

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Iztapalapa
Departamento de Matemáticas

**EL TEOREMA DE GAUSS-BONNET
EN VARIETADES SUAVES**

Presenta

OTTO HÉCTOR ROMERO GERMÁN

Asesor

Dr. GUADALUPE REYES VICTORIA

TESIS
PARA OBTENER EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Agradecimientos

A mis padres, porque su ayuda me fue indispensable para estudiar y dedicarme a este trabajo.

Al Dr. Oscar Palmas y a la Dra. Catherine Searle por sus correcciones y sugerencias.

A la M. en C. Iseo González por su siempre amable atención. También agradezco ampliamente al Dr. Luis Miguel Villegas por ayudarme a recuperar la calidad de alumno.

A los profesores Dr. Max Neumann, Dr. Santiago López de Medrano, Dr. Micho Durdevich, Dr. Chryssomalis Chryssomalakos, Dra. Shirley Bromberg y al Dr. Gerardo Hernández.

A los(as) compañeros(as) y amigos(as) de la Facultad de Ciencias y de la UAM.

A Elvia y Ángeles, les deseo todo lo mejor en sus vidas.

A toda mi familia.

Contenido

Introducción	1
1 Curvatura, característica de Euler y haz tangente unitario	9
1.1 Las formas de conexión, de curvatura y ecuaciones de estructura de Cartan . . .	9
1.1.1 Ecuaciones de estructura en dimensión 2	15
1.2 Breve introducción a curvatura	18
1.3 Curvatura en dimensión par	19
1.4 Curvaturas seccional, de Ricci y escalar	23
1.5 La característica de Euler para superficies	24
1.6 La característica de Euler para variedades	26
1.7 El haz tangente unitario	31
2 Demostración clásica del Teorema de Gauss-Bonnet en dimensión 2	34
2.1 Motivación y ejemplos de la fórmula de Gauss-Bonnet para regiones	34
2.2 Bosquejo de la prueba de la fórmula de Gauss-Bonnet para polígonos	39
2.3 Teorema de Gauss-Bonnet global para superficies	44
3 El Teorema de Gauss-Bonnet en dimensión 2	46
3.1 Fórmula principal para $n = 2$	46
3.2 Demostración del teorema en dimensión 2	49
3.3 Observaciones y aclaraciones	52
4 El Teorema de Gauss-Bonnet en dimensión par	54
4.1 Fórmula principal en dimensión par	54
4.2 Demostración de Chern	60
4.3 Demostración usando límite	65
5 Clases características y el Teorema de Gauss-Bonnet	69
5.1 La Dualidad de Poincaré	69
5.2 Clase de Euler y clase de Thom	71
5.3 Construcción de la clase de Thom usando una métrica	73
6 Haz de Hopf y el Teorema de Gauss-Bonnet	77
7 Conclusión	80
Bibliografía	82

Introducción

El Teorema de Gauss-Bonnet es un maravilloso y profundo ejemplo de conexión entre dos ramas de las matemáticas que de entrada parecieran no tener una relación. Por un lado, la curvatura, propiedad geométrica de un objeto y por otro la característica de Euler que es un invariante topológico. Cada una de éstas se puede reinterpretar de diferentes maneras y por ello el teorema también. La filosofía de dicho teorema se encuentra también presente en otras partes de las matemáticas.

Un ejemplo más moderno de esa filosofía tiene que ver con el sorprendente trabajo de Donaldson sobre invariantes de 4-variedades exóticas. Witten interpretó la teoría de Donaldson como un análogo infinito dimensional del Teorema de Gauss-Bonnet.

Mi motivación en escoger este tema es no sólo tratar de entender la conexión mencionada, sino hacer una introducción básica pero clara al tema de clases características a partir de su relación con el Teorema de Gauss-Bonnet. La generalización intrínseca de tal teorema por S.S. Chern en el caso de dimensión par es la parte formal de esta tesis (véase [4]).

Excepto el capítulo 4 sección 1 que es técnico y es la base del trabajo de Chern, he tratado de hacer entendible y con suficientes ejemplos este trabajo, en resumen, didáctico. Cabe mencionar que traté de encontrar una razón topológica más elemental a dicha parte, en general a la pregunta de cuándo el pullback de una forma cerrada en una variedad \mathbf{M}^n es exacta en un haz compacto \mathbf{E} sobre \mathbf{M}^n , aunque de esto no obtuve resultados.

Una prueba conocida de que al integrar la clase de Euler (obtenida por el pullback de la clase de Thom) da la característica de Euler de una variedad \mathbf{M}^n es considerando el producto $\mathbf{M}^n \times \mathbf{M}^n$ y la diagonal en él. La prueba de este hecho que se da en la página 71 creo que es más clara y trabaja directamente en el haz tangente a \mathbf{M}^n . Las demás demostraciones que aparecen en este trabajo son conocidas. Aclaremos que no se dan resultados originales con respecto al teorema.

En el capítulo 1 reunimos todas las herramientas necesarias de topología y geometría. En la parte topológica se define la característica de Euler para superficies y luego para variedades, incluyendo su interpretación como un número de intersección (se usará la notación clásica de χ para la característica de Euler). En la parte geométrica recordamos las formas de conexión, curvatura y las ecuaciones de estructura de Cartan que las relacionan. Incluimos una introducción informal a curvatura mediante grupos y álgebras de Lie. También motivamos el paso de la curvatura en dimensión 2 a dimensión par, encontrando la n -forma que hay que integrar sobre alguna variedad \mathbf{M}^n de dimensión par para obtener su característica de Euler.

En el capítulo 2 damos ejemplos de motivación del Teorema de Gauss-Bonnet para triángulos y regiones, incluyendo un resumen de su demostración clásica para polígonos y para superficies contenidas en el espacio euclidiano \mathbb{R}^m , con $m \geq 3$.

En el capítulo 3 se prueba la que hemos llamado fórmula principal en dimensión 2, y es el resultado principal en el que descansa la demostración de Chern: es decir, *que la 2-forma de curvatura es siempre exacta en el haz tangente unitario*. Usado dicho resultado se prueba el teorema para superficies Riemannianas.

En el capítulo 4 se prueba la generalización de la fórmula principal a dimensión par, y la prueba del Teorema de Gauss-Bonnet en variedades de dimensión par dada por Chern. También se da una demostración adaptada de una prueba de Bott para haces de esferas contenida en [3], página 124.

En el capítulo 5 tratamos sobre la relación del teorema con las clases características, más exactamente su relación con las clases de Thom y de Euler. La idea del capítulo es entender porque sabiendo la curvatura podemos calcular un número de intersección.

Finalmente, en el capítulo 6 y a modo de aplicación consideramos tres haces principales sobre la 2-esfera \mathbf{S}^2 , con fibra \mathbf{S}^1 , incluyendo el haz de Hopf. Integrando la “curvatura” respectiva para mostrar que también está relacionada con el “torcimiento” de ese haz.

En seguida damos una idea general del trabajo, empezando por recordar las curvaturas Gaussiana y geodésica.

Para una curva plana α , su curvatura en el punto p está definida por;

$$k(p) = \lim_{\alpha \supset I \rightarrow x} \frac{\text{long } n(I)}{\text{long } I}, \quad (1)$$

donde I es una vecindad en la curva que contiene a p , y n es la aplicación normal unitaria.

Por ejemplo, para una recta, su imagen bajo n es un solo punto del círculo, y por tanto tiene curvatura cero.

Se tiene para una curva α cerrada, simple y suave que

$$\int_{\alpha} k(s) ds = 2\pi. \quad (2)$$

Para superficies $\mathbf{M}^2 \subset \mathbb{R}^3$ Gauss define la curvatura puntual (Gaussiana) en p como;

$$K(p) = \lim_{\mathbf{M}^2 \supset R \rightarrow p} \frac{\text{Área } n(R)}{\text{Área } R}, \quad (3)$$

donde $n : \mathbf{M}^2 \rightarrow \mathbf{S}^2$ es la aplicación de Gauss definida en la región $R \subset \mathbf{M}^2$, y también Gauss observa que

$$\text{Área } n(R) = \theta_{\partial R}, \quad (4)$$

donde $\theta_{\partial R}$ es el ángulo de holonomía a lo largo de la frontera de R (ángulo entre un vector inicial y un vector que trasladamos paralelamente a lo largo de la curva usando la conexión de Levi-Civita, página 38). La curvatura de Gauss es una propiedad intrínseca ya que la holonomía y el área son propiedades intrínsecas. La curvatura Gaussiana también se puede calcular midiendo las áreas $A(r)$ de un disco de radio r con centro en x sobre cada superficie como lo muestra la Figura 1.

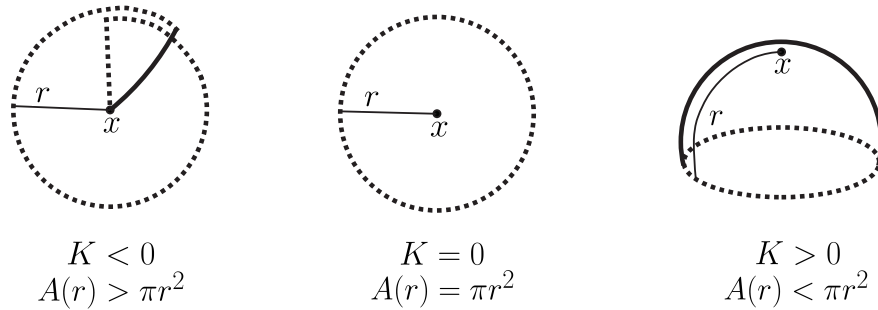


Figura 1: Curvaturas

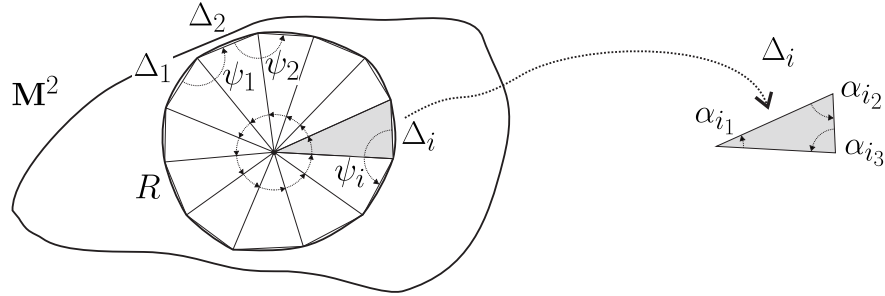
En un plano y en un cilindro la imagen bajo n de cualquier región R tiene dimensión 0 y 1 respectivamente, ambos tienen curvatura Gaussiana 0, y consecuentemente (Teorema de Minding) localmente tienen la misma geometría.

Propiedades geométricas en el plano como la existencia de rectángulos, de triángulos semejantes, que la suma de los ángulos de un triángulo sea π , la validez del Teorema de Pitágoras, etc., son consecuencia del quinto postulado de Euclides ($K = 0$). En la geometría hiperbólica ($K = -1$) o esférica ($K = 1$) no son ciertas dichas propiedades, y para algunas de ellas hay relaciones y propiedades similares.

Para un triángulo geodésico Δ (polígono formado por tres segmentos geodésicos) contenido en \mathbf{M}^2 (con cualquier métrica) y con ángulos α_1, α_2 y α_3 es sencillo ver que el ángulo de holonomía a lo largo de Δ es la suma de los ángulos menos π , por lo que combinando esto con (3) y (4) se sigue que

$$\int_{\Delta} K dA = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi.$$

Esto implica por ejemplo que si $K = -1$ entonces $\text{Área}(\Delta) = \pi - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$, y cuando $K = 1$ se tiene que $\text{Área}(\Delta) = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi$.

Figura 2: Una región R

Consideremos ahora una región $R \subset \mathbf{M}^2$ (con frontera una curva suave) que se puede aproximar por polígonos P_n con n triángulos geodésicos Δ_i , como se muestra en la Figura 2.

Para una curva α contenida en una superficie \mathbf{M}^2 existe el concepto de curvatura geodésica k_g que mide qué tanto difiere la curva de ser geodésica en cada punto. Para calcularla, aproximamos α por geodésicas y se toman los ángulos entre ellas divididos por la longitud de arco. No es difícil ver que si la curva es plana esta definición coincide con la dada en (1). Se tiene la siguiente cadena de igualdades

$$\int_{P_n} K dA = \sum_{i=1}^n \int_{\Delta_i} K dA = \sum_{i=1}^n [\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3} - \pi] = 2\pi - \sum_{i=1}^n [\psi_i - \pi],$$

y entonces tomando el límite cuando $n \rightarrow \infty$

$$\int_R K dA = 2\pi - \int_{\partial R} k_g(s) ds. \quad (5)$$

Observemos que por (4) para una región infinitesimal R centrada en el punto p ,

$$K(x) dA \approx \theta_{\partial R}, \quad (6)$$

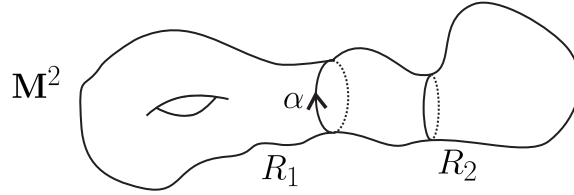
donde el lado izquierdo es una magnitud de área en R , mientras el derecho es una magnitud lineal en la frontera de R . Con formas diferenciables y usando el Teorema de Stokes se ve como

$$\int_R K dA = \int_R \Omega_2^1 = \int_R d\omega_2^1 = \int_{\partial R} \omega_2^1$$

donde

$$\int_{\partial R} \omega_2^1 = 2\pi - \int_{\partial R} k_g(s) ds.$$

Entonces Ω_2^1 da la curvatura Gaussiana, mientras que ω_2^1 nos da la curvatura geodésica (ver página 9 para las definiciones de las formas anteriores).

Figura 3: $\mathbf{M}^2 = R_1 \cup R_2$

Aplicaremos la igualdad en (5) para motivar la fórmula de Gauss-Bonnet en dimensión 2 en un toro, el caso general es análogo, ver página 37. Consideremos una superficie toroidal $\mathbf{M}^2 = R_1 \cup R_2$ como se muestra en la Figura 3.

Los ángulos de holonomía θ_α^1 y θ_α^2 son obtenidos de integrar la curvatura en la región R_1 y R_2 respectivamente, es decir,

$$\theta_\alpha^1 = \int_{R_1} K dA \qquad \theta_\alpha^2 = \int_{R_2} K dA$$

y cumplen que

$$\theta_\alpha^2 - \theta_\alpha^1 = 2\pi [\chi(R_2) - \chi(R_1)] = 2\pi.$$

Equivalentemente,

$$\int_{R_1} K dA = 2\pi \chi(R_1) + \int_\alpha k_g(s) ds = -2\pi + \int_\alpha k_g(s) ds$$

y sabemos que

$$\int_{R_2} K dA = 2\pi - \int_\alpha k_g(s) ds$$

por tanto

$$\int_{\mathbf{M}^2} K dA = \int_{R_1} K dA + \int_{R_2} K dA = 0.$$

Cuando \mathbf{M}^2 es orientable y compacta, tenemos en analogía con (2) la fórmula de Gauss-Bonnet

$$\int_{\mathbf{M}^2} K dA = 2\pi \chi(\mathbf{M}^2).$$

Pasamos al caso $n = 2k$ dimensional y consideremos marcos (bases ortonormales locales). Se tiene que

$$\mathbf{R}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_k = \mathbf{R}_{nik} \mathbf{e}_n,$$

donde $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ es un marco y \mathbf{R}_{nijk} son las componentes del tensor de Riemann \mathbf{R} en dicho marco. La curvatura de Gauss se reescribe con dichas componentes como

$$K = \mathbf{R}_{2121} = \frac{1}{4} \sum_{\substack{I=(i_1 i_2) \\ J=(j_1 j_2)}} \epsilon^{i_1 i_2} \epsilon^{j_1 j_2} \mathbf{R}_{i_1 i_2 j_1 j_2}, \quad (7)$$

donde el símbolo $\epsilon^{i_1 i_2}$ es 1 si $(i_1 i_2)$ es permutación par de (12) , -1 si es permutación impar y 0 en otro caso.

La 2-forma Ω^1_2 se obtiene mediante

$$\Omega^1_2 = \frac{1}{2!} \sum_{I=(i_1 i_2)} \epsilon^{i_1 i_2} \Omega^i_{i_2}, \quad (8)$$

y la relación obtenida es

$$\Omega^1_2 = K dA.$$

La curvatura para una variedad Riemanniana \mathbf{M}^n en p se calcula con la fórmula

$$\mathbf{K}_n(p) = \frac{1}{2^{2k} k!} \sum_{\substack{I=(i_1 i_2 \dots i_n) \\ J=(j_1 j_2 \dots j_n)}} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \epsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} \mathbf{R}_{i_1 i_2 j_1 j_2} \mathbf{R}_{i_3 i_4 j_3 j_4} \cdots \mathbf{R}_{i_{n-1} i_n j_{n-1} j_n}.$$

Observe que \mathbf{K}_2 coincide con K la curvatura de Gauss. La curvatura \mathbf{K}_n tiene sentido por el Teorema de Weil-Allendoerfer, el cual dice que para el caso $\mathbf{M}^n \subset \mathbb{R}^m$, orientable y compacta, se tiene que

$$\int_{\mathbf{M}^n} \mathbf{K}_n(p) d\nu = (2\pi)^k \chi(\mathbf{M}^n). \quad (9)$$

que es la fórmula de Gauss-Bonnet cuando $n = 2$.

La prueba del teorema anterior no es intrínseca (pero usando un encaje de Nash se puede obtener Gauss-Bonnet para dimensión n). En otras palabras, es una prueba no intrínseca para una fórmula intrínseca, pero como veremos, la prueba de Chern sí es intrínseca.

En esta generalización se recupera el concepto de curvatura mediante las formas de curvatura. Para un marco $\mathbf{e}_U = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ en una vecindad de $p \in U$ se tiene asociada la matriz de curvatura Ω_U y se define la n -forma diferenciable $\bar{\Omega}_U$ en la vecindad U por,

$$\bar{\Omega}_U := (-1)^{k-1} \frac{1}{2^{2k} \pi^k k!} \sum_I \epsilon^I \Omega^i_{i_2} \wedge \Omega^{i_3}_{i_4} \wedge \cdots \wedge \Omega^{i_{2k-1}}_{i_{2k}},$$

y probaremos en el capítulo 1, sección 3 que

$$\bar{\Omega}_U(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = \frac{1}{(2\pi)^k} \mathbf{K}_n(p),$$

por lo que con la n -forma $\overline{\Omega}_{\mathcal{U}}$ se recupera la curvatura \mathbf{K}_n de manera intrínseca.

También veremos que si \mathbf{e}_V es otro marco en V con $\mathcal{U} \cap V \neq \emptyset$, se cumple que $\overline{\Omega}_V = \overline{\Omega}_{\mathcal{U}}$, esto implica que las n -formas diferenciables $\{\overline{\Omega}_{\mathcal{U}}\}$ se pegan para dar una n -forma diferenciable global en \mathbf{M}^n denotada $\overline{\Omega}$.

Damos ahora un resumen de la demostración de Chern. Dada una métrica en \mathbf{M}^n variedad orientable y compacta, construimos el haz tangente unitario $\mathbf{S}\mathbf{M}^n$ y sea

$$\Pi : \mathbf{S}\mathbf{M}^n \longrightarrow \mathbf{M}^n$$

la proyección canónica. Se probará la que llamamos fórmula principal

$$\Pi^* \overline{\Omega} = d\Gamma, \quad (10)$$

es decir, $\overline{\Omega}$ no es en general exacta en \mathbf{M}^n , pero $\Pi^* \overline{\Omega}$ si lo es en $\mathbf{S}\mathbf{M}^n$, y Γ es una $(n-1)$ -forma diferenciable global que cumple

$$\int_{F_p} \Gamma = 1 \quad \forall p \in \mathbf{M}^n, \quad (11)$$

donde $F_p \cong \mathbf{S}^{n-1}$ es la fibra en p .

Por ejemplo, cuando $n = 2$ se tienen las formas

$$\Pi^* \Omega_2^1 = d\Gamma \quad \text{con}$$

$$\Gamma = d\theta + \Pi^* \omega_2^1,$$

las cuales se construirán en el capítulo 3, sección 1. Cuando aparece la fórmula para el índice de un campo vectorial en un punto singular, la 1-forma $d\theta$ dará una forma de calcular este índice.

Sea X un campo vectorial no degenerado en \mathbf{M}^n (véase [12]), sus ceros son un conjunto finito denotado Δ , y podemos suponer que X es un campo vectorial unitario en $\mathbf{M}^n - \Delta$.

Usando el haz tangente unitario, el campo X y la fórmula (10), la integral de $\overline{\Omega}$ en \mathbf{M}^n se reduce a una suma de unos y menos unos, de acuerdo a los índices del campo en los puntos singulares.

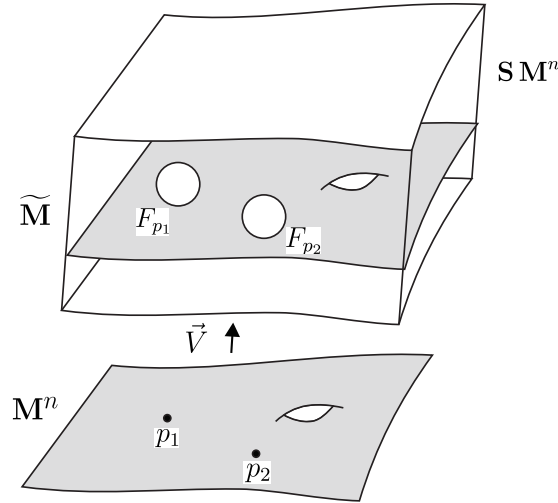
Para aplicar (10) “levantamos” \mathbf{M}^n en el haz tangente unitario a una variedad con frontera $\widetilde{\mathbf{M}}$, es decir,

$$\widetilde{\mathbf{M}} := \overline{X(\mathbf{M}^n - \Delta)},$$

y se tiene que

$$\partial \widetilde{\mathbf{M}} = \bigcup_{p \in \Delta} \text{Ind}(X, p) F_p. \quad (12)$$

donde $\partial \widetilde{\mathbf{M}}$ indica la frontera de $\widetilde{\mathbf{M}}$.

Figura 4: La n variedad con frontera $\tilde{\mathbf{M}}$

Por tanto,

$$\int_{\mathbf{M}^n} \bar{\Omega} = \int_{\mathbf{M}^n - \Delta} \bar{\Omega} = \int_{\tilde{\mathbf{M}}} \Pi^* \bar{\Omega}.$$

Ya que subimos la integral al haz tangente unitario usamos (10) y el Teorema de Stokes, obteniendo

$$\int_{\tilde{\mathbf{M}}} \Pi^* \bar{\Omega} = \int_{\tilde{\mathbf{M}}} d\Gamma = \int_{\partial \tilde{\mathbf{M}}} \Gamma.$$

Pero debido a que las fibras F_p se orientan positivamente o negativamente de acuerdo a si $\text{Ind}(X, p) = +1$ o $\text{Ind}(X, p) = -1$ respectivamente, se obtiene usando (11) y (12)

$$\int_{\partial \tilde{\mathbf{M}}} \Gamma = \sum_{p \in \Delta} \text{Ind}(X, p) \int_{F_p} \Gamma = \sum_{p \in \Delta} \text{Ind}(X, p),$$

y por el Teorema de Poincaré-Hopf (ver página 30)

$$\sum_{p \in \Delta} \text{Ind}(X, p) = \chi(\mathbf{M}^n),$$

la fórmula de Gauss-Bonnet-Chern es

$$\int_{\mathbf{M}^n} \bar{\Omega} = \chi(\mathbf{M}^n).$$

Ejemplo 0.1. Para el caso $n = 4$ se tiene una relación

$$-\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{M}^4} \left[\Omega_2^1 \wedge \Omega_4^3 - \Omega_3^1 \wedge \Omega_4^2 + \Omega_4^1 \wedge \Omega_3^2 \right] = \chi(\mathbf{M}^4).$$

Capítulo 1

Curvatura, característica de Euler y haz tangente unitario

1.1 Las formas de conexión, de curvatura y ecuaciones de estructura de Cartan

Las Ecuaciones de Estructura de Cartan codifican la geometría de una variedad Riemanniana (la conexión y la curvatura) en términos de formas diferenciables. Son una generalización de la interpretación de las ecuaciones de Frenet-Serret para curvas suaves en el espacio tridimensional usando bases ortonormales (marcos) y grupos de Lie. En esta sección veremos cómo construir las formas de conexión y de curvatura y posteriormente derivaremos las ecuaciones de estructura que las relacionan.

Sea \mathbf{M}^n , con $n = 2k$ una variedad Riemanniana compacta y orientable. Escogemos un marco (base ortonormal) $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ en U vecindad de $p \in \mathbf{M}^n$ que sea compatible con la orientación de \mathbf{M}^n , entonces

$$\langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \delta_{ij}.$$

También construimos $\{\sigma_U^1, \dots, \sigma_U^n\}$ la base dual. En general si no hay confusión omitiremos a U . Tomamos ∇ la conexión de Levi-Civita de \mathbf{M}^n , se tiene que

$$\nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_j = \omega_{ij}^k \mathbf{e}_k, \quad (1.1)$$

donde ω_{ij}^k son los coeficientes de la conexión y son los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k en el caso en que la base $\{\mathbf{e}_i\}$ sea la base coordenada y no necesariamente un marco, recordamos que estos símbolos miden cómo cambian las bases coordenadas.

Como ∇ es compatible con la métrica se tiene que

$$\mathbf{e}_k \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \langle \nabla_{\mathbf{e}_k} \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle + \langle \mathbf{e}_i, \nabla_{\mathbf{e}_k} \mathbf{e}_j \rangle,$$

lo cual equivale a que la métrica se preserve a la hora de transportar vectores con la conexión ∇ . Entonces

$$d\delta_{ij}(\mathbf{e}_k) = \omega_{ki}^j + \omega_{kj}^i,$$

y por tanto

$$\omega_{ki}^j = -\omega_{kj}^i.$$

Además ∇ es libre de torsión, entonces

$$\omega_{ki}^j = \omega_{ik}^j.$$

Definimos ahora las 1-formas ω_j^i en $U \subset \mathbf{M}^n$ por

$$\omega_j^i = \omega_{jk}^i \sigma^k, \quad (1.2)$$

y que cumplen que

$$\omega_j^i(\mathbf{e}_k) = \omega_{jk}^i.$$

Estas 1-formas diferenciables que guardan los coeficientes de la conexión dependen de la elección del marco en U . Más adelante veremos como cambian si se elige un marco diferente. Además dichas formas en general no podrán ser globales en \mathbf{M}^n . Esto viene de que los símbolos de Christoffel o los coeficientes de una conexión no son tensores. Ahora, se tiene que

$$\omega_i^j = \omega_{ik}^j \sigma^k = \omega_{ki}^j \sigma^k = -\omega_{kj}^i \sigma^k = -\omega_{jk}^i \sigma^k = -\omega_j^i,$$

por lo que la matriz

$$\omega = (\omega_j^i) \quad (1.3)$$

es antisimétrica. Tal matriz es llamada la **matriz de conexión** asociada a ∇ , es de $n \times n$ con entradas 1-formas diferenciables, tiene toda la información respecto a la conexión. También se refiere a ella como una 1-forma en $U \subset \mathbf{M}^n$ con valores en $\mathfrak{so}(n)$.

