Casa abierta al tiempo

Cosmología Cuántica: Diversos Formalismos

Tesis que presenta:

José Socorro García Díaz

para la obtención del grado de doctor
en ciencias, especialidad en gravitación

Julio, 1995

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería

AGRADECIMIENTOS

A los Dres. Alberto Alejandro García Díaz, Alfredo Macías Alvarez, Hugo Morales Tecotl, Luis Octavio Pimentel Rico y Luis Fernando Urrutia Rios, por sus comentarios, críticas y valiosas sugerencias que le hicieron a este trabajo para poder terminarlo.

Al Dr. Octavio Obregón Díaz por sus enseñanzas, críticas y apoyo que me brindo todo el tiempo.

A la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa por ser uno de sus alumnos del posgrado en ciencias.

Al Instituto de Física de la Universidad de Guanajuato por darme todas las facilidades para conseguir esta meta personal.

DEDICATORIA

A mi esposa Guadalupe Graciela por darme el apoyo moral que necesite en muchas ocasiones.

A mis princesas Grizelda y Zamira Elizabeth por ser como son.

A todos los que confian en mi.

Contenido

1.-) Introducción

Una de las preocupaciones primarias de los físicos de este siglo ha sido desde luego, contestar cual es el último constituyente de la materia, por ejemplo, los físicos de partículas han podido desentrañar los constituyentes de los nucleones (neutrón, protón) como los quarks.

Desde este punto de vista, la relatividad general conduce a las siguientes preguntas. ¿De que esta hecho el espacio-tiempo?, ¿Cómo son sus constituyentes, de tal forma que nos den una visión continua del espacio-tiempo sobre la escala diaria?, ¿Qué conceptos puede uno usar para describir su comportamiento a una escala fundamental, mucho muy pequeña?†.

Estas son algunas de las preguntas que deberá contestar una teoría cuántica de la gravedad

Las teorías modernas (Relatividad General y la Mecánica Cuántica) necesitan ser revisadas ya que presentan algunos inconvenientes, luego entonces se necesitará una teoría de la gravitación mucho mejor que no contemple singularidades y aún, que dé resultados del espacio-tiempo en escalas de lo mucho muy pequeño (energías muy grandes). Como no existe una frontera bien definida entre lo cuántico y lo clásico, de aquí surgen las ideas de estados decoherentes[1,2] de una teoría cuántica, cuando se tiene que el límite sea una teoría clásica. Estados "decoherentes" tiene un significado en un sistema abierto, cuando no existen efectos de interferencia cuánticos en el sistema.

El programa de la cuantización de la relatividad general ha tenido resultados parciales para el sistema de constricciones que resultan a nivel cuántico en los diferentes formalismos que se han propuesto para cuantizar la teoría de Einstein, existiendo todavía dificultades inherentes al mismo problema de la cuantización en todos los formalismos. Dada esta complicación uno busca obtener información aproximada del universo actual en una situación donde la mecánica cuántica fué importante, por este motivo en éste trabajo se presentan algunos resultados cuando el número de grados de libertad de la relatividad general (métricas) son finitos, estudiaremos lo que llamaremos cosmología cuántica en lo que se llama el minisuper-espacio.

† La longitud de Planck $l_p \equiv (G\hbar/c^3)^{\frac{1}{2}} \approx 1.6\mathrm{x}10^{-33}$ cm, $\hbar = 1.05\mathrm{x}10^{-27}$erg-seg

La idea de la cosmología cuántica es quitar los modos inhomogeneos y sólo cuantizar los modos homogeneos del campo gravitacional. La esperanza puesta en este contexto es poder conocer en forma aproximada el comportamiento de la gravedad cuántica. Por este motivo uno puede pensar que la cosmología cuántica es un modelo alternativo para la gravedad cuántica. La extrapolación hacia la misma gravedad cuántica no es evidente a partir de este estudio.

En los años 70's, se desarrollo un estudio de modelos cosmológicos, en particular homogéneos, con el uso de un formalismo hamiltoniano[3]. Entre los modelos más estudiados estan aquellos en que las funciones lapse y shift toman valores N=1 y $\mathrm{N_i} = 0$; las hipersuperficies a $t =$ cte. son aquellas que aceptan grupos de movimiento definidos en ellas y que se conocen como universos tipo Bianchi (nueve en total).

Las 3-geometrías involucradas en una métrica que nos determina la forma general de los universos tipo Bianchi es

$$\mathrm{ds}^2 = (\mathrm{N}^2 - \mathrm{N^j N_j})\mathrm{dt}^2 - 2\mathrm{N_i}\ \mathrm{dt}\ \omega^\mathrm{i} - \mathrm{e}^{-2\Omega(\mathrm{t})}\mathrm{e}^{2\beta(\mathrm{t})}_{\mathrm{ij}}\omega^\mathrm{i}\omega^\mathrm{j} \tag{1.1}$$

donde $\Omega(t)$ es una función escalar y $\beta_{\mathrm{ij}}(\mathrm{t})$ es una matriz 3×3, ω^i son 1-formas apropiadas al modelo Bianchi a estudiar, estos parámetros dependen exclusivamente de la coordenada temporal, por lo que el problema tiene un número finito de grados de libertad; en el lenguaje de Misner las 3-geometrías de estos modelos cosmológicos son un subconjunto del super-espacio, denominado mini-super-espacio[4].

Una de las principales motivaciones para la construcción de una formulación hamiltoniana para la relatividad consistía en la posibilidad de cuantizar la teoría, esto es, asociar a cada variable canónica un operador sobre un espacio vectorial e imponer reglas de conmutación entre pares de variables canónicamente conjugadas. De este modo el operador hamiltoniano toma el papel de generador de traslaciones en el tiempo, es decir es responsable de la dinámica del sistema. Uno de los problemas principales de cuantización a partir de una teoría hamiltoniana, es que el sistema en si tiene 4 constricciones sobre las variables canónicas y no es muy claro dar la interpretación de la función de estado resultante que se obtiene.

La idea de la geometrodinámica[5], que es como se ha llamado a la relatividad general cuando es vista como una teoría dinámica, es introducir nuevas variables y considerar al espacio-tiempo formado por la evolución de métricas $\gamma_{ij}(t)$, esto nos sugiere entonces quién es la variable dinámica que evoluciona

A partir de las variables ADM[6], uno puede escribir la acción del campo gravitacional

$$S[g_{\mu\nu}] = \int_V d^4x\sqrt{-g}\, R[g_{\mu\nu}] + \text{términos de frontera} \tag{1.2}$$

a la forma

$$S[\gamma_{ij}, N, N_i] = \int dt \int d^3x\sqrt{\gamma}N[{}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2 + (\Delta^\lambda); \lambda] \tag{1.3}$$

donde R es el escalar de curvatura espacial y K_{ab} la curvatura extrínseca. En esta acción existen dos integraciones de caracter diferente, la primera integral es sobre la hipersuperficie $\overline{\mathbf{m}}$, donde la función lagrangiana $\mathcal{L}$ esta definida por una integral sobre la hipersuperficie de la forma:

$$\mathcal{L} = \int_{\overline{m}} d^3x\sqrt{\gamma}N[{}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2 + (\Delta^\lambda); \lambda] \tag{1.4}$$

esto implica

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{L} \ dt \tag{1.5}$$

aquí se está especificando la métrica sobre la hipersuperficie inicial (a t_0) y sobre la final (a t_1), por lo que la variación será **sobre todas** las posibles hipersuperficies (sus métricas) que conecten a las dos hipersuperficies de los extremos. La expresión (1.3) no depende del sistema de coordenadas empleados, lo que revela que la propiedad verdaderamente relevante para cada hipersuperficie $\overline{\mathbf{m}}(\mathbf{t})$, no es la métrica definida en ella sino la geometría intrínseca de la variedad tridimensional. De ésta manera el espacio-tiempo es la evolución de 3-geometrías.

La geometrodinámica cuántica puede ser aplicada a métricas donde la homogeneidad ha sido implementada antes de hacer la cuantización del sistema y esto tiene varios propósitos. Yendo desde un modelo teórico para la cuantización de la relatividad general; así ciertos problemas de gravedad cuántica pueden ser resueltos en un contexto limitado con la esperanza de aplicar estas soluciones a la teoría completa. La idea es que estos modelos den un comportamiento aproximado del universo cerca del Big Bang, partiendo de una situación donde la mecánica cuántica es importante[3].

Otra manera de cuantizar modelos cosmológicos es mediante el formalismo de integrales de trayectoria[7,8,9,10], es decir, se consideran todas las posibles 4-geometrías conectando dos de ellas fijas, dando a cada una de ellas un peso proporcional a la acción clásica evaluada a lo largo de esta trayectoria. Existen algunos resultados interesantes para ciertos modelos cosmológicos (Friedmann-Robertson-Walker (FRW), el mismo modelo acoplado a un campo escalar[11]. etc.)

Por otro lado, otro método, el formalismo supersimétrico dado por Graham, D'Eath y otros[12], ellos mantienen las propiedades supersimétricas de los campos y cuantizan el sistema mediante las constricciones supersimétricas de las supercargas y de los hamiltonianos supersimétricos; dichas constricciones son aplicadas sobre la función de onda del sistema de acuerdo al programa de Dirac. Usando esta metodología aqui presentaré resultados obtenidos para el modelo cosmológico Bianchi tipo II en el contexto de la mecánica cuántica supersimétrica.

Otra de las teorías que discutire, es la Supergravedad. Existen varias razones para estudiar y comprender la cosmología cuántica desde el punto de vista de la supergravedad, primero, se esperaban, originalmente que las divergencias del regimen ultravioleta pudiesen cancelarse, segundo, en la definición dada por Hawking de los estados de los agujeros de gusano, las masas efectivas de las partículas inducidas por ellos son típicamente del orden de la masa de Planck * en una teoría no supersimétrica[13]. Tales masas efectivas Planckianas se esperan que sean removidas en una teoría supersimétrica. La acción local supersimétrica podría tener profundas consecuencias para la teoría cuántica resultante. Las constricciones supersimétricas proveen una raíz cuadrada tipo Dirac del hamiltoniano definido por medio de la ecuación de Wheeler-DeWitt que gobierna la dinámica de la función de onda. En el formalismo de supergravedad el campo de la gravitación, el gravitón, forma un supermultiplete con un campo fermiónico de espín $\frac{3}{2}$, el gravitino. En este contexto estudiaré la cuantización de la cosmología en el minisuperespacio, en el cual las variables de la materia y gravitación son reducidos a un número finito de grados de libertad. Con esto no podemos garantizar que los resultados se puedan extrapolar directamente a la cosmología completa, dado que se redujeron los grados de libertad, pero nos dará una idea de cómo se podría comportar en forma aproximada. Los resultados obtenidos en los otros formalismos para cuantizar modelos cosmológicos, a nivel de soluciones, resultan ser similares a las soluciones encontradas mediante el formalismo de Teitelboim.

Por otro lado, se tiene que una de las dificultades severas en cosmología cuántica

* $m_p \equiv l_p c^2/G \approx 2.2\text{x}10^{-5}$ gr; $E_p = l_p c^4/G \approx 1.3\text{x}10^{19}$GeV

así como en la relatividad completa, es que el hamiltoniano del sistema es cuadrático en el mismo sentido que el hamiltoniano para una partícula relativista, $H^2 = p^2 + m^2$, es cuadrático[14]. Los hamiltonianos cuadráticos de esta forma conducen automáticamente a una ecuación tipo Klein-Gordon (ecuación de Wheeler-DeWitt) para la función de estado que caracteriza al universo con todos los problemas inherentes de interpretar estas funciones de estado como densidades de probabilidad[7]. Como es bien conocido, la ecuación de Klein-Gordon no es consistente con los principios de la mecánica cuántica ordinaria, debido a la presencia de derivadas respecto al tiempo de segundo orden, lo cual conduce a la existencia de probabilidades negativas.

Existen varias teorías para poder resolver este tipo de ecuaciones cuadráticas, tales como el método de la raíz cuadrada, el método de Dirac y el método de Schrödinger-Klein-Gordon[3]. El primer método utiliza conceptos de transformadas de Fourier y algunos modelos se pueden resolver fácilmente, pero se empiezan a complicar cuando el sistema tiene potenciales de interacción. En el segundo método, también se intenta una raíz cuadrada de este tipo de hamiltonianos, donde H es lineal en los momentos y el operador cuadrático H^2 conduce a la ecuación original semejante a Klein-Gordon. Este tipo de raíz cuadrada fue inmediatamente encontrada para métricas tipo Bianchi y al menos para el modelo Bianchi tipo I, la ecuación de "Dirac" resultante es resuelta. El problema básico fué que la solución encontrada es un vector de la forma $\binom{\psi_1}{\psi_2}$ y no existe una interpretación natural de sus componentes. El tercer método utiliza al hamiltoniano cuadrático en su forma original e introduce cierta representación para los operadores de la teoría y se trata de resolver la ecuación diferencial (funcional) de segundo orden, este método también se complica cuando existen potenciales de interacción. Pero como se verá en uno de los apartados, cuando se usan ansatze y cambios de coordenadas apropiados, la ecuación de Wheeler-DeWitt resultante se puede resolver fácilmente para los modelos Bianchi Clase A.

En éste punto de las soluciones será importante mirar si las soluciones encontradas en el dominio clásico (época de inflación?) para los mismos modelos tienen alguna relación con las obtenidas en el dominio cuántico. En principio, tal relación (si existe) deberá mostrarnos si es necesario incorporar otros campos a la teoría o encontrar algún mecanismo que haga emerger de este dominio cuántico el dominio clásico ó viceversa

Este trabajo está organizado de la siguiente manera. En la sección 2, presento algunas ideas para cuantizar modelos cosmológicos, en el contexto de la supergravedad, especializado para el Bianchi tipo IX y en particular para el modelo del Taub extremo, en el microsuperespacio. La sección 3 la dedico a la mecánica cuántica supersimétrica aplicada al modelo cosmológico Bianchi II. En la sección 4 se dan resultados para los modelos Bianchi clase A en el formalismo hamiltoniano estandar ADM. La sección 5 se dedica a una teoría generalizada en 5 dimensiones de la teoria de Einstein, como una teoría de norma para obtener la densidad lagrangiana de la teoría de Ashtekar con términos topológicos adicionales. La sección 6 la utilizo para presentar resultados de una teoría en supergravedad N=2, D=5 restringida (sin campo electromagnético y sin torsión) para los modelos cosmológicos Bianchi V y VI_0. La sección 7 se dedica a comentarios generales de este trabajo así como una serie de apéndices que aclaran diferentes partes del texto y por último las referencias.

2.-) Supergravedad N=1

2.1).- Introducción

La teoría de la supergravedad consiste de dos campos de norma acoplados muy particulares, descritos en términos de los sistemas de Einstein y el de Rarita-Schwinger sin masa. En muchos casos, el propósito es el de analizar las propiedades dinámicas de la supergravedad a traves de la reducción de los sistemas acoplados en la forma hamiltoniana. La acción será una suma de los términos cinéticos correspondiendo estos a los grados de libertad del sistema junto con las constricciones y los correspondientes multiplicadores de Lagrange.

Recientemente ha renacido el interés por la cosmología cuántica[8,9,15], por ejemplo, geometrodinámica cuántica aplicada a métricas en las cuales se impone la condición de homogeneidad antes de llevar a cabo la cuantización. Este tipo de teorías tiene varias aplicaciones: puede ser un modelo de teoría para la cuantización de la relatividad general, donde ciertos problemas de la gravedad cuántica pueden ser resueltos al menos en un contexto limitado con la esperanza de poder aplicar estos resultados en un contexto más amplio en la teoría. También estos modelos pueden darnos una idea aproximada del comportamiento global del universo en situaciones donde la mecánica cuántica es importante[16].

Después de inventada la Supergravedad, Teitelboim et al[17,18] mostraron que *esta teoría provee naturalmente una raíz cuadrada del tipo Dirac para la gravedad.* Esta raíz cuadrada sugiere inmediatamente la idea de interpretar las componentes del vector de estado en términos de estados cuánticos en supergravedad. Sin embargo, puesto que la raíz cuadrada de Teitelboim es precisamente la extensión natural supersimétrica de la gravedad, **constituye un método general para obtener raices cuadradas en gravedad y cosmología cuánticas** y da la posibilidad de interpretar las funciones de estado resultantes.

La estructura hamiltoniana de la supergravedad es dictada por las invarianzas de norma locales y por la elección geométrica apropiada de los datos de valores iniciales para los dos sistemas. Un conjunto adecuado de grados de libertad puede ser elegido al tomar las componentes espaciales a nivel de las tétradas $e_{\mu a}$ y del campo fermiónico ψ_μ. Como se observará más adelante, las variables fermiónicas más apropiadas estan elegidas en el espacio tangente $\psi_a = e^\mu{}_a \psi_\mu$, en lugar del espacio-tiempo curvo ψ_μ.

La función de lagrange de supergravedad en un formalismo de primer orden es[19]:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{-\mathrm{g}}\mathrm{R} - \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\psi}_{\mu}\gamma_5\gamma_{\nu}\mathrm{D}_{\rho}\psi_{\sigma}, \tag{2.1}$$

donde el primer sumando es la función de lagrange para gravitación que ya tiene información de la torsión y el segundo sumando es del sistema de Rarita-Schwinger, R es el escalar de curvatura (ver las definiciones de estas cantidades en las ecuaciones (2.23) y (2.24)). Esta función de lagrange llevada a la forma canónica (ADM) tiene el siguiente aspecto[20]

$$\mathcal{L}_{\text{canónico}} = \mathrm{p}^{\mathrm{i}}{}_{\mathrm{a}}\,\dot{\mathrm{e}}_{\mathrm{i}}{}^{\mathrm{a}} - \frac{\mathrm{i}}{2}\varepsilon^{\mathrm{ijk}}\overline{\phi}_{\mathrm{i}}\gamma_5\gamma_{\mathrm{j}}\dot{\phi}_{\mathrm{k}} - \mathrm{N}^{\mu}\mathcal{H}_{\mu} - \lambda^{\mathrm{ab}}\mathrm{J}_{\mathrm{ab}} - \overline{\phi}_0\mathrm{S}, \tag{2.2}$$

Donde la constricción supersimétrica S a nivel cuántico contendrá la información de las *ecuaciones tipo Dirac* del modelo elegido, en particular para nuestro estudio, el Bianchi tipo IX. Las variables de los campos básicos en la formulación gravitón-gravitino de la supergravedad N=1, son las tétradas (en el apéndice se da la manera sistemática de obtener las tétradas a partir de las 1-formas diferenciales del modelo por estudiar) $e_{\mu}{}^{a}$ y el campo vector–espinor del gravitino $\psi_{\mu A}$, donde A=1,...4 son los índices espinoriales, que se pueden suprimir cuando la notación sea obvia, este campo obedece a la dinámica del sistema de Einstein-Rarita-Schwinger[19,20].

Existe una estrecha relación entre tomar la raíz cuadrada de las constricciones de un sistema hamiltoniano, introduciendo grados de libertad de espín en una teoría física y la idea de supersimetría. Llamamos supersimetría a la invariancia de una teoría bajo transformaciones que mezclan variables fermiónicas, las cuales obedecen relaciones de anticonmutación, con variables bosónicas, las cuales obedecen relaciones de conmutación. El ejemplo más simple es el electrón de Dirac, el cual puede ser considerado como un sistema hamiltoniano constreñido, mismo que posee dos constricciones

$$\mathrm{S} = \theta_{\mu}\mathrm{P}^{\mu} + \theta_5\mathrm{m} \approx 0 \tag{2.3}$$

y

$$\mathrm{H} = \mathrm{P}_{\mu}\mathrm{P}^{\mu} + \mathrm{m}^2 \approx 0 \tag{2.4}$$

éstas constricciones cumplen con un álgebra cerrada en el siguiente sentido*

$$\{\mathrm{S},\ \bar{\mathrm{S}}\} = -\mathrm{H} \tag{2.5}$$

$$\{\mathrm{S},\ \mathrm{H}\} = 0 \tag{2.6}$$

$$\{\mathrm{H},\ \mathrm{H}\} = 0. \tag{2.7}$$

Para la teoría cuántica hacemos el cambio usual $\{,\} \rightarrow [,]$, convertimos S y H a operadores $\hat{\mathrm{S}}$, $\hat{\mathrm{H}}$ y

$$\theta_\mu = \frac{i\gamma_5\gamma_\mu}{\sqrt{2}}; \qquad \theta_5 = \frac{\gamma_5}{\sqrt{2}}. \tag{2.8}$$

Los estados físicos de la teoría cuántica deberan ser aniquilados tanto por $\hat{\mathrm{S}}$ como por $\hat{\mathrm{H}}$ De (2.5) se deduce que

$$\hat{\mathrm{S}}|\psi>= 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathrm{H}}|\psi>= 0 \tag{2.9}$$

de manera que la ecuación de Dirac es la *raíz cuadrada* de la ecuación de Klein-Gordon. Así pues tomar la raíz cuadrada de las constricciones significa tomar la raíz cuadrada de las ecuaciones cuánticas de movimiento. La transformación generada por la constricción fermiónica (2.3) obtenida a partir del conmutador (para una variable bosónica) o del anticonmutador (para una variable fermiónica) de las variables dinámicas con S, está dada por

$$\begin{aligned} \delta x^\mu &= \epsilon\theta^\mu \qquad \delta p_\mu = 0 \\ \delta\theta^\mu &= -i\epsilon\rho^\mu \qquad \delta\theta_5 = -i\epsilon m \end{aligned} \tag{2.10}$$

y claramente mezcla variables de Bose y de Fermi.

La relatividad general se ajusta muy bien y de manera natural al esquema anterior. El objeto dinámico es ahora una métrica 3-dimensional ó, más precisamente, las componentes espaciales de la tétrada $e_i{}^a$ y sus correspondientes momentos conjugados $p_i{}^a$. La teoría posee constricciones $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$, J_{ab} asociadas con la libertad de deformar una superficie 3-dimensional, normal y tangencialmente a sí misma y con la libertad de realizar rotaciones localizadas de las tétradas, respectivamente. La constricción $\mathcal{H}_0 \approx 0$ es cuadrática en los

---

* El paréntesis de Poisson generalizado, incluyendo cantidades fermiónicas tiene la forma $\{\mathrm{F},\mathrm{G}\} = \left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{q}^i}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{p}_i} - \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{p}_i}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{q}^i}\right) + \epsilon_f\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\theta^\alpha}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial\pi_\alpha} + \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial\pi_\alpha}\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial\theta^\alpha}\right)$, donde ϵ_f es +1 si F es una función par y -1 cuando es impar

momentos en completa analogía con (2.4). Es por tanto natural preguntarse si es posible tomar la raíz cuadrada de los generadores de las deformaciones superficiales y dotar de esta manera a cada punto del espacio con un nuevo grado de libertad asociado con una estructura espinorial intrínseca. La respuesta fué dada por Freedman, van Nieuwenhuizen y Ferrara[19] y por Deser y Zumino[20]. El campo de espín $\frac{3}{2}$ aparece como una propiedad fundamental del espacio al mismo nivel que los atributos geométricos, en analogía total con el papel jugado por el espín del electrón respecto a la partícula puntual. Así, en el mismo sentido en el que uno habla de las "spinning particles", se puede hablar de que la supergravedad es la teoría del "spinning space".

Para mostrar que las constricciones fermiónicas de la supergravedad son la raíz cuadrada de los generadores de las deformaciones superficiales mostraremos el álgebra completa. Existen tres diferentes constricciones en el problema: los generadores de traslación $\mathcal{H}_a$, los generadores de rotación $\mathrm{J_{ab}}$ y los generadores supersimétricos $\mathrm{S_A}$. Los generadores de traslaciones $\mathcal{H}_a$ son la proyección a lo largo de la tétrada de los generadores usuales de las mismas $\mathcal{H}_\mu$[21,22]. Si bien ambas descripciones son equivalentes, es más conveniente en el presente contexto tomar a $\mathcal{H}_a$ como las cantidades básicas. Así, las relaciones de conmutación adquieren una forma más simétrica y el papel desempeñado por los distintos campos en la teoría se muestra claramente.

Los multiplicadores de Lagrange asociados con traslaciones, rotaciones y transformaciones supersimétricas son las componentes covariantes temporales de los campo de norma correspondientes. Estos campos son $e_\mu{}^a$ (tétrada), $\omega_{\mu ab}$ (coeficientes de rotación de Ricci) y ψ_μ (vector–espinor de Rarita–Schwinger) respectivamente. El hamiltoniano se lee entonces como sigue

$$\mathrm{H} = \int \mathrm{d^3x}(\mathrm{e^a{}_0}\mathcal{H}_\mathrm{a} + \frac{1}{2}\omega_{\mathrm{0ab}}\mathrm{J^{ab}} + \overline{\psi}_0\mathrm{S}) \tag{2.11}$$

se debe enfatizar que $\mathcal{H}_\mathrm{a}, \mathrm{J^{ab}}$ y S son construidos a partir de las variables canónicas de la teoría y no dependen de los multiplicadores de lagrange. Las leyes de transformación de todos estos objetos son las siguientes

$$
\begin{aligned}
\delta\psi_\mu(x) &= D_\mu\epsilon(x) \\
\delta e^a_\mu(x) &= i\bar{\epsilon}(x)\gamma^a\psi_\mu(x) \\
\delta e^a_\mu &= D_\mu\xi^a \\
\delta\psi_\mu &= H_{a\mu}\xi^a \\
\delta\omega_{\mu ab} &= (\Omega_{c\mu ab} - \overline{\psi}_\mu\Sigma_{cab})\xi^c
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

donde

$$
\begin{aligned}
H_{\mu\nu} &= D_\mu\psi_\nu - D_\nu\psi_\mu \\
{}^*H^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\delta}H_{\rho\delta} \\
\Sigma_{\mu ab} &= \gamma_5(\gamma_\mu{}^*H_{ab} + \frac{1}{2}e_{[a\mu}\gamma_c{}^*H_{b]}{}^c) \\
\Omega_{\nu\mu ab} &= R_{\nu\mu ab} - \overline{\psi}_{[\nu}\Sigma_{\mu]ab}
\end{aligned}
\tag{2.13}
$$

Los tensores H, Σ, y Ω tienen la propiedad de que sus componentes a lo largo de la tétrada, H_{ab}, Σ_{cab} y Ω_{cdab}, se transforman homogéneamente bajo traslaciones localizadas, rotaciones y transformaciones supersimétricas. Esta propiedad implica que dichas componentes dependen solo de las variables canónicas de la teoría y no de los multiplicadores de Lagrange. Es importante notar que las componentes del tensor de Riemann $\mathrm{R_{cdab}}$ se transforman inhomogéneamente bajo supersimetría y dependen por lo tanto de los multiplicadores de lagrange.

La transformación de los multiplicadores bajo una traslación $\xi^a(x)$, una rotación $\epsilon^{ab}(x)$ y una transformación supersimétrica $\epsilon(x)$ está dada por la siguiente expresión

$$
\begin{aligned}
\delta e^a{}_0 &= \dot{\xi}^a + \omega_{0b}{}^a\xi^b - \epsilon_b{}^a e^b{}_o + \bar{\epsilon}\gamma^a\psi_0 \\
\delta\omega_{0ab} &= \dot{\epsilon}_{ab} - \epsilon_a{}^c\omega_{0cb} + \omega_{0a}{}^c\epsilon_{cb} + \Omega_{cdab}\xi^c e_0{}^d + (\bar{\epsilon}e^c{}_0 - \overline{\psi}_0\xi^c)\Sigma_{cab} \\
\delta\overline{\psi}_0 &= \dot{\bar{\epsilon}} + \frac{1}{2}(\overline{\psi}_0\epsilon_{ab} - \bar{\epsilon}\omega_{0ab})\sigma^{ab} + \xi^a\overline{H}_{ab}e^b{}_0
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Así, el álgebra que cumplen los generadores $\mathcal{H}_a, J^{ab}$ y S es:

$$
\{S(x),\ \overline{S}(x')\} = \delta(x,x')\gamma^a\mathcal{H}_a \tag{2.15a}
$$

$$
\{S(x),\ \mathcal{H}_c(x')\} = \frac{1}{2}\delta(x,x')\Sigma_{cab}J^{ab} \tag{2.15b}
$$

$$\{S(x),\ J^{ab}(x')\} = -\delta(x,x')\sigma^{ab}S \tag{2.15c}$$

$$\{\mathcal{H}_a(x),\ \mathcal{H}_b(x')\} = \delta(x,x')(\frac{1}{2}\Omega_{abcd}J^{cd} + \overline{H}_{ab}S) \tag{2.15d}$$

$$\{\mathcal{H}_c(x),\ J^{ab}(x')\} = \delta(x,x')(\delta^b_c\mathcal{H}^a - \delta^a_c\mathcal{H}^b) \tag{2.15e}$$

$$\begin{aligned}\{J^{ab}(x),\ J^{cd}(x')\} = \delta(x,x')(\eta^{ac}\delta^b_e\delta^d_f - \eta^{bc}\delta^a_e\delta^d_f + \\ \eta^{bd}\delta^a_e\delta^c_f - \eta^{ad}\delta^b_e\delta^c_f)J^{ef}.\end{aligned} \tag{2.15f}$$

La ecuación (2.15a) es la relación, en términos de generadores, encontrada por Freedman y van Nieuwenhuizen[23] actuando directamente con las transformaciones en los distintos campos. Es importante notar que debido a la definición (2.12) de una traslación localizada, ningún campo aparece explícitamente en el miembro derecho de (2.15a). Los campos aparecen, sin embargo, en las otras relaciones de conmutación.

Los campos Σ_{cab}, Ω_{abcd} *y* H_{ab} juegan el papel de curvaturas en (2.15). Si se suprimen, el álgebra se reduce a un número infinito de copias (una para cada punto del espacio) del álgebra supersimétrica de espacio plano.

La relación (2.15a) muestra que la supergravedad es cláramente la "raíz cuadrada" de la relatividad general. De hecho, los estados físicos de la teoría cuántica deben satisfacer

$$\hat{\mathrm{S}}|\psi> = 0 \tag{2.16}$$

lo cual vía (2.15a) implica que

$$(\hat{\mathrm{S}}\hat{\bar{\mathrm{S}}} + \hat{\bar{\mathrm{S}}}\hat{\mathrm{S}})|\psi> = 0 \tag{2.17}$$

y por tanto

$$\hat{\mathcal{H}}_a|\psi> = 0 \tag{2.18}$$

Las funciones Σ_{cab}, Ω_{abcd} *y* H_{ab} dependen de las variables canónicas de la teoría. Las constantes de estructura del álgebra no son por tanto constantes sino que dependen de los campos. Esto hace que el problema del ordenamiento cuántico sea particularmente difícil. Este problema está presente en la relatividad general ordinaria, donde $\mathrm{R_{abcd}}$ aparece en el miembro derecho de (2.15d) para el caso correspondiente en términos de $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_i$; en lugar de $\mathcal{H}_a$. Siempre que se tiene un álgebra con constantes de estructura dinámica no es posible separar el álgebra del hecho de que los generadores deben estar constreñidos a anularse.

