



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

ESTABILIZACIÓN GLOBAL DE SISTEMAS AFINES CON CONTROL RESTRINGIDO

Tesis que presenta
M. en C. Horacio Leyva Castellanos
para obtener el grado de
Doctor en Ciencias (Matemáticas)

Director de Tesis: **Dr. Julio Ernesto Solís Daun**

Jurado calificador:

Presidente: **Dr. José de Jesús Alvarez Ramírez**

Secretario: **Dr. Joaquín Delgado Fernández**

Vocal: **Dr. Guillermo Fernández Anaya**

Vocal: **Dr. Julio Ernesto Solís Daun**

Vocal: **Dr. Gerardo René Espinoza Pérez**

6 de diciembre de 2015



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Índice general

ESTABILIZACIÓN GLOBAL DE SISTEMAS AFINES CON CONTROL RESTRINGIDO

Tesis que presenta
M. en C. Horacio Leyva Castellanos
para obtener el grado de
Doctor en Ciencias (Matemáticas)

Director de Tesis: **Dr. Julio Ernesto Solís Daun**

Jurado calificador:

Presidente: **Dr. José de Jesús Álvarez Ramírez**

Secretario: **Dr. Joaquín Delgado Fernández**

Vocal: **Dr. Guillermo Fernández Anaya**

Vocal: **Dr. Julio Ernesto Solís Daun**

Vocal: **Dr. Gerardo René Espinoza Pérez**

1 de diciembre de 2015

Índice general

0.1. Antecedentes	5
0.2. Descripción de las contribuciones	7
1. Estabilización de Sistemas Lineales con Control Escalar Positivo	9
1.1. Introducción	9
1.2. El problema de Estabilización Global	9
1.3. Resultados Principales	11
1.4. Estabilización Global de Sistemas Lineales con Realimentación Positiva no Acotada	12
1.5. Estabilización Global de Sistemas Lineales con Realimentación Positiva Acotada .	15
1.6. Ejemplo y Aplicación	16
2. CLF-Estabilización con la hipercaja con 0 en el interior como CVS	19
2.1. Introducción	19
2.2. CLF-Estabilización de sistemas afines con control escalar acotado	21
2.3. Teoría CLF	21
2.4. Un diseño particular de $\rho(x)$	24
2.5. La CLF estabilización global con respecto a la hipercaja	28
2.6. Un diseño general de controles admisibles con respecto a la hipercaja	30
2.7. Diseño de una fórmula de control de retroalimentación explícita con respecto a la hipercaja	32
2.8. Ejemplos	38
3. CLF-Estabilización con la hipercaja con 0 en la frontera como CVS	41
3.1. Introducción	41
3.2. CLF Estabilización de sistemas afines con control escalar positivo acotado	44
3.3. Ejemplo	48
3.4. Geometría del conjunto nulo N_C	49
3.5. La estabilización global con la hipercaja como CVS	50
3.6. Un control de retroalimentación diseñado para la hipercaja	52
3.7. La fórmula explícita de control de retroalimentación con respecto a la hipercaja positiva	54

4. Margen de estabilidad robusta	55
4.1. Definición y prueba de la propiedad RSM	55
4.2. Ejemplos y observaciones	57
5. CLF-Estabilización con CVS dados por subconjuntos convexos contenidos en la hipercaja	61
5.1. Controles restringidos a un hipertetraedro	61
5.2. Ejemplos	63
5.3. Controlabilidad y CLF estabilización local de un sistema lineal con control positivo.	65
5.3.1. Controlabilidad con control positivo	65
5.3.2. CLF estabilización local con control positivo	67
6. Conclusiones y perspectivas	71

Acrónimos

Lista de Acrónimos
(en inglés, con traducción al español)

SCP: Propiedad de Control Pequeño

CLF: Función de Lyapunov de Control

CVS: Conjunto de Valores del Control

ANCBC: Asintóticamente Controlable al Origen con Controles Acotados.

GAS : Estabilización Global Asintótica.

LAS : Estabilización Local Asintótica.

BFC : Retroalimentación de Control Acotada.

SLF : Retroalimentación Lineal Saturada.

RSM: Margen de Estabilidad Robusta

Resumen

Con base en la teoría CLF, generada por la teoría de Lyapunov y los resultados de estabilización para sistemas de control no lineales de Zvi Artstein (1983) y Eduardo Sontag (1983), estudiamos problemas de estabilización de sistemas con parámetros de control restringidos a conjuntos convexos. Para resolver el *problema de síntesis* correspondiente, consideramos como *conjunto de valores admisibles* (CVS) a conjuntos convexos, de manera que nuestro *conjunto admisible de funciones de retroalimentación* son las funciones continuas que toman valores en el CVS. En particular consideramos conjuntos convexos no estrictos como los politopos. Más especialmente suponemos a la hipercaja m -dimensional como conjunto de valores admisibles; siendo para este caso nuestra contribución principal.

Cabe destacar que hemos introducido la terminología y resultados de la teoría de convexidad con el objetivo de describir la geometría de diversos problemas de estabilización, lo que ha permitido fundamentar la definición del control óptimo, que nos ha servido como un referente y base para describir soluciones al problema de regularización para casos generales de CVS; especialmente nos ha permitido estudiar el caso del conjunto de valores admisibles conteniendo al control nulo en la frontera.

En general damos condiciones suficientes para lograr la estabilización de un sistema afín. En particular presentamos un diseño explícito y descentralizado que resuelve el problema de estabilización para el caso de la hipercaja como conjunto de valores admisibles para el control. Además de incluir el caso extremo de controles positivos, para este diseño logramos probar que el sistema afín retroalimentado tiene la propiedad de robustez llamada *margin de estabilidad robusta* (RSM).

Introducción

0.1. Antecedentes

En muchos modelos económicos, físicos, biológicos, etc., el parámetro de control tiene restricciones. Por ejemplo, en reactores y bioprocesos la acción de control está relacionada a flujos cuyo valor es positivo. Los problemas de estabilización con control positivo han sido poco estudiados. Por ejemplo, la clase de sistemas que son estabilizables mediante funciones de control continuos que toman valores en el CVS $U = [0, r]$ es una pequeña parte de la clase de sistemas que son estabilizables mediante controladores restringidos al conjunto $U = [-r, r]$. Por ejemplo, es conocido que el *doble integrador* es estabilizable mediante un controlador continuo restringido a $U = [-r, r]$, pero no es estabilizable por una función de control positivo. En [2], R. F. Brammer logra una caracterización de los sistemas lineales controlables con control positivo. Para los sistemas no lineales hay pocos resultados en esta dirección: El problema de estabilizabilidad local ha sido abordada por Smirnov en [42], caracterizando los sistemas no lineales que son localmente estabilizables mediante controles positivos. La metodología de Smirnov consiste en determinar la controlabilidad del sistema linealizado con el fin de inferir la estabilizabilidad local del sistema no lineal. En [39], Saperstone y Yorke describen el siguiente problema mecánico: ¿Puede el péndulo ser llevado al punto de equilibrio estable por medio de la aplicación en una sola dirección de una fuerza finita continua? Ellos muestran que este sistema es *nulo-controlable*. En [43], Smirnov también presentó un estabilizante no-Lipschitz para ese problema mecánico, pero para lograrlo requiere *controlabilidad completa* y conocimiento de una función de Lyapunov. En [32], Korobov establece las condiciones necesarias y suficientes para determinar la controlabilidad local de la familia de sistemas $dx/dt = Ax + g(u)$, incluyendo el caso del control nulo en la frontera del conjunto admisible de controles ($0 \in \partial U$). En [30], Kaveh y Shtessel abordan el problema de controlar el nivel de glucosa en la sangre humana por medio de la insulina. Ya que la insulina se puede inyectar en el cuerpo humano, pero no puede ser extraída, por lo que representa un problema de regulación que se busca estabilizar por medio de controles positivos. El problema de estabilización global se ha considerado en los siguientes casos particulares: En [25], Bastin y Praly, presentan un diseño de una ley de control positivo para la estabilización mediante retroalimentación de una clase de sistemas positivos de *balance de masa*, donde el estado-solución del sistema de retroalimentación converge a la *iso-masa* (que es una porción de un hiperplano en el espacio de estados).

Estudiar la estabilidad de un sistema no lineal autónomo $\dot{x} = f(x)$, donde x es el vector de estado del sistema, puede ser pensado como un sistema controlado en lazo cerrado. Si $x = x_0$ es un punto de equilibrio del sistema, $f(x_0) = 0$, las propiedades de estabilidad de este punto de equilibrio pueden ser caracterizadas mediante la definición de *estabilidad de Lyapunov* V . Los teoremas de estabilidad de Lyapunov para los sistemas no lineales, descritos mediante el concepto *función de Lyapunov del sistema*, son no-constructivos, en el sentido que no dan sugerencia sobre cómo encontrar la función V que cumpla las condiciones necesarias para mostrar la estabilidad

GAS. Tales teoremas de Lyapunov, y los teoremas inversos de Lyapunov (Kurzweil (1956) & Massera (1949)), establecen la equivalencia entre la estabilidad asintótica global y la existencia de una función de Lyapunov estricta global.

Diseño de Control con base en la Teoría de Lyapunov.

Considere el sistema $dx/dt = f(x, u)$, donde x es el estado del sistema y u es la entrada de control, y sea la estabilidad en $x = 0$ el objetivo de control. Es decir, queremos diseñar una ley de control $u = k(x)$ de forma que el punto de equilibrio $x = 0$ sea GAS bajo el sistema a lazo cerrado $dx/dt = f(x, k(x))$. Para mostrar el comportamiento GAS necesitamos una función de Lyapunov $V(x)$ que satisfaga las condiciones de los teoremas de Lyapunov. De acuerdo a estos teoremas, el *diseño de control basado en la teoría de Lyapunov* consiste en construir una ley de control $k(x)$ y una función de Lyapunov $V(x)$. Un enfoque para encontrar $k(x)$ consiste en escoger una función $V(x)$ radialmente no acotada y definida positiva, y luego elegir $k(x)$ tal que

$$\nabla V(x) \cdot (f(x, k(x))) < 0, \quad \forall x \neq 0,$$

Para que este enfoque tenga éxito, la función V debe escogerse cuidadosamente de manera que la desigualdad anterior tenga solución. Esto motiva la definición *función Lyapunov de control* V :

Una función escalar suave $V(x)$, definida positiva y radialmente no acotada, es llamada una *función Lyapunov de control (CLF)* para $dx/dt = f(x, u)$ si

$$\inf_{u \in U} \{\nabla V(x) \cdot f(x, u)\} < 0, \quad \forall x \neq 0,$$

Dada una CLF para el sistema, podemos encontrar una ley de control globalmente estabilizante. De hecho, la existencia de una ley de control globalmente estabilizante es equivalente a la existencia de una CLF. Esto significa que por cada función de control globalmente estabilizante, puede encontrarse una correspondiente CLF, y viceversa. Esto se conoce como el teorema de Artstein. (Teorema de Zvi Artstein: *Suponga que el CVS $U \subset \mathbb{R}^m$ es convexo y el sistema (1) es tal que $f(x)$ y $(x, u) \mapsto \sum g_i(x) u_i$ son continuas. Existe un control continuo $u : \mathbb{R}^m \rightarrow U$ tal que (1) es GAS ssi existe una CLF $V(x, u)$ que satisface la SCP.* Es decir, conocida una función Lyapunov de control para un sistema, el teorema de Artstein asegura la existencia de un estabilizador, no necesariamente explícito. Pero hay dos inconvenientes para aplicar este resultado:

1. No existen métodos generales para construir CLF. Hay métodos para construir CLF de clases especiales de sistemas. Ver [Sepulchre et al.] (1997) and [Malisoff and Mazenc] (2009).
2. La demostración del teorema de Artstein no es constructiva (este usa particiones de la unidad). Por lo tanto, el problema que supone la síntesis del teorema de Artstein es muy difícil de resolver, incluso si tenemos una CLF apropiada.

Como consecuencia de los inconvenientes anteriores, Eduardo Sontag propuso (en 1999) el siguiente problema:

"Encontrar fórmulas universales para la CLF-estabilización de sistemas con respecto a conjuntos CVS generales (convexos) U ",

Es decir, encontrar fórmulas de control casi-suaves de clase \mathcal{C}^s ($s \geq 1$), continua en \mathbb{R}^n) para tener la estabilidad asintótica global (GAS) del sistema con respecto a CVS U generales.

Los politopos son una familia de conjuntos, no estrictamente convexos, que surgen naturalmente en las aplicaciones. Un politopo de especial importancia es la hipercaja $\mathcal{B}_r^m(\infty)$, dada por

$$\mathcal{B}_r^m(\infty) := [-r_1^-, r_1^+] \times \dots \times [-r_m^-, r_m^+] = \text{conv} \{(-r_1^-, \dots, -r_m^-), \dots, (r_1^+, \dots, r_m^+)\}.$$

Para sistemas de control no lineales, con conjunto de valores admisibles convexos, Zvi Artstein presenta en [21] un resultado de existencia de estabilizadores continuos restringidos a tales CVS.

Volviendo al problema planteado por Eduardo Sontag: *resolver el problema de síntesis para el sistema afín con controles estabilizadores globales casi suaves (de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ y continuos en \mathbb{R}^n) con CVS convexos generales*. Tales conjuntos de restricción pueden clasificarse como *estrictamente convexos* (esferas, elipsoides, etc) y *no-estrictamente convexos*, como aquellos cuya frontera contiene un segmento de recta.

En este trabajo abordamos el problema de estabilización de sistemas afines con controles continuos restringidos a CVS no estrictamente convexos. En particular estudiamos la hipercaja, con un planteamiento que permite incluir el caso de controles positivos. En [23] J. Curtis introduce un método para la parametrización algorítmica de controles estabilizadores sujetas a CVS dados por politopos. En [47], estudiamos cómo obtener controles de retroalimentación admisibles que hacen que el sistema sea GAS con respecto a CVS U politópicos, con $0 \in \partial U$. Con motivo de abordar la estabilización CLF, y considerando en general el papel central de la teoría de Lyapunov en la estabilizabilidad de sistemas no lineales, en el anexo describimos algunos resultados de la teoría de Lyapunov. A partir del segundo capítulo, suponemos conocida una función de Lyapunov $V(x)$, con respecto a una familia de sistemas afines y la hipercaja como CVS, que satisface las condiciones de estabilizabilidad establecidas en el trabajo de Zvi Artstein, de manera que con tales condiciones resolvemos el problema de síntesis.

0.2. Descripción de las contribuciones

En el primer capítulo de esta tesis resolvemos un problema de estabilización para sistemas lineales. Separamos el problema en dos partes; primero suponemos que el sistema a lazo abierto es inestable, y mostramos que es posible resolver el problema de síntesis mediante una retroalimentación no acotada de la forma $u(x) = \max\{0, K^T x\}$. En una segunda parte mostramos que mediante una saturación de este control positivo, una SLF no-negativa, es posible estabilizar globalmente los sistemas lineales que son estables a lazo abierto. Para resolver este problema de estabilización consideramos la caracterización de los sistemas lineales controlables con control positivo que presenta R. F. Brammer en [2]. Una vez resuelto el problema de estabilización describimos la dinámica correspondiente al sistema retroalimentado. A partir del capítulo 2 consideramos la teoría CLF para lograr la estabilización de una familia de sistemas afines, con la hipercaja como CVS. Abordamos el problema de estabilización en dos partes: en el capítulo 2 suponemos que el control nulo $u=0$ pertenece al interior de la hipercaja. En el capítulo 3 suponemos que el control nulo $u=0$ pertenece a la frontera de la hipercaja; $0 \in \partial U$. Considerando esta restricción presentamos un diseño de función de control escalar para estabilizar sistemas afines, donde el intervalo $[-r^-, r^+]$ es el conjunto de valores admisibles (CVS), incluyendo el caso de control positivo ($r^- = 0$). También a partir capítulo 2 utilizamos la teoría de Lyapunov para buscar la estabilización de los sistemas de control, conocida como teoría CLF, desarrollada en el área de control a partir de los resultados de Zvi Artstein, ver [21]. De manera que suponemos conocida una función de Lyapunov con las condiciones suficientes para obtener los estabilizadores admisibles. En el capítulo 3 consideramos el sistema afín con entrada multivariable, donde suponemos a la hipercaja m -dimensional (denotado por $\mathcal{B}_r^m(\infty)$) como conjunto de valores para el control (CVS). Analizamos las condiciones para la existencia, unicidad y regularidad del control estabilizante con mejor tasa $\bar{w}(x)$. Sin embargo, dado que este control es singular, para lograr la regularidad proponemos un control de retroalimentación descentralizado $u(x) = (u_1(x), \dots, u_m(x))^T$, cuyos componentes están dadas por $u_j(x) = \rho_j(x) \bar{w}_j(x)$, donde cada $\rho_j(x)$ es una función de reescalamiento que permite regularizar cada entrada $\bar{w}_j(x)$ de $\bar{w}(x)$. Damos condiciones suficientes para las funciones $\rho_j(x)$, de forma que el control $u(x)$ sea un estabilizador continuo (admisibile); tal que presentamos un diseño particular de reesca-

lamiento $\rho_{j_\varepsilon}(x)$ para el caso de que el CVS sea la hipercaja $\mathcal{B}_r^m(\infty)$, con $0 \in \text{int}\mathcal{B}_r^m(\infty)$. Cabe destacar que hemos introducido la terminología y resultados de la teoría de convexidad con el objetivo de describir la geometría del problema de estabilización, lo que ha permitido fundamentar la definición del control óptimo $\bar{w}(x)$ (con mejor tasa de acuerdo a una función de Lyapunov V), que a la vez representa un referente para describir casos generales de CVS, como los politopos. Incluimos una descripción de casos particulares de CVS; un triángulo equilátero y el rectángulo $\mathcal{B}_{r^+}^2(\infty) = \text{conv}\{(0,0), (r_1^+,0), (0,r_2^+), (r_1^+,r_2^+)\}$. A partir del capítulo 3, prestamos especial atención al caso $0 \in \partial\mathcal{B}_r^m(\infty)$. De manera que partiendo del diseño de la fórmula explícita para controles de retroalimentación presentada en el capítulo 3, analizamos la generalización para incluir el caso de controles positivos. Parte de este trabajo fue publicado en [52]. En el capítulo 4 mostramos que el control diseñado $u_\varepsilon(x)$ con valores en $\mathcal{B}_r^m(\infty)$ [que abreviamos como $u_\varepsilon(x) \in \mathcal{B}_r^m(\infty)$], con componentes $u_{j_\varepsilon}(x) = \rho_{j_\varepsilon}(x)\bar{w}_j(x)$ y admisibles para cada $\varepsilon \in (0, \infty)$; es tal que si $\varepsilon \rightarrow \infty$, entonces $u_{j_\varepsilon}(x) \rightarrow \bar{w}_j(x)$ casi en todas partes, de tal manera que logramos probar que el sistema afin retroalimentado tiene la propiedad de robustez llamada *margen de estabilidad robusta*. En el capítulo 5, considerando el control explícito $u_\varepsilon(x) \in \mathcal{B}_r^m(\infty)$ expuesto en los capítulos 3 y 4, exponemos una manera de estabilizar sistemas con control restringido a un politopo (tetraedro) convexo U ; contenido en la hipercaja $\mathcal{B}_r^m(\infty)$; es decir, el diseño $u_\varepsilon(x)$ lo restringimos al politopo $U \subset \mathcal{B}_r^m(\infty)$, y deducimos una familia de sistemas que puede ser estabilizada con tal restricción. También, mediante un sistema lineal escogido como ejemplo, con CVS $\mathcal{B}_{r^+}^3(\infty) = \text{conv}\{(0,0,0), (r_1^+,0,0), \dots, (r_1^+,r_2^+,r_3^+)\}$, exponemos dos maneras de estabilizar el sistema con un control continuo; primero suponiendo la controlabilidad para obtener un estabilizador global $u(x) \in \mathbb{R}_+^3$ no acotado; después obtenemos un estabilizador local $u_\varepsilon(x) \in \mathcal{B}_{r^+}^3(\infty)$ mediante las condiciones establecidas en el teorema de Z. Artstein para una vecindad Ω del origen $x = 0$.

En todos los capítulos fueron incluidos ejemplos y aplicaciones de la literatura para ejemplificar el método estabilización propuesto. En los últimos capítulos, queda claro que la dificultad práctica para obtener el control estabilizante consiste en encontrar la función de Lyapunov apropiada V con las condiciones CLF y SCP, al menos en una vecindad Ω del origen $x = 0$.

Para futuras investigaciones queda la generalización de los resultados expuestos a los politopos U como CVS, con $0 \in U$, y el diseño correspondiente de una fórmula de control explícito $u(x)$ restringido a U (con componentes de entrada signados/ positivos) tal que el sistema retroalimentado (1) sea GAS.

Capítulo 1

Estabilización de Sistemas Lineales con Control Escalar Positivo

1.1. Introducción

Consideremos el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, A es una matriz real de dimensión $n \times n$, con entrada *admisibile* $u \in U \subset \mathbb{R}$. En particular consideraremos los casos de *conjunto de valores admisibile* (CVS) $U = [0, r]$ y $U = [0, \infty)$. Si $U = [0, r]$, diseñamos una función de retroalimentación de control acotada (BFC) positiva. En este trabajo, primero abordamos el problema de estabilización asintótica global del sistema (1.1) por medio de una función BFC Lipschitz y no negativa $u = u(x)$.

Para el sistema (1.1) y un intervalo U como CVS, consideramos el conjunto de funciones de retroalimentación admisibles

$$\mathcal{U} := \{u : \mathbb{R}^n \rightarrow U : u(x) \text{ es regular}\},$$

donde *regular* significa al menos continua.

1.2. El problema de Estabilización Global

Consideremos el sistema de control no lineal (1.1). El problema de estabilización global consiste en diseñar una función $u : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ que satisfaga las siguientes condiciones:

- i) El punto de equilibrio $x = 0$ de la ecuación diferencial

$$\dot{x} = Ax + bu(x)$$

es global asintóticamente estable.

- ii) $u : \mathbb{R}^n \rightarrow U$ es función admisibile.
- iii) $u = 0$ pertenece a la frontera de U ($0 \in \partial U$).

En general, diremos que el punto de equilibrio $x = 0$ de $\dot{x} = f(x)$ es *estable* (Lyapunov estable) si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, tal que $\|x(0)\| < \delta$ implica que $\|x(t)\| < \varepsilon$ para toda $t \geq 0$. El punto de equilibrio $x = 0$ es *asintóticamente estable* si, es estable y δ puede ser elegida de tal manera que $\|x(0)\| < \delta$ implique que $x(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$. Diremos que el punto de equilibrio es *global asintóticamente estable* (GAS), si la región de atracción del punto de equilibrio es todo \mathbb{R}^n .

Si el problema de estabilización tiene solución, el sistema (1.1) es llamado *globalmente estabilizable*. El problema clásico de estabilización global está compuesto por las condiciones i) y ii). La condición iii) está poco estudiada y representa una dificultad mayor para resolver el problema de estabilización.

En este trabajo, nos propondremos resolver el problema de estabilización para el sistema (1.1) con controles restringidos en signo y magnitud. Sin perder generalidad, suponemos que la matriz real A está en la *forma canónica de Jordan*. En [5], Leenher y Aeyels establecen condiciones necesarias y suficientes para resolver el problema de estabilización en el caso de un sistema lineal positivo con control sin restricción. H.J. Sussmann y Y. Yang en [17], requieren de una matriz A con valores propios simples para mostrar que el sistema (1.1) es estabilizable por medio de una saturación del control lineal $u(x) = b^T x$. Pero ellos no abordan el problema de estabilización con $0 \in \partial U$. En este capítulo, para resolver el problema de estabilización supondremos que el sistema es controlable con control escalar positivo. Es decir, si (1.1) es *nulo-controlable* con CVS $[0, r]$, entonces mostramos que es posible diseñar el estabilizador. Además, si la ecuación $\dot{x} = Ax$ es Lyapunov-estable, mediante la saturación en $[0, 1]$ de un control del tipo $u(x) = \max\{0, K^T x\}$, de manera que obtenemos un BFC (de hecho el control puede ser arbitrariamente pequeño) no negativo que estabiliza globalmente el sistema realimentado.

La caracterización de controlabilidad en [9] y [2], incluyen el caso donde la matriz A tiene valores propios con parte real positiva. Es conocido que tales sistemas no pueden ser estabilizados globalmente con controles acotados, por lo que nos proponemos diseñar un estabilizador global para tales sistemas con CVS dada por $U = [0, \infty)$. Denotamos con $C(A, b)$ a la matriz de controlabilidad $[b, Ab, \dots, A^{n-1}b]$. En [2], Brammer presenta la siguiente caracterización de los sistemas lineales controlables con CVS $U = [0, 1]$:

El sistema (1.1) con $U = [0, 1]$ es nulo-controlable si y sólo si $C(A, b)$ tiene rango n y A no tiene valores propios reales.

Dado un sistema lineal (1.1) controlable con control positivo, mostramos que la función de retroalimentación continua $u(x) = \max\{0, K^T x\}$, donde el vector $K^T \in \mathbb{R}^n$ es elegido apropiadamente, es un estabilizador admisible. En la primer parte, dado un intervalo como CVS U , supondremos que la matriz $C(A, b)$ es no singular y A no tiene valores propios reales.

A continuación describo una versión del teorema de Brammer que caracteriza los sistemas lineales controlables con control positivo; $u \in U = \mathbb{R}_+^m$, para el sistema lineal con A y B matrices reales constantes. Ver [2], donde Brammer caracteriza los sistemas lineales localmente controlables con controles positivos.

Teorema de Brammer.

El sistema lineal $\dot{x} = Ax + Bu$ es completamente controlable si y sólo si

a) La matriz de controlabilidad $C(A, B)$ tiene rango n .

b) No existe vector propio real v de A^T tal que se cumple la desigualdad $v^T B u \leq 0$ para toda $u \in \mathbb{R}_+^m$.

Por ejemplo, el sistema conocido como *doble integrador*

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u$$

es controlable con CVS $U = \mathbb{R}$, pero no es controlable con CVS $U = \mathbb{R}_+$. Para $U = \mathbb{R}_+$ la condición b) no se cumple, ya que $v = (0, 1)^T$ es vector propio de A^T , tal que el término $v^T b u = u$ no cambia de signo. También es conocido que el doble integrador es GAS mediante un controlador continuo restringido al CVS $U = [-r, r]$, pero no es estabilizable mediante una función de control positivo.

1.3. Resultados Principales

Subespacio invariante

Supongamos que la matriz real A , (de dimensión $2k \times 2k$) es dada en la forma canónica de Jordan. Supondremos que todos los valores propios de la matriz A son imaginarios y simples, de forma que $A^T = -A$.

Dada una matriz A , es bien conocido que la dimensión de los subespacios A -invariantes tienen que ver con multiplicidad de los valores propios de A . Mostraremos que el hiperplano definido por

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid b^T x = 0\},$$

no tiene subespacios A -invariantes.

Proposición 1.1 Si $A^T = -A$ y rango $C(A, b) = n$, entonces, no existe una solución $x(t) \neq 0$ del sistema $\dot{x} = Ax$, tal que $b^T x(t) = 0$ para $t \geq 0$.

Demostración: Probaremos esta proposición por contradicción. Supongamos que existe $x(t) \neq 0$ tal que la igualdad previa es verdadera, entonces, derivando sucesivamente respecto a t obtenemos que

$$b^T A^m x(t) = 0 \quad \text{para } t \geq 0, \text{ y } m = 0, 1, 2, \dots, n-1,$$

aplicando la condición $A^T = -A$, obtenemos que

$$x^T(t) A^m b = 0 \quad \text{para } t \geq 0 \text{ y } m = 0, 1, \dots, n-1,$$

lo cual implica que rango $[b, Ab, \dots, A^{n-1}b] < n$. □

Observación 1.2 Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{2k \times 2k}$ en forma canónica de Jordan, con valores propios imaginarios diferentes, la solución del sistema lineal $\dot{x} = Ax$ tiene la forma

$$x(t) = \exp(At)x_0 = \begin{bmatrix} \exp(A_1 t) & 0 & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & 0 & \exp(A_k t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{10} \\ \vdots \\ x_{k0} \end{bmatrix}$$

esta función vectorial está compuesta por k funciones vectoriales de dimensión dos:

$$x_j(t) = \exp(A_j t)x_{j0} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_j t) & \sin(\beta_j t) \\ -\sin(\beta_j t) & \cos(\beta_j t) \end{bmatrix} x_{j0}$$

para $j = 1, 2, \dots, k$.

De la observación 1.2, es claro que

$$x_j \left(t + \frac{\pi}{\beta_j} \right) = -x_j(t), \quad \text{para cada } j,$$

así que el semiespacio

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid b^T x > 0\}$$

no puede ser A -invariante. Existen k hiperplanos A -invariantes de dimensión dos en el espacio de estados \mathbb{R}^{2k} ; de acuerdo a la Proposición 1, ninguno de estos hiperplanos está contenido en el hiperplano

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid b^T x = 0\}.$$

1.4. Estabilización Global de Sistemas Lineales con Realimentación Positiva no Acotada

Daremos condiciones para lograr la estabilización global de una familia de sistemas lineales del tipo

$$\dot{x} = Ax + bu, \tag{1.2}$$

con x variable de estado y u parámetro escalar de control. Para lograr la estabilización proponemos el control positivo y no acotado

$$u(x) = \frac{1}{2} \left(|K^T x| + K^T x \right) = \max \{0, K^T x\}, \tag{1.3}$$

donde K^T es un vector apropiado y $u(x)$ tomando valores en $U = [0, \infty)$.

Dada una matriz A con valores propios

$$\sigma(A) = \{\alpha_1 + i\beta_1, \alpha_1 - i\beta_1, \beta_1 > 0\},$$

por controlabilidad, existe $K^T \in \mathbb{R}^n$ tal que, $\sigma(A + bK^T) = \{\alpha_2 + i\beta_2, \alpha_2 - i\beta_2, \beta_2 > 0\}$, donde este último conjunto lo elegimos a conveniencia. Para determinar K^T , sólo igualamos el polinomio característico $\det[A + bK^T - \lambda I]$ con el polinomio cuyas raíces son $\{\alpha_2 + i\beta_2, \alpha_2 - i\beta_2, \beta_2 > 0\}$.

Proposición 1.3 *Dado un sistema controlable del tipo (1.2) con $U = [0, \infty)$, entonces el sistema realimentado (1.2)-(1.3) es tal que:*

- i) Si $\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} < 0$, entonces el origen $x = 0$ es globalmente asintóticamente estable.
- ii) Si $\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} > 0$, entonces el origen $x = 0$ es inestable.
- iii) Si $\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 0$, entonces el origen $x = 0$ es estable (es un centro).

Demostración: Tomamos una condición inicial $x(0) = x_0 \neq 0$, tal que $K^T x_0 = 0$, $x_0, K \in \mathbb{R}^2$. Denotemos por $x(t, x_0)$ a la solución correspondiente, los *tiempos de intersección* al hiperplano $\{x \mid K^T x = 0\}$ son definidos como

$$t_1 = \inf\{t \mid t > 0 \text{ y } K^T x(t, x_0) = 0\};$$

$$t_2 = \inf\{t | t > t_1 \text{ y } K^T x(t, x_0) = 0\}.$$

Ya que el origen es el único conjunto A -invariante en el hiperplano $\{x | K^T x = 0\}$, entonces $t_2 > t_1 > 0$. De la composición de las soluciones que terminan e inician en el hiperplano (que llamaremos *medios mapeos*), obtenemos que $x(t_2, x_0) = x(t_2 - t_1, x(t_1, x_0))$. Es fácil ver que $t_2 = \pi/\beta_1 + \pi/\beta_2$, así que

$$\left\| x \left(\frac{\pi}{\beta_1} + \frac{\pi}{\beta_2}, x_0 \right) \right\| = \exp \left(\pi \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \right) \right) \|x_0\|$$

de manera que el mapeo, que resulta de la composición de medios-mapeos, es una contracción si y sólo si $\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} < 0$. De otra forma, si $\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} = 0$, entonces $\|x(t_2, x_0)\| = \|x_0\|$ para cualquier condición inicial x_0 , de manera que el origen es un centro. \square

Observación 1.4 El resultado anterior se extiende fácilmente al caso donde la matriz A tiene valores propios imaginarios y simples

$$A = \left\{ \text{diag} \left[\begin{array}{cc} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{array} \right] \right\}, \text{ con } \beta_j \neq 0, \text{ para } j = 1, \dots, \frac{n}{2},$$

de tal forma que el vector K^T es tal que

$$\sigma(A + bK^T) = \left\{ \bar{\alpha}_j \pm \bar{\beta}_j i; \text{ para } j = 1, \dots, \frac{n}{2} \right\}$$

entonces las soluciones del sistema a lazo cerrado (1.2)-(1.3) tienen el siguiente comportamiento:

- i) Si $\frac{\alpha_j}{\beta_j} + \frac{\bar{\alpha}_j}{\bar{\beta}_j} < 0$, para $j = 1, \dots, \frac{n}{2}$, entonces es atractor global.
- ii) Si $\frac{\alpha_j}{\beta_j} + \frac{\bar{\alpha}_j}{\bar{\beta}_j} > 0$, para algún j , entonces es un repulsor.
- iii) Si $\frac{\alpha_j}{\beta_j} + \frac{\bar{\alpha}_j}{\bar{\beta}_j} = 0$, para un valor de j , entonces en el hiperplano j -ésimo las soluciones describen órbitas cerradas.

Ahora consideremos la multiplicidad de los valores propios de la matriz A . En la siguiente proposición suponemos la forma de Jordan

$$A = \left\{ \text{diag} \left[\begin{array}{cc} \alpha_1 & \beta \\ -\beta & \alpha_1 \end{array} \right] \right\} + N \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

donde $\beta \neq 0$ y la matriz nilpotente N , es tal que $N^m \neq 0$ y $N^{m+1} = 0$, para un entero positivo m .

También consideraremos la norma euclídeana:

$$\|M\| = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sum_{i,j} m_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

definida para una matriz $M = [m_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que

$$\left\| \left\{ \text{diag} \left[\begin{array}{cc} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{array} \right] \right\} \right\| = 1, \quad \|I\| = 1 \text{ y } 0 \leq \|N\| \leq 1.$$

Proposición 1.5 Si el sistema (1.2) es controlable con $U = [0, \infty)$, entonces existe un vector K tal que la función de retroalimentación (1.3) es un estabilizador global.

