

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD -IZTAPALAPA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

*Órbitas periódicas en el problema
restringido de cuatro cuerpos.*

Tesis que presenta:
Jaime Burgos García

Para obtener el grado de:
Doctor en Ciencias (Matemáticas)

Asesor

Dr. Joaquín Delgado Fernández

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
México, Marzo de 2013

*“Cuando mayor es la dificultad,
mayor es la gloria”
Marco Tulio Cicerón*

Agradecimientos

El presente trabajo es el “fin” de un camino que comenzó hace 9 años cuando ingresé por primera vez a esta, mi adorada universidad que tantas cosas me ha dado. Quiero agradecer en primer lugar a mis amigos y mentores, el Dr. Mario Pineda Ruelas y Gabriel Hernández Hernández quienes me introdujeron al vasto terreno que son las Matemáticas con sus conocimientos y sabios consejos cuando andaba de hoja al viento. Espero haber sido un digno discípulo. Agradezco enormemente a mi asesor el Dr. Joaquín Delgado Fernández quien hizo posible este trabajo, gracias *prof* por su paciencia, por sus consejos profesionales y personales que me alentaron a seguir adelante y por el privilegio de permitirme trabajar con usted. También quiero agradecer a los profesores del área de Mecánica Celeste de la UAM-I, a mis sinodales y a los profesores Jaume Llibre y Esther Barrabés en Barcelona España por sus comentarios y críticas que me ayudaron a tomar nuevos rumbos y mejorar mis investigaciones. A mi esposa Dania quien me dio una preciosa hija y que estuvo conmigo en la parte final de este trabajo, gracias por tu amor y comprensión *coneja*. A mis amigos que conocí en estos años en la UAM, por los buenos momentos y por esas “fiestas” que compartimos juntos. Debo decir que este trabajo no hubiera sido posible sin el apoyo económico brindado por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología CONACyT a quien agradezco todo el apoyo brindado durante estos años.

Sin embargo, quiero hacer una mención especial y agradecer a mis padres Jaime Burgos y Marina García por todo el apoyo brindado, por sus enseñanzas y por darme la vida, espero haber compensado en algo los corajes y desvelos que he ocasionado, a mi hermana por esos años que pasamos juntos, por los momentos difíciles y alegres que vivimos *pelusa*. Finalmente, agradezco a esa *fuerza* extraña que llamamos *dios* por la oportunidad de comenzar este camino.

Índice general

1. Introducción y Preliminares	6
1.1. Introducción	6
1.2. Preliminares	9
1.2.1. Sistemas Hamiltonianos	9
1.2.2. Configuraciones centrales	10
1.2.3. Estabilidad	12
2. El Problema Restringido de Cuatro Cuerpos	14
2.1. Planteamiento del Problema	14
2.2. Ecuaciones de Movimiento	15
2.3. Formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana del Problema Restringido de 4 cuerpos	19
3. Aspectos Dinámicos del Problema	22
3.1. Regiones de Hill	22
3.2. Soluciones de equilibrio relativo	23
3.2.1. Estudio de los equilibrios relativos	25
3.3. Estudio de la estabilidad de los equilibrios relativos	28
3.3.1. Estabilidad de los equilibrios relativos en el PR4C	29
4. Forma Normal en el Punto de Equilibrio L_2	36
4.1. Teoría de perturbación y formas normales	37
4.2. Aplicación de la teoría de formas normales al punto L_2	42
4.2.1. La forma normal lineal	42
4.2.2. Los términos de orden superior	44
4.2.3. Análisis de la forma normal en L_2	47
4.2.4. La función de Melnikov	51
4.3. Estudio numérico de las variedades estable e inestable de L_2	54
5. Regularización en el PR4C	61
5.1. Regularización de colisiones con m_2 y m_3	65
5.2. Regularización simultánea de colisiones con las tres primarias	67

6. Órbitas Periódicas en el PR4C	72
6.1. Teoría preliminar sobre órbitas periódicas	73
6.2. El método de continuación analítica	76
6.3. Órbitas generadoras y el problema de Kepler en el PR4C	84
6.4. Órbitas de segunda especie	90
6.4.1. Familias de arcos en el PR3C	91
6.4.2. Familias de arcos en el PR4C	98
6.5. Estabilidad de órbitas periódicas y bifurcaciones	103
6.6. La búsqueda numérica de familias de órbitas periódicas	110
6.6.1. Continuación numérica	110
6.6.2. Continuación numérica por pseudolongitud de arco	111
7. Clasificación de Familias de Órbitas Periódicas	114
7.1. La familia g de órbitas periódicas directas alrededor de m_1	115
7.2. La familia f de órbitas retrógradas alrededor de m_1	116
7.3. La familia a de órbitas retrógradas alrededor de L_1	117
7.4. La familia g_4	118
7.5. La familia g_6	119
7.6. La familia m de órbitas retrógradas alrededor de m_1, m_2 y m_3	119
7.7. La familia j de órbitas retrógradas alrededor de m_2 y m_3	121
7.8. La familia j_2	122
7.9. La familia r_2 de órbitas asintóticas a L_2	122
7.10. Puntos críticos en las familias de órbitas periódicas	124
7.11. Estudio de la estabilidad de las familias de órbitas periódicas	125
7.12. Ilustraciones de órbitas periódicas de las familias encontradas	127
8. Conclusiones	134

Capítulo 1

Introducción y Preliminares

1.1. Introducción

Desde los comienzos de la historia de la humanidad el hombre ha tratado de dar explicación acerca del movimiento de los cuerpos, los primeros astrónomos desarrollaron modelos empíricos en base a sus observaciones en los astros para medir el tiempo y elaborar calendarios. Tiempo después, las ideas Aristotélicas del movimiento junto con el modelo geocéntrico del sistema solar trataron de explicar el movimiento de los astros, pero como sabemos ahora, de una manera incorrecta. Hubo que esperar a hombres de la talla de Galileo, Tycho Brahe, Copérnico, Kepler, entre otros para tener una nueva concepción acerca del movimiento planetario. Como resultado de estos trabajos, Isaac Newton formuló la clásica ley de la gravitación universal la cual explica las razones de las órbitas de los planetas y otros objetos celestes. Sin embargo, esto dio origen a un nuevo problema conocido como el *problema de los n cuerpos*, es decir, el problema de describir el movimiento de n masas puntuales, no nulas, sometidas a la ley de la gravitación universal de Newton. En términos matemáticos el planteamiento de este problema es como sigue:

Si x_i es la posición del i -ésimo cuerpo respecto al centro de masa y m_i denota su masa, entonces

$$m_i \ddot{x}_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{G m_i m_j (x_i - x_j)}{\|x_j - x_i\|^3},$$

donde $x_i \in \mathbb{R}^3$. Este es un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que rige el movimiento de los n -cuerpos. El problema de $n = 2$ cuerpos llevó a Newton a la invención del cálculo para resolverlo, sin embargo, la solución del problema para $n = 3$ cuerpos probó ser insoluble en esa época, de hecho Newton afirmó que su solución "*excede, si no estoy equivocado la fuerza de cualquier mente humana*" [49]. El estudio del problema de tres cuerpos dio origen a dos enfoques distintos: el primero de ellos consistía en aproximar las

soluciones y esto dio origen a la mecánica celeste; el segundo enfoque consistió en buscar las soluciones transformando el problema original y esto originó la mecánica analítica.

En 1912 Karl Sundman publicó en [62] que es posible encontrar una solución en serie de potencias de el problema de 3 cuerpos para casi toda condición inicial admisible. Dichas series están compuestas por potencias de $t^{1/3}$, además estas series son convergentes para todo $t \in \mathbb{R}$ excepto para un conjunto despreciable de condiciones iniciales, que a saber son aquellas para las cuales el momento angular es cero. Más aún, en 1991 Wang [66] publicó un resultado interesante en el cual se prueba que existe una solución en series de potencias convergentes del problema general de n - cuerpos, sin embargo, estas series poseen un orden de convergencia muy lento y desde un punto de vista teórico, estas series no aportan nada nuevo a lo ya conocido. Entonces, dada la complejidad del problema, los investigadores se propusieron estudiar casos particulares del problema, esto dio origen a dos célebres problemas: El problema restringido de 3 cuerpos (PR3C) y el problema de los dos centros fijos, estudiado inicialmente por Euler y completado posteriormente por Legendre y Jacobi. El PR3C supone que dos cuerpos de masas m_1 y m_2 , se mueven en órbitas circulares respecto de su centro de masa mutuo y que el tercer cuerpo es de masa despreciable respecto de las masas m_1 y m_2 , el tercer cuerpo se mueve bajo la influencia gravitacional de estos pero sin perturbar su movimiento.

Desde la época de Euler a la fecha, numerosos investigadores han estudiado el PR3C que ha probado ser una buena aproximación para ciertos subsistemas de nuestro sistema solar, por ejemplo, en el sistema Sol-Júpiter y los asteroides troyanos. Destacan las contribuciones de Poincaré, Euler, Lagrange, y el estudio de las familias de órbitas periódicas realizado primeramente por Elis Strömberg y sus colaboradores en el observatorio de Copenhague, más recientemente la sintetización de este y otros trabajos fue realizado por Michel Hénon en los años 60. Bajo este enfoque para estudiar el problema general de n cuerpos, es natural preguntarse por problemas restringidos para el caso de $n = 4$ y extenderlos entonces al caso general de 4 cuerpos. Existen dos problemas restringidos de 4 cuerpos que ya han comenzado a ser explorados, el primero de ellos supone tres masas puntuales (primarias) en la configuración central colineal de Euler y una cuarta masa, que es despreciable respecto de las primarias, se mueve bajo la influencia gravitacional de las primarias pero sin afectar su movimiento. El segundo problema plantea las mismas condiciones que el primero pero con la excepción de que las tres primarias ahora se encuentran en la configuración de triángulo equilátero de Lagrange, como referencias se pueden consultar los trabajos: [2], [41] y [54]. En este trabajo estamos interesados en estudiar el segundo problema, en particular, el objetivo central es explorar y clasificar familias de órbitas periódicas de este problema como fue hecho en el PR3C. Este trabajo está pensado para ser comprendido por cualquier lector que tenga conocimientos básicos en Matemáticas que se imparten en los últimos años de la licenciatura y sin necesidad de ser un experto en el tema. La estructura del presente trabajo

es la siguiente:

En el capítulo 2 definiremos y estableceremos formalmente el problema restringido de 4 cuerpos equilátero, (de aquí en adelante solo lo llamaremos problema restringido de 4 cuerpos por simplicidad) junto con las ecuaciones de movimiento que gobiernan el movimiento de la cuarta masa infinitesimal y exploraremos sus propiedades, también discutiremos la formulación Hamiltoniana del problema y sus consecuencias. En el capítulo 3 estudiaremos algunos aspectos dinámicos del problema como son las regiones de movimiento permitido o regiones de Hill y discutiremos acerca de los puntos de equilibrio relativo del sistema y exploraremos sus propiedades. En el desarrollo de este capítulo hacemos uso de algunos resultados del trabajo [39], sin embargo, hemos corregido algunas cantidades que el autor presenta en este trabajo, dichas cantidades corresponden a un intervalo de valores de las masas para el cual un punto de equilibrio presenta estabilidad, mostramos que este intervalo tiene, de hecho, una longitud más pequeña que la mencionada en dicha referencia. En el capítulo 4 discutiremos la teoría de formas normales en general y la aplicaremos en nuestro problema para obtener una forma normal en un punto de equilibrio que será llamado L_2 , después analizaremos esta forma normal para obtener información sobre la dinámica local de este punto de equilibrio. En el capítulo 5 discutiremos la técnica conocida como regularización de colisiones binarias y la aplicaremos a nuestro problema por medio de transformaciones diversas que serán escogidas apropiadamente. En el capítulo 6 estudiaremos los fundamentos analíticos y numéricos para explorar las órbitas periódicas en nuestro problema, luego discutiremos los criterios que usaremos para definir y clasificar familias de órbitas periódicas en el problema restringido de 4 cuerpos. También se ofrece un estudio de las familias de órbitas denominadas *órbitas de segunda especie*, este estudio está inspirado el trabajo [34] hecho para el PR3C. En el capítulo 7 ofrecemos un estudio exhaustivo de las familias de órbitas periódicas que fueron encontradas usando las técnicas del capítulo 6, como ya se mencionó, el estudio de las órbitas periódicas será hecho de una manera análoga que en el PR3C. Cabe mencionar que mientras se escribía el trabajo de este capítulo salió a la luz un artículo publicado por Baltagiannis, A.N. y Papadakis, K.E. [5] que contenía algunos resultados similares a los presentados en este trabajo [13], sin embargo, se confirmaron y extendieron algunos resultados de [5] y se encontraron nuevas familias de órbitas periódicas, la extensión de los resultados nos llevo a conjeturar la existencia de la terminación “Blue sky catastrophe” [22], [35] en nuestro problema. Esta conjetura es estudiada a detalle y verificada en el capítulo 4. Finalmente, el capítulo 8 está dedicado a conclusiones y problemas abiertos en este problema. Dedicamos la siguiente sección a establecer algunos preliminares sobre los fundamentos básicos que se necesitan en una primera lectura de este trabajo, si el lector está familiarizado con la teoría básica de ecuaciones diferenciales ordinarias y sistemas Hamiltonianos, puede omitir esta sección para ir directamente al siguiente capítulo.

1.2. Preliminares

1.2.1. Sistemas Hamiltonianos

Asumimos que el lector está familiarizado con la teoría básica de álgebra lineal y la teoría general de ecuaciones diferenciales lineales. Los siguientes resultados y sus demostraciones se pueden encontrar en [47]. Denotemos por $gl(m, \mathbb{F})$ a el conjunto de todas las matrices $m \times m$ con entradas en un campo \mathbb{F} donde $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, denotemos también por $Gl(m, \mathbb{F})$ a el conjunto de matrices no singulares $m \times m$ con entradas en el campo \mathbb{F} . $Gl(m, \mathbb{F})$ es un grupo bajo la operación de producto de matrices y es llamado el *grupo lineal general*. En esta teoría existe una matriz que juega un papel especial, dicha matriz será llamada la matriz simpléctica estándar de orden $2n \times 2n$ dada por

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

donde I es la matriz identidad. Se puede verificar que esta matriz cumple que $J^{-1} = J^T = -J$. Una matriz $A \in gl(m, \mathbb{F})$ se llama Hamiltoniana si $A^T J + JA = 0$. El conjunto de todas las matrices Hamiltonianas de orden $2n \times 2n$ se denotará por $sp(n, \mathbb{F})$.

Teorema 1.2.1. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes: (1) A es Hamiltoniana, (2) $A = JR$ donde R es una matriz simétrica, (3) JA es simétrica. Si A y B son matrices Hamiltonianas, entonces lo son A^T , αA ($\alpha \in \mathbb{F}$), $A \pm B$, $[A, B] = AB - BA$*

Una matriz T de orden $2n \times 2n$ se llama simpléctica con multiplicador μ si

$$T^T J T = \mu J,$$

donde μ es una constante distinta de cero. Si $\mu = 1$, entonces T se llama simplemente simpléctica. El conjunto de todas la matrices simplécticas de orden $2n \times 2n$ se denota por $Sp(n, \mathbb{F})$.

Teorema 1.2.2. *Si T es simpléctica con multiplicador μ , entonces T es no singular y $T^{-1} = -\mu^{-1} J T^T J$. Si T y R son simplécticas con multiplicador μ y ν respectivamente, entonces T^T , T^{-1} , y TR son simplécticas con multiplicadores μ , μ^{-1} y $\mu\nu$ respectivamente.*

Si $T \in Sp(n, \mathbb{F})$ entonces su determinante siempre es igual a uno. Sea z un vector de coordenadas en \mathbb{R}^{2n} , I un intervalo en \mathbb{R} y $S : I \rightarrow gl(2n, \mathbb{R})$ una transformación lineal y simétrica. Un sistema Hamiltoniano lineal está definido por el sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{z} = JS(t)z = A(t)z,$$

donde

$$H = \frac{1}{2} z^T S z,$$

con $S = -JA$. No obstante, esta definición también se puede extender al caso no lineal ya que el formalismo Hamiltoniano es la estructura Matemática natural para estudiar a los sistemas mecánicos conservativos. Un sistema Hamiltoniano en general es un sistema de $2n$ ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, q, p), \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(t, q, p),\end{aligned}$$

con $i = 1, 2, \dots, n$ y $H = H(t, q, p)$ es llamado el Hamiltoniano del sistema. Los vectores $q = (q_1, \dots, q_n)$ y $p = (p_1, \dots, p_n)$ son llamados tradicionalmente los vectores de posición y momento respectivamente. Es importante en sistemas Hamiltonianos conocer cuando un cambio de variables preserva la estructura Hamiltoniana.

Definición 1.2.3. Sea $T(t, z) : D \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ una función diferenciable sobre un subconjunto abierto $D \subset \mathbb{R}^{2n+1}$; T se llama una transformación simpléctica si la matriz Jacobiana de T con respecto a z , $\frac{\partial T}{\partial z}$ es una matriz simpléctica en cada punto $(t, z) \in D$, es decir, T es simpléctica si y solo si

$$\frac{\partial T^T}{\partial z} J \frac{\partial T}{\partial z} = J$$

Teorema 1.2.4. Una transformación simpléctica preserva la estructura Hamiltoniana del sistema.

Es decir, un cambio de variables simpléctico transforma un sistema Hamiltoniano de ecuaciones en otro sistema Hamiltoniano de ecuaciones.

1.2.2. Configuraciones centrales

A continuación daremos las definiciones y resultados básicos sobre esta teoría que asumiremos sin demostración, se remite a las referencias [42], [47] y [52] para consultar los detalles.

Ya hemos resaltado la importancia de encontrar soluciones especiales para el problema de N -cuerpos, una de ellas es tratar de buscar soluciones colineales de las ecuaciones de movimiento

$$m_i \ddot{q}_i = \sum_{j=1}^N G \frac{m_i m_j (q_j - q_i)}{\|q_j - q_i\|^3} = \frac{\partial U}{\partial q_i}, \quad (1.1)$$

donde

$$U = \sum_{1 \leq i < j \leq N} \frac{m_i m_j}{\|q_j - q_i\|},$$

y G es la constante universal de gravitación. Para esto, busquemos soluciones de la forma $q_i(t) = \phi(t)a_i$, con a_i vectores constantes para cada $i \in 1, 2, \dots, N$ y

$\phi(t)$ una función escalar. Sustituyendo esto en la ecuación (1.1) y simplificando términos obtenemos

$$|\phi|^3 \phi^{-1} \ddot{\phi} m_i a_i = \sum_{j=1}^N G \frac{m_i m_j (a_j - a_i)}{\|a_j - a_i\|^3}, \quad (1.2)$$

observe que el lado derecho de (1.2) es constante, entonces el lado izquierdo debe serlo también, por lo tanto (1.2) tiene una solución si existe una función $\phi(t)$, una constante λ y vectores a_i tales que

$$\ddot{\phi} = -\lambda \frac{\phi}{|\phi|^3}, \quad (1.3)$$

$$-\lambda m_i a_i = \sum_{j=1}^N G \frac{m_i m_j (a_j - a_i)}{\|a_j - a_i\|^3}, \quad (1.4)$$

para $j = 1, 2, \dots, N$. La ecuación (1.3) es el problema de Kepler en una dimensión, así que se conocen todas sus soluciones. La ecuación (1.4) es un sistema no trivial de ecuaciones algebraicas no lineales. A una configuración geométrica de N partículas dada por vectores constantes a_1, a_2, \dots, a_N que satisfacen la relación (1.4) para alguna constante λ se llama una configuración central que abreviaremos como c.c. En las referencias citadas arriba el lector puede encontrar una vasta discusión sobre las propiedades de las c.c. en el contexto más general, una de ellas nos dice que cualquier escalamiento uniforme de una c.c. es también una c.c., entonces con el fin de medir el tamaño del sistema, definimos el momento de inercia del sistema como

$$I = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \|q_i\|^2, \quad (1.5)$$

entonces (1.4) se puede escribir como

$$\frac{\partial U}{\partial q}(a) + \lambda \frac{\partial I}{\partial q}(a) = 0, \quad (1.6)$$

con $q = (q_1, \dots, q_N)$ y $a = (a_1, \dots, a_N)$. De (1.6) tenemos que la constante λ se puede considerar como un multiplicador de Lagrange y de esta forma una c.c. no es más que un punto crítico del potencial U restringido a una superficie de momentos de inercia constante $I = I_0 = cte$. Para $N = 3$ existen exactamente 5 c.c. para cualquier conjunto dado de masas, a saber estas c.c. son las tres soluciones colineales de Euler y las dos soluciones de triángulo equilátero de Lagrange. Sin embargo, poco es conocido sobre las c.c. para $N \geq 4$ salvo algunos casos especiales de las masas, en [7], [55], [56] y [60] el lector puede encontrar diversos estudios sobre las c.c. para el caso $N = 4$, en el caso general se sabe que el número de c.c. debe ser finito [31]. Regresando al caso $N = 3$ tenemos que las configuraciones de Euler y Lagrange son obtenidas a partir de una c.c. a la cual le aplicamos una rotación seguida de una dilatación o expansión (homotecia),

así conseguimos que cada partícula se mueva en una órbita elíptica pero que conserve a su vez la configuración inicial colineal o de triángulo equilátero. Este tipo de soluciones se definen como sigue

Definición 1.2.5. *Se dice que una solución $r(t) = (q_1(t), \dots, q_N(t))$ es homográfica si existe una función escalar $e(t)$ y una matriz de rotación $R(t)$ tal que para toda $i = 1, 2, \dots, N$ y para todo tiempo t , se cumple que $q_i(t) = e(t)R(t)a_i$ donde $a = (a_1, \dots, a_N)$ es una c.c.*

1.2.3. Estabilidad

Existen varias nociones de estabilidad de una solución de un campo vectorial, a continuación definiremos las tres nociones más utilizadas en la teoría de estabilidad. Consideremos un campo vectorial autónomo

$$\dot{x} = f(x), \quad (1.7)$$

con $x \in \mathbb{R}^n$ y sea $\bar{x}(t)$ cualquier solución de (1.7). Las siguientes definiciones son los conceptos de estabilidad que se usarán a lo largo de este trabajo [67]

Definición 1.2.6. *(Estabilidad de Liapunov) La solución $\bar{x}(t)$ es estable si dado cualquier $\epsilon > 0$, existe un $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que para cualquier otra solución, $y(t)$ de (1.7) que satisface $\|\bar{x}(t_0) - y(t_0)\| < \delta$ entonces $\|\bar{x}(t) - y(t)\| < \epsilon \forall t > t_0$.*

Definición 1.2.7. *(Estabilidad asintótica de Poisson) La solución $\bar{x}(t)$ es asintóticamente estable si es estable en el sentido de Liapunov y si existe una constante $b > 0$ tal que si $\|\bar{x}(t_0) - y(t_0)\| < b$ entonces $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\bar{x}(t_0) - y(t_0)\| = 0$*

Definición 1.2.8. *(Estabilidad orbital de Birkhoff) La solución $\bar{x}(t)$ es orbitalmente estable si para cada $\epsilon > 0$ existen $\delta(\epsilon)$ y $\tau(t)$ tales que si $\|\bar{x}(t_0) - y(t_0)\| < \delta$ entonces $\|\bar{x}(t) - y(\tau(t))\| < \epsilon$*

Las dos primeras definiciones nos dicen que las soluciones que son cercanas en un tiempo $t_0 \in \mathbb{R}$ a la solución conocida $\bar{x}(t)$, permanecerán cercanas para todo tiempo $t > t_0$. La tercera definición nos dice que aunque dos soluciones no permanecen cercanas a cualquier tiempo, sus órbitas asociadas si permanecen cercanas en el espacio. Estas tres definiciones son elegantes matemáticamente, sin embargo, no nos dan un método útil para determinar cuando una solución es estable o no. Para determinar la estabilidad de una solución $\bar{x}(t)$ debemos entender la naturaleza de las soluciones cerca de $\bar{x}(t)$. Para hacer esto, hagamos

$$x = \bar{x}(t) + y, \quad (1.8)$$

si sustituimos (1.8) en (1.7) y expandiendo en serie de Taylor alrededor de $\bar{x}(t)$ obtenemos

$$\dot{x} = \dot{\bar{x}}(t) + \dot{y} = f(\bar{x}(t)) + Df(\bar{x}(t))y + \mathcal{O}(\|y\|^2),$$

donde Df denota la derivada de f y $\|\cdot\|$ es una norma en \mathbb{R}^n . Si usamos el hecho de que $\dot{\bar{x}}(t) = f(\bar{x}(t))$ entonces tenemos

$$\dot{y} = Df(\bar{x}(t))y + \mathcal{O}(\|y\|^2), \quad (1.9)$$

la ecuación (1.9) describe la evolución de las órbitas cerca de $\bar{x}(t)$, entonces es razonable que para estudiar el comportamiento de dichas órbitas podemos estudiar el sistema lineal asociado $\dot{y} = Df(\bar{x}(t))y$. Por lo tanto, las cuestiones de estabilidad de $\bar{x}(t)$ involucra los siguientes pasos

1. Determinar si la solución $y = 0$ del sistema lineal asociado es estable
2. Mostrar que la estabilidad (o inestabilidad) de la solución $y = 0$ implica la estabilidad (inestabilidad) de $\bar{x}(t)$.

El paso 1 puede ser igualmente difícil que el problema original ya que no hay métodos generales para encontrar la solución de ecuaciones diferenciales con coeficientes dependientes del tiempo. Sin embargo, si la solución conocida en un punto de equilibrio entonces la matriz $Df(x_0)$ es de coeficientes constantes y el problema se reduce a estudiar los eigenvalores del sistema

$$\dot{y} = By,$$

con $B = Df(x_0)$.

Teorema 1.2.9. *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene al origen y $f \in C^1(E)$, sea ϕ_t el flujo del sistema (1.7) para el cual el origen es un punto de equilibrio. Supongamos que $B = Df(0)$ tiene k eigenvalores con parte real negativa y $n - k$ con parte real positiva, entonces existe una variedad diferenciable de dimensión k , W^s tangente al espacio estable E^s generado por los k eigenvalores del sistema lineal $\dot{y} = By$ tal que $\forall t \geq 0$, y $\forall x_0 \in W^s$ $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi_t(x_0) = 0$. Y existe una variedad diferenciable de dimensión $n - k$, W^u tangente al espacio inestable E^u generado por los $n - k$ eigenvalores del sistema lineal $\dot{y} = By$ tal que $\forall t \leq 0$, y $\forall x_0 \in W^u$ $\lim_{t \rightarrow -\infty} \phi_t(x_0) = 0$.*

Entonces los eigenvalores del sistema nos dan información acerca de la estructura local de las soluciones.

Capítulo 2

El Problema Restringido de Cuatro Cuerpos

2.1. Planteamiento del Problema

Consideremos tres masas puntuales, a las que llamaremos primarias, moviéndose en órbitas periódicas circulares alrededor de su centro de masa bajo la mutua influencia gravitacional dada por las leyes de Newton, las masas permanecen a todo tiempo en una configuración Lagrangiana del problema general de tres cuerpos, es decir, las masas permanecen fijas en los vértices de un triángulo equilátero si son vistas en un sistema rotatorio que gira con la misma velocidad angular constante de las primarias. Un cuerpo de masa infinitesimal se mueve

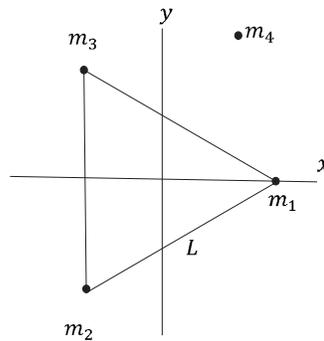


Figura 2.1: El problema restringido de cuatro cuerpos en un sistema rotatorio.

bajo la influencia gravitacional que ejercen las tres primarias, como en el célebre problema restringido de tres cuerpos, suponemos que la cuarta masa no afecta el movimiento de las tres primarias, así que la configuración de triángulo equilátero permanece sin cambios. Por lo tanto, en el sistema rotatorio el problema

se ve como en la figura (2.1). El objetivo de este trabajo es estudiar algunos aspectos dinámicos de este problema, como son: ¿Cuántos puntos de equilibrio relativo tiene el problema?, ¿Donde están localizados estos puntos?, ¿Como es la estabilidad de los puntos de equilibrio?, ¿Como son las órbitas periódicas del problema?, ¿Que se puede decir acerca de su estabilidad?. ¿Existen bifurcaciones de los puntos de equilibrio y de las órbitas periódicas?. En los capítulos siguientes nos dedicaremos a contestar en medida de lo posible estas interrogantes, sin embargo, antes de realizar esto necesitamos naturalmente, establecer las ecuaciones de movimiento del problema. En la siguiente sección establecemos dichas ecuaciones como se presenta en [54]

2.2. Ecuaciones de Movimiento

Tres masas finitas m_1, m_2 , y m_3 y una cuarta masa despreciable están en un cierto momento en el mismo plano. Las cuatro masas permanecerán a todo tiempo en este plano si ninguna otra fuerza actúa aparte de sus atracciones mutuas. Vamos a escoger un sistema de coordenadas cartesiano fijo y denotemos las coordenadas de las tres masas finitas en este sistema de coordenadas con (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) y (X_3, Y_3) . Denotemos las distancias entre las masas finitas con $\rho_{1,2}$, $\rho_{2,3}$ y $\rho_{1,3}$ mientras que ρ_1 , ρ_2 y ρ_3 denotan las distancias entre las tres masas finitas y la masa infinitesimal. Si denotamos con k^2 a la constante gravitacional obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales para el movimiento de las tres masas finitas;

$$\begin{aligned}
X_1'' &= -k^2 m_2 (X_1 - X_2) / \rho_{1,2}^3 - k^2 m_3 (X_1 - X_3) / \rho_{1,3}^3, \\
Y_1'' &= -k^2 m_2 (Y_1 - Y_2) / \rho_{1,2}^3 - k^2 m_3 (Y_1 - Y_3) / \rho_{1,3}^3, \\
X_2'' &= -k^2 m_1 (X_2 - X_1) / \rho_{1,2}^3 - k^2 m_3 (X_2 - X_3) / \rho_{2,3}^3, \\
Y_2'' &= -k^2 m_1 (Y_2 - Y_1) / \rho_{1,2}^3 - k^2 m_3 (Y_2 - Y_3) / \rho_{2,3}^3, \\
X_3'' &= -k^2 m_1 (X_3 - X_1) / \rho_{1,3}^3 - k^2 m_2 (X_3 - X_2) / \rho_{2,3}^3, \\
Y_3'' &= -k^2 m_1 (Y_3 - Y_1) / \rho_{1,3}^3 - k^2 m_2 (Y_3 - Y_2) / \rho_{2,3}^3,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

mientras que el movimiento de la masa infinitesimal se determina mediante las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned}
X'' &= -k^2 m_1 (X - X_1) / \rho_1^3 - k^2 m_2 (X - X_2) / \rho_2^3 - k^2 m_3 (X - X_3) / \rho_3^3, \\
Y'' &= -k^2 m_1 (Y - Y_1) / \rho_1^3 - k^2 m_2 (Y - Y_2) / \rho_2^3 - k^2 m_3 (Y - Y_3) / \rho_3^3.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Ahora bien, deseamos sustituir el sistema de coordenadas fijo (X, Y) por un sistema de coordenadas rotatorias (\bar{x}, \bar{y}) con velocidad angular constante n . Para hacer esto, usamos las ecuaciones de transformación.

$$X = \bar{x} \cos nt - \bar{y} \sin nt, \tag{2.3}$$

$$Y = \bar{x} \sin nt + \bar{y} \cos nt.$$

Las ecuaciones diferenciales para el movimiento de las tres primarias (2.1) en el sistema de coordenadas rotatorio se transforman en

$$\begin{aligned}
\bar{x}_1'' - 2n\bar{y}_1' - n^2\bar{x}_1 &= -k^2m_2(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)/\rho_{1,2}^3 - k^2m_3(\bar{x}_1 - \bar{x}_3)/\rho_{1,3}^3, \\
\bar{y}_1'' + 2n\bar{x}_1' - n^2\bar{y}_1 &= -k^2m_2(\bar{y}_1 - \bar{y}_2)/\rho_{1,2}^3 - k^2m_3(\bar{y}_1 - \bar{y}_3)/\rho_{1,3}^3, \\
\bar{x}_2'' - 2n\bar{y}_2' - n^2\bar{x}_2 &= -k^2m_1(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)/\rho_{1,2}^3 - k^2m_3(\bar{x}_2 - \bar{x}_3)/\rho_{2,3}^3, \\
\bar{y}_2'' + 2n\bar{x}_2' - n^2\bar{y}_2 &= -k^2m_1(\bar{y}_2 - \bar{y}_1)/\rho_{1,2}^3 - k^2m_3(\bar{y}_2 - \bar{y}_3)/\rho_{2,3}^3, \\
\bar{x}_3'' - 2n\bar{y}_3' - n^2\bar{x}_3 &= -k^2m_1(\bar{x}_3 - \bar{x}_1)/\rho_{1,3}^3 - k^2m_2(\bar{y}_3 - \bar{x}_2)/\rho_{2,3}^3, \\
\bar{y}_3'' + 2n\bar{x}_3' - n^2\bar{y}_3 &= -k^2m_1(\bar{y}_3 - \bar{y}_1)/\rho_{1,3}^3 - k^2m_2(\bar{y}_3 - \bar{y}_2)/\rho_{2,3}^3.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Mientras que el movimiento de la masa infinitesimal se determina mediante las ecuaciones

$$\begin{aligned}
\bar{x}'' - 2n\bar{y}' - n^2\bar{x} &= -k^2m_1(\bar{x} - \bar{x}_1)/\rho_1^3 - k^2m_2(\bar{x} - \bar{x}_2)/\rho_2^3 - k^2m_3(\bar{x} - \bar{x}_3)/\rho_3^3, \\
\bar{y}'' + 2n\bar{x}' - n^2\bar{y} &= -k^2m_1(\bar{y} - \bar{y}_1)/\rho_1^3 - k^2m_2(\bar{y} - \bar{y}_2)/\rho_2^3 - k^2m_3(\bar{y} - \bar{y}_3)/\rho_3^3.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Consideremos el caso especial en el que las tres primarias ocupan una posición fija en el sistema de coordenadas rotatorio, donde se encuentran en los vértices de un triángulo equilátero con lado ρ ; la velocidad y la aceleración de las primarias deben ser igual a cero en todo tiempo, es decir, $\bar{x}_i' = 0$, $\bar{x}_i'' = 0$, $\bar{y}_i' = 0$, $\bar{y}_i'' = 0$ con $i \in \{1, 2, 3\}$ y también $\rho_{1,2} = \rho_{2,3} = \rho_{1,3} = \rho$. Del sistema (2.4) se obtiene que

$$\begin{aligned}
n^2\rho^3\bar{x}_1 &= k^2m_2(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) + k^2m_3(\bar{x}_1 - \bar{x}_3), \\
n^2\rho^3\bar{x}_2 &= k^2m_1(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) + k^2m_3(\bar{x}_2 - \bar{x}_3), \\
n^2\rho^3\bar{x}_3 &= k^2m_1(\bar{x}_3 - \bar{x}_1) + k^2m_2(\bar{x}_3 - \bar{x}_2),
\end{aligned} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}
n^2\rho^3\bar{y}_1 &= k^2m_2(\bar{y}_1 - \bar{y}_2) + k^2m_3(\bar{y}_1 - \bar{y}_3), \\
n^2\rho^3\bar{y}_2 &= k^2m_1(\bar{y}_2 - \bar{y}_1) + k^2m_3(\bar{y}_2 - \bar{y}_3), \\
n^2\rho^3\bar{y}_3 &= k^2m_1(\bar{y}_3 - \bar{y}_1) + k^2m_2(\bar{y}_3 - \bar{y}_2),
\end{aligned} \tag{2.7}$$

los sistemas de coordenadas (2.6) y (2.7) sirven para la determinación de \bar{x}_1 , \bar{x}_2 , \bar{x}_3 y \bar{y}_1 , \bar{y}_2 , \bar{y}_3 . Si las tres ecuaciones de (2.6) las multiplicamos respectivamente por m_1, m_2 y m_3 y las ecuaciones de (2.7) las tratamos en forma similar al sumar obtenemos dos ecuaciones:

$$m_1\bar{x}_1 + m_2\bar{x}_2 + m_3\bar{x}_3 = 0, \tag{2.8}$$

$$m_1\bar{y}_1 + m_2\bar{y}_2 + m_3\bar{y}_3 = 0.$$

Se obtiene entonces que el centro de masa común de las tres primarias está en el origen del sistema de coordenadas. Con ayuda de (2.8) podemos reducir (2.6) y (2.7) al siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
(k^2M - n^2\rho^3)\bar{x}_1 &= 0, \\
(k^2M - n^2\rho^3)\bar{x}_2 &= 0, \\
(k^2M - n^2\rho^3)\bar{x}_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}
(k^2M - n^2\rho^3)\bar{y}_1 &= 0, \\
(k^2M - n^2\rho^3)\bar{y}_2 &= 0, \\
(k^2M - n^2\rho^3)\bar{y}_3 &= 0,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

donde $M = m_1 + m_2 + m_3$. Supongamos que no todas las seis coordenadas son cero dado que están en configuración equilátera, entonces las ecuaciones anteriores se pueden reducir a una sola ecuación conocida como la tercera ley de Kepler:

$$k^2M - n^2\rho^3 = 0. \tag{2.11}$$

Sin embargo, queremos establecer nuestras ecuaciones en el sistema rotatorio (sinódico) en variables adimensionales, para hacer esto definamos $x = \bar{x}/\rho$, $y = \bar{y}/\rho$, $r_i = \rho_i/\rho$, $t = nt^*$, $\mu_i = m_i/M$, y denotemos por un punto (\cdot) a la derivada con respecto al nuevo tiempo t . Si sustituimos esto en las ecuaciones (2.5) obtenemos

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\dot{y} - x &= -\frac{k^2M}{n^2\rho^3} = -\sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i(x - x_i)}{r_i^3}, \\
\ddot{y} + 2\dot{x} - y &= -\frac{k^2M}{n^2\rho^3} = -\sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i(y - y_i)}{r_i^3},
\end{aligned}$$

pero haciendo uso de (2.11) obtenemos finalmente

$$\begin{aligned}
\ddot{x} - 2\dot{y} - x &= -\sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i(x - x_i)}{r_i^3}, \\
\ddot{y} + 2\dot{x} - y &= -\sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i(y - y_i)}{r_i^3}.
\end{aligned} \tag{2.12}$$

En particular estamos interesados en el caso de dos masas iguales $\mu_2 = \mu_3 := \mu$ que implica $\mu_1 = 1 - 2\mu$. Bajo estas condiciones, no es difícil probar que las soluciones a las ecuaciones (2.6), (2.7) son $\bar{x}_1 = \sqrt{3}\mu\rho$, $\bar{y}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = \bar{x}_3 = -\frac{\sqrt{3}\rho(1-2\mu)}{2}$, $\bar{y}_2 = -\frac{\rho}{2}, \bar{y}_3 = \frac{\rho}{2}$ de donde obtenemos al escalar $x_1 = \sqrt{3}\mu$, $y_1 = 0$, $x_2 = x_3 = -\frac{\sqrt{3}(1-2\mu)}{2}$, $y_2 = -\frac{1}{2}, y_3 = \frac{1}{2}$. Observe que en las ecuaciones del problema restringido de cuatro cuerpos (PR4C) tenemos tres casos especiales

1. Si $\mu = 0$, obtenemos el problema de Kepler rotatorio con $m_1 = 1$ en el origen de coordenadas.
2. Si $\mu = \frac{1}{2}$, obtenemos el problema restringido de tres cuerpos con dos masas iguales $m_2 = m_3 = \frac{1}{2}$
3. Si $\mu = \frac{1}{3}$, obtenemos el caso simétrico con tres masas iguales a $\frac{1}{3}$

El sistema (2.12) puede ser escrito de una forma compacta como:

$$\begin{aligned}\ddot{x} - 2\dot{y} &= \Omega_x, \\ \ddot{y} + 2\dot{x} &= \Omega_y,\end{aligned}\tag{2.13}$$

donde

$$\Omega(x, y, \mu) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{r_i},$$

con $r_i = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$. Análogamente al PR3C, podemos verificar que el sistema (2.13) tiene una integral primera del tipo Jacobi dada por

$$C = 2\Omega(x, y, \mu) - (\dot{x}^2 + \dot{y}^2),\tag{2.14}$$

los detalles se pueden consultar en [2]. En ocasiones será necesario escribir el sistema (2.13) en notación compleja, para hacer esto multiplicamos a la segunda ecuación de (2.12) por $i = \sqrt{-1}$ y sumemos esta ecuación con la primera. No es difícil ver que se obtiene

$$\ddot{x} + i\ddot{y} + 2i(\dot{x} + i\dot{y}) = x + iy - \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i(x + iy - (x_i + iy_i))}{r_i^3}.$$

Si definimos $z = x + iy$ la ecuación anterior se escribe como:

$$\ddot{z} + 2iz = 2\frac{\partial\Omega}{\partial\bar{z}},\tag{2.15}$$

con

$$\Omega(z, \bar{z}, \mu) = \frac{1}{2}|z|^2 + \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{|z - z_i|},$$

aquí $|z - z_i|$, $i = 1, 2, 3$ son las distancias de m_4 con las primarias y la dependencia de Ω con \bar{z} se da si recordamos la propiedad de los números complejos $z \cdot \bar{z} = |z|^2$. La integral primera se escribe en esta notación como

$$2\Omega(z, \bar{z}, \mu) - |\dot{z}|^2 = C.$$

Con esta notación es más fácil verificar que las ecuaciones del PR4C poseen las siguientes simetrías

1. Si $z(t)$ es una solución de (2.15) entonces $\bar{z}(-t)$ también es solución de (2.15).
2. Si $\mu = 1/3$ y $z(t)$ es una solución de (2.15) entonces $e^{\frac{2\pi}{3}i}z(t)$ también es solución de (2.15).

La primera condición nos dice que las soluciones son simétricas respecto del eje x como en el caso del PR3C, la segunda condición nos dice que para el caso de tres masas iguales, las soluciones tienen simetría respecto de las líneas que unen a las tres masas con el baricentro del triángulo, vea la figura (2.2). Estas simetrías serán útiles a la hora de calcular órbitas periódicas simétricas de este problema dado que solo será suficiente calcular intersecciones perpendiculares de estas órbitas con los ejes de simetría. Más adelante abordaremos detalladamente este problema.

2.3. Formulaciones Lagrangiana y Hamiltoniana del Problema Restringido de 4 cuerpos

La mecánica Lagrangiana es una reformulación de la mecánica clásica introducida por Joseph Louis Lagrange en 1788. En la mecánica Lagrangiana la trayectoria de un objeto es obtenida encontrando la trayectoria que minimiza un cierto funcional (que mencionaremos más adelante). Esta formulación simplifica considerablemente muchos problemas físicos por ejemplo, a diferencia de las leyes de Newton, la forma de las ecuaciones de movimiento en esta formulación no depende del sistema de referencia elegido. Otro ejemplo es el caso del estudio de movimientos referidos a un sistema que rota, como es el caso de las observaciones astronómicas vistas desde la Tierra: en la formulación Newtoniana es necesario introducir a mano fuerzas ficticias o fuerzas de inercia como la fuerza centrífuga o la fuerza de Coriolis, mientras que en la formulación Lagrangiana estas fuerzas aparecen de modo natural.

Las ecuaciones de movimiento en la formulación Lagrangiana, son las ecuaciones de Lagrange, también conocidas como las ecuaciones de Euler-Lagrange. Estas pueden derivarse directamente de las Leyes de Newton o usando el principio de mínima acción, en [4] y [63] pueden encontrarse discusiones completas acerca de esta formulación, sin embargo, por completez, vamos a discutir de manera breve la derivación por medio del principio de mínima acción y su aplicación en el PR4C. Para un sistema Lagrangiano, el principio de mínima acción se enuncia como sigue: fijado un sistema de coordenadas generalizadas sobre el espacio de configuración (posiciones), se tiene que de todas las trayectorias posibles que transcurren en el instante t_1 y t_2 , el sistema escogerá aquella que minimiza la acción A que viene dada para cada trayectoria por la integral:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i(t)\dot{q}_i(t), t)dt,$$

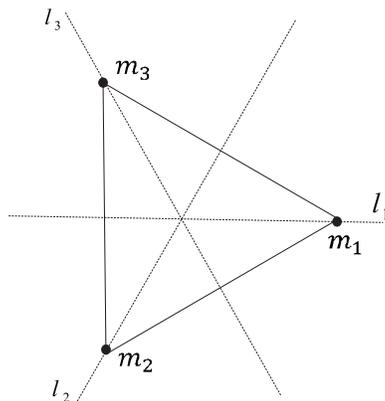


Figura 2.2: Líneas de simetría en el caso de masas iguales.

donde $A : C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{2n}) \rightarrow \mathbb{R}$ y $L(q_i, \dot{q}_i, t)$ es la función Lagrangiana del sistema que es definida por la diferencia $T - V$, con T y V las energías cinéticas y potencial respectivamente. Las trayectorias que minimizan la acción A deben satisfacer las ecuaciones de Euler Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Para encontrar la función Lagrangiana de nuestro problema, empecemos por hacer la diferencias $T - V$ en el sistema fijo o sideral, la función Lagrangiana se escribe como $L = T - V = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2) + \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{\rho_i}$ ahora bien, bajo el cambio de variable (2.3) en variables adimensionales se encuentra que en el sistema rotatorio la función Lagrangiana es

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + (\dot{x}y - \dot{y}x) + \Omega(x, y, \mu). \quad (2.16)$$

Existe una manera más elegante de reducir el sistema (2.13) a un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden que lleva a su vez a la forma Hamiltoniana de las ecuaciones. Esto se puede hacer por medio de la llamada transformación de Legendre [1]. El punto importante en esta transformación es introducir en lugar de \dot{q}_i las variables

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}(q_i, \dot{q}_i),$$

con $i, j = 1, 2, \dots, n$. Se define el Hamiltoniano como transformación de Legendre del Lagrangiano $L(\dot{q}_i, q_i, t)$ como

$$H = \sum_{j=1}^n q_j p_j - L(\dot{q}_i, q_i, t).$$

La transformación anterior es posible siempre y cuando el Lagrangiano sea una forma bilineal cuadrática no degenerada de las velocidades ya que en este caso, la condición de la existencia de la inversa $\dot{q}_j = \dot{q}_j(p_j, q_j)$ está automáticamente garantizada por el teorema de la función implícita ya que $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_j^2} = a_{jj} \neq 0$. En el caso del PR4C es fácil ver que el Hamiltoniano se escribe como:

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + (yp_x - xp_y) - \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{r_i}. \quad (2.17)$$

En la notación compleja introducida anteriormente podemos escribir el Hamiltoniano como:

$$H = \frac{1}{2}|P|^2 + \text{Im}(Z \cdot \bar{P}) - \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{|z - z_i|}, \quad (2.18)$$

donde se ha definido $P = p_x + ip_y$ como el momento conjugado de $z = x + iy$. Este Hamiltoniano en notación compleja será útil cuando tratemos el tema de

regularización de colisiones binarias. Como en el caso del PR3C, el Hamiltoniano del PR4C se relaciona con la integral Jacobiana por medio de

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \Omega(x, y, \mu) = -\frac{C}{2}.$$

En los capítulos siguientes iremos explorando las propiedades de esta función Hamiltoniana, por ahora terminaremos esta sección estableciendo las ecuaciones de movimiento en esta formulación

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p_x + y, \\ \dot{y} &= p_y - x, \\ \dot{p}_x &= p_y + \frac{\partial U}{\partial x}, \\ \dot{p}_y &= p_x + \frac{\partial U}{\partial y},\end{aligned}\tag{2.19}$$

con $U(x, y, \mu) = \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{r_i}$, observe que este es un sistema de 4 ecuaciones diferenciales de primer orden.

