Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

SOBRE IDEALES Y LA PROPIEDAD Q EN ÁLGEBRAS TOPOLÓGICAS

TESIS QUE PRESENTA

YULIANA DE JESÚS ZÁRATE RODRÍGUEZ

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DIRECTORA DE TESIS

DRA. MARIA DE LOURDES PALACIOS FABILA

JURADO

DR. ÁNGEL TAMARIZ MASCARÚA
DR. CARLOS SIGNORET POILLON
DR. CONSTANCIO HERNÁNDEZ GARCIA

MÉXICO, D.F. JULIO 2013

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo

Índice general

Agradecimientos.

En primer lugar, quiero agradecer a Dios por permitirme concluir una meta más en mi vida profesional, por darme fortaleza en los momentos más difíciles a lo largo de todo este trabajo.

Quiero hacer un agradecimiento muy especial a mi madrina Cuca que siempre fue mi ejemplo profesional a seguir, mi inspiración y en muchos momentos mi guía desde el cielo.

De igual manera dedico esta tesis a mis padres y mi hermano por brindarme su apoyo incondicional, por estar conmigo en las buenas y en las malas, por apoyar todas mis locuras y nunca detenerme, por impulsarme a crecer más, los amo con todo mi corazón.

A el amor de mi vida, que ha sabido apoyarme para continuar y nunca renunciar, a quien le agradezco su paciencia, tolerancia, comprensión, sus conocimientos y su fortaleza, pero sobre todo por su amor incondicional. Muchas gracias por estar a mi lado Víck.

A mi abuelita, que siempre está al pendiente de mi avance, quien siempre reza por mí y a quien adoro demasiado.

Agradezco también a la Dra. Lourdes Palacios y a el Dr. Carlos Signoret por transmitirme sus conocimientos, por ser tan estrictos lo cual me hizo crecer mucho, por su paciencia, dedicación, su guía, comprensión, apoyo y sobre todo su amistad.

Introducción.

El caracter esencial de las álgebras topológicas es la consideración simultánea de dos estructuras en un mismo conjunto: una estructura algebraica (el de un álgebra) y una estructura topológica, asegurando la consistencia entre el álgebra y la topología. Esta unión lleva como componentes vitales, a un importante objeto del análisis funcional llamado "álgebras topológicas".

El estudio de las álgebras topológicas (no normadas) se inició alrededor de 1950, para manipular ciertas clases de álgebras topológicas que aparecieron naturalmente en las matemáticas y en la física. Algunos resultados en tales álgebras topológicas habían sido publicados en 1947 por R. Arens [3], pero no fue sino hasta 1952 cuando éste y E.A. Michael dieron, independientemente, el primer estudio sistemático sobre las álgebras localmente m-convexas, las cuales constituyen una clase importante de álgebras topológicas no normadas. Se puede destacar el hecho de que M.A. Naimark, un experto en el área de álgebras de Banach, había señalado la importancia de la consideración de álgebras no normadas y predijo el desarrollo de esta teoría. En relación a la cosmología, G. Lassner, para su gran sorpresa, se dió cuenta de que la teoría de las álgebras topológicas normadas no era suficiente como herramienta de trabajo.

Además, para el estudio interno de la estructura de las álgebras topológicas no normadas y no localmente convexas, existen aplicaciones en otras ramas de las matemáticas, tales como geometría diferencial en superficies suaves y en física matemática, la relatividad cuántica (A. Mallios) y cosmología cuántica (G. Lassner). Es más, las álgebras topológicas tienen gran influencia en los operadores no acotados. Otros temas donde las álgebras topológicas son aplicables es el álgebra homológica topológica, la geometría algebraica topológica, la teoría de gavillas y la K-teoría.

Un concepto importante dentro del estudio de las álgebras topológicas es el de Q-álgebra. Las Q-álgebras mantienen muchas de las propiedades fundamentales de las álgebras de Banach y en muchos casos estas propiedades caracterizan a la propiedad Q.

Una Q-álgebra es un álgebra topológica tal que el conjunto de sus elementos casi invertibles es abierto. El concepto de la propiedad Q fue introducido por primera vez en 1947 por I. Kaplansky en [28] en el contexto de los anillos topológicos. Las Q-álgebras poseen un lugar importante en la teoría de las álgebras topológicas, comparten con las álgebras de Banach propiedades significativas, por mencionar, entre otras, cada caracter es continuo, cada ideal máximo regular es cerrado, cada elemento tiene espectro compacto, y estas álgebras son advertiblemente completas.

Las álgebras advertiblemente completas fueron introducidas por S. Warner en 1955 en el contexto de las álgebras localmente m-convexas. Las Q-álgebras no son completas pero son advertiblemente completas y ambos conceptos son equivalentes en la clase de las álgebras normadas con unidad.

Recientemente se ha prestado una atención considerable a la clase de las Q-álgebras localmente m-convexas y en particular a aquellas que son de Fréchet (F-álgebras). Por otro lado, el concepto de álgebra topológicamente Q es una generalización muy conveniente del concepto de Q-álgebra. Este ha sido considerado por diversos autores como A. Najmi [35], H. Arizmendi et al [6], M. Abel, W. Zelazko [44] y R. Hadjigeorgiou [23] entre otros quienes han extendido resultados similares a los de E. Michael y otras a esta nueva clase de álgebras.

En el caso de las álgebras localmente m-convexas podemos hacer notar que el teorema de Gelfand-Mazur para álgebras m-convexas implica que cada ideal máximo cerrado es de codimensión 1 y es el núcleo de una funcional lineal multiplicativa continua no nula. Puesto que para cada ideal cerrado $I \subset A$ el álgebra cociente es tambien un álgebra localmente m-convexa, entonces cada ideal cerrado está contenido en un ideal máximo cerrado. Si A es una Q-álgebra, entonces cada ideal máximo es cerrado y por lo tanto es de codimensión 1.

Decimos que un álgebra localmente m-convexa A es un álgebra B_0 si es completa y metrizable. Existen ejemplos de álgebras con ideales máximos densos de codimensión infinita que no son Q, W. Zelazko [44] hizo la siguiente pregunta: ¿es cierto que un álgebra m-convexa B_0 tiene un ideal máximo denso de codimensión infinita si y sólo si no es una Q-álgebra? Tratando de responder a esta pregunta, W. Zelazko pudo caracterizar a las álgebras m-convexas conmutativas completas con unidad donde todos los ideales máximos son de codimensión 1 y descubrió las condiciones bajo la cuales existen ideales máximos densos (de codimensión finita o infinita).

Por otro lado, en 1999, R. Choukri y A. El Kinani [12] examinaron algunas álgebras topológicas y pudieron relacionar conceptos meramente algebraicos, como las condiciones de cadena en ideales, con propiedades topológicas, logrando caracterizar a las F-álgebras Noetherianas que son Q-álgebras, como aquellas en donde todos sus ideales izquierdos son cerrados. Más aún, en [14] R. Choukri define el concepto de álgebra topológicamente Noetheriana y estudia sus propiedades.

Este trabajo presenta tanto los fundamentos como resultados más relevantes en el estudio de cierto tipo de álgebras no normadas. Cabe mencionar que muchos de los elementos aquí considerados, como por ejemplo, álgebras de Fréchet con la propiedad Q tienen aplicaciones en la teoría de las ecuaciones diferenciales parciales, teoría de operadores y la geometría diferencial entre otras ramas de la matemática. Sin embargo debido a que el campo de estudio es muy basto existen muchas otras propiedades relacionadas con las álgebras topológicas no normadas que aún están por investigarse.

Resumen

La tesis está dividida en cuatro capítulos donde cada uno de ellos trata un aspecto en particular de las álgebras topológicas de diferentes tipos. El capítulo I está dedicado a introducir los conceptos y propiedades fundamentales de la álgebra de Banach, las álgebras normadas y las F-álgebras.

Las álgebras localmente m-convexas completas comparten propiedades fundamentales con las álgebras de Banach. Sin embargo, hay propiedades que no se pueden extender a ese tipo de álgebras. Para muchas de las propiedades que se han generalizado, es esencial la completitud del álgebra, aunque algunas de ellas se siguen cumpliendo si ponemos una condición mas débil, como es el ser advertiblemente completa.

El capítulo II está dedicado al estudio de las álgebras localmente convexas, en particular a las álgebras localmente m-convexas. El principal objetivo de este capítulo es tener una representación de cualquier álgebra localmente m-convexa completa A como un límite proyectivo de álgebras de Banach (descomposición de Michael-Arens).

El capítulo III está dirigido a estudiar propiedades algebraicas, topológicas y topológico-algebraicas de las álgebras topológicas. Relacionamos condiciones en los ideales de las álgebras con conceptos topológicos. Estudiamos en detalle las Q-álgebras, las Q_t-álgebras, proporcionamos caracterizaciones añadiendo algunas contribuciones originales.

En el capítulo IV proporcionamos un diagrama que describe los distintos tipos de álgebras topológicas consideradas en este trabajo. Además damos un resumen de ejemplos de álgebras mostrando su posición relativa en el diagrama.

Capítulo 1

Preliminares.

1.1. Definiciones Básicas

Definición 1.1. *Un* ***álgebra topológica*** *es un espacio vectorial topológico sobre* $\mathbb{K}$ *(donde* $\mathbb{K}$ *puede ser* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*) dotado de una multiplicación asociativa conjuntamente continua.*

Sea A un álgebra topológica sobre $\mathbb{C}$. Denotamos con $\Phi(A)$ a la familia de todas las vecindades balanceadas y convexas del origen en A. Una vecindad U es **balanceada**, si $0 \in int(U)$ y $\lambda U \subset U$ para cada complejo λ con $|\lambda| \leq 1$ y es **convexa** si $\alpha U + (1-\alpha)U \subset U$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

La **continuidad conjunta** de la multiplicación en el origen significa que para cada $U_\alpha \in \Phi(A)$ existe una $U_\beta \in \Phi(A)$ tal que

$$U_\beta U_\beta = (U_\beta)^2 \subset U_\alpha \tag{1.1}$$

De aquí obtenemos la continuidad conjunta en $A \times A$. Para verificarlo, sean $x_0, y_0 \in A$, y V_α un elemento arbitrario de $\Phi(A)$. Debemos encontrar una vecindad $V_\beta \in \Phi(A)$ tal que siempre que $x \in x_0 + V_\beta,\ y \in y_0 + V_\beta$, entonces $xy \in x_0 y_0 + V_\alpha$, lo cual es equivalente a

$$(x_0 + V_\beta)(y_0 + V_\beta) \subset x_0 y_0 + V_\alpha.$$

Está última relación se satisface si

$$x_0 V_\beta + V_\beta y_0 + (V_\beta)^2 \subset V_\alpha.$$

Primero encontramos una vecindad U_α en $\Phi(A)$ tal que $3U_\alpha \subset V_\alpha$. Por la relación (1.1) podemos encontrar U_β tal que $(U_\beta)^2 \subset U_\alpha$. Por la continuidad de la multiplicación por escalares podemos encontrar una $\lambda,\ 0 < \lambda \leq 1$, tal que $\lambda x_0,\ \lambda y_0 \in U_\beta$, y escoger V_β tal que $\lambda^{-1} V_\beta \subset U_\beta$. Entonces tenemos

$$x_0 V_\beta + V_\beta y_0 + (V_\beta)^2 \subset \lambda x_0 \lambda^{-1} V_\beta + \lambda^{-1} V_\beta \lambda y_0 + \lambda^2 (U_\beta)^2 \subset 3(U_\beta)^2 \subset 3U_\alpha \subset V_\alpha$$

que es lo que deseamos.

Si A es un álgebra sin unidad, podemos añadir la unidad a A definiendo el álgebra $A_1 = A \oplus \mathbb{K}e$, (e es el vector unitario en el álgebra $\mathbb{K}e \cong \mathbb{K}$), con la topología producto y la multiplicación dada por :

$$(x + \lambda e)(y + \mu e) = xy + \lambda y + \mu x + \lambda \mu e,$$

donde $x, y, \in A,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}$. A_1 así definida es un álgebra topológica también.

En efecto:

1. Es fácil verificar que A_1 es un álgebra, asociativa y distributiva.

2. A_1 tiene identidad, la cual esta dada por $e^{'} = 0 + 1e$, pues

   $$(x + \lambda e)(e^{'}) = (x + \lambda e)(0 + 1e) = x \cdot 0 + 1 \cdot x + \lambda \cdot 0 + (\lambda \cdot 1)e = 0 + x + \lambda e = x + \lambda e$$

análogamente $(e^{'})(x+\lambda e) = x+\lambda e$

3. A_1 es un álgebra topológica; sea $\Phi(A_1)$ un sistema de vecindades del 0 en A_1, sea $U \in \Phi(A_1)$ donde $U = V \times W$ tal que $V \in \Phi(A),\ W \in \Phi(\mathbb{K}e)$.

   $\exists\, T_0 \in \Phi(A)$ *tal que* $T_0^2 \subseteq V$ *y* $\exists\, R_0 \in \Phi(\mathbb{K}e)$ *tal que* $R_0^2 \subseteq W$

   como la multiplicación por escalar es continua $\exists\ T_1 \in \Phi(A)$ y $R_1 \in \Phi(\mathbb{K}e)$ tal que $T_1 \cdot R_1 \subseteq V$.

   Sea $T_2 = T_0 \cap T_1$ y $R_2 = R_0 \cap R_1$ por lo tanto $T_2^2 \subseteq V,\ \ R_2^2 \subseteq W,\ \ T_2 \cdot R_2 \subset V$.

   Sea $z = T_2 \times R_2$ entonces,

$$z^2 \subseteq (T_2 \times R_2)(T_2 \times R_2) \subseteq (T_2^2 + T_2R_2 + T_2R_2) \times R_2^2 \subseteq (V+V+V) \times W \subseteq 3V \times W.$$

   Si $V' = (1/3)V$, repetimos el argumento con $U' = V' \times W'$,

   $z^2 \subseteq 3 \cdot (1/3)V \times W \subseteq V \times W = U$ entonces el producto es conjuntamente continuo.

4. A es un ideal cerrado de A_1.

   - A es un ideal de A_1.

     Si $(x+\lambda e) \in A_1$ y $y \in A$,

$$(x+\lambda e)(y) = (x+\lambda e)(y+0e) = xy + 0x + \lambda y + (\lambda 0)e = xy + \lambda y \in A$$

     análogamente $(y)(x+\lambda e) \in A$.

   - A es cerrado en A_1.

     Si $(x_n + \lambda_n e) \to (x+\lambda e)$ es un sucesión de elementos de A_1 convergente en A_1, entonces $x_n \to x,\ \ \lambda_n \to \lambda$, porque la topología en A_1 es la topología producto.

     Por lo tanto, si $\lambda_n = 0,\ \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\lambda = 0$, es decir, $x_n \in A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \in A$.

Clasificamos a las álgebras topológicas de la misma manera en que lo hacemos con los espacios topológicos lineales, es decir, si K es una clase de espacios lineales topológicos, entonces definimos una K-álgebra como un álgebra topológica que pertenece a la clase K como espacio lineal topológico. A continuación mencionaremos algunas clases de K-álgebras:

- **LC**- la clase de las álgebras y espacios localmente convexos.
- **F**- la clase de las álgebras y espacios lineales topológicos completos metrizables, pero no necesariamente localmente convexos.
- **LB**- la clase de todos los espacios localmente acotados.
- B_0- la clase de todos los espacios completos metrizables localmente m-convexos.
- **B**- la clase de todos los espacios de Banach.

Tenemos que $B = LC \cap LB \cap F$.

1.2. Álgebras de Banach.

Trataremos con algunas de las álgebras anteriormente mencionadas. Empezaremos con las álgebras de Banach que son el punto de inspiración para estudiar álgebras no normadas. Para ello daremos algunas definiciones.

Definición 1.2. *Un álgebra topológica A es un **álgebra topológica completa** si como espacio vectorial topológico es completo.*

Definición 1.3. *Un espacio vectorial normado $(A, \|\cdot\|)$ es un **álgebra normada** si A es un álgebra y $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, $(x, y \in A)$.*

Claramente un álgebra normada es un álgebra topológica.

Definición 1.4. *Si A es un álgebra normada y completa, entonces decimos que A es un **álgebra de Banach**.*

Observacion 1.5. *Algunos autores definen un álgebra de Banach como un álgebra topológica que vista como espacio vectorial topológico es un espacio de Banach. Con esta definición probaremos que en toda álgebra de Banach existe una norma equivalente a la norma original de A que satisface $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, $(x, y \in A)$.*

Si A es un álgebra de Banach con la norma $\|x\|$, tenemos que $\{x : \|x\| \leq r\} \in \Phi(A)$ y cada elemento de $\Phi(A)$ contiene una vecindad de la forma $\{x \in A : \|x\| \leq r\}$. Entonces existen vecindades $U_\alpha, U_\beta \in \Phi(A)$ tal que $U_\beta^2 \subset U_\alpha$, es decir, $\|xy\| \leq c\|x\|\|y\|$ para toda $x, y, \in A$ (asumimos que $U_\alpha = \{x : \|x\| \leq 1\}$, entonces existe U_β con $U_\beta^2 \subset U_\alpha$. Pero existe un $r > 0$ con $\{x : \|x\| \leq r\} \subset U_\beta$ y por lo tanto $\{x : \|x\| \leq r\}^2 = \{x : \|x\| \leq 1\}$. Entonces para cada $x, y \in A$, $\ x, y, \neq 0$ tenemos que $\|\frac{rx}{\|x\|}\frac{ry}{\|y\|}\| \leq 1$, o $\|xy\| \leq \frac{1}{r^2}\|x\|\|y\|$).

Veremos que al reemplazar la norma de A por una equivalente, podemos suponer que $c = 1$, es decir, $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ y $\|e\| = 1$ si A tiene unidad. Se puede hacer como sigue.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que A tiene una unidad, en otro caso consideraremos el álgebra A_1 en lugar de A. A cada $x \in A$ le corresponde un operador $T_x : y \longrightarrow T_x y = xy$. Dotamos a A de una nueva norma dada por: $|||x||| = \|T_x\|$, entonces se satisfacen las condiciones anteriores. Necesitamos mostrar que las normas $\|x\|$ y $|||x|||$ son equivalentes. Observemos que

$$|||x||| = \sup_y \frac{\|T_x y\|}{\|y\|} = \sup_y \frac{\|xy\|}{\|y\|} \leq \sup_y \frac{c\|x\|\|y\|}{\|y\|} \leq c\|x\|,$$

Habremos terminado si probamos que A es completa con la norma $|||\cdot|||$. Para este fin utilizamos el siguiente resultado de espacios de Banach: Si X es un espacio de Banach (completo) con respecto a las siguientes dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ y si existe $c > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq c\|x\|_2$ para toda $x \in X$, entonces ambas normas $\|\cdot\|_1$, y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes, es decir, existe otra constante $c_2 > 0$ tal que $c_2\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c\|x\|_1$. Esto se sigue del teorema del mapeo inverso de Banach.

Supongamos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en la norma $|||\cdot|||$, es decir, T_{x_n} es una sucesión de Cauchy de operadores en L(A), donde L(A) es el álgebra de todos los endomorfismos continuos de A y por lo tanto converge a algún operador $T \in L(A)$. Para cualquier $y, z \in A$ tenemos que $T_{x_n}(yz) = T_{x_n}(y)z$ y lo mismo vale para el operador límite T, por lo tanto, $T(y)z = T(yz)$. Si $y = e$ obtenemos que $T(z) = T(e)z = T_{T(e)}(z)$, es decir, T es de la forma T_{x_0} para $x_0 = T(e)$ y por lo tanto, $x_n \stackrel{|||\cdot|||}{\to} x_0$. Entonces A es completa en $|||\cdot|||$ que es lo que queríamos probar.

De ahora en adelante supondremos que la norma de un álgebra de Banach satisface que $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ y $\|e\| = 1$ si A tiene elemento unitario e.

Observacion 1.6. *En el razonamiento anterior el hecho de que la multiplicación fuera separadamente continua fue esencial y esta continuidad implica que la multiplicación es conjuntamente continua. Esto es cierto para F-álgebras, pero es falso en general. Por ejemplo existen espacios normados no completos en donde es posible definir la multiplicación separadamente* *continua la cual no es conjuntamente continua. Por ejemplo ℓ_1 con la norma ℓ_2.*

Definición 1.7. *Sean A un álgebra de Banach compleja y ϕ una forma lineal sobre A no idénticamente cero. Si $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$ para todo $x \in A$ e $y \in A$, entonces ϕ es un* ***homomorfismo complejo*** *sobre A.*

(La exclusión del caso $\phi \equiv 0$ es, desde luego, solamente una cuestión de conveniencia).

Proposición 1.8. *Si ϕ es un homomorfismo complejo sobre un álgebra compleja A con unidad e, entonces $\phi(e) = 1$, y $\phi(x) \neq 0$ para cada $x \in A$ invertible.*

Demostración. Para algún $y \in A$, $\phi(y) \neq 0$. Como $\phi(y) = \phi(ye) = \phi(y)\phi(e)$, se sigue que $\phi(e) = 1$. Si x es invertible, entonces $\phi(x)\phi(x^{-1}) = \phi(xx^{-1}) = \phi(e) = 1$, luego $\phi(x) \neq 0$.

Las partes (a) y (c) del teorema siguiente son quizás los hechos más ampliamente utilizados en la teoría de las álgebras de Banach; en particular, (c) implica que todos los homomorfismo complejos de álgebras de Banach son continuos.

Teorema 1.9. *Sean A un álgebra de Banach, $x \in A$, $\|x\| < 1$. Entonces*

(a) *$e - x$ es invertible,*

(b) $\|(e-x)^{-1} - e - x\| \leq \frac{\|x\|^2}{1-\|x\|}$,

(c) *$|\phi(x)| < 1$ para todo homomorfismo complejo ϕ sobre A.*

Demostración. Como $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ y $\|x\| < 1$, sea $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ donde

$$s_n = e + x + x^2 + \cdots + x^n \tag{1.2}$$

afirmamos que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en A, pues dado $\varepsilon > 0$ y sean $n \geq m$ con $n, m \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned}
\|s_n - s_m\| &= \|e + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n - (e + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n)\| \\
&= \|x^{m+1} + x^{m+2} + \cdots + x^n\| \\
&\leq \|x^{m+1}\| + \|x^{m+2}\| + \cdots + \|x^n\| \\
&\leq \|x\|^{m+1} + \|x\|^{m+2} + \cdots + \|x\|^n
\end{aligned}$$

si $\|x\| = \alpha$ y $0 < \alpha < 1$, sean $t_n = 1 + \alpha + \cdots + \alpha^n$ entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}$, por lo tanto dado $\varepsilon > 0$; $N \in \mathbb{N}$ tenemos que $\|s_n - s_m\| \to s$ con $s \in A$, lo que implica que $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy.

Puesto que $x^n \to 0$ y

$$\begin{aligned}
s_n(e - x) &= (e + x + x^2 + \cdots + x^n)(e - x) \\
&= e + x + x^2 + \cdots + x^n - (x + x^2 + \cdots + x^n) \\
&= e - x^{n+1} \\
&= (e - x)s_n
\end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}
s_n(e - x) = &\ e + x^{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} s(e - x) = e \\
(e - x)s_n = &\ e + x^{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (e - x)s = e
\end{aligned}$$

esto se tiene por la continuidad de la multiplicación. Por lo tanto, s es el inverso multiplicativo de $(e - x)$. Ahora, (1.2) prueba que

$$\|s_n - e - x\| = \|x^2 + x^3 + \cdots\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \|x\|^n = \frac{\|x\|^2}{1 - \|x\|}$$

Finalmente, sea $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$. Por (a), $e - \lambda^{-1}x$ es invertible. Por la Proposición (1.8), $1 - \lambda^{-1}\phi(x) = \phi(e - \lambda^{-1}x) \neq 0$, por lo tanto, $\phi(x) \neq \lambda$. Esto completa la demostración.

Definición 1.10. *Sea A un álgebra de Banach; sea* ***G=G(A) el conjunto de todos los elementos invertibles de A****. Si $x \in G$ e $y \in G$, entonces $y^{-1}x$ es el inverso de $x^{-1}y$; por lo tanto, $x^{-1}y \in G$ y G es un grupo.*

Sea A un álgebra topológica, decimos que A es una ***Q-álgebra*** *si G(A) es un conjunto abierto en A.*

Si $x \in A$, el ***espectro*** *$\sigma(x)$ de x es el conjunto de todos los números complejos λ tales que $\lambda e - x$ no es invertible. El complemento de $\sigma(x)$ es el conjunto* ***resolvente*** *de x; está formado por todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los que $(\lambda e - x)^{-1}$ existe.*

El ***radio espectral*** *de x es el número $\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$. Es el radio del menor disco circular en $\mathbb{C}$ con centro en cero, que contiene $\sigma(x)$. Naturalmente, $\rho(x)$ no tiene sentido cuando $\sigma(x)$ es vacío. Pero esto no ocurre nunca en un álgebra de Banach como veremos más adelante.*

Teorema 1.11. *Sean A un álgebra de Banach, $x \in G(A)$, $h \in A$, $\|h\| < \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$. Entonces $x + h \in G(A)$, y $\|(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1}\| \leq 2\|x^{-1}\|^3\|h\|^2$.*

Demostración. Como $x+h = x(e+x^{-1}h)$ y $\|x^{-1}h\| < \frac{1}{2}$, el Teorema (1.9) tenemos que $e - x^{-1}h$ es invertible y sabemos por hipótesis que x es invertible lo que implica $x(e - x^{-1}h) = x - h \in G(A)$

Ahora veremos que se cumple la desigualdad, primero observamos que $(x+h)^{-1} - x^{-1} + x^{-1}hx^{-1} = [(e + x^{-1}h)^{-1} - e + x^{-1}h]x^{-1}$ entonces por el Teorema (1.9) tenemos que

$$\begin{aligned}
\|[(e+x^{-1}h)^{-1}-e+x^{-1}h]x^{-1}\| &\leq \|(e+x^{-1}h)^{-1}-e+x^{-1}h\|\cdot\|x^{-1}\| \\
&\leq \frac{\|x^{-1}h\|^2}{1-\|x^{-1}h\|}\cdot\|x^{-1}\| \\
&\leq \frac{\|x^{-1}\|^2\|h\|^2}{1-\frac{1}{2}}\cdot\|x^{-1}\| \\
&= 2\|x^{-1}h\|^2\|x^{-1}\|
\end{aligned}$$

Lema 1.12. *Sea A un álgebra de Banach con unidad e. Entonces G(A) es un subconjunto abierto de A y G(A) es un grupo topológico, es decir, la función $x \longrightarrow x^{-1}$ es continua.*

Demostración. Primero mostramos que $U = \{x \in A : \|x-e\| < 1\} \subset G(A)$. De hecho sea $\|x-e\| < 1$ y pongamos $y = x-e$. Entonces la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y^n$ es absolutamente convergente en A. Sea $z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} y^n$. Tenemos $zx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} y^n(y-e) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} y^n = e$, y por lo tanto, $x \in G(A)$. Ahora sea $x \in G(A)$. Entonces la función $y \longrightarrow xy$ es un homeomorfismo de A en si misma, y por lo tanto la función manda conjuntos abiertos en conjuntos abiertos. Como U es abierto, entonces xU es abierto. Ya que $e \in U$, $x \in xU$ y xU consiste de elementos invertibles. Entonces cualquier x en G(A) tiene una vecindad que consiste de elementos invertibles (por ejemplo, xU) y entonces G(A) es abierto.

Falta ver que la función $x \longrightarrow x^{-1}$ es continua en G(A). Primero mostramos que si $x_n \longrightarrow e$, $x_n \in G(A)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $x_n^{-1} \longrightarrow e$, es decir, la inversión es continua en x=e. Para un $N \in \mathbb{N}$ grande, dijamos $n > N$, tenemos $\|x_n - e\| < \frac{1}{2}$, es decir, $x_n \in U$ y entonces $x_n^{-1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(x_n-e)^k$, entonces $\|x_n^{-1}\| \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty}\|x_n-e\|^k \leq \sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 2$. Esto es, $\|x_n^{-1}-e\| = \|x_n^{-1}(e-x_n)\| \leq \|x_n^{-1}\|\|e-x_n\| \leq 2\|e-x_n\| \to 0$.

Lo cual nos da $\lim\limits_{n\to\infty} x_n^{-1} = e$. Ahora tomemos un $x_0 \in G(A)$ arbitrario y supongamos que $x_n \to x_0$, $\quad x_n \in G(A)$. Tenemos que mostrar que $x_n^{-1} \to x_0^{-1}$. Pero $x_n \to x_0$ implica que $x_n x_0^{-1} \to e$, y por lo anterior $x_0 x_n^{-1} \to e$ o $\ x_n^{-1} \to x_0^{-1}$ que es lo que deseamos.

Observacion 1.13. *Toda álgebra de Banach es una Q-álgebra.*

Ejemplo 1. *El álgebra $R(D)$ de todas las funciones racionales complejas definidas en el disco unitario cerrado D de $\mathbb{C}$ con las operaciones puntuales, dotada con la norma*

$$\|q\| := \sup_{z \in \mathbb{C}} |q(z)|.$$

Afirmamos que $q \in R(D)$ es invertible si y sólo si q no tiene ceros en D. Pues si $q \in R(D)$ entonces $q(x) = \frac{r(x)}{s(x)}$ con $r(x),\ s(x)$ polinomios con coeficientes en $\mathbb{C}$ y $s(x) \neq 0,\ \forall x \in D$, por lo tanto $q(x)$ es invertible si y sólo si $\frac{s(x)}{r(x)}$ esta definida en D, es decir, $r(x) \neq 0,\ \forall x \in D$.

Ahora demostraremos que $G(R(D))$ es abierto en $R(D)$, por el principio del módulo máximo. Sea $q_0 \in G(R(D))$ y sea $\|\frac{1}{q_0}\| = M$, entonces $|\frac{1}{q_0(x)}| \leq M,\ \forall x \in D$. Sea $q \in R(D)$ tal que $\|q - q_0\| < \frac{1}{2M}$, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} ||q(x)| - |q_0(x)|| \leq |q(x) - q_0(x)| &< \frac{1}{2M} \\ -\frac{1}{2M} \leq |q(x)| - |q_0(x)| &\leq \frac{1}{2M} \\ -\frac{1}{2M} + |q_0(x)| &\leq |q(x)| \end{aligned}$$

Pero $|q_0(x)| > \frac{1}{2M}$ y por lo tanto $|q(x)| > 0,\ \forall x \in D$ entonces $q \in G(R(D))$.

Entonce la bola de radio $1/2M$ con centro en q_0 esta contenida en $G(R(D))$, por lo tanto, $G(R(D))$ es abierto.

Por otro lado, $R(D)$ claramente no es un álgebra de Banach ya que existen funciones en D las cuales no son racionales (por ejemplo $\sin(z)$).

Teorema 1.14. *Sea A un álgebra de Banach entonces si $x \in A$*

a) *El espectro $\sigma(x)$ es no vacío y compacto.*

b) *El radio espectral $\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{n\geq 1} \|x^n\|^{-1}$. A la equivalencia anterior se le conoce como **la fórmula espectral**.*

Demostración.

a) Si $|\lambda| > \|x\|$ entonces $e - \lambda^{-1}x \in G(A)$, por lo tanto $\lambda e - x \in G(A)$ y $\lambda \notin \sigma(x)$, entonces $\rho(x) \leq \|x\|$, en particular $\sigma(x)$ es un conjunto acotado.

Para probar que $\sigma(x)$ es cerrado, definamos $g : \mathbb{C} \longrightarrow A$ por $g(\lambda) = \lambda e - x$. Entonces g es continua por la continuidad de las operaciones en A, y el complemento Ω de $\sigma(x)$ es $g^{-1}(G(A))$.

En efecto, $\lambda \in \Omega$, si y sólo si, $\lambda e - x \in G(A)$, por definición $g(\lambda) \in G(A)$, entonces $\lambda \in g^{-1}(G(A))$, por lo tanto $\Omega = (\sigma(x))^c$ es abierto. Esto implica que $\sigma(x)$ es cerrado, con lo que concluimos que $\sigma(x)$ es compacto.

b) Sea $f : \Omega \longrightarrow G(A),\ f(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1},\ \ \lambda \in \Omega$. En el Teorema (1.11) reemplazamos a " x " por $(\lambda e - x)$ y a " h " por $(\mu - \lambda)e$, entonces tenemos que $|\mu - \lambda| < \frac{1}{2}\|(\lambda e - x)^{-1}\|^{-1}$.

Si $\lambda \in \Omega$ y μ está suficientemente cerca de λ, el resultado de esta sustitución es

$$\|(\lambda e - x + (\mu-\lambda)e)^{-1} - (\lambda e - x)^{-1} + (\lambda e - x)^{-1}(\mu - \lambda)e(\lambda e - x)^{-1}\| \leq 2\|(\lambda e - x)^{-1}\|^3|\mu - \lambda|^2$$

$$\textit{es decir,}\ \ \|(\mu e - x)^{-1} - (\lambda e - x)^{-1} + (\mu - \lambda)(\lambda e - x)^{-2}\| \leq 2\|(\lambda e - x)^{-1}\|^3|\mu - \lambda|^2$$

$$\textit{o sea,}\ \ \|f(\mu) - f(\lambda) + (\mu - \lambda)(f(\lambda))^2\| \leq 2\|f(\lambda)\|^3|\mu - \lambda|^2$$

Así que $\lim_{\mu\to\lambda} \frac{f(\mu) - f(\lambda)}{\mu - \lambda} = -f(\lambda)^2,\ \ \lambda \in \Omega$, es decir, f es un función fuertemente holomorfa en Ω con valores en A.

Si $|\lambda| > \|x\|$, el argumento utilizado en el Teorema (1.9) prueba que $f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1}x^n = \lambda^{-1}e + \lambda^{-2}x + ...$ Esta serie converge uniformemente sobre cada círculo Γ_r, con centro en 0 y radio $r > \|x\|$. Por [37, p.77, Teorema 3.29], la integración término a término es entonces lícita. Por consiguiente

$$x^n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \lambda^n f(\lambda)d\lambda, \quad (r > \|x\|, n = 0, 1, 2, ...) \tag{1.3}$$

Si $\sigma(x)$ fuese vacío, $\Omega = \mathbb{C}$ y por [37, p.78, Teorema 3.31], implicaría que todas las integrales de (1.3) son 0. Pero para n=0, el primer miembro de (1.3) es $e = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \lambda^0 f(\lambda)d\lambda \neq 0$. Esta contradicción prueba que $\sigma(x)$ es no vacío.

Como Ω contiene todos los λ tales que $|\lambda| > \rho(x)$, una aplicación de (3) del Teorema [37, p.78, Teorema 3.31] prueba que la condición $r > \|x\|$ puede sustituirse en (1.3) por $r > \rho(x)$. Si $M(r) = \max_{\theta} \|f(re^{i\theta})\|$ $(r > \rho(x))$ la continuidad de f implica que $M(r) < \infty$. Como (1.3) da ahora

$$\begin{aligned}
\|x^n\| &= \|\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} \lambda^n f(\lambda)d\lambda\| \\
&\leq \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} |\lambda|^n \|f(\lambda)\| d\lambda \\
&\leq \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_r} |\lambda|^n \cdot M(r)d\lambda \\
&\leq \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i r M(r)|r^n| \\
&= r^{n+1}M(r),
\end{aligned}$$

se obtiene $\lim_{n\to\infty} \sup \|x^n\|^{1/n} \leq r, \quad (r > \rho(x))$

$$\lim_{n\to\infty} \sup \|x^n\|^{1/n} \leq \rho(x) \tag{1.4}$$

Por otro lado, si $\lambda \in \sigma(x)$, la factorización $\lambda^n e - x^n = (\lambda e - x)(\lambda^{n-1}e + \cdots + \lambda^{n-1})$ muestra que $\lambda^n e - x^n$ no es invertible. Si lo fuera, $\lambda e - x$ sería invertible, por lo tanto $\lambda^n \in \sigma(x^n)$, por que $\rho(x) \leq \|x\| \quad \Rightarrow \quad |\lambda^n| \leq \rho(x^n) \leq \|x^n\| \;\; \forall n = 1, 2, ...$ y entonces si $|\lambda| \leq \|x^n\|^{1/n}$, $\rho(x) \leq \inf\limits_{n\geq 1} \|x^n\|^{1/n}$ con (1.4) tenemos $\limsup \|x^n\|^{1/n} \leq \rho(x) \leq \inf\limits_{n\geq 1} \|x^n\|^{1/n}$ y como $\inf\limits_{n\geq 1} \|x^n\|^{1/n} \leq \limsup \|x^n\|^{1/n}$ tenemos que $\sigma(x) \neq \phi$.

El hecho de que $\sigma(x)$ es no vacío da una fácil caracterización de aquellas álgebras de Banach que son álgebras con división.

Teorema 1.15. ***(Gelfand- Mazur).*** *Si A es un álgebra de Banach en la cual cada elemento distinto de cero tiene inverso multiplicativo, entonces A es (isométricamente) isomorfo a $\mathbb{C}$.*

Demostración. Sea $x \in A$ y $\lambda_1 \neq \lambda_2$ donde $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ entonces a lo más uno de los dos elementos $\lambda_1 e - x, \lambda_2 e - x$ es cero (si no lo es entonces $\lambda_1 = \lambda_2$); entonces al menos uno de ellos es invertible.

Como $\sigma(x) \neq \phi$ entonces $\sigma(x)$ consiste exactamente de un punto $\lambda(x)$ para cada $x \in A$. Como $\lambda(x)e - x$ no es invertible, esto implica $\lambda(x)e - x = 0$, si y sólo si, $x = \lambda(x)e$. La función que manda x en $\lambda(x)$ es un isomorfismo de A sobre $\mathbb{C}$. En efecto, es un monomorfismo pues, $\lambda(x) = \lambda(y)$ implica que $x = \lambda(x)e = \lambda(y)e = y$. Es un epimorfismo pues, si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces $\exists \lambda e \in A$ tal que $\lambda(\lambda e) = \lambda$. Además, es una isometría, $|\lambda(x)| = \|\lambda(x)e\| = \|x\|$ para cada $x \in A$.

Observacion 1.16.

a) *Notemos que el inverso de un elemento $x \in A$, el espectro $\sigma(x)$, $x \in A$, y el radio espectral $\rho(x)$, $x \in A$ son conceptos meramente algebraicos.*

b) *Si el álgebra A es una subálgebra del álgebra de Banach B puede suceder que x^{-1} no exista en A pero que si exista en B. Podemos ver que $\sigma_A(x) \supseteq \sigma_B(x)$ (y pueden ser distintos), sin embargo la fórmula espectral NO depende del álgebra $\rho_A(x) = \rho_B(x)$.*

Definición 1.17. *Un subconjunto J de un álgebra conmutativa compleja A es un* ***ideal*** *si:*

a) *J es un subespacio de A (en el sentido de espacio vectorial), y*

b) *$xy \in J$ si $x \in A$* y *$y \in J$*

Si $J \neq A$, J es un ideal propio. Un ideal J es ***máximo*** *si es un ideal propio de A y tal que si $J \subset M$ con M un ideal de A, entonces $J = M$ o $M = A$.*

Proposición 1.18.

a) *Ningún ideal propio de A contiene a ningún elemento invertible de A.*

b) *La cerradura de un ideal propio en un álgebra de Banach conmutativa A con unidad es también un ideal en A.*

Demostración.

a) Sea J un ideal propio de A y $x \in J$, si $x \in G(A)$, entonces $\exists y \in A$ tal que $yx = 1$ lo que implica, $1 \in J$, por lo tanto, $z \cdot 1 = z \in J \quad \forall z \in A$, es decir, $J = A$ lo cual es una contradicción, entonces $\exists x \notin G(A)$ tal que $x \in J$.

b) Sea J un ideal propio de A, y sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset J$ tal que $x_n \longrightarrow x$ en A. Sea $y \in A$ como la multiplicación es continua entonces $yx_n \longrightarrow yx$ pero $x_n \in J$, lo que implica $yx \in \overline{J}$, por lo tanto, $\overline{J}$ es tambien un ideal de A.

Teorema 1.19.

a) *Si A es un álgebra de Banach conmutativa entonces todo ideal propio esta contenido en un ideal máximo de A.*

b) *A es álgebra de Banach conmutativa entonces todo ideal máximo es cerrado.*

Demostración.

a) Sea J un ideal propio de A y sea $\mathbf{P} = \{I \ \ ideales \ \ de \ \ A : J \subseteq I, \ \ I \ \ propio\}$.

Damos un orden parcial a $\mathbf{P}$ por la inclusión. Sea $I_1 \leq I_2 \leq \cdots \leq I_n \leq \cdots$ una cadena en $\mathbf{P}$.

Sea $I = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$. Afirmamos que I es un ideal propio de A. En efecto, como I es la unión de un conjunto totalmente ordenado, I es un ideal de A.

Si $I = A$, entonces $1 \in I$, lo que implica $1 \in I_{n_0}$ para algún n_0, entonces $I_{n_0} = A$ contradicción por que I_{n_0} es un ideal propio de A.

Entonces I es una cota superior de la cadena en $\mathbf{P}$. Como $\mathbf{P} \neq \phi \ \ (J \in \mathbf{P})$, el Lema de Zorn implica, que existen elementos máximos en $\mathbf{P}$.

Si M es un elemento máximo, M es ideal máximo que contiene a J.

b) Sea M un ideal máximo de A. Si $G(A) \cap M = \phi$ entonces $G(A) \cap \overline{M} = \phi$ entonces $\overline{M}$ es un ideal propio de A. Por un lado $M \leq \overline{M}$ pero M es máximo, por lo tanto $M = \overline{M}$.

Sean A,B dos álgebras de Banach conmutativas, $\varphi : A \longrightarrow B$ homomorfismo. Sabemos que $ker\varphi$ es un ideal de A. Entonces $ker\varphi$ es cerrado, si φ es continua.