Demostración: Generalizamos los cálculos para sistemas definidos en un espacio de estado de dimensión n , consideremos el sistema lineal del tipo (1.2) con

$$A = \left\{ \text{diag} \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta \\ -\beta & \alpha_1 \end{bmatrix} \right\} + N \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

donde N es una matriz triangular superior nilpotente. Consideraremos también los vectores $b, K^T \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\text{rango}C(A, b) = n \quad \text{y} \quad \sigma(A + bK^T) = \{\alpha_2 \pm i\beta\},$$

con la multiplicidad apropiada. Entonces existe una matriz invertible P tal que

$$P^{-1}(A + bK^T)P = \left\{ \text{diag} \begin{bmatrix} \alpha_2 & \beta \\ -\beta & \alpha_2 \end{bmatrix} \right\} + \bar{N},$$

de la condición de controlabilidad tenemos que $x = 0$ es el único conjunto A -invariante contenido en $\{x | K^T x \leq 0\}$.

La función

$$x(t) = e^{\alpha_1 t} \left\{ \text{diag} \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} \right\} \left[I + \sum_{i=1}^k \frac{N^i t^i}{i!} \right] x_0$$

es solución de $\dot{x} = Ax$, con condición inicial $x(0) = x_0$, así que

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq e^{\alpha_1 t} \left\| \left\{ \text{diag} \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} \right\} \right\| \left\| \left[I + \sum_{i=1}^k \frac{N^i t^i}{i!} \right] \right\| \|x_0\| \\ &\leq e^{\alpha_1 t} \left[1 + \sum_{i=1}^k \frac{\|N^i\| t^i}{i!} \right] \|x_0\| \end{aligned}$$

tal que

$$\|x(t)\| \leq e^{\alpha_1 t} e^{\|N\|t} \|x_0\| = e^{(\alpha_1 + \|N\|)t} \|x_0\| \quad (1.4)$$

donde hemos usado las siguientes conocidas desigualdades

- $\|N\|^i \geq \|N^i\|$, válida para cualquier entero positivo i
- $e^{\|N\|t} \geq 1 + \sum_{i=1}^k \frac{\|N\|^i t^i}{i!}$, para $t > 0$ y cualquier entero positivo k

Similarmente la función

$$y(t) = e^{\alpha_2 t} \left\{ \text{diag} \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} \right\} \left[I + \sum_{i=1}^k \frac{\bar{N}^i t^i}{i!} \right] y_0$$

es solución de $\dot{y} = P^{-1}(A + bK^T)Py$, con $y(0) = y_0$; así que

$$\|y(t)\| = e^{\alpha_2 t} \left\| \left\{ \text{diag} \begin{bmatrix} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -\sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} \right\} \right\| \left\| \left[I + \sum_{i=1}^k \frac{\bar{N}^i t^i}{i!} \right] \right\| \|y_0\|$$

tal que

$$\|y(t)\| \leq e^{(\alpha_2 + \|\bar{N}\|)t} \|y_0\|. \quad (1.5)$$

Dada una condición inicial arbitraria $x(0) = x_0 \neq 0$, donde $K^T x_0 = 0$, denotemos por $x(t, x_0)$ a la solución correspondiente y mediante los tiempos de intersección

$$t_1 = \inf\{t | t > 0 \text{ y } K^T x(t, x_0) = 0\};$$

$$t_2 = \inf\{t | t > t_1 \text{ y } K^T y(t, x(t_1)) = 0\},$$

tal que $y_0 = x(t_1)$, de las desigualdades (1.4) y (1.5) obtenemos que

$$\|y(t_2)\| \leq e^{(\alpha_2 + \|\bar{N}\|)t_2} e^{(\alpha_1 + \|N\|)t_1} \|x_0\| \leq e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\|N\|)t_2} \|x_0\|$$

donde suponemos que $\|N\| \geq \|\bar{N}\|$. De la desigualdad

$$\|y(t_2)\| \leq e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\|N\|)t_2} \|x_0\|$$

deducimos que hay una contracción de la composición de medios mapeos $y(t_2, x(t_1))$ si se cumple que $e^{(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\|N\|)t_2} < 1$, o equivalentemente, si

$$\alpha_1 + \alpha_2 + 2\|N\| < 0 \quad (1.6)$$

donde $0 \leq \|N\| \leq 1$.

En particular, si el sistema es inestable a lazo abierto con $\alpha_1 > 0$ y $N \in \mathbb{R}^{n \times n}$, podemos escoger $\alpha_2 < 0$ para tener (1.6). Concluimos que esta condición es suficiente para tener estabilización asintótica global en el sistema a lazo cerrado (1.2)-(1.3). \square

Observación 1.6 *La desigualdad (1.6) implica la desigualdad (i) de la proposición 1.3, que fue obtenida para asegurar la estabilidad asintótica en el caso de dos dimensiones. Para el caso $\beta_1 = \beta_2 > 0$ y $N = 0$, las desigualdades coinciden.*

Hasta aquí, el control considerado (1.3) es no acotado. Sin embargo, podemos usar la saturación para obtener un estabilizador global para la clase de sistemas lineales Lyapunov-estables.

1.5. Estabilización Global de Sistemas Lineales con Realimentación Positiva Acotada

En lo que sigue suponemos que la matriz A está en la forma de Jordan y el sistema a lazo abierto $\dot{x} = Ax$ es Lyapunov-estable. Es decir,

$$A = J = \text{diag}[J_1, J_2, \dots, J_s],$$

de forma que si el bloque de Jordan J_k tiene valores propios en el eje imaginario, entonces es de dimensión dos. En el otro caso, tiene los valores propios en el lado izquierdo del plano complejo.

En esta parte damos un control positivo globalmente estabilizante para la clase de sistemas (1.2) donde la matriz A y el vector b satisfacen las siguientes condiciones:

- a) $\text{rango}C(A, b) = n$.
- b) $A^T = -A$, con $0 \notin \sigma(A)$.

Es bien conocido que las condiciones a) y b) implican *controlabilidad local* del sistema (1.2) con $U = [0, r]$ (ver [2]). La restricción $u \in [0, r]$ implica que la condición (a) no sea suficiente para resolver el problema de estabilización de (1.2). Para tener el diseño del estabilizador global BFC positivo, necesitamos que el sistema a lazo abierto sea Lyapunov-estable, esto implica que A es simple, lo que a la vez implica la condición (b).

La siguiente función BFC positiva

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} [|b^T x| - b^T x] & \text{si } -b^T x \leq r \\ r & \text{si } -b^T x \geq r \end{cases} \quad (1.7)$$

corresponde a la saturación del control (1.3) en el intervalo $U = [0, r] \subset \mathbb{R}$.

Proposición 1.7 *Si el sistema (1.2) es controlable con $U = [0, r]$ y A es Lyapunov-estable, entonces la retroalimentación (1.7) resuelve el problema de estabilización global.*

Demostración: Consideremos la función de Lyapunov $V = x^T x$, tal que

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [Ax + bu(x)]^T x + x^T [Ax + bu(x)] \\ &= x^T [A^T + A]x + u^T b^T x + x^T bu \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \dot{V} &= 2b^T x u \\ &= \begin{cases} b^T x [|b^T x| - b^T x] & \text{si } -b^T x \leq r \\ 2b^T x r & \text{si } -b^T x \geq r \end{cases} \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

de manera que al considerar los casos

- Caso $-b^T x > 0$. Tenemos que $\dot{V} < 0$.
- Caso $-b^T x \leq 0$. En este caso tenemos que $\dot{V} = 0$.

De la proposición 1.1 y observación 1.2, concluimos que el origen es el único conjunto A -invariante en $\{x | -b^T x \leq 0\}$. De acuerdo al principio de invariancia de LaSalle, concluimos que el origen es globalmente asintóticamente estable bajo el sistema (1.2)-(1.7). \square

Hemos dividido el espacio de estado en dos regiones:

$$\mathbb{R}_+^n = \{x | -b^T x > 0\} \quad \text{y} \quad \mathbb{R}_-^n = \{x | -b^T x \leq 0\},$$

En el semiespacio \mathbb{R}_+^n , las soluciones corresponden al sistema a lazo cerrado, y en \mathbb{R}_-^n , al sistema a lazo abierto. De manera que la proposición 4 implica que la composición de medios-mapeos, obtenida al aplicar la realimentación (1.7), estabiliza globalmente al sistema.

1.6. Ejemplo y Aplicación

Ejemplo

Consideremos el sistema lineal en el plano

$$\dot{x} = Ax + bu = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta \\ -\beta & \alpha_1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u \quad (1.8)$$

con $u \in [0, \infty)$ y $\beta \neq 0$. Tal que, $\text{rango}[b, Ab] = 2$.

Si elegimos los vectores

$$K^T = [K_1, K_2] = \left[-\frac{1}{\beta}(\alpha_1 - \alpha_2)^2, 2(\alpha_1 - \alpha_2) \right] \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

entonces $\sigma(A + bK^T) = \{\alpha_2 \pm i\beta\}$. Podemos escoger α_2 , tal que $\alpha_2 + \alpha_1 < 0$ ya que $N = 0$ en (1.6).

Como ejemplo numérico, consideremos el sistema (1.8) con

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

tal que $\sigma(A) = \left\{ \frac{1}{2} \pm i \right\}$. Obtenemos el control (1.3) por medio del vector

$$K^T = \left[\frac{9}{4}, -3 \right], \quad \text{tal que} \quad A + bK^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{13}{4} & -\frac{5}{2} \end{bmatrix},$$

con valores propios $\sigma(A + bK^T) = \{-1 \pm i\}$.

De la proposición 1.3, tenemos que

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \frac{\alpha_2}{\beta_2} = -\frac{1}{2} < 0,$$

de forma que el origen es globalmente asintóticamente estable bajo el sistema a lazo cerrado (1.8)-(1.3).

Aplicación

Como una aplicación a un sistema mecánico estabilizable con controles positivos acotados, consideremos las ecuaciones de movimiento linealizadas de dos osciladores con el fin de estabilizarlos mediante la utilización de una fuerza continua aplicada en una sola dirección. Cada masa m_i (ambas masas son no nulas) están fijadas en los extremos de una varilla ingravida rígida de longitud l_i , $i = 1, 2$. El sistema gira sin fricción sobre los puntos del pivote p_0 y p_1 , donde p_0 está sujeto a una estructura rígida. Una fuerza u , $0 \leq u \leq 1$, es aplicada simultáneamente a las masas m_1 y m_2 como se indica en la figura 1.1.

Si $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \dot{\theta}_1$, $x_3 = \theta_2$ y $x_4 = \dot{\theta}_2$, es bien conocido que podemos escribir el sistema de ecuaciones que describen la dinámica de un péndulo doble en la forma $\dot{x} = Ax + bu$, con matrices

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ -\beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & -\beta_2 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_2 \end{bmatrix},$$

con constante gravitacional normalizada $g = 1$, y

$$\beta_1 = \sqrt{\frac{1}{2l_1l_2} \left[(l_1 + l_2)k + \sqrt{(l_1 + l_2)^2k^2 - 4l_1l_2k} \right]},$$

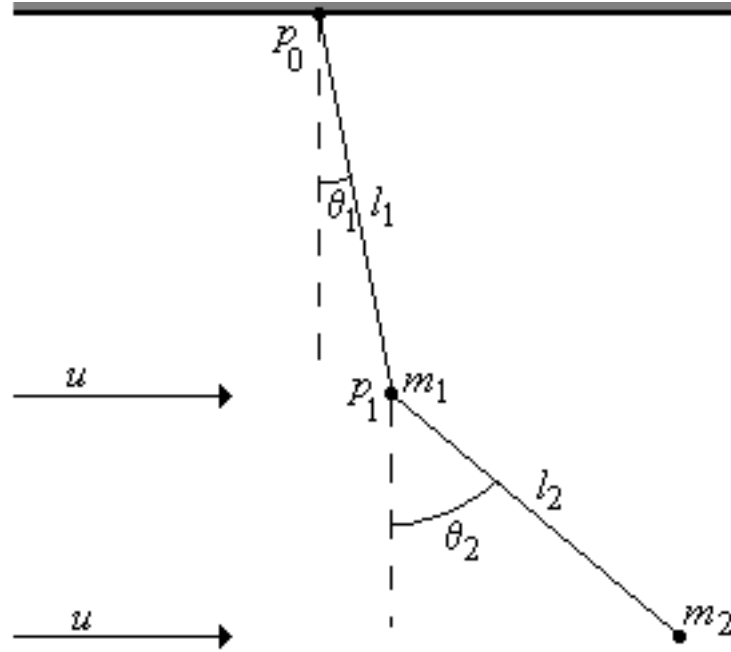


Figura 1.1: Péndulo Doble.

$$\beta_2 = \sqrt{\frac{1}{2l_1l_2} \left[(l_1 + l_2)k - \sqrt{(l_1 + l_2)^2k^2 - 4l_1l_2k} \right]},$$

$$k = 1 + \frac{m_2}{m_1}, \quad b_j = \frac{1}{m_1l_1} + \frac{(1 - l_1\beta_j^2) \left(\frac{1}{m_2} - \frac{1}{m_1} \right)}{l_1l_2\beta_j^2}, \quad j = 1, 2.$$

Observamos que $\beta_1 \neq \beta_2$. Es fácil mostrar que el determinante Δ de la matriz de controlabilidad es $4b_1^2b_2^2\beta_1\beta_2(\beta_1^2 - \beta_2^2)^2$. En general, $\Delta \neq 0$ excepto para ciertos valores críticos de los parámetros l_1, l_2 y k .

Observamos que la matriz A y el vector b satisfacen las condiciones (a) y (b), bajo la suposición $\Delta \neq 0$. Concluimos que el estado $x(t)$ del péndulo doble puede ser llevado al estado $x = 0$ con el control positivo arbitrariamente pequeño,

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} [|b^T x| - b^T x] & \text{si } -b^T x \leq r \\ r & \text{si } -b^T x \geq r \end{cases}$$

El origen $x = 0$ es un punto de equilibrio globalmente asintóticamente estable para el sistema a lazo cerrado.

Resumiendo el capítulo: si el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

es controlable con controles positivos, entonces puede ser globalmente estabilizado mediante una sencilla función de retroalimentación positiva (no-negativa) y Lipchitz (continua) en la siguiente forma $u(x) = \max\{0, K^T x\}$, donde el vector $K^T \in \mathbb{R}^n$ es elegido apropiadamente.

Capítulo 2

CLF-Estabilización con la hipercaja con 0 en el interior como CVS

2.1. Introducción

Considere el sistema afín con entrada multivariable

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^m u_j g_j(x), \quad (2.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es la variable de estado, las funciones vectoriales $f, g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, para $j = 1, \dots, m$, son $C^s(\mathbb{R}^n)$ ($s \geq 0$), el conjunto de valores admisibles para el control (CVS) es dado por la hipercaja $U = \mathcal{B}_r^m(\infty) := [-r_1^-, r_1^+] \times \dots \times [-r_m^-, r_m^+] \subset \mathbb{R}^m$, con $r_j^\pm > 0$, para toda $j = 1, \dots, m$, y $u = (u_1, \dots, u_m)^\top$, con $^\top$ denotando transposición. Sin perder generalidad, suponemos que $f(0) = 0$. El conjunto de funciones de retroalimentación admisibles es definida por

$$\mathcal{U} := \{u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{B}_r^m(\infty) : u(x) \text{ es regular}\}, \quad (2.2)$$

donde *regular* significa continua para cada x , o de clase C^s ($s \geq 1$), suave, analíticas, etc. casi en todas partes.

El objetivo principal de este trabajo es abordar la *estabilización asintótica global* (GAS) del sistema (2.1) por medio de un control de retroalimentación admisible $u(x)$.

En general, buscamos resolver el siguiente problema: ¿Cómo lograr que un sistema de control afín sea global asintóticamente estable mediante la aplicación de un control de retroalimentación admisible $u(x)$, cuando el CVS es un politopo m -dimensional U ?

¿Cómo resolver este problema?

Es conocido que hay un interés creciente en el diseño de las funciones de control de retroalimentación por medio de *funciones de Lyapunov* debido a los resultados obtenidos en [21, 47]. En [21], Artstein probó que la existencia de un control de retroalimentación continuo, que toma valores en un convexo arbitrario CVS $U \subset \mathbb{R}^m$, es equivalente a la existencia de una *función Lyapunov de control* (CLF) (ver abajo definición de una CLF). Aunque la prueba en [21] está basada sobre un procedimiento no constructivo (particiones de la unidad), ha habido una gran actividad en el diseño de controles de retroalimentación por medio de funciones CLF debido a una fórmula explícita, cuando el CVS U es el espacio \mathbb{R}^m , obtenida por Sontag en [47]: la *fórmula*

universal. Una de las principales dificultades en el diseño de las funciones de control por medio de la teoría CLF, radica en el hecho de que la fórmula universal propuesta depende del CVS U particular. En [33], Lin y Sontag obtuvieron una fórmula universal para el caso cuando el CVS es la bola unitaria euclidiana abierta; y que, en [36], Malisoff y Sontag extienden este resultado al caso cuando las entradas del control son restringidas a la bola unitaria abierta p -normada, $\text{int } \mathcal{B}_p^m(p)$, donde

$$\mathcal{B}_1^m(p) := \{u \in \mathbb{R}^m : \|u\|_p = \sqrt[p]{|u_1|^p + \dots + |u_m|^p} \leq 1\},$$

para valores específicos de $p = 2r/(2r-1)$, con $r = 1, 2, \dots$ (así, $1 < p \leq 2$). La fórmula propuesta es

$$u(x) := \lambda_p \left(a, \|b\|_{2k}^{2k} \right) \left(b_1^{2k-1}, \dots, b_m^{2k-1} \right)^\top, \quad (2.3)$$

donde $a = a(x)$ y $b = b(x)$ se dan abajo en (2.22) y $\lambda_p : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ es definida por

$$\lambda_p(\alpha, \theta) := \begin{cases} \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \theta^{2k}}}{\left(1 + \sqrt{1 + \theta^{2k-1}}\right)^\theta}, & \text{si } \theta > 0, \\ 0, & \text{si } \theta = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Además, se ha demostrado en [33, 36] que el control de retroalimentación dado por (2.3)-(2.4) es suave en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ y continuo en todas partes (función casi suave), siempre que el CLF y los campos vectoriales que definen (2.1) son suaves. Finalmente, la fórmula también se utilizó solamente en el caso del cuadrado abierto $\text{int } \mathcal{B}_1^2(\infty) = (-1, 1)^2$ y un m -octaedro abierto $\text{int } \mathcal{B}_1^m(1)$, a un costo de “pequeños sobredisparos” en los valores del control. En [35], el problema de sobredisparo se abordó para el CVS $(-1, 1)^2$. En [49], Suárez, Solís-Daun y Álvarez propusieron una familia uno-paramétrica de controles de retroalimentación continuos que toman valores tan cerca como se desee en la frontera de los CVS

$$\mathcal{B}_r^m(p) := \{u \in \mathbb{R}^m : \|u\|_p = \sqrt[p]{r_1^{-1}(u_1) |u_1|^p + \dots + r_m^{-1}(u_m) |u_m|^p} < 1\}, \quad (2.5)$$

para el caso general $1 < p < \infty$, donde $r_j(\zeta_j)$ son dados por

$$r_j(\zeta_j) := \begin{cases} r_j^+, & \text{si } \zeta_j \geq 0, \\ r_j^-, & \text{si } \zeta_j < 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

con $r_j^\pm > 0$, para $j = 1, \dots, m$, y $\mathbf{r} = (r_1^\pm, \dots, r_m^\pm)$. Entonces, se define un control de retroalimentación continuo para el caso cuando el CVS es la hipercaja m -dimensional \mathbf{r} -ponderado, $\mathcal{B}_r^m(\infty) := [-r_1^-, r_1^+] \times \dots \times [-r_m^-, r_m^+] \subset \mathbb{R}^m$, aumentando p cuando u se acerca a la frontera de $\mathcal{B}_r^m(\infty)$. Luego, en [48], Suárez, Solís-Daun & Aguirre generalizan este diseño de control, proponen una fórmula explícita de una familia parametrizada de un control de retroalimentación continuo $u_\varepsilon(x)$ para el GAS de los sistemas con respecto a una clase de convexos compactos CVS. En [45], Solís-Daun, Aguirre and Suárez extienden este resultado a una clase más general de convexos compactos CVS U , y considera una forma general de estabilizadores de retroalimentación regulares ($u(x) = \rho(x) \bar{w}(x)$, donde $\rho(x)$ es una función de reescalamiento y $\bar{w}(x)$ es un control óptimo) que comprende muchas de las fórmulas de control existentes en la literatura. Recientemente, en [44], Solís-Daun mostró cómo la regularidad del control de $\bar{w}(x)$ depende de la geometría (*curvatura*) of U . Además, basándose en un método para aproximar los conjuntos convexos compactos, se diseñó controles de retroalimentación regulares para el GAS de sistemas con convexos compactos CVS U con $0 \in \text{int } U$, a un costo de “pequeños sobredisparos”

en los valores del control. Finalmente, en [46], Solís-Daun y Leyva estudiaron las condiciones que deben satisfacer los controles de retroalimentación para obtener la GAS de los sistemas con politopos como CVS. Mediante el uso de una fórmula similar a la definida en [48], en [31], Kidane y coautores diseñaron un estabilizador continuo para sistemas (2.1) con CVS $U = \text{int}\mathcal{B}_1^m(p)$ ($1 < p < \infty$), y en [40], Satoh y coautores generalizaron este resultado con respecto a una clase de restricciones de entrada convexas.

En este trabajo estudiamos las condiciones que debe satisfacer un control de forma general para ser admisible. A continuación, proponemos una fórmula explícita para una familia unoparametrizada de controladores regulares $u^\varepsilon(x)$, con parámetro $\varepsilon \in (0, \infty)$, que toma valores en la hipercaja $\mathcal{B}_r^m(\infty) := [-r_1^-, r_1^+] \times \cdots \times [-r_m^-, r_m^+]$, tal que el sistema (2.1) es GAS. En comparación con la literatura existente, la fórmula de control propuesto utiliza casi todo el recurso de control disponible, en el sentido de que pueden tomar valores tan cerca como se desee de la frontera de la hipercaja. Además, el control de retroalimentación es continuo; es suave/ real analítico sobre \mathbb{R}^n excepto en cierta “superficies de cambio”, siempre que la CLF y los campos vectoriales que definen (2.1) son suaves/real analíticos. Introducimos algunos ejemplos para ilustrar el diseño propuesto de control. Finalizamos el capítulo abordando el problema de diseñar una *función de control marginalmente robusta*; tal que la familia de controles de retroalimentación propuesta $u^\varepsilon(x)$ aproxima (para valores grandes del parámetro ε) al controlador que optimiza el margen de estabilidad robusta.

2.2. CLF-Estabilización de sistemas afines con control escalar acotado

En esta sección proponemos una fórmula explícita de funciones de retroalimentación admisibles para resolver el problema de estabilización con CVS $U := [-r^-, r^+]$. Diremos que el control es signado si y sólo si (ssi) u puede tomar dos signos, es decir, $r^- > 0$.

Consideremos el sistema escalar afin

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (2.7)$$

donde las funciones vector f y g son suaves en \mathbb{R}^n , con CVS $U := [-r^-, r^+]$, $r^- > 0$ y $r^+ > 0$. Sin perder generalidad, suponemos que $f(0) = 0$. El conjunto de *funciones de retroalimentación admisibles* es definida por

$$U := \{u : \mathbb{R}^n \rightarrow U : u(x) \text{ es regular}\}. \quad (2.8)$$

donde *regular* significa al menos continua para cada x . De manera que objetivo principal de este capítulo es abordar la *estabilización asintótica global* (GAS) del sistema (2.7) por medio de un control de retroalimentación admisible $u(x)$.

2.3. Teoría CLF

Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada una *función Lyapunov de control* (CLF) [con respecto al sistema (2.7) con CVS U] si y sólo si (ssi) es una función $C^k(\mathbb{R}^n)$ ($k \geq 1$) la cual es *definida positiva* ($V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ ssi $x \neq 0$) y radialmente no acotada $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$, con tasa de decaimiento tal que

$$\inf_{u \in U} \{\nabla V(x) \cdot (f(x) + g(x)u)\} = \inf_{u \in U} \{a(x) - b(x) \cdot u\} < 0, \quad \forall x \neq 0, \quad (2.9)$$

donde

$$a(x) := L_f V(x) \ \& \ b(x) := -L_g V(x),$$

denota las derivadas direccionales de $V(x)$ con respecto a los campos vectoriales que definen el sistema (2.7).

Para el diseño de las funciones de control de retroalimentación continuas en el origen, Artstein introduce en [21] el concepto de *propiedad del control pequeño SCP*:

Definición. La *función Lyapunov de control* tiene la *propiedad del control pequeño (SCP)* con respecto a (2.9) si para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < \|x\| < \delta$, entonces existe un control $u \in U$, con $|u| < \epsilon$, tal que

$$a(x) - b(x) \cdot u < 0, \text{ para } x \neq 0.$$

Definimos la función no negativa $|b| r$ donde

$$r = \begin{cases} r^+ & \text{si } b > 0, \\ r^- & \text{si } b \leq 0. \end{cases}$$

Dado el sistema (2.7), suponga que existe una CLF V que satisface la SCP. Definimos la función de retroalimentación óptima (mejor tasa de estabilización) $\bar{\omega}(x) \in U$ como la función de \mathbb{R}^n a U que satisface:

$$\inf_{u \in U} \{ \nabla V(x) \cdot (f(x) + g(x)u) \} = \nabla V \cdot (f + g\bar{\omega}) \quad x \neq 0 \quad (2.10)$$

Existe un único control estabilizante óptimo $\bar{\omega}(x)$ definido por

$$\bar{\omega}(x) = r(\text{sign}b(x)), \quad (2.11)$$

y para toda x tal que $b(x) \neq 0$, pero no es continuo en el conjunto $\mathcal{N}_b = \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) = 0\}$.

De la definición de $|b| r$, tenemos que

$$\min_{u \in U} \{a - bu\} = a - b\bar{\omega} = a - |b| r. \quad (2.12)$$

Por lo tanto, la condición de decaimiento CLF, representada por la desigualdad (2.9), es equivalente a la siguiente desigualdad

$$a(x) < |b| r, \quad \text{para } x \neq 0. \quad (2.13)$$

En general, hay dos inconvenientes al aplicar el teorema de Z. Arstein:

1. Encontrar una CLF apropiada;
2. La prueba del resultado de Artstein no es constructiva. Por lo tanto, el problema de síntesis de la retroalimentación es muy difícil de resolver.

A continuación mostramos una condición necesaria para la estabilización del sistema de control.

II.1 Un diseño general de controles admisibles con respecto al intervalo.

Supongamos que $V(x)$ es CLF con respecto al sistem (2.7) con controles tomando valores en el intervalo $U = [-r^-, r^+]$, con $r^- > 0$ y $r^+ > 0$. Entonces, teniendo en cuenta el control de mejor tasa $\bar{\omega}(x)$, tenemos que

$$dV/dt = a(x) - b(x) \cdot \bar{\omega}(x) = a(x) - |b(x)| r(x) < 0, \quad \forall x \neq 0.$$

Observación 1. Observe que si $\beta(x) := b(x)\bar{\omega}(x) = 0$ entonces $a(x) < 0$, y se cumple que $\beta(x) = 0$ ssi $x \in \mathcal{N}_b$. \square

Suponiendo que U es un intervalo, proponemos funciones de control de realimentación de la forma $u(x) := \rho(x)\bar{\omega}(x)$, donde $\bar{\omega}(x)$ es la correspondiente ley de control de mejor tasa y $\rho(x)$ es una función escalar por determinar. El propósito de este diseño es regularizar la discontinuidad de $\bar{\omega}(x)$ en la superficie de cambio \mathcal{N}_b mediante una función de reescalamiento apropiada $\rho(x)$.

A continuación enuncio las condiciones que $\rho(x)$ debe satisfacer para garantizar la existencia de un control de retroalimentación *admisibles* $u(x)$ ($u(x) \in U$) tal que el sistema a lazo cerrado sea GAS.

Hipótesis H. Supongamos que $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \rho(x) < 1$;
- (ii) $\rho(x) = 0$ ssi $x \in \mathcal{N}_b$;
- (iii) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}_b, \rho(x) > \frac{a(x)}{|b(x)|r(x)}$.

Para $b(x) \neq 0$, la desigualdad (2.13) equivale a la desigualdad $\frac{a(x)}{|b(x)|r(x)} < 1$, de manera que la condición (iii) para $\rho(x)$ implica la desigualdad

$$\frac{a(x)}{|b(x)|r(x)} < \rho(x) < 1.$$

Mediante el siguiente teorema mostramos que las condiciones de la **Hipótesis H** son suficientes para resolver el problema de estabilización con control $u(x) = \rho(x)\bar{\omega}(x)$. Con base en la definición: $\mathcal{N}_b = b^{-1}[0] = \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) = 0\}$ y el control de mejor tasa $\bar{\omega}(x) = r \operatorname{sign} b$, tenemos el siguiente teorema.

Teorema. Supongamos que $V(x)$ es una CLF [con respecto al sistema (2.7) y el CVS $U = [-r^-, r^+]$, con $r^- \geq 0$ y $r^+ > 0$] y satisface la propiedad SCP, $\bar{\omega}(x) = r \operatorname{sign} b$ es el control de retroalimentación con mejor tasa y $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ una función continua que satisface la *Hipótesis H*. Entonces, el control continuo $u(x) = \rho(x)\bar{\omega}(x) \in U$ es un estabilizador global para el sistema (2.7).

Prueba de que el control $u(x) = \rho(x)\bar{\omega}(x) = \rho(x)r \operatorname{sign} b$ es admisible: De hecho, a partir de la condición $0 \leq \rho(x) < 1$ tenemos que

$$u(x) = \rho(x)\bar{\omega}(x) = \rho(x)r \operatorname{sign} b$$

es equivalente a

$$\begin{aligned} -r^- &\leq -r^- \rho(x) && \text{si } b < 0 \\ r^+ \rho(x) &\leq r^+ && \text{si } b > 0 \end{aligned}$$

tal que $u(x)$ está restringido a $[-r^-, r^+]$.

Además, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}_b$ tenemos que ambos, $\rho(x)$ y $\bar{\omega}(x)$, son continuos (recordemos que $\bar{\omega}(x)$ es constante en cada intervalo donde b no cambia de signo) de manera que $u(x)$ es continuo. En el caso $x \in \mathcal{N}_b$, ya que $\rho(x)$ es continuo y $\bar{\omega}(x) = r(x) \operatorname{sign} b(x)$ es acotada, entonces de la SCP y condición (ii) se deduce que $\forall x^* \in \mathcal{N}_b$,

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow x^*} |u(x)| = \lim_{x \rightarrow x^*} \rho(x) |\bar{\omega}(x)| = 0,$$

entonces cada entrada $u(x)$ es continua en \mathcal{N}_b y $u(x)|_{\mathcal{N}_b} = 0$.

Por último, mostramos que el sistema de lazo cerrado es GAS:

(a) Si $x \in \mathcal{N}_b \setminus \{0\}$, entonces $a(x) < 0$ y $u(x)|_{\mathcal{N}_b} = 0$. Por lo tanto, tenemos que

$$dV/dt = a(x) - b(x)u(x) = a(x) < 0 \quad \forall x \in \mathcal{N}_b \setminus \{0\}.$$

(b) Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}_b$, entonces $b(x) \neq 0$. Por lo tanto tenemos que

$$dV/dt = a(x) - b(x)u(x) < 0$$

ya que de la condición (iii) deducimos que

$$a(x) - b(x)u(x) = a(x) - b(x)\rho(x)\bar{\omega}(x) = a(x) - \rho(x)b\text{sign}b = a - \rho(x)|b|r < 0$$

por consiguiente, $dV/dt < 0$, $x \neq 0$.

Dado un sistema afín, la dificultad práctica para obtener el control estabilizante consiste en encontrar la función de Lyapunov V con las propiedades CLF y SCP, al menos en una vecindad Ω del origen. En el siguiente capítulo veremos otra prueba de este resultado.

2.4. Un diseño particular de $\rho(x)$

Consideremos la función de retroalimentación continua $u_\varepsilon(x) = \bar{\omega}\rho_\varepsilon(x)$, parametrizada con $\varepsilon > 0$, dada por

$$u_\varepsilon(x) = \begin{cases} r(\text{sign}b) \left[1 - \left(1 - \frac{|a|+a}{2|b|r} \right) \exp(\tau_\varepsilon) \right], & \text{para } |b|r > 0, \\ 0, & \text{para } |b|r = 0, \end{cases} \quad (2.14)$$

donde $\rho_\varepsilon(x)$ es dada por

$$\rho_\varepsilon(a, b) = 1 - \left(1 - \frac{|a|+a}{2|b|r} \right) \exp(\tau_\varepsilon)$$

y $\tau_\varepsilon(x)$ es una función no-positiva definida como

$$\tau_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\ln(\lambda(x))}{\lambda(x)} - \varepsilon|b|r, & \text{para } |b|r > 0, \\ 0, & \text{para } |b|r = 0, \end{cases} \quad (2.15)$$

con $\lambda(x) = 1 - \frac{1}{2}(|a(x)| + a(x))/|b|r$. Si $\varepsilon \rightarrow \infty$, la función de control $u_\varepsilon(x)$ converge al control estabilizante con mejor tasa $\bar{\omega} = r\text{sign}(b)$, y como consecuencia de $0 < \exp(\tau_\varepsilon) \leq 1$ para cada $\varepsilon > 0$, tenemos la condición restrictiva para el control $0 \leq u_\varepsilon(x) \leq r^+$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$.

A continuación probamos que la función de control $u_\varepsilon(x) = \rho_\varepsilon(x)\bar{\omega}(x)$ resuelve el problema de estabilización global.

Si $a(x) < |b|r$ para toda $x \neq 0$, entonces el sistema a lazo cerrado (2.7)-(2.14) es GAS.

Probaremos primero que el sistema retroalimentado (2.7)-(2.14) satisface $\dot{V} < 0$ para $x \neq 0$.

