Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

DUALIDAD EN CATEGORÍAS Y MÓDULOS

Tesis que presenta
Benigno Mercado Berrum
Para obtener el grado de
Maestro en ciencias (Matemáticas)

Asesor:	Dr. Rogelio Fernández Alonso González
Jurado calificador:	
Presidente:	Dr. Hugo Alberto Rincón Mejía
Secretario:	Dr. Rogelio Fernández Alonso González
Vocal:	Dra. Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda

Ciudad de México, Septiembre de 2019

Índice general

Agradecimientos

Le doy gracias a Dios por darme una buena familia, por siempre brindarme salud y por darme la vida.

A mis padres por todo el apoyo que me han dado en el transcurso de mi vida, por darme la educación, los valores y las herramientas necesarias para enfrentarme a la dura vida y sobre todo por hoy ser la persona que soy y permitirme este logro.

A mi Asesor de tesis, el Doctor en Ciencias Rogelio Fernández Alonso González por los conocimientos, la confianza y el apoyo brindado, no solo a lo largo de este trabajo, también en mi trayectoria académica.

A mis compañeros de clase y amigos por su amistad, en general, a las personas que hicieron la estancia en la universidad mucho más divertida. Así también a todos aquellos que hoy en día me apoyan incondicionalmente.

Finalmente a la Universidad Autónoma Metropolitana, sin duda alguna es un gran orgullo ser universitario.

Introducción

"La dualidad del hombre consiste en dos formas de personalidad patronas: apolineo (serenidad, claridad, razón...) y por otro lado el dionisiaco (exceso, impulsividad, erotismo...) que hacen que la vida del ser humano tenga sentido".

Autor anónimo.

En matemáticas, una *dualidad*, generalmente hablando, traduce conceptos, teoremas o estructuras matemáticas en otros conceptos, teoremas o estructuras, en una manera uno a uno. En el contexto de las matemáticas, la dualidad posee numerosos significados y aunque es un concepto muy penetrante e importante en las matemáticas modernas y un tema general importante que se ha manifestado en casi todas las áreas de las matemáticas, no hay una sola definición universal aceptada que unifique todos los conceptos de dualidad.

Desde el punto de vista de la *Teoría de Categorías*, la dualidad también se puede ver como un funtor, al menos en el ámbito de los espacios vectoriales. Este funtor asigna a cada espacio su espacio dual y la construcción de retorno asigna a cada morfismo $f : V \to W$ su dual $f^* : W^* \to V^*$.

Muchas dualidades matemáticas entre objetos de dos tipos corresponden a emparejamientos por ejemplo, la dualidad del álgebra lineal se corresponde con mapeos bilineales de pares de espacios vectoriales a escalares, es por ello que surgió el interés de ver si dicha dualidad se podía trasladar a los módulos y de no ser así en general, ver bajo qué condiciones sí se puede trasladar.

En este trabajo nos enfocaremos en ver la dualidad desde diferentes perspectivas en la rama del Algebra, en particular en las categorías de módulos. En el capítulo 1 se iniciará mirando la dualidad en los espacios vectoriales, en la cual se puede garantizar la existencia de un monomorfismo de dicho espacio en su *doble dual*.

El problema radicará cuando esta propiedad la extendamos a una categoría de R-módulos para cualquier anillo R, es decir, en dicha categoría resulta que la propiedad que se cumple para los espacios vectoriales en general no se cumple para todos los módulos. Por ende en dicho capítulo introduciremos las nociones básicas de módulos, categorías, funtores y transformaciones naturales.

Una vez que tengamos las nociones básicas, en el capítulo 2 primero veremos que la existencia del monomorfismo referido en el capítulo 1 en general no existe, después analizaremos algunos anillos (los anillos QF) para los cuales dicho monomorfismo sí se puede garantizar. Cabe mencionar que para hablar del módulo dual es de vital importancia primero hablar sobre el funtor Hom (por esta razón dicho funtor no se introdujo en los preliminares) el cual analizaremos a fondo y veremos algunas de sus propiedades más importantes respecto a módulos.

Debido al problema que se tiene al no poder garantizar la existencia de un R-monomorfismo entre un R-módulo y su doble dual para cualquier anillo R, en el capítulo 3 se darán condiciones necesarias y suficientes para mostrar que dicha propiedad (de los espacios vectoriales) pueda ser extendida a la categoría de los módulos.

Para lograr dicho objetivo estudiaremos los *módulos cogeneradores* y un módulo especial, llamado el *módulo carácter*. Así, al redefinir el concepto de módulo dual utilizando el módulo carácter se podrá garantizar la generalización de los espacios vectoriales a módulos, es decir, mediante el módulo carácter siempre se podrá garantizar la existencia de un R-monomorfismo (para cualquier anillo R) entre un R-módulo y su doble dual.

En el capítulo 4 se analizará otro tipo de dualidad, *la dualidad a nivel categórico*, es decir, dada una categoría definiremos su categoría opuesta (dual) y exhibiremos un ejemplo donde dicha *dualidad* se pierde, a su vez analizaremos también que sucede con la categoría opuesta de los módulos para ciertos anillos en particular. Más en específico, analizaremos cómo dicha dualidad se expresa entre los módulos inyectivos y los proyectivos, en particular cuándo los anillos son *perfectos* y *semiperfectos*, así como la asimetría de dicha dualidad.

Por último, en el capítulo 5 analizaremos otro tipo de dualidad, por un lado tenemos *las equivalencias categóricas* y por otro *las dualidades categóricas*, las cuales vistas como teorías resultan ser duales entre sí, además en el caso particular de las dualidades categóricas se observará que en general para cualesquiera dos anillos R y S sus respectivas categorías de módulos no resultan ser duales, sin embargo, al restringirnos a algunas subcategorías veremos que dichas categorías resultan ser duales entre sí y ese es otro tipo de dualidad que se verá en este trabajo.

Cabe mencionar que durante este trabajo supondremos que todo anillo es asociativo y con uno, además el funtor producto tensorial también será utilizado y dado que dicho tema se escapa un poco a nuestros intereses, le dedicaremos unas páginas al final del trabajo.

Capítulo 1

Preliminares

"La dualidad es lo que hace que el universo este completo...
El amor y el odio pueden coexistir en un mismo ser".
Autor anónimo.

Como bien lo dice su nombre, en este capítulo se presentarán las nociones básicas con las cuales se realizará dicho trabajo. Se dará inicio recordando la noción de el espacio dual de un K-espacio vectorial para de esta forma generalizar dicho concepto a los módulos.

Como el trabajo se centrará principalmente en las *categorías de módulos*, se introducirán los conceptos de categoría, funtores, transformación natural y algunas propiedades que cumplen ciertos módulos con dichas nociones. Los conceptos de módulo, homomorfismo, monomorfismo, epimorfismo, isomorfismo, suma directa, sumando directo y producto directo se supondrán conocidos. Si el lector no está familiarizado con dichos conceptos puede revisarlos en [3].

También dedicaremos una sección para hablar de los módulos proyectivos e inyectivos ya que dichos módulos jugarán un papel importante en dicho trabajo y siempre se estarán mencionando.

1.1. El dual de un espacio vectorial

Recordemos que a todo campo K se le puede dar estructura de espacio vectorial sobre sí mismo, por ende si V es un K-espacio vectorial entonces tiene sentido pensar en las transformaciones lineales de V en K. Tales transformaciones reciben el nombre de `funcionales lineales` en V.

No es difícil verificar que el conjunto de funcionales lineales en V tiene estructura de K-espacio vectorial con la suma puntual y el producto por escalar usual. Con esto daremos inicio al estudio de los espacios duales.

Definición 1.1.1. *Sea V un K-espacio vectorial. Se llama* `espacio dual` *de V, y se denota por V^* al K-espacio vectorial*

$$V^* = \{f : V \to K \mid f \textit{es un funcional lineal}\}.$$

Notemos que si V es de dimensión finita entonces resulta que $dim(V) = dim(V^*)$ pues

$$dim(V^*) = dim(L(V,K)) = dim(V)dim(K) = dim(V)$$

donde $L(V,K) = V^*$, $dim(K) = 1$ y $dim(L(V,K)) = dim(V)dim(K)$ siempre se cumple para espacios de dimensión finita; de esta forma se tiene que V y V^* son isomorfos.

Más aún, podemos definir el `doble dual` V^{**} de V como el dual de V^*. De hecho, existe una identificación natural de V en V^{**} la cual se mostrará más adelante.

Dado que V^* es un K-espacio vectorial entonces tiene sentido hablar de bases, y como dicho espacio depende en cierta forma de V, no es de extrañar que dichas bases dependan de las bases de V.

Proposición 1.1.2. *Si V es un K-espacio vectorial de dimensión finita y $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V entonces existe una única base*
$\beta^* = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ de V^* tal que

$$f_i(v_j) = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j. \end{cases}$$

Dicha base se conoce como la ***base dual*** *de β.*

Demostración. La demostración se puede encontrar en [11, pág 112]. □

Cabe señalar que la base dual se definió para el caso finito, sin embargo, si V no es de dimensión finita se puede obtener un conjunto linealmente independiente, y por ende una base.

Definición 1.1.3. *Sea V un K-espacio vectorial, se define* ***la evaluación*** *$e_V : V \to V^{**}$ de la siguiente manera: $e_V(v)(f) = f(v)$ para toda $f \in V^*$, donde $e_V(v) : V^* \to K$ para cada $v \in V$.*

Una de las propiedades principales que guardan los espacios vectoriales a través de la evaluación es la siguiente.

Teorema 1.1.4. *Si V es un K-espacio vectorial entonces se cumple lo siguiente:*

(*a*) *e_V es una transformación lineal.*

(*b*) *e_V es inyectiva.*

(*c*) *Si $dim(V)$ es finita entonces e_V resulta ser una biyección.*

Demostración. (*a*) Es claro que e_V es una transformación lineal pues para cada $a \in K$ y $u, v \in V$ se cumple que para toda $f \in V^*$

$$\begin{aligned} e_V(ru+v)(f) &= f(ru+v) \\ &= rf(u) + f(v) \\ &= re_V(u)(f) + e_V(v)(f) \end{aligned}$$

Por lo tanto $e_V(ru+v) = re_V(u) + e_V(v)$ y así e_V es una transformación lineal.

(b) Observemos que $v \in ker(e_V)$ si y sólo si $f(v) = 0$ para toda $f \in V^*$. Por lo tanto para mostrar que e_V es inyectiva, sólo basta mostrar que para cada $v \neq 0$ existe $f \in V^*$ tal que $f(v) \neq 0$.
Sea $v \in V$ no cero, entonces podemos considerar el subespacio generado por v, $U =< v >$ y un complemento W de U, es decir, $U \oplus W = V$.

Por la propiedad universal de la suma directa se puede definir una transformación lineal $f : V \to K$ tal que $f(av) = a$ para cada $a \in K$ y $f(w) = 0$ para toda $w \in W$. Explícitamente, f se caracteriza por la igualdad $f(av + w) = a$ si $a \in K$ y $w \in W$.

De esta forma se cumple que $f(v) = 1$ y por lo tanto e_V es inyectiva.

(c) Si suponemos que V es de dimensión finita entonces V^* también es de dimensión finita, más aún, $dim(V) = dim(V^*)$. De la misma forma V^{**} es de dimensión finita con $dim(V^{**}) = dim(V^*)$ y como e_V resulta ser inyectiva entonces por Teoría de Conjuntos e_V resulta ser suprayectiva y por lo tanto e_V es una biyección. □

En otras palabras, para cualquier K-espacio vectorial (independientemente del campo que se elija) siempre existe una transformación lineal inyectiva de dicho espacio en su doble dual.

1.2. Módulos

Una de las estructuras algebraicas fundamentales usadas en álgebra abstracta son los *módulos*. Un *módulo* sobre un anillo es una generalización de la noción de espacio vectorial sobre un cuerpo, donde los correspondientes escalares son los elementos de un anillo (con unidad) arbitrario y donde está definida una multiplicación (a la izquierda y/o a la derecha) entre elementos del anillo y elementos del módulo.

Notación: Si M es un R-módulo izquierdo escribiremos $_RM$ y si es derecho escribiremos M_R. Nótese que si R es un anillo conmutativo entonces todo módulo izquierdo se puede ver como un módulo derecho, pero en general si R no es conmutativo esto no sucede.

En la Teoría de Módulos también interesa considerar bimódulos, es decir, módulos que tengan estructura de ser tanto izquierdo como derecho, más aún, casos en los cuales se tenga estructura de R-módulo izquierdo y S-módulo derecho donde R y S son anillos no necesariamente iguales. En estos casos se impone la condición asociativa

$$(rm)s = r(ms) \text{ para cada } r \in R,\ s \in S \text{ y } m \in M.$$

En tal caso diremos que M es un R-S-bimódulo y se denota por $_RM_S$.

En lo siguiente, siempre que se diga R-módulos, se estará pensando en módulos izquierdos.

Para cada R-módulo M, cada familia $\{m_i\}_{i\in I}$ de elementos de M define un homomorfismo de R-módulos $\phi : R^{(I)} \to M$ dado por

$$\phi((a_i)_{i\in I}) := \sum_{i\in I} a_i m_i$$

y diremos que forman un sistema de generadores de M cuando $M = \sum_i Rm_i$, es decir, cuando el correspondiente homomorfismo $\phi : R^{(I)} \to M$ es un epimorfismo.

Diremos que $\{m_i\}_{i\in I}$ es una base para M cuando ϕ es un isomorfismo, es decir, cuando cada elemento de M se pueda representar de manera única como una combinación lineal de los elementos $\{m_i\}_{i\in I}$.

Definición 1.2.1. *Decimos que un R-módulo M es* `libre` *si admite alguna base, es decir, si M es isomorfo a $R^{(I)}$ para algún conjunto de índices I.*

Otro de los conceptos importantes en la Teoría de Módulos es el de sucesión exacta. Recordemos cuándo una sucesión de módulos es exacta.

Definición 1.2.2. *Decimos que una sucesión de R-módulos $\cdots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n \xrightarrow{f_{n+1}} M_{n+1} \longrightarrow \cdots$ es una* `sucesión exacta` *si para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que $Im(f_n) = Ker(f_{n+1})$.*

Un tipo de sucesión exacta de gran importancia es la `sucesión exacta corta`.

Proposición 1.2.3. *Consideremos la siguiente sucesión exacta $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ de R-módulos. Entonces existe un homomorfismo $s : M'' \to M$ tal que $g \circ s = id_{M''}$ si y sólo si existe un homomorfismo $h : M \to M'$ tal que $h \circ f = id_{M'}$.*

Demostración. La demostración se puede revisar en [8, pág 31]. □

Cuando una sucesión exacta corta cumple las condiciones de la proposición anterior reciben un nombre especial.

Definición 1.2.4. *Decimos que una sucesión exacta corta se* `escinde` *si satisface la proposición anterior. En tal caso $M \simeq M' \oplus M''$*

Corolario 1.2.5. *Cualquier sucesión exacta de R-módulos de la forma $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0$, donde L es libre, se escinde.*

Demostración. La demostración puede ser revisada en [13, pág 90]. □

Existen muchas clases de módulos sobre anillos, sin embargo, hay dos en particular que serán de vital importancia para el trabajo que se realizará; la clase de *módulos proyectivos* y la clase de *módulos inyectivos*.

1.3. Módulos proyectivos e inyectivos

En esta sección se introducirán los conceptos de módulo proyectivo y módulo inyectivo, además se enunciarán algunas propiedades y resultados importantes sobre dichos módulos que nos servirán en capítulos posteriores.

Un dato interesante es que hay una especie de *dualidad* entre dichos módulos, ya que lo que se cumple para uno se cumple para el otro en su forma *dual*, es decir, que un R-módulo M es *proyectivo* si para todo diagrama exacto de la forma

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "\psi"] & \\ N_1 \arrow[r, "\varphi"] & N_2 \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

existe un homomorfismo $\gamma : M \to N_1$ tal que hace conmutar el diagrama, mientras que M es *inyectivo* si para todo diagrama exacto de la forma

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N' \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"] & N'' \\ & M & \end{tikzcd}$$

existe un homomorfismo $\mu : N'' \to M$ tal que hace conmutar el diagrama. Nótese que la *dualidad* se refiere a que se intercambian monomorfismos por epimorfismos y los homomorfismos existentes que hacen conmutar los diagramas cambian de dirección.

Definición 1.3.1. *Dados cualesquiera R-módulos P y M, decimos que P es* `M-proyectivo` *si para cada epimorfismo $\varphi : M \to N$ y cada homomorfismo $\psi : P \to N$ existe un homomorfismo $\gamma : P \to M$ tal que $\psi = \varphi \circ \gamma$.*

Más aún, se puede hablar de módulos proyectivos en general, es decir:

Definición 1.3.2. *Sea P un R-módulo. Decimos que P es* `proyectivo` *si es M-proyectivo para todo R-módulo M, o equivalentemente que toda sucesión exacta corta* $0 \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow P \longrightarrow 0$ *se escinde.*

Dado que los módulos libres son un poco más fáciles de tratar, pues en cierta medida "suelen parecerse a los espacios vectoriales" ya que cuentan con bases, los siguientes resultados nos darán una caracterización de módulos proyectivos.

Proposición 1.3.3. *Todo módulo libre es proyectivo.*

Demostración. Sea L un R-módulo libre con base $\beta = \{l_i\}_{i \in I}$ y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & L \arrow[d, "\psi"] & \\ M \arrow[r, "\varphi"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

donde $M \to N \to 0$ es exacta y denotemos por $\psi(l_i) = n_i$.

Dado que φ es un epimorfismo entonces para cada $n_i \in N$ existe $m_i \in M$ tal que $\varphi(m_i) = n_i$. Notemos que $h : L \to M$ definida por

$$h(l) = \sum_{i=1}^{k} r_i m_i$$

donde

$$l = \sum_{i=1}^{k} r_i l_i$$

está bien definida pues todo $l \in L$ se escribe de manera única y además es claro que es un homomorfismo de módulos.

Por otra parte, para cada $l \in L$ se tiene que

$$(\varphi \circ h)(l) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{k} r_i m_i\right) = \sum_{i=1}^{k} r_i \varphi(m_i) = \sum_{i=1}^{k} r_i n_i = \sum_{i=1}^{k} r_i \psi(l_i) = \psi(l)$$

Por tanto $\varphi \circ h = \psi$ y así se concluye que L es proyectivo. □

Otro resultado interesante es que tomar sumas directas preserva la proyectividad, en otras palabras.

Proposición 1.3.4. *Sean R un anillo, $\{P_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una familia de R-módulos y $P = \bigoplus_{\alpha \in I} P_\alpha$. Entonces, P es proyectivo si y sólo si P_α es proyectivo para cada $\alpha \in I$.*

Demostración. La demostración puede verificarse en [9, pág 146].

□

Observación 1.3.5. *Cabe mencionar que el producto directo de módulos proyectivos en general no es un módulo proyectivo, pues si consideramos el anillo de los enteros $\mathbb{Z}$ y tomamos $R_n = \mathbb{Z}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces $M = \prod_{n \in \mathbb{N}} R_n$ no es un $\mathbb{Z}$-módulo proyectivo.*

Sin embargo, una consecuencia inmediata del resultado anterior es la siguiente.

Corolario 1.3.6. *Cada sumando directo de un R-módulo proyectivo es proyectivo.*

Ya observamos que todo módulo libre es proyectivo, sin embargo, el recíproco no es cierto, aunque si existen condiciones para saber cuando un módulo proyectivo resulta ser libre.

Proposición 1.3.7. *Un R-módulo P es proyectivo si y sólo si éste es isomorfo a un sumando directo de un R-módulo libre.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Sea P un R-módulo proyectivo y consideremos el R-módulo libre $R^{(P)}$ con base $\beta = \{a_p\}_{p \in P}$.

Definamos $h : R^{(P)} \to P$ dado por $h(a_p) = p$ para cada $p \in P$. Dado que β es base de $R^{(P)}$, h está bien definido en $R^{(P)}$, además es claro que es un homomorfismo y por construcción es un epimorfismo.

Así que podemos considerar la sucesión exacta corta $0 \longrightarrow ker(h) \xrightarrow{\iota} R^{(P)} \xrightarrow{h} P \longrightarrow 0$, la cual se escinde por ser P proyectivo.

Por lo tanto $R^{(P)} \simeq ker(h) \oplus P$ que era lo que se deseaba demostrar.

$\Leftarrow\rfloor$ Sea L un R-módulo libre y supongamos que P es un R-módulo tal que P es sumando directo de L.

Como L es libre entonces existe un conjunto de índices I tal que $L \simeq R^{(I)}$. De esta forma podemos suponer que P es sumando directo de $R^{(I)}$ y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "\psi"] & \\ M \arrow[r, "\varphi"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Sean $\iota : P \to R^{(I)}$ y $\pi : R^{(I)} \to P$ la inclusión y proyección respectivamente. Notemos que por la Proposición 1.3.3 existe $\widehat{\psi \circ \pi} : R^{(I)} \to M$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & R^{(I)} \arrow[d, "\pi"] \arrow[dl, dashed, "\widehat{\psi\circ\pi}"'] & \\ & P \arrow[d, "\psi"] & \\ M \arrow[r, "\varphi"] & N \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}.$$

Ahora definamos $\widehat{\psi} : P \to M$ por $\widehat{\psi} = \widehat{\psi \circ \pi} \circ \iota$ el cual claramente es un homomorfismo, además notemos que

$$\begin{aligned} \varphi \circ \widehat{\psi} &= \varphi \circ ((\widehat{\psi \circ \pi}) \circ \iota) \\ &= (\varphi \circ \widehat{\psi \circ \pi}) \circ \iota \\ &= (\psi \circ \pi) \circ \iota \\ &= \psi \end{aligned}$$

Con lo cual se concluye que P es proyectivo. $\square$

Por el momento dejaremos de lado los módulos proyectivos, los cuales retomaremos en el Capítulo 4, y analizaremos algunas propiedades de "sus módulos duales" los módulos inyectivos, para ello empezaremos definiéndolos.

Definición 1.3.8. *Para cualesquiera R-módulos M y E, decimos que E es* `M-inyectivo` *si para cualquier monomorfismo $\varphi : N \to M$ y para cualquier homomorfismo $\psi : N \to E$ existe un homomorfismo $\gamma : M \to E$ tal que $\psi = \gamma \circ \varphi$.*

Al igual que en los proyectivos, el concepto de módulo inyectivo se puede dar de forma general, esto es:

Definición 1.3.9. *Sea E un R-módulo, decimos que E es* **`inyectivo`** *si es M-inyectivo para todo R-módulo M, o equivalentemente que toda sucesión exacta corta* $0 \longrightarrow E \longrightarrow K \longrightarrow N \longrightarrow 0$ *se escinde.*

Obsérvese que la dualidad entre las definiciones de módulo inyectivo y módulo proyectivo sugiere que los resultados sean duales y que éstos se obtienen de los resultados de los módulos proyectivos simplentente "invirtiendo las flechas".

Proposición 1.3.10. *Sea M un R-módulo. Si $E \leq M$ es inyectivo entonces existe $S \leq M$ tal que $M = E \oplus S$.*

Demostración. Como $E \leq M$ entonces podemos considerar $\iota : E \to M$ la inclusión. Además, puesto que E es inyectivo, existe $g : M \to E$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "Id_E"'] & M \arrow[dl, "g"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

con lo cual g escinde a M y por tanto $Im(\iota) \oplus ker(g) = M$ que era lo que se quería mostrar ya que $Im(\iota) = E$ y $ker(g) \leq M$. $\square$

Proposición 1.3.11. *Sea E un R-módulo. E es inyectivo si y sólo si E es sumando directo de todo módulo que lo contenga.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Es una consecuencia de la proposición anterior.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que E es sumando directo de todo módulo que lo contenga, en ese caso para cada M tal que $E \leq M$ podemos considerar la inclusión canónica $\iota : E \to M$. Como E es sumando directo de M, entonces existe la proyección canónica $\pi_E : M \to E$ tal que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & E \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "Id_E"'] & M \arrow[dl, dashed, "\pi_E"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

Con lo cual se concluye que E es inyectivo.

$\square$

A diferencia de los módulos proyectivos, los cuales se caracterizan mediante suma de sus submódulos, en el caso de los módulos inyectivos es independiente si una familia de módulos es o no una subfamilia de submódulos de un módulo inyectivo, en otras palabras:

Proposición 1.3.12. *Si $\{E_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es una familia de R-módulos, entonces el R-módulo $E = \prod_{\alpha \in I} E_\alpha$ es inyectivo si y sólo si E_α lo es para cada $\alpha \in I$.*

Demostración. La demostración se puede verificar en [9, pág 140]. $\square$

Cabe mencionar que como consecuencia inmediata se tiene que una suma directa finita de módulos inyectivos es inyectiva, sin embargo, en general una suma directa infinita de módulos inyectivos no es inyectiva.

De momento dejemos de lado los módulos y veamos un concepto más abstracto, *las categorías.*

1.4. Categorías

La Teoría de Categorías fue introducida en Topología Algebraica, por Samuel Eilenberg y Saunders Mac Lane en 1942, en un importante paso para la transición desde homología a Teoría de la Homología.

La Teoría de Categorías es un estudio matemático que trata de axiomatizar de forma abstracta diversas estructuras matemáticas como una sola, mediante el uso de objetos y morfismos. Al mismo tiempo trata de mostrar una nueva forma de ver las matemáticas sin incluir las nociones de elementos, pertenencia, entre otras.

Definición 1.4.1. *Una categoría $\mathcal{C}$ consiste en:*

(i) *Una clase de objetos, Obj($\mathcal{C}$).*

(ii) *Todo par de objetos $A, B \in \mathcal{C}$ tiene asociado un conjunto de morfismos, denotado por $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, donde los morfismos de este conjunto se denota por $f : A \to B$ y decimos que A es el dominio y B el codominio.*

(iii) *Para cada $A, B, C \in Obj(\mathcal{C})$ existe una operación llamada composición $\circ$ tal que*

$$\circ : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \to Hom_{\mathcal{C}}(A, C)$$

$$(f, g) \mapsto g \circ f$$

la cual cumple las siguientes condiciones:

a) *La composición es asociativa, es decir, para cada $A, B, C, D \in Obj(\mathcal{C})$ y para cada terna de morfismos $f : A \to B$, $g : B \to C$ y $h : C \to D$ se tiene $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

b) *Para cada $A \in Obj(\mathcal{C})$ existe el morfismo identidad 1_A tal que para cada par de morfismos $f : A \to B$ y $g : C \to A$ se tiene $f = f \circ 1_A$ y $g = 1_A \circ g$*

Algunos ejemplos de categorías son las siguientes:

1. **Set.** Los objetos en esta categoría son los conjuntos, los morfismos son funciones y $\circ$ es la composición usual de funciones.

2. **Grp.** Los objetos en esta categoría son los grupos, los morfismos son los homomorfismos de grupos y $\circ$ es la composición usual.

3. **Mon.** Los objetos son monoides, es decir, semigrupos con unidad, los morfismos son homomorfismos de monoides y $\circ$ es la composición usual.

4. **Top.** Los objetos en esta categoría son los espacios topológicos, los morfismos son funciones continuas y $\circ$ es la composición usual de funciones.

5. **Vec.** Los objetos de esta categoría son los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales, los morfismos son las transformaciones lineales y $\circ$ es la composición usual.

6. **R-Mod.** Los objetos de esta categoría son los R-módulos izquierdos, los morfismos son los R-homomorfismos y $\circ$ es la composición usual.

7. **Mod-R.** Los objetos de esta categoría son los R-módulos derechos, los morfismos son los R-homomorfismos y $\circ$ es la composición usual.

Definición 1.4.2. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $f : A \to B$ un $\mathcal{C}$-morfismo.*

*(i) Decimos que f es un **monomorfismo** si para cada $C \in Obj(\mathcal{C})$ y para cada par de morfismos $g, h : C \to A$, $f \circ g = f \circ h$ implica que $g = h$.*

*(ii) Decimos que f es un **epimorfismo** si para cada $D \in Obj(\mathcal{C})$ y para cada par de morfismos $g, h : B \to D$, $g \circ f = h \circ f$ implica que $g = h$.*

De manera similar se pueden definir los isomorfismos, es decir:

Definición 1.4.3. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $f : A \to B$ un $\mathcal{C}$-morfismo. Decimos que f es un isomorfismo si existe un morfismo $g : B \to A$ tal que $g \circ f = id_A$ y $f \circ g = id_B$.*

Con el concepto de categoría se pretende capturar −poniendo el énfasis en el concepto de relación (de aplicación), más que de elemento y pertenencia− la esencia de una clase de objetos matemáticos, que se relacionan mediante aplicaciones, los morfismos en la categoría en cuestión.

Por ejemplo, la clase de los grupos: en vez de estudiar los objetos individuales (cada grupo) como se vino haciendo, se enfatizan dichos morfismos entre ellos, que no son otra cosa que las aplicaciones que "conservan su estructura". En el ejemplo de los grupos, dichos morfismos son los homomorfismos de grupos.

Definición 1.4.4. *Se dice que una categoría $\mathcal{A}$ es una **subcategoría** de una categoría $\mathcal{C}$ si satisface las siguientes condiciones:*

(i) $Obj(\mathcal{A}) \subseteq Obj(\mathcal{C})$

(ii) Para cada $X, Y \in Obj(\mathcal{A})$, $Hom_{\mathcal{A}}(X, Y) \subseteq Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$

(iii) Para cada $X \in Obj(\mathcal{A})$, la $\mathcal{C}$-identidad en X es la $\mathcal{A}$-identidad en X

(iv) La composición en $\mathcal{A}$ es la restricción de la composición en $\mathcal{C}$ para los morfismos de $\mathcal{A}$.

*Además, decimos que $\mathcal{A}$ es una **subcategoría plena** de $\mathcal{C}$ si en (ii) se da la igualdad.*

Algunos ejemplos son los siguientes:

1. Dado R un anillo se tiene que: ${}_RFM$ el conjunto de todos los R-módulos izquierdos finitamente generados y FM_R el conjunto de todos los R-módulos derechos finitamente generados son subcategorías de R-Mod y Mod-R respectivamente.

