Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Departamento de Matemáticas

“Sobre la gran retícula de Clases Aditivas y su descripción particular en algunos anillos uniseriales”

T E S I S

Que para obtener el grado de

Doctor en Ciencias (Matemáticas)

Presenta:

Sergio Zamora Erazo

Matrícula: 2112800096

Director de Tesis: Dr. Carlos José Enrique Signoret Poillon

Sinodales:

Presidente:	Dr. José Ríos Montes
Secretario:	Dr. Alejandro Alvarado García
Vocal:	Dra. María José Arroyo Paniagua
Vocal:	Dr. Rogelio Fernández-Alonso González
Vocal:	Dra. Silvia Claudia Gavito Ticozzi

Ciudad de México, México 5 de diciembre de 2018

A mi asesor, Carlos.

A mis padres, Dagoberto y Mireya.

A mi esposa, Anahi.

Agradecimientos

Papá, Mamá, Hermanos: gracias por el apoyo incondicional, por su amor y buena vibra en esta etapa de mi vida. Sé que estuve (y sigo estando) lejos, pero siempre están en mi corazón y siempre forman parte de mis éxitos personales y profesionales.

Anahi: muchísimas gracias por ese amor infinito que me demuestras día a día, por apoyarme siempre, especialmente en esas noches de desvelo y pocas horas de sueño, por sacarme adelante cuando no podía más, por ser mi luz y mi camino. Gracias por estar a mi lado y formar juntos esta familia científica.

Carlos: me faltan palabras para decirte lo muy agradecido que estoy contigo (permíteme la osadía de tutearte). El camino fue duro, sin lugar a dudas, pero salimos adelante, y en parte (y en todo) gracias a tu sabia dirección. Sin ti, esto no sería realidad. Gracias por tus enseñanzas, tanto matemáticas como personales. Aprendí mucho de ti y espero algún día llegar a ser al menos como tú. P.D. Aquí no acaba esto.

Dr. Alejandro Alvarado, Dra. María José Arroyo, Dr. Rogelio Fernández-Alonso, Dra. Silvia Gavito, Dr. José Ríos: muchas gracias por tomarse el tiempo en leer mi trabajo, por sus puntuales y atinadas observaciones y sugerencias, por el rigor y cuidado que mostraron a lo largo de la revisión, por la dedicación y el esfuerzo que le imprimieron a mi trabajo.

Amigos, compañeros de estudio, profesores y colegas: gracias por ser y estar, por influir en esta etapa profesional de manera directa o indirecta.

Aprovecho el momento para agradecer al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico para la realización de esta tesis (número de becario 257024).

Resumen

En este trabajo estudiamos la gran retícula de clases aditivas y algunas de sus propiedades reticulares. Estudiamos la subretícula de R-ad de clases aditivas acotadas, R-bad, probamos que R-bad $\cong$ R-pretors y que R-ad es una gran retícula atómica, cuyos átomos están dados por clases aditivas acotadas. Describimos los intervalos de clases aditivas asociadas a un filtro lineal.

Estudiamos y caracterizamos a los submódulos y módulos cociente de módulos sobre anillos Artinianos cadena y anillos c-uniseriales. Introducimos los conceptos de clase α-aditiva, clase u-cardinal, tamaño (simple, semisimple, cadena y uniserial) aditivo, así como módulo cíclico supervisor y supervisado.

Estudiamos y describimos la estructura reticular de R-ad cuando R es un anillo Artiniano simple, Artiniano semisimple, Artiniano cadena y c-uniserial. Para R un anillo Artiniano semisimple, probamos que R-ad es isomorfo como gran retícula a un producto directo finito de copias de la clase de todos los números cardinales infinitos. Para R un anillo c-uniserial, probamos que R-ad es isomorfo como gran retícula a una subretícula de un producto directo finito de copias de la clase de todos los números cardinales infinitos.

Introducción

En años recientes, el estudio de conglomerados de clases de módulos definidos a través de sus propiedades de cerradura ha mostrado su relevancia y desarrollo en la Teoría de Módulos, así como en la Teoría de Anillos. Por ejemplo, en [2] se muestra que es una condición necesaria y suficiente para que un anillo sea isomorfo a un anillo Artiniano serial que el conglomerado de clases hereditarias, clases de módulos cerradas bajo submódulos, coincida con el conglomerado de clases cohereditarias, clases de módulos cerradas bajo módulos cociente (ver [2, Teorema 38]). Esto implica que todo submódulo de un módulo M sobre un anillo Artiniano serial es módulo cociente de M y viceversa (ver[2, Teorema 38]).

En [1] se observa que un conglomerado de clases de módulos obtiene el carácter de retícula o gran retícula por medio de la inclusión como orden parcial. Por tanto, se pueden utilizar definiciones de la Teoría de Retículas al estudio de conglomerados de clases de módulos que permitan desarrollar el estudio de la Teoría de Anillos. Un ejemplo de lo anterior es el Teorema 4.2 en [1], el cual establece que es una condición necesaria y suficiente para que un anillo sea isomorfo a un producto directo finito de anillos locales izquierdos perfectos derechos que el esqueleto del conglomerado de clases hereditarias (el esqueleto de una retícula L es el conjunto de pseudocomplementos de elementos en L) coincida con el esqueleto del conglomerado de clases cohereditarias.

Aunado a lo anterior, algunas clases de módulos particulares han jugado un papel importante en ciertas caracterizaciones de módulos y anillos. Por ejemplo, el Teorema 2.7 en [1] establece que es una condición necesaria y suficiente para que un anillo sea Artiniano izquierdo y contenga una copia de cada módulo simple, que las clases $sext(R)$ y $sext(R\text{-simp})$ sean iguales (ver Sección 1.3.1).

Aquí realizamos el estudio de un conglomerado de clases de módulos muy particular: *la gran retícula de Clases Aditivas, R-ad*. Este conglomerado es sumamente interesante pues se ubica dentro de la familia de conglomerados entre el conglomerado de las clases abiertas (introducido en [22]) y el conjunto de las clases de pretorsión hereditaria (estudiado en [29]). Las clases aditivas, sin embargo, fueron introducidas por C. Walker y E. Walker en [30]. Ellos usaron esta noción para describir una relación entre las clases de Serre y las clases de pretorsión hereditaria.

En este trabajo estudiamos la gran retícula de clases aditivas y algunas de sus propiedades reticulares. Estudiamos la subretícula de R-ad de clases aditivas acotadas, que denotamos como R-bad, y su importancia en la descripción de átomos, elementos esenciales e intervalos de clases aditivas asociadas a un filtro lineal. Además, profundizamos en el estudio de la estructura reticular de R-ad cuando R es un anillo Artiniano simple, Artiniano semisimple, Artiniano cadena y c-uniserial. Para lo anterior, estudiamos la estructura de los submódulos y módulos cociente de módulos sobre anillos Artinianos cadena y c-uniseriales.

En el capítulo 1 se muestran algunos resultados preliminares de la Teoría de Retículas, de la Teoría de Módulos, y del estudio de clases de módulos. La finalidad de este capítulo es introducir al lector a los conceptos que se estarán trabajando a lo largo de este documento.

En el capítulo 2 se estudia la gran retícula de clases aditivas y sus propiedades reticulares. Se muestra una relación entre las clases aditivas acotadas y las clases de pretorsión hereditaria. Se describen los átomos en la gran retícula de clases aditivas. Además, se muestra explícitamente una relación entre las clases aditivas y los filtros lineales.

En el capítulo 3 se estudia la estructura reticular de R-ad para anillos Artinianos simples y Artinianos semisimples. Se introducen las clases α-aditivas, las cuales son ciertas clases aditivas particulares, así como las clases u-cardinales, las cuales son clases aditivas que dependen de módulos simples y números cardinales infinitos. Se introduce el concepto de *tamaño (simple) aditivo*, el cual permite caracterizar a todas las clases aditivas bajo anillos Artinianos simples y semisimples en términos de potencias de los módulos simples que contienen. A través de esta caracterización se determina la cardinalidad de R-bad y R-pretors, así como el número de átomos en R-ad y el número de intervalos en los que está particionado R-ad. Para R un anillo Artiniano semisimple, se prueba que R-ad es isomorfo como gran retícula a un producto directo finito de copias de la clase de todos los números cardinales infinitos.

En el capítulo 4, el cual está dedicado al estudio de los módulos sobre anillos Artinianos cadena y c-uniseriales, se introducen las nociones de *módulos cíclicos supervisor y supervisado*. Se caracterizan a todos los submódulos y a todos los módulos cociente de todos los módulos sobre anillos Artinianos cadena y c-uniseriales.

En el capítulo 5 se estudia la estructura reticular de R-ad para anillos Artinianos cadena y c-uniseriales. Se redefinen las clases u-cardinales para dichos anillos, que ahora dependen de módulos uniseriales y números cardinales infinitos. Se introducen la nociones de *tamaño (uniserial) aditivo*, las cuales permiten caracterizar a todas las clases aditivas en anillos Artinianos cadena y c-uniseriales en términos de potencias de los módulos cíclicos uniseriales que contienen. A través de esta caracterización se determina la cardinalidad de R-bad y R-pretors, así como el número de átomos en R-ad que puede tener en función del número de componentes en que se descomponga el anillo, y el número de intervalos en los que está particionado R-ad. Para R un anillo c-uniserial, se prueba que R-ad es isomorfo como gran retícula a una subretícula de un producto directo finito de copias de la clase de todos los números cardinales infinitos.

A lo largo de este trabajo, trabajamos con la Teoría Axiomática de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel-Elección para usar los conceptos de *conjunto, clase* y *conglomerado*. Consideramos a todo anillo R como un anillo izquierdo asociativo con unidad. Consideramos a todo R-módulo M como un R-módulo izquierdo unitario.

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

En la teoría de conjuntos, una *clase* es una colección de conjuntos que puede ser definida en forma no ambigua por una o varias propiedades que satisfacen sus miembros. De manera similar, un *conglomerado* es una colección de clases que puede ser definida en forma no ambigua por una o varias propiedades que satisfacen sus miembros. Tanto las clases como los conglomerados, satisfacen los Axiomas de Zermelo-Fraenkel-Elección en sus versiones análogas. De aquí en adelante, utilizaremos los conceptos y hechos de la Teoría de Conjuntos aplicados a clases y conglomerados en general.

A continuación, mostramos algunas definiciones y resultados que serán útiles para este trabajo.

1.1. Teoría de Retículas

Sea A un conjunto no vacío. Una *relación binaria* R es un subconjunto de $A \times A$. Decimos que $a, b \in A$ están *en relación* con respecto a R si $(a, b) \in R$ y lo denotamos como aRb. Decimos que A está *parcialmente ordenado por* R si satisface las siguientes propiedades:

(P1) aRa para toda $a \in A$. (reflexividad)

(P2) si aRb y bRa, entonces $a = b$. (antisimetría)

(P3) si aRb y bRc, entonces aRc. (transitividad)

En ese caso, denotamos a R como "$\leqslant$". De aquí en adelante, diremos que A es un conjunto parcialmente ordenado, asumiendo que "$\leqslant$" es conocido. Si A es una clase, decimos que A es una *clase parcialmente ordenada* si A cumple con todas las propiedades de ser un conjunto parcialmente ordenado (recordando que A es una clase).

Sea H un subclase de A y $a, b \in A$. Decimos que a es una *cota superior* de H si $h \leqslant a$ para toda $h \in H$. Una cota superior a de H es *la menor cota superior* (*supremo*) de H si es una cota superior tal que $a \leqslant c$ para toda cota superior c de H. Si existe, es única y, en ese caso, la denotamos como $\sup H$ o $\bigvee H$. Decimos que b es una *cota inferior* de H si $b \leqslant h$ para toda $h \in H$. Una cota inferior a de H es *la mayor cota inferior* (*ínfimo*) de H si es una cota inferior tal que $c \leqslant b$ para toda cota superior c de H. Si existe, es única y, en ese caso, la denotamos como $\inf H$ o $\bigwedge H$.

Definición 1.1 *Sea A un conjunto (clase) parcialmente ordenado. Decimos que A es una* (gran) retícula *si* $\sup\{a,b\}$ *e* $\inf\{a,b\}$ *existen para todo $a, b \in A$.*

De la definición anterior, se sigue que un conjunto (clase) parcialmente ordenado A es una (gran) retícula si y sólo si $\sup H$ e $\inf H$ existen para cualquier $H \subseteq A$ finito no vacío.

Sea A una (gran) retícula. Para cualesquiera $a, b \in A$, denotamos como $a \vee b = \sup\{a,b\}$ y $a \wedge b = \inf\{a,b\}$. Así, podemos tratar al ínfimo y al supremo como operaciones binarias sobre A:

$$\begin{array}{rccl} \vee : & A \times A & \to & A \\ & (a,b) & \mapsto & a \vee b = \sup\{a,b\} \end{array} \quad \text{y} \quad \begin{array}{rccl} \wedge : & A \times A & \to & A \\ & (a,b) & \mapsto & a \wedge b = \inf\{a,b\} \end{array}$$

Sean $a, b, c \in A$. El ínfimo y el supremo cumplen con las siguientes propiedades:

(L1) $\quad a \vee a = a \quad$ y $\quad a \wedge a = a$ (idempotencia)

(L2) $\quad a \vee b = b \vee a \quad$ y $\quad a \wedge b = b \wedge a$ (conmutatividad)

(L3) $\quad (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) \quad$ y $\quad (a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ (asociatividad)

(L4) $\quad a \vee (a \wedge b) = a \quad$ y $\quad a \wedge (a \vee b) = a$ (identidades de absorción)

Definición 1.2 *Sea A un conjunto (clase) no vacío. Decimos que A, junto con dos operaciones $\wedge, \vee : A \times A \to A$, es una* (gran) retícula *si $\wedge$ y $\vee$ satisfacen las propiedades* (L1), (L2), (L3) *y* (L4) *para cualesquiera $a, b, c \in A$.*

El siguiente teorema muestra que las Definiciones 1.1 y 1.2 son equivalentes.

Teorema 1.3 *Sea A un conjunto (clase) no vacío.*

(*i*) *Sea A una (gran) retícula en el sentido de la Definición 1.1. Definimos $a \wedge b = inf\{a,b\}$ y $a \vee b = sup\{a,b\}$. Entonces A es una (gran) retícula en el sentido de la Definición 1.2.*

(*ii*) *Sea A una (gran) retícula en el sentido de la Definición 1.2. Definimos $a \leqslant b$ si y sólo si $a \wedge b = a$. Entonces A es una (gran) retícula en el sentido de la Definición 1.1.*

Sea A una (gran) retícula. Decimos que A es *completa* si $\bigvee H$ y $\bigwedge H$ existen para cualquier subconjunto no vacío $H \subseteq A$.

Proposición 1.4 *Sea A un conjunto (clase) parcialmente ordenado. Entonces A es una (gran) retícula completa si existe $\bigwedge H$ para todo $H \subseteq A$ no vacío.*

1.1.1. Distributividad y modularidad en retículas

Definición 1.5 *Sea A una (gran) retícula.*

(i) *Decimos que A es* distributiva *si*

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee c)$$

para cualesquiera $a, b, c \in A$.

(ii) *Decimos que A es* (gran) marco *si*

$$a \wedge \left(\bigvee_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda \right) = \bigvee_{\lambda \in \Lambda} (a \wedge b_\beta)$$

para cualquier $a \in A$ y cualquier familia $\{b_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de elementos de A.

(iii) *Decimos que A es* modular *si para cualesquiera $a, b, c \in A$ tales que $c \leqslant a$, entonces*

$$(a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c)$$

La siguiente proposición muestra algunas propiedades de operaciones con ínfimos y supremos en una (gran) retícula.

Proposición 1.6 *Sean A una (gran) retícula y $a, b, c \in A$. Entonces*

(i) $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leqslant a \wedge (b \vee c)$

(ii) $a \vee (b \wedge c) \leqslant (a \vee b) \wedge (a \vee c)$

(iii) *A es distributiva si y sólo si* $(a \vee b) \wedge (a \vee c) = a \vee (b \wedge c)$

(iv) *A es modular si y sólo si* $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = a \wedge (b \vee (a \wedge c))$.

1.1.2. Complementos y pseudocomplementos en retículas

Sea A un conjunto (clase) parcialmente ordenado. Un *cero* de A es un elemento, denotado como 0, tal que $0 \leqslant a$ para toda $a \in A$. Un *uno* de A es un elemento, denotado como 1, tal que $a \leqslant 1$ para toda $a \in A$. Estos no necesariamente existen en A; pero si existen, son únicos. Decimos que A es *acotado* si existen 0 y 1 en A.

Sea A una (gran) retícula acotada y $a \in A$. Decimos que a es un *complemento* de $b \in A$ si $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$. Notemos que si existe el complemento, no necesariamente es único. La Figura 1.1 muestra una retícula donde el elemento a tiene como complementos a b y a c. Si A es acotada y distributiva, entonces el complemento es único. Además, notemos que en A acotada y distributiva, si b es un complemento de a, entonces b es

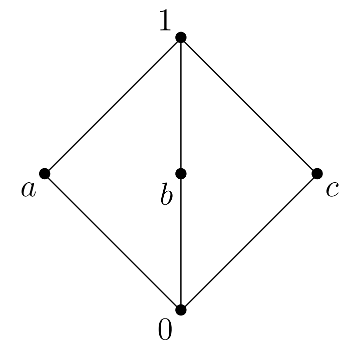


Figura 1.1: Ejemplo de una retícula con 5 elementos.

máximo en A tal que $a \wedge b = 0$. Decimos que A es *complementada* si cada elemento de A tiene complemento.

Sea A una (gran) retícula con 0 y $a \in A$. Decimos que b es un *pseudocomplemento* de a en A si $a \wedge b = 0$ y es máximo en A con esa propiedad. Si el pseudocomplemento es único, decimos que es un *pseudocomplemento fuerte*. La definición de pseudocomplemento fuerte coincide con la definición de pseudocomplemento de Grätzer en [14]. La Figura 1.1 muestra una retícula donde el elemento b tiene como pseudocomplementos a a y a c. Decimos que A es *pseudocomplementada* si cada elemento en A tiene un pseudocomplemento. Decimos que A es *fuertemente pseudocomplementada* si cada elemento en A tiene un pseudocomplemento fuerte. Denotamos como $Skel(A)$ a la clase de todos los pseudocomplementos de A y llamamos a esta clase el *esqueleto* de A.

1.1.3. Átomos, coátomos, elementos esenciales y superfluos en retículas

Sea A una (gran) retícula acotada. Consideremos $a, b \in A$. Decimos que *a cubre* a b si $a > b$ y no existe $x \in A$ tal que $a > x > b$. Denotaremos a esto como $a \succ b$.

Decimos que $a \in A$ es un *átomo* de A si $a \succ 0$. Decimos que A es *atómica* si para cada elemento $0 \neq x \in A$, existe un átomo a tal que $a \leqslant x$. La Figura 1.1 muestra una retícula atómica. Decimos que $c \in A$ es un *coátomo* de A si $1 \succ c$. Decimos que A es *coatómica* si para cada elemento $1 \neq x \in A$, existe un coátomo c tal que $x \leqslant c$. La Figura 1.1 muestra una retícula coatómica.

Sean $a, b \in \Lambda$. Llamamos *intervalo de a a b* al conjunto $[a, b] := \{c \in \Lambda \mid a \leqslant c \leqslant b\}$. Decimos que Λ es *fuertemente atómica* si cada intervalo $[a, b]$ es atómico. La Figura 1.1 muestra una retícula fuertemente atómica. Decimos que Λ es *fuertemente coatómica* si cada intervalo $[a, b]$ es coatómico. La Figura 1.1 muestra una retícula fuertemente coatómica.

Decimos que $e \in A$ es *esencial* en A si para toda $a \in A$ tenemos que $a \wedge e = 0$ implica $a = 0$. Decimos que $s \in A$ es *superfluo* en A si para toda $a \in A$ tenemos que

$a \vee s = 1$ implica $a = 1$.

1.2. Teoría de Módulos

De aquí en adelante, consideraremos a R como un anillo izquierdo asociativo con unidad, denotada como 1. A continuación, mostramos definiciones y resultados de la Teoría de Módulos importantes para el desarrollo de este trabajo.

1.2.1. Módulos, submódulos y módulos cociente

Sea R un anillo y M un grupo abeliano aditivo. Decimos que M es un *R-módulo izquierdo unitario* si existe una función $\varphi\colon R \times M \to M$ definida como $(r, m) \overset{\varphi}{\mapsto} rm$ tal que

i) $r(m + m') = rm + rm'$

ii) $(r + r')m = rm + r'm$

iii) $(rr')m = r(r'm)$

iv) $1m = m$

para todo $r, r' \in R$ y para todo $m, m' \in M$. De aquí en adelante, entenderemos por *módulo* a un R-módulo izquierdo unitario.

Ejemplo 1.7 *Sea G un grupo abeliano. Definimos $\varphi\colon \mathbb{Z} \times G \to G$ como*

$$(z, g) \overset{\varphi}{\mapsto} z \cdot g = \begin{cases} \underbrace{g + \cdots + g}_{z\text{-veces}} & si\ z > 0 \\ 0 & si\ z = 0 \\ \underbrace{-g - \cdots - g}_{-z\text{-veces}} & si\ z < 0 \end{cases}$$

Entonces G es un $\mathbb{Z}$-módulo izquierdo.

Ejemplo 1.8 *Sea R un anillo. Definimos $\varphi\colon R \times R \to R$ como $(r, s) \overset{\varphi}{\mapsto} rs$. Entonces R es un R-módulo izquierdo.*

Sea M un módulo y $N \subseteq M$. Decimos que N es *submódulo* de M, lo cual denotamos como $N \leqslant M$, si es un subgrupo de M cerrado bajo la multiplicación por escalar de elementos en R. Si $N \neq M$, decimos que N es *submódulo propio* de M.

Si $N \leqslant M$, el *módulo cociente de M sobre N* es el módulo

$$M/N = \{m + N \mid m \in M\},$$

donde la operación suma es la suma usual en grupos cociente (aditivos) y la multiplicación por escalar está definida como $r(m + M') := rm + M'$ para toda $r \in R$.

Definición 1.9 *Sea M un módulo.*

(*i*) *Decimos que M es* finitamente generado *si existe un conjunto finito $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\} \subseteq M$ tal que $M = \sum_{i=1}^{n} Rm_i$.*

(*ii*) *Decimos que M es* cíclico *si $M = Rm$ para algún $m \in M$.*

(*iii*) *Decimos que M es* simple *si $M \neq 0$ y si sus únicos submódulos son 0 y M.*

De la definición anterior, podemos ver todo módulo simple es cíclico. Sin embargo, no todo módulo cíclico es simple: Si $R = \mathbb{Z}$, entonces $\mathbb{Z}_6 := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} = \mathbb{Z}(1 + 6\mathbb{Z})$ y $0 < \{0 + 6\mathbb{Z}, 2 + 6\mathbb{Z}, 4 + 6\mathbb{Z}\} < \mathbb{Z}_6$.

Definición 1.10 *Sea M un módulo y $N \leqslant M$.*

(*i*) *Decimos que N es* esencial *en M si para cada $L \leqslant M$, $N \cap L = 0$ implica $L = 0$.*

(*ii*) *Decimos que N es* superfluo *en M si para cada $L \leqslant M$, $N + L = M$ implica $L = M$.*

Usaremos la notación $N \trianglelefteq M$ y $N \ll M$ para decir que N es esencial en M y superfluo en M, respectivamente.

(*iii*) *Decimos que M es* uniforme *si $N \trianglelefteq M$ para todo $N \neq 0$.*

1.2.2. Homomorfismos de módulos y Teoremas de Isomorfismo

Sean M, N módulos y $f\colon M \to N$ una función. Decimos que f es un *R-homomorfismo de módulos* si

$$f(m + m') = f(m) + f(m') \qquad \text{y} \qquad f(rm) = rf(m)$$

para toda $m, m' \in M$ y para toda $r \in R$. Denotamos como $Hom_R(M, N)$ al conjunto de todos los R-homomorfismos $f\colon M \to N$. De aquí en adelante, entenderemos por homomorfismo a un R-homomorfismo de módulos.