Recíprocamente, si J es un ideal propio cerrado de A y $\pi : A \longrightarrow A/J$ es la función cociente $\pi(a) = a + J$ entonces A/J es un álgebra de Banach conmutativa con la norma cociente dada por:

$$\|a + J\| = \text{ínf}\{\|a - j\| : j \in J\}$$

Observemos que A/J es un espacio vectorial y que A/J es un álgebra. Afirmamos que la norma cociente $\|a + J\| = \text{ínf}\{\|a - j\| : j \in J\}$ es una norma. En efecto, está bien definida sean

$a + J = a' + J \Rightarrow a' - a \in J$; si$j \in J$, $\ a - j = a - j + a' - a' = a' - (a - a' + j) = a' - j'$

lo que implica que $j' \in J$, entonces

$$\text{ínf}\{\|a - j\| : j \in J\} \geq \text{ínf}\{\|a' - j'\| : j' \in J\}.$$

Análogamente para $\leq$. Por lo tanto $\|a + J\| = \|a' + J\|$. Solo falta ver que se cumplen el resto de las propiedades de ser norma. Primero verificamos que cumple $\|a + J\| \geq 0$ y $\|a + J\| = 0$ si y sólo si $a + J = 0 + J$. En efecto, si $\|a + J\| = 0 \Leftrightarrow \text{ínf}\{\|a - j\| : j \in J\} = 0 \Leftrightarrow \exists \{j_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq J$ tal que $j_n \to a$ pero J es cerrado entonces $a \in J$, por lo tanto, $a + J = 0 + J$ y $\|a + J\| \geq 0$ por definición. Ahora, demostramos que se cumple la desigualdad del triángulo. Sean $a + J, \;\; b + J \in A/J$, entonces

$$\begin{aligned}
\|(a + J) + (b + J)\| &= \text{ínf}\{\|a + b - j\| : j \in J\} \\
&= \text{ínf}\left\{\left\|\left(a - \frac{j}{2}\right) + \left(b - \frac{j}{2}\right)\right\| : j \in J\right\} \\
&\leq \text{ínf}\{\|a - k_1\| : k_1 \in J\} + \text{ínf}\{\|a - k_2\| : k_2 \in J\} \\
&= \|a + J\| + \|b + J\|.
\end{aligned}$$

Veamos que es homogenea. Si $k = 0$, entonces $\|k(a + J)\| = |k| \cdot \|a + J\|$. Por otro lado, si $k \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned}
\|k(a + J)\| = \|ka + J\| &= \text{ínf}\{\|ka + j\| : j \in J\} \\
&= \text{ínf}\left\{\left\|ka - k\left(\frac{j}{k}\right)\right\| : j \in J\right\} \\
&= |k|\,\text{ínf}\left\{\left\|a - \frac{j}{k}\right\| : j \in J\right\} \\
&= |k|\,\text{ínf}\{\|a - j'\| : j' \in J\} \\
&= |k| \cdot \|a + J\|
\end{aligned}$$

Por último probamos que es submultiplicativa. Si $x_1, x_2 \in A \;\; y \;\; \delta > 0$ entonces

$\|x_1 + y_1\| \leq \|x_1 + J\| + \delta$ y $\|x_2 + y_2\| \leq \|x_2 + J\| + \delta$ para algunos $y_1, y_2 \in J$. Por lo cual tenemos que $(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 \in x_1x_2 + J$, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\|x_1x_2 + J\| &\leq \|(x_1 + y_1)(x_2 + y_2)\| \\
&\leq \|x_1 + y_1\| \cdot \|x_2 + y_2\| \\
&\leq (\|x_1 + J\| + \delta)(\|x_2 + J\| + \delta) \\
&= \|x_1 + J\| \cdot \|x_2 + J\| + 2\delta.
\end{aligned}$$

Esto nos da $\|x_1x_2 + J\| \leq \|x_1 + J\| \cdot \|x_2 + J\|$.

Teorema 1.20. *Sea A un álgebra de Banach. Entonces cada ideal máximo bilateral de A es cerrado.*

Demostración. Sea M un ideal máximo bilateral del álgebra A. Entonces $M \cap G(A) = \phi$ y puesto que $G(A)$ es abierto, $\overline{M} \cap G(A) = \phi$. Así, $\overline{M}$ es un ideal propio de A y por ser M máximo se tiene que $M = \overline{M}$.

Teorema 1.21. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad y sea Δ el conjunto de todos los homomorfismos complejos de A.*

a) *Todo ideal máximo de A es el nucleo de un $h \in \Delta$*

b) *Si $h \in \Delta$, entonces ker(h) es un ideal máximo.*

c) *Si $x \in A$, $x \in G(A)$, si y sólo si $h(x) \neq 0$ $\forall h \in \Delta$*

d) *Si $x \in A$, $x \in G(A)$, si y sólo si $x \notin J$ $\forall J$ ideal propio de A.*

e) *$\lambda \in \sigma(x)$, si y sólo si $h(x) = \lambda$ para algún $h \in \Delta$*

Demostración.

a) Sea M un ideal máximo de A entonces M es cerrado por el Teorema (1.19) y A/M es, por lo tanto, un álgebra de Banach conmutativa. Elijamos $x \in A$, $x \notin M$; Sea

$J = \{ax + y : a \in A, \ \ y \in M\}$, entonces J es un ideal de A tal que $M \subset J$ pues $x \in J$, por lo tanto, $J = A$ y $ax + y = e$ para algún $a \in A$ y algún $y \in M$. Si $\pi : A \to A/M$ es la aplicación cociente, se deduce que $\pi(a)\pi(x) = \pi(e)$. Cada elemento no nulo $\pi(x)$ del álgebra de Banach A/M es pues invertible en A/M. Por el Teorema de Gelfand-Mazur, existe un isomorfismo j de A/M sobre $\mathbb{C}$. Pongamos $h = j \circ \pi$, entonces $h \in \Delta$, y M es el nucleo de h.

b) Sea $h \in \Delta$ y M=ker(h), por lo tanto, $M = h^{-1}\{0\}$, entonces M es un ideal cerrado de codimensión 1 lo que implica que M es máximo.

c) $\Rightarrow$) Si $x \in G(A)$, entonces $\exists x^{-1} \in A$, tal que $e = xx^{-1}$. Si $h \in \Delta$, entonces $1 = h(e) = h(xx^{-1}) = h(x)h(x^{-1}) = h(x)h^{-1}(x)$, por lo tanto, $h(x) \neq 0$

$\Leftarrow$) Sea $x \in A$ tal que $h(x) \neq 0 \ \ \forall h \in \Delta$ consideremos el ideal $J = Ax$. Si J es propio, entonces existe un ideal M máximo tal que $J \leq M$, pero M=ker(h) para algún $h \in \Delta$, por lo cual $h(j) = 0 \ \ \forall j \in J$ en particular, $h(x) = 0$ lo que es una contradicción, por lo tanto, J no es propio, entonces $J = A$, es decir, $1 \in J$ lo que implica $1 = ax$ para algún $a \in A$, entonces $a = x^{-1}$, por lo tanto, $x \in G(A)$.

d) $\Rightarrow$) Sea J un ideal propio de A, entonces si $x \in G(A)$, es decir, $\exists x^{-1}$ en A, si $x \in J \lneq A$ implica que $1 = xx^{-1} \in J$, entonces $b \cdot 1 \in J, \ \ b \in A$, lo que implica que $J = A$ lo cual es una contradicción.

$\Leftarrow$) Ha sido demostrado en (c).

e) $\Rightarrow$) Sea $x \in \lambda, \ \ \lambda \in \sigma(x)$ entonces $x - \lambda e \notin G(A)$ por (c), $\exists h \in \Delta$ tal que $h(x - \lambda e) = 0$ pero $0 = h(x - \lambda e) = h(x) - \lambda h(e) = h(x) - \lambda$, por lo tanto, $h(x) = \lambda$.

$\Leftarrow$) Si $h \in \Delta$ tal que $h(x) = \lambda$ entonces $h(x - \lambda e) = 0$, lo que implica $x - \lambda e \notin G(A)$, por lo tanto,$\lambda \in \sigma(x)$.

Definición 1.22. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa,* ***la transformada de Gelfand*** *de A es la asignación que para $x \in A$, esta definida como $\widehat{x} : \Delta \longrightarrow \mathbb{C}$ donde $\widehat{x}(h) = h(x)$*

Por lo tanto, $\widehat{\ }: A \longrightarrow C(\Delta)$ donde $C(\Delta)$ es el álgebra de las funciones complejas continuas definidas en Δ.

Sea $\widehat{A} = \{\widehat{x} : x \in A\}$. La topología de Gelfand de Δ es la topología débil inducida en Δ por $\widehat{A}$, es decir, la topología más débil que hace que toda $\widehat{x}$ sea continua. Se denota por (Δ, τ_G) a el espacio de ideales máximos de A.

Teorema 1.23. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa y Δ su espacio de ideales máximos. Entonces (Δ, τ_G) es Hausdorff y compacto.*

Demostración. Sea A* el espacio dual de A (como espacio de Banach). Sea K la bola unitaria cerrada en la topología de la norma de A*, es decir, $\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\}$.

Por el Teorema de Banach-Alaoglu, entonces K es compacto en la topología débil *. Por la parte (c) del Teorema (1.9) implica $\Delta \subseteq K$ y K es compacto. La topología de Gelfand de Δ es evidentemente la restricción a Δ de la topología débil* de A*, por tanto, es suficiente probar que Δ es un subconjunto débilmente*- cerrado de A*.

Sea Λ_0 un elemento de acomulación débil* de Δ. Tenemos que probar que $\Lambda_0(xy) = \Lambda_0 x \Lambda_o y \ \ (x \in A, y \in A)$ y $\Lambda_0 e = 1$.

Sea $\varepsilon > 0$, $\ x, y \in A$ y
$W = \{\Lambda \in A* : |\Lambda(z_i) - \Lambda_0(z_i)| < \varepsilon, \ 1 \leq i \leq 4; \ z_1 = e, \ z_2 = x \ z_3 = y \ z_4 = xy\}$. Entonces W es un entorno débil* de Λ_0 que contiene por lo tanto un $h \in \Delta$. Para este h, $|1 - \Lambda_0(e)| = |h(e) - \Lambda_0 e| < \varepsilon$, y como es $\forall \varepsilon$, entonces $\Lambda_0(e) = 1$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\Lambda_0(xy) - \Lambda_0(x)\Lambda_0(y) &= \Lambda_0(xy) - \Lambda_0(x)\Lambda_0(y) + h(x)h(y) - h(xy) \\
&= [\Lambda_0(xy) - h(xy)] - [\Lambda_0(x)\Lambda_0(y) - h(x)h(y)] \\
&= [\Lambda_0(x)(y) - h(x)h(y)] - [(\Lambda_0(x) - h(x))\Lambda_0(y) + (\Lambda_0(y) - h(y))h(x)]
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
|\Lambda_0(xy) - \Lambda_0(x)\Lambda_0(y)| &\leq |\Lambda_0(xy) - h(xy)| + |\Lambda_0(y)||\Lambda_0(x) - h(x)| + |h(x)||h(y) - \Lambda_0(y)| \\
&< \varepsilon + |\Lambda_0(x)|\varepsilon + |h(x)|\varepsilon \\
&< \varepsilon'
\end{aligned}$$

tenemos, entonces $\Lambda_0(xy) = \Lambda_0(x) \cdot \Lambda_0(y)$, lo que implica que $\Lambda_0 \in \Delta$.

1.3. Álgebras Normadas

Recordemos la definición de un álgebra normada.

Definición 1.24. *Un espacio vectorial normado $(A, \|\cdot\|)$ es un **álgebra normada** si A es un álgebra y $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, $(x, y \in A)$.*

Definición 1.25. *La **dimensión** de un álgebra A es su dimensión como K-espacio vectorial.*

Teorema 1.26. *Si A es un álgebra normada de dimensión finita, entonces es un álgebra de Banach.*

Demostración. Sea $B = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ una base de A, y $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en A. Escribimos cada término de la sucesión como combinación lineal de la base B

$$z_k = \alpha_{k_1}x_1 + \cdots + \alpha_{k_n}x_n$$

y restando dos términos cualquiera de la sucesión se obtiene

$$z_k - z_s = (\alpha_{k_1} - \alpha_{s_1})x_1 + \cdots + (\alpha_{k_n} - \alpha_{s_n})x_n$$

y ahora por [15, Prop I.38,p 43] existe una constante M tal que

$$|\alpha_{k_1} - \alpha_{s_1}| \leq M\|z_k - z_s\|, \qquad 1 \leq j \leq n$$

Esto prueba que $\{\alpha_{k_j}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{K}$ para $1 \leq j \leq n$. La completitud del campo de los escalares nos dice que cada una de ellas es convergente a un punto $\alpha_{0_j} \in \mathbb{K}$. Llamamos $z_0 = \alpha_{0_1}x_1 + \cdots + \alpha_{0_n}x_n$ se tiene

$$\begin{aligned} \|z_k - z_s\| &= \|(\alpha_{k_1} - \alpha_{s_1})x_1 + \cdots + (\alpha_{k_n} - \alpha_{s_n})x_n\| \\ &\leq |\alpha_{k_1} - \alpha_{s_1})| \cdot \|x_1\| + \cdots + |\alpha_{k_n} - \alpha_{s_n}| \cdot \|x_n\| \end{aligned}$$

de donde se deduce trivialmente que $z_k \to z_0$ en A.

Teorema 1.27. *Sea $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra normada. Si $x \in A$, entonces $\lim\limits_n \|x^n\|^{1/n}$ existe. Además,*

1. $\lim\limits_n \|x^n\|^{1/n} = \inf\limits_n \|x^n\|^n$.

2. $\lim\limits_n \|x^n\|^{1/n} \leq \|x\|$.

Demostración. Sea $a = \inf\limits_n \|x^n\|^n$. Claramente $a < \lim\limits_n \inf \|x^n\|^n$. Supongamos que $\varepsilon > 0$ y elegimos un número positivo m tal que $\|x^m\|^m < a + \varepsilon$. Entonces para cada entero positivo n existen enteros no negativos a_n y b_n, $0 \leq b_n \leq m$, tales que $n = a_n m + b_n$. Además, podemos observar que: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n m + b_n}{n} = 1$ tenemos $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 0$, ya que b_n es acotado, por lo tanto, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 1$. Pero entonces,

$$\|x^n\|^{1/n} = \|x^{a_n m + b_n}\|^{1/n} \leq \|x^m\|^{a_n/n} \|x\|^{b_n/n} \leq (a+\varepsilon)^{a_n m/n} \|x\|^{b_n/n}, \quad (n = 1, 2, 3, ...)$$

de la que se deduce que

$$\lim_n \sup \|x^n\|^{1/n} < \lim_n \sup (a+\varepsilon)^{a_n m/n} \lim_n \sup \|x\|^{b_n/n} = (a+\varepsilon),$$

entonces $\lim\limits_n \sup \|x^n\| 1/n \leq a$, por lo tanto $a = \lim\limits_n \|x^n\|^{1/n}$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, concluimos que $\lim\limits_n \sup \|x^n\|^{1/n} \leq a$, por lo tanto, $\lim\limits_n \|x^n\|^{1/n}$ existe y $\lim\limits_n \|x^n\|^{1/n} = \inf\limits_n \|x^n\|^{1/n}$.

El hecho, que $\lim\limits_n \|x^n\|^{1/n} \leq \|x\|$ es inmediato uno observa que $\|x^n\| \leq \|x\|^n$.

Proposición 1.28. *Sea $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra normada con división. Entonces A es isométricamente isomorfa a $\mathbb{C}$.*

Demostración. Como A es normada entonces la podemos completar, digamos $\widehat{A}$. Para todo $x \in \widehat{A}$, $\sigma_{\widehat{A}}(x) \neq \phi$ y $\sigma_{\widehat{A}} \subset \sigma_A(x)$, entonces en un álgebra normada $\sigma_A(x) \neq \phi$, para toda x en A. Por hipótesis y para todo $x \in A$, $x \neq 0$, x es invertible en A. Esto implica que $0 \notin \sigma_A(x)$, para toda $x \neq 0$. Pero como $\sigma_A(x) \neq \phi$, entonces existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\lambda \in \sigma_A(x)$. Luego, $(x - \lambda e) \notin G(A)$ de donde $(x - \lambda e) = 0$, es decir, $x = \lambda$ y por lo tanto, A is isométricamente isomorfo a $\mathbb{C}$.

1.4. F-Álgebras

Definición 1.29. *Una **F-álgebra (un álgebra de tipo F)** es un álgebra topológica la cual es un F-espacio, es decir, un espacio vectorial topológico metrizable y completo. La topología de un F-espacio X puede ser dada por medio de una F- norma, es decir, una función $x \mapsto \|x\|$ de X en el conjunto de los números reales no negativos tal que*

(i) $\|x\| \geq 0$, $\forall x \in X$ *y* $\|x\| = 0$ *si y sólo si* $x = 0$,

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

(iii) *la función* $(\lambda, x) \mapsto \|\lambda x\|$ *de* $\mathbb{K} \times X$ *en* X *es conjuntamente continua,* $\lambda \in \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$).

La métrica (distancia) de un F-espacio X esta dada por medio de $\|x - y\|$, $x, y \in X$.

Proposición 1.30. *Sea A una F-álgebra con unidad en la cual cualquier ideal máximo izquierdo es cerrado e I un ideal de A tal que $\overline{I}$ es de tipo finito. Entonces I es cerrado.*

Demostración. Sea $\overline{I} = Ax_1 + Ax_2 + \cdots + Ax_r$ y $J = \{a \in A : \exists a_2, a_3, ..., a_r : ax_1 + a_2x_2 + \cdots + a_rx_r \in I\}$. Afirmamos que J es un ideal, pues sean $z \in A$ y $y_1, y_2 \in J$, entonces existen $a_2, a_3, ...a_r$ y $b_2, b_3, ...b_r$ tales que $y_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_rx_r \in I$ y $y_2x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_rx_r \in I$, con lo que tenemos $(y_1 + y_2)x_1 + (a_2 + b_2)x_2 + \cdots + (a_r + b_r)x_r \in I$, lo que implica que $y_1 + y_2 \in J$. Además $z(y_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_rx_r) = zy_1x_1 + za_2x_2 + \cdots + za_rx_r \in I$, es decir, $zy_1 \in J$, por último $0 \in I$, entonces $0 \in J$ cuando $a_2 = a_3 = \cdots = a_r = 0$, lo que implica que $y_1 = 0$.

Ahora mostraremos que $\overline{J} = A$. Supongase que $\overline{J} \neq A$ y sea $O = A/J$. Consideremos la función $\varphi : A^r \to I^r$ definida por $\varphi(a_1, a_2, ...a_r) = \sum_{1 \leq i \leq r} a_ix_i$. Esta función es lineal, continua, suprayectiva y además es abierta. En particular, $\varphi(O \times A^{r-1})$ es un conjunto abierto de $\overline{I}$, pues O es abierto y A es abierto, entonces $O \times A^{r-1}$ es abierto, lo que implica que $\varphi(O \times A^{r-1})$

es abierto de $\overline{I}$. Además I es denso en $\overline{I}$, por lo tanto, $\varphi(O \times A^{r-1}) \cap I \neq \phi$. Entonces existe un $a \in O$ ya que $ax_1 + a_2x_2 + \cdots + a_rx_r \in I$, implica que $a \in J$; lo cual es una contradicción, entonces $\overline{J} = A$ y consuentemente $J = A$, entonces existe $y_1 \in I$ tal que $\overline{I} = Ay_1 + Ax_2 + \cdots + Ax_r$.

Sucesivamente, uno construye una sucesión $y_i,\ 1 \leq i \leq r$ de elementos de I tales que $\overline{I} = Ay_1 + Ay_2 + \cdots + Ay_r = I$.

Capítulo 2

Álgebras localmente convexas.

2.1. Álgebras localmente convexas.

Un álgebra localmente convexa es un álgebra topológica que como espacio vectorial es localmente convexo. En este caso, la topología puede estar dada mediante una familia $\{\|\cdot\|_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ de seminormas tal que para cada índice α, existe un índice β tal que

$$\|xy\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \|y\|_\beta \tag{2.1}$$

A la clase de álgebras localmente convexas se les denotará por LC y a la clase de LC-álgebras con unidad por LC_e. Un álgebra-B_0 es un álgebra LC completa y metrizable. Su topología puede estar dada por una sucesión de seminormas $\{||x||_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $||x||_i \leq ||x||_{i+1}$ y $||xy||_i \leq ||x||_{i+1}||y||_{i+1}$.

Definición 2.1. *Un álgebra LC es **m-convexa** si su topología puede estar dada por medio de una familia $\{||\cdot||_\alpha\}_{i\in\mathbb{N}}$ de seminormas tales que para cada $\alpha\in\Lambda$ y $x,y\in A$*

$$||xy||_\alpha \leq ||x||_\alpha ||y||_\alpha.$$

Teorema 2.2. *Sea X un espacio localmente convexo y sea L(X) el álgebra de todos los operadores lineales continuos de X. Si a L(X) se le puede dar una topología tal que L(X) sea un espacio lineal topológico, de tal manera que la función* $(T, x) \to T(x)$ *es conjuntamente continua de* $L(X) \times X \to X$ *con* $T \in L(X)$*, entonces (y sólo entonces) X es un espacio normado.*

Demostración. Supongamos que existe una topología en L(X) tal que la función $(T, x) \to T(x)$ es conjuntamente continua.

Sea $\phi(X)$ la familia de vecindades del cero en X y (V) la familia de vecindades del cero en L(X). Entonces para cada $U \in \phi(X)$ existen U' y V vecindades del cero en X tales que

$$VU' \subset U \tag{2.2}$$

Podemos suponer que la vecindad U es convexa y circulada de tal forma que cada una de ellas corresponde a una seminorma $||\cdot||_U$ que tiene a U como su bola unitaria.

Sabemos que si f es una funcional lineal continua en un espacio lineal convexo, digamos X, entonces existe una seminorma continua $||\cdot||$ y una constante C tal que $\forall x \in X$

$$|f(x)| \leq C||x|| \tag{2.3}$$

También sabemos que si X no es un espacio normado entonces no puede ser elegida una seminorma tal que (2.3) se cumpla, $\forall f \in X'$ continua. Por lo tanto, para cada $||\cdot||$ existe una f continua tal que

$$\sup_{||x|| \leq 1} |f(x)| = \infty \tag{2.4}$$

Ahora fijamos V, U' y U tal que cumpla (2.2). Suponemos que X no es un espacio normado.

Entonces existe un funcional continuo en X digamos f, tal que cumpla (2.4) para $||x|| = ||x||_{U'}$.

Sea $x_0 \in X$ y supongamos que $||x_0||_U = 1$. Consideremos el operador $T(x) = f(x) \cdot x_0$, afirmamos que este es un operador lineal de X, ya que,
$T(x+y) = f(x+y) \cdot x_0 = (f(x) + f(y))x_0 = f(x)x_0 + f(y)x_0$, por lo tanto,
$T(x+y) = T(x) + T(y)$ y $T(\alpha x) = f(\alpha x) \cdot x_0 = \alpha f(x) x_0 = \alpha T(x)$.

Por la continuidad de la multiplicación por un escalar en L(X) existe un λ positivo tal que $\lambda T \in V$ por (2.2) $\lambda T U' \subset V U' \subset U$, entonces $\lambda T U' \subset U$. Por (2.4) podemos encontrar un $x \in X$ tal que $||x||_{U'} < 1$ (es decir, $x \in U'$), en efecto,
$\|\lambda T(x)\|_U = \lambda \|f(x) x_0\|_U = \lambda \|f(x)\|_U \|x_0\|_U = \lambda |f(x)|, \ \ \forall x \in X.$

Podemos encontrar una $x \in X$ tal que $\lambda |f(x)| > 1$. De aquí que $|f(x)| > \lambda^{-1}$. Como $\lambda T \in V$ y $x \in U'$, entonces $\lambda T x \in U$. Pero $\|\lambda T x\|_U = \|\lambda f(x) \cdot x_0\|_U > 1$, por lo tanto, (2.3) no es cierta.

Comentario. No existe tal topología en el subespacio L(X) que consista de operadores de dimensión 1.

Damos ahora algunos ejemplos de álgebras localmente convexas.

Ejemplo 2. *El álgebra $C(-\infty, \infty)$ que consiste de todas las funciones complejo valuadas continuas en la recta real con las operaciones algebraicas puntuales y con seminormas*

$$\|x\|_n = \max_{-n \leq t \leq n} |x(t)|$$

Demostraremos que esta una B_0-álgebra y m-convexa.

Primero veamos que es m-convexa:

$$||xy||_n = \max_{-n \leq t \leq n} |x(t) y(t)| = \max_{-n \leq t \leq n} |x(t)||y(t)| \leq \max_{-n \leq t \leq n} |x(t)| \max_{-n \leq t \leq n} |y(t)| = ||x||_n ||y||_n$$

Por lo tanto, $||xy||_n \leq ||x||_n ||y||_n$. Tenemos entonces que es un álgebra m-convexa.

Ahora veamos que es B_0.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C(-\infty,\infty)$ *una sucesión de Cauchy, entonces dado* $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n, m \leq N \Longrightarrow ||x_n - x_m||_\alpha \leq \varepsilon/2$.

Fijando α *tenemos que* $||x_n - x_m||_\alpha = \max\limits_{-n\leq t\leq n}|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon/2$ *pero*

$|x_n(t) - x_m| \leq \max\limits_{-n\leq t\leq n}|x_n(t) - x_m| < \varepsilon/2$, *entonces* $\{x_n(t)\}_n$ *es de Cauchy en* $\mathbb{C}$, *como* $\mathbb{C}$ *es completo, entonces* $\exists\, x(t) \in \mathbb{C}$ *tal que* $x_n(t) \to x(t)$.

Sea $N' = max\{N, M\}$ *y* $n, m \leq N'$

$$\begin{aligned}
||x_n - x||_\alpha &= \max_{-n\leq t\leq n}|x_n(t) - x(t)| \\
&= \max_{-n\leq t\leq n}|x_n(t) - x_m(t) + x_m(t) - x(t)| \\
&\leq \max_{-n\leq t\leq n}(|x_n(t) - x_m(t)| + |x_m(t) - x(t)|) \\
&\leq \max_{-n\leq t\leq n}|x_n(t) - x_m(t)| + \max_{-n\leq t\leq n}|x_m(t) - x(t)| \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall n, m \leq N
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x_n \to x$ *en* $C(-\infty,\infty)$ $\forall\alpha$. *Hemos demostrado que el álgebra* $C(-\infty,\infty)$ *es completa.*

Ejemplo 3. *El álgebra* ϵ *de todas las funciones enteras de una variable compleja con las operaciones puntuales y seminormas*

$$\|x\|_n = \max_{|t|\leq n}|x(t)|$$

Primero veamos que es m-convexa:

$||xy||_n = \max\limits_{|t|\leq n}|x(t)y(t)| = \max\limits_{|t|\leq n}|x(t)||y(t)| \leq \max\limits_{|t|\leq n}|x(t)|\max\limits_{|t|\leq n}|y(t)| = ||x||_n||y||_n$

Por lo tanto, $||xy||_n \leq ||x||_n||y||_n$, *entonces es un álgebra m-convexa.*

Ahora veamos que es B_0:

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \epsilon$ *una sucesión de Cauchy, entonces dado* $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n, m \leq N \implies ||x_n - x_m||_\alpha \leq \varepsilon/2$. *Fijando* α *tenemos que* $||x_n - x_m||_\alpha = \max_{|t|\leq n}|x_n(t) - x_m(t)| < \varepsilon/2$, *pero* $|x_n(t) - x_m| \leq \max_{|t|\leq n}|x_n(t) - x_m| < \varepsilon/2$, *entonces* $\{x_n(t)\}_n$ *es de Cauchy en* $\mathbb{C}$, *como* $\mathbb{C}$ *es completo, entonces* $\exists x(t) \in \mathbb{C}$ *tal que* $x_n(t) \to x(t)$.

Tomemos $N' = max\{N, M\}$ *y* $n, m \leq N'$

$$\begin{aligned}
||x_n - x||_\alpha &= \max_{|t|\leq n}|x_n(t) - x(t)| \\
&= \max_{|t|\leq n}|x_n(t) - x_m(t) + x_m(t) - x(t)| \\
&\leq \max_{|t|\leq n}(|x_n(t) - x_m(t)| + |x_m(t) - x(t)|) \\
&\leq \max_{|t|\leq n}|x_n(t) - x_m(t)| + \max_{|t|\leq n}|x_m(t) - x(t)| \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \forall n, m \leq N
\end{aligned}$$

Lo que implica $x_n \to x$ *en* ϵ $\forall\alpha$, *por lo tanto, el álgebra* ϵ *es completa, con lo que podemos concluir que* ϵ *es una* B_0*-álgebra y m-convexa.*

Ejemplo 4. L^ω *el conjunto de todas las funciones medibles en el intervalo unitario (0,1) tal que*

$$\|x\|_n = \left(\int_0^1 |x(t)|^n \, dt\right)^{1/n} < \infty.$$

Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz tenemos que

$$\|xy\|_n = \left(\int_0^1 \mid x^n(t) y^n(t) \mid \, dt\right)^{1/n} \leq \left(\int_0^1 \mid x(t) \mid^{2n} \, dt\right)^{1/2n} \left(\int_0^1 \mid y(t) \mid^{2n} \, dt\right)^{1/2n} = \|x\|_{2n}\|y\|_{2n}$$

Ahora demostremos que L^ω *es completa. Primero lo demostraremos para* $\omega = 1$. *Sea* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de Cauchy en* $L^1(\mu)$, *es decir,* $\forall\ \varepsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ $n, m > N$, *entonces* $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$, *es decir,* $\int_x |f_n - f_m| d\mu < \varepsilon$, *lo que implica que* $f_n \to f$.

Sea $\{f_{n_i}\}$ *una sucesión de* $\{f_n\}$ *de manera que* $\int_X |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| d\mu < \frac{1}{2^i}$, *lo que implica que* $\sum_{i=1}^{\infty} \int_X |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| d\mu < \infty$. *Definamos* $g_i := |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}|$, *con esta definición damos una nueva sucesión*

$$\left\{ \sum_{k=1}^{N} g_k \right\}_{N\in\mathbb{N}} = \{G_N\}_{N\in\mathbb{N}},$$

entonces $\lim_{N\to\infty} G_N = G$. *Por el Lema de Fatou tenemos la siguiente desigualdad:*

$$\int_X \liminf_{N\to\infty} G_N d\mu \leq \liminf_{N\to\infty} \int_X G_N d\mu = \liminf_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} |f_{n_{i+1}} - f_{n_i}| d\mu < \infty,$$

por lo tanto, $\int_X G d\mu < \infty$.

Como $\int_X G d\mu < \infty$ *implica que* $G < \infty$ *en casi todas partes, tomemos* $x_n = \{x : G(x) > n\}$, *entonces* $n\mu(x_n) \leq \int_{x_n} G d\mu \leq \int_x G d\mu < \infty \Rightarrow$ $\mu(x_n) \leq \frac{1}{n} \int_x G d\mu \to 0$, *cuando* $n \to \infty$.

Como $\sum_{i=1}^{\infty} |f_{n_i} - f_{n_{i+1}}| < \infty$, *entonces* $f_1 + \sum_{i=1}^{\infty} f_{n_{i+1}} - f_{n_i}$ *es una serie convergente en casi todas partes, por lo tanto,* $f_1 + \sum_{i=1}^{\infty} f_{n_{i+1}} - f_{n_i} = f$ *sea* $f = \lim_{i\to\infty} f_{n_i}$.

Falta estudiar $\int_X |f_{n_i} - f|$ *para terminar la prueba, Entonces, tenemos* $\int_X |f_{n_i} - f| d\mu = \int_X (\lim_{k\to\infty} |f_{n_i} - f_{n_k}|) d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_X |f_{n_i} - f_{n_k}| d\mu < \epsilon$, *por lo tanto,* $f_n \to f$ *en* L^1, *lo que implica que* L^1 *es completo.*

Ahora demostraremos que L^∞ *es completa.*

Primero definamos $\|f\|_\infty = \inf\{\alpha : \mu(x : |f(x)| > \alpha)\} = 0$, *afirmamos que esta es una norma, pues si* $f \in L^\infty$ *tenemos que* $\|\alpha f\|_\infty \leq |\alpha f(x)| \leq |\alpha| \|f\|_\infty$ *en casi todas partes, por lo tanto,* $\|\alpha f(x)\|_\infty \leq |\alpha| \|f(x)\|_\infty$. *Además,* $|\alpha| \|f\|_\infty \leq \|\alpha f\|_\infty$ *en casi todas partes, por lo tanto* $\|\alpha f\|_\infty = |\alpha| \|f\|_\infty$. *Ahora veamos que* $\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. *Sabemos por definición que se cumple* $|f(x)| \leq \|f\|_\infty$ *excepto en* A *y* $\mu(A) = 0$ *y* $|g(x)| \leq \|g\|_\infty$ *excepto en* B *y* $\mu(B) = 0$. *Entonces* $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$ *excepto en* $A \cap B$, *por lo tanto, $\|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$. Lo que implica que si es norma.*

Ahora veamos que L^∞ es completa. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^\infty(\mu)$. Sean $A_n = \{x : |f_n(x)| > \|f\|_\infty\}$ y $B_{n,m} = \{x : |f_n(x) - f_m(x)| > \|f_n - f_m\|_\infty\}$, tenemos que $\mu(A_n) = 0$ y $\mu(B_{n,m}) = 0\ \ \forall n, m \in \mathbb{N}$, lo que implica que $A = (\bigcup_n A_n) \bigcup (\bigcup_{n,m} B_{n,m})$ es tal que $\mu(A) = 0$. Sea $x \notin A$ y $x \notin A_n$; $x \notin B_{n,m}$ consideremos $\{f_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy puesto que: $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty$. Sea $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Necesitamos probar que:

- *$f \in L^\infty(\mu)$, equivalentemente probar que f es continua.*
- *$f_n \to f$ en $L^\infty(\mu)$*

En efecto,

- *$|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty$ la sucesión $\{\|f_n\|_\infty\}$ es acotada, pues la sucesión es de Cauchy, entonces, $\|f_n - f_N\| \leq 1$ si $n > N$; $\|f_n\| \leq 1 + \|f_N\|$, por μ y n se tiene que $\|f\|_\infty \leq M$*
- *Debemos ver que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ cuando $n \to \infty$. Si $x \notin A$, $|f_n(x) - f(x)| = \lim_{k\to\infty} |f_n(x) - f_{n+1}(x)|$ como $x \notin A$, implica que $|f_n(x) - f_{n+k}(x)| \leq \|f_n - f_{n+k}\|_\infty$. Como $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $L^\infty(\mu)$ dado $\varepsilon > 0$ $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, entonces $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. Si $n \geq N$, tenemos $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, lo cual implica $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$, por lo tanto, $L^\infty(\mu)$ es completo.*

Por último, sea $1 < \omega < \infty$ y si $f \in L^\omega$, entonces $\|f\|_\omega := \left(\int_X |f|^\omega d\mu\right)^{1/\omega}$. Probemos que L^ω con $1 < \omega < \infty$ es un espacio completo.

Sea $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L^\omega(\mu)$. Sea N_1 tal que $n > N_1$ implica $\|f_n - f_{N_1}\|_\omega < \frac{1}{2}$, y sea N tal que $n, m > N$ implica $\|f_n - f_m\|_\omega < \frac{1}{4}$. Entonces tomemos $N_2 = \max\{N_1, N\} + 1$, como $N_2 > N_1$, entonces $\|f_{N_2} - f_{N_1}\|_\omega < \frac{1}{2}$. Por lo tanto, tenemos que si $n, m > N$, implica $\|f_n - f_m\|_\omega < \frac{1}{8}$. Ahora tomemos $N_3 = \max\{N_2, N\} + 1$, entonces $N_3 > N_2$, por lo tanto, $\|f_{N_3} - f_{N_2}\|_\omega < \frac{1}{4}$.

Tenemos una subsucesión $\{f_{N_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *tal que* $\|f_{N_{i+1}} - f_{N_i}\|_\infty < \frac{1}{2^i}$. *Definimos* $g_k := \sum_{i=1}^{k} |f_{N_{i+1}} - f_{N_i}|$, *por como definimos a g esta es finita en casi todas partes. Demostraremos que* $g \in L^\omega(\mu)$. *Por la desigualdad de Minkowski tenemos* $\|g_k\|_\omega \leq \sum_{i=1}^{k} \|f_{N_{i+1}} - f_{N_i}\|_\omega < 1$ *tenemos la siguiente desigualdad por el Lema de Fatou:*

$$\int_X |g|^\omega d\mu \; = \; \int_\mu \lim_{k\to\infty} |g_k|^\omega d\mu \leq \lim_{k\to\infty} \text{inf} \int_X |g|^\omega d\mu \leq 1,$$

por lo tanto, $g \in L^\omega$ *y* $g(x) < \infty$ *en casi todas partes, tenemos que*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left(f_{N_{i+1}} - f_{N_i}\right) \in L^\omega(\mu) y f_1 + \sum_{i=1}^{\infty} (f_{N_{i+1}} - f_{N_i}) = f = \lim_{i\to\infty} f_{N_i} \in L^\omega(\mu).$$

Tenemos ya que $f_{N_i} \to f$ *en casi todas partes, lo que implica que* $\|f_{N_i} - f\|_\omega \to 0$ *cuando* $i \to \infty$. *Hasta el momento tenemos que f es medible, afirmamos que* $f \in L^\omega(\mu)$, *para ello vamos a calcular* $\int_X |f_{N_i} - f|^\omega d\mu$. *Definimos la sucesión* $\{h_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *dada por* $h_j := |f_{N_i} - f_{N_j}|^\omega \leq 0$, *entonces* $\lim_{j\to\infty} h_j = |f_{N_j} - f|^\omega$ *por el Lema de Fatou tenemos que:*

$$\int_X \mid f_{N_i} - f \mid^\omega d\mu \leq \lim_{j\to\infty} \text{inf} \int_X \mid f_{N_i} - f_{N_j} \mid^\omega d\mu \tag{2.5}$$

Sea $\varepsilon > 0$, *entonces existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $n, m \geq N$ *implica que* $\|f_n - f_m\|_\omega < \varepsilon$, *si* i *es tal que* $N_i \geq N$, *entonces* $\|f_{N_i} - f_{N_j}\| < \varepsilon \;\; \forall j \geq i$ *y por lo tanto, tenemos que por (2.5),* $\int_X |f_{N_i} - f|^\omega d\mu \leq \lim_{j\to\infty} \text{inf} \int_X |f_{N_i} - f_{N_j}|^\omega d\mu \leq \varepsilon^\omega$, *lo que implica que* $\|f_{N_i} - f\|_\omega < \varepsilon$ *si* $N_i < N$, *por lo tanto,* $f_{N_1} - f \in L^\omega(\mu)$, *por lo cual,* $f \in L^\omega(\mu)$ *y* $f_{N_i} \to f$ *en* $L^\omega(\mu)$.

Podemos concluir la demostración analizando lo que hemos realizado, tomamos $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de Cauchy en* $L^\omega(\mu)$, *probamos que la subsucesión* $\{f_{N_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ *converge a f en* $L^\omega(\mu)$, *por lo tanto,* $f_n \to f$ *cuando* $n \to \infty$ *en* $L^\omega(\mu)$ *y con lo que conluimos que* $L^\omega(\mu)$ *es completa.*

Por lo tanto, L^ω *el conjunto de todas las funciones medibles en el intervalo unitario (0,1)* *es un álgebra localmente convexa pero no es m-convexa.*

Ejemplo 5. $C^\infty(0,1)$. *Esta es el álgebra de todas las funciones derivables infinitas veces en un intervalo unitario con operaciones puntuales y seminormas* $\max\limits_{0\le t<1}|x^{(n)}(t)|$. *Reemplazamos este sistema de seminormas por un sistema equivalente de seminormas dado por*

$$||x||_n = 2^n \max_{0\le i\le n} 2^i \max_{0\le t<1}|x^{(i)}(t)|$$

tenemos entonces

$$\max_{0\le t<1}|x^{(i)}(t)| \le \frac{||x||_n}{2^{n+i}}$$

Demostraremos que es un álgebra m-convexa,

$$\begin{aligned}
||xy||_n &= 2^n \max_{0\le i\le n} 2^i \max_{0\le t<1}|(xy)^{(i)}(t)| \\
&= 2^n \max_{0\le i\le n} 2^i \max_{0\le t<1}\Big|\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} x^{(k)}(t) y^{(i-k)}(t)\Big| \\
&\le 2^n \max_{0\le i\le n} 2^i \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \max_{0\le t<1}|x^{(k)}(t)| \max_{0\le t<1}|y^{(i-k)}(t)| \\
&\le 2^n \max_{0\le i\le n} 2^i \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \frac{||x||_n}{2^{n+k}} \cdot \frac{||y||_n}{2^{n+1-k}} \\
&= ||x||_n ||y||_n.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $||xy||_n \le ||x||_n||y||_n$. *Por lo que* $C^\infty(0,1)$ *es una m-convexa.*

Ahora veamos que esta álgebra es completa:

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C^\infty(0,1)$ *una sucesión de Cauchy, entonces dado* $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ *tal que*

$\forall n, m \le N \implies ||x_n - x_m||_\alpha \le \frac{\varepsilon}{2^{2\alpha+1}}$, *es decir,* $2^\alpha \max\limits_{0\le i\le\alpha} 2^i \max\limits_{0\le t<1}|x_n^{(i)}(t) - x_m^{(i)}(t)| \le \dfrac{\varepsilon}{2^{2\alpha+1}}$

$\implies |x_n^{(i)}(t) - x_m^{(i)}(t)| \le 2^\alpha \max\limits_{0\le i\le\alpha} 2^i \max\limits_{0\le t<1}|x_n^{(i)}(t) - x_m^{(i)}(t)| \le \dfrac{\varepsilon}{2^{2\alpha+1}}$

$\implies |x_n^{(i)}(t) - x_m^{(i)}(t)| \le \frac{\varepsilon}{2^{2\alpha+1}}$ *si* $n, m \le N_1,\ 0 \le i \le \alpha,\ \ 0 \le t \le 1$

$\Longrightarrow \{x_n^{(i)}(t)\}$ *es de Cauchy en* $\mathbb{R}$ *y como* $\mathbb{R}$ *es completo, entonces* $\exists x^{(i)}(t) \in \mathbb{R}$ *tal que*

$x_n^{(i)}(t) \to x^{(i)}(t) \Longrightarrow$ *si* $n > N_2$ *entonces* $|x_n^{(i)}(t) - x^{(i)}(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}$.