2. Para cualquier categoría $\mathcal{C}$, las categorías vacío y $\mathcal{C}$ son subcategorías plenas de $\mathcal{C}$.

3. **Grp** es una subcategoría plena de **Mon**.

1.5. Funtores y transformaciones naturales

Los funtores son una cierta generalización del concepto de función para categorías: un funtor asocia a cada objeto de una categoría un objeto de la otra, y a cada aplicación de la primera una aplicación de la segunda. De cierto modo nos lleva de una imagen de la categoría hacia la otra categoría, con ciertos grados de "afinamiento".

Existen dos tipos de funtores *covariantes* y *contravariantes.*

Definición 1.5.1. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías entonces un* funtor covariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *consiste en:*

(i) *Para cada $A \in Obj(\mathcal{C})$, $F(A) \in Obj(\mathcal{D})$.*

(ii) *Para cada $A, B \in Obj(\mathcal{C})$ y para cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, F define un morfismo*

$$F : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$$

$$f \mapsto F(f)$$

de tal manera que:

a) *Para cada par de morfismos $f : A \to B$ y $g : B \to C$ de $\mathcal{C}$ se cumple que $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$*

b) *Para cada $A \in Obj(\mathcal{C})$, $F(1_A) = 1_{F(A)}$.*

Un funtor contravariante *F se define de la misma forma, pero intercambiando (ii) y $a)$ por:*

$(ii)'$ *Para cada $A, B \in Obj(\mathcal{C})$ y para cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, F define un morfismo*

$$F : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$$

$$f \mapsto F(f)$$

tal que

$a)'$ *Para cada par de morfismos $f : A \to B$ y $g : B \to C$ de $\mathcal{C}$ se cumple que $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$.*

Como los funtores son un tipo de generalización de las funciones para categorías, es lógico pensar en la existencia de isomorfismos entre categorías, el cual debe de cumplir lo esperado.

Definición 1.5.2. *Decimos que un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un* `isomorfismo` *de $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ si existe un funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $G \circ F = Id_{\mathcal{C}}$ y $F \circ G = Id_{\mathcal{D}}$*

Dado que los funtores están muy a menudo naturalmente relacionados, esto lleva al concepto de *transformación natural.* Una transformación natural proporciona una manera de transformar un funtor en otro mientras que se respeta la estructura interna, es decir la composición de morfismos, de las categorías implicadas.

Por lo tanto, una transformación natural se puede considerar como un morfismo de funtores, en otras palabras.

Definición 1.5.3. *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ categorías y $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores (covariantes), decimos que $\eta : F \to G$ es una* `transformación natural` *si:*

(i) *Para cada $A \in \mathcal{C}$ existe $\eta_A \in Hom_{\mathcal{D}}(F(A), G(A))$*

(ii) *Para cada $A, B \in \mathcal{C}$ y para cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ el siguiente cuadrado*

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"] & G(B) \end{tikzcd}$$

es conmutativo, es decir, $\eta_B \circ F(f) = G(f) \circ \eta_A$.

Las transformaciones naturales son, después de las categorías y de los funtores, una de las nociones más básicas del álgebra categórica y por lo tanto aparecen en la mayoría de sus usos.

Notemos que en K-Vec, la categoría de los K-espacios vectoriales, al dualizar se obtiene un funtor contravariante $(\_)^* : K$-Vec $\to K$-Vec. Así, al dualizar dos veces se tiene un funtor (covariante) $(\_)^{**} : K$- Vec $\to K$-Vec y por tanto se sigue la siguiente observación:

Observación 1.5.4. *La colección de los morfismos $e_V : V \to V^{**}$ forman una transformación natural $e : I \to (\_)^{**}$ del funtor identidad $I : K$-Vec $\to K$-Vec al funtor doble dual.*

Capítulo 2

Dualidad de módulos

"Sin la dualidad nada existiría, sólo sería realidad".
Autor anónimo.

La idea principal de este capítulo es analizar que sucede cuando se trata de generalizar el concepto de dualidad descrito en la sección 1.1, es decir, si se sigue manteniendo la existencia de un monomorfismo entre un módulo y su doble dual.

A diferencia de los espacios vectoriales, veremos que dicha generalización en los módulos no siempre ocurre. Sin embargo, podemos plantearnos las siguientes preguntas: **¿Para qué clase de módulos se cumple la existencia de dicho monomorfismo?** y **¿Para qué anillos R, simpre existe dicho monomorfismo en su respectiva categoría R-Mod?**

Para ver en dónde radica el problema de dicha generalización primero analizaremos el funtor Hom, algunas propiedades que cumple y cómo se comporta con las sucesiones. Después de ello veremos que en general no existe un monomorfismo entre un módulo y su doble dual. Por último, se darán clases de módulos los cuales responderán a la primera pregunta planteada y se finalizará respondiendo a la segunda pregunta que se planteó.

2.1. El funtor Hom

Dados dos R-módulos izquierdos M y N, denotamos por $Hom_R(M,N)$ el conjunto de todos los homomorfismos $f : M \to N$. Notemos que si $f, g \in Hom_R(M,N)$ entonces $f+g$ definido por $(f+g)(m) = f(m)+g(m)$ resulta ser un R-homomorfismo de módulos, más aún, no es difícil probar que $Hom_R(M,N)$ resulta ser un grupo abeliano con la suma, sin embargo, en general no siempre es un R-módulo.

Ahora, sea $h : N \to N'$ un R-homomorfismo de R-módulos. Si definimos

$$Hom_R(M,h) : Hom_R(M,N) \to Hom_R(M,N')$$

por $Hom_R(M,h)(f) = h \circ f$, resulta ser un homomorfismo de grupos abelianos, más aún, $Hom_R(M, \_)$ preserva composiciones, es decir,

$$Hom_R(M, g \circ h) = Hom_R(M, g) \circ Hom_R(M, h).$$

De manera similar si $g : M' \to M$ es un R-homomorfismo y definimos

$$Hom_R(g, N) : Hom_R(M, N) \to Hom_R(M', N)$$

por $Hom_R(g, N)(f) = f \circ g$, entonces no es difícil comprobar que $Hom_R(g, N)$ es un homomorfismo de grupos abelianos y $Hom_R(\_, N)$ invierte el orden de la composición

$$Hom_R(g \circ h, N) = Hom_R(h, N) \circ Hom_R(g, N).$$

Lo anterior nos dice que $Hom_R(M, \_)$ resulta ser un funtor covariante y $Hom_R(\_, N)$ es un funtor contravariante. Dichos funtores se suelen denotar por $Hom_R(M, f) = f_*$ y $Hom_R(g, N) = g^*$ respectivamente, cuando está claro cuál es el módulo M o N fijo.

Como dijimos anteriormente, dados $M, N \in R\text{-}Mod$, $Hom_R(M, N)$ no necesariamente resulta ser un R-módulo; para que esto suceda M y N deben de tener otras propiedades.

Proposición 2.1.1. *Sean R, S anillos y $A, B \in R\text{-}Mod$. Entonces:*

(*a*) *Si A es un R-S-bimódulo entonces $Hom_R(A, B)$ es un S-módulo izquierdo, con el producto definido como sigue: para cada $s \in S$ y cada $f \in Hom_R(A, B)$ sf es tal que para cada $a \in A$, $(sf)(a) = f(as)$.*

(*b*) *Si B es un R-S-bimódulo entonces $Hom_R(A, B)$ es un S-módulo derecho, con el producto definido como sigue: para cada $s \in S$ y cada $f \in Hom_R(A, B)$ fs es tal que para cada $a \in A$, $(fs)(a) = f(a)s$.*

Demostración. (a) Supongamos que A es un R-S-bimódulo y $B \in R\text{-}Mod$. Se mostrará que $Hom_R(A, B) \in S\text{-}Mod$.

(i) Sean $s \in S$ y $f, g \in Hom_R(A, B)$, dado que $Hom_R(A, B)$ es un grupo con la suma entonces $f + g \in Hom_R(A, B)$. Así por la definición dada de producto escalar se tiene que para cada $a \in A$:

$$\begin{aligned}
[s(f+g)](a) &= (f+g)(as) \\
&= f(as) + g(as) \\
&= (sf)(a) + (sg)(a) \\
&= [sf + sg](a)
\end{aligned}$$

Por lo tanto $s(f + g) = sf + sg$

(ii) Sean $s, s' \in S$ y $f \in Hom_R(A, B)$. Entonces para cada $a \in A$ se tiene que:

$$\begin{aligned} [(s+s')f](a) &= f(a(s+s')) \\ &= f(as+as') \\ &= f(as)+f(as') \\ &= (sf)(a)+(s'f)(a) \\ &= [sf+s'f](a) \end{aligned}$$

Por lo tanto $(s+s')f = sf + s'f$

(iii) Sean $s, s' \in S$ y $f \in Hom_R(A, B)$, entonces para cada $a \in A$ se cumple lo siguiente:

$$\begin{aligned} [(ss')f](a) &= f(a(ss')) \\ &= f((as)s') \\ &= (s'f)(as) \\ &= [s(s'f)](a) \end{aligned}$$

Por lo tanto $(ss')f = s(s'f)$

(iv) Sean $1_S \in S$ y $f \in Hom_R(A, B)$, entonces para cada $a \in A$

$$(1_S f)(a) = f(a1_S) = f(a),$$

es decir, $1_S f = f$.

Por lo tanto de $(i), (ii), (iii)$ y (iv) se concluye que $Hom_R(A, B) \in S\text{-}Mod$.

(b) Supongamos que B es un R-S-bimódulo y $A \in R\text{-}Mod$. Lo que se mostrará es que $Hom_R(A, B) \in Mod\text{-}S$.

(i) Sean $f, g \in Hom_R(A, B)$ y $s \in S$. Como $Hom_R(A, B)$ es un grupo abeliano entonces $f + g \in Hom_R(A, B)$, así para cada $a \in A$ se tiene:

$$\begin{aligned} [(f+g)s](a) &= [(f+g)(a)]s \\ &= [f(a)+g(a)]s \\ &= f(a)s+g(a)s \\ &= (fs)(a)+(gs)(a) \\ &= [fs+gs](a) \end{aligned}$$

Por lo tanto $(f+g)s = fs + gs$.

(ii) Sean $s, s' \in S$ y $f \in Hom_R(A, B)$, entonces para cada $a \in A$ tenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} [f(s+s')](a) &= f(a)(s+s') \\ &= f(a)s + f(a)s' \\ &= (fs)(a) + (fs')(a) \\ &= [fs + fs'](a) \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(s+s') = fs + fs'$.

(iii) Sean $s, s' \in S$ y $f \in Hom_R(A, B)$. Entonces para cada $a \in A$ se cumple que:

$$\begin{aligned} [f(ss')](a) &= f(a)(ss') \\ &= (f(a)s)s' \\ &= (fs(a))s' \\ &= [(fs)s'](a) \end{aligned}$$

Por lo tanto $f(ss') = (fs)s'$.

(iv) Sean $1_S \in S$ y $f \in Hom_R(A, B)$, entonces para cada $a \in A$ se tiene que

$$[f1_S](a) = f(a)1_S = f(a),$$

es decir, $f1_S = f$.

Por lo tanto de $(i), (ii), (iii)$ y (iv) se concluye que $Hom_R(A, B) \in Mod\text{-}S$. □

Si la categoría es de módulos derechos en vez de izquierdos, la estructura anterior se invierte en el siguiente sentido.

Proposición 2.1.2. *Sean R y S anillos asociativos y $A, B \in Mod\text{-}R$. Entonces:*

(a) *Si A es un S-R-bimódulo entonces $Hom_R(A, B)$ es un S-módulo derecho, con el producto definido como sigue: para cada $s \in S$ y cada $f \in Hom_R(A, B)$, fs es tal que para cada $a \in A$, $(fs)(a) = f(sa)$.*

(b) *Si B es un S-R-bimódulo entonces $Hom_R(A, B)$ es un S-módulo izquierdo, con el producto definido como sigue: para cada $s \in S$ y cada $f \in Hom_R(A, B)$, sf es tal que para cada $a \in A$, $(sf)(a) = sf(a)$.*

Demostración. La demostración es análoga a la de la proposición anterior. □

De lo anterior se deduce que $Hom_R(M, R)$ es un R-módulo derecho para todo $M \in R\text{-}Mod$ y por lo tanto $Hom_R(\_, R) : R\text{-}Mod \to Mod\text{-}R$ es un funtor contravariante, que asocia a cada R-módulo izquierdo M el R-módulo derecho $Hom_R(M, R)$ y a cada R-homomorfismo $f : M \to N$ el R-homomorfismo $f^* : Hom_R(N, R) \longrightarrow Hom_R(M, R)$ tal que $f^*(h) = h \circ f$ para cada $h \in Hom_R(N, R)$.

Recordemos que otro de los aspectos importantes en la Teoría de Módulos son las sucesiones exactas, es por ello que veremos como se comporta el funtor Hom con las sucesiones exactas.

Proposición 2.1.3. *Sea R un anillo. Entonces se cumple lo siguiente:*

(a) *Si* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta de R-módulos izquierdos, entonces la sucesión inducida* $0 \longrightarrow Hom_R(M'', N) \xrightarrow{g^*} Hom_R(M, N) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M', N)$ *es exacta para todo R-módulo N.*

(b) *Si* $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ *es una sucesión exacta de R-módulos izquierdos, entonces la sucesión inducida* $0 \longrightarrow Hom_R(M, N') \xrightarrow{f_*} Hom_R(M, N) \xrightarrow{g_*} Hom_R(M, N'')$ *es exacta para todo R-módulo M.*

Demostración. (a) Supongamos que la sucesión $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ es exacta y sea $\varphi \in Hom_R(M'', N)$ tal que $g^*(\varphi) = 0$.

Por definición $g^*(\varphi) = \varphi \circ g$, así que $0 = \varphi \circ g$.

Dado que φ se anula en $Im(g)$ y por hipótesis tenemos que $Im(g) = M''$, entonces g^* es un monomorfismo.

Ahora mostraremos que $Im(g^*) = Ker(f^*)$.
Si $\varphi \in Im(g^*)$, entonces existe $\lambda \in Hom_R(M'', N)$ tal que $\varphi = g^*(\lambda)$. Entonces

$$f^*(\varphi) = f^*(g^*(\lambda)) = \lambda \circ g \circ f = 0$$

pues como $Im(f) = Ker(g)$ se tiene que $g \circ f = 0$.

Por lo tanto $\varphi \in Ker(f^*)$.

Por otro lado, notemos que si $\gamma \in ker(f^*)$ entonces $0 = f^*(\gamma) = \gamma \circ f$, es decir, el homomorfismo $\gamma : M \to N$ se anula en $Im(f) = Ker(g)$, así de acuerdo a la propiedad universal del módulo cociente se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\gamma"'] & M/Ker(g) \arrow[dl, dashed, "\lambda"] \\ N & \end{tikzcd}$$

pero como $M/Ker(g) \cong M''$ se concluye que $\gamma \in Im(\pi^*) = Im(g^*)$ y por lo tanto $Im(g^*) = Ker(f^*)$ lo cual finaliza la prueba.

(b) Supongamos que la sucesión $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N''$ es exacta.
Sea M un R-módulo y consideremos la sucesión inducida

$$0 \longrightarrow Hom_R(M, N') \xrightarrow{f_*} Hom_R(M, N) \xrightarrow{g_*} Hom_R(M, N'')$$

(i) f_* es un monomorfismo.
En efecto, pues si $\gamma : M \to N'$ es tal que $f_*(\gamma) = 0$ entonces se tiene que $0 = f_*(\gamma) = f \circ \gamma$ y dado

que f es un monomorfismo se deduce que $\gamma = 0$ y por lo tanto f_* es un monomorfismo.

(ii) $Im(f_*) = Kker(g_*)$
En efecto, pues por un lado tenemos que si $\gamma \in Im(f_*)$ entonces existe $\varphi : M \to N'$ tal que $\gamma = f_*(\varphi) = f \circ \varphi$.

Por hipótesis sabemos que $g \circ f = 0$ pues $Im(f) = Ker(g)$, así que

$$g_*(\gamma) = g_*(f \circ \varphi) = g \circ f \circ \varphi = 0,$$

es decir, $\gamma \in Ker(g_*)$.

Por otro lado, si $\lambda : M \to N$ es tal que $g_*(\lambda) = 0$ entonces se tiene que $0 = g \circ \lambda$, con lo cual $Im(\lambda) \subseteq Ker(g) = Im(f)$, es decir, $Im(\lambda) \subseteq Im(f)$ y por ende $\lambda \in Im(f_*)$.

Por lo tanto $Im(f_*) = Ker(g_*)$ y así la sucesión inducida
$0 \longrightarrow Hom_R(M, N') \xrightarrow{f_*} Hom_R(M, N) \xrightarrow{g_*} Hom_R(M, N'')$ es exacta.

□

La proposición anterior nos dice que los funtores $Hom_R(M, \_)$ y $Hom_R(\_, N)$ resultan ser exactos izquierdos. No sólo eso, los funtores Hom también caraterizan los módulos proyectivos e inyectivos como se enunciará a continuación.

Proposición 2.1.4. *Sea P un R-módulo. P es proyectivo si y sólo si $Hom_R(P, \_)$ es un funtor exacto.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Sea P un R-módulo proyectivo y supongamos que $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} L \xrightarrow{\gamma} N \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta de R-módulos.

Aplicando $Hom(P, -)$ se tiene la siguiente sucesión inducida

$$0 \longrightarrow Hom_R(P, M) \xrightarrow{\varphi_*} Hom_R(P, L) \xrightarrow{\gamma_*} Hom_R(P, N) \longrightarrow 0.$$

Dado que P es proyectivo entonces para cualquier $f \in Hom_R(P, N)$ existe $h \in Hom_R(P, L)$ tal que $f = \gamma \circ h$, pero por definición $\gamma_*(h) = \gamma \circ h$. Por lo tanto γ_* es epi, es decir, $Hom_R(P, \_)$ es exacto derecho y por la proposición anterior se concluye que $Hom_R(P, \_)$ es un funtor exacto.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que $Hom_R(P, \_)$ es un funtor exacto. Consideremos $\varphi : M \to N$ un epimorfismo de R-módulos y $\gamma : P \to N$ un $R-$homomorfismo.

Notemos que la sucesión $0 \longrightarrow Ker(\varphi) \xrightarrow{\iota} M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$ es exacta por ser φ epi, así por hipótesis se tiene que la sucesión inducida por $Hom_R(P, \_)$ resulta ser exacta, es decir,
$\varphi_* : Hom_R(P, M) \to Hom_R(P, N)$ es un epimorfismo y por lo tanto para $\gamma \in Hom(P, N)$ existe $h \in Hom_R(P, M)$ tal que $\varphi_*(h) = \gamma$, es decir, $\varphi \circ h = \gamma$ con lo cual se concluye que P es proyectivo. □

Proposición 2.1.5. *Un R-módulo E es inyectivo si y sólo si $Hom_R(\_, E)$ es exacto.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Sea E un R-módulo inyectivo y consideremos la siguiente sucesión exacta $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} L \xrightarrow{\gamma} N \longrightarrow 0$.

Al aplicar el funtor $Hom_R(\_, E)$ a la sucesión anterior obtenemos la sucesión inducida
$0 \longrightarrow Hom_R(N, E) \xrightarrow{\gamma^*} Hom_R(L, E) \xrightarrow{\varphi^*} Hom_R(M, E) \longrightarrow 0$.
Como el funtor Hom es exacto izquierdo, sólo basta probar que $\varphi^* : Hom_R(L, E) \to Hom_R(M, E)$ es un epimorfismo.

Sea $k \in Hom_R(M, E)$. Como φ es un monomorfismo y E es inyectivo entonces existe un R-homomorfismo $h : L \to E$ tal que $k = h \circ \varphi$, pero por definición $h \circ \varphi = \varphi^*(h)$. Por lo tanto φ^* es un epimorfismo y así el funtor $Hom_R(\_, E)$ es exacto.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que $Hom_R(\_, E)$ es exacto y consideremos $\varphi : M \to L$ un monomorfismo. Entonces al aplicar el funtor a la sucesión $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\varphi} L$ se obtine la sucesión exacta $Hom_R(L, E) \xrightarrow{\varphi^*} Hom_R(M, E) \longrightarrow 0$, es decir, φ^* es un epimorfismo.

Ahora, sea $\gamma : M \to E$ un R-homomorfismo. Dado que φ^* es epi entonces existe $h : L \to E$ tal que $\varphi^*(h) = \gamma$, pero por definición $\varphi^*(h) = h \circ \varphi$, es decir, $h \circ \varphi = \gamma$ y por lo tanto E es inyectivo. $\square$

El siguiente resultado da una caracterización de los módulos inyectivos respecto a sucesiones exactas y el funtor $Hom_R(\_, E)$.

Proposición 2.1.6. *Para cada R-módulo E, las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) *E es inyectivo*

(b) *Para cada monomorfismo de R-módulos $f : K \to M$ se satisface que $f^* : Hom_R(M, E) \to Hom_R(K, E)$ es un epimorfismo*

(c) *Para cada sucesión exacta $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ de R-módulos, la sucesión $Hom_R(M'', E) \xrightarrow{g^*} Hom_R(M, E) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M', E)$ es exacta.*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que E es inyectivo y sea $f : K \to M$ un monomorfismo. Mostraremos que $Hom(f, E) : Hom_R(M, E) \to Hom_R(K, E)$ es epimorfismo.

Sea $\varphi \in Hom_R(K, E)$. Dado que E es inyectivo y f monomorfismo, existe $h : M \to E$ tal que $\varphi = h \circ f = f^*(h)$, es decir, $Hom(f, E)$ es epimorfismo.

$(b) \Rightarrow (c)$ Supongamos que $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ es una sucesión exacta de R-módulos. Entonces al aplicar el funtor $Hom_R(-, E)$ se obtiene la sucesión inducida

$$Hom_R(M'', E) \xrightarrow{g^*} Hom_R(M, E) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M', E)$$

Lo que mostraremos es que $Im(g^*) = Ker(f^*)$.
Por un lado tenemos que si $\gamma \in Im(g^*)$ entonces existe $\varphi \in Hom_R(M'', E)$ tal que $g^*(\varphi) = \gamma$. De esta forma se tiene que

$$f^*(\gamma) = f^*(g^*(\varphi)) = f^*(\varphi \circ g) = \varphi \circ g \circ f$$

pero por hipótesis $Im(f) = Ker(g)$ lo cual implica que $g \circ f = 0$, así que $f^*(\gamma) = 0$ y por lo tanto $\gamma \in Ker(f^*)$.

Por otro lado, sean $\gamma \in Ker(f^*)$, $K = Im(g)$, $\iota : K \to M$ la inclusión canónica y $g' : M \to K$ el cual es un epimorfismo.

Dado que $\gamma \circ f = 0$ se tiene que el homomorfismo $\gamma : M \to E$ se anula en $Im(f) = Ker(g)$ y así por la propiedad universal del módulo cociente γ se factoriza a través de la proyección canónica $\pi : M \to M/Ker(g) \cong K$, es decir, se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\gamma"'] & K \arrow[dl, dashed, "\varphi"] \\ E & \end{tikzcd},$$

es decir, $\varphi \circ g' = \gamma$.

Por hipótesis para el monomorfismo ι se tiene que $\iota^* : Hom_R(M'', K) \to Hom_R(K, E)$ es un epimorfismo. Así que para φ existe $\lambda : M'' \to E$ tal que $\varphi = \iota^*(\lambda)$, es decir, $\lambda \circ \iota = \varphi$.

Luego, como $\iota \circ g' = g$ entonces se tiene lo siguiente

$$\gamma = \varphi \circ g' = \lambda \circ \iota \circ g' = \lambda \circ g = g^*(\lambda).$$

Por lo tanto $\gamma \in Im(g^*)$ y así se concluye que $Im(g^*) = Ker(f^*)$ que es lo que se deseaba.

$(c) \Rightarrow (a)$ Sean $\varphi : N \to M$ un monomorfismo y $\psi : N \to E$ un homomorfismo. Dado que la sucesión $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\varphi} M$ es exacta, por ser φ monomorfismo, entonces por hipótisis la sucesión $Hom_R(M, E) \xrightarrow{\varphi^*} Hom_R(N, E) \longrightarrow 0$ es exacta.
Ahora, como $\psi \in Hom_R(N, E)$ entonces existe $h \in Hom_R(M, E)$ tal que $\varphi^*(h) = \psi$ pero $\varphi^*(h) = h \circ \varphi$, por tanto $\psi = h \circ \varphi$, es decir, el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & M \arrow[dl, "h"] \\ & E & \end{tikzcd}$$

y por lo tanto E es inyectivo.

$\square$

2.2. El dual de un módulo

Dado que a todo anillo R se le puede dar estructura de módulo sobre sí mismo y tomando en cuenta la sección anterior, resulta ser que el dual de un módulo M no es más que su imagen o asociado bajo el funtor contravariante $Hom_R(M,R)$. Nótese que como $Hom_R(R,N) \cong N$ como R-módulos para todo R-módulo N se obtiene "lo mismo" al aplicar el funtor covariante que el funtor contravariante, es por ello que continuando lo tratado en la sección 1.1 lo lógico es definir el dual de un módulo como en el caso de los espacios vectoriales.

Definición 2.2.1. *Sea R un anillo asociativo y M un R-módulo. Se define el **módulo dual** de M, denotado por M^*, como $M^* = Hom_R(M,R)$.*

De manera similar se puede definir el doble dual de M como el dual de M^*, esto es, dado un R-módulo M, su doble dual es $M^{**} = Hom_R(M^*, R)$.

Notemos que independientemente de la naturaleza de M, su doble dual regresa a la misma categoría en la cual está M. Esto es ya que si $M \in R\text{-}Mod$ entonces $M^* = Hom_R(M,R) \in Mod\text{-}R$ y así que $M^{**} = Hom_R(M^*,R) \in R\text{-}Mod$. De manera análoga sucede si $M \in Mod\text{-}R$. Es por ello que tiene sentido pensar en homomorfismos de M en su doble dual.

Definición 2.2.2. *Sea M un R-módulo izquierdo, se define la función **evaluación** $e_{_M} : M \to M^{**}$ de tal manera que para cada $m \in M$, $e_{_M}(m) : M^* \to R$ es el homomorfismo de R-módulos derechos tal que para cada $f \in M^*$, $e_{_M}(m)(f) = f(m)$.*

Es decir, $e_{_M}(m)$ es la evaluación en m, más aún, se tiene lo siguiente.

Proposición 2.2.3. *La función $e_{_M}$ definida anteriormente es un homomorfismo de R-módulos.*

Demostración. Sean $m, m' \in M$ y $r \in R$. Notemos que para todo $f \in M^*$ se tiene que

$$\begin{aligned} e_{_M}(m+m')(f) &= f(m+m') \\ &= f(m) + f(m') \\ &= e_{_M}(m)(f) + e_{_M}(m')(f) \\ &= [e_{_M}(m) + e_{_M}(m')](f) \end{aligned}$$

por tanto $e_{_M}(m+m') = e_{_M}(m) + e_{_M}(m')$, además también para cada $f \in M^*$ se tiene que

$$\begin{aligned} e_{_M}(rm)(f) &= f(rm) \\ &= rf(m) \\ &= r[e_{_M}(m)(f)] \\ &= [re_{_M}(m)](f) \end{aligned}$$

es decir, $e_{_M}(rm) = re_{_M}(m)$.
Por lo tanto $e_{_M}$ es un homomorfismo. $\square$

Nótese que el funtor $(\_)^{**}$ y el funtor identidad I en la categoría de módulos son covariantes y que la colección de los morfismos $e_M : M \to M^{**}$ forman una transformación natural $e : I \to (\_)^{**}$, es decir, para cada $M, N \in R\text{-}Mod$ y para cada $f \in Hom_R(M, N)$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "e_M"] \arrow[d, "f"'] & M^{**} \arrow[d, "f_{**}"] \\ N \arrow[r, "e_N"'] & N^{**} \end{tikzcd}$$

El problema que tenemos en estas estructuras es que a diferencia de los espacios vectoriales, los módulos no se comportan tan bien con el homomorfismo evaluación, esto es: Si M es un R-módulo, no necesariamente se cumple que e_M es un monomorfismo (cosa que siempre sucede en los K-espacios vectoriales), pues en algunas ocasiones resulta ser que el dual de un módulo es el módulo cero y por ende el homomorfismo evaluación no es inyectivo como se muestra a continuación.

Ejemplo 2.2.4. *Sean R un dominio entero pero no un campo, M un R-módulo de torsión, no trivial y finitamente generado sobre R y $f \in M^*$.*

Si $f \neq 0$ entonces existe $m_0 \in M$ tal que $f(m_0) \neq 0$.

Por otro lado, dado que M es de torsión, existe $a \in R \setminus \{0\}$ tal que $a \cdot m_0 = 0$. De esta forma se tiene que

$$a \cdot f(m_0) = f(a \cdot m_0) = 0$$

pero como $a, f(m_0) \in R$ y como R es un dominio entero entonces $f(m_0) = 0$ ó $a = 0$ lo cual es una contradicción.

Por lo tanto $f = 0$ y así que $M^* = 0$ y por ende $M^{**} = 0$, lo cual nos dice que e_M es el homomorfismo cero el cual no es un monomorfismo.

Esto nos dice que en general el *núcleo* del homomorfismo e_M no necesariamente es cero. De hecho podemos describirlo, simplemente desglosando su definición.

Observación 2.2.5. *Si M es un R-módulo, entonces se tiene que:*

$$Ker(e_M) = \bigcap \{Ker(\varphi) \mid \varphi \in Hom_R(M, R)\}.$$

Lo cual es claro de ver pues si $e_M : M \to M^{**}$ es monomorfismo entonces, si

$$m \in \bigcap \{Ker(\varphi) \mid \varphi \in Hom_R(M, R)\},$$

$\varphi(m) = 0$ para cada $\varphi \in M^*$, pero por definición de e_M, $\varphi(m) = e_M(m)(\varphi)$ lo cual implica que $m = 0$ por ser e_M monomorfismo y en consecuencia

$$\bigcap \{Ker(\varphi) \mid \varphi \in Hom_R(M, R)\} = 0$$

.