Capítulo 3

Aspectos Dinámicos del Problema

3.1. Regiones de Hill

En esta sección realizaremos un breve análisis de la función

$$\Omega(x, y, \mu) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{r_i},$$

que fue establecida en el capítulo anterior. Recordemos que el PR4C posee una integral primera dada por la expresión

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\Omega - C. \quad (3.1)$$

Las curvas de velocidad cero se definen al igualar $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0$ en la expresión anterior, esto equivale naturalmente que $\dot{x} = \dot{y} = 0$, por lo tanto, del lado derecho de (3.1) obtenemos $C = 2\Omega$, esto crea una superficie en el espacio (x, y, C) (ver figura (3.1)) para valores fijos de μ , podemos preguntarnos en particular sobre los puntos críticos de esta superficie, por ejemplo, donde están localizados los máximos y mínimos, para hacer esto tenemos que explorar los ceros de las derivadas parciales Ω_x y Ω_y de la función Ω , sin embargo, observe que estos puntos son parte del conjunto de puntos de equilibrio de las ecuaciones de movimiento los cuales serán analizados más adelante. Para cada valor constante de C y μ tenemos que las curvas de nivel de la función $C = 2\Omega$ determinan las llamadas curvas de velocidad cero sobre el plano (x, y) . Observe que de la relación (3.1) se tiene que $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \geq 0$ y en particular $\Omega(x, y) \geq C/2$, esta desigualdad determina las regiones en el plano (x, y) que son accesibles al movimiento de la masa m_4 , en particular las curvas de velocidad cero funcionan como las fronteras de estas regiones que se denominan las regiones de Hill del PR4C, así pues, para cada valor de μ se puede dar un primera descripción cualitativa del movimiento si determinamos las curvas de nivel para cada valor de C constante, en la figura

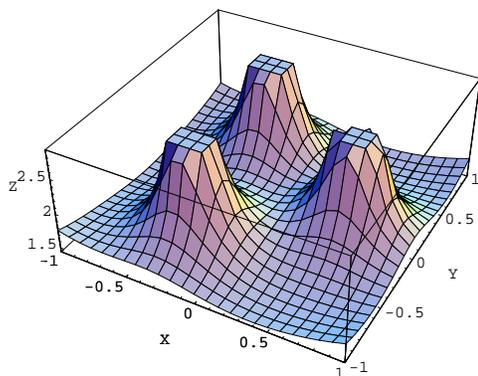


Figura 3.1: La superficie $C = 2\Omega$ para $\mu = 1/3$.

(3.2) se ilustran estas regiones para varios valores de C y μ . Como ya se mencionó, el caso $\mu = 0$ corresponde al problema de Kepler rotatorio donde se conocen detalladamente las regiones de Hill, en [63] el lector puede consultar en detalle estas regiones para este problema y para las del PR3C.

3.2. Soluciones de equilibrio relativo

En esta sección discutiremos el problema de determinar soluciones de equilibrio relativo en el PR4C. En los preliminares el lector puede encontrar una breve discusión sobre este problema en el caso general de $n = 4$ cuerpos. Para los problemas restringidos de 3+1 cuerpos con tres masas finitas m_1 , m_2 y m_3 y una masa infinitesimal, las tres masas finitas se pueden encontrar en las configuraciones de Euler o de Lagrange ya mencionadas; entonces nos preguntamos por las posiciones de equilibrio relativo para m_4 dadas por los puntos críticos de la suma del potencial gravitacional creado por m_1 , m_2 , m_3 y el potencial centrífugo debido a la rotación uniforme de nuestro sistema como se estableció en el capítulo 2.

Si m_1 , m_2 y m_3 están en configuración de Euler entonces m_4 puede estar en 6 posiciones diferentes, que a saber son 4 sobre el eje x y 2 más fuera del eje x pero que son simétricas respecto de este. Cabe mencionar que estos 6 puntos de equilibrio existen para todos los valores de las masas m_1 , m_2 y m_3 , consulte [60] y [41] para más detalles. Sin embargo, estamos interesados en el caso cuando las tres masas finitas están en la configuración de Lagrange, que es el problema principal que estamos tratando. A diferencia del caso anterior, para este caso el número de equilibrios relativos depende del valor de las masas; aunque se trata de un caso restringido del problema general de 4 cuerpos, el estudio de sus equilibrios relativos no es un caso trivial, este problema ha sido

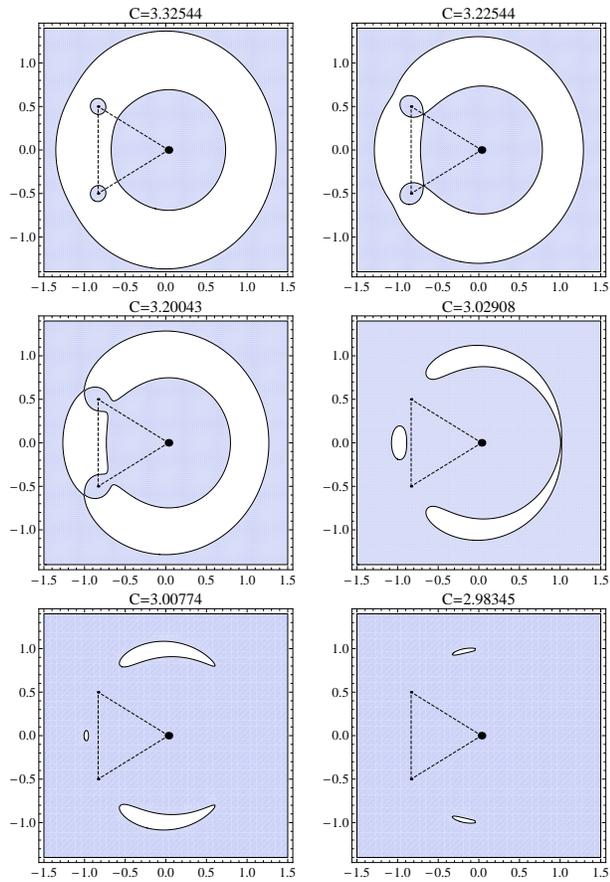


Figura 3.2: Regiones de Hill (áreas en azul) para valores grandes de la constante de Jacobi (arriba izquierda). Las restantes regiones de Hill corresponden a valores críticos de la constante de Jacobi.

estudiado por varias décadas y por numerosos autores, quizá los trabajos mas conocidos y detallados son los de [54], [3] y [60]. Sin embargo, si queremos abordar los detalles técnicos de las demostraciones presentadas en estos trabajos en su contexto mas general, exigiría un tratado muy extenso sobre el tema, de hecho vas mas allá de los propósitos de este trabajo. Asumiremos algunas conclusiones generales de estos trabajos y mencionaremos algunos aspectos sobre las pruebas de estos resultados. En lo subsecuente nos restringiremos al caso de dos masas iguales y analizaremos las bifurcaciones de los equilibrios relativos que presenta el problema.

3.2.1. Estudio de los equilibrios relativos

Como ya mencionamos, en el presente problema el número de equilibrios relativos depende de los valores de las tres primarias, es decir, el número de equilibrios relativos de nuestro problema no es constante. En 1944 Pedersen [54] obtuvo una primera descripción cualitativa acerca de las regiones donde se pueden localizar dichos equilibrios para cualquier valor de las masas, en la figura (3.3) se pueden apreciar diversas regiones en el plano (x, y) en las cuales se pueden localizar los equilibrios relativos. Vamos a asumir sin demostración el siguiente resultado general que el lector puede consultar en [3] y [54], y a lo largo de esta sección discutiremos y analizaremos este resultado.

Teorema 3.2.1. *Si las tres masas principales m_1 , m_2 y m_3 se encuentran en una configuración Lagrangiana, entonces el correspondiente PR_4C tiene 8,9 ó 10 configuraciones centrales para todas las elecciones positivas de las masas.*

Hasta donde se pudo verificar al momento de escribir este trabajo, no se ha podido dar un resultado puramente analítico de esta afirmación, las pruebas conocidas mezclan técnicas analíticas y numéricas para probar sus afirmaciones, por ejemplo las investigaciones de Pedersen se enfocan principalmente en un tratamiento inverso del problema en el siguiente sentido: las ecuaciones $\Omega_x = 0$ y $\Omega_y = 0$ contienen las incógnitas (x, y) que son las coordenadas de los puntos de equilibrio y m_1, m_2, m_3 que son los valores de las tres primarias. Cuando las tres masas son conocidas se pueden determinar las coordenadas (x, y) de los puntos de equilibrio resolviendo estas ecuaciones, pero esto es en extremo difícil, ya que por lo general se obtienen muchas soluciones en el siguiente sentido: para cada valor de las masas corresponde una posición determinada del centro de masa común, es decir, a una posición determinada del centro de masa usualmente le corresponde varios puntos de equilibrio. Si por el contrario, si suponemos que la posición de un punto de equilibrio se conoce (y de aquí (x, y)), entonces las ecuaciones $\Omega_x = 0$ y $\Omega_y = 0$ junto con el escalamiento $\sum_{i=1}^3 m_i = 1$ sirven para determinar a m_1, m_2 y m_3 , y como las tres ecuaciones son lineales en estas magnitudes se pueden resolver fácilmente y dar como resultado uno y solo un valor de las masas y por lo tanto, un valor del centro de masa.

Pedersen analiza casos especiales donde se pueden localizar los puntos de equilibrio, por ejemplo: un eje de simetría del triángulo, una línea que une dos masas,

etcétera. Con estas investigaciones se pueden deducir las regiones posibles donde se pueden localizar los puntos de equilibrio y de aquí la localización del centro de masa para el caso de masas positivas, es decir, para el caso en el que el centro de masa se encuentre dentro del triángulo de masas, figura (3.3). Años más tarde Simó confirmó los resultados obtenidos por Pedersen por medio de un análisis puramente numérico del problema. En el trabajo de Arenstorff [3] se da un tratamiento más analítico del problema de localizar las regiones posibles donde se pueden encontrar los puntos de equilibrio, sin embargo, los resultados más importantes sobre bifurcaciones y el conteo de los puntos de equilibrio se tienen que verificar numéricamente. Si nos restringimos al caso de 2 masas igua-

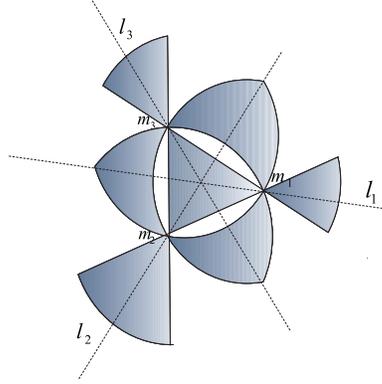


Figura 3.3: Regiones (sombreadas) posibles donde se pueden localizar los puntos de equilibrio para cualquier valor de las tres primarias que se localizan en los vértices del triángulo equilátero. l_1 , l_2 , l_3 denotan las líneas de simetría respecto del baricentro del triángulo.

les se cumple en particular el teorema anterior, pero en este caso es un poco más sencillo localizar y estudiar las bifurcaciones y degeneraciones de los puntos de equilibrio, el siguiente teorema es una adaptación a nuestro problema de la prueba que se ofrece en [17]

Lema 3.2.2. *El número de puntos de equilibrio que se encuentran sobre el eje de simetría para el caso de dos masas iguales es dos, tres o cuatro dependiendo del valor de las masas.*

Demostración: Para encontrar los puntos de equilibrio sobre el eje de simetría tenemos que analizar las derivadas parciales del potencial Ω , para facilitar el cálculo pasemos a coordenadas (\bar{x}, \bar{y}) donde el origen del sistema está en el baricentro del triángulo por medio de la traslación $x = \bar{x} + \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $\bar{y} = y$, para no recargar la notación omitiremos las barras superiores en las variables (x, y) pero el lector debe recordar que se va a trabajar en estas coordenadas. En este nuevo sistema de coordenadas las posiciones de las primarias son $r_1^2 = (x - 1/\sqrt{3})^2 + y^2$, $r_2^2 = (x + 1/2\sqrt{3})^2 + (y - 1/2)^2$, $r_3^2 = (x + 1/2\sqrt{3})^2 + (y + 1/2)^2$

y

$$\Omega(\mu, x, y) = \frac{1}{2}((x + \sqrt{3}\mu - 1/\sqrt{3})^2 + y^2) + \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{r_i}, \quad (3.2)$$

cuando la coordenada y del punto de equilibrio es cero, nos facilita un poco más los cálculos de las derivadas, no es difícil ver que

$$\frac{\partial \Omega}{\partial y} = y - \frac{(1 - 2\mu)y}{r_1^3} - \mu \left(\frac{y + 1/2}{r_2^3} + \frac{y - 1/2}{r_3^3} \right),$$

entonces para $y = 0$ tenemos que $r_2 = r_3 = \sqrt{(x + 1/2\sqrt{3})^2 + 1/4}$ y r_1 se define como

$$r_1 = \begin{cases} x - \frac{1}{\sqrt{3}} & x \in I_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \infty) \\ -(x - \frac{1}{\sqrt{3}}) & x \in I_2 = (-\infty, \frac{1}{\sqrt{3}}). \end{cases} \quad (3.3)$$

Por lo tanto $\frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0$ para cualquier elección de x , entonces es suficiente examinar la derivada parcial de (3.2) respecto de x que está dada por la expresión

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = x + \sqrt{3}\mu - \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{(1 - 2\mu)(x - 1/\sqrt{3})}{r_1^3} - \frac{2\mu}{r_2^3} \left(x + \frac{1}{2\sqrt{3}} \right), \quad (3.4)$$

ya hicimos notar que la ecuación $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0$ es lineal en la variable μ entonces podemos despejar μ en función de x

$$\mu = \frac{r_2^3(1 - \delta r_1^3)}{\delta\sqrt{3}r_1^2r_2^3 + 2r_2^3 - 2\delta r_1^2(r_1 + \sqrt{3}/2)}, \quad (3.5)$$

en donde tomamos $r_1 = x - 1/\sqrt{3}$ e introducimos un parámetro δ para denotar la región de interés; para la región I_1 se tiene $\delta = 1$ y para la región I_2 se tiene $\delta = -1$. En la figura (3.4) puede verificarse que la gráfica $\mu(x)$ presenta un mínimo local en $x_0 = -0,1484$ con valor $\mu_0 = 0,288$ y un máximo local en $x = 1/\sqrt{3}$ de $\mu = 1/2$. Dado que el problema solo tiene significado físico en el intervalo $[0, 1/2]$, vamos analizar a $\mu(x)$ en este intervalo. No es difícil ver que, si trazamos líneas paralelas al eje x , que para $\mu < \mu_0$ existen exactamente dos equilibrios relativos fuera del triángulo equilátero, para $\mu = \mu_0$ tenemos exactamente tres equilibrios relativos, dos de ellos fuera del triángulo equilátero y uno dentro este. Para $\mu_0 < \mu < 1/2$ tenemos 4 equilibrios relativos 2 fuera de triángulo equilátero y dos dentro de este y finalmente, para $\mu = 1/2$ tenemos 3 equilibrios relativos donde uno coincide con el máximo local en la posición de colisión $x = 1/\sqrt{3}$.

□

En vista de este lema y del teorema principal de esta sección tenemos que para el caso de masas iguales, las bifurcaciones de los puntos de equilibrio ocurren para los puntos situados sobre el eje de simetría dentro de la configuración equilátera, los demás puntos de equilibrio se encuentran en las regiones descritas en la figura (3.3)

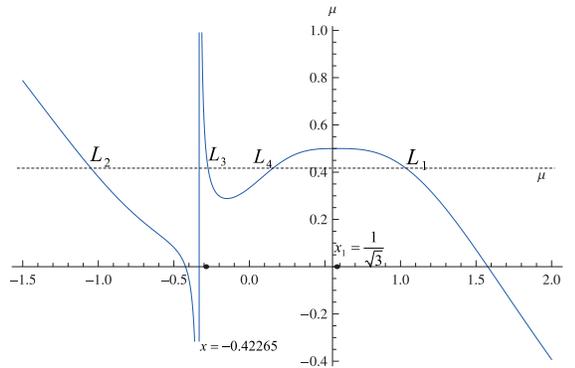


Figura 3.4: La gráfica de μ como función de x , note que para cada valor fijo de $\mu \in (0, 1/2]$ podemos tener 2, 3 o 4 puntos de equilibrio que provienen de las bifurcaciones entre los puntos L_3, L_4 y L_1, L_4 .

3.3. Estudio de la estabilidad de los equilibrios relativos

En ecuaciones diferenciales y en sistemas dinámicos la teoría de la estabilidad estudia, en términos coloquiales, como difieren las soluciones bajo pequeñas modificaciones de las condiciones iniciales. El estudio de la estabilidad es muy importante en ciencias aplicadas, por dar un ejemplo, ya que en general en problemas prácticos las condiciones iniciales nunca se conocen con toda precisión y su predicción requiere que pequeñas desviaciones iniciales no generen comportamientos cualitativamente muy diferentes a corto plazo. Cuando dos soluciones cualquiera que a un tiempo inicial t_0 están cercanas y para todo tiempo posterior permanecen cercanas, se dice que el sistema presenta estabilidad. Trataremos de resumir brevemente las propiedades que nos serán útiles para estudiar la estabilidad en sistemas Hamiltonianos, sin embargo, si el lector no está familiarizado con los conceptos básicos de estabilidad puede consultar los preliminares. El siguiente resultado es clásico dentro de la teoría lineal de sistemas Hamiltonianos

Proposición 3.3.1. *El polinomio característico de una matriz Hamiltoniana real es un polinomio par, es decir, si λ es un eigenvalor de la matriz, entonces lo son: $-\lambda, \bar{\lambda}$ y $-\bar{\lambda}$. El polinomio característico de una matriz simpléctica real es un polinomio recíproco, es decir, si λ es un eigenvalor de la matriz, entonces lo son: $\lambda^{-1}, \bar{\lambda}$ y $\bar{\lambda}^{-1}$.*

Consideremos el sistema lineal

$$\dot{y} = By, \tag{3.6}$$

con $B = Df(x_0)$. Las soluciones de este sistema son combinaciones lineales de las soluciones básicas de la forma $t^k e^{\lambda t}$, donde k es un entero no negativo y λ es

un eigenvalor de B . Todas las soluciones de (3.6) tienden a 0 conforme $t \rightarrow \infty$ (estabilidad asintótica) si y solo si todos los eigenvalores de B tienen parte real negativa. Por la proposición anterior esto nunca es posible para sistemas Hamiltonianos, entonces todas las soluciones de (3.6) serán acotadas para $t > 0$ si y solo si, (i) todos los eigenvalores de B tienen parte real no positiva y (ii) si λ es un eigenvalor de B con parte real cero, (imaginario puro) entonces el entero k en las soluciones básicas es cero. La condición (ii) es equivalente a la condición que los bloques de Jordan para todos los eigenvalores imaginarios puros de B en su forma canónica de Jordan sean diagonales, es decir, no existen términos fuera de la diagonal en los bloques de Jordan para eigenvalores imaginarios puros de B . Entonces la proposición anterior obliga a que si todos los eigenvalores tienen parte real no positiva, entonces deben ser imaginarios puros. Así pues, un sistema Hamiltoniano tiene todas sus soluciones acotadas para todo $t \in \mathbb{R}$; esto es debido a que en sistemas Hamiltonianos lineales, el concepto principal de estabilidad es que todas las soluciones sean acotadas para todo $t \in \mathbb{R}$. De esta manera hemos probado la siguiente

Proposición 3.3.2. *El sistema Hamiltoniano (3.6) es estable si y solo si (i) B tiene solo eigenvalores imaginarios puros y (ii) B es diagonalizable sobre \mathbb{C}*

3.3.1. Estabilidad de los equilibrios relativos en el PR4C

Hemos discutido la existencia de 8, 9 ó 10 puntos de equilibrio en el PR4C según el valor de las masas. La aproximación lineal del campo vectorial nos proporciona información sobre la estabilidad de los puntos de equilibrio, en esta parte, exploraremos esta aproximación considerando que el sistema es Hamiltoniano. Consideremos el Hamiltoniano del PR4C como se estableció en el capítulo 2 con el origen en el centro de masa, si hacemos las identificaciones $v_1 = p_x$, $v_2 = p_y$, $u_1 = x$ y $u_2 = y$ obtenemos

$$H = \frac{1}{2}(v_1^2 + v_2^2) + (u_2v_1 - u_1v_2) - \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{r_i},$$

donde $r_i^2 = (u_1 - u_i^1)^2 + (u_2 - u_i^2)^2$ son las distancias de m_4 a las tres primarias. Sean (ξ_1, ξ_2) las coordenadas de uno de los puntos de equilibrio, para estudiar el movimiento cerca de estos puntos hagamos una traslación del origen del sistema al punto de equilibrio en cuestión por medio de

$$x_1 = u_1 - \xi_1, y_1 = v_1 + \xi_2,$$

$$x_2 = u_2 + \xi_2, y_2 = v_2 - \xi_1,$$

ahora las nuevas coordenadas son $x = (x_1, x_2, y_1, y_2)$, esta transformación es simpléctica y por lo tanto no alteramos la estructura Hamiltoniana del problema. Si expandimos el nuevo Hamiltoniano hasta términos de segundo orden obtenemos

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + (x_2y_1 - x_1y_2) - \frac{1}{2}(U_{x_1x_1}x_1^2 + 2U_{x_1x_2}x_1x_2 + U_{x_2x_2}x_2^2) + \dots,$$

recordemos que denotamos como U al potencial gravitacional. Los términos lineales desaparecen porque la expansión se hace en un punto de equilibrio y también se han omitido los términos constantes porque no contribuyen en nada a las ecuaciones diferenciales.

Si ignoramos los términos superiores obtenemos un Hamiltoniano cuadrático de la forma $H = \frac{1}{2}x^T Sx$, con $S = -J_4 A$ donde J_4 denota la matriz simpléctica estándar de orden 4

$$J_4 = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix},$$

y A es la matriz Hamiltoniana

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ U_{x_1 x_1} & U_{x_1 x_2} & 0 & 1 \\ U_{x_1 x_2} & U_{x_2 x_2} & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

si usamos la relación $\Omega_{x_1 x_1} = 1 + U_{x_1 x_1}$, $\Omega_{x_2 x_2} = 1 + U_{x_2 x_2}$ y $\Omega_{x_1 x_2} = U_{x_1 x_2}$ obtenemos la forma estándar del polinomio característico de esta matriz

$$p(\lambda) = \lambda^4 + (4 - \Omega_{x_1 x_1} - \Omega_{x_2 x_2})\lambda^2 + (\Omega_{x_1 x_1}\Omega_{x_2 x_2} - \Omega_{x_1 x_2}^2), \quad (3.8)$$

las raíces de (3.8) nos dan los eigenvalores de (3.7), si denotamos como $\eta = \lambda^2$ y $H\Omega$ es la matriz Hessiana de segundas derivadas de Ω podemos escribir

$$p(\eta) = \eta^2 + (4 - \Omega_{x_1 x_1} - \Omega_{x_2 x_2})\eta + |H\Omega|.$$

Por lo tanto las raíces de este polinomio cuadrático nos dan información sobre los eigenvalores de (3.7). Vamos a seguir el tratamiento encontrado en [39] para analizar los eigenvalores. Definamos $A = 4 - \Omega_{x_1 x_1} - \Omega_{x_2 x_2}$ y $B = \text{Det}(H\Omega)$, tengamos en mente que estas son funciones de las posiciones y de las masas. Entonces el polinomio $p(\eta)$ se escribe como $p(\eta) = \eta^2 + A\eta + B$. Se puede verificar que la proposición (3.3.2) para el PR4C es equivalente al siguiente lemma:

Lema 3.3.3. *Un equilibrio relativo del PR4C para un valor dado de las masas es espectralmente estable si y solo si A , B y $\Delta = A^2 - 4B$ son no negativos*

Aquí Δ es el discriminante de la ecuación $p(\eta) = 0$. El problema ahora es determinar las coordenadas del equilibrio relativo a estudiar. Como ya se vio en las secciones anteriores esto solo se puede hacer en general numéricamente, por lo que a diferencia de otros problemas restringidos no podemos dar formulas explícitas en función del parámetro de masas para los eigenvalores [41]. Sin embargo, si nos restringimos nuevamente al caso de puntos de equilibrio sobre el eje x podemos facilitar el análisis de la estabilidad. De hecho, la determinación de la estabilidad de estos puntos de equilibrio nos será útil en lo subsecuente. Dado que el análisis requerido solo depende de las derivadas parciales de segundo orden de Ω , entonces para facilitar los cálculos y la notación consideraremos

el potencial Ω en coordenadas baricéntricas que utilizamos en la sección anterior

$$\Omega(\mu, x, y) = \frac{1}{2}((x + \sqrt{3}\mu - 1/\sqrt{3})^2 + y^2) + \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{r_i},$$

ya vimos que para el caso $y = 0$ tenemos que $r_2 = r_3$ y por lo tanto $\frac{\partial \Omega}{\partial y} = 0$ que implica $\frac{\partial \Omega}{\partial x \partial y} = 0$ y r_1 definida sobre sus regiones I_1 e I_2 definidas anteriormente. Para facilitar el análisis vamos a introducir una parametrización de la coordenada x . Sean $s(\alpha) = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha}$ y $c(\alpha) = \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha}$ definidas en $(0, \infty)$, entonces si hacemos $x(\alpha) = 1/2(s(\alpha) - 1/\sqrt{3})$ no es difícil ver que $r_2(\alpha) = 1/2c(\alpha)$. El siguiente paso es analizar el dominio de $x(\alpha)$ de tal forma que podamos encontrar regiones D_i , $i = 1, 2$ tales que $x(D_i) = I_i$; si tomamos las regiones $D_1 = (2 + \sqrt{3}, \infty)$ y $D_2 = (0, 2 + \sqrt{3})$ es fácil ver que cumplen con la condición requerida.

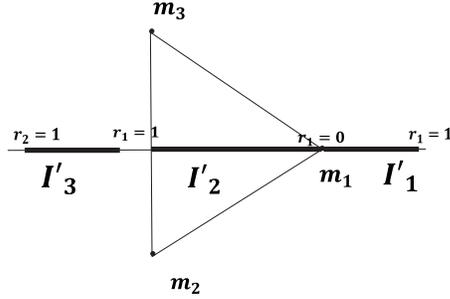


Figura 3.5: Las regiones posibles de equilibrios relativos .

Sin embargo, ya sabemos que existen regiones determinadas donde pueden estar los puntos de equilibrio, en el caso $y = 0$ tenemos que existen tres regiones sobre el eje x $I'_i, i = 1, 2, 3$ (ver figura(3.5)) por lo tanto podemos encontrar 3 subregiones D'_i de $D_1 \cup D_2$ tales que $x(D'_i) = I'_i$, las regiones buscadas son $D'_1 = (2 + \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2 + \sqrt{3}}) \subset D_1$, $D'_2 = (1, 2 + \sqrt{3}) \subset D_2$, $D'_3 = (2 - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}) \subset D_2$. Así pues, con la parametrización introducida estamos listos para establecer resultados sobre la estabilidad de los puntos de equilibrio. Solo daremos demostraciones para la región I'_1 , para las dos regiones restantes las pruebas son similares, el lector puede consultarlas en [39]. En la región I'_3 preferimos hacer un análisis geométrico y numérico sobre la estabilidad en esta región, así será más evidente un fenómeno de bifurcación que analizaremos después.

Para la región I'_1 tenemos que $r_1 = x - 1/\sqrt{3}$, si definimos $m = \frac{\mu}{1-2\mu}$ tenemos que la ecuación (3.5) se puede escribir como

$$m = \frac{-(r_1^3 - 1)r_2^3}{(r_2^3 - 1)(\sqrt{3} + 2r_1)r_1^2},$$

con este nuevo parámetro las segundas derivadas se ven como

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} = 1 + \frac{2}{(1+2m)r_1^3} + \frac{6m(r_1 + \sqrt{3}/2)^2}{(1+2m)r_2^5} - \frac{2m}{(1+2m)r_2^3},$$

y

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} = 1 - \frac{1}{(1+2m)r_1^3} + \frac{3m}{2(1+2m)r_2^5} - \frac{2m}{(1+2m)r_2^3},$$

con estos cálculos se establece la siguiente proposición, [39]

Proposición 3.3.4. *Los puntos de equilibrio en la región I_1' son espectralmente inestables*

Demostración. De acuerdo con el lema anterior es suficiente verificar que alguna de las tres cantidades A , B o Δ es negativa, probemos que el coeficiente B del polinomio de dicho lema es una función estrictamente negativa en I_1' . Podemos escribir a B como

$$B = \frac{B_1 B_2}{B_3},$$

donde

$$B_1 = 2r_2^5(2 + r_1^3 + 2mr_1^3 + mr_1^3) + mr_1^3(9 - 4r_2^2 + 12r_2^2 + 12\sqrt{3}r_1),$$

$$B_2 = -2r_2^5(1 - r_1^3 + 2mr_1^3) - mr_1^3(3 - 4r_2^2),$$

$$B_3 = 4(1 - 2m)^2 r_1^6 r_2^{10},$$

observe que B_3 es siempre positiva, si sustituimos la expresión para el nuevo parámetro m en las primeras dos expresiones anteriores tenemos

$$B_1 = \frac{B_{11}}{B_{12}},$$

$$B_2 = \frac{B_{21}}{B_{22}},$$

donde

$$B_{11} =$$

$$r_2^3(-4\sqrt{3}r_2^2 + 4\sqrt{3}r_2^5 + r_1(9 - 12r_2^2 + 12r_2^5) + 12\sqrt{3}r_1^2 + 2r_1^3(6 - \sqrt{3}r_2^2) - 9r_1^4 - 12\sqrt{3}r_1^5 - 12r_1^6),$$

$$B_{12} = B_{22} = (\sqrt{3} + 2r_1)(r_2^3 - 1),$$

$$B_{21} = (r_1^3 - 1)r_2^3(-3r_1 - 2\sqrt{3}r_2^2 + 2\sqrt{3}r_2^5),$$

recuerde que sobre I_1' tenemos que $r_1 < 1$ y $r_2 > 1$. Así las cantidades B_{12} y B_{22} son siempre positivas y

$$B < 0 \Rightarrow B_4 = \frac{B_{11}B_{21}}{(r_1^3 - 1)r_2^6} > 0. \quad (3.9)$$

Si usamos la parametrización que introducimos previamente, podemos escribir a $B_4 = B_4(\alpha)$ con dominio D'_1 . Definamos una nueva variable $\nu = \alpha - (2 + \sqrt{3})$, entonces $r_1 = 0$ corresponde a $\nu = 0$, cuando sustituimos en B_4 obtenemos

$$B_4(\nu) = \frac{C_1(\nu)C_2(\nu)}{50331648\nu^2(\nu + 2 + \sqrt{3})^{13}},$$

donde

$$\begin{aligned} C_1(\nu) = & 2575466496 + 1486946304\sqrt{3} + (8064294912 + 4655923200\sqrt{3})\nu \\ & + (11602182144 + 6698524672\sqrt{3})\nu^2 + (10171932672 + 5872771072\sqrt{3})\nu^3 \\ & + (6076329984 + 3508166656\sqrt{3})\nu^4 + (2620512256 + 1512931328\sqrt{3})\nu^5 \\ & + (844539904 + 487578112\sqrt{3})\nu^6 + (208364288 + 120313216\sqrt{3})\nu^7 \\ & + (40256768 + 23259392\sqrt{3})\nu^8 + (6277888 + 3619456\sqrt{3})\nu^9 \\ & + (823680 + 465888\sqrt{3})\nu^{10} + (93040 + 50400\sqrt{3})\nu^{11} \\ & + (8704 + 4480\sqrt{3})\nu^{12} + (608 + 300\sqrt{3})\nu^{13} + (32 + 10\sqrt{3})\nu^{14} + \nu^{15}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} C_2(\nu) = & 172032 + 99328\sqrt{3} + (417024 + 240768\sqrt{3})\nu + (425472 + 245504\sqrt{3})\nu^2 \\ & + (243840 + 140288\sqrt{3})\nu^3 + (87552 + 50016\sqrt{3})\nu^4 \\ & + (20464 + 11744\sqrt{3})\nu^5 + (3136 + 1840\sqrt{3})\nu^6 + (320 + 180\sqrt{3})\nu^7 \\ & + (20 + 10\sqrt{3})\nu^8 + \nu^9. \end{aligned}$$

Todos los coeficientes en $C_1(\nu)$ y $C_2(\nu)$ son positivos. Dado que solo valores positivos de ν tienen sentido, concluimos que $C_1(\nu)C_2(\nu)$ y por lo tanto B_4 son positivos. Entonces por la equivalencia (3.9) obtenemos la conclusión deseada. \square

De hecho podemos decir mucho más sobre la estabilidad en I'_1 , la estructura del espectro en esa región no la proporciona el siguiente

Corolario 3.3.5. *En la región I'_1 se tienen dos eigenvalores reales y dos eigenvalores imaginarios puros, para cualquier elección del parámetro de masas.*

Demostración. Las raíces de $p(\eta)$ están dadas por las fórmulas $2\eta_1 = -A + \sqrt{A^2 - 4B}$ y $2\eta_2 = -A - \sqrt{A^2 - 4B}$. De la proposición anterior se tiene que $B < 0$ entonces el discriminante Δ se escribe como $\Delta = A^2 + 4|B| > 0$, de donde se tiene que $\eta_{1,2} \in \mathbb{R}$. Afirmamos que $\eta_2 < 0$. si $A \geq 0$ esto es obvio, si $A < 0$ entonces $A = -|A|$ de donde $2\eta_2 = |A| - \sqrt{A^2 + 4|B|}$, ahora si $2\eta_2 \geq 0$ entonces $A^2 \geq A^2 + 4|B| \Rightarrow |B| \leq 0$ una contradicción; por lo tanto $2\eta_2 < 0$. Esto implica que η_2 es real y negativo, de donde se sigue que $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\eta_2}$ son imaginarios puros. Por otro lado, como $\eta_1 \in \mathbb{R}$ basta probar que $\eta_1 > 0$; si por el contrario $\eta_1 \leq 0$ entonces $-A + \sqrt{A^2 + 4|B|} \leq 0$ de donde $A^2 + 4|B| \leq A^2$ y obtenemos $|B| \leq 0$ que es una contradicción. Por lo tanto $\eta_1 > 0$ que implica $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\eta_1} \in \mathbb{R}$

□

Este corolario será importante cuando estudiemos las órbitas periódicas del PR4C. Para las regiones I'_2 e I'_3 tenemos la siguiente:

Proposición 3.3.6. *El coeficiente A es negativo en la región I'_2 y positivo sobre I'_3 . El coeficiente B es positivo sobre la región I'_3 .*

Como consecuencia de la proposición anterior tenemos que los puntos de equilibrio degenerados dentro del triángulo equilátero encontrados en la sección anterior son espectralmente inestables. El problema de determinar la estabilidad en la región I'_3 es un asunto más delicado ya que la proposición anterior nos dice que tanto A como B son positivos, entonces el problema de determinar la estabilidad se centra en examinar el discriminante Δ de $p(\eta)$. En la figura (3.6) observamos el comportamiento del discriminante Δ como función de x , en esta figura se observa que existe un punto x_b donde Δ cambia de positivo a negativo, este valor puede ser calculado numéricamente donde se encuentra que $x_b = -0,4241$ al que le corresponde el valor de bifurcación $\mu_b = 0,0027$. De esta discusión podemos establecer la siguiente

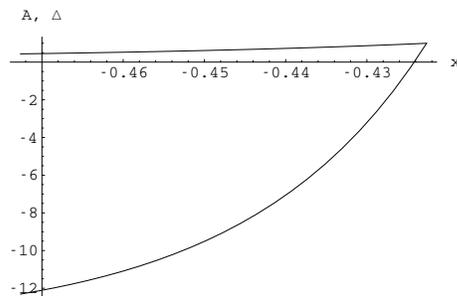


Figura 3.6: Gráficas de los coeficientes A (curva superior) y Δ (curva inferior) como funciones de x , observe que el coeficiente A siempre es positivo pero existe una pequeña región donde Δ cambia de signo.

Proposición 3.3.7. *Existe un valor del parámetro $\mu_b \in [0, 1/2]$ tal que si $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{\eta_1}$ y $\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{\eta_2}$ son los eigenvalores sobre la región I'_3 entonces $\eta_1 = \eta_2 < 0$, es decir, tenemos eigenvalores imaginarios puros de multiplicidad 2. Más aún, si $\mu < \mu_b$ entonces $\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$ y $\lambda_{3,4} = \pm i\omega_2$ con ω_1 y ω_2 reales y positivos; si $\mu > \mu_b$ entonces $\lambda_{1,2,3,4} = \pm\alpha \pm i\omega$ con α y ω reales positivos.*

La prueba de la proposición (3.3.6) se encuentra en las paginas 345 y 346 de [39], sin embargo, la revisión de los cálculos de este trabajo junto con el análisis hecho para establecer la proposición (3.3.7) nos llevan a establecer que el valor del parámetro de masas para el cual los equilibrios relativos en la región I'_3 son estables debe ser $\mu < 0,002709$ o en la notación de [39] $m < 0,002724\dots$ Por lo tanto el resultado de la pagina 325 de [39] se debe leer como *There exists $\epsilon > 0$*

such that all relative equilibria in $x < -1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \epsilon$, are spectrally unstable and all relative equilibria in $-1 + \frac{1}{\sqrt{3}} - \epsilon < x < -1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$ are spectrally stable. The latter equilibria correspond to $m < 0,002724$, es decir, la cota es más pequeña que la estimada por el autor. El corolario (3.3.5) nos proporciona la información necesaria si queremos aplicar el célebre teorema del centro de Liapunov que recordamos a continuación

Teorema 3.3.8. (Teorema del centro de Liapunov). *Supongamos que un sistema con una integral no degenerada tiene un punto de equilibrio con eigenvalores correspondientes $\pm\omega i, \lambda_3, \dots, \lambda_m$, donde $\omega \in \mathbb{R} - 0$. Si $\lambda_j/i\omega$ nunca es un entero para $j = 3, \dots, m$ entonces existe una familia de órbitas periódicas dependientes de un parámetro que emanan del punto de equilibrio. Más aún, cuando nos aproximamos al punto de equilibrio a lo largo de la familia, los periodos tienden a $2\pi/\omega$ y los multiplicadores no triviales tienden a $\exp(2\pi\lambda_j/\omega)$, $j = 3, \dots, m$.*

Este resultado nos garantiza la existencia de órbitas periódicas alrededor del punto de equilibrio L_1 siempre y cuando no se cumpla la condición $\lambda_j/i\omega \in \mathbb{Z}$. El trabajo de explorar y continuar las órbitas periódicas que emanan de L_1 será realizado en el capítulo 7. Los resultados sobre la estabilidad de los equilibrios relativos que están situados en el eje x se resumen en la tabla (3.10), en un trabajo futuro examinaremos los restantes equilibrios relativos.

Punto de equilibrio	Región	Rango de existencia	Estado
L_1	I'_1	$\mu \in (0, 1/2]$	Inestable
L_2	I'_3	$\mu \in (0, 1/2]$	Estable/Inestable
L_3	I'_2	$\mu \in [0, 288, 1/2)$	Inestable
L_4	I'_2	$\mu \in [0, 288, 1/2]$	Inestable.

(3.10)

Observe que el espectro del equilibrio relativo que llamamos L_2 sobre la región I'_3 tiene las misma propiedad que los equilibrios relativos L_4 y L_5 del PR3C. Entonces podríamos preguntarnos si este punto tiene alguna relación con las familias de órbitas periódicas del PR4C dado que en el PR3C ciertas familias de órbitas periódicas se vuelven asintóticas a estos puntos; de hecho este fenómeno también ocurre en nuestro problema y lo investigaremos más a detalle en el próximo capítulo.

Capítulo 4

Forma Normal en el Punto de Equilibrio L_2

En el capítulo anterior vimos que el punto L_2 presenta un cambio de estabilidad a inestabilidad espectral cuando el parámetro μ es menor o mayor (respectivamente) que un valor de bifurcación μ_b que ya fué calculado anteriormente. Este tipo de fenómeno es sumamente interesante y tiene importantes consecuencias. En campos vectoriales $\dot{x} = f(x, \alpha)$ en general que dependen de un parámetro, los cambios de estabilidad a inestabilidad de este tipo dan lugar a bifurcaciones, que son en cierto sentido un cambio topológico del retrato fase del sistema bajo la variación del (los) parámetro(s) del sistema, por ejemplo, el nacimiento y desaparición de órbitas periódicas alrededor de un equilibrio relativo conforme se pasa a través del valor crítico. En [67] y [37] el lector puede consultar a detalle el tema de las bifurcaciones de un sistema. Sin embargo, estamos interesados en otra consecuencia interesante que sucede en sistemas Hamiltonianos: para ciertos valores del parámetro (cuando solo existe uno) pueden encontrarse órbitas homoclínicas que son *terminaciones* de familias de órbitas periódicas, es decir, estas familias *convergen* en cierto sentido a tales órbitas homoclínicas. Más adelante daremos una definición precisa de estos términos.

Estos fenómenos que acabamos de mencionar están relacionados con el comportamiento de las variedades invariantes del punto de equilibrio en cuestión. No obstante, realizar un estudio global de estas variedades es muy difícil en general ya que puede ser equivalente a resolver el sistema de manera exacta, esto lleva a buscar simplificaciones del sistema en el sentido de reducir la dimensión del mismo o tratar de eliminar la no linealidad del sistema. Si optamos por la segunda opción, existe una técnica matemática rigurosa llamada el método de las formas normales, vamos a discutirla de manera breve en lo que sigue.

4.1. Teoría de perturbación y formas normales

Este método tiene como origen la tesis doctoral de Poincaré, [57] aunque el lector puede consultar también los textos [65], [67] y [47] para encontrar discusiones detalladas sobre este método. Daremos un panorama general sobre las formas normales, sin embargo, omitiremos la mayoría de las pruebas de los resultados que estableceremos pero haremos algunas excepciones cuando necesitemos aclarar algún concepto. Comencemos considerando un sistema Hamiltoniano con función Hamiltoniana asociada $H(x)$, con $x \in \mathbb{R}^{2n}$; muchos problemas interesantes se pueden formular como un sistema de ecuaciones que dependen de un pequeño parámetro ϵ . Esto es útil cuando queremos estudiar qué pasa con el sistema en una vecindad de una solución bien conocida del sistema, por ejemplo, una órbita periódica o una solución de equilibrio; para esto introducimos un parámetro ϵ de tal forma que cuando $\epsilon = 0$ el sistema sea lineal o al menos integrable; en lo que resta de este capítulo supondremos que la solución conocida es un punto de equilibrio y que hemos trasladado el origen de coordenadas a dicho punto de equilibrio. Supongamos que nuestro Hamiltoniano admite un desarrollo en serie de potencias de la forma

$$H(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i H^i(x),$$

buscamos un cambio de coordenadas *apropiado* de tal forma que este sistema en estas nuevas coordenadas sea mucho más *simple*. Los términos apropiado y simple dependen del problema que estemos manejando, sin embargo, vamos a definirlos en forma general más adelante. Supongamos que el cambio de coordenadas requerido es $x = F(y)$ y que en estas nuevas coordenadas el Hamiltoniano se convierte en

$$G(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \epsilon^i G^i(y),$$

si este nuevo Hamiltoniano cumple con las exigencias originales de ser en cierta forma más simple, diremos que este sistema está en forma normal. Este proceso de transformación tiene varias implicaciones, una de ellas es que aunque nuestro Hamiltoniano original $H(x)$ es una serie convergente en algún dominio de \mathbb{R}^{2n} , bajo el cambio de coordenadas $x = F(y)$ no hay garantía de que la serie resultante $G(y)$ sea convergente. Por lo tanto aquí surge una nueva implicación: ¿Hasta que término debemos truncar el Hamiltoniano $G(y)$ para obtener resultados rigurosos aceptables? nuevamente, esto depende del problema en particular que estemos tratando, esto se hará evidente en la siguiente parte de este capítulo cuando apliquemos la teoría de formas normales al PR4C. En lo que resta de esta sección formalizaremos las ideas y términos que acabamos de discutir, comenzaremos por definir qué queremos decir por un cambio de coordenadas apropiado. La idea general es generar un cambio simpléctico de coordenadas que dependa de un pequeño parámetro como resultado de resolver un sistema de ecuaciones diferenciales Hamiltoniano.