Si $a(x) > 0$, tenemos que $|b|r > 0$. Esto implica que

$$\begin{aligned}\dot{V} &= a + bu_\varepsilon = a + b\bar{\omega}\rho_\varepsilon(a, b) \\ &= a - |b|r\rho_\varepsilon(a, b) \\ &= a - |b|r \left(1 - \left(1 - \frac{a}{|b|r} \right) e^{\frac{\ln\left(1 - \frac{a}{|b|r}\right)}{1 - \frac{a}{|b|r}} - \varepsilon(|b|r)^2} \right)\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}\dot{V} &= a - |b|r + (|b|r - a) e^{\frac{\ln\left(1 - \frac{a}{|b|r}\right)}{1 - \frac{a}{|b|r}} - \varepsilon(|b|r)^2} \\ &= (a - |b|r) \left(1 - e^{\frac{\ln\left(1 - \frac{a}{|b|r}\right)}{1 - \frac{a}{|b|r}} - \varepsilon(|b|r)^2} \right) \\ &< 0.\end{aligned}$$

Para $x \neq 0$ tal que $a(x) \leq 0$, tenemos que $|b|r > 0$ y $\rho_\varepsilon(a, b) = 1 - \exp(-\varepsilon(|b|r)^2)$. Esto implica que

$$\begin{aligned}\dot{V} &= a - |b|r\rho_\varepsilon(a, b) \\ &= a - |b|r \left(1 - \exp(-\varepsilon(|b|r)^2) \right) \\ &< 0.\end{aligned}$$

Hemos probado que

$$\dot{V} = a + bu_\varepsilon < 0 \text{ para } x \neq 0 \text{ y para toda } \varepsilon > 0.$$

Mediante el siguiente lema mostramos la continuidad del control $u_\varepsilon(x)$ con este diseño particular de $\rho_\varepsilon(x)$; o equivalentemente, para mostrar que $\rho_\varepsilon(x)$ satisface las propiedad (ii) de la hipótesis H es necesario el siguiente lema.

Lema Si la CLF V satisface la SCP, entonces se cumplen los siguientes limites:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(x) + |a(x)|}{2|b|r} = 0$;
- (b) $\lim_{|b|r \rightarrow 0} \frac{a(x) + |a(x)|}{2|b|r} = 0$.

Prueba de (a). Es suficiente probar que $\lim_{x \rightarrow 0} a(x) / |b(x)| = 0$ para $a(x) > 0$.

Por la SCP tenemos que

$$0 < a(x) < -b(x)u \leq |b(x) \cdot u| = |b(x)| |u| < |b(x)| \varepsilon, \text{ ya que } |u| < \varepsilon$$

entonces

$$0 < \frac{a(x)}{|b(x)|} < \varepsilon, \text{ para } \varepsilon > 0 \text{ arbitrariamente pequeño y } 0 < \|x\|_2 < \delta.$$

entonces $\lim_{x \rightarrow 0} a(x)/|b(x)| = 0$.

Prueba de (b).

Sea $x_0 \in \{x : |b|r = 0\}$ un punto arbitrario. Si $x_0 = 0$, entonces el limite **(b)** coincide con el limite **(a)**. Ahora supongamos que $x_0 \neq 0$.

Tendremos **(b)** si probamos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x) + |a(x)|}{2|b|r} = 0.$$

Si $x_0 \in \{x : |b|r = 0\}$, debido a la desigualdad $a(x_0) < \|b(x_0)\|$, tenemos $a(x_0) < 0$. Consecuentemente, sea $\Omega_\varepsilon(x_0)$ una vecindad de x_0 tal que

$$a(x) < 0 \text{ para toda } x \in \Omega_\varepsilon(x_0).$$

Sea $\{x_n\}$ una susecion $\{x_n\} \rightarrow x_0$ y $|b|r > 0$ para cada n . Entonces, existe un entero positivo N tal que $\{x_n\} \in \Omega_\varepsilon(x_0)$ para toda $n > N$, tal que $a(x_n) < 0$ si $n > N$. Entonces

$$\frac{a(x_n) + |a(x_n)|}{2|b(x_n)|r} = 0, \text{ si } n > N.$$

por consiguiente

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{a(x_n) + |a(x_n)|}{2|b(x_n)|r} = 0.$$

Esto completa la prueba.

Proposición Consideremos el sistema afin (2.7) tal que $V(x)$ es una CLF que satisface la condición SCP. Entonces la retroalimentación (2.14) es una función continua.

Prueba

De los limites **(a)** y **(b)** del lema anterior, la continuidad del termino $|b|r$, y ya que la composicion de funciones continuas es continua, tenemos los siguientes limites para $u_\varepsilon(x)$:

$$\begin{aligned} (i) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} u_\varepsilon(x) = 0, \\ (ii) \quad & \lim_{|b|r \rightarrow 0} u_\varepsilon(x) = 0, \end{aligned}$$

concluimos que $u_\varepsilon(x)$ es continua.

En el siguiente capítulo mostramos que el sistema retroalimentado (2.7)-(2.14) es estable de forma robusta.

Observaciones.

Más generalmente, para sistemas afines con CVS $U = [-r^-, r^+]$, para reescribir $\bar{\omega}(x)$ definido en $\min_{u \in U} \{a - bu\} = a - b\bar{\omega}$, con

$$r = \begin{cases} r^+, & \text{si } b > 0, \\ r^-, & \text{si } b \leq 0. \end{cases} \quad \text{y } \bar{\omega}(x) = r(\text{sign}b(x)),$$

suponemos que $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ es una función regular de reescalamiento tal que $\rho(x) = 0$ ssi $b(x) = 0$. En particular, si $\rho = \rho_\varepsilon(x)$ tal que $u_\varepsilon(x) = \bar{\omega}\rho_\varepsilon(x)$, tenemos que el control $u_\varepsilon(x)$ es continuo, ya que

$$\rho_\varepsilon(x) = 0 \text{ ssi } b(x) = 0\}.$$

dado por

$$\rho_\varepsilon(a, b) = 1 - \lambda(a, b) \left(1 + \frac{1}{\lambda(a, b)} \right) \exp(-\varepsilon |b| r)$$

con $\lambda(a, b) = 1 - \frac{1}{2}(|a| + a) / |b| r$. Es claro que $0 \leq \lambda(a, b) \leq 1$ tal que el control $u_\varepsilon(x)$ es continuo y acotado. Si $r^- = 0$, la función $u_\varepsilon(x)$ es positiva.

Observaciones de convexidad

Ver anexo para definiciones y resultados de la Teoría de Convexidad.

Existen dos clases importantes de conjuntos convexos compactos: Conjuntos estrictamente convexos y politopos. En este trabajo consideramos la hipercaja como un CVS para un sistema de control afin. De manera que en lo sucesivo, sobre la base de estos resultados de convexidad, vamos a suponer que $U \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto convexo compacto con $0 \in \text{int}U$. Una clase importante de conjuntos convexos compactos es la clase de politopos convexos. Recordemos que un *politopo* U (convexo) puede definirse como un conjunto acotado dado por la intersección de un número finito de semiespacios cerrados, llamado *H-representación*; o de forma equivalente se describe en términos de la *envolvente convexa* de sus vertices $U = \text{conv}(V)$, donde $V = \{v_1, \dots, v_k\}$, con $v_i \in \mathbb{R}^m$, llamada *V-representación*. En particular, la hipercaja m -dimensional \mathbf{r} -ponderada (también nombrado *orthotope*),

$$\mathcal{B}_{\mathbf{r}}^m(\infty) := [-r_1^-, r_1^+] \times \dots \times [-r_m^-, r_m^+] = \text{conv} \{(-r_1^-, \dots, -r_m^-), \dots, (r_1^+, \dots, r_m^+)\}, \quad (2.16)$$

con $r_j^\pm > 0$, para $j = 1, \dots, m$, es un politopo. Por lo tanto, $\mathcal{B}_{\mathbf{r}}^m(\infty)$ es un conjunto convexo compacto con $0 \in \text{int}\mathcal{B}_{\mathbf{r}}^m(\infty)$, de modo que admite una representación en términos de un funcional de Minkowski. En efecto, define la función $\psi_{p, \mathbf{r}} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\psi_{\infty, \mathbf{r}}(u) := \left\| (r_1^{-1}(u_1) |u_1|, \dots, r_m^{-1}(u_m) |u_m|) \right\|_\infty = \sup_j \{r_j^{-1}(u_j) |u_j|\}. \quad (2.17)$$

donde $r_j(\zeta_j)$ son dadas por (2.6), para $j = 1, \dots, m$.

Proposición 2.1 *La función $\psi_{\infty, \mathbf{r}}(u)$ es una funcional de Minkowski definida positiva, y el conjunto*

$$U := \{u \in \mathbb{R}^m : \psi_{\infty, \mathbf{r}}(u) \leq 1\}. \quad (2.18)$$

es una representación de la hipercaja $\mathcal{B}_{\mathbf{r}}^m(\infty)$.

En particular, si $\bar{r}_j = r_j^- = r_j^+$ para toda j , entonces $\psi_{\infty, \mathbf{r}}(\cdot) = \|\cdot\|_{\infty, \mathbf{r}}$ -una norma l_∞ \mathbf{r} -ponderada, por lo tanto U se convierte en una hipercaja *simétrica*, $\mathcal{B}_{\mathbf{r}}^m(\infty) = [-\bar{r}_1, \bar{r}_1] \times \dots \times [-\bar{r}_m, \bar{r}_m]$.

En lo sucesivo, identificamos el espacio dual $(\mathbb{R}^m)^*$ con \mathbb{R}^m usando el producto interior, y denotamos el dual u^* por b .

Correspondiente a $\psi_{\infty, \mathbf{r}}$, definimos la siguiente funcional de Minkowski tipo l_1 y \mathbf{r} -ponderada

$$\psi_{1, 1/\mathbf{r}}(b) := \|(r_1(b_1) |b_1|, \dots, r_m(b_m) |b_m|)\|_1 = \sum_{j=1}^m r_j(b_j) |b_j|, \quad (2.19)$$

donde $r_j(\zeta_j)$ es definida en (2.6), para $j = 1, \dots, m$.

Proposición 2.2 Las funcionales de Minkowski $\psi_{\infty, \mathbf{r}}$ y $\psi_{1,1/\mathbf{r}}$ son polares una de la otra (i.e. $\psi_{\infty, \mathbf{r}}^* = \psi_{1,1/\mathbf{r}}$ y viceversa). Además, el conjunto polar de $\mathcal{B}_{\mathbf{r}}^m(\infty)$ es

$$(\mathcal{B}_{\mathbf{r}}^m(\infty))^* := \{b \in \mathbb{R}^m : \psi_{1,1/\mathbf{r}}(b) \leq 1\}, \quad (2.20)$$

que es una m -octaedro (llamado politopo cruzado).

Teniendo en cuenta que la función soporte $\zeta_U(b)$ de la hipercaja es dada por $\psi_{1,1/\mathbf{r}}(b)$, entonces no es difícil ver que es una función lineal a trozos y continua, donde los dominios de la linealidad son dados por los 2^m ortantes (o hiperortantes) del espacio euclidiano \mathbb{R}^m . Recordemos que un ortante abierto se puede definir como $\mathcal{O} = \{b \in \mathbb{R}^m : \delta_j b_j > 0\}$, donde cada $\delta_j = -1$ o 1 , para $j = 1, \dots, m$, así que permutación de los signos de δ_j rinde 2^m ortantes diferentes, por ejemplo \mathbb{R}_-^m y \mathbb{R}_+^m son ortantes abiertos con $\delta_j = -1$ y $\delta_j = 1$, para toda $j = 1, \dots, m$, respectivamente.

2.5. La CLF estabilización global con respecto a la hipercaja

Supongamos que el CVS es un conjunto convexo compacto arbitrario $U \subset \mathbb{R}^m$. Una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es llamada una *función Lyapunov de control* [con respecto al sistema (2.1) con controles que toman valores en U] si y sólo si (ssi) es una función $\mathcal{C}^k(\mathbb{R}^n)$ ($k \geq 1$) la cual es *definida positiva* ($V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ ssi $x \neq 0$) y *propia* (para cualquier $c \geq 0$, su preimagen $V^{-1}(c)$ es un conjunto compacto), tal que¹

$$\inf_{u \in U} \{\nabla V(x) \cdot (f(x) + g(x)u)\} = \inf_{u \in U} \{a(x) - b(x) \cdot u\} < 0, \quad \forall x \neq 0, \quad (2.21)$$

donde

$$\begin{aligned} a(x) &:= L_f V(x) \ \& \ b(x) := (b_1(x), \dots, b_m(x)), \\ \text{con } b_j(x) &:= -L_{g_j} V(x), \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (2.22)$$

denota las derivadas de Lie de $V(x)$ con respecto a los campos vectoriales que definen el sistema (2.1).

Para el diseño de las funciones de control de retroalimentación continua en el origen, Artstein introduce en [21] el concepto de *propiedad del control pequeño* (SCP): Para cada $\epsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que se tiene la desigualdad $a(x) - b(x) \cdot u < 0$ para una u con $\|u\|_U < \epsilon$, siempre que $0 < \|x\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$. (Aquí, $\|\cdot\|_A$ representa una norma para el conjunto A).

Observe que el problema de optimización (2.21) se satisface si existe un control de retroalimentación $u(x) \in \partial U$ tal que $a(x) < b(x) \cdot u(x)$, $\forall x \neq 0$.

Por otra parte, para cualquier control $u(x)$ tomando valores en U , tenemos que: $b(x) \cdot u(x) \leq \mu^*(b(x)) \mu(u(x))$. Por lo tanto, si ponemos $u(x) = \bar{w}(x)$, con $\mu(\bar{w}(x)) \equiv 1$ (i.e. toma valores en ∂U), entonces $\bar{w}(x)$ satisface la ecuación

$$b(x) \cdot \bar{w}(x) = \mu^*(b(x)). \quad (2.23)$$

Por lo tanto, si podemos encontrar una CLF apropiada, entonces cualquier control de retroalimentación $\bar{w}(x)$ satisface (2.23) logra la equivalencia entre el problema (2.21) y la siguiente desigualdad

$$a(x) < \mu^*(b(x)), \quad \forall x \neq 0. \quad (2.24)$$

¹Sin perder generalidad, hemos hecho una ligera modificación en (2.21)-(2.22) cambiando el signo.

Llamaremos a la retroalimentación $\bar{w}(x)$ la *ley de control de mejor tasa (óptima)* con respecto a la CLF $V(x)$ [para sistemas (2.1) con controles tomando valores en U] *ssi* satisface la ecuación

$$a(x) - b(x) \cdot \bar{w}(x) = \inf_{u \in U} \{a(x) - b(x) \cdot u\} < 0, \quad (2.25)$$

para toda $x \neq 0$. Por lo tanto, el problema (2.21) es satisfecho *si* existe un control de retroalimentación $\bar{w}(x)$. De (2.23), se sigue que este control es una función *singular* $\bar{w} : \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}_b \rightarrow \partial U$, donde

$$\mathcal{N}_b := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) = 0\}, \quad (2.26)$$

ya que si $b(x) = 0$ entonces $\bar{w}(x)$ es arbitraria. Entonces, $\bar{w}(x)$ no es admisible por ser una función discontinua.

Ahora procedemos a la *existencia, unicidad y regularidad* del control $\bar{w}(x)$. Dejemos de lado temporalmente la dependencia de x . Teniendo en cuenta la polar μ^* definido por (6.8), tenemos que la ecuación (2.23) puede ser reformulado como el siguiente programa de optimización m -parametrizado

$$\mathcal{P}(b) := \sup \{b \cdot u : u \in \partial U\}, \quad (2.27)$$

donde $b \in \mathbb{R}^m$ y $\partial U := \{u \in \mathbb{R}^m : \mu(u) = 1\}$ es el conjunto de restricción. Claramente, ya que U es compacto, existe al menos una solución global de $\mathcal{P}(b)$, denotada por $\omega(b)$. Por otro lado, el programa de optimización $\mathcal{P}(b)$ es precisamente la *función soporte* del conjunto U , $\zeta_U(b)$, que es convexa y positivamente homogénea. Por otra parte, del teorema 1 tenemos que $\zeta_U(b) = \mu^*(b)$. Recordemos que $h(b)$ es una función homogénea de grado α *ssi* $h(\lambda b) = \lambda^\alpha h(b)$, para cualquier real $\lambda \geq 0$. En particular, si $h(b)$ es una función homogénea (*i.e.* $\alpha = 1$ y $\lambda \geq 0$), entonces una extensión del teorema of Euler a las funciones no suaves positivamente homogéneas (see [26]) indica que

$$h(b) = w \cdot b, \quad \forall w \in \partial h(b), \quad (2.28)$$

donde el conjunto $\partial h(b)$ es la *subdiferencial* de h en b y cada elemento w de $\partial h(b)$ es llamado un *subgradiente* de h en b . Claramente, si $h(b)$ es diferenciable, entonces $\partial h(b)$ es un conjunto unitario $w = \nabla_b h(b)$ siendo el gradiente de h en b .

Ahora, consideremos que el CVS U dado por la hipercaja $\mathcal{B}_r^m(\infty)$. Así, ya que su función soporte $\zeta_{\mathcal{B}_r^m(\infty)}(b) = \psi_{1,1/r}(b)$ es positivamente homogénea y lineal por pedazos, entonces de (2.23) y (2.28) obtenemos que la única solución (módulo discontinuidades) a (2.27) es dada por la fórmula

$$\omega(b) = (\nabla \psi_{1,1/r}(b))^\top = (r_1(b_1) \text{sign } b_1, \dots, r_m(b_m) \text{sign } b_m)^\top, \quad (2.29)$$

donde $r_j(\zeta_j)$ esta definida en (2.6), para $j = 1, \dots, m$. Observe que $\omega(b)$ es una función constante (por lo tanto, real analítica) en cada uno de los 2^m ortantes abiertos de \mathbb{R}^m , y en particular, es igual a los vértices de $\mathcal{B}_r^m(\infty)$. Específicamente, si v_i es un vértice y \mathcal{O}_i es su correspondiente ortante abierto, entonces $\omega(b) = v_i$, para todo $b \in \mathcal{O}_i$. De ahí la importancia de encontrar los vértices de una hipercaja. Además, $\omega(b)$ es discontinua en la unión de las fronteras (*caras*) de los octantes, que están dados por las coordenadas de hiperplanos de \mathbb{R}^m , $C_j = \{b \in \mathbb{R}^m : b_j = 0\}$, para $j = 1, \dots, m$, y $\cap_j C_j = \{0\}$ -el origen en \mathbb{R}^m . Por lo tanto, la función $\omega(b)$ es constante por pedazos: Es constante en cada ortante abierto, siendo singular en los hiperplanos de coordenadas C_j de \mathbb{R}^m .

Ilustramos la teoría desarrollada con el siguiente ejemplo de dos dimensiones.

Ejemplo 1. Sea $\mathcal{B}_r^2(\infty) = [-r_1^-, r_1^+] \times [-r_2^-, r_2^+] = \text{conv} \{(r_1^+, r_2^+), (-r_1^-, r_2^+), (-r_1^-, -r_2^-), (r_1^+, -r_2^-)\}$, con $r_j^\pm > 0$, para $j = 1, 2$. Entonces su funcional de Minkowski es

$\psi_{\infty, r}(u) = \max \left\{ \frac{|u_1|}{r_1(u_1)}, \frac{|u_2|}{r_2(u_2)} \right\}$, su función soporte (o polar) es

$$\psi_{1,1/r}(b) = r_1(b_1) |b_1| + r_2(b_2) |b_2| = \begin{cases} r_1^+ b_1 + r_2^+ b_2, & \text{si } (b_1, b_2) \in \mathbb{R}_{++}^2 \\ -r_1^- b_1 + r_2^+ b_2, & \text{si } (b_1, b_2) \in \mathbb{R}_{-+}^2 \\ -r_1^- b_1 - r_2^- b_2, & \text{si } (b_1, b_2) \in \mathbb{R}_{--}^2 \\ r_1^+ b_1 - r_2^- b_2, & \text{si } (b_1, b_2) \in \mathbb{R}_{+-}^2, \end{cases}$$

donde \mathbb{R}_{++}^2 es el primer cuadrante, ..., and \mathbb{R}_{+-}^2 es el cuarto, en sentido antihorario, y es lineal en cada cuadrante. Por lo tanto, el conjunto polar está dada por

$$\begin{aligned} (\mathcal{B}_r^m(\infty))^* &= \{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 : \psi_{1,1/r}(b_1, b_2) \leq 1\} \\ &= \{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 : (r_1^+ b_1 + r_2^+ b_2 \leq 1) \& (-r_1^- b_1 + r_2^+ b_2 \leq 1) \& (-r_1^- b_1 - r_2^- b_2 \leq 1) \\ &\quad \& (r_1^+ b_1 - r_2^- b_2 \leq 1)\} \end{aligned}$$

que es un conjunto romboidal (o un rombo si sus cuatro lados tienen igual longitud $r = r_j^\pm$, $j = 1, 2$). Finalmente, de la fórmula (2.29), tenemos

$$\omega(b) = (r_1(b_1) \text{sign } b_1, r_2(b_2) \text{sign } b_2)^\top = \begin{cases} (r_1^+, r_2^+), & \text{si } (b_1, b_2) \in \mathbb{R}_{++}^2 \\ (-r_1^-, r_2^+), & \text{si } (b_1, b_2) \in \mathbb{R}_{-+}^2 \\ (-r_1^-, -r_2^-), & \text{si } (b_1, b_2) \in \mathbb{R}_{--}^2 \\ (r_1^+, -r_2^-), & \text{si } (b_1, b_2) \in \mathbb{R}_{+-}^2, \end{cases}$$

el cual es constante e igual a un vértice de $\mathcal{B}_r^2(\infty)$ en cada cuadrante, y singular en los ejes coordenados. \square

Ahora, volvamos a la dependencia de la variable de estado $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $b(x)$ dada por (2.22). En adelante, denotaremos por $r_j(x) := r_j(b_j(x))$, con $r_j(\zeta_j)$ dada por (2.6), para $j = 1, \dots, m$, $\beta(x) := \psi_{1,1/r}(b(x))$ y $\bar{\omega}(x) := \omega(b) \circ b(x)$, con $\omega(b)$ definida en (2.29). Observe que $\bar{\omega}(x)$ es un control de retroalimentación tipo *bang-bang*, siendo singular en los conjuntos nulos

$$\mathcal{N}_j := b_j^{-1}[C_j] = \{x \in \mathbb{R}^n : b_j(x) = 0\}, \text{ para } j = 1, \dots, m, \quad (2.30)$$

que son las *superficies de cambio* de $\bar{\omega}(x)$, y además \mathcal{N}_b definida en (2.26) es precisamente la intersección de estos conjuntos, i.e. $\mathcal{N}_b = b^{-1}[0] = \cap_j \mathcal{N}_j$.

2.6. Un diseño general de controles admisibles con respecto a la hipercaja

Supongamos que $V(x)$ es CLF con respecto al sistema (2.1) con controles tomando valores en la hipercaja $\mathcal{B}_r^m(\infty) = [-r_1^-, r_1^+] \times \dots \times [-r_m^-, r_m^+]$, con $r_j^\pm > 0$, para $j = 1, \dots, m$. Entonces, teniendo en cuenta el control de mejor tasa asociada $\bar{\omega}(x)$ dado por (2.29), tenemos

$$\begin{aligned} dV/dt = a(x) - b(x) \cdot \bar{\omega}(x) &= a(x) - \sum_1^m r_j(x) b_j(x) \text{sign } b_j(x) < 0 \text{ ssi} \\ a(x) < \sum_1^m r_j(x) |b_j(x)| &\text{ ssi } a(x) < \beta(x), \quad \forall x \neq 0. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Observación 1. Observe que si $\beta(x) = 0$ entonces $a(x) < 0$, y aún más $\beta(x) = 0$ ssi $x \in \mathcal{N}_b$. \square

Suponiendo que U es un conjunto estrictamente convexo con $0 \in \text{int}U$, en [45, 44] se consideró controles generales de retroalimentación de la forma $u(x) := \rho(x) \bar{w}(x)$, donde $\rho(x)$ es un reescalamiento apropiado y $\bar{w}(x)$ es la correspondiente ley de control de mejor tasa, comprende muchos de los diseños de fórmulas de control propuestas en la literatura existente. Sin embargo, el diseño sólo puede tratar las singularidades de $\bar{w}(x)$ en \mathcal{N}_b . En adelante, en este trabajo, proponemos funciones de control de realimentación de forma descentralizada

$$u(x) := (u_1(x), \dots, u_m(x))^\top, \quad \text{con } u_j(x) := \rho_j(x) \bar{w}_j(x), \quad (2.32)$$

para $j = 1, \dots, m$, donde $\bar{w}(x)$ es la función de control definida por composición $\omega(b)$ dada por (2.29) y $b(x)$ dada por (2.22), y $\rho(x) = (\rho_1(x), \dots, \rho_m(x))$ es una *función vectorial de reescalamiento* por determinar.

El propósito de este diseño es doble: Por un lado, que obedece al problema de hacer frente a las discontinuidades de $\bar{w}(x)$ en las superficies de cambio \mathcal{N}_j mediante apropiadas funciones de reescalamiento $\rho_j(x)$ utilizadas para regularizar cada entrada $\bar{w}_j(x)$ (que, en general, puede ser difícil de tratar mediante el uso de sólo una función escalar de reescalamiento); mientras que por otro lado, también nos permitirá abordar el problema de diseño del control positivo (que describimos en el siguiente capítulo). Por lo tanto, el mismo esquema de control descentralizado (2.32) se utiliza para tratar el problema de estabilización CLF con controles restringidos a la hipercaja que contiene a 0, ya sea como un punto interior o como un punto frontera (controles positivos).

Ahora, pedimos las condiciones que $\rho(x)$ debe satisfacer para garantizar la existencia de un control de retroalimentación *admisible* $u(x)$ ($u(x) \in \mathcal{U}$) de la forma (2.32) tal que el sistema a lazo cerrado resultante (2.1)-(2.32) es GAS.

Hipótesis H. Supongamos que $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función regular tal que

- (i) $\forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \rho_j(x) \leq 1$, para $j = 1, \dots, m$.
- (ii) $\rho_j(x) = 0$ ssi $x \in \mathcal{N}_j$, para $j = 1, \dots, m$, y
- (iii) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}, \|\rho(x)\|_\infty > \frac{a(x)}{\beta(x)}$.

Observación 2. Tenemos que imponer algunas condiciones de regularidad sobre $\rho(x)$ para obtener cierta regularidad del control de retroalimentación $u(x)$. Una condición es la continuidad siempre que $b_j(x) \neq 0$, para $j = 1, \dots, m$, y $\rho(x)$ debe ser capaz de eliminar las singularidades de $\bar{w}(x)$, i.e., $\forall x^* \in \mathcal{N}_j, \lim_{x \rightarrow x^*} \rho_j(x) \bar{w}_j(x)$ exista. Ahora, ya que $0 \in \mathcal{N}_b = \cap_j \mathcal{N}_j$ y se supondrá SCP, una condición necesaria para la continuidad de cada $u_j(x) = \rho_j(x) \bar{w}_j(x)$ en \mathcal{N}_j es que $\forall x^* \in \mathcal{N}_j^0, \lim_{x \rightarrow x^*} \rho_j(x) \bar{w}_j(x) = 0$ y $\rho_j(x) \upharpoonright_{\mathcal{N}_j^0} \equiv 0$, donde \mathcal{N}_j^0 es la componente conexa de 0 en \mathcal{N}_j . Por lo tanto, para incluir el caso de que todo el conjunto \mathcal{N}_j es un conjunto conexo, tenemos que tanto $\rho_j(x) \upharpoonright_{\mathcal{N}_j} \equiv 0$ y $\forall x^* \in \mathcal{N}_j, \lim_{x \rightarrow x^*} \rho_j(x) \bar{w}_j(x) = 0$ deben cumplirse. \square

Observación 3. La continuidad de los controladores en $x = 0$ se obtiene a través de la propiedad SCP²: Para cada $\epsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que if $0 < \|x\| < \delta$, entonces $a(x) < b(x) \cdot u$ se mantiene para un determinado u con $\mu(u) < \epsilon$. Por lo tanto, para tales u , $a(x) < b(x) \cdot u(x) \leq \beta(x) \mu(u(x)) < \epsilon \beta(x)$, de manera que $\lim_{x \rightarrow 0} a(x) / \beta(x) = 0$; y viceversa. \square

²Aquí, μ es una funcional finita en todas partes y definida positiva, por lo que es *equivalente* a cualquier norma.

Observación 4. De la condición (iii), tenemos que cada $\rho_j(x)$ se puede definir como una composición de funciones continuas: $\rho_j(x) := \varrho_j(\alpha, \beta) \circ (a(x), \beta(x))$, donde $\varrho_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$. Por otra parte, si denotamos $\varrho = (\varrho_1, \dots, \varrho_m)$, entonces se satisface que $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \beta \neq 0, \|\varrho(\alpha, \beta)\|_\infty > \alpha/\beta$ y $\varrho(\alpha, 0) = (0, \dots, 0)$. \square

Teorema 2.3 *Supongamos que el CVS es la hipercaja $\mathcal{B}_r^m(\infty) = [-r_1^-, r_1^+] \times \dots \times [-r_m^-, r_m^+]$, con $r_j^\pm > 0$, $V(x)$ es una CLF [con respecto al sistema (2.1) y los controles toman valores en $\mathcal{B}_r^m(\infty)$] y satisface la propiedad SCP, $\bar{\omega}(x)$ es el control de retroalimentación con mejor tasa dado por (2.29) y $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función continua que satisface la Hipótesis H. Entonces, el control de retroalimentación $u(x)$ definido en (2.32) es admisible ($u(x) \in \mathcal{U}$) y hace que el sistema (2.1) sea GAS.*

Demostración. En primer lugar, tenemos que $u(x)$ dado por (2.32) es admisible: De hecho, de la condición (i) tenemos que $u_j(x) = \rho_j(x) \bar{\omega}_j(x) = \rho_j(x) r_j(x) \text{sign } b_j(x)$ es equivalente a las desigualdades $-r_j^- \leq -r_j^- \rho_j(x)$, si $b_j(x) < 0$, y $r_j^+ \rho_j(x) \leq r_j^+$, si $b_j(x) > 0$; de manera que $u_j(x)$ toma valores en el intervalo cerrado $[-r_j^-, r_j^+]$, para $j = 1, \dots, m$.

Además, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \cup_j \mathcal{N}_j$, tenemos que tanto $\rho(x)$ y $\bar{\omega}(x)$ son continuas, así que $u(x)$ lo es. En el caso $x \in \mathcal{N}_j$, ya que $\rho_j(x)$ es continua y $\bar{\omega}_j(x) = r_j(x) \text{sign } b_j(x)$ es acotada, entonces de la propiedad SCP y condición (ii) se sigue que $\forall x^* \in \mathcal{N}_j$,

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow x^*} |u_j(x)| = \lim_{x \rightarrow x^*} \rho_j(x) |r_j(x)| \leq \lim_{x \rightarrow x^*} \rho_j(x) \max\{r_j^-, r_j^+\} = 0, \quad (2.33)$$

entonces cada $u_j(x)$ es continua en \mathcal{N}_j y $u_j(x) \upharpoonright_{\mathcal{N}_j} \equiv 0$.

Por último, procedemos a mostrar que el sistema es GAS:

(a) Si $x \in \mathcal{N}_b \setminus \{0\}$, entonces de la observación 1, tenemos que $dV/dt = a(x) - b(x) \cdot u(x) = a(x) < 0$.

(b) Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}_b$, entonces existe al menos una j ($1 \leq j \leq m$) tal que $b_j(x) \neq 0$. Entonces, de condición (iii) tenemos que

$$\begin{aligned} dV/dt &= a - b \cdot u = a - \sum_1^m b_j \rho_j r_j \text{sign } b_j = a - \sum_1^m \rho_j r_j |b_j| < 0, \text{ ssi} \\ a &< \rho \cdot (r_1 |b_1|, \dots, r_m |b_m|) \leq \|\rho\|_\infty \|(r_1 |b_1|, \dots, r_m |b_m|)\|_1 = \|\rho\|_\infty \psi_{1,1/r}(b). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall x \neq 0, dV/dt < 0$. Por lo tanto, $u(x)$ es un estabilizador asintótico global. \blacksquare

Observación 5. La regularidad del control $u(x)$ es dada por (2.32) depende de la regularidad de la función de reescalamiento $\rho(x)$ porque $\bar{\omega}(x)$ es constante por pedazos sobre $\mathbb{R}^n \setminus \cup_j \mathcal{N}_j$. Por ejemplo, si suponemos que $\rho(x)$ es suave/real analítica en \mathbb{R}^n , entonces $u(x)$ es (al menos) suave/real analítica para toda $x \in \mathbb{R}^n \setminus \cup_j \mathcal{N}_j$ y continua en todas partes. \square

2.7. Diseño de una fórmula de control de retroalimentación explícita con respecto a la hipercaja

Proponemos la siguiente familia de controles de retroalimentación ε -parametrizada ($\varepsilon > 0$):

$$u^\varepsilon(x) := (u_1^\varepsilon(x), \dots, u_m^\varepsilon(x)) \text{ con } u_j^\varepsilon(x) = \varrho_j^\varepsilon(a(x), \beta(x)) \bar{\omega}_j(x) \quad (2.34)$$

donde $\bar{\omega}(x)$ es el control de mejor tasa que comparte el esquema de (2.29), $q_j^\varepsilon : \mathbb{R} \times [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ es definido por

$$q_j^\varepsilon(a, \beta) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{|a|+a}{2\beta} \frac{|b_j|r_j}{\beta}\right) \exp(\tau_j^\varepsilon \frac{|b_j|r_j}{\beta}), & \text{si } |b_j|r_j > 0, \\ 0, & \text{si } |b_j|r_j = 0, \end{cases} \quad (2.35)$$

y $\tau_j^\varepsilon(x)$ es una función no positiva definida como

$$\tau_j^\varepsilon(x) = \begin{cases} m \frac{\ln(\lambda(x))}{\lambda(x)} - \varepsilon |b_j|r_j, & \text{si } \beta > 0, \\ 0, & \text{si } \beta = 0, \end{cases} \quad (2.36)$$

para $j = 1, \dots, m$, donde $\lambda(x) = 1 - \frac{1}{2}(|a(x)| + a(x))/\beta(x)$, $\beta(x) = \psi_{1,1/r}(b(x))$ y $\varepsilon > 0$ es un parámetro de tono.

En lo sucesivo, a menos que se especifique lo contrario, vamos a denotar por $\rho_j^\varepsilon(x) := q_j^\varepsilon(a(x), \beta(x))$, para $j = 1, \dots, m$.

Ahora, vamos a demostrar que el control (2.34) es una función de control admisible que hace que el sistema (2.1) sea GAS.