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$ *y* $n, m \geq N$ *entonces*

$$\begin{aligned}
|x_n^{(i)}(t) - x^{(i)}(t)| &\leq \max_{0\leq t<1} |x_n^{(i)}(t) - x^{(i)}(t)| \\
&\leq 2^\alpha \max_{0\leq i\leq\alpha} 2^i \max_{0\leq t<1} |x_n^{(i)}(t) - x^{(i)}(t)| \\
&= 2^\alpha \max_{0\leq i\leq\alpha} 2^i \max_{0\leq t<1} |x_n^{(i)}(t) - x_m^{(i)}(t) + x_m^{(i)}(t) - x^{(i)}(t)| \\
&\leq 2^\alpha \max_{0\leq i\leq\alpha} 2^i \max_{0\leq t<1} |x_n^{(i)}(t) - x_m^{(i)}(t)| + |x_m^{(i)}(t) - x^{(i)}(t)| \\
&< 2^\alpha \max_{0\leq i\leq\alpha} 2^i \max_{0\leq t<1} \frac{\varepsilon}{2^{2\alpha+1}} + \frac{\varepsilon}{2^{2\alpha+1}} \\
&= 2^\alpha\, 2^\alpha \frac{\varepsilon}{2^{2\alpha}} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Con lo que obtenemos $||x_n - x||_\alpha = 2^\alpha \max_{0\leq i\leq\alpha} 2^i \max_{0\leq t<1} |x_n^{(i)}(t) - x^i(t)| < \epsilon$, *lo que implica que* $x_n \to x$, *por lo tanto* C^∞ *es completa. Podemos concluir que* C^∞ *es un álgebra m-convexa y* B_0.

Ejemplo 6. *Sea* κ *el álgebra de todas las series de potencias de la forma* $x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n$ *con seminormas*

$$||x||_n = \sum_{i=0}^{n} |x_i|$$

y con multiplicación de Cauchy en serie de potencias, es decir,

$$xy = z = \sum_{n=0}^{\infty} z_n t^n \quad donde \quad z_k = \sum_{i=0}^{k} x_k y_{k-i}$$

tenemos que

$$||xy||_n = \sum_{k=0}^{n} \Big| \sum_{i=0}^{k} x_i y_{k-i} \Big| \leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{i=0}^{k} |x_i||y_{k-i}| \leq \sum_{i=0}^{n} |x_i| \sum_{k=i}^{n} |y_k| \leq ||x||_n ||y||_n$$

Ahora sea $\{x_p\}_{p\in\mathbb{N}}$ *una suceción de Cauchy en* κ*, entonces dado* $\varepsilon > 0$ $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$r, s \leq N_1 \Longrightarrow ||x_r - x_s||_n < \varepsilon$*, es decir,*

$$\left\|\sum_{i=0}^{n} x_i^r t^i - \sum_{i=0}^{n} x_i^s t^i\right\|_n = \left\|\sum_{i=0}^{n}(x_i^r - x_i^s)t^i\right\|_n = \sum_{i=0}^{n} |x_i^r - x_i^s| < \varepsilon$$

Lo que implica que, $|x_i^r - x_i^s| < \frac{\varepsilon}{2^n}$ $\forall$ $0 \leq i \leq n$*, por lo tanto,* $\{x_i^r\}_{r\in\mathbb{N}}$ *es de Cauchy en* $\mathbb{C}$*, entonces* $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n, r \geq N_2$ *entonces,* $|x_i^n - x_i^r| < \frac{\varepsilon}{2^n}$ $\forall\, 0 \leq i \leq 1$ *como* $\mathbb{C}$ *es completo existe* x_i *tal que* $x_i^r \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} x_i$.

Tomemos $N = \max\{N_1, N_2\}$ *y r>N, entonces*

$\|\sum_{i=0}^{n} x_i^r t^i - \sum_{i=0}^{n} x_i t^i\|_n = \|\sum_{i=0}^{n}(x_i^r - x_i)t^i\|_n = \sum_{i=0}^{n} |x_i^r - x_i| < \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^n} \cdot \varepsilon = \varepsilon$

obtenemos que $||x^r - x|| < \varepsilon$*, por lo tanto,* $\{x_p\}_{p\in\mathbb{N}} \longrightarrow x = \sum_{i=0}^{\infty} x_i t^i$ *por lo tanto el álgebra* κ *es completa.*

Ejemplo 7. *Sea* $(a_{n,k})$, $1 \leq n < \infty$, $-\infty < k < \infty$ *una matriz infinita de números reales positivos. Asumimos también que para cada n, existe un n'>n tal que*

$$a_{n',k'}a_{n',l} \geq a_{n,k+l} \ \ \forall k, l. \tag{2.6}$$

Llamemos por $\kappa(a_{n,k})$ *el álgebra de todas las series de Laurent de la forma*

$$x = \sum_{-\infty}^{\infty} x_k t^k \ \text{ tales que } \ ||x||_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n,k}|x_k|$$

Esta es un álgebra bajo la multiplicación de Cauchy, por (2.6)

$$||xy||_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n,k}\left|\sum_{i=-\infty}^{\infty} x_{k-i} \cdot y_i\right| \leq \sum_{k,i=-\infty}^{\infty} a_{n,k}|x_{k-i}|\cdot|y_i| \leq \sum_{k,i=-\infty}^{\infty} a_{n',k-i}\cdot a_{n',i}|x_{k-i}|\cdot|y_i| = ||x||_{n'}||y||_{n'}$$

Entonces $\kappa(a_{n,k})$ *es una* B_0 *-álgebra. En este caso, cuando en (2.6) n=n', $\kappa(a_{n,k})$ es un álgebra m-convexa.*

2.2. Álgebras localmente m-convexas

Definición 2.3. *Un subconjunto X de un álgebra topológica A es* ***idempotente*** *si* $X^2 \subset X$. *Un álgebra topológica A es localmente idempotente si existe una base de vecindades del cero que consiste de conjuntos idempotentes.*

Lema 2.4. *La envolvente convexa de un conjunto idempotente es también un conjunto idempotente.*

Demostración. Sea U un conjunto idempotente y V su envolvente convexa. Entonces V consiste de suma finitas $x = \sum \alpha_n x_n$ donde $x_i \in U,\ \sum \alpha_i = 1\ y\ \ 0 \leq \alpha_i \leq 1$. Pero si $x, y \in V$ y $y = \sum \beta_n y_n$, entonces

$$xy = \textstyle\sum_{i,j} \alpha_i \beta_j x_i y_j \in V^2 \ \text{ y } \ x_i y_j \in U \ \text{ y } \ \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j = 1 \Longrightarrow V^2 \subset V.$$

Proposición 2.5. *Sea A un álgebra localmente convexa. Entonces A es m-convexa si y solo si es localmente idempotente.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si A es m-convexa, tiene un sistema de semi-normas $(||\cdot||_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$ con $||xy||_\alpha \leq |x|_\alpha |y|_\alpha,\ \alpha \in \Sigma$.

Afirmamos que $B = \{x \in A : ||x||_\alpha < 1/n\}_{\alpha\in\Sigma, n\in\mathbb{N}}$ forma una base de vecindades para A y consiste de conjuntos idempotentes. En efecto, sea $x \in A$ y U una vecindad de x, sea $K = \sup\{||x-y||_\alpha : y \in U\}$ $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \frac{k}{2} \Longrightarrow V = \{x \in U : ||x||_\alpha < \frac{1}{n}\} \in B$ y $x \in V \subset U$, por lo tanto, B es una base. Ahora vemos que B consiste de idempotentes pues $||xy||_\alpha \leq ||x||_\alpha ||y||_\alpha < \frac{1}{n^2} \Longrightarrow xy \in B$.

$\Leftarrow$) Si A es localmente convexa y localmente idempotente, entonces existe una base de vecindades del origen (U_α) que consiste de conjuntos idempotentes y tenemos que $V = \overline{conv \bigcup_{|\lambda|\leq 1} \lambda U_\alpha}$. Obteniendo una base que consiste de conjuntos balanceados, idempotentes y convexos.

Si $||x||_\alpha$ es una seminorma en A tal que $\{x : ||x||_\alpha \leq 1\} = V_\alpha$, tal que el sistema $(||x||_\alpha)$ da la topología de A y $V_\alpha^2 \subset V_\alpha$, es equivalente con $||xy||_\alpha \leq ||x||_\alpha ||y||_\alpha$, entonces A es m-convexa.

Teorema 2.6. *Sea A un álgebra m-convexa, entonces A es isomorfa a una subálgebra de un producto cartesiano de álgebras de Banach. Si A es completa entonces la subálgebra en cuestión es cerrada.*

Demostración. Sea $(||x||_\alpha)_{\alpha\in\Sigma}$ un sistema de seminormas multiplicativas que hace de A un álgebra m-convexa. Consideremos el siguiente conjunto

$$N_\alpha = \{x \in A : ||x||_\alpha = 0\}$$

Afirmamos que N_α es un sistema de ideales cerrados en A. En efecto,

$$\begin{aligned} Si\ x, y \in N_\alpha &\implies ||x-y||_\alpha \leq ||x||_\alpha + ||y||_\alpha = 0 \\ &\implies ||x-y||_\alpha = 0 \\ &\implies x - y \in N_\alpha \\ Si\ x \in A\ y \in N_\alpha &\implies ||xy||_\alpha \leq ||x||_\alpha ||y||_\alpha = 0 \\ &\implies ||xy||_\alpha = 0 \\ &\implies xy \in N_\alpha \end{aligned}$$

Por lo tanto, N_α es un ideal, solo nos falta ver que es cerrado; en efecto, pues la norma es continua y $\{0\}$ es cerrado, entonces N_α es la imagen inversa continua de un cerrado, la cual es cerrada para toda $\alpha \in \Sigma$.

Sean $A_\alpha = A/N_\alpha$ y $\widetilde{A} = \prod\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ con la topología producto y las operaciones definidas coordenada a coordenada. La función $\Pi : A \to \widetilde{A}$, donde $\Pi(x) = (\Pi_\alpha(x))$ es el isomorfismo deseado. En efecto, Π es inyectiva pues si $(\Pi_\alpha(x))_\alpha = 0$, entonces $\Pi_\alpha(x) = 0\ \forall \alpha \in I$, lo cual implica $|x|_\alpha = 0 \; \forall \alpha \in I$ (por ser un espacio Hausdorff), por lo tanto, x=0.

Sea O un abierto básico de $\widetilde{A}$; entonces existen $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_n}$ abiertos de A_{α_i} $(1 \leq i \leq n)$ respectívamente tales que

$$O = \{x \in \widetilde{A} : x_{\alpha_i} \in U_{\alpha_i} \; (1 \leq i \leq n)\}.$$

Como Π_{α_i} es continuo (es la proyección y ésta es continua), $\Pi^{-1}(O) = \bigcap_{i=1}^{n} \Pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ también es abierto en A, entonces Π es continua.

Además Π es un homomorfismo de álgebras, pues

$$\begin{aligned} \text{Sean } x, y \in A &\implies \Pi(x+y) = (\Pi(x+y)) = (\Pi_\alpha(x) + \Pi_\alpha(y)) \\ x \in A, k \in \mathbb{C} &\implies \Pi(kx) = (\Pi_\alpha(kx)) = (k\Pi_\alpha(x)) = k(\Pi_\alpha(x)) = k\Pi_\alpha(x) \\ x, y \in A &\implies \Pi(xy) = (\Pi_\alpha(xy)) = (\Pi_\alpha(x)\Pi_\alpha(y)) = \Pi_\alpha(x)\Pi_\alpha(y) \end{aligned}$$

Para finalizar la demostración falta ver que $\Pi(A)$ es una subálgebra cerrada de $\prod_{\alpha \in \sigma} A_\alpha$. Sea $\{x_n\} \subseteq \Pi(A)$ y sea $x = \lim_{n \to \infty} x_n$; $x \in \prod_{\alpha \in \sigma} A_\alpha$. Como $\{x_n\}_{\mathbb{N}}$ converge, es de Cauchy entonces

$$y_n = \Pi^{-1}(x_n) \Rightarrow \{y_n\} \subseteq A$$

y es de Cauchy $\Rightarrow \exists y \in A$ tal que $y_n \to y$ entonces $\Pi(y) = x$, es decir, $x \in \prod_{\alpha \in \sigma} A_\alpha$, por lo tanto $\Pi(A)$ es cerrada.

Corolario 2.7. *Sea A un álgebra m-convexa con unidad e. Entonces su topología puede estar dada mediante un sistema de semi-normas sub-multiplicativas* $\{\|x\|_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *tales que* $\|e\|_\alpha = 1$ $\forall \alpha \in I$.

Demostración. $\Pi_\alpha(e)$ es unidad en A_α y por lo tanto se puede dar una nueva seminorma en A_α de tal forma que $\|\Pi_\alpha(e)\|_\alpha = 1 \; \forall \alpha \in \Sigma$.

En efecto, sea $\kappa_\alpha = \frac{1}{\Pi_\alpha(e)}$, entonces sea $\|x\|'_\alpha = \|x\|_\alpha \kappa_\alpha$. De aqui que $\|\Pi_\alpha(e)\|'_\alpha = 1$. De esta forma A_α queda renombrada de manera que $\|\Pi_\alpha(e)\|'_\alpha = 1$.

Para cada $x \in A$ sea $\|x\|_\alpha = \|\Pi_\alpha(x)\|_\alpha$ para cada $\alpha \in \Sigma$.

Así obtenemos la familia de seminormas con la propiedad pedida.

2.2.1. Topologías iniciales. Subálgebras topológicas. Productos cartesianos.

Dada un álgebra A y una familia $\{(A_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ de parejas (A_α, f_α) donde para cada índice $\alpha \in I, A_\alpha$ es un álgebra topológica y $f_\alpha : A \longrightarrow A_\alpha$ un morfismo de álgebras, entonces podemos considerar la topología inicial en A definida por las funciones $f_\alpha, \alpha \in I$, a saber, la topología débil en A tal que hace cada una de estas funciones continuas. Es claro, que esta topología es compatible con la estructura de espacio vectorial en el álgebra dada A, de esta manera A es un espacio vectorial topológico.

Una base local de A consiste de conjuntos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \tag{2.7}$$

donde los conjuntos U_{α_i} son bases locales sobre las álgebras topológicas $A_\alpha, \alpha \in I$.

Además, la misma topología de espacio vectorial en A es compatible con la estructura de álgebra de A, es decir, A se convierte en un álgebra topológica bajo la siguiente proposición:

Proposición 2.8. *Sean A un álgebra, $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ una familia de álgebras topológicas, y un morfismo de álgebras $f_\alpha : A \longrightarrow A_\alpha$ para cada $\alpha \in I$. Entonces la topología inicial definida en A por las funciones $f_\alpha, \alpha \in I$, hacen de A un álgebra topológica. En particular el álgebra A con esta topología tiene una multiplicación conjuntamente continua, si las álgebras topológicas A_α dadas la tienen.*

Demostración. Por lo anterior la topología bajo consideración es compatible con la estructura de espacio vectorial de A, una base local es dada por los conjuntos de la forma $\bigcap\limits_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$.

Más aún, para cada $x \in A$, la función (endomorfismo lineal sobre A) $l_x : A \longrightarrow A$ definida por $y \longrightarrow l_x(y) := xy$ es continua. De hecho, es suficiente probar que, para cada $\alpha \in I$, la función composición $f_\alpha \circ l_x$ es continua.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\ell_x"] \arrow[dr, "f_\alpha \circ \ell_x"'] & A \arrow[d, "f_\alpha"] \\ & A_\alpha \end{tikzcd} \tag{2.8}$$

Sin embargo, esto es directo debido a la hipótesis para la familia (A_α, f_α). Por otro lado, la última parte de la afirmación es ahora una consecuencia inmediata del siguiente resultado.

Lema 2.9. *Sea A un álgebra, F un álgebra topológica con multiplicación continua y $h : A \longrightarrow F$ un morfismo de álgebras. Entonces la topología de imagen inversa en A definida por h es una topología de espacio vectorial en A que la convierte en un álgebra topológica con multiplicación continua.*

Demostración. En efecto, la topología en cuestión hace de A un espacio vectorial topológico. Además, si $h^{-1}(W)$ es una vecindad del cero en A, donde W es una vecindad del cero en F, entonces por la hipótesis, existen vecindades del cero en F, sean U y V tal que $UV \subseteq W$ y $f^{-1}(U)f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(U \cdot V) \subseteq f^{-1}(W)$, por lo tanto A tiene una multiplicación conjuntamente continua.

Comentario. Respecto del uso del lema en la última parte de la demostración de (2.8). Observamos que la topología inicial en A definida por las funciones $f_\alpha, \alpha \in I$ coincide con la topología de la imagen inversa en A definida por la función

$$x \longrightarrow (f_\alpha(x)) : A \longrightarrow \prod_{\alpha \in I} A_\alpha; \tag{2.9}$$

La imagen de (2.9) es el producto cartesiano respectivo dotado de la topología producto definida en ella por los espacios topológicos $A_\alpha,\ \ \alpha \in I$.

Cada A_α tiene multiplicación conjuntamente continua porque $\prod_{\alpha \in I} A_\alpha$ tiene multiplicación conjuntamente continua.

Como la topología de la imagen inversa coincide con la topología inicial dada por f_α, entonces por el Lema (2.9)A tiene una multiplicación conjuntamente continua.

Ahora, dadas álgebras topológicas $A_\alpha, \alpha \in I$, localmente convexas, uno concluye por (2.7) que la topología inicial en A definida por las funciones $f_\alpha, \alpha \in I$, hacen de A un álgebra localmente convexa. Aún más, otra vez se sigue por el Lema (2.9) que A es un álgebra localmente convexa así definida con una multiplicación conjuntamente continua en caso de que las álgebras $A_\alpha, \alpha \in I$ la tengan.

El mismo lema implica que cualquier subálgebra de un álgebra topológica dada con una multiplicación conjuntamente continua es en la topología relativa (es decir, la topología de la imagen inversa definida sobre esta por la respectiva función de inclusión) un álgebra topológica del mismo tipo que la dada (si el álgebra topológica considerada tiene una multiplicación separadamente continua, hay un argumento similar usando un diagrama análogo a (2.8)). Análogamente uno concluye que cualquier subálgebra de un álgebra localmente convexa es, en la topología relativa, un álgebra topológica del mismo tipo que la dada.

Por otro lado, obtenemos que: La topología inicial definida en un álgebra dada A por las funciones $f_\alpha, \alpha \in I$, como antes, en el caso en que las álgebras sean localmente m-convexas hacen que A sea un álgebra localmente m-convexa tambien.

Esto otra vez es directo por (2.7) en conjugación con [32, Teorema 1.1, p.7] y [32, Lema 3.1, p. 14]. En efecto, uno prueba que la topología de la imagen inversa, correspondiente al morfismo de álgebras dado $h : A \longrightarrow F$ con F un álgebra localmente m-convexa define a A como un álgebra localmente m-convexa. En particular uno concluye que cualquier subálgebra de un álgebra localmente m-convexa es, en la topología relativa, un álgebra topológica del mismo tipo.

Proposición 2.10. *Sea A un álgebra topológica con la topología inicial definida por la familia $\{(A_\alpha, f_\alpha)\}_{\alpha\in I}$, como arriba, donde la topología de cada una de las álgebras $A_\alpha, \alpha \in I$, es Hausdorff. La topología de A es Hausdorff si y solo si, para cada elemento $x \neq 0$ en A existe un índice $\alpha \in I$ tal que $f_\alpha(x) \neq 0$ en A_α.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Si A es Hausdorff y $x \neq 0$ en A, entonces existe una vecindad U del cero en A con $x \notin U$ por (2.7)

$$x \notin \bigcap_{i=1}^{n} f_\alpha^{-1}(U_{\alpha_i}) \subset U$$

entonces $x \notin f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ para algun α_i, por lo tanto $f_{\alpha_i} \neq 0$.

$\Leftarrow$) Si $f_{\alpha_i} \neq 0$ para algún índice $\alpha \in I$, entonces $x \notin f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ mientras que $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ pertenece a la base local de A, entonces $x \notin \bigcap_{i=1}^{n} f_\alpha^{-1}(U_{\alpha_i}) \subset f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, lo cual implica que existe una vecindad del cero tal que $x \in U$ y $0 \in f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ tal que $U \bigcap f_\alpha^{-1}(U_\alpha) = \emptyset$.

En particular supongamos que dada una familia $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ de álgebras topológicas y consideramos el producto cartesiano respectivo

$$A = \prod_{\alpha\in I} A_\alpha$$

definido por los conjuntos $A_\alpha, \alpha \in I$. Entonces definimos las operaciones coordenada a coordenada y así el conjunto A es un álgebra. La función proyección canonica respectiva

$$\Pi_\alpha : A \longrightarrow A_\alpha, \;\; \alpha \in I \tag{2.10}$$

con la definición de la topología inicial en A, da por definición la topología del producto cartesiano, definida por los espacios topológicos A_α, $\alpha \in I$.

Por otro lado, por la definición de las operaciones (en el producto cartesiano) en el álgebra A, uno realmente tiene que las funciones proyección Π_α, $\alpha \in I$ son morfismo de álgebras; así que uno concluye que A dotada de la topología de producto cartesiano es un álgebra topológica la cual, en particular, tiene multiplicación conjuntamente continua si este es el caso para cada una de las álgebras topológicas dadas A_α, $\alpha \in I$.

Uno obtiene que una base local del álgebra topológica A esta definida, acorde a (2.23) como intersecciones finitas de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{n} \pi_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \tag{2.11}$$

donde los conjuntos U_{α_i} son bases locales de las álgebras topológicas A_α, $\alpha \in I$. Equivalentemente uno puede considerar los conjuntos de la forma

$$\prod_{\alpha \in I} U_\alpha$$

con $U_\alpha = A_\alpha$ exepto por un número finito de índices $\alpha \in I$ para los cuales los respectivos conjuntos U_α estan variando como en (2.11).

Similarmente, el producto cartesiano de álgebras localmente convexas (con multiplicación continua) es un álgebra topológica del mismo tipo que los factores.

En particular, es válido para álgebras localmente m-convexas.

Lema 2.11. *Sea* $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ *una familia de álgebras localmente m-convexas. Entonces, el álgebra producto cartesiano* $A = \prod_{\alpha\in I} A_\alpha$*, dotada con la topología de producto cartesiano, es un álgebra localmente m-convexa. En particular esto es valido para cualquier subálgebra de* A*.*

Por otro lado, el álgebra topológica producto cartesiano es Hausdorff si y sólo si cada álgebra A_α, $\alpha \in I$ es Hausdorff.

Finalmente, el álgebra topológica producto cartesiano es completa si y sólo si A_α, $\alpha \in I$ es completa.

2.2.2. Descomposición de Arens-Michael.

Supongase dada una familia $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ de álgebras, donde el conjunto de índices I es ahora un conjunto dirigido; es decir, un conjunto parcialmente ordenado $(\leq)$ tal que para cualesquiéra índices $\alpha, \beta \in I$ existe un índice $\gamma \in I$ tal que $\alpha \leq \gamma$ *y* $\beta \leq \gamma$.

Lo que es más, está dada una familia $(f_{\alpha\beta})$ de morfismos de álgebras tales que

$$f_{\alpha\beta} : A_\beta \longrightarrow A_\alpha \tag{2.12}$$

para todos α, $\beta \in I$ tal que $\alpha \leq \beta$; además para cada $\alpha \in I$, sea

$$f_{\alpha\alpha} : A_\alpha \longrightarrow A_\alpha \ \text{ donde } \ f_{\alpha\alpha} = idA_\alpha \tag{2.13}$$

el morfismo identidad en el álgebra A_α.

Así un sistema proyectivo (o inverso) de álgebras es por definición una familia $(\{A_\alpha\}, \{f_{\alpha\beta}\}, \alpha \leq \beta)$, como antes, además de cumplir los dos relaciones, satisfacen también la condición

$$f_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma} \tag{2.14}$$

para cada $\gamma, \alpha, \beta \in I$ tales que $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, como se muestra en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
 & A_\gamma \arrow[d, "f_{\beta\gamma}"] \arrow[dd, shift left=6ex, "f_{\alpha\gamma}"] \\
A \arrow[ur, "f_\gamma"] \arrow[r, "f_\beta"] \arrow[dr, "f_\alpha"'] & A_\beta \arrow[d, "f_{\alpha\beta}"] \\
 & A_\alpha
\end{tikzcd}$$

Ahora consideremos el álgebra producto cartesiano

$$F = \prod_{\alpha \in I} A_\alpha$$

y el siguiente subconjunto de F

$$A = \{x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in F : \, x_\alpha = f_{\alpha\beta}(x_\beta) \; si \; \alpha \leq \beta\} \tag{2.15}$$

Afirmamos que A es una subálgebra de F, por definición de las operaciones en el álgebra F y las hipótesis para las funciones $f_{\alpha\beta}$ si $x, y \in A$ son tales que $x = x_\alpha$ $y = y_\alpha$ y $\beta \leq \gamma$.

$$\begin{aligned}
x_\alpha + y_\alpha &= f_{\alpha\beta}(x_\beta) + f_{\alpha\gamma}(x_\gamma) \\
&= f_{\alpha\beta}(x_\beta) + f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma}(x_\gamma) \\
&= f_{\alpha\beta}(x_\beta + f_{\beta\gamma}(x_\gamma)) \in A
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ax_\alpha + by_\alpha &= af_{\alpha\beta}(x_\beta) + bf_{\alpha\gamma}(x_\gamma) \\ &= f_{\alpha\beta}(ax_\beta) + f_{\alpha\gamma}(bx_\gamma) \\ &= f_{\alpha\beta}(ax_\beta) + f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma}(bx_\gamma) \\ &= f_{\alpha\beta}(ax_\beta + f_{\beta\gamma}(bx_\gamma)) \in A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_\alpha \cdot y_\alpha &= f_{\alpha\beta}(x_\beta) \cdot f_{\alpha\gamma}(x_\gamma) \\ &= f_{\alpha\beta}(x_\beta) \cdot f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma}(x_\gamma) \\ &= f_{\alpha\beta}(x_\beta \cdot f_{\beta\gamma}(x_\gamma)) \in A \end{aligned}$$

Por lo tanto, A es una subálgebra.

Si A_α, para cada $\alpha \in I$, tiene elemento identidad, digamos 1_α, $\alpha \in I$ y los morfismos de álgebra $f_{\alpha\beta}$ con $\alpha \leq \beta$, preservan la identidad, la identidad $1 = (1_\alpha) \in F$ pertenece también a la subálgebra A de F definida por (2.15).

El álgebra A así definida es llamada *el álgebra límite proyectivo (o inverso)*, del sistema proyectivo $(A_\alpha, f_{\alpha\beta})$ dado y es denotada por

$$A = \lim_{\longleftarrow}(A_\alpha, f_{\alpha\beta}) \tag{2.16}$$

o simplemente por

$$A = \lim_{\longleftarrow} A_\alpha.$$

Por otro lado, dado un sistema proyectivo de álgebras uno define una familia $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ de morfismos de álgebras por la relación

$$f_\alpha = \Pi_\alpha|_A : A \longrightarrow A_\alpha \tag{2.17}$$

para cada $\alpha \in I$, al considerar la restricción de A de la proyección canónica Π_α de F sobre A_α, $\alpha \in I$; entonces en este caso (2.17) nos da lugar, en general, a un morfismo suprayectivo. Es más, obtenemos que

$$f_\alpha(x_\alpha) = f_{\alpha\beta}(x_\beta) = f_{\alpha\beta}(f_\beta(x_\alpha)) = (f_{\alpha\beta} \circ f_\beta)(x_\alpha)$$

Por lo tanto,

$$f_\alpha = f_{\alpha\beta} \circ f_\beta \tag{2.18}$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in I$ tales que $\alpha \leq \beta$.

Definición 2.12. *Un* ***sistema proyectivo o (inverso) de álgebras topológicas*** *es un sistema proyectivo de álgebras $\{(A_\alpha, f_{\alpha\beta})\}$ como antes, donde las álgebras $A_\alpha, \alpha \in I$ son topológicas y las funciones $f_{\alpha\beta}$ con $\alpha \leq \beta \in I$ son morfismos continuos de álgebras.*

El álgebra límite proyectivo A está dotada de la topología inicial definida por las funciones f_α, $\alpha \in I$. El álgebra topológica así definida es el álgebra límite proyectivo (o inverso).

Así por lo anterior y el Lema (2.11) concluimos que: El álgebra límite proyectivo de álgebras localmente m-convexas es un álgebra topológica del mismo tipo.

Finalmente enfatizamos que un álgebra topológica límite proyectivo $A = \varprojlim(A_\alpha, f_{\alpha\beta})$ (siendo una subálgebra topológica de $F = \prod_{\alpha \in I} A_\alpha$) es Hausdorff si este es el caso de cada una de las álgebras A_α, $\alpha \in I$.

Definición 2.13. *Sea A un àlgebra topológica. Un subconjunto U de A es:*

- *U es* ***balanceado*** *si $\lambda B \subset B$, $\forall \lambda$ con $|\lambda| \leq 1$.*
- *U es* ***absolutamente convexo*** *si es balanceado y convexo.*
- *U es* ***absorbente*** *si $\forall x \in A$, $\exists t = t(x) > 0$ tal que $x \in tB$*

- *U es un **barril** si es cerrado, absolutamente convexo y absorbente.*

- *U es un **m-barril** si es un barril multiplicativo.*

Concluimos esta sección con el siguiente lema.

Lema 2.14. *Cada álgebra topológica límite proyectivo $A = \varprojlim A_\alpha$ es una subálgebra cerrada del álgebra topológica producto cartesiano $F = \prod_{\alpha \in I} A_\alpha$. En particular, A es completa, si cada una de las álgebras topológicas dadas A_α, $\alpha \in I$ lo es.*

Demostración. La primera parte de la afirmación es una consecuencia directa de (2.15), la continuidad de las funciones $f_{\alpha\beta}$ con $\alpha \leq \beta \in I$, y la definición de la topología de A, así como la topología relativa inducida por F. (El argumento previo es válido, para cada espacio topológico límite proyectivo A, con respecto a su relación con el respectivo espacio producto cartesiano F). Así la última parte de la afirmación se obtiene del hecho de que A es un subespacio cerrado del espacio completo F. En efecto, sea $\{x_n\}_n$ una sucesión en A, entonces $(x_\alpha)_n \in A$ y sea $y = (y_\alpha)$ tal que $(x_\alpha)_n \longrightarrow y$ con $y \in F$. Entonces,

$$f_{\alpha\beta}(y_\beta) = f_{\alpha\beta}(\lim_{n\to\infty}(x_\beta)) = \lim_{n\to\infty} f_{\alpha\beta}(x_\beta) \lim_{n\to\infty}(x_\alpha)_n = y_\alpha \Longrightarrow y \in A.$$

El objetivo de esta parte de la sección es dar una representación de cualquier álgebra m-convexa A como un límite proyectivo de álgebras de Banach. Como ya se ha mencionado anteriormente, esta representación constituye, de hecho, una conclusión fundamental de toda la teoría de álgebras localmente m-convexas. Como veremos a través de esta descomposición preguntas básicas acerca de un álgebra localmente m-convexa se pueden reducir a las preguntas análogas en sus respectivas álgebras de Banach.

Sea A un álgebra localmente m-convexa junto con una base local $\mathfrak{N} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de A que consiste de m-barriles. Al considerar las respectivas funciones indicadoras de los elementos de $\mathfrak{N}$, uno obtiene una familia $\Gamma = (p_\alpha)_{\alpha \in I}$ de semi-normas submultiplicativas (continuas) que definen la topología de A.

Por otro lado, para cada índice $\alpha \in I$, la pareja (A, p_α) es un álgebra semi-normada, entonces esta puede definir la respectiva álgebra normada A_α; es decir, uno tiene

$$A_\alpha = A/p_\alpha^{-1}(0) \tag{2.19}$$

donde $p_\alpha^{-1}(0) = Ker(p_\alpha) = \{x \in A : p_\alpha(x) = 0\} \equiv N_\alpha$ es un ideal bilateral cerrado del álgebra topológica A (Véase la demostración del Teorema (2.6)).

Tomando las completaciones en (2.19) para cada $\alpha \in I$, el álgebra de Banach correspondiente

$$\widehat{A_\alpha} = A/\widehat{p_\alpha^{-1}(0)} \tag{2.20}$$

Más aún, consideremos la respectiva función cociente (canónico)

$$\rho_\alpha : A \longrightarrow A_\alpha := A/N_\alpha,\ \alpha \in I \tag{2.21}$$

la cual es un morfismo de álgebras, sea también $\overline{\rho_\alpha}$ la función definida por el siguiente digrama:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\rho_\alpha"] \arrow[dr, "\overline{\rho_\alpha} = i_\alpha \circ \rho_\alpha"'] & A_\alpha \arrow[d, "i_\alpha \text{ (inyección canónica)}"] \\ & \widehat{A_\alpha} \end{tikzcd} \tag{2.22}$$

Este también es un morfismo del álgebra dada A en el álgebra de Banach $\widehat{A\alpha}$, $\alpha \in I$.

Ahora definimos un orden parcial en el conjunto de índices I por la siguiente relación.

$$Si \ \ \alpha, \beta \ \ son \ \ elementos \ \ de \ \ I, \ \ sean \ \alpha \leq \beta, \ \ si \ \ U_\alpha \subseteq U_\beta; \tag{2.23}$$

$$equivalentemente \ \ si \ \ \rho_\alpha(x) \leq \rho_\beta(x) \ \ \forall x \in A \qquad . \tag{2.24}$$

Por hipótesis para $\mathfrak{N}$ concluimos que I dotada con el orden parcial anterior se convierte en un conjunto dirigido.

Así, para cualesquiera $\alpha, \beta \in I$ con $\alpha \leq \beta$ obtenemos por (2.23), $\rho_\alpha \leq \rho_\beta$, cumple

$$N_\beta = Ker(\rho_\beta) \subseteq Ker(\rho_\alpha) = N_\alpha.$$

Entonces, la relación

$$f_{\alpha\beta} : A_\beta \longrightarrow A_\alpha$$

$$donde, \quad f_{\alpha\beta}(x + N_\beta) := x + N_\alpha = [x]_\alpha$$

con $x \in A$ define un morfismo suprayectivo de álgebras $f_{\alpha\beta} : A_\beta \to A_\alpha$ tal que por (2.21) obtenemos la relación

$$\rho_\alpha = f_{\alpha\beta} \circ \rho_\beta \tag{2.25}$$

para cualesquiera $\alpha, \beta \in I$, con $\alpha \leq \beta$. Las funciones $f_{\alpha\beta}$, con $\alpha \leq \beta$, son continuas también. Además (2.13) y (2.14) son satisfechas. En efecto, sea $x + N_\alpha \in A_\alpha$ entonces $f_{\alpha\alpha}(x + N_\alpha) = x + N_\alpha = [x]_\alpha \Rightarrow f_{\alpha\alpha} : A_\alpha \to A_\alpha$ es la identidad. Ahora verifiquemos que se cumple (2.14)

$$f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma}(x + N_\gamma) = f_{\alpha\beta}(f_{\beta\gamma}(x + N_\gamma)) = f_{\alpha\beta}(x + N_\beta) = x + N_\alpha = f_{\alpha\gamma}(x + N_\gamma)$$

por lo tanto $f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma} = f_{\alpha\gamma}$.

Concluimos que la familia $\{(A_\alpha, f_{\alpha\beta})\}_{\alpha\in I}$ define un sistema proyectivo de álgebras normadas, correspondiente a la base local $\mathfrak{N}$ en A. Más aún, al considerar las extensiones continuas $\overline{f_{\alpha\beta}}$ de las funciones $f_{\alpha\beta}$ uno obtiene un sistema proyectivo de álgebras de Banach $\{(\widehat{A_\alpha}, \overline{f_{\alpha\beta}})\}_{\alpha\in I}$ y la relación respectiva (2.25) es cierta, tambien.

Por la discusión en la sección previa uno obtiene el álgebra localmente m-convexa $\varprojlim A_\alpha$, así como el álgebra localmente m-convexa completa $\varprojlim \widehat{A_\alpha}$.

Nuestro principal interés será encontrar las relaciones entre las dos álgebras anteriores y el álgebra A dada.

Para ello necesitamos los dos lemas siguientes.

Lema 2.15. *Sea $A = \varprojlim(A_\alpha, f_{\alpha\beta})$ un álgebra topológica límite proyectivo. Entonces una base local de A es dada por la familia*

$$\{f_\alpha^{-1}(U_\alpha) : U_\alpha \in \mathfrak{N}_\alpha, \alpha \in I\}$$

donde $\mathfrak{N}_\alpha$ es una base local de álgebras de $A_\alpha, \alpha \in I$

Demostración. Por (2.11) y (2.17) obtenemos una base local de A al considerar conjuntos de la forma

$$\bigcap_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) \tag{2.26}$$

donde los conjuntos U_{α_i} corren sobre bases locales de las álgebras A_α, es decir, $\mathfrak{N}_\alpha$, $\alpha \in I$.

Por otro lado, como I es un conjunto dirigido, existe un índice $\alpha \in I$ tal que $\alpha_i \leq \alpha$ con i=1,...,n, así que uno obtiene $f_{\alpha_i} = f_{\alpha_i\alpha} \circ f_\alpha$; luego uno tiene

$$\bigcap_{i=1}^{n} f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i}) = \bigcap_{i=1}^{n} f_{\alpha}^{-1}(f_{\alpha_i\alpha}^{-1}(U_{\alpha_i})) = f_{\alpha}^{-1}(\bigcap_{i=1}^{n} f_{\alpha_i\alpha}^{-1}(U_{\alpha_i})) = f_{\alpha}^{-1}(V_{\alpha}) \tag{2.27}$$

donde el conjunto $V_\alpha = \bigcap\limits_{i=1}^{n} f_{\alpha_i\alpha}^{-1}(U_{\alpha_i})$ es una vecindad del cero en A_α. Así, existen $U_\alpha \in \mathfrak{N}_\alpha$ con $U_\alpha \subseteq V_\alpha$, lo cual prueba la afirmación sobre la base (2.26) y (2.27), es decir, una base local de A está dada por la familia

$$\{f_{\alpha}^{-1}(U_{\alpha}) : U_{\alpha} \in \mathfrak{N}_{\alpha}, \alpha \in I\}$$

donde $\mathfrak{N}_\alpha$ es una base local del álgebra $A_\alpha, \alpha \in I$.

Ahora, por el lema anterior, también llegamos al siguiente resultado, el cual aplicamos en el siguiente teorema.

Lema 2.16. *Sea $A = \varprojlim(A_\alpha, f_{\alpha\beta})$ el álgebra límite proyectivo como en el lema anterior, y B cualquier subespacio vectorial de A. Entonces uno tiene*

$$\overline{B} = \bigcap_{\alpha \in I} f_{\alpha}^{-1}(\overline{f_{\alpha}(B)}) = \varprojlim \overline{f_{\alpha}(B)} \tag{2.28}$$

donde las funciones $f_\alpha, \alpha \in I$ son dados por $f_\alpha = \Pi_\alpha|_A : A \to A_\alpha$. En particular, si B es cerrado, obtenemos que

$$B = \varprojlim f_{\alpha}(B) = \varprojlim \overline{f_{\alpha}(B)}. \tag{2.29}$$

Demostración. La familia

$$\{(f_{\alpha}(B), f_{\alpha\beta}|_{f_{\beta}(B)})\}_{\alpha \in I} \tag{2.30}$$

define un sistema proyectivo de espacios (vectoriales) topológicos, pues

$f_{\alpha\alpha} : f_\alpha(B) \longrightarrow f_\alpha(B)$, está definida por: $f_{\alpha\alpha} = idf_\alpha(B)$ y además

$f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma}(f_\gamma(b)) = f_{\alpha\beta}(f_{\beta\gamma}(f_\gamma(b))) = f_{\alpha\beta}(f_\beta(b)) = f_\alpha(b) = f_{\alpha\gamma}(f_\gamma(b))$, por lo tanto, $f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma} = f_{\alpha\gamma}$

Por otro lado, como $f_{\alpha\beta}(\overline{f_\beta(B)}) \subseteq \overline{f_{\alpha\beta}(f_\beta(B))} = \overline{f_\alpha(B)}$ para cualquier $\alpha \leq \beta$, uno obtiene que la familia

$$\{(\overline{f_\beta(B)}, f_{\alpha\beta}|_{\overline{f_\beta(B)}})\}_{\alpha\in I} \tag{2.31}$$

define también un sistema proyectivo de espacios (vectoriales) topológicos, así la segunda igualdad de (2.28) es ahora un nueva consecuencia directa de la misma definición.

Ahora probaremos que $\overline{B} \subset \bigcap\limits_{\alpha\in I}(\overline{f}_\alpha(B))$. Para ello es suficiente probar que $\overline{B} \subseteq f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(B)})$, $\forall\alpha \in I$ pues $\overline{B} \subseteq \overline{f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(B)})} = f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(B)})$, $\forall\alpha \in I$. Entonces, sea $x \in B \Rightarrow$
$f_\alpha(x) \subset f_\alpha(B) \subset \overline{f_\alpha(B)}$.

