

*FUNDAMENTOS E IMPLICACIONES ASTROFÍSICAS DEL
ESQUEMA DE MEIXNER Y PRIGOGINE APLICADO A
ESPACIO-TIEMPOS CURVOS.*

TESIS QUE PRESENTA EL

M. en Fís. Alfredo Sandoval Villalbaz

PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

MAYO DE 1999

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA**

DEDICATORIA

Es imposible expresar lo fundamental que es el apoyo del ser amado en la consecución de proyectos académicos serios. Además de las horas invertidas en cálculos y escritura, se deben sumar infinidad de detalles de la vida en pareja que son descuidados cuando un investigador se encuentra sumergido en el análisis de sus problemas. Mi adorada Citlalli no sólo ha sido una compañera comprensiva y amorosa, también ha tenido la sabiduría para construir un maravilloso matrimonio, proporcionar cariño incalculable a nuestro hermosísimo bebé, y además sentar las bases para culminar sus estudios de médico cirujano. Ante todo esto simplemente quiero expresarle, una vez más, que este trabajo va completamente dedicado a ella el amor de mi vida, la persona que hace que todo adquiera valor.

Alfredo Sandoval-Villalbaz
Mayo de 1999

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a mis padres todo el apoyo y confianza que me han brindado desde que se inició mi formación académica en mi ya lejana infancia. La gratitud de un hijo a sus padres siempre será poca ante el amor incondicional propio de la paternidad.

Le doy las gracias al personal académico del Área de Matemáticas del Departamento de Ciencias de la Universidad Iberoamericana por su amistad y por el compañerismo mostrado en en estos años de trabajo. En especial, quiero agradecer a la Mtra. Graciela Rojas González, ex-Directora del Departamento de Matemáticas, por su confianza, su amistad y por su valiosísimo apoyo en todos los niveles.

A los Doctores Octavio Pimentel Rico, José Franco López, Eduardo Piña Garza y Roberto Sussman Livovsky les estoy profundamente agradecido por sus comentarios enormemente constructivos y enriquecedores. La interacción que he tenido con investigadores de tanta calidad profesional y humana ha sido una de las experiencias académicas más estimulantes y satisfactorias de mi vida.

Por último, quiero expresar mi reconocimiento y gratitud al más extraordinario investigador y guía que he conocido. Persona de la más alta calidad humana, profunda conocedora del quehacer académico en las Ciencias Físicas al más alto nivel. Para mí ha sido el mayor de los privilegios el poder aprender del Dr. Leopoldo García-Colín Scherer, a quien expreso mi más grande respeto.

Fundamentos e implicaciones astrofísicas del esquema de Meixner y Prigogine aplicado a espacio-tiempos curvos.

M. en Fís. Alfredo Sandoval Villalbazo

1996-1999

Contenido.

1. Introducción General.

2. Establecimiento de las ecuaciones relativistas de Navier-Stokes.

- Tensor de esfuerzos y ecuaciones de balance.
- Balances de energías mecánica e interna.
- Balance relativista de entropía
- Hipotesis de equilibrio local.
- Ecuaciones constitutivas generalizadas
- Sistema de ecuaciones de Navier-Stokes
- Ideas esenciales de la termodinámica de segundo orden de Israel.
- Conclusiones del capítulo 2

3. Implicaciones cosmológicas del esquema relativista de Meixner y Prigogine para flujo viscoso.

- La métrica de Robertson-Walker y sus implicaciones cosmológicas.
- Alternativas en la introducción de efectos disipativos en la métrica de Robertson y Walker.
- Análisis de las implicaciones cosmológicas inmediatas.
- El esquema de Meixner con viscosidad, en ausencia de flujo de calor: el factor de escala cosmológico.
- Conclusiones del capítulo 3.

4. Teoría cinética relativista para medios continuos.

- La ecuación de Boltzmann no relativista.
- Invariantes colisionales, velocidad caótica y ecuaciones de transporte no relativistas. Notación tensorial.
- La ecuación de Boltzmann relativista.
- La velocidad caótica en la teoría cinética relativista.
- Las ecuaciones de transporte derivadas de la teoría cinética relativista. Implicaciones.
- Consideraciones fundamentales referentes a formalismos alternativos en teoría cinética relativista.
- Conclusiones del capítulo 4.

5. El campo electromagnético en el esquema relativista de Meixner y Prigogine.

- Alternativas para la inclusión de campos electromagnéticos: fuerzas externas vs. curvatura.

- Las ecuaciones de la magnetohidrodinámica desde el punto de vista de fuerzas externas.
- Magnetohidrodinámica desde el punto de vista de la curvatura (uso de derivadas covariantes).
- La magnetohidrodinámica en relatividad general.
- Conclusiones del capítulo 5.

Apéndice 1. Objetos matemáticos básicos en la métrica de Schwarzschild.

Apéndice 2. Ejemplo de cálculo explícito de derivadas covariantes.

Apéndice 3. Cálculos correspondientes a la métrica Robertson-Walker-Friedman con curvatura positiva.

Apéndice 4. Evolución de la temperatura bajo la métrica Robertson-Walker-Friedman con curvatura positiva.

Apéndice 5. Forma explícita del flujo de energía en teoría cinética relativista.

1. Introducción General.

Es sorprendente que en una enorme cantidad de estudios de procesos astrofísicos y cosmológicos, el análisis de la validez local de la segunda ley de la termodinámica es ignorado. Pocos son los casos en los que se halla un análisis satisfactoriamente fundamentado de la producción de entropía en el estudio de flúidos astrofísicos, siendo que dicho análisis es indispensable para garantizar la propuesta correcta de relaciones constitutivas entre flujos y fuerzas termodinámicas. Más aún, en el estudio de la evolución del Universo a gran escala, es indudable que existen numerosas etapas en las cuales resulta ineludible la utilización de formalismos fuera del equilibrio ... y sin embargo la inmensa mayoría de los libros de texto en el área muestran desarrollos *termostáticos* con producción de entropía idéntica a cero, desde instantes posteriores al Big-Bang, hasta nuestros días. Aún la mayor parte de los formalismos relacionados con las teorías inflacionarias modernas no parecen considerar de suficiente relevancia un cálculo sistemático de la producción de entropía. Esto resulta paradójico, puesto que los efectos disipativos característicos de los procesos irreversibles pueden traducirse en fases de expansión del Universo *aceleradas*.

Las bases de este trabajo radican en las hipótesis y los métodos de la termodinámica de procesos irreversibles. Se examina el establecimiento de ecuaciones de transporte para el estudio de fluidos astrofísicos garantizándose una producción de entropía semidefinida positiva en todo lugar y a todo tiempo. Así mismo, se establecen relaciones dinámicas para las variables relevantes en cosmología, supuestas en equilibrio *local* en un espacio-tiempo de 4 dimensiones, *sin necesidad de realizar ninguna hipótesis de validez de proceso cuasiestático alguno*. Estas ideas llevan a implicaciones cosmológicas muy interesantes en el caso de geometrías cerradas que aparentemente han sido establecidas por vez primera en este trabajo.

Se desea que todo esquema fenomenológico vinculado con una teoría de transporte deba ser fundamentable microscópicamente en términos de una teoría cinética adecuada. En la literatura correspondiente a la teoría cinética relativista existente, *no se utiliza explícitamente el concepto de velocidad caótica* (también llamada molecular o peculiar) bien conocida de la teoría cinética no relativista. Este trabajo utiliza explícitamente este concepto, lo cual ha dado lugar a implicaciones cosmológicas que el autor también considera relevantes, pues proporcionan una evidencia de crecimiento del universo, *con correcciones a la ley de Hubble*.

En los días en que esta tesis se encontraba en revisión, evidencias *observacionales* han conducido a la conclusión de que existe una aparente aceleración del Universo a gran escala[3]. Si se emplean desarrollos cinéticos como el mostrado en el capítulo tercero de esta tesis, es posible que estas desviaciones a la ley de Hubble puedan ser descritas y cuantificadas de manera aproximada, sin tener que recurrir a sofisticadas teorías de partículas elementales.

Por último, quien haya trabajado con la teoría general de la relatividad, debe de haber quedado impresionado con la incorporación de los efectos dinámicos gravitacionales al marco geométrico riemanniano inherente al formalismo. El concepto de "fuerza externa" se reduce a una simple apariencia; en el esquema relativista, lo que prevalece son los efectos de curvatura asociados a la presencia de fuentes. Las ecuaciones de transporte fundamentadas en la termodinámica de procesos irreversibles, pueden establecerse de acuerdo a este marco de ideas. De esta manera se desea visualizar los efectos de campos electromagnéticos en términos geométricos análogos a los gravitacionales. Esta idea se remonta al lejano 1923, con los clásicos trabajos de T. Kaluza[1]-[2]. Es satisfactorio que en este trabajo se han logrado incorporar las ideas del espacio pentadimensional de las teorías de Kaluza-Klein al marco de la termodinámica de procesos irreversibles. El resultado ha sido el establecimiento de un sistema de ecuaciones de transporte para la materia cargada en presencia de campos electromagnéticos en donde *no* se hace uso del concepto de fuerza externa. Los efectos disipativos asociados los campos eléctricos se cuantifican en base a las derivadas covariantes que aparecen en el formalismo. Así mismo, se abren nuevas perspectivas de unir en forma clara campos aparentemente diferentes como lo son la termodinámica de procesos irreversibles y la teoría moderna de los campos. Existen más interrogantes que respuestas en esta tesis, pero el autor considera que este trabajo constituye un paso necesario en la física, que por razones de diversa índole, se había venido posponiendo.

References

- [1] Th. Kaluza, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1921, p.966
- [2] Appelquist, Chodos and Freund Eds., Modern Kaluza-Klein Theories, Addison-Wesley, 1987.
- [3] Sci. Am. Jan. 1999.

2. Establecimiento de las ecuaciones relativistas de Navier-Stokes.

El esquema relativista de Meixner y Prigogine de la termodinámica fuera del equilibrio [2]-[12] representa un formalismo directo capaz de establecer las ecuaciones relativistas de transporte para un medio continuo. Recientemente, una generalización relativista de este tipo de razonamiento ha sido desarrollada para fluidos isotrópicos no viscosos[1]. Las ecuaciones de transporte así obtenidas dan lugar, entre otros resultados, a una ecuación de calor hiperbólica, libre de problemas de causalidad.

La viscosidad es la siguiente variable a introducir en el esquema. El formalismo que se presenta en el presente capítulo admite la introducción de efectos de viscosidad cortante y volumétrica en el tensor de esfuerzos *mecánico* inicial. El flujo de calor aparece por vez primera únicamente al considerarse el balance de energía total. Si se toma como punto de partida el hecho de que la divergencia del tensor de esfuerzos se anula, entonces necesariamente la componente temporal de dicho balance corresponderá al flujo de energía mecánica. En el esquema de Meixner y Prigogine, como en toda la termodinámica, el calor no se considera una forma de energía mecánica convencional.

En la primera parte de este capítulo se establecen las ecuaciones relativistas de Navier-Stokes en base al esquema de Meixner y Prigogine. Especial énfasis se hace en la producción de entropía local que se obtiene en el esquema. Dicha variable resulta de alto interés en el estudio de problemas cosmológicos, en donde el papel de la segunda ley de la termodinámica aún no ha sido suficientemente clarificado. Las ecuaciones de transporte obtenidas en el presente capítulo son aplicables a un fluido relativista simple en una métrica estática. Posteriormente se aplican las mismas ideas para analizar el comportamiento de los fluidos relativistas en métricas dependientes del tiempo, útiles para modelar el comportamiento del Universo a gran escala. En base a esto se mostrará que es posible conciliar la idea de una métrica homogénea e isotrópica dependiente del tiempo, con una producción de entropía semidefinida positiva asociada a un flujo de calor debidamente construido.

2.1. Tensor de esfuerzos y ecuaciones de balance.

El punto de partida para el formalismo descrito en la introducción es el tensor de esfuerzos convencional [4.10]:

$$T^{\mu\nu} = \rho_{(o)} v^\mu v^\nu - p_{(o)} g^{\mu\nu} + \frac{p_{(o)}}{c^2} v^\mu v^\nu + \Xi^{\mu\nu} \quad (2.1)$$

El término $\frac{p_{(o)}}{c^2} v^\mu v^\nu$ no fue utilizado en trabajos anteriores [1], en los cuales se partió del tensor propuesto por Einstein [3], quien omite este término. Se ha encontrado que el trabajo con ambos tensores lleva a ecuaciones de transporte consistentes con el límite no relativista conocido. Por otro lado, (2.1) puede obtenerse a partir de desarrollos de teoría cinética como el mostrado en el capítulo 4 de esta tesis.

Los subíndices en paréntesis indicarán en lo sucesivo que las magnitudes a representar se están midiendo en un sistema comóvil al elemento de masa. En la ecuación (2.1) $\rho_{(o)}$ es la densidad (escalar), $p_{(o)}$ corresponde a la presión, y $\Xi^{\mu\nu}$ denota al tensor viscoso. El cuadvectores de velocidad, v^μ está definido por la ecuación

$$v^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} \quad (2.2)$$

en donde la variable τ representa al tiempo propio del elemento.

El tensor métrico $g^{\mu\nu}$ debe ser una solución conocida de las ecuaciones de campo de Einstein. Por ejemplo, en espacios estáticos con simetría esférica, $g^{\mu\nu}$ corresponde a la métrica de Schwarzschild :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{2GM}{c^2 r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Aquí, como es usual, G es la constante de gravitación universal, M es la masa de la fuente del campo gravitacional, y c es la velocidad de la luz. El manejo algebraico de los objetos fundamentales de la teoría general de la relatividad se muestra en el apéndice 1. A su vez, en dicho apéndice se utiliza el paquete con capacidades simbólicas, Mathematica, para verificar directamente que la métrica (2.3) corresponde a una solución de las ecuaciones de Einstein.

2.1.1. Ecuación de continuidad

La ecuación fundamental:

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (2.4)$$

y la importante identidad correspondiente a la derivada total respecto del tiempo propio:

$$\frac{d}{d\tau} = v^\nu ()_{;\nu} \quad (2.5)$$

llevan a la *ecuación de continuidad*:

$$\frac{d\rho_{(o)}}{d\tau} + \rho_{(o)} v^\nu_{;\nu} = -\frac{p_{(o)}}{c^2} g^{\mu\nu} v_{\mu;\nu} - \frac{1}{c^2} v_\mu \Xi^{\mu\nu}_{;\nu} \quad (2.6)$$

en donde el punto y coma representa derivada covariante. La evaluación detallada de derivadas covariantes se ejemplifica en el apéndice dos. La operación de proyección $v_\mu T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ debe efectuarse para establecer la ecuación (2.6).

2.1.2. Balance de Ímpetu.

La combinación de las ecuaciones (2.4-2.6) lleva a la ecuación de balance del ímpetu

$$\left(\rho_{(o)} + \frac{p}{c^2} \right) \frac{dv^\mu}{d\tau} = -\frac{v^\mu}{c^2} v_\alpha p_{(o)}^{\alpha} + p_{(o)}^{\mu} - \Xi^{\mu\nu}_{;\nu} + \frac{1}{c^2} v^\mu v_\alpha \Xi^{\alpha\nu}_{;\nu} \quad (2.7)$$

Es fácil ver que las ecuaciones (2.6-2.7) se reducen a sus contrapartes no relativistas en el límite de velocidades bajas, es decir, depreciando todos los términos que tienen a c^2 en el denominador se obtiene que,

$$\rho_{(o)} \frac{dv^k}{d\tau} = p_{(o)}^k - \Xi^{k\ell}_{;\ell} \quad (2.8)$$

que es la bien conocida ecuación no relativista [12].

2.2. Balances de energías mecánica e interna.

2.2.1. Balance de energía mecánica.

El flujo de energía mecánica se obtiene a partir de la proyección sobre el espacio de velocidades del tensor de esfuerzos (2.1):

$$J_{[M]}^\nu = v_\mu T^{\mu\nu} \quad (2.9)$$

Tomando la derivada covariante en la ecuación (2.9), y usando la ecuación (2.4), es posible establecer una ecuación que *no* es de conservación para la energía mecánica, a saber:

$$J_{[M] ; \nu}^\nu = v_{\mu ; \nu} T^{\mu\nu} \quad (2.10)$$

o bien, considerando la ecuación (2.1) :

$$J_{[M] ; \nu}^\nu = -\frac{p_{(o)}}{c^2} g^{\mu\nu} v_{\mu ; \nu} - \frac{1}{c^2} v_\mu \Xi^{\mu\nu} \quad (2.11)$$

donde, en estas ecuaciones, el flujo de energía mecánica está definido como:

$$J_{[M]}^\nu = \rho_{(o)} c^2 v^\nu + v_\mu \Xi^{\mu\nu} \quad (2.12)$$

Las ecuaciones (2.10-2.12) se reducen a sus contrapartes no relativistas[2] en los límites $\gamma \rightarrow 1$, $\sqrt{g_{00}} \rightarrow 1$ y reduciendo las derivadas covariantes a derivadas parciales simples.

2.2.2. Balance de energía interna.

Una expresión para la derivada total de la energía total respecto del tiempo propio resulta de alto interés en el esquema de Meixner y Progomine. Para obtener la expresión correspondiente, es necesario postular la expresión para la conservación de la energía *total* :

$$J_{[TE] ; \nu}^\nu = 0 \quad (2.13)$$

donde, por la analogía con la termodinámica irreversible no relativista, el flujo de energía total, $J_{[TE]}^\nu$, consiste de tres tipos de término: el flujo de energía mecánica, el flujo de energía interna, y el flujo de calor:

$$J_{[TE]}^\nu = J_{[M]}^\nu + \rho_{(o)} e_{[int] (o)} v^\nu + J_{[Q]}^\nu \quad (2.14)$$

Reemplazando directamente la ecuación (2.14) en la ecuación (2.13), y utilizando las expresiones (2.6) y (2.10), el balance de energía interna puede escribirse de la forma:

$$\rho_{(o)} \frac{d e_{[int] (o)}}{d\tau} + e_{[int] (o)} \left[-\frac{p_{(o)}}{c^2} g^{\mu\nu} v_{\mu;\nu} - \frac{1}{c^2} v_\mu \Xi^{\mu\nu}_{;\nu} \right] = -J_{[Q];\nu}^\nu - p_{(o)} g^{\mu\nu} v_{\mu;\nu} - v_\mu \Xi^{\mu\nu}_{;\nu} \quad (2.15)$$

Es ahora en este punto, donde es posible establecer el balance de entropía y con ello obtener una expresión para la *producción de entropía*, variable fundamental en la termodinámica de procesos irreversibles.

2.3. Balance relativista de entropía

2.3.1. Expresión genérica para el balance de entropía

El flujo de entropía total está representado por el cuadrivector:

$$J_{[ST]}^\nu = \rho_{(o)} s_{(o)} v^\nu + J_{[S]}^\nu \quad (2.16)$$

donde el primer término de la ecuación (2.16) representa una contribución estrictamente convectiva.

El balance genérico de entropía adopta la forma:

$$J_{[ST];\nu}^\nu = \sigma \quad (2.17)$$

en donde la producción de entropía σ es una cantidad *semidefinida positiva*. El reemplazo de la ecuación (2.16) en la ecuación (2.17), junto con el uso de las expresiones (2.5) y (2.6), llevan a la siguiente expresión:

$$\rho_{(o)} \frac{d s_{(o)}}{d\tau} + s_{(o)} \left[-\frac{p_{(o)}}{c^2} g^{\mu\nu} v_{\mu;\nu} - \frac{1}{c^2} v_\mu \Xi^{\mu\nu}_{;\nu} \right] + J_{[S];\nu}^\nu = \sigma \quad (2.18)$$

La ecuación (2.18) una ecuación genérica de balance de entropía en términos de una derivada total respecto del tiempo propio. Este tipo de expresión es necesaria para utilizar la hipótesis de equilibrio local.

2.4. Hipotesis de equilibrio local.

La hipótesis de equilibrio local corresponde a la suposición de que la entropía local es una funcional independiente del tiempo de la densidad y energía interna locales:

$$s_{(o)} = s_{(o)} \left(\rho_{(o)}, e_{[int] (o)} \right) \quad (2.19)$$

de forma tal que la derivada total de la entropía respecto del tiempo propio está dada por:

$$\frac{ds_{(o)}}{d\tau} = \left(-\frac{p_{(o)}}{\rho_{(o)}^2 \Theta_{(o)}} \right) \frac{d\rho_{(o)}}{d\tau} + \left(\frac{1}{\Theta_{(o)}} \right) \frac{de_{[int] (o)}}{d\tau} \quad (2.20)$$

En la ecuación (2.20) se ha hecho uso de relaciones termostáticas bien conocidas, las cuales permiten explicitar las derivadas parciales de la entropía local.