Teorema 4.1.1. *Sea $\psi(t, \tau, \xi)$ la solución general del sistema Hamiltoniano $\dot{z} = J\nabla_z H(t, z)$ con $\psi(\tau, \tau, \xi) = \xi$. Entonces para t y τ fijos, el mapeo $\xi \rightarrow \psi(t, \tau, \xi)$ es simpléctico. De hecho, si $\psi(t, \tau, \xi)$ es la solución general de una ecuación diferencial $\dot{z} = f(t, z)$ definida en $I \times \mathbf{0}$, donde I es un intervalo de \mathbb{R} y $O \subset \mathbb{R}^{2n}$ y además el mapeo $\psi(t, \tau, \xi)$ es siempre simpléctico, entonces la ecuación diferencial $\dot{z} = f(t, z)$ es Hamiltoniana.*

Consideremos el sistema Hamiltoniano no autónomo

$$\frac{dx}{d\epsilon} = J\nabla W(\epsilon, x), \quad (4.1)$$

y la condición inicial $x(0) = y$, donde W es suave. La solución general del problema anterior es una función suave $X(\epsilon, y)$ tal que $X(0, y) = y$, por el teorema anterior la función X es simpléctica para ϵ fijo, de hecho prueba la siguiente

Proposición 4.1.2. *La función $X(\epsilon, y)$ es un cambio de coordenadas simpléctico cercano a la identidad si y solo si es la solución general de una ecuación diferencial Hamiltoniana del tipo (4.1).*

El método de transformaciones de Lie es un procedimiento general para cambiar variables en un sistema de ecuaciones que dependen de un parámetro pequeño. Sean $X(\epsilon, y)$ y $W(\epsilon, x)$ como antes, pensemos a $x = X(\epsilon, y)$ como un cambio de variables $x \rightarrow y$ que depende de un parámetro. Sean $H(\epsilon, x)$ un Hamiltoniano y $G(\epsilon, y) = H(\epsilon, X(\epsilon, y))$ es decir, G es el Hamiltoniano H en las nuevas coordenadas. Llamaremos a G la transformada de Lie de H generada por W . Supongamos que H , G y W poseen desarrollos en serie de potencias en el parámetro ϵ , es decir

$$\begin{aligned} H(\epsilon, x) &= H_0^0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\epsilon^n}{n!} \right) H_n^0(x), \\ G(\epsilon, y) &= H_0^0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\epsilon^n}{n!} \right) H_n^0(x), \\ W(\epsilon, x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\epsilon^n}{n!} \right) W_{n+1}(x). \end{aligned} \quad (4.2)$$

El método introduce un indexado doble H_j^i , $i, j = 0, 1, 2, \dots$ que concuerda con las expansiones anteriores cuando i ó j son cero. El problema es cómo calcular los términos intermedios H_j^i cuando i y j no son ambos cero. La respuesta a esta cuestión la proporciona el siguiente

Teorema 4.1.3. *Usando la notación introducida en el párrafo anterior, las funciones H_j^i , $i = 1, 2, \dots$, $j = 0, 1, 2, \dots$ satisfacen las identidades recursivas*

$$H_j^i = H_{j+1}^{i-1} + \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} \{H_{j-k}^{i-1}, W_{k+1}\}. \quad (4.3)$$

Vamos a detenernos un momento para entender como trabaja el algoritmo. Dada una función $W(p, q)$, la aplicación $\mathfrak{L}_W(f) = \{f, W\}$ donde

$$\{f, W\} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial W}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial W}{\partial q_i},$$

es el corchete de Poisson de f y W definidas en el espacio fase $x = (q, p) \in \mathbb{R}^{2n}$, se llama la derivada de Lie generada por W ; la expresión $\binom{j}{k}$ es el coeficiente binomial $\binom{j}{k} = \frac{j!}{k!(j-k)!}$. Dado que la transformación generada por W debe ser cercana a la identidad, el primer término en H y G es el mismo, a saber, H_0^0 . Para mostrar la interdependencia de las funciones H_j^i considere el diagrama siguiente llamado el triángulo de Lie

$$\begin{array}{ccccc} H_0^0 & & & & \\ \downarrow & & & & \\ H_1^0 & \rightarrow & H_0^1 & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ H_2^0 & \rightarrow & H_1^1 & \rightarrow & H_0^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \end{array}$$

Observe que los coeficientes de la expansión de H están en la columna izquierda y los de la función G están sobre la diagonal. La fórmula (4.3) establece que para calcular los elementos de la diagonal, se necesitan las entradas de la columna izquierda inmediata, un paso a la izquierda y un paso arriba de este. Es mejor si damos un ejemplo de esto; para calcular la expansión en serie de G hasta términos de orden ϵ^2 , debemos calcular primero H_0^1 por medio de

$$H_0^1 = H_1^0 + \{H_0^0, W_1\}, \quad (4.4)$$

que nos da el término de orden ϵ , después tenemos que calcular

$$H_1^1 = H_2^0 + \{H_1^0, W_1\} + \{H_0^0, W_2\}, \quad (4.5)$$

$$H_0^2 = H_1^1 + \{H_0^1, W_1\},$$

que nos da el término de orden ϵ^2 . Por lo tanto obtenemos

$$G(\epsilon, y) = H_0^0(y) + \epsilon H_0^1(y) + \frac{\epsilon^2}{2} H_0^2(y) + \dots$$

Sin embargo, el cálculo de las ecuaciones (4.4) y (4.5) que son llamadas ecuaciones homológicas no es una tarea trivial, observe que en ambas ecuaciones tenemos dos incógnitas, en la ecuación (4.4) tenemos las incógnitas H_1^0 y W_1 , en la ecuación (4.5) tenemos las incógnitas H_2^0 y W_2 (conociendo previamente a W_1); por lo tanto debemos conocer alguna de las 2 incógnitas para resolver estas ecuaciones en cada paso. La forma de resolver estas ecuaciones depende fuertemente de como es nuestro Hamiltoniano cuadrático H_0^0 o equivalentemente, de la forma de su matriz Hamiltoniana asociada, vamos analizar con más

detalle este problema.

Comenzaremos por dar una serie de definiciones y resultados que se pueden encontrar en textos de álgebra lineal, así que los asumiremos sin demostración. En lo que sigue consideraremos un espacio vectorial real de dimensión $2n$ (V, ω) con coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n}$, es decir, $(x, y) = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n)$ que no se deben confundir con la notación anterior y ω es la forma simpléctica estándar $\omega(x, y) = x^T J y$ sobre V .

Definición 4.1.4. *Sea V un espacio vectorial real de dimensión finita. Una transformación lineal $S : V \rightarrow V$ se llama semisimple si cada subespacio de V que es invariante bajo S tiene un subespacio complementario invariante bajo S .*

Lema 4.1.5. *Si $S : V \rightarrow V$ es semisimple entonces $V = \text{im}(S) \oplus \text{ker}(S)$.*

Proposición 4.1.6. *Sea $A : V \rightarrow V$ una transformación lineal, entonces*

1. *Existen únicas transformaciones lineales S y N que satisfacen: $A = S + N$ donde S es semisimple y N es nilpotente. Más aún, S y N conmutan.*
2. *Existen polinomios p y q en una incógnita sin términos constantes tales que $S = p(A)$ y $N = q(A)$.*
3. *si A es una matriz Hamiltoniana entonces S y N también lo son.*

La descomposición que menciona la proposición anterior depende de como sea el espectro de la matriz considerada, para el caso Hamiltoniano tenemos que el espectro de A cae en los siguientes 4 grupos

1. El eigenvalor cero.
2. Eigenvalores reales de la forma: $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \dots, \pm\alpha_m$.
3. Eigenvalores puramente imaginarios: $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2, \dots, \pm i\omega_m$.
4. Complejos conjugados: $\pm\alpha_1 \pm i\omega_1, \pm\alpha_2 \pm i\omega_2, \dots, \pm\alpha_m \pm i\omega_m$.

Una vez que se conoce el espectro de la matriz, buscamos una base simpléctica en la cual la matriz A se pueda escribir de manera más simple, en diagonal por bloques por ejemplo. Para cada uno de los 4 casos anteriores existen algoritmos sobre como calcular las bases simpléticas en cada caso y de aquí la forma que deben tener los bloques de la forma buscada de A . En trabajos como [47], [38] y [12] el lector puede encontrar discusiones detalladas sobre como obtener este tipo de formas llamadas *formas normales para matrices*. En este trabajo estamos interesados en hacer una aplicación para el caso cuando los eigenvalores son imaginarios de multiplicidad 2. Más adelante veremos la construcción de la forma normal de la matriz (3.7).

A continuación daremos una definición de lo que entendemos por un Hamiltoniano en forma normal, antes necesitamos unos preliminares

Lema 4.1.7. *Sea $A = S + N$ la descomposición de $A : V \rightarrow V$ entonces*

1. $\ker(A) = \ker(S) \cap \ker(N)$.
2. $\operatorname{im}(A) = \operatorname{im}(S) \oplus [\operatorname{im}(N) \cap \ker(S)]$.

Corolario 4.1.8. *Supongamos que Y es un complemento de $\ker(S) \cap \operatorname{im}(N)$ en $\ker(S)$ es decir, $\ker(S) = Y \oplus [\ker(S) \cap \operatorname{im}(N)]$. Entonces Y es un complemento de $\operatorname{im}(A)$ en V , es decir, $V = \operatorname{im}(A) \oplus Y$.*

Denotemos por $\mathcal{P}_n(V, \mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ el espacio vectorial de polinomios homogéneos reales sobre V de grado n , y sea $\mathcal{FP}(V, \mathbb{R})$ el espacio vectorial de series de potencias formales reales sobre V . Para estar acorde con esta notación, supongamos que la expansión de nuestro Hamiltoniano H es de la forma $H = H_2 + H_3 + H_4 + \dots$, esta es una serie de potencias sobre V de H con $H_n \in \mathcal{P}_n(V, \mathbb{R})$. Supongamos que H_2 está en forma normal, o equivalentemente, la matriz Hamiltoniana asociada a este Hamiltoniano cuadrático está en forma normal y por lo tanto conocemos la descomposición $A = S + N$. Denotemos por \mathcal{L}_A , \mathcal{L}_S , \mathcal{L}_N a las derivadas de Lie de elementos de $\mathcal{FP}(V, \mathbb{R})$ con respecto a las partes A , S y N respectivamente. Por la descomposición $A = S + N$ tenemos que $\mathcal{L}_A = \mathcal{L}_S + \mathcal{L}_N$, no es difícil ver de la definición de la derivada de Lie, que el operador \mathcal{L}_A mapea a $\mathcal{P}_n(V, \mathbb{R})$ en sí mismo ya que las componentes asociadas a S y N son polinomios homogéneos de grado 2. Sean \mathcal{L}_{A_n} , \mathcal{L}_{S_n} , \mathcal{L}_{N_n} las restricciones de \mathcal{L}_A , \mathcal{L}_S , \mathcal{L}_N a $\mathcal{P}_n(V, \mathbb{R})$ respectivamente, entonces $\mathcal{L}_{A_n} = \mathcal{L}_{S_n} + \mathcal{L}_{N_n}$ es la $S - N$ descomposición de \mathcal{L}_{A_n} . Para $n \geq 2$ sea Y_n un complemento de $\ker(\mathcal{L}_{S_n}) \cap \operatorname{im}(\mathcal{L}_{N_n})$ en $\ker(\mathcal{L}_{S_n})$ es decir, $Y_n \oplus [\ker(\mathcal{L}_{S_n}) \cap \operatorname{im}(\mathcal{L}_{N_n})] = \ker(\mathcal{L}_{S_n})$. Si usamos el corolario de arriba tenemos que $Y_n \oplus \operatorname{im}(\mathcal{L}_{A_n}) = \mathcal{P}_n(V, \mathbb{R})$. Entonces tenemos la siguiente:

Definición 4.1.9. *Diremos que un Hamiltoniano H está en forma normal a orden $k \in \mathbb{N}$ si $H_n \in Y_n$ para $3 \leq n \leq k$. si A es semisimple entonces $Y_n = \ker(\mathcal{L}_{A_n})$.*

De esta definición observamos que $Y_n \subset \mathcal{P}_n(V, \mathbb{R})$ entonces cada término H_n de la forma normal de H debe estar en un subespacio más pequeño del espacio considerado originalmente, por lo tanto la forma normal construida es en este sentido más simple (o más pequeña) que el Hamiltoniano original. En el caso semisimple conocemos perfectamente en cada paso los espacios Y_n , pero si este no es el caso, es decir, cuando $N \neq 0$ no conocemos exactamente cuales son estos espacios Y_n de los que nos habla la definición de forma normal, entonces esto pone un problema adicional a la resolución de las ecuaciones homológicas; la elección de los espacios Y_n depende de lo que se pretenda hacer con el cálculo de la forma normal, es decir, tenemos que hacer elecciones *ad hoc* para cada problema en particular, de aquí se desprende de que en el caso no semisimple la forma normal NO ES ÚNICA. No nos detendremos más discutiendo este problema, remitimos al lector a las referencias que hemos estado mencionando a lo largo de esta sección. En lo que sigue vamos hacer una aplicación de esta teoría de formas normales en el PR4C para el punto de equilibrio L_2 y de esta forma ilustraremos como calcular una forma normal paso a paso.

4.2. Aplicación de la teoría de formas normales al punto L_2

4.2.1. La forma normal lineal

En esta parte vamos hacer una aplicación del algoritmo presentado en [12] para el caso cuando la matriz A tenga eigenvalores imaginarios. Cuando estudiamos la estabilidad de los puntos de equilibrio vimos que en el punto colineal que llamamos L_2 tenemos un espectro de la forma $\pm i\omega_1, \pm i\omega_2$ cuando $0 < \mu < \mu_b$, de la forma $\pm i\omega$ de multiplicidad 2 es decir, $\omega_1 = \omega_2$ cuando $\mu = \mu_b$, de la forma $\pm\alpha \pm i\omega$ cuando $\mu > \mu_b$. El objetivo a seguir es estudiar el sistema en el valor μ_b que es donde se bifurca el espectro, esto tendrá consecuencias importantes en el sistema que veremos más adelante. En el punto colineal L_2 el Hamiltoniano cuadrático es de la forma

$$H_0^0 = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + (x_2y_1 - x_1y_2) - \frac{1}{2}(U_{x_1x_1}x_1^2 + U_{x_2x_2}x_2^2), \quad (4.6)$$

este Hamiltoniano se puede escribir como la forma cuadrática $H = \frac{1}{2}x^T Sx$, con $S = -J_4A$ y $x = (x_1, x_2, y_1, y_2)$, A es la matriz (3.7) definida anteriormente. Buscamos un cambio simpléctico de coordenadas $x = Pz$ con $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$, tal que el Hamiltoniano (4.6) se pueda escribir como

$$H_0^0 = \frac{1}{2}z^T S^* z = \omega(z_1z_4 - z_2z_3) - \frac{\epsilon}{2}(z_1^2 + z_2^2),$$

donde $S^* = -J_4B$ y $B = P^{-1}AP$ es la forma normal de la matriz A

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 & 0 \\ \omega & 0 & 0 & 0 \\ \epsilon & 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \epsilon & \omega & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.7)$$

con $\epsilon = \pm 1$, el valor de ϵ depende, como veremos más adelante, de la base a construir. El primer paso es calcular las matrices S y N ; cuando el polinomio característico de una matriz es de la forma $q(\lambda) = p(\lambda)^n$ donde $p(\lambda) = (\lambda^2 + \omega^2)$ la matriz S se puede calcular por medio de la formula presentada en [12]

$$S = A \left(I + \sum_j^{n-1} \binom{2j}{j} \left(\frac{P(A)}{4\omega^2} \right)^j \right),$$

en nuestro caso tenemos que el polinomio característico es de la forma $q(\lambda) = (\lambda^2 + \omega^2)^2$ así que se tiene $n = 2$ y por lo tanto la parte semisimple de nuestra matriz A está dada por

$$S = A \left(I + \frac{1}{2\omega^2} p(A) \right), \quad (4.8)$$

y la parte nilpotente no es mas que la diferencia $N = A - S$. Por el teorema de Hamilton-Cayley tenemos que $p(A) \neq 0$ que implica $A \neq S$ y por lo tanto $N \neq 0$ así que estamos en un caso no semisimple. Un cálculo directo nos dice que las matrices S y N son de la forma

$$S = \frac{1}{2\omega^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3\omega^2 + 2b + a - 1 & 3\omega^2 + a - 3 & 0 \\ -(3\omega^2 + 2a + b - 1) & 0 & 0 & 3\omega^2 + b - 3 \\ a^2 - b + a(3\omega^2 - 2) & 0 & 0 & 3\omega^2 + 2a + b - 1 \\ 0 & -a + b(3\omega^2 + b - 2) & -(3\omega^2 + 2b + a - 1) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

y

$$N = \frac{1}{2\omega^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -(\omega^2 + 2b + a - 1) & -(\omega^2 + a - 3) & 0 \\ \omega^2 + 2a + b - 1 & 0 & 0 & -(\omega^2 + b - 3) \\ -(a^2 - b + a(\omega^2 - 2)) & 0 & 0 & -(\omega^2 + 2a + b - 1) \\ 0 & a - b(\omega^2 + b - 2) & \omega^2 + 2b + a - 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

donde $a = U_{x_1 x_1}$ y $b = U_{x_2 x_2}$ son las respectivas derivadas en el valor μ_b . Con estas matrices calculadas estamos listos para proceder con el segundo paso que es encontrar una base simpléctica en la cual podamos expresar a la matriz A en su forma normal B . Según el algoritmo que estamos siguiendo, necesitamos un vector inicial z_0 para construir la base deseada y determinar el valor de ϵ , aquí vamos a denotar el producto simpléctico que ya definimos anteriormente como $\langle x, y \rangle = x^T J_4 y$. Como en el caso del PR3C una elección natural es el vector $z_0 = \frac{e_1}{\sqrt{|\langle e_1, N e_1 \rangle|}}$ con e_1 el vector unitario de la base estándar de \mathbb{R}^4 , no es difícil ver que $\langle e_1, N e_1 \rangle = N_{31}$ y por lo tanto

$$\epsilon = \langle z_0, N z_0 \rangle = \frac{\langle e_1, N e_1 \rangle}{|N_{31}|} = \frac{N_{31}}{|N_{31}|},$$

si sustituimos los valores numéricos tenemos que el valor de N_{31} es aproximadamente $-1,82$ de donde se tiene $\epsilon = -1$ como es el caso de la forma normal respectiva del R3BP. así pues la base deseada tiene la forma : $z_1 = z_0 + \frac{\epsilon}{2\omega^2} \langle z_0, S z_0 \rangle N S z_0$, $z_2 = \frac{1}{\omega} S z_1$, $z_3 = \epsilon N z_1$, $z_4 = \frac{\epsilon}{\omega} S N z_1$. La matriz cambio de base tiene la forma $P = \text{col}(z_1, z_2, z_3, z_4)$, y se ve como

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & 0 & p_{14} \\ 0 & p_{22} & p_{23} & 0 \\ 0 & p_{32} & p_{33} & 0 \\ p_{41} & 0 & 0 & p_{44} \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

por supuesto los elementos de esta matriz dependen de los elementos de las matrices S y N (por lo tanto de a, b). En el Hamiltoniano original $H(\epsilon, x)$ dado

en (4.2) debemos sustituir el cambio simpléctico de coordenadas $x = Pz$ para obtener una nueva serie

$$H(\epsilon, z) = H_0^0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\epsilon^n}{n!} \right) H_n^0(z), \quad (4.12)$$

$H_0^0(z)$ es el Hamiltoniano lineal asociado con la forma normal B . Sin embargo, observe que no hemos normalizado los términos de orden superior $H_n^0(z)$, esto, como ya lo hicimos notar, es un asunto más delicado y lo trataremos aparte.

4.2.2. Los términos de orden superior

En este apartado continuaremos el proceso de normalización, trataremos con los términos de orden superior en nuestro Hamiltoniano del PR4C, si recordamos la expansión requerida en (4.2) debemos notar que los términos $H_n^0(x)$ contienen los términos de orden $n+2$ de la serie de Taylor del potencial $U(x_1, x_2, \mu)$, por lo tanto estos términos deben tener la forma $H_1^0(x) = a_3x_1^3 + b_3x_1^2x_2 + c_3x_1x_2^2 + d_3x_2^3$, $H_2^0(x) = a_4x_1^4 + b_4x_1^3x_2 + c_4x_1^2x_2^2 + d_4x_1x_2^3 + e_4x_2^4$, ...etc. Los coeficientes de estos polinomios homogéneos corresponden a las respectivas derivadas de orden $n+2$ en la expansión de $U(x_1, x_2, \mu)$ evaluada en el origen. Como el punto de equilibrio está sobre el eje x , tenemos que $\frac{\partial U}{\partial x_2}(x_1, 0, \mu) = 0$ y por lo tanto $\frac{\partial^n \partial}{\partial x_1^n \partial x_2} U(x_1, 0, \mu) = 0$ para cada n . Un cálculo directo nos muestra que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 U}{\partial x_2^3} &= \mu \left(\frac{9(x_2 - 1/2)}{r_3^5} - \frac{15(x_2 - 1/2)^3}{r_3^7} \right) + \mu \left(\frac{9(x_2 + 1/2)}{r_2^5} - \frac{15(x_2 + 1/2)^3}{r_2^7} \right) \\ &\quad + (1 - 2\mu) \mu \left(\frac{9x_2}{r_1^5} - \frac{15x_2^3}{r_1^7} \right), \end{aligned}$$

si evaluamos en $x_2 = 0$ vemos que $r_2 = r_3$, entonces $\frac{\partial^3 U}{\partial x_2^3} = 0$ que implica $\frac{\partial^4 \partial}{\partial x_1 \partial x_2^3} U = 0$. Entonces se tiene $H_1^0(x) = a_3x_1^3 + c_3x_1x_2^2$ y $H_2^0(x) = a_4x_1^4 + c_4x_1^2x_2^2 + e_4x_2^4$. En lo que resta de esta sección no mostraremos todos los cálculos dado que son muy extensos, así que solo diremos como se llevan a cabo. El siguiente paso para calcular la forma normal deseada a orden 2 es transformar H_1^0 y H_2^0 bajo el cambio de coordenadas $x = Pz$; con ayuda de un manipulador algebraico esto no representa problema, la tarea interesante es como calcular las ecuaciones homológicas (4.4) y (4.5). Como ya mencionamos existen técnicas para calcular estas ecuaciones, por ejemplo en [64], [61] y [19] el lector puede encontrar discusiones detalladas sobre este problema. Debemos hacer notar que muchos autores hacen uso de variables complejas para efectuar los cálculos de las formas normales, sin embargo, en ocasiones si construimos formas normales con variables complejas, no necesariamente estamos determinando las formas normales reales [12], así que preferiremos hacer uso exclusivo de transformaciones *reales* y simplécticas para efectuar los cálculos. En [51] se encuentra un método muy elegante para calcular las ecuaciones homológicas cuando se está en el caso no semisimple de un campo vectorial lineal y su aplicación al PR3C

en el punto de equilibrio L_4 . Vamos explicar como funciona.

Consideremos el cambio de coordenadas simpléctico a coordenadas polares $(z_1, z_2, z_3, z_4) \rightarrow (r, \theta, R, \Theta)$ definido por

$$\begin{aligned} z_1 &= r \cos \theta, \\ z_2 &= r \sin \theta, \\ z_3 &= R \cos \theta - \frac{\Theta}{r} \sin \theta, \\ z_4 &= R \sin \theta + \frac{\Theta}{r} \cos \theta, \end{aligned} \tag{4.13}$$

en estas coordenadas el término H_0^0 se convierte en $H_0^0 = \omega\Theta + \frac{1}{2}r^2$, por un escalamiento del tiempo podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\omega = 1$; por lo tanto

$$H_0^0 = \Theta + \frac{1}{2}r^2, \tag{4.14}$$

por supuesto que debemos transformar nuevamente los términos $H_1^0(z)$, $H_2^0(z)$ bajo este cambio de coordenadas. Sea $\mathfrak{L}_{H_0^0}(W_i)$ el operador lineal definido por $\mathfrak{L}_{H_0^0}(W_i) = \{W_i, H_0^0\}$, $i \in \mathbb{N}$, explícitamente $\mathfrak{L}_{H_0^0}(W_i) = \{W_i, \Theta\} + \frac{1}{2}\{W_i, r^2\} = \frac{\partial W_i}{\partial \theta} - r \frac{\partial W_i}{\partial R} := \mathfrak{L}_S + \mathfrak{L}_N$ con $\mathfrak{L}_S = \frac{\partial}{\partial \theta}$ y $\mathfrak{L}_N = -r \frac{\partial}{\partial R}$. La ecuación homológica en cada paso se ve como

$$\mathfrak{L}_{H_0^0}(W_i) + H_0^i = \widetilde{H}_i,$$

donde \widetilde{H}_i agrupa todos los términos de los pasos anteriores H_j^i . Deprit [19] mostró que, después de separar $\widetilde{H}_i = \widetilde{H}_i^*(r, -, R, \Theta) + \widetilde{H}_i'(r, \theta, R, \Theta)$, podemos escoger $H_0^i = \widetilde{H}_i^*$ y resolver

$$\mathfrak{L}_{H_0^0}(W_i) = \widetilde{H}_i', \tag{4.15}$$

con $\widetilde{H}_i' = \widetilde{H}_i - \widetilde{H}_i^*$ en términos de operadores podemos escribir la ecuación (4.15) como

$$(id + \mathfrak{L}_S^{-1} \mathfrak{L}_N)(W_i) = \mathfrak{L}_S^{-1}(\widetilde{H}_i'),$$

en general el operador $(id + \mathfrak{L}_S^{-1} \mathfrak{L}_N)(W_i)$ no es invertible, pero en nuestro caso particular podemos calcular W_i porque todos los términos del lado derecho de (4.15) son periódicos en θ y \mathfrak{L}_N es nilpotente. Por la linealidad de $\mathfrak{L}_{H_0^0}$ tenemos

$$(id + \mathfrak{L}_S^{-1} \mathfrak{L}_N)^{-1} = id - (\mathfrak{L}_S^{-1} \mathfrak{L}_N) + (\mathfrak{L}_S^{-1} \mathfrak{L}_N)^2 - \dots,$$

esta serie es una suma finita porque en general $\mathfrak{L}_N^m(p) = 0$ si p es un polinomio homogéneo de grado $m - 1$. Por lo tanto W_i se puede tomar como

$$W_i = (id + \mathfrak{L}_S^{-1} \mathfrak{L}_N)^{-1} \mathfrak{L}_S^{-1}(\widetilde{H}_i'),$$

observe que obtenemos una función totalmente periódica en θ . Por esta razón, podemos repetir el proceso a cualquier orden en particular, después de dos pasos obtenemos

$$G(\epsilon, y) = H_0^0(y) + \epsilon H_0^1(y) + \frac{\epsilon^2}{2} H_0^2(y).$$

La función generadora se puede conocer totalmente en cada paso sin suposiciones adicionales y es enteramente polinomial. Queremos aplicar este método para calcular una forma normal del Hamiltoniano en el caso del problema restringido de cuatro cuerpos. Sea H_0^0 el Hamiltoniano cuadrático (4.14), como fué descrito arriba, la ecuación homológica a primer orden a resolver es

$$\mathfrak{L}_{H_0^0}(W_1) + H_0^1 = H_1^0,$$

si $H_1^0 = H_1^{0*}(r, -, R, \Theta) + H_1^{0'}(r, \theta, R, \Theta)$ y escogemos $H_0^1 = H_1^{0*}$ entonces la ecuación homológica se convierte en

$$\mathfrak{L}_{H_0^0}(W_1) = H_1^{0'}, \quad (4.16)$$

con $H_1^{0'} = H_1^0 - H_1^{0*}$. En coordenadas polares el término H_1^0 se expresa como

$$H_1^0 = a_3 \left(p_{11}r \cos \theta + p_{14} \left(R \sin \theta + \frac{\Theta}{r} \cos \theta \right) \right)^3 + c_3 \left(p_{22}r \sin \theta + p_{23} \left(R \cos \theta - \frac{\Theta}{r} \sin \theta \right) \right)^2 \left(p_{11}r \cos \theta + p_{14} \left(R \sin \theta + \frac{\Theta}{r} \cos \theta \right) \right),$$

observe que los términos en θ aparecen en todos los términos de H_1^0 por lo tanto $H_1^{0*} = 0$ y $H_1^0 = H_1^{0'}$. Si definimos $I = \int H_1^0 d\theta$ se puede ver que $\mathfrak{L}_N^4(I) = 0$, entonces la función generadora en el primer paso es

$$W_1 = I + r \left(\int \frac{\partial}{\partial R} d\theta \right) (I) + r^2 \left(\int \frac{\partial}{\partial R} d\theta \right)^2 (I) + r^3 \left(\int \frac{\partial}{\partial R} d\theta \right)^3 (I), \quad (4.17)$$

donde en este caso los exponentes significan la composición repetida de los operadores derivada e integral aplicados a la función I . Para el segundo término tenemos que calcular $H_1^1 = H_2^0 + \{H_1^0, W_1\} + \{H_0^0, W_2\}$ y $H_0^2 = H_1^1 + \{H_1^0, W_1\}$ pero $H_0^1 = 0$ entonces $H_0^2 = H_1^1 = \widetilde{H}_2 + \{H_0^0, W_2\}$ con $\widetilde{H}_2 = H_2^0 + \{H_1^0, W_1\}$, por lo tanto, la ecuación homológica en el segundo paso es

$$\mathfrak{L}_{H_0^0}(W_2) = \widetilde{H}_2',$$

con $H_0^2 = \widetilde{H}_2^*$ y $\widetilde{H}_2 = \widetilde{H}_2^* + \widetilde{H}_2'$. La ecuación homológica en el segundo paso se resuelve de manera similar a la anterior. Hay que resaltar que todos los cálculos hechos hasta ahora han sido hechos en general, es decir, sin recurrir a los valores numéricos de la matriz P y de los polinomios H_1^0 y H_2^0 . Las expresiones de W_1 y H_0^2 que fueron obtenidas con ayuda de un manipulador algebraico

son demasiado extensas y no las mostraremos. Ahora bien, si sustituimos los coeficientes numéricos requeridos de la matriz P : $p_{11} = -0,3928$, $p_{14} = -0,7631$, $p_{22} = -0,9680$, $p_{23} = -1,8807$, $p_{32} = 2,005$, $p_{33} = 1,3490$, $p_{41} = 0,8134$, $p_{44} = 0,5474$ y los coeficientes de los polinomios $a_3 = -0,962$, $c_3 = 1,370$, $a_4 = -1,007$, $c_4 = 3,150$, $e_4 = -0,4686$ obtenemos

$$H_0^2 = h_1 r^4 - h_2 R^4 + h_3 r^2 R^2 - h_4 r^2 \Theta + h_5 R^2 \Theta - h_6 \Theta^2 - h_7 \frac{R^2 \Theta^2}{r^2} + \quad (4.18)$$

$$h_8 \frac{\Theta^3}{r^2} - h_9 \frac{\Theta^4}{r^4},$$

con $h_1 = 2,19104$, $h_2 = 1,41252$, $h_3 = 16,2535$, $h_4 = 8,35177$, $h_5 = 4,24874$, $h_6 = 0,00392$, $h_7 = 2,82504$, $h_8 = 4,24874$, $h_9 = 1,41252$. Por lo tanto, el Hamiltoniano (4.12) después de dos pasos en el proceso de normalización queda:

$$G = H_0^0 + \frac{\epsilon^2}{2} H_0^2.$$

Hemos enfatizado la no unicidad de la forma normal para el caso no semisimple, sin embargo es de resaltar que si los términos de orden 2 de las formas normales del PR3C $H_0^2 = (p_1^2 + p_2^2)[A(p_1^2 + p_2^2) + B(q_1 p_2 - q_2 p_1) + C(q_1^2 + q_2^2)]$ y $H_0^2 = c(q_1 p_2 - q_2 p_1)^2 + d(q_1 p_2 - q_2 p_1)(p_1^2 + p_2^2) + e(p_1^2 + p_2^2)^2$ con A , B , C , c , d , e constantes, que se encuentran en [61] y [47] los expresamos en coordenadas polares, estos se encuentran contenidos en (4.18). Esta es una consecuencia directa de nuestro algoritmo aplicado para el cálculo de una forma normal de PR4C donde solo usamos coordenadas reales y no hacemos ninguna suposición adicional sobre la función generadora.

4.2.3. Análisis de la forma normal en L_2

Estamos interesados en hacer un análisis local de la forma normal truncada calculada en la sección anterior, en particular, estamos interesados en estudiar sus respectivas variedades estable denotada por W^s e inestable denotada por W^u . Primero vamos a construir una deformación versal ([64], [4]) para la forma normal ya obtenida. El lector que no esté familiarizado con este concepto puede consultarlo en dichas referencias. Recordemos la definición de una deformación versal

Definición 4.2.1. Una deformación $A(\lambda)$ de $A_0 \in M(\mathbb{C}_n)$ se llama versal si cualquier otra deformación $B(\mu)$ de A_0 es equivalente a una deformación inducida por A , i.e.,

$$B(\mu) = C(\mu)A(\phi(\mu))C^{-1}(\mu)$$

para algún cambio de parámetros $\phi : \Sigma \rightarrow \Lambda$.

Este tipo de deformación es útil para estudiar el sistema truncado a través de resonancia. Ya hemos mencionado en repetidas ocasiones que no tenemos relaciones explícitas entre las derivadas parciales a y b y el parámetro de masa

μ , así que no podemos dar una relación explícita entre los parámetros de la deformación versal y el parámetro de masa μ . Por lo tanto, solo podemos dar una relación general de los parámetros de la deformación versal con las cantidades a y b . Consideremos la matriz B relacionada al campo vectorial lineal H_0^0 , si deseamos construir una deformación versal de la matriz B debemos considerar la familia de matrices $B_\nu := B + D_\nu$ donde la matriz D_ν yace en el complemento ortogonal de la órbita de B [67], esto es equivalente a pedir que la matriz D_ν satisfaga $[D_\nu^*, B] = 0$ donde D_ν^* denota la adjunta de D_ν . La matriz $D_\nu = \nu_1 e_1 + \nu_2 e_2$ con

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

y

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

satisface $[D_\nu^*, B] = 0$. Ahora consideremos la matriz Hamiltoniana A del campo vectorial linealizado del PR4C

$$A_\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $a = U_{x_1 x_1}(0, \mu)$ y $U_{x_2 x_2}(0, \mu)$. Hemos encontrado una transformación lineal simpléctica P que transforma la matriz A_{μ_1} en su forma normal $B = P^{-1} A_{\mu_1} P$. Como mencionamos la matriz

$$B_\nu = \begin{pmatrix} 0 & -(1 + \nu_1) & \nu_2 & 0 \\ (1 + \nu_1) & 0 & 0 & \nu_2 \\ -1 & 0 & 0 & -(1 + \nu_1) \\ 0 & -1 & 1 + \nu_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.19)$$

es una deformación versal de la matriz B . Consideremos ahora la familia de matrices $B_\mu = P^{-1} A_\mu P$, B_μ es una deformación de B (en μ) así que por la definición (4.2.1) existe un cambio de parámetros $\phi : \Sigma \rightarrow \Lambda$ tal que $B_\mu = C_\mu D_\nu C_\mu^{-1}$ por lo tanto B_ν y B_μ tienen los mismos polinomios característicos, es decir, los polinomios $P_{B_\mu} = \lambda^4 + (2 - a - b)\lambda^2 + (a + b + ab + 1)$ y $P_{B_\nu} = \lambda^4 + 2[(1 + \nu_1)^2 + \nu_2]\lambda^2 + [(1 + \nu_1)^2 - \nu_2]^2$ son iguales. Con un poco de álgebra podemos notar que:

$$\begin{aligned} \nu_2 &= 1/2 - 1/4(a + b) - 1/2(a + b + ab + 1)^{1/2}, \\ \nu_1 &= [1/2 - 1/4(a + b) + 1/2(a + b + ab + 1)^{1/2}]^{1/2} - 1, \end{aligned}$$

más aún $(1 + \nu_1)^2 = 1 - 1/2(a + b) - \nu_2$: Los eigenvalores están dados por la expresión

$$\lambda^2 = -((1 + \nu_1)^2 - \nu_2) \pm 2|1 + \nu_1|\sqrt{\nu_2}.$$

Note que el signo de ν_2 determina el comportamiento de los eigenvalores, ya sea si estos son puramente imaginarios o tiene parte real distinta de cero. En coordenadas polares la deformación versal relacionada con la matriz (4.19) es:

$$H_{2,\nu} = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) + \frac{\nu_2}{2} r^2 + (1 + \nu_1)\Theta.$$

Los parámetros ν_1 y ν_2 no son independientes y dado que Θ es una constante de movimiento pues θ es una variable que no aparece en la forma normal, tenemos que en realidad la deformación versal depende solo de el parámetro ν_2 . Ahora estamos listos para realizar el estudio del sistema truncado a través de resonancia. El Hamiltoniano a considerar será

$$H = \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) + \frac{\nu}{2} r^2 + \Theta + H_0^2.$$

Dado que Θ es una constante, hemos obtenido un sistema en un grado de libertad, queremos ver cuales términos son los más importantes o que influyen más cerca del origen, así que usaremos el escalamiento encontrado en [48] en forma polar

$$\begin{aligned} r &\rightarrow \epsilon r, & (4.20) \\ \theta &\rightarrow \theta \\ R &\rightarrow \epsilon^2 R, \\ \Theta &\rightarrow \epsilon^3 \Theta, \\ \nu &\rightarrow \epsilon^2 \nu, \end{aligned}$$

que es simpléctico con multiplicador ϵ^{-3} . El Hamiltoniano se transforma en

$$H = \Theta + \epsilon \left(\frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) + \frac{\nu}{2} r^2 + h_1 r^4 \right) + \bar{H}(r, \theta, R, \Theta), \quad (4.21)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{H}(r, \theta, R, \Theta) = & -\epsilon^2 (h_4 r^2 \Theta) + \epsilon^3 (h_3 r^2 R^2 - h_6 \Theta^2) + \epsilon^4 \left(h_5 R^2 \Theta + h_8 \frac{\Theta^3}{r^2} \right) - \\ & \epsilon^5 \left(h_2 R^4 + h_4 \frac{R^2 \Theta^2}{r^2} + h_9 \frac{\Theta^4}{r^4} \right). \end{aligned}$$

Si ignoramos los términos de orden superior en ϵ , obtenemos la forma del Hamiltoniano truncado que se presenta en [48]

$$\hat{H} = \Theta + \epsilon \left(\frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) + \frac{\nu}{2} r^2 + h_1 r^4 \right), \quad (4.22)$$

con parámetros $\delta = 1$ y $\eta = h_1 > 0$. Vamos a resumir el análisis que se presenta en ese trabajo. Ya mencionamos que θ es una variable ignorable así que su momento conjugado Θ es una integral primera, definamos $\Theta = c$ donde c es una constante arbitraria. El problema ha sido reducido a estudiar el problema de un grado de libertad; entonces un análisis cualitativo del sistema truncado se reduce a estudiar las curvas de nivel del Hamiltoniano (4.22). Como llevamos el punto L_2 al origen de coordenadas, las variedades estables e inestables yacen en el nivel de energía $H = 0$ así que solo nos centraremos en estudiar el flujo sobre este nivel de energía. En (4.22) si hacemos $H = 0$ y resolvemos para R^2 obtenemos

$$R^2 = -2c - \frac{c^2}{r^2} - \nu r^2 - 2h_1 r^4,$$

dado que solo estamos interesados en estudiar las variedades estables e inestables, solo necesitamos considerar la intersección de la integral primera c con el nivel $H = 0$, es decir, debemos hacer $c = 0$ por lo tanto obtenemos

$$R^2 = -\nu r^2 - 2h_1 r^4. \quad (4.23)$$

En la figura (4.1) observamos las variedades estables e inestables en el plano (r, R) teniendo en cuenta que h_1 es positivo. El lector debe notar que estas fi-

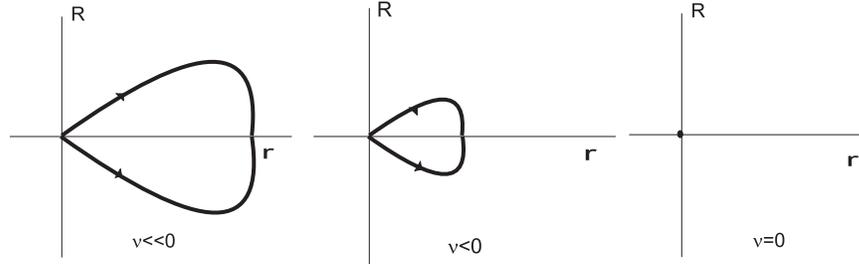


Figura 4.1: Variedades estable e inestable del Hamiltoniano truncado cuando $h_1 > 0$.

guras son solo proyecciones de el nivel $H = 0$ sobre el plano (r, R) , y que θ es arbitrario; así que para cada punto (r, R) con $r \neq 0$ le corresponde un círculo en $H = 0$, pero estos círculos tienden a cero conforme $r \rightarrow 0$. Las conclusiones presentadas en [48] afirman que podemos considerar a las variedades estable e inestable, W^s y W^u respectivamente, del sistema completo (o no truncado) como perturbaciones de las variedades invariantes del sistema truncado, de hecho las variedades W^s y W^u del sistema completo convergen (en cierto sentido) a las variedades del sistema truncado conforme $\epsilon \rightarrow 0$ y más aún, dicha convergencia es en el contexto de mapeos de Poincaré; entonces podemos considerar a las variedades W^s y W^u como perturbaciones Hamiltonianas es decir, que preservan áreas. Por lo tanto los resultados presentados en [43] establecen que las variedades estable e inestable (del sistema truncado) permanecen idénticas

o estas se intersectan transversalmente bajo la perturbación para ϵ suficientemente pequeño.

El Hamiltoniano (4.21) se puede escribir de manera breve como

$$H = \hat{H} + \bar{H},$$

donde \bar{H} , contiene los términos de orden ϵ^2 y superiores, observe que \bar{H} es una función periódica en θ dado que $\theta \in [0, 2\pi]$ es una variable arbitraria y el Hamiltoniano H , como ya se mencionó, es de un grado de libertad (cuando omitimos los términos superiores), entonces para ϵ suficientemente pequeño podemos aplicar el método de Melnikov para sistemas Hamiltonianos autónomos.

4.2.4. La función de Melnikov

En esta sección mostraremos que las variedades invariantes de \hat{H} se separan bajo la perturbación \bar{H} .

Dado que Θ es una constante para el Hamiltoniano H , podemos escoger el conjunto de nivel $\Theta = 0$ como una sección transversal para el flujo Hamiltoniano definido por (4.21). Reescalamos el Hamiltoniano H para escribirlo de la forma

$$H = \hat{H} + \epsilon H_1, \quad (4.24)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2} \left(R^2 + \frac{\Theta^2}{r^2} \right) + \frac{\nu}{2} r^2 + h_1 r^4, \\ H_1 &= h_3 r^2 R^2. \end{aligned}$$

La función de Melnikov a considerar es [30]

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{ \hat{H}, H_1 \} \left(\hat{\Gamma}(t - t_0) \right) dt, \quad (4.25)$$

donde

$$\{ \hat{H}, H_1 \} = \frac{\partial \hat{H}}{\partial r} \frac{\partial H_1}{\partial R} - \frac{\partial \hat{H}}{\partial R} \frac{\partial H_1}{\partial r}$$

es el corchete de Poisson y $\hat{\Gamma}(t - t_0)$ es una órbita homoclínica conocida del sistema definido por \hat{H} , aquí t_0 es un parámetro arbitrario que determina los posibles puntos de cruce entre las variedades. No es difícil ver que en nuestro caso

$$\{ \hat{H}, H_1 \} = 2h_3(4h_1 r^5 R + \nu r^3 R - r R^3). \quad (4.26)$$

El análisis de la función de Melnikov lo proporciona el siguiente

Teorema 4.2.2. *La función de Melnikov (4.25) posee dos ceros simples. En particular las variedades estable e inestable del origen $r = 0$, $R = 0$, se intersectan transversalmente en estos puntos.*

De las ecuaciones de movimiento del Hamiltoniano \hat{H} tenemos la relación $\dot{r} = -\partial\hat{H}/\partial R = -R$, entonces (4.23) se escribe como

$$\frac{dr^2}{dt} = -\nu r^2 - 2h_1 r^4. \quad (4.27)$$

Demostración. Definamos las constantes $a = -\nu$, $b = 2h_1$ y $c = \sqrt{a/b}$, la relación (4.27) se puede escribir como

$$t = \pm \int \frac{dr}{r\sqrt{a-br^2}}.$$

Esta integral se puede calcular fácilmente si hacemos el cambio de variable $r = c \sin \phi$ entonces

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{a-br^2}} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int \frac{d\phi}{\sin \phi} = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left(\tan \frac{\phi}{2} \right),$$

y por lo tanto

$$\sqrt{at} = \pm \ln \left(\tan \frac{\phi}{2} \right). \quad (4.28)$$

La idea central es medir la separación de las variedades estable e inestable de \hat{H} sobre una sección de cruce $t = t_0$. Ya mencionamos que t_0 actúa como un parámetro, entonces es claro que dada la ecuación (4.28) si variamos t_0 o ϕ_0 obtenemos el mismo efecto.