Por último es suficiente probar que cada elemento en $\bigcap\limits_{\alpha\in I} f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(B)})$ es un punto de acumulación de B. Así, si $f_\alpha(x) = x_\alpha \in \overline{f_\alpha(B)}$ $\forall\alpha \in I$, entonces para cada vecindad abierta básica U_α de x_α en E_α (es decir, un elemento de un sistema fundamental de vecindades abiertas del punto en cuestión) uno tiene $U_\alpha \cap f_\alpha(B) \neq \phi$ así que $f_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap B \neq \phi$ donde $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ es una vecindad abierta básica de x en A por el Lema (2.15) prueba la afirmación. Por lo tanto, $\overline{B} = \bigcap\limits_{\alpha\in I} f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(B)}) = \lim\limits_{\leftarrow} \overline{f_\alpha(B)}$, uno tiene que

$$B \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} f_\alpha^{-1}(f_\alpha(B)) \subseteq \bigcap_{\alpha\in I} f_\alpha^{-1}(\overline{f_\alpha(B)})$$

Así por (2.30) y por (2.31) obtenemos

$$B \subseteq \lim_{\leftarrow} f_\alpha(B) = \lim_{\leftarrow} \overline{f_\alpha(B)} = \overline{B}$$

Entonces, $B = \lim\limits_{\leftarrow} f_\alpha(B) = \lim\limits_{\leftarrow} \overline{f_\alpha(B)}$.

Hemos llegado ahora al resultado principal de esta sección.

Teorema 2.17. *Sea A un álgebra localmente m-convexa (Hausdorff) y $\mathfrak{N} = (U_\alpha)_{\alpha\in I}$ una base local de A que consiste de m-barriles. Más aun, denotemos por $\widehat{A}$ a la completación de A y sea A_α (resp. $\widehat{A_\alpha}$), $\alpha \in I$, las álgebras normadas (resp. álgebras de Banach) correspondientes a la base local $\mathfrak{N}$ definidas por $A_\alpha = A/p_\alpha^{-1}(0)$ (resp. $\widehat{A_\alpha} = \widehat{A/p_\alpha^{-1}(0)}$). Entonces tenemos las relaciones*

$$A \subseteq \lim\limits_{\leftarrow} A_\alpha \subseteq \lim\limits_{\leftarrow} \widehat{A_\alpha} = \widehat{A} \tag{2.32}$$

mediante isomorfismos algebraicos topológicos. En particular, para cada álgebra completa localmente m-convexa A, con $\mathfrak{N}$ como antes, obtenemos las relaciones

$$A = \lim\limits_{\leftarrow} A_\alpha = \lim\limits_{\leftarrow} \widehat{A_\alpha} \tag{2.33}$$

mediante isomorfismos isométricos algebraicos topológicos.

Demostración. Considerando las álgebras localmente m-convexas $\lim\limits_{\leftarrow} A_\alpha$ y $\lim\limits_{\leftarrow} \widehat{A_\alpha}$, obtenemos la siguiente función

$$\phi : A \to \lim\limits_{\leftarrow} A_\alpha \quad \text{donde} \quad x \to \phi(x) := (\rho_\alpha(x)) \tag{2.34}$$

donde, $\rho_\alpha(x) = x + Ker(\rho_\alpha) = [x]_\alpha$, $\alpha \in I$, es decir,
$\rho_\alpha(x) = (f_{\alpha\beta} \circ \rho_\beta)(x) = f_{\alpha\beta}(\rho_\beta(x)) = [x]_\alpha$, por lo tanto, $\phi(x)$, $x \in A$; es un elemento de $\lim\limits_{\leftarrow} A_\alpha$. Así ϕ está bien definida. Ahora, es claro que ϕ define un morfismo de las álgebras respectivas. Probaremos que ϕ define un isomorfismo topológico (de álgebras) en $\lim\limits_{\leftarrow} A_\alpha$, $\alpha \in I$.

Efectivamente, si $\phi(x) = ([x]_\alpha) = 0$, entonces $[x]_\alpha = 0$ con $\alpha \in I$ que pues $\rho_\alpha(x) = 0$, para cada $\alpha \in I$, así que, como A es de Hausdorff llegamos a que $x = 0$. Por lo tanto la función ϕ es inyectiva.

Además, $(f_\alpha \circ \phi)(x) = f_\alpha([x]_\alpha) = [x]_\alpha = \rho_\alpha(x)$, por lo tanto,

$$f_\alpha \circ \phi = \rho_\alpha, \ \alpha \in I. \tag{2.35}$$

Es decir, tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\phi"] \arrow[dr, "f_\alpha \circ \phi = \rho_\alpha"'] & \lim\limits_{\leftarrow} A_\alpha \arrow[d, "f_\alpha"] \\
 & A_\alpha
\end{tikzcd}$$

lo cual implica que ϕ es continua. Por otro lado, la función inversa

$$\phi^{-1} : \phi(A) \subseteq \lim\limits_{\leftarrow} A_\alpha \longrightarrow A \tag{2.36}$$

es también es continua. En efecto, si $U_\alpha \in \mathfrak{N}$ es cualquier miembro de la base local de A dada, el conjunto

$$V = (\prod_{\beta \in I} V_\beta) \bigcap \phi(A),$$

con $V_\alpha = \rho_\alpha(\frac{1}{2}U_\alpha)$ y $V_\beta = A_\beta$, para cada $\beta \in I$, con $\beta \neq \alpha$, define una vecindad del cero en $\phi(A)$, de tal forma que $V \subseteq \phi(U_\alpha)$. Entonces, ϕ es también una función abierta. Y hemos probado que ϕ define un isomorfismo algebraico topológico del álgebra A dada en $\lim\limits_{\leftarrow} A_\alpha$.

Las inyeciones canónicas (isomorfismos algebraico-topológicos) $j_\alpha : A_\alpha \longrightarrow \widehat{A_\alpha}$, $\alpha \in I$ conmutan con las funciones $f_{\alpha\beta}$ y sus extensiones $\overline{f_{\alpha\beta}} : \widehat{A_\beta} \longrightarrow \widehat{A_\alpha}$, con $\alpha \leq \beta$, y obtenemos un isomorfismo (de álgebras)

$$j = \lim_{\leftarrow} j_\alpha : \lim_{\leftarrow} A_\alpha \longrightarrow \widehat{A_\alpha} \tag{2.37}$$

que es tambien topológico, lo cual es fácilmente de ver por de las definiciones de las topologías de las álgebras involucradas en (2.37).

Por otro lado, por (2.35) y (2.21) tenemos $f_\alpha(\phi(A)) = \rho_\alpha(A) = A_\alpha$ para cada $\alpha \in I$; entonces $A \subseteq \overline{A} = \overline{\phi(A)}$ porque ϕ es isomorfismo de álgebras como se probó antes, entonces $\overline{\phi(A)} = \lim\limits_{\leftarrow} \overline{f_\alpha(\phi(A))}$ y $f_\alpha(\phi(A)) = A_\alpha$ lo que implica $\lim\limits_{\leftarrow} \overline{f_\alpha(\phi(A))} = \lim\limits_{\leftarrow} \overline{A_\alpha}$ por el Lema (2.16) $\lim\limits_{\leftarrow} \overline{A_\alpha} = \lim\limits_{\leftarrow} \widehat{A_\alpha}$, entonces podemos concluir $A \subseteq \overline{A} = \overline{\phi(A)} = \lim\limits_{\leftarrow} \overline{f_\alpha(\phi(A))} = \lim\limits_{\leftarrow} \overline{A_\alpha} = \lim\limits_{\leftarrow} \widehat{A_\alpha}$. Por el Lema (2.14) el $\lim\limits_{\leftarrow} \widehat{A_\alpha}$ es completo. Concluimos que

$$\widehat{A} = \overline{A} = \lim_{\leftarrow} \overline{A_\alpha} = \overline{\lim_{\leftarrow} A_\alpha} = \lim_{\leftarrow} \widehat{A_\alpha}$$

mediante isomorfismos algebraicos topológicos, lo cual junto con (2.37) prueban ambas relaciones (2.32) y (2.33) y con esto finaliza la prueba del teorema.

Una consecuencia directa de lo anterior es ahora el siguiente corolario.

Corolario 2.18. *Cada álgebra localmente m-convexa (Hausdorff) es, mediante un isomorfismo algebraico topológico, una subálgebra de un producto cartesiano de álgebras de Banach. Esto proporciona, un sistema proyectivo de álgebras (de Banach) topológicas, tal que el álgebra dada es también una subálgebra densa de la respectiva álgebra límite proyectivo.*

Si A tiene una base local numerable $\mathfrak{N} = (U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (es decir, A es un álgebra localmente m-convexa metrizable), obtenemos el siguiente corolario del teorema (2.17). En este respecto, es claro que podemos suponer que la base local, $\mathfrak{N}$, consiste de una sucesión decreciente de subconjuntos de A. Así, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 2.19. *Cada álgebra localmente m-convexa de Fréchet es (mediante los isomorfismos algebraicos topológicos) el límite proyectivo de una "sucesión decreciente" de álgebras de Banach.*

Observación. La sucesión A_n, $n \in \mathbb{N}$, de álgebras de Banach considerada en el corolario anterior es tal que, para cada $m \leq n$ en $\mathbb{N}$, tenemos un morfismo (continuo) de álgebras $\overline{f_{nm}} : \widehat{A_n} \longrightarrow \widehat{A_m}$, que no es en general inyectivo.

Definición 2.20. *Supongamos que damos un álgebra localmente m-convexa completa A y una base local $\mathfrak{N} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de A que consiste de m-barriles. Una descomposición de Arens-Michael A, correspondiente a la base local $\mathfrak{N}$ bajo consideración es una expresión de la forma*

$$A = \lim_{\leftarrow} \widehat{A_\alpha}$$

la cual existe y tiene sentido por el Teorema (2.17) excepto por un isomorfismos de álgebras topológicas.

Es conveniente hacer notar que, abusando de la terminología, nos referimos a una descomposición de Arens-Michael de cualquier álgebra localmente m-convexa A, no necesariamente completa para considerar cualquier relación de la forma

$$A \subseteq \lim_{\leftarrow} A_\alpha \subseteq \lim_{\leftarrow} \widehat{A} = \lim_{\leftarrow} \widehat{A}$$

correspondiente a una base local dada $\mathfrak{N} = (U_\alpha)_{\alpha \in I}$ de A.

2.2.3. Funcionales lineales multiplicativos y el espectro.

En esta sección A denotará un álgebra completa, conmutativa, localmente m-convexa con unidad e, que es un espacio complejo localmente convexo con un sistema de seminormas submultiplicativas $\|x\|_\alpha$, $\alpha \in \Lambda$.

Definición 2.21. *Sea A como arriba. Denotamos por* $\mathcal{M}^\sharp(A)$ *el conjunto de todas las funcionales lineales multiplicativas no nulas de A. Denotamos por* $\mathcal{M}(A)$ *al conjunto de todos los elementos de* $\mathcal{M}^\sharp(A)$ *que son continuos y con* $\mathcal{M}_\alpha(A)$ *al conjunto de todos los elementos en* $\mathcal{M}(A)$ *que son continuos con respecto a la seminorma* $\|\cdot\|_\alpha$*. Decimos que el álgebra A es* ***funcionalmente continua*** *si* $\mathcal{M}^\sharp(A) = \mathcal{M}(A)$*. Entonces tenemos*
$\mathcal{M}_\alpha(A) \subset \mathcal{M}(A) \subset \mathcal{M}^\sharp(A)$

Definición 2.22. *La topología de Gelfand en* $\mathcal{M}^\sharp(A)$ *está definida de la siguiente forma: si* $f_0 \in \mathcal{M}^\sharp(A)$ *entonces la base de vecindades de* f_0 *en* $\mathcal{M}^\sharp(A)$ *está dada por*
$\mathrm{U}(f_0; \epsilon; x_1, x_2, ..., x_n) = \{f \in \mathcal{M}^\sharp(A) : |f(x_i) - f_0(x_i)| < \epsilon,\ i = 1, 2..., n\}$,
donde $\epsilon > 0$ *y* $x_1, x_2, ...x_n \in A$.

$\mathcal{M}(A)$ es entonces un subespacio de $\mathcal{M}^\sharp(A)$ bajo la topología relativa.

Sea ahora $\alpha \in I$, definimos $N_\alpha = \{x \in A : \|x\|_\alpha = 0\}$. Este es un ideal cerrado de A (Véase la demostración del Teorema (2.6)).

Consideremos al álgebra normada $(A/N_\alpha, \|\cdot\|_\alpha)$ a la que llamamos A_α y la completamos. Así obtenemos un álgebra normada completa, la cual denotamos con $\widehat{A_\alpha}$.

El subespacio $\mathcal{M}_\alpha(A) \subset \mathcal{M}(A)$ puede identificarse con $\mathcal{M}(\widehat{A_\alpha})$. De hecho hay una correspondencia uno a uno entre $\mathcal{M}(\widehat{A_\alpha})$ y $\mathcal{M}_\alpha(A)$ dada por:

$$\phi : \mathcal{M}_\alpha(A) \longrightarrow \mathcal{M}(\widehat{A_\alpha})$$

$$F \longmapsto \phi(F) = f$$

donde $(f \circ \pi_\alpha)(x) = F(x)$ y $\overline{\rho_\alpha} : A \to A/N_\alpha \hookrightarrow \widehat{A_\alpha}$ es el morfismo natural. (La continuidad de F respecto a $\| \cdot \|_\alpha$ implica que $f \in \mathcal{M}(\widehat{A_\alpha})$).

ϕ está bien definida pues A/N_α es denso en $\widehat{A_\alpha}$, y su inversa está dada por $\phi^{-1}(f) = f \circ \overline{\rho_\alpha}$

Para comprobar que ϕ es un homomorfismo, sea $\mathcal{V} = \mathcal{V}(f_0; \epsilon; \overline{\rho_\alpha}(x_1), \overline{\rho_\alpha}(x_n), ..., \overline{\rho_\alpha}(x_n))$ en abierto básico un $\mathcal{M}(\widehat{A_\alpha})$ y sea $\phi(G) = f_0$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\phi^{-1}(\mathcal{V}) &= \{F \in \mathcal{M}_\alpha(A) : \phi(F) \in \mathcal{V}\} \\
&= \{F \in \mathcal{M}_\alpha(A) : |\phi(F)(\overline{\rho_\alpha}(x_i)) - f_0(\overline{\rho_\alpha}(x_i))| < \epsilon, \ \forall i = 1, 2, ..., n\} \\
&= \{F \in \mathcal{M}_\alpha(A) : |F(x_i) - G(x_i)| < \epsilon, \ \forall i = 1, 2, ..., n\} \\
&= \mathcal{U}(G; \epsilon, x_1, x_2, .., x_n)
\end{aligned}$$

que es un abierto básico de $\mathcal{M}_\alpha(A)$, lo cual prueba que ϕ es continua.

Análogamente $\phi(\mathcal{U}G; \epsilon; x_1, x_2, ..., x_n)) = \mathcal{V}(\phi(G); \epsilon; \overline{\rho_\alpha}(x_1), \overline{\rho_\alpha}(x_2), ..., \overline{\rho_\alpha}(x_n))$ lo cual prueba que ϕ es abierta.

Por lo tanto ϕ es un homeomorfismo.

Definición 2.23. *El espacio $\mathcal{M}(A)$ es el* ***espectro*** *de A.*

Observacion 2.24. *$\mathcal{M}_\alpha(A)$ es compacto $\forall \alpha \in \Lambda$ pues $\mathcal{M}_\alpha(A) \cong \mathcal{M}(\widehat{A_\alpha})$. Además, $\mathcal{M}(A) = \bigcup\limits_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha(A)$.*

Definición 2.25. *Sean A como antes, y $x \in A$.* ***La transformada de Gelfand*** *de x es la función*

$$\widehat{x} : \mathcal{M}(A) \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$f \longmapsto \widehat{x}(f) = f(x)$$

Observacion 2.26. *$\widehat{x}$ es una función continua.*

Demostración. Dada $\epsilon > 0$ sea $\mathcal{U} = \mathcal{U}(f;\epsilon;x) = \{g \in \mathcal{M}(A) : |f(x) - g(x)| < \epsilon\}$, entonces $\widehat{x}(\mathcal{U}) \subseteq B_\epsilon(f(x))$, donde $B_\epsilon(f(x))$ es la bola con centro en $f(x)$ y radio ϵ.

Lema 2.27. *Sea A un álgebra m-convexa completa. Si $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} A_\alpha$ y $f_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha$ siempre que $\beta > \alpha$, entonces existe un elemento $x \in A$ tal que $f_\alpha(x) = x_\alpha \ \ \forall\alpha \in I$.*

Demostración. Como $f_{\alpha\beta}(x_\beta) = x_\alpha$, entonces $(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \widehat{A}$ y por el Teorema (2.17) existe $x \in A$ tal que $f_\alpha(x) = x_\alpha \ \ \forall\alpha \in I$.

Teorema 2.28. *Sea $x \in A$. Entonces $x \in G(A)$ si y sólo si $f_\alpha(x) \in G(A_\alpha)$ para toda $\alpha \in I$.*

Demostración. Si $x \in G(A)$ entonces $f_\alpha \in G(A_\alpha)$ porque es la imagen homorfa de un elemento invertible.

Recíprocamente, si $f_\alpha(x) \in G(A_\alpha) \ \ \forall\alpha \in I$, como $f_\alpha(e)$ es la unidad en A_α, entonces

$$\begin{aligned} f_\alpha(e) &= f_{\alpha\beta}(f_\beta(e)) \\ &= f_{\alpha\beta}(f_{\beta(x)}f_\beta(x)^{-1}) \\ &= f_{\alpha\beta}(f_\beta(x)) \cdot f_{\alpha\beta}(f_\beta(x)^{-1}) \\ &= f_\alpha(x)f_{\alpha\beta}(f_\beta(x))^{-1}. \end{aligned}$$

Esto quiere decir que $f_{\alpha\beta}(f_\beta(x))^{-1} \ = \ f_\alpha(x)^{-1}$.

Así que si $\alpha << \beta$, entonces $f_{\alpha\beta}(f_\beta(x)^{-1}) = f_\alpha(x)^{-1}$. Se cumple la hipótesis del Lema (2.27) para $x_\alpha = f_\alpha(x)^{-1}$. Esto implica que existe $y \in A$ tal que $f_\alpha(y) = f_\alpha(x)^{-1} \ \forall\alpha \in I$.

Ahora $f_\alpha(xy) = f_\alpha(yx) = f_\alpha(x)f_\alpha(y) = f_\alpha(e) \ \ \forall\alpha \in I$ y entonces $xy = yx = e$; ésto nos dice que $x \in G(A)$.

Teorema 2.29. ***(Propiedad de Wiener para álgebras m-convexas).***

Si A es como antes, entonces $x \in G(A)$ *si y sólo si* $\widehat{x}(f) \neq 0 \, \forall f \in \mathcal{M}(A)$.

Demostración. La propiedad de Wiener se cumple en álgebras de Banach; es decir, si B es un álgebra de Banach y $y \in B$, entonces $y \in G(B) \Leftrightarrow \widehat{y}(f) \neq 0, \; \forall f \in \mathcal{M}(B)$, por lo tanto, para cada $x \in A$, tenemos que $\overline{\rho_\alpha}(x) \in G(\widehat{A_\alpha}) \Leftrightarrow \widehat{\overline{\rho_\alpha}}(x)(f_\alpha) \neq 0, \forall f_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha(A)$.

$\Rightarrow$)Sea $x \in G(A)$, entonces $\overline{\rho_\alpha}(x) \in G(\widehat{A_\alpha}), \; \forall \alpha \in I$ y por lo tanto $\widehat{\overline{\rho_\alpha}}(x)(f_\alpha) \neq 0$, $\forall f_\alpha \in \mathcal{M}_\alpha(A)$. Si $f \in \mathcal{M}(A)$, entonces $f = f_\alpha \in \mathcal{M}(\widehat{A_\alpha})$ para alguna α; por lo tanto

$$\widehat{x}(f) = \widehat{x}(f_\alpha) = f_\alpha(x) = (f \circ \overline{\rho_\alpha})(x) = f(\overline{\rho_\alpha}(x)) = \widehat{\overline{\rho_\alpha}}(x)(f) \neq 0$$

$\Leftarrow$) Si $\widehat{x} \neq 0 \;\; \forall f \in \mathcal{M}(A)$, entonces $\widehat{x}(f) \neq 0$,
$\forall f \in \mathcal{M}(A)$, entonces $f(x) \neq 0, \forall f \in \mathcal{M}(A)$; en particular $f(x) \neq 0, \forall f \in \mathcal{M}(\widehat{A_\alpha})$ y por lo tanto $(f \circ \overline{\rho_\alpha})(x) \neq 0, \forall f \in \mathcal{M}(A_\alpha)$, es decir, $\overline{\rho_\alpha}(x) \in G(\widehat{A_\alpha}), \forall \alpha \in \Lambda$. Entonces $x \in G(A)$.

Teorema 2.30. *Sea A un álgebra localmente m-convexa con unidad (sobre los reales o complejos, obsérvese que no estamos suponiendo conmutatividad, ni completitud), entonces la operación* $x \longmapsto x^{-1}$ *es continua en G(A).*

Demostración. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que A es completa ya que si A no es completa, la sumergimos en su completación $\widehat{A}$. Entonces si mostramos que la operación $x \to x^{-1}$ de $G(\widehat{A})$ en si misma es continua y la restringimos a $G(A)$, entonces la operación también es continua de $G(A)$ en si misma pues A es densa en $\widehat{A}$. Supongamos ahora que $\{x_t\} \longrightarrow x_0$ es una red, $x_t, x_0 \in G(A)$. Entonces para cada α, $\{\overline{\rho_\alpha}(x_t)\} \longrightarrow \overline{\rho_\alpha}(x_0)$ en $\widehat{A_\alpha}$ (pues π_α es continua), pero $\widehat{A_\alpha}$ es de Banach y ahí la inversa es continua, entonces $\{\overline{\rho_\alpha}(x_t)^{-1}\} \longrightarrow \overline{\rho_\alpha}(x_0^{-1})$, pero $\overline{\rho_\alpha}(x_t)^{-1} = \pi_\alpha(x_t^{-1})$ y por lo tanto $\{x_t^{-1}\} \longrightarrow x_0^{-1}$ en A.

Ahora presentamos el teorma de Gelfand-Mazur para álgebras m-convexas.

Teorema 2.31. ***(Gelfand - Mazur).*** *Si A es como en el teorema anterior y $A = G(A) \cup (0)$, entonces $A = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ o $\mathbb{Q}$ en el caso real y $A = \mathbb{C}$ en el caso complejo.*

En el caso conmutativo el teorema anterior se sigue del:

Teorema 2.32. *Sea A un álgebra conmutativa, compleja, m-convexa con unidad e. Entonces $\mathcal{M}(A)$ es no vacío.*

Demostración. Sabemos que $\mathcal{M}(A) = \bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} \mathcal{M}_\alpha(A) \cong \bigcup\limits_{\alpha \in \lambda} \mathcal{M}(\widehat{A_\alpha})$.

Como $\widehat{A_\alpha}$ es de Banach $\forall\ \alpha \in I$, entonces $\mathcal{M}(\widehat{A_\alpha}) \neq \phi \quad \forall \alpha \in I$. De aquí se sigue la afirmación.

Definición 2.33. *Sea A un álgebra localmente m-convexa conmutativa, compleja con unidad e. Si $x \in A$, entonces* ***el espectro*** *de x en A es*

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \notin G(A)\}$$

Teorema 2.34. *Sea A un álgebra localmente m-convexa conmutativa, compleja con unidad e. Si $x \in A$, entonces*

$$\sigma(x) = \widehat{x}\ (\mathcal{M}(A)) = \widehat{x}\ (\mathcal{M}^\sharp(A)) = \bigcup_\alpha \sigma_{\widehat{A_\alpha}}(\overline{\rho_\alpha}(x))$$

Demostración. Por definición $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\ x - \lambda e \notin G(A)\}$, entonces $\lambda \in \sigma(x)$ si y sólo si existe $f \in \mathcal{M}(A)$ tal que $0 = (\widehat{x - \lambda e})(f) = f(x - \lambda e)$, es decir, $\widehat{x}(f) = f(x) = \lambda$; esto es, $\lambda \in \widehat{x}(\mathcal{M}(A))$ y por lo tanto $\lambda \in \widehat{x}(\mathcal{M}^\sharp(A))$. Esto dice $\sigma(x) = \widehat{x}(\mathcal{M}(A)) \subset \widehat{x}(\mathcal{M}^\sharp(A))$.

Como $\mathcal{M}(A) = \bigcup_{\alpha \in I} \mathcal{M}_\alpha(A)$, entonces

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(x) \Leftrightarrow \lambda \in \widehat{x}(\mathcal{M}(A)) &= \widehat{x}(\bigcup_{\alpha\in I} \mathcal{M}_\alpha(A)) \\ &= \bigcup_{\alpha\in I} \widehat{x}(\mathcal{M}_\alpha(A)) \\ &= \bigcup_{\alpha\in I} (\widehat{\pi_\alpha(x)})(\mathcal{M}_\alpha(A)) \\ &= \bigcup_{\alpha\in I} \sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x)) \end{aligned}$$

ya que $\widehat{x}(f) = f(x) = f(\pi_\alpha(x)) = \widehat{\pi_\alpha(x)}(f)$ tenemos que $\sigma(x) = \widehat{x}(\mathcal{M}(A)) = \widehat{x}\left(\bigcup_{\alpha\in I} \sigma_{\widehat{A_\alpha}}(\overline{\rho_\alpha}(x))\right)$ y $\widehat{x}(\mathcal{M}(A)) \subseteq \widehat{x}(\mathcal{M}^\sharp(A))$.

Si $\lambda \in \widehat{x}(\mathcal{M}^\sharp(A))$, entonces $\exists f \in \mathcal{M}^\sharp(A)$ tal que $\lambda = \widehat{x}(f)$. Esto implica que $\lambda = f(x)$, lo cual dice que $f(x - \lambda e) = 0$ y por lo tanto $x - \lambda e$ no es invertible; por lo tanto, por la propiedad de Wiener para álgebras m-convexas (Teorema (2.29)), $\exists g \in \mathcal{M}(A)$ tal que $g(x - \lambda e) = 0$ y entonces $\lambda = g(x)$. Así tenemos que $\widehat{x}(\mathcal{M}^\sharp(A)) \subseteq \widehat{x}(\mathcal{M}(A))$.

Observacion 2.35. *Del teorema anterior se sigue que para $F \in \mathcal{M}^\sharp(A)$ y $x \in A$, $F(x) = f(x)$ para alguna $f \in \mathcal{M}(A)$, donde f depende de x.*

En efecto, si $F \in \mathcal{M}^\sharp(A)$ entonces $\widehat{x}(F) \in \widehat{x}(\mathcal{M}^\sharp(A)) = \widehat{x}(\mathcal{M}(A))$. De aquí que $\widehat{x}(F) = \widehat{x}(f)$, con $f \in \mathcal{M}(A)$.

Definición 2.36. *Para $x \in A$ definimos el **radio espectral** de x, $\rho(x)$, como*

$$\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Ahora mostraremos algunas fórmulas para $\rho(x)$.

Teorema 2.37. *Sea $(A, \|\cdot\|_{\alpha\in\sigma})$ un álgebra localmente m-convexa conmutativa, compleja con unidad e. Sea $x \in A$, definimos*

- $r_1(x) = \sup_{\alpha\in\Sigma} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|_\alpha}$,

- $r_2(x) = \sup\limits_{|\cdot|} \lim\limits_{n} \sup \sqrt[n]{|x^n|}$, *donde el supremo se toma con respecto a todas las seminormas continuas* $|\cdot|$ *en* A.

- $r_3(x) = \sup\limits_{f \in A*} \lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{(f(x^n))}$, *donde* A^* *es el conjunto de todos los funcionales lineales continuos de* A *en* $\mathbb{C}$.

- $r_4(x) = \sup\limits_{f\in m(A)} |f(x)|$,

- $r_5(x) = \text{ínf}\{r : \ x - \lambda e \in G(A)\ \forall \lambda,\ |\lambda| > r\}$

- $r_6(x) = \text{ínf}\{r : \ \exists (a_n)_{n=0}^{\infty},\ a_n \in \mathbb{C},\ \Sigma a_n \lambda^n$ *tiene radio de convergencia igual a* r *y* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge en* $A\}$

- $r_7(x) = \text{ínf}\{r : \ \forall (a_n)_{n=0}^{\infty},\ a_n \in \mathbb{C},$ *si* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$ *tiene radio de convergencia igual a* r, *entonces* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge en* $A\}$.

Entonces $r_1(x) = r_2(x) = r_3(x) = r_4(x) = r_5(x) = r_6(x) = r_7(x) = \rho(x)$

Demostración.

Es claro que $r_2(x) \geq r_1(x)$, es decir, $\sup\limits_{|\cdot|} \lim\sup \sqrt[n]{|x^n|} \geq \sup\limits_{\alpha\in\Sigma} \lim \sqrt[n]{\|x^n\|_\alpha}$ y por otro lado, para cada seminorma continua $|\cdot|$ en A, existe una constante $c > 0$ y una $\alpha \in \Sigma$ tal que $|x| \leq c\|x\|_\alpha$, $\forall x \in A$, y por lo tanto

$$\lim\sup \sqrt[n]{|x^n|} \leq \lim \sqrt[n]{c\|x^n\|_\alpha} \leq r_1(x)$$

entonces $r_1(x) = r_2(x)$.

Ahora probamos que $r_1(x) \geq r_3(x)$. Si $f \in A^*$, $\exists c > 0$ tal que $|f(x)| \leq c\|x\|_\alpha \ \ \forall x$ y para alguna $\alpha \in \Lambda$. Entonces $|f(x^n)| \leq c\|x^n\|_\alpha$. De aquí que $\sqrt[n]{|f(x^n)|} \leq \sqrt[n]{c\|x^n\|_\alpha}$ y por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|f(x^n)|} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c\|x^n\|_\alpha} = \lim_{n\to\infty} c^{1/n} \sqrt[n]{\|(x^n)\|_\alpha} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|_\alpha} \leq r_1(x).$$

Así $r_3(x) \leq r_1(x)$ y tenemos $r_1(x) = r_2(x) \geq r_3(x)$.

Probamos ahora que $r_3(x) \geq r_4(x)$. Tenemos

$$\begin{aligned}
r_3(x) &= \sup_{f\in A*} \limsup \sqrt[n]{(f(x^n))} \\
&\geq \sup_{f\in m(A)} \limsup \sqrt[n]{|f(x^n)|} \\
&= \sup_{f\in m(A)} \limsup \sqrt[n]{|f(x)|^n} \\
&= \sup_{f\in m(A)} \limsup |f(x)| \\
&= \sup_{f\in m(A)} |f(x)| = r_4
\end{aligned}$$

A continuación probamos que $r_4 = \rho(x)$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\rho(x) &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} \\
&= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \ \widehat{x}\ \ (\mathcal{M}(A))\} \\
&= \sup\{|f(x)| : f \in \mathcal{M}(A)\} = \sup_{f\in m(A)} |f(x)| = r_4
\end{aligned}$$

Observamos que $r_5 = \rho(x)$

$$\begin{aligned}
\rho(x) &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} \\
&= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \notin G(A)\}\} \\
&= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C}\ y\ x - \lambda e \notin G(A)\} \\
&= \inf\{r : x - \lambda e \in G(A)\ \forall\lambda,\ |\lambda| > r\}
\end{aligned}$$

Hasta este momento hemos probado $r_1(x) = r_2(x) \geq r_3(x) \geq r_4(x) = \rho(x) = r_5(x)$.

Pero claramente $\rho(x) = r_5(x)$. Probamos ahora que $\rho(x) \geq r_1(x)$. Observemos que $\rho(x) \geq \rho_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x))$ puesto que $\rho_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x)) = \sup\{|\lambda| :\ \lambda \in \sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x))\} = \sup|\sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x))|$ y que $\sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x)) \subseteq \bigcup_{\alpha\in\Lambda} \sigma_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x)) = \sigma_A(x)$.

Nos falta probar que $\rho_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x)) \geq \sqrt[n]{\|x^n\|_\alpha}$. Pero

$$\rho_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x)) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|'_\alpha} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|\pi_\alpha(x^n)\|'_\alpha} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|_\alpha}$$

donde $\|\cdot\|'_\alpha$ es la norma en A_α inducida por la seminorma $\|\cdot\|_\alpha$ en A y por lo tanto, $\rho(x) \geq \rho_{A_\alpha}(\pi_\alpha(x)) = \sup_\alpha \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|_\alpha} = r_1(x)$, así que $\rho(x) \geq r_1(x)$.

Esto quiere decir, $r_1(x) = r_2(x) = r_3(x) = r_4(x) = r_5(x) = \rho(x)$.

Es claro que $r_6(x) \leq r_7(x)$. Supongase ahora que $r_6(x) < \infty$ y tomemos algún $r > r_6(x)$. Existe una sucesión compleja $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ para la cual la serie $\sum a_n x^n,\ a_n \in \mathbb{C}$ converge en A y tal que el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^\infty a_n \lambda^n$ es menor que r, es decir,

$$r > \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

o, equivalentemente,

$$r^{-1} < \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$$

entonces tenemos que $r^{-n} < |a_n|$ para un número infinito de subíndices n. Por otro lado, como $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$ converge en A, se tiene que $\|a_n x^n\| \to 0,\ \forall \alpha \in \Lambda$. Esto implica que existe una sucesión creciente de enteros $\{k_n\}$ tal que $\|r^{-k_n} x^{k_n}\|_\alpha \to 0,\ \forall \alpha \in \Lambda$. Por lo tanto $\forall f \in \mathcal{M}(A)$, existen $\alpha \in \Lambda$ y una constante $c > 0$ tales que $|f((x/r)^{k_n})| = |f(x^{k_n} r^{-k_n})| \leq c\|x^{k_n} r^{-k_n}\|_\alpha \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Luego para toda $f \in \mathcal{M}(A)$ se tiene que $|f(x/r)| < 1$, por lo tanto $\frac{1}{|r|}|f(x)| < 1$ y entonces $|f(x)| < r$. Así $r_4(x) < r$ y tenemos que $r_6(x) \geq r_4(x) = \rho(x)$.

Esta misma relación se cumple si $r_6(x) = \infty$. Es suficiente probar que $r_7 \leq \rho(x)$. Esto es claro si $\rho(x) = \infty$. Supongamos que $\rho(x) < \infty$ y que $r > \rho(x) = r_2(x)$.

Para toda seminorma continua $|x|$, tenemos que $\limsup \sqrt[n]{|(\frac{x}{r})^n|} \leq \frac{r_1(x)}{r} < 1$.

Luego la serie $\sum_{n=0}^\infty (\frac{x}{r})^n$ es convergente en A y por lo tanto $r \geq r_7(x)$. Así que tenemos la implicación $r > \rho(x) \Rightarrow r \geq r_7(x)$, lo cual dice que $r_7(x) \leq \rho(x)$.

La situación es $r_1(x) = r_2(x) = r_3(x) = r_4(x) = r_5(x) = \rho(x) \geq r_7(x) \geq r_6(x) \geq \rho(x)$. De aquí se sigue el teorema.

Capítulo 3

Ideales en álgebras topológicas.

3.1. Q-álgebras.

En el capítulo 1 enunciamos y probamos algunas propiedades fundamentales que caracterizan a las álgebras de Banach como son:

- Sus ideales bilaterales máximos son cerrados.
- El espectro $\sigma(x) \neq \phi$ es acotado y compacto.
- Es una Q-álgebra.
- $\mathcal{M}(A) \neq \phi$ y es compacto.
- $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}^{\sharp}(A)$

En este capítulo estableceremos caracterizaciones de las Q-álgebras en clases de álgebras más generales. Comenzamos con las álgebras normadas con unidad.

Toda álgebra de Banach es Q, pero este no es el caso para las álgebras normadas. Existen álgebras normadas que son Q y no son completas, como por ejemplo:

Ejemplo 8. *El álgebra R(D) de todas las funciones racionales complejas definidas en el disco unitario cerrado D de $\mathbb{C}$ con las operaciones puntuales, dotada con la norma*

$$\|q\| := \sup_{z\in\mathbb{C}} |q(z)|.$$

(véase ejemplo (1))

El siguiente teorema muestra que casi todas las propiedades fundamentales de las álgebras de Banach son compartidas por la clase de las Q-álgebras normadas, la cual es una clase más grande. Resulta que algunas de estas propiedades caracterizan de hecho a las Q-álgebras normadas entre las álgebras normadas con unidad.

Teorema 3.1. *(Mascioni) Sea A un álgebra normada, compleja con unidad. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A es una Q-álgebra*
2. *Existe un $\delta \in (0,1] : x \in A$ y $\|e - x\| < \delta$ implica que $x \in G(A)$.*
3. *Si $x \in A$ y $\|e - x\| < 1$, entonces $x \in G(A)$*
4. *Si $x \in A$ y $\|x\| < 1$, entonces $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge en A.*
5. *$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}, \ \forall x \in A$*
6. *$\sup_{\|x\|=1} \rho(x) < \infty$*
7. *$\rho(x) \leq \|x\|, \forall x \in A$*

Demostración.

$(1 \Rightarrow 2)$ Por hipótesis tenemos que G(A) es abierto, entonces la unidad es un punto interior de G(A), es decir, existe un $\delta > 0$ tal que $\{y \in A : \|e - y\| < \delta\} \subset G(A)$. Sabemos que por definición $0 \notin G(A)$, lo que implica $\delta \leq 1$.

$(2 \Rightarrow 6)$ Por (2) existe un $\delta \in (0,1]$: $x \in A$ y $\|e - x\| < \delta$ implica que $x \in G(A)$. Tenemos que $\rho(x) \leq \frac{\|x\|}{\delta}$ para toda $x \in A$, por lo tanto $\sup\limits_{\|x\|=1} \rho(x) \leq \sup\limits_{\|x\|=1} \frac{\|x\|}{\delta} = \frac{1}{\delta} < \infty$, por lo tanto, $\sup\limits_{\|x\|=1} \rho(x) < \infty$.

$(6 \Rightarrow 5)$ Las fórmulas $\rho(a) \geq \lim\limits_{n\to\infty} \|a^n\|^{1/n} = \inf\limits_{n} \|a^n\|^{1/n}$ y $\sigma(x) \neq 0$ son ciertas en cualquier álgebra normada compleja, (véase 1.27 y [8, Prop. 2.8 y Teo. 5.7]).

Demostraremos que $\rho(x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}, \ \ \forall x \in A$. Primero probaremos que $\sigma(p(x)) = p(\sigma(x))$ para todo polinomio no constante p.

Sea $\lambda \in p(\sigma(x))$, entonces $\lambda = p(\alpha_1)$ con $\alpha_1 \in \sigma(x)$, por lo tanto $x - \alpha_1 e \notin G(A)$. Observemos que $p(z) - \lambda = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \cdots (z - \alpha_n)$, lo cual implica que $p(x) - \lambda e = (x - \alpha_1 e)(x - \alpha_2 e) \cdots (x - \alpha_n e)$, por lo que $p(x) - \lambda e$ no es invertible y tenemos que $\lambda \in \sigma(p(x))$, por lo tanto, $p(\sigma(x)) \subseteq \sigma(p(x))$.

Si $\lambda \in \sigma(p(x))$, entonces $p(x) - \lambda e \notin G(A)$ y $p(x) - \lambda e = (x - \beta_1 e)(x - \beta_2 e) \cdots (x - \beta_n e)$, por lo tanto para algún $(x - \beta_i e)$ con $1 \leq i \leq n$, no es invertible, lo que implica que $p(\beta_i - \lambda) = 0$ para algún $1 \leq i \leq n$, por lo que, $p(\beta_i) = \lambda$, por lo tanto $\lambda \in p(\sigma(x))$.

Hemos probado que $\sigma(p(x)) = p(\sigma(x))$ para todo polinomio no constante p.

Entonces, tenemos que para $n \in \mathbb{N}$, $\rho(x)^n = \rho(x^n) \leq M\|x^n\|$, donde $0 < M := \sup\limits_{\|y\|=1} \rho(y) < \infty$. Ahora se sigue inmediatamente que:

$$\rho(x) \leq \left(\lim_{n\to\infty} M\|x^n\|\right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} M^{1/n}\|x^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} M^{1/n} \cdot \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}.$$

$(5 \Rightarrow 7)$ Sea $x \in A$; por la hipótesis tenemos que se cumple

$$\rho(x) = \inf_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \leq \inf_{n\to\infty} (\|x\|^n)^{1/n} = \inf_{n\to\infty} \|x\| \leq \|x\| \ \ \forall x \in A$$

lo que implica que $\rho(x) \leq \|x\|$.

$(7 \Rightarrow 3)$ Sea $x \in A$ tal que $\|1 - x\| < 1$. Entonces, por hipótesis tenemos que

$\rho(1-x) \leq \|1-x\| < 1$, lo que implica $\rho(1-x) < 1$, es decir, $1 \notin \sigma(1-x)$, por lo tanto, $x = 1-(1-x) \in G(A)$, es decir, $x \in G(A)$.

$(3 \Rightarrow 4)$ Tenemos por hipótesis que si $x \in A$ y $\|1-x\| < 1$, entonces $x \in G(A)$. Sea $x \in A$ tal que $\|x\| < 1$. Definimos $S_N := \sum\limits_{n=0}^{N} x^n$, $\forall N \geq 0$ donde $x^0 := 1$. Por la hipótesis $1-x$ es invertible. Sea $y := (x-1)^{-1}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\|S_N - y\| &= \|y(1-x)S_N - y\| = \|y[(1-x)S_N - 1]\| \\
&\leq \|y\| \cdot \|(1-x)S_N - 1\| \\
&= \|y\| \cdot \left\|(1-x)\sum_{n=0}^{N} x^n - 1\right\| \\
&= \|y\| \cdot \left\|\sum_{n=0}^{N} x^n - \sum_{n=1}^{N+1} x^n - 1\right\| \\
&= \|y\| \cdot \|x^{N+1}\| \\
&\leq \|y\| \cdot \|x\|^{N+1}
\end{aligned}$$

Ya que $\|x\| < 1$, entonces $\lim\limits_{N\to\infty} S_N = y$, por lo tanto, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ converge.