De ahora en adelante, cuando sea posible usaremos notación matricial, que en muchos casos clarifica la geometría y simplifica los cálculos. Para ello usamos la siguientes notaciones:

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_n)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma^1 \\ \sigma^2 \\ \vdots \\ \sigma^n \end{pmatrix}$$

$$\nabla \mathbf{e} = (\nabla \mathbf{e}_1 \quad \nabla \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \nabla \mathbf{e}_n)$$

Donde las $\nabla \mathbf{e}_i$ son 1-formas en U con valores vectoriales. Para consultar el tema de formas diferenciables con valores vectoriales veáse por ejemplo [8], y estas se definen como

$$(\nabla \mathbf{e}_i)(\mathbf{v}_p) = \nabla_{\mathbf{v}_p} \mathbf{e}_i,$$

donde \mathbf{v}_p es un vector tangente en $p \in U$.

Más exactamente,

$$\nabla \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_k \otimes \omega_i^k, \quad (1.4)$$

ya que

$$[\mathbf{e}_k \otimes \omega_i^k](\mathbf{e}_n) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{e}_k \omega_i^k(\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_k \omega_{im}^k \sigma^m(\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_k \omega_{in}^k \stackrel{\text{por (1.1)}}{=} \nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{e}_n.$$

La ecuación (1.4) también la escribimos como

$$\nabla \mathbf{e} = \mathbf{e} \otimes \omega,$$

donde $\mathbf{e} \otimes \omega$ significa una “multiplicación” de matrices.

Antes de pasar a curvatura y como aplicación de lo anterior recordaremos cómo hacer transporte paralelo a lo largo de una curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbf{M}^n$.

Podemos suponer que existe una vecindad U tal que $\alpha([a, b]) \subset U$, además que \mathbf{e} es un marco en U . Sea \vec{v}_I un vector a trasladar en el espacio tangente $\mathbf{T}_{\alpha(a)} \mathbf{M}^n$, expresamos el campo ψ a lo largo de α en el marco por:

$$\psi = \left(\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_n \right) \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \psi_n(t) \end{pmatrix} := \mathbf{e} u$$

Derivando

$$\nabla \psi = \nabla(\mathbf{e} u) = (\nabla \mathbf{e}) u + \mathbf{e} du = \mathbf{e}(du + \omega u).$$

Como queremos que ψ sea paralelo a lo largo de α se sigue que;

$$\nabla_{\alpha'(t)} \psi = 0 \quad \forall t \in I,$$

y por los cálculos anteriores para la derivada de ψ se concluye

$$du + \omega(\alpha'(t)) u = 0 \quad \forall t \in I,$$

lo cual es un sistema de n ecuaciones diferenciales ordinarias, con la condición inicial dada por $\psi(a) = \vec{v}_I$, utilizando el Teorema de existencia y unicidad podemos encontrar el campo paralelo ψ , entonces

$$\vec{v}_F := \psi(b)$$

es el vector transportado paralelamente a lo largo de α .

Pasamos ahora a construir la llamada **matriz de curvatura** Ω dada por:

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega, \tag{1.5}$$

con entradas $\Omega = (\Omega_j^i)$, donde

$$\Omega_j^i = d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k,$$

que cumplen

$$\Omega_i^j = -\Omega_j^i.$$

Entonces Ω es una matriz antisimétrica de $n \times n$ con entradas 2-formas diferenciables en U . También nos referimos a Ω como una 2-forma en U con valores en $\mathfrak{so}(2)$. Para ver la relación entre Ω y la curvatura, se tiene que (consultar [5] para una demostración),

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2} \mathbf{R}_{jkn}^i \sigma^k \wedge \sigma^n \quad (1.6)$$

donde \mathbf{R}_{jkn}^i son las componentes del tensor de curvatura de Riemann de \mathbf{M}^n en el marco $\{\mathbf{e}\}$, es decir,

$$\mathbf{R}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_k = \mathbf{R}_{ijk}^n \mathbf{e}_n,$$

lo cual implica que

$$\Omega_j^i(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_n) = \mathbf{R}_{jkn}^i.$$

Es esta la razón por lo que decimos que la matriz Ω guarda toda la información de la curvatura.

Es conveniente hacer notar que las componentes \mathbf{R}_{jkn}^i no son necesariamente las componentes del tensor de Riemann R_{ijk}^n en una base coordenada, digamos $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ en U vecindad de $p \in \mathbf{M}^n$. Éstas recordemos están dadas por

$$\mathbf{R}(\partial_i, \partial_j) \partial_k = R_{ijk}^n \partial_n.$$

Para bajar los índices usamos la métrica, es decir,

$$R_{nik} = g_{n\alpha} R_{ijk}^\alpha,$$

en cambio, para marcos se cumple que

$$\mathbf{R}_{nik} = \delta_{n\alpha} \mathbf{R}_{ijk}^\alpha = \mathbf{R}_{ijk}^n.$$

Ahora mostraremos la relación entre las formas de conexión y sus derivadas con las formas duales. En notación de Cartan, dp es la 1-forma en U con valores vectoriales dada por

$$dp(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_i. \quad (1.7)$$

El que $\{\sigma^t\}$ sea la base dual al marco $\{\mathbf{e}_t\}$ lo escribimos como

$$dp = \mathbf{e}_k \otimes \sigma^k,$$

ya que

$$[\mathbf{e}_k \otimes \sigma^k](\mathbf{e}_i) := \mathbf{e}_k \sigma^k(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_k \delta_i^k = \mathbf{e}_i.$$

La ecuación (1.7) también la podemos escribir en notación matricial como

$$dp = \mathbf{e} \otimes \sigma,$$

y derivándola se obtiene

$$\begin{aligned} d^2p &= (\nabla \mathbf{e}) \otimes \sigma + \mathbf{e} \otimes d\sigma \\ 0 &= [\mathbf{e} \otimes \omega] \otimes \sigma + \mathbf{e} \otimes d\sigma \\ 0 &= \mathbf{e} \otimes (\omega \wedge \sigma + d\sigma). \end{aligned}$$

Por lo que

$$d\sigma = -\omega \wedge \sigma, \quad (1.8)$$

o también,

$$d\sigma^i = -\omega^i_k \wedge \sigma^k. \quad (1.9)$$

Resumimos lo visto en la sección. Sea $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ un marco en U y $\{\sigma^1, \dots, \sigma^n\}$ su base dual. Las formas de conexión y de curvatura están relacionadas (y determinadas) por las igualdades (1.2), (1.4) y (1.9) las que son conocidas como **Ecuaciones de estructura de Cartan**.

$$\begin{aligned} \omega^i_j &= \omega^i_{jk} \sigma^k \\ d\sigma^i &= -\omega^i_k \wedge \sigma^k \\ \Omega^i_j &= d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j, \end{aligned}$$

donde $\omega^i_j = -\omega^j_i$ y $\Omega^i_j = -\Omega^j_i$, o en notación matricial,

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{e} &= \mathbf{e} \otimes \omega \\ d\sigma &= -\omega \wedge \sigma \\ \Omega &= d\omega + \omega \wedge \omega, \end{aligned}$$

siendo ω y Ω antisimétricas.

Tenemos dos relaciones adicionales entre las formas anteriores. Tomando la ecuación (1.9) y derivando, se tiene

$$\begin{aligned} d\sigma &= -\omega \wedge \sigma \\ d^2\sigma &= -[d\omega \wedge \sigma - \omega \wedge d\sigma] \\ 0 &= -d\omega \wedge \sigma + \omega \wedge [d\sigma] && \text{por (1.8)} \\ 0 &= -[(\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \sigma] - \omega \wedge \omega \wedge \sigma && \text{por (1.5)} \\ 0 &= -\Omega \wedge \sigma + \cancel{\omega \wedge \omega \wedge \sigma} - \cancel{\omega \wedge \omega \wedge \sigma} \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\Omega \wedge \sigma = 0, \quad (1.10)$$

o equivalentemente,

$$\sigma^k \wedge \Omega^i_k = 0.$$

Si derivamos la ecuación (1.5), se tiene que

$$\begin{aligned} d\Omega &= d(d\omega + \omega \wedge \omega) \\ d\Omega &= d\omega \wedge \omega - \omega \wedge d\omega \\ d\Omega &= (\Omega - \omega \wedge \omega) \wedge \omega - \omega \wedge (\Omega - \omega \wedge \omega) && \text{por (1.5)} \\ d\Omega &= \Omega \wedge \omega - \cancel{\omega \wedge \omega \wedge \omega} - \omega \wedge \Omega + \cancel{\omega \wedge \omega \wedge \omega}, \end{aligned}$$

y entonces se cumple la relación

$$d\Omega - \omega \wedge \Omega + \Omega \wedge \omega = 0, \quad (1.11)$$

también escrita en coordenadas como

$$d\Omega_i^j - \omega_i^k \wedge \Omega_k^j + \Omega_i^k \wedge \omega_k^j = 0.$$

Las ecuaciones (1.10) y (1.11) son conocidas como las **identidades de Bianchi**.

Ahora mostraremos cómo cambian las formas de conexión y de curvatura cuando se elige un marco diferente. Sean \mathbf{e}_U y \mathbf{e}_V dos marcos en las vecindades U y V respectivamente, con $U \cap V \neq \emptyset$. Entonces

$$\mathbf{e}_V = \mathbf{e}_U g_{UV} \tag{1.12}$$

donde $g_{UV} \in \mathbf{SO}(n)$. Se tiene que

$$\nabla \mathbf{e}_V = \mathbf{e}_V \otimes \omega_V, \quad \nabla \mathbf{e}_U = \mathbf{e}_U \otimes \omega_U$$

y para las formas de curvatura

$$\Omega_V = d\omega_V + \omega_V \wedge \omega_V, \quad \Omega_U = d\omega_U + \omega_U \wedge \omega_U.$$

Por la relación (1.12) y las propiedades de ∇ , se tiene que

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{e}_V &= (\nabla \mathbf{e}_U) g_{UV} + \mathbf{e}_U \otimes dg_{UV} \\ &= (\mathbf{e}_U \otimes \omega_U) g_{UV} + \mathbf{e}_U \otimes dg_{UV} \\ &= \mathbf{e}_U \otimes (\omega_U g_{UV} + dg_{UV}) \end{aligned}$$

pero también

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{e}_V &= \mathbf{e}_V \otimes \omega_V \\ &= (\mathbf{e}_U g_{UV}) \otimes \omega_V \\ &= \mathbf{e}_U \otimes (g_{UV} \omega_V) \end{aligned}$$

por lo que igualando,

$$\omega_U g_{UV} + dg_{UV} = g_{UV} \omega_V$$

y despejando a ω_V ,

$$\omega_V = g_{VU} \omega_U g_{UV} + g_{VU} dg_{UV}, \tag{1.13}$$

lo cual muestra la manera de transformar las formas de conexión en dos marcos diferentes.

Para ver cómo cambian las formas de curvatura, primero obtendremos unos resultados previos. Derivando la identidad

$$g_{UV} g_{VU} = I,$$

y adoptando la notación $C := g_{VU}$ tenemos que

$$(dC^{-1})C + C^{-1}(dC) = 0;$$

multiplicando a la izquierda por C , se tiene

$$dC = -C(dC^{-1})C. \tag{1.14}$$

Derivando la ecuación (1.13), tenemos que

$$d\omega_V = d[C\omega_U C^{-1} + C(dC^{-1})]$$

y desarrollando,

$$d\omega_V = (dC)\omega_U C^{-1} + C(d\omega_U)C^{-1} - C\omega_U(dC^{-1}) + (dC)(dC^{-1}). \quad (1.15)$$

Además,

$$\begin{aligned} \omega_V \wedge \omega_V &= [C\omega_U C^{-1} + C(dC^{-1})] \wedge [C\omega_U C^{-1} + C(dC^{-1})] \\ &= C(\omega_U \wedge \omega_U)C^{-1} + C\omega_U(dC^{-1}) \\ &\quad + [C(dC^{-1})C]\omega_U C^{-1} + [C(dC^{-1})C]dC^{-1}, \end{aligned}$$

y al sustituir la identidad (1.14) en la igualdad anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} \omega_V \wedge \omega_V &= C(\omega_U \wedge \omega_U)C^{-1} + C\omega_U(dC^{-1}) \\ &\quad - (dC)\omega_U C^{-1} - (dC)(dC^{-1}). \end{aligned}$$

Sumando ésta última ecuación con la igualdad (1.15) se concluye que

$$\begin{aligned} d\omega_V + \omega_V \wedge \omega_V &= C(\omega_U \wedge \omega_U)C^{-1} + C(d\omega_U)C^{-1} \\ &= C(d\omega_U + \omega_U \wedge \omega_U)C^{-1}, \end{aligned}$$

por lo que la manera de cambiar entre las formas de curvatura es:

$$\Omega_V = g_{VU}\Omega_U g_{UV}. \quad (1.16)$$

1.1.1 Ecuaciones de estructura en dimensión 2

Sean \mathbf{M}^2 una superficie Riemanniana compacta y orientable de dimensión 2 y $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ un marco en $U \subset M$ (vecindad de un punto $p \in \mathbf{M}^2$) con base dual $\{\sigma^1, \sigma^2\}$. Si ∇ es la conexión de Levi-Civita de \mathbf{M}^2 , por la primera ecuación de estructura de Cartan

$$\omega_2^1 = \omega_{21}^1 \sigma^1 + \omega_{22}^1 \sigma^2. \quad (1.17)$$

Ahora, de la segunda ecuación de estructura para $i = 1$,

$$d\sigma^1 = -\omega_1^1 \wedge \sigma^1 - \omega_2^1 \wedge \sigma^2,$$

pero por la antisimetría de ω , $\omega_1^1 = 0$. Usando este hecho y sustituyendo (1.17) en la ecuación anterior se tiene que

$$d\sigma^1 = -\omega_{21}^1 \sigma^1 \wedge \sigma^2. \quad (1.18)$$

Análogamente para $i = 2$,

$$d\sigma^2 = \omega_{22}^1 \sigma^1 \wedge \sigma^2. \quad (1.19)$$

Recordamos que,

$$\langle \mathbf{R}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \rangle = \langle \mathbf{R}_{121}^k \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_2 \rangle = \mathbf{R}_{121}^2 = K,$$

donde K es la curvatura de Gauss de \mathbf{M}^2 . De la ecuación (1.6), se tiene que

$$\Omega_1^2 = \mathbf{R}_{112}^2 \sigma^1 \wedge \sigma^2, \quad (1.20)$$

pero

$$\mathbf{R}_{112}^2 = -\mathbf{R}_{121}^2$$

y por tanto de la ecuación (1.20),

$$\Omega_1^2 = d\omega_1^2 = -K \sigma^1 \wedge \sigma^2.$$

Ejemplo 1.1. Una parametrización de la 2-esfera de radio r usando coordenadas esféricas es $X : (0, 2\pi) \times (0, \pi) \rightarrow \mathbf{S}_r^2$ dada por

$$X(\theta, \psi) = (r \cos \theta \sen \psi, r \sen \theta \sen \psi, r \cos \psi),$$

entonces

$$\begin{aligned} X_\theta &= (-r \sen \theta \sen \psi, r \cos \theta \sen \psi, 0) \\ X_\psi &= (r \cos \theta \cos \psi, r \sen \theta \cos \psi, -r \sen \psi). \end{aligned}$$

Tomamos como marco y base dual en la imagen de X a

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{1}{r \sen \psi} X_\theta & \sigma^1 &= r \sen \psi d\theta \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{1}{r} X_\psi & \sigma^2 &= r d\psi. \end{aligned}$$

Por la ecuación (1.18) se tiene

$$d(r \sen \psi d\theta) = -\omega_{21}^1 (r \sen \psi d\theta) \wedge (r d\psi),$$

de donde se obtiene

$$\omega_{21}^1 = \frac{\cos \psi}{r \sen \psi},$$

y por (1.19)

$$d(r d\psi) = \omega_{22}^1 (r \sen \psi d\theta) \wedge (r d\psi),$$

lo cual implica

$$\omega_{22}^1 = 0.$$

Por lo que, de la primer ecuación de estructura (1.17),

$$\omega_2^1 = \frac{\cos \psi}{r \sen \psi} \sigma^1 = \cos \psi d\theta$$

de lo cual se sigue que

$$\Omega_2^1 = d\omega_2^1 = -\sen \psi d\psi \wedge d\theta = \frac{1}{r^2} (r \sen \psi d\theta) \wedge (r d\psi) = \frac{1}{r^2} \sigma^1 \wedge \sigma^2,$$

y entonces la curvatura es $K = \frac{1}{r^2}$.

Ejemplo 1.2. Para el plano hiperbólico \mathbb{H}^2 tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= y \frac{\partial}{\partial x} & \sigma^1 &= \frac{1}{y} dx \\ \mathbf{e}_2 &= y \frac{\partial}{\partial y} & \sigma^2 &= \frac{1}{y} dy \end{aligned}$$

y por la ecuación (1.18),

$$d\left(\frac{1}{y} dx\right) = -\omega_{21}^1 \left(\frac{1}{y} dx\right) \wedge \left(\frac{1}{y} dy\right).$$

Por tanto,

$$\omega_{21}^1 = -1,$$

y de (1.19)

$$d\left(\frac{1}{y} dy\right) = \omega_{22}^1 \left(\frac{1}{y} dx\right) \wedge \left(\frac{1}{y} dy\right),$$

se sigue

$$\omega_{22}^1 = 0.$$

De la primer ecuación de estructura (1.17),

$$\omega_2^1 = -\sigma^1 = -\frac{1}{y} dx,$$

luego,

$$\Omega_2^1 = d\omega_2^1 = \frac{1}{y^2} dy \wedge dx = -\frac{dx}{y} \wedge \frac{dy}{y} = -\sigma^1 \wedge \sigma^2,$$

y entonces la curvatura es $K = -1$.

Ejemplo 1.3. Análogamente, para el plano euclidiano \mathbb{R}^2 , tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \frac{\partial}{\partial x} & \sigma^1 &= dx \\ \mathbf{e}_2 &= \frac{\partial}{\partial y} & \sigma^2 &= dy \end{aligned}$$

y es fácil ver que

$$\omega_{21}^1 = \omega_{22}^1 = 0.$$

De esta manera,

$$\Omega_2^1 = \omega_2^1 = 0,$$

consecuentemente, la curvatura Gaussiana es $K = 0$.

1.2 Breve introducción a curvatura

Chern estudia la geometría usando las formas diferenciables como lenguaje. Por ejemplo, en la sección anterior vimos como usando formas diferenciables calcular la curvatura en dimensión 2, ahora veremos que pasa en el caso de dimensión n . Para una introducción a formas diferenciables y a curvatura sugerimos [2], de donde fue basado el siguiente resumen.

En dimensión 2, si hacemos transporte paralelo a lo largo de un paralelogramo obtenemos una transformación ortogonal $A \in \mathbf{SO}(2)$, esto es porque el ángulo y las normas entre dos vectores trasladados paralelamente se conservan, entonces A es una rotación del tipo

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \text{sen } \varphi \\ -\text{sen } \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

para algún ángulo φ .

A también se puede pensar o tiene asociado un elemento $\Phi \in \mathfrak{so}(2)$ (el álgebra de Lie de $\mathbf{SO}(2)$), es decir, las matrices antisimétricas de 2×2 . Entonces existe una matriz

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \varphi \\ -\varphi & 0 \end{pmatrix},$$

y la relación entre ellas está dada por la aplicación exponencial

$$A = \exp(\Phi) = I + \Phi + \frac{\Phi^2}{2!} + \frac{\Phi^3}{3!} + \dots \quad (1.21)$$

Seremos ahora un poco más precisos y volvamos al caso n dimensional. Consideremos un marco $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ en alguna vecindad de $p \in \mathbf{M}^n$. $P_{\varepsilon, \eta}^T$ denotará el paralelogramo en $\mathbf{T}_p \mathbf{M}^n$ formado por el vector ε y el vector η , y por $P_{\varepsilon, \eta}$ denotamos al paralelogramo curvilíneo asociado a la variedad \mathbf{M}^n , es decir,

$$P_{\varepsilon, \eta} := \exp_p(P_{\varepsilon, \eta}^T),$$

donde $\exp_p : \mathbf{T}_p \mathbf{M}^n \rightarrow \mathbf{M}^n$ es el mapeo exponencial de variedades.

El tensor de curvatura de Riemann \mathbf{R} se codifica en las transformaciones $A(\varepsilon \mathbf{e}_i, \varepsilon \mathbf{e}_j) \in \mathbf{SO}(n)$, dadas por la traslación a lo largo de los paralelogramos $P_{\varepsilon \mathbf{e}_i, \varepsilon \mathbf{e}_j}$.

Cuando usamos paralelogramos curvilíneos con $\varepsilon \approx 0$, a las matrices $A(\varepsilon \mathbf{e}_i, \varepsilon \mathbf{e}_j)$ les corresponden matrices en el álgebra de Lie $\mathfrak{so}(n)$, que resultan ser aproximadas por las matrices $\Omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$, más exactamente se tiene la relación como en (1.21)

$$\begin{aligned} A(\varepsilon \mathbf{e}_i, \varepsilon \mathbf{e}_j) &= \exp(\Omega(\varepsilon \mathbf{e}_i, \varepsilon \mathbf{e}_j)) \\ &= I + \varepsilon^2 \Omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) + \frac{\varepsilon^4 \Omega^2(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)}{2!} + \frac{\varepsilon^6 \Omega^3(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)}{3!} + \dots \end{aligned}$$

y entonces

$$\Omega(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{A(\varepsilon \mathbf{e}_i, \varepsilon \mathbf{e}_j) - I}{\varepsilon^2}.$$

En resumen, la curvatura en \mathbf{M}^n se codifica en las transformaciones $A(\epsilon \mathbf{e}_i, \epsilon \mathbf{e}_j) \in \mathbf{SO}(n)$ dadas por la traslación a lo largo de paralelogramos curvilíneos, estas transformaciones también las podemos recuperar mediante el álgebra de Lie de $\mathbf{SO}(n)$, y con ellas se obtienen la matriz de curvatura Ω . La ventaja es que se puede encontrar a Ω en principio de manera más simple que al tensor de Riemann, además de que esta idea se generaliza a otros haces con alguna conexión y su respectiva curvatura.

1.3 Curvatura en dimensión par

Daremos diferentes maneras de expresar la curvatura de Gauss en dimensión 2, para hacer natural la curvatura \mathbf{K}_n definida en el caso $n = 2k$, de acuerdo con el Teorema de Weil-Allendoerfer, que generaliza al de Gauss-Bonnet, ya que al integrar la n -forma $\mathbf{K}_n d\nu$ sobre la variedad \mathbf{M}^n obtenemos su característica de Euler (módulo una constante que viene del volumen de la \mathbf{S}^{n-1} esfera), y donde $d\nu$ es la n -forma de volumen en \mathbf{M}^n . Para esto se necesita que la variedad esté contenida en algún \mathbb{R}^m , $m > n$.

A continuación se recupera la n -forma $\mathbf{K}_n d\nu$ como una n -forma $\bar{\Omega}$ obtenida a partir de la matriz de curvatura asociada a algún marco. De esta manera la curvatura se vuelve intrínseca y no necesitamos tener la variedad encajada en \mathbb{R}^m .

Para terminar la sección, obtendremos $\bar{\Omega}$ de una manera algebraica, en álgebra lineal el pfaffiano de una matriz antisimétrica es la raíz cuadrada de su determinante, $\bar{\Omega}$ será, módulo una constante, el pfaffiano de la matriz de curvatura Ω que sabemos es antisimétrica.

Para una superficie $\mathbf{M}^2 \subset \mathbb{R}^3$ compacta, sin frontera y con la métrica heredada de \mathbb{R}^3 , se tiene que la curvatura Gaussiana K en un punto p está dada por:

$$K = k_1 \cdot k_2 = \det dn_p, \quad (1.22)$$

donde k_1 y k_2 son las curvaturas principales de \mathbf{M}^2 en p , y dn_p es la derivada de la aplicación de Gauss n en p .

De manera intrínseca, si \mathbf{M}^2 es una superficie Riemanniana, compacta y orientable, en términos de las componentes del tensor de curvatura \mathbf{R}_{ijkl} en algún marco, la curvatura es

$$K = \frac{1}{4} \sum_{\substack{I=(i_1 i_2) \\ J=(j_1 j_2)}} \epsilon^{i_1 i_2} \epsilon^{j_1 j_2} \mathbf{R}_{i_1 i_2 j_1 j_2} \quad (1.23)$$

donde

$$\epsilon^{i_1 i_2} := \begin{cases} +1 & \text{si } (i_1 i_2) \text{ es permutación par de } (1 \ 2) \\ -1 & \text{si } (i_1 i_2) \text{ es permutación impar de } (1 \ 2) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observamos que la fórmula en (1.23) se sigue ya que el lado derecho es

$$\frac{1}{4} [\mathbf{R}_{1212} - \mathbf{R}_{1221} - \mathbf{R}_{2112} + \mathbf{R}_{2121}] = \mathbf{R}_{1212} = K.$$

Recordamos que K es un invariante escalar, es decir, depende de la métrica pero no del sistema particular de coordenadas usado para calcularla.

Para recuperar la curvatura con formas, recordamos que si $\mathbf{e}_U = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es un marco en una vecindad \mathcal{U} de un punto $p \in \mathbf{M}^2$,

$$\Omega^1_2 = K \, dA = K \, \sigma^1 \wedge \sigma^2, \quad (1.24)$$

siendo $\{\sigma^1, \sigma^2\}$ la base dual.

También Ω^1_2 se obtiene mediante la fórmula

$$\Omega^1_2 = \frac{1}{2!} \sum_{I=(i_1 i_2)} \epsilon^{i_1 i_2} \Omega^i_1. \quad (1.25)$$

Pasamos ahora al caso $n = 2k$. Sea \mathbf{M}^n una variedad Riemanniana, compacta y orientable, la curvatura \mathbf{K}_n en $p \in \mathbf{M}^n$ está dada por

$$\mathbf{K}_n = \frac{1}{2^{2k} k!} \sum_{\substack{I=(i_1 i_2 \dots i_n) \\ J=(j_1 j_2 \dots j_n)}} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \epsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} \mathbf{R}_{i_1 i_2 j_1 j_2} \mathbf{R}_{i_3 i_4 j_3 j_4} \cdots \mathbf{R}_{i_{n-1} i_n j_{n-1} j_n}. \quad (1.26)$$

Observemos que (1.26) es una generalización de (1.23), esto es, $\mathbf{K}_2 = K$. La curvatura definida así tiene sentido por el siguiente teorema (ver [1] para la demostración).