El propósito de éste trabajo es utilizar el formalismo de Teitelboim para obtener la raíz cuadrada a la ecuación de Wheeler–DeWitt asociada con la cosmología Bianchi tipo IX. A fin de llevar a cabo este programa, simplificaremos la supergravedad lo más posible. Las variables de campo básicas en la formulación gravitón–gravitino de la supergravedad[23] N=1 son la tétrada $e_\mu{}^{(a)}(x^\alpha)$ y el vector–espinor del campo del gravitino $\psi_{\mu A}(x^\alpha)$ donde $A = 1, \ldots, 4$ son índices espinoriales, las cuales obedecen el sistema de Einstein–Rarita–Schwinger formulado por Freedman y van Nieuwenhuizen. Para simplificar los cálculos al máximo posible, supondremos que $\psi_{\mu A}$ puede ser desarrollado en una base anticonmutante de orden dos[24], esto es

$$\psi_{\mu A} = \psi_{\mu A1}\epsilon_1 + \psi_{\mu A2}\epsilon_2 \tag{2.19}$$

donde las $\psi_{\mu Ai}$ son funciones ordinarias y las ϵ_i son constantes que obedecen $\epsilon_i\epsilon_j = -\epsilon_j\epsilon_i$. Es obvio que los grados de libertad que cuantizaremos son los $\psi_{\mu Ai}$, las cuales escribiremos como operadores $\hat{\psi}_{\mu A}$. La métrica tipo Bianchi que usaremos es

$$\mathrm{ds}^2 = (\mathrm{N}^2 - \mathrm{N}^\mathrm{j}\mathrm{N}_\mathrm{j})\mathrm{dt}^2 - 2\mathrm{N}_\mathrm{i}\mathrm{dt}\omega^\mathrm{i} - \mathrm{e}^{-2\Omega(\mathrm{t})}\ \mathrm{e}^{2\beta(\mathrm{t})}_{\mathrm{ij}}\omega^\mathrm{i}\omega^\mathrm{j} \tag{2.20}$$

donde $\Omega(t)$ es un escalar y $\beta_{ij}(t)$ es una matriz 3×3 y $\mathrm{N(t)}$ y $\mathrm{N_i(t)}$ son las funciones de lapse y shift, respectivamente. Las 1–formas ω^i son las apropiadas a un universo Bianchi particular y obedecen la relación

$$\mathrm{d}\omega^\mathrm{i} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{C}^\mathrm{i}_{\mathrm{jk}}\omega^\mathrm{j} \wedge \omega^\mathrm{k}. \tag{2.21}$$

donde $\mathrm{C}^\mathrm{i}_{\mathrm{jk}}$ son las constantes de estructura del grupo de movimiento asociado con el modelo Bianchi particular en consideración, aquí tomaremos las del modelo Bianchi tipo IX.

Consideraremos que la cosmología cuántica implica la cuantización del modelo homogéneo elegido, con $\psi_\mu = \psi_\mu(t)$ siendo $\Omega(t)$, $\beta_{ij}(t)$ *y* $\psi_{\mu Ai}(t)$ el conjunto completo de variables dinámicas. Tomaremos la parametrización de Misner[25] para la β_{ij} en la cual $\beta_{ij} = \mathrm{diag}(\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-, \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-, -2\beta_+)$.

2.2.-) Lagrangiano para el modelo Bianchi tipo IX

Como se mencionó en la introducción, nos restringimos al caso (que resulta ser general, excepto cuando se introduce supermateria)

$$\psi_\mu = \epsilon_1 \psi_{\mu 1} + \epsilon_2 \psi_{\mu 2} \tag{2.22}$$

con $\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2\epsilon_1 = 0$. El Lagrangiano de la supergravedad se reduce entonces a

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{-\mathrm{g}}\ \mathrm{R} - \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \mathrm{D}_\rho \psi_\sigma, \tag{2.23}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathrm{R}_{\mu\nu\mathrm{ab}} &= (\partial_\mu \omega_{\nu\mathrm{ab}} + \omega_{\mu\mathrm{a}}{}^{\mathrm{c}}\omega_{\nu\mathrm{cb}}) - (\mu \leftrightarrow \nu) \\
\mathrm{R}_{\mu\mathrm{a}} &= \mathrm{e}^{\mathrm{b}\nu}\mathrm{R}_{\mu\nu\mathrm{ab}} \qquad \mathrm{R} = \mathrm{e}^{\mathrm{a}\mu}\mathrm{R}_{\mu\mathrm{a}} \\
[\gamma_\mu, \gamma_\nu] &= 2\mathrm{g}_{\mu\nu} \qquad \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \\
\sigma^{\mathrm{ab}} &= \frac{1}{4}[\gamma^{\mathrm{a}}, \gamma^{\mathrm{b}}] \\
\mathrm{D}_\nu \psi_\rho &= \partial_\nu \psi_\rho + \frac{1}{2}\omega_{\nu\mathrm{ab}}\sigma^{\mathrm{ab}}\psi_\rho \\
\omega_{\mu\mathrm{ab}} &= \tilde{\omega}_{\mu\mathrm{ab}} + \kappa_{\mu\mathrm{ab}}
\end{aligned} \tag{2.24}$$

y

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_{\mu\mathrm{ab}} &= \frac{1}{2}[\mathrm{e_a}{}^\nu(\partial_\mu \mathrm{e}_{\mathrm{b}\nu} - \partial_\nu \mathrm{e}_{\mathrm{b}\mu}) + \mathrm{e_a}{}^\rho \mathrm{e_b}{}^\sigma(\partial_\sigma \mathrm{e}_{\mathrm{c}\rho})\mathrm{e}^{\mathrm{c}}{}_\mu] - (\mathrm{a} \leftrightarrow \mathrm{b}) \\
\kappa_{\mu\nu\rho} &= -\mathrm{S}_{\mu\nu\rho} + \mathrm{S}_{\nu\rho\mu} - \mathrm{S}_{\rho\mu\nu} \\
\mathrm{S}_{\mu\nu\rho} &= \frac{\mathrm{i}}{4}\overline{\psi}_\mu \gamma_\rho \psi_\nu
\end{aligned} \tag{2.25}$$

son los coeficientes de rotación de Ricci (sin torsión), los tensores de contorsión y torsión respectivamente. Nótese que en nuestro Lagrangiano todos los términos de tercer orden o mayor han desaparecido debido a (2.19). Para las matrices γ usamos la representación real de Majorana

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^1 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.26}$$

donde $\overline{\psi} = \psi^{\mathrm{T}}\mathrm{C}$ con $\mathrm{C} = -\mathrm{i}\gamma^0$.

La métrica de un modelo general tipo Bianchi es

$$ds^2 = (N^2 - N^j N_j)dt^2 - 2N_i dt\omega^i - e^{-2\Omega(t)}\, e^{2\beta(t)}_{ij}\omega^i\omega^j \tag{2.27}$$

Las 1-formas ω^i para el Bianchi tipo IX son

$$\begin{aligned}
\omega^1 &= -\sin x^3 dx^1 + \sin x^1 \cos x^3 dx^2 \\
\omega^2 &= \cos x^3 dx^1 + \sin x^1 \sin x^3 dx^2 \\
\omega^3 &= \cos x^1 dx^2 + dx^3.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Para escribir las ecuaciones de movimiento del gravitino necesitamos una tétrada ortonormal

$$\begin{aligned}
e_0^{(0)} &= N \qquad e_i^{(0)} = 0 \qquad e_0^{(i)} = e^{\Omega} e^{-\beta}_{ij}\, N_j \\
e_j^{(1)} &= e^{-\Omega}\, e^{\beta}{}_{11}[-\sin x^3\ \delta_j^1 + \sin x^1\ \cos x^3\ \delta_j^2] \\
e_j^{(2)} &= e^{-\Omega}\, e^{\beta}{}_{22}[\cos x^3\ \delta_j^1 + \sin x^1\ \sin x^3\ \delta_j^2] \\
e_j^{(3)} &= e^{-\Omega}\, e^{\beta}{}_{33}[\cos x^1\ \delta_j^2 + \delta_j^3],
\end{aligned} \tag{2.29}$$

donde β_{ij} está parametrizada por

$$\beta_{ij} = \mathrm{diag}(\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-, \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-, -2\beta_+). \tag{2.30}$$

Los coeficientes de rotación de Ricci (2.24) usando (2.29) y (2.30) se reducen a ($\tilde{\omega}_{abc} = e_a{}^{\mu}\tilde{\omega}_{\mu bc}$)

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_{ii0} &= \frac{\dot{\Omega} - \dot{\beta}_{ii}}{N} && \text{(no suma)} \\
\tilde{\omega}_{00i} &= \tilde{\omega}_{iik} = 0 \\
\tilde{\omega}_{ij0} &= \varepsilon^{ijk}\ \frac{N^k}{2N}[e^{\beta}{}_{jj} e^{-\beta}{}_{ii} - e^{\beta}{}_{ii} e^{-\beta}{}_{jj}] && \text{(no suma)} \\
\tilde{\omega}_{0ij} &= \varepsilon^{ijk}\ \frac{N^k}{2N}[e^{\beta}{}_{jj} e^{-\beta}{}_{ii} + e^{\beta}{}_{ii} e^{-\beta}{}_{jj}] && \text{(no suma)} \\
\tilde{\omega}_{ijk} &= \frac{e^{\Omega}}{2}[e^{2\beta}{}_{ii} - e^{2\beta}{}_{jj} - e^{2\beta}{}_{kk}] && i, j, k \quad \text{en orden ciclico y sin suma}
\end{aligned} \tag{2.31}$$

donde el punto significa derivada respecto al tiempo y todos los índices se refieren al espacio tangente.

Calculemos ahora el Lagrangiano (2.23) para este caso. Hacemos el siguiente cambio de variable para el campo del gravitino[26],*

$$\psi_\mu = ({}^3e)^{\frac{1}{2}}\, e_\mu{}^{(a)}\, \phi_{(a)} \qquad \mu, a = 0,1,2,3. \tag{2.32}$$

Así, el Lagrangiano (2.23) toma la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{3e^{-3\Omega}}{N}\{(\dot\Omega)^2 - (\dot\beta_+)^2 - (\dot\beta_-)^2\} \\
& - \frac{3}{4}e^{-\Omega}N\{\frac{1}{3}e^{-8\beta_+} + \frac{2}{3}e^{4\beta_+}[cosh(4\sqrt{3}\beta_-) - 1] - \frac{4}{3}e^{-2\beta_+}\cosh(2\sqrt{3}\beta_-)\} \\
& - \frac{iN}{2}e^{\Omega}\overline{\phi}_3\gamma^2\phi_1\{e^{-4\beta_+} + 2e^{2\beta_+}\sinh(2\sqrt{3}\beta_-)\} \\
& - \frac{iN}{2}e^{\Omega}\overline{\phi}_2\gamma^1\phi_3\{e^{-4\beta_+} - 2e^{2\beta_+}\sinh(2\sqrt{3}\beta_-)\} \\
& - \frac{iN}{2}e^{\Omega}\overline{\phi}_2\gamma^3\phi_1\{e^{-4\beta_+} - 2e^{2\beta_+}\cosh(2\sqrt{3}\beta_-)\} + iN^1\cosh(3\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-)\overline{\phi}_2\gamma^0\phi_3 \\
& + iN^2\cosh(3\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)\overline{\phi}_3\gamma^0\phi_1 + iN^3\cosh(2\sqrt{3}\beta_-)\overline{\phi}_1\gamma^0\phi_2 \\
& + \frac{i}{4N}\overline{\phi}_0\{\gamma^1\phi_1(2\dot\Omega + \dot\beta_+ + \sqrt{3}\dot\beta_-) + \gamma^2\phi_2(2\dot\Omega + \dot\beta_+ - \sqrt{3}\dot\beta_-) \\
& + \gamma^3\phi_3(2\dot\Omega - 2\dot\beta_+) - Ne^{\Omega}[-e^{2\beta_+ + 2\sqrt{3}\beta_-}\gamma^0\gamma^2\gamma^3\phi_1 \\
& + e^{2\beta_+ - 2\sqrt{3}\beta_-}\gamma^0\gamma^1\gamma^3\phi_2 - e^{-4\beta_+}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\phi_3]\} \\
& - \frac{i}{4N}\{\overline{\phi}_1\gamma^1(2\dot\Omega + \dot\beta_+ + \sqrt{3}\dot\beta_-) + \overline{\phi}_2\gamma^2(2\dot\Omega + \dot\beta_+ - \sqrt{3}\dot\beta_-) \\
& + \overline{\phi}_3\gamma^3(2\dot\Omega - 2\dot\beta_+) + Ne^{\Omega}[-e^{2\beta_+ + 2\sqrt{3}\beta_-}\overline{\phi}_1\gamma^0\gamma^2\gamma^3 + e^{2\beta_+ - 2\sqrt{3}\beta_-}\overline{\phi}_2\gamma^0\gamma^1\gamma^3 \\
& - e^{-4\beta_+}\overline{\phi}_3\gamma^0\gamma^1\gamma^2]\}\phi_0 - \frac{i}{2}\{\overline{\phi}_1\gamma^1\gamma^0(\gamma^2\dot\phi_2 + \gamma^3\dot\phi_3) \\
& + \overline{\phi}_2\gamma^2\gamma^0(\gamma^1\dot\phi_1 + \gamma^3\dot\phi_3) + \overline{\phi}_3\gamma^3\gamma^0(\gamma^1\dot\phi_1 + \gamma^2\dot\phi_2)\} \\
& - \frac{i}{2}\{(-3\dot\beta_+ - \sqrt{3}\dot\beta_-)\overline{\phi}_1\gamma^1\gamma^0\gamma^3\phi_3 + (-2\sqrt{3}\dot\beta_-)\overline{\phi}_1\gamma^1\gamma^0\gamma^2\phi_2 \\
& + (-3\dot\beta_+ + \sqrt{3}\dot\beta_-)\overline{\phi}_2\gamma^2\gamma^0\gamma^3\phi_3\}.
\end{aligned} \tag{2.33}$$

---

* Debido a que los campos fermiónicos $\psi_\mu \equiv \psi_{\mu A}$ donde el índice μ nos denota el campo espinorial y la letra A=1,2,3,4 la componente, entonces las funciones $\phi_{(a)A}$ también son espinores de 4 componentes, que en lo sucesivo se eliminara el parentesis () de la letra latina minuscula ya que todos los índices se referiran al espacio tangente.

A este nivel no hemos combinado los términos en ϕ_0 y $\overline{\phi}_0$ en un solo término ($\overline{\eta}\gamma\phi = -\overline{\phi}\gamma\eta$), así como tampoco hemos simplificado términos de la forma $\overline{\phi}_\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\phi_\beta(\overline{\phi}_\alpha\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\eta = \overline{\eta}\gamma^\rho\gamma^\nu\gamma^\mu\phi)$ para facilitar la comparación de las ecuaciones dinámicas obtenidas a partir de (2.33) con las ecuaciones exactas de supergravedad N=1, que tienen el siguiente aspecto

$$\mathrm{R}_{\mu\mathrm{a}} - \frac{1}{2}\mathrm{e}_{\mu\mathrm{a}}\mathrm{R} = \mathrm{T}_{\mu\mathrm{a}} \tag{2.34}$$

$$\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\gamma_5\gamma_\nu \mathrm{D}_\rho\psi_\sigma = 0 \tag{2.35}$$

donde

$$\mathrm{T}_{\mathrm{ab}} = -\frac{\mathrm{e}_{\nu\mathrm{a}}}{2\sqrt{-\mathrm{g}}}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\overline{\psi}_\mu\gamma_5\gamma_\mathrm{b}\mathrm{D}_\rho\psi_\sigma. \tag{2.36}$$

Las ecuaciones obtenidas en éste contexto, fueron determinadas en la norma definida por los multiplicadores de lagrange[19] $\mathrm{N} = 1$, $\mathrm{N}^\mathrm{i} = 0$, $\phi_0 = 0$, $\gamma^i\phi_i = 0$. No existe garantía de que las ecuaciones obtenidas a partir de lo anterior coincidan con la variación de la función de lagrange, puesto que se impuso la condición de homogeneidad sobre $\mathcal{L}$ antes de la variación. No siempre es consistente realizar la variación seguida por la homogenización con el procedimiento inverso.

Al variar $\mathcal{L}$ con respecto a N^i obtenemos las ecuaciones i0 de Einstein-Rarita-Schwinger, el anulamiento de las constricciones implica la validez de las ecuaciones 0i. Las ecuaciones ij con $i \neq j$ no las recuperamos, dado que se introdujo la métrica en la función de lagrange.[a]

2.3) Modelo Cosmológico Cuántico

Nuestra función de lagrange (2.33) puede ser transformada a la forma canónica en la forma usual, donde la parte fermiónica de la función de lagrange se transforma de manera

---

[a] Como la intención de este trabajo se centra en la propiedad de *raiz cuadrada* entre los generadores supersimétricos S y el hamiltoniano H_o no es importante obtenerlas, en caso contrario se incluirian como nuevas constricciones en la densidad lagrangiana y actuarian sobre la función de onda a nivel cuántico, modificando la forma de la función de onda obtenida. Lo mismo sucede con la constricción J_{ab} que no tampoco fué considerada en este enfoque.

semejante[b], donde el momento conjugado a las variables fermiónicas ϕ_i, π^k esencialmente son combinaciones de ellas mismas[18]. Así tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{canónico}} &= \mathrm{P}_\Omega\ \dot{\Omega} + \mathrm{P}_+\ \dot{\beta}_+ + \mathrm{P}_-\ \dot{\beta}_- \\
&+ \frac{\mathrm{Ne}^{3\Omega}}{12}\Big\{[-\mathrm{P}_\Omega^2 + \mathrm{P}_+^2 + \mathrm{P}_-^2 \\
&+ e^{-4\Omega}\{\frac{1}{3}e^{-8\beta_+} + \frac{2}{3}e^{4\beta_+}[\cosh(4\sqrt{3}\beta_-) - 1] - \frac{4}{3}e^{-2\beta_+}\cosh(2\sqrt{3}\beta_-)\}] \\
&- iN[(3P_+ + \sqrt{3}P_-)\overline{\phi}_1\gamma^1\gamma^0\gamma^3\phi_3 + 2\sqrt{3}P_-\overline{\phi}_1\gamma^1\gamma^0\gamma^2\phi_2 \\
&+ (3P_+ - \sqrt{3}P_-)\overline{\phi}_2\gamma^2\gamma^0\gamma^3\phi_3]\Big\} \\
&+ \mathrm{iN}^1\cosh(3\beta_+ - \sqrt{3}\beta_-)\overline{\phi}_2\gamma^0\phi_3 \\
&+ \mathrm{iN}^2\cosh(3\beta_+ + \sqrt{3}\beta_-)\overline{\phi}_3\gamma^0\phi_1 \\
&+ \mathrm{iN}^3\cosh(2\sqrt{3}\beta_-)\overline{\phi}_1\gamma^0\phi_2 \\
&+ \frac{i}{12}\overline{\phi}_0\ \{e^{3\Omega}[P_\Omega(\gamma^i\phi_i) - \frac{1}{2}P_+(\gamma^1\phi_1 + \gamma^2\phi_2 - 2\gamma^3\phi_3) - \frac{\sqrt{3}}{2}P_-(\gamma^1\phi_1 - \gamma^2\phi_2)] \\
&+ e^{\Omega}[-e^{2\beta_+ + 2\sqrt{3}\beta_-}\gamma^0\gamma^2\gamma^3\phi_1 + e^{2\beta_+ - 2\sqrt{3}\beta_-}\gamma^0\gamma^1\gamma^3\phi_2 - e^{-4\beta_+}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\phi_3]\} \\
&- \frac{i}{12}\{e^{3\Omega}[(\overline{\phi}_i\gamma^i)P_\Omega - \frac{1}{2}(\overline{\phi}_1\gamma^1 + \overline{\phi}_2\gamma^2 - 2\ \overline{\phi}_3\gamma^3)P_+ - \frac{\sqrt{3}}{2}\ (\overline{\phi}_1\gamma^1 - \overline{\phi}_2\gamma^2)P_-] \\
&- e^{\Omega}[-e^{2\beta_+ + 2\sqrt{3}\beta_-}\overline{\phi}_1\gamma^0\gamma^2\gamma^3 + e^{2\beta_+ - 2\sqrt{3}\beta_-}\overline{\phi}_2\gamma^0\gamma^1\gamma^3 - e^{-4\beta_+}\overline{\phi}_3\gamma^0\gamma^1\gamma^2]\}\ \phi_0 \\
&- \frac{i}{2}[\overline{\phi}_1\gamma^1\gamma^0(\gamma^2\dot{\phi}_2 + \gamma^3\dot{\phi}_3) + \overline{\phi}_2\gamma^2\gamma^0(\gamma^1\dot{\phi}_1 + \gamma^3\dot{\phi}_3) + \overline{\phi}_3\gamma^3\gamma^0(\gamma^1\dot{\phi}_1 + \gamma^2\dot{\phi}_2)].
\end{aligned}
\tag{2.37}
$$

Las constricciones $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$ y S son multiplicadas por las variables no-dinámicas N, N^{i} y ϕ_0. De manera semejante al trabajo desarrollado por otros autores en este contexto, las constricciones satisfacen una álgebra similar al álgebra descubierta por Teitelboim[17]. Ellas mantienen la propiedad del álgebra de la *raíz cuadrada*. Si nosotros usamos la misma forma homogénea para los paréntesis de Dirac[22,26], (y su generalización Grassmanniana[27])

$$\{S_A(x), \overline{S}_B(x')\} = \gamma^\mu_{AB}\mathcal{H}_\mu\ \delta(x, x') \tag{2.38}$$

será entonces posible mostrar que en éste caso la constricción supersimétrica S y $\mathcal{H}_0$ pre-

[b] El momento canónico de las variables bosónicas $\mathrm{q_k}, \mathrm{p^k} = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{\mathrm{q}}_\mathrm{k}}$, mientras que para el campo fermiónico ϕ_i, $\pi^k = \frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\dot{\phi}_k} = \frac{1}{2}i\epsilon^{ijk}\overline{\phi}_i\gamma_5\gamma_j$, éste se calcula de la ecuación (2.2).

sentan la *propiedad de raíz cuadrada*

$$-\{S_1, \overline{S}_4\} = \{S_1, S_1\} = \frac{3}{8}\frac{1}{12}e^{3\Omega}(\gamma_0)_{14}[\mathcal{H}_0 + 18(\overline{\phi}_j\gamma^j\gamma^0)_1\ S_1 \\ + 54i\ e^{-2\Omega}\ \overline{S}_1\gamma^0(e^{2\beta_+ + 2\sqrt{3}\beta_-}\gamma^2\gamma^0\gamma^3\phi_1 \\ + e^{2\beta_+ - 2\sqrt{3}\beta_-}\gamma^3\gamma^0\gamma^1\phi_2 + e^{-4\beta_+}\gamma^1\gamma^0\gamma^2\phi_3)], \tag{2.39}$$

en donde el lado derecho de esta ecuación es un "hamiltoniano generalizado" $\tilde{H}$ (como se ve de ecuación (2.38)) con $\tilde{H} = \tilde{H}(P's, \phi's)$ (que depende tanto de cantidades bosónicas como fermiónicas), que contiene al hamiltoniano $\mathcal{H}_0$ † de la cosmología estandar (ver ecuación (2.40)), $\mathcal{H}_0$ sólo depende de los momentos bosónicos de la teoría.

Como en el caso del modelo[28] de Bianchi tipo I, la homogenización de la función de lagrange introduce términos extras dentro del álgebra, que son proporcionales a la constricción S y dependen únicamente de las variables canónicas de la teoría. Puesto que ellas son proporcionales a S, son debilmente cero y no adicionan nuevas constricciones al álgebra, para $A \neq B$ todos los paréntesis $\{S_A, S_B\} \approx 0$, teniendo relaciones similares a (2.39) para el resto de $\{S_A, S_A\}$.

Se puede mostrar que la constricción usual en cosmología Bianchi tipo IX

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{12}e^{3\Omega}[(P_\Omega^2 - P_+^2 - P_-^2) \\ - e^{-4\Omega}\{\frac{1}{3}e^{-8\beta_+} + \frac{2}{3}e^{4\beta_+}[\cosh(4\sqrt{3}\beta_-) - 1] \\ - \frac{4}{3}e^{-2\beta_+}\cosh(2\sqrt{3}\beta_-)\}] \tag{2.40}$$

que genera la ecuación semejante a la ecuación de Klein-Gordon, es una consecuencia de $S\,\psi = 0$ a través del álgebra (2.38).

† Esta constricción $\mathcal{H}_0$ nos determina la ecuación cuántica de Wheeler-DeWitt que no depende de variables fermiónicas.

Las cuatro componentes del generador supersimétrico S son[c]:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{S}_1 = &-\frac{e^{3\Omega}}{12}[\mathrm{P}_\Omega(-\phi_{11}-\phi_{24}+\phi_{32})+\frac{1}{2}\mathrm{P}_+(2\phi_{32}+\phi_{24}+\phi_{11})+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{P}_-(-\phi_{24}+\phi_{11})\\
&+3e^{-2\Omega}\{e^{2\beta_++2\sqrt{3}\beta_-}\phi_{12}+e^{2\beta_+-2\sqrt{3}\beta_-}\phi_{23}+e^{-4\beta_+}\phi_{31}\}]\\
\mathrm{S}_2 = &-\frac{e^{3\Omega}}{12}[\mathrm{P}_\Omega(\phi_{12}+\phi_{23}+\phi_{31})+\frac{1}{2}\mathrm{P}_+(2\phi_{31}-\phi_{23}-\phi_{12})+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{P}_-(\phi_{23}-\phi_{12})\\
&+3e^{-2\Omega}\{e^{2\beta_++2\sqrt{3}\beta_-}\phi_{11}-e^{2\beta_+-2\sqrt{3}\beta_-}\phi_{24}-e^{-4\beta_+}\phi_{32}\}]\\
\mathrm{S}_3 = &-\frac{e^{3\Omega}}{12}[\mathrm{P}_\Omega(-\phi_{13}+\phi_{22}+\phi_{34})+\frac{1}{2}\mathrm{P}_+(2\phi_{34}-\phi_{22}+\phi_{13})+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{P}_-(\phi_{22}+\phi_{13})\\
&+3e^{-2\Omega}\{-e^{2\beta_++2\sqrt{3}\beta_-}\phi_{14}+e^{2\beta_+-2\sqrt{3}\beta_-}\phi_{21}-e^{-4\beta_+}\phi_{33}\}]\\
\mathrm{S}_4 = &-\frac{e^{3\Omega}}{12}[\mathrm{P}_\Omega(\phi_{14}-\phi_{21}+\phi_{33})+\frac{1}{2}\mathrm{P}_+(2\phi_{33}+\phi_{21}-\phi_{14})+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{P}_-(-\phi_{21}-\phi_{14})\\
&+3e^{-2\Omega}\{-e^{2\beta_++2\sqrt{3}\beta_-}\phi_{13}+e^{2\beta_+-2\sqrt{3}\beta_-}\phi_{22}+e^{-4\beta_+}\phi_{34}\}]
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

Para la cuantización de este modelo clásico seguimos el procedimiento canónico, convertimos P_Ω, $\mathrm{P}_\pm$ y ϕ_i a operadores que actuan sobre la función de onda ψ del universo, que en principio nos dara la probabilidad de encontrar al universo en un estado con valores dados de Ω, $\beta_\pm$ y ϕ_i. Consecuentemente las constricciones S, $\mathcal{H}_0$ y $\mathcal{H}_i$ son ahora operadores con el orden de los factores arbitrario. La representación de los operadores $\hat{S}_A$ es la siguiente, los momentos P_Ω, P_+, P_- toman la forma usual[d] $\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\Omega}$, $-\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial\beta_\pm}$ respectivamente. También deberemos de encontrar una representación para las componentes del

---

[c] En este punto aparecen las componentes del campo del gravitino ϕ_i como ϕ_{iA} donde los índices nos indican, i=espinor y A=componente, debido a que cada campo ϕ_i es multiplicado por las diferentes matrices γ^j (ver ecuación (2.26)), por ejemplo

$$
\gamma^1\phi_1-\gamma^2\phi_2 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & 0\\ 0 & -i & 0 & 0\\ 0 & 0 & i & 0\\ 0 & 0 & 0 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{12}\\ \phi_{13}\\ \phi_{14}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i\\ 0 & 0 & -i & 0\\ 0 & -i & 0 & 0\\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_{21}\\ \phi_{22}\\ \phi_{23}\\ \phi_{24}\end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} i(\phi_{11}-\phi_{24})\\ i(-\phi_{12}+\phi_{23})\\ i(\phi_{13}+\phi_{22})\\ i(-\phi_{14}-\phi_{21})\end{pmatrix},
$$

como se ve en la ecuación (2.37) cuando construimos la constricción S

[d] Los parentesis de Poisson entre los momentos y las variables canónicas conjugadas a ellos es 1 (cantidades bosónicas)

campo fermiónico ϕ_{iA} las cuales deben de cumplir[e]

$$\{\phi_{\mathrm{iA}}, \phi_{\mathrm{jB}}\} = \frac{1}{8}\mathrm{i}(\gamma_{\mathrm{j}}\gamma_{\mathrm{i}})_{\mathrm{AB}} \tag{2.42}$$

y para cada $\mathrm{S_A}$ podemos escribir $\mathrm{S_A}\ \psi = 0$, donde cada $\hat{\mathrm{S}}_{\mathrm{A}}$ será un operador matricial del orden más pequeño posible que nos produzca el álgebra apropiada para S. Pero también es posible tomar otras realizaciones para las ϕ_{iA}, i.e en término de operadores diferenciales[12d], esto último no lo haremos aquí.

