



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

**Propiedades asintóticas de las matrices circulantes y de
Toeplitz**

Tesis que presenta:

Alejandro González Alba

Para obtener el grado de:

Maestro en ciencias (Matemáticas)

Asesores:

Dr. Roberto Quezada Batalla
Dr. Jorge R. Bolaños Servín

Jurado:

Dr. Jorge R. Bolaños Servín
Dr. Egor Maximenko
Dr. Luis Verde Star

México, 18 de mayo del 2018



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00177

Matrícula: 2152800918

Propiedades asintóticas de las matrices circulantes y de Toeplitz

En la Ciudad de México, se presentaron a las 17:00 horas del día 18 del mes de mayo del año 2018 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. LUIS VERDE STAR
DR. EGOR MAXIMENKO
DR. JORGE RICARDO BOLAÑOS SERVIN

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: ALEJANDRO GONZALEZ ALBA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



ALEJANDRO GONZALEZ ALBA
ALUMNO

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. LUIS VERDE STAR

VOCAL

DR. EGOR MAXIMENKO

SECRETARIO

DR. JORGE RICARDO BOLAÑOS SERVIN

Agradecimientos

Agradezco a mis padres por su incondicional apoyo, su guía y enseñanza que me han permitido llegar cada vez más lejos. Este trabajo es suyo.

De igual manera agradezco al Dr. Roberto Quezada por su paciencia, dirección y confianza. Al Dr. Jorge Bolaños por su ayuda en todo momento, por las lecciones, el tiempo de práctica, aprendí tanto, gracias por su amistad. Al Dr. Julio César García por su apoyo y grandes enseñanzas. Al Dr. Luis Verde y al Dr. Egor Maximenko por su revisión y sugerencias a este trabajo.

Gracias Almita por tu paciencia y apoyo en los momentos difíciles de este proyecto, por ser compañera y cómplice. Te quiero.

“Los decimales no calculados de π duermen en un misterioso reino abstracto, donde gozan de una débil realidad. Hasta que no son calculados no se convierten en algo plenamente real, e incluso entonces su realidad es mera cuestión de grado.”

William James

Índice general

Resumen	7
Introducción	9
1. Matrices asintóticamente equivalentes	11
1.1. Preliminares	11
1.2. Norma de matrices	16
2. El álgebra de von Neumann de las matrices circulantes	39
2.1. El álgebra circulante	43
3. Distribución asintótica de los valores propios de una sucesión de matrices de Toeplitz	47
3.1. Matrices de Toeplitz	47
3.2. Matrices de Toeplitz de banda	53
3.3. Matrices de Toeplitz de la clase de Wiener	58
4. Operadores completamente positivos de Toeplitz	67
4.1. Preliminares	67
4.2. Operadores completamente positivos de Toeplitz asociados a una función de la clase de Wiener	69
Conclusiones y perspectivas	85
A. Notación de Dirac	87
B. Teorema de Riemann-Lebesgue	91
C. El álgebra de Wiener	99

Resumen

En este trabajo desarrollamos algunas herramientas útiles para estudiar la distribución asintótica de los valores propios de sucesiones de matrices y los aplicamos a sucesiones de matrices de Toeplitz. Introducimos las nociones de operador completamente positivo de Toeplitz y circulante, asimismo estudiamos algunas relaciones entre sus espectros.

Introducción

En este trabajo nos enfocamos en las clases de matrices de Toeplitz y circulantes. Una matriz es de Toeplitz (en honor a Otto Toeplitz), si los elementos de sus diagonales son constantes. Por otro lado, una matriz circulante es aquella en donde cada renglón es permutación cíclica hacia la derecha relativa al renglón precedente. Las matrices circulantes forman una subclase de las matrices de Toeplitz. La teoría de matrices (operadores) de Toeplitz y los símbolos que los generan es un tema vigente en matemáticas [2]. Las matrices de Toeplitz y circulantes cuentan con una variedad de aplicaciones que van desde la mecánica cuántica [1, 12], procesos estocásticos [10], procesamiento de imágenes [11] hasta la modelación física [8].

Las matrices circulantes son “sencillas” pues forman un álgebra conmutativa. Se diagonalizan respecto a la misma base, además los valores propios son conocidos explícitamente. Por otra parte cada sucesión de matrices de Toeplitz tiene asociada una sucesión de matrices circulantes, de manera que ambas sucesiones son asintóticamente equivalentes. En virtud de ello, las matrices circulantes se pueden usar para estudiar propiedades asintóticas de sucesiones de matrices de Toeplitz.

En el primer capítulo de este trabajo recordamos las definiciones de la norma de operadores y de la norma Hilbert-Schmidt de una matriz. Se define el concepto de equivalencia asintótica de sucesiones de matrices y se demuestran los teoremas de la distribución asintótica de los valores propios de matrices, ver [9].

En el segundo capítulo se introducen las matrices circulantes, algunas de sus propiedades y se da una caracterización de ellas como el álgebra de von Neumann de ciertas proyecciones.

En el tercer capítulo, dada una función en el álgebra de Wiener se construyen dos sucesiones de matrices de Toeplitz y circulantes respectivamente, se prueba la equivalencia asintótica entre ellas para obtener el primer teorema límite de Szegő.

En el último capítulo recordamos la definición de operador completamente positivo y damos una definición de operadores completamente positivos de Toeplitz y circulantes, revisando algunas de sus propiedades. Los operadores completamente positivos circulantes aparecen dentro de la teoría de semigrupos cuánticos de Markov circulantes [3]. En [4] se demuestra que el espectro de un operador completamente positivo circulante coincide con el de su matriz circulante asociada. Damos ejemplos que sugieren que aunque esto no es válido para operadores completamente positivos generales podría ser cierto para la clase de operadores completamente positivos de Toeplitz.

El contenido del segundo y cuarto capítulo es contribución original de esta tesis.

Capítulo 1

Matrices asintóticamente equivalentes

Comenzamos con las definiciones pertinentes y un teorema de pre-requisito, procedemos a una discusión de los valores propios y comportamiento de sucesiones de matrices. El uso principal de los teoremas de este capítulo es relacionar el comportamiento asintótico de una sucesión de matrices complicada con el de una sucesión asintóticamente equivalente más simple.

1.1. Preliminares

Los valores propios α_k y los vectores propios x_k de una matriz A de tamaño $n \times n$ son soluciones de la ecuación $Ax = \alpha x$. Los valores propios son raíces de la ecuación característica de A : $\det(A - \alpha I) = 0$. Si los valores propios son reales, entonces usualmente asumimos que están ordenados de manera no-creciente, es decir $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \dots$.

Dada cualquier matriz compleja A se puede escribir como $A = URU^*$ donde el $*$ denota conjugar y transponer, U es una matriz unitaria, es decir $U^{-1} = U^*$ y R es una matriz triangular superior, equivalentemente:

Lema 1 *Para cada operador lineal T en un espacio n -dimensional complejo V con producto interno hay una base ortonormal β de V tal que $[T]_\beta$ (la matriz asociada a T respecto a β) es triangular superior.*

Demostración. Vamos a probar el resultado anterior para operadores lineales por inducción sobre n . Para $n = 1$ sea x un vector arbitrario distinto del cero en V entonces tomamos $\beta = \{x/\|x\|\}$, β es una base ortonormal de V , y la matriz de 1×1 $[T]_\beta$ es triangular superior. Ahora fijemos $n > 1$ y supongamos que el resultado es válido para todo espacio con producto interno de dimensión menor que n . Dado que estamos trabajando sobre un campo algebraico cerrado $\mathbb{C}$, sabemos que T tiene un valor propio $c_1 \in \mathbb{C}$ con vector propio asociado x_1 (tomamos c_1 cualquier raíz del polinomio característico de T). Dividiendo x_1 por algún escalar podemos asegurar que $\|x_1\| = 1$.

Afirmamos que $V = \mathbb{C}x_1 \oplus W$ donde $W = x_1^\perp = \{w \in V : \langle w, x_1 \rangle = 0\}$. Para ver esto, consideremos el operador $S : V \rightarrow \mathbb{C}$ definido como $S(v) = \langle v, x_1 \rangle$ para $v \in V$. S es un operador lineal con kernel W e imagen $\mathbb{C}$. Entonces por el teorema del rango-nulidad tenemos que $n = \dim(V) = \dim(W) + \dim(\mathbb{C})$. Como $\dim(\mathbb{C}) = 1$, tenemos que

$\dim(W) = n - 1$. Si $v \in V$, entonces $S(v - ax_1) = \langle v - ax_1, x_1 \rangle = \langle v, x_1 \rangle - a = 0$, si y solamente si $a = \langle v, x_1 \rangle$. Es decir $v - \langle v, x_1 \rangle x_1 \in \text{Ker } S = W$. En otras palabras, si $w = v - \langle v, x_1 \rangle x_1 \in \text{Ker } W$, entonces $v = \langle v, x_1 \rangle x_1 + w$. Se sigue que cualquier vector en V puede ser escrito de manera única como $ax_1 + w$, donde $a \in \mathbb{C}$ y $w \in W$. Sea $P : V \rightarrow W$ el operador proyección definido por $P(ax_1 + w) = w$ y definamos el operador lineal $T' : W \rightarrow W$ como $T'(w) = P(T(w))$ para $w \in W$. Por hipótesis de inducción, podemos encontrar una base ortonormal $\beta' = \{x_2, x_3, \dots, x_n\}$ de W tal que $[T']_{\beta'}$ es triangular superior. Sea $\beta = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, es claro que es base ortonormal de V , afirmamos que

$$[T]_{\beta} = \left[\begin{array}{c|ccc} c_1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & [T']_{\beta'} & \\ 0 & & & \end{array} \right],$$

es una matriz triangular superior.

Para verificar esto, recordemos que la j -ésima columna de $[T]_{\beta}$ consiste en las coordenadas de $T(x_j)$ relativas a la base β . Como $T(x_1) = c_1 x_1$ entonces la primera columna de $[T]_{\beta}$ es $(c_1, 0, \dots, 0)^T$. Para $j > 1$, escribimos $T(x_j) = c_{1,j}x_1 + c_{2,j}x_2 + \dots + c_{n,j}x_n$ con $c_{i,j} \in \mathbb{C}$, entonces $T'(x_j) = P(T(x_j)) = c_{2,j}x_2 + \dots + c_{n,j}x_n$. Por lo tanto la j -ésima columna de $[T]_{\beta}$ está conformada por los escalares $c_{1,j}$ seguidos por la $(j-1)$ -ésima columna de $[T']_{\beta'}$. Esto completa la prueba de la afirmación. $\square$

Los valores propios de A son los elementos de la diagonal principal de R . Si A es normal, es decir, $A^*A = AA^*$, entonces R es una matriz diagonal, que denotamos por $R = \text{diag}(\alpha_k)$. Si A es una matriz Hermitiana, es decir, $A^* = A$, sus valores propios son reales.

Una matriz A es definida positiva si $\langle x, Ax \rangle \geq 0$ para cualquier vector x . La matriz es estrictamente definida positiva si $\langle x, Ax \rangle > 0$ para todo vector $x \neq 0$. Si una matriz Hermitiana es definida positiva entonces todos sus valores propios son mayores o iguales a cero, si una matriz es estrictamente definida positiva entonces todos sus valores propios son estrictamente positivos.

Los valores extremos de los valores propios de una matriz Hermitiana H pueden ser caracterizados en términos del cociente de Rayleigh de H y el vector x , definido de la siguiente manera: $R_H(x) = \frac{\langle x, Hx \rangle}{\|x\|^2}$.

Lema 2 Dada H una matriz Hermitiana, sean η_m y η_M el mínimo y máximo de los valores propios de H respectivamente, entonces:

$$\eta_m = \min_{x \neq 0} R_H(x) = \min_{\|x\|=1} \langle x, Hx \rangle$$

$$\eta_M = \max_{x \neq 0} R_H(x) = \max_{\|x\|=1} \langle x, Hx \rangle.$$

Demostración. Sean e_m y e_M vectores propios asociados a los valores propios mínimo y máximo η_m y η_M respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned} R_H(e_m) &= \frac{\langle e_m, H e_m \rangle}{\|e_m\|^2} = \frac{\langle e_m, \eta_m e_m \rangle}{\|e_m\|^2} = \eta_m \frac{\langle e_m, e_m \rangle}{\|e_m\|^2} \\ &= \eta_m, \end{aligned}$$

es decir $R_H(e_m) = \eta_m$.

También

$$\begin{aligned} R_H(e_M) &= \frac{\langle e_M, H e_M \rangle}{\|e_M\|^2} = \frac{\langle e_M, \eta_M e_M \rangle}{\|e_M\|^2} = \eta_M \frac{\langle e_M, e_M \rangle}{\|e_M\|^2} \\ &= \eta_M \end{aligned}$$

así $R_H(e_M) = \eta_M$.

Por otro lado, notemos que $\min_x R_H(x) \leq R_H(\xi)$ para cualquier vector ξ , en particular para el vector e_m , es decir

$$\min_x R_H(x) \leq R_H(e_m) = \eta_m. \quad (1.1)$$

Análogamente

$$\max_x R_H(x) \geq R_H(\xi) \text{ para cualquier vector } \xi,$$

en particular para el vector e_M , es decir

$$\max_x R_H(x) \geq R_H(e_M) = \eta_M. \quad (1.2)$$

Dado que H es Hermitiana, podemos escribir $H = UAU^*$, donde U es una matriz unitaria y A una matriz diagonal, con valores propios η_k . Notemos que $\eta_m \leq \eta_k \leq \eta_M$. Estimemos

$$\begin{aligned} R_H(x) &= \frac{\langle x, Hx \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle x, UAU^*x \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle U^*x, AU^*x \rangle}{\|x\|^2} \\ &= \frac{\langle y, Ay \rangle}{\|y\|^2} \end{aligned}$$

donde $y = U^*x$, como $\|Ux\|^2 = \langle Ux, Ux \rangle = \langle x, U^*Ux \rangle = \langle x, x \rangle = \|x\|^2$, por lo que $\|Ux\| = \|x\|$ esto es, es una isometría, también $\|x\|^2 = \|y\|^2$. Por lo que, las identidades anteriores coinciden con

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \eta_k}{\sum_{k=1}^n |y_k|^2} &\leq \frac{\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \eta_M}{\sum_{k=1}^n |y_k|^2} \\ &= \eta_M. \end{aligned}$$

Entonces, para cada x , $R_H(x) \leq \eta_M$, en particular para el máximo:

$$\max_{x \neq 0} R_H(x) \leq \eta_M. \quad (1.3)$$

De manera similar, puesto que $\eta_m \leq \eta_k$ tenemos

$$\begin{aligned} R_H(x) &= \frac{\langle x, Hx \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle x, UAU^*x \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle U^*x, AU^*x \rangle}{\|x\|^2} \\ &= \frac{\langle y, Ay \rangle}{\|y\|^2} = \frac{\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \eta_k}{\sum_{k=1}^n |y_k|^2} \geq \frac{\sum_{k=1}^n |y_k|^2 \eta_m}{\sum_{k=1}^n |y_k|^2} = \eta_m \end{aligned}$$

es decir, para toda x , $R_H(x) \geq \eta_m$, en particular para el mínimo

$$\min_{x \neq 0} R_H(x) \geq \eta_m. \quad (1.4)$$

De la ecuación (1.1) y (1.4) se sigue que $\min_{x \neq 0} R_H(x) = \eta_m$ y de la ecuación (1.2) y (1.3) que $\max_{x \neq 0} R_H(x) = \eta_M$.

Por otra lado tenemos que

$$\max_{\|x\|=1} R_H(x) \leq \max_{x \neq 0} R_H(x) \quad (1.5)$$

$$\min_{x \neq 0} R_H(x) \leq \min_{\|x\|=1} R_H(x). \quad (1.6)$$

Ahora para toda x ,

$$\max_{\|x\|=1} R_H(x) \geq R_H\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{\left\langle \frac{x}{\|x\|}, H \frac{x}{\|x\|} \right\rangle}{\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|^2} = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, H \frac{x}{\|x\|} \right\rangle = \frac{\langle x, Hx \rangle}{\|x\|^2} = R_H(x),$$

es decir para toda x $\max_{\|x\|=1} R_H(x) \geq R_H(x)$, en particular se tiene

$$\max_{\|x\|=1} R_H(x) \geq \max_{x \neq 0} R_H(x). \quad (1.7)$$

Por lo tanto de (1.5) y (1.7) tenemos $\max_{\|x\|=1} R_H(x) = \max_{x \neq 0} R_H(x)$.

También, para cada x ,

$$\min_{\|x\|=1} R_H(x) \leq R_H\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{\left\langle \frac{x}{\|x\|}, H \frac{x}{\|x\|} \right\rangle}{\left\| \frac{x}{\|x\|} \right\|^2} = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, H \frac{x}{\|x\|} \right\rangle = \frac{\langle x, Hx \rangle}{\|x\|^2} = R_H(x),$$

es decir para toda x $\min_{\|x\|=1} R_H(x) \leq R_H(x)$, en particular se tiene

$$\min_{\|x\|=1} R_H(x) \leq \min_{x \neq 0} R_H(x). \quad (1.8)$$

Por lo que de (1.6) y (1.8) se sigue que $\min_{\|x\|=1} R_H(x) = \min_{x \neq 0} R_H(x)$.

Por lo tanto $\eta_m = \min_{x \neq 0} R_H(x) = \min_{\|x\|=1} \langle x, Hx \rangle$ y $\eta_M = \max_{x \neq 0} R_H(x) = \max_{\|x\|=1} \langle x, Hx \rangle$ como se requería.

□

Si A es una matriz compleja arbitraria, entonces la matriz A^*A es hermitiana, en efecto, $(A^*A)^* = A^*A^{**} = A^*A$ y es definida positiva, esto es $\langle x, A^*Ax \rangle \geq 0$, lo cual se sigue del cálculo siguiente $\langle x, A^*Ax \rangle = \langle Ax, Ax \rangle = \|Ax\|^2 \geq 0$.

La traza de una matriz A es la suma de los elementos en su diagonal principal. Es bien conocido que la traza es invariante bajo conjugación por matrices unitarias, esto es, $\text{Tr}(UAU^*) = \text{Tr}(A)$, si U es unitaria. El siguiente lema es útil cuando se estudian matrices y productos de matrices Hermitianas y no Hermitianas.

Lema 3 Sea A una matriz con valores propios α_k , sean $\lambda_k \geq 0$ los valores propios de la matriz Hermitiana definida positiva A^*A , entonces

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \geq \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k|^2 \quad (1.9)$$

con igualdad si y solamente si A es normal.

Demostración. Sea A una matriz entonces por el lema 1 podemos escribir $A = URU^*$ y $A^* = UR^*U^*$, donde U es matriz unitaria y R es una matriz triangular superior, por lo que $A^*A = (UR^*U^*)(URU^*) = UR^*(U^*U)RU^* = UR^*U^{-1}URU^* = UR^*RU^*$. Como la traza de

una matriz es la suma de sus valores propios tenemos que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k = \text{Tr}(A^*A) = \text{Tr}(UR^*RU^*) = \text{Tr}(R^*R).$$

Por otra parte $(R^*R)_{j'j} = \left(\sum_{k=\min(j,j')}^{n-1} \bar{r}_{kj'} r_{kj} \right)$, entonces

$$\text{Tr}(R^*R) = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k \leq j}^{n-1} \bar{r}_{kj} r_{kj} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k \leq j}^{n-1} |r_{kj}|^2.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k \leq j}^{n-1} |r_{kj}|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k|^2 + \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k < j}^{n-1} |r_{kj}|^2 \geq \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k|^2.$$

Por otro lado si A es una matriz *normal*, $A = U^*RU$, entonces R es una matriz diagonal, por lo tanto:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k = \sum_{k=0}^{n-1} \text{Tr}(A^*A) = \sum_{k=0}^{n-1} \text{Tr}(R^*R) = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} |r_{kk}|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k|^2.$$

□

Observación 1 Los números $\lambda_k^{1/2}$ se llaman valores singulares de la matriz A .

1.2. Norma de matrices

Para estudiar la equivalencia asintótica de las matrices se requiere de una métrica o una norma sobre el espacio de matrices. Una métrica conveniente para nuestros propósitos es la norma de la diferencia de dos matrices.

Definición 1 Sea A una matriz con valores propios α_k , sean $\lambda_k \geq 0$ los valores propios de la matriz hermitiana definida positiva A^*A . La norma de operadores de A , denotada por $\|A\|$, está dada por

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} [R_{A^*A}(x)]^{1/2} = \max_{x \neq 0} \left[\frac{\langle x, A^*Ax \rangle}{\|x\|^2} \right]^{1/2} = \max_{x \neq 0} \frac{\langle x, A^*Ax \rangle^{1/2}}{\|x\|}.$$

Notemos que por el **lema 2**, $\max_{x \neq 0} R_{A^*A}(x) = \max_{\|x\|=1} R_{A^*A}(x)$, de donde obtenemos que

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \left[\frac{\langle x, A^*Ax \rangle}{\|x\|^2} \right]^{1/2} = \max_{\|x\|=1} \langle x, A^*Ax \rangle^{1/2}.$$

Lema 4 *La norma de operadores es en efecto una norma.*

Demostración. Verifiquemos los axiomas de norma.

Como $\frac{\langle x, A^*Ax \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle Ax, Ax \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} \geq 0$, extrayendo raíz cuadrada y tomando máximo se sigue que $\|A\| = \max_{x \neq 0} \left[\frac{\langle x, A^*Ax \rangle}{\|x\|^2} \right]^{1/2} \geq 0$.

Supongamos que $\|A\|^2 = \max_{x \neq 0} \frac{\langle x, A^*Ax \rangle}{\|x\|^2} = 0$, esto es $\langle x, A^*Ax \rangle = 0$, por lo que $\langle Ax, Ax \rangle = 0$, y de esto obtenemos $A = 0$. Por otra parte, supongamos que $A = 0$, esto es $\|A\| = \max_{x \neq 0} \left[\frac{\langle x, 0x \rangle}{\|x\|^2} \right]^{1/2} = 0$.

Ahora notemos que

$$\frac{\langle x, (cA)^* (cA) x \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle x, (\bar{c}A^*) (cA) x \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\langle x, \bar{c}cA^*Ax \rangle}{\|x\|^2} = (\bar{c})(c) \frac{\langle x, A^*Ax \rangle}{\|x\|^2} = |c|^2 \frac{\langle x, A^*Ax \rangle}{\|x\|^2},$$

entonces extrayendo raíz cuadrada, como $|c| \geq 0$, usando propiedades de máximo tenemos

$$\begin{aligned} \|cA\| &= \max_{x \neq 0} \left[|c|^2 \frac{\langle x, A^*Ax \rangle}{\|x\|^2} \right]^{1/2} = [|c|^2]^{1/2} \max_{x \neq 0} \left[\frac{\langle x, A^*Ax \rangle}{\|x\|^2} \right]^{1/2} = |c| \max_{x \neq 0} \left[\frac{\langle x, A^*Ax \rangle}{\|x\|^2} \right]^{1/2} \\ &= |c| \|A\|. \end{aligned}$$

Por otro lado, tenemos que $\|Ax\| \leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$ y $\|Bx\| \leq \max_{\|x\|=1} \|Bx\|$ para toda x , por lo que $\|Ax\| + \|Bx\| \leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|=1} \|Bx\|$, de donde se sigue que $\max_{\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|=1} \|Bx\|$ es cota superior de $\|Ax\| + \|Bx\|$.

Ahora como para toda x , $\|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq \max_{\|x\|=1} \{\|Ax\|\} + \max_{\|x\|=1} \{\|Bx\|\}$ entonces

$$\|A + B\| = \max_{\|x\|=1} \|Ax + Bx\| \leq \max_{\|x\|=1} \{\|Ax\| + \|Bx\|\} \leq \max_{\|x\|=1} \|Ax\| + \max_{\|x\|=1} \|Bx\|, \text{ esto es}$$

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|.$$

□

Lema 5 *La norma de operadores es submultiplicativa, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.*

Demostración. Consideremos $\|ABx\|^2 = \max_x \langle x, (AB)^* (AB) x \rangle = \max_{\|x\|=1} \|ABx\|^2$, como $\|ABx\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|$, se sigue que $\|ABx\|^2 \leq \|A\|^2\|B\|^2$ para cada x tal que $\|x\| = 1$, es decir $\|A\|^2\|B\|^2$ es cota superior de $\|ABx\|^2$ si $\|x\| = 1$.

$$\text{Así } \max_{\|x\|=1} \|ABx\|^2 \leq \|A\|^2\|B\|^2, \text{ es decir } \|AB\| \leq \|A\|\|B\|.$$

□

Por otra parte, sea e_M el vector propio asociado al valor propio λ_M , entonces por el **lema 2**, $\frac{\langle e_M, A^* A e_M \rangle}{\|e_M\|^2} = \lambda_M = \max_k \lambda_k$ y como $\frac{\langle \xi, H \xi \rangle}{\|\xi\|^2} \leq \max_{\xi \neq 0} \frac{\langle \xi, H \xi \rangle}{\|\xi\|^2}$ para toda ξ , así tenemos que $\max_k \lambda_k = \frac{\langle e_M, A^* A e_M \rangle}{\|e_M\|^2} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\langle x, A^* A x \rangle}{\|x\|^2}$, esto es

$$\max_k \lambda_k = \lambda_M \leq \|A\|^2. \quad (1.10)$$

Ahora puesto que $\lambda_m \leq R_{A^*A}(x) \leq \lambda_M$, entonces $0 \leq \frac{\langle x, A^* A x \rangle}{\|x\|^2} \leq \lambda_M$ para toda x , por lo que extrayendo raíz cuadrada se tiene $\frac{\langle x, A^* A x \rangle^{1/2}}{\|x\|} \leq \sqrt{\lambda_M}$ para toda x , así $\sqrt{\lambda_M}$ es cota superior de esos productos internos, por lo tanto el máximo de ellos también está acotado, es decir

$$\|A\|^2 \leq \lambda_M \quad (1.11)$$

De (1.10) y (1.11) se sigue que

$$\|A\|^2 = \max_k \lambda_k = \lambda_M. \quad (1.12)$$

La norma de operadores se puede acotar inferiormente. Si e_M es el valor propio de A , asociado al valor propio α_M , como $\max_{\|\xi\|=1} \langle \xi, A \xi \rangle \geq \langle e_M, A e_M \rangle$ para toda ξ , en particular para $\frac{e_M}{\|e_M\|}$ tenemos

$$\begin{aligned} \|A\|^2 &= \max_{\|x\|=1} \langle x, A^* A x \rangle \geq \left\langle \frac{e_M}{\|e_M\|}, A^* A \frac{e_M}{\|e_M\|} \right\rangle = \left\langle A \frac{e_M}{\|e_M\|}, A \frac{e_M}{\|e_M\|} \right\rangle \\ &= \left\langle \alpha_M \frac{e_M}{\|e_M\|}, \alpha_M \frac{e_M}{\|e_M\|} \right\rangle = \alpha_M \overline{\alpha_M} \left\langle \frac{e_M}{\|e_M\|}, \frac{e_M}{\|e_M\|} \right\rangle = |\alpha_M|^2 \frac{\|e_M\|^2}{\|e_M\|^2} \\ &= |\alpha_M|^2. \end{aligned}$$

Si A es una matriz Hermitiana sus valores propios son reales y los valores singulares λ_k de A^*A son $\lambda_k = \alpha_k^2$. En efecto si e_k es un vector propio de A con valor propio α_k entonces $(A^*A)e_k = \alpha_k(A^*e_k) = \alpha_k(\alpha_k e_k) = \alpha_k^2 e_k$, esto es $\lambda_k = \alpha_k^2$. En particular si A es Hermitiana, entonces de (1.12) se sigue que

$$\|A\| = \max_k |\alpha_k| = |\alpha_M|. \quad (1.13)$$

Definición 2 Sea A una matriz de tamaño $n \times n$, la norma Hilbert-Schmidt de A está dada por

$$|A| = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |a_{kj}|^2 \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{n} \text{Tr}(A^*A) \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \right)^{1/2}.$$

Veamos la equivalencia de las distintas representaciones de $|A|$ en la definición anterior, usando la notación del **Apéndice A**, sea

$$A = \sum_{i,j=0}^{n-1} a_{ij} |e_i\rangle \langle e_j|, \text{ con matriz adjunta } A^* = \sum_{k,l=0}^{n-1} \bar{a}_{kl} |e_l\rangle \langle e_k|, \text{ entonces:}$$

$$A^* A = \sum_{k,l=0}^{n-1} \bar{a}_{kl} |e_l\rangle \langle e_k| \sum_{i,j=0}^{n-1} a_{ij} |e_i\rangle \langle e_j| = \sum_{i,j,l=0}^{n-1} \bar{a}_{il} a_{ij} |e_l\rangle \langle e_j|,$$

por lo tanto

$$\text{Tr}(A^* A) = \text{Tr} \left(\sum_{i,j,l=0}^{n-1} \bar{a}_{il} a_{ij} |e_l\rangle \langle e_j| \right) = \sum_{i,j,l=0}^{n-1} \bar{a}_{il} a_{ij} \text{Tr}(|e_l\rangle \langle e_j|) = \sum_{i,j=0}^{n-1} |a_{ij}|^2.$$

Finalmente multiplicando por $\frac{1}{n}$ y extrayendo raíz cuadrada tenemos

$$\left(\frac{1}{n} \text{Tr}(A^* A) \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i,j=0}^{n-1} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} = |A|. \quad (1.14)$$

Por otra parte, como la traza de una matriz es la suma de sus valores propios, tenemos $\text{Tr}(A^* A) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k$, multiplicando por $\frac{1}{n}$ y extrayendo raíz cuadrada tenemos

$$|A| = \left(\frac{1}{n} \text{Tr}(A^* A) \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \right)^{1/2}.$$

Esto demuestra la igualdad de las dos representaciones.

