



Universidad Autónoma
Metropolitana

UNIDAD IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

**“Análisis de la dinámica
lenta-rápida en un sistema
presa-depredador Leslie-Gower con
respuesta funcional Holling tipo II,
efecto Allee y un depredador
generalista”**

TESIS

que para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:

MTRO. ROBERTO ALBARRÁN GARCÍA

Matrícula: 2183802424

Orcid: 0009-0006-4591-7316

Correo: albarrangr74@live.com.mx

DIRECTORA:

DRA. MARTHA ÁLVAREZ RAMÍREZ

JURADO:

Presidente: Dr. Joaquín Delgado Fernández

Secretario: Dr. Julio Ernesto Solís Daun

Vocal: Dr. Carlos García Azpeitia

Vocal: Dr. Manuel Jesús Falconi Magaña

Vocal: Dr. Fernando Verduzco González

Iztapalapa, Ciudad de México, a 5 de noviembre de 2025

A la memoria de mi madre

En primer lugar deseo expresar mi agradecimiento a la directora de esta tesis, Dra. Martha Álvarez Ramírez. Por su disponibilidad para guiarme a lo largo de este trabajo, así como las largas horas dedicadas a discutir y aclarar mis dudas, redundaron benéficamente en la calidad de los resultados obtenidos.

Asimismo, agradezco a la Dr. Hildeberto Jardón Kojakhmetov y al M. en C. Marco Polo García Rivera por su participación activa y apoyo que me brindaron en el desarrollo de esta tesis.

Quiero extender un sincero agradecimiento a los doctores Joaquín Delgado Fernández, Manuel J. Falconi Magaña, Carlos García Azpeitia, Julio E. Solís Daun y Fernando Verduzco González, por haber aceptado ser jurados de este trabajo de tesis.

Y por supuesto, el agradecimiento más profundo y sentido va para mi familia, por su comprensión y solidaridad con este proyecto, por el tiempo que me han concedido, un tiempo robado a ellos.

Este proyecto de tesis fue llevado a cabo con el apoyo de la beca de CONACyT con número 924692.

Índice general

Introducción	1
Capítulo 1. Preliminares	7
1.1 Bifurcación de Takens-Bogdanov	8
1.2 Sistemas de tipo lento-rápido	12
1.3 Teorema de Fenichel	14
1.4 Método de explosión para sistemas de tipo lento-rápido	16
1.5 Punto de pliegue (<i>fold point</i>) genérico	19
1.6 Ciclos de canard en el plano	21
Capítulo 2. Reducción y análisis de la estabilidad lineal de los puntos de equilibrio del modelo	27
2.1 Sistema reducido	27
2.2 Determinación de los puntos de equilibrio	31
2.3 Análisis de la estabilidad lineal de los puntos de equilibrio	34
Capítulo 3. Análisis del sistema en las variables lenta y rápida	41
3.1 Modelo lento-rápido	41
3.2 Forma normal del sistema lento-rápido	47
3.3 Explosión del punto de pliegue	49
3.4 Explosión de canard	57
3.5 Función de entrada-salida	58
3.6 Determinación intrínseca de la criticidad de la bifurcación de Hopf	66
Capítulo 4. Punto de bifurcación transcítica degenerada	71
4.1 Desingularización del punto T_C , en el caso degenerado $C = -AMQ$	77
4.1.1 Carta de entrada	78
4.1.2 Carta central	80
4.1.3 Carta de salida	82
4.1.4 Carta inferior	88
4.1.5 Dinámica de explosión en T_C , oscilaciones de relajación y canard transitorio	88

4.2	Bifurcación de Takens-Bogdanov	92
4.2.1	Forma normal	96
Capítulo 5. Conclusiones		105
Bibliografía		107

Índice de figuras

1.1	Bifurcación de Hopf supercrítica. Figura tomada de [36].	9
1.2	Bifurcación de Hopf subcrítica. Figura tomada de [36].	9
1.3	Diagrama de bifurcación y retratos fase de (1.12). Figura tomada de [48].	12
1.4	Esquema de la teoría geométrica de perturbación singular.	15
1.5	Bosquejo del espacio ampliado y de algunas de las cartas direccionales. En la práctica, a través del método de expansión, estudiamos los campos vectoriales locales definidos en las cartas y luego “pegamos” las trayectorias y otros objetos invariantes para describir la dinámica en una pequeña vecindad de $\mathcal{B}_0$, que a su vez proporciona la dinámica de un sistema lento-rápido alrededor del origen para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Figura tomada de [26].	18
1.6	Bosquejo de un sistema lento-rápido en un entorno de un punto de pliegue (<i>fold point</i>) genérico. Considerando sólo los primeros términos de la variedad crítica $\mathcal{S}_0$, que se muestra con la línea punteada, esta queda definida por $\mathcal{S}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$. Las líneas continuas (azules) con flechas dobles representan la dinámica de la ecuación de capa. Luego, $\mathcal{S}_0$ tiene una rama atractora ($\mathcal{S}_0^a$) y una repulsora ($\mathcal{S}_0^r$). Lejos del punto de pliegue, el teorema de Fenichel garantiza que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña, $\mathcal{S}_0^a$ y $\mathcal{S}_0^r$ se alteran suavemente con variedades invariantes (en este caso trayectorias) $\mathcal{S}_\varepsilon^a$ y $\mathcal{S}_\varepsilon^r$, respectivamente. El análisis (a través de la explosión) garantiza que $\mathcal{S}_\varepsilon^a$ puede extenderse más allá del punto de pliegue, como se muestra en la figura. En particular, se puede mostrar que la distancia entre el eje x y la intersección $\mathcal{S}_\varepsilon^a \cap \Sigma^{ex}$ es de orden $\mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$. Figura tomada de [26].	20
1.7	Representación esquemática de un canard máximo. Notemos que $\mathcal{S}_\varepsilon^a$ se extiende precisamente a $\mathcal{S}_\varepsilon^r$ más allá del origen. Las trayectorias que atraviesan exponencialmente cercanas a $\mathcal{S}_\varepsilon^a$ siguen a $\mathcal{S}_\varepsilon^r$ para el tiempo de orden $\mathcal{O}(1)$ antes de ser repelidas. Figura tomada de [26].	24

1.8	Diagramas de bifurcación correspondientes a una explosión de canard para $\mathcal{A} < 0$ a la izquierda y $\mathcal{A} > 0$ a la derecha (ver la fórmula (1.34) y el teorema 6). Se produce una bifurcación de Hopf en $\omega = \omega_H$ y un canard máximo cuando $\omega = \omega_C$. Estos diagramas representan la amplitud y estabilidad de los ciclos límite $\Gamma_{\varepsilon, \omega}$ para $\varepsilon > 0$ fijo suficientemente pequeño. En particular, tenemos que para $\mathcal{A} < 0$ todos los ciclos de canard son estables.	25
1.9	Ciclos de canard singulares (o conjuntos periódicos límite) que dan lugar a ciclos de canard en el oscilador de van der Pol. Para $\varepsilon > 0$ existen órbitas cerradas suficientemente pequeñas como perturbaciones de estos ciclos singulares. Figura tomada de [26].	25
2.1	La intersección de la nuclina de la presa $h(u) = (u+A)(1-u)(u-M)$ (curva roja) y la nuclina del depredador $\ell(u) = (u+C)/Q$ (recta negra), indica dos, uno o ningún punto de equilibrio del sistema (2.1) con efecto Allee débil ($M < 0$).	32
2.2	La intersección de la nuclina de la presa $h(u) = (u+A)(1-u)(u-M)$ (curva roja) y la nuclina del depredador $\ell(u) = (u+C)/Q$ (recta negra), indica dos, uno o ningún punto de equilibrio del sistema (2.1) con efecto Allee débil ($M < 0$).	33
2.3	La intersección de la nuclina de la presa $h(u) = (u+A)(1-u)(u-M)$ (curva roja) y la nuclina del depredador $\ell(u) = (u+C)/Q$ (recta negra), indica uno, dos o tres puntos de equilibrio del sistema (2.1) con efecto Allee débil ($M < 0$).	34
3.1	Dinámica del sistema lento-rápido (3.2) para (a) $C < -AMQ$ y (b) $C = -AMQ$, donde $\mathcal{M}_0^0$ y $\mathcal{M}_0^1$ son las subvariedades críticas. Se muestran el punto de plegado $P = (u_p, v_p)$, el punto transcrito $T_C = (0, -AM)$, la nuclina $\ell(u)$ y su punto de intersección $\frac{C}{Q}$ con el eje v , así como una representación esquemática del flujo lento en los diferentes componentes del punto crítico (curva roja) y el flujo rápido (líneas azules).	43
3.2	Aproximación de la variedad invariante perturbada para distintos valores de ε . Para $\varepsilon = 0$ (rojo), $\varepsilon = 0.001$ (azul), $\varepsilon = 0.01$ (morado) y $\varepsilon = 0.1$ (verde).	46
3.3	Diagrama que muestra la curva de bifurcación de Hopf singular Q_H (en azul), la curva del canard máximo Q_C (en rojo) y la correspondiente al ciclo de oscilación de relajación Q_{ro} (en negro punteado).	58
3.4	Para $Q > Q_H$ el flujo converge al punto estable E_*	59

3.5	En el valor crítico $Q = Q_H$, el punto de equilibrio de coexistencia E_* coincide con el punto de pliegue P y pierde estabilidad a través de una bifurcación de Hopf singular. Para $Q < Q_H$, se genera un ciclo límite estable de pequeña amplitud en torno a E_*	60
3.6	El pequeño ciclo límite estable se amplía progresivamente, dando lugar a una solución periódica conocida como <i>ciclo canard sin cabeza</i> , la cual continúa creciendo hasta alcanzar un tamaño <i>máximo</i> cuando $Q = Q_C$	61
3.7	Para $Q < Q_C$, se obtiene otro ciclo canard, conocido como <i>canard con cabeza</i> . Este ciclo incrementa su amplitud a medida que se reduce el valor de Q , y el sistema finalmente se establece en una solución periódica de gran amplitud, denominada <i>oscilación de relajación</i> , cuando $Q = Q_{ro}$	62
3.8	Para $Q < Q_{ro}$, el ciclo de relajación persiste hasta que Q alcanza el valor crítico $Q = Q_C^*$, a partir del cual el punto $E_* = T_C$ adquiere estabilidad.	63
3.9	Cuando $E_* = T_C$, se cumple que $\frac{C}{Q} = -AM$, lo que implica que únicamente se verifica la condición $AM + \frac{C}{Q} = 0$. En este caso, la oscilación de relajación desaparece, ya que el punto E_* se convierte en el atractor global del sistema.	64
3.10	Diagrama de bifurcación asociado a una explosión de canard. Este diagrama ilustra la amplitud y estabilidad de los ciclos límite para un valor fijo de $0 < \varepsilon \ll 1$. Se observa una bifurcación de Hopf supercrítica ($\mathcal{A} < 0$) en $Q = Q_H$, así como un canard máximo en $Q = Q_C$. Además, el ciclo de relajación desaparece eventualmente en $Q = Q_C^*$	65
3.11	Secciones del flujo: Δ^{in} y Δ^{out}	66
3.12	Presentamos cortes de (3.41) para los valores de parámetros indicados. De esta manera, verificamos la región de parámetros para la cual la bifurcación de Hopf es supercrítica ($\sigma < 0$) o subcrítica ($\sigma > 0$). La curva negra indica $\sigma = 0$	69
4.1	Posiciones relativas entre el punto de bifurcación transcítica T_C y el equilibrio límite $\left(0, \frac{C}{Q}\right)$ en el eje v . (a) $\left(0, \frac{C}{Q}\right)$ debajo de T_C . (b) $\left(0, \frac{C}{Q}\right)$ se superpone con T_C exactamente.	72
4.2	Si se cumple la condición $\frac{1}{Q} > A - M + AM$, el punto T_C es un atractor local. (a) Las trayectorias de la explosión (blow-up) cerca del círculo unitario. (b) Las trayectorias de la explosión (blow-up) cerca del origen. (c) La distribución de trayectorias cerca del punto de bifurcación transcítico degenerado T_C	77

4.3	Si se cumple la condición $\frac{1}{Q} < A - M + AM$, entonces el punto T_C es un punto silla. (a) Las trayectorias blow-up (explosión) cerca del círculo unitario. (b) Las trayectorias blow-up (explosión) cerca del origen. (c) La distribución de trayectorias cerca del punto de bifurcación transcrito degenerado T_C	78
4.4	Esquema de la dinámica del sistema (4.14) en un entorno del origen, de acuerdo con el análisis desarrollado en esta sección. Las trayectorias límite se muestran en verde y azul, correspondientes a los casos $\epsilon_1 = 0$ y $r_1 = 0$, respectivamente. Una órbita representativa del sistema completo (4.14) se ilustra en rojo.	80
4.5	Retrato fase del sistema (4.21) para $A - M + AM - \frac{1}{Q} < 0$ (izquierda) y $A - M + AM - \frac{1}{Q} > 0$ (derecha). Los diagramas se construyen cualitativamente a partir de la proposición 9, utilizando que $\frac{dv_2}{dt} > 0$ para todo $v_2 < 0$, y considerando la disposición relativa de las nulclinas $v_2 = (A - M + AM)u_2$, donde $A - M + AM > 0$ y $v_2 = \frac{1}{Q}u_2$	83
4.6	Dinámica del sistema (4.14) en el diagrama $K_3 = \{\bar{u} = 1\}$ para $A - M + AM - \frac{1}{Q} < 0$ a la izquierda y $A - M + AM - \frac{1}{Q} > 0$ a la derecha. El flujo en azul ocurre en el plano (ϵ_3, v_3) , mientras que el verde en el plano (r_3, v_3) . Las órbitas negras son un esbozo de una muestra de órbitas que fluyen desde Δ_3^{in} y llegan a Δ_3^{out} . La superficie roja es la variedad central $\mathcal{P}_3$. Nótese que, dado que ℓ_3 es simplemente la variedad crítica $\mathcal{M}_0^1$ escrita en las coordenadas locales de este diagrama, las órbitas en $\mathcal{P}_3$ pueden identificarse con las variedades lentas que se perturban desde $\mathcal{M}_0^1$. Aunque no mostramos Δ_c^{in} , ya que es una franja exponencialmente delgada, es evidente a partir del análisis presentado que algunas de las órbitas cercanas a $\mathcal{P}_3$ llegan a Δ_3^{out}	87
4.7	Dinámica de (4.38) cerca del origen. En contraste con el flujo de (4.14), la variedad central en el plano (v_4, ϵ_4) no es única.	88
4.8	Las dos dinámicas ampliadas no equivalentes del punto T_C para $A - M + AM < \frac{1}{Q}$ a la izquierda y $A - M + AM > \frac{1}{Q}$ a la derecha. Las curvas punteadas representan la variedad crítica. Los flujos reducidos correspondientes se indican con las flechas magenta. Compárese con la figura 3.1 cerca del punto T_C	89

- 4.9 Ciclos singulares en los que nos centramos. El ciclo rojo sólido en (a) representa una órbita candidata para una oscilación de relajación regular, que aparece cuando $C < -AMQ$. Este ciclo ya fue estudiado en [63]; sin embargo, lo incluimos aquí para ofrecer una presentación completa. Véase la sección 3.5. Los dos ciclos en la parte inferior, (b) y (c), son degenerados y, hasta donde sabemos, no han sido reportados previamente. A nivel singular, estos existen para $C = -AMQ$. Como mostramos en la sección 4.1, el ciclo representado en (b), llamado *canard transitorio*, se construye mediante la combinación de un canard máximo en P y una transición tipo silla (degenerada) en T_C . Por su parte, el ciclo en (c) resulta de un salto genérico en P seguido de la misma transición tipo silla degenerada en T_C 91
- 4.10 A la izquierda mostramos una oscilación de relajación singular que pasa por el punto de pliegue P y el punto singular T_C . A la derecha mostramos un canard transitorio que pasa por las mismas singularidades. Estos ciclos se obtienen para diferentes regímenes de parámetros (recuerde que en esta sección $C = -AMQ$) siempre que $A - M + AM > \frac{1}{Q}$. La oscilación de relajación se obtiene cuando el punto de pliegue P es un punto de salto genérico. El canard transitorio se obtiene cuando el punto de pliegue sufre una bifurcación de Hopf singular y el parámetro $Q \approx Q_H$ se elige de modo que haya un canard máximo en P 92
- 4.11 Equilibrios de (2.1) y sus bifurcaciones en un diagrama de bifurcación de codimensión 2 obtenido mediante Matcont [12]. Para este diagrama fijamos los parámetros $A = \frac{1}{2}$, $M = -\frac{1}{10}$ y $\varepsilon = \frac{1}{50}$. La superficie gris corresponde a los equilibrios. Para valores fijos de C , mostramos los equilibrios estables en azul y los equilibrios inestables en rojo discontinuo. Estos equilibrios experimentan una bifurcación de Hopf supercrítica a lo largo de la línea magenta sólida y una subcrítica a lo largo de la línea magenta discontinua. La línea magenta punteada indica sillas neutras. La curva negra es una curva de puntos límite (LP), que representa la región donde el equilibrio positivo no es único. Indicamos además un punto de Hopf generalizado $GH = (u, v; C, Q) \approx (0.544, 0.306; 0.158, 2.292)$, un punto de cúspide $CP = (u, v; C, Q) \approx (0.133, 0.128; 0.078, 1.657)$, y un punto de Takens-Bogdanov $BT = (u, v; C, Q) \approx (0.047, 0.076; 0.084, 1.721)$. Véase también la figura 4.12, que complementa este diagrama. . . 93

4.12	Diagrama de bifurcación que resalta los ciclos límite (curvas negras) que surgen de las bifurcaciones de Hopf (comparar con la figura 4.11). Mostramos los diagramas correspondientes para $C = 0$, $C = 0.125$ y $C = 0.175$, los dos últimos alrededor del punto GH . De hecho, en los dos últimos casos, los ciclos límite de la explosión de canard se truncan y chocan con la curva de equilibrios, dando lugar a una órbita homoclínica límite. Esto también es una verificación numérica de que las órbitas periódicas que surgen de una explosión de canard terminan en una órbita homoclínica límite siempre que el equilibrio positivo no sea único, recuerde la observación 3.	94
4.13	Gráfica de ψ_4 la cual es negativa cuando $1.7 < Q < 1.8$	100
4.14	Gráfica de ψ_5 la cual es positiva cuando $1.7 < Q < 1.8$	102
4.15	Diagrama de bifurcación y su correspondiente retrato de fase del sistema (4.46). El origen es el punto de bifurcación Takens-Bogdanov (TB), y las curva de bifurcación SN se refiere a silla-nodo, H a Hopf y HL a lazo homoclínico.	103

Introducción

La ecología matemática se apoya fundamentalmente en el análisis de la dinámica presa-depredador para predecir las interacciones entre especies, así como su evolución, crecimiento y patrones de distribución poblacional de las especies biológicas involucradas.

El primer modelo presa-depredador basado en sólidos principios matemáticos fue propuesto por Lotka [40] y Volterra [57]. A raíz de sus hallazgos, desde entonces se han llevado a cabo numerosos intentos para mejorarlos. Uno de los esfuerzos para lograr esta tarea es el modelo de Leslie-Gower, cuya principal característica es que la ecuación de crecimiento del depredador es logística, lo que implica que existe competencia o autointerferencia entre los depredadores, ver [38]. Actualmente, el modelo de Leslie-Gower ha sido estudiado desde un punto de vista matemático y biológico por muchos investigadores, lo cual es evidente por la cantidad de trabajos publicados, ver por ejemplo [20], [29], [16], [49], [18] y las referencias allí contenidas.

En 1931 el biólogo W.C. Allee investigó las fluctuaciones poblacionales y descubrió que una variedad de fenómenos biológicos afectan la dinámica de las especies, como las dificultades para encontrar pareja, la termorregulación social, la deriva genética, la evitación de enemigos naturales, la evitación de depredadores, la defensa de los recursos y la mala nutrición debido a la baja densidad de población. Este fenómeno ahora se conoce como *efecto Allee*. Los efectos Allee fuertes dan como resultado tamaños de población críticos, mientras que los efectos Allee débiles no. Esto se debe al vínculo del efecto entre la densidad o el tamaño de la población y la aptitud individual. Se anima a los lectores interesados en este tema a consultar, por ejemplo, [45], [9], [51].

La *respuesta funcional*, se refiere a la cantidad de presas que consume un depredador por unidad de tiempo, es un componente crucial de los modelos matemáticos de la dinámica presa-depredador. La capacidad de la presa para huir de un ataque o el éxito de la persecución del depredador son dos ejemplos de las variables que pueden afectar. Diversos estudios en dinámica poblacional han

modelado la respuesta funcional utilizando formulaciones de tipo Holling I, II, III o IV (véase [23], [24]). En este trabajo se analiza un modelo presa-depredador que incorpora una respuesta funcional Holling tipo II, caracterizada por un predominio del tiempo de búsqueda a bajas densidades de presas y del tiempo de manipulación a altas densidades. Esta formulación permite capturar de manera más realista las limitaciones en la capacidad de consumo del depredador, es decir, a bajas densidades de presas, el depredador dedica más tiempo a la búsqueda activa, mientras que, a altas densidades, el tiempo de manipulación de las presas capturadas se vuelve predominante. Matemáticamente, esto se expresa como

$$h(x) = \frac{qx}{bx + a},$$

donde $x = x(t)$ denota la densidad de la población de presas en el tiempo $t \geq 0$, q representa la tasa máxima de consumo per cápita, b está asociado con el tiempo de manejo por presa capturada y a es el parámetro de saturación, correspondiente al número de presas necesario para que la tasa de depredación alcance la mitad de su valor máximo. En este trabajo, y sin pérdida de generalidad, fijaremos $b = 1$, lo cual equivale a una adecuada elección de las unidades de la variable x (densidad de presas), de manera que el punto de semisaturación se ubique en la escala deseada.

El siguiente modelo presa-depredador de Leslie-Gower con respuesta funcional Holling tipo II, efecto Allee en la presa y depredador generalista es considerado por Arancibia-Ibarra y Flores en [3]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= rx \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m) - \frac{qxy}{x + a}, \\ \frac{dy}{dt} &= sy \left(1 - \frac{y}{nx + c}\right), \end{aligned} \tag{1}$$

donde x y y representan el tamaño de las poblaciones de presas y depredadores, respectivamente, en el momento t . Los significados biológicos de los parámetros r , K , m , q , a , s , n y c se muestran en la tabla 1.

Es importante destacar, debido a su relevancia en el análisis posterior, que los ejes coordenados en el sistema (1) son invariantes bajo la dinámica. Por razones de interpretación biológica, nos limitamos a estudiar el sistema (1) en el primer cuadrante, es decir, en la región $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0\}$.

La investigación de Arancibia-Ibarra y Flores [3] se enfocó en demostrar que el sistema (1) experimenta bifurcaciones de Hopf y Takens-Bogdanov bajo ciertas condiciones entre los parámetros. Más recientemente, Zhu y Liu han analizado el mismo sistema en [63], pero asumiendo que la población de presas aumenta mucho más rápido que la de los depredadores. Esto conduce a un sistema lento-rápido y, dado que un depredador puede coexistir con varias generaciones de

Parametros	Descripción
r	tasa de crecimiento intrínseca de la presa
K	capacidad de carga ambiental para la presa
m	población mínima viable o umbral de Allee
q	tasa máxima de consumo per cápita de los depredadores
a	es la cantidad de presas para llegar a la mitad de q
s	tasa de crecimiento intrínseca de los depredadores
n	calidad de los alimentos, indica cómo los depredadores convierten las presas devoradas en nuevos nacimientos de depredadores
c	capacidad de carga ambiental para el depredador

Tabla 1: Significado biológico de los parámetros presentes en el sistema (1).

presas, se pueden distinguir dos escalas de tiempo para la presa y el depredador, matemáticamente resulta en un sistema lento-rápido. Utilizando la teoría de la forma normal lenta-rápida, la teoría geométrica de la perturbación singular y la teoría de Fenichel [15], se logran identificar fenómenos dinámicos significativamente más complejos, como los efectos de Allee fuerte ($m > 0$) y débil ($m < 0$). Este último incluye la aparición de ciclos de canard, que surgen desde un punto de bifurcación de Hopf, la explosión de canard, oscilaciones de relajación descritas por la función de entrada-salida, y la presencia de órbitas heteroclínicas y homoclínicas. No obstante, Zhu y Liu [63] no consideran un caso degenerado que también muestra un comportamiento dinámico interesante. Este caso degenerado ocurre cuando la nuclina lenta interseca la rápida a lo largo del eje y , como se explica en el capítulo 4. Además, cerca de este punto degenerado, descubrimos numéricamente fenómenos nuevos que no habían sido reportados anteriormente. Utilizando técnicas modernas, pudimos determinar la criticidad de la bifurcación singular de Hopf.

Los resultados de este trabajo fueron discutidos y analizados en colaboración con el Dr. Hildeberto Jardón-Kojakhmetov del Bernoulli Institute for Mathematics, Computer Science and Artificial Intelligence de la Universidad de Groningen. Como fruto de esta colaboración, se publicó el artículo [1].

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 1, se presentan los conceptos fundamentales de la teoría de bifurcaciones, se introduce la teoría de Fenichel y se proporcionan las herramientas necesarias para el análisis de sistemas lento-rápido. Además, el material relacionado con estos sistemas y la técnica de explosión (blow-up) ha sido adaptado de [26]. En el capítulo 2, se realiza una transformación del modelo descrito por las ecuaciones (1) a un sistema de ecuaciones polinómicas topológicamente equivalente, mediante el uso de variables escaladas. Esta reducción facilita el análisis matemático del sistema al simplificar

su estructura sin alterar su comportamiento cualitativo. Además, en la sección 2.2, se establecen las condiciones sobre los parámetros del modelo que garantizan la existencia de puntos de equilibrio positivos y su estabilidad lineal es analizada en la sección 2.3.

El sistema lento-rápido se introduce y estudia en el capítulo 3. La variedad crítica $\mathcal{M}_0$ se calcula en la sección 3.1, donde se muestra que se compone de dos partes disconexas. A continuación, se aplica la teoría de Fenichel, la cual permite analizar el comportamiento del sistema perturbado en un entorno de $\mathcal{M}_0$, específicamente cuando el parámetro ε , que define las escalas de tiempo, es pequeño. En la sección 3.2, se calcula la forma normal del punto de pliegue P , el cual es el punto donde las partes atractora y repulsora de $\mathcal{M}_0$ coinciden. El caso en el que el punto P coincide con el punto de equilibrio positivo se trata en la sección 3.3, donde se aplica la técnica de explosión (*blow-up*) para llevar a cabo la desingularización del sistema. Este procedimiento facilita el análisis detallado de la dinámica y las bifurcaciones cercanas a esta degeneración. En particular, identificamos la aparición de ciclos de canard que surgen de una bifurcación de Hopf singular, proporcionando una comprensión más profunda de los comportamientos dinámicos complejos en esta región del sistema. La rápida transición en el tamaño del ciclo límite, desde pequeños ciclos de canard hasta oscilaciones de relajación, ocurre en un rango exponencialmente pequeño del parámetro de bifurcación. Este fenómeno se asocia con la *explosión de canard*, un proceso que se analiza detalladamente en la sección 3.4. La función de *entrada-salida*, utilizada para estudiar las oscilaciones de relajación y los ciclos de canard, se detalla en la sección 3.5. Esta función describe cómo el sistema se comporta con pequeñas perturbaciones, siendo clave para entender los fenómenos de oscilación y la aparición de soluciones periódicas, en particular las que surgen de la bifurcación de Hopf singular. En la sección 3.6, aplicamos la técnica descrita por De Maesschalck y et al. en [43] la cual permite determinar de manera intrínseca la criticidad de una bifurcación de Hopf en sistemas lento-rápido sin necesidad de llevar el sistema a su forma normal.

En el capítulo 4, se analiza el comportamiento asintótico del modelo (2.1) en las proximidades de una bifurcación transcítica degenerada, la cual ocurre cuando las nulclinas se intersectan en el punto de bifurcación transcítica T_C . Para estudiar este fenómeno, se emplean dos herramientas fundamentales de la teoría de sistemas dinámicos: la reducción a la variedad central y la técnica de explosión.

En la sección 4.2, motivados por la simulación numérica presentada en la figura 4.11, mostraremos que el sistema (2.1) exhibe una bifurcación de Takens-Bogdanov de codimensión 2, cuando existen dos puntos de equilibrio E_* y E_2 (condición 1(a))

del teorema 8) en las proximidades de T_C .

Todos los cálculos necesarios, aunque tediosos, para obtener los resultados presentados en esta tesis, así como las gráficas, fueron realizados utilizando el software *Mathematica*. Además, empleamos el paquete *MatCont*, basado en *Matlab*, para calcular la continuación de puntos de equilibrio y bifurcaciones, así como las gráficas obtenidas.

Capítulo 1

Preliminares

Una ecuación diferencial ordinaria con coeficientes reales se dice que es *estructuralmente estable* (para definiciones precisas, véase [21, 47]), cuando un pequeño cambio en los coeficientes produce una ecuación diferencial perturbada, cuya familia de curvas solución son cualitativamente las mismas que las de la ecuación diferencial original.

Una *bifurcación* es un cambio en la estructura cualitativa del diagrama de fases de un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$x' = f(x, \lambda) \tag{1.1}$$

donde $x \in \mathbb{R}^m$ y $\lambda \in \mathbb{R}^n$ es un parámetro que varía en una vecindad de un valor crítico λ_0 . La *codimensión* de una bifurcación se define como el número mínimo de parámetros que deben modificarse para que la bifurcación ocurra de manera genérica; este valor es siempre menor o igual que n . Para determinar la codimensión, comúnmente se realiza un proceso de reducción o normalización del sistema, lo que permite identificar las condiciones esenciales bajo las cuales la bifurcación se manifiesta.

Por otro lado, dado un campo vectorial V definido por (1.1), en λ_0 se puede buscar una familia de campos vectoriales que contengan a V y que satisfaga un criterio de *estabilidad estructural*. Esta familia se llama una *deformación versal* (o *desdoblamiento universal*) de V (ver [21]).

Una de las bifurcaciones más estudiadas en sistemas dinámicos es la bifurcación de Hopf ver [48]. A continuación, se describe su estructura. En este caso, tenemos $x \in \mathbb{R}^2$ y un parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

Considere el sistema analítico en el plano

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda x - y + p(x, y) \\ \dot{y} &= x + \lambda y + q(x, y)\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde las funciones

$$\begin{aligned}p(x, y) &= \sum_{i+j \geq 2} a_{ij} x^i y^j = (a_{20} x^2 + a_{11} xy + a_{02} y^2) \\ &\quad + (a_{30} x^3 + a_{21} x^2 y + a_{12} xy^2 + a_{03} y^3) + \dots\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}q(x, y) &= \sum_{i+j \geq 2} b_{ij} x^i y^j = (b_{20} x^2 + b_{11} xy + b_{02} y^2) \\ &\quad + (b_{30} x^3 + b_{21} x^2 y + b_{12} xy^2 + b_{03} y^3) + \dots.\end{aligned}$$

son analíticas.

Para $\lambda = 0$, $Df(\mathbf{0}, 0)$ tiene un par de valores propios imaginarios puros y el origen se denomina foco débil o foco múltiple. El primer coeficiente de Liapunov σ está dado por la ecuación

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{3\pi}{2} \left(3(a_{30} + b_{03}) + (a_{12} + b_{21}) - 2(a_{20}b_{20} - a_{02}b_{02}) \right. \\ &\quad \left. + (a_{11}(a_{02} + a_{20}) - b_{11}(b_{02} + b_{20})) \right).\end{aligned}\tag{1.3}$$

Teorema 1. (*Bifurcación de Hopf*) Si $\sigma < 0$, entonces para cada $\lambda > 0$ existe una única órbita periódica asintóticamente estable que se bifurca del punto de equilibrio x_0 . Si $\sigma > 0$, entonces para cada $\lambda < 0$ existe una única órbita periódica inestable que se bifurca del punto de equilibrio x_0 .

Definición 1. El caso $\sigma < 0$ se llama una *bifurcación de Hopf supercrítica*, y $\sigma > 0$ es una *bifurcación de Hopf subcrítica*. Ver las figuras [1.1](#) y [1.2](#).

1.1. Bifurcación de Takens-Bogdanov

En esta sección vamos a dar condiciones suficientes para que algunos sistemas de ecuaciones diferenciales en el plano tipo Takens-Bogdanov, sean topológicamente equivalente a su deformación versal (o desdoblamiento universal), para más detalles ver [\[36\]](#).

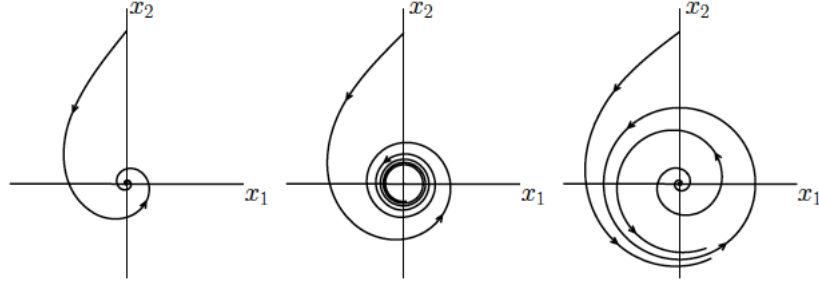


Figura 1.1: Bifurcación de Hopf supercrítica. Figura tomada de [36].

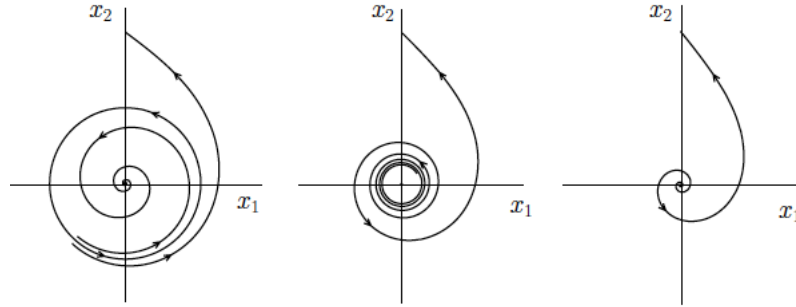


Figura 1.2: Bifurcación de Hopf subcrítica. Figura tomada de [36].

La bifurcación de Takens-Bogdanov desempeña un papel fundamental en el análisis del comportamiento de los sistemas dinámicos, ya que puede dar lugar a la aparición de órbitas homoclínicas asociadas a puntos de equilibrio tipo silla, en un entorno próximo a valores críticos de los parámetros. Supongamos que el sistema en el plano está definido por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y),\end{aligned}\tag{1.4}$$

donde el punto denota la derivada con respecto de t , y las funciones P , Q son analíticas en un entorno del origen $(0, 0)$ y éste es un punto de equilibrio aislado.

Sea $f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ y sea $A = Df(0, 0)$ la matriz de la parte lineal. En el caso de que A tenga un único valor propio cero, es decir, $\det A = 0$, pero $\text{tr} A \neq 0$, en Andronov et al. [4], pág. 338, se demuestra que el sistema (1.4) puede ser escrito en la forma

$$\dot{x} = p_1(x, y),\tag{1.5}$$

$$\dot{y} = y + p_2(x, y),\tag{1.6}$$

donde p_1 y p_2 son analíticas en un entorno del origen y tienen expansión que inicia con términos de segundo grado en x y y . El siguiente teorema está demostrado en la sección 12.1, pág. 340 de Andronov et al. [4].

Teorema 2. *Sea el origen un punto de equilibrio aislado del sistema analítico (1.5). Sea $y = \phi(x)$ una solución de la ecuación $y + p_2(x, y) = 0$ en un entorno del origen, y la expansión de la función $\psi(x) = p_2(x, \phi(x))$ en un entorno de $x = 0$ tiene la forma $\psi(x) = a_m x^m + \dots$, donde $m \geq 2$ y $a_m \neq 0$. Entonces*

1. *para m impar y $a_m > 0$, el origen es un nodo inestable*
2. *para m impar y $a_m < 0$, el origen es (topológicamente) una silla*
3. *para m par, el origen es una silla-nodo.*

En el caso de que la matriz A tenga dos valores propios cero, es decir, $\det A = 0$ y $\text{tr} A = 0$, el sistema (1.4) puede transformarse, mediante cambios de coordenadas y escalamiento de tiempo, a la siguiente forma normal:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= a_k x^k [1 + h(x)] + b_n x^n y [1 + g(x)] + y^2 R(x, y),\end{aligned}\tag{1.7}$$

donde $h(x)$, $g(x)$ y $R(x, y)$ son funciones analíticas en un entorno del origen, con $h(0) = g(0) = 0$, $k \geq 2$, $a_k \neq 0$ y $n \geq 1$.

Esta forma normal permite caracterizar la naturaleza del punto de equilibrio, como se detalla en [4], pág. 356, y se resume en el siguiente resultado.

Teorema 3. *Sea $k = 2m$ con $m \geq 1$ en (1.7). Entonces el origen en (1.4) es:*

1. *una cúspide si $b_n = 0$ y también si $b_n \neq 0$ y $n \geq m$,*
2. *un punto silla-nodo si $b_n \neq 0$ y $n < m$.*

La demostración de este teorema se puede consultar en [4], páginas 357-362.

Ahora consideremos la familia de campos vectoriales

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y, \mu), \\ \dot{y} &= g(x, y, \mu),\end{aligned}\tag{1.8}$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, y $f, g \in C^\infty(x, y, \mu)$.