Sea $f\colon M \to N$ un homomorfismo. Decimos que f es un *monomorfismo* (o *mono*) si f es inyectivo. Decimos que f es un *epimorfismo* (o *epi*) si f es suprayectivo. Decimos que f es un *isomorfismo* (o *iso*) si f es mono y epi. Usaremos las notaciones $M \rightarrowtail N$, $M \twoheadrightarrow N$, y $M \cong N$ para decir que $f\colon M \to N$ es un mono, epi, e iso, respectivamente. Para cada homomorfismo f, definimos $\text{Ker } f := \{m \in M \mid f(m) = 0\} \leqslant M$ e $\text{Im } f := \{n \in N \mid \exists\ m \in M \text{ tal que } f(m) = n\} \leqslant N$.

Sea $f\colon M \to N$ un homomorfismo. Notemos que f es mono si y sólo si $Ker\ f = 0$. De igual manera, se tiene que f es epi si y sólo si $Im\ f = N$.

Los Teoremas de Isomorfismo de Noether y el Teorema de la Correspondencia tienen su equivalente en la Teoría de Módulos, y son los siguientes:

Teorema 1.11 (Primer Teorema de Isomorfismo para módulos)
Si $f\colon M \to N$ es homomorfismo, entonces

$$M/(Ker\ f) \cong Im\ f$$

Corolario 1.12 *Sea M un módulo. Entonces M es cíclico si y sólo si $M \cong R/I$ para algún ideal $I \leqslant R$. Más aún, si $M = Rm$ para algún $m \in M$, entonces $M \cong R/I$ con $I = \{r \in R \mid rm = 0\}$.*

Teorema 1.13 (Segundo Teorema de Isomorfismo para módulos)
Si $N, K \leqslant M$, entonces $K \leqslant K + N$, $N \cap K \leqslant N$ y

$$N/(N \cap K) \cong (N + K)/K$$

Teorema 1.14 (Tercer Teorema de Isomorfismo para módulos)
Si $N, K \leqslant M$ tales que $K \subseteq N$, entonces $N/K \leqslant M/K$ y

$$(M/K)/(N/K) \cong M/N$$

Teorema 1.15 (Teorema de la Correspondencia para módulos)
Si $N \leqslant M$, entonces existe una correspondencia biyectiva entre los submódulos de M/N y los submódulos de M que contienen a N.

1.2.3. Sumas directas y productos directos de módulos. Sucesiones exactas de módulos.

Sea $\{M_i\}_{i\in I}$ una familia de módulos, donde I es un conjunto. El *producto directo de* $\{M_i\}_{i\in I}$ es el módulo $\prod_{i\in I} M_i = \{(m_i)_{i\in I} \mid m_i \in M_i\}$, donde la suma y el producto por escalar están definidos de la forma usual. La *suma directa de* $\{M_i\}_{i\in I}$ es el módulo $\bigoplus_{i\in I} M_i = \{(m_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} M_i \mid m_i = 0 \text{ para casi toda } i \in I\}$

Llamamos *proyección natural* (*del producto directo*) al homomorfismo

$$p_j\colon \prod_{i\in I} M_i \to M_j \quad \text{dado por} \quad (m_i)_{i\in I} \overset{p_j}{\mapsto} m_j$$

para cada $j \in I$, e *inclusión natural* (*del producto directo*) al homomorfismo

$$\lambda_j\colon M_j \to \prod_{i\in I} M_i \quad \text{dado por} \quad m_j \overset{\lambda_j}{\mapsto} ((\overline{m_i})_{i\in I})$$

donde $\overline{m_i} = 0$ si $i \neq j$ y $\overline{m_i} = m_j$ si $i = j$, para cada $j \in I$. Notemos que $p_i\lambda_i = 1_{M_i}$ para toda $i \in I$, mientras que $p_i\lambda_k = 0$ si $i \neq k$. Además, p_i y λ_i están definidas para $\bigoplus_{i\in I} M_i$ y son tales que $\sum_{i\in I} \lambda_i p_i = 1_{(\bigoplus_{i\in I} M_i)}$.

Los siguientes teoremas caracterizan a la suma directa y al producto directo a través de propiedades universales.

Teorema 1.16 *Sea* $\{M_i\}_{i\in I}$ *una familia de módulos y* $\{\lambda_i\}_{i\in I}$ *la familia de inclusiones naturales de los* M_i*. Entonces la pareja* $(\bigoplus_{i\in I} M_i, \{\lambda_i\}_{i\in I})$ *cumple con la siguiente*

Propiedad Universal de la Suma Directa*: Para todo módulo* X *junto con una familia de homomorfismos* $f_i\colon M_i \to X$ *donde* $i \in I$*, existe un único homomorfismo* $\varphi\colon \bigoplus_{i\in I} M_i \to X$ *tal que* $\varphi \circ \lambda_i = f_i$ *para toda* $i \in I$*.*

Además, si existe otra pareja $(A, \{\alpha_i\colon M_i \to A\}_{i\in I})$ *que cumple con la propiedad, entonces* $A \cong \bigoplus_{i\in I} M_i$*.*

Teorema 1.17 *Sean* $\{M_i\}_{i\in I}$ *una familia de módulos y* $\{p_i\}_{i\in I}$ *la familia de proyecciones naturales de los* M_i*. Entonces la pareja* $(\prod_{i\in I} M_i, \{p_i\}_{i\in I})$ *cumple con la siguiente*

Propiedad Universal del Producto Directo*: Para todo módulo* X *junto con una familia de homomorfismos* $f_i\colon X \to M_i$ *donde* $i \in I$*, existe un único homomorfismo* $\varphi\colon X \to \prod_{i\in I} M_i$ *tal que* $p_i \circ \varphi = f_i$ *para toda* $i \in I$*.*

Además, si existe otra pareja $(A, \{\alpha_i\colon A \to M_i\}_{i\in I})$ *que cumple con la propiedad, entonces* $A \cong \prod_{i\in I} M_i$*.*

Para el caso de una familia finita de módulos, tenemos que el producto directo y la suma directa coinciden.

Sean $N, M_1, M_2 \leqslant M$. Decimos que M es *la suma directa (interna) de* M_1 *y* M_2, lo cual denotamos como $M := M_1 \oplus M_2$, si $M_1 \cap M_2 = 0$ y $M_1 + M_2 = M$. Decimos que N es *sumando directo de* M, lo cual denotamos como $N \bigoplus M$, si existe $K \leqslant M$ tal que $M = N \oplus K$.

Sean f, g dos homomorfismos $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ Decimos que la sucesión es *exacta en* M si $Im\ f = Ker\ g$. Notemos que si $M' = 0$, entonces $f = 0$. Esto lo denotamos como $0 \to M$. Si $M'' = 0$, entonces $g = 0$. Esto lo denotamos como $M \to 0$.

Observación 1.1 *Sean* M, M', M'' *módulos y* f, g *homomorfismos. Entonces*

i) $0 \to M' \xrightarrow{f} M$ *es exacta si y sólo si* f *es mono.*

ii) $M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ *es exacta si y sólo si* g *es epi.*

iii) $0 \to M \xrightarrow{f} M' \to 0$ *es exacta si y sólo si* f *es isomorfismo.*

iv) Si $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ *es exacta, con* f *epi y* g *mono, entonces* $M = 0$*. Se concluye que si* $0 \to M \to 0$ *es exacta, entonces* $M = 0$*.*

Si $0 \to M' \xrightarrow{i} M \xrightarrow{f} M'' \to 0$ es una sucesión exacta, tenemos que $Im\ i \cong M'$ y $M/(Im\ i) \cong M/(Ker\ f) \cong Im\ f \cong M''$. A las sucesiones como la anterior las llamamos *sucesiones exactas cortas*. De esta manera, podemos reescribir el Tercer Teorema de Isomorfismo de la siguiente forma:

Teorema 1.18 (Segunda versión del Tercer Teorema de Isomorfismo para módulos)
Si $N, K \leqslant M$ tales que $K \subseteq N$, entonces existe una sucesión exacta corta

$$0 \to N/K \to M/K \to M/N \to 0$$

Sea $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \to 0$ una sucesión exacta corta. Decimos que la sucesión exacta se *escinde* si existe $j : C \to B$ tal que $p \circ j = 1_C$. El siguiente teorema caracteriza a los sumandos directos a través de sucesiones exactas cortas que se escinden.

Teorema 1.19 *Sean $A, B \in R$-Mod tales que $i\colon A \to B$ es mono. Entonces $A \bigoplus B$ si y sólo si existe $p\colon B \to A$ tal que $p \circ i = 1_A$.*

Corolario 1.20 *Sean $A, B \in R$-Mod. Entonces $A \bigoplus B$ si y sólo si existe $C \in R$-Mod tal que la sucesión $0 \to A \to B \to C \to 0$ se escinde.*

1.3. Clases de módulos

En esta sección mostramos algunas clases de módulos conocidas y sus propiedades de cerradura. Además, mostramos ciertos operadores de clases de módulos y caracterizaciones de anillos. Denotamos como **On**, **Cn** y **ICn** a las clases de todos los números ordinales, cardinales, y cardinales infinitos, respectivamente. Denotamos como $\mathcal{L}(M)$ a la retícula de submódulos de un módulo M.

Definición 1.21 *Sea R un anillo. Llamamos* clase abstracta de R-módulos *a cualquier colección $\mathcal{X}$ de R-módulos tal que $0 \in \mathcal{X}$ y que sea cerrada bajo isomorfismos, es decir, ($M \in \mathcal{X}$ y $M \cong N$) implican $N \in \mathcal{X}$.*

De aquí en adelante, entenderemos por clase de módulos a una clase abstracta de módulos.

Ejemplo 1.22 *Las siguientes son ejemplos de clases de módulos.*

- *R-Mod y la clase $0 := \{K \in R\text{-Mod} \mid K \cong 0\}$.*
- *Las clases R-simp $:= \{S \in R\text{-Mod} \mid S \text{ es simple}\} \cup \{0\}$ y R-ssimp de todos los módulos* simples *y* semisimples*, respectivamente.*
- *Las clases $\mathcal{J} = \{M \in R\text{-Mod} \mid \forall\ N \leqslant M\ \exists\ K \bigoplus M \text{ tal que } N \trianglelefteq K\}$ y $\mathcal{J}' = \{M \in R\text{-Mod} \mid \forall\ N \leqslant M\ \exists\ K \bigoplus M \text{ tal que } K \leqslant N \text{ y } N/K \ll M/K\}$ de todos los módulos* extensores *y* elevadores*, respectivamente.*
- *Las clases **A** y **N** de todos los módulos* artinianos *y* noetherianos*, respectivamente.*

- *La clase* $\mathcal{S}_{\ll} = \{M \in R\text{-}Mod \mid \exists\, K \in R\text{-}Mod \text{ tal que } M \ll K\}$ *de todos los módulos superfluos en R-Mod.*

Así como existen operaciones entre módulos, se pueden definir operaciones para clases de módulos. En particular, están definidas la unión y la intersección de una familia de clases de módulos, así como el ínfimo y el supremo de una (gran) retícula de clases de módulos (ver Sección 1.3.1). A continuación, se muestran el producto finito y la suma finita de clases de módulos.

Definición 1.23 *Sean* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2, \ldots, \mathcal{X}_n$ *clases de módulos. Definimos*

- el producto $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ *como la clase*

$$\{M \in R\text{-}Mod \mid N \in \mathcal{X} \text{ y } M/N \in \mathcal{Y} \text{ para algún } N \leqslant M\}$$

El producto finito $\prod_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i$ *se define de manera recursiva.*

- la suma finita $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{X}_1$ *como la clase*

$$\left\{ M \in R\text{-}Mod \;\middle|\; M \cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_i, \text{ donde } M_i \in \mathcal{X}_i \right\}$$

En particular, si $\mathcal{X}_i = \mathcal{X}$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$, denotamos a $\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2 \cdots \mathcal{X}_n$ como $\mathcal{X}^n$ y a $\mathcal{X}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathcal{X}_n$ como $\mathcal{X}^{(n)}$. El producto de dos clases de módulos también se puede expresar por medio de sucesiones exactas cortas, como lo muestra la siguiente

Observación 1.2 *Sean* $\mathcal{X}$ *y* $\mathcal{Y}$ *clases de módulos. Entonces*

$$\mathcal{X}\mathcal{Y} = \left\{ M \in R\text{-}Mod \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{existe una sucesión exacta corta } 0 \to X \to M \to Y \to 0 \\ \text{tal que } X \in \mathcal{X} \text{ y } Y \in \mathcal{Y} \end{array} \right\}$$

Gracias a la observación anterior, es claro que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}^2$ para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$.

La Observación 1.2 muestra que el producto $\mathcal{X}\mathcal{Y}$ coincide con la clase $E(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ definida en [1]. De esta manera, por [1, Proposición 2.2, p. 23] tenemos que el producto de clases de módulos es asociativo. Además, se tiene que la clase 0 es un neutro multiplicativo. Para el caso de la suma finita de clases de módulos, la suma finita es asociativa, conmutativa y la clase 0 es un neutro aditivo.

Para cualesquiera $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ clases de módulos, se tiene que $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X} \bigoplus \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}\mathcal{Y}$. De hecho, este resultado se generaliza a familias finitas de clases de módulos. Es decir, si $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^{n}$ es una familia de clases de módulos, entonces

$$\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i \subseteq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i \subseteq \prod_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i$$

1.3.1. Retículas y grandes retículas de clases de módulos

Algunas clases de módulos se pueden clasificar de acuerdo a ciertas propiedades *de cerradura*. En este trabajo consideramos las siguientes propiedades de cerradura para cualquier clase de módulos.

Definición 1.24 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Diremos que*

- $\mathcal{X}$ *es cerrada* bajo submódulos *si para todo $N \leqslant M$ con $M \in \mathcal{X}$, se tiene que $N \in \mathcal{X}$.*
- $\mathcal{X}$ *es cerrada* bajo cocientes *si para todo $N \leqslant M$ con $M \in \mathcal{X}$, se tiene que $M/N \in \mathcal{X}$.*
- $\mathcal{X}$ *es cerrada* bajo extensiones exactas *si para todo módulo M tal que existe una sucesión $0 \to N \to M \to L \to 0$ con $N, L \in \mathcal{X}$, se tiene que $M \in \mathcal{X}$.*
- $\mathcal{X}$ *es cerrada* bajo sumas directas arbitrarias *si para todo conjunto arbitrario $\{M_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{X}$ se tiene que $\bigoplus_{i\in I} M_i \in \mathcal{X}$.*
- $\mathcal{X}$ *es cerrada* bajo sumas directas finitas *si para todo conjunto finito $\{M_i\}_{i=1}^{n} \subseteq \mathcal{X}$ se tiene que $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \in \mathcal{X}$.*

Usamos los símbolos $\leqslant, \twoheadrightarrow, ext, \oplus, \oplus^n$ para denotar las cerraduras bajo submódulos, cocientes, extensiones exactas, sumas directas arbitrarias, y sumas directas finitas, respectivamente. Consideramos el conjunto $\{\leqslant, \twoheadrightarrow, ext, \oplus, \oplus^n\}$ como el conjunto de propiedades de cerradura para este trabajo. De esta manera, si A es un subconjunto de este conjunto de propiedades de cerradura, denotamos por L_A a la *clase* (formalmente, *conglomerado*) de todas las clases de módulos que son cerradas bajo cada propiedad de cerradura en A.

Notemos que, para cualquier subconjunto A de propiedades de cerradura, L_A está parcialmente ordenada por la inclusión de clases de módulos. Además, tenemos que el ínfimo arbitrario de una familia de clases de módulos en L_A existe y es la intersección arbitraria de la familia. De esta manera, y como consecuencia de la Proposición 1.4, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1.25 *Sea A un subconjunto de propiedades de cerradura. Entonces L_A es una (gran) retícula completa acotada, donde $0_{L_A} = 0$ y $1_{L_A} = R$-Mod.*

Demostración:
La demostración es similar a [14, Lema 14, p. 24]. ■

Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Consideremos la familia $\mathcal{F}$ de todas las clases en L_A que contienen a $\mathcal{X}$ como subclase. Notemos que $\mathcal{F}$ tiene elemento menor y coincide con el ínfimo de $\mathcal{F}$. Denotamos como $L_A(\mathcal{X})$ al menor elemento en L_A que contiene a $\mathcal{X}$ y lo llamamos *la clase en L_A generada por $\mathcal{X}$*. Si $\mathcal{X} = \{N \mid N \cong M\} \cup \{0\}$, denotamos a $L_A(\mathcal{X})$ simplemente como $L_A(M)$. Siguiendo [14, Lema 14, p. 24], para $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ una familia de clases de módulos en L_A notemos que

$$\bigvee_{i\in I} \mathcal{X}_i = L_A\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i\right)$$

En esta sección nos enfocamos en describir los supremos arbitrarios de L_A, para algunos subconjuntos A de propiedades de cerradura.

Por ejemplo, tomemos $A = \{\leqslant\}$. Entonces $L_{\{\leqslant\}}$ es el conglomerado de todas las clases de módulos que son cerradas bajo submódulos. Denotamos a $L_{\{\leqslant\}}$ como R-*sub* y a los elementos de R-sub como *clases hereditarias (de módulos)*. Por la Proposición 1.25, tenemos que R-sub es una gran retícula completa. La gran retícula R-sub ha sido estudiada en [3].

Para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$, tenemos que $L_{\{\leqslant\}}(\mathcal{X})$ es la clase resultante de aplicar a $\mathcal{X}$ el operador *sub*:

$$sub(\mathcal{X}) := \{M \in R\text{-Mod} \mid \exists\ 0 \to M \to K, \text{ donde } K \in \mathcal{X}\}$$

Tenemos que la unión arbitraria de clases hereditarias es una clase hereditaria. Por lo tanto, si $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ es una familia de clases hereditarias, tenemos que

$$\bigvee_{i\in I} \mathcal{X}_i = sub\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i$$

Notemos que R-sub es un gran marco. Además, es fuertemente pseudocomplementado, donde el pseudocomplemento fuerte de una clase hereditaria $\mathcal{H}$ es

$$\mathcal{H}^{\perp_{\{\leqslant\}}} := \{M \in R\text{-Mod} \mid \mathcal{H} \cap sub(M) = 0\}$$

Decimos que una clase de módulos $\mathcal{X}$ es *natural* si es cerrada bajo submódulos, sumas directas y cápsulas inyectivas. Además, se tiene que toda clase natural es cerrada bajo extensiones exactas. Denotamos como R-nat a la clase de todas las clases naturales. De esta manera, en [3, Teorema 12, p. 545] se prueba que $Skel(R\text{-sub}) = R\text{-nat}$.

Ahora, tomemos $A = \{\twoheadrightarrow\}$. Entonces $L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ es el conglomerado de todas las clases de módulos que son cerradas bajo cocientes. Denotamos a $L_{\{\twoheadrightarrow\}}$ como R-*quot* y a los elementos de R-quot como *clases cohereditarias (de módulos)*. Por la Proposición 1.25, tenemos que R-quot es una gran retícula completa. La gran retícula R-quot ha sido estudiada en [3].

Para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$, tenemos que $L_{\{\twoheadrightarrow\}}(\mathcal{X})$ es la clase resultante de aplicar a $\mathcal{X}$ el operador *quot*:

$$quot(\mathcal{X}) := \{M \in R\text{-Mod} \mid \exists\ K \to M \to 0, \text{ donde } K \in \mathcal{X}\}$$

Tenemos que la unión arbitraria de clases cohereditarias es una clase cohereditaria. Por lo tanto, si $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ es una familia de clases cohereditarias, tenemos que

$$\bigvee_{i\in I} \mathcal{X}_i = quot\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i$$

Notemos que R-quot es un gran marco. Además, es fuertemente pseudocomplementado, donde el pseudocomplemento fuerte de una clase cohereditaria $\mathcal{Q}$ es

$$\mathcal{Q}^{\perp_{\{\twoheadrightarrow\}}} := \{M \in R\text{-Mod} \mid \mathcal{Q} \cap quot(M) = 0\}$$

En [3, Definición 21, p. 546] se define R-conat, la clase de todas las clases conaturales, como $Skel(R\text{-quot})$. En [3, Teorema 24, p. 547] se prueba que toda clase conatural es cerrada bajo cocientes, extensiones exactas y epimorfismos superfluos.

Tomemos $A = \{\leqslant, \twoheadrightarrow\}$. Entonces $L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow\}}$ es el conglomerado de todas las clases de módulos que son cerradas bajo submódulos y cocientes. Denotamos a $L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow\}}$ como *R-op* y a los elementos de R-op como *clases abiertas (de módulos)*. Por la Proposición 1.25, tenemos que R-op es una gran retícula completa. La gran retícula R-op ha sido estudiada en [22].

Para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$, tenemos que $L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow\}}(\mathcal{X})$ es la clase resultante de aplicar a $\mathcal{X}$ el operador *subquot*:

$$subquot(\mathcal{X}) := sub(quot(\mathcal{X}))$$

Notemos que $subquot(\mathcal{X}) = quot(sub(\mathcal{X}))$ para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$. Tenemos que la unión arbitraria de clases abiertas es una clase abierta. Por lo tanto, si $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ es una familia de clases abierta, tenemos que

$$\bigvee_{i\in I} \mathcal{X}_i = subquot\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i$$

Notemos que R-op es un gran marco. Además, es fuertemente pseudocomplementado, donde el pseudocomplemento fuerte de una clase abierta $\mathcal{O}$ es

$$\mathcal{O}^{\perp_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow\}}} := \{M \in R\text{-Mod} \mid \mathcal{O} \cap subquot(M) = 0\}$$

Debido a que todo módulo finitamente generado (f.g.) tiene un submódulo máximo [5, Teorema 2.8, p. 32], tenemos que R-op es atómico, donde sus átomos son las clases de módulos $subquot(S)$ con S un módulo simple.

Tomemos $A = \{\leqslant, ext\}$. Entonces $L_{\{\leqslant,ext\}}$ es el conglomerado de todas las clases de módulos que son cerradas bajo submódulos y extensiones exactas. Denotamos a $L_{\{\leqslant,ext\}}$ como *R-sext*. Por la Proposición 1.25, tenemos que R-sext es una gran retícula completa. La gran retícula R-sext ha sido estudiada en [1].

Para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$, tenemos que $L_{\{\leqslant,ext\}}(\mathcal{X})$ es la clase resultante de aplicar a $\mathcal{X}$ el operador *sext*:

$$sext(\mathcal{X}) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (sub(\mathcal{X}))^n$$

Si $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ es una familia de clases en R-sext, tenemos que

$$\bigvee_{i\in I} \mathcal{X}_i = sext\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i\right)$$

Tenemos que R-sext es fuertemente pseudocomplementado, donde el pseudocomplemento fuerte de una clase $\mathcal{H} \in R$-sext es

$$\mathcal{H}^{\perp_{\{\leqslant,ext\}}} := \{M \in R\text{-Mod} \mid \mathcal{H} \cap sext(M) = 0\}$$

Tomemos $A = \{\twoheadrightarrow, ext\}$. Entonces $L_{\{\twoheadrightarrow,ext\}}$ es el conglomerado de todas las clases de módulos que son cerradas bajo cocientes y extensiones exactas. Denotamos a $L_{\{\twoheadrightarrow,ext\}}$ como *R-qext*. Por la Proposición 1.25, tenemos que R-qext es una gran retícula completa. La gran retícula R-qext ha sido estudiada en [1].

Para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$, tenemos que $L_{\{\twoheadrightarrow,ext\}}(\mathcal{X})$ es la clase resultante de aplicar a $\mathcal{X}$ el operador *qext*:

$$qext(\mathcal{X}) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (quot(\mathcal{X}))^n$$

Si $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ es una familia de clases en R-qext, tenemos que

$$\bigvee_{i\in I} \mathcal{X}_i = qext\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i\right)$$

Tenemos que R-qext es fuertemente pseudocomplementado, donde el pseudocomplemento fuerte de una clase $\mathcal{Q} \in R$-qext es

$$\mathcal{Q}^{\perp_{\{\leqslant,ext\}}} := \{M \in R\text{-Mod} \mid \mathcal{Q} \cap qext(M) = 0\}$$

Tomemos $A = \{\leqslant, \twoheadrightarrow, ext\}$. Entonces $L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,ext\}}$ es el conglomerado de todas las clases de módulos que son cerradas bajo submódulos, cocientes, y extensiones exactas. Denotamos a $L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,ext\}}$ como *R-ss* y a los elementos de R-ss como *clases de Serre (de módulos)*. Por la Proposición 1.25, tenemos que R-ss es una gran retícula completa. La gran retícula R-ss ha sido estudiada en [24].