$(4 \Rightarrow 3)$ Sea $x \in A$ tal que $\|1-x\| < 1$. Por hipótesis tenemos que $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-x)^n$ converge, a un $y \in A$. Ahora, obtenemos

$$\begin{aligned}
\left\|1 - x\sum_{n=0}^{N}(1-x)^n\right\| &= \left\|1 + \sum_{n=0}^{N}(1-x)^n - x\sum_{n=0}^{N}(1-x)^n - \sum_{n=0}^{N}(1-x)^n\right\| \\
&= \left\|1 + (1-x)\sum_{n=0}^{N}(1-x)^n - \sum_{n=0}^{N}(1-x)^n\right\| \\
&= \left\|1 + \sum_{n=1}^{N+1}(1-x)^n - \sum_{n=0}^{N}(1-x)^n\right\| \\
&= \|(1-x)^{N+1}\| \\
&\leq \|1-x\|^{N+1}
\end{aligned}$$

por lo tanto, $xy = 1$. Similarmente, $yx = 1$, por lo cual x es invertible.

(3 ⇒ 1) Sean $x, y \in A$ tales que $x \in G(A)$ y $\|x-y\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|}$. Esto implica que

$$\|1 - x^{-1}y\| = \|x^{-1}(x-y)\| \leq \|x^{-1}\| \cdot \|x-y\| < \|x^{-1}\| \frac{1}{\|x^{-1}\|} = 1$$

es decir, $x^{-1}y$ es invertible por hipótesis. Sea $\omega := (x^{-1}y)^{-1}$, observemos que $(\omega x^{-1})y = ((x^{-1}y)^{-1}x^{-1}y) = (y^{-1}xx^{-1}y) = y^{-1}y = 1$.

Analógamente se prueba que yx^{-1} es invertible, donde $z = (yx^{-1})^{-1}$. Tenemos que $y(x^{-1}z)^{-1} = y(x^{-1}(yx^{-1})^{-1}) = y(x^{-1}xy^{-1}) = yy^{-1} = 1$. Hemos demostrado que y es invertible por la izquierda y por la derecha, entonces es invertible. Esto prueba que G(A) es abierto.

Teorema 3.2. *Sea A un álgebra m-convexa, con unidad, compleja, completa, conmutativa. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Cada ideal máximo de A es de codimensión 1.*

2. *Para cada elemento $x \in A$ el espectro $\sigma(x)$ es acotado.*

3. *Para cada elemento $x \in A$ el espectro $\sigma(x)$ es compacto.*

4. *A es una Q-álgebra, m-convexa, completa sobre una topología más fuerte que la original.*

5. *A es una Q-álgebra, m-convexa, completa sobre alguna topología.*

6. *El espacio $\mathfrak{M}^\sharp(A)$ de todas las funciones multiplicativas lineales no cero en A es compacto en la topología débil estrella.*

Demostración.

(1 ⇒ 2) Tenemos que mostrar que si para algún $x_0 \in A$ el espectro $\sigma(x_0)$ es no acotado, entonces A posee un ideal máximo de codimensión infinita.

Supongamos que para algún $x_0 \in A$ existe una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \sigma(x_0)$ de números complejos tendiendo a infinito.

Por el Teorema Clásico de Weierstrass [37, Teorema 5.8, p. 119]. Existe una sucesión $\varphi_n(z)$ de funciones enteras tal que

$$\varphi_n^{-1}(0) = \{z_n, z_{n+1}, z_{n+2}, ...\}, \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{3.1}$$

Ponemos

$$x_n = \varphi_n(x_0), \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Sea I el ideal más pequeño de A que contiene todos los elementos $x_1, x_2, ...$ Esta consiste de las sumas finitas de la forma $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, $y_i \in A$.

Mostraremos que I es un ideal propio de A. Si no, entonces $e \in I$, $e = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ para algunos elementos $y_1, y_2, ..., y_n \in A$. Tomemos cualquier funcional $f \in \mathcal{M}(A)$ tal que $f(x_0) = z_n$. Para $1 \leq i \leq n$ tenemos

$$0 = \varphi_i(z_n) = \varphi_i(f(x_0)) = f(\varphi_i(x_0)) = f(x_i)$$

y esto nos da una contradicción ya que:

$$1 = f(e) = f(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i y_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) f(y_i) = 0.$$

Entonces I es un ideal propio.

Sea ahora M cualquier ideal máximo de A que contiene al ideal I. Mostraremos que este es de dimensión infinita. Si no, entonces por el Teorema Clásico de Frobenius [26, Teorema, p. 704] este es de codimensión 1 y por lo tanto M es el kernel de una función $F \in \mathcal{M}^\sharp(A)$. Ya que $x_i \in I \subset M$, tenemos $F(x_i) = 0$ para $i = 1, 2, ...$

Sea E el álgebra de todas las funciones enteras de una variable compleja. Se sabe que todos los funcionales lineales multiplicativos en E son una evaluación puntual, es decir, si ϕ es tal función, entonces siempre existe un número complejo z_0 tal que

$$\phi(\varphi) = \varphi(z_0)$$

para cada $\varphi \in E$.

Ponemos ahora $\phi(\varphi) = F(\varphi(x_0))$ para cada $\varphi \in E$. Es claramente una función lineal multiplicativa en E, por lo tanto existe un número complejo z_0 tal que

$$F(\varphi(x_0)) = \varphi(z_0)$$

para cada $\varphi \in E$. Tomando como φ las funciones φ_i se ve que

$$\varphi_i(z_0) = F(\varphi_i(x_0)) = F(x_i) = 0,$$

por lo tanto, todas las funciones φ_i tienen un cero en común en z_0, lo cual contradice la relación (3.1). Entonces la codimensión de M es infinita.

$(2 \Rightarrow 3)$ Tenemos que mostrar que si para algún $x \in A$ el espectro $\sigma(x)$ es no cerrado en $\mathbb{C}$, entonces hay un elemento en A con el espectro no acotado. Por lo tanto, sea $\lambda \in \overline{\sigma(x)}/\sigma(x)$. Entonces $x - \lambda e$ es un elemento invertible en A y por las fórmulas

- $\widehat{x}(\mathcal{M}(A)) = \widehat{x}(\mathcal{M}^\sharp(A))$
- $\widehat{\varphi(x)}(f) = \varphi(\widehat{x}(f))$

el espectro del elemento $\overline{y} = (x - \lambda e)^{-1}$ es no acotado.

$(3 \Rightarrow 4)$ Sea $(\|x\|_\alpha)$ un sistema de seminormas submultiplicativas en A dando su topología, denotada por τ. Ponemos $|x|_0 = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} = \sup\limits_{f \in m(A)} |\widehat{x}(f)|$ para cada $x \in A$. Esta es claramente una seminorma submultiplicativa en A, posiblemente discontinua.

Definimos en A un nuevo sistema de seminormas submultiplicativas

$$\|x\|_\alpha^* = \text{máx}(|x|_0, \|x\|_\alpha).$$

El sistema $(\|x\|_\alpha^*)$ define en A una nueva topología m-convexa, denotada por τ^*. La topología τ^* es ciertamente más fuerte que la topología τ.

Mostraremos que el álgebra A es completa en la topología τ^*. Sea (x_i) una red de Cauchy en la topología τ^*. Entonces (x_i) tambien es una red de Cauchy en la topología τ; es decir, como A es completa en la topología τ entonces (x_i) τ-converge a un elemento $x_0 \in A$, y además, la red $\widehat{(x_i)}$ de las transformadas de Gelfand son uniformemente convergentes a una función continua $u(f)$ definida en $\mathcal{M}(A)$. Para probar que A es τ^*-completa es suficiente mostrar que $u(f) = \widehat{x_0}(f)$. Pero para cada $f \in \mathcal{M}(A)$ tenemos que $\widehat{x_i}(f) = f(x_i) \to f(x_0) = \widehat{x_0}(f)$ y para algún i suficientemente grande tenemos que $\widehat{x_i}(f) \to u(f)$. Por lo tanto, A es τ^*-completa. Claramente, (A, τ^*) es una Q-álgebra ya que la vercindad del elemento unitario, dada por
$\{x \in A : |x - e|_0 < 1\}$, consiste enteramente de elementos invertibles.

$(4 \Rightarrow 5)$ Es trivial.

$(5 \Rightarrow 6)$ Se sigue por el hecho de que para cada Q-álgebra $\mathcal{M}(A) = \mathcal{M}^\sharp(A)$ es un espacio compacto (la topología de $\mathcal{M}^\sharp(A)$) depende solamente de la estructura de espacio lineal de A y no de su topología, es decir, es compacto con una topología más fina como la topología débil estrella).

$(6 \Rightarrow 2)$Se sigue del hecho de $\widehat{x}(\mathcal{M}(A)) = \widehat{x}(\mathcal{M}^\sharp(A))$, pues por (6) tenemos que $\mathcal{M}^\sharp(A)$ es compacto, entonces $\widehat{x}(\mathcal{M}^\sharp(A))$ es compacto, por el Teorema (2.34) tenemos que $\sigma(x)$ es compacto, entonces $\sigma(x)$ es acotado.

$(5 \Rightarrow 1)$ Sea M un ideal máximo de A, como A es Q-álgebra entonces M es cerrado. M es un subespacio vectorial, entonces A/M es un álgebra m-convexa que es un anillo con división. Por el Teorema de Gelfand Mazur (2.31), $A/M \cong \mathbb{C}$ por lo tanto, M es de codimensión 1.

Corolario 3.3. *Sea A un álgebra m-convexa, con unidad, compleja, completa, conmutativa. El álgebra A posee un ideal máximo denso de codimensión infinita si y sólo si posee un elemento con espectro no acotado.*

Demostración. Existe un ideal máximo I denso de codimensión infinita si y sólo si existe un elemento $x \in A$ tal que $\sigma(x)$ no es acotado. Por los incisos (1) y (2) de Teorema (3.2).

Corolario 3.4. *Sea A un álgebra m-convexa, con unidad, compleja, completa, conmutativa. Si el espacio $\mathcal{M}(A)$ es compacto, entonces el espacio $\mathcal{M}^{\sharp}(A)$ es compacto también.*

Demostración. Por hipótesis el espacio $\mathcal{M}(A)$ es compacto; Sea $x \in A$ como la transformada de Gelfand-Mazur es continua tenemos que $\widehat{x}(\mathcal{M}(A))$ es compacto, ahora por el Teorema (2.34) tenemos que $\widehat{x}(\mathcal{M}(A)) = \sigma(x)$, y aplicando el Teorema (3.2) concluimos que $\mathcal{M}^{\sharp}(A)$ es compacto.

Definición 3.5. *Un álgebra topológica es **barrilada** si cada barril es una vecindad del cero.*

Corolario 3.6. *Sea A un álgebra m-convexa, completa con unidad, compleja conmutativa la cual es un espacio barrilado. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *Cada ideal máximo de A es de codimensión 1.*

2. *Cada ideal máximo de A es cerrado.*

3. *El espectro $\sigma(x)$ de cada elemento $x \in A$ es acotado.*

4. *El espectro $\sigma(x)$ de cada elemento $x \in A$ es compacto.*

5. *A es una Q-álgebra.*

6. *El espacio* $\mathcal{M}(A)$ *es compacto.*

Demostración.

(5 $\Rightarrow$ 2) Sea $M \subset A$ un ideal máximo. Veamos que es cerrado. Por hipótesis $G(A)$ es abierto lo que implica que $M \cap G(A) = \phi$ y también $\overline{M} \cap G(A) = \phi$ ya que si $\exists x \in \overline{M} \cap G(A)$ entonces existiría una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que $x_n \to x$, pero como $x \in G(A)$ existe una vecindad V de x tal que $V \subset G(A)$. Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande $x_n \in V$, lo cual es una contradicción pues $x_n \notin G(A)$. Por lo tanto, $\overline{M} \subset (G(A))^c$ que es cerrado. Luego, $\overline{M}$ es propio y por ser M máximo, $\overline{M} = M$.

(2 $\Rightarrow$ 1) Sea M un ideal máximo cerrado entonces A/M es un álgebra topológica y por el Teorema de Gelfand Mazur tenemos que $A/M \cong \mathbb{C}$, entonces M es de codimensión 1.

(1 $\Rightarrow$ 3) Se obtiene por el Teorema (3.2).

(3 $\Rightarrow$ 4) Se obtiene por el Teorema (3.2).

(4 $\Rightarrow$ 5) Por el Teorema (3.2) tenemos que el inciso (4) implica que A es una Q-álgebra m-convexa completa sobre alguna topología lo que implica (5).

(5 $\Leftrightarrow$ 6) Por hipótesis tenemos que cada m-barril es una vecindad del cero, entonces por la [34, Prop. 4.2, p.17] y la [34, Prop 13.6, p.59] tenemos que (5) es equivalente a (6).

Proposición 3.7. *Sea A un álgebra m-convexa, completa con unidad, compleja, conmutativa. Si el espacio de ideales máximos* $\mathcal{M}(A)$ *no es compacto, entonces A posee un ideal máximo denso.*

Demostración. Si A tiene un elemento x con espectro no acotado, entonces el resultado se sigue del Corolario (3.3). Si para toda x en A su espectro es acotado entonces $\mathcal{M}^\sharp(A)$ es compacto (por la condición (4) del Teorema (3.2)). Por lo tanto, $\mathcal{M}^\sharp(A) \neq \mathcal{M}(A)$ y existe un elemento en $\mathcal{M}^\sharp(A)/\mathcal{M}(A)$ cuyo kernel es un ideal máximo denso.

Proposición 3.8. *Sea A un álgebra topológica con unidad. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es Q-álgebra.*

2. *$intG(A) \neq \phi$.*

3. *$e \in intG(A)$.*

4. *$B_1 = \{x \in A : \rho(x) \leq 1\}$ es una vecindad del cero.*

Demostración.

$(1 \Rightarrow 2)$ Por definición de Q-álgebra.

$(2 \Rightarrow 3)$ Sea $a \in intG(A)$. Entonces existe una vecindad V de cero tal que $a+V \subset G(A)$. Por continuidad de la multiplicación en A existe una vecindad U de cero tal que $aU \subset V$ y $Ua \subset V$. Entonces $a(e+U) \subset a+V \subset G(A)$ y $(e+U)a \subset a+V \subset G(A)$. Esto implica que existen redes $(a_\gamma(U))\gamma \in \Gamma$ y $(b_\gamma(U))_{\gamma\in\Gamma}$ en A tales que $(a_\gamma(U))[a(e+U)] \rightarrow e$ y $[(e+U)a](b_\gamma(U)) \rightarrow e$. Por lo tanto $(e+U) \subset G(A)$.

$(3 \Rightarrow 4)$ Como $e \in intG(A)$ entonces existe una vecindad V de cero balanceada tal que $e+V \in intG(A)$. Debemos probar que $V \in B_1$. Si no $(\lambda e - x) \notin G(A)$. Luego $(e - \frac{x}{\lambda}) \notin G(A)$. Como V es balanceada y $|\lambda| > 1$ entonces $-\frac{x}{\lambda} \in V$, de donde $(e - \frac{x}{\lambda}) \in e+V \subset G(A)$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $V \subset G(A)$ lo que implica que B_1 es una vecindad del cero.

$(4 \Rightarrow 1)$ Supongamos que $0 \in intB_1$ y sea $V = \frac{1}{2}B_1$. V es una vecindad de cero. Si $e+V \not\subseteq G(A)$. Entonces existe $x \in V$ tal que $(e+x) \notin G(A)$. Como $x = \frac{1}{2}y$, para $y \in B_1$, tenemos que $(e+\frac{1}{2}y) \notin G(A)$, $(2e-y) \notin G(A)$ lo que implica que $\rho(y) \geq 2$. Por hipótesis $\rho(y) \leq 1$. Por lo tanto, $(e+V) \in G(A)$. Esto es, A es una Q-álgebra.

Corolario 3.9. *Si A es una Q-álgebra, m-convexa completa conmutativa compleja con unidad entonces* $A = B_\infty = \{x \in A : \rho(x) < \infty\}$.

Demostración. Supongamos que A es Q-álgebra y $A \neq B_\infty$, entonces existe un $x \in A$ tal que $\rho(x) = \infty$ pero como A es Q-álgebra, B_1 es una vecindad del cero en A y $B_1 \subset B_\infty$, por lo tanto, B_∞ es una vecindad del cero en A. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en B_∞ tal que $x_n \to x$, por el Teorema (2.37) tenemos la fórmula $\rho(x) = r_3(x) = \sup\limits_{f\in A^*} \limsup \sqrt[n]{|f(x^n)|}$, entonces $f(x_n) \to f(x), \quad \forall f \in A^*$ ya que f es continua, por lo que tenemos $\sup\limits_{f\in A^*} \limsup f(x_n) \to \sup\limits_{f\in A^*} \limsup f(x)$, es decir, $\rho(x_n) \to \rho(x)$, lo cual es una contradicción ya que $\rho(x_n) < \infty$ y $\rho(x) = \infty$. Por lo tanto $A = B_\infty$.

Proposición 3.10. *Sea A un álgebra m-convexa. A es Q-álgebra si y sólo si existe* $|\cdot|_\beta$ *tal que*

$$\rho(x) = \lim_n \sqrt[n]{\|x^n\|_\beta} = \inf_{n\geq 1} \sqrt[n]{\|x^n\|_\beta}$$

Demostración.

($\Rightarrow$) Afirmamos que $\rho(x) \geq \sup\limits_\beta \lim\limits_n \sqrt[n]{\|x^n\|_\beta}$. En efecto, si $|\lambda| > \rho(x)$, entonces $(\lambda e - x) \in G(A)$ y por lo tanto, existe $y \in A$ tal que $(\lambda e - x)y = e_A$. Así para cada β,

$$\pi_\beta(\lambda e - x)\pi_\beta(y) = e_A \;\Leftrightarrow\; (\lambda e_{A_\beta} - \pi_\beta(x))\pi_\beta(y) = e_{A_\beta}$$

donde π_β es la proyección canónica de A en A_β

luego, $\pi_\beta(x) \in G(A_\beta)$ y entonces $|\lambda| > \rho_{A_\beta}(\pi_\beta(x)) = \lim\limits_n \sqrt[n]{\|x^n\|_\beta}$.

Falta probar que $\rho(x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|_\beta}$. Si A es una Q-álgebra entonces existe $\|\cdot\|_\beta$ tal que

$$\{x \in A : \|x\|_\beta < \varepsilon < 1\} \subset \{x \in A : \rho(x) \leq 1\}.$$

Supongamos que $\|x\|_\beta \neq 0$, para todo $x \in A$. Entonces si $\|x^n\|_\beta < \varepsilon$ tenemos que

$\rho(x^n) \leq 1$. Así, $\rho(\varepsilon \frac{x^n}{\|x^n\|_\beta}) < 1$ lo cual implica que

$$(\rho(x))^n \leq \rho(x^n) \leq \frac{1}{\varepsilon}\|x^n\|_\beta.$$

Luego, $\rho(x) \leq \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|x^n\|_\beta}$.

Si $\|\gamma x\|_\beta = 0$ para todo $\gamma \in \mathbb{C}$, entonces $\rho(\gamma x) \leq 1$, de donde $\rho(x) \leq \frac{1}{\gamma} \to 0$ cuando $|\gamma| \to \infty$.

($\Leftarrow$) Por hipótesis tenemos que $\rho(x) \leq \|x\|_\beta$, para toda $x \in A$ y alguna β. Entonces $\{x \in A : \|x\|_\beta \leq 1\} \subset \{x \in A : \rho(x) \leq 1\}$. Es decir, el conjunto $\{x \in A : \rho(x) \leq 1\}$ es una vecindad del cero y por lo tanto, A es una Q-álgebra.

3.2. Ideales, condiciones de cadena y Q-álgebras.

La teoría de anillos nos proporciona conceptos y propiedades importantes que pueden ser aplicadas en el contexto de las álgebras topológicas.

Definición 3.11. *Un anillo conmutativo R es* ***Noetheriano*** *si sus ideales satifacen la condición de cadena ascendente, es decir, si para cada cadena de ideales $I_1 \leq I_2 \leq ... \leq I_n \leq ...$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_{n+i} = I_n$ $(i = 1, 2, 3, ..)$.*

Un anillo conmutativo R es ***Artiniano*** *si sus ideales satifacen la condición de cadena descendente, es decir, si para cada cadena de ideales $I_1 \geq I_2 \geq I_3 \geq ... \geq I_n \geq ...$, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $I_{n+i} = I_n$ $(i = 1, 2, 3, ..)$.*

Proposición 3.12. *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *R es Noetheriano.*
2. *Cada ideal de R es finitamente generado.*
3. *Cada familia no vacía de ideales de R tiene algún elemento máximo.*

Demostración.

$(1 \Rightarrow 3)$ Sea Ω una familia de ideales no vacía. Tomemos una cadena ascendente de ideales $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$. Sea $I = \bigcup_{1 \leq j < \infty} I_j$, este es un ideal y cota superior de Ω. Entonces por el Lema de Zorn, existe un ideal máximo en Ω.

$(3 \Rightarrow 2)$ Consideremos un ideal I. Afirmamos que I es finitamente generado, para ello consideremos

$$\Omega = \{J \subseteq I : J \text{es finitamente generado}\}$$

tenemos que $0 \in \Omega$, entonces $\Omega \neq \phi$, por lo tanto, por la condición (b) admite un elemento máximo, digamos H.

Afirmamos que $H = I$, para ello supongamos que $H \subsetneq I$.Sea $x \in I/H$. Consideremos $H' = H + Rx \in \Omega$, por lo tanto, $H \subseteq H$, lo que es una contradicción, por lo tanto, $H = I$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Supongamos que se cumple la condición (2) y tomemos una cadena de ideales tal que $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$, sea $I = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$. Entonces I es finitamente generado por la hipótesis, es decir, existen $x_1, x_2, ..., x_r \in I$ tales que $I = Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_r$. Entonces

$$\begin{aligned}
x_1 \in I &\Rightarrow x_1 \in I_{n_1} \\
x_2 \in I &\Rightarrow x_2 \in I_{n_2} \\
&. \\
&. \\
x_j \in I &\Rightarrow x_r \in I_{n_r}
\end{aligned}$$

Sea $\kappa = \text{máx}\{n_j : 1 \leq j \leq r\}$, entonces $x_j \in I_{n_\kappa}, \ \ \forall 1 \leq j \leq r$, por lo tanto $I_{n_\kappa} \supseteq I$, lo que implica que $I = I_{n_\kappa}$.

Proposición 3.13. *Para un anillo R las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *R es Artiniano.*

2. *Cada familia no vacía de idelaes de R tiene un elemento mínimo.*

Demostración. La demostración es dual a $1 \Leftrightarrow 3$ del Teorema (3.12)

A continuación recordamos algunas propiedades algebraicas de las álgebras de Banach con el objeto de analizar si dichas propiedades siguen siendo válidas en álgebras más generales.

Teorema 3.14. *Sea A un álgebra de Banach y sea I un ideal bilateral máximo entonces I es cerrado.*

Demostración. Véase el Teorema (1.20)

Como las álgebras no necesariamente tienen unidad, entonces tenemos la siguiente definición.

Definición 3.15. *Un ideal izquierdo I de un álgebra topológica compleja A es de* ***tipo finito*** *si es generado por un número finito de elementos de este, es decir, existen $x_1, x_2, ...x_r \in I$ tal que*

$$I = Ax_1 + \mathbb{C}x_1 + Ax_2 + \mathbb{C}x_2 + ... + Ax_r + \mathbb{C}x_r$$

Sean $I_1, I_2, ..., I_r$ ideales izquierdos de un álgebra A. Denotamos por $I_1 \cdot I_2 \cdot I_3 \cdots I_r$ el ideal producto, de los ideales $I_{i's}$ izquierdos de A. Este ideal es el ideal generado por los productos $x_1 \cdot x_2 \cdots x_r$, donde $x_i \in I_i$. Si $I_i = I \;\; \forall i = 1, ..., r$ el ideal $I_1 \cdot I_2 \cdot I_3 \cdots I_r$ es denotado por I^r.

Teorema 3.16. *Cada funcional lineal multiplicativo en un álgebra de Banach conmutativa es continuo.*

Demostración. Como cada funcional tiene nucleo un ideal máximo y estos son cerrados por el Teorema (1.21), entonces son continuos.

Corolario 3.17. *Sea A un álgebra de Banach conmutativa con unidad. Entonces existe al menos un funcional lineal multiplicativo y continuo.*

Demostración. Si A es el campo de los números complejos entonces la identidad es tal funcional. Si A no es el campo de los números complejos entonces existe $x \in A \setminus \{0\}$ que no es invertible y el conjunto xA es un ideal el cual está contenido en un ideal máximo. Así, el álgebra tiene un ideal máximo, o equivalentemente, A tiene un funcional lineal multiplicativo y continuo.

Teorema 3.18. *Sea $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra normada entonces cada ideal bilateral máximo cerrado de A es de codimensión uno.*

Demostración. Sea $M \subset A$ un ideal máximo bilateral cerrado. M es un subespacio vectorial, entonces A/M es un álgebra normada que es un anillo con división. Por la Proposición (1.28) tenemos que $A/M \cong \mathbb{C}$, lo que implica que M es de codimensión uno.

Teorema 3.19. *Si $(A, \|\cdot\|)$ es un álgebra normada conmutativa con unidad entonces cada ideal cerrado de A esta contenido en un ideal máximo cerrado.*

Demostración Sea $I \subset A$ un ideal cerrado. Entonces A/I es un álgebra normada conmutativa y por lo tanto, $\mathcal{M}(A/I) \neq \phi$. Sea $f \in \mathcal{M}(A/I)$. Si $\pi : A \to A/I$ es el homomorfismo canónico, entonces $F(x) = f(\pi(x))$ es un elemento de $\mathcal{M}(A)$ e $I \subset F^{-1}(0) = Z(f \circ \pi)$ el cual es un ideal máximo cerrado.

Proposición 3.20. *Sea $(A, \|\cdot\|)$ una Q-álgebra normada conmutativa. Sea $x \in A$, entonces*

$$\sigma(x) = \{f(x) : f \in \mathcal{M}(A)\}$$

Demostración. Sea $\lambda \in \sigma(x)$. Entonces $(x - \lambda e) \notin G(A)$ lo que implica que existe un ideal máximo cerrado M de codimensión uno tal que $A(x - \lambda e) \subset M$. Así, existe $f \in \mathcal{M}(A)$ tal que $f(x - \lambda e) = 0$ y por lo tanto, $f(x) = \lambda$, de donde $\lambda \in \{f(x) : f \in \mathcal{M}(A)\}$. Si $f(x) = \lambda$ entonces $(x - \lambda e) \notin G(A)$, así que $\{f(x) : f \in \mathcal{M}(A)\} \subset \sigma(x)$.

En álgebras normadas, como por ejemplo $(\mathbb{P}(X); \|p\| = \max\limits_{0 \leq x \leq 1} |p(x)|)$, el espectro de un polinomio no constante es todo el plano complejo. Por lo tanto, no tenemos un resultado análogo al anterior. Sin embargo, modificando un poco el espectro en ellas tenemos el siguiente resultado.

Definición 3.21. *Sea $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra normada conmutativa. Si $x \in A$, el* ***espectro*** *$\widetilde{\sigma}(x)$ está dado por:*

$$\widetilde{\sigma}(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{(x - \lambda e)A} \text{ es propio en } A\}$$

Proposición 3.22. *Sea $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra normada conmutativa. Entonces*

$$\widetilde{\sigma}(x) = \{f(x) : f \in \mathcal{M}(A)\}$$

Demostración. Sea $\lambda \in \widetilde{\sigma}(x)$. Entonces $\overline{(x - \lambda e)A} \subset M$ es un ideal máximo cerrado de codimensión uno. Así, existe $f \in \mathcal{M}(A)$ tal que $f(x - \lambda e) = 0$, de donde,
$\lambda \in \{f(x) : f \in \mathcal{M}(A)\}$. Veamos la otra inclusión. Observemos que $(f(x)e - x) \in \ker(f)$ que es un ideal máximo cerrado. Luego, como $(f(x)e - x) \notin G(A)$ entonces $\overline{(f(x)e - x)A} \subseteq \ker(f)$ lo que implica que el ideal $\overline{(f(x)e - x)A}$ es propio en A.

Proposición 3.23. *Sea $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra normada. Si A es Q-álgebra, entonces todos los ideales máximos de A son cerrados.*

Demostración. Sea $M \subset A$ un ideal máximo. Veamos que es cerrado. Por hipótesis $G(A)$ es abierto lo que implica que $M \cap G(A) = \phi$ y también $\overline{M} \cap G(A) = \phi$ ya que si $\exists x \in \overline{M} \cap G(A)$ entonces existiría una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset M$ tal que $x_n \to x$, pero como $x \in G(A)$ existe una vecindad V de x tal que $V \subset G(A)$. Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande $x_n \in V$, lo cual es una contradicción pues $x_n \notin G(A)$. Por lo tanto, $\overline{M} \subset (G(A))^c$ que es cerrado. Luego, $\overline{M}$ es propio y por ser M máximo, $\overline{M} = M$.

Nota: El inverso del Teorema anterior es verdad pero requiere de otros resultados que veremos más adelante.

Teorema 3.24. *Cada álgebra normada, artiniana con unidad $(A, \|\cdot\|)$ es una Q-álgebra.*

Demostración. Mostraremos que $G(A)$ contiene una bola $\{x \in A : \|e - x\| < 1\}$. Supongamos que $\|e - x\| < 1$. La sucesión $\{Ax^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de ideales izquierdos, por ser Artiniana existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que $Ax^{n_0} = Ax^{n_0+1}$. Sea $a \in A$ tal que $x^{n_0} = ax^{n_0+1}$. Como x es invertible en la completación de A, tenemos que $e = ax$ lo que implica $x \in G(A)$, por lo tanto, G(A) es abierto, entonces A es una Q-álgebra.

Definición 3.25. *Un ideal P de un álgebra unitaria conmutativa A es llamado **primo** si $P \neq A$ y si el cociente A/P es un álgebra sin divisores de cero.*

Definición 3.26. *Sea A un álgebra. El **Radical** de A es*

$$Rad(A) = \bigcap\{I \subset A : I \, es \ ideal \ máximo \ de \ A\}$$

*y el **Nilradical** de A es*

$$Nil(A) = \bigcap\{I \subset A : I \, es \ ideal \ primo \ de \ A\}$$

Teorema 3.27. *Sea $(A, \|\cdot\|)$ un álgebra normada conmutativa con unidad. Entonces son equivalentes:*

1. *$(A, \|\cdot\|)$ es de dimensión finita.*
2. *$(A, \|\cdot\|)$ es un álgebra Artiniana.*

Demostración

$(1 \Rightarrow 2)$ Es inmediata.

$(2 \Rightarrow 1)$ Dividimos la demostración de esta implicación en dos partes. En el caso (a) suponemos que el álgebra $(A, \|\cdot\|)$ es local, es decir, tiene un único ideal máximo. Consideraremos el caso general en el (b).

(a) Suponemos que el álgebra $(A, \|\cdot\|)$ es local. Sea M el único ideal máximo de A. Por [30, Prop IV.3, p.66], sabemos que el radical de un anillo Artiniano es igual a su nilradical, entonces es nilpotente, es decir, existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $M^n = \{0\}$. Por otro lado, por la Proposición (3.24) tenemos que A es una Q-álgebra. La Proposición (3.23) , implica que M es cerrado. Por el teorema de Gelfand Mazur, M es un ideal de codimensión finita. El teorema de caracterización de anillos

Artinianos, implica que A es Noetheriana, entonces $M = Ax_1 + Ax_2 + \cdots + Ax_r$, donde $x_1, x_2, ..., x_r \in M$. Como M es de codimensión finita, entonces A/M es de dimensión finita. Sea $z_1 + M, z_2 + M, ..., z_k + M$ una base de A/M; consideramos a $z_1, z_2, ..., z_k$. Sea B el subespacio vectorial de A generado por $z_1, z_2, ..., z_k$.

Se afirma que $A = M + B$. Sea $a \in A$, consideremos $a + M \in A/M$, existen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ tales que $a + M = \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_k z_k + M$, por lo tanto, $a = \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_k z_k + m \quad con \quad m \in M$. Por lo anterior podemos concluir que B es un subespacio de dimensión finita de A tal que $A = M + B$.

Para $y_1, y_2, ..., y_{n-1} \in \{x_1, x_2, ..., x_r\}$ afirmamos que $Ay_1y_2 \cdots y_{n-1} = By_1y_2 \cdots y_{n-1}$. En efecto, sea $a \in Ay_1y_2 \cdots y_{n-1} = (M + B)y_1y_2 \cdots y_{n-1}$, entonces

$$\begin{aligned}
a &= (m+b)y_1y_2 \cdots y_{n-1} \text{ con } m \in M \text{ y } b \in B \\
a &= (\lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_r x_r)y_1y_2 \cdots y_{n-1} + by_1y_2 \cdots y_{n-1} \\
a &= \lambda_1 x_1 y_1 y_2 \cdots y_{n-1} + \cdots + \lambda_r x_r y_1 y_2 \cdots y_{n-1} + by_1y_2 \cdots y_{n-1} \\
a &= by_1y_2 \cdots y_{n-1} \in By_1y_2 \cdots y_{n-1}
\end{aligned}$$

por lo tanto, tenemos que $Ay_1y_2 \cdots y_{n-1} = By_1y_2 \cdots y_{n-1}$. Podemos observar que

$$\begin{aligned}
Ay_1y_2 \cdots y_{n-1} &= By_1y_2 \cdots y_{n-1} \\
(M+B)y_1y_2 \cdots y_{n-1} &= By_1y_2 \cdots y_{n-1} \\
My_1y_2 \cdots y_{n-1} + By_1y_2 \cdots y_{n-1} &= By_1y_2 \cdots y_{n-1}
\end{aligned}$$

Como B es de dimensión finita entonces $Ay_1y_2 \cdots y_{n-1}$ es de dimensión finita. De esto se sigue que M^{n-1} es de dimensión finita. Por inducción se muestra que M es de dimensión finita.

(b) En el caso general, el álgebra tiene un número finito de ideales máximos, pues se sabe que un anillo Artiniano tiene un número finito de ideales primos, por lo tanto, un número finito de ideales máximos. Sean $M_1, M_2, ..., M_r$ los ideales máximos de A. El $rad(A) = \bigcap_{1\leq i\leq r} I_r$ es nilpotente, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(\bigcap_{1\leq i\leq r} M_i)^n = \{0\}$.

Como $M_i + M_j = A$ para $i \neq j$ tenemos $\bigcap_{1\leq i\leq r} M_i^n = \{0\}$.

Afirmamos que $M_i^n = \{x \in M : x(\bigcap_{i\neq j} M_i^n) = \{0\}\}$ para $i \in \{1, 2, ..., r\}$, pues

Por lo tanto, M_i^n es un ideal cerrado en A y de ahí el álgebra A/M_i^n es normada. Por (a) esta es artiniana y entonces de dimensión finita. Finalmente, ya que A es isomorfo a $\prod_{1\leq i\leq r} A/M_i^n$, por lo tanto, A es de dimensión finita.

Proposición 3.28. *Sea A una F-álgebra conmutativa con unidad. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *A es una Q-álgebra.*
2. *Todo ideal máximo de A es cerrado.*

Demostración.

$(1 \Rightarrow 2)$ Sea $M \subset A$ un ideal máximo. Veamos que es cerrado. Por hipótesis $G(A)$ es abierto lo que implica que $M \cap G(A) = \phi$ y también $\overline{M} \cap G(A) = \phi$ ya que si $\exists x \in \overline{M} \cap G(A)$ entonces existiría una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset M$ tal que $x_n \to x$, pero como $x \in G(A)$ existe una vecindad V de x tal que $V \subset G(A)$. Para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande $x_n \in V$, lo cual es una contradicción pues $x_n \notin G(A)$. Por lo tanto, $\overline{M} \subset (G(A))^c$ que es cerrado. Luego, $\overline{M}$ es propio y por ser M máximo, $\overline{M} = M$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Sea $|\cdot|$ una F-norma que define la topología τ de A (existe por la definición de F-álgebra véase (1.29)) y d la distancia en A asociada a $|\cdot|$. Para todo $x, y \in A,\ d(x,y) = |x-y|$ en (A,d) es un espacio metrizable y completo uniformemente isomorfo a A.

Supongamos A no es una Q-álgebra, entonces G(A) no es vecindad de la unidad, por lo tanto,

$$\forall n \geq 1\ \exists u_n \in A/G(A),\ d(u_n, e) < \frac{1}{n}.$$

Obtenemos una sucesión $\{u_n\}_{n\geq 1}$ de elementos no invertibles en A que converge a e. Vamos a extraer de esta sucesión una subsucesión $\{u_{n_p}\}_{p\geq 1}$ tal que $d(e, u_{n_1})$ y

$$\forall p > 1,\ d(e, u_{n_p}) < 2^{-(p-1)} \quad \forall 1 \leq k \leq p-1,\ d(u_{n_k} \cdots u_{n_{p-1}}, u_{n_k} \cdots u_{n_p}) < 2^{-(p-1)}.$$

Haremos una contrucción por recurencia. u_{n_1} existe pues $\{u_n\}_{n\geq 1}$ converge a e.

Contrucción de u_{n_2}: la función $a \mapsto u_{n_1}a$ de A en A es continua en e, por lo tanto

$$\exists 0 \leq \eta < 2^{-1},\ d(e, a) < \eta\ \Rightarrow d(u_{n_1}, u_n a) < 2^{-1} \tag{3.2}$$

y $\exists n_2 > n_1,\ d(e, u_{n_2}) < \eta$ pues $\{u_n\}_{n\geq 1}$ converge a e; debido a (3.2) uno obtiene

$$d(e, u_{n_2}) < \eta < 2^{-1}\ \ y\ \ d(u_{n_1}, u_{n_1}u_{n_2}) < 2^{-1}.$$

Supongamos ya contruidos $u_{n_1}, u_{n_2}, ..., u_{n_{p-1}}$.

Contrucción de u_{n_p}: la función $a \mapsto (u_{n_1}u_{n_2} \cdots u_{n_{p-1}}a, u_{n_2}u_{n_3} \cdots u_{n_{p-1}}a, ..., u_{n_{p-1}}a)$ de A en A^{p-1} es continua en e, por lo tanto,

$$\exists 0 < \eta < 2^{-(p-1)},\ d(e, a) < \eta \Rightarrow \sum_{k=1}^{p-1} d(u_{n_k} \cdots u_{n_{p-1}}, u_{n_k} \cdots u_{n_p}) < \sum_{k=1}^{p-1} 2^{-k} \tag{3.3}$$

y $\exists n_p > n_{p-1},\ d(e, u_{n_p}) < \eta$ pues $\{u_n\}_{n\geq 1}$ converge a e; debido a (3.3) se obtiene

$$d(e, u_{n_p}) < 2^{-(p-1)}\ y\ \forall 1 \leq k \leq p-1,\ d(u_{n_k} \cdots u_{n_{p-1}}, u_{n_k} \cdots u_{n_p}) < 2^{-(p-1)}.$$

Para toda $k \geq 1$ fija, la sucesión $\{u_{n_k}u_{n_{k+1}} \cdots u_{n_p}\}_{p\geq k}$ es una sucesión de Cauchy, en efecto, si $q \geq p \geq k$ tenemos

$$d(u_{n_k} \cdots u_{n_p}, u_{n_k} \cdots u_{n_q}) \leq \sum_{i=p}^{q-1} d(u_{n_k} \cdots u_{n_i} \cdots u_{n_{i+1}}) \leq \sum_{i=p}^{q-1} 2^{-i}.$$

Por lo tanto, esta serie converge en (A, τ) a un elemento al que denotaremos por e_k. Obtenemos una sucesión $\{e_k\}_{k\geq 1}$ que satisface que $\forall k \geq 1,\ e_k = u_{n_k} e_{k+1}$; y tenemos:

$$d(e_k, e) \leq d(e, u_{n_k}) + \sum_{p=k}^{\infty} d(u_{n_k} \cdots u_{n_p}, u_{n_k} \cdots u_{n_{p+1}}) \leq 2^{-(k-1)} + \sum_{p=k}^{\infty} 2^{-p} \leq 2^{-(k-2)}.$$

Por lo tanto, la sucesión $\{e_k\}_{k\geq 1}$ converge a e.

Para $k \geq 1$ consideraremos el ideal Ae_k que es un ideal propio de A pues u_{n_k} no es invertible en A. Ya que $\forall k \geq 1,\ e_k = u_{n_k} e_{k+1}$, la sucesión de ideales $\{Ae_k\}_{k\geq 1}$ es creciente. Entonces $\bigcup_{k\geq 1} Ae_k$ es un ideal propio de A denso en A pues $\{e_k\}_{k\geq 1}$ converge a e.

De donde la existencia de ideales máximos densos en A se sigue de tomar un ideal máximo que contenga $\bigcup_{k\geq 1} Ae_k$.

Definición 3.29. *Denotaremos por $G_\ell(A)$ (resp.$G_r(A)$) al conjunto de los elementos invertibles izquierdos (resp. derechos) de A.*

Lema 3.30. *Sea A una F-álgebra con unidad e. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *El conjunto $G_\ell(A)$ (resp.$G_r(A)$) contiene una vecindad de la unidad.*
2. *El conjunto $G_\ell(A)$ (resp.$G_r(A)$) es abierto.*

Demostración. Solo tenemos que demostrar (1) $\Rightarrow$ (2). Dada la prueba para $G_\ell(A)$ es analóga para $G_r(A)$.

Supongamos que existe una vecindad U de e que consiste de elementos invertibles izquierdos. Sea a un elemento invertible izquierdo en A arbitrario. Como la función $x \mapsto xa$ es sobreyectiva de A en si misma es abierta por el Teorema de la función abierta para F-espacios e implica que el conjunto Ua es abierto. Como esta contiene a a y consiste de elementos invertibles, cada elemento de $G_\ell(A)$ es un punto interior de este, y por lo tanto, $G_\ell(A)$ es abierto.

