



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
UNIDAD IZTAPALAPA  
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

# “Algunas conexiones y resultados de la teoría de transporte óptimo de Monge-Kantorovich”

TESIS QUE PRESENTA  
GIOVANNI ARQUÍMEDES WENCES NÁJERA  
CON MATRÍCULA 2141801212  
PARA OBTENER EL GRADO DE  
DOCTOR EN CIENCIAS MATEMÁTICAS

DIRECTOR: DR. JOAQUÍN DELGADO FERNÁNDEZ

PRESIDENTE: DR. OSVALDO OSUNA CASTRO  
SECRETARIO: DR. JOSÉ RAÚL MONTES DE OCA MACHORRO  
VOCAL: DR. JOAQUÍN DELGADO FERNÁNDEZ  
VOCAL: DR. LORENZO HÉCTOR JUÁREZ VALENCIA  
VOCAL: DR. FRANCISCO VENEGAS MARTÍNEZ

IZTAPALAPA, CIUDAD DE MÉXICO, FEBRERO 2020

## **Dedicatoria**

A mis padres Teresa Avelino †, Job Wences y a mi abuelita Ma. Reyna Galán †.

## Agradecimientos

Agradezco primeramente a Dios por darme tantas cosas hermosas en mi vida, siendo una de ellas la culminación de este proyecto. Todo el honor y la gloria para Él.

Agradezco infinitamente a mi asesor, Joaquín Delgado Fernández, quien me compartiera su tiempo, conocimientos y sobre todo por la paciencia para conmigo.

A los profesores Héctor Juárez, Raúl Montes de Oca, Francisco Venegas y Osvaldo Osuna, por haber revisado este trabajo y por sus valiosos comentarios.

Al profesor Fernando Hernández Hernández, quien me motivara siempre con sus consejos durante la maestría y me incitara a continuar con mis estudios.

A mi esposa Rafaela e hijo Arán Moisés que siempre entendieron los sacrificios y las ausencias durante la realización de este trabajo.

A mis padres Teresa Avelino y Job Wences por haberme guiado e impulsado en cada momento de mi vida.

A mis papás por darme la vida, Rufino Wences, y de manera muy especial a mi mamá Ana Nájera por brindarme su apoyo, por sus palabras de motivación y por estar al pendiente de mí en este proyecto.

A mis abuelitos Carlos Nájera y Reyna Galán por brindarme techo y comida durante este proyecto.

A mis tíos, en especial a mis tíos Ramón Wences, Dominga Wences, Fausto Nájera por el apoyo que me brindaron durante el doctorado.

Al Dr. José Alfredo Romero Olea por su apoyo incondicional.

A mis amigos, José Hernández, Victoria Chávez, Victor Manuel, Gabriel Zacarías †, por compartir conmigo sus conocimientos y amistad.

A mis hermanos Reyna y Jorge, y a un buen amigo, Jorge Muñoz por su gran apoyo.

A la maestra Carmen Carreto por su gran apoyo incondicional.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT, por la beca que me otorgó para llevar a cabo este proyecto.



## Índice general

Resumen	5
Introducción	7
Capítulo 1. El problema de transporte óptimo de Monge-Kantorovich	9
1. Introducción	9
2. El problema de transporte de Monge-Kantorovich	10
3. La dualidad de Kantorovich	16
4. El problema de transporte para el caso de una función de costo cuadrático en $\mathbb{R}^n$	17
Capítulo 2. Diferenciabilidad de segundo orden de un funcional asociado al problema de Monge	25
1. Introducción	25
2. Antecedentes	25
3. Resultados sobre la diferenciabilidad de segundo orden de $M$	27
Capítulo 3. Una aplicación del modelo de los precios hedónicos	37
1. Introducción	37
2. El modelo hedónico de Rosen y su equilibrio	40
3. Datos socioeconómicos y la violencia criminal en Acapulco	44
4. Valoración del impacto de la violencia criminal en los precios de viviendas en Acapulco	46
Capítulo 4. Algunas conexiones entre la teoría KAM-débil y transporte óptimo	65
1. Introducción	65
2. Soluciones KAM-débiles y funciones importantes	66
3. Resultados	69
Capítulo 5. Conclusiones y perspectivas	79

Capítulo 6. Apéndice	81
1. Sobre el método de (Chartrand et al., 2009) e imágenes médicas	81
2. Prueba del acotamiento de $J_\varphi(w)$	83
3. Una introducción a la teoría KAM-débil	88
4. Equivalencia entre los problemas de transporte óptimo y de los precios hedónicos	91
5. Análisis cualitativo de turismo nacional y extranjero en Acapulco	93
Bibliografía	99

## Resumen

En el presente trabajo se muestran algunos resultados originales sobre la teoría de transporte óptimo de Monge-Kantorovich, así como una aplicación de la teoría de los precios hedónicos, la cual está íntimamente relacionada con la teoría de transporte óptimo. Estos resultados fueron obtenidos durante mi estancia doctoral bajo la supervisión de mi asesor. El trabajo en esta tesis tiene tres objetivos. El primer objetivo en esta tesis tiene que ver con el trabajo de Chartrand et al. (2009), específicamente:

- Estudiar la diferenciabilidad de segundo orden del funcional estudiado en (Chartrand et al., 2009),

con el propósito, en un futuro, de proponer un algoritmo tipo-Newton que sea mejor que el expuesto en (Chartrand et al., 2009), el cual sufre de algunas deficiencias. El alcance de este primer objetivo radica en la aplicación a imágenes warping e imágenes médicas.

El segundo objetivo tiene que ver con la teoría de los precios hedónicos, la cual está íntimamente relacionada con la teoría de transporte de Monge-Kantorovich, como se muestra en (Chiappori et al., 2010) y (Ekeland, 2009). Por ejemplo, en (Chiappori et al., 2010) se prueba que los problemas definidos en cada una de estas teorías, bajo ciertas hipótesis, son equivalentes, es decir, la existencia de una solución de un problema implica la existencia de una solución del otro problema. La teoría de los precios hedónicos nace formalmente con el modelo de Rosen (1974), la cual está basada en la hipótesis de que un bien es valorado por la satisfacción o placer que sus atributos o características producen al consumidor. Así, por ejemplo, el precio de los bienes raíces no sólo están determinados por sus características físicas sino por los atributos o desatributos de localización y de entorno. Para estimar la relación entre el precio de mercado de un bien y sus atributos se usa regresión sobre precios de bienes dados en el mercado. De esta manera se puede identificar la importancia relativa de cada uno de los atributos en el valor asignado del bien en el mercado. Esta teoría se ha usado ampliamente para la valoración de atributos o desatributos de viviendas, como es el

caso de Thaler (1978) quien lo aplica para la valoración del control de crimen en Rochester, New York. Este y otros trabajos que utilizan la metodología de los precios hedónicos para la valoración del crimen en la propiedad nos motiva a nuestro segundo objetivo:

- Aplicar la metodología de los precios hedónicos para medir los efectos de la violencia criminal en la determinación de precios de viviendas en la ciudad de Acapulco, Gro.

El alcance de este objetivo está fundado en la importancia que tiene la ciudad de Acapulco por su actividad turística y que ha sido afectada por los altos índices de violencia criminal en tal ciudad en los últimos años. Esta aplicación no sólo corrobora estadísticamente la percepción de la depreciación de las viviendas en la ciudad por los altos índices de violencia criminal, sino que además cuantifica en moneda mexicana esta depreciación.

Recientemente se han publicado varios trabajos que muestran conexiones entre la teoría de transporte óptimo y diferentes áreas de las matemáticas, así como otros campos de la ciencia. En esta tesis presentaremos algunas conexiones nuevas. Nuestro tercer objetivo es:

- Estudiar algunas relaciones entre la teoría débil de Kolmogorov-Arnold-Moser, llamada teoría KAM-débil, y la teoría de transporte óptimo para Lagrangianos Tonelli en variedades compactas, conexas sin fronteras, considerando problemas de transporte con funciones importantes de la teoría KAM-débil como funciones de costo.

Estas funciones de costo consideradas son el potencial de Mañé y la barrera de Peierls. Existen algunos trabajos mostrando algunas relaciones entre aquellas teorías, uno de estos es llevado a cabo por Bernard and Buffoni (2007b), en el cual nos hemos inspirado para explorar algunas relaciones y que son presentadas en este capítulo. El alcance de este objetivo es la aportación de nuevas conexiones entre aquellas teorías, así como el planteamiento de algunas preguntas que puedan surgir en el desarrollo de este trabajo.

## Introducción

La teoría de transporte óptimo surgió a finales del siglo XVIII con un problema de Monge planteado en su artículo (Monge, 1781) que trata sobre la reasignación eficiente de masa. En el siglo XX fue retomado este problema por Appell (1928), pero a mediados del mismo siglo, Kantorovich dio un gran avance para el desarrollo de esta teoría en sus trabajos (Kantorovich, 1942) y (Kantorovich, 1948), así en muchos textos llaman a esta teoría como la teoría de transporte de masa de Monge–Kantorovich. A partir de los resultados de Brenier (Brenier, 1987) sobre la existencia de una solución del problema de Monge en un caso específico, muchos matemáticos han puesto sus intereses en esta teoría, generalizando el problema original de Monge a escenarios más generales y obteniendo resultados de existencia y unicidad de soluciones, así como caracterizaciones de las mismas, entre otras cuestiones, como el estudio de regularidad. Durante las dos últimas décadas se han encontrado muchas aplicaciones de esta hermosa teoría tanto en ramas de las matemáticas como en otras áreas del conocimiento, por ejemplo: ecuaciones diferenciales parciales (Carlen and Gangbo, 2003), meteorología (Benamou and Brenier, 1998; Cullen and Gangbo, 2001), análisis funcional (McCann, 1997; Barthe, 1997), economía (Ekeland, 2005, 2009; Carlier and Ekeland, 2010; Chiappori et al., 2010), tráfico (Carlier et al., 2008), planeación urbana (Buttazzo and Santambrogio, 2009), óptica (Wang, 2004), energía cinética (Bolley and Carrillo, 2007), biología (Brenier, 2005), procesamiento de imágenes, particularmente imágenes warping (Angenent et al., 2003; Chartrand et al., 2009; Rehman et al., 2009; Haber and Tannenbaum, 2010; Saumier et al., 2015). Un escenario popular en la teoría de transporte óptimo es el llamado problema de transporte óptimo  $L^2$ , que trata del problema de reasignación de masa donde el objetivo es minimizar la suma de los movimientos de masa medidos por el cuadrado de la distancia euclídeana. La razón de esta popularidad reside principalmente en la simplicidad de los resultados y la amplia gama de aplicaciones. Por ejemplo, en (Chartrand et al., 2009) se estudia un cierto funcional que se origina en el problema dual del problema de Monge–Kantorovich en el caso mencionado, llamado también

caso costo cuadrático. Los autores de (Chartrand et al., 2009) demuestran que este funcional es Hadamard diferenciable y calculan explícitamente la derivada correspondiente, con la cual desarrollan un algoritmo para calcular numéricamente la solución correspondiente al problema de Monge y exponen una aplicación para imágenes warping (deformación de imágenes) e imágenes médicas. Uno de nuestros objetivos en esta tesis está inspirado en el trabajo de Chartrand et al. (2009), donde probamos que aquel funcional es segundo diferenciable en algún sentido y con lo cual se abre la posibilidad, en un futuro, de proponer un algoritmo numérico para calcular el mapeo óptimo en el problema de Monge para el caso costo cuadrático. En este trabajo también presentamos algunas conexiones de la teoría de transporte óptimo con la teoría KAM-débil, el cual fue inspirado por el trabajo (Bernard and Buffoni, 2007b). Estas conexiones abren la posibilidad de seguir indagando a nuevas relaciones entre estas dos teorías. La otra parte de la tesis consiste en desarrollar una aplicación de la teoría de los precios hedónicos, la cual ha sido inspirada por la relación que existe entre dicha teoría y la teoría de transporte óptimo.

De esta manera deseamos resaltar que la columna vertebral del desarrollo de este trabajo es la teoría de transporte óptimo, por un lado exponiendo resultados originales que conciernen a la diferenciabilidad de un funcional  $M$  asociado al problema dual del problema de transporte, y a conexiones entre tal teoría y la teoría KAM-débil, y por el otro lado desarrollando una aplicación en un problema de la vida actual, no de la teoría de transporte óptimo, sino de una teoría relacionada con ésta, a saber, la teoría de los precios hedónicos. Sin temor a equivocarnos los resultados aquí obtenidos abrirán a nuevos estudios, tanto en transporte óptimo como en el estudio empírico de los precios hedónicos.

La tesis está organizada como sigue: En Capítulo 1, presentamos una visión general de la teoría de transporte óptimo de Monge-Kantorovich con algunos hechos importantes que nos servirán en el transcurso del desarrollo de los otros capítulos. En Capítulos 2, 3 y 4 se desarrollan los objetivos primero, segundo y tercero, respectivamente. En Capítulo 5 se incluyen las conclusiones y se plantean algunos trabajos futuros que se derivan del desarrollo de esta tesis. Finalmente, en Capítulo 6 incluimos algunas demostraciones muy extensas e información adicional que ponen en contexto la importancia de cada uno de los trabajos desarrollados en esta tesis.

## Capítulo 1

# El problema de transporte óptimo de Monge-Kantorovich

### 1. Introducción

En este primer capítulo vamos a exponer la parte básica de la teoría transporte óptimo y algunos de sus resultados importantes. Además, incluimos los resultados que se necesitarán en el siguiente capítulo para abordar nuestro primer objetivo. Para obtener nuestros resultados que conciernen al primer objetivo, se han usado fuertemente resultados como el Teorema 1.7, que se centra en un problema particular de Monge, así como la formulación dual del problema de Monge-Kantorovich. Antes de entrar en materia introducimos algo de notación y conceptos que usaremos a lo largo del segundo capítulo.

**1.1. Notación.** Dado un espacio medible  $X$ , vamos a denotar por  $\mathcal{P}(X)$  al conjunto de todas las medidas de probabilidad Borel sobre  $X$ .

Si  $X$  es un espacio topológico denotaremos por  $C(X)$  al conjunto de las funciones continuas sobre  $X$ ;  $C_b(X)$  el espacio normado de las funciones continuas y acotadas sobre  $X$  con norma  $\|f\| = \sup_X |f|$ ; y por  $C_0(X)$  al conjunto de funciones continuas sobre  $X$  que se anulan en el infinito, es decir, que para todo  $\epsilon > 0$  existe un compacto  $K \subseteq X$  tal que  $|f(x)| \leq \epsilon$  para todo  $x \in X \setminus K$ . Note que  $C_0(X) \subseteq C_b(X)$ . El soporte de una función  $f$  sobre  $X$  es la clausura del conjunto  $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ . Al conjunto de funciones continuas sobre  $X$  con soporte compacto se denotará por  $C_c(X)$ . Tenemos que  $C_c(X) \subseteq C_0(X)$  y cuando  $X$  es compacto  $C_c(X) = C_0(X)$  y  $C_c(X) = C_b(X)$ .

Una medida de probabilidad  $\mu$  sobre un espacio  $X$  es *apretada* si para todo  $\epsilon > 0$  existe un compacto  $K_\epsilon$  tal que  $\mu[X \setminus K_\epsilon] \leq \epsilon$ . Una familia  $\mathcal{P}$  de medidas de probabilidad sobre un espacio  $X$  se llama *apretada* si para todo  $\epsilon > 0$  existe un compacto  $K_\epsilon$  para el cual  $\sup_{\mu \in \mathcal{P}} \mu[X \setminus K_\epsilon] \leq \epsilon$ .

Sea  $X$  un espacio métrico y sean  $\mu_n, \mu$  medidas de probabilidad Borel sobre  $X$  tal que

$$\int_X f d\mu_n \rightarrow \int_X f d\mu$$

para toda función  $f \in C_b(X)$ . Entonces se dice que  $\mu_n$  converge débilmente a  $\mu$ .

Decimos que una familia  $\mathcal{P}$  de medidas de probabilidad Borel sobre un espacio métrico  $X$  es *relativamente compacta* si toda sucesión de elementos de  $\mathcal{P}$  tiene una subsucesión débilmente convergente. Un espacio topológico se llama *polaco* si es metrizable, separable y completo. Un resultado importante para la teoría de transporte óptimo es el *Teorema de Prokhorov*, que afirma que en un espacio polaco  $X$  cualquier familia apretada  $\mathcal{P}$  es secuencialmente compacta.

## 2. El problema de transporte de Monge-Kantorovich

En 1781 el matemático francés Gaspard Monge en su artículo (Monge, 1781) se planteó el siguiente problema : supongamos que tenemos una pila de tierra y un hoyo que tenemos que llenar completamente con la tierra, donde la pila y el hoyo tienen mismo volumen. La pregunta es, ¿cuál es la manera más eficiente para mover la tierra de la pila al hoyo preservando volumen? La eficiencia se traduce en obtener un costo o trabajo mínimo. Imaginemos que la tierra o masa, en general, inicialmente ocupa la región acotada  $A \subseteq \mathbb{R}^3$  y que el hoyo es la región  $B \subseteq \mathbb{R}^3$ . Entonces para un mapeo  $T : A \rightarrow B$ ,  $T(x) \in B$  representa la ubicación de la unidad de masa colocada inicialmente en  $x \in A$  y el costo total involucrado es

$$\int_A |x - T(x)| dx,$$

luego, tenemos que minimizar este costo sobre el conjunto de mapeos  $T : A \rightarrow B$  que “preservan volumen”. Más generalmente, sean  $X$  y  $Y$  dos espacios medibles. La pila y el hoyo se modelan por medidas de probabilidad  $\mu$  y  $\nu$ , definidas respectivamente sobre espacios medibles  $X$  y  $Y$ , donde  $\mu(X) = \nu(Y)$ . Siempre que  $A$  y  $B$  sean subconjuntos medibles de  $X$  y  $Y$ , respectivamente,  $\mu(A)$  da una medida de cuanta tierra está colocada dentro de  $A$  y  $\nu(B)$  de cuanta tierra puede ser colocada en  $B$ . Sea  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  una función medible. Esta función  $c(x, y)$  dice cual es el costo de transportar una unidad de masa de ubicación  $x$  a la ubicación  $y$ . Los mapeos que transportan la masa deberán cumplir un requisito de conservación de masa, que se define a continuación:

DEFINICIÓN 1.1. Sea  $T : X \rightarrow Y$  un mapeo medible, *el empuje hacia delante* (o *medida imagen*) de  $\mu$  a través de  $T$  es la medida denotada por  $T\#\mu$ , definida sobre  $Y$  por

$$T\#\mu(B) = \mu(T^{-1}(B)), \text{ para todo subconjunto medible } B \text{ de } Y.$$

Un mapeo medible  $T : X \rightarrow Y$  se llama *mapeo de transporte* (de  $\mu$  a  $\nu$ ) si  $T\#\mu = \nu$ .

De esta manera decimos que un mapeo de transporte preserva medida o masa entre  $\mu$  y  $\nu$ .

Entonces *el problema de Monge* (generalizado) consiste en

$$(1.1) \quad \text{Minimizar } \bar{I}[T] = \int_X c(x, T(x)) d\mu$$

sobre el conjunto de todos los mapeos de transporte  $T$  de  $\mu$  a  $\nu$ .

Una solución a este problema (si existe) se llama *mapeo de transporte óptimo* o *solución de Monge*. Monge no resolvió su problema, pero dedujo por argumentos geométricos que si un mapeo de transporte existe, entonces debe estar en parte determinado por un potencial. A finales del siglo pasado, Evans and Gangbo (1999) demostraron que para todo espacio Euclideano existe un mapeo óptimo para el correspondiente problema de Monge. Este problema resulta ser difícil debido a la no linealidad en  $T$  y la complejidad del conjunto de mapeos de transporte, por ejemplo, no es cerrado con respecto a ninguna topología débil. Un ejemplo fácil donde no existe un mapeo óptimo es considerando  $\mu = \delta_a$  una masa de Dirac y  $\nu$  una masa que no es Dirac, entonces es imposible transportar  $\mu$  a  $\nu$ . Hay que señalar que la formulación de Monge es rígida en el sentido de que requiere que toda la masa en la ubicación  $x$ , está asociada con un único destino  $T(x)$ .

En los años 40 del siglo pasado (Kantorovich, 1942, 1948), hubo un gran avance por el matemático Leonid Kantorovich, quien formuló una versión relajada del problema de Monge que permite que la masa se escinda. En vez de minimizar sobre mapeos de transporte, él consideró medidas de probabilidad  $\pi$  definidas en  $X \times Y$ , las cuales tienen a  $\mu$  y  $\nu$  como sus marginales, esto es:

$$\pi(A \times Y) = \mu(A), \quad \pi(X \times B) = \nu(B),$$

para cualesquiera subconjuntos medibles  $A \subseteq X$ ,  $B \subseteq Y$ . Más precisamente, el problema de Kantorovich consiste en:

$$(1.2) \quad \text{Minimizar } I[\pi] = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y)$$

sobre el conjunto de todas las medidas de probabilidad  $\pi$  definidas en  $X \times Y$  con marginales  $\mu$  y  $\nu$ .

Una medida  $\pi$  que satisface estas condiciones se le llama *plan de transporte* (de  $\mu$  a  $\nu$ ) y una medida que minimiza (1.2) se llama *plan de transporte óptimo*. Una manera de ver un plan de transporte  $\pi$  es que el valor de  $\pi(A \times B)$  es la cantidad de masa inicial en  $A$  la cual es enviada a  $B$ . Denotamos por  $\Gamma(\mu, \nu)$  al conjunto de planes de transporte de  $\mu$  a  $\nu$ . Hay varias ventajas en la formulación de Kantorovich sobre el problema de transporte de Monge:

- $\Gamma(\mu, \nu)$  es siempre no vacío, pues la medida producto  $\mu \times \nu$  pertenece a  $\Gamma(\mu, \nu)$ ,
- La linealidad de  $I$  en  $\pi$ ,
- $\Gamma(\mu, \nu)$  es un conjunto convexo,
- El mínimo existe bajo una hipótesis ligera de  $c$  y por un argumento de compacidad de  $\Gamma(\mu, \nu)$ .

Es fácil ver de la definición de la medida producto que  $\mu \times \nu \in \Gamma(\mu, \nu)$ , pues  $(\mu \times \nu)(A \times Y) = \mu(A)\nu(Y) = \mu(A)$  y  $(\mu \times \nu)(X \times B) = \mu(X)\nu(B) = \nu(B)$ , para cualesquiera subconjuntos medibles  $A$  de  $X$  y  $B$  de  $Y$ .

Para probar que  $\Gamma(\mu, \nu)$  es convexo, nos tomamos  $\pi_1, \pi_2 \in \Gamma(\mu, \nu)$  y  $\lambda \in [0, 1]$ . Como  $\mu, \nu$  son medidas de probabilidad en  $X, Y$ , respectivamente, se tiene que  $(\lambda\pi_1 + (1 - \lambda)\pi_2)$  es una medida de probabilidad en  $X \times Y$ . Ahora sean  $A$  un subconjunto medible de  $X$  y  $B$  un subconjunto medible de  $Y$ , entonces

$$(\lambda\pi_1 + (1 - \lambda)\pi_2)(A \times Y) = \lambda\pi_1(A \times Y) + (1 - \lambda)\pi_2(A \times Y) = \lambda\mu(A) + \mu(A) - \lambda\mu(A) = \mu(A)$$

y

$$(\lambda\pi_1 + (1 - \lambda)\pi_2)(X \times B) = \lambda\pi_1(X \times B) + (1 - \lambda)\pi_2(X \times B) = \lambda\nu(B) + \nu(B) - \lambda\nu(B) = \nu(B).$$

La existencia de un plan óptimo en el problema de Kantorovich es uno de los hechos importantes de esta teoría y es una consecuencia fuerte de la compacidad de  $\Gamma(\mu, \nu)$  (lo

cual se tiene cuando  $X$  y  $Y$  son Polacos) y la semicontinuidad de  $c$ . La demostración no requiere de mucho esfuerzo y decidimos exponerla aquí

De aquí en adelante vamos a denotar por  $\Pi(\mu, \nu)$  a los planes de transporte Borel.

**TEOREMA 1.2.** (Existencia de un plan de transporte óptimo, (Ambrosio and Gigli, 2013)) *Sean  $\mu \in \mathcal{P}(X)$ ,  $\nu \in \mathcal{P}(Y)$  con  $X$  y  $Y$  espacios polacos. Sea  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  una función de costo semicontinua inferiormente. Entonces existe un plan de transporte óptimo para el problema de Kantorovich.*

Demostración.

Veamos primero que  $\Pi(\mu, \nu)$  es una familia apretada. Sea  $\epsilon > 0$ . Por el lema de Ulam  $\mu$  es apretada, luego, existe un compacto  $K_\epsilon \subseteq X$  tal que  $\mu(X \setminus K_\epsilon) \leq \epsilon/2$ . Similarmente existe compacto  $L_\epsilon \subseteq Y$  tal que  $\nu(Y \setminus L_\epsilon) \leq \epsilon/2$ . Entonces para cualquier  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$

$$\pi[(X \times Y) \setminus (K_\epsilon \times L_\epsilon)] \leq \pi[(X \setminus K_\epsilon) \times Y] \cup \pi[(X \times (Y \setminus L_\epsilon))] \leq \epsilon$$

Así

$$\sup_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \pi[(X \times Y) \setminus (K_\epsilon \times L_\epsilon)] \leq \epsilon.$$

Por Teorema de Prokhorov,  $\Pi(\mu, \nu)$  es secuencialmente compacta. Sea  $\pi_k \in \Pi(\mu, \nu)$  una sucesión minimizadora para  $I$ , es decir,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I[\pi_k] = \inf I.$$

Por compacidad secuencial de  $\Pi(\mu, \nu)$  existe subsucesión de  $(\pi_k)$ , llamémosle  $(\pi_k)$ , y una medida  $\pi$  tal que  $(\pi_k)$  converge débilmente a  $\pi$ . Veamos primero que  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ . Sea  $\varphi \in C_b(X)$ , entonces la función  $(x, y) \mapsto \varphi(x)$  es continua y acotada en  $X \times Y$ , así que

$$\int_X \varphi(x) dp_1 \# \pi = \int_{X \times Y} \varphi(x) d\pi = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} \varphi(x) d\pi_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X \varphi(x) dp_1 \# \pi_k = \int_X \varphi(x) d\mu$$

donde  $p_1$  es la proyección sobre la primera coordenada. Entonces ya que  $\varphi$  es arbitraria tenemos que  $p_1 \# \pi = \mu$ . Similarmente obtenemos  $p_2 \# \pi = \nu$ . De esta manera hemos probado que  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ .

Ahora probemos que  $\pi$  es realmente un minimizador para  $I$ . Puesto que  $c$  es semicontinua inferiormente en  $X \times Y$  podemos escribirla como el supremo de una sucesión creciente  $(c_n)$

de funciones continuas y acotadas en  $X \times Y$ . Por la convergencia débil tenemos para cada  $n \in \mathbb{N}$

$$(1.3) \quad \int_{X \times Y} c_n d\pi = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} c_n d\pi_k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} c d\pi_k,$$

por otro lado, por el teorema de convergencia monótona obtenemos

$$(1.4) \quad \int_{X \times Y} c d\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} c_n d\pi,$$

usando (1.3) y (1.4) tenemos

$$\int_{X \times Y} c d\pi = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} c_n d\pi \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} c d\pi_k$$

pero por la propiedad minimizadora de  $(\pi_k)$

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} c d\pi_k = \inf I,$$

así

$$\int_{X \times Y} c d\pi \leq \inf I.$$

□

La existencia de planes de transporte es un hecho importante, pero ¿por qué el problema de Kantorovich es una relajación del problema de Monge? Primero notemos que existe una relación entre los mapeos de transporte y los planes de transporte, la cual se establece en la siguiente proposición cuya demostración es muy fácil. Antes de esto definimos la función  $id \times T : X \rightarrow X \times Y$  por  $(id \times T)(x) = (x, T(x))$ , para todo  $x \in X$ .

**PROPOSICIÓN 1.3.** (Ambrosio, 2003) *Todo mapeo de transporte  $T$  induce un plan de transporte dado por  $(id \times T)\#\mu$ .*

*Demostración.*

Tenemos que probar que  $(id \times T)\#\mu \in \Gamma(\mu, \nu)$ , esto es, probar que  $(id \times T)\#\mu$  tiene marginales  $\mu$  y  $\nu$ . Sea  $A \subseteq X$  medible, entonces  $(id \times T)\#\mu(A \times Y) = \mu[(id \times T)^{-1}(A \times Y)]$ , pero

$$x \in (id \times T)^{-1}(A \times Y) \Leftrightarrow (x, T(x)) \in A \times Y \Leftrightarrow x \in A,$$

luego,

$$\mu[(id \times T)^{-1}(A \times Y)] = \mu(A).$$

Ahora sea  $B \subseteq Y$  medible, entonces  $(id \times T)\#\mu(X \times B) = \mu[(id \times T)^{-1}(X \times B)]$ , pero

$$x \in (id \times T)^{-1}(X \times B) \Leftrightarrow (x, T(x)) \in X \times B \Leftrightarrow x \in T^{-1}(B),$$

entonces

$$\mu[(id \times T)^{-1}(X \times B)] = \mu[T^{-1}(B)] = \nu(B).$$

□

Estos planes de transporte inducidos están concentrados sobre la gráfica del mapeo de transporte  $T$  y el converso también se cumple. Además por la fórmula de cambio de variables tenemos

$$\int_{X \times Y} c(x, T(x)) d(id \times T)\#\mu = \int_X c(x, T(x)) d\mu,$$

esto significa en este caso, que el costo total de transporte de Kantorovich coincide con el costo total de transporte de Monge.

Esto prueba que

$$\min_{\pi \in \Gamma(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi \leq \inf_{T\#\mu = \nu} \int_X c(x, T(x)) d\mu.$$

Así que, si tenemos un plan de transporte óptimo de la forma  $(id \times T)\#\mu$ , entonces  $T$  será un mapeo de transporte óptimo. Por último, se puede probar (Ambrosio, 2003, Teorema 2.1) que si  $c$  es continua y  $\mu$  no atómica entonces

$$\min I = \inf \bar{I}.$$

Por lo tanto, el problema de Kantorovich es considerado como una relajación del problema de Monge y es por eso que en muchos textos a estos dos problemas se le llama *problema de transporte de Monge-Kantorovich*.

La teoría de transporte óptimo se ha desarrollado bastante en los últimos años, por ejemplo, hay grandes avances sobre cuestiones de existencia y unicidad de soluciones para diferentes funciones de costo, así como en el estudio de la regularidad de mapeos de transporte óptimos. Dos libros que recomendamos para abundar más en esta teoría son (Villani, 2003) y (Villani, 2009). Esta teoría ha tenido un gran impacto tanto en matemáticas como en otras áreas del conocimiento por sus amplias aplicaciones y hay al menos dos libros con este enfoque (Ambrosio et al., 2001) y (Santambrogio, 2015).