La norma Hilbert-Schmidt proviene de la función en el espacio de matrices definida como $\langle A, B \rangle = \frac{1}{n} \text{Tr}(A^* B)$, esta función es un producto interno. En efecto, verifiquemos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es lineal respecto al segundo argumento

$$\langle A, B + C \rangle = \frac{1}{n} \text{Tr}(A^* (B + C)) = \frac{1}{n} \text{Tr}(A^* B + A^* C) = \frac{1}{n} \text{Tr}(A^* B) + \frac{1}{n} \text{Tr}(A^* C) = \langle A, B \rangle + \langle A, C \rangle.$$

$$\text{Sea } \lambda \in \mathbb{C} \text{ entonces } \langle A, \lambda B \rangle = \frac{1}{n} \text{Tr}(A^* (\lambda B)) = \frac{1}{n} \text{Tr}(\lambda A^* B) = \frac{\lambda}{n} \text{Tr}(A^* B) = \lambda \langle A, B \rangle.$$

$$\text{Por otra parte } \overline{\langle A, B \rangle} = \overline{\frac{1}{n} \text{Tr}(A^* B)} = \frac{1}{n} \text{Tr}((A^* B)^*) = \frac{1}{n} \text{Tr}(B^* A) = \langle B, A \rangle.$$

Finalmente mostraremos que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es definida positiva. Supongamos que $A \neq 0$ entonces:

$$\langle A, A \rangle = \frac{1}{n} \text{Tr}(A^* A) = \sum_{i,j=0}^{n-1} |a_{ij}|^2 \geq 0$$

por lo tanto tenemos que $\langle A, A \rangle \geq 0$.

Lema 6 *La norma Hilbert-Schmidt es, en efecto, una norma.*

Demostración. Se sigue de manera inmediata, pues proviene de un producto interno. $\square$

Por otra parte como $\lambda_k \leq \max_k \lambda_k$ entonces $\sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \max_k \lambda_k = n \max_k \lambda_k$, de (1.12) tenemos

$$|A|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k \leq \max_k \lambda_k = \|A\|^2. \quad (1.15)$$

Esto es, la norma Hilbert-Schmidt es más débil que la norma de operadores.

Lema 7 *La norma de Hilbert-Schmidt es invariante al tomar adjunto.*

Demostración.

$$|A| = \left[\frac{1}{n} \text{Tr}(A^* A) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{n} \text{Tr}(A A^*) \right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{n} \text{Tr}((A^*)^* A^*) \right]^{\frac{1}{2}} = |A^*|.$$

$\square$

Lema 8 *La norma Hilbert-Schmidt es invariante bajo la multiplicación por matrices unitarias.*

Demostración. Sean A y U matrices con U unitaria, entonces:

$$|UA|^2 = \frac{1}{n} \text{Tr} \left((UA)^* (UA) \right) = \frac{1}{n} \text{Tr} \left(A^* U^* U A \right) = \frac{1}{n} \text{Tr} \left(A A^* \right) = |A^*|^2 = |A|^2,$$

y

$$|AU|^2 = \frac{1}{n} \text{Tr} \left((AU)^* (AU) \right) = \frac{1}{n} \text{Tr} \left(U^* A^* A U \right) = \frac{1}{n} \text{Tr} \left(U U^* A^* A \right) = \frac{1}{n} \text{Tr} \left(A^* A \right) = |A|^2.$$

Donde hemos utilizado la propiedad cíclica de la traza para un producto de matrices.

$\square$

La norma Hilbert-Schmidt suele ser más útil y fácil de manejar, sin embargo, la norma de operadores proporciona una cota para el producto de dos matrices, como se muestra en el siguiente lema.

Lema 9 *Dadas dos matrices G y H $n \times n$ entonces $|GH| \leq \|G\| \|H\|$.*

Demostración. Sean $G = \sum_{i,j=0}^{n-1} g_{ij} |e_i\rangle \langle e_j|$, $H = \sum_{k,l=0}^{n-1} h_{kl} |e_k\rangle \langle e_l|$ dos matrices de $n \times n$ con matrices adjuntas $G^* = \sum_{i',j'=0}^{n-1} \bar{g}_{i'j'} |e_{j'}\rangle \langle e_{i'}|$, $H^* = \sum_{k',l'=0}^{n-1} \bar{h}_{k'l'} |e_{l'}\rangle \langle e_{k'}|$ respectivamente.

Calculemos los siguientes productos, $GH, H^*G^*, (H^*G^*)GH$.

$$GH = \sum_{i,j=0}^{n-1} g_{ij}|e_i\rangle\langle e_j| \sum_{k,l=0}^{n-1} h_{kl}|e_k\rangle\langle e_l| = \sum_{i,j,k,l=0}^{n-1} g_{ij}h_{kl}|e_i\rangle\langle e_j||e_k\rangle\langle e_l| = \sum_{i,j,l=0}^{n-1} g_{ij}h_{jl}|e_i\rangle\langle e_l|.$$

$$\begin{aligned} H^*G^* &= \sum_{k',l'=0}^{n-1} \bar{h}_{k'l'}|e_{l'}\rangle\langle e_{k'}| \sum_{i',j'=0}^{n-1} \bar{g}_{i'j'}|e_{j'}\rangle\langle e_{i'}| = \sum_{k',l',i',j'=0}^{n-1} \bar{h}_{k'l'}\bar{g}_{i'j'}|e_{l'}\rangle\langle e_{k'}||e_{j'}\rangle\langle e_{i'}| \\ &= \sum_{i',j',l'=0}^{n-1} \bar{h}_{j'l'}\bar{g}_{i'j'}|e_{l'}\rangle\langle e_{i'}|. \end{aligned}$$

De estos dos últimos cálculos obtenemos

$$\begin{aligned} (H^*G^*)GH &= \sum_{i',j',l'=0}^{n-1} \bar{h}_{j'l'}\bar{g}_{i'j'}|e_{l'}\rangle\langle e_{i'}| \sum_{i,j,l=0}^{n-1} g_{ij}h_{jl}|e_i\rangle\langle e_l| \\ &= \sum_{i',j',l',i,j,l=0}^{n-1} \bar{h}_{j'l'}\bar{g}_{i'j'}g_{ij}h_{jl}|e_{l'}\rangle\langle e_{i'}||e_i\rangle\langle e_l| \\ &= \sum_{j',l',i,j,l=0}^{n-1} \bar{h}_{j'l'}\bar{g}_{ij'}g_{ij}h_{jl}|e_{l'}\rangle\langle e_l|. \end{aligned}$$

Ahora

$$\begin{aligned} |GH|^2 &= \frac{1}{n} \text{Tr}((GH)^*(GH)) = \frac{1}{n} \text{Tr}(H^*G^*GH) = \frac{1}{n} \text{Tr}\left(\sum_{j',l',i,j,l=0}^{n-1} \bar{h}_{j'l'}\bar{g}_{ij'}g_{ij}h_{jl}|e_{l'}\rangle\langle e_l|\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i,j,j',l=0}^{n-1} \bar{h}_{j'l}h_{jl}\bar{g}_{ij'}g_{ij}. \end{aligned}$$

Por otra parte, sea $h_l = \sum_{k=0}^{n-1} h_{kl}e_k$ la l -ésima columna de la matriz H , entonces:

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{n-1} \langle h_l, G^*Gh_l \rangle &= \sum_{l=0}^{n-1} \left\langle \sum_{k=0}^{n-1} h_{kl}e_k, G^*G \sum_{k=0}^{n-1} h_{kl}e_k \right\rangle \\ &= \sum_{i,j,k,l,i',j',k'=0}^{n-1} \bar{h}_{kl}\bar{g}_{i'j'}g_{ij}h_{k'l}\langle e_k, |e_{j'}\rangle\langle e_{i'}||e_i\rangle\langle e_j|e_{k'}\rangle \\ &= \sum_{i,j,k,l=0}^{n-1} \bar{h}_{kl}h_{jl}\bar{g}_{ik}g_{ij}. \end{aligned}$$

Por lo que tenemos:

$$|GH|^2 = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \langle h_l, G^* G h_l \rangle. \quad (1.16)$$

Puesto que para todo ξ es $\frac{\langle h_l, G^* G h_l \rangle}{\|h_l\|^2} \leq \max_{\xi \neq 0} \frac{\langle \xi, G^* G \xi \rangle}{\|\xi\|^2} = \|G\|^2$ entonces

$$\langle h_l, G^* G h_l \rangle \leq \|G\|^2 \|h_l\|^2,$$

y al tomar en esta última expresión la suma sobre l se tiene

$$\sum_{l=0}^{n-1} \langle h_l, G^* G h_l \rangle \leq \|G\|^2 \sum_{l=0}^{n-1} \|h_l\|^2.$$

Notemos que $\sum_{l=0}^{n-1} \|h_l\|^2 = \sum_{l=0}^{n-1} \langle h_l, h_l \rangle = \sum_{l,k,k'=0}^{n-1} \bar{h}_{k'l} h_{kl} |e_{k'}\rangle \langle e_k| = \sum_{k,l=0}^{n-1} \bar{h}_{kl} h_{kl} = \sum_{k,l=0}^{n-1} |h_{kl}|^2$.

Por lo tanto en (1.16)

$$\begin{aligned} |GH|^2 &= \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} \langle h_l, G^* G h_l \rangle \leq \frac{1}{n} \|G\|^2 \sum_{l=0}^{n-1} \|h_l\|^2 = \frac{1}{n} \|G\|^2 \sum_{k,l=0}^{n-1} |h_{kl}|^2 = \|G\|^2 \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} |h_{kl}|^2 \\ &= \|G\|^2 |H|^2. \end{aligned}$$

Esto es

$$|GH| \leq \|G\| |H|.$$

□

Notemos que en el **lema 9** no se requiere que las matrices G o H sean Hermitianas.

Observación 2 Usando el **lema 7** y el hecho de que $\|A\| = \|A^*\|$ obtenemos del **lema 9** la siguiente estimación

$$|GH| = |(GH)^*| = |H^* G^*| \leq \|H^*\| \|G^*\| = \|H\| \|G\|.$$

Vamos a considerar matrices de $n \times n$ que se aproximan entre sí cuando n es grande, utilizaremos la norma Hilbert-Schmidt de la diferencia de dos sucesiones de matrices como una medida de la distancia entre ambas.

Definición 3 Se dice que dos sucesiones de matrices $\{A_n\}_{n \geq 1}$ y $\{B_n\}_{n \geq 1}$ de $n \times n$ son asintóticamente equivalentes si:

(1) $\{A_n\}_n$ y $\{B_n\}_n$ son uniformemente acotadas en la norma de operadores:

Existe $M > 0$ tal que $\|A_n\|, \|B_n\| \leq M < \infty$, para cada $n \geq 1$.

(2) $A_n - B_n$ converge a 0 en la norma Hilbert-Schmidt cuando $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n - B_n| = 0.$$

La equivalencia asintótica entre sucesiones de matrices $\{A_n\}_n$ y $\{B_n\}_n$ será abreviada como $A_n \sim B_n$.

El siguiente teorema proporciona varias propiedades de la equivalencia asintótica.

Teorema 1 (1) Si $A_n \sim B_n$ entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| - \|B_n\| = 0$.

(2) Si $A_n \sim B_n$ y $B_n \sim C_n$ entonces $A_n \sim C_n$.

(3) Si $A_n \sim B_n$ y $C_n \sim D_n$ entonces $A_n C_n \sim B_n D_n$.

(4) Si $A_n \sim B_n$ y $\|A_n^{-1}\|, \|B_n^{-1}\| \leq K < \infty$ para cada $n \geq 1$, esto es A_n^{-1} y B_n^{-1} existen y son uniformemente acotadas por alguna constante independiente de n , entonces $A_n^{-1} \sim B_n^{-1}$.

(5) Si $A_n B_n \sim C_n$ y $\|A_n^{-1}\| \leq K < \infty$ para cada $n \geq 1$ entonces $B_n \sim A_n^{-1} C_n$.

(6) Sean $\alpha_{n,k}$ y $\beta_{n,k}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, los valores propios de A_n y B_n respectivamente. Si $A_n \sim B_n$ entonces existen constantes, m y M tales que $m \leq \alpha_{n,k}, \beta_{n,k} \leq M$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Demostración.

(1) Por hipótesis tenemos

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| - \|B_n\| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} |A_n - B_n| = 0$$

de donde se sigue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n\| - \|B_n\| = 0$.

(2) Dado que $A_n \sim B_n$ tenemos $\|A_n\|, \|B_n\| \leq K_1$ para cada $n \geq 1$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n - B_n| = 0$, también $B_n \sim C_n$ por lo que $\|B_n\|, \|C_n\| \leq K_2$ para cada $n \geq 1$, y $\lim_{n \rightarrow \infty} |B_n - C_n| = 0$, entonces

$$|A_n - C_n| = |A_n - B_n + B_n - C_n| \leq |A_n - B_n| + |B_n - C_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Por otra parte sea $K = \max\{K_1, K_2\}$ entonces $\|A_n\|, \|C_n\| \leq K$ para cada $n \geq 1$.

(3) Como $A_n \sim B_n$ tenemos $\|A_n\|, \|B_n\| \leq K_1$ para cada $n \geq 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n - B_n| = 0$. También $C_n \sim D_n$ por lo que $\|C_n\|, \|D_n\| \leq K_2$ para cada $n \geq 1$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} |C_n - D_n| = 0$. Sea $K = \max\{K_1, K_2\}$, entonces

$$\begin{aligned} |A_n C_n - B_n D_n| &= |A_n C_n - A_n D_n + A_n D_n - B_n D_n| \leq |A_n C_n - A_n D_n| \\ &\quad + |A_n D_n - B_n D_n| \leq \|A_n\| |C_n - D_n| + \|D_n\| |A_n - B_n| \\ &\leq K(|C_n - D_n| + |A_n - B_n|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Por otro lado usando que la norma de operadores es submultiplicativa tenemos:

$$\begin{aligned}\|A_n C_n\| &\leq \|A_n\| \|C_n\| \leq K_1 K_2 \leq K^2 \\ \|A_n C_n\| &\leq \|A_n\| \|C_n\| \leq K_1 K_2 \leq K^2\end{aligned}$$

- (4) Por hipótesis $A_n \sim B_n$ en particular tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n - B_n| = 0$ y también por hipótesis $\|A_n^{-1}\| \|B_n^{-1}\| \leq K$ para cada $n \geq 1$, por lo tanto

$$\begin{aligned}|A_n^{-1} - B_n^{-1}| &= |B_n^{-1} B_n A_n^{-1} - B_n^{-1} A_n A_n^{-1}| = |B_n^{-1} (B_n - A_n) A_n^{-1}| \\ &\leq \|A_n^{-1}\| \|B_n^{-1}\| |B_n - A_n| \leq K^2 |B_n - A_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

- (5) Notemos que $A_n \sim A_n$ pues $\lim_{n \rightarrow \infty} |A_n - A_n| = 0$ y $\|A_n\| \leq K < \infty$ para cada $n \geq 1$, si A_n^{-1} existe tenemos $A_n^{-1} \sim A_n^{-1}$ y por hipótesis $A_n B_n \sim C_n$ por lo tanto por el inciso (3) se tiene $B_n \sim A_n^{-1} C_n$.

- (6) Como $A_n \sim B_n$ tenemos en particular que $\|A_n\|, \|B_n\| \leq K$ para cada $n \geq 1$, por el **lema 3** sabemos que $|A|^2 \geq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k|^2$ para cada $n \geq 1$, por lo que $K^2 \geq \|A_n\|^2 \geq |\alpha_{n,M}|^2$ para cada $n \geq 1$, donde $\alpha_{n,M}$ es el máximo de los valores propios de A_n . Entonces $K \geq |\alpha_{n,M}| \geq |\alpha_{n,k}|$ para cada $n \geq 1$, por lo tanto $|\alpha_{n,k}| \leq K$. Tomamos $m = -K$ y $M = K$, así para cada $n = 1, 2, 3, \dots$ y para cada $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ se sigue $m \leq \alpha_{n,k} \leq M$. De manera análoga tenemos $m \leq \beta_{n,k} \leq M$.

□

Los resultados anteriores serán útiles en varias de las demostraciones posteriores. El siguiente lema proporciona un preludio del tipo de resultados que se pueden obtener acerca de los valores propios y sirve por sí mismo como la parte esencial de los resultados más generales a seguir. Se muestra que la norma Hilbert-Schmidt de la diferencia de dos matrices acota superiormente al promedio de la diferencia de sus valores propios.

Lema 10 Dadas dos matrices A y B con valores propios α_k y β_k , $0 \leq k \leq n-1$ respectivamente entonces:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \beta_k) \right| \leq |A - B|.$$

Demostración. Sea $D = A - B = \{d_{ij}\}_{ij}$. Usando propiedades de la traza obtenemos que $\text{Tr}(D) = \text{Tr}(A - B) = \text{Tr}(A) - \text{Tr}(B) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k$, ahora calculamos el cuadrado del valor absoluto de la traza de D y aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\text{Tr}(D)|^2 = \left| \sum_{k=0}^{n-1} d_{kk} \right|^2 \leq \sum_{k=0}^{n-1} |1|^2 \sum_{k=0}^{n-1} |d_{kk}|^2 = n \sum_{k=0}^{n-1} |d_{kk}|^2 \leq n \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |d_{kj}|^2 = n^2 |D|^2.$$

Entonces $|\operatorname{Tr}(D)| \leq n|D|$ y multiplicando por $\frac{1}{n}$ obtenemos $|\frac{1}{n} \operatorname{Tr}(D)| \leq |D|$ de donde se sigue que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \right| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \beta_k) \right| = \left| \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k \right) \right| = \left| \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(D) \right| \leq |A - B|.$$

□

Una consecuencia inmediata de este lema es el siguiente corolario.

Corolario 1 Si $\{A_n\}_n$ y $\{B_n\}_n$ son dos sucesiones de matrices asintóticamente equivalentes donde $\{\alpha_{n,k}\}_k$ y $\{\beta_{n,k}\}_k$, $0 \leq k \leq n-1$, son los valores propios de A_n y B_n respectivamente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{n,k} - \beta_{n,k}) = 0,$$

y si uno de los límites existe,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{n,k}. \quad (1.17)$$

Demostración. Sea $D_n = A_n - B_n$ por lo que $\operatorname{Tr}(D_n) = \operatorname{Tr}(A_n - B_n) = \operatorname{Tr}(A_n) - \operatorname{Tr}(B_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{n,k} = \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{n,k} - \beta_{n,k})$ y $|D_n| = |A_n - B_n|$, de manera análoga como en la prueba del lema anterior tenemos $|\operatorname{Tr}(D_n)|^2 \leq n^2 |D_n|^2$, y de la hipótesis se sigue que

$$0 \leq \left| \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(D_n) \right| \leq |D_n| = |A_n - B_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Por lo tanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(D_n) \right| = 0$, esto es $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{n,k} - \beta_{n,k}) \right| = 0$. Usando la conti-

nuidad del valor absoluto se tiene $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{n,k} - \beta_{n,k}) = 0$. Por otra parte si uno de los

límites existe, de la última igualdad se sigue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{n,k}$. □

Corolario 2 Dadas dos sucesiones de matrices Hermitianas asintóticamente equivalentes $\{A_n\}_n$ y $\{B_n\}_n$, sean $\{\alpha_{n,k}\}_k$ y $\{\beta_{n,k}\}_k$, $0 \leq k \leq n-1$, los valores propios de A_n y B_n respectivamente, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{n,k}^2 - \beta_{n,k}^2) = 0,$$

y si uno de los límites existe,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{n,k}^2. \quad (1.18)$$

Demostración. Sea $A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k |u_k\rangle\langle u_k|$ con matriz adjunta $A^* = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\alpha}_k |u_k\rangle\langle u_k|$, por lo que

$$A^*A = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\alpha}_k |u_k\rangle\langle u_k| \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k |u_k\rangle\langle u_k| = \sum_{k'=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\alpha}_{k'} \alpha_k |u_{k'}\rangle\langle u_{k'}| |u_k\rangle\langle u_k| = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\alpha}_k \alpha_k |u_k\rangle\langle u_k|,$$

y como A es Hermitiana se sigue que $A^*A = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2 |u_k\rangle\langle u_k|$, por lo que $\text{Tr}(A^*A) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2$.

De manera análoga se obtiene $\text{Tr}(B^*B) = \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k^2$.

Por otra parte sea $D_n = A_n - B_n$, entonces $||A_n| - |B_n|| \leq |A_n - B_n| = |D_n|$ esto es,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \sqrt{\frac{1}{n} \text{Tr}(A_n^* A_n)} - \sqrt{\frac{1}{n} \text{Tr}(B_n^* B_n)} \right| \leq |D_n| \\ 0 &\leq \left| \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2} - \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k^2} \right| \leq |D_n| \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$ tenemos $|D_n| \rightarrow 0$ de donde se obtiene el resultado. $\square$

Antes de enunciar uno de los teoremas centrales de esta sección, damos la demostración de un par de lemas que permiten, de cierto modo, dar una factorización de la diferencia de potencias de dos matrices.

Lema 11 Sean A y B matrices finito dimensionales y sea $s \in \mathbb{Z}_+$, entonces

$$A^s - B^s = A \left(\sum_{k=0}^{s-1} A^k B^{s-1-k} \right) - \left(\sum_{k=0}^{s-1} A^k B^{s-1-k} \right) B. \quad (1.19)$$

Demostración. Por inducción sobre s . Base, $s = 2$

$$\begin{aligned} A^2 - B^2 &= A^2 - B^2 + AB - AB = AB + A^2 - (AB + B^2) = A(B + A) + (B + A)B \\ &= A(A^0 B^1 + A^1 B^0) - (A^0 B^1 + A^1 B^0)B \\ &= A \left(\sum_{k=0}^{2-1} A^k B^{2-1-k} \right) + \left(\sum_{k=0}^{2-1} A^k B^{2-1-k} \right) B. \end{aligned}$$

Paso inductivo, supongamos válido hasta s

$$\begin{aligned}
A^{s+1} - B^{s+1} &= A^{s+1} - B^{s+1} + AB^s - AB^s = AB^s - B^{s+1} + A^{s+1} - AB^s \\
&= AB^s - B^{s+1} + A(A^s - B^s) \\
&= AB^s - B^{s+1} + A \left[A \left(\sum_{k=0}^{s-1} A^k B^{s-1-k} \right) - \left(\sum_{k=0}^{s-1} A^k B^{s-1-k} \right) B \right] \\
&= AB^s - B^{s+1} + A \left(\sum_{k=0}^{s-1} A^{k+1} B^{s-1-k} \right) - A \left(\sum_{k=0}^{s-1} A^k B^{s-1-k} \right) B \\
&= A \left(\sum_{k=0}^{s-1} A^{k+1} B^{s-1-k} \right) + AB^s - \left(\sum_{k=0}^{s-1} A^{k+1} B^{s-1-k} \right) B - B^{s+1} \\
&= A \left[\sum_{k=0}^{s-1} A^{k+1} B^{s-1-k} + B^s \right] - \left[\sum_{k=0}^{s-1} A^{k+1} B^{s-1-k} + B^s \right] B \\
&= A \left(\sum_{k=0}^s A^k B^{s-k} \right) - \left(\sum_{k=0}^s A^k B^{s-k} \right) B.
\end{aligned}$$

□

Lema 12 Sean A y B matrices finito dimensionales y sea $s \in \mathbb{Z}_+$, entonces

$$A^s - B^s = \sum_{k=0}^{s-1} A^k (A - B) B^{s-1-k}. \quad (1.20)$$

Demostración. Usando el lema 11

$$\begin{aligned}
A^s - B^s &= A \left(\sum_{k=0}^{s-1} A^k B^{s-1-k} \right) - \left(\sum_{k=0}^{s-1} A^k B^{s-1-k} \right) B \\
&= \sum_{k=0}^{s-1} (A^{k+1} B^{s-1-k} - A^k B^{s-k}) \\
&= \sum_{k=0}^{s-1} (A^{k+1} - A^k B) B^{s-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{s-1} A^k (A - B) B^{s-1-k}.
\end{aligned}$$

□

Las ecuaciones (1.17) y (1.18) son un caso especial del siguiente teorema sobre el comportamiento asintótico de los valores propios de sucesiones de matrices asintóticamente equivalentes.

Teorema 2 Sean $\{A_n\}_n$ y $\{B_n\}_n$ dos sucesiones de matrices asintóticamente equivalentes. Sean $\{\alpha_{n,k}\}_k$ y $\{\beta_{n,k}\}_k$ $0 \leq k \leq n-1$ los valores propios de A_n y B_n respectivamente,

entonces para cualquier entero positivo s , las sucesiones de matrices $\{A_n^s\}_n$ y $\{B_n^s\}_n$ son asintóticamente equivalentes,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{n,k}^s - \beta_{n,k}^s) = 0, \quad (1.21)$$

y si uno de los límites existe,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k}^s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{n,k}^s.$$

Demostración. Sea $D_n = A_n - B_n$ y sea $\Delta_n := A_n^s - B_n^s$ para cada $n \geq 1$. Calculemos

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\frac{1}{n} \Delta_n \right) &= \text{Tr} \left(\frac{1}{n} A_n^s - \frac{1}{n} B_n^s \right) = \text{Tr} \left(\frac{1}{n} A_n^s \right) - \text{Tr} \left(\frac{1}{n} B_n^s \right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k}^s - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{n,k}^s \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{n,k}^s - \beta_{n,k}^s). \end{aligned}$$

Por otro lado consideramos $A_n^s - B_n^s$, entonces, tomando la norma Hilbert-Schmidt y aplicando el **lema 9** y **lema 12** obtenemos

$$\begin{aligned} |A_n^s - B_n^s| &= \left| \sum_{k=0}^{s-1} A_n^k (A_n - B_n) B_n^{s-1-k} \right| \leq \sum_{k=0}^{s-1} \|A_n^k\| \|(A_n - B_n) B_n^{s-1-k}\| \\ &\leq \sum_{k=0}^{s-1} \|A_n^k\| \|B_n^{s-1-k}\| |A_n - B_n|. \end{aligned}$$

Esto es $|\Delta_n| = |A_n^s - B_n^s| \leq K |D_n|$, donde $0 < K < \infty$ no depende de n . Por lo tanto

$$0 \leq \left| \frac{1}{n} \text{Tr}(\Delta_n) \right| \leq |\Delta_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Se sigue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_{n,k}^s - \beta_{n,k}^s) = 0$, y si uno de los límites existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k}^s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{n,k}^s.$$

□

Corolario 3 Sean $\{A_n\}_n$ y $\{B_n\}_n$ dos sucesiones de matrices asintóticamente equivalentes y $\{\alpha_{n,k}\}_k$ y $\{\beta_{n,k}\}_k$, $0 \leq k \leq n-1$, los valores propios de A_n y B_n respectivamente, sea $p(x)$ cualquier polinomio, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (p(\alpha_{n,k}) - p(\beta_{n,k})) = 0,$$

y si uno de los límites existe,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p(\alpha_{n,k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p(\beta_{n,k}). \quad (1.22)$$

Demostración. Supongamos que $p(x) = \sum_{s=0}^m a_s x^s$, entonces sumando sobre s en (1.21), obtenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (p(\alpha_{n,k}) - p(\beta_{n,k})) = 0,$$

y si uno de los límites existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p(\alpha_{n,k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p(\beta_{n,k}).$$

□

El **corolario 3** puede utilizarse para demostrar que (1.22) se satisface para cualquier función analítica $f(x)$, pues tales funciones tienen un desarrollo en series complejas de Taylor, que pueden ser vistas como polinomios con un número posiblemente infinito de términos. Sin embargo, se necesita algún esfuerzo para justificar el intercambio de límites, lo que puede lograrse si la serie de Taylor converge uniformemente. Si A_n y B_n son Hermitianas, sin embargo, entonces existe un resultado mucho más fuerte. En este caso, los valores propios de ambas matrices son reales y podemos invocar el teorema de la aproximación de Stone-Weierstrass para generalizar inmediatamente el **corolario 3**.

Teorema 3 [*Stone – Weierstrass*]

Si f es una función compleja continua en $[a, b]$, existe una sucesión de polinomios p_n ,

$$\text{tal que } \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x) \quad \text{uniformemente en } [a, b].$$

Si f es real, se deben tomar los p_n s reales.