El objetivo es escribir la función de Melnikov en términos de la variable ϕ , de la ecuación (4.28) obtenemos

$$\sqrt{a} dt = \frac{d\phi}{\sin \phi}. \quad (4.29)$$

El signo \pm en (4.28) proporciona la dirección en la que se toma el tiempo t o $-t$ así que es suficiente con tomar el signo $+$, no es difícil ver que el intervalo de integración $(-\infty, \infty)$ (en la variable t) se convierte en $[0, \pi]$ en la variable ϕ . La órbita homoclínica (4.23) bajo el cambio de variable $r = c \sin \phi$ es

$$R^2 = br^2(c^2 - r^2) = bc^4 \sin^2 \phi \cos^2 \phi,$$

y por lo tanto

$$R = \begin{cases} \sqrt{bc^2} \sin \phi \cos \phi & \phi \in [0, \pi/2], \\ -\sqrt{bc^2} \sin \phi \cos \phi & \phi \in [\pi/2, \pi] \end{cases} \quad (4.30)$$

Finalmente, si usamos los cálculos previos podemos escribir la función de Melnikov en términos de la variable ϕ_0 como

$$M(\phi_0) = \int_0^\pi \{\hat{H}, H_1\} \left(\hat{\Gamma}(\phi - \phi_0) \right) \frac{d\phi}{\sqrt{a} \sin \phi} = 2h_3 (4h_1 c^6 I_1 + \nu c 4I_2 - c^6 I_3), \quad (4.31)$$

donde

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin^5(\phi - \phi_0) \cos(\phi - \phi_0) d\phi - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^5(\phi - \phi_0) \cos(\phi - \phi_0) d\phi,$$

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} \sin^3(\phi - \phi_0) \cos(\phi - \phi_0) d\phi - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3(\phi - \phi_0) \cos(\phi - \phi_0) d\phi,$$

y

$$I_3 = \int_0^{\pi/2} \sin^3(\phi - \phi_0) \cos^3(\phi - \phi_0) d\phi - \int_{\pi/2}^{\pi} \sin^3(\phi - \phi_0) \cos^3(\phi - \phi_0) d\phi.$$

Observemos que las integrales I_1 , I_2 y I_3 se pueden calcular fácilmente. Después de algunos cálculos obtenemos

$$M(\phi_0) = C_1(\cos^6 \phi_0 - \sin^6 \phi_0) + C_2(\cos^4 \phi_0 - \sin^4 \phi_0), \quad (4.32)$$

con

$$C_1 = \frac{2}{3} h_3 c^6 (4h_1 + 1)$$

and

$$C_2 = h_3(\nu c^4 - c^6).$$

La derivada está dada por la expresión

$$M'(\phi_0) = -6C_1(\cos^5 \phi_0 \sin \phi_0 + \sin^5 \phi_0 \cos \phi_0) - 4C_2(\cos^3 \phi_0 \sin \phi_0 + \sin^3 \phi_0 \cos \phi_0), \quad (4.33)$$

observe que la función de Melnikov se anula en los puntos $\phi_0 = \pi/4$ y $\phi_0 = 3\pi/4$ que están en el intervalo $[0, \pi]$. Para estos valores obtenemos

$$M'(\pi/4) = -\frac{3}{2}C_1 - 2C_2$$

y

$$M'(3\pi/4) = \frac{3}{2}C_1 + 2C_2.$$

Recordando que $c = \sqrt{-\nu/2h_1}$, es fácil ver que

$$\frac{3}{2}C_1 + 2C_2 = \frac{\nu^3 h_3}{h_1^2} \left(\frac{1}{8h_1} - \frac{1}{4} \right),$$

pero $\nu < 0$, entonces $M'(\pi/4) \neq 0$ and $M'(3\pi/4) \neq 0$. Por lo tanto la función de Melnikov tiene dos ceros simples en $\phi_0 = \pi/4$ y $\phi_0 = 3\pi/4$. \square

Las consecuencias dinámicas debidas a una intersección transversal entre las variedades invariantes son importantes, en [22] podemos encontrar el siguiente resultado

Teorema 4.2.3. *Sea H un Hamiltoniano analítico y supongamos que $0 \in \mathbb{R}^4$ es un punto de equilibrio del sistema con espectro $\pm\lambda \pm i\omega$ donde λ y ω son reales positivos. Si $W^u(0)$ y $W^s(0)$ se intersectan transversalmente sobre el nivel $H_0 = \{z \in \mathbb{R}^4 : H(z) = 0\}$ a lo largo de una órbita homoclínica, entonces una herradura de Smale está contenida en la dinámica.*

Sin embargo se sabe que la hipótesis de analiticidad de H no es necesaria, con que el Hamiltoniano sea clase C^5 es suficiente, además, la condición de transversalidad en el sentido usual o algebraico se puede debilitar a solo pedir transversalidad topológica, ver [11]. La presencia de Herraduras de Smale en la dinámica es un hecho muy interesante, existen tratados extensos sobre el estudio de este fenómeno en [45], [1] y [37] son buenas referencias. En el PR3C existen órbitas doblemente asintóticas a los puntos de equilibrio L_4 y L_5 y dichas órbitas son límites de familias de órbitas periódicas con largos periodos; este fenómeno fué nombrado la terminación "Blue Sky Catastrophe". Vamos a enunciar formalmente lo que nos dice este fenómeno [35]

Teorema 4.2.4. *Consideremos una órbita homoclínica no degenerada a un punto de equilibrio con eigenvalores $\pm\alpha \pm i\omega$ con α y ω reales y estrictamente positivos, de un sistema Hamiltoniano analítico real de dos grados de libertad. Entonces cerca de esta órbita existe una familia analítica de órbitas periódicas con las siguientes propiedades*

1. *La familia puede ser puesta en términos de un parámetro ϵ en el intervalo $0 < \epsilon < \delta$ con δ suficientemente pequeño. es decir, la podemos escribir como $x(\epsilon, t) = x(\epsilon, t + T(\epsilon))$.*
2. *Para $\epsilon = 0$ tenemos una órbita homoclínica.*
3. *El periodo $T(\epsilon)$ crece sin cota cuando ϵ tiende a cero.*
4. *Los exponentes característicos de la familia cambian del tipo estable al inestable y viceversa en infinitas ocasiones conforme ϵ tiende a cero.*

El lector puede consultar la prueba original de este hecho mostrada en [35] y su versión más general en [11]. Ya hemos visto que el espectro de nuestro punto de equilibrio L_2 tiene las mismas propiedades relativas al espectro que los puntos L_4 y L_5 del PR3C y dado que cumple con las condiciones de transversalidad que exige la terminación "Blue Sky Catastrophe", debemos tener familias de órbitas periódicas que tienden a una órbita homoclínica a L_2 . Esto va ser verificado numéricamente en la siguiente sección y cuando estudiemos las órbitas periódicas del sistema.

4.3. Estudio numérico de las variedades estable e inestable de L_2

En esta sección llevamos a cabo un breve estudio numérico de las variedades estable e inestable W^s y W^u del punto de equilibrio L_2 con el objetivo de verificar

que estas variedades poseen intersecciones transversales como fue predicho en la sección anterior. Cabe señalar que no intentamos hacer un estudio numérico exhaustivo de estas variedades así que solo presentaremos algunas intersecciones transversales para algunos valores del parámetro μ que fuimos capaces de calcular numéricamente. Recordamos que en el capítulo 3 vimos que para el punto de equilibrio L_2 existe un valor del parámetro de masas μ_b tal que para cada $\mu \in (\mu_b, 1/2]$ los eigenvalores del sistema son $\lambda_{1,2,3,4} = \pm\alpha \pm i\omega$ donde α y ω son cantidades reales y estrictamente positivas. La teoría general de ecuaciones diferenciales establece que para este caso la solución de la parte lineal del sistema en el punto de equilibrio está dada por la expresión:

$$x(t) = \sum_{i=1}^4 A_i e^{\lambda_i t}, \quad (4.34)$$

$$y(t) = \sum_{i=1}^4 B_i e^{\lambda_i t},$$

donde los coeficientes no son independientes. En [63] se puede encontrar que tales coeficientes satisfacen la relación: $(\lambda_i^2 - \Omega_{xx})A_i = (2\lambda_i + \Omega_{xy})B_i$ sin embargo, en nuestro caso el punto de equilibrio está sobre el eje x , esto implica que $\Omega_{xy} = 0$ entonces

$$B_i = \left(\frac{\lambda_i^2 - \Omega_{xx}}{2\lambda_i} \right).$$

Hemos resaltado que no conocemos relaciones analíticas entre los eigenvalores y el parámetro de masas, por lo tanto, tampoco tenemos relaciones de este tipo para las constantes A_i y B_i . Para llevar a cabo una globalización numérica de las variedades invariantes locales W_{loc}^u y W_{loc}^s usando la aproximación lineal de los espacios estable e inestable, tomamos un conjunto de condiciones iniciales que es equivalente a las condiciones iniciales clásicas usadas en el PR3C [27]. Nuestro vector de condiciones iniciales está definido por :

$$v_0 = L_2 + \epsilon(\cos \theta \bar{v} + \sin \theta \bar{w}), \quad (4.35)$$

donde $L_2 = (x_{L_2}, 0, 0, 0)$, $\epsilon > 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y \bar{v} y \bar{w} están en el espacio inestable (estable) E^u (E^s) respectivamente. Cabe mencionar que este enfoque no es único, existen técnicas diversas para calcular variedades invariantes, se remite al lector a [37] para encontrar ejemplos y referencias de algunas de estas técnicas; en nuestro caso abordaremos la técnica conocida como *método de la gráfica* [24]. Para realizar esto introducimos coordenadas locales $(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (A^s s + A^u u)$ donde las columnas de A^u y A^s están conformadas por los vectores que conforman las eigenbases de E^s E^u respectivamente, en particular W_{loc}^s es tangente al espacio lineal E^s de L_2 así que puede ser escrita localmente como la gráfica de una función $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{n-d}$ que está dada por una expansión en serie de orden $m \in \mathbb{N}$ por medio de $W_{loc}^s = (s, g(s))$ con s variando en una vecindad del origen, aquí d denota la dimensión E^s . Señalamos que el orden que usamos en nuestros

cálculos para aproximar las variedades es $m = 4$.

En resumen, si queremos obtener una globalización de las variedades W_{loc}^u y W_{loc}^s tomamos un pequeño conjunto de condiciones iniciales, ya sea sobre los espacios E^s y E^u o sobre las variedades aproximadas W_{loc}^u y W_{loc}^s . Hemos utilizado un integrador multipaso Adams–Bashfort–Moulton en precisión doble. Como ya hemos mencionado, las ecuaciones de movimiento poseen la propiedad de que si $x = x(t)$, $y = y(t)$ es una solución, entonces $x = x(-t)$, $y = -y(-t)$ también es una solución, entonces las variedades estable e inestable de L_2 son simétricas respecto del eje x y por lo tanto será suficiente calcular la variedad W^u .

En el PR3C, los puntos de equilibrio L_4 y L_5 donde la terminación BSC ocurre, están fuera del eje x , pero en nuestro caso el punto L_2 está sobre este eje, así que debemos ser cuidadosos cuando realizamos la globalización numérica. A manera del PR3C usamos el plano (x, \dot{x}) para representar los cortes transversales de las variedades invariantes, esto es posible dado que usamos la sección de corte $y = 0$, y porque la velocidad \dot{y} se puede poner en función de x y \dot{x} de la relación (??). Vamos a considerar ambas componentes de la sección $y = 0$: $\dot{y} > 0$ y $\dot{y} < 0$, de manera más precisa, estas componentes están formalmente definidas por

$$\left\{ (x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^n \mid x \neq x_1, \quad 2\Omega(x, 0, \mu) - C - \dot{x}^2 > 0 \text{ y } \dot{y} = \pm \sqrt{(x, 0, \mu) - C - \dot{x}^2} \right\}.$$

Cuando llevamos a cabo la globalización numérica de W_{loc}^u observamos que cuando las órbitas abandonan la vecindad del punto L_2 , estas cruzan varias veces la sección $y = 0$, estos cruces los denominaremos *cortes*. Estos cortes con el eje x son consecuencia de que el punto L_2 también está sobre esta sección. En la figura (4.2) mostramos varias intersecciones transversales entre las variedades invariantes para varios valores del parámetro de masa μ , sin embargo, es conveniente mostrar como es el comportamiento global de la variedad W^u , tomamos el valor $\mu = 0,2$ para mostrar dicho comportamiento. En las figuras (4.4), (4.5), (4.7) y (4.6) mostramos el cuarto corte de W^u en el plano (x, \dot{x}) tanto para la aproximación lineal como para la aproximación a cuarto orden. Hemos decidido mostrar ambas aproximaciones con el fin de validar nuestros cálculos, note que el comportamiento de W^u es cualitativamente el mismo en ambas aproximaciones.

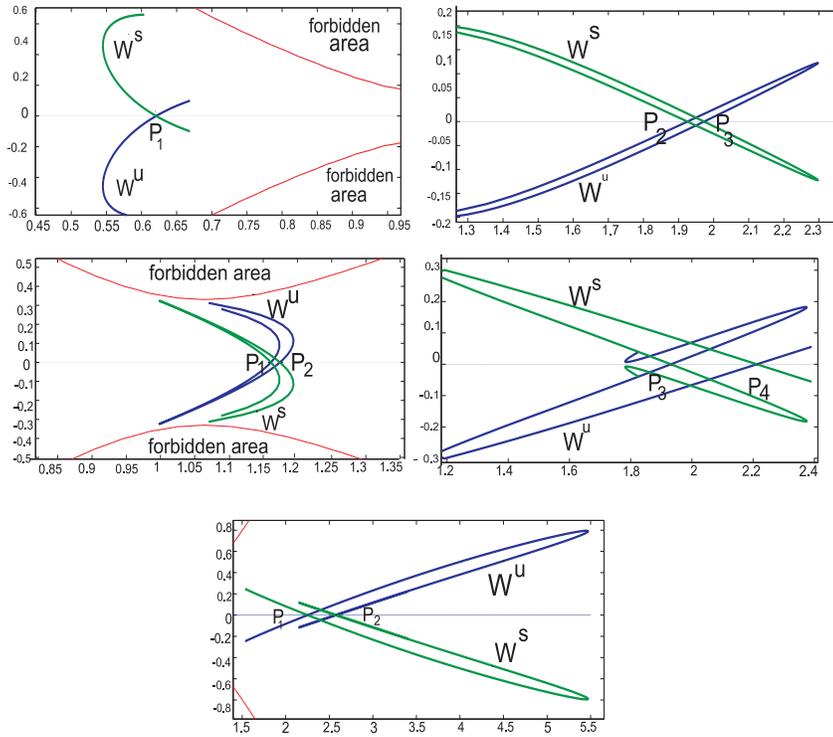


Figura 4.2: Primer renglón: Puntos de intersección transversal para $\mu = 0,019$ en el quinto corte. Segundo renglón: Puntos de intersección transversal para $\mu = 0,1$ en el cuarto corte. Tercer renglón: Puntos de intersección transversal para $\mu = 0,2$ en el cuarto corte.

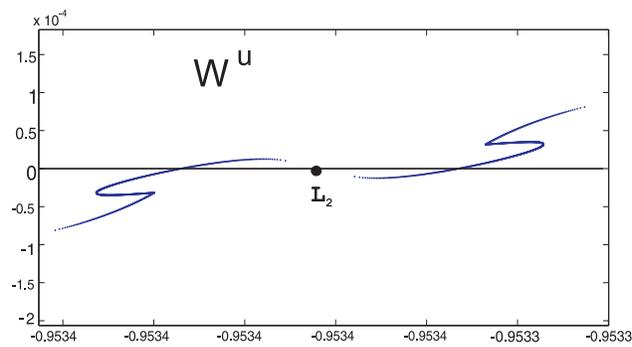


Figura 4.3: Primer corte de W^u para $\mu = 0,2$

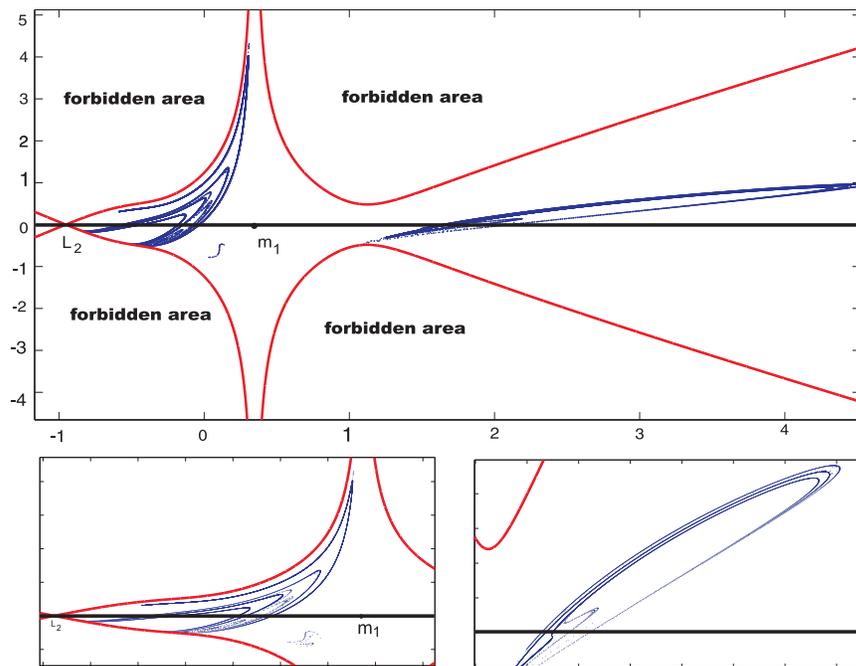


Figura 4.4: Cuarto corte de W^u con $\dot{y} < 0$ y magnificaciones sobre el eje x para $\mu = 0,2$ (aproximación lineal)

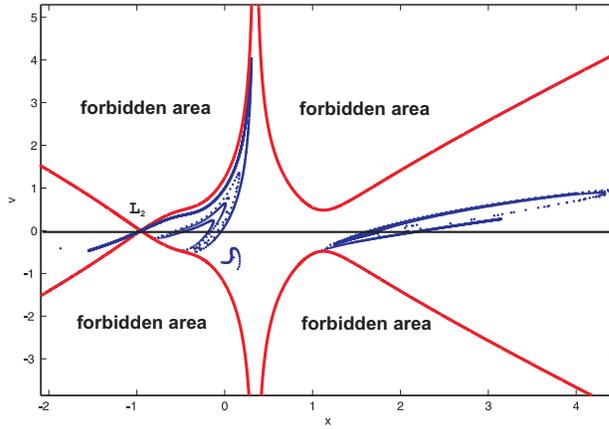


Figura 4.5: Cuarto corte de W^u con $\dot{y} < 0$ para $\mu = 0,2$ (aproximación a cuarto orden)

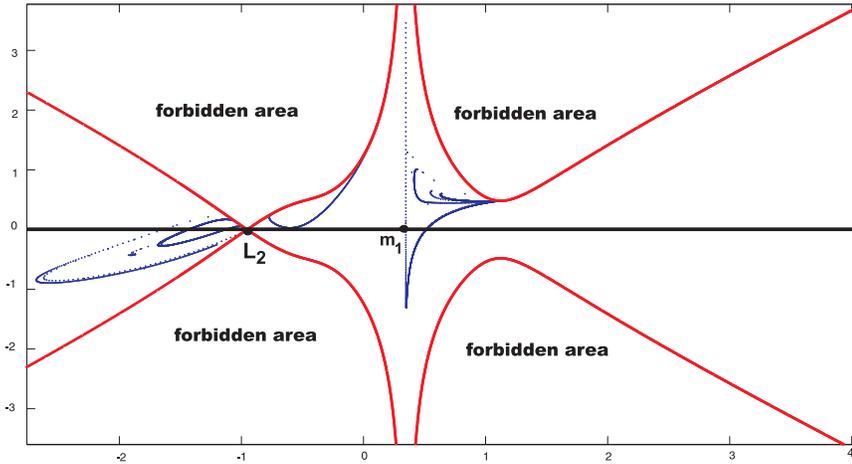


Figura 4.6: Cuarto corte de W^u con $\dot{y} > 0$ para $\mu = 0,2$ (aproximación lineal)

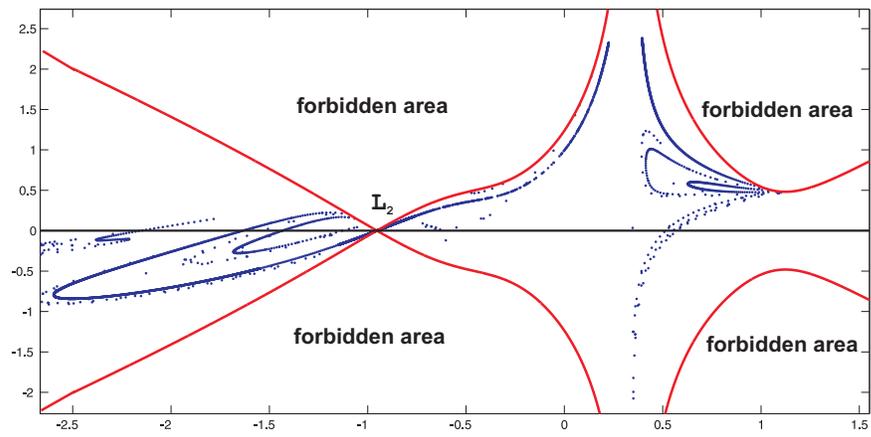


Figura 4.7: Cuarto corte de W^u con $\dot{y} > 0$ para $\mu = 0,2$ (aproximación a cuarto orden)

Capítulo 5

Regularización en el PR4C

Bajo la ley de la gravitación universal, la fuerza que ejercen uno o más cuerpos entre si es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, lo que significa que entre mas cerca se encuentren los cuerpos unos de otros, la fuerza gravitacional será mayor, en lenguaje matemático esto significa que conforme la distancia entre los cuerpos tiende a cero la fuerza gravitacional tiende a infinito, esto crea singularidades en las ecuaciones de movimiento debidas a colisión. La técnica conocida como *regularización* es una forma de “remover” estas singularidades debidas a las colisiones para así poder estudiar el sistema cerca de tales colisiones. En problemas de órbitas de cuerpos en el espacio es importante estudiar órbitas que conecten dos o mas cuerpos celestes, en el sentido físico las singularidades no se alcanzan por medio de colisiones en sentido de la mecánica celeste dado que esta última supone los cuerpos celestes como masas puntuales. Como ya dijimos estudiar la dinámica del sistema cerca de estas singularidades es de suma importancia desde un punto de vista computacional y conceptual. Para el lector que no esté familiarizado con esta técnica lo remitimos al libro [63] cap. 3 para consultar una aplicación al PR3C. En este capítulo extenderemos e introduciremos nuevas transformaciones para regularizar nuestro problema, usaremos en ocasiones la regularización de Levi-Civita [40] para los casos que tengamos colisión con alguna de las tres primarias, extenderemos la transformación de Birkhoff [8] a nuestro problema cuando tengamos colisión simultánea con dos primarias, sin embargo, también introducimos una nueva transformación que nos permitirá regularizar las órbitas que pasen por colisión con las tres primarias.

Vamos a explicar de manera breve el proceso de regularización teniendo en cuenta que nuestro problema es un sistema Hamiltoniano de dos grados de libertad. Empecemos por recordar el Hamiltoniano de nuestro problema en las coordenadas complejas

$$H = \frac{1}{2}|P|^2 + \text{Im}(z\bar{P}) - \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{|z - z_i|}. \quad (5.1)$$

Para dar comienzo al proceso de regularización, debemos efectuar una traslación $z = u + T(\mu)$ desde el centro de masa en el cual inicialmente escribimos las ecuaciones; aquí $T(\mu)$ es una función lineal del parámetro μ . La traslación se efectúa de tal forma que el Hamiltoniano pueda escribirse en coordenadas más adecuadas dependiendo del tipo de regularización que se quiera hacer; más adelante veremos como escoger a $T(\mu)$. En las nuevas coordenadas $u = x_1 + ix_2$ las posiciones de las tres primarias las denotaremos por: u_1, u_2, u_3 que dependen obviamente de la elección de $T(\mu)$. En estas coordenadas el Hamiltoniano se escribe como

$$H = \frac{1}{2}|U|^2 + \text{Im}((u + T(\mu))\bar{U}) - V(u, \bar{u}, \mu), \quad (5.2)$$

donde $U = P$ es el momento complejo conjugado de u . Denotaremos por $f^*(w)$ a la derivada con respecto a la variable compleja w donde $f(w)$ representa una función analítica de variable compleja. El punto principal del proceso de regularización es escoger a la transformación f de tal forma que elimine las singularidades que deseamos remover, más adelante haremos explícita a la transformación $f(w)$. El siguiente lema muestra cómo efectuar una transformación puntual dada por una función analítica $u = f(w)$ para que sea canónica [63]

Lema 5.0.1. *Sea $u = f(w)$ una función de la variable compleja w , entonces la transformación del momento conjugado $U = W/\overline{f^*(w)}$ nos da una transformación canónica siempre y cuando $f^*(w) \neq 0$.*

Demostración: El mapeo $(u, U) \rightarrow (w, W)$ es canónico si

$$\text{Re}(\bar{U}du) = \text{Re}(\bar{W}dw),$$

pero

$$\bar{U}du = \bar{U}f^*(u)du = \frac{\bar{W}}{f^*(u)}f^*(u)du = \bar{W}dw$$

de donde se sigue el resultado. □

Además de efectuar una transformación canónica, el proceso de regularización debe incluir una reparametrización del tiempo sobre un nivel fijo de energía $H = -C/2$. Sea $f(w)$ como antes, esta transformación debe satisfacer las hipótesis del lema anterior. Efectuemos el siguiente escalamiento del tiempo

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{|f^*(w)|^2}. \quad (5.3)$$

Ahora necesitamos transformar el Hamiltoniano (5.2) a las nuevas variables

$$H = \frac{1}{2} \frac{|W|^2}{|f^*(w)|^2} + \text{Im} \left((f(w) + T(\mu)) \frac{\bar{W}}{f^*(w)} \right) - V(f(w), \overline{f(w)}, \mu). \quad (5.4)$$

Debemos aplicar el llamado *truco* de Poincaré para reparametrizar las soluciones de acuerdo a (5.3) $\bar{H} = |f^*(w)|^2(H + C/2)$. Observe que el nivel de energía $H = -C/2$ se transforma en el nivel de energía $\bar{H} = 0$, explícitamente tenemos

$$\begin{aligned} \bar{H} = \frac{1}{2}|W|^2 + Im((f(w) + T(\mu))\overline{f^*(w)W}) - |f^*(w)|^2V(w, \bar{w}, \mu) \\ + |f^*(w)|^2(C/2), \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde

$$V(w, \bar{w}, \mu) = \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{|f(w) - w_i|},$$

y w_i denota las posiciones de las tres primarias en las coordenadas w . Observe que las singularidades de el Hamiltoniano (5.4) están contenidas en el término $|f^*(w)|^2V(w, \bar{w}, \mu)$ y son debidas a las diferencias $|f(w) - w_i|$. Aquí es importante tomar en cuenta el tipo de regularización que se pretenda hacer, es decir, cual de las colisiones entre m_4 y las tres primarias se quiere remover. Sin embargo, es importante tener en consideración las propiedades del problema. Cuando establecimos las ecuaciones de movimiento vimos que el PR4C posee dos simetrías importantes, para cada valor del parámetro μ tenemos la propiedad de que si $z(t)$ es una solución entonces $\bar{z}(-t)$ es también solución, es decir, tenemos simetría respecto del eje x . Para el caso de masas iguales $\mu = 1/3$ tenemos la simetría que si $z(t)$ es solución entonces $e^{\frac{2\pi i}{3}}z(t)$ también es solución, es decir, tenemos simetría con respecto a las líneas l_1, l_2, l_3 que unen el baricentro del triángulo con cada una de las primarias. Como ya se ha mencionado, el objetivo es estudiar las órbitas periódicas simétricas de este problema, entonces las propiedades anteriores nos llevan a los siguientes tipos de colisiones y por lo tanto a las regularizaciones que son necesarias para estudiar las órbitas periódicas del sistema

1. Para órbitas periódicas que colisionan con la masa m_1 , es suficiente remover solo esta colisión.
2. Para órbitas periódicas que tienen dos cruces perpendiculares con el eje x y que colisionan con la masa m_2 , la simetría respecto del eje x obliga necesariamente a la órbita a colisionar con la masa m_3 , entonces es necesario remover ambas colisiones simultáneamente.
3. Para órbitas periódicas que tienen dos cruces perpendiculares con dos de las líneas l_1, l_2, l_3 y que colisionan con alguna de las primarias, en el caso de masas iguales, la simetría respecto a estas líneas nos dice que este tipo de órbitas colisionan con las tres primarias necesariamente, por lo tanto debemos regularizar las tres colisiones simultáneamente.

Antes de establecer transformaciones que nos permitan regularizar los tres casos anteriores, analicemos con más detalle el término $|f^*(w)|^2V(w, \bar{w}, \mu)$. Para cada caso, se desea que la transformación $f(w)$ deje fija a la primaria o primarias que se vayan a regularizar, es decir, pediremos que $u_i = f(u_i)$ para algún $i \in 1, 2, 3$,

esto nos permitirá mantener las propiedades físicas del problema. La exigencia principal para la transformación $f(w)$ es que los cocientes $\frac{|f^*(w)|^2}{|f(w)-w_i|}$ sean, en medida de lo posible, libres de denominadores dependiendo de que tipo de colisión se quiera remover. Para cada tipo de singularidad en el PR4C, tenemos una transformación $f(w)$ que remueve a la respectiva colisión. Listaremos dichas transformaciones en el orden que se presentaron los diferentes tipos de colisión

$$u = w^2 \text{ con } T(\mu) = \sqrt{3}\mu, \quad (5.6)$$

$$u = \frac{1}{2} \left(w - \frac{1}{4w} \right) \text{ con } T(\mu) = \sqrt{3}\mu - \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad (5.7)$$

$$u = \frac{2}{3} \left(w - \frac{1}{6\sqrt{3}w^2} \right) \text{ con } T(\mu) = \sqrt{3}\mu - \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (5.8)$$

La primera transformación es conocida como la transformación de Levi-Civita y se aplicó por primera vez para regularizar el problema de Kepler y después se utilizó para regularizar el PR3C en el caso de colisión con alguna de las primarias, como ya mencionamos solo nos enfocaremos a hacer la aplicación de esta regularización a nuestro problema. Cuando aplicamos la traslación $T(\mu) = \sqrt{3}\mu$ al sistema original, obtenemos como resultado que las nuevas posiciones de las tres primarias son $u_1 = 0$, $u_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ y $u_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, así que la primaria m_1 se ha llevado al origen de coordenadas. Si sustituimos $u = f(w) = w^2$ que implica $f^*(w) = 2w$ entonces el término $|f^*(w)|^2 V(w, \bar{w}, \mu)$ se convierte en

$$4(1 - 2\mu) + 4\mu|w|^2 \left(\frac{1}{|w^2 - u_2|} + \frac{1}{|w^2 - u_3|} \right), \quad (5.9)$$

observe que el cociente que corresponde a m_1 es $\frac{|f^*(w)|^2}{|w^2 - u_1|} = 4(1 - 2\mu)$ y por lo tanto se ha removido esta singularidad. Sin embargo observe que hemos también introducido nuevas singularidades en el término (5.9), que a saber son $\pm\sqrt{u_2}$ y $\pm\sqrt{u_3}$. El lector puede decir que hemos complicado el problema dado que si en el Hamiltoniano original teníamos 3 singularidades, en el nuevo Hamiltoniano tenemos 4, pero note que estas nuevas singularidades se corresponden con las colisiones debidas a m_2 y m_3 pues $f(\pm\sqrt{u_{2,3}}) = u_{2,3}$ respectivamente, es decir, si $w(\tau)$ es una solución tal que pasa por una de las 4 singularidades en el plano w , entonces la correspondiente órbita en el plano físico $u(t) = f(w(\tau))$ pasa por colisión con alguna de las primarias m_2 o m_3 , pero no por m_1 ya que esta primaria permanece fija en el origen de coordenadas de ambos planos y $w = 0$ no es una singularidad en el plano w ; de este modo podemos estudiar las órbitas en una vecindad del origen en el plano w y obtener bajo el mapeo $f(w)$ información de las correspondientes órbitas que pasan por el origen en el plano físico que corresponden a colisiones con m_1 . Esta es la filosofía de la regularización y será más evidente cuando la apliquemos para estudiar órbitas periódicas de colisión en el PR4C. Las restantes dos transformaciones fueron creadas específicamente para remover de manera sencilla las regularizaciones simultáneas del PR4C, exploraremos sus propiedades a detalle en las siguientes secciones.

5.1. Regularización de colisiones con m_2 y m_3

En el caso de la segunda transformación cuando aplicamos la traslación $T(\mu) = \sqrt{3}\mu - \sqrt{3}/2$, las posiciones de las tres primarias en las coordenadas u son $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $u_2 = -\frac{i}{2}$, $u_3 = \frac{i}{2}$, observe que las primarias m_2 y m_3 son llevadas sobre el eje imaginario bajo esta traslación. No es difícil verificar que la transformación (5.7) posee las siguientes propiedades

$$u_i = f(u_i), \quad i = 2, 3. \quad (5.10)$$

$$f^*(w) = \frac{1}{2} \frac{(w - u_2)(w - u_3)}{w^2}. \quad (5.11)$$

En particular

$$|f^*(w)|^2 = \frac{1}{4} \frac{(|w - u_2|^2)(|w - u_3|^2)}{|w|^4}, \quad (5.12)$$

para $i = 1, 2$. Además

$$f^*(u_i) = 0, \quad i = 2, 3. \quad (5.13)$$

Observe que las posiciones de las primarias m_2 y m_3 permanecen fijas bajo la transformación. Más aún, las siguientes propiedades son la clave para remover las singularidades debidas a m_2 y m_3 .

$$f(w) - u_i = \frac{1}{2} \left(\frac{(w - u_i)^2}{w} \right),$$

y

$$f(w) - u_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{(w - a_1)(w - a_2)}{w} \right),$$

donde $a_1 = 1 + \sqrt{3}/2$, $a_2 = -1 + \sqrt{3}/2$. Ahora debemos verificar que el término $|f^*(w)|^2 V(w, \bar{w}, \mu)$ está libre de las singularidades debidas a las colisiones con m_2 y m_3 , un cálculo directo nos muestra que

$$|f^*(w)|^2 V(w, \bar{w}, \mu) = \frac{1}{2|w|^3} \left(\frac{(1 - 2\mu)|w - u_2|^2|w - u_3|^2}{|w - a_1||w - a_2|} + \mu(|w - u_2|^2 + |w - u_3|^2) \right).$$

Las singularidades debidas m_2 y m_3 han sido removidas dado que en los respectivos cocientes se han eliminado los denominadores. Sin embargo, en el proceso hemos introducido nuevas singularidades $w = a_1$, $w = a_2$ y $w = 0$; exploremos la geometría de la transformación para entender que significan estas nuevas singularidades.

El origen del nuevo sistema $w = 0$ es mapeado bajo (5.7) al infinito en el plano físico u , entonces esta singularidad corresponde a escapes y no es de interés para nosotros. Veamos que sucede con las singularidades $w = a_1$ y $w = a_2$. En primer lugar queremos describir el número de preimágenes de un punto u bajo la transformación $f(w)$; para esto necesitamos resolver para la variable w la ecuación dada por la igualdad $u = f(w)$, o equivalentemente, necesitamos encontrar

las raíces del polinomio cuadrático $p(w) = w^2 - 2uw - 1/4$. Note que dado un valor de u , tenemos dos raíces o preimágenes contando las multiplicidades de las raíces. Para analizar estas multiplicidades recordemos el siguiente lema

Lema 5.1.1. *Sea w_0 una raíz de un polinomio $p(w)$, si $p'(w_0) = p(w_0) = 0$ pero $p''(w_0) \neq 0$ entonces w_0 es una raíz de multiplicidad 2. si $p''(w_0) = p'(w_0) = p(w_0) = 0$ pero $p'''(w_0) \neq 0$ entonces w_0 es una raíz de multiplicidad 3 etc.*

Es fácil ver que $p'(w) = 2w - 2u$ y $p''(w) = 2$ entonces $p'(w) = 0 \Leftrightarrow w = u$. Si evaluamos esta raíz en el polinomio $p(w)$ vemos que $p(u) = -u^2 - 1/4$ y $p(u) = 0 \Leftrightarrow w = u_i$ $i = 2, 3$. por lo tanto $p(u_i) = p'(u_i) = 0$ pero $p''(u_i) \neq 0$. En resumen hemos probado la siguiente

Proposición 5.1.2. *Sea $u \in \mathbb{C}$ un número complejo, si $u = u_i$, $i = 2, 3$. entonces el número de preimágenes es igual a uno, si $u \neq u_i$, $i = 2, 3$. entonces el número de preimágenes es igual a dos.*

□

Esto muestra que el número de preimágenes de las posiciones de las primarias m_2 y m_3 es exactamente uno. De hecho para $u = u_i$, $i = 2, 3$, tenemos

$$p(w) = (w - u_i)^2,$$

así que las imágenes de u_i , $i = 2, 3$ son ellas mismas. Las preimágenes de la primaria u_1 son a_1 y a_2 , entonces las nuevas singularidades se corresponden con la singularidad u_1 en el plano u sin embargo, recuerde que con esta transformación no estamos interesados en remover esta singularidad. De este modo hemos hecho una regularización global de las singularidades debidas a colisiones con las primarias m_2 and m_3 . En resumen, el espacio fase donde las ecuaciones de movimiento son regulares es

$$\bar{\Delta} = \{(w, W) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} | w \notin \{0, a_1, a_2\}, i = 1, 2, 3\}.$$

Podemos hacer más clara la discusión anterior si comparamos las regiones de Hill en ambos planos. Ya sabemos como son estas regiones en el plano físico, pero la pregunta es cómo obtener estas regiones en el plano regularizado w . Ya sabemos que los conjuntos donde la desigualdad $\Omega(z, \bar{z}, \mu) \geq C/2$ se cumple, son llamados las regiones de Hill, en las variables regularizadas la desigualdad anterior la podemos escribir como: [63]

$$|f^*(w)|^2(\Omega(w, \bar{w}, \mu) - C/2) \geq 0,$$

esta desigualdad define las regiones de Hill en variables regularizadas siempre y cuando $w \neq 0$, $w \neq a_1$ y $w \neq a_2$. En forma explícita estas regiones son definidas por la expresión

$$\frac{1}{2}|f^*(w)|^2|f(w) + \sqrt{3}\mu - \frac{\sqrt{3}}{2}|^2 + |f^*(w)|^2V(w, \bar{w}, \mu) - |f^*(w)|^2\frac{C}{2} \geq 0. \quad (5.14)$$

La siguiente figura muestra las regiones de Hill en el plano físico u y en el plano regularizado w para varios valores de la constante de Jacobi C y para el caso de masas iguales, es decir, $\mu = 1/3$. En el valor de referencia $C_1 = 3,35804$ existen tres puntos críticos de el potencial Ω en el plano u y observamos que las regiones en ambos planos son muy similares pero en el origen del plano w aparecen nuevas regiones alrededor de las singularidades a_1 y 0 , vea la figura (5.1). Si incrementamos el valor de C_1 , las regiones de Hill se vuelven disconexas en ambos planos y las nuevas regiones alrededor de las singularidades en el plano w incrementan su tamaño, en este punto son claras las correspondencias entre los planos u y w dadas por la transformación (5.7). Si disminuimos el valor de C_1 encontramos que la región de Hill completa es una sola región conexa, vea la figura (5.1). Las posiciones de las tres primarias están marcadas por pequeños círculos y las singularidades $w = 0$, $w = a_1$ and $w = a_2$ están marcadas por puntos negros.

5.2. Regularización simultánea de colisiones con las tres primarias

En esta parte trataremos con la regularización simultánea de las tres primarias, el lector puede preguntarse en este momento que los dos procesos de regularización anteriores son casos particulares de este dado que si podemos remover simultáneamente las tres singularidades debidas a colisiones con las tres primarias entonces automáticamente se han cubierto los dos procesos de regularización anteriores; en cierto sentido esta observación es correcta pero hay dos motivos por lo que es conveniente separar los tres tipos de regularización, uno es por motivos computacionales y el otro es por motivos teóricos. Exploremos con mas cuidado la transformación (5.8) para hacer más evidentes las dificultades que presenta. Como en los casos anteriores para comenzar el proceso de regularización debemos definir a $T(\mu)$, en este caso las coordenadas apropiadas serán situar el origen del sistema en el baricentro del triángulo de masas, es decir, debemos definir la traslación como $T(\mu) = \sqrt{3}\mu - 1/\sqrt{3}$. Las posiciones de las tres primarias en estas coordenadas son $u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $u_2 = -\frac{1}{2\sqrt{3}} - \frac{i}{2}$, $u_3 = -\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{i}{2}$ y $u_i^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$ para $i = 1, 2, 3$. El Hamiltoniano (5.5) se convierte entonces en

$$\bar{H} = \frac{1}{2}|W|^2 + Im((f(w) + \sqrt{3}\mu - 1/\sqrt{3})\overline{f^*(w)W}) - |f^*(w)|^2 V(w, \bar{w}, \mu) + |f^*(w)|^2 (C/2). \quad (5.15)$$

No es difícil ver que la transformación (5.8) tiene las siguientes propiedades

$$u_i = f(u_i), i = 1, 2, 3. \quad (5.16)$$

$$f^*(w) = \frac{2}{3} \frac{(w - u_1)(w - u_2)(w - u_3)}{w^3}. \quad (5.17)$$

En particular

$$|f^*(w)|^2 = \frac{4}{9} \frac{(|w - u_1|)(|w - u_2|)(|w - u_3|)}{|w|^6}, \quad (5.18)$$

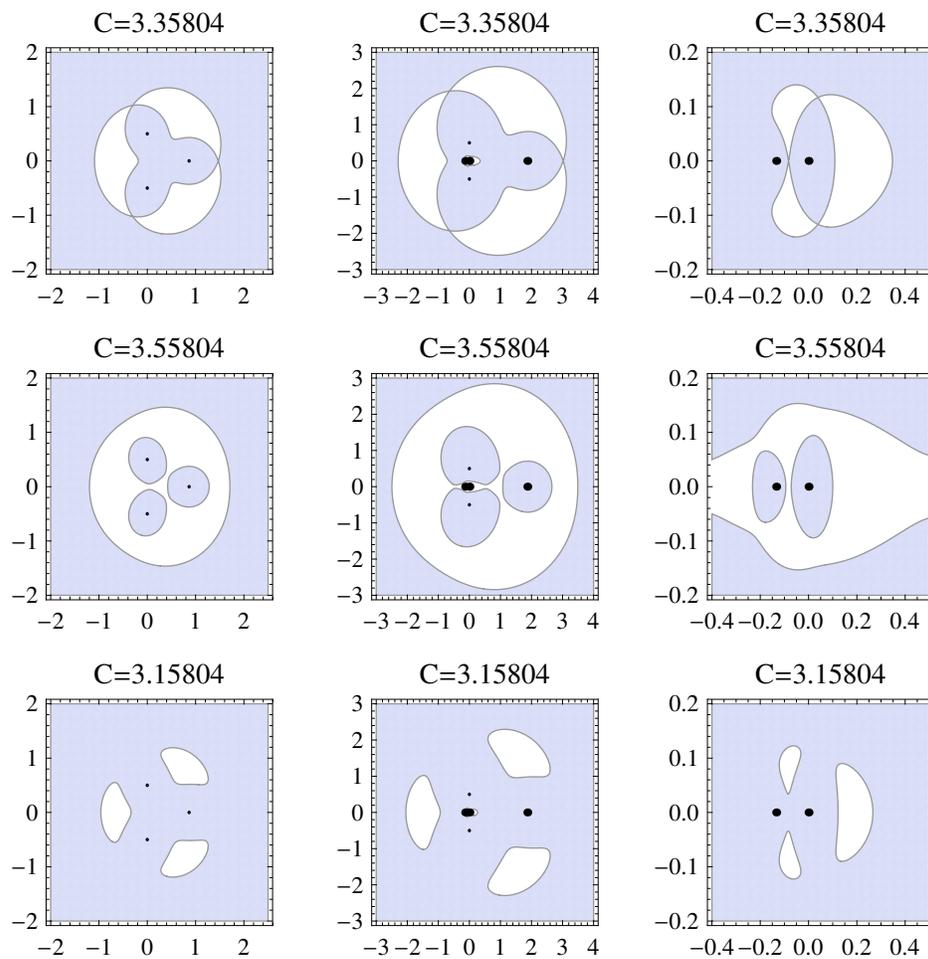


Figura 5.1: Las regiones de Hill (áreas sombreadas) en el plano u (columna izquierda), y en el plano w (columna central), acercamientos en el origen del plano w (columna derecha). De arriba hacia abajo: $C = C_1$, $C = C_1 + 0,2$, $C = C_1 - 0,2$

y

$$f^*(u_i) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.19)$$

Observe nuevamente que las posiciones de las tres primarias permanecen fijas bajo esta transformación como es requerido originalmente. De hecho, la siguiente propiedad nos ayudará a remover las singularidades u_i , $i = 1, 2, 3$.

$$f(w) - u_i = \frac{2}{3} \left(\frac{(w - u_i)^2(w + (1/2)u_i)}{w^2} \right).$$

Para verificar que con esta transformación hemos removido las tres singularidades simultáneamente tenemos que examinar el término $|f^*(w)|^2 V(w, \bar{w}, \mu)$, si usamos(5.18) y un poco de álgebra obtenemos que

$$|f^*(w)|^2 V(w, \bar{w}, \mu) = \frac{2}{3|w|^4} \left(\frac{(1 - 2\mu)|w - u_2|^2|w - u_3|^2}{|w + (1/2)u_1|} + \frac{\mu|w - u_1|^2|w - u_3|^2}{|w + (1/2)u_2|} + \frac{\mu|w - u_1|^2|w - u_2|^2}{|w + (1/2)u_3|} \right),$$

observe que en efecto las singularidades debidas a la tres primarias u_i , $i = 1, 2, 3$ han sido removidas de este término, sin embargo, hemos introducido como en los casos anteriores nuevas singularidades, que a saber son $w_i = -\frac{1}{2}u_i$, $i = 1, 2, 3$ y $w = 0$ y por lo tanto debemos analizarlas. El origen del nuevo sistema $w = 0$ es enviado bajo la transformación (5.8) al infinito del espacio físico u , y por lo tanto no es de nuestro interés. Examinemos las singularidades restantes $w_i = -\frac{1}{2}u_i$. Haremos el mismo análisis que efectuamos para la transformación (5.7), es decir, primero vamos a describir el número de preimágenes de un punto u bajo la transformación $f(w)$, esto es equivalente a resolver la ecuación polinomial de grado 3, $p(w) = 2w^3 - 3uw^2 + \frac{1}{3\sqrt{3}}$. Observe que dado u , debemos tener 3 raíces de esta ecuación que nos dan las preimágenes de un punto si contamos las multiplicidades. No es difícil ver que $p'(w) = 6w^2 - 6uw$, $p''(w) = 12w - 6u$ y $p'''(w) = 12$ entonces $p'(w) = 0 \Leftrightarrow w = 0$ o $w = u$, $p''(w) = 0 \Leftrightarrow w = u/2$. Ahora bien, si evaluamos estas raíces en el polinomio $p(w)$ veremos que $p(0) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, $p(u) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - u^3$ y $p(u/2) = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{u^3}{2}$, si recordamos que $u_i^3 = \frac{1}{3\sqrt{3}}$, tenemos que $u = u_i$ que implica $p(u_i) = p'(u_i) = 0$ pero $p''(u_i) \neq 0$. En conclusión, hemos probado la siguiente

Proposición 5.2.1. *Sea $u \in \mathbb{C}$ un número complejo, si $u = u_i$, $i = 1, 2, 3$. entonces el número de preimágenes es dos, si $u \neq u_i$, $i = 1, 2, 3$. entonces el número de preimágenes es tres.*

Esta proposición nos dice que el número de preimágenes de las tres primarias es exactamente dos, de hecho para $u = u_i$ tenemos

$$p(w) = 2(w - u_i)^2(w + \frac{u_i}{2}),$$

y así las preimágenes de cada u_i son $\{u_i, -\frac{1}{2}u_i\}$. El espacio fase donde nuestro Hamiltoniano es regular está definido por

$$\bar{\Delta} = \{(w, W) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} | w \notin \{0, -\frac{1}{2}u_i\}, i = 1, 2, 3\}.$$

Aquí es donde aparece el inconveniente teórico que mencionamos al principio, las nuevas singularidades en el plano w , $\{-\frac{1}{2}u_i\}$ se corresponden bajo $f(w)$ con las singularidades de espacio físico, entonces a diferencia de los casos anteriores, existen órbitas de colisión con las primarias que se corresponden con órbitas que pasan por las nuevas singularidades en el plano w y de esta forma dichas órbitas no se pueden regularizar bajo esta transformación y por lo tanto no se puede obtener información acerca de ellas, lo que hemos hecho es hacer una regularización *local* y no global como fueron los dos casos anteriores; aparte de este inconveniente observe que la transformación es más complicada que las dos anteriores y entonces desde un punto de vista computacional las ecuaciones derivadas de nuestro Hamiltoniano regularizado son más complicadas y exigen mayor trabajo de cómputo. Sin embargo, en implementaciones prácticas se ha observado que esta transformación es útil en el caso de calcular órbitas de triple colisión cuando tenemos el caso de tres masas iguales $\mu = 1/3$. Esto será más evidente cuando exploremos las órbitas periódicas de nuestro problema más adelante. La desigualdad que nos permite encontrar las regiones de Hill

$$|f^*(w)|^2(\Omega(w, \bar{w}, \mu) - C/2) \geq 0,$$

cuando $w \neq 0$, $w \neq -\frac{1}{2}w_i$, explícitamente está dada por la expresión

$$\frac{1}{2}|f^*(w)|^2|f(w) + \sqrt{3}\mu - \frac{1}{\sqrt{3}}|^2 + |f^*(w)|^2V(w, \bar{w}, \mu) - |f^*(w)|^2\frac{C}{2} \geq 0, \quad (5.20)$$

la figura siguiente muestra las regiones de Hill en el plano u y en el plano w para algunos valores de la constante de Jacobi C y para el caso de masas iguales, es decir, $\mu = 1/3$, las posiciones de las tres primarias están representadas por círculos y las posiciones de las tres nuevas singularidades en el plano w están marcadas por puntos negros.