### 3. La dualidad de Kantorovich

Una poderosa herramienta en la teoría de transporte óptimo es la fórmula de dualidad debido a Kantorovich. Ya hemos visto que el problema de Kantorovich es un problema de minimización lineal con restricciones convexas y como es sabido en programación lineal, este tipo de problemas admiten una formulación dual.

**El problema dual** Sean  $\mu, \nu$  medidas de probabilidad en  $X$  y  $Y$ , respectivamente. Sea  $c$  una función de costo en  $X \times Y$ , *el problema dual de Kantorovich* consiste en

$$\text{maximizar } J(\varphi, \psi) = \int_X \varphi(x) d\mu(x) + \int_Y \psi(y) d\nu(y)$$

sobre todas las parejas de funciones medibles  $(\varphi, \psi) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu)$  tales que

$$(1.5) \quad \varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)$$

para  $\mu$ -casi en toda  $x \in X$ ,  $\nu$ -casi en toda  $y \in Y$ . Sea  $\Phi_c$  el conjunto de todas las parejas de funciones medibles  $(\varphi, \psi) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu)$  que satisfacen

$$\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)$$

para  $\mu$ -casi en toda  $x \in X$ ,  $\nu$ -casi en toda  $y \in Y$ .

A continuación presentamos el teorema de dualidad de Kantorovich, quien en realidad se concentró en el caso particular cuando la función de costo es una distancia:  $c(x, y) = d(x, y)$ , pero de hecho su teorema de dualidad se cumple en generalidades considerables, como podemos ver en el siguiente teorema. Hay versiones de este teorema cumpliéndose en espacios topológicos más exóticos o incluso en escenarios no topológicos.

**TEOREMA 1.4.** (Dualidad de Kantorovich) *Sean  $X$  y  $Y$  espacios polacos,  $\mu \in \mathcal{P}(X)$  y  $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ . Sea  $c : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$  una función de costo semicontinua inferiormente. Entonces*

$$(1.6) \quad \inf_{\Pi(\mu, \nu)} I[\pi] = \sup_{\Phi_c} J(\varphi, \psi).$$

*Más aún, el ínfimo en el lado izquierdo de (1.6) es alcanzado. Además, no cambia el valor del supremo en el lado derecho de (1.6) si restringimos en la definición de  $\Phi_c$  a las parejas de funciones  $(\varphi, \psi)$  las cuales son continuas y acotadas.*

La prueba de este importante hecho se puede consultar en (Villani, 2003) y no la exponemos aquí por ser demasiada larga, además necesita resultados de análisis convexo que no son triviales y que requieren de un esfuerzo mayor, como el principio de minimax dado por la dualidad de Fenchel–Rockafellar que también se puede consultar en (Villani, 2003). Los problemas primal y dual de transporte están relacionados mediante el siguiente resultado.

**TEOREMA 1.5.** (Bernard and Buffoni, 2007b) *Si  $\pi$  es un plan de transporte óptimo y  $(\varphi, \psi)$  es una solución del problema dual de Kantorovich, entonces  $\pi$  está concentrado en el conjunto*

$$\{(x, y) \in X \times Y : \varphi(x) + \psi(y) = c(x, y)\}.$$

#### 4. El problema de transporte para el caso de una función de costo cuadrático en $\mathbb{R}^n$

El problema de transporte de masa de Monge–Kantorovich para el caso particular

$$c(x, y) = \frac{1}{2}|x - y|^2$$

definida en  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ , es el caso donde los resultados son más simples y más importantes por las aplicaciones, las cuales se encuentran tanto en las mismas matemáticas como en otros campos de la ciencia, por ejemplo: análisis funcional (ver, por ejemplo, Figalli et al., 2010), teoría cinética (ver, por ejemplo, Bolley and Carrillo, 2007), ciencias atmosféricas (ver, por ejemplo, Benamou and Brenier, 1998), astrofísica (ver, por ejemplo, McCann, 1997), ecuaciones de materiales porosos (ver, por ejemplo, Otto, 2001), procesamiento de imágenes, particularmente la aplicación a imágenes warping (ver, por ejemplo, Benamou and Brenier, 2000; Angenent et al., 2003; Chartrand et al., 2009; Rehman et al., 2009; Haber and Tannenbaum, 2010; Saumier et al., 2015).

El factor  $1/2$  no tiene ninguna importancia relevante en el problema, simplemente es para tener elegancia en los cálculos. En este caso

$$I[\pi] = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}|x - y|^2 d\pi.$$

Sean  $\mu, \nu$  medidas de probabilidad Borel en  $\mathbb{R}^n$  con momentos de segundo orden finitos, esto es:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^2}{2} d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|y|^2}{2} d\nu(y) < \infty,$$

lo cual asegura que el funcional  $I$  siempre es finito sobre  $\Pi(\mu, \nu)$ . En efecto, siempre que  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ ,

$$I[\pi] = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \frac{|x - y|^2}{2} d\pi(x, y) \leq \int (|x|^2 + |y|^2) d\pi(x, y).$$

Este problema de Kantorovich admite una solución, como lo establece el Teorema 1.2. Veremos a continuación cual es el problema dual bajo este escenario y daremos dos teoremas importantes que se utilizan para obtener nuestros resultados en el siguiente capítulo.

**4.1. El problema dual.** En este caso la condición de  $(\varphi, \psi)$  para pertenecer a  $\Phi_c$  es

$$(1.7) \quad \varphi(x) + \psi(y) \leq \frac{1}{2}|x - y|^2,$$

cumpliéndose para  $\mu$ -casi en todo  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\nu$ -casi en todo  $y \in \mathbb{R}^n$ . Desarrollando el lado derecho de (1.7) y reorganizando términos tenemos

$$(1.8) \quad x \cdot y \leq \left[ \frac{|x|^2}{2} - \varphi(x) \right] + \left[ \frac{|y|^2}{2} - \psi(y) \right].$$

Hacemos

$$\tilde{\varphi}(x) = \frac{|x|^2}{2} - \varphi(x), \quad \tilde{\psi}(y) = \frac{|y|^2}{2} - \psi(y)$$

y denotamos por  $\tilde{\Phi}$  al conjunto de parejas  $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$  en  $L^1(d\mu) \times L^1(d\nu)$  con valores en  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$  tales que para casi todo  $x, y$ ,

$$(1.9) \quad x \cdot y \leq \tilde{\varphi}(x) + \tilde{\psi}(y)$$

Así que  $(\varphi, \psi) \in \Phi_c \Leftrightarrow (\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \in \tilde{\Phi}$ .

Entonces

$$\begin{aligned}
\sup_{\Phi_c} J(\varphi, \psi) &= \sup_{\tilde{\Phi}} J(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) \\
&= \sup_{\tilde{\Phi}} \left\{ \int \frac{|x|^2}{2} d\mu - \int \varphi d\mu + \int \frac{|y|^2}{2} d\nu - \int \psi d\nu \right\} \\
&= \sup_{\tilde{\Phi}} \left( \int \frac{|x|^2}{2} d\mu + \int \frac{|y|^2}{2} d\nu - \left\{ \int \varphi d\mu + \int \psi d\nu \right\} \right) \\
&= \int \frac{|x|^2}{2} d\mu + \int \frac{|y|^2}{2} d\nu - \inf_{\tilde{\Phi}} \left\{ \int \varphi d\mu + \int \psi d\nu \right\}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos

$$\begin{aligned}
\inf_{\Pi(\mu, \nu)} I[\pi] &= \inf_{\Pi(\mu, \nu)} \int \frac{1}{2} |x - y|^2 d\pi(x, y) \\
&= \inf_{\Pi(\mu, \nu)} \left\{ \int \frac{|x|^2}{2} d\mu + \int \frac{|y|^2}{2} d\nu - \int (x \cdot y) d\pi \right\} \\
&= \int \frac{|x|^2}{2} d\mu + \int \frac{|y|^2}{2} d\nu - \sup_{\Pi(\mu, \nu)} \left\{ \int (x \cdot y) d\pi \right\}.
\end{aligned}$$

Así, del principio de dualidad resulta que

$$(1.10) \quad \sup_{\Pi(\mu, \nu)} \int (x \cdot y) d\pi = \inf_{\tilde{\Phi}} \int \varphi d\mu + \int \psi d\nu.$$

Los siguientes dos teoremas contienen resultados del problema de Monge-Kantorovich en el caso costo cuadrático. La demostración de estos teoremas se pueden consultar en (Villani, 2003) y (De Philippis, 2013) se omite su demostración porque son demasiadas extensas. El primero establece la existencia de una pareja óptima de funciones conjugadas convexas para el problema dual en el caso costo cuadrático.

**TEOREMA 1.6.** *Sean  $\mu, \nu$  dos medidas de probabilidad sobre  $\mathbb{R}^n$ , con momentos de segundo orden finitos. Sea  $\tilde{\Phi}$  definido como (1.9). Entonces existe una pareja  $(\varphi, \varphi^*)$  de funciones propias conjugadas convexas semicontinuas inferiormente sobre  $\mathbb{R}^n$ , tal que*

$$\inf_{\tilde{\Phi}} J = J(\varphi, \varphi^*).$$

El segundo establece resultados debidos a Knott and Smith (1984) sobre la existencia de un plan de transporte óptimo y resultados sobre la existencia de un mapeo de transporte óptimo para el caso costo cuadrático debido a Brenier (1987).

**TEOREMA 1.7.** *Sean  $\mu, \nu$  dos medidas de probabilidad sobre  $\mathbb{R}^n$  con momentos de segundo orden finitos. Consideremos el problema de transporte de Monge-Kantorovich asociado con una función de costo cuadrático  $c(x, y) = |x - y|^2$ . Entonces,*

(i) (Criterio de optimalidad de Knott-Smith)  $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$  es óptimo si y sólo si existe una función convexa semicontinua inferiormente  $\varphi$  tal que

$$\text{spt}(\pi) \subseteq \text{Graf}(\partial\varphi),$$

o equivalentemente:

$$\text{para } \mu - \text{casi todo } (x, y), \quad y \in \partial\varphi(x).$$

Más aún, en ese caso, la pareja  $(\varphi, \varphi^*)$  es un minimizador en el problema

$$\inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \psi d\nu; \quad \forall (x, y), \quad x \cdot y \leq \varphi(x) + \psi(y) \right\}.$$

(ii) (Teorema de Brenier) Si  $\mu$  es absolutamente continua con respecto a la medida de Lebesgue, entonces existe un único plan óptimo  $\pi$ , el cual está inducido por el gradiente de una función convexa  $\varphi$ , esto es,

$$\pi = (\text{Id} \times \nabla\varphi)\#\mu,$$

donde  $\nabla\varphi$  es el único (es decir, únicamente determinado  $\mu$ -casi en todas partes) gradiente de una función convexa la cual empuja a  $\mu$  para  $\nu$ :  $\nabla\varphi\#\mu = \nu$ .

(iii) Como un corolario, bajo la hipótesis de (ii),  $\nabla\varphi$  es la única solución para el problema de transporte de Monge:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x - \nabla\varphi(x)|^2 d\mu(x) = \inf_{T\#\mu=\nu} \int_{\mathbb{R}^n} |x - T(x)|^2 d\mu(x),$$

o equivalentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} x \cdot \nabla\varphi(x) d\mu(x) = \sup_{T\#\mu=\nu} \int_{\mathbb{R}^n} x \cdot T(x) d\mu(x).$$

(iv) Finalmente, si  $\nu$  es absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue, entonces  $(\nabla\varphi^* \times Id)\# \nu$ . En particular, para  $\mu$ -casi todo  $x$  y  $\nu$ -casi todo  $y$ ,

$$\nabla\varphi^* \circ \nabla\varphi(x) = x, \quad \nabla\varphi \circ \nabla\varphi^*(y) = y,$$

y  $\nabla\varphi^*$  es el ( $\nu$ -casi en todas partes) único gradiente de una función convexa la cual empuja  $\nu$  para  $\mu$ , y además es la solución del problema de Monge transportando  $\nu$  a  $\mu$  con una función de costo cuadrático.

El teorema de Brenier incluso sigue cumpliéndose sin la hipótesis sobre finitud de segundo orden de los momentos. A continuación se explica como el mapeo óptimo en el caso costo cuadrático satisface una ecuación de Monge–Ampère. Este es otro hecho de suma importancia para nuestro primer objetivo.

**4.2. La ecuación de Monge–Ampère.** Consideremos  $\mu$  y  $\nu$  medidas de probabilidad en  $\mathbb{R}^n$  absolutamente continuas con respecto a la medida de Lebesgue,  $d\mu(x) = f(x) dx$ ,  $d\nu(y) = g(y) dy$ . Del Teorema 1.7 sabemos que existe ( $\mu$  casi en todas partes) un único gradiente de una función convexa,  $\nabla\varphi$ , tal que para toda función prueba  $\zeta \in C_b(\mathbb{R}^n)$  se cumple

$$(1.11) \quad \int \zeta(y)g(y) dy = \int \zeta(\nabla\varphi(x))f(x) dx.$$

Supongamos que  $\nabla\varphi$  es suave (es decir,  $C^1$ ) y uno a uno (lo cual se cumple si  $\varphi$  es estrictamente convexa). Entonces podemos realizar el cambio de variable  $y = \nabla\varphi(x)$  en el lado izquierdo de (1.11):

$$(1.12) \quad \int \zeta(y)g(y) dy = \int \zeta(\nabla\varphi(x))g(\nabla\varphi(x)) \det(D^2\varphi(x)) dx.$$

Como  $\zeta$  es arbitraria, de (1.11) y (1.12) obtenemos

$$(1.13) \quad f(x) = g(\nabla\varphi(x)) \det(D^2\varphi(x)).$$

Esto significa que  $\varphi$  resuelve la siguiente ecuación:

$$(1.14) \quad \det(D^2\varphi(x)) = \frac{f(x)}{g(\nabla\varphi(x))},$$

la cual es un caso particular de la ecuación de Monge–Ampère:

$$\det(D^2\varphi(x)) = F(x, \varphi(x), \nabla\varphi(x)).$$

Recalcamos que como  $\varphi$  es convexa,  $D^2\varphi$  se puede interpretar como una matriz de medidas signadas, la cual tiene una parte absolutamente continua y una singular con respecto a la medida de Lebesgue, esta medida es la medida Hessiana asociada a  $\varphi$ , que se denota por  $\det_H D^2\varphi$  y se define de la siguiente manera: para cualquier conjunto medible  $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ,

$$\det_H D^2\varphi[E] = |\partial\varphi(E)|.$$

Una función  $\varphi$  es una solución de (1.13) en el sentido de Aleksandrov si la identidad (1.13) se cumple casi en todas partes y además la parte singular de la medida Hessiana es cero y  $\varphi$  es estrictamente convexa, por otro lado,  $\varphi$  es una solución de Brenier de (1.13) si  $\nabla\varphi\#\mu = \nu$ , donde  $\mu$  y  $\nu$  son medidas de probabilidad dadas por  $d\mu(x) = f(x)dx$ ,  $d\nu(x) = g(y)dy$ . Cuando  $\varphi$  es dos veces continuamente diferenciable estos conceptos reducen a la ecuación de Monge-Ampère al sentido usual.

**4.3. Regularidad del mapeo óptimo.** En la teoría de transporte óptimo una cuestión importante es el estudio de la regularidad del mapeo de transporte óptimo, que está motivado por varias razones:

- El estudio de un ecuación diferencial parcial típica,
- Es un paso hacia una comprensión cualitativa del mapeo de transporte óptimo,
- Si se trata de un fenómeno general, los casos no suaves pueden ser tratados por regularización, en lugar de trabajar directamente sobre objetos no suaves.

Brenier (1991) hizo la conexión popular entre el problema de Monge y las ecuaciones de Monge-Ampère. En consecuencia, en la literatura soluciones débiles de ecuaciones tipo Monge-Ampère construidas por medio de transporte óptimo son llamadas soluciones de Brenier. Caffarelli (1992) demostró que para un conjunto de llegada convexo la noción de solución de Brenier es equivalente a los conceptos viejos de solución de Aleksandrov y solución viscosa. En el caso especial, costo = distancia cuadrática en  $\mathbb{R}^n$ , el problema de regularidad ha sido resuelto por Caffarelli (1990, 1991, 1992, 1996), quien demostró la suavidad del mapeo óptimo bajo adecuadas condiciones sobre la regularidad de las densidades y sobre la geometría de sus soportes. Sin embargo, un mayor problema el cual sigue siendo abierto, es la regularidad para funciones de costo generales. Un avance en este problema ha sido alcanzado por Ma et al. (2005) y Loeper (2009), quienes encontraron una condición necesaria y suficiente sobre la función de costo para garantizar la regularidad del mapeo

óptimo. Esta condición, llamada ahora condición MTW, involucra una combinación de derivadas de la función de costo, hasta de cuarto orden. Si la condición MTW falla sólo en un punto, entonces se puede construir densidades suaves (ambas soportadas sobre dominios los cuales satisfacen las hipótesis de convexidad) para las cuales el mapeo de transporte óptimo no es continuo (Loeper, 2009). La cuestión de regularidad es muy complicada, por ejemplo se sabe que la condición MTW sólo se satisface para clases muy especiales de variedades Riemannianas, tales como esferas, sus productos, sus cocientes y sus perturbaciones. En efecto, la condición MTW es extremadamente restrictiva y muchos costos interesantes no la satisfacen (Loeper, 2009). Por lo tanto, una pregunta natural e importante es la siguiente: ¿Qué se puede decir acerca de la regularidad de los mapeos de transporte óptimos cuando la condición MTW falla? Recientemente, De Philippis and Figalli (2015) han dado una respuesta a este cuestionamiento. Chen and Figalli (2017) han probado regularidad parcial más alta cuando se consideran costos generales y han dado estimaciones globales  $W^{2,p}$  para el caso costo cuadrático y pequeñas perturbaciones de ella. Así, el problema de regularidad del mapeo de transporte óptimo es una línea de investigación importante que sigue desarrollándose en estos tiempos.



## Capítulo 2

# Diferenciabilidad de segundo orden de un funcional asociado al problema de Monge

### 1. Introducción

Como hemos dicho en el capítulo anterior, el problema de transporte de Monge con función de costo la distancia Euclideana cuadrática,  $c(x, y) = |x - y|^2$ , es muy interesante debido a sus amplias aplicaciones, particularmente al procesamiento de imágenes (Benamou and Brenier, 2000; Angenent et al., 2003; Chartrand et al., 2009; Rehman et al., 2009; Haber and Tannenbaum, 2010; Saumier et al., 2015). En este caso se han estudiado métodos numéricos para calcular el mapeo de transporte óptimo, que como sabemos está dado por el gradiente de una función convexa. Por ejemplo, en (Chartrand et al., 2009) los autores proponen un método iterativo de descenso por gradiente para calcular numéricamente el mapeo óptimo, esto es gracias al cálculo que ellos obtienen de la derivada de cierto funcional  $M$  asociado al problema de Monge correspondiente. Ellos son motivados por la aplicación a imágenes warping, el cual consiste en el rearreglo o reasignación de pixeles de una imagen en otra a un mínimo costo. La característica peculiar de este algoritmo es que es simple y con pocas iteraciones se obtienen warpings de buena calidad. Nuestro trabajo desarrollado en este capítulo está motivado por (Chartrand et al., 2009) para investigar si el funcional  $M$  es segundo diferenciable en algún sentido y tratar de mejorar en un futuro trabajo el método en (Chartrand et al., 2009) por un método tipo-Newton. En este capítulo presentamos nuestros resultados acerca de la diferenciabilidad de segundo orden de dicho funcional.

### 2. Antecedentes

Es bien sabido que el problema de Monge formulado en el siguiente escenario admite solución:

- $X = Y = \mathbb{R}^n$ ,

- $\mu$  y  $\nu$  medidas absolutamente continuas con soporte compacto  $K_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $K_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  y densidades  $f_1 \in L^1(K_1)$  y  $f_2 \in L^1(K_2)$ , respectivamente,
- $c$  es la función de costo  $\frac{1}{2}|x - y|^2$ .

El problema dual como vimos en capítulo anterior se reduce a

$$(2.1) \quad \text{minimizar } \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu$$

sobre el conjunto de parejas  $(\varphi, \psi) \in C(K_1) \times C(K_2)$  tales que para todo  $(x, y) \in K_1 \times K_2$  satisfacen

$$\varphi(x) + \psi(y) \geq x \cdot y,$$

el cual tiene solución  $(\varphi, \psi)$ , donde estas funciones son conjugadas convexas una de la otra y  $\nabla\varphi$  es la solución del problema de Monge en el escenario antes mencionado (Knott and Smith, 1984; Brenier, 1987). Este problema de Monge es considerado en (Chartrand et al., 2009), donde los autores demuestran que un funcional asociado al problema dual es diferenciable en el sentido de Hadamard y calculan explícitamente esta derivada. El funcional está dado por:

$$(2.2) \quad M(\varphi) = \int_{K_1} \varphi f_1 + \int_{K_2} \varphi^* f_2$$

definido en  $C(K_1)$  y

$$\nabla M(\varphi) = f_1 - f_2(\nabla\varphi^{**}) \det(D^2\varphi^{**}).$$

Además, ellos prueban que  $M$  tiene un único minimizador convexo  $\varphi$  el cual es el potencial para la solución del problema de Monge. Esto es consecuencia inmediata del hecho que

$$\varphi(y) + \varphi^*(x) \geq x \cdot y.$$

Este funcional tiene propiedades agradables, como ser convexo y Lipschitz. Con el cálculo de la derivada de  $M$  los autores aproximaron numéricamente el mapeo de transporte óptimo usando una iteración de descenso por gradiente y aplicaron este algoritmo (ver el Apéndice, Sección 1) para el transporte de pixel a pixel de una imagen a otra a un mínimo costo, produciendo warpings de buena calidad. Más precisamente, en el warping de una imagen en otra, dadas en escalas de grises, cada imagen representa una distribución de masa de la cantidad de luz acumulada en una ubicación determinada, entonces un pixel brillante representa una ubicación con más masa, mientras que un pixel oscuro representa



FIGURA 2.1. Lena



FIGURA 2.2. Tiffany

una ubicación con menos masa. El mapeo óptimo entre aquellas imágenes nos revelará la mejor manera (en términos de minimizar la distancia cuadrática) de transportar la primera densidad en la segunda, así que es importante calcular numéricamente el mapeo óptimo para darnos cuenta como una imagen se está transformando o deformando en otra. En (Chartrand et al., 2009) consideraron dos imágenes que son estándar en la literatura del procesamiento de imágenes, Lena y Tiffany dadas en Figuras 2.1 y 2.2, para aplicar el warping. Sin embargo, la aproximación que se obtiene del mapeo óptimo no están fina, puesto que los autores en (Chartrand et al., 2009) sustituyen la función  $\varphi^{**}$  por  $\varphi$  en  $\nabla M(\varphi)$  y pensamos que ésta es una de las deficiencias que tiene este método. El warping resultante que obtuvieron los autores con el mapeo óptimo se muestra en Figura 2.3. Para entender la importancia del warping de imágenes se puede consultar el Apéndice, Sección 1.

### 3. Resultados sobre la diferenciabilidad de segundo orden de $M$

Varios investigadores han trabajado en las cuestiones de diferenciabilidad de segundo orden, el primer artículo que aborda esta cuestión es (Busemann and Feller, 1936), donde



FIGURA 2.3. Warping de Lena a Tiffany con 15 iteraciones

los autores demostraron que las funciones convexas de dos variables son dos veces diferenciables. Unos años más tarde, Aleksandrov en su importante artículo (Aleksandrov, 1939) extiende este resultado demostrando que toda función convexa de  $n$  variables tiene una segunda derivada casi en todas partes. Este trabajo motivó la investigación en la dirección de obtener versiones de lo que ahora se conoce como el teorema de Alexandrov, en el caso de dimensión infinita. En dicho caso, el problema de la diferenciabilidad de segundo orden es más delicado (Bogachev and Goldys, 2006), pero se han obtenido algunos resultados positivos, por ejemplo, en (Borwein and Noll, 1994) el problema se abordó en el contexto de funcionales integrales convexos. Otras obras en esta dirección se dan, por ejemplo, en (Kato, 1989; Noll, 1993; Matoušková and Zajíček, 1998). En estos trabajos se han utilizado diferentes nociones de diferenciabilidad de segundo orden, por ejemplo en (Borwein and Noll, 1994) se introduce la diferenciabilidad de segundo orden como la existencia de una expansión de Taylor de segundo orden. En ese artículo se define también una segunda derivada generalizada, donde la convergencia se obtiene en el sentido de Mosco, mientras que en (Noll, 1993) se utiliza el enfoque de epi-convergencia. Nuestros resultados se dan en el contexto de la convergencia de la diferencia cociente (2.3) en la topología débil y normal.

Ahora resumimos las nociones de diferenciabilidad de segundo orden siguiendo Noll (1993).

DEFINICIÓN 2.1. Sea  $F$  una función convexa continua definida en un espacio de Hilbert  $H$ .

El cociente

$$(2.3) \quad \frac{\nabla F(\varphi + t\omega) - \nabla F(\varphi)}{t}$$

se llama *diferencia cociente* de  $\nabla F$  en  $\varphi$ . Decimos que

- $F$  es Gâteaux diferenciable de segundo orden en  $\varphi$ , si la diferencia cociente de  $\nabla F$  en  $\varphi$  converge puntualmente en  $w$ , con respecto a la topología de norma, a un operador lineal acotado simétrico  $T_\varphi$  en  $H$ .
- $F$  es débil Gâteaux diferenciable de segundo orden en  $\varphi$ , si la diferencia cociente de  $\nabla F$  en  $\varphi$  converge puntualmente en  $w$ , con respecto a la topología débil, a un operador lineal acotado simétrico  $T_\varphi$  en  $H$ .
- $F$  es Fréchet diferenciable de segundo orden en  $\varphi$ , si la diferencia cociente de  $\nabla F$  en  $\varphi$  converge uniformemente en  $\|w\| \leq 1$ , con respecto a la topología de norma, a un operador lineal acotado simétrico  $T_\varphi$  en  $H$ .
- $F$  es débil Fréchet diferenciable de segundo orden en  $\varphi$ , si la diferencia cociente de  $\nabla F$  en  $\varphi$  converge uniformemente en  $\|w\| \leq 1$ , con respecto a la topología débil, a un operador lineal acotado simétrico  $T_\varphi$  en  $H$ .

El operador  $T_\varphi$ , si existe, será denotado por  $\nabla^2 F(\varphi)(w)$ , con una indicación en el sentido que es considerado.

Nuestros resultados se obtienen para  $n = 2$  y entorno al potencial de Monge, es decir, entorno a la función  $\varphi$  tal que  $\nabla\varphi$  es el mapeo óptimo en el escenario mencionado en sección anterior. En las pruebas de nuestros resultados necesitaremos hechos importantes relacionados con el análisis convexo y la teoría de la diferenciabilidad de segundo orden, algunos de ellos se exponen a continuación. La demostración de las siguientes proposiciones pueden ser consultadas en la referencias dadas ahí.

**PROPOSICIÓN 2.2.** (McCann (1997), Prop. A.1). (Teorema de la función inversa para mapeos monótonos). *Supongamos que  $\varphi$  es convexa en  $\mathbb{R}^n$  y tiene una derivada de Aleksandrov  $\nabla^2\varphi(x_0)$  en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , así que  $\nabla\varphi(x_0)$  existe y  $\varphi < \infty$  en una vecindad de  $x_0$ . Si  $\nabla^2\varphi(x_0)$  es invertible, entonces  $\varphi^*$  tiene  $[\nabla^2\varphi(x_0)]^{-1}$  como su derivada de Aleksandrov en  $\nabla\varphi(x_0)$ ; si  $\nabla^2\varphi(x_0)$  es no invertible, entonces  $\varphi^*$  no es dos veces diferenciable en  $\nabla\varphi(x_0)$  en el sentido de Aleksandrov.*

**PROPOSICIÓN 2.3.** (Noll (1993), Prop. 2.1). *Sea  $H$  un espacio de Hilbert separable. Sea  $F$  Gâteaux diferenciable de primer orden en una vecindad de  $\varphi$  y supongamos que  $F$  es débil Gâteaux diferenciable de segundo orden en  $\varphi$ . Supongamos que  $t \rightarrow \langle \nabla F(\varphi + t\varphi), v \rangle$  es absolutamente continua para  $t$  pequeño y  $w, v$  fijos. Entonces  $F$  es Gâteaux diferenciable*

de segundo orden en  $\varphi$ , es decir, la convergencia débil de la diferencia cociente de  $\nabla F$  en  $\varphi$  puede ser mejorada a la convergencia en norma.

**PROPOSICIÓN 2.4.** (Borwein and Noll (1994), Prop. 2.2). *Sea  $F$  una función convexa continua definida en un espacio de Banach  $E$ . Entonces todo punto de diferenciabilidad (diferencial) de segundo orden de  $F$  es un punto Lipschitz-suave. En particular,  $F$  es Fréchet diferenciable en tales puntos.*

En lo que sigue establecemos nuestros resultados, los cuales conciernen a diferenciabilidad de segundo orden de  $M$ , Teorema 2.5 y 2.7, y también diferenciabilidad de primer orden de  $M$  en el sentido fuerte dado en Corolario 2.8. El siguiente Teorema establece diferenciabilidad de segundo orden del funcional  $M$  en sentido débil.

**TEOREMA 2.5.** *Sea  $f_1 \in C^1(K_1)$ ,  $f_2 \in C^1(K_2)$ , con  $K_1$  compacto y convexo,  $K_2$  compacto. Sea  $\varphi : K_1 \rightarrow \mathbb{R}$  el potencial de Monge y supongamos que  $\varphi$  es de clase  $C^3$ . Entonces el funcional  $M$  es débil Gâteaux diferenciable de segundo orden en el potencial de Monge  $\varphi$  y*

$$\nabla^2 M(\varphi)(w) = -f_1 \operatorname{tr}([D^2\varphi]^{-1}D^2w) - \nabla f_2(\nabla\varphi) \cdot \nabla w \det(D^2\varphi).$$

para toda función convexa  $w \in C_0^\infty(K_1) \cap L^2(K_1)$ .

*Demostración.* En lo que sigue necesitaremos extender una función dada  $\varphi$  originalmente definida en  $K_1$  al espacio total  $\mathbb{R}^n$ , esta extensión la hacemos definiendo  $\varphi \equiv +\infty$  en  $\mathbb{R}^n \setminus K_1$ . Si  $\varphi$  es Lipschitz entonces la extensión resultante es semi-continua inferiormente ya que  $K_1$  es compacto, equivalentemente, su epigráfica es cerrada (Ioffe and Tihomirov, 1979, pág. 167). Nosotros estamos suponiendo en este Teorema que  $\varphi$  es  $C^3$  en  $K_1$ , por lo que es Lipschitz en  $K_1$ . Por otro lado, la extensión será convexa, ya que la función original es convexa. Aquí usaremos este procedimiento varias veces y denotaremos la extensión por la misma letra.