El reemplazo de las ecuaciones (2.6) y (2.15) en la ecuación (2.20) lleva, después de manipulaciones simples, a la expresión:

$$\rho_{(o)} \frac{ds_{(o)}}{d\tau} + \left(\frac{p_{(o)}}{\rho_{(o)} \Theta_{(o)}} + \frac{e_{[int] (o)}}{\Theta_{(o)}} \right) \left[-\frac{p_{(o)} g^{\mu\nu}}{c^2} v_{\mu;\nu} - \frac{1}{c^2} v_{\mu} \Xi^{\mu\nu} \right] + \left(\frac{J_{[Q]}^{\nu}}{\Theta} \right)_{;\nu} = \quad (2.21)$$

$$-\frac{J_{[Q]}^{\nu} \Theta_{(o);\nu}}{\Theta_{(o)}^2} - \frac{\Xi^{\mu\nu} v_{\mu;\nu}}{\Theta_{(o)}}$$

La ecuación (2.21) puede ahora compararse con la expresión para el balance genérico de entropía (2.18). Dicha comparación lleva a expresiones para:

- La producción de entropía:

$$\sigma = -\frac{J_{[Q]}^{\nu} \Theta_{(o);\nu}}{\Theta_{(o)}^2} - \frac{\Xi^{\mu\nu} v_{\mu;\nu}}{\Theta_{(o)}} \quad (2.22)$$

- El cuadriflujo de entropía:

$$J_{[S]}^{\nu} = \frac{J_{[Q]}^{\nu}}{\Theta} \quad (2.23)$$

El término $\left(\frac{p_{(o)}}{\rho_{(o)} \Theta_{(o)}} + \frac{e_{[int] (o)}}{\Theta_{(o)}} \right) \left[-\frac{p_{(o)} g^{\mu\nu}}{c^2} v_{\mu;\nu} - \frac{1}{c^2} v_{\mu} \Xi^{\mu\nu} \right]$ no aparece en los análisis no relativistas. Obsérvese que $c \gg v$, por lo que el término se anula.

Debido a la estructura de la ecuación (2.22), ahora es posible proponer ecuaciones constitutivas. Éstas deberán imponer la condición de que la producción de entropía sea semidefinida positiva, con ellas será posible completar el sistema de ecuaciones de transporte.

2.5. Ecuaciones constitutivas generalizadas

2.5.1. Producción de entropía y principio de Curie

En este trabajo el tensor de viscosidad $\Xi^{\lambda\nu}$ se supone simétrico, de forma tal que éste puede ser descompuesto de la forma:

$$\Xi^{\lambda\nu} = \dot{\Xi}^{\lambda\nu} + \frac{1}{4} \text{Tr} \{ \Xi^{\lambda\mu} \} \delta^{\lambda\nu} = \dot{\Xi}^{\lambda\nu} + \Xi \delta^{\lambda\nu} \quad (2.24)$$

en donde $\dot{\Xi}^{\lambda\nu}$ representa a la parte sin traza del tensor de viscosidad, y $\Xi \equiv \frac{1}{4} \text{Tr} \{ \Xi^{\lambda\mu} \}$ es un cuarto de la traza de dicho tensor.

El gradiente de velocidades generalizado $v_{\mu;\nu}$ también puede ser descompuesto, considerándose también una parte antisimétrica de dicho tensor:

$$v_{\mu;\nu} = \dot{v}_{\mu;\nu}^{\{s\}} + v_{\mu;\nu}^{\{a\}} + \frac{1}{4} \text{Tr} (v_{\mu;\nu}) \delta_{\mu\nu} \quad (2.25)$$

donde los superíndices $\{s\}$ y $\{a\}$ corresponden, respectivamente, a las partes simétricas y antisimétricas del tensor.

La producción de entropía, ecuación (2.22) puede ser reescrita usando las expresiones (2.24) y (2.25), observándose que

$$\frac{\Xi^{\mu\nu} v_{\mu;\nu}}{\Theta_{(o)}} = \frac{1}{\Theta_{(o)}} \dot{\Xi}^{\lambda\nu} \dot{v}_{\mu;\nu}^{\{s\}} + \Xi v_{;\nu}^{\nu} \quad (2.26)$$

y habéndose hecho uso de que la doble contracción de un tensor simétrico con uno antisimétrico es cero. Las descomposiciones mencionadas arriba resultan útiles para acoplar flujos y fuerzas termodinámicas del mismo orden tensorial (principio de Curie) [2]. La expresión final para la producción de entropía se lee:

$$\sigma = -\frac{J_{[Q]}^{\nu} \Theta_{(o);\nu}}{\Theta_{(o)}^2} - \frac{1}{\Theta_{(o)}} \dot{\Xi}^{\lambda\nu} \dot{v}_{\mu;\nu}^{\{s\}} - \Xi v_{;\nu}^{\nu} \quad (2.27)$$

2.6. Relaciones constitutivas lineales

La forma más simple de asegurar que la producción de entropía (2.27) es semi-definida positiva, es proponer *relaciones constitutivas lineales*:

- Para la conducción de calor:

$$J_{[Q]}^\nu = \frac{-\lambda}{\Theta_{(o)}^2} g^{\nu\eta} \Theta_{(o);\eta} \simeq -\kappa g^{\nu\eta} \Theta_{(o);\eta} \quad (2.28)$$

- Para la viscosidad cortante:

$$\overset{\circ}{\Xi}^{\mu\nu} = -\frac{\eta'}{\Theta_{(o)}} g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} \dot{v}_{\alpha;\beta}^{\{s\}} \simeq -\eta g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} \dot{v}_{\alpha;\beta}^{\{s\}} \quad (2.29)$$

- Y para la viscosidad volumétrica

$$\Xi = -\xi v_{;\nu}^\nu \quad (2.30)$$

Todas las ecuaciones propuestas se reducen a sus contrapartes no relativistas en los límites correspondientes.

2.7. Ecuaciones relativistas de Navier-Stokes de acuerdo al esquema de Meixner

2.7.1. Ecuación de movimiento

La generalización relativista de las ecuaciones de Navier-Stokes se obtiene mediante la inserción de las ecuaciones (2.28) y (2.30) en la ecuación de movimiento (2.7), en la cual la divergencia del tensor de viscosidad ha adquirido la forma:

$$\left(\overset{\circ}{\Xi}^{\mu\nu} + \Xi \delta^{\mu\nu} \right)_{;\nu} = - \left(\eta g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} \dot{v}_{\alpha;\beta}^{\{s\}} \right)_{;\nu} - \left[\left(\xi v_{;\alpha}^\alpha \right) \delta^{\mu\nu} \right]_{;\nu} \quad (2.31)$$

El gradiente de la presión puede ser eliminado de la ecuación (2.7) por medio de la hipótesis de equilibrio local usando la expresión,

$$p_{(o)}^{i\mu} = \left(\frac{\partial p_{(o)}}{\partial \rho_{(o)}} \right)_{\Theta_{(o)}} \rho_{(o)}^{i\mu} + \left(\frac{\partial p_{(o)}}{\partial \Theta_{(o)}} \right)_{\rho_{(o)}} \Theta_{(o)}^{i\mu} = \left(\frac{1}{\rho_{(o)} k_{\Theta_{(o)}}} \right) \rho_{(o)}^{i\mu} + \left(\frac{\beta}{k_{\Theta_{(o)}}} \right) \Theta_{(o)}^{i\mu} \quad (2.32)$$

donde $k_{\Theta_{(o)}}$ representa la compresibilidad isotérmica del elemento, y β corresponde al coeficiente de expansión volumétrica. De esta forma, la generalización relativista de la ecuación de Navier-Stokes es:

$$\begin{aligned} \left(\rho_{(o)} + \frac{p}{c^2} \right) \frac{dv^\mu}{d\tau} = & -\frac{v^\mu}{c^2} v_\alpha \left[\left(\frac{1}{\rho_{(o)} k_{\Theta_{(o)}}} \right) \rho_{(o)}^{;\alpha} + \left(\frac{\beta}{k_{\Theta_{(o)}}} \right) \Theta_{(o)}^{;\alpha} \right] + \left[\left(\frac{1}{\rho_{(o)} k_{\Theta_{(o)}}} \right) \rho_{(o)}^{i\mu} + \left(\frac{\beta}{k_{\Theta_{(o)}}} \right) \Theta_{(o)}^{i\mu} \right] \\ & - \left(\eta g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} \dot{v}_{\alpha;\beta}^{[s]} \right)_{;\nu} - \left[\left(\xi v_{;\alpha}^\alpha \right) \delta^{\mu\nu} \right]_{;\nu} - \frac{1}{c^2} v^\mu v_\lambda \left[\left(\eta g^{\lambda\beta} g^{\nu\alpha} \dot{v}_{\alpha;\beta}^{[s]} \right)_{;\nu} - \left[\left(\xi v_{;\alpha}^\alpha \right) \delta^{\lambda\nu} \right]_{;\nu} \right] \end{aligned} \quad (2.33)$$

La ecuación (2.33) es la ecuación de movimiento buscada, en términos de las variables $\rho_{(o)}$, $\Theta_{(o)}$ y v^μ .

2.7.2. Ecuación de calor.

La ecuación de calor se encuentra utilizando la ecuación de continuidad (2.6), el balance de energía interna (2.15), y las ecuaciones constitutivas(2.28)-(2.30). Usando de nuevo la hipótesis de equilibrio local, la energía interna se supone una funcional independiente del tiempo de la densidad y la temperatura, de forma que:

$$\frac{d e_{[int]}(o)}{d\tau} = \left(\frac{\partial e_{[int]}(o)}{\partial \rho_{(o)}} \right)_{\Theta_{(o)}} \frac{d\rho_{(o)}}{d\tau} + \left(\frac{\partial e_{[int]}(o)}{\partial \Theta_{(o)}} \right)_{\rho_{(o)}} \frac{d\Theta_{(o)}}{d\tau} \quad (2.34)$$

Las derivadas parciales en la ecuación (2.34) corresponden a las variables medibles:

$$\left(\frac{\partial e_{[int]}(o)}{\partial \rho_{(o)}} \right)_{\Theta_{(o)}} = - \left(\frac{\beta}{k_{\Theta_{(o)}}} \right) \frac{\Theta_{(o)}}{\rho_{(o)}^2} + \frac{p_{(o)}}{\rho_{(o)}^2} \quad (2.35)$$

$$\left(\frac{\partial e_{[int]}(o)}{\partial \Theta_{(o)}} \right)_{\rho_{(o)}} = c_\rho \quad (2.36)$$

de esta forma, por medio de la ecuación (2.6) y las ecuaciones (2.35) y (2.36), la ecuación (2.34) se transforma en,

$$\rho \frac{de_{[int] (o)}}{d\tau} = \left[- \left(\frac{\beta}{k_{\Theta(o)}} \right) \frac{\Theta(o)}{\rho(o)} + \frac{p(o)}{\rho(o)} \right] \left(- \frac{p(o)}{c^2} g^{\mu\nu} v_{\mu;\nu} - \frac{1}{c^2} v_{\mu} \Xi^{\mu\nu} - \rho(o) v_{;\nu}^{\nu} \right) + \rho(o) c_p \frac{d\Theta(o)}{d\tau} \quad (2.37)$$

Finalmente, el lado izquierdo de la ecuación (2.37) puede reemplazarse por la expresión (2.15) y reescribiendo los flujos termodinámicos en términos de las relaciones constitutivas (2.28-2.30), la ecuación final puede escribirse de la forma:

$$\left[- \left(\frac{\beta}{k_{\Theta(o)}} \right) \frac{\Theta(o)}{\rho(o)} + \frac{p(o)}{\rho(o)} \right] \left(- \frac{p(o)}{c^2} g^{\mu\nu} v_{\mu;\nu} - \frac{1}{c^2} v_{\mu} \Xi^{\mu\nu} - \rho(o) v_{;\nu}^{\nu} \right) + c_p \frac{d\Theta(o)}{d\tau} = R \quad (2.38)$$

donde:

$$R = e_{[int] (o)} \left[- \frac{p(o)}{c^2} g^{\mu\nu} v_{\mu;\nu} - \frac{1}{c^2} v_{\mu} \Xi^{\mu\nu} \right] - J_{[Q];\nu} - p(o) g^{\mu\nu} v_{\mu;\nu} - v_{\mu} \Xi^{\mu\nu} \quad (2.39)$$

Esta última expresión se puede reescribir utilizando las relaciones constitutivas (2.28)-(2.30), hallándose que,

$$R = e_{[int] (o)} \left\{ - \frac{p(o)}{c^2} g^{\mu\nu} v_{\mu;\nu} + \frac{1}{c^2} v_{\mu} \left[\left(\eta g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} i_{\alpha;\beta}^{\{s\}} \right)_{;\nu} + \left[\left(\xi v_{;\alpha}^{\alpha} \right) \delta^{\mu\nu} \right]_{;\nu} \right] \right\} \quad (2.40)$$

$$+ \left(\kappa g^{\nu\eta} \Theta_{(o);\eta} \right)_{;\nu} - p(o) g^{\mu\nu} v_{\mu;\nu} - v_{\mu} \left[\left(\eta g^{\mu\beta} g^{\nu\alpha} i_{\alpha;\beta}^{\{s\}} \right)_{;\nu} + \left[\left(\xi v_{;\alpha}^{\alpha} \right) \delta^{\mu\nu} \right]_{;\nu} \right]$$

Esta ecuación se reduce a una ecuación previamente reportada, aplicable al caso no viscoso [1]. Énfasis debe hacerse en que la ecuación (2.38) no admite propagación de energía a velocidades mayores que la velocidad de la luz, ya que el término $\left(\kappa g^{\nu\eta} \Theta_{(o);\eta} \right)_{;\nu}$ en (2.40) genera una ecuación hiperbólica para la temperatura.

2.8. Ideas Esenciales de la Termodinámica de Segundo Orden de Israel.

2.8.1. Leyes de Conservación en la Termodinámica de Segundo Orden de Israel.

Para contrastar las ideas expuestas en el presente capítulo con trabajo conocido en el área, se presentan las ideas fundamentales de la termodinámica relativista

de segundo orden propuesta por Werner Israel alrededor de 1976 [6]. Después de subrayar los distintos problemas conceptuales que se presentan al intentar definir una velocidad hidrodinámica para un elemento de volumen de fluido, Israel propone distintas alternativas para el tensor de esfuerzos-energía, a los cuales siempre se les exigirá que satisfagan la ecuación de conservación (2.4) .

Dichas alternativas se fundamentan en el supuesto (utilizado por Israel) de que, para sistemas fuera del equilibrio, no es posible asignar una velocidad hidrodinámica única para el elemento de fluido. Israel propone la existencia de dos velocidades posibles para incorporar en el tensor de esfuerzos-energía:

- a) Una velocidad paralela al flujo de partículas u_N^μ .
- b) Una velocidad paralela al eigenvector del tensor T^{ab} , que se denominará u_E^μ .

Se propone que la relación entre ambos cuadvectores de velocidad es, para ligeras desviaciones del equilibrio[6]:

$$u_E^\mu = u_N^\mu + \frac{1}{\rho c^2 + p} q^\mu + O_2 \quad (2.41)$$

en donde ρ y p son la densidad y presión medidas en el sistema local, q^μ es el cuadvector de flujo de calor, y O_2 representa términos especificados de segundo orden en las desviaciones con respecto al equilibrio local.

Ahora bien, en el límite no relativista, es posible el definir una velocidad hidrodinámica única, y no queda claro de la ecuación (2.41) el cómo coinciden las definiciones u_N^μ y u_E^μ en el límite de bajas velocidades.

El tensor de esfuerzos-energía que utiliza Israel se ubica entonces en dos contextos:

- En el sistema de flujo de partículas (en ausencia de viscosidad y de esfuerzos cortantes):

$$T^{\alpha\beta} = \rho u_N^\alpha u_N^\beta + p \Delta_N^{\alpha\beta} + q^\alpha u_N^\beta + q^\beta u_N^\alpha \quad (2.42)$$

en donde $\Delta_N^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + \frac{u_N^\alpha u_N^\beta}{c^2}$.

- En el sistema de energía:

$$T^{\alpha\beta} = \rho u_E^\alpha u_E^\beta + p \Delta_E^{\alpha\beta} + q^\alpha u_N^\beta + q^\beta u_N^\alpha \quad (2.43)$$

en donde $\Delta_E^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + \frac{u_E^\alpha u_E^\beta}{c^2}$

Es de hacerse notar que, en ambos casos, se involucra a variables termodinámicas locales en la construcción inicial del tensor de esfuerzos-energía. Ello lleva necesariamente a la inclusión del cuadvivector de calor en el balance energía *mecánica e implica interpretaciones mecánicas del flujo de calor.*

2.8.2. La Hipótesis de Equilibrio Local y La Producción de Entropía en la Termodinámica de Segundo Orden de Israel.

Israel[6] explicita un par de ecuaciones en donde se hace ver, de acuerdo a los dos posibles formalismos mencionados en la sección anterior, a la entropía local como una funcional, independiente del tiempo, de la densidad y de la energía interna locales:

$$S_E = S_{eq}(\rho_E, n_E) \quad (2.44)$$

$$S_N = S_{eq}(\rho_N, n_N) \quad (2.45)$$

En este contexto, Israel no sigue un procedimiento ortodoxo[12] en el cuál se separen las formas mecánicas y no mecánicas de energía para establecer las ecuaciones de transporte. Esta alternativa se analizó ya en esta tesis.

En lugar de ello, Israel propone:

a) Una ecuación constitutiva para el flujo de calor en términos de la temperatura, T , la aceleración local y la derivada del flujo de calor. A saber:

$$q^\alpha = -\kappa T \Delta_N^{\alpha\beta} \left(\frac{T_{;\beta}}{T} + \dot{u}_\beta + \bar{\beta}_1 \dot{q}_\beta \right) \quad (2.46)$$

en donde κ corresponde a la conductividad térmica del sistema, y $\bar{\beta}_1$ es una constante de proporcionalidad.

b) Un flujo de entropía dado por:

$$S^\mu = u_N S_N + \frac{q_N^\mu}{T} - Q_N^\mu \quad (2.47)$$

en donde Q_N^μ representa contribuciones de segundo orden al flujo de entropía.

c) Una producción de entropía dada por

$$S^\mu_{;\mu} = \frac{q^\mu q_\mu}{k T^2} \quad (2.48)$$

que se obtiene a partir las ecuaciones fenomenológicas (2.46) y del flujo de entropía (2.47).

El formalismo de Israel conduce a un sistema de ecuaciones de transporte en el cuál no aparecen problemas de causalidad en los fenómenos de transferencia de calor y de transporte de masa. Este sistema es complejo y tiene la desventaja de incluir parámetros ajustables en la teoría.

El procedimiento ortodoxo [12] [2] [1] conlleva un orden y una lógica diferentes, y a juicio del autor de esta tesis, es mucho menos artificial .

2.9. Conclusiones del capítulo 2

Hasta este momento se ha establecido el conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de Navier-Stokes-Fourier en el contexto de la teoría general de la relatividad, para un fluido simple modelado por el tensor (2.1). El procedimiento ha sido directo y es prácticamente una calca del esquema no relativista de Meixner-Prigogine incluido en textos clásicos [2]-[12]. Es muy probable que la mayor virtud de este formalismo sea que es capaz de *establecer* las forma explícitas del flujo y de la producción de entropía. En contraste, Israel y otros autores [6]-[11], *proponen* un cuadriflujo de entropía del cual obtienen una expresión para la producción de entropía vía la operación de divergencia. En los trabajos que se acaban de mencionar, el principio de equilibrio local, no se utiliza en su forma más amplia, esto es, no se utiliza la ecuación (2.21) para *establecer* la producción de entropía, por lo que es necesario aumentar el orden de los gradientes para generar ecuaciones

de transporte hiperbólicas. En una teoría relativista consistente, esto ciertamente *no* debe ser necesario, aún en el régimen lineal.

Por otro lado, es importante observar que en la ecuación (2.28) se está suponiendo que existe una componente temporal no nula del cuadriflujo de calor medido en el sistema comóvil. Hay una razón de fondo para que esto así sea. Es la presencia de esta componente lo que garantiza causalidad en el régimen *lineal*. Por otro lado, el hecho de que esta componente sea no nula en el sistema comóvil resulta objetable para algunos investigadores del área[11]. A mi juicio, la mejor manera de afrontar esta cuestión consiste en revisar los fundamentos cinéticos de la teoría, para con ello establecer una interpretación objetiva del significado de esta variable. Esto se hace en el capítulo 4 de este trabajo de tesis.

Por último, es pertinente enfatizar que el desarrollo del esquema de Meixner para flujo viscoso va más allá de un mero ejercicio matemático. Para un recuento de aplicaciones del análisis de flujo viscoso en astrofísica puede consultarse el texto de Chandrasekhar[13], en el cual, desgraciadamente, no existe análisis formal alguno de la producción de entropía local.