Análogamente, si

$$\bigcap\{Ker(\varphi) \mid \varphi \in Hom_R(M,R)\} = 0$$

entonces dado $m \in M$ *tal que para cada* $\varphi \in M^*$*, se cumple que* $e_M(m)(\varphi) = 0$*. Así por definición de* e_M *se tiene que* $\varphi(m) = 0$ *para todo* $\varphi \in M^*$*. Por lo tanto por la hipótesis se concluye que* $m = 0$*, es decir,* e_M *es monomorfismo.*

En general, dado un R-módulo fijo C se puede definir la intersección de todos los núcleos de los homomorfismos de todos módulos en C, esto es: Si R es un anillo y C un R-módulo, decimos que C es **cogenerador** para R-Mod si cumple que para cada $M \in R$-Mod,

$$\bigcap\{Ker(\varphi) \mid \varphi \in Hom_R(M,C)\} = 0.$$

En particular R visto como módulo sobre sí mismo es un cogenerador y así el homomorfismo evaluación e_M es un monomorfismo para cada $M \in$R-Mod. Dichos módulos se verán con un poco de más detalle en el siguiente capítulo. Por el momento analicemos el homomorfismo evaluación e_M.

2.3. El monomorfismo e_M

Como vimos anteriormente, e_M no siempre resulta ser un monomorfismo y dado que la idea es generalizar la noción de los espacios vectoriales (en los cuales siempre existe una transformación lineal inyectiva de un espacio vectorial en su doble dual) a los módulos, es de nuestro interés el preguntarnos cuándo dicho homomorfismo sí es un monomorfismo. Es por ello que nos planteamos las siguientes preguntas respecto a e_M:
1.- Dado un anillo R, ¿para qué R-módulos M, e_M es un monomorfismo?
2.- ¿Para qué anillos R, e_M es un monomorfismo para todo R-módulo M?.

Para respoder a la primer pregunta iniciaremos estudiando los módulos libres, los cuales sabemos que siempre admiten una base. Es por ello que retomando la Proposición 1.1.2, dicho resultado resulta ser cierto para módulos libres finitamente generados, esto es:

Proposición 2.3.1. *Sea* L *un* R*-módulo libre finitamente generado con base* $\beta = \{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$*. Defínase el conjunto* $\beta^* = \{l_1^*, l_2^*, \ldots, l_n^*\}$ *donde* $l_i^* \in L^*$ *por*

$$l_i^*(l_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases}$$

Entonces β^* *es una base de* L^* *a la cual se le llama base dual.*

Demostración. (i) β^* es linealmente independiente.

Supongamos que existen $c_i \in R$ tales que $0 = \sum_{i=1}^{n} c_i l_i^*$, entonces para cada $l_j \in \beta$ se tiene que

$$0 = \left(\sum_{i=1}^{n} c_i l_i^*\right)(l_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i \delta_{ij} = c_j,$$

es decir, para toda $1 \leq j \leq n$ se tiene que $c_j = 0$. Por lo tanto β^* es linealmente independiente.

(ii) β^* genera a L^*

En efecto pues sea $f \in L^*$ y supongamos que para cada $1 \leq i \leq n$, $f(l_i) = a_i$.

Sea $g = \sum_{i=1}^{n} a_i l_i^* : L \to R$, notemos que para cada $1 \leq j \leq n$ se tiene

$$g(l_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i l_i^*\right)(l_j) = a_j = f(l_j)$$

es decir, $g(l_j) = f(l_j)$.

Por lo tanto $g = f$ y así de (i) y (ii) se concluye que β^* es una base para L^*.

□

El resultado anterior nos dice que una base dual se obtiene a través de una base del módulo libre, la cuál además es de la misma dimensión y por ende resulta ser que L es isomorfo a L^*.

Corolario 2.3.2. *Sea L un R-módulo libre de dimensión n con $\beta = \{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$ una base de L. Entonces la función $\omega : L \to L^*$ definida por*

$$\omega\left(\sum_{i=1}^{n} r_i l_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i l_i^*$$

es un isomorfismo de R-módulos.

Demostración. (i) Es claro que ω es un homomorfismo por la manera en que está definida.

(ii) ω es monomorfismo

Sean $l, l' \in M$ tales que $\omega(l) = \omega(l')$. Dado que β es base para L entonces existen $r_i, s_i \in R$ tales que $l = \sum_{i=1}^{n} r_i l_i$ y $l' = \sum_{i=1}^{n} s_i l_i$ entonces se tiene que $\sum_{i=1}^{n} r_i l_i^* = \sum_{i=1}^{n} s_i l_i^*$, así para cada $l_j \in \beta$ se tiene que $\left(\sum_{i=1}^{n} r_i l_i^*\right)(l_j) = r_j$ y $\left(\sum_{i=1}^{n} s_i l_i^*\right)(l_j) = s_j$, por tanto $l = l'$ y se sigue que ω es monomorfismo.

(iii) ω es epi

En efecto pues si $f \in L^*$ entonces por la proposición anterior $f = \sum_{i=1}^{n} a_i l_i^*$ donde $a_i \in R$ para toda $1 \leq i \leq n$. Así, haciendo $l = \sum_{i=1}^{n} a_i l_i$ se tiene que $\omega(l) = f$.

Por lo tanto de $(i), (ii)$ y (iii) se concluye que ω es un isomorfismo de R-módulos.

□

De manera análoga se puede dar un isomorfismo entre L^* y $(L^*)^*$ si L^* es de dimensión finita, en otras palabras, si L es un R-módulo libre finitamente generado entonces existe un isomorfismo entre L y L^{**}.

Teorema 2.3.3. *Dado L un R-módulo libre, el homomorfismo evaluación $e_{_L} : L \to L^{**}$ es inyectivo. Más aún, si L es finitamente generado entonces $e_{_L}$ es un isomorfismo.*

Demostración. Sean $u \in L$ tal que $u \neq 0$ y β una base para L. Entonces existen $a_1, \ldots, a_n \in R \setminus \{0\}$ y $\{l_1, l_2, \ldots, l_n\} \subset \beta$ tales que $u = \sum_{i=1}^{n} a_i l_i$.

Definimos $\omega \in L^*$ dado por $\omega(l_i) = 1_R$ y $\omega(l) = 0$ para todo $l \neq l_i$, $l \in \beta$.
De esta forma

$$e_{_L}(u)(\omega) = \omega(u) = \omega\left(\sum_{i=1}^{n} a_i l_i\right) = a_i \neq 0$$

con lo cual $e_{_L}(u) \neq 0$ y por lo tanto $Ker(e_{_L}) = 0$, es decir, $e_{_L}$ es un monomorfismo.

Por otro lado, si L es finitamente generado, digamos que $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ es una base para L, entonces consideremos $\beta^* = \{v_1^*, \ldots, v_n^*\}$ la base dual de L^* y sea $\beta^{**} = \{v_1^{**}, \ldots, v_n^{**}\}$ la base dual de L^{**}.

Afirmación: $e_{_L}(v_i) = v_i^{**}$ para cada $1 \leq i \leq n$.
En efecto pues notemos que para cada $1 \leq j \leq n$ se tiene que

$$e_{_L}(v_i)(v_j^*) = v_j^*(v_i) = \delta_{ij} = v_i^{**}(v_j^*)$$

es decir, $e_{_L}(v_i) = v_i^{**}$ y como $\{e_{_L}(v_1), \ldots, e_{_L}(v_n)\}$ también forma una base para L^{**} entonces se deduce que $e_{_L}$ es epimorfismo.

Por lo tanto si L es finitamente generado se concluye que $e_{_L}$ es un isomorfismo. □

Los módulos que son isomorfos a su doble dual reciben un nombre especial.

Definición 2.3.4. *Decimos que un R-módulo M es* `reflexivo` *si $e_{_M}$ es un isomorfismo. En el caso de que $e_{_M}$ sólo sea un monomorfismo decimos que M es* R-`libre de torsión`.

Dado que las sumas directas siempre juegan un papel importante en cualquier estructura que admita dichas sumas, a continuación analizaremos la reflexividad de las sumas directas y sumandos directos, para ello es necesario identificar el isomorfismo.

Para ello definamos $\Psi : (M_1 \oplus M_2)^{**} \to M_1^{**} \oplus M_2^{**}$ como $\Psi(\omega) = (\omega_1, \omega_2)$ donde $\omega_i \in M_i^{**}$ está definida como $\omega_i(\theta_i) = \omega(\theta_i \circ \pi_i)$ para toda $\theta_i \in M_i^*$ y donde $\pi_i : M_1 \oplus M_2 \to M_i$ es la proyección canónica.

De manera similar podemos definir $\Phi : M_1^{**} \oplus M_2^{**} \to (M_1 \oplus M_2)^{**}$ por $\Phi(\omega_1, \omega_2)(\theta) = \omega_1(\theta \circ \iota_1) + \omega_2(\theta \circ \iota_2)$ donde $\theta \in (M_1 \oplus M_2)^*$ e $\iota_i : M_i \to M_1 \oplus M_2$ son las inclusiones canónicas.

Es claro que Ψ y Φ son homomorfismos, más aún, son inversos el uno del otro.

Lema 1. *Sean Ψ y Φ los homomorfismos mencionados anteriormente. Ψ y Φ son inversos.*

Demostración. Sea $\omega \in (M_1 \oplus M_2)^{**}$ y $\theta \in (M_1 \oplus M_2)^{*}$. Entonces

$$\begin{aligned}
(\Phi \circ \Psi)(\omega)(\theta) &= \Phi(\omega_1, \omega_2)(\theta) \\
&= \omega_1(\theta \circ \iota_1) + \omega_2(\theta \circ \iota) \\
&= \omega(\theta \circ \iota_1 \circ \pi_1) + \omega(\theta \circ \iota_2 \circ \pi_2) \\
&= \omega(\theta \circ \iota_1 \circ \pi_1 + \theta \circ \iota_2 \circ \pi_2) \\
&= \omega(\theta \circ (\iota_1 \circ \pi_1 + \iota_2 \circ \pi_2)) \\
&= \omega(\theta \circ 1_{M_1 \oplus M_2}) \\
&= \omega(\theta)
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left((\Psi \circ \Phi)(\omega_1, \omega_2)\right)(\theta_1, \theta_2) &= \Psi\left(\Phi(\omega_1, \omega_2)\right)(\theta_1, \theta_2) \\
&= \left(\Phi(\omega_1, \omega_2)(\theta_1 \circ \pi_1), \Phi(\omega_1, \omega_2)(\theta_2 \circ \pi_2)\right) \\
&= \left(\omega_1(\theta_1 \circ \pi_1 \circ \iota_1), \omega_2(\theta_2 \circ \pi_2 \circ \iota_2)\right) \\
&= \left(\omega_1(\theta_1), \omega_2(\theta_2)\right) \\
&= (\omega_1, \omega_2)(\theta_1, \theta_2)
\end{aligned}$$

es decir, $\Phi \circ \Psi = 1_{(M_1 \oplus M_2)^{**}}$ y $\Psi \circ \Phi = 1_{M_1^{**} \oplus M_2^{**}}$ y por tanto Ψ y Φ son inversos. □

Ahora, sean $f : N \to N'$ y $g : L \to L'$ R-homomorfismos, entonces el R-homomorfismo $(f, g) : N \oplus L \to N' \oplus L'$ está dado por el siguiente cuadro conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[d, "f"'] & N \oplus L \arrow[l, "\pi_N"'] \arrow[r, "\pi_L"] \arrow[d, "{(f,g)}"] & L \arrow[d, "g"] \\
N' & N' \oplus L' \arrow[l, "\pi_{N'}"'] \arrow[r, "\pi_{L'}"] & L'
\end{tikzcd}$$

De esta forma para M, M_1 y M_2 R-módulos tales que $M = M_1 \oplus M_2$ si consideramos los homomorfismos evaluaciones $e_{M_i} : M_i \to M_i^{**}$ y $e_M : M \to M^{**}$. se tiene lo siguiente:

Proposición 2.3.5. *Usando la notación anterior, el siguiente es un diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[d, "e_M"'] \arrow[dr, dashed, "{(e_{M_1}, e_{M_2})}"] & \\
M^{**} \arrow[r, "\Psi"'] & M_1^{**} \oplus M_2^{**}
\end{tikzcd}$$

i.e $\Psi \circ e_M = (e_{M_1}, e_{M_2})$.

Demostración. Sean e_{M_i}, e_M los homomorfismos evaluación y $\Psi : M^{**} \to M_1^{**} \oplus M_2^{**}$ el homomorfismo definido anteriormente, entonces para cada $(w_1, w_2) \in M$ se tiene que:

$$\begin{aligned}(\Psi \circ e_M)(w_1, w_2) &= \Psi(e_M(v_1, v_2))(w_1, w_2)\\ &= (e_M(v_1, v_2)(w_1 \circ \pi_1), e_M(v_1, v_2)(w_2 \circ \pi_2))\\ &= ((w_1 \circ \pi_1)(v_1, v_2), (w_2 \circ \pi_2)(v_1, v_2))\\ &= (w_1(v_1), w_2(v_2))\\ &= (e_{M_1}, e_{M_2})(v_1, v_2)(w_1, w_2)\end{aligned}$$

Por lo tanto $\Psi \circ e_M = (e_{M_1}, e_{M_2})$. □

En base al resultado anterior se desprende lo siguiente.

Corolario 2.3.6. *Para e_M, e_{M_i} como antes se tiene lo siguiente:*

(a) *$e_M : M \to M^{**}$ es monomorfismo si y sólo si $e_{M_i} : M_i \to M_i^{**}$ es monomorfismo para cada $i = 1, 2$.*

(b) *M es reflexivo si y sólo si M_1 y M_2 son reflexivos.*

Demostración. (a) Supongamos que $e_M : M \to M^{**}$ es un monomorfismo.
Por la proposición anterior tenemos que $\Psi \circ e_M = (e_{M_1}, e_{M_2})$. Como Ψ es un monomorfismo (pues es un isomorfismo) se tiene que e_{M_i} es un monomorfismo para $i = 1, 2$.

De manera análoga se tiene que si e_{M_i} es un monomorfismo para $i = 1, 2$, por la proposición anterior $\Psi \circ e_M = (e_{M_1}, e_{M_2})$, pero sabemos que Ψ es un isomorfismo con inverso Φ, así que
$e_M = \Phi \circ (e_{M_1}, e_{M_2})$ y por lo tanto e_M es un monomorfismo.

(b) Notemos que M es reflexivo si y sólo si e_M es un isomorfismo y ésto sucede si y sólo si $\Psi \circ e_M = (e_{M_1}, e_{M_2})$ es un isomorfismo, lo cual ocurre si y sólo si e_{M_i} es un isomorfismo para $i = 1, 2$, es decir, si y sólo si M_i es reflexivo para $i = 1, 2$. □

Corolario 2.3.7. *Sea P un R-módulo. Si P es proyectivo entonces $e_P : P \to P^{**}$ es inyectivo. Más aún, si P es finitamente generado entonces P es reflexivo.*

Demostración. Supongamos que P es un R-módulo proyectivo, entonces por la Proposición 1.3.6 P es isomorfo a un sumando directo de un R-módulo libre, es decir, existen R-módulos P' y L tales que $P \oplus P' \cong L$ donde L es libre. Así, $e_L : L \to L^{**}$ es monomorfismo y por lo tanto e_P es un monomorfismo.

Por otro lado, si además P es finitamente generado entonces e_L resultaría ser un isomorfismo y por ende e_P también lo sería. Así que podemos concluir que si P es finitamente generado entonces P es reflexivo. □

Por lo tanto la respuesta a la primer pregunta planteada al inicio de esta sección la dan los módulos libres, los módulos proyectivos y en general los módulos reflexivos.

Ahora, para dar respuesta a la segunda pregunta planteada al inicio de esta sección, **¿para qué anillos R, e_M es un monomorfismo para todo R-módulo M?**, veremos los *anillos QF*.

2.4. Anillos QF

Los *anillos QF* tienen muchas propiedades, algunas de ellas son respecto a la dualidad entre las categorías R-Mod y Mod-R, donde R es un anillo QF y uno de los resultados más importantes sobre este tipo de anillos es cierta relación que hay entre módulos proyectivos e inyectivos, sin embargo, en esta sección nos enfocaremos en garantizar la existencia del monomorfismo evaluación $e_{_M}$ para todo $M \in R$-Mod. Antes de mostrar dicha existencia, veremos un poco de su desarrollo histórico.

En el desarrollo histórico primero se consideraron en la Teoría de Representaciones de grupos finitos, anillos de grupo con coeficientes en un campo K los cuales han sido estudiados por su estrecha realción con el Álgebra, Teoría de Números y Teoría de Representaciones pero también por sus aplicaciones en otras áreas como Combinatoria y Criptografía.

Por ejemplo, los anillos de grupo se usan directamente para construir protocolos de intercambios de claves similares al protocolo Diffie-Hellman.

Definición 2.4.1. *Dado un grupo G y un anillo S, se define el* `anillo de grupo` *SG como*

$$SG = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i g_i \mid a_i \in S, g_i \in G, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Cabe mencionar que si en SG se define la suma y producto por:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i g_i + \sum_{i=1}^{m} b_i g_i = \sum_{i=1}^{\text{máx}\{\text{m,n}\}} (a_i + b_i) g_i$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m} b_i g_i\right) = \sum_{i=1}^{n+m}\left(\sum_{l=1}^{i} a_l b_{i-l+1}\right) g_i$$

entonces SG resulta ser un anillo.

Además, podemos definir una multiplicación escalar dada por:

$$s \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i g_i = \sum_{i=1}^{n} (s a_i) g_i$$

donde $s \in S$.

Como SG es un anillo, entonces tiene sentido hablar de homomorfismos de anillos. Dado un anillo de grupos $R := SG$ donde G es un grupo finito, es decir, $G = \{e = g_1, g_2, \ldots, g_n\}$, la función $\varphi : R \to S$ dada por

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i g_i\right) = a_1$$

es un R-homomorfismo y así que $\varphi \in R^* := Hom_S(R, S)$. Este homomorfismo φ tiene la propiedad escencial de que $Ker(\varphi)$ no contine ideales izquierdos o derechos diferentes de cero. Por medio de esta propiedad φ es esencialmente determinado de manera única y es llamado el `homomorfismo de Frobenius`.

Dado que R^* es un R-módulo derecho y para un homomorfismo de Frobenius φ se sigue que $\varphi(R) = R^*_R$, entonces $\Phi : R_R \to R^*_R$ dado por $\Psi(r) = \varphi(r)$ resulta ser un isomorfismo e inversamente cada R-isomorfismo $\Psi : R_R \to R^*_R$ produce, mediante $\varphi := \Psi(1_R)$ un homomorfismo de Frobenius $\varphi : R_R \to S_S$.

Después de que se observó que muchas propiedades atractivas para anillos de grupos dependían sólo de la existencia de un homomorfismo de Frobenius φ o-equivalentemente-de un isomorfismo Ψ se pasaron a definir las *álgebras de Frobenius* las cuales originalmente se estudiaron como parte de una investigación sobre la Teoría de Representaciones de grupos finitos y han contribuido al estudio de la Teoría de Números, Geometría Algebraica, Combinatoria y Teoría de Códigos.

Definición 2.4.2. *Un* `álgebra de Frobenius` *es una K-álgebra A la cual está equipada con una transformación lineal $\varepsilon : A \to K$ cuyo espacio nulo no contiene ideales izquierdos no triviales.*

Notemos que las álgebras de Frobenius responden afirmativamente a nuestra pregunta, ¿para qué anillos R, e_M es un monomorfismo para todo R-módulo M?, pues ya sabemos que en los espacios vectoriales siempre existe dicho monomorfismo.

El siguiente paso esencial en el desarrollo se produjo al eliminar la propiedad de álgebra. Después se mostró que para un álgebra de Frobenius mediante el uso de φ, respectivamente Ψ, las ecuaciones anuladoras siguientes se cumplen

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_R(\mathbf{l}_R(I)) &= I \\ \mathbf{l}_R(\mathbf{r}_R(J)) &= J \end{aligned} \tag{2.1}$$

para cada I ideal derecho de R y para cada J ideal izquierdo de R, donde

$$\mathbf{r}_R(J) = \{r \in R \mid xr = 0 \text{ para todo } x \in J\}$$

y

$$\mathbf{l}_R(I) = \{r \in R \mid ry = 0 \text{ para todo } y \in I\}.$$

Así finalmente se introdujo la noción de *anillo Quasi-Frobenius*.

Definición 2.4.3. *Un anillo artiniano (tanto derecho como izquierdo) que satisface las ecuaciones anuladoras* (2.1)*, se llama* `anillo Quasi-Frobenius` *o simplemente anillo QF.*

Cabe resaltar que la definición de ser anillo QF es simétrica, es decir, no se habla de anillo QF izquierdo o derecho, como en el caso de los anillos perfectos. Si el lector desea más información acerca de los anillos QF puede consultar [1], [10], [22], [18], [15], [23].

Después con una condición adicional, T. Nakayama en 1941 definió un *anillo de Frobenius*. Sobre estas bases muchos resultados sobre anillos QF y Frobenius fueron establecidas. Algunas caracterizaciones y resultados más interesantes son los siguientes:

1.− Un anillo R es QF si es artiniano y:

$i)$ Es auto-inyectivo derecho, es decir, R_R es inyectivo [23, pág 20].

$ii)$ R define una R-dualidad entre FM_R y ${}_RFM$ [10, pág 204].

$iii)$ El R-módulo dual de cada R-módulo izquierdo o derecho simple es simple [10, pág 204].

$iv)$ R_R es un cogenerador inyectivo [10, pág 204].

2.− Un anillo R es QF si y sólo si cada módulo proyectivo es inyectivo si y sólo si cada módulo inyectivo es proyectivo [10, pág 209].

3.− Si R es un anillo QF entonces todo R-módulo finitamente generado es reflexivo [15, pág 413].

4.− Si R es un anillo QF entonces un R-módulo M es finitamente generado si y sólo si M^* es finitamente generado [15, pág 413].

Resulta que dichos anillos tienen la peculiaridad de que en su respectiva categoría de módulos, el homomorfismo evaluación resulta ser un monomorfismo como se verá a continuación.

Proposición 2.4.4. *Sea R un anillo. Si R es QF entonces para cada R-módulo M se cumple:*

(a) *El homomorfismo evaluación $e_M : M \to M^{**}$ es un monomorfismo.*

(b) *Si M es finitamente generado entonces M es reflexivo.*

Demostración. Por el momento usaremos el hecho de que cada R-módulo M tiene *cápsula inyectiva* y además dicha cápsula es un módulo inyectivo (esto se mostrará con detalle en el Capítulo 4).

(a) Sea M un R-módulo y consideremos $E(M)$ su cápsula inyectiva. Dado que R es QF entonces por 2.− (descrita hace unos momentos) se sigue que $E(M)$ es un módulo proyectivo.

Por otro lado, por la Proposición 1.3.7 se sigue que existe un R-módulo libre L y un epimorfismo $f : L \to E(M)$. De esta forma para el homomorfismo identidad $Id_{E(M)} : E(M) \to E(M)$ existe $\varphi : E(M) \to L$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & E(M) \arrow[dl, dashed, "\varphi"'] \arrow[d, "Id_{E(M)}"] & \\ L \arrow[r, "f"] & E(M) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

y por lo tanto φ es un monomorfismo. Así, podemos suponer que $E(M) \leq L$ y en consecuencia $M \subseteq E(M) \subseteq L$. Finalmente, dado que L es libre, por el Teorema 2.3.3 se sigue que e_L es un monomorfismo y por lo tanto e_M es un monomorfismo.

La conclusión se sigue del siguiente hecho: Si F es un R-módulo libre y $N \leq F$ entonces al considerar la inclusión $\iota : N \to F$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "e_N"] \arrow[d, "\iota"'] & N^{**} \arrow[d, "\iota_N^{**}"] \\ F \arrow[r, "e_F"] & F^{**} \end{tikzcd}$$

del cual se sigue que e_N es monomorfismo por ser e_F monomorfismo ya que F es libre.

(b) Supongamos que M es finitamente generado. Entonces podemos considerar la siguiente sucesión exacta corta $0 \longrightarrow N \xrightarrow{\iota} L \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$ donde L es un R-módulo libre finitamente generado y $N = Ker(f)$.

Dado que R_R y ${}_RR$ son inyectivos, pues R es QF, entonces por la Proposición 2.1.5 $Hom_R(\_, R_R)$ y $Hom_R({}_RR, \_)$ son exactos. De esta forma se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "e_N"] & L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "e_L"] & M \arrow[r] \arrow[d, "e_M"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & N^{**} \arrow[r, "\iota^{**}"] & L^{**} \arrow[r, "f^{**}"] & M \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Dado que L es libre y finitamente generado entonces por el Teorema 2.3.3 e_L es un isomorfismo, además por el diagrama anterior se tiene que $e_M \circ f = f^{**} \circ e_L$ y por tanto f^{**} es un epimorfismo ya que por (a) e_M es un monomorfismo. Como f es un monomorfismo y e_L un isomorfismo se deduce que e_M es un epimorfismo, es decir, e_M es un isomorfismo y por lo tanto M es reflexivo. □

Por lo tanto los anillos QF son algunos anillos que dan respuesta a la segunda pregunta planteada. Como dato interesante se tiene que un anillo QF resulta ser un cogenerador (concepto que se explicará con mayor detalle en el siguiente capítulo).

Terminaremos el capítulo dando algunos ejemplos de anillos QF para posterioremente analizar los módulos cogeneradores y así poder generalizar el hecho de que el homomorfismo evaluación e_M resulta ser un homomorfismo para cada R-módulo M.

Ejemplo 2.4.5. ***1.-*** *Si K es un campo entonces K es un anillo QF.*

2.- *Si R es un dominio de ideales principales entonces para cualquier $r \in R$ no cero ni unidad, R/Rr es un anillo QF. En particular $\mathbb{Z}_n$ es un anillo QF para cada $n \geq 2$.*

3.- *Si K es un campo e I es un ideal no cero de $K[x]$, entonces $K[x]/I$ es un anillo QF.*

4.- *Cada álgebra de Frobenius es un anillo QF.*

Capítulo 3

El módulo carácter y los módulos planos

"Toda persona es un sueño hecho realidad.
Sueño y pesadilla es nuestra dualidad".
Ave literaria.

El objetivo principal de este capítulo es que para cualquier anillo R se puede mostrar un módulo C con el cual se puede definir un dual $M^* = Hom_R(M, C)$ que garantice la existencia de un monomorfismo de M en M^{**} para cualquier módulo $M \in R\text{-}Mod$. Para que ésto suceda, obviamente se tiene que reestructurar la definición de módulo dual (pues ya hemos visto que con la definición tradicional no siempre se puede garantizar dicho monomorfismo para cualquier R-módulo).

Para lograr dicho objetivo, echaremos mano de los *módulos cogeneradores*. Es por ello que se iniciará el capítulo definiendo este tipo de módulos. En nuestro caso como sólo nos interesa estudiar la categoría $R\text{-}Mod$, veremos algunas equivalencias y/o propiedades en dicha categoría.

Posteriormente terminaremos el capítulo analizando la relación que guarda dicho módulo (*módulo carácter*) con el funtor producto tensorial, es decir, la relación que hay entre los módulos planos con los módulos inyectivos como lo enuncia Lambek en su teorema.

3.1. Módulos cogeneradores

Existen varias definiciones de lo que es un módulo cogenerador, sin embargo, en este contexto iniciaremos con la definición dada en el capítulo anterior y posteriormente mencionaremos sus equivalencias. Para ello recordemos cuándo un módulo es cogenerador.

Definición 3.1.1. *Sea R un anillo y $C \in R\text{-}Mod$. Decimos que C es* **cogenerador** *de $R\text{-}Mod$, o simplemente cogenerador, si para cada $M \in R\text{-}Mod$ se tiene que:*

$$\bigcap \{Ker(f) \mid f \in Hom_R(M, C)\} = 0.$$

De manera análoga se define un módulo cogenerador para la categoría $Mod\text{-}R$. A continuación daremos algunas caracterizaciones de un módulo cogenerador a través de ciertos homomorfismos.

Proposición 3.1.2. *Sea $C \in R$-Mod. Las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) *C es cogenerador*

(b) *Para todo $M \in R$-Mod y para cada $m \in M \setminus \{0\}$ existe $g \in Hom_R(M, C)$ tal que $g(m) \neq 0$.*

(c) *Para cada par de R-homomorfismos $f, g : N \to M$ con $f \neq g$ existe $h : M \to C$ tal que $h \circ f \neq h \circ g$*

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ Supongamos que C es cogenerador y sean M un R-módulo, $m \in M \setminus \{0\}$. La existencia de un homomorfismo $g : M \to C$ tal que $g(m) \neq 0$ es clara, pues de no ser así entonces para cada $g : M \to C$, $g(m) = 0$ implica que

$$\bigcap \{Ker(\varphi) \mid \varphi \in Hom(M, C)\} \neq 0$$

lo cual no sucede por ser C un cogenerador. Por lo tanto existe $g : M \to C$ tal que $g(m) \neq 0$.

$(b) \Rightarrow (c)$ Sean $f, g : N \to M$ homomorfismos de R-módulos tales que $f \neq g$. Entonces existe $n_0 \in N$ tal que $f(n_0) \neq g(n_0)$ y así por hipótesis para

$$m = f(n_0) - g(n_0) \in M \setminus \{0\}$$

existe un homomorfismo $h : M \to C$ tal que $h(m) \neq 0$. Así que

$$0 \neq h(m) = h(f(n_0) - g(n_0)) = (h \circ f)(n_0) - (h \circ g)(n_0)$$

Por lo tanto $h \circ f \neq h \circ g$ que era lo que se quería mostrar.

$(c) \Rightarrow (a)$ Primero observemos que la hipótesis es equivalente a decir que para todo homomorfismo $\lambda : N \to M$ existe $h \in Hom_R(M, C)$ tal que $h \circ \lambda \neq 0$.