Supongamos que para $\mu = 0$, el sistema (1.8) tiene un punto de equilibrio en el origen $x = y = 0$, y que la parte lineal del sistema en dicho punto tiene un valor

propio $\lambda = 0$ con multiplicidad algebraica dos y geométrica uno. En este caso, la parte lineal es similar al bloque de Jordan de orden dos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bajo estas condiciones, el sistema (1.8) puede escribirse, para $\mu = 0$, en la forma normal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= ax^2 + bxy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Supongamos además que $ab \neq 0$ en (1.9). Bajo esta condición, es posible realizar un cambio de variables y un reescalamiento del tiempo adecuados para normalizar los coeficientes no nulos del término cuadrático y del término mixto. Considerando la transformación:

$$x \mapsto \frac{a}{b^2}x, \quad y \mapsto \frac{a^2}{b^3}y, \quad t \mapsto \frac{b}{a}t,$$

el sistema (1.9) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= x^2 + xy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Notemos que si $ab < 0$, entonces la dirección del tiempo se invierte. Si uno quiere mantener la dirección del movimiento, entonces (1.9) debe ser transformado en la ecuación que tiene la misma forma que (1.9) con $a = 1$, $b = \pm 1$. Nosotros solamente consideramos el caso $b = 1$. El caso $b = -1$ es similar.

Definición 2. Una familia de campos vectoriales (1.8) es llamada *deformación* de la ecuación (1.10) si para $\mu = 0$ se tiene la forma (1.10).

Bajo las hipótesis consideradas, podemos suponer que el sistema (1.8) constituye una familia de deformaciones del sistema normalizado (1.10), y puede escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y + w_1(x, y, \mu) \\ \dot{y} &= x^2 + xy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3) + w_2(x, y, \mu), \end{aligned} \quad (1.11)$$

donde $x, y \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 2$, $w_1, w_2 \in C^\infty(x, y, \mu)$ y $w_i|_{\mu=0} = 0$, $i = 1, 2$.

La familia biparamétrica de campos vectoriales

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu_1 + \mu_2 y + x^2 + xy, \end{aligned} \quad (1.12)$$

es la deformación versal de (1.10). Este resultado no es obvio y su demostración fue dada por Takens [55] y Bogdanov [6]. Obtenemos las siguientes representaciones locales de las curvas de bifurcación (ver [48]):

- (i) La curva de bifurcación de silla nodo $SN = \{(\mu_1, \mu_2) | \mu_1 = 0, \mu_2 \neq 0\}$.
- (ii) La curva de bifurcación de Hopf subcrítica es $H = \{(\mu_1, \mu_2) | \tau_2 = \sqrt{-\mu_1}, \mu_1 < 0\}$.
- (iii) La curva de bifurcación homoclínica es $HL = \{(\mu_1, \mu_2) | \tau_2 = \frac{5}{7}\sqrt{-\mu_1}, \tau_1 < 0\}$.

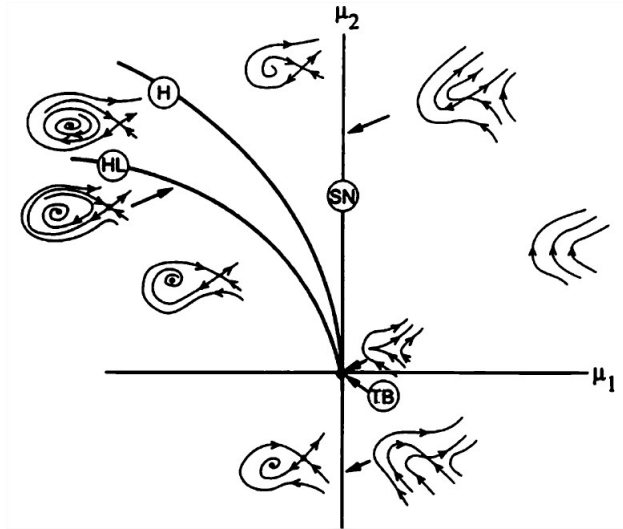


Figura 1.3: Diagrama de bifurcación y retratos fase de (1.12). Figura tomada de [48].

Con el fin de explicar brevemente la Teoría Geométrica de Perturbación Singular, de la cual usamos algunas técnicas para analizar el sistema (1), en las siguientes secciones damos un breve extracto del estudio sobre el método de explosión para sistemas de tipo lento-rápido [26].

1.2. Sistemas de tipo lento-rápido

Algunos sistemas físicos y biológicos están formados por procesos que operan en escalas de tiempo y longitud distintas. Los modelos matemáticos empleados

para analizar estos sistemas de múltiples escalas suelen abordarse como problemas de perturbación singular, destacándose los problemas de dos escalas. Por ejemplo, un sistema de tipo lento-rápido se describe mediante una ecuación diferencial ordinaria (EDO) singularmente perturbada de la forma

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= f(x, y, \varepsilon), \\ \dot{y} &= g(x, y, \varepsilon),\end{aligned}\tag{1.13}$$

donde el punto superior denota la derivada con respecto al tiempo lento t , $x \in \mathbb{R}^m$ y $y \in \mathbb{R}^n$ denotan las variables rápida y lenta respectivamente, y $\varepsilon > 0$ es un pequeño parámetro que representa la separación de la escala de tiempo.

Al definir el tiempo rápido $\tau := \frac{t}{\varepsilon}$, podemos reescribir el sistema (1.13) como una ε -familia de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y, \varepsilon), \\ y' &= \varepsilon g(x, y, \varepsilon),\end{aligned}\tag{1.14}$$

donde ahora prima ($'$) denota la derivada con respecto al tiempo rápido τ . Suponemos que $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ son de clase C^k , con k suficientemente grande.

El concepto de *Teoría Geométrica de Perturbación Singular* (TGPS), se refiere a la colección de técnicas geométricas con las que se pueden analizar sistemas de tipo lento-rápido. La idea de TGPS es estudiar los límites de (1.13) y (1.14) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, analizar objetos invariantes en los dos límites y luego usar métodos de perturbación para describir la dinámica de (1.13) y (1.14) para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. En consecuencia, al considerar $\varepsilon = 0$ en (1.13) obtenemos

$$\begin{aligned}0 &= f(x, y, 0), \\ \dot{y} &= g(x, y, 0),\end{aligned}\tag{1.15}$$

que se llama sistema reducido (o subsistema lento), y el flujo de (1.15) se llama flujo lento. Estructuralmente, el sistema (1.15) es una ecuación diferencial restringida (o ecuación algebraica diferencial), ver [56]. A partir de (1.14) obtenemos para $\varepsilon = 0$ la EDO

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y, 0), \\ y' &= 0,\end{aligned}\tag{1.16}$$

que se llama ecuación de capa (o subsistema rápido) donde podemos ver a las variables lentas (y) como parámetros. Observamos en (1.15) que el conjunto $\{f(x, y, 0) = 0\}$ define el espacio de fase de las soluciones del subsistema lento y el conjunto de puntos de equilibrio de la ecuación del subsistema rápido. Esto conduce a la siguiente definición natural:

Definición 3. (Variedad crítica). La variedad crítica se define como el conjunto

$$\mathcal{S}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \mid f(x, y, 0) = 0\}. \quad (1.17)$$

Notemos que aunque llamamos a $\mathcal{S}_0$ una variedad, estrictamente hablando, las soluciones de la ecuación $f(x, y, 0) = 0$ no definen necesariamente una variedad diferencial, es decir, pueden no ser localmente difeomorfas a un espacio euclidiano. Una característica importante que pueden tener las variedades críticas es la *hiperbolicidad normal*.

Definición 4. Un punto $p = (x, y) \in \mathcal{S}_0$ se llama *hiperbólico* si la matriz $D_x f(p, 0) \in \mathbb{R}^{m \times m}$, donde D_x representa la derivada total con respecto a x , no tiene valores propios en el eje imaginario. La variedad crítica $\mathcal{S}_0$ se denomina *normalmente hiperbólica* si todos los puntos $p \in \mathcal{S}_0$ son hiperbólicos.

De manera equivalente a la definición (4), se puede decir que $\mathcal{S}_0$ es normalmente hiperbólica si todos sus puntos son puntos de equilibrio hiperbólicos del subsistema rápido. En caso contrario, llamaremos a $p \in \mathcal{S}_0$ no hiperbólico si la matriz $D_x f(p, 0)$ tiene al menos un valor propio en el eje imaginario.

Un punto hiperbólico p es atrayente si todos los valores propios tienen una parte real negativa, repelente si todos los valores propios tienen una parte real positiva, y tipo silla si hay valores propios negativos y positivos en la parte real. Si la variedad crítica es, o no, normalmente hiperbólica, distinguirá las herramientas que se necesitan para el análisis del correspondiente sistema lento-rápido. En el caso de la hiperbolicidad normal tenemos el teorema de Fenichel; en el caso de pérdida de hiperbolicidad normal debido a la presencia de puntos no hiperbólicos, podemos utilizar el método de *blow-up* (explosión). Un esquema representativo de la teoría geométrica de perturbación singular dado en la figura 1.4. Para mayores detalles sobre esta teoría el lector es referido a [15] y [33].

La pérdida de hiperbolicidad normal en un sistema lento-rápido es muy relevante ya que está relacionada con características dinámicas como: ciclos de canard, explosión de canard, oscilaciones de relajación, etcétera.

1.3. Teorema de Fenichel

El teorema de Fenichel, proporciona herramientas y técnicas geométricas para analizar sistemas de tipo lento-rápido con puntos *hiperbólicos*:

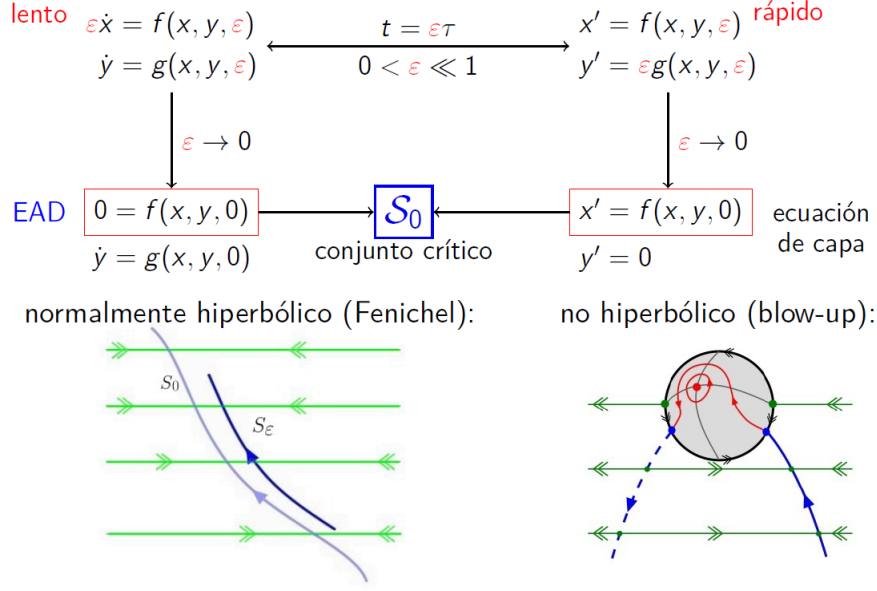


Figura 1.4: Esquema de la teoría geométrica de perturbación singular.

Teorema 4. Suponga que $S_0 \subseteq \mathcal{C}_0$ es una subvariedad compacta normalmente hiperbólica (posiblemente con frontera) de la variedad crítica $\mathcal{C}_0$ del sistema (1.14). Luego, para $\varepsilon > 0$ lo suficientemente pequeño, se cumple lo siguiente:

- (M1) Existe una variedad local invariante S_ε difeomorfa a S_0 . La invariancia local significa que las trayectorias pueden entrar o salir de S_ε sólo a través de su frontera.
- (M2) S_ε tiene la distancia de Hausdorff $\mathcal{O}(\varepsilon)$, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, de S_0 .
- (M3) El flujo en S_ε converge al flujo lento cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.
- (M4) S_ε es diferenciable de clase C^k .
- (M5) S_ε es normalmente hiperbólica y conserva las mismas propiedades de estabilidad que S_0 ; es decir, es atractora, repulsora o de tipo silla con respecto a las variables rápidas.
- (M6) S_ε no suele ser única. En las regiones que permanecen a una distancia fija de ∂S_ε , todas las variedades que satisfacen los incisos (M1) al (M5) anteriores se encuentran a una distancia de Hausdorff de orden $\mathcal{O}(\exp(-C/\varepsilon))$ unas de otras para algún $C > 0$, $C \in \mathcal{O}(1)$, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Comúnmente se hace referencia al teorema de Fenichel como la teoría geométrica de perturbación singular (TGPS). No obstante, en la actualidad, la TGPS abarca una amplia gama de técnicas geométricas, que incluyen el método de explosión y la teoría de la forma normal lento-rápida, entre otras.

1.4. Método de explosión para sistemas de tipo lento-rápido

En esta sección, presentamos una revisión del método de explosión, el cual se emplea con frecuencia en la actualidad para el análisis de sistemas de tipo lento-rápido que presentan singularidades *no hiperbólicas*. Para esclarecer la relación entre el método de explosión y los sistemas lentos-rápidos, primero reescribamos la ε -familia de campos vectoriales del sistema (1.14) en $\mathbb{R}^{m+n}$ como un campo vectorial único en $\mathbb{R}^{m+n+1}$ de la forma

$$\begin{aligned}x' &= f(x, y, \varepsilon), \\y' &= \varepsilon g(x, y, \varepsilon), \\\varepsilon' &= 0.\end{aligned}\tag{1.18}$$

Además, supongamos que el origen $(x, y, \varepsilon) = (0, 0, 0)$ es un punto de equilibrio y que $D_x f(0, 0, 0)$ tiene todos sus valores propios iguales a cero. Esto significa que $(0, 0, 0)$ es una singularidad nilpotente del sistema (1.18) y, como tal, el método de explosión se puede adaptar para desingularizar este punto. Usar esferas, cilindros o espacios relacionados como espacios ampliados es a menudo muy conveniente, pero no necesario.

Observación 1. *Las singularidades nilpotentes son un subconjunto de las singularidades no hiperbólicas. Por lo tanto, no todas las singularidades no hiperbólicas de los sistemas lentos-rápidos pueden estudiarse con el método de explosión.*

Aunque existen varias versiones equivalentes y mejoras del método de explosión, nos centraremos en el caso cuasi-homogéneo, dado que es el más utilizado en la actualidad.

Sea $X : \mathbb{R}^{m+n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}$ el campo vectorial, que está definido por (1.18), y sea $\mathbb{S}^N$ la esfera de dimensión N . A continuación, podemos definir formalmente la transformación de explosión más comúnmente utilizada en sistemas lentos-rápidos:

Definición 5. (Explosión cuasi-homogénea). Considere un campo vectorial $X : \mathbb{R}^{m+n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}$ definido por (1.18) y suponga que $X(0) = 0$. Sea $\alpha =$

$(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^m$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$ y $\gamma \in \mathbb{N}_0$. Sea la transformación polar generalizada $\phi : \mathbb{S}^{m+n} \times I \longrightarrow \mathbb{R}^{m+n+1}$ que puede ser definida por

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, r) = (r^\alpha \bar{x}, r^\beta \bar{y}, r^\gamma \bar{\varepsilon}) = (x, y, \varepsilon). \quad (1.19)$$

donde $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m, \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_m, \bar{\varepsilon}) \in \mathbb{S}^{m+n}$, $r \in I$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo que contiene al origen. Aquí usamos la notación de índices múltiples $r^\alpha \bar{x} = (r^\alpha \bar{x}_1, \dots, r^\alpha \bar{x}_m)$, y de manera similar para $r^\beta \bar{y}$. La explosión cuasi-homogénea del campo vectorial X , denotado como $\bar{X}$, se define por

$$\bar{X} = D\phi^{-1}|_{(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, r)} \circ X \circ \phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, r). \quad (1.20)$$

Observamos que ϕ asigna la esfera $\mathcal{B}_0 := \mathbb{S}^{m+n} \times \{\mathbf{0}\}$ al origen en $\mathbb{R}^{m+n+1}$, donde ϕ^{-1} asigna $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{m+n+1}$ a $\mathcal{B}_0$. Por lo tanto, la operación ϕ^{-1} se llama explosión (cuasi-homogénea) mientras que ϕ se llama blow-down “desinfe” (cuasi-homogénea). La palabra cuasi-homogéneo refleja el hecho de que los exponentes que aparecen en (1.19) no son necesariamente los mismos. Omitimos el término “cuasi-homogénea” cuando todos los exponentes (α, β, γ) son iguales a 1.

De (1.20) deducimos que $\bar{X}$ y X son topológicamente conjugados para $r > 0$, lo que significa que existe un mapeo uno a uno entre las trayectorias de X y las trayectorias de $\bar{X}$ fuera de $\mathcal{B}_0$. Además, se puede demostrar que $\bar{X}$ está bien definido en $r = 0$. Debido a la presencia de singularidades no hiperbólicas, y dependiendo de la elección de los exponentes, suele ocurrir que el sistema denotado por $\bar{X}$ se anule en $\mathcal{B}_0$, luego definimos el campo vectorial desingularizado $\tilde{X} = \frac{1}{r^k} \bar{X}$. Ahora $\tilde{X}$ no se anula en $\mathcal{B}_0$. Dado que $\bar{X}$ y $\tilde{X}$ son suavemente equivalentes para $r > 0$, toda la información obtenida de $\tilde{X}$ es equivalente a la de $\bar{X}$ fuera de $\mathcal{B}_0$. Sin embargo, dado que $\tilde{X}$ ya no se anula a lo largo de $\{r = 0\}$, podemos intentar inferir la dinámica de $\tilde{X}$ para $r > 0$ pequeño a partir de la restricción $\tilde{X}|_{\{r=0\}}$. Esto simplifica mucho el análisis, pues normalmente encontramos que $\tilde{X}$ tiene singularidades semi-hiperbólicas, singularidades hiperbólicas o ninguna singularidad. Finalmente, debido a las equivalencias entre X , $\bar{X}$, y $\tilde{X}$, llegamos a la conclusión de que el flujo de $\tilde{X}$ para $r > 0$ suficientemente pequeño proporciona una descripción completa del flujo de X para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño.

Cuando estudiamos problemas de alta dimensión, digamos para $m + n > 2$, trabajar con coordenadas polares puede resultar engorroso. Entonces, preferimos trabajar en cartas que cubran el espacio de expansión. En cada una de las cartas podemos definir coordenadas locales y un campo vectorial local correspondiente. En la práctica, lo que hacemos para definir las coordenadas locales en una carta es fijar una de las coordenadas ampliadas en ± 1 . Esta aproximación se llama “explosión direccional”. Por ejemplo, para realizar una explosión en la dirección

de $\bar{\varepsilon}$, definimos nuevas coordenadas de acuerdo con $\phi : \mathbb{R}^{n+m+1} \longrightarrow \mathbb{R}^{n+m+1}$ dado por

$$\phi(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\varepsilon}, r) = (r^\alpha \bar{x}, r^\beta \bar{y}, r^\gamma), \quad (1.21)$$

es decir, fijando $\bar{\varepsilon} = 1$. De manera similar, podemos definir explosiones en cualquiera de las otras direcciones.

Las explosiones direccionales inducen campos vectoriales locales en cada una de las cartas (euclidianas). Una vez que se realiza el análisis de los campos vectoriales locales relevantes, se pueden superponer las regiones adecuadas de las cartas y hacer coincidir el flujo en dichas cartas a través de los llamados mapeos de coincidencia (o mapeos de transición) para describir la dinámica en todo $\mathbb{S}^{m+n} \times I$. En particular, este proceso nos permite rastrear objetos invariantes, principalmente variedades centrales, a través del espacio expandido. En la figura 1.5 mostramos una representación esquemática del mapeo ampliado.

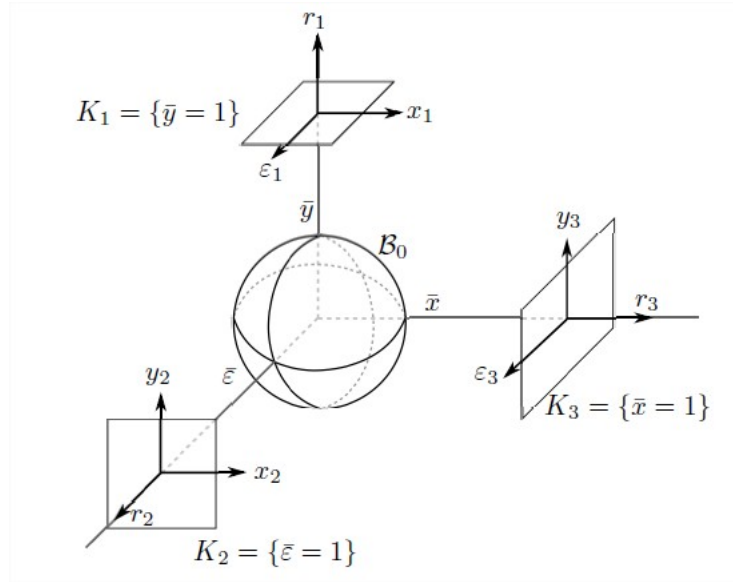


Figura 1.5: Bosquejo del espacio ampliado y de algunas de las cartas direccionales. En la práctica, a través del método de expansión, estudiamos los campos vectoriales locales definidos en las cartas y luego “pegamos” las trayectorias y otros objetos invariantes para describir la dinámica en una pequeña vecindad de $\mathcal{B}_0$, que a su vez proporciona la dinámica de un sistema lento-rápido alrededor del origen para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Figura tomada de [26].

En resumen, el método de blow-up permite abordar de manera más accesible el análisis de sistemas lento-rápido en un entorno de puntos de equilibrio no hiperbólicos. No obstante, el estudio de los campos vectoriales resultantes tras la

explosión sigue siendo altamente no trivial, debido a diversos desafíos, como la no linealidad de los campos locales, la presencia de equilibrios semihiperbólicos y la aparición de resonancias, entre otros. Incluso puede ocurrir que, en alguna de las cartas resultantes, persista una singularidad nilpotente, en cuyo caso puede ser necesario aplicar nuevamente el procedimiento de blow-up. Además, la elección adecuada de las potencias (α, β, γ) no siempre es evidente y puede requerir un análisis cuidadoso.

En la siguiente sección, exploraremos algunos conceptos fundamentales sobre el método de explosión. Esto nos permitirá analizar la dinámica de sistemas de tipo lento-rápido en una vecindad de los puntos de equilibrio no hiperbólicos.

1.5. Punto de pliegue (*fold point*) genérico

El pliegue genérico es la primera situación natural donde aparece un punto no hiperbólico en sistemas planos lentos-rápidos. En esta sección resumimos los principales resultados de [33].

Definición 6. (Punto de pliegue genérico). Considere el sistema (1.13) con $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Decimos que (x_0, y_0) es un punto de pliegue genérico si

$$f(x_0, y_0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, 0) = 0, \quad (1.22)$$

junto con las condiciones de no degeneración

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0, 0) \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, 0) \neq 0, \quad g(x_0, y_0, 0) \neq 0. \quad (1.23)$$

Sin pérdida de generalidad, asumimos que $(x_0, y_0) = (0, 0)$ y podemos elegir los signos de (1.23). Por lo tanto, un sistema lento-rápido con un punto de pliegue genérico en el origen se puede expresar como la forma canónica (local)

$$\begin{aligned} x' &= -y + x^2 + \mathcal{O}(\varepsilon, xy, y^2, x^3), \\ y' &= \varepsilon(-1 + \mathcal{O}(x, y, \varepsilon)). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Observamos que la variedad crítica correspondiente

$$\mathcal{S}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -y + x^2 + \mathcal{O}(\varepsilon, xy, y^2, x^3) = 0\}, \quad (1.25)$$

es localmente una parábola como se muestra en la figura 1.6.

Sea $\mathcal{S}_0^a$ (resp. $\mathcal{S}_0^r$) un subconjunto compacto de la sección atractora (resp. repulsora) de la variedad crítica $\mathcal{C}_0$. Se sabe por el teorema de Fenichel que una variedad lenta $\mathcal{S}_\varepsilon^a$ (resp. $\mathcal{S}_\varepsilon^r$) existe como una perturbación suave de $\mathcal{S}_0^a$ (resp. $\mathcal{S}_0^r$). Sin embargo, el teorema de Fenichel solo garantiza la existencia de tales variedades fuera del punto de pliegue. El objetivo principal es extender $\mathcal{S}_\varepsilon^a$ más allá del punto de pliegue. Sea $\rho > 0$ un número pequeño e $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo adecuado, y definimos las secciones

$$\begin{aligned}\Sigma^{en} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y = \rho^2\}, \\ \Sigma^{ex} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \rho, y \in \mathbb{R}\}.\end{aligned}\tag{1.26}$$

Aquí I es un intervalo adecuado, significa que en Σ^{en} interseca a $\mathcal{S}_0^a$ pero no a $\mathcal{S}_0^r$, ver la figura 1.6. El siguiente teorema establece las propiedades de la variedad lenta $\mathcal{S}_\varepsilon^a$ a medida que pasa por el origen (un esquema de este resultado lo mostramos en la figura 1.6).

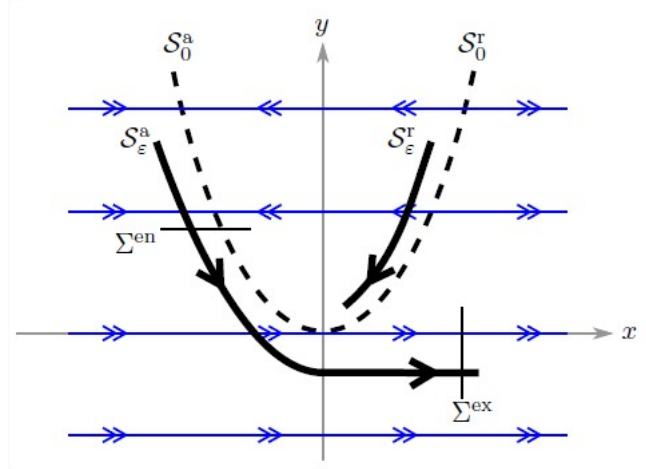


Figura 1.6: Bosquejo de un sistema lento-rápido en un entorno de un punto de pliegue (*fold point*) genérico. Considerando sólo los primeros términos de la variedad crítica $\mathcal{S}_0$, que se muestra con la línea punteada, esta queda definida por $\mathcal{S}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$. Las líneas continuas (azules) con flechas dobles representan la dinámica de la ecuación de capa. Luego, $\mathcal{S}_0$ tiene una rama atractora ($\mathcal{S}_0^a$) y una repulsora ($\mathcal{S}_0^r$). Lejos del punto de pliegue, el teorema de Fenichel garantiza que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeña, $\mathcal{S}_0^a$ y $\mathcal{S}_0^r$ se alteran suavemente con variedades invariantes (en este caso trayectorias) $\mathcal{S}_\varepsilon^a$ y $\mathcal{S}_\varepsilon^r$, respectivamente. El análisis (a través de la explosión) garantiza que $\mathcal{S}_\varepsilon^a$ puede extenderse más allá del punto de pliegue, como se muestra en la figura. En particular, se puede mostrar que la distancia entre el eje x y la intersección $\mathcal{S}_\varepsilon^a \cap \Sigma^{ex}$ es de orden $\mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$. Figura tomada de [26].

Teorema 5. Sea $\Pi : \Sigma^{en} \longrightarrow \Sigma^{ex}$ la función de transición para el flujo de (1.24). Entonces, existe $\varepsilon_0 > 0$, de modo que las siguientes afirmaciones son válidas para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$:

- (F1) La variedad $\mathcal{S}_\varepsilon^a$ pasa por Σ^{ex} en un punto $(\rho, h(\varepsilon))$, donde $h(\varepsilon) \in \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$.
- (F2) La transición Π es una contracción con tasa de contracción $\mathcal{O}(\exp(-C/\varepsilon))$, donde $C > 0$.

Notamos la importancia de los dos enunciados (F1) y (F2) contenidos en el teorema 5. En primer lugar, la estimación $h(\varepsilon) \in \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3})$ indica que $\mathcal{S}_\varepsilon^a$ no es una perturbación regular del conjunto singular $\mathcal{S}_0^a \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0\}$. En otras palabras, no es posible considerar una serie asintótica en potencias enteras positivas de ε como una expansión de $\mathcal{S}_\varepsilon^a$ en una pequeña vecindad del punto de pliegue. El segundo enunciado muestra que la contracción exponencial hacia $\mathcal{S}_\varepsilon^a$, que antes del punto de pliegue está garantizada por el teorema de Fenichel, no se pierde después de cruzar el punto de pliegue. Observamos que este hecho no es un argumento de perturbación regular derivado de la ecuación de capa correspondiente, pero se puede probar mediante un análisis más amplio.

1.6. Ciclos de canard en el plano

Las trayectorias cercanas a un punto de pliegue genérico primero siguen la parte atrayente de la variedad crítica y luego siguen la dirección rápida. Quizás de manera contraria a la intuición, para ciertas familias de un parámetro de sistemas planos lentos-rápidos, hay trayectorias cerca de una singularidad de pliegue que pueden seguir de cerca la región inestable de la variedad crítica para un tiempo de orden $\mathcal{O}(1)$. Este tipo de trayectorias se denominan canard, ver la figura 1.7.

Iniciemos considerando una familia de un parámetro de sistemas lentos-rápidos planos dada por

$$\begin{aligned} x' &= f(x, y, \omega, \varepsilon), \\ y' &= \varepsilon g(x, y, \omega, \varepsilon), \end{aligned} \tag{1.27}$$

donde $\omega \in \mathbb{R}$. Al igual que en el caso de pliegue genérico de la sección 1.5, podemos suponer que existe un punto de pliegue en el origen, digamos para $\omega = 0$.

Definición 7. (Punto de Canard). Considere el sistema (1.27). Decimos que $(x, y) = (0, 0)$ es un *punto canard* si

$$f(0, 0, 0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0, 0) = 0, \quad g(0, 0, 0, 0) = 0 \tag{1.28}$$

junto con las condiciones de no degeneración

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0,0,0) \neq 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0,0) \neq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(0,0,0,0) \neq 0, \quad \frac{\partial g}{\partial \omega}(0,0,0,0) \neq 0. \quad (1.29)$$

La principal diferencia con respecto al caso de pliegue genérico en la sección 1.5 radica en la presencia de un punto de equilibrio en el origen, el cual está determinado por la condición $g(0,0,0,0) = 0$. Las condiciones de no degeneración implican una intersección transversal en el origen de las nuclinas de (1.27). La variedad crítica de (1.27) es, hasta los términos de orden uno, la misma que la dada en la sección 1.2. Entonces, usamos la misma notación y no repetimos su definición aquí. De manera similar al caso del plegue genérico, se puede demostrar que un sistema lento-rápido en el plano tiene una expresión local cerca de un punto canard dada por

$$\begin{aligned} x' &= -yh_1(x, y, \omega, \varepsilon) + x^2h_2(x, y, \omega, \varepsilon) + \varepsilon h_3(x, y, \omega, \varepsilon), \\ y' &= \varepsilon \left(xh_4(x, y, \omega, \varepsilon) - \omega h_5(x, y, \omega, \varepsilon) + yh_6(x, y, \omega, \varepsilon) \right), \end{aligned} \quad (1.30)$$

donde

$$\begin{aligned} h_3 &= \mathcal{O}(x, y, \omega, \varepsilon), \\ h_j &= 1 + \mathcal{O}(x, y, \omega, \varepsilon), \quad j = 1, 2, 4, 5. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Observación 2. *Hasta los términos de orden inicial el sistema (1.30) se lee como*

$$\begin{aligned} x' &= -y + x^2, \\ y' &= \varepsilon(x - \omega). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Sea, por ahora, $\varepsilon > 0$. Entonces se produce una bifurcación de Hopf en $\omega = 0$. Además, la norma de los valores propios correspondientes tiende a cero (y al infinito en la escala de tiempo lenta) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Esta situación se conoce como bifurcación de Hopf singular.

Definimos las constantes

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{\partial h_3}{\partial x}(0,0,0,0), \\ a_5 &= h_6(0,0,0,0), \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\mathcal{A} = -\frac{\partial h_1}{\partial x}(0,0,0,0) + 3\frac{\partial h_2}{\partial x}(0,0,0,0) - 2\frac{\partial h_4}{\partial x}(0,0,0,0) - 2a_5, \quad (1.34)$$

y las secciones

$$\Sigma^j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in I_j, y = \rho^2\}, \quad j = \text{en}, \text{ex}, \quad (1.35)$$

donde $\rho > 0$ e I_j es un pequeño intervalo adecuado, ver la figura 1.7. Sea $q_{\text{en},\varepsilon} = \Sigma^{\text{en}} \cap \mathcal{S}_\varepsilon^a$, $q_{\text{ex},\varepsilon} = \Sigma^{\text{ex}} \cap \mathcal{S}_\varepsilon^r$ y denotamos por $\Pi : \Sigma^{\text{en}} \rightarrow \Sigma^{\text{ex}}$ la transición inducida por (1.27). El resultado principal que describe el comportamiento de las variedades lentas $\mathcal{S}_\varepsilon^a$ y $\mathcal{S}_\varepsilon^r$ alrededor del punto canard es el siguiente.

Teorema 6. *Suponga que el sistema (1.27) tiene un punto canard en el origen, es decir, satisface (1.28) y (1.29). Suponga que la solución $x_0(t)$ del problema reducido conecta $\mathcal{S}_\varepsilon^a$ con $\mathcal{S}_\varepsilon^r$. Entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ y una función suave $\omega_c(\sqrt{\varepsilon})$ definida en $[0, \varepsilon_0]$ tal que para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ las siguientes afirmaciones son válidas.*

(C1) $\Pi(q_{\text{en},\varepsilon}) = q_{\text{ex},\varepsilon}$ si y solo si $\omega = \omega_c(\sqrt{\varepsilon})$.

(C2) La función ω_c tiene la expansión

$$\omega_c(\sqrt{\varepsilon}) = -\left(\frac{a_1 + a_5}{2} + \frac{1}{8}A\right)\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}) \quad (1.36)$$

(C3) El mapeo de transición se define solo para ω en un intervalo alrededor de $\omega_c(\sqrt{\varepsilon})$ de tamaño $\mathcal{O}(\exp(-C/\varepsilon))$ para algún $C > 0$.

(C4) Hay una condición de división en $\omega = \omega_c(\sqrt{\varepsilon})$ dado por

$$\frac{\partial}{\partial \omega}(\Pi(q_{\text{en},\varepsilon}) - q_{\text{ex},\varepsilon})|_{\omega=\omega_c(\sqrt{\varepsilon})} > 0. \quad (1.37)$$

En la figura 1.7 se da una representación esquemática del teorema 6. El aspecto más importante del teorema 6 es que nos dice que para $\varepsilon > 0$ hay exactamente un valor del parámetro ω para el cual $\mathcal{S}_\varepsilon^a$ se extiende exactamente a $\mathcal{S}_\varepsilon^r$, es decir, coinciden como se indica en (C1). La trayectoria anterior se suele llamar canard máximo para distinguirla de otras que pueden seguir a $\mathcal{S}_\varepsilon^r$ para el tiempo de orden $\mathcal{O}(1)$. Otro punto importante del teorema 6 es su tercer elemento (C3), que nos dice que las órbitas de canard cerca de los pliegues planos ocurren solo para valores de ω dentro de un intervalo exponencialmente pequeño. En relación con la observación anterior, observamos además que la intersección de $\mathcal{S}_\varepsilon^a$ y $\mathcal{S}_\varepsilon^r$ no es transversal y, por lo tanto, pequeñas C^1 -perturbaciones del parámetro ω destruye el canard máximo; véase (C4).

En la carta $K_2 = \{\bar{\varepsilon} = 1\}$, el objeto clave de estudio es un sistema de ecuaciones en el plano de la forma

$$\begin{aligned} x_2' &= -y_2 + x_2^2, \\ y_2' &= x_2, \end{aligned} \quad (1.38)$$

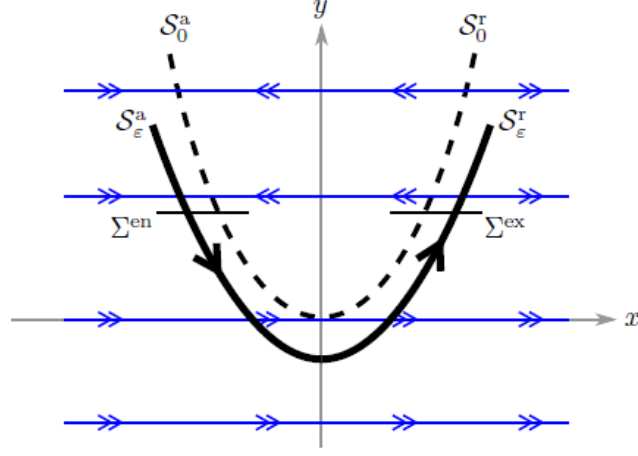


Figura 1.7: Representación esquemática de un canard máximo. Notemos que $\mathcal{S}_\varepsilon^a$ se extiende precisamente a $\mathcal{S}_\varepsilon^r$ más allá del origen. Las trayectorias que atraviesan exponencialmente cercanas a $\mathcal{S}_\varepsilon^a$ siguen a $\mathcal{S}_\varepsilon^r$ para el tiempo de orden $\mathcal{O}(1)$ antes de ser repelidas. Figura tomada de [26].

que se obtiene después de la restricción a $\{r_2 = \omega_2 = 0\}$; compárese con el sistema (1.32). Se puede comprobar que el sistema (1.38) es completamente integrable, teniendo una constante de movimiento denotada por $H(x_2, y_2)$. Esto significa que las trayectorias de (1.38) están determinadas por las curvas de nivel de H . Aquí $(x_2, y_2, r_2, \varepsilon_2)$, denotan las coordenadas locales en la carta K_2 .