Teorema 1.4. (Weil-Allendoerfer) *Sea $\mathbf{M}^n \subset \mathbb{R}^m$ para algún $m > n$, una variedad compacta, orientable y Riemanniana con la métrica heredada de \mathbb{R}^m ; sea $d\nu$ su n -forma de volumen, $g = \det(g_{ij})$, con g_{ij} el tensor métrico, y R_{ijkl} las componentes del tensor de curvatura asociado a g_{ij} , entonces se tiene el invariante escalar Ψ dado por*

$$\Psi = \frac{1}{(2\pi)^k} \frac{1}{2^n k!} \sum_{\substack{I=(i_1 i_2 \dots i_n) \\ J=(j_1 j_2 \dots j_n)}} \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \epsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} g R_{i_1 i_2 j_1 j_2} R_{i_3 i_4 j_3 j_4} \cdots R_{i_{n-1} i_n j_{n-1} j_n}.$$

Además, tenemos que

$$\int_{\mathbf{M}^n} \Psi(x) \, d\nu = \chi(\mathbf{M}^n).$$

Tomando las componentes del tensor de Riemann asociado a un marco se tiene que

$$\mathbf{K}_n(p) = (2\pi)^k \Psi(p).$$

Consecuentemente, la curvatura \mathbf{K}_n es también un invariante escalar, y usando la fórmula del Teorema 1.4 nos queda que

$$\int_{\mathbf{M}^n} \mathbf{K}_n(p) \, d\nu = (2\pi)^k \chi(\mathbf{M}^n). \quad (1.27)$$

Para la hipersuperficie $\mathbf{M}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ se puede probar que

$$\mathbf{K}_n(p) = k_1 \cdot k_2 \cdots k_n = \det dn_p, \quad (1.28)$$

donde k_1, k_2, \dots, k_n son las curvaturas principales en x , y n es la aplicación normal de Gauss.

Recordemos que en el Teorema de Weil-Allendoerfer la variedad está contenida en algún \mathbb{R}^m , por lo que la prueba no es intrínseca, sin embargo, como demostró Nash, toda variedad Riemanniana se puede encajar isométricamente en algún espacio euclidiano \mathbb{R}^m , por lo que usando este resultado se tiene la fórmula de Gauss-Bonnet para dimensión $2k$.

La prueba que daremos, debida a Chern, es intrínseca, e importante porque se basa en interpretar hechos geométricos y topológicos en términos de haces (en este caso el haz tangente unitario) y usando las formas diferenciables como lenguaje.

A continuación recuperamos la curvatura \mathbf{K}_n en términos de formas. Consideremos un marco \mathbf{e}_U en una vecindad U del punto $p \in \mathbf{M}^n$, y $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ el marco en p , con la matriz de curvatura asociada Ω_U construimos la n -forma diferenciable $\bar{\Omega}_U$ en U como sigue

$$\bar{\Omega}_U := (-1)^{k-1} \frac{1}{2^{2k} \pi^k k!} \sum_I \epsilon^I \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \Omega_{i_4}^{i_3} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_n}^{i_{n-1}}, \quad (1.29)$$

donde

$$\epsilon^I \stackrel{\text{not}}{=} \epsilon^{i_1 i_2 \cdots i_n} := \begin{cases} +1 & \text{si } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ es permutación par de } (1, 2, \dots, n) \\ -1 & \text{si } (i_1, i_2, \dots, i_n) \text{ es permutación impar de } (1, 2, \dots, n) \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Para explicar la fórmula anterior, observemos que de la cadena de igualdades

$$\begin{aligned} & \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \Omega_{i_4}^{i_3} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_n}^{i_{n-1}}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \\ &= \frac{(2k)!}{2^k} \frac{1}{(2k)!} \sum_J \epsilon^J \Omega_{i_2}^{i_1}(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}) \Omega_{i_4}^{i_3}(\mathbf{e}_{j_3}, \mathbf{e}_{j_4}) \cdots \Omega_{i_n}^{i_{n-1}}(\mathbf{e}_{j_{n-1}}, \mathbf{e}_{j_n}) \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_J \epsilon^J \mathbf{R}_{i_1 i_2 j_1 j_2} \mathbf{R}_{i_3 i_4 j_3 j_4} \cdots \mathbf{R}_{i_{n-1} i_n j_{n-1} j_n}, \end{aligned}$$

se sigue que

$$\begin{aligned} & \bar{\Omega}_U(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \\ &= \frac{(2k)!}{2^k} \frac{1}{(2k)!} \sum_J \epsilon^J \Omega_{i_2}^{i_1}(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}) \Omega_{i_4}^{i_3}(\mathbf{e}_{j_3}, \mathbf{e}_{j_4}) \cdots \Omega_{i_n}^{i_{n-1}}(\mathbf{e}_{j_{n-1}}, \mathbf{e}_{j_n}) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^k} \frac{(-1)^{k-1}}{2^{2k} k!} \sum_{I, J} \epsilon^I \epsilon^J \mathbf{R}_{i_1 i_2 j_1 j_2} \mathbf{R}_{i_3 i_4 j_3 j_4} \cdots \mathbf{R}_{i_{n-1} i_n j_{n-1} j_n} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^k} \mathbf{K}_n(p), \end{aligned}$$

y si como antes, $d\nu$ denota la n -forma de volumen en \mathbf{M}^n , se cumple

$$d\nu(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$$

y finalmente

$$\bar{\Omega}_U = \frac{1}{(2\pi)^k} \mathbf{K}_n d\nu. \quad (1.30)$$

De nuevo se observa que (1.30) es una generalización de (1.24).

Como veremos, las n -formas diferenciables $\{\bar{\Omega}_U\}$ forman una n -forma diferenciable global $\bar{\Omega}$ en \mathbf{M}^n . Integrando la última igualdad y por la relación (1.27) se concluye que

$$\int_{\mathbf{M}^n} \bar{\Omega} = \chi(\mathbf{M}^n).$$

Para terminar la sección, veamos como recuperar $\bar{\Omega}$ mediante el operador Pfaffiano, denotado Pf, y que se define para matrices antisimétricas (cumplen que $A^t = -A$) con $A = (A_{ij}) \in M_{2k \times 2k}$ por:

$$Pf(A) := \frac{1}{2^k k!} \sum_I \epsilon^I A_{i_1 i_2} A_{i_3 i_4} \cdots A_{i_{n-1} i_n},$$

donde el término $\frac{1}{2^k k!}$ se debe a los factores repetidos en la suma.

Ejemplo 1.5. Para el caso $n = 2$ tenemos,

$$Pf \begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} = A_{12}.$$

Ejemplo 1.6. Para el caso $n = 4$, se tiene,

$$Pf \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & 0 & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & 0 & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & 0 \end{pmatrix} = A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23}.$$

Una propiedad importante del Pfaffiano es

$$(Pf(A))^2 := Pf(A)^2 = \det A, \quad (1.31)$$

cuya demostración puede verse en [14], Vol 5.

Escogemos $g \in \mathbf{SO}(n)$, con $n = 2k$. Entonces $\det g = 1$ y $g^{-1} = g^t$. Por lo tanto,

$$(g^{-1}Ag)^t = (g^tAg)^t = g^t A^t g = -(g^{-1}Ag),$$

lo que prueba que $g^{-1}Ag$ también es antisimétrica y se cumplen las relaciones

$$\det g^{-1}Ag = (\det g)^2 (\det A) = \det A = Pf(A)^2,$$

$$\det g^{-1}Ag = Pf(g^{-1}Ag)^2,$$

con lo cual se puede verificar que

$$Pf(g^{-1}Ag) = Pf(A). \quad (1.32)$$

Tomando en lugar de A a la matriz de curvatura Ω_U asociada a algún marco \mathbf{e}_U , se define el Pfaffiano de Ω_U por

$$Pf(\Omega_U) := \frac{1}{2^k k!} \sum_I \epsilon^I \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \Omega_{i_4}^{i_3} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_n}^{i_{n-1}},$$

y es una n -forma en U . Si \mathbf{e}_V es otro marco en V con $U \cap V \neq \emptyset$, entonces por (1.16)

$$\Omega_V = g_{UV}^{-1} \Omega_U g_{UV}$$

para algún $g_{UV} \in \mathbf{SO}(n)$, por la propiedad (1.32),

$$Pf(\Omega_V) = Pf(g_{UV}^{-1} \Omega_U g_{UV}) = Pf(\Omega_U).$$

Consecuentemente, las n -formas diferenciables $\{Pf(\Omega_U)\}$ se pegan para dar una n -forma diferenciable global en \mathbf{M}^n la cual denotaremos por $Pf(\Omega)$.

Es claro por la definición del Pfaffiano que

$$\bar{\Omega} = -\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^k Pf(\Omega), \quad (1.33)$$

y la fórmula de Gauss-Bonnet-Chern se reescribe como

$$-\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^k \int_{\mathbf{M}^n} Pf(\Omega) = \chi(\mathbf{M}^n).$$

Ejemplo 1.7. Para el caso $n = 4$,

$$-\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{M}^4} \Omega_2^1 \wedge \Omega_4^3 - \Omega_3^1 \wedge \Omega_4^2 + \Omega_4^1 \wedge \Omega_3^2 = \chi(\mathbf{M}^4).$$

1.4 Curvaturas seccional, de Ricci y escalar

Brevemente y a manera de complemento mencionamos algunas cuestiones básicas de dichas curvaturas. Sea \mathbf{M}^n variedad Riemanniana compacta y $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ un marco en alguna vecindad U de $p \in \mathbf{M}^n$, también consideramos \mathbf{R}_{jkn}^i las componentes del tensor de curvatura en dicho marco.

Escogemos \mathcal{P} un plano que pase por el origen en $\mathbf{T}_p\mathbf{M}^n$, se puede construir una superficie Riemanniana $S_{\mathcal{P}}$ contenida en \mathbf{M}^n (usando el mapeo exponencial) tal que $\mathbf{T}_p S_{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$, entonces

se define la **curvatura seccional** $K(\mathcal{P})$ como la curvatura de Gauss de $S_{\mathcal{P}}$ en p . Si $\{\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j\}$ generan el plano \mathcal{P} se tiene que

$$K(\mathcal{P}) := K(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{R}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \mathbf{R}_{ijij}.$$

El **tensor de Ricci** denotado Ric es un tensor simétrico de tipo $(2, 0)$ que se obtiene de la traza del tensor de Riemann,

$$Ric(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \text{Tr}[V \rightarrow \mathbf{R}(V, \mathbf{e}_i) \mathbf{e}_j]$$

y tiene por componentes

$$Ric_{ij} = \sum_{k=1}^n \mathbf{R}_{ikj}^k = \sum_{k=1}^n \mathbf{R}_{kikj}.$$

El número $Ric(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i)$ se interpreta como el cambio en el volumen de una pequeña $(n-1)$ -esfera centrada en p cuando se le deforma en la dirección \mathbf{e}_i . Para interpretar $Ric(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$ se puede utilizar la identidad

$$Ric(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \frac{1}{2} [Ric(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j) - Ric(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) - Ric(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_j)].$$

Por otro lado, la **curvatura escalar** (denotada S) en el punto p mide la razón de cambio entre los volúmenes de una $(n-1)$ -esfera centrada en p y el volumen de la $(n-1)$ -esfera usual del mismo radio en \mathbb{R}^n . Se obtiene de la traza del tensor de Ricci, es decir,

$$S = \text{Tr} Ric = \sum_{i=1}^n Ric_{ii} = \sum_{i,k=1}^n \mathbf{R}_{iki}^k.$$

Para terminar veremos dos relaciones básicas entre las curvaturas anteriores,

$$Ric(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i) = \sum_{k=1}^n \mathbf{R}_{iki}^k = \sum_{k=1}^n \mathbf{R}_{kiki} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n K(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i),$$

$$S = \sum_{k,i=1}^n \mathbf{R}_{iki}^k = \sum_{k,i=1}^n \mathbf{R}_{kiki} = \sum_{\substack{k,i=1 \\ k \neq i}}^n K(\mathbf{e}_k, \mathbf{e}_i).$$

En dimensión 2, $\mathbf{R}_{1212} = K = \frac{1}{2}S$.

1.5 La característica de Euler para superficies

La característica de Euler de una superficie compacta y conexa es un número entero que es un invariante topológico, el cual puede obtenerse de cualquier triangulación de la superficie (lo formalizaremos en el caso de variedades en la siguiente sección) y no depende de la elección

particular de ésta. También se puede calcular a partir de la homología de la variedad (mediante los llamados números de Betti).

Para superficies compactas la característica de Euler y la orientabilidad determinan completamente la topología y la geometría de la superficie, en ese caso la característica de Euler es básicamente el género (número de hoyos).

Para definir la característica de Euler de una superficie M^2 damos una triangulación K de ella. Sean

$$\begin{aligned} v &= \text{número de vértices de } K \\ a &= \text{número de aristas de } K \\ c &= \text{número de caras de } K \end{aligned}$$

entonces la característica de Euler, denotada por $\chi(M^2)$, está definida mediante la igualdad

$$\chi(M^2) = v - a + c,$$

y no depende de la triangulación particular K como se mostrará más adelante.

Ejemplo 1.8. Para la esfera S^2 elegimos un triángulo T de cualquier triangulación de ella, como $\overline{S^2 - T}$ es topológicamente un disco, la característica de la esfera es la característica del disco $\overline{S^2 - T}$ que es 1 más una cara dada por T , entonces

$$\chi(S^2) = \chi(\overline{S^2 - T}) + 1 = 1 + 1 = 2.$$

Ejemplo 1.9. El toro $T^2 = S^1 \times S^1$. Como la característica de un disco con dos agujeros es $1 - 2 = -1$, y la de un cilindro es 0, es sencillo ver que la característica de S_f es -1 (ver Figura 1.1). Como el toro es S_f pegándole en la frontera un disco, se tiene que

$$\chi(T^2) = \chi(S_f) + 1 = -1 + 1 = 0.$$

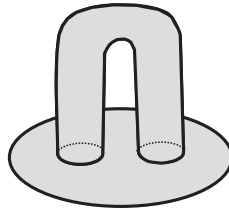


Figura 1.1: La superficie S_f

Ejemplo 1.10. Si M y N son superficies compactas con frontera, una fórmula que nos permite calcular la característica de Euler de la suma conexas de M y N , está dada por

$$\chi(M \# N) = \chi(M) + \chi(N) - 2,$$

con $M \# N$ denotamos la suma conexas de M y N .

Ejemplo 1.11. El espacio topológico nT^2 , que denota la suma conexas de n 2-toros, tiene una característica de Euler dada por

$$\chi(nT^2) = 2 - 2n.$$

Ejemplo 1.12. La suma conexas de n espacios proyectivos, denotada por $n\mathbb{R}P^2$, tiene como característica de Euler

$$\chi(n\mathbb{R}P^2) = 2 - n.$$

1.6 La característica de Euler para variedades

Para definir la característica de Euler en cualquier dimensión, recordaremos los conceptos de “simplejos” y “complejo simplicial”, que son una generalización de triángulo y de triangulación respectivamente en dimensión n .

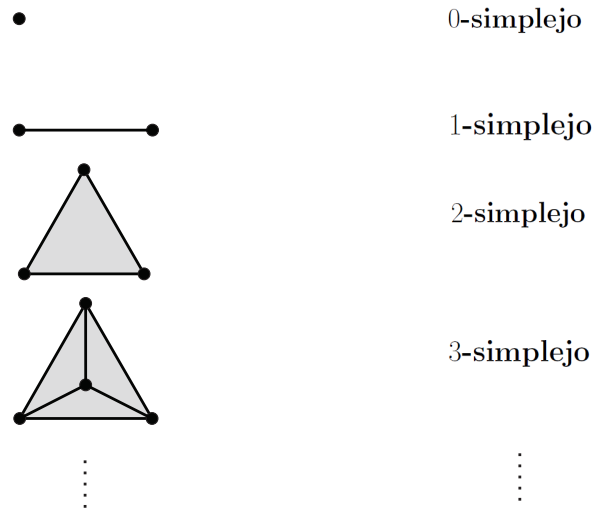


Figura 1.2: Los n -simplejos

Si tomamos q puntos $p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_q}$ de un n -simplejo σ_n , estos definen una q -cara $\sigma_q = \langle p_{i_1} p_{i_2} \dots p_{i_q} \rangle$ de σ_n y lo escribiremos como

$$\sigma_q \leq \sigma_n.$$

Ejemplo 1.13. En el 4-simplejo $\sigma_4 = \langle p_1 p_2 p_3 p_4 \rangle$, $\sigma_3 = \langle p_1 p_2 p_4 \rangle$ es una 3-cara (triángulo), $\sigma_2 = \langle p_1 p_2 \rangle$ es una 2-cara (arista) y $\sigma_1 = \langle p_4 \rangle$ es una 0-cara (vértice).

Un complejo simplicial K es una unión finita de simplejos en algún \mathbb{R}^m , con las siguientes condiciones:

1. Cualquier q -cara de un simplejo en K pertenece también a K , es decir, si

$$\sigma_q \leq \sigma_n \text{ donde } \sigma_n \in K, \text{ entonces } \sigma_q \in K.$$

2. Si σ y δ son simplejos en K , entonces la intersección $\sigma \cap \delta$ es vacía o es una cara común de σ y δ , en símbolos, si

$$\sigma, \delta \in K \Rightarrow \sigma \cap \delta = \emptyset \text{ o } (\sigma \cap \delta \leq \sigma \text{ y } \sigma \cap \delta \leq \delta).$$

La dimensión de un complejo simplicial K es la dimensión del más grande de sus simplejos, en realidad nos interesa los casos en que todos los simplejos son de la misma dimensión n y lo llamamos un **n -complejo simplicial**.

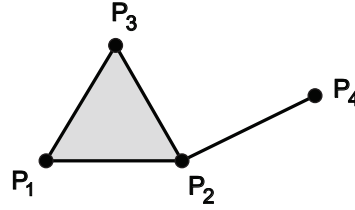


Figura 1.3: Un 2-complejo simplicial K

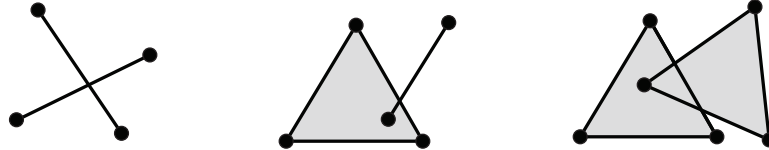


Figura 1.4: Unión de simplejos que no son complejos simpliciales

Ejemplo 1.14. El 2-complejo simplicial $K = \{p_1, p_2, p_3, p_4, \langle p_1p_3 \rangle, \langle p_1p_2 \rangle, \langle p_2p_3 \rangle, \langle p_2p_4 \rangle, \langle p_1p_2p_3 \rangle\}$ se muestra en la Figura 1.3

Como un complejo simplicial K es un conjunto en algún espacio \mathbb{R}^m , le damos la topología heredada y entonces K es un espacio topológico.

Sea M^n una variedad compacta, decimos que M^n es triangulable si existe un n -complejo simplicial K tal que es homeomorfo a M^n , es decir, existe un homomorfismo f ,

$$f : K \longrightarrow M^n,$$

y llamamos a K una triangulación de M^n .

Denotemos por I_j el número de j -simplejos en K , entonces definimos la característica de Euler de K como:

$$\chi(K) := \sum_{j=1}^n (-1)^j I_j,$$

y mencionamos el siguiente teorema sin demostración.

Teorema 1.15. (Teorema de Euler-Poincaré) Sea K un n -complejo simplicial, entonces

$$\chi(K) = \sum_{j=1}^n (-1)^j I_j = \sum_{j=1}^n (-1)^j b_j(K),$$

donde $b_j(K) := \dim H_j(K; \mathbb{R})$, es decir, el j -ésimo número de Betti de K o la dimensión del j -ésimo grupo de homología de K con coeficientes en \mathbb{R} . Recordamos que los grupos de homología miden los “hoyos” de K . Para una referencia en homología ver [9].

Como los números de Betti son invariantes topológicos, si K y K' son dos triangulaciones de M^n , entonces el teorema implica que

$$\chi(K) = \chi(K').$$

Por lo que podemos definir

$$\chi(\mathbf{M}^n) := \chi(\mathbf{K}),$$

donde \mathbf{K} es cualquier triangulación de \mathbf{M}^n .

Además si \mathbf{M}^n es homeomorfa a \mathbf{N}^n entonces

$$\chi(\mathbf{M}^n) = \chi(\mathbf{N}^n),$$

por lo que la característica de Euler es un invariante topológico.

Ejemplo 1.16. Sea \mathbf{M}^3 una 3-variedad compacta, orientable y conexa; entonces $b_0 = b_3 = 1$ y por dualidad de Poincaré $b_1 = b_2$, entonces

$$\chi(\mathbf{M}^3) = 1 - b_1 + b_1 - 1 = 0.$$

Ejemplo 1.17. Si \mathbf{M} y \mathbf{N} son variedades compactas y conexas, entonces

$$\chi(\mathbf{M} \times \mathbf{N}) = \chi(\mathbf{M}) \cdot \chi(\mathbf{N}).$$

Ejemplos de esta fórmula son

$$\chi(\mathbf{S}^2 \times \mathbf{S}^2) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\chi(\mathbf{S}^2 \times \mathbb{T}^2) = 2 \cdot 0 = 0.$$

Ejemplo 1.18. Calculamos la característica de Euler de la 4-esfera \mathbf{S}^4 , sabiendo que

$$H_0(\mathbf{S}^4; \mathbb{R}) = H_4(\mathbf{S}^4; \mathbb{R}) = \mathbb{R}$$

$$H_1(\mathbf{S}^4; \mathbb{R}) = H_2(\mathbf{S}^4; \mathbb{R}) = H_3(\mathbf{S}^4; \mathbb{R}) = 0,$$

por lo que $b_0 = b_4 = 1$ y $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, por tanto,

$$\chi(\mathbf{S}^4) = 1 - 0 + 0 - 0 + 1 = 2.$$

Damos ahora una interpretación conocida de la característica de Euler como un número de intersección. Para ello consideremos $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Y}$ variedades orientables tales que $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subset \mathbf{Y}$ y se cumple la condición

$$\dim \mathbf{A} + \dim \mathbf{B} = \dim \mathbf{Y}. \tag{1.34}$$

Definición 1.19. Con las hipótesis anteriores, decimos que \mathbf{A} y \mathbf{B} se *intersecan transversalmente* si para cada $x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ se tiene que

$$\mathbf{T}_x \mathbf{A} \oplus \mathbf{T}_x \mathbf{B} = \mathbf{T}_x \mathbf{Y},$$

y se denota por $\mathbf{A} \pitchfork \mathbf{B}$.

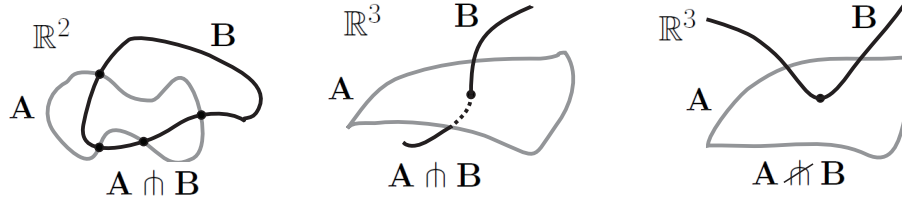


Figura 1.5: Transversalidad

Si $\mathbf{A} \pitchfork \mathbf{B}$ y es válida la ecuación (1.34) se obtiene que $\dim \mathbf{A} \cap \mathbf{B} = 0$, y entonces $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}$ es un conjunto de puntos, que suponemos es finito.

Para cada $x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$, consideremos la base $\beta_x = \{\{e_x\}, \{f_x\}\}$, donde $\{e_x\}$ es una base orientada de $\mathbf{T}_x \mathbf{A}$, y $\{f_x\}$ una base orientada de $\mathbf{T}_x \mathbf{B}$. β_x es una base de \mathbf{Y} en x (ya que $\mathbf{A} \pitchfork \mathbf{B}$).

Definición 1.20. El *número de intersección* de \mathbf{A} y \mathbf{B} es

$$I(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \sum_{x \in \mathbf{A} \cap \mathbf{B}} \text{sgn}(\beta_x) \cdot 1,$$

este número topológico depende sólo de las clases de homología de \mathbf{A} y \mathbf{B} y del espacio \mathbf{Y} .

También requerimos deformar un espacio, por ello la siguiente.

Definición 1.21. Con las hipótesis anteriores, decimos que \mathbf{B} es una *deformación transversal* de \mathbf{A} en \mathbf{Y} , si existe una homotopía suave $H : \mathbf{A} \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{Y}$ tal que las funciones $H_t : \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{Y}$ dadas por $H_t(a) = H(a, t)$ son encajes, además que $H_0(\mathbf{A}) = \mathbf{A} \subset \mathbf{Y}$, $H_1(\mathbf{A}) = \mathbf{B}$ y $\mathbf{A} \pitchfork \mathbf{B}$.

Antes de recuperar la característica de Euler veremos dos ejemplos básicos de haces.

Ejemplo 1.22. La banda de Möbius. Escogemos \mathbf{A} como el círculo central de la banda y \mathbf{B} una deformación transversal de \mathbf{A} como indica la figura, donde por ejemplo en x_2 el signo está

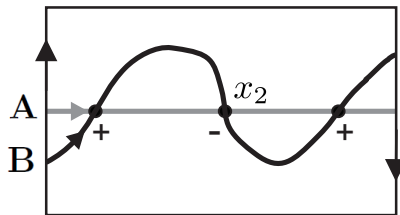


Figura 1.6: $\mathbf{A} \pitchfork \mathbf{B}$

dado por la orientación de $\beta_{x_2} = \{(1, 0), (0, -1)\}$,

$$\text{sgn} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ es negativo,}$$

y entonces $I(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = +1 - 1 + 1 = +1$.

Ejemplo 1.23. El cilindro $\mathbf{S}^1 \times [-1, 1]$. Sea $\mathbf{A} = \mathbf{S}^1 \times \{0\}$ y \mathbf{B} es la curva dada en la Figura 1.7, entonces $I(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = +1 - 1 = 0$, de nuevo, \mathbf{B} es una deformación de \mathbf{A} , y también podíamos

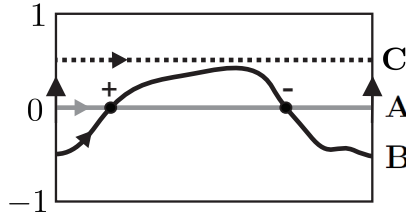


Figura 1.7: $\mathbf{A} \pitchfork \mathbf{B}$

haber tomado $\mathbf{C} = \mathbf{S}^1 \times \{\frac{1}{2}\}$ y es claro que el número de intersección es 0.

Ahora recordaremos un teorema que usaremos varias veces a lo largo del trabajo.

Teorema 1.24. (Teorema de Poincaré-Hopf) Sea \mathbf{M}^n una variedad compacta, orientable, sin frontera, y sea $V : \mathbf{M}^n \rightarrow \mathbf{T}\mathbf{M}^n$ cualquier campo vectorial en \mathbf{M}^n con un conjunto finito de ceros denotado Δ , se tiene que

$$\chi(\mathbf{M}^n) = \sum_{x \in \Delta} \text{Ind}(V, x).$$

Sea \mathbf{M}^n con las hipótesis anteriores, consideremos el campo vectorial cero $V_0 : \mathbf{M} \rightarrow \mathbf{T}\mathbf{M}^n$ que encaja \mathbf{M}^n en $\mathbf{T}\mathbf{M}^n$, y sea $V_1 : \mathbf{M}^n \rightarrow \mathbf{T}\mathbf{M}^n$ cualquier campo vectorial no degenerado (los campos vectoriales en \mathbf{M}^n son secciones de su haz tangente), entonces (véase [12]) tiene un conjunto finito de ceros Δ . Se puede probar que $V_1(\mathbf{M}^n)$ es una deformación transversal de $V_0(\mathbf{M}^n)$ en el haz tangente, se tiene

$$\dim V_0(\mathbf{M}^n) + \dim V_1(\mathbf{M}^n) = 2n = \dim \mathbf{T}\mathbf{M}^n.$$

Usando el Teorema de Poincaré-Hopf se demuestra que

$$\chi(\mathbf{M}^n) = \sum_{x \in \Delta} \text{Ind}(V_1, x) = I(V_0(\mathbf{M}^n), V_1(\mathbf{M}^n)).$$

Observamos que se puede usar cualquier campo vectorial no degenerado para calcular la característica de Euler de \mathbf{M}^n . En analogía a los ejemplos anteriores de las bandas, en que se podía tomar cualquier deformación transversal del círculo medio.