Para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$, tenemos que $L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,ext\}}(\mathcal{X})$ es la clase resultante de aplicar a $\mathcal{X}$ el operador *serre*:

$$serre(\mathcal{X}) := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (subquot(\mathcal{X}))^n$$

Si $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ es una familia de clases de Serre, tenemos que

$$\bigvee_{i\in I}\mathcal{X}_i = serre\left(\bigcup_{i\in I}\mathcal{X}_i\right)$$

Tenemos que R-ss es un gran marco. Además, es fuertemente pseudocomplementado, donde el pseudocomplemento fuerte de una clase de Serre $\mathcal{S}$ es

$$\mathcal{S}^{\perp_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,ext\}}} := \{M \in R\text{-Mod} \mid \mathcal{S} \cap serre(M) = 0\}$$

Tomemos $A = \{\leqslant, \twoheadrightarrow, \oplus\}$. Entonces $L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,\oplus\}}$ es el conglomerado de todas las clases de módulos que son cerradas bajo submódulos, cocientes, y sumas directas arbitrarias. Denotamos a $L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,\oplus\}}$ como *R-pretors* y a los elementos de R-pretors como *clases de pretorsión hereditaria (de módulos)*. Por la Proposición 1.25, tenemos que R-pretors es una gran retícula completa. La gran retícula R-pretors ha sido estudiada en [23].

Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos y $\lambda \in \mathbf{Cn}$. Definimos *la suma de λ copias* de $\mathcal{X}$ como

$$\mathcal{X}^{(\lambda)} := \left\{M \in R\text{-Mod} \;\middle|\; M \cong \bigoplus_{i\in I} N_i,\text{ donde } N_i \in \mathcal{X}\ \forall\ i \in I \text{ e } |I| \leqslant \lambda\right\}$$

Para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$, tenemos que $L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,\oplus\}}(\mathcal{X})$ es la clase resultante de aplicar a $\mathcal{X}$ el operador σ:

$$\sigma(\mathcal{X}) := subquot\left(\bigcup_{\lambda\in\mathbf{Cn}}\mathcal{X}^{(\lambda)}\right)$$

Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Definimos $cyc(\mathcal{X})$ como un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de submódulos cíclicos de módulos en $\mathcal{X}$. Si $\mathcal{X} = R$-Mod, denotaremos como R-cyc a $cyc(R\text{-Mod})$. Denotamos como $M_{\mathcal{X}}$ a la suma directa de todos los módulos en $cyc(\mathcal{X})$. En [8, Lema 2.2.3, p. 12] se prueba que

$$L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,\oplus\}}(\mathcal{X}) = \sigma(M_{\mathcal{X}})$$

para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$. Notemos que $\sigma(M)$ coincide con $\sigma[M]$, la subcategoría completa de R-Mod de todos los módulos subgenerados por M, introducida en [31]. Sin embargo, en este trabajo trataremos de manera distinta a $\sigma(M)$ y a $\sigma[M]$.

Sea $\mathfrak{F} \subseteq \mathcal{L}(R)$ una familia de ideales de R. Diremos que $\mathfrak{F}$ es un *filtro lineal* de R si cumple las siguientes condiciones:

(F1) Si $I, J \in \mathfrak{F}$, entonces $I \cap J \in \mathfrak{F}$.

(F2) Si $I \in \mathfrak{F}$ e $I \subseteq J$, entonces $J \in \mathfrak{F}$.

(F3) Si $I \in \mathfrak{F}$ y $r \in R$, entonces $(I : r) := \{s \in R \mid sr \in I\} \in \mathfrak{F}$.

Denotamos como R-fil al conjunto de todos los filtros lineales de R. En [15, Proposición 1.11, p. 7] se prueba que existe una correspondencia biyectiva entre R-pretors y R-fil. Así, R-pretors es un conjunto y por ende, una retícula completa.

Si $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ es una familia de clases de pretorsión hereditaria, tenemos que

$$\bigvee_{i\in I} \mathcal{X}_i = \sigma\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i\right) = \sigma\left(\bigoplus_{i\in I} M_{\mathcal{X}_i}\right)$$

donde $\sigma(M_{\mathcal{X}_i}) = \mathcal{X}_i$ para toda $i \in I$. Tenemos que R-pretors es una retícula modular. Además, es fuertemente pseudocomplementado, donde el pseudocomplemento fuerte de una clase de pretorsión hereditaria $\mathcal{P}$ es

$$\mathcal{P}^{\perp_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,\oplus\}}} := \{M \in R\text{-Mod} \mid \mathcal{P} \cap \sigma(M) = 0\}$$

En [29, 1.2(2), p. 3616] se prueba que R-pretors es una retícula atómica, donde sus átomos son las clases de módulos $\sigma(S)$ con S un módulo simple.

Tomemos $A = \{\leqslant, \twoheadrightarrow, ext, \oplus\}$. Entonces $L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,ext,\oplus\}}$ es el conglomerado de todas las clases de módulos que son cerradas bajo submódulos, cocientes, extensiones exactas, y sumas directas arbitrarias. Denotamos a $L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,ext,\oplus\}}$ como *R-tors* y a los elementos de R-tors como *clases de torsión hereditaria (de módulos)*. Por la Proposición 1.25, tenemos que R-tors es una gran retícula completa. La gran retícula R-tors ha sido estudiada en [16].

Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Definimos

- $lh(\mathcal{X}) := \{M \in R\text{-Mod} \mid Hom_R(M, E(X)) = 0 \ \forall \ X \in \mathcal{X}\}$
- $rh(\mathcal{X}) := \{M \in R\text{-Mod} \mid Hom_R(X, E(M)) = 0 \ \forall \ X \in \mathcal{X}\}$

donde $E(X)$ y $E(M)$ son las cápsulas inyectivas de X y M, respectivamente. Para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$, tenemos que $L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,ext,\oplus\}}(\mathcal{X})$ es la clase resultante de aplicar a $\mathcal{X}$ el operador $htors$:

$$htors(\mathcal{X}) := lh(rh(\mathcal{X}))$$

Si $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ es una familia de clases de torsión hereditaria, tenemos que

$$\bigvee_{i\in I} \mathcal{X}_i = htors\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i\right)$$

Debido a que R-tors $\subseteq$ R-pretors, se tiene que R-tors es un conjunto. Tenemos que R-tors es un marco. Además, es fuertemente pseudocomplementado, donde el pseudocomplemento fuerte de una clase de torsión hereditaria $\mathcal{T}$ es

$$\mathcal{T}^{\perp_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,ext,\oplus\}}} := \{M \in R\text{-Mod} \mid \mathcal{T} \cap htors(M) = 0\}$$

En [1, Lema 1.7, p. 22] se prueba que $Skel(R\text{-op}) \subseteq R$-tors. Aunado a esto, tenemos el siguiente

Teorema 1.26 ([1], Teorema 1.4, p. 21) *Sean P, Q dos subconjuntos de propiedades de cerradura. Supongamos que L_P y L_Q son fuertemente pseudocomplementadas. Si $Skel(L_P) \subseteq L_Q \subseteq L_P$, entonces $Skel(L_Q) = Skel(L_P)$.*

De esta manera, tenemos que

- $Skel(R\text{-tors}) = Skel(R\text{-pretors}) = Skel(R\text{-ss}) = Skel(R\text{-op})$
- $Skel(R\text{-sext}) = Skel(R\text{-sub})$
- $Skel(R\text{-qext}) = Skel(R\text{-quot})$

Además, se concluye que

- $\mathcal{T}^{\perp_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,ext,\oplus\}}} = \{M \in R\text{-Mod} \mid \mathcal{T} \cap subquot(M) = 0\}$ para toda $\mathcal{T} \in R$-tors.
- $\mathcal{P}^{\perp_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,\oplus\}}} = \{M \in R\text{-Mod} \mid \mathcal{P} \cap subquot(M) = 0\}$ para toda $\mathcal{P} \in R$-pretors.
- $\mathcal{S}^{\perp_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,ext\}}} = \{M \in R\text{-Mod} \mid \mathcal{S} \cap subquot(M) = 0\}$ para toda $\mathcal{S} \in R$-ss.
- $\mathcal{H}^{\perp_{\{\leqslant,ext\}}} = \{M \in R\text{-Mod} \mid \mathcal{H} \cap sub(M) = 0\}$ para toda $\mathcal{H} \in R$-sext.
- $\mathcal{Q}^{\perp_{\{\leqslant,ext\}}} := \{M \in R\text{-Mod} \mid \mathcal{Q} \cap quot(M) = 0\}$ para toda $\mathcal{Q} \in R$-qext.

1.3.2. Caracterizaciones de anillos a través de clases de módulos

El estudio de los conglomerados de clases de módulos que son cerradas bajo propiedades de cerradura, así como el estudio de ciertos operadores de clases de módulos, se ha dirigido paralelamente hacia la caracterización de anillos. A continuación, mostramos algunas caracterizaciones de anillos mediante condiciones que involucran a los operadores anteriormente descritos y a los conglomerados de clases de módulos.

Teorema 1.27 ([1], Teorema 2.7, p. 26) *$sext(R) = sext(R\text{-simp})$ si y sólo si R es Artiniano y R-simp $\subseteq \mathcal{L}(R)$.*

Teorema 1.28 ([1], Teorema 3.5, p. 28) *R es Artiniano si y sólo si R es Noetheriano y $qext(R) = qext(R\text{-simp})$.*

Teorema 1.29 ([1], Teorema 4.2, p. 31) *$Skel(R\text{-sub}) = Skel(R\text{-quot})$ si y sólo si R es isomorfo a un producto directo finito de anillos locales izquierdos perfectos derechos.*

Teorema 1.30 ([1], Teorema 5.14, p. 34) *Sea R tal que la cápsula inyectiva de cada módulo simple es f.g. Entonces R-sext $=$ R-qext si y sólo si R es isomorfo a un producto directo finito de anillos Artinianos locales.*

Teorema 1.31 ([2], Teorema 38, p. 116) *R-her $=$ R-quot si y sólo si R es isomorfo a un producto directo finito de anillos Artinianos de ideales principales.*

Capítulo 2

Clases aditivas

Walker y Walker en [30] introdujeron el concepto de *clase aditiva* para estudiar una relación entre clases de Serre y filtros lineales del anillo. Sin embargo, el estudio de clases aditivas no fue exhaustivo, pues los autores utilizaron las clases aditivas como un puente entre las clases de Serre y las clases de torsión hereditaria.

En este capítulo estudiamos con más profundidad a las clases aditivas, mediante el estudio de la estructura reticular del conglomerado de todas las clases aditivas usando operadores de clases de módulos. Además, estudiamos propiedades del conglomerado de todas las *clases aditivas acotadas*, un concepto cercano al introducido en [30]. Después, mostramos la existencia de átomos en el conglomerado de todas las clases aditivas. Al final, estudiamos una relación entre el conjunto de todos los filtros lineales de R y el conglomerado de todas las clases aditivas.

2.1. Estructura reticular de R-ad

Definición 2.1 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Decimos que $\mathcal{X}$ es una* clase aditiva (de módulos) *si es cerrada bajo submódulos, cocientes y sumas directas finitas. Denotamos como R-*ad *al conglomerado de todas las clases aditivas. De esta manera, $R\text{-}ad = L_{\{\leqslant, \twoheadrightarrow, \oplus^n\}}$.*

La definición de clase aditiva fue formalmente introducida en [30, Definición 1.2, p. 515]. Por la Proposición 1.25, tenemos que R-ad es una gran retícula completa. Dado que la propiedad de ser cerrado bajo sumas directas finitas es equivalente a la propiedad de ser cerrado bajo extensiones exactas que se escinden (Corolario 1.20), tenemos que

$$R\text{-ss} \subseteq R\text{-ad} \subseteq R\text{-op} \quad \text{y} \quad R\text{-pretors} \subseteq R\text{-ad} \subseteq R\text{-op}$$

Existen anillos para los cuales las contenciones anteriores son estrictas.

Ejemplo 2.2 *Consideremos $\mathcal{S}_{\ll}$, la clase de todos los módulos superfluos en R-Mod (Ver Ejemplo 1.22). En [21, Teorema 2, p. 528], Leonard probó que $\mathcal{S}_{\ll} \in R$-ad.*

Recordemos que un anillo R es max izquierdo *si todo R-módulo no cero tiene un submódulo máximo. En [4, Teorema 2.8, p. 2909], Amini y Amini probaron que R es max izquierdo si y sólo si $S_{\ll} \in R$-pretors. Así, para $R = \mathbb{Z}$ tenemos que $\mathcal{S}_{\ll} \notin R$-pretors.*

Por otro lado, recordemos que un anillo R es hereditario izquierdo *si cada ideal de R es proyectivo. En [21, Teorema 3, p. 528], Leonard probó que si R es hereditario izquierdo, entonces $\mathcal{S}_{\ll} \in R$-ss.*

Con este ejemplo, se observa que $\mathbb{Z}$-pretors $\subsetneq \mathbb{Z}$-ad.

Ejemplo 2.3 *Sea $R = \mathbb{Z}$. Consideremos R-fgssimp, la clase de todos los módulos semisimples finitamente generados. Es fácil ver que R-fgssimp $\in R$-ad.*

Por un lado, tenemos que $\mathbb{Z}_2 \in R$-fgssimp. Sin embargo, notemos que $\mathbb{Z}_2^{(\aleph_0)}$ es un módulo semisimple que no es finitamente generado. Por lo tanto, $\mathbb{Z}_2^{(\aleph_0)} \notin R$-fgssimp y se concluye que R-fgssimp $\notin R$-pretors.

Por otro lado, tomemos la sucesión

$$0 \to \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_4 \to \mathbb{Z}_2 \to 0$$

Tenemos que $\mathbb{Z}_2 \in R$-fgssimp pero $\mathbb{Z}_4 \notin R$-fgssimp. Por lo tanto, R-fgssimp $\notin R$-ss.

Con este ejemplo, se observa que $\mathbb{Z}$-ss $\subsetneq \mathbb{Z}$-ad.

Para describir la estructura reticular de R-ad, necesitamos determinar los supremos en R-ad. Para ello, definimos el operador

$$ad(\mathcal{X}) := subquot\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{X}^{(n)}\right)$$

para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$. Notemos que el operador ad es la restricción del operador σ para potencias finitas. Además, se puede observar cierta similitud con el operados $serre$.

Teorema 2.4 *$ad(\mathcal{X}) \in R$-ad para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$.*

Demostración:
Por definición, tenemos que $ad(\mathcal{X}) \in R$-op. Ahora, consideremos $M_1, M_2 \in ad(\mathcal{X})$. Entonces existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ y los diagramas

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i=1}^{n_1} K_{1i} \arrow[r] & T_1 \arrow[r] & 0 \\ & M_1 \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd} \quad \text{y} \quad \begin{tikzcd} \bigoplus_{j=1}^{n_2} K_{2j} \arrow[r] & T_2 \arrow[r] & 0 \\ & M_2 \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

donde $K_{1i}, K_{2j} \in \mathcal{X}$ para toda $i \in \{1,\ldots,n_1\}$ y para toda $j \in \{1,\ldots,n_2\}$. Así, tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd} \left(\bigoplus_{i=1}^{n_1} K_{1i}\right) \oplus \left(\bigoplus_{j=1}^{n_2} K_{2j}\right) \arrow[r] & T_1 \oplus T_2 \arrow[r] & 0 \\ & M_1 \oplus M_2 \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

De esta manera, se tiene que $M_1 \oplus M_2 \in ad(\mathcal{X})$. Se concluye que $ad(\mathcal{X}) \in R$-ad. ■

Denotamos como $ad(M)$ a la clase de módulos que resulta de aplicar el operador ad a la clase de módulos que contiene al módulo cero, a M y a todos sus módulos isomorfos. Denotamos como R-*mod* a la clase de todos los módulos finitamente generados.

Proposición 2.5 *Sea R un anillo. Entonces $ad(R) = sub(R\text{-}mod)$.*

Demostración:
Sea R un anillo. De la definición del operador ad, tenemos que

$$\begin{aligned} ad(R) &= \left\{ M \in R\text{-Mod} \;\middle|\; \exists \begin{tikzcd} R^n \arrow[r] & T \arrow[r] & 0 \\ & M \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd} \right\} \\ &= \{M \in R\text{-Mod} \mid \exists\, T \in R\text{-mod tal que } M \leqslant T\} \\ &= sub(R\text{-mod}) \end{aligned}$$

■

Proposición 2.6 $L_{\{\leqslant,\twoheadrightarrow,\oplus^n\}}(\mathcal{X}) = ad(\mathcal{X})$ *para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$.*

Demostración:
Por definición del operador ad, tenemos que $\mathcal{X} \subseteq ad(\mathcal{X})$.

Ahora, supongamos que $\mathcal{Y} \in R$-ad tal que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. Si $M \in ad(\mathcal{X})$, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i=1}^{n} K_i \arrow[r] & T \arrow[r] & 0 \\ & M \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

donde $K_i \in \mathcal{X}$ para toda $i \in \{1,\ldots,n\}$. Dado que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ y $\mathcal{Y} \in R$-ad, tenemos que $\bigoplus_{i=1}^{n} K_i \in \mathcal{Y}$ de donde se sigue que $T \in \mathcal{Y}$ y, por lo tanto, $M \in \mathcal{Y}$. Se concluye que $ad(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y}$. ■

Teorema 2.7 *Sea I un conjunto y $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de clases aditivas. Entonces*

$$\bigvee_{i\in I} \mathcal{X}_i = ad\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i\right)$$

Demostración:
Se sigue de la Proposición 2.6 y del hecho que $\bigvee_{i\in I} \mathcal{X}_i = L_A\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i\right)$ para cualquier A subconjunto de propiedades de cerradura. ■

Para el caso en que la familia de clases aditivas sea finita, la descripción del supremo en R-ad es más sencilla. Para ello, necesitamos el siguiente lema.

Lema 2.8 *Sea $m \in \mathbb{N}$ y $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^m$ una familia no vacía de clases de módulos cerradas bajo sumas directas finitas. Entonces*

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{i=1}^m \mathcal{X}_i\right)^{(n)} = \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{X}_i$$

Demostración:
($\subseteq$) Sea $M \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{i=1}^m \mathcal{X}_i\right)^{(n)}$. Entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $M \cong \bigoplus_{j=1}^k M_j$ donde $M_j \in \bigcup_{i=1}^m \mathcal{X}_i$ para cada $j \in \{1,\ldots,k\}$. De esta manera, para cada $j \in \{1,\ldots,k\}$ existe $i \in \{1,\ldots,m\}$ tal que $M_j \in \mathcal{X}_i$. Dado que $\mathcal{X}_i \in L_{\{\oplus^n\}}$ para cada $i \in \{1,\ldots,m\}$, se sigue que $M \in \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{X}_i$.

($\supseteq$) Sea $M \in \bigoplus_{i=1}^m \mathcal{X}_i$. Entonces $M \cong \bigoplus_{i=1}^m M_i$ donde $M_i \in \mathcal{X}_i$ para toda $i \in \{1,\ldots,m\}$. Dado que $M_i \in \bigcup_{i=1}^m \mathcal{X}_i$ para toda $i \in \{1,\ldots,m\}$, se concluye que $M \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\bigcup_{i=1}^m \mathcal{X}_i\right)^{(n)}$. ■

Proposición 2.9 *Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Entonces $\mathcal{X}$ es cerrada bajo sumas directas finitas si y sólo si $\mathcal{X}^{(2)} = \mathcal{X}$.*

Demostración:
($\Rightarrow$)($\subseteq$) Dado que $\mathcal{X} \in L_{\{\oplus^n\}}$, la prueba es inmediata.

($\supseteq$) Sea $M \in \mathcal{X}$. Dado que $\mathcal{X} = \mathcal{X} \cup \mathcal{X} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\mathcal{X} \cup \mathcal{X})^{(n)}$ y por el Lema 2.8, se sigue que $M \in \mathcal{X}^{(2)}$.

($\Leftarrow$) Sean $M_1, M_2 \in \mathcal{X}$. Entonces $M_1 \oplus M_2 \in \mathcal{X}^{(2)} = \mathcal{X}$. Por lo tanto, $\mathcal{X}$ es cerrada bajo sumas directas finitas. ■

Teorema 2.10 *Sea $m \in \mathbb{N}$ y $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^m$ una familia no vacía de clases aditivas. Entonces*

$$\bigvee_{i=1}^m \mathcal{X}_i = subquot\left(\bigoplus_{i=1}^m \mathcal{X}_i\right)$$

Demostración:
Por definición del operador *ad* y por el Lema 2.8, se tiene que

$$\bigvee_{i=1}^{m} \mathcal{X}_i = ad\left(\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{X}_i\right) = subquot\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(\bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{X}_i\right)^{(n)}\right) = subquot\left(\bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{X}_i\right)$$

■

Sea I un conjunto y $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ una familia de clases de módulos. Definimos *la suma arbitraria* de $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ como

$$\bigoplus_{i\in I} \mathcal{X}_i := \left\{ M \in R\text{-Mod} \;\middle|\; M \cong \bigoplus_{i\in I} N_i \text{ donde } N_i \in \mathcal{X}_i \ \forall\ i \in I \right\}$$

Una prueba similar a la del Lema 2.8, muestra que si $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ es una familia de clases de módulos cerradas bajo sumas directas finitas, entonces $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i)^{(n)} \subseteq \bigoplus_{i\in I} \mathcal{X}_i$. Sin embargo, la otra contención no se cumple en general.

Por ejemplo, consideremos $R = \mathbb{Z}$ y las clases $\mathcal{Z}_p = \{0, \mathbb{Z}_p\}$ para cada primo p. Tomemos $\bigoplus_{p \text{ primo}} ad(\mathcal{Z}_p)$. Notemos que el módulo $\bigoplus_{p \text{ primo}} \mathbb{Z}_p$ es un elemento de $\bigoplus_{p \text{ primo}} ad(\mathcal{Z}_p)$ pero no de $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(\bigcup_{p \text{ primo}} ad(\mathcal{Z}_p))^{(n)}$.

Por otro lado, si consideramos $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ una familia de clases de módulos cerradas bajo sumas directas arbitrarias, se tiene un resultado análogo al Lema 2.8. Y así, se obtiene una descripción más sencilla del supremo de clases de pretorsión hereditarias.

Lema 2.11 *Sea $\lambda \in \mathbf{Cn}$, I un conjunto y $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de clases de módulos cerradas bajo sumas directas arbitrarias. Entonces*

$$\bigcup_{\lambda\in\mathbf{Cn}}\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i\right)^{(\lambda)} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{X}_i$$

Teorema 2.12 *Sea I un conjunto y $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ una familia de clases de pretorsión hereditaria. Entonces*

$$\bigvee_{i\in I} \mathcal{X}_i = subquot\left(\bigoplus_{i\in I} \mathcal{X}_i\right)$$

Demostración:
Por definición del operador σ y por el Lema 2.11, se tiene que

$$\bigvee_{i\in I} \mathcal{X}_i = \sigma\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i\right) = subquot\left(\bigcup_{\lambda\in\mathbf{Cn}}\left(\bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i\right)^{(\lambda)}\right) = subquot\left(\bigoplus_{i\in I} \mathcal{X}_i\right)$$

■

2.2. Clases aditivas acotadas. Operadores *strong* y *bad*

En [30, Definición 1.3, p. 515], Walker y Walker introdujeron la definición de clase aditiva acotada. La siguiente definición es una versión ligeramente modificada de la versión de Walker y Walker.