Sean  $w, v$  fijos y  $t > 0$ . Nuestro primer objetivo es demostrar

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{\nabla M(\varphi + tw) - \nabla M(\varphi)}{t}, v \right\rangle = \\ & - \int_{K_1} v(x) [f_1(x) \operatorname{tr}([D^2\varphi(x)]^{-1}D^2w(x)) + \nabla f_2(\nabla\varphi(x)) \cdot \nabla w(x) \det(D^2\varphi(x))] dx. \end{aligned}$$

Tenemos de (Chartrand et al., 2009) que

$$\nabla M(\varphi) = f_1 - f_2(\nabla\varphi^{**}) \det(D^2\varphi^{**}) = f_1 - f_2(\nabla\varphi) \det(D^2\varphi)$$

para toda  $\varphi \in C(K_1)$ . La última igualdad la obtenemos por el Teorema de Fenchel-Moreau (Ioffe and Tihomirov, 1979, pág. 175), ya que  $\varphi$  es convexa y cerrada (aquí usamos el hecho de que  $\varphi \in C^3(K_1)$ ). Ver el primer párrafo de la prueba). Similarmente

$$\nabla M(\varphi + tw) = f_1 - f_2(\nabla(\varphi + tw)) \det(D^2(\varphi + tw)),$$

aquí hemos usado otra vez el Teorema de Fenchel-Moreau definiendo  $w$  en el espacio total  $\mathbb{R}^n$  como lo hicimos con  $\varphi$ , así  $(\varphi + tw)^{**} = \varphi + tw$ .

Ahora tenemos la diferencia cociente de  $\nabla M$  en  $\varphi$ :

$$\frac{\nabla M(\varphi + tw) - \nabla M(\varphi)}{t} = \frac{f_2(\nabla\varphi) \det(D^2\varphi) - f_2(\nabla(\varphi + tw)) \det(D^2(\varphi + tw))}{t},$$

Entonces

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{\nabla M(\varphi + tw) - \nabla M(\varphi)}{t}, v \right\rangle = \\ & \lim_{t \rightarrow 0} \int_{K_1} \frac{f_2(\nabla\varphi) \det(D^2\varphi) - f_2(\nabla(\varphi + tw)) \det(D^2(\varphi + tw))}{t} v \, dx \end{aligned}$$

Calculamos primero

$$\begin{aligned} \delta_t &= \int_{K_1} v(x) f_2(\nabla\varphi(x)) \det(D^2\varphi(x)) \, dx - \int_{K_1} v(x) f_2(\nabla(\varphi + tw)(x)) \det(D^2(\varphi + tw)(x)) \, dx \\ &= \int_{K_1} v(x) f_2(\nabla\varphi(x)) \det(D^2\varphi(x)) \, dx - \int_{K_1} v(x) f_2(\nabla(\varphi + tw)(x)) \det(D^2(\varphi + tw)(x)) \, dx \\ &\pm \int_{K_1} v(x) f_2(\nabla(\varphi + tw)(x)) \det(D^2\varphi(x)) \, dx \\ &= \int_{K_1} v(x) \left[ f_2(\nabla\varphi(x)) - f_2(\nabla(\varphi + tw)(x)) \right] \det(D^2\varphi(x)) \, dx \\ &+ \int_{K_1} v(x) f_2(\nabla(\varphi + tw)(x)) \left[ \det(D^2\varphi(x)) - \det(D^2(\varphi + tw)(x)) \right] \, dx. \end{aligned}$$

Ya que  $\varphi$  y  $\varphi + tw$  se suponen diferenciables en  $K_1$ , tenemos que  $\nabla\varphi(x)$  y  $\nabla(\varphi + tw)(x)$  existen para cada  $x \in K_1$ . Sean  $y_0 = \nabla\varphi(x)$  y  $y_t = \nabla(\varphi + tw)(x)$ , entonces

$$\begin{aligned} y_t - y_0 &= \nabla(\varphi + tw)(x) - \nabla\varphi(x) \\ &= \nabla\varphi(x) + t\nabla w(x) - \nabla\varphi(x) \\ (2.4) \qquad &= t\nabla w(x) \end{aligned}$$

Como  $w$  es de clase  $C^1(K_1)$  obtenemos que  $y_t \rightarrow y_0$  uniformemente cuando  $t \rightarrow 0$ .

Separamos  $\delta_t$  en dos partes:

$$\delta_t^1 := \int_{K_1} v(x) [f_2(\nabla\varphi(x)) - f_2(\nabla(\varphi + tw)(x))] \det(D^2\varphi(x)) dx$$

y

$$\delta_t^2 := \int_{K_1} v(x) f_2(y_t) [\det(D^2\varphi(x)) - \det(D^2(\varphi + tw)(x))] dx.$$

Tenemos

$$\delta_t^1 = \int_{K_1} v(x) [f_2(\nabla\varphi(x)) \det(D^2\varphi(x)) - f_2(\nabla\varphi(x) + t\nabla w(x)) \det(D^2\varphi(x))] dx,$$

ahora expandemos  $f_2(\nabla\varphi(x) + t\nabla w(x))$  en series de Taylor:

$$f_2(\nabla\varphi(x) + t\nabla w(x)) = f_2(\nabla\varphi(x)) + t\nabla f_2(\nabla\varphi(x)) \cdot \nabla w(x) + o(t),$$

así

$$\delta_t^1 = - \int_{K_1} v(x) [t\nabla f_2(\nabla\varphi(x)) \cdot \nabla w(x) + o(t)] \det(D^2\varphi(x)) dx,$$

entonces

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\delta_t^1}{t} = - \int_{K_1} v(x) [\nabla f_2(\nabla\varphi(x)) \cdot \nabla w(x)] \det(D^2\varphi(x)) dx.$$

Ahora calculamos

$$\delta_t^2 = \int_{K_1} v(x) f_2(y_t) [\det(D^2\varphi(x)) - \det(D^2(\varphi + tw)(x))] dx.$$

Tomamos ventaja del hecho que  $\det(D^2(\varphi + tw)) = \det(D^2\varphi + tD^2w)$  para expandir este determinante como función de  $t$  en series de Taylor:

$$\det(D^2\varphi + tD^2w) = \det(D^2\varphi) + t \det(D^2\varphi) \operatorname{tr}([D^2\varphi]^{-1} D^2w) + o(t).$$

La invertibilidad de  $D^2\varphi$  se sigue del hecho de que la función  $\varphi^*$  es dos veces diferenciable (casi en todas partes) en el sentido de Aleksandrov (Ver Proposición 2.2). Por lo tanto

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\delta_t^2}{t} &= - \int_{K_1} v(x) f_2(y_0) \det(D^2\varphi(x)) \operatorname{tr}([D^2\varphi(x)]^{-1} D^2w(x)) dx \\ &= - \int_{K_1} v(x) f_2(\nabla\varphi(x)) \det(D^2\varphi(x)) \operatorname{tr}([D^2\varphi(x)]^{-1} D^2w(x)) dx,\end{aligned}$$

Así, la convergencia de la diferencia cociente de  $\nabla M$  en  $\varphi$ , con respecto a la topología débil, es demostrada y

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{\nabla M(\varphi + tw) - \nabla M(\varphi)}{t}, v \right\rangle &= \\ - \int_{K_1} v(x) [f_2(\nabla\varphi(x)) \det(D^2\varphi(x)) \operatorname{tr}([D^2\varphi(x)]^{-1} D^2w(x)) + \\ \nabla f_2(\nabla\varphi(x)) \cdot \nabla w(x) \det(D^2\varphi(x))] dx.\end{aligned}$$

Podemos hacer una simplificación usando el hecho de que  $\nabla\varphi$  es el mapeo óptimo, así que  $\nabla\varphi \# d\mu_1 = d\mu_2$  (ver (1.13)), luego

$$f_1(x) = f_2(\nabla\varphi(x)) \det(D^2\varphi(x)),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \left\langle \frac{\nabla M(\varphi + tw) - \nabla M(\varphi)}{t}, v \right\rangle &= \\ - \int_{K_1} v(x) [f_1(x) \operatorname{tr}([D^2\varphi(x)]^{-1} D^2w(x)) + \nabla f_2(\nabla\varphi(x)) \cdot \nabla w(x) \det(D^2\varphi(x))] dx.\end{aligned}$$

Finalizamos la prueba demostrando que

$$J_\varphi(w) := -f_1 \operatorname{tr}([D^2\varphi]^{-1} D^2w) - \nabla f_2(\nabla\varphi) \cdot \nabla w \det(D^2\varphi)$$

es un operador lineal acotado en  $C_0^\infty(K_1) \cap L^2(K_1)$ .

La linealidad de  $J_\varphi$  se sigue del hecho de que la traza,  $D^2$  y  $\nabla$  son operadores lineales. Para la prueba del acotamiento véase el Apéndice, Teorema 6.1. La simetría es realmente obtenida reemplazando el operador  $J_\varphi$  por su simetrización  $\frac{1}{2}(J_\varphi + J_\varphi^*)$  como se discute en (Borwein and Noll, 1994). Por lo tanto hemos probado que  $\nabla^2 M(\varphi)(w) = J_\varphi(w)$ .  $\square$

**Observación.** Como es bien sabido, la regularidad de un mapeo de transporte óptimo es toda una teoría. Las primeras investigaciones acerca de regularidad fueron llevadas a cabo por Caffarelli, citadas en (Villani, 2003, págs. 140–141). Imponiendo regularidad de

Holder en las densidades  $f_1, f_2$  y acotamiento en teorema anterior, uno obtiene regularidad correspondiente del potencial del mapeo óptimo. Nosotros no abordamos aquellas delicadas cuestiones que requieren de investigaciones más profundas, sino que ponemos como hipótesis explícita la clase o regularidad necesaria para justificar los cálculos a lo largo de la demostración del Teorema 2.5.

Podemos de hecho mejorar este resultado en el sentido de la convergencia de la diferencia cociente de  $\nabla M$  en el potencial de Monge  $\varphi$ , probando que la diferencia cociente de  $\nabla M$  en el potencial de Monge converge en norma, para esto vamos a probar el siguiente:

LEMA 2.6. *La función  $t \rightarrow \langle \nabla M(\varphi + tw), v \rangle$  es absolutamente continua, para  $t$  pequeño y  $w, v$  fijos .*

*Demostración.*

Sean  $t > 0$  pequeño,  $w$  y  $v$  fijos y sea  $G(t) = \langle \nabla M(\varphi + tw), v \rangle$ , entonces

$$G(t) = \int_{K_1} v[f_1 - f_2(\nabla(\varphi + tw)) \det(D^2(\varphi + tw))] dx.$$

Sea  $\epsilon > 0$ . Deseamos encontrar un  $\delta > 0$  tal que si  $\{(\eta_k, \xi_k)\}_{k=1}^n$  es una familia de sub-intervalos mutuamente disjuntos de  $[0, t]$  tales que  $\sum_k |\xi_k - \eta_k| < \delta$ , entonces

$$\sum_k |G(\eta_k) - G(\xi_k)| < \epsilon.$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned} & G(\eta_k) - G(\xi_k) \\ = & \int_{K_1} f_2(\nabla(\varphi + \xi_k w)) \det(D^2(\varphi + \xi_k w)) dx - \int_{K_1} f_2(\nabla(\varphi + \eta_k w)) \det(D^2(\varphi + \eta_k w)) dx \\ = & \int_{K_1} f_2(\nabla(\varphi + \xi_k w)) \det(D^2(\varphi + \xi_k w)) dx - \int_{K_1} f_2(\nabla(\varphi + \eta_k w)) \det(D^2(\varphi + \eta_k w)) dx \\ & \pm \int_{K_1} f_2(\nabla(\varphi + \xi_k w)) \det(D^2(\varphi + \eta_k w)) dx \\ = & \int_{K_1} f_2(\nabla(\varphi + \xi_k w)) [\det(D^2(\varphi + \xi_k w)) - \det(D^2(\varphi + \eta_k w))] dx \\ & + \int_{K_1} \det(D^2(\varphi + \eta_k w)) [f_2(\nabla(\varphi + \xi_k w)) - f_2(\nabla(\varphi + \eta_k w))] dx. \end{aligned}$$

Para la primera integral en la expresión anterior procedemos como sigue:

$$\det(D^2(\varphi + \xi_k w)) = \det[D^2(\varphi + \eta_k w) + (\xi_k - \eta_k)D^2 w],$$

expandiendo en series de Taylor

$$\begin{aligned} & \det[D^2(\varphi + \eta_k w) + (\xi_k - \eta_k)D^2 w] = \\ & \det(D^2(\varphi + \eta_k w)) + (\xi_k - \eta_k) \det(D^2(\varphi + \eta_k w)) \operatorname{tr}([D^2(\varphi + \eta_k w)]^{-1} D^2 w) + o(\xi_k - \eta_k), \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} & \det(D^2(\varphi + \xi_k w)) - \det(D^2(\varphi + \eta_k w)) = \\ & (\xi_k - \eta_k) \det(D^2(\varphi + \eta_k w)) \operatorname{tr}([D^2(\varphi + \eta_k w)]^{-1} D^2 w) + o(\xi_k - \eta_k). \end{aligned}$$

Entonces para cada  $(\eta_k, \xi_k)$

$$\begin{aligned} & |G(\eta_k) - G(\xi_k)| = \\ & \left| \int_{K_1} f_2(\nabla(\varphi + \xi_k w)) (\xi_k - \eta_k) \det(D^2(\varphi + \eta_k w)) \operatorname{tr}([D^2(\varphi + \eta_k w)]^{-1} D^2 w) dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{K_1} f_2(\nabla(\varphi + \xi_k w)) o(\xi_k - \eta_k) dx \right. \\ & \quad \left. + \int_{K_1} \det(D^2(\varphi + \eta_k w)) [f_2(\nabla(\varphi + \xi_k w)) - f_2(\nabla(\varphi + \eta_k w))] dx \right| \\ & \leq |\xi_k - \eta_k| M_1 \int_{K_1} \left| \det(D^2(\varphi + \eta_k w)) \operatorname{tr}([D^2(\varphi + \eta_k w)]^{-1} D^2 w) \right| dx \\ & \quad M_1 \int_{K_1} |o(\xi_k - \eta_k)| dx \\ & \quad + M_2 \int_{K_1} \left| [f_2(\nabla(\varphi + \xi_k w)) - f_2(\nabla(\varphi + \eta_k w))] \right| dx \\ & \leq |\xi_k - \eta_k| M_1 R |K_1| + M_1 C |\xi_k - \eta_k| |K_1| + M_2 C_L |\nabla(\varphi + \xi_k w) - \nabla(\varphi + \eta_k w)| |K_1| \\ & = |\xi_k - \eta_k| M_1 R |K_1| + M_1 C |\xi_k - \eta_k| |K_1| + M_2 C_L |\nabla w| |\xi_k - \eta_k| |K_1| \\ & \leq |\xi_k - \eta_k| (M_1 R |K_1| + M_1 C |K_1| + M_2 C_L M_3 |K_1|), \end{aligned}$$

donde  $R$  es una constante tal que

$$R \geq \left| \det(D^2(\varphi + \eta_k w)) \operatorname{tr}([D^2(\varphi + \eta_k w)]^{-1} D^2 w) \right|,$$

$M_1 = \max_{K_2} |f_2|$ ,  $C_L$  es la constante de Lipschitz de  $f_2$ ,  $|K_1|$  es la medida de  $K_1$ ,  $M_2$  es una constante tal que  $M_2 \geq |\det(D^2(\varphi + \eta_k w))|$  y  $M_3$  es una constante tal que  $M_3 \geq |\nabla w|$ .

Ahora sea  $\delta = \epsilon / (M_1 R |K_1| + M_1 C |K_1| + M_2 C_L M_3 |K_1|)$ , entonces obtenemos que

$$\sum_k |G(\eta_k) - G(\xi_k)| \leq \sum_k |\xi_k - \eta_k| (M_1 R |K_1| + M_1 C |K_1| + M_2 C_L M_3 |K_1|) < \epsilon.$$

□

Ahora establecemos nuestro resultado principal de este capítulo:

**TEOREMA 2.7.** *El funcional  $M$  es Gâteaux diferenciable de segundo orden en el potencial de Monge  $\varphi$ .*

*Demostración.*

Usando nuestros previos resultados, Teorema 2.5 y Lema 2.6, y Proposición. 2.3, obtenemos la demostración. □

Sabemos que  $M$  es Gâteaux diferenciable de primer orden en todo punto (Chartrand et al. (2009)), de hecho,  $M$  es Hadamard diferenciable, ya que  $M$  es Lipschitz. ¿Será verdad que  $M$  es Fréchet diferenciable en todo punto? En el siguiente corolario damos la respuesta para el potencial de Monge.

**COROLARIO 2.8.** *El funcional  $M$  es Fréchet diferenciable en el potencial de Monge.*

*Demostración.* Hemos probado que  $M$  es débil Gâteaux diferenciable de segundo orden en el potencial de Monge  $\varphi$ , lo cual es equivalente a ser diferenciable de segundo orden en  $\varphi$  ((Borwein and Noll, 1994), Definición 2.1 y Teorema 3.1), así, por Proposición 2.4 obtenemos que  $M$  es Fréchet diferenciable en el potencial de Monge  $\varphi$ . □

## Capítulo 3

# Una aplicación del modelo de los precios hedónicos

### 1. Introducción

Cuando estudiábamos la teoría de transporte óptimo fuimos encontrando sorprendentemente que varias áreas del conocimiento se relacionaban con esta teoría, una de ellas es la teoría de los precios hedónicos como se muestra en (Ekeland, 2005, 2009; Chiappori et al., 2010) (para ver los resultados que ligan tales teorías puede consultarse en el Apéndice, Sección 4). Nos pareció muy interesante dicha teoría por sus aplicaciones a la valoración de bienes por medio de sus características o atributos, proporcionando la importancia relativa de cada una de ellas en la determinación del precio de mercado. Así, por ejemplo, a través de la metodología que ofrece esta teoría se pueden valorar viviendas, autos, computadoras, medicamentos; en general, bienes heterogéneos. Inmediatamente pensamos en un problema que existe en nuestro país, la violencia criminal, la cual podríamos investigar sus efectos sobre la valoración de viviendas usando la metodología hedónica.

Durante los últimos años, México ha sufrido de la violencia criminal en casi todo su territorio y una de las ciudades más lastimadas por este problema social ha sido la ciudad de Acapulco, Gro., siendo la ciudad más violenta del país en los años 2014, 2015 y 2016. Esta violencia ha tenido un efecto perjudicial en el desarrollo social y económico, así como en la educación y turismo. La pérdida de seguridad en Acapulco debido a la violencia criminal no sólo es una amenaza para los habitantes de la ciudad, sino para la gente que visita este importante lugar turístico. Cualitativamente, se ha observado que la violencia criminal en Acapulco ha tenido efectos significativos en el mercado de viviendas en la ciudad. Motivados por esto, dedicamos investigar los efectos de la violencia criminal en Acapulco en los precios de viviendas por medio de la metodología hedónica.

La teoría hedónica tiene una larga historia, empezando con los estudios de caso de espárragos en Boston por Waugh (1929) y de las características en la producción de líneas

de automóviles en Detroit por Court (1939). La metodología hedónica muestra que el precio de un bien está determinado no sólo por sus cualidades físicas, sino también por sus características hedónicas, como su ubicación, amenidades o entorno en el caso de los bienes inmuebles. En el artículo de gran influencia de Rosen (1974), el autor propuso el conocido método de dos pasos para determinar la relación empírica del precio de un bien heterogéneo y sus características hedónicas. Sin ninguna crítica, se han utilizado varias relaciones funcionales para evaluar los precios implícitos para una variedad de bienes mediante el análisis de regresión múltiple; bienes como automóviles (Berry et al., 1996), productos farmacéuticos (Cockburn and Aslam, 1998), vuelos de aerolíneas (Good et al., 2005), computadoras (Triplett, 1991) y transporte público (Wallace, 1996; Milon et al., 1984). La metodología hedónica también se ha utilizado en la valoración de la política ambiental y pública (Hidano, 2002) y en los ajustes al índice de precios al consumidor por parte de Bureau of Labor Statistics (BLS, 2016). Esta metodología también tiene su propio interés teórico, como lo demuestran Chiappori et al. (2010) y Ekeland (2005). Por ejemplo, el equilibrio hedónico entre vendedores y compradores se interpreta como una solución óptima para un problema de transporte óptimo de Monge-Kantorovich en su forma dual (Chiappori et al., 2010).

En este capítulo se desarrolla una aplicación de la metodología de los precios hedónicos para determinar cuantitativamente los efectos de la violencia criminal en los precios de viviendas en Acapulco. La aplicación de esta metodología se lleva a cabo con dos modelos hedónicos; el primer modelo es menos elaborado que el segundo, puesto que se omiten algunas variables explicativas importantes, como aquellas relacionadas con el turismo. Además, la variable considerada para medir el impacto de la violencia criminal solamente toma en cuenta la ubicación de la colonia más insegura en la ciudad, a diferencia del segundo modelo, donde se incorpora una variable que considera los homicidios dolosos ocurridos en cada colonia, así como el cierre de escuelas debido a la violencia criminal. Por otro lado, en el primer modelo hedónico trabajamos con una base de datos de precios de viviendas dados en 2016, mientras que en el segundo modelo se trabaja con una base de datos de precios de viviendas dados en 2015 y 2016. Nuestra hipótesis es que los precios de mercado de las viviendas en Acapulco son afectados negativamente por la violencia criminal. La razón por la cual el primer modelo considera menos variables explicativas y cuenta con una base de datos menor a la del segundo modelo, es que no se contaba con suficientes datos en el momento de su ajuste.

Hay una serie de trabajos que han estudiado los efectos del crimen sobre los valores de la propiedad a través de la metodología hedónica, comenzando con el trabajo de Thaler (1978), quien evaluó la disponibilidad a pagar por el control del crimen en Rochester, NY, con una base en datos recogida en 1971. Dubin and Goodman (1982) estudiaron la valoración de los hogares con características de la colonia de viviendas en el área metropolitana de Baltimore; entre estas características, se utilizaron doce variables para describir la delincuencia en la colonia. Lynch and Rasmussen (2001) realizaron otro estudio sobre los precios de la vivienda en Jacksonville, FL. Ellos encontraron que el costo de crimen prácticamente no tiene impacto en los precios de la vivienda en general; sin embargo, las viviendas tienen un gran descuento en las zonas de alta criminalidad. Linden and Rockoff (2008) utilizaron datos de registros de delincuentes sexuales para estimar la valoración de las personas de vivir cerca de un criminal condenado en el condado de Mecklenburg. Troy and Grove (2008) utilizaron el análisis hedónico para determinar como los parques son valorados por el mercado inmobiliario en Baltimore, MD., con respecto a su tasa de criminalidad media. Más recientemente, Buonanno et al. (2013) estimaron el efecto de la percepción de crimen sobre la vivienda usando encuestas de victimización en la ciudad de Barcelona de 2004 a 2006. Usaron dos variables como indicadores para la percepción de crimen a nivel distrito: el nivel de seguridad en el distrito y la tasa entre el promedio de seguridad percibida en la ciudad como un total y el nivel de seguridad percibido en el distrito. Hasta donde sabemos, el trabajo de Núñez et al. (2017) es de los primeros que incluye una variable para medir efectos de violencia sobre viviendas en México, usando el enfoque del modelo de los precios hedónicos; esta variable es la tasa de crimen por municipio. Los autores calculan la disponibilidad marginal de pagar por control del crimen y otras amenidades en México. Demuestran que el salario es afectado negativamente por el crimen, mientras que para algunos estados del país el crimen resulta ser una amenidad; la explicación que dan los autores de este último resultado es que tal vez se deba a que algunos de los más antiguos carteles de droga se encuentran en dichos estados. Respecto a otras características prueban, por ejemplo, que altos niveles de contaminación afectan negativamente los salarios y los precios de la renta de viviendas.

## 2. El modelo hedónico de Rosen y su equilibrio

El modelo de los precios hedónicos está basado en la hipótesis de que los bienes son valorados por la satisfacción o placer que producen sus características o atributos al consumidor (Rosen, 1974). En (Griliches, 1971) se formuló por primera vez este modelo, sin embargo, fue Rosen quien más tarde asentó las bases teóricas del equilibrio de mercado tanto desde el punto de vista del consumidor como del productor, estableciendo de ese modo el soporte teórico para la aplicación econométrica de la teoría de los precios hedónicos. Esta teoría propone explicar el valor de un bien heterogéneo, es decir, un bien con  $n$  características o atributos, en función de cada una de ellas y así identificar su efecto en el valor asignado en el mercado de ese bien. Cada característica en el bien tiene un precio implícito, el cual no es observable en el mercado, sin embargo, con esta teoría se puede determinar en forma de disponibilidad a pagar por cada unidad de cambio de aquella característica. A continuación vamos a resumir brevemente el modelo de los precios hedónicos de Rosen (1974).

Se considera un mercado donde el bien que se comercializará está compuesto por  $n$  atributos o características para las cuales no existen mercados explícitos. Este bien puede ser visto como un vector  $z = (z_1, \dots, z_n)$ , donde  $z_i$  mide la cantidad (o calidad) de la  $i$ -ésima característica del bien  $z$ . Los vendedores (o productores) ofrecen una variedad de diferentes paquetes de características, de manera que cada vendedor tiene la misma oportunidad de vender. Existe una función  $p(z) = p(z_1, \dots, z_n)$  que relaciona el precio de cada producto  $z$  con sus características. Cada comprador (o consumidor) obtiene una utilidad  $u(z_1, \dots, z_n, X)$  (que se supone estrictamente cóncava) al comprar un producto  $z = (z_1, \dots, z_n)$  y consumir un producto compuesto  $X$ .

Los compradores desean maximizar su utilidad sujeta a su restricción presupuestaria, esto es

$$\begin{aligned} & \text{máx } u(z_1, \dots, z_n, X) \\ & \text{sujeta a } M = X + p(z), \end{aligned}$$

donde  $M$  es el ingreso y el precio de  $X$  se supone igual a la unidad.

Las condiciones de primer orden para este problema son:

$$(3.1) \quad \frac{u_{z_i}}{u_X} = \frac{\partial p}{\partial z_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde  $u_{z_i}$  y  $u_X$  indican la derivada parcial de  $u$  respecto a  $z_i$  y la derivada parcial de  $u$  respecto a  $X$ , respectivamente. La derivada  $\partial p / \partial z_i$  es el precio hedónico marginal o precio

implícito de la característica  $i$ -ésima del producto  $z$  y  $u_{z_i}/u_X$  es la tasa de sustitución marginal entre la característica  $z_i$  y dinero.

Rosen define una función de demanda  $\theta(z; u, y)$ , la cual representa el gasto que el comprador está dispuesto a pagar por el producto  $z$  dado un ingreso  $y$  y un nivel de utilidad fijo  $u$ . De la definición de  $\theta$  se puede obtener:

$$\frac{\partial \theta}{\partial z_i} = \frac{u_{z_i}}{u_X}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Entonces la utilidad es maximizada cuando la cantidad que el comprador está dispuesto a pagar por el producto  $z^*$  es igual al precio mínimo  $p(z^*)$  dado en el mercado:  $\theta(z^*; u^*, y) = p(z^*)$  y además  $p$  y  $\theta$  son tangentes una de la otra:

$$(3.2) \quad \frac{\partial \theta}{\partial z_i}(z^*; u^*, y) = \frac{\partial p(z^*)}{\partial z_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

donde  $z^*$  y  $u^*$  son cantidades óptimas.

Por otro lado, cada vendedor (productor) quiere maximizar su ganancia, que está dada por el ingreso de ventas de  $N$  unidades del producto  $z$  a un precio  $p(z)$ , menos el costo de producción  $C(z, N)$  de las  $N$  unidades:

$$\text{máx } \pi := Np(z) - C(z, N).$$

La elección de  $N$  y  $z$  en el problema del vendedor requiere las condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial p}{\partial z_i} = \frac{C_{z_i}}{N}, \quad i = 1, \dots, n.$$

$$p(z) = C_N.$$

La primera ecuación significa que el precio marginal de cada característica  $z_i$  debe ser igual a su costo de producción marginal por unidad vendida de  $z_i$  y la segunda ecuación significa que el precio del producto  $z$  debe ser igual al costo de producción de una unidad de  $z$ . Simétricamente, Rosen define una función de oferta:  $\phi(z; \pi)$ , la cual indica el precio por unidad producida que el productor está dispuesto a aceptar a una ganancia constante  $\pi$  cuando la cantidad producida es óptima. De la definición de  $\phi$  se puede obtener:

$$\frac{\partial \phi}{\partial z_i} = \frac{C_{z_i}}{N}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Por lo tanto, la máxima ganancia y el óptimo paquete satisfacen

$$\frac{\partial \phi}{\partial z_i}(z^*; \pi^*) = \frac{\partial p(z^*)}{\partial z_i}, \quad i = 1, \dots, n,$$

y

$$p(z^*) = \phi(z^*; \pi^*),$$

donde  $p(z^*)$  es el máximo precio de  $z^*$  obtenido en el mercado. Entonces el equilibrio en este mercado hedónico está caracterizado por la tangencia entre las funciones de demanda y oferta de los compradores y vendedores, la cual da origen a la función de precios hedónica  $p$ , como la envolvente de ambas curvas, representando todos los puntos de transacciones del bien  $z$ , el cual está dado en una variedad de paquetes. Esta función puede ser estimada económicamente una vez que la forma funcional es especificada calculando sus coeficientes. El punto es que la forma funcional de la función de precios hedónica  $p(z)$  nos conduce a través de sus derivadas de acuerdo a (3.1) y (3.2) a la interpretación económica de tasas de utilidad y disponibilidad a pagar, respectivamente. En la Figura 3.1 presentamos el equilibrio hedónico en una dimensión entre diferentes compradores y diferentes vendedores. La principal aportación del modelo de Rosen ha sido constatar, justificar y demostrar la existencia de una relación entre el precio de un bien heterogéneo y el conjunto de atributos que incorpora esa variedad del bien.