Ejemplo 1.25. El toro \mathbb{T}^2 . En este caso es sencillo construir un campo vectorial V_1 en el toro que no tenga ceros, entonces

$$\chi(\mathbb{T}^2) = I(V_0(\mathbb{T}^2), V_1(\mathbb{T}^2)) = 0,$$

ya que $V_0(\mathbb{T}^2)$ y $V_1(\mathbb{T}^2)$ son dos toros ajenos en $\mathbf{T}\mathbb{T}^2$, como lo que ocurre en el caso del cilindro, decimos que $\mathbf{T}\mathbb{T}^2$ es un haz trivial o un haz no torcido.

Ejemplo 1.26. La 2-esfera \mathbf{S}^2 . Cualquier manera de deformar la esfera $\mathbf{S}^2 \subset \mathbf{T}\mathbf{S}^2$ e intersecarla transversalmente con ella misma nos da +2, en este caso el haz $\mathbf{T}\mathbf{S}^2$ es no trivial.

Resumiendo, para calcular la característica de Euler de \mathbf{M}^n hay que calcular la intersección en el haz tangente de \mathbf{M}^n con una copia transversal a ella.

Consecuentemente, por el Teorema de Gauss-Bonnet la integral de la curvatura mide un número de intersección.

Si en lugar de tomar el haz tangente a una variedad \mathbf{M}^n trabajamos con otro haz vectorial con fibra \mathbb{R}^n , tenemos otra “característica de Euler” de \mathbf{M}^n , que bajo ciertas condiciones también se puede recuperar con la curvatura asociada a una conexión en dicho haz.

1.7 El haz tangente unitario

Sea \mathbf{M}^n una variedad Riemanniana, compacta y orientable, denotamos por $\mathbf{S M}^n$ al haz tangente unitario a \mathbf{M}^n , que consta de los vectores unitarios en cada plano tangente a la variedad,

$$\mathbf{S M}^n = \bigcup_{x \in \mathbf{M}^n} [V_x \in \mathbf{T}_x \mathbf{M}^n ; g(V_x, V_x) = 1]$$

donde g es la métrica, $\mathbf{S M}^n$ es una variedad compacta de dimensión $2n - 1$. Denotaremos por $\Pi : \mathbf{S M}^n \rightarrow \mathbf{M}^n$ a la proyección usual dada por $\Pi(V_x) = x$, la fibra en un punto $\Pi^{-1}(x)$ es la $(n - 1)$ -esfera $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbf{T}_x \mathbf{M}^n$.

En esta sección construiremos diferentes formas diferenciables en $\mathbf{S M}^n$ que nos servirán más adelante. Antes de continuar en esa dirección es buen momento de recordar el concepto de pullback en formas diferenciables.

Definición 1.27. Sean \mathbf{N} , \mathbf{M} variedades suaves y $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{M}$ una función suave, *el pullback de f* (denotado f^*) manda cualquier k -forma diferenciable α^k en \mathbf{M} a una k -forma diferenciable $f^* \alpha^k$ en \mathbf{N} dada por

$$f^* \alpha^k (v_1, \dots, v_k) = \alpha^k (df_p(v_1), \dots, df_p(v_k)),$$

donde v_1, \dots, v_k son vectores en un plano tangente $\mathbf{T}_p \mathbf{N}$, con $p \in \mathbf{N}$ y $df_p : \mathbf{T}_p \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{T}_{f(p)} \mathbf{M}$ la derivada de f en p .

Sea V cualquier campo vectorial unitario en una vecindad de $p \in U \subset M$,

$$V = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i v_i,$$

donde \mathbf{e} es un marco en U , y las v_i son funciones coordenadas en $\mathbf{S M}^n$.

Tenemos las siguientes notaciones

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \dots \quad \mathbf{e}_n)$$

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$v^t = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n),$$

con lo cual V se expresa como

$$V = \mathbf{e} v. \quad (1.35)$$

Queremos ahora encontrar ∇V , por lo que derivando la ecuación (1.35) obtenemos,

$$\nabla V = \nabla(\mathbf{e} v) = \mathbf{e} \otimes \nabla v = \mathbf{e} \otimes (\mathbf{d} v + \pi^* \omega v). \quad (1.36)$$

Definimos a Θ como

$$\Theta = \mathbf{d} v + \pi^* \omega v := \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \vdots \\ \theta_n \end{pmatrix}, \quad (1.37)$$

o también, en coordenadas,

$$\theta_i = \mathbf{d} v_i + v_k \Pi^* \omega_i^k.$$

Por comodidad en la notación, nos referimos a ellas simplemente como

$$\theta_i = \mathbf{d} v_i + v_k \omega_i^k, \quad (1.38)$$

equivalentemente

$$\Theta = \mathbf{d} v + \omega v, \quad (1.39)$$

y entonces de (1.36) y (1.39)

$$\nabla V = \mathbf{e} \otimes \Theta.$$

Por otra parte, como V es un campo unitario

$$v^t v = \sum_{i=1}^n v_i v_i = 1,$$

derivando tenemos

$$v^t \mathbf{d} v = 0. \quad (1.40)$$

Consideramos también la igualdad

$$v^t \Theta \stackrel{\text{por (1.39)}}{=} v^t [\mathbf{d} v + \omega v] = v^t \mathbf{d} v + v^t \omega v = v^t \omega v,$$

pero, en virtud de que

$$v^t \omega v = (v^t \omega v)^t = v^t \omega^t v = -(v^t \omega v),$$

se cumple que $v^t \omega v = 0$ y por lo tanto,

$$v^t \Theta = 0. \quad (1.41)$$

Otra igualdad que utilizaremos la obtenemos de derivar (1.37)

$$\begin{aligned}
 d\Theta &= d^2v + d(\omega v) \\
 &= (d\omega)v - \omega \wedge dv \\
 &= (\Omega - \omega \wedge \omega)v - \omega \wedge (\Theta - \omega v) \quad \text{por (1.5) y (1.37)} \\
 &= \Omega v - \underbrace{(\omega \wedge \omega)v} - \omega \wedge \Theta + \underbrace{(\omega \wedge \omega)v} \\
 &= \Omega v - \omega \wedge \Theta,
 \end{aligned}$$

la cual en coordenadas se escribe como

$$d\theta_i = \Omega_i^k v_k - \omega_i^k \wedge \theta_k. \quad (1.42)$$

Para terminar la sección mostramos cómo cambian las v_i y las θ_i cuando se cambia de marco. Si \mathbf{e}_V es otro marco en V , con $U \cap V \neq \emptyset$ recordamos que $\mathbf{e}_V = \mathbf{e}_U \mathbf{g}_{UV}$, y se tiene,

$$V = \mathbf{e}_V v_V = \mathbf{e}_U v_U,$$

esto se debe a que el campo vectorial V tiene componentes en dos bases dadas por los marcos \mathbf{e}_U y \mathbf{e}_V . La matriz \mathbf{g}_{UV} es la matriz de cambio de base y sustituyendo,

$$(\mathbf{e}_U \mathbf{g}_{UV}) v_V = \mathbf{e}_U v_U$$

con lo cual

$$v_V = \mathbf{g}_{VU} v_U,$$

De esta manera las componentes del campo cambian por la matriz de cambio de base, es decir

$$v_{i_V} = (\mathbf{g}_{VU})_i^k v_{k_U}. \quad (1.43)$$

Para ver como cambian las θ_i , usamos la notación $C = \mathbf{g}_{VU}$, se sigue que

$$\begin{aligned}
 \Theta_V &= dv_V + \omega_V v_V \\
 &= d(C v_U) + (C \omega_U C^{-1} + C dC^{-1})(C v_U) \quad \text{por (1.13)} \\
 &= (dC)v_U + C(dv_U) + C \omega_U v_U + C(dC^{-1})C v_U \\
 &= \underbrace{(dC)v_U} + C(dv_U) + C \omega_U v_U - \underbrace{(dC)v_U} \quad \text{por (1.14)} \\
 &= C(dv_U + \omega_U v_U) \\
 &= C \Theta_U.
 \end{aligned}$$

Entonces, las Θ se transforman también con la matriz de cambio de base

$$\Theta_V = \mathbf{g}_{VU} \Theta_U,$$

es decir

$$\Theta_{i_V} = (\mathbf{g}_{VU})_i^k \Theta_{k_U}. \quad (1.44)$$

Capítulo 2

Demostración clásica del Teorema de Gauss-Bonnet en en dimensión 2

Como ya mencionamos, la métrica en una superficie M^2 nos determina las propiedades geométricas que en ésta existen, por ejemplo, las geodésicas, las distancias, la existencia de rectángulos, longitud, área de círculos, sumas de los ángulos de polígonos y curvatura. La métrica no puede ser definida arbitrariamente en la superficie, ya que debe respetar la topología de M^2 .

En el caso de dimensión impar, más específicamente para espacios de dimensión 3, la característica de Euler no nos da información pero también existen relaciones entre invariantes topológicos y entre propiedades geométricas de dicho espacio.

2.1 Motivación y ejemplos de la fórmula de Gauss-Bonnet para regiones

Un primer resultado de la geometría de superficies debido a Gauss es que para un triángulo geodésico ΔABC sus ángulos están relacionados con la curvatura de la superficie dentro del triángulo (y si es compacta también fuera de él). Gauss demuestra la relación

$$\iint_{\Delta} K dA = \angle A + \angle B + \angle C - \pi, \quad (2.1)$$

donde K es la curvatura de Gauss, y $\angle A, \angle B, \angle C$ son los ángulos interiores del triángulo Δ .

Ejemplo 2.1. Para el plano, la ecuación (2.1) nos indica el conocido resultado

$$\angle A + \angle B + \angle C = \pi.$$

Ejemplo 2.2. Para la esfera unitaria $K = 1$ y (2.1) implican que

$$\text{Área}(\Delta) = \iint_{\Delta} dA = \angle A + \angle B + \angle C - \pi.$$

El triángulo obtenido al considerar un octante de la esfera, como se muestra en la Figura 2.1, tiene ángulos iguales a $\frac{\pi}{2}$, entonces la suma de sus ángulos menos π es $\frac{\pi}{2}$ que es una octava parte de el área de la esfera.

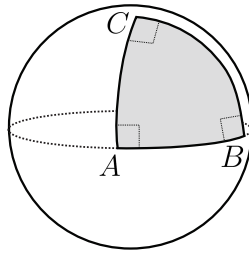


Figura 2.1: Triángulo en la esfera

Ejemplo 2.3. Para el plano hiperbólico, la ecuación (2.1) implica en este caso que

$$\text{Área}(\Delta) = \pi - \angle A + \angle B + \angle C.$$

Para verificarlo con un ejemplo, tomemos el triángulo ideal Δ en la Figura 2.2 y que tiene ángulos $\angle A = \angle B = \angle C = 0$, entonces

$$\pi - (\angle A + \angle B + \angle C) = \pi = \text{Área}(\Delta) = \iint_{\Delta} \frac{1}{y^2} dx dy.$$

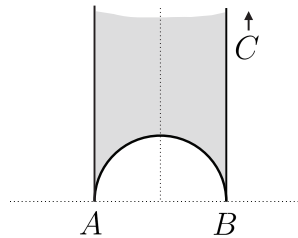


Figura 2.2: Triángulo Δ en el plano hiperbólico

Como sugiere el ejemplo, los ángulos de un triángulo geodésico hiperbólico lo determinan salvo isometrías, existen fórmulas trigonométricas (dadas por Lobachevski) para determinar las longitudes de los lados en función de los ángulos.

Si consideramos una región R (ver Figura 2.3) contenida en una superficie orientable \mathbf{M}^2 , que tiene como frontera un número n de curvas α_i cerradas, suaves, parametrizadas por longitud de arco y orientadas, entonces existe una relación entre las curvaturas (geodésica y de Gauss) y su característica de Euler, esto es,

$$\sum_{j=1}^n \int_{\alpha_j} k_g(s) ds + \iint_R K dA + \sum_{j=1}^n \epsilon_j = 2\pi \chi(R), \quad (2.2)$$

donde los ϵ_j son los ángulos exteriores a las curvas α_i con $i = 1, \dots, n$ y k_g es la curvatura geodésica.

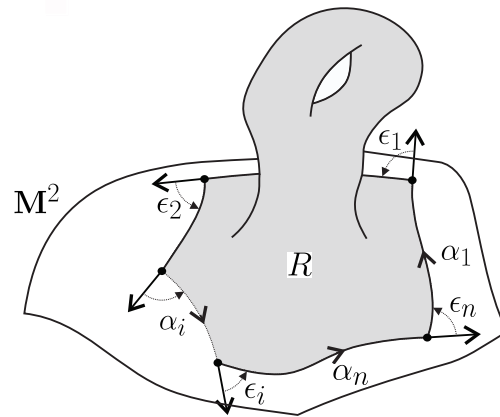


Figura 2.3: Una región R

Observemos que si R es la región acotada por un triángulo geodésico entonces (2.2) es la fórmula de Gauss (2.1), debido a que $k_g = 0$ ya que los lados del triángulo son geodésicas, además $\chi(R) = 1$ ya que R es topológicamente un disco.

Ejemplo 2.4. Si α es una curva plana cerrada, suave y parametrizada por longitud de arco, entonces de (2.2);

$$\int_{\alpha} k_g(s) ds = 2\pi,$$

ya que $\sum_{j=1}^n \epsilon_j = 0$ pues no hay ángulos exteriores.

Ejemplo 2.5. Supongamos que \mathbf{S} es una superficie con curvatura constante $K \neq 0$, entonces no existen rectángulos geodésicos en \mathbf{S} . Ya que si R fuera un rectángulo geodésico, tendríamos que $\epsilon_j = \frac{\pi}{2}$ para $j = 1, 2, 3, 4$, por lo que por (2.2)

$$\iint_R K dA = K \iint_R dA = K \cdot \text{Área}(R) = 0,$$

y entonces $\text{Área}(R) = 0$, lo cual es una contradicción.

Ejemplo 2.6. Para una esfera topológica \mathbf{S}^2 obtenida de la suma conexa de las regiones R_1 y R_2 , ver Figura 2.4, se tiene que

$$\iint_{R_1} K dA = 2\pi - \int_{\gamma} k_g(s) ds,$$

y tomando la orientación adecuada en R_2

$$\iint_{R_2} K dA = 2\pi + \int_{\gamma} k_g(s) ds,$$

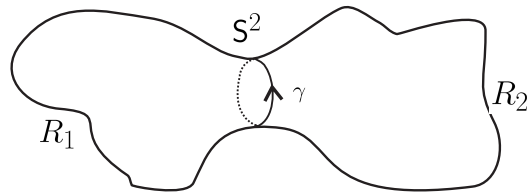


Figura 2.4: $S^2 = R_1 \cup R_2$

por lo tanto, la curvatura total es,

$$\iint_{S^2} K dA = 4\pi.$$

Ejemplo 2.7. Consideremos las regiones R_1 y R_2 como indica la figura y que identificándose en la curva cerrada γ conforman una superficie orientable M^2 .

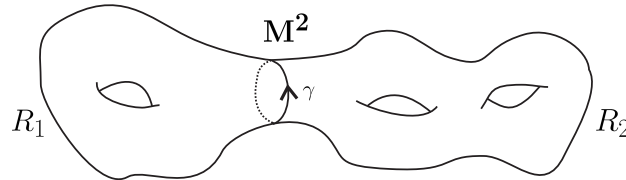


Figura 2.5: $M^2 = R_1 \cup R_2$

Se tiene que, debido a que γ es cerrada,

$$\iint_{R_1} K dA = 2\pi \chi(R_1) - \int_{\gamma} k_g(s) ds,$$

y tomando la orientación adecuada en R_2 a lo largo de γ para identificar correctamente con R_1 ,

$$\iint_{R_2} K dA = 2\pi \chi(R_2) + \int_{\gamma} k_g(s) ds,$$

lo cual implica que

$$\iint_{M^2} K dA = \iint_{R_1} K dA + \iint_{R_2} K dA = 2\pi [\chi(R_1) + \chi(R_2)].$$

Pero se verifica fácilmente que

$$\chi(R_1) + \chi(R_2) = \chi(R_1 \cup R_2),$$

de lo cual se concluye la igualdad

$$\iint_{M^2} K dA = 2\pi \chi(M^2).$$

La fórmula (2.2) también se reinterpreta en términos del concepto de conexión, que nos permite trasladar “paralelamente” vectores de un plano tangente a otro, y por tanto definir una derivada en la superficie, de hecho son conceptos equivalentes. Esto es porque para derivar un campo en la superficie (o en una variedad) necesitamos tomar la diferencia de vectores “cercaños” en dicha superficie, es aquí donde trasladamos paralelamente uno de ellos para que estén en el mismo plano tangente y poder tomar su diferencia.

La conexión de Levi-Civita nos asegura que localmente las curvas suaves (parametrizadas por longitud de arco) con aceleración cero (campo de velocidades paralelo) son las mismas que minimizan la distancia en \mathbf{M}^2 (geodésicas). Para calcular la curvatura intrínseca de una curva contenida en la superficie (curvatura geodésica) necesitamos de una conexión.

Definición 2.8. Sea $\alpha \subset \mathbf{M}^2$ una curva cerrada, suave por pedazos, *el ángulo de holonomía* θ_α de α , es el ángulo entre un vector $\vec{v}_I \in T_x \mathbf{M}^2$ y el vector $\vec{v}_F \in T_x \mathbf{M}^2$ obtenido después de trasladar paralelamente \vec{v}_I a lo largo de la curva α , donde x es cualquier punto en α .

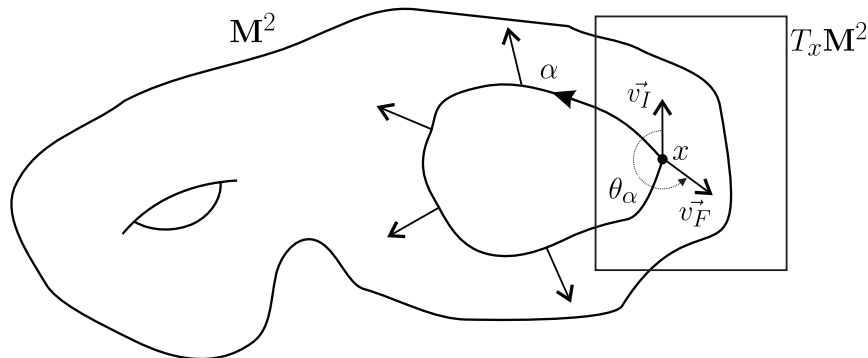


Figura 2.6: Ángulo de holonomía

Si Δ es el triángulo geodésico orientado en \mathbf{M}^2 con ángulos exteriores $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ y frontera α , entonces la holonomía a lo largo de α está determinada por los ángulos del triángulo, es decir,

$$\theta_\alpha = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - 2\pi,$$

por tanto por (2.2)

$$\iint_{\Delta} K dA = \theta_\alpha.$$

Ejemplo 2.9. Característica de Euler usando holonomía. Consideremos una superficie orientable, compacta, sin frontera $\mathbf{M}^2 \subset \mathbb{R}^3$ y triangulada, en la que denotamos dichos triángulos por Δ_i . Se tienen definidas las holonomías θ_i dadas al medir el ángulo de holonomía en cada Δ_i . Podemos juntar todos esos ángulos en un círculo unitario de cualquiera de los planos tangentes, se tiene que el número de vueltas completas en el círculo coincide con la característica de Euler de \mathbf{M}^2 . Notamos que esto se puede hacer para cualquier superficie Riemanniana, y para “trasladar” los ángulos usamos el transporte paralelo dado por la conexión de Levi-Civita.

Ejemplo 2.10. Consideremos el triángulo geodésico con frontera α de la Figura 2.7.

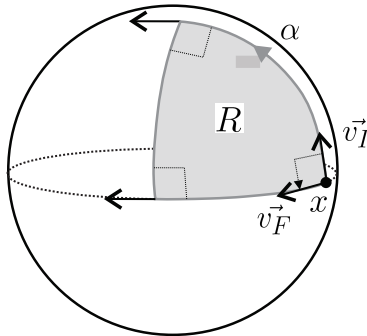


Figura 2.7: El ángulo de holonomía es $\frac{\pi}{2}$

Se tiene que $\theta_\alpha = \frac{\pi}{2}$ y como $K = 1$ para la 2-esfera unitaria,

$$\iint_R K dA = \text{Área}(R) = \frac{\pi}{2}.$$

2.2 Bosquejo de la prueba de la fórmula de Gauss-Bonnet para polígonos

Ahora definimos los elementos básicos para bosquejar las demostraciones de los teoremas que acabamos de mencionar. Sea $\mathbf{M}^2 \subset \mathbb{R}^m$, $m \geq 3$, una superficie orientable y $R \subset \mathbf{M}^2$ una región que cumple las siguientes condiciones:

1. La región R es conexa y simplemente conexa.
2. La frontera de R está parametrizada por una curva

$$\alpha : [0, 1] \longrightarrow \mathbf{M}^2,$$

donde α es cerrada y suave por pedazos, es decir, existen curvas suaves

$$\alpha_i : (s_{i-1}, s_i) \longrightarrow \mathbf{M}^2$$

parametrizadas por longitud de arco, con

$$\begin{aligned} \alpha_i(s_i) &= \alpha_{i+1}(s_i) \quad i=1, \dots, n-1 \\ \alpha_1(0) &= \alpha_n(s_n), \end{aligned}$$

donde $[0 = s_0, s_1, \dots, s_n = 1]$ es una partición regular del intervalo $[0, 1]$, y se cumple que

$$\alpha|_{[s_{i-1}, s_i]} = \alpha_i.$$

3. \overline{R} está contenido en una carta coordenada, es decir existe una parametrización $X : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbf{M}^2$ tal que $\overline{R} \subset X(U)$.

Ahora, aclararemos varios puntos de la definición anterior. En cada vértice los vectores tangentes $\alpha'_i(s_i)$ y $\alpha'_{i+1}(s_i)$ existen y el ángulo entre ellos ϵ_i (ángulo exterior en el vértice $\alpha_i(s_{i-1})$) está dado por

$$\cos \epsilon_i = I_{\alpha_i(s_i)}(\alpha'_i(s_i), \alpha'_{i+1}(s_i)) \quad i=1,2, \dots, n-1 \quad (2.3)$$

$$\cos \epsilon_0 = I_{\alpha_1(0)}(\alpha'_n(s_n), \alpha'_1(0)) \quad (2.4)$$

donde I_x es la primer forma fundamental de \mathbf{M}^2 en x .

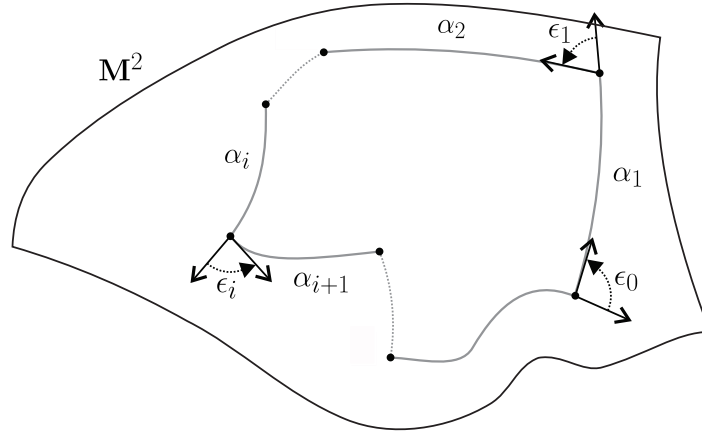


Figura 2.8: Los ángulos ϵ_i

Introducimos ahora las funciones

$$\phi_i : [s_{i-1}, s_i] \longrightarrow \mathbf{M}^2$$

a lo largo de las curvas α_i .

Las $\phi_i(s)$ miden el ángulo entre $X_u := \frac{\partial X}{\partial u}$ en $\alpha_i(s)$ y $\alpha'_i(s)$, es decir,

$$\cos \phi_i(s) = I_{\alpha_i(s)}\left(\alpha'_i(s), \frac{X_u}{\sqrt{E}}\right) \quad (2.5)$$

donde X_u es un campo vectorial de referencia en $X(U)$ para medir ángulos.

Escogemos un ángulo en sentido contrario a las manecillas del reloj para $\phi_1(0)$ y por continuidad extendemos ϕ_1 a lo largo de $[0, s_1]$. En $s = s_1$ tenemos un salto para $\phi_2(s_1)$ en la curva α_2 dado por

$$\phi_2(s_1) = \epsilon_1 + \phi_1(s_1),$$

ahora extendemos $\phi_2(s)$ a lo largo de α_2 usando la continuidad en el intervalo $[s_1, s_2]$. Continuando este proceso tenemos definidas las ϕ_j , y tenemos la relación

$$\phi_{j+1}(s_j) = \epsilon_j + \phi_j(s_j) \quad \text{para } 1 \leq j \leq n-1. \quad (2.6)$$

Se tiene el siguiente resultado que nos dice cuál es el valor de $\phi_n(s_n)$ después de recorrer el polígono a partir de $\phi_1(0)$.

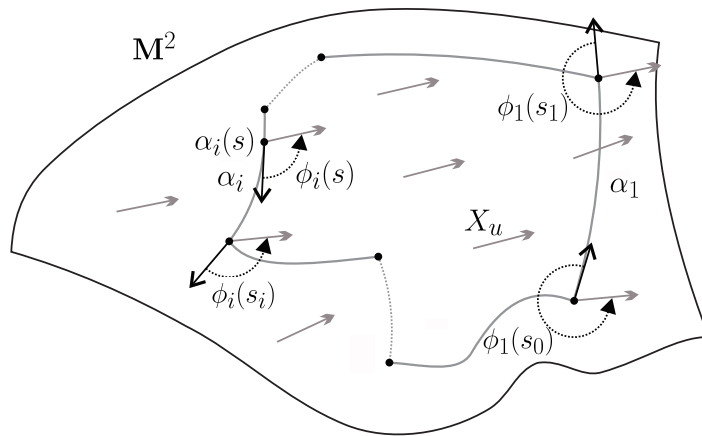


Figura 2.9: Los ángulos ϕ_i

Teorema 2.11. (Teorema de Hopf) Sea α una curva con las hipótesis anteriores, entonces

$$\phi_n(s_n) + \epsilon_n = \phi_1(0) + 2\pi.$$

De el Teorema de Hopf se tiene el siguiente:

Corolario 2.12. Con los elementos definidos se cumple la igualdad,

$$\sum_{j=1}^n \int_{\alpha_j} \phi'_j(s) ds = 2\pi - \sum_{j=1}^n \epsilon_j. \quad (2.7)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_j} \phi'_j(s) ds &= \sum_{j=1}^n [\phi_j(s_j) - \phi_j(s_{j-1})] \\ &= \phi_1(s_1) - \phi_1(0) + \sum_{j=2}^n \phi_j(s_j) - \sum_{j=2}^n \phi_j(s_{j-1}). \end{aligned}$$

Pero por la ecuación (2.6)

$$\phi_j(s_{j-1}) = \epsilon_{j-1} + \phi_{j-1}(s_{j-1}) \quad \text{para } 2 \leq j \leq n.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_j} \phi'_j(s) ds &= \phi_1(s_1) - \phi_1(0) + \sum_{j=2}^n \phi_j(s_j) - \sum_{j=2}^n \phi_{j-1}(s_{j-1}) - \sum_{j=2}^n \epsilon_{j-1} \\ &= \phi_1(s_1) - \phi_1(0) + \phi_n(s_n) - \phi_1(s_1) - \sum_{j=1}^{n-1} \epsilon_j \end{aligned}$$

$$= 2\pi - \epsilon_n - \sum_{j=1}^{n-1} \epsilon_j = 2\pi - \sum_{j=1}^n \epsilon_j \quad .$$

□

Veamos cómo se relaciona lo anterior con las curvaturas. Para simplificar los cálculos escogemos una carta coordenada ortogonal $X(u, v)$, (con $F = 0$) y entonces la curvatura Gaussiana está dada por

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) \right]. \quad (2.8)$$

En tal sistema coordenado, a lo largo de las curvas $\alpha_j(s) := X(u_j(s), v_j(s))$ la curvatura geodésica es

$$k_g(s) = \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[G_u \frac{\partial v_j}{\partial s} - E_v \frac{\partial u_j}{\partial s} \right] + \frac{\partial \phi_j}{\partial s}, \quad (2.9)$$

(veáse [11] para unas demostraciones).