Demostración. Sin pérdida de generalidad supongamos que $[a, b] = [0, 1]$, pues el intervalo $[a, b]$ se puede mapear biyectivamente sobre el intervalo $[0, 1]$, y que $f(0) = f(1) = 0$, puesto que si se demuestra el teorema para este caso, consideramos $g(x) = f(x) - f(0) - x[f(1) - f(0)]$, para $0 \leq x \leq 1$. Notemos que g es continua en $[0, 1]$ con $g(0) = g(1) = 0$ y si puede obtenerse g como límite de una sucesión uniformemente convergente de polinomios, entonces lo mismo es cierto para f , pues $f - g$ es un polinomio. Supongamos además que f es cero para x fuera del intervalo $[0, 1]$, entonces f es uniformemente continua en toda la recta. Necesitamos una sucesión de polinomios que aproxime a f uniformemente, estudiemos la siguiente familia de polinomios

$$q_n(x) = c_n (1 - x^2)^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

donde se ha elegido c_n , de modo que

$$\int_{-1}^1 q_n(x) dx = 1, n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Busquemos una estimación para c_n ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_n} &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx = 2 \int_0^1 (1-x^2)^n dx \geq 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-x^2)^n dx \geq 2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} (1-nx^2) dx \\ &= \frac{2}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3\sqrt{n}} \\ &> \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \text{de donde } c_n < \sqrt{n}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

La desigualdad $(1-x^2)^n \geq 1-nx^2$, que se usó antes, se comprueba considerando la función $h(x) = (1-x^2)^n - 1 + nx^2$, cuya derivada $h'(x) = -2nx((1-x^2)^{n-1} - 1)$ se anula en $x = 0$ y es positiva en $(0, 1)$.

Para todo $\delta > 0$, (1.23), implica que

$$q_n \leq \sqrt{n} (a - \delta^2)^n, \delta \leq |x| \leq 1,$$

y $q'_n(x) = -2xnc_n(1-x^2)^{n-1}$, esto es $q_n(x)$ es decreciente, notemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (1 - \delta^2)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{(1 - \delta^2)^{-n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}n^{-1/2}}{(1 - \delta^2)^{-n} \ln(1 - \delta^2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}(1 - \delta^2)^n}{2 \ln(1 - \delta^2)} = 0$. Afirmamos que q_n converge uniformemente a 0 en $\delta \leq |x| \leq 1$, en efecto dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (1 - \delta^2)^n = 0$ para el mismo $\varepsilon > 0$, existe $N_\varepsilon \geq 1$ tal que $\sqrt{n} (1 - \delta^2)^n < \varepsilon$ para cada $n \geq N_\varepsilon$, entonces tomando $\eta = \sqrt{N_\varepsilon + 1} (1 - \delta^2)^{N_\varepsilon + 1} > 0$ obtenemos que $|q_n(x)| < \sqrt{n} (1 - \delta^2)^n < \varepsilon$, para cada $n \geq N_\varepsilon$ y para cada x tal que $\delta \leq |x| \leq 1$.

Ahora sea

$$p_n(x) = \int_{-1}^1 f(x+t)q_n(t)dt, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

puesto que f se anula fuera del intervalo $[0, 1]$ el integrando es nulo fuera del intervalo $[-x, 1-x]$ tenemos

$$p_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x+t)q_n(t)dt,$$

y haciendo un cambio de variable

$$p_n(x) = \int_0^1 f(t)q_n(t-x)dt.$$

Después de integrar, tenemos un polinomio en la variable x , así $\{p_n\}_n$ es una sucesión de polinomios, que son reales si f es real.

Por otra parte como f es continua sobre un compacto, entonces f es uniformemente continua en el compacto, dado $\varepsilon > 0$, elegimos $\delta > 0$, tal que $|y-x| < \delta$ implica $|f(y)-f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $M = \sup_{x \in [-1,1]} |f(x)|$. Como $q_n(x) \geq 0$, vemos que para $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} |p_n(x) - f(x)| &= \left| \int_{-1}^1 (f(x+t) - f(x))q_n(t)dt \right| \leq \int_{-1}^1 |f(x+t) - f(x)| q_n(t)dt \\ &\leq 2M \int_{-1}^{-\delta} q_n(t)dt + \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\delta}^{\delta} q_n(t)dt + 2M \int_{\delta}^1 q_n(t)dt \leq 4M\sqrt{n}(1-\delta^2)^n + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

para cada $n \geq N_\varepsilon$, lo que demuestra el teorema. $\square$

Teorema 4 Sean $\{A_n\}_n$ y $\{B_n\}_n$ dos sucesiones de matrices Hermitianas asintóticamente equivalentes y $\{\alpha_{n,k}\}_k$ y $\{\beta_{n,k}\}_k$, $0 \leq k \leq n-1$ los valores propios de A_n y B_n respectivamente. Por el **teorema 1** existen constantes, m y M tales que $m \leq \alpha_{n,k}, \beta_{n,k} \leq M$, $n = 1, 2, 3, \dots; k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Sea $f(x)$ una función continua en $[m, M]$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(\alpha_{n,k}) - f(\beta_{n,k})) = 0,$$

y si uno de los límites existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_{n,k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\beta_{n,k}).$$

Demostración. Puesto que f es continua en $[m, M]$, entonces por el **teorema 3** [Stone-Weierstrass], existe $L_\varepsilon \geq 1$ tal que $|f(x) - p_l(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$ siempre que $\ell \geq L_\varepsilon$ y para toda $x \in [m, M]$. Estimemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(\alpha_{n,k}) - f(\beta_{n,k})) \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(\alpha_{n,k}) - f(\beta_{n,k})) + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (p_l(\alpha_{n,k}) - p_l(\beta_{n,k})) - \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (p_l(\alpha_{n,k}) - p_l(\beta_{n,k})) \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(\alpha_{n,k}) - p_l(\alpha_{n,k})) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(\beta_{n,k}) - p_l(\beta_{n,k})) + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (p_l(\alpha_{n,k}) - p_l(\beta_{n,k})) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(\alpha_{n,k}) - p_l(\alpha_{n,k})) \right| + \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(\beta_{n,k}) - p_l(\beta_{n,k})) \right| + \\
&\quad \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (p_l(\alpha_{n,k}) - p_l(\beta_{n,k})) \right| \\
&\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(\alpha_{n,k}) - p_l(\alpha_{n,k})| + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(\beta_{n,k}) - p_l(\beta_{n,k})| + \\
&\quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |p_l(\alpha_{n,k}) - p_l(\beta_{n,k})| \\
&< \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon, \text{ si } n > 1.
\end{aligned}$$

Esto es $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(\alpha_{n,k}) - f(\beta_{n,k})) = 0$, y si uno de los límites existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\alpha_{n,k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\beta_{n,k}).$$

□

Definición 4 Dos sucesiones $\{\alpha_{n,k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{\beta_{n,k}\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $\alpha_{n,k}, \beta_{n,k} \in [m, M]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (f(\alpha_{n,k}) - f(\beta_{n,k})) = 0$ para cualquier función f continua en $[m, M]$ se dice que son asintóticamente igualmente distribuidas.

Definición 5 Dos sucesiones $\{\alpha_{n,k}\}_{n \in \mathbb{N}}$ y $\{\beta_{n,k}\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $\alpha_{n,k}, \beta_{n,k} \in [m, M]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ tales que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(\alpha_{n,k}) - f(\beta_{n,k})| = 0$ para cualquier función f continua en $[m, M]$ se dice que son asintóticamente absolutamente igualmente distribuidas.

Como ejemplo del uso del **teorema 4**, damos la demostración del siguiente corolario sobre los determinantes de sucesiones de matrices asintóticamente equivalentes.

Corolario 4 Sean $\{A_n\}_n$ y $\{B_n\}_n$ sucesiones de matrices Hermitianas asintóticamente equivalentes y $\{\alpha_{n,k}\}_k$, $\{\beta_{n,k}\}_k$, $0 \leq k \leq n-1$, los valores propios de A_n y B_n respectivamente tales que $\alpha_{n,k}, \beta_{n,k} \geq m > 0$, para algún m . Entonces si uno de los límites existe

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\det A_n)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\det B_n)^{1/n}$$

Demostración. Sea $f(x) = \ln x$, por el **teorema 4**, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(\alpha_{n,k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(\beta_{n,k})$, aplicando la función exponencial a ambos lados tenemos

$$\exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(\alpha_{n,k})\right) = \exp\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(\beta_{n,k})\right),$$

ahora por continuidad de $\exp x$ se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(\alpha_{n,k})\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(\beta_{n,k})\right),$$

usando la propiedad de los logaritmos $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, tenemos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k}\right)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{n} \ln\left(\prod_{k=0}^{n-1} \beta_{n,k}\right)\right),$$

y como el producto de los valores propios de una matriz es igual al determinante de la matriz, se sigue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{n} \ln(\det A_n)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{1}{n} \ln(\det B_n)\right).$$

Finalmente usando propiedades del logaritmo para potencias obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\ln(\det A_n)^{1/n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left(\ln(\det B_n)^{1/n}\right),$$

esto es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\det A_n)^{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\det B_n)^{1/n}.$$

□

Es posible mejorar el **teorema 4**, la idea clave es el siguiente resultado de la teoría de matrices:

Teorema 5 [*Teorema de Wielandt-Hoffman*]

Dadas dos matrices Hermitianas A y B con valores propios $\{\alpha_k\}_k$ y $\{\beta_k\}_k$ en orden no-creciente respectivamente entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k - \beta_k|^2 \leq |A - B|^2.$$

Demostración. Dado que A y B son matrices Hermitianas podemos escribir $A = U \operatorname{diag}(\alpha_k) U^*$ y $B = W \operatorname{diag}(\beta_k) W^*$, donde U y W son matrices unitarias. Sabemos por el **lema 8** que la norma Hilbert-Schmidt es invariante bajo la multiplicación por matrices unitarias, entonces:

$$\begin{aligned} |A - B| &= |U \operatorname{diag}(\alpha_k) U^* - W \operatorname{diag}(\beta_k) W^*| = |U \left(\operatorname{diag}(\alpha_k) U^* - U^* W \operatorname{diag}(\beta_k) W^* \right)| \\ &= |\operatorname{diag}(\alpha_k) U^* - U^* W \operatorname{diag}(\beta_k) W^*| = | \left(\operatorname{diag}(\alpha_k) U^* W - U^* W \operatorname{diag}(\beta_k) \right) W^*| \\ &= |\operatorname{diag}(\alpha_k) U^* W - U^* W \operatorname{diag}(\beta_k)| = |\operatorname{diag}(\alpha_k) Q - Q \operatorname{diag}(\beta_k)|, \end{aligned}$$

donde $Q = U^*W = \{q_{i,j}\}$. Notemos que Q es unitaria, en efecto

$$Q^*Q = (U^*W)^*(U^*W) = (W^*U^{**})(U^*W) = W^*UU^*W = WW^* = I$$

y

$$QQ^* = (U^*W)(U^*W)^* = (U^*W)(W^*U^{**}) = U^*WW^*U = U^*U = I.$$

Por otra parte la entrada (ij) de la matriz $\text{diag}(\alpha_k)Q - Q\text{diag}(\beta_k)$ es $(\alpha_i - \beta_j)q_{ij}$, para ver esto sean $D_\alpha = \text{diag}(\alpha_k) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i |e_i\rangle\langle e_i|$, $D_\beta = \text{diag}(\beta_k) = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j |e_j\rangle\langle e_j|$, $Q = \sum_{i,j=0}^{n-1} q_{ij} |e_i\rangle\langle e_j|$ entonces

$$D_\alpha Q = \sum_{i,j=0}^{n-1} \alpha_i q_{ij} |e_i\rangle\langle e_i| |e_j\rangle\langle e_j| = \sum_{i,j=0}^{n-1} \alpha_i q_{ij} |e_i\rangle\langle e_j|,$$

análogamente

$$D_\beta Q = \sum_{i,j=0}^{n-1} \beta_j q_{ij} |e_i\rangle\langle e_j| |e_j\rangle\langle e_j| = \sum_{i,j=0}^{n-1} \beta_j q_{ij} |e_i\rangle\langle e_j|,$$

por lo que:

$$\begin{aligned} D_\alpha Q - D_\beta Q &= \sum_{i,j=0}^{n-1} \alpha_i q_{ij} |e_i\rangle\langle e_j| - \sum_{i,j=0}^{n-1} \beta_j q_{ij} |e_i\rangle\langle e_j| = \sum_{i,j=0}^{n-1} (\alpha_i q_{ij} - \beta_j q_{ij}) |e_i\rangle\langle e_j| \\ &= \sum_{i,j=0}^{n-1} (\alpha_i - \beta_j) q_{ij} |e_i\rangle\langle e_j|. \end{aligned}$$

Entonces

$$|A - B|^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_i - \beta_j|^2 |q_{ij}|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_i - \beta_j|^2 p_{ij}, \quad (1.24)$$

donde $p_{ij} = \frac{1}{n} |q_{ij}|^2$.

Por otro lado tenemos $Q = \sum_{i,j=0}^{n-1} q_{ij} |e_i\rangle\langle e_j|$, $Q^* = \sum_{k,l=0}^{n-1} \bar{q}_{ij} |e_l\rangle\langle e_k|$, y como es Q unitaria

$$Q^*Q = \sum_{j,k,l=0}^{n-1} \bar{q}_{kl} q_{kj} |e_l\rangle\langle e_j| = \sum_{m=0}^{n-1} |e_m\rangle\langle e_m| \text{ y de esto último se sigue :}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \bar{q}_{kl} q_{kj} = \begin{cases} 0 & j \neq l \\ 1 & j = l \end{cases} = \delta_{jl},$$

cuando $j = l$, $\sum_{k,l=0}^{n-1} \bar{q}_{kl} q_{kl} = \sum_{k,l=0}^{n-1} |q_{kl}|^2 = 1$.

Análogamente $QQ^* = \sum_{i,k,l=0}^{n-1} q_{il} \bar{q}_{kl} |e_i\rangle \langle e_k| = \sum_{m=0}^{n-1} |e_m\rangle \langle e_m|$ de donde obtenemos:

$$\sum_{l=0}^{n-1} q_{il} \bar{q}_{kl} = \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases} = \delta_{ik},$$

cuando $i = k$, $\sum_{k,l=0}^{n-1} \bar{q}_{kl} q_{kl} = \sum_{k,l=0}^{n-1} |q_{kl}|^2 = 1$. Por lo tanto $\sum_{i=0}^{n-1} |q_{ij}|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} |q_{ij}|^2 = 1$ y así

$$\sum_{i=0}^{n-1} p_{ij} = \sum_{j=0}^{n-1} p_{ij} = \frac{1}{n}. \quad (1.25)$$

Afirmamos que para todas las matrices P que satisfacen (1.25), el lado derecho de (1.24) es minimizado por $P = \frac{1}{n}I$, donde I es la matriz identidad, esto es

$$\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_i - \beta_j|^2 p_{ij} \geq \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha_i - \beta_i|^2,$$

lo que prueba el resultado.

Para ver esto, sea ℓ el menor entero en $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ tal que P tiene un elemento distinto de cero fuera de la diagonal ya sea en el renglón ℓ o en la columna ℓ . Si hay un elemento distinto de cero en el renglón ℓ , digamos $p_{\ell a}$, entonces por (1.25) también hay un elemento distinto de cero en la columna ℓ fuera de la diagonal, digamos $p_{b\ell}$, con la condición (1.25) satisfecha. Dado que es ℓ el menor entero, entonces $\ell < a$ y $\ell < b$. Sea $x = \min \{p_{\ell a}, p_{b\ell}\}$.

Formemos una nueva matriz P' sumando x a $p_{\ell\ell}$ y p_{ba} , y restando x de $p_{b\ell}$ y $p_{\ell a}$

$$P' = \begin{bmatrix} \ddots & & & & \\ & p_{\ell\ell} + x & p_{\ell a} - x & & \\ & \vdots & \vdots & & \\ & p_{b\ell} - x & p_{ba} + x & & \\ & & & \ddots & \end{bmatrix},$$

P' satisface (1.25) y tiene un cero en la posición (b, ℓ) ó (ℓ, a) pues $x = \min \{p_{\ell a}, p_{b\ell}\}$ y la diferencia $p_{\ell a} - x = 0$ ó $p_{b\ell} - x = 0$.

Ahora usando (1.24) para P ,

$$\begin{aligned} N(P) &= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_i - \beta_j|^2 p_{ij} = |\alpha_\ell - \beta_\ell|^2 p_{\ell\ell} + |\alpha_\ell - \beta_a|^2 p_{\ell a} + |\alpha_b - \beta_\ell|^2 p_{b\ell} + |\alpha_b - \beta_a|^2 p_{ba} \\ &\quad + \sum_{i,j} |\alpha_i - \beta_j|^2 p_{ij}. \end{aligned}$$

Mientras que para P' ,

$$N(P') = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_i - \beta_j|^2 p'_{ij} = |\alpha_\ell - \beta_\ell|^2 (p_{\ell\ell} + x) + |\alpha_\ell - \beta_a|^2 (p_{\ell a} - x) + |\alpha_b - \beta_\ell|^2 (p_{b\ell} - x) \\ + |\alpha_b - \beta_a|^2 (p_{ba} + x) + \sum_{i,j} |\alpha_i - \beta_j|^2 p_{ij}$$

Entonces

$$N(P') - N(P) = |\alpha_\ell - \beta_\ell|^2 x - |\alpha_\ell - \beta_a|^2 x - |\alpha_b - \beta_\ell|^2 x + |\alpha_b - \beta_a|^2 x \\ = -2x(\alpha_\ell - \alpha_b)(\beta_\ell - \beta_a) \leq 0,$$

donde la desigualdad se obtiene del hecho de que x es positivo, pues $x = \min\{p_{\ell a}, p_{b\ell}\}$ con $p_{ij} = \frac{1}{n}|q_{ij}|^2$. Por hipótesis los α^s y β^s están en orden no-creciente y cómo $\ell < a$, $\ell < b$ entonces $\alpha_\ell - \alpha_b \geq 0$ y $\beta_\ell - \beta_a \geq 0$.

Asi obtenemos

$$N(P') \leq N(P).$$

Hemos construido una matriz P' que satisface (1.25), tal que $N(P') \leq N(P)$. Por construcción tiene menos elementos no nulos fuera de la diagonal que P .

Continuando de esta manera, los elementos fuera de la diagonal, todos ellos distintos de cero, pueden ser llevados a cero sin aumentar la norma. Por lo tanto $P = \frac{1}{n}I$, y se sigue que

$$|A - B|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |\alpha_i - \beta_j|^2 p_{ij} \geq \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha_i - \beta_i|^2.$$

□

Lema 13 Dadas dos matrices A y B respectivamente con valores propios α_n y β_n en orden no-creciente, respectivamente, entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k - \beta_k| \leq |A - B|$$

Demostración. Aplicamos la desigualdad de Cauchy-Swartz al vector $(\alpha_k - \beta_k)$

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k - \beta_k| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \beta_k)^2} \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} 1^2} = \sqrt{n \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \beta_k)^2} = \sqrt{n^2 \left(\frac{1}{n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \beta_k)^2}.$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_k - \beta_k| \leq \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k - \beta_k)^2} \leq |A - B|.$$

□

Usando el lema anterior presentamos la prueba de una versión más fuerte del **teorema 4**.

Teorema 6 Sean $\{A_n\}_n$ y $\{B_n\}_n$ sucesiones de matrices Hermitianas asintóticamente equivalentes con valores propios $\{\alpha_{n,k}\}$ y $\{\beta_{n,k}\}$ respectivamente. Por el **teorema 1** existen constantes, m y M tales que $m \leq \alpha_{n,k}, \beta_{n,k} \leq M$, $n = 1, 2, 3, \dots; k = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Sea $f(x)$ una función arbitraria continua en $[m, M]$ entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(\alpha_{n,k}) - f(\beta_{n,k})| = 0. \quad (1.26)$$

Demostración. Del lema 13

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |\alpha_{n,k} - \beta_{n,k}| \leq |A_n - B_n|,$$

de donde se obtiene (1.26) para el caso $f(x) = x$. Por otra parte, para cualquier entero no-negativo j tenemos

$$|\alpha_{n,k}^j - \beta_{n,k}^j| \leq j \max(|m|, |M|)^{j-1} |\alpha_{n,k} - \beta_{n,k}|,$$

para ver esto, sea $a, b \in [m, M]$, usando el desarrollo del binomio, $\frac{a^j - b^j}{a - b} = \sum_{l=1}^j a^{j-l} b^{l-1}$, por lo que

$$\left| \frac{a^j - b^j}{a - b} \right| = \left| \sum_{l=1}^j a^{j-l} b^{l-1} \right| \leq \sum_{l=1}^j |a^{j-l} b^{l-1}| \leq j \max(|m|, |M|)^{j-1}.$$

Lo que prueba (1.26) para funciones de la forma $f(x) = x^j$ para cualquier entero positivo j , de donde se sigue que es válido para cualquier polinomio. Ahora sea f una función arbitraria continua en $[m, M]$, por el **teorema 3 [Stone-Weierstrass]**, dado $\varepsilon > 0$ existe un polinomio p tal que

$$|p(z) - f(z)| < \varepsilon, \quad z \in [m, M].$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(\alpha_{n,k}) - f(\beta_{n,k})| &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(\alpha_{n,k}) - p(\alpha_{n,k}) + p(\alpha_{n,k}) - p(\beta_{n,k}) + p(\beta_{n,k}) - f(\beta_{n,k})| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |f(\alpha_{n,k}) - p(\alpha_{n,k})| + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |p(\alpha_{n,k}) - p(\beta_{n,k})| + \\ &\quad \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |p(\beta_{n,k}) - f(\beta_{n,k})| \\ &\leq 2\varepsilon + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |p(\alpha_{n,k}) - p(\beta_{n,k})| \leq 2\varepsilon + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} M |\alpha_{n,k} - \beta_{n,k}| \\ &\leq 2\varepsilon + M |A_n - B_n| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.\end{aligned}$$

Lo que termina la prueba, pues ε puede hacerse arbitrariamente pequeño. □

Capítulo 2

El álgebra de von Neumann de las matrices circulantes

Las matrices circulantes son frecuentes en muchas partes de la matemática (ver por ejemplo [15], [19], [6]). En este capítulo estudiamos las propiedades fundamentales de las matrices circulantes, algunas conocidas y otras no muy conocidas. Describiremos el álgebra de von Neumann con el conjunto de matrices circulantes.

Definición 6 Una matriz $C = (c_{ij})$, $c_{ij} \in \mathbb{C}$ de tamaño $p \times p$ se llama *circulante* si $c_{ij} = c_{j-i}$, para $i, j = 0, 1, 2, \dots, (p-1)$, donde la operación en el subíndice es módulo p ($c_{(j-i) \bmod p}$),

$$C = \begin{pmatrix} c_0 & c_1 & \cdots & c_{p-1} \\ c_{p-1} & c_0 & \cdots & c_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_0 \end{pmatrix}.$$

Notemos que una matriz circulante de tamaño $p \times p$ está completamente determinada por una p -tupla $(c_0, c_1, \dots, c_{p-1})$. A veces denotamos $C = \text{circ}(c_0, c_1, \dots, c_{p-1})$.

Definamos $\omega = \exp\left(\frac{2\pi i}{p}\right)$, es decir, ω es una raíz p -ésima primitiva de la unidad.

Definición 7 La transformada de Fourier discreta (DFT, por sus siglas en inglés) sobre $\mathbb{C}^p$ es el operador definido por medio de

$$F_p = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{0 \leq j, k \leq p-1} \omega_p^{kj} |e_k\rangle \langle e_j|,$$

donde ω_p es una raíz p -ésima primitiva de la unidad y $\{e_j\}_{0 \leq j \leq p-1}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^p$.

Proposición 1 Para $k \in \mathbb{Z}$ fijo

$$\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \omega^{(k+\ell)j} = \begin{cases} 1 & \text{si } k + \ell \equiv 0 \pmod{p} \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$

Demostración. Si ℓ es tal que $k + \ell \equiv 0 \pmod{p}$ entonces $k + \ell = pm$ para algún $m \in \mathbb{Z}$, entonces

$$\frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \omega^{(k+\ell)j} = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \omega^{(pm)j} = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} (e^{2\pi i})^{mj} = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} 1^{mj} = \frac{1}{p} p = 1.$$

Si $k + \ell \not\equiv 0 \pmod{p}$ entonces $k + \ell = pm + r$ para algún $m \in \mathbb{Z}$ y $1 \leq r \leq p-1$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \omega^{(k+\ell)j} &= \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \omega^{(pm+r)j} = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} \omega^{pmj} \omega^{rj} = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} e^{2\pi i m j} (\omega^j)^r \\ &= \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} (e^{2\pi i})^{mj} (\omega^j)^r = \frac{1}{p} \sum_{j=0}^{p-1} 1^{mj} (\omega^j)^r = 0. \end{aligned}$$

□

Como caso particular de la proposición anterior tenemos el siguiente corolario.

Corolario 5 Sean $i, k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$ entonces

$$\frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} \omega_p^{kl} \omega_p^{-il} = \delta_{ik}.$$

Proposición 2 F_p es un operador unitario.

Demostración.

$$\begin{aligned} F_p F_p^* &= \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{k,l=0}^{p-1} \omega_p^{kl} |e_k\rangle \langle e_l| \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{i,j=0}^{p-1} \bar{\omega}_p^{ij} |e_j\rangle \langle e_i| = \frac{1}{p} \sum_{i,j,k,l=0}^{p-1} \omega_p^{kl} \bar{\omega}_p^{ij} |e_k\rangle \langle e_l| |e_j\rangle \langle e_i| \\ &= \frac{1}{p} \sum_{i,k,l=0}^{p-1} \omega_p^{kl} \bar{\omega}_p^{il} |e_k\rangle \langle e_i| = \frac{1}{p} \sum_{i,k,l=0}^{p-1} \omega_p^{kl} \omega_p^{-il} |e_k\rangle \langle e_i| = \sum_{i,k=0}^{p-1} \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} \omega_p^{kl} \omega_p^{-il} |e_k\rangle \langle e_i| \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} |e_k\rangle \langle e_k| = I_d. \end{aligned}$$

También

$$\begin{aligned}
F_p^* F_p &= \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{i,j=0}^{p-1} \bar{\omega}_p^{ij} |e_j\rangle \langle e_i| \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{k,l=0}^{p-1} \omega_p^{kl} |e_k\rangle \langle e_l| = \frac{1}{p} \sum_{i,j,k,l=0}^{p-1} \bar{\omega}_p^{ij} \omega_p^{kl} |e_j\rangle \langle e_i| |e_k\rangle \langle e_l| \\
&= \frac{1}{p} \sum_{j,k,l=0}^{p-1} \bar{\omega}_p^{kj} \omega_p^{kl} |e_j\rangle \langle e_l| = \frac{1}{p} \sum_{j,k,l=0}^{p-1} \omega_p^{kl} \omega_p^{-kj} |e_j\rangle \langle e_l| = \sum_{j,l=0}^{p-1} \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \omega_p^{kl} \omega_p^{-kj} |e_j\rangle \langle e_l| \\
&= \sum_{j=0}^{p-1} |e_j\rangle \langle e_j| = I_d,
\end{aligned}$$

esto es, $F_p F_p^* = I_d = F_p^* F_p$.

□

Por otra parte consideremos la base canónica $\{e_j\}_{j=0}^{p-1}$ y $F_p^* = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{k,l=0}^{p-1} \bar{\omega}_p^{kl} |e_l\rangle \langle e_k|$, obtenemos:

$$u_q = F_p^* e_q = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{k,l=0}^{p-1} \bar{\omega}_p^{kl} |e_l\rangle \langle e_k| e_q = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{k,l=0}^{p-1} \bar{\omega}_p^{kl} \langle e_k, e_q \rangle e_l = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{l=0}^{p-1} \bar{\omega}_p^{ql} e_l = \sum_{l=0}^{p-1} \omega_p^{-ql} e_l,$$

puesto que un operador unitario lleva bases ortonormales en bases ortonormales se sigue que $\{u_j\}_{j=0}^{p-1}$ es una base ortonormal.