Este diseño de control presenta una solución intermedia: Por un lado, permite utilizar casi todos los recursos disponibles de control debido a que puede tomar valores tan cerca como se desee de la frontera del cvs $B_r^m(\infty)$ y también se puede aplicar al caso de los controles positivos (véase la sección 6). Ya que la Hipótesis H es una condición suficiente pero no necesaria, con el fin de demostrar la estabilidad GAS del sistema de lazo cerrado (2.1)-(2.34), en el siguiente lema definimos una función que es esencial para este propósito.

Lema 2.4 *Considere la función no negativa $h_m : \mathbb{Y}_m \times (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$h_m(\mathbb{Y}, z) = h(y_1, \dots, y_{m-1}, z) = \sum_{j=1}^m \frac{y_j - zy_j^2}{1 - z + zmy_j} \quad (2.37)$$

con $\mathbb{Y}_m = \left\{ (y_1, \dots, y_{m-1}) \subset [0, 1]^{m-1} : \sum_{j=1}^{m-1} y_j < 1 \right\}$, donde $y_m = 1 - \sum_{j=1}^{m-1} y_j$. Entonces, la función $h_m(\mathbb{Y}, z)$ satisface las siguientes propiedades en el punto $Y_0 = \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right) \in \text{int}\mathbb{Y}_m$, para cada $z \in (0, 1)$

(i) $\frac{\partial h(Y_0, z)}{\partial y_j} = 0$ para $j = 1, \dots, m-1$; con Y_0 como único punto de equilibrio.

(ii) $\frac{\partial^2 h(Y_0, z)}{\partial y_i \partial y_j} = \begin{cases} 2p(z), & \text{si } i = j, \\ p(z), & \text{si } i \neq j, \end{cases}$
para $i, j = 1, \dots, m-1$; donde $p(z) = -2z(z-m-1)(z-1)$ es tal que $p(z) < 0$ para $z \in (0, 1)$. Estos son los componentes de la matriz Hessiana Hh de la función h_m evaluada en el punto (Y_0, z) .

(iii) $h_m(y_1, \dots, y_{m-1}, z) \leq h(Y_0, z) = 1 - \frac{z}{m}$ para toda $(y_1, \dots, y_{m-1}, z) \in \mathbb{Y}_m \times (0, 1)$. I.e., Y_0 es un máximo global para h_m .

Demostración. Un cálculo corto nos da que la función $h_m(\mathbb{Y}, z)$ satisface las propiedades (i)-(ii) en el punto $Y_0 = \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right)$, para cada $z \in (0, 1)$.

El inciso (iii) sigue de los siguientes hechos. La matriz Hessiana $Hh(Y_0)$, evaluada en el punto Y_0 es dado por

$$Hh_m(Y_0, z) = p(z)M_m,$$

donde M_k es una matriz $(k-1) \times (k-1)$, dada por

$$M_k = \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

La matriz M_k tiene determinante $\det(M_k) = k$. Esto implica que la matriz M_m tiene todos sus menores principales positivos, de donde obtenemos que M_m es una matriz definida positiva. Por lo tanto, la matriz de Hessiana $Hh_m(Y_0)$ es negativa definida para cualquier $z \in (0, 1)$.

Una forma de encontrar el *máximo global* de h_m es determinar todos los *máximos locales* y luego elegir la que nos da el mayor valor para h_m , que se compara también con los valores que la función alcanza en la frontera del dominio.

Por medio de cálculos directos, es fácil de obtener las siguientes equivalencias para esta función

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_m(y_1, \dots, y_{m-1}, z)}{\partial y_i} = 0 &\Leftrightarrow 1 - \sum_{j=1}^{m-1} y_j = y_i \quad \text{para } i = 1, 2, \dots, m-1 \\ &\Leftrightarrow y_i = \frac{1}{m} \quad \text{para cada } i = 1, 2, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el punto $Y_0 = \left(\frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right)$ es el único punto de equilibrio de la función $h_m(y_1, \dots, y_{m-1}, z)$. Además, se completa que

$$\max_{\partial \mathbb{Y}_m} h_m \leq \max_{\mathbb{Y}_m} h_m = 1 - \frac{z}{m}, \quad \forall z \in (0, 1) \text{ y } m = 2, 3, 4, \dots$$

Entonces, se concluye que

$$h_m(y_1, \dots, y_{m-1}, z) \leq h(Y_0, z) = 1 - \frac{z}{m},$$

para toda $(y_1, \dots, y_m) \in [0, 1]^m$. ■

Proposición 2.5 *Supongamos que $V(x)$ es una CLF [con respecto al sistema (2.1) con controles tomando valores en la hipercaja U]. Si $\bar{w}(x)$ es el control de mejor tasa dado en términos de (2.29), entonces el sistema a lazo cerrado (2.1)-(2.34) es GAS.*

Demostración. Probaremos primero que el sistema de retroalimentación (2.1)-(2.34) satisface que $\dot{V} < 0, \forall x \neq 0$.

De hecho, para cualquier $x \in \mathcal{N}_b \setminus \{0\}$ ($\beta(x) = 0$ y $x \neq 0$), tenemos que $a(x) < 0$ y $u(x) = 0$. Esto implica que

$$\dot{V} = \nabla V(x) \cdot (f(x) + g(x)u^\varepsilon) = a - b \cdot u^\varepsilon = a < 0.$$

Ahora, supongamos que $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}_b$ (i.e., $\beta(x) > 0$), entonces

$$\begin{aligned}\dot{V} &= a - b \cdot u^\varepsilon = a - (b_1, \dots, b_m) \begin{pmatrix} u_1^\varepsilon \\ \vdots \\ u_m^\varepsilon \end{pmatrix} \\ &= a - \beta - \sum_{j=1}^m |b_j| r_j \exp\left(\tau_j^\varepsilon \frac{|b_j| r_j}{\beta}\right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^m \left(\frac{|b_j| r_j}{\beta}\right)^2 \left(\frac{|a| + a}{2}\right) \exp\left(\tau_j^\varepsilon \frac{|b_j| r_j}{\beta}\right).\end{aligned}$$

por consiguiente,

$$\begin{aligned}\frac{\dot{V}}{\beta} &= \frac{a}{\beta} - 1 + \sum_{j=1}^m \frac{|b_j| r_j}{\beta} \exp\left(\tau_j^\varepsilon \frac{|b_j| r_j}{\beta}\right) \\ &\quad - \sum_{j=1}^m \left(\frac{|b_j| r_j}{\beta}\right)^2 \left(\frac{|a| + a}{2\beta}\right) \exp\left(\tau_j^\varepsilon \frac{|b_j| r_j}{\beta}\right)\end{aligned}\tag{2.38}$$

Dos casos se pueden distinguir:

(i) Si $a \leq 0$, resulta que

$$\frac{\dot{V}}{\beta} < \frac{a}{\beta} - 1 + \sum_{j=1}^m \frac{|b_j| r_j}{\beta} \exp\left(-\varepsilon \frac{(|b_j| r_j)^2}{\beta}\right) < 0$$

porque, $\tau_j^\varepsilon(x) = -\varepsilon |b_j| r_j$, $a/\beta < 0$, y la siguiente desigualdad se cumple

$$\sum_{j=1}^m \frac{|b_j| r_j}{\beta} \exp\left(-\varepsilon \frac{(|b_j| r_j)^2}{\beta}\right) < \sum_{j=1}^m \frac{|b_j| r_j}{\beta} = 1.$$

(ii) Por otra parte, supongamos que $a > 0$. Denotemos por $y_j = |b_j| r_j / \beta$, para $j = 1, \dots, m$, y $z = a/\beta$, entonces obtenemos

$$\frac{\dot{V}}{\beta} = z - 1 + \sum_{j=1}^m (y_j - zy_j^2) \exp(\tau_j^\varepsilon y_j)\tag{2.39}$$

$$= z - 1 + \sum_{j=1}^m (y_j - zy_j^2) (1 - z)^{\binom{my_j}{1-z}} \exp(-\varepsilon y_j^2 \beta)\tag{2.40}$$

$$< z - 1 + \sum_{j=1}^m (y_j - zy_j^2) (1 - z)^{\binom{my_j}{1-z}}\tag{2.41}$$

Vamos a utilizar el siguiente par de conocidas desigualdades (ver [29]):

$$\ln(r) < r - 1 \quad (r > 0, r \neq 1) \quad (a)$$

$$\exp(r) < \frac{1}{1-r} \quad (r < 1, r \neq 0) \quad (b)$$

De la primer desigualdad tenemos que

$$\ln(1-z) < -z, \quad \forall z \in (0,1).$$

Aplicando estas desigualdades al término exponencial

$$(1-z)^{my_j(1-z)^{-1}},$$

obtenemos que

$$\begin{aligned} (1-z)^{my_j(1-z)^{-1}} &= \exp\left(\left(\frac{my_j}{1-z}\right) \ln(1-z)\right) \\ &< \exp\left(-z \left(\frac{my_j}{1-z}\right)\right) \quad \text{por la desigualdad (a)} \\ &< \frac{1}{1+z \left(\frac{my_j}{1-z}\right)} \quad \text{por la desigualdad (b)} \\ &= \frac{1-z}{1-z+zmy_j}, \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \frac{\dot{V}}{\beta} &< z-1 + \sum_{j=1}^m (y_j - zy_j^2) \left(\frac{1-z}{1-z+zmy_j}\right) \\ &= (1-z) \left[-1 + \sum_{j=1}^m \frac{y_j - zy_j^2}{1-z+zmy_j}\right]. \end{aligned}$$

Entonces, del lema 11, tenemos que

$$\sum_{j=1}^m \frac{y_j - zy_j^2}{1-z+zmy_j} \leq 1 - \frac{z}{m}, \quad \forall (y_1, \dots, y_m, z) \in [0,1]^m \times (0,1), \text{ con } m \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto, ya que las siguientes desigualdades son verdaderas

$$\frac{\dot{V}}{\beta} < (1-z) \left(-\frac{z}{m}\right) < 0, \quad \forall z \in (0,1),$$

hemos demostrado que $\dot{V} < 0$, para $x \neq 0$ y para todo $\varepsilon \geq 0$. ■

Lema 2.6 *Supongamos que $V(x)$ es una CLF [con respecto al sistema (2.1) con controles tomando valores en la hipercaja U] y satisface la propiedad SCP. Entonces el límite $\lim_{\beta(x) \rightarrow 0} \frac{a(x) + |a(x)|}{2\beta(x)} = 0$ se cumple.*

Demostración. Sea $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n : \beta(x) = 0\}$ un punto arbitrario. Si $x_0 = 0$, entonces el límite coincide con el límite de Observación 3. Por lo tanto, vamos a suponer que $x_0 \neq 0$.

Recordando que $\beta(x) = \psi_{1,1/r}(b(x))$, tendremos que el límite se mantiene si podemos probar que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x) + |a(x)|}{2\beta(x)} = 0.$$

Por lo tanto, si $x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^n : \beta(x) = 0\}$, debido a la desigualdad $a(x_0) < \beta(x)$, entonces tenemos que $a(x_0) < 0$. Por consiguiente, debido a la continuidad de $a(x)$, existe una vecindad de x_0 , denotada por $\Omega(x_0)$, tal que

$$a(x) < 0, \forall x \in \Omega(x_0).$$

Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que $\{x_n\} \rightarrow x_0$ y $\beta(x_n) > 0$ para cada n . Entonces, existe un entero positivo $N > 0$ tal que $\{x_n\} \in \Omega(x_0)$ para toda $n > N$, de modo que $a(x_n) < 0$ si $n > N$. Entonces

$$\frac{a(x_n) + |a(x_n)|}{2\beta(x_n)} = 0, \text{ si } n > N.$$

por lo tanto

$$\lim_{x_n \rightarrow x_0} \frac{a(x_n) + |a(x_n)|}{2\beta(x_n)} = 0.$$

Esto completa la demostración. ■

Teorema 2.7 *Supongamos que el CVS es la hipercaja $\mathcal{B}_r^m(\infty) = [-r_1^-, r_1^+] \times \dots \times [-r_m^-, r_m^+]$, con $r_j^\pm > 0$, $V(x)$ es una CLF [con respecto al sistema (2.1) y los controles tomando valores en $\mathcal{B}_r^m(\infty)$] y satisface la propiedad SCP. Entonces $u^\varepsilon(x)$ dada por (2.34) es una fórmula de una ε -familia ($\varepsilon > 0$) de controles admisibles sub-óptimos que hacen al sistema (2.1) GAS.*

Demostración. Tenemos que una consecuencia de $0 < \exp(\tau_j^\varepsilon |b_j| r_j / \beta) \leq 1$ para cada $\varepsilon > 0$, se satisface la condición de restricción de control $-r_j^- \leq u_j^\varepsilon(x) \leq r_j^+$, para $j = 1, \dots, m$, y para toda $x \in \mathbb{R}^n$. Ahora, vamos a probar la continuidad: Del límite de Observación 3 y lema anterior, la continuidad del término $|b_j| r_j$, y en vista de que la composición de funciones continuas es continua, se obtienen los siguientes límites para cada función $u_j^\varepsilon(x)$:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & \lim_{x \rightarrow 0} u_j^\varepsilon(x) = 0, \\ \text{(ii)} \quad & \lim_{|b_j| r_j \rightarrow 0} u_j^\varepsilon(x) = 0. \end{aligned}$$

Ya que si $\lim_{|b_j| r_j \rightarrow 0} \|b(x)\| > 0$, entonces (ii) es inmediato. Concluimos que cada $u_j^\varepsilon(x)$ es continua. Por lo tanto, la función de control $u^\varepsilon(x)$ es admisible. Además, se puede observar que si $\varepsilon \rightarrow \infty$, entonces $u_j^\varepsilon(x)$ converge a la j -ésima componente $\omega_j = r_j \text{sign}(b_j)$ del control de mejor tasa, por lo que el control de retroalimentación $u^\varepsilon(x)$ definido en (2.34) es *sub-óptimo*.

Finalmente, el sistema a lazo cerrado (2.1)-(2.34) es GAS por la proposición 2.5. ■

Observación 6. Si las funciones $V(x)$, $f(x)$ y $g_j(x)$, para $j = 1, 2, \dots, m$, son suaves/real analíticas, entonces la función de control de retroalimentación $u^\varepsilon(x)$ definida por (2.34) es suave/real analítica para toda $x \in \mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{N}_a \cup \mathcal{N}_1 \cup \dots \cup \mathcal{N}_m)$, donde $\mathcal{N}_a := \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) = 0\}$. De hecho, en base a la definición de $q_j^\varepsilon(a, \beta)$, denotada q_j , tenemos los siguientes casos:

Caso 1. Si $a \leq 0$ y $|b_j| r_j > 0$, entonces

$$q_j = 1 - e^{-\varepsilon \frac{|b_j|^2 r_j^2}{\beta}}$$

Caso 2. Si $a > 0$ y $|b_j| r_j > 0$, entonces

$$\begin{aligned} \varrho_j &= 1 - \left(1 - \frac{|b_j|r_j a}{\beta \beta}\right) e^{m \frac{|b_j|r_j}{\beta-a} \ln\left(1 - \frac{a}{\beta}\right)} e^{-\varepsilon \frac{|b_j|^2 r_j^2}{\beta}} \\ &= 1 - \left(1 - \frac{|b_j|r_j a}{\beta \beta}\right) \left(1 - \frac{a}{\beta}\right)^{m \frac{|b_j|r_j}{\beta-a}} e^{-\varepsilon \frac{|b_j|^2 r_j^2}{\beta}}, \end{aligned}$$

donde $0 < \frac{a}{\beta} < 1$.

Caso 3. Si $|b_j|r_j = 0$ entonces $\varrho_j = 0$.

Teniendo en cuenta que las sumas, productos y composiciones de funciones suaves / real analíticas son también suaves / real analíticas, el recíproco de una función suave / real analítica que no es cero es suave / real analítica y, finalmente, la función exponencial es real analítica, se sigue que cada ϱ_j es (por lo menos) suave/real analítica para toda x en $\mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{N}_a \cup (\cup_j \mathcal{N}_j))$ (recordemos que \mathcal{N}_j son las “superficies de cambio” de $\bar{\omega}(x)$) y continua en todas partes. \square

2.8. Ejemplos

Ejemplo 1. Consideremos el problema de estabilizar el sistema escalar

$$\dot{x} = \frac{x}{1+x^2} + u, \quad u \in U = [-r^-, r^+],$$

de manera que al considerar la función $V = \frac{1}{2}x^2$, obtenemos que $a(x) = L_f V = \frac{x^2}{1+x^2}$, $b(x) = L_g V = x$. Si $r^- = r^+ = 1$, tenemos que V es una CLF ya que

$$\begin{aligned} \min_{u \in U} \dot{V} &= a(x) - |b(x)| \\ &= \frac{x^2}{1+x^2} - |x| < 0 \text{ para } x \neq 0, \end{aligned}$$

de manera que el estabilizador con mejor tasa es $\bar{\omega}(x) = -\text{sign}(x)$. La función de retroalimentación explícita $u_\varepsilon(a, b) = \rho_\varepsilon(a, b)\bar{\omega}$, en función de x es

$$u_\varepsilon(a(x), b(x)) = \begin{cases} -\text{sign}(x) \left(1 - \left(\lambda^{\frac{1}{\lambda}}\right) e^{(-\varepsilon|x|)}\right), & \text{if } x \neq 0, \\ 0, & \text{if } x = 0, \end{cases}$$

con

$$\lambda(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{|x|(1+x^2)} & \text{para } x \neq 0 \\ 1 & \text{para } x = 0 \end{cases},$$

donde la función $\lambda(x)$ es continua pero no derivable en $x = 0$.

Ejemplo 2. Consideremos el problema de estabilizar el siguiente sistema mediante funciones admisibles

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \sqrt{3} \frac{x_2}{1+x_2^2} + u_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2^2}{1+x_2^2} + u_2 \end{aligned}$$

con CVS el rectángulo $U := [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \times [-2, 1]$. El sistema a lazo abierto es inestable; por ejemplo, la parte derecha es positiva en el primer cuadrante implicando que este cuadrante es invariante. Al considerar $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, tenemos que

$$\dot{V} = x_1 \left(\sqrt{3} \frac{x_2}{1+x_2^2} + u_1 \right) + x_2 \left(\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2^2}{1+x_2^2} + u_2 \right)$$

tal que

$$a(x) = \sqrt{3} \frac{x_1 x_2}{1+x_2^2} + \frac{x_1 x_2}{1+x_1^2} + \frac{x_2^2}{1+x_2^2}, \quad b_1 = x_1 \quad \text{y} \quad b_2 = x_2.$$

Tenemos la condición clf

$$\inf_{u_1, u_2} \dot{V} = a(x) - b_1 \bar{\omega}_1 - b_2 \bar{\omega}_2 = a(x) - \beta(x) < 0 \quad \text{para } x \neq 0,$$

Considerando cada cuadrante como un caso, es posible mostrar que se cumple la condición CLF. Donde los controles con mejor tasa, $\bar{\omega}_1$ y $\bar{\omega}_2$, son

$$\bar{\omega}_1(x) = \begin{cases} \sqrt{3} & \text{si } x_1 < 0 \\ -\sqrt{3} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \bar{\omega}_2(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 < 0 \\ -2 & \text{si } x_2 > 0 \end{cases}$$

por lo tanto, podemos considerar el diseño admisible estabilizante

$$u_\varepsilon(x) = (u_{1\varepsilon}(x_1, x_2), u_{2\varepsilon}(x_1, x_2)) \in U,$$

tal que

$$\dot{V} = a(x) + b_1 u_{1\varepsilon}(x) + b_2 u_{2\varepsilon}(x) < 0 \quad \text{para } x \neq 0, \quad (D1)$$

Observación. La continuidad en $(x_1, x_2) = (0, 0)$ es implicada por el límite $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{a(x_1, x_2)}{\beta(x_1, x_2)} = 0$, en este ejemplo tenemos que

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{a(x_1, x_2)}{\beta(x_1, x_2)} = \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)} \frac{x_1 \left(\sqrt{3} \frac{x_2}{1+x_2^2} \right) + x_2 \left(\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2^2}{1+x_2^2} \right)}{\sqrt{3}|x_1| + |x_2| r_2} = 0.$$

A continuación obtenemos la condición CLF: $\inf_{u_1, u_2} \dot{V} < 0$ para $x \neq 0$, para cada cuadrante. El caso $x_1 > 0$ & $x_2 > 0$:

$$\dot{V} = \sqrt{3}x_1 \left(\frac{x_2}{1+x_2^2} - 1 \right) + x_2 \left(\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2^2}{1+x_2^2} - 2 \right) < 0.$$

El caso $x_1 > 0$ & $x_2 < 0$:

$$\dot{V} = \sqrt{3}x_1 \left(\frac{x_2}{1+x_2^2} - 1 \right) + x_2 \left(\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2^2}{1+x_2^2} + 1 \right) < 0.$$

El caso $x_1 < 0$ & $x_2 < 0$:

$$\dot{V} = \sqrt{3}x_1 \left(\frac{x_2}{1+x_2^2} + 1 \right) + x_2 \left(\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2^2}{1+x_2^2} + 1 \right) < 0.$$

El caso $x_1 < 0$ & $x_2 > 0$:

$$\dot{V} = \sqrt{3}x_1 \left(\frac{x_2}{1+x_2^2} + 1 \right) + x_2 \left(\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2^2}{1+x_2^2} - 2 \right)$$

Conclusión. Dado un sistema afín y conocida una la función de Lyapunov V con las propiedades CLF y SCP, al menos en una vecindad Ω del origen. Al aplicar el método de síntesis con CVS la hipercaja, hemos logrado:

- a Dar una familia de estabilizadores admisibles $u_\varepsilon(x)$ para cada $\varepsilon \in (0, \infty)$.
- b Para el caso $\Omega = \mathbb{R}^n$, el punto de equilibrio $x = 0$ del sistema a lazo cerrado (2.7) con retroalimentación admisible $u_\varepsilon(x)$ es GAS.

Capítulo 3

CLF-Estabilización con la hipercaja con 0 en la frontera como CVS

3.1. Introducción

Retomando el sistema afín con entrada multivariable

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^m u_j g_j(x), \quad (3.1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, los campos vectoriales $f, g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, para $j = 1, \dots, m$, son $\mathcal{C}^s(\mathbb{R}^n)$ ($s \geq 0$), el conjunto de valores admisibles para el control (CVS) es dado por la hipercaja $U = \mathcal{B}_r^m(\infty) := [-r_1^-, r_1^+] \times \dots \times [-r_m^-, r_m^+] \subset \mathbb{R}^m$, con $r_j^+ > 0$, y $r_j^- \geq 0$ para $j = 1, \dots, m$. Si $r_j^- = 0$ para toda $j = 1, \dots, m$, el control de retroalimentación restringido $u(x)$ es un control positivo acotado. Sin perder generalidad, suponemos que $f(0) = 0$. El conjunto de funciones de retroalimentación admisibles es definida por

$$\mathcal{U} := \{u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{B}_r^m(\infty) : u(x) \text{ es regular}\}. \quad (3.2)$$

Estudiamos la solución al problema general: ¿Cómo obtener un sistema de control afín global asintóticamente estable (GAS) a través de un control de retroalimentación admisible $u(x)$, cuando el CVS es un politopo m -dimensional U , con $0 \in \partial U$ (en particular controles positivos) ?

El objetivo principal de este capítulo es estudiar la manera de lograr que un sistema de control afín (3.1) sea global asintóticamente estable (GAS) mediante la acción de un control de retroalimentación admisible $u(x)$, cuando el CVS es la hipercaja $\mathcal{B}_r^m(\infty) := [-r_1^-, r_1^+] \times \dots \times [-r_m^-, r_m^+]$, con $r_j^- \geq 0$ & $r_j^+ > 0$, tal que $0 \in \mathcal{B}_r^m(\infty)$. De tal manera que este capítulo III representa una extensión del capítulo II, con el objetivo de incluir el caso de la entrada del control nulo en la frontera del CVS U . Con particular interés en el caso de la hipercaja $U = \mathcal{B}_{r^+}^m(\infty)$ que representa el caso de controles positivos ($r_i^- = 0$, para $i = 1, 2, \dots, m$).

Dado el sistema afín de entrada multivariable (3.1), con el CVS es cualquier conjunto convexo $U \subseteq \mathbb{R}^m$, $u = (u_1, \dots, u_m)^\top \in U$, con $^\top$ denotando transposición. Decimos que una componente u_j de la entrada del control es signado si y sólo si (ssi) u_j puede tomar dos signos; mientras que es positiva si y sólo si $u_j \geq 0$. Una entrada de control u se denomina positiva ssi $u_j \geq 0$ para toda j .

Nótese que si renombramos $g_j(x) \leftarrow -g_j(x)$ & $u_j \leftarrow -u_j$ en (3.1), cualquier componente $u_j \leq 0$ se convierte en positiva, siempre que $r_j^+ \neq 0$. Por consiguiente, en este trabajo incluimos el caso de componentes negativos en el control u .

Retomando el control explícito valuado en $\mathcal{B}_r^m(\infty)$ expuesto en el capítulo anterior, estudiamos las condiciones de los controles de retroalimentación de forma descentralizada $u(x) := (\rho_1(x)\bar{\omega}_1, \dots, \rho_m(x)\bar{\omega}_m)$, tal que debe ser *admisibile* (regular y restringido a $\mathcal{B}_r^m(\infty)$) y rendir un sistema GAS. Donde $\bar{\omega}(x)$ es un control óptimo con respecto a una CLF y las $\rho_j(x)$ son funciones de reescalamiento. De manera que permitimos que $0 \in \text{int}\mathcal{B}_r^m(\infty)$ (i.e. todos $r_j^- > 0$) o la posibilidad de que la entrada de control nulo pueda estar en la frontera $0 \in \partial\mathcal{B}_r^m(\infty)$ (i.e. algún $r_j^- = 0$), para que podamos tener las entradas de control con una variedad de componentes signado o positivos oscilando entre todos signados a todos positivos. En lo sucesivo, sobre la base de estos resultados de convexidad, vamos a suponer que $U \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto convexo compacto con $0 \in U$. Una clase importante de conjuntos convexos compactos es la clase de polítopos convexos. Recordemos que un polítopo U (convexo) puede definirse como un conjunto acotado dado por la intersección de un número finito de semiespacios cerrados, llamado *H-representación*; o de forma equivalente se describe en términos de la *envolvente convexa* de sus vértices $U = \text{conv}(V)$, donde $V = \{v_1, \dots, v_k\}$, con $v_i \in \mathbb{R}^m$, llamada *V-representación*. Considerando los resultados de convexidad expuestos en el capítulo anterior, identificamos el espacio dual $(\mathbb{R}^m)^*$ con \mathbb{R}^m usando el producto interior, y denotamos al covector u^* por b .

Suponga que U es un polítopo con $0 \in \text{int}U$. Es conocido que U es un polítopo *ssi* su función soporte es continua y lineal por pedazos. El dominio de linealidad corresponde a los vértices del polítopo U (el máximo del producto escalar que define la función soporte es alcanzado en uno de los vértices). Por lo tanto, al asumir la *V-representación*, si U tiene k vértices, entonces $U = \text{conv}\{v_1, \dots, v_k\}$ y

$$\zeta_U(b) = \begin{cases} v_1 \cdot b, & \text{si } b \in C_1 \\ \vdots & \vdots \\ v_k \cdot b, & \text{si } b \in C_k \end{cases} \quad (3.3)$$

donde los C_i son conos poliedrales con vértice en 0, $i = 1, \dots, k$, que corresponde al dominio de linealidad de $\zeta_U(b)$. Estos conos sn llamados el *abanico* del polítopo U

Para cada cara propia F de un conjunto convexo $A \neq \emptyset$ corresponde a un cono N_F de una función lineal $v \in (\mathbb{R}^m)^*$ que se maximizan en F sobre A . El cono N_F es llamado el *cono normal* de F y los conos normales de todas las caras de un polítopo P forman un *abanico completo*, el *abanico normal* de P , N_P , de P : Toda cara $F \neq \emptyset$ de un cono normal es también un cono normal de alguna cara de P , la intersección de dos conos normales es una cara de ambos y la unión de todos los conos es una cubierta de \mathbb{R}^m .

Para $\zeta_U(b)$ definida en (3.3), el polar U^* es dado por el siguiente sistema de k desigualdades lineales.

$$\begin{aligned} U^* &= \{b \in \mathbb{R}^m : \zeta_U(b) \leq 1\} \\ &= \{b \in \mathbb{R}^m : v_1 \cdot b \leq 1 \ \& \ \dots \ \& \ v_k \cdot b \leq 1\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

Para un conjunto cerrado U , el conjunto nulo de $\zeta_U(b)$ es

$$N_\zeta := \{b \in \mathbb{R}^m : \zeta_U(b) = 0\}. \quad (3.5)$$

Del teorema 1, si U es compacto con $0 \in \text{int}U$, entonces $\zeta_U(b)$ es finito en todas partes y definido positivo ($N_\zeta = 0$). Sin embargo, si U es un polítopo con $0 \in \partial U$, entonces el teorema 4 y corolario 1, implican que U^* es un poliedro no acotado con $0 \in \text{int}U^*$, y $\zeta_U(b)$ es sólo *semidefinida positiva*.

Por consiguiente es importante estudiar las propiedades y la estructura geométrica de N_ζ . Claramente, tenemos que $\{0\} \subseteq N_\zeta$, con igualdad *ssi* $0 \in \text{int}U$, (de los teoremas 1 (ii) y 2).

Retomando a las hipercajas como una clase importante de politopos

$$\mathcal{B}_{\mathbf{r}}^m(\infty) := [-r_1^-, r_1^+] \times \dots \times [-r_m^-, r_m^+] = \text{conv} \{(-r_1^-, \dots, -r_m^-), \dots, (r_1^+, \dots, r_m^+)\},$$

con $r_j^- \geq 0$ y $r_j^+ > 0$, para $j = 1, \dots, m$.

Por lo tanto, $\mathcal{B}_{\mathbf{r}}^m(\infty)$ es un conjunto convexo compacto con $0 \in \text{int}\mathcal{B}_{\mathbf{r}}^m(\infty)$, de modo que admite una representación en términos de una funcional de Minkowski,

$$\mathcal{B}_{\mathbf{r}}^m(\infty) := \{u \in \mathbb{R}^m : \psi_{\infty, \mathbf{r}}(u) \leq 1\},$$

donde $\psi_{\infty, \mathbf{r}} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es

$$\psi_{\infty, \mathbf{r}}(u) := \sup_j \left\{ r_j^{-1}(u_j) |u_j| \right\} = \left\| (r_1^{-1}(u_1) |u_1|, \dots, r_m^{-1}(u_m) |u_m|) \right\|_{\infty}, \quad (3.6)$$

con $r_j(\zeta_j)$ dado por (5), y $r_j^- \geq 0$, $r_j^+ > 0$, para $j = 1, \dots, m$. Correspondiendo a $\psi_{\infty, \mathbf{r}}$, definimos la siguiente funcional de Minkowski tipo l_1 , \mathbf{r} -ponderada,

$$\psi_{1,1/\mathbf{r}}(b) := \sum_{j=1}^m r_j(b_j) |b_j| = \|r_m(b_m) |b_m|, \dots, r_1(b_1) |b_1|\|_1, \quad (3.7)$$

con $r_j(\zeta_j)$ dado por (2.6), y $r_j^- \geq 0$, $r_j^+ > 0$, para $j = 1, \dots, m$.

Proposition 1: [4], $\psi_{\infty, \mathbf{r}}(u)$ y $\psi_{1,1/\mathbf{r}}(b)$ son funcionales de Minkowski, y polar una de la otra: $\psi_{\infty, \mathbf{r}}^* = \psi_{1,1/\mathbf{r}}$ and vice versa. Además, el conjunto polar de la hipercaja es

$$\mathcal{B}_{\mathbf{r}}^m(\infty)^* = \{b \in \mathbb{R}^m : \psi_{1,1/\mathbf{r}}(b) \leq 1\}, \quad (3.8)$$

el cual es un m -octaedro, siempre que $0 \in \text{int}\mathcal{B}_{\mathbf{r}}^m(\infty)$.

Los k -ortantes del espacio Euclidiano \mathbb{R}^m , para $k = 0, 1, 2, 3, \dots, m$, son el origen, semiejes positivos/negativos, cuadrantes, octantes y ortantes (m -octante), respectivamente. Un *ortante abierto*, puede ser definido como $C = \{b \in \mathbb{R}^m : \delta_j b_j > 0, \text{ donde } \delta_j = -1 \text{ ó } 1, \text{ para } j = 1, \dots, m.\}$, tal que la permutación de signos de δ_j rinde 2^m diferentes ortantes; por ejemplo, \mathbb{R}_-^m y \mathbb{R}_+^m son los ortantes abiertos negativo y positivo con $\delta_j = -1$ & $\delta_j = 1$, para toda $j = 1, \dots, m$, respectivamente. En el caso de la m -hipercaja, observamos que su función soporte es $\zeta_{\mathcal{B}_{\mathbf{r}}^m(\infty)}(b) = \psi_{1,1/\mathbf{r}}(b)$, tal que es continua y lineal por pedazos, donde los dominios de linealidad son dados por los 2^m ortantes. Sin embargo, el correspondiente conjunto nulo $N_{\zeta} := \{b \in \mathbb{R}^m : \psi_{1,1/\mathbf{r}}(b) = 0\}$ de forma que se define por el siguiente sistema de 2^m ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{cases} v_1 b = 0 & \text{si } b \in C_1 \\ \vdots & \vdots \\ v_k b = 0 & \text{si } b \in C_{2^m} \end{cases} \quad (3.9)$$

donde cada ecuación es resuelta en su ortante C_i , para $i = 1, \dots, 2^m$; que representan los dominios de linealidad de $\zeta_{\mathcal{B}_{\mathbf{r}}^m(\infty)}$. Por consiguiente, el caso de controles positivos está ya incluido, si consideramos la m -hipercaja positiva

$$\mathcal{B}_{\mathbf{r}^+}^m(\infty) = [0, r_1^+] \times \dots \times [0, r_m^+] = \text{conv} \{(0, \dots, 0), (0, \dots, r_1^+), \dots, (r_1^+, r_2^+, \dots, r_m^+)\}$$

con $r_j^+ > 0$, y $r_j^- = 0$, para toda $j = 1, \dots, m$. En este caso, tenemos que N_{ζ} es el ortante cerrado negativo \mathbb{R}_-^m .