Hay una curva especial γ_c dada por la solución de $H = 0$. La mayor importancia de γ_c es que conecta con precisión $\mathcal{S}_0^a$ con $\mathcal{S}_0^r$. Naturalmente, en el espacio de explosión $\mathcal{S}_0^a$ y $\mathcal{S}_0^r$ corresponden a $\mathcal{M}_2^a|_{r_2=0}$ y $\mathcal{M}_2^r|_{r_2=0}$ respectivamente.

El siguiente paso es investigar cómo se rompe dicha conexión para $r_2 > 0$, $\omega_2 \neq 0$, que describirá cómo las variedades $\mathcal{M}_2^a$ y $\mathcal{M}_2^r$ están conectadas. Para tal fin se utiliza un análisis basado en el método Melnikov [21]. En esencia, el método de Melnikov proporciona una expresión para la distancia entre $\mathcal{M}_2^a$ y $\mathcal{M}_2^r$, denotada por $d = d(r_2, \omega_2)$. Por lo tanto, para $\varepsilon > 0$ las variedades $\mathcal{S}_\varepsilon^a$ y $\mathcal{S}_\varepsilon^r$ están conectadas si y solo si $d = 0$. Estimaciones cuidadosas de la función d y un blow-down (desinfe) proporcionan la expresión para ω_c en el teorema 6 y el argumento de ruptura que prueba (C4).

El teorema 1 en [14] proporciona estimaciones asintóticas del parámetro para cada uno de los ciclos canard que se muestran en la figura 1.9. Todos estos ciclos ocurren dentro de un intervalo exponencialmente pequeño del parámetro. Esto significa que la transición entre ciclos de canard de pequeña amplitud hacia os-

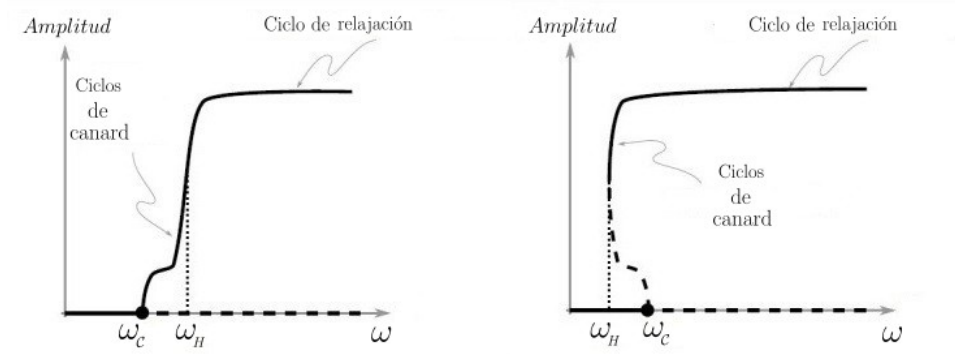


Figura 1.8: Diagramas de bifurcación correspondientes a una explosión de canard para $\mathcal{A} < 0$ a la izquierda y $\mathcal{A} > 0$ a la derecha (ver la fórmula (1.34) y el teorema 6). Se produce una bifurcación de Hopf en $\omega = \omega_H$ y un canard máximo cuando $\omega = \omega_C$. Estos diagramas representan la amplitud y estabilidad de los ciclos límite $\Gamma_{\varepsilon, \omega}$ para $\varepsilon > 0$ fijo suficientemente pequeño. En particular, tenemos que para $\mathcal{A} < 0$ todos los ciclos de canard son estables.

oscilaciones de relajación se produce para una variación exponencialmente pequeña del parámetro. Este efecto se llama *explosión de canard*, ver figura 1.8.

Las extensiones y generalizaciones de los resultados de [14] se aplica a familias generales de un parámetro de sistemas en el plano de tipo lento-rápido (1.27) que tienen una variedad crítica en forma de S (un caso particular es el oscilador de van der Pol, figura 1.9). El resultado principal es la prueba de que la transición entre órbitas periódicas de pequeña amplitud a oscilaciones de relajación ocurre dentro de un intervalo exponencialmente pequeño del parámetro.

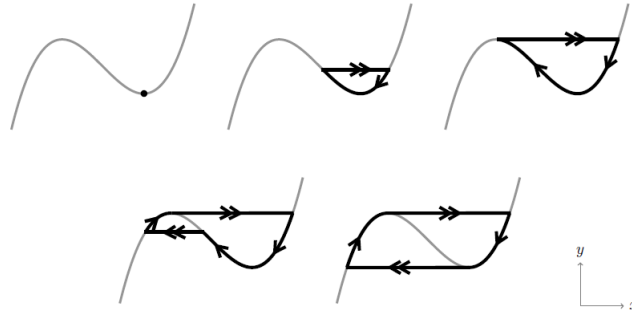


Figura 1.9: Ciclos de canard singulares (o conjuntos periódicos límite) que dan lugar a ciclos de canard en el oscilador de van der Pol. Para $\varepsilon > 0$ existen órbitas cerradas suficientemente pequeñas como perturbaciones de estos ciclos singulares. Figura tomada de [26].

Capítulo 2

Reducción y análisis de la estabilidad lineal de los puntos de equilibrio del modelo

En este capítulo, se aborda la reducción del modelo (1) a un sistema polinómico topológicamente equivalente, con el objetivo de facilitar su estudio analítico. Esta transformación permite preservar las propiedades cualitativas del sistema original, como la existencia y estabilidad de los puntos de equilibrio, al tiempo que simplifica su estructura matemática. Además, se identifican los puntos de equilibrio del sistema reducido y se analiza su estabilidad local mediante la linealización en torno a dichos puntos. En este sentido, los resultados aquí presentados constituyen una síntesis clara y rigurosa que sistematiza y clarifica este aspecto del modelo. Cabe señalar que, a diferencia de este enfoque, los trabajos [3] y [63], los cuales se concentran principalmente en la existencia de bifurcaciones locales a partir de los equilibrios, sin desarrollar con el mismo nivel de detalle la caracterización previa de su existencia y estabilidad lineal.

2.1. Sistema reducido

Con el objetivo de simplificar los cálculos, en esta sección reduciremos el sistema mediante un reescalamiento de las variables y el tiempo, según lo propuesto por Zhu y Liu en [63], y analizaremos el comportamiento asintótico de las soluciones. A partir de este punto, dado que las variables x y y representan el tamaño de las poblaciones de presas y depredadores, respectivamente, consideraremos que el

sistema (1) está definido en el conjunto $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0\}$.

Proposición 1. *Existe una equivalencia topológica de clase C^1 entre el sistema (1) y el siguiente sistema, excepto en la singularidad $x = -a$,*

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= u(u + C)((u + A)(1 - u)(u - M) - v), \\ \frac{dv}{d\tau} &= Sv(u + A)(u + C - Qv).\end{aligned}\tag{2.1}$$

Demostración. Sea $\tilde{\Omega} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2, u \geq 0, v \geq 0\}$. Definimos la función

$$\varphi : \tilde{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R}$$

$$\varphi(u, v, \tau) = (x, y, t),$$

donde

$$x = Ku, \quad y = \frac{rK^2}{q}v, \quad d\tau = \frac{rnK^3}{(nx + c)(u + a)}dt.$$

Adicionalmente definimos

$$A := \frac{a}{K} < 1, \quad C := \frac{c}{Kn}, \quad S := \frac{s}{rK}, \quad Q := \frac{rK}{nq} \quad \text{y} \quad M := \frac{m}{K}$$

entonces $(A, M, C, S, Q) \in (0, 1) \times (-1, 1) \times \mathbb{R}_+^3$.

El mapeo φ , definido como

$$\varphi(u, v, \tau) = \left(Ku, \frac{rK^2}{q}v, \frac{(nx + c)(x + a)}{rnK^3} \right),$$

es un difeomorfismo que preserva la orientación del tiempo ya que

$$\begin{aligned}\det D\varphi(u, v, \tau) &= \begin{vmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & \frac{rK^2}{q} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(u + c)(u + a)}{rnK^3} \end{vmatrix} \\ &= (u + c)(u + a)/nq > 0.\end{aligned}$$

Por lo tanto el sistema (1) es topológicamente equivalente al sistema (2.1) □

Notemos que el sistema (2.1) es de tipo Kolmogorov, entonces los ejes u y v son conjuntos invariantes respecto al flujo. Adicionalmente, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2. *El conjunto $\Gamma = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 1, v \geq 0\}$ es positivamente invariante bajo el flujo del sistema (2.1). Es decir, cada órbita que entra en Γ en un tiempo finito nunca sale de allí.*

Demostración. El campo vectorial asociado a la ecuación diferencial (2.1) lo denotamos como:

$$F(u, v) = \left(u(u + C)((u + A)(1 - u)(u - M) - v), Sv(u + A)(u + C - Qv) \right).$$

Para demostrar que Γ es positivamente invariante es suficiente probar que el campo en $\partial\Gamma$ apunta al interior de Γ o es tangente a éste.

Iniciemos por considerar el caso $u = 0$ y $v \geq 0$, tenemos que

$$F(0, v) = \left(0, SvA(C - Qv) \right),$$

de tal forma que cualquiera que sea el signo de $SvA(C - Qv)$, el campo es tangente a la frontera de Γ .

Si $0 < u < 1$ y $v = 0$, tenemos que

$$F(u, 0) = \left(u(u + C)(u + A)(1 - u)(u - M), 0 \right)$$

y cualquiera que sea el signo de $u(u + C)(u + A)(1 - u)(u - M)$, el campo es tangente a la frontera de Γ .

Si $u = 1$ y $v \geq 0$, tenemos que

$$F(1, v) = \left(-v(1 + C), Sv(1 + A)(1 + C - Qv) \right)$$

donde $-v(1 + C) \leq 0$ y cualquiera que sea el signo de $Sv(1 + A)(1 + C - Qv)$ las trayectorias del campo entran y permanecen en el región Γ .

Por lo tanto el conjunto $\Gamma = \{(u, v) \in \tilde{\Omega} \mid 0 \leq u \leq 1, v \geq 0\}$ es positivamente invariante. $\square$

La siguiente proposición establece que todas las soluciones que se inician en Γ están eventualmente acotadas.

Proposición 3. *Todas las soluciones de (2.1) con condiciones iniciales en Γ están acotadas y están contenidas en el conjunto*

$$\tilde{\Gamma} = \left\{ (u, v) : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq \frac{1 + C}{Q} \right\},$$

cuando $t \rightarrow \infty$.

Demostración. De la primera ecuación del sistema (2.1) tenemos que si

$$u(u + C)v > 0 \quad \text{y} \quad 0 < u < 1.$$

Entonces

$$\frac{du}{d\tau} \leq (1 + A)(1 + C)(1 - u)(u - M). \quad (2.2)$$

Separando variables e integrando ambos lados de (2.2), tenemos

$$u \leq \frac{M - e^{(1+A)(1+C)(1-M)\tau+c_1}}{1 - e^{(1+A)(1+C)(1-M)\tau+c_1}} = \frac{Me^{-(1+A)(1+C)(1-M)\tau} - e^{c_1}}{e^{-(1+A)(1+C)(1-M)\tau} - e^{c_1}}.$$

Por lo tanto $\limsup_{\tau \rightarrow \infty} u(\tau) \leq 1$.

Por otra parte, de la segunda ecuación del sistema (2.1), como

$$0 < u(\tau) < 1 \quad \text{y} \quad v > 0,$$

tenemos

$$u + C - Qv < 1 + C - Qv \quad \text{para todo} \quad v \geq 0$$

y

$$Sv(u + C - Qv) < Sv(1 + C - Qv).$$

Además $u + A < 1 + A$, entonces

$$Sv(u + A)(u + C - Qv) < Sv(1 + A)(1 + C - Qv).$$

Por lo tanto

$$\frac{dv}{d\tau} \leq Sv(1 + A)(1 + C - Qv). \quad (2.3)$$

Separando variables e integrando ambos lados de (2.3), tenemos

$$v \leq \frac{(1 + C)e^{S(1+A)(1+C)\tau}}{e^{(1+C)c_1} + Qe^{S(1+A)(1+C)\tau}} = \frac{1 + C}{e^{-S(1+A)(1+C)\tau+(1+C)c_1} + Q}.$$

Por lo tanto $\limsup_{\tau \rightarrow \infty} v(\tau) \leq \frac{1+C}{Q}$.

Como consecuencia de los resultados anteriores, tenemos que $\tilde{\Gamma}$ es un conjunto positivamente invariante y atractor para el flujo del sistema (2.1) en el primer cuadrante. $\square$

En la siguiente sección, buscaremos todos los puntos de equilibrio factibles de (2.1), especialmente los puntos de equilibrio de coexistencia entre ambas especies.

2.2. Determinación de los puntos de equilibrio

Observemos que los puntos de equilibrio de (2.1) con $M > 0$ (efecto Allee fuerte) y donde una de las especies se extingue son $(M, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, C/Q)$. Por otro lado, si $M < 0$ (efecto Allee débil), el punto de equilibrio $(M, 0)$ se encuentra en el semieje negativo $u < 0$. En éste trabajo estudiaremos el caso en el que el sistema es afectado por un efecto Allee débil, es decir $M < 0$. Los puntos de equilibrio positivos o puntos de coexistencia entre ambas poblaciones, corresponden a la intersección de las nulclinas en el primer cuadrante. Estas nulclinas están dadas por

$$\ell(u) = \frac{u + C}{Q}, \quad h(u) = (u + A)(1 - u)(u - M). \quad (2.4)$$

La coordenada u_* del punto de intersección (u_*, v_*) está determinada por la solución de la ecuación

$$\frac{u + C}{Q} = (u + A)(1 - u)(u - M),$$

o equivalentemente por los ceros del polinomio

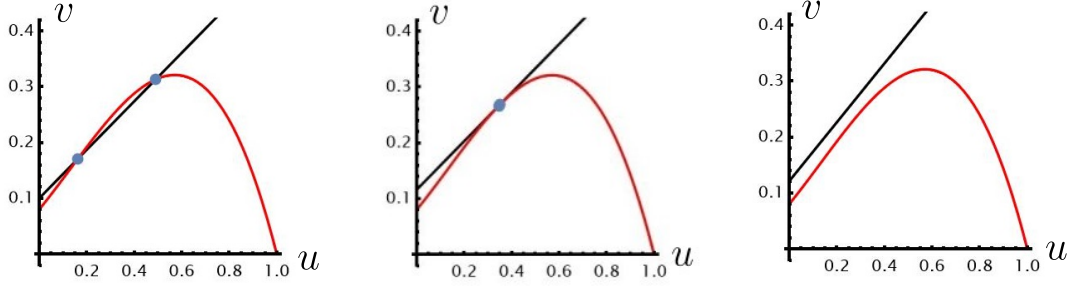
$$P(u) = u^3 + (A - M - 1)u^2 + (M - A - AM + \frac{1}{Q})u + AM + \frac{C}{Q} = 0. \quad (2.5)$$

Para garantizar la existencia de los puntos de equilibrio positivos, en el caso $M < 0$, observamos que la intersección de la recta $\ell(u) = (u + C)/Q$ y la función cúbica $h(u) = (u + A)(1 - u)(u - M)$ depende del valor de los parámetro C y Q . Para hallar los valores u_* donde hay puntos de equilibrio positivos, aplicamos la regla de los signos de Descartes al polinomio (2.5). Por lo tanto, tenemos el siguiente teorema el cual es dado de forma equivalente en [3].

Teorema 7.

1. Con $\frac{C}{Q} > -AM$ y $M < 0$, ver la figura 2.1, se tienen los siguientes casos.

- a) Si $A - M - 1 < 0$ ó $A - M - 1 > 0$ y $M - A - AM + \frac{1}{Q} < 0$ ó $A - M - 1 = 0$ y $M - A - AM + \frac{1}{Q} < 0$, entonces los coeficientes del polinomio (2.5) tienen dos cambios de signo, por lo que el sistema (2.1) tiene hasta dos puntos de equilibrio positivos en el primer cuadrante.
- b) Si $A - M - 1 > 0$ y $M - A - AM + \frac{1}{Q} \geq 0$ ó $A - M - 1 = 0$ y $M - A - AM + \frac{1}{Q} \geq 0$, entonces los coeficientes del polinomio (2.5) no tienen cambios de signo, por lo que el sistema (2.1) no tiene puntos de equilibrio positivos en el primer cuadrante.



(a) Caso 1a. en el teorema 7 con dos puntos de equilibrio. (b) Caso 1a. en el teorema 7 con un punto de equilibrio. (c) Caso 1b. en el teorema 7 sin puntos de equilibrio.

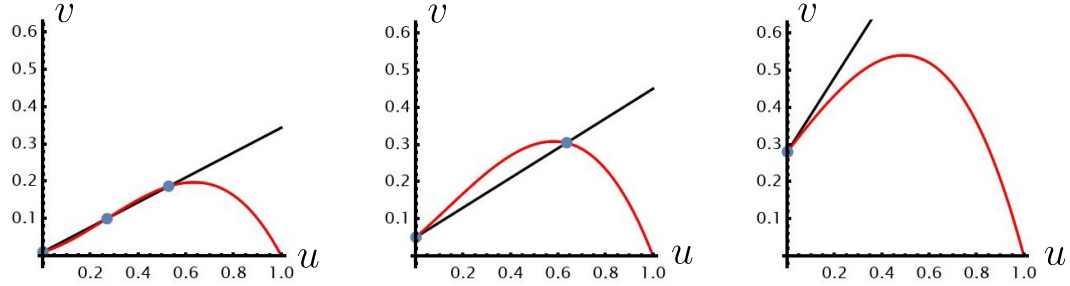
Figura 2.1: La intersección de la nuclina de la presa $h(u) = (u + A)(1 - u)(u - M)$ (curva roja) y la nuclina del depredador $\ell(u) = (u + C)/Q$ (recta negra), indica dos, uno o ningún punto de equilibrio del sistema (2.1) con efecto Allee débil ($M < 0$).

2. Con $\frac{C}{Q} = -AM$ y $M < 0$, ver la figura 2.2, se tienen los siguientes casos.

- a) Si $A - M - 1 < 0$ y $M - A - AM + \frac{1}{Q} > 0$, entonces los coeficientes del polinomio (2.5) tienen dos cambios de signo, por lo que el sistema (2.1) tiene hasta dos puntos de equilibrio positivos en el primer cuadrante.
- b) Si $A - M - 1 < 0$ y $M - A - AM + \frac{1}{Q} \leq 0$ ó $A - M - 1 \geq 0$ y $M - A - AM + \frac{1}{Q} < 0$, entonces los coeficientes del polinomio (2.5) tienen un cambio de signo, por lo que el sistema (2.1) tiene un punto de equilibrio positivo en el primer cuadrante.
- c) Si $A - M - 1 \geq 0$ y $M - A - AM + \frac{1}{Q} \geq 0$, entonces los coeficientes del polinomio (2.5) no tienen cambios de signo, por lo que el sistema (2.1) no tiene puntos de equilibrio positivos en el primer cuadrante.

3. Con $\frac{C}{Q} < -AM$ y $M < 0$, ver la figura 2.3, se tienen los siguientes casos.

- a) Si $A - M - 1 \leq 0$ y $M - A - AM + \frac{1}{Q} \leq 0$ ó $A - M - 1 \geq 0$ y $M - A - AM + \frac{1}{Q} \geq 0$ ó $A - M - 1 \geq 0$ y $M - A - AM + \frac{1}{Q} \leq 0$, entonces los coeficientes del polinomio (2.5) tienen un cambio de signo, por lo que el sistema (2.1) tiene un punto de equilibrio positivo en el primer cuadrante.
- b) Si $A - M - 1 < 0$ y $M - A - AM + \frac{1}{Q} > 0$, entonces los coeficientes del polinomio (2.5) tienen tres cambios de signo, por lo que el sistema (2.1) tiene hasta tres puntos de equilibrio positivos en el primer cuadrante.

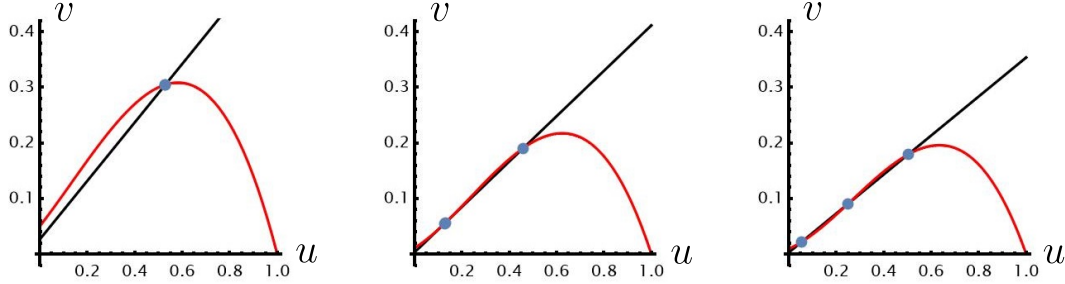


(a) Caso 2a. en el teorema 7 con dos puntos de equilibrio. (b) Caso 2b. en el teorema 7 con un punto de equilibrio. (c) Caso 2c. en el teorema 7 sin puntos de equilibrio.

Figura 2.2: La intersección de la nuclina de la presa $h(u) = (u + A)(1 - u)(u - M)$ (curva roja) y la nuclina del depredador $\ell(u) = (u + C)/Q$ (recta negra), indica dos, uno o ningún punto de equilibrio del sistema (2.1) con efecto Allee débil ($M < 0$).

Observación 3.

- El caso 2 del teorema 7 corresponde a un caso degenerado en el que las dos nulclinas se intersecan a lo largo del eje v , véase la figura 2.2. También sirve como separador de situaciones genéricas ya estudiadas en la literatura, véase por ejemplo [62]. Por lo tanto, una parte importante de nuestro artículo está dedicada a este caso.
- Consideremos el caso 2 del teorema 7 con A y M fijos. Sea Q suficientemente pequeño como para que haya exactamente un punto de equilibrio positivo (u_*, v_*) . Si $A - M - 1 < 0$ entonces, a medida que se aumenta el valor de Q , la coordenada u_* disminuye. Finalmente, para $Q = \frac{1}{A - M + AM}$, aparece un segundo punto de equilibrio (2(b) $\rightarrow$ 2(a)) (que se denotará como $E_2 = (u_2, v_2)$). Si se aumenta aún más Q , (u_*, v_*) colisiona con E_2 y desaparece (2(a) $\rightarrow$ 2(c)). Por otro lado, si $A - M - 1 > 0$ entonces, a medida que se aumenta el valor de Q , la coordenada u_* disminuye. Finalmente, (u_*, v_*) colisiona con el punto $(0, -AM)$ antes de dejar de existir (2(b) $\rightarrow$ 2(c)).
- Consideremos el caso 3 del Teorema 7 con A y M fijos. Sea Q lo suficientemente pequeño como para que haya exactamente un punto de equilibrio positivo (u_*, v_*) . Si $A - M - 1 < 0$ entonces, a medida que aumenta el valor de Q , la coordenada u_* disminuye. Además, para $Q = \frac{1}{A - M + AM}$ tenemos dos casos:



(a) Caso 3a. en el teorema 7 con un punto de equilibrio. (b) Caso 3b. en el teorema 7 con dos puntos de equilibrio. (c) Caso 3b. en el teorema 7 con tres puntos de equilibrio.

Figura 2.3: La intersección de la nuclina de la presa $h(u) = (u + A)(1 - u)(u - M)$ (curva roja) y la nuclina del depredador $\ell(u) = (u + C)/Q$ (recta negra), indica uno, dos o tres puntos de equilibrio del sistema (2.1) con efecto Allee débil ($M < 0$).

- (I) Si $Q > \frac{3}{1+A+A^2-M+AM+M^2}$ aparece un segundo punto de equilibrio $E_2 = (u_2, v_2)$ y eventualmente un tercer punto de equilibrio E_3 (3(a) $\rightarrow$ 3(b)). Cuando Q crece aún más los puntos (u_*, v_*) y E_2 chocan y finalmente desaparecen, mientras que E_3 choca con el punto $(0, -AM)$ antes de dejar de existir.
- (II) Si $Q < \frac{3}{1+A+A^2-M+AM+M^2}$, siempre hay un único punto de equilibrio.

Por otro lado, si $A - M - 1 > 0$, siempre tenemos un único punto de equilibrio. Esto porque nos estamos moviendo de una condición a otra dentro de las consideradas en el punto 3(a) del Teorema 7.

Estudiamos los casos en los que hay un punto de equilibrio positivo (u_*, v_*) en el primer cuadrante, es decir, estudiamos los casos 2(b) y 3(a).

2.3. Análisis de la estabilidad lineal de los puntos de equilibrio

En esta sección estudiaremos los casos 2(b) y 3(a) del teorema 7. Para determinar la naturaleza de los puntos de equilibrio debemos calcular la matriz jacobiana $\mathcal{J}(u, v)$ del sistema (2.1):

$$\mathcal{J}(u, v) = \begin{pmatrix} -5u^4 + 4(M - C - A + 1)u^3 + \alpha & -u(u + C) \\ Sv(A + C + 2u - Qv) & S(u + A)(u + C - 2Qv) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

donde $\alpha = 3(A(M - C + 1) + CM + C - M)u^2 + 2(A(CM + C - M) - (CM + v))u - C(AM + v)$.

La matriz jacobiana del sistema (2.1) en el punto $(0, 0)$ es:

$$\mathcal{J}(0, 0) = \begin{pmatrix} -ACM & 0 \\ 0 & ACS \end{pmatrix}.$$

Con determinante $\det(\mathcal{J}(0, 0)) = -A^2C^2MS > 0$ y traza $\text{tr}(\mathcal{J}(0, 0)) = AC(S - M) > 0$. Por lo tanto, el punto de equilibrio $(0, 0)$ es un repulsor.

La matriz jacobiana del sistema (2.1) en el punto $(1, 0)$ es:

$$\mathcal{J}(1, 0) = \begin{pmatrix} -(1 + C)(1 + A)(1 - M) & -(1 + C) \\ 0 & S(1 + C)(1 + A) \end{pmatrix}.$$

Con determinante $\det(\mathcal{J}(1, 0)) = -S(1 + C)^2(1 + A)^2(1 - M) < 0$. Por lo tanto, el punto de equilibrio $(1, 0)$ es un punto silla.

La matriz jacobiana del sistema (2.1) en el punto $(0, C/Q)$ es:

$$\mathcal{J}(0, C/Q) = \begin{pmatrix} C \left(-AM - \frac{C}{Q} \right) & 0 \\ \frac{ACS}{Q} & -ACS \end{pmatrix}.$$

Entonces

- (1) Si $-AM - \frac{C}{Q} > 0$, tenemos $\det(\mathcal{J}(0, 0)) = -AC^2S(-AM - \frac{C}{Q}) < 0$. Por lo tanto, el punto de equilibrio $(0, C/Q)$ es un punto silla.
- (2) Si $-AM - \frac{C}{Q} < 0$, tenemos $\det(\mathcal{J}(0, 0)) = -AC^2S(-AM - \frac{C}{Q}) > 0$ y si $\text{tr}(\mathcal{J}(0, 0)) = C(-AM - \frac{C}{Q}) - ACS < 0$, entonces el punto de equilibrio $(0, C/Q)$ es un atractor.
- (3) Si $-AM - \frac{C}{Q} < 0$, tenemos $\det(\mathcal{J}(0, 0)) = -AC^2S(-AM - \frac{C}{Q}) > 0$ y si $\text{tr}(\mathcal{J}(0, 0)) = C(-AM - \frac{C}{Q}) - ACS > 0$, entonces el punto de equilibrio $(0, C/Q)$ es un repulsor.

De acuerdo con las condiciones 2(b) y 3(a) del teorema 7, el sistema (2.1) tiene solo un punto de equilibrio positivo en el primer cuadrante, y se encuentra sobre la recta $v = \frac{u+C}{Q}$, por lo que lo denotamos por $(u_*, \frac{u_*+C}{Q})$ donde $0 < u_* < 1$. De modo que, la matriz jacobiana del sistema (2.1) en el punto $(u_*, \frac{u_*+C}{Q})$ es:

$$\mathcal{J}(u_*, \frac{u_*+C}{Q}) = \begin{pmatrix} u_*(u_* + C) \left((A - M + AM + 2(M + 1 - A)u_* - 3u_*^2) \right) & -u_*(u_* + C) \\ \frac{S(u_*+A)(u_*+C)}{Q} & -S(u_* + A)(u_* + C) \end{pmatrix}$$

La traza y el determinante de $\mathcal{J}$ están dados por

$$\begin{aligned} \text{tr}(\mathcal{J}) = \\ (u_* + C) \left((A - M + AM)u_* + 2(M + 1 - A)u_*^2 - 3u_*^3 - S(u_* + A) \right), \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \det(\mathcal{J}) = \\ Su_*(u_* + A)(u_* + C)^2 \left(\frac{1}{Q} - (A - M + AM)u_* + 2(M + 1 - A)u_*^2 - 3u_*^3 \right). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ya que el polinomio característico está dado por $\lambda^2 - \text{tr}(\mathcal{J})\lambda + \det(\mathcal{J}) = 0$, el signo de la parte real de los valores propios es el signo de la $\text{tr}(\mathcal{J})$. Por lo tanto, el punto de equilibrio $(u_*, \frac{u_*+C}{Q})$ es estable si $\text{tr}(\mathcal{J}) < 0$, y es inestable si $\text{tr}(\mathcal{J}) > 0$. Las condiciones necesarias para que ocurra una bifurcación de Hopf son: $\text{tr}(\mathcal{J}) = 0$ y $\det(\mathcal{J}) > 0$. Resolviendo la ecuación $\text{tr}(\mathcal{J}) = 0$ para Q , obtenemos el valor $Q = Q_H$ donde hay una bifurcación de Hopf. En resumen tenemos el siguiente teorema.

Teorema 8. *Sea el sistema (2.1) tal que*

1. *En el caso 2(b) del teorema 7 donde $M < 0$, $AM + C/Q = 0$, $A - M - 1 < 0$ y $M - A - AM + \frac{1}{Q} \leq 0$. El sistema (2.1) tiene solo un punto de equilibrio positivo interior. Además, el punto de equilibrio $(u_*, \frac{u_*+C}{Q})$ es:*

(i) *un nodo estable si: $3u_*^2 + 2(A - M - 1)u_* + (M - A - AM + \frac{1}{Q}) > 0$ y*

$$Q > \frac{3u_*}{AS + (2A - 2M + 2AM + S)u_* + (M - A - 1)u_*^2};$$

(ii) *un nodo inestable si: $3u_*^2 + 2(A - M - 1)u_* + (M - A - AM + \frac{1}{Q}) > 0$ y*

$$Q < \frac{3u_*}{AS + (2A - 2M + 2AM + S)u_* + (M - A - 1)u_*^2};$$

(iii) *un centro lineal si: $3u_*^2 + 2(A - M - 1)u_* + (M - A - AM + \frac{1}{Q}) > 0$ y*

$$Q = \frac{3u_*}{AS + (2A - 2M + 2AM + S)u_* + (M - A - 1)u_*^2};$$

2. *En el caso 3(a) del teorema 7 donde $M < 0$, $AM + C/Q < 0$, $A - M - 1 < 0$ y $M - A - AM + \frac{1}{Q} < 0$. El sistema (2.1) tiene solo un punto de equilibrio positivo interior. Además, el punto de equilibrio $(u_*, \frac{u_*+C}{Q})$ es:*

(i) un nodo estable si: $3u_*^2 + 2(A - M - 1)w + (M - A - AM + \frac{1}{Q}) > 0$ y

$$Q > \frac{3(u_* + C)}{(S + M(u_* - 2) - u_*)u_* + A(S - (u_* - 2)u_* + M(2u_* - 3))};$$

(ii) un nodo inestable si $3u_*^2 + 2(A - M - 1)w + (M - A - AM + \frac{1}{Q}) > 0$ y

$$Q < \frac{3(u_* + C)}{(S + M(u_* - 2) - u_*)u_* + A(S - (u_* - 2)u_* + M(2u_* - 3))};$$

(iii) un centro lineal si $3u_*^2 + 2(A - M - 1)w + (M - A - AM + \frac{1}{Q}) > 0$ y

$$Q = \frac{3(u_* + C)}{(S + M(u_* - 2) - u_*)u_* + A(S - (u_* - 2)u_* + M(2u_* - 3))};$$

Demostración. De (2.5), tenemos que

$$P(u_*) = u_*^3 + (A - M - 1)u_*^2 + (M - A - AM + \frac{1}{Q})u_* + AM + \frac{C}{Q} = 0$$

Sea $J_{11} = A - M + AM + 2(1 - A + M)u_* - 3u_*^2$, entonces

$$\text{tr}(\mathcal{J}) = (u_* + C)(u_* J_{11} - S(u_* + A)),$$

$$\det(\mathcal{J}) = Su_*(u_* + A)(u_* + C)^2 \left(\frac{1}{Q} - J_{11} \right).$$

Los signos de la traza dependen del valor $u_* J_{11} - S(u_* + A)$ y los signos del

determinante dependen del valor de $\frac{1}{Q} - J_{11}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Q} - J_{11} &= \frac{1}{Q} - \left(A - M + AM + 2(1 - A + M)u_* - 3u_*^2 \right) \\
u_* \left(\frac{1}{Q} - J_{11} \right) &= \left(\frac{1}{Q} - A + M - AM \right) u_* - (1 - A + M)u_*^2 + u_*^3 \\
&\quad - (1 - A + M)u_*^2 + 2u_*^3 \\
&= - \left(AM + \frac{C}{Q} \right) - (1 - A + M)u_*^2 + u_*^3 + u_*^3 \\
&= - \left(AM + \frac{C}{Q} \right) - \left(AM + \frac{C}{Q} \right) - \left(\frac{1}{Q} - A + M - AM \right) u_* + u_*^3 \\
&= - 2 \left(AM + \frac{C}{Q} \right) - \left(\frac{1}{Q} - A + M - AM \right) u_* + u_*^3 \\
&= - 2 \left(AM + \frac{C}{Q} \right) - \left(\frac{1}{Q} - A + M - AM \right) u_* \\
&\quad - \left(AM + \frac{C}{Q} \right) - \left(\frac{1}{Q} - A + M - AM \right) u_* + (1 - A + M)u_*^2 \\
&= - 3 \left(AM + \frac{C}{Q} \right) - 2 \left(\frac{1}{Q} - A + M - AM \right) u_* + (1 - A + M)u_*^2.
\end{aligned}$$

Despejando $u_* J_{11}$ de la ecuación anterior, obtenemos

$$u_* J_{11} = 3 \left(AM + \frac{C}{Q} \right) + u_* \left((A - M - 1)u_* + 2 \left(\frac{1}{Q} - A + M - AM \right) + \frac{1}{Q} \right),$$

por lo que la traza, puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
\text{tr}(\mathcal{J}) &= (u_* + C) \left(3 \left(AM + \frac{C}{Q} \right) \right. \\
&\quad \left. + u_* \left((A - M - 1)u_* + 2 \left(\frac{1}{Q} - A + M - AM \right) + \frac{1}{Q} \right) - S(u_* + A), \right.
\end{aligned}$$

y el determinante puede expresarse como

$$\begin{aligned}
\det(\mathcal{J}) &= \\
&= Su_*(u_* + A)(u_* + C)^2 \left(\frac{1}{Q} - (A - M + AM + 2(1 - A + M)u_* - 3u_*^2) \right).
\end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación $\text{tr}(\mathcal{J}) = 0$ para Q , obtenemos el valor de Q_H en donde se anula la traza. Para el caso 2(b) del teorema 7, con $AMQ + \frac{C}{Q} = 0$, tenemos

$$Q_H = \frac{3u_*}{AS + (2A - 2M + 2AM + S)u_* + (M - A - 1)u_*^2}. \quad (2.9)$$

y para el caso 3(a) del teorema 7, con $AMQ + \frac{C}{Q} < 0$, tenemos

$$Q_H = \frac{3(u_* + C)}{A(M(2u_* - 3) + S - (u_* - 2)u_*) + u_*(M(u_* - 2) + S - u_*)}. \quad (2.10)$$

Si suponemos que $Q = Q_H$ con $\det(\mathcal{J}) > 0$, concluimos que la matriz $\mathcal{J}$ tiene un par de valores propios imaginarios puros conjugados, lo que implica que el punto de equilibrio $(u_*, \frac{u_* + C}{Q})$ es un centro. Cuando $Q > Q_H$, los valores propios de $\mathcal{J}$ tienen partes reales negativas, lo que implica que el punto de equilibrio es topológicamente un nodo estable. Por otro lado, si $Q < Q_H$, los valores propios de $\mathcal{J}$ tienen partes reales positivas, lo que implica que el punto de equilibrio es topológicamente un nodo inestable. Considerando las distintas posibilidades para los dos valores propios, obtenemos los resultados del teorema. $\square$

En diversos sistemas de ecuaciones diferenciales, es posible distinguir variables que evolucionan en distintas escalas de tiempo. Esta característica es especialmente evidente en modelos presa-depredador, donde las especies que ocupan diferentes niveles tróficos suelen presentar tasas de crecimiento significativamente distintas. Por ejemplo, en interacciones ecológicas como las de insectos y aves [41], o liebres y lince [54], se ha documentado empíricamente que la población de presas crece mucho más rápidamente que la de sus depredadores.

Esta separación natural de escalas de tiempo, motiva el estudio de modelos *lento-rápido*, en los cuales se introduce un parámetro que cuantifica la diferencia entre las velocidades de evolución de las variables. En el siguiente capítulo, desarrollaremos esta idea incorporando un parámetro que separa las escalas temporales de presa y depredador, lo que nos permitirá analizar la dinámica del sistema desde la perspectiva de la teoría de sistemas dinámicos lento-rápido.