References

- [1] A. Sandoval-Villalbaz and L.S. García-Colín, *Physica A*, **234** (1996) 358
- [2] S.R. de Groot and P. Mazur, *Non-Equilibrium Thermodynamics* (Dover Publications, Toronto, Ontario, 1984).
- [3] A. Einstein, *The Meaning of Relativity* (Princeton University, New Jersey, 1969).
- [4] C. Misner, K.S. Thorne, and J.A. Wheeler, *Gravitation*. (W.H. Freeman and Company, New York, 1973).
- [5] S.R. de Groot, W.A. van Leeuwen and Ch.G. van Weert, *Relativistic Kinetic Theory*(North Holland, the Netherlands, 1980).
- [6] W. Israel, *Ann. Phys.* 100, (1976) 310, and references therein.
- [7] W. Israel, *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 11, (1986) 295.

- [8] Zhang, Z. in *Black Hole Physics*, edited by V. De Sabbata and Z.Zhang, (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,1992).
- [9] G.W. Gibbons and S.W. Hawking. Eds., *Euclidean Quantum Gravity*, (World Scientific. Singapore.1993).
- [10] H. Stephani, *General Relativity* 2nd. Ed., (Cambridge University Press, New York. 1994).
- [11] Jou, D. Comunicación personal (1998).
- [12] L.S. García-Colín. *Termodinámica de Procesos Irreversibles*,(UAM-CBI, México, 1990).
- [13] S. Chandrasekhar. *Hidrodinamic and Hydromagnetic Stability*, (Dover publications, New York, 1961).

3. Implicaciones cosmológicas del esquema relativista de Meixner y Prigogine.

El estudio de las propiedades del Universo a gran escala es una de las actividades más apasionantes de las Ciencias Físicas. La forma más directa para estudiar problemas tales como el tamaño, el futuro y el pasado del universo consiste en la obtención y análisis de soluciones especiales de las ecuaciones de campo de Einstein. De acuerdo a este tipo de razonamiento, el Universo puede modelarse como un fluido homogéneo e isotrópico representado por un tensor de esfuerzos adecuado. Al introducirse este tensor a las ecuaciones de campo y resolver el sistema proponiendo una métrica dependiente del tiempo, es posible obtener la denominada solución Robertson-Walker-Friedmann (RWF) de las ecuaciones de Einstein. La variable principal involucrada en este modelo es un radio dependiente del tiempo que puede identificarse como el "radio del Universo".

La consideración de efectos disipativos en Universos homogéneos e isotrópicos representa un problema importante en la cosmología moderna. Cálculos de enorme interés, tales como la densidad del Universo y la abundancia de materia oscura *pueden* depender de la existencia de efectos disipativos. Tradicionalmente, la viscosidad volumétrica ha sido considerada como el único efecto disipativo en Universos RWF. El flujo de calor tiene que descartarse en estos modelos *si es incluido en el tensor de esfuerzos que aparece en las ecuaciones de campo de Einstein*. El esquema relativista de Meixner y Prigogine[1] es un formalismo alternativo al tradicional que permite introducir al flujo de calor en los modelos cosmológicos RWF de forma indirecta. En sí, el esquema de Meixner y Prigogine de la TIL provee de herramientas suficientes para realizar estudios serios de problemas cosmológicos, ya que contiene una producción de entropía global semidefinida positiva, donde pueden aparecer efectos disipativos *sin* tener que restringirse exclusivamente a la viscosidad volumétrica.

Este capítulo se dedica fundamentalmente a establecer las ecuaciones de campo en métricas RWF introduciendo un flujo de calor por medio del esquema presentado en el capítulo anterior. Posteriormente se discuten las implicaciones de las ecuaciones obtenidas.

3.1. La métrica de Robertson-Walker y sus implicaciones cosmológicas.

El punto de partida aquí son las ecuaciones de campo de Einstein [3]

$$G^{\alpha\beta} = \kappa T^{\alpha\beta} \quad (3.1)$$

donde $G^{\alpha\beta}$ es el tensor de Einstein. $T^{\alpha\beta}$ es el tensor de esfuerzos y κ es la constante de acoplamiento entre ambos tensores.

El universo a gran escala se modela con el tensor de esfuerzos:

$$T^{\alpha\beta} = \rho v^\alpha v^\beta + \frac{p}{c^2} v^\alpha v^\beta - p g^{\alpha\beta} \quad (3.2)$$

en donde:

- ρ es la densidad local del fluido medida en el sistema comóvil.
- v^α es la cuadrivelocidad local del fluido.
- p es la presión local del fluido medida en el sistema comóvil.
- c es la velocidad de la luz.
- $g^{\alpha\beta}$ es el tensor métrico escrito de forma contravariante.

La solución propuesta, útil para incorporar en el modelo las propiedades de isotropía y homogeneidad (corroboradas a gran escala) es [3]:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - K^2(ct) \left[\left(\frac{dr^2}{1-r^2} \right) + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\varphi^2 \right] \quad (3.3)$$

donde r , θ , φ son las coordenadas esféricas usuales y $K(ct)$ se identifica con el radio del fluido (el Universo). A $K^2(ct)$ también se le conoce con factor de escala.

Si ahora se calcula el tensor de Einstein en términos de la métrica (3.3), se generan dos ecuaciones de campo independientes, a saber:

$$1 + \kappa K^2(ct) p + \left[\frac{dK(ct)}{d(ct)} \right]^2 + 2K(ct) \frac{d^2 K(ct)}{d(ct)^2} = 0 \quad (3.4)$$

$$3 + 3 \left[\frac{dK(ct)}{d(ct)} \right]^2 = \kappa \rho c^2 K^2(ct) \quad (3.5)$$

Los detalles de este importante cálculo se encuentran en prácticamente en todos los textos de relatividad general, pero una síntesis de ellos, elaborada con el paquete *Mathematica*, se incluye en el apéndice 3.

3.2. Introducción de efectos disipativos en la métrica de Robertson y Walker en el esquema de Meixner y Prigogine.

Los efectos disipativos inherentes a la dinámica de los fluidos, pueden introducirse al problema cosmológico siguiendo las ideas inicialmente propuestas por Meixner y Prigogine [2], y descritas en el capítulo anterior. De acuerdo a esto, la derivada total de la entropía local respecto del tiempo propio τ puede escribirse como:

$$\frac{ds}{d\tau} = \left(\frac{\partial s}{\partial \rho} \right) \frac{d\rho}{d\tau} + \left(\frac{\partial s}{\partial e_{[int]}} \right) \frac{de_{[int]}}{d\tau} \quad (3.6)$$

Ahora bien, en el esquema de Meixner y Prigogine es esencial reescribir la ecuación (3.6) en la forma de una ecuación de balance del tipo:

$$J_{[ST] ; \mu}^{\mu} = \sigma \quad (3.7)$$

en donde $J_{[ST]}^{\mu}$ representa un flujo de entropía total y σ corresponde a la *producción de entropía*, que de acuerdo a la segunda ley de la termodinámica debe ser semidefinida positiva. Es decir:

$$\sigma \geq 0 \quad (3.8)$$

El formalismo descrito en el capítulo anterior permite proponer relaciones entre flujos y fuerzas termodinámicas que satisfagan claramente la segunda ley de la termodinámica, sin que en el proceso se tengan que hacer hipótesis restrictivas de idealidad del fluido que limiten a cero el valor posible de la producción de entropía.

Para obtener una ecuación del tipo (3.7) a partir de (3.6) es necesario hallar expresiones para las derivadas totales de la densidad y energía *interna* en base a los respectivos balances. A ello se dedicarán las siguientes subsecciones.

3.2.1. Derivada total de la densidad

Considérese la expresión

$$v_\mu T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0 \quad (3.9)$$

obtenida de multiplicar el tensor (3.2) por el tensor covariante de velocidad v_μ y tomando en cuenta la ecuación de Einstein (3.1). Una manipulación algebraica simple permite reescribir (3.9) en una forma sugestiva, a saber,

$$(v_\mu T^{\mu\nu})_{;\nu} = -T^{\mu\nu} v_{\mu;\nu} \quad (3.10)$$

La ecuación (3.10) *no* es una ecuación de conservación. La divergencia del flujo de energía mecánica $v_\mu T^{\mu\nu}$ no se anula, si no que es igual a la doble contracción del tensor de esfuerzos con el gradiente de velocidades (término de Raleigh relativista). Si ahora se consideran: a) la forma explícita del tensor de esfuerzos (3.2), b) La métrica de Robertson-Walker-Friedmann, ecuación (3.3) y c) las componentes espaciales de la velocidad nulas (sistema comóvil), es posible escribir la ecuación *de balance de masa*, como,

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{3}{K} \frac{dK}{dt} \left(\frac{p}{c^2} + \rho \right). \quad (3.11)$$

Para llegar a esta ecuación se ha hecho uso de los símbolos de Christoffel de segunda especie, calculados en el apéndice 4 de la tesis.

3.2.2. Derivada total de la energía interna

Como ya se ha dicho, el flujo de energía total se compone de tres términos: uno para la energía mecánica, uno para la energía interna y uno para el flujo de calor, de forma que:

$$J_{[T]}^\nu = J_{[M]}^\nu + J_{[Int]}^\nu + J_{[Q]}^\nu$$

De la ecuación (3.10) y de los métodos de las secciones 2.2.1 y 2.2.2 de esta tesis, se tiene que la conservación de la energía total lleva directamente a la expresión de balance de energía interna:

$$\rho \frac{d e_{int}}{dt} = \frac{3}{K} \frac{dK}{dt} e_{[int]} \frac{p}{c^2} - J_{[Q];\nu}^\nu - \frac{3p}{K} \frac{dK}{dt}. \quad (3.12)$$

3.2.3. Producción de entropía

Ahora es posible regresar a las ecuaciones (3.6) y (3.7) puesto que ya se tienen expresiones para las derivadas totales correspondientes.

La ecuación (3.7) puede reescribirse, en términos de la derivada total respecto del tiempo, de la forma:

$$\rho \frac{ds}{dt} - \frac{3}{K} \frac{dK}{dt} \frac{p}{c^2} s + J_{[s];\nu}^{\nu} = \sigma. \quad (3.13)$$

el término de divergencia en la ecuación (3.13) no contiene términos convectivos.

Ahora bien, las derivadas totales en las ecuaciones (3.11-3.12) se pueden introducir en la ecuación (3.6), lo cuál lleva después de manipulaciones algebraicas simples a la expresión:

$$\rho \frac{ds}{dt} - \frac{3}{K} \frac{dK}{dt} \frac{p}{c^2} \left(\frac{p}{\rho\Theta} + \frac{e_{[int]}}{\Theta} \right) + \left(\frac{J_{[Q]}^{\nu}}{\Theta} \right)_{;\nu} = - \frac{J_{[Q]}^{\nu} \Theta_{;\nu}}{\Theta^2}. \quad (3.14)$$

Al compararse las ecuaciones (3.13-3.14) se encuentra la *producción de entropía*:

$$\sigma = - \frac{J_{[Q]}^{\nu} \Theta_{;\nu}}{\Theta^2} \quad (3.15)$$

y la entropía local:

$$s = \frac{p}{\Theta} + \frac{e_{[int]}}{\Theta}. \quad (3.16)$$

Las ecuaciones (3.14-3.16) son la base de la teoría que aquí se presenta.

3.3. Ecuación de calor en ausencia de viscosidad

Los resultados obtenidos en las secciones anteriores pueden utilizarse para estudiar la evolución de la temperatura respecto del tiempo propio, así como otras variables termodinámicas en métricas de Robertson y Walker. La ecuación para la temperatura puede obtenerse a partir de la dependencia de la energía interna respecto de la temperatura y la densidad de masa.

$$e_{[int]} = e_{[int]}(\rho, \Theta) \quad (3.17)$$

La derivada total de la energía interna respecto del tiempo propio, de acuerdo a la ecuación (3.17), puede escribirse de la forma:

$$\rho \frac{de_{[int]}}{dt} = \left[\left(\frac{\beta}{k_{\Theta(\circ)}} \right) \frac{\Theta}{\rho} + \frac{p}{\rho} \right] \frac{d\rho}{dt} + c_p \frac{d\Theta}{dt} \quad (3.18)$$

en donde se ha hecho uso de las relaciones termodinámicas (2.35)-(2.36).

Por medio de la ecuación (3.11) y las ecuaciones (2.35)-(2.36), la ecuación (3.18) adquiere la forma:

$$\rho \frac{de_{[int]}}{dt} = \left[- \left(\frac{\beta}{k_{\Theta}} \right) \frac{\Theta}{\rho} + \frac{p}{\rho} \right] \left(- \frac{3}{K} \frac{dK}{dt} \left(\frac{p}{c^2} + \rho \right) \right) + \rho c_p \frac{d\Theta}{dt} \quad (3.19)$$

Con esta expresión es ya posible aplicar directamente los métodos de la sección 2.7.2. de forma tal que es posible establecer la ecuación de calor:

$$\left[- \left(\frac{\beta}{k_{\Theta}} \right) \frac{\Theta}{\rho} + \frac{p}{\rho} \right] \left(- \frac{3}{K} \frac{dK}{dt} \left(\frac{p}{c^2} + \rho \right) \right) + c_p \frac{d\Theta}{dt} = R \quad (3.20)$$

donde:

$$R = \frac{3}{K} \frac{dK}{dt} e_{[int]} \frac{p}{c^2} - J_{[Q];\nu}^{\nu} - \frac{3p}{K} \frac{dK}{dt} \quad (3.21)$$

esta última expresión se puede reescribir utilizando las relación constitutiva (2.28), hallándose que,

$$R = \frac{3}{K} \frac{dK}{dt} e_{[int]} \frac{p}{c^2} - (\kappa g^{\nu\eta} \Theta_{;\eta})_{;\nu} - \frac{3p}{K} \frac{dK}{dt} \quad (3.22)$$

Debe hacerse énfasis en el hecho de que se ha utilizado la metodología expuesta en el capítulo 2. Una vez más, la ecuación de calor establecida *no* admite propagación de energía a velocidades mayores que la velocidad de la luz, ya que el término $(\kappa g^{\nu\eta} \Theta_{;\eta})_{;\nu}$ genera una ecuación hiperbólica para la temperatura.

En el caso de un Universo de Friedmann, $p = 0$, y la ecuación (3.20) se reduce a

$$\left(\frac{\beta}{k_{\Theta(\circ)}} \right) \Theta \left(\frac{3}{K} \frac{dK}{dt} \right) + c_p \frac{d\Theta}{dt} = - (\kappa g^{\nu\eta} \Theta_{;\eta})_{;\nu} \quad (3.23)$$

Es importante hacer notar que las ecuaciones (3.20-3.23) no tienen problemas de causalidad aún en el caso de que el gradiente espacial de temperaturas sea cero, dado que la cuarta componente del cuadrivector de calor no se anula [1]. El cuadrivector de calor es de tipo temporal (timelike) para conductividades térmicas positivas. De acuerdo a esto, *la segunda ley de la termodinámica garantiza la causalidad*. Este hecho parece no haber sido apreciado por autores de trabajos en este campo.

El comportamiento de la temperatura para universos cerrados y planos puede estudiarse a partir de la ecuación (3.20). Es importante resaltar que no existe necesidad alguna de suponer proceso cuasiestático alguno, ni ecuación de estado alguna, para establecer la ecuación dada. Un enfriamiento rápido se observa durante el periodo de expansión, mientras que un incremento de la temperatura es identificado durante la contracción en un universo cerrado [5].

Si se supone una conductividad térmica diferente de cero, se observa un “amortiguamiento” interesante en el comportamiento oscilatorio de la temperatura en el caso de un universo cerrado. Este hecho se encuentra claramente ligado a que la producción de entropía se supone positiva en este caso. Una representación esquemática de estas ideas se muestra en las gráficas correspondientes al apéndice 4 de este trabajo.

3.4. El esquema de Meixner con viscosidad, en ausencia de flujo de calor: el factor de escala cosmológico.

La aplicación de las hipótesis y métodos mostrados en esta sección pueden aplicarse a modelos de Universo con disipación viscosa, en ausencia de calor. Aunque dicho problema ya ha sido trabajado con las ideas de la termodinámica extendida en métricas más generales[6] [7], el esquema de Meixner constituye, a juicio del autor, una alternativa conceptualmente más simple y directa de análisis. El tensor de esfuerzos en este caso es:

$$T^{\alpha\beta} = \rho_{[o]} v^\alpha v^\beta + \frac{p_{[o]}}{c^2} v^\alpha v^\beta - p_{[o]} g^{\alpha\beta} + \tau g^{\alpha\beta} \quad (3.24)$$

en donde τ corresponde a una viscosidad volumétrica cosmológica. Ahora bien, el uso de la métrica (3.3) y *la metodología del esquema de Meixner* llevan ala

ecuación para la evolución para el factor de escala:

$$-\frac{1}{\rho} \left[\frac{d\rho}{dt} \right]^2 = \frac{3}{cK} \frac{dK}{dt} - \frac{1}{c^2} \left(\frac{3}{K} \frac{dK}{dt} \frac{d\eta}{dt} + 3\eta \frac{K \frac{d^2K}{dt^2} - \left(\frac{dK}{dt} \right)^2}{K^2} \right) \quad (3.25)$$

en donde η es una viscosidad volumétrica, y \hat{M} es una constante de integración de las ecuaciones de campo. Las soluciones del sistema formado por las ecuaciones (3.5-3.25) poseen la ventaja adicional de que la producción de entropía siempre es positiva en el modelo, y puede ser determinada de manera ortodoxa de acuerdo al esquema de Meixner de la termodinámica irreversible lineal. Naturalmente, el sistema se reduce a las ecuaciones convencionales para el caso $\eta = 0$.

3.5. Conclusiones del capítulo 3

En éste capítulo se ha mostrado que la existencia de una producción de entropía semidefinida positiva es compatible con las propiedades fundamentales de los modelos cosmológicos convencionales. El calor puede introducirse en la cosmología sin tener que prescindir de las hipótesis de homogeneidad e isotropía a gran escala, incorporadas al tensor de esfuerzos (3.2). De la misma manera, *la evolución de la temperatura puede ser predicha sin tener que suponer la validez de ningún proceso cuasistático*. Es pertinente aquí enfatizar que el esquema relativista de Meixner y Prigogine constituye un formalismo adecuado para abordar problemas cosmológicos sin tener que imponer hipótesis demasiado restrictivas referentes a los procesos termodinámicos inherentes a los diferentes modelos cosmológicos [3]. Además, las ideas aquí mostradas permiten la inclusión de efectos viscosos sin que éstos representen la única alternativa de disipación en el Universo a gran escala. El esquema de Meixner y Prigogine en modelos cosmológicos con viscosidad será reportado en el futuro.

En el capítulo aquí expuesto se han estudiado propiedades fuera del equilibrio de la materia en el Universo a gran escala. La extensión de este formalismo en presencia de campos electromagnéticos se estudiará en el capítulo 5.

References

- [1] A. Sandoval-Villalbaz and L.S. García-Colín, *Physica A*, **234** (1996) 358

- [2] C.Misner, K.S Thorne, and J.A.Wheeler, Gravitation. (W.H. Freeman and Company, NewYork, 1973).
- [4] L Landau and E.M. Lifshitz, Classical Theory of Fields 4th, Ed., (Pergamon Press, London, 1980)..
- [3] H. Stephani, General Relativity 2nd. Ed., (Cambridge University Press, New York, 1994).
- [5] A. Sandoval-Villalbaz and L.S. García-Colín, Journal of General Relativity and Gravitation (1999) (en prensa).
- [6] R. A. Sussman, Class. Quantum Grav. **11** (1994) 1445-1451.
- [7] R.A. Sussman and J. Triginer Class. Quantum Grav. **16** (1999) 167-187.

4. Teoría cinética relativista para medios continuos diluidos.

4.1. Introducción

En sus rasgos esenciales, la teoría cinética relativista fue desarrollada mucho tiempo después que su contraparte no relativista[1]. Haciendo uso de la ecuación de Boltzmann de manera apropiada, dicha teoría fue básicamente encaminada al estudio de fenómenos de transporte relativistas y, de manera no ortodoxa, utilizada para fundamentar microscópicamente a la termodinámica relativista fuera del equilibrio. El término *no ortodoxo* se utiliza en vista de que el ahora reconocido esquema unificado de la termodinámica de procesos irreversibles, formulado por Meixner y Prigogine a finales de los cuarenta, [2] [3] y cuya forma final se dio a principios de los sesenta[6], llegó mucho tiempo después que las ideas utilizadas por los primeros trabajadores en el campo de la termodinámica irreversible relativista[8] [4]. De hecho, hasta donde es del conocimiento del autor, el primer intento para reproducir el esquema de Meixner-Prigogine en el contexto de la relatividad general, fue publicado hace sólo tres años [5].

La diferencia principal entre las varias maneras de abordar la teoría de transporte relativista estriba en la forma de introducir el cuadriflujo de calor. En trabajos previamente publicados[5], se ha puesto énfasis en el hecho de que el calor *no es* una forma convencional de energía mecánica. Esta es la posición que se ha tomado en los desarrollos de los dos capítulos anteriores. La energía mecánica convencional no se conserva, de forma que el calor se introduce como un recurso, una forma de energía *alternativa* que hace posible la conservación de la energía *total*[7]. Pero esto no es nuevo, es el contenido esencial de la primera ley de la termodinámica.

En este capítulo se analiza la construcción del flujo de calor en la teoría cinética relativista, *utilizando explícitamente el concepto de velocidad caótica*. En este contexto, el balance de energía se obtiene de la componente temporal del tensor ímpetu-energía. El límite newtoniano surge a partir de este formalismo, y las primeras correcciones relativistas son fácilmente identificadas. Se analiza también la construcción del tensor de esfuerzos a partir de este formalismo de forma que es posible identificar las distintas contribuciones que lo integran, en analogía directa con el desarrollo no relativista. Las ecuaciones fenomenológicas de trans-

porte pueden obtenerse a partir del tensor de esfuerzos siguiendo los métodos convencionales de la teoría cinética . Asimismo, en este capítulo se muestra como consecuencia importante de este formalismo, el hecho de que *la tasa de expansión en Universos RWF se modifica radicalmente para velocidades caóticas de orden relativista.*

La estructura de este capítulo se ha dividido de la siguiente manera: Primeramente se hace una revisión de la teoría cinética no relativista utilizando una notación matricial adecuada. Esto se hace con el objeto de establecer una ruta directa para construir la teoría relativista correspondiente. Posteriormente se utiliza la ecuación de Boltzmann relativista (en su versión más aceptada) para establecer las ecuaciones de transporte. Las últimas secciones se dedican a analizar las consecuencias cosmológicas del formalismo y a establecer conclusiones referentes a esta manera de construir la teoría cinética relativista.

4.2. Teoría cinética no relativista: notación matricial.

El punto de partida aquí es la bien conocida ecuación de Boltzmann [2]- [3]

$$\frac{\partial f(x^j, v^j, t)}{\partial t} + u^k \frac{\partial f(x^j, v^j, t)}{\partial x^k} = C(f, f') \quad (4.1)$$

donde $f(x^j, v^j, t)$ corresponde al número de partículas en el elemento dx^j, dv^j de un gas diluido en el tiempo t ; u^k es velocidad hidrodinámica del elemento, y C corresponde al término colisional (los índices latinos corresponden a valores que van del uno al tres). La función de Boltzmann $f(x^j, v^j, t)$ nos permite definir el promedio estadístico de una función dinámica ψ de la forma:

$$\langle \psi(x^j, t) \rangle = \frac{\int \psi f(x^j, v^j, t) d^3v}{\int f(x^j, v^j, t) d^3v} = \frac{\int \psi f(x^j, v^j, t) d^3v}{n(x^j, t)} \quad (4.2)$$

donde la densidad numérica $n(x^j, t)$ está definida como la integral de la función de Boltzmann sobre todo el espacio de velocidades. La velocidad hidrodinámica del sistema de partículas puede obtenerse a partir de la ecuación (4.2) haciendo $\psi = v^j$, siendo v^j la velocidad de una sola partícula:

$$u^k(x^j, t) = \frac{\int v^k f(x^j, v^j, t) d^3v}{n(x^j, t)}$$

A partir de la ecuación (4.1) es posible obtener la ecuación genérica de transporte, conocida como ecuación de Maxwell y Enskog, y tiene la forma[7]:

$$\frac{\partial \langle n \psi \rangle}{\partial t} + \frac{\partial [n \langle v^k \psi \rangle]}{\partial x^k} = 0 \quad (4.3)$$

Lo que se quiere mostrar a continuación es que, por medio de una formulación matricial adecuada, es posible reescribir los resultados usuales de la teoría cinética no relativista, de una forma que será muy fácilmente reproducible en la contraparte relativista. Para este fin, se escribirán las ecuaciones de transporte en términos de promedios estadísticos de las *velocidades caóticas* (velocidades relativas de partículas individuales con respecto del centro de masas local), y se definirán:

– La *matriz galileana* 4×4 A_ν^μ , en coordenadas cartesianas:

$$A_\nu^\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta^1 & 1 & 0 & 0 \\ \beta^2 & 0 & 1 & 0 \\ \beta^3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

– El cuadrivector de posición para las partículas:

$$x^\alpha = \begin{bmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

donde $\beta^j = \frac{u^j}{c}$, c siendo la velocidad de la luz (los índices griegos correrán del 0 al 3).

Las bien conocidas ecuaciones de transformación galileanas son:

$$\begin{bmatrix} ct \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\bar{t} \\ \bar{x}^1 + c\beta^1\bar{t} \\ \bar{x}^2 + c\beta^2\bar{t} \\ \bar{x}^3 + c\beta^3\bar{t} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

y

$$\begin{bmatrix} c \\ v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ k^1 + c\beta^1 \\ k^2 + c\beta^2 \\ k^3 + c\beta^3 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

donde $k^j = \bar{v}^j$ representa al vector de velocidad relativa referido a $c\beta^j$. En este caso las k^j 's corresponden a las velocidades caóticas.

Las ecuaciones (4.6-4.7) pueden ser exactamente reescritas por medio de la matriz (4.4) como:

$$x^\mu = A_\nu^\mu \bar{x}^\nu \quad (4.8)$$

y

$$v^\mu = A_\nu^\mu K^\nu \quad (4.9)$$

en donde se ha definido

$$K^\nu = \begin{bmatrix} c \\ k^1 \\ k^2 \\ k^3 \end{bmatrix}$$

obsérvese que la velocidad está dada por $v^\mu = \frac{dx^\mu}{dt}$, y $K^j = v^j - c\beta^j$ corresponde a la velocidad caótica mencionada antes. El promedio de las componentes espaciales se anula, es decir $\langle K^j \rangle = 0$, mientras que $\langle K^0 \rangle = c$.

Ahora es posible reemplazar $\psi = m v^\mu$ en la ecuación (4.3) para reescribir las ecuaciones de transporte en términos de las velocidades caóticas, toda vez que se utilice la matriz (4.9). Aquí m representa la masa de una partícula individual, y ψ puede adoptar la forma de cualquier invariante colisional. La ecuación obtenida por medio de las manipulaciones mencionadas es:

$$\frac{\partial \left[\rho A_\mu^\alpha A_\nu^\lambda \langle K^\mu K^\nu \rangle \right]}{\partial x^\alpha} = 0 \quad (4.10)$$

donde $\rho = m n$ es la densidad de masa.

La ecuación (4.10) contiene información bien conocida de la teoría cinética no relativista, a saber:

Para $\lambda = 0$, el balance de masa, o ecuación de continuidad surge inmediatamente.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial [\rho u^j]}{\partial x^j} = 0 \quad (4.11)$$

mientras que para $\lambda = j$, el balance de ímpetu toma la forma,

$$\frac{\partial [\rho u^i]}{\partial t} + \frac{\partial [\rho \langle u^j u^i \rangle]}{\partial x^j} = - \frac{\partial [\rho \langle K^j K^i \rangle]}{\partial x^j} \quad (4.12)$$

donde el tensor $\rho \langle K^j K^i \rangle$ corresponde al tensor de esfuerzos fenomenológico, en el caso de que no exista viscosidad. Más aún, en el caso isotrópico, la ecuación (4.12) se reduce a la bien conocida ecuación de Euler, previa identificación del último término de la ecuación (4.12) con el gradiente de presión, ya que en ese caso:

$$\rho \langle K^j K^i \rangle = p \delta^{ji} \quad (4.13)$$

El balance de energía se obtiene por medio del reemplazo del invariante colisional $v = \frac{1}{2} m v^2$ en la ecuación (4.3). Sin embargo, dicha expresión para ψ es aparentemente ajena al cuadvivector definido en la ecuación (4.5). En la siguiente sección se obtendrá un balance de energía-masa apropiado, a partir de la contraparte relativista del cuadvivector de velocidad definido en (4.5).

En la siguiente sección se discutirá la generalización relativista del formalismo mostrado de una manera clara y directa. De la misma manera se establecerá el tensor fenomenológico de esfuerzos en el contexto relativista.

4.3. La ecuación de Boltzmann relativista y los invariantes colisionales

Se desea ahora establecer la contraparte relativista del formalismo presentado en la sección anterior. El punto de partida aquí es la versión relativista más aceptada de la ecuación (4.1), que es[1]:

$$\frac{df(x^\mu, v^\mu)}{d\tau} = C(f, f') \quad (4.14)$$

donde x^μ es el cuadrivector de posición del elemento, v^μ es la correspondiente cuadrivelocidad, $f(x^\mu, v^\mu)$ representa al número de partículas en el elemento definido por los intervalos $(x^\mu, x^\mu + dx^\mu)$ y $(v^\mu, v^\mu + dv^\mu)$. Finalmente, el término colisional se denota por $C(f, f')$ y su estructura es análoga a la manejada en la teoría no relativista[1].

La derivada total respecto del tiempo propio en la ecuación (4.14) se desarrolla por medio de la expresión.

$$\frac{df}{d\tau} = v^\mu (f)_{,\mu} \quad (4.15)$$

A continuación se presentan las definiciones necesarias para desarrollar el cálculo mencionado.

En la formulación de la teoría cinética es importante establecer una densidad numérica de partículas:

$$n_o(x^\mu) = \int f(x^\mu, p^\mu) d^4v \quad (4.16)$$

que representa el número de partículas, por unidad de volumen, en el intervalo $(x^\mu, x^\mu + dx^\mu)$. Más aún, es claro, a partir de la ecuación (4.16) que la densidad de masa propia está dada por

$$\rho_o(x^\mu) = m_o n_o(x^\mu) = m_o \int f(x^\mu, p^\mu) d^4v \quad (4.17)$$

donde m_o representa la densidad de masa en reposo de una partícula individual. También, el promedio estadístico de cualquier función ψ dependiente de la velocidad está dado por la expresión:

$$\langle \psi \rangle \equiv \frac{\int \psi(v^\mu) f(x^\mu, v^\mu) d^4v}{n_o(x^\mu)} \quad (4.18)$$

4.3.1. Ecuación de transporte genérica

La ecuación de transporte se obtiene de multiplicar ambos lados de la ecuación (4.14) por la función dependiente de la velocidad $\psi(v^\mu)$ e integrando respecto del elemento de volumen. Este procedimiento lleva a la expresión:

$$[n_o(x^\alpha) \langle v^\mu \psi(v^\nu) \rangle]_{;\mu} = \int C(f, f_1) \psi(v^\nu) d^4v \quad (4.19)$$

donde el punto y coma representa derivada covariante. Cuando $\psi(v^\nu)$ es un invariante colisional, el miembro derecho se hace cero, por los pasos conducentes al teorema H [1]. Cabe mencionar aquí que dicho teorema se obtiene de acuerdo con los mismos pasos y condiciones que se imponen en el caso no relativista; es por ello que aquí éstos se han omitido.

Se puede probar [1] que $\psi(v^\nu) = m_o v^\nu$ es el invariante colisional más general asociado a la ecuación (4.19). Dado que la cuadrivelocidad v^ν incluye un factor γ desarrollable en serie de potencias en β , combinaciones lineales de una constante, la velocidad, y el cuadrado de la velocidad pueden identificarse con los invariantes colisionales que aparecen en el límite no relativista. En este contexto, la ecuación (4.19) nos permite escribir la ecuación de balance más general, en el caso relativista, dada por,

$$[\rho_o(x^\alpha) \langle v^\mu v^\nu \rangle]_{;\mu} = 0 \quad (4.20)$$

La ecuación (4.20) es la ecuación de transporte en el caso relativista y será la base de la discusión de los flujos de ímpetu y energía de acuerdo al formalismo de la teoría cinética.

De aquí en adelante, será de utilidad el uso del cuadrivector de velocidad hidrodinámica:

$$U_{[H]}^\nu \equiv \langle v^\nu \rangle = \frac{\int v^\nu f(x^\mu, p^\mu) d^4v}{n_o(x^\mu)} \quad (4.21)$$

el cual se relaciona con el cuadrivector de velocidad $\mathbf{u}_{[H]}$ por medio de la relación:

$$U_{[H]}^\nu = \begin{bmatrix} c \gamma_{[H]} \\ u^1 \gamma_{[H]} \\ u^2 \gamma_{[H]} \\ u^3 \gamma_{[H]} \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

en donde se ha hecho uso de las relaciones conocidas de la teoría especial de la relatividad:

$$\beta^j = \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{u}_{[H]}}{c} = \begin{bmatrix} u^1 \gamma_{[H]} \\ u^2 \gamma_{[H]} \\ u^3 \gamma_{[H]} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

y

$$\gamma_{[H]} = \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\beta}_{[H]}^2}} \quad (4.24)$$

El *cua*drivector de velocidad caótica (o peculiar) K^ν se define como la velocidad de una partícula medida en el sistema comóvil, de tal forma que de acuerdo a las transformaciones de Lorentz:

$$v^\alpha = L_\beta^\alpha K^\beta \quad (4.25)$$

Es conveniente subrayar que la velocidad hidrodinámica está incluida en la matriz de Lorentz de acuerdo con la relación,

$$L_b^a = \delta_b^a + (\gamma_{[H]} - 1) \frac{u_{[H]b} u_{[H]}^a}{\mathbf{u}_{[H]}^2} \quad (4.26)$$

$$L_0^\nu = L_\nu^0 = \frac{U_{[H]}^\nu}{c} \quad (4.27)$$

La ecuación (4.25) es la contraparte relativista de la ecuación (4.9), y representa la expresión de la velocidad de las partículas en términos de la velocidad caótica y de la velocidad hidrodinámica $U_{[H]}^\nu$.

El *cua*drivector de velocidad caótica se relaciona con el trivector k^j contenido en la ecuación (4.25) por medio de la expresión:

$$K^\beta = \begin{bmatrix} c \gamma_{[K]} \\ k^1 \gamma_{[K]} \\ k^2 \gamma_{[K]} \\ k^3 \gamma_{[K]} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

donde

$$\gamma_{[K]} = \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\beta}_{[K]}^2}} \quad (4.29)$$

Se sigue directamente de las ecuaciones (4.26) , (4.27) y (4.28) que en el límite no relativista

$$\langle K^m \rangle = 0 \quad (4.30)$$

para $m = 1, 2, 3$.

La introducción de las velocidades caótica e hidrodinámica en la ecuación de genérica de transporte (4.20) puede realizarse por medio del reemplazo de las velocidades individuales en la mencionada ecuación haciendo uso de las transformaciones (4.25), de tal forma que:

$$\left[\rho_o (x^\eta) L_\alpha^\mu L_\beta^\nu \langle K^\alpha K^\beta \rangle \right]_{;\nu} = 0 \quad (4.31)$$

En la ecuación (4.31) el término en corchetes, puede ser identificado, en analogía con la ecuación (4.10), con el *tensor de esfuerzos-energía*:

$$\Xi^{\mu\nu} = \rho_o (x^\eta) L_\alpha^\mu L_\beta^\nu \langle K^\alpha K^\beta \rangle \quad (4.32)$$

Aunque la expresión (4.32) resulta de difícil manejo, existen resultados muy importantes de interés físico directamente derivables de ésta. Muchos de estos resultados se pueden establecer de manera inmediata si se considera al tensor medido desde el sistema comóvil.

Con el objeto de ilustrar estas ideas, se considerará el sistema masa-energía medido desde el sistema comóvil, el cual puede obtenerse por medio del reemplazo directo de v^μ , haciendo $\mu = 0$ en la ecuación (4.31). La expresión así obtenida es:

$$\left[\rho_o L_\alpha^\nu L_\beta^0 \langle K^\alpha K^\beta \rangle \right]_{;\nu} = 0 \quad (4.33)$$

y el *cuadriflujo de energía total* en el modelo cinético se identifica como:

$$J_{[TE]}^\nu = \rho_o L_\alpha^\nu L_\beta^0 \langle K^\alpha K^\beta \rangle \quad (4.34)$$

El significado y las implicaciones de la ecuación (4.34) pueden analizarse de acuerdo a las siguientes ideas: En la teoría cinética no relativista, la expresión $\frac{1}{2}\rho \langle \mathbf{k}^2 \rangle$ se identifica con la densidad de energía interna local, y el vector de flujo de calor se asocia con la expresión:

$$\mathbf{J}_{[Q]} = \frac{1}{2} \rho \langle \mathbf{k}^2 \mathbf{k} \rangle \quad (4.35)$$

Ahora bien, en el formalismo relativista, la densidad de energía interna generalizada se encuentra dada por la expresión:

$$\rho_o e_{[int]} = \rho_o \langle [K^0]^2 \rangle \quad (4.36)$$

que es el único término diferente de cero en el sistema comóvil cuando se hace $\nu = 0$ ien la ecuación (4.33). El flujo de calor generalizado se obtiene considerando $\nu = r$ ($r = 1, 2, 3$) e identificando los términos independientes de β en la misma ecuación. La expresión obtenida de acuerdo a este procedimiento es:

$$J_{[Q]}^r = \rho_o c \langle K^0 K^r \rangle \quad (4.37)$$

Las ecuaciones (4.36)-(4.37) pueden combinarse para formar un sólo cuadrivector dado por:

$$J_{[Q]}^\nu = \rho_o \langle K^0 K^\nu \rangle \quad (4.38)$$

Considerando los desarrollos en serie a primer orden en $\gamma_{[K]}$ es posible realizar las aproximaciones $K^0 \sim c$ y $K^r \sim \left[\begin{array}{l} \left(1 + \frac{\mathbf{k}^2}{2c^2}\right) c \\ \left(1 + \frac{\mathbf{k}^2}{2c^2}\right) \mathbf{k} \end{array} \right]$; el reemplazo directo de estas aproximaciones en la ecuación (4.38) genera el cuadrivector de calor aproximado:

$$J_{[Q]}^\nu \sim \left[\begin{array}{l} c \left(\rho_o c^2 + \frac{1}{2} \rho_o \langle \mathbf{k}^2 \rangle \right) \\ \rho_o c^2 \langle \mathbf{k} + \frac{\mathbf{k}^2}{2c^2} \mathbf{k} \rangle \end{array} \right] \quad (4.39)$$

La componente temporal en la ecuación (4.39) dividida ente c representa la densidad de energía interna usual con un término de energía en reposo que generalmente es ignorado en la física no relativista. El primer término en las componentes espaciales se anula, puesto que el promedio de las velocidades caóticas es cero. El segundo término en las componentes espaciales corresponde al flujo de calor no relativista (4.35).

El hecho de que la componente temporal del cuadriflujo de calor no se anule impide que se presenten problemas de causalidad en la ecuación de calor derivada en esquemas fenomenológicos [5]. De la misma manera, dado que este cuadrivector

satisface las transformaciones de Lorentz (4.26), las contribuciones al flujo de calor espaciales se manifiestan en la componente temporal al pasar a distintos sistemas de referencia. La interpretación física de la ecuación (4.38) es simple: el flujo de energía cinética caótico usual debe reemplazarse por el flujo de energía cinética relativista

$$J_{[Cin]}^\nu = \rho_o c \langle K^0 K^\nu \rangle \quad (4.40)$$

Este vector corresponde a un cuadrivector cuya componente temporal puede ser interpretada como una densidad de energía interna local.

4.3.2. Las componentes espaciales del tensor de esfuerzos viscoso.

Las componente espaciales del tensor (4.32) que son independientes de la velocidad hidrodinámica corresponden a la parte simétrica del tensor de esfuerzos conocida en la física no relativista

$$\tau^{ij} = \rho \langle k^i k^j \rangle \quad (4.41)$$

La diferencia es que ahora aparecen cuadrivelocidades en la construcción:

$$\Xi^{ij} = \rho_o \langle K^i K^j \rangle \quad (4.42)$$

Resulta claro que el límite relativista de la ecuación (4.28), corresponde a

$$\Xi^{ij} \cong \tau^{ij} \quad (4.43)$$

con lo que se satisface el límite no relativista. Una vez más, aparecen correcciones debidas a la presencia de altas velocidades. Es importante insistir aquí que expresiones simples de la forma (4.42) pueden obtenerse únicamente al considerar velocidades caóticas de manera explícita en el formalismo cinético.