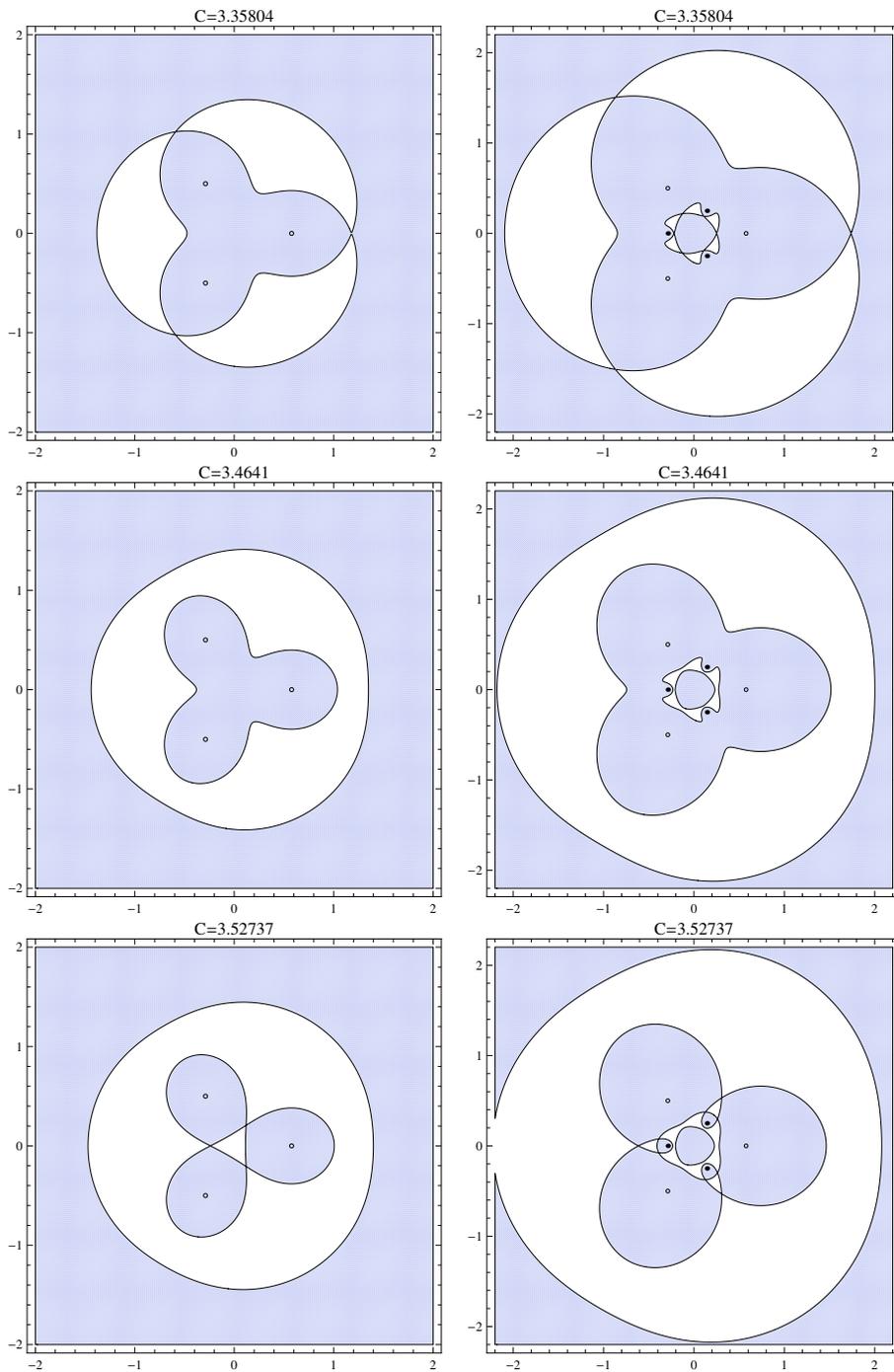


Figura 5.2: Regiones de Hill en el plano físico (columna izquierda) y en el plano regularizado w (columna derecha) para valores críticos de la constante de Jacobi.

Capítulo 6

Órbitas Periódicas en el PR4C

En el primer volumen de *Méthodes Nouvelles* Poincaré considera el tema de órbitas periódicas como la única brecha abierta a través de la cual el célebre inaccesible problema de tres cuerpos se puede estudiar. Más aún, la versión de Schwarzschild de la conjetura de Poincaré para el PR3C resulta interesante si es puesta en el lenguaje del espacio fase, esta nos dice: "En una vecindad cerrada arbitraria de cualquier punto en el espacio fase existe un punto que representa una órbita periódica". En otras palabras, pequeñas modificaciones de cualquier conjunto de condiciones iniciales resultarán en una órbita periódica en general con periodo muy largo. En fin, ya sea en la forma original o en su versión modificada la conjetura de Poincaré sugiere el uso de órbitas periódicas como órbitas de referencia. Para sistemas dinámicos no integrables parece imposible obtener información completa respecto de cualquier órbita a menos que ésta sea asintótica, periódica, o cuasi-periódica pues el comportamiento a largo plazo en general se considera conocido si el movimiento es periódico, cuasi-periódico o asintótico. Más aún la significancia de fenómenos periódicos en general en mecánica celeste y en las ciencias físicas se pueden adjuntar a los argumentos ya mencionados para entender el porqué es importante el estudio de órbitas periódicas en un sistema. De las técnicas conocidas para encontrar órbitas periódicas de un sistema destacan tres de ellas que son: (i) Las técnicas de series de potencias, (ii) El método de continuación analítica y (iii) El empleo de técnicas de cálculo variacional. Cuando estudiamos la teoría de formas normales vimos una aplicación de la técnica (i), antes de discutir la técnica (ii), vamos a establecer algunos preliminares que nos serán necesarios. Hemos decidido presentar estos preliminares en el presente capítulo dado que el estudio de órbitas periódicas es el tema principal del presente trabajo, el lector que esté familiarizado con estos resultados puede omitirlos y pasar a la siguiente sección.

6.1. Teoría preliminar sobre órbitas periódicas

En esta sección desarrollaremos los conceptos básicos que necesitamos para comenzar el estudio de órbitas periódicas de un sistema. Cabe mencionar que algunos resultados se asumirán sin demostración dado que se pueden encontrar en libros clásicos de ecuaciones diferenciales. Enunciaremos estos resultados en su forma más general; sin embargo, como el problema principal de este trabajo es un sistema Hamiltoniano, nos detendremos un poco para destacar las particularidades que presentan estos sistemas. Empecemos por definir formalmente lo que se entiende por órbita periódica de un sistema

Definición 6.1.1. *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea $f \in C^1(E)$ un campo vectorial. Una solución del sistema $\dot{x} = f(x)$ es periódica, denotada por $\phi(t, x)$, de periodo T si satisface $\phi(t + T, x) = \phi(t, x)$ para cada $t \in \mathbb{R}$ y T una constante distinta de cero. Si T_0 es el menor número positivo que satisface la relación anterior entonces T_0 es llamado el periodo mínimo de la solución*

Probablemente la herramienta más básica para estudiar la estabilidad y las bifurcaciones de órbitas periódicas es el mapeo de Poincaré o mapeo del primer retorno, definido por Henri Poincaré en 1881. La idea del mapeo de Poincaré es muy simple y vamos a describirla brevemente. Si Γ es una órbita periódica del sistema $\dot{x} = f(x)$ que pasa por el punto x_0 y Σ es un hiperplano perpendicular a Γ en x_0 , entonces para cualquier punto $x \in \Sigma$ suficientemente cerca de x_0 , la solución de $\dot{x} = f(x)$ que tiene por condición inicial a x , que denotaremos por $\phi(t, x)$, cruzará a Σ nuevamente en un punto $P(x)$ cerca de x_0 . El mapeo $x \rightarrow P(x)$ se llama el mapeo de Poincaré.

El mapeo de Poincaré también se puede definir cuando Σ es una superficie suave a través de un punto $x_0 \in \Gamma$ la cual no es tangente a Γ en x_0 . En este caso, se dice que la superficie Σ intersecta a la curva Γ transversalmente en x_0 . El siguiente teorema establece la existencia y continuidad del mapeo de Poincaré $P(x)$ y de su primera derivada $DP(x)$.

Teorema 6.1.2. *Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y sea $f \in C^1(E)$. Suponga que $\phi(t, x_0)$ es una solución periódica del sistema $\dot{x} = f(x)$ de período T y además la curva Γ definida por $\phi(t, x_0)$ está contenida en E para $0 \leq t \leq T$. Sea Σ el hiperplano ortogonal a Γ en x_0 es decir,*

$$\Sigma := \{x \in \mathbb{R}^n \mid (x - x_0) \cdot f(x_0) = 0\}.$$

Entonces existe $\delta > 0$ y una única función $\tau(x)$, definida y continuamente diferenciable para $x \in B_\delta(x_0)$, tal que $\tau(x_0) = T$ y

$$\phi(\tau(x), x) \in \Sigma,$$

para todo $x \in B_\delta(x_0)$.

Demostración Usaremos el resultado preliminar que nos dice que si E es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n y si $f \in C^1(E)$ entonces $\Omega := \{(t, x_0) \in \mathbb{R} \times E \mid t \in I\}$

es un subconjunto abierto de $\mathbb{R} \times E$ y $\phi(t, x) \in C^1(\Omega)$. Entonces para un punto dado $x_0 \in \Gamma \subset E$, definamos la función

$$F(t, x) = [\phi(t, x) - x_0] \cdot f(x_0).$$

Entonces se sigue del resultado anterior que $F \in C^1(\Omega)$ y se sigue de la periodicidad de $\phi(t, x_0)$ que $F(T, x_0) = 0$ y más aún dado que $\phi(t, x_0)$ es una solución $\dot{x} = f(x)$ que satisface $\phi(T, x_0) = x_0$, se sigue que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(T, x_0)}{\partial t} &= \frac{\partial \phi(T, x_0)}{\partial t} \cdot f(x_0) \\ &= f(x_0) \cdot f(x_0) = |f(x_0)|^2 \neq 0, \end{aligned}$$

puesto que x_0 no es punto de equilibrio. Se sigue del teorema de la función implícita que existe un $\delta > 0$ y una única función $\tau(x)$ definida y continuamente diferenciable para cada $x \in B_\delta(x_0)$ tal que $\tau(x_0) = T$ y tal que

$$F(\tau(x), x) = 0,$$

para cada $x \in B_\delta(x_0)$ o sea $[\phi(\tau(x), x) - x_0] \cdot f(x_0) = 0$ o sea

$$\phi(\tau(x), x) \in \Sigma.$$

□

Definición 6.1.3. Sean Γ , Σ , δ y $\tau(x)$ definidas como en el teorema anterior. Entonces para $x \in B_\delta(x_0) \cap \Sigma$, la función

$$P(x) = \phi(\tau(x), x),$$

se llama el mapeo de Poincaré para Γ en x_0 .

Se sigue del teorema anterior que $P \in C^1(U)$ donde $U = B_\delta(x_0) \cap \Sigma$. Los puntos fijos del mapeo de Poincaré corresponden a órbitas periódicas del sistema $\dot{x} = f(x)$, si asumimos sin pérdida de generalidad que $x_0 = 0$ tendremos que $\Sigma \simeq \mathbb{R}^{n-1}$, $P : \mathbb{R}^{n-1} \cap B_\delta(0) \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ y $DP(0)$ se representa por una matriz $(n-1) \times (n-1)$. Al considerar el sistema $\dot{x} = f(x)$ con $t \rightarrow -t$, se puede ver que el mapeo de Poincaré tiene inversa C^1 . Se tiene por lo tanto que P es un difeomorfismo. Consideremos nuevamente el sistema $\dot{x} = f(x)$ como antes y una órbita periódica de periodo T

$$\Gamma : x = \gamma(t), 0 \leq t \leq T.$$

Mostraremos que la matriz $DP(x_0)$ está determinada por una matriz fundamental de la linealización de $\dot{x} = f(x)$ a lo largo de la órbita periódica. La linealización a lo largo de Γ la definiremos como el sistema lineal no autónomo

$$\dot{x} = A(t)x,$$

donde

$$A(t) = Df(\gamma(t)).$$

La matriz $n \times n$ $A(t)$ es una función continua de periodo T para cada $t \in \mathbb{R}$. Una matriz fundamental para $\dot{x} = A(t)x$ es una matriz $n \times n$ no singular $\Phi(t)$ que satisface la ecuación diferencial matricial

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi.$$

Ya se mencionó que $A(t)$ es una matriz periódica, entonces es aplicable la teoría de Floquet sobre matrices con coeficiente periódicos, asumiremos los siguientes resultados

Teorema 6.1.4. *Si $A(t)$ es una matriz continua y de periodo T , entonces para cada $t \in \mathbb{R}$ cualquier matriz fundamental solución de $\dot{x} = A(t)x$ se puede escribir en la forma*

$$\Phi(t) = Q(t)e^{Bt},$$

donde $Q(t)$ es una matriz no singular, diferenciable de periodo T y B una matriz constante. Más aún, si $\Phi(0) = I$ entonces $Q(0) = I$.

Corolario 6.1.5. *Bajo las hipótesis del teorema anterior el sistema $\dot{x} = A(t)x$, bajo el cambio de coordenadas lineal*

$$y = Q^{-1}(t)x,$$

se reduce al sistema lineal autónomo

$$\dot{y} = By. \tag{6.1}$$

Demostración Por el teorema anterior, $Q(t) = \Phi(t)e^{-Bt}$ entonces

$$\begin{aligned} Q'(t) &= \Phi'(t)e^{-Bt} - \Phi(t)e^{-Bt}B \\ &= A(t)\Phi(t)e^{-Bt} - \Phi(t)e^{-Bt}B \\ &= A(t)Q(t) - Q(t)B, \end{aligned}$$

dado que e^{-Bt} y B conmutan. Si

$$y(t) = Q^{-1}(t)x(t),$$

o equivalentemente

$$x(t) = Q(t)y(t),$$

entonces

$$\begin{aligned} x'(t) &= Q'(t)y(t) + Q(t)y'(t) \\ &= A(t)Q(t)y(t) - Q(t)By(t) + Q(t)y'(t), \\ &= A(t)x(t) + Q(t)[y'(t) - By(t)], \end{aligned}$$

así, dado que $Q(t)$ es no singular, $x(t)$ es solución de $\dot{x} = A(t)x$ si y solo si $y(t)$ es solución de $\dot{y} = By$.

□

Como vimos anteriormente $\Phi(t)$ es una matriz fundamental para $\dot{x} = A(t)x$ que satisface $\Phi(0) = I$, entonces $\|DP(x_0)\| = \|\Phi(T)\|$ para cualquier $x_0 \in \Gamma$. Entonces se sigue del teorema anterior que $\|DP(x_0)\| = \|e^{BT}\|$. Los eigenvalores de e^{BT} están dados por $e^{\lambda_j T}$ donde $\lambda_j, j = 1, \dots, n$, son los eigenvalores de la matriz B . Estos eigenvalores de B son llamados los exponentes característicos de $\gamma(t)$ y los eigenvalores de e^{BT} son llamados los multiplicadores característicos de $\gamma(t)$ los cuales determinarán la estabilidad de la órbita periódica Γ .

El estudio de la estabilidad de las órbitas periódicas como en el caso del estudio de la estabilidad de los puntos de equilibrio, es equivalente al estudio del espectro de la parte lineal del mapeo de Poincaré. Nuevamente, nos concentraremos al estudio de estabilidad en sistemas Hamiltonianos. Cuando estudiamos las cuestiones de estabilidad, establecimos que para sistemas lineales con coeficientes constantes se cumple que el sistema $\dot{y} = By$ es estable si y solo si (i) B tiene solo eigenvalores imaginarios puros y (ii) B es diagonalizable sobre \mathbb{C} . Entonces en vista de este resultado y del hecho que los multiplicadores característicos $e^{\lambda_j T}$ contienen los eigenvalores λ_j de la matriz constante B podemos establecer la siguiente proposición

Proposición 6.1.6. *El sistema periódico $\dot{x} = A(t)x$ en el caso Hamiltoniano es estable si y solo si (i) La matriz $\Phi(T)$ tiene solo eigenvalores de módulo uno y (ii) $\Phi(T)$ es diagonalizable sobre \mathbb{C}*

Por lo tanto, de la relación $\|DP(x_0)\| = \|e^{BT}\|$ tenemos que esta proposición también nos da información acerca del espectro del mapeo de Poincaré. Una vez que hemos determinado el como estudiar órbitas periódicas de un sistema, queda la cuestión, desde un punto de vista computacional, de ¿como calcular los objetos que menciona la teoría anterior?. Esto lo responderemos en las siguientes secciones.

6.2. El método de continuación analítica

En esta sección abordaremos la técnica conocida como *continuación analítica de órbitas periódicas*. El enfoque que daremos es totalmente constructivo dado que tiene la ventaja de que en cada paso explicaremos como calcular los objetos que necesitamos para el estudio de las órbitas que se mencionaron en la sección anterior. Cabe mencionar que debido a este enfoque, modificaremos un poco la notación respecto de la sección anterior por simplicidad. Consideremos un sistema de clase C^1 respecto de la coordenada x y el parámetro real $\alpha \in \mathbb{R}$ en una región $D \times (-\epsilon, \epsilon) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$\dot{x} = F(x, \alpha). \quad (6.2)$$

El método consiste en obtener órbitas periódicas cercanas a órbitas conocidas del sistema cuando $\alpha = \alpha_0$, aplicando el teorema de la función implícita. Por

ello se conoce también como el método de continuación analítica. Denotemos la solución al tiempo t del sistema (6.2) que tiene por condición inicial ξ al tiempo $t = 0$, por $x(t, \xi, \alpha)$. Supongamos que para $\alpha = \alpha_0$ se tiene una órbita periódica de periodo T_0 , con condición inicial ξ_0 , es decir, $x(t + T_0, \xi_0, \alpha_0) = x(t, \xi_0, \alpha_0)$. Para un valor del parámetro α cercano a α_0 , buscamos una solución periódica de periodo T cercano a T_0 y condición inicial ξ cercana a ξ_0 . Por unicidad de soluciones, esto es equivalente a resolver la ecuación de periodicidad

$$x(T, \xi, \alpha) - \xi = 0. \quad (6.3)$$

Observe que éste es un sistema de n ecuaciones con $n + 1$ incógnitas que son: la condición inicial ξ y el periodo T ; es necesario imponer restricciones adicionales para poder resolver dicha ecuación. Busquemos por ejemplo, órbitas de periodo fijo T_0 (en general en sistemas autónomos este tipo de órbitas no existen, pero lo tomaremos solo como una motivación). Por hipótesis, el sistema (6.3) admite una solución para $\alpha = \alpha_0$ la cual es $\xi = \xi_0$. Vamos a denotar en lo sucesivo $X(T, \xi, \alpha) = \frac{\partial x}{\partial \xi}(T, \xi, \alpha)$. Por el teorema de la función implícita, si el operador

$$X(T, \xi, \alpha) - I_n, \quad (6.4)$$

es invertible, entonces existe una curva diferenciable $\xi(\alpha)$ definida en un entorno de α_0 en una vecindad de ξ_0 tal que $\xi(\alpha_0) = \xi_0$, y que satisface

$$x(T_0, \xi(\alpha), \alpha) - \xi(\alpha) = 0, \quad (6.5)$$

es decir la curva de condiciones iniciales $\xi(\alpha)$ define una familia de órbitas periódicas dependientes del parámetro α . Ahora bien, la cuestión es ¿cómo calculamos la matriz $X(T, \xi, \alpha)$?; para hacer esto debemos introducir las ecuaciones variacionales.

En las siguientes tres proposiciones, que se pueden consultar en cualquier libro de ecuaciones diferenciales ordinarias, el parámetro α no juega ningún papel por lo cual estaremos considerando el sistema

$$\dot{x} = F(x).$$

Teorema 6.2.1. (*Dependencia sobre condiciones iniciales*) Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene a x_0 y supongamos que $F \in C^1(E)$. Entonces existe un $a > 0$ y $\delta > 0$ tal que para todo $\xi \in B_\delta(x_0)$ el problema de valor inicial

$$\dot{x} = F(x), \quad (6.6)$$

con

$$x(0) = \xi,$$

tiene una solución única $x(t, \xi)$ con $x \in C_1(G)$ donde $G = [-a, a] \times B_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^{n+1}$; más aún, para cada $\xi \in B_\delta(x_0)$, $x(t, \xi)$ es una función dos veces continuamente diferenciable de t para $t \in [-a, a]$.

Corolario 6.2.2. *Bajo las hipótesis del teorema de arriba*

$$X(t, \xi) = \frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi),$$

para $t \in [-a, a]$ y $\xi \in B_\delta(x_0)$ si y solo si $X(t, \xi)$ es la matriz fundamental solución de

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X &= \frac{\partial F}{\partial x}(x(t, \xi)) \cdot X, \\ X(0, \xi) &= I, \end{aligned}$$

para $t \in [-a, a]$ y $\xi \in B_\delta(x_0)$.

Proposición 6.2.3. *Sea $x(t, \xi)$ una solución del sistema (6.6) con condición inicial $x(0, \xi) = \xi$. Entonces la matriz de derivadas parciales $X(t, \xi)$ satisface el sistema lineal con coeficientes variables*

$$\frac{d}{dt}X(t, \xi) = \frac{\partial F}{\partial x}(x(t, \xi)) \cdot X(t, \xi), \quad (6.7)$$

y la condición inicial

$$X(0, \xi) = I_n. \quad (6.8)$$

Es necesario hacer algunas observaciones sobre esta última proposición

1. La ecuación (6.7) es una ecuación diferencial matricial lo cual es equivalente a resolver los n problemas de condición inicial

$$\dot{x} = \frac{\partial F}{\partial x}(x(t, \xi)) \cdot x,$$

con las condiciones iniciales $x(0) = e_i$, donde e_i , $i = 1, \dots, n$ son los vectores canónicos en \mathbb{R}^n . El sistema (6.7) se llaman las ecuaciones variacionales a lo largo de la órbita $x(t, \xi)$.

2. Si la solución de referencia $x(t, \xi)$ es periódica, entonces el sistema variacional anterior tiene coeficientes periódicos. En este caso, la matriz $X(T, \xi)$ se llama una matriz de monodromía.

Entonces para aplicar el teorema de la función implícita debemos explorar los eigenvalores de la matriz $X(T, \xi)$.

Proposición 6.2.4. *Consideremos el sistema $\dot{x} = F(x)$, si $x(t, \xi)$ es una solución periódica de periodo T , entonces 1 es valor propio de la matriz de monodromía $X(T, \xi)$ con vector propio $F(\xi)$.*

Demostración Por ser solución

$$\dot{x}(t, \xi) = F(x(t, \xi)),$$

derivando de ambos lados respecto de t

$$\ddot{x}(t, \xi) = \frac{\partial F}{\partial x}(x(t, \xi)) \cdot \dot{x}(t, \xi),$$

es decir, $\dot{x}(t, \xi)$ es solución del sistema variacional

$$\delta\dot{x} = \frac{\partial F}{\partial x}(x(t, \xi))\delta x,$$

donde $\delta x \in \mathbb{R}^n$. Como $\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi)$ es una matriz fundamental, existe un vector c tal que

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi) \cdot c = \dot{x}(t, \xi),$$

evaluando en $t = 0$ obtenemos

$$c = \dot{x}(0, \xi),$$

por lo tanto

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(T, \xi) \cdot \dot{x}(0, \xi) = \dot{x}(T, \xi) = \dot{x}(0, \xi),$$

la última igualdad se sigue de que la solución es periódica. Por lo tanto $\dot{x}(0, \xi) = F(x(0, \xi)) = F(\xi)$ es un vector propio con valor propio 1.

□

Esto trae como consecuencia que el operador $X(T_0, \xi_0, \alpha_0) - I_n$ sea degenerado. La idea a seguir para eliminar esta degeneración consiste en tomar un hiperplano Σ que pase por ξ_0 y transversal a $F(\xi_0)$. O sea, consideraremos la aplicación de Poincaré cuya existencia y propiedades se discutieron en la sección anterior.

Teorema 6.2.5. *Considere el sistema $\dot{x} = F(x)$ con $x(t, \xi_0)$ una solución periódica de periodo T_0 . Sea $X(T_0, \xi_0)$ la matriz de monodromía; Σ un hiperplano que pasa por ξ_0 transversal a $F(\xi_0)$, $\psi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ la aplicación de Poincaré definida sobre U . Entonces el polinomio característico se factoriza como*

$$|X(T_0, \xi_0) - \lambda I_n| = (\lambda - 1) \left| \frac{\partial \psi}{\partial \xi_\Sigma}(\xi_0) - \lambda I_\Sigma \right|$$

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos en lo que resta de esta sección que $\xi_0 = 0$ y por transversalidad

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R}F(\xi_0) \oplus \Sigma.$$

Escribamos

$$\xi = \xi^T + \xi^\Sigma,$$

para la correspondiente descomposición en los respectivos subespacios. Por la proposición anterior, $F(\xi_0)$ es un vector propio con valor propio 1, luego

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(T_0, \xi_0) \cdot \xi^T = \xi^T. \quad (6.9)$$

Por otro lado tenemos que de la definición de la aplicación de Poincaré se sigue que $\frac{\partial \psi}{\partial \xi^\Sigma}(\xi_0)$ es la transformación lineal $\Sigma \rightarrow \Sigma$ que se obtiene al derivar ψ sobre Σ , se sigue de la regla de la cadena

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi^\Sigma}(\xi_0) \cdot \xi^\Sigma = \frac{\partial x}{\partial \tau}(\tau(\xi_0, \xi_0)) \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \xi^\Sigma}(\xi_0) \cdot \xi^\Sigma + \frac{\partial x}{\partial \xi}(\tau(\xi_0, \xi_0)) \cdot \xi^\Sigma. \quad (6.10)$$

Como $\frac{\partial \tau}{\partial \xi^\Sigma}(\xi_0) : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, por definición del vector gradiente tenemos

$$\frac{\partial \tau}{\partial \xi^\Sigma}(\xi_0) \cdot \xi^T = \langle \nabla_\Sigma \tau(\xi_0), \xi^T \rangle, \quad (6.11)$$

donde $\nabla_\Sigma \tau(\xi_0)$ es el gradiente de τ como función definida en el subespacio Σ ; además por ser $x(t, \xi_0)$ solución

$$\frac{\partial x}{\partial t}(\tau(\xi_0), \xi_0) = F(x(\tau(\xi_0), \xi_0)), \quad (6.12)$$

luego sustituyendo (6.12) y (6.11) en (6.10) obtenemos

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(\tau(\xi_0, \xi_0)) \cdot \xi^\Sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \xi^\Sigma}(\xi_0) \cdot \xi^\Sigma - \langle \nabla_\Sigma \tau(\xi_0), \xi^\Sigma \rangle F(\xi_0), \quad (6.13)$$

como

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(T_0, \xi_0) \cdot \xi^T = \xi^T,$$

entonces de (6.13) obtenemos

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(T_0, \xi_0) \cdot \xi^\Sigma = \frac{\partial \psi}{\partial \xi^\Sigma}(\xi_0) \cdot \xi^\Sigma - \langle \nabla_\Sigma \tau(\xi_0), \xi^\Sigma \rangle F(\xi_0). \quad (6.14)$$

O sea, adjuntando a $F(\xi_0)$ una base arbitraria de Σ para tener una base de \mathbb{R}^n (recuerde la descomposición en suma directa) la matriz de monodromía toma la forma

$$X(T_0, \xi_0) = \begin{pmatrix} 1 & -\nabla_\Sigma \tau(\xi_0)^T \\ 0 & \frac{\partial \psi}{\partial \xi^\Sigma}(\xi_0) \end{pmatrix},$$

la cual es la matriz transpuesta de los coeficientes en la base elegida. La identidad en \mathbb{R}^n se puede escribir, respecto de la descomposición en suma directa, como $I_n = 1 \oplus I_\Sigma$, entonces

$$X(T_0, \xi_0) - \lambda I_n = \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -\nabla_\Sigma \tau(\xi_0)^T \\ 0 & \frac{\partial \psi}{\partial \xi^\Sigma}(\xi_0) - \lambda I_\Sigma \end{pmatrix},$$

de donde se sigue el resultado. □

Si el sistema $\dot{x} = F(x)$ posee una integral primera, entonces tenemos un grado más de degeneración en la matriz de monodromía

Proposición 6.2.6. *Supongamos que el sistema $\dot{x} = F(x)$ posee una integral primera: $H(x(t, \xi)) = H(\xi)$. Si $x(t, \xi_0)$ es una solución periódica de periodo T_0 , entonces 1 es un valor propio de multiplicidad 2 de la matriz de monodromía $X(T_0, \xi_0)$.*

Demostración. Diferenciando respecto de ξ la relación $H(x(t, \xi)) = H(\xi)$ y de la definición de gradiente se tiene que para cualquier $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial x}(x(t, \xi)) \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi) \cdot v &= \frac{\partial H}{\partial x}(\xi) \cdot v \\ \langle \nabla H(x(t, \xi)), \frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi) \cdot v \rangle &= \langle \nabla H(\xi), v \rangle \\ \left\langle \frac{\partial x}{\partial \xi}(t, \xi)^T \nabla H(x(t, \xi)), v \right\rangle &= \langle \nabla H(\xi), v \rangle, \end{aligned}$$

en particular para $t = T_0$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}(T_0, \xi_0)^T \nabla H(x(T_0, \xi_0)) = \nabla H(\xi_0), \quad (6.15)$$

lo cual nos dice que $\nabla H(\xi_0)$ es un vector propio izquierdo de $\frac{\partial x}{\partial \xi}(T_0, \xi_0)$ o bien un vector propio derecho de $\frac{\partial x}{\partial \xi}(T_0, \xi_0)^T$ con valor propio 1. Como los valores propios de una matriz y su transpuesta son iguales, se sigue que 1 es valor propio de $\frac{\partial x}{\partial \xi}(T_0, \xi_0)$

□

Juntando los dos resultados anteriores se tiene

Teorema 6.2.7. *Suponga que el sistema $\dot{x} = F(x)$ posee una integral primera y una solución periódica $x(t, \xi_0)$ de periodo T_0 . Existe una base de \mathbb{R}^n tal que*

$$|X(T_0, \xi_0) - \lambda I_n| = (\lambda - 1)^2 \left| \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(\xi) - \lambda I_{n-2} \right|,$$

donde ψ es la aplicación de Poincaré asociada a un plano Σ' de codimensión 2 ortogonal a $\nabla H(\xi_0)$ y transversal a $F(\xi_0)$.

De hecho podemos decir mucho más, solo que necesitamos un corolario proveniente del teorema de la caja de flujo que asumiremos sin demostración.

Lema 6.2.8. *Considere el sistema $\dot{x} = F(x)$ como antes y suponga que este sistema posee $1 \leq r \leq n$ integrales independientes $H_i, i = 1, \dots, r$. Entonces localmente existe un cambio de variable $x \rightarrow y$ tal que*

$$y_i = H_i(x), i = 1, \dots, r,$$

$$y_i = x_i, i = r + 1, \dots, n.$$

Proposición 6.2.9. Si el sistema $\dot{x} = F(x)$ posee $r < n$ integrales primeras independientes entonces

$$|X(T_0, \xi_0) - \lambda I_n| = (\lambda - 1)^{r+1} \left| \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(\xi) - \lambda I_{n-r+1} \right|.$$

Demostración. Denotemos por $H_i \in C^1$ $i = 1, 2, \dots, r$ a las r integrales primeras independientes y definamos

$$S = S_c = \{x \in \mathbb{R}^n : H_i(x) = c_i, i = 1, 2, \dots, r\},$$

con $c = (c_1, \dots, c_r) \in \mathbb{R}^n$. Ahora si definimos $G(x) = (H_1(x) - c_1, \dots, H_r(x) - c_r)$ y usando el hecho de que las integrales son independientes tenemos que de hecho, el espacio tangente de S en x está dado por

$$T_x S = \ker \left(\frac{\partial G}{\partial x}(x) \right), x \in S.$$

Note que en particular el espacio tangente lo podemos ver como la intersección de los planos por el origen cuyas normales son precisamente $\nabla H(\xi_0)$ y en particular $F(x) \in T_x$. Para calcular los eigenvalores de $X(T_0, \xi_0)$, por el lema anterior, podemos escoger coordenadas locales $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ en una vecindad de ξ_0 tales que

$$H_i(x) = \xi_i, i = 1, 2, \dots, r,$$

$$x_i = \xi_i, i = r + 1, \dots, n.$$

Ahora si escribimos $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ como $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_r)$, $\xi'' = (\xi_{r+1}, \dots, \xi_n)$ entonces el mapeo $x(T, \xi)$ lo podemos escribir como

$$x(T, (\xi', \xi'')) = \begin{pmatrix} x'(T, \xi) = \xi' \\ x''(T, \xi) \end{pmatrix}.$$

Entonces la matriz de monodromía queda

$$X(T_0, \xi_0) = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ * & X' \end{pmatrix},$$

donde X' es la restricción de X al espacio tangente $T_{\xi_0} S$ Ahora aplicamos la misma idea que en el teorema 6.2.5, pero esta vez considerando a la submatriz X' , es decir, consideremos un hiperplano $\Sigma' \subset T_{\xi_0} S$ transversal al campo $F(\xi_0)$ de esta manera X' se factoriza como

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & -\nabla_{\Sigma'} \tau(\xi_0) \\ 0 & \frac{\partial \psi}{\partial \xi}(\xi_0) \end{pmatrix},$$

de donde se sigue el resultado. □

Hemos llegado al teorema en su forma más general que nos garantiza la existencia de órbitas periódicas al hacer uso del teorema de la función implícita aplicado a la aplicación de Poincaré

Teorema 6.2.10. *Considere el sistema $\dot{x} = F(x, \alpha)$ dependiente de un parámetro α . Sea $x(t, \xi_0, \alpha_0)$ una órbita periódica de periodo T_0 para α_0 y suponga que el sistema tiene r integrales linealmente independientes. Entonces existe una familia de órbitas periódicas $x(t, \xi, \alpha)$ con condiciones iniciales $\xi(c, \alpha)$ y con periodos $T(c, \alpha)$ que yacen sobre las hipersuperficies*

$$H_i = c_i, i = 1, 2, \dots, r,$$

o sea

$$H_i(x(t, c, \alpha); \alpha) = c_i, i = 1, 2, \dots, r,$$

tales que $\xi(c, \alpha_0) = \xi_0$, $T(c, \alpha_0) = T_0$; la dependencia de la condición inicial y el periodo es C^1 respecto del parámetro α .

Demostración. Como antes introduzcamos coordenadas ξ_1, \dots, ξ_n en una vecindad de ξ_0 tales que

$$H_i(x) = \xi_i, i = 1, 2, \dots, r,$$

$$x_i = \xi_i, i = r + 1, \dots, n,$$

se cumple para cada α cerca de α_0 y tal que $x_n = 0$ define la sección Σ . En estas coordenadas locales el mapeo de Poincaré lo escribimos como

$$\psi \begin{pmatrix} \xi' \\ \xi'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi'(\xi', \xi''; \alpha) = \xi' \\ \psi''(\xi', \xi''; \alpha) \end{pmatrix},$$

donde $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_r)$ y $\xi'' = (x_{r+1}, \dots, x_{n-1})$. Debemos encontrar los puntos fijos de ψ , para esto solo debemos resolver las $n - r - 1$ ecuaciones

$$\psi''(\xi', \xi''; \alpha) = \xi'',$$

pues las primeras r ecuaciones

$$\psi'(\xi', \xi''; \alpha) = \xi',$$

se satisfacen automáticamente por construcción. Observe que para la primera ecuación el teorema de la función implícita es aplicable, pues

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ * & \frac{\partial \psi''}{\partial \xi''} \end{pmatrix},$$

y por la proposición anterior

$$\frac{\partial \psi''}{\partial \xi''} - I_{n-r-1},$$

es no singular, por lo tanto existe un único mapeo $\xi''(\xi', \alpha)$ tal que resuelve la ecuación $\psi''(\xi', \xi''; \alpha) = \xi''$. Entonces $\xi' = c$, $\xi'' = \xi''(\xi'; \alpha)$ son las condiciones iniciales de las soluciones requeridas.

Poniendo $\alpha = \alpha_0$ en el teorema observamos que la órbita periódica original también yace en una familia de órbitas periódicas de r -parámetros $x(t, \xi, \alpha_0)$ con periodos cercanos a T_0 . Estas soluciones periódicas corresponden a diferentes valores de las integrales, es decir,

$$H_i(x(t, c, \alpha_0); \alpha_0) = c_i, i = 1, 2, \dots, r$$

□

6.3. Órbitas generadoras y el problema de Kepler en el PR4C

Como se mencionó desde el principio de este trabajo, el objetivo principal es estudiar y clasificar órbitas periódicas del PR4C. Sin embargo, hay que tener en mente que el estudio y clasificación de órbitas periódicas en un sistema no es un problema trivial pues, como sucede en el PR3C, estas soluciones pueden formar un conjunto denso en el espacio fase, así que debemos tener una estrategia bien definida para manejar y organizar las órbitas periódicas de nuestro sistema. En el caso del PR3C, este estudio y clasificación se realizó a lo largo de varias décadas por numerosos autores, la metodología adoptada por M. Hénon para clasificar todo este trabajo resultó satisfactoria. Invitamos al lector que no esté familiarizado con este trabajo, a consultar el libro [34] para ver una síntesis del enfoque adoptado por Hénon. Por tales motivos decidimos adoptar la misma metodología para el PR4C. Vamos a discutir de manera breve las definiciones y conceptos que nos ayudarán en nuestro trabajo. Una órbita periódica $x(t, \xi, \alpha)$

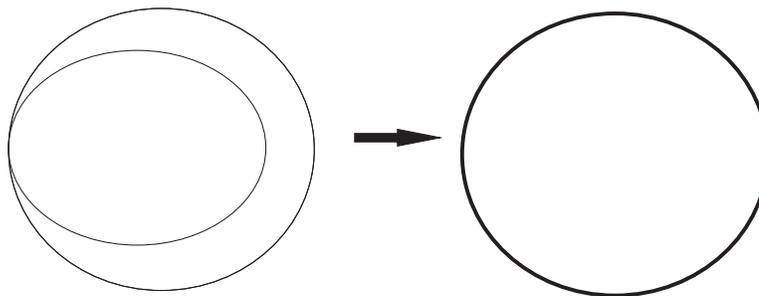


Figura 6.1: Evolución posible de una órbita periódica.

puede ser considerada como si tuviera una infinidad de periodos, pues si conocemos el periodo mínimo T_0 de la órbita podemos obtener periodos nuevos al

realizar $T = nT_0$, $n \in \mathbb{Z}$. Para conjuntos de órbitas periódicas es útil cambiar este punto de vista y atribuir un periodo bien definido a una órbita periódica considerado como un miembro de una familia dada. Este será llamado el *periodo en familia* y lo representaremos por T^* . Es posible escoger T^* para cada órbita de manera tal que la función T^* resulte al menos continua. Uno podría pensar en tomar a T^* como T_0 , pero esto no es una buena elección ya que las órbitas de una familia pueden formar 2 o más *rizos* o vueltas (ver figura 6.1), y conforme seguimos a esta órbita a lo largo de la familia, variando el parámetro α , estos rizos pueden coincidir cuando se alcanza una órbita en particular (que llamaremos *crítica*), así T^* saltará repentinamente a un valor n veces más pequeño. Entonces $T^* = T_0$ no será siempre una función continua de α . Sin embargo, esta discontinuidad en T_0 es removible si calculamos el límite de $T_0(\alpha)$ cuando la evolución de la familia se acerca a una órbita *crítica*. Por lo tanto, si removemos este tipo de discontinuidades calculando dicho límite, obtendremos una función continua T^* a lo largo de una familia F .

Definición 6.3.1. *El periodo en familia T^* de una órbita periódica $x(t, \xi, \alpha_0)$ en un conjunto dado es el límite del periodo mínimo T_0 conforme se tiende hacia esa órbita sobre el conjunto, es decir,*

$$\lim_{\alpha \rightarrow \alpha_0} T_0(\alpha) := T^*.$$

En general T_0 es igual a T^* pero en las mencionadas discontinuidades tenemos $T_0 = T^*/n$, donde n es el número de vueltas. En tal caso dicha órbita crítica puede pertenecer a otra familia, digamos G , en la cual su periodo en familia es precisamente T_0 . Esta situación se representa en la figura (6.2) donde se muestra el periodo en familia como función del parámetro α para las familias F y G .

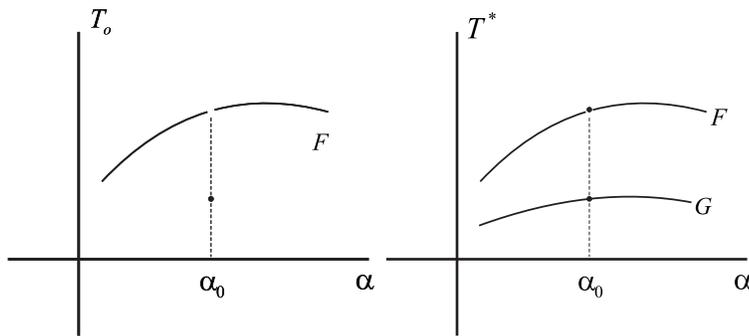


Figura 6.2: Periodo en familia para las familias F y G .

En vista de la discusión anterior, vamos a definir formalmente lo que entendemos como una familia de órbitas periódicas.