En analogía con la ecuación de Dirac, cada $\mathrm{S_A}$ pueden ser escritas como

$$\mathrm{S_A} = -\frac{\mathrm{e}^{3\Omega}}{12}\Big\{\hat{\mathrm{M}}_{\mathrm{A1}}\,\mathrm{P}_{\Omega} + \hat{\mathrm{M}}_{\mathrm{A2}}\,\mathrm{P}_{+} + \hat{\mathrm{M}}_{\mathrm{A3}}\,\mathrm{P}_{-}$$
$$+\hat{\mathrm{M}}_{\mathrm{B1}}\,\mathrm{e}^{-2\Omega}\,\mathrm{e}^{2\beta_{+}+2\sqrt{3}\beta_{-}} + \hat{\mathrm{M}}_{\mathrm{B2}}\,\mathrm{e}^{-2\Omega}\,\mathrm{e}^{2\beta_{+}-2\sqrt{3}\beta_{-}} + \hat{\mathrm{M}}_{\mathrm{B3}}\,\mathrm{e}^{-2\Omega}\,\mathrm{e}^{-4\beta_{+}}\Big\}$$

donde cada matriz $\hat{\mathrm{M}}_{\mathrm{Bi}}$ es una combinación lineal de las matrices $\hat{\mathrm{M}}_{\mathrm{Ai}}$. De este modo, a partir de (2.41) podemos escribir para cada $\mathrm{S_A}$[f]

$$\mathrm{S}_1 = -\frac{\mathrm{e}^{3\Omega}}{12}\Big\{\mathrm{M}_{11}\mathrm{P}_{\Omega} + \mathrm{M}_{12}\mathrm{P}_{+} + \mathrm{M}_{13}\mathrm{P}_{-} + \mathrm{e}^{-2\Omega}\Big[\mathrm{e}^{2\beta_{+}+2\sqrt{3}\beta_{-}}(\mathrm{M}_{21} - \mathrm{M}_{22} - \sqrt{3}\mathrm{M}_{23})$$
$$+\mathrm{e}^{2\beta_{+}-2\sqrt{3}\beta_{-}}(\mathrm{M}_{21} - \mathrm{M}_{22} + \sqrt{3}\mathrm{M}_{23}) + \mathrm{e}^{-4\beta_{+}}(\mathrm{M}_{21} + 2\mathrm{M}_{22})\Big]\Big\} \tag{2.43a}$$

$$\mathrm{S}_2 = -\frac{\mathrm{e}^{3\Omega}}{12}\Big\{\mathrm{M}_{21}\mathrm{P}_{\Omega} + \mathrm{M}_{22}\mathrm{P}_{+} + \mathrm{M}_{23}\mathrm{P}_{-} + \mathrm{e}^{-2\Omega}\Big[\mathrm{e}^{2\beta_{+}+2\sqrt{3}\beta_{-}}(-\mathrm{M}_{11} + \mathrm{M}_{12} + \sqrt{3}\ \mathrm{M}_{13})$$
$$+\mathrm{e}^{2\beta_{+}-2\sqrt{3}\beta_{-}}(-\mathrm{M}_{11} + \mathrm{M}_{12} - \sqrt{3}\ \mathrm{M}_{13}) + \mathrm{e}^{-4\beta_{+}}(-\mathrm{M}_{11} - 2\ \mathrm{M}_{12})\Big]\Big\}, \tag{2.43b}$$

$$\mathrm{S}_3 = -\frac{\mathrm{e}^{3\Omega}}{12}\Big\{\mathrm{M}_{31}\mathrm{P}_{\Omega} + \mathrm{M}_{32}\mathrm{P}_{+} + \mathrm{M}_{33}\mathrm{P}_{-} + \mathrm{e}^{-2\Omega}\Big[\mathrm{e}^{2\beta_{+}+2\sqrt{3}\beta_{-}}(-\mathrm{M}_{41} + \mathrm{M}_{42} + \sqrt{3}\mathrm{M}_{43})$$
$$+\mathrm{e}^{2\beta_{+}-2\sqrt{3}\beta_{-}}(-\mathrm{M}_{41} + \mathrm{M}_{42} - \sqrt{3}\mathrm{M}_{43}) + \mathrm{e}^{-4\beta_{+}}(-\mathrm{M}_{41} - 2\mathrm{M}_{42})\Big]\Big\}, \tag{2.43c}$$

$$\mathrm{S}_4 = -\frac{\mathrm{e}^{3\Omega}}{12}\Big\{\mathrm{M}_{41}\mathrm{P}_{\Omega} + \mathrm{M}_{42}\mathrm{P}_{+} + \mathrm{M}_{43}\mathrm{P}_{-} + \mathrm{e}^{-2\Omega}\Big[\mathrm{e}^{2\beta_{+}+2\sqrt{3}\beta_{-}}(\mathrm{M}_{31} - \mathrm{M}_{32} - \sqrt{3}\mathrm{M}_{33})$$
$$+\mathrm{e}^{2\beta_{+}-2\sqrt{3}\beta_{-}}(\mathrm{M}_{31} - \mathrm{M}_{32} + \sqrt{3}\mathrm{M}_{33}) + \mathrm{e}^{-4\beta_{+}}(\mathrm{M}_{31} + 2\mathrm{M}_{32})\Big]\Big\}. \tag{2.43d}$$

---

[e] El parentesis de Poisson entre ϕ_i y su momento conjugado π^k es $\{\phi_{iA}, \pi^k_B\} = (\delta^k_i)_{AB}$, que escribiendo para $\pi^k = i\overline{\phi}_i\gamma^0\sigma^{ik}$ se obtiene el álgebra entre las componentes del campo fermiónico $\{\phi_{iA}, \phi_{jB}\} \longrightarrow (\gamma_j\gamma_i)_{AB}$, ver ref [18].

[f] Cada matriz $\hat{\mathrm{M}}_{\mathrm{Ai}}$ es una combinación de los operadores $\hat{\phi}_{\mathrm{iA}}$, que se leen de la ecuación (2.41), por ejemplo: $\hat{\mathrm{M}}_{11} \equiv (-\hat{\phi}_{11} - \hat{\phi}_{24} + \hat{\phi}_{32})$, $\hat{\mathrm{M}}_{12} \equiv \frac{1}{2}(2\hat{\phi}_{32} + \hat{\phi}_{24} + \hat{\phi}_{11})$, $\hat{\mathrm{M}}_{13} \equiv \frac{\sqrt{3}}{2}(-\hat{\phi}_{24} + \hat{\phi}_{11})$, etc., de esto, uno calcula las matrices $\hat{\mathrm{M}}_{\mathrm{Bi}}$ que aparecen en los términos del potencial.

Las matrices que aparecen en la parte *libre* de S_1 aparecen en el término de *interacción* de S_2 como combinación lineal y viceversa. Si uno observa S_3 y S_4 estan acopladas en forma analoga.

El hecho de que las constricciones S_1 y S_2 se encuentren acopladas debido que comparten el mismo conjunto de ϕ'_{iA}s, y éste también es el caso del acoplamiento de S_3 y S_4, nos permite elegir dos conjuntos independientes de 6 matrices ortonormales, uno para las combinaciones lineales de las ϕ_{iA} que aparecen en S_1 y S_2 y otros para las que aparecen en S_3 y S_4. De este modo la función de onda multicomponente tiene 16 entradas que nosotros dividimos como sigue:

$$\psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$$

con cada Ψ_1 y Ψ_2 de 8 componentes. Sobre Ψ_1 actuaran sólo S_1 y S_2 y sobre Ψ_2, S_3 y S_4 correspondientemente.

Todas las constricciones actuaran sobre la función de onda completa ψ, pero lo que se ha logrado aqui es dividir el problema en 2 partes, tales que las primeras dos S's sobre la segunda parte de la función de onda den identicamente cero y lo mismo pasa con las otras dos S's, S_3 y S_4 cuando actuan sobre la primera parte de la función de onda. Esto es como partir la ecuación de Dirac en dos ecuaciones independientes, con matrices de Pauli para las componentes I y II, asi como para III y IV.

En (2.43a) tenemos seis matrices M_{Ai}, y para preservar el álgebra para las M_{Ai}[g] esto implica que el mínimo rango posible para una representacion matricial de M_{Ai}, es ocho[h]. Estas matrices M_{Ai} las renombramos por las matrices Γ_i las cuales calculamos siguiendo el procedimiento de Pais[29]. De éste modo la ecuación cuántica $\hat{S}_A\ |\psi_A>= 0$, donde ψ_A

[g] Como las matrices M_{Ai} son combinaciones lineales de losoperadores $\hat{\phi}_{iA}$, el álgebra que cumplen estas matrices, esencialmente es el álgebra para las ϕ's, ecuación (2.42)

[h] Esto se puede ver si aplicamos la formula $\text{dim.matriz} = 2^{\frac{N}{2}}$ ó, $2^{\frac{N-1}{2}}$ cuando el número de matrices independientes N es par ó impar, respectivamente. En nuestro caso N=6, obteniendo que la dimensión de las matrices M_{Ai} es ocho.

son vectores de ocho componentes, para la ψ nos queda de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
&\{i\Gamma^1 \frac{\partial}{\partial \Omega} - i\Gamma^2 \frac{\partial}{\partial \beta_+} - i\Gamma^3 \frac{\partial}{\partial \beta_-} + e^{-2\Omega} e^{2\beta_+ + 2\sqrt{3}\beta_-}[\Gamma^4 - \Gamma^5 - \sqrt{3}\,\Gamma^6] \\
&\quad + e^{-2\Omega} e^{2\beta_+ - 2\sqrt{3}\beta_-}[\Gamma^4 - \Gamma^5 + \sqrt{3}\,\Gamma^6] + e^{-2\Omega} e^{-4\beta_+}[\Gamma^4 + 2\,\Gamma^5]\}\Psi_1 = 0, \\
&\{i\Gamma^4 \frac{\partial}{\partial \Omega} - i\Gamma^5 \frac{\partial}{\partial \beta_+} - i\Gamma^6 \frac{\partial}{\partial \beta_-} + e^{-2\Omega} e^{2\beta_+ + 2\sqrt{3}\beta_-}[-\Gamma^1 + \Gamma^2 + \sqrt{3}\,\Gamma^3] \\
&\quad + e^{-2\Omega} e^{2\beta_+ - 2\sqrt{3}\beta_-}[-\Gamma^1 + \Gamma^2 - \sqrt{3}\,\Gamma^3] + e^{-2\Omega} e^{-4\beta_+}[-\Gamma^1 - 2\,\Gamma^2]\}\Psi_1 = 0, \\
&\{i\Gamma^1 \frac{\partial}{\partial \Omega} - i\Gamma^2 \frac{\partial}{\partial \beta_+} - i\Gamma^3 \frac{\partial}{\partial \beta_-} + e^{-2\Omega} e^{2\beta_+ + 2\sqrt{3}\beta_-}[-\Gamma^4 + \Gamma^5 + \sqrt{3}\,\Gamma^6] \\
&\quad + e^{-2\Omega} e^{2\beta_+ - 2\sqrt{3}\beta_-}[-\Gamma^4 + \Gamma^5 - \sqrt{3}\,\Gamma^6] + e^{-2\Omega} e^{-4\beta_+}[-\Gamma^4 - 2\,\Gamma^5]\}\Psi_2 = 0, \\
&\{i\Gamma^4 \frac{\partial}{\partial \Omega} - i\Gamma^5 \frac{\partial}{\partial \beta_+} - i\Gamma^6 \frac{\partial}{\partial \beta_-} + e^{-2\Omega} e^{2\beta_+ + 2\sqrt{3}\beta_-}[\Gamma^1 - \Gamma^2 - \sqrt{3}\,\Gamma^3] \\
&\quad + e^{-2\Omega} e^{2\beta_+ - 2\sqrt{3}\beta_-}[\Gamma^1 - \Gamma^2 + \sqrt{3}\,\Gamma^3] + e^{-2\Omega} e^{-4\beta_+}[\Gamma^1 + 2\,\Gamma^2]\}\Psi_2 = 0.
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

donde las matrices Γ son

$$
\Gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^\mu \\ \gamma^\mu & 0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^5 \\ \gamma^5 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Gamma^6 = i\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
\gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.45}
$$

$$
\gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Estas ecuaciones tienen un acoplamiento no minimal similar al del oscilador de Dirac[30], donde P_j es transformado a $P_j - imw\beta r_j$, con β una matriz. Las ecuaciones tipo Dirac son transformadas unas a otras cambiando el signo del término de potencial, de igual manera a la que se da en la teoría de Dirac estándar, las soluciones de energía positiva y negativa estan relacionadas, teniendo una clase de comportamiento tipo universo-antiuniverso.

La solución a este sistema de ecuaciones diferenciales es muy complicado[31a], pero eligiendo un nuevo conjunto de variables se puede resolver por separación de variables; aquí muestro la solución a la primera ecuación para el modelo Bianchi tipo IX, falta aplicar la segunda ecuación S_2 para conocer como se restringe esta solución.

$$
\Psi_1 = \begin{pmatrix}
\psi_{01}\, e^{-e^\alpha} e^{e^\beta} e^{e^\gamma} + e^{-e^\alpha}\, E_i(\alpha)\, n_1 - e^{e^\beta}\, E_i(\beta)\, m_1 - e^{e^\gamma}\, E_i(\gamma)\, l_1 \\
\psi_{02}\, e^{e^\alpha} e^{-e^\beta} e^{e^\gamma} - e^{e^\alpha}\, E_i(\alpha)\, n_2 - e^{-e^\beta}\, E_i(\beta)\, m_2 - e^{e^\gamma}\, E_i(\gamma)\, l_2 \\
\psi_{03}\, e^{-e^\alpha} e^{-e^\beta} e^{e^\gamma} + e^{-e^\alpha}\, E_i(\alpha)\, n_3 - e^{-e^\beta}\, E_i(\beta)\, m_3 - e^{-e^\gamma}\, E_i(\gamma)\, l_3 \\
\psi_{04}\, e^{e^\alpha} e^{e^\beta} e^{-e^\gamma} - e^{e^\alpha}\, E_i(\alpha)\, n_4 + e^{e^\beta}\, E_i(\beta)\, m_4 - e^{-e^\gamma}\, E_i(\gamma)\, l_4 \\
\psi_{05}\, e^{-e^\alpha} e^{e^\beta} e^{-e^\gamma} + e^{-e^\alpha}\, E_i(\alpha)\, n_5 - e^{e^\beta}\, E_i(\beta)\, m_5 + e^{-e^\gamma}\, E_i(\gamma)\, l_5 \\
\psi_{06}\, e^{e^\alpha} e^{-e^\beta} e^{-e^\gamma} - e^{e^\alpha}\, E_i(\alpha)\, n_6 - e^{-e^\beta}\, E_i(\beta)\, m_6 + e^{-e^\gamma}\, E_i(\gamma)\, l_6 \\
\psi_{07}\, e^{-e^\alpha} e^{-e^\beta} e^{e^\gamma} + e^{-e^\alpha}\, E_i(\alpha)\, n_7 + e^{-e^\beta}\, E_i(\beta)\, m_7 + e^{e^\gamma}\, E_i(\gamma)\, l_7 \\
\psi_{08}\, e^{e^\alpha} e^{e^\beta} e^{e^\gamma} - e^{e^\alpha}\, E_i(\alpha)\, n_8 + e^{e^\beta}\, E_i(\beta)\, m_8 + e^{e^\gamma}\, E_i(\gamma)\, l_8
\end{pmatrix} \tag{2.46}
$$

donde las constantes de separación cumplen la relación $n_j - m_j - l_j = 0, j = 1, \cdots, 8$ y las nuevas variables son $\alpha = -\Omega + \beta_+ + \sqrt{3}\beta_-$, $\beta = -\Omega + \beta_+ - \sqrt{3}\beta_-$, $\gamma = -\Omega - 2\beta_+$, y $E_i(*)$ es la función integral-exponencial[31b], que depende del argumento * especificado en cada caso.

En este punto es conveniente mencionar el porque la función de onda no depende explicitamente de las variables del gravitino; en principio la función de onda multicomponente $\psi = \psi(\Omega, \beta_\pm, \phi_{iA})$, pero en la forma funcional de la ψ que se obtiene en este formalismo, no aparece en ningún momento ninguna de las componentes ϕ_{iA}. La razon es que se elige que el operador matricial $\hat{\mathrm{M}}_{\mathrm{Ai}}$, que tiene la información fermiónica del problema, aplicado a la función de onda $|\psi>$, dé una ecuación de eigenvalores y eigenvectores, es decir, donde los eigenvalores son las matrices constantes M_{Ai} que son conbinaciones de las matrices Γ_i (ecuación (2.45)), ó sea $\hat{\mathrm{M}}_{\mathrm{Ai}}|\psi >= \mathrm{M}_{\mathrm{Ai}}|\psi$. El inconveniente es que no se tiene una interpretación tan clara como en el problema del oscilador armonico en mecánica cuántica estandard, cuando la representación elegida es la representación de número, donde cada eigenvector y eigenvalor esta relacionado con el estado excitado correspondiente del oscilador harmonico; en nuestro caso tenemos combinaciones de las componentes $\hat{\phi}_{\mathrm{iA}}$ como eigenvalor y no podemos asegurar que sea un eigenvector de un estado ϕ_{iA} en particular.

Por otro lado, haciendo $\beta_- = P_- = 0$, se obtiene el modelo de Taub para el cual ya existe una solución en base a funciones especiales[31a] y al tomar el límite $\beta_+ \to \infty$ para este modelo, tenemos el modelo del Taub Extremo en el micro-super-espacio. La solucioón a este último modelo se presenta en la siguiente subsección.

2.4) Modelo de Taub

Es bien conocido[32] en cosmología cuántica estándar que para el sector del micro-superespacio del modelo de Taub (tomando el límite de β_+ muy grande, Ω grande), la ecuación de Wheeler-DeWitt corresponde a una ecuación tipo Klein-Gordon sin término de masa, i.e. ningún término de potencial está presente. Sin embargo, para éste caso particular la ecuación tipo Dirac obtenida en (Super)cosmología cuántica contiene un término de potencial. De ésto se infiere que existen diferencias en los resultados que se obtienen para la solución de la función de onda usando (Super)cosmología y cosmología cuántica estándar.

Para el modelo de Taub, el vector de estado se divide en cuatro vectores de 4 componentes y cada uno de ellos obedece una ecuación tipo Dirac, que tiene la siguiente forma

$$\left(P_\Omega + \gamma P_+ + \beta_1 e^{-2\Omega} e^{2\beta_+} + \beta_2 e^{-2\Omega} e^{-4\beta_+}\right)\psi = 0, \tag{2.47}$$

con γ, β_1 y β_2 matrices, y $\gamma^2 = \beta_2^2 = const.$, $\beta_1^2 = 0$, asi que cuando tomamos el cuadrado de ésta ecuación, los dos términos del potencial nos reproducen el potencial del modelo de Taub

$$\mathrm{e}^{-4\Omega}[\mathrm{e}^{-8\beta_+} - 4\mathrm{e}^{-2\beta_+}], \tag{2.48}$$

el cual en el límite del sector del microsuperespacio es cero. Sin embargo, en éste límite el último término en la ecuacion (2.47) es cero, pero la ecuación diferencial tiene otro término que no es cero, teniendo un término de potencial. Si tomamos el cuadrado de ésta ecuación, el cuadrado del término de potencial remanente es cero, pero el producto con Ω y P_+ produce términos extra, como en el caso de la teoría de Dirac estándar.

Luego entonces, en el sector del microsuperespacio para el modelo de Taub, la ecuación tipo Dirac y la ecuación iterada de la misma, en (Super)cosmología, poseen un término de potencial, en contraste con la ecuación de Wheeler-DeWitt de la cosmología estándar. Para poder hacer comparaciones con cosmología estándar, presentamos la solución al conjunto de ecuaciones tipo Dirac que se obtienen para éste modelo restringido. En ésta, uno observa que las soluciones decrecen exponencialmente con el cuadrado de uno de los radios del universo, resultado obtenido previamente por Hawking y Page[33] para el modelo de Friedmann, y por Moncrief y Ryan[34] en cosmología cuántica estándar. Conviene mencionar una posible conexión entre estos resultados y el formalismo de Ashtekar[35] para gravedad cuántica. Kodama[36] mostró que existen funciones de estado ADM que pueden ser construidas de soluciones Ψ_A, para la ecuación de Wheeler-DeWitt, en la forma

$$\Psi_{\mathrm{ADM}} = \Psi_{\mathrm{A}} \exp(\pm \mathrm{i} \mathrm{S}_{\mathrm{A}}), \tag{2.49}$$

donde S_{A} es una funcional con parte imaginaria únicamente y que puede ser calculada algebráicamente para cualquier modelo cosmológico[36,37]

Considerando que $\Psi = We^{-S}$, $W = const$, Moncrief y Ryan[34] fueron capaces de obtener soluciones para el modelo cosmológico del Bianchi tipo IX, y en particular para el modelo de Taub, encontrando

$$\mathrm{S} = \frac{1}{6} \mathrm{e}^{-2\Omega} [\mathrm{e}^{-4\beta_+} + 2\mathrm{e}^{2\beta_+}]. \tag{2.50}$$

Nuestras soluciones para el sector del micro-super-espacio para el modelo de Taub son de la forma $\exp(-e^{-2\Omega} e^{2\beta_+})$, que es una exponencial cuyo argumento es el factor del primer término del potencial en (2.47). Aquí ambos términos en el potencial tienen la forma de S en (2.50), pero con la diferencia que β_1 y β_2 son matrices.

Cosmología cuántica significará la cuantización del modelo homogeneo de Taub con $\Psi_\mu = \Psi_\mu(t)$ y el conjunto completo de variables dinámicas $\Omega(t)$, $\beta_{ij}(t)$ and $\Psi_{\mu A_i}(t)$. El problema de construir una acción que sea función únicamente de éstas variables dinámicas y que nos dé el conjunto de ecuaciones de Rarita-Schwinger es bien conocido en cosmología cuántica, pero para los Bianchi Clase B esto no se puede hacer[38]. Ahora la matriz $\beta_{\mathrm{ij}} = \mathrm{diag}(\beta_+, \beta_+, -2\beta_+)$

La forma canónica del lagrangiano (2.33) se encuentra de la misma manera como en el caso del Bianchi tipo IX.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{canónico}} &= P_\Omega\,\dot{\Omega} + P_+\,\dot{\beta}_+ + \frac{Ne^{3\Omega}}{12}[-P_\Omega^2 + P_+^2 + \frac{1}{3}e^{-4\Omega}\{e^{-8\beta_+} - 4e^{-2\beta_+}\}] \\
&+ \frac{i}{4}Ne^{3\Omega}P_+\overline{\phi}_3\gamma^3\gamma^0(\gamma^1\phi_1 + \phi_2\gamma^2) \\
&- \frac{iN}{2}e^{\Omega}e^{-4\beta_+}\{\overline{\phi}_3\gamma^2\phi_1 + \overline{\phi}_2\gamma^1\phi_3 + \overline{\phi}_2\gamma^3\phi_1\} + iNe^{\Omega}e^{2\beta_+}\overline{\phi}_2\gamma^3\phi_1 \\
&+ iN^1\cosh(3x)\overline{\phi}_2\gamma^0\phi_3 + iN^2\cosh(3x)\overline{\phi}_3\gamma^0\phi_1 + iN^3\overline{\phi}_1\gamma^0\phi_2 \\
&\frac{i}{6}\overline{\phi}_0\{e^{3\Omega}[P_\Omega(\gamma^i\phi_i) - \frac{1}{2}P_+(\gamma^1\phi_1 + \gamma^2\phi_2 - 2\gamma^3\phi_3)] \\
&+ Ne^{\Omega}[-e^{2\beta_+}\gamma^0\gamma^2\gamma^3\phi_1 + e^{2\beta_+}\gamma^0\gamma^1\gamma^3\phi_2 - e^{-4\beta_+}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\phi_3]\} \\
&- \frac{i}{2}[\overline{\phi}_1\gamma^1\gamma^0(\gamma^2\dot{\phi}_2 + \gamma^3\dot{\phi}_3) + \overline{\phi}_2\gamma^2\gamma^0(\gamma^1\dot{\phi}_1 + \gamma^3\dot{\phi}_3) + \overline{\phi}_3\gamma^3\gamma^0(\gamma^1\dot{\phi}_1 + \gamma^2\dot{\phi}_2)].
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

Las constricciones $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_i$ y S satisfacen un álgebra cerrada similar al álgebra descubierta por Teitelboim[17]. Es posible mostrar que en nuestro caso las constricciones S y $\mathcal{H}_0$ satisfacen la propiedad de raíz cuadrada, por ejemplo

$$
\begin{aligned}
-\{S_1, \overline{S}_4\} = \{S_1, S_1\} &= \frac{3}{8}\frac{1}{12}e^{3\Omega}(\gamma_0)_{14}\{\mathcal{H}_0 \\
&+ 18(\overline{\phi}_j\gamma^j\gamma^0)_1\ S_1 + 54i\ e^{-2\Omega}\ e^{2\beta_+}\ \overline{S}_1[\gamma^3\gamma^2\phi_1 + \gamma^1\gamma^3\phi_2 \\
&+ e^{-6\beta_+}\gamma^2\gamma^1\phi_3]_1\}.
\end{aligned}
\tag{2.52}
$$

Los términos extras en esta álgebra son proporcionales a la constricción S, y dependen únicamente de las variables canónicas de la teoría. Como estas son proporcionales a S, se dice que ellas son debilmente cero, por lo cual no adicionan nuevas constricciones al álgebra. Para $A \neq B$ todos los parentesis $\{S_A, S_B\} \approx 0$ son debilmente cero, y relaciones similares a (2.52) se siguen para el resto de $\{S_A, S_A\}$.

Las cuatro componentes de S para el modelo de Taub son

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{e^{3\Omega}}{12}[P_\Omega(-\phi_{11}-\phi_{24}+\phi_{32})+\frac{1}{2}P_+(2\phi_{32}+\phi_{24}+\phi_{11}) \\ &+3e^{-2\Omega}\{e^{2\beta_+}(\phi_{12}+\phi_{23})+e^{-4\beta_+}\phi_{31}\}] \\ S_2 &= -\frac{e^{3\Omega}}{12}[P_\Omega(\phi_{12}+\phi_{23}+\phi_{31})+\frac{1}{2}P_+(2\phi_{31}-\phi_{23}-\phi_{12}) \\ &+3e^{-2\Omega}\{e^{2\beta_+}(\phi_{11}-\phi_{24})-e^{-4\beta_+}\phi_{32}\}] \\ S_3 &= -\frac{e^{3\Omega}}{12}[P_\Omega(-\phi_{13}+\phi_{22}+\phi_{34})+\frac{1}{2}P_+(2\phi_{34}-\phi_{22}+\phi_{13}) \\ &+3e^{-2\Omega}\{e^{2\beta_+}(-\phi_{14}+\phi_{21})-e^{-4\beta_+}\phi_{33}\}] \\ S_4 &= -\frac{e^{3\Omega}}{12}[P_\Omega(\phi_{14}-\phi_{21}+\phi_{33})+\frac{1}{2}P_+(2\phi_{33}+\phi_{21}-\phi_{14}) \\ &+3e^{-2\Omega}\{e^{2\beta_+}(-\phi_{13}+\phi_{22})+e^{-4\beta_+}\phi_{34}\}]. \end{aligned} \tag{2.53}$$

Puesto que $\{\mathrm{S_A}, \mathrm{S_B}\} \approx 0$, $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$, nosotros podemos considerar que cada una de las $\mathrm{S_A}$ operen sobre espacios ortonormales, con lo que podemos escribir para cada $\hat{\mathrm{S}}_\mathrm{A}$, $\hat{S}_A\ |\psi_A>= 0$. Cada $\hat{\mathrm{S}}_\mathrm{A}$ representa una raíz cuadrada de $\hat{\mathcal{H}}_0$, con $\mathrm{S_A}$ en representación matricial de rango más pequeño posible.

De la misma manera que para el modelo cosmológico del Bianchi tipo IX, este modelo tiene las mismas peculiaridades ya que es un submodelo del mismo, asi el hecho de que las constricciones $\mathrm{S_1}$ y $\mathrm{S_2}$ se encuentren acopladas debido que comparten el mismo conjunto de ϕ'_{iA}s, y éste también es el caso del acoplamiento de $\mathrm{S_3}$ y $\mathrm{S_4}$, nos permite elegir dos conjuntos independientes de 4 matrices ortonormales, uno para las combinaciones lineales de las ϕ_{iA} que aparecen en $\mathrm{S_1}$ y $\mathrm{S_2}$ y otros para las que aparecen en $\mathrm{S_3}$ y $\mathrm{S_4}$. De este modo la función de onda multicomponente tiene 8 entradas que nosotros dividimos como sigue:

$$\psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$$

con cada Ψ_1 y Ψ_2 con 4 componentes. Sobre Ψ_1 actuaran sólo $\mathrm{S_1}$ y $\mathrm{S_2}$ y sobre Ψ_2, $\mathrm{S_3}$ y $\mathrm{S_4}$ correspondientemente.

Todas las constricciones actuaran sobre la función de onda completa ψ, pero lo que se ha logrado aqui es dividir el problema en 2 partes, tales que las primeras dos S's sobre la segunda parte de la función de onda den identicamente cero y lo mismo pasa con las otras dos S's, $\mathrm{S_3}$ y $\mathrm{S_4}$ cuando actuan sobre la primera parte de la función de onda. Esto es como partir la ecuación de Dirac en dos ecuaciones independientes, con matrices de Pauli para las componentes I y II, asi como para III y IV.

Con esto en mente, para el modelo de Taub, nosotros representamos las ϕ_{iA} y sus combinaciones lineales por matrices γ de igual manera a como se mostro para el modelo Bianchi tipo IX, en este caso el número de matrices linealmente independiente son 4 (ver S_1 y S_2, por ejemplo), entonces la dimensión de estas matrices será 4 (ver pie de pagina 21). Con lo cual (2.53) se reduce a

$$\begin{aligned}
&\{i\gamma^0\frac{\partial}{\partial\Omega}-i\gamma^1\frac{\partial}{\partial\beta_+}-2e^{-2\Omega}e^{2\beta_+}[\gamma^3-i\gamma^2]+2e^{-2\Omega}e^{-4\beta_+}[\gamma^3+\frac{i}{2}\ \gamma^2]\}\Psi_1=0\\
&\{-\gamma^2\frac{\partial}{\partial\Omega}-i\gamma^3\frac{\partial}{\partial\beta_+}-2e^{-2\Omega}e^{2\beta_+}[\gamma^0-\gamma^1]-2e^{-2\Omega}e^{-4\beta_+}[\gamma^1+\frac{1}{2}\ \gamma^0]\}\Psi_1=0\\
&\{i\gamma^0\frac{\partial}{\partial\Omega}-i\gamma^1\frac{\partial}{\partial\beta_+}-2e^{-2\Omega}e^{2\beta_+}[-\gamma^3+i\gamma^2]+2e^{-2\Omega}e^{-4\beta_+}[-\gamma^3-\frac{i}{2}\ \gamma^2]\}\Psi_2=0\\
&\{-\gamma^2\frac{\partial}{\partial\Omega}-i\gamma^3\frac{\partial}{\partial\beta_+}-2e^{-2\Omega}e^{2\beta_+}[-\gamma^0+\gamma^1]-2e^{-2\Omega}e^{-4\beta_+}[-\gamma^1-\frac{1}{2}\ \gamma^0]\}\Psi_2=0.
\end{aligned}\tag{2.54}$$

El acoplamiento no minimal asi como el vector de estado se divide de manera natural en vectores de cuatro componentes*. Observando que si cambiamos el signo del término de potencial, la primera y tercera ecuación son intercambiables, correspondientemente la segunda y la cuarta ecuación.

El sector del microsuperespacio del modelo de Taub ha sido definido en cosmología cuántica estandar[32] en la región de β_+ muy grande (con Ω grande). Para el modelo de Taub el hamiltoniano es de la forma

$$\mathrm{H}=-(\mathrm{P}_\Omega)^2+(\mathrm{P}_+)^2+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4\Omega}[\mathrm{e}^{-8\beta_+}-4\mathrm{e}^{-2\beta_+}]\tag{2.55}$$

y para el sector del microsuperespacio, éste potencial se anula, con lo cual la ecuación de Wheeler-DeWitt se simplifica a

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial\Omega^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial\beta_+^2}=0,\tag{2.56}$$

cuya solución general es

$$\Psi=\mathrm{F}(\Omega-\beta_+)+\mathrm{G}(\Omega+\beta_+),\tag{2.57}$$

donde F y G son funciones arbitrarias de $\Omega-\beta_+$ y $\Omega+\beta_+$, respectivamente. En nuestro caso, los últimos términos de la ecuación (2.54) se anulan para β_+ muy grande (Ω grande),

* Esta división es la que nos permite encontrar solución distinta de cero al conjunto de ecuaciones diferenciales parciales a que se traducen las constricciones S_A.

pero el primer término del potencial permanece, luego entonces en este límite considerado, la ecuación tipo Dirac no corresponde a la simple raíz cuadrada de la ecuación (2.56), la cual no contiene términos de potencial. Sin embargo el cuadrado del primer término en dicho potencial de la ecuación (2.54) es cero y la ecuación iterada tipo Dirac tiene términos extras (ver (2.52)) debido al producto de las derivadas con dichos términos de potencial, como lo conocemos de la teoría de Dirac estándar. El potencial para el modelo de Taub (2.48) es obtenido esencialmente tomando el cuadrado de los dos términos del potencial de la ecuación (2.54).

En lo que sigue, nosotros exhibimos una solución particular para el sector del micro-superespacio del modelo de Taub. Elegimos para las matrices γ la siguiente realización

$$\gamma^\alpha = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_L^\alpha \\ \sigma_R^\alpha & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_L^\alpha = (1, \quad -\overrightarrow{\sigma}) \qquad \sigma_R^\alpha = (1, \quad \overrightarrow{\sigma}), \tag{2.58}$$

donde σ son las matrices de Pauli.