Capítulo 3

Análisis del sistema en las variables lenta y rápida

3.1. Modelo lento-rápido

Basándose en la observación de que las especies que ocupan diferentes niveles tróficos presentan distintas tasas de crecimiento, varios investigadores han desarrollado modelos matemáticos de sistemas presa-depredador que incorporan esta diferencia en la escala de tiempo. Específicamente, se introduce un pequeño parámetro $0 < \varepsilon \ll 1$ que permite diferenciar las distintas velocidades de crecimiento de las especies involucradas. El parámetro ε se interpreta como la relación entre la tasa de muerte lineal del depredador y la tasa de crecimiento lineal de la presa [22]. La condición $0 < \varepsilon \ll 1$ introduce una separación natural de escalas de tiempo, es decir, durante una generación de depredadores pueden sucederse varias generaciones de presas. Esta diferencia de escalas justifica formular el modelo como un sistema lento-rápido, donde la dinámica de la presa corresponde a la escala rápida y la del depredador a la escala lenta. Así, la formulación adoptada sigue un planteamiento general de tipo lento-rápido, en el espíritu del modelo desarrollado por Zhu y Liu en [63].

En esta sección analizamos la dinámica de (2.1) bajo el supuesto de que la población de presas crece considerablemente más rápido que la de depredadores, es decir, $s \ll r$ en (1). Dado que la capacidad de carga de la población de presas K , suele tener un valor mayor que 1, entonces $S = \frac{s}{rK}$ es un parámetro de perturbación que es lo suficientemente pequeño. En consecuencia, haciendo $S = \varepsilon$ en (2.1), el sistema puede escribirse como un sistema lento-rápido [35] dado por la

ecuación diferencial ordinaria singularmente perturbada:

$$\begin{aligned}\varepsilon \frac{du}{dt} &= f(u, v) = u(u + C)((u + A)(1 - u)(u - M) - v), \\ \frac{dv}{dt} &= g(u, v) = v(u + A)(u + C - Qv),\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde u es la variable rápida, v es la variable lenta y t es el tiempo lento. Ahora hacemos un reescalamiento del tiempo, para definir el tiempo rápido $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$, y obtenemos una ε -familia de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= f(u, v) = u(u + C)((u + A)(1 - u)(u - M) - v), \\ \frac{dv}{d\tau} &= \varepsilon g(u, v) = \varepsilon v(u + A)(u + c - Qv),\end{aligned}\tag{3.2}$$

con condiciones iniciales $u(t) \geq 0$, $v(t) \geq 0$.

Para estudiar la dinámica completa del sistema (2.1), recurrimos a la teoría geométrica de perturbación singular que nos permite estudiar los límites de los sistemas (3.1) y (3.2) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Tomando $\varepsilon = 0$ en el sistema (3.1), encontramos el sistema algebraico diferencial

$$\begin{aligned}0 &= f(u, v) = u(u + C)((u + A)(1 - u)(u - M) - v), \\ \frac{dy}{dt} &= v(u + A)(u + C - Qv),\end{aligned}\tag{3.3}$$

obtenemos el *subsistema lento* correspondiente al sistema lento-rápido (3.1), y el flujo de (3.3) se llama flujo lento, ver la figura 3.1. La solución del sistema (3.3) está restringida al conjunto $\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid f(u, v) = 0\}$ que define la variedad crítica dada por

$$\mathcal{M}_0 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid f(u, v) = 0\}.$$

Esta variedad crítica consta de dos variedades diferentes

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0^0 &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid u = 0, v \geq 0\}, \\ \mathcal{M}_0^1 &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v = (u + A)(1 - u)(u - M), 0 < u < 1, v > 0\},\end{aligned}$$

tal que $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_0^0 \cup \mathcal{M}_0^1$ donde $\mathcal{M}_0^0$ es el eje v positivo y $\mathcal{M}_0^1$ es una porción de la gráfica de un polinomio cúbico, en el primer cuadrante, semejante a una parábola.

Tomando $\varepsilon = 0$ en el sistema (3.2), obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{du}{d\tau} &= f(u, v) = u(u + C)((u + a)(1 - u)(u - M) - v), \\ \frac{dv}{d\tau} &= 0,\end{aligned}\tag{3.4}$$

la *ecuación de capa* (o *subsistema rápido*) correspondiente al sistema lento-rápido (3.2). El flujo rápido consiste en una densidad constante de depredadores determinada por la condición inicial $v(0) = c$, dado por la ecuación diferencial

$$\frac{du}{d\tau} = u(u + C)((u + a)(1 - u)(u - M) - c), \quad (3.5)$$

con condición inicial $u(0) > 0$. Notemos que la dirección del flujo rápido depende de la elección de las condiciones iniciales $u(0)$, $v(0)$ y los valores de los parámetros.

La variedad crítica $\mathcal{M}_0^1$ se puede dividir en dos partes, una parte consta de la parte atractora del subsistema rápido y otra parte es de naturaleza repulsora, ver figura 3.1. La parte atractora y repulsora de la variedad están separadas por un punto de pliegue $P = (u_p, v_p)$ que se caracteriza por las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} f(u_p, v_p) &= 0, \quad g(u_p, v_p) \neq 0, \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u_p, v_p) &= 0, \quad \frac{\partial f}{\partial v}(u_p, v_p) \neq 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}(u_p, v_p) \neq 0. \end{aligned}$$

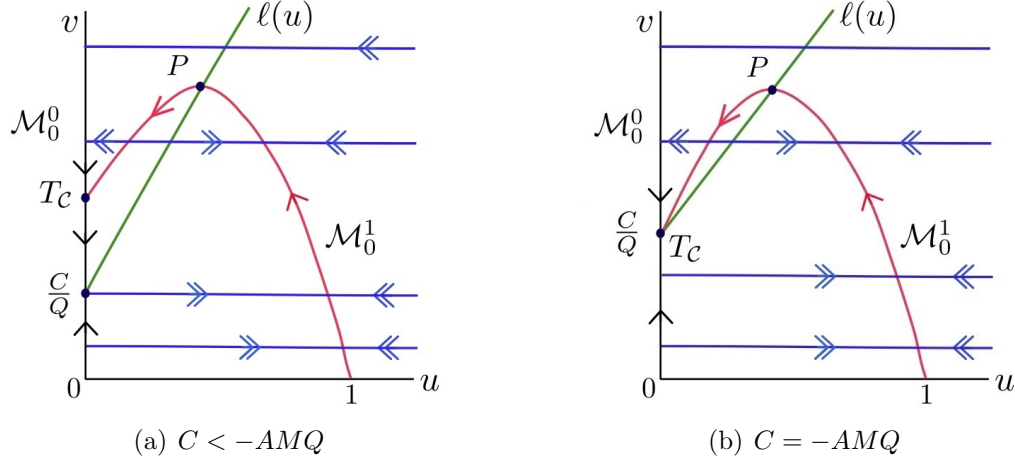


Figura 3.1: Dinámica del sistema lento-rápido (3.2) para (a) $C < -AMQ$ y (b) $C = -AMQ$, donde $\mathcal{M}_0^0$ y $\mathcal{M}_0^1$ son las subvariedades críticas. Se muestran el punto de plegado $P = (u_p, v_p)$, el punto transcrito $T_C = (0, -AM)$, la nuclina $\ell(u)$ y su punto de intersección $\frac{C}{Q}$ con el eje v , así como una representación esquemática del flujo lento en los diferentes componentes del punto crítico (curva roja) y el flujo rápido (líneas azules).

El punto de pliegue $P = (u_p, v_p)$ corresponde al punto máximo de la variedad crítica $\mathcal{M}_0^1$, donde u_p se obtiene al resolver la ecuación $h'(u) = 0$ para u , siendo

$h(u)$ la función definida en (2.4). Por lo tanto las coordenadas de P están dadas por

$$\begin{aligned} u_p &= \frac{1}{3}(1 - A + M + \beta), \\ v_p &= (u_f + A)(1 - u_f)(u_f - M) \\ &= \frac{1}{27}(1 - A - 2M + \beta)(2 + A - M - \beta)(1 + 2A + M + \beta), \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde $\beta = \sqrt{1 + A + A^2 - M + AM + M^2}$.

El punto de pliegue divide a la variedad crítica en dos subvariedades normalmente hiperbólicas: atrayente $\mathcal{M}_0^{1,a}$ y repelente $\mathcal{M}_0^{1,r}$ dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_0^{1,a} &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v = h(u), u_p < u \leq 1\}, \\ \mathcal{M}_0^{1,r} &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid v = h(u), 0 \leq u < u_p\}. \end{aligned}$$

El punto de intersección de la variedad crítica $\mathcal{M}_0^1$ con el eje vertical v , es el punto de bifurcación transcítica para el subsistema rápido $T_C = (0, -AM)$.

El teorema de Fenichel garantiza la existencia de una variedad localmente invariante $\mathcal{M}_\varepsilon^1$ difeomorfa a la variedad crítica $\mathcal{M}_0^1$, excepto en los puntos no hiperbólicos P y T_C . La variedad crítica $\mathcal{M}_0^1$ se puede escribir explícitamente como $v = h(u)$ y, la variedad invariante $\mathcal{M}_\varepsilon^1$ se puede escribir como una perturbación de $v = h(u)$ de la siguiente manera, con ε como parámetro de perturbación,

$$\mathcal{M}_\varepsilon^1 = \{(u, v) \mid v = h(u, \varepsilon)\},$$

donde la función $h(u, \varepsilon)$ es de clase $\mathcal{C}^k$ para algún $k > 0$.

La expansión formal de $h(u, \varepsilon)$ en series de potencias de ε está dada por

$$h(u, \varepsilon) = h_0(u) + \varepsilon h_1(u) + \varepsilon^2 h_2(u) + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j h_j(u). \quad (3.7)$$

Ya que $v = h(u, \varepsilon)$ de la condición de invariancia para variedades, tenemos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial h(u, \varepsilon)}{\partial u} \frac{du}{dt}.$$

Usando la expresión explícita de $\frac{du}{dt}$ y $\frac{dv}{dt}$ así como el sistema lento-rápido (2.1), tenemos

$$\varepsilon h(u, \varepsilon)(u+A)(u+C+Qh(u, \varepsilon)) = \frac{\partial h(u, \varepsilon)}{\partial u} u(u+C)((u+A)(1-u)(u-M)-h(u, \varepsilon)).$$

Sustituyendo la expansión (3.7), tenemos

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j h_j(u)(u+A) \left(u+C-Q \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j h_j(u) \right) = \\ u(u+C) \frac{d}{du} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j h_j(u) \left((u+A)(1-u)(u-M) - \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j h_j(u) \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Suponiendo que $u \neq 0$, $\dot{h}_0(u) \neq 0$ e igualando los términos independientes de ε en ambos lados de (3.8), obtenemos

$$h_0(u) = (u+A)(1-u)(u-M),$$

que es, como era de esperarse, la variedad crítica. Ahora igualamos los coeficientes lineales de ε de ambos lados de (3.8), y obtenemos

$$h_1(u) = \frac{h_0(u)(u+A)(u+C-Qh_0(u))}{-u(u+C)\dot{h}_0(u)}.$$

Llevando a cabo un proceso similar, igualando los coeficientes de ε^2 , obtenemos $h_2(u)$

$$h_2(u) = \frac{h_1(u) \left((u+A)(u+C-2Qh_0(u)) + u(u+C)\dot{h}_1(u) \right)}{-u(u+C)\dot{h}_0(u)}.$$

Por lo tanto la expansión de $h(u, \varepsilon)$ en series de potencias de ε hasta orden dos, está dada por

$$\begin{aligned} h(u, \varepsilon) = (u+A)(1-u)(u-M) + \varepsilon \frac{h_0(u)(u+A)(u+C-Qh_0(u))}{-u(u+C)\dot{h}_0(u)} \\ + \varepsilon^2 \frac{h_1(u) \left((u+A)(u+C-2Qh_0(u)) + u(u+C)\dot{h}_1(u) \right)}{-u(u+C)\dot{h}_0(u)}, \end{aligned}$$

de donde obtenemos que la reducción del sistema (2.1) es

$$\frac{du}{dt} = \frac{h(u, \varepsilon)(u+A)(u+C-Qh(u, \varepsilon))}{\dot{h}(u, \varepsilon)}, \quad (3.9)$$

Para variedades normalmente hiperbólicas, la teoría de Fenichel es bastante completa, es decir, la ecuación (3.9) describe el flujo sobre la variedad $\mathcal{M}_0^1$, sin embargo, en la vecindad de los puntos donde se pierde la hiperbolicidad normal,

por ejemplo, cerca de los puntos de bifurcación, puntos de pliegue o puntos de auto-intersección ¹, esta teoría no es adecuada.

En la figura 3.2 mostramos las aproximaciones de la variedad invariante para diferentes valores de ε . Estas aproximaciones tienen dos discontinuidades no removibles en la vecindad de los puntos no hiperbólicos P y T_C . La variedad crítica $\mathcal{M}_0^1$ es normalmente hiperbólica excepto en los puntos $P = (u_p, v_p)$ y $T_C = (0, -AM)$. Luego, cualquier trayectoria que comience cerca de la subvariedad atractora (repelente) $\mathcal{M}_0^{1,a}$, ($\mathcal{M}_0^{1,r}$) no puede cruzar el punto de pliegue P (punto transcrito T_C). Por lo tanto, el teorema de Fenichel no garantiza la existencia de una variedad invariante $\mathcal{M}_\varepsilon^1$ como una perturbación suave de la variedad lenta $\mathcal{M}_0^1$.

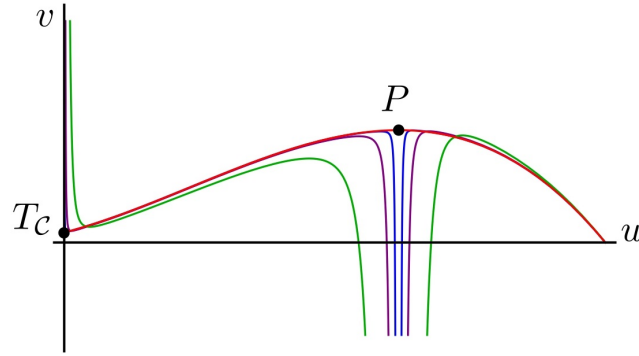


Figura 3.2: Aproximación de la variedad invariante perturbada para distintos valores de ε . Para $\varepsilon = 0$ (rojo), $\varepsilon = 0.001$ (azul), $\varepsilon = 0.01$ (morado) y $\varepsilon = 0.1$ (verde).

Para eliminar las singularidades en estos puntos, usaremos la técnica de explosión (blow-up). Primero estudiaremos la dinámica cerca del punto de pliegue $P = (u_p, v_p)$ y posteriormente en el capítulo 4 estudiaremos la dinámica en el punto de bifurcación transcrito T_C . Para el punto de pliegue utilizamos la transformación de explosión (blow-up) en el punto no hiperbólico de pliegue que extenderá el sistema sobre una 3-esfera en $\mathbb{R}^4$, denotada por $S^3 = \{x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| = 1\}$. Usando la técnica de explosión eliminamos la singularidad del sistema y determinamos la solución de canard que pasa por el punto. Para aplicar ésta técnica primero transformamos el sistema (2.1) a la forma normal.

¹Aunque nos referimos a $\mathcal{M}_0^1$ como variedad diferencial, estrictamente hablando, las soluciones de la ecuación $f(u, v) = 0$, pueden no ser localmente difeomórfas a un espacio euclidiano. Por ejemplo, pueden auto-intersecarse como en el caso de la singularidad transcrito. Sin embargo, hay regiones abiertas en donde $\mathcal{M}_0^1$ es de hecho una variedad diferencial. Entonces, por convención, podemos referirnos a $\mathcal{M}_0^1$ como una variedad diferencial.

3.2. Forma normal del sistema lento-rápido

Como ya mencionamos, la variedad crítica $\mathcal{M}_0^1$ se puede dividir en dos partes, una parte atractora del subsistema rápido y otra parte es de naturaleza repulsora. La parte atractora y repulsora de la variedad está separada por un punto de pliegue P . Cuando $Q = Q_H$, el punto de equilibrio de coexistencia E_* coincide con el punto de pliegue P , como consecuencia se cumplen las siguientes condiciones

$$\begin{aligned} f(u_p, v_p, Q_H) &= 0, & f_u(u_p, v_p, Q_H) &= 0, & f_v(u_p, v_p, Q_H) &\neq 0, \\ f_{uu}(u_p, v_p, Q_H) &\neq 0, & g(u_p, v_p, Q_H) &= 0, & g_u(u_p, v_p, Q_H) &\neq 0, \\ \text{y } g_Q(u_p, v_p, Q_H) &\neq 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Usando la transformación $dt_* = u(u + C)d\tau$ en (2.1), trasladamos el punto de pliegue al origen, $U = u - u_*$, $V = v - v_*$, $\lambda = Q_H - Q$; y junto con las condiciones (3.10) el sistema (2.1) se reduce a la forma

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt_*} &= -V + (1 - A + M - 3u_*)U^2 - U^3, \\ \frac{dV}{dt_*} &= \varepsilon \left(b_{00} + b_{10}U + b_{01}V + b_{20}U^2 + b_{11}UV + b_{02}V^2 + b_{21}U^2V + b_{12}UV^2 + b_{22}U^2V^2 \right), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} b_{00} &= -\frac{(A + u_*)v_*^2\lambda}{u_*(C + u_*)}, \\ b_{10} &= \frac{v_* \left(u_*^2 v_* (Q_H - \lambda) - A((C + u_*)^2 + (C + 2u_*)(\lambda - Q_H)v_*) \right)}{u_*^2(u_* + C)^2}, \\ b_{01} &= \frac{v_*(A + u_*)(2\lambda - Q_H)}{u_*(u_* + C)}, \\ b_{20} &= \frac{v_* \left(u_*^3 v_* (\lambda - Q_H) + A((C + u_*)^3 + v_*(\lambda - Q_H)(C^2 + 3Cu_* + 3u_*^2)) \right)}{u_*^3(u_* + C)^3}, \\ b_{11} &= \frac{2u_*^2 v_* (Q_H - \lambda) - A((C + u_*)^2 + 2v_*(\lambda - Q_H)(C + 2u_*))}{u_*^2(u_* + C)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{02} &= \frac{(u_* + A)(\lambda - Q_H)}{u_*(u_* + C)}, \\
b_{21} &= \frac{2u_*^3 v_*(\lambda - Q_H) + A((C + u_*)^3 + 2v_*(\lambda - Q_H)(C^2 + 3Cu_* + 3u_*^2))}{u_*^3(u_* + C)^3}, \\
b_{12} &= \frac{(Q_H - \lambda)(u_*^2 + A(C + 2u_*))}{u_*^2(u_* + C)^2}, \\
b_{22} &= \frac{(\lambda - Q_H)(u_*^3 + A(C^2 + 3Cu_* + 3u_*^2))}{u_*^3(u_* + C)^3}.
\end{aligned}$$

Sea $\beta_1 = \frac{v_*(Q_H v_*(A(C+2u_*)+u_*^2)-A(C+u_*)^2)}{u_*^2(C+u_*)^2}$ y aplicando la transformación:

$$U = \frac{\sqrt{\beta_1}}{1 - A + M - 3u_*} U_1, \quad V = \frac{\beta_1}{1 - A + M - 3u_*} V_1, \quad t_* = \frac{t_1}{\sqrt{\beta_1}},$$

aquí escribimos nuevamente U_1 como U , V_1 como V y t_1 como t . Luego el sistema se puede escribir en la forma normal

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dt} &= -Vh_1(U, V) + U^2h_2(U, V) + \varepsilon h_3(U, V), \\
\frac{dV}{dt} &= \varepsilon (Uh_4(U, V) - \lambda h_5(U, V) + Vh_6(U, V)),
\end{aligned} \tag{3.11}$$

donde

$$\begin{aligned}
h_1(U, V) &= 1, \\
h_2(U, V) &= 1 + \frac{\sqrt{\beta_1}}{(1 - A + M - 3u_*)^2} U, \\
h_3(U, V) &= 0, \\
h_4(U, V) &= 1 + \frac{v_*\beta_2}{\sqrt{\beta_1}(1 - A + M - 3u_*)} U, \\
h_5(U, V) &= 1 + \mathcal{O}(U, V), \\
h_6(U, V) &= -\frac{Q_H v_*(A + u_*)}{u_*(C + u_*)\sqrt{\beta_1}} + \mathcal{O}(U, V),
\end{aligned}$$

$$\text{con } \beta_2 = \frac{A(C+u_*)^3 - Q_H(u_*^3 + A(C^2 + 3Cu_* + 3u_*^2))v_*}{u_*^3(C+u_*)^3} \text{ y } \lambda = \frac{(A+u_*)(A-1-M+3u_*)v_*^2}{u_*(C+u_*)(\beta_1)^{3/2}}.$$

El sistema (3.11) es la forma normal del sistema lento-rápido (2.1) en un entorno del punto de equilibrio (u_*, v_*) . Aquí λ mide la perturbación de Q desde Q_H y se considera como parámetro de bifurcación del sistema (3.11). Además,

suponemos que el parámetro de bifurcación Q y el parámetro de escala de tiempo ε son independientes. Ahora ampliamos el sistema anterior a $\mathbb{R}^4$, para lo cual agregamos las ecuaciones

$$\frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad y \quad \frac{d\varepsilon}{dt} = 0,$$

para el sistema (3.11) y estudiamos la dinámica del sistema en las proximidades del $(0, 0, 0, 0)$.

3.3. Explosión del punto de pliegue

Cuando $Q = Q_H$, correspondiente al umbral de bifurcación de Hopf, el punto de equilibrio E_* del sistema (2.1), coincide con el punto de pliegue P . Esta coincidencia identifica a P como el punto *canard*.

Consideremos el espacio de explosión

$$S^3 = \{(\bar{U}, \bar{V}, \bar{\lambda}, \bar{\varepsilon}) \in \mathbb{R}^4 : \bar{U}^2 + \bar{V}^2 + \bar{\lambda}^2 + \bar{\varepsilon}^2 = 1\},$$

y un intervalo $I = [0, \mu]$ donde $\mu > 0$ es una pequeña constante. Definimos una variedad $\mathcal{M} := S^3 \times I$ y el mapeo extendido $\Phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^4$, donde

$$\Phi(\bar{U}, \bar{V}, \bar{\lambda}, \bar{\varepsilon}, \bar{\rho}) = (\bar{\rho} \bar{U}, \bar{\rho}^2 \bar{V}, \bar{\rho} \bar{\lambda}, \bar{\rho}^2 \bar{\varepsilon}) := (U, V, \lambda, \varepsilon). \quad (3.12)$$

Usando el mapeo anterior podemos escribir el sistema transformado de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{U}}{dt} &= \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{dU}{dt} - \bar{U} \frac{d\bar{\rho}}{dt} \right), \\ \frac{d\bar{V}}{dt} &= \frac{1}{\bar{\rho}^2} \left(\frac{dV}{dt} - 2\bar{\rho} \bar{V} \frac{d\bar{\rho}}{dt} \right) \\ \frac{d\bar{\lambda}}{dt} &= \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{d\lambda}{dt} - \bar{\lambda} \frac{d\bar{\rho}}{dt} \right), \\ \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} &= \frac{1}{\bar{\rho}^2} \left(\frac{d\varepsilon}{dt} - 2\bar{\rho} \bar{\varepsilon} \frac{d\bar{\rho}}{dt} \right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Para estudiar la dinámica del sistema transformado en y alrededor del hemisferio $S_{\varepsilon \geq 0}^3$, presentaremos las cartas con los mapeos de expansión de direcciones. A lo largo de cada dirección del eje de coordenadas definimos las cartas K_1, K_2 ,

K_3 y K_4 configurando $\bar{V} = 1$, $\bar{\varepsilon} = 1$, $\bar{U} = 1$, $\bar{\lambda} = 1$ respectivamente en (3.13). Las cartas K_1 y K_3 describen la dinámica en una vecindad del ecuador de S^3 y K_2 describe la dinámica en una vecindad del hemisferio positivo. Aquí nos enfocamos principalmente en la carta K_2 para demostrar la existencia de una solución periódica para $0 < \varepsilon \ll 1$. Al volver a escalar el tiempo con la transformación $\bar{t} := \bar{\rho}t$, desingularizamos el sistema (3.13) de modo que el factor $\bar{\rho}$ desaparece. La versión transformada del sistema (3.13) se puede escribir en la carta K_2 de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\frac{d\bar{U}}{d\bar{t}} &= -\bar{V}b_1 + \bar{U}^2b_2 + \bar{\rho}(a_1\bar{U} - a_2\bar{U}\bar{V} + a_3\bar{U}^3) + \mathcal{O}(\bar{\rho}(\bar{\lambda}, \bar{\rho})), \\ \frac{d\bar{V}}{d\bar{t}} &= \bar{U}b_3 - \bar{\lambda}b_4 + \bar{\rho}(a_4\bar{U}^2 + a_5\bar{V}) + \mathcal{O}(\bar{\rho}(\bar{\lambda}, \bar{\rho})), \\ \frac{d\bar{\lambda}}{d\bar{t}} &= 0, \\ \frac{d\bar{\varepsilon}}{d\bar{t}} &= 0,\end{aligned}\tag{3.14}$$

donde

$$\begin{aligned}b_1 &= 1, \quad b_2 = 1, \quad b_3 = 1, \quad b_4 = \frac{(A + u_*)(A - 1 - M + 3u_*)v_*^2}{u_*(C + u_*)(\beta_1)^{3/2}}, \\ a_1 &= 0, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = -\frac{\sqrt{\beta_1}}{(1 - A + M - 3u_*)^2}, \\ a_4 &= \frac{\sqrt{\beta_1}\left(A(u_* + C)^3 - Q_*(u_*^3 + A(C^2 + 3Cu_* + 3u_*^2))v_*\right)}{u_*(u_* + C)(-1 + A - M + 3u_*)(A(u_* + C)^2 - Q_*(u_*^2 + A(C + 2u_*))v_*)}, \\ a_5 &= -\frac{Q_*v_*(A + u_*)}{u_*(C + u_*)\sqrt{\beta_1}}.\end{aligned}\tag{3.15}$$

La bifurcación de Hopf del sistema (3.11) ocurre cuando $\lambda = 0$. Los valores propios de la matriz jacobiana en la bifurcación de Hopf son imaginarios puros y dependen de ε , y tienden a cero cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Además, en el sistema lento los valores propios están en función de $\frac{1}{\varepsilon}$. Entonces, tanto en el sistema lento como en el rápido, la bifurcación de Hopf es *singular* cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Para determinar la criticidad de la bifurcación de Hopf y la explosión de ca-

nard, definimos la constante

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= -\frac{\partial h_1}{\partial x}(0,0,0,0) + 3\frac{\partial h_2}{\partial x}(0,0,0,0) - 2\frac{\partial h_4}{\partial x}(0,0,0,0) - 2h_6(0,0,0,0) \\
&= -a_2 + 3a_3 - 2a_4 - 2a_5 \\
&= -3\frac{\sqrt{\beta_1}}{(1-A+M-3u_*)^2} \\
&\quad - 2\frac{\sqrt{\beta_1}\left(A(u_*+C)^3 - Q_H(u_*^3 + A(C^2 + 3Cu_* + 3u_*^2))v_*\right)}{u_*(u_*+C)(-1+A-M+3u_*)(A(u_*+C)^2 - Q_H(u_*^2 + A(C+2u_*))v_*)} \\
&\quad + 2\frac{Q_H v_*(A+u_*)}{u_*(C+u_*)\sqrt{\beta_1}}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

donde los coeficientes h_1 , h_2 , h_4 y h_6 están definidos en (3.11), y los coeficientes a_2 , a_3 , a_4 y a_5 se encuentran en (3.15).

Observación 4. *Es importante destacar que, en el marco de la teoría clásica de bifurcaciones, el coeficiente $\mathcal{A}$ coincide con el primer coeficiente de Lyapunov.*

Ya que determinar de forma explícita el valor de $\mathcal{A}$ en función de los parámetros del sistema resulta inviable analíticamente. Para ilustrar la criticidad de la bifurcación de Hopf a través del signo de $\mathcal{A}$, realizamos a continuación un ejemplo numérico considerando un conjunto específico de parámetros que satisfacen la condición $AM + \frac{C}{Q} = 0$:

$$A = 0.5, \quad C = 0.1052, \quad M = 0.1, \quad Q = 2.104012$$

donde el sistema experimenta una bifurcación de Hopf supercrítica en el punto $u = 0.53869979$, $v = 0.30603456$ con $\mathcal{A} = -1.76548 < 0$.

Para un segundo caso, en el que se cumple $AM + \frac{C}{Q} < 0$, consideramos los parámetros:

$$A = 0.5, \quad C = 0.05, \quad M = 0.1, \quad Q = 1.939069$$

donde también se observa una bifurcación de Hopf supercrítica en el punto en $u = 0.544603$, $v = 0.306643$ con $\mathcal{A} = -2.23129 < 0$.

Observación 5. *En la sección 3.6 determinaremos de manera intrínseca la criticidad de la bifurcación de Hopf, mediante un procedimiento novedoso que no requiere que el sistema esté en forma normal lenta-rápida. Este enfoque permite confirmar y respaldar los resultados obtenidos previamente.*

En lo que sigue vamos a calcular la curva de bifurcación de Hopf singular $\lambda_H(\sqrt{\varepsilon})$ y la curva canard máxima $\lambda_C(\sqrt{\varepsilon})$ para la forma normal lenta-rápida (3.11), para lo cual haremos uso de las fórmulas (3.15) y (3.16) en [34].

Teorema 9. *Sea $(U, V) = (0, 0)$ el punto de canard del sistema transformado (3.11) en $\lambda = 0$ tal que $(0, 0)$ es una singularidad plegada y $g(0, 0, 0) = 0$. Entonces para ε lo suficientemente pequeño existe una curva de bifurcación de Hopf singular $\lambda = \lambda_H(\sqrt{\varepsilon})$ tal que el punto de equilibrio P del sistema (3.11) es estable para $\lambda > \lambda_H(\sqrt{\varepsilon})$ y*

$$\lambda_H(\sqrt{\varepsilon}) = -\frac{(a_1 + a_5)}{2}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}}). \quad (3.17)$$

Demostración. En la carta K_2 , $\bar{\varepsilon} = 1$ por lo que la transformación de explosión como se define en (3.12) se reduce a

$$\bar{\rho} = \sqrt{\varepsilon}, \quad U = \sqrt{\varepsilon}\bar{U}, \quad V = \varepsilon\bar{V}, \quad \lambda = \sqrt{\varepsilon}\bar{\lambda}. \quad (3.18)$$

Usando la transformación (3.18) podemos escribir el sistema (3.14) eliminando las barras superiores como

$$\begin{aligned} U_t &= -V + U^2 + \sqrt{\varepsilon}\mathcal{G}_1(U, V) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}(\lambda, \sqrt{\varepsilon})), \\ V_t &= U - b_4\lambda + \sqrt{\varepsilon}\mathcal{G}_2(U, V) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}(\lambda, \sqrt{\varepsilon})), \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde

$$\mathcal{G}_1 = a_1U - a_2UV + a_3U^3, \quad \mathcal{G}_2 = a_4U^2 + a_5V. \quad (3.20)$$

Sea (U_e, V_e) el punto de equilibrio del sistema (3.19), $U_e = \lambda + \mathcal{O}(2)$ y $V_e = \mathcal{O}(2)$, donde $\mathcal{O}(2) := (\lambda^2, \lambda\sqrt{\varepsilon}, \lambda)$. Linealizando el sistema alrededor de este punto de equilibrio, tenemos la matriz jacobiana

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 2U_e + a_1\sqrt{\varepsilon} + \mathcal{O}(2) & -1 + \mathcal{O}(2) \\ 1 + \mathcal{O}(2) & a_5\sqrt{\varepsilon} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

En la bifurcación de Hopf tenemos la traza de $\mathcal{J}$ es igual a cero, lo que implica que

$$2\lambda + (a_1 + a_5)\sqrt{\varepsilon} + \mathcal{O}(2) = 0,$$

y aplicando el mapeo blow-down (desinfe) $\lambda_H = \lambda\sqrt{\varepsilon}$ obtenemos la curva de bifurcación de Hopf singular $\lambda_H(\sqrt{\varepsilon})$ para la forma normal lenta-rápida (3.2) como

$$\lambda_H(\sqrt{\varepsilon}) = -\frac{a_1 + a_5}{2}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}}). \quad (3.22)$$

□

La curva de bifurcación de Hopf singular para el sistema (3.2) con la condición $AM + \frac{C}{Q} = 0$ está dada por

$$Q_H(\sqrt{\varepsilon}) = \frac{3u_*}{AS + (2A - 2M + 2AM + S)u_* + (M - A - 1)u_*^2} + \frac{a_1 + a_5}{2}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}}). \quad (3.23)$$

y para la condición $AM + \frac{C}{Q} < 0$ está dada por

$$Q_H(\sqrt{\varepsilon}) = \frac{3(w + C)}{A(M(2w - 3) + S - (w - 2)w) + w(M(w - 2) + S - w)} + \frac{a_1 + a_5}{2}\varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{\frac{3}{2}}). \quad (3.24)$$

Teorema 10. Sea $(U, V) = (0, 0)$ el punto de canard de la forma normal lenta-rápida (3.11) en $\lambda = 0$ tal que $(0, 0)$ es una singularidad plegada y $g(0, 0, 0) = 0$. Entonces, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, existe una curva de canard máxima $\lambda = \lambda_C(\sqrt{\varepsilon})$ tal que el flujo lento en las subvariedades invariantes normalmente hiperbólicas $\mathcal{M}_\varepsilon^{1,a}$ se conecta con $\mathcal{M}_\varepsilon^{1,r}$ en el espacio de explosión. Y $\lambda_C(\sqrt{\varepsilon})$ está dada por

$$\lambda_C(\sqrt{\varepsilon}) = -\left(\frac{a_1 + a_5}{2} + \frac{\mathcal{A}}{8}\right)\varepsilon + \mathcal{O}\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right) \quad (3.25)$$

donde $\mathcal{A}$ fué dada en (3.16).

Demostración. Aquí probaremos la existencia de una curva de canard máxima y daremos una expresión analítica de la misma. Para esto probaremos primero la siguiente proposición. En la carta K_2 del espacio de explosión consideramos el sistema desingularizado (3.19) como

$$\begin{aligned} U_t &= -V + U^2 + \sqrt{\varepsilon}\mathcal{G}_1(U, V) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}(\lambda, \sqrt{\varepsilon})), \\ V_t &= U - b_4\lambda + \sqrt{\varepsilon}\mathcal{G}_2(U, V) + \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon}(\lambda, \sqrt{\varepsilon})), \\ \rho_t &= 0, \\ \lambda_t &= 0, \end{aligned} \quad (3.26)$$

donde $b_1, b_2, b_3, b_4, \mathcal{G}_1$ y $\mathcal{G}_2$ están dadas en (3.15) y (3.20). La dinámica del sistema en la esfera se obtiene haciendo $\rho = 0$ en (3.26) para diferentes valores de λ en la vecindad de 0. Luego tomando $\rho = 0$ y $\lambda = 0$, el sistema anterior es integrable y tenemos

$$\begin{aligned} U_t &= -V + U^2, \\ V_t &= U. \end{aligned} \quad (3.27)$$

La solución de este sistema ayuda a demostrar el teorema principal.