**2.1. Regresión hedónica.** En el método de los precios hedónicos, el precio de un bien heterogéneo es desagregado en función de sus características y atributos. Aunque estos no son directamente negociables tienen un precio implícito y con la suma de estos precios se determina el precio del bien en el mercado. En particular, una vivienda es un bien heterogéneo; así, su precio en el mercado está determinado por la agregación de los precios implícitos de las características físicas de la unidad (número de recámaras, número de baños, área total, etc.), las características de localización o entorno (por ejemplo, cercanía a escuelas) y otras variables de interés. La metodología de nuestra investigación está basada en la aplicación del método de los precios hedónicos usando una herramienta estadística llamada *regresión hedónica*, la cual consiste en la estimación estadística de la relación entre las características del bien y su precio de mercado, a través del cálculo de los coeficientes de las variables en la función de precios especificada. Para este fin, se debe

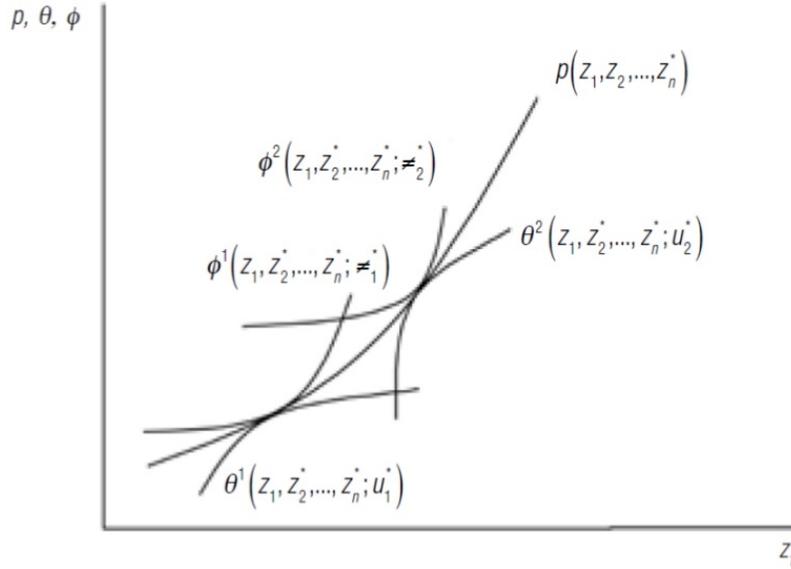


FIGURA 3.1. Equilibrio hedónico

tener una base de datos de precios del bien con diferentes características y atributos (o desatributos). Las variables representan las cantidades o calidades de las características del bien. Como estableció Rosen (1974), la forma funcional de la función de precios no puede ser en general especificada debido a cuestiones teóricas, por ejemplo, puede suceder que la ecuación diferencial que define a  $p$  sea no lineal. Hay formas funcionales para la función de precios que mejor se ajustan a los datos en un problema dado, pero cuya forma es bastante complicada y entonces la interpretación de los coeficientes del modelo resulta ser muy difícil (Halvorsen and Pollakowski (1981); Walter et al. (1984); Witte et al. (1979)). En econometría se ha usado bastante la transformación Box-Cox (Box and Cox, 1964) para la forma funcional hedónica de precios, la cual está dada por:

$$P^{\lambda_1} = \beta_0 + \sum_{j=1}^N \beta_j X_j^{\lambda_2} + \epsilon,$$

donde  $\epsilon$  es el término de error,  $N$  es el número de variables explicativas en la regresión y las variables  $P$ ,  $X_j$  son transformadas como sigue:

$$y^\lambda = \begin{cases} (y^\lambda - 1)/\lambda & \lambda \neq 0, \quad y > 0, \\ \ln y & \lambda = 0, \quad y > 0. \end{cases}$$

Esta transformación contiene casos especiales que se han aplicado en estudios de valoración hedónica como, por ejemplo: cuando  $\lambda_1 = 1 = \lambda_2$ , obteniendo un modelo lineal, para  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 = 1$  obteniendo un modelo semilogarítmico y para  $\lambda_1 = 0 = \lambda_2$ , obtenemos el modelo logarítmico. El precio hedónico marginal (precio implícito) para el atributo o característica  $X_j$  está dado por:

$$\frac{\partial P}{\partial X_j} = \beta_j P^{1-\lambda_1} X_j^{\lambda_2-1}.$$

En nuestro estudio proponemos formas funcionales con un buen ajuste a nuestros datos y la interpretación de los coeficientes es simple. Muchas veces tener acceso a datos es muy complicado y es lo primero a lo que nos podemos enfrentar usando esta metodología.

### 3. Datos socioeconómicos y la violencia criminal en Acapulco

A continuación, describimos algunos datos socioeconómicos y de violencia criminal en la ciudad de Acapulco.

Acapulco es una ciudad y puerto en México localizado en la costa del estado de Guerrero a 304 kilómetros de la capital, Ciudad de México. Es la ciudad más importante del estado, principalmente debido a su actividad turística, además, es una de las zonas metropolitanas más grandes del país; de acuerdo con los resultados del Censo de Población y Vivienda, realizado por el Instituto de Estadística y Geografía (INEGI) en 2010, Acapulco fue la ciudad más poblada del estado de Guerrero con 673,479 habitantes (INEGI, 2010). Acapulco fue un importante puerto de comercio con la Nueva España desde 1571, siendo el puerto principal para la actividad comercial con Filipinas. Hasta hace unos años, fue uno de los primeros y más importantes puertos de México, utilizado como escala en las rutas marítimas a través del océano Pacífico. Acapulco se divide en tres grandes áreas turísticas: Acapulco Tradicional, Acapulco Dorado y Acapulco Diamante. El centro y el puerto están situados en la primera zona, así como los barrios tradicionales y los inmuebles antiguos, mientras que las otras incluyen las zonas hoteleras, condominios residenciales, varios centros comerciales y lugares de entretenimiento. Las principales actividades económicas de la ciudad son el turismo, la agricultura y la pesca. El turismo es la actividad más importante debido a sus ingresos económicos.

En 2015, el Consejo Ciudadano de Seguridad Pública y Justicia Penal declaró a Acapulco como la tercera ciudad más violenta del mundo en 2014, con una tasa de 104.16

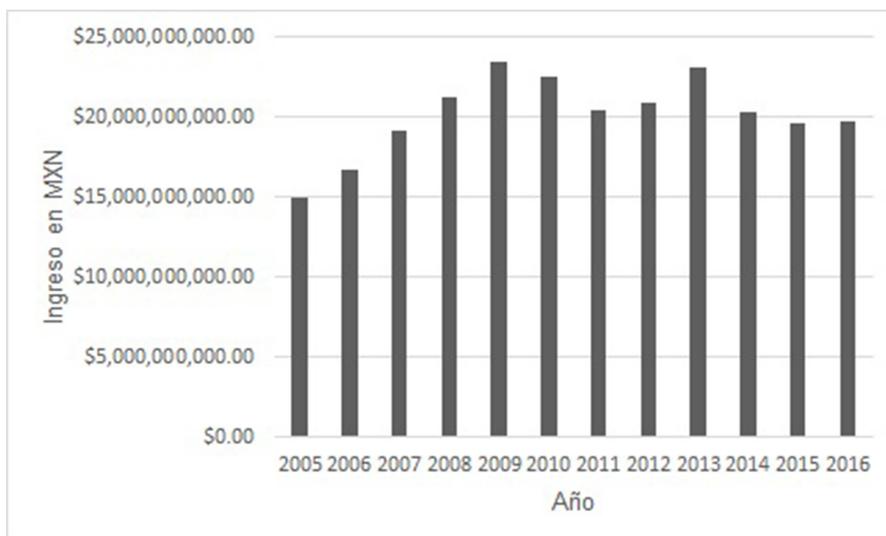


FIGURA 3.2. Ingreso de turismo anual (en moneda Mexicana) en Acapulco de 2005 a 2016 (cifras deflacionadas a 2005)

homicidios dolosos por cada 100 mil habitantes, siendo Acapulco la ciudad más violenta de México. En los años 2015 y 2016, Acapulco fue nuevamente considerada la primera ciudad más violenta de México según el Consejo Ciudadano de Seguridad Pública y Justicia Penal, con una tasa de 104.73 y 113.24 homicidios dolosos por cada 100 mil habitantes, respectivamente (CCPSCJa, 2015; CCPSCJb, 2016). Según un estudio llevado a cabo por la Comisión Nacional de Seguridad (CNS), la colonia más peligrosa en Acapulco en 2016, debido al alto nivel de incidencia en homicidios dolosos, robo de vehículos y armamento asegurado, fue la colonia Ciudad Renacimiento. El Secretario Ejecutivo del Sistema Nacional de Seguridad Pública (SESNSP) ha clasificado a Guerrero como uno de los Estados a nivel nacional con niveles más altos de homicidios dolosos (SEGOB, 2017). Para dar una idea de las cifras, el número de homicidios dolosos por día ocurridos en el Estado de Guerrero en el período Enero–Noviembre de 2015 fue de 5.46 homicidios dolosos, con un total de 1824 homicidios dolosos; para el período Enero–Noviembre de 2016, ocurrieron 6.11 homicidios dolosos por día, con un total de 2044 homicidios dolosos. La violencia criminal ha tenido un impacto negativo en la ciudad, afectando el crecimiento económico y el bienestar social del estado de Guerrero. Por ejemplo, Figura 3.2 muestra el ingreso de turismo de 2005 a 2019, deflacionado a 2005 para propósitos de comparación. La gráfica muestra claramente

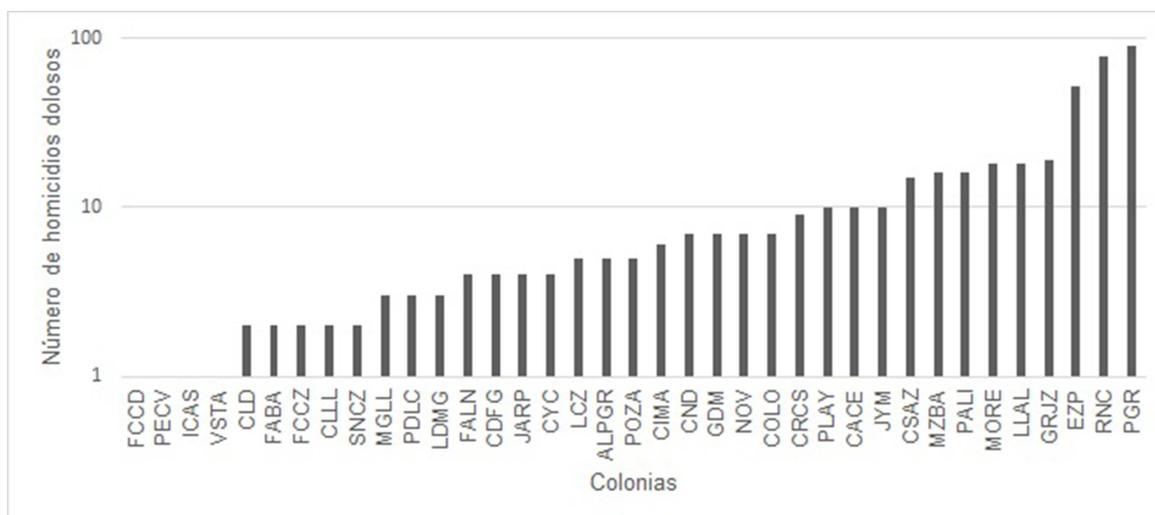


FIGURA 3.3. Colonias en este estudio con al menos un muerto en 2015–2016

una tendencia de incremento hasta 2009, seguido por una variación alrededor del valor promedio.

El impacto de criminalidad incluye la actividad educativa, ya que un gran número de escuelas privadas y públicas han llegado a cerrar temporal o definitivamente debido a episodios de tiroteos. En la actividad inmobiliaria, la violencia criminal ha afectado al comercio de casas, apartamentos y condominios. Privacidad, infraestructura de seguridad como cámaras, alarmas y vigilancia privada, son los factores principales que determinan un precio más alto de una vivienda, mientras que el cierre de escuelas se concibe como una desamenidad. Figura 3.3 muestra las colonias donde al menos una muerte ocurrió en 2015-2016. Aquellas colonias representan el 64.9% del total de 57 incluidas en este estudio.

#### 4. Valoración del impacto de la violencia criminal en los precios de viviendas en Acapulco

Es esta sección desarrollaremos la aplicación de la metodología hedónica para determinar cuantitativamente el efecto de la violencia criminal sobre los precios de las viviendas en Acapulco. Son desarrollados dos modelos hedónicos, ambos con el mismo propósito (pero para distintos períodos), los cuales llamaremos modelo hedónico 1 y modelo hedónico 2,

aunque las variables empleadas para medir la violencia criminal en los modelos son distintas. Podríamos decir que el modelo hedónico 2 es mejor que el modelo 1 debido a que son consideradas variables explicativas importantes que en el modelo 1 no se incluyeron por falta de datos al tiempo de hacer el ajuste. Nuestra hipótesis en ambos modelos es que la violencia criminal (medida con sus respectivas variables para cada modelo hedónico) afecta negativamente el precio de mercado de las viviendas en Acapulco. En las siguientes subsecciones se darán más detalles sobre estos modelos.

**4.1. Modelo hedónico 1.** Para nuestro primer modelo hedónico mediremos la violencia criminal a través de la inseguridad, con datos de 2016. Así que nuestro estudio es conocer el efecto de la inseguridad en los precios de viviendas en Acapulco. Para ello es considerada en nuestro modelo hedónico 1, la distancia de viviendas a la colonia más insegura en Acapulco como la variable que medirá tal impacto (como mencionamos anteriormente, la colonia más insegura en 2016 fue Ciudad Renacimiento). Así que en esta sección evaluaremos nuestra hipótesis, de que el efecto de la inseguridad medido por la distancia de las viviendas a la colonia más insegura en Acapulco, es negativo sobre los precios de mercado de las viviendas, es decir, el valor de una vivienda disminuye con la cercanía a la colonia más insegura.

### Datos y variables

Para llevar a cabo las estimaciones de los coeficientes de las variables en el modelo, construimos una base de datos de precios de viviendas observadas con diferentes características. Nuestra base de datos consiste en 184 viviendas ubicadas a lo largo y ancho de la ciudad, las cuales fueron ofertadas y capturadas en la página web de inmobiliarias en Acapulco en el mes de Diciembre de 2016. Las variables que corresponden a las *características físicas* de viviendas consideradas en nuestro modelo hedónico 1 son las siguientes:

- C = Variable dicotómica que toma valor uno si la vivienda es una casa y cero en otro caso.
- CC = Variable dicotómica que toma valor uno si la vivienda está en un condominio y cero en otro caso.
- NR = Número de recámaras de la vivienda.
- NB = Número de baños de la vivienda.
- NE = Número de estacionamientos de la vivienda.

- A = Edad, en años, de la vivienda.
- S = Área total de la vivienda (en metros cuadrados).
- TC = Área total de construcción de la vivienda (en metros cuadrados).

Las viviendas se clasifican en casa, casa en condominio y departamento, y este último funge como la categoría de referencia en el modelo. Los datos correspondientes a estas características fueron capturados al mismo tiempo que se capturó el precio de la vivienda.

Las variables que corresponden a las *características de localización* son las siguientes:

- DP = Distancia en ruta a la playa más cercana (en metros).
- L = Variable dicotómica que toma el valor uno si la vivienda está localizada en zona privada con seguridad permanente y vista a la playa, cero en otro caso.
- DR = Distancia en ruta a la colonia Ciudad Renacimiento (en metros).

Más precisamente, DP es la distancia en ruta del centroide de la colonia donde se encuentra ubicada la vivienda a la avenida más cercana con acceso a la playa y DR es la distancia en ruta del centroide de la colonia Ciudad Renacimiento al centroide de la colonia donde se ubica la vivienda observada. Estas distancias fueron obtenidas usando Google Earth. Finalmente, la variable dependiente es:

- P = Precio de la vivienda (en MXN).

**Forma funcional del modelo hedónico 1 y estimaciones** La ecuación que es estimada en la regresión de nuestros datos para obtener los precios implícitos de las características en nuestro estudio, es la siguiente:

$$(3.3) \quad \log(P) = \beta_0 + \beta_1 C + \beta_2 CC + \beta_3 \ln(NR) + \beta_4 \ln(NB) + \beta_5 \ln(S) \\ + \beta_6 \ln(TC) + \beta_7 NE + \beta_8 A + \beta_9 DP + \beta_{10} L + \beta_{11} DR.$$

Esta forma funcional hedónica corresponde a un modelo generalizado de la transformación Box-Cox, debido a que para algunas variables explicativas  $\lambda_2$  toma el valor 0 y en otras el valor 1. Este modelo se ha propuesto después de haber ensayado con otros: como el lineal, el semilogarítmico, el logarítmico (sin transformar las variables dicotómicas y DR, ya que toman el valor cero). Los modelos ensayados resultaron un mal ajuste o no cumplieron con alguna de las tres hipótesis del análisis de regresión (homocedasticidad, no autocorrelación y normalidad de los errores). En cambio, el modelo hedónico 1 dado en (3.3) supera estos

CUADRO 3.1. Estimación de coeficientes del modelo hedónico dado en (3.3)

Variable	Coefficiente	Error estándar	p-valor
Intercept	9.782e+00	3.716e-01	< 2e-16
C	-6.168e-01	1.002e-01	5.07e-09
CC	-3.365e-01	8.268e-02	7.17e-05
ln(NR)	2.880e-01	1.537e-01	0.062661
ln(NB)	3.457e-01	1.008e-01	0.000757
ln(S)	2.494e-01	6.018e-02	5.36e-05
ln(TC)	7.203e-01	9.358e-02	1.04e-12
NE	-3.106e-03	1.908e-02	0.870844
A	-4.269e-03	3.439e-03	0.216159
DP	-5.415e-05	1.611e-05	0.000954
L	4.378e-01	1.189e-01	0.000311
DR	1.972e-05	7.942e-06	0.014001
$R_a^2=0.8695$			

problemas. Debido a su simplicidad se tiene una interpretación de los coeficientes sin dificultades. A continuación, describimos el modelo propuesto y damos sus propiedades, las cuales nos llevaron a su elección para nuestro estudio.

Se usó el método de mínimos cuadrados ordinarios para las estimaciones de los coeficientes  $\beta_j$  y usamos el software R para tales estimaciones. Además, con este software realizamos las pruebas de hipótesis en el análisis de regresión. En Cuadro 3.1 presentamos los coeficientes estimados para la función de precios dada en (3.3), los errores estándar y el p-valor para cada una de las variables. Notemos que todas las variables resultaron estadísticamente significativas, excepto las variables, NE, A y ln(NR). Obtuvimos un buen ajuste, dado que el valor del coeficiente ajustado de determinación de  $R_a^2=0.8695$ , el cual es mayor a algunos presentados en trabajos reportados, como, por ejemplo, el obtenido por Fitch et al. (2013). Mediante el análisis VIF estudiamos cuestiones de colinealidad para este modelo ajustado, considerando que una variable con un VIF mayor al VIF global indica que hay un problema de colinealidad entre esta variable y alguna otra variable explicativa. En este caso, todas las variables resultaron con un VIF menor al VIF global 8.1499 del modelo ajustado (3.3), lo cual nos da indicios de no-colinealidad. Los valores se muestran en Cuadro 3.2. Las hipótesis

CUADRO 3.2. VIFs de las variables en (3.3)

Variable	VIF
C	2.537945
CC	1.919776
ln(NR)	3.268803
ln(NB)	3.354335
ln(S)	3.729917
ln(TC)	5.782719
NE	1.965948
A	1.059150
DP	2.395056
L	1.271300
DR	2.282842

bajo las cuales se rige el modelo de regresión lineal, fueron verificadas. Por medio del test Breusch-Pagan encontramos no evidencia de heterocedasticidad, a un nivel de confianza del 99 %. La normalidad de los errores la verificamos usando el test Shapiro-Wilk a un nivel de confianza del 99 % y finalmente, la no evidencia de correlación de los errores se verificó mediante el test Durbin-Watson a un nivel de confianza del 95 %.

### Interpretación de los resultados y conclusiones

Una vez verificado que nuestro modelo es un buen ajuste a nuestros datos, que cumple con las hipótesis del análisis de regresión, continuamos con la interpretación de los resultados. La variable C es significativa al nivel del 99.9 % de confianza y el signo negativo de su coeficiente nos indica que el precio de una casa es menor que el precio de un departamento, ceteris paribus. En efecto, sea  $\beta_C = -0.6168$ , el coeficiente estimado para C, la relación de los precios de una casa y un departamento está dada por  $P_{\text{casa}} = e^{\beta_C} P_{\text{depto}} = 0.5396 P_{\text{depto}}$ . Por ejemplo, si un departamento cuesta 5 000,000 mxn, entonces una casa con iguales características tendrá un precio de 2 698,000 mxn. La variable CC también resultó significativa al nivel de confianza del 99.9 % y con coeficiente negativo, indicando que el precio de una casa en condominio tiene un precio menor que el de un departamento, manteniendo las otras variables constantes. La relación de precios se obtiene de manera similar como la variable C. Tenemos entonces que  $P_{\text{casa en condo}} = e^{\beta_{CC}} P_{\text{depto}} = 0.7142 P_{\text{depto}}$ . Ejemplo, si un

departamento tiene un precio de 5 000,000 mxn, el precio de una casa en condominio con iguales características tendrá un precio de 3 571,000 mxn. La variable  $\ln(\text{NR})$  no resultó ser significativa, mientras que la variable  $\ln(\text{NB})$  sí, a un nivel de confianza del 99.9% y además con signo esperado, positivo. Su coeficiente 0.3457 es interpretado como una elasticidad, indicando que por cada 1% de incremento de NB, hay un 0.3457% de incremento en el valor de la vivienda. Otra variable física que resultó significativa es  $\ln(\text{S})$ , al mismo nivel que las anteriores y con signo positivo, el cual indica que conforme el área de una vivienda aumente, el precio de la vivienda incrementa. Más precisamente, por cada 1% de incremento de área de la vivienda, hay un incremento del 0.2494% en el valor. La variable  $\ln(\text{TC})$  es significativa al nivel de confianza del 99.9% con signo positivo, y su coeficiente se interpreta como una elasticidad, como la variable  $\ln(\text{S})$ . En cuanto a las variables de localización, todas resultaron significativas, por ejemplo, la distancia a la playa (DP), es significativa al nivel de confianza del 99.9% y su coeficiente con signo esperado, negativo. Su valor -0.00005415 nos indica que por cada metro que la vivienda se aleje de la playa más cercana, su valor decrece en 0.005415%. Por ejemplo, si el valor de la vivienda es de 1 000,000 mxn, entonces decrece en 54.15 mxn por cada metro que la vivienda se aleje de la playa más cercana. La variable dicotómica L, también resultó significativa al nivel del 99.9% y con signo esperado, positivo, indicando que una vivienda dentro de esa zona privada descrita anteriormente, tiene un precio mayor al de una vivienda ubicada fuera de aquella zona, *ceteris paribus*. La relación de precios se obtiene como las variables dicotómicas anteriores. Finalmente, acerca de nuestra variable de interés, la distancia a la colonia Ciudad Renacimiento resultó significativa al nivel de confianza del 95% con signo esperado. Su coeficiente 0.00001972 indica que por cada metro que la vivienda se aleje de aquella zona, su valor incrementa en 0.001972%. Así, por ejemplo, si la vivienda tiene un precio de 1 000,000 mxn, entonces el comprador estará dispuesto a pagar 19.72 mxn por cada metro que ésta se aleje de aquella zona. Entonces podemos atribuir una pérdida de valor de la vivienda cuando se vive cerca de esta colonia, la cual es la más insegura de Acapulco; probando así nuestra hipótesis planteada.

En conclusión, hemos ajustado un modelo hedónico para conocer los efectos de la violencia criminal en Acapulco, a través de la inseguridad, en los precios de las viviendas de esta ciudad, usando la distancia a la colonia más insegura de la ciudad: Ciudad Renacimiento. Hemos probado que existe un efecto negativo de la inseguridad sobre los precios

de las viviendas de Acapulco, obteniendo que el valor de las viviendas decrece con la cercanía a dicha colonia insegura. Nuestros resultados corroboran la hipótesis planteada en esta sección. Además, hemos cuantificado el valor por el incremento por cada metro que la vivienda se aleje de aquella colonia, dicho incremento resultó del 0.001972% de su precio. Nuestro modelo hedónico 1 dado en (3.3) nos indica que el comprador estaría dispuesto a pagar más por la cercanía a la playa que por la lejanía a la colonia más insegura. Lo que sugiere que a pesar de que el efecto de la inseguridad es importante para los precios de mercado de las viviendas en Acapulco, para el comprador es más importante la amenidad de vivir cerca de la playa. Una necesidad que el presente estudio plantea, es incorporar otras variables que cuantifiquen de mejor manera el efecto de la violencia criminal en los precios de vivienda en la ciudad, por ejemplo, se podría considerar el nivel de incidencia en homicidios dolosos, robo de vehículos y armamento por colonias, sin embargo, esta información es bastante difícil de obtener debido a la delicada situación en la que se encuentra el puerto de Acapulco; de hecho, la obtención de datos es muchas veces un problema común a la que se tiene que enfrentar en este tipo de modelos. Pese a esto, nuestro modelo predice precios implícitos razonables.

**4.2. Modelo hedónico 2.** En este segundo modelo hedónico se consideran dos variables para conocer el efecto de la violencia criminal en los precios de las viviendas en Acapulco, además de otras variables de entorno no consideradas en el primer modelo hedónico. Las variables físicas incluidas son aquellas consideradas en el primer modelo. En este segundo modelo, el número de homicidios dolosos es nuestra variable de interés ya que medirá el impacto directo de la violencia criminal en los precios de la vivienda. Entre las variables de entorno consideradas, se incluye una variable discreta relacionada con el cierre de escuelas debido a episodios de disparos en la colonia donde se encuentra la vivienda, la cual medirá el impacto indirecto de la violencia criminal. Además, se considera un índice de turismo compuesto para describir el impacto directo del turismo en los precios de la vivienda. La incorporación de este índice puede considerarse una contribución del presente trabajo a la literatura hedónica sobre precios de la vivienda. Evaluaremos nuestra hipótesis: los precios de mercado de viviendas localizadas en colonias de Acapulco caracterizadas por niveles crecientes de violencia criminal disminuyen, es decir, la violencia criminal afecta negativamente los precios de mercado de las viviendas en Acapulco.

¿Por qué consideramos el número de homicidios dolosos para medir el impacto de violencia criminal?

Buvinic et al. (1999) sugiere que las manifestaciones de violencia criminal son robo a mano armada, asalto, violación y homicidio doloso. De acuerdo al Secretario Ejecutivo del Sistema Nacional de Seguridad Pública (SESNSP), la mayoría de aquellos crímenes y otros, tales como extorsión y secuestro, no son denunciados por la víctima. Esto hace que datos que corresponden a este tipo de crímenes sean subestimados. SESNSP ha usado el número de homicidios dolosos como la principal medida del índice de violencia criminal en México, así en nuestro modelo hedónico 2, usamos el número de homicidios dolosos ocurridos en colonias donde las viviendas fueron localizadas en Acapulco como la variable que mide la violencia criminal.

**Datos y variables** Datos sobre el número de homicidios dolosos en las colonias observadas se obtuvieron directamente de la Fiscalía General del Estado de Guerrero por medio de una solicitud al Sistema Info-Guerrero en la página WEB del Portal Oficial del Estado de Guerrero, que con base a un cuestionario se evalúa si una información solicitada es pertinente. Nuestros datos consisten de una muestra de 339 viviendas de Acapulco ofertadas en la página web de distintas compañías de inmobiliarias, localizadas en 57 colonias. Cada una de aquellas colonias fue localizada geográficamente por su centroide en el mapa Google. En este estudio se consideraron dos períodos de tiempo: Enero–Noviembre 2015 y Enero–Noviembre 2016. Nuestros datos de precios de viviendas fueron recolectados de la web en Diciembre de 2015 y Diciembre 2016, respectivamente, con los precios anunciados en la web en el momento de la observación, así como las características físicas de la vivienda (las cuales fueron consideradas en modelo hedónico 1). Asociamos cada precio con la colonia donde fue localizada la vivienda y el número de homicidios dolosos ocurridos en aquella colonia en el período correspondiente.

Ahora listamos las variables de entorno usadas en este modelo.

### **Variables de entorno**

- $H$  = Número de homicidios dolosos ocurridos en el período  $DT$  en la colonia de la vivienda.

- DT = Variable dicotómica que toma valor uno si el precio de la vivienda fue registrado al final del período Enero-Noviembre 2016 y cero en otro caso. El período de referencia es Enero-Noviembre 2015.
- IT = Índice de turismo.
- SC = Variable dicotómica que toma el valor uno si la colonia donde la vivienda es localizada no tuvo cierre de escuelas debido a episodios de tiroteo (o algún otro crimen de la violencia) y cero en otro caso.

Nuestra variable dependiente será denotada como en modelo anterior. Antes de continuar con la discusión de nuestros resultados, haremos algunos comentarios sobre las variables IT y SC.

Existen estudios en la literatura sobre el impacto de crimen en los precios de la vivienda utilizando la metodología hedónica en ciudades donde el turismo no es tan importante como en el caso de la ciudad de Acapulco (ver, por ejemplo, Thaler, 1978; Dubin and Goodman, 1982; Lynch and Rasmussen, 2001; Linden and Rockoff, 2008). Por otro lado, hay una cantidad considerable de artículos que utiliza la metodología hedónica para estudiar el papel de un solo componente turístico en los precios de la vivienda, como la proximidad al océano o vista a la playa (Shabman and Bertelson, 1979; Milon et al., 1984; Edwards and Gable, 1991; Pompe and Rinehart, 1995; Rush and Bruggink, 2000; Conroy and Milosch, 2009). En nuestro estudio, reconocemos que el turismo es un bien compuesto conformado por servicios, entretenimiento y atracciones naturales, entre otros (ver, por ejemplo, Sinclair and Stabler, 1997; Stabler et al., 2010, y referencias ahí). Hacemos notar que la incorporación de componentes de turismo en el enfoque hedónico es novedoso y aún está en desarrollo; ver, por ejemplo, (Biangi and Faggian, 2004; Biangi et al., 2012, 2015). Siguiendo Biangi and Faggian (2004), Biangi et al. (2012) y Biangi et al. (2015), construimos un índice de turismo, IT, que incorpora la distancia del centroide de la colonia a la avenida más cercana con acceso a la playa, el número total de alojamientos (hoteles y casas de vacaciones) y el número total de espacios de entretenimiento (restaurantes y bares). La metodología para la construcción del índice de turismo se basa en un procedimiento de clasificación o rango, específicamente un tipo de clasificación fraccional llamada ranking score de Van der Waerden (VdW), definida de la siguiente manera:

$$VdW_i = \frac{R_i}{n + 1},$$

donde  $VdW_i$  es el rango de Van der Waerden para la colonia  $i$ ,  $n$  es el número de colonias y  $R_i$  es el rango de cada colonia (de hecho, el índice VdW debe ser considerado para los años 2015 y 2016, pero según la secretaria de turismo local (comunicación personal), el número total de alojamientos y espacios de entretenimiento no cambiaron durante este período). En nuestro caso, un score más alto corresponde a lugares menos turísticos y vice versa, lo que es consistente con otras referencias (ver, por ejemplo, Biangi et al., 2012). Una vez que el índice VdW se ha calculado por separado para cada una de las tres variables turísticas, se calcula el promedio de los tres score para obtener nuestra IT final para cada colonia:

$$IT_i = \frac{\sum_j^3 VdW_{ij}}{3}.$$

La Figura 3.4 muestra los resultados de nuestra clasificación IT de las 57 colonias incluidas en este estudio, visualizando su distribución geográfica y su importancia turística de acuerdo con este índice, codificadas en colores. Por otro lado, como se mencionó anteriormente, las altas tasas de criminalidad han tenido un impacto, obligando a escuelas a cerrar debido a episodios de disparos. Por lo tanto, si una colonia tuvo escuelas que tuvieron que cerrar en 2015 o 2016 por este motivo, estos cierres se traducen en una desamenidad para los residentes de esa colonia. Por lo tanto, incorporamos una variable dicotómica, SC, que toma el valor de uno si la colonia donde se encuentra la vivienda no tuvo escuelas que cerraron debido a la violencia y cero en caso contrario. Nuestro universo incluye sólo escuelas primarias como referencia. Finalmente, como una visión general del impacto directo de la violencia criminal, medida por la variable H, el número de homicidios dolosos se representa gráficamente contra los precios de la vivienda (escala logarítmica  $\ln(P)$ ) en la Figura 3.5 .