Si analizamos las dos primeras ecuaciónes de (2.54) aplicadas a la misma función de onda, resultados similares son obtenidos para las otras dos. La primer ecuación nos queda

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\Omega}\psi_{13} + \frac{\partial}{\partial\beta_+}\psi_{14} - 2ie^{-2\Omega}e^{2\beta_+}[\psi_{13} - \psi_{14}] = 0 \\
\frac{\partial}{\partial\Omega}\psi_{14} + \frac{\partial}{\partial\beta_+}\psi_{13} - 2ie^{-2\Omega}e^{2\beta_+}[\psi_{13} - \psi_{14}] = 0 \\
\frac{\partial}{\partial\Omega}\psi_{11} - \frac{\partial}{\partial\beta_+}\psi_{12} - 2ie^{-2\Omega}e^{2\beta_+}[-\psi_{11} + \psi_{12}] = 0 \\
\frac{\partial}{\partial\Omega}\psi_{12} - \frac{\partial}{\partial\beta_+}\psi_{11} - 2ie^{-2\Omega}e^{2\beta_+}[-\psi_{11} + \psi_{12}] = 0.
\end{aligned} \tag{2.59}$$

donde el segundo índice en Ψ_{1a} denota la componente del cuadrivector Ψ_1.

La solución de éste sistema acoplado al aplicarse a la segunda ecuación ecuación se restringe a la siguiente forma

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} \frac{b_0}{2}(1+i)\exp(-R_1^2) \\ -\frac{b_0}{2}(1-i)\exp(-R_1^2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.60}$$

(2.60) ha sido escrita en término del radio del modelo de Taub restringido $R_1 = e^{-\Omega}e^x$. Las primeras dos componentes decaen como $\exp(-R_1^2)$ y las otras son cero en nuestro límite.

Este comportamiento fue encontrado por Hawking y Page[33] al considerar un universo tipo Friedmann acoplado minimalmente a un campo escalar sin masa $\phi(t)$. Nuestro resultado también depende únicamente de un radio R_1, que cuando $R_1 \to \infty$ se parece al modelo de FRW.

Si uno traduce la solución encontrada para el modelo de Taub en el microsuper-espacio en relación con la función potencial Φ presentada por D'Eath, Hawking y Obregón[12f], se observa que existe este comportamiento de $\Psi \sim \mathrm{e}^{-\Phi}$ cuando se aplica esta solución al segundo conjunto de ecuaciones diferenciales parciales que resultan al tomar la segunda ecuación tipo Dirac, con esto las componentes 3 y 4 resultan ser cero y las dos primeras presentan este comportamiento. La otra solución $\Psi \sim \mathrm{e}^{\Phi}$ surge al resolver las ecuaciones 3 y 4 de (2.54), resultando las primeras dos entradas en la función de onda iguales a cero y las otras dos con el comportamiento con Φ positivo. El resultado que obtiene Macias para el modelo de Taub (no en el microsuper-espacio) es más complicada, pero también presenta el comportamiento de exponenciales de un cierto potencial Φ. En este punto, uno observa que a nivel de soluciones, el comportamiento que tiene la función de estado es muy similar en ambos formalismo, el usado por D'Eath, Hawking y Obregón con espinores de dos componentes y el formalismo matricial empleado en este trabajo.

Por otro lado, una solución exacta para el modelo de Taub fue encontrada por Moncrief y Ryan[34] en el formalismo hamiltoniano ADM, la cual puede ser escrita en término de los dos radios del modelo R_1 y R_2 como $\psi = \mathrm{C}\exp(-\frac{1}{3}\mathrm{R}_1^2)\exp(-\frac{1}{6}\mathrm{R}_2^2)$, con $\mathrm{C} = \mathrm{cte}$. Para R_2 muy pequeño (sector del microsuperespacio) uno puede expander la segunda exponencial para obtener

$$\psi = \mathrm{C}\exp(-\frac{1}{3}\mathrm{R}_1^2)\Big[1 - \frac{1}{6}\mathrm{R}_2^2\Big], \tag{2.61}$$

para R_1 grande, el primer término decae como $\exp(-\frac{1}{3}\mathrm{R}_1^2)$ y el segundo término se aproxima a cero en este límite. De éste modo las primeras componentes de la función de onda se comportan de manera similar como los primeros términos de (2.61). Nuestra solución (2.60) en el sector del microsuperespacio del modelo de Taub es válida para β_+ muy grande (Ω grande) lo cual produce que uno de los radios R_2 del universo vaya a cero, y si uno considera a $\Psi^*\Psi$ como una representación de la probabilidad de encontrar al universo en algun estado, éste debera depender únicamente de la evolución del radio R_1.

Para finalizar, los trabajos que estan involucrados en esta parte son los siguientes:

1.- Supersymmetric Microsuperspace Quantization for the Taub model, J. Socorro, O. Obregón and A. Macías, *Phys. Rev. D* **45**, 2026 (1992).

2.- Supersymmetric Taub Model, the microsuperspace sector, J. Benítez, O. Obregón and J. Socorro, *Astro, Sp. Sc.* **193**, 61 (1992).

3.- Supersymmetric Quantum Cosmology, A. Macías, O. Obregón and J. Socorro, *Int. J. Mod. Phys. A* **8**, 4291 (1993).

3.-) Mecánica Cuántica Supersimétrica

En los últimos años se han propuesto extensiones supersimétricas de cosmología cuántica, obteniendo resultados que tienen profundas consecuencias para la teoría cuántica en cuestión. Las teorías supersimétricas dan la posibilidad de proveer de una marco de unificación para la descripción de bosones y fermiones los cuales son combinados en el mismo multiplete supersimétrico[39], ademas las teorías de campo supersimétricas son menos divergentes que las teorías de campo ordinarias. Un entendimiento completo de tales teorías requiere del uso familiar con el álgebra de Grassmann, el álgebra de cantidades que anticonmutan. Se ha mostrado que las teorías de campo supersimétricas pueden ser construidas definiendo un supercampo en un super-espacio, que es un espacio que consiste esencialmente del espacio-tiempo usual adicionando los espinores de Grassmann[43] . El supercampo Φ es entonces una función de las coordenadas del espacio tiempo y de elementos impares θ y $\overline{\theta}$ del álgebra de Grassmann ($\overline{\theta}$ es el conjugado de θ). Las transformaciones supersimétricas pueden ser vistas como una traslación par en Grassmann en éste superespacio. Los generadores de estas transformaciones son las supercargas. Las teorías de campo supersimétricas pueden ser definidas tambien sin dar explicítamente la referencia al superespacio o números de Grassmann.

Witten[41] en 1981 construyó un ejemplo de los más simple de un sistema supersimétrico, una partícula de espin $\frac{1}{2}$ moviendose en una dimension, éste fué un ejemplo de un sistema supersimétrico el cual no hace referencia a una teoría de campo. El también definió el álgebra que debe ser satisfecha por los operadores de carga en término de los cuales el hamiltoniano supersimétrico puede ser expresado. Estas relaciones algebráicas que Witten formuló inicialmente para su sistema, son ahora la base que definen las relaciones de la mecánica cuántica supersimétrica y estas relaciones con su contraparte de una teoría de campo pueden ser también establecidas. El término de Hamiltoniano supersimétrico es tomado en el sentido de que el Hamiltoniano es definido en término de supercargas que obedecen la misma álgebra que el de los generadores de una teoría de campo supersimétrica.

De acuerdo a Witten, la mecánica cuántica supersimétrica es caracterizada por la existencia de operadores de carga $\mathrm{Q_i}$ que obedecen el álgebra

$$\begin{aligned} \{\mathrm{Q_i}, \mathrm{Q_j}\} &= \delta_{ij}\mathcal{H} \qquad i, j = 1, 2, ..N \\ \{\mathrm{Q_i}, \mathcal{H}\} &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $\mathcal{H}$ es el hamiltoniano supersimétrico, N es el número de generadores y $\{.....\}$ denota un anticonmutador.

Usando éste formalismo en cosmología cuántica, en el minisuper-espacio, presentaré resultados para diferentes modelos cosmológicos los cuales existe una correspondencia con las soluciones obtenidas en los otros formalismos que presento en éste trabajo.

En el formalismo de la mecánica cuántica supersimétrica, una simetría escondida para el potencial U que aparece en el hamiltoniano del super-espacio $\mathrm{H_0}$ del Bianchi tipo IX fué descubierta[12b], lo cual permitió asegurar que $\mathrm{H_0}$ es la parte bosónica de un hamiltoniano supersimétrico y las dos supercargas Q y $\overline{\mathrm{Q}}$ son definidas con varibles de Grassmann, dadas como operadores diferenciales, teniendo para el sistema cuántico un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales acopladas.

En éste contexto la solución para la función de onda Ψ puede ser escrita como un vector n-dimensional ó como una expansión en variables de Grassmann multiplicadas por funciones bosónicas*. Una solución para el primer término bosónico de esta expansión fue obtenida[12b], pero es necesario notar que esta solución para el primer término bosónico del hamiltoniano supersimétrico no corresponde a una solución de la parte bosónica de $\mathrm{H_0}$, sino a otra ecuación de Wheeler-DeWitt con un ordenamiento de factores diferente al propuesto[34]. En éste método también se ha introducido la constante cosmológica para el modelo de FRW[42] supersimétrico (k = +1). Para el resto de las funciones bosónicas del Bianchi tipo IX en la expansión en Grassmann (sector fermiónico) serán encontradas si la correspondiente ecuación diferencial que las determinan puede ser resuelta[12b,43]. La masa del gravitino no aparece como la raíz cuadrada de Λ como en la referencia [41]

* La relación entre estas dos representaciones es de tal modo que la componente (11) de la representación vectorial corresponderá al término puramente bosónico, la componente (12) al término con el orden más bajo de la expansión en Grassmann, por ejemplo θ^0, $(13) \rightarrow \theta^0\theta^1$, etc.

puesto que supergravedad no es usada. Uno de los problemas que pudiera presentarse en el procedimiento es de que el lagrangiano[43] deberá ser construido para cada modelo cosmológico bajo consideración, asi como la manera de incluir materia.

En esta sección usaremos éste método y será extendido para obtener todas las funciones bosónicas que aparecen en la expansión en la base de Grassmann para la función de onda, esto lo haremos para tres modelos cosmológicos, el FRW ($k = +1$) y el Taub en el microsuperespacio, que son dos subclases del Bianchi tipo IX, asi como del modelo cosmológico del Bianchi tipo II. Se mostrará que estas soluciones son esencialmente las encontradas previamente usando supergravedad[45] N=1 y los modelos reducidos[12d] N=4, d=1. También se hace notar que la simetría escondida para el potencial[12b,46] U para el Bianchi tipo IX, es vista como una propiedad general de los modelos Bianchi Clase A. Esta simetría escondida se verá posteriormente en el formalismo Hamiltoniano ADM, no es otra cosa que tomar los momentas en la representación de las derivadas de una acción para tener la ecuación de clásica de Einstein-Hamilton-Jacobi. Aquí se exhibe para el Bianchi tipo II, pero posteriormente se dará para los otros modelos. Para finalizar esta sección calcularemos la densidad de probabilidad no normalizada[8,47] $|\Psi|^2$ integrando sobre variables de Grassmann para la función de onda del Bianchi tipo II y mostramos dos figuras en las cuales se nota la contribución de la parte púramente bosónica y otra al resto de la expansión de la función de onda.

3.1) El método

La métrica para los modelos tipo Bianchi es de la forma

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\Omega(t)} e^{2\beta(t)}{}_{ij}\sigma^i\sigma^j \tag{3.2}$$

donde $\Omega(t)$ es una función escalar y β_{ij} una matrix 3x3 diagonal y sin traza, las σ^i son uno-formas de cada modelo cosmológico tipo Bianchi que obedecen $d\sigma^i = \epsilon_{ijk}\sigma^i \wedge \sigma^j$.

El hamiltoniano para estos modelos tiene la constricción $\mathcal{H}_0 = 0$, que toma la forma siguiente (sin ordenamiento de factores)

$$\mathcal{H}_0 = -P_\Omega^2 + P_+^2 + P_-^2 + U(\Omega, \beta_\pm) \tag{3.3}$$

que se puede escribir como

$$\mathcal{H}_0 = \eta^{\mu\nu} \mathrm{P}_\mu \mathrm{P}_\nu + \mathrm{U}(\mathrm{q}^\mu) \tag{3.4}$$

donde $\mathrm{U}(\mathrm{q}^\mu)$ es el potencial del modelo cosmológico bajo estudio, $\mathrm{q}^\mu = (\Omega, \beta_+, \beta_-), \mu = 0, 1, 2$ son coordenadas generalizadas y P_μ son los momentos generalizados canónicamente conjugados y $\eta^{\mu\nu} = (-1, +1, +1) = \eta_{\mu\nu}$.

A partir del hecho que las funciones de potencial para los modelos diagonales Bianchi Clase A se pueden escribir al estilo de "laplacianos" aplicados a otra función Φ, nos permite obtener las supercargas Q como una *raiz cuadrada* de la ecuación (3.4).

$$\mathrm{U}(\mathrm{q}^\mu) = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{q}^\mu} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{q}^\nu} \tag{3.5}$$

donde para el Bianchi tipo IX se encontró $\Phi(\mathrm{q}) = \frac{1}{6} \mathrm{e}^{2\Omega} \mathrm{Tr}(\mathrm{e}^{2\beta})$ y para el Bianchi tipo II es $\Phi(\mathrm{q}) = \frac{1}{6} \mathrm{e}^{2\Omega} \mathrm{e}^{2\beta_+ + 2\sqrt{3}\beta_-}$. En el apéndice B se dá la manera sistematica de encontrar esta nueva función potencial Φ para los modelos Bianchi Clase A.

La manera de escribir la función U(q) permite asegurar que el hamiltoniano anterior, es la parte bosónica de un Hamiltoniano supersimétrico[41] de la forma

$$\mathrm{H} = \frac{1}{2}(\mathrm{Q}\overline{\mathrm{Q}} + \overline{\mathrm{Q}}\mathrm{Q}) = \mathcal{H}_0 + \frac{\hbar}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathrm{q}^\mu \partial \mathrm{q}^\nu} [\overline{\psi}^\mu, \psi^\nu], \tag{3.6}$$

donde las super-cargas no hermitianas (tipo ecuaciones de Dirac) son

$$\mathrm{Q} = \psi^\mu [\mathrm{P}_\mu + \mathrm{i} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{q}_\mu}], \qquad \overline{\mathrm{Q}} = \overline{\psi}^\mu [\mathrm{P}_\mu - \mathrm{i} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{q}_\mu}] \tag{3.7}$$

con ψ^μ y $\overline{\psi}^\mu$ que satisfacen el algebra

$$\psi^\mu \overline{\psi}^\nu + \overline{\psi}^\nu \psi^\mu = \eta^{\mu\nu}, \quad \overline{\psi}^\mu \overline{\psi}^\nu + \overline{\psi}^\nu \overline{\psi}^\mu = 0, \quad \psi^\mu \psi^{nu} + \psi^\nu \psi^\mu = 0, \tag{3.8}$$

y $\mathcal{H}_0$ es el hamiltoniano bosónico del modelo cosmológico en estudio.

Para realizar la cuantización del sistema, aplicamos el Super-Hamiltoniano H a la función de onda y se elige una representación para las partes de espín $\overline{\psi}^\mu$ y ψ^ν; en éste caso, la representación es en términos de números de Grassmann θ^μ y sus derivadas

$$\psi^\mu = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \theta^\nu} \qquad \overline{\psi}^\nu = \theta^\nu. \tag{3.9}$$

Se nota que el super-hamiltoniano difiere del hamiltoniano estandar en un término de espín, el cual se anula en el límite clásico.

Cualquier solución para $\mathrm{H}\Psi = 0$ podemos escribirla en forma natural en función de tres números de Grassmann

$$\Psi = \mathcal{A}_+ + \mathcal{B}_\nu \theta^\nu + \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\mu\lambda}\mathcal{C}^\lambda \theta^\nu \theta^\mu + \mathcal{A}_- \theta^0 \theta^1 \theta^2 \tag{3.10}$$

donde las 8 funciones $\mathcal{A}_\pm$, $\mathcal{B}_\nu$ y $\mathcal{C}^\nu$ dependen únicamente de las coordenadas generalizadas q^ν (son funciones bosónicas).

Las soluciones supersimétricas deben de satisfacer las constricciones $\mathrm{Q}\Psi = 0 = \overline{\mathrm{Q}}\Psi$, de donde las 8 funciones bosónicas para los modelos cosmologicos Bianchi II y IX pueden ser obtenidas de las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_\pm &= a_\pm e^{\mp\Phi(q)/\hbar} \\ \mathcal{B}_\nu &= \frac{\partial f_+(q^\nu)}{\partial q_\nu} e^{-\Phi(q)/\hbar} \\ \mathcal{C}^\nu &= \eta^{\nu\mu} \frac{\partial f_-(q^\mu)}{\partial q_\nu} e^{\Phi(q)/\hbar} \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde $\mathrm{a}_\mp$ son constantes y $\mathrm{f}_\pm(\mathrm{q})$ son funciones que satisfacen la ecuación

$$\eta^{\mu\nu}\left[\hbar\frac{\partial}{\partial q^\nu} \mp 2\frac{\partial\Phi}{\partial q^\nu}\right]\frac{\partial f_\pm(q)}{\partial q_\nu} = 0. \tag{3.12}$$

Para otros modelos estas ecuaciones son modificadas levemente como se muestra enseguida.

3.2) Modelo de FRW k= +1

Siguiendo el procedimiento anterior [12b] para el modelo cosmológico del FRW, nosotros obtenemos para la función Φ (tomando $\hbar = 1$, $\Omega = -\alpha$)

$$\Phi = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\alpha} = \frac{1}{2}\mathrm{a}^2. \tag{3.13}$$

donde se uso la relación entre el parámetro α y el radio del modelo $\mathrm{a} = \mathrm{e}^\alpha$. La expansión en variables de Grassmann para la función de onda completa es

$$\Psi = \mathcal{A}_+ + \mathcal{B}_0\ \theta^0, \tag{3.14}$$

las supercargas en éste caso son

$$Q = i\frac{d}{d\theta^0}\Big[-a\frac{d}{da} + a^2\Big], \qquad \overline{Q} = -i\theta^0\Big[a\frac{d}{da} + a^2\Big], \tag{3.15}$$

consecuentemente las ecuaciones diferenciales para las componentes de la función de onda resultan

$$\Big[\frac{d}{da} - a\Big]\mathcal{B}_0 = 0 \qquad \text{and} \qquad \Big[\frac{d}{da} + a\Big]\mathcal{A}_+ = 0, \tag{3.16}$$

cuyas soluciones son de la forma

$$\mathcal{A}_+ = a_+ \exp\ (-\frac{a^2}{2}) \qquad \mathcal{B}_0 = b_0 \exp\ (\frac{a^2}{2}), \tag{3.17}$$

donde a_+, b_0 son constantes.

Estas soluciones fueron encontradas previamente usando el modelo supersimétrico[12d] N=4, d=1. Estos también pueden ser reproducidos por el enfoque de supergravedad[45] N=1.

3.3) Sector del micro-super-espacio del modelo de Taub

Para el sector del micro-super-espacio del modelo de Taub, la función Φ tiene la forma $\Phi = \frac{1}{3}e^{2\alpha}e^{2\beta_+}$ y Ψ

$$\Psi = \mathcal{A}_+ + \mathcal{B}_0\theta^0 + \mathcal{B}_1\theta^1 + \mathcal{C}_2\theta^0\ \theta^1. \tag{3.18}$$

En éste caso aplicando las constricciones de las supercargas Q $\Psi = \overline{Q}\ \Psi = 0$ uno obtiene las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
\Big[\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{2}{3}e^{2\alpha}e^{2\beta_+}\Big]\mathcal{A}_+ &= 0,\\
\Big[\frac{\partial}{\partial\beta_+} + \frac{2}{3}e^{2\alpha}e^{2\beta_+}\Big]\mathcal{A}_+ &= 0,\\
\Big[\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{2}{3}e^{2\alpha}e^{2\beta_+}\Big]\mathcal{B}_1 - \Big[\frac{\partial}{\partial\beta_+} + \frac{2}{3}e^{2\alpha}e^{2\beta_+}\Big]\mathcal{B}_0 &= 0,\\
\Big[-\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{2}{3}e^{2\alpha}e^{2\beta_+}\Big]\mathcal{B}_0 + \Big[\frac{\partial}{\partial\beta_+} - \frac{2}{3}e^{2\alpha}e^{2\beta_+}\Big]\mathcal{B}_1 &= 0,\\
\Big[\frac{\partial}{\partial\alpha} - \frac{2}{3}e^{2\alpha}e^{2\beta_+}\Big]\mathcal{C}_2 &= 0,\\
\Big[\frac{\partial}{\partial\beta_+} - \frac{2}{3}e^{2\alpha}e^{2\beta_+}\Big]\mathcal{C}_2 &= 0,
\end{aligned} \tag{3.19}$$

siendo las soluciones para las funciones bosónicas de la forma

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_+ &= \mathrm{A}\exp\,(-\frac{1}{3}\mathrm{R}_1^2),\\
\mathcal{B}_0 &= \mathrm{b}\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2^2\Big(1+\frac{2}{9}\mathrm{R}_1^2\Big),\\
\mathcal{B}_1 &= -\mathrm{b}\mathrm{R}_1\ \mathrm{R}_2^2\Big(1+\frac{2}{9}\mathrm{R}_1^2\Big),\\
\mathcal{C}_2 &= \mathrm{C}\exp\,(\frac{1}{3}\mathrm{R}_1^2)
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

con $\mathrm{R}_1 = e^{\alpha}\ e^{\beta_+}$ y $\mathrm{R}_2 = e^{\alpha}e^{-2\beta_+}$, donde A, b, C son constantes.

Para éste modelo cosmológico, la solución encontrada es esencialmente la misma que se obtuvo en la referencia [42] usando el enfoque de supergravedad N=1. En éste caso uno obtiene dos términos semejantes a $\mathcal{A}_+$ o dos términos semejantes a $\mathcal{C}_2$, pero ellos no aparecen mezclados en la misma solución. Una vez más el tipo de solución exponencial con argumentos positivo y negativo del cuadrado de los radios aparece aquí. Con la imposición de condiciones de frontera apropiadas, únicamente una clase de términos permanecerá en la función de onda.

3.4.-) Modelo Cosmológico Bianchi tipo II

El potencial para éste modelo cosmológico es (se usa $\mathrm{x} = \beta_+$ y $\mathrm{y} = \beta_-$)

$$
\mathrm{U} = \frac{1}{3}\exp\,(4\alpha + 4\mathrm{x} + 4\sqrt{3}\mathrm{y}), \tag{3.21}
$$

Es facil ver que la función Φ para éste modelo es $\Phi = \frac{1}{6}\exp\,(2\alpha + 2\mathrm{x} + 2\sqrt{3}\mathrm{y})$, con esto mostramos que el potencial U para este modelo, también tiene una simetría escondida, y no unicamente el Bianchi tipo IX[12b], lo cual se mostrará en el apéndice B, que es una propiedad general de los modelos cosmológicos Bianchi Clase A.

Las ecuaciones que necesitamos resolver son las mismas que se encuentran en la referencia [12b] (empleando las ecuaciones (3.7) y (3.9)).

$$
\Box \mathrm{f}_\pm \mp 2\nabla\Phi \bullet \nabla \mathrm{f}_\pm = 0, \tag{3.22}
$$

donde $\square$ es el d'Lambertiano en 3 dimensiones.

Determinando $f_\pm$, todas las funciones bosónicas que aparecen en la función de onda pueden ser obtenidas. Para resolver la ecuación (3.2), observamos que Φ satisface la siguiente ecuación

$$-\frac{\partial^2\Phi}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial \mathrm{x}^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial \mathrm{y}^2}=12\Phi, \tag{3.23}$$

entonces proponemos para $f_\pm$ el ansatz

$$f_\pm = W_\pm e^{\pm\Phi}, \tag{3.24}$$

y para $W_\pm$ nosotros obtenemos

$$\square W_\pm = 12(\Phi^2 \mp \Phi)W_\pm, \tag{3.25}$$

cuya solución es

$$W_\pm = r_\pm \exp\left(b_\pm(2\alpha - \mathrm{x} + \sqrt{3}\mathrm{y})\right) e^{\mp\Phi}. \tag{3.26}$$

Entonces

$$f_\pm = r_\pm \exp\left(b_\pm(2\alpha - \mathrm{x} + \sqrt{3}\mathrm{y})\right), \tag{3.27}$$

donde $r_\pm, b_\pm$ = constantes.

La solución para las funciónes bosónicas de la función de onda

$$\Psi = \mathcal{A}_+ + \mathcal{B}_\nu\,\theta^\nu + \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\mu\lambda}\mathcal{C}^\lambda\theta^\mu\theta^\nu + \mathcal{A}_-\theta^0\theta^1\theta^2 \tag{3.28}$$

nos queda de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_\pm &= q_\pm\ e^{\mp\Phi}, & \mathcal{C}^0 &= -2b_-\ f_-\ e^{\Phi},\\
\mathcal{B}_0 &= 2b_+\ f_+\ e^{-\Phi}, & \mathcal{C}^1 &= \frac{1}{2}\mathcal{C}^0,\\
\mathcal{B}_1 &= -\frac{1}{2}\mathcal{B}_0, & \mathcal{C}^2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{C}^0,\\
\mathcal{B}_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{B}_0,
\end{aligned} \tag{3.29}$$

con $q_\pm$ =constantes de integración.

Como se encontró en los dos casos previos, la dependencia en la solución en término de exponenciales de la función Φ es obtenida también en este modelo. La selección de condiciones de frontera sobre la función de onda, será lo que determine los estados físicos de interes que prevalezcan. Una posibilidad es demandar que Ψ no diverga para $|\mathrm{x}|, |\mathrm{y}| \to \infty$ para α, fija[12b], en ese caso unicamente los términos $\mathrm{e}^{-\Phi}$ permanecen. Con esta condición nosotros calcularemos en la siguiente sección $|\Psi|^2$ como una densidad de probabilidad no normalizada[8], integrando sobre las variables de Grassmann, y es claro que uno puede distinguir dos casos de interes en el comportamiento de esta densidad de probabilidad. Uno es donde el término dominante es el término púramente bosónico, y el otro caso, cuando los tres términos fermiónicos son los relevantes.

3.5) Densidad de probabilidad $|\Psi|^2$ no normalizada

Para calcular $|\Psi|^2$ para la función de onda Ψ dada por la ecuación (3.28), necesitamos primero integrar sobre las variables de Grassmann θ. Este procedimiento[47] se basa en la definición de un producto escalar de dos funciones en una base de números de Grassmann, el cual necesitamos para mostrar que $\Psi^*\Psi$ es positiva.

Si Ψ_1 y Ψ_2 son funciones que dependen de números de Grassmann, usamos la siguiente definición para el producto escalar

$$\Big\langle \Psi_1 | \Psi_2 \Big\rangle = \int \Big(\Psi_1(\theta^*)\Big)^* \Psi_2(\theta^*)\, \mathrm{e}^{-\sum_{\mathrm{i}} \theta_{\mathrm{i}}^* \theta_{\mathrm{i}}} \prod_{\mathrm{i}} \mathrm{d}\,\theta_{\mathrm{i}}^*\, \mathrm{d}, \theta_{\mathrm{i}} \tag{3.30}$$

donde la operación * es definida por

$$\Big(\mathrm{C}\theta_1 \ldots \theta_{\mathrm{r}}\Big)^* = \theta_{\mathrm{r}}^* \ldots \theta_{\mathrm{i}}^* \mathrm{C}^* \tag{3.31}$$

y la integral con números de Grassmann

$$\int \theta_i \theta_i^* \ldots \theta_m \theta_m^* d\,\theta_m^*\, d\,\theta_m \ldots \theta_i^*\, d\,\theta_i = 1. \tag{3.32}$$

En nuestro caso, si $\Psi_1 = \Psi_2$, de este producto existen términos proporcionales a

$$(1,\, \theta_0\theta_0^*,\, \theta_1\theta_1^*,\, \theta_2\theta_2^*,\, \theta_1\theta_2\theta_2^*\theta_1^*,\, \theta_0\theta_2\theta_2^*\theta_0^*,\, \theta_0\theta_1\theta_1^*\theta_0^*,\, \theta_0\theta_1\theta_2\theta_2^*\theta_1^*\theta_0^*) \tag{3.33}$$

y en la expansión de la integral sobreviven los términos de ese estilo que combinados de cierta manera, debemos de tener una integral en los números de Grassmann de tal forma que sea uno. Al aplicarlo al modelo del Bianchi tipo II, obtenemos

$$|\Psi|^2 = \mathcal{A}_+^*\mathcal{A}_+ + \mathcal{B}_0^*\mathcal{B}_0 + \mathcal{B}_1^*\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_2^*\mathcal{B}_2 + \mathcal{C}^{0*}\mathcal{C}^0 + \mathcal{C}^{1*}\mathcal{C}^1 + \mathcal{C}^{2*}\mathcal{C}^2 + \mathcal{A}_-^*\mathcal{A}_-. \tag{3.34}$$

Considerando que las constantes que aparecen en (3.29) son reales, obtenemos

$$|\Psi|^2 = \left(q_+^2 + 8b_+^2 f_+^2\right)e^{-2\Phi} + \left(q_-^2 + 8b_-^2 f_-^2\right)e^{2\Phi}. \tag{3.35}$$

Al demandar que $|\Psi|^2$ no diverja cuando $|x|, |y| \to \infty$ para α fija, únicamente el término $e^{-2\Phi}$ en la ecuación (3.35) deberá permanecer. En las referencias [12b,40], el modelo cosmológico del Bianchi tipo IX fue estudiado y una solución explicita para el primer término en la expansión de la función de onda fué dada y analizada. Para nuestro modelo es claro que los términos $\mathcal{B}_\mu$ en (3.28) pueden ser la contribución principal en la densidad de probabilidad $|\Psi|^2$ y no $\mathcal{A}_+$. Esto dependera de los valores de los parametros de integración que aparecen en la solución (3.29).

Las dos figuras siguientes representan cuales son los términos dominantes en el calculo de la densidad de Probabilidad, como se menciono anteriormente. En el primer caso la exponencial $e^{-2\Phi}$ decae del valor 1 a cero ($q_+ = 1$). En la segunda figura, $|\Psi|^2$ tiene un máximo y posteriormente decrece al aumentar de valores y.

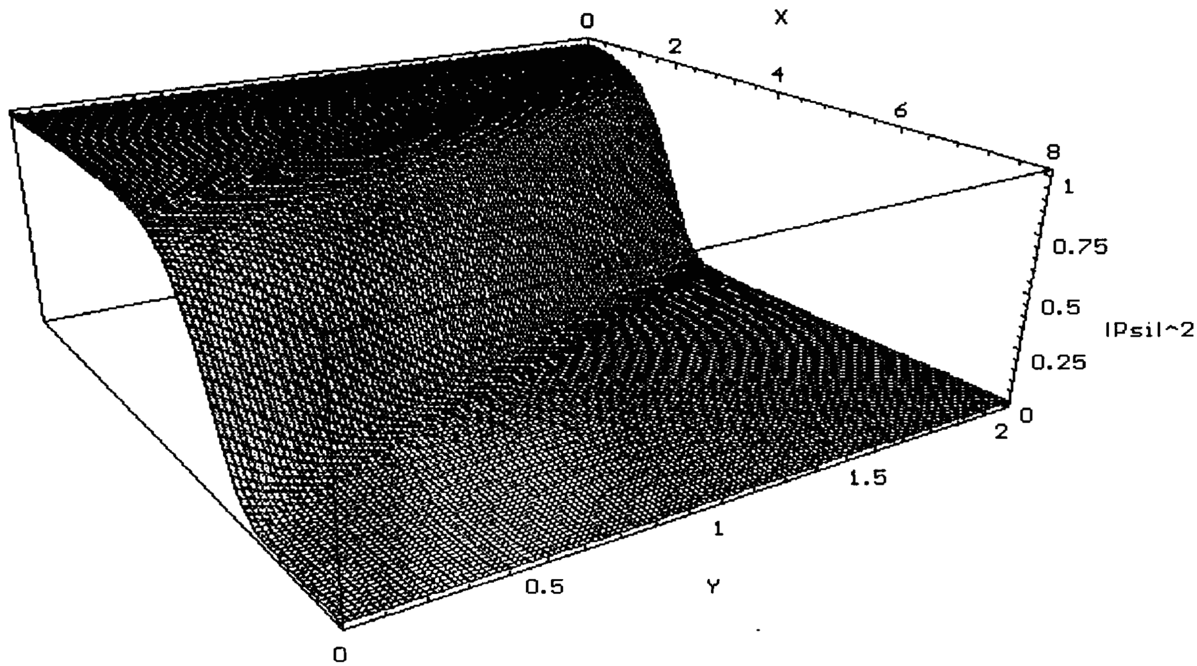

Fig. 1 La función densidad de probabilidad, cuando se toma en cuenta sólo el primer término bosónico de la función de onda, $|\Psi|^2 = q_+^2\, e^{-2\Phi}$, $q_+ = 1, \alpha = -5$. Observese que esta función tiene una simetría traslacional a lo largo de la línea $x = -\sqrt{3}\,y + 5$.

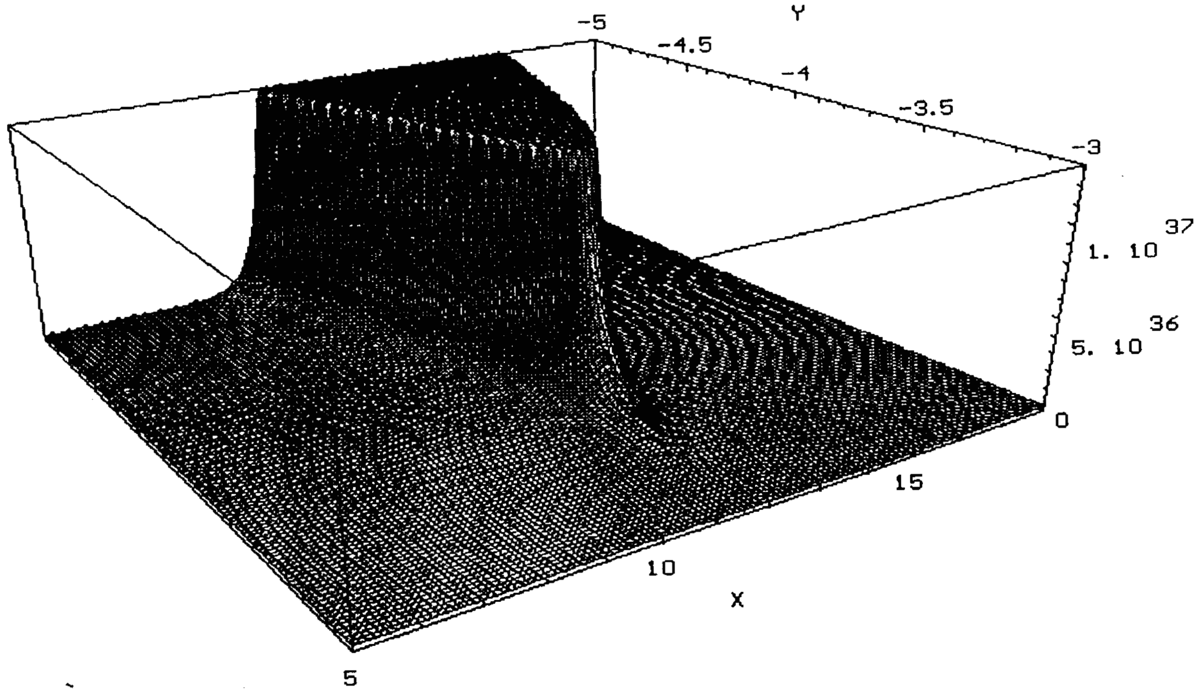

Fig. 2 La función densidad de probabilidad, cuando se toman en cuenta también los términos fermiónicos $\mathcal{B}_\mu$, $|\Psi|^2 = 8b_+^2\, f_+^2\, e^{-2\Phi}$, $b_+ = -\frac{3}{2}$, $r_+ = \frac{1}{3\sqrt{2}}$, $\alpha = -5$.

3.6) Observaciones

Usando el método de simetría escondida de la mecánica cuántica supersimétrica, se encontró una correspondencia de la función de onda para el modelo de FRW (k= +1) con los dos formalismos vistos en este trabajo (posteriormente en el ADM se observara algo semejante para los modelos Bianchi clase A). Para el sector del microsuper-espacio del modelo de Taub, este método da la misma solución particular encontrada en supergravedad. Para el modelo del Bianchi tipo II, esta solución es nueva, no se había encontrado por otros metodos (nosotros mismos la obtuvimos en cosmología ADM estandar). La función de onda encontrada tiene términos que por un lado se comportan como los estados de agujero de gusano propuestos por Hawking y otros términos que satisfacen la propuesta de Hartle-Hawking de estados sin frontera. Cuando se calcula la función de densidad no normalizada $|\Psi|^2$, para este mismo modelo, bajo las condiciones enunciadas previamente, el comportamiento de $|\Psi|^2$ es muy diferente dependiendo de los términos considerados, ya sea la primer función bosónica o los términos que contienen fermiones, en la expansión de la función de onda.

Al hablar de las soluciones que se obtienen en los diferentes enfoques que existen para estudiar la cosmología cuántica, no queremos decir que sean totalmente equivalentes, más bien que existe una correspondencia a nivel de soluciones para las funciones de onda de los modelos cosmológicos similares, de esto, el proceso de extraer algunas predicciones para los modelos cosmológicos se siguen de la manera usual[49]. A este nivel se ha mostrado que los enfoques estudiados aquí (supergravedad N=1, mecánica cuántica supersimética y y posteriormente ADM) dan resultados similares.

Para finalizar, los trabajos que estan involucrados en esta sección son los siguientes:

1.- O. Obregón, J. Socorro and J. Benítez, Phys. Rev. D **47**, (1993) 4471.

2.- J. Socorro, O. Obregón and J. Benítez, Proceeding in Symposium Latinoamericano on Relativity and Gravitation, SILARG VIII World Scientific Pub. 446-451 (1994).

4.-) Formalismo Hamiltoniano ADM

En los últimos años algún trabajo se ha hecho en el formalismo hamiltoniano conocido como ADM (Arnowitt-Deser-Misner) aplicado a modelos cosmológicos[49]. De esta aplicación algunas conclusiones han sido exhibidas conociendo la solución a la ecuación cuántica de Wheeler-DeWitt (WDW) estudiada, con esto algunas relaciones fueron encontradas en común con el formalismo de Ashtekar, por ejempo Kodama[36] mostro que existe una transformación entre la función de onda ADM y la función de onda a la Ashtekar, siendo de la forma $\Psi_{\rm ADM} = \Psi_{\rm A} e^{\mp i S_{\rm A}}$, donde $S_{\rm A}$ es una función púramente imaginaria que puede ser calculada algebraícamente para cualquier modelos cosmológico en el formalismo de Ashtekar.

En particular, como $\Psi_{\rm A}$ = const. es una posible solución (para un cierto ordenamiento de factores) uno esperaría una solución de la forma $\Psi_{\rm ADM} = We^{-\Phi}$, W = constante para el modelo del mixmaster y Φ una función que puede ser calculada para los modelos cosmológicos bajo estudio (en particular presento los Bianchi clase A). Por otro lado, Moncrief y Ryan[34], dan una solución a un submodelo de este mismo problema, el modelo de Taub. Ellos fueron motivados para proponer su ansatz, al observar las soluciones de la ecuación de WDW de la forma $\Psi_{\rm ADM} = We^{-\Phi}$, donde la función Φ es una solución a la ecuación clásica de Einstein-Hamilton-Jacobi.

Al mismo tiempo, Graham[12b] encontró una solución al mismo modelo en el sector bosónico utilizando el método de simetría escondida, en mecánica cuántica supersimétrica, que en el contexto de Moncrief y Ryan, es leida como la misma ecuación de Einstein-Hamilton-Jacobi.

Debido a que los principales resultados obtenidos en cosmología cuántica estan basados en obtener una solución a la ecuación clásica de Einstein-Hamilton-Jacobi y/o resolver las constricciones supersimétricas (Supercargas Q, $\overline{Q}$ en mecánica cuántica supersimétrica, $S_{\rm A}, \overline{S}_{\rm B}$ en supergravead), al parecer pudiera existir una correspondencia entre los tres formalismos a nivel de obtener soluciones, pero no al predecir otras propiedades fisicas del sistema estudiado (obtención de cantidades conservadas, definir un producto escalar, etc), que en muchos de los casos son problemas abiertos.

Esta parte del trabajo es una extensión a las ideas presentadas por Moncrief y Ryan. Se estudia la ecuación cuántica de Wheeler-DeWitt para cualquier ordenamiento de factores en el mismo sentido que fué presentado por Hartle-Hawking[8], para los modelos cosmológicos Bianchi Clase A. El método que presento para resolver la ecuación de WDW, muestra la posible dependencia en la función de onda de un parámetro Q que caracteriza cualquier ordenamiento de factores en la ecuación de WDW. Algunas soluciones particulares han sido obtenidas para ciertos modelos, aquí se presentan las mismas soluciones, además de otras que no fueron contempladas o analizadas en su momento.

La métrica de los modelos cosmológicos Bianchi tiene la forma general

$$\mathrm{ds}^2 = -\mathrm{dt}^2 + \mathrm{e}^{2\alpha(\mathrm{t})}\,(\mathrm{e}^{2\beta(\mathrm{t})})_{\mathrm{ij}}\,\omega^{\mathrm{i}}\,\omega^{\mathrm{j}}, \tag{4.1}$$

donde $\alpha(t)$ es una función escalar y $\beta_{\mathrm{ij}}(\mathrm{t})$ es una matriz diagonal 3x3, $\beta_{\mathrm{ij}} = \mathrm{diag}(\mathrm{x} + \sqrt{3}\mathrm{y}, \mathrm{x} - \sqrt{3}\mathrm{y}, -2\mathrm{x})$, ω_i son uno-formas que caracterizan a cada modelo cosmológico tipo Bianchi, y que obedecen la relación $\mathrm{d}\omega^{\mathrm{i}} = \frac{1}{2}\mathrm{C}^{\mathrm{i}}_{\mathrm{jk}}\omega^{\mathrm{j}} \wedge \omega^{\mathrm{k}}$ y la tri-métrica parámetrizada $\mathrm{g}_{\mathrm{ij}}(\mathrm{t}) = \mathrm{e}^{2\alpha(\mathrm{t})}\,(\mathrm{e}^{2\beta(\mathrm{t})})_{\mathrm{ij}}$.

La acción ADM tiene la forma

$$\mathrm{I} = \int (\mathrm{P_x dx} + \mathrm{P_y dy} + \mathrm{P}_\alpha \mathrm{d}\alpha - \mathrm{N}\mathcal{H}_\perp)\mathrm{dt}, \tag{4.2}$$

donde

$$\mathcal{H}_\perp = \mathrm{e}^{-3\alpha}\Big(-\mathrm{P}_\alpha^2 + \mathrm{P}_+^2 + \mathrm{P}_-^2 + \mathrm{e}^{4\alpha}\mathrm{V}(\mathrm{x},\mathrm{y})\Big), \tag{4.3}$$

y $\mathrm{e}^{4\alpha}\,\mathrm{V}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \mathrm{U}(\mathrm{q}^\mu)$ es el término del potencial para el modelo cosmológico en consideración.

La ecuación de Wheeler-DeWitt es la forma del operador $\mathcal{H}_\perp = 0$ con $\mathrm{P}_{\mathrm{q}^\mu}$, realizados por $-\mathrm{i}\partial_{\mathrm{q}^\mu}$ con $\mathrm{q}^\mu = (\alpha, \mathrm{x}, \mathrm{y})$. El factor $\mathrm{e}^{-3\alpha}$ puede ser ordenado de muchas maneras con P_α. Hartle-Hawking[8] han sugerido, lo que ellos han llamado un ordenamiento de factores semi-general, para el cual, en este caso $\mathrm{e}^{-3\alpha}\mathrm{P}_\alpha^2$ es ordenado como

$$-\mathrm{e}^{(-3-\mathrm{Q})\alpha}\,\partial_\alpha \mathrm{e}^{-\mathrm{Q}\alpha}\partial_\alpha = -\mathrm{e}^{-3\alpha}\,\partial_\alpha^2 + \mathrm{Q}\,\mathrm{e}^{-3\alpha}\partial_\alpha, \tag{4.4}$$

donde Q es cualquier constante real. Con este ordenamiento de factores, la ecuación de WDW viene a ser

$$\Box\Psi + \mathrm{Q}\frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} - \mathrm{e}^{4\alpha}\mathrm{V}(\mathrm{x},\mathrm{y})\Psi = 0, \tag{4.5}$$

donde $\Box$ es el d'Lambertiano en tres dimensiones, con signatura $(-,+,+)$.

En este punto, estamos interesados en transformar la última ecuación en otra, pero que no contenga el termino del potencial, que nos permita obtener soluciones más fácilmente de la forma $\Psi(\mathrm{q}^{\mu}) = \mathrm{W}(\mathrm{q}^{\mu}, \mathrm{Q})\mathrm{e}^{-\Phi(\mathrm{q}^{\mu})}$, pero que dichas soluciones satisfagan todas las ecuaciones en las cuales se transforma la ecuación de WDW original.

Esta sección esta organizada como sigue: en la parte 1 se presenta el procedimiento por el cual la ecuación de WDW original se reduce a otras más simples. En la parte 2 se aplican estas ecuaciones a los modelos cosmológicos tipo Bianchi Clase A, para los cuales escribo una forma general para determinar la función de onda. Algunas soluciones ya fueron obtenidas, pero sin tomar en cuenta el ordenamiento de factores en la ecuación de WDW, entonces, estas son más generales. En el apendice B presento el procedimiento para resolver la ecuación clásica de EHJ para la función Φ, que aparece en la descomposición de la ecuación de WDW, para los modelos cosmológicos Bianchi Clase A, la cual se presenta en la tabla 1 de esta sección.

4.1.-) Reducción de la ecuación de Wheeler-DeWitt

Usando el ansatz para la función de onda $\Psi(\mathrm{q}^{\mu}) = \mathrm{W}(\alpha, \mathrm{x}, \mathrm{y})\mathrm{e}^{-\Phi}$ en la ecuación (4.5), obtenemos[50]

$$\Box W - W\Box\Phi - 2\nabla W \cdot \nabla\Phi + Q\frac{\partial W}{\partial \alpha} - QW\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} + W[(\nabla\Phi)^2 - U] = 0, \tag{4.6}$$

con U el término de potencial que expecifica el modelo cosmológico bajo estudio.

Si uno puede resolver la ecuación no lineal

$$(\nabla\Phi)^2 - U = 0, \tag{4.7}$$

para la función Φ, uno obtiene una ecuación maestra para determinar la función W (esto se presenta en el apendice B).

$$\Box W - W\Box\Phi - 2\nabla W \cdot \nabla\Phi + Q\frac{\partial W}{\partial \alpha} - QW\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = 0. \tag{4.8}$$

La (4.7) no es otra cosa que la ecuación clásica de Einstein-Hamilton-Jacobi que se obtiene al reemplazar los momentos $\mathrm{P}_{\mathrm{q}^{\mu}} \to \frac{\partial\Phi}{\partial \mathrm{q}^{\mu}}$ en la ecuación (4.3) y elegir $\mathcal{H}_{\perp} = 0$.

Se pudo resolver la ecuación (4.7) en todos los modelos cosmológicos Bianchi Clase A, haciendo el siguiente cambio de coordenadas generalizadas $\beta_1 = \alpha + \mathrm{x} + \sqrt{3}\mathrm{y}$, $\beta_2 = \alpha + \mathrm{x} - \sqrt{3}\mathrm{y}$, $\beta_3 = \alpha - 2\mathrm{x}$, y reescribir la ecuación (4.7) en estas nuevas coordenadas. Con este cambio, la función Φ es obtenida inmediatamente para los modelos cosmológicos bajo estudio (ver apéndice B).

En particular Moncrief y Ryan[34] encontraron en el caso del Bianchi tipo IX una solución exacta para la ecuación (4.7), siendo ésta

$$\Phi = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{2\alpha}[\mathrm{e}^{-4\mathrm{x}} + 2\mathrm{e}^{2\mathrm{x}}\cosh(2\sqrt{3}\mathrm{y})], \tag{4.9}$$

también encontraron una función de onda particular para este modelo, donde W=const., ello implicó que el parámetro Q= -6, ademas, para un submodelo de éste, el modelo de Taub, el parámetro es cero, pero la W es ahora una función de la forma $\mathrm{W} = \mathrm{const.}\, \mathrm{e}^{\alpha+\mathrm{x}}$.

En lo que sigue, presento las ideas que me permiten reducir la ecuación de WDW a un conjunto de ecuaciones diferenciales que son mas simples de resolver para la función W, conociendo la función Φ. La función W en estos casos, si depende del parámetro Q. Esto además nos permite recobrar las soluciones particulares para la función de onda Ψ que algunos autores han obtenido para ciertos modelos cosmológicos tipo Bianchi.

Si en la ecuación (4.8) uno desea obtener una ecuación para la función W, una posibilidad es demandar que

$$\Box \mathrm{W} + \mathrm{Q}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \alpha} = 0, \tag{4.10}$$

la cual sera considerada como una ecuación de consistencia para dicha función, lo anterior implica que

$$\mathrm{W}\Box\Phi + 2\nabla \mathrm{W}\cdot\nabla\Phi + \mathrm{QW}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = 0, \tag{4.11}$$

la cual es más fácil de resolver que la ecuación original (4.5). La ecuación (4.11) es similar a la ecuación (4.5), pero sin término de potencial (semejante a una ecuación de onda homogénea).

4.2.-) Soluciones para los modelos cosmológicos Bianchi Clase A

En esta sección presento las soluciones a todas las ecuaciones que aparecen en la descomposición de la ecuación de WDW original, por ejemplo, las ecuaciones (4.7), (4.10) y (4.11), y doy el conjunto de soluciones para los modelos cosmológicos tipo Bianchi Clase A, tomando en cuenta el parámetro de ordenamiento de factores, en el sentido de Hartle-Hawking.

Bianchi tipo I

El término de potencial para este modelo es cero, entonces una posibilidad para la función Φ es ser una constante, luego la ecuación maestra (4.8) toma la forma parecida a la ecuación reducida (4.11)

$$\Box \mathrm{W} + \mathrm{Q}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \alpha} = 0, \tag{4.12}$$

La solución para la función de onda es semejante a la función de una onda plana,

$$\Psi_1 = \mathrm{A}\, e^{\vec{k}\cdot\vec{X}}, \tag{4.13}$$

con la condición sobre el modulo del vector k, $k^2 = 0$ ($\vec{k} = (a - Q, b, c)$), con a, b, c constantes, y $\vec{X} = (-\alpha, x, y)$.

Existe la siguiente relación entre todas las constantes

$$a = \frac{Q \pm \sqrt{Q^2 + 4(b^2 + c^2)}}{2}. \tag{4.14}$$

Esta relación nos da la solución encontrada por Ryan[16] para el caso Q=0.

Otra posibilidad para la función Φ, que es solución de la ecuaón de EHJ, es

$$\Phi = \mathrm{const.} \pm F(g(u)), \tag{4.15}$$

con $F(g(u))$ es una funcional sobre $g(u)$, donde la función $g(u)$ puede tener cualquier dependencia sobre la coordenada $u = (a_0 + Q)\alpha + a_1 x + a_2 y$, pero con la condición sobre las constantes $(a_0 + Q)^2 = a_1^2 + a_2^2$.

Con esto, la solución consistente con las ecuaciones (4.10) y (4.11) es la siguiente función de onda

$$\Psi = \mathrm{W_0 exp}\left((\frac{Q}{2} + \frac{a}{a_0 + Q})\alpha + (\frac{a+b}{a_1})x - \frac{b}{a_2}y \right) \exp\left[\mathrm{const.} \pm F(g(u))\right] \tag{4.16}$$

donde a, b son constantes de integración que satisfacen la constricción

$$\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{a_0 + Q}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{a_1}\right)^2 + \left(\frac{b}{a_2}\right)^2 = 0 \tag{4.17}$$

Si uno desea obtener la solución parecida a la onda plana por medio de esta solución, es necesario tomar la siguiente forma más simple para la función $F(g(u)) = u$ y W=constante, implicando que las constantes toman el valor $a = b = 0$.

Bianchi tipo II

Para este modelo, el termino de potencial tiene la siguiente forma $U_2 = \frac{1}{3}\exp(4\beta_1)$, donde β_1 es la nueva coordenada definida anteriormente. Resolviendo la ecuación (4.7), la solución para Φ es

$$\Phi_2 = \frac{1}{6}e^{2\beta_1} + a_0\, G(\alpha + x). \tag{4.18}$$

donde a_0 es una constante. La solución para la función Ψ cuando el parámetro es real, la obtenemos al resolver las ecuaciones (4.10) y (4.11), de este modo la función de onda tiene la forma

$$\Psi_2 = W_0 \exp\left((3 - a + \frac{Q}{2})\alpha + (b-a)x - \frac{b}{\sqrt{3}}y \right) \exp[\pm\Phi_2], \tag{4.19}$$

con la condición sobre la constante $a_0 = 0$ en la función Φ_2, para que sea una solución consistente a la ecuación cuántica de WDW, y las constantes involucradas satisfacen la siguiente relación

$$108 - 72a + 24ab - 16b^2 - 3Q^2 = 0. \tag{4.20}$$

En este punto, podemos obtener varios casos, por ejemplo, poniendo Q=0 se obtiene la siguiente condición entre las constantes

$$4b^2 - 6ab + 18a - 27 = 0. \tag{4.21}$$

y consecuentemente la solución para la función de onda

$$\Psi_2 = W_0 \exp\left((3 - a)\alpha + (b-a)x - \frac{b}{\sqrt{3}}y \right) \exp[\pm\Phi_2], \tag{4.22}$$

Otro caso es elegir las constantes a = b = 0, ello nos implica que el parámetro Q toma los valores Q = ±6, y con el valor -6, se obtiene que la función W = const.,

$$\Psi_2 = W \exp[\pm\Phi_2], \tag{4.23}$$

Este último resultado para la función de onda fué obtenido en la ref. [51] en el formalismo de la mecánica cuántica supersimétrica para el término bosónico (y los terminos fermiónicos también) y posteriormente en la ref. [52] en el formalismo ADM.

Es importante hacer notar que en éste modelo (y posiblemente en otros), la función Φ_2, que es solución a la ecuación clásica de EHJ, presenta dos partes, una es la que se encuentra por el método presentado en el apéndice B, y otra, la parte que tiene que ver con la función G, que se obtiene únicamente por inspección de esta ecuación, pero ello no implica que toda la función Φ_2 calculada aquí sea solución a la ecuación cuántica de WDW. Como en éste caso, el requisito que se pide a la función Φ_2 para que se pueda encontrar una solución a la ecuación de WDW, es que la constante a_0 sea cero, esto es compatible con el resultado presentado en la tabla 1, posteriormente.

Bianchi tipo $\mathrm{VI}_{h=-1}$

Para este modelo, el término de potencial es $U_6 = \frac{4}{3}\exp[4(\alpha+x)]$ y resolviendo la ecuación (4.7) se encuentra para la función Φ

$$\Phi_6 = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}\,y\exp[2(\alpha+x)], \tag{4.24}$$

función que presenta la particularidad de no tener la forma estándar obtenida para los otros modelos Bianchi estudiados y tampoco en los demas Bianchi Clase A que posteriormente presentaré.

La forma de la función W, resolviendo las ecuaciones (4.10) y (4.11) es

$$W = \exp\left[\frac{1}{4}(\alpha+x)a_2\right], \tag{4.25}$$

donde a_2 es una constante de separación, y en este caso el parámetro Q toma el valor cero únicamente

Bianchi tipo $\mathrm{VII}_{h=0}$

En este caso, el término de potencial es $U_7 = \frac{2}{3}\exp(4\alpha + 4x)\cosh[(4\sqrt{3}y) - 1]$ y resolviendo la ecuación (4.7) se encuentra para la función Φ

$$\Phi_7 = \frac{1}{3}e^{2\alpha+2x}\cosh(2\sqrt{3}y), \tag{4.26a}$$

ó

$$\Phi_7 = \frac{1}{6}[e^{2\beta_1} + e^{2\beta_2}], \tag{3.26b}$$

La función de onda para cuando el parámetro Q toma valores reales, tiene la forma

$$\Psi_7 = W_0\exp[(3 + \frac{Q}{2} - a)\alpha - ax]\exp[\pm\Phi_7], \tag{4.27}$$

donde las constantes a y Q cumplen la siguiente ecuación

$$36 - 24\,a - Q^2 = 0. \tag{4.28}$$

Bianchi tipo VIII

Para éste modelo, el término del potencial tiene la forma

$$U_8 = \frac{2}{3}\exp(4\alpha + 4x)\cosh[(4\sqrt{3}y) - 1] + \frac{1}{3}\exp(4\alpha - 8x) + \frac{4}{3}\exp(4\alpha - 2x)\cosh(2\sqrt{3}y), \tag{4.29}$$

con lo cual la función Φ es

$$\Phi_8 = \frac{1}{6}[e^{2\beta_1} + e^{2\beta_2} - e^{2\beta_3}], \tag{4.30}$$

donde las coordenadas β_i, $i = 1, 2, 3$ ya fueron mencionadas previamente (ver apéndice B también). Al resolver para la función W, la función de onda tiene la forma

$$\Psi_8 = W_0\exp[(3 + \frac{Q}{2})\alpha]\exp[\pm\Phi_8], \tag{4.31}$$

para éste modelo, el parámetro Q toma los valores ± 6.

Bianchi tipo IX y casos reducidos

Éste modelo es el más complicado de los modelos anisotrópicos tipo Bianchi, siendo la forma del potencial

$$U = \frac{1}{3}[e^{4\beta_3} - 2e^{2\beta_3}(e^{2\beta_1} + e^{2\beta_2}) + (e^{2\beta_1} - e^{2\beta_2})^2] \tag{4.32}$$

y la solución a la ecuación (4.7) tiene la forma (ver apéndice B, la manera en que fue obtenida dicha función)

$$\Phi_9 = \frac{1}{6}[e^{2\beta_1} + e^{2\beta_2} + e^{2\beta_3}]. \tag{4.33}$$

Cuando se resuelven las ecuaciones (4.10) y (4.11), la función de onda resulta ser

$$\Psi_9 = W_0 \exp[(3 + \frac{Q}{2})\alpha] \exp[\pm\Phi_9]. \tag{4.34}$$

con $Q = \pm 6.$,

En este punto, es conveniente mencionar que existe otra solución diferente para este modelo a la ecuación de EHJ, presentando el mismo tipo que en el modelo del Bianchi II ($\Phi_{9New} = \Phi_9 + F(\alpha, \beta_\pm)$. Esta función Φ_{9New} implica que la función W deba ser cero, lo cual es una inconsistencia, queriendo decir que no existe función de onda para es modelo cuántico del Bianchi tipo IX. De donde, la función Φ_9 es la única parte que de esta nueva función Φ que permanece al sustituirla en la ecuación de WDW (ver tabla 1).

Por otro lado, uno de los modelos reducidos es el modelo de Taub, en éste, uno reemplaza en todas las expresiones únicamente $y = P_- = 0$

$$\Phi_{TAUB} = \frac{1}{6}[2\,e^{2\alpha+2x} + e^{-4x}], \tag{4.35}$$

resultando para la función W

$$W = W_0 \exp(\alpha + x). \tag{4.36}$$

Para éste submodelo, el valor del parámetro Q calculado por este procedimiento es cero. Esta solución fue encontrada por Moncrief y Ryan[34].

Para el modelo de FRW, el valor de Q=2 fue obtenido por este método y la solución para la función de onda, la forma muy conocida $\Phi_{FRW} = \frac{1}{2}e^{2\alpha}$, y

$$\Psi_{FRW} = W_0 \exp[\pm\Phi_{FRW}]. \qquad 4.37)$$

Para concluir esta sección, si uno observa todas las expresiones que se obtuvieron para la función Φ, existe una forma general para reescribirlas, para ello usando las matrices 3x3 m^{ij}, (excepto para el Bianchi tipo $VI_{h=-1}$ debido a que la matriz correspondiente a este modelo deberia ser modificada) que aparece en el esquema clasificatorio de Ellis y MacCallum[16,38] para los modelos Bianchi Clase A, cuando las constantes de estructura son escritas en la forma

$$C^{i}_{jk} = \epsilon_{jks}\, m^{si} + \delta^{i}_{[k} a_{j]} \tag{4.38}$$

Si definimos $g_i(q^\mu) = (e^{\beta_1}, e^{\beta_2}, e^{\beta_3})$ con β_i definidas anteriormente, la solución unificada para la ecuación (4.7) para los modelos cosmológicos Bianchi clase A.

$$\Phi(q^\mu) = \pm\frac{1}{6}\left[g_i\, m^{ij}\, (g_j)^T\right] \tag{4.39}$$

y la matriz m^{ij} para todos los Bianchi Clase A es presentada en la siguiente tabla.

Modelos Bianchi Clase A ($a_i = 0$)

Bianchi type	m	Φ
I	**0**	0
II	diag(1,0,0)	$\pm\frac{1}{6}e^{2\beta_1}$
$VI_{h=-1}$	α	$\pm\frac{1}{6}[2(\beta_1-\beta_2)e^{(\beta_1+\beta_2)}]$
$VII_{h=0}$	diag(1,1,0)	$\pm\frac{1}{6}[e^{2\beta_1}+e^{2\beta_2}]$
VIII	diag(1,1,−1)	$\pm\frac{1}{6}[e^{2\beta_1}+e^{2\beta_2}-e^{2\beta_3}]$
IX	(δ_{ij})	$\pm\frac{1}{6}[e^{2\beta_1}+e^{2\beta_2}+e^{2\beta_3}]$

Tabla 1. Se presenta la matriz **m** y la función Φ para los modelos Bianchi Clase A

donde la matriz α modificada es (valor fijo de y)

$$\alpha = \frac{6}{\sqrt{3}}\, y \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

Una expresión similar a la ecuación (3.14) fue obtenida en otros contextos en las referencias [53,54]. En el caso donde m^{ij} es diagonal, la ecuación (3.24) es similar a

$$\Phi(q^\mu) = \pm\frac{1}{6}\left[m^{ij}\, g_{ij}\right] \tag{4.41}$$

donde g_{ij} es la 3-métrica.

Entonces la función de onda Ψ tiene la forma general

$$\Psi = \mathrm{W} \exp\left[\pm \frac{1}{6}\left[g_i\, m^{ij}\, (g_j)^T\right]\right] \tag{4.42}$$

donde la función W es dada en la siguiente tabla.