Proposición 4. La solución del sistema (3.27) está dada por $H(U, V) = 0$, donde

$$H(U, V) = e^{-2V} \left(\frac{U^2}{2} - \frac{1}{4} - \frac{V}{2} \right)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= -e^{-2V} \frac{\partial H}{\partial V}, \\ \frac{dV}{dt} &= e^{-2V} \frac{\partial H}{\partial U}. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Demostración. Podemos escribir el sistema (3.27) como

$$\frac{dV}{dU} = \frac{U}{U^2 - V},$$

o de forma equivalente, como la ecuación

$$UdU + (V - U^2)dV = 0,$$

para convertir esta ecuación en una ecuación exacta, multiplicamos ambos lados por el factor integrante e^{-2V} . Luego, integrando obtenemos

$$e^{-2V} \left(-U^2 + V + \frac{1}{2} \right) = c_0.$$

Multiplicando por $\frac{1}{2}$ obtenemos la solución del sistema (3.27) como

$$e^{-2V} \left(-\frac{U^2}{2} + \frac{1}{4} + \frac{V}{2} \right) = c,$$

donde $c = \frac{c_0}{2}$ es una constante. La solución para $c = 0$ es una parábola dada por

$$U^2 = \frac{1}{2} + V.$$

□

Para continuar con la demostración del teorema 10, expresamos la solución del sistema (3.27) en forma paramétrica

$$\eta(t) = \left(U(t), V(t) \right) = \left(t, t^2 - \frac{1}{2} \right), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{3.29}$$

Para $\varepsilon = 0$, las subvariedades atractora y repulsora de la variedad crítica $\mathcal{M}_0^1$ se intersectan a lo largo del ecuador del espacio de expansión S^3 . Según la teoría de Fenichel, para $\varepsilon > 0$ existen variedades invariantes lentas perturbadas, una de ellas atrayente atractoras ($\mathcal{M}_\varepsilon^{1,a}$) y repulsoras ($\mathcal{M}_\varepsilon^{1,r}$). A lo largo de la curva (3.29), las subvariedades invariantes atrayentes ($\mathcal{M}_\varepsilon^{1,a}$) y repelentes ($\mathcal{M}_\varepsilon^{1,r}$) en el espacio de expansión se cruzan y la trayectoria de solución que se encuentra en esa intersección se denomina *curva de canard máxima*. Utilizamos la función de Melnikov para calcular la distancia entre estas variedades invariantes, la cual está dada por

$$D_{\rho,\lambda} = d_\rho \rho + d_\lambda \lambda + \mathcal{O}(\rho^2), \quad (3.30)$$

donde

$$\begin{aligned} d_\rho &= \int_{-\infty}^{\infty} \nabla H(\eta(t))^T \mathcal{G}(\eta(t)) dt, \\ d_\lambda &= \int_{-\infty}^{\infty} \nabla H(\eta(t))^T \begin{pmatrix} 0 \\ -b_4 \end{pmatrix} dt, \end{aligned} \quad (3.31)$$

donde $\mathcal{G}$ y H se definen en (3.20) y (3.28) respectivamente. La distancia entre las subvariedades $\mathcal{M}_\varepsilon^{1,a}$ y $\mathcal{M}_\varepsilon^{1,r}$ está dada por la ecuación (3.30). Dado que la curva de canard máxima corresponde a la intersección de las variedades invariantes perturbadas, es preciso que se cumpla la condición $D_{\rho,\lambda} = 0$. Con el fin de verificar dicha condición, procedemos al cálculo explícito de las integrales de Melnikov d_ρ y d_λ , definidas en (3.29) y (3.31), respectivamente.

$$\begin{aligned} d_\rho &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[(a_1 U - a_2 UV + a_3 U^3) \frac{\partial H(\eta(t))}{\partial U} + (a_4 U^2 + a_5 V) \frac{\partial H(\eta(t))}{\partial V} \right] dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2V} [(a_1 U - a_2 UV + a_3 U^3) (-U) + (a_4 U^2 + a_5 V) (U^2 - v)] dt \\ &= e \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t^2} \left((a_2 - a_3) t^4 + \left(-a_1 - \frac{a_2}{2} + \frac{a_4}{2} + \frac{a_5}{2} \right) t^2 - \frac{a_5}{4} \right) dt. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Ahora, al sustituir $z = t^2$ y realizar varias integraciones por partes, se obtiene

$$d_\rho = \frac{e}{16} (-4a_1 + a_2 - 3a_3 + 2a_4 - 2a_5) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t^2} dt,$$

y

$$\begin{aligned}
d_\lambda &= - \int_{-\infty}^{\infty} b_4 \frac{\partial H}{\partial V} dt \\
&= b_4 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2V} (U^2 - v) dt \\
&= -\frac{b_4 e}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t^2} dt.
\end{aligned}$$

Como $d_\lambda \neq 0$, el teorema de la función implícita nos permite resolver explícitamente a partir de (3.30),

$$\begin{aligned}
\lambda(\rho) &= -\frac{d_\rho}{d_\lambda} \rho + \mathcal{O}(\rho^2) = \frac{1}{8} (-4a_1 + a_2 - 3a_3 + 2a_4 - 2a_5) \rho + \mathcal{O}(\rho^2) \\
&= \frac{1}{8} (-4a_1 - 4a_5 + a_2 - 3a_3 + 2a_4 + 2a_5) \rho + \mathcal{O}(\rho^2) \\
&= -\left(\frac{a_1 + a_5}{2} + \frac{\mathcal{A}}{8} \right) \rho + \mathcal{O}(\rho^2).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Ahora usando la función blow-down $\lambda_C = \lambda(\sqrt{\varepsilon})$ obtenemos la curva de canard máxima para la forma normal lenta-rápida (3.11).

$$\lambda_C(\sqrt{\varepsilon}) = -\left(\frac{a_1 + a_5}{2} + \frac{\mathcal{A}}{8} \right) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}). \tag{3.34}$$

□

La curva de canard máxima, a lo largo de la cual se genera el ciclo de canard con cabeza en el sistema (3.2) bajo la condición $AM + \frac{C}{Q} = 0$, está dada por

$$\begin{aligned}
Q_C(\sqrt{\varepsilon}) &= \frac{3u_*}{AS + (2A - 2M + 2AM + S)u_* + (M - A - 1)u_*^2} \\
&\quad + \left(\frac{a_1 + a_5}{2} + \frac{\mathcal{A}}{8} \right) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}).
\end{aligned} \tag{3.35}$$

y para la condición $AM + \frac{C}{Q} < 0$ está dada por

$$\begin{aligned}
Q_C(\sqrt{\varepsilon}) &= \frac{3(w + C)}{A(M(2w - 3) + S - (w - 2)w) + w(M(w - 2) + S - w)} \\
&\quad + \left(\frac{a_1 + a_5}{2} + \frac{\mathcal{A}}{8} \right) \varepsilon + \mathcal{O}(\varepsilon^{3/2}).
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Fijando los parámetros A, C, M, S y $\varepsilon > 0$, tenemos que $Q_C(\sqrt{\varepsilon})$ da el umbral para la existencia de ciclo canard con cabeza. En la figura 3.3 mostramos un diagrama de las curvas de umbral en el plano Q - ε , que lo dividen en cuatro regiones. Para un $\varepsilon > 0$, fijo, en la región I , cuando $Q > Q_H$, el punto de equilibrio de coexistencia es estable. A medida que disminuimos Q de la región I a la región II , después de cruzar el umbral de bifurcación de Hopf $Q = Q_H$ aparecen ciclos de canard de pequeña amplitud. En la región II , es decir, cuando $Q_C < Q < Q_H$, el sistema experimenta una transición del ciclo de canard sin cabeza al ciclo de canard con cabeza. El tamaño del ciclo de canard aumenta al disminuir Q y la forma del ciclo cambia a canard con cabeza en Q_C . El ciclo de canard con cabeza persiste en la región III , donde $Q_{ro} < Q < Q_C$. Al disminuir aún más Q , es decir, cuando $Q = Q_{ro}$, el punto de equilibrio inestable está rodeado por un atractor periódico estable llamado oscilación de relajación. Este atractor periódico consta de dos flujos concatenados lento (cerca de la variedad crítica) y rápido (casi horizontal y alejado de la variedad crítica). Podemos ver que para ε suficientemente pequeño, esta transición, del ciclo de canard pequeño a la oscilación de relajación a través del ciclo de canard con cabeza, tiene lugar dentro de un intervalo estrecho del parámetro Q , este fenómeno se conoce como *explosión de canard*. En la figura 3.10 mostramos un diagrama de bifurcación asociado a una explosión del canard.

3.4. Explosión de canard

En las secciones anteriores, hemos observado la dinámica periódica del sistema lento-rápido cerca del punto canard. El punto de equilibrio de coexistencia E_* es estable para $Q > Q_H$ y las trayectorias convergen a este punto para cualquier condición inicial ya que es el atractor global; ver la figura 3.4. Cuando $Q = Q_H$, el punto E_* coincide con el punto de pliegue P , el punto de equilibrio de coexistencia pierde estabilidad a través de la bifurcación de Hopf singular. Podemos ver que para $Q < Q_H$, se observa un ciclo límite estable de pequeña amplitud; ver la figura 3.5. Debido a la disminución del parámetro Q , el ciclo límite estable crece en tamaño esta solución periódica se conoce como ciclo canard sin cabeza, esto marca el inicio de la explosión de canard. Al reducir aún más Q , se obtiene un *canard máximo* sin cabeza en $Q = Q_C$, umbral de canard; ver la figura 3.6. Cuando $Q < Q_C$, obtenemos otro ciclo de canard conocido como canard con cabeza, este ciclo es especial en el sentido de que desde la vecindad del punto de pliegue sigue la variedad lenta repulsora $\mathcal{M}_0^{1,r}$ durante un tiempo de $\mathcal{O}(1)$, antes de saltar a otra variedad atractora (ver la figura 3.7). Al disminuir Q , el sistema se establece en una gran solución periódica estable llamada *oscilación de relajación*, que marca el final

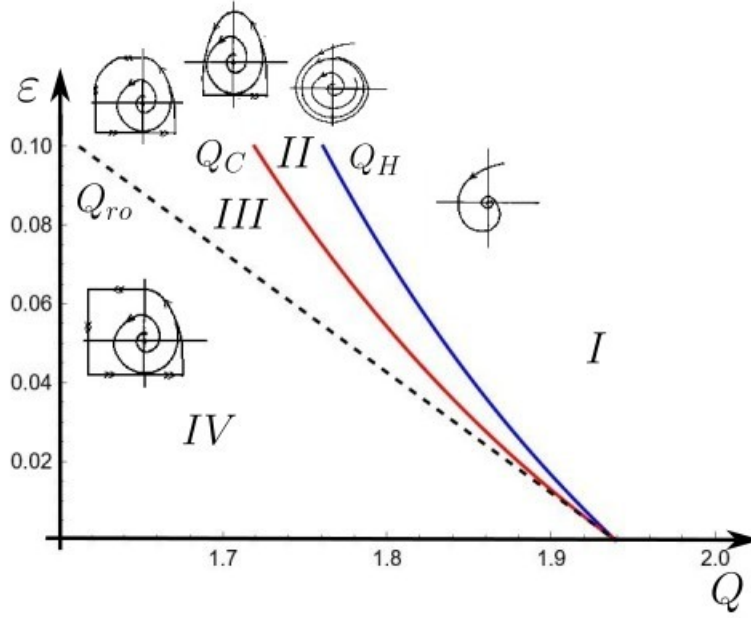


Figura 3.3: Diagrama que muestra la curva de bifurcación de Hopf singular Q_H (en azul), la curva del canard máximo Q_C (en rojo) y la correspondiente al ciclo de oscilación de relajación Q_{ro} (en negro punteado).

de la explosión de canard (ver la figura 3.8). Esta órbita se caracteriza porque el flujo lento al llegar a la proximidad del punto de pliegue salta directamente a otra variedad lenta atrayente, como se estudiará en la sección 3.5. Esta oscilación de relajación eventualmente desaparece cuando $Q = Q_C^*$, esto es, cuando $E_* \in \mathcal{M}_0^0$, pues este punto se vuelve un atractor global (ver la figura 3.9). La fuerza del efecto Allee tiene una influencia significativa en la amplitud de la coexistencia oscilatoria estable de ambas especies. El cambio en la amplitud del ciclo límite correspondiente a la explosión del canard se muestra en la figura 3.10.

Observación 6. Obsérvese en las figuras 3.7 y 3.8 que, en el caso degenerado en que se cumple la condición $AM + \frac{C}{Q} = 0$, los ciclos cercanos al punto T_C tienen un pico en parte cercana al eje v . La dinámica en torno a este punto será analizada con mayor detalle en la sección 4.1.

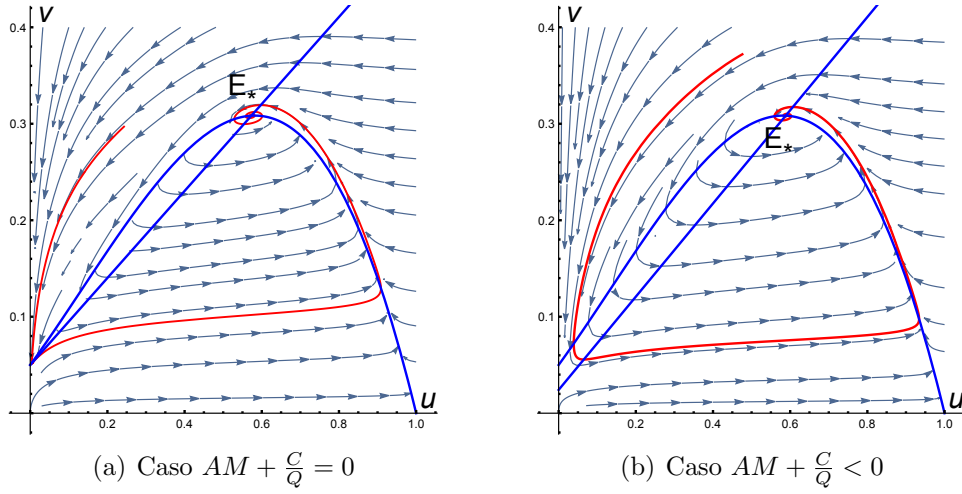


Figura 3.4: Para $Q > Q_H$ el flujo converge al punto estable E_* .

3.5. Función de entrada-salida

En esta sección demostraremos la existencia de una oscilación de relajación, para esto usaremos la función de entrada-salida. Es importante señalar que el uso de esta función es válido únicamente para el caso genérico $AM + \frac{C}{Q} < 0$. El caso crítico $AM + \frac{C}{Q} = 0$ se analizará por separado en la sección 4.1. El ciclo canard y la oscilación de relajación pasan por la vecindad de P para $\varepsilon \ll 1$. Ahora demostramos la existencia de una trayectoria que salta del punto de pliegue a otro punto de la variedad lenta $\mathcal{M}_0^0$ a través de un flujo horizontal rápido y continuando allí por un tiempo constante la trayectoria sale de $\mathcal{M}_0^0$ en un cierto punto. Esto está determinado por la función de entrada-salida y podemos encontrar las coordenadas del punto de salida de la variedad lenta $\mathcal{M}_0^0$.

Con el fin de alcanzar nuestro objetivo, reescribimos el sistema (3.2) como el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= uf_1(u, v) = u \left((u + C)((u + A)(1 - u)(u - M) - v) \right), \\ \frac{dv}{d\tau} &= \varepsilon vg_1(u, v) = \varepsilon v (S(u + A)(u + C - Qv)). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Notemos que (3.37) es un sistema de tipo Kolmogorov (véase [17]). Al evaluar las funciones del lado derecho de (3.37) en $u = 0$, obtenemos: $f_1(0, v) = C(-AM - v)$, $g_1(0, v) = SA(C - Qv)$, lo que implica que $f_1(0, v) < 0$ si $v > -AM$, $f_1(0, v) >$

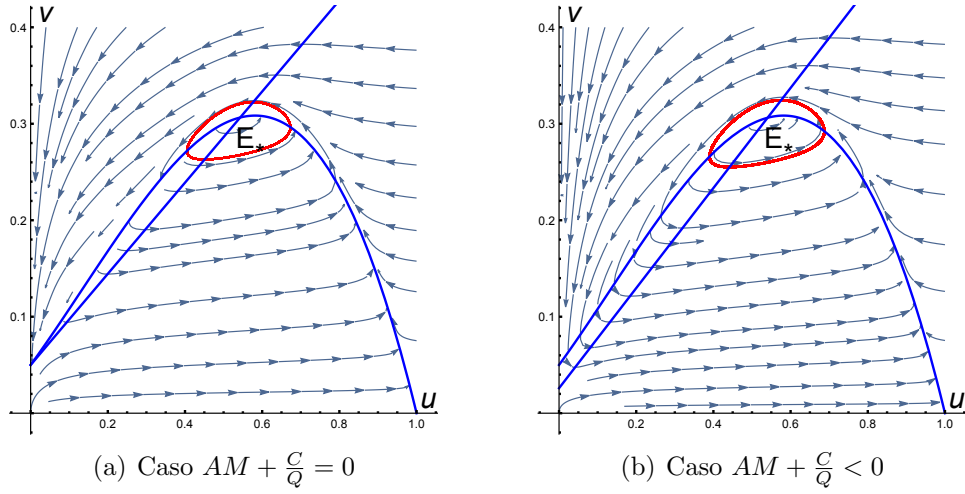


Figura 3.5: En el valor crítico $Q = Q_H$, el punto de equilibrio de coexistencia E_* coincide con el punto de pliegue P y pierde estabilidad a través de una bifurcación de Hopf singular. Para $Q < Q_H$, se genera un ciclo límite estable de pequeña amplitud en torno a E_* .

0 si $v < -AM$. Observemos que $T_C(0, -AM)$ en el eje vertical es el punto de bifurcación transcrito y podemos dividir la variedad lenta $\mathcal{M}_0^0$ en dos partes

$$\mathcal{M}_0^{0,a} = \{(u, v) : u = 0, v > -AM\},$$

y

$$\mathcal{M}_0^{0,r} = \{(u, v) : u = 0, v < -AM\}.$$

Es claro que $\mathcal{M}_0^{0,a}$ es atractora y $\mathcal{M}_0^{0,r}$ es repulsora del flujo rápido ver figura 3.1.

Fijemos $\varepsilon > 0$ y tomamos u_p , como el punto máximo de la variedad crítica $\mathcal{M}_0^1$ cuyas coordenadas fueron dadas en (3.6)

$$u_f = \frac{1}{3}(1 - A + M + \beta),$$

donde $\beta = \sqrt{1 + A + A^2 - M + AM + M^2}$. Luego, de la expresión de $\mathcal{M}_0^1$ tenemos

$$v_f = (u_f + A)(1 - u_f)(u_f - M). \quad (3.38)$$

Ahora consideramos una trayectoria que parte de un punto, digamos (u_1, v_1) , donde $u_1 < u_p$ y $v_1 = v_p$. La trayectoria se atrae hacia la variedad atractora $\mathcal{M}_0^{0,a}$ y comienza a moverse hacia abajo manteniendo la proximidad a $\mathcal{M}_0^{0,a}$. Se esperaba que la trayectoria dejaría el eje vertical en el punto de bifurcación transcrito

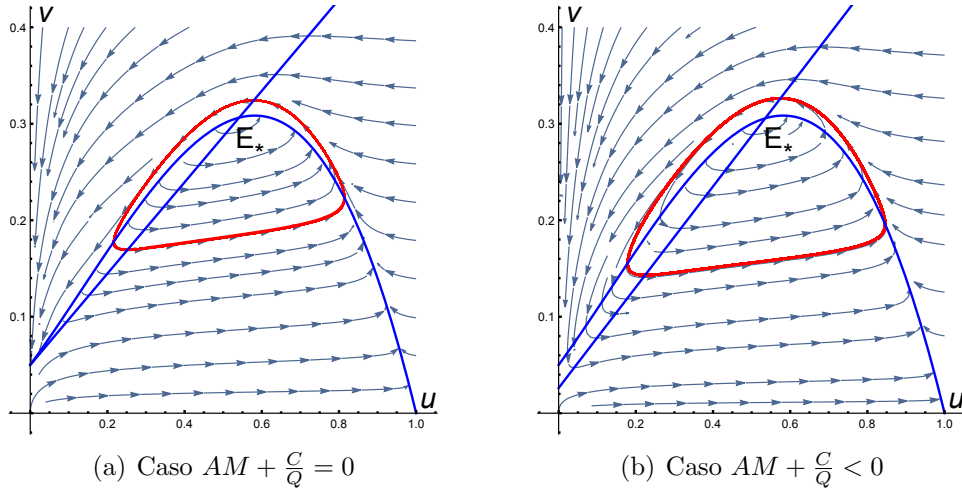


Figura 3.6: El pequeño ciclo límite estable se amplía progresivamente, dando lugar a una solución periódica conocida como *ciclo canard sin cabeza*, la cual continúa creciendo hasta alcanzar un tamaño *máximo* cuando $Q = Q_C$.

T_C donde pierde su estabilidad [44]. La trayectoria cruza el punto T_C y continúa moviéndose verticalmente hacia abajo permaneciendo cerca de la parte repelente $\mathcal{M}_0^{0,r}$, por un cierto tiempo, hasta que se alcanza una población mínima de depredadores $p(v_1)$ tal que $0 < p(v_1) < -AM$. Después de dejar la variedad lenta cerca del punto $p(v_1)$, la trayectoria comienza a moverse a lo largo de un segmento casi horizontal y es atraída hacia la variedad atractora lenta $\mathcal{M}_1^a$. Este punto de salida está determinado por una función implícita $p(v_1)$, llamada función de entrada-salida, que se define implícitamente como

$$\int_{p(v_1)}^{v_1} \frac{f_1(0, v)}{vg_1(0, v)} dv = 0.$$

Para simplificar, definimos $v_0 := p(v_1)$, luego tenemos

$$\begin{aligned} \int_{v_0}^{v_1} \frac{C(-AM - v)}{v(SA(C - Qv))} dv = 0 \quad \implies \\ \frac{(AMQ + C) \ln \left(\frac{C - Qv_1}{C - Qv_0} \right) + AMQ \ln \left(\frac{v_0}{v_1} \right)}{AQ S} = 0 \end{aligned} \quad (3.39)$$

Sustituyendo $v_1 = v_p$ de (3.38) en la ecuación (3.39), obtenemos una ecuación trascendental en v_0 que se puede resolver numéricamente para obtener el punto de salida.

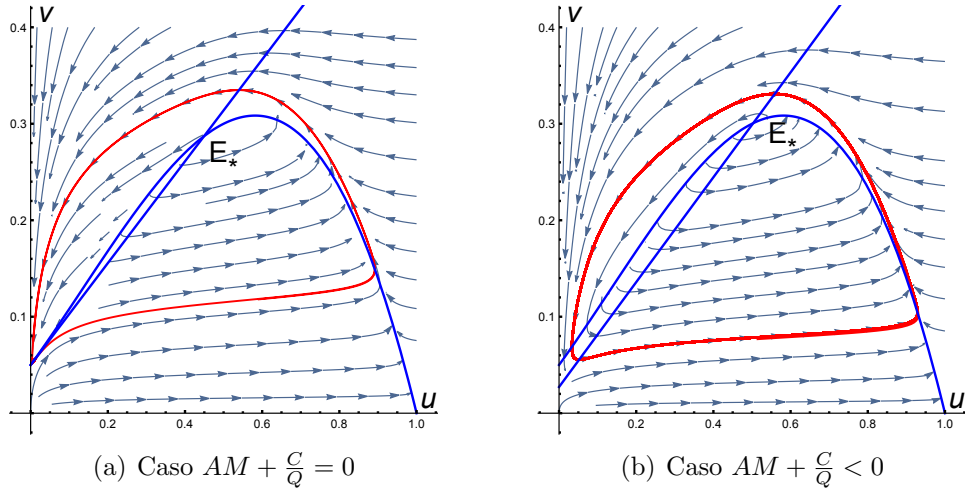


Figura 3.7: Para $Q < Q_C$, se obtiene otro ciclo canard, conocido como *canard con cabeza*. Este ciclo incrementa su amplitud a medida que se reduce el valor de Q , y el sistema finalmente se establece en una solución periódica de gran amplitud, denominada *oscilación de relajación*, cuando $Q = Q_{ro}$.

Teorema 11. Para el sistema (3.37), existe un único punto $v_0 := p(v_1) \in (\frac{C}{Q}, -AM)$ tal que

$$\int_{p(v_1)}^{v_1} \frac{f_1(0, v)}{vg_1(0, v)} dv = 0.$$

Demostración. Sea $F(v_0) = \int_{p(v_1)}^{v_1} \frac{f_1(0, v)}{vg_1(0, v)} dv$, integrando y aplicando propiedades de los logaritmos, tenemos

$$F(v_0) = \frac{(AMQ + C) \ln \left(\frac{C - Qv_1}{C - Qv_0} \right) + AMQ \ln \left(\frac{v_0}{v_1} \right)}{AQS},$$

como $v_0 \in (\frac{C}{Q}, -AM)$, calculamos el límite lateral

$$\lim_{v_0 \rightarrow \frac{C}{Q}^+} F(v_0) = -\infty,$$

ya que $AMQ + C < 0$. Entonces $\frac{C}{Q}$ es una asíntota de $F(v_0)$ y para valores cercanos a $\frac{C}{Q}$, $F(v_0) < 0$.

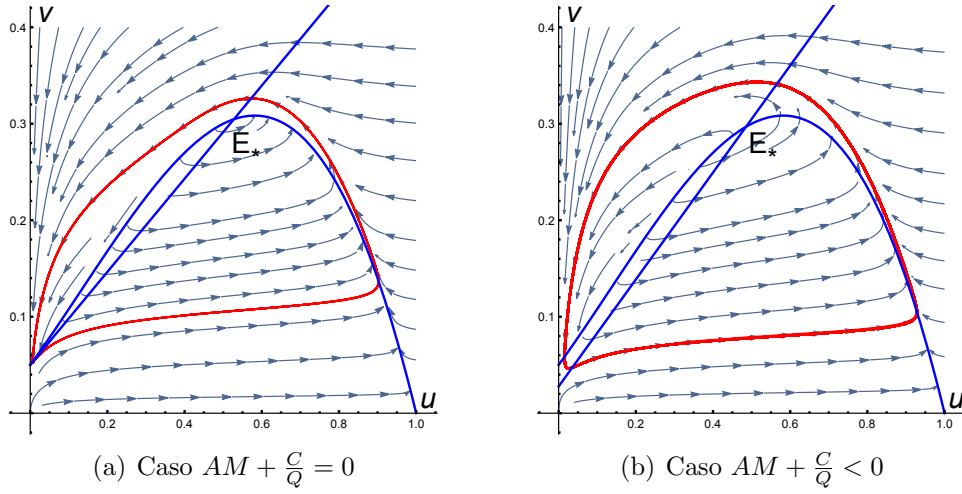


Figura 3.8: Para $Q < Q_{ro}$, el ciclo de relajación persiste hasta que Q alcanza el valor crítico $Q = Q_C^*$, a partir del cual el punto $E_* = T_C$ adquiere estabilidad.

Por otra parte

$$F(-AM) = \frac{(AMQ + C) \ln \left(\frac{C - Qv_1}{C + AMQ} \right) + AMQ \ln \left(-\frac{AM}{v_1} \right)}{AQS},$$

$-AM < v_1$, implica que $0 < -\frac{AM}{v_1} < 1$ y $0 < \frac{C - Qv_1}{AMQ + C} < 1$, por lo que los logaritmos son negativos. Además $AMQ + C < 0$ y $AMQ < 0$, por lo que $F(-AM) > 0$.

Por otra parte, si $v_0 \in (\frac{C}{Q}, -AM)$, como $v_0 > 0$, $CQ > 0$, $AM + v_0 < 0$ y $C - Qv_0 < 0$, entonces

$$\frac{dF(v_0)}{dv_0} = \frac{CQ(AM + v_0)}{v_0(C - Qv_0)} > 0,$$

es decir, $F(v_0)$ es creciente en $(\frac{C}{Q}, -AM)$.

Como la función $F(v_0)$ es continua y tiene un cambio de signo en $(\frac{C}{Q}, -AM)$, por el teorema de Bolzano, la función $F(v_0)$ tiene al menos un cero en dicho intervalo. Más aún, ya que la función es creciente, por el teorema de Rolle, el cero es único. $\square$

Teorema 12. Sea P el punto de pliegue en la variedad crítica $\mathcal{M}_0^1$ donde el flujo lento en la variedad atractora $\mathcal{M}_0^{1,a}$ viene dado por (3.9). Suponga también

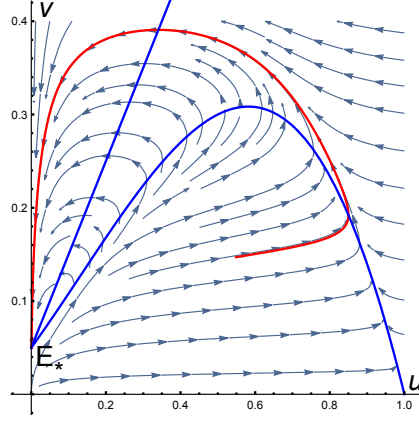


Figura 3.9: Cuando $E_* = T_C$, se cumple que $\frac{C}{Q} = -AM$, lo que implica que únicamente se verifica la condición $AM + \frac{C}{Q} = 0$. En este caso, la oscilación de relajación desaparece, ya que el punto E_* se convierte en el atractor global del sistema.

que el punto de equilibrio de coexistencia se encuentra en la subvariedad crítica normalmente hiperbólica repulsora bajo la restricción paramétrica,

$$u_* < u_p,$$

y sea E una pequeña vecindad de una trayectoria singular γ_0 que consta de trayectorias alternas lentas y rápidas. Entonces, para ε suficientemente pequeño existe un único ciclo límite atractor $\gamma_\varepsilon \subset E$ tal que $\gamma_\varepsilon \rightarrow \gamma_0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Demostración. Aquí, demostramos la existencia de un ciclo límite atractor único llamado oscilación de relajación. Para estudiar la dinámica del sistema (3.37), definimos dos secciones del flujo como

$$\begin{aligned} \Delta^{in} &= \{(u_+, v) : u_+ \ll u_f, v \in (v_1 - \delta, v_1 + \delta)\}, \\ \Delta^{out} &= \{(u_+, v) : u_+ \ll u_f, v \in (v_1 - \delta^2, v_1 + \delta^2)\}, \end{aligned}$$

donde δ es un número positivo suficientemente pequeño. Definamos un mapeo de retorno $\Pi : \Delta^{in} \rightarrow \Delta^{in}$ que es una composición de dos mapeos

$$\Phi : \Delta^{in} \rightarrow \Delta^{out}, \quad \Psi : \Delta^{out} \rightarrow \Delta^{in},$$

tal que $\Pi = \Psi \circ \Phi$. Fijamos $\varepsilon > 0$ y tomamos un punto (u_+, v_+) de la sección Δ^{in} . Ahora consideramos una trayectoria del sistema (3.37) partiendo del punto inicial (u_+, v_+) . Del análisis de la función de entrada y salida, podemos decir que esta trayectoria será atraída por $\mathcal{M}_0^{0,a}$ y dejará a $\mathcal{M}_0^{0,r}$ en el punto $(0, p(v_+))$, donde

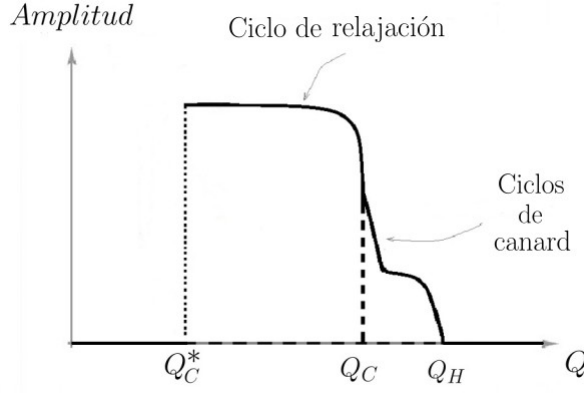


Figura 3.10: Diagrama de bifurcación asociado a una explosión de canard. Este diagrama ilustra la amplitud y estabilidad de los ciclos límite para un valor fijo de $0 < \varepsilon \ll 1$. Se observa una bifurcación de Hopf supercrítica ($\mathcal{A} < 0$) en $Q = Q_H$, así como un canard máximo en $Q = Q_C$. Además, el ciclo de relajación desaparece eventualmente en $Q = Q_C^*$.

$p(v_+)$ es la función de entrada y salida. Luego la trayectoria salta a la sección Δ^{out} en el punto $(u_+, p(v_+))$. Por lo tanto, el mapeo Φ se define con la ayuda de la función de entrada-salida como $\Phi(u_+, v_+) = (u_+, p(v_+))$.

Ahora para estudiar el mapeo Ψ consideramos dos trayectorias $\gamma_\varepsilon^1, \gamma_\varepsilon^2$ partiendo de la sección Δ^{out} . Estas trayectorias son atraídas hacia $\mathcal{M}_\varepsilon^{1,a}$ donde el flujo lento viene dado por $\frac{du}{d\tau} = \frac{g(u, h(u, \varepsilon))}{\dot{h}(u, \varepsilon)}$.

Estas siguen la variedad lenta perturbada hasta la vecindad del punto de pliegue donde se contraen exponencialmente entre sí [58] y saltan a Δ^{in} . Aplicando el teorema 2.1 de [33], tenemos que la aplicación Π es una contracción. Usando el teorema de mapeo de contracción, concluimos que Π tiene un punto fijo único que da lugar a un ciclo de oscilación de relajación único γ_ε . Además de la teoría de Fenichel, inferimos que γ_ε converge a γ_0 cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. $\square$

Cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, todas las trayectorias convergen asintóticamente a este ciclo límite estable que consiste en transiciones alternadas lentas y rápidas de densidades de presas y depredadores. Este ciclo se puede interpretar de la siguiente manera. Cuando la población de depredadores alcanza una alta densidad, hay una rápida disminución en la población de presas debido al consumo excesivo por parte del depredador especialista y la presa alcanza un nivel considerablemente bajo. Como consecuencia, la población de depredadores disminuye lentamente

hasta que alcanza un umbral de densidad bajo en el que la población de presas comienza a crecer nuevamente. En consecuencia, la presa se regenera en muy poco tiempo mientras que la densidad de depredadores permanece más o menos fija. A medida que la densidad de presas se acerca a su capacidad de carga, la población de depredadores crece lentamente debido a la abundancia de recursos. Finalmente, cuando la densidad de depredadores alcanza su nivel máximo, el ciclo lento-rápido se completa y esta dinámica continúa con el tiempo. Ver figure 3.11.

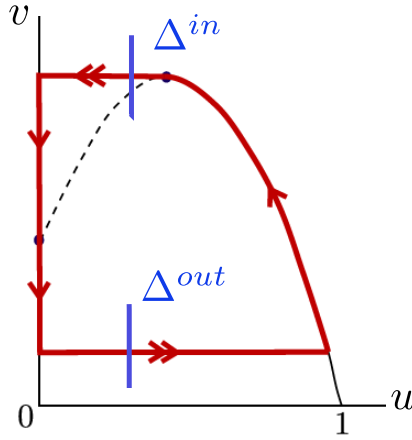


Figura 3.11: Secciones del flujo: Δ^{in} y Δ^{out} .

3.6. Determinación intrínseca de la criticidad de la bifurcación de Hopf

En la secciones 3.2 y 3.3 calculamos la criticidad de la bifurcación de Hopf llevando el sistema (3.2) a la forma normal (3.11), calculando la curva de bifurcación de Hopf $\lambda_H(\sqrt{\varepsilon})$ de manera explícita y obteniendo la constante $\mathcal{A}$ para este fin. En esta sección usaremos un método novedoso para calcular la criticidad de la bifurcación de Hopf, sin llevar el sistema (3.2) a la forma normal. La intención de calcular la criticidad de Hopf por partida doble no es redundar, sino más bien presentar las dos alternativas con propósito didáctico.

Utilizando las propiedades inherentes de la noción de punto de Hopf lento-rápido, De Maesschalck et al. [43] demostraron que la criticidad de una bifurcación de Hopf en un sistema lento-rápido se puede determinar sin la necesidad de tener o cambiar el sistema a la forma normal, como lo hicimos en la secciones 3.2 y 3.3. Ellos introdujeron una fórmula sencilla para verificar de manera intrínseca si

existe algún punto de contacto singular. Esto es muy útil porque la curva crítica no requiere parametrización. En este trabajo se analiza el caso en el que el primer coeficiente de Lyapunov es distinto de cero.

Como ya mencionamos, la variedad crítica $\mathcal{M}_0^1$ se puede dividir en dos partes, una parte atractora y otra parte repulsora respecto al subsistema rápido. La parte atractora y repulsora de la variedad está separada por un punto de pliegue P . En esta sección determinamos de manera intrínseca la criticidad de la bifurcación de Hopf lenta-rápida del sistema (2.1). Si el punto de pliegue P coincide con el punto de equilibrio de coexistencia $Q = Q_H$ como consecuencia se cumplen las condiciones (3.10)

$$\begin{aligned} f(u_p, v_p, Q_H) &= 0, & f_u(u_p, v_p, Q_H) &= 0, & f_v(u_p, v_p, Q_H) &\neq 0, \\ f_{uu}(u_p, v_p, Q_H) &\neq 0, & g(u_p, v_p, Q_H) &= 0, & g_u(u_p, v_p, Q_H) &\neq 0, \\ \text{y } g_Q(u_p, v_p, Q_H) &\neq 0. \end{aligned}$$

Consideremos el sistema (3.2)

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= u(u + C)((u + A)(1 - u)(u - M) - v), \\ \frac{dv}{d\tau} &= \varepsilon v(u + A)(u + C - Qv). \end{aligned}$$

donde identificamos

$$\begin{aligned} F(u, v) &= u(u + C)((u + A)(1 - u)(u - M) - v), \\ G(u, v) &= v(u + A)(u + C - Qv). \end{aligned}$$

Ahora definimos $Z = \frac{\partial}{\partial U}$ y calculamos

$$\begin{aligned} ZF(U, V) &= u(C + u)(A(1 + M - 2u) + (2 - 3u)u + M(2u - 1)) \\ &\quad + u((M - u)(u - 1)(A + u) - v) + (C + u)((M - u)(u - 1)(A + u) - v) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ZZF(U, V) &= 2(-3Mu + 6u^2 + 6Mu^2 - 10u^3 + C(-M + 3u + 3Mu - 6u^2) \\ &\quad + A(-M + C(1 + m - 3u) + 3u + 3Mu - 6u^2) - v) \end{aligned}$$

$$ZZZF(U, V) = 6(-M + C(1 + M - 4u) + A(1 - C + M - 4u) + 4u + 4Mu - 10u^2)$$

$$\Omega(G, Z) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ G(u, v) & 0 \end{vmatrix} = -v(u + A)(u + C - Qv),$$

$$\begin{aligned}
\Omega(\nabla F, \nabla ZF) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial U} & \frac{\partial ZF}{\partial U} \\ \frac{\partial F}{\partial V} & \frac{\partial ZF}{\partial V} \end{vmatrix} \\
&= A(C^2M + 2CMu + (2M + C(1 - 3C + M))u^2 - 8Cu^3 - 4u^4) \\
&\quad + C^2((3 + 3M - 8u)u^2 + v) + 2u^2((2 + 2M - 5u)u^2 + v) \\
&\quad + Cu(-u(M - 8(1 + M)u + 19u^2) + 2v),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(U, V) &= \Omega(Q, Z) \Omega(\nabla F, \nabla ZF) \\
&= - \left((A + u)v(c + u - Qv) (A(c^2M + 2CMu \right. \\
&\quad + (2M + C(1 - 3C + M))u^2 - 8Cu^3 - 4u^4) + C^2((3 + 3M - 8u)u^2 + v) \\
&\quad \left. + 2u^2((2 + 2M - 5u)u^2 + v) + Cu(-u(M - 8(1 + M)u + 19u^2) + 2v) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(U, V) &= \frac{ZZZF(U, V)}{[ZZF(U, V)]^2} \\
&= \left[3(-M + C(1 + M - 4u) + A(1 - C + M - 4u) + 4u + 4Mu - 10u^2) \right] / \\
&\quad \left[2(-3Mu + 6u^2 + 6Mu^2 - 10u^3 + C(-M + 3u + 3Mu - 6u^2) \right. \\
&\quad \left. + A(-M + C(1 + M - 3u) + 3u + 3Mu - 6u^2) - v)^2 \right].
\end{aligned}$$

Sea $\mathcal{V} = a_1 \frac{\partial}{\partial u} + a_2 \frac{\partial}{\partial v}$ donde a_1 y a_2 son algunas funciones. Luego encontramos a_1 y a_2 resolviendo el sistema de ecuaciones $\mathcal{V}(F) = 0$ y $\mathcal{V}(ZF) = 1$. Obtenemos

$$\mathcal{V} = \frac{\frac{-\partial F}{\partial V}}{\Omega(\nabla F, \nabla ZF)} \frac{\partial}{\partial U} + \frac{\frac{\partial F}{\partial U}}{\Omega(\nabla F, \nabla ZF)} \frac{\partial}{\partial V}. \quad (3.40)$$

De (3.40) obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}F(u, v) &= \frac{\frac{-\partial F}{\partial v}}{\Omega(\nabla F, \nabla ZF)} \frac{\partial}{\partial u} F + \frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\Omega(\nabla F, \nabla ZF)} \frac{\partial}{\partial v} F, \\
\mathcal{V}\mathcal{G}(u, v) &= \frac{\frac{-\partial F}{\partial v}}{\Omega(\nabla F, \nabla ZF)} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{G} + \frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\Omega(\nabla F, \nabla ZF)} \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{G}, \\
\mathcal{V}^2\mathcal{G}(u, v) &= \frac{\frac{-\partial F}{\partial v}}{\Omega(\nabla F, \nabla ZF)} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{V}\mathcal{G} + \frac{\frac{\partial F}{\partial u}}{\Omega(\nabla F, \nabla ZF)} \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{V}\mathcal{G}.
\end{aligned}$$

y

$$\sigma = \frac{1}{2} \mathcal{V}^2 \mathcal{G}(u_f, v_f) - (\mathcal{V} \mathcal{G}(u_f, v_f))(\mathcal{A}(u_f, v_f)), \quad (3.41)$$

donde (u_f, v_f) es el punto de pliegue

Para nuestro modelo particular, determinar analíticamente el signo de σ es inviable debido a su complejidad. Sin embargo, presentamos cortes representativos de la gráfica de $\sigma = \sigma(A, C, M)$ dado por (3.41) en la figura 3.12, donde es evidente que existen ambos regímenes, supercrítico y subcrítico. No obstante, el análisis previo prueba la siguiente proposición, que está especializada para los propósitos del trabajo.