### Forma funcional del modelo hedónico 2 y estimaciones

Como en modelo hedónico 1, estudiamos el modelo hedónico 2 mediante los fundamentos del análisis de regresión lineal analizando la bondad de ajuste, multicolinealidad, homocedasticidad, no autocorrelación y normalidad de los errores. Proponemos un modelo mixto con diferentes exponentes para las variables explicativas. La forma funcional para la función de precios hedónica es la siguiente:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \ln(P) = & \beta_0 + \beta_1 C + \beta_2 CC + \beta_3 \ln(NR) + \beta_4 \ln(NB) + \beta_5 \ln(S) + \beta_6 \ln(TC) \\ & + \beta_7 NE + \beta_8 A + \beta_9 H + \beta_{10} DT + \beta_{11} \ln(IT) + \beta_{12} SC \end{aligned}$$



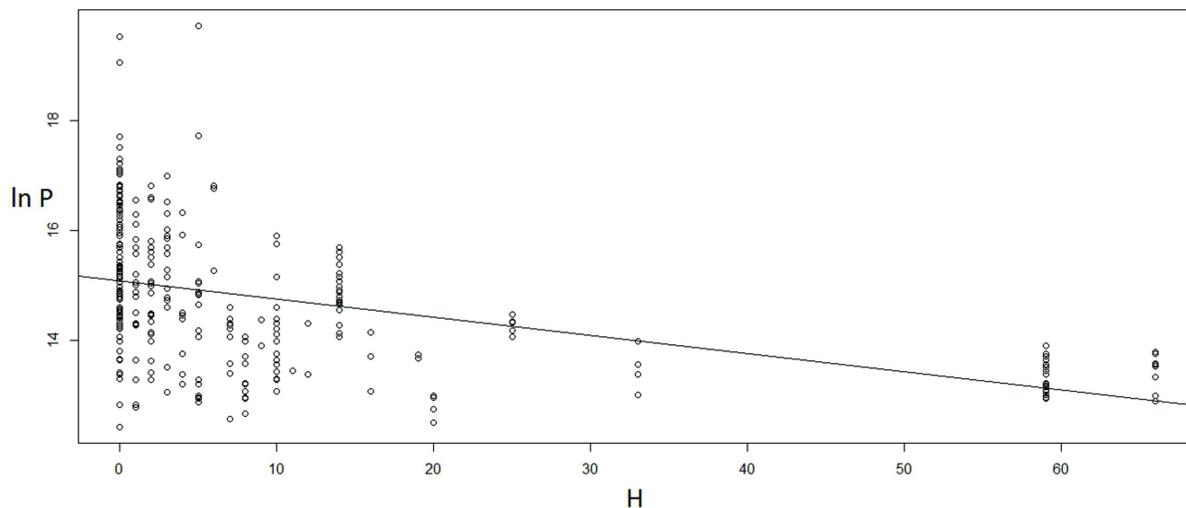


FIGURA 3.5. Variación de  $\ln(P)$  contra  $H$  con la línea de tendencia, mostrando un decrecimiento en los precios de las viviendas cuando el número de homicidios dolosos en la colonia incrementa

el modelo con esa variable eliminada:

$$(3.5) \quad \ln(P) = \beta_0 + \beta_1 C + \beta_2 CC + \beta_3 \ln(NR) + \beta_4 \ln(NB) + \beta_5 \ln(S) + \beta_6 NE + \beta_7 A + \beta_8 H + \beta_9 DT + \beta_{10} \ln(IT) + \beta_{11} SC.$$

Cuadro 3.3 muestra los coeficientes estimados para modelo dado en (3.5). Obtuvimos un valor para el coeficiente de determinación ajustado de 0.7024, lo que indica que tenemos un buen ajuste. Además, la mayoría de las variables son significativas y tienen el signo esperado. El modelo en (3.5) no mostró problemas de multicolinealidad de acuerdo con el análisis VIF, ya que todas las variables en este modelo tuvieron un VIF por debajo de 5. Estos VIF se presentan en Cuadro 3.4. Se investigaron los supuestos de regresión multilínea, como la normalidad, la homocedasticidad y la no autocorrelación. Se verificó la homocedasticidad y no autocorrelación, mientras que no se cumplió el supuesto de normalidad. Para resolver el problema de este supuesto de distribución (errores distribuidos normalmente) y dado que estamos trabajando con una muestra pequeña, recurrimos al método bootstrap, con el que podemos obtener inferencias más precisas. Usando bootstrapping con  $B=1,000$  muestras de bootstrap, obtenemos los coeficientes de regresión bootstrap, los errores estándar bootstrap

CUADRO 3.3. Coeficientes del modelo mixto en (3.5)

Variable	Coeficiente	Error estándar
Intercept	(10.7469)***	0.3159
C	(-0.6277)***	0.1302
CC	(-0.2285)	0.1227
ln(NR)	(0.2234)	0.1748
ln(NB)	(0.5375)***	0.1264
ln(S)	(0.5395)***	0.0599
NE	(0.0181)	0.0250
A	(-0.0022)	0.0021
H	(-0.0077)**	0.0028
DT	(-0.1394)	0.0965
ln(IT)	(-0.2381)**	0.0832
SC	(0.3100)**	0.1191

$R_a^2 = 0.7024$

Se usaron estimadores de MCO. Nuestra principal variable de interés, H, es significativa.

\*\*\*, \*\*, \* y · indican significativa al nivel 0.1, 1, 5 y 10 %, respectivamente

CUADRO 3.4. VIFs de las variables en (3.5)

Variable	VIF
C	2.8465
CC	2.6443
ln(NR)	3.0278
ln(NB)	3.9356
ln(S)	2.8615
NE	2.1335
A	1.2962
H	1.6911
DT	1.5856
ln(IT)	1.2416
SC	1.5723

Todos los VIFs están por debajo de 5

CUADRO 3.5. Estadísticos para  $B = 1,000$  réplicas bootstrap

Variable	Estimador bootstrap promedio	Error est. bootstrap	Intervalo percentil
Intercepto	10.7206	0.4150	(9.9427, 11.5564)
C	-0.6364	0.1686	(-1.0023, -0.3329)
CC	-0.2358	0.1622	(-0.5793, 0.0455)
ln(NR)	0.2177	0.1438	(-0.0645, 0.4875)
ln(NB)	0.5270	0.1173	(0.2803, 0.7455)
ln(S)	0.5460	0.0806	(0.3874, 0.7076)
NE	0.0250	0.0348	(-0.0365, 0.0986)
A	-0.0023	0.0018	(-0.0057, 0.0009)
H	-0.0075	0.0027	(-0.0126, -0.0019)
DT	-0.1280	0.1113	(-0.3445, 0.0850)
ln(IT)	-0.2325	0.0717	(-0.3643, -0.0835)
SC	0.3119	0.0997	(0.1243, 0.5038)
$R_a^2$	0.7081	0.0598	(0.5971, 0.8212)

La mayoría de los errores estándar bootstrap de los coeficientes bootstrap promedio son más grandes que los errores estándar asintóticos presentados en Cuadro 3.3

y los intervalos de confianza de 95 % para cada coeficiente de regresión bootstrap. Los intervalos de confianza bootstrap se basan en percentiles bootstrap, que tienen buenas propiedades teóricas y una estabilidad razonable en la práctica, como se describe en (Efron and Tibshirani, 1993). Basado en el coeficiente de determinación ajustado-bootstrap de 0.7081 con un intervalo de confianza de 95 %, (0,5971, 0,8212), tenemos un buen ajuste del modelo dado en (3.5). Los resultados de este procedimiento computacionalmente intensivo se resumen en Cuadro 3.5.

La mayoría de los errores estándar bootstrap de los coeficientes bootstrap promedio son mayores que los errores estándar asintóticos, lo que revela la aplicación inadecuada de estos últimos en muestras pequeñas. Con los intervalos de confianza bootstrap calculados al nivel de confianza de 95 %, tenemos para cada coeficiente bootstrap estimado  $\beta$  una prueba bootstrap al nivel de significancia de 5 %, donde la hipótesis nula  $H_0 : \beta = 0$  se rechaza si y sólo si 0 no cae dentro del intervalo de confianza.

### Interpretación de los resultados

Ahora procedemos a la interpretación de los coeficientes bootstrap estimados de las variables significativas de nuestro modelo dado en (3.5). La variable que representa el número de homicidios dolosos,  $H$ , resulta ser significativa y con signo esperado. El valor de su coeficiente de  $-0.0075$  indica que por cada unidad de incremento en  $H$  para la colonia donde se encuentra la vivienda, el valor de la vivienda disminuye el  $0.75\%$ . Por ejemplo, sea el precio de una vivienda de  $1,000,000$  MXN; por lo tanto, el precio disminuye  $7,500$  MXN por cada homicidio doloso adicional en esa colonia, *ceteris paribus*.

La variable dicotómica  $C$  es significativa y negativa, indicando que el precio de una casa es menor que el precio de un apartamento. De hecho, si  $\beta_C$  es el coeficiente en el modelo, entonces la relación de precios es  $P_{\text{casa}} = e^{(\beta_C)}P_{\text{depto}} = 0.5292P_{\text{depto}}$ . La variable dicotómica  $CC$  es no significativa. La variable  $\ln(NB)$  es significativa; el valor de su coeficiente de  $0.5270$  es positivo e indica que por cada aumento del  $1\%$  en  $NB$ , hay un aumento de  $0.5270\%$  en el valor de la vivienda. Además, la variable  $\ln(S)$  es significativa; su valor positivo del coeficiente indica que por cada aumento del  $1\%$  en el área de una vivienda dada, su valor aumenta el  $0.5460\%$ . El resto de las variables físicas, es decir,  $\ln(NR)$ ,  $NE$  y  $A$ , fueron no significativas. La variable de turismo  $\ln(IT)$  es significativa y tiene el signo negativo esperado, lo que confirma que el turismo afecta positivamente el mercado de viviendas, es decir, cuanto más bajo es el índice de turismo, más altos son los precios de las viviendas. Su coeficiente,  $-0.2325$ , indica que por cada incremento del  $1\%$  en  $IT$ , el valor de la vivienda disminuye el  $0.2325\%$ . Con respecto a las otras variables de entorno, obtenemos los siguientes resultados. La variable dicotómica  $SC$  es significativa, y su coeficiente positivo indica que el precio de una vivienda ubicada en una colonia en la que las escuelas no cerraron debido a la violencia criminal es mayor que el precio de una vivienda ubicada en una colonia con ese problema. La relación de los precios de las viviendas es  $P_{\text{sin escuelas cerradas}} = e^{(\beta_{SC})}P_{\text{con escuelas cerradas}} = 1.3660 P_{\text{con escuelas cerradas}}$ . Finalmente, la variable  $DT$  es no significativa; por lo tanto, parece que no hay un cambio significativo en los precios de las viviendas en los períodos Enero-Noviembre de 2015 y Enero-Noviembre de 2016.

Ahora deseamos saber si los homicidios dolosos ocurridos en 2015 tuvieron un impacto sobre los precios de viviendas dados en 2016; con ese fin, realizamos un análisis de regresión sólo con los datos de nuestra muestra correspondientes a 2016, y construimos un modelo hedónico similar al que se proporciona en (3.5). Introdujimos nuevas variables,  $H_0$  y  $H$ ,

CUADRO 3.6. Estadísticos para  $B = 1,000$  réplicas bootstrap

Variable	Coeficiente	Estimador bootstrap promedio	Error est.	Error est. Bootstrap
Intercept	11.2700	11.1902	0.3788	0.5231
C	-0.6247	-0.6374	0.1362	0.1267
CC	-0.1999	-0.2059	0.1186	0.1197
ln(NR)	0.2860	0.2563	0.2026	0.1664
ln(NB)	0.6659	0.6585	0.1412	0.1205
ln(S)	0.4486	0.4744	0.0643	0.0960
NE	0.0083	0.0169	0.0263	0.0410
A	-0.0034	-0.0040	0.0049	0.0043
H	0.0011	0.0018	0.0040	0.0038
H0	-0.0347	-0.0351	0.0099	0.0109
ln(IT)	-0.2365	-0.2160	0.0932	0.0969
SC	-0.0418	-0.0275	0.1750	0.2053

definidas como el número de homicidios dolosos ocurridos en 2015 y 2016, respectivamente, en la colonia donde se encuentra la vivienda. El modelo hedónico propuesto es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 \ln(P) = & \beta_0 + \beta_1 C + \beta_2 CC + \beta_3 \ln(NR) + \beta_4 \ln(NB) + \beta_5 \ln(S) \\
 (3.6) \quad & + \beta_6 NE + \beta_7 A + \beta_8 H + \beta_9 H0 + \beta_{10} \ln(IT) + \beta_{11} SC
 \end{aligned}$$

La variable TC log-transformada no se incluye en el modelo (3.6) porque tuvo un VIF mayor que 5. El modelo en (3.6) no mostró ningún problema de multicolinealidad de acuerdo con el análisis VIF, ya que todas las variables en este modelo tuvieron un VIF por debajo de 5. Los supuestos de homocedasticidad y no autocorrelación fueron satisfechos, mientras que no se cumplió el supuesto de normalidad. Como antes, recurrimos al método bootstrap para obtener resultados más precisos. Cuadro 3.6 muestra los coeficientes estimados y los errores estándar obtenidos de la muestra original, también muestra los coeficientes bootstrap y los errores estándar bootstrap con  $B = 1,000$  réplicas bootstrap. Obtuvimos un valor de 0.7752 para el coeficiente de determinación ajustado-bootstrap y su intervalo de confianza bootstrap (0.7135, 0.8621) de 95 %. Para H0, obtuvimos (-0.0578, -0.0139) como el intervalo

percentil al 95 %, lo que indica que la variable  $H_0$  es significativa en el nivel 5 %. Por lo tanto, concluimos que el número de homicidios dolosos ocurridos en 2015 tuvieron un impacto en los precios de las vivienda dados en 2016 y que este impacto es negativo; es decir, el precio de las viviendas disminuye con el aumento en el número de homicidios dolosos ocurridos en 2015 en la colonia donde se encuentra la vivienda. Cuantitativamente, el valor de la vivienda se deprecia en 3.51 % por cada incremento en el número de homicidios en 2015 en la colonia donde se encuentra la vivienda. Por otro lado, los homicidios dolosos ocurridos en 2016 no afectan los precios de las viviendas dados en 2016.

En conclusión, en este apartado estudiamos el efecto de la violencia criminal en los precios de las viviendas en la ciudad de Acapulco, basado en la teoría de los precios hedónicos. Usamos el número de homicidios dolosos como la variable que mide el nivel de violencia criminal, principalmente porque es bien sabido que otros tipos de delitos no están bien documentados o no son denunciados a las autoridades. Mediante un modelo mixto de tipo Box-Cox, dado en (3.5), realizamos pruebas que demostraron que el aumento de homicidios dolosos ocurridos en una colonia deprecia el valor la vivienda ubicada en aquella colonia por un monto determinado. Un hecho interesante que logramos descubrir es que, el valor las casas es menor que el de un apartamento, lo que es contrario en otras ciudades. Una posible explicación podría ser que los apartamentos son más seguros para vivir que las casas y que tales construcciones están principalmente cerca de la zona costera. Nuestra principal variable de interés,  $H$ , considerada como la medida de la violencia criminal, fue significativa y tuvo el signo negativo esperado, que interpretamos como una depreciación de los precios a medida que aumenta el número de homicidios dolosos en la colonia. Introdujimos en nuestro análisis hedónico una variable de extrema importancia que, para nuestro conocimiento, es novedoso en el contexto del crimen. Esta variable es una medida del nivel de turismo,  $\ln(IT)$ ; la cual fue significativa y tuvo el signo esperado.  $IT$  se consideró como un bien compuesto de tres indicadores de turismo, a saber, alojamientos, servicios y amenidades. Por otro lado, en nuestro análisis, encontramos que parte del efecto negativo de la violencia criminal en los precios de las viviendas se debe al impacto indirecto, el cual se midió con la variable de control  $SC$ . Los dos períodos incluidos en este estudio no tuvieron un impacto significativo en los precios de las viviendas, quizás porque se considera un período corto para reflejar consecuencias en el mercado de viviendas.

Además, probamos que los homicidios dolosos ocurridos en 2015 afectaron negativamente los precios de la vivienda en 2016. Este estudio incluye datos recopilados durante un corto período de tiempo, 2015-2016. Se incluye una discusión en el apéndice resumida en las Figuras 6.3 a 6.6 las cuales revelan que el impacto de la violencia criminal en la industria del turismo es notable a largo plazo. El turismo nacional muestra un aumento sostenido en el período 1996-2016 en la ciudad de Acapulco y en ciudades similares donde el turismo tiene un nivel principal de importancia. Sin embargo, el turismo extranjero, cuya contribución al ingreso total per cápita es más que el doble del turismo nacional, muestra una disminución abrupta en 1999, y esta disminución no está presente en las otras ciudades tomadas como comparación. Una conclusión parcial es que el impacto de la violencia criminal en la ciudad de Acapulco en los ingresos del turismo extranjero es un fenómeno a largo plazo, que no es evidente dentro de la ventana de tiempo de este estudio. Así, se justifica un estudio adicional que incluya este efecto a largo plazo en el modelo hedónico.

**4.3. Conclusiones.** Con dos modelos hedónicos se ha probado que la violencia criminal tuvo un efecto negativo en los precios de las viviendas en la Ciudad Acapulco en 2016 y en el período 2015-2016, respectivamente. En el primer modelo se considera la distancia a la colonia más insegura para medir el impacto de la violencia criminal y en el segundo modelo hedónico se consideran dos variables, una midiendo el impacto directo y la otra el impacto indirecto. Este impacto indirecto trae consecuencias importantes en el mercado de viviendas. La inclusión de esta variable, que no se considerará en el primer modelo hedónico, como aquella que mide el impacto del turismo en el precio de las viviendas, y el uso del método bootstrap, hacen que el modelo hedónico 2 dado en (3.5) explica mejor el precio de las viviendas en función de sus atributos y desatributos. Creemos que el trabajo desarrollado en este capítulo tiene tres contribuciones importantes. La primera es que a través de una forma funcional hedónica con la cual tenemos una interpretación simple de los resultados, se corrobora que la violencia criminal en la ciudad de Acapulco tiene un efecto significativo y negativo en los precios del mercado inmobiliario en esta ciudad. Un comprador marginal deprecia el valor de la vivienda que se encuentra en una colonia con un número creciente de homicidios dolosos. La segunda contribución es la medición cuantitativa realizada a través de la estimación econométrica de los atributos que explican el valor de la vivienda en la ciudad de Acapulco. Finalmente, la tercera contribución es la extensión de la aplicación de la metodología hedónica en la determinación del impacto del crimen en los precios de la

vivienda en una ciudad donde el turismo tiene gran relevancia. Creemos que el presente estudio puede generalizarse a ciudades turísticas similares en países en desarrollo donde la violencia es un problema grave.

## Capítulo 4

# Algunas conexiones entre la teoría KAM-débil y transporte óptimo

### 1. Introducción

La teoría de transporte óptimo ha sido un área de las matemáticas muy activa en la investigación, principalmente debido a un rango amplio de aplicaciones y relaciones insospechadas con otras teorías tanto en las mismas matemáticas como fuera de ellas. Por ejemplo, en el campo de dinámica Lagrangiana y teoría de Aubry-Mather se han encontrado resultados importantes relacionando estas teorías con transporte óptimo (Bernard and Buffoni, 2006, 2007a,b). Otros trabajos relacionando aquellas teorías pueden encontrarse en (Evans, 2003), (De Pascale, 2006) y (Granieri, 2007).

En este capítulo nos interesamos en explorar algunas relaciones de transporte óptimo y lo que ahora se conoce como teoría KAM-débil (para un entendimiento mejor sobre el origen y la importancia de estudiar teoría KAM-débil se puede consultar en el Apéndice, Sección 3). En esta dirección existen algunas investigaciones, especialmente en (Bernard and Buffoni, 2007b) se desarrolló un escenario abstracto motivado por el funcional de acción como una función de los puntos extremos  $A(x, y)$ . En particular, se probó una caracterización de soluciones KAM-débiles y parejas de Kantorovich admisibles usando la barrera de Peierls (definida en (Mather, 1993)) como una función de costo. En este capítulo estudiamos algunas relaciones de aquellas teorías considerando el potencial de Mañé (definido en Mañé (1997)) y la barrera de Peierls como funciones de costo en el problema de transporte. Parte de este estudio está inspirado por uno de los resultados de Bernard and Buffoni (2007b), en la cual obtenemos resultados similares usando como función de costo la barrera de Peierls (con  $k = c(L)$ ) (Ver Propositiones 4.13 y 4.14) como en el Teorema 12, primer párrafo en (Bernard and Buffoni, 2007b). Para obtener estas proposiciones nosotros usamos métodos de la teoría KAM-débil en vez del escenario abstracto dado en (Bernard and Buffoni, 2007b), donde se suponen algunas hipótesis sobre

el análogo al funcional de acción, en particular la hipótesis (A1). El resto de este estudio se desarrolla para el potencial de Mañé como la función de costo para  $k = c(L) = 0$  y arbitrario  $k > c(L)$ . En el primer caso obtenemos una caracterización de parejas de Kantorovich admisibles para el problema dual como puntos fijos de los semi-grupos de Lax-Oleinik. Para  $k > c(L)$  probamos la existencia de curvas minimizantes usando teoría de transporte óptimo. Cabe mencionar que soluciones KAM-débiles sólo existen para  $k = c(L)$ , así una caracterización en el caso  $k > c(L)$  no tiene sentido.

## 2. Soluciones KAM-débiles y funciones importantes

En esta sección exponemos algunos conceptos y hechos que corresponden a la teoría KAM de Fathi y que serán usados a lo largo de este capítulo. Consideramos  $M$  una variedad Riemanniana  $C^\infty$ , compacta, conexa sin frontera y  $L$  un Lagrangiano de Tonelli.

La acción de una curva continua  $C^1$  por pedazos  $\gamma : [0, t] \rightarrow M$  para  $L$ , está definida por

$$A_L(\gamma) = \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds.$$

Como es bien sabido, es de gran interés estudiar y encontrar minimizadores, es decir, curvas continuas  $C^1$  por pedazos que minimicen la acción  $A_L$ .

DEFINICIÓN 4.1. Sea  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función, con  $U$  un subconjunto abierto de  $M$ . Si  $k \in \mathbb{R}$ , se dice que  $u$  está dominada por  $L + k$  sobre  $U$  y escribimos  $u \prec L + k$ , si para cada curva continua  $C^1$  por pedazos  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  se tiene

$$u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)) \leq \int_a^b L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + k(b - a).$$

La siguiente definición está motivada por las funciones  $u$  las cuales satisfacen la ecuación de Hamilton-Jacobi  $H(x, \nabla u(x)) = k$ .

DEFINICIÓN 4.2. Sea  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función y sea  $k \in \mathbb{R}$  una constante, con  $U$  un subconjunto abierto de  $M$ . Una curva continua  $C^1$  por pedazos  $\gamma : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U$  es  $(u, L, k)$ -calibrada, si para todo  $t, t' \in I$ , con  $t \leq t'$ , se tiene

$$u(\gamma(t')) - u(\gamma(t)) = \int_t^{t'} L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + k(t' - t).$$

Resulta que las curvas calibradas pueden llegar a ser curvas minimizadores, más precisamente:

**TEOREMA 4.3.** ((Fathi, 2008), Teorema 4.1.9) *Supongamos que  $L$  es un Lagrangiano de Tonelli sobre la variedad  $M$ . Sea  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  una función, con  $U$  un subconjunto abierto de  $M$ . Supongamos que  $u \prec L + k$ , donde  $k \in \mathbb{R}$ . Entonces cualquier curva continua  $C^1$  por pedazos  $(u, L, k)$ -calibrada  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  es necesariamente una curva minimizadora para la clase de curvas continuas por pedazos  $C^1$  sobre  $U$ . Por lo tanto es una curva extremal y tan suave como el Lagrangiano  $L$ .*

Existe una caracterización de las curvas calibradas si  $u \prec L + k$ , la cual es una simplificación de su definición.

**TEOREMA 4.4.** ((Fathi, 2008), Cor. 4.3.3) *Sea  $L$  un Lagrangiano de Tonelli sobre la variedad  $M$ . Supongamos que  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, donde  $U$  es un subconjunto abierto de  $M$ . Además supongamos que  $u \prec L + k$  y  $\gamma : [a, b] \rightarrow U$  es una curva continua  $C^1$  por pedazos. Entonces la curva  $\gamma$  es  $(u, L, k)$ -calibrada si y sólo si*

$$u(\gamma(b)) - u(\gamma(a)) = \int_a^b L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds + k(b - a).$$

Uno de los conceptos importantes en este capítulo son las soluciones KAM-débiles de la ecuación de Hamilton-Jacobi  $H(x, \nabla u(x)) = k$ , las cuales bajo algunas hipótesis pueden ser vistas como parejas de Kantorovich admisibles.

**DEFINICIÓN 4.5.** Sea  $L$  un Lagrangiano de Tonelli sobre un variedad compacta  $M$ . Una solución KAM-débil de tipo negativo (resp. de tipo positivo) es una función  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  para la cual existe  $k \in \mathbb{R}$  tal que

1.  $u$  está dominada por  $L + k$ .
2. Para todo  $x \in M$  podemos encontrar una curva  $(u, L, k)$ -calibrada  $\gamma : (-\infty, 0] \rightarrow M$  (resp.  $\gamma : [0, +\infty) \rightarrow M$ ) con  $\gamma(0) = x$ .

## 2.1. Potencial de Mañé.

**DEFINICIÓN 4.6.** 1. El potencial de acción finito es la función  $\phi : M \times M \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$\phi(x, y; t) = \inf_{\gamma \in C(x, y; t)} A_L(\gamma),$$

donde  $C(x, y; t)$  es el conjunto de curvas continuas  $C^1$  por pedazos  $\gamma : [0, t] \rightarrow M$  tales que  $\gamma(0) = x$  y  $\gamma(t) = y$ .

2. Para  $k \in \mathbb{R}$  fijo, el potencial de Mañé  $\Phi_k : M \times M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  está definido por

$$\Phi_k(x, y) = \inf_{t>0} \phi(x, y; t) + tk.$$

3. El valor crítico  $c(L)$  de Mañé (Mañé, 1997) está definido como

$$c(L) = \sup\{k \in \mathbb{R} : \exists \text{ curva cerrada } \gamma \text{ con } A_{L+k}(\gamma) < 0\}.$$

El valor crítico  $c(L)$  de Mañé satisface ciertas propiedades cuyas demostraciones pueden consultarse en (Contreras et al., 1997): Por ejemplo,  $c(L)$  es igual al ínfimo del conjunto de los  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $\Phi_k$  es finito. Para  $k < c(L)$ ,  $\Phi_k \equiv -\infty$  and for  $k \geq c(L)$ ,  $\Phi_k > -\infty$ ,  $\Phi_k$  es Lipschitz y para todo  $x, y, z \in M$

- $\Phi_k(x, z) \leq \Phi_k(x, y) + \Phi_k(y, z)$
- $\Phi_k(x, x) = 0$ .

Es bien sabido que las soluciones KAM-débiles negativas (resp. positivas)  $u$  existen sólo para el valor  $k = c(L)$  (Fathi, 2008, Cor. 4.3.7).

Otro de los importantes conceptos en cálculo de variaciones que son centrales en este capítulo son los semi-grupos de Lax-Oleinik de operadores  $\langle T_t^- \rangle_{t \geq 0}$  y  $\langle T_t^+ \rangle_{t \geq 0}$ , los cuales están definidos como sigue: dada una función continua  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  y  $t > 0$ , la función  $T_t^- u$  está definida para cada  $x \in M$  como

$$T_t^- u(x) = \inf\{u(\gamma(0)) + \int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) ds\},$$

donde el ínfimo es tomado sobre el conjunto de curvas continuas  $C^1$  por pedazos  $\gamma : [0, t] \rightarrow M$  tales que  $\gamma(t) = x$ . Es fácil verificar que

$$T_t^- u(x) = \min\{u(y) + \phi(y, x; t) : y \in M\}.$$

Para  $t = 0$ , se define  $T_0^- u = u$ . Similarmente, uno define  $\langle T_t^+ \rangle_{t \geq 0}$  y obtiene que

$$T_t^+ u(x) = \max\{u(z) - \phi(x, z; t) : z \in M\},$$

para cada  $t > 0$ .

Existe una caracterización de las soluciones KAM-débiles negativas (resp. positivas) a través del semi-grupo de Lax-Oleinik  $\langle T_t^- \rangle_{t \geq 0}$  (resp.  $\langle T_t^+ \rangle_{t \geq 0}$ ); en efecto, las funciones  $u$

que satisfacen  $T_t^- u + kt = u$  para cada  $t \in [0, +\infty)$  (resp.  $T_t^+ u - kt = u$ ) son precisamente las soluciones KAM-débiles negativas (resp. positivas). La prueba de este hecho se puede ver en (Fathi, 2008). Para  $k = 0$ , una función  $u$  que satisface  $T_t^- u = u$  (resp.  $T_t^+ u = u$ ) se llama punto fijo de  $\langle T_t^- \rangle_{t \geq 0}$  (resp.  $\langle T_t^+ \rangle_{t \geq 0}$ ).