3.2. CLF Estabilización de sistemas afines con control escalar positivo acotado

El control de retroalimentación positivo escalar como un caso particular de la hipercaja *positiva* m -dimensional como CVS.

$$\mathcal{B}_{r^+}^m(\infty) = \text{conv}\{(0, \dots, 0), (0, \dots, r_m^+), \dots, (r_1^+, \dots, r_m^+)\} = [0, r_1^+] \times \dots \times [0, r_m^+], \quad (3.10)$$

con $r_j^+ > 0$, para $j = 1, \dots, m$. Ahora, definimos

$$r_j(\zeta_j) := \begin{cases} r_j^+, & \text{si } \zeta_j \geq 0, \\ 0, & \text{si } \zeta_j < 0, \end{cases} \quad (3.11)$$

para $j = 1, \dots, m$. Entonces, la función soporte de la hipercaja positiva $\mathcal{B}_{r^+}^m(\infty)$ es dada por

$$\zeta_{\mathcal{B}_{r^+}^m(\infty)}(b) = \psi_{1,1/r}(b) = \|(r_1 |b_1|, \dots, r_m |b_m|)\|_1,$$

que es una función convexa positivamente homogénea, pero sólo *semi-definida positiva*: Observamos que $\zeta_{\mathcal{B}_{r^+}^m(\infty)} \upharpoonright_{\text{cl } \mathbb{R}_-^m} \equiv 0$, donde $\text{cl } \mathbb{R}_-^m = \{b \in \mathbb{R}^m : b_j \leq 0, \text{ para } j = 1, \dots, m\}$ es el octante *no-positivo* cerrado.

En lo sucesivo, suponemos que $V(x)$ es una CLF con respecto al sistema (2.1) con CVS $U = \mathcal{B}_{r^+}^m(\infty)$. Entonces, el control con mejor tasa $\bar{\omega}(x)$ es definido en términos de la función

$$\omega(b) = \left(\nabla \sum_{j=1}^m r_j |b_j| \right)^\top = (r_1 \text{sign } b_1, \dots, r_m \text{sign } b_m)^\top, \quad (3.12)$$

que es constante en cada uno de los 2^m octantes abiertos de \mathbb{R}^m y, en particular, $\omega(b) \upharpoonright_{\mathbb{R}_-^m} \equiv 0$. De nuevo, las superficies de cambio de los $\bar{\omega}(x)$ son la representación en \mathbb{R}^n de los hiperplanos coordenados $C_j = \{b \in \mathbb{R}^m : b_j = 0\}$, para $j = 1, \dots, m$, y $\cap_j C_j = \{0\}$ -el origen en \mathbb{R}^m .

Ilustramos los conceptos anteriores con el siguiente ejemplo de control positivo escalar.

Ejemplo. Si $U = [0, r^+]$, para $r^+ > 0$, entonces su función soporte es

$$\zeta_U(b) = \text{máx}\{0, r^+ b\} = \begin{cases} r^+ b, & \text{si } b > 0, \\ 0, & \text{si } b \leq 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, el conjunto polar $U^* = \zeta_U^{-1}[0, 1] = \{b \in \mathbb{R} : \zeta_U(b) \leq 1\} = \{b \in \mathbb{R} : r^+ b \leq 1 \text{ \& } 0 \leq 1\} = (-\infty, 1/r^+]$ -con un intervalo no acotado con $0 \in \text{int } U^*$. Además, el control con mejor tasa es

$$\omega(b) = r \text{sign } b = \begin{cases} r^+, & \text{si } b > 0, \\ 0, & \text{si } b < 0, \end{cases}$$

que es constante por trozos. □

Ahora, regresemos a la variable de estado x . Denotemos por $\beta(x) = \zeta_{\mathcal{B}_{r^+}^m(\infty)}(b(x))$. En este caso, para el sistema a lazo cerrado (2.1)-(2.29), obtenemos que $dV/dt = a(x) - \beta(x) < 0$, $\forall x \neq 0$.

Observación 7. De la desigualdad anterior observamos que si $\beta(x) = 0$ entonces $a(x) < 0$. Por otra parte, tenemos que $\beta(x) = 0$ ssi $x \in \mathcal{B}^-$, donde $\mathcal{B}^- = b^{-1}[\text{cl } \mathbb{R}_-^m] = \{x \in \mathbb{R}^n : b_j(x) \leq 0, \text{ para } j = 1, \dots, m\}$ es la preimagen del ortante no positivo cerrado $\text{cl } \mathbb{R}_-^m$ bajo la aplicación $b(x)$. Entonces, en particular, $\bar{\omega}(x) \upharpoonright_{\text{int } \mathcal{B}^-} \equiv 0$. □

Teniendo en cuenta que la función soporte $\zeta_{\mathcal{B}_r^m(\infty)}(b)$ es semidefinida positiva, entonces el diseño de control propuesto $u^\varepsilon(x)$ definido en (2.34) es singular cuando $\beta(x) = 0$ (i.e. $x \in \mathcal{B}^-$), excepto en el caso de entrada escalar. Así, supongamos que $m = 1$, así que el CVS es $U = [0, r^+]$. Por lo tanto, $\zeta_{\mathcal{B}_r^1(\infty)}(b) = |b| r$ con

$$r = \begin{cases} r^+, & \text{si } b > 0, \\ 0, & \text{si } b \leq 0. \end{cases}$$

El control dado por (2.34) se convierte en un control de retroalimentación escalar $u^\varepsilon(x)$ definido por

$$u^\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{|a|+a}{2|b|r}\right) \exp(\tau^\varepsilon), & \text{si } |b|r > 0, \\ 0, & \text{si } |b|r = 0, \end{cases} \quad (3.13)$$

donde $\tau^\varepsilon(x)$ es una función no positiva definida como

$$\tau^\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{\ln(\lambda(x))}{\lambda(x)} - \varepsilon |b| r, & \text{si } |b|r > 0, \\ 0, & \text{si } |b|r = 0, \end{cases} \quad (3.14)$$

donde $\lambda(x) = 1 - \frac{1}{2}(|a(x)| + a(x)) / |b| r$ y $\varepsilon > 0$ es un parámetro de ajuste. Se puede observar que cuando $\varepsilon \rightarrow \infty$, la función de control $u^\varepsilon(x)$ converge hacia el control de la estabilización óptima $\omega = r \operatorname{sign}(b)$, y como consecuencia de $0 < \exp(\tau^\varepsilon) \leq 1$ para cada $\varepsilon > 0$, tenemos que la condición de restricción de control $0 \leq u^\varepsilon(x) < r^+$ para toda $x \in \mathbb{R}^n$. Es evidente que el control de retroalimentación $u^\varepsilon(x)$ es una función acotada positiva. Por otra parte, de Observación 6, este control por retroalimentación es suave / real analítica $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus (\mathcal{N}_a \cup \mathcal{N}_b)$, siempre que la CLF $V(x)$, y los campos vectoriales $f(x)$ y $g_1(x)$ sean suaves/real analíticos, y continuos en todas partes.

Cabe señalar que la fórmula de control propuesto (3.13)-(3.14) es diferente a la fórmula universal de [34], simplemente porque la función (3.13)-(3.14) toma valores en el intervalo $[0, r^+)$ incluyendo el valor 0, mientras que en [34], Lin y Sontag consideraron el problema de diseño de control para los casos con CVS los conjuntos abiertos $U = (0, 1)$ ó $U = (0, \infty)$; pero sus resultados no son satisfactorios ya que las funciones de control obtenidas no son explícitas y no logran la continuidad en $x = 0$.

Por último, no es difícil ver que este control de retroalimentación escalar garantiza que el sistema es GAS:

$$\dot{V} = a - b u^\varepsilon < 0 \quad \forall x \neq 0 \text{ y cualquier } \varepsilon > 0.$$

Observación 8. Bajo una hipótesis adicional, la fórmula de control propuesto (2.34)-(2.35) también se puede utilizar en el caso cuando el control nulo esta en la frontera del CVS $\mathcal{B}_r^m(\infty)$ (en particular, controles positivos). Sin embargo, si $r_j^- = 0$ para alguna j , la función $\zeta_U(b)$ es sólo semidefinida positiva. Entonces, no es posible garantizar que el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(x)}{\beta(x)} = 0$$

se mantiene. Por lo tanto, para el caso de tener el control nulo en la frontera (controles positivos), extendemos los resultados de este capítulo a la familia de sistemas que satisfacen este límite. De forma que la fórmula del control descentralizada con (2.34)-(2.35) produce que tales sistemas sean GAS con respecto al CVS dado por las hipercajas $\mathcal{B}_r^m(\infty)$ que contienen al 0 en su frontera, i.e. con componentes de las entradas del control signadas/positivas.

Otra presentación del caso escalar

La formula explícita de funciones de retroalimentación admisibles (3.13)-(3.14) para resolver el problema de estabilización con $r^- = 0$ son extensivas al caso $r^- \geq 0$, con CVS $U := [-r^-, r^+]$, $r^+ > 0$, donde consideramos el sistema afín

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad (3.15)$$

con funciones f y g suaves en \mathbb{R}^n , con $f(0) = 0$. El conjunto de funciones de retroalimentación admisibles es definida por

$$\mathcal{U} := \{u : \mathbb{R}^n \rightarrow U : u(x) \text{ es regular}\}. \quad (3.16)$$

donde *regular* significa al menos continua para cada x .

Suponemos conocida una función Lyapunov de control $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ con respecto a (3.15), que satisface la SCP y la versión escalar de la desigualdad (2.21):

$$\inf_{u \in U} \{\nabla V(x) \cdot (f(x) + g(x)u)\} = \inf_{u \in U} \{a(x) - b(x) \cdot u\} < 0, \quad \forall x \neq 0, \quad (3.17)$$

donde el lado izquierdo puede ser reescrito mediante la función de control óptima $\bar{\omega}(x)$ como

$$\inf_{u \in U} \{\nabla V(x) \cdot (f(x) + g(x)u)\} = \nabla V \cdot (f + g\bar{\omega}) \quad x \neq 0 \quad (3.18)$$

donde

$$\bar{\omega}(x) = r \text{sign}(b(x)), \quad (3.19)$$

está bien definida para toda x tal que $b(x) \neq 0$, pero no es continuo en el conjunto $\mathcal{N}_b = \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) = 0\}$. Mediante la función no negativa $|b|r$, con

$$r = \begin{cases} r^+ & \text{si } b > 0, \\ r^- & \text{si } b \leq 0. \end{cases}$$

tenemos que

$$\min_{u \in U} \{a - bu\} = a - b\bar{\omega} = a - |b|r. \quad (3.20)$$

De (3.20), tenemos que la condición de decaimiento CLF representada por la desigualdad (3.18) es equivalente a la desigualdad

$$a(x) < |b|r, \quad \text{para } x \neq 0. \quad (3.21)$$

Con el intervalo U como CVS, proponemos funciones de retralimentación de la forma $u(x) := \rho(x)\bar{\omega}(x)$, donde $\bar{\omega}(x)$ es el correspondiente control óptimo, y $\rho(x)$ es una función escalar por determinar. El propósito de este diseño es regularizar la discontinuidad de $\bar{\omega}(x)$ en la superficie de cambio \mathcal{N}_b mediante una apropiadas función de reescalamiento $\rho(x)$; además, buscamos incluir el problema de diseño del control positivo.

Las condiciones que debe satisfacer la función $\rho(x)$ para garantizar la existencia de un control de retroalimentación admisible $u(x)$ ($u(x) \in U$) tal que el sistema a lazo cerrado resultante sea GAS.

Hipótesis H. Supongamos que $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que

$$(i) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \rho(x) < 1,$$

$$(ii) \quad \rho(x) = 0 \text{ ssi } x \in \mathcal{N}_b, \text{ y}$$

$$(iii) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}_b, \rho(x) > \frac{a(x)}{|b(x)|r(x)}.$$

Para $x \neq 0$, la propiedad CLF equivale a la desigualdad $\frac{a(x)}{|b(x)|r(x)} < 1$, de manera que la condición (iii) para $\rho(x)$ implica la desigualdad

$$\frac{a(x)}{|b(x)|r(x)} < \rho(x) < 1.$$

Mediante el siguiente teorema mostramos que las condiciones de la **Hipótesis H** son suficientes para resolver el problema de estabilización con control $u(x) = \rho(x)\bar{w}(x)$. Con base en la definición: $\mathcal{N}_b = b^{-1}[0] = \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) = 0\}$ y el control $\bar{w}(x) = r \text{sign} b$, tenemos el siguiente teorema.

Teorema. Supongamos que $V(x)$ es una CLF [con respecto al sistema (3.15) y el CVS $U = [-r^-, r^+]$, con $r^- \geq 0$ y $r^+ > 0$] y satisface la propiedad SCP, $\bar{w}(x) = r \text{sign}(b)$ es el control óptimo y $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ una función continua que satisface la *Hipótesis H*. Entonces, el control continuo $u(x) = \rho(x)\bar{w}(x) \in \mathcal{U}$ es un estabilizador global para el sistema (3.15).

Prueba de que el control $u(x) = \rho(x)\bar{w}(x) = \rho(x)r \text{sign} b$ es admisible: De hecho, a partir de la condición $0 \leq \rho(x) < 1$ tenemos que

$$u(x) = \rho(x)\bar{w}(x) = \rho(x)r \text{sign} b$$

es equivalente a

$$\begin{aligned} -r^- &\leq -r^- \rho(x) & \text{si } b < 0 \\ r^+ \rho(x) &\leq r^+ & \text{si } b > 0 \end{aligned}$$

tal que $u(x)$ está restringido a $[-r^-, r^+]$. Además, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}_b$ tenemos que ambos, $\rho(x)$ y $\bar{w}(x)$, son continuos (recordemos que $\bar{w}(x)$ es constante en cada intervalo donde b no cambia de signo) de manera que $u(x)$ es continuo. En el caso $x \in \mathcal{N}_b$, ya que $\rho(x)$ es continuo y $\bar{w}(x) = r(x) \text{sign} b(x)$ es acotada, entonces de la SCP y condición (ii) se deduce que $\forall x^* \in \mathcal{N}_b$,

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow x^*} |u(x)| = \lim_{x \rightarrow x^*} \rho(x) |\bar{w}(x)| = 0,$$

entonces cada entrada $u(x)$ es continua en \mathcal{N}_b y $u(x)|_{\mathcal{N}_b} = 0$.

Por último, mostramos que el sistema de lazo cerrado es GAS:

(a) Si $x \in \mathcal{N}_b \setminus \{0\}$, entonces $a(x) < 0$ y $u(x)|_{\mathcal{N}_b} = 0$. Por lo tanto, tenemos que

$$dV/dt = a(x) - b(x)u(x) = a(x) < 0 \quad \forall x \in \mathcal{N}_b \setminus \{0\}.$$

(b) Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}_b$, entonces $b(x) \neq 0$. Por lo tanto tenemos que

$$dV/dt = a(x) - b(x)u(x) < 0$$

ya que de la condición (iii) deducimos que

$$a(x) - b(x)u(x) = a(x) - b(x)\rho(x)\bar{w}(x) = a(x) - \rho(x)b r \text{sign} b = a - \rho(x)|b|r < 0$$

por consiguiente, $dV/dt < 0$, $x \neq 0$.

Dado un sistema afín, la dificultad práctica para obtener el control estabilizante consiste en encontrar la función de Lyapunov V con las propiedades CLF y SCP, al menos en una vecindad Ω del origen. En el siguiente capítulo veremos otra prueba de este resultado.

Consideremos la función de retroalimentación continua $u_\varepsilon(x) = \bar{\omega}\rho_\varepsilon(x)$, parametrizada con $\varepsilon > 0$, es dada explícitamente por (3.13)-(3.14).

En la sección 2.4 probamos que la función de control $u_\varepsilon(x) = \rho_\varepsilon(x)\bar{\omega}(x)$ resuelve el problema de estabilización global. Es decir, si $a(x) < |b(x)r$ para toda $x \neq 0$, entonces el sistema a lazo cerrado es GAS.

También en la sección 2.4 probamos la continuidad del control $u_\varepsilon(x)$ con este diseño particular de $\rho_\varepsilon(x)$.

En el capítulo 4 mostraremos que el sistema (3.15), retroalimentado con (3.13)-(3.14), es estable de forma robusta.

3.3. Ejemplo

Consideremos el sistema uno-dimensional

$$\dot{x} = \frac{x^2}{1+x^2} - u,$$

con CVS $U = [0, r^+]$. Sea $V = \frac{1}{2}x^2$, tal que $a(x) = L_f V = \frac{x^3}{1+x^2}$, $b(x) = L_g V = -x$, y V es una clf ya que

$$\begin{aligned} \min_{u \in U} \dot{V} &= a(x) - |b(x)|r = \frac{x^3}{1+x^2} - |x|r \\ &= \begin{cases} x \left(\frac{x^2}{1+x^2} \right) < 0, & \text{si } x < 0, \\ x \left(\frac{x^2}{1+x^2} - r^+ \right) < 0, & \text{si } x > 0, \end{cases} \end{aligned}$$

donde $r = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ r^+, & \text{si } x > 0. \end{cases}$ La función de retroalimentación es dada por

$$\begin{aligned} u(a, b) &= \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1 - \lambda(a, b)^{1+\lambda^{-1}(a, b)} \exp(-\varepsilon x), & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1+x^2)^{-(1+x^2)} \exp(-\varepsilon x), & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \end{aligned}$$

con $\lambda(a, b) = 1 - \frac{x^2}{1+x^2}$. Observe que $u_\varepsilon(x)$ es Lipschitz-continuous en x . El control óptimo (con mejor tasa) es dado por

$$\bar{\omega}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ r^+, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

de forma que $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} u_\varepsilon(x) = \bar{\omega}(x)$ si $b(x) \neq 0$. Además, con $u_\varepsilon(x)$ tenemos que $\dot{V} \rightarrow 0$ ssi $r^+ \geq 1$.

Resumiendo: dado un sistema afín y una función de Lyapunov V con las propiedades CLF y SCP, al menos en una vecindad Ω del origen, presentamos un estabilizador restringido al

intervalo (CVS) $U := [0, r^+]$, de forma que en el dominio Ω el control positivo tiene las siguientes propiedades:

- a Damos una familia de estabilizadores admisibles $u_\varepsilon(x)$ para cada $\varepsilon \in (0, \infty)$.
- b Para el caso $\Omega = \mathbb{R}^n$, el punto de equilibrio $x = 0$ del sistema a lazo cerrado (3.15) con retroalimentación admisible $u_\varepsilon(x)$ es GAS.
- c El control positivo $u_\varepsilon(x)$ se aproxima al control óptimo para valores grandes del parámetro ε ; esta característica lleva a que el sistema retroalimentado sea estable en forma robusta, en la siguiente sección probaremos este resultado de robustez.

3.4. Geometría del conjunto nulo N_ζ .

A continuación ilustramos con un ejemplo cómo cambia el conjunto nulo N_ζ , dado por (3.5), en función de la localización de 0 en un rectángulo. Por ejemplo, consideremos el rectángulo $\mathcal{B}_r^2(\infty) := [-r_1^-, r_1^+] \times [-r_2^-, r_2^+]$, con $r_j^- \geq 0$ y $r_j^+ > 0$. Entonces, su conjunto de vértices tomadas en sentido antihorario es

$$V = \{(r_1^+, r_2^+), (-r_1^-, r_2^+), (-r_1^-, -r_2^-), (r_1^+, -r_2^-)\}$$

El abanico normal de $\mathcal{B}_r^2(\infty)$ es dada por los cuatro cuadrantes de \mathbb{R}^2 , donde C_i indica el i -ésimo cuadrante tomado en sentido antihorario.

Si $r_1^-, r_2^- > 0$, entonces $(0, 0) \in \text{int}\mathcal{B}_r^2(\infty)$, y $N_\zeta = \{(0, 0)\}$. De (9)-(14), su función soporte (o polar) es $\zeta_{\mathcal{B}_r^m(\infty)}(b) = \psi_{1,1/r}(b)$:

$$\psi_{1,1/r}(b) = r_1(b_1) |b_1| + r_2(b_2) |b_2| = \begin{cases} r_1^+ b_1 + r_2^+ b_2, & \text{si } (b_1, b_2) \in \mathbb{R}_{++}^2 \\ -r_1^- b_1 + r_2^+ b_2, & \text{si } (b_1, b_2) \in \mathbb{R}_{-+}^2 \\ -r_1^- b_1 - r_2^- b_2, & \text{si } (b_1, b_2) \in \mathbb{R}_{--}^2 \\ r_1^+ b_1 - r_2^- b_2, & \text{si } (b_1, b_2) \in \mathbb{R}_{+-}^2 \end{cases}$$

y observamos que es lineal en cada cuadrante. Por otra parte, a partir de (3.4) obtenemos que

$\mathcal{B}_r^2(\infty)^*$ es un cuadrilátero con vértices en $\left(\frac{1}{r_1^+}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{r_2^+}\right)$, $\left(-\frac{1}{r_1^-}, 0\right)$ & $\left(0, -\frac{1}{r_2^-}\right)$. Suponga

que $r_1^- = 0$ y $r_2^- > 0$, tal que u_1 es positivo y u_2 es signado. Entonces, $(0, 0) \in \text{relint}(\{0\} \times [-r_2^-, r_2^+])$ -un borde vertical de $\mathcal{B}_r^2(\infty)$ y $\zeta_{\mathcal{B}_r^m(\infty)}(b)$ es semidefinido positivo: $N_\zeta = C_2 \cap C_3 = \{(b_1, 0) : b_1 \leq 0\}$ es el (no positivo) b_1^- -semi-eje. Análogamente, si $r_1^- > 0$ y $r_2^- = 0$, obtenemos que $(0, 0) \in \text{relint}([-r_1^-, r_1^+] \times \{0\}) \subset \partial\mathcal{B}_r^2(\infty)$, y $N_\zeta = C_3 \cap C_4 = \{(0, b_2) : b_2 \leq 0\}$ es el b_2^- -semi-eje. Finalmente, si $r_1^- = r_2^- = 0$, entonces u es positivo, tal que el rectángulo es la 2-hipercaja positiva, $\mathcal{B}_{r^+}^2(\infty)$, tal que $(0, 0)$ es un vértice de $\mathcal{B}_{r^+}^2(\infty)$, y $N_\zeta = C_3$. En estos casos, el polar $\mathcal{B}_r^2(\infty)^*$ es un polígono no acotado con $(0, 0) \in \text{int}\mathcal{B}_r^2(\infty)^*$. Por ejemplo, en el último caso

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_r^2(\infty)^* &= \zeta_U^{-1}[0, 1] = \{b \in \mathbb{R}^2 : \zeta_U(b_1, b_2) \leq 1\} \\ &= \{(r_1^+ b_1 + r_2^+ b_2 \leq 1) \& (r_2^+ b_2 \leq 1) \& (r_1^+ b_1 \leq 1)\} \end{aligned}$$

el cual es un polígono con vértices en $\left(\frac{1}{r_1^+}, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{r_2^+}\right)$, que contiene propiamente el cuadrante

C_3 , y limitado por la recta $b_2 = -\frac{r_1^+}{r_2^+} b_1 + \frac{1}{r_2^+}$, la línea horizontal $b_2 = \frac{1}{r_2^+}$ y la recta vertical

$b_1 = \frac{1}{r_1^+}$. Con el fin de ver cómo parece este conjunto, tomamos el límite del conjunto polar cuadrilátero $\mathcal{B}_r^2(\infty)^*$ con sus vértices en $\left(-\frac{1}{r_1}, 0\right)$ & $\left(0, -\frac{1}{r_2}\right)$ tiende a $-\infty$ sobre sus ejes correspondientes, según $r_1^-, r_2^- \rightarrow 0^+$.

Observación 2.1. En este ejemplo observamos cómo cambia N_ζ al desplazarse el lugar geométrico de $(0,0)$ como un punto interior a través de las caras F de $\mathcal{B}_r^2(\infty)$; que resumimos en la siguiente tabla. Observe que $\dim N_\zeta = m - \dim F$, con $m = 2$.

N_ζ vs lugar geométrico de $(0,0)$ en las caras de $\mathcal{B}_r^2(\infty)$

Cara F	$\dim F$	N_ζ	$\dim N_\zeta$
$\mathcal{B}_r^2(\infty)$	2	$\{(0,0)\}$	0
$\{0\} \times [-r_2^-, r_2^+]$	1	semieje- b_1^-	1
$[-r_1^-, r_1^+] \times \{0\}$	1	semieje- b_2^-	1
$\{(0,0)\}$	0	C_3	2

El siguiente resultado muestra la estructura geométrica de N_ζ en terminos del lugar geométrico del origen como un punto interior relativo a las caras de la hipercaja $\mathcal{B}_r^m(\infty)$.

Teorema 6: *Suponga que $\mathcal{B}_r^m(\infty)$ es una m -hipercaja con $0 \in \mathcal{B}_r^m(\infty)$ dada por (2.16), con $r_j^+ > 0$, y $r_j^- \geq 0$ para $j = 1, \dots, m$. Entonces, el conjunto nulo N_ζ de $\zeta_{\mathcal{B}_r^m(\infty)}$ es un cono poliedral con vértice en 0. Por otra parte, (a) si $0 \in \partial \mathcal{B}_r^m(\infty)$ es un vértice, entonces $\mathcal{B}_r^m(\infty)$ es la hipercaja positiva, y por lo tanto $N_\zeta = \mathbb{R}^m$; de otro modo, (b) N_ζ es un $(m-d)$ ortante de \mathbb{R}^m , definido como el cono normal de la d -cara F de $\mathcal{B}_r^m(\infty)$, $1 \leq d \leq m$, incluyendo la misma hipercaja, tal que $0 \in \text{relint}F$, y dado por la intersección de los ortantes correspondientes a todos los vértices de F .*

Comentario: El teorema (6.9) del anexo, escrito para politopos, representa una generalización de este teorema 6, escrito para la hipercaja. De manera que este teorema 6 es más bien un corolario del teorema (6.9).

Observación 2.2.

Nótese que si $F = \{0\}$ -un vértice de la hipercaja, entonces obtenemos la hipercaja $\mathcal{B}_r^m(\infty)$ positiva y por lo tanto $N_\zeta = \mathbb{R}^m$; mientras que si F es la d -cara de la hipercaja ($1 \leq d \leq m$) tal que tal que $0 \in \text{relint}F$, entonces N_ζ es un subconjunto propio de una intersección de hiperplanos cartesianos.

3.5. La estabilización global con la hipercaja como CVS

A continuación exploramos la geometría detrás de la estabilización CLF del sistema (3.1) con CVS dada por hipercajas que contienen el origen (no necesariamente como un punto interior), de forma que incluimos el caso de controles positivos.

En nuestro problema de control, supongamos que U es un CVS cerrado con $0 \in U$. Observe que tenemos la condición CLF si hay una retroalimentación $u(x)$ que toma valores en ∂U tal que $a(x) < b(x)u(x)$ para toda $x \neq 0$. De otra manera, para cualquier control $u(x)$ que toma valores en U , tenemos que: $b(x)u(x) \leq \mu^*(b(x))\mu(u(x))$. Entonces, para $u = \bar{\omega}(x)$, con $\mu(\bar{\omega}(x)) = 1$ (ya que $\bar{\omega}(x)$ toma valores en ∂U) y recordando que $\mu^*(b) = \zeta_U(b)$,

$$b(x)\bar{\omega}(x) = \zeta_U(b(x)). \quad (3.22)$$

Por lo tanto, dada una V CLF, entonces cualquier control $\bar{\omega}(x)$ que satisfice (3.22) establece la equivalencia entre la condición CLF y la desigualdad

$$\forall x \neq 0, \quad a(x) < \zeta_U(b(x)) \quad (3.23)$$

Llamaremos a $\bar{\omega}(x)$ un control de retroalimentación óptimo (mejor tasa de estabilización) con respecto a la CLF $V(x)$ [para el sistema (3.1) con controles tomando valores en U] ssi satisfice

$$\forall x \neq 0, \quad a(x) - b(x)\bar{\omega} = \inf_{u \in U} \{a(x) - b(x) \cdot u\} < 0. \quad (3.24)$$

Por lo tanto, la condición CLF se satisfice si existe un control óptimo $\bar{\omega}(x)$. Sin embargo, a partir de (3.22), se deduce que $\bar{\omega}(x)$ no es admisible, ya que es singular en el conjunto nulo

$$\mathcal{N}_b := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) = 0\} \quad (3.25)$$

En [9], se demostró que la existencia, unicidad y la continuidad del control óptimo $\bar{\omega}(x)$ están garantizados, siempre que U pertenezca a la clase de todos los CVS compactos estrictamente convexos (ningun segmento de línea está contenida en ∂U) $U \subset \mathbb{R}^m$ con $0 \in \text{int}U$, denotado por $\mathcal{U}(\mathbb{R}^m)$. Especialmente, si se demostró que si $U \in \mathcal{U}(\mathbb{R}^m)$, entonces $\zeta_U(b)$ es $C^1(\mathbb{R}^m \setminus \{0\})$, y $\bar{\omega}(x)$ es un control de retroalimentación de tipo gradiente de la forma

$$\bar{\omega}(x) := \omega(b(x)), \text{ donde } \omega(b) = (\nabla \zeta_U(b))^T, \quad (3.26)$$

y $b(x)$ es dada por (2.22). Observamos que $\omega(b)$ es continuo para $b \neq 0$ y homogénea de grado 0. Por lo tanto, tenga en cuenta que si quitamos x , la ecuación (3.22) se convierte en el llamado teorema de Euler para funciones (positivamente) homogéneas: $b(\nabla \zeta_U(b))^T = \zeta_U(b)$.

Ahora, si $\zeta_U(b)$ es diferenciable en b , entonces la fórmula (3.26) sigue siendo válida. Por lo tanto, si $U = \text{conv}\{v_1, \dots, v_k\}$ -un politopo, entonces $\zeta_U(b)$ es lineal por pedazos, de modo que a partir de (3.26), $\omega(b)$ es constante en el interior de cada cono poliédrico $\text{int}C_i$, y singular en las superficies de cambio ∂C_i , para $i = 1, 2, \dots, k$, es decir

$$\omega(b) = (\nabla \zeta_U(b))^T = \begin{cases} v_1 & \text{si } b \in \text{int}C_1 \\ \vdots & \vdots \\ v_k & \text{si } b \in \text{int}C_k \end{cases} \quad (3.27)$$

Ahora consideremos la m -hipercaja $\mathcal{B}_r^m(\infty)$ definida en (12), con $r_j^- \geq 0$ y $r_j^+ > 0$, para toda $j = 1, 2, \dots, m$, tal que $0 \in \mathcal{B}_r^m(\infty)$. Recordemos que $\zeta_{\mathcal{B}_r^m(\infty)}(b) = \psi_{1,1/r}(b)$, la cual es una función definida positiva ssi $0 \in \text{int}\mathcal{B}_r^m(\infty)$, pero ésta sólo es semidefinida positiva si $0 \in \partial\mathcal{B}_r^m(\infty)$. Además, del teorema 6, tenemos que N_ζ es un $(m-d)$ -ortante en \mathbb{R}^m , siendo el cono normal de la d -cara F ($1 \leq d \leq m$) de $\mathcal{B}_r^m(\infty)$ tal que $0 \in \text{relint}F$. Por otro lado, si $F = \{0\}$ -un vértice, entonces tenemos la hipercaja positiva $\mathcal{B}_r^m(\infty)$, y $N_\zeta = \mathbb{R}^m$. En cualquier caso, de (3.26), obtenemos que es constante en cada uno de los 2^m ortantes abiertos \mathbb{R}^m . Por ejemplo, en el caso de $\mathcal{B}_r^m(\infty)$, si $b \in \mathbb{R}^m$, entonces $\omega(b) = 0$; o bien $\omega(b)|_{\mathbb{R}^m_-} = 0$. Además, las superficies de cambio N_j de $\omega(b)$ son los hiperplanos Cartesianos de \mathbb{R}^m , $N_j = \{b \in \mathbb{R}^m : b_j(x) = 0 \ \& \ b_i(x) \neq 0, i \neq j\}$, $j = 1, \dots, m$, y además $\cap N_j = \{0\}$.

Retomando la dependencia de la variable de estado $x \in \mathbb{R}^n$, con $b(x)$ definida en (2.22). Observe que el conjunto N_b dada por (3.25) se puede definir como la imagen inversa de 0 bajo la asignación $b(x)$, es decir, $\mathcal{N}_b = b^{-1}[0] = \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) = 0\}$. Análogamente, se define la representación del ortante correspondiente a cada vértice v_i de $\mathcal{B}_r^m(\infty)$, como $\mathcal{C}_i = b^{-1}[C_i] = \{x \in \mathbb{R}^n : b(x) \in C_i\}$, para $i = 1, \dots, 2^m$.

Ahora, denotamos la representación en \mathbb{R}^n de las superficies de cambio N_j de $\omega(b)$ -los hiperplanos cartesianos de \mathbb{R}^m , por

$$\mathcal{N}_j = b^{-1}[N_j] = \{x \in \mathbb{R}^n : b_j(x) = 0 \text{ \& } b_i(x) \neq 0, i \neq j\} \quad (3.28)$$

$j = 1, 2, \dots, m$, y el conjunto nulo de $\zeta_{\mathcal{B}_r^m(\infty)}(b)$ dado por (3.5), mediante

$$\mathcal{N}_\zeta = b^{-1}[N_\zeta] = \{x \in \mathbb{R}^n : \zeta_{\mathcal{B}_r^m(\infty)}(b(x)) = 0\}. \quad (26) \quad (3.29)$$

Observación 5.1. Tenemos que $\mathcal{N}_b = \cap \mathcal{N}_j$, y $\mathcal{N}_b \subseteq \mathcal{N}_\zeta$ con igualdad si $0 \in \text{int}U$. Sin embargo, con base en la Observación 2.2, tenemos que:

a) $\mathcal{N}_\zeta = b^{-1}(\mathbb{R}^m)$ siempre que 0 es un vértice de la hipercaja positiva; ó b) $\mathcal{N}_\zeta \subset \mathcal{N}_j$ para alguna j , siempre que $0 \in \text{relint}F$, para una d -cara de la hipercaja.

A partir de ahora, denotamos por $r_j(x) := r_j(b_j(x))$, con $r_j(\zeta_j)$ dado por (2.6), para $j = 1, \dots, m$, $\beta(x) := \psi_{1,1/r}(b(x))$ y $\bar{\omega}(x)$ es definido por (3.26)-(3.27). Sin embargo, es claro que $\bar{\omega}(x)$ es una función singular en $\cup_j \mathcal{N}_j$. En particular, para la hipercaja positiva $\mathcal{B}_r^m(\infty)$, tenemos que $\bar{\omega}(x)|_{\text{int}\mathcal{N}_\zeta} = 0$.