Definición 6.3.2. *Una familia de órbitas periódicas está definida por las funciones $x(t, \xi, \alpha)$ y $T^*(\alpha)$.*

Ahora que ya sabemos lo que entendemos por una familia de órbitas, necesitamos dotarlas de cierta estructura, esto con la finalidad de saber donde empieza una familia y donde termina. El primer paso es definir el como representar una familia de órbitas periódicas cuando dependen de un parámetro. Una órbita está bien definida por sus condiciones iniciales $\xi = (x_0, y_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0)$ entonces cada punto ξ representa una órbita en el espacio fase, cuando estas dependen de un parámetro α debemos incluir en la representación a dicho parámetro, es decir, representamos estas órbitas en el espacio $(\xi, \alpha) \in \mathbb{R}^5$. Esto no nos permite dar una visualización de la estructura de las familias de órbitas periódicas, sin embargo, si imponemos algunas condiciones sobre las órbitas podemos reducir la dimensiones del espacio, si hacemos una reparametrización del tiempo (y una traslación de los ejes si es necesario) podemos suponer que una componente de la posición es igual a cero al tiempo $t = 0$, digamos $y(0) = 0$ entonces hemos reducido en uno la dimensión del espacio original, ahora bien; si hacemos uso de la integral primera al tiempo $t = 0$ tenemos que $\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 = 2\Omega - C$ y de esta forma podemos conocer alguna de las velocidades iniciales en términos de la otra si despejamos alguna de esta ecuación, digamos que ponemos $\dot{y} = \dot{y}(\dot{x})$, entonces hemos reducido el espacio a dimensión tres, que a saber está definido por las coordenadas (x_0, \dot{x}_0, α) .

Esto nos permite visualizar a las familias como superficies en el espacio tridimensional. Si ponemos la restricción adicional de que las órbitas sean simétricas respecto del eje x entonces necesariamente tenemos $\dot{x}_0 = 0$, entonces se reducen las familias a curvas en el plano (x_0, α) , estas serán llamadas las *curvas características* de las familias, y por lo tanto el estudio de las familias se reduce a estudiar sus curvas características. El hecho que las familias de órbitas periódicas simétricas se representen por curvas en el plano, nos restringe a que si comenzamos desde una órbita dada en una familia, solo podemos movernos a lo largo de la familia en 2 y solo 2 direcciones. En el seguimiento de una familia

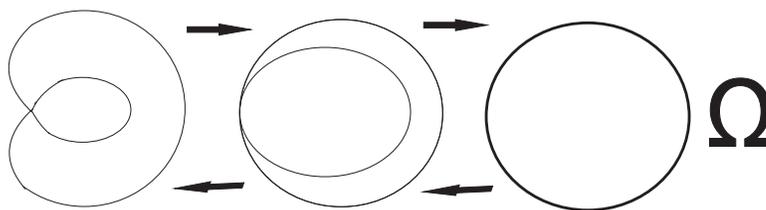


Figura 6.3: Reflexión de una familia de órbitas periódicas.

podemos encontrar un fenómeno interesante llamado *reflexión* de una familia. Supongamos que cuando seguimos una familia empezamos con una órbita sobre ésta; y al continuar llegamos a una órbita particular Ω si seguimos continuando Ω podemos regresar a la órbita en la cual empezamos, ver figura (6.3). Con esto podemos clasificar a una familia de órbitas periódicas en 4 casos posibles

1. Una familia cerrada sin reflexiones. La característica de esta familia es una curva cerrada.
2. Una familia cerrada con 2 reflexiones.
3. Una familia abierta sin reflexiones.
4. Una familia abierta con una reflexión

Entonces dada una familia de órbitas periódicas podemos tomar cualquier punto sobre ella para comenzar, sin embargo, no siempre es claro decir cuando termina una familia. Adoptaremos el principio de *terminación natural* formulado primeramente por Strömngren para decidir cuando termina una familia de órbitas periódicas

Definición 6.3.3. *Supongamos que hemos obtenido por algún medio una porción finita de una familia de órbitas periódicas, es decir, conocemos las funciones $x(t, \xi, \alpha)$ y $T^*(\alpha)$ para un rango de valores $\alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2$ y queremos extenderla entonces*

1. *La familia se mantiene en sí misma, o sea la curva característica $\xi(\alpha)$ es una curva cerrada. Entonces llamaremos a esta familia una familia cerrada.*
2. *La familia tiene en cada una de las dos direcciones α_1 y α_2 una terminación natural en la cual una o más de las siguientes tres cantidades crece sin límite*
 - *La dimensión D de la órbita, definida como la distancia máxima al origen.*
 - *El parámetro α .*
 - *El periodo T^* .*

En este último caso hablaremos de una familia abierta.

Órbitas de primera especie

En vista de que ya hemos definido y adoptado una estrategia para el estudio de órbitas periódicas, queremos saber cuáles conjuntos de órbitas periódicas pueden ser continuadas en el contexto que hemos descrito. Estos conjuntos los llamaremos órbitas generadoras. Recuerde que para el caso $\mu = 0$ recuperamos todo acerca de sus soluciones, en particular, sus soluciones periódicas que son círculos y elipses vistas en un sistema fijo, estas órbitas las llamaremos *órbitas Keplerianas*. De manera más general, estas órbitas han sido llamadas en [34] *órbitas de primera especie*. Es natural pensar en continuar estas órbitas respecto del parámetro de masa μ , sin embargo, para poder hacer esto debemos verificar que las hipótesis del teorema 6.2.10 se cumplen para este tipo de órbitas. Sabemos que el problema de Kepler posee dos integrales primeras que a saber son el

momento angular y la energía, por la proposición 6.2.9 y por la autonomía del sistema tenemos entonces que 1 es valor propio de multiplicidad 3, por la estructura simpléctica del problema tenemos que los valores propios aparecen por pares en el espectro, esto nos obliga a que la multiplicidad sea necesariamente 4. Sin embargo, las órbitas circulares poseen una peculiaridad que enunciaremos en la siguiente proposición

Proposición 6.3.4. *Denotemos por $M = r^2(\dot{\theta}+1)$ y $2H = \dot{r}^2+r^2\dot{\theta}^2-r^2-\frac{2}{r}$ a las integrales del momento angular y de la energía respectivamente en coordenadas polares en el sistema rotatorio. ∇M y ∇H son linealmente dependientes si y solo si $r = a$, $\dot{\theta} = \beta$ son constantes y $(\beta+1)^2a^3 = 1$ o sea tenemos una solución circular y se satisface la tercera ley de Kepler.*

Demostración Un cálculo directo nos muestra que

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial M}{\partial r} & \frac{\partial M}{\partial \theta} & \frac{\partial M}{\partial \dot{r}} & \frac{\partial M}{\partial \dot{\theta}} \\ \frac{\partial(2H)}{\partial r} & \frac{\partial(2H)}{\partial \theta} & \frac{\partial(2H)}{\partial \dot{r}} & \frac{\partial(2H)}{\partial \dot{\theta}} \end{pmatrix},$$

es

$$\begin{pmatrix} 2r(\dot{\theta}+1) & 0 & 0 & r^2 \\ 2r\dot{\theta}^2 - 2r + \frac{2}{r^2} & 0 & 2\dot{r} & 2r^2\dot{\theta} \end{pmatrix}.$$

Supongamos que existe $\lambda \in \mathbb{R} - 0$ tal que $\nabla M = \lambda \nabla(2H)$ entonces en particular

$$2\dot{r} = 0,$$

y

$$r^2 = 2r^2\dot{\theta}\lambda,$$

como $r \neq 0$ entonces $r = a$ y $\dot{\theta} = \frac{1}{2\lambda} := \beta$ son constantes, por lo tanto tenemos una órbita circular y por lo tanto se sigue la relación $(\beta+1)^2a^3 = 1$. Recíprocamente, al reescribir la relación $(\dot{\theta}+1)^2r^3 = 1$ obtenemos la igualdad

$$2 \left(r\dot{\theta}^2 - r + \frac{1}{r^2} \right) = 4r\dot{\theta}(\dot{\theta}+1),$$

definamos $\lambda = 2\dot{\theta}$ el lado izquierdo de la ecuación de arriba es precisamente $\frac{\partial(2H)}{\partial r}$ y recuerde también que $\frac{\partial M}{\partial r} = 2r(\dot{\theta}+1)$ entonces podemos escribir

$$\frac{\partial(2H)}{\partial r} = \lambda \frac{\partial M}{\partial r},$$

como r es constante $2\dot{r} = 0$ y por lo tanto se cumple $\nabla(2H) = \lambda \nabla M$ como se quería.

□

Este resultado nos dice que en el caso circular en realidad solo tenemos una integral primera y por lo tanto la multiplicidad del valor propio es 2 y el teorema 6.2.10 es aplicable. Para salvar la situación en el problema elíptico se introducen una serie de cambios canónicos de coordenadas haciendo uso de las coordenadas de Delaunay para el problema de Kepler [63], [47]. Con este cambio de coordenadas, es posible aplicar el teorema de la función implícita para probar que las órbitas elípticas que son simétricas respecto del eje x también pueden ser continuadas. Estableceremos esto formalmente en el siguiente teorema, la demostración de este hecho es análoga a la del PR3C y el lector puede consultarla en las referencias mencionadas

Teorema 6.3.5. *Sean $m, n \in \mathbb{Z}$ primos relativos y $T = 2\pi m$. La solución elíptica de periodo T del problema de Kepler en coordenadas rotatorias que satisface*

$$l(0) = \pi, g(0) = \pi, L^3(0) = m/k,$$

y que no pasa a través de $(\sqrt{3}/2, 1/2)$ y $(\sqrt{3}/2, -1/2)$ se puede continuar a PR4C para valores pequeños de μ . Esta solución periódica es simétrica con respecto del eje x

En mecánica celeste, se dice que hay resonancia orbital cuando las órbitas de dos cuerpos tienen periodos cuya razón es una fracción de números enteros simple. Ello significa que se ejercen una influencia gravitatoria regular. El efecto de la resonancia es muy conocido en física y se sabe que este efecto puede llegar a afectar de manera notable al movimiento. Considérese que, si el periodo de un satélite es un múltiplo exacto del periodo de otro satélite, el efecto gravitatorio neto de cada satélite sobre el otro vendrá a ser, en resumidas cuentas, un tirón o empujón aplicado, repetidamente, en el mismo punto de movimiento cíclico. Esto trae como consecuencia que en algunos casos se desestabilicen las órbitas. Como ejemplos de este efecto en el sistema solar se encuentran en asteroides alrededor de Júpiter y en los anillos de Saturno. Para el caso $\mu = 0$ una órbita circular, escrita en notación compleja como $z = ae^{i\beta t}$ donde a es la distancia entre la masa m_1 (en el origen de coordenadas) y la masa infinitesimal m_4 , en el sistema sinódico tiene la frecuencia angular $\beta = n - 1$ donde n es la frecuencia angular en el sistema sideral. La condición de no resonancia es equivalente a pedir

$$\frac{1}{n-1} \notin \mathbb{Z}, \quad (6.16)$$

recuerde que la velocidad angular del sistema rotante y por tanto de los primarios es constante con valor 1. Si $n < 0$ es decir la órbita es retrógrada en el sistema sideral (y de aquí retrógrada en el sinódico) entonces el cociente (6.16) está entre -1 y 0, y por lo tanto la condición de no resonancia se satisface automáticamente. Para órbitas directas en el sistema sideral $n > 0$, existen dos casos:

1. $n < 1$ de donde $a > 1$ y por lo tanto la órbita de m_4 es exterior a los planetoides de masa $\mu = 0$ localizados en $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$ y $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$. La condición de no resonancia se vuelve equivalente a pedir

$$n \neq \frac{k+1}{k}, k = 1, 2, 3, \dots,$$

2. $1 < n$, y por lo tanto $a < 1$, lo que significa que la órbita es interior a los planetoides. La condición de no resonancia se puede escribir como

$$n \neq \frac{k-1}{k}, k = 1, 2, 3, \dots,$$

y solo en estos casos será posible la continuación analítica. Sin embargo, cuando $a = 1$ tenemos que la órbita de m_4 coincide con la de los planetoides m_2 y m_3 lo que nos puede llevar a colisiones con estos, de hecho este fenómeno también puede suceder aún en el caso de órbitas elípticas, este tipo de órbitas, que ya no pertenecen a la primera especie, a manera del PR3C se denominan *órbitas de segunda especie*. No estamos interesados en tratar de continuar este tipo de órbitas en este trabajo, así que no estudiaremos a profundidad todas las propiedades de estas familias de órbitas, en consecuencia, nos limitaremos a explorar algunas de sus propiedades básicas. Sin embargo, resulta sumamente interesante, desde un punto de vista teórico, preguntarse (como lo hemos hecho anteriormente con otros temas) ¿Existe una relación entre las órbitas de segunda especie del PR3C con las correspondientes del PR4C? Responderemos esta pregunta en la siguiente sección.

6.4. Órbitas de segunda especie

En esta sección daremos una breve introducción al estudio de órbitas de segunda especie en el PR3C, cabe mencionar que este tipo de familias de órbitas representa un vasto terreno que fue explorado varios años por diversos autores. Los trabajos [34], [10] y [36] representan excelentes referencias que puede consultar el lector que no esté familiarizado con este tema. A continuación definiremos formalmente lo que entenderemos por una órbita generadora de segunda especie para el PR3C, más adelante extenderemos este concepto al PR4C y estudiaremos sus relaciones.

Definición 6.4.1. *Una órbita generadora es de segunda especie si ésta pasa por el punto donde se localiza la masa m_2 , a tal paso se le llamará una colisión.*

Como se consideran órbitas periódicas, entonces éstas tienen una infinidad de colisiones (puede haber más de una colisión por periodo). Las colisiones separan las órbitas en “piezas” que serán llamadas arcos. Dos arcos consecutivos se juntan en una colisión. Se debe tener cuidado de no confundir a los arcos con órbitas generadoras pues los arcos son solo parte de las órbitas. De manera más formal

Definición 6.4.2. *Un arco lo definimos como una pieza finita de una órbita Kepleriana (o sea una solución del problema de 2 cuerpos) que comienza y termina en una colisión.*

La órbita Kepleriana a la que pertenece una arco se llamará la órbita Kepleriana de soporte del arco, que en nuestro caso serán elipses. Consideremos momentáneamente a las soluciones generadoras y denotemos a los arcos como U , entonces

una solución generadora de segunda especie Γ se define por una sucesión de p arcos que conforman un periodo completo es decir,

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^p U_i.$$

Cada U_i está completamente definido por su solución de soporte Kepleriana y por los tiempos t'_j, t''_j de las colisiones inicial y final. Se define la duración τ_j de un arco U_i como la longitud del intervalo de tiempo que se toma para describirlo, es decir,

$$\tau_j = t''_j - t'_j.$$

Observe que para $j > 1$, t'_j se conoce y no necesita ser especificado pues es igual al tiempo final t''_j del arco precedente. Cuando se considera la órbita generadora t'_j se puede escoger arbitrariamente. Quisiéramos obtener las curvas características para estos arcos de tal forma que dos arcos con la misma elipse de soporte se representen por el mismo punto en el plano de las características. A continuación discutiremos maneras de hacer esto.

6.4.1. Familias de arcos en el PR3C

El caso general que será estudiado se ilustra en la figura (6.4) donde la partícula masiva m_1 se localiza en el origen del sistema (por simplicidad se considera el sistema sideral) y la partícula de masa cero m_2 describe una órbita circular de radio 1 y periodo 2π es decir, $\omega = 1$. La partícula de masa infinitesimal m_3 describe una órbita elíptica alrededor de la primaria m_1 . Las órbitas en la figura (6.4) se suponen directas y que al tiempo t_0 el cuerpo de masa m_3 está en el lado de la elipse donde $x > 0$ entonces las coordenadas de la primaria m_3 en un tiempo arbitrario t son

$$\begin{aligned} x &= a\sigma_0(\sigma_2 \cos(E) - e), \\ y &= a\sigma_0\sigma_1\sigma_2(1 - e^2)^{1/2} \sin(E), \\ t - t_0 &= a^{3/2}(E - e\sigma_2 \sin(E)), \end{aligned} \tag{6.17}$$

donde a y e son el semieje mayor y la excentricidad de la elipse y E es la anomalía excéntrica, además

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \begin{cases} 1 & \text{si el perigeo está localizado en } x > 0. \\ -1 & \text{si el perigeo está localizado en } x < 0. \end{cases} \\ \sigma_1 &= \begin{cases} 1 & \text{si la órbita es directa.} \\ -1 & \text{si la órbita es retrógrada.} \end{cases} \\ \sigma_2 &= \begin{cases} 1 & \text{si } m_3 \text{ está localizada en el perigeo en } t_0. \\ -1 & \text{si } m_3 \text{ está localizada en el apogeo en } t_0. \end{cases} \end{aligned}$$

Más adelante veremos que en efecto σ_2 está bien definida. Por otro lado la posición de la primaria m_2 está dada por

$$x = \cos(t), \tag{6.18}$$

$$y = \sin(t).$$

Supongamos que al tiempo $t_1 = \tau + t_0$ existe una colisión (digamos en el punto Q), definamos como η el valor de la anomalía excéntrica E en ese momento entonces tenemos que en la colisión se cumplen las igualdades

$$\cos(\tau + t_0) = a\sigma_0(\sigma_2 \cos(\eta) - e), \quad (6.19)$$

$$\sin(\tau + t_0) = a\sigma_0\sigma_1\sigma_2(1 - e^2)^{1/2} \sin(\eta),$$

$$\tau = a^{3/2}(\eta - e\sigma_2 \sin(\eta)).$$

Las incógnitas de este sistema de ecuaciones son: t_0 , τ , η , a y e . Supongamos también que al tiempo $t_2 < t_0$ también hay otra colisión, entonces dos casos son posibles

1. Esta colisión toma lugar en el mismo punto Q de la órbita sidereal como en el tiempo t_1 . Entonces los cuerpos m_2 y m_3 ejecutan un número entero de revoluciones cada una sobre sus órbitas entre las dos colisiones, por lo tanto sus periodos siderales de revolución deben ser conmensurables, es decir, éstos dependerán de dos enteros I y J digamos. Los conjuntos de tales arcos serán llamados $T_{I,J}$.
2. La colisión al tiempo t_2 toma lugar en el otro punto P del plano sidereal. Obsérvese que los puntos P y Q son simétricos con respecto del eje x . Tomando en cuenta esta simetría vemos que al considerar $t_0 = \frac{t_1+t_2}{2}$ (módulo $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) tenemos que m_2 y m_3 están sobre el eje x tanto

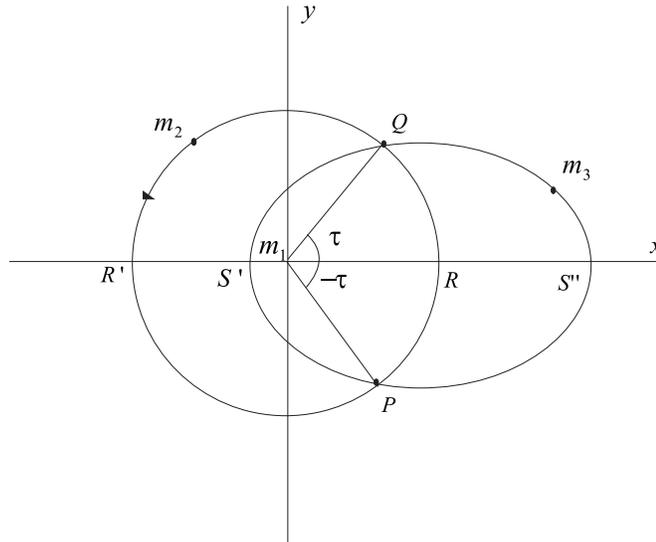


Figura 6.4: Elipse de soporte en el Problema restringido de tres cuerpos.

sinódico como sideral, o sea explícitamente podemos definir $t_0 = \hat{t}_0 + 2k\pi$ donde

$$\hat{t}_0 = \begin{cases} \pi & \text{si } m_3 \text{ está localizada en el perigeo.} \\ 0 & \text{si } m_3 \text{ está localizada en el apogeo.} \end{cases}$$

esto prueba que la función σ_2 está bien definida y que es equivalente a t_0 por lo que hemos eliminado una incógnita. La correspondiente órbita sinódica es simétrica respecto del eje x . El conjunto de estos arcos es llamado S definidos así primeramente por Hénon en 1968.

Discutamos brevemente las características de los arcos tipo S . En el sistema (6.19) tenemos tres ecuaciones con 4 incógnitas y por lo tanto obtendremos una infinidad de soluciones dadas por un parámetro que determinará a las características. Elevando al cuadrado y sumando las primeras ecuaciones de (6.19) obtenemos

$$1 = a(1 - \sigma_2 e \cos(\eta)),$$

de donde se obtiene

$$a = \frac{1 - \sigma \cos(\tau) \cos(\eta)}{\sin^2(\eta)}, \quad (6.20)$$

$$e = \frac{\sigma_2 \cos(\eta) - \sigma_0 \cos(\tau)}{1 - \sigma \cos(\tau) \cos(\eta)},$$

donde se ha definido $\sigma := \sigma_0 \sigma_2$. Finalmente, insertando (6.20) en la tercera ecuación de (6.19) obtenemos la llamada condición de periodicidad o *timing condition*

$$\sigma_\eta (1 - \sigma \cos(\tau) \cos(\eta))^{1/2} [\eta (1 - \sigma \cos(\tau) \cos(\eta)) - \sin(\eta) (\cos(\eta) - \sigma \cos(\tau))] - \tau \sin^3(\eta) := F(\tau, \eta, \sigma, \sigma_\eta) = 0, \quad (6.21)$$

donde $\sigma_\eta := \text{sign}(\sin(\eta))$. Esta ecuación originalmente fue derivada y resuelta por Hénon en 1968 [34]; en sus cálculos Henón encontró un número infinito de familias uniparamétricas continuas de soluciones. Este tipo de soluciones, expresó, “poseen una riqueza y variedad inesperada”. Los resultados de sus cálculos se muestran en la figura (6.5) donde las curvas solución se grafican como funciones de las variables η y τ . Solo se muestra un parte del plano (η, τ) , de hecho las soluciones existen para todos los valores $\tau > 0,51500\dots$ y $\eta > 0$. Este modelo para los arcos tipos S tiene ventajas considerables [36]:

1. Dado que las soluciones τ y η de 6.21 determinan a la órbita (a y e) y a las condiciones iniciales (6.17), es natural entonces tomar a las curvas solución de (6.21) como curvas características para las órbitas con colisiones consecutivas de este tipo.
2. El plano (η, τ) tiene la propiedad que las curvas características están separadas de manera apropiada que forman patrones y formas fácilmente reconocibles, sin son cerradas o si se intersectan con otras familias, a diferencia de otras representaciones como [10].

3. Se puede expresar a la constante de Jacobi para $\mu = 0$ en las variables τ y η para obtener una función $C(\tau, \eta)$ en cuyos puntos extremos se localizan órbitas críticas de colisiones consecutivas, más adelante veremos que las órbitas críticas poseen interesantes propiedades.

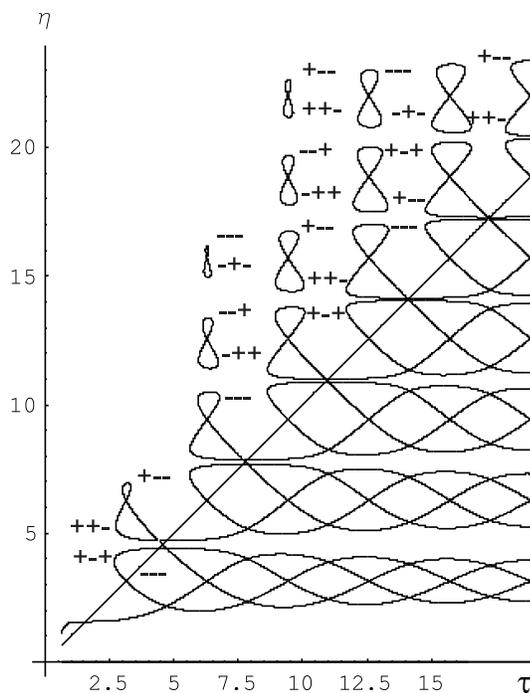


Figura 6.5: Curvas características para los arcos tipo S del PR3C (Hénon 1968). Los tres signos sobre las curvas corresponden a σ_0 , σ_1 y σ_2 respectivamente.

Para representar las características de los arcos tipo T discutiremos brevemente el modelo presentado por Hénon en [34] aunque el lector puede leer la referencia para una discusión más detallada. Cabe señalar que no es el único modelo disponible, se puede encontrar otra representación en [10], pero el modelo de Hénon será útil en lo que sigue. Consideremos la figura (6.6) y estudiemos las intersecciones de la elipse descrita por m_3 con el círculo unitario. Geométricamente es conveniente usar las coordenadas polares γ y V pues estarán determinadas y definidas por una elipse de soporte dada, V debe ser menor que la velocidad de escape que es igual a $\sqrt{2}$ a distancia 1 de m_1 entonces

$$0 \leq V < \sqrt{2},$$

$$0 \leq \gamma \leq \pi,$$

en estas coordenadas tenemos los casos

1. Tipo I: $0 < V < \sqrt{2}$ y $0 < \gamma < \pi$,
2. Tipo II: $\gamma = 0$ ó $\gamma = \pi$ pero $V \neq 1$,
3. Tipo III: $\gamma = \pi$ y $V = 1$,
4. Tipo IV: $\gamma = 0$ y $V = 1$.

Geoméricamente estos casos se pueden ver como sigue: para el tipo I la elipse intersecta al círculo en exactamente dos puntos distintos (como en el caso de la figura (6.4)), para el tipo II la elipse de soporte es tangente al círculo unitario en un punto, para los tipos III y IV la elipse de soporte es igual al círculo unitario pero con las distinciones que para el caso III hablaremos de movimiento retrógrado y para el caso IV tendremos movimiento directo. Obsérvese que los tres últimos casos son casos límite, valores de V y γ en estos rangos junto con un punto P sobre el círculo unitario definen únicamente una elipse de soporte.

Es conveniente definir $A = a^{3/2}$ y $e' = \sigma_1 \sqrt{1 - e^2}$, con esta notación se puede verificar que se cumplen las relaciones

$$A = (2 - V^2)^{-3/2}, \quad (6.22)$$

$$e' = V \sqrt{2 - V^2 \cos(\gamma)}.$$

Denotemos por t_{20} el tiempo de un paso en particular de m_2 por el punto Q y denotemos también por t_{30} el tiempo de un paso en particular de m_3 por el mismo punto Q . Es posible mostrar que t_{20} y t_{30} se pueden escribir como

$$t_{20} = -2 \text{sign}(\cos(\gamma)) \arccos \frac{1 - V^2 \cos^2(\gamma)}{\sqrt{1 - V^2(2 - V^2) \cos^2(\gamma)}}, \quad (6.23)$$

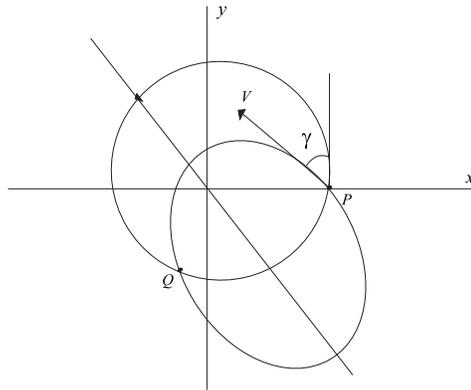


Figura 6.6: Coordenadas (V, γ) para representar los arcos tipo T .

$$t_{30} = 2(2 - V^2)^{-3/2} \arctan \frac{V\sqrt{2 - V^2} \sin(\gamma)}{V^2 - 1} - \frac{2V \sin(\gamma)}{2 - V^2}.$$

Si definimos $Z = \frac{1}{2\pi}(t_{20} - t_{30})$ entonces tendremos un cambio de coordenadas $c : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $(\gamma, V) \rightarrow (A, Z)$. Trabajaremos por simplicidad en el plano (A, Z) . De la ecuación (6.22) vemos que es monotónica en el rango $2^{-3/2} \leq A < \infty$. Entonces dado V (o A) quisiéramos saber dónde es monotónica la relación entre Z y γ dada por las ecuaciones (6.23) para esto tenemos los siguientes casos.

1. Para $A > 1$, hay una relación 1-1 entre el dominio $1 < V < \sqrt{2}$, $0 < \gamma < \pi$ y el dominio en el plano (A, Z) dado por $1 < A < \infty$, $-1 < Z < 1$ que llamaremos dominio D_1 . Por lo tanto cada punto en este dominio representa una elipse de soporte bien definida.
2. Para $A < 1$, hay una relación 2-1 entre γ y Z . Definamos $Z_m(A)$ el máximo de Z dado A y $\gamma_m(A)$ el valor donde se alcanza este máximo. Entonces el dominio $1 < V < \sqrt{2}$, $0 < \gamma < \pi$ es mapeado dos veces en el dominio del plano (A, Z) definido por $2^{-3/2} < A < 1$, $0 < Z \leq Z_m(A)$. Que llamaremos dominio D_2 y que será considerado compuesto de dos partes u hojas D_2^+ D_2^- correspondientes a los dominios $0 < V < 1$, $0 < \gamma \leq \gamma_m$ y $0 < V < 1$, $\gamma_m \leq \gamma < \pi$. Observe que D_2^+ y D_2^- comparten una frontera en común (definida como Γ) correspondiente a $Z = Z_m(A)$, $2^{-3/2} < A < 1$.
3. Para $A = 1$, de la definición de Z y usando las ecuaciones (6.23) tenemos que este caso reduce a $Z = \pi^{-1}(\gamma + \sin(\gamma)) - 1$ y por lo tanto hay una relación 1-1 entre el dominio $V = 1$, $0 < \gamma < \pi$ y la línea definida por $A = 1$, $-1 < Z < 0$ que llamaremos D_3 (vea la figura (6.7)).

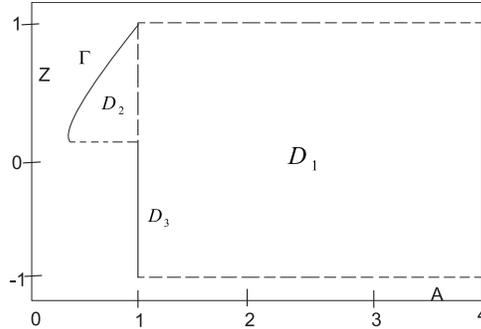


Figura 6.7: El plano (A, Z) para representar las características de los arcos tipo T en el PR3C.

Ya mencionamos que para los arcos tipo T , m_2 y m_3 hacen un número entero de revoluciones sobre sus órbitas respectivas $I \in \mathbb{Z}$ y $J \in \mathbb{Z}$, entonces $|n| = J/I$ de donde se tienen las cantidades, por la tercera ley de Kepler,

$a = (I/J)^{2/3}$ y $T = 2\pi I$, usaremos el plano (A, Z) para representar a las características de los arcos de este tipo. Cada par de enteros I, J determinan una familia $T_{I,J}$ donde el semieje de la elipse está fijo, o sea A está fijo y por lo tanto podemos variar libremente Z dentro de dominio correspondiente (y por lo tanto γ) con este valor fijo de A , entonces las características de estas familias se representan en el plano (A, Z) como líneas rectas verticales.

En resumen, tenemos que dados dos enteros I, J , un dominio en el plano (A, Z) y un punto en este dominio tal que $A = I/J$, habremos definido una elipse de soporte, sin embargo dos arcos T son posibles: uno que comienza y termina en P y otro que comienza y termina en Q . Distinguiremos estos arcos denotándolos como T^i y T^e respectivamente, entonces cada punto de las líneas $T_{I,J}$ representa dos arcos tipo T es decir cada línea $T_{I,J}$ representa dos familias de arcos tipo T que son respectivamente $T_{I,J}^i$ y $T_{I,J}^e$.

Encontramos todas las familias de arcos tipo T al considerar la línea vertical dada por $A = I/J$ para todos los valores de I, J , se tienen entonces tres casos

1. $I > J$ es decir, $A > 1$, $T_{I,J}$ siempre existe y es un segmento vertical en D_1 con terminaciones sobre las fronteras superior e inferior de D_1 , respectivamente.
2. $I < J$ es decir, $A < 1$, $T_{I,J}$ existe solo si $A > 2^{-3/2}$ y es un segmento vertical en D_2 . Cada familia $T_{I,J}^i$ y $T_{I,J}^e$ consiste en si misma de dos piezas que yacen respectivamente en las hojas D_2^+ , D_2^- con un punto en común sobre la curva Γ . Entonces, cada familia de arcos tipo T comienza sobre la frontera inferior de D_2^+ y "crece" hasta cruzar Γ , después "decrece" y termina sobre la frontera inferior de D_2^- (recuerde que este dominio involucra un máximo local).
3. $I = J = 1$ es decir, $A = 1$, $T_{1,1}$ es un segmento vertical que coincide con el dominio D_3 .

Sin embargo, considerando unos arcos límite tendremos que en efecto estas dos familias las podemos ver como una sola familia cerrada.

1. Consideremos el caso $A > 1$, de la relación (6.22) se puede ver que si $Z \rightarrow -1$ entonces $\gamma \rightarrow 0$. Por otro lado, $A > 1$ implica $V > 1$ y por lo tanto en el límite se tiene una elipse de soporte del tipo II que es directa: Esto es cierto para ambas familias $T_{I,J}^i$ y $T_{I,J}^e$ pues es claro que en el límite los dos puntos P y Q coinciden. En forma similar tenemos que si $Z \rightarrow 1$ entonces $\gamma \rightarrow \pi$ y en el límite tenemos una elipse de soporte tipo II retógrada y por la misma razón tenemos que esto es cierto para ambas familias $T_{I,J}^i$ y $T_{I,J}^e$.
2. Para $A < 1$, los resultados son similares, la única diferencia es que el arco límite directo del tipo II ahora corresponde al punto terminal sobre la

frontera inferior de D_2^+ ($Z = 0$), mientras que el arco límite retrógrado corresponde al punto terminal sobre la frontera inferior de D_2^- ($Z = 0$).

3. Para $A = 1$, tenemos que los dos puntos terminales corresponden a $Z = -1$ y $Z = 0$ y por lo tanto los correspondientes valores de γ son 0 y π por lo tanto las elipses de soporte límite son del tipo IV y III respectivamente.

Entonces con la inclusión de los dos arcos límite, las familias $T_{I,J}^i$ y $T_{I,J}^e$ se pueden considerar como parte de una sola familia cerrada que llamaremos simplemente $T_{I,J}$.

6.4.2. Familias de arcos en el PR4C

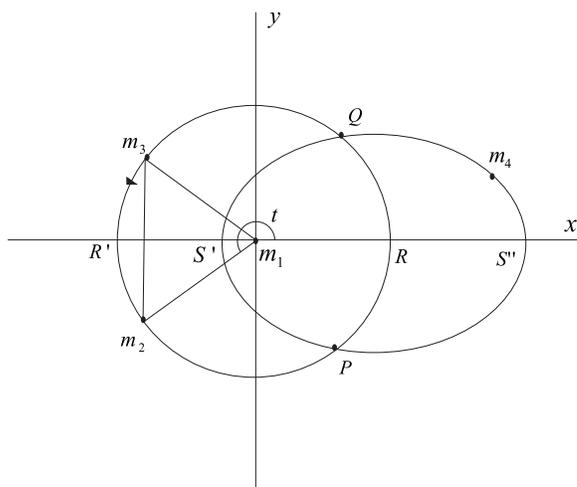


Figura 6.8: Elipse de soporte en el Problema restringido de cuatro cuerpos.

De las ecuaciones de movimiento del PR4C tenemos que si hacemos $\mu = 0$ obtenemos el problema de Kepler rotatorio con una partícula de masa $m_1 = 1$ en el origen y dos masas cero en configuración de triángulo equilátero con m_1 , el problema general se ilustra en la figura (6.8), note que se tiene un problema similar al PR3C pero con una masa extra en el círculo de radio 1. Las ecuaciones que gobiernan el movimiento de la elipse son las ecuaciones dadas por (6.17), las ecuaciones para m_2 son las mismas que en (6.18) con la excepción de que tenemos un par de ecuaciones extras para m_3 que están dadas por ¹

$$x = \cos(t - \pi/3), \quad (6.24)$$

$$y = \sin(t - \pi/3).$$

¹Como tenemos un triángulo equilátero el ángulo entre sus vértices es $\pi/3$

Esta masa extra da lugar a nuevos tipos de arcos en el sentido de la sección anterior. Empecemos el análisis y clasificación de los arcos tipo S para nuestro problema.

1. Arcos S_1 que sólo consideran colisiones de m_2 y m_4 es decir, comienzan con una colisión y terminan con colisión entre estas dos partículas.
2. Arcos S_2 que sólo consideran colisiones de m_3 y m_4 es decir, comienzan con una colisión y terminan con colisión entre estas dos partículas.
3. Un nuevo tipo de arcos S_3 que consideran colisiones entre tres partículas, es decir, arcos que comienzan con colisión entre m_2 y m_4 (digamos) y terminan con colisión entre m_3 y m_4 .

El primer caso ignora a la partícula m_3 entonces tenemos el mismo problema que en la sección anterior considerando solo a m_2 pero con la diferencia de que el eje x del sistema rotatorio no se encuentra sobre la primaria m_2 pero vía una rotación podemos montar este eje x rotatorio sobre m_2 y por lo tanto tendremos las mismas conclusiones que en el caso de la sección anterior, de esta manera la simetría obtenida no es ahora respecto del eje x rotatorio sino respecto de l_2 (vea la figura (6.9)). El segundo caso es totalmente análogo al caso 1. El tercer

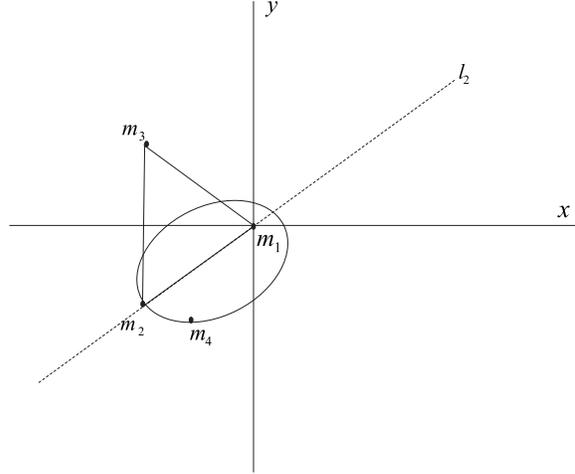


Figura 6.9: Simetría de los arcos tipo S respecto de l_2 vistos desde el sistema rotatorio.

caso requiere un poco más de cuidado, supongamos nuevamente que al tiempo $t_1 = \tau + t_0$ existe una colisión (digamos en el punto P) entre m_2 y m_4 , definamos como η el valor de la anomalía excéntrica E en ese momento entonces tenemos que en la colisión se cumplen las igualdades

$$\cos(\tau + t_0 - \pi/3) = a\sigma_0(\sigma_2 \cos(\eta) - e), \quad (6.25)$$

$$\sin(\tau + t_0 - \pi/3) = a\sigma_0\sigma_1\sigma_2(1 - e^2)^{1/2} \sin(\eta),$$

$$\tau = a^{3/2}(\eta - e\sigma_2 \sin(\eta)),$$

las incógnitas de este sistema de ecuaciones son: t_0 , τ , η , a y e . Supongamos también que al tiempo t_2 hay otra colisión ahora en el punto Q entre m_3 y m_4 (vea la figura (6.10)). Tomemos ahora (módulo $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$) como antes $t_0 = (t_1 + t_2)/2$, de la geometría del problema tenemos que a t_2 lo podemos escribir como $t_2 = -t_1 + \pi/3$ de donde se obtiene que $t_0 = \pi/6$ por lo tanto al tiempo t_0 (módulo $2k\pi$) tenemos la configuración dada por la figura (6.11).

O sea los ejes tanto fijos como rotatorios coinciden a este tiempo y m_4 se

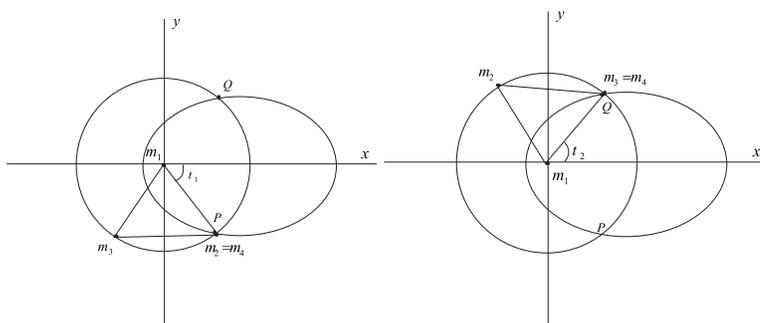


Figura 6.10: Configuraciones a los tiempos t_1 (izquierda) y t_2 (derecha).

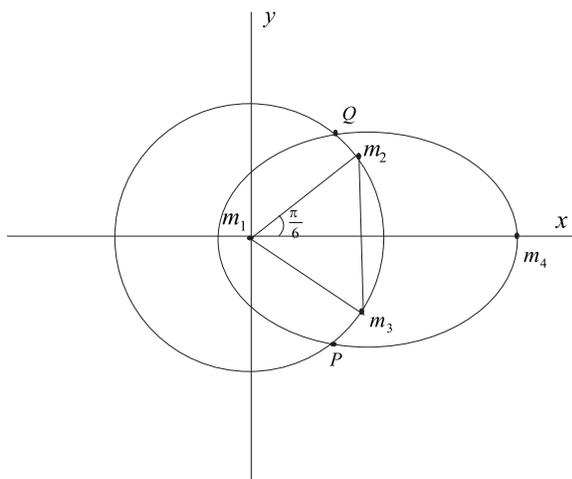


Figura 6.11: Configuración al tiempo t_0 .

encuentra sobre el eje x , entonces nuevamente por la simetría de los puntos P y

Q tenemos que estos nuevos arcos también son simétricos respecto del eje x en el sistema rotatorio. Uno podría preguntarse, al comparar las ecuaciones (6.19) con las ecuaciones (6.25), si se tienen las mismas soluciones como las obtenidas en el caso (6.19), en efecto éste es el caso, observe que al obtener la condición de periodicidad se elevan al cuadrado y se suman las dos primeras ecuaciones por lo que desaparecen los primeros miembros de las dos primeras ecuaciones en (6.25) por lo que se obtiene una ecuación de periodicidad idéntica a la del PR3C. Como consecuencia de esta discusión establecemos la siguiente

Proposición 6.4.3. *Los arcos del tipo S en el PR4C tienen las siguientes propiedades*

1. *Los arcos del caso 1 son simétricos respecto de la línea l_2 .*
2. *Los arcos del caso 2 son simétricos respecto de la línea l_3 .*
3. *Los arcos del caso 3 son simétricos respecto del eje x rotatorio.*

Las características de estos arcos están dadas por la condición de periodicidad (6.21), en cada caso τ representa el periodo medio del arco, medido desde l_2 , l_3 y el eje x respectivamente.

Para los arcos tipo T se espera que el modelo discutido en la sección anterior sirva en el PR4C. Supongamos sin pérdida de generalidad que el punto de colisión a considerar es el punto P , tenemos tres casos de arcos tipo T para este problema

1. Ambas colisiones de m_4 son con el cuerpo m_2 , arcos T_1 .
2. Ambas colisiones de m_4 son con el cuerpo m_3 , arcos T_2 .
3. La primera colisión es entre m_4 y m_2 , la segunda es entre m_4 y m_3 , arcos T_3 .

Los dos primeros casos son dos PR3C considerados por separado involucrando a las partículas m_1 , m_2 , m_4 y m_1 , m_3 , m_4 respectivamente. Estos casos no aportan nada nuevo al problema y uno se puede remitir a la sección anterior para estudiar estos casos, nuevamente el tercer caso es el más interesante y será tratado más a detalle. En el PR3C se tiene que las familias de arcos tipo T están determinadas por dos números enteros I, J que son el número de revoluciones de m_3 , m_2 , respectivamente, dichos enteros determinan n y por lo tanto a y T . Si definimos t_1 y t_2 los tiempos a los que ocurren los choques en el presente problema entonces los cuerpos m_3 , m_2 sobre el círculo efectúan un número entero de revoluciones (digamos I) más un factor de $\pi/3$ (que es el ángulo entre ellos) entre estos tiempos (vea la figura (6.12)). Entonces nos preguntamos si para el caso en consideración tenemos algo similar, para esto tenemos la siguiente

Proposición 6.4.4. *Para los arcos del caso 3 se tienen la igualdades*

$$a^{3/2} = \frac{\pi/3 + 2I\pi}{2J\pi}, \quad (6.26)$$

$$\tau = 2\pi J a^{3/2},$$

donde $I, J \in \mathbb{Z}$ y $\tau = t_2 - t_1$ es la duración del arco.

Demostración: Como ya mencionamos de la geometría del problema podemos escribir

$$t_2 = t_1 + \pi/3 + 2I\pi,$$

por otro lado como m_4 hace un número entero J de revoluciones sobre la elipse entonces podemos escribir también $\tau = JT_{sid}$ donde T_{sid} es el periodo en el sistema sidereal que es $2\pi a^{3/2}$ por lo tanto, por un lado tenemos $\tau = 2\pi J a^{3/2}$ y también $\tau = t_2 - t_1 = \pi/3 + 2I\pi$ e igualando estas cantidades obtenemos el resultado.

□

Entonces como en el caso del PR3C la cantidad $A = a^{3/2}$ está determinada por dos enteros I, J y por lo tanto podemos usar el plano (A, Z) para representar las características de estos arcos. Como A está ya determinado entonces también lo estará V (recuerde las relaciones (6.22)), por lo tanto solo falta estudiar la cantidad γ y por (6.23) determinaremos Z . Dado que a ya está fijo entonces γ estará determinado simplemente por las cantidades σ_1 y e y no por la partícula considerada sobre el círculo, es decir, γ es el mismo para los choques $m_3 - m_4$ y $m_2 - m_4$, entonces para definir Z basta considerar cualquier *tiempo particular* t_{20} o t_{30} (recuerde que la duración del arco ya se conoce por la prop. anterior) definidas en el sentido de la sección anterior. Una elección natural es considerar t_{20} tal como en (6.23) es decir considerando un choque $m_2 - m_4$ y definir así $Z = \frac{1}{2\pi}(t_{20} - t_{40})$, note que en este caso t_{40} juega el papel de t_{30} en la sección anterior. Con Z definida de esta manera tenemos que las características en este caso se representan idénticamente que en el PR3C salvo una transformación hecha en A que obviamente no afecta el modelo del plano (A, Z) dado que sus dominios dependen principalmente de la relación $Z - \gamma$.