Proposición 3 *El conjunto de matrices circulantes de tamaño $p \times p$ coincide con $\text{span}\{|u_i\rangle \langle u_i| : i = 0, 1, \dots, p-1\}$.*

Demostración. Sea C una matriz circulante, consideremos la siguiente matriz J y notemos que

$$\begin{aligned}
J &= \sum_{l=0}^{p-1} |e_l\rangle \langle e_{l+1}| = \frac{1}{p} \sum_{l,j=0}^{p-1} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \bar{\omega}^{i(l+1-j)} \right) |e_l\rangle \langle e_j| = \frac{1}{p} \sum_{l,j=0}^{p-1} \left(\sum_{i=0}^{p-1} \bar{\omega}^{il} \bar{\omega}^i \omega^{ij} \right) |e_l\rangle \langle e_j| \\
&= \frac{1}{p} \sum_{i,l=0}^{p-1} \sum_{j,k=0}^{p-1} \bar{\omega}^{il} \bar{\omega}^i \omega^{kj} |e_l\rangle \langle e_i| |e_k\rangle \langle e_j| = \frac{1}{p} \sum_{i,l=0}^{p-1} \bar{\omega}^{il} \bar{\omega}^i |e_l\rangle \langle e_i| \sum_{j,k=0}^{p-1} \omega^{kj} |e_k\rangle \langle e_j| \\
&= \frac{1}{p} \sum_{i,l=0}^{p-1} \sum_{r=0}^{p-1} \bar{\omega}^{il} \bar{\omega}^r |e_l\rangle \langle e_i| |e_r\rangle \langle e_r| \sum_{j,k=0}^{p-1} \omega^{kj} |e_k\rangle \langle e_j| \\
&= \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{i,l=0}^{p-1} \bar{\omega}^{il} |e_l\rangle \langle e_i| \sum_{q=0}^{p-1} \bar{\omega}^q |e_q\rangle \langle e_q| \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{j,k=0}^{p-1} \omega^{kj} |e_k\rangle \langle e_j| = F^* \sum_{q=0}^{p-1} \bar{\omega}^q |e_q\rangle \langle e_q| F \\
&= \sum_{q=0}^{p-1} \bar{\omega}^q |F^* e_q\rangle \langle F^* e_q| \\
&= \sum_{q=0}^{p-1} \bar{\omega}^q |u_q\rangle \langle u_q|,
\end{aligned}$$

esto es $J \in \text{span}\{|u_i\rangle\langle u_i| : i = 0, 1, \dots, p-1\}$, por lo tanto al ser un subespacio cerrado bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalar tenemos, $C = \sum_{j=0}^{p-1} c_j J^j \in \text{span}\{|u_i\rangle\langle u_i| : i = 0, 1, \dots, p-1\}$.

Por otra parte sea $C \in \text{span}\{|u_i\rangle\langle u_i| : i = 0, 1, \dots, p-1\}$,

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{k=0}^{p-1} \beta_k |u_k\rangle\langle u_k| = \sum_{k=0}^{p-1} \beta_k |F^* e_k\rangle\langle F^* e_k| = F^* \sum_{k=0}^{p-1} \beta_k |e_k\rangle\langle e_k| F \\
&= \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{i,l=0}^{p-1} \bar{\omega}^{il} |e_i\rangle\langle e_l| \sum_{k=0}^{p-1} \beta_k |e_k\rangle\langle e_k| \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{j,r=0}^{p-1} \omega^{jr} |e_r\rangle\langle e_j| \\
&= \frac{1}{p} \sum_{i,l=0}^{p-1} \sum_{k=0}^{p-1} \bar{\omega}^{il} \beta_k |e_i\rangle\langle e_l| |e_k\rangle\langle e_k| \sum_{j,r=0}^{p-1} \omega^{rj} |e_r\rangle\langle e_j| \\
&= \frac{1}{p} \sum_{i,l=0}^{p-1} \bar{\omega}^{il} \beta_l |e_i\rangle\langle e_l| \sum_{j,r=0}^{p-1} \omega^{rj} |e_r\rangle\langle e_j| = \frac{1}{p} \sum_{i,j,l=0}^{p-1} \bar{\omega}^{il} \beta_l \omega^{jl} |e_i\rangle\langle e_j| \\
&= \frac{1}{p} \sum_{i,j,l=0}^{p-1} \omega^{-il} \omega^{jl} \beta_l |e_i\rangle\langle e_j| \\
&= \sum_{i,j=0}^{p-1} c_{ij} |e_i\rangle\langle e_j|
\end{aligned}$$

donde $c_{ij} = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} \omega^{l(j-i)} \beta_l$. Sea $c_k := c_{0,k}$ y notemos que $c_{j-i} = c_{0,j-i} = \frac{1}{p} \sum_{l=0}^{p-1} \omega^{l(j-i-0)} \beta_l = c_{ij}$, por lo tanto $c_{ij} = c_{j-i}$, es decir C es una matriz circulante. $\square$

Como consecuencia de esta proposición, tenemos una descripción explícita de los valores propios de una matriz circulante.

Corolario 6 Si $C = \text{circ}(c_0, \dots, c_{p-1})$ es una matriz circulante, entonces sus valores propios son

$$\psi_j = \sum_{i=0}^{p-1} c_i \bar{\omega}^{ij}, \quad j = 0, \dots, n-1. \quad (2.1)$$

Sus vectores propios son $\{u_j\}_{j=0}^{p-1}$. Por lo tanto

$$C = F^* \text{diag}(\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{p-1}) F.$$

Aun más $F^* D F$ es circulante para cualquier matriz diagonal D .

Demostración. De la proposición anterior tenemos que $FJF^* = \sum_{k=0}^{p-1} \bar{\omega}^k |e_k\rangle\langle e_k|$, por lo que

$$\begin{aligned} FCF^* &= F \sum_{i=0}^{n-1} c_i J^i F^* = \sum_{i=0}^{n-1} c_i F J^i F^* = \sum_{i=0}^{p-1} c_i \sum_{j=0}^{p-1} \bar{\omega}^{ji} |e_j\rangle\langle e_j| = \sum_{j=0}^{p-1} \left(\sum_{i=0}^{p-1} c_i \bar{\omega}^{ji} \right) |e_j\rangle\langle e_j| \\ &= \sum_{j=0}^{p-1} \psi_j |e_j\rangle\langle e_j|. \end{aligned}$$

De donde obtenemos que

$$C = F^* \sum_{j=0}^{p-1} \psi_j |e_j\rangle\langle e_j| F = \sum_{j=0}^{p-1} \psi_j |F^* e_j\rangle\langle F^* e_j| = \sum_{j=0}^{p-1} \psi_j |u_j\rangle\langle u_j|,$$

esto es, C es una matriz diagonal en la base $\{u_q\}_{q=0}^{p-1}$, así tenemos que $\psi_j = \sum_{i=0}^{p-1} c_i \bar{\omega}^{ij}$ son los valores propios de la matriz C con vectores propios u_j . $\square$

2.1. El álgebra circulante

En esta sección usaremos un resultado clásico probado por von Neumann (1930), «el teorema del doble conmutante (o biconmutante)» que caracteriza a ciertas subálgebras, daremos una descripción de las matrices circulantes como una sub-álgebra de ese tipo.

Sea $N \subseteq \{0, 1, \dots, p-1\}$, con $N \neq \emptyset$, consideremos las siguientes proyecciones

$$P_N = \sum_{i \in N} |u_i\rangle\langle u_i|.$$

Notemos que $|N| \leq p$, esto es, no necesariamente incluye todos los índices.

Proposición 4 $P_N = \sum_{i \in N} |u_i\rangle\langle u_i|$ es proyección.

Demostración.

$$P_N P_N = \sum_{i \in N} |u_i\rangle\langle u_i| \sum_{i \in N} |u_i\rangle\langle u_i| = \sum_{i \in N} \sum_{i \in N} |u_i\rangle\langle u_i| |u_i\rangle\langle u_i| = \sum_{i \in N} |u_i\rangle\langle u_i| = P_N.$$

$\square$

Sea $\mathcal{P} = \{P_N | P_N \text{ es proyección, } N \subseteq \{0, 1, \dots, p-1\}\}$ el conjunto de las $2^p - 1$ proyecciones. Sea $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ el álgebra generada por $\mathcal{P}$, es decir $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ es un álgebra finitamente generada. Si $q \in \mathcal{A}(\mathcal{P})$, entonces $q = P[P_{N_1}, P_{N_2}, \dots, P_{N_{2^p-1}}]$ esto es q es un polinomio en las $2^p - 1$ proyecciones:

$$q = \sum_{(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2^p-1}) \in \mathbb{N}^{2^p-1}} \alpha_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2^p-1}} P_{N_1}^{\ell_1} P_{N_2}^{\ell_2} \cdots P_{N_{2^p-1}}^{\ell_{2^p-1}},$$

donde $P_{N_j}^0 = P_{\{0,1,\dots,p-1\}}$ para cualquier j .

Observación 3 Sean P_{N_k}, P_{N_j} proyecciones $N_j, N_k \subseteq \{0, 1, \dots, p-1\}$.

(i) $P_{N_k} P_{N_j} = \sum_{i \in N_j} |u_i\rangle\langle u_i| \sum_{l \in N_k} |u_l\rangle\langle u_l| = \sum_{i \in N_j} \sum_{l \in N_k} |u_i\rangle\langle u_i||u_l\rangle\langle u_l| = \sum_{i \in N_j \cap N_k} |u_i\rangle\langle u_i| = P_{N_j \cap N_k}$, podemos proceder de manera inductiva para obtener $P_{N_1} P_{N_2}, \dots, P_{N_m} = P_{\bigcap_{j=1}^m N_j}$, de donde se sigue para $k \in \mathbb{N}$, $(P_{N_j})^k = P_{N_j}$.

(ii) Si $\ell_1, \ell_2 \neq 0$, tenemos que $P_{N_k}^{\ell_1} P_{N_j}^{\ell_2} = P_{N_k} P_{N_j} = P_{N_k \cap N_j}$, y si $\ell_1 \neq 0, \ell_2 = 0$ tenemos que $P_{N_k}^{\ell_1} P_{N_j}^{\ell_2} = P_{N_k} P_{\{0,1,\dots,p-1\}} = P_{N_k \cap \{0,1,\dots,p-1\}} = P_{N_k}$.

Proposición 5 El álgebra $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ coincide con $\text{span}\{|u_i\rangle\langle u_i| : i = 0, 1, \dots, p-1\}$.

Demostración. Sea $q \in \mathcal{A}(\mathcal{P})$, entonces usando la observación anterior

$$\begin{aligned} q &= \sum_{(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2p-1}) \in \mathbb{N}^{2p-1}} \alpha_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2p-1}} P_{N_1}^{\ell_1} P_{N_2}^{\ell_2} \cdots P_{N_{2p-1}}^{\ell_{2p-1}} \\ &= \sum_{(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2p-1}) \in \mathbb{N}^{2p-1}} \alpha_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2p-1}} P_{\bigcap_{\{j: \ell_j \neq 0\}} N_j} \\ &= \sum_{(\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2p-1}) \in \mathbb{N}^{2p-1}} \alpha_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{2p-1}} \sum_{k \in \bigcap_{\{j: \ell_j \neq 0\}} N_j} |u_k\rangle\langle u_k| \in \text{span}\{|u_i\rangle\langle u_i| : i = 0, 1, \dots, p-1\}. \end{aligned}$$

Por otro lado sea $f \in \text{span}\{|u_i\rangle\langle u_i| : i = 0, 1, \dots, p-1\}$, esto es $f = \sum_{i \in N_f} \beta_i |u_i\rangle\langle u_i|$, el cual es un polinomio en las P_{N_j} y por lo tanto $f \in \mathcal{A}(\mathcal{P})$.

□

Combinando la **proposición 3** y la **proposición 5** tenemos el siguiente:

Teorema 7 El conjunto de matrices circulantes de tamaño $p \times p$ es el álgebra finitamente generada $\mathcal{A}(\mathcal{P})$.

Por la **proposición 5** podemos tomar los elementos de $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ como polinomios o bien como combinaciones lineales de proyectores $|u_i\rangle\langle u_i|$.

Proposición 6 $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ es un álgebra autoadjunta.

Demostración. Sea $f = \sum_{i \in N_f} \alpha_i |u_i\rangle\langle u_i| \in \mathcal{A}(\mathcal{P})$, por lo que $f^* = \sum_{i \in N_f} \overline{\alpha_i} (|u_i\rangle\langle u_i|)^* = \sum_{i \in N_f} \overline{\alpha_i} |u_i\rangle\langle u_i|$, esto es $f^* \in \mathcal{A}(\mathcal{P})$. □

Proposición 7 $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ es un álgebra conmutativa.

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{A}(\mathcal{P})$

$$\begin{aligned}
fg &= \sum_{i \in N_f} \alpha_i |u_i\rangle \langle u_i| \sum_{j \in N_g} \beta_j |u_j\rangle \langle u_j| = \sum_{i \in N_f} \sum_{j \in N_g} \alpha_i \beta_j |u_i\rangle \langle u_i| |u_j\rangle \langle u_j| \\
&= \sum_{i \in N_f \cap N_g} \alpha_i \beta_i |u_i\rangle \langle u_i| = \sum_{i \in N_g \cap N_f} \beta_i \alpha_i |u_i\rangle \langle u_i| \\
&= \sum_{j \in N_g} \sum_{i \in N_f} \beta_j \alpha_i |u_j\rangle \langle u_j| |u_i\rangle \langle u_i| = \sum_{j \in N_g} \beta_j |u_j\rangle \langle u_j| \sum_{i \in N_f} \alpha_i |u_i\rangle \langle u_i| \\
&= gf.
\end{aligned}$$

□

Notemos que el elemento identidad de $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ puede ser escrito como $\mathbb{I} = \sum_{i \in \{0,1,\dots,p-1\}} |u_i\rangle \langle u_i|$.

Por otra parte sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, y sea M un subconjunto de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ definimos $M' = \{y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : yx = xy \text{ para todo } x \in M\}$, el espacio M' es llamado el *conmutante* de M , recursivamente podemos definir $M'' = (M')', \dots, M^{(k)} = (M^{(k-1)})'$. El espacio M'' es llamado el doble conmutante o biconmutante de M . Enunciaremos dos teoremas, cuya demostración puede ser consultada en [23] y en [14].

Teorema 8 Sea M una subálgebra autoadjunta de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que contiene elemento identidad, con $\dim(\mathcal{H}) = n < \infty$. Entonces $M = M''$.

Teorema 9 Si M es una subálgebra autoadjunta de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ con elemento identidad, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- (a) $M = M''$.
- (b) M es fuertemente cerrada.
- (c) M es débilmente cerrada.

Definición 8 Una subálgebra autoadjunta de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que satisface las condiciones del teorema anterior se denomina *álgebra de Von Neumann*.

Teorema 10 El álgebra conmutativa $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ es de Von Neumann y coincide con el conjunto de matrices circulantes de tamaño $p \times p$.

Demostración. Notemos que $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ es una subálgebra de $\mathcal{B}(\mathbb{C}^p) = \mathcal{M}_{p \times p}(\mathbb{C})$ y $\dim(\mathbb{C}^p) < \infty$, por la **proposición 6** es autoadjunta y por el **teorema 8** $\mathcal{A}(\mathcal{P}) = (\mathcal{A}(\mathcal{P}))''$. Finalmente por el **teorema 9** $\mathcal{A}(\mathcal{P})$ es de Von Neumann y por el **teorema 7** es el conjunto de matrices circulantes de tamaño $p \times p$. □

Capítulo 3

Distribución asintótica de los valores propios de una sucesión de matrices de Toeplitz

Dada la simplicidad de las sumas, los productos y los valores propios de las matrices circulantes, una aproximación natural al estudio de las propiedades asintóticas de sucesiones de matrices de Toeplitz es aproximarlas por sucesiones asintóticamente equivalentes de matrices circulantes y luego aplicar los resultados desarrollados hasta ahora. Tales resultados se derivan más fácilmente cuando se colocan suposiciones fuertes sobre la sucesión de matrices de Toeplitz que mantienen la estructura de las matrices y permiten que sean bien aproximadas por una sucesión natural y simple de matrices circulantes.

3.1. Matrices de Toeplitz

Definición 9 Una matriz de Toeplitz de $n \times n$ es una matriz $T_n = [t_{k,j} : k, j = 0, 1, \dots, n-1]$ donde $t_{kj} = t_{k-j}$ es decir es de la forma

$$T_n = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-(n-1)} \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & \\ t_2 & t_1 & t_0 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \\ t_{n-1} & & & \cdots & t_0 \end{pmatrix}.$$

Observación 4 Toda matriz circulante es de Toeplitz pero el recíproco no se cumple.

Observación 5 Notemos que

$$\delta_{kj} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-j)\lambda} d\lambda, \quad (3.1)$$

pues si $k \neq j$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-j)\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi} e^{i(k-j)\lambda} \left(\frac{1}{i(k-j)} \right) \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

y si $k = j$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-j)\lambda} d\lambda = 1.$$

Sea f una función continua y acotada en $[a, b]$ y $\{t_k : k \in \mathbb{Z}\}$ una sucesión tal que es absolutamente sumable, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |t_k| < \infty$. Sea $f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k e^{ik\lambda} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n t_k e^{ik\lambda}$ la serie de Fourier de f , notemos que

$$\left| f(\lambda) - \sum_{k=-n}^n t_k e^{ik\lambda} \right| = \left| \sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} t_k e^{ik\lambda} + \sum_{k=n+1}^{\infty} t_k e^{ik\lambda} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{-(n+1)} |t_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |t_k| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \quad (3.2)$$

donde el lado derecho de (3.2) no depende de λ , por lo que la convergencia es uniforme para toda λ (para un estudio mas profundo de la convergencia de la serie de Fourier ver [22]). Más aun, podemos recuperar la sucesión $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ a través de f mediante:

$$t_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) e^{-ik\lambda} d\lambda,$$

donde $f(\lambda)$ es una función continua en $[a, b]$ casi donde quiera (c.d), respecto a la medida de Lebesgue. Para una demostración de ello ver el **Apéndice B**.

Definición 10 Sea f Riemann integrable y acotada, definimos la sucesión de matrices $n \times n$ de Toeplitz, $\{T_n(f)\}_{n \geq 1}$, donde

$$T_n(f) = \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) e^{-i(k-j)\lambda} d\lambda; k, j = 0, \dots, n-1 \right].$$

Lema 14 La matriz de Toeplitz $T_n(f)$ es Hermitiana para cada n si y solamente si f es real.

Demostración. Supongamos que $T_n(f)$ es Hermitiana para cada n , esto es $t_k = \overline{t_{-k}}$ para toda k . Notemos que $t_0 = \overline{t_0}$, esto es t_0 es real.

$$\begin{aligned} f(\lambda) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k e^{ik\lambda} = \sum_{k=-\infty}^0 t_k e^{ik\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} t_k e^{ik\lambda} = \sum_{k=0}^{\infty} t_{-k} e^{-ik\lambda} + \sum_{k=0}^{\infty} t_k e^{ik\lambda} \\ &= t_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{t_k} e^{-ik\lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} t_k e^{ik\lambda} = t_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\overline{t_k} e^{-ik\lambda} + t_k e^{ik\lambda}] \\ &= t_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [\overline{t_k e^{-ik\lambda}} + t_k e^{ik\lambda}] = t_0 + 2\operatorname{Re}(t_k e^{ik\lambda}). \end{aligned}$$

Por lo tanto f es real.

Por otra parte, supongamos que $f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k e^{ik\lambda}$ es real, entonces $f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k e^{ik\lambda} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{t_{-k}} e^{ik\lambda}$, por lo que

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (t_k - \overline{t_{-k}}) e^{ik\lambda} = 0. \quad (3.3)$$

Basta mostrar que $\{e^{ik\lambda}\}_{k \geq 1}$ es linealmente independiente. Para ver esto, demostraremos que el conjunto $\{e^{ik_1\lambda}, e^{ik_2\lambda}, \dots, e^{ik_n\lambda}\}$ con $k_j \in \mathbb{Z}$, es linealmente independiente. El conjunto $\{c_1 e^{ik_1\lambda}\}$ es linealmente independiente, en efecto, $c_1 e^{ik_1\lambda} = 0$, se sigue que $c_1 = 0$. El conjunto $\{e^{ik_1\lambda}, e^{ik_2\lambda}\}$ es linealmente independiente, pues para cualesquiera constantes c_1, c_2 tales que

$$c_1 e^{ik_1\lambda} + c_2 e^{ik_2\lambda} = 0, \quad (3.4)$$

derivando respecto a λ ,

$$ik_1 c_1 e^{ik_1\lambda} + ik_2 c_2 e^{ik_2\lambda} = 0. \quad (3.5)$$

Multiplicando (3.4) por ik_1 ,

$$ik_1 c_1 e^{ik_1\lambda} + ik_1 c_2 e^{ik_2\lambda} = 0. \quad (3.6)$$

De (3.5) y (3.6) obtenemos

$$c_2 (ik_2 - ik_1) e^{ik_2\lambda} = 0,$$

si $k_1 \neq k_2$ entonces $c_2 = 0$. Análogamente, multiplicando (3.4) por ik_2 obtenemos $c_1 = 0$. Procediendo de esta manera, sean cualesquiera constantes $c_1, \dots, c_n$ tales que

$$\sum_{j=1}^n c_j e^{ik_j\lambda} = 0,$$

derivando respecto a λ

$$\sum_{j=1}^n ik_j c_j e^{ik_j\lambda} = 0,$$

se sigue que para cada λ

$$0 = \sum_{j=1}^n ik_j c_j e^{ik_j\lambda} - ik_\ell \sum_{j=1}^n c_j e^{ik_j\lambda} = \sum_{j=1}^n c_j (ik_j - ik_\ell) e^{ik_j\lambda},$$

de donde obtenemos que para $k \neq \ell$, $ik_j - ik_\ell \neq 0$, por lo que $c_j = 0$ para cada $j \neq \ell$. Finalmente para $j = \ell$, $c_\ell e^{ik_\ell\lambda} = 0$ de donde obtenemos $c_\ell = 0$. Consecuentemente el conjunto $\{e^{ik_1\lambda}, e^{ik_2\lambda}, \dots, e^{ik_n\lambda}\}$ es linealmente independiente.

Por lo tanto en (3.3) $t_k - \overline{t_{-k}} = 0$, esto es $t_k = \overline{t_{-k}}$ y la matriz $T_n(f)$ es Hermitiana. $\square$

En el caso de que f sea real sean

$$M_f = \sup_{\lambda \in I} f(\lambda) \quad \text{y} \quad m_f = \inf_{\lambda \in I} f(\lambda) \quad (3.7)$$

el supremo y el ínfimo de $f(\lambda)$ respectivamente, tenemos la siguiente estimación.

Lema 15

$$\max(|M_f|, |m_f|) \leq M_{|f|}. \quad (3.8)$$

Demostración. Para cada $x \in I$

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \quad (3.9)$$

tomando supremo sobre los $x \in I$

$$\sup_{x \in I} \{-|f(x)|\} \leq \sup_{x \in I} \{f(x)\} \leq \sup_{x \in I} \{|f(x)|\}$$

usando propiedades del supremo obtenemos

$$-\inf_{x \in I} \{|f(x)|\} \leq \sup_{x \in I} \{f(x)\} \leq \sup_{x \in I} \{|f(x)|\}.$$

Por lo que

$$-m_{|f|} \leq M_f \leq M_{|f|}. \quad (3.10)$$

Por otra parte sabemos que $m_{|f|} \leq M_{|f|}$, así $-M_{|f|} \leq -m_{|f|}$ y de (3.10) obtenemos

$$-M_{|f|} \leq -m_{|f|} \leq M_f \leq M_{|f|}$$

es decir

$$|M_f| \leq M_{|f|}. \quad (3.11)$$

De manera análoga, en (3.9) tomando ínfimo sobre los $x \in I$

$$\inf_{x \in I} \{-|f(x)|\} \leq \inf_{x \in I} \{f(x)\} \leq \inf_{x \in I} \{|f(x)|\}.$$

Usando propiedades del ínfimo obtenemos

$$-\sup_{x \in I} \{|f(x)|\} \leq \inf_{x \in I} \{f(x)\} \leq \inf_{x \in I} \{|f(x)|\}$$

y

$$-M_{|f|} \leq m_f \leq m_{|f|} \leq M_{|f|},$$

es decir

$$|m_f| \leq M_{|f|}. \quad (3.12)$$

Finalmente de (3.11) y (3.12) obtenemos $\max(|M_f|, |m_f|) \leq M_{|f|}$.

□

Utilizando el **lema 15** y el **lema 2**, obtenemos una cota para los valores propios de matrices de Toeplitz Hermitianas y una cota superior para la norma de operadores de matrices de Toeplitz.

Lema 16 Sean $\tau_{n,k}$ los valores propios de una matriz de Toeplitz $T_n(f)$. Si $T_n(f)$ es Hermitiana entonces

$$m_f \leq \tau_{n,k} \leq M_f. \quad (3.13)$$

Si $T_n(f)$ es o no Hermitiana

$$\|T_n(f)\| \leq 2M_{|f|}, \quad (3.14)$$

por lo que la sucesión de matrices $\{T_n(f)\}$ es uniformemente acotada si $\sup\{|f|\} < \infty$.

Demostración. Por el **lema 2**

$$\max_k \tau_{n,k} = \max_x \frac{\langle x, T_n(f) x \rangle}{\|x\|^2} \quad (3.15)$$

$$\min_k \tau_{n,k} = \min_x \frac{\langle x, T_n(f) x \rangle}{\|x\|^2}. \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \langle x, T_n(f) x \rangle &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} t_{k-j} x_k \bar{x}_j = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) e^{-i(k-j)\lambda} d\lambda \right] x_k \bar{x}_j \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} f(\lambda) e^{ij\lambda} e^{-ik\lambda} x_k \bar{x}_j d\lambda = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^{2\pi} f(\lambda) e^{ij\lambda} \bar{x}_j e^{-ik\lambda} x_k d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) \left| \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{ik\lambda} \right|^2 d\lambda. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Usando (3.1), tenemos

$$\|x\|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |x_k|^2 = \sum_{j,k=0}^{n-1} x_k \bar{x}_j \delta_{jk} = \sum_{j,k=0}^{n-1} x_k \bar{x}_j \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-j)\lambda} d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{ik\lambda} \right|^2 d\lambda. \quad (3.18)$$

De (3.17) y (3.18) obtenemos

$$\frac{\langle x, T_n(f) x \rangle}{\|x\|^2} = \frac{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) \left| \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{ik\lambda} \right|^2 d\lambda}{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{ik\lambda} \right|^2 d\lambda} = \frac{\left| \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{ik\lambda} \right|^2 \int_0^{2\pi} f(\lambda) d\lambda}{\left| \sum_{k=0}^{n-1} x_k e^{ik\lambda} \right|^2 \int_0^{2\pi} d\lambda} = \frac{\int_0^{2\pi} f(\lambda) d\lambda}{\int_0^{2\pi} d\lambda}. \quad (3.19)$$

Por otra parte

$$m_f \leq f(\lambda) \leq M_f,$$

integrando respecto a λ

$$2\pi m_f \leq \int_0^{2\pi} f(\lambda) d\lambda \leq 2\pi M_f,$$

$$\frac{2\pi m_f}{\int_0^{2\pi} d\lambda} \leq \frac{\int_0^{2\pi} f(\lambda) d\lambda}{\int_0^{2\pi} d\lambda} \leq \frac{2\pi M_f}{\int_0^{2\pi} d\lambda}.$$

Por lo tanto de (3.19)

$$m_f \leq \frac{\langle x, T_n(f) x \rangle}{\|x\|^2} \leq M_f,$$

y de (3.15) y (3.16) se sigue (3.13).

Por otra parte, si $T_n(f)$ es Hermitiana de (1.13) obtenemos

$$\|T_n(f)\| = \max_k |\tau_{n,k}| = |\tau_{n,M}|.$$

Como $|\tau_{n,M}| \leq \max(|M_f|, |m_f|) \leq M_{|f|}$ entonces

$$\|T_n(f)\| \leq M_{|f|}.$$

Si $T_n(f)$ no es Hermitiana, equivalentemente f no es real, por lo que $f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f$, donde $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ son funciones reales, y en particular

$$\operatorname{Re} f = \frac{f + \bar{f}}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{Im} f = \frac{f - \bar{f}}{2i}.$$

Por lo tanto

$\|T_n(f)\| = \|T_n(\operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f)\| = \|T_n(\operatorname{Re} f) + i T_n(\operatorname{Im} f)\| \leq \|T_n(\operatorname{Re} f)\| + \|T_n(\operatorname{Im} f)\|$
es decir

$$\|T_n(f)\| \leq M_{|\operatorname{Re} f|} + M_{|\operatorname{Im} f|}. \quad (3.20)$$

Por otra parte

$$\frac{|f \pm \bar{f}|}{2} \leq \frac{|f| + |\bar{f}|}{2} \leq \frac{M_{|f|} + M_{|f|}}{2} = M_{|f|} \quad (3.21)$$

y puesto que $|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z| \leq |z|$, entonces en (3.20) obtenemos

$$\|T_n(f)\| \leq 2M_{|f|}.$$

□

3.2. Matrices de Toeplitz de banda

En esta sección consideramos un caso más simple de matrices de Toeplitz y estudiamos su comportamiento asintótico mediante una matriz circulante asintóticamente equivalente.