Supongamos que $V(x)$ es una CLF con respecto al sistema (3.1) con CVS $\mathcal{B}_r^m(\infty)$ conteniendo a 0. Entonces, con base en (3.22), y considerando el control óptimo $\bar{\omega}(x)$ definido por (3.26)-(3.27), tenemos que para toda $x \neq 0$,

$$\frac{dV}{dt} = a(x) - b(x)\bar{\omega} < 0 \text{ ssi } \alpha(x) < \beta(x) \quad (3.30)$$

Observación 5.2. De (3.30) para $x \neq 0$, si $\beta(x) \neq 0$, entonces $\alpha(x) < 0$. Más aún, $\beta(x) = 0$ ssi $x \in \mathcal{N}_\zeta$.

3.6. Un control de retroalimentación diseñado para la hipercaja

Sin embargo, puesto que el control óptimo $\bar{\omega}(x)$ es singular, se estudian las condiciones que deben satisfacer los controles de retroalimentación con el fin de que sea regular, tome sus valores en la m -hipercaja $\mathcal{B}_r^m(\infty)$ con $0 \in \mathcal{B}_r^m(\infty)$, produce que el sistema (3.1) sea GAS, bajo la condición de que sea conocida una CLF apropiada.

Ahora, suponiendo que U es un conjunto compacto y estrictamente convexo con $0 \in \text{int}U$, en [9] se consideró controles de realimentación general de la forma $u(x) = \rho(x)\bar{\omega}(x)$, donde $\rho(x)$ es una función de reescalamiento y $\bar{\omega}(x)$ es el control de mejor tasa. Sin embargo, el diseño sólo puede ocuparse de las singularidades del control $\bar{\omega}(x)$ en \mathcal{N}_b . De aquí en adelante, a raíz de [4], [11], proponemos controles de retroalimentación de forma *descentralizada*

$$u(x) := (u_1(x), \dots, u_m(x))^T, \quad \text{con } u_j(x) := \rho_j(x)\bar{\omega}_j(x), \quad (3.31)$$

para $j = 1, \dots, m$, donde $\bar{\omega}(x)$ es la función de control definida por la composición de $\omega(b)$ dada por (2.29) y $b(x)$ dada por (2.22), y $\rho(x) = (\rho_1(x), \dots, \rho_m(x))$ es una *función vectorial de reescalamiento* por determinar. Por lo tanto, el esquema de control (3.31) se utiliza para abordar la estabilización CLF global de (3.1) a través de controles de retroalimentación que toman valores en $\mathcal{B}_r^m(\infty)$, ya sea con $0 \in \text{int}\mathcal{B}_r^m(\infty)$ ó si $0 \in \partial\mathcal{B}_r^m(\infty)$.

En el capítulo II establecimos que las condiciones para $\rho(x)$, enunciadas en la hipótesis H, son suficientes para garantizar la existencia de un control de retroalimentación admisible $u(x)$ de la forma (3.31) para que el sistema (3.1)- (3.31) sea GAS.

Supongamos que $\rho(x)$ garantiza la existencia de un control de retroalimentación *admisibles* $u(x)$ ($u(x) \in \mathcal{U}$) de la forma (2.32) tal que el sistema a lazo cerrado resultante (3.1)-(2.32) es GAS.

Hipótesis H. Supongamos que $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función regular tal que

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq \rho_j(x) \leq 1$, para $j = 1, \dots, m$.

(ii) $\rho_j(x) = 0$ ssi $x \in \mathcal{N}_j$, para $j = 1, \dots, m$, y

(iii) $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}, \|\rho(x)\|_\infty > \frac{a(x)}{\beta(x)}$.

El siguiente teorema establece la suficiencia de la hipótesis **H** para tener estabilización.

Teorema 7. Supongamos que $V(x)$ es una CLF [con respecto al sistema (3.1) y el CVS es la hipercaja $\mathcal{B}_r^m(\infty)$, con $0 \in \mathcal{B}_r^m(\infty)$] y satisface la propiedad SCP, $\bar{w}(x)$ es el control de retroalimentación con mejor tasa dado por (2.29) y $\rho : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función continua que satisface la *Hipótesis H*. Entonces, el control de retroalimentación $u(x)$ definido en (2.32) es admisible ($u(x) \in \mathcal{U}$) y hace que el sistema (3.1) sea GAS.

Prueba. En primer lugar, tenemos que $u(x)$ dada por (3.31) es admisible: De hecho, a partir de la condición (i) tenemos que

$$u_j(x) = \rho_j(x)\bar{w}_j(x) = \rho_j(x)r_j \text{sign}b_j$$

es equivalente a

$$\begin{aligned} -r_j^- &\leq -r_j^- \rho_j(x) && \text{si } b_j < 0 \\ r_j^+ \rho_j(x) &\leq r_j^+ && \text{si } b_j > 0 \end{aligned}$$

tal que $u_j(x)$ está restringido a $[-r_j^-, r_j^+]$, para $j = 1, \dots, m$. Así que $u(x)$ toma valores en $\mathcal{B}_r^m(\infty)$.

Además, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \cup_j \mathcal{N}_j$ tenemos que ambos, $\rho(x)$ y $\bar{w}(x)$, son continuos (recordemos que $\bar{w}(x)$ es constante en cada ortante abierto) de manera que $u(x)$ es continuo. En el caso $x \in \mathcal{N}_j$, ya que $\rho_j(x)$ es continuo y $\bar{w}_j(x) = r_j(x) \text{sign}b_j(x)$ es acotada, entonces de la SCP y condición (ii) se deduce que $\forall x^* \in \mathcal{N}_j$, para $j = 1, \dots, m$,

$$0 \leq \lim_{x \rightarrow x^*} |u_j(x)| = \lim_{x \rightarrow x^*} \rho_j(x) |\bar{w}_j(x)| = 0,$$

entonces cada entrada $u_j(x)$ es continua en \mathcal{N}_j y $u_j(x)|_{\mathcal{N}_j} = 0$. Con base en la observación 5.1, observamos que la regularidad de $u(x)$ en el conjunto nulo \mathcal{N}_ζ ya se ha abordado anteriormente: ya sea que $\mathcal{N}_\zeta \subset \mathcal{N}_j$ para alguna j , ó $\mathcal{N}_\zeta = b^{-1}(\mathbb{R}_-^m)$.

Por último, se muestra que el sistema de lazo cerrado es GAS:

(a) Si $x \in \mathcal{N}_\zeta \setminus \{0\}$, entonces de la observación 5.2 se deduce que $a(x) < 0$ y $u(x)|_{\mathcal{N}_\zeta} = 0$. Por lo tanto, tenemos que

$$dV/dt = a(x) - b(x)u(x) = a(x) < 0 \quad \forall x \in \mathcal{N}_\zeta \setminus \{0\}.$$

(b) Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{N}_\zeta$, entonces existe al menos una j , $1 \leq j \leq m$, tal que $b_j(x) \neq 0$. Entonces, de la proposición 1, las definiciones de $\beta(x)$ y $u(x)$, y condición (iii) obtenemos que

$$\begin{aligned} dV/dt &= a(x) - b(x)u(x) < 0 \quad \text{ssi} \\ a(x) &< \psi_{1,1/r}(b)\psi_{\infty,r}(\rho_1(x)\bar{w}_1(x), \dots, \rho_m(x)\bar{w}_m(x)) \\ &\leq \beta(x) \|\rho(x)\|_\infty \psi_{\infty,r}(\bar{w}(x)) = \beta(x) \|\rho(x)\|_\infty, \end{aligned}$$

donde $\|\rho(x)\|_\infty = \max_j \rho_j(x)$. Por consiguiente, $dV/dt < 0$, $x \neq 0$.

3.7. La fórmula explícita de control de retroalimentación con respecto a la hipercaja positiva

Respecto a la familia de controles (2.34) restringido a CVS $\mathcal{B}_r^m(\infty)$, observamos que presenta una ventaja adicional: Por un lado, conduce a usar casi todo el recurso de control disponible, ya que puede tomar valores tan cerca como se desee de la frontera del CVS $\mathcal{B}_r^m(\infty)$ y también puede ser aplicado al caso de entradas de control signados / positivos.

Lema 3.1 *Supongamos que $V(x)$ es una CLF [con respecto al sistema (3.1) con controles tomando valores en la hipercaja U] y satisface la propiedad SCP. Entonces el límite $\lim_{\beta(x) \rightarrow 0} \frac{a(x) + |a(x)|}{2\beta(x)} = 0$ se cumple.*

Cabe mencionar que el lema , es válido aún si $0 \in \partial\mathcal{B}_r^m(\infty)$; es decir, el límite

$$\lim_{\beta(x) \rightarrow 0} \frac{a(x) + |a(x)|}{2\beta(x)} = 0$$

se cumple.

De manera que para extender el teorema (expuesto en el capítulo anterior) al caso $0 \in \partial\mathcal{B}_r^m(\infty)$, fue agregada la observación 8. De manera que se puede utilizar en el caso cuando 0 esta en la frontera del CVS $\mathcal{B}_r^m(\infty)$ (en particular, controles positivos). Tal que si $r_j^- = 0$ para alguna j , la función $\zeta_U(b)$ es sólo semidefinida positiva. Entonces, no es posible garantizar que el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a(x)}{\beta(x)} = 0$$

se satisfage. Por lo tanto, al suponer que este límite se cumple, tenemos que la fórmula del control (2.34)-(2.35) produce que tales sistemas sean GAS con respecto al CVS dado por las hipercajas $\mathcal{B}_r^m(\infty)$ que contienen al 0, i.e. con componentes de las entradas del control signadas/positivas.

Conclusiones y trabajo futuro respecto a la hipercaja positiva

En general, estudiamos el problema de controlabilidad y estabilización con control positivo; mostramos que tales problemas son cualitativamente diferentes. Es decir, los teoremas correspondientes requieren condiciones adicionales para tener la controlabilidad y estabilización. En el capítulo uno abordamos el problema de síntesis para lograr la estabilización de sistemas lineales controlables con control positivo. En los capítulo siguientes abordamos el problema de la estabilización CLF global de sistemas afines con control restringido a politopos (CVS); en particular la familia de hipercajas $\mathcal{B}_r^m(\infty)$ como CVS, con $0 \in \mathcal{B}_r^m(\infty)$. Primero mostramos que para una m -hipercaja, el control $\bar{\omega}(x)$ es constante por pedazos, con superficies de cambio \mathcal{N}_j definidas en (3.28) como conjunto de nivel. Ya que el control $\bar{\omega}(x)$ no es admisible por ser discontinuo.

Prestamos especial atención al caso cuando $0 \in \partial\mathcal{B}_r^m(\infty)$, y en particular a los controles positivos. De manera que generalizamos el diseño de la fórmula explícita para controles de retroalimentación presentada en el capítulo II para incluir el caso $0 \in \partial\mathcal{B}_r^m(\infty)$. En el siguiente capítulo mostraremos que el diseño explícito $u^\varepsilon(x)$, dado por (2.34)-(2.35), tiene la propiedad de ser una *función de control robusta marginalmente*; tal que representa una familia de controladores continuos $u^\varepsilon(x)$ que se aproxima (para valores grandes de ε) al control que optimiza el *Margen de Estabilidad Robusta* (RSM).

Para futuras investigaciones falta una generalización de los resultados expuestos para los politopos U como CVS, con $0 \in U$, y el diseño correspondiente de una fórmula de control explícito restringido a U (con componentes de entrada signados/ positivos) tal que el sistema (3.1) es GAS.

Capítulo 4

Margen de estabilidad robusta

En las aplicaciones, es necesario que los controles estabilizantes sean eficientes a pesar de incertidumbres no consideradas en el modelado. En el presente trabajo mostramos que la función de retroalimentación presentado en el capítulo II tiene la propiedad de robustez conocida como *margen de estabilidad robusta* (RSM), donde el margen de robustez es el máximo nivel de variación que puede presentar una incertidumbre sin que el sistema se vuelva inestable. A continuación mostraremos que el control (2.34) tiene propiedades de robustez. De hecho, vamos a demostrar que el sistema en lazo cerrado (2.1)-(2.34) tiene la propiedad RSM.

4.1. Definición y prueba de la propiedad RSM

el siguiente sistema con una dinámica de incertidumbre

$$\dot{x} = f(x) + \Delta f,$$

donde $\|\Delta f\|_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : \sup \|\Delta f(x)\|\}$ es acotada. El *margen de estabilidad robusta* γ es definido como el tamaño de la menor perturbación desestabilizante, *i.e.*

$$\gamma = \inf \{ \|\Delta f\|_\infty : \text{el sistema no es GAS} \}.$$

Un método para aproximar el margen de estabilidad robusta se basa en la existencia de una función de Lyapunov $V(x)$ para el sistema nominal $\dot{x} = f(x)$ tal que $L_f V(x) < 0$, $\forall x \neq 0$. Dado un sistema afín (2.1), suponemos que existe una CLF $V(x)$ para el CVS $U = [-r_1^-, r_1^+] \times \cdots \times [-r_m^-, r_m^+]$ -una hipercaja m -dimensional.

Dada una función de control de retroalimentación $u(x)$ que satisface $a(x) - b(x) \cdot u(x) < 0$, donde $a(x) := L_f V(x)$ y $b(x) := (b_1(x), \dots, b_m(x))$, con $b_j(x) := -L_{g_j} V(x)$ para $j = 1, \dots, m$, el correspondiente RSM está definido como la función (ver [37]):

$$\gamma_V = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \inf - \frac{a(x) - b(x) \cdot u(x)}{\|\nabla V(x)\|} \right\}, \quad \forall x \neq 0.$$

Es fácil demostrar que si $\|\Delta f(x)\| \leq \gamma_V(x)$, entonces el sistema

$$\dot{x} = f(x) + \Delta f + \sum_{j=1}^m g_j(x) u_j,$$

es estable de manera robusta.

Una pregunta que surge naturalmente es: cuál es el control que maximiza el margen de estabilidad robusta asociado a la función de Lyapunov $V(x)$?. El control acotado óptimo $\bar{\omega}(x)$, satisface la ecuación

$$\begin{aligned} \inf_{u \in \mathcal{U}} \{a(x) - b(x) \cdot u\} &= a(x) - b(x) \cdot \bar{\omega}(x) \\ &= a(x) - \beta(x) \end{aligned}$$

También maximiza el margen de estabilidad robusta $\gamma_V(x)$, y tiene la siguiente expresión

$$\begin{aligned} \bar{\omega}(x) &= (\bar{\omega}_1(x), \dots, \bar{\omega}_m(x))^\top \\ &= (r_1 \text{sign}(b_1(x)), \dots, r_m \text{sign}(b_m(x)))^\top \end{aligned}$$

definida por $b_j(x) \neq 0, j = 1, \dots, m$. Entonces,

$$\gamma_V^*(x) = -\frac{a(x) - b(x) \cdot \bar{\omega}(x)}{\|\nabla V(x)\|} = -\frac{a(x) - \beta(x)}{\|\nabla V(x)\|}.$$

Entonces, para cualquier control subóptimo $u^\varepsilon(x)$, tenemos que

$$a(x) - \beta(x) < a(x) - b(x) \cdot u^\varepsilon(x) < 0, \forall x \neq 0.$$

Por lo tanto,

$$0 < \gamma_{\varepsilon V}(x) := -\frac{a(x) - b(x) \cdot u^\varepsilon(x)}{\|\nabla V(x)\|} \leq \gamma_V^*(x).$$

El control diseñado subóptimo $u^\varepsilon(x)$ satisface lo siguiente

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \gamma_{\varepsilon V}(x) = \gamma_V^*(x),$$

ya que para cada $j = 1, \dots, m$ tenemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} u_j^\varepsilon(x) = \bar{\omega}_j(x),$$

si $b_j(x) \neq 0$. La retroalimentación $u^\varepsilon(x)$ se acerca al valor de control óptimo para valores grandes del parámetro ε .

Con base en la desigualdad

$$\|\Delta f(x)\| \leq \gamma_{\varepsilon V}(x) \leq \gamma_V^*(x)$$

para tener estabilidad robusta, es evidente que el *margen de diseño* para el control subóptimo $u^\varepsilon(x)$ está dada por la diferencia $\gamma_V^*(x) - \|\Delta f(x)\|$. Por lo que si $\gamma_V^*(x) - \|\Delta f(x)\| = 0$, entonces no existe un control estabilizante robusto.

Otro enfoque para la robustez marginal para el sistema de lazo cerrado consiste en la *velocidad de convergencia* que nos proporciona el límite

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \dot{V} = \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \{a(x) - b(x) \cdot u(x)\}.$$

Si $dV/dt \rightarrow 0$ cuando $\|x\| \rightarrow \infty$, entonces el sistema a lazo cerrado no es *robusto*.

Para el caso del mejor control $\bar{\omega}(x)$, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \dot{V} &= \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \{a(x) - b(x) \cdot \bar{\omega}(x)\} \\ &= \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \{a(x) - \beta(x)\}.\end{aligned}$$

Diremos que un control subóptimo $u^\varepsilon(x)$ está *bien diseñado*, de acuerdo con el enfoque del desempeño del *margen de estabilidad robusta*, si el límite

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \{a(x) - b(x) \cdot u^\varepsilon(x)\}$$

es aproximado (o igual) al límite

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \{a(x) - \beta(x)\}.$$

4.2. Ejemplos y observaciones

Los siguientes ejemplos ilustran el diseño de control de estabilización propuesto en este trabajo.

Ejemplo 1. Considere el sistema unidimensional

$$\dot{x} = \frac{x^2}{1+x^2} - u,$$

con CVS $U = [0, r^+]$. Sea $V = \frac{1}{2}x^2$, tal que $a(x) = L_f V = \frac{x^3}{1+x^2}$, $b(x) = L_g V = -x$, y V es una clf ya

y $r^+ \geq 1$ donde $r = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ r^+, & \text{si } x > 0. \end{cases}$. La función de retroalimentación es dada por

$$\begin{aligned}u(a, b) &= \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1 - \lambda(a, b)^{1+\lambda^{-1}(a, b)} \exp(-\varepsilon x), & \text{si } x \geq 0, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1+x^2)^{-(1+x^2)} \exp(-\varepsilon x), & \text{si } x \geq 0, \end{cases}\end{aligned}$$

donde $\lambda(a, b) = 1 - \frac{x^2}{1+x^2}$. Observe que $u_\varepsilon(x)$ es Lipschitz-continua en x . El control con mejor tasa es dado por

$$\bar{\omega}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ r^+, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

de forma que $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} u_\varepsilon(x) = \bar{\omega}(x)$ si $b(x) \neq 0$. Además, con $u_\varepsilon(x)$ tenemos que $\dot{V} \rightarrow 0$ ssi $r^+ \geq 1$.

Por lo tanto, $\dot{V} \rightarrow 0$ con $u^\varepsilon(x)$. El correspondiente RSM es

$$\gamma_{\varepsilon V}(x) = u^\varepsilon(x) - \frac{x^2}{1+x^2}, \quad \text{para } x > 0,$$

de modo que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \gamma_{\varepsilon V}(x) = \gamma_V^*(x) = r^+ - \frac{x^2}{1+x^2}.$$

La *velocidad de convergencia* que nos proporciona el límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \dot{V} = \lim_{x \rightarrow \infty} \{a(x) - b(x)u^\varepsilon(x)\} = \lim_{x \rightarrow \infty} x(1-r^+)$$

y para el control de mejor tasa tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{a(x) - b(x)\bar{w}(x)\} = \lim_{x \rightarrow \infty} x(1-r^+)$$

Por lo tanto, $\dot{V} \rightarrow 0$ como $x \rightarrow \infty$ ssi $r^+ = 1$ para cualquier retroalimentación.

Acerca de la diferenciabilidad de la función $u^\varepsilon(x)$, observemos que la función

$$|b(x)|r = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ x, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

no es diferenciable en $x = 0$, pero es real analítica en el conjunto abierto $(0, \infty)$. \square

Ejemplo 2. Como un ejemplo de control positivo multivariable basado en la Observación 8, consideremos el siguiente sistema con dos entradas:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} - u_1 \\ \dot{y} &= \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} - u_2 \end{aligned} \quad (4.1)$$

con restricción $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$. Consideremos $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ como una candidata a CLF. Así, tenemos que

$$a(x, y) := L_f V = x \left(\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \right) + y \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$$

$$b := (b_1, b_2), \quad b_1 = L_{g_1} V = -x, \quad b_2 = L_{g_2} V = -y.$$

El siguiente control de retroalimentación acotado y positivo estabiliza globalmente el sistema (4.1):

$$u_1^\varepsilon(x, y) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{x}{x+y} \left(\frac{a}{\beta}\right)\right) \exp(\tau_1 \frac{x}{x+y}), & \text{si } x > 0 \text{ y } y > 0, \\ 1 - \lambda(a, b)^{\left(1 + \frac{1}{\lambda(a, b)}\right)} \exp(-\varepsilon x), & \text{si } x > 0 \text{ y } y \leq 0, \\ 0, & \text{si } x \leq 0, \end{cases}$$

y de manera similar

$$u_2^\varepsilon(x, y) = \begin{cases} 1 - \left(1 - \frac{y}{x+y} \left(\frac{a}{\beta}\right)\right) \exp(\tau_2 \frac{y}{x+y}), & \text{si } x > 0 \text{ y } y > 0, \\ 1 - \lambda(a, b)^{\left(1 + \frac{1}{\lambda(a, b)}\right)} \exp(-\varepsilon y), & \text{si } x \leq 0 \text{ y } y > 0, \\ 0, & \text{si } y \leq 0, \end{cases}$$

donde $\lambda(x) = 1 - \frac{1}{2}(|a| + a)/\beta$, $\varepsilon > 0$ es una constante y

$$r_1 = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0, \\ 0, & \text{si } x \leq 0, \end{cases} \quad \text{y} \quad r_2 = \begin{cases} 1, & \text{si } y > 0, \\ 0, & \text{si } y \leq 0, \end{cases}$$

donde $\beta(x, y) = |b_1(x, y)|r_1 + |b_2(x, y)|r_2$. Además, es fácil ver que $\inf_{u \in U} \dot{V} = a - \beta < 0$, para toda $(x, y) \neq (0, 0)$. Por lo tanto, el punto de equilibrio $x = 0$ resulta ser global asintóticamente estable en el sistema a lazo cerrado. Un cálculo sencillo muestra que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{a(x,y)}{\beta(x,y)} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \left(\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \right) + y \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}}{|x|r_1 + |y|r_2} = 0,$$

lo que implica que $V(x)$ satisface la propiedad SCP (ver Observación 8). Por consiguiente, $V(x)$ es una CLF [para este sistema con controles tomando valores en $[0, 1]^2$] satisface la propiedad SCP. Este ejemplo ilustra un sistema inestable a lazo abierto, que puede ser estabilizado globalmente (GAS) con controles positivos y continuos. \square

Ejemplo 3. Considere el sistema afín que representa el problema de la estabilización de la velocidad angular de una nave espacial rígida, ver [28]. Las ecuaciones dinámicas para el problema no simétrico son

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{23}x_2x_3 \\ I_{31}x_3x_1 \\ I_{12}x_1x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{I_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

con $(u_1, u_2, u_3) \in U := [-1, 1]^3$. Los momentos principales de inercia de la nave espacial rígida son, $I_{23} = \frac{I_2 - I_3}{I_1}$, $I_{31} = \frac{I_3 - I_1}{I_2}$, $I_{12} = \frac{I_1 - I_2}{I_3}$. Consideremos la función $V = \frac{1}{2} (I_1 x_1^2 + I_2 x_2^2 + I_3 x_3^2)$ como candidata a CLF. Así, tenemos que

$$a(x_1, x_2, x_3) \equiv 0$$

$$b := (b_1, b_2, b_3), \quad b_1 = L_{g_1} V = x_1, \quad b_2 = L_{g_2} V = x_2, \quad b_3 = L_{g_3} V = x_3.$$

Del caso 1 de la Observación 6 ($a \leq 0$ y $|b_j| r_j \geq 0$), la siguiente ε -familia de funciones de retroalimentación acotadas

$$u_j^\varepsilon(x) = \begin{cases} -\text{sign}(x_j) \rho_j(x) & \text{si } x_j \neq 0, \\ 0, & \text{si } x_j = 0, \end{cases}$$

estabiliza globalmente el sistema, donde

$$\rho_j = 1 - e^{-\varepsilon \frac{|b_j|^2 r_j^2}{\beta}} = 1 - \exp\left(-\varepsilon \frac{|x_j|^2}{\beta}\right),$$

con $\beta = |x_1| + |x_2| + |x_3|$, $r_1 = r_2 = r_3 = 1$ y $\varepsilon > 0$. Ya que $a \equiv 0$, obtenemos que

$$\inf_{u \in U} \dot{V} = a - \beta = -\beta < 0, \text{ para toda } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0).$$

Para cada j es fácil mostrar que la función $u_j^\varepsilon(x)$ es Lipschitz-continua en $x_j = 0$, mientras que si $x_j \neq 0$, entonces $\rho_j(x)$ es de clase \mathcal{C}^1 . \square

Hemos estudiado el problema de diseñar una *función de control robusta marginalmente*, y mostramos que la familia de controladores continuos $u^\varepsilon(x)$, dada por (2.34), aproxima (para valores grandes de ε) el control que optimiza el RSM. Incluimos el problema de la CLF-estabilización con controles positivos y damos ejemplos.

Capítulo 5

CLF-Estabilización con CVS dados por subconjuntos convexos contenidos en la hipercaja

El problema de síntesis que implica el teorema de Artstein es difícil de resolver. En [51], E. Sontag propuso el problema "encontrar fórmulas universales para la CLF estabilización para el caso general de CVS convexos". Considerando los CVS estrictamente convexos, en los capítulos II y III presentamos una fórmula para el problema de estabilización de un sistema afín donde se considera a la hipercaja como CVS. En este capítulo abordamos el problema de síntesis para el caso donde los CVS son hipertetraedros contenidos en la hipercaja.

5.1. Controles restringidos a un hipertetraedro

Dado el sistema afín

$$\dot{x} = f(x) + \sum_{j=1}^m u_j g_j(x), \quad (5.1)$$

con control $u = (u_1, \dots, u_m)^T$ restringido al CVS representado por la hipercaja

$$U = \mathcal{B}_r^m(\infty) := [-r_1^-, r_1^+] \times \dots \times [-r_m^-, r_m^+] \subset \mathbb{R}^m,$$

con $r_j^- \geq 0$ y $r_j^+ > 0$, para toda $j = 1, \dots, m$, que incluye el caso de controles positivos. Dada una función norma, $\phi(u) := \|u\|$, tal que $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}_+$, podemos definir el conjunto $U_\phi := \{u \in \mathcal{B}_r^m(\infty) / \phi(u) \leq 1\}$ y considerarlo como un nuevo CVS, donde $U_\phi \subset U$. Podemos preguntarnos por los sistemas afines estabilizables con controles admisibles restringidos al CVS U_ϕ .

Por ejemplo, consideremos el CVS $U^+ = \mathcal{B}_r^m(\infty) = [0, r_1] \times \dots \times [0, r_m] \subset \mathbb{R}_+^m$, con $r_j > 0$, y escogiendo $\phi(u) := \|u\|_T = \frac{u_1}{r_1} + \frac{u_2}{r_2} + \dots + \frac{u_m}{r_m}$, entonces podemos definir el conjunto $U_T = \{u \in U^+ \subset \mathbb{R}^m / \phi(u) \leq 1\}$ que representa un hipertetraedro contenido en la hipercaja positiva $\mathcal{B}_r^m(\infty)$.

Con base en el diseño de la función admisible y estabilizante $u_\varepsilon(x) = \rho(x)\bar{w}(x) \in U$, presentado en los capítulos anteriores para resolver el problema de estabilización de (5.1), definimos una función continua $v(x)$ restringido al conjunto U_ϕ , como sigue

$$v(x) = \begin{cases} u_\varepsilon(x) & \text{si } \phi(u_\varepsilon(x)) \leq 1 \\ \frac{1}{\phi(u_\varepsilon)} u_\varepsilon(x) & \text{si } \phi(u_\varepsilon(x)) \geq 1 \end{cases}, \quad u_\varepsilon \in U. \quad (5.2)$$

de manera que $v \in U_\phi = \{u \in \mathcal{B}_r^m(\infty) / \phi(u) \leq 1\}$, ya que $\phi(v) \leq 1$.

Semejante al sistema (5.1), consideremos el problema de estabilización del sistema

$$\dot{x} = \frac{1}{m} f(x) + \sum_{j=1}^m v_j g_j(x), \quad (5.3)$$

Proposición. Dado un sistema afín con las propiedades CLF y SCP en U , entonces el control $v(x)$, dado por (5.2) es admisible con CVS U_ϕ y el sistema retroalimentado (5.2) – (5.3) es global asintóticamente estable.

Demostración

La continuidad de (5.2) es inmediata, ya que si $\phi(u) \leq 1$, entonces $v(x) = u(x)$. Si $\phi(u) > 1$, la función cociente $\frac{u_i(x)}{\phi(u(x))}$, $i = 1, \dots, m$, es continua.

Sea $m > 0$, tal que $1 \leq \max_U \phi(u) \leq m$; consideremos los casos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \phi(u) \leq 1 && \text{para } u \in U_\phi \\ \text{y } 1 &\leq \phi(u) \leq m && \text{para } u \in U \setminus U_\phi \end{aligned}$$

la segunda desigualdad implica que

$$\frac{1}{m} \leq \frac{1}{\phi(u)} \leq 1$$

de manera que al considerar

$$\dot{V} = a(x) + b_1(x) u_1(x) + \dots + b_m(x) u_m(x) < 0 \quad \text{para } u(x) \in U \text{ y } x \neq 0$$

tenemos que

$$\frac{\dot{V}}{\phi(u)} = \frac{a(x)}{\phi(u)} + \frac{b_1(x) u_1(x)}{\phi(u)} + \dots + \frac{b_m(x) u_m(x)}{\phi(u)} < 0,$$

por lo tanto, para el caso $a(x) \geq 0$, tenemos que

$$\frac{a(x)}{m} + \frac{b_1(x) u_1(x)}{\phi(u)} + \dots + \frac{b_m(x) u_m(x)}{\phi(u)} \leq \frac{\dot{V}}{\phi(u)} < 0,$$

por lo que tenemos la estabilidad global del sistema retroalimentado (5.2)-(5.3).

Observamos que para $u \in \mathcal{B}_r^m(\infty)$, con $\phi(u) \geq 1$, entonces

$$v = \frac{1}{\phi(u)} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \in \partial U_T.$$

Para el caso $0 \in \partial U$ necesitamos suponer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$; una vez que $u_\varepsilon(x)$ es continua, la continuidad de $v(x)$ es inmediata.

5.2. Ejemplos

Ejemplo 1

En particular, abordemos el problema de estabilizar el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{1}{2} \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} - v_1 \\ \dot{y} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} - v_2\end{aligned}\tag{5.4}$$

con control admisible v restringido al CVS representado por el politopo

$$U_T = \left\{ u \in \mathbb{R}_+^2 / \phi(u) \leq 1 \right\},$$

donde $\phi(u) = \frac{u_1}{r_1^+} + \frac{u_2}{r_2^+} = u_1 + u_2$.

Para resolver el problema anterior consideremos el sistema (5.4), donde presentamos la solución $u_\varepsilon(x) \in U_R := [0, r_1^+] \times [0, r_2^+]$ al problema de estabilizar el sistema afin definido en el plano

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} - u_1 \\ \dot{y} &= \sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}} - u_2\end{aligned}\tag{5.5}$$

con restricción $(u_1, u_2) \in [0, 1]^2$. De manera que la función de retroalimentación

$$v(x) = \begin{cases} u_\varepsilon(x) & \text{si } u_{\varepsilon 1} + u_{\varepsilon 2} \leq 1 \\ \frac{1}{u_{\varepsilon 1}(x) + u_{\varepsilon 2}(x)} u_\varepsilon(x) & \text{si } u_{\varepsilon 1} + u_{\varepsilon 2} \geq 1 \end{cases},$$

es admisible ($v(x)$ es continuo y pertenece al triángulo U_ϕ) tal que el sistema retroalimentado (5.4) con $v(x)$ es global asintóticamente estable.

Observación. Para este ejemplo (5.4), podemos definir otro conjunto retricción:

$$U_S = \left\{ u \in \mathbb{R}_+^2 / \phi_2(u) \leq 1 \right\},$$

donde $\phi_2(u) := u_1^2 + u_2^2$. Tal que para $\phi_2(u) \geq 1$, es decir $2 \geq \phi_2(u) \geq 1$, implica que

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{\phi_2(u)} \leq 1,$$

de manera que $U_\phi \subset U_S \subset U^+$. La función $\phi(u)$ que determina el nuevo CVS U_ϕ no necesariamente debe ser una norma; con ser continua en la hipercaja $\mathcal{B}_r^m(\infty)$ y $\phi(u) = 1$ para $u \in \partial U_\phi$ positiva en el conjunto deferencia $\mathcal{B}_r^m(\infty) \setminus U_\phi$

Ejemplo 2

En el siguiente ejemplo consideramos como CVS al triángulo

$$U_T := \text{conv} \left\{ (-\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, 1), (0, -2) \right\}$$

estudiado en el capítulo 4. Consideremos el problema de estabilizar el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{2\sqrt{3}}{5} \frac{x_2}{1+x_2^2} + v_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{2}{5} \frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{2}{5} \frac{x_2^2}{1+x_2^2} + v_2\end{aligned}\tag{5.6}$$

mediante entradas admisibles $v = (v_1, v_2)$ restringida al triángulo U_T . Observamos que el sistema a lazo abierto es inestable con el cono positivo \mathbb{R}_+^2 invariante.

Observación.

La función

$$\phi(u) = \phi(u_1, u_2) = \frac{\sqrt{3}|u_1| - u_2}{2}$$

definida para $(u_1, u_2) \in U := [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \times [-2, 1]$, tiene las siguientes características:

- (a) Si $u \in U \setminus U_T$, entonces $\phi(u) \geq 1$;
- (b) Si $u \in U_T$, entonces $\phi(u) \leq 1$;
- (c) $\{u \in U_T \text{ \& } \phi(u) = 1\} \Rightarrow u \in \partial U_\phi$ (la implicación inversa no es cierta: $\phi(u) = 1 \not\Leftarrow u \in \partial U_\phi$);
- (d) $\phi(u)$ es continua;
- (e) $\max_{u \in U} \phi(u_1, u_2) = \phi(\pm\sqrt{3}, -2) = \frac{5}{2}$;
- (f) El triángulo $U_\phi \subset U$ puede representarse como

$$U_\phi = \left\{ (u_1, u_2) \in U : \frac{\sqrt{3}|u_1| - u_2}{2} \leq 1 \right\}.$$

Como consecuencia, si $u \in U \setminus U_\phi$, tal que $\phi(u) \geq 1$, entonces $\frac{u}{\phi(u)} \in \partial U_T$, ya que $\phi\left(\frac{u}{\phi(u)}\right) = 1$.