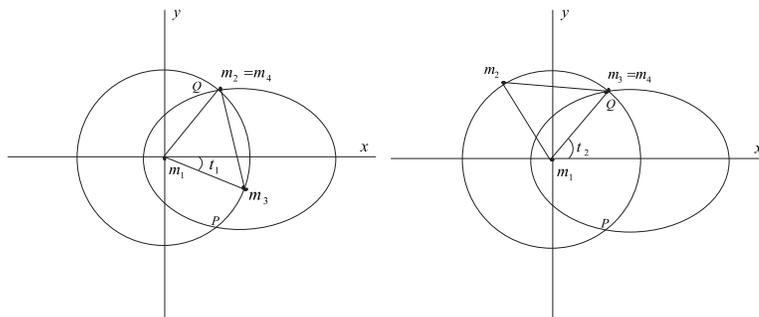


Figura 6.12: Configuraciones a los tiempos t_1 (izquierda) y t_2 (derecha) para los arcos tipo T .

Como ya se mencionó, los arcos tipo T en los casos (1) y (2) no aportan nada nuevo al problema ya que considerados por separado se pueden ver como dos problemas restringidos de tres cuerpos, entonces sus características son cerradas en el sentido de la sección anterior. Resulta interesante preguntarse si esta propiedad se preserva para el caso (3). Observe que tenemos una correspondencia directa con las cantidades A y Z del PR3C, es decir, si denotamos por A' y Z' a las respectivas cantidades del PR4C entonces no es difícil ver que estas se relacionan por medio de las igualdades

$$Z' = Z,$$

y

$$A' = \frac{\pi/3 + 2I\pi}{2\pi J} = A + \frac{1}{6J},$$

entonces se tiene que salvo una traslación sobre A los límites discutidos en el final de la sección anterior son idénticos a los de este caso en consideración. Entonces podemos concluir que en este caso las familias de arcos serán también cerradas. Resumimos los resultados de esta sección en la siguiente:

Proposición 6.4.5. *Consideremos el PR4C para el caso especial $\mu = 0$; las órbitas de segunda especie se dividen en dos grupos: tipo S y tipo T que a su vez se dividen en tres casos respectivamente: S_1, S_2, S_3, T_1, T_2 y T_3 entonces*

1. *Los arcos S_1, S_2 y S_3 están representados por la ecuación (6.21) del PR3C, por lo tanto sus características son idénticas a las del PR3C con la diferencia que la cantidad τ debe ser medida desde las líneas l_2, l_3 y el eje x rotatorio respectivamente.*
2. *Las curvas características de los arcos T_1, T_2 son idénticas a las del PR3C y por lo tanto tienen la misma estructura. Salvo la adición de $\frac{1}{6J}$, $J \in \mathbb{Z}$ en la cantidad A , las curvas características de los arcos T_3 son idénticas a las del PR3C y por lo tanto tienen la misma estructura.*

6.5. Estabilidad de órbitas periódicas y bifurcaciones

En la teoría preliminar sobre órbitas periódicas se estableció el teorema 6.1.6 que nos proporciona un criterio matemático en general sobre la estabilidad de una órbita periódica. Sin embargo, si queremos estudiar la estabilidad de familias completas de órbitas periódicas debemos crear herramientas que nos permitan hacer esto de una manera más rápida y eficiente. Hemos decidido poner aparte esta sección dado que, como se observará más adelante, la estabilidad y bifurcación de familias de órbitas periódicas no son fenómenos aislados dado que el estudio de la estabilidad de una familia nos puede dar información sobre alguna bifurcación de ésta. En el capítulo 11 de [47] el lector puede encontrar una amplia discusión sobre este tema. Como dijimos anteriormente, el enfoque

que adoptaremos para estudiar las relaciones entre estos dos temas es el que se encuentra en [33] dado que es más adecuado al enfoque que estamos siguiendo en nuestro estudio de familias de órbitas periódicas. Supongamos que hemos calculado por algún medio familias de órbitas periódicas para $\mu > 0$ en el PR4C y queremos estudiar su estabilidad en conjunto, esto nos lleva a analizar la naturaleza de los multiplicadores característicos del mapeo de Poincaré ψ . Cuando estudiamos el tema de continuación analítica vimos que la autonomía de un sistema y la presencia de integrales primeras nos permiten reducir la dimensión del mapeo de Poincaré (teorema 6.2.9), en nuestro caso tenemos la presencia de una integral primera, por lo tanto podemos reducir el mapeo a un espacio de dimensión 2, ahora bien, por motivos computacionales queremos hacer explícito este mapeo. Ya mencionamos que para nuestros propósitos es suficiente conocer las condiciones iniciales x_0 y \dot{x}_0 de una órbita periódica, o equivalentemente, es suficiente restringirnos al estudio de las intersecciones de estas órbitas con el plano (x_0, \dot{x}_0) . Si hacemos $\xi_1 = x_0$ y $\xi_2 = \dot{x}_0$ entonces $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ denotará a las condiciones iniciales requeridas, denotemos también por x_1 y \dot{x}_1 a los valores del mapeo de Poincaré al tiempo de cruce $\tau(\xi)$, es decir,

$$x_1 = \psi_1(\xi),$$

$$\dot{x}_1 = \psi_2(\xi),$$

donde $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, por lo tanto

$$A = \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

donde a, b, c y d son las respectivas derivadas parciales. Como el mapeo de Poincaré es simpléctico, tenemos que $ad - bc = 1$, el polinomio característico de A está dado por

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + 1 = 0,$$

el discriminante de $p(\lambda)$ es $D = (a + d)^2 - 4$, si $|a + d| < 2$ tenemos dos eigenvalores complejos conjugados $\lambda_1 = re^{i\theta}$ y $\lambda_2 = re^{-i\theta}$, de aquí se tiene automáticamente que A es diagonalizable y $\lambda_1 \lambda_2 = 1$ que implica $r = 1$ esto es el caso de estabilidad en el sentido lineal. En caso de que tengamos órbitas periódicas $(x(t), y(t))$ simétricas respecto del eje x , tenemos que $(x(-t), -y(-t))$ describe la misma órbita periódica, entonces el mapeo de Poincaré también lo podemos escribir como

$$x_0 = \psi_1(x_1, -\dot{x}_1),$$

$$-\dot{x}_0 = \psi_2(x_1, -\dot{x}_1),$$

sólo que en este caso $\xi_1 = x_1$ y $\xi_2 = -\dot{x}_1$. Entonces se tiene que

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix},$$

sin embargo, este segundo caso considera $t \rightarrow -t$ por lo tanto este caso es equivalente a la inversa del mapeo del primer caso, entonces debemos tener

$$\frac{\partial \psi^{-1}}{\partial \xi} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix},$$

pero la inversa de la matriz A está dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

igualando las matrices $\frac{\partial \psi^{-1}}{\partial \xi}$ y A^{-1} se obtiene $a = d$. Por lo tanto la condición de estabilidad en este caso se reduce a pedir $|a| < 1$. Observe que este es un criterio muy sencillo para determinar la estabilidad de una órbita sin necesidad de calcular todos los multiplicadores característicos, desde un punto de vista computacional es muy útil. Note que por simplicidad en esta discusión no hemos usado en nada la dependencia sobre un parámetro dado y que este criterio se cumple para una sola órbita en particular, pero sin duda el concepto puede extenderse a una familia de órbitas periódicas parametrizada por alguna cantidad α . En nuestro problema tenemos que podemos usar como parámetro α a μ o la constante de Jacobi C , dejando la otra constante. Si tomamos un valor de μ constante y tomamos como parámetro a C tiene varias ventajas, una de ellas es que la constante C puede variar sobre toda la recta real al contrario del parámetro de masa que solo puede variar entre 0 y $1/2$ para que el problema tenga significado físico. Otra ventaja es que en niveles de energía fijos no podríamos encontrar relaciones entre órbitas periódicas y puntos de equilibrio a menos que estemos en el valor de energía de uno de esos puntos lo cual nos restringe en la exploración; las ventajas de usar esta metodología será evidente en lo subsecuente.

Estudiamos las relaciones existentes entre bifurcaciones de órbitas y su estabilidad en general y después nos restringiremos al caso particular de órbitas simétricas. Como ya ha sido mencionado, el estudio de una órbita periódica está determinada por el estudio de los puntos fijos del mapeo $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donde

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1(x_0, \dot{x}_0, C) \\ \psi_2(x_0, \dot{x}_0, C) \end{pmatrix},$$

donde C es el parámetro a considerar. En el caso de una órbita periódica se tiene que

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ \dot{x}_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_1(x_0, \dot{x}_0, C) \\ \psi_2(x_0, \dot{x}_0, C) \end{pmatrix},$$

o en coordenadas

$$x_0 = \psi_1(x_0, \dot{x}_0, C), \quad (6.27)$$

$$\dot{x}_0 = \psi_2(x_0, \dot{x}_0, C). \quad (6.28)$$

Consideremos un punto cualquiera A de coordenadas (x_0, \dot{x}_0, C) sobre una curva característica γ y estudiemos la vecindad de ese punto, diferenciando las

ecuaciones (6.27) y (6.28) obtenemos

$$(a-1)dx_0 + bdx_0 + \frac{\partial\psi_1}{\partial C}dC = 0, \quad (6.29)$$

$$cdx_0 + (d-1)dx_0 + \frac{\partial\psi_2}{\partial C}dC = 0, \quad (6.30)$$

donde $a = \frac{\partial\psi_1}{\partial x_0}$, $b = \frac{\partial\psi_1}{\partial \dot{x}_0}$, $c = \frac{\partial\psi_2}{\partial x_0}$ y $d = \frac{\partial\psi_2}{\partial \dot{x}_0}$. Estas ecuaciones determinan la dirección de la tangente a la característica en el punto A . Supongamos por ejemplo que $b \neq 0$, combinando las ecuaciones (6.27) y (6.28) y haciendo uso del teorema de la función implícita podemos escribir

$$\psi_2(x_0, \dot{x}_0(x_0, C), C) - \dot{x}_0 := \varphi(x_0, C) = 0. \quad (6.31)$$

La función φ representa una curva γ' en el plano (x_0, C) que en realidad se trata de la proyección de la característica γ sobre el plano (x_0, C) . Por tanto la tangente a γ' en el punto A' (la proyección de A) está dada por la ecuación

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}dx_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial C}dC = 0, \quad (6.32)$$

diferenciando (6.31) usando (6.30) y usando que se cumple la relación $ad-bc = 1$ obtenemos

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} = c - \frac{(d-1)(a-1)}{b} = \frac{a+d-2}{b}, \quad (6.33)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial C} = c - \frac{\partial\psi_2}{\partial C} - \frac{d-1}{b} \frac{\partial\psi_1}{\partial C}, \quad (6.34)$$

hacemos las siguientes definiciones

Definición 6.5.1. Una órbita periódica se llama una órbita crítica de primer tipo si ésta cumple la ecuación $a+d=2$, y se llama órbita crítica de segundo tipo si cumple $a+d=-2$.

Supongamos que A es un punto crítico de primer tipo, entonces se cumple la relación $\frac{\partial\varphi}{\partial x_0} = 0$. Distinguiremos los siguientes dos casos

1. $\frac{\partial\varphi}{\partial C} \neq 0$, la ecuación (6.32) muestra que la tangente en un punto A' es paralela al eje x_0 . es decir, A' es un extremo en C de la curva γ' figura (6.13.a).
2. $\frac{\partial\varphi}{\partial C} = 0$, A' es un punto doble, es decir, será un punto cúspide (6.13.b) o un punto de intersección con otra rama (curva) δ' (6.13.c).

entonces podemos establecer la siguiente

Proposición 6.5.2. Un punto crítico de primer tipo es un extremo en C de la característica o es un punto de intersección con otra característica.

No es difícil ver que esta misma proposición se obtiene si se suponen las otras cantidades $(a - 1, c, d - 1)$ distintas de cero. Nos preguntamos ahora que sucede con la estabilidad en una vecindad de A .

El criterio de estabilidad está dado por la desigualdad $|a + d| < 2$, entonces de la ecuación (6.33) se tiene que hay estabilidad si se tiene $b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2} < 0$ e inestabilidad en el caso contrario. El coeficiente b que se supone no nulo en A' guarda un signo constante en una vecindad de A' . Entonces se tiene que la cantidad $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}$ cambia de signo en dicha vecindad, por lo tanto se obtienen 4 casos posibles que se muestran en la figura (6.14), los signos $+$ y $-$ corresponden a la cantidad $b \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_0^2}$. Supongamos ahora que el punto A es un punto crítico de segundo tipo. Los valores propios dados por la ecuación característica $\lambda^2 - 2(a + d)\lambda + 1 = 0$ son iguales a -1 , consideremos ahora el mapeo ψ^2 en vez de mapeo ψ , entonces sus valores propios son iguales a los cuadrados de los anteriores es decir, $+1$. Si denotamos como a_2, b_2, c_2 y d_2 a los coeficientes asociados a ψ^2 se tiene que $a_2 + d_2 = 2$ y tenemos así el análisis del caso anterior (primer tipo)

1. A es un punto extremo para C (pero de ψ^2). Entonces es un extremo en una vecindad de la característica γ_2 (γ_2 puede verse como la característica γ pero compuesta de las órbitas recorridas dos veces) pero esto implicaría que A es un extremo de γ o sea que se tiene $a + d = 2$ lo que es una contradicción ya que A es de segundo tipo, por lo tanto no se puede dar

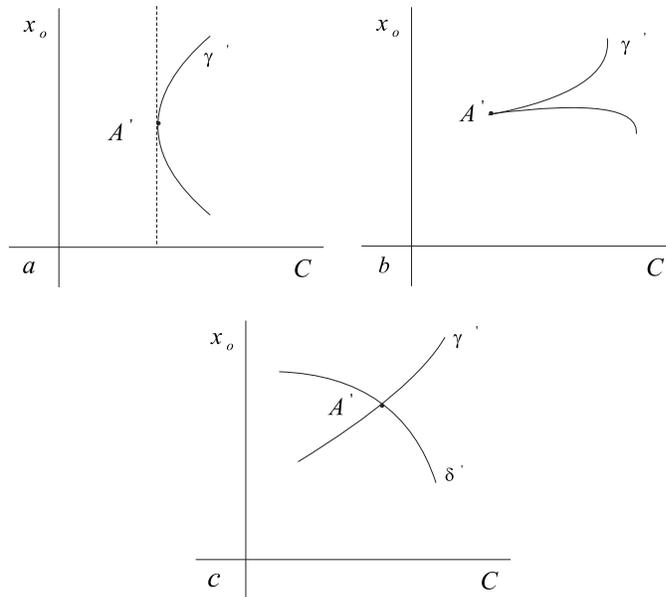


Figura 6.13: Formas posibles de las curvas características en la vecindad de un punto crítico de primer tipo.

este caso.

2. O bien A es una intersección con otra característica δ , tengamos en cuenta que estamos considerando la transformación ψ^2 entonces esta característica δ corresponde a órbitas de periodo doble o periodo simple, pero si las órbitas son de periodo simple entonces necesariamente $\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = 0$ y esto implica que A es de primer tipo, una contradicción. Por lo tanto δ necesariamente está compuesta de órbitas de periodo doble y la denotaremos por δ_2 .

Entonces en un punto A , la órbita periódica de periodo doble se reduce a una órbita periódica simple pero recorrida dos veces, por lo tanto establecemos la siguiente

Proposición 6.5.3. *Un punto crítico de segundo tipo es un punto de intersección con una característica de órbitas de periodo doble y un extremo en C para esta característica (δ_2).*

Los resultados anteriores se cumplen para órbitas periódicas cualesquiera, en particular para el caso $\dot{x}_0 = 0$ (el caso de órbitas simétricas), entonces las características δ' , δ'_2 y γ' dejan de ser proyecciones sobre el plano (x_0, C) .

Sea A un punto crítico en este caso particular que no es un extremo para C , entonces es un cruce con otra característica. Por construcción, el conjunto de

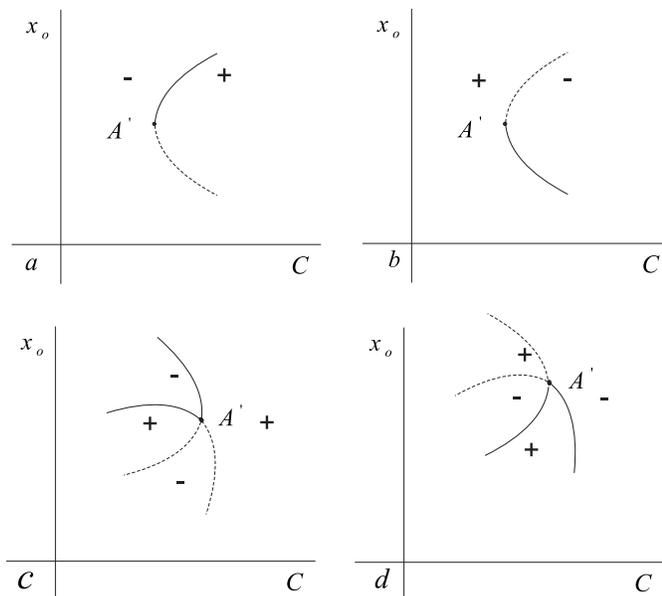


Figura 6.14: Cambios en la estabilidad cuando se pasa un punto crítico.

características debe ser simétrico respecto del plano $\dot{x}_0 = 0$. En consecuencia esta segunda característica está en el plano $x_0 = 0$, o es simétrica respecto a él y lo corta perpendicularmente. En resumen, se tiene 6 tipos de puntos críticos y se puede obtener información sobre el tipo de punto crítico si se calculan los valores (como se muestra en [33]) de las cantidades a , b , c y d en dicho punto.

$$a = d = 1 \begin{cases} c = 0 & \text{tipo I, II ó III} \\ b = 0 & \text{tipo IV} \end{cases}$$

$$a = d = -1 \begin{cases} c = 0 & \text{tipo V} \\ b = 0 & \text{tipo VI} \end{cases}$$

Notemos que el análisis previo hecho para un punto crítico cualquiera de órbitas periódicas simples, es decir, donde las órbitas solo tienen dos cruces con la sección de Poincaré, puede hacerse inmediatamente en el caso de órbitas de periodo $n \in \mathbb{Z}$. Basta con sustituir en todas partes del caso de periodo simple por periodo n y periodo doble por periodo $2n$. En conclusión tenemos que en los puntos críticos, además de tener cambios de estabilidad, podemos tener bifurcaciones o cruces con otras familias de órbitas periódicas, y toda esta información está contenida en las cantidades a , b , c y d solamente; entonces solo hay que calcular estas cantidades en cada paso para ir obteniendo la información necesaria, lo que es muy económico en los cálculos. Sin embargo, aún no sabemos como implementar numéricamente estos métodos, eso será el tema de la siguiente sección.

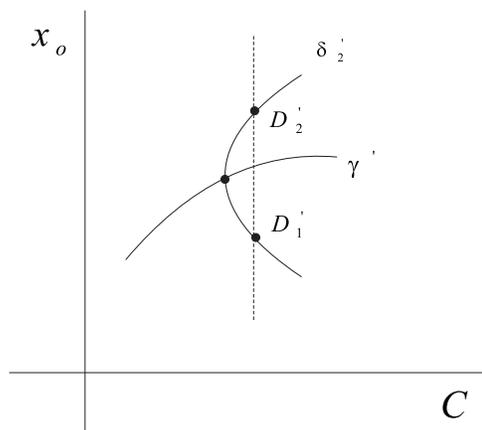


Figura 6.15: Vecindad de un punto crítico de segundo tipo.

6.6. La búsqueda numérica de familias de órbitas periódicas

En esta sección abordamos los fundamentos matemáticos principales para llevar a cabo una implementación numérica de la técnica conocida como continuación analítica. Aunque en las secciones previas se discutió continuación analítica de órbitas periódicas en sistemas autónomos, esta técnica no se limita a tal problema. Si nos sentamos a pensar un momento, notamos que continuación analítica de órbitas periódicas consiste esencialmente en encontrar puntos fijos de la aplicación de Poincaré $\psi(x, \alpha)$ o equivalentemente encontrar ceros de la función $G(x, \alpha) = \psi(x, \alpha) - x$. Por lo tanto, desde un punto de vista numérico, la continuación analítica se trata de encontrar ceros consecutivos de cierto tipos de funciones, aunque sabemos que encontrar ceros de funciones es un problema nada trivial. Ya hemos visto que el seguimiento de familias de órbitas periódicas presenta puntos singulares o *críticos*, por ejemplo puntos donde se intersectan dos curvas características de familias de órbitas periódicas distintas, entonces es natural preguntarse ¿cómo calcular las cantidades definidas en la sección anterior para detectar estos puntos singulares?. En lo que sigue discutiremos de manera breve resultados elementales que nos servirán para la implementación numérica del problema. El lector que no esté familiarizado con implementaciones numéricas y análisis numérico de bifurcaciones los textos de [28] y [37] son dos excelentes referencias para consultar.

6.6.1. Continuación numérica

Empezaremos dando unas definiciones preliminares [28]

Definición 6.6.1. Sean $k, N \in \mathbb{N}$ con $N > k \geq 1$. Un subconjunto $S \subset \mathbb{R}^N$ se llama una variedad de clase C^1 de dimensión k si para cada $\bar{x} \in S$ existe una vecindad U de \bar{x} en \mathbb{R}^N y una función $G : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$ tal que $G_x(\bar{x})$ (la derivada de G) tiene rango $N - k$ y $S \cap U = \{x \in U : G(x) = 0\}$. Diremos que G es una función definida localmente para S y $N - k$ se llama la codimensión de la variedad.

Definición 6.6.2. Si $N > k \geq 1$ y $G : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$ es una función de clase C^1 , entonces G se llama una función definida globalmente para la variedad $S = \{x \in \mathbb{R}^N : \text{Rang}(G_x(x)) = N - k\}$. Los puntos de esta variedad se llaman puntos ordinarios del conjunto de ceros de G .

Definición 6.6.3. Sean $k, N \in \mathbb{N}, N > k \geq 1$, S una variedad de clase C^1 en \mathbb{R}^N de dimensión k , $\bar{x} \in S$ y $G : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$ una función definida localmente para S en \bar{x} . Entonces el espacio nulo de $G_x(\bar{x})$ se define como el espacio tangente de S en \bar{x} .

En particular estamos interesados en el caso $k = 1$. Sea $G(x, \alpha) : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ donde $x \in \mathbb{R}^N$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, una función de clase C^1 y sea $Z = \{y \in \mathbb{R}^{N+1} : G(y) = 0\}$ y S el conjunto de todos los puntos ordinarios en Z , entonces S es una

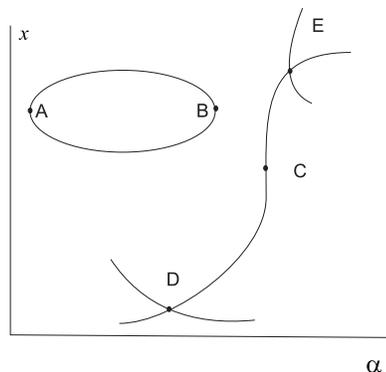


Figura 6.16: Conjunto de ceros de una función no lineal.

variedad diferenciable de dimensión 1. Las componentes conexas de S se llaman ramas. Un retrato posible para Z se presenta en la figura (6.16), obviamente D y E no pertenecen a S . Observe que S tiene 8 componentes conexas (ramas). El punto D lo llamamos un punto de bifurcación transcrito; al punto E lo llamamos un punto de bifurcación tipo *trinche*. A, B y C están en S pero son especiales con respecto al parámetro α porque las tangentes en esos puntos son ortogonales al eje α . Entonces el parámetro α no se puede usar para parametrizar S en una vecindad de A, B o C . Esto nos lleva a la siguiente definición

Definición 6.6.4. Si denotamos como $[G_x, G_\alpha]$ a la derivada de $G(x, \alpha) : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ entonces un punto $(x, \alpha) \in S$ se llama un punto límite o punto crítico si G_x es singular, en caso contrario los llamamos puntos regulares.

Volviendo al problema, estamos interesados en calcular una rama solución $x(\alpha)$ de la ecuación

$$G(x, \alpha) = 0, \quad (6.35)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{R}$ y $G(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n$. Por lo visto anteriormente, tenemos que en puntos regulares podemos utilizar a α como parámetro, entonces para cada valor de α podríamos utilizar el Método de Newton por ejemplo por su rápida convergencia para calcular el valor de $x \in \mathbb{R}^n$. Pero como ya se vió, en puntos límite esta metodología falla por la singularidad de G_x entonces surge una cuestión: ¿Que método debemos usar para salvar esta situación? La respuesta la obtenemos del método conocido como continuación por pseudolongitud de arco.

6.6.2. Continuación numérica por pseudolongitud de arco

Supongamos que conocemos una solución (x_0, α_0) de (6.35), para encontrar una nueva solución (x_1, α_1) necesitamos un punto inicial $(\hat{x}, \hat{\alpha})$ y una estrategia para determinar (x_1, α_1) . Supongamos que un punto (x_1, α_1) y un punto previo (x_0, α_0) con vector tangente t_0 se conocen. Deseamos encontrar un vector tangente t_1 en (x_1, α_1) o sea pedimos que

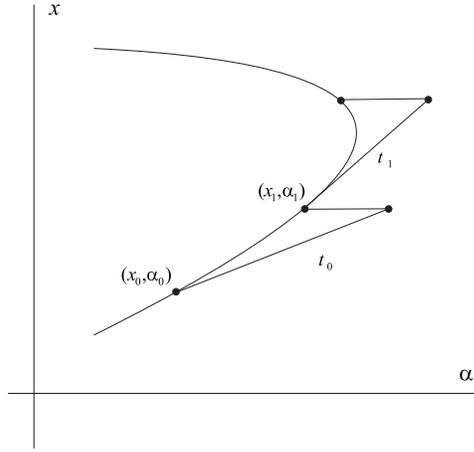


Figura 6.17: Continuación a lo largo de una rama por pseudolongitud de arco.

1. $[G_x, G_\alpha] \cdot t_1 = 0$.
2. Para preservar la orientación de la rama pediremos además que $\langle t_0, t_1 \rangle = 1$.

Escribamos $t_1 = \begin{pmatrix} t_1^x \\ t_1^\alpha \end{pmatrix}$ y $t_0 = \begin{pmatrix} t_0^x \\ t_0^\alpha \end{pmatrix}$ entonces juntando las condiciones 1 y 2 obtenemos

$$\begin{pmatrix} G_x & G_\alpha \\ t_0^{(x)T} & t_0^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1^x \\ t_1^\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

donde $G_x \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, G_α y t_0^x están en \mathbb{R}^n y t_0^α es un escalar.

Supongamos que se ha escogido un tamaño de paso Δs entonces nuestro paso predictor es

$$\hat{x} = x_1 + \frac{\Delta s}{\|t_1\|} t_1^x,$$

$$\hat{\alpha} = \alpha_1 + \frac{\Delta s}{\|t_1\|} t_1^\alpha.$$

A esto lo llamamos un predictor de pseudolongitud de arco dado que Δs mide la longitud de arco a lo largo de la línea tangente y por lo tanto aproxima a la longitud de arco a lo largo de la rama.

Hay varias posibilidades para un caso corrector, solo presentaremos una de ellas que es la que se utilizará en las implementaciones numéricas. Esta opción trata de buscar una solución de (6.35) en un hiperplano ortogonal a t_1 o sea que satisfaga el sistema

$$G(x, \alpha) = 0,$$

$$t_1^x(x - \hat{x}) + t_1^\alpha(\alpha - \hat{\alpha}) = 0.$$

Nos gustaría nuevamente aplicar un método de Newton o cuasi-Newton a este sistema, para resolverlo entonces debemos verificar que

$$J = \begin{pmatrix} G_x & G_\alpha \\ t_1^{(x)T} & t_1^\alpha \end{pmatrix},$$

sea no singular. Para esto tenemos la siguiente

Proposición 6.6.5. *El rango de J es igual a $n + 1$.*

Demostración. Sabemos por elección de G que $[G_x, G_\alpha]$ tiene rango n entonces supongamos que existe $j \in 1, \dots, n$ tal que el j -ésimo renglón $[G_x, G_\alpha]_j$ de $[G_x, G_\alpha]$ es linealmente dependiente con t_1^T es decir, que existe $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ tal que

$$[G_x, G_\alpha]_j = a \cdot t_1^T,$$

entonces $[[G_x, G_\alpha] \cdot t_1]_j = a \cdot \|t_1\|^2$ es decir, $[G_x, G_\alpha] \cdot t_1 \neq 0$, pues $t_1 \neq 0$, esto es una contradicción con la condición 1 sobre la construcción de t_1 . Por lo tanto el rango de J es $n + 1$ y por lo tanto invertible.

□

Ahora que ya tenemos un método bien definido sobre cómo implementar un seguimiento numérico de familias de órbitas periódicas, estamos listos para hacer una exploración en el PR4C. Los resultados de tal exploración se presentan en el siguiente capítulo.

Capítulo 7

Clasificación de Familias de Órbitas Periódicas

En este capítulo se ofrece una clasificación de algunas familias de órbitas periódicas que fuimos capaces de calcular numéricamente vía la metodología que discutimos en el capítulo anterior. Estas órbitas fueron calculadas con precisión doble con un integrador multipaso Adams–Bashfort de orden variable para mayor precisión. Como se observará más adelante todas las familias presentan órbitas de expulsión-colisión, por lo tanto en nuestra búsqueda numérica las ecuaciones regularizadas en sus distintas versiones que se discutieron en el capítulo 5 fueron necesarias para pasar a través de estas colisiones. Por motivos históricos como teóricos hemos denotado a la familias de órbitas periódicas por letras del alfabeto a manera del PR3C, algunas familias de órbitas presentan subíndices en sus nombres, tales subíndices denotan el número de *rizos* que da la órbita alrededor de la(s) primaria(s) en consideración. Como ya mencionamos, usaremos el plano de características (x_0, C) para representar a estas familias de órbitas periódicas dado que todos sus elementos son órbitas periódicas simétricas con respecto al eje x , cuando estudiemos la estabilidad de estas familias, usaremos el plano (a, C) para representar las curvas de estabilidad $a(C)$ donde a es el índice de estabilidad.

Presentamos un estudio exhaustivo de nueve familias de órbitas periódicas cuya existencia está garantizada por las técnicas analíticas que discutimos anteriormente, hemos escogido el valor de $\mu = 0,019$, puesto que este valor del parámetro de masas se encuentra en el rango donde la configuración equilátera de las tres primarias es estable, es decir; este valor se encuentra en el intervalo $[0, \mu_r]$ donde μ_r es el valor crítico de Routh [4], [68]. El estudio está compuesto principalmente en identificar a cada familia en *fases*, donde cada fase separa a la familia en órbitas *destacadas* en el sentido de que estas órbitas son de colisión, pertenecientes a puntos críticos entre familias o que pertenezcan al principio de terminación natural. En la figura (7.1) presentamos las curvas características de las familias

mencionadas, los diversos colores en las curvas simbolizan a las distintas fases de las familias y los pasos por colisión en la evolución de las familias de órbitas periódicas [13], en las secciones siguientes esto será más evidente.

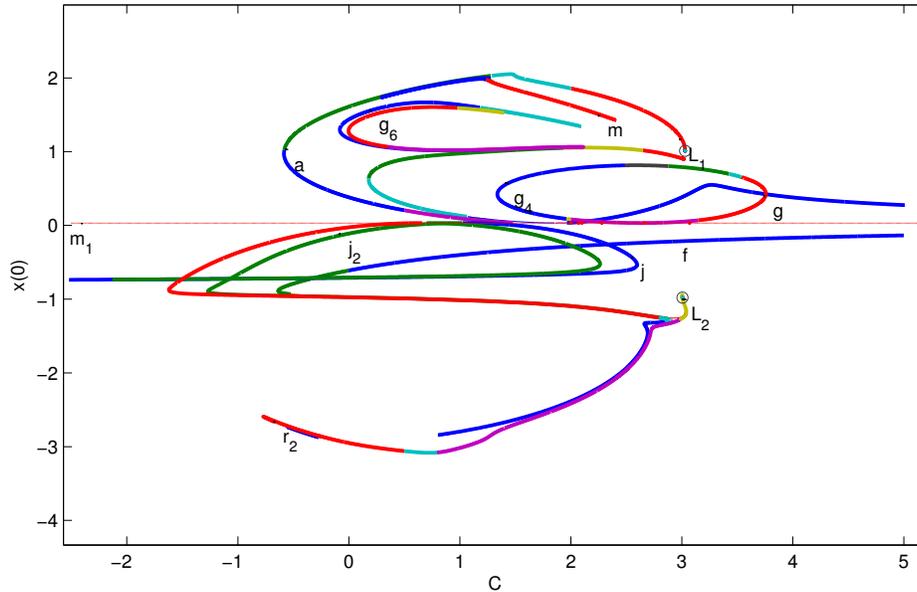


Figura 7.1: Curvas características para las nueve familias de órbitas periódicas simétricas.

7.1. La familia g de órbitas periódicas directas alrededor de m_1

La primera fase de esta familia comienza con órbitas periódicas directas circulares e infinitesimales alrededor de la primaria m_1 dadas para valores grandes de la constante de Jacobi C , el tamaño de las órbitas se incrementa conforme el valor de C decrece hasta que dichas órbitas alcanzan una órbita de colisión con m_1 , a este conjunto de órbitas periódicas se le llama primera fase, vea la figura (7.14). La segunda fase de esta familia comienza cuando las órbitas pasan a través de esta colisión, dichas órbitas forman dos rizos alrededor de m_1 . El rizo interno se incrementa y el rizo externo se reduce conforme el valor de C decrece, ambos rizos se vuelven indistinguibles en el valor de $C = 0,1797$, en este punto se alcanza un valor de bifurcación con la familia f que se describirá más adelante. En este punto termina la segunda fase y comienza la tercera, ahora

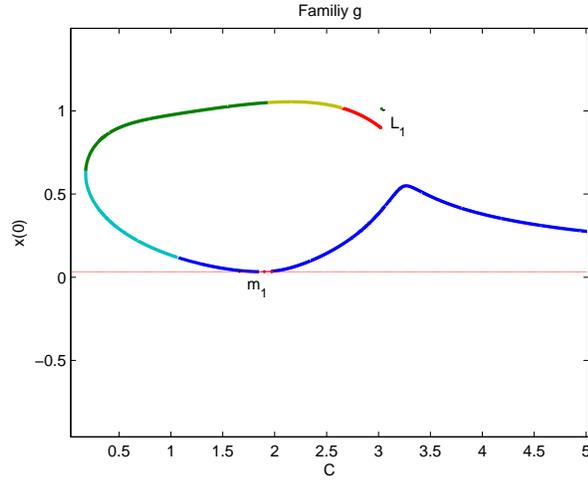


Figura 7.2: Curva característica para la familia g .

los rizos anteriores se intercambian, es decir; el rizo interior se reduce y el rizo exterior se expande conforme el valor de C se incrementa. Si seguimos la evolución de esta fase encontramos que nuevamente se alcanza una órbita de colisión con m_1 pues el rizo interior colapsa a tal primaria, en este punto comienza la cuarta fase, conforme la constante de Jacobi se incrementa, la parte media de la órbita también se incrementa, esta cuarta y última fase sigue evolucionando hasta que termina en órbitas asintóticas al punto de equilibrio L_2 , o de manera más precisa; la constante de Jacobi oscila en una pequeña vecindad alrededor de valor C_2 y el periodo de las órbitas comienza a incrementarse fuertemente. Como en el caso de la Categoría de Copenhague del PR3C, esta familia presenta la denominada terminación "blue sky catastrophe".

7.2. La familia f de órbitas retrógradas alrededor de m_1

La primera fase de esta familia comienza como en la familia g , con órbitas periódicas circulares infinitesimales alrededor de m_1 solo que esta vez las órbitas son retrógradas, la primera fase de esta familia evoluciona en forma similar a la correspondiente de la familia g conforme el valor de C decrece monótonamente, sin embargo, este decremento de la constante de Jacobi se detiene en el valor $C = -0,6379$ y la constante de Jacobi comienza a crecer, es decir; se alcanza un punto de retorno, aquí termina la primera fase. Después de este punto comienza naturalmente la segunda fase, el tamaño de las órbitas periódicas continúa incrementándose pero ahora estas órbitas tienden a colisionar con las primarias

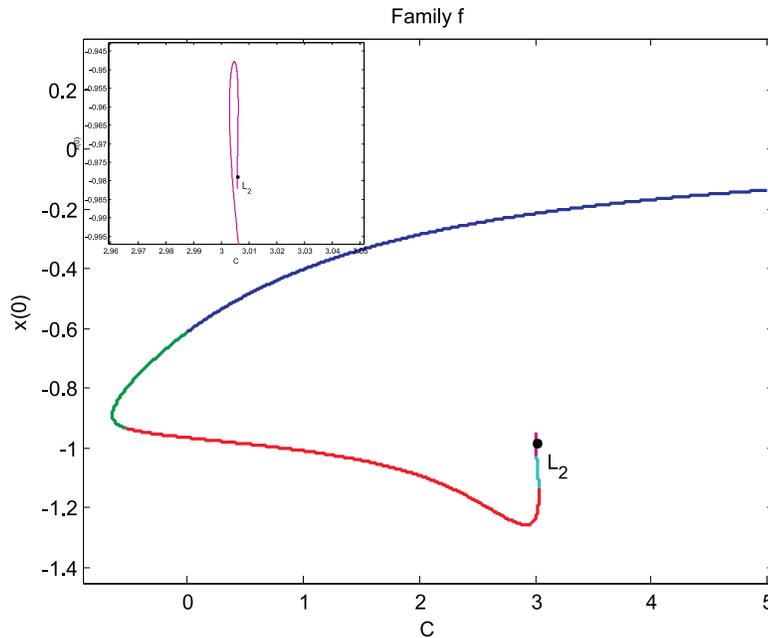


Figura 7.3: Curva característica de la familia f y magnificación de la terminación de la familia en el punto de equilibrio L_2 .

m_2 y m_3 pero estas colisiones nunca se alcanzan por el contrario, las órbitas se vuelven asintóticas al punto L_2 , o sea esta familia termina de manera similar a la familia g , figura (7.3).

7.3. La familia a de órbitas retrógradas alrededor de L_1

El comienzo de esta familia está garantizado por el célebre teorema del centro de Liapunov dado que el espectro de este punto de equilibrio satisface las condiciones que establece este teorema. Si tomamos a esta familia de órbitas periódicas que emanan del punto L_1 como el comienzo de la primera fase y la seguimos numéricamente para valores de C menores que C_1 encontramos que conforme el decremento de C es monótono el tamaño de las órbitas comienza a incrementarse hasta el punto que una órbita de colisión con m_1 aparece, de esta manera acaba la primera fase. Después de esta colisión comienza la segunda fase, el valor de C continua decreciendo monótonicamente pero un segundo rizo aparece sobre las órbitas, este segundo rizo crece conforme seguimos la segunda fase hasta que un nuevo punto de retorno se alcanza en el valor $C = -0,5846$, en este punto los rizos tanto interior como exterior coinciden y como en las

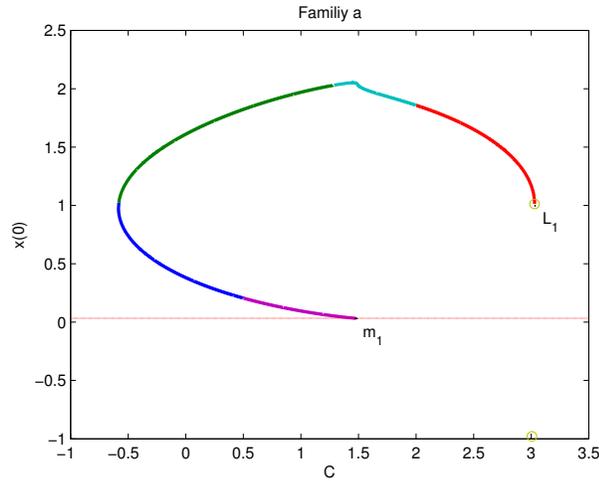


Figura 7.4: Curva característica de la familia a .

familias previas, después de este punto ambos rizos se intercambian y el nuevo rizo interno comienza a colapsar conforme C se incrementa hasta alcanzar una nueva órbita de colisión con m_1 , aquí termina la tercera fase de la familia, figura (7.16).

7.4. La familia g_4

Esta familia es el primer ejemplo de lo que se denomina una familia cerrada de órbitas periódicas, figura (7.5). La primera fase de esta familia se compone de órbitas que forman 4 rizos alrededor de m_1 , cabe señalar que todas las órbitas son retrógradas, siguiendo la evolución de la primera fase, encontramos que conforme el valor de C decrece estos 4 rizos se acercan más y más hasta que se vuelven indistinguibles, es decir; se alcanza un punto de retorno en $C = 1,3381$, en este punto comienza la segunda fase, ahora los 4 rizos se comienzan a separar conforme C se incrementa y las órbitas tienden a colisión con m_1 pues las intersecciones entre los rizos colapsan a m_1 . Si seguimos la familia después de esta colisión encontramos la tercera fase de esta familia, los rizos mencionados cambian su multiplicidad, es decir; 4 rizos internos alrededor de m_1 aparecen junto con 4 rizos externos, figura (7.17), conforme el valor de C se incrementa los rizos internos incrementan su tamaño mientras que los rizos exteriores disminuyen simultáneamente hasta desaparecer, así termina la tercera fase. La cuarta fase comienza cuando los rizos alrededor de m_1 incrementan su tamaño conforme C continua creciendo monótonicamente. Estos rizos coinciden en el valor $C = 3,7581$ y así un nuevo punto de retorno aparece. Después de este punto de retorno comienza la quinta fase, ahora los rizos se intercambian

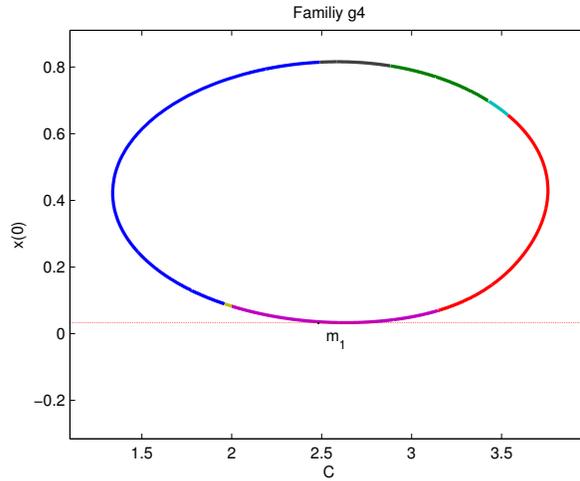


Figura 7.5: Curva característica de la familia g_4 .

como se esperaba y los extremos de los rizados exteriores se vuelven cúspides, es decir; no hay más intersecciones ortogonales con el eje- x , este es el fin de la quinta fase. Conforme C decrece los rizados de las órbitas tienden a colisión con m_1 y la sexta y última fase termina en este punto. Obsérvese que esta colisión es también el comienzo de la primera fase, por lo tanto la familia es cerrada.

7.5. La familia g_6

Esta familia es otro ejemplo de una familia cerrada de órbitas periódicas, sin embargo, el comportamiento de sus órbitas es más complicado que las de las familias previas. Hemos nombrado a esta familia como g_6 porque existe una parte en esta familia donde las órbitas tienen 6 rizados alrededor de la primaria m_1 pero si seguimos la evolución de esta familia encontramos que las órbitas presentan una dinámica más complicada, por lo tanto no es muy claro como clasificar las fases de esta familia, por simplicidad hemos nombrado primera fase a la sección exterior entre los puntos de retorno de la curva característica y segunda fase a la sección interior. En cada fase mostramos figuras representativas para mostrar la dinámica de las órbitas, figura (7.18).

7.6. La familia m de órbitas retrógradas alrededor de m_1 , m_2 y m_3

Esta familia consiste de órbitas periódicas retrógradas alrededor de las tres primarias, sin embargo, las órbitas no rodean a las tres primarias simultáneamente,

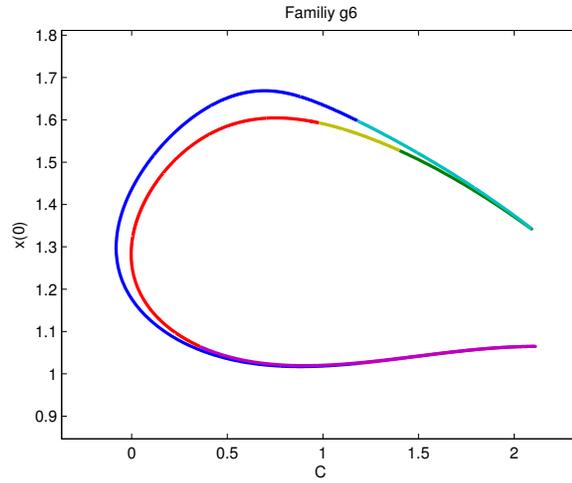


Figura 7.6: Curva característica de la familia g_6 .