Ejemplo 2.13. Como ejemplo de la última ecuación consideramos una curva plana $\alpha(s)$ en \mathbb{R}^2 . En tal caso, la ecuación (2.9) se reduce a

$$k(s) = \frac{\partial \phi}{\partial s},$$

donde la curvatura es la variación del ángulo que forman las rectas tangentes a la curva con una recta fija cualquiera (para este caso, el eje x).

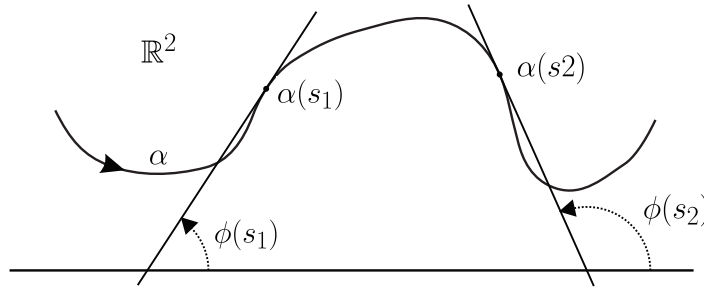
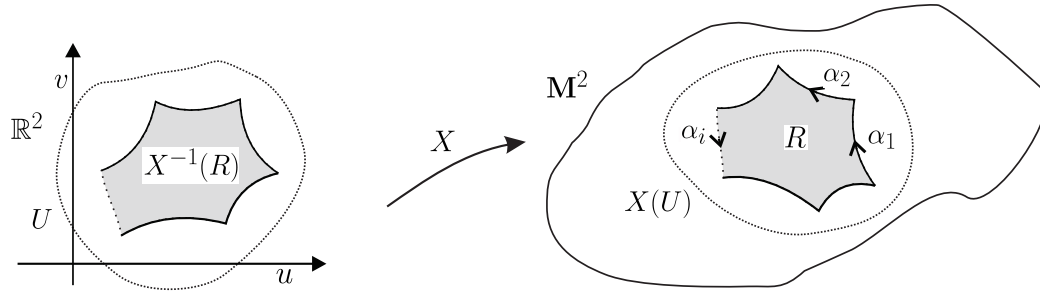


Figura 2.10: Curvatura de una curva plana

Consideramos ahora la curvatura geodésica total sobre la frontera de R , ∂R , dada por

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_j} k_g(s) ds &= \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_j} \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[G_u \frac{\partial v_j}{\partial s} - E_v \frac{\partial u_j}{\partial s} \right] ds + \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_j} \phi'_j(s) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\partial X^{-1}(R)} \left[\frac{E_v}{\sqrt{EG}} du - \frac{G_u}{\sqrt{EG}} dv \right] + \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_j} \phi'_j(s). \end{aligned} \quad (2.10)$$


 Figura 2.11: La región R

Por el Teorema de Green,

$$\int_{\partial X^{-1}(R)} \left[\frac{E_v}{\sqrt{EG}} du - \frac{G_u}{\sqrt{EG}} dv \right] = \iint_{X^{-1}(R)} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right] du dv,$$

sustituyendo en la ecuación (2.10) y usando (2.7) del corolario, se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_j} k_g(s) ds &= - \iint_{X^{-1}(R)} \frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right] \sqrt{EG} du dv \\ &\quad + 2\pi - \sum_{j=1}^n \epsilon_j \\ &= - \iint_R K dA + 2\pi - \sum_{j=1}^n \epsilon_j, \end{aligned}$$

lo que implica el siguiente resultado.

Teorema 2.14. (Gauss-Bonnet para polígonos) Sea R una región simplemente conexa y conexa en una superficie M^2 , donde R tiene como frontera una unión de n curvas α_i suaves y parametrizadas por longitud de arco y con ángulos exteriores $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$, entonces

$$\sum_{j=1}^n \int_{\alpha_j} k_g(s) ds + \iint_R K dA + \sum_{j=1}^n \epsilon_j = 2\pi. \quad (2.11)$$

Este teorema es un caso particular del siguiente, del cual ya hablamos antes dando varios ejemplos, y es válido para regiones más generales que un disco topológico,

Teorema 2.15. (Gauss-Bonnet para regiones generales) Sea R una región conexa contenida en una superficie M^2 , donde la frontera de R es la unión de n curvas cerradas α_i , suaves y parametrizadas por longitud de arco. Si $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n$ son todos los ángulos exteriores a esas curvas, entonces

$$\sum_{j=1}^n \int_{\alpha_j} k_g(s) ds + \iint_R K dA + \sum_{j=1}^n \epsilon_j = 2\pi \chi(R). \quad (2.12)$$

Para una demostración veáse [13].

Si escogemos a R como la región limitada por un triángulo ΔABC , y de lados no necesariamente geodésicos, del teorema anterior se sigue que

$$\iint_{\Delta} K dA = \angle A + \angle B + \angle C - \pi - \sum_{j=1}^3 \int_{\alpha_j} k_g(s) ds, \quad (2.13)$$

ya que

$$2\pi - (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) = 2\pi - (\pi - \angle A + \pi - \angle B + \pi - \angle C) = \angle A + \angle B + \angle C - \pi.$$

Por lo que se tiene el siguiente teorema.

Teorema 2.16. (de Gauss para triángulos) Sea ΔABC un triángulo geodésico en \mathbf{M}^2 con vértices A, B y C , entonces

$$\iint_{\Delta} K dA = \angle A + \angle B + \angle C - \pi.$$

2.3 Teorema de Gauss-Bonnet global para superficies

Teorema 2.17. (de Gauss-Bonnet global para superficies) Sea \mathbf{M}^2 una superficie orientable, compacta, conexa y sin frontera, entonces

$$\iint_{\mathbf{M}^2} K dA = 2\pi \chi(\mathbf{M}^2).$$

Demostración. Triangulamos a \mathbf{M}^2 con triángulos orientados que llamaremos Δ_i , y donde $\partial\Delta_i = \alpha_i$, con α_i una curva suave por pedazos. Por $\theta_{i_1}, \theta_{i_2}$ y θ_{i_3} denotamos a los ángulos internos del triángulo Δ_i , ver Figura 2.12. Sean

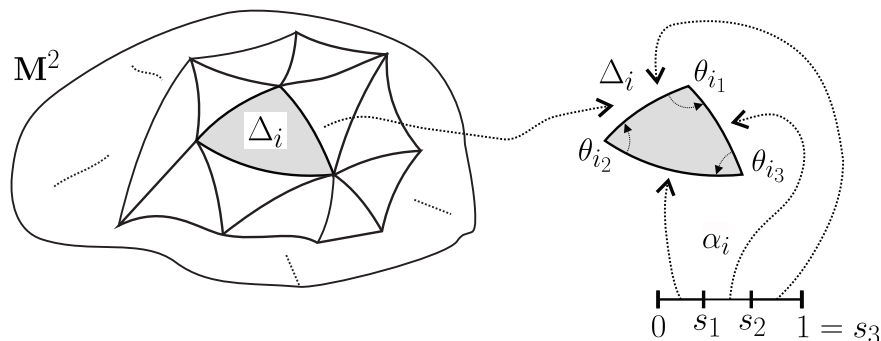


Figura 2.12: Triangulación de \mathbf{M}^2

- v = número de vértices de la triangulación
- a = número de aristas de la triangulación
- c = número de caras de la triangulación

y observamos que como cada triángulo contribuye con 3 lados y cada lado está en 2 triángulos, se tiene que

$$3c = 2a. \quad (2.14)$$

Por el Teorema de Gauss-Bonnet para triángulos (no necesariamente geodésicos),

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{M}^2} K dA &= \sum_{i=1}^c \iint_{\Delta_i} K dA \\ &\stackrel{\text{por (2.13)}}{=} \sum_{i=1}^c [\theta_{i1} + \theta_{i2} + \theta_{i3} - \pi] + \sum_{i=1}^c \int_{\partial\Delta_i} k_g(s) ds, \end{aligned}$$

pero como en nuestra triangulación la curvatura geodésica se integra en cada arista dos veces con orientaciones opuestas, se tiene que,

$$\sum_{i=1}^c \int_{\partial\Delta_i} k_g(s) ds = 0,$$

por lo que

$$\iint_{\mathbf{M}^2} K dA = \sum_{i=1}^c [\theta_{i1} + \theta_{i2} + \theta_{i3}] - \pi c.$$

Ahora, en cada vértice, la suma de los ángulos internos de los triángulos que tienen ese vértice es 2π , luego

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{M}^2} K dA &= 2\pi v - \pi c \\ &= 2\pi v - 2\pi a + 2\pi c + \pi(2a - 3c) \\ &\stackrel{\text{por (2.14)}}{=} 2\pi(v - a + c) \\ &= 2\pi \chi(\mathbf{M}^2). \end{aligned}$$

□

Capítulo 3

El Teorema de Gauss-Bonnet en dimensión 2

Sea \mathbf{M}^2 una superficie Riemanniana, compacta, orientable, y \mathbf{SM}^2 el haz tangente unitario. La fibra de este haz es $\mathbf{SO}(2) \cong \mathbf{S}^1$, el grupo de estructura también es $\mathbf{SO}(2)$, cuya álgebra de Lie son las matrices antisimétricas de 2×2 , es decir $\mathfrak{so}(2)$. Recordamos que Π es la proyección

$$\Pi : \mathbf{SM}^2 \longrightarrow \mathbf{M}^2.$$

Como mencionamos en la introducción de la tesis, la relación entre curvatura y holonomía se expresa en formas diferenciables como

$$d\omega_2^1 = \Omega_2^1,$$

donde ω_2^1 es la 1-forma de conexión en alguna vecindad $U \subset \mathbf{M}^2$ y Ω_2^1 es la 2-forma global de curvatura en \mathbf{M}^2 . Sin embargo, la idea de Chern es mirar la geometría en \mathbf{SM}^2 en lugar de \mathbf{M}^2 , veremos (en la siguiente sección) que existe una 1-forma diferenciable global $\bar{\omega}_2^1$ en \mathbf{SM}^2 tal que

$$d\bar{\omega}_2^1 = \Pi^* \Omega_2^1. \tag{3.1}$$

Chern observa que de (3.1) se deriva la fórmula de Gauss-Bonnet (sección 2), y más aún, que esta idea se puede extender al caso de dimensión par (capítulo 4). Chern se refiere a la ecuación (3.1), afirmando

“... que contiene toda la información local de la geometría Riemanniana en dos dimensiones y nos da consecuencias globales. Una breve meditación convence a uno que (3.1) es la base formal de la fórmula de Gauss-Bonnet. Y que la prueba para una fórmula en el caso $2k$ dimensional puede ser basada en la misma idea ...”

3.1 Fórmula principal para $n = 2$

Sean $p, q \in \mathbf{M}^2$, $\mathbf{e}_V = \{\mathbf{e}_{1V}, \mathbf{e}_{2V}\}$ un marco en V y $\mathbf{e}_U = \{\mathbf{e}_{1U}, \mathbf{e}_{2U}\}$ otro marco en U , con $p \in U$ y $q \in V$, además pedimos que $U \cap V \neq \emptyset$, por (1.12),

$$\mathbf{e}_V = \mathbf{e}_U g_{UV} \tag{3.2}$$

para algún $g_{UV} \in \mathbf{SO}(2)$.

Recordamos también que por (1.13),

$$\omega_V = g_{VU} \omega_U g_{UV} + g_{VU} \mathbf{d}g_{UV}, \quad (3.3)$$

con

$$g_{VU} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = e^{-J\theta},$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(2).$$

Se cumple que,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_{1U}^2 \\ \omega_{2U}^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{1U}^2 \\ \omega_{2U}^1 & 0 \end{pmatrix}$$

por tanto

$$g_{VU} \omega_U g_{UV} = \omega_U.$$

Además se tiene que

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \theta \, \mathbf{d}\theta & \cos \theta \, \mathbf{d}\theta \\ -\cos \theta \, \mathbf{d}\theta & -\operatorname{sen} \theta \, \mathbf{d}\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{d}\theta \\ -\mathbf{d}\theta & 0 \end{pmatrix}$$

por tanto

$$g_{VU} \mathbf{d}g_{UV} = J \otimes \mathbf{d}\theta,$$

que es una 1-forma en $U \cap V$ con valores en $\mathfrak{so}(2)$.

De esta manera, la ecuación (3.3) se ve simplemente como

$$\omega_V = \omega_U + J \otimes \mathbf{d}\theta, \quad (3.4)$$

donde

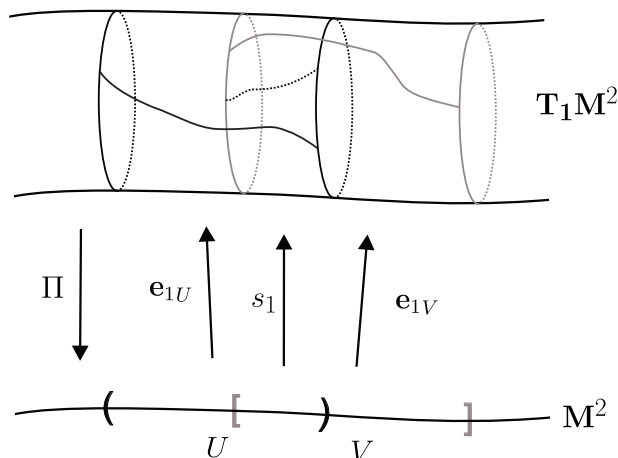
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_V &= \mathbf{e}_U g_{UV} \\ g_{UV} &= e^{J\theta}. \end{aligned}$$

Es fácil ver que para las formas de curvatura se tiene que $\Omega_V = g_{UV}^{-1} \Omega_U g_{UV} = \Omega_U$, y entonces $\Omega_{\frac{1}{2}}$ es una 2-forma global en \mathbf{M}^2 .

Escogemos un marco arbitrario $s = \{s_1, s_2\}$ en $U \cap V$, y que cumple

$$s = \mathbf{e}_U g_U = \mathbf{e}_V g_V, \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} g_U &= e^{J\alpha} \\ g_V &= e^{J\beta}. \end{aligned}$$


 Figura 3.1: Las secciones \mathbf{e}_{1U} , \mathbf{e}_{1V} y s_1

Ahora se define la 1-forma $\bar{\omega}_U$ en $\Pi^{-1}(U)$ con valores en $\mathfrak{so}(2)$,

$$\bar{\omega}_U := \Pi^*(\omega_U + J \otimes d\alpha) \quad (3.6)$$

y análogamente,

$$\bar{\omega}_V := \Pi^*(\omega_V + J \otimes d\beta), \quad (3.7)$$

donde el marco s nos servirá para “pegar” las 1-formas $\bar{\omega}_U$ y $\bar{\omega}_V$.

Como se tiene la relación

$$g_{UV} = g_U g_V^{-1},$$

es decir,

$$e^{J\theta} = e^{J\alpha} (e^{J\beta})^{-1},$$

se tiene que (ver Figura 3.2)

$$\theta = \alpha - \beta + 2\pi k,$$

con $k \in \mathbb{Z}$ y entonces

$$d\theta = d\alpha - d\beta. \quad (3.8)$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_V &= \Pi^*\omega_V + \Pi^*(J \otimes d\beta) && \text{por (3.7)} \\ &= \Pi^*(\omega_U + J \otimes d\theta) + \Pi^*(J \otimes d\beta) && \text{por (3.4)} \\ &= \Pi^*\omega_U + \Pi^*J \otimes (d\alpha - d\beta) + \Pi^*(J \otimes d\beta) && \text{por (3.8)} \\ &= \Pi^*\omega_U + \Pi^*(J \otimes d\alpha) \\ &= \Pi^*(\omega_U + J \otimes d\alpha) \\ &= \bar{\omega}_U, \end{aligned}$$

Por lo tanto, las 1-formas $\{\bar{\omega}_U\}$ definen una 1-forma global $\bar{\omega}$ en $\mathbf{S}\mathbf{M}^2$ con valores en $\mathfrak{so}(2)$. También $\Pi^*\Omega$ es una 2-forma global en $\mathbf{S}\mathbf{M}^2$ con valores en $\mathfrak{so}(2)$.

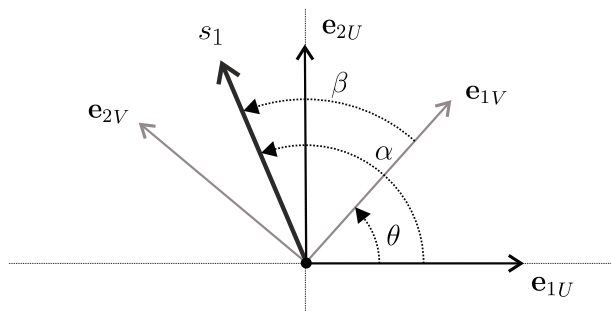


Figura 3.2: Relación entre ángulos

Se cumple que

$$\begin{aligned}
 d\bar{\omega}_V &= d\Pi^*(\omega_V + J \otimes d\beta) \\
 &= \Pi^* d(\omega_V + J \otimes d\beta) \\
 &= \Pi^* d\omega_V + \Pi^* J \otimes d^2\beta \\
 &= \Pi^* d\omega_V \\
 &= \Pi^* \Omega_V
 \end{aligned}$$

y entonces $d\bar{\omega} = \Pi^* \Omega$, ahora, si denotamos por

$$\bar{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\omega}_1^2 \\ \bar{\omega}_2^1 & 0 \end{pmatrix}$$

hemos probado la ecuación (3.1)

$$d\bar{\omega}_2^1 = \Pi^* \Omega_2^1.$$

3.2 Demostración del teorema en dimensión 2

Sea $r > 0$ y consideremos las siguientes vecindades del punto $p \in \mathbf{M}^2$,

$$\begin{aligned}
 U &= \mathbf{M}^2 - B_{\frac{r}{2}}(p) \\
 V &= B_{\frac{3r}{2}}(p)
 \end{aligned}$$

en \mathbf{M}^2 mostradas en la Figura 3.3.

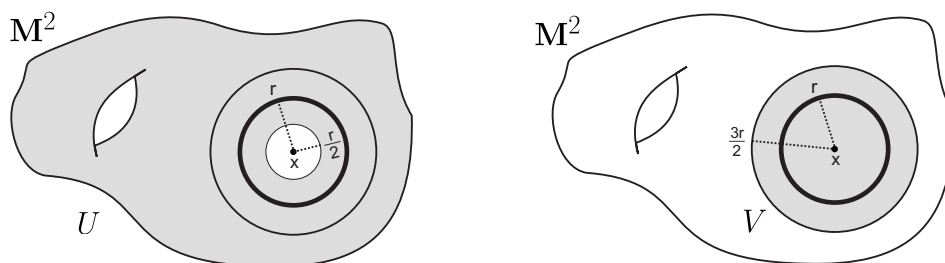


Figura 3.3: Las vecindades U y V

Sean \mathbf{e}_U y \mathbf{e}_V dos marcos en U y V respectivamente, donde

$$\theta = \angle(\mathbf{e}_{1U}, \mathbf{e}_{1V}),$$

es el ángulo entre los vectores \mathbf{e}_{1U} y \mathbf{e}_{1V} , y usando (3.4) se tiene que

$$\omega_{2U}^1 = \omega_{2V}^1 - d\theta \quad \text{en } U \cap V. \quad (3.9)$$

Escogemos X un campo vectorial unitario en \mathbf{M}^2 con posiblemente a lo más un único punto singular en p , y hacemos $s = \{X, X^\perp\}$ un marco en $U \cap V$, si

$$\begin{aligned} \alpha &= \angle(\mathbf{e}_{1U}, X) \\ \beta &= \angle(\mathbf{e}_{1V}, X) \end{aligned}$$

se tiene que

$$\bar{\omega}_{2U}^1 = \Pi^* \omega_{2U}^1 + \Pi^* d\alpha. \quad (3.10)$$

Un homeomorfismo manda fronteras en fronteras, por lo que se tiene la relación

$$\partial X(\mathbf{M}^2 - B_r(p)) = X(\partial B_r(p)), \quad (3.11)$$

donde $X(\mathbf{M}^2 - B_r(p))$ es la superficie con frontera en $\mathbf{S M}^2$ dada al levantar $\mathbf{M}^2 - B_r(p)$ mediante el campo X . Entonces,

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{M}^2 - B_r(p)} \Omega_2^1 &= \iint_{X(\mathbf{M}^2 - B_r(p))} \Pi^* \Omega_2^1 && \text{por definición de pullback} \\ &= \iint_{X(\mathbf{M}^2 - B_r(p))} d\bar{\omega}_{2U}^1 && \text{por (3.1)} \\ &= \int_{\partial X(\mathbf{M}^2 - B_r(p))} \bar{\omega}_{2U}^1 && \text{por el Teorema de Stokes} \\ &= \int_{X(\partial B_r(p))} \bar{\omega}_{2U}^1 && \text{por (3.11)} \\ &= \int_{X(\partial B_r(p))} \Pi^* \omega_{2U}^1 - \Pi^* d\alpha && \text{por (3.10)} \\ &= \int_{\partial B_r(p)} \omega_{2U}^1 - \int_{\partial B_r(p)} d\alpha. && \text{ya que } X^* \circ \Pi^* = \text{Id} \end{aligned}$$

Pero la integral

$$\int_{\partial B_r(p)} d\alpha \quad (3.12)$$

mide el número de vueltas que da el campo X alrededor de p respecto a un marco de referencia \mathbf{e}_U . Luego,

$$\int_{\partial B_r(p)} d\alpha = -2\pi \operatorname{Ind}(X, p),$$

donde el signo menos es porque cambia la orientación en la curva $\partial B_r(p)$. Por el Teorema de Poincaré-Hopf,

$$\operatorname{Ind}(X, p) = \chi(\mathbf{M}^2),$$

de donde hemos justificado que

$$\iint_{\mathbf{M}^2 - B_r(p)} \Omega_2^1 = 2\pi \chi(\mathbf{M}^2) + \int_{\partial B_r(p)} \omega_{2U}^1. \quad (3.13)$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \iint_{\overline{B_r(p)}} \Omega_{2V}^1 &= \iint_{\overline{B_r(p)}} d\omega_{2V}^1 \\ &= \int_{\partial B_r(p)} \omega_{2V}^1 && \text{por el Teorema de Stokes} \\ &= - \int_{\partial B_r(p)} \omega_{2U}^1 - \int_{\partial B_r(p)} d\theta && \text{por (3.9),} \end{aligned}$$

y como $\int_{\partial B_r(p)} d\theta = 0$, ya que el campo \mathbf{e}_{1V} no da vueltas con respecto al campo \mathbf{e}_{1U} , se concluye

$$\iint_{\overline{B_r(p)}} \Omega_2^1 = - \int_{\partial B_r(p)} \omega_{2U}^1. \quad (3.14)$$

De sumar las identidades en (3.13) y (3.14) se tiene finalmente que

$$\iint_{\mathbf{M}^2} \Omega_2^1 = 2\pi \chi(\mathbf{M}^2).$$

Para terminar, observemos que considerando la región $\mathbf{M}^2 - B_r(p)$ y usando en ella el Teorema de Gauss-Bonnet para regiones generales (página 43), se tiene

$$\iint_{\mathbf{M}^2 - B_r(p)} \Omega_2^1 = 2\pi \chi(\mathbf{M}^2 - B_r(p)) - \int_{\partial B_r(p)} k_g(s) ds.$$

Pero de la relación $\chi(\mathbf{M}^2 - B_r(p)) = \chi(\mathbf{M}^2) - 1$ y combinando con (3.13) se concluye

$$\int_{\partial B_r(p)} \omega_{2U}^1 = - \left[2\pi + \int_{\partial B_r(p)} k_g(s) ds \right].$$

En resumen, Ω_2^1 determina la curvatura Gaussiana y ω_{2U}^1 determina básicamente la curvatura geodésica.

3.3 Observaciones y aclaraciones

Hasta ahora hemos usado grupos de matrices, con el propósito de tener más claridad y naturalidad. En esta sección veremos cómo escribir más formalmente las cosas para el haz tangente unitario.