Bianchi type	**W**	**constricción**
I	$\exp[\vec{x}\cdot\vec{k}]$	$a^2 - aQ - (b^2 + c^2) = 0$
II	$\exp[(3 + \frac{Q}{2} - a)\alpha + (b - a)x - \frac{b}{\sqrt{3}} y]$	$108 - 72a + 24ab - 16b^2 - 3Q^2 = 0$
$VI_{h=-1}$	$\exp[\frac{1}{4}(\alpha + x)]$	$Q = 0$
$VII_{h=0}$	$\exp[(3 + \frac{Q}{2} - a)\alpha - ax]$	$36 - 24a - Q^2 = 0$
VIII	$\exp[(3 + \frac{Q}{2})\alpha]$	$Q = \pm 6$
IX	$\exp[(3 + \frac{Q}{2})\alpha]$	$Q = \pm 6$

Tabla 2. La función W y la relación entre diferentes constantes para cada modelo Bianchi

Con esto, la función de onda encontrada para los modelos cosmológicos tipo Bianchi Clase A en el formalismo hamiltoniano ADM estan también caracterizados por la forma[55] $e^{\pm\Phi}$, que es un buen indicio para continuar buscando la correspondencia con los otros formalismos usados para estudiar la cosmología cuántica. Aqui también se presenta el problema de definir un producto interno que sea finito, debido a que las funciones de onda no estan normalizadas.

Para finalizar, los trabajos que estan involucrados en esta sección son los siguientes:

1.- O. Obregón and J. Socorro, $\Psi = W e^{\pm\Phi}$ *quantum cosmological solution for Class A Bianchi models*, enviado al Class. Quantum Grav. (1995).

2.- J. Socorro, O. Obregón and J. Benítez, Proceeding in Symposium Latinoamericano on Relativity and Gravitation, SILARG VIII World Scientific Pub. 446-451 (1994).

5.-) Densidad lagrangiana de la Teoría de Ashtekar a partir de una Teoría de norma de la gravedad en D=5

Hace algunos años MacDowell-Mansouri[56], Pagels[57] y otros autores[58] introdujeron teorías de campo para las cuales, su acción es independiente de la métrica y la conexión. En ellas, los campos fundamentales en la acción son los campos de norma de un grupo apropiado G, donde $g_{\mu\nu}$ y $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ son obtenidos como combinaciones de estos campos, con lo cual relatividad general es una consecuencia de estas construcciones. En teoría de campo convencional, la métrica determina el espacio-tiempo para el resto de los campos cuánticos y esta presente necesariamente en la acción de dichas teorías, siendo un campo propiamente dicho. En los enfoques mencionados, la métrica no aparece en la acción, con lo cual no se considera como uno de los campos fundamentales, siendo derivado de los campos de norma gravitacionales ${\omega_\mu}^{AB} = -{\omega_\mu}^{BA}$. Posteriormente estos son identificados como las seis componentes de la conexión ${\omega_\mu}^{ab}$ y las cuatro ${\omega_\mu}^{4a}$ con las tétradas ${e_\mu}^{a}$.

Estas teorías de norma estan cercanamente relacionadas con el formalismo de Chern-Simons[59], asi como con la teoría de Ashtekar[35,60], su cuantización canónica ha conducido a algunos autores[61] a obtener soluciones para las cuales los estados físicos son precisamente la exponecial de la acción de Chern-Simons

Por otro lado, una clase de teorías que dependen de la conexión y una densidad escalar han sido propuestas[62], para grupos de norma arbitrarios. Para el grupo SO(3,C), la formulación canónica conduce directamente al hamiltoniano del formalismo de Ashtekar. En este sentido estas teorías pueden ser consideradas como un generalización de la teoría de Ashtekar.

Los trabajos antes mencionados nos mostivan a investigar la busqueda de una teoría de gravitación que dependa únicamente de campos de norma tipo MacDowell-Mansouri, los cuales estan cercanamente relacionados con el formalismo de Chern-Simons, siendo también una extensión del formalismo de Ashtekar en vista de su conexión con la acción de Chern-Simons.

Se mostrará que a partir de la relación de los campos de norma gravitacionales con la conexión y la métrica, nuestra acción es descompuesta en cuatro términos: Los términos topológicos de Euler y el de Pontrjagin, la acción de Ashtekar (en la forma propuesta por

Samuel[63] y por Jacobson y Smolin[64], además de un término con constante cosmológica. El invariante topológico de Pontrjagin aparece también como un término extra en comparación con la acción de MacDowell-Mansouri. Esto puede ser considerado como una generalización de esta teoría. Nuestra propuesta se reduce ahora clasicamente a la formulación exacta de la teoría de Ashtekar, sin embargo es una propuesta diferente[65] que depende unicamente de los campos de norma del grupo elegido y ello preserva la relación con el formalismo de Chern-Simons.

La propuesta que presentamos es una extensión al procedimiento de MacDowell-Mansouri, en lo que sigue damos una revisión rápida de la ideas de este procedimiento. El punto de partida de esta teoría es considerar el potencial de norma ${\omega_\mu}^{AB}(x)$, donde los índices $\mu = 0, 1, 2, 3$ corresponden a una base 4-dimensional del espacio-tiempo M, con x^α son coordenadas locales sobre la variedad M, y los índices A,B $= 0, 1, 2, 3, 4$ estan asociados al grupo fibrado de anti-de-Sitter SO(3,2). De éste modo el potencial de norma ${\omega_\mu}^{AB}$ es una conexión asociada al haz fibrado principal (M, SO(3,2)).

Del potencial de norma ${\omega_\mu}^{AB}$ nosotros podemos introducir la curvatura

$$\mathcal{R}^{AB}_{\mu\nu} = \partial_\mu {\omega_\nu}^{AB} - \partial_\nu {\omega_\mu}^{AB} + \frac{1}{2} f^{[AB]}_{[[CD][EF]]} {\omega_\mu}^{CD} {\omega_\nu}^{EF}, \tag{5.1}$$

donde $f^{[AB]}_{[[CD][EF]]}$ son las constantes de estructura de SO(3,2). Aquí la notación en los índices [AB] significa antisimetrización. Para el potencial de norma en si ${\omega_\mu}^{AB}$ y la curvatura $\mathcal{R}^{AB}_{\mu\nu}$ creemos conveniente no usar los parentesis cuadrados, pensando que son antisimétricos en los indices AB.

Consideremos ahora los generadores $S_{AB} = -S_{BA}$ del álgebra de anti-de-Sitter SO(3,2) que satisfacen la siguiente relación

$$[S_{AB}, S_{CD}] = f^{[EF]}_{[[AB][CD]]} S_{EF}. \tag{5.2}$$

Encontramos que las constantes de estructura de SO(3,2) son dadas por

$$f^{[EF]}_{[[AB][CD]]} = \frac{1}{2}[\eta_{AC}\delta^E_B\delta^F_D - \eta_{AD}\delta^E_B\delta^F_C + \eta_{BD}\delta^E_A\delta^F_C - \eta_{BC}\delta^E_A\delta^F_D] - (E \leftrightarrow F). \tag{5.3}$$

De esta expresión obtenemos los siguientes resultados:

$$f^{[4a]}_{[4b][4c]} = 0, \quad f^{[4d]}_{[ab][cd]} = 0, \quad f^{[ab]}_{[4c][de]} = 0, \tag{5.4}$$

$$f^{[4a]}_{[4b][cd]} = \frac{1}{2}[\eta_{bd}\delta^a_c - \eta_{bc}\delta^a_d], \tag{5.5}$$

$$f^{[ab]}_{[4c][4d]} = \frac{\lambda^2}{2}[-\delta^a_c\delta^b_d + \delta^a_d\delta^b_c], \tag{5.6}$$

$$f^{[ab]}_{[cd][ef]} = \frac{1}{2}[\eta_{ce}\delta^a_d\delta^b_f - \eta_{cf}\delta^a_d\delta^b_e + \eta_{df}\delta^a_c\delta^b_e - \eta_{de}\delta^a_c\delta^b_f] - (a \leftrightarrow b), \tag{5.7}$$

donde los índices a,b corren de 0 a 3.

Sustituyendo los resultados anteriores en el término de curvatura (5.1), obtenemos

$$\mathcal{R}^{a4}_{\mu\nu} = \partial_\mu e_\nu{}^a - \partial_\nu e_\mu{}^a + (e_\mu{}^b\omega_{\nu b}{}^a - \omega_{\mu b}{}^a e_\nu{}^b), \tag{5.8}$$

y

$$\mathcal{R}^{ab}_{\mu\nu} = R^{ab}_{\mu\nu} - \lambda^2(e^a_\mu e^b_\nu - e^a_\nu e^b_\mu), \tag{5.9}$$

donde

$$R^{ab}_{\mu\nu} = \partial_\mu\omega_\nu{}^{ab} - \partial_\nu\omega_\mu{}^{ab} + \omega_\mu{}^{ca}\omega_{\nu c}{}^b - \omega_\nu{}^{ca}\omega_{\mu c}{}^b. \tag{5.10}$$

Considerando que $\mathcal{R}^{a4}_{\mu\nu}$ puede ser considerado como la torsión, mientras que $R^{ab}_{\mu\nu}$ es la curvatura usual del tensor de Riemann en cuatro dimensiones. Hasta aquí hemos ya identificado las componentes de los campos de norma $\omega_\mu{}^{AB}$ como las seis componentes de la conexión $\omega_\mu{}^{ab}$ y las tétradas $e_\mu{}^a \equiv \omega_\mu{}^{4a}$.

La acción de MacDowell-Mansouri S_{MM} es

$$S_{MM} = \int d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, \epsilon_{abcd}\, \mathcal{R}^{ab}_{\mu\nu}\, \mathcal{R}^{cd}_{\alpha\beta}. \tag{5.11}$$

Aquí $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ es el símbolo de permutación, una densidad tensorial con $\epsilon^{0123} = +1$ y para contraer los índices asociados con el grupo fibrado SO(3,2), uno considera una estructura que mantenga la propiedad de forma mas general de invariancia de Lorentz, siendo el símbolo antisimétrico ϵ_{abcd} (ver ref. [56]).

Con esto, se vió que esta teoría es equivalente a tres términos en la acción, el término topologico de Euler, el término de Einstein-Hilbert y el término de constante cosmológica. La nueva teoría de norma de gravitación que se propone, es simplemente la generalización de ésta última teoría, pero ahora tomando la parte auto-dual de la conexión ${}^+\omega_\mu{}^{ab}$ para construir las correspondientes intensidades de campo de norma ${}^+\mathcal{R}^{ab}_{\mu\nu}$. Varias acciones han sido ya construidas basandose en la parte auto-dual de la conexión[60,62,66,67]. La teoría de Ashtekar puede ser incluida en este grupo de propuestas. Nuestro enfoque es basado, sin embargo, en otro principio de construcción y es una de las formas mas naturales de extender la clase de teorías de norma que se hacen mención en las referencias [56,57,58], en particular nosotros extendemos en este trabajo la formulación de MacDowell-Mansouri. Sin embargo, clasicamente la acción de Ashtekar es obtenida exactamente de nuestra formulación. Entonces, esta nueva teoría de norma de la gravitación es también una extensión alternativa de esa realizada por Ashtekar.

Nuestra propuesta parte de la acción con cantidades auto-duales

$$\mathrm{S} = \int \mathrm{d}^4\mathrm{x}\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, \epsilon_{\mathrm{abcd}}\, {}^{+}\mathcal{R}^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu}\, {}^{+}\mathcal{R}^{\mathrm{cd}}_{\alpha\beta}, \tag{5.12}$$

para definir ${}^{+}\mathcal{R}^{ab}_{\mu\nu}$ introducimos las siguientes cantidades.

Definimos

$${}^{\pm}\mathrm{A}_{\mu\nu}{}^{\mathrm{ab}} = \frac{1}{2}\Big[\mathrm{A}_{\mu\nu}{}^{\mathrm{ab}} \mp \mathrm{i}\, {}^{*}\mathrm{A}_{\mu\nu}{}^{\mathrm{ab}}\Big]$$

con ${}^{*}\mathrm{A}_{\mu\nu}{}^{\mathrm{ab}} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mathrm{ab}}{}_{\mathrm{cd}}\, \mathrm{A}_{\mu\nu}{}^{\mathrm{cd}}$, como la forma de obtener cantidades auto-duales (+) o anti-auto-duales (-).

Con esto, la conexión auto-dual ${}^{+}\omega$, es

$${}^{+}\omega_{\mu}{}^{\mathrm{ab}} = \frac{1}{2}(\omega_{\mu}{}^{\mathrm{ab}} - \frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon^{\mathrm{ab}}{}_{\mathrm{cd}}\omega_{\mu}{}^{\mathrm{cd}}). \tag{5.13}$$

y de la siguiente definición

$$\Sigma^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu} = \mathrm{e}_{\mu}{}^{\mathrm{a}}\mathrm{e}_{\nu}{}^{\mathrm{b}} - \mathrm{e}_{\nu}{}^{\mathrm{a}}\mathrm{e}_{\mu}{}^{\mathrm{b}}, \tag{5.14}$$

tenemos su correspondiente expresión auto-dual

$${}^{+}\Sigma^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\Sigma^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu} - \frac{\mathrm{i}}{2}\epsilon^{\mathrm{ab}}{}_{\mathrm{cd}}\, \Sigma^{\mathrm{cd}}_{\mu\nu}). \tag{5.15}$$

En este punto, estamos interesados únicamente en tomar la parte auto-dual de $\mathcal{R}^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu}$. Asi tenemos

$${}^{+}\mathcal{R}^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu} = {}^{+}\mathrm{R}^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu} - \lambda^2\, {}^{+}\Sigma^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu}, \tag{5.16}$$

donde

$${}^{+}\mathrm{R}^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\, {}^{+}\omega_{\nu}{}^{\mathrm{ab}} - \partial_{\nu}\, {}^{+}\omega_{\mu}{}^{\mathrm{ab}} + {}^{+}\omega_{\mu}{}^{\mathrm{ca}}\, {}^{+}\omega_{\nu\mathrm{c}}{}^{\mathrm{b}} - {}^{+}\omega_{\nu}{}^{\mathrm{ca}}\, {}^{+}\omega_{\mu\mathrm{c}}{}^{\mathrm{b}}. \tag{5.17}$$

Con estas expresiones de ${}^{+}\mathcal{R}^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu}$, y por consiguiente la teoría de norma de gravitación dada por la acción (5.12) es ahora definida.

Para mostrar que esta nueva teoría reproduce la teoría de Ashtekar, introducimos la ecuación (5.16) en (5.12) y encontramos

$$\begin{aligned} S = &\int d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, \epsilon_{abcd}\, {}^{+}R^{ab}_{\mu\nu}\, {}^{+}R^{cd}_{\alpha\beta} - 2\lambda^2 \int d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, \epsilon_{abcd}\, {}^{+}\Sigma^{ab}_{\mu\nu}\, {}^{+}R^{cd}_{\alpha\beta} \\ &+ 2\lambda^4 \int d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, \epsilon_{abcd}\, e_{\mu}{}^{a}\, e_{\nu}{}^{b}\, e_{\alpha}{}^{c}\, e_{\beta}{}^{d}, \end{aligned} \tag{5.18}$$

donde hemos usados las ecuaciones (5.14) y (5.15) para obtener el último término de la ecuación (5.18). Con esto, nosotros reconocemos el segundo término como la acción de Ashtekar[63,64], mientras que el último término es el término usual de constante cosmológica. Asi el segundo y el tercer término corresponden a la teoría de Ashtekar.

Para clarificar el significado del primer término de la ecuación (5.18), usamos la ecuación (5.13) y vemos que ${}^{+}R^{ab}_{\mu\nu}$ dada en la ecuación (5.17) puede ser escrita como:

$$ {}^{+}R^{ab}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} R^{cd}_{\mu\nu}\, {}^{+}E^{ab}{}_{cd}. \tag{5.19}$$

con

$$ {}^{+}E^{ab}{}_{cd} = \frac{1}{2}\Big(\delta^{ab}{}_{cd} - i\epsilon^{ab}{}_{cd}\Big)$$

donde $\delta^{ab}{}_{cd} = \delta^a_c\delta^b_d - \delta^a_d\delta^b_c$. De este modo, el primer término en (5.18) viene a ser

$$\frac{1}{16}\int d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, \epsilon_{abef}\, R^{cd}_{\mu\nu}\, R^{gh}_{\alpha\beta}\Big(\delta^{ab}{}_{cd}\,\delta^{ef}{}_{gh} - 2i\delta^{ab}{}_{cd}\,\epsilon^{ef}{}_{gh} - \epsilon^{ab}{}_{cd}\,\epsilon^{ef}{}_{gh}\Big). \tag{5.20}$$

Considerando que

$$\epsilon_{abcd}\,\epsilon^{ab}{}_{ef} = -2(\eta_{ce}\eta_{df} - \eta_{cf}\eta_{de}), \tag{5.21}$$

el primer y tercer sumando en la ecuación (5.20) conduce a

$$\frac{1}{2}\int d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, \epsilon_{efgh} R^{ef}_{\mu\nu} R^{gh}_{\alpha\beta}. \tag{5.22}$$

Por el mismo procedimiento, el segundo término en la ecuación (5.20) se convierte en

$$ i\int d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, R^{ab}_{\mu\nu}\, R^{gh}_{\alpha\beta}\, \eta_{ag}\eta_{bh}. \tag{5.23}$$

Resumiendo, el primer término en la ecuación (5.18) conduce al resultado

$$\frac{1}{2}\int d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, \epsilon_{abcd} R^{ab}_{\mu\nu} R^{cd}_{\alpha\beta} + i\int d^4x\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, \eta_{ac}\eta_{bd}\, R^{ab}_{\mu\nu}\, R^{cd}_{\alpha\beta}. \tag{5.24}$$

Nosotros reconocemos al primer término como el término topológico de Euler y el segundo es el término topológico de Pontrjagin, asi el primer término en la ecuación (5.18) es un término topológico (una diferencial exacta).

Si consideramos la suma del segundo y tercer término en (5.18) y el primer término en (5.24) nosotros obtenemos el enfoque propuesto por MacDowell-Mansouri[56], puesto que es conocido que el segundo término en (5.18) da la mitad de la acción de Einstein-Hilbert[63,64]. La nueva característica viene del segundo término en (5.24), el término topológico de Pontrjagin. el segundo y tercer términos en (5.18) nos da la teoría de Ashtekar con término cosmológico, el primer término es puramente topológico (Euler más Pontrjagin) como se muestra en la expresión (5.24). Nuestra propuesta conduce entonces a la acción de MacDowell-Mansouri al remover el término topológico de Pontrjagin y esto nos conduce a la acción de Ashtekar al tomar ambos términos topológicos.

En el formalismo de Ashtekar la conexión ${}^{+}\omega_{\mu}{}^{\mathrm{ab}}$ usualmente llamada $\mathrm{A}_{\mu}{}^{\mathrm{ab}}$ juega un papel central. En la literatura, la intensidad del campo asociado a $\mathrm{A}_{\mu}{}^{\mathrm{ab}}$ es llamada $\mathrm{F}^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu}$ la cual es definida como

$$\mathrm{F}^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\mathrm{A}_{\nu}{}^{\mathrm{ab}} - \partial_{\nu}\mathrm{A}_{\mu}{}^{\mathrm{ab}} + \mathrm{A}_{\mu}{}^{\mathrm{ca}}\mathrm{A}_{\nu\mathrm{c}}{}^{\mathrm{b}} - \mathrm{A}_{\nu}{}^{\mathrm{ca}}\mathrm{A}_{\mu\mathrm{c}}{}^{\mathrm{b}}. \tag{5.25}$$

En nuestro enfoque $\mathrm{F}^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu} = {}^{+}\mathrm{R}^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu}$, $\mathrm{F}^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu}$ tiene la estructura de la intensidad de campos de Yang-Mills. La teoría de Ashtekar es construida pareciendose a una teoría de Yang-Mills y es usualmente considerada como la versión de gravedad de estas clases de teorías. Sin embargo, la acción en el formalismo de Ashtekar es

$$\int \mathrm{d}^4\mathrm{x}\, \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\, \epsilon_{\mathrm{abcd}}\, \mathrm{e}_{\mu}{}^{\mathrm{a}}\, \mathrm{e}_{\nu}{}^{\mathrm{b}}\mathrm{F}^{\mathrm{cd}}_{\alpha\beta}, \tag{5.26}$$

la cual es lineal en las componentes de la intensidad de los campos y no tiene la estructura usual de una acción de Yang-Mills.

Con éste trabajo nosotros mostramos que al adicionar tres términos a la acción (5.26) (términos de Euler, Pontrjagin y cosmológico) nosotros llegamos a la teoría de norma propuesta por medio de la acción (5.12). Esta ya es cuadrática en las componentes de la intensidad de los campos $\mathcal{F}^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu} = \mathrm{F}^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu} - \lambda^2\ {}^{+}\Sigma^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu}$, meramente la acción (5.12) puede ser escrita como

$$\mathrm{S} = \int \mathrm{d}^4\mathrm{x}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\mathrm{abcd}}\mathcal{F}^{\mathrm{ab}}_{\mu\nu}\mathcal{F}^{\mathrm{cd}}_{\alpha\beta}. \tag{5.27}$$

En nuestra opinion, la estructura de norma de esta teoría de la gravedad clarifica en parte, y desde un nuevo punto de vista, la selección particular de la acción (5.26) propuesta por Samuel[63] y Jacobson-Smolin[64].

Sin embargo, la acción (5.27) ha sido también construida tomando en cuenta su interesante relación cercana con la teoría de Chern-Simons. De echo, si en lugar del símbolo de Levi-Civita ϵ_{abcd}, nosotros usamos la métrica de Killing asociada al grupo $SO(3,2)$, la expresión (5.27) viene a ser la segunda forma Clase Chern, de la cual la acción de Chern-Simons puede ser derivada.

De acuerdo a nuestro resultado, el formalismo de Ashtekar es cercanamente relacionada a la teoría de Chern-Simons. Esto puede contribuir a entender el hecho que los estados físicos de relatividad general a nivel cuántico[56] son la exponencial de la acción de Chern-Simons $\psi \sim \exp(\frac{\mathrm{const.}}{\Lambda} S_{cs})$.

Para finalizar, el trabajo que esta involucrado en esta sección es el siguiente:

1.- J.A. Nieto, O. Obregón and J. Socorro, Phys. Rev. **D50**, R3583 (1994).

6.-) Modelos Cosmológicos en Supergravedad N=2, en cinco dimensiones

6.1.-) Introducción

En éste trabajo se estudian modelos cosmológicos en la teoría de supergravedad, para N=2, en cinco dimensiones, con algunas restricciones sobre las variables de campo del sistema. Dichos modelos se pueden estudiar en una teoría 4-dimensional, con dos campos escalares ϕ y ψ interaccionando. La finalidad primordial de este acoplamiento es la de buscar la manera de remover la singularidad para un tiempo finito debido a la presencia de un campo supersimétrico ψ y a la manera en que interacciona con un campo escalar de corto alcance ϕ, tipo Brans-Dicke. Los modelos estudiados son los Bianchi tipo V y VI_0.

Las teorías físicas formuladas sobre espacio-tiempos mayores que 4 han sido objeto de estudios intensivos en los últimos años, tales como teoría de cuerdas, supercuerdas y supergravedad. Recientemente Balbinot et al.[68,69] han considerado soluciones cosmológicas para la teoría de supergravedad N=2, D=5 [70,71], la cual contiene la métrica g_{MN}, un campo de espín $\frac{3}{2}$, ψ^a_M (a=1,2 es un índice interno) y una 1-forma B_A (M,N=1,...,5 and $\mu\nu = 1, ..., 4$). El interes esta enfocado en las soluciones cosmológicas de las ecuaciones clásicas de campo obtenidas al tomar una adecuada configuración del "estado base", es decir la configuración donde el conjunto de todos los campos fermiónicos son cero y el potencial de Maxwell tiene solamente una componente, $A_B = (0, 0, 0, 0, A_5) = (0, 0, 0, 0, \psi)$.

Estas teorías, cuyo origen esta en los trabajos de Kaluza-Klein, tienen como meta dar una explicación de las propiedades intrinsecas de la materia, tal como la carga eléctrica como una manifestación del espacio-tiempo de una dimensionalidad "interna" adicional. Sin embargo, la necesidad de tener una consistencia física de la compactificación del espacio interno, forza a los teóricos a introducir otros campos, además de la geometrización multidimensional de la gravitación, que induzca esta compactificación; no es claro si uno puede en general observar estos campos extras en sentido geométrico. Sin embargo una estructura geométrica puede ser introducida, cuando estos campos se interpretan como componentes de un multiplete supersimétrico[39].

La teoría contiene un campo adicional semejante a los de Maxwell, definido como un campo externo en 5-dimensiones, que proviene de la métrica g_{MN}, como en el esquema tradicional de Kaluza-Klein. Aquí presentamos soluciones exactas en esta teoría bajo la presunción de que el espacio-tiempo 5-dimensional tiene localmente la estructura de $V_4 x S^1$, donde V_4 es el espacio-tiempo 4-dimensional, cuya sección espacial la da el modelo cosmológico a estudiar, en nuestro caso los modelos Bianchi[72,73] tipo V y VI_0.

El lagrangiano de la supergravedad para N=2, D=5 puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}\sqrt{g}R - \frac{1}{4}\sqrt{g}F_{AB}F^{AB} - \frac{1}{6\sqrt{3}}\epsilon^{ABCDE}F_{AB}F_{CD}B_E - \frac{i}{2}\sqrt{g}\overline{\psi}^a_A\Gamma^{ABC}D_B\psi_{Da} \\ & - \frac{i}{8}\sqrt{3}\sqrt{g}F_{AB}\overline{\psi}^a_C(\Gamma^{ABCD} + 4\delta^{AC}\delta^{BD})\psi_{Da},\end{aligned} \tag{6.1}$$

donde los términos proporcionales a la torsión han sido despreciados; $F_{AB} = \partial_A B_B - \partial_B B_A$ y Γ^{ABC} es un producto anti-simétrico de matrices de Dirac†.

La signatura es $(+ - - - -)$; el tensor de Riemann $R^A_{BCD} = \partial_C\Gamma^A_{BD} - \partial_D\Gamma^A_{BC} + \Gamma^E_{BD}\Gamma^A_{CE} - \Gamma^E_{BC}\Gamma^A_{DE}$, y el tensor de Ricci $R_{AB} = R^C_{ACD}$.

Las restricciones introducidas, impuestas, como se mencionó anteriormente, para poder tener la configuración del "estado base", esta sobre el campo fermiónico y el campo electromagnético. Después de la reducción dimensional se obtiene una teoría efectiva en la cual la gravedad esta acoplada en forma no-trivial a dos campos escalares ψ y $\phi = (g_{55})^{\frac{1}{2}}$.

El elemento de línea 5-dimensional esta dado por:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\mu)dx^\mu dx^\nu - \phi^2(x^\mu)(dx^5)^2. \tag{6.2}$$

La 1-forma B_A es $B_\mu = 0$, $B_5 = \psi(x^\mu)$. Como ningún campo se considerá dependiente de x^5, la teoría es equivalente a la descrita por un lagrangiano 4-dimensional de la forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}\sqrt{g}\phi(R - \frac{2}{\phi^2}D_\lambda\psi D^\lambda\psi), \tag{6.3}$$

donde $\sqrt{g}$ y R son ahora cantidades 4-dimensionales asociadas con la métrica $g_{\mu\nu}$ del expacio externo.

De esta densidad lagrangiana (6.3) se obtienen las siguientes ecuaciones de movimiento para los campos $g_{\mu\nu}$, ϕ y ψ.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{3}{2\phi^2}(\psi_{;\mu}\psi_{;\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\psi_{;\lambda}\psi^{;\lambda}) + \frac{1}{\phi}(\phi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\Box\phi), \tag{6.4a}$$

† $\Gamma^{ABC} = \frac{1}{3!}\Big[\Gamma^A\Gamma^B\Gamma^C - \Gamma^A\Gamma^C\Gamma^B - \Gamma^B\Gamma^A\Gamma^C + \Gamma^B\Gamma^C\Gamma^A + \Gamma^C\Gamma^A\Gamma^B - \Gamma^C\Gamma^B\Gamma^A\Big]$, $\Gamma^{AB} = \frac{1}{2}[\Gamma^A, \Gamma^B]$

$$\Box\phi + \frac{\psi_{;\lambda}\psi^{;\lambda}}{\phi} = 0, \tag{6.4b}$$

$$\Box\psi - \frac{\phi_{;\lambda}\psi^{;\lambda}}{\phi} = 0, \tag{6.4c}$$

donde $\Box$ es el d'Alembertiano covariante * con respecto a $g_{\mu\nu}$. Éste sistema es equivalente al que se obtiene del lagrangiano de supergravedad de 5 dimensiones al variar con respecto a B_A, g_{AB} y ψ^a_A, e imponiendo el ansatz después de variar, $\psi^a_A = 0$, $B_A = (0,0,0,0,\psi)$ y tomando en cuenta la métrica 5-dimensional, la ecuación (6.2).

6.2.-) Métricas de los modelos cosmológicos y las soluciones exactas

Bianchi tipo V

Este modelo cosmológico es anisotrópico y homogéneo, con la siguiente métrica

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2A}dx^2 + e^{2B-2qx}dy^2 + e^{2C-2qx}dz^2, \tag{6.5}$$

donde A, B y C son funciones del tiempo cosmológico t. Las ecuaciones de campo para éste espacio-tiempo y los campos ϕ y ψ son

$$\dot{A}\dot{B} + \dot{A}\dot{C} + \dot{B}\dot{C} - 3q^2e^{-2A} = -(A+B+C)^{\dot{}}\left(\frac{\dot\phi}{\phi}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{\dot\psi}{\phi}\right)^2, \tag{6.6a}$$

$$\ddot{B} + \dot{B}^2 + \ddot{C} + \dot{C}^2 + \dot{B}\dot{C} - q^2e^{-2A} = -(B+C)^{\dot{}}\left(\frac{\dot\phi}{\phi}\right) - \left(\frac{\ddot\phi}{\phi}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{\dot\psi}{\phi}\right)^2, \tag{6.6b}$$

$$\ddot{A} + \dot{A}^2 + \ddot{C} + \dot{C}^2 + \dot{A}\dot{C} - q^2e^{-2A} = -(A+C)^{\dot{}}\left(\frac{\dot\phi}{\phi}\right) - \left(\frac{\ddot\phi}{\phi}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{\dot\psi}{\phi}\right)^2, \tag{6.6c}$$

$$\ddot{A} + \dot{A}^2 + \ddot{B} + \dot{B}^2 + \dot{A}\dot{B} - q^2e^{-2A} = -(A+B)^{\dot{}}\left(\frac{\dot\phi}{\phi}\right) - \left(\frac{\ddot\phi}{\phi}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{\dot\psi}{\phi}\right)^2, \tag{6.6d}$$

$$2\dot{A} = \dot{B} + \dot{C}, \tag{6.6e}$$

$$\ddot\phi + (A+B+C)^{\dot{}}\;\dot\phi + \frac{\dot\psi^2}{\phi} = 0, \tag{6.6f}$$

$$\ddot\psi + (A+B+C)^{\dot{}}\;\dot\psi - \frac{\dot\psi\dot\phi}{\phi} = 0, \tag{6.6g}$$

---

* $\Box\phi = g^{\alpha\mu}\phi_{,\alpha,\mu} - \Gamma^\rho\,\phi_\rho$ con $\Gamma^\rho = g^{\mu\nu}\Gamma^\rho_{\mu\nu}$

aquí los puntos significan derivadas con respecto al tiempo t. En lo que sigue presentamos las soluciones exactas de las ecuaciones diferenciales (6.6). Para poner el sistema anterior de una forma más simétrica, definimos una nueva variable del tiempo: $d\eta = \exp(-A)dt$, ahora las ecuaciones (6.6) son

$$A'B' + A'C' + B'C' - 3q^2 = -(A+B+C)' \quad \frac{\phi'}{\phi} + \frac{3}{4}\left(\frac{\psi'}{\phi}\right)^2, \tag{6.7a}$$

$$B'' - A'B' + B'^2 + C'' - A'C' + C'^2 + B'C' - q^2 = (A-B-C)'\frac{\phi'}{\phi} - \frac{\phi''}{\phi} - \frac{3}{4}\left(\frac{\psi'}{\phi}\right)^2, \tag{6.7b}$$

$$A'' + C'' + C'^2 - q^2 = -C' \quad \frac{\phi'}{\phi} - \frac{\phi''}{\phi} - \frac{3}{4}\left(\frac{\psi'}{\phi}\right)^2, \tag{6.7c}$$

$$A'' + B'' + B'^2 - q^2 = -B' \quad \frac{\phi'}{\phi} - \frac{\phi''}{\phi} - \frac{3}{4}\left(\frac{\psi'}{\phi}\right)^2, \tag{6.7d}$$

$$2A' = B' + C', \tag{6.7e}$$

$$\phi'' + (B+C)' \quad \phi' + \frac{\psi'^2}{\phi} = 0, \tag{6.7f}$$

$$\psi'' + (B+C)' \quad \psi' - \frac{\psi'\phi'}{\phi,} = 0 \tag{6.7g}$$

aquí las primas significan derivadas respecto al parámetro η.

Multiplicando la ecuación (6.7f) por ϕ' y la ecuación (6.7g) por ψ' y sumandolas, obtenemos (usando la ecuación (6.7e))

$$\frac{1}{2}(\phi'^2 + \psi'^2)' + 2\mathrm{A}'(\phi'^2 + \psi'^2) = 0, \tag{6.8}$$

o

$$\phi'^2 + \psi'^2 = \alpha_1 \mathrm{e}^{-4\mathrm{A}}, \qquad \alpha_1 > 0. \tag{6.9}$$

Ademas, la ecuación (6.7g) (utilizando la ecuación (6.7e)) implica que

$$\psi' = \alpha_2 \mathrm{e}^{-2\mathrm{A}}\phi. \tag{6.10}$$

Sumando las ecuaciones (6.7a y 6.7b) multiplicadas por e^{2A} ambos miembros, obtenemos

$$[\phi'' + 2\mathrm{A}''\phi + 4\mathrm{A}'\phi' + 4\mathrm{A}'^2\phi]\mathrm{e}^{2\mathrm{A}} = 4\mathrm{q}^2\phi\mathrm{e}^{2\mathrm{A}}, \tag{6.11}$$

pero el primer miembro es una diferencial exacta de

$$(\phi e^{2A})'' = 4q^2\phi e^{2A}, \tag{6.12}$$

teniendo así otra primera integral,

$$\phi e^{2A} = \alpha_3\, e^{2q\eta} + \alpha_4\, e^{-2q\eta}, \tag{6.13}$$

donde α_3 y α_4 son constantes de integración. De las ecuaciones (6.9 y 6.10) obtenemos

$$\psi' = \pm\frac{\alpha_2\phi\phi'}{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2^2\phi^2}}. \tag{6.14}$$

Usando las ecuaciones (6.10, 6.13 y 6.14) para eliminar e^{2A}

$$\frac{\phi'}{\phi\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2^2\phi^2}} = \frac{\pm 1}{\alpha_3\, e^{2q\eta} + \alpha_4\, e^{-2q\eta}}. \tag{6.15}$$

La solución para esta ecuación es

$$\phi = \frac{2\sqrt{\alpha_1}}{\alpha_2}\frac{\alpha_5 e^{-I\sqrt{\alpha_1}}}{1 + \alpha_5^2 e^{-2I\sqrt{\alpha_1}}}, \tag{6.16a}$$

en esta última ecuación α_5 es una constante de integración, e I esta dada por

$$I(\eta) = \int^{\eta} \frac{1}{\alpha_3 e^{2q\eta} + \alpha_4 e^{-2q\eta}}. \tag{6.16b}$$

El valor explicito de esta integral se deja para después, ya que depende del signo del producto de $\alpha_3\alpha_4$ o de si una de las dos constantes se anula.

Restando la ecuación (6.7c) de (6.7d), encontramos

$$C'' - B'' + C'^2 - B'^2 = (-C' + B')\left(\frac{\phi'}{\phi}\right) \tag{6.17}$$

que tiene como primera integral

$$(C - B)'\phi = \alpha_6 e^{-2A}. \tag{6.18}$$

Usando la ecuación (6.13) y la ecuación anterior, al integrar se obtiene

$$(C - B) = \alpha_6\, I \tag{6.19}$$

y de la ecuación (6.14)

$$\psi = \psi_0 - \frac{\sqrt{\alpha}_1}{\alpha_2}\left[\frac{1-\alpha_3(\tanh\ \mathrm{q}\eta)^{\frac{\sqrt{\alpha}_1}{\mathrm{qk}}}}{1+\alpha_3(\tanh\ \mathrm{q}\eta)^{\frac{\sqrt{\alpha}_1}{\mathrm{qk}}}}\right]. \tag{6.20}$$

La solución para A la obtenemos de la ecuación (6.13)

$$\mathrm{A} = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\alpha_3\mathrm{e}^{2\mathrm{q}\eta}+\alpha_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{q}\eta}}{\phi}\right] \tag{6.21}$$

de la ecuación $C' + B' = 2A'$ tenemos

$$\mathrm{C}+\mathrm{B} = 2\mathrm{A} \tag{6.22}$$

donde sin perder generalidad, hemos elegido una constante de integración igual a cero.

De las ecuaciones (6.18) a (6.22) obtenemos la solución para B y C.

$$\mathrm{B} = \mathrm{A}-\alpha_6\mathrm{I}(\eta) = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\alpha_3\mathrm{e}^{2\mathrm{q}\eta}+\alpha_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{q}\eta}}{\phi}\right] - \alpha_6\mathrm{I}(\eta), \tag{6.23}$$

$$\mathrm{C} = \mathrm{A}+\alpha_6\mathrm{I}(\eta) = \frac{1}{2}\ln\left[\frac{\alpha_3\mathrm{e}^{2\mathrm{q}\eta}+\alpha_4\mathrm{e}^{-2\mathrm{q}\eta}}{\phi}\right] + \alpha_6\mathrm{I}(\eta). \tag{6.24}$$

Si nosotros ahora sustituimos las expresiones anteriores para A, B, C, ψ y ψ en las ecuaciones (6.7), nosotros obtenemos la siguiente relación entre las diferentes constantes de integración,

$$\alpha_1 = -(4\alpha_6^2 + 48\alpha_3\alpha_4)/3, \tag{6.25}$$

y puesto que $\alpha_1 > 0$, es claro que $\alpha_3\alpha_4 < 0$, por lo cual estamos listos para evaluar la integral $\mathrm{I}(\eta)$ y todas las otras funciones que dependen de ella. La forma final de las soluciones es

$$\mathrm{I}(\eta) = \frac{1}{4\mathrm{q}\sqrt{-\alpha_3\alpha_4}}\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{q}\eta}-\sqrt{-\alpha_4/\alpha_3}}{\mathrm{e}^{2\mathrm{q}\eta}+\sqrt{-\alpha_4/\alpha_3}}\right), \tag{6.26}$$

$$e^{2A} = \frac{\alpha_2}{2\alpha_5\sqrt{\alpha_1}}\left(\alpha_3 e^{2q\eta}+\alpha_4 e^{-2q\eta}\right)\left(\frac{e^{2q\eta}-\sqrt{-\alpha_4/\alpha_3}}{e^{2q\eta}+\sqrt{-\alpha_4/\alpha_3}}\right)^{\frac{-\alpha_1}{4q\sqrt{-\alpha_1\alpha_3\alpha_4}}} \cdot \left[\alpha_5^2 + \left(\frac{e^{2q\eta}-\sqrt{-\alpha_4/\alpha_3}}{e^{2q\eta}+\sqrt{-\alpha_4/\alpha_3}}\right)^{\frac{\alpha_1}{2q\sqrt{-\alpha_1\alpha_3\alpha_4}}}\right], \tag{6.27}$$

$$e^{2B} = e^{2A}\left(\frac{e^{2q\eta} - \sqrt{-\alpha_4/\alpha_3}}{e^{2q\eta} + \sqrt{-\alpha_4/\alpha_3}}\right)^{\frac{-\alpha_6}{2q\sqrt{-\alpha_3\alpha_4}}}, \tag{6.28}$$

$$e^{2C} = e^{2A}\left(\frac{e^{2q\eta} - \sqrt{-\alpha_4/\alpha_3}}{e^{2q\eta} + \sqrt{-\alpha_4/\alpha_3}}\right)^{\frac{+\alpha_6}{2q\sqrt{-\alpha_3\alpha_4}}}, \tag{6.29}$$

En éste punto, no es posible observar si la singularidad del espacio es removida por la introducción del campo escalar ϕ y del campo supersimétrico ψ, para algún valor en especial del parámetro η.

Bianchi tipo VI_0

Éste modelo cosmológico es anisotrópico y homogéneo, con la siguiente métrica

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2A}dx^2 + e^{2B-2qx}dy^2 + e^{2B+2qx}dz^2, \tag{6.30}$$

donde A y B son funciones del tiempo cosmológico t. Las ecuaciones de campo, usando las ecuaciones (6.4), para éste espacio-tiempo son

$$2\dot{A}\dot{B} + \dot{B}^2 - q^2e^{-2A} = -(A + 2B\dot{)}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{\psi}}{\phi}\right)^2, \tag{6.31a}$$

$$2\ddot{B} + 3\dot{B}^2 + q^2e^{-2A} = -(2B\dot{)}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right) - \left(\frac{\ddot{\phi}}{\phi}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{\psi}}{\phi}\right)^2, \tag{6.31b}$$

$$\ddot{A} + \dot{A}^2 + \ddot{B} + \dot{B}^2 + \dot{A}\dot{B} - q^2e^{-2A} = -(A + B\dot{)}\left(\frac{\dot{\phi}}{\phi}\right) - \left(\frac{\ddot{\phi}}{\phi}\right) - \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{\psi}}{\phi}\right)^2, \tag{6.31c}$$

$$\ddot{\phi} + (A + 2B\dot{)}\dot{\phi} + \frac{\dot{\psi}^2}{\phi} = 0(6.31d)$$

$$\ddot{\psi} + (A + 2B\dot{)}\dot{\psi} - \frac{\dot{\psi}\dot{\phi}}{\phi} = 0, \tag{6.31e}$$

los puntos significan derivadas con respecto al tiempo t. De igual manera que en el caso anterior, definimos una nueva variable del tiempo por: $d\eta = \exp(-A)dt$, ahora las ecuaciones (6.31) son

$$2A'B' + B'^2 - q^2 = -(A + 2B)'\frac{\phi'}{\phi} + \frac{3}{4}\left(\frac{\psi'}{\phi}\right)^2, \tag{6.32a}$$

$$2B'' - 2A'B' + 3B'^2 + q^2 = (A - 2B)'\frac{\phi'}{\phi} - \frac{\phi''}{\phi} - \frac{3}{4}\left(\frac{\psi'}{\phi}\right)^2, \tag{6.32b}$$

$$A'' + B'' + B'^2 - q^2 = -B'\frac{\phi'}{\phi} - \frac{\phi''}{\phi} - \frac{3}{4}\left(\frac{\psi'}{\phi}\right)^2, \tag{6.32c}$$

$$\phi'' + 2B'\phi' + \frac{\psi'^2}{\phi} = 0, \tag{6.32d}$$

$$\psi'' + 2B' \quad \psi' - \frac{\psi'\phi'}{\phi} = 0, \tag{6.32e}$$

la prima significa la derivada con respecto a η. Multiplicamos la ecuación (6.32c) por ϕ' y la ecuación (6.32d) por ψ' y sumandolas, se obtiene

$$\frac{1}{2}(\phi'^2 + \psi'^2)' + 2B'(\phi'^2 + \psi'^2) = 0, \tag{6.33}$$

o

$$\phi'^2 + \psi'^2 = \alpha_1 e^{-4B} \qquad \alpha_1 > 0. \tag{6.34}$$

La ecuación (6.32e) implica

$$\psi' = \alpha_2 e^{-2B}\phi. \tag{6.35}$$

Sumando las ecuaciones (6.32 a y b) y multiplicando ambos miembros por e^{2B}, obtenemos

$$[\phi'' + 2B''\phi + 4B'\phi' + 4B'^2\phi]e^{2B} = 0, \tag{6.36}$$

que es una segunda derivada total de la forma

$$(\phi e^{2B})'' = 0, \tag{6.37}$$

teniendo una primera integral de movimiento,

$$\phi e^{2B} = \alpha_3 + \alpha_4\eta. \tag{6.38}$$

De las ecuaciones (6.34 y 6.35) tenemos

$$\psi' = \frac{\alpha_2\phi\phi'}{\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2^2\phi^2,}} \tag{6.39}$$

y de las ecuaciones (6.35 y 6.38) tenemos

$$\psi' = \frac{\alpha_2\phi^2}{\alpha_3 + \alpha_4\eta}, \tag{6.40}$$

eliminando ψ entre ambas ecuaciones, tenemos para ϕ,

$$\frac{\phi'}{\phi\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2^2\phi^2}} = \frac{1}{\alpha_3 + \alpha_4\eta}. \tag{6.41}$$

La solución de esta ecuación es dada por

$$\phi = \frac{2\alpha_5\sqrt{\alpha_1}}{\alpha_2} \frac{(\alpha_3 + \alpha_4\eta)^{\frac{\sqrt{\alpha_1}}{\alpha_4}}}{1 + \alpha_5^2(\alpha_3 + \alpha_4\eta)^{\frac{2\sqrt{\alpha_1}}{\alpha_4}}}, \tag{6.42}$$

con éste resultado, regresamos a la ecuación (6.38), para encontrar la función B:

$$\mathrm{B} = \frac{1}{2}\ln\Big[\frac{\alpha_2}{2\alpha_5\sqrt{\alpha_1}}(\alpha_3 + \alpha_4\eta)^{\frac{\alpha_4+\sqrt{\alpha_1}}{\alpha_4}}\Big(1 + \alpha_5^2(\alpha_3 + \alpha_4\eta)^{\frac{2\sqrt{\alpha_1}}{\alpha_4}}\Big)\Big] \tag{6.43}$$

y de la ecuación (6.39) es claro que

$$\psi = \psi_0 - \frac{1}{\alpha_2}\sqrt{\alpha_1 - \alpha_2^2\phi^2} \tag{6.44}$$

Si restamos la ecuación (6.32c) a la (6.32b) y ademas usamos las ecuaciones (6.38) y (6.43), se obtiene una ecuación diferencial para la función A, cuya solución es:

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_1 \ln(\alpha_3 + \alpha_4\eta) + \frac{1}{2}\ln[(\alpha_3 + \alpha_4\eta)\phi^{-1}] + \frac{1}{2}\Big(\frac{\mathrm{q}}{\alpha_4}\Big)^2\Big(\alpha_3 + \alpha_4\eta\Big)^2 \tag{6.45}$$

donde A_1 es una constante de integración (la otra constante aditiva fue elegida igual a cero).

Al sustituir los resultados para las funciones A, B, ϕ y ψ en las ecuaciones (6.32) se encuentra la siguiente relación entre algunas constantes de integración

$$\alpha_1 = \alpha_4^2(4\,\mathrm{A}_1 + 1)/3. \tag{6.46}$$

Para determinar si en éste modelo, la interacción de los campos escalares evita la singularidad del espacio calculamos el volumen $\mathrm{V} = \exp[\mathrm{A} + 2\mathrm{B}]$ para los siguientes valores muy particulares de las constantes de integración $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_5 = 1$, $\mathrm{A}_1 = \frac{1}{2}$, y $\alpha_3 = 0$,

$$\mathrm{V} = \frac{\sqrt{2}}{4}\mathrm{e}^{\mathrm{q}^2\eta^2/2}(1 + \eta^2)^{3/2}\,\eta^3. \tag{6.47}$$

observese que para $\eta = 0$ esta solución particular tiene una singularidad, correspondiendo a un valor finito del tiempo t dado por

$$\mathrm{t} - \mathrm{t}_0 = \int_0^\eta \mathrm{e}^{\mathrm{A}}\,d\eta = \frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^\eta \mathrm{e}^{\mathrm{q}^2\eta^2/2}\,\eta\sqrt{1 + \eta^2}\,d\eta. \tag{6.48}$$

Suponiendo que las constantes α_2 y α_5 tengan el mismo signo y que $\alpha_4 > 0$ (con esto tenemos que el campo escalar $\phi > 0$ para $\alpha_3 + \alpha_4 \eta > 0$), la solución anterior tiene una singularidad para éste caso. Con esto se concluye que aun con la presencia del campo escalar ϕ y del campo supersimétrico ψ, no es posible remover la singularidad para el modelo Bianchi tipo VI_0.

Para finalizar, los trabajos que estan involucrados en esta sección son los siguientes:

1.- Luis O. Pimentel and J. Socorro, Int. J. Theo. Phys. **34**, 701 (1995).

2.- Luis O. Pimentel and J. Socorro, Gen. Rel. and Grav. **25**, 1159 (1993).

7.- Comentarios

En este trabajo se han considerado tres enfoques diferentes para estudiar cosmología cuántica (supergravedad N=1, mecánica cuántica supersimétrica y el formalismo hamiltoniano ADM), que parten de diferentes bases. Se complementa con una teoría cuadratica para la gravedad en D=5 debida a MacDowell-Mansouri; nuestra propuesta auto-dual es usar cantidades auto-duales en todas las cantidades que aparecen en la definición de la acción de MacDowell-Mansouri, obteniendo la teoría de la gravedad en variables de Ashtekar más otros términos que generalizan la acción de ellos. Se finalizó este trabajo con el estudio de modelos cosmológicos considerando el sector bosónico de una teoría de supergravedad N=2, D=5, para estudiar el comportamiento a nivel clásico, de los radios de los modelos considerados, nuestro resultado no evita la singularidad de los mismos, como en los modelos estudiados por otros autores.

Respecto a la cosmología cuántica, es importante mencionar que el trabajo que motivó a encontrar la caracterización de la función de onda Ψ con respecto a la dependencia $\sim e^{\pm\Phi}$, fué el de Kodama[33], que presenta una relación funcional entre la función de onda en el formalismo hamiltoniano ADM y el formalismo de Ashtekar (variables complejas),

$$\Psi_{\mathrm{ADM}} = \Psi_{\mathrm{Ash}}\, \mathrm{e}^{\pm i \mathrm{S}}$$

donde la función S es una funcional puramente imaginaria que se puede determinar algebraicamente para los modelos cosmológicos en estudio en el formalismo de Ashtekar.

A partir de esto, por ejemplo en supergravedad N=1, D'Eath, Hawking y Obregón[12f] presentan la siguiente forma de la función de onda para el modelo Bianchi tipo I, (que al parecer no es la más general posible, usando notación de espinores de dos componentes), bajo la idea de que la función de onda debe ser invariante de Lorentz (de hecho esto hace que la constricción supersimétrica $\mathrm{J}_{\mathrm{AB}}|\psi>= 0$ se satisface automáticamente.

$$\Psi = \mathrm{a}_0 \exp(-\mathrm{I})\, \psi_0 + \mathrm{F}\, \psi_2 + \mathrm{G}\, \psi_4 + \mathrm{a}_1 \exp(+\mathrm{I}) \psi_6$$

donde F y G son funciones identicamente cero (Graham[74] presenta otra alternativa que permite suponer que existan estas funciones, posteriormente P.V. Moniz[75] escribe otra forma más general para la función de onda invariante de Lorentz, teniendo el inconveniente de no contener los estados de agujero de gusano y de Hartle-Hawking a partir de esta generalización al esquema estandard[12f]) siendo los parámetros $\psi's$ variables Grassman pares, además, la función I tiene la forma

$$\mathrm{I} = \frac{1}{6}\exp(2\alpha)\mathrm{Tr}(\exp(2\beta)).$$

que viene siendo identica al potencial Φ obtenido tanto de la llamada *simetría escondida* de los modelos cosmológicos tipo Bianchi Clase A en mecánica cuántica supersimétrica, como de la solución a la ecuación de Einstein-Hamilton-Jacobi clásica en el formalismo hamiltoniano ADM. Ellos consideran un cierto ordenamiento de factores en la ecuación de Wheeler-DeWitt, resultando el estado conocido como agujero de gusano en el sector bosónico (término ψ_0), asi como el estado de Hartle-Hawking en el sector fermiónico (en el término con mayor número de cantidades Grassmanianas). Estos estados también son posteriormente obtenidos en los otros formalismos.

En el formalismo matricial usado en supergravedad N=1, la idea principal era obtener la propiedad de "raiz cuadrada a la Dirac" entre la constricción hamiltoniana bosónica de la cosmología cuántica estandard (hamiltonianos para los modelos cosmológicos tipo Bianchi Clase A, ya que los Clase B no admiten una formulación hamiltoniana) y la constricción supersimétrica S a través del álgebra (2.38). Ello nos permite asegurar que $\hat{\mathrm{S}}|\psi>=0 \rightarrow \hat{\mathcal{H}}_0|\psi>=0$. Los modelos más interesantes a estudiar en este formalismo son aquellos que tiene potenciales de interacción, en particular el modelo Bianchi tipo IX y en nuestro caso el sub-modelo de Taub cuyo hamiltoniano es de la forma

$$\mathcal{H}_0 = -(\mathrm{P}_\Omega)^2 + (\mathrm{P}_+)^2 + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-4\Omega}[\mathrm{e}^{-8\beta_+} - 4\mathrm{e}^{-2\beta_+}]$$

y para el sector del micro-super-espacio ($\beta_+ \rightarrow \infty, \Omega$ grande), el potencial se anula, con lo cual la ecuación de Wheeler-DeWitt se transforma en partícula libre

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial\Omega^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial\beta_+^2} = 0,$$

cuya solución general es

$$\Psi = \mathrm{F}(\Omega - \beta_+) + \mathrm{G}(\Omega + \beta_+),$$

donde F y G son funciones arbitrarias de $\Omega - \beta_+$ y $\Omega + \beta_+$, respectivamente. En nuestro caso, los últimos términos de la ecuación (2.54) se anulan para β_+ muy grande (Ω grande), pero el primer término del potencial permanece distinto de cero, luego entonces en este límite considerado, "la ecuación tipo Dirac de nuestra formulación no corresponde a la raíz cuadrada estandard" de la ecuación (2.56), la cual no contiene potencial. El cuadrado del primer término en dicho potencial de la ecuación (2.54) es cero y la ecuación iterada tipo Dirac tiene términos extras (ver (2.52)) debido al producto de las derivadas con el potencial, como ya es conocido de la teoría de Dirac estándar. El potencial para el modelo de Taub (2.48) es obtenido esencialmente tomando el cuadrado de los dos términos del potencial de cualquiera de las ecuaciones de (2.54).

La idea primordial en este enfoque matricial que nos permite obtener la forma de la función de onda, parte del hecho de que las constricciones S_1 y S_2 estan acopladas debido que comparten el mismo conjunto de $\{\phi_{iA}\}$, y éste también es el caso del acoplamiento de S_3 y S_4, esto nos permite elegir dos conjuntos independientes de 4 matrices ortonormales, uno para las combinaciones lineales de las ϕ_{iA} que aparecen en S_1 y S_2 y otros para las que aparecen en S_3 y S_4. De este modo la función de onda multicomponente tiene 8 entradas que nosotros dividimos como sigue:

$$\psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}$$

con cada Ψ_1 y Ψ_2 con 4 componentes. Sobre Ψ_1 actuaran sólo S_1 y S_2 y sobre Ψ_2, S_3 y S_4 correspondientemente.

Todas las constricciones S_A actuaran sobre la función de onda completa ψ, pero lo que se logró aquí es dividir el problema en 2 partes, tales que las primeras dos S's sobre la segunda parte de la función de onda se anulan identicamente y lo mismo pasa con S_3 y S_4 cuando actuan sobre la primera parte de la función de onda.

La solución al sistema acoplado que surge de la ecuación S_1 fué de la forma

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} \frac{b_0}{2}(1+i)\exp(-R_1^2) \\ -\frac{b_0}{2}(1-i)\exp(-R_1^2) \\ a_0 R_1 R_2^2(\frac{1}{2} - \frac{i}{3}R_1^2) \\ -a_0 R_1 R_2^2(\frac{1}{2} + \frac{i}{3}R_1^2) \end{pmatrix},$$

Esta solución ha sido escrita en término del radio del modelo de Taub restringido[34] $\mathrm{R}_1 = e^{-\Omega} e^{x}$. Las primeras dos componentes decaen como $\exp(-\mathrm{R}_1^2)$ y las otras son cero en este sector. Este comportamiento fué encontrado por Hawking y Page[30] al considerar un universo tipo Friedmann acoplado mínimalmente a un campo escalar sin masa $\phi(t)$. Nuestro resultado también depende únicamente de un radio R_1, que cuando $\mathrm{R}_1 \to \infty$ se parece al model de FRW.

Por otro lado, al aplicar la segunda S_2 sobre la solución anterior, esta se restringe de tal manera que las dos últimas componentes son cero, o sea:

$$\Psi_1 = \begin{pmatrix} \frac{b_0}{2}(1+i)\exp(-\mathrm{R}_1^2) \\ -\frac{b_0}{2}(1-i)\exp(-\mathrm{R}_1^2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

La forma para Ψ_2 (solución a S_3 yS_4 simultaneamente) es:

$$\Psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b_1 \exp(\mathrm{R}_1^2) \\ b_2 \exp(\mathrm{R}_1^2) \end{pmatrix},$$

Esta forma de la función de onda multicomponente puede sufrir modificaciones si realmente aplicamos *todas* las constricciones que posee la supergravedad N=1, no fueron tomadas en cuenta las otras constricciones $\mathcal{H}_i$ y J^{ab}. Esta última constricción tiene la siguiente forma (ver ref. Pilati)

$$\mathrm{J}^{ab} = 2\mathrm{p}^{k[a} \mathrm{e}_k{}^{b]} - \pi^k \sigma^{ab} \phi_k .$$

En el caso particular del modelo cosmológico estudiado, la primera parte (bosónica) de esta constricción resulta ser cero identicamente al fijar la tétrada y la segunda tiene el papel de mostrar cuales son las componentes de esta función multicomponente que pueden ser consideradas como independientes (debido a que existen constantes de acoplamiento).

Para complementar esta parte, si uno traduce la solución encontrada para el modelo de Taub en el microsuper-espacio en la notación en términos de la función potencial Φ

presentada por D'Eath, Hawking y Obregón, uno observa que existe este comportamiento de $\Psi = e^{\pm\Phi}$ con $R_1 = \Phi = e^{-\Omega+x}$, como se menciono anteriormente. El resultado que obtiene Macias para el modelo de Taub completo es más complicada, pero también presenta el comportamiento de exponenciales de un potencial Φ.

En este punto, uno observa que a nivel de soluciones, el comportamiento que tiene la función de estado es muy similar en ambos formalismo, el usado por D'Eath, Hawking y Obregón con espinores de dos componentes y el formalismo matricial empleado en este trabajo.

Existen diversos punto que quedan abiertos en este esquema, uno es encontrar la correspondencia que pueda existir con los otros formalismos usados para estudiar cosmología cuántica. Otro relacionado con el punto anterior, es que no tenemos la dependencia explicita de los campos fermiónicos en la estructura funcional de la función de onda, ya que se considero la aplicación del operador matricial $\hat{M}_{iA}$ sobre $|\psi>$ como una ecuación de eigenvalores y eigenvectores, siendo los eigenvalores las matrices constantes Γ_i, teniendo el problema de definir a que $\hat{\phi}_{iA}$ corresponde el (ó componente) estado encontrado, debido a que cada matriz es una combinación de varias $\hat{\phi}'_{iA}s$. Otro punto abierto, es encontrar una ecuación de consistencia para la densidad de probabilidad consevada que sea positiva-definida (estilo Dirac?).

Por otro lado, a nivel de la mecánica cuántica supersimétrica, al escribir la forma de la función de onda en una base de Grassman para el mismo modelo Bianchi tipo IX, tomando en cuenta que cualquier solución para $H\Psi = 0$ se puede escribir en forma natural en función de tres números de Grassmann

$$\Psi = \mathcal{A}_+ + \mathcal{B}_\nu \theta^\nu + \frac{1}{2}\epsilon_{\nu\mu\lambda}\mathcal{C}^\lambda \theta^\nu \theta^\mu + \mathcal{A}_- \theta^0 \theta^1 \theta^2$$

donde las 8 funciones $\mathcal{A}_\pm$, $\mathcal{B}_\nu$ y $\mathcal{C}^\nu$ dependen únicamente de las coordenadas generalizadas q^ν (todas son funciones bosónicas).

La función supersimétrica debe de satisfacer las constricciones $Q\Psi = 0 = \overline{Q}\Psi$, y las 8 funciones bosónicas a determinar para los modelos cosmológicos Bianchi Clase A satisfacen las siguientes relaciones

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\pm} &= a_{\pm} e^{\mp\Phi(q)/\hbar} \\
\mathcal{B}_{\nu} &= \frac{\partial f_{+}(q^{\nu})}{\partial q_{\nu}} e^{-\Phi(q)/\hbar} \\
\mathcal{C}^{\nu} &= \eta^{\nu\mu} \frac{\partial f_{-}(q^{\mu})}{\partial q_{\nu}} e^{\Phi(q)/\hbar}
\end{aligned}
$$

donde $a_{\mp}$ son constantes y $f_{\pm}(q)$ son funciones que cumplen la ecuación

$$
\eta^{\mu\nu} \left[\hbar \frac{\partial}{\partial q^{\nu}} \mp 2 \frac{\partial \Phi}{\partial q^{\nu}} \right] \frac{\partial f_{\pm}(q)}{\partial q_{\nu}} = 0.
$$

Para el Bianchi tipo II se encontró una solución explícita a esta última ecuación, siendo de la forma

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\pm} &= \mathrm{q}_{\pm}\ \mathrm{e}^{\mp\Phi}, \\
\mathcal{B}_0 &= 2\mathrm{b}_{+}\ \mathrm{f}_{+}\ \mathrm{e}^{-\Phi}, \\
\mathcal{B}_1 &= -\frac{1}{2}\mathcal{B}_0, \\
\mathcal{B}_2 &= \frac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{B}_0, \\
\mathcal{C}^0 &= -2\mathrm{b}_{-}\ \mathrm{f}_{-}\ \mathrm{e}^{\Phi}, \\
\mathcal{C}^1 &= \frac{1}{2}\mathcal{C}^0, \\
\mathcal{C}^2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2}\mathcal{C}^0,
\end{aligned}
$$

con $\mathrm{q}_{\pm}$ =constantes de integración.

La solución en términos de exponenciales de la función Φ es obtenida también en este modelo. La selección de condiciones de frontera sobre la función de onda, será lo que determine los estados físicos de interes que prevalezcan.

En este formalismo fué posible encontrar una producto interno en términos de variables de Grassmann que es positivo-definido, lo que queda abierto es poder determinar una densidad de probabilidad conservada que sea positiva-definida, en las otras variables $(\Omega, \beta_{\pm})$.