Probaremos que C es cogenerador. Supongamos que esto no sucede, es decir, existe un R-módulo M tal que

$$C' = \bigcap \{Ker(\varphi) \mid \varphi \in Hom_R(M, C)\} \neq 0.$$

Como $C' \neq 0$ entonces podemos considerar $\iota : C' \to M$ la inclusión la cual obviamente es distinta de cero.

Entonces por hipótesis existe $h : M \to C$ tal que $h \circ \iota \neq 0$ y así $C' \subsetneq Ker(h)$ lo cual contradice la definición de C'. Por lo tanto para cada $M \in R$-Mod se tiene que

$$\bigcap \{Ker(\varphi) \mid \varphi \in Hom_R(M, C)\} = 0$$

es decir, C es cogenerador. □

Dado que las sucesiones exactas siempre juegan un papel importante en la categoría de módulos, a continuación daremos una equivalencia de módulo cogenerador en términos del funtor Hom y las sucesiones exactas de módulos.

Proposición 3.1.3. *Un módulo C es cogenerador si y sólo si una sucesión de R-módulos* $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ *es exacta siempre que la sucesión* $Hom_R(M'', C) \xrightarrow{g^*} Hom_R(M, C) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M', C)$ *sea exacta.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que C es cogenerador y sean $f : M' \to M$, $g : M \to M''$ homomorfismos tales que la sucesión inducida $Hom_R(M'', C) \xrightarrow{g^*} Hom_R(M, C) \xrightarrow{f^*} Hom_R(M', C)$ es exacta.

Como $Im(g^*) = Ker(f^*)$ entonces $f^* \circ g^* = 0$, sin embargo, dado que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ entonces $(g \circ f)^* = 0$ y por lo tanto $Im(f) \subseteq ker(g)$.

Por otro lado, sea $\eta : M \to M/Im(f)$ el epimorfismo canónico. Entonces para cada $h : M/Im(f) \to C$ se tiene que $f^*(h \circ \eta) = (h \circ \eta) \circ f$, con lo cual

$$\begin{aligned} [f^*(h \circ \eta)](M') &= ((h \circ \eta) \circ f)(M') \\ &= (h \circ \eta)(f(M')) \\ &= h(\eta(f(M'))) \\ &= h(f(M')) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $h \circ \eta \in Ker(f^*) = Im(g^*)$, así que existe $\varphi \in Hom_R(M'', C)$ tal que $g^*(\varphi) = h \circ \eta$, es decir, $\varphi \circ g = h \circ \eta$.

Ahora, como $Ker(g)/Im(f) \leq M/Im(f)$ entonces se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} h(Ker(g)/Im(f)) &= h(\eta(Ker(g))) \\ &= (h \circ \eta)(Ker(g)) \\ &= (\varphi \circ g)(Ker(g)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por tanto se sigue que

$$Ker(g)/Im(f) \subseteq \bigcap \{Ker(\gamma) \mid \gamma \in Hom_R(M/Im(f), C)\} = 0$$

pues C es cogenerador.
Por lo tanto $Ker(g) = Im(f)$ y así la sucesión $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ es exacta.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que toda sucesión (como en la hipótesis) es exacta siempre que la sucesión inducida por Hom es exacta. Mostraremos que C es cogenerador.
Consideremos $\eta : M \to M/N$ el epimorfismo canónico, donde

$$N = \bigcap \{Ker(\varphi) \mid \varphi \in Hom_R(M, C)\}$$

y tomemos la sucesión $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} M/N$. Al aplicar el funtor $Hom(\_, C)$ tenemos la sucesión inducida $Hom_R(M/N, C) \xrightarrow{\eta^*} Hom_R(M, C) \longrightarrow 0$ ·

Afirmación: η^* es epi.

Sea $f \in Hom_R(M, C)$ y definamos $h : M/N \to C$ dada por $h(m + N) = f(m)$, el cual existe ya que se tienen los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd}
 & Ker(\varphi) \arrow[d, hook] & \\
N \arrow[ur, hook] \arrow[r, hook] \arrow[dr, dashed, "0"'] & M \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "f"] & M/N. \arrow[dl, dashed, "h"] \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

Entonces para cada $m \in M$ se tiene que

$$f(m) = h(m + N) = h(\eta(m)) = (h \circ \eta)(m)$$

es decir, $f = h \circ \eta$ y por tanto $\eta^*(h) = f$ que era lo que queríamos.

En consecuencia la sucesión $Hom_R(M/N, C) \xrightarrow{\eta^*} Hom_R(M, C) \longrightarrow 0$ es exacta y así por hipótesis la sucesión $0 \longrightarrow M \xrightarrow{\eta} M/N$ es exacta, lo que implica que $0 = Ker(\eta) = N$.

Por lo tanto C es cogenerador que era lo que se quería probar. □

Otra forma de ver que un módulo C es un cogenerador es siendo que cualquier módulo se puede sumergir en un producto de copias de C.

Proposición 3.1.4. *Sea R un anillo asociativo y sea $C \in R$-Mod. Entonces C es cogenerador si y sólo si para cada $M \in R$-Mod existe un conjunto X y un monomorfismo $M \rightarrowtail C^X$.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que C es cogenerador y sea M un R-módulo. Si tomamos $X = Hom_R(M, C)$ entonces podemos considerar la familia de las proyecciones de C^X en C y la familia de homomorfismos X. Entonces por la propiedad universal del producto existe $h : M \to C^X$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
C^X \arrow[r, "\pi_i"] & C \\
M \arrow[u, dashed, "h"] \arrow[ur, "\varphi"] &
\end{tikzcd}$$

De esta forma $Ker(h) = \bigcap Ker(\varphi)$, pero $\bigcap Ker(\varphi) = 0$ por ser C un cogenerador y por tanto h es un monomorfismo.

$\Leftarrow\rfloor$ Sea M un R-módulo y consideremos $f, g : N \to M$ un par de homomorfismos tales que $f \neq g$. Por hipótesis existe un conjunto X y un monomorfismo $\varphi : M \to C^X$.

Si consideramos las α-ésimas proyecciones de C^X tenemos la familia de homomorfismos $\pi_\alpha \circ \varphi : M \to C$ con lo cual existe al menos una $\alpha \in X$ tal que $(\pi_\alpha \circ \varphi) \circ f \neq (\pi_\alpha \circ \varphi) \circ g$ y así por la Proposición 3.1.2 se concluye que C es cogenerador. □

Recordemos que a todo grupo abeliano se le puede dar estructura de $\mathbb{Z}$-módulo, es por ello que si consideramos G un grupo abeliano, de acuerdo a la Proposición 2.1.1 se tienen los siguientes casos:

1. Si consideramos a G como un $\mathbb{Z}$-módulo derecho entonces $Hom_{\mathbb{Z}}(M, G) \in Mod\text{-}R$ para todo $M \in R\text{-}Mod$.

2. Si consideramos a G como un $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo entonces $Hom_{\mathbb{Z}}(N, G) \in R\text{-}Mod$ para todo $N \in Mod\text{-}R$.

De esta forma se tiene la siguiente observación.

Observación 3.1.5. *Si G es un grupo abeliano entonces los funtores $Hom_{\mathbb{Z}}(\_, G) : Mod\text{-}R \to R\text{-}Mod$ y $Hom_{\mathbb{Z}}(\_, G) : R\text{-}Mod \to Mod\text{-}R$ son contravariantes.*

La observación anterior nos dice que para cualquier R-módulo y para cualquier grupo abeliano G, al componer dos veces el funtor $Hom_{\mathbb{Z}}(\_, G)$ se tiene un funtor covariante que regresa módulos izquierdos (derechos) en módulos izquierdos (derechos). Así que lo ideal es encontrar un grupo abeliano G que sea cogenerador en la categoría de los grupos abelianos $\mathbb{Z}\text{-}Mod$ y de esta forma dicho $\mathbb{Z}$-módulo servirá para nuestro propósito.

Para encontrar dicho $\mathbb{Z}$-módulo cogenerador echaremos mano de la siguiente proposición que relaciona a los módulos inyectivos con los módulos cogeneradores.

Proposición 3.1.6. *Si C es un R-módulo inyectivo, entonces C es un cogenerador si y sólo si para todo $m \neq 0$, con $m \in M$ donde M es un R-módulo, existe $g : Rm \to C$ con $g \neq 0$.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Es consecuencia inmediata de la Proposición 3.1.2.

$\Leftarrow\rfloor$ Sea M un R-módulo y consideremos $m \in M \setminus \{0\}$. Por hipótesis existe $g : Rm \to C$ un homomorfismo no nulo. Ahora, dado que C es inyectivo entonces existe $f : M \to C$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & Rm \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "g"] & M \arrow[dl, dashed, "f"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

es decir, $g = f \circ \iota$, donde $\iota : Rm \to M$ es la inclusión. En particular $f(m) = g(m) \neq 0$ y así por la Proposición 3.1.2 se concluye que C es un cogenerador. □

Notemos que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un grupo abeliano el cual además resulta ser un $\mathbb{Z}$-módulo inyectivo. De hecho, dicho módulo resulta ser un cogenerador en $\mathbb{Z}\text{-}Mod$ y por ende es el módulo que nos sirve para nuestros propósitos.

Proposición 3.1.7. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *es cogenerador en* $\mathbb{Z}\text{-}Mod$

Demostración. Por la proposición anterior sólo basta exhibir g con las condiciones requeridas pues sabemos que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es inyectivo.

Para ello, para cada $x \neq 0$ denotemos por $|x|$ al orden de x y definamos $g : \mathbb{Z}x \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ dada por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \mathbb{Z}x & \text{si } |x| = \infty \\ \\ \frac{1}{n} + \mathbb{Z}x & \text{si } |x| = n \end{cases}$$

la cual define un homomorfismo no nulo en x y así por la proposición anterior se concluye que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es cogenerador en $\mathbb{Z}$-Mod. □

3.2. El módulo carácter y los módulos planos

Dado que ya encontramos un $\mathbb{Z}$-módulo cogenerador, ahora si ya estamos listos para redefinir el concepto de módulo dual de cualquier R-módulo M y por ende mostrar que existe un monomorfismo de M en M^{**} (utilizando $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$).

Definición 3.2.1. *Sea R un anillo asociativo y $M \in R$-Mod. Definimos el* **`módulo carácter`** *de M como $Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ y lo denotaremos por M^+.*

El módulo carácter para un R-módulo derecho se define de forma análoga y así por la Observación 3.1.5 tenemos funtores contravariantes

$$(\_)^+ : R\text{-}Mod \to Mod\text{-}R \ \text{ y } \ (\_)^+ : Mod\text{-}R \to R\text{-}Mod$$

y por ende un funtor covariante $(\_)^{++} : R\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$.

Además para cada $M \in R$-Mod se tiene un homomorfismo evaluación $e_M : M \to M^{++}$ (definido como en 2.2.2) y así la colección de dichos homomorfismos constituye una transformación natural $e : I \to (\_)^{++}$, donde $I : R\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$ es el funtor identidad.

Por lo tanto, la construcción del dual usando el módulo carácter nos lleva finalmente a la propiedad que queríamos conservar al ampliar el contexto de espacios vectoriales. Esto es:

Corolario 3.2.2. *Para cada $M \in R$-Mod, e_M es un monomorfismo.*

Demostración. Sea M un R-módulo y consideremos $e_M : M \to M^{++}$ el homomorfismo evaluación.

Sea $m \in M$ y supongamos que $e_M(m)(f) = 0$ para toda $f \in M^+$. Por como está definido e_M se tiene que $f(m) = 0$ para toda $f \in M^+ = Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ lo cual implica que $0 = f(m) \in \mathbb{Z}$ y así que $m = 0$.

Por lo tanto se concluye que e_M es un monomorfismo. □

Como bien se menciono al inicio, finalizaremos el capítulo dando la relación que guarda el módulo carácter con los *módulos planos*. Antes de ver dicha relación veremos que sucede con los funtores Hom y $\otimes$. Despúes se introducirá la definición de módulo plano para finalmente enunciar el Teorema de Lambek.

Lema 2. *Sean R y S dos anillos, entonces para cada S-R-bimódulo M, $N \in S$-Mod y $L \in R$-Mod existe*

$$\phi : Hom_R(L, Hom_S(M, N)) \to Hom_S((M \otimes_R L), N)$$

un isomorfismo de grupos.

Demostración. Sea $\gamma \in Hom_R(L, Hom_S(M, N))$ con lo cual para cada $l \in L$, $\gamma(l) \in Hom_S(M, N)$.

Definamos $h : {}_SM_R \times {}_RL \to {}_SN$ por $h(m, l) = \gamma(l)(m)$.
(i) h está bien definida pues $\gamma(l)$ lo está.
(ii) Para cada $m, m' \in M$ y $l \in L$ es claro que $h(m + m', l) = h(m, l) + h(m', l)$.
(iii) para cada $m \in M$ y $l, l' \in L$ se tiene que

$$\begin{aligned} h(m, l + l') &= \gamma(l + l')(m) \\ &= (\gamma(l) + \gamma(l'))(m) \\ &= \gamma(l)(m) + \gamma(l')(m) \\ &= h(m, l) + h(m, l') \end{aligned}$$

(iv) Para cada $m \in M$, $r \in R$ y $l \in L$ se tiene que

$$h(mr, l) = \gamma(l)(mr) = (r\gamma(l))(m) = \gamma(rl)(m) = h(m, rl)$$

Los puntos anteriores nos dicen que h es R-bilineal y así por la propiedad universal del producto tensorial, existe un único homomorfismo $\phi(\gamma) : M \otimes_R L \to N$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "h"] \arrow[d] & N \\ M \otimes_R L \arrow[ur, dashed, "\phi(\gamma)"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\phi(\gamma)(m \otimes l) = \gamma(l)(m)$.

De esta forma hemos exhibido un homomorfismo de grupos

$$\phi : Hom_R(L, Hom_S(M, N)) \to Hom_S((M \otimes_R L), N)$$

Por otro lado; para $\delta \in Hom_S(M \otimes_R L, N)$, $\phi^{-1}(\delta) \in Hom_R(L, Hom_S(M, N))$ y $\phi^{-1}(\delta)(l) \in Hom_S(M, N)$. Por lo tanto, tomando a ϕ^{-1} dado por $\phi^{-1}(\delta)(l)(m) = \delta(m \otimes l)$ se tiene que ϕ es un isomorfismo de grupos. $\square$

El resultado precedente nos da como consecuencia que para cada homomorfismo en R-Mod existe un cuadro conmutativo entre Hom y $\otimes$.

Corolario 3.2.3. *Para cada S-R-bimódulo M, $N \in S$-Mod, $L', L \in R$-Mod y $f \in Hom_R(L', L)$ el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{tikzcd}
Hom_R(L, Hom_S(M,N)) \arrow[r, "Hom_R(f, Hom_S(M,N))"] \arrow[d, "\phi"'] & Hom_R(L', Hom_S(M,N)) \arrow[d, "\phi'"] \\
Hom_S((M \otimes_R L), N) \arrow[r, "Hom_S((M \otimes_R f), N)"] & Hom_S((M \otimes_R L'), N)
\end{tikzcd}$$

Demostración. Por el Lema anterior existen isomorfismos

$$\phi : Hom_R(L, Hom_S(M,N)) \longrightarrow Hom_S((M \otimes_R L), N)$$

y

$$\phi' : Hom_R(L', Hom_S(M,N)) \longrightarrow Hom_S((M \otimes_R L'), N)$$

definidos por

$$\phi(\gamma)(m \otimes l) = \gamma(l)(m)$$

y

$$\phi'(\varphi)(m \otimes l') = \varphi(l')(m)$$

respectivamente. Entonces para cada $\gamma : L' \to Hom_S(M,N)$, $l' \in L$ y para cada $m \otimes l' \in M \otimes_R L'$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
(\phi' \circ Hom_R(f, Hom_S(M,N)))(\gamma)(m \otimes l') &= \phi'(Hom_R(f, Hom_S(M,N))(\gamma))(m \otimes l') \\
&= \phi'(\gamma \circ f)(m \otimes l') \\
&= (\gamma \circ f)(l')(m) \\
&= \gamma(f(l'))(m) \\
&= \phi(\gamma)(m \otimes f(l')) \\
&= \phi(\gamma) \circ (M \otimes_R f)(m \otimes l') \\
&= Hom_S((M \otimes_R f), N)(\phi(\gamma))(m \otimes l') \\
&= (Hom_S((M \otimes_R f), N) \circ \phi)(\gamma)(m \otimes l'),
\end{aligned}$$

es decir,

$$\phi' \circ Hom_R(f, Hom_S(M,N)) = Hom_S((M \otimes_R f), N) \circ \phi$$

lo cual concluye la demostración. □

Dado que el funtor Hom es exacto izquierdo lo ideal es que el funtor $\otimes$ resulte ser exacto derecho, lo cual en efecto sucede como veremos a continuación.

Proposición 3.2.4. *Si* $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$ *es una sucesión exacta en R-Mod. Entonces para cada S-R-bimódulo M, la sucesión* $M \otimes_R N' \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} M \otimes_R N \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} M \otimes_R N'' \longrightarrow 0$ *es exacta en S-Mod.*

Demostración. Sea M un R-módulo derecho y consideremos $M^+ = Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, el cual es un R-módulo izquierdo. Tomemos la siguiente sucesión exacta $0 \longrightarrow N' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} N'' \longrightarrow 0$.

Dado que el funtor Hom es exacto izquierdo entonces se tiene que la sucesión $0 \longrightarrow Hom_R(N'', M^+) \xrightarrow{g^*} Hom_R(N, M^+) \xrightarrow{f^*} Hom_R(N', M^+)$ es exacta.

Luego, por el corolario anterior se tiene que la sucesión $0 \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N'', \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N', \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ resulta ser exacta.

Ahora, dado que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es un cogenerador entonces por la Proposición 3.1.3 se concluye que la sucesión $M \otimes_R N' \xrightarrow{\mathcal{F}(f)} M \otimes_R N \xrightarrow{\mathcal{F}(g)} M \otimes_R N'' \longrightarrow 0$ es exacta lo cual concluye la prueba. □

Ahora sí ya estamos en condiciones para introducir la definición de módulo plano y así concluir el capítulo.

Definición 3.2.5. *Sea M un R-módulo derecho. Decimos que M es* **plano** *si el funtor $M \otimes_R \_$ es exacto, es decir, si $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta en R-Mod, entonces la sucesión $0 \longrightarrow M \otimes_R N' \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N'' \longrightarrow 0$ es exacta como grupos abelianos.*

La planitud para módulos izquierdos se define de forma análoga.

Observación 3.2.6. *Dado que el funtor $M \otimes_R \_$ es exacto derecho, se tiene que un R-módulo derecho M es plano si y sólo si para cualquier monomorfismo $\varphi : N' \to N$, se cumple que $1_M \otimes_R \varphi$ es un monomorfismo.*

Teorema 3.2.7. *(Lambek)*
Sea M un R-módulo derecho. Entonces M es plano si y sólo si M^+ es un R-módulo izquierdo inyectivo.

Demostración. Primero observemos que por el Lema 2 (ver pág 41)

$$Hom_R(\_, M^+) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R \_, \mathbb{Q}/Z) \cdots (*)$$

$\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que M es plano y consideremos la sucesión exacta ${}_RN' \longrightarrow {}_RN \longrightarrow {}_RN''$.

Como M es plano entonces $M \otimes_R N' \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N''$ es una sucesión exacta. Ahora, como $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ es inyectivo entonces por la Proposición 2.1.6 la sucesión $Hom_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N'', \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N')$ resulta ser exacta.

Así, por $(*)$ la sucesión $Hom_R(N'', M^+) \longrightarrow Hom_R(N, M^+) \longrightarrow Hom_R(N'', M^+)$ es exacta y por lo tanto, nuevamente por la Proposición 2.1.6 se concluye que M^+ es inyectivo.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que M^+ es inyectivo y consideremos $0 \longrightarrow N \longrightarrow N'$ una sucesión exacta. Mostraremos que la sucesión $0 \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N'$ es exacta.

Dado que M^+ es inyectivo entonces por la Proposición 2.1.6 la sucesión $Hom_R(N', M^+) \longrightarrow Hom_R(N, M^+) \longrightarrow 0$ es exacta. Entonces por $(*)$ la sucesión $Hom_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N', \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow Hom_{\mathbb{Z}}(M \otimes_R N, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \longrightarrow 0$ resulta ser exacta.

Así, por la Proposición 3.1.3 se concluye que la sucesión $0 \longrightarrow M \otimes_R N \longrightarrow M \otimes_R N'$ es exacta y por lo tanto M es plano. $\square$

Sabemos que existe una dualidad (descrita en el primer capítulo) entre los módulos inyectivos y proyectivos, además de que dado un módulo proyectivo (inyectivo) no hay garantía de que su módulo dual resulte ser inyectivo (proyectivo), es decir, no existe una relación explícita entre dichas dualidades, pues aunque tomemos un módulo proyectivo (inyectivo) M al tomar su dual M^* nada nos garantiza que M^* resulte ser un módulo inyectivo (proyectivo), sin embargo, el resultado anterior sí nos da una relación entre ambas dualidades en el siguiente sentido: si M es un módulo proyectivo entonces su dual M^+ es inyectivo (pues todo módulo proyectivo es plano).

Capítulo 4

Dualidad categórica

"Las cosas no son buenas ni malas, simplemente, son. La categoría de ser buenas o malas la establece cada quien según sus propios valores".
Autor anónimo.

Ahora estudiaremos la dualidad a nivel categórico, esto es, dada una categoría analizaremos qué es su categoría dual (que puede resultar ser una categoría diferente a la original) la cual se puede interpretar como la original con la condición de que se voltean las flechas.

Después nos enfocaremos en una categoría en particular, la de los R-módulos. Dicha categoría resulta ser interesante pues como hemos visto en el primer capítulo los resultados para módulos inyectivos se obtienen de forma dual para los módulos proyectivos simplemente invirtiendo las flechas, sin embargo, el interés real de ver dicha dualidad en esta categoría (particularmente con los módulos proyectivos e inyectivos) es que la dualidad existente entre dichos módulos se rompe en el siguiente sentido: en cualquier anillo todo módulo tiene *cápsula inyectiva* pero no siempre tiene *cubierta proyectiva*.

Finalmente se analizará una clase de anillos donde la dualidad mencionada arriba ya no se rompe en la categoría de los R-módulos, es decir, en dichos anillos todo módulo tiene tanto cápsula inyectiva como cubierta proyectiva.

4.1. Principio de dualidad

Definición 4.1.1. *Para cualquier categoría $\mathcal{A}$ se define la* `categoría dual de` *$\mathcal{A}$ (u opuesta) como $\mathcal{A}^{op}$, donde:*
(i) $obj(\mathcal{A}^{op}) = obj(\mathcal{A})$
(ii) $Hom_{\mathcal{A}^{op}}(A, B) = Hom_{\mathcal{A}}(B, A)$
(iii) $f \circ^{op} g = g \circ f$.

Por tanto, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{A}^{op}$ tienen los mismos objetos y sus morfismos invertidos en sus direcciones. A continuación se mencionan algunos ejemplos:

Ejemplo 4.1.2. *Si $\mathcal{A} = (X, \leq)$ es una clase preordenada, considerándola como una categoría, es decir, cada par $(X, \leq)$ con X una clase y $\leq$ una relación reflexiva y transitiva sobre X, da lugar a una categoría $\mathcal{A} = C(X, \leq)$ donde $obj(\mathcal{A}) = X$,*

$$Hom(x,y) = \begin{cases} \{(x,y)\} & si \quad x \leq y \\ \\ \emptyset & en\ otro\ caso \end{cases}$$

$id_x = (x,x)$ *y* $(y,z) \circ (x,y) = (x,z)$.

Entonces se tiene que la categoría opuesta de $\mathcal{A}$ es $\mathcal{A}^{op} = (X, \geq)$.

Ejemplo 4.1.3. *Si $\mathcal{B} = (M, \cdot, e)$ es un monoide considerado como una categoría: es decir, cada semigrupo $(M, \cdot)$ con unidad e, da lugar a una categoría $\mathcal{B} = C(M, \cdot, e)$ $-$con sólo un objeto$-$ $obj(\mathcal{B}) = \{M\}$, $Hom(M,M) = M$, $id_M = e$ y $y \circ x = y \cdot x$.*

Entonces la categoría opuesta de $\mathcal{B}$ es $\mathcal{B}^{op} = (M, \widehat{\cdot}, e)$ donde $a \widehat{\cdot} b = b \cdot a$.

Debido a la forma en que se definen las categorías duales, obsérvese que dada una propiedad $S_{\mathcal{A}^{op}}(X)$ relativa a un objeto X en la categoría $\mathcal{A}^{op}$ puede trasladarse a una propiedad lógicamente equivalente dentro de $S^{op}_{\mathcal{A}}(X)$ relativa al objeto X en la categoría $\mathcal{A}$.

Esto permite asociar a cada propiedad P relativa a objetos en categorías, una propiedad dual relativa a objetos en categorías. Como ejemplo de este principio general tenemos que dicho proceso se puede enunciar de la siguiente manera:

Ejemplo 4.1.4. *Sean $\mathcal{A}$ una categoría y $X \in Obj(\mathcal{A})$. Consideremos la siguiente propiedad:*

$$\mathfrak{P}_{\mathcal{A}}(X) \equiv \textit{Para cada } A \in Obj(\mathcal{A}) \textit{ existe un único } \mathcal{A}\textit{-morfismo } f : A \to X.$$

El proceso consiste en hacer los siguientes pasos:

***Paso 1**: En $\mathfrak{P}_{\mathcal{A}}(X)$ reemplazar todas las ocurrencias de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{A}^{op}$, obteniendo así la propiedad*

$$\mathfrak{P}_{\mathcal{A}^{op}}(X) \equiv \textit{Para cada } A \in Obj(\mathcal{A}^{op}) \textit{ existe un único } \mathcal{A}^{op}\textit{-morfismo } f : A \to X.$$

***Paso 2**: Trasladar $\mathfrak{P}_{\mathcal{A}^{op}}(X)$ a la sentencia lógicamente equivalente*

$$\mathfrak{P}^{op}_{\mathcal{A}}(X) \equiv \textit{Para cada } A \in Obj(\mathcal{A}) \textit{ existe un único } \mathcal{A}\textit{-morfismo } f : X \to A.$$

Nótese que, $\mathfrak{P}^{op}_{\mathcal{A}}(X)$ se obtiene de $\mathfrak{P}_{\mathcal{A}}(X)$ invirtiendo la dirección de cada flecha y el orden en el cual los morfismos son compuestos.

Naturalmente, $\mathfrak{P}^{op}_{\mathcal{A}}(X)$ en general no es equivalente a $\mathfrak{P}_{\mathcal{A}}(X)$. Esto se puede ver con una categoría particular:
Sea $\mathcal{A} = Set$ y consideremos $\mathfrak{P}_{\mathcal{A}}(X)$ la propiedad antes mencionada. Entonces
1.- $\mathfrak{P}_{Set}(X)$ es verdadera si y sólo si X es un conjunto con un único elemento. Mientras que:
2.- $\mathfrak{P}^{op}_{Set}(X)$ es verdadera si y sólo si $X = \emptyset$.

Dado que en las categorías también se pueden cumplir propiedades acerca de sus morfismos, es lógico pensar en dualizar una propiedad referente a morfismos y nuevamente, como ejemplo de dicho principio general tenemos lo siguiente.

Ejemplo 4.1.5. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría y consideremos la siguiente propiedad un de morfismo en $\mathcal{A}$, $A \xrightarrow{f} B$ como sigue:*

$$\mathfrak{Q}_{\mathcal{A}}(f) \equiv \text{Existe un } \mathcal{A}\text{-morfismo } B \xrightarrow{g} A \text{ con } g \circ f = id_A \text{ en } \mathcal{A}.$$

El proceso es el siguiente:
Paso 1*: Reemplazar en $\mathfrak{Q}_{\mathcal{A}}(f)$ todas las ocurrencias de $\mathcal{A}$ por $\mathcal{A}^{op}$, obteniendo así la propiedad*

$$\mathfrak{Q}_{\mathcal{A}^{op}}(f) \equiv \text{Existe un } \mathcal{A}^{op}\text{-morfismo } B \xrightarrow{g} A \text{ con } g \circ f = id_A \text{ en } \mathcal{A}^{op}.$$

Paso 2*: Trasladar $\mathfrak{Q}_{\mathcal{A}^{op}}(f)$ a la sentencia lógicamente equivalente*

$$\mathfrak{Q}^{op}_{\mathcal{A}}(f) \equiv \text{Existe un } \mathcal{A}\text{-morfismo } A \xrightarrow{g} B \text{ con } f \circ g = id_A \text{ en } \mathcal{A}.$$

Al igual que con los objetos, es de esperarse que dicha propiedad para morfismos en general no sea equivalente a su propiedad dual para morfismos pues si nuevamente consideramos $\mathcal{A} = Set$ se tiene lo siguiente:

1.- $\mathfrak{Q}_{Set}(f)$ es verdadera si y sólo si f es una función inyectiva con dominio distinto del vacío, o es la identidad sobre el conjunto vacío. Mientras que:
2.- $\mathfrak{Q}^{op}_{Set}(f)$ es verdadera si y sólo si f es una función suprayectiva.

Sin embargo, cuando una propiedad se cumple en *todas* las categorías entonces su propiedad dual también se debe cumplir. Esto lo establece el *Principio de Dualidad.*

Principio de Dualidad para Categorías
Siempre que una propiedad $\mathfrak{P}$ sea válida para todas las categorías, entonces la propiedad $\mathfrak{P}^{op}$ es válida para todas las categorías.

La prueba de este principio se sigue inmediatamente de que para todas las categorías $\mathcal{A}$ y propiedades $\mathfrak{P}$ se cumple lo siguiente:

(i) $(\mathcal{A}^{op})^{op} = \mathcal{A}$

(ii) $\mathfrak{P}^{op}(\mathcal{A})$ es verdadera si y sólo si $\mathfrak{P}(\mathcal{A}^{op})$ es verdadera.

Debido a este principio, cada resultado en la Teoría de Categorías tiene dos formulaciones equivalentes. Sin embargo, sólo una de ellas necesita ser probada, ya que la otra se sigue en virtud del Principio de Dualidad.