Sea U una vecindad de $p \in \mathbf{M}^2$ con una trivialización Φ_U , es decir,

$$\Phi_U^{-1} : \Pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbf{SO}(2),$$

es un difeomorfismo, también denotamos por P_F a la proyección del producto a la fibra, esto es,

$$P_F : U \times \mathbf{SO}(2) \longrightarrow \mathbf{SO}(2),$$

por f a la función

$$f := P_F \circ \Phi_U^{-1} : \Pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbf{SO}(2),$$

y por

$$g_U : U \subset \mathbf{M}^2 \longrightarrow \mathbf{SO}(2)$$

a la función dada por

$$g_U(q) = e^{J\alpha(q)}, \quad q \in U. \quad (3.15)$$

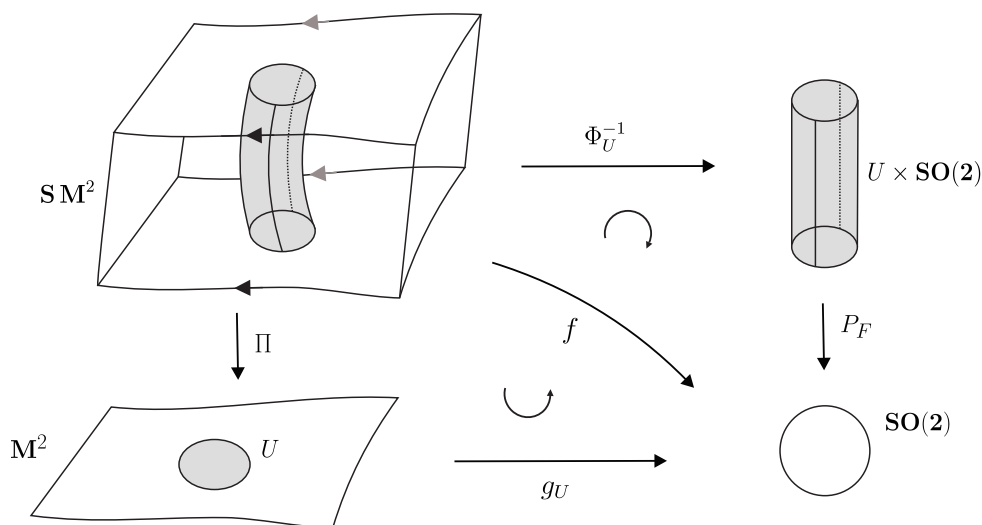


Figura 3.4: Las funciones Φ_U^{-1} , P_F , f y g_U

Veamos cuál es la relación entre las funciones anteriores. Sea $Q \in \Pi^{-1}(U)$ con $\Pi(Q) = q$, entonces

$$\Phi_U^{-1}(Q) = (q, g_U(q)).$$

Por tanto,

$$f(Q) = P_F \circ \Phi_U^{-1}(Q) = g_U(q) = g_U \circ \Pi(Q),$$

y se concluye que

$$f = g_U \circ \Pi. \quad (3.16)$$

De (3.15) se obtiene la identidad

$$g_U^{-1} dg_U = J \otimes d\alpha, \quad (3.17)$$

que es una 1-forma en $\mathbf{SO}(2)$ con valores en su álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2)$. Se sigue que $\bar{\omega}_U$ se simplifica como sigue

$$\bar{\omega}_U = \Pi^* \omega_U + \Pi^* g_U^* (g_U^{-1} dg_U),$$

pero por (3.16) y (3.17),

$$\Pi^* g_U^* (g_U^{-1} dg_U) = f^* (J \otimes d\alpha).$$

De esta manera,

$$\bar{\omega}_U = \Pi^* \omega_U + J \otimes f^* d\alpha,$$

y para la entrada 2,1

$$\bar{\omega}_{2U}^1 = \Pi^* \omega_{2U}^1 + f^* d\alpha. \quad (3.18)$$

Para terminar, veamos las propiedades de la ecuación anterior. Recordamos que $F_p := \Pi^{-1}(p)$ es la fibra en p , y se cumple que

$$f|_{F_p} : F_p \longrightarrow \mathbf{SO}(2)$$

es un difeomorfismo para todo $p \in U$, entonces

$$\int_{F_p} f^* d\alpha = \int_{\mathbf{SO}(2)} d\alpha = 2\pi, \quad (3.19)$$

y además

$$\int_{F_p} \Pi^* \omega_{2U}^1 = 0, \quad (3.20)$$

ya que $\Pi^* \omega_{2U}^1|_{F_p} = 0$. Combinando la ecuación (3.18), (3.19) y (3.20)

$$\int_{F_p} \bar{\omega}_{2U}^1 = 2\pi. \quad (3.21)$$

Veremos que las propiedades (3.18), (3.19) y (3.21) se generalizan al caso de dimensión par.

Capítulo 4

El Teorema de Gauss-Bonnet en dimensión par

En la siguiente sección, que es la parte medular y más técnica de la tesis, probaremos la generalización de la fórmula (3.1) en dimensión $n = 2k$, dada por Chern en [4].

4.1 Fórmula principal en dimensión par

Consideremos U una vecindad de $p \in \mathbf{M}^n$ y \mathbf{e}_U un marco en U . Tenemos construido lo siguiente:

$$\begin{aligned} v_{i_U} & \text{ son funciones coordenadas locales en } \Pi^{-1}(U) \subset \mathbf{SM}^n \\ \Pi^* \omega_{j_U}^i, dv_{i_U}, \theta_{i_U} & \text{ son 1-formas diferenciables en } \Pi^{-1}(U) \subset \mathbf{SM}^n \\ \Pi^* \Omega_{j_U}^i & \text{ son 2-formas diferenciables en } \Pi^{-1}(U) \subset \mathbf{SM}^n. \end{aligned}$$

Usando éstas definimos ahora las $(n - 1)$ -formas locales Φ_{m_U} y las n -formas locales Ψ_{m_U} como sigue:

$$\begin{aligned} \Phi_{m_U} & := \epsilon^I v_{i_1 U} \theta_{i_2 U} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_{2k-2m} U} \wedge \Pi^* \Omega_{i_{2k-2m+2} U}^{i_{2k-2m+1}} \wedge \cdots \wedge \Pi^* \Omega_{i_{2k} U}^{i_{2k-1}} \\ \Psi_{m_U} & := \epsilon^I \Pi^* \Omega_{i_2 U}^{i_1} \wedge \theta_{i_3 U} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_{2k-2m} U} \wedge \Pi^* \Omega_{i_{2k-2m+2} U}^{i_{2k-2m+1}} \wedge \cdots \wedge \Pi^* \Omega_{i_{2k} U}^{i_{2k-1}} \end{aligned}$$

con $m = 0, 1, \dots, k - 1$.

Más adelante se probará que las $\{\Phi_{m_U}\}$ forman una $(n - 1)$ -forma diferenciable global en \mathbf{SM}^n la cual denotamos Φ_m , y las $\{\Psi_{m_U}\}$ forman una n -forma diferenciable global en \mathbf{SM}^n denotada Ψ_m .

Cuando en las formas omitimos la vecindad nos referimos a U . También, por cuestiones tipográficas y para no cargar la notación nos referimos a las Φ_m y Ψ_m simplemente como

$$\begin{aligned} \Phi_m & := \epsilon^I v_{i_1} \theta_{i_2} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_{2k-2m}} \wedge \Omega_{i_{2k-2m+2}}^{i_{2k-2m+1}} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_{2k}}^{i_{2k-1}} \\ \Psi_m & := \epsilon^I \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \theta_{i_3} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_{2k-2m}} \wedge \Omega_{i_{2k-2m+2}}^{i_{2k-2m+1}} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_{2k}}^{i_{2k-1}}. \end{aligned}$$

con $m = 0, 1, \dots, k - 1$.

Observamos que cuando $m = k - 1$, se tiene

$$\Psi_{k-1} = \epsilon_I \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \Omega_{i_4}^{i_3} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{2k}}^{i_{2k-1}} = c \Pi^* \bar{\Omega}, \quad (4.1)$$

donde c es una constante.

Chern muestra la siguiente fórmula recurrente para $d\Phi_m$,

$$d\Phi_m = \Psi_{m-1} + \frac{2k - 2m - 1}{2(m+1)} \Psi_m,$$

por lo que de ella es sencillo encontrar una $(n - 1)$ -forma diferenciable global Γ en \mathbf{SM}^n que cumple

$$d\Gamma = \Psi_{k-1} = c \Pi^* \bar{\Omega}.$$

Ahora probaremos de aquí al final de esta sección que Φ_m y Ψ_m son formas globales, que es válida la fórmula recurrente y la exactitud de Ψ_{k-1} .

Lema 4.1. *Si \mathbf{e}_U y \mathbf{e}_V son dos marcos en U y V respectivamente, entonces en $U \cap V \neq \emptyset$ se tiene que*

$$\Phi_{m_U} = \Phi_{m_V}$$

$$\Psi_{m_U} = \Psi_{m_V}$$

para $m = 0, 1, \dots, k - 1$, entonces las $\{\Phi_{m_U}\}$ forman una $(n - 1)$ -forma diferenciable global en \mathbf{SM}^n denotada Φ_m , y las $\{\Psi_{m_U}\}$ forman una n -forma diferenciable global en \mathbf{SM}^n denotada Ψ_m .

Demostración. Primero recordamos algunos resultados. Por la ecuación (1.16) y si como antes, $A := \mathbf{g}_{VU} = (A_j^i) \in \mathbf{SO}(n)$ se tiene que

$$\Omega_{i_2 V}^{i_1} = A_{i_2}^{j_2} \Omega_{j_2}^{j_1} (A^{-1})_{j_1}^{i_1}.$$

Pero $A^{-1} = A^t$, se sigue que

$$\Omega_{i_2 V}^{i_1} = A_{i_1}^{j_1} A_{i_2}^{j_2} \Omega_{j_2}^{j_1}, \quad (4.2)$$

y por la ecuación (1.44),

$$\theta_{V_{i_1}} = A_{i_1}^{j_1} \theta_{j_1}, \quad (4.3)$$

de la ecuación (1.43)

$$v_{V_{i_1}} = A_{i_1}^{j_1} v_{j_1}, \quad (4.4)$$

observamos que en las ecuaciones anteriores la matriz que interviene es siempre A .

Por otro lado, de la definición de determinante de una matriz,

$$\begin{aligned} 1 &= \det A := \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) A_1^{\sigma(1)} A_2^{\sigma(2)} \dots A_{2k}^{\sigma(2k)} \\ &= \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} A_{i_1}^1 A_{i_2}^2 \dots A_{i_{2k}}^{2k}, \end{aligned}$$

y consecuentemente

$$\epsilon^{j_1 j_2 \dots j_{2k}} = \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_{2k}} A_{i_1}^{j_1} A_{i_2}^{j_2} \dots A_{i_{2k}}^{j_{2k}}, \quad (4.5)$$

ya que $\text{sgn}(j_1 j_2 \dots j_{2k}) = \epsilon^{j_1 j_2 \dots j_{2k}}$.

Sustituyendo las relaciones (4.2), (4.3) y (4.4) en la expresión de Φ_{mV} se tiene

$$\begin{aligned} \Phi_{mV} &= \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} v_{i_1 V} \theta_{i_2 V} \wedge \dots \wedge \theta_{i_{2k-2m} V} \\ &\quad \wedge \Omega_{j_{2k-2m+2} V}^{j_{2k-2m+1}} \wedge \dots \wedge \Omega_{j_{2k} V}^{j_{2k-1}} \\ &= \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} (A_{i_1}^{j_1} v_{j_1}) (A_{i_2}^{j_2} \theta_{j_2}) \wedge \dots \wedge (A_{i_{2k-2m}}^{j_{2k-2m}} \theta_{j_{2k-2m}}) \\ &\quad \wedge (A_{i_{2k-2m+1}}^{j_{2k-2m+1}} A_{i_{2k-2m+2}}^{j_{2k-2m+2}} \Omega_{j_{2k-2m+2}}^{j_{2k-2m+1}}) \wedge \dots \wedge (A_{i_{2k-1}}^{j_{2k-1}} A_{i_{2k}}^{j_{2k}} \Omega_{j_{2k}}^{j_{2k-1}}) \\ &= [\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} A_{i_1}^{j_1} A_{i_2}^{j_2} \dots A_{i_{2k-1}}^{j_{2k-1}} A_{i_{2k}}^{j_{2k}}] \\ &\quad v_{j_1} \theta_{j_2} \wedge \dots \wedge \theta_{j_{2k-2m}} \wedge \Omega_{j_{2k-2m+2}}^{j_{2k-2m+1}} \wedge \dots \wedge \Omega_{j_{2k}}^{j_{2k-1}} \\ \text{por (4.5)} &= \epsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} v_{j_1} \theta_{j_2} \wedge \dots \wedge \theta_{j_{2k-2m}} \wedge \Omega_{j_{2k-2m+2}}^{j_{2k-2m+1}} \wedge \dots \wedge \Omega_{j_{2k}}^{j_{2k-1}} \\ &= \Phi_{mU}. \end{aligned}$$

Análogamente,

$$\begin{aligned} \Psi_{mV} &= \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} \Omega_{i_2 V}^{i_1} \wedge \theta_{i_3 V} \wedge \dots \wedge \theta_{i_{2k-2m} V} \\ &\quad \wedge \Omega_{i_{2k-2m+2} V}^{i_{2k-2m+1}} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{2k} V}^{i_{2k-1}} \\ &= \epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} (A_{i_1}^{j_1} A_{i_2}^{j_2} \Omega_{j_2}^{j_1}) \wedge (A_{i_3}^{j_3} \theta_{j_3}) \wedge \dots \wedge (A_{i_{2k-2m}}^{j_{2k-2m}} \theta_{j_{2k-2m}}) \\ &\quad \wedge (A_{i_{2k-2m+1}}^{j_{2k-2m+1}} A_{i_{2k-2m+2}}^{j_{2k-2m+2}} \Omega_{j_{2k-2m+2}}^{j_{2k-2m+1}}) \wedge \dots \wedge (A_{i_{2k-1}}^{j_{2k-1}} A_{i_{2k}}^{j_{2k}} \Omega_{j_{2k}}^{j_{2k-1}}) \\ &= [\epsilon^{i_1 i_2 \dots i_n} A_{i_1}^{j_1} A_{i_2}^{j_2} A_{i_3}^{j_3} \dots A_{i_{2k}}^{j_{2k}}] \\ &\quad \Omega_{j_2}^{j_1} \wedge \theta_{j_3} \wedge \dots \wedge \theta_{j_{2k-2m}} \wedge \Omega_{j_{2k-2m+2}}^{j_{2k-2m+1}} \wedge \dots \wedge \Omega_{j_{2k}}^{j_{2k-1}} \\ \text{por (4.5)} &= \epsilon^{j_1 j_2 \dots j_n} \Omega_{j_2}^{j_1} \wedge \theta_{j_3} \wedge \dots \wedge \theta_{j_{2k-2m}} \wedge \Omega_{j_{2k-2m+2}}^{j_{2k-2m+1}} \wedge \dots \wedge \Omega_{j_{2k}}^{j_{2k-1}} \\ &= \Psi_{mU}. \end{aligned}$$

□

Lema 4.2. *Se cumple la relación de recurrencia,*

$$d\Phi_m = \Psi_{m-1} + \frac{2k-2m-1}{2(m+1)} \Psi_m, \quad (4.6)$$

donde $\Psi_{-1} := 0$, $m = 0, 1, \dots, k-1$.

Demostración. Derivando Φ , reagrupando las formas semejantes que resultan, y redefiniendo índices tenemos que

$$\begin{aligned} d\Phi_m &= \epsilon^I dv_{i_1} \theta_{i_2} \wedge \dots \wedge \theta_{i_{2k-2m}} \wedge \Omega_{i_{2k-2m+2}}^{i_{2k-2m+1}} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{2k}}^{i_{2k-1}} \\ &\quad + (2k-2m+1) \epsilon^I v_{i_1} d\theta_{i_2} \wedge \theta_{i_3} \wedge \dots \wedge \theta_{i_{2k-2m}} \wedge \Omega_{i_{2k-2m+2}}^{i_{2k-2m+1}} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{2k}}^{i_{2k-1}} \\ &\quad - m \epsilon^I v_{i_1} \theta_{i_2} \wedge \dots \wedge \theta_{i_{2k-2m}} \wedge d\Omega_{i_{2k-2m+2}}^{i_{2k-2m+1}} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{2k}}^{i_{2k-1}}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Recordemos que de las relaciones (1.38), (1.42) y (1.11),

$$\begin{aligned} dv_i &= \theta_i - v_t \omega_i^t \\ d\theta_i &= \Omega_i^t v_t - \omega_i^k \wedge \theta_k \\ d\Omega_i^j &= \omega_i^t \wedge \Omega_t^j + \Omega_i^t \wedge \omega_t^j. \end{aligned}$$

Para simplificar, escogemos coordenadas normales en una vecindad de un punto $p \in \mathbf{M}^n$, con esto logramos que

$$\omega_i^j(p) = 0 \quad \forall i, j,$$

por lo que las ecuaciones anteriores en el punto p se simplifican a:

$$dv_i = \theta_i \tag{4.8}$$

$$d\theta_i = v_t \Omega_i^t \tag{4.9}$$

$$d\Omega_i^j = 0. \tag{4.10}$$

Entonces la derivada de Φ , ecuación (4.7) también se simplifica y

$$\begin{aligned} d\Phi_k &= \epsilon^I \theta_{i_1} \wedge \theta_{i_2} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_{2k-2m}} \wedge \Omega_{i_{2k-2m+2}}^{i_{2k-2m+1}} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_{2k}}^{i_{2k-1}} \\ &+ (2k - 2m + 1) \epsilon^I v_{i_1} v_t \Omega_{i_2}^t \wedge \theta_{i_3} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_{2k-2m}} \wedge \Omega_{i_{2k-2m+2}}^{i_{2k-2m+1}} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_{2k}}^{i_{2k-1}} \end{aligned} \tag{4.11}$$

Para analizar el primer sumando de la ecuación anterior observamos que por definición de Ψ_{m-1} se cumple

$$\begin{aligned} \Psi_{m-1} &= \epsilon^I \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \theta_{i_3} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_{2k-2m+2}} \wedge \Omega_{i_{2k-2m+4}}^{i_{2k-2m+3}} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_{2k}}^{i_{2k-1}} \\ &= \epsilon^I \theta_{i_3} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_{2k-2m+2}} \wedge \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \Omega_{i_{2k-2m+4}}^{i_{2k-2m+3}} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_{2k}}^{i_{2k-1}}, \end{aligned}$$

y renombrando índices se tiene que el primer término en (4.11) es Ψ_{m-1} .

Posteriormente, para analizar el segundo sumando en (4.11), se define un nuevo grupo de n -formas diferenciables que también son globales en \mathbf{SM}^n . La prueba es análoga a la realizada en el lema 4.6, dichas formas son:

$$\begin{aligned} P_m &:= \epsilon^I v_{i_1}^2 \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \theta_{i_3} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_{2k-2m}} \wedge \Omega_{i_{2k-2m+2}}^{i_{2k-2m+1}} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_{2k}}^{i_{2k-1}} \\ \Sigma_m &:= \epsilon^I v_{i_1} v_{i_3} \Omega_{i_2}^{i_3} \wedge \theta_{i_3} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_{2k-2m}} \wedge \Omega_{i_{2k-2m+2}}^{i_{2k-2m+1}} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_{2k}}^{i_{2k-1}} \\ T_m &:= \epsilon^I v_{i_3}^2 \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \theta_{i_3} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_{2k-2m}} \wedge \Omega_{i_{2k-2m+2}}^{i_{2k-2m+1}} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_{2k}}^{i_{2k-1}} \end{aligned}$$

para $m = 0, 1, \dots, k - 1$.

Existen algunas relaciones entre las formas diferenciables anteriores con Φ_m , de las que ahora nos ocuparemos. Como las v_i son las coordenadas de un campo unitario (local), entonces

$$v_{i_1}^2 + v_{i_2}^2 + \cdots + v_{i_{2k}}^2 = 1,$$

y despejando $v_{i_1}^2$ y sustituyendo en P_m , se obtiene

$$P_m = \epsilon^I [1 - v_{i_2}^2 - v_{i_3}^2 - \cdots - v_{i_{2k}}^2] \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \theta_{i_3} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_{2k-2m}} \wedge \Omega_{i_{2k-2m+2}}^{i_{2k-2m+1}} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_{2k}}^{i_{2k-1}},$$

pero en esta suma el primer término es Φ_m y los demás son (reordenando índices) ya sea P_m o T_m , y se tiene entonces que

$$P_m = \Phi_m - P_m - 2(k - m - 1) T_m - 2m P_m,$$

y consecuentemente,

$$\Phi_m = 2(m + 1) P_m + 2(k - m - 1) T_m. \tag{4.12}$$

Por otra parte, de la relación (4.41) podemos despejar $v_{i_3} \theta_{i_3}$ y sustituir en Σ_m , obteniendo

$$\begin{aligned} \Sigma_m &= \epsilon^I v_{i_1} \Omega_{i_2}^{i_3} \wedge [-v_{i_1} \theta_{i_1} - v_{i_2} \theta_{i_2} - v_{i_4} \theta_{i_4} - \dots - v_{i_{2k}} \theta_{i_{2k}}] \wedge \theta_{i_4} \wedge \dots \\ &\quad \wedge \theta_{i_{2k-2m}} \wedge \Omega_{i_{2k-2m+2}}^{i_{2k-2m+1}} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{2k}}^{i_{2k-1}}. \end{aligned}$$

Nuevamente, reordenando índices, se sigue que

$$\Sigma_m = T_m - (2m + 1) \Sigma_m$$

y por tanto

$$T_m = 2(m + 1) \Sigma_m. \quad (4.13)$$

Con todo esto regresamos a el segundo término de la fórmula (4.11) que es,

$$(2k - 2m + 1) \epsilon^I v_{i_1} v_t \Omega_{i_2}^t \wedge \theta_{i_3} \wedge \dots \wedge \theta_{i_{2k-2m}} \wedge \Omega_{i_{2k-2m+2}}^{i_{2k-2m+1}} \wedge \dots \wedge \Omega_{i_{2k}}^{i_{2k-1}},$$

que reordenando queda igual a

$$(2k - 2m + 1) [P_m + 2(k - m - 1) \Sigma_m],$$

y entonces concluimos que la ecuación (4.11) adopta la forma:

$$\begin{aligned} d\Phi_m &= \Psi_{m-1} + (2k - 2m + 1) [P_m + 2(k - m - 1) \Sigma_m] \\ &= \Psi_{m-1} + \frac{(2k - 2m + 1)}{2(m + 1)} [2(m + 1) P_m + 2(k - m - 1) 2(m + 1) \Sigma_m] \\ &= \Psi_{m-1} + \frac{(2k - 2m + 1)}{2(m + 1)} [2(m + 1) P_m + 2(k - m - 1) T_m] \quad \text{por (4.13)} \\ &= \Psi_{m-1} + \frac{(2k - 2m + 1)}{2(m + 1)} \Psi_m. \quad \text{por (4.12)} \end{aligned}$$

□

Tomando la fórmula recurrente anterior, podemos despejar Ψ_m en términos de las $d\Phi_m$,

$$\Psi_m = \frac{2(m + 1)}{2k - 2m - 1} [d\Phi_m - \Psi_{m-1}],$$

y

$$\Psi_{m-1} = \frac{2((m - 1) + 1)}{2k - 2(m - 1) - 1} [d\Phi_{m-1} - \Psi_{m-2}]$$

por lo que

$$\Psi_m = a_1 d\Phi_m - a_2 d\Phi_{m-1} + a_2 \Psi_{m-2},$$

donde a_1, a_2 son constantes. Continuando este proceso, se obtiene

$$\Psi_m = \sum_{j=0}^m (-1)^j \frac{2^{j+1} (m + 1) m (m - 1) \dots (m - j + 1)}{(2k - 2m - 1)(2k - 2(m - 1) - 1) \dots (2k - 2(m - j) - 1)} d\Phi_{m-j}.$$

Si $m = k - 1$ entonces,

$$\Psi_{k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \frac{2^{j+1} k(k-1)(k-2) \dots (k-j)}{1 \cdot 3 \dots (2j+1)} d\Phi_{k-1-j}. \quad (4.14)$$

Como ya hemos visto en (1.29) y de acuerdo a las convenciones de esta sección,

$$\Pi^* \bar{\Omega} = (-1)^{k-1} \frac{1}{2^{2k} \pi^k k!} \sum_I \epsilon^I \Omega_{i_2}^{i_1} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_{2k}}^{i_{2k-1}},$$

y por la observación en (4.1)

$$\Pi^* \bar{\Omega} = (-1)^{k-1} \frac{1}{2^{2k} \pi^k k!} \Psi_{k-1}. \quad (4.15)$$

Ahora se define la $(n-1)$ -forma diferenciable Γ ;

$$\Gamma := \frac{1}{\pi^k} \sum_{t=0}^{k-1} (-1)^t \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (2k-2t-1) t! 2^{t+k}} \Phi_t. \quad (4.16)$$

Como $0 \leq t \leq k-1$ haciendo el cambio de variable $t = k-1-m$ se tiene también que $0 \leq m \leq k-1$, y

$$t! = (k-1-m)! = \frac{k!}{k(k-1)(k-2) \cdots (k-m)},$$

finalmente,

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{\pi^k} \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{k-1-m} \frac{1}{(k-1-m)!} \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (2m+1) 2^{2k-1-m}} d\Phi_{k-1-m} \\ &= \frac{1}{\pi^k} \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^{-m} (-1)^{k-1} \frac{2^{m+1} k(k-1)(k-2) \cdots (k-m)}{2^{2k} k! \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2m+1)} d\Phi_{k-1-m} \\ &= (-1)^{k-1} \frac{1}{2^{2k} \pi^k k!} \Psi_{k-1}. \end{aligned}$$

Lo cual demuestra que

$$d\Gamma = (-1)^{k-1} \frac{1}{2^{2k} \pi^k k!} \Psi_{k-1} \stackrel{\text{por (4.15)}}{=} \Pi^* \bar{\Omega} \stackrel{\text{por (1.33)}}{=} - \left(-\frac{1}{2\pi} \right)^k \Pi^* Pf(\Omega). \quad (4.17)$$

Ejemplo 4.3. Sea \mathbf{M}^2 una superficie compacta y Riemanniana, y X el campo vectorial unitario en una vecindad $U \subset M$ dado por

$$X = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2,$$

donde $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ es un marco en U , en este caso, $v_1 = \cos \theta$ y $v_2 = \sin \theta$.

De la ecuación en (1.38) y con cálculos sencillos encontramos que

$$\theta_1 = -\sin \theta d\theta - \sin \theta \omega_2^1$$

$$\theta_2 = \cos \theta d\theta + \cos \theta \omega_2^1.$$

También se verifica que

$$\Phi_0 = v_1 \theta_2 - v_2 \theta_1 = d\theta + \omega_2^1$$

$$\Psi_0 = \Omega_2^1 - \Omega_1^2 = 2\Omega_2^1.$$

La ecuación (4.16) es

$$\Gamma = \frac{1}{2\pi} [d\theta + \omega_2^1],$$

y la identidad en (4.15) se ve como

$$\Pi^* \bar{\Omega} = \frac{1}{2\pi} \Omega_2^1.$$

Por lo que de las dos igualdades anteriores es inmediato concluir que

$$d\Gamma = \Pi^* \bar{\Omega},$$

fórmula que ya obtuvimos por otro método en (3.1) del capítulo 3 sección 1.

4.2 Demostración de Chern

Sea $\Pi : \mathbf{S}\mathbf{M}^n \rightarrow \mathbf{M}^n$ la proyección del haz tangente unitario en \mathbf{M}^n variedad compacta, conexa, orientable, sin frontera y de dimensión $n = 2k$. También escogemos X un campo vectorial no degenerado en \mathbf{M}^n cuyos ceros forman un conjunto finito Δ , podemos suponer que X es un campo unitario en $\mathbf{M}^n - \Delta$.

Denotamos por $\widetilde{\mathbf{M}}$ a la variedad con frontera contenida en $\mathbf{S}\mathbf{M}^n$ obtenida al levantar $\mathbf{M}^n - \Delta$ mediante el campo X y tomar la cerradura, esto es,

$$\widetilde{\mathbf{M}} := \overline{X(\mathbf{M}^n - \Delta)}.$$

Se tiene entonces que

$$\partial \widetilde{\mathbf{M}} = \bigcup_{p \in \Delta} \text{Ind}(X, p) F_p, \quad (4.18)$$

donde $F_p \cong \mathbf{S}^{n-1}$ es la fibra en p .

Para asociar los índices a los ceros del campo unitario, tomaremos un ejemplo que ilustra las ideas principales, más adelante se probarán estos hechos.