Definición 3.31. *Sea A un álgebra topológica compleja unitaria. Entonces un elemento $x \in A$ es topológicamente invertible si $\overline{xA} = \overline{Ax} = A$.*

Lema 3.32. *Sea A una F-álgebra unitaria y sea $(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset A$ una sucesión que tiende a e. Entonces existe una subsucesión $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ tal que $\forall k \in \mathbb{N}$ los productos finitos.*

$$u_k = \lim_i a_k a_{k+1} \cdots a_{k+i} \tag{3.4}$$

Son convergentes y además

$$\lim_k u_k = e \tag{3.5}$$

Si todos los x_i son invertibles derechos, entonces todos los productos u_k son topológicamente invertibles derechos.

Notemos que la fórmula (1) implica que

$$u_k = a_k u_{k+1}, \ \ \forall k \tag{3.6}$$

Demostración. Véase [46, Lema 1-5].

Teorema 3.33. *Sea A una F-álgebra con unidad. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *Todos los ideales izquierdos máximos en A son cerrados.*

(b) *El conjunto $G_\ell(A)$ de todos los elementos invertibles izquierdos es abierto.*

(c) *El conjunto $G(A)$ de todos los elementos invertibles es abierto, es decir, A es una Q-álgebra.*

(d) *El conjunto $G_r(A)$ de todos los elementos invertibles derechos es abierto.*

(e) *Todos los ideales derechos máximos en A son cerrados.*

Demostración.

$(a \Rightarrow b)$ Lo haremos por contradicción, asumimos que $G_\ell(A)$ no es abierto. Terminamos la prueba si mostramos que A tiene un ideal izquierdo denso I, por que entonces cada ideal izquierdo máximo que contenga a I sería denso y por lo tanto no cerrado.

Por el Lema (3.30), existe una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in A$ de elementos en $A/G_\ell(A)$ que tiende a e. Consideremos los elementos a_i y u_k obtenidos a partir de la fórmula (3.4) del Lema (3.32). Vamos a estar buscando un ideal de la forma:

$$I = \bigcup_{k=1}^{\infty} Au_k. \tag{3.7}$$

Si ninguno de los u_k es invertibles izquierdos, entonces los ideales izquierdos Au_k son propios. En este caso, por el Lema (3.32) tenemos que $u_k = a_k u_{k+1}$ lo que implica que $Au_k = Aa_k u_{k+1}$. Entonces el ideal I es un ideal propio izquierdo en A que es una unión creciente de ideales propios. También tenemos $u_k \in I,\ \forall k$.

Sea x un elemento arbitrario de A. Entonces $xu_k \in I,\ \forall k$, y por la fórmula (3.5) tenemos $xu_k \to x$. Como x es arbitrario entonces I es denso en A y se sigue la conclusión. Queda demostrado para cuando todos los elementos u_k no son invertibles izquierdos.

Para probar este hecho, consideraremos el primer caso donde nuestra sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos no invertibles izquierdos puede ser elegida de modo que consista de elementos invertibles derechos. Afirmamos que en este caso ningun elemento de u_k pueden pertenecer a $G_\ell(A)$. De otra manera

$$bu_{k_0} = e \tag{3.8}$$

para algún natural k_0 y algún b en A. Por el Lema (3.32), u_{k_0} es topologicamente invertible derecho, y por lo tanto existen $z_i \in A$ tales que $u_{k_0} z_i \to e$. Multiplicando

(3.8) por z_i por la derecha y tomando el límite obtenemos

$$z_i = bu_{k_0}z_i \to b.$$

Entonces $u_{k_0}b = \lim_{i\to\infty} u_{k_0}z_i = e = bu_{k_0}$ y por lo tanto, u_{k_0} es invertible con inverso b. Tenemos $e = bu_{k_0} = ba_{k_0}u_{k_0+1}$, de modo que u_{k_0+1} es invertible izquierdo también. Con el razonamiento anterior llegamos a que u_{k_0+1} es invertible, lo que implica la invertibilidad de $a_{k_0} = u_{k_0}(u_{k_0+1})^{-1}$. Esto es una contracción con la hipótesis de que x_i no es invertible izquierdo para toda i.

En caso contrario no existe ninguna sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos no invertibles tales que $x_i \in G_r(A)$, $\forall i$. En este caso existe una vecindad U de la identidad tal que no contiene ningun elemento invertible derecho excepto los invertibles. Tomando ahora una sucesión $\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ de modo que no soló todos sus terminos sino también todos los elementos u_k, obtenidos por el Lema (3.32), estan en U. Esto puede hacerse usando la fórmula (3.5). Nuestra conclusión será obtenida si mostramos que los u_k no puede ser un invertible izquierdo, por que entonces (3.7) daría un ideal izquierdo denso. Supongamos por contradicción que u_{k_0} es invertible izquierdo para algún k_0. Por (3.4) tenemos que $e = bu_{k_0} = \lim_{i\to\infty} ba_{k_0}\cdots a_{k_0+i}$ y entonces, para un i suficientemente grande, digamos $i \geq i_0$, los elementos $ba_{k_0}\cdots a_{k_0+i}$ estan en U. Por (3.6) tenemos

$$bu_{k_0} = bu_{k_0}a_{k_0}\cdots a_{k_0+i}u_{k_0+i_0+i+1} = e,$$

entonces todos los elementos $ba_{k_0}\cdots a_{k_0+i_0+i}$, $i \in \mathbb{N}$, siendo elementos invertibles derechos de U, consecuentemente

$$a_{k_0+i_0+1} = (ba_{k_0}\cdots a_{k_0+i_0})^{-1}ba_{k_0}\cdots a_{k_0+i_0+1},$$

y así el elemento de la izquierda es invertible. Esta contradicción completa la implicación deseada.

($b \Rightarrow c$) Esta prueba es similar a la última parte de la anterior. Realizaremos por contradicción que $G_\ell(A)$ es abierto mientras que G(A) no es abierto. Denotemos por U una vecindad abierta de e que consiste de elementos invertibles izquierdos. Por hipótesis, existe en U una sucesión $x_i \to e$ que consiste de elementos no invertibles. Utilizando el Lema (3.32) obtenemos elementos a_i y u_i, y por (3.5), existe un indice k_0 tal que $u_k \in U$, $\forall k \geq k_0$. En particular por (3.6), existe un elemento $b \in A$ tal que

$$e = bu_{k_0} = \lim_{i\to\infty} ba_{k_0} \cdots a_{k_0+i}. \tag{3.9}$$

Por lo tanto $ba_{k_0} \cdots a_{k_0+i} \in U$ para un i suficientemente grande, digamos $i \geq i_0$. Tenemos

$$bu_{k_0} = ba_{k_0} \cdots a_{k_0+i_0} u_{k_0+i_0+1},$$

de modo que, por (3.9), $ba_{k_0} \cdots a_{k_0+i_0}$ es invertible derecho, y por lo tanto invertible. Similarmente $ba_{k_0} \cdots a_{k_0+i_0+1}$ es también invertible. Entonces

$$a_{k_0+i_0+1} = (ba - k_0 \cdots a_{k_0+i_0})^{-1} ba_{k_0} \cdots a_{k_0+i_0+1}$$

es invertible, lo cual es una contradicción.

($c \Rightarrow a$) Tenemos que G(A) es abierto. Si M es un ideal izquierdo máximo, entonces $M \cap G(A) = \phi$ y por lo tanto M no es denso en A. Entonces un ideal máximo izquierdo es denso o cerrado, M es cerrado la implicación se sigue .

Entonces tenemos $(a) \Leftrightarrow (b) \Leftrightarrow (c)$. Analógamente $(c) \Leftrightarrow (d) \Leftrightarrow (e)$ es soló cambiar izquierdo por derecho y se tiene la conclusión.

Proposición 3.34. *Sea A una F-álgebra con unidad donde la familia de ideales izquierdos principales satisface la condición de cadena ascendente. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *A es una Q-álgebra.*
2. *$\forall x \in A,\ \overline{Ax} = A \Leftrightarrow x \in G(A)$.*

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sea $x \in A$ tal que $\overline{Ax} = A$. Por (1) demostraremos que $Ax = A$. Se puede ver fácilmente que $Ax \subseteq A$, entonces sólo demostraremos que $A \subseteq Ax$, tenemos por hipótesis que $A \subseteq \overline{Ax}$, entonces existe $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\overline{Ax}$ tal que $x_n \to 1$ pero cada $x_n = a_n x$, lo que implica que $a_n x \to 1$, por lo tanto, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m > n_0$, implica que $a_m x \in G(A)$, por lo que tenemos que $(y_m)(a_m x) = 1$.

Afirmamos que $\{y_m a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy. Dada $\varepsilon > 0$ y d un métrica compatible con la topología del álgebra, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq N \quad \Rightarrow \quad d(y_m a_m x, y_n a_n x) < \varepsilon$, lo que implica que $\|x\| d(y_m a_m, y_n a_n) < \varepsilon$, por lo tanto, $\{y_m a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy y por ser A completa tenemos que $\{y_m a_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ converge . Sea $z = \lim_{m\to\infty} y_m a_m$, entonces $zx = 1$, por lo que x es invertible por la izquierda, por [27, Teorema 1, p.353] x es invertible en A.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que A no es un Q-álgebra. Existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos no invertibles tal que $x_n \to e$ cuando $n \to \infty$. Argumentado en [18, Prop. 2.1], nosotros construimos una sucesión $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en A que satisfacen:

(i) $e_n \to e, \ \ (n \to \infty)$

(ii) $\forall n \ \ e_n = x_n e_{n+1}$

(La hipótesis de conmutatividad y de m-convexidad que se supone en [18, Prop. 2.1] no se utiliza para la construcción de la sucesión $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$). La hipótesis hecha en A resulta la existencia de un número n_0 tal que $Ae_n = Ae_{n_0}$ para todo $n \geq n_0$. De esto resulta que

$\overline{Ae_{n_0}} = A$. Por la afirmación (2), e_{n_0} es invertible izquierdo en A y por lo tanto, invertible vía [27, Teorema 1, p.353]. Así el elemento x_{n_0} es invertible derecho en A por [27, Teorema 1, p.353], este no es caso, lo cual nos da una contradicción, por lo tanto, A es una Q-álgebra.

Proposición 3.35. *Sea A una F-álgebra con unidad la cual es una Q-álgebra. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es una álgebra Noetheriana.*
2. *Cada ideal izquierdo de A es cerrado.*

Demostración.

$(1 \Rightarrow 2)$ Sea F la colección de todos los ideales izquierdos no cerrados en A. Asumimos que F es un conjunto no vacío y sea I el elemento máximo en F. Entonces I no es cerrado, existe un $x \in \overline{I}$ y $x \notin I$. Entonces tenemos que $I \subset I + Ax$ y $I \neq I + Ax$. Por lo tanto, $I + Ax$, pues como I no es cerrado y es el máximo de F.

Por lo tanto, $I + Ax = \overline{I}$. Por hipótesis tenemos que existen $x_1, ..., x_r$ en I tal que $I = Ax_1 + Ax_2 + \cdots + Ax_r$. Consideremos la función

$$\begin{aligned} \varphi : A^{r+1} &\rightarrow \overline{I} \\ (a_1, a_2, ..., a_r) &\rightarrow \sum_{i=1}^{r+1} a_i x_i \quad \text{donde } x_{r+1} = x \end{aligned}$$

Tenemos que φ es una función lineal continua, pues es composición de funciones continuas de A^{r+1} en $\overline{I}$. Por lo tanto esta función es abierta.

Por otra parte, sea V una vecindad abierta del cero en A tal que $e+V \subset G(A)$, entonces $\varphi(e+V)$ es abierto en $\overline{I}$, tenemos $\varphi(e+V) \cap I \neq \phi$, Entonces existen $a_1, a_2, ..., a_{r+1} \in G(A)$ tales que

$$\sum_{i=1}^{r+1} a_i x_i \in I$$

por lo tanto $a_{r+1}x_{r+1} \in I$ de donde tenemos que $x_{r+1} \in I$ ya que a_{r+1} es invertible. Esto implica que $I = \overline{I}$ lo cual es una contradicción, por lo tanto, $F = \phi$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Sea $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión creciente de ideales izquierdos en A. Entonces $I = \bigcup_{n\geq 0} I_n$ es un ideal izquierdo en A. Por el Teorema de Baire, existe un entero n_0 tal que I_{n_0} es no vacío en el interior de I. Se sigue que la cadena $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de ideales es finita. Por lo tanto, A es Noetheriana.

Teorema 3.36. *Sea A una F-álgebra. Los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. *Todos los ideales izquierdos de A son cerrados.*
2. *A es una Q-álgebra Noetheriana izquierda.*

Demostración.

$(1 \Rightarrow 2)$ Sea $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una cadena creciente de ideales izquierdos de A. Definimos $I = \bigcup_n I_n$. Es un ideal izquierdo de A. Por el teorema de Baire, existe un n_0 tal que I_{n_0} tiene interior no vacío en I. Resulta que $I_{n_0} = I$ y por lo tanto $I_n = I_{n_0}, \ \ \forall n \geq n_0$, por lo tanto, A es Noetheriana.

La segunda afirmación se sigue de la Proposición (3.34).

$(2 \Rightarrow 1)$ Sea $\mathcal{F}$ la familia de los ideales izquierdos no cerrados en A. Supongamos que $\mathcal{F}$ es no vacía y consideremos un elemento máximo I de $\mathcal{F}$. Sea $x \in \overline{I}$. Sea $\overline{I} = I + Ax$. Consideremos $x_1, ..., x_r \in I$ tal que $I = Ax_1 + \cdots + Ax_r$. Sea $J = \{a \in A : ax \in I\}$ que es un ideal izquierdo de A. Sea $\varphi : A^{r+1} \to I$ con

$$\varphi(a_1, ..., a_{r+1}) = \sum_{1\leq i\leq r} a_i x_i + a_{r+1}x$$

La función φ es lineal, continua y sobreyectiva. Entonces es abierta. Si θ es un abierto no vacío de A^{r+1}, existen $a_1, ..., a_r, a_{r+1} \in \theta$ tal que $\sum_{1\leq i\leq r} a_i x_i + a_{r+1}x \in I$. Hace que

$a_{r+1}x \in I$. Resulta que $a_{r+1} \in J$ y por lo tanto, J es denso en A. Como A es Q-álgebra, afirmamos que J=A, puesto que $G(A) \cap J \neq \phi \Rightarrow \exists a \in G(A)$ tal que $a \in J$, es decir, $ax \in I$, lo que implica que $yax = x \in I$ lo que es una contradicción, por lo cual $\mathcal{F}$ es vacía, por lo tanto, todos los ideales son cerrados.

Ejemplo 9. *La metrizabilidad es necesaria para la validez del Teorema (3.36). En efecto, aquí esta un ejemplo de una Q-álgebra localmente m-convexa completa conmutativa donde todos sus ideales son cerrados y no es Noetheriana.*

Para todo entero natural $k \geq 1$, *consideremos* $A_k = \{(x_n) \in S_0^1 : \forall n \geq m, x_n = x_m\}$ *las* A_k *forman una sucesión creciente de subálgebras de dimensión finita de* S_0^1. *Más aún* $S_0^1 = \bigcup_{k \geq 1} A_k$. *Provisto de la topología límite inductivo localmente convexa, el álgebra* S_0^1 *es un álgebra localmente m-convexa por [7, Prop11,p. 349], por lo tanto, el álgebra es localmente m-convexa y es completa, más aún, es barrilada ya que los* A_k *lo son. Por otro lado, el espectro de todo elemento de* S_0^1 *es acotado, pues*

$$\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \notin G(A)\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda = x_n, \textit{para algún } n \geq 0\},$$

este conjunto consta de un número finito de elementos. Así por el Teorema (3.2) tenemos que S_0^1 *es una Q-álgebra. Sin embargo,* S_0^1 *no es Noetheriana, pues sean*

$$x_1 = (1, 0, 0, ...), x_2 = (1, 1, 0, 0, ...), ..., x_n = (1, 1, 1, ..., 1, 0, 0, 0, ...), ...$$

y formemos lo ideales

$$I_1 = \langle x_1 \rangle, I_2 = \langle x_1, x_2 \rangle, ..., I_n = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle, ...$$

Notese que

$$I_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n, 0, 0, 0, ...) : a_i \in S_0^1, 1 \leq i \leq n\} \textit{ y } I_1 \leq I_2 \leq ... \leq I_n \leq ....$$

y esta no se estaciona. Por lo tanto no es Noetheriana.

Proposición 3.37. *Sea A una F-álgebra Noetheriana conmutativa entonces A es una Q-álgebra.*

Demostración. Primero mostraremos que si $a \in A$ tal que Aa es denso, entonces a es invertible.

Aplicamos el teorema de Mittag-Leffler [16, Teorema 5.3, p.147] a la sucesión $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funciones en A definidas por: $f_n : x \to a^n x$. Afirmamos que $a^n A$ es denso en $a^{n-1}A$. Primero observemos que $a^n A \subset a^{n-1}A$, pues $x \in a^n A \;\Rightarrow\; x = a^n y$ tal que $y \in A \;\Rightarrow\; x = a^{n-1}(ay)$ y $ay \in A \;\Rightarrow\; x \in a^{n-1}A$.

Por inducción. Para n=1, Aa es denso en Aa^{n-2}. Supongamos que $Aa^{n-1}a = Aa^n$ es denso en Aa^{n-1}, pues la multiplicación es homeomorfa para un elemento fijo. Por lo tanto, Aa^n es denso en Aa^{n-1}, esto implica que $g_k = \bigcap_{k\geq 0}(f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_k)$ y $g_k(Aa^k) = \bigcap\limits_{n\geq 0} Aa^n$ es denso en A, entonces $\overline{\bigcap\limits_{n\geq 0} Aa^n} = A$. Definimos $I = \bigcap\limits_{n\geq 0} Aa^n$. Verificamos que $I = Ia$, pues $Ia \subset I$ por que I es un ideal, por otro lado, $I \subset \bigcap\limits_{n\geq 0} Aa^n \subset (Aa^{n-1})a \;\Rightarrow\; I \subset Ia \;\Rightarrow\; I = Ia$.

Por otro lado, tenemos que $I = \bigcap Aa^n$ y Aa son ideales de A y $I(Aa) = Ia = I$. Por [40, Lema 2, p.215] existe $x \in A$ tal que $(e-x)I = \{0\}$. Como I es denso, entonces $(e-x)A = \{0\} \;\Rightarrow\; x = e$, esto se cumple por que el anillo es Noetheriano propio, entonces, como los anuladores son ideales finitamente generados en el anillo, implica que hay una combinación lineal que es 1. Entonces, a es invertible, pues $x \in Aa \;\Rightarrow\; x = ba \;\Rightarrow\; e = ba \;\Rightarrow\; a$ es invertible.

Probaremos que A es una Q-álgebra. Asumimos lo contrario. Entonces existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos no invertibles en A tales que $x_n \to e$. Sea d la métrica completa definida por τ, esta existe por que A es una F-álgebra. Por inducción se puede construir una subsucesión $(x_{n_p})_{p\geq 1}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que tenga las siguientes propiedades.

1. $d(e, x_{n_p}) < 2^{-p+1}$ (ya que $x_n \to e$)

2. $d(x_{n_k}\cdots x_{n_{p-1}}, x_{n_k}\cdots x_{n_p}) < 2^{-p+1}\ \ \forall p \leq 2$ (por la continuidad de la multiplicación).

La existencia de x_{n_1} se sigue del hecho de que $x_n \to e$. Supongase que $x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_{p-1}}$ han sido construidos. Usando la continuidad de la función $x \mapsto (x_{n_1}\cdots x_{n_{p-1}}x, x_{n_2}\cdots x_{n_{p-1}}x, ..., x_{n_{p-1}}x)$ definida para A en A^{p-1}, obtenemos x_{n_p}. Ahora por la condición (2) tenemos que para cada $p \geq 2$, la sucesión $(x_{n_p}, x_{n_{p+1}}, ..., x_{n_k})_{k\geq p}$ converge a un elemento $e_p \in A$. Es obvio que $e_k = x_k e_{k+1}$. Tenemos que,

$$
\begin{aligned}
d(e_k - e) &= \|e_k - e\| \\
&= \|e_k + x_{n_k} - x_{n_k} - e\| \\
&\leq \|e_k - x_{n_k}\| + \|e - x_{n_k}\| \\
&= \|x_{n_k} - e_{k+1}\| + \|e - x_{n_k}\| \\
&= \|x_{n_k}\| \cdot \|e_{k+1} - e\| + \|e - x_{n_k}\| \\
&= \|x_{n_k}\| \cdot \|e_{k+1} - x_{n_{k+1}} + x_{n_{k+1}} - e\| + \|e - x_{n_k}\| \\
&\leq \|x_{n_k}\| \cdot \|e_{k+1} - x_{n_{k+1}}\| + \|x_{n_k}\| \cdot \|x_{n_{k+1}} - e\| + \|e - x_{n_k}\| \\
&= \|x_{n_k}\| \cdot \|x_{n_{k+1}} e_{k+2} - x_{n_{k+2}}\| + \|x_{n_k}\| \cdot \|x_{n_{k+1}} - e\| + \|e - x_{n_k}\| \\
&= \|x_{n_k} x_{n_{k+1}}\| \cdot \|e_{k+2} - e\| + \|x_k\| \cdot \|x_{n_{k+1}} - e\| + \|e - x_{n_k}\| \\
&\leq \|x_{n_k} x_{n_{k+1}}\| \cdot \|e_{k+2} + x_{n_{k+2}} - x_{n_{k+2}} - e\| + \|x_{n_k}\| \cdot \|x_{n_{k+1}} - e\| + \|e - x_{n_k}\|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot\ \ \cdot\cdot \\
&\leq \|e - x_{n_k}\| + \sum_{k=p}^{\infty} \|x_{n_k}\cdots x_{n_p}\| \cdot \|e - x_{n_{p+1}}\| \\
&= \|e - x_{n_k}\| + \sum_{k=p}^{\infty} \|x_{n_k}\cdots x_{n_p} - x_{n_k}\cdots x_{n_{p+1}}\| \\
&= d(e, x_{n_k}) + \sum_{k=p}^{\infty} d(x_{n_k}\cdots x_{n_p}, x_{n_k}\cdots x_{n_{p+1}}) \\
&\leq 2^{-k+1} + \sum_{k=p}^{\infty} 2^{-k}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la sucesión $(e_k)_{k\geq 1}$ converge a e. Por otro lado, para cada $k \geq 1$, tenemos que $e_k = x_{n_{k+1}}e_{k+1}$ y por lo tanto $(Ae_k)_k$ es una sucesión creciente de ideales. Como A es Noetheriana, de ahí existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $Ae_k = Ae_{k_0}$ para cada $k \geq k_0$. De este se sigue que Ae_{k_0} es denso en A. Por la primera parte, el elemento e_{k_0} es invertible. Esto es imposible ya que $x_{n_{k_o+1}}$ es no invertible, contradicción, por lo tanto, A es Q-álgebra.

Teorema 3.38. *Sea A una F-álgebra localmente m-convexa. Entonces todos sus ideales izquierdos son cerrados si y sólo si A es Noetheriana izquierda.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Por el Teorema (3.36) el que el álgebra tenga todos sus ideales izquierdos cerrado implica Noetheriana izquierda.

$\Leftarrow$) Es suficiente, por el mismo Teorema (3.36) demostrar que A es Q-álgebra . Para ello se utiliza la segunda afirmación de la Proposición (3.34). En efecto, si $\overline{Ax} = A$ para $x \in A$, entonces por [4, Teorema 3.2, p.173] tambien $Ax = A$, es decir, x es invertible izquierdo. Por lo tanto, x es invertible por [27, Teorema 1, p.353]. Como estamos en el caso Noetheriano tenemos que todos los ideales izquierdos de A son cerrados.

Proposición 3.39. *Sea A un álgebra m-convexa con unidad. Entonces cada ideal bilateral máximo cerrado es de codimensión uno.*

Demostración. Sea $M \subset A$ un ideal bilateral máximo cerrado. M es un subespacio vectorial. Entonces A/M es un álgebra m-convexa que es un anillo de división. Por el Teorema de Gelfand Mazur (2.31), $A/M \cong \mathbb{C}$.

Teorema 3.40. *Sea A un álgebra m-convexa, compleja, con unidad que es Q-álgebra bajo alguna topología. Entonces todo ideal máximo de A es de codimensión 1.*

Demostración. Como A es Q-álgebra, entonces por [32, Teorema 6.3, p.106] tenemos que todo ideal máximo de A es cerrado, consideremos $f : A \to A/M$ el homomorfismo canónico por el Teorema de Gelfand Mazur (2.31), $A/M \cong \mathbb{C}$. Entonces, $f \in \mathcal{M}(A)$ y $M = \ker(f)$ que es un ideal máximo de A de codimensión 1.

Proposición 3.41. *Sea A un álgebra m-convexa Hausdorff con unidad. Si A es Artiniana, entonces A es Q-álgebra.*

Demostración. Sea $(p_i)_{i\in I}$ una familia de seminormas submultiplicativas las cuales están ordenadas por $\leq$, y definen la topología de A. Sea $i_0 \in I$ tal que $\ker\rho_{i_0}$ es un ideal mínimo en la familia $(\ker\rho_i)_{i\in I}$ de ideales. Para cada $i \geq i_0$, tenemos $\ker p_i \subset \ker p_{i_0}$. Ya que si $\ker\rho_{i_0}$ es mínimo entonces ρ_{i_0} es máxima, es decir,$\forall x \in A, \rho_i(x) \leq \rho_{i_0}(x)$. Supongamos que $\exists x_0 \in A$, $\rho_i(x_0) > \rho_{i_0}(x_0)$ para cada $i \geq i_0$ tenemos que si:

1. Si $x_0 \in \ker\rho_{i_0} \Rightarrow \rho_{i_0}(x_0) = 0 \Rightarrow \ker\rho_{i_0} \subseteq \ker\rho_i \Rightarrow \rho_i(x_0) = 0$, llegamos a una contradicción.

2. Si $x_0 \notin \ker\rho_{i_0} \Rightarrow \rho_{i_0} \neq 0$, sea $y = x_0 - \rho_{i_0}(x_0)e$, entonces tenemos que $\rho_{i_0}(y) = 0 \Rightarrow \rho_i(y) = 0$, lo que implica

$$0 = \rho_i(y) = \rho_i(x_0) - \rho_{i_0}(x_0)\rho_i(e) = \rho_i(x_0) - \rho_{i_0}(x_0) \Rightarrow \rho_i(x_0) = \rho_{i_0}(x_0)$$

lo cual también es un contradición, lo que implica que $\ker p_i \subset \ker p_{i_0}$. De donde $\ker p_i = \ker p_{i_0}$. Por lo tanto, del hecho de que τ es Hausdorff, tenemos que $\ker p_{i_0} = \{0\}$. Esto implica que (A, p_{i_0}) es un álgebra normada. La conclusión se sigue de la Proposición (3.24) y del hecho de que τ es más fina que la topología definida por p_{i_0}.

Proposición 3.42. *Sea A un álgebra m-convexa Hausdorff conmutativa con unidad. Si A es Artiniana entonces es de dimensión finita.*

Demostración. Procediendo de forma análoga a la demostración de la Proposición (3.41) tenemos que A es normada. Como A es artiniana entonces se cumplen las hipótesis del Teorema (3.27) y por lo tanto podemos concluir que A es de dimensión finita.

Teorema 3.43. *Sea A un álgebra Artiniana conmutativa. Entonces A tiene todos sus ideales izquierdos cerrados para toda topología del álgebra.*

Demostración. Sea τ una topología del álgebra de A y F la familia de sus ideales principales de A que no son cerrados. Supongamos que F no es vacía, consideremos un elemento Ax_0 mínimo de F. Como Ax_0 no es cerrado, entonces $Ax_0^2 \neq Ax_0$.

Teniendo en cuenta la minimalidad de Ax_0, el ideal Ax_0^2, es cerrado. Por otra parte, el álgebra Ax_0/Ax_0^2, cuyo producto es trivial, es Artiniano. Entonces es de dimensión finita, pues el generador es $ex_0 + Ax_0^2$.

Afirmamos que el ideal Ax_0/Ax_0^2 es cerrado en el álgebra topológica cociente A/Ax_0^2. Pues tomemos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una suseción en Ax_0/Ax_0^2. Como cada $x_n \in Ax_0/Ax_0^2$, entonces $x_n = a_nx_0 + Ax_0^2$ y $x \in A/Ax_0^2$, lo que implica $x = a + Ax_0^2$. Por hipótesis tenemos que $\{x_n\} \to x$, entonces $a_nx_0 + Ax_0^2 \to a + Ax_0^2$. Dado $\varepsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m \geq n$, $|a_nx_0 + Ax_0 - (a + Ax_0^2)| < \varepsilon$, entonces $|a_nx_0 - a| < \varepsilon$, por lo tanto $\{a_nx_0\} \to a \in A$, lo cual implica que $a = bx_0$ con $b \in A$, y por lo tanto $a_nx_0 \to bx_0$; entonces $x_n \to x \in Ax_0/Ax_0^2$. Por lo tanto, Ax_0/Ax_0^2 es cerrado en A/Ax_0^2.

De esto resulta que el ideal Ax_0 es cerrado en A, este no es el caso. Por lo tanto, F es vacía. Con lo que concluimos que todo ideal principal de A es cerrado. Como el ser Artiniano y que todos sus ideales izquierdos sean cerrados son propiedades conservadas por el paso al cociente, todo ideal de tipo finito de A es cerrado. Por lo tanto A tiene todos sus ideales izquierdos cerrados ya que es Noetheriano.

Definición 3.44. *El radical de A, $Rad(A)$, es la intersección de todos los ideales máximos de A.*

A es un álgebra semisimple si $Rad(A) = 0$

Teorema 3.45. *Sea A un álgebra conmutativa semi-simple Noetheriana A. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *A tiene todos sus ideales izquierdos cerrados.*
2. *A es isomorfo a un producto finito de álgebras que son campos.*
3. *A es Artiniana.*

Demostración.

($2 \Rightarrow 1$) Sea $A = \prod_{i=1}^{n} K_i$ donde K_n son campos $\forall\ 1 \leq i \leq n$. Facilmente podemos ver que los ideales de un producto finito son de la forma $(I_1, I_2, ..., I_n)$ donde $I_i = 0$ o $I_i = K_i,\ \ \forall 1 \leq i \leq n$ y estos son cerrados.

($2 \Rightarrow 3$) Por hipótesis tenemos que A es de la forma $A = \prod_{i=1}^{n} K_i$ con K_i campos y por lo anterior tenemos 2^n ideales por lo tanto es Artiniana.

($3 \Rightarrow 2$) Por hipótesis A es Artiniana y semi-simple entonces por el Teorema de Artin-Wedderburn [17, Teorema 7-1.41, p.124] para álgebras tenemos que A es isomorfa a un producto finito de álgebras que son campos.

($1 \Rightarrow 2$) Sea $(M_i)_{i \in \Lambda}$ la familia de ideales máximos de A. Si Λ se reduce a un solo punto entonces el álgebra A es un campo ya que es semi-simple.

Supongamos ahora que Λ no es un único punto. Sea $i_0 \in \Lambda$ y tomemos $L = \bigcap_{i \neq i_0} M_i$. Supongase que L es nulo. Dotamos a A de la topología definida por la familia de seminormas

$$(p_{i,f})_{i \in I \setminus \{i_0\}},\ \ f \in (A/M_i)^*,\ \ con$$

$$p_{i,f} = |f(s_i(x))|,\ \ \forall x \in A,$$

donde s_i es la proyección canonica de A sobre A/M_i y $(A/M_i)^*$ es el dual algebraico de A/M_i.

Notemos que para toda $i \in \Lambda$ y $f \in (A/M_i)^*$, el kernel de $p_{i,f}$ contiene al ideal M_i.

Mostraremos que existe un conjunto de indices J finito contenido en $I \setminus \{i_0\}$ tal que M_{i_0} contiene $\bigcap_{j \in J} M_j$. En el caso contrario, para cada $x_J \notin M_{i_0}$, tenemos que $M_{i_0} + Ax_J = A$ por la máximalidad de M_{i_0}. Por lo tanto, existe un $a_J \in A$ y $m_J \in M_{i_0}$ tal que $e = m_J + a_J x_J$. Entonces, la sucesión generalizada por $(a_J x_J)_J$ converge a cero, y por lo tanto la sucesión $(m_J)_J$ converge a e; esto es imposible ya que M_{i_0} es un ideal propio cerrado. Por lo tanto, existe un conjunto J finito contenido en $I \setminus \{i_0\}$ tal que M_{i_0} contiene a $\bigcap_{j \in J} M_j$.

En consecuencia, existe un $j \in J$ tal que $M_{i_0} = M_j$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, necesariamente L es no nulo. Además, tenemos $M_{i_0} \cap L = \{0\}$. Como A es semi-simple, existe un ideal primo minimal P de A que no contiene a L. El ideal P contiene entonces a M_{i_0} y, en concecuencia $P = M_{i_0}$.

En conclusión, por [30, Corolario, p.106] I es finito y A es isomorfo al álgebra producto $\prod_{i \in I} A/M_i$ donde A/M_i son campos.

Teorema 3.46. *Un álgebra de Banach conmutativa A es Noetheriana si y sólo si la dimensión de A es finita.*

Demostración. Sea η el nilradical de A, sabemos que η es nilpotente [31, Lema 2.3, p.193] y [31, Corolario 3.8, p.202], entonces

$$\exists j_0 > 0 \text{ tal que } \eta^{j_0} = 0. \tag{3.10}$$

Consideremos la cadena

$$A > \eta > \eta^2 > \eta^3 > \cdots$$

por (3.10) tenemos que existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $\dim \eta^j < \infty$.

Mostraremos por inducción sobre j que $\dim_k \eta^d < \infty$, $\forall d < j$; supongamos que

$\dim_k \eta^{d+1} < \infty$ para considerar la k-sucesión exacta siguiente:

$$0 \to \eta^{d+1} \to \eta^d \to \eta^d/\eta^{d+1} \tag{3.11}$$

Como ideal, η^d es A-finitamente generado pues A es Noetheriano, por otro lado el A-módulo η^d/η^{d+1} es un A/η-módulo pues $ann(\eta^d/\eta^{d+1}) \subseteq \eta$.

Notamos que η^d/η^{d+1} también es un A/η-módulo finitamente generado, además tenemos que por el Teorema (3.35) tiene todos sus ideales izquierdos cerrados, más aún A/η es semi-simple, por lo tanto, por el Teorema (3.45), A/η es Artineana, aplicando el Teorema(3.27) tenemos que $\dim_k A/\eta < \infty$ y así se cumple que $\dim_k \eta^d/\eta^{d+1} < \infty$ también.

Por el Teorema de la dimensión aplicado a (3.11), tenemos lo anunciado. Entonces eventualmente llegamos a que $\dim_k A < \infty$.

Observacion 3.47. *Nótese que en particular un álgebra de Banach conmutativa es Noetheriana si y sólo si es Artiniana. Esto es por los Teoremas (3.46) y (3.27)*

Teorema 3.48. *Un álgebra de Banach A conmutativa con unidad es de dimensión finita si y sólo si todos sus ideales máximos son de tipo finito.*

Demostración.

$\Leftarrow$) Demostraremos primero que si A tiene todos sus ideales de tipo finito, entonces la dimensión de A es finita. Por el Teorema (3.46) es suficiente probar que A es Noetheriana; por [30, Teo.II.2,p.50] sabemos que si A es un anillo, son equivalentes: A es Noetheriana y todo ideal primo es de tipo finito.

Consideremos $\mathfrak{D}$ la familia de todos los ideales primos los cuales no son de tipo finito ordenados por la inclusión. Supongamos que $\mathfrak{D} \neq \phi$, entonces $\mathfrak{D}$ es inductivo y por el Lema de Zorn, existe $P \in \mathfrak{D}$ un elemento máximo.

Pero por hipótesis P es de tipo finito ya que es un ideal máximo en A, lo cual nos lleva a una contradicción, por lo tanto $\mathfrak{D} = \phi$, entonces todo ideal primo de A es de tipo finito.

$\Rightarrow$) Si A es de dimensión finita por el Teorema (3.46) es Noetheriana, entonces todos sus ideales son de tipo finito. En particular sus ideales máximos son de tipo finito.

Observacion 3.49. *Un álgebra de Banach conmutativa con unidad es Noetheriana si y sólo si todos sus ideales máximos son de tipo finito.*

3.3. Álgebras Advertiblemente Completas

Las álgebras topológicas advertiblemente completas fueron introducidas en 1955 por S. Waner. En particular, él consideró este concepto en el contexto de la teoría de las álgebras localmente m-convexas. Se dio cuenta de que las "álgebras localmente m-convexas que son advertiblemente completas poseen la mayoría de las propiedades de las álgebras de Banach".

Definición 3.50. *Una red* $(x_i)_{i\in I}$ *en* A *es* ***advertiblemente convergente derecha (izquierda)*** *con respecto a* $x \in A$ *si* $x \circ x_i \to 0$ $(x_i \circ x \to 0)$, *y entonces también decimos que* $(x_i)_{i\in I}$ *es el casi inverso topológico derecho (izquierdo) de* x.

La red $(x_i)_{i\in I}$ *es llamada* ***advertiblemente convergente*** *o simplemente* ***advertible*** *si es advertiblemente convergente derecha e izquierda con respecto a algún* x *en* A. *Observe que* $(x_i)_{i\in I}$ *converge en* A *si y sólo si* $x \in G^q(A)$, *donde* $G^q(A)$ *es el conjunto de los elementos casi invertibles de* A; *en este caso su límite es* x°. *El álgebra topológica* A *es* ***advertiblemente completa*** *si cada red de Cauchy advertible de* A *converge en* A.

Como vemos, esta definición considera el caso más general, es decir, cuando el álgebra topológica no tiene unidad. En el caso de un álgebra topológica con unidad esa definición la podemos presentar como sigue:

Definición 3.51. *Una red* $(x_i)_{i\in I}$ *en* A *es* ***advertiblemente convergente derecha (izquierda)*** *con respecto a* $x \in A$ *si* $xx_i \to e$ $(x_i x \to e)$, *y entonces también decimos que* $(x_i)_{i\in I}$ *es el inverso topológico derecho (izquierdo) de* x.

La red $(x_i)_{i\in I}$ *es llamada* ***advertiblemente convergente*** *o simplemente* ***advertible*** *si es advertiblemente convergente derecha e izquierda con respecto a algún* x *en* A. *Observe que* $(x_i)_{i\in I}$ *converge en* A *si y sólo si* $x \in G(A)$; *en este caso su límite es* x^{-1}.

El álgebra topológica A *es* ***advertiblemente completa*** *si cada red de Cauchy advertible de* A *converge en* A.

Como cada red advertible de Cauchy $(x_i)_{i\in I}$, en particular es un red de Cauchy, esta converge en un álgebra completa, por lo tanto cada álgebra completa es advertiblemente completa.

Por definición las Q-álgebras no son completas pero son advertiblemente completas, como lo muestra el siguiente Teorema, y estos dos conceptos son equivalentes en las álgebras normadas.

Teorema 3.52. *Sea A una Q-álgebra entonces, A es advertiblemente completa.*

Demostración. Sea F un filtro de Cauchy en A, y supongamos que $x \circ F \longrightarrow 0$ y $F \circ x \longrightarrow 0$, para algún elemento $x \in A$. Entonces si denotamos con S al conjunto de los elementos casi invertibles de A, existe un conjunto $E \in F$ tal que $x \circ E \subseteq S$ y $E \circ x \subseteq S$. Entonces para los cualesquiera $a, b \in E$ y $u, v \in A$ que satisfacen las relaciones siguientes:

$$\begin{aligned}
(x \circ a) \circ u &= (x \circ a) + u - (x \circ a)u \;=\; x + a - xa + u - (x + a - xa)u \\
&= x + a - xa + u - xu - au + xau \;=\; x + a + u - xa - x(u + a - au) \\
&= x + (a \circ u) - x(a \circ u) \;=\; x \circ (a \circ u) = 0 \\
& \quad y \\
v \circ (b \circ x) &= v + (b \circ x) - v(b \circ x) \;=\; v + b + x - bx - v(b + x - bx) \\
&= v + b + x - bx - vb - vx - vbx \;=\; v + b - vb + x - bx - vx - vbx \\
&= (v \circ b) + x - (b + v - vb)x \;=\; (v \circ b) + x - (v \circ b)x \\
&= (v \circ b) \circ x = 0
\end{aligned}$$

lo que implica que $a \circ u = v \circ b \equiv z$. En consecuencia, por hipótesis, para el filtro F uno finalmente tiene que $F = F \circ 0 = F \circ (x \circ z) = (F \circ x) \circ z$ tomando el límite tenemos que $\lim F = \lim[(F \circ x) \circ z] = \lim(F \circ x) \circ z = 0 \circ z = z$, es decir, $F \to z$. Por lo tanto A es advertiblemente completa.

Teorema 3.53. *Sea A un álgebra normada, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Si $\|x\| < 1$ entonces x es casi-invertible.*

2. *A es una Q-álgebra.*

3. *A es advertiblemente completa.*

4. *Si $x \in A$ con $\|x\| < 1$, entonces la serie $-\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ converge en A.*

Demostración.

$(1 \Rightarrow 2)$ Por hipótesis el conjunto $U = \{x \in A : \|x\| < 1\} \subset G^q(A)$ y U es abierto entonces $G(A)$ es abierto lo que implica que A es una Q-álgebra.

$(2 \Rightarrow 3)$ Por hipótesis A es una Q-álgebra entonces por el Teorema (3.52) implica que A es advertiblemente completa.