4.3.3. Consecuencias en el contexto cosmológico

Hasta ahora, no han saltado a la vista implicaciones físicas relevantes de este formalismo. Considérense a continuación las comoponentes no nulas de la componente puramente temporal del tensor de esfuerzos (medida en el sistema comóvil). Esta componente es directamente proporcional a la correspondiente componente del tensor de Einstein, de forma que en un universo Robertson-Walker-Friedman (RWF):

$$T_o^o = \rho_o c^2 \quad (4.44)$$

$$T_j^j = p \text{ (sin suma)} \quad (4.45)$$

Si ahora se supone que en el formalismo no existe viscosidad y que el tensor de esfuerzos es isotrópico, la presión en la ecuación (4.45) claramente estará dada por:

$$\Xi_j^j = \rho_o \langle K_j K^j \rangle \text{ (sin suma)} \quad (4.46)$$

y el término de energía adquiere la forma:

$$\Xi_o^o = \rho_o \langle [K^o]^2 \rangle = \rho_o c^2 \langle \gamma_{[K]} \rangle \quad (4.47)$$

La ecuación (4.47) debe estudiarse con atención. Si las velocidades caóticas son no relativistas (tal y como ocurre en algunas etapas de la evolución del Universo a gran escala),

$$[K^o]^2 \rightarrow c^2 \quad (4.48)$$

como puede comprobarse a partir de la ecuación (4.29), de forma que esta expresión coincide con (4.44). Pero, en el caso de una expansión en la cuál las partículas tengan velocidades relativistas, el factor

$$f = \langle \gamma_{[K]} \rangle \quad (4.49)$$

adquiere órdenes de magnitud de importancia *capaces de modificar las tasas de expansión del Universo a gran escala.*

Desde luego, esta modificación parte del supuesto de la validez de la ecuación de Boltzmann para abordar problemas cosmológicos. Sin embargo, dado que desviaciones respecto del equilibrio de un sistema pueden ser medidas en términos de promedios de potencias de velocidades caóticas, y que dichas desviaciones pueden provenir de procesos de intercambio de masa-energía, resulta razonable considerar que las desviaciones respecto del equilibrio den lugar a correcciones a la densidad considerada en la ecuación fundamental (4.44). La ecuación (4.47) proporciona una forma directa de estimar dichas correcciones. Cálculos igualmente orientados, pero más apegados a la realidad deben involucrar consideraciones cuánticas fuera del equilibrio[12]. Este tipo de problemas se abordarán en el futuro.

4.4. Conclusiones del capítulo 4

En este capítulo se ha mostrado que una generalización directa de las ecuaciones de transporte no relativistas puede establecerse en el contexto relativista en base a la consideración de velocidades caóticas (4.25). En el formalismo relativista fueron construidas explícitamente las correcciones para la densidad de energía interna y para el flujo de calor, esto en base al uso de cuadvectores que involucran el factor relativista correspondiente a la ecuación (4.49). Correcciones similares fueron establecidas en la construcción del tensor de esfuerzos viscoso.

Es importante subrayar que la mayor parte de los formalismos encaminados a establecer una teoría cinética relativista no utilizan explícitamente el concepto de velocidad caótica[1]. En lugar de ello, se introducen definiciones de energía y flujo de calor como punto de partida, dando lugar a teorías que buscan reproducir los esquemas fenomenológicos introducidos por Eckart e Israel [8]-[9]. El enfoque presentado en esta capítulo es consistente con el esquema relativista de Meixner y Prigogine. En teoría cinética, las ecuaciones de conservación contienen expresiones explícitas para el tensor de los esfuerzos y el flujo de calor. Aquí se ha mostrado como ambos se generalizan al caso relativista con las ventajas ya señaladas. En particular, el que el cuadvector del flujo de calor tenga una componente no nula garantiza la existencia de una ecuación de Fourier que no viola causalidad y además proporciona un mecanismo de disipación con $\sigma > 0$ aún para medios homogéneos e isotrópicos. Esto *no* se ha logrado en versiones anteriores de una teoría cinética relativista, e inclusive ha llevado a muchos autores a recurrir a versiones extendidas de la termodinámica irreversible lineal [13] para resolver la falla. Además, el tensor de los esfuerzos utilizado antes [5] surge de manera natural del formalismo sin la necesidad de emplear argumentos un tanto heurísticos.

Por otra parte, el formalismo conduce también a una ecuación de balance de entropía tal que, como en el caso no relativista, y por los argumentos conducentes al teorema H, contiene una producción de entropía no negativa para toda solución de la ecuación de Boltzmann. Este es un resultado general poco apreciado por los simpatizadores de estos esquemas. Sin embargo, el formalismo aquí descrito sólo muestra como extraer las ecuaciones de conservación de manera muy general. Si éste es o no completamente consistente con el esquema relativista de Meixner y Prigogine dependerá de la estructura de la función de distribución, correspondiente a la solución de la ecuación (4.14). De esta forma, se espera que

al construirse una solución aproximada a "primer orden" en los gradientes, se generen ecuaciones constitutivas lineales, expresiones explícitas de los coeficientes de transporte, y ecuaciones que exhiban el principio de equilibrio local. Todo esto es trabajo aún por desarrollar. Por otro lado, el formalismo presentado en este capítulo reproduce los resultados de la teoría cinética no relativista de manera directa.

El siguiente punto a trabajar en esta teoría es la construcción de expresiones explícitas para los coeficientes de transporte inherentes a la teoría, ejemplo de ello son la conductividad térmica y la viscosidad volumétrica. El método de Chapman y Enskog parece adecuado para reescribir las ecuaciones constitutivas de la termodinámica de procesos irreversible lineal en el contexto relativista. Estos resultados conformarán la columna vertebral de futuros reportes.

En problemas cosmológicos, la ecuación de Einstein requiere del conocimiento de un tensor de esfuerzos. La componente puramente temporal de este tensor incluye a la densidad medida en el sistema comóvil (4.44). Esta componente parece modificarse por un factor directamente relacionado con la presencia de velocidades caóticas relativistas. Este resultado implica que las desviaciones respecto del equilibrio muy probablemente modifiquen también las tasas de expansión del Universo a gran escala. Con ello, se muestra que el uso de la física de procesos irreversibles es capaz de aportar elementos de gran valor en el estudio de problemas cosmológicos.

References

- [1] S.R. de Groot, W.A. van Leeuwen and Ch.G. van Weert, *Relativistic Kinetic Theory*(North Holland, the Netherlands, 1980).
- [2] I. Prigogine, *Thermodynamics of Irreversible Processes* (John Wiley and Sons, N.Y. 3rd. Ed. 1967).
- [3] J. Meixner & H.G. Reik, *Thermodynamik der Irreversiblen Prozesse in Handbuch der Physik* S. Flugge, ed. (Springer Verlag, Berlin 1959) Vol III N° 2.
- [4] L. Landau & E. Lifshitz, *Fluid mechanics* (Addison-Wesley, Reading Mass.) 1959
- [5] A. Sandoval-Villalbaz and L.S. García-Colín, *Physica A*, **234**, 358-370 (1996).
- [6] S.R. de Groot and P. Mazur, *Non-Equilibrium Thermodynamics* (Dover Publications, Toronto, Ontario, 1984).
- [7] S. Chapman and T.G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press, Cambridge, 1952.
- [8] Eckart, *Phys. Rev.* 58 (1940) 919-928.
- [9] W. Israel, *Ann. Phys.* 100, (1976) 310, and references therein.
- [10] W. Israel, *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 11, (1986) 295.
- [11] H. Stephani, *General Relativity* 2nd. Ed., (Cambridge University Press, New York. 1994).
- [12] S. Fujita, *Introduction to Non-Equilibrium Quantum Statistical Mechanics*, Saunders, Philadelphia-London, 1966.
- [13] D. Jou, J. Casas-Vázquez y G. Lebon; *Extended Irreversible Thermodynamics* 2nd. Ed., (Springer-Verlag, Berlin, 1996).

5. El campo electromagnético en el esquema relativista de Meixner y Prigogine.

La dinámica de los fluidos en presencia de campos electromagnéticos es un tema de enorme interés en el estudio de problemas astrofísicos. Sin embargo, el análisis de la producción de entropía local suele ser ignorado o sobresimplificado, de forma tal que elementos importantes de las ideas físicas quedan oscurecidos en la mayor parte de los formalismos tradicionales de la magnetohidrodinámica.

En este capítulo se presentan dos maneras de evaluar la producción de entropía para el caso de la dinámica de los fluidos en presencia de campos electromagnéticos. En primer término se exhibe el formalismo correspondiente en términos de fuerzas externas. Esto es, los campos electromagnéticos se introducen como agentes externos capaces de modificar el estado de movimiento de los elementos de masa cargados. Este tipo de aproximación al problema puede hallarse en el texto de de Groot y Mazur[2] aunque al parecer ha sido insuficientemente valorado por los astrofísicos.

Por otro lado, siguiendo un espíritu relativista mucho más puro, se muestra que es posible reproducir las ideas mostradas en el capítulo segundo, para el caso puramente gravitacional, con el objeto de establecer las ecuaciones de la magnetohidrodinámica *sin* hacer uso del concepto de fuerza externa. Los efectos termodinámicos de los campos electromagnéticos pueden incorporarse en términos de curvaturas asociadas a una métrica *en un espacio matemático de cinco dimensiones*. Si bien, las ideas de ampliar la métrica convencional para incorporar efectos electromagnéticos se remonta a tiempos tan lejanos como 1921 [8], su aplicación a la termodinámica de procesos irreversibles en términos del esquema de Meixner y Prigogine aparentemente tuvo que esperar hasta la elaboración de este trabajo.

5.1. El uso de fuerzas inclusión de campos electromagnéticos en el esquema no relativista de Meixner y Prigogine.

Tal y como se comentó en la introducción, las ideas fundamentales que se van a describir en esta sección se encuentran en el texto de de Groot y Mazur[2], sin embargo es pertinente incluir aquí una síntesis autocontenida de este formalismo. Esto permitirá contrastar con el trabajo habitual de la magnetohidrodinámica orientada a la astrofísica, y con el formalismo relativista más elegante y general

que se discutirá en una sección posterior.

5.1.1. Las ecuaciones convencionales de la magnetohidrodinámica.

En el caso de un fluido simple las ecuaciones de balance de masa e ímpetu son respectivamente:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^\ell)}{\partial x^\ell} = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial (\rho u^\ell)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^\ell u^k + \tau^{\ell k})}{\partial x^k} = f^\ell \quad (5.2)$$

en donde f^ℓ es la fuerza externa por unidad de volumen que actúa sobre cada elemento de volumen y $\tau^{\ell k}$ es el tensor de los esfuerzos. En toda esta subsección se manejan índices latinos que toman valores del 1 al 3.

Si la carga específica del fluido es q/m , la densidad de carga eléctrica local estará dada por

$$\rho_{[\varepsilon]} = \frac{q}{m} \rho \quad (5.3)$$

Es claro que la ecuación (5.1) es equivalente a la ecuación convencional de conservación de carga, pues al multiplicar dicha ecuación por la carga específica (que es constante para el fluido simple), y considerar la expresión (5.3) se obtiene:

$$\frac{\partial \rho_{[\varepsilon]}}{\partial t} + \frac{\partial (J_{[\varepsilon]}^\ell)}{\partial x^\ell} = 0 \quad (5.4)$$

en donde la densidad de corriente eléctrica está dada por

$$J_{[\varepsilon]}^\ell = \rho_{[\varepsilon]} u^\ell. \quad (5.5)$$

La ecuación (5.2) se reduce a la ecuación de movimiento de Lorentz para medios continuos

$$\rho \frac{d u^\ell}{d t} = - \frac{\partial \tau^{\ell k}}{\partial x^k} + \frac{q}{m} \rho [E^\ell + \varepsilon_{kn}^\ell u^k B^n] \quad (5.6)$$

en donde la fuerza externa ha sido reemplazada por la fuerza de Lorentz. Los vectores de campo eléctrico y magnético se han denotado, en forma respectiva,

por E y B . El símbolo de Levi-Civita ha sido empleado para expresar en términos de índices al producto vectorial que aparece en la fuerza de Lorentz.

Es lamentable el hecho de que una buena parte de los desarrollos en astrofísica se detienen *conceptualmente* en este punto, limitándose a integrar las ecuaciones (5.1-5.6) con diversas formas del tensor de esfuerzos (y quizás incorporando sistemas multicomponentes), pero *desacoplando* la temperatura del problema suponiendo sistemas isotérmicos. Además, en este tipo de formalismos, la producción local de entropía simplemente *se ignora*. En las siguientes secciones se aplican los métodos de la TIL de forma tal que en las ecuaciones resultantes de la magnetohidrodinámica se mantenga una producción de entropía semidefinida positiva, de manera explícita, para todo punto del espacio y a todo tiempo.

5.1.2. Energía interna local con fuerzas externas

Al multiplicar ambos términos de la ecuación (5.6) por el vector covariante de velocidad, y haciendo uso de la ecuación (5.1) se obtiene la ecuación de balance para la energía mecánica total, esto es,

$$\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \rho u^2 \right)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{1}{2} \rho u^2 u^k + u_\ell \tau^{\ell k} \right) = + \frac{q}{m} \rho u_\ell \left[E^\ell + \varepsilon_{kn}^\ell u^k B^n \right] + \frac{\partial u_\ell}{\partial x^k} \tau^{\ell k} \quad (5.7)$$

en donde se ve que la energía mecánica *no* se conserva. Más aún, existe un término disipativo ohmico, adicional al término de Rayleigh. El término correspondiente al campo magnético se anula.

La energía mecánica total satisface la ecuación de balance:

$$\frac{\partial \left(\rho e_{[mec]} \right)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(J_{[mec]}^k \right) = + \frac{q}{m} \rho u_\ell \left[E^\ell + \varepsilon_{kn}^\ell u^k B^n \right] + \frac{\partial u_\ell}{\partial x^k} \tau^{\ell k} \quad (5.8)$$

donde, en ausencia de otras fuerzas externas,

$$\rho e_{[mec]} = \frac{1}{2} \rho u^2 \quad (5.9)$$

$$J_{[mec]}^k = \frac{1}{2} \rho u^2 u^k + u_\ell \tau^{\ell k} \quad (5.10)$$

$$\frac{q}{m} \rho u_\ell (\varepsilon_{kn}^\ell u^k B^n) = 0 \quad (5.11)$$

puesto que la velocidad es perpendicular a la fuerza magnética. Instistimos, no se ha incluido una energía potencial, dado que en el caso dinámico, los campos eléctrico y magnético son no conservativos.

La energía total se conserva, de forma tal que, definiendo el vector de flujo de energía total como la suma de los flujos de energía mecánica, energía interna y calor, es válido escribir la ecuación:

$$\frac{\partial (\rho e_{[mec]} + \rho e_{[int]})}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^k} (J_{[mec]}^k + J_{[Q]}^k + \rho e_{[int]} v^k) = 0 \quad (5.12)$$

la cual, combinada con las ecuaciones (5.1) y (5.8) permite establecer la ecuación de balance para la energía interna:

$$\rho \frac{de_{[int]}}{dt} = -\frac{\partial J_{[Q]}^k}{\partial x^k} - u_{\ell,k} \tau^{\ell k} - \frac{q}{m} \rho u_\ell E^\ell \quad (5.13)$$

El tercer término del lado derecho de la ecuación (5.13) no aparece en la ecuación usual para un fluido simple. Dicho término representa la potencia dispada por el campo eléctrico.

5.1.3. Producción de entropía y ecuaciones constitutivas en el formalismo basado en fuerzas externas.

Utilizando la misma metodología del capítulo 2, la entropía local se supone una funcional independiente del tiempo de la densidad y energía interna, ecuaciones (2.19-2.20). De esta manera, *en ausencia de viscosidad*,

$$\tau^{\ell k} = 0 \quad (5.14)$$

y la ecuación de balance de entropía adquiere la forma:

$$\rho \frac{ds}{dt} + \left(\frac{J_{[Q]}^\ell}{\Theta} \right)_{;\ell} = -\frac{J_{[Q]}^\ell \Theta_{;\ell}}{\Theta^2} - \frac{J_{\ell[E]} E^\ell}{\Theta} \quad (5.15)$$

en donde la densidad de corriente eléctrica está definida por

$$J_{\ell[E]} = \frac{q}{m} \rho u_\ell \quad (5.16)$$

La ecuación (5.15) sugiere identificar sus términos componentes de la manera siguiente,

- La producción de entropía:

$$\sigma = -\frac{J_{[Q]}^k \Theta_{(o);k}}{\Theta_{(o)}^2} - \frac{J_{k[El]} E^k}{\Theta} \quad (5.17)$$

- El flujo de entropía

$$J_{[S]}^k = \frac{J_{[Q]}^k}{\Theta} \quad (5.18)$$

De la ecuación (5.17) se sugiere también que se pueden proponer las ecuaciones constitutivas lineales:

- Para la conducción de calor:

$$J_{[Q]}^k = \frac{-\lambda'}{\Theta_{(o)}^2} \delta^{km} \Theta_{,m} \simeq -\lambda \delta^{km} \Theta_{,m} \quad (5.19)$$

- Para la conducción de corriente eléctrica:

$$J_{k[El]} = \frac{-k}{\Theta_{(o)}} \delta_{km} E^m \simeq -k \delta_{km} E^m \quad (5.20)$$

k es la conductividad eléctrica del fluido simple y (5.20) es simplemente la ley de Ohm.

Esta elección, como las anteriores, garantiza que la producción de entropía es positiva si y sólo si ambos coeficientes de transporte son positivos, lo cual concuerda con el experimento.

5.1.4. Las ecuaciones de la magnetohidrodinámica desde el punto de vista de fuerzas externas.

El sistema de ecuaciones de Navier-Stokes-Fourier, en el régimen de la TIL se obtiene mediante la inserción de las expresiones (5.19) y (5.20) en la ecuación de movimiento (5.6). El gradiente de la presión puede eliminarse de la ecuación (5.6) por medio de la contaparte no relativista de (2.32):

$$p^{;k} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{\Theta} \rho^{;k} + \left(\frac{\partial p}{\partial \Theta} \right)_{\rho} \Theta^{;k} = \left(\frac{1}{\rho k_{\Theta}} \right) \rho^{;k} + \left(\frac{\beta}{k_{\Theta}} \right) \Theta^{;k} \quad (5.21)$$

De esta forma, la ecuación de Navier-Stokes magnetohidrodinámica, en ausencia de viscosidad es:

$$\rho \frac{d u^{\ell}}{d t} = - \left[\left(\frac{1}{\rho k_{\Theta}} \right) \rho^{;k} + \left(\frac{\beta}{k_{\Theta}} \right) \Theta^{;k} \right] + \frac{q}{m} \rho E^{\ell} - k \varepsilon_{k n}^{\ell} E^k B^n \quad (5.22)$$

La ecuación (5.22) es la ecuación de movimiento buscada, en términos de las variables densidad, temperatura y velocidad. El último término de esta ecuación es proporcional al vector de Poynting, bien conocido en la electrodinámica, y que en este caso representa el flujo de ímpetu electromagnético que atraviesa al elemento de volumen del fluido simple. De esta manera, el formalismo incorpora a la ecuación de balance una contribución estrictamente radiativa que es consistente con todas las leyes de la termodinámica.

5.1.5. Ecuación de calor.

La ecuación de calor se encuentra utilizando la ecuación de continuidad (5.2), el balance de energía interna (5.13), y las ecuaciones constitutivas (5.19-5.20). La energía interna se supone una funcional independiente del tiempo de la densidad y la temperatura, de forma que se sostienen las ecuaciones (2.34-2.36). Ahora bien, por medio la ecuación (5.2) y las ecuaciones (2.35-2.36), la ecuación (2.34) adquiere, en el caso magnetohidrodinámico, la forma:

$$\rho \frac{d e_{[int]}}{d \tau} = \left[\left(\frac{\beta}{k_{\Theta(o)}} \right) \Theta + p \right] v_{;k}^k + \rho_{(o)} c_{\rho} \frac{d \Theta}{d t} \quad (5.23)$$

Finalmente, el lado izquierdo de la ecuación (5.23) puede reemplazarse por la expresión (5.13). Reescribiendo los flujos termodinámicos en términos de las

relaciones constitutivas (5.19-5.20), la ecuación final, en el régimen de la TIL, y en ausencia de viscosidad, puede escribirse de la forma siguiente,

$$\left[\left(\frac{\beta}{k_{\Theta}} \right) \Theta \right] v_{;k}^k + \rho c_{\rho} \frac{d\Theta}{dt} = \delta^{km} \frac{\partial^2 (\lambda \Theta)}{\partial x^k \partial x^m} - k \delta_{km} E^m E^k \quad (5.24)$$

que es una ecuación la cual, por deducirse no relativísticamente, posee problemas de causalidad. En el límite no relativista, sin embargo, resulta una buena aproximación. El último término del lado derecho de (5.24) es proporcional a la densidad de energía del campo. Si no se emplea la relación constitutiva de la TIL (5.20), la ecuación de calor tiene la forma más familiar

$$\left[\left(\frac{\beta}{k_{\Theta}} \right) \Theta \right] v_{;k}^k + \rho c_{\rho} \frac{d\Theta}{dt} = \delta^{km} \frac{\partial^2 (\lambda \Theta)}{\partial x^k \partial x^m} - \frac{q}{m} \rho u_{\ell} E^{\ell} \quad (5.25)$$

de forma que el último término se identifica con la potencia disipada eléctricamente en el elemento de volumen.