Definición 2.13 *Sea $\mathcal{X} \in R$-ad. Decimos que $\mathcal{X}$ es* acotada *si para toda $\mathcal{Y} \in R$-ad tal que $cyc(\mathcal{Y}) = cyc(\mathcal{X})$, tenemos que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. Denotamos como R-bad al conglomerado de todas las clases aditivas acotadas en R-Mod.*

Por definición, se tiene que cada clase aditiva acotada está caracterizada por los módulos cíclicos que contiene. Ahora, sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Definimos el operador

$$bad(\mathcal{X}) := ad(cyc(\mathcal{X}))$$

Tenemos los siguientes resultados con respecto al operador *bad*.

Proposición 2.14 *Sea $\mathcal{X} \in R$-ad. Entonces*

(i) $bad(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$

(ii) $cyc(bad(\mathcal{X})) = cyc(\mathcal{X})$

(iii) $bad(\mathcal{X}) \in R\text{-}bad$

(iv) $bad(\mathcal{X}) = \{M \in R\text{-}Mod \mid \exists\ K \in \mathcal{X} \cap R\text{-}mod \text{ tal que } M \leqslant K\}$

Demostración:

(i) Dado que $cyc(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$, se concluye que $bad(\mathcal{X}) = ad(cyc(\mathcal{X})) \subseteq ad(\mathcal{X}) = \mathcal{X}$.

(ii) Dado que $cyc(\mathcal{X}) \subseteq ad(cyc(\mathcal{X}))$, se sigue que $cyc(\mathcal{X}) \subseteq cyc(bad(\mathcal{X}))$. Por (i), se tiene que $cyc(bad(\mathcal{X})) \subseteq cyc(\mathcal{X})$.

(iii) Por definición, se tiene que $bad(\mathcal{X}) \in R$-ad. Ahora, sea $\mathcal{Y} \in R$-ad tal que $cyc(bad(\mathcal{X})) = cyc(\mathcal{Y})$. Por (ii), se tiene que $cyc(\mathcal{X}) = cyc(\mathcal{Y})$. Por (i), se sigue que $bad(\mathcal{X}) = bad(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{Y}$.

(iv) Sea $\mathcal{Y} = \{M \in R\text{-Mod} \mid \exists\ K \in \mathcal{X} \cap R\text{-mod tal que } M \leqslant K\}$.

$(\subseteq)$ Sea $M \in bad(\mathcal{X})$. Entonces existe $n \in \mathbb{N}$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^{n} C_i \arrow[r] & K \arrow[r] & 0 \\
& M \arrow[u] & \\
& 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

donde $C_i \in cyc(\mathcal{X})$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dado que $\bigoplus_{i=1}^n C_i \in \mathcal{X} \cap R$-mod, tenemos que $K \in \mathcal{X} \cap R$-mod. Por lo tanto, $M \in \mathcal{Y}$.

($\supseteq$) Sea $M \in \mathcal{Y}$. Entonces existe $K \in \mathcal{X} \cap R$-Mod tal que $M \leqslant K$. Como K es finitamente generado, entonces existen $k_1, \ldots, k_n$ tal que $K = \sum_{i=1}^n Rk_i$, donde $Rk_i \in \mathcal{X}$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. De esta manera, existe el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus_{i=1}^{n} Rk_i \arrow[r] & K \arrow[r] & 0 \\
& M \arrow[u] & \\
& 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, $M \in bad(\mathcal{X})$. ■

Corolario 2.15 *Sea R un anillo. Entonces $bad(R\text{-}Mod) = ad(R) = bad(R)$.*

Demostración:
La primera igualdad se sigue de las Proposiciones 2.5 y 2.14 (iv). La segunda igualdad se sigue de la definición de los operadores ad y bad. ■

Teorema 2.16 *Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *R es Noetheriano*

(ii) *$ad(R) = R$-mod*

(iii) *$bad(\mathcal{X}) \subseteq R$-mod para toda clase aditiva $\mathcal{X}$.*

Demostración:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Supongamos que R es Noetheriano. Entonces, todo submódulo de un módulo f.g. es finitamente generado. Por la Proposición 2.5, se concluye que $ad(R) = R$-mod.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Supongamos que $ad(R) = R$-mod. Sea $\mathcal{X} \in R$-ad. Es fácil ver que $bad(\mathcal{X}) \subseteq bad(R\text{-Mod})$. Por el Corolario 2.15, se concluye que $bad(\mathcal{X}) \subseteq R$-mod.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Supongamos que $bad(\mathcal{X}) \subseteq R$-mod para toda clase aditiva $\mathcal{X}$. Sea M un submódulo de un módulo finitamente generado. Por la Proposición 2.14 (iv) se tiene que $M \in bad(R\text{-Mod})$. Como R-Mod $\in R$-ad, tenemos que M es finitamente generado. Por lo tanto, R es Noetheriano. ■

Proposición 2.17 *El supremo arbitrario en R-ad de clases aditivas acotadas es una clase aditiva acotada.*

Demostración:
Sea I un conjunto y $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de clases aditivas acotadas. Probamos que $ad\left(\bigcup_{i\in I}\mathcal{X}_i\right) \in R$-bad. Por definición, tenemos que $ad\left(\bigcup_{i\in I}\mathcal{X}_i\right) \in R$-ad. Ahora, sea $\mathcal{Y} \in R$-ad tal que $cyc(\mathcal{Y}) = cyc(ad\left(\bigcup_{i\in I}\mathcal{X}_i\right))$. Tenemos que $cyc(\mathcal{X}_i) \subseteq cyc(\mathcal{Y})$ para toda $i \in I$. Por la Proposición 2.14 (i), tenemos que $\mathcal{X}_i = bad(\mathcal{X}_i) \subseteq bad(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{Y}$ para toda $i \in I$. Entonces, $\bigcup_{i\in I}\mathcal{X}_i \subseteq \mathcal{Y}$. Por la Proposición 2.6, concluimos que $ad\left(\bigcup_{i\in I}\mathcal{X}_i\right) \subseteq \mathcal{Y}$.■

En general, no se cuenta con suficiente información para determinar el ínfimo arbitrario de clases aditivas acotadas. Sin embargo, para anillos Noetherianos sí se tiene una descripción del ínfimo arbitrario.

Teorema 2.18 *Sea R un anillo Noetheriano, I un conjunto y $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ una familia no vacía de clases aditivas acotadas. Entonces*

$$\bigcap_{i\in I}\mathcal{X}_i \in R\text{-}bad$$

Es decir, el ínfimo arbitrario en R-ad de clases aditivas acotadas es una clase aditiva acotada.

Demostración:
Probamos que $\bigcap_{i\in I}\mathcal{X}_i = bad\left(\bigcap_{i\in I}\mathcal{X}_i\right)$.

($\subseteq$) Por la Proposición 2.14 (iv), tenemos que

$$\mathcal{X}_i = bad(\mathcal{X}_i) = \{M \in R\text{-Mod} \mid \exists\ K \in \mathcal{X}_i \cap R\text{-mod tal que } M \leqslant K\}$$

para toda $i \in I$. Sea $M \in \bigcap_{i\in I}\mathcal{X}_i$. Entonces $M \in \mathcal{X}_i$ para toda $i \in I$. Así, existen $K_i \in \mathcal{X}_i \cap R$-mod tales que $M \leqslant K_i$ para toda $i \in I$. Notemos que $M \leqslant \bigcap_{i\in I} K_i$, donde $\bigcap_{i\in I} K_i \in \left(\bigcap_{i\in I}\mathcal{X}_i\right) \cap sub(R\text{-mod})$. Como R es Noetheriano, tenemos que $sub(R\text{-mod}) = R$-mod. Por lo tanto, $M \in bad\left(\bigcap_{i\in I}\mathcal{X}_i\right)$.

($\supseteq$) Se sigue de la Proposición 2.14 (i). ■

Existe una relación entre R-bad y R-pretors. Sea $\mathcal{X}$ una clase de módulos. Definimos el operador

$$strong(\mathcal{X}) := \left\{ N \in R\text{-Mod} \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists \text{ un conjunto } I, M_i \in cyc(\mathcal{X})\ \forall\ i \in I \text{ y} \\ \text{un epimorfismo } \bigoplus_{i\in I} M_i \to N \to 0 \end{array} \right\}$$

Proposición 2.19 *Sea $\mathcal{X} \in R$-ad. Entonces*

(i) $\mathcal{X} \subseteq strong(\mathcal{X})$

(ii) $cyc(strong(\mathcal{X})) = cyc(\mathcal{X})$

(iii) $strong(\mathcal{X}) \in R$-*pretors* (*iv*) $strong(\mathcal{X}) = \{M \in R\text{-}Mod \mid Rm \in \mathcal{X}\ \forall\ m \in M\}$

Demostración:

(i) Dado que existe $\bigoplus_{m\in M} Rm \to M \to 0$ para todo $M \in R$-Mod, se concluye que $\mathcal{X} \subseteq strong(\mathcal{X})$.

(ii) Por (i), se sigue que $cyc(\mathcal{X}) \subseteq cyc(strong(\mathcal{X}))$. Por otro lado, sea $C \in cyc(strong(\mathcal{X}))$. Como C es finitamente generado, entonces existen $\{M_i\}_{i=1}^{n} \subseteq cyc(\mathcal{X})$ y $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to C \to 0$. Como $M_i \in \mathcal{X}$ para toda $i \in \{1,\dots,n\}$, se sigue que $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \in \mathcal{X}$ y por lo tanto, $C \in \mathcal{X}$. Se concluye que $cyc(strong(\mathcal{X})) \subseteq cyc(\mathcal{X})$.

(iii) Por definición, $strong(\mathcal{X}) \in R$-quot.
Ahora, sea J un conjunto y $\{N_j\}_{j\in J} \subseteq strong(\mathcal{X})$. Entonces existen $\{M_{ij}\}_{i\in I_j} \subseteq cyc(\mathcal{X})$ y $\bigoplus_{i\in I_j} M_{ij} \to N_j \to 0$ para cada $j \in J$. Así, tenemos que existe el epimorfismo $\bigoplus_{j\in J}(\bigoplus_{i\in I_j} M_{ij}) \to \bigoplus_{j\in J} N_j \to 0$. Por lo tanto, $\bigoplus_{j\in J} N_j \in strong(\mathcal{X})$. Se concluye que $strong(\mathcal{X}) \in L_{\{\oplus\}}$.
Por último, sea $M \in strong(\mathcal{X})$ y $K \leqslant M$. Por (ii), tenemos que $Rk \in cyc(\mathcal{X})$ para toda $k \in K$. Entonces, existe $\bigoplus_{k\in K} Rk \to K \to 0$. Por lo tanto, $K \in strong(\mathcal{X})$. Se concluye que $strong(\mathcal{X}) \in R$-sub.

(iv) Sea $\mathcal{Y} = \{M \in R\text{-Mod} \mid Rm \in \mathcal{X}\ \forall\ m \in M\}$.

($\subseteq$) Sea $M \in strong(\mathcal{X})$. Por ($ii$), tenemos que $cyc(M) \subseteq cyc(\mathcal{X})$. Por lo tanto, $M \in \mathcal{Y}$.

($\supseteq$). Sea $M \in \mathcal{Y}$. Tenemos que existe $\bigoplus_{m\in M} Rm \to M \to 0$ donde $Rm \in cyc(\mathcal{X})$ para toda $m \in M$. Por lo tanto, $M \in strong(\mathcal{X})$. ■

Teorema 2.20 *Sea R un anillo. Entonces R-bad $\cong$ R-pretors como clases de módulos.*

Demostración:
Definimos la correspondencia

$$\begin{array}{rcl} \theta : R\text{-bad} & \to & R\text{-pretors} \\ \mathcal{X} & \mapsto & \theta(\mathcal{X}) = strong(\mathcal{X}) \end{array}$$

- <u>θ está bien definida</u>: Sean $\mathcal{X},\mathcal{Y} \in R$-bad tales que $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$. Por la Proposición 2.19 (ii), tenemos que $cyc(\theta(\mathcal{X})) = cyc(\theta(\mathcal{Y}))$. Como las clases de pretorsión hereditarias están caracterizadas por los módulos cíclicos que contienen, se concluye que $\theta(\mathcal{X}) = \theta(\mathcal{Y})$.

- <u>θ es mono</u>: Sean $\mathcal{X},\mathcal{Y} \in R$-bad tales que $\theta(\mathcal{X}) = \theta(\mathcal{Y})$. Por la Proposición 2.19 (ii), tenemos que $cyc(\mathcal{X}) = cyc(\mathcal{Y})$. Como las clases aditivas acotadas están caracterizadas por los módulos cíclicos que contienen, se concluye que $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$.

- <u>θ es epi</u>: Sea $\mathcal{X} \in R$-pretors. Por la Proposición 2.14 (ii) y (iii), tenemos que $bad(\mathcal{X}) \in R$-bad y $cyc(\mathcal{X}) = cyc(bad(\mathcal{X}))$. Por la Proposición 2.19, se sigue que $cyc(\mathcal{X}) = cyc(strong(bad(\mathcal{X})))$. Por lo tanto, $\theta(bad(\mathcal{X})) = strong(bad(\mathcal{X})) = \mathcal{X}$.

Se concluye que R-bad $\cong$ R-pretors. ∎

Como consecuencias inmediatas del Teorema 2.20, tenemos los siguientes

Corolario 2.21 *Sea R un anillo. Entonces R-bad es un conjunto.*

Corolario 2.22 *Sea R un anillo. Entonces R-pretors $\subsetneq$ R-ad.*

2.3. Átomos en R-ad

Proposición 2.23 *Sea R un anillo y $\mathcal{B} = \{0, S\}$, donde $S \in R$-simp. Entonces $bad(\mathcal{B}) \in R$-bad y $bad(\mathcal{B})$ es un átomo en R-ad.*

Demostración:
Notemos que $bad(\mathcal{B}) = \{M \in R\text{-Mod} \mid M \cong S^{(n)}$ para alguna $n \in \mathbb{N}\}$. De esta manera, es claro que $bad(\mathcal{B}) \in R$-bad. Por la descripción de $bad(\mathcal{B})$, se sigue que no existe $\mathcal{Y} \in R$-ad tal que $0 < \mathcal{Y} < bad(\mathcal{B})$. Por lo tanto, $bad(\mathcal{B})$ es un átomo. ∎

Teorema 2.24 *Sea R un anillo. Entonces R-ad es una gran retícula atómica.*

Demostración:
Sea $\mathcal{X}$ una clase aditiva diferente de cero. Sea $0 \neq S \in R$-simp $\cap\, \mathcal{X}$. Consideramos el conjunto $\mathcal{B} = \{0, S\}$. Por la Proposición 2.23, tenemos que $bad(\mathcal{B})$ es un átomo en R-ad. Por la descripción de $bad(\mathcal{B})$, se tiene que $bad(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{X}$. ∎

Teorema 2.25 *Sea R un anillo y $0 \neq \mathcal{X} \in R$-ad. Entonces $\mathcal{X}$ es un átomo en R-ad si y sólo si existe $S \in R$-simp tal que $cyc(\mathcal{X}) = \mathcal{B} = \{0, S\}$ y $\mathcal{X} = bad(\mathcal{B})$.*

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{X}$ es un átomo en R-ad. Por el Teorema 2.24, tenemos que $bad(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{X}$. Como $\mathcal{X}$ es un átomo, se concluye que $\mathcal{X} = bad(\mathcal{X})$ y $cyc(\mathcal{X}) = cyc(bad(\mathcal{B})) = \mathcal{B}$.

($\Leftarrow$) Supongamos que existe $S \in R$-simp tal que $cyc(\mathcal{X}) = \mathcal{B}$ y $\mathcal{X} = bad(\mathcal{B})$. Por la Proposición 2.23, tenemos que $\mathcal{X}$ es un átomo en R-ad. ∎

Teorema 2.26 *Sea $0 \neq \mathcal{X} \in R$-ad. Entonces $\mathcal{X}$ es esencial en R-ad si y sólo si R-simp $\subseteq cyc(\mathcal{X})$.*

Demostración:
($\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{X}$ es esencial en R-ad. Sea $0 \neq S \in R$-simp. Consideramos el conjunto $\mathcal{B} = \{0, S\}$. Por la Proposición 2.23, tenemos que $bad(\mathcal{B})$ es un átomo en R-ad. Dado que $\mathcal{X}$ es esencial, tenemos que $bad(\mathcal{B}) = bad(\mathcal{B}) \cap \mathcal{X} \subseteq \mathcal{X}$. Por lo tanto, $S \in \mathcal{X}$.

($\Leftarrow$) Supongamos que R-simp $\subseteq cyc(\mathcal{X})$. Supongamos que existe $\mathcal{Y} \in R$-ad tal que $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0$. Si $\mathcal{Y} \neq 0$, por el Teorema 2.24 existe un módulo simple $0 \neq S$ y un conjunto $\mathcal{B} = \{0, S\}$ tal que $bad(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{Y}$. Entonces $bad(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $\mathcal{Y} = 0$. Concluimos que $\mathcal{X}$ es esencial en R-ad. ∎

Denotamos como $atm(R\text{-ad})$ al número de átomos en R-ad.

Teorema 2.27 *Sea R un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Toda clase aditiva diferente de cero es esencial en R-ad*

(ii) $atm(R\text{-}ad) = 1$

(iii) $|R\text{-}simp| = 1$

Demostración:
$(i) \Rightarrow (ii)$: Supongamos que toda clase aditiva es esencial en R-ad. Probamos que R-ad tiene un único átomo. En caso contrario, supongamos que existen $\mathcal{V}, \mathcal{W} \in R$-ad tales que $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son átomos en R-ad y son tales que $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = 0$. Como toda clase aditiva es esencial, concluimos que $\mathcal{V} = 0$ o $\mathcal{W} = 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $atm(R\text{-ad}) = 1$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Supongamos que $atm(R\text{-ad}) = 1$. Sean $0 \neq S, T \in R$-simp tales que $S \neq T$. Por la Proposición 2.23, tenemos que $bad(\mathcal{B})$ y $bad(\mathcal{D})$ son átomos en R-ad, donde $\mathcal{B} = \{0, S\}$ y $\mathcal{D} = \{0, T\}$. Por hipótesis se sigue que $bad(\mathcal{B}) = bad(\mathcal{D})$, lo que implica que $S \cong T$. Por lo tanto, $|R\text{-simp}| = 1$.

$(iii) \Rightarrow (i)$: Supongamos que $|R\text{-simp}| = 1$. Sea $0 \neq \mathcal{X} \in R$-ad. Probamos que $\mathcal{X}$ es esencial en R-ad. En caso contrario, supongamos que existe $0 \neq \mathcal{Y} \in R$-ad tal que $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0$. Entonces, existen $bad(\mathcal{B})$ y $bad(\mathcal{D})$ átomos en R-ad tales que $bad(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{X}$, $bad(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{Y}$ y $bad(\mathcal{B}) \neq bad(\mathcal{D})$, con $\mathcal{B} = \{0, S\}$ y $\mathcal{D} = \{0, T\}$ donde $S, T \in R$-simp. Dado que $S \cong T$ por hipótesis, tenemos que $bad(\mathcal{B}) = bad(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = 0$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $\mathcal{Y} = 0$. Concluimos que $\mathcal{X}$ es esencial en R-ad. ∎

Ejemplo 2.28 *Sea p un número primo y $n \in \mathbb{N}$. Si $R = \mathbb{Z}_{p^n}$, entonces R-ad tiene un sólo átomo, el cual es*

$$bad(\{0, \mathbb{Z}_p\}) = \{M \in R\text{-}Mod \mid M \cong (\mathbb{Z}_p)^{(k)} \text{ para alguna } k \in \mathbb{N}\}$$

2.4. Filtros lineales y clases aditivas

Como comentamos en la Sección 1.3.1, existe una correspondencia biyectiva entre R-pretors y R-fil. Dado que R-pretors $\subseteq R$-ad, es natural extender esta asignación a R-ad.

Proposición 2.29 *Sea $\mathcal{X} \in R$-ad. Entonces $\mathfrak{F}_{\mathcal{X}} = \{I \leqslant R \mid R/I \in \mathcal{X}\} \in R$-fil.*

Demostración:
Primero, probamos que $\mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$ es cerrado bajo intersecciones. Sean $I_1, I_2 \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$. Notemos que $R/(I_1 \cap I_2) \leqslant (R/I_1 \oplus R/I_2)$. Dado que $R/I_1, R/I_2 \in \mathcal{X}$, tenemos que $R/I_1 \oplus R/I_2 \in \mathcal{X}$ y así, $R/(I_1 \cap I_2) \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $I_1 \cap I_2 \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$.

Ahora, probamos que $\mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$ es cerrado bajo súper ideales. Sea $I, J \leqslant R$ ideales tales que $I \leqslant J$ and $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$. Notemos que $R/J \cong (R/I)/(J/I)$. Como $R/I \in \mathcal{X}$, se concluye que $R/J \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $J \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$.

Por último, probamos que $\mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$ es cerrado bajo traslaciones. Sea $I \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$ y $r \in R$. Notemos que $R/(I : r) = R/(0 : (r + I)) \cong R(r + I) = (Rr + I)/I \leqslant R/I$. Como $R/I \in \mathcal{X}$, tenemos que $R/(I : r) \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $(I : r) \in \mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$. ■

Definimos la asignación

$$\begin{array}{rcl} \phi : R\text{-ad} & \to & R\text{-fil} \\ \mathcal{X} & \mapsto & \phi(\mathcal{X}) = \mathfrak{F}_{\mathcal{X}} \end{array}$$

Es fácil ver que ϕ es no decreciente. Además, por el Corolario 2.22, tenemos que ϕ es suprayectiva pero no inyectiva. Por lo tanto, para un filtro lineal dado, existen muchas clases aditivas en su preimagen. Esto se explica a continuación.

Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in R$-ad. Si $\phi(\mathcal{X}) = \phi(\mathcal{Y})$, decimos que $\mathcal{X}$ y $\mathcal{Y}$ están *ϕ-relacionados* y lo denotamos como $\mathcal{X} \sim_{\phi} \mathcal{Y}$. Notemos que $\sim \phi$ es una relación de equivalencia. Denotamos como $[\mathcal{X}]_{\sim_{\phi}}$ la clase de equivalencia de $\mathcal{X} \in R$-ad con respecto a $\sim_{\phi}$.

Proposición 2.30 *Sea $\mathcal{X} \in R$-ad. Entonces $bad(\mathcal{X}) \in [\mathcal{X}]_{\sim_{\phi}}$.*

Demostración:
Probamos que $\phi(bad(\mathcal{X})) = \phi(\mathcal{X})$.

($\subseteq$) Por la Proposición 2.14 (i), tenemos que $\phi(bad(\mathcal{X})) \subseteq \phi(\mathcal{X})$.

($\supseteq$) Sea $I \in \phi(\mathcal{X})$. Entonces $R/I \in \mathcal{X}$. Como R/I es cíclico, por la Proposición 2.14 (ii) se sigue que $R/I \in bad(\mathcal{X})$. Por lo tanto, $I \in \phi(bad(\mathcal{X}))$. ■

Proposición 2.31 *Sea $\mathcal{X} \in R$-ad. Entonces $strong(\mathcal{X}) \in [\mathcal{X}]_{\sim_{\phi}}$.*

Demostración:
Probamos que $\phi(strong(\mathcal{X})) = \phi(\mathcal{X})$.

($\subseteq$) Sea $I \in \phi(strong(\mathcal{X}))$. Entonces $R/I \in strong(\mathcal{X})$. Como R/I es cíclico, por la Proposición 2.19 (ii) se sigue que $R/I \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $I \in \phi(\mathcal{X})$.

($\supseteq$) Por la Proposición 2.19 (i), tenemos que $\phi(\mathcal{X}) \subseteq \phi(strong(\mathcal{X}))$. ■

Teorema 2.32 *Sea $\mathcal{X} \in R$-ad. Entonces*

$$[\mathcal{X}]_{\sim_{\phi}} = [bad(\mathcal{X}), strong(\mathcal{X})]$$

Demostración:

($\subseteq$) Sea $\mathcal{Y} \in [\mathcal{X}]_{\sim_{\phi}}$. Probamos que $bad(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{Y} \subseteq strong(\mathcal{X})$.