Considerando los resultados expuestos en los capítulos anteriores, resolveremos primero el problema de estabilizar mediante funciones admisibles el sistema

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sqrt{3} \frac{x_2}{1+x_2^2} + u_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2^2}{1+x_2^2} + u_2\end{aligned}$$

con CVS el rectángulo $U_R := [-\sqrt{3}, \sqrt{3}] \times [-2, 1]$. Al considerar $V = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, entonces

$$\dot{V} = x_1 \left(\sqrt{3} \frac{x_2}{1+x_2^2} + u_1 \right) + x_2 \left(\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2^2}{1+x_2^2} + u_2 \right)$$

tal que tenemos la *tasa de decaimiento* CLF

$$\inf_{u_1, u_2} \dot{V} = a(x) - b_1 \bar{\omega}_1 - b_2 \bar{\omega}_2 = a(x) - \beta(x) < 0 \text{ para } x \neq 0,$$

donde los controles con mejor tasa, $\bar{\omega}_1$ y $\bar{\omega}_2$, son

$$\bar{\omega}_1(x) = \begin{cases} \sqrt{3} & \text{si } x_1 < 0 \\ -\sqrt{3} & \text{si } x_1 > 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \bar{\omega}_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } x_2 < 0 \\ -2 & \text{si } x_2 > 0 \end{cases}$$

además se cumple la propiedad SCP, ya que

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{a(x_1, x_2)}{\beta(x_1, x_2)} = \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0,0)} \frac{x_1 \left(\frac{\sqrt{3} x_2}{1+x_2^2} \right) + x_2 \left(\frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{x_2^2}{1+x_2^2} \right)}{\sqrt{3}|x_1| + |x_2|r_2} = 0$$

por lo tanto, podemos considerar el diseño estabilizante $u_\varepsilon(x) = (u_{1\varepsilon}(x_1, x_2), u_{2\varepsilon}(x_1, x_2)) \in U_R$, tal que

$$\dot{V} = a(x) + b_1 u_{1\varepsilon}(x) + b_2 u_{2\varepsilon}(x) < 0 \text{ para } x \neq 0, \quad (5.7)$$

de manera que mediante la función $\phi(u)$, con $u \in U_R$, definimos la función continua

$$v(x) = \begin{cases} u_\varepsilon(x) & \text{si } \phi(u_\varepsilon(x)) \leq 1 \\ \frac{1}{\phi(u_\varepsilon(x))} u_\varepsilon(x) & \text{si } \phi(u_\varepsilon(x)) \geq 1 \end{cases} \quad (5.8)$$

o equivalentemente

$$v(x) = \begin{cases} u_\varepsilon(x) & \text{si } u_\varepsilon(x) \in U_T \\ \frac{1}{\phi(u_\varepsilon(x))} u_\varepsilon(x) & \text{si } u_\varepsilon(x) \in U \setminus U_T \end{cases}$$

de forma que $v(x) \in U_T$; de manera que $v(x)$ es admisible; probaremos ahora que estabiliza globalmente el sistema

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{2\sqrt{3}}{5} \frac{x_2}{1+x_2^2} + v_1 \\ \dot{x}_2 &= \frac{2}{5} \frac{x_1}{1+x_1^2} + \frac{2}{5} \frac{x_1^2}{1+x_2^2} + v_2 \end{aligned} .$$

Considerando la función $k(x) := \frac{\sqrt{3}|u_1(x)| - u_2(x)}{2}$, de forma que

$$1 \leq k(x) := \frac{\sqrt{3}|u_1(x)| - u_2(x)}{2} \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} \leq \frac{1}{k(x)} \leq 1$$

de la desigualdad (5.7), tenemos que

$$\begin{aligned} & \frac{2}{5} a(x) + b_1 \frac{1}{k(x)} u_1(x) + b_2 \frac{1}{k(x)} u_1(x) \\ & \leq \frac{1}{k(x)} a(x) + b_1 \frac{1}{k(x)} u_1(x) + b_2 \frac{1}{k(x)} u_1(x) < 0 \text{ para } x \neq 0, \end{aligned}$$

de manera que el sistema a lazo cerrado es GAS.

5.3. Controlabilidad y CLF estabilización local de un sistema lineal con control positivo.

5.3.1. Controlabilidad con control positivo

Con base en las condiciones necesarias y suficientes establecidas en el teorema de R.F. Brammer para caracterizar la controlabilidad con control positivo de un sistema lineal definido en el

plano, presento un diseño de control admisible (continuo y restringido) para estabilizar globalmente un sistema definido en el plano. Para el mismo ejemplo de sistema lineal, presento un segundo diseño de control admisible bajo las condiciones de estabilización CLF establecida por Zvi Artstein, de manera que al suponer un control acotado, logramos un estabilizador local.

Consideremos el sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & -b_1 & 0 \\ b_2 & 0 & -b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

o bien

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + b_1 u_1 - b_1 u_2 \\ \lambda x_2 + b_2 u_1 - b_2 u_3 \end{pmatrix}$$

con constantes $\lambda > 0$ y $b_1 b_2 \neq 0$; y control restringido $u = (u_1 \ u_2 \ u_3)^T \in \mathbb{R}_3^+$. Claramente el sistema es inestable a lazo abierto.

Consideremos el conjunto de funciones de retroalimentación admisibles

$$\mathcal{U} := \{u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+^m : u(x) \text{ es continua}\}.$$

Es posible ver que el sistema es controlable con CVS dado por $U = \mathbb{R}_+^m$. De acuerdo al teorema de Brammer citado en el capítulo 1, tenemos que el sistema lineal $\dot{x} = Ax + Bu$ es completamente controlable si y sólo si

a) La matriz de controlabilidad $(B, AB, \dots, A^{n-1}B)$ tiene rango n .

b) No existe vector propio real v de A^T tal que se cumple la desigualdad $v^T B u \leq 0$ para toda $u \in \mathbb{R}_+^n$.

Para el ejemplo, la condición a) de controlabilidad es inmediata ya que $rkB = 2$.

Respecto a la condición b) tenemos que cualquier vector $v = (v_1 \ v_2)^T$ es vector propio de A^T , de manera que

$$\begin{aligned} v^T B u &= (v_1 \ v_2) \begin{pmatrix} b_1 & -b_1 & 0 \\ b_2 & 0 & -b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \\ &= u_1 (b_1 v_1 + b_2 v_2) - b_1 u_2 v_1 - b_2 u_3 v_2 \end{aligned}$$

es claro que este último término puede cambiar de signo al elegir valores apropiados para $(u_1 \ u_2 \ u_3)^T \in \mathbb{R}_3^+$, implicando que el sistema es controlable con control positivo.

Observación. El sistema no es controlable con dos controles, ya que (por ejemplo), si anulamos $u_3 (= 0)$, entonces

$$v^T B u = u_1 (b_1 v_1 + b_2 v_2) - b_1 u_2 v_1 = b_1 v_1 (u_1 - u_2) + u_1 b_2 v_2,$$

por lo tanto, si $v_1 = 1/b_1$ y $v_2 = 1/b_2$, entonces $b_1 v_1 (u_1 - u_2) + u_1 b_2 v_2 = -u_2 \leq 0$ para toda $u = (u_1 \ u_2)^T \in \mathbb{R}_+^2$. Con base en la controlabilidad, es posible determinar funciones de control continuas y positivas para estabilizar globalmente las soluciones de (5.9). Considerando la función de control continua y no negativa

$$u(x) = (u_1(x), u_2(x), u_3(x))^T \quad (5.10)$$

con entradas

$$u_i(x) = \max\{0, K_i^T x\}$$

donde los vectores K_i^T , $i = 1, 2, 3$, son elegidos apropiadamente, de manera que el sistema retroalimentado (5.9)-(5.10) sea GAS.

5.3.2. CLF estabilización local con control positivo

Tenemos entonces que el ejemplo (5.9) es globalmente estabilizable con controles positivos, de manera que podemos plantearnos el problema de la CLF-estabilización local, con CVS $[0, r^+]^3$, que consiste en lograr la estabilización asintótica (en $x = 0$) del sistema (5.9) mediante un control de retroalimentación admisible $u(x)$, determinado mediante el procedimiento expuesto en el capítulo 4. Para obtener un estabilizador CLF local para el sistema (5.9), debemos considerar la existencia de una función de Lyapunov. Sea $V = \frac{1}{2}al_1^2 + \frac{1}{2}bl_2^2 + \frac{1}{2}cl_3^2$, con a, b y c constantes positivas y las funciones $l_i, i = 1, 2, 3$, dada por

$$\begin{aligned} l_1 &= \frac{\lambda}{4b_1} (\sqrt{21} - 3) x_1 - \frac{\lambda}{4b_2} (\sqrt{21} + 3) x_2 \\ l_2 &= \frac{3\lambda}{2b_1} x_1 + \frac{\lambda}{4b_2} (\sqrt{21} - 3) x_2 \\ l_3 &= -\frac{\lambda}{4b_1} (\sqrt{21} + 3) x_1 + \frac{3\lambda}{2b_2} x_2 \end{aligned}$$

de forma que $V > 0$ si $l_i \neq 0$ para algún i ; además, $V = 0$ ssi $l_1 = l_2 = l_3 = 0$; o equivalentemente, $V = 0$ ssi $x_1 = x_2 = 0$. Es posible ver que V es radialmente no acotada. Por consiguiente,

$$\dot{V} = al_1\dot{l}_1 + bl_2\dot{l}_2 + cl_3\dot{l}_3$$

puede probarse que

$$\dot{V} = \lambda\rho x_1^2 + \lambda\sigma x_2^2 + u_1(\rho b_1 x_1 + \sigma b_2 x_2) - u_2 \rho b_1 x_1 - u_3 \sigma b_2 x_2$$

donde

$$\rho = \left(\frac{\lambda}{b_1}\right)^2 \left(\frac{3}{2}(\sqrt{21} + 5)c + 3a\right) > 0 \quad \text{y} \quad \sigma = \left(\frac{\lambda}{b_2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}(\sqrt{21} + 3)a + 3c\right) > 0.$$

Determinando y reescribiendo a dV/dt con los controles de mejor tasa, tenemos que

$$\begin{aligned} \inf_{u \in U} \dot{V} &= \lambda\rho x_1^2 + \lambda\sigma x_2^2 + \bar{w}_1(\rho b_1 x_1 + \sigma b_2 x_2) - \bar{w}_2 \rho b_1 x_1 - \bar{w}_3 \sigma b_2 x_2 \\ &= \alpha(x) - \beta(x) < 0, \text{ para } 0 \neq x \in W \end{aligned}$$

con $\alpha(x) = \lambda\rho x_1^2 + \lambda\sigma x_2^2$ y $\beta(x) = \bar{w}_1(\rho b_1 x_1 + \sigma b_2 x_2) - \bar{w}_2 \rho b_1 x_1 - \bar{w}_3 \sigma b_2 x_2$ donde W es una vecindad de $x = 0$ y los \bar{w}_i son los valores extremos de $u_i \in [0, r^+]$, dados por

$$\bar{w}_1 = \begin{cases} r^+ & \text{si } \rho b_1 x_1 + \sigma b_2 x_2 \leq 0 \\ 0 & \text{si } \rho b_1 x_1 + \sigma b_2 x_2 > 0 \end{cases}, \quad \bar{w}_2 = \begin{cases} r^+ & \text{si } \rho b_1 x_1 \geq 0 \\ 0 & \text{si } \rho b_1 x_1 < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad \bar{w}_3 = \begin{cases} r^+ & \text{si } \sigma b_2 x_2 \geq 0 \\ 0 & \text{si } \sigma b_2 x_2 < 0 \end{cases}.$$

A continuación daremos condiciones suficientes sobre los parámetros y variables que definen a V para tener la propiedad CLF; es decir, la desigualdad $\inf_{u \in U} \dot{V} < 0$ para $0 \neq x \in W$, con W una vecindad de $x = 0$.

En los siguientes casos suponemos que $b_1, b_2 > 0$ y $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.

Caso I: $\rho b_1 x_1 \geq 0$ y $\sigma b_2 x_2 \geq 0 \Rightarrow \rho b_1 x_1 + \sigma b_2 x_2 > 0$; es decir

$$\inf_{u \in U} \dot{V} = \lambda\rho x_1^2 + \lambda\sigma x_2^2 - r^+ \rho b_1 x_1 - r^+ \sigma b_2 x_2$$

si $b_1 > 0$ y $b_2 > 0$, entonces $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$; por lo tanto, para tener la desigualdad

$$\inf_{u \in U} \dot{V} = \rho x_1 (\lambda x_1 - r^+ b_1) + \sigma x_2 (\lambda x_2 - r^+ b_2) < 0$$

es suficiente con tener las desigualdades

$$0 \leq x_1 \leq \frac{r^+ b_1}{\lambda} \quad \& \quad 0 \leq x_2 \leq \frac{r^+ b_2}{\lambda},$$

además, para este caso tenemos la propiedad scp: $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0^+, 0^+)} \frac{\alpha(x_1, x_2)}{\beta(x_1, x_2)} = 0$, ya que

$$\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0^+, 0^+)} \frac{\lambda \rho x_1^2 + \lambda \sigma x_2^2}{r^+ \rho b_1 x_1 + r^+ \sigma b_2 x_2} = \frac{\lambda}{r^+} \left(\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0^+, 0^+)} \frac{\rho x_1^2 + \sigma x_2^2}{\rho b_1 x_1 + \sigma b_2 x_2} \right) = 0$$

Caso II: $\rho b_1 x_1 \geq 0$, $\sigma b_2 x_2 < 0$ y $\rho b_1 x_1 + \sigma b_2 x_2 > 0$; o bien $\rho b_1 x_1 > -\sigma b_2 x_2 > 0$; es decir $\rho \frac{b_1}{b_2} x_1 > -\sigma x_2 > 0$. Además, si $x_1^2 + x_2^2 < 1$, entonces $x_i^2 < |x_i|$. Para este caso tenemos que

$$\begin{aligned} \inf_{u \in U} \dot{V} &= \lambda \rho x_1^2 + \lambda \sigma x_2^2 - \bar{\omega}_2 \rho b_1 x_1 \\ &= \lambda \rho x_1^2 + \lambda \sigma x_2^2 - r^+ \rho b_1 x_1 \\ &< \lambda \rho |x_1| + \lambda \sigma |x_2| - r^+ \rho b_1 x_1 \quad \text{ya que } 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1, \\ &= \lambda \rho x_1 - \lambda \sigma x_2 - r^+ \rho b_1 x_1 \\ &< \lambda \rho x_1 + \lambda \rho \frac{b_1}{b_2} x_1 - r^+ \rho b_1 x_1 \quad \text{ya que } \rho \frac{b_1}{b_2} x_1 > -\sigma x_2 > 0 \\ &= \rho x_1 \left(\lambda + \lambda \frac{b_1}{b_2} - r^+ b_1 \right) \\ &< 0 \quad \text{para } r^+ \text{ t. que } \frac{\lambda}{b_1} + \frac{\lambda}{b_2} < r^+. \end{aligned}$$

También para este caso tenemos la propiedad scp: $\lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0^+, 0^-)} \frac{\alpha(x_1, x_2)}{\beta(x_1, x_2)} = 0$, ya que

$$\{\rho b_1 x_1 > -\sigma b_2 x_2 > 0\} \Rightarrow \left\{ \rho^2 b_1^2 x_1^2 > \sigma^2 b_2^2 x_2^2 \right\} \Rightarrow \left\{ \left(\frac{\rho^2 b_1^2}{\sigma^2 b_2^2} \right) x_1^2 > x_2^2 \right\}$$

por lo tanto

$$\left| \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0^+, 0^-)} \frac{\lambda \rho x_1^2 + \lambda \sigma x_2^2}{r^+ \rho b_1 x_1} \right| \leq \lim_{(x_1, x_2) \rightarrow (0^+, 0^-)} \frac{\lambda \rho x_1^2 + \lambda \sigma \left(\frac{\rho^2 b_1^2}{\sigma^2 b_2^2} \right) x_1^2}{r^+ \rho b_1 x_1} = 0.$$

Caso III: Sea $\rho b_1 x_1 \geq 0$, $\sigma b_2 x_2 < 0$ y $\rho b_1 x_1 + \sigma b_2 x_2 \leq 0$; por lo tanto $0 \leq \rho b_1 x_1 \leq -\sigma b_2 x_2$; i.e. $0 \leq \rho x_1 \leq -\sigma \frac{b_2}{b_1} x_2$. Entonces

$$\begin{aligned} \inf_{u \in U} \dot{V} &= \lambda \rho x_1^2 + \lambda \sigma x_2^2 + r^+ (\rho b_1 x_1 + \sigma b_2 x_2) - r^+ \rho b_1 x_1 \\ &= \lambda \rho x_1^2 + \lambda \sigma x_2^2 + r^+ \sigma b_2 x_2 \\ &< \lambda \rho |x_1| + \lambda \sigma |x_2| + r^+ \sigma b_2 x_2 \quad \text{ya que } 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1, \end{aligned}$$

por consiguiente

$$\begin{aligned}
\inf_{u \in U} \dot{V} &< \lambda \rho x_1 - \lambda \sigma x_2 + r^+ \sigma b_2 x_2 \\
&\leq -\lambda \sigma \frac{b_2}{b_1} x_2 - \lambda \sigma x_2 + r^+ \sigma b_2 x_2 \quad \text{ya que } \rho x_1 \leq -\sigma \frac{b_2}{b_1} x_2 \\
&= \sigma x_2 \left(-\lambda \frac{b_2}{b_1} - \lambda + r^+ b_2 \right) \\
&< 0 \quad \text{ya que } r^+ > \frac{\lambda}{b_1} + \frac{\lambda}{b_2}
\end{aligned}$$

donde $-\lambda \frac{b_2}{b_1} - \lambda + r^+ b_2 > 0 \Leftrightarrow r^+ > \frac{\lambda}{b_1} + \frac{\lambda}{b_2}$. Este caso III es similar al caso II.

Conclusiones del ejemplo.

Si elegimos $r^+ > 0$ tal que $r^+ > \frac{\lambda}{b_1} + \frac{\lambda}{b_2}$ para satisfacer el caso II, entonces

$$1 < \frac{r^+ b_1}{\lambda} \quad \& \quad 1 < \frac{r^+ b_2}{\lambda},$$

por lo tanto

$$0 \leq x_1 \leq 1 < \frac{r^+ b_1}{\lambda} \quad \& \quad 0 \leq x_2 \leq 1 < \frac{r^+ b_2}{\lambda},$$

de forma que se cumplen también las condiciones del caso I.

Podemos concluir que

$$\dot{V} = 2\rho x_1^2 + 2\sigma x_2^2 + \bar{w}_1 (\rho x_1 + \sigma x_2) - \bar{w}_2 \rho x_1 - \bar{w}_3 \sigma x_2 < 0$$

siempre que

$$(x_1, x_2) \in W = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / 0 < x_1^2 + x_2^2 < 1 \right\} \text{ y } \frac{\lambda}{b_1} + \frac{\lambda}{b_2} < r^+.$$

Por lo tanto se cumplen las condiciones de diseño establecidas en el capítulo II, de forma que tenemos funciones continuas $\rho_i(x_1, x_2)$, con $0 \leq \rho_i(x_1, x_2) \leq 1$ y $\rho_i(0, 0) = 0$, tal que la función de retroalimentación descentralizada

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1(x) \bar{w}_1(x) \\ \rho_2(x) \bar{w}_2(x) \\ \rho_3(x) \bar{w}_3(x) \end{pmatrix}$$

es admisible y un estabilizador local para el sistema (5.9).

Capítulo 6

Conclusiones y perspectivas

En el capítulo 1 abordamos el problema de síntesis para lograr la estabilización de sistemas lineales controlables con control positivo. Para lograrlo consideramos las condiciones necesarias y suficientes establecidas en el teorema de R.F. Brammer para caracterizar la controlabilidad con control positivo de un sistema lineal, bajo tales condiciones presentamos un diseño de una función de retroalimentación continua para estabilizar globalmente un sistema lineal. También damos una descripción de la dinámica controlada. Concretamente mostramos que si el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax + bu,$$

es controlable con controles positivos, entonces puede ser globalmente estabilizado mediante una función de retroalimentación positiva (no-negativa) y Lipchitz (continua), de la forma $\max\{0, K^T x\}$, en los siguientes casos:

- i) Si $\dot{x} = Ax$ es inestable, entonces, la retroalimentación $u(x)$ descrita en (1.3) y que toma valores en $U = [0, \infty)$, resuelve el problema de estabilización global.
- ii) Si $\dot{x} = Ax$ es Lyapunov-estable, entonces, la retroalimentación $u(x)$ descrita en (1.7) y que toma valores en $U = [0, r]$, resuelve el problema de estabilización global.

En el capítulo 2 abordamos el problema de estabilización de un sistema afín con respecto a la hipercaja m -dimensional $B_r^m(\infty)$ como CVS, que contiene al origen en su interior. Para resolver este problema consideramos las condiciones establecidas en el teorema de Zvi Artstein. El resultado logrado tiene la debilidad de suponer conocida una función de Lyapunov V con las propiedades CLF y SCP, al menos en una vecindad Ω del origen. Aplicando el método de síntesis presentado en el capítulo 2, obtuvimos lo siguiente:

- a) Una familia de estabilizadores admisibles $u_\varepsilon(x)$ para cada $\varepsilon \in (0, \infty)$; presentados en forma descentralizada y explícita.
- b) Para el caso $\Omega = \mathbb{R}^n$, el punto de equilibrio $x = 0$ del sistema a lazo cerrado (2.7) con retroalimentación admisible $u_\varepsilon(x)$ es GAS.
- c) El control $u_\varepsilon(x)$ se aproxima al control óptimo para valores grandes del parámetro ε ; esta característica lleva a que el sistema retroalimentado sea estable en forma robusta.

Primero mostramos que el problema de optimización CLF (2.21) es soluble si existe un control de retroalimentación $\bar{w}(x)$, que toma valores en ∂U , y es la función de control con mejor tasa

con respecto a una CLF. En particular, si el CVS es la hipercaja m -dimensional $\mathcal{B}_r^m(\infty) \subset \mathbb{R}^m$, se analizan las condiciones para la existencia, unicidad y regularidad del control de retroalimentación $\bar{w}(x)$, y obtenemos una fórmula explícita para éste. Entonces, observamos que el control $\bar{w}(x)$ es constante por pedazos con superficies de cambio definidas como la preimagen de los hiperplanos cartesianos C_j de \mathbb{R}^m , $\mathcal{N}_j = b^{-1}[C_j]$, por lo tanto, se trata de un control de tipo bang-bang.

Sin embargo, en vista de que el control de retroalimentación $\bar{w}(x)$ no es admisible (es discontinuo en $\cup_j \mathcal{N}_j$), consideramos una forma general de estabilizadores de retroalimentación admisibles $u(x) = (u_1(x), \dots, u_m(x))^T$, cuyos componentes están dadas por $u_j(x) = \rho_j(x) \bar{w}_j(x)$, donde cada $\rho_j(x)$ es una función de reescalamiento usada para regularizar cada entrada $\bar{w}_j(x)$. Entonces, proponemos un familia uno-parametrizada explícita de controles de retroalimentación admisibles $u_\varepsilon(x)$ definida por (2.34). Además los controles de retroalimentación son suaves/real analíticos sobre \mathbb{R}^n excepto en las “superficies de cambio” \mathcal{N}_j ($j = 1, \dots, m$) y \mathcal{N}_a , y continua en todas partes, siempre que la CLF y los campos vectoriales del sistema (2.1) sean suaves/real analíticos.

En el capítulo 3 estudiamos el problema de estabilización con control positivo para sistemas afines;; además de extender los resultados del capítulo 2 al caso de controles positivos. También mostramos que el caso $0 \in \mathcal{B}_r^m(\infty)$ es considerado un problema cualitativamente diferente; al poner especial atención al caso cuando $0 \in \partial \mathcal{B}_r^m(\infty)$, y en particular a los controles positivos. De manera que generalizamos el diseño de la fórmula explícita para controles de retroalimentación presentada en el capítulo 2 para incluir el caso $0 \in \partial \mathcal{B}_r^m(\infty)$.

En el capítulo 4 mostramos que el diseño explícito $u_\varepsilon(x)$, dado por (2.34)-(2.35), tiene la propiedad de ser una *función de control robusta marginalmente*; tal que representa una familia de controladores continuos $u_\varepsilon(x)$ que se aproxima (para valores grandes de ε) al control que optimiza el *Margen de Estabilidad Robusta* (RSM).

Abordamos también el caso del control de retroalimentación escalar acotado que toma valores en $[0, r^+)$.

En general, en el capítulo 5 estudiamos el problema de controlabilidad y estabilización con control positivo; la literatura muestra que tales problemas son cualitativamente diferentes al caso de controles signados. Como ejemplo presento un sistema lineal en el plano. Tal sistema es inestable a lazo abierto y es posible estabilizarlo localmente de dos maneras (bajo dos supuestos). La primer manera es suponer las condiciones establecidas en el teorema de R.F. Brammer para caracterizar la controlabilidad con control positivo de un sistema lineal, de manera que presento un diseño de control admisible (continuo y restringido) para estabilizar globalmente el sistema definido en el plano. Para el mismo ejemplo de sistema lineal, presento un segundo diseño de control admisible bajo las condiciones de estabilización CLF establecida por Zvi Artstein, de manera que al suponer un control acotado, obtenemos un estabilizador local.

También en el capítulo 5 presentamos una manera de estabilizar (algunos) sistemas con control restringido a un subconjunto de la hipercaja. El método es como sigue: dado un problema de estabilización de un sistema afín S_T , donde el parámetro de control u está restringido a un hipertetraedro (CVS conteniendo al origen) U_T de dimensión m y contenido en la hipercaja positiva $\mathcal{B}_{r^+}^m(\infty)$; es decir $U_T \subset \mathcal{B}_{r^+}^m(\infty)$, donde el objetivo es diseñar una función continua (admisible) tal que el sistema retroalimentado sea GAS. Mostramos que es posible resolver (para algunos casos) el problema de estabilización de la siguiente manera; mediante lo expuesto en los capítulos 2 y 3 obtenemos la función continua $u_\varepsilon(x)$ que estabiliza el sistema afín S y tal que $u_\varepsilon(x)$ toma valores en la hipercaja $\mathcal{B}_{r^+}^m(\infty)$. Al restringir la función $u_\varepsilon(x)$ al hipertetraedro U_T obtenemos un estabilizador continuo $u_T(x)$ para el sistema S_T .

Para futuras investigaciones se busca una generalización de los resultados expuestos para los politopos U como CVS, con $0 \in U$, y el diseño correspondiente de una fórmula de control explícito restringido a U (con componentes de entrada signados/ positivos) tal que el sistema (3.1) sea GAS.

Anexo

Definiciones Básicas de Teoría de Convexidad

Necesitaremos los siguientes resultados de convexidad, que pueden ser visto en el libro [38], capítulos13-15).

Con el objetivo de generalizar los trabajos descritos en la introducción y dar una solución al problema: “Abordar la estabilización CLF global del sistema afín (2.1) con CVS un politopo U , posiblemente con $0 \in \partial U$, por medio de controles de retroalimentación admisibles”. En general, de acuerdo con el teorema de Artstein, los controles de realimentación diseñados son continuos y toman valores en U .

A continuación damos una breve introducción para definir conceptos y resultados para conjuntos convexos, en particular politopos, ver capítulos13-15 del libro [38].

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^m$ es llamado convexo si y sólo si (ssi) A contiene el segmento de recta

$$[p, q] := \{\lambda p + (1 - \lambda) q : 0 \leq \lambda \leq 1\},$$

para cualquier par de puntos $p, q \in A$. Decimos que p es una *combinación convexa* de $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{R}^m$ si existen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1) p = \lambda_1 p_1 + \dots + \lambda_r p_r, \quad (2) \lambda_1 + \dots + \lambda_r = 1, \quad \text{y} \quad (3) \lambda_i \geq 0. \quad (6.1)$$

Si quitamos la condición (3), p es llamada una *combinación afín* de p_1, \dots, p_r , si la condición (2) es quitada p es llamada una *combinación positiva* de p_1, \dots, p_r y si las condiciones (2) y (3) son quitadas p es llamada una *combinación lineal* de p_1, \dots, p_r .

Para un conjunto A el conjunto de todas las combinaciones convexas de puntos en A es el *envolvente convexo* de A , denotado por $\text{conv}(A)$. En forma similar definimos el *envolvente afín* de A : $\text{aff}(A)$, el *envolvente positivo* de A : $\text{pos}(A)$ (también llamado el *cono* de A : $\text{cone}(A)$) y el *envolvente lineal* of A : $\text{lin}(A)$. De manera que $\text{conv}(A)$ es el conjunto convexo más pequeño que contiene a A , el plano más pequeño que contiene a A y el subespacio más pequeño que contiene a A , respectivamente. Cada envolvente afín es la traslación de un envolvente lineal y la *dimension* de un envolvente afine es definido como la dimension del correspondiente envolvente lineal. De manera que A es k -dimensional, un k -conjunto, si k es la dimensión de $\text{aff}(A)$. Los subespacios afines de dimension $0, 1, \dots, k, \dots, m - 1$ en \mathbb{R}^m son nombrados *puntos*, *lineas*, k -*planos* e *hiperplanos*, respectivamente. El *interior relativo* de A , denotado $\text{relint}A$, es el interior de A relativo a $\text{aff}(A)$. Cada hiperplano $H = \{p \in \mathbb{R}^m : v \cdot p = c\}$ separa el espacio \mathbb{R}^m en dos semiespacios $H^+ = \{p \in \mathbb{R}^m : v \cdot p \geq c\}$ y $H^- = \{p \in \mathbb{R}^m : v \cdot p \leq c\}$. Un hiperplano H es un *hiperplano soporte* de conjunto convexo cerrado $A \subseteq \mathbb{R}^m$ si al menos un punto $a_0 \in A$ pertenece a H , i.e. $v \cdot a_0 = c$, y $A \subset H^+$ ó $A \subset H^-$. El semiespacio que contiene a A es llamado un *semiespacio soporte* de A . La intersección de un número finito de semiespacios es llamado un *poliedro*.

Los conjuntos compactos $K \subset \mathbb{R}^m$, con $\text{int}K \neq \emptyset$, son llamados *cuerpos convexos*. Un *politopo* P es el envolvente convexo de un conjunto finito de puntos $\{v_1, \dots, v_r\} \subset \mathbb{R}^m$. El espacio de todos los politopos en \mathbb{R}^m es denotado por \mathcal{P}_m . El envolvente convexo de puntos v_1, \dots, v_r que son *afinmente independientes*, i.e. ninguno de los puntos es una combinación afín de los otros, es llamado *simplejo*. Si H es un hiperplano soporte de A , entonces $H \cap A$ es llamada una *cara* (*propia*) de A . Tomamos la convención de llamar a \emptyset y A caras de A , refiriéndonos a estas caras como *impropias*.

Las caras de dimension $0, 1, \dots, k, \dots, m - 1$ son llamadas *vertice*, *borde*, *k-cara* and *faceta*. El conjunto de todas las caras de un politopo define una *red* (retículo, red o lattice) bajo inclusion, $\mathcal{L}(P)$. De aquí en adelante, consideraremos $\mathcal{L}(P)$ excluyendo a \emptyset .

Podemos definir politopos como el envolvente (casco) convexo de sus vértices, i.e. $P = \text{conv}\{v_1, \dots, v_r\}$, pero el siguiente resultado establece otra descripción equivalente.

Teorema 6.1 *Un subconjunto $P \subset \mathbb{R}^m$ es el envolvente convexo de un conjunto finito de puntos (un V-politopo) si y sólo si éste es una intersección acotada de un número finito de semiespacios (un H-politopo).*

CVS dados como politopos que contienen el origen.

Para conjuntos arbitrarios, tenemos el siguiente resultado.

Observe que U es convexo ssi $\text{conv}U = U$.

Teorema 6.2 *Sea U un subconjunto convexo cerrado y no vacío. Entonces,*

- (a) (Minkowski) *para todo punto $u \in \partial U$, existe un hiperplano soporte de U que contiene a u .*
- (b) *U es la intersección de todos los semiespacios cerrados que contienen a U .*

Conjunto polar. Si $A \subseteq \mathbb{R}^d$ es un conjunto convexo, entonces el *polar* de A es un conjunto $A^* \subseteq \mathbb{R}^d$ definido como

$$A^* = \{y^* \in \mathbb{R}^d : x \cdot y^* \leq 1 \forall x \in A\} \quad (6.2)$$

Si $A \subseteq \mathbb{R}^d$ es un conjunto, entonces el *polar* de A es un conjunto $A^* \subseteq \mathbb{R}^d$ definido como Para cualquier politopo A tenemos que, por definición, A^* es convexo aún si A no lo es. Además, tenemos que (1) $A \subseteq A^{**}$. (2) Si $A \subseteq B$, entonces $B^* \subseteq A^*$. (3) Si A es convexo y cerrado, entonces $A^* = (\partial A)^*$.

Teorema 6.3 *Suponga que $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}^m$. Entonces tenemos que:*

- (a) *Si U es un subconjunto convexo cerrado que contiene O , entonces $U^{**} = U$.*
- (b) *U es acotado ssi su conjunto polar U^* satisface que $0 \in \text{int}U^*$.*
- (c) *U^* es acotado ssi U satisface que $0 \in \text{int} \text{conv}U$.*

Teorema 6.4 *Si U es un politopo, entonces su polar U^* es un conjunto poliédrico.*

Recordemos que un conjunto convexo $U \subseteq \mathbb{R}^m$ es un *conjunto poliédrico* ssi éste es la intersección finita de semi-espacios cerrados (U puede ser no acotado). Por lo tanto, un politopo es un conjunto poliédrico acotado.

Si $0 \in \text{int}U$, entonces U y su polar U^* comparten las mismas propiedades, expresadas en el siguiente par de teoremas.