5.2. La magnetohidrodinámica desde el punto de vista de la curvatura.

5.2.1. La métrica de Kaluza Klein, las ecuaciones de campo, y las ecuaciones dinámicas.

La formulación que se siguió en la sección anterior presenta un par de dificultades serias. a) La ecuación (5.25) es parabólica, por lo que admite velocidades de propagación de señales a velocidades mayores que la de la luz. Esto es inaceptable en el contexto de la teoría de la relatividad. b) Si se pretende formular una teoría en donde los campos electromagnético y gravitacional sean ambos parte de un tensor métrico fundamental, la propuesta de fuerzas externas explicitada en el último término de la ecuación (5.6) resulta insostenible. Además, la relación constitutiva (5.20), aunque ajena al razonamiento, sugiere que el fluido es óhmico, cosa que puede no estar de acuerdo con la realidad. Por otro lado, el uso de relaciones constitutivas más complicadas podría influir en la semipositividad de la producción de entropía.

Para eliminar estas objeciones, se presentan a continuación las ideas principales del trabajo clásico de Th. Kaluza, en búsqueda de un formalismo geométrico capaz de unificar electromagnetismo y gravitación. Kaluza [8] hizo notar que,

tanto las ecuaciones de campo de Maxwell, como la ecuación de movimiento de una partícula cargada eléctricamente son obtenibles al aplicar las ecuaciones de la teoría general de la relatividad a la métrica de 5 x 5,

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} & A_1 \\ g_{12} & g_{22} & g_{23} & g_{24} & A_2 \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & g_{34} & A_3 \\ g_{14} & g_{11} & g_{34} & g_{44} & \frac{\mathcal{E}}{c} \\ A_1 & A_2 & A_3 & \frac{\mathcal{E}}{c} & g_{55} \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

en donde las componentes del tensor métrico $g_{\mu\nu}$ con μ, ν corriendo de 1 al 4 forman parte de una solución conocida de las ecuaciones de Einstein (la métrica de Minkowski, la métrica de Schwarzschild, etc.), y las componentes asociadas a la nueva dimensión *corresponden al potencial magnético expresado en forma de cuadrivector*. En referencia al elemento de línea correspondiente al tensor (5.26) se definen los cuadrivectores de posición y velocidad[8], como,

$$x^\mu = \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \\ ct \\ x^5 \end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$v^\mu = \begin{bmatrix} \frac{dx^1}{d\tau} \\ \frac{dx^2}{d\tau} \\ \frac{dx^3}{d\tau} \\ c \frac{dt}{d\tau} \\ \frac{q}{m} \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

Obsérvese que la quinta componente de este cuadrivector corresponde a la carga específica q/m . Esto es interesante, ya que en cuatro dimensiones la componente temporal en el sistema comóvil es la velocidad de la luz y en 5 dimensiones, para el caso de un electrón la componente es e/m : *ambas son constantes universales*.

Para clarificar estas ideas, considérese la métrica generalizada

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & A_1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & A_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & A_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{\mathcal{E}}{c} \\ A_1 & A_2 & A_3 & \frac{\mathcal{E}}{c} & 0 \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

Los símbolos de Christoffel asociados con ésta métrica, considerando la quinta dimensión, permiten establecer la ecuación aproximada (ver apéndice 6):

$$2\Gamma_{\beta 5}^{\alpha} = \frac{\partial A^{\alpha}}{\partial x^{\beta}} - \frac{\partial A^{\beta}}{\partial x^{\alpha}} = F_{\beta}^{\alpha} \quad (5.30)$$

de forma tal que las componentes del tensor de Faraday:

$$F_{\beta}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & \frac{1}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & \frac{1}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & \frac{1}{c}E_3 \\ -\frac{1}{c}E_1 & -\frac{1}{c}E_2 & -\frac{1}{c}E_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

pueden identificarse como los símbolos de Cristoffel asociados a la métrica generalizada. Además, la identidad

$$\left(\Gamma_{\beta\lambda}^{\alpha} + \Gamma_{\lambda\alpha}^{\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\lambda} \right)_{,\mu} = \Gamma_{\mu\beta}^{\lambda,\alpha} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\alpha,\beta} + \Gamma_{\mu\alpha}^{\beta,\lambda} \quad (5.32)$$

corresponde a las ecuaciones de Maxwell sin fuentes:

$$F^{\lambda,\alpha\beta} + F^{\alpha,\beta\lambda} + F^{\beta,\lambda\alpha} = 0 \quad (5.33)$$

Las dos ecuaciones de Maxwell restantes pueden obtenerse por medio de la ecuación de campo de Einstein introducida en la sección 3.1 de la tesis (ecuación (3.1)), y considerando que el cuadvivector de densidad de corriente eléctrica está relacionado con las nuevas componentes del tensor de esfuerzos, esto es:

$$J_{[El]}^{\alpha} = T^{5\alpha} = T^{\alpha 5} \quad (5.34)$$

Para finalizar esta subsección, hay que hacer notar que la ecuación de movimiento de la geodésica

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{dx^{\mu}}{ds} \frac{dx^{\nu}}{ds} = 0 \quad (5.35)$$

se reduce, para cargas específicas pequeñas, y efectos de dilatación del tiempo despreciables, a la ecuación de movimiento de Lorentz para cargas puntuales:

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{dt^2} = \frac{q}{m} \left[E^{\ell} + \varepsilon_{kn}^{\ell} u^k B^n \right] \quad (5.36)$$

Para obtener (5.36) es necesario calcular los símbolos de Christoffel bajo la métrica (5.29), lo cual se muestra en el apéndice 6 de esta tesis.

En todos sus cálculos, Kaluza utiliza la *condición cilíndrica*:

$$\frac{\partial}{\partial x^5} = 0 \quad (5.37)$$

la cual se asocia con una simetría análoga a la que se presenta en el caso de situaciones de independencia de la coordenada angular en el sistema cilíndrico de coordenadas, cuando existe simetría azimutal. Kaluza propone una simetría de este tipo en el espacio de 5 dimensiones. Hay que resaltar que la justificación de la ecuación (5.37) descansa en el hecho de que conduce en forma limpia a las ecuaciones del campo electromagnético.

5.2.2. La magnetohidrodinámica en relatividad general. Implicaciones.

El punto a tratar ahora es la reconstrucción del esquema de Meixner y Prigogine en el espacio-tiempo de 5 dimensiones correspondiente a la métrica (5.26). ¿Qué modificación habría que hacer a las ecuaciones establecidas en el capítulo 2 de esta tesis? La respuesta que parece más correcta, a juicio del autor, es que *formalmente ninguna modificación es necesaria*. Basta utilizar las definiciones y aproximaciones propuestas por Kaluza, y hacer correr los índices de las ecuaciones (2.1-2.22) desde el 1 hasta el 5 para obtener la producción de entropía, incluyendo campos electromagnéticos.

Para ilustrar esta idea desarrollamos la producción de entropía (2.22) en el espacio de 5 dimensiones y la comparamos con la expresión (5.17). De esta forma, considerando la quinta componente del tensor métrico y la definición de derivada covariante, el último término de la ecuación (2.22) toma la forma,

$$\frac{\Xi^{\mu\nu} v_{\mu;\nu}}{\Theta_{(o)}} = \frac{\Xi^{\mu\nu}}{\Theta_{(o)}} \frac{\partial v_{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} v_{\alpha} \frac{\Xi^{\mu\nu}}{\Theta_{(o)}} \quad (5.38)$$

donde los símbolos de Christoffel no nulos están determinados por la ecuación (5.30). De esta manera, la producción de entropía es:

$$\sigma = -\frac{J_{[Q]}^{\nu} \Theta_{(o);\nu}}{\Theta_{(o)}^2} - \frac{\Xi^{\mu\nu}}{\Theta_{(o)}} \frac{\partial v_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} v_{\alpha} \frac{\Xi^{\mu\nu}}{\Theta_{(o)}} \quad (5.39)$$

Por último, intentándose obtener una ecuación constitutiva del tipo (5.20), se hace notar que en ausencia de viscosidad y de campos magnéticos en tres dimensiones, el último término de la ecuación (5.39) se reduce a

$$\sigma_{[El]} = -\Gamma_{44}^{\alpha} v_{\alpha} \frac{\Xi^{44}}{\Theta_{(o)}} - 2\Gamma_{45}^{\alpha} v_{\alpha} \frac{\Xi^{45}}{\Theta_{(o)}} \quad (5.40)$$

pero, de acuerdo con las ecuaciones (5.30)-(5.31), el último término de la expresión (5.40) corresponde al producto escalar entre los vectores de velocidad y campo eléctrico. De forma que, asignando,

$$\Xi^{45} = \frac{1}{2}\rho v^5 = \frac{1}{2}\rho \frac{q}{m} \quad (5.41)$$

se tiene que,

$$-2\Gamma_{45}^{\alpha} v_{\alpha} \frac{\Xi^{45}}{\Theta_{(o)}} = -\frac{J_{k[El]} E^k}{\Theta} \quad (5.42)$$

Esto muestra claramente que la producción de entropía obtenida mediante el uso de fuerzas externas es un caso límite de un formalismo más profundo, fundamentado en la teoría general de la relatividad en el marco de un espacio-tiempo de 5 dimensiones. Aunque la asignación (5.41) puede parecer arbitraria, la libertad que otorga al formalismo la inclusión de la nueva dimensión permite interpretar a la relación mencionada como una ecuación constitutiva que relaciona la nueva componente del tensor viscoso con la quinta componente del vector de velocidad generalizado.

5.3. Conclusiones del capítulo 5.

En este capítulo se han discutido dos formalismos de los cuales se han establecido las ecuaciones relativistas de Navier-Stokes-Fourier en presencia de campos electromagnéticos, garantizándose una producción de entropía semidefinida positiva. En ambos casos ha quedado claro que la hipótesis de isothermicidad del fluido por analizar resulta innecesaria si se sigue el esquema de Meixner y Prigogine. También se ha mostrado que el espacio-tiempo de cinco dimensiones propuesto por Kaluza[8]-[9] es completamente compatible con las hipótesis y métodos de la termodinámica de procesos irreversibles. De esta forma, se ha propuesto por vez primera una construcción de la producción de entropía, ecuación (5.39) que incluye

los efectos disipativos asociados a las interacciones electromagnéticas utilizando las derivadas covariantes inherentes al espacio-tiempo pentadimensional.

Las ideas expuestas en este capítulo abren nuevas perspectivas en el estudio de fluidos astrofísicos, las cuales pueden sintetizarse en las siguientes líneas:

- Generalización de la teoría cinética relativista expuesta en el capítulo 4 por medio de una matriz de Lorentz pentadimensional adecuada. Esto constituye, a juicio del autor, un enfoque novedoso en el estudio de plasmas.
- Establecimiento de un formalismo análogo al mostrado en el capítulo 3 aplicable a problemas cosmológicos. Si bien cosmologías tipo Kaluza-Klein han sido trabajadas desde hace 20 años, el tratamiento de la segunda ley de la termodinámica a nivel fenomenológico ha sido hasta ahora ignorado.
- Aplicación del esquema fenomenológico a problemas abiertos tales como la abundancia de materia oscura en el Universo, involucrando efectos geométricos de la presencia de campos y sistemas multicomponentes en donde los efectos cuánticos resultan relevantes. Los resultados de este tipo de estudios pueden modificar, en algunos aspectos, la forma en que actualmente se visualiza al Universo.

References

- [1] A. Sandoval-Villalbazo and L.S. García-Colín, *Physica A*, **234**, 358-370 (1996).
- [2] S.R. de Groot and P. Mazur, *Non-Equilibrium Thermodynamics* (Dover Publications, Toronto, Ontario, 1984).
- [3] Eckart, *Phys. Rev.* 58 (1940) 919-928.
- [4] W. Israel, *Ann. Phys.* 100, (1976) 310, y referencias contenidas en él.
- [5] W. Israel, *J. Non-Equilib. Thermodyn.* 11, (1986) 295.
- [6] H. Stephani, *General Relativity* 2nd. Ed., (Cambridge University Press, New York, 1994).
- [7] S. Fujita, *Introduction to Non-Equilibrium Quantum Statistical Mechanics*, Saunders, Philadelphia-London, 1966.

- [8] Th. Kaluza, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1921, p.966
- [9] Appelquist, Chodos and Freund Eds., Modern Kaluza-Klein Theories, Addison-Wesley, 1987.
- [10] Sci. Am. Jan, 1999.

. Objetos matemáticos básicos en la métrica de Schwarzschild

En este apéndice se obtienen objetos matemáticos de interés para esta tesis. Inicialmente se introduce el tensor métrico de forma explícita, de forma tal que es posible aprovechar las capacidades simbólicas de Mathematica en el cálculo de los símbolos de Christoffel, el tensor de Ricci, el escalar de curvatura y el tensor de Einstein. Los procedimientos aquí incluidos son "caseros" y fueron elaborados por el autor de este trabajo.

I. Introducción del tensor fundamental en la métrica de Schwarzschild

■ Tensor métrico covariante

$$\begin{aligned} g_{cov}[i_, j_] &= 0; \\ g_{cov}[4, 4] &:= 1 - \frac{2GM}{c^2 x[1]}; \\ g_{cov}[1, 1] &:= -\frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 x[1]}}; \\ g_{cov}[2, 2] &:= -x[1]^2; \\ g_{cov}[3, 3] &:= -(x[1] \sin[x[2]])^2; \end{aligned}$$

Las componentes temporales se asocian con el índice 4.

■ Tensor métrico contravariante

$$\begin{aligned} g_{con}[i_, j_] &= 0; \\ g_{con}[4, 4] &:= \frac{1}{g_{cov}[4, 4]}; \\ g_{con}[1, 1] &:= \frac{1}{g_{cov}[1, 1]}; \\ g_{con}[2, 2] &:= \frac{1}{g_{cov}[2, 2]}; \\ g_{con}[3, 3] &:= \frac{1}{g_{cov}[3, 3]}; \end{aligned}$$

- Definición del cuadvivector de posición (coordenadas esféricas)

```
x = {r, th, phi, ct}
```

```
{r, th, phi, ct}
```

```
x[[4]] := ct;  
x[[1]] := r;  
x[[2]] := th;  
x[[3]] := phi;
```

II. Manejo de los símbolos de Christoffel en esta métrica

- Definición de los símbolos de Christoffel de primera y segunda especie

$$\text{Christoffel1}[k_, l_, i_] := \frac{1}{2} (\partial_x[[l]] \text{gcov}[i, k] + \partial_x[[k]] \text{gcov}[i, l] - \partial_x[[i]] \text{gcov}[k, l])$$

$$\text{Christoffel2}[i_, k_, l_] := \sum_{n=1}^4 \text{gcon}[i, n] \text{Christoffel1}[k, l, n]$$

- Forma explícita de los símbolos de Christoffel de primera especie

```
Do[{c2 = Simplify[Christoffel1[i, j, k]]; If[c2 == 0, Null,
  Print[i, j, k, " ", c2], Print[i, j, k, " ", c2]}],
  {i, 1, 4, 1}, {j, 1, 4, 1}, {k, 1, 4, 1}]
```

$$111 \quad \frac{c^2 GM}{(-2 GM + c^2 r)^2}$$

$$122 \quad -r$$

$$133 \quad -r \sin[\text{th}]^2$$

$$144 \quad \frac{GM}{c^2 r^2}$$

$$212 \quad -r$$

$$221 \quad r$$

$$233 \quad -r^2 \cos[\text{th}] \sin[\text{th}]$$

$$313 \quad -r \sin[\text{th}]^2$$

$$323 \quad -r^2 \cos[\text{th}] \sin[\text{th}]$$

$$331 \quad r \sin[\text{th}]^2$$

$$332 \quad r^2 \cos[\text{th}] \sin[\text{th}]$$

$$414 \quad \frac{GM}{c^2 r^2}$$

$$441 \quad -\frac{GM}{c^2 r^2}$$

- Forma explícita de los símbolos de Christoffel de segunda especie

El primer valor corresponde al índice superior

```

Do[{c6 = Simplify[Christoffel2[i, j, k]];
  If[c6 == 0, Null, Print[i, j, k, " ", c6],
    Print[i, j, k, " ", c6]], {i, 1, 4, 1},
  {j, 1, 4, 1}, {k, 1, 4, 1}]

```

111 $\frac{GM}{2GMr - c^2 r^2}$

122 $\frac{2GM}{c^2} - r$

133 $\left(-1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) r \sin[\text{th}]^2$

144 $\frac{GM(-2GM + c^2 r)}{c^4 r^3}$

212 $\frac{1}{r}$

221 $\frac{1}{r}$

233 $-\cos[\text{th}] \sin[\text{th}]$

313 $\frac{1}{r}$

323 $\cot[\text{th}]$

331 $\frac{1}{r}$

332 $\cot[\text{th}]$

414 $\frac{GM}{-2GMr + c^2 r^2}$

441 $\frac{GM}{2GMr + c^2 r^2}$

III. Definición del tensor de Ricci

$$\text{Ricci2}[m_, q_] := \sum_{\substack{s=1 \\ \Delta s=1}}^4 \partial_x[s.] \text{Christoffel2}[s, .m, .q] - \sum_{\substack{s=1 \\ \Delta s=1}}^4 \partial_x[q.] \text{Christoffel2}[s, .m, .s] +$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \Delta n=1}}^4 \sum_{\substack{s=1 \\ \Delta s=1}}^4 \text{Christoffel2}[s, .n, .s] \text{Christoffel2}[n, .m, .q] -$$

$$\sum_{\substack{n=1 \\ \Delta n=1}}^4 \sum_{\substack{s=1 \\ \Delta s=1}}^4 \text{Christoffel2}[s, n, q] \text{Christoffel2}[n, m, s]$$

■ Despliegue del tensor de Ricci

```
Do[{Ri = Simplify[Ricci2[i, j]];
  Print["R ", i, "{low} ", j, "{low} ", " ", Ri];
  Print[" "], {i, 1, 4}, {j, 1, 4}]
```

R 1{low} 1{low} 0

R 1{low} 2{low} 0

R 1{low} 3{low} 0

R 1{low} 4{low} 0

R 2{low} 1{low} 0

R 2{low} 2{low} 0

R 2{low} 3{low} 0

R 2{low} 4{low} 0

R 3{low} 1{low} 0

R 3{low} 2{low} 0

R 3{low} 3{low} 0

R 3{low} 4{low} 0

R 4{low} 1{low} 0

R 4{low} 2{low} 0

```
R 4{low} 3{low} 0
```

```
R 4{low} 4{low} 0
```

Aquí se ha realizado, por medio del paquete, un cálculo que muestra que el tensor de Ricci se anula con esta métrica

IV. Cálculo del escalar de Curvatura

$$R = \text{Simplify}\left[\sum_{a=1}^4 \sum_{n=1}^4 g_{con}[a, n] \text{Ricci2}[a, n]\right]$$

```
0
```

Este resultado es conocido para las ecuaciones de campo con tensor de esfuerzos nulo

V. Cálculo del tensor de Einstein

```
EinsCov[m_, n_] := Simplify[Ricci2[m, n]] -  $\frac{1}{2}$  Simplify[R] * gcov[m, n];
```

```
Do[Do[{Eins = Simplify[EinsCov[i, j]]; If[Eins == 0, Null,
  Print[i, "{low} ", j, "{low} ", " ", Eins],
  Print["G ", i, "{low} ", j, "{low} ", " ", Eins]}],
  {i, 1, 4}], {j, 1, 4}]
```

Esta instrucción no despliega salida alguna debido a que el tensor de Einstein se anula con el tensor métrico propuesto.

Cálculo de derivadas covariantes.

Espacio de Minkowsky.
Coordenadas cilíndricas.

Uso de coordenadas generalizadas, componentes tensoriales y componentes físicas.

Numerosas ecuaciones que aparecen en los capítulos 2 al 5 incluyen el uso de derivadas covariantes. Este cálculo es necesario calcular estos objetos matemáticos en términos de métricas y sistemas coordenados específicos, para que las ecuaciones obtenidas en estos capítulos puedan ser trabajadas de manera explícita. A continuación se presenta un ejemplo que muestra este tipo de cálculo.