Consideremos una sucesión $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ absolutamente sumable y definamos la correspondiente sucesión de matrices de Toeplitz $n \times n$, $\{T_n\}_{n \geq 1}$, donde $T_n = [t_{k-j} : k, j = 0, 1, \dots, n-1]$. Supongamos que existe un $m < \infty$ para el cual $t_k = 0$, $|k| > m$, en este caso se dice que T_n es una matriz de Toeplitz de bandas. Una matriz de Toeplitz de bandas tiene la apariencia

$$T_n = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-m} & & & & & & \\ t_1 & t_0 & & & & & & & & \\ \vdots & & & & & & 0 & & & \\ & & \ddots & & \ddots & & & & & \\ t_m & & & \ddots & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & t_m & \cdots & t_1 & t_0 & t_{-1} & \ddots & t_{-m} & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & & \ddots & & t_{-m} & \\ & & & & & & & & \vdots & \\ 0 & & & & & & & & t_0 & t_{-1} \\ & & & & & t_m & \cdots & t_1 & t_0 & \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

$$C_n = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-m} & & & & & t_m & \cdots & t_2 & t_1 \\ t_1 & t_0 & \cdots & t_{-(m-1)} & t_{-m} & & & & & & & t_2 \\ & & & & & & & & & \ddots & & \vdots \\ t_2 & t_1 & \cdots & t_{-(m-2)} & t_{-(m-1)} & t_{-m} & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & & & & & t_m \\ t_m & & & & & & & & 0 & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & & \\ & & t_m & \cdots & t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & t_{-m} & & & \\ & & & \ddots & & & & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & & & & & & & \\ & & & & & t_m & & & & & & t_{-m} \\ & t_{-m} & & & & & & & & & & \vdots \\ & \vdots & & & & & \ddots & & & & & t_{-2} \\ & & & \ddots & & & & & & & & \\ t_{-2} & & & & & & & & & & & t_{-1} \\ t_{-1} & t_{-2} & \cdots & t_{-m} & & 0 & & t_m & \cdots & t_2 & t_1 & t_0 \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

Esta matriz puede ser escrita como

$$C_n = \begin{pmatrix} c_0^{(n)} & \cdots & & c_{n-1}^{(n)} \\ c_{n-1}^{(n)} & c_0^{(n)} & \cdots & \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ c_1^{(n)} & \cdots & c_{n-1}^{(n)} & c_0^{(n)} \end{pmatrix}, \quad (3.24)$$

con vector circulante $(c_0^{(n)}, \dots, c_{n-1}^{(n)})$ donde

$$c_k^{(n)} = \begin{cases} t_{-k} & k = 0, 1, \dots, m \\ t_{n-k} & k = n - m, \dots, n - 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.25)$$

Si una matriz de Toeplitz está determinada por una función f y por lo tanto se denota por $T_n(f)$, la matriz circulante definida por (3.24) y (3.25), se denotará de manera similar $C_n(f)$. La función f se mostrará explícitamente cuando sea útil hacerlo, por ejemplo cuando los resultados que se están desarrollando involucren a f .

La matriz C_n es intuitivamente un candidato para una matriz simple asintóticamente equivalente a T_n .

Lema 17 Sea $\{t_k\}_{k=-m}^m$ una sucesión, f una función Riemann integrable y acotada. Las matrices T_n y C_n definidas en (3.22) y (3.24) son asintóticamente equivalentes.

Demostración.

Sea $T_n = \left[\sum_{\ell=0}^m \sum_{j=0}^{n-(\ell+1)} t_{-\ell} |e_j\rangle \langle e_{j+\ell}| + \sum_{\ell=1}^m \sum_{j=0}^{n-(\ell+1)} t_{\ell} |e_{j+\ell}\rangle \langle e_j| \right]$ como en (3.22) y la matriz circulante $C_n = \left[T_n + \sum_{\ell=n-m}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1-\ell} t_{-(\ell-n)} |e_k\rangle \langle e_{k+\ell}| + \sum_{\ell=n-m}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1-\ell} t_{(\ell-n)} |e_{k+\ell}\rangle \langle e_k| \right]$ como en (3.24).

Dado que

$$\begin{aligned} T_n - C_n &= - \sum_{\ell=n-m}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1-\ell} t_{-(\ell-n)} |e_k\rangle \langle e_{k+\ell}| - \sum_{\ell=n-m}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1-\ell} t_{(\ell-n)} |e_{k+\ell}\rangle \langle e_k| \\ &= - \sum_{\ell=n-m}^{n-1} t_{-(\ell-n)} \sum_{k=0}^{n-1-\ell} |e_k\rangle \langle e_{k+\ell}| - t_{-(\ell-n)} \sum_{k=0}^{n-1-\ell} t_{(\ell-n)} |e_{k+\ell}\rangle \langle e_k| \end{aligned}$$

Por lo tanto, usando la norma Hilbert- Schmidt (1.14) tenemos

$$\begin{aligned} |T_n - C_n|^2 &= \frac{1}{n} \sum_{\ell=n-m}^{n-1} |t_{-(\ell-n)}|^2 (n - \ell) + |t_{-(\ell-n)}|^2 (n - \ell) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^m j (|t_j|^2 + |t_{-j}|^2) \\ &\leq \frac{m}{n} \sum_{j=0}^m (|t_j|^2 + |t_{-j}|^2) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Por otra parte, ya que $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es absolutamente sumable, entonces $\sum_{k=-m}^m |t_k| < \infty$ y del **lema 16** obtenemos $\|T_n(f)\| \leq 2M_{|f|}$.

Como C_n es circulante, sus valores propios son de la forma

$$\lambda_{n,k} = \sum_{j=0}^{n-1} c_j^{(n)} e^{-\frac{2\pi i j k}{n}},$$

entonces los valores propios de C_n^* son $\overline{\lambda_{n,k}}$ y los de $C_n^* C_n$ son $|\lambda_{n,k}|^2$.

Tenemos que $f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k e^{ik\lambda}$, por lo que

$$\begin{aligned}
|\lambda_{n,k}|^2 &= \left| \sum_{j=0}^{n-1} c_j^{(n)} e^{-\frac{2\pi i j k}{n}} \right|^2 = \left| \sum_{j=0}^m t_{-j} e^{-\frac{2\pi i (-j) k}{n}} + \sum_{j=n-m}^{n-1} t_{(n-j)} e^{-\frac{2\pi i (n-j) k}{n}} \right|^2 \\
&= \left| \sum_{j=0}^m t_{-j} e^{-\frac{2\pi i (-j) k}{n}} + \sum_{j=-m}^{-1} t_{-j} e^{-\frac{2\pi i (-j) k}{n}} \right|^2 \\
&= \left| \sum_{j=-m}^m t_{-j} e^{-\frac{2\pi i (-j) k}{n}} \right|^2 = \left| \sum_{j=-m}^m t_j e^{\frac{2\pi i j k}{n}} \right|^2 = \left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} t_j e^{\frac{2\pi i j k}{n}} \right|^2 \\
&= \left| f\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right|^2
\end{aligned}$$

Así los valores propios de $C_n^* C_n$ son $|\lambda_{n,k}|^2 = \left| f\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right|^2 \leq M_{|f|}^2$ y de (1.12) obtenemos $\|C_n\|^2 \leq M_{|f|}^2$, por lo tanto $T_n \sim C_n$.

□

Lema 18 Sean $T_n(f)$ y $C_n(f)$ definidas como en (3.22) y (3.24), con valores propios $\tau_{n,k}$ y $\psi_{n,k}$ respectivamente, entonces para cualquier entero positivo s

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\tau_{n,k}^s - \psi_{n,k}^s) = 0.$$

Más aún, para $n < \infty$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\tau_{n,k}^s - \psi_{n,k}^s) \right| \leq \frac{K}{\sqrt{n}},$$

donde K no depende de n .

Demostración. Por el lema 17, $T_n \sim C_n$ y por el teorema 2 obtenemos que $\{T_n^s\}_n \sim \{C_n^s\}_n$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\tau_{n,k}^s - \psi_{n,k}^s) = 0$. Por otra parte

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\tau_{n,k}^s - \psi_{n,k}^s) \right| &= |T_n^s - C_n^s| = \left| \sum_{k=0}^{s-1} T_n^k (T_n - C_n) C_n^{s-1-k} \right| \leq \sum_{k=0}^{s-1} |T_n^k (T_n - C_n) C_n^{s-1-k}| \\
&\leq \sum_{k=0}^{s-1} \|T_n^k\| \|(T_n - C_n) C_n^{s-1-k}\| \leq \sum_{k=0}^{s-1} \|T_n^k\| \|(T_n - C_n)\| \|C_n^{s-1-k}\| \\
&\leq |T_n - C_n| s M_1 M_2 \leq s M_1 M_2 \sqrt{\frac{m}{n} \sum_{k=0}^m (|t_k|^2 + |t_{-k}|^2)}.
\end{aligned}$$

Así $\left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\tau_{n,k}^s - \psi_{n,k}^s) \right| \leq \frac{K}{\sqrt{n}}$, con $K = sM_1M_2 \sqrt{m \sum_{k=0}^m (|t_k|^2 + |t_{-k}|^2)}$ que no depende de n . $\square$

El siguiente lema muestra que el segundo límite converge y proporciona una manera de evaluar el límite.

Lema 19 Sea $C_n(f)$ construida de $T_n(f)$ como en (3.24) y sean $\psi_{n,k}$ los valores propios de $C_n(f)$, entonces para cualquier entero positivo s

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi_{n,k}^s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^s(\lambda) d\lambda.$$

Si $T_n(f)$ y $C_n(f)$ son Hermitianas, entonces para cualquier función $F(x)$ continua en $[m_f, M_f]$ tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F(\psi_{n,k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(f(\lambda)) d\lambda.$$

Demostración. Notemos que

$$\psi_{n,j} = \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{(n)} e^{-\frac{2\pi i j k}{n}} = \sum_{k=0}^m t_{-k} e^{-\frac{2\pi i j k}{n}} + \sum_{k=n-m}^{n-1} t_{n-k} e^{-\frac{2\pi i j k}{n}} = \sum_{k=-m}^m t_k e^{-\frac{2\pi i j k}{n}} = f\left(\frac{2\pi}{n}j\right), \quad (3.26)$$

esto es los valores propios de $C_n(f)$ son los valores $f(\lambda)$ con λ uniformemente espaciado entre 0 y 2π . Sean $\lambda_k = \frac{2\pi}{n}k$, $\Delta\lambda = \frac{2\pi}{n}$, entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi_{n,k}^s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left[f\left(\frac{2\pi}{n}k\right) \right]^s = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} [f(\lambda_k)]^s \frac{2\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{n-1} [f(\lambda_k)]^s \Delta\lambda. \quad (3.27)$$

Puesto que f es continua, la existencia del límite (3.27) queda asegurada, por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi_{n,k}^s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (f(\lambda))^s d\lambda. \quad (3.28)$$

Por otro lado, si $T_n(f)$ y $C_n(f)$ son Hermitianas, entonces $\psi_{n,k}$ y $f(\lambda)$ son reales, entonces de (3.28) y del **teorema Stone-Weierstrass** dado $\varepsilon > 0$ existe $N \geq 1$ tal que para cada $n \geq N$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F(\psi_{n,k}) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(f(\lambda)) d\lambda \right| = \\
& \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F(\psi_{n,k}) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} p_n(\psi_{n,k}) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(f(\lambda)) d\lambda + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p_n(f(\lambda)) d\lambda \right| \leq \\
& \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (F(\psi_{n,k}) - p_n(\psi_{n,k})) \right| + \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (F(f(\lambda)) - p_n(f(\lambda))) d\lambda \right| \leq \\
& \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} |F(\psi_{n,k}) - p_n(\psi_{n,k})| + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(f(\lambda)) - p_n(f(\lambda))| d\lambda < \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{2} d\lambda = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Finalmente del **lema 16** obtenemos $m_f \leq \psi_{n,k}, \tau_{n,k} \leq M_f$, lo que termina la prueba. $\square$

Teorema 11 Si $T_n(f)$ es una matriz de Toeplitz de bandas con valores propios $\tau_{n,k}$, entonces para cualquier entero positivo s

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tau_{n,k}^s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^s(\lambda) d\lambda.$$

Si f es real, entonces para cualquier función $F(x)$ continua en $[m_f, M_f]$ tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F(\tau_{n,k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(f(\lambda)) d\lambda.$$

Demostración. Por el **lema 17** $T_n(f) \sim C_n(f)$, por lo que del **teorema 2** $T_n^s(f) \sim C_n^s(f)$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\psi_{n,k}^s - \tau_{n,k}^s) = 0,$$

por (3.28) uno de los límites existe y nuevamente por **teorema 2** obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tau_{n,k}^s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^s(\lambda) d\lambda.$$

La segunda parte del teorema se prueba de manera análoga a la del **lema 19**. $\square$

3.3. Matrices de Toeplitz de la clase de Wiener

En esta sección estudiamos el caso cuando f pertenece al álgebra de Wiener, es decir, el caso donde la sucesión $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ es absolutamente sumable. Como en el caso de las sucesiones

de matrices de Toeplitz de bandas, la aproximación básica es encontrar una sucesión de matrices circulantes $\{C_n(f)\}_{n \geq 1}$ que sea asintóticamente equivalente a la sucesión de matrices de Toeplitz $\{T_n(f)\}_{n \geq 1}$. En este caso, la construcción de $C_n(f)$ es más complicada. La elección de una sucesión apropiada de matrices circulantes para aproximar una sucesión de matrices Toeplitz no es única, por lo que somos libres de elegir una construcción con las propiedades más deseables.

Del **Apéndice C**, si $f \in \mathcal{W}$ diremos indistintamente que f pertenece al álgebra de Wiener o bien que f es de la clase de Wiener, con esto en mente pasamos al tema central de esta sección.

Sea f en la clase de Wiener. La serie de Fourier de f es

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k e^{ik\lambda} \quad (3.29)$$

$$t_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) e^{-ik\lambda} d\lambda. \quad (3.30)$$

Definimos la matriz circulante $C_n(f)$ con vector circulante $c^{(n)} = (c_0^{(n)}, c_1^{(n)}, \dots, c_{n-1}^{(n)})$

$$\text{donde } c_k^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) e^{\frac{2\pi i j k}{n}}. \quad (3.31)$$

Dado que f es Riemann integrable, sean $\lambda_j = \frac{2\pi j}{n}$, $\Delta\lambda = \frac{2\pi}{n}$, tenemos para un k fijo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} c_k^{(n)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) e^{\frac{2\pi i j k}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) e^{\frac{2\pi i j k}{n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) e^{\frac{2\pi i j k}{n}} \frac{2\pi}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{n-1} f(\lambda_j) e^{i\lambda_j k} \Delta\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\lambda) e^{ik\lambda} d\lambda = t_{-k}, \end{aligned}$$

esto es, $c_k^{(n)}$ son simplemente las aproximaciones a la integral de Riemann o del coeficiente de la transformada de Fourier de f , t_{-k} .

Por otro lado, usando el **corolario 5** y **corolario 6**

$$\begin{aligned}\psi_{n,m} &= \sum_{k=0}^{n-1} c_k^{(n)} e^{\frac{-2\pi i m k}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) e^{\frac{2\pi i j k}{n}} \right) e^{\frac{-2\pi i m k}{n}} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i (j-m)k}{n}} \right) = f\left(\frac{2\pi m}{n}\right).\end{aligned}$$

Esto es los valores propios de $C_n(f)$ son

$$\psi_{n,m} = f\left(\frac{2\pi m}{n}\right), \quad (3.32)$$

así $C_n(f)$ tiene la propiedad (3.26) de la aproximación circulante (3.25) utilizada en el caso de bandas. La ecuación (3.32) a su vez define $C_n(f)$ ya que si se nos dice que $C_n(f)$ es una matriz circulante con valores propios $f\left(\frac{2\pi m}{n}\right); m = 0, 1, \dots, n-1$, entonces

$$c_k^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} \psi_{n,m} e^{\frac{2\pi i m k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{m=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi m}{n}\right) e^{\frac{2\pi i m k}{n}}$$

como en (3.31).

Las conclusiones del **lema 19** se mantienen para el caso más general con $C_n(f)$ construida como en (3.31).

Lema 20 Sea $C_n(f)$ construida como en (3.31) a partir de f , sean $\psi_{n,k}$ los valores propios de $C_n(f)$, entonces para cualquier entero positivo s

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \psi_{n,k}^s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^s(\lambda) d\lambda.$$

Si $C_n(f)$ es Hermitiana, entonces para cualquier función $F(x)$ continua en $[m_f, M_f]$ tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F(\psi_{n,k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(f(\lambda)) d\lambda.$$

Demostración.

La demostración es análoga a la del **lema 19**, usando (3.32).

□

Lema 21 Sea f una función que satisface (3.29) y (3.30), definimos la matriz circulante $C_n(f)$ como en (3.31) entonces

$$i) \ c_k^{(n)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t_{-k+mn} ; \ k = 0, 1, \dots, n-1.$$

$$ii) \text{ Si } f(\lambda) \text{ es real y } m_f > 0 \text{ entonces } (C_n(f))^{-1} = C_n\left(\frac{1}{f}\right).$$

$$iii) \text{ Dadas dos funciones } f(\lambda) \text{ y } g(\lambda), \text{ entonces } C_n(f)C_n(g) = C_n(fg).$$

$$iv) \text{ Dadas dos funciones } f(\lambda) \text{ y } g(\lambda), \text{ entonces } C_n(f) + C_n(g) = C_n(f+g).$$

Demostración.

$$i) \text{ Notemos que } \sum_{m=-\infty}^{\infty} t_{-k+mn} \text{ es convergente ya que } f \text{ es de la clase de Wiener. De (3.29)}$$

$$\text{con } \lambda = \frac{2\pi j}{n} \text{ obtenemos } f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} t_{\ell} e^{\frac{i\ell 2\pi j}{n}} \text{ entonces en (3.31)}$$

$$\begin{aligned} c_k^{(n)} &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f\left(\frac{2\pi j}{n}\right) e^{\frac{2\pi i j k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} t_{\ell} e^{\frac{i\ell 2\pi j}{n}} \right) e^{\frac{2\pi i j k}{n}} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} t_{\ell} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{i\ell 2\pi j}{n}} e^{\frac{2\pi i j k}{n}} \\ &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} t_{\ell} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{i 2\pi (k+\ell) j}{n}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, de la **proposición 1** para $k + \ell \equiv 0 \pmod{n}$ esto es, para $\ell = -k + mn$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ obtenemos

$$c_k^{(n)} = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} t_{\ell} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{i 2\pi (k+\ell) j}{n}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} t_{-k+mn}.$$

$$ii) \text{ Por hipótesis y de el lema 16 } 0 < m_f \leq \psi_{n,k} \leq M_f, \text{ esto es } \psi_{n,k} = f\left(\frac{2\pi k}{n}\right) > 0,$$

entonces $\det[C_n(f)] = \prod_{k=0}^{n-1} \psi_{n,k} \neq 0$, por lo tanto $C_n(f)$ es no singular y $(C_n(f))^{-1}$ existe.

Sea $D_n(f) = \text{diag}\left(f\left(\frac{2\pi}{n}\right), f\left(\frac{2\pi(2)}{n}\right), \dots, f\left(\frac{2\pi(n-1)}{n}\right)\right)$ entonces por el **corolario 6**

$$(C_n(f))^{-1} = F_n^* (D_n(f))^{-1} F_n = F_n^* D_n(1/f) F_n = C_n(1/f).$$

iii) Por el **corolario 6**, $C_n(f) = F_n^* D_n(f) F_n$ y $C_n(g) = F_n^* D_n(g) F_n$, donde $D_n(f) = \text{diag}\left(f\left(\frac{2\pi}{n}\right), f\left(\frac{2\pi(2)}{n}\right), \dots, f\left(\frac{2\pi(n-1)}{n}\right)\right)$ y $D_n(g) = \text{diag}\left(g\left(\frac{2\pi}{n}\right), g\left(\frac{2\pi(2)}{n}\right), \dots, g\left(\frac{2\pi(n-1)}{n}\right)\right)$, por lo tanto

$$C_n(f) C_n(g) = (F_n^* D_n(f) F_n)(F_n^* D_n(g) F_n) = F_n^* D_n(f) D_n(g) F_n = F_n^* D_n(fg) F_n = C_n(fg),$$

con valores propios $f\left(\frac{2\pi k}{n}\right)g\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$, ya que fg pertenece al álgebra de Wiener pues f y g pertenecen al álgebra.

iv) Por el **corolario 6**, obtenemos que, $C_n(f) = F_n^* D_n(f) F_n$ y $C_n(g) = F_n^* D_n(g) F_n$, entonces

$$\begin{aligned} C_n(f) + C_n(g) &= F_n^* D_n(f) F_n + F_n^* D_n(g) F_n = F_n^* (D_n(f) + D_n(g)) F_n = F_n^* D_n(f+g) F_n \\ &= C_n(f+g), \end{aligned}$$

con valores propios $f\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + g\left(\frac{2\pi k}{n}\right)$. Como f y g pertenecen al álgebra de Wiener también $f+g$. □

Ya que estamos interesados en hallar una sucesión de matrices circulantes asintóticamente equivalente a la sucesión de matrices de Toeplitz, consideremos la serie de Fourier de f truncada, $\hat{f}_n(\lambda) = \sum_{m=-(n-1)}^{n-1} t_m e^{im\lambda}$ que depende únicamente de $\{t_m : m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm (n-1)\}$. Definamos la matriz circulante $C_n(\hat{f}_n)$ con vector circulante $(\hat{c}_0^{(n)}, \hat{c}_1^{(n)}, \dots, \hat{c}_{n-1}^{(n)})$; de manera análoga que en la prueba del inciso i) del **lema 21**:

$$\begin{aligned} \hat{c}_k^{(n)} &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \hat{f}_n\left(\frac{2\pi j}{n}\right) e^{\frac{2\pi i j k}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{\ell=-(n-1)}^{n-1} t_\ell e^{\frac{2\pi i j \ell}{n}} \right) e^{\frac{2\pi i j k}{n}} \\ &= \sum_{\ell=-(n-1)}^{n-1} t_\ell \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i (k+\ell) j}{n}} = \sum_{\ell=-(n-1)}^{n-1} t_\ell \delta_{(k+\ell) \bmod n} \\ &= \sum_{\ell \in I_k} t_\ell \end{aligned} \tag{3.33}$$

donde

$$I_k = \{-(n-1) \leq \ell \leq (n-1) : k + \ell \equiv 0 \pmod{n}\}, \tag{3.34}$$

con $k + \ell \equiv 0 \pmod{n}$ si y solamente si $\ell = -k + mn$, $m \in \mathbb{Z}$.

Para $k = 0$ obtenemos en (3.34),

$$I_0 = \{-(n-1) \leq mn \leq (n-1) : m \in \mathbb{Z}\} = \{-(n-1) \leq mn \leq (n-1) : m = 0\} = \{0\}.$$

Para $k \neq 0$. Si $-(n-1) \leq -k + mn \leq (n-1)$, entonces $m \leq \frac{k-1}{n} + 1 \leq \frac{n-2}{n} + 1$, en efecto si $-k + mn \leq n-1$, entonces $m \leq \frac{k-1}{n} + 1 \leq \frac{(n-1)-1}{n} + 1 = \frac{n-2}{n} + 1$, por lo tanto $m \leq 1$ pues m es entero y n es fijo.

De manera análoga si $-(n-1) \leq -k + mn$ entonces $(\frac{1}{n} - 1) \leq \frac{k+1}{n} - 1 \leq m$ por lo tanto $0 \leq m$ pues m es entero y n es fijo.

Así $m \geq 0$ y $m \leq 1$, con m entero, por lo tanto obtenemos que $m = 0$ o $m = 1$.

Si $m = 0$ entonces $-(n-1) \leq -k \leq n-1$ y si $m = 1$ entonces $-(n-1) \leq n-k \leq n-1$. Por lo que en (3.34) obtenemos

$$I_k = \{-(n-1) \leq -k + mn \leq (n-1) : m = 0 \text{ o } m = 1\} = \{-k, n-k\},$$

de manera equivalente podemos escribir

$$I_k = \begin{cases} \{0\} & \text{si } k = 0 \\ \{-k, n-k\} & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

Entonces en (3.33)

$$\hat{c}_k^{(n)} = \begin{cases} t_0 & k = 0 \\ t_{-k} + t_{n-k} & k = 1, 2, \dots, (n-1). \end{cases} \quad (3.35)$$

Dado que $C_n(\hat{f}_n)$ también es una matriz de Toeplitz, reescribimos a $C_n(\hat{f}_n)$ como una matriz de este tipo, $T'_n = \{t'_{k-j}\}$ usando (3.35)

$$t'_k = \begin{cases} t_k + t_{n+k} & k = -(n-1), \dots, -1 \\ t_0 & k = 0 \\ t_{-(n-k)} + t_k & k = 1, 2, \dots, (n-1), \end{cases} \quad (3.36)$$

por lo tanto

$$C_n(\hat{f}_n) = T'_n = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} + t_{n-1} & t_{-2} + t_{n-2} & \cdots & t_{-(n-1)} + t_1 \\ t_1 + t_{-(n-1)} & t_0 & t_{-1} + t_{n-1} & & \\ t_2 + t_{-(n-2)} & t_1 + t_{-(n-1)} & t_0 & & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ t_{n-1} + t_1 & & & \cdots & t_0 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

La norma Hilbert-Schmidt de una matriz de Toeplitz toma una forma particularmente simple. Sea $T_n(f) = t_{k-j}$, y notemos que hay n términos t_0 en la diagonal principal, $(n-1)$ términos t_{-1} y t_1 , $(n-2)$ términos t_{-2} y t_2 , agrupandolos obtenemos

$$|T_n(f)|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |t_{k-j}|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} (n - |k|) |t_k|^2. \quad (3.38)$$

Lema 22 Sea $T_n(f) = \{t_{k-j}\}$ donde $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |t_k| < \infty$ y

$$f(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k e^{ik\lambda}, \quad \hat{f}_n(\lambda) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} t_k e^{ik\lambda}.$$

Definamos las matrices circulantes $C_n(f)$ y $C_n(\hat{f}_n)$ como en (3.31) y (3.35)-(3.37). Entonces

$$C_n(f) \sim C_n(\hat{f}_n) \sim T_n(f).$$

Demostración. Dado que $C_n(f)$ y $C_n(\hat{f}_n)$ son matrices circulantes, por el **corolario 6** tienen los mismos valores propios. Por lo tanto de (3.32) y de la definición de norma de Hilbert-Schmidt tenemos

$$\left| C_n(f) - C_n(\hat{f}_n) \right|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - \hat{f}_n\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right|^2 \quad (3.39)$$

como $\hat{f}_n(\lambda)$ converge uniformemente a $f(\lambda)$, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $N \geq 1$ tal que para cada $n \geq N$ y para cada k

$$\left| f\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - \hat{f}_n\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right|^2 \leq \varepsilon \quad \text{para cada } n \geq N.$$

Por lo tanto en (3.39)

$$\left| C_n(f) - C_n(\hat{f}_n) \right|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| f\left(\frac{2\pi k}{n}\right) - \hat{f}_n\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \right|^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon = \varepsilon,$$

como ε es arbitrario, entonces

$$\left| C_n(f) - C_n(\hat{f}_n) \right|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.40)$$

También

$$|f(\lambda)| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k e^{ik\lambda} \right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |t_k| < \infty, \text{ esto es } f \text{ es acotada y por lo tanto}$$

$$\|C_n(f)\| = \max \lambda_k = |f(2k\pi/n)|^2 \leq S, \quad (3.41)$$

análogamente

$$\|C_n(\hat{f}_n)\| \leq S, \quad (3.42)$$

así de (3.40)-(3.42) obtenemos

$$C_n(f) \sim C_n(\hat{f}_n). \quad (3.43)$$

Por otra parte usando (1.14), (3.36) y (3.38)

$$\begin{aligned}
|T_n(f) - C_n(\hat{f}_n)|^2 &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} |t_{k-j} - t'_{k-j}|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} (n - |k|) |t_k - t'_k|^2 \\
&= \sum_{k=-(n-1)}^{-1} \frac{n - (-k)}{n} |t_k - (t_k + t_{n+k})|^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n - k}{n} |t_k - (t_{-(n-k)} + t_k)|^2 \\
&= \sum_{k=-(n-1)}^{-1} \frac{n + k}{n} |t_{n+k}|^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n - k}{n} |t_{-(n-k)}|^2 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} |t_k|^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} |t_{-k}|^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n} (|t_k|^2 + |t_{-k}|^2) \tag{3.44}
\end{aligned}$$

recordemos que $\|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1$ por lo tanto $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |t_k|^2 \leq \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |t_k| \right)^2$, esto es $\{t_k\}_{k \geq 1}$ es cuadrado sumable, entonces dado $\varepsilon > 0$ podemos elegir un N tal que

$$\sum_{k=N}^{\infty} (|t_k|^2 + |t_{-k}|^2) \leq \varepsilon. \tag{3.45}$$

Entonces para $n > N$

$$\begin{aligned}
|T_n(f) - C_n(\hat{f}_n)|^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n} (|t_k|^2 + |t_{-k}|^2) \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k}{n} (|t_k|^2 + |t_{-k}|^2) + \sum_{k=N}^{n-1} \frac{k}{n} (|t_k|^2 + |t_{-k}|^2) \\
&\leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{N-1} k (|t_k|^2 + |t_{-k}|^2) \right) + \sum_{k=N}^{\infty} (|t_k|^2 + |t_{-k}|^2) \\
&\leq \varepsilon + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=0}^{N-1} k (|t_k|^2 + |t_{-k}|^2) \right).
\end{aligned}$$

Tomando límite cuando $n \rightarrow \infty$ obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |T_n(f) - C_n(\hat{f}_n)|^2 < \varepsilon.$$

Dado que ε es arbitrario,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |T_n(f) - C_n(\hat{f}_n)| = 0. \tag{3.46}$$

Por lo tanto de (3.14), (3.42) y (3.46), obtenemos

$$T_n(f) \sim C_n(\hat{f}_n). \quad (3.47)$$

Finalmente aplicando el **teorema 1** a (3.43) y (3.47) obtenemos

$$C_n(f) \sim C_n(\hat{f}) \sim T_n(f).$$

□

Ahora tenemos una sucesión de matrices circulantes $\{C_n(f)\}_n$ asintóticamente equivalente a la sucesión $\{T_n(f)\}_n$ y los valores propios y productos de las matrices circulantes se conocen exactamente. Los **lemas 19, 22** y el **teorema 2** se pueden aplicar para generalizar el **teorema 11**:

Teorema 12 Sea $\{T_n(f)\}_{n \geq 1}$ una sucesión de matrices de Toeplitz tal que $f(\lambda)$ es un elemento del álgebra de Wiener. Sean $\tau_{n,k}$ los valores propios de $T_n(f)$ y sea s un entero positivo. Entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tau_{n,k}^s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^s(\lambda) d\lambda.$$

Si f es real, entonces para cualquier función $F(x)$ continua en $[m_f, M_f]$ tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} F(\tau_{n,k}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(f(\lambda)) d\lambda.$$

Demostración. Por el **lema 22** $T_n(f) \sim C_n(f)$, por lo que del **teorema 2** $\{T_n^s(f)\}_n \sim \{C_n^s(f)\}_n$ y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (\psi_{n,k}^s - \tau_{n,k}^s) = 0,$$

por (3.28) uno de los límites existe y nuevamente por **teorema 2** obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \tau_{n,k}^s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f^s(\lambda) d\lambda.$$

La segunda parte del teorema se prueba de manera análoga a la del **lema 19**.

□

Capítulo 4

Operadores completamente positivos de Toeplitz

En este capítulo estudiamos una clase particular de operadores en espacios de Hilbert, que generalizan a los operadores positivos. En las secciones precedentes consideramos $h = (\mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es antilineal en la primera componente y lineal en la segunda componente. Denotaremos por $B(h) = M_{n \times n}(\mathbb{C})$ el conjunto de matrices con entradas complejas $n \times n$.

4.1. Preliminares

Definición 11 Una matriz $x \in B(h)$ es positiva si satisface la condición $\langle u, x u \rangle \geq 0$ para cada $u \in h$.

Lema 23 Sea $x \in B(h)$, $x = 0$ si y solamente si $\langle u, x v \rangle = 0$ para toda $u, v \in h$.

Demostración. Supongamos que $x = 0$ por lo tanto para cada v , $x v = 0$, así para cada $u, v \in h$ $\langle u, x v \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0$.

Por otra parte supongamos que $\langle u, x v \rangle = 0$ para cada $u, v \in h$, sea $u = x v$, por lo tanto para cada $v \in h$, $\langle x v, x v \rangle = 0$ esto es $x v = 0$ para cada $v \in h$, por lo tanto $x = 0$. $\square$

Lema 24 Sea $x \in B(h)$, si para cada $u \in h$ $\langle u, x u \rangle = 0$ entonces $x = 0$.

Demostración. Sean $a, b \in \mathbb{C}$ y consideremos $au + bv \in h$, por hipótesis

$$\begin{aligned} 0 &= \langle au + bv, x(au + bv) \rangle = \langle au + bv, axu + bxv \rangle = \langle au + bv, axu \rangle + \langle au + bv, bxv \rangle \\ &= \overline{\langle axu, au + bv \rangle} + \overline{\langle bxv, au + bv \rangle} = \overline{\langle axu, au \rangle} + \overline{\langle axu, bv \rangle} + \overline{\langle bxv, au \rangle} + \overline{\langle bxv, bv \rangle} \\ &= \langle au, axu \rangle + \langle bv, axu \rangle + \langle au, bxv \rangle + \langle bv, bxv \rangle = \bar{a}a\langle u, xu \rangle + \bar{b}a\langle v, xu \rangle + \bar{a}b\langle u, xv \rangle + \bar{b}b\langle v, xv \rangle \\ &= \bar{b}a\langle v, xu \rangle + \bar{a}b\langle u, xv \rangle. \end{aligned}$$

Si $a = 1 = b$ tenemos

$$\langle v, xu \rangle + \langle u, xv \rangle = 0. \quad (4.1)$$

Si $a = i, b = 1$ tenemos

$$i\langle v, xu \rangle - i\langle u, xv \rangle = 0,$$

equivalentemente

$$\langle u, xv \rangle - \langle v, xu \rangle = 0 \quad (4.2)$$

resolviendo (4.1) y (4.2) obtenemos $\langle u, xv \rangle = 0$, por el **lema 23** $x = 0$.

□

Lema 25 *Toda matriz positiva es hermitiana.*

Demostración. Para cada $u \in h$ tenemos

$$\langle u, xu \rangle = \overline{\langle u, xu \rangle} = \langle xu, u \rangle = \langle u, x^*u \rangle,$$

esto es para cada $u \in h$

$$0 = \langle u, xu \rangle - \langle u, x^*u \rangle = \langle u, (x - x^*)u \rangle,$$

por el **lema 24** $x - x^* = 0$, es decir $x = x^*$.

□

Definición 12 *Un operador completamente positivo es un operador lineal $\phi : B(h) \rightarrow B(h)$ con la representación*

$$\phi(x) = \sum_{i=0}^r K_i^* x K_i \quad (4.3)$$

donde $r \leq n^2$, $K_i \in B(h)$, $x \in B(h)$.

Observación 6 *A la representación dada en (4.3) se le conoce como representación de Kraus. La representación de Kraus no es única.*

Lema 26 *Si K_i es unitaria, $0 \leq i \leq r \leq n^2$ y $\sum_{i=0}^r K_i K_i^* = I$ entonces ϕ preserva la traza.*

Demostración. Sea $x \in B(h)$ y $r \leq n^2$

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\phi(x)) &= \text{Tr}\left(\sum_{i=0}^r K_i^* x K_i\right) = \sum_{i=0}^r \text{Tr}(K_i^* x K_i) = \sum_{i=0}^r \text{Tr}(K_i K_i^* x) = \text{Tr}\left(\sum_{i=0}^r K_i K_i^* x\right) = \text{Tr}(Ix) \\ &= \text{Tr}(x). \end{aligned}$$

□

Lema 27 Si $x \in B(h)$ es positiva entonces $\phi(x)$ es positivo.

Demostración. Sea $x \in B(h)$ positiva, para cada $u \in h$ y $r \leq n^2$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle u, \phi(x)u \rangle &= \langle u, \sum_{i=0}^r K_i^* x K_i \rangle = \sum_{i=0}^r \langle u, K_i^* x K_i u \rangle = \sum_{i=0}^r \langle K_i u, x K_i u \rangle \\ &= \sum_{i=0}^r \langle v_i, x v_i \rangle \geq 0, \quad \text{para cada } v_i = K_i u \in h. \end{aligned}$$

□

Definición 13 Un operador completamente positivo de Toeplitz es de la forma

$$\phi(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j S_n^{*j} x S_n^j + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j S_n^j x S_n^{*j} \quad (4.4)$$

donde $S_n = \sum_{i=0}^{n-2} |e_i\rangle\langle e_{i+1}|$.

Definición 14 Un operador completamente positivo circulante es de la forma

$$\tilde{\phi}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j J_n^{*j} x J_n^j \quad (4.5)$$

donde $J_n = \sum_{i=0}^{n-1} |e_i\rangle\langle e_{i+1}|$.

4.2. Operadores completamente positivos de Toeplitz asociados a una función de la clase de Wiener

Sea $f(\lambda) = e^{-i\lambda}$, $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ donde $t_{-1} = 1$ y $t_j = 0$ si $j \neq -1$. Notemos que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |t_k| = 1 < \infty$, es decir f pertenece al álgebra de Wiener y por lo tanto podemos definir $T_n(f)$.

$$T_n(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = S_n. \quad (4.6)$$

Construimos la matriz circulante $C_n(f)$ a partir de (4.6)

$$C_n(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = J_n. \quad (4.7)$$

Observemos que $T_n(f)$ y $C_n(f)$ son del tipo de matrices Toeplitz y circulante usadas en la **definición 13** y **definición 14**, de modo que para cada n definimos como en (4.4) el siguiente operador

$$\phi_n(x) = T_n(f)^* x T_n(f). \quad (4.8)$$

Para ilustrar la acción de un operador de este tipo revisemos el caso para $n = 4$. Si $x \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ entonces

$$\begin{aligned} \phi_4(x) &= T_4(f)^* x T_4(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & x_{03} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{30} & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{00} & x_{01} & x_{02} & x_{03} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ 0 & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la acción de ϕ_n consiste en un recorrimiento uniforme en cada subdiagonal de x .

La matriz (4.6) puede ser escrita como $T_n(f) = \sum_{i=0}^{n-2} |e_i\rangle\langle e_{i+1}|$ donde $\{e_j\}_{j=0}^{n-1}$ es la base canónica, la acción de $T_n(f)$ sobre la base canónica es

$$T_n(f) e_j = \begin{cases} 0 & j = 0 \\ e_{j-1} & j = 1, 2, \dots, n-1 \end{cases} \quad (4.9)$$

con $e_{n-1} \notin \text{Im}(T_n(f))$.

De manera análoga para $T_n(f)^*$ obtenemos

$$T_n(f)^* e_j = \begin{cases} 0 & j = n-1 \\ e_{j+1} & j = 0, 1, \dots, n-2 \end{cases} \quad (4.10)$$

con $e_0 \notin \text{Im}(T_n(f)^*)$.

Lema 28 Para $\ell = 0, \dots, n-1$ definimos los siguientes subespacios $\mathcal{B}_\ell \subset \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ por

$$\mathcal{B}_{-\ell} = \text{span}\{|e_i\rangle\langle e_{i+\ell}| : i = 0, 1, \dots, n-1-\ell\},$$

$$\mathcal{B}_\ell = \text{span}\{|e_{i+\ell}\rangle\langle e_i| : i = 0, 1, \dots, n-1-\ell\}.$$

Cada subespacio es invariante bajo la acción de ϕ_n .

Demostración. Para $\ell = 0$, sea $x \in \mathcal{B}_0$

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= T_n(f)^* x T_n(f) = T_n(f)^* \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j |e_j\rangle\langle e_j| T_n(f) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j T_n(f)^* |e_j\rangle\langle e_j| T_n(f) = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j |T_n(f)^* e_j\rangle\langle T_n(f)^* e_j| \\ &= \sum_{j=0}^{n-2} \alpha_j |e_{j+1}\rangle\langle e_{j+1}| \in \mathcal{B}_0. \end{aligned}$$

Para $\ell \neq 0$, sea $x \in \mathcal{B}_\ell$

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= T_n(f)^* x T_n(f) = T_n(f)^* \sum_{j=0}^{n-1-\ell} \alpha_j |e_{j+\ell}\rangle\langle e_j| T_n(f) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1-\ell} \alpha_j T_n(f)^* |e_{j+\ell}\rangle\langle e_j| T_n(f) = \sum_{j=0}^{n-1-\ell} \alpha_j |T_n(f)^* e_{j+\ell}\rangle\langle T_n(f)^* e_j| \\ &= \sum_{j=0}^{n-1-\ell} \alpha_j |e_{j+1+\ell}\rangle\langle e_{j+1}| \in \mathcal{B}_\ell. \end{aligned}$$

Por otra parte sea $x \in \mathcal{B}_{-\ell}$

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= T_n(f)^* x T_n(f) = T_n(f)^* \sum_{j=0}^{n-1-\ell} \alpha_j |e_j\rangle\langle e_{j+\ell}| T_n(f) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1-\ell} \alpha_j T_n(f)^* |e_j\rangle\langle e_{j+\ell}| T_n(f) = \sum_{j=0}^{n-1-\ell} \alpha_j |T_n(f)^* e_j\rangle\langle T_n(f)^* e_{j+\ell}| \\ &= \sum_{j=0}^{n-1-\ell} \alpha_j |e_{j+1}\rangle\langle e_{j+1+\ell}| \in \mathcal{B}_{-\ell}. \end{aligned}$$

□

Lema 29 Los subespacios $\mathcal{B}_\ell$ son mutuamente ortogonales respecto al producto interno de Hilbert-Schmidt y $M_{n \times n}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{\ell=-(n-1)}^{n-1} \mathcal{B}_\ell$.

Demostración. Sea $j, m \geq 0$ $j \neq m$, consideremos $\mathcal{B}_j = \text{span}\{|e_{i+j}\rangle\langle e_i| : i = 0, 1, \dots, n-1-j\}$, $\mathcal{B}_m = \text{span}\{|e_{i+m}\rangle\langle e_i| : i = 0, 1, \dots, n-1-m\}$, evidentemente $\mathcal{B}_j \cap \mathcal{B}_m = \{0\}$.

Notemos que para cada $0 \leq i \leq n-1-j$ y para cada $0 \leq k \leq n-1-m$

$$\begin{aligned} \langle |e_{i+j}\rangle\langle e_i|, |e_{k+m}\rangle\langle e_k| \rangle_{H-S} &= \text{Tr}(|e_{i+j}\rangle\langle e_i|^* |e_{k+m}\rangle\langle e_k|) = \text{Tr}(|e_i\rangle\langle e_{i+j}| |e_{k+m}\rangle\langle e_k|) \\ &= \delta_{i+j, k+m} \text{Tr}(|e_i\rangle\langle e_k|) = \delta_{i+j, k+m} \delta_{i, k} \\ &= \delta_{j, m}. \end{aligned}$$

Sean $x \in \mathcal{B}_j$, $y \in \mathcal{B}_m$, entonces

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle_{H-S} &= \text{Tr}(x^* y) = \text{Tr} \left(\sum_{i=0}^{n-1-j} \bar{\alpha}_i |e_i\rangle\langle e_{i+j}| \sum_{k=0}^{n-1-m} \beta_k |e_{k+m}\rangle\langle e_k| \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1-j} \sum_{k=0}^{n-1-m} \bar{\alpha}_i \beta_k \text{Tr}(|e_i\rangle\langle e_{i+j}| |e_{k+m}\rangle\langle e_k|) \\ &= \sum_{i=0}^{n-1-j} \sum_{k=0}^{n-1-m} \bar{\alpha}_i \beta_k \delta_{j, m} \\ &= 0 \quad \text{para } j \neq m. \end{aligned}$$

De manera similar se prueba que $\mathcal{B}_{-j} \perp \mathcal{B}_{-m}$ para $j, m \geq 0$, $j \neq m$.

Por otra parte supongamos que $-(n-1) < m < 0 < j < n-1$ y sean $\mathcal{B}_j = \text{span}\{|e_{i+j}\rangle\langle e_i| : i = 0, 1, \dots, n-1-j\}$, $\mathcal{B}_{-m} = \text{span}\{|e_k\rangle\langle e_{k+m}| : k = 0, 1, \dots, n-1-k\}$. Es claro que $\mathcal{B}_j \cap \mathcal{B}_{-m} = \{0\}$. Sean $|e_{i+j}\rangle\langle e_i| \in \mathcal{B}_j$, $|e_k\rangle\langle e_{k+m}| \in \mathcal{B}_{-m}$, entonces:

$$\langle |e_{i+j}\rangle\langle e_i|, |e_k\rangle\langle e_{k+m}| \rangle_{H-S} = \text{Tr}(|e_{i+j}\rangle\langle e_i|^* |e_k\rangle\langle e_{k+m}|) = \delta_{i+j, k} \delta_{i, k+m}. \quad (4.11)$$

Supongamos que $\delta_{i+j, k} \delta_{i, k+m} = 1$, entonces $i+j = k$ y $k+m = i$, esto es $(i+j) + m = i$ por lo que $j = -m$ que no puede suceder pues $m < 0 < j$. Así $\delta_{i+j, k} \delta_{i, k+m} \neq 1$.

Por lo tanto en (4.11)

$$\langle |e_{i+j}\rangle\langle e_i|, |e_k\rangle\langle e_{k+m}| \rangle_{H-S} = \delta_{i+j, k} \delta_{i, k+m} = 0.$$

Por otra parte es claro que $\mathcal{B}_j \cap \mathcal{B}_m = \{0\}$, para $j \neq m$, por lo tanto $M_{n \times n}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{\ell=0}^{n-1} \mathcal{B}_\ell$.

□

Notemos que $\mathcal{B}_0$ es el conjunto de matrices diagonales $n \times n$, por lo que $\dim(\mathcal{B}_0) = n$, $\mathcal{B}_{-1}$ es el conjunto de matrices en las que sus elementos son distintos de cero únicamente en la diagonal superior a la principal, por lo que $\dim(\mathcal{B}_{-1}) = n - 1$, continuando con este razonamiento obtenemos que

$$\dim(\mathcal{B}_\ell) = n - |\ell|, \quad \ell = -(n-1), \dots, 0, \dots, n-1. \quad (4.12)$$

Observación 7 Como era de esperarse $\sum_{\ell=-(n-1)}^{n-1} \dim(\mathcal{B}_\ell) = n^2$, en efecto

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=-(n-1)}^{n-1} \dim(\mathcal{B}_\ell) &= \sum_{\ell=-(n-1)}^{n-1} (n - |\ell|) = \sum_{\ell=-(n-1)}^{n-1} n - \sum_{\ell=-(n-1)}^{n-1} |\ell| \\ &= \sum_{\ell=-(n-1)}^{-1} n + \sum_{\ell=0}^{n-1} n - 2 \sum_{\ell=0}^{n-1} \ell = n(n-1) + nn - 2 \left(\frac{(n-1)n}{2} \right) \\ &= (n-1)n + n^2 - (n-1)n \\ &= n^2. \end{aligned}$$

Por otra parte, consideremos $\mathcal{B}_{-\ell} = \text{span}\{|e_i\rangle\langle e_{i+\ell}| : i = 0, 1, \dots, n-1-\ell\}$, para $\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$, definamos el isomorfismo

$$\begin{aligned} j_{-\ell} : \mathcal{B}_{-\ell} &\longrightarrow \mathbb{C}^{\dim(\mathcal{B}_{-\ell})} \\ j_{-\ell} : |e_i\rangle\langle e_{i+\ell}| &\mapsto e_i. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Lema 30 Cada $j_{-\ell}$ preserva el producto interno

$$\langle x, y \rangle_{H-S} = \langle j_{-\ell}(x), j_{-\ell}(y) \rangle.$$

Demostración. Sean $|e_i\rangle\langle e_{i+\ell}|, |e_j\rangle\langle e_{j+\ell}| \in \mathcal{B}_{-\ell}$

$$\begin{aligned} \langle |e_i\rangle\langle e_{i+\ell}|, |e_j\rangle\langle e_{j+\ell}| \rangle_{H-S} &= \text{Tr}(|e_i\rangle\langle e_{i+\ell}|^* |e_j\rangle\langle e_{j+\ell}|) = \text{Tr}(|e_{i+\ell}\rangle\langle e_i| |e_j\rangle\langle e_{j+\ell}|) \\ &= \delta_{i,j} \text{Tr}(|e_{i+\ell}\rangle\langle e_{i+\ell}|) = \delta_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \langle j_{-\ell}(|e_i\rangle\langle e_{i+\ell}|), j_{-\ell}(|e_j\rangle\langle e_{j+\ell}|) \rangle. \end{aligned}$$

□

Lema 31 Bajo el isomorfismo $j_{-\ell} : \mathcal{B}_{-\ell} \longrightarrow \mathbb{C}^{\dim(\mathcal{B}_{-\ell})}$ se tiene que

$$\phi_n(|e_k\rangle\langle e_{k+\ell}|) = j_{-\ell}^{-1}(T_{-\ell}^* j_{-\ell}(|e_k\rangle\langle e_{k+\ell}|)) \quad (4.14)$$

donde

$$T_{-\ell} = \sum_{i=0}^{n-1-\ell} |e_i\rangle\langle e_{i+1}|, \quad \ell = 0, 1, \dots, n-1.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
j_{-\ell}^{-1} (T_{-\ell}^* j_{-\ell}(|e_k\rangle\langle e_{k+\ell}|)) &= j_{-\ell}^{-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1-\ell} |e_i\rangle\langle e_{i+1}|^* j_{-\ell}(|e_k\rangle\langle e_{k+\ell}|) \right) \quad 0 \leq k \leq n-1-\ell \\
&= j_{-\ell}^{-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1-\ell} |e_{i+1}\rangle\langle e_i| e_k \right) = j_{-\ell}^{-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1-\ell} \langle e_i, e_k \rangle e_{i+1} \right) \\
&= j_{-\ell}^{-1} (e_{k+1}) = |e_{k+1}\rangle\langle e_{k+1+\ell}| = |T_n(f)^* e_k\rangle\langle T_n(f)^* e_{k+\ell}| \\
&= T_n(f)^* |e_k\rangle\langle T_n(f)^* e_{k+\ell}| = T_n(f)^* |e_k\rangle\langle e_{k+\ell}| T_n(f) \\
&= \phi_n(|e_k\rangle\langle e_{k+\ell}|).
\end{aligned}$$

□

Para $\mathcal{B}_\ell = \text{span}\{|e_{i+\ell}\rangle\langle e_i| : i = 0, 1, \dots, n-1-\ell\}$, con $\ell = 0, 1, 2, \dots, n-1$, definamos el isomorfismo

$$\begin{aligned}
j_\ell : \mathcal{B}_\ell &\longrightarrow \mathbb{C}^{\dim(\mathcal{B}_\ell)} \\
j_\ell : |e_{i+\ell}\rangle\langle e_i| &\mapsto e_i.
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Lema 32 *Cada j_ℓ preserva el producto interno*

$$\langle x, y \rangle_{H-S} = \langle j_\ell(x), j_\ell(y) \rangle.$$

Demostración. Sean $|e_{i+\ell}\rangle\langle e_i|, |e_{j+\ell}\rangle\langle e_j| \in \mathcal{B}_\ell$

$$\begin{aligned}
\langle |e_{i+\ell}\rangle\langle e_i|, |e_{j+\ell}\rangle\langle e_j| \rangle_{H-S} &= \text{Tr}(|e_{i+\ell}\rangle\langle e_i|^* |e_{j+\ell}\rangle\langle e_j|) = \text{Tr}(|e_i\rangle\langle e_{i+\ell}| |e_{j+\ell}\rangle\langle e_j|) \\
&= \delta_{i+\ell, j+\ell} \text{Tr}(|e_i\rangle\langle e_j|) = \delta_{i, j} = \langle e_i, e_j \rangle \\
&= \langle j_\ell(|e_{i+\ell}\rangle\langle e_i|), j_\ell(|e_{j+\ell}\rangle\langle e_j|) \rangle.
\end{aligned}$$

□

Lema 33 *Bajo el isomorfismo $j_\ell : \mathcal{B}_\ell \longrightarrow \mathbb{C}^{\dim(\mathcal{B}_\ell)}$ se tiene que*

$$\phi_n(|e_{k+\ell}\rangle\langle e_k|) = j_\ell^{-1} (T_{-\ell}^* j_\ell(|e_{k+\ell}\rangle\langle e_k|)) \tag{4.16}$$

donde

$$T_{-\ell} = \sum_{i=0}^{n-1-\ell} |e_i\rangle\langle e_{i+1}|, \quad \ell = 0, 1, \dots, n-1.$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
j_\ell^{-1} (T_{-\ell}^* j_\ell(|e_{k+\ell}\rangle\langle e_k|)) &= j_\ell^{-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1-\ell} |e_{i+1}\rangle\langle e_i|^* j_\ell(|e_{k+\ell}\rangle\langle e_k|) \right) \quad 0 \leq k \leq n-1-\ell \\
&= j_\ell^{-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1-\ell} |e_{i+1}\rangle\langle e_i| e_k \right) = j_\ell^{-1} \left(\sum_{i=0}^{n-1-\ell} \langle e_i, e_k \rangle e_{i+1} \right) \\
&= j_\ell^{-1} (e_{k+1}) = |e_{k+1+\ell}\rangle\langle e_{k+1}| = |T_n(f)^* e_{k+\ell}\rangle\langle T_n(f)^* e_k| \\
&= T_n(f)^* |e_{k+\ell}\rangle\langle T_n(f)^* e_k| = T_n(f)^* |e_{k+\ell}\rangle\langle e_k| T_n(f) \\
&= \phi_n(|e_{k+\ell}\rangle\langle e_k|).
\end{aligned}$$

□

Consideremos la base canónica y la matriz $J_n = \sum_{i=0}^{n-1} |e_i\rangle\langle e_{i+1}|$ definida en (4.7), para cada n definimos como en (4.5) el siguiente operador

$$\tilde{\phi}_n(x) = J_n^* x J_n. \quad (4.17)$$

Como ejemplo de la acción del operador (4.17) tomemos $n = 4$ y $x = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & x_{03} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{30} & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$ por lo que

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_4(x) &= J_4(f)^* x J_4(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & x_{03} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{30} & x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{30} & x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{00} & x_{01} & x_{02} & x_{03} \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & x_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_{33} & x_{30} & x_{31} & x_{32} \\ x_{03} & x_{00} & x_{01} & x_{02} \\ x_{13} & x_{10} & x_{11} & x_{12} \\ x_{23} & x_{20} & x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Por lo tanto la acción de $\tilde{\phi}_n$ consiste en un recorrimiento cíclico en cada subdiagonal de x .

La acción de J_n sobre la base canónica es

$$J_n e_j = \begin{cases} e_{j-1} & j = 1, 2, \dots, n-1 \\ e_{n-1} & j = 0 \end{cases} = e_{j-1} \quad (4.18)$$

donde la operación en los índices es módulo n : $(j-1) \bmod n$.

De manera análoga para J_n^* obtenemos

$$J_n(f)^* e_j = \begin{cases} e_{j+1} & j = 0, 1, \dots, n-2 \\ e_0 & j = n-1 \end{cases} = e_{j+1} \quad (4.19)$$

donde la operación en los índices es módulo n : $(j+1) \bmod n$.

Lema 34 Para $\ell = 0, 1, \dots, n-1$ definimos los siguientes subespacios $\mathbf{B}_\ell \subset \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ por

$$\mathbf{B}_\ell = \text{span}\{|e_i\rangle\langle e_{i+\ell}| : i = 0, 1, \dots, n-1\}.$$

Cada subespacio es invariante bajo la acción de $\tilde{\phi}_n$.

Demostración. Sea $x \in \mathbf{B}_\ell$, para $\ell = 0, 1, \dots, n-1$ tenemos

$$\begin{aligned}
\tilde{\phi}_n(x) &= J_n^* x J_n = J_n(f)^* \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j |e_j\rangle \langle e_{j+\ell}| J_n(f) \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j J_n^* |e_j\rangle \langle e_{j+\ell}| J_n = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j |J_n^* e_j\rangle \langle e_{j+\ell}| J_n \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j |J_n^* e_j\rangle \langle J_n^* e_{j+\ell}| \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j |e_{j+1}\rangle \langle e_{j+1+\ell}| \in \mathbf{B}_\ell.
\end{aligned}$$

□

Notemos que $\dim(\mathbf{B}_\ell) = n$ para toda $\ell = 0, 1, \dots, n-1$.

Lema 35 *Los subespacios $\mathbf{B}_\ell$ son mutuamente ortogonales respecto al producto interno de Hilbert-Schmidt y $M_{n \times n}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{\ell=0}^{n-1} \mathbf{B}_\ell$.*

Demostración. Sean $|e_i\rangle \langle e_{i+j}| \in \mathbf{B}_j$, $|e_k\rangle \langle e_{k+m}| \in \mathbf{B}_m$ para $j \neq m$ y notemos que

$$\begin{aligned}
\langle |e_i\rangle \langle e_{i+j}|, |e_k\rangle \langle e_{k+m}| \rangle_{H-S} &= \text{Tr}(|e_i\rangle \langle e_{i+j}|^* |e_k\rangle \langle e_{k+m}|) = \text{Tr}(|e_{i+j}\rangle \langle e_i| |e_k\rangle \langle e_{k+m}|) \\
&= \delta_{i,k} \text{Tr}(|e_{i+j}\rangle \langle e_{k+m}|) = \delta_{i+j, i+m} \\
&= \delta_{j,m} \quad \text{para } j \neq m.
\end{aligned}$$

Sean $x \in \mathbf{B}_j$, $y \in \mathbf{B}_m$, con $j \neq m$

$$\begin{aligned}
\langle x, y \rangle_{H-S} &= \text{Tr}(x^* y) = \text{Tr} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \bar{\alpha}_i |e_{i+j}\rangle \langle e_i| \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k |e_k\rangle \langle e_{k+m}| \right) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\alpha}_i \beta_k \text{Tr}(|e_{i+j}\rangle \langle e_i| |e_k\rangle \langle e_{k+m}|) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} \bar{\alpha}_i \beta_k \delta_{j,m} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por otra parte es claro que $\mathbf{B}_j \cap \mathbf{B}_m = \{0\}$, para $j \neq m$, por lo tanto $M_{n \times n}(\mathbb{C}) = \bigoplus_{\ell=0}^{n-1} \mathbf{B}_\ell$.

□

Para $\ell = 0, 1, \dots, n-1$ definimos un isomorfismo

$$\begin{aligned}
j_\ell : \mathbf{B}_\ell &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\
j_\ell : |e_i\rangle \langle e_{i+\ell}| &\mapsto e_i.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Lema 36 Cada j_ℓ preserva el producto interno

$$\langle x, y \rangle_{H-S} = \langle j_\ell(x), j_\ell(y) \rangle.$$

Demostración. Sean $|e_i\rangle\langle e_{i+\ell}|, |e_j\rangle\langle e_{j+\ell}| \in \mathbf{B}_\ell$

$$\begin{aligned} \langle |e_i\rangle\langle e_{i+\ell}|, |e_j\rangle\langle e_{j+\ell}| \rangle_{H-S} &= \text{Tr}(|e_i\rangle\langle e_{i+\ell}|^* |e_j\rangle\langle e_{j+\ell}|) = \text{Tr}(|e_{i+\ell}\rangle\langle e_i| |e_j\rangle\langle e_{j+\ell}|) \\ &= \delta_{i,j} \text{Tr}(|e_{i+\ell}\rangle\langle e_{j+\ell}|) = \delta_{i,j} = \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \langle j_\ell(|e_i\rangle\langle e_{i+\ell}|), j_\ell(|e_j\rangle\langle e_{j+\ell}|) \rangle. \end{aligned}$$

□

Lema 37 Bajo el isomorfismo $j_\ell : \mathbf{B}_\ell \longrightarrow \mathbb{C}^n$ se tiene que

$$\tilde{\phi}_n(|e_i\rangle\langle e_{i+\ell}|) = \tilde{\phi}_n(j_\ell^{-1}(e_i)) = j_\ell^{-1}(J_n^* e_i) \quad (4.21)$$

donde

$$J_n = \sum_{j=0}^{n-1} |e_j\rangle\langle e_{j+1}|, \quad e_j \in \mathbb{C}^n.$$

Demostración.

$$\begin{aligned} j_\ell^{-1}(J_n^* e_i) &= j_\ell^{-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} |e_j\rangle\langle e_{j+1}|^* e_i \right) = j_\ell^{-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} |e_{j+1}\rangle\langle e_j| e_i \right) \\ &= j_\ell^{-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} \langle e_j, e_i \rangle e_{j+1} \right) = j_\ell^{-1}(e_{i+1}) = |e_{i+1}\rangle\langle e_{i+1+\ell}| \\ &= |J_n^* e_i\rangle\langle J_n^* e_{i+\ell}| = J_n^* |e_i\rangle\langle J_n^* e_{i+\ell}| = J_n^* |e_i\rangle\langle e_{i+\ell}| J_n \\ &= \tilde{\phi}_n(|e_i\rangle\langle e_{i+\ell}|). \end{aligned}$$

□

Observación 8 La matriz J_n del **lema 37** no depende del $\mathbf{B}_\ell$ en cuestión.

Teorema 13 El espectro de $\tilde{\phi}_n$ coincide con el espectro de J_n^* .

Demostración. Por ser J_n^* matriz circulante, sus valores propios son ω^k con vectores propios u_k y $J_n^* u_k = \omega^k u_k$. Sea k fijo, usando el isomorfismo $j_\ell : \mathbf{B}_\ell \longrightarrow \mathbb{C}^n$ obtenemos

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_n(j_\ell^{-1}(u_k)) &= \tilde{\phi}_n \left(j_\ell^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj} e_j \right) \right) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj} \tilde{\phi}_n(j_\ell^{-1}(e_j)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj} j_\ell^{-1}(J_n^* e_j) = j_\ell^{-1} \left(J_n^* \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{kj} e_j \right) \\ &= j_\ell^{-1}(J_n^* u_k) = j_\ell^{-1}(\omega^k u_k) \\ &= \omega^k j_\ell^{-1}(u_k). \end{aligned}$$

Por lo tanto todos los $j_\ell^{-1}(u_k)$ son vectores propios asociados al valor propio ω^k , los vectores propios son linealmente independientes pues $\mathbf{B}_\ell$ es ortogonal a $\mathbf{B}_{\ell'}$ para $\ell \neq \ell'$ para $\ell = 0, 1, \dots, n-1$ por **lema 35**.

Sean $k \leq m$, $k, m = 0, 1, \dots, n-1$, cada $j_\ell^{-1}(u_k)$ es linealmente independiente de $j_{\ell'}^{-1}(u_m)$ para $\ell' = 0, 1, \dots, n-1$, pues si $\ell \neq \ell'$ $\mathbf{B}_\ell$ es ortogonal a $\mathbf{B}_{\ell'}$ por **lema 35**, entonces $j_\ell^{-1}(u_k)$ es ortogonal a $j_{\ell'}^{-1}(u_m)$ y si $\ell = \ell'$ por el **lema 36** tenemos

$$\langle j_\ell^{-1}(u_m), j_\ell^{-1}(u_k) \rangle_{H-S} = \langle u_m, u_k \rangle = 0.$$

Hemos probado que cada valor propio ω^k de J_n^* es también un valor propio de $\tilde{\phi}_n$ y su multiplicidad como valor propio de $\tilde{\phi}_n$ es n , de esta manera hemos exhibido un sistema de n^2 vectores propios linealmente independientes de $\tilde{\phi}_n$, por lo tanto el espectro de $\tilde{\phi}_n$ y el de J_n^* coinciden.

□

Por otra parte $\mu = 0$ es el único valor propio de la matriz $T_n(f)$ dada en (4.6) pues $T_n(f)$ es una matriz estrictamente triangular superior y con diagonal cero.

Lema 38

i) 0 es valor propio del operador ϕ_n dado en (4.8).

ii) Para cada $\ell = 0, 1, \dots, n-1$ los vectores $|e_{n-1-\ell}\rangle\langle e_{n-1}| \in \mathcal{B}_{-\ell}$ y $|e_{n-1}\rangle\langle e_{n-1-\ell}| \in \mathcal{B}_\ell$ son vectores propios asociados al 0.

Es decir, 0 tiene por lo menos $2n-1$ vectores propios asociados.

Demostración. Para i), sean $0 \leq \ell \leq n-1$ y $|e_j\rangle\langle e_{j+\ell}| \in \mathcal{B}_{-\ell}$, entonces

$$\phi_n(|e_j\rangle\langle e_{j+\ell}|) = |T_n(f)^*e_j\rangle\langle T_n(f)^*e_{j+\ell}| \quad (4.22)$$

haciendo $j = n-1-\ell$ obtenemos en (4.22)

$$\phi_n(|e_{n-1-\ell}\rangle\langle e_{n-1-\ell+\ell}|) = \phi_n(|e_{n-1-\ell}\rangle\langle e_{n-1}|) = 0$$

esto es, 0 es valor propio de ϕ_n con vector propio $|e_{n-1-\ell}\rangle\langle e_{n-1}|$.

Por otra parte sea $|e_{j+\ell}\rangle\langle e_j| \in \mathcal{B}_\ell$ entonces

$$\phi_n(|e_{j+\ell}\rangle\langle e_j|) = |T_n(f)^*e_{j+\ell}\rangle\langle T_n(f)^*e_j| \quad (4.23)$$

haciendo $j = n-1-\ell$ obtenemos en (4.23)

$$\phi_n(|e_{n-1}\rangle\langle e_{n-1-\ell}|) = 0$$

esto es, 0 es valor propio de ϕ_n con vector propio $|e_{n-1}\rangle\langle e_{n-1-\ell}|$.

Para ii), de la parte i) obtenemos que para cada $0 \leq \ell \leq n-1$ hay un vector propio asociado a 0 en $\mathcal{B}_{-\ell}$ y $\mathcal{B}_\ell$. La ortogonalidad de $\{\mathcal{B}_j\}_{j=-(n-1)}^{n-1}$ implica que los vectores propios son linealmente independientes. □

Lema 39 Para cada $0 \leq \ell < n-1$, el conjunto $\{|e_{i+\ell}\rangle\langle e_i|, |e_i\rangle\langle e_{i+\ell}|\} : i = 0, 1, \dots, n-\ell-2$ es un conjunto de vectores propios generalizados de ϕ_n asociados al valor propio 0. El orden de los vectores propios $|e_{i+\ell}\rangle\langle e_i|, |e_i\rangle\langle e_{i+\ell}|$ es $n - (i + \ell)$, $i = 0, 1, \dots, n - \ell - 2$.

Demostración. Notemos que

$$\phi_n^{n-(i+\ell)-1}(|e_i\rangle\langle e_{i+\ell}|) = |e_{i+n-(i+\ell)-1}\rangle\langle e_{i+\ell+n-(i+\ell)-1}| = |e_{n-\ell-1}\rangle\langle e_{n-1}| \neq 0, \quad \ell < n-1,$$

mientras que

$$\begin{aligned} \phi_n^{n-(i+\ell)}(|e_i\rangle\langle e_{i+\ell}|) &= \phi_n(\phi_n^{n-(i+\ell)-1}(|e_i\rangle\langle e_{i+\ell}|)) = \phi_n(|e_{n-\ell-1}\rangle\langle e_{n-1}|) \\ &= |T_n(f)^*e_{n-\ell-1}\rangle\langle T_n(f)^*e_{n-1}| = 0. \end{aligned}$$

De manera análoga obtenemos que $\phi_n^{n-(i+\ell)-1}(|e_{i+\ell}\rangle\langle e_i|) \neq 0$ y $\phi_n^{n-(i+\ell)}(|e_{i+\ell}\rangle\langle e_i|) = 0$. $\square$

Observación 9 Del **lema 38** y **lema 39** se sigue que el operador ϕ_n tiene $2n-1-2(m-1)$ valores propios generalizados de orden m , donde $1 \leq m \leq n$.

Teorema 14 El espectro de ϕ_n coincide con el espectro de $T_n(f)$.

Demostración. Claramente $\text{sp}(T_n(f)) \subset \text{sp}(\phi_n)$.

Por otro lado sea $\mu \in \text{sp}(\phi_n)$, dado que μ es valor propio tenemos un vector propio asociado a μ digamos $v = \sum_{i,j=0}^{n-1} \alpha_{ij} |e_i\rangle\langle e_j| \neq 0$ y notemos que $\phi_n(v) = \sum_{i,j=0}^{n-1} \alpha_{ij} \phi_n(|e_i\rangle\langle e_j|)$, entonces

$$\phi_n^n(v) = \sum_{i,j=0}^{n-1} \alpha_{ij} \phi_n^n(|e_i\rangle\langle e_j|) = 0.$$

Por lo tanto $0 = \phi_n^n(v) = \mu^n v$, esto es $\mu = 0$. Lo que demuestra que $\text{sp}(\phi_n) \subset \text{sp}(T_n(f))$. $\square$

El **teorema 14** es un resultado conocido para operadores completamente positivos circulares [4]. El siguiente ejemplo muestra que no es válido en general para un operador completamente positivo aun en el caso en que los operadores de Kraus sean matrices de Toeplitz.

Sea $h_1(\lambda) = t_{-1}e^{-i\lambda}$, $t_{-1} \neq 0$, $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{t_{-1}\}_{k \in \mathbb{Z}} = \begin{cases} t_{-1} & \text{si } k = -1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$. Notemos que

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |t_k| < \infty$ por lo que h_1 pertenece a la clase de Wiener. Entonces

$$T_n(h_1) = \begin{pmatrix} 0 & t_{-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & t_{-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t_{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n-2} t_{-1} |e_j\rangle\langle e_{j+1}|. \quad (4.24)$$

Consideremos $h_2(\lambda) = t_1 e^{i\lambda}$, $t_1 \neq 0$, $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{t_1\}_{k \in \mathbb{Z}} = \begin{cases} t_1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$. Notemos que

$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |t_k| < \infty$ por lo que h_2 pertenece a la clase de Wiener, así

$$T_n(h_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ t_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_1 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{n-2} t_1 |e_{j+1}\rangle \langle e_j|. \quad (4.25)$$

Sea $h(\lambda) = t_{-1} e^{-i\lambda} + t_1 e^{i\lambda}$, $t_1, t_{-1} \neq 0$, $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}} = \{t_1, t_{-1}\}_{k \in \mathbb{Z}} = \begin{cases} t_{-1} & \text{si } k = -1 \\ t_1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$,

notemos que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |t_k| < \infty$ por lo que h pertenece a la clase de Wiener y

$$T_n(h) = \begin{pmatrix} 0 & t_{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & 0 & t_{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & t_{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_1 & 0 & t_{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

De (4.24) y (4.25) es claro que $T_n(h) = \sum_{j=0}^{n-2} t_{-1} |e_j\rangle \langle e_{j+1}| + \sum_{j=0}^{n-2} t_1 |e_{j+1}\rangle \langle e_j|$, y realizando cálculos sencillos tenemos

$$T_n(h)^* = \sum_{j=0}^{n-2} t_1 |e_j\rangle \langle e_{j+1}| + \sum_{j=0}^{n-2} t_{-1} |e_{j+1}\rangle \langle e_j|. \quad (4.27)$$

Observación 10 Sea f una función en la clase de Wiener tal que

$$T_n(f) = \begin{pmatrix} t_0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & t_0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t_0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & t_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & t_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & t_0 \end{pmatrix}.$$

Denotemos $\rho_n(t)$ el polinomio característico de la matriz $T_n(f)$. Calculando el $\det(T_n(f) - tI_n)$ expandiendo el último renglón obtenemos,

$$\rho_n(t) = (t_0 - t)\rho_{n-1}(t) - \rho_{n-2}(t) \quad \text{para } n \geq 2 \quad (4.28)$$

con $\rho_0(t) = 1$, $\rho_1(t) = t_0 - t$. Definiendo el polinomio $U_n(x) = \rho_n(t_0 - 2x)$ obtenemos en (4.28):

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) \quad \text{para } n \geq 2$$

con $U_0(x) = 1$, $U_1(x) = 2x$. Entonces $U_n(x)$ es un polinomio de Chebyshev de segundo tipo de grado n . Es bien conocido que

$$U_n(x) = \frac{\sin((n+1)\cos^{-1}(x))}{\sin(\cos^{-1}x)} \quad \text{para } |x| \leq 1,$$

y que las raíces de $U_n(x)$ son de la forma $z_k = \cos\left(\frac{(k+1)\pi}{n+1}\right)$ para $k = 0, \dots, n-1$.

Como z_k es raíz de $U_n(x)$ entonces $0 = U_n(z_k) = \rho_n(t_0 - 2z_k)$, es decir $t_0 + 2z_k$ es raíz de ρ_n , por lo tanto $t_0 - 2z_k$ es valor propio de $T_n(f)$. El siguiente teorema trata el caso de una matriz de Toeplitz tridiagonal general.

Teorema 15 Los valores propios de una matriz de Toeplitz tridiagonal

$$T = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t_1 & t_0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & t_0 & t_{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t_1 & t_0 & t_{-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & t_1 & t_0 \end{pmatrix}.$$

son

$$\lambda_j = t_0 + 2\sqrt{t_1 t_{-1}} \cos\left(\frac{\pi(j+1)}{n+1}\right), \quad j = 0, 1, \dots, n-1 \quad (4.29)$$

y un vector propio para λ_j es $v_j = (v_j^{(0)}, v_j^{(1)}, \dots, v_j^{(n-1)})$ con

$$v_j^{(k)} = \left(\sqrt{\frac{t_1}{t_{-1}}}\right)^{(k+1)} \sin\left(\frac{(k+1)\pi(j+1)}{n+1}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.30)$$

Demostración. Supongamos que $t_{-1}, t_1 \neq 0$. Sea $\alpha = \sqrt{\frac{t_{-1}}{t_1}}$, por lo que $t_1\alpha = \sqrt{t_1 t_{-1}}$.

Consideremos $g(\lambda) = \alpha^2 e^{-i\lambda} + e^{i\lambda}$ y $\{t_k\}_{k \in \mathbb{Z}} = \begin{cases} \alpha^2 & \text{si } k = -1 \\ 1 & \text{si } k = 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, g pertenece a la clase

de Wiener pues $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |t_k| < \infty$, construimos la matriz de Toeplitz asociada

$$T_n(g) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \alpha^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & \alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.31)$$

Por lo tanto $T_n(h) = t_0 I_n + t_1 T_n(g)$ y así es suficiente mostrar que los valores propios de $T_n(g)$ son

$$\mu_j = 2\alpha \cos\left(\frac{\pi(j+1)}{n+1}\right), \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \quad (4.32)$$

con vector propio asociado $v_j = (v_j^{(0)}, v_j^{(1)}, \dots, v_j^{(n-1)})$, donde

$$v_j^{(k)} = \alpha^{-(k+1)} \sin\left(\frac{(k+1)\pi(j+1)}{n+1}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (4.33)$$

Esto es equivalente a probar las igualdades:

$$\alpha^2 v_j^{(1)} = \mu_j v_j^{(0)}$$

$$v_j^{(k)} + \alpha^2 v_j^{(k+2)} = \mu_j v_j^{(k+1)} \quad k = 0, \dots, n-3 \quad (4.34)$$

$$v_j^{(n-2)} = \mu_j v_j^{(n-1)}. \quad (4.35)$$

Estas igualdades son verificadas fácilmente, por ejemplo para (4.34), usando la identidad trigonométrica $\sin(\psi) + \sin(\phi) = 2 \cos\left(\frac{\psi+\phi}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi-\phi}{2}\right)$ obtenemos

$$\begin{aligned} v_j^{(k)} + \alpha^2 v_j^{(k+2)} &= \alpha^{-(k+1)} \sin\left(\frac{(k+1)\pi(j+1)}{n+1}\right) + \alpha^2 \alpha^{-(k+3)} \sin\left(\frac{(k+3)\pi(j+1)}{n+1}\right) \\ &= \alpha^{-(k+1)} \left[\sin\left(\frac{(k+1)\pi(j+1)}{n+1}\right) + \sin\left(\frac{(k+3)\pi(j+1)}{n+1}\right) \right] \\ &= 2\alpha^{-(k+1)} \cos\left(\frac{\pi(j+1)}{n+1}\right) \sin\left(\frac{(k+2)\pi(j+1)}{n+1}\right) \\ &= 2\alpha \alpha^{-k-2} \cos\left(\frac{\pi(j+1)}{n+1}\right) \sin\left(\frac{(k+2)\pi(j+1)}{n+1}\right) \\ &= 2\alpha \cos\left(\frac{\pi(j+1)}{n+1}\right) \alpha^{-(k+2)} \sin\left(\frac{(k+2)\pi(j+1)}{n+1}\right) \\ &= \mu_j v_j^{(k+1)}. \end{aligned}$$

□

Por el **teorema 15**, el espectro de la matriz $T_n(h)^*$ dada en (4.27) es

$$\text{sp}(T_n(h)^*) = \{\bar{\lambda}_j = 2\sqrt{\bar{t}_{-1}\bar{t}_1} \cos\left(\frac{\pi(j+1)}{n+1}\right) : j = 0, \dots, n-1\}, \quad (4.36)$$

con vector propio asociado

$$v_j = (v_j^{(0)}, v_j^{(1)}, \dots, v_j^{(n-1)}), \quad (4.37)$$

donde

$$v_j^{(k)} = \left(\sqrt{\frac{\bar{t}_{-1}}{\bar{t}_1}}\right)^{(k+1)} \sin\left(\frac{(k+1)\pi(j+1)}{n+1}\right), \quad k = 0, \dots, n-1.$$

Consideremos el operador $\phi_n(x) = T_n(h)^* x T_n(h)$ y consideremos los valores propios $\{\bar{\lambda}_j\}_{j=0}^{n-1}$ de $T_n(h)^*$ dados por (4.36), entonces

$$\begin{aligned} \phi_n(|v_j\rangle\langle v_k|) &= T_n(h)^* |v_j\rangle\langle v_k| T_n(h) = |T_n(h)^* v_j\rangle\langle T_n(h)^* v_k| \\ &= \bar{\lambda}_j \bar{\lambda}_k |v_j\rangle\langle v_k|. \end{aligned}$$

Es decir para cada j, k , $\nu_{jk} = \bar{\lambda}_j \bar{\lambda}_k$ es valor propio de ϕ_n .

Afirmamos que $\text{sp}(T_n(h)^*) \neq \text{sp}(\phi_n)$. Para ver esto, sea $\beta = \sqrt{\bar{t}_1 \bar{t}_{-1}}$, entonces

$$|\nu_{n-1n-1}| = |\bar{\lambda}_{n-1} \bar{\lambda}_{n-1}| = |\bar{\lambda}_{n-1}|^2 = \left|4\beta^2 \cos^2\left(\frac{\pi n}{n+1}\right)\right| = 4|\beta|^2 \cos^2\left(\frac{\pi n}{n+1}\right) \quad (4.38)$$

y

$$|\bar{\lambda}_\ell| = \left|2\beta \cos\left(\frac{\pi(\ell+1)}{n+1}\right)\right| \leq 2|\beta| \left|\cos\left(\frac{\pi n}{n+1}\right)\right| \quad \text{para toda } \ell \leq n-1. \quad (4.39)$$

En particular (4.39) es cierta para el máximo

$$\max_{\ell} |\bar{\lambda}_\ell| \leq 2|\beta| \left|\cos\left(\frac{\pi n}{n+1}\right)\right|. \quad (4.40)$$

De (4.38) y (4.40) obtenemos la siguiente estimación

$$\begin{aligned} |\nu_{n-1n-1}| - \max_{\ell} |\bar{\lambda}_\ell| &\geq |\nu_{n-1n-1}| - 2|\beta| \left|\cos\left(\frac{\pi n}{n+1}\right)\right| \geq 4|\beta|^2 \cos^2\left(\frac{\pi n}{n+1}\right) - 2|\beta| \left|\cos\left(\frac{\pi n}{n+1}\right)\right| \\ &= 2|\beta| \left|\cos\left(\frac{\pi n}{n+1}\right)\right| \left(2|\beta| \left|\cos\left(\frac{\pi n}{n+1}\right)\right| - 1\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2|\beta| (2|\beta| - 1). \end{aligned}$$

Por lo tanto $|\nu_{n-1n-1}| - \max_{\ell} |\bar{\lambda}_\ell| \geq |\nu_{n-1n-1}| - \max_{\ell} |\bar{\lambda}_\ell| > 0$ para $|\beta| > 1/2$ y n suficientemente grande. De esto se concluye que $\text{sp}(T_n(h)^*) \neq \text{sp}(\phi_n)$.

Conclusiones y perspectivas

A lo largo de este trabajo presentamos algunas herramientas útiles para estudiar la distribución asintótica de los valores propios de sucesiones de matrices. Observamos que algunas propiedades asintóticas de matrices de Toeplitz pueden ser estudiadas a través de matrices más simples, circulantes. Posteriormente analizamos el concepto de operador completamente positivo de Toeplitz, operador completamente positivo circulante y estudiamos algunas relaciones espectrales entre ellos. Concluimos que los operadores completamente positivos circulantes pueden ser útiles para estudiar los operadores completamente positivos de Toeplitz.

Algunas perspectivas son:

- Investigar si todo operador completamente positivo circulante es un operador completamente positivo de Toeplitz.
- Demostrar la conjetura de la igualdad entre espectros de operadores completamente positivos de Toeplitz y su matriz asociada.
- Estudiar la distribución asintótica de los valores propios de los operadores completamente positivos de Toeplitz usando los operadores completamente positivos circulantes.
- Utilizar las matrices circulantes como herramienta para estudiar otro tipo de propiedades de las matrices de Toeplitz.
- Aplicar la teoría desarrollada a modelos que utilicen matrices de Toeplitz.

Apéndice A

Notación de Dirac

La notación de Dirac, también conocida como notación bra-ket, es la notación estándar para describir los estados cuánticos en la teoría de la mecánica cuántica. En matemáticas se utiliza para denotar vectores abstractos, funcionales lineales, matrices, entre otros objetos. Damos algunas propiedades de esta notación.

Sea $(h, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espacio de Hilbert, donde el producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es lineal en la segunda variable y antilineal (lineal conjugado) en la primera variable. Usaremos el símbolo $B(h)$ para denotar el conjunto de operadores lineales acotados de h en h .

Para $u, v \in h$ definimos el operador lineal $|u\rangle\langle v|$ de h en h mediante la correspondencia

$$|u\rangle\langle v|w = \langle v, w\rangle u \quad \text{para cada } w \in h.$$

Proposición 8 *El operador lineal $|u\rangle\langle v|$ satisface*

1. $|u\rangle\langle v|$ es lineal.
2. $|z + u\rangle\langle v| = |z\rangle\langle v| + |u\rangle\langle v|$ y $|u\rangle\langle v + z| = |u\rangle\langle v| + |u\rangle\langle z|$.
3. $(|v\rangle\langle u|)^* = |u\rangle\langle v|$.
4. $|u\rangle\langle v||\psi\rangle\langle\varphi| = \langle v, \psi\rangle |u\rangle\langle\varphi|$.
5. $\| |u\rangle\langle v| \| = \|u\| \|v\|$.
6. Para cada $A \in B(h)$, $A|u\rangle\langle v| = |Au\rangle\langle v|$ y $|u\rangle\langle v|A = |u\rangle\langle A^*v|$.

Demostración.

1. Para $w, x \in h$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tenemos,

$$\begin{aligned} |u\rangle\langle v|(w + \lambda x) &= \langle v, w + \lambda x\rangle u = (\langle v, w\rangle + \langle v, \lambda x\rangle) u = \langle v, w\rangle u + \lambda \langle v, x\rangle u \\ &= |u\rangle\langle v|w + \lambda |u\rangle\langle v|x. \end{aligned}$$

2. Sean $w, z \in h$ entonces,

$$|z + u\rangle\langle v|w = \langle v, w\rangle (z + u) = \langle v, w\rangle z + \langle v, w\rangle u = |z\rangle\langle v|w + |u\rangle\langle v|w.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} |u\rangle\langle v + z|w &= \langle v + z, w\rangle u = \overline{\langle w, v + z\rangle} u = \left(\overline{\langle w, v\rangle} + \overline{\langle w, z\rangle}\right) u \\ &= \left(\overline{\langle w, v\rangle} + \overline{\langle w, z\rangle}\right) u = \langle v, w\rangle u + \langle z, w\rangle u \\ &= |u\rangle\langle v|w + |u\rangle\langle z|w. \end{aligned}$$

3. Para $x, y \in h$, tenemos

$$\begin{aligned} \langle x, |v\rangle\langle u|y\rangle &= \langle x, \langle u, y\rangle v\rangle = \langle u, y\rangle\langle x, v\rangle = \langle x, v\rangle\langle u, y\rangle = \overline{\langle v, x\rangle}\langle u, y\rangle = \langle\langle v, x\rangle u, y\rangle \\ &= \langle |u\rangle\langle v|x, y\rangle. \end{aligned}$$

Esto es $(|v\rangle\langle u|)^* = |u\rangle\langle v|$.