**2.2. La barrera de Peierls.** La barrera de Peierls  $h$  está definida en  $M \times M$  como

$$h(x, y) = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \phi(x, y; t) + c(L)t.$$

La siguiente desigualdad es satisfecha para todo  $x, y \in M$ :

$$h(x, y) \geq \Phi_{c(L)}(x, y),$$

y como  $M$  es compacto se tiene

- $h$  es Lipschitz,
- $h(x, z) \leq h(x, y) + h(y, z)$  para todo  $x, y, z \in M$ ,
- $x \in \mathcal{A}$  si y sólo si  $h(x, x) = 0$ ,

donde  $\mathcal{A}$  es el conjunto de Aubry proyectado.

Para una prueba de aquellas afirmaciones ver (Contreras, 2001) o (Fathi, 2008). Contreras en su artículo (Contreras, 2001) da tres maneras de construir soluciones KAM-débiles, en el caso especial que  $M$  es una variedad compacta, la Proposición 4.2 en (Contreras, 2001) lleva a la siguiente consecuencia directa:

**PROPOSICIÓN 4.7.** *Sea  $M$  una variedad conexa y compacta. Sea  $f : M \rightarrow \mathbf{R}$  una función continua. Entonces las funciones*

$$u_-(x) =: \inf_{z \in M} \{f(z) + h(z, x)\} \text{ y } u_+(x) =: \sup_{z \in M} \{f(z) - h(x, z)\},$$

*son una solución KAM-débil negativa y positiva, respectivamente.*

### 3. Resultados

En esta sección vamos a presentar nuestros resultados correspondientes a este capítulo y sus respectivas pruebas. Estos resultados son válidos bajo la hipótesis de que  $M$  es una variedad Riemanniana  $C^\infty$ , conexa, compacta y sin frontera, además  $L$  un Lagrangiano de Tonelli.

**3.1. Parejas de Kantorovich admisibles y puntos fijos de los semi-grupos de Lax-Oleinik usando el potencial de Mañé.** Nuestro primer resultado es una caracterización de las parejas de Kantorovich admisibles y las soluciones KAM-débiles. Para obtener esta caracterización usamos la caracterización de las soluciones KAM-débiles a través de los puntos fijos de los semi-grupos de Lax-Oleinik mencionada anteriormente. Existe un resultado similar sobre la caracterización de las soluciones KAM-débiles a través de los puntos fijos de los semi-grupos de Lax-Oleinik en (Bernard and Buffoni, 2007b), pero usando la barrera de Peierls como la función de costo en el problema de transporte de Monge-Kantorovich y bajo una hipótesis la cual los autores llamaron  $(A_1)$ . Por el contrario, nosotros consideramos el potencial de Mañé como la función de costo, más precisamente,  $\Phi_k$  con  $k = c(L) = 0$ . Como dijimos antes,  $\Phi_k$  tiene propiedades importantes, de hecho  $\Phi_0$  es una métrica (Maderna, 2012). Vamos a usar  $\Phi$  para denotar el potencial de Mañé para este caso particular.

Antes de ir a nuestro primer resultado damos algunas definiciones. Dada una función de costo,  $c : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ , se define una pareja de Kantorovich admisible como una pareja de funciones reales continuas  $(\varphi_0, \varphi_1)$ , con  $\varphi_0$  definida en  $M$  y  $\varphi_1$  definida en  $N$ , tales que

$$\forall y \in N, \quad \varphi_1(y) := \inf_{x \in M} \{\varphi_0(x) + c(x, y)\}$$

y

$$\forall x \in M, \quad \varphi_0(x) := \sup_{y \in N} \{\varphi_1(y) - c(x, y)\}.$$

El nombre es debido a que estas parejas de funciones satisfacen la restricción en el problema dual de Kantorovich. Si una pareja de Kantorovich admisible resuelve el problema dual de Kantorovich se llamará pareja de Kantorovich admisible óptima. Una función  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$  es llamada  $c$ -Lipschitz si

$$\forall x, y \in M, \quad \varphi(y) - \varphi(x) \leq c(x, y).$$

**TEOREMA 4.8.** *Sea  $M$  una variedad  $C^\infty$ , conexa, compacta y sin frontera, y sea  $L$  un Lagrangiano de Tonelli. Sea  $\Phi_k : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  la función de costo en el problema transporte de Monge-Kantorovich asociado, con  $k = C(L) = 0$ . Entonces  $(\varphi, \varphi)$  es una pareja de Kantorovich admisible si y sólo si  $\varphi$  es un punto fijo de los semi-grupos  $\langle T_t^- \rangle_{t \geq 0}$  and  $\langle T_t^+ \rangle_{t \geq 0}$ .*

*Demostración.* Primero notemos que como  $\Phi$  satisface la desigualdad del triángulo y  $\Phi(x, x) = 0$  para todo  $x \in M$ , entonces las parejas de Kantorovich admisibles son de la forma  $(\varphi, \varphi)$ , donde  $\varphi$  es  $\Phi$ -Lipschitz. Tenemos que  $\Phi$  es Lipschitz y por el lema de Fleming para cada  $t > 0$ ,  $\phi$  es Lipschitz.

Sea  $(\varphi, \varphi)$  una pareja de Kantorovich admisible. Para todo  $y \in M$  tenemos

$$\varphi(y) = \min_{x \in M} \{\varphi(x) + \Phi(x, y)\} \quad y \quad \varphi(y) = \max_{x \in M} \{\varphi(x) - \Phi(y, x)\}.$$

Cuando  $t = 0$ , la prueba se sigue de la definición. Ahora sea  $t > 0$  arbitrario y  $z \in M$ , entonces obtenemos

$$\begin{aligned} T_t^- \varphi(z) &= \min_{x, y \in M} \{\varphi(x) + \Phi(x, y) + \phi(y, z; t)\} \\ &= \min_{x \in M} \{\varphi(x) + \Phi(x, z)\} \quad (\text{ya que } c(L) = 0) \\ &= \varphi(z), \end{aligned}$$

así  $\varphi$  es un punto fijo del semi-grupo  $\langle T_t^- \rangle_{t \geq 0}$ . Similarmente, obtenemos

$$\begin{aligned} T_t^+ \varphi(z) &= \max_{x, y \in M} \{\varphi(x) - \Phi(y, x) - \phi(z, y; t)\} \\ &= \max_{x \in M} \{\varphi(x) - \Phi(z, x)\} \\ &= \varphi(z), \end{aligned}$$

por lo tanto  $\varphi$  es un punto fijo del semi-grupo  $\langle T_t^+ \rangle_{t \geq 0}$ .

Vamos a probar ahora que si  $\varphi$  es punto fijo del semi-grupo  $\langle T_t^- \rangle_{t \geq 0}$  entonces  $(\varphi, \varphi)$  es una pareja de Kantorovich admisible.

$\varphi$  punto fijo de  $\langle T_t^- \rangle_{t \geq 0}$  implica  $\varphi \prec L$  (ver Fathi, 2008, Prop. 4.6.7), lo cual implica que  $\varphi$  es  $\Phi$ -Lipschitz (ver Fathi, 2008, Prop. 9.1.2), y esto a su vez implica que  $(\varphi, \varphi)$  es una pareja de Kantorovich admisible, ya que  $\Phi(x, x) = 0$  para todo  $x \in M$ .  $\square$

Después de nuestro resultado anterior, una pregunta natural que podemos plantearnos es: si es posible generalizar dicho resultado para  $k = c(L) > 0$ . Una dirección es inmediata, esto es, si  $\varphi$  es tal que  $T_t^- \varphi + kt = \varphi$  para todo  $t \geq 0$ , entonces  $\varphi$  es  $\Phi_k$ -Lipschitz (ver Fathi, 2008, Props. 4.6.7, 9.1.2), y por lo tanto,  $(\varphi, \varphi)$  es una pareja de Kantorovich admisible. Sin embargo, para la otra dirección, el argumento usado en el caso análogo no funciona.

OBSERVACIÓN 4.9. En general se puede obtener: Si  $(\varphi, \varphi)$  es una pareja de Kantorovich admisible, entonces  $\varphi \prec L + k$ , donde  $k \in \mathbb{R}$  es arbitrario. La prueba de esta afirmación es inmediata, ya que  $(\varphi, \varphi)$  una pareja de Kantorovich admisible implica que  $\varphi$  es  $\Phi_k$ -Lipschitz y entonces  $\varphi \prec L + k$  (ver Fathi, 2008, Prop. 9.1.2).

**3.2. Existencia de curvas minimizadoras a través de parejas de Kantorovich admisibles óptimas.** En esta sección presentamos otro de nuestros resultados, el cual muestra la existencia de curvas minimizadores usando teoría de transporte óptimo. Consideramos un problema de transporte bajo el siguiente escenario:  $\mu$  y  $\nu$  son dos medidas de probabilidad sobre  $M$ , tales que  $\mu$  es absolutamente continua con respecto a la clase de Lebesgue y el potencial de Mañé  $\Phi_k$  como la función de costo, con  $k > c(L)$ . En este escenario fueron estudiadas cuestiones de existencia de soluciones para el problema de transporte de Monge-Kantorovich en (Bernard and Buffoni, 2006).

TEOREMA 4.10. *Sea  $M$  una variedad  $C^\infty$ , conexa, compacta y sin frontera, y sea  $L$  un Lagrangiano de Tonelli. Sea  $k > c(L)$  y  $\Phi_k : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$  la función de costo en el problema de transporte anterior. Sean  $(\varphi, \psi)$  una pareja de Kantorovich admisible óptima y  $\pi$  un plan de transporte óptimo en dicho problema de transporte. Entonces existen curvas  $(\varphi, L, k)$ -calibradas.*

*Demostración.*

Ya que  $k > c(L)$ , el potencial de Mañé  $\Phi_k$  es Lipschitz, además satisface la desigualdad del triángulo y  $\Phi_k(x, x) = 0$  para todo  $x \in M$ . Entonces las parejas de Kantorovich admisibles son de la forma  $(u, u)$ , donde  $u$  es  $\Phi_k$ -Lipschitz (Bernard and Buffoni, 2007b, Lema 5). Vamos a escribir como  $(\varphi, \varphi)$  a la pareja de Kantorovich óptima. Como  $\pi$  y  $(\varphi, \varphi)$  son soluciones para el problema primal y dual de Kantorovich, respectivamente, tenemos que  $\pi$  está concentrada sobre el conjunto

$$D = \{(y, x) \in M \times M : \varphi(x) - \varphi(y) = \Phi_k(y, x)\}.$$

Ahora fijamos  $x \in M$  tal que  $B_x \neq \emptyset$ , donde  $B_x = \{y \in M : (y, x) \in D\}$ . Sea  $y$  un elemento de  $B_x$ . Obtenemos de la hipótesis  $k > c(L)$  que  $L$  es supercrítico, entonces podemos aplicar Lema 3 dado en (Bernard and Buffoni, 2006), así existe un  $t_y > 0$  y una

curva continua  $C^1$  por pedazos  $\gamma_{t_y} : [0, t_y] \rightarrow M$  tal que  $\gamma_{t_y}(0) = y$ ,  $\gamma_{t_y}(t_y) = x$  y

$$(4.1) \quad \Phi_k(y, x) = \int_0^{t_y} L(\gamma_{t_y}(s), \dot{\gamma}_{t_y}(s)) ds + kt_y,$$

esto es,  $\gamma_{t_y}$  es un minimizador global. Entonces obtenemos de (4.1) y el hecho de que  $(\gamma_{t_y}(0), \gamma_{t_y}(t_y)) \in D$ ,

$$(4.2) \quad \varphi(\gamma_{t_y}(t_y)) - \varphi(\gamma_{t_y}(0)) = \int_0^{t_y} L(\gamma_{t_y}(s), \dot{\gamma}_{t_y}(s)) ds + kt_y.$$

Ya que  $(\varphi, \varphi)$  es una pareja de Kantorovich admisible tenemos  $\varphi \prec L + k$ , y por la igualdad en (4.2), podemos usar Teorema 4.4 y así obtenemos que  $\gamma_{t_y}$  es una curva  $(\varphi, L, k)$ -calibrada.

□

**COROLARIO 4.11.** *Con la misma notación e hipótesis del teorema 4.10, para cada  $y \in B_x$ , la curva  $\gamma_{t_y}$  es una curva minimizadora para la clase de curvas continuas  $C^1$  por pedazos.*

*Demostración.* La prueba es una consecuencia directa del Teorema 4.10 y Teorema 4.3 □.

**3.3. Parejas de Kantorovich admisibles y soluciones KAM-débiles usando la barrera de Peierls.** Para establecer el contenido de las Proposiciones 4.13 y 4.14, describiremos brevemente las principales propiedades de la construcción hecha en (Bernard and Buffoni, 2007b). Los autores parten de una función continua arbitraria  $A : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ , y la extienden a una familia de funciones  $A_n$  las cuales son equicontinuas y tienen a lo más un crecimiento lineal con  $n$  y tasa  $\ell$ . Bajo la hipótesis llamada  $(A_1)$  de  $\ell = 0$ , ellos prueban que la función de costo definida como

$$c(x, y) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} A_n(x, y)$$

es finita y continua. Entonces ellos definen una familia de operadores y caracterizan las parejas de Kantorovich admisibles como puntos fijos de aquellos operadores los cuales coinciden en el conjunto donde  $c(x, x) = 0$ . Ellos afirman que cuando la función  $A$  es la acción Lagrangiana, entonces la función de costo  $c$  es la barrera de Peierls y los operadores son los operadores de los semi-grupos de Lax-Oleinik. El conjunto de puntos donde  $c(x, x) = 0$  entonces coincide con el conjunto de Aubry proyectado. De esta manera ellos obtienen una

caracterización de las soluciones KAM-débiles y parejas de Kantorovich admisibles. A diferencia de esto, nosotros usamos un enfoque directo, partiendo de la definición de la barrera de Peierls

$$h(x, y) = \liminf_{t \rightarrow +\infty} \phi(x, y; t) + kt,$$

damos dos proposiciones las cuales relacionan las parejas de Kantorovich admisibles y las parejas de Kantorovich admisibles débiles con soluciones KAM-débiles usando teoría de Fathi y evitando la construcción formal mencionada.

**DEFINICIÓN 4.12.** Dada una función de costo,  $c : M \times N \rightarrow \mathbb{R}$ , diremos que una pareja de funciones reales y continuas  $(\varphi_0, \varphi_1)$ , con  $\varphi_0$  definida en  $M$  y  $\varphi_1$  definida en  $N$ , es una pareja de Kantorovich admisible débil si

$$(4.3) \quad \varphi_1(y) - \varphi_0(x) \leq c(x, y)$$

para todo  $x \in M$  y  $y \in N$ .

Es decir, una pareja de Kantorovich admisible débil es aquella que satisface la restricción en el problema dual de Kantorovich. Es claro que si  $(\varphi_0, \varphi_1)$  es una pareja de Kantorovich admisible, entonces la desigualdad en (4.3) es satisfecha. Por otro lado, dada una pareja de Kantorovich admisible débil,  $(\varphi_0, \varphi_1)$ , se puede obtener una pareja de Kantorovich admisible  $(\psi, \varphi)$ , tal que para todo  $x \in M$  y para todo  $y \in N$  se tiene

$$\begin{aligned} \varphi(y) &:= \inf_x \{\varphi_0(x) + c(x, y)\} \\ &= \inf_x \{\psi(x) + c(x, y)\}, \\ \psi(x) &:= \sup_y \{\varphi_1(y) - c(x, y)\} \\ &= \sup_y \{\varphi(y) - c(x, y)\}. \end{aligned}$$

**PROPOSICIÓN 4.13.** *Sea  $M$  una variedad  $C^\infty$ , conexa, compacta y sin frontera, y sea  $L$  un Lagrangiano de Tonelli. Sea  $h$  la barrera de Peierls la función de costo. Supongamos que  $\varphi_0, \varphi_1$  son funciones continuas definidas en  $M$  tales que*

- $\varphi_1$  es una solución KAM-débil negativa,
- $\varphi_0$  es una solución KAM-débil positiva, y
- $\varphi_0 = \varphi_1$  en  $\mathcal{A}$ ,

entonces  $(\varphi_0, \varphi_1)$  es una pareja de Kantorovich admisible débil.

*Demostración.* Las soluciones KAM-débiles  $\varphi_1$  y  $\varphi_0$  están caracterizadas como

$$T_t^- \varphi_1 + c(L)t = \varphi_1, \quad T_t^+ \varphi_0 - c(L)t = \varphi_0,$$

para todo  $t \geq 0$ , respectivamente. Entonces

$$(4.4) \quad \varphi_1(y) = T_t^- \varphi_1(y) + c(L)t \leq \varphi_1(z) + \phi(z, y; t) + c(L)t$$

y

$$(4.5) \quad \varphi_0(x) = T_t^+ \varphi_0(x) - c(L)t \geq \varphi_0(z) - \phi(x, z; t) - c(L)t$$

para todo  $z \in M$ . De las desigualdades (4.4) y (4.5) tenemos que para todo  $x, y \in M$  y  $t \geq 0$

$$\varphi_1(y) - \varphi_0(x) \leq \varphi_1(z) + \phi(z, y; t) + c(L)t - \varphi_0(z) + \phi(x, z; t) + c(L)t$$

para todo  $z \in M$ . Entonces para todo  $z \in \mathcal{A}$  obtenemos

$$\varphi_1(y) - \varphi_0(x) \leq \phi(x, z; t) + c(L)t + \phi(z, y; t) + c(L)t,$$

y tomando ínfimos resulta

$$\begin{aligned} \varphi_1(y) - \varphi_0(x) &\leq \inf_{t>0} \{ \phi(x, z; t) + c(L)t \} + \inf_{t>0} \{ \phi(z, y; t) + c(L)t \} \\ &= \Phi_c(x, z) + \Phi_c(z, y) \end{aligned}$$

para todo  $z \in \mathcal{A}$ . Entonces

$$\begin{aligned} \varphi_1(y) - \varphi_0(x) &\leq \inf_{z \in \mathcal{A}} \{ \Phi_c(x, z) + \Phi_c(z, y) \} \\ &= h(x, y), \end{aligned}$$

donde la igualdad se obtiene por ser  $M$  compacto (ver Contreras, 2001, Prop. 0.1). Por lo tanto  $(\varphi_0, \varphi_1)$  es una pareja de Kantorovich admisible débil.  $\square$

Imponiendo una hipótesis más fuerte que admisibilidad débil recuperamos soluciones KAM-débiles.

**PROPOSICIÓN 4.14.** *Sea  $M$  una variedad  $C^\infty$ , conexa, compacta y sin frontera, y sea  $L$  un Lagrangiano de Tonelli. Sea  $h$  la barrera de Peierls la función de costo y sea  $(\varphi_0, \varphi_1)$  una pareja de Kantorovich admisible. Entonces*

- $\varphi_1$  es una solución KAM-débil negativa,
- $\varphi_0$  es una solución KAM-débil positiva, y
- $\varphi_0 = \varphi_1$  en  $\mathcal{A}$ .

*Demostración.* Por la hipótesis de admisibilidad tenemos

$$\varphi_0(x) = \max_{y \in M} \{\varphi_1(y) - h(x, y)\} \text{ y } \varphi_1(y) = \min_{x \in M} \{\varphi_0(x) + h(x, y)\},$$

para todo  $x, y \in M$ . Por Proposición 4.7 tenemos que  $\varphi_0$  es una solución KAM-débil positiva y  $\varphi_1$  es una solución KAM-débil negativa. La igualdad  $\varphi_0 = \varphi_1$  sobre el conjunto  $\mathcal{A}$  se obtiene al aplicar Lema 6 dado en (Bernard and Buffoni, 2007b), ya que  $h$  satisface la desigualdad triángulo.  $\square$

Recalamos que las parejas de funciones conjugadas coinciden en el conjunto de Aubry proyectado  $\mathcal{A}$  (ver Fathi, 2008, Teorema 5.2.8); por lo tanto de Proposición 4.14 obtenemos el siguiente corolario:

**COROLARIO 4.15.** *Sea  $M$  una variedad  $C^\infty$ , conexa, compacta y sin frontera, y sea  $L$  un Lagrangiano de Tonelli. Sea  $h$  la barrera de Peierls la función de costo y sea  $(\varphi_0, \varphi_1)$  una pareja de Kantorovich admisible. Entonces  $(\varphi_0, \varphi_1)$  es una pareja de funciones conjugadas.*

Una importante consecuencia de la Proposición 4.14 es acerca de la unicidad de las parejas de Kantorovich admisibles.

**PROPOSICIÓN 4.16.** *Sea  $M$  una variedad  $C^\infty$ , conexa, compacta y sin frontera, y sea  $L$  un Lagrangiano de Tonelli. Supongamos que existe sólo una clase estática, entonces existe sólo una pareja de Kantorovich admisible  $(\varphi_0, \varphi_1)$ , módulo una constante aditiva.*

*Demostración.* Sea  $(\varphi_0, \varphi_1)$  una pareja de Kantorovich admisible, entonces por la Proposición 4.14,  $\varphi_0$  es una solución KAM-débil positiva y  $\varphi_1$  es una solución KAM-débil negativa. Como  $M$  es compacto y existe sólo una clase estática, aquellas soluciones KAM-débiles son únicas módulo una constante aditiva (Contreras, 2001, Corolario 4.7), así  $(\varphi_0, \varphi_1)$  es la única pareja de Kantorovich admisible, módulo una constante aditiva.  $\square$

**Ejemplo.** Después de estos resultados veamos un ejemplo en el cual podemos aplicarlos para resolver el problema dual de Kantorovich en un escenario específico. Consideremos el péndulo simple cuyo Lagrangiano mecánico  $L : TS^1 \rightarrow \mathbb{R}$  está dado como

$$L(x, v) = \frac{1}{2}|v|^2 + (1 - \cos(2\pi x))$$

y su Hamiltoniano

$$H(x, p) = \frac{1}{2}|p|^2 - (1 - \cos(2\pi x)).$$

Para Lagrangianos simétricos se tiene que  $c(L) = \max_x E(x, 0)$ , donde  $E(x, v) = \frac{\partial L}{\partial v} \cdot v - L$  es la función de energía de  $L$ . Nuestro Lagrangiano  $L$  es simétrico (esto es,  $L(x, v) = L(x, -v)$ ), así

$$c(L) = \max_{x \in S^1} E(x, 0) = \max_{x \in S^1} (-1 + \cos(2\pi x)) = 0.$$

Ahora consideremos el problema dual de Kantorovich asociado al péndulo simple:

$$\sup_{\{(\psi, \varphi): \varphi(y) - \psi(x) \leq h(x, y)\}} \int_M \varphi d\nu - \int_M \psi d\mu,$$

donde la función de costo es la barrera de Peierls  $h$  definida en  $M \times M$ , con  $M = S^1 = [0, 2\pi]$  y  $\mu, \nu$  son medidas de probabilidad Borel definidas en  $M$ . Deseamos saber si existe solución de este problema dual. Obsérseve que las funciones

$$\varphi(y) = \int_0^y \sqrt{2[1 - \cos(2\pi s)]} ds, \quad \psi(x) = - \int_0^x \sqrt{2[1 - \cos(2\pi s)]} ds,$$

son soluciones KAM-débiles, negativa y positiva, respectivamente, de la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$H(x, d_x u) = c(L) = 0.$$

Para Lagrangianos mecánicos, como es el caso, se tiene que las órbitas estáticas son los puntos fijos  $(x, 0)$ , donde  $x$  es tal que maximiza  $U(x)$ . En este caso  $U(x) = \cos(2\pi x) - 1$ , por lo que  $x = 0$ . Por lo tanto el conjunto de Aubry es  $\{(0, 0)\}$ . Claramente  $\varphi = \psi$  en el conjunto de Aubry proyectado  $\{0\}$ . Así que por Proposition 4.13,  $(\psi, \varphi)$  es una pareja de Kantorovich admisible débil. Por otro lado, como el conjunto de Aubry tiene un elemento, existe sólo una clase estática, así por Proposition 4.16 existe una única pareja admisible de Kantorovich, módulo una constante aditiva. Por lo tanto, la pareja  $(\psi, \varphi)$  es una solución del problema dual de Kantorovich planteado.



## Capítulo 5

### Conclusiones y perspectivas

En esta tesis se han presentado resultados originales de la teoría de transporte óptimo (en Capítulos 2 y 4) y una aplicación del modelo de los precios hedónicos (en Capítulo 3), que se obtuvieron durante mi estancia doctoral bajo la supervisión del Dr. Joaquín Delgado. El trabajo desarrollado en Capítulos 2, 3 y 4, nos abre la posibilidad de futuros trabajos de investigación. Con respecto al trabajo desarrollado en Capítulo 2, nuestro resultado principal dado en Teorema 2.7, de que el funcional  $M$  es segundo diferenciable en el potencial de Monge en el sentido de Gâteaux, nos conduce a

- desarrollar un trabajo en el futuro para investigar si es posible proponer un algoritmo numérico tipo-Newton para aproximar la solución del problema de transporte óptimo de Monge-Kantorovich en el caso costo cuadrático, el cual podríamos implementarlo en imágenes warping, persiguiendo una mejoría al algoritmo expuesto en (Chartrand et al., 2009).

Otro reto importante dado el trabajo desarrollado en dicho capítulo es

- investigar si el funcional  $M$  es segundo diferenciable en un sentido más fuerte, digamos Fréchet diferenciable, y en qué conjunto lo es.

En el trabajo desarrollado en Capítulo 3, se aplica la metodología de los precios hedónicos mediante una forma funcional sencilla (dada en (3.5)) para probar que la violencia criminal tuvo un efecto negativo en los precios de las viviendas en la Ciudad de Acapulco en el período 2015-2016. Este período corto no permite visualizar como la violencia criminal ha afectado al turismo y por lo tanto cómo este impacto afecta a los precios de las viviendas. Lo que sabemos y hemos expuesto en este trabajo es que el turismo extranjero ha tenido una disminución importante durante los últimos años, mientras que el turismo nacional ha tenido un aumento sostenido. Así que podemos plantear la pregunta, ¿la disminución en el

número de turistas extranjeros ha tenido un efecto en los precios de las viviendas en dicha Ciudad? Esto conlleva a desarrollar un trabajo futuro

- investigar con un modelo hedónico, incorporando una nueva variable, si la disminución en el número de turistas extranjeros en la Ciudad de Acapulco en una ventana de tiempo grande ha afectado los precios de las viviendas en dicha Ciudad. Esto podría ser investigado a través de las inversiones de turistas extranjeros en la Ciudad, como por ejemplo, la compra de casas de vacaciones, así como el ingreso local.

Otro trabajo importante a desarrollar es

- aplicar la metodología hedónica para investigar el impacto de la violencia criminal en ciudades turísticas similares a Acapulco donde hay altos índices de violencia.

En Capítulo 4 probamos algunas relaciones entre la teoría KAM-débil y la teoría de transporte de Monge-Kantorovich, por ejemplo, probamos una caracterización de las parejas de Kantorovich admisibles vía los puntos fijos de los semi-grupos de Lax-Oleinik, usando el potencial de Mañé en un caso particular. Un trabajo a desarrollar en esta dirección es

- generalizar el resultado dado en Teorema 4.8, para  $k = c(L) > 0$ .

Una dirección es inmediata como se estableció en Capítulo 4, mientras que la otra se vuelve complicada. Quizá en vez de esto, podríamos preguntarnos si dada una pareja admisible de Kantorovich  $(\varphi, \varphi)$  con la función de costo el potencial de Mañé, la función  $\varphi$  define un tipo especial de solución KAM-débil, digamos una función de Busemann, y dar algunas hipótesis para contestar positivamente tal pregunta.

## Capítulo 6

### Apéndice

#### 1. Sobre el método de (Chartrand et al., 2009) e imágenes médicas

En este apartado damos algunos detalles sobre el método propuesto en (Chartrand et al., 2009) para calcular numéricamente el mapeo de transporte óptimo en el caso costo cuadrático. Además daremos otro ejemplo en el cual se explica la importancia de calcular el mapeo de transporte óptimo. Como hemos visto en Capítulo 2, el método propuesto en (Chartrand et al., 2009) resulta de una reformulación del problema dual de Kantorovich en un problema de minimización sin restricciones de un funcional  $M$ , el cual es convexo, continuo y diferenciable. La derivada obtenida está dada por la ecuación de Monge-Ampère

$$\nabla M(\varphi) = f_1 - f_2(\nabla\varphi^{**}) \det(D^2\varphi^{**}).$$

Más aún,  $M$  tiene un único minimizador convexo  $\varphi$ , para el cual  $\nabla\varphi$  es la solución del problema de Monge-Kantorovich para el caso  $c(x, y) = \frac{|x-y|}{2}$ . Esto sugiere a los autores en (Chartrand et al., 2009) que un potencial para el mapeo de transporte óptimo puede ser calculado por iteración de descenso por gradiente de la forma

$$(6.1) \quad \varphi_{n+1} = \varphi_n - \alpha_n \nabla M(\varphi_n),$$

donde  $\alpha_n$  es el tamaño de paso. En la práctica ellos reemplazan  $\varphi^{**}$  por  $\varphi$ ,

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - \alpha_n \left( f_1 - f_2(\nabla\varphi) \det(D^2\varphi) \right).$$

$\varphi^{**}$  y  $\varphi$  no son iguales a menos que se imponga una hipótesis sobre  $\varphi$ , ser continua inferiormente. Los autores encuentran que el algoritmo propuesto produce aproximaciones razonables del potencial del mapeo óptimo, y por lo tanto para  $\nabla\varphi$ . Sin embargo, ellos no prueban que este algoritmo converja. Con imágenes propias de la literatura del procesamiento de imágenes, Lena y Tiffany, aplicaron su método para el warping de tales imágenes. Con un tamaño de  $256 \times 256$  píxeles de las imágenes obtuvieron warpings de buena calidad, usando 190 iteraciones con un parámetro  $\alpha$  constante igual a 1 e iniciando el algoritmo con

el potencial del mapeo identidad, es decir,  $\varphi_0 = \frac{1}{2}(i^2 + j^2)$ . Las funciones  $f_1$  y  $f_2$  se discretizaron por los valores de intensidad de los píxeles de las imágenes y ellos usaron diferencias finitas centradas para calcular las derivadas. La utilidad del warping (deformación) radica en el uso de la corrección de la distorsión de una imagen, así como en la creatividad.