■ Símbolos de Christoffel de segunda especie.

```
Clear[gup, gdown, coordinate, v, vt]
```

$$\text{AffineConnection}[i_, j_, k_] := \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\text{Length}[\text{coordinate}]} \text{gup}[i, m] (\partial_{\text{coordinate}[j]} \text{gdown}[m, k] + \partial_{\text{coordinate}[k]} \text{gdown}[m, j] - \partial_{\text{coordinate}[m]} \text{gdown}[j, k])$$

■ Definición de derivada covariante (x representa al tensor contravariante de primer rango a derivar). La salida corresponde a las componentes tensoriales.

$$\text{DCovariant}[x_, i_, j_] := \partial_{\text{coordinate}[j]} x[[i]] + \sum_{b=1}^{\text{Length}[\text{coordinate}]} \text{AffineConnection}[i, b, j] x[[b]]$$

■ Sistema de coordenadas (cilíndrico)

```
coordinate = {r, theta, z, ct};
```

■ Componentes tensoriales de la velocidad (contravariante).

$$v := \left\{ \frac{Vr[r, \theta, z, ct]}{\sqrt{-g_{down}[1, 1]}}, \frac{Vth[r, \theta, z, ct]}{\sqrt{-g_{down}[2, 2]}}, \frac{Vz[r, \theta, z, ct]}{\sqrt{-g_{down}[3, 3]}}, \frac{Vct[r, \theta, z, ct]}{\sqrt{g_{down}[4, 4]}} \right\};$$

$v[[3]$

$$\frac{Vz[r, \theta, z, ct]}{\sqrt{-g_{down}[3, 3]}}$$

■ Coeficientes métricos (coordenadas cilíndricas)

```
gdown[1, 1] = -1;
gdown[2, 2] = -coordinate[[1]]^2;
gdown[3, 3] = -1;
gdown[4, 4] = 1;
gdown[i_, j_] = 0;
gup[1, 1] = -1;
gup[2, 2] = -1/coordinate[[1]]^2;
gup[3, 3] = -1;
gup[4, 4] = 1;
gup[i_, j_] = 0;
```

■ Divergencia del tensor V (en términos de las componentes físicas del tensor original)

$$\sum_{m=1}^{\text{Length}[\text{coordinate}]} \text{DCovariant}[V, m, m]$$

$$\frac{Vr[r, \theta, z, ct]}{r} + Vct^{(0,0,0,1)}[r, \theta, z, ct] + Vz^{(0,0,1,0)}[r, \theta, z, ct] + \frac{Vth^{(0,1,0,0)}[r, \theta, z, ct]}{\sqrt{r^2}} + Vr^{(1,0,0,0)}[r, \theta, z, ct]$$

[Este es el resultado conocido para la divergencia en coordenadas esféricas. en el límite clásico].

■ **Gradiente del vector V (en términos de las componentes físicas del tensor original). Se genera un tensor mixto de segundo rango.**

```

Do[Do[Print[i, " Up      ", j, " Down "];
  Print["          *"]; Print[nablaV[i_, j_] = Simplify[DCovariant[V, i, j]]];
  Print["#####"];
  {j, 1, Length[coordinate]}],
  {i, 1, Length[coordinate]}]

1 Up      1 Down
  (1,0,0,0)
Vr      [r, theta, z, ct]
#####
1 Up      2 Down
  r Vth[r, theta, z, ct]      (0,1,0,0)
-((-----) + Vr      [r, theta, z, ct]
  2
  Sqrt[r ]
#####
1 Up      3 Down
  (0,0,1,0)
Vr      [r, theta, z, ct]
#####
1 Up      4 Down
  (0,0,0,1)
Vr      [r, theta, z, ct]
#####
2 Up      1 Down
  2      (1,0,0,0)
Sqrt[r ] Vth      [r, theta, z, ct]
-----
  2
  r
#####
2 Up      2 Down
  (0,1,0,0)
Vr[r, theta, z, ct] Vth      [r, theta, z, ct]
----- + -----
  r      2
  Sqrt[r ]
#####
2 Up      3 Down
  (0,0,1,0)
Vth      [r, theta, z, ct]
-----
  2
  Sqrt[r ]
#####
2 Up      4 Down
  (0,0,0,1)
Vth      [r, theta, z, ct]
-----
  2
  Sqrt[r ]

```

```

#####
3 Up 1 Down
  *
  (1,0,0,0)
Vz [r, theta, z, ct]
#####
3 Up 2 Down
  .
  (0,1,0,0)
Vz [r, theta, z, ct]
#####
3 Up 3 Down
  *
  (0,0,1,0)
Vz [r, theta, z, ct]
#####
3 Up 4 Down
  .
  (0,0,0,1)
Vz [r, theta, z, ct]
#####
4 Up 1 Down
  *
  (1,0,0,0)
Vct [r, theta, z, ct]
#####
4 Up 2 Down
  .
  (0,1,0,0)
Vct [r, theta, z, ct]
#####
4 Up 3 Down
  *
  (0,0,1,0)
Vct [r, theta, z, ct]
#####
4 Up 4 Down
  .
  (0,0,0,1)
Vct [r, theta, z, ct]
#####

```

Simplify[DCovariant[V, 2, 4]]

$$\frac{V_{th}^{0,0,0,1} [r, \theta, z, ct]}{\sqrt{r^2}}$$

Apéndice tres

Cálculos Correspondientes a la Métrica Robertson-Walker-Friedman con $e=1$

"Universo cerrado"

En el capítulo 3 de esta tesis se utiliza la métrica Robertson-Walker-Friedman. En este apéndice se establecen las ecuaciones de campo para esta métrica., siguiéndose la metodología tradicional, es decir, se calculan los símbolos de Christoffel y se construyen los tensores de Ricci y Einstein.

■ Introducción de los coeficientes métricos

■ Cuadrivector de posición

$$\mathbf{x} = \{r, \nu, \phi, ct\}$$

$$\{r, \nu, \phi, ct\}$$

■ Tensor covariante

$$g_{cov}[i_, j_] = 0;$$

$$g_{cov}[1, 1] := -\frac{1}{1 - x[[1]]^2} \kappa[ct]^2;$$

$$g_{cov}[2, 2] := -x[[1]]^2 \kappa[ct]^2;$$

$$g_{cov}[3, 3] := -x[[1]]^2 (\sin[x[[2]])^2 \kappa[ct]^2;$$

$$g_{cov}[4, 4] := 1;$$

■ Tensor contravariante

$$\begin{aligned} \text{gcon}[i_, j_] &= 0; \\ \text{gcon}[1, 1] &:= \frac{1}{\text{gcov}[1, 1]}; \\ \text{gcon}[2, 2] &:= \frac{1}{\text{gcov}[2, 2]}; \\ \text{gcon}[3, 3] &:= \frac{1}{\text{gcov}[3, 3]}; \\ \text{gcon}[4, 4] &:= \frac{1}{\text{gcov}[4, 4]}; \end{aligned}$$

■ Símbolos de Christoffel de primera y segunda especie

$$\begin{aligned} \text{Christoffel1}[i_, k_, l_] &:= \frac{1}{2} (\partial_{x[l]} \text{gcov}[i, k] + \partial_{x[k]} \text{gcov}[i, l] - \partial_{x[i]} \text{gcov}[k, l]) \\ \text{Christoffel2}[i_, k_, l_] &:= \sum_{n=1}^4 \text{gcon}[i, n] \text{Christoffel1}[n, k, l] \end{aligned}$$

■ Tensor de Ricci

$$\begin{aligned} \text{Ricci2}[m_, q_] &:= \sum_{\substack{s=1 \\ \Delta s=1}}^4 \partial_{x[s]} \text{Christoffel2}[s, m, q] - \\ &\sum_{\substack{s=1 \\ \Delta s=1}}^4 \partial_{x[q]} \text{Christoffel2}[s, m, s] + \sum_{\substack{n=1 \\ \Delta n=1}}^4 \sum_{\substack{s=1 \\ \Delta s=1}}^4 \text{Christoffel2}[s, n, s] \text{Christoffel2}[n, m, q] - \\ &\sum_{\substack{n=1 \\ \Delta n=1}}^4 \sum_{\substack{s=1 \\ \Delta s=1}}^4 \text{Christoffel2}[s, n, q] \text{Christoffel2}[n, m, s] \end{aligned}$$

■ Despliegue de los objetos

■ Símbolo de Christoffel de primera especie

```
Do[
  {c2 = Simplify[Christoffel1[i, j, k]]; If[c2 == 0, Null, Print[j, k, ",", i, " ", c2];
  Print[" "], Print["["], j, k, ",", i, "]", " ", c2]; Print[" "]}],
  {i, 1, 4, 1}, {j, 1, 4, 1}, {k, 1, 4, 1}]
```

$$[11,1] \quad -\frac{r K[ct]^2}{(-1+r^2)^2}$$

$$[14,1] \quad \frac{K[ct] K'[ct]}{-1+r^2}$$

$$[22,1] \quad r K[ct]^2$$

$$[33,1] \quad r K[ct]^2 \text{Sin}[nu]^2$$

$$[41,1] \quad \frac{K[ct] K'[ct]}{-1+r^2}$$

$$[12,2] \quad -r K[ct]^2$$

$$[21,2] \quad -r K[ct]^2$$

$$[24,2] \quad -r^2 K[ct] K'[ct]$$

$$[33,2] \quad r^2 \text{Cos}[nu] K[ct]^2 \text{Sin}[nu]$$

$$[42,2] \quad -r^2 K[ct] K'[ct]$$

$$[13,3] \quad -r K[ct]^2 \text{Sin}[nu]^2$$

$$[23,3] \quad -r^2 \text{Cos}[nu] K[ct]^2 \text{Sin}[nu]$$

$$[31,3] \quad -r K[ct]^2 \text{Sin}[nu]^2$$

$$[32,3] \quad -r^2 \text{Cos}[nu] K[ct]^2 \text{Sin}[nu]$$

$$[34,3] \quad -r^2 K[ct] \text{Sin}[nu]^2 K'[ct]$$

$$[43,3] \quad -r^2 K[ct] \text{Sin}[nu]^2 K'[ct]$$

$$[11,4] \quad \frac{K[ct] K'[ct]}{1-r^2}$$

$$[22,4] \quad r^2 K[ct] K'[ct]$$

$$[33,4] \quad r^2 K[ct] \text{Sin}[nu]^2 K'[ct]$$

■ Símbolo de Christoffel de segunda especie, RWF, e=1

```
Do[{c6 = Simplify[Christoffel2[i, j, k]]; If[c6 == 0, Null, Print[i, j, k, " ", c6];
  Print[" "], Print[i, "{upp} ", j, "{low} ", k, "{low} ", " ", c6]];
  Print[" "], {i, 1, 4, 1}, {j, 1, 4, 1},
  {k, 1, 4, 1}]
```

$$1(\text{upp}) \ 1(\text{low}) \ 1(\text{low}) \quad \frac{r}{1-r^2}$$

$$1(\text{upp}) \ 1(\text{low}) \ 4(\text{low}) \quad \frac{K'[ct]}{K[ct]}$$

" "

$$1(\text{upp}) \ 3(\text{low}) \ 3(\text{low}) \quad r (-1-r^2) \text{Sin}[nu]^2$$

$$1(\text{upp}) \ 4(\text{low}) \ 1(\text{low}) \quad \frac{K'[ct]}{K[ct]}$$

" "

$$2(\text{upp}) \ 1(\text{low}) \ 2(\text{low}) \quad \frac{1}{r}$$

" "

$$2(\text{upp})\ 2(\text{low})\ 1(\text{low}) \quad \frac{1}{r}$$

" "

$$2(\text{upp})\ 2(\text{low})\ 4(\text{low}) \quad \frac{K'[\text{ct}]}{K[\text{ct}]}$$

" "

$$2(\text{upp})\ 3(\text{low})\ 3(\text{low}) \quad -\text{Cos}[\text{nu}]\ \text{Sin}[\text{nu}]$$

" "

$$2(\text{upp})\ 4(\text{low})\ 2(\text{low}) \quad \frac{K'[\text{ct}]}{K[\text{ct}]}$$

" "

" "

$$3(\text{upp})\ 1(\text{low})\ 3(\text{low}) \quad \frac{1}{r}$$

" "

$$3(\text{upp})\ 2(\text{low})\ 3(\text{low}) \quad \text{Cot}[\text{nu}]$$

$$3(\text{upp})\ 3(\text{low})\ 1(\text{low}) \quad \frac{1}{r}$$

$$3(\text{upp})\ 3(\text{low})\ 2(\text{low}) \quad \text{Cot}[\text{nu}]$$

$$3(\text{upp})\ 3(\text{low})\ 4(\text{low}) \quad \frac{K'[\text{ct}]}{K[\text{ct}]}$$

$$3\{\text{upp}\} 4\{\text{low}\} 3\{\text{low}\} \quad \frac{K'[\text{ct}]}{K[\text{ct}]}$$

$$4\{\text{upp}\} 1\{\text{low}\} 1\{\text{low}\} \quad \frac{K[\text{ct}] K'[\text{ct}]}{1 - r^2}$$

" "

$$4\{\text{upp}\} 2\{\text{low}\} 2\{\text{low}\} \quad r^2 K[\text{ct}] K'[\text{ct}]$$

" "

$$4\{\text{upp}\} 3\{\text{low}\} 3\{\text{low}\} \quad r^2 K[\text{ct}] \text{Sin}[\text{nu}]^2 K'[\text{ct}]$$

" "

■ Tensor de Ricci

```
Do[{Ri = Simplify[Ricci2[i, j]];
  Print["R ", i, "{low} ", j, "{low} ", " ", Ri]; Print[" " ]}, {i, 1, 4},
  {j, 1, 4}]
```

$$R 1\{\text{low}\} 1\{\text{low}\} \quad - \frac{2 + 2 K'[\text{ct}]^2 + K[\text{ct}] K''[\text{ct}]}{-1 + r^2}$$

$$R 1\{\text{low}\} 2\{\text{low}\} \quad 0$$

$$R 1\{\text{low}\} 3\{\text{low}\} \quad 0$$

$$R 1\{\text{low}\} 4\{\text{low}\} \quad 0$$

$$R 2\{\text{low}\} 1\{\text{low}\} \quad 0$$

$$R 2\{\text{low}\} 2\{\text{low}\} \quad r^2 (2 + 2 K'[\text{ct}]^2 + K[\text{ct}] K''[\text{ct}])$$

$$R_{2\{low\}3\{low\}} = 0$$

$$R_{2\{low\}4\{low\}} = 0$$

$$R_{3\{low\}1\{low\}} = 0$$

$$R_{3\{low\}2\{low\}} = 0$$

$$R_{3\{low\}3\{low\}} = r^2 \sin^2[\nu] (2 + 2 K'[ct]^2 + K[ct] K''[ct])$$

$$R_{3\{low\}4\{low\}} = 0$$

$$R_{4\{low\}1\{low\}} = 0$$

$$R_{4\{low\}2\{low\}} = 0$$

$$R_{4\{low\}3\{low\}} = 0$$

$$R_{4\{low\}4\{low\}} = -\frac{3 K''[ct]}{K[ct]}$$

■ Escalar de Curvatura

$$R = \text{Simplify}\left[\sum_{a=1}^4 \sum_{n=1}^4 g_{con}[a, n] Ricci2[a, n]\right]$$

$$= \frac{6 (1 + K'[ct]^2 + K[ct] K''[ct])}{K[ct]^2}$$

■ Tensor de Einstein

$$EinsCov[m_, n_] := \text{Simplify}[Ricci2[m, n]] - \frac{1}{2} \text{Simplify}[R] g_{cov}[m, n];$$

```

Do[Do[{Eins = Simplify[EinsCov[i, j]];
  If[Eins == 0, Null, Print[i, "{low} ", j, "{low} ", " ", Eins],
    Print["G ", i, "{low} ", j, "{low} ", " ", Eins]}], {i, 1, 4}],
{j, 1, 4}]

G 1{low} 1{low}       $\frac{1 + K'[ct]^2 + 2 K[ct] K''[ct]}{-1 + r^2}$ 
G 2{low} 2{low}       $-r^2 (1 + K'[ct]^2 + 2 K[ct] K''[ct])$ 
G 3{low} 3{low}       $-r^2 \text{Sin}[\text{nu}]^2 (1 + K'[ct]^2 + 2 K[ct] K''[ct])$ 
G 4{low} 4{low}       $\frac{3 (1 + K'[ct]^2)}{K[ct]^2}$ 

```

■ Ecuaciones de campo

■ Componente 00

```
eq1 := Simplify[EinsCov[4, 4] == kappa (Ro[ct] c^2)]
```

```
eq1
```

$$\frac{3 (1 + K'[ct]^2)}{K[ct]^2} == c^2 \text{kappa Ro}[ct]$$

```
Simplify[EinsCov[4, 4] K[ct]^2 == kappa (Ro[ct] c^2 K[ct]^2)]
```

$$3 + 3 K'[ct]^2 == c^2 \text{kappa K}[ct]^2 \text{Ro}[ct]$$

■ Componente 11

```
eq2 := Simplify[EinsCov[1, 1] == -kappa Po[ct] gcov[1, 1]]
```

```
eq2
```

$$\frac{1 + \text{kappa K}[ct]^2 \text{Po}[ct] + K'[ct]^2 + 2 K[ct] K''[ct]}{-1 + r^2} == 0$$

■ Componente 22

```
eq3 := Simplify[EinsCov[2, 2] == -kappa Po[ct] gcov[2, 2]]
```

```
eq3
```

$$-r^2 (1 + \text{kappa K}[ct]^2 \text{Po}[ct] + K'[ct]^2 + 2 K[ct] K''[ct]) == 0$$

■ **Componente 33**

```
eq4 := Simplify[EinsCov[3, 3] == -kappa Po[ct] K[ct] gcov[3, 3]]
```

```
eq4
```

```
-r2 Sin[nu]2 (1 + kappa K[ct]3 Po[ct] + K'[ct]2 + 2 K[ct] K'[ct]) == 0
```



Evolución de la temperatura en el esquema relativista de Meixner-Prigogine en la métrica Friedman-Robertson Walker

Las gráficas presentadas en este apéndice son esquemáticas debido a que el valor exacto de los coeficientes de transporte se desconoce. Sin embargo, las propiedades cualitativas de estas gráficas coinciden con propiedades del Universo a gran escala.

■ Geometría cerrada. Presión y conductividad térmica nulas.

■ Evolución del factor de escala

Las ecuaciones (3-4-3.5) del texto pueden integrarse inmediatamente para el caso $p=0$ (Universo de Friedman). Las soluciones, escritas en forma paramétrica, son bien conocidas y corresponden, salvo un factor constante, a las siguientes expresiones:

$$t[Tu_] = Tu - \text{Sin}[Tu]$$

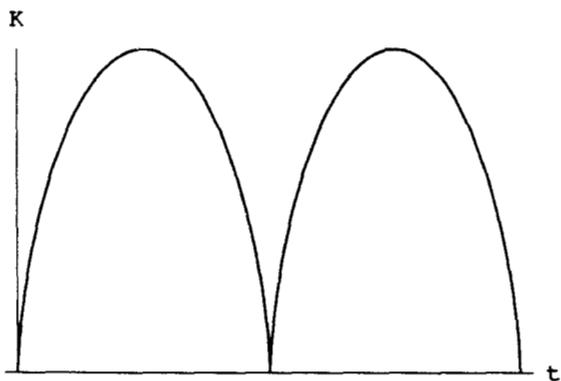
$$Tu - \text{Sin}[Tu]$$

$$K[Tu_] = 1 - \text{Cos}[Tu]$$

$$1 - \text{Cos}[Tu]$$

"Tu" corresponde al llamado <<tiempo universal>> y K es el factor de escala. La gráfica correspondiente a estas ecuaciones se muestra a continuación:

```
graf2 = ParametricPlot[{t[Tu], K[Tu]}, {Tu, 0, 4 π}, PlotRange → {0, 2},
  AxesLabel → {"t", "K"}, Ticks → None]
```



- Graphics -

■ Evolución de la temperatura

La resolución de la ecuación (3.23), haciendo cero presión y conductividad térmica, utilizando al tiempo universal como variable independiente, conduce a:

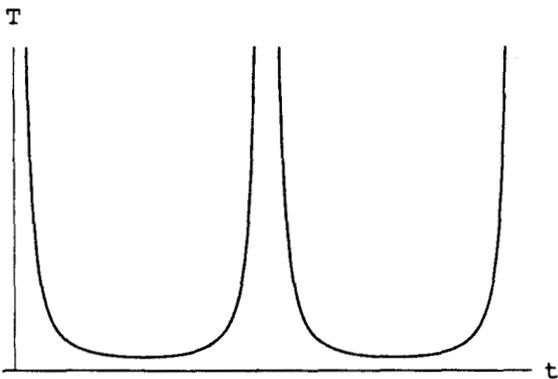
$$T[\text{Tu}_] = \frac{1}{(1 - \text{Cos}[\text{Tu}])^3}$$

$$\frac{1}{(1 - \text{Cos}[\text{Tu}])^3}$$

Esta función está determinada salvo un factor constante asociado a la capacidad calorífica y al proceso de integración.