En lo que respecta al formalismo hamiltoniano ADM, usando un propuesta semejante a la de Kodama para la función de onda $\Psi \sim \mathrm{W}(\mathrm{q}^{\mu})\exp(\pm\Phi)$, se encontró la siguiente forma general para la función de onda para todos los modelos cosmológicos Bianchi clase A,

$$\Psi = \mathrm{W} \exp\left[\pm \frac{1}{6} \left[\mathrm{g_i\, m^{ij}\, (g_j)^T}\right]\right]$$

donde la función W, $\mathrm{g_i}(\mathrm{q}^\mu) = (\mathrm{e}^{\beta_1}, \mathrm{e}^{\beta_2}, \mathrm{e}^{\beta_3})$ con β_i y la matriz $\mathrm{m^{ij}}$ se definieron anteriormente. En cuanto a la función Φ en este formalismo se pudo escribir de la siguiente forma

$$\Phi = \pm \frac{1}{6} \left[\mathrm{g_i\, m^{ij}\, (g_j)^T}\right]$$

Al hablar de las soluciones que se obtuvieron en los diferentes enfoques estudiados en este trabajo, en la cosmologia cuántica, no queremos decir que sean totalmente equivalentes, más bien, que existe una correspondencia entre estas soluciones. El proceso de extraer algunas predicciones cuánticas para los modelos cosmológicos, se sigue de la manera usual[49]. A este nivel se ha mostrado que los enfoques estudiados aquí (supergravedad N=1, mecánica cuántica supersimétrica y ADM) dan resultados similares en lo concerniente a la dependencia (ya sea en componentes o en forma general) funcional de $\exp(\pm\Phi)$, con Φ determinada para cada modelo cosmológico tipo Bianchi.

Por otro lado, en una teoría de campo propuesta por MacDowell-Mansouri[56], se obtiene una acción de la forma

$$\mathrm{S} = \text{término de Euler} + \text{gravedad de Einstein} + \text{constante cosmológica}$$

Nuestra propuesta fué convertir a cantidades auto-duales todas las cantidades involucradas en dicha acción; se mostró que a partir de la relación de los campos de norma ${\omega_\mu}^{\mathrm{AB}}$ con la conexión y la tétrada, nuestra acción auto-dual se descompone en cuatro contribuciones. Dos es estas contribuciones corresponden a los términos topológicos de Euler y de Pontrjagin, tenemos también **la acción de Ashtekar** (en la forma propuesta por Samuel[63] y por Jacobson y Smolin[64]), además de un término cosmológico, es decir

$$\mathrm{S} = \text{término de (Euler + Pontrjagin)} + \text{Gravedad a la Ashtekar} + \text{constante cosmológica}$$

El invariante topológico de Pontrjagin aparece también como un término extra en comparación con la acción de MacDowell-Mansouri. Esto puede ser considerado como una generalización de esta teoría. Nuestra propuesta se reduce ahora clásicamente a la formulación exacta de la teoría de Ashtekar, sin embargo es una propuesta diferente[65] que depende unicamente de los campos de norma del grupo elegido y ello preserva la relación con el formalismo de Chern-Simons. La propuesta que presentamos podría ser usada para generalizar la teoría de supergravedad.

Para finalizar, en éste trabajo se estudiaron los modelos cosmológicos Bianchi tipo V y VI_0 en el sector bosónico de una teoría de supergravedad, N=2, D=5, con algunas restricciones sobre las variables de campo del sistema. Esta teoría es equivalente a una teoría 4-dimensional, con dos campos escalares ϕ y ψ acoplados.

En este punto, para el modelo[72] Bianchi tipo V, queda por analizar si la singularidad del espacio-tiempo es removida por la introducción del campo escalar ϕ y del campo supersimétrico ψ, para algún valor en especial del parámetro η.

Para el modelo[73] Bianchi tipo VI_0, suponiendo que las constantes α_2 y α_5 tengan el mismo signo y que $\alpha_4 > 0$ (con esto tenemos que el campo escalar $\phi > 0$ para $\alpha_3 + \alpha_4\,\eta > 0$), la solución anterior tiene una singularidad. Con ésto se concluye que aún con la presencia del campo escalar ϕ y del campo supersimétrico ψ, no es posible remover la singularidad para el modelo Bianchi tipo VI_0, al igual de lo que sucede[69] para el modelo de FRW.

8.- Apéndice A

En éste apéndice se muestran los pasos a seguir para determinar las tétradas a partir de la métrica general de los modelos cosmológicos tipo Bianchi. La teoría canónica que se utiliza en supergravedad a nivel función de lagrange o hamiltoniana, es conocida como ADM, luego entonces es necesario adecuar las métricas a esta teoría.

La métrica más general de los modelos cosmológicos tipo Bianchi, con signatura $(+ \;-\; -\; -)$ es:

$$\mathrm{ds}^2 = (\mathrm{N}^2 - \mathrm{N}^j\mathrm{N}_j)\mathrm{dt}^2 - 2\mathrm{N}_i\ \mathrm{dt}\ \omega^i - \mathrm{e}^{-2\Omega(t)}\mathrm{e}^{2\beta(t)}_{ij}\omega^i\omega^j \tag{A.1}$$

con ω_i las formas diferenciales apropiadas al modelo tipo Bianchi, esta misma métrica se puede escribir como

$$\mathrm{ds}^2 = \mathrm{N}^2\mathrm{dt}^2 - \mathrm{e}^{-2\Omega(t)}\mathrm{e}^{2\beta(t)}_{ij}(\omega^i + \mathrm{N}^i\ \mathrm{dt})(\omega^j + \mathrm{N}^j\ \mathrm{dt}) \tag{A.2}$$

donde

$$\mathrm{N}_i = \mathrm{e}^{-2\Omega}\ \mathrm{e}^{2\beta}_{ij}\mathrm{N}^j \tag{A.3}$$

$$\mathrm{N}^i = \mathrm{e}^{2\Omega}\ \mathrm{e}^{-2\beta}_{ij}\mathrm{N}_i \tag{A.4}$$

que es la forma usual de bajar y subir índices curvos con g_{ij}, y ademas se utiliza la parametrización de Misner para ello

$$\mathrm{g}_{ij} = \mathrm{e}^{-2\Omega}\ \mathrm{e}^{2\beta}_{ij} \tag{A.5}$$

Uno de los problemas fundamentales a los que uno se encuentra en la adecuación de la métrica empleada de los modelos cosmológicos, es que las funciones N_i que aparecen en nuestra métrica no corresponde a la dada en el formalismo ADM, luego entonces hay que encontrar la ley de transformación para la adecuación de las métricas.

La forma estándar de la métrica del formalismo ADM (ver Gravitation, cap 21, referencia [6]) se escribe

$$\mathrm{ds}^2 = (\overline{\mathrm{N}}^2 - \overline{\mathrm{N}}^j\overline{\mathrm{N}}_j)\mathrm{dt}^2 - 2\overline{\mathrm{N}}_i\ \mathrm{dt}\ \mathrm{dx}^i - \overline{\mathrm{g}}_{kl}\ \mathrm{dx}^k\ \mathrm{dx}^l \tag{A.6}$$

Si uno observa las ecuaciones A.1 y A.6, nota las diferencias de estrada:

i) Las $\overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{i}}$ y N_i no deben ser las mismas, dada la manera en que estan escritas las métricas, una esta en 1-formas diferenciales y la otra en sistema coordenado.

ii) Debe de existir una ley de transformación de coordenadas a 1-formas diferenciales y viceversa; de aquí se obtiene la matriz de Lorentz de transformación

$$\omega^{\mathrm{k}} = \mathrm{L}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{k}}\ \mathrm{dx}^{\mathrm{j}}, \qquad \mathrm{dx}^{\mathrm{j}} = (\mathrm{L}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{j}})^{-1}\ \omega^{\mathrm{k}} \tag{A.7}$$

donde $\mathrm{L}_{\mathrm{j}}^{\mathrm{k}}$ es la matriz de transformación de Lorentz de coordenadas, de esto último se tiene:

$$\begin{aligned} \mathrm{N}^2 - \mathrm{N}^{\mathrm{i}}\ \mathrm{N}_{\mathrm{i}} &= \overline{\mathrm{N}}^2 - \overline{\mathrm{N}}^{\mathrm{i}}\ \overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{i}} \\ \overline{\mathrm{N}}^{\mathrm{k}} &= (\mathrm{L}_{\mathrm{i}}^{\mathrm{k}})^{-1}\ \mathrm{N}^{\mathrm{i}} \\ \overline{\mathrm{N}}_{\mathrm{k}} &= \mathrm{L}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{i}}\ \mathrm{N}_{\mathrm{i}} \\ \overline{\mathrm{g}}_{\mathrm{kl}} &= \mathrm{e}^{-2\Omega}\ \mathrm{e}_{\mathrm{ij}}^{2\beta}\ \mathrm{L}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{i}}\ \mathrm{L}_{\mathrm{l}}^{\mathrm{j}} \end{aligned} \tag{A.8}$$

De esta manera la ecuación A.1 se re-escribe como

$$\mathrm{ds}^2 = (\mathrm{N}^2 - \mathrm{N}^{\mathrm{j}}\mathrm{N}_{\mathrm{j}})\mathrm{dt}^2 - 2\mathrm{N}_{\mathrm{i}}\ \mathrm{L}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{i}}\ \mathrm{dx}^{\mathrm{k}}\ \mathrm{dt} - \mathrm{e}^{-2\Omega(\mathrm{t})}\mathrm{e}_{\mathrm{ij}}^{2\beta(\mathrm{t})}\mathrm{L}_{\mathrm{k}}^{\mathrm{i}}\ \mathrm{L}_{\mathrm{l}}^{\mathrm{j}}\ \mathrm{dx}^{\mathrm{k}}\ \mathrm{dx}^{\mathrm{l}} \tag{A.9}$$

Cualquier métrica se puede escribir de una base ortonormal, utilizando como definición a las 1-formas diferenciales, a un espacio tangente

$$\mathrm{ds}^2 = \eta_{(\mathrm{ab})}\sigma^{(\mathrm{a})}\ \sigma^{(\mathrm{b})} \tag{A.10}$$

donde a,b son índices de éste último espacio, $\mathrm{a}, \mathrm{b} = 0, 1, 2, 3$, que se escribiran encerrados en un parentesis, para diferenciarlos de los índices curvos α, β, y la métrica $\eta_{(\mathrm{ab})}$ es la de Minkowski, con el mismo tipo de signatura, que nos servirá para subir y bajar índices planos.

Existe también una ley de transformación de la base ortonormal a tétradas de la forma

$$\sigma^{(\mathrm{a})} = \mathrm{e}_{\mu}^{(\mathrm{a})}\ \mathrm{dx}^{\mu} \tag{A.11}$$

De esta manera, si comparamos la métrica A.2 y A.10 se observa que

$$\begin{aligned} \sigma^{(0)} &= \mathrm{N}\ \mathrm{dt} \\ \sigma^{(\mathrm{i})} &= \mathrm{e}^{-\Omega}\ \mathrm{e}^{\beta}_{\ \mathrm{ik}}\ (\omega^{\mathrm{k}} + \mathrm{N}^{\mathrm{k}}\ \mathrm{dt}) \\ &= \mathrm{e}^{-\Omega}\ \mathrm{e}^{\beta}_{\ \mathrm{ik}}\ (\mathrm{L}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{k}}\ \mathrm{dx}^{\mathrm{m}} + \mathrm{N}^{\mathrm{k}}\ \mathrm{dt}) \\ &= \mathrm{e}^{-\Omega}\ \mathrm{e}^{\beta}_{\ \mathrm{ik}}\ \mathrm{L}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{k}}\ \mathrm{dx}^{\mathrm{m}} + \mathrm{e}^{-\Omega}\ \mathrm{e}^{\beta}_{\ \mathrm{ik}}\ \mathrm{N}^{\mathrm{k}}\ \mathrm{dt} \end{aligned} \tag{A.12}$$

de A.11 y A.12 se observa $e_0^{(0)} = N$, $e_k^{(0)} = 0$, $\sigma^{(i)} = e_\mu^{(i)}\, dx^\mu$, obtenemos que

$$\begin{aligned} e_0^{(i)} &= e^{-\Omega}\, e^{\beta}_{\ ik}\, N^k \\ e_m^{(i)} &= e^{-\Omega}\, e^{\beta}_{\ ik}\, L^k_m \end{aligned} \tag{A.13}$$

En el cálculo de las cantidades empleadas en la función de lagrange de supergravedad, también se usan las tétradas opuestas, y para calcularlas se emplea la transformación inversa $dx^\mu = e^\mu_{(a)}\, \sigma^{(a)}$, de éste modo tenemos:

$$\begin{aligned} e^m_{(l)} &= e^{\Omega}\, e^{-\beta}_{\ ik}\, (L^m_k)^{-1} \\ e^m_{(0)} &= -(L^m_k)^{-1}\, \frac{N^k}{N} = -\frac{\overline{N}^k}{N} \end{aligned} \tag{A.14}$$

De esta manera tenemos determinadas todas las tétradas que se pueden usar al calcular las cantidades definidas en las funciones de lagrange de supergravedad, las cuales podemos agrupar como sigue:

$$\begin{aligned} e_0{}^{(i)} &= e^{-\Omega}\, e^{\beta}_{\ ik}\, N^k = -e_{0(i)} \\ e_m{}^{(i)} &= e^{-\Omega}\, e^{\beta}_{\ ik}\, L^k_m = -e_{m(i)} \\ e^0{}_{(0)} &= \frac{1}{N} = e^{0(0)} \\ e_{0(0)} &= e_0{}^{(0)} = N \\ e^0{}_{(k)} &= -e^{0(k)} = 0 \\ e_{k(0)} &= e_k{}^{(0)} = 0 \\ e^m{}_{(l)} &= -e^{m(l)} = e^{\Omega}\, e^{-\beta}_{\ kl}\, (L^m_k)^{-1} \\ e^m{}_{(0)} &= e^{m(0)} = -\frac{\overline{N}^k}{N} = -(L^m_k)^{-1}\, \frac{N^k}{N} \end{aligned} \tag{A.15}$$

Apéndice B

En éste apéndice se da la manera en que se puede encontrar la función Φ que es solución a la ecuación clásica de Einstein-Hamilton-Jacobi (EHJ), haciendo un cambio de variables en la ecuación original.

La ecuación de EHJ

$$(\nabla\Phi)^2 - U = 0, \tag{B.1}$$

donde

$$\left[\nabla\right]^2 = -(\frac{\partial}{\partial\alpha})^2 + (\frac{\partial}{\partial x})^2 + (\frac{\partial}{\partial y})^2 \tag{B.2}$$

se puede transformar a otra ecuación que se puede resolver por un método semejante al de separación de variables.

Sea la transformación de coordenadas siguiente:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha + x + \sqrt{3}y & \alpha &= \frac{1}{3}\left[\beta_1 + \beta_2 + \beta_3\right] \\ \beta_2 &= \alpha + x - \sqrt{3}y & x &= \frac{1}{6}\left[\beta_1 + \beta_2\right] - \frac{1}{3}\beta_3 \\ \beta_3 &= \alpha - 2x & \sqrt{3}y &= \frac{1}{2}\left[\beta_1 - \beta_2\right] \end{aligned} \tag{B.3}$$

el operador $\left[\nabla\right]^2$ en estas nuevas variables es escrito como

$$\begin{aligned} \left[\nabla\right]^2 &= 3\left[(\frac{\partial}{\partial\beta_1})^2 + (\frac{\partial}{\partial\beta_2})^2 + (\frac{\partial}{\partial\beta_3})^2\right] - 6\left[\frac{\partial}{\partial\beta_1}\frac{\partial}{\partial\beta_2} + \frac{\partial}{\partial\beta_1}\frac{\partial}{\partial\beta_3} + \frac{\partial}{\partial\beta_2}\frac{\partial}{\partial\beta_3}\right] \\ &= 3\Big(\frac{\partial}{\partial\beta_1} + \frac{\partial}{\partial\beta_2} + \frac{\partial}{\partial\beta_3}\Big)^2 - 12\left[\frac{\partial}{\partial\beta_1}\frac{\partial}{\partial\beta_2} + \frac{\partial}{\partial\beta_1}\frac{\partial}{\partial\beta_3} + \frac{\partial}{\partial\beta_2}\frac{\partial}{\partial\beta_3}\right] \end{aligned} \tag{B.4}$$

El término de potencial del Bianchi tipo IX en las nuevas variables tiene la siguiente forma (para los demas modelos el término de potencial correspondiente tiene un comportamiento parecido a éste).

$$\begin{aligned} e^{4\alpha}V(\beta_\pm) &= \frac{1}{3}\Big[e^{4(\alpha-2x)} + e^{4(\alpha+x+\sqrt{3}y)} + e^{4(\alpha+x-\sqrt{3}y)} \\ &\qquad - 2e^{4(\alpha+x)} - 2e^{4\alpha-2x+2\sqrt{3}y} - 2e^{4\alpha-2x-2\sqrt{3}y}\Big] \\ &= \frac{1}{3}\left[e^{4\beta_1} + e^{4\beta_2} + e^{4\beta_3} - 2e^{2(\beta_1+\beta_2)} - 2e^{2(\beta_1+\beta_3)} - 2e^{2(\beta_2+\beta_3)}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\left(e^{2\beta_1} + e^{2\beta_2} + e^{2\beta_3}\right)^2 - 4e^{2(\beta_1+\beta_2)} - 4e^{2(\beta_1+\beta_3)} - 4e^{2(\beta_2+\beta_3)}\right] \end{aligned} \tag{B.5}$$

con lo cual, la ecuación de EHJ para el modelo Bianchi tipo IX en las nuevas variables se escribe

$$\begin{aligned} &3\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_1} + \frac{\partial\Phi}{\partial\beta_2} + \frac{\partial\Phi}{\partial\beta_3}\Big)^2 - 12\left[\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_2} + \frac{\partial\Phi}{\partial\beta_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_3} + \frac{\partial\Phi}{\partial\beta_2}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_3}\right] \\ &- \frac{1}{3}\left[\left(e^{2\beta_1} + e^{2\beta_2} + e^{2\beta_3}\right)^2 - 4e^{2(\beta_1+\beta_2)} - 4e^{2(\beta_1+\beta_3)} - 4e^{2(\beta_2+\beta_3)}\right] = 0. \end{aligned} \tag{B.6}$$

Si uno observa esta última ecuación, podemos separar en dos partes y de ahí obtener la función Φ de la siguiente manera:

$$3\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_2}+\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_3}\Big)^2=\frac{1}{3}[\Big(e^{2\beta_1}+e^{2\beta_2}+e^{2\beta_3}\Big)^2, \quad (B.7)$$

$$12\Big[\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_2}+\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_3}+\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_2}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_3}\Big]=\frac{4}{3}\Big[e^{2(\beta_1+\beta_2)}-4e^{2(\beta_1+\beta_3)}-4e^{2(\beta_2+\beta_3)}\Big]. \quad (B.8)$$

De (B.7) obtenemos

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_1}+\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_2}+\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_3}=\pm\frac{1}{3}\Big(e^{2\beta_1}+e^{2\beta_2}+e^{2\beta_3}\Big), \quad (B.9)$$

la cual podemos separar en tres ecuaciones de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_1}&=\pm\frac{1}{3}e^{2\beta_1},\\ \frac{\partial\Phi}{\partial\beta_2}&=\pm\frac{1}{3}e^{2\beta_2},\\ \frac{\partial\Phi}{\partial\beta_3}&=\pm\frac{1}{3}e^{2\beta_3}.\end{aligned} \quad (B.10)$$

Al integrar la primera de estas ecuaciones obtenemos un resultado parcial para la función Φ, en función de la variable β_1 más otras dos funciones, $f(\beta_2)+g(\beta_3)$, donde f y g son funciones del argumento considerado; después sustituir éste resultado en la segunda ecuación, se obtiene la función f, por último se sustituye el resultado previo en la tercer ecuación y se determina la función g, con esto la solución para función Φ es

$$\Phi=\pm\frac{1}{6}\Big(e^{2\beta_1}+e^{2\beta_2}+e^{2\beta_3}\Big), \quad (B.11)$$

la cual debe de satisfacer las otras ecuaciones de constricción que surgen de la segunda ecuación en la que se separo la ecuación original de EHJ.

$$\begin{aligned}9\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_2}&=e^{2(\beta_1+\beta_2)},\\ 9\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_1}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_3}&=e^{2(\beta_1+\beta_3)},\\ 9\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_2}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta_3}&=e^{2(\beta_2+\beta_3)},\end{aligned} \quad (B.12)$$

lo cual se cumple al sustituir la función Φ en cada una de estas tres ecuaciones.

Este procedimiento puede ser utilizado para encontrar la función Φ que es solución a la ecuación de EHJ, utilizando el potencial respectivo de los modelos cosmológicos Bianchi Clase A, los cuales se presentaron en la Tabla 1.

Por otro lado, es posible que existan otras soluciones a esta ecuación claásica de EHJ, tal como se mostro en los modelos Bianchi II y Bianchi IX, las cuales presenten la parte de la función Phi_n que se muestra en la tabla I, más otros términos, pero que en general estos nuevos términos no sean solución a la ecuación cuántica de WDW, como sucede para estos dos modelos en particular.

8.-) Referencias

1.- J. Halliwell, Phys. Rev. D **39**, 2912 (1989) y referencias citadas ahí.

2.- Salman Habib, Phys. Rev. D **42**, 2566 (1990) y referencias citadas ahí.

3.- M.P. Ryan, *Hamiltonian Cosmology*, (Berlin: Springer) (1972).

4.- C.W. Misner *"Minisuperspace" in Magic without Magic*, J. A. Wheeler, Ed. J. R. Klauder 441-473 (1992).

5.- J. A. Wheeler, *"Superspace" in Analytic Methods in Mathematical Physics*, ed. Gilbert Newton 335-378 (1970).

6.- C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, Gravitation (W.A. Freeman and Co. San Francisco 1973).

7.- S. Hawking, *Astrophysical Cosmology* (Vatican City: Pontificia Academie Scientorum) (1982).

8.- J.B. Hartle and S.W. Hawking, Phys. Rev. D **28**, 2960 (1983).

9.- J. B. Hartle, *High Energy Physics: Prod. Yale Theoretical Advanced Study Institute*, Ed. M. J. Bowick and F. Gursey (Singapore: World Scientific Co) (1985).

10.- R. Penrose, in *General Relativity: An Einstein Centenary Survey*, Eds S. W. Hawking and W. Israel (Cambridge University Press, Cambridge 1979).
A. Vilenkin, Phys. Lett. B **117**, 25 (1982).
A. Vilenkin, Phys. Rev. D **27**, 2848 (1983).
A. Vilenkin, Phys. Rev. D **30**, 509 (1984).

11.- S.W. Hawking and D.N. Page, Nucl. Phys. B **264**, 185 (1986).

12a.- R. Graham and P. Szépfalusy, Phys. Rev. D **42**, 2483 (1990).

b.- R. Graham, Phys. Rev. Lett. **67**, 1381 (1991).

c.- P.D. D'Eath, Phys. Rev. D **29**, 2199 (1984).

d.- P.D. D'Eath and D.I. Hughes, Phys. Lett. B **214**, 498 (1988).

e.- P.D. D'Eath, H.F. Dowker and D.I. Hughes, in Quantum Gravity, Proc. of the fifth seminar Moscow, eds. M. A. Markov, V. A. Berezin and V. P. Frolov (1990);

f.- P. D. D'Eath, S. W. Hawking and O. Obregón, Phys. Lett. B **300** (1993) 44.

g.- R. Graham, Phys. Rev. D **48** (1993) 1602.

13.- S. W. Hawking, Phys. Rev. D **37**, 904 (1988).

14.- C. Misner, Phys. Rev. **186**, 1319 (1969)

15.- J. Halliwell and S. Hawking, Phys. Rev. D **31** 1777 (1985).

16.- M. P. Ryan and L. C. Shepley, *Homogeneous Relativistic Cosmologies* (Princeton University Press, Princeton, 1975)

17.- C. Teitelboim, Phys. Lett. B **69**, 240; Phys. Rev. Lett. **38**, 1106 (1977). R. Tabensky and C. Teitelboim, Phys. Lett. B **69**, 453 (1977).

18.- M. Pilati, Nucl. Phys. B **132**, 138 (1978).

19.- D. Freedman, P. van Nieuwenhuizen and S. Ferrara, Phys. Rev. D **13**, 3214 (1976). A. Das and D. Freedman, Nucl. Phys. B **114**, 271 (1976).

20.- S. Deser and B. Zumino, Phys. Lett. B **62**, 335 (1976).

21.- C. Teitelboim, "The Hamiltonian Structure of Space-time", Ph. D. thesis, Princeton, (unpublished) (1973).

22.- P.A.M. Dirac, P.A.M., Can. J. Math. **3**, 1 (1951).
Teitelboim, C., Ann. Phys. (NY), **79**, 542 (1973).
Hojman, S., Kuchař, K. and Teitelboim, C., Ann. Phys. (NY), **96**, 88 (1976).
Hojman, S., Kuchař, K. and Teitelboim, C., Nature, London Phys. Sci. **97**, 245 (1973).

23.- Freedman, D.Z. and van Nieuwenhuizen, P., Phys Rev. **D14**, 912 (1976).

24.- Finkelstein, R. and Kim, J., J. Math. Phys. **22**, 2228 (1981).

25.- Misner, C., Phys. Rev.**186**, 1319 (1969).

26.- Deser, S. Kay, J. and Stelle, K., Phys. Rev. D **16**, 2448 (1977).

27.- R. Casalbuoni, N. Cimento **33A**, 115 (1976).

28.- A. Macías, O. Obregón and M. P. Ryan, Class. Quantum Grav. **4** 1477 (1987).

29.- A. Pais, J. of Math. Phys. **3**, 1135 (1962).

30.- M. Moshinsky and A. Szczepaniak, J. Phys. A:Math. Gen. **22**, L817 (1989).

31a.- A. Macías, Comunicación privada.

31b.- I.S. Gradshteyn and I.M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products*, pag. 925, (1980).

32.- K. V. Kuchař and M.P. Ryan Jr., Phys. Rev. D **40**, 3982 (1989).

33.- S. W. Hawking and D. N. Page, Santa Barbara ITP report No. NSF-itp-90-76 (no publicado).

34.- V. Moncrief and M.P. Ryan, Jr., Phys. Rev. D**44**, 2375 (1991).

35.- See, for example, A. Ashtekar, in *New perspectives in canonical Gravity* Monographs and textbooks in physical science, Napoli, Bibliopolis, (1988).

36.- K. Kodama, Prog. Theor. Phys. **80**, 1024 (1988).

37.- J. Friedman and I. Jack, Phys. Rev. D**37**, 3495 (1988).

38.- G.F.R. Ellis and M. A. H. MacCallum, Comm. Math. Phys. **12**, 108 (1969).

39.- J. Wess and B. Zumino, Nucl. Phys. B **70**, 39 (1974).

40.- A. Salam and J. Strathdee, Phys. Rev. D **11**, 1521 (1975).

41.- E. Witten, Nucl. Phys. B **185**, 513 (1981).

42.- R. Graham, Phys. Lett. B **277**, 393 (1992).

43.- J. Bene and R. Graham, in *Quantum Physics and the Universe*, Proceedings of the Conference in Tokyo, Japan (1992).

44.- A. Macías, O. Obregón and J. Socorro, Intern. J. Mod. Phys. A **24**, 4291 (1992).

45.- J. Socorro, O. Obregón and A. Macías, Phys. Rev. D **45**, 2026 (1992).

46.- C.V. Sukumar, J. Phys. A:Math. Gen. **18**, 2917 (1985).

47.- L.D. Faddeev and A.A. Slavnov, *Gauge fields an Introduction to quantum theory* (Addison Wesley Pu. Co. 1991) sec. 2.5.

48.- S.W. Hawking and D. N. Page, Phys. Rev. D **42**, 2655 (1990).

49.- K.V. Kuchař, in Quantum Gravity 2, eds. C. Isham, R. Penrose and D.W. Sciama (Clarendon Press, Oxford, 1981).

50.- La notación para algunos simbolos utilizados en forma compacta son: El d'Alambertiano en tres dimensiones se considera como $\square = \mathrm{G}^{\mu\nu}\frac{\partial^2}{\partial \mathrm{q}^\mu \partial \mathrm{q}^\nu}$, las coordenadas generalizadas $\mathrm{q}^\mu = (\alpha, \mathrm{x}, \mathrm{y})$ y la expresión $\nabla \mathrm{W} \cdot \nabla \Phi = \mathrm{G}^{\mu\nu}\frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{q}^\mu}\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{q}^\nu}$, donde $\mathrm{G}^{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1)$

51.- O. Obregón, J. Socorro and J. Benítez, Phys. Rev. D **47**, (1993) 4471.

52.- J. Socorro, O. Obregón and J. Benítez, Proceeding in Symposium Latinoamericano on Relativity and Gravitation, SILARG VIII World Scientific Pub. 446-451 (1994).

53.- M. Asano, M. Tanimoto and N. Yoshino, Phys. Lett. B **314**, 303 (1993).

54.- J.E. Lidsey, Preprint FERMILAB-Pub-94-062-A.

55.- O. Obregón and J. Socorro, enviado al Class. Quantum Gravity (1995).

56.- S. W. MacDowell and F. Mansouri, Phys. Rev. Lett. **38**, 739 (1977); F. Mansouri, Phys. Rev. D **16**, 2456 (1977). See also P. G. O. Freund, in Introduction to Supersymmetry (1988), Cambridge University Press.

57.- H. R. Pagels, Phys. Rev. D **29**, 1690 (1984).

58.- P. C. West, Phys. Lett. B **76**, 569 (1978); A.H. Chamseddine, Ann. Phys. **113**, 212 (1978); S. Gotzes and A.C. Hirshfeld, Ann. Phys. (N.Y) **203**, 410 (1990).

59.- S. S. Chern and J. Simons, Ann. Math. **99**, 48 (1974).

60.- A. Ashtekar, Phys. Rev. Lett. **57**, 2244 (1986); Phys. Rev. D **36**, 1587 (1987).

61.- H. Kodama, Phys. Rev. D **42**, 2548 (1990). See also B. Brügmann, R. Gambini and J. Pullin, Gen. Rel. and Grav. **25**, 1 (1993) and references therein.

62.- R. Capovilla, T. Jacobson and J. Dell, Phys. Rev. Lett. **63**, 2325 (1989); P. Peldan, Phys. Rev. D **46**, R2279 (1992).

63.- J. Samuel, Pramana J. Phys. **28**, L429 (1987).

64.- T. Jacobson and L. Smolin, Class. Quantum Grav. **5**, 583 (1988).

65.- Un desarrollo ralacionado se encuentra en: E. W. Mielke, Phys. Rev. D **42**, 3388 (1990) and Ann. Phys. (N.Y) **219**, 78 (1992). Este autor fue capaz de generar otras variables complejas en el contexto del grupo de Poincare, suplementando la norma en el lagrangiano con la función generadora dictada por las identidades de Bianchi de la geometria de Riemann-Cartan.

66.- J.A. Nieto, O. Obregón and J. Socorro, Phys. Rev. D**50**, R3583 (1994).

67.- J. F. Plebanski, J. Math. Phys. **18**, 2511 (1977); P. Peldan, preprint Göteborg ITP 93-13, (1993) y referencias citadas ahí.

68.- R. Balbinot, J.C. Fabris and Kerner; Class. Quantum. Grav. **7**, L17 (1990).

69.- R. Balbinot, J.C. Fabris and Kerner; Phys. Rev. D**42** 1023, (1990).

70.- R. D'Auria, P. Fre, E. Maine and T. Regge; Ann. Phys. NY **135**, 237 (1982).

71.- E. Cremmer, *Superspace and Supergravity*, Proceedings of the Nuffield Workshop (Cambridge: University Press) (1980).

72.- Luis O. Pimentel and J. Socorro, Int. J. Theo. Phys. **34**, 701 (1995).

73.- Luis O. Pimentel and J. Socorro, Gen. Rel. and Grav. **25**, 1159 (1993).

74.- A. Csordás and R. Graham, Phys. Rev. Letters **74**, 4129 (1995) y en: Proceedings of the First Mexican School in Gravitation and Mathematical Physics, Guanajuato, México, December 12-16, 1994. *Nontrivial fermion states in supersymmetric minisu-*

perspace.

75.- P. V. Moniz, Preprint DAMTP R95/# *Quantization of the Bianchi type-IX model in N=1 Supergravity in the Presence of Supermatter*