$(3 \Rightarrow 1)$ Si $\|x\| < 1$, sea $s_n = -\sum_{i=1}^{n} x^i$. Entonces $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy y $\lim_{n\to\infty} x^{n+1} = 0$. Pero tenemos que

$$\begin{aligned} s_n \circ x &= s_n + x - xs_n \\ &= -\sum_{k=1}^{n} x^k + x + x\sum_{k=1}^{n} x^k \\ &= -x + x + x^{n+1} \\ &= x^{n+1} = x \circ s_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

por lo tanto $\lim_{n\to\infty} s_n \circ x = \lim_{n\to\infty} x \circ s_n = 0$. Por hipótesis A es advertiblemente completa, entonces existe x° tal que $\lim_{n\to\infty} s_n = x^\circ$, entonces x° es el casi inverso de x.

$(1 \Rightarrow 4)$ Sea $x \in A$ con $\|x\| < 1$ y sea y el casi inverso de x en A. Mostramos que la sucesión

$\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $s_n = -\sum\limits_{k=1}^{n} x^k$ converge a y y esto prueba el inciso (3). En efecto,

$$\begin{aligned}
-s_n + y &= (y \circ x) \circ (-s_n) + y \\
&= (y + x - yx) \circ (-s_n) + y \\
&= y + x - yx - s_n + s_n(y + x - yx) + y \\
&= y + x - yx + \sum_{k=1}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n} x^k(y + x - yx) + y \\
&= y + x - yx + \sum_{k=1}^{n} x^k - \sum_{k=1}^{n} x^k y - \sum_{k=2}^{n+1} x^k + y \sum_{k=1}^{n} x^k + y \\
&= 2y + x - yx + x - x^{n+1} - xy + yx^{n+1} \\
&= 2y - 2yx + 2x - x^{n+1} + yx^{n+1} \\
&= 2(y \circ x) - x^{n+1} + yx^{n+1} \\
&= -x^{n+1} + yx^{n+1} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \text{ ya que} \|x\| < 1
\end{aligned}$$

Entonces $s_n \to y$.

$(4 \Rightarrow 2)$ Sea $x \in A$ con $\|x\| < 1$. Por hipótesis la sucesión $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x^k$ converge en A y sea z su límite. Entonces

$$\begin{aligned}
s_n \circ x &= s_n + x - xs_n \\
&= -\sum_{k=1}^{n} x^k + x + x\sum_{k=1}^{n} x^k \\
&= -x + x + x^{n+1} \\
&= x^{n+1} = x \circ s_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

donde $\|x^{k+1}\| \leq \|x\|^{k+1} \to 0$. Entonces, $s_n \circ x \to 0 \leftarrow x \circ s_n$, tomando el límite tenemos que $z \circ x \to 0$ y $x \circ z \to 0$, por lo tanto z es el casi inverso de x.

Consideremos el conjunto abierto $U = \{y \in A : \|y - x\| < \frac{1}{1+\|x^\circ\|}\}$. Entonces $x \in U \subseteq G^q(A)$, donde $G^q(A)$ es el conjunto de los casi invertibles de A. En efecto, si

$y \in U$ uno tiene que

$$
\begin{aligned}
\|y \circ x^{\circ}\| &= \|y + x^{\circ} - yx^{\circ}\| \\
&= \|y + x^{\circ} - (x^{\circ} \circ x) - yx^{\circ}\| \\
&= \|y + x^{\circ} - (x^{\circ} + x - x^{\circ}x) - yx^{\circ}\| \\
&= \|y + x^{\circ} - x^{\circ} - x + x^{\circ}x - yx^{\circ}\| \\
&= \|y + x^{\circ}x - x - yx^{\circ}\| \\
&= \|(y - x) - (y - x)x^{\circ}\| \\
&= \|(y - x)(1 - x^{\circ})\| \\
&\leq \|y - x\|\|1 - x^{\circ}\| \\
&\leq \|y - x\|(1 + \|x^{\circ}\|) \\
&< \frac{1}{1 + \|x^{\circ}\|}(1 + \|x^{\circ}\|) < 1
\end{aligned}
$$

Por la primera parte de la demostración tenemos que $(y \circ x^{\circ})$ es casi invertible y por lo tanto $y = (y \circ x^{\circ}) \circ x \in G^q(A)$. Esto prueba que el conjunto de los elementos casi invertibles de A es abierto, lo que implica que A es Q-álgebra.

Ejemplo 10. *Sea $\kappa(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) : supp(f) es\ compacto\}$ dotada con las operaciones algebraicas puntuales y norma uniforme $\|\cdot\|_{\infty}$.*

Afirmamos que $\kappa(\mathbb{R})$ es un álgebra normada, no completa sin unidad (es fácil ver que $f(x) = x \notin \kappa(\mathbb{R})$ ya que no tiene soporte compacto). Veamos que $\kappa(\mathbb{R})$ es normada. Como $\mathbb{R}$ es metrizable todo conjunto compacto es cerrado y acotado y por lo tanto para toda $f \in \kappa(\mathbb{R})$, $\|f\|_{\infty} = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ existe y cumple las propiedades de norma. Solo queda ver que $\kappa(\mathbb{R})$ no es completa.

Sea $f \in \kappa(\mathbb{R})$ con $\|f\|_{\infty} < 1$. Entonces $f(x) \neq 1$, para cada $x \in \mathbb{R}$, definamos la función

$$g(x) := \frac{f(x)}{f(x) - 1}, \quad con \ \ x \in \mathbb{R}.$$

Como $f \in \kappa(\mathbb{R})$ *tiene soporte compacto y* $g(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = 0$. *Entonces* $g(x)$ *tambien tiene soporte compacto, lo que implica que* $g(x) \in \kappa(\mathbb{R})$ *y*

$$\begin{aligned}
g \circ f &= \frac{f(x)}{f(x)-1} + f(x) - \left(\frac{f(x)}{f(x)-1}\right) f(x) \\
&= \frac{f(x) + f^2(x) - f(x) - f^2(x)}{f(x)-1} \\
&= \frac{0}{f(x)-1} = 0 \\
&\quad y \\
f \circ g &= f(x) + \frac{f(x)}{f(x)-1} - f(x)\left(\frac{f(x)}{f(x)-1}\right) \\
&= \frac{f^2(x) - f(x) + f(x) - f^2(x)}{f(x)-1} \\
&= \frac{0}{f(x)-1} = 0
\end{aligned}$$

entonces, $g \circ f = f \circ g = 0$ *lo que implica que* f *sea casi invertible en* $\kappa(\mathbb{R})$. *Por lo que se cumple el inciso (1) del Teorema (3.53) lo que es equivalente a que* $\kappa(\mathbb{R})$ *es un álgebra advertiblemente completa.*

También existen álgebras normadas, no completas, que no son Q-álgebras y no son advertiblemente completas, por ejemplo:

Ejemplo 11. *Sea* $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ *y* P *todos los polinomios en* $\mathbb{T}$ *con coeficientes complejos. Dotamos a* P *con las operaciones algebraicas definidas puntualmente y con la norma uniforme* $\|\cdot\|_\infty$.

Afirmamos que P es un álgebra normada. Sea $p \in P$ entonces

$$
\begin{aligned}
\|p\|_\infty &= \sup_{z\in\mathbb{T}} |p(z)| \\
&= \sup_{z\in\mathbb{T}} |a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n|,\ \textit{con } a_i \in \mathbb{C},\ \forall 0 \le i \le n \\
&\le \sup_{z\in\mathbb{T}} |a_0| + |a_1 z| + |a_2 z^2| + \cdots + |a_n z^n| \\
&\le \sup_{z\in\mathbb{T}} |a_0| + |a_1||z| + |a_2||z^2| + \cdots + |a_n||z^n| \\
&\le |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| < \infty
\end{aligned}
$$

y por definición cumple las propiedades de norma.

Sea $p \in P$ con $p(z) = 1 - \frac{z}{2}$, $z \in \mathbb{T}$, entonces

$$
\begin{aligned}
p(z)q(z) &= \left(1 - \frac{z}{2}\right)(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n) \\
&= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n - \frac{a_0}{2} z - \frac{a_1}{2} z^2 - \frac{a_2}{2} z^3 - \cdots - \frac{a_n}{2} z^{n+1} \\
&= a_0 + \left(a_1 - \frac{a_0}{2}\right) z + \left(a_2 - \frac{a_1}{2}\right) z^2 + \cdots + \left(a_n - \frac{a_{n-1}}{2}\right) z^n - \frac{a_n}{2} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

de donde tenemos que

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_1 - \frac{a_0}{2} = a_1 - \frac{1}{2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_1 = \frac{1}{2} \\
a_2 - \frac{a_1}{2} = a_2 - \frac{1}{2^2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2^2} \\
a_3 - \frac{a_2}{2} = a_3 - \frac{1}{2^3} = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_3 = \frac{1}{2^3} \\
&\cdots \\
a_n - \frac{a_{n-1}}{2} = a_n - \frac{1}{2^n} = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_n = \frac{1}{2^n} \\
\frac{a_n}{2} = 0 \quad &\Rightarrow \quad a_n = 0, \textit{lo cual es una contradicción.}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, si $p(z) = 1 - \frac{z}{2}$ *no existe un* $q(z) \in P$ *tal que* $p(z)q(z) = 1$, $z \in \mathbb{T}$. *Esto significa que* $p(z)$ *no es invertible en* P.

Por otro lado, si 1 *es el elemento identidad de* P *tenemos que*
$\|1 - p\|_\infty = \|1 - (1 - \frac{z}{2})\|_\infty = \| - \frac{z}{2}\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{T}} |\frac{z}{2}| = \frac{1}{2} < 1$, *por el Teorema (3.53) si* P *es una* Q*-álgebra,* p *sería invertible lo cual es un contradicción. Entonces* P *no es una* Q*-álgebra, ni advertiblemente completa.*

Hemos probado que P *es un álgebra normada la cual no es* Q*, sabemos que toda álgebra de Banach es* Q*-álgebra, por lo tanto,* P *no es completa.*

Hay álgebras normadas que son advertiblemente completas pero no son ni completas ni Q-álgebras.

Ejemplo 12. *Sea* A_1 *una* Q*-álgebra normada no completa (véase el ejemplo (10)) y* $\{A_n\}_{n>1}$ *una familia de álgebras de Banach unitarias. Consideremos* $A := \prod_{n \in \mathbb{N}} A_n$ *y dotemos ésta con la topología producto. Entonces, por el Teorema (3.52) cada* A_n *con* $n \in \mathbb{N}$ *es un álgebra advertiblemente completa, por lo tanto el álgebra* A *es advertiblemente completa, la cual no es completa ya que* A_1 *no lo es.*

Noótese que si e_n *es el elemento identidad de* A_n, $n > 1$, *ésta no es un elemento casi-invertible en* A*; asumiendo que este lo es, nos llevaría a una contradicción, que* $e_n = 0$, $n > 1$. *Por lo tanto* A *no es una* Q*-álgebra y esto se sigue de la Proposición [21, Prop 6.10(3), p.74]*

Teorema 3.54. *Sea* A *un álgebra advertiblemente completa localmente m-convexa entonces considerando la descomposición de Arens-Michael de* A*, el radio espectral para* $x \in A$ *es:*

$$\rho(x) = \sup_{\alpha} \rho_{\widehat{A_\alpha}}([x]_\alpha) = \sup_{\alpha} \lim_{n \to \infty} (p_\alpha(x^n))^{1/n}. \tag{3.12}$$

En particular, si A *tiene elemento identidad, entonces el espectro de un elemento* x *en* A *satisface la relación:*

$$\sigma_A(x) = \bigcup_{\alpha \in I} \sigma_{\widehat{A_\alpha}}([x]_\alpha) \tag{3.13}$$

Demostración. Si $\lambda \neq 0$, entonces $\lambda \in \sigma_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C}^* : \frac{1}{\lambda}x \in A$ no es casi-invertible$\}$ si y sólo si, $\frac{1}{\lambda}x$ no es casi-invertible; por lo tanto, existe un $\alpha \in I$ tal que $[\frac{1}{\lambda}x]_\alpha = \frac{1}{\lambda}[x]_\alpha$ no es casi-invertible, así que $\lambda \in \sigma_{\widehat{A_\alpha}}([x]_\alpha)$ lo que implica que $\sigma_A \subseteq \bigcup\limits_{\alpha\in I} \sigma_{\widehat{A_\alpha}}$.

Sea $\lambda \neq 0$ tal que $\lambda \in \bigcup\limits_{\alpha\in I} \sigma_{\widehat{A_\alpha}}$, entonces $\frac{1}{\lambda}[x]_\alpha$ no es casi-invertible para algún $\alpha \in I$, por lo que $[\frac{1}{\lambda}x]_\alpha$ no es casi invertible, lo que implica que $\frac{1}{\lambda}x$ no es casi-invertible en A, entonces $\lambda \in \sigma_A$, por lo tanto $\bigcup\limits_{\alpha\in I} \sigma_{\widehat{A_\alpha}} \subseteq \sigma_A$.

Aplicando que $\rho_A(x) = \sup\limits_{\lambda\in\sigma_{A(x)}} |\lambda|$ tenemos que

$$\begin{aligned}
\rho_A(x) &= \sup_{\lambda\in \bigcup\limits_{\alpha\in I} \sigma_{\widehat{A_\alpha}([x]_\alpha)}} |\lambda| \\
&= \sup_{\alpha\in I} \sup_{\lambda\in\sigma_{\widehat{A_\alpha}([x]_\alpha)}} |\lambda| \\
&= \sup_{\alpha\in I} \rho_{\widehat{A_\alpha}}([x]_\alpha) \\
&= \sup_{\alpha} \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{\|x\|^n})
\end{aligned}$$

por lo tanto se cumple (3.12).

Por otro lado, si A tiene un elemento identidad, podemos aplicar el razonamiento a un elemento $\lambda \neq 0$ en $\sigma_A(x)$, con $x \in A$; además, si $0 \in \sigma_A(x)$ entonces x no es casi invertible, por lo tanto, es cierto para algún $[x]_\alpha$, con $\alpha \in I$. Así que $\sigma_A = \bigcup\limits_{\alpha\in I} \sigma_{\widehat{A_\alpha}}$

Teorema 3.55. *Sea A un álgebra localmente m-convexa. Si*

$$\sigma_A(x) \cup \{0\} = \widehat{x}(\mathcal{M}(A)^+) \ \ \forall x \in A \tag{3.14}$$

entonces A es advertiblemente completa. En particular, si el álgebra A es conmutativa, entonces las dos afirmaciones anteriores son equivalentes.

Demostración. Sea f un filtro de Cauchy en A tal que para algún elemento $x \in A$, se tiene que:

$$\lim(x \circ F) = \lim(F \circ x) = 0 \tag{3.15}$$

Por hipótesis se cumple (3.14) y esto implica que $f(x) \neq 1$, $\forall f \in \mathcal{M}(A)$. Veremos que x es un elemento casi-invertible de A. De lo contrario, existiría un elemento $f \in \mathcal{M}(A)$, tal que $f(x) = 1$. Ahora, por la continuidad de f, el conjunto

$$U = \{y \in A : |f(y)| < 1\}$$

es una vecindad abierta del $0 \in A$, por la hipótesis para $\mathcal{F}$, existe $B \in \mathcal{F}$, tal que $x \circ B = \{x \circ y : y \in B\} \subseteq U$, por lo tanto, $|f(x \circ y)| < 1$ para cada $y \in B$. Pero uno todavía obtiene

$$f(x \circ y) = f(x + y - xy) = f(x) + f(y) - f(x)f(y) = f(x) = 1$$

para cualquier $y \in B$, y esta es una contradicción a la última conclusión pues $1 > |f(x \circ y)| = |1| = 1$, por lo tanto, x es un elemento casi invertible de A; además existe un elemento $z \in A$, tal que $x \circ z = z \circ x = 0$, por lo que uno tiene

$$\rho_\alpha(x) \circ \rho_\alpha(z) = \rho_\alpha(z) \circ \rho_\alpha(x) = 0, \;\; \forall \alpha \in I. \tag{3.16}$$

Además, por la hipótesis para $\mathcal{F}$, $\rho_\alpha(\mathcal{F})$ es un filtro de Cauchy en $\widehat{A_\alpha}$; como $\widehat{A_\alpha}$ es completa, existe $y_\alpha \in \widehat{A_\alpha}$ tal que

$$\lim \rho_\alpha(\mathcal{F}) = y_\alpha \in \widehat{A_\alpha}, \;\; \forall \alpha \in I. \tag{3.17}$$

Por lo tanto, por (3.15) y (3.17), uno obtiene que

$$\lim \rho_\alpha(x \circ \mathcal{F}) = \lim(\rho_\alpha(x) \circ \rho_\alpha(\mathcal{F})) = \rho_\alpha(x) \circ (\lim \rho_\alpha(\mathcal{F})) = (\lim \rho_\alpha(\mathcal{F})) \circ \rho_\alpha(x) = 0$$

es decir, $\rho_\alpha(x) \circ y_\alpha = y_\alpha \circ \rho_\alpha(x) = 0$, $\forall \alpha \in I$. Consecuentemente por (3.16) tenemos que $y_\alpha = \rho_\alpha(z)$, con $\alpha \in I$, así que finalmente $y = (y_\alpha) = (\rho_\alpha(z)) = z \in A$, de modo que por (3.17) el filtro $\mathcal{F}$ converge a un elemento $y \in A$, por lo tanto, A es advertiblemente completa.

Además, si el álgebra es conmutativa y advertiblemente completa, entonces por [32, Teorema 5.1, p.97], $\lambda \in \sigma(x)$ si y sólo si existe un elemento $f \in \mathcal{M}(A)$, con $f(\frac{1}{\lambda}x) = 1$, es decir, $f(x) = \widehat{x}(f) = \lambda$; por lo tanto, $\lambda \in \widehat{x}\mathcal{M}(A)^+$, lo que implica que $\sigma_A(x) \cup \{0\} = \widehat{x}(\mathcal{M}(A)^+)$ con $x \in A$.

En base a la demostración anterior podemos concluir el resultado siguiente.

Corolario 3.56. *Sea A un álgebra localmente m-convexa conmutativa con unidad. Entonces A es advertiblemente completa si y sólo si,*

$$\widehat{x}(m(A)) = \sigma(x) \neq \phi, \; para \; cada \, x \in A.$$

Nota: Para cada álgebra A localmente m-convexa advertiblemente completa y conmutativa, el respectivo radio espectral ρ define una semi-norma submultiplicativa en el conjunto $B(A) = \{x \in A : \rho(x) < \infty\}$ que se convierte así en una subálgebra de A.

Corolario 3.57. *Sea A un álgebra localmente m-convexa advertiblemente completa y conmutativa. Entonces*

$$\rho_A(x) = \sup_{f \in m(A)} |f(x)|$$

para cada elemento $x \in A$. Además si $S(A) = \{x \in A : \rho(x) \leq 1\}$ entonces

$$S(A) = (\mathcal{M}(A))^\circ$$

donde $(\mathcal{M}(A))^\circ$ es el interior de $\mathcal{M}(A)$ y es un m-barril de $B(A)$ dotada de la topología relativa de A.

Demostración. Afirmamos que $\rho_A(x) = \sup_{f \in m(A)} |f(x)|$, puesto que $\rho_A(x) = \sup_{\lambda \in \sigma_A(x)} |\lambda|$ por definición y por el Teorema (3.55) tenemos que $\sigma_A(x) \cup \{0\} = \widehat{x}(\mathcal{M}(A))$ entonces obtenemos:

$\rho_A(x) = \sup_{\lambda \in \sigma_A(x)} |\lambda| = \sup_{f \in m(A)} |f(x)|$, por lo tanto, $\rho(x) = \sup_{f \in m(A)} |f(x)|$ con $x \in A$.

Por otro lado, es fácil ver que $S(A) = (\mathcal{M}(A))^{\circ}$ pues por definición
$S(A) = \{x \in A : \sup_{f \in m(A)} |f(x)| \leq 1\}$ y $\rho(x) = \sup_{f \in m(A)} |f(x)|$.

Falta ver que el conjunto S(A) es un conjunto m-barril, es decir, cerrado, balanceado, convexo e idempotente. Afirmamos que es un conjunto cerrado, puesto que si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en S(A) tal que $x_n \longrightarrow x$ con $x \in A$, como cada $x_n \in S(A)$ tenemos que $\rho(x) \leq 1$ y sabemos que $\rho(x)$ es una seminorma continua, entonces $\rho(x_n) \longrightarrow \rho(x)$, es decir, dado $\epsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} |\rho(x_n) - \rho(x)| < \epsilon \quad &\Rightarrow \quad -\epsilon < \rho(x_n) - \rho(x) < \epsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \rho(x) - \epsilon < \rho(x_n) < \epsilon + \rho(x) \end{aligned}$$

tenemos $\rho(x) - \epsilon < \rho(x_n) \leq 1$ y $\epsilon \to 0 \;\Rightarrow\; \rho(x) \leq 1 \;\Rightarrow x \in S(A)$.

Ahora veamos que el conjunto S(A) es balanceado, sea $x \in S(A)$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \leq 1$. Demostraremos que $\lambda x \in S(A)$. Tomemos un $x \in S(A)$, es decir, $\rho(x) \leq 1$ y $\rho(x)$ es una seminorma, entonces $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x) \leq 1$, lo que implica $\lambda x \in S(A)$.

Veamos que S(A) es convexo. Sean $x, y \in S(A)$ y $t \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leq t \leq 1$. Entonces, $\rho(tx + (1-t)y) \leq \rho(tx) + \rho((1-t)y) = t\rho(x) + (1-t)\rho(y) < t + (1-t) = 1$, por lo tanto, $tx + (1-t)y \in S(A)$.

Finalmente, verifiquemos que el conjunto S(A) es idempotente. Sea $x \in S(A)$, es decir, $\rho(x) \leq 1$, entonce $\rho(x \cdot x) = \rho(x)\rho(x) \leq 1$, lo que implica, $x \cdot x \in S(A)$. Por lo tanto, podemos concluir que el conjunto S(a) es un m-barril de $B(A)$.

Teorema 3.58. *Sea A localmente m-convexa m-barrilada advertiblemente completa y conmutativa. Entonces son equivalentes:*

1. *A es una Q-álgebra.*

2. $A = B(A)$

Demostración.

($1 \Rightarrow 2$) Esto se cumple para cada álgebra topológica, por [32, Corolario, II 4.3, p. 60]

($2 \Rightarrow 1$) Si $A = B(A)$, entonces por el Teorema (3.57) tenemos que $S(A)$ es m-barril en $B(A)$, de modo que por hipótesis es un vecindad del cero en A, lo que implica que A es un Q-álgebra por [32, Lema 4.2, p.59].

Teorema 3.59. *Si A es un álgebra m-convexa con unidad. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *A es advertiblemente completa.*

2. *$x \in A$ es invertible, si y sólo si $\pi_\alpha(x)$ es invertible en A_α, para toda α.*

Demostración.

($2 \Rightarrow 1$) Si $(x_\lambda)_\lambda$ es una red advertiblemente convergente de Cauchy, entonces existe $x \in A$ tal que $x(x_\lambda) \to e$, de ahí que $\pi_\alpha(x)\pi_\alpha(x_\lambda) \to e_\alpha$ para cada α, además como A_α es completa y $(\pi_\alpha(x_\lambda))_\lambda$ es de Cauchy (ya que $(x_\lambda)_\lambda$ es de Cauchy y π_α es continua), concluimos que $(\pi_\alpha(x_\lambda))_\lambda$ es convergente y por lo tanto $\pi_\alpha(x)$ es invertible, ahora usando la hipótesis se tiene que x es invertible y entonces $(x_\lambda)_\lambda$ es convergente.

($1 \Rightarrow 2$) Claramente se tiene que si x es un elemento invertible de A, entonces $\pi_\alpha(x)$ es invertible en A_α, para cada α, sólo resta probar que si $\pi_\alpha(x)$ es invertible en A_α para toda α, entonces x es invertible. Sea $(\pi_\alpha(x))^{-1}$ el inverso de $\pi_\alpha(x)$, (claramente $\|(\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha \neq 0$). Como $Im\pi_\alpha$ es densa en A_α para toda α, se tiene que dado α y $n \in \mathbb{N}$ existe $z_{\alpha,n} \in A$ tal que $\|\pi_\alpha(x)\pi_\alpha(z_{\alpha,n}) - e_\alpha\|'_\alpha < \frac{1}{n}$.

Decimos que $(\alpha, n) \preceq (\beta, m)$, si y sólo si, $\alpha \leq \beta$ y $n \leq m$. Consideremos la red $(z_{\alpha,n})_{(\alpha,n)}$, probaremos que esta es de Cauchy, es decir, que dado α *y* $\epsilon > 0$, existe (α_0, n_0) tal que para toda (α_1, n_1), $(\alpha_2, n_2) \succeq (\alpha_0, n_0)$, se tiene que

$\|\pi_\alpha(z_{\alpha_1,n_1}) - \pi_\alpha(z_{\alpha_2,n_2})\|'_\alpha < \epsilon$.

Consideremos $\alpha_0 = \alpha$ y $n_0 > \frac{2\|(\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha}{\epsilon}$. Se afirma que

$$\begin{aligned}
\|\pi_\alpha(z_{\alpha_1,n_1}) - (\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha &< \frac{\|(\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha}{n_1} \quad y \\
\|\pi_\alpha(z_{\alpha_2,n_2}) - (\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha &< \frac{\|(\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha}{n_2} \quad ya \;\; que
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\pi_\alpha(z_{\alpha_1,n_1}) - (\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha &= \|(\pi_\alpha(x))^{-1}\pi_\alpha(x)\pi_\alpha(z_{\alpha_1,n_1}) - (\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha \\
&= \|(\pi_\alpha(x))^{-1}(\pi_\alpha(x)\pi_\alpha(z_{\alpha_1,n_1}) - e_\alpha)\|'_\alpha \\
&\leq \|(\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha\|(\pi_\alpha(x)\pi_\alpha(z_{\alpha_1,n_1}) - e_\alpha)\|'_\alpha \\
&= \|(\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha\|xz_{\alpha_1,n_1} - e\|_\alpha \\
&\leq \|(\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha\|xz_{\alpha_1,n_1} - e\|_{\alpha_1} \\
&< \frac{\|(\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha}{n_1}
\end{aligned}$$

Haciendo lo análogo para $\|\pi_\alpha(z_{\alpha_2,n_2}) - (\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha$, se tiene que

$\|\pi_\alpha(z_{\alpha_2,n_2}) - (\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha < \frac{\|(\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha}{n_2}$.

Usando la afirmación anterior se tiene que

$$\begin{aligned}
\|\pi_\alpha(z_{\alpha_1,n_1}) - \pi_\alpha(z_{\alpha_2,n_2})\|'_\alpha &\leq \|\pi_\alpha(z_{\alpha_1,n_1}) - (\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha + \|\pi_\alpha(z_{\alpha_2,n_2}) - (\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha \\
&< \frac{\|(\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha}{n_1} + \frac{\|(\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha}{n_2} \\
&= \|(\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha(1/n_1 + 1/n_2) \\
&\leq \|(\pi_\alpha(x))^{-1}\|'_\alpha 2/n_0 \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Además por la elección de la red $(z_{\alpha,n})$ se tiene que $(xz_{\alpha,n})$ converge a e.

Como A es advertiblemente completa, $(z_{\alpha,n})$ es Cauchy y $(xz_{\alpha,n})$ converge a e, entonces $(z_{\alpha,n})$ es convergente y converge al inverso de x.

Teorema 3.60. *Sea A un álgebra m-convexa, conmutativa con unidad y advertiblemente completa , entonces x es invertible si y sólo si $f(x) \neq 0$, para toda $f \in \mathcal{M}(A)$.*

Demostración. $\Rightarrow$)Consideremos $x \in A$ invertible y $y \in A$ el inverso de x. Como $1 = f(e) = f(xy) = f(yx) = f(y)f(x)$, entonces $f(x) \neq 0 \ \ \forall f \in \mathcal{M}(A)$.

$\Leftarrow$) Supongamos que x no es invertible, entonces por el Teorema (3.59), existe un $\alpha \in \lambda$ tal que $\pi_\alpha(x)$ no es invertible en A_α. Consideremos el ideal $\pi_\alpha(x)A_\alpha$, el cual es propio y está contenido en un ideal máximo cerrado M, esto implica que existe $f \in \mathcal{M}(A_\alpha)$ tal que $f(\pi_\alpha(x)) = 0$, esto es una contradicción, ya que $f \circ \pi_\alpha \in \mathcal{M}(A)$.

Teorema 3.61. *Las propiedades (1)-(6) son equivalentes para cualquier álgebra m-convexa, unitaria, conmutativa y compleja (A, τ).*

1. *A es una Q-álgebra m-convexa sobre alguna topología τ^**

2. *A es un álgebra advertiblemente completa, m-convexa sobre alguna topología τ^* y el espacio $\mathcal{M}^\sharp(A)$ es compacto en la topología débil estrella.*

3. *El espacio $\mathcal{M}^\sharp(A)$ es compacto en la topología débil estrella y para cada elemento $x \in A$ tenemos que el espectro es $\sigma(x) = \widehat{x}(\mathcal{M}^\sharp(A))$.*

4. *A es espectralmente acotada y $\sigma(x) = \widehat{x}(\mathcal{M}^\sharp(A))$ para toda $x \in A$.*

5. *Para cada elemento $x \in A$ el espectro $\sigma(x)$ es compacto y $\sigma(x) = \widehat{x}(\mathcal{M}^\sharp(A))$.*

6. *A es un Q-álgebra m-convexa sobre alguna topología τ^* más fuerte que τ.*

   Además, cada una de las propiedades implica la siguiente:

7. *Cada ideal máximo de A es de codimensión 1.*

Demostración.

(1 $\Rightarrow$ 2) Por hipótesis A es una Q-álgebra por el Teorema (3.52) tenemos que A es adververtiblemente completa. Por el Teorema (3.2) inciso (6) tenemos que el espacio $\mathfrak{M}^\sharp(A)$ es compacto en la topología débil estrella.

(1 $\Rightarrow$ 7) Por el Teorema (3.2) inciso (1).

(2 $\Rightarrow$ 3) Que $\sigma(x) = \widehat{x}(\mathcal{M}^\sharp(A))$ para cada $x \in A$, si (A, τ^*) es advertiblemente completa, es por el Corolario (3.83).

(3 $\Rightarrow$ 4) Se sigue por el hecho de que $\widehat{x}$ es una función continua en $\mathcal{M}^\sharp(A)$, puesto que la imagen continua de un compacto es un compacto.

(4 $\Rightarrow$ 5) Supongamos que $\sigma(x)$ no es cerrado para algún $x \in A$ y tomemos $\lambda \in \overline{\sigma(x)} \backslash \sigma(x)$. Entonces $y = x - \lambda e$ es un elemento invertible de A. Existe una sucesión de números complejos $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge a 0 tal que $\lambda_n \neq 0$ y $\lambda_n \in \sigma(y)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ya que $\sigma(y) = \widehat{y}(\mathcal{M}^\sharp(A))$, tenemos que $\frac{1}{\lambda_n} \in \sigma(y^{-1})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $\sigma(y^{-1})$ no es acotada, y esto contradice la condición (4).

(5 $\Rightarrow$ 6) Supongamos que la topología τ de A es dada por el sistema $(\|\cdot\|_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de semi-normas submultiplicativas en A. Ponemos

$$|x|_0 = \text{máx}\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\} = \text{máx}\{|\widehat{x}(\varphi)| : \varphi \in \mathcal{M}^\sharp(A)\}$$

para cada $x \in A$. Notemos que $|\cdot|_0$ es un semi-norma submultiplicativa y $|x - e|_0 < 1$ implica que x es invertible en A.

Definimos en A un nuevo sistema de semi-normas submultiplicativas

$$\|x\|_\alpha^* = \text{máx}(|x|_0, \|x\|_\alpha).$$

La topología m-convexa τ^* en A asociada con este sistema de semi-normas es más fuerte que τ. Puesto que el conjunto $\{x \in A : |x - e|_0 < 1\}$ es una τ^*-vecindad de e que consiste de elementos invertibles, entonces (A, τ^*) es una Q-álgebra.

$(6 \Rightarrow 1)$ Inmediato.

3.4. Propiedades topológico-algebraicas y Q-álgebras

Definición 3.62. *Un ideal izquierdo I de un álgebra topológica compleja A es* ***topológicamente de tipo finito*** *si es topológicamente generado por un número finito de elementos de este, es decir, existe $x_1, x_2, ..., x_r \in I$ tal que*

$$\overline{I} = \overline{Ax_1 + \mathbb{C}x_1 + Ax_2 + \mathbb{C}x_2 + ... + Ax_r + \mathbb{C}x_r}$$

Un álgebra A es ***topológicamente Noetheriana izquierda*** *si todo ideal izquierdo es topológicamente de tipo finito.*

Ejemplo 13. *$\mathbb{H}(\mathbb{C})$ la F-álgebra localmente m-convexa de todas las funciones complejas holomorfas en el campo de los complejos $\mathbb{C}$. Dotada con la topología de convergencia uniforme en los subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$ y seminormas $P_k := \max\{|f(z)| : z \in \mathbb{K}\}$ cuando f sea una función continua definida en un abierto Ω de plano $\mathbb{C}$ y $\mathbb{K} \subset \Omega$ un compacto.*

Cada ideal principal de $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ es cerrado. Afirmamos que los ideales de $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ que son topológicamente de tipo finito son exactamente los ideales principales. Sea I un ideal principal de $\mathbb{H}(\mathbb{C})$, es decir, $I = \langle f \rangle = \{fa|\ a \in \mathbb{H}(\mathbb{C})\}$, mostraremos que I es cerrado y por lo tanto topológicamente de tipo finito. Sea $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en I tal que $g_n \to g$. Como $g_n \in I$, $\forall n \in \mathbb{N}$ tenemos que $g_n = fa_n$, entonces $\{fa_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una suceción de Cauchy en I.

Dado $\varepsilon' = |f|\varepsilon$ con $\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n, m \geq N$, implica que $\|fa_n - fa_m\| < \varepsilon'$, entonces

$$\begin{aligned} \|fa_n - fa_m\| < \varepsilon' &\Rightarrow |f||a_n - a_m| < \varepsilon' \\ &\Rightarrow |a_n - a_m| < \frac{\varepsilon'}{|f|} = \frac{\epsilon|f|}{|f|} = \epsilon \\ &\Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon \end{aligned}$$

por lo tanto, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ el cual es completo, entonces $\exists a \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ tal que $a_n \to a$ como la multiplicación es continua tenemos que $fa_n \to fa$, es decir, $g_n \to fa$, como $\mathbb{H}(\mathbb{C})$ es Hausdorff, implica que $g = fa$, por lo tanto, I es cerrado.

Ejemplo 14. *Cada álgebra topológica Noetheriana es topológicamente Noetheriana. Pues si A es un álgebra topológica Noetheriana, es decir, si I es un ideal izquierdo de A entonces $\overline{I}$ es de tipo finito, es decir, $\exists x_1, x_2, ..., x_r$ tales que $\overline{I} = Ax_1 + \mathbb{C}x_1 + \cdots + Ax_r + \mathbb{C}x_r$, entonces*

$$\begin{aligned} \overline{I} &= Ax_1 + \mathbb{C}x_1 + \cdots + Ax_r + \mathbb{C}x_r \\ \overline{\overline{I}} &= \overline{Ax_1 + \mathbb{C}x_1 + \cdots + Ax_r + \mathbb{C}x_r} \\ \overline{\overline{I}} &= I \end{aligned}$$

por lo tanto, A es topológicamente Noetheriana.

Proposición 3.63. *Sea A un álgebra topológica. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Cualquier sucesión creciente de ideales izquierdos cerrados se estaciona.*
2. *Cada familia no vacía de ideales izquierdos cerrados de A tiene un elemento máximo.*
3. *Cada ideal izquierdo de A es topológicamente de tipo finito.*

Demostración.

$(1 \Rightarrow 2)$ Sea Ω una familia de idelaes izquierdos cerrados no vacía.

Tomemos una cadena ascendente de ideales izquierdos cerrados en Ω, $I_1 \leq I_2 \leq \cdots$ Sea $I = \bigcup_{1\leq j<\infty} I_j$. Como I contiene a todos los I_j para $1 \leq j < \infty$ entonces I es una cota superior de Ω. I es cerrado ya que $\overline{I} = \overline{\cup I_j} = \cup\overline{I_j} = \cup I_j = I$. Tenemos que $I_1 \leq I_2 \leq \cdots$ es una sucesión creciente de ideales izquierdos cerrados, por hipótesis se estaciona, por lo tanto $I = I_{j_0}$ para algún $0 \leq j_0 < \infty$.

(2 $\Rightarrow$ 3) Consideremos un ideal I. Demostramos que I es topológicamente de tipo finito, para ello consideramos $\Omega = \{J \subset \overline{I} : J$ es topológicamente de tipo finito$\}$ tenemos que $0 \in \Omega$, entonces $\Omega \neq \phi$, por lo tanto, por la condición (2) tiene un elemento máximo, dijamos H.

Afirmamos que $H = \overline{I}$, para ello supongamos que $H \subsetneq \overline{I}$. Sea $x \in \overline{I} - H$. Consideremos $H' = \overline{H + Ax + x\mathbb{C}} \in \Omega$, por lo tanto $H \subseteq H'$ lo cual es una contradicción, por lo tanto, $H = \overline{I}$.

(3 $\Rightarrow$ 1) Supongamos que se cumple la condición (3) y tomamos una cadena de ideales izquierdos cerrados tales que $I_1 \leq I_2 \leq \cdots$. Sea $I = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Entonces I es topológicamente de tipo finito, es decir, existen $x_1, x_2, ..., x_r \in I$ tal que $I = \overline{Ax_1 + \mathbb{C}x_1 + Ax_2 + \mathbb{C}x_2 + \cdots + Ax_r + \mathbb{C}x_r}$. Entonces

$$\begin{aligned}
x_1 \in I &\implies x_1 \in I_{n_1} \\
x_2 \in I &\implies x_2 \in I_{n_2} \\
&\cdot \\
&\cdot \\
&\cdot \\
x_j \in I &\implies x_j \in I_{n_j}
\end{aligned}$$

Sea $\kappa = \text{máx}\{n_j : 1 \leq j \leq n\}$, entonces, $x_j \in I_{n_\kappa}$ $\forall 1 \leq j \leq n$, por lo tanto, $I_{n_\kappa} = \overline{I_{n_\kappa}} \supset \overline{I} = I$, lo que implica, $I_{n_\kappa} = I$.

Proposición 3.64. *Un álgebra topológica A es topológicamente Noetheriana, si y soló si $A^1 = A \oplus \mathbb{C}_e$ también lo es.*

Demostración. Por hipótesis tenemos que A es topológicamente Noetheriana si y sólo si I es un ideal de A de la forma $I = \overline{x_1A + \mathbb{C}x_1 + \cdots + x_rA + \mathbb{C}x_r}$ si y sólo si I es un ideal de A^1 de esa forma si y sólo si A^1 es topológicamente Noetheriana.

Proposición 3.65. *Sea A un álgebra topológicamente Noetheriana e I un ideal izquierdo de A. Entonces el álgebra I es topológicamente Noetheriana.*

Demostración Sea I un ideal izquierdo de A. Por hipótesis tenemos que A es topológicamente Noetheriana entonces I es topológicamente de tipo finito, es decir, existen $x_1, x_2, ..., x_r \in I$ tales que $I = \overline{x_1 A + x_1\mathbb{C} + x_2 A + x_2\mathbb{C} + \cdots + x_r A + x_r\mathbb{C}}$.

I es un álgebra y demostramos que I es topológicamente Noetheriana. Sea I' un ideal de I entonces $I' \subset I$, por lo tanto, $I' = \overline{x_i A + x_i\mathbb{C}}$ con $i \subset \{1, 2, ..., r\}$, así I es un álgebra topológicamente Noetheriana.

Proposición 3.66. *Sea A un álgebra topológicamente Noetheriana conmutativa e I un ideal cerrado de A. Entonces:*

1. *El álgebra cociente I/I^n es de dimensión finita para $n \geq 1$.*
2. *Si I es de codimensión finita entonces pasa la mismo para $\overline{I^n}$, para cada $n \geq 1$.*
3. *Existen ideales primos cerrados $P_1, P_2, ..., P_r$ de A tales que $P_1 \cdot P_2 \cdots P_r \subset I$.*

Demostración.

(1) Por la proposición (3.65) el álgebra I es topológicamente Noetheriana; lo mismo sucede para el cociente $I/\,\overline{I^2}$, en esta álgebra el producto es trivial, y el álgebra es de dimensión finita. Por inducción y con ayuda del isomorfismo

$$I/\,\overline{I^{n+1}}/\,\overline{I^n}/\,\overline{I^{n+1}} \;\cong\; I/\,\overline{I^n}$$

tenemos que $\overline{I^n}$ es de codimensión finita.

(2) Se sigue del inciso (1) y del isomorfismo

$$A/\,\overline{I^n}/\,I/\,\overline{I^n} \;\cong\; A/\,I$$

En efecto, por hipótesis $A/\ I$ es de dimensión finita, entonces por el isomorfismo mencionado $A/\ \overline{I^n}$ es de dimensión finita.

(3) Supongamos que no se cumple la propiedad y consideremos la familia F de todos los ideales cerrados de A que no cumplen la propiedad (3). Sea I_0 un elemento máximo de F (I_0 existe por el Lema de Zorn). El ideal I_0 no puede ser un ideal primo. Entonces existen $x, y \in A$ tales que $xy \in I_0$ con $x \notin I_0$, $y \notin I_0$. Sean $J = I_0 + Ax$ y $K = I_0 + Ay$, $I_0 \subsetneq \overline{J}$ y $I_0 \subsetneq \overline{K}$. Cada uno de ellos contiene un producto finito de ideales primos cerrados. Sin embargo I_0 contiene al ideal producto $\overline{JK}$, pues $\overline{JK} = (I_0 + Ax)(I_0 + Ay) = I_0 xyA \subseteq I_0$, lo que implica que I_0 contiene un producto finito de ideales primos cerrados, y esto es contradictorio a nuestra hipótesis.