Consideremos los campos vectoriales $V_1, V_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dados por

$$\begin{aligned} V_1(x, y) &= (x, y) \\ V_2(x, y) &= (-x, y). \end{aligned}$$

El campo unitario asociado $X_1 : \mathbf{S}^1 \rightarrow \mathbf{S}^1$ aplica el círculo positivo (orientado positivamente) en el círculo positivo. Análogamente, X_2 aplica el círculo positivo a el círculo negativo. Aquí $\text{Ind}(V_1, 0) = +1$ y $\text{Ind}(V_2, 0) = -1$, signos que se determinan mediante

$$\begin{aligned} \text{sgn det } dV_1(0) &= \text{sgn det} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es positivo.} \\ \text{sgn det } dV_2(0) &= \text{sgn det} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ es negativo.} \end{aligned}$$

Por otra parte, por la ecuación (4.17)

$$d\Gamma = \Pi^* \bar{\Omega}.$$

La prueba simplificada de Chern es básicamente la siguiente:

$$\int_{\mathbf{M}^n} \bar{\Omega} = \int_{\widetilde{\mathbf{M}}} \Pi^* \bar{\Omega} = \int_{\partial \widetilde{\mathbf{M}}} \Gamma = \sum_{p \in \Delta} \text{Ind}(X, p) \int_{F_p} \Gamma = \sum_{p \in \Delta} \text{Ind}(X, p) = \chi(\mathbf{M}^n).$$

Justificaremos ahora los pasos anteriores, primero vemos que de (4.16)

$$\Gamma = \frac{1}{\pi^k} \sum_{m=0}^{k-1} (-1)^m \frac{1}{1 \cdot 3 \cdots (2k - 2m - 1) m! 2^{m+k}} \Phi_m.$$

Ahora, para $m \geq 1$, Φ_m contiene al menos un término $\Pi^* \Omega_j^i$, por lo que

$$\int_{F_p} \Pi^* \Omega_j^i = 0,$$

y entonces

$$\int_{F_p} \Phi_m = 0 \quad \text{para } m \geq 1.$$

Para $m = 0$,

$$\Phi_0 = \epsilon^I v_{i_1} \theta_{i_2} \wedge \cdots \wedge \theta_{i_{2k}},$$

de manera equivalente,

$$\Phi_0 = (2k - 1)! \sum_{i=1}^n (-1)^i \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{i-1} v_i \theta_{i+1} \wedge \cdots \wedge \theta_{2k},$$

donde la forma que aparece en la sumatoria es la $(n - 1)$ -forma de volumen en F_p , recordemos que (véase [6], capítulo 4, sección 11)

$$\text{Vol}(\mathbf{S}^{n-1}) = \frac{2 \pi^k}{(k - 1)!},$$

con todas estas observaciones se tiene que

$$\int_{F_p} \Gamma = \frac{1}{2^k \pi^k \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k - 1)} \int_{F_p} \Phi_0 = \frac{1}{2^k \pi^k \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k - 1)} (2k - 1)! \frac{2 \pi^k}{(k - 1)!}$$

y entonces

$$\int_{F_p} \Gamma = 1. \tag{4.19}$$

Como $\mathbf{M}^n - \Delta$ difiere de \mathbf{M}^n en un conjunto finito, $\widetilde{\mathbf{M}}$ difiere de $X(\mathbf{M}^n - \Delta)$ en un conjunto de medida cero, entonces se justifica que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{M}^n} \bar{\Omega} &= \int_{\mathbf{M}^n - \Delta} \bar{\Omega} \\ &= \int_{X(\mathbf{M}^n - \Delta)} \Pi^* \bar{\Omega} \\ &= \frac{\int_{X(\mathbf{M}^n - \Delta)} \Pi^* \bar{\Omega}}{X(\mathbf{M}^n - \Delta)} \end{aligned}$$

lo cual implica que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{M}^n} \bar{\Omega} &= \int_{\widetilde{\mathbf{M}}} \Pi^* \bar{\Omega} \\ &= \int_{\widetilde{\mathbf{M}}} d\Gamma && \text{por (4.17)} \\ &= \int_{\partial \widetilde{\mathbf{M}}} \Gamma && \text{por Teorema de Stokes} \\ &= \sum_{p \in \Delta} \text{Ind}(X, p) \int_{F_p} \Gamma && \text{por (4.18)} \\ &= \sum_{p \in \Delta} \text{Ind}(X, p) && \text{por (4.19)} \\ &= \chi(\mathbf{M}^n). && \text{por Teorema de Poincaré-Hopf} \end{aligned}$$

Terminamos la sección probando los lemas usados anteriormente.

Lema 4.4. *Sea*

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \overline{X(\mathbf{M}^n - \Delta)},$$

con Δ el conjunto de ceros de X , entonces

$$\partial \widetilde{\mathbf{M}} = \bigcup_{p \in \Delta} \text{Ind}(X, p) F_p,$$

donde F_p está orientada positivamente si $\text{Ind}(X, p) = +1$, y negativamente si $\text{Ind}(X, p) = -1$.

Demostración. Primero probaremos que:

$$F_p = \Pi^{-1}(p)|_{\widetilde{\mathbf{M}}} \tag{4.20}$$

\supseteq) Sea $z \in \Pi^{-1}(p)|_{\widetilde{\mathbf{M}}}$ entonces $\Pi(z) = p$, se sigue que $z \in F_p$.

⊆) Sea $(q, p) \in F_p$, se dará una sucesión de puntos en $\widetilde{\mathbf{M}}$ que convergen al punto (q, p) , y como $\widetilde{\mathbf{M}}$ es cerrada, tendremos que $(q, p) \in \Pi^{-1}(p)|_{\widetilde{\mathbf{M}}}$.

Para cada $r = \frac{1}{m}$, con m mayor que alguna constante se tiene que

$$X : B_{\frac{1}{m}}(p) \longrightarrow \mathbf{S}^{n-1} \cong F_p$$

es sobreyectiva, ya que el índice de un campo no degenerado es +1 o -1 (veáse [12]).

Por tanto existe una sucesión $\{p_m\} \in B_{\frac{1}{m}}(p)$ con $\lim_{m \rightarrow \infty} p_m = p$ y tal que

$$X(p_m) = q.$$

Ahora, como $p_m \in \mathbf{M}^n - \Delta$ la sucesión $\{(X(p_m), p_m)\} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ y cumple que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (X(p_m), p_m) = (q, \lim_{m \rightarrow \infty} p_m) = (q, p).$$

Observemos que otra manera de escribir (4.20) es

$$F_p = \partial \Pi^{-1}(p)|_{\widetilde{\mathbf{M}}}. \quad (4.21)$$

También requerimos probar que

$$\Pi(\partial \widetilde{\mathbf{M}}) = \Delta. \quad (4.22)$$

⊆) Es equivalente a probar que

$$\Pi(\overset{\circ}{\widetilde{\mathbf{M}}^n}) \supset \mathbf{M}^n - \Delta.$$

Escogemos $q \in \mathbf{M}^n - \Delta$, como Δ es cerrado, $\mathbf{M}^n - \Delta$ es abierto, entonces existe U una vecindad de q tal que $U \subset \mathbf{M}^n - \Delta$, entonces $X(U) \subset \overset{\circ}{\widetilde{\mathbf{M}}}$ por ser $X : \mathbf{M}^n - \Delta \longrightarrow X(\mathbf{M}^n - \Delta)$ un difeomorfismo, por tanto,

$$q \in U = \Pi(X(U)) \subset \Pi(\overset{\circ}{\widetilde{\mathbf{M}}}).$$

⊇) Sea $p \in \Delta$ y $z \in \Pi^{-1}(p)|_{\widetilde{\mathbf{M}}}$, por (4.20) y (4.21),

$$\Pi^{-1}(p)|_{\widetilde{\mathbf{M}}} = F_p = \partial \Pi^{-1}(p)|_{\widetilde{\mathbf{M}}},$$

por tanto $z \in \partial \widetilde{\mathbf{M}}$ y además $z \in F_p$, luego $\Pi(z) = p$ y se sigue que $p \in \Pi(\partial \widetilde{\mathbf{M}})$.

De (4.22) se tiene que (aplicando Π^{-1}),

$$\partial \widetilde{\mathbf{M}} = \Pi^{-1}(\Delta) = \bigcup_{p \in \Delta} F_p.$$

Veamos ahora lo que respecta a la orientación. Como \mathbf{M}^n es orientable y $X : \mathbf{M}^n - \Delta \rightarrow X(\mathbf{M}^n - \Delta)$ un difeomorfismo, hay una orientación heredada a $X(\mathbf{M}^n - \Delta)$, y una orientación a su frontera, que por lo que ya probamos es $\bigcup_{p \in \Delta} F_p$.

Para ver la orientación en cada fibra F_p consideramos el mapeo

$$h := d\psi \circ X \circ \psi^{-1} : \psi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

donde $\psi : \psi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow U$ es una parametrización, U es una vecindad de p , y suponemos $\psi(p) = 0$.

La orientación en F_p es positiva o negativa de acuerdo a si el signo del determinante de la transformación lineal dh_0 es positivo o negativo, pero ésta es precisamente la definición de $\text{Ind}(X, p)$, es decir,

$$\text{Ind}(X, p) = \text{sgn det } dh_0.$$

□

Lema 4.5.

$$\eta = \sum_{i=1}^{2k} (-1)^i \theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{i-1} v_i \theta_{i+1} \wedge \cdots \wedge \theta_{2p},$$

es la $(n-1)$ -forma de volumen en $F_p \cong \mathbf{S}^{n-1}$.

Demostración. Queremos ver que η evaluada en cualquier base ortonormal en F_p es 1, con $p \in \mathbf{M}^n$, y por esto, será la $(n-1)$ -forma de volumen.

Sea $\mathbf{q} \in F_p$,

$$\mathbf{q} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i v_i,$$

para algún marco $\{\mathbf{e}_i\}$ en una vecindad de p , y v_i las funciones coordenadas correspondientes.

Escogemos $\{f_1, f_2, \dots, f_{n-1}\}$ cualquier marco en $\mathbf{T}_{\mathbf{q}}F_p$, probaremos que

$$\eta(f_1, f_2, \dots, f_{n-1}) = 1.$$

Pero $\{\mathbf{q}, f_1, f_2, \dots, f_{n-1}\}$ es un marco en $\mathbf{T}_{\mathbf{p}}\mathbf{M}^n$ (ver Figura 4.1), por lo que desarrollando el determinante en la primera fila

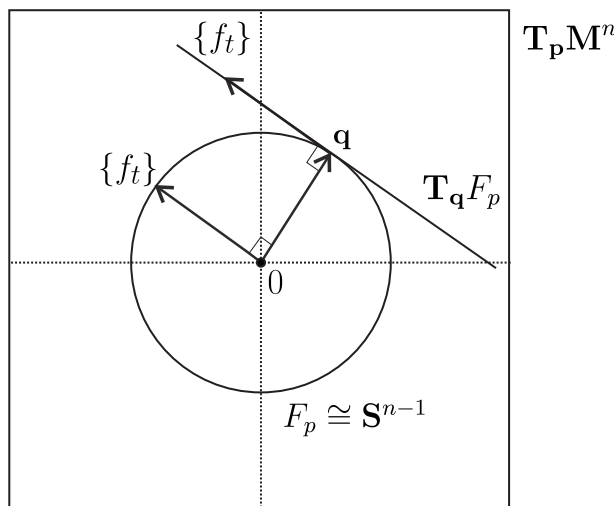
$$1 = \sum_{i=1}^n (-1)^n v_i \det \begin{pmatrix} f_1^1 & \cdots & f_1^{i-1} & f_1^{i+1} & \cdots & f_1^n \\ f_2^1 & \cdots & f_2^{i-1} & f_2^{i+1} & \cdots & f_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{n-1}^1 & \cdots & f_{n-1}^{i-1} & f_{n-1}^{i+1} & \cdots & f_{n-1}^n \end{pmatrix},$$

donde

$$f_t = \mathbf{e}_s f_t^s,$$

y por (1.38)

$$\theta_i = dv_i + v_k \Pi^* w_i^k,$$


 Figura 4.1: $\mathbf{T}_p \mathbf{M}^n$

pero en este caso,

$$\Pi^* w_i^k|_{F_p} = 0 \quad \forall i, \forall k$$

luego,

$$\theta_i = \mathbf{d}v_i \text{ en } F_p,$$

evaluando,

$$\theta_i(f_t) = \mathbf{d}v_i(\mathbf{e}_s f_t^s) = f_t^i,$$

entonces

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{i=1}^n (-1)^n v_i \det \begin{pmatrix} \theta_1(f_1) & \cdots & \theta_{i-1}(f_1) & \theta_{i+1}(f_1) & \cdots & \theta_n(f_1) \\ \theta_1(f_2) & \cdots & \theta_{i-1}(f_2) & \theta_{i+1}(f_2) & \cdots & \theta_n(f_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_1(f_{n-1}) & \cdots & \theta_{i-1}(f_{n-1}) & \theta_{i+1}(f_{n-1}) & \cdots & \theta_n(f_{n-1}) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^n [\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_{i-1} v_i \theta_{i+1} \wedge \cdots \wedge \theta_n](f_1, f_2, \dots, f_{n-1}) \\ &= \eta(f_1, f_2, \dots, f_{n-1}). \end{aligned}$$

□

4.3 Demostración usando límite

La siguiente prueba es una adaptación de la prueba de Bott para haces de esferas contenida en [3], página 124. En ella consideramos un campo vectorial que tiene solo una singularidad, y obtenemos el índice de tal campo en ese punto con una integral, esto generaliza la fórmula (3.12) de la página 50 a variedades de dimensión par.

Por (4.17)

$$-\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^k \Pi^* Pf(\Omega) = \mathbf{d}\Gamma,$$

donde $Pf(\Omega)$ es una n -forma diferenciable global en \mathbf{M}^n construida con las matrices de curvatura Ω asociadas a marcos locales, y por (4.16)

$$\Gamma = \frac{1}{2^k \pi^k \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2k-1)} \Phi_0 + \Upsilon,$$

donde

$$\Phi_0 = (2k-1)! \eta,$$

con η la $(n-1)$ -forma de volumen en las fibras \mathbf{F}_p con $p \in \mathbf{M}^n$.

Tenemos que

$$\Gamma = \frac{1}{\text{Vol}(\mathbf{S}^{n-1})} \eta + \Upsilon, \quad (4.23)$$

donde como ya hemos argumentado en la prueba anterior,

$$\begin{aligned} \int_{F_p} \eta &= \text{Vol}(\mathbf{S}^{n-1}) \\ \int_{F_p} \Upsilon &= 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

También escogemos X un campo vectorial unitario en \mathbf{M}^n con a lo más un único punto singular en p . Nos interesa encontrar una fórmula para el índice de X en el punto p .

Sea U una vecindad de \mathbf{M}^n con una trivialización Φ_U ,

$$\Phi_U^{-1} : \Pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \mathbf{S}^{n-1},$$

P_F es la proyección del producto a la fibra, es decir,

$$P_F : U \times F \longrightarrow \mathbf{S}^{n-1},$$

y f está dado por

$$f := P_F \circ \Phi_U^{-1} : \Pi^{-1}(U) \longrightarrow \mathbf{S}^{n-1}.$$

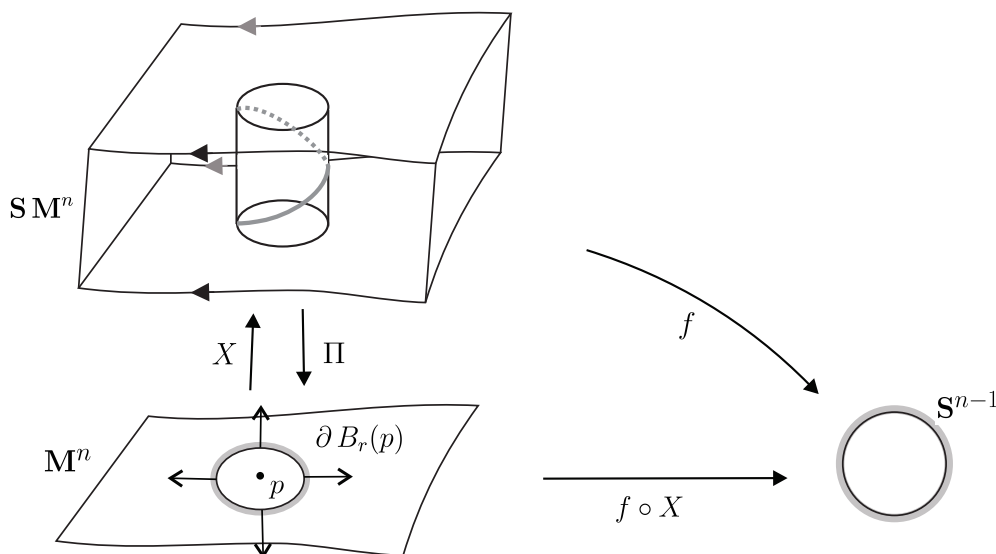
Sea σ la $(n-1)$ -forma de volumen de $\mathbf{S}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, entonces $f^*\sigma$ es una $(n-1)$ -forma diferenciable en $\Pi^{-1}(U)$ que se puede extender a una forma diferenciable global en $\mathbf{S}\mathbf{M}^n$.

Pero entonces, η y $f^*\sigma$ son dos $(n-1)$ -formas diferenciables en $\mathbf{S}\mathbf{M}^n$ que cumplen

$$\int_{F_q} \eta = \int_{F_q} f^*\sigma = \text{Vol}(\mathbf{S}^{n-1}) \quad \forall q \in \mathbf{M}^n$$

por la unicidad de formas con esta propiedad se tiene que pertenecen a la misma clase de cohomología, esto es,

$$[\eta] = [f^*\sigma]. \quad (4.25)$$


 Figura 4.2: El mapeo $f \circ X$ da el índice del campo X

Consideremos ahora la función

$$f \circ X|_{\partial B_r(p)} : \partial B_r(p) \cong \mathbf{S}^{n-1} \longrightarrow \mathbf{S}^{n-1},$$

donde para no cargar la notación nos referimos a esta función simplemente como $f \circ X$.

Por un teorema clásico de formas,

$$\int_{\partial B_r(p)} (f \circ X)^* \sigma = \text{Deg}(f \circ X) \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \sigma, \quad (4.26)$$

donde

$$\text{Ind}(X, p) = \text{Deg}(f \circ X),$$

es decir, el índice se convierte en el “número de vueltas” que hace el mapeo $f \circ X$ de \mathbf{S}^{n-1} en sí mismo. Ahora, como

$$\int_{\partial B_r(p)} (f \circ X)^* \sigma = \int_{\partial B_r(p)} X^* f^* \sigma = \int_{X(\partial B_r(p))} f^* \sigma,$$

por (4.26)

$$\int_{X(\partial B_r(p))} f^* \sigma = \text{Ind}(X, p) \text{Vol}(\mathbf{S}^{n-1}),$$

usando (4.25) y el Teorema de Poincaré-Hopf concluimos que

$$\int_{X(\partial B_r(p))} \eta = \chi(\mathbf{M}^n) \text{Vol}(\mathbf{S}^{n-1}). \quad (4.27)$$

También, como hipótesis, consideramos $\widetilde{\mathbf{M}}_r$ la variedad con frontera en $\mathbf{S}\mathbf{M}^n$ dada por levantar $\mathbf{M}^n - B_r(p)$ por X , es decir,

$$\widetilde{\mathbf{M}}_r := X(\mathbf{M}^n - B_r(p)),$$

de la identidad $\Pi \circ X = Id$ se sigue que

$$\Pi \widetilde{\mathbf{M}}_r = \mathbf{M}^n - B_r(p), \quad (4.28)$$

y también tenemos:

$$\partial \widetilde{\mathbf{M}}_r = X(\partial B_r(p)). \quad (4.29)$$

Como $\widetilde{\mathbf{M}}$ se aproxima por las variedades $\widetilde{\mathbf{M}}_r$ cuando $r \rightarrow 0$, se justifica que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial \widetilde{\mathbf{M}}_r} \Upsilon = \int_{F_p} \Upsilon = 0, \quad (4.30)$$

donde la última integral es 0 por (4.24).

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{M}^n - B_r(p)} \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^p Pf(\Omega) &= \int_{\Pi \widetilde{\mathbf{M}}_r} \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^p Pf(\Omega) && \text{por (4.28)} \\ &= \int_{\widetilde{\mathbf{M}}_r} \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^p \Pi^* Pf(\Omega) \\ &= - \int_{\widetilde{\mathbf{M}}_r} d\Gamma && \text{por (4.17)} \\ &= - \int_{\partial \widetilde{\mathbf{M}}_r} \Gamma && \text{por Teorema de Stokes} \\ &= - \int_{X(\partial B_r(p))} \Gamma && \text{por (4.29)} \\ &= - \frac{1}{\text{Vol}(\mathbf{S}^{n-1})} \int_{X(\partial B_r(p))} \eta - \int_{\partial \widetilde{\mathbf{M}}_r} \Upsilon && \text{por (4.23)} \\ &= -\chi(\mathbf{M}^n) - \int_{\partial \widetilde{\mathbf{M}}_r} \Upsilon && \text{por (4.27)}. \end{aligned}$$

Finalmente

$$\int_{\mathbf{M}^n} \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^k Pf(\Omega) = \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\mathbf{M}^n - B_r(p)} \left(-\frac{1}{2\pi}\right)^k Pf(\Omega) = -\chi(\mathbf{M}^n) - \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial \widetilde{\mathbf{M}}_r} \Upsilon$$

y entonces por (4.30)

$$-\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^k \int_{\mathbf{M}^n} Pf(\Omega) = \chi(\mathbf{M}^n).$$

Capítulo 5

Clases características y el Teorema de Gauss-Bonnet

En el capítulo 1, sección 6, se abordó la interpretación de la característica de Euler de una variedad compacta, conexa y orientable \mathbf{M}^n , con $n = 2k$, como un número de intersección de dos secciones transversales en su haz tangente $\mathbf{T}\mathbf{M}^n$. En la siguiente sección veremos como usando la dualidad de Poincaré podemos calcular números de intersección y combinando ambas ideas encontraremos una clase de cohomología $[\mathbf{e}(\mathbf{T}\mathbf{M}^n)]$, llamada **clase de Euler**, que cumple

$$\int_{\mathbf{M}^n} \mathbf{e}(\mathbf{T}\mathbf{M}^n) = \chi(\mathbf{M}^n),$$

donde $\mathbf{e}(\mathbf{T}\mathbf{M}^n) = s_0^* \Phi$, $s_0 : \mathbf{M}^n \rightarrow \mathbf{T}\mathbf{M}^n$ es la sección cero y Φ es la llamada **clase de Thom**.

En el procedimiento anterior no se usan métricas, pero si \mathbf{M}^n es Riemanniana podemos usar dicha métrica para construir la clase de Thom, y en este caso, como veremos, se tiene la igualdad

$$[\mathbf{e}(\mathbf{T}\mathbf{M}^n)] = -\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^k [Pf(\Omega)],$$

que nos lleva al Teorema de Gauss-Bonnet-Chern.

5.1 La Dualidad de Poincaré

Sea \mathbf{M}^n una variedad compacta, conexa, sin frontera y orientable, la dualidad de Poincaré establece que los “ j -hoyos” en \mathbf{M}^n se corresponden con los “ $(n-j)$ -hoyos”, lo cual se escribe

$$H^j(\mathbf{M}^n; \mathbb{R}) \cong H^{n-j}(\mathbf{M}^n; \mathbb{R})^* \cong H_{n-j}(\mathbf{M}^n; \mathbb{R}).$$

Tomando dimensiones de los espacios vectoriales anteriores se sigue que $b_j(\mathbf{M}^n) = b_{n-j}(\mathbf{M}^n)$ para $j = 0, 1, \dots, n$, donde $b_j(\mathbf{M}^n)$ es el j -ésimo número de Betti de \mathbf{M}^n .

Como sugieren las igualdades anteriores, existe una correspondencia entre subvariedades de dimensión j y ciertas $(n-j)$ -formas diferenciables en \mathbf{M}^n , para esta parte \mathbf{M}^n es conexa y

orientable pero no necesariamente compacta. Si N^j es una subvariedad de dimensión j , su **dual de Poincaré** es una $(n - j)$ -forma diferenciable denotada η_N^{n-j} y cumple la relación

$$\int_{\mathbf{M}^n} \alpha^j \wedge \eta_N^{n-j} = \int_{N^j} \alpha^j, \tag{5.1}$$

para toda α^j j -forma diferenciable con soporte compacto en \mathbf{M}^n . En la última integral se toma la restricción de α^j a N_j .

Ejemplo 5.1. Escogemos $N^0 = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_\lambda$ una subvariedad de dimensión 0 de \mathbf{M}^n , es inmediato de (5.1) que

$$\int_{\mathbf{M}^n} \eta_N^n = \lambda.$$

Si $\lambda = 1$, η_N^n es una n -forma con soporte en una vecindad de P_1 , o puede pensarse como una delta de Dirac con valor en P_1 .

Si $\lambda = \chi(\mathbf{M}^n)$, entonces η_N^n es la clase de Euler.

Ejemplo 5.2. Como mencionamos en la introducción del capítulo, una importante utilidad de la dualidad de Poincaré es que permite calcular números de intersección. Sean \mathbf{A} y \mathbf{B} subvariedades de \mathbf{M}^n que se intersecan transversalmente en un conjunto finito, se cumple

$$I(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \int_{\mathbf{M}^n} \eta_{\mathbf{A}} \wedge \eta_{\mathbf{B}}. \tag{5.2}$$

Ejemplo 5.3. A lo largo de esta tesis no habíamos usado formas diferenciables con funciones que involucren deltas de Dirac, damos un ejemplo en \mathbb{R}^3 de la fórmula del ejemplo anterior usando tales deltas.

Consideremos $\mathbf{M}^3 = \mathbb{R}^3$, \mathbf{A} como el plano XY y \mathbf{B} como el eje Z (veáse Figura 5.1), es claro entonces que $I(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 1$. Las duales de Poincaré $\eta_{\mathbf{A}}^1$ y $\eta_{\mathbf{B}}^2$ tienen soporte en \mathbf{A} y \mathbf{B} respectivamente, se verifica que son las siguientes

$$\begin{aligned} \eta_{\mathbf{A}}^1 &= \delta(z) \, dz \\ \eta_{\mathbf{B}}^2 &= \delta(x) \delta(y) \, dx \, dy. \end{aligned}$$

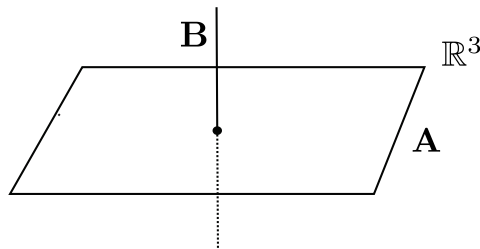


Figura 5.1: $\mathbf{A} \pitchfork \mathbf{B}$

Como $\eta_{\mathbf{A}}^1 \wedge \eta_{\mathbf{B}}^2$ tiene soporte sólo en el origen se sigue que

$$I(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = \int_{\mathbb{R}^3} \delta(x) \delta(y) \delta(z) dx dy dz = 1.$$

Ejemplo 5.4. Sea \mathbf{M}^n una variedad Riemanniana, compacta, conexa y orientable, consideramos en ella una subvariedad N^j y una vecindad tubular \mathcal{V} de N^j (vecindad difeomorfa a un abierto del haz normal a N^j) con fibras N_p , $p \in N^j$ (veáse Figura 5.2).

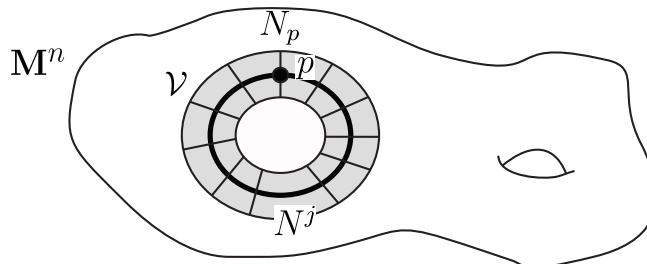


Figura 5.2: Vecindad tubular de N^j

Sea η una $(n - j)$ -forma en \mathbf{M}^n que tiene soporte en la vecindad \mathcal{V} y cumple que

$$\int_{N_p} \eta = 1 \quad \forall p \in N^j. \quad (5.3)$$

Considere ahora cualquier j -forma α^j en \mathbf{M}^n . Es claro que $\alpha^j \wedge \eta$ tiene soporte en \mathcal{V} y por la condición (5.3) al integrarse en dicha vecindad tubular sólo aporta α^j , es decir, se cumple la condición (5.1), por lo que $\eta = \eta_N^{n-j}$ es la dual de Poincaré a N^j .