A continuación daremos un ejemplo de una propiedad que se cumple en todas las categorías.

Ejemplo 4.1.6. *Sea $\mathcal{A}$ una categoría y consideremos la propiedad*

$$\mathfrak{R} := \mathfrak{R}_{\mathcal{A}}(f) \equiv \text{Si } \mathfrak{P}_{\mathcal{A}}(dom(f)) \text{ entonces } \mathfrak{Q}_{\mathcal{A}}(f),$$

donde $\mathfrak{P}$ *y* $\mathfrak{Q}$ *son las propiedades definidas en los ejemplos* 4.1.4 *y* 4.1.5

Afirmación: $\mathfrak{R}(\mathcal{A})$ *es verdadera.*

Demostración. En efecto dicha propiedad se cumple, pues sea $\mathcal{A}$ una categoría y f un $\mathcal{A}$-morfismo. Si $\mathfrak{P}_{\mathcal{A}}(dom(f))$ es verdadera entonces para $cod(f) \in Obj(\mathcal{A})$ existe un único $\mathcal{A}$-morfismo $g : cod(f) \to dom(f)$.

Por otro lado, para $dom(f)$ existe un único $\mathcal{A}$-morfismo $h : dom(f) \to dom(f)$, es decir, $h = id_{dom(f)}$ y dado que $g \circ f : dom(f) \to dom(f)$ e $id_{dom(f)}$ es el único $\mathcal{A}$-morfismo se concluye que $g \circ f = id_{dom(f)}$, es decir, $\mathfrak{Q}_{\mathcal{A}}(f)$ es verdadera.
Por lo tanto $\mathfrak{R}(\mathcal{A})$ se cumple para cualquier categoría $\mathcal{A}$. □

Entonces por el Principio de Dualidad $\mathfrak{R}^{op}(\mathcal{A})$ *se cumple para todas las categorías* $\mathcal{A}$*, donde*

$$\mathfrak{R}^{op}_{\mathcal{A}}(f) \equiv \textit{Si } \mathfrak{P}^{op}_{\mathcal{A}}(cod(f)) \textit{ entonces } \mathfrak{Q}^{op}_{\mathcal{A}}(f).$$

Como dijimos anteriormente, la categoría de R-módulos resulta ser muy interesante pues la propiedad de ser proyectivo:

$\mathrm{P}_{_{R\text{-}Mod}}(L) \equiv$ Para cada módulo M, cada epimorfismo $\varphi : M \to N$ y cada homomorfismo $\psi : L \to N$ existe un homomorfismo $\gamma : L \to M$ tal que $\psi = \varphi \circ \gamma$

dualiza la propiedad de ser inyectivo

$\mathrm{P}^{op}_{_{R\text{-}Mod}}(L) \equiv$ Para cada módulo M, cada monomorfismo $\varphi : N \to M$ y cada homomorfismo $\psi : N \to L$ existe un homomorfismo $\gamma : M \to L$ tal que $\psi = \gamma \circ \varphi$.

Todo pareciera indicar que si tenemos un categoría arbitraria de módulos $\mathcal{M}$, entonces los resultados que se cumplen para los módulos proyectivos en $\mathcal{M}$ se deberían de cumplir para los módulos inyectivos en $\mathcal{M}^{op}$ al dualizar, sin embargo, esto no sucede ya que $\mathcal{M}^{op}$ no necesariamente es una categoría de módulos (lo cual se mostrará más adelante).

Sin embargo, lo interesante es que no todas las pruebas tienen que ser duales y a pesar de que no hay un Principio de Dualidad para categorías de módulos, se tienen casos donde si se cumplen propiedades duales como se anuncia a continuación:

En cualquier categoría de módulos $\mathcal{M}$ se tiene que

todo módulo es cociente de un proyectivo

cuya demostración no es tan complicada, mientras que su afirmación dual

todo módulo es un sub-mdulo de un inyectivo

tiene una prueba completamente distinta a la afirmación de módulos proyectivos.

Así que si tenemos dos enunciados (sobre módulos) duales verdaderos, no necesariamente las demostraciones son duales. Lo curioso es que a pesar de que las afirmaciones anteriores son duales (pero no en su demostración) existen resultados duales (desprendidos de dichas afirmaciones) cuyas demostraciones si resultan ser duales. Un ejemplo de ello es la existencia de *resoluciones proyectivas* y *resoluciones inyectivas* para un módulo M.

Una `resolución proyectiva` de un R-módulo M es una sucesión exacta $\cdots \longrightarrow P_m \xrightarrow{f_m} P_{m-1} \xrightarrow{f-1} \cdots \longrightarrow P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \longrightarrow 0$ en $R\text{-}Mod$, donde los $P_j \in R\text{-}Mod$ son proyectivos para todo $j \geq 0$, mientras que una `resolución inyectiva` de un R-módulo N es una sucesión exacta $0 \longrightarrow N \xrightarrow{g_0} I_0 \xrightarrow{g_1} I_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow I_n \xrightarrow{g_{n+1}} I_{n+1} \longrightarrow \cdots$ en $R\text{-}Mod$, donde los $I_i \in R\text{-}Mod$ son inyectivos para todo $i \geq 0$.

Como se puede observar, a pesar de que los módulos inyectivos son duales a los proyectivos, algunas demostraciones de ciertas propiedades que cumplen unos no se pueden demostrar dualmente a pesar de que los resultados si lo sean.

4.2. Cubiertas proyectivas

Definición 4.2.1. *Sea M un R-módulo y N un submódulo de M. Decimos que N es* `superfluo`*, lo que se denota por $N \ll M$, si para todo $L \lneq M$ se tiene que $L + N \neq M$.*

Es claro que todo módulo no cero tiene al menos un submódulo superfluo, en efecto pues si M es un R-módulo con $M \neq 0$, entonces el submódulo $\{0\}$ es superfluo (en el caso del módulo cero, $\{0\}$ es superfluo en $\{0\}$).

Dado que el núcleo de cualquier homomorfismo es submódulo de su dominio, de manera similar puede definirse un homomorfismo superfluo.

Definición 4.2.2. *Sea $f : P \to M$ un homomorfismo de R-módulos. Decimos que f es* `superfluo` *si f es un epimorfismo tal que $Ker(f) \ll P$. Además, si P es proyectivo, la pareja (P, f) recibe el nombre de* `cubierta proyectiva` *de M.*

En algunos contextos la cubierta proyectiva de un módulo M suele denotarse por $P(M)$.

A continuación mostraremos un ejemplo de un módulo que tiene cubierta proyectiva. Para ello primero recordemos qué es el *radical* de un anillo y de un módulo.

Definición 4.2.3. *Sea R un anillo y M un R-módulo. Se define el* `radical de Jacobson` *de R, denotado por $rad(R) = \mathsf{J}(R)$, como la intersección de todos los ideales máximos de R. De manera similar se define el* `radical` *de M como la intersección de todos los submódulos máximos de M,*

$$rad(M) = \bigcap \{N \mid N \text{ es un submódulo máximo de } M\}$$

Ejemplo 4.2.4. *Si R es un anillo y $e \in R$ es idempotente, entonces (Re, π) es una cubierta proyectiva de $Re/rad(Re)$, donde $\pi : Re \to Re/rad(Re)$ es la proyección canónica.*

En efecto pues sabemos que $\pi : Re \to Re/rad(Re)$ es un epimorfismo y $Ker(\pi) = rad(Re)$. Por otro lado, dado que Re es un R-módulo libre, y por ende proyectivo, entonces

$$rad(Re) = Re \cdot \mathsf{J}(R) = (\mathsf{J}(R))e$$

y así por el Lema de Nakayama se tiene que $rad(Re) \ll Re$. Por lo tanto $ker(\pi) \ll Re$ y así se concluye que (Re, π) es una cubierta proyectiva de $Re/rad(Re)$.

Lema de Nakayama. Si I es un ideal de R tal que $I \subset \mathsf{J}(R)$, entonces las siguientes dos condiciones equivalentes se mantienen para cada R-módulo finitamente generado M:
(a) Si N es un submódulo de M tal que $N + IM = M$, entonces $N = M$.
(b) Si $IM = M$, entonces $M = 0$.

La siguiente proposición muestra la relación que existe entre la cubierta de un módulo con su radical.

Proposición 4.2.5. *Sea P un R-módulo. Entonces se cumple lo siguiente:*

(a) *Si (P, f) es una cubierta proyectiva de M entonces $Ker(f) \subseteq rad(P)$.*

(b) *Si P es proyectivo, finitamente generado y $f : P \to M$ un epimorfismo tal que $Ker(f) \subseteq rad(P)$ entonces (P, f) es una cubierta proyectiva de M.*

Demostración. (a) Dado que (P, f) es una cubierta proyectiva de M entonces $Ker(f) \ll P$ y dado que para todo R-módulo N, $rad(N) = \sum N_\alpha$ tal que $N_\alpha \ll N$, se sigue que $Ker(f) \subseteq rad(P)$.

(b) Ya que P es finitamente generado, $rad(P) \ll P$ y por tanto $Ker(f) \ll P$, luego, como f es epimorfismo se concluye que (f, P) es una cubierta proyectiva de M. $\square$

Hasta el momento sólo se han dado resultados con la suposición de que existe la cubierta proyectiva de un módulo, sin embargo, esta no siempre existe. A continuación se muestran algunos ejemplos de módulos para los cuales no existe cubierta proyectiva.

Ejemplo 4.2.6. ***1.-*** *Si R es un anillo tal que $\mathsf{J}(R) = 0$ entonces los únicos módulos con cubierta proyectiva son los módulos proyectivos.*

En efecto pues, si (P, f) es una cubierta proyectiva de M entonces

$$Ker(f) \subseteq rad(P) = P \cdot \mathsf{J}(R) = 0.$$

pues para cada R-módulo proyectivo P se cumple que $rad(P) = P \cdot \mathsf{J}(R)$ (ver [9, pág 223]).

Así que f es monomorfismo y por ende es un isomorfismo y por tanto M es proyectivo.

2.- *$\mathbb{Z}_n$ no tiene cubierta proyectiva para todo $n \geq 2$.*
En efecto pues como $J(\mathbb{Z}) = 0$ entonces por lo anterior los únicos módulos que tienen cubierta proyectiva son los $\mathbb{Z}$-módulos libres (ver [9, pág 224]).

Por tanto, dado que $\mathbb{Z}_n$ no es $\mathbb{Z}$ libre para todo $n \geq 2$ se concluye que $\mathbb{Z}_n$ no tiene cubierta proyectiva para todo $n \geq 2$.

El ejemplo **1** nos dice que en un anillo tal que su radical es cero, cualquier módulo que no sea proyectivo no tiene cubierta proyectiva y el ejemplo **2** nos da una infinidad de módulos sin dicha propiedad, sin embargo, cuando un módulo tiene cubierta proyectiva se puede demostrar que ésta es única.

Proposición 4.2.7. *Las cubiertas proyectivas son únicas salvo isomorfismos (en caso de existir).*

Demostración. Sean $(P_1, \varphi_1), (P_2, \varphi)$ cubiertas proyectivas de M. Dado que P_2 es proyectivo y φ_1 es un epimorfismo, entonces el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} & P_2 \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "\varphi_2"] & \\ P_1 \arrow[r, "\varphi_1"] & M \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Notemos que si $x \in P_1$ entonces por ser φ_2 un epimorfismo, existe $y \in P_2$ tal que $\varphi_2(y) = \varphi_1(x)$. Sea $z = x - f(y) \in P_1$. Notemos que $z \in Ker(\varphi_1)$ pues

$$\varphi_1(z) = \varphi_1(x) - \varphi_1(f(y)) = \varphi_1(x) - \varphi_2(y) = 0,$$

por tanto $x = z + f(y) \in Ker(\varphi_1) + Im(f)$ y así se tiene que $P_1 = Ker(\varphi_1) + Im(f)$.

Por otro lado, como $Ker(\varphi_1) \ll P_1$ entonces $Im(f) = P_1$ y de esta forma f es un epimorfismo.

Ahora, dado que P_1 es proyectivo entonces $f : P_2 \to P_1$ se escinde, por lo cual si $f' : P_1 \to P_2$ es una escisión para f entonces f' es monomorfismo y $P_2 = Im(f') \oplus Ker(f)$, pero $Ker(f) \subseteq Ker(\varphi_2)$ con lo cual $Ker(f) \ll P_2$. Por lo tanto $P_2 = Im(f') \cong P_1$ que era lo que se quería probar. □

Ahora analizaremos el concepto dual de las cubiertas proyectivas para módulos, las cuales reciben el nombre de *cápsulas inyectivas*.

4.3. Cápsulas inyectivas

Definición 4.3.1. *Sea M un R-módulo y $N \leq M$. Decimos que N es* **`esencial`** *si para todo $N' \leq M$ con $N' \neq 0$ se tiene que $N \cap N' \neq 0$. Si N es un submódulo esencial de M, escribiremos $N \trianglelefteq M$, entonces M se llama una extensión esencial de N.*

Todo módulo tiene submódulos esenciales como se mostrará a continuación.

Proposición 4.3.2. *Sean M un R-módulo y N un submódulo de M. Entonces existe un submódulo $N_c \leq M$ tal que $N + N_c$ es directa y $N + N_c \trianglelefteq M$.*

Demostración. Supongamos que $N \leq M$ y consideremos $\mathcal{F} = \{N' \leq M | N \cap N' = 0\}$. Notemos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$ pues $0 \in \mathcal{F}$ ya que $0 \leq M$ y $N \cap 0 = 0$. Además, como $(\mathcal{F}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado que satisface las hipótesis del Lema de Zorn, entonces $\mathcal{F}$ tiene elemento máximo, el cual denotaremos por N_c, y así $N + N_c$ es directa.

Por otro lado, sea $N' \leq M$ con $N' \neq 0$ y supongamos que $(N + N_c) \cap N' = 0$. Como $N' \subsetneq N_c$ entonces $N_c \subset N' + N_c$ y por tanto $N \cap (N' + N_c) \neq 0 \cdots\cdots (*)$.

Sea $z \in N \cap (N' + N_c)$. Como $z \in N' + N_c$ entonces existen $n' \in N'$ y $n \in N_c$ tales que $z = n' + n$, así se tiene que $n' = z - n \in (N + N_c) \cap N' = 0$ y por tanto $z = n$. Sin embargo, como $N \cap N_c = 0$ se deduce que $z = 0$ y por lo tanto $N \cap (N' + N_C) = 0$ lo cual contradice $(*)$.

Por lo tanto $(N + N_c) \cap N' \neq 0$ y así que $N + N_c \trianglelefteq M$. □

Lema 3. *Sea N un R-módulo y M un submódulo de N. Entonces $M \trianglelefteq N$ si y sólo si para todo $n \in N \setminus \{0\}$ existe $r \in R$ tal que $0 \neq r \cdot n \in M$.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que $M \trianglelefteq N$ y sea $n \in N \setminus \{0\}$. Consideremos el submódulo no cero $N' = Rn$.

Dado que $M \trianglelefteq N$ entonces $M \cap N' \neq 0$, es decir, existe $m \in M \cap N'$ tal que $m \neq 0$ y de esta forma existe $r \in R$ tal que $m = rn$ que es lo que se quería demostrar.

$\Leftarrow\rfloor$ Sea $M \leq N$ y consideremos $N' \leq N$ con $N \neq 0$.
Por hipótesis para todo $n \in N - \{0\}$ existe $r \in R$ tal que $0 \neq rn \in M$, en particular para $n' \in N' - \{0\}$ existe $r \in R$ tal que $rn' \in M$ y por tanto $M \cap N' \neq 0$. Por lo tanto $M \trianglelefteq N$. □

Un hecho importante es que la propiedad de ser esencial es transitiva y que un módulo inyectivo no puede ser un submódulo esencial propio de otro módulo.

Proposición 4.3.3. *Sea M un R-módulo.*

(a) *M es inyectivo si y sólo si no existe un módulo N con $M \lneqq N$ tal que $M \trianglelefteq N$.*

(b) *Si $K \trianglelefteq M$ y $M \trianglelefteq N$ entonces $K \trianglelefteq N$.*

Demostración. (a) Primero notemos que M es inyectivo si y sólo si es sumando directo de todo módulo que lo contenga (Proposición 1.3.11).

Así que, si M es inyectivo es inmediato que no existe $N \neq M$ tal que $M \trianglelefteq N$.

Por otro lado, si M no es inyectivo entonces existe K un R-módulo con $M \subseteq K$ y M no es un sumando directo de K, con lo que $M \trianglelefteq K/L$ donde $L \leq K$ y $M \subset K/L$.

(*b*) Sea $n \in N \setminus \{0\}$, dado que $M \trianglelefteq N$ entonces por el lema anterior (Lema 3) existe $r \in R$ tal que $0 \neq rn \in M$. Nuevamente, como $K \trianglelefteq M$ entonces para rn existe $r' \in R$ tal que $0 \neq r'(rn) \in K$.

Por lo tanto $(r'r)n \in K$ y así nuevamente por el Lema 3 se concluye que $K \trianglelefteq N$. $\square$

Ahora definiremos la propiedad dual de cubierta proyectiva correspondiente a módulos inyectivos.

Definición 4.3.4. *Sea $f : M \to E$ un R-homomorfismo de módulos. Decimos que f es* **esencial** *si es un monomorfismo tal que $Im(f) \trianglelefteq E$. Más aún, decimos que (E, f) es una* **cápsula inyectiva** *de M si f es esencial y E es inyectivo.*

En algunos contextos la cápsula inyectiva de un módulo M se denota por $E(M)$.

Algunos ejemplos de módulos con cápsula inyectiva son los siguientes:

Ejemplo 4.3.5. ***1.-*** *$(\mathbb{Q}, \iota)$ es una cápsula inyectiva de $\mathbb{Z}$, donde $\iota : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ es la inclusión.*

2.- *$(\mathbb{Z}_{p^\infty}, f)$ es una cápsula inyectiva de $\mathbb{Z}_{p^m}$, donde $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \langle \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} : n \in \mathbb{N} \rangle$ y $f : \mathbb{Z}_{p^m} \to \mathbb{Z}_{p^\infty}$ es el monomorfismo dado por $f(1) = \frac{1}{p^m} + \mathbb{Z}$.*

Proposición 4.3.6. *Todo módulo tiene cápsula inyectiva.*

Demostración. Sea M un R-módulo. Entonces existe un módulo inyectivo E y un monomorfismo $\varphi : M \to E$(ver [19, pág 41]) .

Sea $\mathcal{F} = \{N \leq E \mid \varphi(M) \trianglelefteq N\}$ el cual es no vacío ya que $\varphi(M) \in \mathcal{F}$. Ahora consideremos $\{N_\alpha\}_{\alpha \in \delta}$ una cadena en $\mathcal{F}$.

Claramente $\cup N_\alpha \in \mathcal{F}$ pues por ser cadena $\cup N_\alpha \leq E$ y como $\varphi(M) \trianglelefteq N_\alpha$ para cada $\alpha \in \delta$ entonces $N_\alpha \trianglelefteq \cup N_\alpha$ y así por el Lema 3, $\varphi(M) \trianglelefteq \cup N_\alpha$, de esta forma $\cup N_\alpha$ es una cota superior de $\mathcal{F}$.

Entonces por el Lema de Zorn $\mathcal{F}$ tiene elementos máximos, digamos $E(M)$.

Lo que probaremos es $\varphi : M \to E(M)$ es esencial y $E(M)$ es inyectivo.
Primero observemos que si E_c es un complemento de $E(M)$ en E entonces

$$E(M) \simeq (E(M) \oplus E_c)/E_c \trianglelefteq E/E_c,$$

en efecto pues si $N/E_c \leq E/E_c$ tal que $(E(M) \oplus E_C)/E_c \cap (N/E_c) = 0$ entonces $(E(M) \oplus E_c) \cap N \subseteq E_c$. De la modularidad se tiene que

$$(E(M) \cap N) \oplus E_c = (E(M) \oplus E_c) \cap N$$

y así $E_c \subseteq (E(M) \cap N) \oplus E_c \subseteq E_c$.

Por lo tanto $E(M) \cap N = 0$ y por la maximidad de E_c se tiene que $E_c = N$, de donde $N/E_c = 0$. Consecuentemente $(E(M) \oplus E_c/E_c) \trianglelefteq E/E_c$.

Ahora mostraremos que $E = E(M) \oplus E_c$ donde E_c es el submódulo referido en la Proposición 4.3.2. Para ello consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & (E(M) \oplus E_c)/E_c \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\psi"] & E/E_c \arrow[d, "g"] \\ & E(M) \arrow[r, "\iota'"] & E \end{tikzcd}$$

donde ψ es el isomorfismo, ι e ι' son las respectivas inclusiones y g es el homomorfismo dado por la inyectividad de E.

Dado que $\iota' \circ \psi$ es monomorfismo entonces g es monomorfismo, así del diagrama anterior se tiene que

$$E(M) = Im(\iota' \circ \psi) = g((E(M) \oplus E_c)/E_c) \subseteq g(E/E_c)$$

pero $\varphi(M)$ es esencial en $E(M)$ y por ende $E(M)$ es esencial en $g(E/E_c)$.

Por otro lado, como $E(M)$ es extensión esencial máxima de $\varphi(M)$ en E, la maximadad de $E(M)$ implica que $E(M) = g(E/E_c)$ y por lo tanto $E(M) \oplus E_c = E$.

Por lo tanto de la Proposición 1.3.11 se sigue que $E(M)$ es inyectivo y así se concluye que $(E(M), \varphi)$ es una cápsula inyectiva de M. □

Tanto las cubiertas proyectivas como cápsulas inyectivas son únicas.

Proposición 4.3.7. *Las cápsulas inyectivas son únicas salvo isomorfismos.*

Demostración. Sea M un R-módulo y supongamos que $(E_1, \varphi_1), (E_2, \varphi_2)$ son cápsulas inyectivas de M. Dado que E_2 es inyectivo, existe un homomorfismo $f : E_2 \to E_1$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\varphi_2"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & E_2 \arrow[dl, dashed, "f"] \\ E_1 & \end{tikzcd}$$

y así f es monomorfismo pues $\varphi_1 = f \circ \varphi_2$ y por hipótesis φ_1, φ_2 son monomorfismos. Además, como $f(E_2) \leq E_1$ y E_1 es inyectivo se sigue que $f(E_2)$ es sumando directo de E_1, digamos $E_1 = f(E_2) \oplus N$.

Por otro lado, como $\varphi(M) \subseteq f(E_2)$ entonces $\varphi_1(M) \cap N = 0$. Pero por hipótesis $\varphi_1(M) \trianglelefteq E_1$, entonces $N = 0$ y por tanto $f(E_2) = E_1$, es decir, f es epimorfismo y en consecuencia f es un isomorfismo lo cual concluye la prueba. □

El hecho de que un módulo siempre tenga cápsula inyectiva pero no necesariamente cubierta proyectiva nos permite concluir lo siguiente.

Corolario 4.3.8. *La categoría $(R\text{-}Mod)^{op}$ no necesariamente es una categoría de módulos para cada anillo R.*

Demostración. Consideremos el anillo $\mathbb{Z}$, $\mathcal{A} = \mathbb{Z}\text{-}Mod$ y $\mathbb{Z}_n$ un $\mathbb{Z}$-módulo con $n \geq 2$. Si $\mathcal{A}^{op}$ fuese una categoría de módulos entonces al tomar la propiedad

$$\mathfrak{P}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}_n) \equiv \mathbb{Z}_n \text{ no tiene cubierta proyectiva en } \mathcal{A},$$

por el Principio de Dualidad, la propiedad

$$\mathfrak{P}^{op}_{\mathcal{A}}(\mathbb{Z}_n) \equiv \mathbb{Z}_n \text{ no tiene cápsula inyectiva en } \mathcal{A}^{op}$$

también debe de cumplirse, sin embargo, ésto es falso pues anteriormente se demostró que todo módulo siempre tiene cápsula inyectiva. □

Dado que $\mathcal{A}^{op}$ en general no resulta ser una categoría de módulos, tiene sentido preguntarnos lo siguiente: **1.- ¿Para qué anillos R, $(R\text{-}Mod)^{op}$ es una categoría de módulos?**. De esta manera si logramos encontrar anillos R para los cuales $(R\text{-}Mod)^{op}$ resulta ser una categoría entonces lo lógico es preguntarnos **2.- ¿Para qué anillos R, todo R-módulo tiene cubierta proyectiva?** y de esta manera ver si los anillos R para los cuales todo R-módulo tiene cubierta proyectiva son los mismos que cumplen que $(R\text{-}Mod)^{op}$ es una categoría de módulos o no tienen relación alguna.

La respuesta a la primera pregunta se dará en el siguiente capítulo y la respuesta a la segunda pregunta la dan los anillos *perfectos* (los cuales fueron introducidos por H.Bass), sin embargo, antes de mostrar eso primero nos saldremos un poco de contexto para analizar otra clase más general de anillos llamados *anillos semiperfectos* los cuales también fueron introducidos por H.Bass en 1960.

Recordemos que un anillo R se llama **local** si R tiene un único ideal maximal izquierdo. Algunas equivalencias de anillo local son las siguientes:

Proposición 4.3.9. *Sea $\mathsf{J}(R)$ el radical de Jacobson de un anillo R, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *R es local*

(b) *$\mathsf{J}(R)$ es el único ideal máximo izquierdo de R*

(c) *$\{r \in R \mid r$ no es invertible$\}$ es un ideal propio de R*

(d) *$\mathsf{J}(R) = \{r \in R \mid r$ no es invertible$\}$*

(e) *$R/\mathsf{J}(R)$ es un anillo con división.*

Demostración. La demostración puede ser revisada en [12, pág 226]. □

La siguiente clase de anillos es una generalización tanto de la clase de los anillos locales como de la clase de los anillos artinianos.

Definición 4.3.10. *Un anillo R se llama* `semilocal` *si $\overline{R} = R/\mathsf{J}(R)$ es un anillo artiniano semi-simple.*

No sólo se puede hablar de anillos locales, sino que también de elementos locales, esto es:

Definición 4.3.11. *Sea R un anillo y $e \in R$ un idempotente. Decimos que e es* `local` *si el anillo eRe es local.*

Si suponemos que un anillo R es semilocal entonces el anillo cociente $\overline{R} = R/\mathsf{J}(R)$ se puede descomponer como una suma directa de ideales mínimos derechos: $\overline{R} = \overline{e_1}\,\overline{R} \oplus \cdots \oplus \overline{e_n}\,\overline{R}$. Además, como cada anillo $\overline{e_i}\,\overline{R}\,\overline{e_i}$ es un anillo con división, entonces los idempotentes $\overline{e_i}$ son locales. Es por ello que tenemos la siguiente definición.

Definición 4.3.12. *Sea I un ideal de un anillo R. Decimos que* `los idempotentes se pueden levantar módulo I` *si del hecho de $g^2 - g \in I$ con $g \in R$, se sigue que existe $e \in R$ idempotente tal que $e - g \in I$, es decir, $e + I = g + I$.*

Si R es un anillo y consideramos $\mathsf{J}(R)$ el radical de Jacobson de R tenemos la siguiente definición.

Definición 4.3.13. *Decimos que R es un anillo* `semiperfecto` *si R es semilocal y sus idempotentes se pueden levantar módulo $\mathsf{J}(R)$.*

Algunos ejemplos de anillos semiperfectos son los siguientes (los cuales pueden ser consultados en [12, pág 237]):

Ejemplo 4.3.14. ***1.-*** *Sea $p \in \mathbb{Z}$ primo, entonces el anillo de enteros localizados en P, $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \mid (m,n) = 1\, y\, (n,p) = 1\}$ es semiperfecto (porque es local).*

2.- *Si $p_1, p_2, \ldots, p_n \in \mathbb{Z}$ son primos (no necesariamente distintos) entonces el anillo de la forma*

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{(p_1)} & \mathbb{Q} & \cdots & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Z}_{(p_2)} & \cdots & \mathbb{Q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbb{Z}_{(p_n)} \end{pmatrix}$$

es semiperfecto derecho.

3.- *Si $\mathcal{O}$ es un anillo local entonces el anillo $R = \mathbf{M}_n(\mathcal{O})$ es semiperfecto derecho.*

4.- *$\mathbb{Z}$ y el anillo de polinomios $\mathbf{K}[x]$, donde $\mathbf{K}$ es un campo, no son anillos semiperfectos.*

Los anillos semiperfectos se pueden caracterizar vía sus ideales como se enuncia a continuación.

Teorema 4.3.15. *Un anillo R es semiperfecto izquierdo si y sólo si R se puede descomponer como una suma directa de ideales izquierdos donde cada ideal tiene un único submódulo máximo.*

Demostración. La demostración puede ser revisada en [12, pág 235]. □

Otra caracterización de los anillos semiperfectos fue dada por Müller.

Teorema 4.3.16 (B.J. Müller)**.** *Un anillo R es semiperfecto izquierdo si y sólo si $1 \in R$ puede ser descompuesto como una suma de un conjunto finito de idempotentes ortogonales locales.*

Demostración. La demostración puede ser revisada en [12, pág 236]. □

H.Bass notó que si R es un anillo semiperfecto, entonces al restringirnos a la subcategoría de R-módulos finitamente generados resulta que dichos módulos siempre tienen cubierta proyectiva, esto es:

Teorema 4.3.17 (H. Bass)**.** *Para un anillo R las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) R es semiperfecto

(b) Cualquier R-módulo izquierdo finitamente generado tiene cubierta proyectiva

(c) Cualquier R-módulo cíclico izquierdo tiene cubierta proyectiva.

Para la demostración de dicho teorema nos auxiliaremos del siguiente lema.

Lema 4. *Un anillo semiprimitivo que satisface la condición (c) del teorema anterior es semisimple.*

Demostración. La demostración puede ser revisada en [12, pág 239]. □

Ahora se mostrará el Teorema de H.Bass.