Supongamos que $M \in bad(\mathcal{X})$. Por la Proposición 2.14 (iv), existe $K \in \mathcal{X} \cap R$-mod tal que $M \leqslant K$. Entonces, existen $k_1, \ldots, k_n \in K$ tal que $K = \sum_{i=1}^{n} Rk_i$, donde $Rk_i \in \mathcal{X}$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. De aquí se sigue que $(0 : k_i) \in \phi(\mathcal{X}) = \phi(\mathcal{Y})$ para toda

$i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces $Rk_i \in \mathcal{Y}$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$ y así, $K \in \mathcal{Y}$. Por lo tanto, $M \in \mathcal{Y}$.

Ahora, supongamos que $M \in \mathcal{Y}$. Por la Proposición 2.19 (i), se sigue que $M \in strong(\mathcal{Y})$. Por la Proposición 2.19 (iv), tenemos que

$$\begin{aligned} strong(\mathcal{Y}) &= \{N \in R\text{-Mod} \mid Rn \in \mathcal{Y}\ \forall\ n \in N\} \\ &= \{N \in R\text{-Mod} \mid (0:n) \in \phi(\mathcal{Y})\ \forall\ n \in N\} \\ &= \{N \in R\text{-Mod} \mid (0:n) \in \phi(\mathcal{X})\ \forall\ n \in N\} \\ &= \{N \in R\text{-Mod} \mid Rn \in \mathcal{X}\ \forall\ n \in N\} = strong(\mathcal{X}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $M \in strong(\mathcal{X})$. Concluimos que $\mathcal{Y} \in [bad(\mathcal{X}), strong(\mathcal{X})]$.

$(\supseteq)$ Sea $\mathcal{Y} \in [bad(\mathcal{X}), strong(\mathcal{X})]$. Dado que ϕ es creciente, por las Proposiciones 2.30 y 2.31 se tiene que

$$\phi(\mathcal{X}) = \phi(bad(\mathcal{X})) \subseteq \phi(\mathcal{Y}) \subseteq \phi(strong(\mathcal{X})) = \phi(\mathcal{X})$$

Por lo tanto, $\mathcal{Y} \in [\mathcal{X}]_{\sim_\phi}$. ■

Corolario 2.33 *La familia* $\{[bad(\mathcal{X}), strong(\mathcal{X})] \mid \mathcal{X} \in R\text{-}ad\}$ *forma una partición de R-ad.*

En [25], Raggi y Signoret estudiaron una relación entre clases de Serre y filtros lineales. A continuación, describimos la relación entre R-ss y R-fil en el contexto de R-ad.

En [15, Proposición 1.11, p. 7], Golan probó que si $\mathfrak{F} \in R$-fil, entonces

$$\mathbb{T}_{\mathfrak{F}} := \{M \in R\text{-Mod} \mid (0:m) \in \mathfrak{F}\ \forall\ m \in M\} \in R\text{-pretors}$$

Entonces, en [25, Remark 1, p. 413], Raggi y Signoret probaron que si $\sigma \in R$-ss, entonces

$$\mathbb{T}_{\mathfrak{F}_\sigma} = \{M \in R\text{-Mod} \mid (sub(M) \cap R\text{-mod}) \subseteq \sigma\}$$

Proposición 2.34 *Si $\sigma \in R$-ss, entonces $\mathbb{T}_{\mathfrak{F}_\sigma} = strong(\sigma)$.*

Demostración:
Es fácil probar que $\mathbb{T}_{\mathfrak{F}_\sigma} \in R$-pretors. Probamos que $cyc(\mathbb{T}_{\mathfrak{F}_\sigma}) = cyc(\sigma)$.

$(\subseteq)$ Sea $M \in cyc(\mathbb{T}_{\mathfrak{F}_\sigma})$. Entonces $M \in \mathbb{T}_{\mathfrak{F}_\sigma}$ y así, $M \in (sub(M) \cap R\text{-mod}) \subseteq \sigma$. Por la Proposición 2.19 (ii), tenemos que $M \in cyc(\sigma) = cyc(strong(\sigma))$.

$(\supseteq)$ Sea $M \in cyc(strong(\sigma))$. Por la Proposición 2.19 (ii), tenemos que $M \in cyc(\sigma)$. Esto implica que $(sub(M) \cap R\text{-mod}) \subseteq sub(M) \subseteq \sigma$. Por lo tanto, $M \in cyc(\mathbb{T}_{\mathfrak{F}_\sigma})$. ■

Sea $\sigma \in R$-ss. En [25, Sección 2, p. 413] Raggi y Signoret definieron la clase

$$\lfloor \sigma \rfloor := \{\tau \in R\text{-ss} \mid \phi(\tau) = \phi(\sigma)\}$$

En la Proposición 1, p. 413, ellos probaron que $\lfloor \sigma \rfloor$ tiene elemento menor, el cual es denotado como σ_0. Más aún, se tiene que $\sigma_0 = serre(cyc(\sigma))$. Ellos llamaron a una clase $\sigma \in R$-ss *mínima* si $\sigma = \sigma_0$. Al igual que los autores, llamamos R-ssm al conjunto de todas las clases de Serre mínimas. Notemos que $\phi(\sigma) = \phi(\sigma_0)$. Así, $cyc(\sigma) = cyc(\sigma_0)$.

Teorema 2.35 *Sea R un anillo. Entonces R es Noetheriano si y sólo si $\sigma \subseteq R$-mod para toda $\sigma \in R$-ssm.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Supongamos que R es Noetheriano. Sea $\sigma \in R$-ssm. Entonces, existe $\tau \in R$-ss tal que $\sigma = \tau_0$. Por hipótesis, tenemos que

$$\sigma = serre(cyc(\tau)) \subseteq serre(R\text{-mod}) = R\text{-mod}$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $\sigma \subseteq R$-mod para toda $\sigma \in R$-ssm. Por la Proposición 2.5 y el Corolario 2.15, tenemos que

$$R\text{-mod} \subseteq ad(R) = bad(R\text{-Mod}) \subseteq (R\text{-Mod}_0) \subseteq R\text{-mod}$$

Por el Teorema 2.16, R es Noetheriano. ■

Corolario 2.36 *Si R es Noetheriano, entonces $\sigma_0 = bad(\sigma)$ para toda $\sigma \in R$-ss.*

Demostración:
Sea $\sigma \in R$-ss. Notemos que $cyc(\sigma_0) = cyc(\sigma) = cyc(bad(\sigma))$. Probamos que $\sigma_0 \in R$-bad. Así, sea $\mathcal{X} \in R$-ad tal que $cyc(\sigma) = cyc(\mathcal{X})$. Si $M \in \sigma_0$, entonces $M \in R$-mod por el Teorema 2.35. De esta manera, existen $m_1, \ldots, m_k \in M$ tal que $M = \sum_{i=1}^{k} Rm_i$. Dado que $Rm_i \in cyc(\sigma_0) = cyc(\mathcal{X})$, tenemos que $M \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $\sigma_0 \in R$-bad. Concluimos que $\sigma_0 = bad(\sigma)$. ■

Como consecuencia de la Proposición 2.34 y el Corolario 2.36, tenemos el siguiente

Corolario 2.37 *Sea $\sigma \in R$-ss. Si R es Noetheriano, entonces $[\sigma]_{\sim_\phi} = [\sigma_0, \mathbb{T}_{\mathfrak{F}_\sigma}]$.*

En general, si $\sigma \in R$-ss, la clase $[\sigma]_{\sim_\phi}$ no tiene solamente clases de Serre, como $\lfloor\sigma\rfloor$. En general, si $\mathcal{X} \in R$-ad, la clase $[\mathcal{X}]_{\sim_\phi}$ puede no contener clases de Serre. Decimos que $[\mathcal{X}]_{\sim_\phi}$ es *libre de Serre* si $[\mathcal{X}]_{\sim_\phi}$ no contiene clases de Serre.

Ejemplo 2.38 *Sea $R = \mathbb{Z}_4$. Notemos que R es un anillo Noetheriano. Tenemos tres filtros lineales: $\mathfrak{F}_1 = \{0\}$, $\mathfrak{F}_2 = \{0, \mathbb{Z}_2\}$ y $\mathfrak{F}_3 = \{0, \mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_4\}$.*

Para $\mathfrak{F}_3$, tenemos que toda clase aditiva asociada a $\mathfrak{F}_3$ está en el intervalo $[R\text{-mod}, R\text{-Mod}]$. Por los Corolarios 2.15 y 2.36,y el Teorema 2.16, tenemos que R-mod $\in R$-ssm. Ahora, tomemos

$$\mathcal{X} = \{M \in R\text{-}Mod \mid M \cong \mathbb{Z}_2^{(\lambda)} \oplus \mathbb{Z}_4^{(n)} \text{ donde } \lambda < \aleph_1 \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$$

Es fácil probar que $\mathcal{X} \in [R\text{-mod}, R\text{-Mod}]$ pero $\mathcal{X} \notin R$-ss.

Para $\mathfrak{F}_2$, tenemos que toda clase aditiva asociada a $\mathfrak{F}_2$ está en el intervalo $[R\text{-fgssimp}, R\text{-ssimp}]$. Dado que R-fgssimp $\in R$-bad, tenemos que

$$\begin{aligned} R\text{-}fgssimp &= bad(R\text{-}fgssimp) \\ &= \{M \in R\text{-}Mod \mid M \cong \mathbb{Z}_2^{(n)} \text{ donde } n \in \mathbb{N}\} \notin R\text{-}ssm \end{aligned}$$

Es fácil probar que $[R\text{-fgssimp}, R\text{-ssimp}]$ es libre de Serre.

Capítulo 3

La estructura reticular de R-ad para anillos Artinianos semisimples

En este capítulo estudiamos algunas propiedades reticulares de R-ad para R un anillo Artiniano semisimple y describimos completamente la estructura reticular de R-ad.

3.1. Propiedades reticulares de R–ad con R un anillo Artiniano semisimple

Como se mencionó en la Sección 1.3.1, R-ss es un gran marco y R-pretors es una retícula modular. No sabemos si R-ad es gran marco o una gran retícula modular para cualquier anillo R. Sin embargo, sí lo sabemos para R un anillo Artiniano semisimple. Para demostrar esto, necesitamos algunos resultados previos.

Lema 3.1 *Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z}$ cualesquiera clases de módulos. Si $\mathcal{X} \in L_{\{\leqslant, \oplus^n\}}$ o $\mathcal{X} \in L_{\{\twoheadrightarrow, \oplus^n\}}$, entonces*

$$\mathcal{X} \cap (\mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z}) = (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) \oplus (\mathcal{X} \cap \mathcal{Z})$$

Demostración:

($\subseteq$) Sea $M \in \mathcal{X} \cap (\mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z})$. Entonces existen $M_1 \in \mathcal{Y}$ y $M_2 \in \mathcal{Z}$ tales que $M \in \mathcal{X}$ y $M \cong M_1 \oplus M_2$. Como $\mathcal{X}$ es cerrada bajo submódulos, tenemos que $M_1, M_2 \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $M \in (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) \oplus (\mathcal{X} \cap \mathcal{Z})$.

($\supseteq$) Sea $M \in (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) \oplus (\mathcal{X} \cap \mathcal{Z})$. Entonces existen $M_1 \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ y $M_2 \in \mathcal{X} \cap \mathcal{Z}$ tales que $M \cong M_1 \oplus M_2$. Como $\mathcal{X}$ es cerrada bajo sumas directas finitas, tenemos que $M \in \mathcal{X}$. Por lo tanto, $M \in \mathcal{X} \cap (\mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z})$. ■

Proposición 3.2 *Sea R un anillo Artiniano semisimple y $\{\mathcal{X}_i\}_{i=1}^n$ una familia no vacía de clases aditivas. Entonces*

$$\bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i$$

Demostración:

($\subseteq$) Por el Teorema 2.10, tenemos que $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i \subseteq subquot(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i) = \bigvee_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i$.

($\supseteq$) Sea $M \in subquot(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i)$. Entonces existe el diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] & L \arrow[r] & 0 \\ & M \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

donde $K \in \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i$. Como R es Artiniano semisimple, tenemos que $K \cong \bigoplus_{i=1}^{n} K_i$, donde K_i es semisimple y $K_i \in \mathcal{X}_i$ para toda $i \in \{1, \ldots, n\}$. Es fácil ver que existen $M_i \leqslant K_i$ tales que $M \cong \bigoplus_{i=1}^{n} M_i$. Por lo tanto, $M \in \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{X}_i$. ■

Teorema 3.3 *Sea R un anillo Artiniano semisimple. Entonces R-ad es una gran retícula distributiva.*

Demostración:
Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \mathcal{Z} \in R$-ad. Por el Lema 3.1 y la Proposición 3.2, se sigue que

$$\mathcal{X} \wedge (\mathcal{Y} \vee \mathcal{Z}) = \mathcal{X} \cap (\mathcal{Y} \oplus \mathcal{Z}) = (\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) \oplus (\mathcal{X} \cap \mathcal{Z}) = (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}) \vee (\mathcal{X} \wedge \mathcal{Z}) \qquad ■$$

Sea Λ una retícula y $X \subseteq \Lambda$. Decimos que X es *dirigido* si para cualesquiera $a, b \in X$ existe $c \in X$ tal que $a \leqslant c$ y $b \leqslant c$. Decimos que Λ es *superiormente continua* si

$$a \wedge \left(\bigvee_{i \in I} b_i \right) = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i)$$

para cualquier $a \in \Lambda$ y para cualquier conjunto dirigido $\{b_i\}_{i \in I} \subseteq \Lambda$.

Teorema 3.4 *Sea R un anillo. Entonces R-ad es una gran retícula superiormente continua.*

Demostración:
Sea $\mathcal{X} \in R$-ad y $\{\mathcal{X}_i\}_{i \in I} \subseteq R$-ad un conjunto dirigido. Probaremos que

$$\mathcal{X} \wedge (\bigvee_{i \in I} \mathcal{X}_i) = \bigvee_{i \in I} (\mathcal{X} \wedge \mathcal{X}_i)$$

($\subseteq$) Sea $M \in \mathcal{X} \wedge (\bigvee_{i \in I} \mathcal{X}_i)$. Entonces $M \in \mathcal{X}$ y existe el diagrama

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{j=1}^{n} M_j \arrow[r] & K \arrow[r] & 0 \\ & M \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

donde $M_j \in \bigcup_{i\in I} \mathcal{X}_i$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces $M_j \in \mathcal{X}_{ij}$ y $\mathcal{X}_{ij} \in \{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Como $\{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ es un conjunto dirigido, existe $\mathcal{X}_\alpha \in \{\mathcal{X}_i\}_{i\in I}$ tal que $\mathcal{X}_{ij} \leqslant \mathcal{X}_\alpha$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. De aquí se sigue que $M_j \in \mathcal{X}_\alpha$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto, $\bigoplus_{j=1}^n M_j \in \mathcal{X}_\alpha$. Esto implica que $K \in \mathcal{X}_\alpha$ y así, $M \in \mathcal{X}_\alpha$. Se concluye que $M \in \mathcal{X} \wedge \mathcal{X}_\alpha \subseteq \bigvee_{i\in I}(\mathcal{X} \wedge \mathcal{X}_i)$.

($\supseteq$) Inmediata. ■

Corolario 3.5 *Sea R un anillo Artiniano semisimple. Entonces R-ad es un gran marco.*

Demostración:
Se sigue de los Teoremas 3.3 y 3.4, y de [18, Lema 1.6, p. 4]. ■

El Corolario 3.5 también se deduce del siguiente

Teorema 3.6 *Sea R un anillo Artiniano semisimple. Entonces R-ad $= R$-ss.*

Demostración:
($\subseteq$) Inmediata.

($\supseteq$) Dado que R es Artiniano semisimple, tenemos que toda sucesión exacta corta se escinde. Notemos que $\mathcal{X} \in R$-ad es cerrada bajo sucesiones exactas cortas que se escinden. Entonces, toda clase aditiva es cerrada bajo sucesiones exactas cortas. Por lo tanto, R-ad $\subseteq R$-ss. ■

Proposición 3.7 *Sea R un anillo Artiniano semisimple. Entonces R-fgssimp $= R$-mod.*

Demostración:
Como todo módulo es semisimple, entonces

$$R\text{-fgssimp} = R\text{-mod} \cap R\text{-ssimp} = R\text{-mod}$$ ■

3.2. Clases α-aditivas y u-cardinales

Si R es un anillo Artiniano semisimple, obtenemos una descripción completa de la estructura reticular de R-ad. Para mostrar esto, necesitamos la siguiente definición y algunas propiedades derivadas de la misma, todo esto para cualquier anillo R.

Definición 3.8 *Sea R un anillo, $\mathcal{X}$ una clase de módulos y $\kappa \in$ **ICn**.*

- *Llamamos* clase $(-\infty)$-aditiva generada por $\mathcal{X}$ *a la clase*

$$ad_{(-\infty)}(\mathcal{X}) := 0$$

- *Llamamos* clase κ-aditiva generada por $\mathcal{X}$ *a la clase*

$$ad_{\kappa}(\mathcal{X}) := \left\{ N \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\ 0 \to N \to K \ y \ (\bigoplus_{i\in I} M_i) \to K \to 0 \\ donde\ I\ es\ un\ conjunto\ tal\ que\ |I| < \kappa \\ y\ M_i \in \mathcal{X}\ \forall\ i \in I \end{array} \right\}$$

- *Llamamos* clase ∞-aditiva generada por $\mathcal{X}$ *a la clase*

$$ad_{\infty}(\mathcal{X}) := \left\{ N \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\ 0 \to N \to K \ y \ (\bigoplus_{i\in I} M_i) \to K \to 0 \\ donde\ I\ es\ un\ conjunto\ y\ M_i \in \mathcal{X}\ \forall\ i \in I \end{array} \right\}$$

Notemos que para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$, tenemos que $ad(\mathcal{X}) = ad_{\aleph_0}(\mathcal{X})$ y $\mathcal{X} \subseteq ad_{\kappa}(\mathcal{X})$ para toda $\kappa \in \mathbf{ICn} \cup \{\infty\}$.

Lema 3.9 *Sea R un anillo, $\mathcal{X} \in R$-ad y $\kappa \in \mathbf{ICn} \cup \{\infty\}$. Entonces*

$$cyc(\mathcal{X}) = cyc(ad_{\kappa}(\mathcal{X})) = cyc(ad_{\kappa}(cyc(\mathcal{X})))$$

Demostración:
Probaremos que $cyc(\mathcal{X}) = cyc(ad_{\kappa}(\mathcal{X}))$.

($\subseteq$) Como $\mathcal{X} \subseteq ad_{\kappa}(\mathcal{X})$, se sigue que $cyc(\mathcal{X}) \subseteq cyc(ad_{\kappa}(\mathcal{X}))$.

($\supseteq$) Sea $N \in cyc(ad_{\kappa}(\mathcal{X}))$. Entonces, existe un diagrama

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i\in I} M_i \arrow[r] & K \arrow[r] & 0 \\ & N \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

donde $|I| < \kappa$ y $M_i \in \mathcal{X}$ para toda $i \in I$. Dado que N es finitamente generado, existe $M_1, M_2, \ldots, M_t \in \{M_i\}_{i\in I}$ y un epimorfismo $\bigoplus_{\alpha=1}^{t} M_\alpha \to N \to 0$. Entonces, $\bigoplus_{\alpha=1}^{t} M_\alpha \in \mathcal{X}$. Esto implica que $N \in \mathcal{X}$. Por lo tanto $N \in cyc(\mathcal{X})$.

De manera similar se prueba que $cyc(\mathcal{X}) = cyc(ad_{\kappa}(cyc(\mathcal{X})))$. ■

Denotamos por $\overline{\mathbf{ICn}}$ a la unión $\mathbf{ICn} \cup \{-\infty, \infty\}$. Consideramos $-\infty$ y ∞ como el elemento menor y el elemento mayor en $\overline{\mathbf{ICn}}$, respectivamente.

Proposición 3.10 *Sea R un anillo y $\mathcal{X}$ una clase de módulos.*

(i) *Si $\kappa \in \overline{\mathbf{ICn}}$, entonces $ad_{\kappa}(\mathcal{X}) \in R$-ad.*

(ii) *$ad_{\infty}(\mathcal{X}) \in R$-pretors.*

(iii) *Si $\mathcal{X} \in R$-ad, entonces $ad_{\aleph_0}(cyc(\mathcal{X})) = bad(\mathcal{X})$ y $ad_{\infty}(cyc(\mathcal{X})) = strong(\mathcal{X})$.*

Demostración:

(i) Sea $\kappa \in \overline{\mathbf{ICn}}$. Por definición, $ad_\kappa(\mathcal{X})$ es cerrada bajo submódulos y cocientes. Ahora, sea $\{M_j\}_{j=1}^n$ una familia finita de elementos en $ad_\kappa(\mathcal{X})$. Entonces, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ existe un diagrama

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i\in I_j} M_{ij} \arrow[r] & K_j \arrow[r] & 0 \\ & M_j \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

donde I_j es un conjunto tal que $|I_j| < \kappa$ y $M_{ij} \in \mathcal{X}$ para toda $i \in I_j$. Sea T un conjunto tal que $|T| = \left|\bigsqcup_{j=1}^n \{M_{ij}\}_{i\in I_j}\right| = \sum_{j=1}^n |I_j|$. Esto implica que $|T| < \kappa$. Así, existe un diagrama

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{t\in T} M_t \arrow[r] & \bigoplus_{j=1}^{n} K_j \arrow[r] & 0 \\ & \bigoplus_{j=1}^{n} M_j \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

donde $\{M_t\}_{t\in T} = \bigsqcup_{j=1}^n \{M_{ij}\}_{i\in I_j}$. Por lo tanto, $\bigoplus_{j=1}^n M_j \in ad_\kappa(\mathcal{X})$.

(ii) Por (i), solo necesitamos probar que $ad_\infty(\mathcal{X})$ es cerrada bajo sumas directas arbitrarias. Sea $\{M_j\}_{j\in J}$ una familia de elementos en $ad_\infty(\mathcal{X})$. Entonces, para cada $j \in J$ existe un diagrama

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{i\in I_j} M_{ij} \arrow[r] & K_j \arrow[r] & 0 \\ & M_j \arrow[u] & \\ & 0 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

donde I_j es un conjunto y $M_{ij} \in \mathcal{X}$ para toda $i \in I_j$. Sea T un conjunto tal que $|T| = \left|\bigsqcup_{j\in J} \{M_{ij}\}_{i\in I}\right| = \sum_{j\in J} |I_j|$. Entonces, existe un diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\bigoplus_{t\in T} M_t \arrow[r] & \bigoplus_{j\in J} K_j \arrow[r] & 0 \\
 & \bigoplus_{j\in J} M_j \arrow[u] & \\
 & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}
$$

donde $\{M_t\}_{t\in T} = \bigsqcup_{j\in J}\{M_{ij}\}_{i\in I}$. Por lo tanto, $\bigoplus_{j\in J} M_j \in ad_{\infty}(\mathcal{X})$.

(iii) Sea $\mathcal{X} \in R$-ad. La primera igualdad es verdadera por definición. La segunda es verdadera por (ii) y por el Lema 3.9. ■

Lema 3.11 *Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ clases de módulos y $\kappa, \eta \in \overline{\mathbf{ICn}}$. Si $\kappa \leqslant \eta$ y $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, entonces*

$$
\begin{array}{ccc}
ad_{\kappa}(\mathcal{X}) & \subseteq & ad_{\eta}(\mathcal{X}) \\
\rotatebox{90}{$\supseteq$} & & \rotatebox{90}{$\supseteq$} \\
ad_{\kappa}(\mathcal{Y}) & \subseteq & ad_{\eta}(\mathcal{Y})
\end{array}
$$

Demostración:
Inmediato. ■

Sea R un anillo cualquiera. Como se ve en el Lema 3.11, el orden total de los números cardinales pareciera que se hereda a las clases κ-aditivas. Por otro lado, si $\mathcal{X} \in R$-ad, entonces por la Proposición 2.29, a $cyc(\mathcal{X})$ le corresponde el filtro lineal $\mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$ y esta correspondencia es suprayectiva. Por el Lema 3.9, para cada clase aditiva $\mathcal{X}$ y cada $\kappa \in \mathbf{ICn} \cup \{\infty\}$, tenemos que $ad_{\kappa}(cyc(\mathcal{X}))$ está asociado a $\mathfrak{F}_{\mathcal{X}}$.