La gráfica paramétrica correspondiente a la expresión obtenida está dada por:

```
graf1 = ParametricPlot[{t[Tu], T[Tu]}, {Tu, 0, 4 π}, PlotRange → {0, 3},
  AxesLabel → {"t", "T"}, Ticks → None]
```

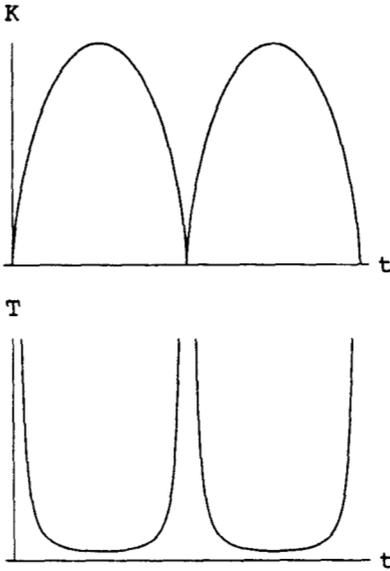


- Graphics -

■ Interpretación de la gráfica para la evolución de la temperatura:

Observemos el siguiente arreglo gráfico de la evolución del factor de escala y la temperatura.

```
Show[GraphicsArray[{{graf2}, {graf1}}]]
```



- GraphicsArray -

Es claro que, cualitativamente, existe un enfriamiento en la fase expansiva del Universo cerrado. Por otro lado, un incremento de la temperatura atribuible al decremento del factor de escala es observado a partir del inicio de la fase de contracción. Por último, la singularidades correspondientes a $K=0$ corresponden a indeterminaciones en la temperatura.

■ **Comportamiento cualitativo de la temperatura con presión nula y transferencia de calor no nula .**

■ **Solución de la ecuación diferencial**

A continuación se integra numéricamente la ecuación (3.23) del texto con $p=0$ y conductividad unitaria. Se utiliza al tiempo escalado como variable independiente.

```
sistema10 = {K[Tu] Th''[Tu] - K'[Tu] Th'[Tu] + K[Tu]^2 Th'[Tu] + 3 K[Tu] K'[Tu] Th[Tu] == 0,
Th[0.001] == 1000000000000, Th'[0.001] == -0.1}

{3 (1 - Cos[Tu]) Sin[Tu] Th[Tu] + (1 - Cos[Tu])^2 Th'[Tu] -
Sin[Tu] Th'[Tu] + (1 - Cos[Tu]) Th''[Tu] == 0, Th[0.001] == 1000000000000,
Th'[0.001] == -0.1}
```

Aunque en el sistema propuesto la condición de frontera sobre la derivada es arbitraria, el signo es completamente compatible con el hecho de que en una expansión en un espacio homogéneo e isotrópico, existe un enfriamiento.

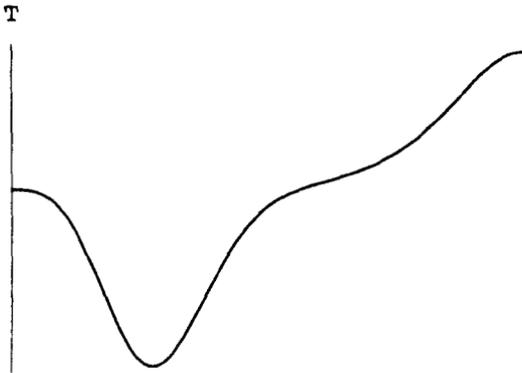
A continuación se resuelve numéricamente la ecuación diferencial.

```
solx1 = NDSolve[sistema10, Th[Tu], {Tu, 0.001, 1.99  $\pi$ }]
{{Th[Tu]  $\rightarrow$  InterpolatingFunction[{{0.001, 6.251769380643689}, .83507187554605 1011,
- (3.477335927732879 1011),
```

■ Gráficas e interpretación de las soluciones

■ Gráfica de la temperatura en términos del "tiempo universal"

```
graf1 = Plot[Th[Tu] /. solx1, {Tu, 0.001, 1.99  $\pi$ }, Ticks  $\rightarrow$  None, AxesLabel  $\rightarrow$  {"t", "T"},
Axes  $\rightarrow$  {None, True}, PlotRange  $\rightarrow$  All]
```

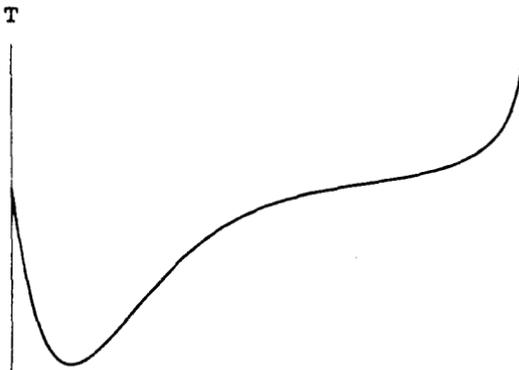


- Graphics -

El incremento de la temperatura posterior al inicio de la contracción es mayor que en el caso de transferencia de calor nula. Esto se asocia a la positividad de la producción de entropía.

■ Gráfica paramétrica en función del tiempo propio

```
graf = ParametricPlot[{t[Tu], Th[Tu] /. solx1[[1]]}, {Tu, 0.001, 1.99  $\pi$ },
PlotRange  $\rightarrow$  All, AxesLabel  $\rightarrow$  {"t", "T"}, Axes  $\rightarrow$  {None, True}, Ticks  $\rightarrow$  None]
```



- Graphics -

Por último, al generarse la gráfica en términos del tiempo propio, se observa una evolución de la temperatura bastante interesante. Primeramente se da un enfriamiento veloz hasta generarse una temperatura mínima, tras lo cual se da un aumento gradual de esta variable. Esto es compatible con la positividad de la producción de entropía. Obsérvese que se genera una indeterminación al acercarnos al momento del "big crunch", lo cual parece bastante razonable.

Debe enfatizarse el hecho de que la aplicación del esquema de Meixner en cosmología está en sus inicios. Más aún, por lo menos hasta donde es conocimiento del autor, sólo este trabajo de tesis y la referencia [5] incluida en el capítulo 3 de la misma hacen uso de este esquema en el estudio de problemas cosmológicos. El hecho de que los resultados obtenidos en este apéndice sean prometedores parece abrir nuevas perspectivas referentes al uso de la termodinámica de procesos irreversibles en cosmología.

Apéndice 5

Forma explícita del flujo de energía en la teoría cinética relativista

Uso de velocidades caóticas

En este apéndice se muestran cálculos que constituyen el desarrollo expresiones (4.32-4.33), que son la base de la teoría cinética relativista descrita en el capítulo 4 de esta tesis. La metodología consiste en introducir la matriz de Lorentz general, ecuaciones (4.26-4.27) y realizar los productos y derivadas indicados en las ecuaciones (4.32-4.33). Los términos obtenidos permiten establecer la forma explícita del flujo de energía correspondiente a la teoría expuesta en el mencionado capítulo.

■ Matriz de Lorentz con velocidad constante orientada arbitrariamente

■ Vector de velocidad hidrodinámica

$$\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$$

$$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

■ Matriz de Lorentz con velocidad constante y dirección arbitraria

$$L = \begin{pmatrix} 1 + \frac{(\gamma-1)(\beta_1 \beta_1)}{\beta \cdot \beta} & \frac{(\gamma-1)(\beta_1 \beta_2)}{\beta \cdot \beta} & \frac{(\gamma-1)(\beta_1 \beta_3)}{\beta \cdot \beta} & \gamma \beta_1 \\ \frac{(\gamma-1)(\beta_2 \beta_1)}{\beta \cdot \beta} & 1 + \frac{(\gamma-1)(\beta_2 \beta_2)}{\beta \cdot \beta} & \frac{(\gamma-1)(\beta_2 \beta_3)}{\beta \cdot \beta} & \gamma \beta_2 \\ \frac{(\gamma-1)(\beta_3 \beta_1)}{\beta \cdot \beta} & \frac{(\gamma-1)(\beta_3 \beta_2)}{\beta \cdot \beta} & 1 + \frac{(\gamma-1)(\beta_3 \beta_3)}{\beta \cdot \beta} & \gamma \beta_3 \\ \gamma \beta_1 & \gamma \beta_2 & \gamma \beta_3 & \gamma \end{pmatrix} // \text{MatrixForm}$$

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{\beta_1^2(-1+\gamma)}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} & \frac{\beta_1 \beta_2(-1+\gamma)}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} & \frac{\beta_1 \beta_3(-1+\gamma)}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} & \beta_1 \gamma \\ \frac{\beta_1 \beta_2(-1+\gamma)}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} & 1 + \frac{\beta_2^2(-1+\gamma)}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} & \frac{\beta_2 \beta_3(-1+\gamma)}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} & \beta_2 \gamma \\ \frac{\beta_1 \beta_3(-1+\gamma)}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} & \frac{\beta_2 \beta_3(-1+\gamma)}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} & 1 + \frac{\beta_3^2(-1+\gamma)}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} & \beta_3 \gamma \\ \beta_1 \gamma & \beta_2 \gamma & \beta_3 \gamma & \gamma \end{pmatrix}$$

■ Componentes de la matriz de transformación

$$\text{Lr}[1, 1] = 1 + \frac{(\gamma - 1)(\beta_1 \beta_1)}{\beta \cdot \beta};$$

$$\text{Lr}[1, 2] = \frac{(\gamma - 1)(\beta_1 \beta_2)}{\beta \cdot \beta};$$

$$\text{Lr}[1, 3] = \frac{(\gamma - 1)(\beta_1 \beta_3)}{\beta \cdot \beta};$$

$$\text{Lr}[1, 4] = \gamma \beta_1;$$

$$\text{Lr}[2, 1] = \frac{(\gamma - 1)(\beta_2 \beta_1)}{\beta \cdot \beta};$$

$$\text{Lr}[2, 2] = 1 + \frac{(\gamma - 1)(\beta_2 \beta_2)}{\beta \cdot \beta};$$

$$\text{Lr}[2, 3] = \frac{(\gamma - 1)(\beta_2 \beta_3)}{\beta \cdot \beta};$$

$$\text{Lr}[2, 4] = \gamma \beta_2;$$

$$\text{Lr}[3, 1] = \frac{(\gamma - 1)(\beta_3 \beta_1)}{\beta \cdot \beta};$$

$$\text{Lr}[3, 2] = \frac{(\gamma - 1)(\beta_3 \beta_2)}{\beta \cdot \beta};$$

$$\text{Lr}[3, 3] = 1 + \frac{(\gamma - 1)(\beta_3 \beta_3)}{\beta \cdot \beta};$$

$$\text{Lr}[3, 4] = \gamma \beta_3;$$

$$\text{Lr}[4, 1] = \gamma \beta_1;$$

$$\text{Lr}[4, 2] = \gamma \beta_2;$$

$$\text{Lr}[4, 3] = \gamma \beta_3;$$

$$\text{Lr}[4, 4] = \gamma;$$

■ Velocidades caóticas (uso de la transformación de Lorentz)

■ Definición del cuadrivector de posición

$$\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, ct\}$$

$$\{x_1, x_2, x_3, ct\}$$

■ **Definición del cuadvivector de velocidad caótica**

k[1] := k1;
 k[2] := k2;
 k[3] := k3;
 k[4] := k4;
 k[5] := k5;

■ **Transformación de Lorentz para las velocidades**

$$v[a_] = \sum_{m=1}^4 Lr[a, m] k[m];$$

Do[Print["Componente ", a, " ", v[a], " ***** "], {a, 1, 4}]

Componente 1 $k1 \left(1 + \frac{\beta1^2 (-1 + \gamma)}{\beta1^2 + \beta2^2 + \beta3^2} \right) + \frac{k2 \beta1 \beta2 (-1 + \gamma)}{\beta1^2 + \beta2^2 + \beta3^2} + \frac{k3 \beta1 \beta3 (-1 + \gamma)}{\beta1^2 + \beta2^2 + \beta3^2} + k4 \beta1 \gamma$ *****

Componente 2 $k2 \left(1 + \frac{\beta2^2 (-1 + \gamma)}{\beta1^2 + \beta2^2 + \beta3^2} \right) + \frac{k1 \beta1 \beta2 (-1 + \gamma)}{\beta1^2 + \beta2^2 + \beta3^2} + \frac{k3 \beta2 \beta3 (-1 + \gamma)}{\beta1^2 + \beta2^2 + \beta3^2} + k4 \beta2 \gamma$ *****

Componente 3 $k3 \left(1 + \frac{\beta3^2 (-1 + \gamma)}{\beta1^2 + \beta2^2 + \beta3^2} \right) + \frac{k1 \beta1 \beta3 (-1 + \gamma)}{\beta1^2 + \beta2^2 + \beta3^2} + \frac{k2 \beta2 \beta3 (-1 + \gamma)}{\beta1^2 + \beta2^2 + \beta3^2} + k4 \beta3 \gamma$ *****

Componente 4 $k4 \gamma + k1 \beta1 \gamma + k2 \beta2 \gamma + k3 \beta3 \gamma$ *****

■ **Obtención del flujo de energía**

■ **Tensor de esfuerzos**

$$T[a_, b_] := Ro v[a] v[b]$$

Con esta definición, y las ecuaciones de transformación, el tensor de esfuerzos queda en términos de las velocidades caóticas.

A continuación se analizan algunas componentes del tensor obtenido.

■ Densidad de energía

DeInt = Expand[T[4, 4]]

$$k^4 \text{ Ro } \gamma^2 + 2 k_1 k_4 \text{ Ro } \beta_1 \gamma^2 + k_1^2 \text{ Ro } \beta_1^2 \gamma^2 + 2 k_2 k_4 \text{ Ro } \beta_2 \gamma^2 + 2 k_1 k_2 \text{ Ro } \beta_1 \beta_2 \gamma^2 + k_2^2 \text{ Ro } \beta_2^2 \gamma^2 + \\ 2 k_3 k_4 \text{ Ro } \beta_3 \gamma^2 + 2 k_1 k_3 \text{ Ro } \beta_1 \beta_3 \gamma^2 + 2 k_2 k_3 \text{ Ro } \beta_2 \beta_3 \gamma^2 + k_3^2 \text{ Ro } \beta_3^2 \gamma^2$$

Obsérvese que sólo el primer término es independiente de β con $\gamma=1$, lo cual permite escribir la ecuación (4.36) de la tesis.

■ Flujo de energía por componente

Do[Print[" Componente ", k, " ", Expand[T[4, k]], " * "], {k, 1, 3}]**

Componente 1

$$k_1 k_4 \text{ Ro } \gamma + k_1^2 \text{ Ro } \beta_1 \gamma + k_1 k_2 \text{ Ro } \beta_2 \gamma + k_1 k_3 \text{ Ro } \beta_3 \gamma - \frac{k_1 k_4 \text{ Ro } \beta_1^2 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \frac{k_1^2 \text{ Ro } \beta_1^3 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \\ \frac{k_2 k_4 \text{ Ro } \beta_1 \beta_2 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \frac{2 k_1 k_2 \text{ Ro } \beta_1^2 \beta_2 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \frac{k_2^2 \text{ Ro } \beta_1 \beta_2^2 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \frac{k_3 k_4 \text{ Ro } \beta_1 \beta_3 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \frac{2 k_1 k_3 \text{ Ro } \beta_1^2 \beta_3 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \\ \frac{2 k_2 k_3 \text{ Ro } \beta_1 \beta_2 \beta_3 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \frac{k_3^2 \text{ Ro } \beta_1 \beta_3^2 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + k_4^2 \text{ Ro } \beta_1 \gamma^2 + k_1 k_4 \text{ Ro } \beta_1^2 \gamma^2 + k_2 k_4 \text{ Ro } \beta_1 \beta_2 \gamma^2 + \\ k_3 k_4 \text{ Ro } \beta_1 \beta_3 \gamma^2 + \frac{k_1 k_4 \text{ Ro } \beta_1^2 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{k_1^2 \text{ Ro } \beta_1^3 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{k_2 k_4 \text{ Ro } \beta_1 \beta_2 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{2 k_1 k_2 \text{ Ro } \beta_1^2 \beta_2 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \\ \frac{k_2^2 \text{ Ro } \beta_1 \beta_2^2 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{k_3 k_4 \text{ Ro } \beta_1 \beta_3 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{2 k_1 k_3 \text{ Ro } \beta_1^2 \beta_3 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{2 k_2 k_3 \text{ Ro } \beta_1 \beta_2 \beta_3 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{k_3^2 \text{ Ro } \beta_1 \beta_3^2 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}$$

Componente 2

$$k_2 k_4 \text{ Ro } \gamma + k_1 k_2 \text{ Ro } \beta_1 \gamma + k_2^2 \text{ Ro } \beta_2 \gamma + k_2 k_3 \text{ Ro } \beta_3 \gamma - \frac{k_1 k_4 \text{ Ro } \beta_1 \beta_2 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \frac{k_1^2 \text{ Ro } \beta_1^2 \beta_2 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \\ \frac{k_2 k_4 \text{ Ro } \beta_2^2 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \frac{2 k_1 k_2 \text{ Ro } \beta_1 \beta_2^2 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \frac{k_2^2 \text{ Ro } \beta_2^3 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \frac{k_3 k_4 \text{ Ro } \beta_2 \beta_3 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \frac{2 k_1 k_3 \text{ Ro } \beta_1 \beta_2 \beta_3 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \\ \frac{2 k_2 k_3 \text{ Ro } \beta_2^2 \beta_3 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \frac{k_3^2 \text{ Ro } \beta_2 \beta_3^2 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + k_4^2 \text{ Ro } \beta_2 \gamma^2 + k_1 k_4 \text{ Ro } \beta_1 \beta_2 \gamma^2 + k_2 k_4 \text{ Ro } \beta_2^2 \gamma^2 + \\ k_3 k_4 \text{ Ro } \beta_2 \beta_3 \gamma^2 + \frac{k_1 k_4 \text{ Ro } \beta_1 \beta_2 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{k_1^2 \text{ Ro } \beta_1^2 \beta_2 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{k_2 k_4 \text{ Ro } \beta_2^2 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{2 k_1 k_2 \text{ Ro } \beta_1 \beta_2^2 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \\ \frac{k_2^2 \text{ Ro } \beta_2^3 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{k_3 k_4 \text{ Ro } \beta_2 \beta_3 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{2 k_1 k_3 \text{ Ro } \beta_1 \beta_2 \beta_3 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{2 k_2 k_3 \text{ Ro } \beta_2^2 \beta_3 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{k_3^2 \text{ Ro } \beta_2 \beta_3^2 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Componente 3} \quad & k_3 k_4 R_o \gamma + k_1 k_3 R_o \beta_1 \gamma + k_2 k_3 R_o \beta_2 \gamma + k_3^2 R_o \beta_3 \gamma - \frac{k_1 k_4 R_o \beta_1 \beta_3 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \frac{k_1^2 R_o \beta_1^2 \beta_3 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \\
 & \frac{k_2 k_4 R_o \beta_2 \beta_3 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \frac{2 k_1 k_2 R_o \beta_1 \beta_2 \beta_3 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \frac{k_2^2 R_o \beta_2^2 \beta_3 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \frac{k_3 k_4 R_o \beta_3^2 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \frac{2 k_1 k_3 R_o \beta_1 \beta_3^2 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \\
 & \frac{2 k_2 k_3 R_o \beta_2 \beta_3^2 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} - \frac{k_3^2 R_o \beta_3^3 \gamma}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + k_4^2 R_o \beta_3 \gamma^2 + k_1 k_4 R_o \beta_1 \beta_3 \gamma^2 + k_2 k_4 R_o \beta_2 \beta_3 \gamma^2 + \\
 & k_3 k_4 R_o \beta_3^2 \gamma^2 + \frac{k_1 k_4 R_o \beta_1 \beta_3 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{k_1^2 R_o \beta_1^2 \beta_3 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{k_2 k_4 R_o \beta_2 \beta_3 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{2 k_1 k_2 R_o \beta_1 \beta_2 \beta_3 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \\
 & \frac{k_2^2 R_o \beta_2^2 \beta_3 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{k_3 k_4 R_o \beta_3^2 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{2 k_1 k_3 R_o \beta_1 \beta_3^2 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{2 k_2 k_3 R_o \beta_2 \beta_3^2 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} + \frac{k_3^2 R_o \beta_3^3 \gamma^2}{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2} \\
 & \dots
 \end{aligned}$$

Una vez más, sólo los primeros términos de cada componente son independientes de β , de forma que haciendo $\gamma=1$, se obtiene la ecuación (4.37) de la tesis.