Demostración. $(c) \Rightarrow (a)$ Por el Lema 4 el anillo $\overline{R} = R/\mathsf{J}(R)$ es semisimple, es decir, $\overline{R} = U_1 \oplus U_2 \cdots \oplus U_n$ donde los U_i son módulos simples. Luego, por [12, pág 239]

$$P(\overline{R}) = P(U_1) \oplus P(U_2) \oplus \cdots \oplus P(U_n)$$

y por [12, pág 238] cada módulo $P(U_i)$ tiene exactamente un submódulo máximo.

Consideremos $\pi : R \to \overline{R}$ la proyección natural y sea $\varphi : P(\overline{R}) \to U_1 \oplus \cdots \oplus U_n$ un epimorfismo. Como $P = P(\overline{R})$ es proyectivo entonces existe un homomorfismo $\psi : P(\overline{R}) \to R$ tal que $\pi \circ \psi = \varphi$. Claramente $Im(\psi) + Ker(\pi) = R$ y dado que $Ker(\pi) = \mathsf{J}(R)$ entonces por el Lema de Nakayama se tiene $Im(\psi) = R$, es decir, ψ es un epimorfismo.

Por otro lado, dado que R visto como R-módulo sobre sí mismo es un módulo proyectivo entonces

$$P \simeq Im(\psi) \oplus Ker(\psi) = R \oplus Ker(\psi).$$

Luego, $P/(\mathsf{J}(R)P) \simeq \overline{R}$, entonces por el Teorema de Krull-Schmidt para módulos semisimples se tiene que $Ker(\psi)/(\mathsf{J}(R)Ker(\psi)) = 0$. Así por el Lema de Nakayama se sigue que $Ker(\psi) = 0$.

Por lo tanto ψ es un isomorfismo y por el Teorema 4.3.15 se concluye que R es semiperfecto.

$(a) \Rightarrow (b)$ Sea M un R-módulo izquierdo finitamente generado. Claramente $M/(\mathsf{J}(R)M)$ es un $\overline{R}$-módulo y por el Lema de Nakayama $M \neq \mathsf{J}(R)M$ por ser M finitamente generado.

Como M es finitamente generado entonces $M/(\mathsf{J}(R)M)$ se puede descomponer como una suma directa de un número finito de módulos simples, esto es;

$$M/(\mathsf{J}(R)M) = U_{i_1} \oplus U_{i_2} \oplus \cdots \oplus U_{i_m}.$$

Por hipótesis R es semiperfecto, así que por el Teorema 4.3.15 se sigue que cualquier $\overline{R}$-módulo simple U tiene la forma $U = P/(\mathsf{J}(R)P)$, donde P es un R-módulo izquierdo proyectivo indescomponible.

Entonces para cada U_{i_k}, con $k = 1, 2, \ldots, m$, existe P_{i_k} proyectivo indescomponible tal que $U_{i_k} = P_{i_k}/(\mathsf{J}(R)P_{i_k})$. De manera similar a la implicación previa, se puede garantizar la existencia de un epimorfismo $\varphi : P \to M$, donde $P = P_{i_1} \oplus \cdots \oplus P_{i_m}$ y más aún, como $Ker(\varphi) \subset \mathsf{J}(R)P$ entonces por el Lema de Nakayama $Ker(\varphi) \ll P$. Por lo tanto (P, φ) es una cubierta proyectiva de M.

$(b) \Rightarrow (c)$ Es obvia. □

Ahora sí, para responder a la pregunta planteada analizaremos los anillos perfectos. Algunas propiedades fundamentales de anillos perfectos dependen sobre una generalización del concepto nilpotente, el cual es *T-nilpotente*.

Definición 4.3.18. *Sea R un anillo, un ideal I de R es llamado **T-nilpotente izquierdo** (derecho) si para cualquier sucesión $a_1, a_2, \ldots$ de elementos de I existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a_1 a_2 \cdots a_n = 0$ (respectivamente $a_n a_{n-1} \cdots a_1 = 0$).*

En general decimos que un ideal I es *T-nilpotente* si es *T-nilpotente* tanto izquierdo como derecho.

A continuación se dará algún tipo de generelización del Lema de Nakayama para módulos izquierdos arbitrarios.

Teorema 4.3.19. *Para cada ideal I de un anillo R las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(a) *I es T-nilpotente izquierdo*

(b) *Un R-módulo izquierdo M que satisface la igualdad $IM = M$ es igual a cero*

(c) *$IM \ll M$ para todo $M \in Mod\text{-}R$ con $M \neq 0$.*

Demostración. La demostración puede ser revisada en [12, pág 243]. □

Definición 4.3.20. *Sea R un anillo con radical de Jacobson $\mathsf{J}(R)$. Decimos que R es **perfecto izquierdo** (derecho) si $R/\mathsf{J}(R)$ es semisimple y $\mathsf{J}(R)$ es T-nilpotente izquierdo (derecho). Decimos que R es **perfecto** si es perfecto derecho y perfecto izquierdo.*

Algunos ejemplos de anillos perfectos son los siguientes:

Ejemplo 4.3.21. *Todo anillo artiniano izquierdo (respectivamente derecho) R es un anillo perfecto, porque el radical de Jacobson de R es nilpotente y por ende es T-nilpotente tanto izquierdo como derecho y porque R es semiperfecto.*

Ejemplo 4.3.22.

$$R = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$

Es un anillo perfecto el cual además cumple que no es artiniano derecho ni izquierdo.

Notemos que la noción de anillo perfecto no es simétrica, es decir, existen anillos perfectos derechos que no son anillos perfectos izquierdos (y viceversa) como veremos a continuación.

Ejemplo 4.3.23. *Sea K un campo y consideremos K_ω el álgebra de todas las matrices infinitas sobre K. Denotemos por N el conjunto de todas las matrices triangulares estrictamente inferiores en K_ω teniendo un número finito de entradas no cero. Si R es la subálgebra de K_ω generada por N junto con la matriz identidad, entonces R es un anillo perfecto izquierdo pero no es perfecto derecho (ver más detalladamente en [12, pág 245]).*

La cuestión era buscar anillos R para los cuales cualquier R-módulo tuviera cubierta proyectiva en su respectiva categoría de módulos. H.Bass encontró ciertos anillos que cumplen esta condición, así en dicha categoría de módulos se cumple tanto la propiedad de existencia de cápsulas inyectivas como la propiedad dual, existencia de cubiertas proyectivas.

Teorema 4.3.24 (H.Bas)**.** *Sea R un anillo con radical de Jacobson $\mathsf{J}(R)$. Entonces, R es perfecto izquierdo si y sólo si cada módulo izquierdo tiene cubierta proyectiva.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que R es un anillo perfecto izquierdo y sea $M \in R\text{-}Mod$. Consideremos $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ una descomposición como una suma de idempotentes ortogonales locales. Entonces por el Teorema 4.3.16, $\overline{R} = R/\mathsf{J}(R)$ es semiperfecto, además $M/(\mathsf{J}(R)M)$ es un $\overline{R}$-módulo izquierdo el cual se descompone como una suma directa de un número finito de $\overline{R}$-módulos simples, es decir,

$$M/(\mathsf{J}(R)M) = U_{i_1} \oplus U_{i_2} \oplus \cdots \oplus U_{i_m}.$$

Como $\overline{R}$ es semiperfecto, entonces por la Teorema 4.3.15 se sigue que cada $\overline{R}$-módulo izquierdo U tiene la forma $U = P/(\mathsf{J}(R)P)$ donde P es un R-módulo izquierdo proyectivo indescomponible.

Para cada $k = 1, 2, \ldots, m$ sea $U_{i_k} = P_{i_k}/(\mathsf{J}(R)P_{i_k})$ donde los P_{i_k} son R-módulos izquierdos proyectivos indescomponibles. Consideremos $P = P_{i_1} \oplus P_{i_2} \oplus \cdots \oplus P_{i_m}$ el cual es proyectivo.

Entonces usando la proyectividad de P tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & P \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & P_{i_1}/(\mathsf{J}(R)P_{i_1}) \oplus \cdots \oplus P_{i_m}/(\mathsf{J}(R)P_{i_m}) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathsf{J}(R)M \arrow[r] & M \arrow[r] & M/(\mathsf{J}(R)M) \cong U_{i_1} \oplus \cdots \oplus U_{i_m} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

para un homomorfismo adecuado ψ. Entonces

$$Im(\psi) + \mathsf{J}(R)M = M \text{ y } Ker(\psi) \subseteq \mathsf{J}(R)P.$$

Dado que $\mathsf{J}(R)$ es *T-nilpotente* izquierdo, entonces del Teorema 4.3.19 se tiene que $Im(\psi) = M$, es decir, ψ es un epimorfismo.

Por otro lado, como $\mathsf{J}(R)P \ll P$, entonces $Ker(\psi) \subseteq \mathsf{J}(R)P$ implica que $Ker(\psi) \ll P$. Por lo tanto (P,ψ) es una cubierta proyectiva de M.

$\Leftarrow\rfloor$ Por el Teorema 4.3.17 R es semiperfecto, por lo que sólo necesitamos probar que $\mathsf{J}(R)$ es *T-nilpotente* izquierdo.
Sea $M \in Mod\text{-}R$. Por hipótesis M tiene una cubierta proyectiva con lo cual $\mathsf{J}(R)M \leqslant rad(M) \leqslant M$ y $rad(M) \neq M$.

En particular se tiene que $\mathsf{J}(R)M = M$ implica que $M = 0$, así por el Teorema 4.3.19 se tiene que $\mathsf{J}(R)$ es *T-nilpotente* izquierdo y por lo tanto R es perfecto izquierdo. □

El siguiente resultado caracteriza a los módulos planos cuando estos satisfacen la condición de cadena descendente para ideales principales derechos.

Proposición 4.3.25. *Sea R un anillo y consideremos $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\} \subseteq R$. Si $F = \oplus_{i=1}^{n} Re_i$ es un R-módulo libre y K su submódulo (libre) generado por $\{f_i = e_i - a_{i+1}e_{i+1} \mid i \geq 1\}$, entonces el R-módulo izquierdo $M = F/K$ es plano.*

Más aún, M es proyectivo si y sólo si la cadena descendente de ideales principales derechos

$$a_1R \supseteq a_1a_2R \supseteq a_1a_2a_3R \supseteq \cdots$$

se estaciona.

Demostración. La demostración puede ser revisada en [12, pág 246]. □

Recordemos que los módulos planos siempre guardan una relación con los módulos inyectivos sea cual sea el anillo (Teorema 3.2.7), lo cual en general no sucede con los módulos proyectivos. Sin embargo, si el anillo es perfecto siempre existe una relación entre los módulos proyectivos y los módulos planos.

Proposición 4.3.26 (H. Bass)**.** *Sea R un anillo y $\mathsf{J}(R)$ su radical de Jacabson. Entonces las afirmaciones siguientes son equivalentes:*

(*a*) *R es perfecto izquierdo*

(*b*) *Cada R-módulo plano izquierdo es proyectivo*

(*c*) *R satisface la condición de cadena descendente sobre ideales principales derechos.*

Demostración. (*a*) $\Rightarrow$ (*b*) Supongamos que R es un anillo perfecto izquierdo y sea $M \in R\text{-}Mod$ plano. Entonces por el Teorema 4.3.24 existe (P,φ) una cubierta proyectiva de M, la cual induce una sucesión exacta corta
$0 \longrightarrow K \longrightarrow P \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0,$ donde $K = ker(\varphi)$. Dado que M es plano, entonces tomando $\overline{R} = R/\mathsf{J}(R)$ se tiene que la sucesión inducida $0 \longrightarrow \overline{R} \otimes_R K \longrightarrow \overline{R} \otimes_R P \xrightarrow{1\otimes\varphi} \overline{R} \otimes_R M \longrightarrow 0$ es

exacta.

Dado que $\overline{R} \otimes_R M \simeq K/(\mathsf{J}(R)K)$ y (P, φ) es la cubierta proyectiva de M, entonces $1 \otimes \varphi$ define un isomorfismo $P/(\mathsf{J}(R)P) \simeq M/(\mathsf{J}(R)M)$. Esto significa que $K/(\mathsf{J}(R)K) = 0$ y como por hipótesis $\mathsf{J}(R)$ es *T-nilpotente* izquierdo entonces de la Proposición 4.3.19 se sigue que $K = 0$, es decir, φ es un monomorfismo y por lo tanto un isomorfismo. En consecuencia se tiene que M es proyectivo.

$(b) \Rightarrow (c)$ Consideremos la cadena descendente de ideales principales derechos

$$a_1R \supseteq a_1a_2R \supseteq a_1a_2a_3R \supseteq \cdots \qquad (*)$$

Por la proposición anterior podemos asociar un módulo plano M a la sucesión $\{a_1, a_2, \ldots\}$, entonces por hipótesis M es proyectivo y así que la sucesión $(*)$ se estaciona.

$(c) \Rightarrow (a)$ Primero veamos que $\mathsf{J}(R)$ es *T-nilpotente* izquierdo.
Sea $\{a_1, a_2, \ldots\}$ un subconjunto de $\mathsf{J}(R)$ y consideremos la siguiente cadena de ideales principales derechos

$$a_1R \supseteq a_1a_2R \supseteq a_1a_2a_3R \supseteq \cdots \qquad (**)$$

Por hipótesis sabemos que $(**)$ se estaciona, así que existe $n \in \mathbb{N}$ y $b \in R$ tal que

$$a_1a_2 \cdots a_n = a_1a_2 \cdots a_na_{n+1}b.$$

Entonces $a_1a_2 \cdots a_n(1 - a_{n+1}b) = 0$. Así que $1 - a_{n+1}b$ es invertible en R (ver Proposición 3.4.5 en [12]) y en consecuencia $a_1a_2 \cdots a_n = 0$. Por lo tanto $\mathsf{J}(R)$ es *T-nilpotente* izquierdo.

Por otro lado, como toda cadena descendente de ideales principales derechos en $\overline{R} = R/\mathsf{J}(R)$ puede ser escrita en la forma

$$\overline{a_1}\,\overline{R} \supseteq \overline{a_1}\,\overline{a_2}\,\overline{R} \supseteq \cdots$$

la condición de cadena descendente de ideales principales derechos de R se aplica para $\overline{R}$ y de esta forma $\overline{R}$ es semisimple. Por lo tanto R es perfecto izquierdo. $\square$

Por último, en el siguiente capítulo analizaremos otro tipo de dualidad entre categorías; *La teoría de equivalencias* entre categorías y *la teoría de dualidades* entre categorías.

Capítulo 5

Dualidad de Morita

"En todos nosotros hay una dualidad: no somos sólo buenos o sólo malos".
Pilar Tena.

En este capítulo analizaremos otro tipo de dualidad entre categorías, por un lado tenemos *equivalencias categóricas* y por otro *dualidad entre categorías.* Dichas teorías vistas desde un punto categórico resultan ser duales, es decir, si se tiene una dualidad entre dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, se puede reemplazar dicha dualidad por una equivalencia categórica entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}^{op}$. Como siempre nuestro interés estará en la categoría de módulos.

5.1. Equivalencias de anillos

Para poder definir cuándo dos anillos son equivalentes, echaremos mano de las respectivas categorías de módulos, para ello primero definiremos cuándo dos categorías son equivalentes.

Definición 5.1.1. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Un funtor covariante $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es una* `equivalencia categórica` *si existe un funtor (necesariamente covariante) $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ y un isomorfismo natural $GF \cong 1_{\mathcal{C}}$ y $FG \cong 1_{\mathcal{D}}$*

Un funtor G con la propiedad anterior es llamado una `equivalencia inversa` de F. Así que se dice que dos categorías C y D son `equivalentes` si existe una equivalencia categórica de una en la otra. En tal caso escribimos $\mathcal{C} \approx \mathcal{D}$.

Como una situación más general al concepto de equivalencia categórica se tiene el concepto de *adjunción*, esto es.

Definición 5.1.2. *Sean $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$ dos categorías y $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funtores. Decimos que la pareja (F, G) es* `un par adjunto` *si existe un isomorfismo $\tau : Hom_{\mathcal{D}}(F(\_), \_) \longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(\_, G(\_))$, en tal caso decimos que (F, G, τ) es una* `adjunción`.

En el caso de que (F, G) sea un par adjunto de funtores, decimos que F es el adjunto izquierdo de G o que G es el adjunto derecho de F.

Obsérvese que un isomorfismo de categorías provee un ejemplo trivial de adjunción, en efecto pues si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es un isomorfismo de categorías con inversa $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ entonces (F, G) es un par adjunto, además obsérvese que en este caso (G, F) también es un par adjunto.

Sin embargo, en general la adjunción no es simétrica pues para cualesquiera anillos R, S, T y cualquier S-T-bimódulo B se tiene que $(\_ \otimes_S B, Hom_T(B, \_))$ es un par adjunto vía el isomorfismo natural $Hom_{(R,T)}(\_ \otimes_S B, \_) \cong Hom_{(R,S)}(\_, Hom_T(B, \_))$, mientras que para $R = S = T = \mathbb{Z}$ y $B = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, $(Hom_T(B, \_)), \_ \otimes_S B)$ no es un par adjunto (ver más detalladamente en [20, pág 89]).

Ahora aterricemos el concepto de equivalencia de categorías a categorías de módulos, en otras palabras:

Definición 5.1.3. *Decimos que dos anillos R y S son (Morita)* ***equivalentes****, y denotamos $R \approx S$, si R-$Mod \approx S$-Mod.*

De esta forma, si partimos del hecho de que $R \approx S$ podemos obtener la siguiente observación.

Observación 5.1.4. *Supongamos que R y S son dos anillos equivalentes y sean*

$$F : R\text{-}Mod \to S\text{-}Mod \qquad y \qquad G : S\text{-}Mod \to R\text{-}Mod \tag{5.1}$$

equivalencias inversas, es decir,

$$FG \cong 1_{S\text{-}Mod} \qquad y \qquad GF \cong 1_{R\text{-}Mod}$$

Así existen isomorfismos naturales

$$\eta : GF \to 1_{R\text{-}Mod} \qquad y \qquad \zeta : FG \to 1_{S\text{-}Mod} \tag{5.2}$$

Luego, para cada $M, M' \in R$-Mod y cada R-homomorfismo $f : M \to M'$ se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & M' \\ GF(M) \arrow[u, "\eta_M"] \arrow[r, "GF(f)"'] & GF(M') \arrow[u, "\eta'_M"'] \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

Ahora, para cada $M \in R$-Mod y cada $N \in S$-Mod existen $\mathbb{Z}$-isomorfismos

$$\phi = \phi_{MN} : Hom_S(N, F(M)) \longrightarrow Hom_R(G(N), M) \tag{5.4}$$

$$\theta = \theta_{MN} : Hom_S(F(M), N) \longrightarrow Hom_R(M, G(N))$$

definidos vía

$$\phi_{MN}(\gamma) = \eta_M \circ G(\gamma)$$
$$\theta_{MN}(\delta) = G(\delta) \circ \eta_M^{-1}$$

De manera análoga se tienen cuadrados conmutativos y $\mathbb{Z}$-isomorfismos definidos por ζ.

Por la forma en que se define una equivalencia de anillos vía sus equivalencias inversas (F y G), los siguientes resultados son válidos tanto para F como para G, es por ello que sólo se probarán para un funtor.

Proposición 5.1.5. *Sea $F : R\text{-}Mod \to S\text{-}Mod$ una equivalencia categórica. Entonces para cada $M, M' \in R\text{-}Mod$ la restricción de F a $Hom_R(M, M')$ es un isomorfismo de grupos abelianos tal que $F(f)$ es un monomorfismo (epimorfismo) en $S\text{-}Mod$ si y sólo si f es un monomorfismo (epimorfismo) en $R\text{-}Mod$. Más aún, si $M \neq 0$, entonces esta restricción*

$$F : End(_RM) \to End(_SF(M))$$

es un isomorfismo de anillos.

Demostración. Primero tenemos que por ser F un funtor $R\text{-}Mod \to S\text{-}Mod$ sus restricciones son homomorfismos de grupos abelianos.

Así, para $M \in R\text{-}Mod$ no cero, $F : End(_RM) \to End(_SF(M))$ es un homomorfismos de grupos abelianos. Además, por [3, pág 236] se sigue que dicho homomorfismo resulta ser un isomorfismo.

Ahora se mostrará que la restricción de F a $Hom_R(M, M')$ es un isomorfismo de grupos abelianos. Para ello adoptando la notación de la Observación 5.1.4 para $M, M' \in R\text{-}Mod$ al considerar

$$H : Hom_S(F(M), F(M')) \longrightarrow Hom_R(M, M')$$

definida por $H(g) = \eta_{M'} \circ G(g) \circ \eta_M^{-1}$, donde G es una equivalencia inversa de F, resulta ser un $\mathbb{Z}$-homomorfismo por ser composición de $\mathbb{Z}$-homomorfismos.

Afirmación 1 H es monomorfismo.
En efecto pues si $H(g) = 0$ entonces por como se definió H resulta que $G(g) = 0$, así por el análogo a (5.3) para ζ se sigue que

$$g = \zeta_{F(M')} \circ FG(g) \circ \zeta_{F(M)}^{-1} = 0$$

es decir, $g = 0$ y por lo tanto H es monomorfismo.

Afirmación 2 H es epimorfismo.
En efecto pues si $f \in Hom_R(M, M')$ se tiene que

$$H(F(f)) = \eta_{M'} \circ G(F(f)) \circ \eta_M^{-1} = f$$

es decir, para cada $f \in Hom_R(M, M')$ existe $F(f) \in Hom_S(F(M), F(M'))$ tal que $H(F(f)) = f$.

Por lo tanto se concluye que H es un isomorfismo con inverso F y por consiguiente F es un isomorfismo de grupos abelianos.

Por otro lado, de (5.3) se sigue que f es monomorfismo (epimorfismo) si y sólo si $GF(f)$ es monomorfismo (epimorfismo).

Sea $f : M \to M'$ un monomorfismo y sea h un S-homomorfismo tal que $F(f) \circ h = 0$. Como G es una equivalencia inversa de F y $GF(f)$ es monomorfismo se sigue que $GF(f) \circ G(h) = 0$ y por tanto $G(h) = 0$. Así que $FG(h) = 0$, de esta forma el análogo de (5.3) para ζ implica que $h = 0$ y por lo tanto $F(f)$ es un monomorfismo.

Finalmente, como G es una equivalencia inversa de F, si $F(f)$ es monomorfismo se sigue que $GF(f)$ es monomorfismo y por lo tanto f es monomorfismo.

La afirmación de que $F(f)$ es epimorfismo si y sólo si f es epimorfismo se prueba de manera similar utilizando el cuadro conmutativo en (5.3). □

Ahora veamos algunas propiedades que cumplen los $\mathbb{Z}$-isomorfismos descritos en (5.4).

Lema 5. *Sean R y S anillos tales que $R \approx S$. Entonces, en la Observación* 5.1.3*, los homomorfismos*

$$\phi : Hom_S(N, F(M)) \longrightarrow Hom_R(G(N), M)$$
$$\theta : Hom_S(F(M), N) \longrightarrow Hom_R(M, G(N))$$

son isomorfismos naturales en cada variable. En particular, para cada

$$\gamma \in Hom_S(N_1, F(M_1)) \qquad \delta \in Hom_S(F(M_2), N_2)$$
$$\overline{\gamma} \in Hom_R(G(N_1), M_1) \qquad \overline{\delta} \in Hom_R(M_2, G(N_2))$$

y para cada

$$h : M_1 \to M_2 \qquad k : N_2 \to N_1$$

se cumple lo siguiente:

(a) $\phi(F(h)\,\gamma k) = h\,\phi(\gamma)\,G(k)$

(b) $\theta(k\,\delta\,F(h)) = G(k)\,\theta(\delta)\,h$

(c) $\phi^{-1}(h\,\overline{\gamma}\,G(k)) = F(h)\,\phi^{-1}(\overline{\gamma})\,k$

(d) $\theta^{-1}(G(k)\,\overline{\delta}\,h) = k\,\theta^{-1}(\overline{\delta})\,F(h)$

Además, $\phi(\gamma)$ es un monomorfismo (epimorfismo) si y sólo si γ es un monomorfismo (epimorfismo) y $\theta(\delta)$ es un monomorfismo (epimorfismo)si y sólo si δ es un monomorfismo (epimorfismo).

Demostración. Por la proposición anterior se tiene que

$$G : Hom_S(N, F(M)) \longrightarrow Hom_R(G(N), GF(M))$$

es un $\mathbb{Z}$-isomorfismo.

Por otro lado, como $\eta_M : GF(M) \to M$ es un isomorfismo entonces se tiene que

$$Hom_R(G(N), \eta_M) : Hom_R(G(N), GF(M)) \longrightarrow Hom_R(G(N), M)$$

resulta ser un isomorfismo. Por lo tanto se concluye que

$$\phi : Hom_S(N, F(M)) \longrightarrow Hom_R(G(N), M)$$

es un $\mathbb{Z}$-isomorfismo pues $\phi = Hom_R(G(N), \eta_M) \circ G$.

De manera similar se puede observar que

$$\theta : Hom_S(F(M), N) \longrightarrow Hom_R(M, G(N))$$

es un $\mathbb{Z}$-isomorfismo.

Ahora mostraremos (a) y (c) ya que (b) y (d) son análogos.

(a) Para h, k y γ como en las hipótesis se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\phi(F(h)\,\gamma\,k) &= \eta_{M_2}\; G(F(h)\,(\gamma\,k)) \\
&= \eta_{M_2}\; GF(h)\; G(\gamma)\; G(k) \\
&= \eta_{M_2}\; GF(h)\,(\eta_{M_1}^{-1}\,\eta_{M_1})\; G(\gamma)\; G(k) \\
&= (\eta_{M_2}\; GF(h)\,\eta_{M_1}^{-1})\,(\eta_{M_1}\; G(\gamma))\; G(k) \\
&= h\,\phi(\gamma)\; G(k)
\end{aligned}$$

(c) Notemos que para $h, \overline{\gamma}$ y k como en las hipótesis se tiene que

$$\begin{aligned}
\phi(F(h)\,\phi^{-1}(\overline{\gamma})\,k) &= h\,\phi(\phi^{-1}(\overline{\gamma}))\; G(k) \\
&= h\,\overline{\gamma}\; G(k)
\end{aligned}$$

Por lo tanto se concluye que $\phi^{-1}(h\,\overline{\gamma}\,G(k)) = F(h)\,\phi^{-1}(\overline{\gamma})\,k$

Por último sólo se mostrará que $\phi(\gamma)$ es monomorfismo si y sólo si γ es monomorfismo ya que las otras son muy similares.

Sea $\gamma \in Hom_S(N, F)$. Entonces por definición se tiene que $\phi(\gamma) = \eta_M \circ G(\gamma)$. Dado que η_M es un isomorfismo entonces se sigue que $\phi(\gamma)$ es monomorfismo si y sólo si $G(\gamma)$ es monomorfismo si y sólo si γ es monomorfismo (por la Proposición 5.1.5 para G). $\square$

El Lema precedente nos dice que podemos usar ϕ y θ para "transformar" ciertos diagramas de la categoría R-Mod (respectivamente en S-Mod) a diagramas correspondientes en S-Mod (R-Mod respectivamente). Por ejemplo, para (a) tenemos que ϕ transforma el diagrama

$$\begin{tikzcd}
N_1 \arrow[r, "\gamma"] & F(M_1) \arrow[d, "F(h)"] \\
N_2 \arrow[u, "k"] \arrow[r, "F(h)\gamma k"'] & F(M_2)
\end{tikzcd}$$

en el diagrama

$$\begin{tikzcd} G(N_1) \arrow[r, "\phi(\gamma)"] & M_1 \arrow[d, "h"] \\ G(N_2) \arrow[u, "G(k)"] \arrow[r, "\phi(F(h)\gamma k)"'] & M_2 \end{tikzcd}$$

y para (b) θ transforma el diagrama

$$\begin{tikzcd} F(M_2) \arrow[r, "\delta"] & N_2 \arrow[d, "k"] \\ F(M_1) \arrow[u, "F(h)"] \arrow[r, "k\delta F(h)"'] & N_1 \end{tikzcd}$$

en el diagrama

$$\begin{tikzcd} M_2 \arrow[r, "\theta(\delta)"] & G(N_2) \arrow[d, "G(k)"] \\ M_1 \arrow[u, "h"] \arrow[r, "\theta(k\delta F(h))"'] & G(N_1). \end{tikzcd}$$

Una de las propiedades básicas de las equivalencias categóricas es que preservan sucesiones exactas.

Proposición 5.1.6. *Sea $F : R\text{-}Mod \to S\text{-}Mod$ una equivalencia categórica. Entonces una sucesión $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ es exacta (se escinde) en $R\text{-}Mod$ si y sólo si la sucesión $0 \longrightarrow F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \longrightarrow 0$ es exacta (se escinde) en $S\text{-}Mod$.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta. Entonces f es monomorfismo, g es epimorfismo y $Im(f) = ker(g)$

Por la Proposición 5.1.4 se tiene que $F(f)$ es monomorfismo, $F(g)$ es epimorfismo y por tanto sólo basta probar que $Im(F(f)) = Ker(F(g))$.

Como $Im(f) = Ker(g)$ entonces $g \circ f = 0$ y así $F(g)\,F(f) = F(g \circ f) = 0$. Por lo tanto $Im(F(f)) \subseteq Ker(F(g))$.

Por otro lado, consideremos $K = Ker(F(g))$ e $\iota : K \to F(M)$ la inclusión. Entonces por definición $\phi(\iota) : G(K) \to M$ y por el Lema 5, $\phi(F(g)\,\iota) = g\,\phi(\iota)$, pero por como se tomo K se tiene que $\phi(F(g)\,\iota) = 0$ y por lo tanto $Im(\phi(\iota) \subseteq Ker(g) = Im(f)$.

Ahora, por el Teorema del Factor existe $\overline{\gamma} : G(K) \to M'$ tal que $\phi(\iota) = f \circ \overline{\gamma}$. Entonces

$$\iota = \phi^{-1}(f \circ \overline{\gamma}) = F(f)\phi^{-1}(\overline{\gamma})$$

Por lo tanto $ker(F(g)) \subseteq Im(F(f))$ pues $Im(\iota) = K = Ker(F(g))$ y así se concluye que $0 \longrightarrow F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta.