Así, para cada $\mathcal{X} \in R$-ad, el intervalo $[ad_{\aleph_0}(cyc(\mathcal{X})), ad_{\infty}(cyc(\mathcal{X}))]$ contiene a la clase $\{ad_{\kappa}(\mathcal{X}) \mid \kappa \in \mathbf{ICn} \cup \{\infty\}\}$. Sin embargo, no sabemos si $\mathcal{X}$ y $ad_{\kappa}(cyc(\mathcal{X}))$ son comparables en su intervalo para cualquier anillo R. Por tanto, para cualquier anillo R, los intervalos en R-ad no están completamente descritos.

Sin embargo, para anillos uniseriales (ver Definición 4.3) tenemos una completa descripción de cada uno de esos intervalos. En la Sección 3.3, mostramos esta descripción para anillos Artinianos semisimples. En la Sección 5.1, mostramos esta descripción para anillos uniseriales.

De aquí en adelante, consideramos a R como un anillo Artiniano semisimple. Por el Teorema de Artin-Wedderburn consideremos $R \cong \prod_{j=1}^{n} R_j$, con R_j un anillo Artiniano simple para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Denotemos como R-simp a un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de módulos simples en R-Mod. Así, consideraremos R-simp $= \{S_j\}_{i=1}^{n}$ donde

$$S_j := R(0, \ldots, 0, \underbrace{e_j}_{\text{coordenada } j}, 0, \ldots, 0)$$

donde R_je_j es un ideal mínimo de R_j. Como R es semisimple, todo módulo $M \in R$-Mod es suma directa de módulos simples. Así, tenemos que

$$M \cong \bigoplus_{j=1}^{n} S_j^{(\alpha_j)}$$

donde $0 \leqslant \alpha_j \in \mathbf{Cn}$ para toda $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Por el Teorema de Krull-Schmidt-Remak-Azumaya [11, Teorema 2.12], tenemos que cualesquiera dos descomposiciones de un módulo semisimple en sumandos directos simples son equivalentes, es decir, si M es un módulo tal que $M = \oplus_{i\in I} N_i = \oplus_{j\in J} K_j$ donde N_i y K_j son módulos simples no cero para cada $i \in I$ y cada $j \in J$, entonces existe una correspondencia biyectiva $\varphi : I \to J$ tal que $N_i \cong M_{\varphi(i)}$ para cada $i \in I$. Como consecuencia de este último teorema, tenemos que todo submódulo y todo cociente de un módulo semisimple M son semisimples y tales que sus sumandos directos simples son un subconjunto de los sumandos directos simples de M.

Consideremos R-simp $= \{S_j\}_{j=1}^n$. Por la Definición 3.8, tenemos que

$$ad_\kappa(S_j) := ad_\kappa(\{0, S_j\}) = \left\{M \,\middle|\, M \cong S_j^{(\eta)} \text{ donde } \eta < \kappa\right\}$$

para toda $\kappa \in \mathbf{ICn}$,

$$ad_{-\infty}(S_j) := ad_{-\infty}(\{0, S_j\}) = \{M \mid M \cong 0\}$$

y

$$ad_\infty(S_j) := ad_\infty(\{0, S_j\}) = \left\{M \,\middle|\, M \cong S_j^{(\eta)} \text{ donde } \eta \in \mathbf{Cn}\right\}$$

Ahora, sean $\kappa_1, \ldots, \kappa_m \in \overline{\mathbf{ICn}}$. Definimos la clase *$u$-cardinal de la n-tupla* $(\kappa_j)_{j=1}^n$ como

$$\mathcal{U}((\kappa_j)_{j=1}^n) := \bigoplus_{j=1}^{n} ad_{\kappa_j}(S_j)$$

Notemos que $S_j \in \mathcal{U}((\kappa_j)_{j=1}^n)$ si y sólo si $\kappa_j \neq -\infty$. Estas clases de módulos son de gran ayuda para describir la estructura reticular de R-ad.

Ejemplo 3.12 *Sea $R = \mathbb{Z}_{30} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$. Notemos que R tiene sólo tres ideales máximos: $R\overline{15}, R\overline{10}$ y $R\overline{6}$. Entonces R-simp $= \{S_1, S_2, S_3\}$. Estamos llamando S_1, S_2 y S_3 a los cocientes $R/R\overline{15}, R/R\overline{10}$ y $R/R\overline{6}$, respectivamente. Sean $\kappa_1 = \aleph_0^+$, $\kappa_2 = -\infty$ y $\kappa_3 = \aleph_0$. Entonces, la clase u-cardinal de la 3-tupla $(\aleph_0^+, -\infty, \aleph_0)$ es*

$$\begin{aligned}\mathcal{U}((\aleph_0^+, -\infty, \aleph_0)) &= ad_{\aleph_0^+}(S_1) \oplus ad_{-\infty}(S_2) \oplus ad_{\aleph_0}(S_3)\\ &= ad_{\aleph_0^+}(S_1) \oplus ad_{\aleph_0}(S_3)\\ &= \left\{M \,\middle|\, M \cong S_1^{(\lambda)} \oplus S_3^{(n)}, \text{ donde } \lambda < \aleph_0^+ \text{ y } n \in \mathbb{N}\right\}\end{aligned}$$

Proposición 3.13 *Sea R un anillo Artiniano semisimple tal que $|R\text{-}simp| = n$. Entonces $\mathcal{U}((\kappa_j)_{j=1}^n) \in R\text{-}ad$ para cualesquiera $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in \overline{\mathbf{ICn}}$.*

Demostración:
Sean $\kappa_1, \ldots, \kappa_n \in \overline{\mathbf{ICn}}$ y R-simp $= \{S_j\}_{j=1}^n$. Por el Teorema 3.2, tenemos que

$$\mathcal{U}((\kappa_j)_{j=1}^n) = \bigoplus_{j=1}^n ad_{\kappa_j}(S_j) = \bigvee_{j=1}^n ad_{\kappa_j}(S_j) \in R\text{-ad}$$

■

3.3. Tamaño aditivo. Descripción de la retícula R-ad para anillos Artinianos semisimples

Sea R un anillo Artiniano semisimple tal que $|R\text{-simp}| = n$. Consideremos la clase $\mathbb{U} = \left\{\mathcal{U}((\kappa_j)_{j=1}^n) \mid \kappa_j \in \overline{\mathbf{ICn}} \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, n\}\right\}$. La Proposición 3.13 muestra que $\mathbb{U} \subseteq R$-ad. Para probar que R-ad $\subseteq \mathbb{U}$, introducimos un par de definiciones que se derivan del siguiente lema. Dichas definiciones son necesarias para describir un orden parcial en R-ad.

Lema 3.14 *Sea R un anillo, $\mathcal{X} \in R\text{-}ad$, $\kappa \in$ **ICn** y $M \in R\text{-}Mod$.*

(i) Si $M^{(\kappa)} \notin \mathcal{X}$, entonces $M^{(\eta)} \notin \mathcal{X}$ para toda $\eta \geqslant \kappa$.

(i) Si $M^{(\kappa)} \in \mathcal{X}$, entonces $M^{(\eta)} \in \mathcal{X}$ para toda $\eta \leqslant \kappa$.

Demostración:
Inmediato. ■

Definición 3.15 *Sea R un anillo, $\mathcal{X} \in R\text{-}ad$, $\kappa \in$ **ICn** y $M \in R\text{-}Mod$. Definimos el* tamaño aditivo de M en $\mathcal{X}$, *denotado como $size_{\mathcal{X}}(M)$, de la siguiente manera:*

- *$size_{\mathcal{X}}(M) = -\infty$ si $M \notin \mathcal{X}$.*
- *$size_{\mathcal{X}}(M) = \kappa$ si $M^{(\eta)} \notin \mathcal{X}$ para todo $\eta \geqslant \kappa$ y κ es el menor número cardinal con esta propiedad.*
- *$size_{\mathcal{X}}(M) = \infty$ si $M^{(\eta)} \in \mathcal{X}$ para todo $\eta \in$ **Cn**.*

Definición 3.16 *Sea R un anillo Artiniano semisimple con $R\text{-}simp = \{S_j\}_{j=1}^n$. Sea $\mathcal{X} \in R\text{-}ad$. Para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$, sea $\kappa_j = size_{\mathcal{X}}(S_j)$ donde $\kappa_j \in \overline{\mathbf{ICn}}$. Definimos el* tamaño simple aditivo de $\mathcal{X}$ *como la n-tupla $(\kappa_j)_{j=1}^n$. Denotamos esto como $Size(\mathcal{X})$.*

Sea $(\overline{\mathbf{ICn}})^n$ el producto Cartesiano de n copias de $\overline{\mathbf{ICn}}$ y consideremos el orden parcial del producto sobre él, dado por:

$$(\kappa_j)_{j=1}^n \leqslant (\eta_j)_{j=1}^n \quad \text{si y sólo si} \quad \kappa_j \leqslant \eta_j \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, n\}$$

Notemos que el ínfimo es

$$(\kappa_j)_{j=1}^n \wedge (\eta_j)_{j=1}^n = (\kappa_j \wedge \eta_j)_{j=1}^n = (\inf\{\kappa_j, \eta_j\})_{j=1}^n$$

y el supremo es

$$(\kappa_j)_{j=1}^n \vee (\eta_j)_{j=1}^n = (\kappa_j \vee \eta_j)_{j=1}^n = (\sup\{\kappa_j, \eta_j\})_{j=1}^n$$

Gracias a lo anterior y a que la clase de todos los números cardinales está bien ordenada, se concluye que $(\overline{\mathbf{ICn}})^n$ es una gran retícula completa. Los siguientes teoremas muestran que existe una relación entre el tamaño simple aditivo y las clases u-cardinales.

Teorema 3.17 *Sea R un anillo Artiniano semisimple tal que $|R\text{-}simp| = n$. Entonces la correspondencia*

$$\begin{array}{rcl} Size : R\text{-}ad & \to & \left(\overline{\mathbf{ICn}}\right)^n \\ \mathcal{X} & \mapsto & Size(\mathcal{X}) \end{array}$$

es biyectiva.

Demostración:
Consideremos R-simp $= \{S_j\}_{j=1}^n$.

<u>$Size$ es inyectiva</u>: Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in R$-ad. Supongamos que $Size(\mathcal{X}) = (\kappa_j)_{j=1}^n = Size(\mathcal{Y})$. Sea $N = \bigoplus_{j=1}^n S_j^{(\eta_j)} \in \mathcal{X}$, donde $\eta_j \in \mathbf{Cn}$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Si $\kappa_j = -\infty$, entonces $\eta_j = 0$. Si $\kappa_j \in \mathbf{ICn} \cup \{\infty\}$, entonces $\eta_j < \kappa_j$. Así, por el Lema 3.14, tenemos que $S_j^{(\eta_j)} \in \mathcal{Y}$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto, $N \in \mathcal{Y}$. Se concluye que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. De la misma manera se prueba que $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$.

<u>$Size$ es suprayectiva</u>: Sea $(\kappa_j)_{j=1}^n \in \overline{\mathbf{ICn}}$. Probaremos que $Size(\mathcal{U}((\kappa_j)_{j=1}^n)) = (\kappa_j)_{j=1}^n$. Para ello, es suficiente probar que $size_{ad_{\kappa_j}(S_j)}(S_j) = \kappa_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Tomemos $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$.

- Si $\kappa_{j_0} = -\infty$, entonces $S_{j_0} \notin ad_{\kappa_{j_0}}(S_{j_0})$. Por lo tanto, $size_{ad_{\kappa_{j_0}}(S_{j_0})}(S_{j_0}) = -\infty = \kappa_{j_0}$.

- Si $\kappa_{j_0} \in \mathbf{ICn}$, entonces $S_{j_0}^{(\eta)} \in ad_{\kappa_{j_0}}(S_{j_0})$ para todo $\eta < \kappa_{j_0}$. Notemos que $S_{j_0}^{(\lambda)} \notin ad_{\kappa_{j_0}}(S_{j_0})$ para todo $\lambda \geqslant \kappa_{j_0}$ y κ_{j_0} es el menor número cardinal con esta propiedad. Por lo tanto, $size_{ad_{\kappa_{j_0}}(S_{j_0})}(S_{j_0}) = \kappa_{j_0}$.

- Si $\kappa_{j_0} = \infty$, entonces $S_{j_0}^{(\eta)} \in ad_{\kappa_{j_0}}(S_{j_0})$ para todo $\eta \in \mathbf{Cn}$. Por lo tanto, $size_{ad_{\kappa_{j_0}}(S_{j_0})}(S_{j_0}) = \infty = \kappa_{j_0}$.

Por lo tanto, $Size(\mathcal{U}((\kappa_j)_{j=1}^n)) = (\kappa_j)_{j=1}^n$. ∎

Corolario 3.18 *Sea R un anillo Artiniano semisimple tal que $|R\text{-}simp| = n$. Entonces*

$$R\text{-}ad = \mathbb{U} = \{\mathcal{U}((\kappa_j)_{j=1}^n) \mid \kappa_j \in \overline{\mathbf{ICn}} \text{ para cada } j = 1, \ldots, n\}$$

Demostración:

($\subseteq$) Sea $\mathcal{X} \in R$-ad. Consideremos la clase $\mathcal{U}(Size(\mathcal{X}))$. Por el Teorema 3.17, tenemos que $\mathcal{X} = \mathcal{U}(Size(\mathcal{X})) \in \mathbb{U}$.

($\supseteq$) Se sigue de la Proposición 3.13. ∎

Teorema 3.19 *Sea R un anillo Artiniano semisimple tal que $|R\text{-}simp| = n$.*

(*i*) *La correspondencia*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U} : \left(\overline{\mathbf{ICn}}\right)^n & \rightarrow & R\text{-}ad \\ (\kappa_j)_{j=1}^n & \mapsto & \mathcal{U}((\kappa_j)_{j=1}^n) \end{array}$$

es inversa de Size.

(*ii*) *Las correspondencias Size y $\mathcal{U}$ preservan el orden.*

Demostración:

Consideremos R un anillo Artiniano semisimple tal que R-simp $= \{S_j\}_{j=1}^n$.

(*i*) Se sigue del Teorema 3.17 y del Corolario 3.18.

(*ii*) <u>$Size$ preserva el orden</u>: Supongamos que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. Por el Corolario 3.18, tenemos que $\mathcal{X} = \mathcal{U}(Size(\mathcal{X})) = \mathcal{U}((\kappa_j)_{j=1}^n)$ y $\mathcal{Y} = \mathcal{U}(Size(\mathcal{Y})) = \mathcal{U}((\eta_j)_{j=1}^n)$. Entonces, $ad_{\kappa_j}(S_j) \subseteq ad_{\eta_j}(S_j)$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Si sucede que $\eta_j < \kappa_j$, entonces $S_j^{(\eta_j)} \in ad_{\kappa_j}(S_j) \subseteq ad_{\eta_j}(S_j)$. Esto implica que $\eta_j < \eta_j$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $\kappa_j \leqslant \eta_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Esto implica que $Size(\mathcal{X}) \leqslant Size(\mathcal{Y})$.

(*ii*) <u>$\mathcal{U}$ preserva el orden</u>: Supongamos que $(\kappa_j)_{j=1}^n = Size(\mathcal{X}) \leqslant Size(\mathcal{Y}) = (\eta_j)_{j=1}^n$. Entonces $\kappa_j \leqslant \eta_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por la Proposición 3.11 (*i*), tenemos que $ad_{\kappa_j}(S_j) \subseteq ad_{\eta_j}(S_j)$ para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces $\mathcal{U}(Size(\mathcal{X})) \subseteq \mathcal{U}(Size(\mathcal{Y}))$. Por el Corolario 3.18, se sigue que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. ∎

Finalmente, juntando todos estos hechos, concluimos que R-ad y $(\overline{\mathbf{ICn}})^m$ son isomorfas como grandes retículas, como se muestra en el siguiente corolario.

Corolario 3.20 *Sea R un anillo Artiniano semisimple tal que $|R\text{-}simp| = n$. Entonces, existe un isomorfismo de retículas entre R-ad e $(\overline{\mathbf{ICn}})^n$.*

Demostración:

Se sigue de los Teoremas 3.17 y 3.19. ∎

Ejemplo 3.21 *Sea $R = \mathbb{Z}_p$ donde p es un número primo. Tenemos que R es un anillo Artiniano simple. Así, tenemos que R-simp $= \{S_1\}$. Entonces, para cada clase aditiva $\mathcal{X}$ existe $\kappa \in \overline{\mathbf{ICn}}$ tal que $\mathcal{X} = \mathcal{U}(\kappa)$. El diagrama de Hasse de $\mathbb{Z}_p$-ad se muestra en la Figura 3.1.*

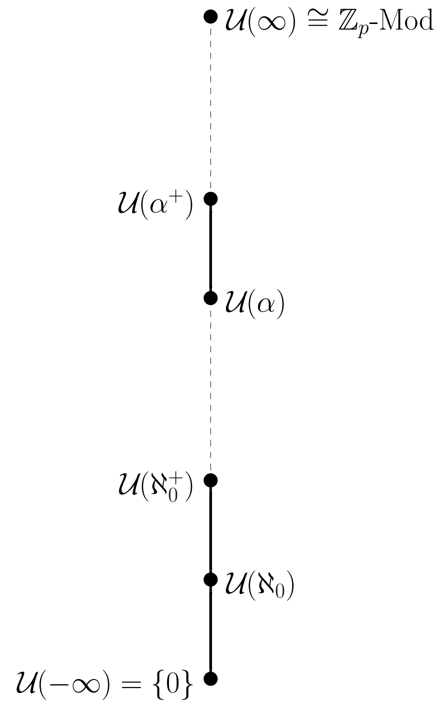


Figura 3.1: **Diagrama de Hasse de $\mathbb{Z}_p$-ad donde p es cualquier número primo.**

Ejemplo 3.22 *Sea $R = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ donde p y q son cualesquiera dos números primos diferentes. Notemos que R tiene sólo dos ideales máximos no isomorfos: $R(\overline{0}, \overline{1})$ y $R(\overline{1}, \overline{0})$. Entonces R-simp $= \{S_1, S_2\}$. Estamos llamando S_1 y S_2 a los cocientes $R/R(\overline{0}, \overline{1})$ y $R/R(\overline{1}, \overline{0})$, respectivamente. Entonces, para cada clase aditiva $\mathcal{X}$ existen $\kappa_1, \kappa_2 \in \overline{\mathbf{ICn}}$ tales que $\mathcal{X} = \mathcal{U}(\kappa_1, \kappa_2)$. El diagrama de Hasse de $(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$-ad se muestra en la Figura 3.2.*

Ejemplo 3.23 *Sea $R = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r$ donde p, q y r son cualesquiera tres números primos distintos. Notemos que R tiene sólo tres ideales máximos: $R(\overline{0}, \overline{1}, \overline{1}), R(\overline{1}, \overline{0}, \overline{1})$ y $R(\overline{1}, \overline{1}, \overline{0})$. Entonces R-simp $= \{S_1, S_2, S_3\}$. Estamos llamando S_1, S_2 y S_3 a los cocientes $R/R(\overline{0}, \overline{1}, \overline{1})$, $R/R(\overline{1}, \overline{0}, \overline{1})$ y $R/R(\overline{1}, \overline{1}, \overline{0})$, respectivamente. Entonces, para cada clase aditiva $\mathcal{X}$ existen $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3 \in \overline{\mathbf{ICn}}$ tales que $\mathcal{X} = \mathcal{U}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$. El diagrama de Hasse de R-ad se muestra en la Figura 3.3.*

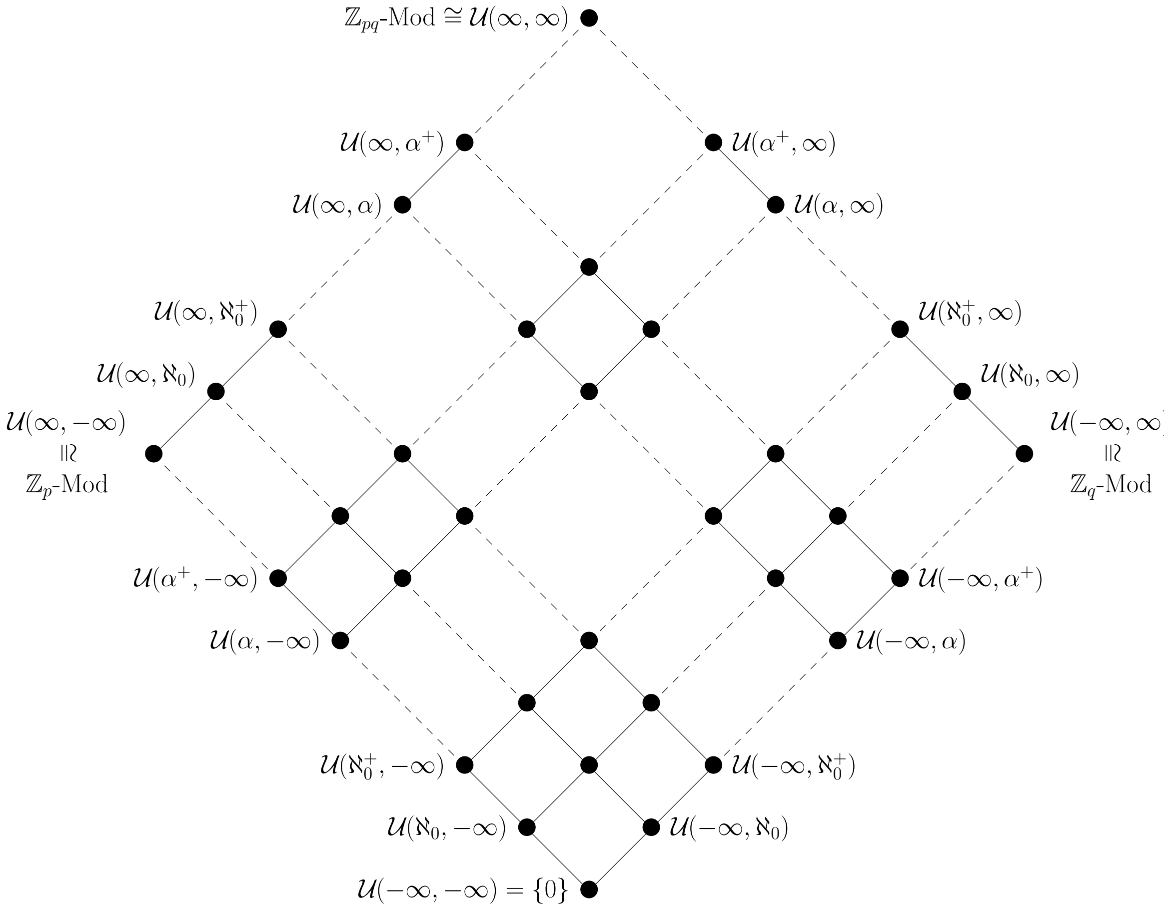


Figura 3.2: **Diagrama de Hasse de $(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$-ad donde p y q son cualesquiera dos números primos distintos.**

Los puntos gruesos en la Figura 3.3 representan a las siguientes clases:

A: $\mathcal{U}(-\infty,-\infty,-\infty)$, *la clase cero.*

B: $\mathcal{U}(-\infty,\infty,-\infty)$ *isomorfo a* $\mathbb{Z}_q$*-Mod.*

C: $\mathcal{U}(\infty,-\infty,-\infty)$ *isomorfo a* $\mathbb{Z}_p$*-Mod.*

D: $\mathcal{U}(\infty,\infty,-\infty)$ *isomorfo a* $(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$*-Mod.*

E: $\mathcal{U}(-\infty,-\infty,\infty)$ *isomorfo a* $\mathbb{Z}_r$*-Mod.*

F: $\mathcal{U}(-\infty,\infty,\infty)$ *isomorfo a* $(\mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r)$*-Mod.*

G: $\mathcal{U}(\infty,-\infty,\infty)$ *isomorfo a* $(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_r)$*-Mod.*