Corolario 6.5 U es un conjunto convexo compacto con $0 \in \text{int}U$ ssi U^* es un conjunto convexo compacto con $0 \in \text{int}U^*$. Por consiguiente, $U^{**} = U$.

Teorema 6.6 U es un politopo con $0 \in \text{int}U$ ssi U^* es un politopo con $0 \in \text{int}U^*$. Por otra parte, la polaridad proporciona una biyección entre las caras de U y las caras de U^* que invierte la relación de inclusión.

Observe la importancia de que 0 sea un punto interior de U . En otro caso, si $0 \notin \text{int}U$ entonces algunas propiedades se pierden. De hecho, como consecuencia directa de los teoremas 3 y 4, tenemos el siguiente resultado.

Corolario 6.7 Si U es un politopo tal que $0 \notin \text{int}U$, entonces su polar U^* es un conjunto poliédrico no acotado con $0 \in \text{int}U^*$.

Ahora, vamos a explorar la geometría detrás de la estabilización del sistema (1) con cvs dadas por politopos que contienen el origen. En particular, el caso de los controles positivos.

Un resultado de convexidad establece que $U \subset \mathbb{R}^m$ es un politopo ssi su función soporte es continua y lineal por pedazos. Los dominios de linealidad corresponden a los vértices del politopo U (el máximo del producto escalar que define la función de soporte se alcanza en uno de los vértices). Por lo tanto, suponiendo la V -representación, si U tiene k vértices, tenemos que $U = \text{conv} \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ y su función soporte es dada por

$$\zeta_U(b) = \begin{cases} v_1 \cdot b, & \text{si } b \in C_1 \\ \vdots & \vdots \\ v_k \cdot b, & \text{si } b \in C_k, \end{cases} \quad (6.3)$$

donde los conjuntos C_i son conos poliédricos con un vértice en 0 , para $i = 1, \dots, k$, correspondiente a los dominios de la linealidad de ζ_U . Estos conos cubren \mathbb{R}^m , y esta cubierta es llamada el *abanico* del politopo U .

Para cada cara propia F de un conjunto convexo cerrado A le corresponde un cono N_F de funciones lineales $v \in (\mathbb{R}^m)^*$ que se maximizan en F sobre A . Identificamos $(\mathbb{R}^m)^*$ con \mathbb{R}^m y nombramos a una función v un *vector normal (exterior)* de F sobre A . A continuación, la cara que es máxima con respecto a v se denota por $(A)^v$. El cono N_F es llamado *cono normal* de F y los conos normales de todas las caras de un politopo P forman un abanico (fan) completo, el *abanico normal*, N_P , de P . Es decir, cada cara no vacía de un cono normal es también un cono normal de alguna cara de P , la intersección de dos conos normales es una cara de ambos y la unión de todos los conos es una cubierta de \mathbb{R}^m . El mapa que envía una cara F de P a su cono normal N_F es un *anti-isomorfismo*, por ejemplo, si P es un m -politopo en \mathbb{R}^m , entonces el cono normal en una d -cara de P es una $(m - d)$ -cara de N_P .

Es fácil ver que $\zeta_U(b)$ es una función homogénea positiva y convexa. Por lo tanto, el conjunto polar U^* es dado por

$$U^* = \{b \in \mathbb{R}^m : \zeta_U(b) \leq 1\} = \{b \in \mathbb{R}^m : v_1 \cdot b \leq 1 \& \dots \& v_k \cdot b \leq 1\}, \quad (6.4)$$

que es un conjunto definido por un sistema de k desigualdades lineales.

Definimos el conjunto nulo de ζ_U por

$$N_\zeta = \{b \in \mathbb{R}^m : \zeta_U(b) = 0\}. \quad (6.5)$$

Es conocido que si U es un conjunto compacto con $0 \in \text{int}U$, entonces su función soporte $\zeta_U(b)$ es finita en todas partes y definida positiva, i.e. $N_\zeta = \{0\}$; mientras que, si 0 pertenece a la frontera de U , $0 \in \partial U$, entonces $\zeta_U(b)$ es una función *semi-definida positiva*, i.e. N_ζ es un conjunto que contiene a 0 . Además, si U es un politopo, del Corolario 5 tenemos que su conjunto polar U^* es un conjunto poliédrico no acotado con $0 \in \text{int}U^*$. Entonces, $\zeta_U(b)$ no es una función propia (una función $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es *propia* ssi la preimagen $f^{-1}[K] = \{x \in D : f(x) \in K\}$ es compacta para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^m$), y esa es la consecuencia de ser sólo positiva semi-definida.

En consecuencia, es muy importante estudiar las propiedades y la estructura geométrica del conjunto nulo N_ζ .

Lema 6.8 Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ un m -politopo y suponga que $E \subset U$ es una cara propia. Si $\{F_1, \dots, F_r\}$ denota el conjunto de todas las caras de U que contienen a E , entonces

$$C_E = \text{pos}\{a_1, \dots, a_r\},$$

donde a_j denota el vector normal interior de la cara F_j .

Probaremos el siguiente teorema.

Teorema 6.9 Suponga que $U \subset \mathbb{R}^m$ es un politopo que contiene el origen. Entonces, el conjunto nulo N_ζ de ζ_U es un cono poliédrico con vértice en 0 . Además, (a) si 0 es un vértice de U , e.g. $v_1 = 0$ (elegido como el primer vértice a través de un reordenamiento), entonces $N_\zeta = C_1$ -un cono m -dimensional; en el otro caso, (b) existe una cara más pequeña F que contiene a 0 , i.e. una d -cara de U ($1 \leq d \leq m$), incluyendo U mismo, tal que $0 \in \text{relint}F$, y N_ζ es un conjunto $(m - d)$ -dimensional dado por la intersección de los conos poliédricos correspondientes a todos los vértices de F .

Demostración. Ante todo, ya que ζ_U es una función homogénea positiva, tenemos que N_ζ es un cono poliédrico con vértice en 0 .

Denotemos como $V = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ el conjunto de todos los vértices de U , tal que $U = \text{conv}(V)$.

Parte (a). Suponga que U es un politopo con un vértice en el origen, sea $v_1 = 0$ -el primer vértice vía un reordenamiento. Entonces, $\zeta_U \upharpoonright_{C_1} \equiv 0$. Además, $\zeta_U \neq 0$ cuando se está restringido a los conos poliédricos restantes C_i , excepto si $b = 0$, porque todos los conos normales incluyen al origen 0 como el ápice, significando que C_i no contiene un subespacio lineal no nulo. Observe que la desigualdad $0 \cdot b = 0 \leq 1$ se cumple trivialmente $\forall b \in \mathbb{R}^m$.

Parte (b). Hay dos casos: $0 \in \text{int}U$ ó $0 \in \partial U \setminus V$. En el primer caso, tenemos que $F = U$, de modo que $\zeta_U(b)$ es definido positivo, i.e. $N_\zeta = \{0\} = \cap_i^k C_i$. En el segundo caso, si F no es U ni un vértice $v_i \in V$ (parte (a)), entonces existe una d -cara mínima F de U ($1 \leq d \leq m - 1$) tal que $0 \in \text{relint}F$. Teniendo en cuenta que cualquier cara de un politopo es un politopo, entonces F es un d -politopo. Sea $V_F := V \cap F$ el conjunto de todos los vértices de F y sea r su cardinalidad (tal que, $2 \leq r \leq k - 1$). En vista de que cualquier c -politopo tiene al menos $c + 1$ vértices, resulta que $r \geq d + 1$ y $k \geq m + 1$.

Afirmación: Tenemos que $\zeta_U(b) = 0$ ssi $b \in \cap_{i=1}^r C_i$, donde los conos poliédricos C_i corresponden a todos los vértices $v_i \in V_F$, para $i = 1, \dots, r$ (escogido vía un reordenamiento).

Suponga que $b \in \cap_{i=1}^r C_i$. Entonces de (6.3), debido a la continuidad de $\zeta_U(b)$, tenemos que para todo $b \in \cap_{i=1}^r C_i$,

$$\begin{aligned} \zeta_U(b) &= v_1 \cdot b = \dots = v_r \cdot b \text{ ssi} & (6.6) \\ (v_1 - v_2) \cdot b &= \dots = (v_1 - v_r) \cdot b = 0, \end{aligned}$$

entonces, b es ortogonal a todos los vectores $v_1 - v_i$, para $i = 2, \dots, r$. Ahora, ya que F tiene r vertices y $r - 1 \geq d = \dim F$, existe un conjunto de d vectores independientes afinamente $(v_1 - v_i) \in F$. Por lo tanto, $b \in (\text{aff}(F))^\perp$, y por lo tanto $\cap_{i=1}^r C_i$ es un conjunto $(m - d)$ -dimensional. Entonces, en vista de que $0 \in \text{relint}F$, escogemos un conjunto de d vertices afinamente independientes de F , sea $\mathfrak{B}^d = \{v_1, v_2, \dots, v_d\}$ (via un reordenamiento), el cual es una base para $\text{aff}(F)$, y completamos esta con una base \mathfrak{B}^{m-d} para $(\text{aff}(F))^\perp$ para obtener una base \mathfrak{B} para \mathbb{R}^m . Entonces, en la base \mathfrak{B} de todos vertices $v_i \in V_F$ y todo $b \in \cap_{i=1}^r C_i$ son de la forma $v_i^\mathfrak{B} = (u^d, 0^{m-d})$ y $b^\mathfrak{B} = (0^d, b^{m-d})$, respectivamente. Por lo tanto, para toda $b \in \cap_{i=1}^r C_i$, $\zeta_U(b) = v_1 \cdot b = \dots = v_r \cdot b = 0$.

Inversamente, suponga que $\zeta_U(b) = 0$. En vista de que todos los conos poliédricos normales incluyen al origen, lo que significa que para cualquier subespacio lineal S , $(S \setminus \{0\}) \not\subseteq \text{int}C_i$, para $i = 1, \dots, k$, entonces $\zeta_U(b) > 0$, para toda $b \in \cup_{i=1}^k \text{int}C_i$. Así, tenemos que el conjunto nulo $N_\zeta \subseteq \cup_i \partial C_i$ y $0 \in \text{relint}N_\zeta$. Además, puesto que N_ζ es un cono poliedral con vertices en 0 , entonces N_ζ es una cara del *fan* normal de U .

Un procedimiento exhaustivo sobre las caras de U descarta todos aquellos que no contiene 0 como candidatos para contener N_ζ . Por lo tanto, al tomar la faceta F de U tal que si $0 \in F$, entonces existe una cara más pequeña $F_0 \subset F$ que contiene al 0 , i.e. una cara de U tal que $0 \in \text{relint}F_0$. Entonces, obtenemos que $N_\zeta = \cap_i C_i$, donde los C_i son conos poliedrales correspondientes a todos los vertices de una cara mínima F_0 de U tal que $0 \in \text{relint}F$.

Finalmente, debido al hecho de que F es un d -politopo con $0 \in \text{relint}F$, entonces la restricción de $\zeta_U(b)$ a $F \subset \text{aff}(F)$ es definida-positiva, i.e. $\zeta_F = 0_d$ ssi $b_d = 0_d$. Por lo tanto, $N_\zeta \cap F = \{0\}$ implicando que N_ζ es un cono. ■

Más generalmente, supongamos que $U \subset \mathbb{R}^m$ es un conjunto convexo y $r \in \mathbb{R}$, entonces el *múltiplo escalar* de U es el conjunto $rU := \{ru : u \in U\}$. Una *funcional de Minkowski* $\mu : D \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es positivamente homogénea ($\mu(\lambda u) = \lambda \mu(u)$, para cualquier real $\lambda \geq 0$) y una función convexa. Por lo tanto, para un conjunto convexo $\emptyset \neq U \subset \mathbb{R}^m$, una funcional de Minkowski es definido por

$$\mu(u) := \inf \{r \geq 0 : u \in rU\}, \quad (6.7)$$

y viceversa, si $\mu(u)$ es *cerrado* ($\mu \upharpoonright_{\text{dom} \neq \emptyset}$ es finito y este es semi-continuo inferiormente), entonces existe un conjunto convexo único $U \neq \emptyset$ tal que $U = \{u \in \mathbb{R}^m : \mu(u) \leq 1\}$ -un conjunto de nivel. Una funcional de Minkowski es una generalización de una norma: μ es una *norma* ssi es *finita en todas partes, definida positiva y simétrica*.

Tenemos las siguientes equivalencias ([38], p. 125.): (1) μ es finita en todas partes ssi $0 \in \text{int}U$ y (2) es definida positiva ssi U es un conjunto compacto.

Si μ es finita en todas partes y definida positiva, entonces su *polar* y el *conjunto polar* de U son definidos, respectivamente, por

$$\mu^*(u^*) := \sup_{u \neq 0} \frac{u^* \cdot u}{\mu(u)} \quad \text{y} \quad U^* = \{u^* \in (\mathbb{R}^m)^* : \mu^*(u^*) \leq 1\}, \quad (6.8)$$

donde $(\mathbb{R}^m)^*$ denota el espacio dual de \mathbb{R}^m .

Entre sí las funcionales de Minkowski polares tienen la siguiente propiedad importante:

$$u^* \cdot u \leq \mu^*(u^*) \mu(u), \quad \forall u \in \text{dom} \mu \ \& \ \forall u^* \in \text{dom} \mu^*, \quad (6.9)$$

donde, $u \in \mathbb{R}^m$ y $u^* \in (\mathbb{R}^m)^*$. La expresión anterior es la "mejor" desigualdad en el sentido de que no se puede ajustar al reemplazar μ o μ^* por funciones mejores en grandes dominios. En particular, si μ es una p -norma, entonces μ^* es una q -norma ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) y la relación anterior se reduce a la conocida desigualdad de Hölder: $u^* \cdot u \leq \|u^*\|_q \|u\|_p$.

La función soporte de U , denotada por ζ_U , es definida como

$$\zeta_U(u^*) := \sup_{u \in U} u^* \cdot u, \quad (6.10)$$

cual es una función positivamente homogénea y convexa, y $\text{dom} \zeta_U$ es un cono convexo en $(\mathbb{R}^m)^*$.

Si $0 \in \text{int}U$, entonces U y su polar U^* comparten las mismas propiedades, expresadas en el siguiente teorema.

Teorema 6.10 *U es un conjunto convexo compacto con $0 \in \text{int}U$ ssi U^* es un conjunto convexo compacto con $0 \in \text{int}U^*$. Por otra parte, $U^{**} = U$, y si μ y μ^* son las medidas de U y U^* , respectivamente, entonces $\mu^* = \zeta_U$ y viceversa.*

En el capítulo 3 ilustramos la teoría desarrollada con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 6.11 *Si $U = [0, \bar{r}]$, para $\bar{r} > 0$, entonces su función soporte es*

$$\zeta_U(b) = \text{máx}\{0, \bar{r}b\} = \begin{cases} 0, & \text{si } b \leq 0, \\ \bar{r}b, & \text{si } b > 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, el conjunto polar $U^* = \zeta_U^{-1}[0, 1] = \{b \in \mathbb{R} : \zeta_U(b) \leq 1\} = \{b \in \mathbb{R} : 0 \leq 1 \text{ \& } \bar{r}b \leq 1\} = (-\infty, 1/\bar{r}]$ -un intervalo no acotado con $0 \in \text{int}U^*$. \square

Ejemplo 6.12 *Si $U = [0, \bar{r}_1] \times [0, \bar{r}_2]$, con $\bar{r}_j > 0$, entonces su función soporte es*

$$\zeta_U(b_1, b_2) = \begin{cases} \bar{r}_1 b_1 + \bar{r}_2 b_2, & \text{si } (b_1, b_2) \in \mathbb{R}_{++}^2 \\ \bar{r}_2 b_2, & \text{si } (b_1, b_2) \in \mathbb{R}_{-+}^2 \\ 0, & \text{si } (b_1, b_2) \in \mathbb{R}_{--}^2 \\ \bar{r}_1 b_1, & \text{si } (b_1, b_2) \in \mathbb{R}_{+-}^2, \end{cases}$$

donde \mathbb{R}_{++}^2 es el primer, ..., y \mathbb{R}_{+-}^2 es el cuarto cuadrante tomado en sentido antihorario, y $\zeta_U(b)$ es lineal sobre cada cuadrante. Por lo tanto, el conjunto polar está dada por

$$\begin{aligned} U^* &= \zeta_U^{-1}[0, 1] = \{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 : \zeta_U(b_1, b_2) \leq 1\} \\ &= \{(b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2 : (\bar{r}_1 b_1 + \bar{r}_2 b_2 \leq 1) \text{ \& } (\bar{r}_2 b_2 \leq 1) \text{ \& } (0 \leq 1) \text{ \& } (\bar{r}_1 b_1 \leq 1)\}, \end{aligned}$$

que es un conjunto poliédrico no acotado con $(0, 0) \in \text{int}U^*$. Por otra parte, la ley de control con mejor tasa es $\omega(b) = (r_1 \text{sign } b_1, r_2 \text{sign } b_2)^\top$. \square

Teoría de Lyapunov y Teoría de funciones de Lyapunov de Control

Consideremos el sistema autónomo:

$$\dot{x} = f(x)$$

donde x es la variable de estado y las componentes del vector n -dimensional $f(x)$ son funciones Lipschitzianas en forma local de x , definidas para todo x en el dominio $D \subset \mathbb{R}^n$. La condición de Lipschitz garantiza la existencia y unicidad de la solución de (1) que satisface la condición inicial $x(t_0) = x_0$. Una función $f(x)$ se denomina Lipschitziana en forma local en un punto x_0 si satisface la condición de Lipschitz: $\|f(x) - f(y)\| \leq L \|x - y\|$ para x, y en un entorno de x_0 , donde L es una constante positiva y $\|\cdot\|$ denota una norma en \mathbb{R}^n . Tenemos que $x = x_0$ es un punto de equilibrio del sistema no lineal $\dot{x} = f(x)$, si $f(x_0) = 0$. Las propiedades de estabilidad de este punto de equilibrio pueden ser caracterizadas por la siguiente definición.

Definición (Estabilidad de Lyapunov) El punto de equilibrio x_0 de $\dot{x} = f(x)$ es

i) *estable* si para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que

$$\|x(0) - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x(t) - x_0\| < \epsilon \text{ para } t \geq 0$$

ii) *inestable* si el punto de equilibrio no es estable;

iii) *asintóticamente estable* si este es estable y además existe $\eta > 0$ tal que

$$\|x(0) - x_0\| < \eta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$$

iv) *global asintóticamente estable (GAS)* si éste es asintóticamente estable para todos los estados iniciales; es decir, si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 \text{ para toda } x_0.$$

Una función de Lyapunov estricta/fuerte global $V(x)$ es una función $V : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$, de clase $C^1(\mathbb{R}^n)$, que es

i) definida positiva ($V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ ssi $x \neq 0$),

ii) propia; para cualquier $c \geq 0$, su preimagen $V^{-1}(c)$ es compacta; o equivalentemente radialmente no acotada: si $\|x\| \rightarrow \infty$, entonces $V(x) \rightarrow \infty$),

iii) y satisface que

$$\forall x \neq 0 \quad \dot{V}(x) = L_f V(x) < 0$$

donde la derivada $\dot{V}(x)$ sobre las trayectorias del sistema $\dot{x} = f(x)$ también es escrita como:

$$dV/dt = \nabla V \cdot f(x)$$

que representa el producto escalar entre el gradiente de V y el campo vectorial f . Una función de Lyapunov estricta $V(x)$ se usa para probar que un sistema es asintóticamente estable, de acuerdo a los teoremas recíprocos de Lyapunov clásicos (Kurzweil (1956) & Massera (1949)), obtenemos el siguiente resultado necesario y suficiente para la estabilidad asintótica global de un sistema.

Teorema 1

Consideremos el sistema $\dot{x} = f(x)$, donde $x \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua, y $f(0) = 0$. El sistema es GAS ssi existe una función de Lyapunov estricta global $V(x)$.

Para incluir el caso de estabilidad local no estricta, consideremos $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen, entonces diremos que:

i) $V(x)$ es una función *definida positiva* si $V(0) = 0$ y $V(x) > 0$ para $x \in D - \{0\}$;

ii) $V(x)$ es una función *semidefinida positiva* si $V(0) = 0$ y $V(x) \geq 0$ para $x \in D$;

iii) $V(x)$ es una función *definida negativa* si $-V(x)$ definida positiva;

iv) $V(x)$ es una función *semidefinida negativa* si $-V(x)$ es semidefinida positiva;

Teorema 2

Sea $x = 0$ un punto de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$ y sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , definida en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen, entonces

- Si $V(x)$ es definida positiva y $\dot{V}(x)$ es semidefinida negativa, el origen es un punto de equilibrio estable.
- Si $V(x)$ es definida positiva y $\dot{V}(x)$ es definida negativa, el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

Principio de Invariancia

En caso de tener que $\dot{V}(x)$ es semidefinida negativa, es posible determinar la estabilidad asintótica del origen como lo muestra el siguiente corolario del Principio de Invariancia de LaSalle.

Corolario: Sea $x = 0$ un punto de equilibrio de $\dot{x} = f(x)$. Sea $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida positiva y de clase C^1 en un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$ que contiene al origen, y además $\dot{V}(x) \leq 0$ para $x \in D$. Sea $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \dot{V}(x) = 0\}$. Si la solución trivial $x(t) = 0$ de $\dot{x} = f(x)$ es la única solución que permanece en S indefinidamente, entonces el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable.

En teoría de control, una función de Lyapunov de control $V(x, u)$ es una generalización de la noción de función de Lyapunov $V(x)$ usada en el análisis de la estabilidad de sistemas de ecuaciones diferenciales.

Ahora, exhibamos un resultado análogo de estabilidad para el sistema de control (2.1). Una función de Lyapunov de control es útil para probar que un sistema de control es estabilizable bajo retroalimentación, i.e. dado un estado x existe $u(x, t)$ tal que el sistema (2.1) puede ser “llevado” asintóticamente al origen $x = 0$ mediante la aplicación de $u(x, t)$.

Para el sistema de control (2.1) con CVS $U \subset \mathbb{R}^m$. Una función de Lyapunov de control (CLF) $V(x, u)$ [con respecto al sistema y controles con valores en U] es una función de clase $C^k(\mathbb{R}^n)$, $k \geq 1$, que es definida positiva, propia y tal que

$$\forall x \neq 0, \exists u \in U \text{ tal que } \dot{V}(x, u) < 0$$

Esta última condición significa que para cada estado x existe al menos un control u que reduce la “energía” de V . De forma equivalente

$$\forall x \neq 0, \exists u \in U \text{ tal que } \inf_{u \in U} \dot{V}(x, u) = \inf_{u \in U} \{\alpha(x) - \beta(x)u\} < 0,$$

donde el término $\beta(x)u$ es un producto interno de los vectores $\beta(x)$ y u , y las funciones

$$\alpha(x) := L_f V(x) \quad \& \quad \beta(x) := (b_1(x), \dots, b_m(x)),$$

con $b_i(x) := -L_{g_i} V(x)$, para $i = 1, 2, \dots, m$, denotan a las derivadas direccionales de $V(x)$ con respecto a los campos vectoriales $f(x)$ y $g_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, m$, que definen el sistema de control (2.1).

A fin de diseñar controles retroalimentados continuos en 0, en [21], Artstein introdujo el concepto de la propiedad de control pequeño (SCP): Para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que la desigualdad $\alpha(x) - \beta(x)u < 0$ es verdadera para cierto u con $\|u\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$, siempre que $0 < \|x\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$. De manera que tenemos el siguiente resultado necesario y suficiente para la estabilidad global del sistema de control.

Teorema 2 (Teorema de Artstein, ver [21]):

Supongamos que el CVS $U \subset \mathbb{R}^m$ es convexo y el lado derecho del sistema de control es continuo. El sistema (2.1) es GAS mediante un control retroalimentado y continuo $u(x)$ restringido a U ssi existe una CLF $V(x, u)$ que satisface la SCP.

La objeción principal para aplicar este resultado reside en hallar una CLF apropiada (aunque hay métodos para construir CLF's para clases especiales de sistemas!, cf. [Sepulchre et al.] (1997) y [Malisoff and Mazenc] (2009)).

Bibliografía

- [1] Bastin, G. and Praly, L. (1999). Feedback stabilization with positive controls of a class of dissipative mass-balance system. 14th World Congress of IFAC, Beijing, China.
- [2] Brammer, R. F. (1971). Controllability in linear autonomous systems with positive controllers. *SIAM J. CONTROL*, Vol. 10, No. 2.
- [3] Clarke, F. H., Y. S. Ledyaev, E. D. Sontag and A. I. Subbotin (1997). Asymptotic controllability implies feedback stabilization. *IEEE Trans. Automat. Control*, 42, 1394-1407.
- [4] Korobov, V. I. (1979). A geometrical criterion for local controllability of dynamical systems with restrictions on controls. *Diff. Uravn.*, Vol. 15, No. 9, pp. 1592-1599.
- [5] Leenher P. D. and D. Aeyels (2001). Stabilization of positive linear systems. *Systems Control Lett.*, 44, 259-271.
- [6] Lin Y. and E. D. Sontag (1995). Control-Lyapunov universal formulas for restricted inputs. *Control: Theory and Advanced Technology*, 10, 1981-2004.
- [7] Megretski, A. (1996). L2 BIBO output feedback stabilization with saturated control. *Proc. 13th World Congress of IFAC*, Vol. D, 435-440.
- [8] Murray Wonham W. (1985). *Linear Multivariate Control; A Geometric Approach*, Third Edition, Springer-Verlag.
- [9] Sapertstone, S.H. and Yorke, J.A. (1971). Controllability of linear oscillatory systems using positive controls. *SIAM J. Control*, Vol. 9, No. 2.
- [10] Schmitendorf, W. E. and B. R. Barmish (1980). Null controllability of linear systems with constrained controls. *SIAM J. Control Optim.*, 18, 327-345.
- [11] Smirnov, G.V. (1999) Global Guidance Stabilization of Linear Control Systems. *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 9, 585-598.
- [12] Smirnov, G.V. (1996) Stabilization by constrained controls. *SIAM J. Control Optim.*
- [13] Sontag, E. D. (1984). An Algebraic approach to bounded controllability of linear systems. *Int. J. Control*, 39, 181-188.
- [14] Suárez, R., J. Álvarez-Ramírez and J. Solís-Daun (1997). Linear systems with bounded inputs: Global stabilization with eigenvalue placement. *Internat. J. Robust Nonlinear Control*, 7, 835-845.
- [15] Suárez, R., J. Solís-Daun and J. Álvarez (1994). Stabilization of linear controllable systems by means of bounded continuous nonlinear feedback control. *Systems Control Lett.*, 23, 403-410.

- [16] Sussmann, H. J., E. D. Sontag and Y. Yang (1994). A general result on the stabilization of linear systems using bounded control. *IEEE Trans. Automat. Control*, 39, 2411-2424.
- [17] Sussmann, H. J. and Yudi Yang (1991). On the Stabilizability of Multiple Integrators by Means of Bounded Feedback Controls. Proceedings of the 30th conference on Decision and control Brighton, England.
- [18] Teel, A. R. (1995). Linear systems with bounded nonlinearities: Global stabilization by scheduling a family of H^∞ -type controllers. *Internat. J. Robust Nonlinear Control*, 5, 399-411.
- [19] Teel, A. R. (1992). Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls. *Systems Control Lett.*, 18, 165-171.
- [20] Tsiniias, J. (1991). Existence of control Lyapunov functions and applications to state feedback stabilizability of nonlinear systems. *SIAM J. Control Optim.*, 29, 457-473.
- [21] Z. ARTSTEIN, *Stabilization with relaxed controls*, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, 7 (1983), pp. 1163–1173.
- [22] J. CURTIS, “CLF-based nonlinear control with polytopic input constraints”, in *Proc. 42th IEEE Conf. Dec. Control*, Maui HI, Dec. 2003, pp. 2228-2233.
- [23] H. LEYVA, & J. SOLIS-DAUN, “Synthesis of positive controls for the global CLF stabilization of systems”, in *Proc. 48th IEEE Conf. Dec. Control/28th Chinese Ctrl. Conf.*, Shanghai, P.R. China, Dec. 2009, pp. 656-660.
- [24] H. LEYVA, J. SOLIS-DAUN, & R. SUÁREZ, “Global CLF stabilization of systems with control inputs constrained to a hyperbox”, *SIAM J. Control Optim.*, vol. 51, pp. 745-766, 2013.
- [25] G. BASTIN, AND L. PRALY, *Feedback stabilization with positive controls of a class of dissipative mass-balance system*, in *Proc. 14th IFAC World Congress*, Beijing, China, 1999.
- [26] F. BLANCHINI, AND S. MIANI, *Any domain of attraction for a linear constrained system is a tracking domain of attraction*, *SIAM J. Control Optim.*, 38 (2000), pp. 971–994.
- [27] R. F. BRAMMER, *Controllability in linear autonomous systems with positive controllers*, *SIAM J. Control*, 10 (1972), pp. 339–353.
- [28] M. CORLESS, AND G. LEITMAN, *Exponential convergence for uncertain system with component-wise bounded controllers*, in *Robust control via Variable Structure and Lyapunov Techniques*, F. Garofalo, and L. Glielmo (Eds.), *Lect. Notes Control Inform. Sci.* 217, 1996, Springer, London, pp. 175–196.
- [29] G. HARDY, J. E. LITTLEWOOD AND G. PÓLYA, *Inequalities*, 2nd Edition, 1988, Cambridge Mathematical Library.
- [30] P. KAVEH, AND Y. B. SHTESSL, *Blood glucose regulation via double loop higher order sliding mode control and multiple sampling rate*, in *Modern Sliding Mode Control Theory*, G. Bartolini *et al.* (Eds.), *Lect. Notes Control Inform. Sci.* 375, 2008, Springer, pp. 427–445.
- [31] K. KIDANE, H. NAKAMURA, Y. YAMASHITA, AND H. NISHITANI, *Controller for a nonlinear system with an input constraint by using a control Lyapunov function I & II*, in *Proc. 16th IFAC World Congress*, Prague, Czech Republic, July 2005.
- [32] V.I. KOROBOV, *A geometrical criterion for local controllability of dynamical systems with restrictions on controls*, *Diff. Uravn.*, 15 (1979), pp. 1592–1599.

- [33] Y. LIN, AND E. D. SONTAG, *A universal formula for stabilization with bounded controls*, *Systems Control Lett.*, 16 (1991), pp. 393–397.
- [34] Y. LIN, AND E. D. SONTAG, *Control-Lyapunov universal formulas for restricted inputs*, *Control: Theory and Advanced Technology*, 10 (1995), pp. 1981–2004.
- [35] M. MALISOFF, *An algorithm for feedback stabilization with respect to saturating controls using universal formulas for control-Lyapunov functions*, in *Proc. Amer. Control Conf.*, Chicado, IL USA, June 2000, pp. 1771–1773.
- [36] M. MALISOFF, AND E. D. SONTAG, *Universal formulas for feedback stabilization with respect to Minkowski balls*, *Systems Control Lett.*, 40 (2000), pp. 247–260.
- [37] Z. QU, *Robust Control of Nonlinear Uncertain Systems*, 1998, Wiley, New York.
- [38] R. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*, 2nd printing, 1972, Princeton Univ. Press, Princeton N.J.
- [39] S. H. SAPERSTONE, AND J. A. YORKE, *Controllability of linear oscillatory systems using positive controls*, *SIAM J. Control*, 9 (1971), pp. 253–272.
- [40] Y. SATOH, H. NAKAMURA, N. NAKAMURA, H. KATAYAMA, AND H. NISHITANI, *Control formula for nonlinear systems subjet to convex input constraints using control Lyapunov functions*, in *Proc. 47th IEEE Conf. Dec. Control*, Cancún, México, Dec. 2008, pp. 2512–2519.
- [41] R. SCHNEIDER, *Convex bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Vol. 44, 1993, Cambridge Univ. Press.
- [42] G. V. SMIRNOV, *Stabilization by constrained controls*, *SIAM J. Control Optim.*, 34 (1996), pp. 1616–1649.
- [43] G. V. SMIRNOV, *Global guidance stabilization of linear control systems*, *Int. J. Robust Nonlinear Control*, 9 (1999), pp. 585–598.
- [44] J. SOLIS DAUN, *Global CLF stabilization of nonlinear systems: A geometric point of view*, in *Proc. 18th IFAC World Congress*, Milano, Italy, August 28–Sept. 2 2011, pp. 11139–11144.
- [45] J. SOLÍS-DAUN, B. AGUIRRE, AND R. SUÁREZ, *Synthesis of regular controls for the global CLF stabilization of nonlinear systems*, in *Proc. 4th IFAC Symp. System, Structure & Control*, Ancona, Italy, Sept. 2010, pp. 242–248.
- [46] J. SOLIS-DAUN, AND H. LEYVA, *On the global CLF stabilization of systems with polytopic control value sets*, in *Proc. 18th IFAC World Congress*, Milano, Italy, August 28–Sept. 2 2011, pp. 11042–11047.
- [47] E. D. SONTAG, *A “universal” construction of Artstein’s theorem on nonlinear stabilization*, *Systems Control Lett.*, 13 (1989), pp. 117–123.
- [48] R. SUAREZ, J. SOLIS-DAUN, AND B. AGUIRRE, *Global CLF stabilization of systems with compact convex control value sets*, in *Proc. 40th IEEE Conf. Dec. Control*, Orlando, FL USA, Dec. 2001, pp. 3838–3843.
- [49] R. SUAREZ, J. SOLIS-DAUN, AND J. ÁLVAREZ-RAMIREZ, *Global robust stabilization of nonlinear systems subject to input constraints*, *Int. J. Robust Nonlin. Control*, 14 (2002), pp. 1227–1238.
- [50] H. J. SUSSMANN, AND Y. YANG, *On the stabilizability of multiple integrators by means of bounded feedback controls*, in *Proc. 30th Conf. Dec. Control*, Brighton, England, Dec. 1991, pp. 70–72.

-
- [51] SONTAG, E. D., BLONDEL V., ET AL, *Control-Lyapunov functions. In Open Problems in Mathematical Systems and Control Theory*, V. Blondel, et al., Eds., Springer, London, 1998; 211-216.
- [52] H. Leyva and J. Solis-Daun, Global CLF stabilization of systems with respect to a hyperbox, allowing the null-control input in its boundary (positive controls), 53 IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2014), pp. 3107-3112.
- [53] J. Solis-Daun, (2013a). Global CLF stabilization of nonlinear systems. Part I: A geometric approach—compact strictly convex CVS. SIAM J.Control Optim. 51, 2152–2175.