$\Leftarrow\rfloor$ Dado que F es una equivalencia categórica, entonces si la sucesión $0 \longrightarrow F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \longrightarrow 0$ es exacta, como antes se muestra que la sucesión

$$0 \longrightarrow G(F(M')) \xrightarrow{G(F(f))} G(F(M)) \xrightarrow{G(F(g))} G(F(M'')) \longrightarrow 0$$

es exacta, donde G es una equivalencia inversa de F.

Por otro lado, como η es un isomorfismo natural se sigue que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & GF(M') \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{M'}"] & GF(M) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_M"] & GF(M'') \arrow[r] \arrow[d, "\eta_{M''}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & M \arrow[r, "g"] & M'' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

conmuta y por lo tanto la sucesión $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$ es exacta como se deseaba. De manera similar se puede mostrar que las sucesiones se escinden. $\square$

Como resultado inmediato se tiene lo siguiente.

Corolario 5.1.7. *Si $F : R\text{-}Mod \to S\text{-}Mod$ es una equivalencia categórica entonces F es un funtor exacto.*

Otra de las propiedades importantes de las equivalencias categóricas es que preservan módulos proyectivos e inyectivos, así como las cubiertas proyectivas (en caso de existir) y cápsulas inyectivas.

Proposición 5.1.8. *Si $R \approx S$ vía $F : R\text{-}Mod \to S\text{-}Mod$ y $M, M', P \in R\text{-}Mod$ entonces se cumple lo siguiente:*

(a) P es proyectivo (inyectivo) si y sólo si $F(P)$ es proyectivo (inyectivo)

(b) Un monomorfismo (epimorfismo) $f : M \to M'$ es esencial (superfluo) si y sólo si $F(f) : F(M) \to F(M')$ es esencial (superfluo)

(c) $f : M \to M'$ es una cápsula inyectiva (cubierta proyectiva) si y sólo si $F(f) : F(M) \to F(M')$ es una cápsula inyectiva (cubierta proyectiva).

Demostración. (a) Sólo se hará la prueba para módulos proyectivos ya que para los módulos inyectivos la prueba es de manera dual.

$\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que P es un R-módulo proyectivo y consideremos la siguiente sucesión exacta en $S\text{-}Mod$ $0 \longrightarrow N_1 \longrightarrow N \longrightarrow N_2 \longrightarrow 0\cdot$
Consideremos G una equivalencia inversa de F. Entonces por el corolario anterior se sigue que G es exacto y por ende $0 \longrightarrow G(N_1) \longrightarrow G(N) \longrightarrow G(N_2) \longrightarrow 0$ resulta ser una sucesión exacta en $R\text{-}Mod$.

Ahora, como P es proyectivo entonces por la Proposición 2.1.4, $Hom_R(P, \_)$ es exacto y así que la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom_R(P, G(N_1)) \longrightarrow Hom_R(P, G(N)) \longrightarrow Hom_R(P, G(N_2)) \longrightarrow 0$$

es exacta.

Finalmente, por Lema 5 (ver pág 65) tenemos que la sucesión

$$0 \longrightarrow Hom_S(F(P), N_1) \longrightarrow Hom_S(F(P), N) \longrightarrow Hom_S(F(P), N_2) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta y así nuevamente por Proposición 2.1.4 se concluye que $F(P)$ es proyectivo.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que $F(P)$ es un S-Mod proyectivo, entonces por un argumento similar al anterior se tiene que $GF(P)$ es un R-módulo proyectivo pues G es una equivalencia. Finalmente, como $GF(P) \cong P$ se concluye que P es un R-módulo proyectivo.

(b) La prueba sólo se hará para monomorfismos esenciales ya que para epimorfismos superfluos es similar.

$\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que $f : M \to M'$ es un monomorfismo esencial y consideremos $g : F(M') \to N$ un homomorfismo en S-Mod tal que $g \circ F(f)$ es monomorfismo.

Entonces por Lema 5 (ver pág 65), $\theta(g \circ F(f))$ es monomorfismo, es decir, $\theta(g)\, f$ es monomorfismo. Ahora, como f es esencial se concluye que $\theta(g)$ es monomorfismo y así nuevamente por Lema 5 se sigue que g es monomorfismo y por lo tanto $F(f)$ es esencial.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que G es una equivalencia inversa de F. Si $F(f)$ es esencial entonces como antes se prueba que $G(F(f))$ es esencial y dado que $GF \cong \eta_M$ se concluye que $GF(f) \cong f$, es decir, f es esencial.

(c) Se sigue de (a) y (b). □

5.2. Equivalencias de Morita

En la sección anterior se dieron algunas propiedades que cumplen las equivalencias categóricas y algunas propiedades de los $\mathbb{Z}$-isomorfismos que se desprenden de dichas equivalencias, obviamente partiendo del hecho de que dos anillos son equivalentes.

El objetivo de esta sección es buscar condiciones necesarias y suficientes para que dos anillos sean equivalentes y para lograr esto introduciremos el concepto de *módulo progenerador*.

Definición 5.2.1. *Sea P un R-módulo, decimos que P es un* `progenerador` *si es finitamente generado, proyectivo y generador.*

Recordemos que un módulo $M \in R\text{-}Mod$ es un generador si y sólo si para algún módulo $L \in R\text{-}Mod$ y algún $n \in \mathbb{N}$ existe un isomorfismo $M^{(n)} \cong R \oplus L$.

Dado que para cualquier anillo R, sabemos que el R-módulo ${}_RR$ es proyectivo, finitamente generado y un generador, se sigue que ${}_RR$ es un progenerador. Cuando se tiene dos anillos equivalentes, R y S, sus respectivos módulos progeneradores (${}_RR$ y ${}_SS$) guardan una relación interesante entre sus equivalencias inversas.

Antes de enunciar el siguiente teorema primero recordemos qué es un bimódulo y módulo fielmente balanceado: Dado un grupo abeliano M sabemos que M tiene estructura de R-módulo izquierdo y S-módulo derecho vía $\lambda : R \to End^l(M)$ y $\rho : S \to End^r(M)$ respectivamente, entonces M tiene estructura de R-S-bimódulo(${}_RM_S$) si y sólo si $\lambda : R \to End(M_S)$ es un homomorfismo si y sólo si $\rho : S \to End({}_RM)$ es un homomorfismo.
Decimos que ${}_RM_S$ es un bimódulo fielmente balanceado si tanto λ como ρ son isomorfismos.

Teorema 5.2.2. *Sean R y S anillos equivalentes vía*

$$F : R\text{-}Mod \to S\text{-}Mod \qquad y \qquad G : S\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$$

Considermos $P = F(R)$ y $Q = G(S)$. Entonces P y Q son naturalmente bimódulos ${}_SP_R$ y ${}_RQ_S$ tales que cumplen lo siguiente:

(*a*) *${}_SP_R$ y ${}_RQ_S$ son fielmente balanceados*

(*b*) *P_R, ${}_SP$, ${}_RQ$ y Q_S son progeneradores*

(*c*) *${}_SP_R \cong Hom_S(Q, S) \cong Hom_R(Q, R)$ y ${}_RQ_S \cong Hom_R(P, R) \cong Hom_S(P, S)$*

(*d*) *$F \cong Hom_R(Q, \_)$ y $G \cong Hom_S(P, \_)$*

(*e*) *$F \cong (P \otimes_R \_)$ y $G \cong (Q \otimes_S \_)$.*

Demostración. Empezaremos probando (a) y (b) simultáneamente y dado que F y G son equivalencias inversas, sólo se mostrará que ${}_SP_R$ es fielmente balanceado y que tanto P_R como ${}_SP$ son progeneradores.

Como bien sabemos a R se le puede dar una estructura de bimódulo ${}_RR_R$ mediante los homomorfismos descritos en la Definición 1.2.1. Además, por ser una equivalencia categórica F induce una estructura de bimódulo ${}_SP_R = F(R)$, donde la multiplicación escalar por la derecha está dada por el homomorfismo de anillos $R \to End({}_SP) = End({}_SF(R))$ mediante $r \longmapsto F(\rho(r))$.

Observemos que $R \cong End({}_SF(R))$ pues

$$R \cong End({}_RR) \qquad \text{y} \qquad End({}_RR) \cong End({}_SF(R))$$

Por otro lado, dado que ${}_RR$ es un progenerador y como F preserva dichas condiciones, se sigue que ${}_SP = F({}_RR)$ es un progenerador. En particular, como ${}_SP$ es un generador se tiene que ${}_SP$ es balanceado (ver [3, pág 195]) y además, como $R \cong End({}_SP)$ se sigue que ${}_SP_R$ es fielmente balanceado y por lo tanto P_R es un progenerador.

Ahora se mostrará (c) y (d).
Por el Lema 5 (ver pág 65) sabemos que

$$Hom_S(S, F(M)) \cong Hom_R(G(S), M) = Hom_R(Q, M)$$

para todo $M \in R\text{-}Mod$. Además, como $F(M) \in S\text{-}Mod$ se tiene que $F(M) \cong Hom_S(S, F(M))$. Por lo tanto para todo $M \in R\text{-}Mod$ se cumple que

$$F(M) \cong Hom_S(S, F(M)) \cong Hom_R(Q, M),$$

es decir, $F \cong Hom_R(Q, \_)$.
De manera análoga se demuestra que $G \cong Hom_S(P, \_)$.

Así, para el bimódulo ${}_RR_R$ se tiene que

$${}_SP_R =_S F(R)_R \cong Hom_R(Q, R).$$

Por (a) sabemos que ${}_RQ_S$ es fielmente balanceado, es decir, $R \cong Hom_S(Q, Q)$. Además, por [3, pág 240] se tiene que

$$Hom_R(Q, Hom_S(Q, Q)) \cong Hom_S(Q, Hom_R(Q, Q))$$

y nuevamente $Hom_R(Q, Q) \cong S$ por ser Q balanceado.
Por lo tanto ${}_SP_R \cong Hom_R(Q, R) \cong Hom_S(Q, S)$.

De manera análoga se demuestra que ${}_RQ_S \cong Hom_R(P, R) \cong Hom_S(P, S)$.

(e) Por último, se mostrará que $F \cong (P \otimes_R \_)$ y $G \cong (Q \otimes_S \_)$.
En efecto pues por (d) se tiene que $F \cong Hom_R(Q, \_)$, además

$$\begin{aligned} Hom_R(Q, \_) &\cong Hom_R(Hom_R(P, R), \_) && \text{por } (c) \\ &\cong P \otimes_R Hom_R(R, \_) && \text{por Prop 20.11 Anderson} \\ &\cong (P \otimes_R \_). \end{aligned}$$

De manera análoga se demuestra que $G \cong (Q \otimes_S \_)$. □

Del resultado precedente, en el caso de la adjunción (F, G) se tiene que $F \cong U \otimes_S \_$ y $G \cong Hom_R(U, \_)$, donde U es un ${}_RU_S$ bimódulo cualquiera. Esto establece de alguna manera una "dualidad" entre dichos funtores más no entre las categorías. Además, el resultado anterior nos da una idea para saber cuando dos anillos son equivalentes.

Teorema 5.2.3 (Morita). *Sean R y S anillos, $F : R\text{-}Mod \to S\text{-}Mod$ y $G : S\text{-}Mod \to R\text{-}Mod$ funtores. Entonces, F y G son equivalencias inversas si y sólo si existe un bimódulo ${}_SP_R$ tal que:*

(a) ${}_SP$ *y* P_R *son progeneradores*

(b) ${}_SP_R$ *es balanceado*

(c) $F \cong (P \otimes_R \_)$ *y* $G \cong Hom_S(P, \_)$

Más aún, si existe un bimódulo ${}_SP_R$ *el cual satisface éstas condiciones, entonces tomando* $Q = Hom_R(P, R)$ *tenemos* ${}_RQ_S$ *con* ${}_RQ$ *y* Q_S *progeneradores y* $F \cong Hom_R(Q, \_)$ *y* $G \cong (Q \otimes_S \_)$.

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Se sigue del teorema anterior.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que existe un bimódulo ${}_SP_R$ tal que cumple las condiciones (a) y (b).

Por [3, pág 243], para cada $M \in R\text{-}Mod$ y para cada $N \in S\text{-}Mod$ se tiene que

$$Hom_S(P, P \otimes_R M) \cong Hom_S(P, P) \otimes_R M$$

luego, como ${}_SP_R$ es balanceado se tiene que $Hom_S(P, P) \cong R$ y además por la Proposición 5.3.14 se tiene que $R \otimes_R M \cong M$.

Por lo tanto $Hom_S(P, P \otimes_R M) \cong M$ para todo $M \in R\text{-}Mod$.

De manera similar se tiene que $P \otimes_R Hom_S(P, N) \cong N$ para todo $N \in S\text{-}Mod$, pues $P \otimes_R Hom_S(P, N) \cong Hom_S(Hom_R(P, P), N)$ y $R \cong Hom_R(P, P)$ por ser ${}_SP_R$ balanceado.

Así, tomando

$$F = (P, \otimes_R \_) \qquad \text{y} \qquad G = Hom_S(P, \_)$$

se tiene que para cada $M \in R\text{-}Mod$ y cada $N \in S\text{-}Mod$

$$\begin{aligned} GF(M) &= G(P \otimes_R M) \\ &= Hom_S(P, P \otimes_R M) \\ &\cong M \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} FG(N) &= F(Hom_S(P, N)) \\ &= P \otimes_R Hom_S(P, N) \\ &\cong N, \end{aligned}$$

es decir,

$$FG \cong 1_{S\text{-}Mod} \qquad \text{y} \qquad GF \cong 1_{R\text{-}Mod}.$$

Por lo tanto F y G son equivalencias inversas.

Finalmente, si existe un bimódulo ${}_SP_R$ el cual satisface las condiciones establecidas, entonces tomando a $Q = Hom_R(P, R)$ por el Teorema 5.2.2 se sigue lo que se desea. $\square$

Como consecuencia se tienen las siguientes equivalencias para que dos anillos sean equivalentes.

Corolario 5.2.4. *Sean R y S anillos, entonces R-$Mod \approx S$-Mod si y sólo si Mod-$R \approx Mod$-S.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que R-$Mod \approx S$-Mod vía $F : R$-$Mod \to S$-Mod y $G : S$-$Mod \to R$-Mod. Entonces por Morita existe un bimódulo ${}_SP_R$ balanceado con ${}_SP$ y P_R progeneradores, además de que $F \cong (P \otimes_R \_)$ y $G \cong Hom_S(P, \_)$.

Entonces por la Proposición 5.2.2 tomando a $Q = Hom_S(P, S)$ resulta ser un bimódulo ${}_RQ_S$ balanceado con ${}_RQ$ y Q_S progeneradores.

De esta forma podemos ver a Q como un bimódulo ${}_{S^{op}}Q_{R^{op}}$ que es balanceado y con $Q_{R^{op}}$, ${}_{S^{op}}Q$ ambos progeneradores. Así nuevamente por Morita, R^{op}-$Mod \approx S^{op}$-Mod y por lo tanto se concluye que Mod-$R \approx Mod$-S.

$\Leftarrow\rfloor$ La demostración es análoga a la necesidad. $\square$

Corolario 5.2.5. *Para dos anilos, R y S las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $R \approx S$

(b) *Existe un progenerador P_R con $S \cong End(P_R)$*

(c) *Existe un progenerador ${}_RQ$ con $S \cong End({}_RQ)$.*

Demostración. Sólo se mostrará $(a) \Leftrightarrow (b)$ ya que $(a) \Leftrightarrow (c)$ es análoga.

$(a) \Rightarrow (b)$ Es inmediata del Teorema de Morita.

$(b) \Rightarrow (a)$ Supongamos que existe un progenerador P_R con $S \cong End(P_R)$. Entonces ${}_SP_R$ es un bimódulo balanceado.

Por otro lado, como P_R es finitamente generado y proyectivo entonces ${}_SP$ es un generador y por lo tanto ${}_SP$ es un progenerador.

Así, si tomamos

$$F = (P \otimes_R \_) \qquad \text{y} \qquad G = Hom_S(P, \_)$$

por el Teorema de Morita se concluye que F y G son equivalencias inversas y por lo tanto $R \approx S$. $\square$

Ahora se analizará la teoría dual a las equivalencias categóricas, esto es, la *dualidad categórica.*

5.3. Dualidades

Una diferencia notable entre la teoría de dualidades y la de equivalencias se da en las categorías de módulos pues, mientras que para algunos anillos R y S puede existir una equivalencia categórica (ver Teorema 5.2.3), resulta que entre dos categorías completas de módulos no puede existir ninguna dualidad y la dificultad de este hecho está en que $(R\text{-}Mod)^{op}$ no es una categoría de módulos (lo cual responde a la pregunta **1.-** planteada en la sección 4.3 y dicha afirmación se demostrará más adelante).

Sin embargo, a pesar de que no existe dualidad entre dos categorías (completas) de módulos, si podemos encontrar dualidades entre subcategorías, para ello primero definiremos el concepto de dualidad entre categorías de manera general.

Definición 5.3.1. *Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Decimos que una pareja (F, G) de funtores contravariantes*

$$\mathsf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D} \qquad y \qquad \mathsf{G} : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$$

*es una **dualidad** entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ si existen isomorfismos naturales*

$$\mathsf{GF} \cong 1_{\mathcal{C}} \qquad y \qquad \mathsf{FG} \cong 1_{\mathcal{D}}$$

Notemos que las teorías de Dualidades y Equivalencias en realidad son duales pues si $op : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{op}$ denota el funtor contravariante canónico que va de una categoría a su categoría opuesta entonces se tiene lo siguiente:

Proposición 5.3.2. *La pareja (F, G) es una dualidad entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ si y sólo si $(op) \circ \mathsf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$ es una equivalencia inversa de $\mathsf{G} \circ (op) : \mathcal{D}^{op} \to \mathcal{C}$.*

Demostración. $\Rightarrow\rfloor$ Supongamos que la pareja (F, G) es una dualidad entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$.

Primero notemos que $(op) \circ \mathsf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op}$ y $\mathsf{G} \circ (op) : \mathcal{D}^{op} \to \mathcal{C}$ son funtores covariantes pues son la composición de dos funtores contravariantes.

Luego

$$\begin{aligned}(\mathsf{G} \circ op) \circ (op \circ \mathsf{F}) &\cong \mathsf{G} \circ (op \circ op) \circ \mathsf{F} \\ &\cong \mathsf{G} \circ (1_{\mathcal{D}}) \circ \mathsf{F} \qquad \text{pues } (op, op) \text{ es una dualidad} \\ &\cong \mathsf{G} \circ \mathsf{F} \\ &\cong 1_{\mathcal{C}}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}(op \circ \mathsf{F}) \circ (\mathsf{G} \circ op) &\cong op \circ (\mathsf{F} \circ \mathsf{G}) \circ op \\ &\cong op \circ (1_{\mathcal{D}}) \circ op \\ &\cong op \circ op \\ &\cong 1_{\mathcal{D}^{op}} \qquad \text{pues } (op, op) \text{ es una dualidad}\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{C} \approx \mathcal{D}^{op}$.

$\Leftarrow\rfloor$ Supongamos que

$$(op) \circ \mathsf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}^{op} \quad \text{y} \quad \mathsf{G} \circ (op) : \mathcal{D}^{op} \to \mathcal{C}$$

son equivalencias inversas. Entonces

$$\begin{aligned} \mathsf{F} \circ \mathsf{G} &\cong 1_{\mathcal{D}} \circ \mathsf{F} \circ \mathsf{G} \circ 1_{\mathcal{D}} \\ &\cong (op \circ op) \circ \mathsf{F} \circ \mathsf{G} \circ (op \circ op) \\ &\cong op \circ (op \circ \mathsf{F} \circ \mathsf{G} \circ op) \circ op \\ &\cong op \circ 1_{\mathcal{D}^{op}} \circ op \\ &\cong 1_{\mathcal{D}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \mathsf{G} \circ \mathsf{F} &\cong \mathsf{G} \circ 1_{\mathcal{D}} \circ \mathsf{F} \\ &\cong \mathsf{G} \circ (op \circ op) \circ \mathsf{F} \\ &\cong (\mathsf{G} \circ op) \circ (op \circ \mathsf{F}) \\ &\cong 1_{\mathcal{C}} \end{aligned}$$

Por lo tanto la pareja (F, G) es una dualidad entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. □

En el Capítulo 2 definimos el dual de un R-módulo mediante el módulo regular ${}_RR$ y en el Capítulo 3 lo definimos mediante un R-módulo cogenerador. Además mostramos un homomorfismo evaluación de un módulo sobre su doble dual. En general, si U es un R-S-bimódulo, para cada $M \in R\text{-}Mod$ definimos el U-**dual** como $M^* = Hom_R(M, U)$ y de la misma forma para cada $N \in Mod\text{-}S$ el U-**dual** como $N^* = Hom_S(N, U)$. De la misma forma se define el doble dual usando ${}_RU_S$ y así tenemos el homomorfismo evaluación $e_M : M \to M^{**}$.

Decimos que M es U-**reflexivo** si e_M es un isomorfismo. Si e_M es un monomorfismo entonces M se dice que es U-**libre de torsión**. Como ya vimos anteriormente en el Capítulo 2 y en el Capítulo 3, dado un anillo cualquiera R; $P, L \in R\text{-}Mod$ son R-libre de torsión si P es proyectivo y L es libre, además si S es un anillo QF entonces cualquier $N \in S\text{-}Mod$ es S-libre de torsión y todo T-módulo M es $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-libre de torsión para todo anillo T.

Si consideramos ${}_R\mathsf{R}[U]$ la subcategoría de módulos U-reflexivos de la categoría $R\text{-}Mod$ y análogamente $\mathsf{R}_S[U]$ la subcategoría de módulos U-reflexivos de la categoría $Mod\text{-}S$ entonces tenemos lo siguiente.

Proposición 5.3.3. *Para cada par de anillos R, S y un bimódulo ${}_RU_S$, los funtores*

$$\mathsf{F} = Hom_R(\_, U) \qquad y \qquad \mathsf{G} = Hom_S(\_, U)$$

definen una dualidad entre las categorías $\mathcal{C} = {}_R\mathsf{R}[U]$ *y* $\mathcal{D} = \mathsf{R}_S[U]$. *De hecho, para cada* $M \in {}_R\mathsf{R}[U]$ *y para cada* $N \in \mathsf{R}_S[U]$, *las evaluaciones*

$$e_M : M \to \mathsf{GF}(M) \qquad y \qquad e_N : N \to \mathsf{FG}(N)$$

son isomorfismos naturales.

Demostración. Por lo anterior para cada $M \in {}_R\mathsf{R}[U]$ se tiene que $e_M : M \to M^{**}$ es un isomorfismo, pero por definición $M^{**} = \mathsf{GF}(M)$ y por lo tanto $\mathsf{GF} \cong 1_{\mathcal{C}}$. Análogamente $\mathsf{FG} \cong 1_{\mathcal{D}}$.

Por lo tanto (F, G) definen una dualidad entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$. □

La proposición precedente nos da isomorfismos naturales para categorías plenas, esto es:

Observación 5.3.4. *Supongamos que* ${}_R\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{D}_S$ *son subcategorías plenas de las categorías R-Mod y Mod-S respectivamente.*

Supongamos que el par de funtores

$$\mathsf{F} :_R \mathcal{C} \to \mathcal{D}_S \qquad\qquad \mathsf{G} : \mathcal{D}_S \to_R \mathcal{C} \tag{5.5}$$

definen una dualidad entre las categorías ${}_R\mathcal{C}$ *y* $\mathcal{D}_S$. *Así*

$$\mathsf{GF} \cong 1_{{}_R\mathcal{C}} \qquad\qquad y \qquad\qquad \mathsf{FG} \cong 1_{\mathcal{D}_S}$$

es decir, existen isomorfismos naturales

$$\eta : \mathsf{GF} \to 1_{{}_R\mathcal{C}} \qquad\qquad y \qquad \zeta : \mathsf{FG} \to 1_{\mathcal{D}_S} \tag{5.6}$$

En particular para η *se tienen cuadros conmutativos de la siguiente forma*

$$\begin{tikzcd} M_1 \arrow[r, "f"] & M_2 \\ \mathsf{GF}(M_1) \arrow[u, "\eta_{M_1}"] \arrow[r, "\mathsf{GF}(f)"] & \mathsf{FF}(M_2) \arrow[u, "\eta_{M_2}"'] \end{tikzcd} \tag{5.7}$$

Lo mismo sucede para ζ. *Además, de manera dual a las equivalencias para cada* $M \in_R \mathcal{C}$ *y cada* $N \in \mathcal{D}_S$ *existen* $\mathbb{Z}$*-isomorfismos*

$$\mu = \mu_{MN} := Hom_S(N, \mathsf{F}(M)) \longrightarrow Hom_R(M, \mathsf{G}(N)) \tag{5.8}$$

$$\upsilon = \upsilon_{MN} := Hom_S(\mathsf{F}(M), N) \longrightarrow Hom_R(\mathsf{G}(N), M)$$

definidos vía

$$\mu_{MN}(\gamma) = \mathsf{G}(\gamma) \circ \eta_M^{-1}$$
$$\upsilon_{MN}(\delta) = \eta_M \circ \mathsf{G}(\delta)$$

De esta forma si existe una dualidad entre categorías plenas entonces se tienen los resultados duales de las equivalencias categóricas, descritas en las secciones 5.1 y 5.2, para dualidad de categorías gracias a la Proposición 5.3.2.

Una caracterización de dualidad entre subcategorías plenas de módulos como "U-dualidades" para algún bimódulo U está dada por el hecho que las categorías sean cerradas bajo imágenes isomorfas y contengan módulos regulares apropiados, en otras palabras:

Teorema 5.3.5 (Morita)**.** *Sean R y S anillos, ${}_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$ subcategorías plenas de R-Mod y Mod-S tales que ${}_RR \in {}_R\mathcal{C}$ y $S_S \in \mathcal{D}_S$, y tal que cada módulo en R-Mod (respectivamente en Mod-S) isomorfo a uno en ${}_R\mathcal{C}$ ($\mathcal{D}_S$) está en ${}_R\mathcal{C}$ ($\mathcal{D}_S$). Si (F, G) es una dualidad entre las categorías ${}_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$, entonces existe un bimódulo ${}_RU_S$ tal que:*

(*a*) ${}_RU \cong \mathsf{G}(S)$ *y* $U_S \cong \mathsf{F}(R)$

(*b*) *existen isomorfismos naturales* $\mathsf{F} \cong Hom_R(\_, U)$ *y* $\mathsf{G} \cong Hom_S(\_, U)$

(*c*) *Cada $M \in {}_R\mathcal{C}$ y cada $N \in \mathcal{D}_S$ son U-reflexivos.*

Demostración. Utilizaremos la notación de la Observación 5.3.4 y utilizaremos algunos resultados duales de equivalencias para dualidades entre categorías.
Sean ${}_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$ como en las hipótesis y (F, G) una dualidad entre las categorías ${}_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$.

Consideremos $U = \mathsf{F}(R) \in \mathcal{D}_S$ y $V = \mathsf{G}(S) \in {}_R\mathcal{C}$. Así los bimódulos regulares ${}_RR_R$ y ${}_SS_S$ inducen estructuras canónicas de bimódulos ${}_RU_S = \mathsf{F}(R)$ y ${}_RV_S = \mathsf{G}(S)$, esto es pues

$$\mathsf{F} : End({}_RM) \xrightarrow{\cong} End(\mathsf{F}(M)_S) \ \text{. y} \quad \mathsf{G} : End(N_S) \xrightarrow{\cong} End({}_R\mathsf{G}(N))$$

para cada $M \in_R \mathcal{C}$ y cada $N \in \mathcal{D}_S$.

Dado que μ es un isomorfismo natural en ambas variables, entonces

$$\mu_{RN} : Hom_S(N, \mathsf{F}(R)) \longrightarrow Hom_R(R, \mathsf{G}(N))$$

es un R-isomorfismo izquierdo para cada $N \in \mathcal{D}_S$ y

$$\mu_{MS} : Hom_S(S, \mathsf{F}(M)) \longrightarrow Hom_R(M, \mathsf{G}(S))$$

es un S-isomorfismo derecho para cada $M \in_R \mathcal{C}$. Entonces

$$\mu_{RS} : Hom_S(S, \mathsf{F}(R)) \longrightarrow Hom_R(R, \mathsf{G}(S))$$

es un R-S-isomorfismo. Por otro lado, como $\mathsf{F}(R) = U \in \mathcal{D}_S$ y $\mathsf{G}(S) = V \in_R \mathcal{C}$ se tiene que

$$U \cong Hom_S(S, \mathsf{F}(R)) \cong Hom_R(R, \mathsf{G}(S)) \cong V,$$

es decir, $U \cong V$ y por lo tanto se satisface (a).

Por otro lado, como μ_{MS} induce un S-isomorfismo natural (derecho) para cada M se sigue que

$$Hom_S(S, \mathsf{F}(\_)) \cong Hom_R(\_, \mathsf{G}(S))$$

y por lo tanto

$$\mathsf{F} \cong Hom_S(S, \mathsf{F}(\_)) \cong Hom_R(\_, \mathsf{G}(S)) = Hom_R(\_, V) \cong Hom_R(\_, U).$$

Análogamente se tiene que $\mathsf{G} \cong Hom_S(\_, U)$ y así se satisface (b).

Ahora se mostrará (c). Para ello sólo se mostrará que cada $N \in \mathcal{D}_S$ es U-reflexivo ya que para $M \in_R \mathcal{C}$ se prueba de manera similar.

Por (a) y (b) sin perdida de generalidad supongamos que existe un bimódulo ${}_RU_S$ tal que $\mathsf{F} = Hom_R(\_, U)$ y $\mathsf{G} = Hom_S(\_, U)$ dan una dualidad entre las categorías ${}_R\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}_S$.

Sea $N \in \mathcal{D}_S$.
Afirmación: $\zeta_N : \mathsf{FG}(N) \to N$ determina un R-automorfismo $\alpha : \mathsf{G}(N) \to \mathsf{G}(N)$.

En efecto pues $\alpha : \mathsf{G}(N) \to \mathsf{G}(N)$ dado por $(\alpha(g))(n) = (\zeta_N^{-1}(n))(g)$ para cada $g \in \mathsf{G}(N)$ está bien definido.