H: $\mathcal{U}(\infty,\infty,\infty)$ *isomorfo a* R*-Mod.*

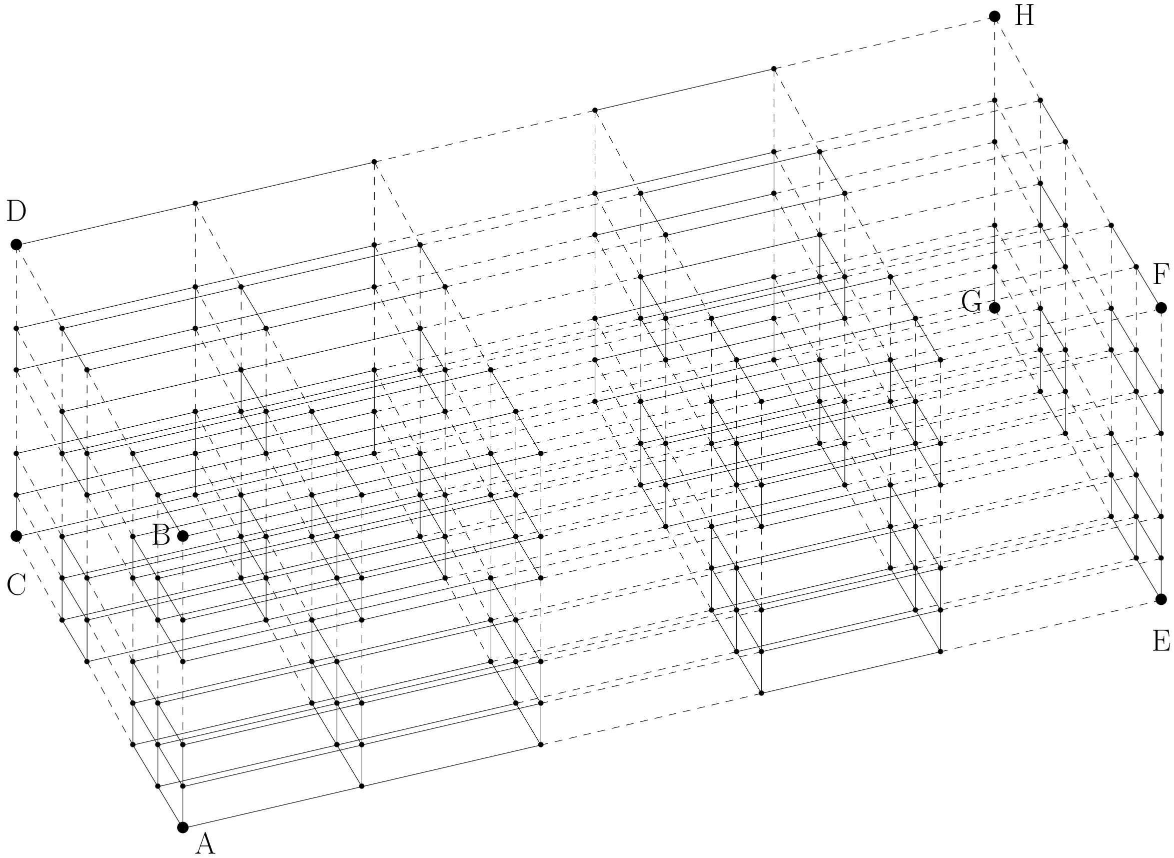


Figura 3.3: **Diagrama de Hasse de ($\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r$)-ad donde p, q y r son cualesquiera tres números primos distintos.**

3.4. Descripciones de R-bad y R-pretors para anillos Artinianos semisimples

En esta sección, caracterizamos las clases R-bad y R-pretors cuando R es un anillo Artiniano semisimple. Además, describimos los átomos e intervalos en la gran retícula R-ad. Para cualquier clase de módulos $\mathcal{X}$, denotamos por $simp(\mathcal{X})$ a un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de módulos simples en $\mathcal{X}$.

Lema 3.24 *Sea R un anillo Artiniano semisimple tal que $|R\text{-}simp| = n$. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in R\text{-ad}$. Entonces, $cyc(\mathcal{X}) = cyc(\mathcal{Y})$ si y sólo si $simp(\mathcal{X}) = simp(\mathcal{Y})$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Supongamos que $cyc(\mathcal{X}) = cyc(\mathcal{Y})$. Como $simp(\mathcal{X}) \subseteq cyc(\mathcal{X})$, se sigue que $simp(\mathcal{X}) \subseteq cyc(\mathcal{Y})$. Por lo tanto, $simp(\mathcal{X}) \subseteq simp(\mathcal{Y})$. Similarmente, se prueba que $simp(\mathcal{Y}) \subseteq simp(\mathcal{X})$. Por lo tanto, $simp(\mathcal{X}) = simp(\mathcal{Y})$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $simp(\mathcal{X}) = simp(\mathcal{Y})$. Sea $C \in cyc(\mathcal{X})$. Como R es Artiniano semisimple, tenemos que C es una suma directa finita de módulos simples en $\mathcal{X}$. Por hipótesis, tenemos que C es una suma directa finita de módulos simples en $\mathcal{Y}$. Por lo tanto, $C \in \mathcal{Y}$ y así, $C \in cyc(\mathcal{Y})$. Concluimos que $cyc(\mathcal{X}) \subseteq cyc(\mathcal{Y})$. Similarmente, se prueba que $cyc(\mathcal{Y}) \subseteq cyc(\mathcal{X})$. Por lo tanto, $cyc(\mathcal{X}) = cyc(\mathcal{Y})$. ■

Teorema 3.25 *Sea R un anillo Artiniano semisimple tal que $|R\text{-}simp| = n$. Entonces,*

(i) $R\text{-}bad = \{\mathcal{U}((\alpha_j)_{j=1}^n) \mid (\alpha_j)_{j=1}^n \in (\{-\infty, \aleph_0\})^n\}$, *y*

(ii) $R\text{-}pretors = \{\mathcal{U}((\beta_j)_{j=1}^n) \mid (\beta_j)_{j=1}^n \in (\{-\infty, \infty\})^n\}$.

Demostración:

(i) Sea $\mathcal{B} = \{\mathcal{U}((\alpha_j)_{j=1}^n) \mid (\alpha_j)_{j=1}^n \in (\{-\infty, \aleph_0\})^n\}$. Probaremos que R-bad $= \mathcal{B}$.

($\subseteq$) Sea $\mathcal{X} \in R$-bad tal que $Size(\mathcal{X}) = (\kappa_j)_{j=1}^n$. Por el Corolario 3.18, tenemos que $\mathcal{X} = \mathcal{U}((\kappa_j)_{j=1}^n)$. Dado que toda clase aditiva acotada está determinada de forma única por los módulos cíclicos que contiene, y por la Proposición 3.10, tenemos que $(\kappa_j)_{j=1}^n \in (\{-\infty, \aleph_0\})^n$. Por lo tanto, $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$.

($\supseteq$) Sea $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$. Por el Corolario 3.18, tenemos que $\mathcal{X} \in R$-ad. Sea $\mathcal{Y} \in R$-ad tal que $cyc(\mathcal{X}) = cyc(\mathcal{Y})$. Entonces, $simp(\mathcal{X}) = simp(\mathcal{Y})$ por el Lema 3.24. De esta manera, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ por el Teorema 3.19 (ii). Por lo tanto, $\mathcal{X} \in R$-bad.

(ii) Sea $\mathcal{C} = \{\mathcal{U}((\beta_j)_{j=1}^n) \mid (\beta_j)_{j=1}^n \in (\{-\infty, \infty\})^n\}$. Probaremos que R-pretors $= \mathcal{C}$.

($\subseteq$) Sea $\mathcal{X} \in R$-pretors tal que $Size(\mathcal{X}) = (\kappa_j)_{j=1}^n$. Por el Corolario 3.18, tenemos que $\mathcal{X} = \mathcal{U}((\kappa_j)_{j=1}^n)$. Notemos que $(\kappa_j)_{j=1}^n \in (\{-\infty, \infty\})^n$. Por lo tanto, $\mathcal{X} \in \mathcal{C}$.

($\supseteq$) Sea $\mathcal{X} \in \mathcal{C}$. Por la Proposición 3.13, tenemos que $\mathcal{X} \in R$-ad. Por definición de la clase $\mathcal{C}$, tenemos que $\mathcal{X}$ es cerrada bajo sumas directas arbitrarias. Por lo tanto, $\mathcal{X} \in R$-pretors. ■

Corolario 3.26 *Sea R un anillo Artiniano semisimple tal que $|R\text{-}simp| = n$. Entonces, $|R\text{-}bad| = |R\text{-}pretors| = 2^n$.*

Siguiendo al Teorema 3.25, podemos generar una clase aditiva acotada y una clase de pretorsión hereditaria de cada clase aditiva $\mathcal{X}$ de la siguiente forma:

Sea $\mathcal{X} \in R$-ad tal que $Size(\mathcal{X}) = (\kappa_j)_{j=1}^n$. Sean $(\alpha_j)_{j=1}^n, (\beta_j)_{j=1}^n \in (\overline{\mathbf{ICn}})^n$ tales que

$$\alpha_j = \begin{cases} \aleph_0 & \text{si } \kappa_j \neq -\infty \\ -\infty & \text{otro caso} \end{cases} \tag{3.1}$$

y

$$\beta_j = \begin{cases} \infty & \text{si } \kappa_j \neq -\infty \\ -\infty & \text{otro caso} \end{cases} \tag{3.2}$$

para cada $j \in \{1 \ldots, n\}$. Entonces, por el Teorema 3.25, tenemos que $\mathcal{U}((\alpha_j)_{j=1}^n) \in R$-bad y $\mathcal{U}((\beta_j)_{j=1}^n) \in R$-pretors.

Teorema 3.27 *Sea R un anillo Artiniano semisimple tal que $|R\text{-simp}| = n$. Si $\mathcal{X} \in R\text{-ad}$, entonces $bad(\mathcal{X}) = \mathcal{U}((\alpha_j)_{j=1}^n)$ y $strong(\mathcal{X}) = \mathcal{U}((\beta_j)_{j=1}^n)$, donde cada α_j satisface la Ecuación 3.1 y cada β_j satisface la Ecuación 3.2.*

Demostración:
Primero, probaremos que $bad(\mathcal{X}) = \mathcal{U}((\alpha_j)_{j=1}^n)$.

Dado que $cyc(\mathcal{X}) = cyc(bad(\mathcal{X}))$, tenemos que $simp(\mathcal{X}) = simp(bad(\mathcal{X}))$ por el Lema 3.24. Por el Teorema 3.25 (i), concluimos que $bad(\mathcal{X}) = \mathcal{U}((\alpha_j)_{j=1}^n)$.

Similarmente, por el Lema 3.24 y el Teorema 3.25 (ii), se prueba que $strong(\mathcal{X}) = \mathcal{U}((\beta_j)_{j=1}^n)$. ■

Recordemos que en la Sección 2.4 probamos que existe una asignación suprayectiva ϕ de las clases aditivas hacia los filtros lineales del anillo. Para una clase aditiva $\mathcal{X}$, denotamos por $[\mathcal{X}]_{\sim_\phi}$ a la clase de todas las clases aditivas que tienen asociado el mismo filtro lineal que $\mathcal{X}$. Probamos que $[\mathcal{X}]_{\sim_\phi} = [bad(\mathcal{X}), strong(\mathcal{X})]$ (Teorema 2.32) y que la familia $\{[bad(\mathcal{X}), strong(\mathcal{X})] \mid \mathcal{X} \in R\text{-ad}\}$ forma una partición de R-ad (Corolario 2.33).

Corolario 3.28 *Sea R un anillo Artiniano semisimple tal que $|R\text{-simp}| = n$. Si $\mathcal{X} \in R\text{-ad}$, entonces el intervalo de clases aditivas asociado al filtro lineal $\phi(\mathcal{X})$ es $[\mathcal{U}((\alpha_j)_{j=1}^n), \mathcal{U}((\beta_j)_{j=1}^n)]$, donde cada α_j satisface la Ecuación 3.1 y cada β_j satisface la Ecuación 3.2. Por lo tanto, R-ad está particionado en 2^n intervalos de la forma $[\mathcal{U}((\alpha_j)_{j=1}^n), \mathcal{U}((\beta_j)_{j=1}^n)]$.*

Demostración:
Se sigue del Teorema 3.27 y del Corolario 3.26. ■

Notemos que si $\mathcal{X} = \{0\}$, entonces

$$\mathcal{U}((\alpha_j)_{j=1}^n) = \mathcal{U}((\beta_j)_{j=1}^n) = \mathcal{U}(\underbrace{-\infty, -\infty, \ldots, -\infty}_{n \text{ veces}}) = \{0\}$$

y así, $[\mathcal{U}((\alpha_j)_{j=1}^n), \mathcal{U}((\beta_j)_{j=1}^n)]$ es un intervalo que consta de una sola clase aditiva, la clase cero.

Teorema 3.29 *Sea R un anillo Artiniano semisimple. Entonces*

$$|R\text{-}simp| = n \quad \text{si y sólo si} \quad atm(R\text{-}ad) = n$$

Demostración:

($\Rightarrow$) Sea $|R\text{-simp}| = n$. Consideremos $R\text{-simp} = \{S_j\}_{j=0}^n$. Por la Proposición 2.23, tenemos que $ad_{\aleph_0}(S_j)$ es un átomo en R-ad para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$. Por el Teorema 2.25, concluimos que $atm(R\text{-ad}) = n$.

($\Leftarrow$) Sea $atm(R\text{-ad}) = n$. Por el Teorema 2.25, tenemos que existen $S_{p_1}, \ldots, S_{p_n} \in R\text{-simp}$, donde $S_{p_i} \ncong S_{p_j}$ como R-módulos para todo $i \neq j$. Sea $S \in R\text{-simp}$. Por la Proposición 2.23 concluimos que $S \cong S_{p_j}$ para alguna j. Por lo tanto, $|R\text{-simp}| = n$. ■

Ejemplo 3.30 *Sea $R = \mathbb{Z}_p$ como en el Ejemplo 3.21. Por el Teorema 3.29, R-ad tiene sólo un átomo, $\mathcal{U}(\aleph_0)$. Por el Corolario 3.28, R-ad está particionada en dos intervalos:*

$\mathscr{A}$: $[\mathcal{U}(-\infty), \mathcal{U}(-\infty)] = \{0\}$

$\mathscr{B}$: $[\mathcal{U}(\aleph_0), \mathcal{U}(\infty)]$

De esta manera, cada clase aditiva pertenece a exactamente uno de estos dos intervalos. Dichos intervalos se muestran en la Figura 3.4.

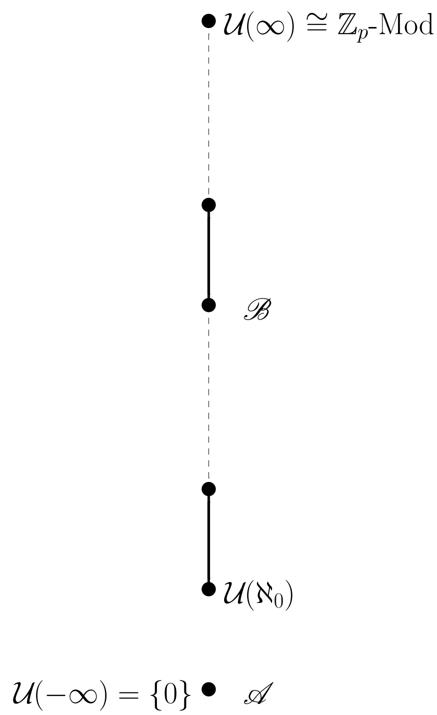


Figura 3.4: **Diagrama de Hasse de cada intervalo en $\mathbb{Z}_p$-ad con p cualquier número primo.**

Ejemplo 3.31 *Sea $R = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ como en el Ejemplo 3.22. Por el Teorema 3.29, R-ad tiene dos átomos, $\mathcal{U}(\aleph_0, -\infty)$ y $\mathcal{U}(-\infty, \aleph_0)$. Por el Corolario 3.28, R-ad está particionado en cuatro intervalos:*

$\mathscr{A}$: $[\mathcal{U}(-\infty, -\infty), \mathcal{U}(-\infty, -\infty)] = \{0\}$

$\mathscr{B}$: $[\mathcal{U}(\aleph_0, -\infty), \mathcal{U}(\infty, -\infty)]$

$\mathscr{C}$: $[\mathcal{U}(-\infty, \aleph_0), \mathcal{U}(-\infty, \infty)]$

$\mathscr{D}$: $[\mathcal{U}(\aleph_0, \aleph_0), \mathcal{U}(\infty, \infty)]$

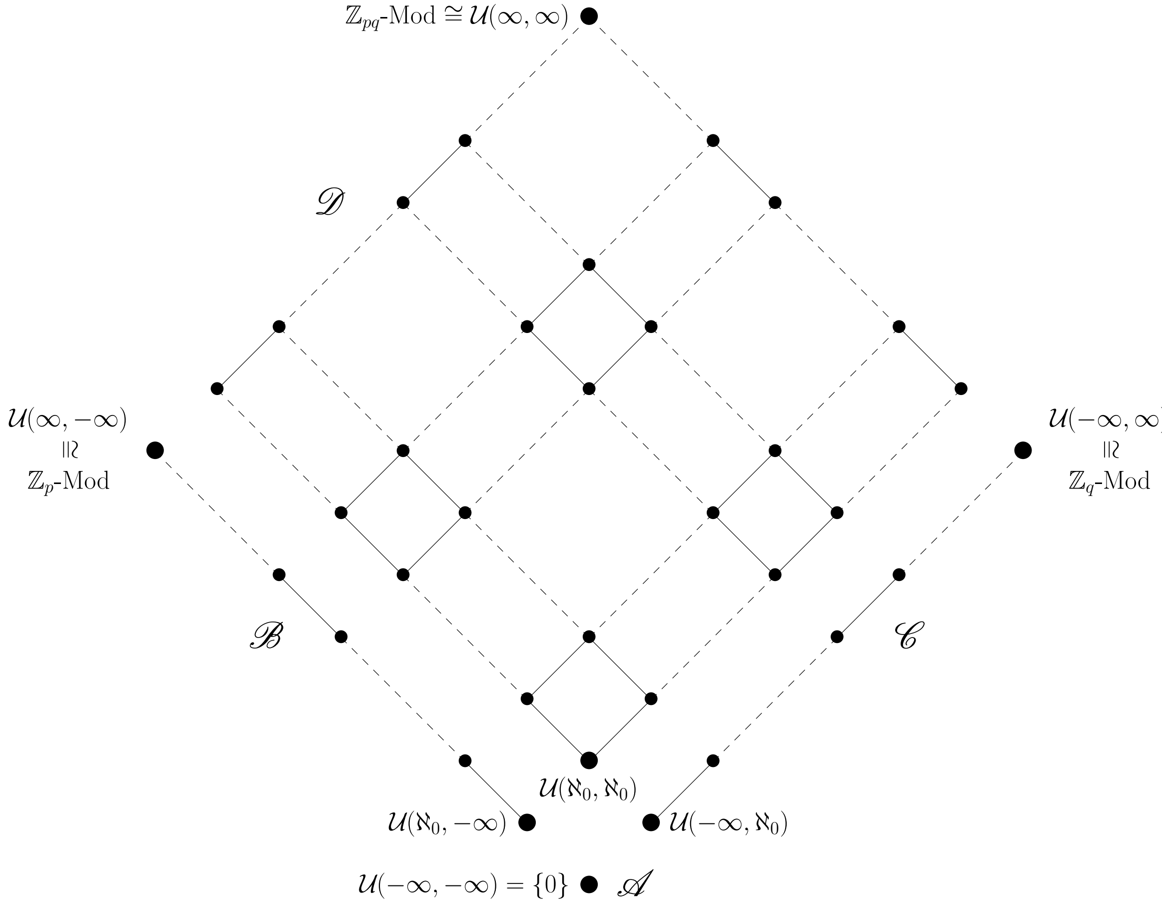


Figura 3.5: **Diagrama de Hasse de cada intervalo en $(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$-ad con p y q cualesquiera números primos distintos.**

De esta manera, cada clase aditiva pertenece a exactamente uno de estos cuatro intervalos. Dichos intervalos se muestran en la Figura 3.5.

Ejemplo 3.32 *Sea $R = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r$ como en el Ejemplo 3.23. Por el Teorema 3.29, R-ad tiene tres átomos, $\mathcal{U}(\aleph_0,-\infty,-\infty)$, $\mathcal{U}(-\infty,\aleph_0,-\infty)$, y $\mathcal{U}(-\infty,-\infty,\aleph_0)$. Por el Corolario 3.28, R-ad está particionada en ocho intervalos:*

- $\mathscr{A}$: $[\mathcal{U}(-\infty,-\infty,-\infty),\mathcal{U}(-\infty,-\infty,-\infty)]$
- $\mathscr{B}$: $[\mathcal{U}(-\infty,\aleph_0,-\infty),\mathcal{U}(-\infty,\infty,-\infty)]$
- $\mathscr{C}$: $[\mathcal{U}(\aleph_0,-\infty,-\infty),\mathcal{U}(\infty,-\infty,-\infty)]$
- $\mathscr{D}$: $[\mathcal{U}(\aleph_0,\aleph_0,-\infty),\mathcal{U}(\infty,\infty,-\infty)]$
- $\mathscr{E}$: $[\mathcal{U}(-\infty,-\infty,\aleph_0),\mathcal{U}(-\infty,-\infty,\infty)]$

$\mathscr{F}$: $[\mathcal{U}(-\infty, \aleph_0, \aleph_0), \mathcal{U}(-\infty, \infty, \infty)]$

$\mathscr{G}$: $[\mathcal{U}(\aleph_0, -\infty, \aleph_0), \mathcal{U}(\infty, -\infty, \infty)]$

$\mathscr{H}$: $[\mathcal{U}(\aleph_0, \aleph_0, \aleph_0), \mathcal{U}(\infty, \infty, \infty)]$

De esta manera, cada clase aditiva pertenece a exactamente uno de estos ocho intervalos. Dichos intervalos se muestran en la Figura 3.6. Cada clase marcada con letra mayúscula es el supremo del intervalo y es una clase de pretorsión hereditaria por el Teorema 3.27. Cada clase marcada con letra minúscula es el ínfimo del intervalo y es una clase aditiva acotada por el Teorema 3.27.