En el procesamiento de imágenes una de las tareas más comunes es determinar una correspondencia geométrica entre imágenes tomadas de la misma escena para compararlas o integrar la información que contienen, obteniendo datos más significativos. Uno podría pensar en imágenes adquiridas en diferentes momentos, con diferentes equipos o desde diferentes puntos de vista, como lo es el caso del estudio de imágenes médicas. El proceso de establecer diagnósticos precisos es crucial, por ejemplo, en la detección temprana de un tumor es esencial para aumentar las posibilidades de supervivencia de una persona. El transporte óptimo es una herramienta potencial para el estudio de imágenes médicas, siempre que el costo computacional no sea alto. Para la detección de tumores se puede usar la información geométrica que contiene el mapeo de transporte óptimo. Por ejemplo, dadas dos imágenes de resonancia magnética tomadas de un mismo cerebro, antes y después de haber desarrollado un tumor, Figura 6.1, se puede observar la región donde se ha desarrollado tal tumor con la gráfica del campo vectorial  $T(x) - x$  (donde  $T$  es el mapeo de transporte óptimo); más de la deformación del dominio está en dicha región. Esta región se puede identificar utilizando la divergencia de  $T$ , el color oscuro corresponde a una divergencia negativa, ya que el mapeo  $T$  comprime el dominio para crear la región oscura del tumor. Las áreas de luz cercanas muestran donde los tejidos circundantes han sido comprimidos por el crecimiento del tumor, Figura 6.2.

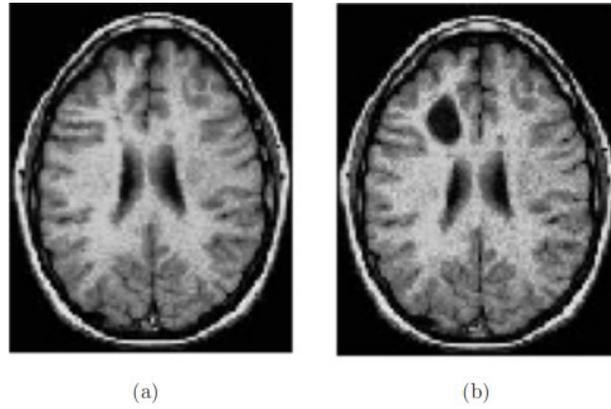


FIGURA 6.1. Cerebro sano en imagen (a) y cerebro con tumor desarrollado en imagen (b)

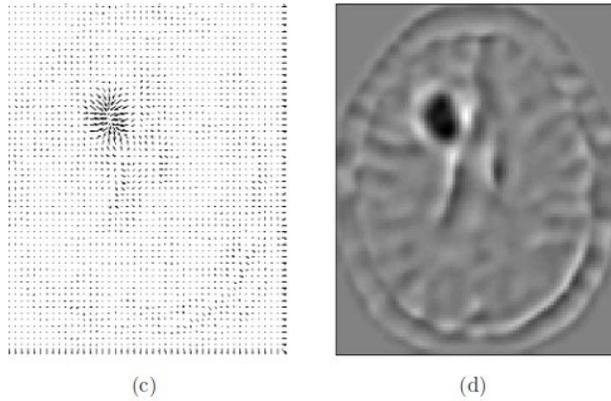


FIGURA 6.2. Campo vectorial  $T(x) - x$  en imagen (c) y la divergencia del mapeo óptimo  $T$  en imagen (d)

## 2. Prueba del acotamiento de $J_\varphi(w)$

TEOREMA 6.1. *El operador  $J_\varphi(w)$*

$$J_\varphi(w) := -f_1 \operatorname{tr}([D^2\varphi]^{-1} D^2 w) - \nabla f_2(\nabla\varphi) \cdot \nabla w \det(D^2\varphi),$$

*es acotado.*

Sean  $w$  y  $v$  funciones en  $C_0^\infty(K_1) \cap L^2(K_1)$ . Como  $\varphi$  y  $w$  son funciones de dos variables, tenemos

$$(6.2) \quad \langle J_\varphi(w), v \rangle = - \int_{K_1} v f_1 \left( D_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial x_1} + D_{21} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + D_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \right) dx_1 dx_2$$

$$(6.3) \quad - \int_{K_1} v \nabla f_2(\nabla \varphi) \cdot \nabla w \det(D^2 \varphi) dx_1 dx_2,$$

donde

$$D_{ij}(x) = \left[ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(x) \right]^{-1}, \quad i, j = 1, 2.$$

Sea  $K_1 = [a, b] \times [c, d]$ . Usando integración por partes y el hecho de que las derivadas parciales de  $w$  se anulan en la frontera de  $K_1$ , tenemos que la integral en (6.2)

$$(6.4) \quad \begin{aligned} &= \int_c^d \int_a^b \left( \frac{\partial(D_{11} f_1 v)}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial(D_{12} f_1 v)}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{\partial(D_{21} f_1 v)}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{\partial(D_{22} f_1 v)}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \\ &= \int_c^d \int_a^b \left\{ \left( \frac{\partial(D_{11} f_1 v)}{\partial x_1} + \frac{\partial(D_{12} f_1 v)}{\partial x_2} \right) \frac{\partial w}{\partial x_1} + \left( \frac{\partial(D_{21} f_1 v)}{\partial x_1} + \frac{\partial(D_{22} f_1 v)}{\partial x_2} \right) \frac{\partial w}{\partial x_2} \right\} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Calculando cada una de las integrales en (6.4):

$$(6.5) \quad \begin{aligned} &\int_c^d \int_a^b \left( \frac{\partial(D_{11} f_1 v)}{\partial x_1} \right) \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \\ &= \int_c^d \int_a^b v D_{11} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \int_c^d \int_a^b f_1 v \frac{\partial D_{11}}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \int_c^d \int_a^b f_1 D_{11} \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \\ &= \int_c^d \int_a^b v \left[ f_1 \frac{\partial D_{11}}{\partial x_1} + D_{11} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right] \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \int_c^d \int_a^b f_1 D_{11} \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Usando integración por partes y el hecho de que  $w$  se anula en la frontera de  $K_1$  resulta que (6.5)

$$\begin{aligned} &= - \int_c^d \int_a^b wv \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ f_1 \frac{\partial D_{11}}{\partial x_1} + D_{11} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right] dx_1 dx_2 - \int_c^d \int_a^b w \left[ f_1 \frac{\partial D_{11}}{\partial x_1} + D_{11} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right] \frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \\ &+ \int_c^d \int_a^b f_1 D_{11} \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Simmilarmente procedemos:

$$\begin{aligned} &\int_c^d \int_a^b \left( \frac{\partial D_{12} f_1 v}{\partial x_2} \right) \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \\ &= \int_c^d \int_a^b v D_{12} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \int_c^d \int_a^b f_1 v \frac{\partial D_{12}}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \int_c^d \int_a^b f_1 D_{12} \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \\ (6.6) \quad &\int_c^d \int_a^b v \left[ f_1 \frac{\partial D_{12}}{\partial x_2} dx_1 dx_2 + D_{12} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right] \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 + \int_c^d \int_a^b f_1 D_{12} \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Usando integración por partes y el hecho de que  $w$  se anula en la frontera de  $K_1$  (6.6) resulta:

$$\begin{aligned} &= - \int_c^d \int_a^b wv \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ f_1 \frac{\partial D_{12}}{\partial x_2} + D_{12} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right] dx_1 dx_2 - w \left[ f_1 \frac{\partial D_{12}}{\partial x_2} + D_{12} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right] \frac{\partial v}{\partial x_1} dx_1 dx_2 \\ &+ \int_c^d \int_a^b f_1 D_{12} \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_1} dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Similarmenete

$$\begin{aligned} &\int_c^d \int_a^b \frac{\partial(D_{21} f_1 v)}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2 \\ &= \int_c^d \int_a^b v D_{21} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2 + \int_c^d \int_a^b f_1 v \frac{\partial D_{21}}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2 + \int_c^d \int_a^b f_1 D_{21} \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2 \\ (6.7) \quad &= \int_c^d \int_a^b v \left[ f_1 \frac{\partial D_{21}}{\partial x_1} + D_{21} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right] \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2 + \int_c^d \int_a^b f_1 D_{21} \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2 \end{aligned}$$

Usando integración por partes y el hecho de que  $w$  se anula en la frontera de  $K_1$  (6.7) resulta:

$$\begin{aligned}
&= - \int_c^d \int_a^b wv \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ f_1 \frac{\partial D_{21}}{\partial x_1} + D_{21} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right] dx_1 dx_2 - \int_c^d \int_a^b w \left[ f_1 \frac{\partial D_{21}}{\partial x_1} + D_{21} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right] \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_1 dx_2 \\
&+ \int_c^d \int_a^b f_1 D_{21} \frac{\partial v}{\partial x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
&\int_c^d \int_a^b \frac{\partial(D_{22}f_1v)}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2 \\
&= \int_c^d \int_a^b v D_{22} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2 + \int_c^d \int_a^b f_1 v \frac{\partial D_{22}}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2 + \int_c^d \int_a^b f_1 D_{22} \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2 \\
(6.8) \quad &= \int_c^d \int_a^b v \left[ f_1 \frac{\partial D_{22}}{\partial x_2} + D_{22} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right] \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2 + \int_c^d \int_a^b f_1 D_{22} \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2
\end{aligned}$$

Usando integración por partes y el hecho de que  $w$  se anula en la frontera de  $K_1$  (6.8) resulta:

$$\begin{aligned}
&= - \int_c^d \int_a^b wv \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ f_1 \frac{\partial D_{22}}{\partial x_2} + D_{22} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right] \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2 - \int_c^d \int_a^b w \left[ f_1 \frac{\partial D_{22}}{\partial x_2} + D_{22} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right] \frac{\partial v}{\partial x_2} dx_1 dx_2 \\
&+ \int_c^d \int_a^b f_1 D_{22} \frac{\partial v}{\partial x_2} \frac{\partial w}{\partial x_2} dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

Con aquellos cálculos obtenemos que

$$\langle J_\varphi(w), v \rangle =$$

$$\begin{aligned}
& - \int_c^d \int_a^b wv \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \left[ f_1 \frac{\partial D_{11}}{\partial x_1} + D_{11} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right] + \left[ f_1 \frac{\partial D_{12}}{\partial x_2} + D_{12} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right] \right) dx_1 dx_2 \\
& - \int_c^d \int_a^b wv \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \left[ f_1 \frac{\partial D_{21}}{\partial x_1} + D_{21} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right] + \left[ f_1 \frac{\partial D_{22}}{\partial x_2} + D_{22} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right] \right) dx_1 dx_2 \\
& - \int_c^d \int_a^b w \frac{\partial v}{\partial x_1} \left( \left[ f_1 \frac{\partial D_{11}}{\partial x_1} + D_{11} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right] + \left[ f_1 \frac{\partial D_{12}}{\partial x_2} + D_{12} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right] \right) dx_1 dx_2 \\
& - \int_c^d \int_a^b w \frac{\partial v}{\partial x_2} \left( \left[ f_1 \frac{\partial D_{21}}{\partial x_1} + D_{21} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right] + \left[ f_1 \frac{\partial D_{22}}{\partial x_2} + D_{22} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right] \right) dx_1 dx_2 \\
& + \int_c^d \int_a^b \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_1} (f_1 D_{11}) dx_1 dx_2 + \int_c^d \int_a^b \frac{\partial w}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} (f_1 D_{12}) dx_1 dx_2 \\
& + \int_c^d \int_a^b \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} (f_1 D_{21}) dx_1 dx_2 + \int_c^d \int_a^b \frac{\partial w}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_2} (f_1 D_{22}) dx_1 dx_2 \\
& - \int_{K_1} v \nabla f_2 (\nabla \varphi) \cdot \nabla w \det(D^2 \varphi) dx_1 dx_2.
\end{aligned}$$

Entonces, usando desigualdad de Schwartz tenemos que

$$\begin{aligned}
|\langle J_\varphi(w), v \rangle| & \leq \|w\|_{L_2} \|v\|_{L_2} \|F_1\|_\infty + \|w\|_{L_2} \|v\|_{L_2} \|F_2\|_\infty + \|w\|_{L_2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{L_2} \|F_3\|_\infty \\
& + \|w\|_{L_2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{L_2} \|F_4\|_\infty + \left\| \frac{\partial w}{\partial x_1} \right\|_{L_2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{L_2} \|F_5\|_\infty + \left\| \frac{\partial w}{\partial x_1} \right\|_{L_2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{L_2} \|F_6\|_\infty \\
& + \left\| \frac{\partial w}{\partial x_2} \right\|_{L_2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_{L_2} \|F_7\|_\infty + \left\| \frac{\partial w}{\partial x_2} \right\|_{L_2} \left\| \frac{\partial v}{\partial x_2} \right\|_{L_2} \|F_8\|_\infty + \|v\|_{L_2} \|Dw\|_{L_2} \|F_9\|_\infty \\
& \leq \|w\|_{L_2} \|v\|_{L_2} \|F_1\|_\infty + \|w\|_{L_2} \|v\|_{L_2} \|F_2\|_\infty + \|w\|_{L_2} \|Dv\|_{L_2} \|F_3\|_\infty \\
& + \|w\|_{L_2} \|Dv\|_{L_2} \|F_4\|_\infty + \|Dw\|_{L_2} \|Dv\|_{L_2} \|F_5\|_\infty + \|Dw\|_{L_2} \|Dv\|_{L_2} \|F_6\|_\infty \\
& + \|Dw\|_{L_2} \|Dv\|_{L_2} \|F_7\|_\infty + \|Dw\|_{L_2} \|Dv\|_{L_2} \|F_8\|_\infty + \|v\|_{L_2} \|Dw\|_{L_2} \|F_9\|_\infty \\
& \leq \|w\|_{C^1} \|v\|_{C^1} \|F_1\|_\infty + \|w\|_{C^1} \|v\|_{C^1} \|F_2\|_\infty + \|w\|_{C^1} \|v\|_{C^1} \|F_3\|_\infty \\
& + \|w\|_{C^1} \|v\|_{C^1} \|F_4\|_\infty + \|w\|_{C^1} \|v\|_{C^1} \|F_5\|_\infty + \|w\|_{C^1} \|v\|_{C^1} \|F_6\|_\infty \\
& + \|w\|_{C^1} \|v\|_{C^1} \|F_7\|_\infty + \|w\|_{C^1} \|v\|_{C^1} \|F_8\|_\infty + \|v\|_{C^1} \|w\|_{C^1} \|F_9\|_\infty \\
& \leq K \|w\|_{C^1} \|v\|_{C^1},
\end{aligned}$$

donde

$$K = \|F_1\|_\infty + \|F_2\|_\infty + \|F_3\|_\infty + \|F_4\|_\infty + \|F_5\|_\infty + \|F_6\|_\infty + \|F_7\|_\infty + \|F_8\|_\infty + \|F_9\|_\infty$$

y

$$\begin{aligned}
F_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \left[ f_1 \frac{\partial D_{11}}{\partial x_1} + D_{11} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right] + \left[ f_1 \frac{\partial D_{12}}{\partial x_2} + D_{12} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right] \right), \\
F_2 &= \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \left[ f_1 \frac{\partial D_{21}}{\partial x_1} + D_{21} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right] + \left[ f_1 \frac{\partial D_{22}}{\partial x_2} + D_{22} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right] \right), \\
F_3 &= \left[ f_1 \frac{\partial D_{11}}{\partial x_1} + D_{11} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right] + \left[ f_1 \frac{\partial D_{12}}{\partial x_2} + D_{12} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right], \\
F_4 &= \left[ f_1 \frac{\partial D_{21}}{\partial x_1} + D_{21} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right] + \left[ f_1 \frac{\partial D_{22}}{\partial x_2} + D_{22} \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right], \\
F_5 &= f_1 D_{11}, F_6 = f_1 D_{12}, F_7 = f_1 D_{21}, F_8 = f_1 D_{22}, F_9 = \nabla f_2(\nabla \varphi) \det(D^2 \varphi).
\end{aligned}$$

□

### 3. Una introducción a la teoría KAM-débil

Es este apartado explicaremos brevemente cual es el objetivo de la teoría KAM-débil y sus orígenes, y mencionaremos algunos resultados importantes de la misma.

La teoría KAM-débil fue desarrollada por Fathi y nos provee de soluciones  $u$  en sentido débil (soluciones KAM-débiles) de la ecuación de Hamilton-Jacobi

$$H(x, \nabla u(x)) = k,$$

para alguna constante  $k \in \mathbb{R}$  (ver Fathi, 2008). Aquellas soluciones se llaman débiles porque sólo satisfacen la ecuación de Hamilton-Jacobi en puntos  $x$  donde es diferenciable la función  $u$ . Encontrar una solución que satisfaga la ecuación anterior en el sentido clásico es casi imposible, sin embargo, mediante una hipótesis adicional sobre una solución KAM-débil  $u$ , ésta resuelve en el sentido clásico la ecuación de Hamilton-Jacobi. Pero ¿por qué es importante resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi? La respuesta es que dado un Hamiltoniano  $H$ , las ecuaciones de Hamilton de  $H$  definen un flujo y entonces es importante buscar conjuntos invariantes bajo este flujo. Una manera de hacer esto es mediante el método de Hamilton-Jacobi, resolviendo la ecuación de Hamilton-Jacobi. Por otro lado, el estudio de sistemas Hamiltonianos vienen desde la mecánica celeste. En 1954, durante el Congreso Internacional de Matemáticas, Kolmogorov expuso una nueva teoría, que estudiaba la estabilidad de ciertos sistemas dinámicos similares al sistema solar. Cincuenta

años antes, Poincaré había señalado que en sistemas de tres o más cuerpos celestes era muy complicado predecir con exactitud la trayectoria que seguiría cada uno, debido a las interacciones gravitacionales. Sin embargo, Kolmogorov afirmó que, aunque no podamos resolver explícitamente las ecuaciones que rigen el sistema de manera global, la mayor parte de la dinámica resiste a pequeñas perturbaciones, y es, por tanto, predecible. Esta afirmación podría explicar la estabilidad de las órbitas de los planetas, y que el sistema solar permanezca siempre tal y como lo conocemos. La teoría KAM estudia sistemas dinámicos próximos a ser integrables. En mecánica celeste, el modelo clásico de dos cuerpos orbitando uno en torno al otro, es un sistema integrable, por ejemplo, el sistema Tierra-Sol viene descrito por las órbitas elípticas de la tierra frente al sol. Sin embargo, un tercer cuerpo añadido al modelo, como la Luna, introduce perturbaciones muy difíciles de predecir de manera precisa en períodos largos de tiempo (millones de años). Cuando el sistema es integrable, se sabe que el espacio de fases está dividido en regiones con forma de toro, y éstos son invariantes bajo el régimen dinámico. Esto quiere decir que la órbita del sistema estará confinada en uno de los toros geométricos, sin abandonarlo. Además, esta órbita es aproximadamente periódica, en el sentido de que tras un intervalo de tiempo, la órbita vuelve a pasar cerca de la posición que ocupaba antes, pero no necesariamente la misma. A estas trayectorias se les denomina órbitas cuasiperiódicas. Aquí surge la cuestión fundamental de la teoría KAM: si se perturba un sistema integrable ligeramente (por ejemplo, añadiendo otro cuerpo relativamente pequeño), algunos de estos toros se deformarán junto con sus órbitas cuasiperiódicas, pero sobrevivirán a la perturbación, mientras que otros serán destruidos dando lugar a dinámicas caóticas.

En lo que sigue vamos a mencionar algunos resultados importantes de las teorías KAM y KAM-débil. La teoría KAM-débil funciona para Hamiltonianos definidos sobre cualquier variedad suave. Aquí sólo se considera el caso de un Hamiltoniano sobre un toro para propósitos de exposición.

Consideremos un Hamiltoniano  $H : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $\mathbb{T}^n$  es el toro  $n$ -dimensional,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{T}^n$  y  $(p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ , y  $H$  satisface las siguientes condiciones:

1.  $H$  es al menos  $C^2$ .
2.  $H$  es convexo en  $p$ , es decir, para todo  $x \in \mathbb{T}^n$  la matriz Hessiana  $\partial_{p_i p_j}^2 H(x, p)$  es definida positiva para todo  $p \in \mathbb{R}^n$ .

3.  $H$  es superlineal en  $p$ , es decir, para todo  $x \in \mathbb{T}^n$  se cumple que  $\lim H(x, p)/|p| \rightarrow +\infty$  cuando  $|p| \rightarrow +\infty$ .

Las ecuaciones de Hamilton

$$(6.9) \quad \dot{x} = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p},$$

$$(6.10) \quad \dot{p} = \frac{-\partial H(x, p)}{\partial x},$$

definen un flujo  $\phi_t^*$  el cual está definido para todo  $t \in \mathbb{R}$ , definiendo así un sistema dinámico. Un ejemplo es el sistema mecánico:  $H(x, p) = |p|^2/2 + V(x)$ , donde  $|\cdot|$  es la norma Euclídeana y  $V(x)$  es un potencial suave sobre  $\mathbb{T}^n$  ( $H$  es la energía cinética más la energía potencial).

Sea  $\{(x(t), p(t))\}_{t \in \mathbb{R}}$  una trayectoria de (6.9), (6.10), con condición inicial  $(x(0), p(0)) = (x_0, p_0)$ . Sea  $\hat{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  un levantamiento de  $x(t) \in \mathbb{T}^n$  a la cubierta universal  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{T}^n$ .

**DEFINICIÓN 6.2.** El *vector de rotación* de una trayectoria  $\{(x(t), p(t))\}_{t \in \mathbb{R}}$  (si existe) es igual a la velocidad asintótica promedio de  $x$ , es decir

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \frac{\hat{x}(t) - \hat{x}(0)}{t} = h(x_0, p_0).$$

Surge la siguiente **pregunta**: Dado un número de rotación  $h \in \mathbb{R}^n$ . ¿Existe un conjunto invariante  $\mathcal{M}_h \subseteq \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$  del flujo  $\phi_t^*$  tal que sus trayectorias tengan vector de rotación  $h$ ? Vamos al resultado básico de la teoría KAM. Sea  $H_0(p)$  suave (es decir,  $C^\infty$ ) y sea  $H_\epsilon(x, p) = H_0(p) + \epsilon H_1(x, p)$  una pequeña perturbación del Hamiltoniano  $H_0(p)$ .

**TEOREMA 6.3** (Teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser). *Si la matriz Hessiana  $\partial_{p_i p_j}^2 H_0(p)$  es no degenerada para todo  $p$  en la bola unitaria  $B^n \subseteq \mathbb{R}^n$ , entonces para  $\epsilon$  suficientemente pequeño*

- *más de las trayectorias en  $\mathbb{T}^n \times B^n$  del flujo Hamiltoniano (6.9, 6.10) de  $H = H_\epsilon$  pertenece a toros  $n$ -dimensionales invariantes;*
- *cada trayectoria de tales toros tiene un vector de rotación  $h$ ;*
- *para más de los vectores de rotación  $h \in B^n$  existe un toro invariante  $\mathbb{T}_{h, \epsilon}^n$  tal que sus trayectorias tienen vector de rotación  $h$ ;*
- *cada uno de estos toros  $\mathbb{T}_{h, \epsilon}^n$  invariantes es una pequeña perturbación del toro  $\mathbb{T}_h^n = \{x \in \mathbb{T}^n : p = h\}$ .*

Por otro lado, la teoría KAM-débil estudia sistemas Hamiltonianos desde el punto de vista variacional, mediante el cual demuestra la existencia de conjuntos invariantes para la dinámica Hamiltoniana. Estos conjuntos están generados por soluciones KAM-débiles.

El método de Hamilton-Jacobi es el siguiente resultado para obtener conjuntos invariantes los cuales son gráficas y están contenidos en un conjunto de nivel de  $H$ .

**TEOREMA 6.4** (Hamilton-Jacobi). *Sea  $u : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^2$ . La gráfica*

$$\text{Graf}(\nabla u) = \{(x, \nabla u(x)) : x \in \mathbb{T}^n\}$$

*es invariante bajo el flujo Hamiltoniano de  $H$  si y sólo si  $H$  es constante en  $\text{Graf}(\nabla u)$ , es decir, si y sólo si  $u$  es solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi*

$$H(x, \nabla u(x)) = c, \text{ para todo } x \in \mathbb{T}^n.$$

En términos de una solución KAM-débil, Fathi ha obtenido conjuntos invariantes como lo establece el siguiente teorema, el cual es una versión débil del teorema de Hamilton-Jacobi.

**TEOREMA 6.5.** *Si  $u : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una solución KAM-débil, entonces*

$$\phi_{-t}^*(\overline{\text{Graf}(\nabla u)}) \subseteq \text{Graf}(\nabla u),$$

*para todo  $t > 0$ . Entonces la intersección*

$$\mathcal{I}^*(u) = \bigcap_{t \leq 0} \phi_{-t}^*[\text{Graf}(\nabla u)] = \bigcap_{t \leq 0} \phi_{-t}^*[\overline{\text{Graf}(\nabla u)}]$$

*es un conjunto no vacío, compacto y  $\phi_{-t}^*$ -invariante, contenido en  $\text{Graf}(\nabla u)$ .*

El conjunto  $\mathcal{I}^*(u)$  es llamado conjunto de Aubry de la solución KAM-débil  $u$ . Otro de los resultados importantes de la teoría KAM-débil es que las soluciones KAM-débiles sólo existen para  $k = c(L)$ , el valor crítico de Mañé.

#### 4. Equivalencia entre los problemas de transporte óptimo y de los precios hedónicos

En esta sección exponemos los teoremas que demuestran la equivalencia entre el problema de transporte óptimo de Kantorovich y el problema de los precios hedónicos dados

en (Chiappori et al., 2010). Brevemente resumimos las hipótesis del modelo hedónico que es estudiado en aquel trabajo.

Los conjuntos  $X, Y, Z$  de compradores, vendedores y de productos se suponen espacios métricos completos y separables. Sea  $u(x, z)$  la función de utilidad del comprador  $x$  comprando el producto  $z$ . Sea  $v(y, z)$  el costo del producto  $z$  producido por el vendedor  $y$ . Estas funciones son especificadas a priori junto con medidas de probabilidad Borel  $\mu$  en  $X$  y  $\nu$  en  $Y$ , las cuales representan la distribución de los tipos de comprador y vendedor en la población. Se define la función superávit

$$s(x, y) = \sup_{z \in Z} \{u(x, z) - v(y, z)\},$$

la cual se supone que siempre alcanza su supremo. Dado  $(x, y) \in X \times Y$ , sea  $z_0(x, y)$  tal que  $s(x, y)$  alcanza su supremo. Sea  $P : Z \rightarrow \mathbb{R}$  el precio de mercado del producto  $z$ . Se supone que el comprador  $x \in X$  tiene una utilidad indirecta que viene dada por la maximización de su utilidad cuasilineal

$$U(x) = \sup_{z \in Z} \{u(x, z) - P(z)\}.$$

De manera similar, se supone que el vendedor tiene una utilidad indirecta dada por

$$V(y) = \sup_{z \in Z} \{P(z) - v(y, z)\}.$$

Sea  $\alpha$  una medida no negativa sobre  $X \times Y \times Z$ . Esta medida representa una asignación de los compradores y vendedores con los productos tratados. Un equilibrio hedónico es un par  $(\alpha, P)$  tal que  $\alpha$  tiene marginales a cada una de las medidas dadas,  $\mu$  y  $\nu$  (proyecciones sobre la primera y segunda coordenada), y para casi todo punto  $(x, y, z)$  en el soporte de  $\alpha$ , se tiene

$$\begin{aligned} U(x) &= \{u(x, z) - P(z)\} \\ V(y) &= \{P(z) - v(y, z)\}. \end{aligned}$$

En tal equilibrio, cada terna  $(x, y, z)$  en el soporte de  $\alpha$  representa un intercambio de acuerdo mútuo del producto  $z$  entre el comprador  $x$  y el vendedor  $y$ , donde  $z$  es el producto más favorecido para ambos con precios de mercado  $P$  dados.

Para enunciar los resultados dados en (Chiappori et al., 2010) debemos poner en claro que, en la formulación de Kantorovich del problema de transporte, los autores consideran un problema de maximización en vez de minimización y como consecuencia, el problema dual viene dado como un problema de minimización con desigualdad invertida en la restricción.

El primer resultado nos dice que soluciones del problema de Kantorovich y su problema dual inducen un equilibrio hedónico.

**TEOREMA 6.6.** *Sea  $\gamma$  una solución del problema de Kantorovich y  $(\varphi, \psi)$  una solución del problema dual de Kantorovich. Entonces existe una función de precios  $P : Z \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaciendo*

$$P_{max}(z) := \inf_{y \in Y} \{v(y, z) + \psi(y)\} \geq P(z) \geq \sup_{x \in X} \{u(x, z) - \varphi(x)\} =: P_{min}(z).$$

Con  $\alpha \equiv (id_X \times id_Y \times z_0)_{\#}\pi$  y cualquier  $P$  satisfaciendo lo anterior, la pareja  $(\alpha, P)$  es un equilibrio hedónico.

Ahora el resultado converso

**TEOREMA 6.7.** *Sea  $(\alpha, P)$  un equilibrio hedónico. Si  $u \in C(X \times Z)$  y  $v \in C(Y \times Z)$  son continuas, entonces las utilidades indirectas  $U(x)$  y  $V(y)$  resuelven el problema dual de Kantorovich, mientras que  $\gamma = (\pi^X \times \pi^Y)_{\#}\alpha$  maximiza el problema primal de Kantorovich. Aquí  $\pi^X$  es la proyección sobre la primera coordenada y  $\pi^Y$  es la proyección sobre la segunda coordenada.*

Por lo tanto, el problema de los precios hedónicos con utilidades cuasilineales es equivalente al problema de transporte óptimo de Kantorovich.

## 5. Análisis cualitativo de turismo nacional y extranjero en Acapulco

En esta sección presentamos datos cualitativos que comparan las tendencias del número de turistas extranjeros y nacionales en Acapulco y tres ciudades principales, Cancún (Costa del Caribe), Ixtapa-Zihuatanejo y Puerto Vallarta (costa del Pacífico), donde el turismo tiene un nivel similar de importancia pero la violencia criminal no ha alcanzado altos niveles como en Acapulco. Los datos están disponibles en la Secretaría Nacional de Turismo (SECTUR, 2018) y cubren un período de tiempo más amplio, 1996-2016. La Figura 6.3 muestra el número de turistas nacionales y extranjeros en un largo período, de 1996 a 2016. Después de un pico máximo en 1999, seguido de una disminución en el período 2000-2003, el turismo nacional muestra, en promedio, un aumento sostenido. Comparativamente, el número de turistas extranjeros muestra una disminución relativamente abrupta después del pico en 1999 y se mantiene en valores más bajos hasta 2016. Este cambio no se nota

en un período corto, 2006-2016, que se muestra en la Figura 6.4. En particular, durante el período que se incluyó en nuestro estudio en modelo hedónico 2 dado en (3.5), 2015-2016, se produjo un aumento relativamente pequeño en el número de turistas nacionales y una disminución en el número de turistas extranjeros. La Figura 6.5 compara las llegadas de turistas extranjeros y nacionales a Acapulco y Cancún en el mismo período. Las gráficas muestran un aumento sostenido en el número de turistas nacionales pero una disminución abrupta en el número de turistas extranjeros en Acapulco en comparación con Cancún. Las llegadas de turistas a Ixtapa-Zihuatanejo y Puerto Vallarta se muestran en la Figura 6.6. Al igual que Acapulco, estas ciudades están ubicadas en la costa del Pacífico. Cualitativamente, Ixtapa-Zihuatanejo presenta un comportamiento similar a Acapulco pero con un menor volumen de turistas. Acapulco e Ixtapa-Zihuatanejo se ubican en el mismo estado y se caracterizan por un alto nivel de violencia criminal. Puerto Vallarta se encuentra en el vecino estado de Jalisco. En estas ciudades, el turismo extranjero ha mantenido un nivel promedio, pero el turismo nacional ha aumentado de manera correspondiente.