Afirmación 1: α es un R-homomorfismo.
En efecto pues

$$\begin{aligned}
(\alpha(g)(rn_1 + n_2) &= (\zeta_N^{-1}(rn_1 + n_2))(g) \\
&= (\zeta_N^{-1}(rn_1) + \zeta_N^{-1}(n_2))(g) \\
&= (r\zeta_N^{-1}(n_1) + \zeta_N^{-1}(n_2))(g) \\
&= r(\zeta_N^{-1}(n_1))(g) + (\zeta_N^{-1}(n_2))(g) \\
&= r(\alpha(g)(n_1)) + (\alpha(g))(n_2)
\end{aligned}$$

Afirmación 2: α es un monomorfismo.
En efecto pues si $\alpha(g)(n) = 0$ entonces por definición $\zeta_N^{-1}(n)(g) = 0$ lo cual implica que $g = 0$ pues ζ_N^{-1} es un isomorfismo.

Para ver que α es un automorfismo primero hagamos lo siguiente:
Dado que ${}_RU_S$ es un bimódulo entonces $\mathsf{F}(U) = Hom_R(U, U)$ es un S-S-bimódulo y como υ es natural en cada variable entonces se tiene que

$$\upsilon_{UN} : Hom_S(\mathsf{F}(U), N) \longrightarrow Hom_R(\mathsf{G}(N), U) = \mathsf{FG}(N)$$

es un S-isomorfismo derecho y en consecuencia

$$\gamma_N = \upsilon_{UN}^{-1} \circ \zeta_N^{-1} : N \longrightarrow Hom_S(\mathsf{F}(U), N)$$

es un isomorfismo natural.

En otras palabras, $\gamma : 1_{\mathcal{D}_S} \to Hom_S(\mathsf{F}(U), \_)$ es un isomorfismo natural de funtores. Por lo tanto

$$\psi : Hom_S(N, U) \longrightarrow Hom_S(Hom_S(\mathsf{F}(U), N), \mathsf{GF}(U)) \tag{5.9}$$

definido por $\psi(g) = Hom_S(\mathsf{F}(U), g)$ es un $\mathbb{Z}$-isomorfismo, pues $\mathsf{GF}(U) \cong U$.

Ahora, como U es un bimódulo se tiene el bimódulo ${}_R\mathsf{GF}(U)_S$. Además, dado que γ_N es un isomorfismo

$$Hom_S(\gamma_N^{-1}, \mathsf{GF}(N)) : Hom_S(Hom_S(\mathsf{F}(U), N), \mathsf{GF}(N)) \longrightarrow Hom_S(N, \mathsf{GF}(N)) \tag{5.10}$$

también resulta ser un $\mathbb{Z}$-isomorfismo.

Por otro lado, como también $\eta_U : \mathsf{GF}(U) \to U$ es un S-isomorfismo entonces

$$Hom_S(N, \eta_U) : Hom_S(N, \mathsf{GF}(U)) \longrightarrow Hom_S(N, U) \tag{5.11}$$

es un $\mathbb{Z}$-isomorfismo.

Así, componiendo (5.9), (5.10) y (5.11) se tiene que para cada $g \in Hom_S(N, U)$ y cada $n \in N$

$$\begin{aligned}
((Hom_S(N, \eta_U) \circ Hom_S(\gamma_N^{-1}, \mathsf{GF}(U)) \circ \psi)(g)(n) &= (\eta_U \circ Hom_S(\mathsf{F}(U), g) \circ \gamma_N)(n) \\
&= \eta_U(g \circ \gamma_N(n)) \\
&= \eta_U(Hom_S(\gamma_N(n), U)(g)) \\
&= (\eta_U \circ \mathsf{G}(\gamma_N(n)))(g) \\
&= \upsilon_{UN}(\gamma_N(n))(g) \\
&= \zeta_N^{-1}(n)(g) \\
&= \alpha(g)(n)
\end{aligned}$$

Por lo tanto α es un R-automorfismo de $\mathsf{G}(N)$ por ser la composición de 3 isomorfismos.

Ahora, como $N \in \mathcal{D}_S$ y $N \cong \mathsf{FG}(N)$ a través de ζ_N entonces en particular, N es isomorfo a el U-dual de algún módulo A y de esta forma N es U-libre de torsión.

Veamos que N es U-reflexivo. Para ello basta probar que si $\lambda \in \mathsf{FG}(N)$ entonces existe $n \in N$ tal que $\lambda(g) = g(n)$ para toda $g \in \mathsf{G}(N)$.

En efecto pues si $\lambda \in \mathsf{FG}(N)$ entonces $\lambda \circ \alpha \in \mathsf{FG}(N) = Im(\zeta_N^{-1})$ pues $\alpha \in End(\mathsf{G}(N))$. De esta forma existe $n \in N$ tal que $\lambda \circ \alpha = \zeta_N^{-1}(n)$, por lo que para cada $g \in End(\mathsf{G}(N))$ se tiene que

$$\lambda(g) = (\zeta_N^{-1}(n))(\alpha^{-1}(g)) = \alpha(\alpha^{-1}(g))(n) = g(n)$$

pues α es un isomorfismo.

Por lo tanto N es U-reflexivo que era lo que se quería mostrar. $\square$

Ahora se darán algunas equivalencias sobre módulos y su dual donde el anillo es una álgebra de dimensión finita sobre un campo K. Para ello recordemos qué es una K-álgebra de dimensión finita.

Definición 5.3.6. *Sea K un campo. Una K-**álgebra** A con unidad es un conjunto dotado de dos operaciones, suma y producto con las cuales cumple que:*
(i) $(A, +, \cdot)$ *es un anillo con unidad*
(ii) $(A, +, \cdot)$ *es un K-espacio vectorial*
(iii) Para cada $\alpha \in K$ y para cada $a, b \in A$ se cumple que $\alpha(ab) = (\alpha a)b = a(\alpha b)$.

Definición 5.3.7. *Decimos que A es una K-**álgebra de dimensión finita** si es una K-álgebra conmutativa con unidad y de dimensión finita como K-espacio vectorial.*

Cabe mencionar que toda K-álgebra de dimensión finita A es artiniana y noetheriana [5]. Ahora consideremos R una álgebra de dimensión finita sobre un campo K. Entonces un R-módulo es finitamente generado si y sólo si éste es de dimensión finita como un K-espacio vectorial si y sólo si tiene una serie de descomposición.

Observación 5.3.8. *Dado que ${}_RFM$ y FM_R son subcategorías de las categorías plenas ${}_R\mathsf{R}[R]$ y $\mathsf{R}_R[R]$ entonces por la Proposición 5.3.2 se tiene que*

$$\mathrm{F} := (op) \circ (\_)^* :_R FM \to (FM_R)^{op}$$

y

$$\mathrm{G} := (\_)^* \circ (op) : (FM_R)^{op} \to_R FM$$

son equivalencias inversas de ${}_RFM$ y $(FM_R)^{op}$.

Asumiendo que los siguientes módulos son finitamente generados se tienen las afirmaciones siguientes:

Afirmación 1 $(\_)^* : {}_RFM \to FM_R$ y $(\_)^* : FM_R \to {}_RFM$ definen una dualidad.

Demostración. Dado que cada $M \in_R FM$ es un K-espacio finitamente generado se sigue que M es K-libre de torsión y por lo tanto por Proposición 5.3.3

$$(\_)^* :_R FM \to FM_R \qquad \text{y} \qquad (\_)^* : FM_R \to_R FM$$

definen una dualidad. □

Afirmación 2 La sucesión $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ es exacta (se escinde) si y sólo si la sucesión $0 \longrightarrow M_3^* \xrightarrow{g^*} M_2^* \xrightarrow{f^*} M_1^* \longrightarrow 0$ es exacta (se escinde).

Demostración. Por la Observación 5.3.8, $F : {}_RFM \to (FM_R)^{op}$ es una equivalencia inversa y así por el Corolario 5.1.7, F es un funtor exacto, de está forma si $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta entonces la inducida por F resulta ser exacta, pero como $(\_)^*$ es contravariante y $op(M) = M$, $op(h) = h$ para cada $M \in Obj((FM_R)^{op})$ y cada homomorfismo h se tiene que la sucesión $0 \longrightarrow M_3^* \xrightarrow{g^*} M_2^* \xrightarrow{f^*} M_1^* \longrightarrow 0$ es exacta.

De manera análoga se tiene que si $0 \longrightarrow M_3^* \xrightarrow{g^*} M_2^* \xrightarrow{f^*} M_1^* \longrightarrow 0$ es una sucesión exacta entonces la sucesión $0 \longrightarrow M_1^{**} \xrightarrow{f^{**}} M_2^* \xrightarrow{g^{**}} M_3^{**} \longrightarrow 0$ es exacta por ser G equivalencia inversa de F y por lo tanto $0 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \longrightarrow 0$ es exacta por la Afirmación 1. □

Afirmación 3 M es inyectivo (proyectivo) si y sólo si M^* es proyectivo (inyectivo).

Demostración. Primero supongamos que $M \in {}_RFM$ es inyectivo y consideremos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & M^* \arrow[d, "\varphi"] & \\ N \arrow[r, "\mu"] & L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

en $({}_RFM)^{op}$ y así al aplicar G a dicho diagrama tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L^* \arrow[r, "\mu^*"] \arrow[d, "\varphi^*"] & N^* \\ & M^{**} & \end{tikzcd}$$

en ${}_RFM$. Dado que M es inyectivo y $M^{**} \cong M$, existe $\lambda : N^* \to M$ tal que $\varphi^* = \lambda \circ \mu^*$. Nuevamente, aplicando F a φ^* se tiene que $\varphi^{**} = \mu^{**} \circ \lambda^*$, es decir, existe $\lambda^* : M^* \to N$ tal que $\varphi = \mu \circ \lambda^*$ y por lo tanto M^* es proyectivo.

De manera análoga, si $M^* \in FM_R$ es proyectivo entonces podemos considerar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mu"] & L \\ & M & \end{tikzcd}$$

en ${}_RFM$. Entonces, al aplicar F al diagrama anterior se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} & M^* \arrow[d, "\mu^*"] & \\ L \arrow[r, "\varphi^*"] & N^* \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

Dado que M^* es proyectivo, existe $\lambda : M^* \to L^*$ tal que $\mu^* = \varphi^* \circ \lambda$. Por tanto, al aplicar nuevamente G se sigue que $\mu = \lambda^* \circ \varphi$ donde $\lambda^* : L^{**} \to M^{**}$, pero $L^{**} \cong L$ y $M^{**} \cong M$. Por lo tanto M es inyectivo.

La prueba de que M es proyectivo si y sólo si M^* es inyectivo es análoga. □

Afirmación 4 $f : M_1 \to M_2$ es una cápsula inyectiva (cubierta proyectiva) si y sólo si $f^* : M_2^* \to M_1^*$ es una cubierta proyectiva (cápsula inyectiva).

Demostración. Se sigue del hecho de que M es inyectivo si y sólo si M^* es proyectivo y de que $((\_)^*, (\_)^*)$ es una dualidad entre las categorías ${}_RFM$ y FM_R, ya que por la dualidad entre equivalencias categóricas y dualidades categóricas, si f es monomorfismo (epimorfismo) entonces f^* es epimorfismo (monomorfismo) y lo mismo sucede con los módulos esenciales y superfluos (es lo dual a la Proposición 5.1.8 pues F y G son una equivalencia entre ${}_RFM$ y $(FM_R)^{op}$), además de que como R es una K-álgebra de dimensión finita, R es artiniano y por ende dicha cubierta proyectiva existe. □

Afirmación 5 M es generador (cogenerador) si y sólo si M^* es cogenerador (generador).

Demostración. Primero supongamos que $M \in {}_RFM$ es un generador, entonces para cada $N \in {}_RFM$ existe un conjunto de índices I y un epimorfismo $f : M^{(I)} \twoheadrightarrow N$. Como M, N son K-espacios vectoriales de dimensión finita entonces son reflexivos por lo cual se cumple que $M^{(I)^*} \cong M^{*^{(I)}}$ y así al aplicar el funtor $(\_)^*$ se sigue que $f^* : N^* \to M^{*^{(I)}}$ es un monomorfismo, pero sabemos que $M^{*^{(I)}} \hookrightarrow M^{*^I}$ es monomorfismo, por lo tanto para cada $N \in FM_R$ existe un conjunto de índices I y un monomorfismo $N^* \rightarrowtail M^{*^I}$ y por lo tanto M^* es un cogenerador.

Por otro lado, si $M^* \in FM_R$ es un cogenerador entonces para cada $N \in FM_R$ existe un conjunto de índices y un monomorfismo $N \rightarrowtail M^{*^I}$. De esta forma al tomar la proyección canónica tenemos un monomorfismo $N \rightarrowtail M^{*^{(I)}}$ y así al aplicar el funtor $(\_)^*$ se tiene un epimorfismo $M^{*^{(I)^*}} \twoheadrightarrow N^*$, pero como M es libre y finitamente generado como K-espacio vectorial entonces $M^{*^{(I)^*}} \cong M^{**^{(I)}} \cong M^{(I)}$ y por lo tanto se concluye que M es un generador.

La prueba de que M es cogenerador si y sólo si M^* es generador es análoga. □

Finalmente se terminará el capítulo (y por ende dicho trabajo) mostrando que no existe una dualidad entre dos categorías de módulos y así concluir que $(R\text{-}Mod)^{op}$ no es una categoría de módulos.

Para ello primero se introducirá la siguiente caracterización.

Proposición 5.3.9. *Para un R-módulo M las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) Para cualquier familia inversa $\{M_i\}_\Delta$ con $M_i \subset M$, la función $\varprojlim p_i : M \to \varprojlim M/M_i$ es un epimorfismo.

(b) Para cualquier familia inversa $\{M_i\}_\Delta$ con $M_i \subset M$ y M/M_i finitamente cogenerado, la función $\varprojlim p_i : M \to \varprojlim M/M_i$ es un epimorfismo.

(c) Si, para una familia de módulos cociente $\{x_i + M_i\}_\Delta$ con $x_i \in M$, y submódulos $M_i \subset M$ (con M/M_i finitamente cogenerado), la intersección de cualquier cantidad finita de estos cocientes es no vacía, entonces se tiene que $\bigcap_\Delta (x_i + M_i) \neq \emptyset$

Un módulo M que satisface estas condiciones es llamado **linealmente compacto** (para ver más detalladamente esto el lector puede revisar [25]).

(∗) **Para cualesquiera par de anillos R y S no existe una dualidad entre R-Mod y Mod-S.**

Demostración. Supongamos que existe un par de anillos R y S para los cuales existe una dualidad entre las categorías $R\text{-}Mod$ y $Mod\text{-}S$, entonces por la Proposición 5.3.2, $Mod\text{-}S \approx (R\text{-}Mod)^{op}$.

Ahora, como existe una dualidad entre $R\text{-}Mod$ y $Mod\text{-}S$ entonces podemos suponer que existe $\mathsf{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ una dualidad donde $\mathcal{C} \subset R\text{-}Mod$ y $\mathcal{D} \subset Mod\text{-}S$ subcategorías plenas, cerradas bajo productos finitos, submódulos y módulos, con todos sus módulos en $\mathcal{C}$ $(\mathcal{D})$ linealmente compactos. Sin embargo, como la suma directa infinita de módulos no cero no es linealmente compacto (ver Proposición 29.8 en [25, pág 344]) entonces por la Proposición 47.3 (ver [25, pág 426]) $\mathcal{C} \neq \sigma[M]$ y $\mathcal{C} \neq R\text{-}Mod$. En particular, la categoría $(R\text{-}Mod)^{op}$) no es una categoría (plena) de módulos, lo cual es una contradicción a la hipótesis.

Por lo tanto se concluye que para cualesquiera par de anillos R y S no existe una dualidad entre $R\text{-}Mod$ y $Mod\text{-}S$. $\square$

El resultado anterior responde a la pregunta planteada al final del capítulo anterior, es decir, no existe un anillo R para el cual $(R\text{-}Mod)^{op}$ es una categoría de módulos.

Conclusiones y Perspectivas

En este trabajo se estudió el concepto de dualidad desde distintos enfoques, inicialmente de la transición de espacios vectoriales a módulos y en el transcurso se fue trasladando a las categorías, siempre enfocándonos en las categorías de módulos.

Como sabemos, la dualidad permite ver dos lados de un mismo contexto, sin embargo, en muchas de las ocasiones ambos lados no resultan ser el reflejo uno del otro. Un claro ejemplo se pudo observar en el Capítulo 4, ya que todo parecia indicar que las propiedades de los módulos proyectivos resultaban ser duales a las propiedades de los módulos inyectivos, sin embargo, notamos que en general esto no ocurre con las cápsulas inyectivas y cubiertas proyectivas.

En general, los módulos nos proporcionan muchos casos en donde la dualidad no resulta ser el reflejo de ambos lados, tal vez ello sea porque no necesariamente existe una dualidad entre categorías de módulos, como se mostró antes.

A pesar de que falta demasiado por abordar en cuanto al estudio de la dualidad en los diferentes ámbitos, en este trabajo se trató de entender en qué contextos la dualidad se comporta de manera simétrica y en cuáles no. Además, en los que no se comporta de manera simétrica se analizó bajo qué condiciones esto sí podía ocurrir.

Finalmente, recordemos que Lambek nos proporciona una especie de dualidad entre un módulo y su módulo carácter. Es por ello que nos podemos plantear lo siguiente. **¿Para qué anillos se cumple que si M es inyectivo (proyectivo) entonces M^+ es proyectivo (inyectivo)?** y dado un anillo R, **¿para qué módulos se cumple esa condición?**.

Apéndice A

Apéndice

Producto tensorial

En esta sección analizaremos un funtor en particular, *producto tensorial*, el cual construiremos y para ello nos auxiliaremos de la siguiente definición.

Definición A.0.1. *Sean $N \in R$-Mod, $M \in Mod$-R y G un grupo abeliano conmutativo. Decimos que $f : M \times N \to G$ es **`R-bilineal`** si para todo $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ y $r \in R$ se cumple lo siguiente:*

(ii) $f(m + m', n) = f(m, n) + f(m', n)$

(ii) $f(m, n + n') = f(m, n) + f(m, n')$

(iii) $f(mr, n) = f(m, rn)$

Construcción

Sean M y N como en las hipótesis, y consideremos el $\mathbb{Z}$-módulo

$$F = \left\{ \sum_{i=1}^{n} z_i(m_i, n_i) \mid (m_i, n_i) \in M \times N,\ z_i \in \mathbb{Z},\ 1 \leq i \leq n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

y sea $H =< h_1, h_2, h_3 >$ donde:
$h_1 = (m + m', n) - (m, n) - (m', n)$,
$h_2 = (m, n + n') - (m, n) - (m, n')$ y
$h_3 = (mr, n) - (m, rn)$ para todo $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ y $r \in R$.

Entonces el grupo abeliano F/H junto con la proyección natural
$\eta : M \times N \to F/H$ es el `producto tensorial` de M y N.

Teorema A.0.2. *(Propiedad Universal del Producto Tensorial)*
Sean G un grupo abeliano aditivo, $M \in Mod$-R, $N \in R$-Mod. Si $f : M \times N \to G$ es R-bilineal

entonces existe un único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\overline{f} : F/H \to G$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta"'] & G \\ F/H \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Supongamos que $f : M \times N \to G$ es R-bilineal, entonces f induce un homomorfismo $f' : F \to G$ dado por $f'(m, n) = f(m, n)$ para cada $(m, n) \in F$ donde, F es el $\mathbb{Z}$-módulo libre con base $M \times N$.

Como f es R-bilineal y $H \subseteq Ker(f')$, donde H es el subgrupo en la construcción del producto tensorial de M y N, existe un homomorfismo $\overline{f} : F/H \to G$ tal que $\overline{f}(\eta(m, n)) = f(m, n)\, \forall(m, n) \in M \times N$ y dado que $\overline{f}$ está definido en los generadores de F/H, dicho homomorfismo es único. □

Más aún, dados $M \in Mod$-R y $N \in R$-Mod, su producto tensorial resulta ser único salvo isomorfismos.

Proposición A.0.3. *El producto tensorial es único salvo isomorfismos.*

Demostración. Sean M un R-módulo derecho y N un R-módulo izquierdo. Supongamos que $(F/H, \eta), (F'/H', \eta')$ son productos tensoriales de M y N. Entonces existen $f : F/H \to F'/H'$ y $g : F'/H' \to F/H$ tales que los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "\eta"'] & F'/H' \\ F/H \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\eta'"'] & F/H \\ F'/H' \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Componiendo ambos diagramas tenemos los siguientes diagramas conmutativos

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "\eta"'] & F/H \\ F/H \arrow[ur, "g \circ f"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\eta'"] \arrow[d, "\eta'"'] & F'/H' \\ F'/H' \arrow[ur, "f \circ g"'] & \end{tikzcd}$$

Dado que $1_{f/H} \circ \eta = \eta$ y $1_{F'/H'} \circ \eta' = \eta'$, entonces por la propiedad universal del producto tensorial se tiene que $1_{F/H} = g \circ f$ y $1_{F'/H'} = f \circ g$.
Por lo tanto $F/H \cong F'/H'$ y en consecuencia f es un isomorfismo tal que $f \circ \eta = \eta'$. □

Notación: Usualmente al producto tensorial $(F/H, \eta)$ de M y N suele denotarse por $M \otimes_R N$. Sus elementos se denotan por $m \otimes n$ para cada $m \in M$ y $n \in N$.

Dado que el producto tensorial resulta ser un funtor (como se verá más adelante), tiene sentido pensar en el producto tensorial entre homomorfismos, es por ello que tenemos lo siguiente.

Proposición A.0.4. *Si $f : M_R \to M'_R$ y $g : {}_RN \to {}_RN'$ son R-homomorfismos entonces existe un único homomorfismo de grupos $f \otimes g : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ tal que $(f \otimes g)(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$ para todo $m \times n \in M \times_R N$.*

Demostración. La prueba se puede consultar en [18, pág 74]. □

En general, el grupo abeliano $M \otimes_R N$ no es un R-módulo. Sin embargo, si S es un anillo y M es un S-R-bimódulo entonces para cada R-módulo izquierdo N y para cada $s \in S$, $\sigma_s : M \times N \to M \otimes_R N$ definida por $\sigma_s(m,n) = (sm) \times n$ es R-bilineal, con lo cual existe un único $\upsilon(s)$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\sigma_s"] \arrow[d, "\eta"'] & M \otimes_R N \\ M \otimes_R N \arrow[ur, dashed, "\upsilon(s)"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta, donde $\upsilon : s \mapsto \upsilon(s)$ define un homomorfismo $S \to End^l(M \otimes_R N)$.
Por tanto $M \otimes_R N \in S\text{-}Mod$ con $s(m \otimes n) = (sm) \otimes n$.

De manera análoga si T es un anillo, N un R-T-bimódulo y M un R-módulo derecho entonces $M \otimes_R N \in Mod\text{-}T$.

En sí, lo que se acaba de demostrar es lo siguiente.

Proposición A.0.5. *Sean R, S, T anillos. Si M es un S-R-bimódulo y N es un R-T-bimódulo entonces $M \otimes_R N$ es un S-T-bimódulo con $s(m \otimes n) = (sm) \otimes n$ y $(m \otimes n)t = m \otimes (nt)$.*

Dado que R se puede considerar como un R-R-bimódulo entonces un resultado inmediato es el siguiente:

Proposición A.0.6. *Para cada par de módulos $M \in Mod\text{-}R$ y $N \in R\text{-}Mod$ se cumple lo siguiente:*

(a) $R \otimes_R N \simeq N$

(b) $M \otimes_R R \simeq M$

(c) Si R es conmutativo, $M \otimes_R N$ es un R-módulo.

Demostración. La demostración de (a) puede consultarse en [3, pág 222].
La prueba de (b) es análoga a (a) y (c) se deduce de (a) y (b).
□

Otra propiedad importante con respecto al producto tensorial es como se comporta en base a la composición y a la identidad. En otras palabras:

Proposición A.0.7. *Si $f_1 : M \to M'$, $f_2 : M' \to M''$ son homomorfismos de R-módulos derechos y $g_1 : N \to N'$, $g_2 : N' \to N''$ son homomorfismos de R-módulos izquierdos entonces*

(a) $(f_2 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes g_1) = f_2 \circ f_1 \otimes g_2 \circ g_1$

(b) $1_M \otimes 1_N = 1_{M \otimes_R N}$.

Demostración. (a) Notemos que para $m \otimes n \in M \otimes_R N$ se tiene que

$$\begin{aligned}(f_2 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes g_1)(m \otimes n) &= (f_2 \otimes g_2)(f_1(m) \otimes g_1(n)) \\ &= f_2(f_1(m)) \otimes g_2(g_1(n)) \\ &= (f_2 \circ f_1)(m) \otimes (g_2 \circ g_1)(n) \\ &= [(f_2 \circ f_1) \otimes (g_2 \circ g_1)](m \otimes n)\end{aligned}$$

Por lo tanto $(f_2 \otimes g_2) \circ (f_1 \otimes g_1) = f_2 \circ f_1 \otimes g_2 \circ g_1$.

(b) Obsérvese que para cada $m \otimes n \in M \otimes_R N$ se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned}(1_M \otimes 1_N)(m \otimes n) &= 1_M(m) \otimes 1_N(n) \\ &= m \otimes n \\ &= 1_{M \otimes_R N}(m \otimes n)\end{aligned}$$

Por lo tanto $1_M \otimes 1_N = 1_{M \otimes_R N}$.

□

Los resultados anteriores nos dan como consecuencia que el producto tensorial resulta ser un funtor covariante. Dicho en otras palabras.

Proposición A.0.8. *Si M es un S-R-bimódulo y N es un R-S-bimódulo, entonces los funtores*

$$\mathcal{F} := M \otimes_R \_ : R\text{-}Mod \to S\text{-}Mod \qquad \mathcal{G} := \_ \otimes_R N : Mod\text{-}R \to Mod\text{-}S$$

son funtores covariantes.

Bibliografía

[1] A note on Quasi-Frobenius Rings. Recuperado de http://www.ams.org/journals/proc/1996-124-02/S0002-9939-96-03303-5/S0002-9939-96-03303-5.pdf

[2] Algebra conmutativa. Recuperado de http://matematicas.unex.es/ sancho/AlgebraConmutativa/alco030.pdf

[3] Anderson F.W, Fuller K.R. *Rings and Categories of Modules*. Spriger-Verlag, Second Edition 1974

[4] Adamek J, H. Herrlich, Strecker George E. *Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats* GNU Free Documentation License Version 1.2, November 2002

[5] Atiyah M.F, Macdonald I.G. *Introduction to Commutative Algebra*. University of Oxford, Addison-Wesley Publishing Company 1969

[6] Carlet Claude and Yin Tan. On group rings and some of their applications to combinatorics and cryptography. Recuperado de http://pdfs.semanticscholar.org/8ff4/9f31c24cc10b72af379fa364becc89eb5a36.pdf

[7] Chan Castro Sergio Santiago, Cuitún Coronado Rodrigo, Jiménez Correa Rodrigo, Pérez Terrazas Jesús Efrén. *La Envolvente Inyectiva y el Teorema de Bass-Papp*. Facultad de Matemáticas, UADY, 2015

[8] De la Rosa Reyes Juan Fernando. *Categoría de Módulos*. Trabajo de Fin de Grado, Facultad de Ciencias, Universidad de La Laguna, Julio 2015

[9] E. Bland Paul. *Rings and their modules*. Walter de Gruyter GmbH and Co. KG, 2011

[10] Faith Carl. *Algebra II. Ring Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1976

[11] Friedberg Stephen H, J. Insel Arnold, E. Spence Lawrence *Algebra Lineal*. Publicasiones Cultural, S.A. Primera Edición

[12] Hazewinkel Michiel, Gubareni Nadiya and V.V. Kirichenko. *Algebras, Rings and Modules*. Springer Science, Volume 1

[13] Kasch Friedrich. *Modules and Rings*. Academic Press, 1982

[14] Lam T.Y. *A First Course in Noncommutative Rings*. Springer-Verlag, Second Edition 2001

[15] Lam T.Y. *Lectures on Modules and Rings*. Springer-Velarg, New York 1999.

[16] Lambek J. *A module is flat if and only if its character module is injective*. October 1963

[17] Mac Lane Saunders. *Categories for the working mathematician*. Springer, Second Edition, 1970

[18] Rotman Joseph J. *An Introduction to Homological Algebra*. Springer, Second Edition 2009

[19] Sánchez Morales Jorge. *La fórmula de Auslander-Buchsbaum*. Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Colegio de Matemáticas, BUAP, Marzo 2011.

[20] Stonek Bruno. Funtores adjuntos y Teoremas de adjunción. Recuperado de http://bruno.stonek.com/monografia.pdf

[21] Stonek Bruno. Generadores y cogeneradores. Recuperado de http://bruno.stonek.com/generadores.pdf

[22] Tachikawa Hiroyuki. Quasi-Frobenius Rings and Generalizations. Spring-Velarg Berlin. Heidelberg. New York 1973

[23] W. Keit Nicholson, M.F. Yousif. *Quasi-Frobenius Rings*. Cambridge University Press, 2003

[24] Weibel Charles A. An introduction to homological algebra. Cambridge University Press 1994

[25] Wisbauer Robert. *Foundations of Module and Ring Theory*. University of Dusseldorf 1991.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00188
Matrícula: 2162800073

Dualidad en Categorías y Módulos.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 11:00 horas del día 27 del mes de septiembre del año 2019 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. HUGO ALBERTO RINCON MEJIA
DRA. MARTHA LIZBETH SHAID SANDOVAL MIRANDA
DR. ROGELIO FERNANDEZ ALONSO GONZALEZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: BENIGNO MERCADO BERRUM

BENIGNO MERCADO BERRUM
ALUMNO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. HUGO ALBERTO RINCON MEJIA

VOCAL

DRA. MARTHA LIZBETH SHAID SANDOVAL MIRANDA

SECRETARIO

DR. ROGELIO FERNANDEZ ALONSO GONZALEZ