Proposición 5. *Existe un conjunto abierto de valores de parámetros (A, M, C) con $A \approx \frac{1}{2}$ y $M \approx -\frac{1}{10}$ para los cuales (1.13) sufre una bifurcación de Hopf supercrítica en $Q = Q_H$.*

Observación 7. *Los valores numéricos $A = \frac{1}{2}$ y $M = -\frac{1}{10}$ se eligieron simplemente con fines de simulación. Se puede comparar y complementar esto con la figura 4.11.*

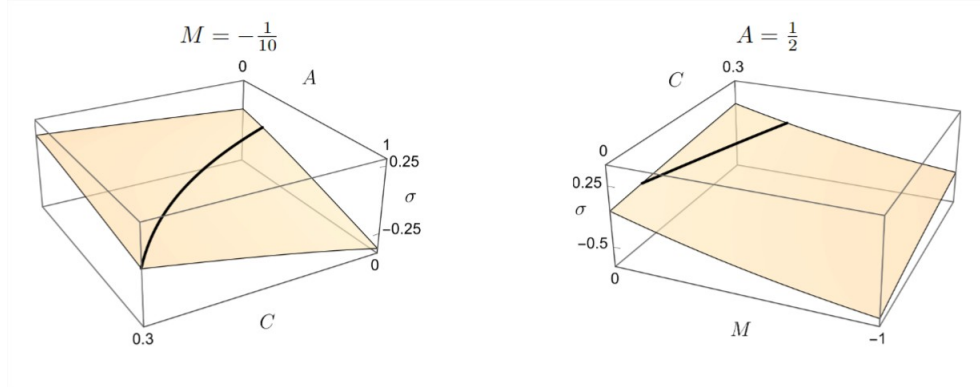


Figura 3.12: Presentamos cortes de (3.41) para los valores de parámetros indicados. De esta manera, verificamos la región de parámetros para la cual la bifurcación de Hopf es supercrítica ($\sigma < 0$) o subcrítica ($\sigma > 0$). La curva negra indica $\sigma = 0$.

Vamos a ilustrar la criticidad de la bifurcación de Hopf utilizando valores numéricos. Al aplicar este criterio intrínseco, obtendremos el valor de σ . Consideremos el caso $AM + \frac{C}{Q} = 0$, con $A = 0.5$, $C = 0.1052$, $M = 0.1$, $Q = 2.104012$ y $\varepsilon = 0.05$. Entonces el sistema experimenta una bifurcación de Hopf supercrítica, pues $\sigma = -0.914906 < 0$, en el punto $u = 0.53869979$, $v = 0.30603456$.

Y para el caso $AM + \frac{C}{Q} < 0$, con $A = 0.5$, $C = 0.05$, $M = 0.1$, $Q = 1.939069$ y $\varepsilon = 0.05$. Entonces el sistema experimenta una bifurcación de Hopf supercrítica, pues $\sigma = -0.855288 < 0$, en el punto $u = 0.544603$ $v = 0.306643$.

Capítulo 4

Punto de bifurcación transcítica degenerada

En esta sección, estudiamos el comportamiento asintótico del modelo (2.1) cerca del punto de bifurcación transcítico degenerado, que es creado cuando un punto de equilibrio del sistema (2.1) se superpone con el punto de bifurcación transcítica $T_C = (0, -AM)$ de la curva crítica $\mathcal{M}_0$, para lo cual, usaremos reducción a la variedad central y la técnica de explosión en coordenadas polares. En la sección (4.1) ampliaremos este análisis local para el caso en el que ε es suficientemente pequeño, usando la técnica de explosión (blow-up) en coordenadas cuasi-homogéneas y estudiaremos el comportamiento cerca del punto T_C en las diferentes cartas.

De acuerdo con las condiciones sobre los parámetros consideradas en el caso 3(a) del teorema 7, es decir,

$$M < 0, \quad \frac{C}{Q} < -AM, \quad A - M - 1 < 0 \quad \text{y} \quad M - A - AM + \frac{1}{Q} < 0,$$

bajo estas condiciones, el sistema (2.1) admite un punto de equilibrio positivo E_* y un punto de equilibrio en el eje v , dado por $\left(0, \frac{C}{Q}\right)$ el cual se encuentra por debajo del punto de bifurcación transcítica T_C sobre la curva crítica; véase la figura 4.1(a). En otras palabras, bajo las condiciones del caso 3(a) del teorema 7, el punto de bifurcación transcítica T_C no coincide con el punto de equilibrio $\left(0, \frac{C}{Q}\right)$.

Por otro lado, si desplazamos la recta de manera que el punto de equilibrio frontera $\left(0, \frac{C}{Q}\right)$, ubicado sobre el eje v , coincida con el punto de bifurcación transcítica

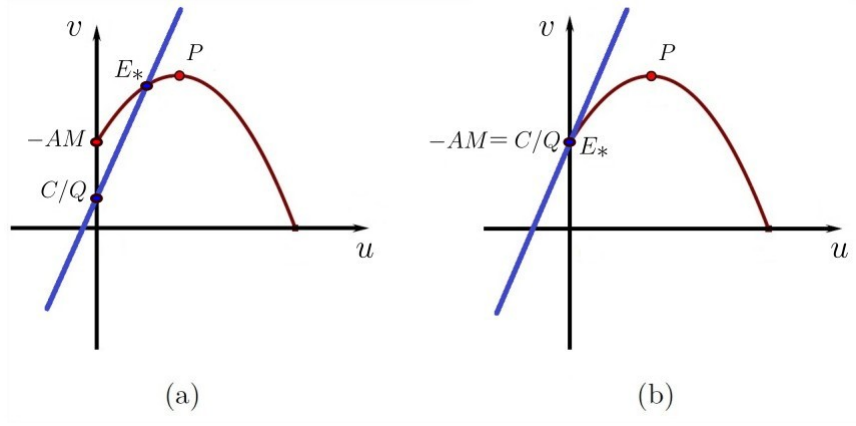


Figura 4.1: Posiciones relativas entre el punto de bifurcación transcritical T_C y el equilibrio límite $\left(0, \frac{C}{Q}\right)$ en el eje v . (a) $\left(0, \frac{C}{Q}\right)$ debajo de T_C . (b) $\left(0, \frac{C}{Q}\right)$ se superpone con T_C exactamente.

T_C , ver figura 4.1(b), es decir, bajo la condición

$$\frac{C}{Q} = -AM, \quad (4.1)$$

entonces T_C se convierte en un punto de bifurcación transcritical degenerada del sistema (2.1). En lo que sigue, analizaremos la naturaleza de este punto bajo la condición (4.1). Primero, reduciremos el sistema (2.1) a la variedad central. Luego, realizaremos un análisis más detallado aplicando la técnica de explosión en coordenadas polares.

Proposición 6. *Bajo la condición (4.1), el sistema (2.1), haciendo $S = \varepsilon$, se puede reescribir como*

$$\begin{aligned} \dot{U} &= -AMQ(A - M + AM)U^2 + AMQUV + \mathcal{O}(\|U, V\|^3), \\ \dot{V} &= \varepsilon(-A^2MU + A^2MQV + \mathcal{O}(\|U, V\|^2)). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Demostración. Primero trasladamos el punto $T_C(0, -AM)$ al origen mediante el cambio de variables

$$u = U, \quad v = V + AM. \quad (4.3)$$

Al sustituir esta transformación en el sistema (2.1), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{U} &= C(A - M + AM)U^2 - CUV + \mathcal{O}(\|U, V\|^3), \\ \dot{V} &= \varepsilon(-A^2MU + A^2MQV + \mathcal{O}(\|U, V\|^2)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

De acuerdo con la condición (4.1), tenemos

$$C = -AMQ$$

que al sustituir en (4.4), obtenemos (4.2). $\square$

Lema 1. *Bajo la condición (4.1), el sistema (2.1) admite una variedad central sobre la cual se cumple lo siguiente:*

1. Si $\frac{1}{Q} > A - M + AM$ el punto de bifurcación transcítica degenerada es localmente estable.
2. Si $\frac{1}{Q} < A - M + AM$ el punto de bifurcación transcítica degenerada es localmente inestable.

restringido al primer cuadrante.

Demostración. La matriz jacobiana del sistema (2.1) en el punto $(0, -AM)$, bajo la condición (4.1), está dada por:

$$\mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -A^2MS & -A^2MS \end{pmatrix},$$

con valores propios $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -A^2MS < 0$.

De acuerdo con el teorema de la variedad central, el sistema (4.2) admite, en un entorno del origen, una variedad central local expresada como

$$V = h(U) = h_0 + h_1U + h_2U^2 + h_3U^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} h_kU^k, \quad (4.5)$$

donde h_k son constantes a determinar, para $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.

Al suponer que $V = h(U)$ tenemos

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dh(U)}{dU} \frac{dU}{dt}.$$

Sustituyendo las expresiones de $\frac{dV}{dt}$ y $\frac{dU}{dt}$ en la ecuación anterior, y comparando los coeficientes U , obtenemos un sistema de ecuaciones que permite determinar los coeficientes h_k :

$$\begin{aligned} h_0 &= 0, \\ h_1 &= \frac{1}{Q}, \\ h_2 &= \frac{AM(1 + MQ - AQ - AMQ)}{Q\varepsilon}, \\ h_3 &= \frac{M(Q((A - 1)M + A)(2Q((A - 1)M + A) - 5) + 3)}{Q^2\varepsilon^2}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$V = h(U) = \frac{1}{Q}U + \frac{AM(1 + MQ - AQ - AMQ)}{Q\varepsilon}U^2 + \frac{M(Q((A-1)M + A)(2Q((A-1)M + A) - 5) + 3)}{Q^2\varepsilon^2}U^3 + \dots \quad (4.6)$$

Sustituyendo (4.6) en la primera ecuación de (4.2), obtenemos

$$\dot{U} = \frac{AM(1 + MQ - AQ - AMQ)}{Q\varepsilon}U^2 + \frac{M(Q((A-1)M + A)(2Q((A-1)M + A) - 5) + 3)}{Q^2\varepsilon^2}U^3 + \mathcal{O}(U^4). \quad (4.7)$$

Ahora, considerando que Q y ε son positivos y $AM < 0$, de donde obtenemos que

$$AM(1 + MQ - AQ - AMQ) < 0, \quad \text{si} \quad \frac{1}{Q} > A - m + AM$$

y

$$AM(1 + MQ - AQ - AMQ) > 0, \quad \text{si} \quad \frac{1}{Q} < A - m + AM.$$

Así, si se cumple que $\frac{1}{Q} > A - M + AM$, entonces la solución $U = 0$ de (4.7) es localmente asintóticamente estable para toda condición inicial $U_0 > 0$. Esto implica que el punto de equilibrio $(0, 0)$ es localmente estable para el sistema completo (4.2), siempre que la trayectoria se inicie en el primer cuadrante. Por el contrario, si $\frac{1}{Q} < A - m + AM$, la solución $U = 0$ de (4.7) es localmente inestable. $\square$

Para complementar el análisis previo mediante la variedad central, aplicaremos ahora la técnica de explosión en coordenadas polares. Este enfoque nos permitirá explorar con mayor detalle la dinámica local del sistema (2.1) en las proximidades del punto de bifurcación transcítica degenerada T_C .

Lema 2. *Bajo la condición (4.1):*

1. Si $\frac{1}{Q} > A - M + AM$ el punto de bifurcación transcítica degenerado es localmente estable.
2. Si $\frac{1}{Q} < A - M + AM$ el punto de bifurcación transcítica degenerado es localmente inestable.

Demostración. De acuerdo con la proposición 6, el sistema (2.1), bajo la condición (4.1), puede reescribirse en la forma:

$$\begin{aligned}\dot{U} &= -AMQ(A - M + AM)U^2 + AMQ UV \\ &\quad + (A - M + AM + A(A - M - 1)MQ)U^3 \\ &\quad - U^2V + (1 + M + A(MQ - 1))U^4 - U^5, \\ \dot{V} &= \varepsilon \left(-A^2M U + A^2MQ V - AM U^2 \right. \\ &\quad \left. + A(1 + MQ) UV - AQ V^2 + U^2V - Q UV^2 \right).\end{aligned}\tag{4.8}$$

Usaremos coordenadas polares para realizar la explosión del punto de bifurcación transcítica degenerada T_C del sistema (2.1) para mostrar la dinámica local cerca de este punto.

Aplicamos la transformación a coordenadas polares dada por $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, es decir,

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}, \quad r^2\dot{\theta} = x\dot{y} - y\dot{x},$$

entonces el sistema (4.8) se convierte en

$$\begin{aligned}\dot{r} &= A^2M\varepsilon \sin \theta (Q \sin \theta - \cos \theta) r \\ &\quad + A \left(-MQ(A - M + AM) \cos^3 \theta + M \sin \theta \cos^2 \theta (Q - \varepsilon) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \sin^2 \theta \cos \theta (MQ + 1) - Q\varepsilon \sin^3 \theta \right) r^2 + \mathcal{O}(r^3), \\ \dot{\theta} &= A^2M\varepsilon \sin \theta (Q \sin \theta - \cos \theta) \\ &\quad + \frac{1}{2}A \cos \theta \left((\sin 2\theta) (A(M + 1)MQ - M^2Q + MQ\varepsilon + \varepsilon) \right. \\ &\quad \left. + (\cos 2\theta) (M(Q - \varepsilon) + Q\varepsilon) - MQ - M\varepsilon - Q\varepsilon \right) + \mathcal{O}(r^2).\end{aligned}\tag{4.9}$$

En el sistema (4.9), el círculo unitario invariante tiene cuatro puntos de equilibrio, los cuales están dados por: $P_1(0, \frac{\pi}{2})$, $P_2(0, \frac{3\pi}{2})$, $P_3\left(0, \arctan\left(\frac{1}{Q}\right)\right)$ y $P_4\left(0, \arctan\left(\frac{-1}{-Q}\right)\right)$, (los signos en el cociente $\frac{-1}{-Q}$ se conservaron para indicar que P_4 está en el tercer cuadrante).

Con el objetivo de analizar la estabilidad lineal de estos puntos de equilibrio, calculamos la matriz jacobiana $J(r, \theta)$ del sistema (4.9), evaluada en cada uno de ellos:

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} A^2MQ\varepsilon & 0 \\ 0 & -A^2MQ\varepsilon \end{pmatrix}, \quad J(P_2) = \begin{pmatrix} A^2MQ\varepsilon & 0 \\ 0 & -A^2MQ\varepsilon \end{pmatrix},$$

$$J(P_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega & A^2MQ\varepsilon \end{pmatrix}, \quad J(P_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \omega & -A^2MQ\varepsilon \end{pmatrix},$$

donde $\omega = \frac{AMQ^2((A-M+AM)Q-1)\sin(2\arctan(\frac{1}{Q}))}{2\sqrt{Q^2+1}}$. Se observa que los puntos P_1 y P_2 corresponden a equilibrios tipo silla, mientras que P_3 y P_4 son puntos de equilibrio degenerados.

Además, para $0 < r \ll 1$, a lo largo de $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$ y $\theta = \arctan\left(\frac{1}{Q}\right)$, en este último θ toma valores en el primer y tercer cuadrantes. Tras una simple verificación con las condiciones (4.1), $M < 0$ y todos los demás parámetros positivos, obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{r} \big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} &= A^2MQ\varepsilon r < 0, \quad \dot{r} \big|_{\theta=\frac{3\pi}{2}} = A^2MQ\varepsilon r < 0, \\ \dot{r} \big|_{\theta=\arctan(\frac{1}{Q})} &= -\frac{AMQ^3((A-M+AM)Q-1)}{(Q^2+1)^{3/2}} r^2. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Notemos que la última igualdad es negativa si $\frac{1}{Q} > A - M + AM$ y positiva si $\frac{1}{Q} < A - M + AM$. De (4.10) podemos ver que los puntos $P_1(0, \frac{\pi}{2})$ y $P_2(0, \frac{3\pi}{2})$, son atractores, mientras que los puntos $P_3\left(0, \arctan\left(\frac{1}{Q}\right)\right)$ (en el primer cuadrante) y $P_4\left(0, \arctan\left(\frac{1}{Q}\right)\right)$ (en el tercer cuadrante), la dirección del flujo es alternada, si $\frac{1}{Q} > A - M + AM$ P_3 es atractor y P_4 es repulsor, y cuando $\frac{1}{Q} < A - M + AM$ se invierte su estabilidad.

En consecuencia, cuando se cumple la condición $\frac{1}{Q} > A - M + AM$, el punto T_C se comporta como un atractor local, como se muestra en la figura 4.2(c). Por el contrario, si $\frac{1}{Q} < A - M + AM$, el punto T_C corresponde a un equilibrio tipo silla, como se ilustra en la figura 4.3(c).

Las figuras 4.2 y 4.3 muestran el comportamiento del flujo en un entorno del punto de bifurcación transcrítica bajo ambas condiciones. En particular, las trayectorias cercanas pero externas al círculo unitario se presentan en las subfiguras 4.2(a) y 4.3(a). La contracción del círculo unitario hacia el origen se ilustra en 4.2(b) y 4.3(b), mientras que las subfiguras 4.2(c) y 4.3(c) muestran el sistema tras aplicar la correspondiente traslación del punto de equilibrio.

Observación 8. Aunque $P_3\left(0, \arctan\left(\frac{1}{Q}\right)\right)$ y $P_4\left(0, \arctan\left(\frac{1}{Q}\right)\right)$ no son singularidades elementales, sus trayectorias locales pueden determinarse mediante (4.10).

□

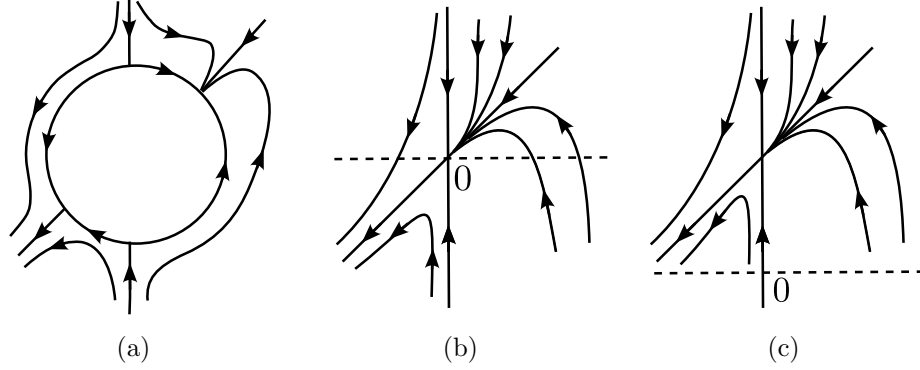


Figura 4.2: Si se cumple la condición $\frac{1}{Q} > A - M + AM$, el punto T_C es un atractor local. (a) Las trayectorias de la explosión (blow-up) cerca del círculo unitario. (b) Las trayectorias de la explosión (blow-up) cerca del origen. (c) La distribución de trayectorias cerca del punto de bifurcación transcritical degenerado T_C .

4.1. Desingularización del punto T_C , en el caso degenerado $C = -AMQ$

En la sección anterior estudiamos el comportamiento asintótico de las soluciones cerca del punto de bifurcación transcritical degenerada T_C usando la variedad central y coordenadas polares. En esta sección, proporcionamos un análisis local del sistema cerca del punto T_C para el escenario degenerado $C = -AMQ$ y ε suficientemente pequeño. Por conveniencia, repetimos el sistema (3.2) considerado, a saber

$$X : \begin{cases} \frac{du}{dt} = u(u - AMQ)(AM - (u - M)(u - 1)(A + u) - v), \\ \frac{dv}{dt} = \varepsilon(u + A)(v - AM)(u - Qv), \\ \frac{d\varepsilon}{dt} = 0, \end{cases} \quad (4.11)$$

donde también desplazamos el origen al punto T_C , reciclamos las coordenadas y agregamos la ecuación trivial $\frac{d\varepsilon}{dt} = 0$. Una verificación directa confirma que el origen es un punto nilpotente. Para analizar su comportamiento, aplicaremos la técnica de explosión (blow-up). Con este fin, proponemos una ampliación del sistema mediante la transformación de la forma:

$$(u, v, \varepsilon) = (r\bar{u}, r\bar{v}, r\bar{\varepsilon}), \quad (4.12)$$

donde $\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{\varepsilon}^2 = 1$ y $r \in [0, r_0]$.

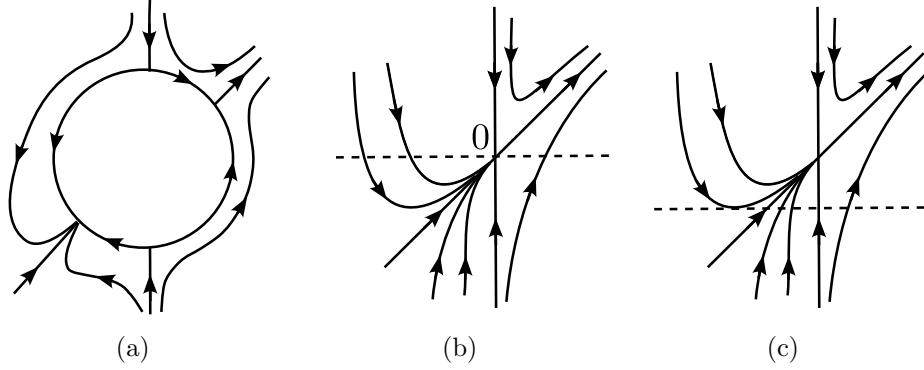


Figura 4.3: Si se cumple la condición $\frac{1}{Q} < A - M + AM$, entonces el punto T_C es un punto silla. (a) Las trayectorias blow-up (explosión) cerca del círculo unitario. (b) Las trayectorias blow-up (explosión) cerca del origen. (c) La distribución de trayectorias cerca del punto de bifurcación transcritical degenerado T_C .

Por razones que se aclararán en el análisis ampliado que sigue, introducimos las siguientes condiciones de no degeneración: $A - M + AM \neq 0$ y $A - M + AM \neq \frac{1}{Q}$.

4.1.1. Carta de entrada

Las coordenadas locales en la carta $K_1 = \{\bar{v} = 1\}$ están dadas por

$$u = r_1 u_1, \quad v = r_1, \quad \epsilon = r_1 \epsilon_1, \quad (4.13)$$

lo que conduce al campo vectorial local

$$\begin{aligned} \frac{dr_1}{dt_1} &= r_1 \epsilon_1 (Q - u_1) (A^2 M + O(r_1)), \\ \frac{du_1}{dt_1} &= AMQ(1 - (A + M - AM)u_1)u_1 - A^2 M(Q - u_1)u_1 \epsilon_1 + O(r_1), \\ \frac{d\epsilon_1}{dt_1} &= -\epsilon_1^2 (Q - u_1) (A^2 M + O(r_1)), \end{aligned} \quad (4.14)$$

donde t_1 denota el tiempo en esta carta (después de la ampliación y la desingularización).

En esta carta, lo primero que nos interesa es la restricción de (4.14) para

$r_1 = 0$, la cual se expresa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{du_1}{dt_1} &= AMQ(1 - (A + M - AM)u_1)u_1 - A^2M(Q - u_1)u_1\epsilon_1, \\ \frac{d\epsilon_1}{dt_1} &= -A^2M\epsilon_1^2(Q - u_1).\end{aligned}\tag{4.15}$$

Proposición 7. *El origen es un punto de equilibrio semihiperbólico de (4.15) y tiene una variedad central 1-dimensional $\mathcal{M}_1$ asociada a él. Para $\epsilon_1 \geq 0$, $\mathcal{M}_1$ es única, coincide con el eje ϵ_1 y el flujo a lo largo de él se aleja del origen.*

Observación 9. *El sistema (4.15) tiene otro punto de equilibrio en $(u_1, \epsilon_1) = (\frac{1}{A-M+AM}, 0)$ pero esto se estudia en la carta K_3 .*

Demostración. Las afirmaciones se deducen a partir de varios argumentos estándar ampliamente conocidos. A modo de referencia, señalamos que el jacobiano en el origen es

$$J = \begin{bmatrix} AMQ & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\tag{4.16}$$

y recuerde que $M < 0$. □

La dinámica del sistema (4.14) restringida al caso $\epsilon_1 = 0$ está dada por:

$$\begin{aligned}\frac{dr_1}{dt} &= 0, \\ \frac{du_1}{dt} &= -AMQ(-1 + (A - M + AM)u_1)u_1 + O(r_1u_1),\end{aligned}\tag{4.17}$$

De esta expresión se deduce fácilmente que el eje r_1 constituye un conjunto de puntos de equilibrio localmente atractor. El flujo correspondiente en esta carta, cerca del origen, se muestra en la figura 4.4.

Sean Δ_1^{in} y Δ_1^{out} las secciones definidas como se muestra en la figura 4.4, y dadas explícitamente por:

$$\begin{aligned}\Delta_1^{in} &= \{(r_1, u_1, \epsilon_1) : r_1 = \delta_1, 0 \leq u_1 < \tilde{u}_1, 0 \leq \epsilon_1 < \delta_2\}, \\ \Delta_1^{out} &= \{(r_1, u_1, \epsilon_1) : \epsilon_1 = \delta_2, 0 \leq u_1 < \tilde{u}_1, 0 \leq r_1 < \delta_1\},\end{aligned}\tag{4.18}$$

con δ_1 , δ_2 , y $\tilde{u}_1$ constantes suficientemente pequeñas. Sea $\Pi_1 : \Delta_1^{in} \rightarrow \Delta_1^{out}$ definido por el flujo de (4.14). Del análisis realizado anteriormente, se deduce la siguiente caracterización del mapeo Π_1 .

Proposición 8. *La función Π_1 está bien definida y es, además, una contracción. En particular, la imagen de Δ_1^{in} bajo Π_1 es una región en forma de cuña contenida en Δ_1^{out} .*

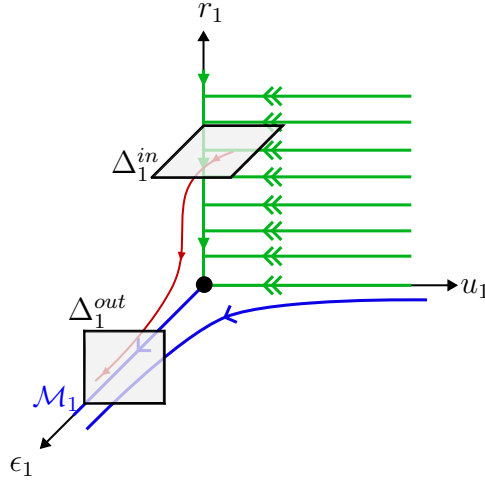


Figura 4.4: Esquema de la dinámica del sistema (4.14) en un entorno del origen, de acuerdo con el análisis desarrollado en esta sección. Las trayectorias límite se muestran en verde y azul, correspondientes a los casos $\epsilon_1 = 0$ y $r_1 = 0$, respectivamente. Una órbita representativa del sistema completo (4.14) se ilustra en rojo.

4.1.2. Carta central

Las coordenadas locales en la carta $K_2 = \{\bar{\epsilon} = 1\}$ están dadas por

$$u = r_2 u_2, \quad v = r_2 v_2, \quad \epsilon = r_2, \quad (4.19)$$

lo que conduce al campo vectorial local

$$\begin{aligned} \frac{dr_2}{dt_2} &= 0 \\ \frac{du_2}{dt_2} &= -u_2(AMQ - r_2 u_2)(Au_2(M - r_2 u_2 + 1) + u_2(r_2 u_2 - 1)(M - r_2 u_2) - v_2) \\ \frac{dv_2}{dt_2} &= -((A + r_2 u_2)(u_2 - Qv_2)(AM - r_2 v_2)). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Restringiendo a $\{r_2 = 0\}$ para (4.20), nos centramos en

$$\begin{aligned} \frac{du_2}{dt_2} &= -AMQu_2((A - M + AM)u_2 - v_2), \\ \frac{dv_2}{dt_2} &= -A^2M(u_2 - Qv_2). \end{aligned} \quad (4.21)$$

donde, como ahora r_2 es un parámetro regular, el análisis que sigue proporciona la dinámica cualitativa también para r_2 suficientemente pequeño.

Proposición 9. *Las siguientes afirmaciones son válidas para (4.21):*

1. *El origen es el único punto de equilibrio y el eje v_2 es invariante bajo el flujo. Además, el flujo a lo largo del eje v_2 se dirige hacia el origen.*
2. *El origen es semihiperbólico. Para $u_2 \geq 0$, existe una variedad central $\mathcal{M}_2$ de dimensión 1 que es localmente atractora tangente al espacio propio central $E^c = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} Q \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.*
3. *Para $u_2 \geq 0$: a) si $A - M + AM < \frac{1}{Q}$ entonces el origen es localmente estable; b) si $A - M + AM > \frac{1}{Q}$ entonces el origen es inestable y la variedad central es única.*

Demostración. Los puntos 1 y 2 se deducen de manera directa. Para el punto 3, definimos la variedad invariante

$$\mathcal{M}_2 = \{(u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid v_2 = h_2(u_2)\},$$

con $h_2(0) = 0$ y $\frac{dh}{du_2}(0) = \frac{1}{Q}$. Al aplicar los métodos estándar para el cálculo de variedades centrales, se obtiene

$$h_2(u_2) = \frac{1}{Q}u_2 + \frac{1 - (A - M + AM)Q}{AQ^2}u_2^2 + O(u_2^3), \quad (4.22)$$

lo que implica que

$$\left. \frac{du_2}{dt} \right|_{\mathcal{M}_2} = -AMQ(A - M + AM - \frac{1}{Q})u_2^2 + O(u_2^3), \quad (4.23)$$

que lleva a la afirmación (recordamos que $M < 0$). La razón por la cual la variedad central es única en el caso $(A - M + AM - \frac{1}{Q} > 0)$ se debe al comportamiento tipo silla cerca del origen. $\square$

Además, nos interesa el caso en que el flujo sobre la variedad central $\mathcal{M}_2$ se aleja del origen, ya que esto permite establecer la posibilidad de oscilaciones de relajación en un entorno degenerado $C = -AMQ$. Por lo tanto, definamos las secciones:

$$\begin{aligned} \Delta_2^{in} &= \{(u_2, v_2) : 0 \leq u_2 < \tilde{u}_2, v_2 = \delta_3\}, \\ \Delta_2^{out} &= \{(u_2, v_2) : u_2 = \delta_4, |v_2 - h_2(\delta_4)| < \delta_5\}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

donde $\tilde{u}_2, \delta_3, \delta_4$ and δ_5 son constantes positivas pequeñas que además satisfacen $\tilde{u}_2 < \delta_4$ y $h(\delta_4) + \delta_5 < \delta_3$. Sea $\Pi_2 : \Delta_2^{in} \rightarrow \Delta_2^{out}$ el mapeo definido por el flujo del sistema (4.21). La siguiente proposición caracteriza Π_2 .

Proposición 10. *Sea $A - M + AM - \frac{1}{Q} > 0$ y $\tilde{u}_2$ suficientemente pequeño. La función Π_2 está bien definida. En particular, dentro de un pequeño entorno de $\mathcal{M}_2$, el flujo de (4.21) se contrae hacia $\mathcal{M}_2$.*

Demostración. Las afirmaciones se deducen de la proposición 9 y de los argumentos estándar de la variedad central. En particular, sea $e = v_2 - h$. Se deduce que:

$$\begin{aligned}
\frac{de}{dt_2} &= \frac{dv_2}{dt_2} - \frac{\partial h_2}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt_2} \\
&= -A^2 M(u_2 - Q(e + h_2)) - \frac{\partial h_2}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt_2} \\
&= A^2 Q M e + A^2 M(Q h_2 - u_2) - \frac{\partial h_2}{\partial u_2} \frac{du_2}{dt_2} \\
&= A^2 Q M e,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

donde la última igualdad se sigue de la invariancia de $\mathcal{M}_2 = \{v_2 = h_2(u_2)\}$. Recordemos que $M < 0$. $\square$

Observamos que la Proposición muestra que, bajo el contexto de la proposición, la variedad central $\mathcal{M}_2$ atrae localmente en todas partes y no solo cerca del origen.

El flujo del sistema (4.21) se representa de manera esquemática en la figura 4.5. Cabe recordar que, en este diagrama, $r_2 = \epsilon$ actúa como un parámetro de perturbación regular.

4.1.3. Carta de salida

Las coordenadas locales en la carta $K_3 = \{\bar{u} = 1\}$ están dadas por

$$u = r_3, \quad v = r_3 v_3, \quad \epsilon = r_3 \epsilon_3, \tag{4.26}$$

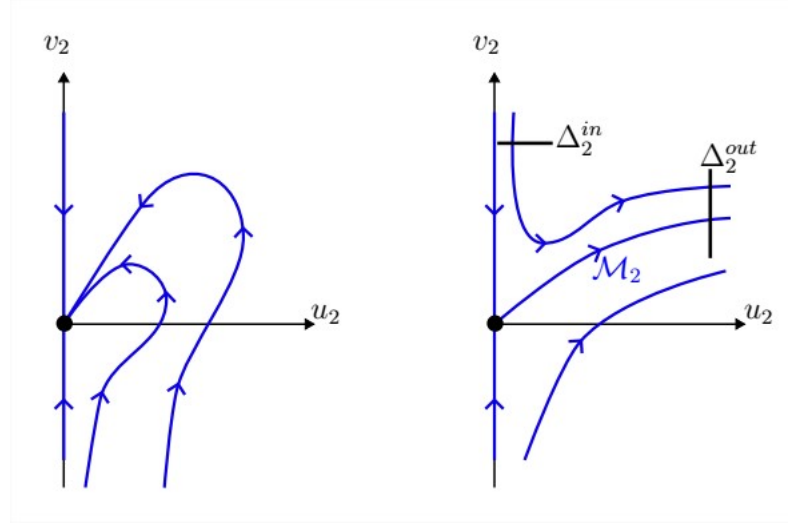


Figura 4.5: Retrato fase del sistema (4.21) para $A - M + AM - \frac{1}{Q} < 0$ (izquierda) y $A - M + AM - \frac{1}{Q} > 0$ (derecha). Los diagramas se construyen cualitativamente a partir de la proposición 9, utilizando que $\frac{dv_2}{dt} > 0$ para todo $v_2 < 0$, y considerando la disposición relativa de las nulclinas $v_2 = (A - M + AM)u_2$, donde $A - M + AM > 0$ y $v_2 = \frac{1}{Q}u_2$.

lo cual conduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en coordenadas locales:

$$\begin{aligned} \frac{dr_3}{dt_3} &= -AMQr_3(A - M + AM - v_3) + O(r_3^2), \\ \frac{dv_3}{dt_3} &= AMQ(A - M + AM - v_3)v_3 + A^2M(Qv_3 - 1)\epsilon_3 + O(r_3), \\ \frac{d\epsilon_3}{dt_3} &= AMQ\epsilon_3(A - M + AM - v_3) + O(\epsilon_3r_3). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Comenzamos analizando el sistema (4.27) restringido al subespacio $r_3 = 0$. En esta restricción, el sistema se reduce a:

$$\begin{aligned} \frac{dv_3}{dt_3} &= AMQ(A - M + AM - v_3)v_3 + A^2M(Qv_3 - 1)\epsilon_3, \\ \frac{d\epsilon_3}{dt_3} &= AMQ\epsilon_3(A - M + AM - v_3). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Proposición 11. *Bajo la condición $A - M + AM > 0$, el sistema (4.28) presenta las siguientes propiedades:*

1. Hay dos puntos de equilibrio:

$$o_3 = (0, 0) \quad \text{and} \quad p_3 = (A - M + AM, 0). \quad (4.29)$$

2. El punto de equilibrio o_3 es un sumidero hiperbólico.

3. El punto de equilibrio p_3 es semihiperbólico y está asociado a una variedad central local unidimensional, $\mathcal{N}_3$ la cual es de tipo repulsivo. Si además $A - M + AM < \frac{1}{Q}$ entonces el flujo a lo largo de $\mathcal{N}_3$ se dirige hacia p_3 y $\mathcal{N}_3$ es único; por otro lado, si $A - M + AM > \frac{1}{Q}$ entonces el flujo a lo largo de $\mathcal{N}_3$ se aleja de p_3 .