La importancia del turismo extranjero se ejemplifica con los siguientes datos: según el Boletín SERVYTUR de CONCANACO (CONCANACO, 2017), el gasto de turismo extranjero en México es relativamente pequeño en comparación con otros destinos turísticos como los Estados Unidos o Australia (1/3 y 1/6, respectivamente). Sin embargo, según un estudio de BBVA Bancomer, uno de los principales bancos de México, la cantidad total de dinero que un turista extranjero gasta en México es, en promedio, más del doble que la de un turista nacional (CONCANACO, 2017). El análisis anterior plantea la cuestión de si la disminución en el número de turistas extranjeros tiene un impacto en los precios de la vivienda. Un impacto directo podía medirse mediante la compra de bienes inmuebles por parte de turistas extranjeros, mientras que un impacto indirecto puede hipotetizarse como una disminución del ingreso local debido a menos compradores. Creemos que estos temas merecen un estudio más profundo más allá del alcance de la presente investigación, que estuvo principalmente restringida por la falta de datos confiables.

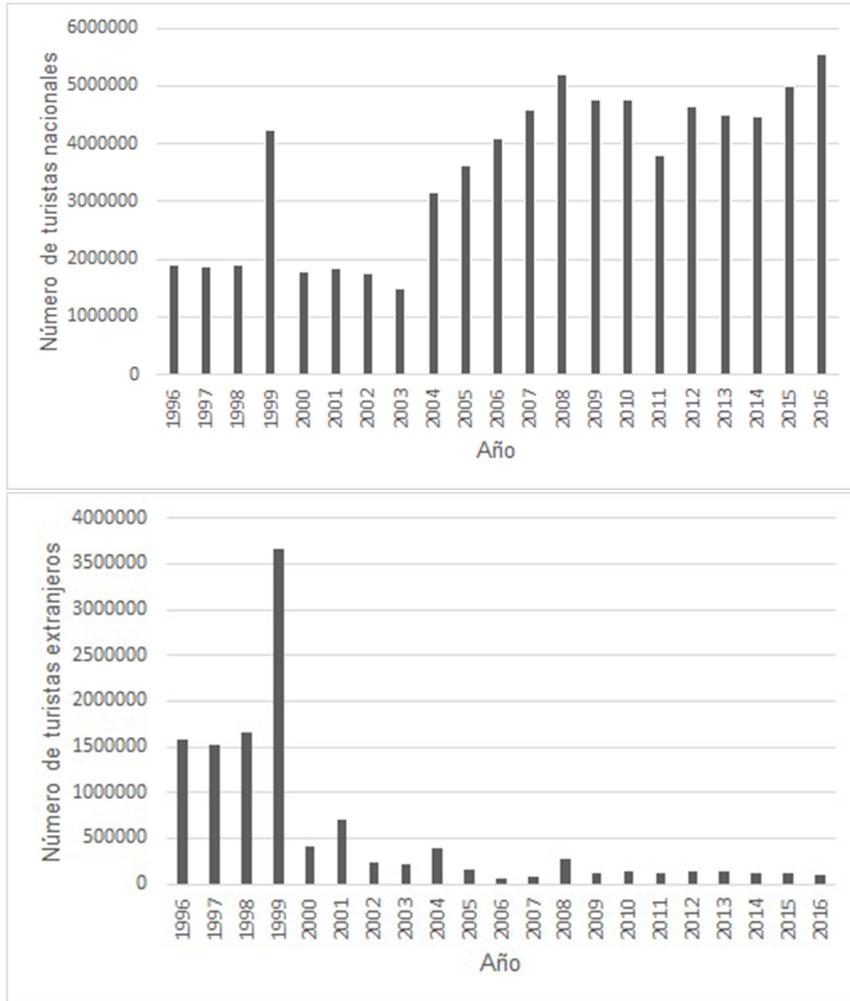


FIGURA 6.3. Llegadas de turistas nacionales y extranjeros en Acapulco en un período largo

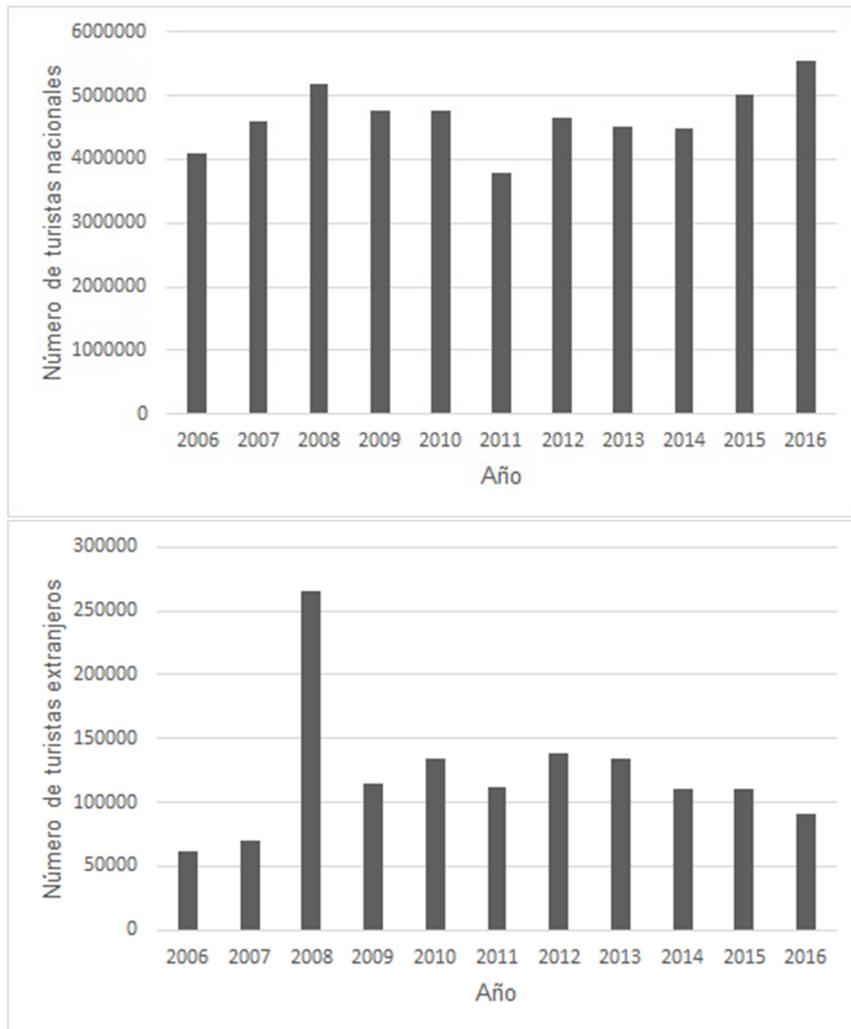


FIGURA 6.4. Llegadas de turistas nacionales y extranjeros en Acapulco en un período corto

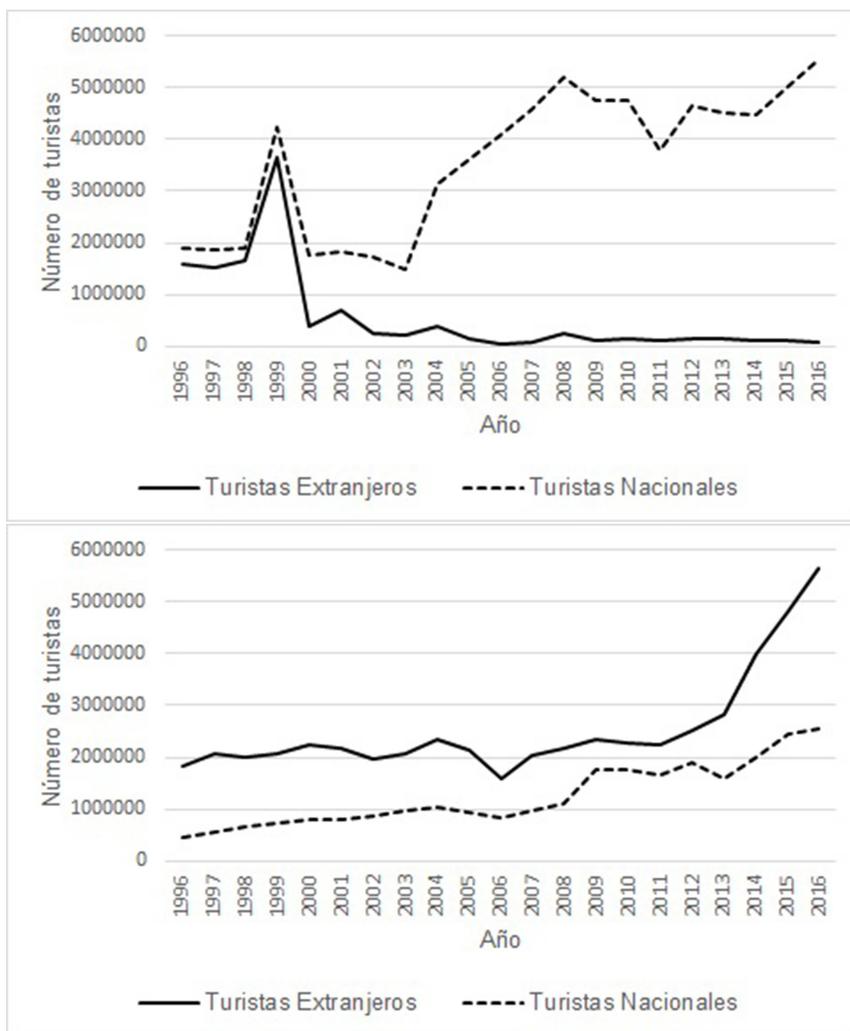


FIGURA 6.5. Comparación entre el número de turistas nacionales y extranjeros en Acapulco (arriba) y Cancún (abajo)

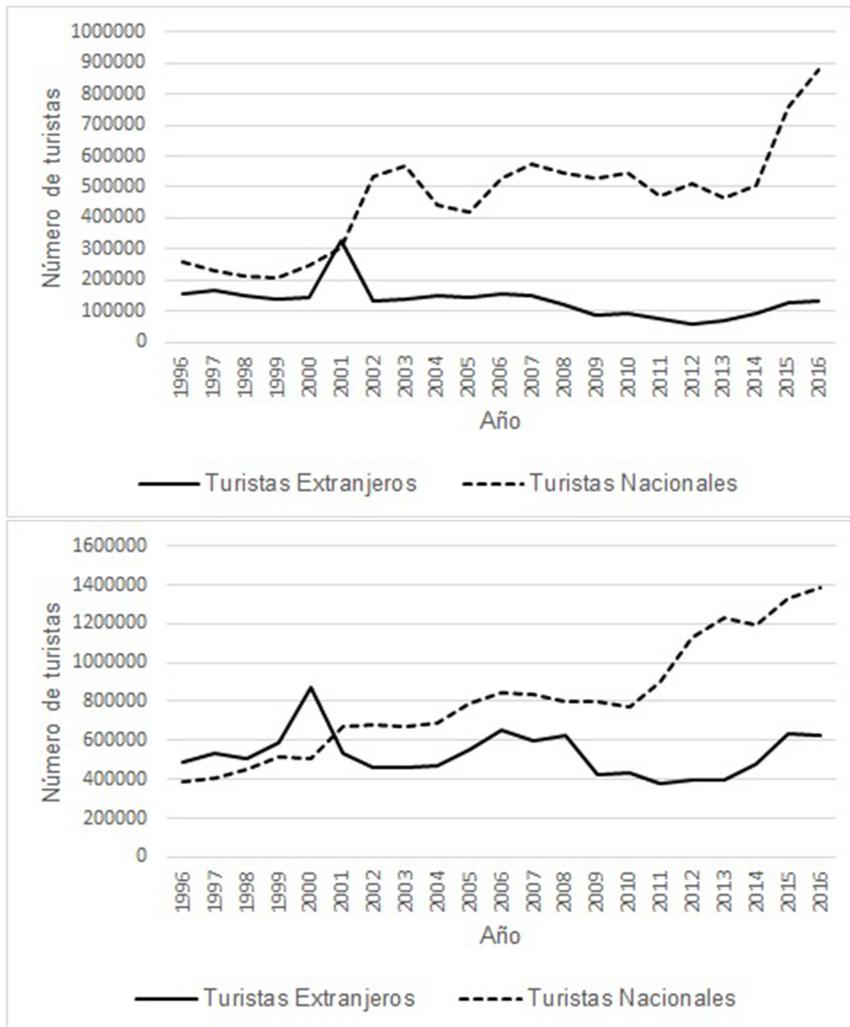


FIGURA 6.6. Número de turistas nacionales y extranjeros en Ixtapuzihuatanejo (arriba) y Puerto Vallarta (abajo)

## Bibliografía

- Aleksandrov, A. D. (1939). The existence almost everywhere of the second differential of a convex function and certain related properties of convex surfaces. *Uchen. Zap. Leningrad. Univ.*, 37(6):3–35.
- Ambrosio, L. (2003). Lecture notes on optimal transport theory. *Mathematical Aspects of Evolving Interfaces, Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, Berlin*, 1812.
- Ambrosio, L., Caffarelli, L. A., Brenier, Y., Buttazzo, G., and Villani, C. (2001). *Optimal transportation and applications*.
- Ambrosio, L. and Gigli, N. (2013). A user’s guide to optimal transport. *In Modelling and optimisation of flows on networks. Springer Berlin Heidelberg*, 2062.
- Angenent, S., Haker, S., and Tannenbaum, A. (2003). Minimizing flows for the Monge–Kantorovich problem. *SIAM J. Math. Anal.*, 35.
- Appell, P. (1928). Le probleme geometrique des déblais et remblais, *Memor. des Sciences. Math., Acad. de Sciences de Paris, Gauthier Villars*, 27.
- Barthe, F. (1997). *Inégalités fonctionnelles et géométriques obtenues par transport de mesures*. Phd. thesis, Univ. Marne–la–Vallée.
- Benamou, J. D. and Brenier, Y. (1998). Weak existence for the semigeostrophic equations formulated as a coupled Monge–Ampere equations/transport problem. *SIAM J. Appl. Ana. Math.*, 58(5):1450–1461.
- Benamou, J. D. and Brenier, Y. (2000). A computational fluid mechanics solution to the Monge–Kantorovich mass transfer problem. *Numer. Math.*, 84.
- Bernard, P. and Buffoni, B. (2006). The Monge problem for supercritical Mañé potentials on compact manifolds. *Advances in Mathematics*, 207.
- Bernard, P. and Buffoni, B. (2007a). Optimal mass transportation and Mather theory. *J. Eur. Math. Soc.*, 9(1):85–121.
- Bernard, P. and Buffoni, B. (2007b). Weak KAM pairs and Monge–Kantorovich duality. *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 47(2):397–420.

- Bernot, M. (2005). *Transport optimal et irrigation*. Phd. thesis, ENS Cachan.
- Berry, S., Kort, A., and A, P. (1996). Environmental change and hedonic cost functions for automobiles. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 93(23):12731–12738.
- Biangi, B., Brandano, M., and Lambiri, D. (2015). Does tourism affect house prices? evidence from italy. *Growth and Change*, 46(3):501–528.
- Biangi, B. and Faggian, A. (2004). The effect of tourism on the house market: The case of sardinia. Working paper, ERSA Conference–Porto.
- Biangi, B., Lambiri, D., and Faggian, A. (2012). *The effect of tourism on the housing market*. In: *Handbook on tourism and quality of life research*, pages 635–652. Springer.
- BLS (2016). <http://www.bls.gov/cpi/cpihqaitem.htm>.
- Bogachev, V. I. and Goldys, B. (2006). Second Derivatives of Convex Functions in the Sense of A. D. Aleksandrov on Infinite-Dimensional Spaces with Measure. *Translated from Matematicheskie Zametki*, 79(4):488–504.
- Bolley, F. and Carrillo, J. A. (2007). Tanaka theorem for inelastic Maxwell models. *Comm. Math. Phys.*, 276(2):287–314.
- Borwein, J. M. and Noll, D. (1994). Second order differentiability of convex functions in Banach spaces. *Transactions of the American Mathematical Society*, 342(1):43–81.
- Box, G. E. P. and Cox, D. R. (1964). An analysis transformations. *Journal of the Royal Statistical Society*, 26(2):211–252.
- Brenier, Y. (1987). Décomposition polaire at réarrangement monotone des champs de vecteurs. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 305.
- Brenier, Y. (1991). Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 44(4):375–417.
- Buonanno, P., Montolio, D., and Raya-Vílchez, J. M. (2013). Housing prices and crime perception. *Empirical Economics*, 45(1):305–321.
- Busemann, H. and Feller, W. (1936). Krümmungsindikatritizen konvexer flächen. *Acta Math.*, 66:1–47.
- Buttazzo, G. and Santambrogio, F. (2009). A mass transportation model for the optimal planning of an urban area. *SIAM Review*.
- Buvinic, M., Morrison, A., and Shifter, M. (1999). Violence in latin america and the caribbean: a framework for action. *Technical study, Sustainable Development Department, Inter-American Development Bank, Washington*.

- Caffarelli, L. A. (1990). A localization property of viscosity solutions to the monge-ampère equation and their strict convexity. *Ann. of Math.*, 131(1):129–134.
- Caffarelli, L. A. (1991). Some regularity properties of solutions of monge ampère equation. *Comm. Pure Appl. Math.*, 44(8):965–969.
- Caffarelli, L. A. (1992). The regularity of mappings with a convex potential. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(1):99–104.
- Caffarelli, L. A. (1996). Boundary regularity of maps with convex potentials. *J. Amer. Math. Soc.*, 2(3):453–496.
- Carlen, E. A. and Gangbo, W. (2003). Constrained steepest descent in the 2-wasserstein metric. *Annals of Mathematics.*, 157:807–846.
- Carlier, G. and Ekeland, I. (2010). Matching for teams. *Economic Theory*, 42(2):397–418.
- Carlier, G., Jimenez, C., and Santambrogio, F. (2008). Optimal transportation with traffic congestion and wardrop equilibria. *SIAM J. Control Optim.*, 47:1330–1350.
- CCPSCJa (2015). Seguridad, Justicia y Paz. Consejo Ciudadano para la Seguridad Pública y la Justicia Penal A.C. <http://www.seguridadjusticiaypaz.org.mx/ranking-de-ciudades-2015>. Accessed 25 February 2016.
- CCPSCJb (2016). Seguridad, Justicia y Paz. Available at <http://www.seguridadjusticiaypaz.org.mx/temas-de-interes/seguridad/1166>.
- Chartrand, R., Vixie, K., Wohlberg, B., and Bollt, E. (2009). A gradient descent solution to the monge-kantorovich problem. *App. Math. SCI.*, 3:1071–1080.
- Chen, S. and Figalli, A. (2017). Partial  $w^{2,p}$  regularity for optimal transport maps. *Journal of Functional Analysis.*, 272(11):4588–4605.
- Chiappori, P. A., McCann, R. J., and Nesheim, L. P. (2010). Hedonic price equilibria, stable matching, and optimal transport: equivalence, topology, and uniqueness. *Econ Theory*, 42:317–354.
- Cockburn, I. and Aslam, A. (1998). Hedonic analysis for arthritis drugs. Cambridge, National Bureau of Economic Research: Working Paper 6574.
- CONCANACO (2017). *Boletín Turismo*. CONCANACO SERVYTUR MÉXICO, year vii, 96 edition.
- Conroy, S. and Milosch, J. (2009). An estimation of the coastal premium for residential housing prices in san diego county. *J Real Estate Finance Econ*, 42(2):211–228.
- Contreras, G. (2001). Action potential and weak kam solutions. *Calc. Var.*, 13(4):427–458.

- Contreras, G., Delgado, J., and Iturriaga, R. (1997). Lagrangian flows: The dynamics of globally minimizing orbits-ii. *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 28(2):155–196.
- Court, A. T. (1939). Hedonic price indexes with automotive examples: In the dynamics of automobile demand. The General Motors Corporation, pages 99–117.
- Cullen, M. J. P. and Gangbo, W. (2001). A variational approach for the 2–dimensional semi–geostrophic shallow water equations. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 156, 156:241–273.
- De Pascale, L., G. M. S. G. L. (2006). Minimal measures, one-dimensional currents and the monge–kantorovich problem. *Cal. Var. and Part. Diff. Eqn.*, 27(1):1–23.
- De Philippis, G. (2013). *Regularity of optimal transport maps and applications. Edizioni Della Normale.*
- De Philippis, G. and Figalli, A. (2015). Partial regularity of optimal transport maps. *Publications mathématiques de l’IHÉS*, 121(1):81–112.
- Dubin, R. and Goodman, A. (1982). Valuation of education and crime neighborhood characteristics through hedonic housing prices. *Population and Environment*, 5(3):166–181.
- Edwards, S. F. and Gable, F. J. (1991). The value of beach recreation from property values: An exploration with comparisons to replenishment costs. *Ocean and Shoreline Management*, 15(1):37–55.
- Efron, B. and Tibshirani, R. (1993). *An introduction to the bootstrap.* Chapman and Hall.
- Ekeland, I. (2005). An optimal matching problem. *ESAIM: Control, Optimisation and calculus of variations*, 11(1):57–71.
- Ekeland, I. (2009). Existence, uniqueness and efficiency of equilibrium in hedonic markets with multidimensional types. *Econ. Theory*, 42(2):275–315.
- Evans, L. C. (2003). Some new PDE methods for weak KAM theory. *Cal. Var. and Part. Diff. Eqn.*, 17(2):159–177.
- Evans, L. C. and Gangbo, W. (1999). Differential equations methods for the Monge–Kantorovich mass transfer problem. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 137(653):1–66.
- Fathi, A. (2008). *Weak KAM Theorem in Lagrangian Dynamics.* , preliminary version, lyon edition.
- Figalli, A., Maggi, F., and Pratelli, A. (2010). A mass transportation approach to quantitative isoperimetric inequalities. *Inventiones mathematicae*, 182(1):167–211.
- Fitch, J. M., Soto, K., and Garza, R. (2013). Valuación de la calidad urbano–ambiental. Una modelación hedónica: San Nicolás de los Garza, México. *Estudios Demográficos y*

- Urbanos*, 28(2):383–428.
- Good, D., Sickles, R., and Weiher, J. (2005). An hedonic price index for airline travel. *Review of Income and Wealth*, 54(3):438–465.
- Granieri, L. (2007). On action minimizing measures for the Monge-Kantorovich problem. *Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 14.
- Griliches, Z. (1971). *Price indexes and quality change*. Harvard University Press.
- Haber, E.; Rehman, T. and Tannenbaum, A. (2010). An efficient numerical method for the solution of the  $L_2$  optimal mass transfer problem. *SIAM J. SCI. Comput.*, 32.
- Halvorsen, R. and Pollakowski, H. O. (1981). Choice of functional form for hedonic price equations. *Journal of Urban Economics*, 10(1):37–49.
- Hidano, N. (2002). *The economic valuation of the environment and public policy. A hedonic approach*. New Horizons in Environmental Economics. Ser. Edward Elgar Publishing. .
- INEGI (2010). Instituto Nacional de Estadística y Geografía. Censo de población y vivienda. <https://www.inegi.org.mx/programas/ccpv/2010/>. Accessed 10 December 2016.
- Ioffe, A. D. and Tihomirov, V. M. (1979). *Theory of extremal problems*. North-Holland Publishing Company.
- Kantorovich, L. (1942). On the transfer of masses. *Dokl. Akad. Nauk.*, 37:227–229.
- Kantorovich, L. (1948). On a problem of Monge. *Uspekhi Mat. Nauk.* , 3:225–226.
- Kato, N. (1989). On the second derivatives of convex functions on Hilbert spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 106(3):697–705.
- Knott, M. and Smith, C. S. (1984). On the optimal mapping of distributions. *J. Optim. Theory Appl.*, 43:39–49.
- Linden, L. and Rockoff, J. E. (2008). Estimates of the impact of crime risk on property values from Megan’s Laws. *American Economic Review*, 98(3):1103–1127.
- Loeper, G. (2009). On the regularity of solutions of optimal transportation problems. *Act. Math.*, 202(2):241–283.
- Lynch, A. K. and Rasmussen, D. W. (2001). Measuring the impact of crime on house prices. *Applied Economics*, 33(15):1981–1989.
- Ma, X.-N., Trudinger, N. S., and Wang, X.-J. (2005). Regularity of potential functions of the optimal transportation problem. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 177(2):151–183.
- Mañe, R. (1997). Lagrangian flows: The dynamics of globally minimizing orbits. *Bol. Soc. Bras. Mat.*, 28(2):141–153.

- Maderna, E. (2012). On weak KAM theory for N-body problems. *Ergod. Th. Dynam. Sys.*, 32(3):1019–1041.
- Mather, J. N. (1993). Variational construction of connecting orbits. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 43(5):1349–1386.
- Matoušková, E. and Zajíček, L. (1998). Second order differentiability and Lipschitz smooth points of convex functionals. *Czechoslovak Mathematical*, 48(4):617–640.
- McCann, R. J. (1997). A convexity principle for interacting gases. *Advances in Mathematics*, 128.
- Milon, W. J., Gressel, J., and Mulkey, D. (1984). Hedonic amenity valuation and functional form specification. *Land Econ*, 60(4):378–387.
- Monge, G. (1781). Mémoire sur the théorie des déblais et des remblais. *In Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris*, pages 666–704.
- Noll, D. (1993). Second order differentiability of integrals functionals on Sobolev spaces and  $L^2$  – spaces. *fur die reine und angewandte Mathematik*, 436.
- Núñez, H. M., Paredes, D., and Garduño Rivera, R. (2017). Is crime in Mexico a disamenity? Evidence from a hedonic valuation approach. *The Annals of Regional Science*, 59(1):171–187.
- Otto, F. (2001). The geometry of dissipative evolution equations: The porous medium equation. *Comm. Partial Differential Equations*, (26):101–174.
- Pompe, J. J. and Rinehart, J. R. (1995). Beach quality and the enhancement of recreational property values. *Journal of Leisure Research*, 27(2):143–54.
- Rehman, T., Haber, E., Pryor, G., and Melonakos, J. (2009). 3D nonrigid registration via optimal mass transport on the GPU. *Medical image analysis*, 13:931–940.
- Rosen, S. (1974). Hedonic prices and implicit markets: product differentiation in pure competition. *Journal of Political Economy*, 82(1):34–55.
- Rush, R. and Bruggink, T. H. (2000). The value of ocean proximity on barrier island houses. *The Appraisal Journal*, 68(2):142–151.
- Santambrogio, F. (2015). *Optimal transport for applied mathematicians: Calculus of variations, PDEs, and modeling*. Birkhauser.
- Saumier, L. P., Agueh, M., and Khouider, B. (2015). An Efficient numerical algorithm for the  $L^2$  optimal transport problem with applications to image processing. *Journal of Applied Mathematics*, 80:135–157.

- SECTUR, S. d. T. (2018). *Sexto Informe de Labores, 2017-2018*. Gobierno de la República, México.
- SEGOB (2017). Secretariado Ejecutivo del Sistema Nacional de Seguridad Pública. <https://www.gob.mx/sesnsp/acciones-y-programas/incidencia-delictiva-del-fuero-comun-nueva-metodologia>. Accessed 10 January 2017.
- Shabman, L. and Bertelson, M. K. (1979). The use of development value estimates for coastal wetland permit decisions. *Land Econ*, 55(2):213–22.
- Sinclair, M. and Stabler, M. (1997). *The economics of tourism*. Routledge advances in tourism series.
- Snee, R. D. (1973). Some aspects of nonorthogonal data analysis, part I. Developing prediction equations. *Journal of Quality Technology*, 5:67–79.
- Stabler, M., Papatheodorou, A., and Sinclair, M. (2010). *The economics of tourism*. Routledge, second edition.
- Thaler, R. (1978). A note on the value of crime control: Evidence from the property market. *Journal of Urban Economics*, 5(1):137–145.
- Triplett, J. (1991). Hedonic methods in statistical agency environments: An intellectual biopsy. *Fifty Years of Economic Measurement: The Jubilee of the Conference on Research in Income and Wealth*, pages 207–238.
- Troy, A. and Grove, J. M. (2008). Property values, parks, and crime: A hedonic analysis in Baltimore. *Landscape and Urban Planning*, 87(3):233–245.
- Villani, C. (2003). *Topics in optimal transportation*. *Grad. Stud. Math. 58*, AMS, Providence, RI.
- Villani, C. (2009). *Optimal transport old and new*. *Grundlehren Math. Wiss. 338*. Springer-Verlag, Berlin.
- Wallace, N. (1996). Hedonic-based price indexes for housing: Theory, estimation, and index construction. *Economic Review of Federal Reserve Bank of San Francisco*, (3):34–38.
- Walter, M. J., Gressel, J., and Mulkey, D. (1984). Hedonic amenity valuation and functional form specification. *Land Economics*, 60(4):378–387.
- Wang, X.-J. (2004). On the design of a reflector antenna. II. *Cal. Var. Partial Differential Equations*, 20(3):329–341.
- Waugh, F. V. (1929). *Quality as a determinant of vegetable prices: A statistical study of quality factors influencing vegetable prices in the Boston wholesale market*. Columbia University Press, New York.

Witte, A. D., Sumka, H. J., and Erekson, H. (1979). An estimate of a structural hedonic price model of the housing market: An application of Rosen's theory of implicit markets. *Econometrica*, 47(5):1151–1173.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

# ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00070

Matrícula: 2141801212

ALGUNAS CONEXIONES Y  
RESULTADOS DE LA TEORIA DE  
TRANSPORTE ÓPTIMO DE  
MONGE-KANTOROVICH

En la Ciudad de México, se presentaron a las 13:00 horas del día 28 del mes de febrero del año 2020 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DR. CARLOS OSVALDO OSUNA CASTRO
- DR. LORENZO HECTOR JUAREZ VALENCIA
- DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ
- DR. JOSE RAUL MONTES DE OCA MACHORRO



*[Handwritten signature]*

GIOVANNI ARQUIMEDES WENCES NAJERA  
ALUMNO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)  
DE: GIOVANNI ARQUIMEDES WENCES NAJERA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

*Aprobar*

REVISÓ



MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ  
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI



DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE



DR. CARLOS OSVALDO OSUNA CASTRO

VOCAL



DR. LORENZO HECTOR JUAREZ VALENCIA

VOCAL



DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ

SECRETARIO



DR. JOSE RAUL MONTES DE OCA MACHORRO