5.2 Clase de Euler y clase de Thom

Sean \mathbf{M}^n una variedad compacta, conexa y orientable, y $s_0, s_T : \mathbf{M}^n \rightarrow \mathbf{T}\mathbf{M}^n$ secciones de $\mathbf{T}\mathbf{M}^n$ es decir, campos vectoriales en \mathbf{M}^n , se definen las siguientes subvariedades en $\mathbf{T}\mathbf{M}^n$

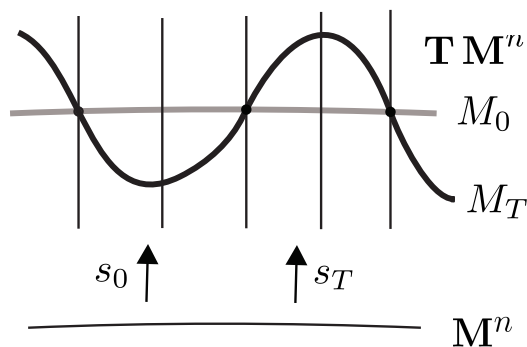
$$M_0 := s_0(\mathbf{M}^n)$$

$$M_T := s_T(\mathbf{M}^n),$$

donde s_0 es la sección cero, suponemos que M_T es una deformación transversal (ver capítulo 1, sección 6 para una definición) de M_0 , ver Figura 5.3, entonces

$$M_0 \pitchfork M_T.$$

Denotamos por η_{M_0} a la n -forma dual de Poincaré a M_0 y por η_{M_T} a la n -forma dual de Poincaré a M_T ; ambas son formas en $\mathbf{T}\mathbf{M}^n$.


 Figura 5.3: s_0 y s_T secciones transversales

Se tiene que

$$\begin{aligned}
 \chi(\mathbf{M}^n) &= \int_{\mathbf{T}\mathbf{M}^n} \eta_{M_0} \wedge \eta_{M_T} && \text{por (5.2)} \\
 &= \int_{M_T} \eta_{M_0} && \text{por (5.1)} \\
 &= \int_{s_T(\mathbf{M}^n)} \eta_{M_0} && \text{ya que } M_T = s_T(\mathbf{M}^n) \\
 &= \int_{\mathbf{M}^n} s_T^* \eta_{M_0}. && \text{usando pullback}
 \end{aligned}$$

La n -forma η_{M_0} es la clase de Thom del haz tangente $\mathbf{T}\mathbf{M}^n$ (y que denotaremos por Φ), y es la dual de Poincaré a la variedad encajada por la sección cero en su haz tangente. La clase de Euler es el pullback bajo la sección cero de la clase de Thom, es decir,

$$s_0^* \Phi = \mathbf{e}(\mathbf{T}\mathbf{M}^n),$$

pero también como Φ es una forma cerrada (lo probaremos en la siguiente sección) y s_0, s_T son funciones homotópicas suaves, se sigue que

$$[s_0^* \Phi] = [s_T^* \Phi],$$

y entonces como consecuencia de la serie de igualdades probadas anteriormente concluimos

$$\int_{\mathbf{M}^n} \mathbf{e}(\mathbf{T}\mathbf{M}^n) = \chi(\mathbf{M}^n).$$

Una manera natural de “medir” el torcimiento del haz tangente a una variedad \mathbf{M}^n es con el producto de intersección de dos secciones transversales, esto es la característica de Euler, la cual como vimos, es obtenida por una clase de cohomología $[\mathbf{e}(\mathbf{T}\mathbf{M}^n)]$ en \mathbf{M}^n . Es en este sentido que la clase de Euler mide el torcimiento del haz tangente a una variedad \mathbf{M}^n .

La prueba anterior también sugiere buscar una relación entre dualidad de Poincaré, dualidad de Hodge (para incluir la métrica) y curvatura, con la cual reinterpretar el teorema. Una relación entre los conceptos anteriores (adaptados a condiciones específicas en física) se obtiene de las ecuaciones de Maxwell. Aunque, en parte por los requerimientos en física, no se continuó el camino anterior.

5.3 Construcción de la clase de Thom usando una métrica

Existe una $(n - 1)$ -forma diferenciable global Γ en $\mathbf{S}M^n$ tal que

$$-\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^k \Pi^* Pf(\Omega) = d\Gamma. \tag{5.4}$$

Sea $N : \mathbf{T}M^n - M_0 \rightarrow \mathbf{S}M^n$ definida por

$$N(X_q) := \frac{X_q}{\|X_q\|},$$

y ρ la proyección usual en el haz tangente, es decir, $\rho : \mathbf{T}M^n \rightarrow M^n$ dada por

$$\rho(X_q) := q,$$

tales que el siguiente diagrama conmuta

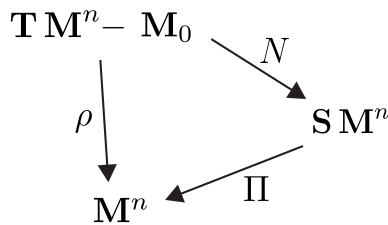


Figura 5.4: $\Pi \circ N = \rho$.

Usaremos una función suave $c : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ como indica la siguiente figura, cuya derivada

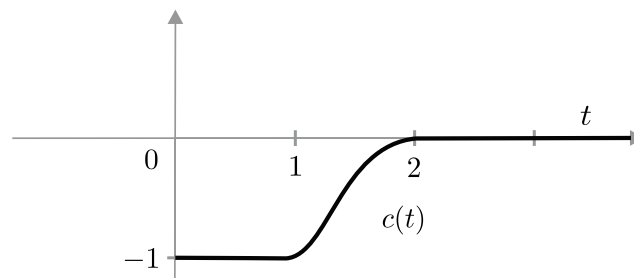


Figura 5.5: La función $c(t)$

es una función como la que aparece en la Figura 5.6,

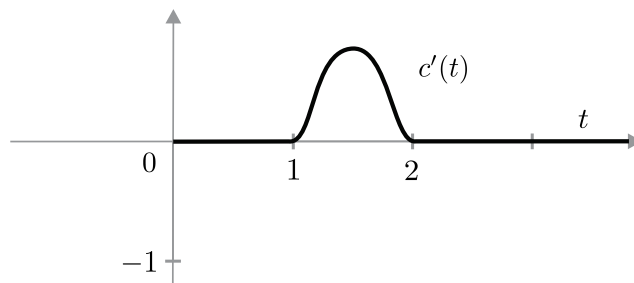


Figura 5.6: La función $c'(t)$

y que además cumple la condición

$$\int_0^{\infty} c'(t) dt = 1.$$

Con la función $c(t)$ definimos una nueva función $f : \mathbf{T}\mathbf{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la regla,

$$f(X_q) := c(\|X_q\|).$$

Finalmente podemos construir la n -forma Φ en $\mathbf{T}\mathbf{M}^n - M_0$

$$\Phi := d(f n^* \Gamma), \tag{5.5}$$

la cual cumple las siguientes propiedades:

(a) Φ se extiende a una n -forma diferenciable en $\mathbf{T}\mathbf{M}^n$, con soporte compacto en las fibras $\rho^{-1}(q)$ para cada $q \in \mathbf{M}^n$.

(b) Φ es cerrada, es decir, $d\Phi = 0$.

(c) Φ cumple que

$$\int_{\rho^{-1}(q)} \Phi|_{\mathbf{T}_q \mathbf{M}^n} = 1 \quad \forall q \in \mathbf{M}^n.$$

(d) $s_0^* \Phi = -\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^k Pf(\Omega)$.

Es decir, Φ es la clase de Thom del haz tangente $\mathbf{T}\mathbf{M}^n$, para la cual $s_0^* \Phi = e(\mathbf{T}\mathbf{M}^n)$. Terminaremos el capítulo demostrando las afirmaciones en los incisos anteriores.

Demostración de (a). Al derivar la ecuación (5.5) se tiene

$$\Phi = (df) N^* \Gamma - f(N^* d\Gamma). \tag{5.6}$$

y tomando las restricciones apropiadas, se obtiene,

$$\Phi|_{\mathbf{T}_q\mathbf{M}^{n-0}} = (\mathbf{d}f)|_{\mathbf{T}_q\mathbf{M}^{n-0}} N^*\Gamma - f N^*\mathbf{d}[\Gamma|_{\Pi^{-1}(q)}].$$

Pero $\Gamma|_{\Pi^{-1}(q)}$ es una $(n-1)$ -forma en $\Pi^{-1}(q) = \{X_q \in \mathbf{T}_q\mathbf{M}^n; \|X_q\| = 1\}$ que es la $(n-1)$ -esfera en el plano tangente a \mathbf{M}^n en el punto q , por tanto

$$\mathbf{d}[\Gamma|_{\Pi^{-1}(q)}] = 0,$$

y entonces se cumple que

$$\Phi|_{\mathbf{T}_q\mathbf{M}^{n-0}} = (\mathbf{d}f)|_{\mathbf{T}_q\mathbf{M}^{n-0}} N^*\Gamma. \quad (5.7)$$

Debido a que $f(X) = c(\|X\|)$, la diferencial $(\mathbf{d}f)$ tiene soporte cuando $c'(t) \neq 0$, y como se ve en la Figura 5.6, $c'(t)$ tiene soporte en el intervalo $[1, 2]$. Por tanto,

$$\text{soporte}(\mathbf{d}f)|_{\mathbf{T}_q\mathbf{M}^{n-0}} = \{X_q \in \mathbf{T}_q\mathbf{M}^n; 1 \leq \|X_q\| \leq 2\},$$

y entonces $\Phi|_{\mathbf{T}_q\mathbf{M}^{n-0}} = 0$ cuando $\|X_q\| < 1$, por lo que se puede definir $\Phi := 0$ en \mathbf{M}_0 y considerar a Φ como una n -forma diferenciable definida en todo $\mathbf{T}\mathbf{M}^n$, además con soporte compacto en las fibras ya que

$$\text{soporte } \Phi|_{\mathbf{T}_q\mathbf{M}^n} = \text{soporte}(\mathbf{d}f)|_{\mathbf{T}_q\mathbf{M}^{n-0}}.$$

□

Demostración de (b). Se sigue directamente del hecho que $\mathbf{d}^2 = 0$. □

Demostración de (c). Al integrar la identidad en (5.7) se tiene

$$\int_{\mathbf{T}_q\mathbf{M}^n} \Phi|_{\mathbf{T}_q\mathbf{M}^n} = \int_{\mathbf{T}_q\mathbf{M}^n} (\mathbf{d}f)|_{\mathbf{T}_q\mathbf{M}^n} N^*\Gamma. \quad (5.8)$$

Para calcular la integral anterior primero observamos que;

$$\int_{\mathbf{S}_r^{n-1}} N^*\Gamma = \int_{\mathbf{S}^{n-1}} \Gamma = 1 \quad \forall r > 0,$$

donde $\mathbf{S}_r^{n-1} = \{X_q \in \mathbf{T}_q\mathbf{M}^n; \|X_q\| = r\}$. También tenemos

$$\int_0^\infty (\mathbf{d}f)|_{\mathbf{T}_q\mathbf{M}^n} = \lim_{s \rightarrow \infty} [f(s) - f(0)] = 1.$$

Por el Teorema de Fubini concluimos que

$$\int_{\mathbf{T}_q\mathbf{M}^n} \Phi|_{\mathbf{T}_q\mathbf{M}^n} = \left[\int_0^\infty (\mathbf{d}f)|_{\mathbf{T}_q\mathbf{M}^n} \right] \left[\int_{\mathbf{S}_r^{n-1}} N^*\Gamma \right] = 1 \cdot 1 = 1.$$

□

Demostración de (d). Observamos primero que $f \circ s_0 : \mathbf{M}^n \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$(f \circ s_0)(q) = f(\vec{0}_q) = c(\|\vec{0}_q\|) = c(0) = -1,$$

$\forall q \in \mathbf{M}^n$. Tenemos la primer identidad

$$f \circ s_0 = -1, \tag{5.9}$$

y también se sigue la igualdad siguiente

$$s_0^* \mathbf{d}f = \mathbf{d}(s_0^* f) = \mathbf{d}(f \circ s_0) \stackrel{\text{por (5.9)}}{=} 0. \tag{5.10}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} s_0^* \Phi &= (s_0^* \mathbf{d}f) \wedge (s_0^* N^* \Gamma) - (s_0^* f) s_0^* \mathbf{d} [N^* \Gamma] && \text{de (5.6)} \\ &= -(s_0^* f) s_0^* \mathbf{d} [N^* \Gamma] && \text{por (5.10)} \\ &= s_0^* \mathbf{d} [N^* \Gamma] && \text{por (5.9)} \\ &= s_0^* N^* \mathbf{d} \Gamma \\ &= s_0^* N^* \left[- \left(-\frac{1}{2\pi} \right)^k \Pi^* Pf(\Omega) \right] && \text{por (5.4)} \\ &= - \left(-\frac{1}{2\pi} \right)^k s_0^* N^* \Pi^* Pf(\Omega) \\ &= - \left(-\frac{1}{2\pi} \right)^k s_0^* \rho^* Pf(\Omega) && \text{ya que } N^* \Pi^* = (\Pi \circ n)^* = \rho^* \\ &= - \left(-\frac{1}{2\pi} \right)^k Pf(\Omega) && \text{ya que } s_0^* \rho^* = (\rho \circ s_0)^* = Id^* \end{aligned}$$

□

Capítulo 6

Haz de Hopf y el Teorema de Gauss-Bonnet

Consideremos un haz principal $\Pi : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{S}^2$, con fibra $\mathbf{SO}(2) \cong \mathbf{S}^1$. Sea ω una conexión en tal haz, es decir, ω es una 1-forma en \mathbf{S}^2 con valores en las matrices antisimétricas de 2×2 ($\mathfrak{so}(2)$). Como ya hemos visto en el capítulo 3, debido a que la dimensión del espacio base es 2 y que $\mathbf{SO}(2)$ es abeliano, se simplifican las formas de conexión y curvatura.

Sean V y U vecindades en \mathbf{S}^2 tales que $U \cap V \neq \emptyset$, se prueba que la manera en que cambian las formas de conexión en la intersección es la misma que se obtuvo en (1.12),

$$\omega_V = g_{VU} \omega_U g_{UV} + g_{VU} \mathbf{d}g_{UV}, \quad (6.1)$$

donde

$$g_{VU} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = e^{-J\theta},$$

y

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{so}(2).$$

La ecuación (6.1) se simplifica como sigue

$$\omega_V = \omega_U + J \otimes \mathbf{d}\theta. \quad (6.2)$$

Pasamos ahora la conexión ω a \mathbf{E} , se define la 1-forma $\bar{\omega}_U$ en $\Pi^{-1}(U)$ con valores en $\mathfrak{so}(2)$ mediante la igualdad

$$\bar{\omega}_U = \Pi^* \omega_U + J \otimes \mathbf{d}\alpha, \quad (6.3)$$

donde usamos alguna sección $g_U = e^{J\alpha}$ en la vecindad U .

Con las mismas pruebas que revisamos en el capítulo 3, sección 1, se ve que $\bar{\omega}_V = \bar{\omega}_U$, por tanto, las 1-formas $\{\bar{\omega}_U\}$ definen una 1-forma global $\bar{\omega}$ en \mathbf{E} con valores en $\mathfrak{so}(2)$, esto es, la conexión en \mathbf{E} .

También se cumple que

$$\mathbf{d}\bar{\omega} = \Pi^* \Omega, \quad (6.4)$$

y de la ecuación (6.3) se sigue que

$$\bar{\omega}|_{\Pi^{-1}(p)} = J \otimes d\alpha \quad \forall p \in U. \quad (6.5)$$

Para las entradas 2,1 en las ecuaciones (6.3), (6.4) y (6.5) se obtienen las siguientes igualdades

$$d\omega_{2U}^1 = \Omega_{2U}^1 \quad (6.6)$$

$$\bar{\omega}_{2U}^1 = \Pi^* \omega_{2U}^1 + d\alpha \quad (6.7)$$

$$\bar{\omega}_{2U}^1|_{\Pi^{-1}(p)} = d\alpha \quad \forall p \in U \quad (6.8)$$

$$d\bar{\omega}_2^1 = \Pi^* \Omega_2^1. \quad (6.9)$$

Consideremos el haz trivial

$$\Pi_1 : \mathbf{S}^2 \times \mathbf{SO}(2) := \mathbf{E}_1 \longrightarrow \mathbf{S}^2,$$

el haz de Hopf

$$\Pi_2 : \mathbf{S}^3 := \mathbf{E}_2 \longrightarrow \mathbf{S}^2,$$

ahora, si damos una métrica Riemanniana a \mathbf{S}^2 podemos construir el haz tangente unitario

$$\Pi_3 : \mathbf{S} \mathbf{S}^2 := \mathbf{E}_3 \longrightarrow \mathbf{S}^2.$$

Se puede probar que estos tres haces son haces principales.

Ahora requerimos decir algo de las secciones de los haces anteriores. En el caso del haz trivial es claro que existen secciones globales, sea $s_1 : \mathbf{S}^2 \longrightarrow \mathbf{E}_1$ una de ellas. En el haz de Hopf existe una sección $s_2 : \mathbf{S}^2 - \{p\} \longrightarrow \mathbf{E}_2$ con $p \in \mathbf{S}^2$. Para el haz tangente unitario, considerando un campo vectorial con un cero en p de índice 2 obtenemos una sección $s_3 : \mathbf{S}^2 - \{p\} \longrightarrow \mathbf{E}_3$.

En analogía con la variedad $\widetilde{\mathbf{M}}$ definida en la prueba de Chern, capítulo 4, se definen

$$\widetilde{\mathbf{M}}_1 := s_1(\mathbf{S}^2) \subset \mathbf{S}^2 \times \mathbf{SO}(2)$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}_2 := \overline{s_2(\mathbf{S}^2 - \{p\})} \subset \mathbf{S}^3$$

$$\widetilde{\mathbf{M}}_3 := \overline{s_3(\mathbf{S}^2 - \{p\})} \subset \mathbf{S} \mathbf{S}^2.$$

Las variedades anteriores tienen las siguientes fronteras

$$\partial \widetilde{\mathbf{M}}_1 = \emptyset$$

$$\partial \widetilde{\mathbf{M}}_2 = \Pi^{-1}(p)$$

$$\partial \widetilde{\mathbf{M}}_3 = 2\Pi^{-1}(p),$$

donde la última igualdad significa que la frontera de $\widetilde{\mathbf{M}}_3$ es el círculo $\Pi^{-1}(p)$ recorrido dos veces.

Escogiendo cualquier conexión sobre cada uno de los tres haces estudiados se cumplen las ecuaciones (6.6), (6.7), (6.8) y (6.9), por lo que se tienen las siguientes igualdades.

Para el haz trivial se sigue que

$$\int_{\mathbf{S}^2} \Omega_2^1 = \int_{\widetilde{\mathbf{M}}_1} \Pi_1^* \Omega_2^1 = \int_{\partial \widetilde{\mathbf{M}}_1} \bar{\omega}_2^1 = 0.$$

Para el haz de Hopf,

$$\int_{\mathbf{S}^2} \Omega_2^1 = \int_{\widetilde{\mathbf{M}}_2} \Pi_2^* \Omega_2^1 = \int_{\partial \widetilde{\mathbf{M}}_2} \bar{\omega}_2^1 = \int_{\Pi_2^{-1}(p)} d\alpha = 2\pi.$$

Para el haz tangente unitario,

$$\int_{\mathbf{S}^2} \Omega_2^1 = \int_{\widetilde{\mathbf{M}}_3} \Pi_3^* \Omega_2^1 = \int_{\partial \widetilde{\mathbf{M}}_3} \bar{\omega}_2^1 = 2 \int_{\Pi_3^{-1}(p)} d\alpha = 4\pi.$$

La filosofía presente en las observaciones anteriores es la del Teorema de Gauss-Bonnet, la curvatura (en un haz principal) está relacionada con el “torcimiento” de ese haz.

El valor obtenido en la integral para el caso del haz de Hopf (ver [16]) también se relaciona con el “linking number” entre cualesquiera dos fibras (dos círculos en \mathbf{S}^3), que es 1, se tiene;

$$\frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{S}^3} \bar{\omega}_2^1 \wedge \Pi_2^* \Omega_2^1 = 1.$$

Se intentó recuperar el “linking number” con las ideas anteriores, conjeturo que se obtiene con el número de intersección

$$I(\widetilde{\mathbf{M}}_2, \partial \widetilde{\mathbf{M}}_2) = 1,$$

donde recordamos que primero hay que hacer una deformación transversal en \mathbf{S}^3 .

Para el caso del haz tangente la analogía de la fórmula anterior es

$$I(\widetilde{\mathbf{M}}_3, \partial \widetilde{\mathbf{M}}_3) = 2.$$

Capítulo 7

Conclusión

El Teorema de Gauss-Bonnet-Chern forma parte y es una motivación a lo que se conoce como **clases características**, que son clases de cohomología en la variedad base \mathbf{M}^n , $n = 2k$ (con las condiciones del teorema) de un haz vectorial E , las cuales miden el “torcimiento” de dicho haz.

Repasamos aquí las ideas principales de lo anterior (para la clase de Euler y usando el haz tangente) a manera de conclusión, aunque conviene mencionar que todas estas ideas se generalizan al caso de tomar cualquier otro haz vectorial sobre \mathbf{M}^n con fibra \mathbb{R}^n .

La característica de Euler de \mathbf{M}^n se puede pensar como un producto de intersección de la sección cero con otra sección transversal en el haz tangente a \mathbf{M}^n (capítulo 1, sección 6). Si la característica de Euler es cero intuitivamente podemos separar dichas secciones y el haz no se “tuerce” en ese sentido (ver ejemplo del cilindro), y si no es cero, la característica de Euler es una medida de lo “torcido” del haz.

Por otro lado, usando la dualidad de Poincaré se pueden calcular productos de intersección. Consideramos la **clase de Thom** Φ que es la dual de Poincaré a la variedad encajada por la sección cero en su haz tangente, y la **clase de Euler** denotada $\mathbf{e}(\mathbf{T}\mathbf{M}^n)$ la cual es el pullback bajo la sección cero de la clase de Thom. La idea es que la clase de Euler es la dual de Poincaré a los ceros de un campo vectorial (transversal) que es la característica de Euler, y se tiene entonces

$$\chi(\mathbf{M}^n) = \int_{\mathbf{M}^n} \mathbf{e}(\mathbf{T}\mathbf{M}^n).$$

Hasta aquí no se han usado las propiedades métricas, pero si \mathbf{M}^n tiene una métrica Riemanniana se puede utilizar ésta para construir las clases de Thom y de Euler (capítulo 5). Podemos entonces resumir el trabajo de Chern por la igualdad

$$[\mathbf{e}(\mathbf{T}\mathbf{M}^n)] = -\left(-\frac{1}{2\pi}\right)^k [Pf(\Omega)],$$

donde en el lado izquierdo la clase de Euler se obtiene por métodos topológicos (dualidad de Poincaré), mientras en el lado derecho la n -forma se obtiene de la curvatura de la métrica, es decir, con geometría, usando el Pfaffiano (denotado Pf) que es un polinomio sobre las matrices

antisimétricas. Es claro que al integrar la igualdad anterior se obtiene el Teorema de Gauss-Bonnet-Chern.

En esta tesis se trabajó con el polinomio invariante Pfaffiano que cumple

$$Pf(g^{-1}Ag) = Pf(A) \quad \forall g \in \mathbf{SO}(\mathbf{n}), \quad (7.1)$$

y como vimos, esta propiedad hace que $Pf(\Omega)$ sea una forma global en \mathbf{M}^n , pero también se tiene (ver Teorema de Chern-Weil) que si Ω' es la curvatura con respecto a la conexión compatible con otra métrica g' en \mathbf{M}^n , entonces

$$Pf(\Omega) - Pf(\Omega') \text{ es exacta.} \quad (7.2)$$

Esta última propiedad implica que

$$\int_{\mathbf{M}^n} Pf(\Omega) = \int_{\mathbf{M}^n} Pf(\Omega'),$$

y por tanto el invariante obtenido no depende de la métrica. También, por el mismo teorema, se tiene (para el caso del Pfaffiano es evidente)

$$dPf(\Omega) = 0, \quad (7.3)$$

por lo que $[Pf(\Omega)]$ define una clase de cohomología en \mathbf{M}^n que mide el torcimiento de su haz tangente.

Existen otros polinomios invariantes P que cumplen (7.1), (7.2) y (7.3) y por tanto nos definen otras clases de cohomología $[P(\Omega)]$ en \mathbf{M}^n , llamadas clases características, y que también miden el torcimiento del haz tangente (existencia o no de k secciones linealmente independientes), las cuales también se pueden construir como duales a ciertas subvariedades. Mencionamos que todas estas ideas se generalizan a otros haces vectoriales con sus respectivas conexiones y curvaturas.

También revisamos para ciertos haces principales que hay relación entre curvatura asociada a una conexión y el “torcimiento” de ese haz.

Bibliografía

- [1] Allendoerfer, C. B., Weil, A., *The Gauss-Bonnet Theorem for Riemannian Polyhedra*, Trans. Amer. Math. Soc. 53, (1943), p.p. 101-129.
- [2] Arnold, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer Verlag, 2^a ed. (1989).
- [3] Bott, R., Tu, L.W., *Differential Forms in Algebraic Topology*, Vol. 82 of Graduate Texts in Mathematics, Springer Verlag, New York (1982).
- [4] Chern, S. S., *A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds*, Annals of Mathematics, Vol. 45 (1944), p.p. 747-753.
- [5] Chern, S. S., Chen, W. H., Lam, K. S., *Lectures on Differential Geometry*, World Scientific (1999).
- [6] Courant, R., John, F., *Introducción al Cálculo y al Análisis Matemático*, Ed. Limusa (1979), Vol II.
- [7] Do Carmo, M. P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall (1976).
- [8] Frankel, T., *The Geometry of Physics: An Introduction*, Cambridge University Press, New York (1997).
- [9] Fulton, W., *Algebraic Topology: A First Course*, Springer Verlag.
- [10] Guillemin, V., Pollack, A., *Topología Diferencial*, Sociedad Matemática Mexicana (2003).
- [11] McCleary, J., *Geometry from a Differentiable Viewpoint*, Cambridge University Press, Cambridge (1994).
- [12] Milnor, J., *Topology from the Differentiable Viewpoint*, The University Press of Virginia Charlottesville (1965), based on notes by David Weaver.
- [13] Palmas, O., Reyes, G., *Curso de Geometría Diferencial, Parte 2, Geometría intrínseca de las superficies*, UNAM-Facultad de Ciencias (2005).
- [14] Spivak, M.A., *Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, Vols. 1-5.
- [15] Uribe, J.A., *El Teorema de Chern-Gauss-Bonnet*, Tesis de Licenciatura, UNAM, (1978).
- [16] Whitehead, J.H., *An expression of Hopf's invariant as an integral*, Magdalen College, Oxford, England (1947).