Proposición 3.67. *Sea A una F-álgebra topológicamente Noetheriana conmutativa con unidad. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es una Q-álgebra.*
2. *Para $x \in A$, $\overline{Ax} = A \quad \Leftrightarrow \quad x \in G(A)$.*

Demostración.

$(1 \Rightarrow 2)$ Supongamos que A es una Q-álgebra, es decir, G(A) es abierto.

$\Rightarrow$) Sea $x \in A$, $\overline{Ax} = A$ como A es unitaria, tenemos $1 \in A = \overline{Ax}$, entonces existe una sucesión $\{a_n x\} \to 1$, lo que implica que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq m,\ a_n x \in G(A)$, entonces existe $y \in A$ tal que $y a_n x = 1$, para un $n \in \mathbb{N}$ fijo, por lo tanto $x \in G(A)$.

$\Leftarrow$) Sea $x \in G(A)$, afirmamos que $A = \overline{Ax}$, tenemos que $\overline{Ax} \subseteq A$, probaremos la contención que nos falta, sea $a \in A$, entonces $ax \in Ax \subset \overline{Ax}$, tenemos que $a = axx^{-1} = (ax^{-1})x \in Ax \subset \overline{Ax}$, por lo tanto $a \in \overline{Ax}$, con lo que concluimos que $A = \overline{Ax}$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Supongamos que A no es una Q-álgebra, por [18, Prop 2.1, p.188] podemos construir una sucesión $(x_n)_{n\geq 1}$ de elementos no invertibles de A tales que $x_n \to e$ y $Ax_n \subset Ax_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por la hipótesis tenemos que A es topológicamente Noetheriana, entonces existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{Ax_{n_0}} = A$, por lo tanto x_{n_0} es invertible, lo cual es una contradición. Por lo tanto A es una Q-álgebra.

Definición 3.68. *Un ideal izquierdo I_ℓ de un álgebra A es* ***regular*** *si existe un elemento u en A tal que $xu - x \in I_\ell$, $\forall x \in A$; el elemento u es llamado una identidad módulo el ideal I_ℓ. Un ideal regular derecho I_r y un elemento identidad módulo un ideal regular derecho son definidos analógamente. Finalmente, un ideal bilateral I es llamado* ***regular*** *si existe un elemento u tal que*

$$ux - x \in I \text{ y } xu - x \in I, \ \forall x \in A.$$

Proposición 3.69. *Sea A una Q-álgebra, conmutativa con unidad en la cual la familia de los ideales cerrados coincide con la familia de los ideales de tipo finito. Entonces A es Noetheriana.*

Demostración. Consideremos F la familia de ideales de A que no son de tipo finito. Supongamos que F es no vacía. La familia F con la inclusión es un conjunto inductivo. Consideremos entonces un elemento máximo I de F el cual existe por el Lema de Zorn.

Por [30, Prop. I.1, p.6], I es primo. Para $x \in \overline{I}/I$, necesariamente xI no esta contenida en I, ya que si $xI \in I$ entonces I sería cerrado y, por hipótesis, de tipo finito, lo cual es una contradicción. Además por el hecho de que I es máximo, tenemos que $I + x\overline{I} = \overline{I}$ porque $I \subset I + x\overline{I}$ lo que implica que $I + x\overline{I} \notin F$; entonces éste es de tipo finito y por hipótesis tenemos que es cerrado, por lo tanto $\overline{I} = \overline{I + x\overline{I}} = I + x\overline{I}$. De esto resulta que I es un ideal máximo regular de $\overline{I}$.

$\overline{I}$ es una Q-álgebra, ya que A lo es. El ideal I es cerrado en $\overline{I}$, lo cual es una contradicción. Entonces F es vacía, por lo tanto A es Noetheriana.

Proposición 3.70. *Sea A una F-álgebra localmente m-convexa topológicamente Noetheriana unitaria y conmutativa. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Cualquier ideal primo cerrado de A es máximo.*
2. *A es de dimensión finita.*

Demostración.

(1 ⇒ 2) Sea I un ideal primo cerrado entonces por la Proposición (3.66) tenemos que existen ideales primos distintos $P_1, P_2, ..., p_r$ y enteros $m_1, ..., m_r$ tales que $P_1^{m_1} \cdots P_r^{m_r} = \{0\}$. Por el [9, Prop 7, p. I.102] uno tiene $P_1^{m_1} \cap \cdots \cap P_r^{m_r} = \{0\}$, además, para cualquier I, $P_i^{m_i} = \{x \in A : x(\bigcap_{j \neq i} P_j^{m_j}) = \{0\}\}$ los $P_i^{m_i}$ son entonces cerrados. Por lo tanto, P_i es de codimensión 1, $P_i^{m_i}$ es de codimensión finita por el inciso (2) de la Proposición (3.66). Resulta que A es de dimensión finita.

(2 ⇒ 1) Siempre se cumple.

Proposición 3.71. *Sea A una F-álgebra localmente m-convexa conmutativa unitaria. Si A es topológicamente Noetheriana. Entonces A es una Q-álgebra.*

Demostración. Por la Proposición (3.67) y como sabemos que x es invertible en A si y sólo si x_i es invertible en $\overline{A_i}$, $\forall i$, por [34] podemos concluir la Proposición.

3.5. Q_t-álgebras

Las álgebras topológicamente Q heredan la mayoría de las propiedades de las Q-álgebras en ciertos aspectos. En esta sección caracterizaremos a las álgebras topológicamente Q.

Definición 3.72. *Sea A un álgebra topológica compleja unitaria. Entonces un elemento $x \in A$ es topológicamente invertible si $\overline{xA} = \overline{Ax} = A$. Equivalentemente, si existen dos redes $(b_i)_{i\in I}$ y $(c_i)_{i\in I}$ en A, tales que*

$$b_i x \longrightarrow e \quad xc_i \longrightarrow e.$$

Denotaremos el conjunto de los elementos topológicamente invertibles por $G_t(A)$. Obviamente $G(A) \subset G_t(A)$.

*Si $G_t(A)$ es abierto, se dice que A es una **Q_t-álgebra**. En forma similar a las definiciones de $\sigma(x)$ y $\rho(x)$, denotamos por $\sigma_t(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : (x - \lambda e) \notin G_t(A)\}$ al **espectro topológico** de x y $\rho_t(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma_t(x)\}$ si $\sigma_t(x) \neq \phi$ y $\rho_t(x) = 0$ en otro caso, al **radio espectral topológico** de x. Así $\sigma_t(x) \subset \sigma(x)$ y $\rho_t(x) \leq \rho(x)$.*

Observacion 3.73. *$G(A) \subset G_t(A)$ por lo tanto toda Q-álgebra es un Q_t-álgebra, sin embargo el converso no es cierto en general como le muestra el siguiente ejemplo.*

Ejemplo 15. *Sea $A = \mathbb{C}[t]$ el álgebra unitaria de funciones polinomiales de una indeterminada definida en $[0,1]$ con valores complejos y dotada de la siguiente norma de álgebra:*

$$P \to \|P\| = \sum_{i=0}^{n} |a_i|; \text{ con } P(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$$

para cada $t \in [0,1]$. Todos los funcionales lineales multiplicativos continuos de A son de la forma δ_z con $|z| \geq 1$ y $\delta_z(P) = P(z)$. Entonces tenemos $\mathcal{M}(A) = \{\delta_z : |z| \leq 1\}$. El conjunto de todos los elementos invertibles de A no es otro que $G(A) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Por lo tanto, G(A) no es abierto. Sea P un polinomio de grado ≥ 1 y que no tenga ninguna raíz en $[0,1]$. Por el teorema de Stone-Weierstrass, existe una sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en el álgebra de funciones *continuas en* $[0,1]$ *la cual converge al inverso de* P. *La sucesión* $\{PP_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge hacia 1 en* A. *Por lo tanto,* $G_t(A) \supset G(A)$ *y* $G_t(A) \neq G(A)$.

Vimos que $G_t(A) = G(\widehat{A}) \cap A$, *donde* $\widehat{A}$ *es la completación de* A, *entonces* $G_t(A)$ *es abierto. Por lo tanto,* A *es una* Q_t*-álgebra.*

Teorema 3.74. *Sea* A *un álgebra topológica con unidad. Las siguientes afirmaciones on equivalentes:*

(1) A *es una* Q_t*-álgebra.*

(2) *La unidad es punto interior de* $G_t(A)$.

(3) $S_t(A) = \{x \in A : \rho_t(x) \leq 1\}$ *es vecindad del cero.*

(4) $G_t(A)$ *tiene interior no vacío.*

Demostración.

$(1) \Rightarrow (2)$ *y* $(2) \Rightarrow (4)$ *son por definición.*

$(2) \Rightarrow (3)$ *Por hipótesis existe una vecindad balanceada* V *de 0 en* A *tal que* $e + V \subset G_t(A)$. *Supongamos que* $\rho(v) > 1$, *para algún* $v \in V$, *entonces existe un escalar* λ *tal que* $|\lambda| > 1$ *y* $v - \lambda e \notin G_t(A)$. *Entonces,* $e + \omega \notin G_t(A)$ *para algún* $\omega \in V$, *lo cual es una contradicción con la hipótesis, por lo tanto,* $V \subset S_t$ *y se cumple (3).*

$(3) \Rightarrow (2)$ *Supongamos* $e + \frac{1}{2}S_t(A) \nsubseteqq G_t(A)$, *entonces existe un* $x \in S_t(A)$ *tal que* $2e + x \notin G_t(A)$. *Entonces,* $\rho_t(x) > 1$, *lo cual es una contradición con la definición de* $S_t(A)$. *Como* $S_t(A)$*es vecindad, entonces* $G_t(A)$ *es abierto.*

$(2) \Rightarrow (1)$ *Supongamos* U *una vecindad del 0 tal que* $e + U \subset G_t(A)$. *Sea* $a \in G_t(A)$ *y* V *una vecindad del 0 que satisfaga que* $V + V \subset U$. *Entonces existen elementos* $b, b' \in A$ *tales que* $ba \in e + V$ *y* $ab' \in e + V$.

Sea W una vecindad del cero tal que $bW \subset V$ y $Wb' \subset V$. Afirmamos que $a+W \subset G_t(A)$. En efecto, si $w \in W$, entonces $b(a+w) \in e+V+V \subset e+U \subset G_t(A)$. También, $(a+w)b' \in e+U \subset G_t(A)$. Entonces, $a+w \subset G_t(A)$.

(4) $\Rightarrow$ (2) *Sea s un punto interior de $G_t(A)$; por lo tanto,existe una vecindad del cero, digamos V tal que $s+V \subset G_t(A)$. Sea U otra vecindad del origen tal que $sU \subseteq V$ y $Us \subseteq V$. Entonces, $s(e+U) \subseteq s+V \subset G_t(A)$ y $(e+U)s \subseteq s+V \subset G_t(A)$. Por lo tanto, $(e+U) \subseteq G_t(A)$.*

Proposición 3.75. *Sea A un álgebra normada con unidad. Entonces, A es una Q_t-álgebra.*

Demostración. De acuerdo con el Teorema (3.74) es suficiente demostrar que

$$U = \{x \in A : \|x-e\| < 1\} \subset G_t(A).$$

Dado $x \in A$ con $\|x-e\| < 1$, definamos $y = x-e$. La sucesión $\left(\sum_{k=0}^{n} y^k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es tal que $\left\|(y-e)\left(\sum_{k=0}^{n} y^k\right) - e\right\| = \|y^{n+1}\| \leq \|y\|^{n+1}$. Por lo tanto,

$$\left\|(y-e)\left(\sum_{k=0}^{n} y^k\right) - e\right\| \to 0,$$

cuando $n \to \infty$. Entonces, $x = e-y$ es topológicamente invertible.

Definición 3.76. *Si A es un álgebra unitaria. A es **cerrada por inversos**, si para cada $x \in A$, $0 \notin \widehat{x}(\mathcal{M}(A)) \Rightarrow x \in G(A)$.*

*Si A es un álgebra unitaria. A es **cerrada por inversos topológicos**, si para cada $x \in A$, $0 \notin \widehat{x}(\mathcal{M}(A)) \Rightarrow x \in G_t(A)$*

Observacion 3.77. *Sea A un álgebra unitaria. Si A es cerrada por inversos entonces A es cerrada por inversos topológicos. El reciproco no es cierto en general.*

Definimos los siguientes conjuntos

$$\phi_x = \begin{cases} \phi \; si \; x \in G(A) \\ \{0\} \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Similarmente

$$\phi_x^t = \begin{cases} \phi \; si \; x \in G_t(A) \\ \{0\} \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Proposición 3.78. *En un álgebra topológica con unidad A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es cerrada por inversos topológicos*
2. *Para cada $x \in A$ tenemos $\widehat{x}(\mathcal{M}(A) \cup \phi_x^t) = \sigma_t(x)$*

Demostración. Por [35, Prop. 2.21, p.9], para cada $x \in A$ tenemos

$$\widehat{x}(\mathcal{M}(A) \cup \phi_x^t) \subset \sigma_t(x).$$

1) $\Rightarrow$ 2) Si $\lambda \in \sigma_t(A)$ con $\lambda \neq 0$, entonces $\frac{x}{\lambda} \notin G_t(A)$. Por la hipótesis, $1 \in \frac{\widehat{x}}{\lambda}(m(A))$. Por lo tanto, existe una $f \in \mathcal{M}(A)$ tal que $f(x) = \lambda$, por lo tanto, $\lambda \in \widehat{x}(\mathcal{M}(A) \cup \Phi_x^t)$.

2) $\Rightarrow$ 1) Si $1 \notin \widehat{x}(\mathcal{M}(A))$, entonces $1 \notin \sigma_t(A)$. Por lo tanto, $x \in G_t(A)$ de tal manera que A es cerrada por inversos topológicos.

Sabemos que $Q \Rightarrow Q_t$ pero nos gustaría saber cuándo $Q_t \Rightarrow Q$. Hemos obtenido una respuesta para cierto tipo de álgebras.

Definición 3.79. *Un álgebra topológica A es **topológicamente espectral** si*

$$\widehat{x}(\mathcal{M}(A)) = \sigma(x)$$

Teorema 3.80. *Sea A una F-álgebra topológicamente Noetheriana con unidad, conmutativa. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *A es una Q-álgebra*

2. *$G_t(A) = G(A)$*

Demostración. $x \in A$ cumple la propiedad (2) de la proposición (3.67) si y sólo si $x \in G_t(A)$.

Teorema 3.81. *Sea A un álgebra topológica topológicamente espectral con unidad. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es una Q-álgebra.*

2. *A es una Q_t-álgebra.*

Demostración.

$(1 \Rightarrow 2)$ Siempre se cumple.

$(2 \Rightarrow 1)$ Por la Proposición (3.78) tenemos que $\widehat{x}(\mathcal{M}(A) \cup \phi_x^t) = \sigma_t(x)$, entonces

$$\widehat{x}(\mathcal{M}(A) \cup \phi_x^t) \subset \sigma_t(x),$$

por lo tanto,

$$\sigma(x) = \widehat{x}(\mathcal{M}(A)) \subseteq \sigma_t(x) \subset \sigma_t(x), \Rightarrow \sigma_t(x) = \sigma(x),$$

lo que implica que $\rho_t(x) = \rho(x) \;\; \Rightarrow \;\; S_t(A) = S(A)$ por hipótesis tenemos que A es Q-álgebra.

También tenemos relaciones entre las álgebras topológicas advertiblemente completas y topológicamente Q.

Proposición 3.82. *Sea A un álgebra topológica localmente m-convexa conmutativa con unidad. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *A es advertiblemente completa.*
2. *A es topológicamente espectral.*
3. *A es cerrada por inversos*

Demostración.

($1 \Leftrightarrow 2$**)** Por el Corolario (3.56)

($2 \Rightarrow 3$**)** Supongamos que $x \notin G(A)$ entonces $x - 0e \notin G(A)$ lo que implica que $0 \in \sigma(x)$. Pero por hipótesis $\sigma(x) \subseteq \widehat{x}(\mathcal{M}(A)) \Rightarrow 0 \in \widehat{x}(\mathcal{M}(A))$

($3 \Rightarrow 2$**)** Como la contención $\widehat{x}(\mathcal{M}(A)) \subseteq \sigma(x)$ siempre es cierta, probemos que $\sigma(x) \subseteq \widehat{x}(\mathcal{M}(A))$.

Sea $\lambda \in \sigma(x) \Rightarrow x - \lambda e \notin G(A)$. Por hipótesis $0 \in \widehat{x - \lambda e}((\mathcal{M}(A)))$, por lo tanto $\exists f \in \mathcal{M}(A)$ tal que

$$\begin{aligned} 0 = (\widehat{x - \lambda e})(f) = f(x - \lambda e) = f(x) - \lambda \\ \Rightarrow \lambda = f(x) = \widehat{x}(f) \\ \Rightarrow \lambda \in \widehat{x}(\mathcal{M}(A)) \end{aligned}$$

Proposición 3.83. *Sea A un álgebra m-convexa unitaria conmutativa compleja. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $G_t(A) = G(A)$.

2. *A es advertiblemente completa.*

3. $\sigma(x) = \widehat{x}(\mathcal{M}(A)) = \widehat{x}(\mathcal{M}^\sharp(A))$ *para toda* $x \in A$.

Demostración.

$(1 \Rightarrow 2)$ Sea $(x_i)_{i\in I}$ una red advertible con respecto a un x en A. Entonces $x \in G_t(A) = G(A)$ y A es advertiblemente completa.

$(2 \Rightarrow 3)$ Ya que $\widehat{x}(\mathcal{M}^\sharp(A)) \subset \widehat{x}(\mathcal{M}(A)) \subset \sigma(x)$, solo tenemos que probar que $\sigma(x) \subset \widehat{x}(\mathcal{M}(A))$.

Supongamos $\lambda \in \sigma(x)$, entonces $x - \lambda e \notin G(A)$. Por el Teorema (3.60), existe una $f \in \mathcal{M}(A)$ tal que $f(x - \lambda e) = 0$. Además $\lambda = \widehat{x}(f)$ pertenece a $\widehat{x}(\mathcal{M}(A))$.

$(3 \Rightarrow 1)$ Sea $x \in G_t(A)$, entonces existe una red $(x_i)_{i\in I}$ en A tal que $xx_i \to e$. Entonces $f(x) \neq 0$ para cada $f \in \mathcal{M}(A)$ y por la hipótesis $x \in G(A)$.

Los siguientes Corolarios de los Teoremas (3.37) y (3.71) relacionan los resultados obtenidos por R. Choukri y H. Arizmendi et al.

Corolario 3.84. *Sea A una F-álgebra conmutativa Noetheriana entonces A es una Q_t-álgebra.*

Corolario 3.85. *Sea A una F-álgebra localmente m-convexa conmutativa topológicamente Noetheriana entonces A es una Q_t-álgebra.*

Proposición 3.86. *Sea A una Q_t-álgebra topológica conmutativa con unidad donde todos los ideales máximos son cerrados. Entonces A es una Q-álgebra.*

Demostración. Es suficiente demostrar que $G_t(A) = G(A)$ puesto que por hipótesis A es una Q_t-álgebra, es decir, $G_t(A)$ es abierto, pero si $G_t(A) = G(A)$, $G(A)$ será abierto y por lo tanto será una Q-álgebra.

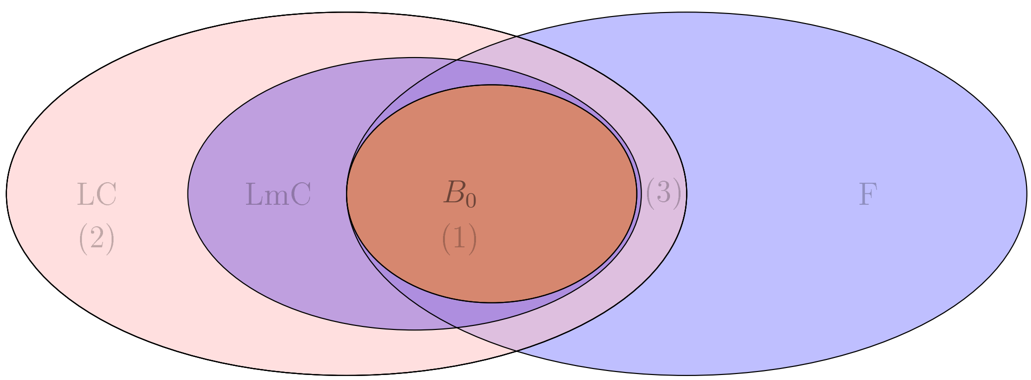
Sabemos que siempre $G_t(A) \subseteq G(A)$. Supongamos $\exists x \in G_t(A) - G(A)$. consideremos el ideal $xA \neq A$ $(x \notin G(A))$. Sea M un ideal máximo de A tal que $xA \subseteq M$, el cual existe ya que en un álgebra con unidad todo ideal propio esta contenido en un ideal máximo, lo que implica $A = \overline{xA} \subseteq \overline{M} = M$ esto nos lleva a una contradicción. Por lo tanto, $G_t(A) = G(A)$.

Capítulo 4

Ubicación de ciertos tipos de álgebras.

En el diagrama mostramos algunos de los diferentes tipos de álgebras normadas y no normadas en relación unas con otras.

Notación.



- F-Álgebras de Fréchet
- LC-Álgebras localmente convexas
- LmC-Álgebras localmente m-convexas
- B_0-Álgebras B_0

Ejemplos:

1. **Álgebras que no son de Banach, no son normadas, pero si son B_0.**

   - El álgebra $C(-\infty,\infty)$ que consiste de todas las funciones complejo valuadas continuas en la recta real con las operaciones algebraicas puntuales y con seminormas $\|x\|_n = \max\limits_{-n\leq t\leq n}|x(t)|$ (Véase el ejemplo 2 de la página 29)

   - El álgebra ϵ de todas las funciones enteras de una variable compleja con las operaciones puntuales y seminormas $\|x\|_n = \max\limits_{|t|\leq n}|x(t)|$. (Véase el ejemplo 3 de la página30)

   - $C^\infty(0,1)$. Esta es el álgebra de todas las funciones derivables infinitas veces en un intervalo unitario con operaciones puntuales y seminormas $\max\limits_{0\leq t<1}|x^{(n)}(t)|$. Reemplazamos este sistema de seminormas por un sistema equivalente de seminormas dado por

   $$||x||_n = 2^n \max_{0\leq i\leq n} 2^i \max_{0\leq t<1}|x^{(i)}(t)|$$

   tenemos entonces $\max\limits_{0\leq t<1}|x^{(i)}(t)| \leq \dfrac{||x||_n}{2^{n+i}}$. (Véase el ejemplo 5 de la página 35)

   - Sea κ el álgebra de todas las series de potencias de la forma $x=\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n t^n$ con seminormas $||x||_n = \sum_{i=0}^{n}|x_i|$ y con multiplicación de Cauchy en serie de potencias, es decir,

   $$xy = z = \sum_{n=0}^{\infty} z_n t^n \ \ donde \ \ z_k = \sum_{i=0}^{k} x_k y_{k-i}$$

   tenemos que

   $$\begin{aligned} ||xy||_n &= \sum_{k=0}^{n}\Big|\sum_{i=0}^{k} x_i y_{k-i}\Big| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n}\sum_{i=0}^{k}|x_i||y_{k-i}| \\ &\leq \sum_{i=0}^{n}|x_i|\sum_{k=i}^{n}|y_k| \leq ||x||_n||y||_n \end{aligned}$$

   (Véase el ejemplo 6 de la página 36)

- Sea $(a_{n,k}),\ 1 \leq n < \infty,\ -\infty < k < \infty$ una matriz infinita de números reales positivos. Asumimos también que para cada n, existe un n'>n tal que

$$a_{n',k'}a_{n',l} \geq a_{n,k+l} \ \ \forall k,l. \tag{4.1}$$

Llamemos por $\kappa(a_{n,k})$ el álgebra de todas las series de Laurent de la forma

$$x = \sum_{-\infty}^{\infty} x_k t^k \ \ tales\ que \ \ ||x||_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n,k}|x_k|$$

Esta es un álgebra bajo la multiplicación de Cauchy, por (4.1)

$$\begin{aligned} ||xy||_n &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_{n,k} \left| \sum_{i=-\infty}^{\infty} x_{k-i} \cdot y_i \right| \\ &\leq \sum_{k,i=-\infty}^{\infty} a_{n,k}|x_{k-i}| \cdot |y_i| \\ &\leq \sum_{k,i=-\infty}^{\infty} a_{n',k-i} \cdot a_{n',i}|x_{k-i}| \cdot |y_i| = ||x||_{n'}||y||_{n'} \end{aligned}$$

(Véase el ejemplo 7 de la página 37)

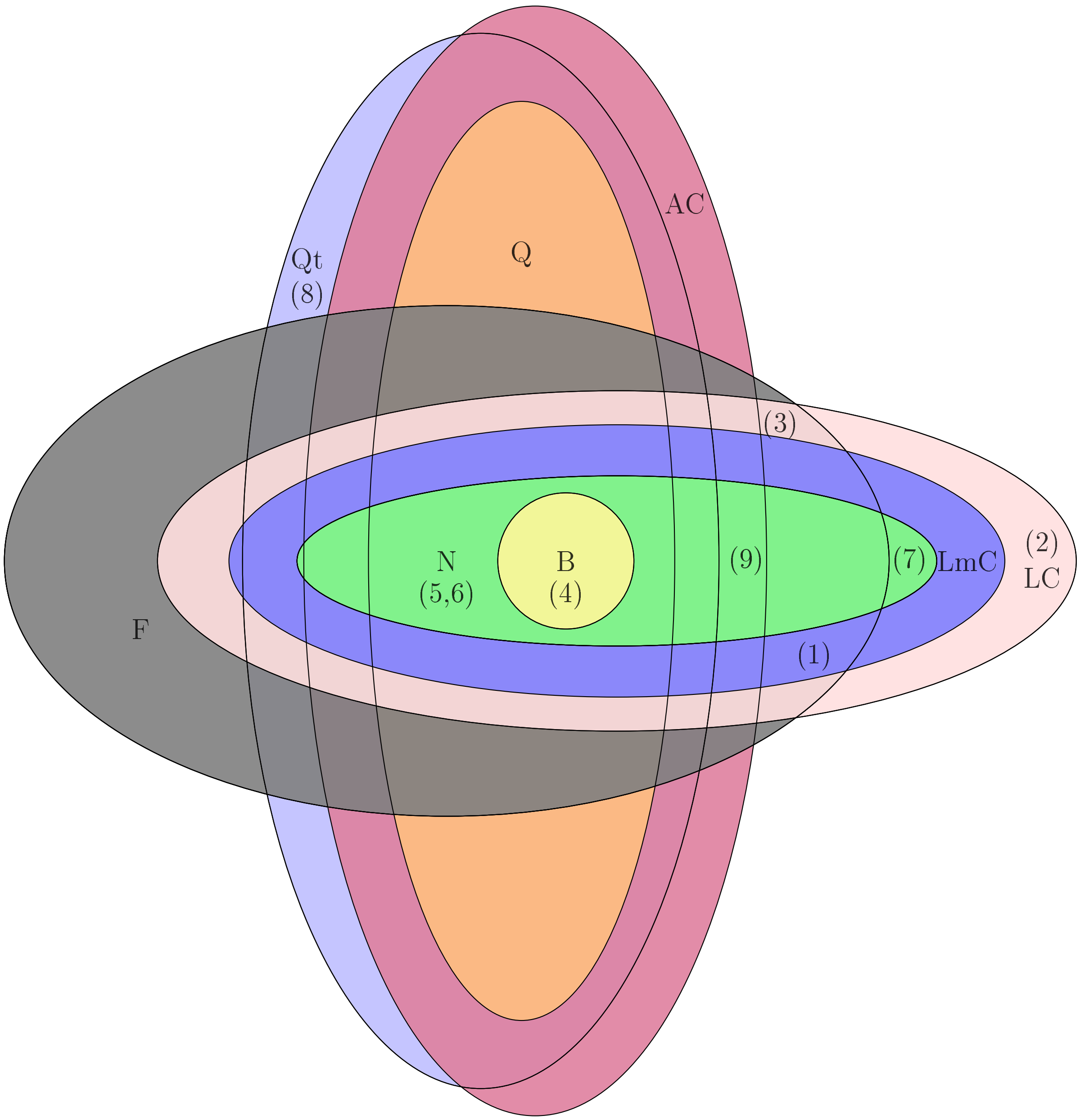
2. **Un álgebra que no es de Banach, no es normada, es localmente convexa pero no m-convexa.**

   L^{ω} el conjunto de todas las funciones medibles en el intervalo unitario (0,1) con las operaciones puntuales tal que $\|x\|_n = \left(\int_0^1 |x(t)|^n \, dt\right)^{1/n} < \infty$.
   (Véase el ejemplo 4 de la página 31).

3. **Una F-álgebra que no es normable y es localmente convexa**

   Sea $\kappa^{\mathbb{N}}$ el conjunto de todas las sucesiones numericas con las operaciones puntuales y la topología producto.

En el siguiente diagrama proporciona la ubicación relativa de los distintos tipos de álgebras topológicas considerados en este trabajo y sus relaciones con los conceptos siguientes: Q-**álgebra,** Q_t-**álgebra, álgebras advertiblemente completa**. También proporcionamos ejemplos muy pertinentes del tipo de álgebra. **Notación.**



- B-Álgebras de Banach
- N-Álgebras Normadas
- LC-Álgebras localmente convexas

- LmC-Álgebras localmente m-convexas
- F-Álgebras de Fréchet
- AC-Álgebras advertiblemente completas
- Q-Álgebras Q
- Q_t-Álgebras Q_t

Ejemplos:

4. **Álgebra de Banach**

Sea A un espacio de Banach; consideramos el álgebra L(A) de los operadores lineales acotados (continuos) de A con la multiplicación dada por la composición. Entonces L(A) es un álgebra normada si definimos la norma de operador como sigue: para $T \in L$(A):

$$\|T\| = \sup_{\|x\|<1} \|T(x)\|$$

Afirmamos que esta es un álgebra de Banach. Primero veamos que esta bien definida la norma:

(i) $\|T\| > 0$ por definición.

(ii)

$$\begin{aligned}
\|T\| = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sup_{\|x\|<1} \|T(x)\| = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \|T(x)\| = 0, \ \forall x \in A \text{ tal que } \|x\| < 1 \\
&\Leftrightarrow \quad T(X) = 0 \ \forall x \in A \text{ tal que } \|x\| < 1.
\end{aligned}$$

(iii) Sean $R, T \in L(\mathrm{A})$ entonces:

$$\begin{aligned}
\|R+T\| &= \sup_{\|x\|<1} \|R(x)+T(x)\| \\
&\leq \sup_{\|x\|<1} \|R(x)\| + \|T(x)\| \\
&\leq \sup_{\|x\|<1} \|R(x)\| + \sup_{\|x\|<1} \|T(x)\| \\
&= \|R\| + \|T\|
\end{aligned}$$

por lo tanto si es norma. Ahora veamos que es completa. Sea $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $L(\mathrm{A})$, entonces $\forall\varepsilon > 0$ existe un $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$ entonces $\|T_n - T_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tenemos que A es un espacio de Banach entonces la sucesión $\{T_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, por lo tanto existe un $T(x) \in A$ tal que $T_n(x) \to T(x)$, es decir, $\forall\varepsilon > 0$ existe un $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n > N$ entonces $\|T_n(x) - T(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$ y $n, m > N$ entonces

$$\begin{aligned}
\|T_n - T\| &= \sup_{\|x\|<1} \|(T_n - T)(x)\| \\
&= \sup_{\|x\|<1} \|T_n(x) - T(x)\| \\
&= \sup_{\|x\|<1} \|T_n(x) - T_m(x) + T_m(x) - T(x)\| \\
&\leq \sup_{\|x\|<1} \|T_n(x) - T_m\| + \|T_m(x) - T(x)\| \\
&\leq \sup_{\|x\|<1} \|T_n(x) - T_m\| + \sup_{\|x\|<1} \|T_m(x) - T(x)\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

Por lo tanto, es completa lo que implica que $L(\mathrm{A})$ es un álgebra de Banach.

5. **Álgebra que no es de Banach, es normada y Q.** El álgebra R(D) de todas las funciones racionales complejas definidas en el disco unitario cerrado D de $\mathbb{C}$ con las operaciones puntuales, dotada con la norma $\|q\| := \sup_{z\in\mathbb{C}} |q(z)|$. (Véase el ejemplo 1 de la página 11)

6. **Un álgebra que no es de Banach, es normada, Q, advertiblemente completa y sin unidad**

   Sea $\kappa(\mathbb{R}) := \{f \in C(\mathbb{R}) : supp(f)\text{es compacto}\}$ dotada con las operaciones algebraicas puntualmente y norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$. (Véase el ejemplo 10 de la página 115)

7. **Un álgebra que no es de Banach, normada que no es Q y tampoco advertiblemente completa.**

   Sea $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y P todos los polinomios en $\mathbb{T}$ con coeficientes complejos. Dotamos a P con las operaciones algebraicas definidas puntualmente y con la norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$. (Véase el ejemplo 11 de la página 116)

8. **Un álgebra que es Q_t pero no es Q.** Sea $A = \mathbb{C}[t]$ el álgebra unitaria de funcionales polinomiales de una indeterminada definida en $[0,1]$ con valores complejos y dotada de la siguiente norma de álgebra:

$$P \to \|P\| = \sum_{i=0}^{n} |a_i|; \text{ con } \; P(t) \sum_{i=0}^{n} a_i t^i$$

   para cada $t \in [0,1]$. (Véase el ejemplo 15 de la página 135)

9. **Un álgebra advertiblemente completa normada que no es ni completa ni Q-álgebra**

   Sea A_1 una Q-álgebra normada no completa (véase el ejemplo (10)) y $\{A_n\}_{n>1}$ una familia de álgebras de Banach unitarias. Consideremos $A := \prod_{n\in\mathbb{N}} A_n$ y dotemos está con la topología producto. (Véase el ejemplo 12 de la página 118)

Conclusiones y Perspectivas

A lo largo de este trabajo hemos presentado un panorama general muy detallado de los resultados y avances que hay en la línea de las álgebras topológicas normadas y no normadas.

La exposición toma como punto de partida las propiedades fundamentales y los conceptos básicos que caracterizan a las álgebras de Banach. Uno de los conceptos relevantes en el estudio de las álgebras topológicas m-convexas es la propiedad Q. Las álgebras de Banach satisfacen la propiedad Q, pero este no es el caso en general para las álgebras que sólo son normadas. Así se estudiaron posibilidades para caracterizar a las álgebras que tienen esta propiedad en el caso normado.

Posteriormente se analizaron conceptos algebraicos sobre los ideales de un álgebra topológica de ciertos tipos y se relacionaron con el hecho de que el álgebra posee la propiedad Q.

Añadimos entonces un ingrediente más a la estructura ya existente del álgebra no normada y se relacionarón conceptos topológicos-algebraicos con la propiedad Q.

Finalmente extendimos la propiedad Q a una propiedad más general a la cual llamamos Q_t.

Por último logramos ubicar los diferentes tipos de álgebras topológicas, normadas, no normadas, F, localmente convexas, localmente m-convexas en un esquema, proveyendo una gama muy pertinente de ejemplos.

En cuanto a las perspectivas de desarrollo en este tema podemos mencionar lo siguiente:

- Es posible profundizar en las relaciones de la propiedad Q_t con las condiciones de cadena en el álgebra.
- Tambien se puede investigar sobre la posibilidad de relacionar a las álgebras con identidad aproximada y la propiedad Q.
- Conviene investigar sobre la posibilidad de relacionar a las álgebras con identidad aproximada y las condiciones de cadena.

Bibliografía

[1] Akkar M. y Nacir C., *Continuité automatique dans les limites inductives localement convexes de Q-algébres de Fréchet*. Ann. Sci. Math. Québec 19. (1995),n°2, 115-130.

[2] Anderson F. y Fuller K., *Rings and Categories of Modules*. Second Edition. Springer-Verlag.1992.

[3] Arens R., *Linear Topological Division Algebras*. Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947), 623-630.

[4] Arens R., *Dense inverse limit rings*, Michigan Math. J. 5 (1958), 169-182.

[5] Arismendi H., Carrillo A. y Pérez R., *On maximal ideals of codimension one in m-convex algebras*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.

[6] Arismendi H., Carrillo A. y Palacios L. *On Q_t-algebras.*

[7] Arrosio A., *Locally convex inductive limits of normed algebras*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 51 (1974), 333-359.

[8] Bonsall F. F. y Duncan J., *Complete normed algebras*, Springer-Verlag, Berlin 1973.

[9] Bourbaki N., *Algèbre*, Chapitres 1 à 3. Diffusion C.C.L.S., Paris. 1970.

[10] Bourbaki N., *Espaces vectoriels topoloiques*. Paris 1981.

[11] Carboni G. y Larotonda A., *An example of Fréchet algebra which is a principal ideal domain*, Stud. Math. 138(3) (2000), 265-275.

[12] Choukri R. y A. El Kinani, *Topological algebras whit ascending or descending chain condition*, Arch. Math. (Basel) 72 (1999), 438-443.

[13] Choukri R., A. El Kinani y M. Oudades, *Algèbres topologiques à idéaux à gauche fermés*, Studia Math. 168 (2) (2005), 159-164.

[14] Choukri R., *A concept of finiteness in topological algebras*, Contemporary Mathematics. 427 (2007), 131-137.

[15] Corach G. y Andruchov E., *Notas de Análisis Funcional*, 1997.

[16] Dales H. G., *Automatic continuity* A surve. Bull. London Math. Soc. 10, 129-183 (1978).

[17] Dauns J., *Modules and Ring*, Cambridge University Press 1994.

[18] Esterle J., *Idéaux maximaux denses dans les algèbres de Féchet*, Bull. Sci. Math. 119 (1995), 187-194.

[19] Esterle J., *Countable Inductive Limits of Fréchet Algebras*, Journal d'Analyse Mathématique. 71. (1997). 195-204.

[20] Ferreira A. V. y Tomassini G., *Finiteness properties of topological algebras.* Annali Scuola Normale Superiore-Pisa. Classe di Scienze. Serie IV. Vol. V.n°3. (1978).

[21] Fragoulopoulou M., *Topological algebras with involuution*, ELSEVIER 2005.

[22] Grauert H. y Remmert R., *Analytische Stellenalgebren*, Springer, 1971.

[23] Hadjigeorgiou R., *On some more characterizations of Q-algebras.* Contemporary Mathematics. Volumen 341. 2004

[24] Hadjigeorgiou R., *Topologically Q-algebras, more.* Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin Volumen 18, Número 4 (2011), 695-706.

[25] JACOBSON N., *The radical and semi-simplicity for arbitrairy ring.* Amer. J. Math. 67,320-333 (1945).

[26] JACOBSON N., *Structure theory for algebraic algebras,* Ann. of Math. 46(1945), 695-767.

[27] JACOBSON N., *Some remarks on one-sided inverses*, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 352-355.

[28] KAPLANSKY I., *Topological Rings*, Amer. J. Math. 50(1947), 153-183.

[29] KÖTHE G., *Topological Vector Spaces*, I, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

[30] LAFON J. P., *Algèbre commutative, langages géométrique el algébrique*, Herman. 1977. París.

[31] MC CONNELL J. y ROBSON J. *Noncommutative Noetherian Rings*, Graduate Studies in Mathematics. Volume 30.

[32] MALLIOUS A., *Topological Algebras, Selected Topics.* North Holland Math. Stud. 124. Notas de Matemática (109). North Holland. Amsterdam - New York - Oxford - Tokyo. 1986.

[33] MASCIONI V., *Some characterizations of complex normed Q-algebra.* El. Math., vol.42, (1987), 10-14.

[34] MICHAEL E., *Locally multiplicatively convex topological algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. 11 (1952).

[35] NAJMI A., *Topologically Q-algebras.*

[36] PALMER W., *Banach algebras and the general theory of *-algebras. Volumen I. Algebras and banach algebras.* Cambrige University Press 1994.

[37] RUDIN W., *Fundamental Analysis*, McGraw-Hill, 1973.

[38] SINCLAIR A. y TULLO A., *Noetherian Banach algebras are finite dimensional.* Math. Ann. 211. (1974). 151-153.

[39] WARNER S., *Polynomial completeness in locally multiplicatively-convex algebras*, Duke Math. J. 23.(1956), 1-11.

[40] ZARISKI O. y SAMUEL P., *Commutative Algebras*, Vol. I. New York-Heidelberg-Berlin 1979.

[41] ZELAZKO W., *Selected topics in Topolical Algebras*, Aarhus Univ., Lectures Notes Series, N° 31, 1971.

[42] ZELAZKO W., *Banach Algebras*, American Elsevier Publishing Company, INC. 1973.

[43] ZELAZKO W., *On maximal ideals in commutative m-convex algebras*, Studia Math. 48 (1976) ,291-298.

[44] ZELAZKO W., *On Ideal theory in Banach and Topological Algebras.* Monografías del Instituto de Matemáticas 15, UNAM. 1981.

[45] ZELAZKO W., *A characterization of conmutative Fréchet algebras with all ideal closed.* Stud. Math. 138. (3)(2000).293-300

[46] ZELAZKO W., *A characterization of F-algebra with all one-sided ideals closed.* Studia Math.168(2005), 135-145.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA – IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

SOBRE IDEALES Y LA PROPIEDAD Q EN ÁLGEBRAS TOPOLÓGICAS

TESIS QUE PRESENTA

YULIANA DE JESÚS ZÁRATE RODRÍGUEZ

PARA OBTENER EL GRADO DE

MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

Ma de Lourdes Palacios D.

DIRECTORA DE TESIS

DRA. MARIA DE LOURDES PALACIOS FABILA

JURADO

DR. ÁNGEL TAMARIZ MASCARÚA
DR. CARLOS SIGNORET POILLON
DR. CONSTANCIO HERNÁNDEZ GARCIA

MÉXICO, D.F. JULIO 2013

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo