

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

UNIDAD: IZTAPALAPA

DIVISION: CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

CARRERA: DOCTORADO EN CIENCIAS

MATERIA: MATEMATICAS

**TITULO: FUNCIONES DE DIMENSION EN
ESPACIOS DE ALEXANDROFF**

FECHA DEL EXAMEN DE GRADO: 10 DE NOVIEMBRE , 1998

ALUMNO: PETRA WIEDERHOLD GRAUERT

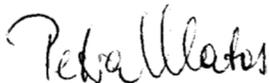
MATRICULA: 9 1 2 5 7 0 4 0

ASESOR DE TESIS: DR. RICHARD G. WILSON ROBERTS

Firma del asesor:



Firma del alumno:



Mexico, al 5 de mayo de 1999.

**UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA**

DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

**FUNCIONES DE DIMENSION
EN ESPACIOS
DE ALEXANDROFF**

por

PETRA WIEDERHOLD GRAUERT DE MATOS

TESIS

PARA OBTENER EL GRADO DE DOCTOR EN CIENCIAS,

ESPECIALIDAD EN MATEMATICAS

MEXICO, D.F., AL 7 DE NOVIEMBRE DE 1998

Contenido

1. Introducción	2
1.1. Ubicación y contenido del trabajo	
1.2. Motivaciones para el estudio de espacios de Alexandroff	
1.3. Modelando imágenes digitales por medio de gráficas y complejos	
1.4. Modelos topológicos de imágenes digitales	
1.5. Dimensionalidad de "espacios digitales"	
2. La dimensión de Alexandroff	14
2.1. Definición de la dimensión de Alexandroff	
2.2. Espacio discreto, subespacios, suma de espacios	
2.3. La topología T_0 de Alexandroff y su orden parcial	
2.4. La dimensión del orden parcial	
2.5. La dimensión de espacios T_0 de Alexandroff	
2.6. La dimensión de Alexandroff del producto cartesiano de espacios T_0	
2.7. Complejos abstractos	
2.8. Topologías T_0 minimales y subtopologías	
3. Espacios digitales de dimensión n	31
3.1. Espacios digitales - Factorización de \mathbb{R}^n sobre la base de fenestraciones	
3.2. Preliminares	
3.3. Sobre conjuntos convexos y conos	
3.4. Fenestraciones poliedrales	
4. La dimensión de Krull de espacios T_0 de Alexandroff	60
4.1. Introducción	
4.2. La dimensión de Krull de retículos y de espacios	
4.3. La dimensión de Krull de espacios T_0 de Alexandroff	
4.4. La dimensión de Krull de espacios T_0 localmente finitos	
Bibliografía	73

Quisiera expresar aquí mi más profundo agradecimiento

a Richard G. Wilson,

por su interminable paciencia y delicadeza en la dirección de mi tesis;

a los sinodales Vladimir Tkachuk, Mikhail Tkachenko, Victor Neumann y Oleg Okunev,

cuyos comentarios, consejos y correcciones condujeron a un mejoramiento de mi tesis;

a mi esposo Tonatiuh Matos Chassin,

por todo su apoyo durante los casi siete años de la elaboración de esta tesis, por su confianza en mí, por su comprensión, y por su compañía;

meiner Mutti,

die mir auf dem Wege bis hierher immer hilfreich zur Seite gestanden hat;

a las abuelas de mi hijo, en particular a AnaMaria, Tayde y Graciela Chassin Miranda,

por haber cuidado con mucho amor a mi bebe en momentos claves de terminación de mi tesis;

a la "Chassinada".

por haberme recibido como nuevo miembro de la familia y haberme regalado un nuevo hogar;

a mis colegas y estudiantes de la Sección de Control Automático del CINVESTAV,

por su apoyo y su confianza, especialmente a Juan Manual Ibarra Zannatha;

al pueblo de México

por haberme abierto las puertas a una nueva patria hace diez años, por haberme enseñado tanto nuevo y bueno sobre la vida, sobre el hombre y sobre mí mismo.

Gracias a todos !

Petra Wiederhold Grauert de Matos.

1. Introducción

1.1. Ubicación y contenido del trabajo

Este trabajo de tesis se dedica a la dimensionalidad de espacios topológicos “digitales”. En términos de la topología general, se trata de espacios de Alexandroff, los cuales fueron introducidos por P. S. Alexandroff en 1937 [Alex] bajo el nombre de “espacios discretos”. Estos espacios topológicos tienen la propiedad que cualquier intersección de conjuntos abiertos es nuevamente un conjunto abierto, o equivalentemente, cada punto del espacio está contenido en una vecindad abierta minimal. Los resultados de esta tesis se refieren principalmente a espacios T_0 de Alexandroff. Cabe notar que un espacio de Alexandroff es T_1 si y sólo si es discreto, así que, nosotros no suponemos el axioma T_1 para los espacios de Alexandroff a estudiar aquí. Además, espacios de Alexandroff en general no son ni regulares ni normales. Por eso, las teorías clásicas de dimensión de la topología general no pueden ser aplicadas inmediatamente a estos espacios.

En el capítulo 2 de esta tesis, definimos una dimensión topológica para espacios de Alexandroff, llamada *dimensión de Alexandroff*, aplicando la dimensión inductiva pequeña *ind* de la topología general. Derivamos propiedades de esta dimensión, similares a las de funciones clásicas de dimensión. En particular demostramos su monotonía con respecto a subespacios, y probamos que la dimensión de un producto cartesiano (finito) de espacios T_0 de Alexandroff es igual a la suma de sus dimensiones. También demostramos algunas propiedades interesantes de la dimensión de Alexandroff con respecto a subtopologías y con respecto a topologías T_0 minimales.

La categoría de los espacios T_0 de Alexandroff es isomorfa a la de los *posets* (conjuntos parcialmente ordenados), lo cual es bien conocido de la literatura (vea por ejemplo [Ern]). En el caso de espacios finitos o localmente finitos, ellos son equivalentes a complejos celulares abstractos (vea [Kov], [Her]), y están relacionados a complejos simpliciales [Kro/2]. Eso da la idea de comparar la dimensión de ciertos espacios de Alexandroff con conceptos de dimensión conocidos para posets, retículos (en inglés: lattices), y complejos. En este contexto, la tesis aporta dos resultados nuevos:

- Demostramos que, para todo espacio T_0 de Alexandroff, su dimensión de Alexandroff coincide con una dimensión del poset correspondiente, la cual se define simplemente como supremo de las longitudes de cadenas (teorema 2.5.9). Este resultado fue publicado en [Wie,Wil/1], y contribuye a muy recientes investigaciones sobre dimensiones de posets y graficas, vea por ejemplo [Eva,Kop,Muk].

- Además, se demuestra en el capítulo 4 de esta tesis, que la dimensión de Alexandroff de un espacio T_0 de Alexandroff (la cual es igual a la dimensión del poset correspondiente!), es igual a la dimensión de Krull del retículo de todos los conjuntos cerrados del espacio (teorema 4.3.4). Adicionalmente, estudiamos el caso de los espacios T_0 localmente finitos, donde demostramos que existe un subretículo minimal, el cual es una base (topológica) de los conjuntos cerrados, y el cual tiene la misma dimensión de Krull como todo el retículo

de los cerrados (teorema 4.4.3). La dimensión de Krull fue aplicada por primera vez a espacios topológicos por Vinokurov [Vin], pero es conocida desde antes en el álgebra como una función de dimensión para anillos y retículos. En espacios generales, esta dimensión es difícil de calcular, pero es interesante que, por ejemplo, en [Vin] fue demostrado que, para espacios separables metrizablees, su dimensión de Krull coincide tanto con la dimensión inductiva pequeña como también con la de dimensión de cobertura. Nuestros resultados, los cuales fueron publicados en [Wie,Wil/2], generalizan algunos resultados demostrados en [Isb] y [San,San/2] para espacios finitos.

El tercer resultado principal de esta tesis se desarrolla en la aplicación de la dimensión de Alexandroff a un “espacio digital”, el cual se construye como espacio cociente del espacio Euclideo \mathbb{R}^n , siguiendo una construcción propuesta por Kronheimer [Kro/2]: Iniciando con una familia \mathcal{E} de subconjuntos disjuntos por parejas y regularmente abiertos de \mathbb{R}^n , cuya unión es densa en \mathbb{R}^n (esta familia es llamada \mathcal{E} -rejilla de \mathbb{R}^n), se construye un cociente abierto $X(\mathcal{E})$ de \mathbb{R}^n llamado *espacio digital*, extendiendo \mathcal{E} a una descomposición $X(\mathcal{E})$ de \mathbb{R}^n , la cual es topologizada por la topología natural de cociente. Bajo una condición de minimalidad, $X(\mathcal{E})$ resulta ser solo dependiente de \mathcal{E} e único, salvo homeomorfismos. Fue demostrado en [Kro/2], que para toda \mathcal{E} -rejilla localmente finita de \mathbb{R}^n , el espacio digital $X(\mathcal{E})$ es un espacio T_0 localmente finito (y por lo tanto, de Alexandroff). Mostramos en el capítulo 3 de esta tesis ejemplos de \mathcal{E} -rejillas de \mathbb{R}^n (cuyos elementos son claramente subconjuntos de \mathbb{R}^n de dimensión n), que dan lugar a espacios digitales de dimensiones de Alexandroff diferentes de n . Sin embargo, nuestro resultado principal en este contexto es, que, si \mathcal{E} es una \mathcal{E} -rejilla de \mathbb{R}^n , cuyos elementos son subconjuntos convexos acotados de \mathbb{R}^n , entonces la dimensión de Alexandroff del espacio digital $X(\mathcal{E})$ es igual a n (teorema 3.4.12). Para demostrar eso, el espacio $X(\mathcal{E})$ es explícitamente construido, y tanto la convexidad de los elementos de \mathcal{E} como el hecho que \mathcal{E} sea localmente finita, son esenciales para nuestra demostración. Este resultado proporciona un fundamento topológico al concepto de una “imagen digital n-dimensional”, y contribuye así a investigaciones actuales sobre “topología digital”.

En este trabajo se usan los siguientes símbolos: ω denota el primer ordinal infinito \mathbb{Z} denota el conjunto de los números enteros, y \mathbb{R} el conjunto de los números reales.

1.2. Motivaciones para el estudio de espacios de Alexandroff

Los espacios de Alexandroff (o sus posets o complejos correspondientes) surgieron a mediados de los ochentas como modelos topológicos de “estructuras discretas”, como lo son por ejemplo imágenes digitales. Estas son los objetos de la visión por computadora (VPC) y de las gráficas por computadora.

La VPC tiene como objetivo capacitar computadoras de la captación y del entendimiento (es decir, del procesamiento y de la interpretación) de información visual. Esta información es primeramente captada, por ejemplo, por medio de cámaras, o tomógrafo: rayos laser, equipo infrarrojo o de ultrasonido. El resultado de esta captación técnica es un *imagen*, en general *analógica*, que puede ser modelada por una función de \mathbb{R}^n en \mathbb{R} . Esta imagen es transformada por medio de una discretización de su dominio de definición y un

cuantización de su dominio de valores a una *imagen digital*, que puede ser modelada por una función f de \mathbb{Z}^n en \mathbb{Z} . Es natural llamar a f una *imagen digital "n-dimensional"*, teniendo en mente, que \mathbb{Z}^n forma un modulo unitario sobre el anillo de los enteros, el cual tiene dimensión vectorial n . Desde el punto de vista de aplicación, tiene sentido hablar de imágenes de cualquier dimensión, como muestran los siguientes ejemplos:

- para $n = 1$, f puede representar una señal registrada en el tiempo;
- para $n = 2$, f puede ser la versión digitalizada de una fotografía;
- para $n = 3$, f puede ser el conjunto de datos generados a partir de proyecciones de una escena real tridimensional;
- para $n = 4$, f puede representar una escena real tridimensional en movimiento;
- para $n \geq 5$, f puede ser el conjunto de datos que representan muchas características de una imagen ya analizada.

Los valores de f representan valores de gris o colores u otros atributos numéricos de los puntos de \mathbb{Z}^n , también llamados píxeles (o, en el caso de una imagen tridimensional, voxeles). Para describir propiedades topológicas y geométricas de los objetos de la imagen, es suficiente que la función f distinga solamente entre los píxeles de objetos de interés y el resto de la imagen. Por eso, adaptamos en este trabajo un modelo simplificado de la imagen digital, siendo un mapeo f de \mathbb{Z}^n en $\{0, 1\}$, donde un pixel $p \in \mathbb{Z}^n$ tiene valor 1 si p pertenece a un objeto de interés, y p tiene valor 0 en otro caso. Una imagen de este tipo se llama imagen binaria, y puede interpretarse como una partición de \mathbb{Z}^n en el conjunto de objetos, y su complemento (el "fondo").

Para resolver un problema práctico de análisis e interpretación de una imagen digital, se inicia en general con un procesamiento de la imagen que incluye su mejoramiento y la extracción de características, para después poder **encontrar los objetos de interés, los cuales deben describirse apropiadamente para ser clasificados o reconocidos**. Para la realización de todas estas tareas, inicialmente se diseñaron algoritmos de manera empírica, adaptados a cada problema concreto práctico. Pero, entre más se desarrollaron los fundamentos metódicos de la VPC, incluyendo soluciones metódicas (es decir, independientes de los problemas concretos a resolver) para la segmentación de imágenes, para el aislamiento de objetos del fondo, para la esqueletización de objetos, para la determinación de características de forma; más se volvió necesario e interesante preguntar:

- ¿ Porqué funcionan los algoritmos empíricamente diseñados ?
- ¿ Porqué (o, cuándo) se puede aislar un objeto del fondo por medio del seguimiento de su contorno \bullet de su superficie ?
- ¿ Cuáles son las propiedades de un objeto, que permitan reconocerlo, independientemente de su tamaño, de su posición y de su orientación dentro de la imagen, de las condiciones de iluminación o del ángulo de vista durante su captación mediante una cámara ?

La última pregunta lleva a la búsqueda de propiedades de objetos, las cuales son invariantes bajo ciertas transformaciones geométricas, como afines, central - proyectivas o proyectivas, y finalmente a propiedades topológicas, las cuales describen la **forma** del objeto, como lo son por ejemplo el número de sus componentes conexas o de sus hoyos.

Pero, más sencillo aún, para poder encontrar un objeto de interés en la imagen y

aislarlo completamente del fondo, se necesita la validez de un teorema de tipo Jordan en el dominio de definición de la imagen, es decir, en \mathbb{Z}^n . Llevando el problema todavía más a sus inicios: un "objeto" se define como un subconjunto de \mathbb{Z}^n , el cual se considera en la mayoría de los casos como un subconjunto **conexo**. Por eso, el concepto de conexidad en \mathbb{Z}^n es esencialmente necesario para encontrar y describir objetos.

La primera y natural idea sería considerar a \mathbb{Z}^n como subespacio topológico de \mathbb{R}^n (con la topología estandar), debido a que la imagen digital definida sobre \mathbb{Z}^n es generada desde una imagen definida sobre \mathbb{R}^n . Sin embargo, como tal subespacio, \mathbb{Z}^n es un espacio discreto, y por lo tanto es totalmente desconexo, y por eso obviamente no permite el modelado de objetos conexos. Así que, la primera tarea es introducir en \mathbb{Z}^n una "estructura", que tenga conexidad. El concepto de conexidad es inherentemente topológico, por lo cual una tal "estructura" sería una topología sobre \mathbb{Z}^n . En otras palabras, un modelado propiamente topológico de una imagen digital consiste en la construcción de un espacio topológico (no discreto !) sobre el conjunto \mathbb{Z}^n . Veremos en la siguiente sección, que este tipo de modelado fue realizado sólo recientemente.

Aunque, para resolver algunos problemas prácticos simples como el conteo de objetos o su marcamiento, es suficiente el modelado topológico de la imagen, cabe aclarar que no lo es para la solución de la mayoría de problemas (complejos). Consideremos un ejemplo:

La esqueletización de objetos es una técnica ampliamente aplicada en el reconocimiento de letras o de otros objetos "delgados" como ciertas células biológicas. Esta se puede realizar por medio de un adelgazamiento de cada objeto, que consiste esencialmente en la eliminación de todos los puntos del objeto, que no son necesarios para conservar la conexidad del objeto, y cuya eliminación tampoco aumente el número de sus hoyos. Es obvio que este procedimiento (basándose puramente en características topológicas) causaría que todo objeto simplemente conexo se adelgazaría a un sólo punto [Ros/2], lo cual en general no es un esqueleto útil para el reconocimiento del objeto. Por eso, los algoritmos de adelgazamiento se basan además de en las propiedades topológicas en la geometría del objeto.

Para terminar esta sección, mencionamos que la VPC no es la única fuente de motivación para el desarrollo de una "topología digital". Recientemente se ha manifestado interés por modelos topológicos de un "espacio-tiempo discreto" en la literatura dedicada a la física teórica, vea por ejemplo [Sor]. Cabe notar que, en caso de que un "espacio digital", por ejemplo un espacio de Alexandroff, fuera dotado de una métrica ρ , esta tendría la propiedad de que exista un número positivo (!) ϵ tal que para todo x, y dos puntos distintos x, y del espacio, valdría $\rho(x, y) \geq \epsilon$. Tales espacios métricos pueden ser interesantes en la física cuántica, interpretando a ϵ como la longitud de Planck. Modelos topológicos de "estructuras discretas" son aplicados también en la química, por ejemplo en la cristalografía (vea el comentario en [Kon, Kop, Mey/2]).

1.3. Modelando imágenes digitales por medio de gráficas y complejos

Las primeras investigaciones para introducir conexidad en \mathbb{Z}^n se basaron esencialmente en gráficas, relaciones de adyacencias y modelos combinatorios como complejos celulares

desarrollando desde los finales de los sesentas varios modelos de un "plano digital" y de un "espacio digital tridimensional". Aunque estos modelos no son propiamente topológicos, se ha usado desde entonces el término de *topología digital* introducido por Rosenfeld [Ros/1] para referirse a la aplicación de conceptos topológicos como conexidad, frontera, teorema de Jordan, hoyos, homotopía a estructuras gráficas y combinatorias.

Los primeros modelos gráficos introdujeron relaciones simétricas (y, en general, irreflexivas) en \mathbb{Z}^2 y \mathbb{Z}^3 , llamadas *relaciones de adyacencia* [Kon.Ros.Ros] o *relaciones de vecindad* [Kle,Vos].

Cabe mencionar, que estas relaciones corresponden a métricas "discretas" (con valores en \mathbb{Z}) sobre \mathbb{Z}^2 y \mathbb{Z}^3 . Por ejemplo, las relaciones de vecindad más aplicadas sobre \mathbb{Z}^2 (vea por ejemplo [Ros,Kak]) son las definidas por

$$x \sim_4 y \iff x, y \text{ se distinguen en exactamente una coordenada por } 1;$$

$$x \sim_8 y \iff x \sim_4 y \text{ ó, } x, y \text{ se distinguen en cada coordenada por } 1.$$

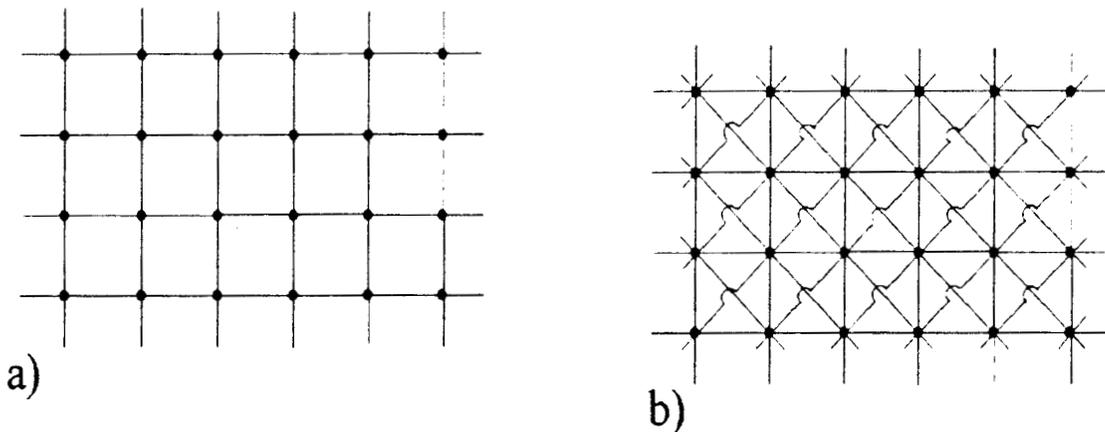


Figura 1.1. a) (\mathbb{Z}^2, \sim_4) , b) (\mathbb{Z}^2, \sim_8)

Figura 1.1 representa las gráficas (\mathbb{Z}^2, \sim_4) y (\mathbb{Z}^2, \sim_8) . Los mapeos d_4 y d_8 de $\mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^2$ en \mathbb{Z} definidos por

$$d_4(x, y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|;$$

$$d_8(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}; \quad x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$$

son métricas sobre \mathbb{Z}^2 , y obviamente

$$x \sim_4 y \iff d_4(x, y) = 1$$

$$x \sim_8 y \iff d_8(x, y) = 1$$

Es bien conocido que

$$d_4(x, y) = \min\{k : x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = y \text{ es un camino en la gráfica } (\mathbb{Z}^2, \sim_4)\}$$

$$d_8(x, y) = \min\{k : x = x_0, x_1, x_2, \dots, x_k = y \text{ es un camino en la gráfica } (\mathbb{Z}^2, \sim_8)\}$$

Correspondencias análogas existen para la 6-vecindad sobre \mathbb{Z}^2 , y para las vecindades de 6, 18, y 26 vecinos sobre \mathbb{Z}^3 (vea por ejemplo [Mel/2]). Las métricas correspondientes dan origen a investigaciones dentro de la "geometría discreta". Nótese que, por ejemplo, un d_4 -círculo es el conjunto de todos los puntos de \mathbb{Z}^2 que tienen la misma d_4 -distancia desde un punto central. El número de estos puntos es finito, y la "forma" de este círculo es bastante distinta a la de un círculo Euclideo, como se ve en la siguiente figura:

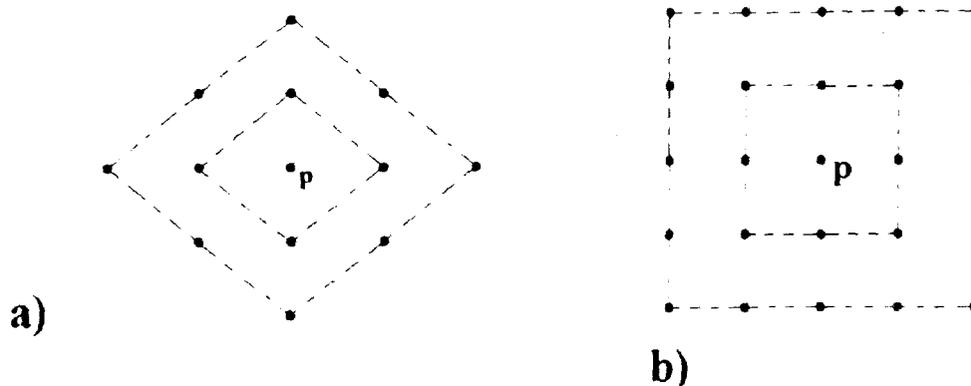


Figura 1.2. a) d_4 -círculos y b) d_8 -círculos centrados en p , con radios 1 y 2.

Debido a que \mathbb{Z}^2 , o en su caso \mathbb{Z}^3 , conjuntamente con una relación de vecindad, es una gráfica, se puede aplicar el concepto de conexidad de la teoría de gráficas. Modelando los objetos de una imagen digital por subgráficas conexas, se desarrollaron las gráficas vecinas [Ros,Kak], las cuales fueron generalizadas a las estructuras vecinas [Kle,Vos], y a las estructuras de incidencia [Vos]. En [Vos], el autor desarrolla un modelo combinatorio de imágenes digitales "multidimensionales", aplicando relaciones de incidencia definidas sobre \mathbb{Z}^n (n arbitrario). Dentro de estos modelos, se han descrito propiedades topológicas y geométricas de los objetos, y se han fundamentado algoritmos de segmentación por la demostración de teoremas del tipo Jordan, y, entre otros temas de investigación, se han iniciado amplios estudios sobre la esqueletización de objetos. Un buen resumen de los resultados obtenidos hasta los finales de los ochentas, es el trabajo [Kon,Ros]. Cabe notar, que estas investigaciones no solamente han fundamentado teóricamente algoritmos existentes (que fueron desarrollados antes heurísticamente), sino también han dado como resultado el mejoramiento de algoritmos (por ejemplo, de adelgazamiento [Ber]), y el diseño

de nuevos algoritmos (por ejemplo, de la detección de superficies en imágenes digitales tridimensionales, vea [Her.Web] y [Vos]).

Una generalización de las relaciones de adyacencia, encaminado a un modelo de carácter topológico, es el “espacio digital de imagen” de [Kon.Ros,Ros], el cual modela imágenes digitales binarias dos- y tridimensionales. En este trabajo, los autores identifican una gran clase de relaciones (además de las relaciones usuales de vecindad, se incluyen vecindades de Voronoi), las cuales permiten la construcción de un “grupo fundamental digital”. Bajo ciertas condiciones, este grupo es isomorfo al grupo fundamental (común) de un poliedro, que es un “análogo continuo” del “espacio digital”, vea también [Kon,Kha]. Cabe mencionar que la “adyacencia” en [Kon,Ros,Ros] está definida como segmento de línea en \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 . Eso tiene como consecuencia, que la geometría y topología del espacio Euclideo está presente en el modelo desde el principio. Así, se modela realmente la “discretización” de \mathbb{R}^2 o \mathbb{R}^3 a un “espacio digital”, cuyas propiedades geométricas y topológicas después se relacionan con las de su “análogo continuo poliedral”.

Aplicando los complejos de la topología algebraica, se obtienen otros modelos, los cuales describen imágenes digitales n-dimensionales:

Kovalevsky [Kov] llama un complejo celular lo que está definido en [Rin] como complejo abstracto: una estructura (X, \leq, \dim) , donde (X, \leq) es un poset (conjunto parcialmente ordenado), y \dim es una función de “dimensión” de X en los números enteros no negativos, tal que $x \leq x'$ implica $\dim x \leq \dim x'$ para todos $x, x' \in X$. El concepto de conexidad inherente a un poset (X, \leq) es el siguiente: Un subconjunto $M \subset X$ se llama conexo en (X, \leq) si y sólo si para toda pareja de puntos $p, q \in M$ existe una cadena finita x_0, x_1, \dots, x_n de puntos de M tal que $x_0 = p, x_n = q$, y para cada i ($0 \leq i \leq n - 1$) vale $x_i \leq x_{i+1}$ o $x_{i+1} \leq x_i$. Una imagen binaria dada se codifica como complejo, identificando cada uno de sus píxeles (puntos de \mathbb{Z}^n) con el cubo unitario centrado en el, y considerando como X el conjunto de todos estos cubos y de todas sus caras (de todas las dimensiones), y suponiendo \leq como la relación natural de fronterización entre estos cubos, es decir, $x \leq x'$ si y sólo si $x = x'$ o x es cara de x' . Una vez segmentados los objetos conexos de la imagen, esta se representa nuevamente como un complejo, donde X es el conjunto de los objetos y de ciertas partes de sus fronteras. De esta manera, la segmentación de la imagen se modela por una transformación de un complejo en otro. Kovalevsky realiza cada complejo celular en la computadora como una estructura enlistada de datos, la cual permite la aplicación rápida de procedimientos propios del procesamiento y del análisis de la imagen, como lo son por ejemplo filtros de mejoramiento y transformaciones geométricas. El complejo que representa la imagen ya segmentada, se refleja en la computadora como una estructura que ocupa poca memoria, y se ha aplicada eficientemente por ejemplo en el reconocimiento de letras escritas a mano, como asegura el autor en [Kov].

Mencionamos que otros autores también aplican complejos para modelar imágenes digitales. Por ejemplo, Herman y Webster justifican un algoritmo de seguimiento de superficies por medio de un complejo tridimensional [Her,Web]. Lee y Rosenfeld desarrollan varias ideas teóricas sobre la representación de imágenes, basándose en un “complejo rectangular de células de \mathbb{R}^n ”, para analizar problemas relacionados con la homología y de la homotopía de los objetos de una imagen [Lee,Ros]. Brisson define una estructura de células que representa variedades subdivididas, la cual realmente es un CW-complejo finito regular

[Bri]. Los autores de [Pao et al] desarrollan un modelo basado en una descomposición simplicial de poliedros. Los últimos dos modelos proporcionan herramientas para las gráficas por computadora y para la geometría computacional.

1.4. Modelos topológicos de imágenes digitales

Modelos de imágenes digitales, cuyo fundamento es una topología sobre \mathbb{Z}^n , han sido desarrollados sólo muy recientemente, iniciándose con los trabajos basados en la topología de Khalimsky [Kha,Kop,Mey] y en espacios topológicos conexos ordenados [Kop,Mey,Wi] los cuales conducen a la aplicación de los espacios de Alexandroff [Kro/2].

La topología de Khalimsky τ_K sobre \mathbb{Z} es la que tiene la subbase $\{\{2n, 2n+1, 2n+2\} \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Entonces, los puntos de \mathbb{Z} son alternadamente abiertos y cerrados. En la siguiente figura, se simbolizan los conjuntos abiertos de una base de τ_K :

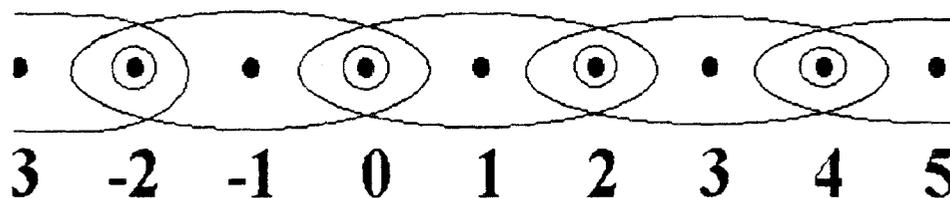


Figura 1.3. Una base de la topología de Khalimsky τ_K sobre \mathbb{Z} .

El espacio de Khalimsky $K = (\mathbb{Z}, \tau_K)$ es un caso particular de un espacio topológico conexo ordenado [Kha,Kop,Mey]. El producto cartesiano de n espacios K , $K^n = K \times \dots \times K$ es llamado *n-espacio digital* en [Kon,Kop,Mey/1], [Kon,Kop,Mey/2]. Figura 1.4a) muestra una porción del 2-espacio digital K^2 , la cual es la vecindad minimal de un punto cerrado. Esta contiene otras vecindades minimales, las cuales están simbolizadas en la misma figura. Notese que todo punto del espacio topológico K^2 tiene una vecindad abierta minimal. En general, K^n es un espacio T_0 de Alexandroff.

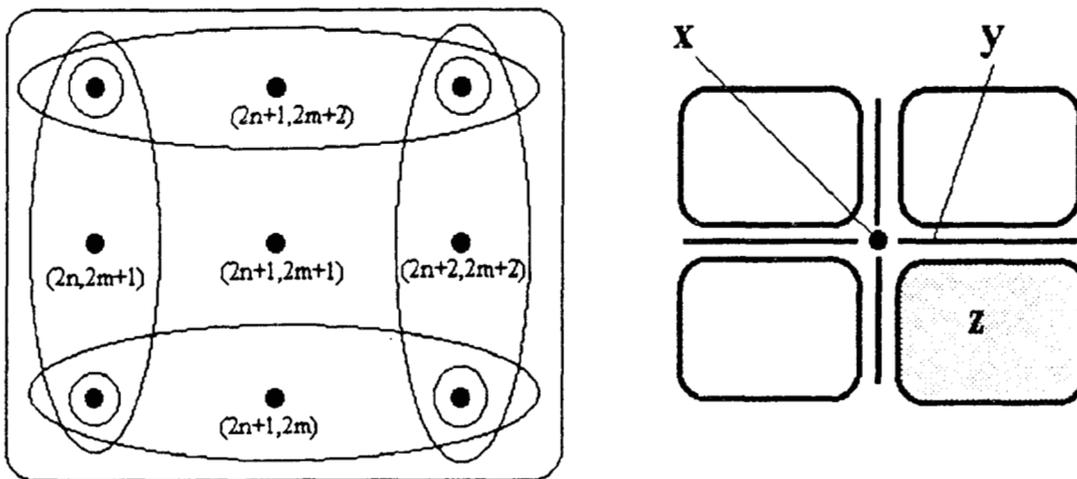
Es bien conocido que, si (X, τ) es un espacio de Alexandroff, entonces la relación \leq definida por $x \leq y \iff x \in cl(\{y\})$, es reflexiva y transitiva, y es antisimétrica (y por lo tanto un orden parcial) si y sólo si (X, τ) es T_0 (vea [Alex] o [Ern]). Este orden parcial definido para todo espacio T_0 de Alexandroff X fue nombrado *orden de especialización* de X por varios autores, por ejemplo en [Joh]. Además, es fácil demostrar que entonces $x \leq y \iff U(y) \subset U(x) \iff y \in U(x)$, donde $U(a)$ denota para cualquier $a \in X$ su vecindad abierta minimal, vea [Alex].

1.4.1. Ejemplo: Consideramos el 2-espacio digital K^2 , una porción del cual se representa en la figura 1.4a). Aplicando la definición $x \leq y \iff x \in cl(\{y\})$, obtenemos el orden de especialización \leq de \mathbb{Z}^2 , el cual satisface por ejemplo

$$\begin{aligned} (2n+1, 2m+1) &\leq (2n+1, 2m) \leq (2n, 2m) \\ (2n+1, 2m+1) &\leq (2n, 2m+1) \leq (2n, 2m+2) \\ (2n+1, 2m) &\leq (2n+2, 2m), \quad n, m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Ahora sea Y el conjunto, cuyos elementos son todos los cuadrados unitarios abiertos (en \mathbb{R}^2) centrados en puntos de \mathbb{Z}^2 de la forma $(2n, 2m)$ (con $n, m \in \mathbb{Z}$ arbitrarios), y todos los segmentos unitarios "abiertos" (es decir, sin sus esquinas) horizontales centrados en puntos de \mathbb{Z}^2 de la forma $(2n, 2m+1)$, y todos los segmentos unitarios "abiertos" (es decir, sin sus esquinas) verticales centrados en puntos de \mathbb{Z}^2 de la forma $(2n+1, 2m)$, y todos los puntos de \mathbb{Z}^2 de la forma $(2n+1, 2m+1)$. La figura 1.4.b) muestra una porción de Y . Nótese que Y es una descomposición de \mathbb{R}^2 , y las cerraduras (en \mathbb{R}^2) de los elementos de Y son poliedros (convexos) de las dimensiones 2,1, y 0. Definimos la relación \leq^* sobre Y como la relación natural de fronterización entre poliedros, es decir, para $x, y \in Y$, $x \leq^* y \iff$ el poliedro $cl_{\mathbb{R}^2}(x)$ está contenido en el poliedro $cl_{\mathbb{R}^2}(y) \iff$ el poliedro $cl_{\mathbb{R}^2}(x)$ es una cara del poliedro $cl_{\mathbb{R}^2}(y)$. Observando figura 1.4b), tenemos en Y por ejemplo $x <^* y <^* z$.

Sea f el mapeo que identifica cada punto $(2n, 2m)$ de \mathbb{Z}^2 con el cuadrado unitario abierto (en \mathbb{R}^2) centrado en $(2n, 2m)$, cada $(2n, 2m+1)$ con el segmento unitario "abierto" (sin sus esquinas) horizontal centrado en este punto, cada $(2n+1, 2m)$ con su correspondiente segmento unitario "abierto" vertical, y deja los puntos $(2n+1, 2m+1)$ idénticos. Entonces, $f(\mathbb{Z}^2) = Y$, y obviamente f es una biyección.



a)

b)

Figura 1.4. a) una porción de K^2 , b) la misma porción de $f(\mathbb{Z}^2)$.

Es evidente que el poset (\mathbb{Z}^2, \leq) es isomorfo al poset $(f(\mathbb{Z}^2), \leq^*)$. Como discutiremos en sección 2.3, eso implica que el 2-espacio digital K^2 es homeomorfo al espacio T_0 de Alexandroff $(f(\mathbb{Z}^2), \tau_{\leq \cdot})$, donde la topología $\tau_{\leq \cdot}$ está dada por la base $\{\{y \in f(\mathbb{Z}^2) : x \leq^* y\}, x \in f(\mathbb{Z}^2)\}$.

El n -espacio digital K^n resulta ser un caso particular de un modelo desarrollado por Kronheimer [Kro/2]; para la relación entre este modelo y algunos de los mencionados arriba, vea [Kro/1]). Este modelo describe el proceso de la "discretización" de un espacio topológico que representa el soporte de una imagen (por ejemplo \mathbb{R}^n) por medio de la construcción de una descomposición de él:

Si S es un espacio topológico, entonces, en un primer paso, se construye una familia \mathcal{E} de conjuntos abiertos disjuntos cuya unión es densa en S , tal familia es llamada *fenestración de S* en [Kro/2].

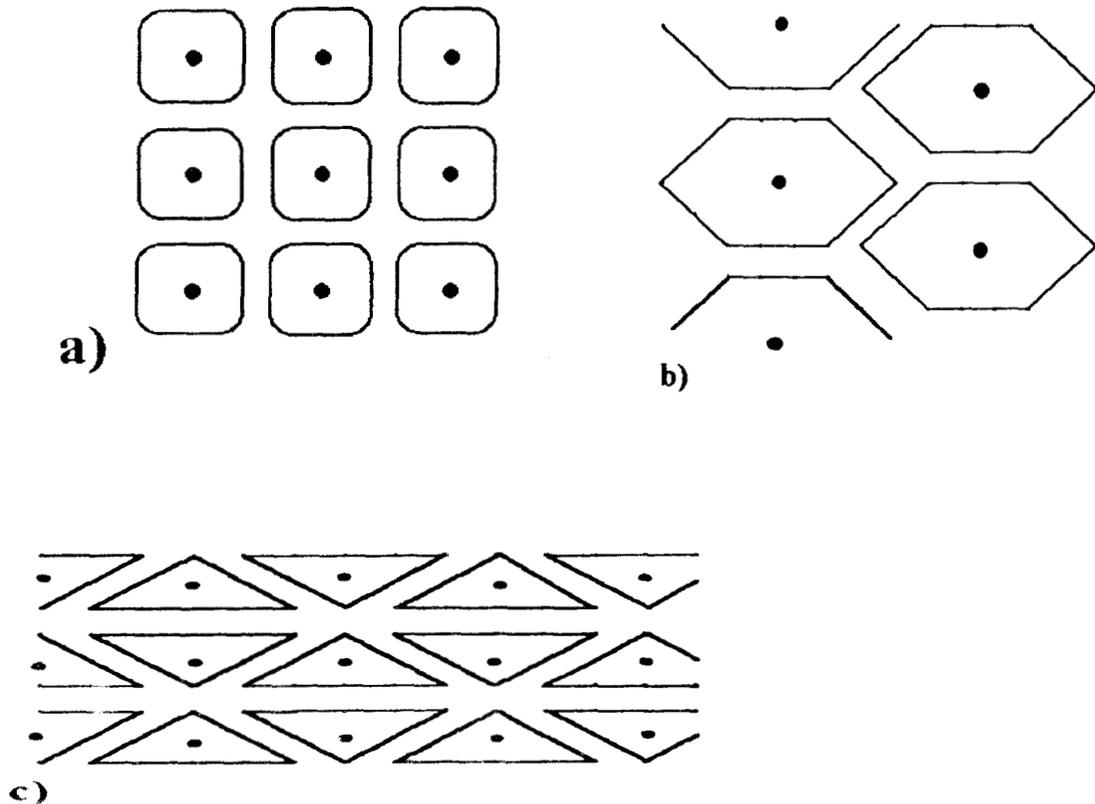


Figura 1.5. a) La fenestración estándar de \mathbb{R}^2 representa \mathbb{Z}^2 . b), c) Una fenestración hexagonal y una trigonal de \mathbb{R}^2 , identificando conjuntos discretos (vea texto).

La motivación para la construcción de una fenestración \mathcal{E} de un espacio topológico S es la identificación (mediante una biyección) de \mathcal{E} con un conjunto discreto D de S . Recordamos que, en cualquier espacio topológico S , un conjunto $D \subset S$ se llama *conjunto discreto* si la topología relativa sobre D como subespacio de S es la discreta. Por ejemplo, el espacio Euclideo \mathbb{R}^n (con la topología estandar) contiene al conjunto discreto \mathbb{Z}^n , el cual se puede identificar con la fenestración representada en figura 1.5a) para el caso de dos dimensiones, es decir, cada punto p de \mathbb{Z}^n se identifica con el cubo unitario abierto de dimensión n centrado en p . El conjunto de estos cubos es llamado *fenestración estándar de \mathbb{R}^n* en [Kro/2]. Cabe notar que el mapeo f construido en el ejemplo 1.4.1, identifica el conjunto discreto (en \mathbb{R}^2) consistiendo de todos los puntos de \mathbb{R}^2 con coordenadas enteras pares (y no todo \mathbb{Z}^2) con la fenestración estándar de \mathbb{R}^2 . En el caso $n = 2$, la misma idea es aplicable para identificar cada uno de los dos conjuntos discretos simbolizados por puntos negros en las figuras 1.5b) y 1.5c) con una fenestración, cuyos elementos son los interiores de polígonos regulares diferentes al cuadrado.

En un segundo paso, se extiende la fenestración \mathcal{E} de S a una descomposición X de S de tal manera que el mapeo de proyección natural $\pi : S \rightarrow X$ sea abierto. X , topologizado por la topología cociente, es un espacio topológico (un cociente abierto de S), y es llamado por Kronheimer *\mathcal{E} -rejilla de S* .

Resulta que, para una fenestración fija \mathcal{E} de S , en general existen varias \mathcal{E} -retículas. Por eso, Kronheimer impone una condición de minimalidad a tal \mathcal{E} -retícula, la cual representa el soporte de la imagen digital. Esta minimalidad se satisface para toda \mathcal{E} -retícula X que es un espacio T_0 semiregular [Kro/2]. Recordamos que un espacio topológico se llama semiregular si y sólo si existe una base de conjuntos abiertos regulares [Pea]. Si la \mathcal{E} -retícula X es un espacio T_0 semiregular, y \mathcal{E} es una fenestración localmente finita, entonces X resulta ser un espacio T_0 de Alexandroff [Kro/2], y por lo tanto un poset, y cualquier (otra) \mathcal{E} -retícula T_0 semiregular es homeomorfa a X (por la definición de minimalidad en [Kro/2], vea sección 3.1 de esta tesis). Nosotros llamamos una \mathcal{E} -retícula T_0 semiregular de una fenestración localmente finita un *espacio digital*. Por ejemplo, para la fenestración estandar de \mathbb{R}^n , el espacio digital X consiste en todos los cubos unitarios "abiertos" de todas las dimensiones k ($0 \leq k \leq n$) cuyas cerraduras son precisamente las caras de los elementos de \mathcal{E} . Recordando el ejemplo 1.4.4 y la figura 1.4 en página 9, es evidente que este espacio es homeomorfo al n -espacio digital K^n . Observe que este espacio X es precisamente el complejo celular que aplica Kovalevsky [Kov] para representar la imagen digital inicialmente dada (es decir, antes de segmentarla).

1.5. Dimensionalidad de "espacios digitales"

Todos los modelos mencionados pretenden a describir el soporte de imágenes digitales o otros conjuntos "discretos" de cierta "dimensión".

Los modelos basados en gráficas introducen relaciones en \mathbb{Z}^2 o \mathbb{Z}^3 , y las relaciones de incidencia de Voss [Vos] se definen sobre \mathbb{Z}^n , para representar imágenes de dos, tres y n dimensiones, respectivamente. El término de dimensión aplicado aquí se refiere obviamente a la estructura algebraica de \mathbb{Z}^n como modulo unitario de "dimensión vectorial" n sobre

\mathbb{Z} , y no se refiere a estas relaciones.

La situación es un poco diferente en el caso del n -espacio digital K^n , pues la topología sobre \mathbb{Z}^n se define como producto cartesiano de las topologías de Khalimsky sobre \mathbb{Z} . Observamos en K^n un adicional y nuevo concepto de dimensión, que es en un principio independiente del n : la dimensión del poset correspondiente (\mathbb{Z}^n, \leq) . Vimos en ejemplo 1, que se pueden formar cadenas de elementos de \mathbb{Z}^2 como $x_0 < x_1 < x_2$, es decir, de longitud 2, y evidentemente no existen cadenas más largas. Eso nos da la idea intuitiva que K^n tenga una "dimensión del poset", la cual aquí coincide con n . Volveremos a considerar esta dimensión en capítulo 2.

Para el espacio de Alexandroff X que se construye como cociente abierto del espacio topológico \mathbb{R}^n , esperamos que X tenga una dimensión igual a n . Aquí llegamos a un interesante problema:

¿ Cómo definimos una función de dimensión para espacios de Alexandroff ?

Nos interesa introducir un concepto topológico de dimensión. En la topología general se conocen básicamente tres dimensiones clásicas: la dimensión inductiva pequeña *ind*, la dimensión inductiva grande *Ind*, y la dimensión de cobertura *dim* [Pea]. Todas ellas coinciden y son iguales a n para el espacio Euclideo \mathbb{R}^n . Para estudiar estas dimensiones se suponen algunas propiedades de los espacios topológicos a considerar. Así, *ind* se aplica generalmente a espacios T_1 regulares, *Ind* se estudia para espacios T_1 normales, y *dim* para espacios T_1 completamente regulares [Eng/1]. Resulta que un espacio de Alexandroff es T_1 si y sólo si es discreto. Nosotros definiremos en el siguiente capítulo una dimensión topológica para espacios de Alexandroff (no necesariamente T_0), adaptando *ind* a esta clase especial de espacios.

Estudiaremos en capítulo 3 el problema de cuándo una \mathcal{E} -rejilla X de \mathbb{R}^n tiene dimensión de espacio de Alexandroff n . Suponiendo que X es un espacio localmente finito T_0 semiregular, y fijando \mathcal{E} , comentamos arriba que X es único salvo homeomorfismos, y entonces la dimensión de X solamente depende de \mathcal{E} .

2. La dimensión de espacios de Alexandroff

En este capítulo definimos una dimensión topológica para espacios de Alexandroff. Derivamos propiedades de esta dimensión, similares a las de funciones clásicas de dimensión; en particular demostramos su monotonía con respecto a subespacios. La categoría de los espacios T_0 de Alexandroff es isomorfa a la de los posets (conjuntos parcialmente ordenados). Demostramos, que la dimensión de Alexandroff de un espacio T_0 coincide con la dimensión de su orden parcial correspondiente. Este resultado se ha publicado en [Wie,Wil/1], y se aplica para probar que, para esta clase de espacios, la dimensión de un producto cartesiano (finito) de espacios es igual a la suma de sus dimensiones. También demostramos algunas propiedades de la dimensión de Alexandroff con respecto a subtopologías y con respecto a topologías T_0 minimales.

Mencionamos que la dimensión de Alexandroff fue definida independientemente en [Eva,Kop,Muk] (un artículo más reciente que [Wie,Wil/1]). Aquí, los autores definen una dimensión equivalente a la dimensión del poset $ODIM$, para gráficas transitivas; y demuestran la coincidencia de ambas dimensiones. Además se prueba que ambas dimensiones son iguales a una tercera, la cual se define inductivamente para gráficas dirigidas, y fue estudiada antes por Ivashchenko en sus "espacios moleculares" [Iva/1], vea también [Iva/2].

En esta tesis, si X es un espacio topológico, y $M \subset X$, entonces $cl(M)$, $int(M)$, $fr(M)$ denotan la cerradura, el interior, y la frontera de M , respectivamente. Si X es un espacio de Alexandroff, entonces, para cualquier $x \in X$, $U(x)$ denota su vecindad abierta minimal.

2.1. Definición de la dimensión de Alexandroff

Definimos la dimensión de Alexandroff como una versión de la dimensión clásica pequeña inductiva ind , la cual se define para un espacio topológico arbitrario X como sigue [Eng]:

$$ind X = -1 \iff X = \emptyset;$$

para cualquier $n \in \omega$:

$ind X \leq n$ si y sólo si para cada $x \in X$ y cada conjunto abierto G que contiene a x existe un conjunto abierto U , tal que $x \in U \subset G$, $ind(fr(U)) \leq n - 1$;

$$ind X = n \iff ind X \leq n \wedge ind X \not\leq n - 1;$$

y finalmente

$$ind X = \infty \iff \text{no existe ningún } n \in \omega \text{ para el cual } ind X \leq n.$$

La dimensión ind es la dimensión dentro de las dimensiones clásicas, la cual puede ser aplicada a la clase más general de espacios. En el caso de un espacio de Alexandroff,

cada conjunto abierto G que contiene a x , es un superconjunto de una vecindad abierta minimal $U(x)$. Por esta razón, en nuestra definición analizamos solamente estas vecindades minimales.

2.1.1. Definición: La *dimensión de Alexandroff* DIM de un espacio de Alexandroff (X, τ) es definida inductivamente en términos de una dimensión local DIL determinada por las vecindades minimales:

- i) $DIM X = -1 \iff X = \phi$.
- ii) Si $X \neq \phi$ entonces se define

$$DIM X = \sup \{DIL x, x \in X\},$$
 donde para $x \in X$ y $n \in \omega$ se define

$$DIL x \leq n \iff DIM(fr(U(x))) \leq n - 1,$$

$$DIL x = n \iff DIL x \leq n \wedge DIL x \not\leq n - 1,$$

$$DIL x = \infty \iff DIL x \leq n \text{ es falso para todo } n.$$

Nótese que esta definición puede ser aplicada también a un espacio de Alexandroff no T_0 . La definición es realmente inductiva, porque $DIM(fr(U(x)))$ es el supremo de las dimensiones locales de los elementos de $fr(U(x))$, medido en el subespacio $(fr(U(x)), \tau_{fr(U(x))})$ con la topología relativa. Deberíamos escribir más exactamente

$$DIL_X x \leq n \iff \sup\{DIL_{fr(U(x))} y, y \in fr(U(x))\} \leq n - 1,$$

pero omitimos los índices cuando estamos trabajando solamente con el espacio (X, τ) . Es fácil ver que dos espacios de Alexandroff homeomorfos tienen la misma dimensión.

2.2. Espacio discreto, subespacios, suma de espacios

Estudios sobre funciones topológicas de dimensión se inician usualmente con investigaciones sobre 0-dimensionalidad, monotonía con respecto a subespacios, y sobre la dimensión del producto cartesiano de espacios.

Es obvio que el espacio discreto no vacío tiene dimensión 0. En el caso de un espacio T_0 , lo contrario también es verdad:

2.2.1. Proposición: Si (X, τ) es un espacio T_0 de Alexandroff, entonces (X, τ) es un espacio discreto si y sólo si $DIM X = 0$.

Demostración:

La necesidad es trivial. Si $DIM X = 0$ entonces por la definición 2.1.1, $DIL x = 0$ para todo $x \in X$, por lo cual $fr(U(x)) = \phi$ para cualquier $x \in X$. Ahora sea $x \in X$ arbitrario y supongase que existe $y \in U(x)$ con $y \neq x$. Puesto que X es T_0 , se sigue $x \notin U(y)$. Pero

de $y \in U(x)$ tenemos $x \in cl(y) \subseteq cl(U(y))$, implicando $x \in fr(U(y))$ lo cual contradice $fr(U(y)) = \emptyset$. En consecuencia $U(x) = \{x\}$, y (X, τ) es discreto. \square

El lema siguiente facilitará la demostración de la monotonía de DIM con respecto a subespacios.

2.2.2. Lema: Si $A \subseteq X$, y (A, τ_A) es el subespacio relativo de un espacio de Alexandroff (X, τ) , entonces para $a \in A$ lo siguiente es verdad:

- (i) $U_A(a) = U(a) \cap A$,
- (ii) $fr_A(U_A(a)) \subseteq fr(U(a)) \cap A$.

Demostración:

(i) es obvio. Para probar (ii), sea $y \in fr_A(U_A(a)) = cl_A(U_A(a)) \cap A \cap (X \setminus U_A(a))$. Utilizando (i), de $y \in A \cap (X \setminus U_A(a))$ se sigue $y \in A \cap (X \setminus U(a))$, y obtenemos $cl(U_A(a)) \subseteq cl(U(a))$. Es fácil ver que $cl_A(U_A(a)) \subseteq cl(U_A(a))$; por lo cual $cl_A(U_A(a)) \subseteq cl(U(a))$, completando la demostración de $y \in fr(U(a)) \cap A$. \square

2.2.3. Proposición: Si $A \subseteq X$, y (A, τ_A) es el subespacio relativo de un espacio de Alexandroff (X, τ) , entonces $DIM A \leq DIM X$.

Demostración: (por inducción sobre $DIM X$)

- i) $DIM X = -1$ implica trivialmente $DIM A = DIM X$.
- ii) Suponemos que $DIM X \leq n$ implica $DIM A \leq DIM X$, y sea ahora $DIM X = n + 1$. Sea $a \in A$ arbitrario. Del lema 2.2.2 se sigue $fr_A(U_A(a)) \subseteq fr(U(a))$. $fr_A(U_A(a))$ con la topología relativa $\tau_{fr_A(U_A(a))}$ es un subespacio de (A, τ_A) , y por lo tanto un subespacio de (X, τ) . $fr(U(a))$ con la topología relativa $\tau_{fr(U(a))}$ es un subespacio de (X, τ) . Es claro que $\tau_{fr_A(U_A(a))}$ es también la topología relativa sobre $fr_A(U_A(a))$ con respecto al espacio $(fr(U(a)), \tau_{fr(U(a))})$. Por eso la hipótesis puede ser aplicada, y se sigue $DIM fr_A(U_A(a)) \leq DIM fr(U(a))$. Por el otro lado, $a \in X$, y $DIM fr(U(a)) \leq n$, debido a $DIL a \leq n + 1$. Por lo tanto $DIL_A a \leq n + 1$, lo cual completa la demostración de $DIM A \leq n + 1$. \square

En cuanto a la unión topológica de espacios de Alexandroff, la siguiente propiedad es fácilmente derivada:

2.2.4. Proposición: Si (X, τ_X) , (Y, τ_Y) son espacios de Alexandroff disjuntos no vacíos, entonces

- (i) $DIM(X \oplus Y) = \max \{DIM X, DIM Y\}$, si $DIM(X)$ y $DIM(Y)$ son finitas;
- (ii) $DIM(X \oplus Y) = \infty$, si $DIM X = \infty$ o $DIM Y = \infty$.

Demostración:

Denotamos $(Z, \tau_Z) = (X, \tau_X) \oplus (Y, \tau_Y)$. Es claro que $fr_X(U_X(x)) = fr_Z(U_Z(x))$, cuando $x \in X$; y $fr_Y(U_Y(y)) = fr_Z(U_Z(y))$, cuando $y \in Y$. Por eso, $x \in X$ implica $DIL_X x = DIL_Z x$; y $y \in Y$ implica $DIL_Y y = DIL_Z y$, lo cual tiene como consecuencia las afirmaciones de la proposición 2.2.4. □

2.3. La topología T_0 de Alexandroff y su orden parcial

En esta sección revisamos unas propiedades de espacios T_0 de Alexandroff. Todas ellas fueron establecidas y probadas por P. Alexandroff en su artículo "Diskrete Räume" [Alex]. A lo largo de esta sección, (X, τ) denota un espacio T_0 de Alexandroff, y para $x \in X$, e conjunto $U(x) = \bigcap \{A \in \tau : x \in A\} \in \tau$ es su vecindad abierta minimal.

2.3.1. Lema: Si X es un espacio T_0 de Alexandroff, y $x, y \in X$, entonces

- (i) $x \leq y \iff U(x) \supseteq U(y)$ define un orden parcial sobre X ,
 - (ii) $x \leq y \iff y \in U(x) \iff x \in cl(\{y\})$.
-

Más aún, cada espacio T_0 de Alexandroff es equivalente a un poset, en el siguiente sentido:

2.3.2. Proposición: Si **Alex** denota la categoría de los espacios T_0 de Alexandroff con funciones continuas como morfismos, y **Poset** denota la categoría de los conjuntos parcialmente ordenados con funciones monótonas como morfismos, entonces **Alex** y **Poset** son isomorfas. Además,

- (i) \mathcal{P} definido para todo $(X, \tau) \in \mathbf{Alex}$ por $\mathcal{P}((X, \tau)) = (X, \leq)$, donde $x \leq y \iff x \in cl(\{y\})$, $x, y \in X$, es un functor de **Alex** en **Poset**.
- (ii) \mathcal{A} definido para todo $(X, \leq) \in \mathbf{Poset}$ por $\mathcal{A}((X, \leq)) = (X, \tau)$, donde τ es la topología determinada por la base $\{\{y \in X : x \leq y\}, x \in X\}$, es un functor de **Poset** en **Alex**.

La correspondencia entre espacios T_0 de Alexandroff y posets fue establecida por primera vez por Alexandroff ([Alex], §1). Una discusión y demostración de ella se encuentran en [Ale, Hop] (III, §1,8). Nuestra proposición 2.3.2, cuyo contenido se reporta en [Neu, Wil/2], es una consecuencia de un teorema más general probado por Erné, quien demuestra que la categoría de los espacios de Alexandroff con funciones continuas como morfismos, es isomorfa a la categoría de los conjuntos preordenados (un preorden es una relación reflexiva y transitiva) con funciones monótonas como morfismos, y que \mathcal{P} y \mathcal{A} definidos arriba son funtores entre estas dos categorías ([Ern], teorema 3.5). Eso implica proposición 2.3.2, debido a que un espacio de Alexandroff (X, τ) es T_0 si y sólo si $\mathcal{P}((X, \tau))$ es un poset, lo cual es fácil de probar.

El orden parcial definido para cada espacio T_0 de Alexandroff en proposición 2.3.2.i) es llamado *orden de especialización de X* por varios autores, por ejemplo en [Joh]. Como corolario tenemos que, si (X, τ) es un espacio T_0 de Alexandroff, y \leq su orden de especialización, entonces el espacio topológico construido desde (X, \leq) como en proposición 2.3.2.ii), es homeomorfo a (X, τ) .

Aplicando el orden de especialización del espacio X , obviamente, la vecindad minimal de un punto $x \in X$ en el espacio (X, τ) tiene la forma $U(x) = \{y \in X : x \leq y\}$. Por eso, el interior de un conjunto $M \subseteq X$ se expresa como

$$\text{int}(M) = \{m \in M : m \leq n \text{ implica } n \in M\}.$$

También la cerradura y la frontera de un conjunto pueden ser caracterizados por el orden de especialización:

2.3.3. Lema: Si \leq es el orden de especialización de un espacio T_0 de Alexandroff (X, τ) , entonces lo siguiente es verdad:

- (i) $\text{cl}(M) = \{y \in X : \text{existe } m \in M \text{ tal que } y \leq m\}$, para $M \subseteq X$.
- (ii) Para $x \in X$, $\{x\}$ es cerrado $\iff (y \leq x \text{ implica } y = x)$.
- (iii) Si $x, y \in X$ con $x < y$ entonces $x \in \text{fr}(U(y))$.

□

2.4. La dimensión del orden parcial

Sea (X, τ) un espacio T_0 de Alexandroff, y (X, \leq) el poset correspondiente, es decir, donde \leq es el orden de especialización, y sea $x \in X$. La dimensión local o "altura" de x es definida en [Eis] como el supremo de las longitudes l de todas las cadenas de la forma $a_l < a_{l-1} < \dots < a_0 = x$ de elementos de X , donde $a < b \iff a \leq b \wedge a \neq b$. Con la base en esta dimensión local, una dimensión global de X es definida, formalmente:

2.4.1. Definición: La *dimensión del orden parcial ODIM* de un poset (X, \leq) es definida en términos de una dimensión local *ODIL* como sigue:

$$\text{ODIM } X = \sup \{\text{ODIL } x, x \in X\}, \text{ donde para } x \in X \text{ se define}$$

$$\text{ODIL } x = \sup \{l : \text{existe una cadena } a_l < a_{l-1} < \dots < a_0 = x \text{ de elementos de } X\}.$$

Recordamos que el supremo de un conjunto acotado por arriba es definido como la cota superior minimal; y es definido como infinito si el conjunto no es acotado por arriba. La dimensión *ODIM* definida aquí coincide con la dimensión o "longitud" de un poset definida en [Bir].

Sea ahora X un espacio T_0 de Alexandroff con una dimensión del orden parcial finita tal que $ODIM X = n$. Definimos

$$D_i = \{x \in X : ODIL x = i\}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

De la definición de $ODIL$, es claro que D_i no es vacío para todo $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, y $X = D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$ es una descomposición de X . También es obvio, que, para cada i cualesquiera dos elementos distintos de D_i no son comparables en (X, \leq) . Las siguientes propiedades serán útiles para las pruebas de las proposiciones siguientes.

2.4.2. Lema: Si X es un espacio T_0 de Alexandroff con $ODIM X = n$ finita, entonces

- (i) $x \in D_n \implies \{x\}$ es abierto
- (ii) $x \in D_0 \iff \{x\}$ es cerrado
- (iii) $x \in D_{n-k} \implies U(x) \setminus \{x\} \subseteq D_n \cup D_{n-1} \cup \dots \cup D_{n-(k-1)}$ para $k \in \{0, \dots, n\}$.

Demostración:

(i) Supongamos $y \in U(x) \setminus \{x\}$, entonces $x < y$. Por $ODIL x = n$ existen a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 tales que $a_n < a_{n-1} < \dots < a_0 = x < y$, lo cual implica $ODIL y \geq n + 1$, contradiciendo $ODIM X = n$. Por eso $U(x) = \{x\}$.

(ii) es obvio de la definición de $ODIL$ y del lema 2.3.3.

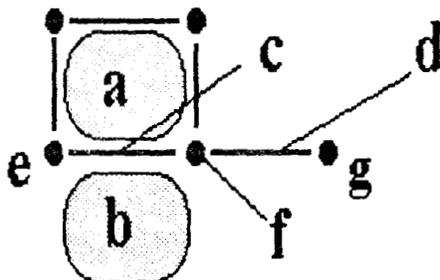
(iii) Sea $x \in D_{n-k}$, entonces $ODIL x = n - k$. Para $y \in U(x) \setminus \{x\}$ tenemos $ODIL y \geq n - (k - 1)$, por lo cual existe una cadena $a_{n-k} < a_{n-k-1} < \dots < a_0 = x < y$ implicando $ODIL y \geq n - (k - 1)$. Pero por $ODIM X = n$ vale que $ODIL y \leq n$. Consecuentemente $ODIL y \in \{n - (k - 1), n - (k - 1) + 1, \dots, n\}$, lo cual implica $y \in D_{n-(k-1)} \cup D_{n-(k-1)-1} \cup \dots \cup D_n$.

□

Las implicaciones (i) y (iii) del último lema no son invertibles, como muestra el siguiente ejemplo:

2.4.3. Ejemplo:

Recordamos el espacio de Alexandroff $(Y, \tau_{\leq \cdot})$ del ejemplo 1.4.1. (vea figura 1.4 en página 9 de esta tesis), el cual es homeomorfo al 2-espacio digital, y sea X el subespacio finito de Y representado en la siguiente figura:



Evidentemente $ODILa = ODILb = 2, ODILc = ODILd = 1, ODILE = ODILf = ODILg = 0$, y por lo tanto $ODIM X = 2$. Sin embargo, d es un punto abierto, el cual no tiene dimensión maximal 2. También, $U(c) \setminus \{c\} = \{a, b\} \subset D_2 \subset D_2 \cup D_1$ pero $ODILc \neq 0$.

2.5. La dimensión de espacios T_0 de Alexandroff

En esta sección demostramos que, para cualquier espacio T_0 de Alexandroff (X, τ) , su dimensión de Alexandroff coincide con la dimensión del orden parcial correspondiente. Primero derivamos una propiedad útil de la 0 - dimensionalidad de (X, τ) :

2.5.1. Lema: *Si (X, τ) es un espacio T_0 de Alexandroff, y $x \in X$, entonces $DILx = 0$ implica que $\{x\}$ es cerrado.*

Demostración:

Denotamos por \leq el orden de especialización de X . De $DILx = 0$ se sigue que $U(x)$ es cerrado, por lo cual $cl(\{x\}) \subset U(x)$. Por eso, $y \in cl(\{x\})$, que significa $y \leq x$, implica también $x \leq y$. Pero entonces $x = y$, puesto que \leq es un orden parcial.

□

La contraposición de la implicación de este lema es falsa, como muestra el siguiente ejemplo.

2.5.2. Ejemplo:

Sea $X = \{a, b, c\}$ y $\tau = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{b\}, \phi, X\}$. Entonces $\{a\}$ es cerrado, pero $DILa = 1 \neq 0$.

2.5.3. Corolario: *Si (X, τ) es un espacio T_0 de Alexandroff, y existe un y tal que $y < x$, entonces $DILx \geq 1$.*

Ahora investigamos la correspondencia entre $ODIM$ y DIM . Primero, consideramos ambas dimensiones localmente.

2.5.4. Proposición: *En cualquier espacio T_0 de Alexandroff (X, τ) , $DILx \leq n$ implica $ODILx \leq n$ para todo $x \in X$, $n \geq 0$.*

Demostración:

Sean $x \in X$ con $DILx \leq n$, $n \geq 0$, y $a_0, a_1, \dots, a_m \in X$ con $a_0 = x$ y $m \geq 0$ tales que $a_m < a_{m-1} < \dots < a_0$.

Es suficiente mostrar que $m \leq n$ (por inducción sobre n).

i) Sea $n = 0$: Obviamente $m \leq 0$, usando el lema 2.5.1.

ii) Supongamos que, en cualquier espacio T_0 de Alexandroff, si $n \leq k$, entonces $DIL x \leq n$ implica $ODIL x \leq n$: y sea $n = k + 1$.

De $DIL x \leq k + 1$ se sigue $DIL_{fr(U(x))} y \leq k$ para todo $y \in fr(U(x))$. Por la transitividad de \leq , tenemos que $a_i < x$ para cada $i = 1, \dots, m$. Entonces, debido al lema 2.3.3, $a_i \in fr(U(x))$ vale para todo $i = 1, \dots, m$. Además, $cl_X(\{a_i\}) = cl_{fr(U(x))}(\{a_i\})$ para cada i , porque $fr(U(x))$ es un subespacio cerrado de (X, τ) . Por eso, de la hipótesis se sigue que $ODIL a_1 \leq k$. Por eso, $a_l < a_{l-1} < \dots < a_2 < a_1$ implica $l \leq k$, donde $a_r < a_{r-1} \Leftrightarrow a_r \in cl_{fr(U(x))}(\{a_{r-1}\}) \Leftrightarrow a_r \in cl_X(\{a_{r-1}\})$. Por eso $m \leq l + 1 \leq k + 1$. \square

Nuevamente, la contraposición de la implicación de esa proposición es falso, como el siguiente ejemplo muestra.

2.5.5. Ejemplo:

Sea (X, τ) el espacio (Y, τ_{\leq}) ($Y = f(\mathbb{Z}^2)$) del ejemplo 1.4.1, donde la topología τ_{\leq} es generada de \leq^* como en proposición 2.3.2(ii) (vea figura 1.4 en página 9). Consideramos un elemento x de Y que es un punto en \mathbb{R}^2 , un elemento $y \in Y$ que es un segmento "abierto" unitario y en \mathbb{R}^2 , y un elemento $z \in Y$ que es el interior de un cuadrado unitario en \mathbb{R}^2 , tales que $x <^* y <^* z$. Entonces $ODIL x = 0$, $ODIL y = 1$, $ODIL z = 2$, pero $DIL x = DIL y = DIL z = 2$.

2.5.6. Proposición: *En cualquier espacio T_0 de Alexandroff (X, τ) , para cualquier $x \in X$ tenemos que, si $ODIL y \leq n$ para todo $y \in U(x)$ entonces $DIL x \leq n$.*

Demostración:

Supongamos que $x \in X$ y $ODIL y \leq n$ para todo $y \in U(x)$. Demostramos por inducción sobre n que $DIM(fr(U(x))) \leq n - 1$.

i) Sea $n = 0$: Entonces $ODIL x = 0$ y por el lema 2.4.2, $\{x\}$ es cerrado, lo cual implica $DIM fr(U(x)) = -1$, debido a $fr(U(x)) = \emptyset$. (Para ver eso, se supone $s \in fr(U(x))$. Entonces, debido a $s \in cl(U(x))$, por el lema 2.3.3 existe $t \in U(x)$ tal que $s \leq t$. Pero $\{y\}$ es cerrado, por lo cual $s = t$ y $t \in (X \setminus U(x))$, lo cual es una contradicción.)

ii) Supongamos que la conjetura vale para $n \leq k$, y consideramos $n = k + 1$.

Sean $f \in fr(U(x))$, y $a_m < a_{m-1} < \dots < a_1 < a_0 = f$ una cadena en $fr(U(x))$. Entonces esta cadena existe en X , siempre cuando $m \geq k + 1$, porque $fr(U(x))$ es un subespacio cerrado de X . Pero $f \in cl(U(x))$, y por eso existe $s \in U(x)$ con $f \leq s$. $f = s$ no es posible, debido a $f \in (X \setminus U(x))$. Por eso $f < s$, lo cual implica que $a_m < \dots < a_1 < f < s$. Entonces $ODIL s \geq m + 1 \geq k + 2$, siendo una contradicción. Así obtenemos que $m \leq k$ y $ODIL f \leq k$ en el espacio $fr(U(x))$. De la hipótesis se sigue ahora $DIL_{fr(U(x))} f \leq k$, y por lo tanto $DIM fr(U(x)) \leq k$. \square

El siguiente ejemplo muestra que la contraposición de la implicación de la proposición 2.5.6 es falsa.

2.5.7. Ejemplo:

Sea $(X, \tau) = (\{x, y\}, \{\{x\}, \emptyset, X\})$. Entonces $DIL y = 0$, pero $x \in U(y)$ y $ODIL x = 1$, pues $y < x$.

Podemos resumir las proposiciones 2.5.4, 2.5.6, y sus corolarios, estableciendo las siguientes condiciones para la dimensión local.

2.5.8. Proposición: *En cualquier espacio T_0 de Alexandroff (X, τ) , para cualquier $x \in X$ vale lo siguiente:*

- (i) *Si $ODIL x \geq n$ y $ODIL y \leq n$ para todo $y \in U(x)$, entonces $DIL x = n$.*
- (ii) *Si $DIL x = n$, entonces $ODIL x \leq n$ y, existe $y \in U(x)$ tal que $ODIL y \geq n$.*

Ni (i) ni (ii) son invertibles. Sin embargo, tenemos lo siguiente:

2.5.9. Teorema: *Para todo espacio T_0 de Alexandroff X ,*

$$DIM X = ODIM X.$$

Demostración:

i) $DIM X = n$ significa que $DIL x \leq n$ para todo $x \in X$, y existe además $x^* \in X$ con $DIL x^* = n$. Eso implica que $ODIL x \leq n$ para cualquier $x \in X$ por la proposición 2.5.4, y entonces existe $y \in U(x^*)$ tal que $ODIL y \geq n$ por la proposición 2.5.8(ii). Claramente $y \in X$, por lo cual $\sup\{ODIL x; x \in X\} = ODIM X = n$.

ii) $ODIM X = n$ significa que $ODIL x \leq n$ para todo $x \in X$, y existe $x^* \in X$ con $ODIL x^* = n$. Eso implica que $DIL x^* = n$ por la proposición 2.5.8(i). Sea ahora $z \in X$; claro que $ODIL y \leq n$ vale para cualquier $y \in U(z)$, por lo cual debido a proposición 2.5.6, $DIL z \leq n$, implicando finalmente $DIM X = n$.

iii) De i), ii), tenemos que $DIM X = n \iff ODIM X = n$ para cada $n = 0, 1, 2, \dots$. Eso implica de inmediato, que $DIM X = \infty \iff ODIM X = \infty$, lo cual completa la demostración.

□

2.6. La dimensión de Alexandroff del producto cartesiano de espacios

Aplicando el resultado del teorema 2.1, demostramos enseguida lo siguiente:

2.6.1. Proposición: *Si X, Y son espacios no vacíos T_0 de Alexandroff, entonces*

- (i) $DIM(X \times Y) = DIM X + DIM Y$, si $DIM X$ y $DIM Y$ son finitas.
(ii) $DIM(X \times Y) = \infty$, si $DIM X = \infty$ o $DIM Y = \infty$.

Demostración:

Sean X, Y espacios no vacíos T_0 de Alexandroff. Claro que $X \times Y$ es nuevamente un espacio T_0 , y de Alexandroff, pues, si $x \in X, y \in Y$, y $U_X(x), U_Y(y)$ denotan las vecindades abiertas minimales de x en el espacio X , y de y en Y , respectivamente, entonces la vecindad abierta minimal del punto (x, y) en el espacio $X \times Y$ está dada por

$$U_{X \times Y}((x, y)) = U_X(x) \times U_Y(y),$$

lo cual es fácil de demostrar como una consecuencia de la definición del producto cartesiano de espacios topológicos. Eso implica para los ordenes de especialización correspondientes de los espacios que, si $(a, b), (c, d) \in X \times Y$, entonces

$$(a, b) \leq (c, d) \iff a \leq c \wedge b \leq d,$$

pues $(a, b) \leq (c, d) \iff (c, d) \in U_{X \times Y}((a, b)) \iff c \in U_X(a) \times U_Y(b) \iff a \leq c \wedge b \leq d$. Este hecho será aplicada en la demostración a continuación.

(i) Suponemos $DIM X = n$ y $DIM Y = m$, y asumimos, sin pérdida de generalidad, $m \geq n$. Por el teorema 2.5.9, $ODIM X = n$ y $ODIM Y = m$. Entonces, $x_t < x_{t-1} < \dots < x_0 = x$ implica $t \leq n$ para todo $x \in X$, y $y_r < y_{r-1} < \dots < y_0 = y$ implica $r \leq m$ para cualquier $y \in Y$.

Ahora sea $z = (x, y) \in X \times Y$ arbitrario, y supongase que existen $z_t, z_{t-1}, \dots, z_1 \in X \times Y$ tales que $z_t < z_{t-1} < \dots < z_1 < z_0 = z$. Denotemos $z_i = (x_i, y_i)$, $i = 0, \dots, t$. Tenemos $z_i < z_{i-1} \iff z_{i-1} \in U_{X \times Y}(z_i) \wedge z_i \neq z_{i-1}$. Incluyendo que $U_{X \times Y}(z_i) = U_X(x_i) \times U_Y(y_i)$, se sigue que $z_i < z_{i-1} \iff x_i \leq x_{i-1} \wedge y_i \leq y_{i-1} \wedge (x_i \neq x_{i-1} \vee y_i \neq y_{i-1}) \iff (x_i < x_{i-1} \wedge y_i \leq y_{i-1}) \vee (x_i \leq x_{i-1} \wedge y_i < y_{i-1})$. Para probar que $t \leq m + n$, podemos suponer que para cada $i = 1, \dots, t$, que z_i y z_{i-1} se distinguen en exactamente una coordenada, porque, si $x_i < x_{i-1} \wedge y_i < y_{i-1}$ para algún i , entonces la cadena puede ser prolongada, poniendo $z_i < (x_i, y_{i-1}) < z_{i-1}$ (o $z_i < (x_{i-1}, y_i) < z_{i-1}$) en lugar de $z_i < z_{i-1}$. Ahora sea I_1 el conjunto de todos los i tales que z_i es distinto de z_{i-1} en su coordenada x , y sea I_2 el conjunto de todos los i para los cuales z_i se distingue de z_{i-1} en su coordenada y . Eso significa $x_i < x_{i-1} \wedge y_i = y_{i-1}$ para cada $i \in I_1$, y $x_i = x_{i-1} \wedge y_i < y_{i-1}$ para cada $i \in I_2$. Así obtenemos las cadenas $x_r < x_{r-1} < \dots < x_0$ (con $r = \text{card } I_1$) y $y_s < y_{s-1} < \dots < y_0$ (con $s = \text{card } I_2$). Entonces $t = r + s$, pues claramente $I_1 \cup I_2 = \{1, \dots, t\}$. De acuerdo a la suposición, tenemos $r \leq n$ y $s \leq m$. En consecuencia $t \leq m + n$, implicando $ODIL z \leq m + n$.

$ODIM X = n, ODIM Y = m$ implica también que existen $x^* \in X, y^* \in Y$ tales que $ODIL x^* = n, ODIL y^* = m$. Eso significa que existen tanto $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ como $y_1, y_2, \dots, y_m \in Y$ tales que $x_n < x_{n-1} < \dots < x_1 < x^*$ y $y_m < y_{m-1} < \dots < y_1 < y^*$.

Definimos ahora $z^* = (x^*, y^*)$. Entonces existe en $X \times Y$ la cadena $(x_n, y_m) < (x_n, y_{m-1}) < (x_n, y_{m-2}) < \dots < (x_n, y_n) < (x_{n-1}, y_n) < (x_{n-1}, y_{n-1}) < (x_{n-2}, y_{n-1}) < (x_{n-2}, y_{n-2}) < \dots < (x_1, y_1) < (x^*, y_1) < (x^*, y^*)$. Esta cadena tiene la longitud $t = (m-n) + 1 + 2n - 1 = m + n$, y se sigue $ODIL z^* \geq m + n$, lo cual implica $ODIM(X \times Y) = m + n$, y por el teorema 2.5.9, $DIM(X \times Y) = m + n$.

(ii) En (i) fue probado que $DILx^* \geq n, DILy^* \geq m$ para $x^* \in X, y^* \in Y$, implica para $z^* = (x^*, y^*)$ que $DILz^* \geq n + m$. Si ahora suponemos, sin pérdida de generalidad, que $DIM X = \infty$, entonces, por la definición de DIM , para todo $n \geq 0$, existe un $x \in X$ tal que $DILx \geq n$. De eso se obtiene enseguida que $\sup\{DILz : z \in X \times Y\} = DIM(X \times Y) = \infty$. \square

2.7. Complejos abstractos

Debido a que espacios T_0 de Alexandroff son equivalentes a posets, estos espacios están relacionados con complejos abstractos, definidos a continuación. Como se describió en capítulo 1 de esta tesis, estos complejos son aplicados como modelos topológicos de imágenes digitales por Kovalevsky [Kov], y Herman [Her].

2.7.1. Definición: ([Rin], p.317) Un *complejo abstracto* es una estructura (M, \leq, dil) , donde M es un conjunto no vacío, \leq es una relación transitiva y reflexiva sobre M , y dil ("dimensión local") es un mapeo de M al conjunto de los números enteros no negativos, tales que

- i) $x \leq y \implies dil x \leq dil y$ para todo $x, y \in M$,
- ii) Para cada $x \in M$, el número de elementos $y \in M$ tales que $y \leq x$, es a lo más finito.

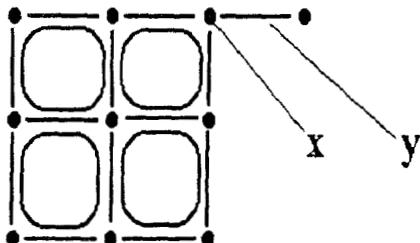
Por la definición de $ODIL$, y tomando en cuenta lema 2.3.3.i), lo siguiente es evidentemente verdad:

2.7.2. Proposición: Si (X, \leq) es el poset correspondiente a un espacio T_0 de Alexandroff (X, τ) , con la propiedad que, para todo $x \in X$, el conjunto $cl(\{x\})$ es a lo más finito, entonces $(X, \leq, ODIL)$ es un complejo abstracto. \square

Es obvio que todo espacio finito es de Alexandroff, y cumple que $cl(\{x\})$ es finito para cada punto x . En consecuencia, todo espacio finito T_0 es un complejo abstracto, siempre cuando suponemos que dil es la dimensión local $ODIL$ del poset. Cuando dil es otra función de dimensión local, en general no obtenemos un complejo. Por ejemplo, observese

que la dimensión de Alexandroff local DIL no es monótona con respecto al orden parcial \leq :

2.7.3. Ejemplo: Sea X el subespacio (finito) representado en la siguiente figura de espacio de ejemplo 1.4.1 (vea páginas 9, 10 de esta tesis):



Aquí tenemos que $DILx = 2$, $DILy = 1$, pero $x < y$.

Consecuentemente, (X, \leq, DIL) no es un complejo abstracto. Así que, la confirmación de Kovalevsky en [Kov], que todo espacio finito T_0 sea un complejo abstracto, no es correcta. Este autor no proporciona en su prueba ningún método razonable de construir una función dil . Mencionamos que Herman dedicó su trabajo [Her] a la corrección de eso; el análisis (después de varios otros autores) la equivalencia entre espacios T_0 de Alexandroff y poset en particular cuando sean localmente finitos, y construye una dimensión, la cual garantiza obtener un complejo abstracto de un poset. La dimensión definida por Herman coincide precisamente con $ODIL$.

2.8. Topologías T_0 minimales y subtopologías

Es conocido que para cada espacio T_0 de Alexandroff (X, τ) existe una subtopología minimal τ_0 entre todas las subtopologías de τ que son T_0 [Kon, Wil]. Aquí estamos interesados en cómo se ve esta topología τ_0 . Sea (X, τ) durante esta sección un espacio T_0 de Alexandroff con la propiedad que $DIM X = n$ ($= ODIM X$ por el teorema 2.5.9) es finita. Si $ODIM X$ es finita, entonces X tiene una descomposición $D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$, donde $D_i = \{x \in X : ODILx = i\}$, como fue desarrollado en página 18. Sea $<_i$ un buen orden irreflexivo sobre D_i . La topología τ_0 tiene la siguiente forma:

2.8.1. Proposición: Si (X, τ) es un espacio T_0 de Alexandroff, y $ODIM X$ es finita entonces una topología minimal T_0 sobre X está dada por

$$\tau_0 = \{\emptyset, X\} \cup \{\{y \in X : x <_* y\}, x \in X\}, \text{ definiendo para } x, y \in X$$

$$x <_* y \iff \begin{cases} x <_i y, & \text{si } x, y \in D_i \\ ODILx < ODILy, & \text{si } x \in D_i, y \in D_j, i \neq j, \end{cases}$$

donde $<$ es un buen orden sobre ω .

Demostración:

Claramente $<_*$ es un buen orden irreflexivo sobre X . Si τ_0 es una topología T_0 contenida en τ , entonces τ_0 es minimal por el teorema de Larson y Pakh [Lar,Pak]. Por eso es suficiente demostrar que τ_0 es una subtopología T_0 de τ .

Para mostrar que τ_0 es topología, notamos que trivialmente $\emptyset, X \in \tau_0$. Sean ahora $A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau_0$, y consideramos la intersección de estos conjuntos. Podemos suponer que $A_i \neq \emptyset, A_i \neq X$ para todo i . Para cada i entonces $A_i = \{y \in X : x_i <_* y\}$ para cierto $x_i \in X$. Por eso $\bigcap \{A_i : i = 1, \dots, n\} = \{y \in X : \max\{x_i : i = 1, \dots, n\} <_* y\}$. El máximo de un subconjunto finito de X existe en X , por lo cual $\bigcap \{A_i : i = 1, \dots, n\} \in \tau_0$. Sean ahora $A_1, A_2, \dots \in \tau_0$, y consideramos la unión de estos conjuntos. Para cada i , podemos suponer $A_i = \{y \in X : x_i <_* y\}$ para cierto $x_i \in X$. Entonces $\bigcup \{A_i : i \in I\} = \{y \in X : \inf\{x_i : i \in I\} <_* y\}$. Puesto que $<_*$ es un buen orden, $x = \inf\{x_i : i \in I\}$ existe en X , lo cual implica $\bigcup \{A_i : i \in I\} \in \tau_0$. Por lo tanto τ_0 es una topología.

Para probar que $\tau_0 \subset \tau$, sea $M \in \tau_0$; $M \neq \emptyset, M \neq X$. Entonces $M = \{y \in X : x <_* y\}$ para un $x \in X = D_0 \cup D_1 \cup \dots \cup D_n$. Si $x \in D_n$, entonces $M \subset D_n$, porque n es la dimensión local maximal. Todos los elementos de D_n son puntos abiertos en τ , por lo cual $M \subset \tau$. Si $x \in D_{n-1}$, por la definición de $<_*$ tenemos $M = \{y \in D_{n-1} : x <_{n-1} y\} \cup D_n$. Si ahora $m \in M \cap D_n$, entonces $U(m) = \{m\} \subset M$, y en el caso de $m \in D_{n-1}$ se sigue $U(m) = \{m\} \cup N$, donde $N \subset D_n$. Debido a que M contiene a D_n , $U(m) \subset M$ y M es abierto. Estos dos pasos pueden ser generalizados fácilmente: Si $x \in D_{n-k}$ ($k = 0, 1, \dots, n$), entonces $M = \{y \in D_{n-k} : x <_{n-k} y\} \cup D_{n-k+1} \cup \dots \cup D_n$. Considerando $m \in M$; si $m \in D_n$ o $m \in D_{n-1}$, usamos los argumentos de arriba para deducir que $U(m) \subset M$. Si $m \in D_{n-2}$, entonces $U(m) = \{m\} \cup N_1 \cup N_2$, donde $N_1 \subset D_n, N_2 \subset D_{n-1}$, y aprovechando que $D_n, D_{n-1} \subset M$, obtenemos $U(m) \subset M$. De esta manera consideramos los casos $m \in D_{n-3}, \dots, m \in D_{n-k}$. Como resultado recibimos que $M \in \tau$ y así $\tau_0 \subset \tau$. \square

El resultado de la minimalización de la topología de Khalimsky es de nuevo una topología de Alexandroff. En general no podemos esperar que la topología T_0 minimal de un espacio de Alexandroff tenga nuevamente la propiedad de Alexandroff.

Por nuestra construcción de τ_0 en proposición 2.8.1, es claro que su dimensión de Alexandroff es infinita, siempre y cuando el conjunto X sea infinito. Si X es un conjunto finito de n elementos, entonces una topología minimal T_0 según [Lar,Pah] tiene la forma

$$\tau_0 = \{\{y \in X : a_i < y\}, i = 1, \dots, n\} \cup \{X\},$$

donde $<$ es un orden arbitrario lineal sobre X , la cual se puede expresar también como

$$\tau_0 = \{\{y \in X : a_i \leq y\}, i = 1, \dots, n\} \cup \{\emptyset\}.$$

Esta topología tiene obviamente dimensión de orden parcial $n - 1$, y por lo tanto tiene dimensión de Alexandroff $n - 1$, y no existe ninguna topología T_0 con una dimensión más

grande que $(n - 1)$, pues no se pueden formar cadenas de la forma $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ con $k > n$ en X .

Para un conjunto X arbitrario, ahora es claro que, entre sus T_0 - topologías, una minimal tiene dimensión maximal. De eso deducimos que la dimensión no decrece, cuando pasamos a una subtopología, lo cual resulta verdad:

2.8.2. Proposición: *Si τ_1, τ_2 son T_0 topologías de Alexandroff sobre X tales que $\tau_1 \subseteq \tau_2$, entonces*

$$DIM(X, \tau_1) \geq DIM(X, \tau_2).$$

Demostración:

Denotamos por \leq_i el orden de especialización de $(X, \tau_i), i = 1, 2$. Si $\tau_1 \subset \tau_2$, entonces cualquier cadena en (X, \leq_2) es una cadena en (X, \leq_1) . Eso implica que $ODIM(X, \leq_1) \geq ODIM(X, \leq_2)$, y entonces $DIM(X, \tau_1) \geq DIM(X, \tau_2)$ por el teorema 2.5.9. □

No obstante, la dimensión no necesariamente crece, cuando pasamos a una subtopología propia, como muestra el siguiente ejemplo:

2.8.3. Ejemplo:

Consideramos $X = \{a, b, c\}$ con las topologías τ_1, τ_2 determinadas por las siguientes bases, respectivamente:

$$\mathcal{B}_1 = \{\{a, b\}, \{b, c\}\} \quad \mathcal{B}_2 = \{\{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$$

Claramente $\tau_1 \subset \tau_2, \tau_1 \neq \tau_2$, pero $DIM(X, \tau_1) = DIM(X, \tau_2) = 1$.

Encontramos la siguiente condición necesaria para el crecimiento de la dimensión. Aquí utilizamos nuevamente las notaciones de la demostración de proposición 2.8.2, en particular $x <_i y \iff y \in U_{\tau_i}(x) \wedge x \neq y$, para $i = 1, 2$.

2.8.4. Proposición: *Sea X un conjunto de al menos dos elementos, y τ_1, τ_2 dos T_0 topologías sobre X tales que $\tau_1 \subset \tau_2$, y sea (X, τ_1) de dimensión finita n . Entonces, $DIM(X, \tau_1) > DIM(X, \tau_2)$ implica que, en cada cadena de longitud maximal $x_n <_1 x_{n-1} <_1 \dots <_1 x_0 = x$ en X , existe un $x_i \in X$ tal que su vecindad abierta minimal con respecto a τ_2 no pertenece a τ_1 .*

Demostración:

$DIM(X, \tau_1) > DIM(X, \tau_2)$ implica $ODIM(X, \tau_2) \leq n - 1$. Supongamos que existe una cadena maximal $x_n <_1 x_{n-1} <_1 \dots <_1 x_0 = x$ con la propiedad de que, ninguno de los x_i esté contenido en una vecindad abierta minimal $U \in \tau_2 \setminus \tau_1$. Para $i = 0, 1, \dots, n$ tenemos $U_1(x_i) \in \tau_2$, y así $U_2(x_i) \subseteq U_1(x_i)$. Si $U_2(x_i) \notin \tau_2 \setminus \tau_1$, entonces $U_2(x_i) \in \tau_1$, y por eso

$U_2(x_i) = U_1(x_i)$, lo cual implica la existencia de la cadena $x_n <_2 x_{n-1} <_2 \cdots <_2 x_0 = x$. Así se obtiene la contradicción: $ODIM(X, \tau_2) \geq n$. □

Con el objetivo de caracterizar la k -dimensionalidad de un espacio T_0 de Alexandroff (X, τ) por medio de la existencia de una cadena de topologías contenidas en τ , probamos la siguiente condición necesaria.

2.8.5. Proposición: *Sea (X, τ) un espacio T_0 de Alexandroff con $DIM X$ finita. Entonces $DIM(X, \tau) = n$ implica que existe una cadena de topologías $T_0, \tau = \tau_0 \subset \tau_1 \subset \cdots \subset \tau_n$, donde τ_n es la topología discreta.*

Demostración:

i) En el caso $n = 0$, tenemos que $X = D_0$, y por el lema 2.4.2, τ es entonces la topología discreta, lo cual implica de inmediato el resultado. A continuación supongase $n \geq 1$.

ii) $DIM X = n$ implica por el teorema 2.5.9, que $ODIM X = n$, por lo cual existe un $x \in X$ tal que $ODILx = n$. Entonces hay una cadena $x_0 < x_1 < \cdots < x_n = x$ de elementos de X , la cual tiene longitud maximal, implicando que $x_i \in D_i$ para cada $i \in \{0, \dots, n\}$. Los puntos x_0, x_1, \dots, x_{n-1} no son abiertos, porque la vecindad abierta minimal de cada uno de ellos contiene a x . En consecuencia, en cada $D_i, i = 0, \dots, n-1$, existe un elemento no abierto.

iii) Definimos

$$\mathcal{B}_1 = \{U(x) : x \in X \setminus D_0^\circ\} \cup \{\{x\} : x \in D_0^\circ\}$$

$$\mathcal{B}_2 = \{U(x) : x \in X \setminus (D_0^\circ \cup D_1^\circ)\} \cup \{\{x\} : x \in (D_0^\circ \cup D_1^\circ)\}$$

⋮
⋮
⋮

$$\mathcal{B}_n = \{U(x) : x \in X \setminus (D_0^\circ \cup \cdots \cup D_{n-1}^\circ)\} \cup \{\{x\} : x \in (D_0^\circ \cup \cdots \cup D_{n-1}^\circ)\}$$

donde $U(x)$ denota la vecindad abierta minimal de $x \in X$, y D_i° denota el conjunto de todos los puntos no abiertos de D_i (por ii), $D_i^\circ \neq \emptyset$ para todo $i = 0, \dots, n-1$. Cada $\mathcal{B}_k, k \in \{0, \dots, n\}$, es una base para una topología τ_k T_0 de Alexandroff. La topología τ_n es discreta, puesto que $X = D_0 \cup \cdots \cup D_n$, y que todos los puntos de D_n son abiertos. $\tau \subset \tau_1 \subset \cdots \subset \tau_n$ es una cadena de topologías distintas, terminando la demostración. □

De la prueba de la proposición 2.8.5, es claro que, la condición no es suficiente. Por ejemplo, si D_0 tiene k elementos no abiertos x_1, \dots, x_k con $k > 1$, se pueden construir en lugar de \mathcal{B}_1 , las siguientes k bases

$$\mathcal{B}_1^1 = \{U(x) : x \in X \setminus \{x_1\}\} \cup \{x_1\}$$

$$\mathcal{B}_1^2 = \{U(x) : x \in X \setminus \{x_1, x_2\}\} \cup \{\{x_1\}, \{x_2\}\}$$

$$\mathcal{B}_1^k = \{U(x) : x \in X \setminus \{x_1, \dots, x_k\}\} \cup \{\{x_1\}, \dots, \{x_k\}\}.$$

dando origen a una subcadena de k topologías $\tau_1^1 \subset \dots \subset \tau_1^k$ en lugar de τ_1 .

Para finalizar esta sección, resumimos las propiedades de las topologías T_0 sobre X en el caso de que X sea un conjunto finito.

2.8.6. Proposición: Si X es un conjunto finito de n elementos con $n \geq 2$, entonces

- (i) Entre todas las topologías T_0 sobre X existe una minimal T_0 con máxima dimensión $(n - 1)$, dada por $\tau_0 = \{\{y \in X : x <_0 y\}, x \in X\} \cup \{X\}$, donde $<_0$ es un orden arbitrario lineal sobre X .
- (ii) Cada topología T_0 minimal sobre X es homeomorfa a τ_0 de (i) y tiene por lo tanto la misma dimensión $(n - 1)$.
- (iii) Cada topología T_0 sobre X la cual no es minimal, tiene una dimensión menor o igual a $(n - 2)$.
- (iv) Cada topología sobre X la cual no es T_0 , tiene una dimensión DIM menor o igual a $(n - 2)$.

Demostración:

(i) es claro de los comentarios de arriba.

(ii) Sea τ una topología T_0 minimal sobre X . Según el teorema de Larson/Pahk existe entonces un orden lineal irreflexivo $<$ sobre X , lo cual coincide con el orden parcial inducido por τ , tal que $\tau = \{\{y \in X : x < y\}, x \in X\} \cup \{\emptyset, X\}$. Si x es un elemento máximo del conjunto linealmente ordenado $(X, <)$, entonces $\{y \in X : x < y\} = \emptyset$, implicando $\tau = \{\{y \in X : x < y\}, x \in X\} \cup \{X\}$. Existe una permutación f sobre X tal que $f(X)$ queda ordenado según $<_0$ de (i), y los abiertos en (X, τ) coinciden exactamente con los de $(f(X), <_0)$. Por eso τ y τ_0 son homeomorfos.

(iii) Sabemos de (i) que $DIM(X, \tau) \leq n - 1$. Supongamos $DIM(X, \tau) = n - 1$. Entonces $ODIM(X, \tau) = n - 1$, y hay un $x \in X$ con $ODILx = n - 1$, implicando la existencia de una cadena $x_n < x_{n-1} < \dots < x_0 = x$ linealmente ordenada en X . Puesto que X tiene n elementos, τ coincide con τ_0 salvo una permutación de los elementos de X , lo cual contradice la suposición.

(iv) Sea τ una topología no T_0 sobre X . Entonces existen $x, y \in X$ tales que $x \in U(y) \wedge y \in U(x)$, lo cual implica $U(x) = U(y)$. Entonces $DILx = DILy$ y $DIM(X) = DIM(X \setminus \{x\})$. Si el espacio $X \setminus \{x\}$ de $(n - 1)$ elementos es T_0 , entonces $DIM(X \setminus \{x\}) \leq n - 2$

por (ii), (iii), terminando la demostración. En otro caso, existen $y, z \in (X \setminus \{x\})$ tales que $U_{(X \setminus \{x\})}(y) = U_{(X \setminus \{x\})}(z)$, y $DIM(X) = DIM(X \setminus \{x\}) = DIM(X \setminus \{x, y\})$. Aplicando un argumento análogo al último: si $(X \setminus \{x, y\})$ es T_0 , se sigue $DIM(X) = DIM(X \setminus \{x, y\}) \leq n - 3 < n - 2$, terminando la demostración. Es obvio que este proceso puede ser continuado, hasta haber eliminado (si la demostración no terminó antes) todos los puntos de X salvo un $a \in X$. Pero en este caso, $DIM(X) = DIM(\{a\}) = 0 < n - 2$.

□

3. Espacios digitales de dimensión n

En este capítulo aplicamos el concepto de la dimensión de Alexandroff al espacio digital de Kronheimer, brevemente introducido en el capítulo 1. Lo consideramos aquí como un espacio cociente X del espacio Euclideo \mathbb{R}^n , donde X contiene un subespacio denso discreto \mathcal{E} . Las preimágenes de los elementos de \mathcal{E} son llamadas *ventanas* de \mathbb{R}^n . Si la familia de las ventanas es localmente finita, entonces el espacio digital construido sobre ella es un espacio T_0 de Alexandroff [Kro/2]. La dimensión de Alexandroff de este espacio depende del tipo de las ventanas; y no siempre es igual a n , como veremos en ejemplos en la sección 3.1. Demostraremos en la sección 3.4, que, para el caso de que las ventanas sean conjuntos regulares abiertos acotados convexos, estos son los interiores de poliedros (convexos), y entonces el espacio digital tiene dimensión de Alexandroff n . Para preparar las demostraciones de nuestros teoremas, se proporcionan algunos preliminares en la sección 3.2, y se demuestran algunas propiedades de conjuntos convexos, en particular propiedades topológicas de conos, en la sección 3.3.

En este capítulo, cerraduras, interiores, fronteras, y vecindades abiertas sin subíndices se refieren al espacio Euclideo \mathbb{R}^n , mientras utilizamos subíndices apropiados cuando se trata de otros espacios.

3.1. Espacios digitales - Factorización de \mathbb{R}^n sobre la base de fenestraciones

En el trabajo [Kro/2], Kronheimer desarrolla los conceptos de “fenestración” y de “rejilla” (*grid*) de un espacio topológico arbitrario. Para los fines de esta tesis, los definimos para el espacio Euclideo \mathbb{R}^n , de la siguiente manera:

3.1.1. Definición: Una *ventana* de \mathbb{R}^n es definida como un subconjunto propio no vacío regular abierto de \mathbb{R}^n . Una colección de ventanas de \mathbb{R}^n se llama una *fenestración* si sus miembros son disjuntos (por parejas) y su unión es densa en \mathbb{R}^n . Una fenestración se llama *localmente finita* si cada punto de \mathbb{R}^n tiene una vecindad la cual intersecta sólo un número finito de ventanas. Si X es una descomposición de \mathbb{R}^n , la cual contiene una fenestración \mathcal{E} , entonces X se llama una \mathcal{E} -*rejilla* si el mapeo natural de proyección de \mathbb{R}^n sobre X es abierto.

En lo que sigue, aplicamos la notación $\cup\mathcal{E} = \cup\{W \subset \mathbb{R}^n : W \in \mathcal{E}\}$. Sea X una \mathcal{E} -rejilla, y π el mapeo natural de proyección de \mathbb{R}^n sobre X . Por la definición 3.1.1, \mathcal{E} es entonces una subfamilia de la familia X de subconjuntos de \mathbb{R}^n . Interpretamos a X a la vez como conjunto cociente; así, cada elemento W de X es un subconjunto de \mathbb{R}^n , y $\pi(W)$ es un “punto” en el conjunto cociente X .

Dada una fenestración arbitraria \mathcal{E} , se obtiene inmediatamente una \mathcal{E} -rejilla trivial, definiendo [Kro/2]

$$X_{trivial} = \mathcal{E} \cup \{x\} : x \in \mathbb{R}^n \setminus \cup \mathcal{E}.$$

La estructura de una fenestración de \mathbb{R}^2 (ó de \mathbb{R}^3) es conocida de la literatura dedicada a la "geometría discreta"; con la diferencia de que, en general se consideran familias de conjuntos cerrados. Así, según Quaisser podemos definir lo siguiente (vea [Qua], de donde aplicamos aquí las definiciones 8.1.2 y 9.1.1 al espacio Euclideo).

3.1.2. Definición: Una familia \mathcal{G} de subconjuntos cerrados de \mathbb{R}^n se llama

- un *empacado*, si los interiores de cualesquiera dos elementos distintos A, B de \mathcal{G} no se intersectan.
- una *división*, si \mathcal{G} es a la vez cobertura (es decir, $\cup\{A \subset \mathbb{R}^n : A \in \mathcal{G}\} \supseteq \mathbb{R}^n$) y empacado.
- un *mosaico*, si \mathcal{G} es una división localmente finita de \mathbb{R}^n , y cada elemento de \mathcal{G} es homeomorfo a un disco cerrado.

Una división, cuyo número de elementos es a lo más numerable, se llama un *adoquinamiento* ("tiling") de \mathbb{R}^n por Schulte [Schu] y por Fejes y Kuperberg [Fej,Kup]. La definición de un *adoquinamiento de \mathbb{R}^2* ("plane tiling"), fue introducida por Grünbaum y Shephard [Grü/She]. En este último trabajo, sin embargo, se suponen de manera informal propiedades adicionales a la división numerable, y la mayoría de los estudios se realizan sobre mosaicos.

Las fenestraciones localmente finitas estan estrechamente relacionadas con las divisiones y, como veremos más tarde, algunas también con los mosaicos. Nótese primero que

3.1.3. Lema: (proposición 2.2, cap. 1 de [Pea]) Si $\mathcal{E} = \{W_i, i \in I\}$ es una fenestración localmente finita de \mathbb{R}^n , entonces la familia $\bar{\mathcal{E}} = \{cl(W_i), i \in I\}$ también es localmente finita, y

$$cl(\cup\{W_i, i \in I\}) = \cup(\{cl(W_i), i \in I\}).$$

□

3.1.4. Corolario: Si $\mathcal{E} = \{W_i, i \in I\}$ es una fenestración localmente finita de \mathbb{R}^n , entonces $\{cl(W_i), i \in I\}$ es una división de \mathbb{R}^n .

Observe que, puesto que cada elemento de una fenestración de \mathbb{R}^n es un conjunto abierto no vacío, el número de estos elementos es a lo más numerable, debido a la separabilidad del espacio Euclideo. Por eso, la familia de las cerraduras de los elementos de una fenestración localmente finita de \mathbb{R}^n , también es un adoquinamiento según la definición de [Schu].

Cada \mathcal{E} -rejilla X es un espacio topológico, con la topología cociente τ_X .

$$\tau_X = \{M \subseteq X : \pi^{-1}(M) \in \tau_{\mathbb{R}^n}\},$$

donde $\tau_{\mathbb{R}^n}$ es la topología Euclideana de \mathbb{R}^n . La topología relativa $\tau_{\mathcal{E}}$ sobre \mathcal{E} con respecto a τ_X es discreta, y el subespacio $(\mathcal{E}, \tau_{\mathcal{E}})$ es denso en (X, τ_X) . En general, para una fenestración fija \mathcal{E} , existen varias \mathcal{E} -rejillas. Por eso, Kronheimer impone la siguiente propiedad de minimalidad a las \mathcal{E} -rejillas que servirán como modelos topológicos de imágenes digitales.

3.1.5. Definición: (de [Kro/2]) Una \mathcal{E} -rejilla X de \mathbb{R}^n se llama *minimal* si todo mapeo continuo abierto de X sobre una \mathcal{E} -rejilla, siendo inyectivo sobre \mathcal{E} , es un homeomorfismo.

Esta definición es una consecuencia natural de la definición de la \mathcal{E} -rejilla; tomando en cuenta que la fenestración \mathcal{E} está fija, y la proyección de \mathbb{R}^n sobre cualquier \mathcal{E} -rejilla X es abierta. Aplicando una definición análoga, se estudian por ejemplo espacios minimales de Hausdorff [Wil].

Aplicando la definición 3.1.5, una \mathcal{E} -rejilla X no es minimal, siempre cuando existe un mapeo f de X sobre otra \mathcal{E} -rejilla X' , donde f es continuo y abierto, la restricción de f sobre \mathcal{E} es un homeomorfismo, pero f no es inyectivo sobre $X \setminus \mathcal{E}$. Kronheimer demuestra, que para toda fenestración \mathcal{E} , y para toda \mathcal{E} -rejilla X , existe un mapeo f_{min} continuo abierto de X sobre una \mathcal{E} -rejilla X_{min} minimal, el cual es inyectivo sobre \mathcal{E} y hace conmutar el siguiente diagrama ([Kro/2], teorema 4.4):

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f_{min}} & X_{min} \\ \pi \uparrow & \pi_{min} \nearrow & \\ \mathbb{R}^n & & \end{array}$$

donde π, π_{min} son las proyecciones naturales de \mathbb{R}^n sobre los espacios cocientes X, X_{min} , respectivamente.

3.1.6. Ejemplo: Recordamos la fenestración estándar de \mathbb{R}^2 , dada por el conjunto \mathcal{E} de todos los cubos unitarios abiertos 2-dimensionales en \mathbb{R}^2 centrados en puntos con coordenadas enteras [Kro/2] (vea también capítulo 1 de esta tesis). Sea X_1 la \mathcal{E} -rejilla trivial, es decir

$$X_1 = \mathcal{E} \cup \{\{x\} : x \in \mathbb{R}^2 \setminus \cup \mathcal{E}\}.$$

La figura 3.1 representa, a parte de X_1 , otras dos \mathcal{E} -rejillas X_2 y X_{min} . Es evidente que X_1 y X_2 no son minimales. El mapeo f que identifica cada tres elementos de X_2 cuyas preimágenes son los segmentos horizontales y el punto en medio de ellos, al segmento horizontal unitario, como señala la figura 3.1, y análogamente, que identifica cada tres elementos de X_2 cuyas preimágenes son los segmentos verticales y el punto en medio de ellos, al segmento vertical unitario, y es una biyección sobre el conjunto de todos los otros elementos de X_2 , es precisamente un mapeo continuo abierto, homeomorfismo sobre \mathcal{E} . Sin embargo, $f(X_2)$ es la \mathcal{E} -rejilla X_{min} , la cual no es homeomorfa a X_2 . Es fácil ver, que X_{min} es una \mathcal{E} -rejilla minimal.

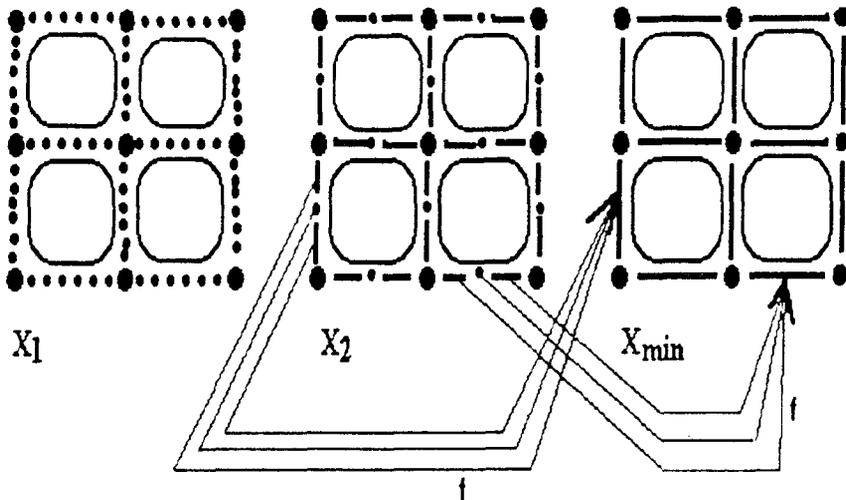


Figura 3.1. \mathcal{E} -rejillas de la fenestración estándar de \mathbb{R}^2

Cabe enfatizar, que una \mathcal{E} -rejilla minimal, la cual existe según [Kro/2] para cualquier fenestración \mathcal{E} , es única salvo homeomorfismos, debido a la definición 3.1.5. Fue probado en [Kro/2] también, que para toda fenestración \mathcal{E} localmente finita, la \mathcal{E} -rejilla minimal es un espacio T_0 de Alexandroff. En consecuencia, a este espacio podemos aplicar la dimensión de Alexandroff, la cual coincide aquí con la dimensión del orden de especialización (vea capítulo 2) de la topología cociente.

La familia de las cerraduras de los elementos de la fenestración estándar de \mathbb{R}^2 es un mosaico, cuyos elementos son polígonos (cerrados) convexos regulares. Además de este *mosaico cuadrático*, existen solamente dos otros mosaicos de \mathbb{R}^2 de polígonos convexos regulares, el *trigonal* y el *hexagonal*, vea por ejemplo [Qua]. Las respectivas familias de los interiores de sus elementos son las fenestraciones representadas en figura 5 en página 10, que dan origen a \mathcal{E} -rejillas 2-dimensionales:

3.1.7. Ejemplo: Sean \mathcal{E}_{hex} , \mathcal{E}_{tri} las fenestraciones representadas en figura 1.5b) y 1.5c) (vea página 10). Las respectivas \mathcal{E} -rejillas minimales X_{hex} , X_{tri} son espacios T_0 de Alexandroff de dimensión 2, vea figura 3.2, cuyos ordenes parciales de especialización coinciden nuevamente con la relación de fronterizar entre polígonos.

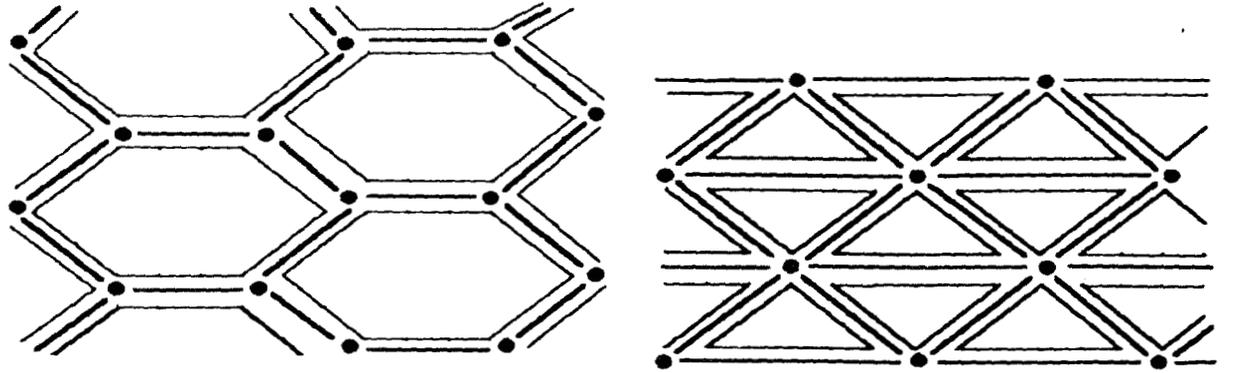


Figura 3.2. \mathcal{E} -rejillas minimales de fenestraciones de \mathbb{R}^2 .

Los espacios topológicos clave aplicados por Kronheimer para modelar imágenes digitales, son \mathcal{E} -rejillas T_0 semiregulares, en particular de fenestraciones localmente finitas.

Un espacio topológico se llama *semiregular* si existe una base de conjuntos abiertos regulares [Wil]. La clase de los espacios semiregulares es una superclase propia de la de los espacios regulares. Recordamos que un espacio X se llama *regular* si para cada conjunto cerrado $A \subset X$ y cada punto $x \in X \setminus A$ existen conjuntos abiertos U, V en X tales que $x \in U, A \subset V$ y $U \cap V = \emptyset$ (vea [Arh,Pon] o [Pea], nótese que aquí no se requiere el T_1 -axioma; otros autores si lo requieren, como por ejemplo en [Eng/1]). Un espacio regular no necesita ser de Hausdorff, sin embargo, un espacio regular T_0 si lo es. La regularidad de un espacio de Alexandroff se caracteriza por el hecho que la relación \leq definida por $x \leq y \iff x \in cl(\{y\})$ es una relación de equivalencia [Kon,Kop,Mey/2]: es evidente que la propiedad interesante para eso es la simetría de la relación \leq ; supongase primero que \leq sea simétrica, y sea A un cerrado en X , y $x \in X \setminus A$. Para demostrar la regularidad de X es suficiente probar que $M = (\cup\{U(a) : a \in A\}) \cap U(x) = \emptyset$, donde $U(y)$ denota la vecindad abierta minimal de cualquier $y \in X$. Si suponemos que existe $m \in M$, entonces existe $a \in A$ tal que $z \in U(a) \cap U(x)$. Puesto que este último es abierto, se sigue $U(z) \subset U(a) \cap U(x)$. De la simetría de \leq se obtiene $a \in U(z)$, y $x \in X \setminus A$ implica $U(x) \subset X \setminus A$. En consecuencia $a \in U(z) \subset U(x) \subset X \setminus A$, lo cual es una contradicción. Para demostrar que la regularidad de X implica la simetría de \leq , supongase que \leq no es simétrica. Entonces existen $x, y \in X$ tales que $x \leq y, y \not\leq x$, así que tenemos $U(y) \subset U(x), x \notin U(y)$. $X \setminus U(y)$ es un cerrado que no contiene a y ; sin embargo, no es separable de y , puesto que $x \in X \setminus U(y)$ implica que todo conjunto abierto que contiene a $X \setminus U(y)$, contiene también a $U(x)$ y con eso a $U(y)$. En consecuencia X no es regular.

Kronheimer demuestra que toda \mathcal{E} -rejilla T_0 semiregular es minimal ([Kro/2], lema 7.1). De importancia especial son los espacios localmente finitos, pues ellos siempre son de

Alexandroff. Recordamos que un espacio topológico X se llama *localmente finito* si todo punto en X tiene una vecindad abierta finita. Si la \mathcal{E} -rejilla X es un espacio T_0 semiregular, y \mathcal{E} es una fenestración localmente finita (entonces el espacio X es localmente finito también), entonces el espacio X resulta ser un espacio T_0 de Alexandroff ([Kro/2], teorema 8.2), y por lo tanto un poset, y cualquier (otra) \mathcal{E} -rejilla T_0 semiregular es homeomorfa a X , lo cual se sigue de la definición de minimalidad. Nosotros llamamos una \mathcal{E} -rejilla T_0 semiregular de una fenestración localmente finita un *espacio digital*.

En los ejemplos 3.1.6, 3.1.7, las \mathcal{E} -rejillas que son espacios digitales construidos de fenestraciones de \mathbb{R}^2 , tienen dimensión de Alexandroff 2. Sin embargo, existen fenestraciones de \mathbb{R}^2 , cuyas \mathcal{E} -rejillas minimales tienen una dimensión diferente de 2, como muestran los siguientes ejemplos.

3.1.8. Ejemplo: Sea \mathcal{E} la fenestración de \mathbb{R}^2 dada por

$$\mathcal{E} = \{w_i, i \in I\} \text{ con } w_1 = D_1^\circ, w_i = D_i^\circ \setminus cl(D_{i-1}^\circ); i \geq 2, \\ \text{donde } D_1^\circ, D_2^\circ, \dots \text{ son discos abiertos concéntricos con radios } 1, 2, \dots.$$

\mathcal{E} es localmente finito, y la \mathcal{E} -rejilla minimal, $X = \mathcal{E} \cup \{x_1, x_2, \dots\}$ está representada en figura 3.3(a). Tenemos

$$x_1 < \frac{w_1}{w_2}, \quad x_2 < \frac{w_2}{w_3}, \quad x_3 < \frac{w_3}{w_4}, \quad \dots,$$

y entonces $ODILx_i = 0$, $ODILw_i = 1$ para todo i , lo cual implica que $DIM X = ODIM X = 1$. Nótese que obtenemos el mismo resultado, si tomamos la fenestración de polígonos (no convexos) de figura 3.3(b).

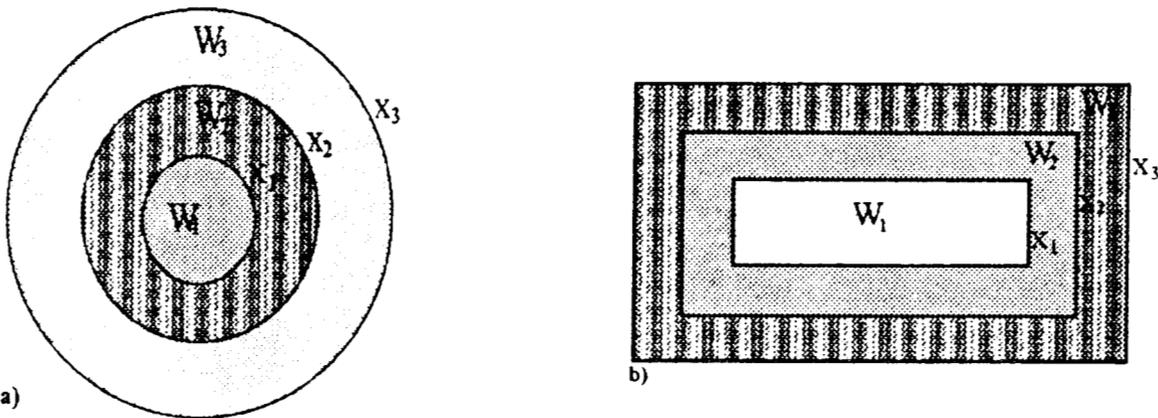


Figura 3.3. Una \mathcal{E} -rejilla uno-dimensional de \mathbb{R}^2 .

3.1.9. Ejemplo: Sea x_5 el punto origen de un sistema cartesiano de coordenadas en \mathbb{R}^2 , x_1 la parte positiva del eje y , x_2 la parte negativa del eje y , x_3 la parte negativa del eje x (para x_1, x_2, x_3 se excluye el punto origen), y x_4 la curva de la función $\text{sen}(1/x)/x$, mientras que sean w_1, w_2, w_3, w_4 las regiones abiertas acotadas por $cl(x_1), cl(x_2), cl(x_3), cl(x_4)$, como se ve en la figura 3.4:

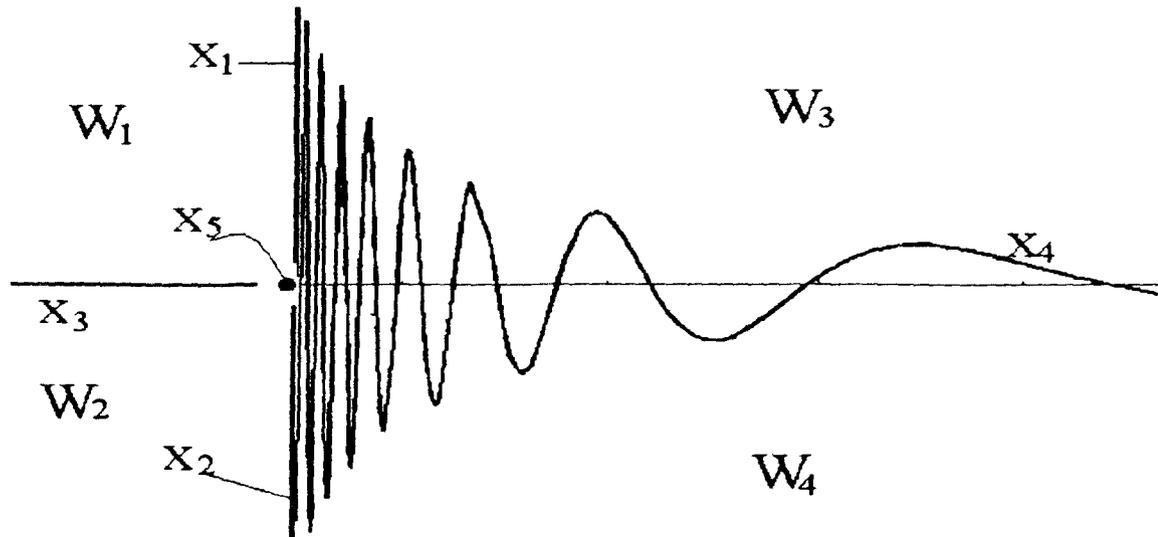


Figura 3.4. Una \mathcal{E} -rejilla tri-dimensional de \mathbb{R}^2 .

$\mathcal{E} = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ es una fenestración de \mathbb{R}^2 , y la \mathcal{E} -rejilla minimal es $X = \mathcal{E} \cup \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$. Si \leq es el orden de especialización del espacio X , encontramos las siguientes cadenas:

$$x_5 < \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix} < x_4 < \begin{matrix} w_3 \\ w_4 \end{matrix}, \quad x_5 < \begin{matrix} x_2 \\ x_3 \end{matrix} < w_1,$$

implicando $ODILw_3 = ODILw_4 = 3$, $ODILw_1 = ODILw_2 = ODILx_4 = 2$, $ODILx_1 = ODILx_2 = ODILx_3 = 1$, $ODILx_5 = 0$, y entonces $DIM X = ODIM X = 3$.

3.2. Preliminaarios

En esta sección recordamos algunos conceptos conocidos de la literatura, relacionados a conjuntos convexos. Seguimos a continuación las definiciones de [Eng,Sie] (capítulos 0.4 y 1.10). También resumimos propiedades conocidas de conjuntos convexos, particularmente de poliedros, y dos resultados de la topología general, que se aplican en las secciones subsecuentes.

Una secuencia finita $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ de puntos de \mathbb{R}^n se llama *afín dependiente* si existen números r_0, r_1, \dots, r_k , no todos iguales a cero, tal que $\sum_{i=0}^k r_i \mathbf{a}_i = 0$ y $\sum_{i=0}^k r_i = 0$. En otro caso, la secuencia se llama *afín independiente*. Claro que $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k$ es afín dependiente [y, respectivamente, independiente] si y sólo si $\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k - \mathbf{a}_0$ es linealmente dependiente [independiente]). Para $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, el conjunto

$$L = \{(1-r)\mathbf{a} + r\mathbf{b}, r \in \mathbb{R}\},$$

es la *recta que pasa por a y b*. Si $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}' \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}, \mathbf{a}' \neq \mathbf{b}'$, y L es una recta que pasa por \mathbf{a} y \mathbf{b} , y L' es una recta que pasa por \mathbf{a}' y \mathbf{b}' , entonces L' se llama *paralela a L* si $\mathbf{b}' - \mathbf{a}' = r(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ para algún $r \in \mathbb{R}$. Un subconjunto H de \mathbb{R}^n se llama *subespacio afín* (ó *plano* en [Rin]) si H es un sólo punto, o para cualesquiera dos puntos distintos de H , la recta que pasa por ellos, está contenida en H . Por ejemplo, cualquier recta es un subespacio afín.

La intersección de cualquier familia de subespacios afines de \mathbb{R}^n es nuevamente un subespacio afín; y para $M \subset \mathbb{R}^n$, la intersección de todos los subespacios afines que contiene a M , se llama *la cerradura afín* de M y se denota por $\text{afín}(M)$. Resulta que (teorema 0.4.6 de [Eng,Sie])

$$\text{afín}(M) = \left\{ \sum_{i=0}^k r_i \mathbf{a}_i; \mathbf{a}_i \in M, r_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \dots, k, \sum_{i=0}^k r_i = 1 \right\}.$$

Para todo subespacio afín H existe $N \subset H$, N afín independiente, tal que $H = \text{afín}(N)$; y si $H = \text{afín}(N_1) = \text{afín}(N_2)$, con N_1, N_2 afín independientes, entonces N_1 y N_2 tienen el mismo número k de elementos, y el número $k - 1$ se llama *dimensión afín* de H .

Ahora, si $H \subset \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{a} \in H$, entonces H es un subespacio afín si y sólo si $H - \mathbf{a} = \{\mathbf{h} - \mathbf{a} : \mathbf{h} \in H\}$ es un subespacio vectorial. Claro que entonces la dimensión afín de H coincide con la dimensión "vectorial" (es decir, el número de vectores linealmente independientes) del subespacio vectorial $H - \mathbf{a}$. Nótese que la dimensión de cualquier subespacio afín propio de \mathbb{R}^n (es decir, no igual a \mathbb{R}^n) es menor o igual a $n - 1$. Enfatizamos, que, además, debido a que la traslación es un mapeo topológico, el subespacio afín H es un espacio topológico homeomorfo al subespacio Euclideo $H - \mathbf{a}$ (este con la topología relativa a la topología Euclidea de \mathbb{R}^n). En consecuencia, si la dimensión afín de H es igual a k , entonces H es homeomorfo a \mathbb{R}^k . Es claro también que todo subespacio afín de \mathbb{R}^n es un subespacio topológico cerrado.

Un subespacio afín H de \mathbb{R}^n que tiene la dimensión afín igual a $n - 1$, se llama *hiperplano de \mathbb{R}^n* ; y este H es el conjunto de soluciones de una ecuación lineal

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0,$$

donde de los coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ no todos son iguales a cero. Entonces, cada uno de los dos conjuntos definidos por las inigualdades

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \geq 0, \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq 0,$$

se llama *semiespacio cerrado de \mathbb{R}^n determinado por H* . También, cada uno de los dos conjuntos definidos por

$$\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i > 0, \alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i < 0,$$

se llama *semiespacio abierto de \mathbb{R}^n determinado por H* . Si H_1, H_2 son los dos semiespacios abiertos de \mathbb{R}^n determinados por H , entonces $\mathbb{R}^n = H_1 \cup H_2 \cup H$ es una descomposición de \mathbb{R}^n , es decir, $H_1 \cap H_2 = H_1 \cap H = H_2 \cap H = \emptyset$. Nótese que un semiespacio cerrado [respectivamente, abierto] definitivamente es un subconjunto cerrado [abierto] del espacio Euclideo \mathbb{R}^n ; y si M es definido por $\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \geq 0$, y N por $\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i > 0$ (ó, análogamente, M por $\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \leq 0$, y N por $\alpha_0 + \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i < 0$), entonces $M = cl(N)$ y $N = int(M)$.

Ahora sean $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$. El conjunto

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b} \rightarrow) = \{(1-r)\mathbf{a} + r\mathbf{b}; r \in \mathbb{R}, r \geq 0\}$$

llamamos *rayo con origen \mathbf{a} que pasa por \mathbf{b}* ; y el conjunto

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \{(1-r)\mathbf{a} + r\mathbf{b}; r \in \mathbb{R}, 0 \leq r \leq 1\}$$

se llama *segmento cerrado con puntos finales \mathbf{a} y \mathbf{b}* . Nótese que, distintos puntos $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ determinan una recta única $L = \text{afin}([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$, y obviamente $L = [\mathbf{a}, \mathbf{b} \rightarrow) \cup [\mathbf{a}, \mathbf{c} \rightarrow)$ para algún $\mathbf{c} \in L, \mathbf{c} \neq \mathbf{a}$ tal que $\mathbf{a} \in [\mathbf{b}, \mathbf{c}]$. Además vale entonces que $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ es cerrado en el espacio topológico L , el cual es homeomorfo a \mathbb{R} ; y $int_L([\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \setminus \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$, donde int_L denota el interior con respecto a L . Denotamos $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = int_L([\mathbf{a}, \mathbf{b}])$, lo cual se llama *segmento abierto entre \mathbf{a} y \mathbf{b}* , y $[\mathbf{a}, \mathbf{b}) = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \setminus \{\mathbf{b}\}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}] = [\mathbf{a}, \mathbf{b}] \setminus \{\mathbf{a}\}$.

Un subconjunto M de \mathbb{R}^n se llama *convexo* si $[\mathbf{a}, \mathbf{b}] \subset M$ para todo $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M$. La intersección de cualquier familia de conjuntos convexos en \mathbb{R}^n es nuevamente un conjunto convexo, lo cual da origen a la siguiente definición: Si $M \subset \mathbb{R}^n$, entonces la intersección de todos los subconjuntos convexos de \mathbb{R}^n que contienen a M , se llama *la cerradura convexa de M* , y se denota por $conv(M)$. Resulta que

$$conv(M) = \left\{ \sum_{i=0}^k r_i \mathbf{a}_i; \mathbf{a}_i \in M, r_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, k, \sum_{i=0}^k r_i = 1 \right\}.$$

Es fácil de demostrar que la cerradura y el interior de un conjunto convexo son convexos ([Grü] pag. 9, [Eng,Sie] lema 1.10.13). Es también bien conocido que

3.2.1. Lema: ([Grü]) *Todo conjunto convexo abierto es regular abierto ($int((cl(A)) = A)$), y todo conjunto convexo cerrado con interior no vacío es regular cerrado ($cl(int(A)) = A$).*

3.2.2. Lema y definición: ([Eng,Sie] lema 1.10.12, [Grü] pap.9, [Rin] 31.7) *Para todo subconjunto no vacío convexo C de \mathbb{R}^n existe exactamente un subespacio afín H de \mathbb{R}^n que contiene a C y satisface que $int_H(C) \neq \emptyset$. Tal H se llama *plano de soporte de C* : H es el subespacio afín de dimensión afín minimal entre todos los subespacios afines que contienen a C , y la dimensión del convexo C se define por $dim C = dim H$.*

□

Si $A \subset \mathbb{R}^n$, entonces un hiperplano h se llama un *hiperplano fronterizo* de A , siempre y cuando $cl(A) \cap h \neq \emptyset$ y A está contenido en uno de los semiespacios determinados por h .

3.2.3. Lema: ([Sch], 9.1 corolario p.64) Si $A \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado convexo con interior no vacío, entonces cada punto de la frontera de A está contenido en al menos un hiperplano fronterizo de A . □

3.2.4. Lema: ([Eng, Sie], teorema 1.10.9; [Sto/Zie], proposición 1.1.8) Si $M \subset \mathbb{R}^n$ es un subconjunto compacto convexo con interior no vacío, entonces existe un homeomorfismo de M sobre el disco cerrado unitario, el cual mapea la frontera de M sobre la frontera de este disco, es decir, sobre la esfera unitaria. □

3.2.5. Lema: ([Rin], 31.17) Un conjunto cerrado convexo n -dimensional en \mathbb{R}^n es una intersección finita de semiespacios de \mathbb{R}^n si y sólo si su frontera está contenida en una unión finita de subespacios afines propios de \mathbb{R}^n . □

3.2.6. Definición: Un subconjunto acotado de \mathbb{R}^n el cual es representable como intersección finita de semiespacios cerrados, se llama *poliedro*.

Nótese que, según nuestra definición, todo poliedro es convexo. Obviamente, todo poliedro es cerrado y por lo tanto compacto. Es bien conocido que toda intersección de poliedros (si no es vacía), es nuevamente un poliedro [Grü]. Si H_1, H_2, \dots, H_k son semiespacios cerrados, y

$$P = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_k$$

es un poliedro de dimensión n , entonces su plano de soporte es \mathbb{R}^n , y

$$\begin{aligned} int(P) &= int(H_1) \cap int(H_2) \cap \dots \cap int(H_k) \\ fr(P) &\subseteq fr(H_1) \cup fr(H_2) \cup \dots \cup fr(H_k), \end{aligned}$$

siendo la última una unión de hiperplanos. Enfatizamos que, si P es un poliedro en \mathbb{R}^n , nos referimos siempre a su dimensión afín, la cual denotamos por $dim P$, y recordamos que $dim P = dim H$, si H es el plano de soporte de P . Sin embargo, P es también un subespacio topológico del espacio Euclideo \mathbb{R}^n , y es bien conocido que la dimensión afín de P coincide con su dimensión topológica: tanto con su dimensión inductiva pequeña ind como con su dimensión inductiva grande Ind como también con su dimensión de cobertura dim (vea por ejemplo [Eng/1] y [Eng,Sie]), así que nuestra notación $dim P$ no causa confusión.

3.2.7. Lema: ([Rin], 31.13) Si P es un poliedro, y S es un hiperplano tal que $S \cap P \neq \emptyset$ y $S \cap int(P) = \emptyset$, entonces P está completamente contenido en uno de los dos semiespacios cerrados determinados por S . □

3.2.8. Lema y definición: Si P es un poliedro de dimensión n , y S es un hiperplano tal que $S \cap P \neq \emptyset$, $S \cap \text{int}(P) = \emptyset$, entonces $P \cap S$ es un conjunto cerrado convexo de dimensión menor o igual a $n - 1$. En el caso $\dim(P \cap S) = n - 1$, S se llama *plano lateral* de P , y $P \cap S$ se llama una $(n - 1)$ -*cara* de P . □

3.2.9. Lema: ([Rin] 31.16) *Cada conjunto convexo cerrado P de dimensión n el cual es una intersección finita de semiespacios, tiene una representación $P = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_l$, donde H_i son semiespacios cerrados, y $\text{fr}(H_i) \cap P$ son los planos laterales distintos de P , $i = 1, 2, \dots, n$. Esta representación es única salvo el orden de los $\text{fr}(H_i)$.* □

3.2.10. Lema: ([Rin] 31.18) *Cada $(n - 1)$ -cara de P es un poliedro $(n - 1)$ -dimensional, y $\text{fr}(P)$ es igual a la unión de sus $(n - 1)$ -caras.* □

3.2.11. Definición: ([Rin]) Toda intersección finita y no vacía de $(n - 1)$ -caras de P se llama *cara propia* de P , y P mismo se llama *cara impropia* de P . Un subconjunto S de P se llama *cara* de P si es una cara propia o $S = P$.

Obviamente, cada cara propia de un poliedro n -dimensional P es nuevamente un poliedro, de dimensión menor o igual a $n - 1$.

3.2.12. Lema: ([Rin], p. 311) *Todo poliedro n -dimensional P ($n \geq 1$) tiene por lo menos una cara de cada dimensión k , $0 \leq k \leq n - 1$.* □

En las demostraciones de las secciones subsecuentes también se aplicarán los siguientes resultados conocidos de la literatura:

3.2.13. Lema: *Aplicando cualquiera de las dimensiones clásicas ind, Ind, dim, para $M \subset \mathbb{R}^n$ vale que:*

(i) *M tiene dimensión n si y sólo si $\text{int}(M) \neq \emptyset$.*

(ii) *M tiene dimensión $\geq n - 1$ si M es un separador cerrado de \mathbb{R}^n .*

(para una demostración de (i) vea [Ark,Pon] teorema 20, o [Eng/2] 1.8.11; referente a (ii) vea [Eng/2] 1.8.14) □

Aplicando este lema, y debido a que un subespacio afín H de \mathbb{R}^n es homeomorfo a \mathbb{R}^k para algún $0 \leq k \leq n$, se obtiene lo siguiente:

3.2.14. Corolario: Si H es un subespacio afín de \mathbb{R}^n , y P es un poliedro P tal que $P \subset H$, entonces

$$\dim P \neq k \iff \dim P \leq k - 1 \iff \text{int}_H(P) = \emptyset.$$

□

3.2.15. Lema: (Teorema de Baire) ([Eng.Sie] teorema 6.4.2) Si X es un espacio métrico completo, y $\{B_n, n \in \omega\}$ es una familia numerable de subconjuntos densos en ninguna parte de X , entonces su unión $B = \cup\{B_n, n \in \omega\}$ tiene interior vacío.

En particular, este teorema es válido en cualquier subespacio afín H de \mathbb{R}^n , puesto que H es homeomorfo a \mathbb{R}^k para algún $0 \leq k \leq n$.

3.3. Sobre conjuntos convexos y conos

En esta sección deducimos algunas propiedades de conjuntos convexos, en particular de conos, donde definimos un cono como la cerradura convexa de la unión de un conjunto convexo con un punto exterior. Las propiedades topológicas del cono demostradas aquí serán importantes para demostrar nuestros teoremas principales de este capítulo.

Para las siguientes demostraciones, recordamos que \mathbb{R}^n es un espacio métrico y por lo tanto T_3 y T_1 (entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y toda vecindad abierta $U(x)$ de x , existe una vecindad abierta $V(x)$ de x tal que $cl(V(x)) \subset U(x)$, vea proposición 1.5.5 de [Eng/1]).

Denotamos para $x, y \in \mathbb{R}^n$ por $d(x, y)$ la distancia Euclideana entre x y y , y aplicamos también la notación usual $d(x, M) = \inf\{d(x, m) : m \in M\}$, para $x \in \mathbb{R}^n, M \subset \mathbb{R}^n$. Si $x, y, z \in \mathbb{R}^n$, denotamos $\Delta(x, y, z) = conv(\{x, y, z\})$.

3.3.1. Lema: Si A, B son subconjuntos disjuntos convexos abiertos acotados de \mathbb{R}^n tales que $cl(A) \cap cl(B) \neq \emptyset$, entonces

(i) $cl(A) \cap cl(B) = fr(A) \cap fr(B)$. $A \cap cl(B) = cl(A) \cap B = \emptyset$;

(ii) $cl(A) \cap cl(B)$ es un subconjunto convexo compacto k -dimensional de un subespacio afín de dimensión k de \mathbb{R}^n , donde $0 \leq k \leq n - 1$.

Demostración:

(i) es obvio

(ii) $0 \leq k \leq n - 1$ se sigue del lema 3.2.13(i), debido a que $int(cl(A) \cap cl(B)) = int(cl(A)) \cap int(cl(B)) = A \cap B = \emptyset$ (puesto que A, B son abiertos regulares por ser convexos según el lema 3.2.1). También es claro que $cl(A) \cap cl(B)$ es un subconjunto convexo compacto de \mathbb{R}^n . Además, aplicando el lema 3.2.2, existe un subespacio afín H de \mathbb{R}^n tal que $dim(H) = dim(cl(A) \cap cl(B))$ (su plano de soporte), lo cual completa la demostración. \square

Para estudiar en la sección subsecuente fenestraciones cuyos elementos son los interiores de poliedros, aplicamos el concepto de cono definido a continuación:

3.3.2. Definición: Si V es un subconjunto convexo de \mathbb{R}^n , $V \neq \emptyset$ y $p \in \mathbb{R}^n \setminus V$, entonces se define el cono sobre V con vertice p por $C(V, p) = conv(V \cup \{p\})$.

Nótese que esta definición de cono no coincide con las definiciones de un cono métrico y de un cono topológico, los cuales son definidos como espacios cocientes, vea por ejemplo en [Eng, Sie] los ejemplos 3.2.13 y 7.4.50. Nuestro cono es simplemente un subconjunto convexo particular de \mathbb{R}^n , el cual se caracteriza por lo siguiente:

3.3.3. Lema: Para todo $V \subset \mathbb{R}^n$, V convexo, $V \neq \emptyset$, $p \in \mathbb{R}^n \setminus V$, se sigue que

$$C(V, p) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{existe } v \in V \text{ tal que } x \in [p, v]\}.$$

Demostración:

Sea $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{existe } v \in V \text{ tal que } x \in [p, v]\}$. Hay que demostrar que M es el conjunto convexo más pequeño que contiene a $V \cup \{p\}$.

Puesto que $V \neq \emptyset$ y $p \notin V$, se sigue que M tiene al menos dos elementos.

Para demostrar que M es convexo, sean $a, b \in M, a \neq b$, y sea $c \in [a, b]$. Hay que demostrar que $c \in M$. Eso es trivialmente verdad si $c = a$ o $c = b$, así que asumimos que $c \neq a, c \neq b$. Puesto que $a, b \in M$, existen $v_1, v_2 \in V$ tales que $a \in [p, v_1], b \in [p, v_2]$. Si $a = p$ entonces $c \in [p, b] \subset [p, v_2]$; análogamente, si $b = p$ entonces $c \in [a, p] \subset [p, v_1]$, y en ambos casos se obtiene $c \in M$: así que ahora suponemos que $a \neq p, b \neq p$, vea figura 3.5:

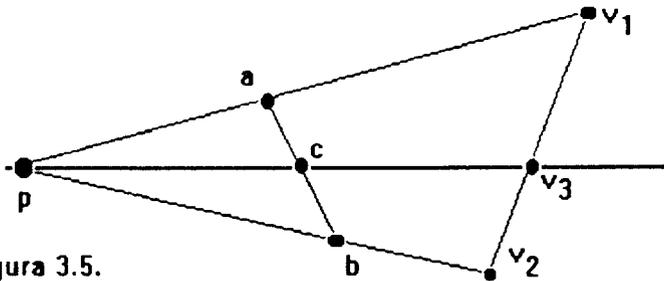


Figura 3.5.

Obviamente el rayo con origen p que pasa por c intersecta al segmento $[v_1, v_2]$ en un punto v_3 (eso es verdad inclusive cuando $a = v_1 \vee b = v_2$; si $a = v_1 \wedge b = v_2$, entonces $c = v_3$). Puesto que V es convexo, si sigue $v_3 \in V$, y $c \in [p, v_3]$ implica $c \in M$.

Es claro que cualquier conjunto convexo que contiene a $V \cup \{p\}$, contiene a M , y la demostración es completa. \square

En la sección subsecuente aplicaremos las siguientes propiedades de un cono generado por un disco (abierto o cerrado) y un punto exterior.

3.3.4. Lema: Si V es un disco (abierto o cerrado) de dimensión n en \mathbb{R}^n , y $p \in \mathbb{R}^n \setminus \text{cl}(V)$, entonces vale lo siguiente:

- (i) Si V es cerrado y $v \in V$ tal que $\text{afín}([p, v])$ es una tangente al disco V , entonces $[p, v] \subset \text{fr}(C(V, p))$.
- (ii) Si $x \in \text{int}(V)$, $L = \text{afín}([p, x])$, $a, b \in L$ tales que $p \in (a, b)$, entonces $(a, b) \cap \text{int}(C(V, p)) \neq \emptyset$ y $(a, b) \cap (\mathbb{R}^n \setminus C(V, p)) \neq \emptyset$.
- (iii) $\text{int}(C(V, p)) = C(\text{int}(V), p) \setminus \{p\}$.
- (iv) Si V es abierto, entonces $\text{int}(C(\text{cl}(V), p)) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{existe } v \in V \text{ tal que } x \in (p, v)\}$.

Demostración:

(i) Primero demostramos que $p \in \text{fr}(C(V, p))$. Asumimos por lo contrario que $p \in \text{int}(C(V, p))$. Entonces existe un disco abierto $U(p)$ centrado en p , tal que $U(p) \subset C(V, p)$,

de lo cual suponemos, sin pérdida de generalidad, que $cl(U(p)) \subset C(V, p)$. Sea $S = fr(U(p))$, y escogemos $a, b \in S$ tales que $p \in (a, b)$. Aplicando el lema 3.3.3, $a, b \in C(V, p)$ implica que existen $a', b' \in V$ tales que $a \in [p, a']$, $b \in [p, b']$. Pero entonces a', a, p, b, b' se encuentran sobre la misma recta y $(a, b) \subset [a', b']$, y debido a que V es convexo, se obtiene $p \in V$ (pues $[a', b'] \subset V$), lo cual es una contradicción a la suposición del lema.

Ahora suponemos $v \in V$, $x \in (p, v]$, donde $L = afín([p, v]) = afín([p, x])$ sea una tangente a V . Entonces, denotando por c el punto centro de V , $r = d(c, v)$ es el radio de V y los puntos p, v, c no son colineales, por lo cual, el subespacio afín $P = afín(\{p, v, c\})$ tiene dimensión 2. Para demostrar $x \in fr(C(V, p))$, asumimos por lo contrario que $x \in int(C(V, p))$ ($x \in C(V, p)$ se sigue de $x \in [p, v]$ por el lema 3.3.3). Eso implica que existe un disco abierto $U(x)$ centrado en x con radio ϵ , tal que $cl(U(x)) \subset C(V, p)$. Sea L' una tangente al disco $cl(U(x))$ tal que $p \in L'$, $L' \subset P$; y suponemos además que, si y es el punto de intersección de $fr(U(x))$ con L' (obviamente $y \neq p$, puesto que $x \neq p$), entonces $[p, y \rightarrow)$ y V se encuentran en diferentes semiespacios de P generados por el hiperplano L en P , como muestra la figura 3.6. Debido a que $cl(U(x)) \subset C(V, p)$ se sigue que $y \in C(V, p)$, por lo cual existe $v' \in V$ tal que $y \in (p, v']$, y puesto que $(p, y] \subset (p, v']$, se obtiene $v' \in L'$. Obviamente $d(c, v') \geq d(c, L') = d(c, a)$, donde $a \in L'$ tal que $[c, a]$ es perpendicular a L' . También es claro que $a \notin [c, v \rightarrow)$, pues tanto $[p, a]$ y $[c, a]$ como también $[p, v]$ y $[c, v]$ forman ángulos rectos, sin embargo, L y L' no son paralelas por intersectarse en p . Así que consideramos en P los triángulos $\Delta(p, y, x)$ y $\Delta(c, v, b)$, los cuales son rectangulares y similares, implicando $r = d(p, y)(d(p, x))^{-1}d(b, c)$. Por $\epsilon > 0$ obtenemos $d(p, y) < d(p, x)$ *. Entonces $d(p, y)(d(p, x))^{-1} < 1$, lo cual implica $r < d(b, c)$, y tomando en cuenta $d(a, c) \geq d(b, c)$, se sigue $d(c, v') > r$, y por lo tanto $v' \notin V$, lo cual es una contradicción.

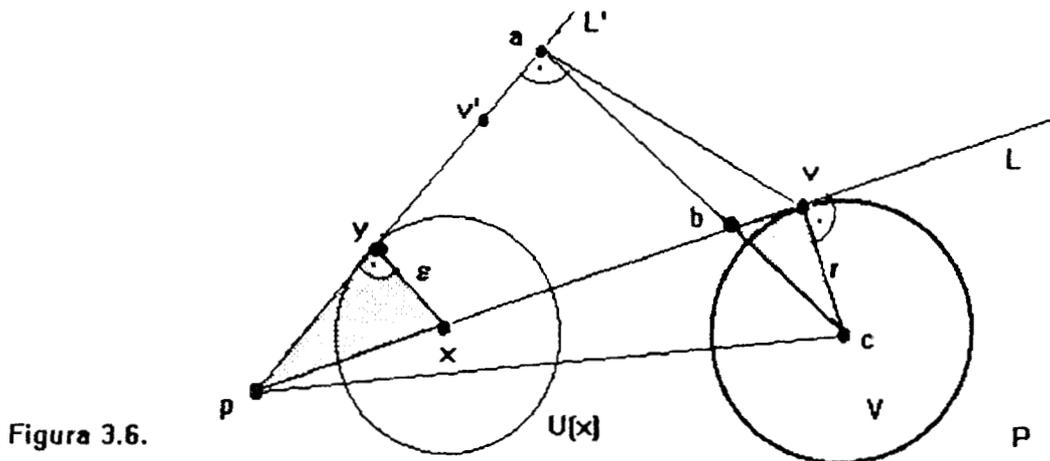


Figura 3.6.

(ii) Sea $v \in int(V)$, $L = afín([p, v])$, y (a, b) un segmento abierto en L tal que $p \in (a, b)$. Entonces existe un disco abierto $A(v)$ centrado en v con radio ϵ tal que $cl(A(v)) \subset V$. Claro que $p \neq v$ pues $p \notin V$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $b \in [p, v \rightarrow)$.

* aplicamos los símbolos $<, >$ para excluir la igualdad

Primero demostramos que $(a, b) \cap \text{int}(C(V, p)) \neq \emptyset$. En caso de que $v \in (p, b)$, tenemos $v \in (a, b) \cap \text{int}(C(V, p))$, pues obviamente $\text{int}(V) \subset \text{int}(C(V, p))$. Asumimos ahora $b \in (p, v]$, vea figura 3.7, y sea $m \in (p, b)$: $m \in [p, v]$ implica por el lema 3.3.3 que $m \in C(V, p)$. Debido a que $m \neq v$, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $m \notin \text{cl}(A(v))$. De $\text{cl}(A(v)) \subset V$ se sigue que $C(\text{cl}(A(v)), p) \subset C(V, p)$. Por el otro lado, es obvio que el disco $B(m)$ centrado en m con el radio δ dado por $\delta = d(p, m)(d(p, v))^{-1}\epsilon$ (obtenido considerando los dos triángulos rectangulares similares $\Delta(p, m, q')$ y $\Delta(p, v, q)$ en la figura 3.7), satisface $B(m) \subset C(\text{cl}(A(v)), p)$. Consecuentemente $m \in (a, b) \cap \text{int}(C(V, p))$.

Para demostrar que $(a, b) \cap (\mathbb{R}^n \setminus C(V, p)) \neq \emptyset$, consideramos $n \in (a, p)$. Nótese que $L = ([p, a \rightarrow) \setminus \{p\}) \cup ([p, b \rightarrow) \setminus \{p\}) \cup \{p\}$ es una descomposición de L , y entonces, debido a que $p \notin V$, $b \in [p, v]$, $v \in V$, se sigue $V \cap L \cap ([p, a \rightarrow) \setminus \{p\}) = \emptyset$. Es claro que $n \in [p, a \rightarrow) \setminus \{p\}$. Si suponemos $n \in C(V, p)$, se sigue del lema 3.3.3 que existe $w \in V$ tal que $n \in [p, w]$. Pero entonces $w \in ([p, a \rightarrow) \setminus \{p\}) \cap V$, lo cual es una contradicción. En consecuencia $n \in (\mathbb{R}^n \setminus C(V, p)) \cap (a, b)$.

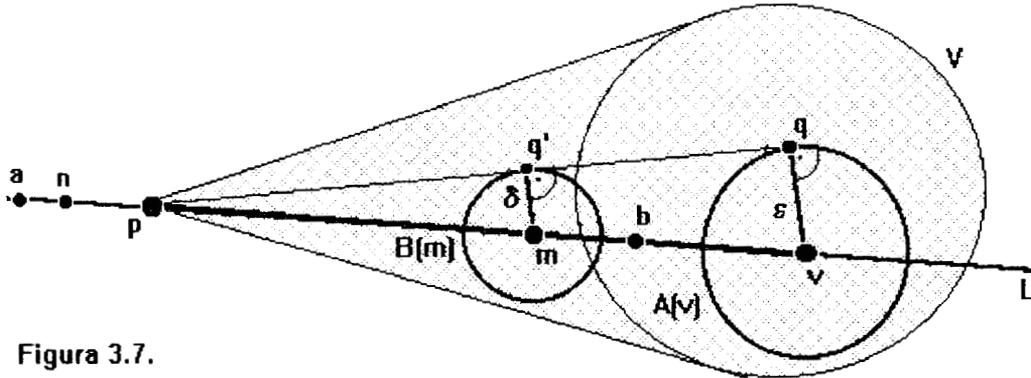


Figura 3.7.

(iii) Sea $M = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{existe } v \in \text{int}(V) \text{ tal que } x \in [p, v] \setminus \{p\}\}$. El lema 3.3.3 implica que $M = C(\text{int}(V), p) \setminus \{p\} \subset C(V, p)$. Para demostrar que $M = \text{int}(C(V, p))$, probamos primero que M es abierto; así que sea $m \in M$.

Obviamente $\text{int}(V) \subset M$, pues $m \in \text{int}(V)$ implica $m \in [p, m]$, y $m \neq p$ puesto que $p \notin \text{int}(V)$. Así que suponemos ahora $m \in M \setminus \text{int}(V)$. Entonces existe $v \in \text{int}(V)$ tal que $m \in (p, v)$, y existe un disco abierto $A(v)$ centrado en v con radio ϵ tal que $\text{cl}(A(v)) \subset \text{int}(V)$. Definimos un disco abierto $B(m)$ centrado en m por el radio δ dado por $\delta = d(p, m) \cdot \epsilon \cdot (d(p, v))^{-1}$, vea figura 3.7 (ϵ, δ son las longitudes de lados correspondientes de dos triángulos similares).

Afirmamos que $B(m) \subset M$. Para ver eso, nótese primero que $\text{cl}(A(v)) \subset \text{int}(V)$ implica $C(\text{cl}(A(v)), p) \subset C(\text{int}(V), p)$, y por lo tanto $C(\text{cl}(A(v)), p) \setminus \{p\} \subset M$. Por el otro lado, por la construcción de δ es claro que $B(m) \subset C(\text{cl}(A(v)), p) \setminus \{p\}$ ($p \notin B(m)$ se obtiene considerando el triángulo $\Delta(p, q', m)$ en figura 3.7, donde por el teorema de Pitágoras $d(p, m) \geq \delta > 0$). En consecuencia $B(m) \subset M$, por lo cual M es abierto, y entonces queda demostrado que $M \subset \text{int}(C(V, p))$.

Para demostrar que $\text{int}(C(V, p)) \subset M$, sea $x \in \text{int}(C(V, p))$. Entonces existe un disco abierto $U(x)$ centrado en x con radio ϵ tal que $U(x) \subset C(V, p)$. Claro que $[p, x \rightarrow) \cap V \neq \emptyset$;

y puesto que $p \notin V$, $[p, x \rightarrow) \cap cl(V)$ o es sólo un punto, o más bien es un segmento. En el primer caso, $afín([p, x \rightarrow))$ es una tangente al disco $cl(V)$; lo cual implica por (i) que $x \in fr(C(V, p))$, que es una contradicción. Consideramos el segundo caso, donde $[p, x \rightarrow) \cap cl(V) = [v_1, v_2]$ para $v_1, v_2 \in cl(V), v_1 \neq v_2$, $[p, x \rightarrow) \cap fr(V) = \{v_1, v_2\}$, y sin pérdida de generalidad suponemos que $[p, v_2] = [p, v_1] \cup [v_1, v_2]$. Claro que $x \in [p, v_2]$, $[p, x \rightarrow) \cap C(V, p) = [p, v_2]$. Entonces el segmento $U(x) \cap [p, x \rightarrow)$ está contenido en $[p, v_2]$, lo cual implica que $d(x, p) > \epsilon$ y $d(x, v_2) > \epsilon$, y por lo tanto $x \neq p, x \neq v_2$. Si $x \in (p, v_1]$, se puede escoger un $v \in (v_1, v_2)$ tal que $x \in (p, v]$. Obviamente $v \in int(V)$, lo cual implica $x \in M$. Si $x \in (v_1, v_2)$, entonces $x \in int(V)$ y $x \in (p, x]$, implicando nuevamente $x \in M$, lo cual completa la demostración.

(iv) es una consecuencia inmediata de lema 3.3.3 y (iii), tomando en cuenta que un disco abierto es regular abierto. □

3.3.5. Corolario: Si P es un poliedro en \mathbb{R}^n y $z \in int(P)$, $a \in fr(P)$, entonces $(a, z] \subset int(P)$.

Demostración:

De $z \in int(P)$ se sigue que existe un disco abierto $U(z)$ centrado en z tal que $U(z) \subset P$, y sin pérdida de generalidad podemos suponer que $cl(U(z)) \subset P$. Aplicando el lema 3.3.4, obtenemos que $(a, z] \subset C(U(z), a) \setminus \{a\} = int(C(cl(U(z)), a))$. Por el otro lado, $a \in P$ y $cl(U(z)) \subset P$ implican que $[a, c] \subset P$ para cualquier $c \in cl(U(z))$, puesto que P es convexo. De eso se obtiene por el mismo lema que $\cup\{[a, c] : c \in cl(U(z))\} = C(cl(U(z)), a) \subset P$. Por lo tanto $int(C(cl(U(z)), a)) \subset int(P)$, y entonces $(a, z] \subset int(P)$. □

3.4. Fenestraciones poliedrales

3.4.1. Definición: Una *fenestración* localmente finita de \mathbb{R}^n se llama *poliedral*, si cada uno de sus elementos es el interior de un poliedro.

Si \mathcal{E} es una fenestración poliedral, entonces cada $W \in \mathcal{E}$ es el interior de un poliedro P de dimensión n , puesto que $W = \text{int}(P) \neq \emptyset$ contiene un disco abierto. Además, $\text{cl}(W) = \text{cl}(\text{int}(P)) = P$, pues P es un conjunto convexo cerrado con interior, y por lo tanto es regular cerrado (lema 3.2.1). Del lema 3.2.4 se obtiene inmediatamente lo siguiente:

3.4.2. Lema: Si $\mathcal{E} = \{W_i, i \in I\}$ es una fenestración poliedral de \mathbb{R}^n , entonces $\{\text{cl}(W_i), i \in I\}$ es un mosaico de \mathbb{R}^n .

Para preparar las demostraciones de nuestros teoremas principales de este capítulo, estudiamos las siguientes propiedades topológicas de fenestraciones poliedrales:

3.4.3. Lema: Si \mathcal{E} es una fenestración poliedral, y N_x es definido para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ por $N_x = \{W \in \mathcal{E} : x \in \text{cl}(W)\}$, entonces

(i) $x \in \text{int}(\cup\{\text{cl}(W) : W \in N_x\})$.

(ii) Si U es un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n tal que $U \subset \cup\{\text{cl}(W) : W \in N_x\}$, entonces $U \cap \text{cl}(W) = \emptyset$ para todo $W \in \mathcal{E} \setminus N_x$.

Demostración:

(i) Sea $x \in \mathbb{R}^n$. Por la definición de N_x es obvio que $x \in M = \cup\{\text{cl}(W) : W \in N_x\}$. M es cerrado porque N_x es finito. Para demostrar que $x \in \text{int}(M)$, suponemos por lo contrario que $x \in \text{fr}(M)$. Entonces toda vecindad abierta de x intersecta a $\mathbb{R}^n \setminus M$. Debido a que \mathcal{E} es una fenestración de \mathbb{R}^n ,

$$\mathbb{R}^n = \text{cl}(\cup\{W : W \in \mathcal{E}\}) = \text{cl}(\cup\{W : W \in N_x\}) \cup \text{cl}(\cup\{W : W \in (\mathcal{E} \setminus N_x)\}),$$

de lo cual se obtiene $\mathbb{R}^n \setminus M \subset \text{cl}(\cup\{W : W \in (\mathcal{E} \setminus N_x)\})$. Consecuentemente, $x \in \text{cl}(\text{cl}(\cup\{W : W \in (\mathcal{E} \setminus N_x)\})) = \text{cl}(\cup\{W : W \in (\mathcal{E} \setminus N_x)\}) = \cup\{\text{cl}(W) : W \in (\mathcal{E} \setminus N_x)\}$ (pues $\mathcal{E} \setminus N_x$ es localmente finito); es decir, existe un $W \in \mathcal{E} \setminus N_x$ tal que $x \in \text{cl}(W)$, lo cual contradice la definición de N_x .

(ii) Sea U abierto tal que $U \subset \cup\{\text{cl}(W) : W \in N_x\}$, y suponemos por lo contrario que exista $V \in \mathcal{E} \setminus N_x$ tal que $U \cap \text{cl}(V) \neq \emptyset$. Eso implica $U \cap V \neq \emptyset$, puesto que U es abierto. Así que sea $z \in U \cap V$. Debido a que $U \subset \cup\{\text{cl}(W) : W \in N_x\}$ se sigue que existe $V' \in N_x$ tal que $z \in \text{cl}(V')$, y por lo tanto $z \in \text{cl}(V') \cap V$. Eso es una contradicción a la proposición 3.3.3.(ii), puesto que $V' \neq V$ por $V \notin N_x$.

□

3.4.4. Lema: Sea \mathcal{E} una fenestración poliédrica, y se define

$$N_x = \{W \in \mathcal{E} : x \in cl(W)\}, \quad P_x = \cap \{cl(W) : W \in N_x\}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

y se denota por H_x el plano de soporte de P_x , entonces se sigue

$$int_{H_x}(P_x) = int(\cup \{cl(W) : W \in N_x\}) \cap H_x.$$

Demostración:

Primero consideramos los casos $dim P_x = 0$ y $dim P_x = n$:

Si $dim P_x = 0$, entonces $P_x = H_x = int_{H_x}(P_x) = \{x\}$, y $int(\cup \{cl(W) : W \in N_x\}) \cap H_x = \{x\}$, debido a que $x \in int(\cup \{cl(W) : W \in N_x\})$, por el lema 3.4.3. Si $dim P_x = n$, entonces $N_x = \{W\}$ para algún $W \in \mathcal{E}$ (si N_x tuviera al menos dos elementos, lema 3.3.1.(ii) implicaría $dim P_x \leq n - 1$), $H_x = \mathbb{R}^n$, $P_x = cl(W)$, de lo cual se obtiene $int_{H_x}(P_x) = int(\cup \{cl(W) : W \in N_x\}) \cap H_x = W$. Así que, en todo lo que sigue suponemos que $1 \leq dim P_x \leq n - 1$.

i) Ahora sea $z \in int(\cup \{cl(W) : W \in N_x\}) \cap H_x$, y demostramos que $z \in int_{H_x}(P_x)$. La suposición implica que existe una vecindad abierta $U(z)$ de z tal que $U(z) \subset \cup \{cl(W) : W \in N_x\}$. Afirmamos que $U(z) \cap H_x \subset P_x$, lo cual completará la demostración de que $z \in int_{H_x}(P_x)$.

Sea $t \in U(z) \cap H_x$. Para demostrar que $t \in P_x$, suponemos por lo contrario que exista $W^* \in N_x$ tal que $t \notin cl(W^*)$. Tenemos que

$$\begin{aligned} t &\in int(\cup \{cl(W) : W \in N_x\}) \cap int(\mathbb{R}^n \setminus cl(W^*)) = int(\cup \{cl(W) : W \in N_x\} \cap (\mathbb{R}^n \setminus cl(W^*))) \\ &= int(\cup \{cl(W) : W \in (N_x \setminus \{W^*\})\} \cap (\mathbb{R}^n \setminus cl(W^*))), \end{aligned}$$

lo cual implica que existe un disco abierto $V(t)$ centrado en t tal que $V(t) \subset (\cup \{cl(W) : W \in (N_x \setminus \{W^*\})\}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus cl(W^*))$. Sin pérdida de generalidad, $V(t)$ puede ser supuesto suficientemente pequeño tal que

$$cl(V(t)) \subset (\cup \{cl(W) : W \in (N_x \setminus \{W^*\})\}) \cap (\mathbb{R}^n \setminus cl(W^*)).$$

Puesto que $dim P_x = dim H_x$, sigue del corolario 3.2.14 que $int_{H_x}(P_x) \neq \emptyset$, así que escogemos $p \in int_{H_x}(P_x)$. Debido a la definición de $V(t)$, y a que $P_x \subset cl(W^*)$, se sigue $p \notin cl(V(t))$. Sea C el cono sobre $cl(V(t))$ con vértice p según la definición 3.3.2. Puesto que $p \in int_{H_x}(P_x)$, existe en el subespacio afín H_x un disco abierto $U_{H_x}(p)$ en H_x centrado en p tal que $U_{H_x}(p) \subset P_x$. Debido a que $[p, t] \subset H_x$ y H_x es convexo, se sigue del lema 3.3.4(ii) que $U_{H_x}(p) \cap int(C) \neq \emptyset$, vea figura 3.8. Sea ahora $y \in U_{H_x}(p) \cap int(C)$, entonces $y \in U_{H_x}(p) \subset P_x \subset cl(W^*)$, implicando que toda vecindad abierta de y intersecta a W^* . Además, puesto que $y \in int(C)$, existe un disco abierto $A(y)$ centrado en y tal que $A(y) \subset int(C)$, y consecuentemente existe un $s \in A(y) \cap W^* \subset int(C) \cap W^*$. Pero $s \neq p$,

pues $p \notin \text{int}(C)$, y entonces existe un $c \in V(t)$ tal que $s \in [p, c]$.

Por el otro lado, vimos arriba que $V(t) \subset \cup\{cl(W) : W \in (N_x \setminus \{W^*\})\}$. Eso implica que existe un $W \in N_x, W \neq W^*$ tal que $c \in cl(W)$. Puesto que $p \in P_x$, tenemos $p \in cl(W)$. Aplicando que $cl(W)$ es un conjunto convexo, se sigue que $[p, c] \subset cl(W)$. Eso implica que $s \in cl(W) \cap W^*$, lo cual completa la demostración de la contención por contradicción al lema 3.3.1.(i).

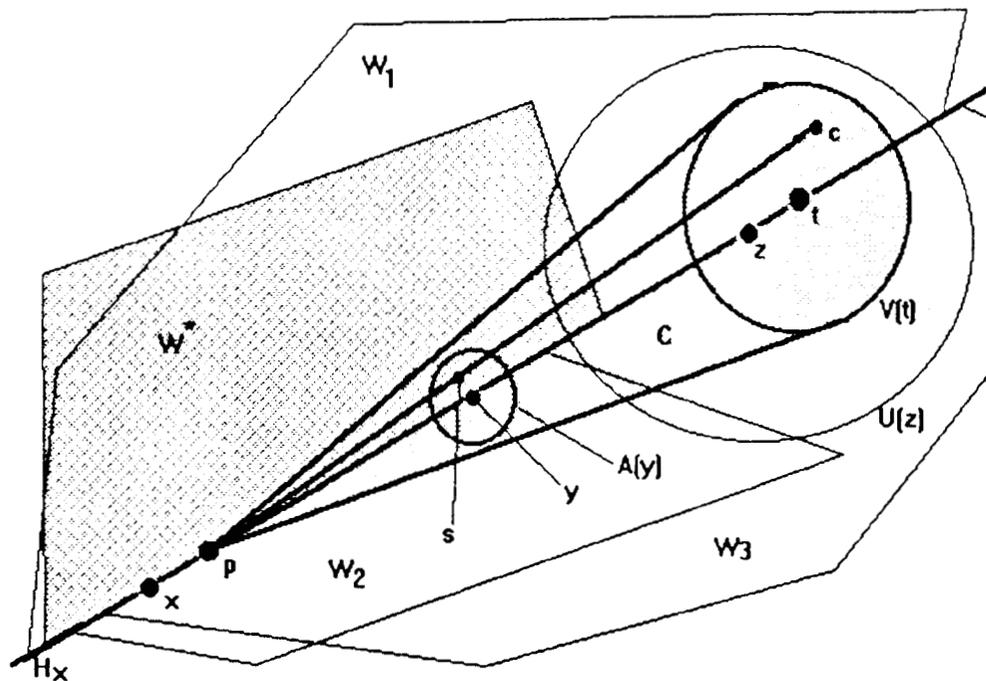


Figura 3.8. Ejemplo en \mathbb{R}^3 , $P_x = \{W_1, W_2, W_3, W^*\}$, $\dim P_x = \dim H_x = 1$, $V(t) \subset W_1 \cup W_3$.

ii) Para demostrar que $\text{int}_{H_x}(P_x) \subset \text{int}(\cup\{cl(W) : W \in N_x\}) \cap H_x$, sea $z \in \text{int}_{H_x}(P_x)$. Obviamente basta demostrar que $z \in \text{int}(\cup\{cl(W) : W \in N_x\})$, puesto que $P_x \subset H_x$. Por el lema 3.4.3(i) tenemos $x \in \text{int}(\cup\{cl(W) : W \in N_x\})$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Eso implica que en el caso $z = x$, la afirmación es trivialmente cierta. Así que, suponemos $z \neq x$. Pero también, $z \in \text{int}(\cup\{cl(W) : W \in N_z\})$, por lo cual es suficiente demostrar que $N_z = N_x$. Si $z \in P_x$ es claro que $N_x \subset N_z$, pues $z \in P_x \Leftrightarrow z \in cl(W)$ para todo $W \in N_x$, lo cual implica que $W \in N_z$ para cualquier $W \in N_x$. En consecuencia, sólo falta demostrar que $N_z \subset N_x$.

Debido a que $x \in \text{int}(\cup\{cl(W) : W \in N_x\})$ y $x \neq z$, existen discos abiertos $U(x)$ centrado en x y $V(z)$ centrado en z tales que

$$U(x) \subset \cup\{cl(W) : W \in N_x\}, cl(U(x)) \cap cl(V(z)) = \emptyset.$$

Puesto que $z \in \text{int}_{H_x}(P_x)$, podemos asumir además que (vea figura 3.9)

$$V(z) \cap H_x \subset P_x.$$

Ahora, para demostrar que $N_z \subset N_x$, supongase que exista $W^* \in N_z \setminus N_x$. Sea $C_1 = C(\text{cl}(U(x)), z)$ el cono sobre $\text{cl}(U(x))$ con vertice z (por la construcción de $U(x)$ es claro que $z \notin \text{cl}(U(x))$).

a) Consideramos primero el caso $\text{int}(C_1) \cap W^* \neq \emptyset$, vea figura 2a). Entonces existe un $s \in \text{int}(C_1) \cap W^*$, y por el lema 3.3.4(iv), existe un $c \in U(x) \subset \cup\{\text{cl}(W) : W \in N_x\}$ tal que $s \in (z, c]$. Eso implica que hay un $W' \in N_x$ tal que $c \in \text{cl}(W')$, y puesto que $z \in \text{cl}(W')$, y debido a la convexidad de $\text{cl}(W')$, se obtiene $s \in \text{cl}(W')$, o sea $s \in \text{cl}(W') \cap W^*$, lo cual es una contradicción al lema 3.3.1.(i), puesto que $W' \neq W^*$ pues $W' \in N_x, W^* \notin N_x$.

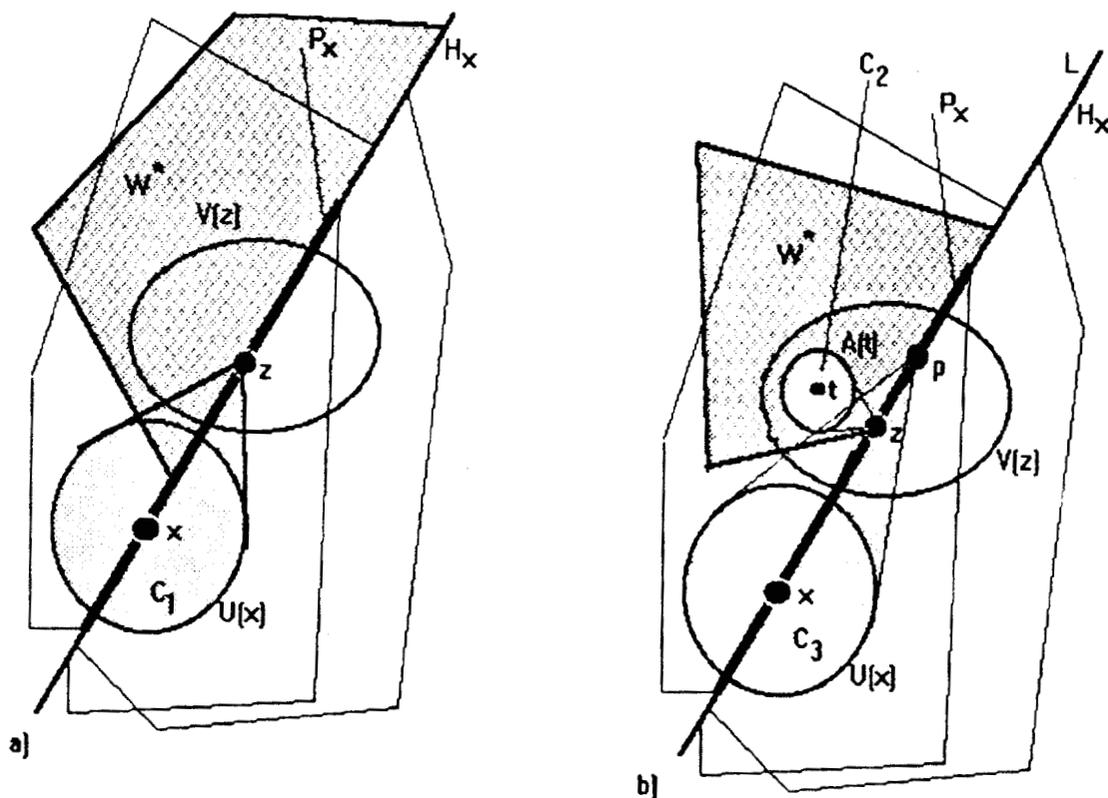


Figura 3.9. Ejemplo en \mathbb{R}^3 , ilustrando en a) el caso $\text{int}(C_1) \cap W^* \neq \emptyset$, y en b) el caso $\text{int}(C_1) \cap W^* = \emptyset$ (vea texto arriba).

b) Queda investigar el caso $\text{int}(C_1) \cap W^* = \emptyset$, vea figura 3.9.b). Debido a que $z \in \text{cl}(W^*)$, $V(z) \cap W^* \neq \emptyset$. Escogemos un $t \in V(z) \cap W^*$. Puesto que este último conjunto es abierto, existe un disco abierto $A(t)$ centrado en t tal que $\text{cl}(A(t)) \subset V(z) \cap W^*$. Nótese que $z \in \text{cl}(W) \cap \text{cl}(W^*) = \text{fr}(W) \cap \text{fr}(W^*)$, por lo cual $z \notin W^*$, y entonces $z \notin \text{cl}(A(t))$. Sea

$C_2 = C(\text{cl}(A(t)), z)$. Debido a que $\text{cl}(A(t)) \subset W^* \subset \text{cl}(W^*)$, $z \in \text{cl}(W^*)$, y que $\text{cl}(W^*)$ es convexo, tenemos que $C_2 \subset \text{cl}(W^*)$ (aplicando el lema 3.3.3, pues por la convexidad de $\text{cl}(W^*)$ vale que $[a, z] \subset \text{cl}(W^*)$ para todo $a \in \text{cl}(A(t))$), implicando $\text{int}(C_2) \subset W^*$ (pues W^* es regular abierto).

Denotamos $L = \text{afín}(\{z, x\})$. Puesto que z es el vertice de C_1 , se sigue del lema 3.3.4(ii) que $(V(z) \cap L) \cap (\mathbb{R}^n \setminus C_1) \neq \emptyset$ (C_1 no está representado en la figura 3.9.b)). Así que escogemos $p \in (V(z) \cap L) \setminus C_1$, entonces $p \notin \text{cl}(U(x))$, y definimos $C_3 = C(\text{cl}(U(x)), p)$. Ahora, nótese que $z \in (p, x) \subset L$, y entonces $z \in \text{int}(C_3)$, por el lema 3.3.4(iv). Además, z es vertice de C_2 , así que $z \in \text{cl}(\text{int}(C_2))$. Eso implica que $\text{int}(C_2) \cap \text{int}(C_3) \neq \emptyset$. Aplicando que $\text{int}(C_2) \subset W^*$, se sigue que $\text{int}(C_3)$ intersecta a W^* , lo cual permite finalizar la demostración argumentando como arriba: Entonces existe $r \in \text{int}(C_3) \cap W^*$, lo cual implica por el lema 3.3.4(iv) que hay un $c \in U(x)$ tal que $r \in (p, c]$. Puesto que $U(x) \subset \cup\{\text{cl}(W) : W \in N_x\}$, existe $W \in N_x$ tal que $c \in \text{cl}(W)$, y debido a que $p \in P_x \subset \text{cl}(W)$, y que $\text{cl}(W)$ es convexo, se obtiene que $r \in \text{cl}(W) \cap W^*$ para diferentes elementos W, W^* de \mathcal{E} , lo cual contradice el lema 3.3.1.(i). □

3.4.5. Corolario: Si \mathcal{E} es una fenestración poliedral, y N_x, P_x, H_x son definidos como en el lema 3.4.4, entonces

$$\text{fr}_{H_x}(P_x) \subset \text{fr}(\cup\{\text{cl}(W) : W \in N_x\}).$$

Demostración:

Sea $z \in \text{fr}_{H_x}(P_x) = P_x \setminus \text{int}_{H_x}(P_x)$. Por $z \in P_x$ es claro que $z \in (\cup\{\text{cl}(W) : W \in N_x\}) \cap H_x$. Obviamente $\text{fr}(\cup\{\text{cl}(W) : W \in N_x\}) = \cup\{\text{cl}(W) : W \in N_x\} \setminus \text{int}(\cup\{\text{cl}(W) : W \in N_x\})$. Para demostrar que $z \in \text{fr}(\cup\{\text{cl}(W) : W \in N_x\})$, suponemos por lo contrario que $z \in \text{int}(\cup\{\text{cl}(W) : W \in N_x\})$. Eso implica por el lema 3.4.4 que $z \in \text{int}_{H_x}(P_x)$, lo cual es una contradicción. □

3.4.6. Corolario: Si \mathcal{E} es una fenestración poliedral, y N_x, P_x, H_x son definidos como en el lema 3.4.4, entonces se sigue para $z \in \mathbb{R}^n$ que

$$z \in \text{int}_{H_x}(P_x) \iff N_z = N_x.$$

Demostración:

Primero sea $z \in \text{int}_{H_x}(P_x)$. $z \in P_x$ implica $N_x \subset N_z$, pues $z \in \text{cl}(W)$ para todo $W \in N_x$; así que sólo falta demostrar $N_z \subset N_x$. Para eso, supongase que exista $W^* \in N_z \setminus N_x$. De los lemas 3.4.3 y 3.4.4, sigue que existe una vecindad abierta $U(z)$ de z en \mathbb{R}^n tal que $U(z) \subset \cup\{\text{cl}(W) : W \in N_x\}$, y $U(z) \cap \text{cl}(W) = \emptyset$ para cualquier $W \in \mathcal{E} \setminus N_x$.

Consecuentemente $U(z) \cap \text{cl}(W^*) = \emptyset$, puesto que $W^* \notin N_x$, lo cual contradice $z \in \text{cl}(W^*)$. Así hemos demostrado que $z \in \text{int}_{H_x}(P_x)$ implica $N_z = N_x$.

Ahora suponemos que $N_z = N_x$, y demostramos que $z \in \text{int}_{H_x}(P_x)$. Debido a que

$N_x \subset N_z$, tenemos $P_z \subset P_x$, y por lo tanto $z \in P_x = \text{int}_{H_x}(P_x) \cup \text{fr}_{H_x}(P_x)$. Para demostrar $z \in \text{int}_{H_x}(P_x)$, asumimos por lo contrario que $z \in \text{fr}_{H_x}(P_x)$. Eso implica por el corolario 3.4.5 que $z \in \text{fr}(\cup\{cl(W) : W \in N_x\}) \subset (\mathbb{R}^n \setminus \text{int}(\cup\{cl(W) : W \in N_x\})) = cl(\mathbb{R}^n \setminus (\cup\{cl(W) : W \in N_x\}))$. Puesto que $\mathbb{R}^n = (\cup\{cl(W) : W \in N_x\}) \cup (\cup\{cl(W) : W \in \mathcal{E} \setminus N_x\})$ (debido a que \mathcal{E} es localmente finita, se puede aplicar el lema 3.1.3), se sigue $\mathbb{R}^n \setminus (\cup\{cl(W) : W \in N_x\}) \subset \cup\{cl(W) : W \in \mathcal{E} \setminus N_x\}$, de lo cual se obtiene enseguida $z \in cl(\cup\{cl(W) : W \in \mathcal{E} \setminus N_x\}) = \cup\{cl(W) : W \in \mathcal{E} \setminus N_x\}$. En consecuencia existe $W^* \in \mathcal{E} \setminus N_x$ tal que $z \in cl(W^*)$, es decir, $W^* \in N_z \setminus N_x$, lo cual contradice la suposición $N_z = N_x$. □

3.4.7. Corolario: Si \mathcal{E} es una fenestración poliedral, y N_x, P_x, H_x son definidos como en el lema 3.4.4, entonces

$$\cup\{\text{int}_{H_y}(P_y) : y \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } N_y \subset N_x\} = \text{int}(\cup\{cl(W) : W \in N_x\}).$$

Demostración:

Primero sea $z \in \text{int}_{H_y}(P_y)$ para algún $y \in \mathbb{R}^n$ el cual satisface $N_y \subset N_x$. El corolario 3.4.6 implica $N_z = N_y$, así que $N_z \subset N_x$, de lo cual obtenemos $z \in \cup\{cl(W) : W \in N_x\}$, puesto que $N_z \neq \emptyset$ pues \mathcal{E} es una fenestración. Debido a que N_x es finito, $\cup\{cl(W) : W \in N_x\}$ es cerrado. Para demostrar que $z \in \text{int}(\cup\{cl(W) : W \in N_x\})$, suponemos por lo contrario que $z \in \text{fr}(\cup\{cl(W) : W \in N_x\})$. Entonces toda vecindad abierta de z intersecta a $\mathbb{R}^n \setminus (\cup\{cl(W) : W \in N_x\}) \subset \cup\{cl(W) : W \in \mathcal{E} \setminus N_x\}$, lo cual implica que $z \in cl(\cup\{cl(W) : W \in \mathcal{E} \setminus N_x\}) = \cup\{cl(W) : W \in \mathcal{E} \setminus N_x\}$ (para más detalle vea la demostración del lema 3.4.3(i)). Consecuentemente existe $W^* \in \mathcal{E} \setminus N_x$ tal que $z \in cl(W^*)$. Pero entonces $W^* \in N_z \subset N_x$, lo cual es una contradicción.

Ahora sea $z \in \text{int}(\cup\{cl(W) : W \in N_x\})$. Por el lema 3.4.3(ii) existe una vecindad abierta $U(z)$ de z tal que $U(z) \subset \cup\{cl(W) : W \in N_x\}$ que satisface $U(z) \cap cl(W) = \emptyset$ para todo $W \in \mathcal{E} \setminus N_x$. Eso implica $N_z \subset N_x$. Además tenemos por el lema 3.4.3(ii) que $z \in \text{int}(\cup\{cl(W) : W \in N_z\})$, y obviamente $z \in P_z \subset H_z$, de donde obtenemos aplicando lema 3.4.4 que $z \in \text{int}_{H_x}(P_z)$, lo cual demuestra que $z \in \cup\{\text{int}_{H_y}(P_y) : y \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } N_y \subset N_x\}$. □

3.4.8. Corolario: Sea \mathcal{E} una fenestración poliedral, y sean N_x, P_x, H_x definidos como en el lema 3.4.4. Si $P_x \subset P_y, P_x \neq P_y$ para $x, y \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$P_x \subset \text{fr}_{H_y}(P_y) \text{ y } \dim P_x \leq \dim P_y - 1.$$

Demostración:

En lo que sigue, $A \subset B$ denota $A \subseteq B, A \neq B$. Suponemos $P_x \subset P_y$. Es claro que $P_x \subset P_y \iff \cap\{cl(W) : W \in N_x\} \subset \cap\{cl(W) : W \in N_y\} \iff N_y \subset N_x$. Entonces $x \in P_y = \text{int}_{H_y}(P_y) \cup \text{fr}_{H_y}(P_y)$. $x \in \text{int}_{H_y}(P_y)$ implicaría por el corolario 3.4.6 que

$N_y = N_x$, lo cual es una contradicción: por eso vale $x \in fr_{H_y}(P_y)$. Ahora sea $z \in P_x$. Eso implica $N_x \subseteq N_z$. Para demostrar que $z \in fr_{H_y}(P_y)$, suponemos por lo contrario que $z \in int_{H_y}(P_y)$. Entonces, por el corolario 3.4.6, $N_z = N_y$, lo cual implica $N_x \subseteq N_y$, obteniendo con lo de arriba $N_x = N_y$, y, aplicando nuevamente el corolario 3.4.6, se sigue $x \in int_{H_y}(P_y)$, lo cual es una contradicción.

Ahora recordamos que H_y es un espacio topológico homeomorfo al espacio Euclideo \mathbb{R}^k , donde $dim P_y = dim H_y = k$ para $0 \leq k \leq n$. Por eso, el lema 3.2.13 implica enseguida que $dim P_x \leq dim P_y - 1$, debido a que $P_x \subset fr_{H_y}(P_y)$ implica $int_{H_y}(P_x) = \emptyset$. □

Nuestro resultado principal de este capítulo es que la \mathcal{E} -retícula minimal es un espacio de Alexandroff que tiene dimensión de Alexandroff igual a n , siempre cuando \mathcal{E} es una fenestración poliedral de \mathbb{R}^n . Sin embargo, se puede suavizar la suposición, debido a que, para una fenestración localmente finita \mathcal{E} de \mathbb{R}^n , una condición suficiente para ser poliedral es, que todo elemento de \mathcal{E} es un conjunto acotado convexo. Eso demostramos primero en teorema 3.4.10, para el cual la siguiente proposición es de ayuda.

3.4.9. Proposición: *Si \mathcal{E} es una fenestración localmente finita de \mathbb{R}^n , tal que todo $W \in \mathcal{E}$ es un subconjunto acotado convexo de \mathbb{R}^n , entonces para todo $W \in \mathcal{E}$ vale lo siguiente:*

- (i) *Si $W' \in \mathcal{E}, W' \neq W$, entonces $cl(W) \cap cl(W') = fr(W) \cap fr(W')$.*
- (ii) *Si $x \in fr(W)$, entonces existe $W' \in \mathcal{E}, W' \neq W$ tal que $x \in cl(W')$.*
- (iii) *$fr(W)$ intersecta las fronteras de sólo un número finito de elementos de \mathcal{E} .*

Demostración:

(i) se sigue inmediatamente del lema 3.3.1.

(ii) Por el lema 3.1.3, tenemos $\mathbb{R}^n = cl(\cup\{X \subset \mathbb{R}^n : X \in \mathcal{E}\}) = \cup\{cl(X) : X \in \mathcal{E}\}$, pues \mathcal{E} es localmente finito. Puesto que W es acotado en el conjunto no acotado \mathbb{R}^n , se sigue $\mathcal{E} \setminus \{W\} \neq \emptyset$ y $x \in cl(\cup\{V \subset \mathbb{R}^n : V \in \mathcal{E} \setminus \{W\}\})$.

(iii) Supongamos que el conjunto $M = \{W' \in \mathcal{E} : cl(W) \cap cl(W') \neq \emptyset\}$ sea infinito. Entonces existen $W_i \in \mathcal{E}$ tales que $cl(W) \cap cl(W_i) \neq \emptyset$ para todo $i \in \omega$. Seleccionamos de cada $cl(W) \cap cl(W_i)$ un punto x_i . Sea X el conjunto de todos estos puntos seleccionados. Por $cl(W) \cap cl(W_i) = fr(W) \cap cl(W_i)$ se sigue que $X \subset fr(W)$.

El conjunto $\{x_i : i \in \omega\}$ es infinito, pues $\{j : x_j = x_i\}$ es finito para todo i . Para mostrar esto, sea $x_i \in X$, y supongamos que $\{j : x_j = x_i\}$ sea infinito. Entonces $x_i \in cl(W_i) \cap (\cap\{cl(W_j) : j \in J\})$ para $J \subset \omega, J$ infinito. Eso implica que cualquiera vecindad abierta de x_i intersecta a todos estos $W_j \in \mathcal{E}$, lo cual contradice que \mathcal{E} es localmente finito.

Así que X es un subconjunto infinito de $fr(W)$. $fr(W)$ es un cerrado en el compacto $cl(W)$. Por eso, $fr(W)$ es compacto en \mathbb{R}^n , y el conjunto infinito X se acumula en $fr(W)$. Sea x un punto de acumulación de X . Por la construcción de X es claro que x está contenido en un número infinito de cerraduras de elementos de \mathcal{E} , es decir, cada vecindad de x intersecta a un número infinito de elementos de \mathcal{E} , lo cual contradice que \mathcal{E} es localmente finito. □

3.4.10. Teorema: Si \mathcal{E} es una fenestración localmente finita de \mathbb{R}^n , tal que todo $W \in \mathcal{E}$ es un subconjunto acotado convexo de \mathbb{R}^n , entonces todo $W \in \mathcal{E}$ es el interior de un poliedro convexo n -dimensional de \mathbb{R}^n ; es decir, \mathcal{E} es una fenestración poliedral.

Demostración:

Sea $W \in \mathcal{E}$, y denótese $V = cl(W)$. Puesto que $int(V) = W$ (W es regular abierto), es suficiente a probar que V es un poliedro. Debido a que W es acotado, convexo y n -dimensional (pues W es abierto), V tiene estas mismas propiedades y además, V es compacto. Por eso, por la definición 3.2.6 del poliedro, y aplicando lema 3.2.5, es suficiente a demostrar que $fr(V)$ está contenido en la unión de un número finito de subespacios afines propios de \mathbb{R}^n .

Por proposición 3.4.9(ii), para todo $x \in fr(V)$ existe $W' \in \mathcal{E}$, $W' \neq W$ tal que $x \in cl(W) \cap cl(W')$. Debido a lema 3.3.1, $cl(W) \cap cl(W')$ está contenido en un subespacio afín propio de \mathbb{R}^n . Por proposición 3.4.9(iii), existe sólo un número finito de tales W' , lo cual implica que $fr(V)$ está contenido en una unión finita de subespacios afines propios, completando la demostración. □

El resultado del teorema 3.4.10 es conocido para mosaicos de \mathbb{R}^n y adoquinamientos localmente finitos (vea definición 3.1.2 y los comentarios que le siguen; referimos a [Grü,She], p. 117 y p. 472). Para el caso de una división numerable, el resultado es mencionado en [Schu], sin ninguna referencia a una demostración.

Antes de formular el teorema principal de este capítulo, demostramos la siguiente propiedad sencilla de ayuda:

3.4.11. Lema: Sea f un mapeo continuo abierto del espacio topológico (X_1, τ_1) sobre el espacio (X_2, τ_2) , y $A \subset X_2$. Entonces

$$(i) \quad (f^{-1}(A))^{\circ} = f^{-1}(A^{\circ})$$

$$(ii) \quad \overline{f^{-1}(A)} = f^{-1}(\overline{A}),$$

donde en ambos espacios, M° denota el interior, y \overline{M} la cerradura del subconjunto M .

Demostración:

(i) Denótese $M = (f^{-1}(A))^{\circ}$. Probamos que $f(M) = A^{\circ}$. $f(M)$ es abierto porque f es abierto, y $M \subset f^{-1}(A)$ implica $f(M) \subset A$. Sea ahora K un subconjunto abierto de A . Entonces $f^{-1}(K) \subset f^{-1}(A)$ y $f^{-1}(K)$ es abierto, lo cual implica $f^{-1}(K) \subset (f^{-1}(A))^{\circ} = M$ y enseguida $K \subset f(M)$, probando $f(M) = A^{\circ}$. Consecuentemente $(f^{-1}(A))^{\circ} \subset f^{-1}(A^{\circ})$. Por otro lado, $f^{-1}(A^{\circ}) \subset (f^{-1}(A))^{\circ}$ porque $f^{-1}(A^{\circ})$ es abierto y $A^{\circ} \subset A$.

(ii) $f^{-1}(\overline{A}) = \left[(f^{-1}(\overline{A}))^c \right]^c = \left[f^{-1}(\overline{A}^c) \right]^c = \left[f^{-1}((A^c)^{\circ}) \right]^c \stackrel{\text{por i)}}{=} \left[(f^{-1}(A^c))^{\circ} \right]^c = \left[((f^{-1}A)^c)^{\circ} \right]^c = \left[\overline{(f^{-1}A)} \right]^c = \overline{f^{-1}(A)}$, donde para cualquier subconjunto M de X_1 , M^c

denota $X_1 \setminus M$.

□

3.4.12. Teorema: Si \mathcal{E} es una fenestración localmente finita de \mathbb{R}^n , tal que todo elemento W de \mathcal{E} es un subconjunto acotado convexo de \mathbb{R}^n , entonces la \mathcal{E} -rejilla minimal tiene dimensión de Alexandroff n .

Demostración:

Debido a teorema 3.4.10, cada elemento W de \mathcal{E} es el interior de un poliedro P , y tenemos que $W = \text{int}(P) = P \setminus \text{fr}(P)$, $cl(W) = cl(P) = P$, $\text{int}(cl(W)) = W$, y $\text{fr}(W) = \text{fr}(P)$. Es suficiente construir una \mathcal{E} -rejilla minimal sobre \mathbb{R}^n de dimensión de Alexandroff n , porque cualquier otra \mathcal{E} -rejilla minimal es homeomorfa a esta, considerando las retículas como espacios cocientes de \mathbb{R}^n , y por lo tanto tiene la misma dimensión de Alexandroff.

Sean N_x, P_x, H_x definidos como en el lema 3.4.4, es decir, para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$

$$N_x = \{W \in \mathcal{E} : x \in cl(W)\}, \quad P_x = \bigcap (\{cl(W) : W \in N_x\}),$$

y H_x denota el plano de soporte de P_x . Definimos la siguiente relación de equivalencia sobre \mathbb{R}^n :

$$x \sim y \iff N_x = N_y, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Denotamos $[x] = \{y \in \mathbb{R}^n : y \sim x\}$, y sea X el conjunto cociente

$$X = \mathbb{R}^n / \sim = \{[x], x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Además, sea π la proyección natural de \mathbb{R}^n sobre X , y τ la topología cociente sobre X . Nótese que $N_x \subseteq N_y \iff P_y \subseteq P_x$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, y el corolario 3.4.6 implica que

$$\pi(y) = [x] \iff N_x = N_y \iff P_x = P_y \iff y \in \text{int}_{H_x}(P_x) \iff x \in \text{int}_{H_y}(P_y).$$

En consecuencia

$$\pi^{-1}([x]) = \text{int}_{H_x}(P_x).$$

i) Primero demostramos que X es un espacio T_0 de Alexandroff. Para eso definimos para cualquier $[x] \in X$

$$U_X([x]) = \{[y] \in X : y \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } N_y \subseteq N_x\},$$

y demostramos que, para todo $[x] \in X$, $U_X([x])$ es la vecindad abierta minimal de $[x]$. Trivialmente vale $[x] \in U_X([x])$, pues $N_x \subseteq N_x$. Ahora,

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(U_X([x])) &= \cup \{ \pi^{-1}([y]) : y \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } N_y \subseteq N_x \} \\ &= \cup \{ \text{int}_{H_y}(P_y) : y \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } N_y \subseteq N_x \},\end{aligned}$$

y debido a que por el corolario 3.4.7, este último conjunto es igual a $\text{int}(\cup \{ \text{cl}(W) : W \in \mathcal{N}_x \})$ y por lo tanto es abierto en \mathbb{R}^n , $U_X([x])$ es abierto en X . Puesto que para todo $x \in \mathbb{R}^n$, N_x es finito, se sigue que $U_X([x])$ es un conjunto finito. Entonces cada $[x] \in X$ tiene una vecindad abierta finita, por lo cual X es un espacio de Alexandroff.

Para demostrar que $U_X([x])$ es el abierto minimal que contiene a $[x]$, supongase por lo contrario que exista un abierto V en X que contiene a $[x]$ tal que $V \subset U_X([x])$, y sea $[z] \in U_X([x]) \setminus V$. Entonces $N_z \subset N_x$, o, equivalentemente, $P_x \subset P_z$, implicando $x \in P_z$. Debido a que P_z es un convexo cerrado con interior no vacío en su plano de soporte H_z , y por lo tanto es un regular cerrado en H_z (por el lema 3.2.1), y que H_z es un subespacio cerrado de \mathbb{R}^n , se obtiene $x \in \text{cl}_{H_z}(\text{int}_{H_z}(P_z)) = \text{cl}(\pi^{-1}([z]))$. Eso implica que el abierto (en \mathbb{R}^n) $\pi^{-1}(V)$ intersecta a $\pi^{-1}([z])$, es decir, existe $t \in \mathbb{R}^n$ tal que $\pi(t) = [z] \in V$, lo cual es una contradicción. Eso completa la demostración de que $U_X([x])$ es la vecindad abierta minimal de $[x]$.

Para ver que X es T_0 , sean $[x], [y] \in X$ tales que $[x] \neq [y]$. Sin pérdida de generalidad suponemos $[y] \in U_X([x])$, lo cual implica inmediatamente $N_y \subseteq N_x$. Si asumimos además que $[x] \in U_X([y])$, obtenemos $N_x \subseteq N_y$, y consecuentemente $N_x = N_y$, lo cual es una contradicción a $[x] \neq [y]$.

Queda demostrado que X es un espacio T_0 de Alexandroff, y por lo tanto su dimensión de Alexandroff coincide con la dimensión de su orden parcial de especialización, como demostramos en capítulo 2 de esta tesis. Es decir,

$$\text{DIM}(X, \tau) = \text{ODIM}(X, \leq),$$

donde

$$[x] \leq [y] \iff [x] \in \text{cl}_X([y]) \iff [y] \in U_X([x]) \iff N_y \subseteq N_x; [x], [y] \in X$$

Denotando $[x] < [y] \iff [x] \leq [y] \wedge [x] \neq [y]$, se sigue entonces del corolario 3.4.8

$$[x] < [y] \iff P_x \subset P_y \wedge P_x \neq P_y \iff P_x \subset \text{fr}_{H_y}(P_y) \wedge \dim P_x \leq \dim P_y - 1,$$

donde \dim denota la dimensión afín de los poliedros. Puesto que esta dimensión de las cerraduras de los elementos de \mathcal{E} es a lo más igual a n , obtenemos que

$$\text{ODIM}(X) = \text{DIM}(X) \leq n.$$

ii) Para demostrar que $\text{DIM} X \geq n$, basta de demostrar $\text{ODIM} X \geq n$, y para eso, es suficiente construir una cadena de elementos de X de longitud n . Aplicamos los lemas 3.2.10 y 3.2.12, por los cuales todo poliedro de dimensión k ($k \geq 1$) tiene caras de todas las dimensiones $k-1, k-2, \dots, 0$, y su frontera (en su plano de soporte) es la union de todas sus caras $(k-1)$ -dimensionales.

Sea ahora $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $x \in W$ para un $W \in \mathcal{E}$. Entonces $P_x = cl(W)$ y $dim P_x = n$. Sea S_1 una cara $(n-1)$ -dimensional de P_x , y H_1 su plano de soporte. Por proposición 3.4.9(iii), S_1 interseca sólo un número finito de fronteras de elementos de \mathcal{E} . Eso implica que S_1 está cubierta por un número finito de poliedros, $S_1 \subset P_{m_1} \cup P_{m_2} \cup \dots \cup P_{m_k}$, donde m_1, m_2, \dots, m_k son puntos de S_1 . Si asumimos que todos estos poliedros tienen dimensiones menor o iguales a $n-2$, entonces, por el corolario 3.2.14, ninguno de ellos tiene interior en H_1 . Tomando en cuenta que H_1 es homeomorfo a \mathbb{R}^{n-1} , y tanto S_1 como $P_{m_1}, P_{m_2}, \dots, P_{m_k}$ son cerrados en H_1 , el teorema de Baire (lema 3.2.15) implica que S_1 no tiene interior en H_1 , de lo cual se obtiene del lema 3.2.14, la contradicción $dim S_1 \neq n-1$. Consecuentemente, si existe un $m_1 \in S_1$ tal que $dim P_{m_1} = n-1$. Obsérvese que $P_{m_1} \subset S_1 \subset fr_{H_x}(P_x)$, y por lo tanto se sigue $[m_1] < [x]$.

Ahora consideramos S_2 una cara $(n-2)$ -dimensional de P_{m_1} . Aplicando un argumento análogo como arriba, se sigue que existe un $m_2 \in S_2$ tal que $dim P_{m_2} = n-2$, y $[m_2] < [m_1]$.

Es evidente que este proceso puede ser continuado, hasta seleccionar una cara 0-dimensional S_n de $P_{m_{(n-1)}}$. Entonces $S_n = \{m_n\}$ y $[m_n] < [m_{n-1}]$, lo cual completa la construcción de la cadena

$$[m_n] < [m_{n-1}] < \dots < [m_1] < [x] \text{ en } X,$$

lo cual comprueba que $ODIM X \geq n$, y implica por *i*) que

$$DIM X = ODIM X = n.$$

iii): Demostramos que X es una \mathcal{E} -rejilla: Aplicando el corolario 3.4.6 obtenemos que, para todo $W \in \mathcal{E}$, $\pi(W) = [w]$ para cualquier $w \in int(W) = W$, así que X contiene la fenestración \mathcal{E} , y sólo falta comprobar que π es un mapeo abierto.

Para eso, sea M un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n , y sea $[x] \in \pi(M)$. Para mostrar que $\pi(M)$ es abierto en X , es suficiente comprobar que $U_X([x]) \subset \pi(M)$, puesto que las vecindades minimales $U_X([x]), [x] \in X$, proporcionan una base de τ . Así que sea $[y] \in U_X([x])$, y demostramos a continuación que $[y] \in \pi(M)$.

De $[x] \in \pi(M)$ se sigue que existe $n \in M$ tal que $\pi(n) = [x] \iff N_n = N_x \iff P_n = P_x$. De $[y] \in U_X([x])$ se obtiene $N_y \subseteq N_x \iff P_x \subseteq P_y$. Ahora consideramos $P_y \subset H_y$, donde H_y denota el plano de soporte de P_y . H_y es homeomorfo a \mathbb{R}^k para algún $0 \leq k \leq n$, y $int_{H_y}(P_y) \neq \emptyset$ (por la definición de H_y , también por $y \in int_{H_y}(P_y)$). En consecuencia, P_y es un cerrado convexo con interior en H_y , y entonces por el lema 3.2.1, P_y es regular cerrado. Eso implica que $n \in cl_{H_y}(P_y)$ pues $n \in P_n = P_x \subseteq P_y = cl_{H_y}(P_y) \subset H_y$. Además, debido a que $n \in M$ y que M es abierto en \mathbb{R}^n , $M \cap H_y$ es una vecindad abierta de n en H_y , la cual entonces interseca a $int_{H_y}(P_y)$. Así que existe $z \in M \cap int_{H_y}(P_y)$. Pero $z \in int_{H_y}(P_y)$ implica por el corolario 3.4.6 que $N_z = N_y$, por lo cual $\pi(z) = [y]$, y con $z \in M$ obtenemos $[y] \in \pi(M)$.

iv): Demostramos que el espacio X es semiregular (y por lo tanto minimal, vea sección 3.1).

Es suficiente demostrar que $U_X([x])$ es regular abierto para todo $[x] \in X$, y debido a que $U_X([x])$ es abierto, basta comprobar que $int_X(cl_X(U_X([x]))) \subseteq U_X([x])$. Así que suponemos $[y] \in int_X(cl_X(U_X([x])))$, y demostramos a continuación que $N_y \subseteq N_x$.

La suposición implica que $U_X([y]) \subset cl_X(U_X([x]))$, de lo cual se obtiene aplicando el lema 3.4.11(ii) que

$$\pi^{-1}(U_X([y])) \subset cl(\pi^{-1}(U_X([x]))).$$

Recordando que para todo $[x] \in X$ tenemos que

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(U_X([x])) &= \cup \{int_{H_y}(P_y) : y \in \mathbb{R}^n \text{ tal que } N_y \subseteq N_x\} \\ &= int(\cup \{cl(W) : W \in N_x\}) \quad (\text{por el corolario 3.4.7}), \end{aligned}$$

y definiendo $M = \cup \{cl(W) : W \in N_x\}$, se obtiene

$$int(\cup \{cl(W) : W \in N_y\}) \subset cl(int(M)).$$

Nótese que M es cerrado, pues N_x es finito, y entonces $cl(int(M)) \subset M$. Por el lema 3.4.3(i), $y \in int(\cup \{cl(W) : W \in N_y\})$, y entonces existe un vecindad abierta $U(y)$ de y en \mathbb{R}^n tal que

$$y \in U(y) \subset int(\cup \{cl(W) : W \in N_y\}) \subset cl(int(M)) \subset M.$$

Pero entonces $y \in int(M)$, y por el lema 3.4.3(ii), $U(y) \cap cl(W) = \emptyset$ para todo $W \in \mathcal{E} \setminus N_x$, lo cual implica que $N_y \subseteq N_x$ (pues, la existencia de $W^* \in N_y \setminus N_x \subset \mathcal{E} \setminus N_x$ implicaría $y \in cl(W^*)$, y entonces $U(y) \cap W^* \neq \emptyset$, que contradice el lema 3.4.3).

Eso completa la demostración de que X es una \mathcal{E} -rejilla minimal de \mathbb{R}^n , la cual tiene dimensión de Alexandroff igual a n .

□

4. La dimensión de Krull de espacios T_0 de Alexandroff

En este capítulo demostraremos que la dimensión de Alexandroff, definida en el capítulo 2, de un espacio T_0 Alexandroff es igual a su *dimensión de Krull*, la cual se define en terminos del retículo de los conjuntos cerrados del espacio y fue estudiada por primera vez por Vinokurov [Vin]. Debido a que la categoría de los espacios T_0 de Alexandroff es isomorfa a la de los posets [Ern], los resultados pueden ser formulados también en esta última categoría. Porque además las dimensiones de Alexandroff y del poset correspondiente coinciden entonces (lo cual demostramos en el capítulo 2), se sigue que la dimensión *ODIM* del poset (X, \leq) es igual a la dimensión de Krull del retículo de los conjuntos cerrados del espacio (X, τ_{\leq}) .

Los resultados de este capítulo fueron publicados en [Wie,Wil/2].

4.1. Introducción

La *dimensión de Krull* es conocida en el algebra como una función de dimensión para anillos y retículos. En particular, la *dimensión de Krull de un ideal primo* P de un anillo conmutativo con unidad, es definida como la longitud máxima d de cadenas de ideales primos $P = P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_d$ (introducida por W. Krull en "Dimensionstheorie in Stellenringen", J. reine angew. Math. 179 (1938), 204-226.) [Eis]. Es entonces natural definir la *dimensión de Krull del anillo*, como supremo de las dimensiones de Krull de sus ideales primos, o equivalentemente, como supremo de las longitudes de cadenas de ideales primos. Interpretando un retículo (L, \cup, \cap) distributivo de conjuntos como estructura algebraica, tanto (L, \cup) como (L, \cap) , son semigrupos conmutativos con unidad; así que, (L, \cup, \cap) "se parece" a un anillo conmutativo con unidad, dando origen a una definición de la dimensión de Krull de este retículo, como supremo de las longitudes de cadenas de sus ideales primos, introducida en [San,San/2]. Todo ideal primo en (L, \cup, \cap) , es un filtro primo en el retículo dual (L, \cap, \cup) . La dimensión de Krull del retículo distributivo (L, \cap, \cup) de los conjuntos cerrados de un espacio topológico determinada por cadenas de filtros primos, fue por primera vez aplicada para definir la *dimensión de Krull de un espacio topológico* por Vinokurov en 1966 [Vin] (llamada por él: "lattice dimension of a topological space").

En espacios generales, esta dimensión es difícil de calcular. Pero es interesante notar que en ciertas clases de espacios, la dimensión de Krull coincide con otras funciones (clásicas) de dimensión. En particular, en [Vin] fue probado que la dimensión de Krull es igual a la pequeña dimensión inductiva y a la de la cobertura para espacios separables metrizablees.

Se deduce en [San,San/2], que la dimensión de Krull de todo espacio T_0 finito (el cual es trivialmente de Alexandroff), coincide con su dimensión del poset. Un resultado equivalente para espacios finitos es probado por Isbell [Isb]. Sin embargo, en [Isb], Isbell define la dimensión de Krull de un espacio diferentemente en terminos de cadenas de conjuntos

cerrados irreducibles: su definición coincide con la introducida en [Vin] y [San.San/2], y usada en este trabajo, solamente en el caso de espacios finitos.

Nosotros demostraremos en este capítulo, que para todo espacio T_0 de Alexandroff (incluyendo el caso infinito), su dimensión de Krull coincide con su dimensión del poset, y por lo tanto es igual a su dimensión de Alexandroff.

4.2. La dimensión de Krull de retículos y de espacios

Recordemos los siguientes conceptos conocidos (para más detalle, vea [Eis] o [Bir]):

Un poset (conjunto parcialmente ordenado) (L, \leq) es llamado retículo, si para todo $a, b \in L$ existe $\inf\{a, b\}$ y $\sup\{a, b\}$, lo cual implica que todo subconjunto finito de L tiene infimo y supremo. Definiendo las operaciones binarias \wedge y \vee sobre L por $a \wedge b = \inf\{a, b\}$, $a \vee b = \sup\{a, b\}$, se obtiene una estructura algebraica (L, \wedge, \vee) también llamada retículo, la cual tiene las propiedades que \wedge, \vee ambos son conmutativos y asociativos, y $a \wedge (a \vee b) = a \vee (a \wedge b) = a$, $a, b \in L$. Debido a, que $a \leq b \iff a \wedge b = a$ define un orden parcial sobre L , tal que (L, \leq) es un retículo, el concepto de retículo de la teoría de ordenes y el algebraico, son equivalentes. Intercambiando las operaciones \wedge, \vee , se obtiene un retículo nuevo (L, \vee, \wedge) , llamado el retículo dual de (L, \wedge, \vee) . En el retículo (L, \wedge, \vee) , L' se llama subretículo, si $L' \subseteq L$ y $a, b \in L'$ implica $a \wedge b, a \vee b \in L'$. Un subretículo es entonces cerrado bajo infimos y supremos finitos, y por eso, cada subconjunto $M \subseteq L$, genera un subretículo cuyos elementos son los infimos y supremos de todos los subconjuntos finitos de M . Un elemento máximo (resp. mínimo) del poset (L, \leq) es llamado unidad 1 (resp. cero 0) del retículo (L, \leq) ; ambos son únicamente definidos, en caso de que existan. El retículo (L, \wedge, \vee) se llama:

- complementado, si tiene unidad y cero, y cada $a \in L$ tiene un complemento, es decir, para todo $a \in L$, existe $u \in L$ tal que $u \wedge a = 0, u \vee a = 1$.
- completo, si todo subconjunto no vacío de L tiene infimo y supremo.
- distributivo, si cada una de las operaciones \wedge, \vee es distributiva sobre la otra.
- algebra de Boole, si es complementado y distributivo.

El conjunto potencia de un conjunto dado, equipado por la inclusión de conjuntos, es un ejemplo de una algebra de Boole completa, donde \wedge es la intersección y \vee es la unión de conjuntos.

Supongamos ahora que (X, τ) sea un espacio topológico, y denotemos por $A(X)$ al conjunto de todos los conjuntos cerrados de X . Entonces $(A(X), \cap, \cup)$ es un retículo distributivo con unidad X y cero \emptyset , el cual en general no es complementado ni completo. Es claro que en el caso de un espacio discreto, este retículo es una algebra de Boole. Nótese que en el caso de un espacio X de Alexandroff, debido a que cualquier unión e intersección de conjuntos cerrados es un conjunto cerrado, el retículo $(A(X), \cap, \cup)$ es completo.

4.2.1. Definición: Sea (L, \wedge, \vee) un retículo. Un subconjunto no vacío $F \subseteq L$ es llamado un *filtro* si $a, b \in F, c \in L$ implica que $a \wedge b, a \vee c \in F$. Un filtro F se llama propio si $F \neq L$.

Un filtro propio F es llamado *primo* si, siempre cuando $a, b \in L$ y $a \vee b \in F$, entonces $a \in F$ o $b \in F$. Un *ultrafiltro* es un filtro propio maximal, es decir, el filtro propio F se llama ultrafiltro, si para todo filtro propio F' , $F \subset F'$ implica $F = F'$. Un *ultrafiltro de la teoría de conjuntos* es un ultrafiltro (ó, equivalentemente un filtro primo) en el retículo de todos los subconjuntos de X .

De la definición es obvio que si F es un subconjunto no vacío de L , entonces F es un filtro en el retículo $L \iff a, b \in F$ implica $a \wedge b \in F$ y $a \in F, a \leq c$ ($c \in L$) implica $c \in F$. En caso de que el retículo (L, \wedge, \vee) tiene unidad 1 y cero 0, lo siguiente es evidente:

- Todo filtro contiene 1: $\{1\}$ es un filtro trivial, el cual en general no es primo.
- Si un filtro F contiene 0, entonces $F = L$. Por eso F es un filtro propio si y sólo si $0 \notin F$.

Así que, un filtro F en el retículo $(A(X), \cap, \cup)$ de los cerrados del espacio X contiene X , y F es propio si y sólo si $\emptyset \notin F$.

Cabe mencionar, que el concepto de filtro propio coincide con el concepto de *filtro sobre X* usado en la teoría de conjuntos, cuando L es el retículo de todos los subconjuntos de X , el cual claramente tiene unidad X y cero \emptyset . Dentro de la teoría de conjuntos también son conocidos los conceptos de filtro primo y de ultrafiltro (coincidiendo nuevamente con los conceptos definidos aquí aplicados a este retículo especial L), y se sabe que un filtro sobre X es ultrafiltro si y sólo si es filtro primo (F es ultrafiltro sobre X si y sólo si para todo $A \subset X$ vale $A \in F$ o $X \setminus A \in F$ si y sólo si $M \cup N \in F$ para $M, N \subset X$ implica $M \in F$ o $N \in F$, lo cual significa que F es filtro primo sobre X , vea [Rin] proposición 21.14 o [Wil] teorema 12.11). Eso explica la última parte de definición 4.2.1.

4.2.2. Definición: La *dimensión de Krull* de un retículo no vacío (L, \wedge, \vee) se define como

$$Kdim L = \sup\{n \in \omega : \text{existe una cadena } F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \\ \text{de filtros primos distintos en } L\}$$

donde ω denota el conjunto de los números naturales. Esta definición coincide (aunque no literalmente) con la introducida por Vinokurov [Vin]. En [San, San/2], la dimensión de Krull de un retículo se define en términos de ideales primos en lugar de filtros primos. Mencionamos que un ideal I en el retículo (L, \wedge, \vee) es definido como un subconjunto no vacío de L con la propiedad que $a, b \in I, c \in L$ implica $a \vee b, a \wedge c \in I$, lo cual es equivalente a que $a, b \in I$ implica $a \vee b \in I$ y $a \in I, c \leq a$ ($c \in L$) implica $c \in I$. Un ideal propio I se llama primo, si $a \wedge b \in I$ ($a, b \in L$) implica $a \in I \vee b \in I$. Así que, un ideal (primo) en L es un filtro (primo) en el retículo dual, y al contrario. Los autores de [San, San/2] se basan en el retículo dual (L, \vee, \wedge) , por lo cual su definición también coincide con la nuestra.

Es conocido que un retículo con unidad y cero tiene dimensión de Krull cero, si y sólo si es una algebra de Boole [Vin]. En consecuencia, $Kdim A(X) = 0$ si X es un espacio discreto. En lo que sigue investigamos si la función $Kdim$ es monótona con respecto a subretículos.

4.2.3. Lema: Si L es un retículo con unidad 1 , y L' es un subretículo de L , entonces
(i) todo filtro F en L' genera un filtro F^* en L , y
(ii) si $F_1 \subset F_2$ para filtros distintos en L' , entonces $F_1^* \subset F_2^*$, $F_1^* \neq F_2^*$ en L .

Demostración:

(i): Sea F un filtro arbitrario en L' . Mostramos que $F^* = \{A \in L : A \text{ contiene algún elemento de } F\}$ es un filtro en L :

- Porque $1 \in F$ y $1 \in F^*$, tenemos $1 \in F^*$ y por lo tanto $F^* \neq \emptyset$.

- Si $M, N \in F^*$, entonces existen $M', N' \in F$ tales que $M' \subseteq M, N' \subseteq N$. Claro que $M' \cap N' \in F$, pues F es filtro. Debido a $M' \cap N' \subseteq M \cap N$, se sigue $M \cap N \in F^*$.

- Sean $M \in F^*, N \in L$. Entonces existe $M' \in F$ tal que $M' \subset M$. Pero $M' \subseteq M \cup N$, por lo cual $M \cup N \in F^*$.

(ii): El filtro $F^* \subset L$ generado de $F \subset L'$ definido en a), satisface $F = F^* \cap L'$. (Para ver eso, $F \subseteq F^* \cap L'$ es trivial, y si $M \in F^* \cap L'$ entonces hay un $M' \in F \subseteq L'$ con $M' \subseteq M$; pero entonces $M' \cup M = M \in F$ puesto que F es filtro.) Eso implica obviamente, que para cualesquiera filtros F_1, F_2 en L' , tales que $F_1 \neq F_2, F_1 \subset F_2$, tenemos, $F_1^* \neq F_2^*, F_1^* \subset F_2^*$ en L .

□

Cabe notar que en general, el filtro F^* en el retículo L generado de F , siendo filtro en el subretículo L' , no es primo, ni en el caso de que F sea primo en L' . Por eso, en general la función $Kdim$ no es monótona con respecto a subretículos, como muestra el siguiente ejemplo.

4.2.4. Ejemplo: Sea X un espacio discreto infinito. Claramente $A(X)$ mismo es un subretículo de $A(X)$, y $Kdim A(X) = 0$ porque $A(X) = \mathcal{P}(X)$ es una algebra de Boole. Ahora sea \mathcal{B} el subretículo generado por $\{X \setminus \{x\}, x \in X\} \cup \{\emptyset\}$. Entonces

$$\mathcal{B} = \{X \setminus F, F \subset X, F \text{ finito}\} \cup \{\emptyset, X\}.$$

Los elementos de $(\mathcal{B} \setminus \{\emptyset\})$ son conjuntos cofinitos, y entonces $(\mathcal{B} \setminus \{\emptyset\})$ es cerrado bajo intersecciones finitas. Eso implica que $(\mathcal{B} \setminus \{\emptyset\})$ es un filtro en \mathcal{B} , el cual obviamente es primo. Además, para todo $x \in X$,

$$F_x = \{M \in \mathcal{B} : x \in M\} = \{X \setminus F, F \subset X, F \text{ finito}, x \notin F\} \cup \{X\}$$

es un filtro primo en \mathcal{B} , y $F_x \subset (\mathcal{B} \setminus \{\emptyset\})$, donde la inclusión es propia, pues $X \setminus \{x\} \in (\mathcal{B} \setminus \{\emptyset\}) \setminus F_x$. Eso implica $Kdim \mathcal{B} \geq 1$.

Para todo lo que sigue, si L es un subretículo de $A(X)$, entonces la notación $\cap L$ significa $\cap \{M \subset A(X) : M \in L\}$.

4.2.5. Lema: Si L es un subretículo arbitrario de $A(X)$ que contiene X y tal que $\cap L = \emptyset$, entonces para todo $x \in X$,

$F_{x,L} = \{M \in L : cl(\{x\}) \subset M\}$ es un filtro primo en L .

Demostración:

- $F_{x,L} \neq \emptyset$ porque $X \in F_{x,L}$.
- Si $M, N \in F_{x,L}$ entonces $M \cap N \in L$ (porque L es retículo) y $cl(\{x\}) \subset M \cap N$ implicando $M \cap N \in F_{x,L}$.
- Si $M \in F_{x,L}$ y $N \in L$ tales que $M \subset N$, entonces $cl(\{x\}) \subset M \subset N$ que implica $N \in F_{x,L}$, lo cual completa a demostrar que $F_{x,L}$ es un filtro.
- Suponiendo $\cap L = \emptyset$, $F_{x,L} = L$ implicaría $\cap L \supset cl(\{x\})$ y por lo tanto $x \in \cap L$, contradiciendo la suposición. En consecuencia, $F_{x,L}$ es un filtro propio en L .
- Suponemos $M, N \in L$ con $M \cup N \in F_{x,L}$. $x \in M \cup N$ implica $cl(\{x\}) \subset M \vee cl(\{x\}) \subset N$ porque M, N son cerrados. Por eso $M \in F_{x,L} \vee N \in F_{x,L}$, probando que $F_{x,L}$ es primo. \square

La definición 4.2.2 fue aplicada por primera vez al retículo de los conjuntos cerrados de un espacio topológico por Vinokurov [Vin]. Con el fin de definir la dimensión de Krull del espacio (X, τ) , necesitaremos el concepto de base del retículo $(A(X), \cap, \cup)$ de todos los subconjuntos cerrados de X .

4.2.6. Definición: Un subconjunto \mathcal{B} de $A(X)$ es llamado *base de retículo* de $A(X)$, si \mathcal{B} es una base (topológica) para los subconjuntos cerrados de X , y adicionalmente, es un subretículo de $(A(X), \cap, \cup)$ el cual contiene \emptyset y X .

Por supuesto, $A(X)$ mismo es una base de retículo de $A(X)$, y debido a que una base de retículo de $A(X)$ es cerrada bajo intersecciones finitas, $A(X)$ es la única base de retículo en el caso de que X sea un conjunto finito.

4.2.7. Definición: La *dimensión de Krull* de un espacio topológico (X, τ) se define por

$$KDIM(X) = \min\{Kdim \mathcal{B} : \mathcal{B} \text{ es una base de retículo de } A(X)\}.$$

Una consecuencia de las observaciones siguientes a la definición 4.2.2 es, que si X es un espacio discreto, entonces $KDIM(X) = 0$, pues podemos tomar como base de retículo $A(X) = \mathcal{P}(X)$, la cual resulta ser una algebra de Boole. En [Vin] y [San.San/2], varias propiedades de $KDIM$ fueron obtenidas. Específicamente, en [San.San/2] se reporta que

- $KDIM(Y_1) \leq KDIM(Y_2)$, si Y_1 es un subespacio de Y_2 ;
- $KDIM(Y_1 \oplus Y_2) = \max\{KDIM(Y_1), KDIM(Y_2)\}$ para cualesquiera espacios Y_1, Y_2 ;
- $KDIM(Y_1 \times Y_2) \leq KDIM(Y_1) + KDIM(Y_2)$ para cualesquiera espacios Y_1, Y_2 .

Vinokurov demuestra en [Vin] que $KDIM(X) = ind X = dim X$ para todo espacio X separable metrizable (donde ind, dim son la dimensión pequeña inductiva y la de la cobertura, respectivamente). Sin embargo, para espacios generales, frecuentemente $KDIM$ es difícil de calcular.

4.3. La dimensión de Krull de un espacio T_0 de Alexandroff

El objetivo de esta sección es probar que, si (X, τ) es un espacio T_0 de Alexandroff, entonces la dimensión de Krull de X coincide con la dimensión de Alexandroff de X , así generalizando un resultado de [San, San/2] y [Isb] para espacios finitos.

Para todo lo que sigue, \leq denotará el orden de especialización del espacio T_0 de Alexandroff (X, τ) introducido en el capítulo 2. Recordemos el resultado del teorema 2.5.9:

$$DIM(X, \tau) = ODIM(X, \leq);$$

donde la dimensión $ODIM$ fue definida en definición 2.1 como sigue

$$ODIL(x) = \sup\{l : \text{existen } a_1, a_2, \dots, a_l \in X \text{ tales que } a_l < a_{l-1} < \dots < a_0 = x\}$$

$$ODIM(X) = \sup\{ODIL(x), x \in X\}$$

En particular, cabe recordarse del capítulo 2, que $ODIL(x) = 0$, si y sólo si $\{x\}$ es cerrado, y x es máximo con respecto a \leq , si y sólo si $\{x\}$ es abierto.

El teorema principal de este capítulo será una consecuencia de las siguientes dos proposiciones.

4.3.1. Proposición: *Si (X, τ) es un espacio T_0 de Alexandroff, y L es una base topológica para sus conjuntos cerrados, la cual a la vez es un subretículo de $(A(X), \cap, \cup)$ que contiene X , entonces $Kdim L \geq DIM(X)$.*

Demostración:

Por el teorema 2.5.9, es suficiente mostrar que $Kdim L \geq ODIM(X)$.

Debido a que L es una base para los conjuntos cerrados, tenemos que $\cap L = \emptyset$. Por lo tanto, lema 4.2.5 implica que

$$F_a = \{M \in L : cl(\{a\}) \subset M\}$$

es un filtro primo en L para todo $a \in X$.

Afirmamos que si $a_1 < a_2$ para $a_1, a_2 \in X$, entonces $F_{a_2} \subset F_{a_1}$, y $F_{a_2} \neq F_{a_1}$. Para convencerse de eso, nótese que si $M \in F_{a_2}$, entonces $cl(\{a_2\}) \subset M$; pero claramente $cl(\{a_1\}) \subset cl(\{a_2\}) \subset M$, y por eso $M \in F_{a_1}$. Ahora bien, porque (X, τ) es un espacio T_0 , $cl(\{a_1\}) \neq cl(\{a_2\})$ y entonces, debido a que L es una base de $A(X)$, existe un conjunto cerrado $M \in L$ tal que $cl(\{a_1\}) \subset M$ y $a_2 \notin M$. Por lo tanto $M \in F_{a_1} \setminus F_{a_2}$, y la afirmación queda probada.

Eso implica que para todo $a \in X$ con $ODIL(a) = k$ existe una cadena de filtros primos $F_{a_k} \subset F_{a_{k-1}} \subset \dots \subset F_{a_0}$ (con $a_k = a$). Por lo tanto, si $DIM(X) = ODIM(X) \geq n$, entonces hay un $x \in X$ con $ODIL(x) \geq n$, implicando $Kdim L \geq n$. El resultado se sigue inmediatamente.

□

Definición 4.2.7 y proposición 4.3.1 implican de inmediato lo siguiente:

4.3.2. Corolario: Si (X, τ) es un espacio T_0 de Alexandroff, entonces

$$KDIM(X) \geq DIM(X).$$

□

4.3.3. Proposición: Si (X, τ) es un espacio T_0 de Alexandroff, entonces

$$Kdim A(X) = DIM(X).$$

Demostración:

De la proposición 4.3.1, tenemos $Kdim A(X) \geq DIM(X)$; por eso, si $DIM(X)$ es infinito, también lo es $Kdim A(X)$ y la demostración queda terminada. Así que, en lo siguiente supongase que $DIM(X) = ODIM(X) = n$ es finito. Probamos que $Kdim A(X) \leq n$.

Porque $ODIM(X) = n$, podemos escribir $X = \cup\{X_i : 0 \leq i \leq n\}$, donde $X_i = \{x \in X : ODIL(x) = i\}$. Entonces X_0 consiste precisamente en los puntos cerrados de X , mientras que todos los puntos de X_n son abiertos. Notamos que la topología relativa sobre cada X_i es discreta, pues en X_i cualesquiera dos puntos son incomparables.

Ahora sea F un filtro primo en la base de retículo $A(X)$. Para cada $m \leq n$, denotamos por $TR_m(F)$ la traza de F sobre X_m , es decir, $TR_m(F) = \{A \cap X_m : A \in F\}$. Primero nótese que $TR_m(F)$ puede contener el conjunto vacío, pero en caso de que $\emptyset \notin TR_m(F)$, se sigue que $\emptyset \notin TR_k(F)$ para todo $k \leq m$ (porque $\emptyset \notin TR_m(F)$ significa que cada $A \in F$ intersecta X_m . Si suponemos un $A \in F$ arbitrario, existe un $x \in X_m \cap A$, implicando $ODILx = m$. Pero por la definición de $ODIL$, para cada $k \leq m - 1$ existe un $y \in X_k$ tal que $y < x$, por lo cual $y \in cl(\{x\}) \subset A$, implicando $y \in A \cap X_k$, obteniendo $A \cap X_k \neq \emptyset$ para todo $k \leq m$). Es también claro que $TR_m(F)$ es un filtro propio sobre X_m siempre cuando $\emptyset \notin TR_m(F)$.

Ahora sea \mathcal{F}_X el conjunto de filtros primos en $A(X)$. Definimos una función $h : \mathcal{F}_X \rightarrow \omega$ por

$$h(F) = \max\{m : \emptyset \notin TR_m(F)\}.$$

Claramente, para cada $F \in \mathcal{F}_X$ tenemos $0 \leq h(F) \leq n$, y así la demostración de la proposición quedará satisfecha de las siguientes observaciones, las cuales muestran que h es inyectiva, cuando la consideramos restringida a una cadena en \mathcal{F}_X .

Afirmación (i) Si $h(F) = m$ y $A \in TR_m(F)$, entonces $A \cup (\cup\{X_i : 0 \leq i \leq m - 1\}) \in F$.

Primero observese que si $h(F) = m$, entonces $\cup\{X_i : 0 \leq i \leq m\} \in F$. Ahora, si $J \in F$ tal que $J \cap X_m = A$, entonces $J \cap (\cup\{X_i : 0 \leq i \leq m\}) \in F$. Pero este último conjunto es un subconjunto de $A \cup (\cup\{X_i : 0 \leq i \leq m-1\})$, y la afirmación está probada.

Afirmación (ii) Si $h(F) = m$, entonces $\mathcal{TR}_m(F)$ es un ultrafiltro (de la teoría de conjuntos) sobre X_m .

Obviamente, $\mathcal{TR}_m(F)$ es cerrado bajo intersecciones finitas, estable con respecto a uniones con elementos de X_m , y no contiene \emptyset , lo cual implica que $\mathcal{TR}_m(F)$ es un filtro (propio) sobre X_m . Ahora supongase que $A, B \subset X_m$ sean tales que $A \cup B \in \mathcal{TR}_m(F)$. De (i) se sigue que $(A \cup B) \cup (\cup\{X_i : 0 \leq i \leq m-1\}) \in F$, y por lo tanto $(A \cup (\cup\{X_i : 0 \leq i \leq m-1\})) \cup (B \cup (\cup\{X_i : 0 \leq i \leq m-1\})) \in F$. Debido a que estos conjuntos son cerrados y F es primo, se sigue que uno de ellos se encuentra en F y por eso, o bien A o B está en $\mathcal{TR}_m(F)$. Así que, $\mathcal{TR}_m(F)$ es un filtro primo, y por lo tanto un ultrafiltro sobre X_m (pues en el retículo de todos los subconjuntos de X_m , un filtro es primo, si y sólo si es ultrafiltro).

Afirmación (iii) Si F, G son filtros primos distintos en la base de retículo $A(X)$ y $F \subset G$, entonces $h(F) > h(G)$.

Es claro que $h(F) \geq h(G)$; así que, sólo se necesita demostrar, que la igualdad no puede ocurrir. Con el fin de probar eso, suponemos al contrario que $h(F) = h(G) = m$. Si $\mathcal{TR}_m(F) \neq \mathcal{TR}_m(G)$. Entonces por (ii), tomando en cuenta que estos filtros son ultrafiltros sobre X_m , ellos tienen elementos disjuntos A_F and A_G , respectivamente (Si F_1, F_2 son ultrafiltros distintos, entonces claramente $M \in F_1 \setminus F_2$ implica $M_c \in F_2 \setminus F_1$). De eso se obtiene por (i), que $A_F \cup \cup\{X_i : 0 \leq i \leq m-1\} \in F \subset G$ y $A_G \cup \cup\{X_i : 0 \leq i \leq m-1\} \in G$. Por lo tanto, la intersección de estos conjuntos es un elemento de G al cual X_m no pertenece, dando una contradicción.

En consecuencia podemos asumir que $\mathcal{TR}_m(F) = \mathcal{TR}_m(G) = \mathcal{K}$. Afirmamos que ambos, F y G , son generados por la base de filtro $\{cl(K) : K \in \mathcal{K}\}$. Para demostrar eso, notamos primero que, debido a que cada elemento $A \in F$ es cerrado y $A \cap X_m \in \mathcal{K}$, cada elemento de F contiene $cl(K)$ para algún $K \in \mathcal{K}$. Es ahora suficiente mostrar que $cl(K) \in F$ para todo $K \in \mathcal{K}$. Para demostrar eso, asumimos al contrario, que exista algún $K \in \mathcal{K}$ tal que $cl(K) \notin F$. Porque $K \in \mathcal{K}$, hay algún $A \in F$ tal que $A \cap X_m = K$, y por lo tanto $A \setminus cl(K) \subset \cup\{X_i : 0 \leq i \leq m-1\}$. Ahora, si tomamos $C = cl(A \setminus cl(K))$, entonces $C \notin F$, pues $C \subset \cup\{X_i : 0 \leq i \leq m-1\} \notin F$. Sin embargo, $C \cup cl(K) = A \in F$, lo cual contradice el hecho de que F es primo. Así que, $\{cl(K) : K \in \mathcal{K}\}$ es una base de filtro para F y G , los cuales entonces tienen que ser iguales.

Ahora, si existiera en $A(X)$ una cadena de filtros primos de longitud $n+1$ (o mayor), es decir $F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_n \subset F_{n+1}$, entonces (iii) implicaría $0 < h(F_{n-1}) < h(F_n) < \dots < h(F_0) \leq n$, lo cual obviamente es imposible. Así, cualquier cadena de filtros primos en $A(X)$ es de una longitud menor o igual a $ODIM X$, y la demostración queda completa. \square

Combinando estos resultados con el corolario 4.1, obtenemos lo siguiente:

4.3.4. Teorema: *Si X es un espacio T_0 de Alexandroff, entonces*

$$KDIM(X) = DIM(X) = ODIM(X).$$

□

Es bien conocido que la categoría de los espacios T_0 de Alexandroff es isomorfa a la de los conjuntos parcialmente ordenados, bajo el functor que lleva al espacio (X, τ) a la poset (X, \leq) , donde \leq es el orden de especialización de (X, τ) (vea capítulo 3 y [Ern]). Por eso, si definimos la *dimensión de Krull de un poset*, como la dimensión de Krull del espacio de Alexandroff correspondiente, dentro de la teoría de ordenes, nuestro teorema 4.3.4 puede ser formulado en la siguiente forma:

4.3.5. Teorema: *Si (X, \leq) es un poset, entonces*

$$KDIM(X, \leq) = ODIM(X, \leq).$$

□

4.4. La dimensión de Krull de un espacio T_0 localmente finito

En la sección anterior demostramos que la dimensión de Krull de un espacio T_0 de Alexandroff X es igual a la dimensión de Krull del retículo $A(X)$ (el cual es una base de retículo de si mismo). Nuestro objetivo ahora es mostrar que en el caso de un espacio T_0 localmente finito (X, τ) , existe un subretículo minimal de $A(X)$, el cual es una base (topológica) para los conjuntos cerrados en X , y que tiene la misma dimensión de Krull como el retículo entero $A(X)$. Esta base para los conjuntos cerrados no necesariamente contiene \emptyset , y por lo tanto, en general no es una base de retículo.

Recordemos que para todo $x \in X$, $U(x)$ denota su vecindad abierta minimal. Claramente, $\{U(x), x \in X\}$ es una base topológica de τ . Esta base es minimal dentro de todas las bases topológicas de τ , en el sentido de que ella está contenida en cualquier otra base de τ . Consecuentemente, el subretículo generado por los complementos de los conjuntos $U(x)$ es minimal en el sentido de ser un subretículo de $(A(X), \cap, \cup)$, y a la vez de ser una base para los conjuntos cerrados de X . Resumamos estas observaciones en el siguiente lema:

4.4.1. Lema: *Si \mathcal{B}_{min} es el subretículo de $A(X)$ generado por $\{X \setminus U(x) : x \in X\}$, entonces \mathcal{B}_{min} es el subretículo minimal de $(A(X), \cap, \cup)$, que es una base (topológica) para los conjuntos cerrados de X .*

Demostración:

\mathcal{B}_{min} es obviamente un subretículo de $A(X)$, y es una base topológica de $A(X)$ porque $\{U(x), x \in X\}$ es una base topológica de τ . Para mostrar que toda base topológica de $A(X)$ contiene \mathcal{B}_{min} , suponemos que \mathcal{B} sea una tal base arbitraria. Es suficiente probar

que $X \setminus U(x) \in \mathcal{B}$ para todo $x \in X$. Para este fin, para todo $x \in X$ tenemos $X \setminus U(x) = \bigcap \{B_\alpha, \alpha \in J\}$, donde $B_\alpha \in \mathcal{B}$ para cualquier $\alpha \in J$. $X \setminus U(x)$ es el conjunto cerrado más grande en X que no contiene x . Entonces existe $\alpha_0 \in J$ tal que $x \notin B_{\alpha_0}$ y $B_{\alpha_0} \subset (X \setminus U(x))$. Pero $X \setminus U(x) \subset B_\alpha$ para cada α , por lo cual $X \setminus U(x) = B_{\alpha_0} \in \mathcal{B}$. □

Llamemos \mathcal{B}_{min} definido en lema 4.4.1, la *base canónica* del retículo de los conjuntos cerrados $A(X)$ de un espacio de Alexandroff X . Este subretículo es una base de retículo para $A(X)$ siempre y cuando contenga a \emptyset y X . Debido a que todo subconjunto cerrado de X es representable como intersección de elementos de \mathcal{B}_{min} , tenemos $\bigcap \mathcal{B}_{min} = \emptyset$. Por eso se puede aplicar lema 4.2.5 al subretículo \mathcal{B}_{min} , en el cual entonces los filtros “generados por un punto” $F_{a, \mathcal{B}_{min}}$, $a \in X$ (más precisamente, generados por la cerradura de a) son filtros primos. Como establece el siguiente lema, en el subretículo especial \mathcal{B}_{min} , estos filtros tienen la propiedad, que la intersección de todos sus elementos es precisamente la cerradura de a :

4.4.2. Lema: Si \mathcal{B}_{min} es la base canónica de $A(X)$, y si $F_a = \{M \in \mathcal{B}_{min} : cl(\{a\}) \subset M\}$ para $a \in X$, entonces $\bigcap F_a = cl(\{a\})$.

Demostración:

El lema es trivialmente verdad si $X = \{a\}$; así que, supongamos ahora que X tenga al menos dos elementos. Claramente $cl(\{a\}) \subset \bigcap F_a$, y si hay algún $b \in \bigcap F_a$ tal que $b \notin cl(\{a\})$, entonces $cl(\{a\}) \subset (X \setminus U(b))$. Pero $X \setminus U(b) \in \mathcal{B}_{min}$, lo cual implica que $X \setminus U(b) \in F_a$, lo cual es una contradicción. □

Nótese que para la validez del lema 4.4.2 no se necesita ni que el espacio (X, τ) sea T_0 ni que sea localmente finito.

El ejemplo 4.2.4 muestra que la dimensión de Krull, aplicada a subretículos de $A(X)$, no es monótona en el sentido de que pueden existir subretículos \mathcal{B}, \mathcal{C} , $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$ tales que $Kdim \mathcal{B} > Kdim \mathcal{C}$. De todos modos, dentro de la clase de los espacios T_0 localmente finitos (y por lo tanto de Alexandroff), la base canónica \mathcal{B}_{min} tiene la misma dimensión de Krull como $A(X)$; es decir, esta base especial tiene dimensión minimal dentro de todos los subretículos:

4.4.3. Teorema: Si (X, τ) es un espacio T_0 localmente finito, y \mathcal{B}_{min} es la base canónica del retículo $(A(X), \cap, \cup)$, entonces $Kdim \mathcal{B}_{min} = DIM(X)$.

Demostración:

De la proposición 4.3.1 ya tenemos $Kdim \mathcal{B}_{min} \geq DIM(X)$, y para todo $a \in X$ con $ODIL(a) = k$, existe alguna cadena de filtros primos $F_{a_k} \subset F_{a_{k-1}} \subset \dots \subset F_{a_0}$ (con $a_k = a$) en \mathcal{B}_{min} , donde

$$F_a = \{M \in \mathcal{B}_{min} : cl(\{a\}) \subset M\}.$$

Se sigue que, si $DIM(X)$ es infinito, entonces también $Kdim \mathcal{B}_{min}$ lo es, y así $DIM(X) = Kdim \mathcal{B}_{min}$. Por eso es suficiente suponer que $DIM(X) = ODIM(X) = n$ sea finito, y hay que probar que $Kdim \mathcal{B}_{min} \leq n$.

Primero nótese que cualquier filtro propio F de \mathcal{B}_{min} satisface $\cap F \neq \emptyset$. Para ver eso, supongase $\cap F = \emptyset$. Entonces para cada $x \in X$ existe un $J_x \in F$ tal que $x \notin J_x$. Pero $J_x \subset (X \setminus U(x))$, por lo cual $X \setminus U(x) \in F$ para todo $x \in X$. Se sigue que $F = \mathcal{B}_{min}$.

Ahora afirmamos que, si a es un punto cerrado de X , entonces F_a es un filtro propio maximal en \mathcal{B}_{min} . Para demostrar eso, observese primero que, en el caso de que $\mathcal{B}_{min} \setminus F_a = \{\emptyset\}$, F_a es claramente maximal. Por eso, suponemos ahora $N \in \mathcal{B}_{min} \setminus F_a$ con $N \neq \emptyset$, y sea F el filtro generado por $F_a \cup \{N\}$. Por el lema 4.4.2, $\cap F_a = \{a\}$, lo cual implica que $\cap F = \cap\{M \cap N : M \in F_a\} = (\cap F_a) \cap N = \{a\} \cap N = \emptyset$, de lo cual se obtiene que F no es filtro propio en \mathcal{B}_{min} .

De las siguientes observaciones se seguirá que los filtros F_a son los únicos filtros primos posibles de \mathcal{B}_{min} :

Sea F un filtro primo en \mathcal{B}_{min} .

(i) Hemos demostrado que $\cap F \neq \emptyset$. Así que, si escojemos $x \in \cap F$, entonces $F \subset F_x$.

(ii) Por (i) y el hecho de que todas las cadenas en (X, \leq) son de una longitud menor o igual a n , podemos encontrar un $b \in X$ que es un elemento máximo en $(\cap F, \leq)$ y $F \subset F_b$. Denotemos por S el conjunto de sucesores (estrictos) de b en (X, \leq) (nótese que si b es máximo en (X, \leq) , lo cual ocurre cuando $\{b\}$ es abierto, entonces $S = \emptyset$). De la maximalidad de b en $\cap F$, se sigue que $F \not\subset F_s$ para todo $s \in S$, y por lo tanto para cada $s \in S$ existe un $A_s \in F$ tal que $s \notin A_s$.

(iii) $\cap F = cl(\{b\})$: Porque $F \subset F_b$ implica que $\cap F_b \subset \cap F$, se sigue del lema 4.4.2 que $cl(\{b\}) \subset \cap F$. Para mostrar lo contrario, supongase que exista un $x \in \cap F$ tal que $x \notin cl(\{b\})$. Tenemos también que $b \notin cl(\{x\})$, porque, si $b \in cl(\{x\})$ ($x \neq b$), entonces $x \in S$ y (ii) implica que $x \notin \cap F$. Por lo tanto, b y x son puntos incomparables en (X, \leq) , lo cual tiene como consecuencia que $(X \setminus U(x)) \cup (X \setminus U(b)) \supset \{b, x\}$. Ahora sea $A \in F$; $z \in U(b) \cap U(x)$ implica $b < z$, y así $z \notin \cap F$. Entonces existe $A_z \in F$ tal que $z \notin A_z$. Debido a que $U(b)$ es finito, $B = \cap\{A_z : z \in U(b) \cap U(x)\} \cap A \in F$. Por lo tanto $B \subset ((X \setminus U(x)) \cup (X \setminus U(b)))$, implicando que

$$B = (B \cap (X \setminus U(x))) \cup (B \cap (X \setminus U(b))).$$

Pero ninguno de estos últimos conjuntos se encuentra en F (porque $F \subset F_b$, $F \subset F_x$), lo cual contradice el hecho que F es primo.

(iv) Afirmamos que $F = F_b$: De (iii) se sigue que para cada $z \notin cl(\{b\})$ existe $A_z \in F$ tal que $z \notin A_z$. Por lo tanto $A_z \subset (X \setminus U(z))$, lo cual enseguida implica que $X \setminus U(z) \in F$, pues F es filtro propio. Consecuentemente $\{X \setminus U(z) : z \notin cl(\{b\})\} \subset F$. Sin embargo, cualquier tal $X \setminus U(z)$ pertenece a \mathcal{B}_{min} y contiene b , implicando que la familia $\{U(z)^c : z \notin cl(\{b\})\}$

genera F_b . Así que, $F_b \subset F$ y por eso los filtros F_b son los únicos filtros primos en \mathcal{B}_{min} , lo cual completa la demostración. \square

Cabe mencionar que en la prueba de (iii) arriba, requeremos solamente que $U(b) \cap U(x)$ sea finito: por lo cual sería realmente suficiente que, o $U(x)$ o $U(b)$ sea finito. Así que, la condición de "localmente finito" en la declaración del teorema 4.4.3 puede ser suavizada a "localmente finito en todas partes con excepción eventual de un punto". Sin embargo, si el espacio no es localmente finito en dos puntos, entonces $Kdim \mathcal{B}_{min} > DIM(X)$ puede ocurrir, como el siguiente ejemplo muestra:

4.4.4. Ejemplo: Denotemos ahora por X el poset $(\{0, 1\} \times \{0\}) \cup (\omega \times \{1\})$ ordenado de tal manera que cada punto con segunda coordenada 1 es mayor a cada punto con segunda coordenada 0, y sin otras relaciones. Entonces

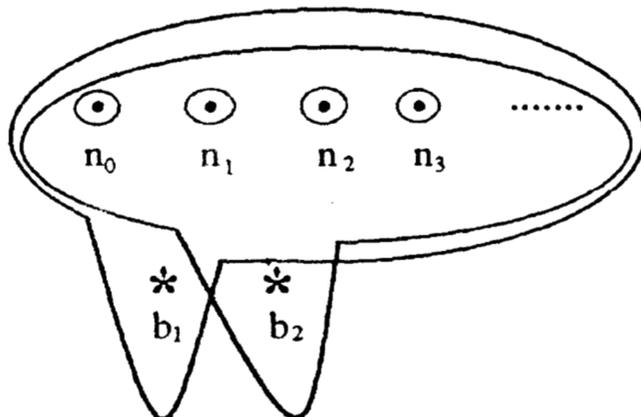
$$X = \{b_1 = (0, 0), b_2 = (1, 0) \\ n_0 = (0, 1), n_1 = (1, 1), n_2 = (2, 1), n_3 = (3, 1), \dots\}$$

y las vecindades minimales son

$$U(b_1) = X \setminus \{b_2\}, U(b_2) = X \setminus \{b_1\}, U(n_i) = \{n_i\}$$

para todo $i \in \omega$.

Así que, este espacio no es localmente finito en los dos puntos b_1, b_2 . Para todo $i \in \omega$, los puntos n_i son abiertos, $cl(\{n_i\}) = \{n_i, b_1, b_2\}$, y $b_1 < n_i, b_2 < n_i$, mientras que los puntos b_1, b_2 son cerrados, como simboliza la siguiente figura:



Obviamente $ODILb_1 = ODILb_2 = 0, ODILn_i = 1$, por lo cual $ODIM X = 1$. La base canónica \mathcal{B}_{min} de $A(X)$ es el subretículo generado por $\{X \setminus \{n_i\}, i \in \omega\} \cup \{b_1\} \cup \{b_2\}$, lo cual implica

$$\mathcal{B}_{min} = \{X \setminus N, N \subset \omega, N \text{ finito}\} \cup \{\{b_1\}, \{b_2\}, \emptyset, X\}.$$

Para los filtros primos introducidos en lema 4.2.5 y utilizados en la prueba del teorema 4.4.3, tenemos

$$F_{b_j} = \{M \in \mathcal{B}_{min} : b_j \in M\}, j = 1, 2; \quad F_{n_i} = \{M \in \mathcal{B}_{min} : n_i, b_1, b_2 \in M\}, i \in \omega:$$

y evidentemente $F_{n_i} \subset F_{b_j}$. Definimos ahora

$$F = \{X \setminus N, N \subset \omega, N \text{ finito}\} \cup \{X\};$$

eso es $F = \mathcal{B}_{min} \setminus \{\{b_1\}, \{b_2\}, \emptyset\}$. Es fácil ver que F es un filtro primo en \mathcal{B}_{min} . Los conjuntos $X \setminus N$ son infinitos, y cada uno de ellos contiene b_1 y b_2 , implicando $\cap F = \{b_1, b_2\}$. De eso se sigue

$$F_{n_i} \subset F \subset F_{b_j}, \text{ para todo } i \in \omega, j = 1, 2;$$

y las dos inclusiones son propias, lo cual implica $Kdim \mathcal{B}_{min} \geq 2$.

4.4.5. Ejemplo: Adoptemos nuevamente el ejemplo 4.4.4, con el único cambio que ahora b_1 sea un punto abierto. El nuevo espacio X es localmente finito con excepción del punto b_2 . Tenemos ahora cadenas de longitud 1 en (X, \leq) solamente de la forma $b_2 < n_i$, y $cl(\{n_i\}) = \{n_i, b_2\}$. \mathcal{B}_{min} es el subretículo generado por $\{X \setminus \{n_i\}, \{b_1\}, X \setminus \{b_1\}\}$, implicando

$$\mathcal{B}_{min} = \{X \setminus N : N \subset \omega, N \text{ finito}\} \cup \{X \setminus (N \cup \{b_1\}), N \subset \omega, N \text{ finito o vacío}\} \cup \{\{b_1\}, \emptyset, X\}$$

Los filtros tienen ahora la forma

$$F_{b_1} = \{M \in \mathcal{B}_{min} : b_1 \in M\}$$

$$F_{b_2} = \{M \in \mathcal{B}_{min} : b_2 \in M\} = \mathcal{B}_{min} \setminus \{\emptyset, \{b_1\}\}$$

$$F_{n_i} = \{M \in \mathcal{B}_{min} : n_i, b_2 \in M\} \subset F_{b_2}$$

$$F = \{X \setminus N, N \subset \omega, N \text{ finito}\} \cup \{X \setminus (N \cup \{b_1\}), N \subset \omega, N \text{ finito o vacío}\} \cup \{X\}$$

Resulta que F si es un filtro primo en \mathcal{B}_{min} , pero

$$F = F_{b_2}.$$

en acuerdo con la demostración del teorema 4.4.3, que muestra que los únicos filtros primos en \mathcal{B}_{min} son los generados por las cerraduras de los elementos de X .

Bibliografía

- [Alex] P. Alexandroff. "Diskrete Räume". *Matematicheskij Sbornik*. Vol. 2 (44), pp. 501-519, 1937.
- [Ale,Hop] P. Alexandroff, H. Hopf. *Topologie*. Chelsea Publishing Company, Bronx, New York, 1937.
- [Arh,Pon] A. V. Arhangel'skij, L. S. Pontryagin (Eds.), *General Topology I (Basic Concepts and Constructions, Dimension Theory)*. Springer, Berlin Heidelberg, 1990 (russ. 1988).
- [Ber] G. Bertrand, "Simple points, topological numbers and geodesic neighborhoods in cubic grids", *Pattern Recognition Letters*, Vol. 15, pp. 1003-1011, 1994.
- [Ber,Mal] G. Bertrand, G. Malandain, "A new characterization of three-dimensional simple points", *Pattern Recognition Letters*, Vol. 15, pp. 169-175, 1994.
- [Bir] Birkhoff, *Lattice Theory*, AMS Colloquium Publications, Vol. XXV, 1961.
- [Box] L. Boxer, "Digitally continuous functions", *Pattern Recognition Letters*, Vol. 15, pp. 833-839, 1994.
- [Bri] E. Brisson, "Representing geometric structures in d dimensions: Topology and order", *Discrete Computational Geometry*, Vol. 9, pp. 387-426, 1993.
- [Eis] G. Eisenreich, *Lexikon der Algebra*, Akademie-Verlag Berlin, 1989.
- [Eng/1] R. Engelking, *General Topology* (Edición revisada y completada), Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [Eng/2] R. Engelking, *Theory of Dimensions, Finite and Infinite*, Heldermann Verlag, Lemgo, 1995.
- [Eng,Sie] R. Engelking, K. Sieklucki, *Topology - A Geometric Approach*, Heldermann Verlag, Berlin, 1992.
- [Ern] M. Ern , The ABC of order and topology, in: *Category Theory at Work*, H. Herrlich and H.-E. Porst (Eds.), Heldermann Verlag, Berlin, 1977, 57-83.
- [Eva,Kop,Muk] A. V. Evako, R. Kopperman, Y. V. Mukhin, "Dimensional properties of graphs and digital spaces", a *publicarse*.
- [Fej,Kup] G. Fejes Tóth, W. Kuperberg, "Packings and coverings with convex sets", en [Gr ,She], capitulo 3.3.
- [Gie] Gierz, Hofmann, Keimel, Lawson, Mislove, Scott, *A Compendium of Continuous Lattices*, Springer, Berlin 1980.
- [Gru,Will] P. M. Gruber, J. M. Wills (Eds.), *Handbook of Convex Geometry*, North Holland (Elsevier Science Publishers), Amsterdam 1993.
- [Gr ] B. Gr nbaum, *Convex Polytopes*, Interscience, London, 1967.
- [Gr ,She] B. Gr nbaum, G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*, Freeman and Company, San Francisco 1986.
- [Her] G. T. Herman, "On topology as applied to image analysis", *CVGIP (Computer Vision, Graphics, and Image Processing)* 52, pp. 409-415, 1990.
- [Her, Web] G. T. Herman, D. Webster. "A topological proof to a surface tracking algorithm", *CVGIP* 23, pp. 162-177, 1983.
- [Isb] J. Isbell, "Graduation and dimension in locales", in: *London Math. Soc. Lecture Notes Series 93*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.
- [Iva/1] A. V. Ivashchenko, "Dimension of molecular spaces", VINITI, Moscow, 6422-84, pp. 3-11, 1985.
- [Iva/2] A. V. Ivashchenko, "Dimension on discrete spaces", *Inter. Journal of Theor. Physics*, august 1994.
- [Joh] P. T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

- [Kha,Kop,Mey] E. Khalimsky, R. Kopperman, P. Meyer, "Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets", *Topology and its Applications* 36, pp. 1-17, 1990.
- [Kle,Vos] R. Klette, K. Voss, "The three basic formulae of oriented graphs", Techn. Report, CAR-TR-305, University of Maryland, 1987.
- [Kon,Kha] T. Y. Kong, E. Khalimsky, "Polyhedral analogs of locally finite topological spaces", en: S. J. Andima et al (Eds.), *General Topology and Applications, Proc. of the Fifth Northeast Conference*, Marcel Dekker, New York, pp. 153-164, 1990.
- [Kon,Kop,Mey/1] T. Y. Kong, R. Kopperman, P. R. Meyer, "A topological approach to digital topology", *Amer. Math. Monthly* 98, pp. 901-917, 1992.
- [Kon,Kop,Mey/2] T. Y. Kong, R. Kopperman, P. R. Meyer, "Guest's editor's preface to special issue on digital topology", *Topology and its Applications* 46, pp. 173-179, 1992.
- [Kon,Kop,Mey/3] T. Y. Kong, R. Kopperman, P. R. Meyer, "Which spaces have metric analogs?", en: S. J. Andima et al (Eds.), *General Topology and Applications, Proc. of the Fifth Northeast Conference*, Marcel Dekker, New York, 209-215, 1990.
- [Kon,Ros] T. Y. Kong, A. Rosenfeld, "Digital topology: Introduction and survey", *CVGIP* 48, pp. 357-393, 1989.
- [Kon,Ros,Ros] T. Y. Kong, A. W. Roscoe, A. Rosenfeld, "Concepts of digital topology", *Topology and its Applications* 46, pp. 219-262, 1992.
- [Kon,Wil] T. Y. Kong, R. G. Wilson, "Spaces with weaker minimal T_0 and minimal T_D topologies", a publicarse.
- [Kop,Mey,Wil] R. Kopperman, P. R. Meyer, R. G. Wilson, "A Jordan surface theorem for three-dimensional digital surfaces", *Discrete and Comput. Geometry* 6, pp. 155-161, 1991.
- [Kov] V. A. Kovalevsky, "Finite topology as applied to image analysis", *CVGIP* 46, pp. 141-161, 1989.
- [Kro/1] E. H. Kronheimer, "A note on alternative digital topologies", *Topology and its Applications*, Vol. 46, pp. 269-277, 1992.
- [Kro/2] E. H. Kronheimer, "The topology of digital images", *Topology and its Applications*, Vol. 46, pp. 279-303, 1992.
- [Lee,Ros] C. N. Lee, A. Rosenfeld, "Connectivity issues in 2D and 3D images", *Proc. of the Intern. Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition 1986, Miami Beach, Florida (CH 2290-5/86, IEEE Comp. Soc. Press)*.
- [Mel/1] R. A. Melter, "Tessellation graph characterizations using rosettas", *Pattern Recognition Letters*, Vol. 4, pp. 79-85, 1986.
- [Mel/2] R. A. Melter, "A survey of digital metrics", *Contemporary Mathematics (AMS)*, Vol. 119, pp. 95-106, 1991.
- [Nas,Oys] C. Nastasescu, Freddy van Oystaeyen, *Dimensions of Ring Theory*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Holland, 1987.
- [Neu,Wil/1] V. Neumann-Lara, R. G. Wilson, "Digital Jordan curves - a graph-theoretical approach to a topological theorem", *Topology and its Applications* 46, pp. 263-268, 1992.
- [Neu,Wil/2] V. Neumann-Lara, R. G. Wilson, "Compatible connectedness in graphs and topological spaces", *Order* 12, pp. 77-90, 1995.
- [Pea] A. R. Pears, *Dimension Theory of General Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1975.
- [Pao et al] A. Paoluzzi, F. Bernardini, C. Cattani, V. Ferrucci, "Dimension-independent modeling with simplicial complexes", *ACM Transactions on Graphics*, Vol. 12, pp. 56-102, 1993.

- [**Qua**] E. Quaißer, *Diskrete Geometrie*, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin Oxford, 1994.
- [**Rin**] W. Rinow, *Lehrbuch der Topologie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1975.
- [**Ros/1**] A. Rosenfeld, "Connectivity in digital pictures", *J. Assoc. Comput. Machin.* 17, pp. 146-160, 1970.
- [**Ros/2**] A. Rosenfeld, "Digital topology", *Amer. Math. Monthly* 86, pp. 621-630, 1979.
- [**Ros/3**] A. Rosenfeld, "'Continuous' functions on digital pictures", *Pattern Recognition Letters*, Vol. 4, pp. 177-184, 1986.
- [**Ros,Kak**] A. Rosenfeld, A. Kak, *Digital Picture Processing*, 2nd edition, Academic Press, 1982.
- [**Sah et al**] P. K. Saha, B. B. Chaudhuri, B. Chanda, D. D. Majumder, "Topology preservation in 3D digital space", *Pattern Recognition*, Vol. 27, pp. 295-300, 1994.
- [**San**] M. T. Sancho de Salas, *Methods of Commutative Algebra for Topology*, Publ. Mat. 17, Univ. de Extremadura, Badajoz, 1987.
- [**San,San/1**] J. B. Sancho de Salas, M. T. Sancho de Salas, "Dimension of dense subalgebras of $A(X)$ ", *Proc. of the Amer. Math. Soc.*, Vol. 105, Nb. 2, pp. 491-499, 1989.
- [**San,San/2**] J. B. Sancho de Salas, M. T. Sancho de Salas, "Dimension of distributive lattices and universal spaces", *Topology and Applications*, Vol. 42, pp. 25-36, 1991.
- [**Sch**] H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, GTM 3, Springer, Berlin 1986 (first printing 1966).
- [**Schu**] E. Schulte, "Tilings", en [Grü.She], capítulo 3.5.
- [**Sor**] R. D. Sorkin, "Finitary substitute for continuous topology", *Inter. Journal of Theoretical Physics*, Vol. 30, No. 7, p. 923-947, 1991.
- [**Sto,Zie**] R. Stöcker, H. Zieschang, *Algebraische Topologie*, B.G. Teubner, Stuttgart, 1988.
- [**Vin**] V. G. Vinokurov, "Lattice method of defining dimension", *Soviet Math. Dokl.*, Vol. 168, Nb. 3, pp. 663-666, 1966.
- [**Vos**] K. Voss, "Images, objects, and surfaces in \mathbb{Z}^n ", *Int. Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence*, Vol. 5, pp.797-808, 1991.
- [**Wie,Wil/1**] P. Wiederhold, R. G. Wilson, "Dimension for Alexandrov spaces", in: *Vision Geometry*, R. A. Melter and A. Y. Wu (Eds.), Proceedings of The Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE), Vol. 1832 (Proc. of SPIE's Conference OE/Technology '92, Boston, MA, 1992), 1993, pp.13-22.
- [**Wie, Wil/2**] P. Wiederhold, R. G. Wilson, "The Krull dimension of Alexandroff T_0 -spaces", en: *Papers on General Topology and Applications*, Annals of the New York Academy of Sciences, Vol. 806, pp. 444-453, Dec. 1996 (Proceedings of the 11th Topology Summer Conference, Maine, U.S.A., 1996).
- [**Will**] S. Willard, *General Topology*, Addison Wesley, Philippines, 1970.