4. Sea $w \in h$, entonces

$$\begin{aligned} (|u\rangle\langle v||\psi\rangle\langle\varphi|)w &= |u\rangle\langle v|(|\psi\rangle\langle\varphi|w) = |u\rangle\langle v|(\langle\varphi, w\rangle\psi) = \langle\varphi, w\rangle|u\rangle\langle v|\psi = \langle\varphi, w\rangle\langle v, \psi\rangle u \\ &= \langle v, \psi\rangle\langle\varphi, w\rangle u = \langle v, \psi\rangle|u\rangle\langle\varphi|w \end{aligned}$$

5. Consideremos el vector unitario $\frac{w}{\|w\|}$, entonces

$$\||u\rangle\langle v|\frac{w}{\|w\|}\| = \frac{1}{\|w\|}|\langle v, w\rangle||u| \leq \frac{1}{\|w\|}\|v\|\|w\||u| = \|u\|\|v\|.$$

De donde obtenemos

$$\||u\rangle\langle v|\| \leq \|u\|\|v\|. \quad (\text{A.1})$$

Por otro lado, consideremos el vector unitario $\frac{v}{\|v\|}$, entonces

$$\||u\rangle\langle v|\frac{v}{\|v\|}\| = \frac{1}{\|v\|}\|\langle v, v\rangle u\| = \frac{\|v\|^2}{\|v\|}\|u\| = \|u\|\|v\|.$$

Dado que

$$\||u\rangle\langle v|\frac{v}{\|v\|}\| \leq \||u\rangle\langle v|\|,$$

entonces

$$\|u\|\|v\| \leq \||u\rangle\langle v|\|. \quad (\text{A.2})$$

Por lo tanto, de (A.1) y de (A.2)

$$\||u\rangle\langle v|\| = \|u\|\|v\|.$$

6. Sea $w \in h$ y $A \in B(h)$.

$$A|u\rangle\langle v|w = A\langle v, w\rangle u = \langle v, w\rangle Au = |Au\rangle\langle v|w.$$

Por otra parte, usando la parte tres de esta proposición y las propiedades del operador adjunto tenemos

$$|u\rangle\langle v|A = |v\rangle\langle u|^*A^{**} = (A^*|v\rangle\langle u|)^* = |A^*v\rangle\langle u|^* = |u\rangle\langle A^*v|.$$

□

Consideremos $B(h) = \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, si $\mathcal{U} = \{u_i\}_{i=0}^{p-1}$ es una base ortonormal, entonces $|u_i\rangle\langle u_j|$ es la matriz que tiene un 1 en la posición (i, j) respecto a esa base y ceros en el resto,

$$\left[|u_1\rangle\langle u_2|\right]_{\mathcal{U}} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Sea $A = (a_{ij})_{i,j=0}^{p-1} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ una matriz representada por a_{ij} respecto a la base ortonormal $\{u_i\}_{i=0}^{p-1}$. Escribimos

$$A = \sum_{i,j=0}^{p-1} a_{ij} |u_i\rangle\langle u_j|. \quad (\text{A.3})$$

Notemos que cualquier vector $x \in h = \mathbb{C}^p$ se respresenta como $x = \sum_{k=0}^{p-1} x_k u_k$ para algunos $x_i \in \mathbb{C}$, y esta notación nos permite aplicar el operador A al vector x :

$$Ax = \sum_{i,j=0}^{p-1} a_{ij} |u_i\rangle\langle u_j| \sum_{k=0}^{p-1} x_k u_k = \sum_{i,j,k=0}^{p-1} a_{ij} x_k \langle u_j, u_k \rangle u_i = \sum_{i,j=0}^{p-1} x_j a_{ij} u_i.$$

Apéndice B

Teorema de Riemann-Lebesgue

Recordemos algunas definiciones relativas a la integral de Riemann. Sea f una función acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$. Sea $P = \{a = x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$, esto es

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Definimos la suma inferior y suma superior de Darboux de f con respecto de P , respectivamente, por

$$L(f, P) = \sum_{i=1}^n m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$U(f, P) = \sum_{i=1}^n M_i (x_i - x_{i-1}),$$

donde, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$m_i = \inf\{f(x) | x_{i-1} < x < x_i\} \quad \text{y} \quad M_i = \sup\{f(x) | x_{i-1} < x < x_i\}.$$

Acontinuación, definimos las integrales inferior y superior de f sobre $[a, b]$, respectivamente, por

$$(R) \int_a^b f = \sup\{L(f, P) | P \text{ es partición de } [a, b]\}$$

y

$$(R) \int_a^b f = \inf\{U(f, P) | P \text{ es partición de } [a, b]\}.$$

Dado que f es acotada y el intervalo $[a, b]$ tiene longitud finita las integrales inferior y superior son finitas, y si las dos son iguales decimos que f es Riemann integrable sobre $[a, b]$. Llamamos a este valor común la integral de Riemann de f sobre $[a, b]$ y lo denotamos por

$$(R) \int_a^b f.$$

Una función ψ definida en $[a, b]$ es llamada función escalonada si hay una partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$ tal que ψ es constante en cada uno de los subintervalos (x_{i-1}, x_i) , para $i = 1, \dots, n$. De la definición de función escalonada y de la definición de integrales inferior y superior obtenemos que cualquier función escalonada es Riemann integrable y

$$(R) \int_a^b \psi = \sum_{i=1}^n c_i (x_i - x_{i-1}).$$

Por lo tanto podemos reformular la definición de integral inferior y superior como sigue

$$(R) \int_a^b f = \sup \left\{ (R) \int_a^b \varphi \mid \varphi \text{ es una función escalonada y } \varphi \leq f \text{ en } [a, b] \right\}$$

$$(R) \int_a^b f = \inf \left\{ (R) \int_a^b \psi \mid \psi \text{ es una función escalonada y } \psi \geq f \text{ en } [a, b] \right\}.$$

En la literatura se puede encontrar caracterizaciones de Riemann integrabilidad, mencionaremos dos de ellas que son equivalentes entre si (ver [21], [20]).

Teorema 16 *Una función f , definida en $[a, b]$ es Riemann integral en $[a, b]$ si y solamente si, para cada $\epsilon > 0$ existen sucesiones de funciones escalonadas $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$, $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ con $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ tales que*

$$I = \sup_n \left\{ (R) \int_a^b \varphi_n \right\} = \inf_n \left\{ (R) \int_a^b \psi_n \right\}.$$

En este caso $(R) \int_a^b f = I$.

Teorema 17 *Una función f acotada en $[a, b]$ es Riemann integrable si y solamente si, existe una sucesión de particiones $\{P_n\}_{n \geq 1}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} [U(f, P_n) - L(f, P_n)] = 0$.*

En lo siguiente, vamos a considerar el espacio de medida $E = [a, b]$ con la medida de Lebesgue.

Lema 40 *Sean $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ y $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ sucesiones de funciones cada una de las cuales es integrable sobre E , tal que $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ es creciente, mientras que $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ es decreciente en E . Sea f una función en E que tiene la propiedad*

$$\varphi_n \leq f \leq \psi_n, \text{ en } E \text{ para toda } n.$$

Si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E [\varphi_n - \psi_n] = 0,$$

entonces

$\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ converge a f puntualmente casi donde quiera en E , $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ converge a f puntualmente casi donde quiera en E , f es integrable sobre E ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \varphi_n = \int_E f \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \psi_n = \int_E f.$$

Demostración. Para $x \in E$ definamos

$$\varphi^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) \text{ y } \psi^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x).$$

Las funciones φ^* y ψ^* están bien definidas ya que las sucesiones monótonas de números reales extendidos convergen a un número real extendido y son medibles, pues cada una, φ^* y ψ^* es el límite puntual de una sucesión de funciones medibles.

Por otro lado tenemos que $\varphi^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) \leq f$ y $\psi^*(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(x) \geq f$ de donde obtenemos

$$\varphi^* \leq f \leq \psi^* \quad \text{en} \quad E, \quad (\text{B.1})$$

por lo que $\psi^* - \varphi^*$ es una función no negativa y medible ya que φ^* y ψ^* son medibles. Como la sucesión $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ es creciente para cada n tenemos $\varphi_n \leq \varphi^*$ y como la sucesión $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ es decreciente n para cada n tenemos $\psi^* \leq \psi_n$, por lo tanto

$$0 \leq \psi^* - \varphi^* \leq \psi_n - \varphi_n. \quad (\text{B.2})$$

Por monotonía de la integral para funciones no negativas, de (B.2) obtenemos para cada n

$$0 \leq \int_E [\psi^* - \varphi^*] \leq \int_E [\psi_n - \varphi_n], \quad (\text{B.3})$$

entonces en (B.3) tomando límite y usando la hipótesis

$$0 \leq \int_E [\psi^* - \varphi^*] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E [\psi_n - \varphi_n] = 0. \quad (\text{B.4})$$

Por lo tanto

$$\int_E [\psi^* - \varphi^*] = 0$$

entonces $\psi^* = \varphi^*$ c.d, así de (B.1) obtenemos $\psi^* = f = \varphi^*$ c.d y $\{\varphi_n\}_{n \geq 1} \rightarrow f$, $\{\psi_n\}_{n \geq 1} \rightarrow f$ puntualmente c.d.

Por otra parte, por hipótesis $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ entonces $|f| \leq \max\{|\varphi_n|, |\psi_n|\} \leq |\varphi_n| + |\psi_n|$, entonces $|f|$ es integrable sobre E y por lo tanto f es integrable sobre E . También de la hipótesis $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$, $\varphi_n - \psi_n \leq f - \psi \leq 0$ entonces

$$0 \leq \psi_n - f \leq \psi_n - \varphi_n. \quad (\text{B.5})$$

Por monotonía de la integral para funciones no negativas, de (B.5) obtenemos para cada n

$$0 \leq \int_E (\psi_n - f) \leq \int_E (\psi_n - \varphi_n). \quad (\text{B.6})$$

Notemos que ψ_n es decreciente, por lo tanto $\int_E \psi_n$ también lo es para cada n y es acotada inferiormente, entonces, es convergente, así en (B.6) al tomar límite y por hipótesis

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \psi_n - \int_E f \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (\psi_n - \varphi_n) = 0. \quad (\text{B.7})$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \psi_n = \int_E f. \quad (\text{B.8})$$

Por otra parte por hipótesis $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$, por lo que

$$0 \leq f - \varphi_n \leq \psi_n - \varphi_n. \quad (\text{B.9})$$

Por monotonía de la integral para funciones no negativas, de (B.9) obtenemos para cada n

$$0 \leq \int_E (f - \varphi_n) \leq \int_E (\psi_n - \varphi_n). \quad (\text{B.10})$$

Notemos que $-\varphi_n$ es decreciente, por lo tanto $-\int_E \varphi_n$ también lo es para cada n y es acotada inferiormente, entonces, es convergente, así en (B.10) al tomar límite y por hipótesis

$$0 \leq \int_E f - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \varphi_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E (\psi_n - \varphi_n) = 0. \quad (\text{B.11})$$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \varphi_n = \int_E f. \quad (\text{B.12})$$

Finalmente de (B.8) y (B.12)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \varphi_n = \int_E f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \psi_n.$$

□

Teorema 18 [Lebesgue] *Una función acotada en un intervalo cerrado $[a, b]$ es Riemann integrable sobre $[a, b]$ si y solamente si f es continua casi dondequiera.*

Demostración. Recordemos que f es integrable en $[a, b]$ si y solamente si existe una sucesión de particiones $\{P_n\}_n$, de $[a, b]$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} [U(f, P_n) - L(f, P_n)] = 0$ y $\int_a^b f = \lim_{n \rightarrow \infty} [U(f, P_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} [L(f, P_n)]$.

Supongamos que f es Riemann-Integrable en $[a, b]$, entonces existe una sucesión de particiones $\{P_n\}_n$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [U(f, P_n) - L(f, P_n)] = 0,$$

donde $U(f, P_n)$ y $L(f, P_n)$ son las sumas superior e inferior de Darboux, P_n partición de $[a, b]$ y supongamos que cada P_{n+1} es un refinamiento de P_n , para cada índice n , definamos:

$$\begin{aligned}\varphi_n &= \sum_{i=1}^N m_i \chi_{[x_{i-1}, x_i)} \\ \psi_n &= \sum_{i=1}^N M_i \chi_{[x_{i-1}, x_i)}\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}m_i &= \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i &= \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}.\end{aligned}$$

Por construcción tenemos que $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ para cada n , más aun $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ es monótona creciente y $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ es monótona decreciente, en efecto, sea $x \in [a, b]$, entonces $x \in [x_i(n), x_{i+1}(n)]$ donde $x_i(n), x_{i+1}(n) \in P_n$, con P_{n+1} un refinamiento de P_n , entonces $x \in [x_i(n), x_{i+1}(n)]$ o $x \in [y_i(n+1), y_{i+1}(n+1)]$. Por ser un refinamiento tenemos que $[y_i(n+1), y_{i+1}(n+1)] \subset [x_i(n), x_{i+1}(n)]$ y por propiedades del ínfimo $\inf\{f(x) : x \in [x_i(n), x_{i+1}(n)]\} \leq \inf\{f(x) : x \in [y_i(n+1), y_{i+1}(n+1)]\}$ de donde se sigue que $\varphi_n(x) \leq \varphi_{n+1}(x)$ es decir $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ es monótona creciente. De manera análoga, del refinamiento $[y_i(n+1), y_{i+1}(n+1)] \subset [x_i(n), x_{i+1}(n)]$ y usando propiedades del supremo $\sup\{f(x) : x \in [y_i(n+1), y_{i+1}(n+1)]\} \leq \sup\{f(x) : x \in [x_i(n), x_{i+1}(n)]\}$ entonces $\psi_{n+1}(x) \leq \psi_n(x)$ es decir $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ es monótona decreciente.

Por otra parte por definición de suma de Darboux $L(f, P_n) = \int_a^b \varphi_n$ y $U(f, P_n) = \int_a^b \psi_n$ para cada $n \geq 1$, por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [\psi_n - \varphi_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} [U(f, P_n) - L(f, P_n)] = 0$$

por el **lema 40** $\{\varphi_n\}_{n \geq 1} \rightarrow f$ puntualmente casi dondequiera en $[a, b]$ y $\{\psi_n\}_{n \geq 1} \rightarrow f$ puntualmente casi dondequiera en $[a, b]$. Sea F el conjunto de puntos x en los cuales $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$

o $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ no convergen a $f(x)$, entonces $m(F) = 0$. Sea $F_0 = F \cup (\cup_{n \geq 1} P_n)$, notemos que P_n es un conjunto numerable entonces $m(P_n) = 0$ y como la unión de conjuntos numerables es un conjunto numerable tenemos $m(\cup_{n \geq 1} P_n) = 0$, así

$$0 \leq m(F_0) = m(F \cup (\cup_{n \geq 1} P_n)) \leq m(F) + m(\cup_{n \geq 1} P_n) = 0$$

es decir $m(F_0) = 0$.

Demostraremos que f es continua en $x_0 \in [a, b] \setminus F_0$. Sea $\varepsilon > 0$, dado que $\{\varphi_n(x_0)\}_{n \geq 1}$ y $\{\psi_n(x_0)\}_{n \geq 1}$ convergen puntualmente a $f(x_0)$, sea n_0 tal que

$$\begin{aligned} f(x_0) - \varphi_n(x_0) &< \varepsilon \\ \psi_n(x_0) - f(x_0) &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Entonces existe un subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición P_n tal que $x_0 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [x_{i-1}, x_i]$, y $\delta > 0$. Por lo tanto si $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces

$$-\varepsilon < \varphi_n(x_0) - f(x_0) = \varphi_n(x) - f(x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq \psi_n(x) - f(x_0) = \psi_n(x_0) - f(x_0) < \varepsilon$$

esto es f es continua en $x_0 \in [a, b] \setminus F_0$.

Por otra parte, supongamos que f es continua casi donde quiera en $[a, b]$. Sea $\{P_n\}_{n \geq 1}$ una sucesión de particiones de $[a, b]$ para las cuales

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{gap } P_n = 0,$$

donde $\text{gap } P_n$ es la máxima distancia entre puntos consecutivos de la partición P_n .

Para cada n , sean φ_n la función escalonada inferior y ψ_n la función escalonada superior asociadas con f sobre la partición P_n . Por hipótesis f es acotada en $[a, b]$, esto es $|f(x)| \leq K$ con $K > 0$, las sucesiones $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}$ y $\{\psi_n\}_{n \geq 1}$ son uniformemente acotadas en $[a, b]$, en efecto

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x)| &= \left| \sum_{i=1}^N m_i \chi_{[x_{i-1}, x_i)} \right| \leq \sum_{i=1}^N |m_i \chi_{[x_{i-1}, x_i)}| = \sum_{i=1}^N |m_i| \leq NK \\ |\psi_n(x)| &= \left| \sum_{i=1}^N M_i \chi_{[x_{i-1}, x_i)} \right| \leq \sum_{i=1}^N |M_i \chi_{[x_{i-1}, x_i)}| = \sum_{i=1}^N |M_i| \leq NK. \end{aligned}$$

Sea $x_0 \in (a, b)$ tal que f es continua en x_0 , entonces dado $\varepsilon > 0$ sea $\delta > 0$ tales que

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{4} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{B.13})$$

si $|x - x_0| < \delta$.

Sea N_0 tal que $\text{gap } P_n < \delta$ si $n \geq N_0$. Si $n \geq N_0$, para algún subintervalo determinado por P_n , $x_0 \in I_n \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Notemos que $\varphi_n(x_0) = m_i = \inf\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$,

por propiedad del ínfimo existe $f(x_{\varepsilon/4})$ tal que

$$f(x_{\varepsilon/4}) \leq \varphi_n(x_0) + \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{con} \quad x_{\varepsilon/4} \in [x_{i-1}, x_i] \quad (\text{B.14})$$

de (B.13) y (B.14)

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{4} < f(x_{\varepsilon/4}) \leq \varphi_n(x_0) + \frac{\varepsilon}{4} \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4}$$

de donde obtenemos para cada $n \geq N_0$

$$0 \leq f(x_0) - \varphi_n(x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

es decir $\{\varphi_n\}_{n \geq 1} \rightarrow f$ puntualmente.

De manera análoga, $\psi_n(x_0) = M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, por propiedad del supremo existe $f(x_{\varepsilon/4})$ tal que

$$\psi_n(x_0) - \frac{\varepsilon}{4} \leq f(x_{\varepsilon/4}) \quad \text{con} \quad x_{\varepsilon/4} \in [x_{i-1}, x_i] \quad (\text{B.15})$$

de (B.13) obtenemos

$$f(x_{\varepsilon/4}) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4} \quad (\text{B.16})$$

y por ser el supremo cota superior, de (B.15) y (B.16) obtenemos

$$f(x_0) - \frac{\varepsilon}{4} \leq \psi_n(x_0) - \frac{\varepsilon}{4} < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{4}$$

por lo tanto para cada $n \geq N_0$

$$0 \leq \psi_n(x_0) - f(x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$$

es decir $\{\psi_n\}_{n \geq 1} \rightarrow f$ puntualmente.

Como $\{\varphi_n\}_{n \geq 1}, \{\psi_n\}_{n \geq 1}$ son funciones escalonadas entonces son medibles y son uniformemente acotadas, por lo tanto por el teorema de convergencia acotada

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \varphi_n &= \int_a^b f \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \psi_n &= \int_a^b f \end{aligned}$$

y de la definición de suma de Darboux $L(f, P_n) = \int_a^b \varphi_n$ y $U(f, P_n) = \int_a^b \psi_n$ para cada $n \geq 1$, obtenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [\psi_n - \varphi_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} [U(f, P_n) - L(f, P_n)] = 0.$$

Finalmente

$$0 \leq \int_a^{\bar{b}} f - \int_{\underline{a}}^b f \leq [U(f, P_n) - L(f, P_n)] \quad \text{para cada } n.$$

Por lo tanto

$$\int_a^{\bar{b}} f = \int_{\underline{a}}^b f$$

asi f es Riemann integrable en $[a, b]$.

□

Apéndice C

El álgebra de Wiener

Damos una breve introducción a las álgebras de Wiener.

Sea $\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{C} : |t| = 1\}$ la circunferencia unitaria compleja. Sea $\mathcal{W}$ el conjunto de todas las funciones $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ con serie de Fourier absolutamente convergente, es decir

$$\mathcal{W} = \{f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k z^k : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |t_k| < \infty\}.$$

Definimos $\|f\|_{\mathcal{W}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |t_k| < \infty$, con esta norma en virtud del siguiente lema, $\mathcal{W}$ es un álgebra de Banach.

Lema 41 *$\mathcal{W}$ es un álgebra de Banach conmutativa con la suma y producto puntual de funciones y la norma $\|f\|_{\mathcal{W}}$.*

Demostración. Las propiedades de álgebra se verifican fácilmente y la completez de $\mathcal{W}$ se sigue de la completez de $\ell_1(\mathbb{Z})$. Verifiquemos que $\mathcal{W}$ es cerrada bajo la multiplicación puntual y la submultiplicatividad de $\|f\|_{\mathcal{W}}$.

Sean $f, g \in \mathcal{W}$, por el criterio de Cauchy para series dobles, para cada $z \in \mathbb{T}$ tenemos

$$\begin{aligned} f(z)g(z) &= \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} t_{\ell} z^{\ell} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k z^k = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_{\ell} r_k z^{\ell+k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} t_{j-k} r_k z^j = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_{j-k} r_k z^j \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} (t * r)_j z^j, \end{aligned}$$

donde $t = \{t_n\}_{n \geq 1}$, $r = \{r_n\}_{n \geq 1}$ y $(t * r)_j$ es la convolución de t y r . Por lo tanto

$$\begin{aligned}\|fg\|_{\mathcal{W}} &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} |(t * r)_j| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_{j-k} r_k \right| \leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |t_{j-k}| |r_k| = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |t_{\ell}| \sum_{k=-\infty}^{\infty} |r_k| \\ &= \|f\|_{\mathcal{W}} \|g\|_{\mathcal{W}} < \infty.\end{aligned}$$

□

El álgebra de Banach $\mathcal{W}$ del lema anterior es llamada el **álgebra de Wiener**.

Consideremos la función $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. Entonces

$$f(e^{i\theta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k e^{i k \theta},$$

tiene coeficientes de Fourier dados por

$$t_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) e^{-i k \theta} d\theta.$$

Con cada $f \in \mathcal{W}$ asociamos la siguiente matriz infinita

$$T(f) = \begin{pmatrix} t_0 & t_{-1} & t_{-2} & \cdots \\ t_1 & t_0 & t_{-1} & \cdots \\ t_2 & t_1 & t_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

La matriz $T(f)$ es llamada una matriz de Toeplitz.

Lema 42 Si $f \in \mathcal{W}$ entonces $T(f)$ induce un operador acotado en ℓ_p ($1 \leq p \leq \infty$) y

$$\|T(f)\|_p \leq \|f\|_{\mathcal{W}}.$$

Demostración. Para $n \in \mathbb{Z}$, sea $\chi_n \in \mathcal{W}$ dada por $\chi_n(t) = t^n$, $t \in \mathbb{T}$. La matriz $T(\chi_n)$ tiene únicamente unos en la diagonal paralela a la principal y ceros en el resto de las entradas. Notemos que para $n \geq 0$

$$T(\chi_n)x = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_n, x_0, x_1, \dots)^\top \quad \text{y} \quad T(\chi_{-n})x = (x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)^\top.$$

Por lo tanto $\|T(\chi_n)x\|_p = \|x\|_p$, de donde se sigue que $\|T(\chi_n)\|_p = 1$ y $\|T(\chi_{-n})x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_{n+k}|^p \right)^{1/p} \leq \|x\|_p$ por lo que $\|T(\chi_{-n})\|_p \leq 1$.

Por otra parte, para $f \in \mathcal{W}$ tenemos que $T(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k T(\chi_k)$ y

$$\|T(f)\|_p = \left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_k T(\chi_k)x \right\|_p \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |t_k| \|T(\chi_k)x\|_p \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |t_k| = \|f\|_{\mathcal{W}}.$$

□

Recordemos que para cada matriz infinita $A = (a_{jk})_{j,k=0}^{\infty}$

$$\|A\|_1 = \sup_{k \geq 0} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{jk}| \quad \text{y} \quad \|A\|_{\infty} = \sup_{j \geq 0} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}|. \quad (\text{C.1})$$

En efecto, si $A = [a_0 \ a_1 \ \dots]$ donde a_j es la j -ésima columna de A entonces para cualquier $x \in \ell_1$

$$\|Ax\|_1 = \left\| \sum_{j=0}^{\infty} x_j a_j \right\|_1 \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|x_j a_j\|_1 = \sum_{j=0}^{\infty} |x_j| \|a_j\|_1 \leq \sum_{j=0}^{\infty} |x_j| \sup_{k \geq 1} \|a_k\|_1 \leq \|x\|_1 \sup_{k \geq 1} \|a_k\|_1.$$

Por lo tanto

$$\|A\|_1 \leq \sup_{k \geq 0} \|a_k\|_1 = \sup_{k \geq 0} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{jk}|. \quad (\text{C.2})$$

Por otra parte sea $e_k = \left(0, 0, \dots, \underbrace{1}_k, 0, \dots \right)$, por lo que $Ae_k = a_k$, donde a_k es la k -ésima columna de A . Para cada k

$$\|Ae_k\|_1 = \|a_k\|_1 = \sum_{j=0}^{\infty} |a_{jk}|.$$

Dado que $\|Ae_k\|_1 \leq \|A\|_1$ entonces

$$\sup_{k \geq 0} \|Ae_k\|_1 = \sup_{k \geq 0} \sum_{j=0}^{\infty} |a_{jk}| \leq \|A\|_1. \quad (\text{C.3})$$

De (C.2) y (C.3) obtenemos la primera igualdad en (C.1).

Para la segunda igualdad, notemos que $Ax = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} x_k \right)_j$

$$\|Ax\|_{\infty} = \sup_{j \geq 0} \left| \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} x_k \right| \leq \sup_{j \geq 0} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}| |x_k| \leq \sup_{j \geq 0} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}| \|x\|_{\infty},$$

de donde

$$\|A\|_{\infty} \leq \sup_{j \geq 0} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}|. \quad (\text{C.4})$$

Por otro lado si $A = 0$, no hay nada que probar. Supongamos que $A \neq 0$. Entonces existe un renglón distinto de cero, digamos el j -ésimo. Definamos el vector $z = [z_i]$ por

$$z_i = \frac{\overline{a_{ji}}}{|a_{ji}|} \quad \text{si } a_{ji} \neq 0$$

$$z_i = 1 \quad \text{si } a_{ji} = 0.$$

Notemos que $\|z\|_\infty = 1$ y que $a_{ji}z_i = |a_{ji}|$ para cada $i \geq 0$, entonces

$$(Az)_j = \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}z_k = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}|$$

y

$$\|Az\|_\infty = \sup_{\ell \geq 0} |(Az)_\ell| \geq |(Az)_j| = \sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}|.$$

Por lo tanto

$$\|A\|_\infty \geq \sup_{j \geq 0} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}|. \quad (\text{C.5})$$

De (C.4) y (C.5) obtenemos la segunda igualdad en (C.1).

Lema 43 Si $f \in \mathcal{W}$ entonces $\|T(f)\|_1 = \|T(f)\|_\infty = \|f\|_{\mathcal{W}}$.

Demostración. Sea $T(f) = (t_{j-k})_{j,k \in \mathbb{Z}}$ y notemos que

$$\sup_{j \geq 0} \sum_{k=0}^{\infty} |t_{j-k}| = \sup_{k \geq 0} \sum_{j=0}^{\infty} |t_{k-j}|.$$

Usando (C.1) obtenemos

$$\|f\|_{\mathcal{W}} = \|T(f)\|_\infty = \|T(f)\|_1.$$

□

De forma análoga se satisface

$$\|T(f)\|_2 = \|f\|_\infty = \max_{t \in \mathbb{T}} |f(t)|.$$

La demostración puede encontrarse en [5].

Bibliografía

- [1] Álvarez-Nodarse, Renato, J. Petronilho, and Niurka R. Quintero. *On some tridiagonal k -Toeplitz matrices: Algebraic and analytical aspects. Applications.* Journal of computational and applied mathematics 184.2 (2005): 518-537.
- [2] Bogoya, J. M., Böttcher, A., Grudsky, S. M., Maximenko, E. A. *Eigenvectors of Hermitian Toeplitz matrices with smooth simple-loop symbols.* Linear Algebra and its Applications, 493. (2016) 606-637.
- [3] Bolaños-Servín, Jorge R., and Roberto Quezada. *A cycle decomposition and entropy production for circulant quantum Markov semigroups.* Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics 16.02 (2013): 1350016.
- [4] Bolaños-Servín, Jorge R., and Raffaella Carbone. *Spectral properties of circulant quantum Markov semigroups.* Open Systems & Information Dynamics 21.04 (2014): 1450007.
- [5] Böttcher, Albrecht and Grudsky, Sergei M. *Spectral properties of banded Toeplitz matrices.* SIAM (2005).
- [6] Cramer, E., and H. H. Bock. *Continuous-time markov chains and compound poisson process with circulant intensity matrices.* Optimization 37.4 (1996).
- [7] Davis, Philip J. *Circulant matrices.* American Mathematical Soc., (2012).
- [8] Deift, Percy, Alexander Its, and Igor Krasovsky. *Toeplitz matrices and Toeplitz determinants under the impetus of the Ising model: some history and some recent results.* Communications on Pure and Applied Mathematics 66.9 (2013): 1360-1438.
- [9] Gray, Robert M. *Toeplitz and circulant matrices: A review.* Foundations and Trends® in Communications and Information Theory, Now Publishers, Inc. Vol 2 (2006).
- [10] Grenander, Ulf, and Gabor Szegö. *Toeplitz forms and their applications.* Vol. 321. Univ of California Press (2001).
- [11] Hansen, Per Christian, James G. Nagy, and Dianne P. O'leary. *Deblurring images: matrices, spectra, and filtering.* Society for Industrial and Applied Mathematics (2006).
- [12] Hatano, Naomichi, and David R. Nelson. *Vortex pinning and non-Hermitian quantum mechanics.* Physical Review B 56.14 (1997): 8651

-
- [13] Horn, Roger A., and Charles R. Johnson. *Matrix analysis*. Cambridge university press, (1990).
- [14] Jones, Vaughan F.R. *von Neumann algebras*. Script available at <http://math.berkeley.edu/~vfr> (2003).
- [15] Kra, Irwin, and Santiago R. Simanca. *On circulant matrices*. Notices of the AMS. Vol 59, no. 3 (2012): 368-377.
- [16] Lancaster, Peter and Tismenetsky, Miron. *The theory of matrices: with applications*. Elsevier (1985).
- [17] Larsen, Ronald. *Banach algebras*. New York: Marcel Dekker, (1973).
- [18] Loehr, Nicholas. *Advanced linear algebra*. CRC Press, 2014.
- [19] Mans, Bernard, and Igor Shparlinski. *Random walks, bisections and gossiping in circulant graphs*. Algorithmica 70.2 (2014).
- [20] Myers, David L. and Wilcox, H.J. *An Introduction to Lebesgue Integration and Fourier Series*. Dover (1978).
- [21] Royden, Halsey Lawrence and Fitzpatrick, Patrick *Real analysis, Fourth Edition* Pearson Education (2010).
- [22] Rudin, Walter *Real and complex analysis, Third Edition*. McGraw-Hill International Editions (1987).
- [23] Sunder, Viakalathur Shankar. *An invitation to von Neumann algebras*. Springer Science & Business Media (2012).