Demostración. Las dos primeras afirmaciones se verifican de manera directa. Para la tercera, aplicamos el procedimiento estándar de reducción a la variedad central. En este caso, se obtiene que

$$\mathcal{N}_3 = \{(v_3, \epsilon_3) \in \mathbb{R}^2 \mid v_3 = g_3(\epsilon_3)\},$$

donde la función $g_3(\epsilon_3)$ admite la siguiente expansión en serie de potencias:

$$g_3(\epsilon_3) = A - M + AM + \frac{A(A - M + AM - \frac{1}{Q})}{(A - M + AM)Q} \epsilon_3 + \frac{A^2(A - M + AM - \frac{1}{Q})}{(A - M + AM)Q^2} \epsilon_3^2 + \mathcal{O}(\epsilon_3^3). \quad (4.30)$$

Al sustituir esta expresión en la segunda ecuación de (4.28), se obtiene

$$\left. \frac{d\epsilon_3}{dt_3} \right|_{\mathcal{N}_3} = - \frac{A^2 M (A - M + AM - \frac{1}{Q})}{(A - M + AM)} \epsilon_3^2 + \mathcal{O}(\epsilon_3^3), \quad (4.31)$$

Dado que $M < 0$, esta expresión permite concluir el carácter repulsivo o atractivo de la variedad central, de acuerdo con el signo de $A - M + AM - \frac{1}{Q}$ como se afirma. La unicidad de la variedad central en el caso atractivo se deduce del carácter tipo silla en el caso correspondiente. $\square$

Observación 10. La variedad central $\mathcal{M}_2$, en la carta K_2 , está contenida en el conjunto invariante hacia adelante $\Gamma_2 = \left\{ (u_2, v_2) \in \mathbb{R}^2 \mid u_2 > 0, 0 < v_2 < \frac{1}{Q} u_2 \right\}$.

En las coordenadas de la carta K_3 , Γ_2 corresponde a $\Gamma_3 = \left\{ (\epsilon_3, v_3) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < v_3 < \frac{1}{Q} \epsilon_3 \right\}$.

Entonces se sigue de la proposición 11 que para $A - M + AM > \frac{1}{Q}$, la única variedad central $\mathcal{M}_2$ converge al origen de la carta K_3 . En este contexto, denotemos por $\mathcal{M}_3$ una parametrización de $\mathcal{M}_2$ en las coordenadas de K_3 y supongamos que (al menos localmente) $\mathcal{M}_3 = \{v_3 = h_3(\epsilon_3)\}$.

Por otro lado, el sistema (4.27) restringido a $\epsilon_3 = 0$ viene dado por:

$$\begin{aligned}\frac{dr_3}{dt_3} &= -(AMQ - r_3)(A(1 + M - r_3) + (M - r_3)(r_3 - 1) - v_3)r_3, \\ \frac{dv_3}{dt_3} &= (AMQ - r_3)(A(1 + M - r_3) + (M - r_3)(r_3 - 1) - v_3)v_3,\end{aligned}\tag{4.32}$$

donde recordamos que $r_3 \geq 0$.

Proposición 12. *Las siguientes afirmaciones son válidas para (4.32) (recuerde que $A - M + AM > 0$):*

1. *El origen $o_3 = (0, 0)$ es una silla hiperbólica. En particular, la dirección r_3 es repulsora mientras que la dirección v_3 es atractora.*
2. *Hay una curva de equilibrios.*

$$\ell_3 = \{(r_3, v_3) \in \mathbb{R}^2 \mid v_3 = A - M + AM + (1 - A + M)r_3 - r_3^2\}.\tag{4.33}$$

Para r_3 suficientemente pequeño, la curva ℓ_3 es repelente.

Demostración. Todas las declaraciones son sencillas. Indicamos que el valor propio no trivial a lo largo de ℓ_3 es $\lambda = -AMQ(A - M + AM) + O(r_3)$ y recordamos que $M < 0$. $\square$

Observación 11. *Sustituyendo $(u, v) = (r_3, r_3, v_3)$ en la expresión de la variedad crítica de (4.11), se deduce que la curva ℓ_3 es, de hecho, la variedad crítica $\mathcal{M}_0^1$ escrita en las coordenadas del diagrama K_3 .*

Proposición 13. *Sea $A - M + AM - \frac{1}{Q} > 0$. Hay una variedad central $\mathcal{P}_3$ (no única) de 2 dimensiones en el punto p_3 . El flujo restringido a ella es tipo silla, con la dirección r_3 estable y la dirección ϵ_3 inestable, como se muestra en la figura 4.6.*

Demostración. El resultado se deriva de los cálculos estándar para la variedad central, por lo que a continuación se presentan solo los pasos esenciales. Suponiendo que la variedad central puede expresarse como la gráfica de $v_3 = H_3(r_3, \epsilon_3)$, obtenemos que

$$H_3 = A - M + AM + \frac{-1 + (A - M + AM)Q}{(A - M + AM)Q} A\epsilon_3 + (1 - A + M)r + O(r_3^2, \epsilon_3^2, r_3\epsilon_3).\tag{4.34}$$

Por lo tanto, la dinámica reducida en la variedad central viene dada por

$$\begin{aligned}\frac{dr_3}{dt_3} &= \frac{r_3(AMQ - r_3)(A\epsilon_3(-1 + (A - M + AM)Q) + (A - M + AM)Qr^2)}{(A - M + AM)Q}, \\ \frac{d\epsilon_3}{dt_3} &= -\frac{\epsilon_3(AMQ - r_3)(A\epsilon_3(-1 + (A - M + AM)Q) + (A - M + AM)Qr^2)}{(A - M + AM)Q}.\end{aligned}\tag{4.35}$$

La condición $A - M + AM - \frac{1}{Q} > 0$, junto con $M < 0$ y $A - M + AM > 0$, implica que el término común $\frac{A\epsilon_3(-1+(A-M+AM)Q)+(A-M+AM)Qr^2}{(A-M+AM)Q}$ es positivo. De ahí se sigue la afirmación. $\square$

A continuación, describimos los dos mapeos de transición más relevantes. Para ello, comenzamos definiendo las siguientes secciones:

$$\begin{aligned}\Delta_3^{in} &= \{(r_3, v_3, \epsilon_3) : \epsilon_3 = \delta_6, |v_3 - h_3(\delta_6)| < \delta_7, 0 \leq r_3 < \tilde{r}_3\}, \\ \Delta_c^{in} &= \{(r_3, v_3, \epsilon_3) : r_3 = \rho_3, |v_3 - \ell_3| < e^{-c/\epsilon}, 0 \leq \epsilon_3 < \delta_8\}, \\ \Delta_3^{out} &= \{(r_3, v_3, \epsilon_3) : r_3 = \delta_9, |v_3| < \delta_{10}, 0 \leq \epsilon_3 < \tilde{\epsilon}_3\},\end{aligned}\tag{4.36}$$

donde todas las constantes introducidas se asumen suficientemente pequeñas y positivas, y además satisfacen $\tilde{\epsilon}_3 < \delta_6$, $\tilde{r}_3 < \delta_9$, $\delta_8 < \delta_6$. Sea $\Pi_3 : \Delta_3^{in} \rightarrow \Delta_3^{out}$ el mapeo definido por el flujo del sistema (4.27), así como $\Pi_3^c : \Delta_c^{in} \rightarrow \Delta_3^{out}$. El análisis desarrollado anteriormente es suficiente para establecer el siguiente resultado:

Proposición 14.

- *El mapeo Π_3 está bien definido. En particular, la imagen de Δ_3^{in} bajo Π_3 es una región en forma de cuña contenida en Δ_3^{out} , y el mapeo actúa como una contracción exponencial hacia el eje r_3 .*
- *El mapeo Π_3^c también está bien definido. La imagen de la franja exponencialmente delgada Δ_c^{in} es otra franja del mismo tipo, contenida dentro de Δ_3^{out} .*

La dinámica descrita del sistema (4.14) por las proposiciones 11, 12, 13 y 14 se resume en la figura 4.6.

Para completar, presentamos brevemente la dinámica en el gráfico inferior en la siguiente sección.

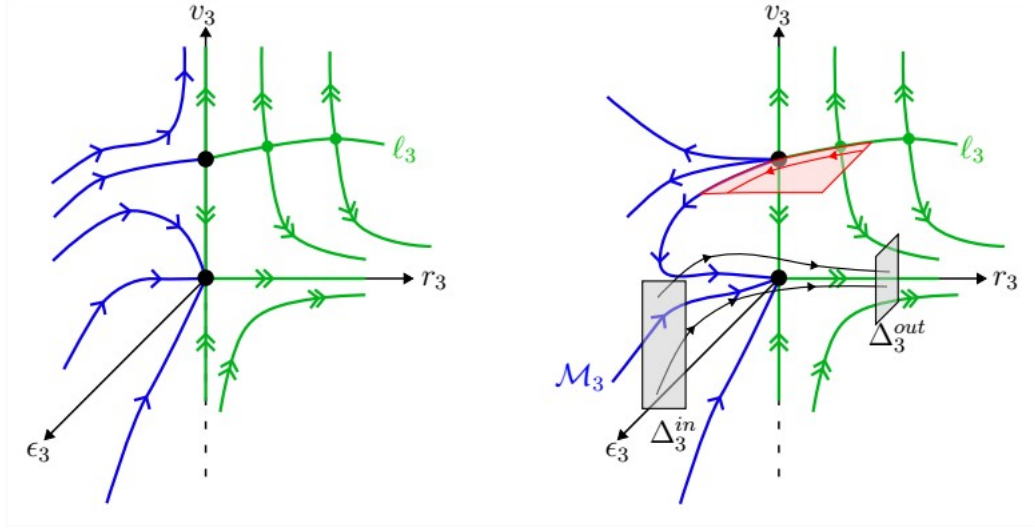


Figura 4.6: Dinámica del sistema (4.14) en el diagrama $K_3 = \{\bar{u} = 1\}$ para $A - M + AM - \frac{1}{Q} < 0$ a la izquierda y $A - M + AM - \frac{1}{Q} > 0$ a la derecha. El flujo en azul ocurre en el plano (ϵ_3, v_3) , mientras que el verde en el plano (r_3, v_3) . Las órbitas negras son un esbozo de una muestra de órbitas que fluyen desde Δ_3^{in} y llegan a Δ_3^{out} . La superficie roja es la variedad central $\mathcal{P}_3$. Nótese que, dado que ℓ_3 es simplemente la variedad crítica $\mathcal{M}_0^1$ escrita en las coordenadas locales de este diagrama, las órbitas en $\mathcal{P}_3$ pueden identificarse con las variedades lentas que se perturban desde $\mathcal{M}_0^1$. Aunque no mostramos Δ_c^{in} , ya que es una franja exponencialmente delgada, es evidente a partir del análisis presentado que algunas de las órbitas cercanas a $\mathcal{P}_3$ llegan a Δ_3^{out} .

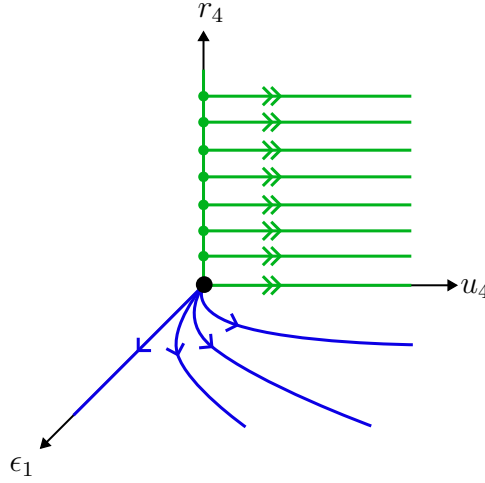


Figura 4.7: Dinámica de (4.38) cerca del origen. En contraste con el flujo de (4.14), la variedad central en el plano (v_4, ϵ_4) no es única.

4.1.4. Carta inferior

Las coordenadas locales en la carta $K_4 = \{\bar{v} = -1\}$ están dadas por

$$u = r_4 u_4, \quad v = -r_4, \quad \epsilon = r_4 \epsilon_4, \quad (4.37)$$

lo que conduce al campo vectorial local

$$\begin{aligned} \frac{dr_4}{dt} &= r_4 \epsilon_4 (Q + u_1) (A^2 M + O(r_4)), \\ \frac{du_4}{dt} &= -AMQ(1 + (A + M - AM)u_4)u_4 - A^2 M(Q + u_4)u_4 \epsilon_4 + O(r_4), \\ \frac{d\epsilon_4}{dt} &= -\epsilon_4^2 (Q + u_4) (A^2 M + O(r_4)). \end{aligned} \quad (4.38)$$

La dinámica es similar a la de la carta de entrada, solo que con la dirección ϵ invertida, por lo que simplemente mostramos en la figura 4.7 el flujo correspondiente y omitimos los detalles.

4.1.5. Dinámica de explosión en T_C , oscilaciones de relajación y canard transitorio

Con el análisis realizado en las secciones 4.1.1-4.1.4 deducimos que la dinámica de explosión en T_C está dada por dos flujos no equivalentes como se muestra en la Figura 4.8.

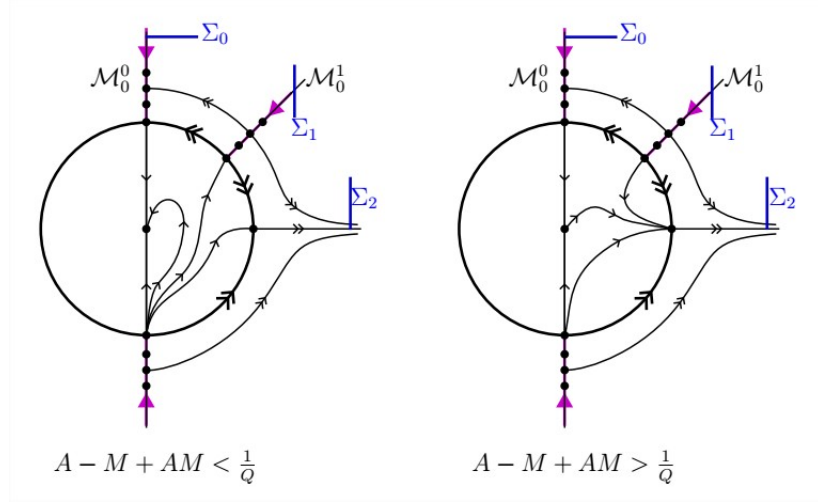


Figura 4.8: Las dos dinámicas ampliadas no equivalentes del punto T_C para $A - M + AM < \frac{1}{Q}$ a la izquierda y $A - M + AM > \frac{1}{Q}$ a la derecha. Las curvas punteadas representan la variedad crítica. Los flujos reducidos correspondientes se indican con las flechas magenta. Compárese con la figura 3.1 cerca del punto T_C .

En particular, la prueba de la siguiente proposición se desprende del análisis efectuado anteriormente.

Proposición 15. *Consideremos el sistema (4.11) y sean Σ_0 , Σ_1 y Σ_2 las secciones definidas de la siguiente manera (consulte también la figura 4.8):*

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &= \{(u, v, \epsilon) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq u < \tilde{u}, v = \tilde{v}, \epsilon \ll 1\} \\ \Sigma_1 &= \{(u, v, \epsilon) \in \mathbb{R}^3 : u = u^*, h(u) - \delta \leq v < h(u) + \delta, \epsilon \ll 1\} \\ \Sigma_2 &= \{(u, v, \epsilon) \in \mathbb{R}^3 : u = u^*, 0 \leq v < h(u), \epsilon \ll 1\},\end{aligned}\tag{4.39}$$

donde $\tilde{u} < u^* < u^*$ son constantes positivas suficientemente pequeñas. Entonces, para $A - M + AM > \frac{1}{Q}$ y $\epsilon > 0$ suficientemente pequeños:

- La función $\Pi_{0 \rightarrow 2} : \Sigma_0 \mapsto \Sigma_2$ inducida por el flujo de (4.11) está bien definida y es una contracción.
- Para $\delta > 0$ exponencialmente pequeño y $Q = Q_m$, donde Q_m es el valor del parámetro Q para el cual hay un canard máximo en P , la función $\Pi_{1 \rightarrow 2} : \Sigma_1 \mapsto \Sigma_2$ inducida por el flujo de (4.11) está bien definida.

Demostración. En el nivel singular, es decir, para $\epsilon = 0$, la función $\Pi_{0 \rightarrow 2}$ se describe mediante la concatenación de las órbitas correspondientes para $\bar{r} = 0$

en el análisis de expansión realizado en las Secciones 4.1.1-4.1.4. En particular, véanse las figuras 4.4, 4.5 y 4.6, así como el análisis que conduce a ellas, junto con una expansión. Para la función $\Pi_{1 \rightarrow 2}$ solo hay que tener cuidado de tener los parámetros apropiados de modo que el flujo lento a lo largo de $\mathcal{M}_0^{1,r}$ se dirija hacia T_C como en la figura 4.9 y que el parámetro Q se elija de modo que haya un canard máximo en el punto de pliegue P .

Este resultado se obtiene para valores de Q exponencialmente próximos a Q_H . Como se mostró en la sección 3.6, la bifurcación de Hopf singular en P para $Q = Q_H$ puede ser supercrítica; por lo tanto, una elección apropiada de parámetros asegura la estabilidad del error máximo para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño. $\square$

Observación 12. *Para $A - M + AM < \frac{1}{Q}$, se puede demostrar que las trayectorias que cruzan Σ_0 convergen transversalmente al origen. Como esto no conduce a un comportamiento oscilatorio, no entraremos en detalles sobre este caso. Sin embargo, resulta interesante observar que, en este caso, el punto degenerado T_C es un punto silla, pero eventualmente atrae a todas las órbitas.*

A continuación, discutimos las oscilaciones que están organizadas por las dos singularidades, el pliegue P y el punto silla degenerado T_C , ver la figura 4.10, que ahora se presenta en las coordenadas originales (u, v) del sistema (2.1) donde $S = \epsilon$.

Contamos con todos los elementos para demostrar lo siguiente:

Teorema 13. *Consideremos el sistema (2.1) con $C = -AMQ$ y $A - M + AM > \frac{1}{Q}$.*

1. *Sean los parámetros $(A, M, Q) \in (0, 1) \times (-1, 0) \times \mathbb{R}_{>0}$ elegidos de manera que el punto de pliegue P sea un punto de salto genérico. En particular, esto implica que el punto de equilibrio $E_1 = (\mathcal{U}_1, \mathcal{V}_1)$ está en la rama izquierda de $\mathcal{M}_0^1$ con $0 < \mathcal{U}_1 < u_p$. Supongamos que E_1 se encuentra dentro de una distancia de orden $\mathcal{O}(1)$ desde la singularidad T_C y P . Para $\epsilon = 0$, hay una órbita singular γ_0 como se muestra en el panel izquierdo de la figura 4.10. Para $S = \epsilon \ll 1$ hay un ciclo localmente estable γ_ϵ que converge en la distancia de Hausdorff a γ_0 como $\epsilon \rightarrow 0$.*
2. *Sean los parámetros $(A, M, Q) \in (0, 1) \times (-1, 0) \times \mathbb{R}_{>0}$ elegidos de manera que el punto de pliegue P sea un punto de canard, es decir, $Q = Q_H$, donde Q_H se dió en (2.10). Para $\epsilon = 0$, hay una órbita singular $\tilde{\gamma}_0$ como se muestra en el panel derecho de la figura 4.10. Para $S = \epsilon \ll 1$ y $Q = Q_c(\epsilon) \approx Q_H$ donde Q_c es el valor del parámetro Q para el cual existe un error máximo, existe*

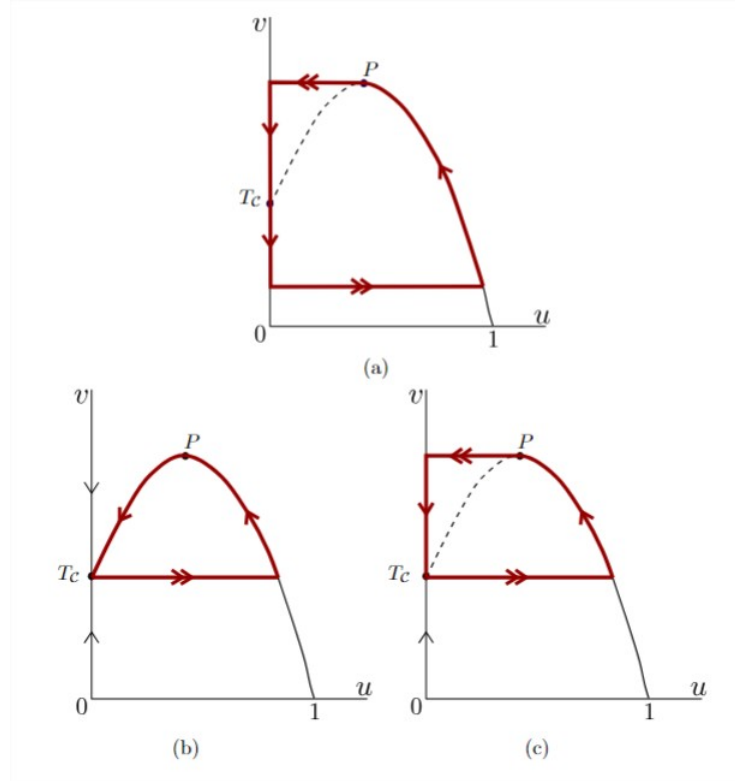


Figura 4.9: Ciclos singulares en los que nos centramos. El ciclo rojo sólido en (a) representa una órbita candidata para una oscilación de relajación regular, que aparece cuando $C < -AMQ$. Este ciclo ya fue estudiado en [63]; sin embargo, lo incluimos aquí para ofrecer una presentación completa. Véase la sección 3.5. Los dos ciclos en la parte inferior, (b) y (c), son degenerados y, hasta donde sabemos, no han sido reportados previamente. A nivel singular, estos existen para $C = -AMQ$. Como mostramos en la sección 4.1, el ciclo representado en (b), llamado *canard transitorio*, se construye mediante la combinación de un canard máximo en P y una transición tipo silla (degenerada) en T_c . Por su parte, el ciclo en (c) resulta de un salto genérico en P seguido de la misma transición tipo silla degenerada en T_c .

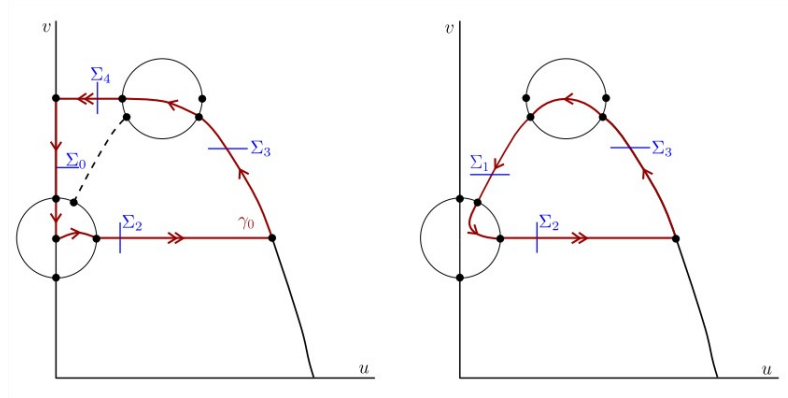


Figura 4.10: A la izquierda mostramos una oscilación de relajación singular que pasa por el punto de pliegue P y el punto singular T_C . A la derecha mostramos un canard transitorio que pasa por las mismas singularidades. Estos ciclos se obtienen para diferentes regímenes de parámetros (recuerde que en esta sección $C = -AMQ$) siempre que $A - M + AM > \frac{1}{Q}$. La oscilación de relajación se obtiene cuando el punto de pliegue P es un punto de salto genérico. El canard transitorio se obtiene cuando el punto de pliegue sufre una bifurcación de Hopf singular y el parámetro $Q \approx Q_H$ se elige de modo que haya un canard máximo en P .

un ciclo localmente estable $\tilde{\gamma}_\epsilon$ que converge en la distancia de Hausdorff a $\tilde{\gamma}_0$ como $\epsilon \rightarrow 0$.

Demostración. Nos referimos a secciones adecuadamente definidas como se muestra en la figura 4.10. Para ambos casos, la transición $\Sigma_2 \rightarrow \Sigma_3$ se sigue de la teoría de Fenichel, al igual que $\Sigma_4 \rightarrow \Sigma_0$. Además, tales transiciones son contracciones exponenciales. Las transiciones $\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_4$, que también es una contracción, y $\Sigma_3 \rightarrow \Sigma_1$ se siguen de [33]. Las transiciones $\Sigma_0 \rightarrow \Sigma_2$ y $\Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ son ambas contracciones y son las versiones reducidas de la proposición 15. Por lo tanto, la existencia y estabilidad de γ_ϵ y de $\tilde{\gamma}_\epsilon$ se siguen de la concatenación de las funciones mencionadas anteriormente. $\square$

4.2. Bifurcación de Takens-Bogdanov

Recordemos que una bifurcación de Takens-Bogdanov, es una bifurcación de un punto de equilibrio en una familia de parámetros de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas en el plano, donde el equilibrio crítico tiene un valor propio

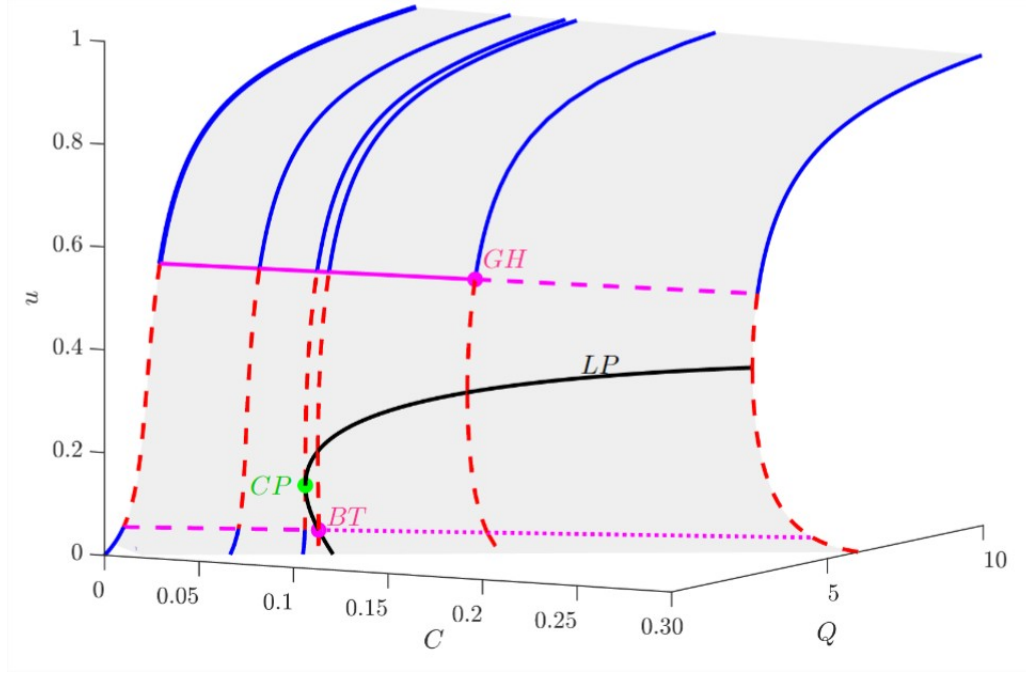


Figura 4.11: Equilibrios de (2.1) y sus bifurcaciones en un diagrama de bifurcación de codimensión 2 obtenido mediante Matcont [12]. Para este diagrama fijamos los parámetros $A = \frac{1}{2}$, $M = -\frac{1}{10}$ y $\varepsilon = \frac{1}{50}$. La superficie gris corresponde a los equilibrios. Para valores fijos de C , mostramos los equilibrios estables en azul y los equilibrios inestables en rojo discontinuo. Estos equilibrios experimentan una bifurcación de Hopf supercrítica a lo largo de la línea magenta sólida y una subcrítica a lo largo de la línea magenta discontinua. La línea magenta punteada indica sillas neutras. La curva negra es una curva de puntos límite (LP), que representa la región donde el equilibrio positivo no es único. Indicamos además un punto de Hopf generalizado $GH = (u, v; C, Q) \approx (0.544, 0.306; 0.158, 2.292)$, un punto de cúspide $CP = (u, v; C, Q) \approx (0.133, 0.128; 0.078, 1.657)$, y un punto de Takens-Bogdanov $BT = (u, v; C, Q) \approx (0.047, 0.076; 0.084, 1.721)$. Véase también la figura 4.12, que complementa este diagrama.

cero de multiplicidad (algebraica) dos, y por lo tanto la parte lineal del sistema de ecuaciones diferenciales es nilpotente.

Motivados por la simulación numérica presentada en la figura 4.11, mostraremos que el sistema (2.1) exhibe una bifurcación de Takens-Bogdanov de codimensión 2, cuando existen dos puntos de equilibrio E_* y E_2 (condición 1(a) del teorema 8) en las proximidades de T_C . Para lograr nuestro objetivo, primero verificaremos cuáles son los valores de los parámetros para los cuales tanto la traza

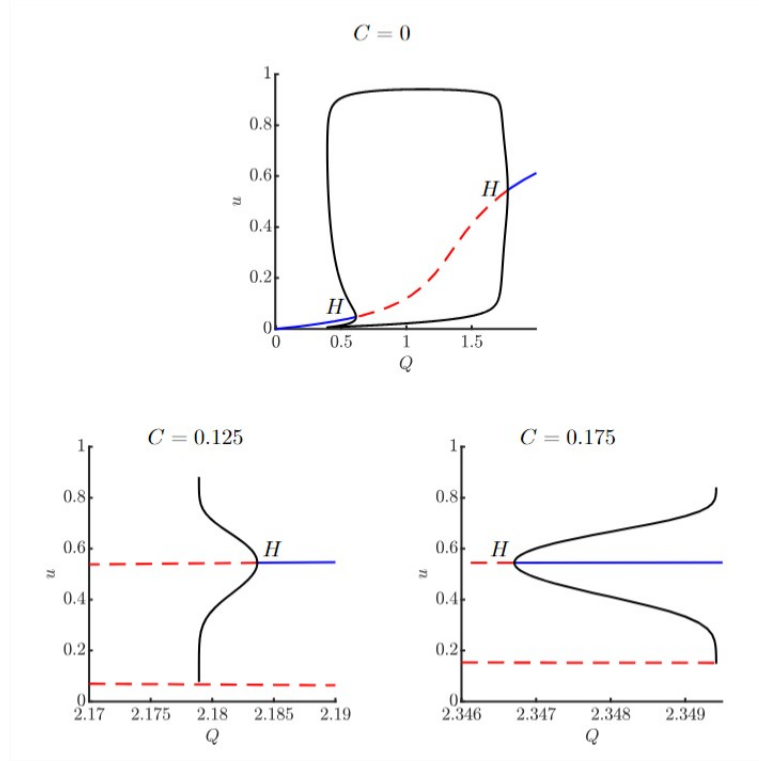


Figura 4.12: Diagrama de bifurcación que resalta los ciclos límite (curvas negras) que surgen de las bifurcaciones de Hopf (comparar con la figura 4.11). Mostramos los diagramas correspondientes para $C = 0$, $C = 0.125$ y $C = 0.175$, los dos últimos alrededor del punto GH . De hecho, en los dos últimos casos, los ciclos límite de la explosión de canard se truncan y chocan con la curva de equilibrios, dando lugar a una órbita homoclínica límite. Esto también es una verificación numérica de que las órbitas periódicas que surgen de una explosión de canard terminan en una órbita homoclínica límite siempre que el equilibrio positivo no sea único, recuerde la observación 3.

como el determinante de la matriz jacobiana $\mathcal{J}$, dada en (2.6), evaluada en el punto E_* , se anulan simultáneamente.

Proposición 16. *Consideremos la matriz jacobiana del sistema (2.1) en el punto E_* . Entonces las condiciones necesarias y suficientes para que $\text{tr } J|_{E_*} = \det J|_{E_*} =$*

0 son

$$A_* = \frac{u_*(1 - QS)}{QS} > 0, \quad (4.40)$$

$$M_* = \frac{C^2S + (C - 1)u_*^3(QS + 3) - u_*^2(C(QS + 2) - 3S) + 4CSu_* + u_*^4(QS + 4)}{u_*((C - 1)u_*(QS + 2) - C(QS + 1) + u_*^2(QS + 3))} < 0, \quad (4.41)$$

con, $A = 0.5$, $C = 0.05$ y $M = -0.1$.

Demostración. La matriz jacobiana del sistema (2.1) en el punto E_* es:

$$\mathcal{J}(P_*) = \begin{pmatrix} u_*(u_* + C) \left((A - M + AM + 2(M + 1 - A)u_* - 3u_*^2) \right) & -u_*(u_* + C) \\ \frac{S(u_* + A)(u_* + C)}{Q} & -S(u_* + A)(u_* + C) \end{pmatrix}$$

En lo que sigue vamos a despejar M de las ecuaciones $\text{tr } J|_{E_*} = 0$ y $\det J|_{E_*} = 0$.

Iniciemos por resolver $\text{tr } J|_{E_*} = 0$ para M :

$$M = \frac{p(u_*)}{Q(3u_*^2(A + C - 1) + 2A(C - 1)u_* - AC - 2Cu_* + 4u_*^3)}, \quad (4.42)$$

donde

$$p(u_*) = 5Qu_*^4 + 4Qu_*^3(A + C - 1) + u_*^2(Q(3A(C - 1) - 3C + S) + 2) + u_*(C(-2AQ + QS + 3) + AQS) + C(AQS + C).$$

Por otro lado, al resolver $\det J|_{E_*} = 0$ para M , obtenemos

$$M = \frac{1}{\left(Q(3u_*^2(A + C - 1) + 2A(C - 1)u_* - AC - 2Cu_* + 4u_*^3) \right)} \left(Cu_*(AQ(3u_* - 2) + Qu_*(4u_* - 3) + 4) + u_*^2(AQ(4u_* - 3) + Qu_*(5u_* - 4) + 3) + C^2 \right). \quad (4.43)$$

Ahora, igualamos (4.42) y (4.44) y despejando A obtenemos

$$A_* = \frac{u_*(1 - QS)}{QS}.$$

Sustituyendo este valor en (4.44), obtenemos

$$M_* = \frac{C^2 S + (C - 1)u_*^3(QS + 3) - u_*^2(C(QS + 2) - 3S) + 4CSu_* + u_*^4(QS + 4)}{u_*((C - 1)u_*(QS + 2) - C(QS + 1) + u_*^2(QS + 3))}. \quad (4.44)$$

En resumen, hemos demostrado que (4.40) son condiciones necesarias y suficientes para que $\text{tr } J|_{E_*} = \det J|_{E_*} = 0$. $\square$

Para ilustrar que la proposición 16 concuerda con los resultados numéricos presentados en la figura 4.11, se fijan los valores de los parámetros según la leyenda del pie de dicha figura: $C = 0.084$, $Q = 1.721$, $\varepsilon = S = 0.02$ y $u_* = 0.047$. Esto da como resultado $A_* = 0.493075 \approx \frac{1}{2}$ y $M_* = -0.114541 \approx -\frac{1}{10}$. Estos valores permiten verificar numéricamente las condiciones establecidas en la proposición, evidenciando la correspondencia entre el análisis teórico y los resultados computacionales.