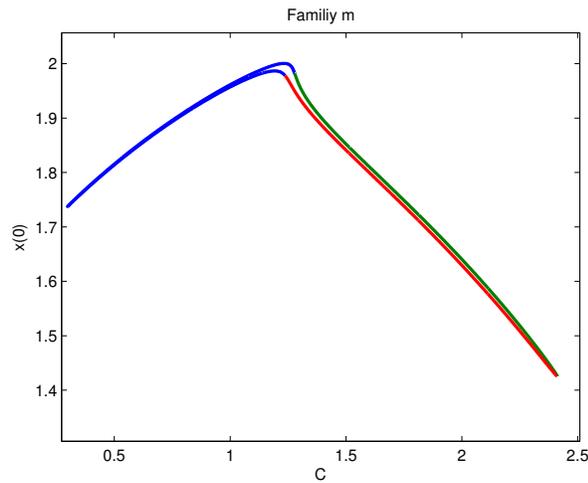


Figura 7.7: Curva característica de la familia m .

es decir; estas forman 3 rizos donde cada rizo rodea a una primaria, esto se puede ver en la figura (7.19). Los tres rizos incrementan y disminuyen su tamaño conforme se sigue a la familia pero una colisión con las tres primarias nunca sucede aunque las órbitas son muy cercanas a colisión cuando los rizos disminuyen su tamaño. Este comportamiento es cíclico y por lo tanto se obtiene otra familia cerrada.

7.7. La familia j de órbitas retrógradas alrededor de m_2 y m_3

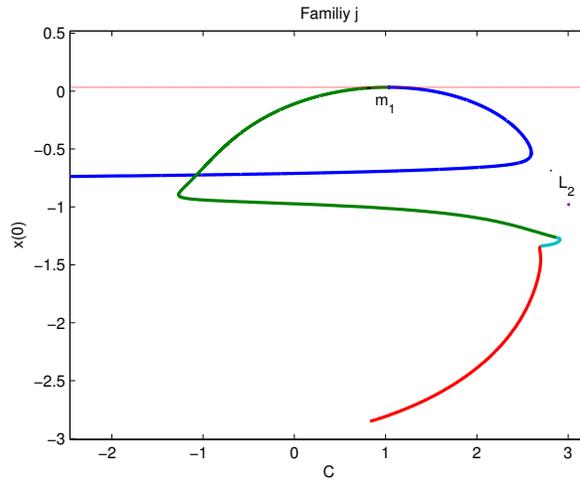


Figura 7.8: Curva característica de la familia j .

La primera fase de esta familia tiende por un lado a colisión con las primarias m_2 y m_3 , esta colisión sucede para grandes valores (negativos) de la constante de Jacobi C . Conforme C se incrementa las órbitas incrementan su tamaño hasta que se alcanza una órbita de colisión con la primaria m_1 , así es como termina la primera fase. Después de esta colisión aparece un rizo extra alrededor de m_1 como se esperaba y ahora las órbitas se vuelven directas alrededor de m_1 , este es el inicio de la segunda fase, conforme seguimos su evolución nos damos cuenta que tanto el rizo exterior como interior incrementan su tamaño y las órbitas tienden a colisión con las primarias m_2 y m_3 , esta segunda fase termina cuando dicha colisión sucede. La tercera fase comienza naturalmente después de esta colisión, dos rizos alrededor de m_2 y m_3 respectivamente aparecen sobre las órbitas y conforme C decrece estos rizos se incrementan alrededor de las primarias, conforme seguimos la evolución de esta fase notamos que el comportamiento de las órbitas se complica y aparece una nueva órbita de colisión con m_1 , este es el fin de la tercera fase. Hemos decidido terminar de seguir la familia en esta fase pues el complicado comportamiento de las órbitas y el extenso tiempo de integración de las ecuaciones regularizadas nos obligan a detener el seguimiento en este punto, figura (7.20).

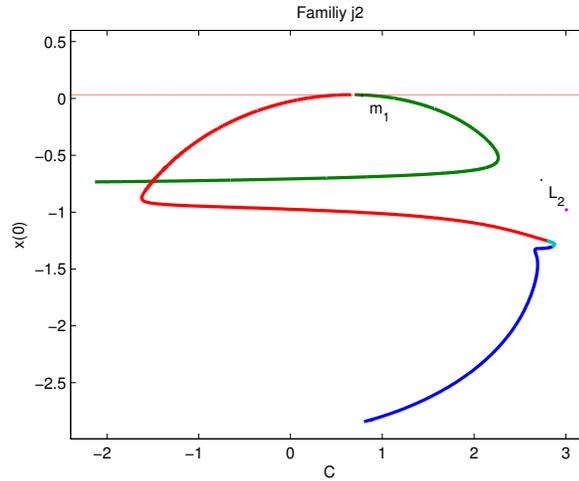


Figura 7.9: Curva característica de la familia j_2 , note que es muy similar a la de la familia j .

7.8. La familia j_2

Esta familia llamada j_2 está compuesta de órbitas periódicas retrógradas alrededor de m_2 y m_3 como en la familia j solo que esta vez las órbitas poseen un rizo extra alrededor de ambas primarias, este rizo rodea a la primaria m_1 también y se puede ver en la figura (fases j_2), la evolución de esta familia es muy similar a la evolución de la familia j y de hecho su curva característica tiene la misma forma que la de la familia j , ver figura (7.9). Para ilustrar la dinámica de esta familia mostramos órbitas representativas de cada fase en la figura (7.22).

7.9. La familia r_2 de órbitas asintóticas a L_2

Esta familia de órbitas periódicas ha sido nombrada r_2 en analogía a la familia r de la categoría de Copenhagen del PR3C, el subíndice es para indicar que la familia es asintótica al punto L_2 . La primera fase de esta familia nace de una órbita homoclínica a L_2 seguida de órbitas periódicas que son asintóticas al punto de equilibrio, estas órbitas forman dos rizos que rodean las primarias m_2 y m_3 , conforme las órbitas periódicas se alejan de L_2 , los rizos comienzan a decrecer en tamaño y tienden a colisión con ambas primarias, sin embargo, estas colisiones nunca se alcanzan, en cambio, cuando comenzamos a decrecer monótonicamente el valor de C , los rizos mencionados comienzan a incrementar su tamaño, este comportamiento se mantiene hasta que las órbitas se vuelven simétricas respecto del eje y , ver figura (7.21), si continuamos disminuyendo el valor de C esta simetría desaparece y las órbitas tienden a colisión con la

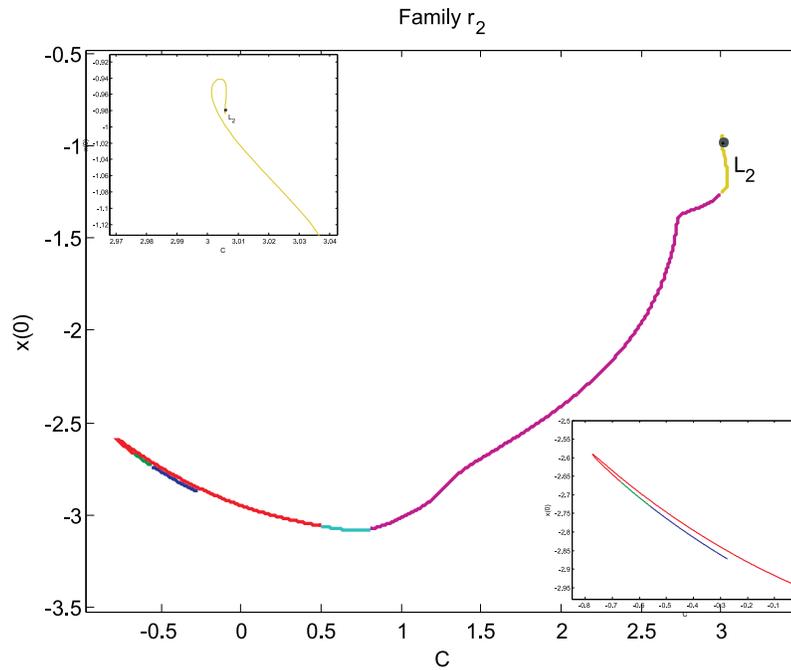


Figura 7.10: Curva caracterisitica de la familia r_2 , las magnificaciones muestran las terminación de la familia en el punto de equilibrio L_2 y un punto de retorno de la familia.

primaria m_1 en dicha colisión termina la fase 1 de esta familia. Cuando las órbitas pasan por esta colisión, un nuevo rizo alrededor de m_1 aparece como se esperaba, este es el comienzo de la segunda fase, conforme seguimos la evolución de esta segunda fase observamos que el nuevo rizo incrementa su tamaño conforme C decrece monótonicamente y además las órbitas tienden a colisión con las primarias m_2 y m_3 , en el punto $C \approx -0,77266$ encontramos un punto de retorno. Aunque el rizo continúa incrementando su tamaño la colisión con m_2 y m_3 no se alcanza, en lugar de eso, el periodo de las órbitas comienza a incrementarse. Este comportamiento continúa conforme el valor de C continúa incrementándose monótonicamente, como sucedió en el caso de la familia j , el gran periodo de las órbitas que exige un tiempo de integración largo de las ecuaciones (regularizadas en este caso) más la fuerte inestabilidad de estas órbitas nos forzaron a terminar el seguimiento de esta fase y por lo tanto, el seguimiento de la familia completa.

7.10. Puntos críticos en las familias de órbitas periódicas

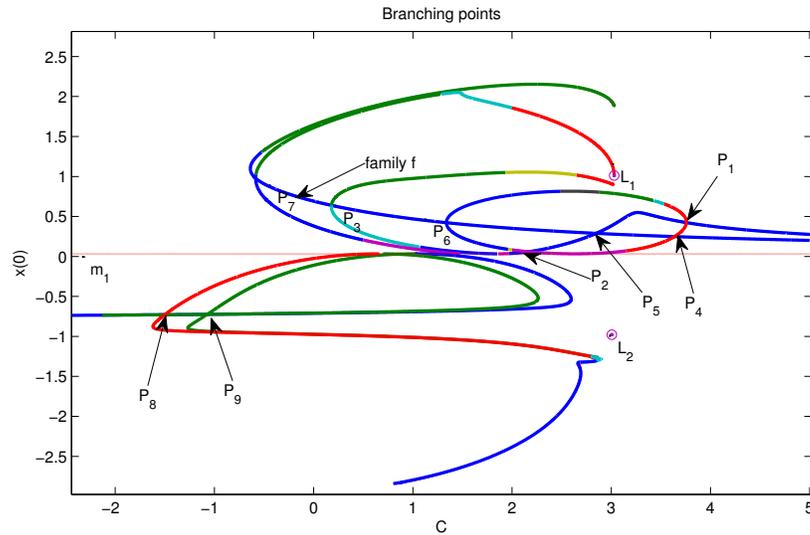


Figura 7.11: Puntos críticos entre las familias de órbitas periódicas.

Como discutimos al final del capítulo anterior, cuando seguimos una familia de órbitas periódicas, en sus curvas características suelen aparecer puntos especiales llamados *puntos críticos* ó *branching points*. En el seguimiento de las nueve familias de órbitas periódicas anteriores se detectaron varios puntos críticos en sus curvas características, debemos decir que algunas familias de órbitas periódicas se encontraron a través de estos puntos. En la figura (7.11) se pueden apreciar dichos puntos,

1. La familia g tiene 3 branching points; el primero, P_1 sucede en $C \approx 3,7581$ con la familia g_4 ; el segundo, P_2 sucede en $C \approx 2,1662$ con la familia g_4 nuevamente; el tercero, P_3 sucede en $C \approx 0,1797$ con la familia f . Este último branching point sucede en el punto de retorno mencionado en el seguimiento de la familia f .
2. La familia f tiene 5 branching points; el primero, P_4 sucede en $C \approx 3,6364$ con la familia g_4 ; el segundo P_5 sucede en $C \approx 2,8481$ con la familia g ; el tercero P_6 sucede en $C \approx 1,3381$ con la familia g_4 ; el cuarto P_3 que sucede con la familia g ya fue mencionado; el quinto P_7 sucede en $C \approx -0,5846$ con la familia a que de hecho, es el punto de retorno de la familia a .
3. Las familias j y j_2 se intersectan en dos puntos; el primero P_8 sucede en

$C \approx -1,5015$ y el segundo P_9 sucede en $C \approx -1,073$.

7.11. Estudio de la estabilidad de las familias de órbitas periódicas

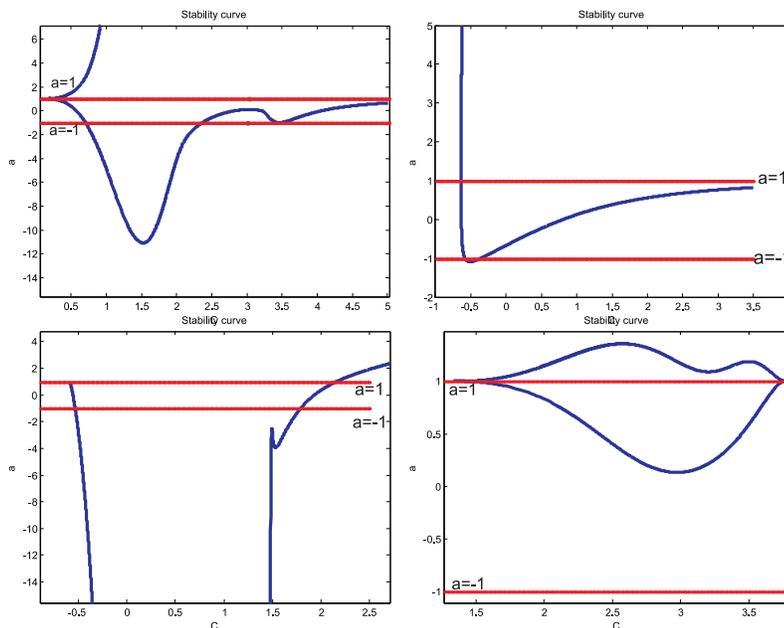


Figura 7.12: Curva de estabilidad de la familia g (arriba izquierda), curva de estabilidad de la familia f (arriba derecha), curva de estabilidad de la familia a (abajo izquierda), curva de estabilidad de la familia g_4 (abajo derecha).

En la familia g observamos que la primera y la segunda fase contienen órbitas periódicas estables, en el final de la segunda fase en el punto crítico (*fold*), se tiene que $|a| = 1$ como la teoría discutida anteriormente predice, después de este punto crítico todas las órbitas se vuelven inestables, al final de esta familia observamos fuertes oscilaciones de positivo a negativo en el signo de a y por lo tanto, obtenemos oscilaciones entre las áreas de estabilidad e inestabilidad como predice la terminación "Blue Sky Catastrophe". En la familia f tenemos que la primera fase de esta familia posee órbitas estables como se muestra en la figura (7.12), en el punto crítico *fold* tenemos $|a| = 1$ nuevamente, después de este punto todas las órbitas son inestables, hasta que se llega al fin de la familia, sucede el mismo fenómeno que en la familia g , se observan fuertes oscilaciones entre las áreas estable e inestable. En la familia a casi todas las órbitas son inestables, en el sentido de que solo tenemos 3 pequeñas regiones donde pode-

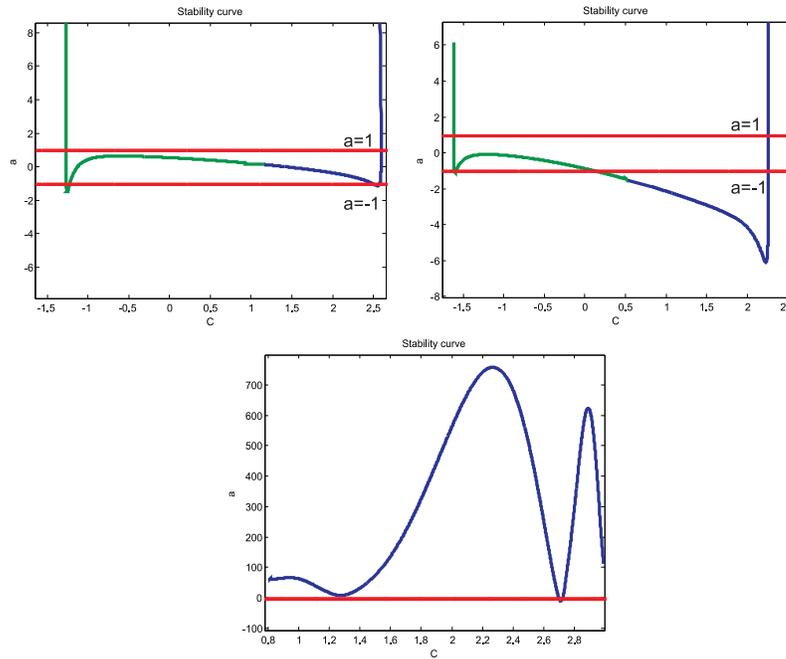


Figura 7.13: Curva de estabilidad de la familia j (arriba izquierda), curva de estabilidad de la familia j_2 (arriba derecha), parte final de la curva de estabilidad de la familia r_2 (centro).

mos encontrar órbitas estables, una región esta sobre la primera fase, la segunda se encuentra al final de la segunda fase, en el punto crítico *fold* tenemos por supuesto $|a| = 1$, después de este punto podemos encontrar una pequeña región de estabilidad al principio de la tercera fase. La familia g_4 es una familia cerrada como se vio anteriormente si observamos su curva de estabilidad vemos que la “mitad” de sus órbitas son estables y la “mitad” son inestables, figura (7.12), en sus dos puntos de retorno tenemos por supuesto $|a| = 1$, y observamos que en realidad entre estos dos puntos críticos ocurre el cambio de estabilidad de sus órbitas.

En la familia g_6 encontramos que casi todas sus órbitas son inestables, solo una muy pequeña región entre sus dos puntos críticos de retorno posee órbitas estables. La estabilidad de la familia m presenta un comportamiento similar a la familia g_6 . Las órbitas en la familia r_2 son fuertemente inestables excepto en el comienzo de la familia donde se observa un fuerte oscilamiento entre las áreas de estabilidad e inestabilidad. En la familia j encontramos una región de estabilidad entre los valores $C \approx -1,27$ y $C \approx 2,59$, figura (7.13), en esta región

tenemos 3 puntos críticos en las curvas características, esto se ve reflejado en la curva de estabilidad donde se tienen varios valores para los cuales $|a| = 1$. La estabilidad de la familia j_2 presenta un comportamiento muy similar al de la familia j , vea figura (7.13).

7.12. Ilustraciones de órbitas periódicas de las familias encontradas

En las figuras siguientes mostramos órbitas representativas de cada una de las fases de las nueve familias encontradas. Cada fila de las siguientes figuras representa una fase de la respectiva familia, la primera fila representa a la primera fase, la segunda fila representa a la segunda fase etc.

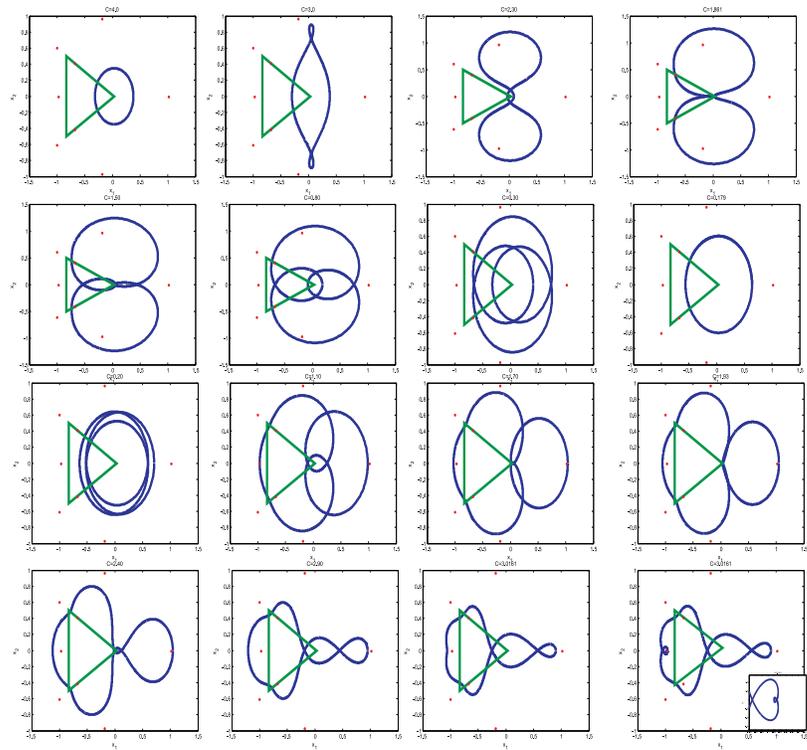


Figura 7.14: Fases de la familia g .

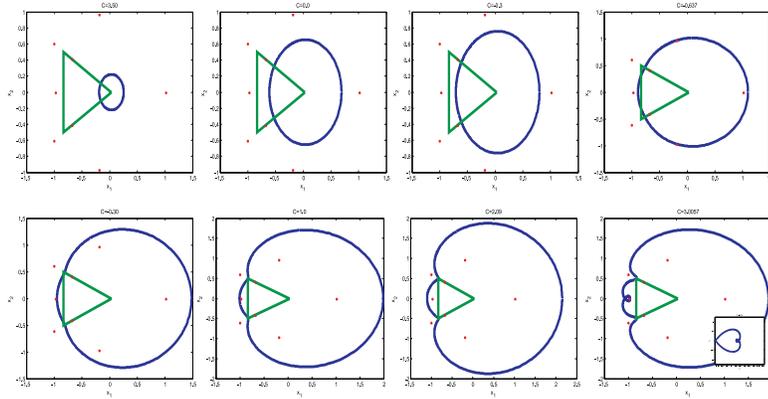


Figura 7.15: Fases de la familia f .

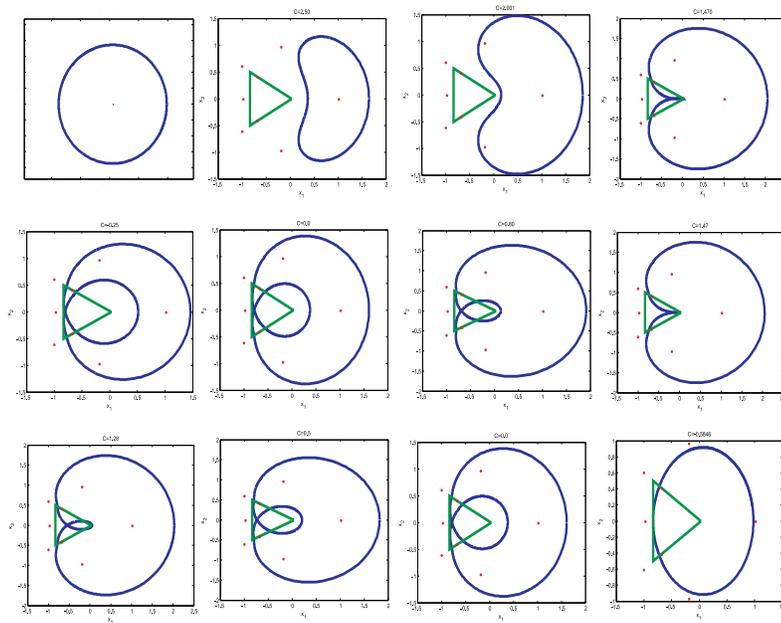


Figura 7.16: Fases de la familia a .

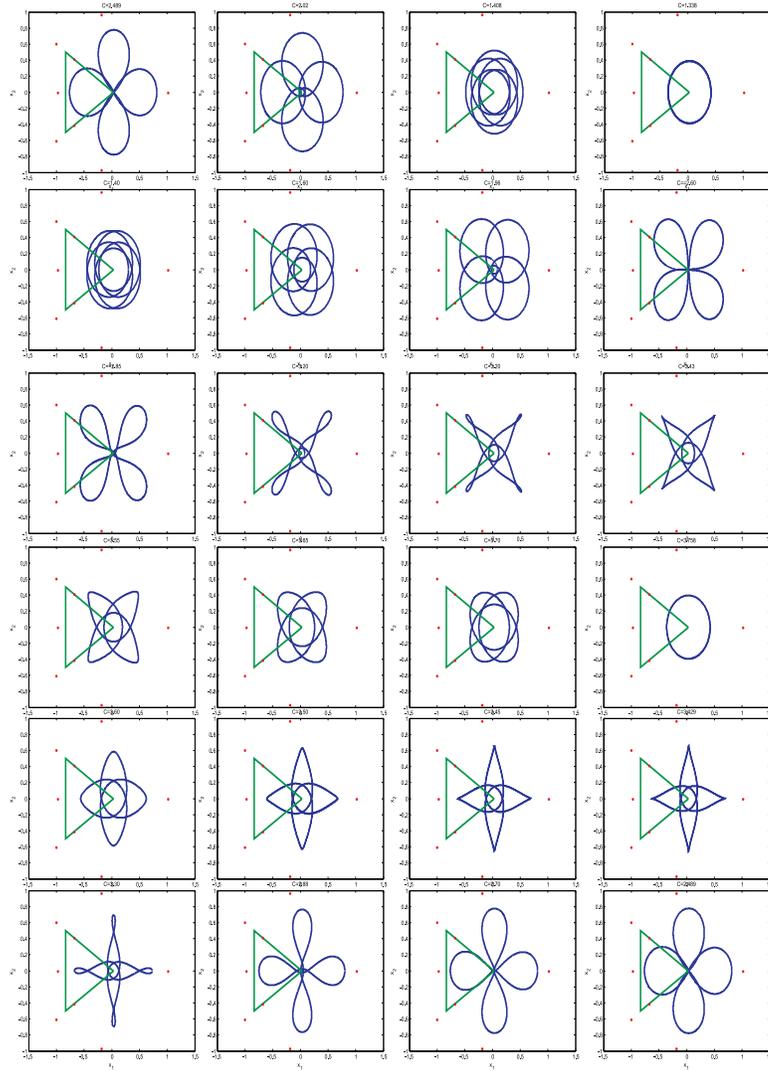


Figura 7.17: Fases de la familia g_4 .

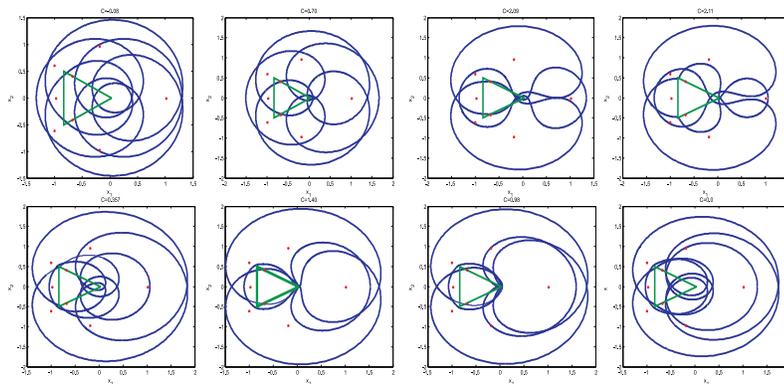


Figura 7.18: Fases de la familia g_6 .

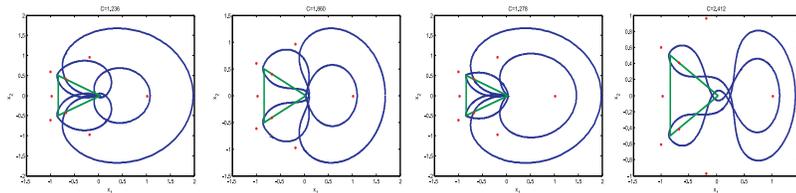


Figura 7.19: Fases de la familia m .

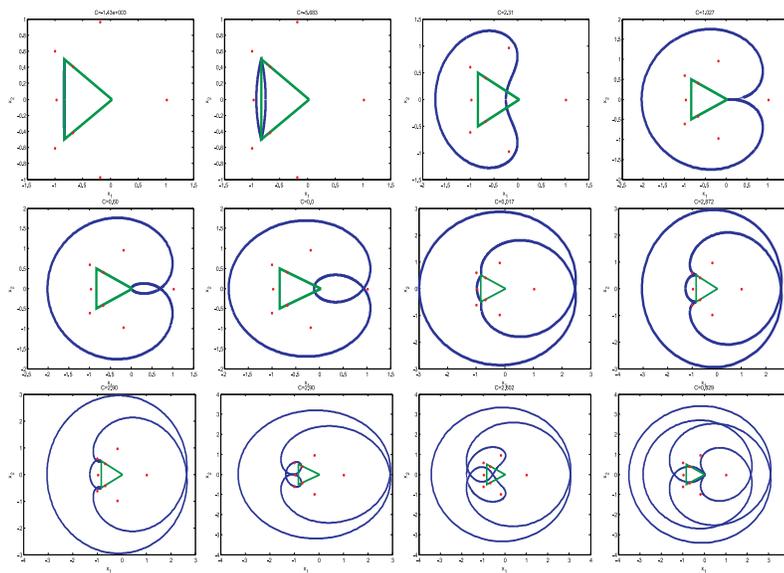


Figura 7.20: Fases de la familia j .

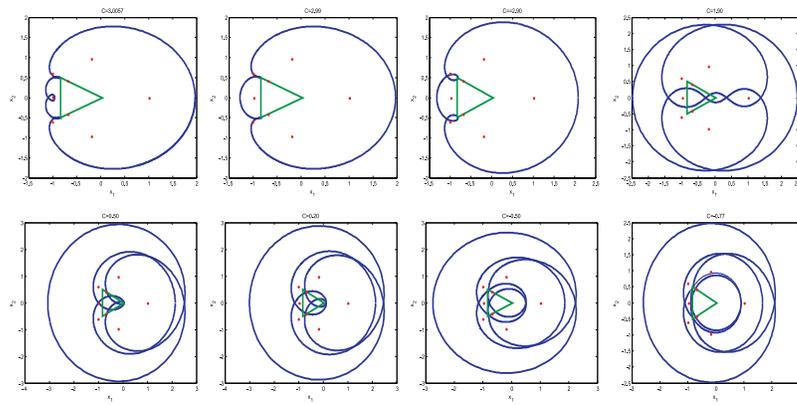


Figura 7.21: Fases de la familia r_2 .

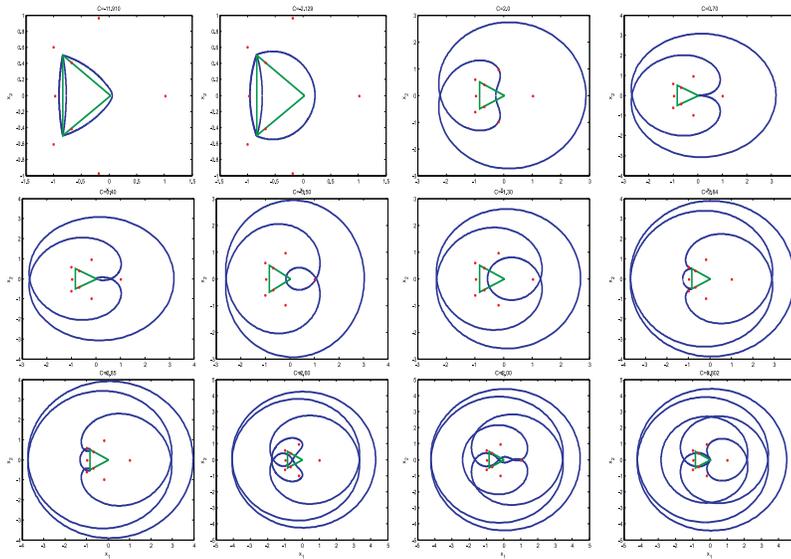


Figura 7.22: Fases de la familia j_2 .

Capítulo 8

Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos visto una larga lista de resultados para el problema restringido de cuatro cuerpos equilátero, algunos de ellos fueron obtenidos por diversos autores que han estudiado previamente este problema. A manera de resumen, hacemos un listado de las principales contribuciones que se hicieron a lo largo de este trabajo.

1. En el capítulo 3 se encontraron y mejoraron las cantidades predecidas en [39] con las cuales se puede determinar una región de estabilidad en función del parámetro de masas μ para el punto de equilibrio L_2 , con estos nuevos valores se pudo estimar el valor de μ para el cual el espectro del punto de equilibrio cambia de estable a inestable. También se extendieron los cálculos para el punto de equilibrio L_1 y se estableció que para este punto, el teorema del centro de Liapunov es aplicable.
2. Los hallazgos del capítulo 3 nos llevaron a preguntar si el punto L_2 posee las mismas propiedades que el llamado punto de equilibrio L_5 del PR3C. Con el fin de responder esta pregunta se realizó un análisis local de las variedades estable e inestable de dicho punto. La técnica utilizada para este estudio fue teoría formas normales, por lo tanto, se tuvo que calcular una forma normal a segundo orden para realizar el análisis y de esta forma se estableció con ayuda de los resultados de [48] que las variedades estables e inestables se intersectan transversalmente; esto nos permitió asegurar que para el punto L_2 , en particular, la terminación denominada “Blue Sky Catastrophe” ocurre.
3. En el capítulo 5 se realizó una aplicación a nuestro problema de la técnica conocida como *regularización de colisiones binarias*. Con el fin de realizar regularizaciones simultáneas fue necesario introducir dos nuevas transformaciones $f(w) = \frac{1}{2} \left(w - \frac{1}{4w} \right)$ y $f(w) = \frac{2}{3} \left(w - \frac{1}{6\sqrt{3}w^2} \right)$ con las cuales fue posible regularizar (respectivamente) colisiones con las masas m_2 , m_3 y con las tres primarias de manera simultánea. Lo destacado en estas dos transformaciones es su sencillez, esto es extremadamente útil a la hora de

utilizar las ecuaciones regularizadas ya que facilitan el análisis y ahorran tiempo de integración de las mismas considerablemente.

4. En el capítulo 6 se examinaron las técnicas para estudiar a las familias de órbitas periódicas de un sistema, y a manera del PR3C, estudiamos las familias de órbitas de segunda especie para nuestro problema tomando como modelo el trabajo de Michel Hénon. En este estudio establecimos que dichas familias poseen la misma estructura que las correspondientes familias del PR3C, además se estableció de manera explícita la manera en que se relacionan ambas familias.
5. Finalmente en el capítulo 7 se llevó a cabo la aplicación de la teoría desarrollada en los capítulos anteriores tanto analítica como numéricamente. De esta manera nos fue posible encontrar 9 familias de órbitas periódicas, una vez que fueron halladas, se estudiaron sus propiedades y relaciones entre ellas como son la determinación de su estabilidad y el estudio de sus puntos críticos. Por motivos históricos y teóricos nombramos a estas familias de manera análoga a las correspondientes familias del PR3C. En particular, es de destacar que la familia g de nuestro problema posee la terminación “Blue sky Catastrophe” como en el caso del PR3C, las familias f y r_2 también verifican esta propiedad. Las demás familias fueron exploradas hasta establecer su *terminación natural* cuando fue numéricamente posible.

El lector puede notar que nuestro problema presenta aspectos dinámicos similares con el PR3C, entonces es natural preguntarse ¿Había más similitudes entre PR4C y el PR3C? y por supuesto ¿Que aspectos dinámicos *nuevos* presenta el PR4C?, es sabido que el PR3C sigue siendo objeto de estudio desde la época de Euler, bajo estas condiciones el presente problema representa un vasto terreno aún por explorar.

Bibliografía

- [1] Abraham R., Marsden J.L.; Foundations of Mechanics. AMS Chelsea Publishing (2008).
- [2] Álvarez-Ramirez, M., Vidal, C.; Dynamical aspects of an equilateral restricted four-body problem. Math. Probl. Eng. (2009). doi:10.1155/2009/181360
- [3] Arenstorff R.F.; Central Configurations of four bodies with one inferior mass. Cel. Mech. **28** 9-15 (1982).
- [4] Arnold V.I., Kozlov V.; Mathematical Methods of Classical Mechanics. Springer-Verlag. New York, Heidelberg, Berlin(1978).
- [5] Baltagiannis, A.N., Papadakis, K.E.; Families of periodic orbits in the restricted four-body problem. Astrophys. Space Sci. **336**, 357–367 (2011).
- [6] Baltagiannis, A.N., Papadakis, K.E.; Equilibrium points and their stability in the restricted four-body problem. Int. J. Bifurc. Chaos. **21**, 2179–2193 (2011).
- [7] Bernat, J., Llibre, J., Pérez-Chavela, E.; On the planar central configurations of the 4-body problem with three equal masses. Dyn. of Cont. Disc. and Imp. Sys. Series **A**. Math. Anal. **16**, 1–13 (2009).
- [8] Birkhoff D.G.; Sur le problème restreint des trois corps. Ann. Scuola Superiore de Pisa 4, 267 (1935); also, Birkhoff, D. G., "Collected Mathematical Papers", Vol.2., p. 466. Am. Math. Soc., New York, 1950.
- [9] Broucke, R. A.; Periodic orbits in the restricted three-body problem with earth-moon masses. Technical Report, JPL. (1968).
- [10] Bruno A.D.; Researches on the restricted three-body problem II. Periodic solutions and arcs for $\mu = 0$. Cel. Mech. **18** 9-50 (1978a).
- [11] Buffoni B.; Shooting methods and topological transversality. Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Sec.A.**129** 1137-1155 (1999).
- [12] Burgoyne N., Cushman R.; Normal forms for real linear Hamiltonian systems with purely imaginary eigenvalues. Cel. Mech. **8** 435-443 (1974).

- [13] Burgos J., Delgado J.; Periodic orbits in the restricted four-body problem with two equal masses. *Astrophysics and Space Science*. doi: 10.1007/s10509-012-1118-2. (2012).
- [14] Burgos J., Delgado J.; On the “Blue sky catastrophe” termination in the restricted four body problem. Submitted to *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* (2012).
- [15] Burgos J; Regularization in the restricted four body problem. *Aportaciones Matemáticas, Memorias SMM* **45** 1-13 (2012).
- [16] Ceccaroni M., Biggs J.; Extension of low-thrust propulsion to the autonomous coplanar circular restricted four body problem with application to future Trojan Asteroid missions. In: 61st Int. Astro. Congress IAC 2010 Prague, Czech Republic (2010).
- [17] Delgado J., Álvarez-Ramirez, M.; Central Configurations of the symmetric restricted four-body problem. *Cel. Mech.* **87** 371-381 (2003).
- [18] Deprit A.; Canonical transformations depending on a small parameter. *Cel. Mech.* **1** 12-30 (1969).
- [19] Deprit A.; Delaunay Normalisations. *Cel. Mech.* **26** 9-21 (1982).
- [20] Deprit A., Henrard J.; A manifold of periodic solutions. *Adv. Astron. Astrophysics.* **6** 6-124 (1968).
- [21] Deprit A., Broucke R.; Régularisation du problème restreint plan de trois corps par représentations conformes. *Icarus* **2**, 207 (1963).
- [22] Devaney R.L.; Blue Sky catastrophes in reversible and Hamiltonian systems. *J. Diff. Eq.* **21** 431-438 (1976).
- [23] Doedel E.J., et al; Elemental periodic orbits associated with the libration points in the circular restricted 3-body problem. *Int. J. Bifurc. Chaos.* **17** 2625-2677 (2007).
- [24] Eirola T., Von Pfaler J.; Numerical Taylor expansions for invariant manifolds. Helsinki University of Technology Inst. of Math. Research Reports. **A460** (2003).
- [25] Garcia A., Pérez-Chavela E.; Heteroclinic phenomena in the Sitnikov problem. *Hamiltonian Systems and Celestial Mechanics (HAMSYS 98)*. World Scientific Monograph Series in Math. **6** 174-185 (2000).
- [26] Giacaglia G.; Regularization of the restricted problem of four bodies. *The Astronomical Journal.* **27** No. 5. (1967).
- [27] Gomez G., Libre J., Masdemont J.; Homoclinic and Heteroclinic solutions in the restricted three-body problem. *Cel. Mech.* **44** 239-259 (1988).

- [28] Govaerts W.; Numerical methods for bifurcations of dynamical equilibria. SIAM. USA., (2000).
- [29] Gröbner W.; Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen. Deutscher Verlag der Wissenschaften. (1967).
- [30] Guckenheimer J., Holmes P.; Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields. Springer-Verlag. New York. (1983).
- [31] Hampton M., Moeckel R.; Finiteness of relative equilibria of the four-body problem. *Inventiones Mathematicae.* **163** 289-312 (2006).
- [32] Hénon, M.: Exploration numérique du problème restreint I. Masses égales, Orbites périodiques. *Ann. Astrophysics* **28**, 499–511 (1965)
- [33] Hénon, M.: Exploration numérique du problème restreint II. Masses égales, stabilité des orbites périodiques. *Ann. Astrophysics* **28**, 992–1007 (1965).
- [34] Hénon, M.: Generating families in the restricted three body problem. Springer Verlag (1997).
- [35] Henrard J., Proof of a conjecture of E. Strömngren. *Cel. Mech.***7** 449-457 (1973).
- [36] Hitzl D. L., Hénon M.; Critical Generating Orbits for Second Species Periodic Solutions of the Restricted Problem. *Cel. Mech.***15** 421-452 (1977).
- [37] Kusnetzov Yu. A.; Elements of applied bifurcation theory. Springer Verlag (2004).
- [38] Kocak H.; Normal Forms and Versal Deformations of Linear Hamiltonian Systems. *Journal of Differential Equations.* **51** 359-407 (1984).
- [39] Leandro E.S.G.; On the central configurations of the planar restricted four-body problem. *J. Differential Equations.***226** 323-351 (2006).
- [40] Levi-Civita T.; Sur le régularisation du problème des trois corps. *Acta Math.***42.** 99-144 (1920).
- [41] Maranhão D.L.; Stability of equilibrium solutions in a restricted four-body problem. *Revista Brasileira de Ensino de Física.* Vol. **20** No. 2 (1998).
- [42] Marchal C., Saari D.G.; On the final evolution of the n-body problem. *J. Diff. Eq.* **20** 150-186 (1976).
- [43] McGehee R., Meyer K.; Homoclinic points of area preserving diffeomorphisms. *Amer. J. Math.* **96** 409-421 (1974).
- [44] Meyer K.; Periodic solutions of the N-body problem. *J. Diff. Eq.* **39** 2-38 (1981).

- [45] Meyer K.; Normal forms for Hamiltonian systems. *Cel. Mech.* **9** 517-522 (1974).
- [46] Meyer K.; Bifurcation of a central configuration. *Cel. Mech.* **40**(3-4) 273-282 (1987).
- [47] Meyer K.; Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-body problem. Springer Verlag. (2009).
- [48] Meyer K., McSwiggen P.D.; The evolution of invariant manifolds in Hamiltonian-Hopf bifurcations. *J. Differential Equations.* **189** 538-555 (2002).
- [49] Newton I.; *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. London (1687), Cambridge (1713).
- [50] Oberti, P.; Lagrangian satellites of Tethys and Dione II. Theory of motion. *Astron. Astrophys.* **228**, 275–283 (1990).
- [51] Palacian J., Yanguas P.; Reduction of polynomial Hamiltonians by the construction of formal integrals. *Nonlinearity* **13**. 1021-1054 (2000).
- [52] Palmore J.; Central configurations and relative equilibria of the N-body problem in E^4 . *Cel. Mech.* **21** 21-24 (1980).
- [53] Papadakis, K.E.; Asymptotic orbits in the restricted four-body problem. *Planetary and Space Science.* **55**, 1368–1379 (2007).
- [54] Pedersen P.; Librationspunkte im restringierten vierkoerperproblem. *Dan. Mat. Fys. Medd.* 1-80 (1944).
- [55] Piña E., Lonngi P.; Central configurations for the planar Newtonian four-body problem. *Cel. Mech. Dyn. Astron.* **108** 73-93 (2010).
- [56] Pérez-Chavela E., Santoprete M.; Convex four-body central configurations with some equal masses. *Arch. Rat. Mech. Anal.* DOI 10.1007/s00205-006-0047-z.
- [57] Poincaré H.; Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles. *Oeuvres*, Gauthier–Villars: Paris, pp. XCIXCX.
- [58] Saari D.G.; Singularities and collisions of Newtonian gravitational systems. *Arch. Rational Mech. Anal.* **49**. 311-320 (1973).
- [59] Schwarz R., Sülli Á., Dvorac R., Pilat-Lohinger E.; Stability of Trojan planets in multi-planetary systems. *Cel. Mech. Dyn. Astron.* **104** 69-84 (2009).
- [60] Simó C.; Relative equilibrium solutions in the four body problem. *Cel. Mech.* **18** 165-184 (1978).

- [61] Sokol'skii A.G.; On the stability of an autonomous Hamiltonian system with two degrees of freedom in the case of equal frequencies. *J. Appl. Math. Mech.* **38** 741-749 (1974-5).
- [62] Sundman K., Mémoire sur le problème des trois corps. *Acta Mathematica.* **36** 105-179 (1912).
- [63] Szebehely V., *Theory of orbits.* Academic Press, New York (1967).
- [64] Vander Meer J-C., Non semisimple 1:1 resonance at an equilibrium. *Celestial Mechanics.* **27** 131-149 (1982).
- [65] Vander Meer J-C., *The Hamiltonian Hopf bifurcation.* (Lecture Notes in Mathematics vol. 1160). New York; Springer (1985).
- [66] Wang Q., The global solution of the n -body problem. *Celestial Mechanics.* **50** 73-88 (1991).
- [67] Wiggins S., *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos.* (Texts in Applied Mathematics vol. 2) Berlin: Springer (1990).
- [68] Wintner A., *The analytic foundations of Celestial Mechanics.* Princeton University Press (1941).



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 60026

Matrícula: 208180115

ORBITAS PERIODICAS EN EL
PROBLEMA RESTRINGIDO DE
CUATRO CUERPOS.

En México, D.F., se presentaron a las 16:00 horas del día 12 del mes de marzo del año 2013 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. ERNESTO PEREZ CHAVELA
DRA. LIDIA GEORGINA JIMENEZ LARA
DR. PANAYIOTIS GEORGE PANAYOTAROS
DR. ARTURO OLVERA CHAVEZ
DR. MARTIN CELLI

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública, cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

DE: JAIME BURGOS GARCIA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



JAIME BURGOS GARCIA
ALUMNO

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSE ANTONIO DE LOS REYES
HEREDIA

PRESIDENTE

DR. ERNESTO PEREZ CHAVELA

VOCAL

DRA. LIDIA GEORGINA JIMENEZ LARA

VOCAL

DR. PANAYIOTIS GEORGE PANAYOTAROS

VOCAL

DR. ARTURO OLVERA CHAVEZ

SECRETARIO

DR. MARTIN CELLI