4.2.1. Forma normal

Teorema 14. *Bajo las condiciones (4.40), el sistema (2.1) experimenta una bifurcación Takens-Bogdanov de codimensión 2 en una vecindad pequeña del punto de equilibrio positivo $E_*(u_*, v_*)$, cuando (M, A) varían cerca de (M_*, A_*) . Además se cumple lo siguiente:*

- (i) *Existen valores de los parámetros tales que el sistema (2.1) tiene un ciclo límite inestable.*
- (ii) *Existen valores de los parámetros para los que el sistema (2.1) tiene un lazo homoclínico inestable.*

Demostración. Sustituyendo (4.40) en el sistema (2.1), obtenemos el siguiente sistema de despliegue

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= u(u - C)((u + A_* + \lambda_1)(1 - u)(u - (M_* + \lambda_2)) - v) = f(u, v), \\ \frac{dy}{d\tau} &= Sv(u + A_* + \lambda_1)(u - Qv - C) = g(u, v). \end{aligned} \quad (4.45)$$

Trasladamos el origen de coordenadas al punto de equilibrio en el sistema (4.45), es decir, $x = u - u_*$, $y = v - v_*$. Luego obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= a_{00} + a_{10}x + a_{01}y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{40}x^4, \\ \frac{dy}{d\tau} &= b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{21}x^2y.\end{aligned}\tag{4.46}$$

donde

$$\begin{aligned}a_{00} &= u_*(u_* - C)((u_* + A_* + \lambda_1)(1 - u_*)(u_* - (M_* + \lambda_2)) - v_*), \\ a_{10} &= u_*(u_* - c)(2u_* - 3u_*^2 + \lambda_1 - 2u_*\lambda_1 + M_*(-1 + 2u_* + \lambda_1) + (-1 + 2u_* + \lambda_1)\lambda_2 \\ &\quad + A_*(1 + M_* - 2u_* + \lambda_2)) + u_*(-v_* + (-1 + u_*)(A_* + u_* + \lambda_1)(M_* - u_* + \lambda_2)), \\ &\quad + (C + u_*)(-v_* + (-1 + u_*)(A_* + u_* + \lambda_1)(M_* - u_* + \lambda_2)), \\ a_{01} &= (C - u_*)u_*, \quad a_{11} = C - 2u_*, \quad a_{21} = -1, \quad a_{40} = 1 - A_* + C + M_* - 5u_* - \lambda_1 - \lambda_2, \\ a_{20} &= 3M_*u_* - 6u_*^2 - 6M_*u_*^2 + 10u_*^3 + v_* + M_*\lambda_1 - 3u_*\lambda_1 - 3M_*u_*\lambda_1 + 6u_*^2\lambda_1 + 3u_*\lambda_2 - 6u_*^2\lambda_2 \\ &\quad + \lambda_1\lambda_2 - 3u_*\lambda_1\lambda_2 + A_*(M_* - 3M_*u_* + 3u_*(-1 + 2u_* - \lambda_2) + \lambda_2 + C(1 + M_* - 3u_* + \lambda_2)) \\ &\quad + C(-6u_*^2 + \lambda_1 + M_*(-1 + 3u_* + \lambda_1) + (-1 + \lambda_1)\lambda_2 + 3u_*(1 - \lambda_1 + \lambda_2)), \\ a_{30} &= -M_* + 4u_* + 4M_*u_* - 10u_*^2 + \lambda_1 + M_*\lambda_1 - 4u_*\lambda_1 + (-1 + 4u_* + \lambda_1)\lambda_2 \\ &\quad + A_*(1 + C + M_* - 4u_* + \lambda_2) - C(1 + M_* - 4u_* - \lambda_1 + \lambda_2), \\ b_{00} &= Sv_*(u_* + A_* + \lambda_1)(u_* - Qv_* - C), \\ b_{10} &= Sv_*(A - C - Qv_* + 2u_* + \lambda_1), \\ b_{01} &= S(u_* - C - Qv_*)(A_* + u_* + \lambda_1), \\ b_{20} &= Sv_*, \quad b_{11} = S(A_* - C - Qv_* + 2u_* + \lambda_1), \quad b_{21} = S\end{aligned}$$

Ahora hacemos el cambio de variable $U = y$ y $V = \frac{dy}{d\tau}$, de tal forma que el sistema (4.46) se transforma en

$$\begin{aligned}\frac{dU}{d\tau} &= V, \\ \frac{dV}{d\tau} &= a_{00}b_{10} + (a_{10}b_{10} + 2a_{00}b_3)x + (a_{01}b_{10} + a_{00}b_{11})U + b_{01}V + (a_{20}b_{10} + 2a_{10}b_{20})x^2 \\ &\quad + (a_{01}b_{11} + a_{00}b_{12})U^2 + (a_{11}b_{10} + 2a_{01}b_{20} + a_{10}b_{11} + 2a_{00}b_{21})xU + b_{11}xV + 2b_{02}UV \\ &\quad + \mathcal{O}(|(U, V)|^3).\end{aligned}$$

El siguiente paso es lograr que esta última ecuación solo dependa de U y V . Luego debemos expresar a x en términos de U y V más términos de orden tres. Para llevar a cabo esto, proponemos que x sea de la siguiente forma:

$$x = x(U, V) = \delta_0 + \delta_1 U + \delta_2 V + \delta_3 U^2 + \delta_4 UV + \delta_5 V^2.$$

Los coeficientes δ_i para $i = 1, \dots, 5$ son calculados al reemplazar en la ecuación anterior $U = y$ y $V = b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2$ para obtener

$$\begin{aligned} x = & \delta_0 + \delta_2 b_{10}x + (\delta_1 + \delta_2 b_{01})y + (\delta_2 b_{20} + \delta_5 b_{10}^2)x^2 + (\delta_2 b_{11} + \delta_4 b_{10} + 2\delta_5 b_{10}b_{01})xy \\ & + (\delta_2 b_{02} + \delta_3 + \delta_4 b_{01} + \delta_5 b_{01}^2)y^2 + \mathcal{O}(|(x, y)|^3). \end{aligned}$$

Ahora igualamos coeficientes y obtenemos el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} \delta_0 &= 0, \\ \delta_2 b_{10} &= 1, \\ \delta_1 + \delta_2 b_{01} &= 0, \\ \delta_2 b_{20} + \delta_5 b_{10}^2 &= 0, \\ \delta_2 b_{11} + \delta_4 b_{10} + 2\delta_5 b_{10}b_{01} &= 0, \\ \delta_2 b_{02} + \delta_3 + \delta_4 b_{01} + \delta_5 b_{01}^2 &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es:

$$\delta_0 = 0, \quad \delta_1 = -\frac{b_{01}}{b_{10}}, \quad \delta_2 = \frac{1}{b_{10}}, \quad \delta_3 = \frac{b_{10}b_{01}b_{11} - b_{01}^2 b_{20} - b_{10}^2 b_{02}}{b_{10}^3},$$

$$\delta_4 = \frac{2b_{01}b_{20} - b_{10}b_{11}}{b_{10}^3}, \quad \delta_5 = -\frac{b_{20}}{b_{10}^3}.$$

Por lo tanto

$$x = -\frac{b_{01}}{b_{10}}U + \frac{1}{b_{10}}V + \frac{b_{10}b_{01}b_{11} - b_{01}^2 b_{20} - b_{10}^2 b_{02}}{b_{10}^3}U^2 + \frac{2b_{01}b_{20} - b_{10}b_{11}}{b_{10}^3}UV - \frac{b_{20}}{b_{10}^3}V^2.$$

Sustituyendo estas expresiones en $\frac{dV}{d\tau}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{dV}{d\tau} = & a_{00}b_{10} + \left[(a_{10}b_{10} + 2a_{00}b_{20}) \left(-\frac{b_{01}}{b_{10}} \right) + a_{01}b_{10} + a_{00}b_{11} \right] U + \left[\frac{2a_{00}b_{20} + a_{10}b_{10}}{b_{10}} + b_{01} \right] V \\ & + \left[-\frac{2a_{00}b_{01}^2b_{20}^2}{b_{10}^3} + \frac{2a_{00}b_{01}b_{20}b_{11}}{b_{10}^2} - \frac{2a_{00}b_{01}b_{21}}{b_{10}} - \frac{2a_{00}b_{20}b_{02}}{b_{10}} + a_{00}b_{12} + \frac{a_{10}b_{01}^2b_{20}}{b_{10}^2} - a_{10}b_{02} \right. \\ & \quad \left. - \frac{2a_{01}b_{01}b_{20}}{b_{10}} + a_{01}b_{11} + \frac{a_{20}b_{01}^2}{b_{10}} - a_{11}b_{01} \right] U^2 \\ & + \left[\frac{1}{b_{10}^3} \left(a_{11}b_{10}^3 - 2a_{20}b_{10}^2b_{01} + 2a_{01}b_{10}^2b_{20} - 2a_{10}b_{10}b_{01}b_{20} + 4a_{00}b_{01}b_{20}^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - b_{10}^2b_{01}b_{11} - 2a_{00}b_{10}b_{20}b_{11} + 2b_{10}^3b_{02} + 2a_{00}b_{10}^2b_{21} \right) \right] UV \\ & + \left[\frac{-2a_{00}b_{20}^2 + a_{10}b_{10}b_{20} + a_{20}b_{10}^2 + b_{10}^2b_{11}}{b_{10}^3} \right] V^2 + \mathcal{O}(|(U, V)|^3). \end{aligned}$$

Entonces podemos escribir el sistema (4.46) como:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= V, \\ \frac{dV}{dt} &= \gamma_0 + \gamma_1 U + \gamma_2 V + \gamma_3 U^2 + \gamma_4 UV + \gamma_5 V^2 + \mathcal{O}(|(U, V)|^3), \end{aligned} \tag{4.47}$$

donde los γ_i , $i = 1, \dots, 5$ son

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= a_{00}b_{10}, & \gamma_1 &= (a_{10}b_{10} + 2a_{00}b_{20}) \left(-\frac{b_{01}}{b_{10}} \right) + a_{01}b_{10} + a_{00}b_{11}, \\ \gamma_2 &= \frac{2a_{00}b_{20} + a_{10}b_{10}}{b_{10}} + b_{01}, \\ \gamma_3 &= -\frac{2a_{00}b_{01}^2b_{20}^2}{b_{10}^3} + \frac{2a_{00}b_{01}b_{20}b_{11}}{b_{10}^2} - \frac{2a_{00}b_{01}b_{21}}{b_{10}} - \frac{2a_{00}b_{20}b_{02}}{b_{10}} + a_{00}b_{12} + \frac{a_{10}b_{01}^2b_{20}}{b_{10}^2} - a_{10}b_{02} \\ &\quad - \frac{2a_{01}b_{01}b_{20}}{b_{10}} + a_{01}b_{11} + \frac{a_{20}b_{01}^2}{b_{10}} - a_{11}b_{01} \\ \gamma_4 &= \frac{1}{b_{10}^3} \left(a_{11}b_{10}^3 - 2a_{20}b_{10}^2b_{01} + 2a_{01}b_{10}^2b_{20} - 2a_{10}b_{10}b_{01}b_{20} + 4a_{00}b_{01}b_{20}^2 \right. \\ &\quad \left. - b_{10}^2b_{01}b_{11} - 2a_{00}b_{10}b_{20}b_{11} + 2b_{10}^3b_{02} + 2a_{00}b_{10}^2b_{21} \right), \\ \gamma_5 &= \frac{-2a_{00}b_{20}^2 + a_{10}b_{10}b_{20} + a_{20}b_{10}^2 + b_{10}^2b_{11}}{b_{10}^3} \end{aligned}$$

bajo la condición $\gamma_3\gamma_4 \neq 0$.

Ahora introducimos un nuevo tiempo a través de $\tau = \frac{t}{1 - \gamma_5 U}$ tal que $dt = (1 - \gamma_5 U)d\tau$. Además, definimos las nuevas variables $x = U$ y $y = (1 - \gamma_5 U)V$, de

tal forma que las ecuaciones (4.47) se transforman en

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau} &= y, \\ \frac{dy}{d\tau} &= -\frac{\gamma_5 y^2}{1 - \gamma_5 x} + \left(\gamma_0 + \gamma_1 x + \frac{\gamma_2}{1 - \gamma_5 x} y + \gamma_3 x^2 + \frac{\gamma_4}{1 - \gamma_5 x} xy \right. \\ &\quad \left. + \frac{\gamma_5}{(1 - \gamma_5 x)^2} y^2 + \mathcal{O}(|(x, y)|^3) \right) (1 - \gamma_5 x)^2.\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\tau} &= \frac{dV(1 - \gamma_5 U)}{d\tau} \\ &= V \left(-\gamma_5 \frac{dU}{d\tau} \right) + (1 - \gamma_5 U) \frac{dV}{d\tau} \\ &= -\frac{\gamma_5 y^2}{1 - \gamma_5 x} + \frac{dy}{d\tau},\end{aligned}$$

lo cual se cumple si y solo si $-\frac{\gamma_5 y^2}{1 - \gamma_5 x} = 0$. Como consecuencia

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\tau} &= (1 - \gamma_5 x)^2 \left(\gamma_0 + \gamma_1 x + \frac{\gamma_2}{1 - \gamma_5 x} y + \gamma_3 x^2 + \frac{\gamma_4}{1 - \gamma_5 x} xy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3) \right) \\ &= \gamma_0 + (\gamma_1 - 2\gamma_0\gamma_5)x + \gamma_2 y + (\gamma_3 - 2\gamma_1\gamma_5 + \gamma_0\gamma_5^2)x^2 \\ &\quad + (\gamma_4 - \gamma_2\gamma_5)xy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3).\end{aligned}$$

En lo que sigue, continuaremos denotando la variable independiente nueva τ como t . Entonces el sistema (4.47) toma la forma

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= \psi_1 + \psi_2 x + \psi_3 y + \psi_4 x^2 + \psi_5 xy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3).\end{aligned}\tag{4.48}$$

donde

$$\psi_1 = \gamma_0, \quad \psi_2 = \gamma_1 - 2\gamma_0\gamma_5, \quad \psi_3 = \gamma_2, \quad \psi_4 = \gamma_3 - 2\gamma_1\gamma_5 + \gamma_0\gamma_5^2, \quad \psi_5 = \gamma_4 - \gamma_2\gamma_5.$$

Estos coeficientes pueden ser expresados en términos de Q , λ_1 y λ_2 . En particular tenemos que

$$\psi_4 = h_1(Q, \lambda_1, \lambda_2),$$

donde $h_1(Q, \lambda_1, \lambda_2)$ es una función que depende de Q , y los coeficientes de (λ_1, λ_2) , dependen suavemente de Q . Notemos que $\psi_4 < 0$ cuando $1.7 < Q < 1.8$ y λ_1, λ_2 son pequeños, ver la figura 4.13.

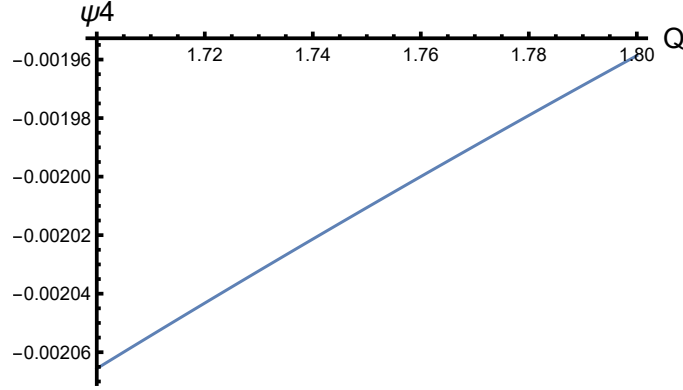


Figura 4.13: Gráfica de ψ_4 la cual es negativa cuando $1.7 < Q < 1.8$.

Ahora introducimos un nuevo tiempo $\tau = \sqrt{-\psi_4}$, tal que $\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{-\psi_4}$. Además definimos las variables $x_1 = x$ y $x_2 = \frac{y}{\sqrt{-\psi_4}}$. Luego, en las nuevas variables las ecuaciones del sistema (4.48) son

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= -\frac{\psi_1}{\psi_4} - \frac{\psi_2}{\psi_4}x_1 + \frac{\psi_1}{\sqrt{-\psi_4}}x_2 - x_1^2 + \frac{\psi_5}{\sqrt{-\psi_4}}x_1x_2 + \mathcal{O}(|(x_1, x_2)|^3) \end{aligned}$$

En lo que sigue, continuaremos denotando la variable independiente nueva τ como t . Entonces el sistema (4.48) toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{\psi_1}{\psi_4} - \frac{\psi_2}{\psi_4}x_1 + \frac{\psi_3}{\sqrt{-\psi_4}}x_2 - x_1^2 + \frac{\psi_5}{\sqrt{-\psi_4}}x_1x_2 + \mathcal{O}(|(x_1, x_2)|^3). \end{aligned} \tag{4.49}$$

Definimos el cambio de variable

$$x = x_1 + \frac{\psi_2}{2\psi_4}, \quad y = x_2.$$

donde, sin pérdida de generalidad, x y y no son las mismas variables definidas anteriormente.

Luego las ecuaciones del sistema (4.49) se pueden escribir como

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{\psi_1}{\psi_4} + \frac{\psi_2^2}{4\psi_4^2} + \left(\frac{\psi_3}{\sqrt{-\psi_4}} - \frac{\psi_2\psi_5}{2\psi_4\sqrt{-\psi_4}} \right) y - x^2 + \frac{\psi_5}{\sqrt{-\psi_4}} xy + \mathcal{O}(|(x, y)|^3).\end{aligned}\tag{4.50}$$

Tenemos que

$$\psi_5 = h_2(Q, \lambda_1, \lambda_2),$$

donde $h_2(Q, \lambda_1, \lambda_2)$ es una función que depende de Q cuyos coeficientes de (λ_1, λ_2) dependen suavemente de Q . Además, $\psi_5 > 0$ cuando $1.7 < Q < 1.8$ y λ_1, λ_2 son pequeños, ver la figura 4.14.

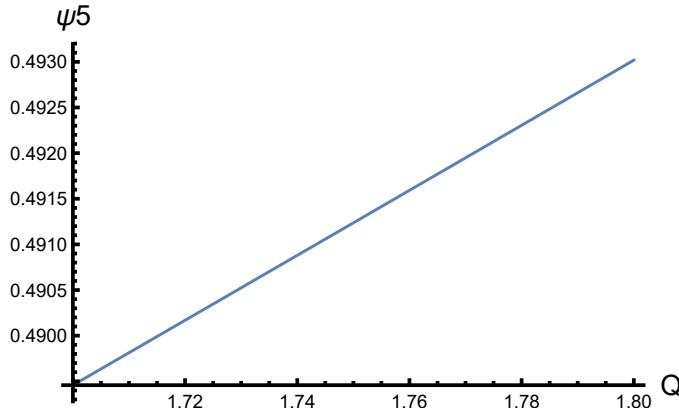


Figura 4.14: Gráfica de ψ_5 la cual es positiva cuando $1.7 < Q < 1.8$.

Finalmente, introducimos una nueva escala de tiempo $\tau = \frac{\sqrt{-\psi_4}}{\psi_5}t$ tal que $d\tau = \frac{\sqrt{-\psi_4}}{\psi_5}dt$, y tomando en cuenta las nuevas variables $x_1 = \frac{\psi_5^2}{\psi_4}x$, $x_2 = \frac{\psi_5^3}{\psi_4\sqrt{-\psi_4}}y$, las ecuaciones del sistema (4.50) se transforman en

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{d\tau} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \frac{\psi_1\psi_5^4}{\psi_4^3} - \frac{\psi_2^2\psi_5^4}{4\psi_4^4} + \left(\frac{\psi_2\psi_5^2}{2\psi_4^2} - \frac{\psi_3\psi_5}{\psi_4} \right) x_2 + x_1^2 + x_1x_2 + \mathcal{O}(|(x_1, x_2)|^3).\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad, escribimos τ como t , y obtenemos la forma versal del

sistema (4.46)

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \tau_1 + \tau_2 x_2 + x_1^2 + x_1 x_2 + \mathcal{O}(|(x_1, x_2)|^3),\end{aligned}\tag{4.51}$$

donde

$$\tau_1 = \frac{\psi_1 \psi_5^4}{\psi_4^3} - \frac{\psi_2^2 \psi_5^4}{4\psi_4^4}, \quad \tau_2 = \frac{\psi_2 \psi_5^2}{2\psi_4^2} - \frac{\psi_3 \psi_5}{\psi_4}.$$

Con el fin de ver la independencia lineal de τ_1 y τ_2 , calculamos el determinante

$$\left| \frac{\partial(\tau_1, \tau_2)}{\partial(\lambda_1, \lambda_2)} \right|_{\lambda=0} \neq 0$$

cuando $1.7 < Q < 1.8$. Entonces τ_1 y τ_2 son parámetros linealmente independientes, y la transformación de parámetros anterior es un homeomorfismo en una vecindad pequeña del origen.

Notemos que todas las transformaciones de tiempo que hemos realizado son positivas, entonces usando los resultados en Takens [55] y Bogdanov [6] (ver también [7] y [48]) obtenemos de el sistema (4.46) el desarrollo versal del desdoblamiento de una bifurcación Takens-Bogdanov de codimensión 2 dada por (4.51). En otras palabras, el sistema (4.46) sufre una bifurcación de Takens-Bogdanov de codimensión 2 en una pequeña vecindad de $E_*(u_*, v_*)$, pues (M, A) varía cerca de (M_*, A_*) , y la bifurcación de Hopf dentro de la bifurcación de Takens-Bogdanov es subcrítica.

Obtenemos las siguientes representaciones locales de las curvas de bifurcación ver [48]:

- (i) la curva de bifurcación de silla nodo $SN = \{(\tau_1, \tau_2) | \tau_1 = 0, \tau_2 \neq 0\}$,
- (ii) La curva de bifurcación de Hopf subcrítica es $H = \{(\tau_1, \tau_2) | \tau_2 = \sqrt{-\tau_1}, \tau_1 < 0\}$,
- (iii) La curva de bifurcación homoclínica es $HL = \{(\tau_1, \tau_2) | \tau_2 = \frac{5}{7}\sqrt{-\tau_1}, \tau_1 < 0\}$.

□

A partir del diagrama de bifurcación de Takens-Bogdanov, así como de los correspondientes retratos de fase del sistema en la figura 4.15, tenemos la siguiente información.

Capítulo 5

Conclusiones

En el contexto de la dinámica ecológica presa-depredador, este trabajo se enfoca en la coexistencia de depredadores y presas, asumiendo que las presas presentan una dinámica rápida. Hemos identificado una bifurcación de Hopf singular, de la cual emergen ciclos de canard estables que aumentan de amplitud, dando lugar a una explosión de canard. Además, demostramos la existencia de un ciclo de relajación asociado a este comportamiento. Cabe recordar que en el estudio presentado se considera el efecto Allee débil, representado por $m < 0$ en el sistema (1) (o $M < 0$ en el sistema (2.1)), que garantiza la existencia del punto de equilibrio $T_C = (0, -MA)$, donde si además $C = -AMQ$, se produce una singularidad transcítica degenerada. Hemos descubierto que este punto puede comportarse de dos maneras según los parámetros: por un lado, puede comportarse como un nodo estable y, por otro, como un punto silla. En el primer caso, las órbitas cercanas a T_C , que biológicamente corresponden a una población baja de presas y una población de depredadores de $\approx -MA$, el sistema puede evolucionar hacia la extinción de la presa o hacia un ciclo de coexistencia donde el tiempo transcurrido cerca de T_C es considerablemente largo, debido precisamente a la naturaleza degenerada del punto.

Hemos encontrado (véanse la figura 4.11 y la sección 4.2) la existencia de un punto de Takens-Bogdanov. Esto, naturalmente, conduce a dinámicas locales interesantes como la bifurcación de silla nodo, bifurcación de Hopf subcrítica y bifurcación homoclínica que influyen en la dinámica global. De la figura 4.11, esta bifurcación ocurre cerca de la región donde se encuentran dos equilibrios coexistentes positivos.

Varios problemas de investigación permanecen abiertos. Aquí discutimos algunos. En las simulaciones observamos que cuando el punto de equilibrio se desplaza

a través de la variedad crítica hacia el punto T_C su estabilidad cambia y también varía el signo del parámetro $\mathcal{A}$. Recordemos que este parámetro determina la criticidad de la bifurcación de Hopf, por lo que este cambio sugiere la ocurrencia de una bifurcación de Hopf generalizada. Se puede consultar la figura 4.11 para una visualización más clara. Un problema adicional de interés, que no se aborda en el presente trabajo, es el de la ciclicidad [61, 60]. Su estudio en el contexto degenerado constituye una línea de investigación relevante que podría explorarse en trabajos futuros.

Bibliografía

- [1] Albarran-García, R., Alvarez-Ramírez, M., Jardón-Kojakhmetov, H., *Singular bifurcations in a slow-fast modified Leslie-Gower model*, Results Appl. Math. 26 (2025), Paper No. 100558, 29 pp. DOI 10.1016/j.rinam.2025.100558
- [2] Álvarez, M. J., Ferragut, A., Jarque, X., *A survey on the blow up technique*, International Journal of Bifurcation and Chaos, vol. 21, 11, 3103-3118, 2011, World Scientific.
- [3] Arancibia-Ibarra, C., Flores, J., *Dynamics of a Leslie-Gower predator-prey model with Holling type II functional response, Allee effect and a generalist predator*, Mathematics and Computers in Simulation, 0378-4754, vol. 188, 2, 1-22, 2021, Elsevier (North-Holland), Amsterdam, DOI 10.1016/j.matcom.2021.03.035.
- [4] Andronov, A.A., Leontovich, E.A., Gordon, I.I., Maier, A.G., *Qualitative theory of second-order dynamical systems*, John Wiley and Sons, New York, 1973.
- [5] Birkhoff, G., Rota, G.C., *Ordinary differential equations*, 4rd. Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.
- [6] Bogdanov, R. I., *The versal deformations of a singular point on the plane in the case of zero eigenvalues*, Trudy Sem. Petrovsk. Vyp., **2** (1976), 37-65.
- [7] Chow, S. N., Li, Ch., Wang, D., *Normal forms and bifurcation of planar vector fields*, Reprint of the 1994 original, Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [8] Carvalho, D. O., Costa-da-Silva, A. L., Lees, R. S., *Two step male release strategy using transgenic mosquito lines to control transmission of vector-borne diseases*, Acta Tropica, **132** (2014), S170-S177.
- [9] Courchamp, F., Berec, L., Gascoigne, J., *Allee effects in ecology and conservation*, Oxford University Press, Oxford, 2008.

- [10] Chow, S. N., Li, Cheng Z., Wang, D., *Normal forms and bifurcation of planar vector fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994, DOI. 10.1017/CBO9780511665639.
- [11] Chowdhury, P. R. and Petrovskii, S. and Banerjee, M., *Oscillations and pattern formation in a slow-fast prey-predator system*, Bull. Math. Biol. vol. 83, 2021, 11, Paper No. 110, 41, DOI. 10.1007/s11538-021-00941-0.
- [12] Dhooge, A., Willy, G., Yuri A. K., *MATCONT: A MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs*, ACM Trans. Math. Softw., 2003, vol. 29, 141-164, url. <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:54259379>.
- [13] Dumortier, F., *Techniques in the theory of local bifurcations: blow-up, normal forms, nilpotent bifurcations, singular perturbations*, Bifurcations and periodic orbits of vector fields (Montreal, 1992), NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci., vol. 408, 19-73, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.
- [14] Dumortier, F. and Roussarie, R., *Canard cycles and center manifolds*, Memoirs of the American Mathematical Society, vol. 121, 1996, 577, DOI. 10.1090/memo/0577.
- [15] Fenichel, N., *Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations*, Journal of Differential Equations, vol. 31, 1, 1979, 53-98, DOI. 10.1016/0022-0396(79)90152-9.
- [16] Fang, K, Zhu, Z., Chen, F., Li, Z., *Qualitative and bifurcation analysis in a Leslie-Gower model with Allee effect*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, vol. 21, 2022, 3, Paper No. 86, 19, 1575-5460, 4440842, DOI. 10.1007/s12346-022-00591-0.
- [17] Freedman, H. I., *Deterministic mathematical models in population ecology*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 57, Marcel Dekker, Inc., New York, 1980.
- [18] Gao, Y., Yao, S., *Dynamical analysis of a modified Leslie-Gower Holling-type II predator-prey stochastic model in polluted environments with interspecific competition and impulsive toxicant input*, J. Biol. Dyn., vol. 16, 2022, 1, 840-858, DOI. 10.1080/17513758.2022.2155717.
- [19] Golubitsky, M., Guillemin, V., *Stable mappings and their singularities*, vol. 14, Springer Science & Business Media, 2012

- [20] Gonzalez-Olivares, E., Rojas-Palma, A., *Global stability in a modified Leslie-Gower type predation model assuming mutual interference among generalist predators*, Math. Biosci. Eng., vol. 17, 2020, 6, 7708-7731, DOI. 10.3934/mbe.2020392.
- [21] Guckenheimer, K., Holmes, P. J., *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Springer New York, 2002.
- [22] Hek, G., *Geometric Singular Perturbation Theory in Biological Practice*, vol. 60, 2009, 347-86, Journal of mathematical biology, DOI. 10.1007/s00285-009-0266-7.
- [23] Holling, C.S., *The components of predation as revealed by a study of small-mammal predation of the European sawfly*, Can. Entomol, 293-320, 91, 1959, DOI. 10.4039/Ent91293-5.
- [24] Holling, C.S., *Some characteristics of simple types of predation and parasitism*, Can. Entomol, 385-398, vol. 91, 1959.
- [25] Huang, J., Ruan, S., Yu, P., Zhang, Y., *Bifurcation analysis of a mosquito population model with a saturated release rate of sterile mosquitoes*. SIAM J. Appl. Dyn. Syst., **18** (2) (2018), 939-972.
- [26] Jardón-Kojakhmetov, H., Kuehn, Ch., *A survey on the blow-up method for fast-slow systems*, Mexican mathematicians in the world-trends and recent contributions, Contemp. Math., vol. 775, 115-160, Amer. Math. Soc., [Providence], RI, [2021] ©2021, DOI. 10.1090/conm/775/15591.
- [27] Jones, C. K. R. T., *Geometric singular perturbation theory*, Dynamical systems (Montecatini Terme, 1994), Lecture Notes in Math., vol. 1609, 44-118, Springer, Berlin, 1995, DOI. 10.1007/BFb0095239.
- [28] Hirschberg, P., Knobloch, E., *An unfolding of the Takens-Bogdanov singularity*, Quarterly of Applied Mathematics, vol. 49, 2, 1991, 281-287.
- [29] Khan, Q. J. A., Balakrishnan, E., Wake, G. C., *Analysis of a predator-prey system with predator switching*, Bull. Math. Biol., vol. 66, 204, 1, 109-123, DOI. 10.1016/j.bulm.2003.08.005.
- [30] Knipling, E. F., *Possibilities of insect control or eradication through the use of sexually sterile males*, J. Econ. Entomol., **48** (1955), 459-462.
- [31] Krupa, M., Szmolyan, P., *Geometric analysis of the singularly perturbed planar fold*, Multiple-time-scale dynamical systems (Minneapolis, MN, 1997),

- IMA Vol. Math. Appl., vol. 122, 89-116, Springer, New York, 2001, DOI. 10.1007/978-1-4613-0117-2_4.
- [32] Krupa, M., Szmolyan, P., *Extending slow manifolds near transcritical and pitchfork singularities*, Nonlinearity, vol. 14, 2001, 6, 1473-1491, DOI. 10.1088/0951-7715/14/6/304.
- [33] Krupa, M., Szmolyan, P., *Extending geometric singular perturbation theory to nonhyperbolic points fold and canard points in two dimensions*, SIAM Journal on Mathematical Analysis, vol. 33, 2001, 2, 286-314, DOI. 10.1137/S0036141099360919.
- [34] Krupa, M., Szmolyan, P., *Relaxation oscillation and canard explosion*, Journal of Differential Equations, vol. 174, 2001, 2, 312-368, DOI. 10.1006/jdeq.2000.3929.
- [35] Christian, H., *Multiple time scale dynamics*, Springer, vol.191, 2015.
- [36] Kuznetsov, Y.A., *Elements of applied bifurcation theory*, vol. 112. Springer, Berlin (2013).
- [37] Lang, S., *Algebra*, 3rd. Edition, Addison-Wesley, 1993.
- [38] Leslie, P. H. and Gower, J. C., *The properties of a stochastic model for the predator-prey type of interaction between two species*, Biometrika, vol. 47, 1960, 219-234, DOI.10.1093/biomet/47.3-4.219.
- [39] Li, J., *Simple mathematical models for interacting wild and transgenic mosquito populations*, Math. Biosci., **189** (2004), 39-59.
- [40] Lotka, A. J., *Elements of Physical Biology*, Williams and Wilkins, Baltimore, 1925.
- [41] D. Ludwig and D. D. Jones and C. S. Holling, *Qualitative analysis of insect outbreak systems: the spruce budworm and forest*, Foundations of Ecology II, University of Chicago Press, 2002, 547-564, DOI. 10.7208/chicago/9780226125534-035.
- [42] De Maesschalck, P., Schechter, S., *The entry-exit function and geometric singular perturbation theory*, J. Differential Equations, vol. 260, 2016, 8, 6697-5715, DOI. 10.1016/j.jde.2016.01.008.
- [43] De Maesschalck, P., Doan, T. S., Wynen, J., *Intrinsic determination of the criticality of a slow-fast Hopf bifurcation*, J. Dynam. Differential Equations, vol. 33, 2021, 4, 2253-2269, DOI. 10.1007/s10884-020-09903-x.

- [44] Muratori, S., Rinaldi, S., *Remarks on competitive coexistence*, SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 49, 1989, 5, 1462-1472, DOI. 10.1137/0149088.
- [45] Murray, J., *Mathematical biology*, Springer-Verlag, NY, 2nd edition, 2002.
- [46] Olver, P., *Classical Invariant Theory*, London Math. Soc., Student Texts, Vol.44, Cambridge Univ. Press, New York, 1999.
- [47] Peixoto, M. M. *On structural stability*, Ann. of Math., **69** (1959), 199-222.
- [48] Perko, L., *Differential equations and dynamical systems*, Texts in Applied Mathematics, vol. 17, 3rd edition, Springer-Verlag, New York, 2001, DOI: 10.1007/978-1-4613-0003-8.
- [49] Qiu, H., Guo, S., *Bifurcation structures of a Leslie-Gower model with diffusion and advection*, Appl. Math. Lett., vol. 35, 2023, Paper No. 108391, 6, DOI: 10.1016/j.aml.2022.108391.
- [50] Ruan, S., Xiao, D., *Imperfect and Bogdanov-Takens bifurcations in biological models: from harvesting of species to isolation of infectives*, J. Math. Biol., vol. 87, 2023, 1, Paper No. 17, 26, DOI: 10.1007/s00285-023-01951-3.
- [51] Schreiber, S. J., *Allee effects, extinctions, and chaotic transients in simple population models*, Theoretical Population Biology, vol. 64, 2, 201-209, 2003, DOI: 10.1016/S0040-5809(03)00072-8.
- [52] Shen, J., *Canard limit cycles and global dynamics in a singularly perturbed predator-prey system with non-monotonic functional response*, Nonlinear Analysis. Real World Applications. An International Multidisciplinary Journal, vol. 31, 2016, 146-165, DOI: 10.1016/j.nonrwa.2016.01.013.
- [53] Sotomayor, J., *Generic bifurcations of dynamical systems*. Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971), pp. 561-582. Academic Press, New York, 1973.
- [54] Stenseth, N. C. and Falck, W. and Bjornstad, O. and Krebs, C., *Population regulation in snowshoe hare and Canadian lynx: Asymmetric food web configurations between hare and lynx*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America vol.94, 1997, 5147-52, DOI. 10.1073/pnas.94.10.5147
- [55] Takens, F., *Forced oscillations and bifurcations, in Applications of Global Analysis I*, Comm. Math. Inst. Rijksuniv. Utrecht 3, Mathematisch Instituut der Rijksuniversiteit Utrecht, the Netherlands, 1974, 1-59.

- [56] Takens, F., *Constrained equations: a study of implicit differential equations and their discontinuous solutions*. In: Hilton, P. (eds) Structural Stability, the Theory of Catastrophes, and Applications in the Sciences. Lecture Notes in Mathematics, vol 525. 1976, Springer, Berlin, Heidelberg. DOI: 10.1007/BFb0077850
- [57] Volterra, V., *Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi*, Mem. Acad. Lincei, 1926, Vol. 6, 2, 31-113.
- [58] Wang, Ch., Zhang, X., *Canards, heteroclinic and homoclinic orbits for a slow-fast predator-prey model of generalized Holling type III*, J. Differential Equations, vol.267, 2019, 6, 3397-3441, DOI: 10.1016/j.jde.2019.04.008.
- [59] Xu, Y., Yang, Y., Meng, F., Ruan, S., *Degenerate codimension-2 cusp of limit cycles in a Holling-Tanner model with harvesting and anti-predator behavior*, Nonlinear Anal. Real World Appl., vol. 76, 2024, Paper No. 103995, 33, DOI: 10.1016/j.nonrwa.2023.103995.
- [60] Yao, J. and Huzak, R., *Cyclicity of the Limit Periodic Sets for a Singularly Perturbed Leslie-Gower Predator-Prey Model with Prey Harvesting*, Journal of Dynamics and Differential Equation, 2022, DOI: 10.1007/s10884-022-10242-2.
- [61] Yao, J. and Huang, J. and Huzak, R., *Cyclicity of slow-fast cycles with two canard mechanisms*, Chaos, Vol. 34, 2024, No. 5, Paper No. 053112,11, DOI: 10.1063/5.0201887.
- [62] Zhong, L. and Shen, J., *Degenerate Transcritical Bifurcation Point can be an Attractor: A Case Study in a Slow-Fast Modified Leslie-Gower Model*, Qual. Theory Dyn. Syst., vol. 21, No. 76, 2022, DOI: 10.1007/s12346-022-00608-8.
- [63] Zhu, Z., Liu, X., *Canard cycles and relaxation oscillations in a singularly perturbed Leslie-Gower predator-prey model with Allee effect*, Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., vol. 32, 2022, 5, Paper No. 2250071, 23, DOI: 10.1142/S0218127422500717.

doctorado.pdf doctorado.pdf  Acta doctorado.pdf