Teorema 3.33 *Sea R un anillo Artiniano semisimple. Entonces, R-ad es una gran retícula fuertemente atómica.*

Demostración:
Supongamos que $|R\text{-simp}| = n$. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in R$-ad tales que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, $Size(\mathcal{X}) = (\kappa_j)_{j=1}^n$ y $Size(\mathcal{Y}) = (\eta_j)_{j=1}^n$. Consideremos el intervalo $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$. Por el Corolario 3.18, estamos tratando con el intervalo $\left[\mathcal{U}((\kappa_j)_{j=1}^n), \mathcal{U}((\eta_j)_{j=1}^n)\right]$. Notemos que, si $\kappa_{j_0} < \eta_{j_0}$, entonces $\mathcal{U}((\kappa_j)_{j=1}^n) \prec \mathcal{U}(\kappa_1, \ldots, \kappa_{j_0-1}, \kappa_{j_0}^+, \kappa_{j_0+1}, \ldots, \kappa_n)$ y esta clase es un átomo en $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$. Se concluye que $[\mathcal{X}, \mathcal{Y}]$ es atómico. ■

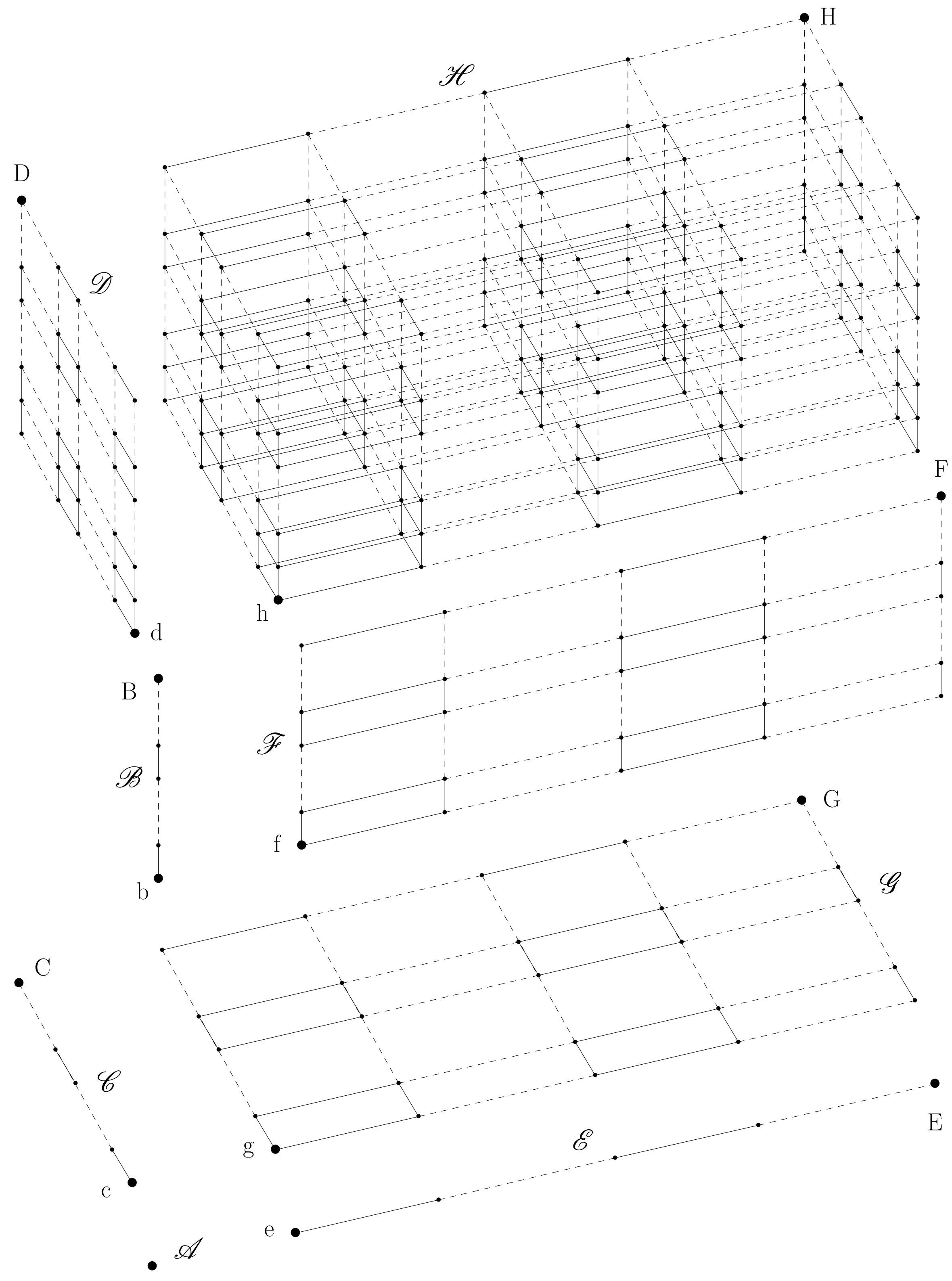


Figura 3.6: **Diagrama de Hasse de cada intervalo en $(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \times \mathbb{Z}_r)$-ad con p, q y r cualesquiera tres números primos distintos.**

Capítulo 4

La estructura de los módulos sobre anillos c-uniseriales

Como observamos en las Secciones 3.2 y 3.3, el Teorema de Artin-Wedderburn y el Teorema de Krull-Schmidt-Remak-Azumaya juegan un papel crucial en la descripción de la estructura reticular de las clases aditivas sobre anillos Artinianos semisimples. En concreto, si R es un anillo Artiniano semisimple, entonces

(I) R tiene un número finito de representantes de módulos simples no isomorfos.

(II) Todo R-módulo es semisimple.

(III) Cualesquiera dos descomposiciones de un R-módulo semisimple en sumandos directos simples son equivalentes, es decir, si M es un módulo tal que $M = \oplus_{i \in I} N_i = \oplus_{j \in J} K_j$ donde N_i y K_j son módulos simples no cero para cada $i \in I$ y cada $j \in J$, entonces existe una correspondencia biyectiva $\varphi : I \to J$ tal que $N_i \cong M_{\varphi(i)}$ para cada $i \in I$.

(IV) Todo submódulo y todo cociente de un R-módulo semisimple M es semisimple tal que sus sumandos directos simples son un subconjunto de los sumandos directos simples de M.

En este capítulo examinamos a los anillos c-uniseriales como una generalización de los anillos Artinianos semisimples a través de los hechos $(I) - (IV)$. Posteriormente, describimos el conglomerado de clases aditivas para estos anillos.

Para empezar, necesitamos algunas definiciones.

Definición 4.1 *Sea R un anillo.*

(i) *R es* local *si R/J es un campo, donde J es el radical de Jacobson (equivalentemente, si R tiene un único ideal máximo derecho).*

(ii) *R es* semilocal *si R/J es semisimple.*

(*iii*) *R es* completamente primario *si es local y J es nilpotente.*

(*iv*) *R es* primario *si es un anillo de matrices completas sobre un anillo completamente primario.*

(*v*) *R es* semiprimario *si es semilocal y J es nilpotente.*

Lema 4.2 *Si R es local y J su radical de Jacobson, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(*i*) *R es primario.*

(*ii*) *R es completamente primario.*

(*iii*) *J es nilpotente.*

Demostración:
Inmediato. ■

Definición 4.3 *Sea R un anillo y $M \in R$-Mod.*

(*i*) *M es* uniserial izquierdo (derecho) *si la retícula de submódulos izquierdos (derechos) de M está totalmente ordenada por la inclusión. M es* uniserial *si es uniserial izquierdo y derecho.*

(*ii*) *M es* serial izquierdo (derecho) *si es suma directa de módulos uniseriales izquierdos (derechos). M es* serial *si es serial izquierdo y derecho.*

(*iii*) *R es* cadena izquierdo (derecho) *si R es uniserial izquierdo (derecho) como módulo sobre sí mismo. R es* cadena *si es cadena izquierdo y derecho.*

(*iv*) *R es* serial izquierdo (derecho) *si R es serial izquierdo (derecho) como módulo sobre sí mismo. R es* serial *si es serial izquierdo y derecho.*

(*v*) *R es* uniserial generalizado izquierdo (derecho) *si R es Artiniano izquierdo (derecho) y serial izquierdo (derecho). R es* uniserial generalizado *si es Artiniano izquierdo y derecho y serial izquierdo y derecho.*

(*vi*) *R es* uniserial izquierdo (derecho) *si es uniserial generalizado izquierdo (derecho) y es isomorfo a un producto directo finito de anillos primarios izquierdos (derechos). R es* uniserial *si es uniserial izquierdo y derecho.*

(*vi*) *R es* c-uniserial izquierdo (derecho) *si es uniserial generalizado izquierdo (derecho) y es isomorfo a un producto directo finito de anillos Artinianos cadena izquierdos (derechos). R es* c-uniserial *si es c-uniserial izquierdo y derecho.*

A continuación, establecemos los siguientes resultados que nos permiten obtener los análogos de los resultados $(I) - (IV)$.

Proposición 4.4 ([12], Ejercicios 18.38.2) *Sea R un anillo completamente primario y J su radical de Jacobson. Entonces R es un anillo de ideales principales izquierdos si y sólo si R tiene una única serie de composición*

$$R > J > J^2 > \cdots > J^{n-1} > 0$$

en R-Mod.

Teorema 4.5 ([6], Teorema 2) *R es uniserial si y sólo si R es Artiniano de ideales principales.*

Teorema 4.6 ([17], Teorema 3) *Todo módulo sobre un anillo uniserial es suma directa de módulos cíclicos uniseriales.*

Teorema 4.7 ([27], Teorema Fundamental) *R es uniserial si y sólo si todo R-módulo es serial.*

De esta manera, obtenemos la siguiente:

Observación 4.1 *Sea R un anillo.*

(i) *R es Artiniano cadena si y sólo si R es Artiniano local de ideales principales.*

(ii) *Todo anillo R c-uniserial es uniserial*

Así, podemos escribir los resultados análogos a $(I) - (III)$:

(I') Todo anillo c-uniserial tiene un número finito de representantes de módulos cíclicos uniseriales no isomorfos. **(Definición de anillo c-uniserial)**.

(II') Todo módulo sobre un anillo c-uniserial es suma directa de módulos cíclicos uniseriales. **(Teorema 4.6)**.

(III') Cualesquiera dos descomposiciones de un módulo serial en sumandos directos uniseriales son equivalentes, es decir, si M es un módulo tal que $M = \oplus_{i \in I} N_i = \oplus_{j \in J} K_j$ donde N_i y K_j son módulos uniseriales no cero para cada $i \in I$ y cada $j \in J$, entonces existe una correspondencia inyectiva $\varphi : I \to J$ tal que $N_i \cong M_{\varphi(i)}$ para cada $i \in I$. **(Teorema de Krull-Schmidt-Remak-Azumaya [11, Teorema 2.12])**.

Con respecto al hecho (IV), en [2, Teorema 38] se demuestra lo siguiente: para un anillo isomorfo a un producto directo finito de anillos Artinianos de ideales principales, todo submódulo de un módulo es módulo cociente y viceversa. Debido a la Observación 4.1 (i) y (iii), podemos concluir que esto también se cumple para los anillos Artinianos cadena y c-uniseriales. Usando este hecho, en este capítulo describimos la estructura de los submódulos y cocientes de cualquier módulo sobre anillos Artinianos cadena y c-uniseriales.

4.1. Módulos sobre anillos Artinianos cadena

En esta sección, consideramos a R como un anillo Artiniano cadena, m su longitud y J su radical de Jacobson. Tenemos que la retícula de ideales de R es $\mathcal{L}(R) = \{J^h\}_{h=0}^m$ donde

$$R = J^0 > J > \cdots > J^{m-1} > J^m = 0$$

Por lo tanto, $|\mathcal{L}(R)| = |R\text{-cyc}| = m + 1$.

Consideremos R-cyc $= \{C_k\}_{k=0}^m$ tal que $C_k \cong R/J^k$ para cada $k \in \{0, \ldots, m\}$. Decimos que $C_{k_1} \prec C_{k_2}$ si $C_{k_1} \ncong C_{k_2}$ y $C_{k_1} \rightarrowtail C_{k_2}$. Como consecuencia de [6, Teorema 2], se sigue que $C_k \cong J^{m-k}$ para cada $k \in \{0, \ldots, m\}$ y $C_{k_1} \prec C_{k_2}$ si y sólo si $J^{m-k_1} < J^{m-k_2}$. Esto implica que todo módulo cíclico sobre un anillo Artiniano cadena es uniserial. De esta forma, tenemos que

$$R \cong C_m \succ C_{m-1} \succ \cdots \succ C_1 \succ C_0 = 0$$

Recordemos que por [2, Teorema 38], tenemos que $C_k \rightarrowtail C_j$ si y sólo si $C_j \twoheadrightarrow C_k$.

Sea R un anillo Artiniano cadena y sea m su longitud. En esta sección, cuando escribamos un R-módulo M como la suma directa $\bigoplus_{j=1}^t C_{k_j}^{(\eta_j)}$, vamos a convenir en las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{array}{rl} (i) & M \neq 0 \\ (ii) & t \leqslant m \\ (iii) & C_{k_j} \in R\text{-cyc para cada } j \in \{1, \ldots, t\} \\ (iv) & C_{k_i} \prec C_{k_l} \text{ si y sólo si } i < l \\ (v) & 0 < \eta_j \in \mathbf{Cn} \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, t\} \end{array}\right\} \cdots (\star)$$

Llamamos *conjunto de componentes de M* al conjunto $\{C_{k_j}\}_{j=1}^t$ y *componente de M* a sus elementos.

Notemos que en la descripción de un módulo que cumple las condiciones $(\star)$, digamos M, los índices de sus componentes son indispensables para mantener el orden total entre ellos. El uso del radical de Jacobson J en vez de módulos cíclicos uniseriales en la descripción de M podría llegar a ser confuso pues el orden total de $\mathcal{L}(R)$ en términos de J está dado por sus potencias de forma inversa. Por lo anterior, usamos R-cyc en vez de $\mathcal{L}(R)$ para describir a los módulos sobre un anillo Artiniano cadena R.

Sea $M \in R$-Mod. Dado que $cyc(M)$ es una cadena finita, tiene un único elemento máximo, digamos $\widehat{C}$. Entonces $\widehat{C}$ es el elemento mayor en $cyc(M)$. Los siguientes resultados describen a $\widehat{C}$ así como a $cyc(M)$.

Lema 4.8 *Sea R un anillo Artiniano cadena y $M \in R$-Mod. Entonces*

$$cyc(M) = \{C \in R\text{-}cyc \mid C \rightarrowtail \widehat{C}\} = \{C \in R\text{-}cyc \mid \widehat{C} \twoheadrightarrow C\},$$

donde $\widehat{C}$ es el mayor submódulo cíclico de M.

Demostración:
Sea $\widehat{C}$ el elemento mayor en $cyc(M)$. Sea $\mathcal{B} = \{C \in R\text{-cyc} \mid C \rightarrowtail \widehat{C}\}$. Probamos que $cyc(M) = \mathcal{B}$.

($\subseteq$) Sea $C \in cyc(M)$. Entonces $C \cong \widehat{C}$ o $C \prec \widehat{C}$. Esto implica que $C \rightarrowtail \widehat{C}$, de donde se sigue que $C \in \mathcal{B}$.

($\supseteq$) Sea $C \in \mathcal{B}$. Entonces $C \rightarrowtail \widehat{C} \rightarrowtail M$, de donde se sigue que $C \in cyc(M)$.

La segunda igualdad es consecuencia de [2, Teorema 38]. ■

Proposición 4.9 *Sea R un anillo Artiniano cadena y m su longitud. Si $M \cong \bigoplus_{j=1}^{t} C_{k_j}^{(\eta_j)}$ cumple las condiciones $(\star)$, entonces*

$$cyc(M) = \{C \in R\text{-}cyc \mid C \rightarrowtail C_{k_t}\} = \{C \in R\text{-}cyc \mid C_{k_t} \twoheadrightarrow C\}$$

Demostración:
Para la primera igualdad, por el Lema 4.8 sólo es necesario probar que C_{k_t} es el mayor elemento en $cyc(M)$, digamos $\widehat{C}$.

Por un lado, como $\widehat{C}$ es el elemento mayor, tenemos que $C_{k_t} \rightarrowtail \widehat{C}$. Por otro lado, dado que todo módulo cíclico es uniforme, por [9, Lema 2.5] se tiene que $\widehat{C} \rightarrowtail C_{k_j}$ para alguna $j \in \{1, \ldots, t\}$. Por lo tanto, $\widehat{C} \rightarrowtail C_{\kappa_t}$. Se concluye que $C_{k_t} \cong \widehat{C}$.

La segunda igualdad se sigue de [2, Teorema 38]. ■

La siguiente proposición nos ayudará a caracterizar los submódulos y cocientes de módulos sobre anillos Artinianos cadena.

Proposición 4.10 *Sea R un anillo Artiniano cadena y m su longitud. Sean $M \cong \bigoplus_{j=1}^{t} C_{k_j}^{(\eta_j)}$ y $N \cong \bigoplus_{l=1}^{s} D_{h_l}^{(\lambda_l)}$ tales que cumplen las condiciones $(\star)$.*

(i) Si $N \rightarrowtail M$, entonces para cada $l \in \{1, \ldots, s\}$ existe $j_l \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $D_{h_l} \rightarrowtail C_{k_{j_l}}$.

(ii) Si $M \twoheadrightarrow N$, entonces para cada $l \in \{1, \ldots, s\}$ existe $j_l \in \{1, \ldots, t\}$ tal que $C_{k_{j_l}} \twoheadrightarrow D_{h_l}$.

Demostración:

(i) Por la Proposición 4.9, se tiene que $D_{h_l} \rightarrowtail C_{k_t}$ para cada $l \in \{1, \ldots, s\}$. Sea

$$\mathcal{B}_l = \{C \in cyc(M) \mid \text{existe } j \in \{1, \ldots, t\} \text{ tal que } C \cong C_{k_j} \text{ y } D_{h_l} \rightarrowtail C\}$$

Dado que $\mathcal{B}_l$ es una cadena finita, entonces tiene elemento menor, digamos $C_{k_{j_l}}$. Así, $D_{h_l} \rightarrowtail C_{k_{j_l}}$ y j_l es el menor número con esta propiedad.

(ii) Similar a (i). ■

Sean $M, N \in R$-Mod. Si $N \rightarrowtail M$, entonces la Proposición 4.10 muestra que cada componente D de N tiene un "supremo" en M en el sentido de que es una componente de M que es el menor elemento en el conjunto de componentes de M que "dominan a" D. De esta manera, definimos la noción de *supervisión* para un par de módulos M y N.

Definición 4.11 *Sea R un anillo Artiniano cadena y m su longitud. Sean $M \cong \bigoplus_{j=1}^{t} C_{k_j}^{(\eta_j)}$ y $N \cong \bigoplus_{l=1}^{s} D_{h_l}^{(\lambda_l)}$ tales que cumplen las condiciones $(\star)$. Consideremos $C \in \{C_{k_j}\}_{j=1}^{t}$ y $D \in \{D_{h_l}\}_{l=1}^{s}$.*

- *Decimos que $C \in \{C_{k_j}\}_{j=1}^{t}$ es un* submódulo cíclico supervisor de M sobre N *si existe $D \in \{D_{h_l}\}_{l=1}^{s}$ tal que $C \twoheadrightarrow D$ y C es la menor componente de M con esta propiedad. Denotamos esta situación como $C\left({}^{M}\searrow_{N}\right)D$.*

- *Decimos que $D \in \{D_{h_l}\}_{l=1}^{s}$ es un* submódulo cíclico supervisado de N en M *si existe $C \in \{C_{k_j}\}_{j=1}^{t}$ tal que $D \rightarrowtail C$ y D es la mayor componente de N con esta propiedad. Denotamos esta situación como $D\left({}_{N}\nearrow^{M}\right)C$.*

Notemos que si no existe un monomorfismo $\phi : N \to M$, entonces no está garantizada la existencia de módulos cíclicos supervisores y supervisados entre M y N.

Ejemplo 4.12 *Sea $R = \mathbb{Z}_{16}$. Los ideales de R son $0, R\overline{8}, R\overline{4}, R\overline{2}$, y R. Consideremos R-cyc $= \{0, C_1, C_2, C_3, C_4\}$ donde identificamos con $0, C_1, C_2, C_3$, y C_4 con los ideales $0, R\overline{8}, R\overline{4}, R\overline{2}$, y R, respectivamente. Tomemos*

$$M \cong (C_2)^{(2)} \oplus (C_3)^{(\aleph_0)} \oplus C_4, \qquad N \cong (C_1)^{(\aleph_0)} \oplus (C_2)^{(10)} \qquad y \qquad K \cong C_3 \oplus C_4$$

(i) Para N y M, tenemos que

$$C_2\left({}^{M}\searrow_{N}\right)C_1, \qquad C_2\left({}^{M}\searrow_{N}\right)C_2, \qquad C_2\left({}_{N}\nearrow^{M}\right)C_2,$$

$$C_2\left({}_{N}\nearrow^{M}\right)C_3 \qquad y \qquad C_2\left({}_{N}\nearrow^{M}\right)C_4$$

También tenemos que

$$C_2\left({}^{N}\searrow_{M}\right)C_2 \qquad y \qquad C_2\left({}_{M}\nearrow^{N}\right)C_2$$

(ii) Para N y K, tenemos que

$$C_3\left({}^{K}\searrow_{N}\right)C_1, \qquad C_3\left({}^{K}\searrow_{N}\right)C_2, \qquad C_2\left({}_{N}\nearrow^{K}\right)C_3 \qquad y \qquad C_2\left({}_{N}\nearrow^{K}\right)C_4.$$

Sin embargo, no existen submódulos cíclicos supervisores de N sobre K ni submódulos cíclicos supervisados de K en N.

Recordemos que un módulo es *local* si y sólo si es cíclico no cero con un único submódulo propio máximo. Un módulo no cero es *inescindible* si sus únicos sumandos directos son los triviales. Notemos que todo módulo local es inescindible. Por [6, Teorema 2] se concluye que todo módulo cíclico uniserial sobre un anillo Artiniano cadena es inescindible.

Lema 4.13 *Sea R un anillo Artiniano cadena y m su longitud. Sean $M \cong \bigoplus_{j=1}^{t} C_{k_j}^{(\eta_j)}$ y $N \cong \bigoplus_{l=1}^{s} D_{h_l}^{(\lambda_l)}$ tales que cumplen las condiciones $(\star)$. Sean $\{D_{h_{l_\gamma}}\}_{\gamma=1}^{y} \subseteq \{D_{h_l}\}_{l=1}^{s}$ y $\{C_{k_{j_\delta}}\}_{\delta=1}^{x} \subseteq \{C_{k_j}\}_{j=1}^{t}$ cualesquiera dos conjuntos.*

(i) Si $\displaystyle\bigoplus_{\gamma=1}^{y} D_{h_{l_\gamma}}^{(\lambda_{l_\gamma})} \rightarrowtail \bigoplus_{\delta=1}^{x} C_{k_{j_\delta}}^{(\eta_{j_\delta})}$*, entonces* $\displaystyle\sum_{\gamma=1}^{y} \lambda_{l_\gamma} \leqslant \sum_{\delta=1}^{x} \eta_{j_\delta}$

(ii) Si $\displaystyle\bigoplus_{\delta=1}^{x} C_{k_{j_\delta}}^{(\eta_{j_\delta})} \twoheadrightarrow \bigoplus_{\gamma=1}^{y} D_{h_{l_\gamma}}^{(\lambda_{l_\gamma})}$*, entonces* $\displaystyle\sum_{\gamma=1}^{y} \lambda_{l_\gamma} \leqslant \sum_{\delta=1}^{x} \eta_{j_\delta}$

Demostración:

(i) Supongamos que $\bigoplus_{\gamma=1}^{y} D_{h_{l_\gamma}}^{(\lambda_{l_\gamma})} \rightarrowtail \bigoplus_{\delta=1}^{x} C_{k_{j_\delta}}^{(\eta_{j_\delta})}$. Para cada $\gamma \in \{1, \ldots, y\}$ consideremos un conjunto V_γ tal que $|V_\gamma| = \lambda_{l_\gamma}$. De la misma manera, para cada $\delta \in \{1, \ldots, x\}$ consideremos un conjunto W_δ tal que $|W_\delta| = \eta_{j_\delta}$. Sean

$$V = \bigsqcup_{\gamma=1}^{y} V_\gamma \quad \text{y} \quad W = \bigsqcup_{\delta=1}^{x} W_\delta$$

la unión disjunta de los V_γ y la unión disjunta de los W_δ, respectivamente. Consideremos $\overline{D_v} \cong D_{h_{l_\gamma}}$ si y sólo si $v \in V_\gamma$. De la misma manera, consideremos $\overline{C_w} \cong C_{k_{j_\delta}}$ si y sólo si $w \in W_\delta$. Entonces

$$\bigoplus_{v\in V} \overline{D_v} \cong \bigoplus_{\gamma=1}^{y} D_{h_{l_\gamma}}^{(\lambda_{l_\gamma})} \quad \text{y} \quad \bigoplus_{w\in W} \overline{C_w} \cong \bigoplus_{\delta=1}^{x} C_{k_{j_\delta}}^{(\eta_{j_\delta})}$$

Dado que $\bigoplus_{v\in V} \overline{D_v} \rightarrowtail \bigoplus_{w\in W} \overline{C_w}$ y como todo módulo cíclico uniserial es inescindible, se concluye que $\sum_{\gamma=1}^{y} \lambda_{l_\gamma} = |V| \leqslant |W| = \sum_{\delta=1}^{x} \eta_{j_\delta}$.

(ii) Similar a (i). ■

Definición 4.14 *Sea R un anillo Artiniano cadena y m su longitud. Sean $M \cong \bigoplus_{j=1}^{t} C_{k_j}^{(\eta_j)}$ y $N \cong \bigoplus_{l=1}^{s} D_{h_l}^{(\lambda_l)}$ tales que cumplen las condiciones $(\star)$. Llamamos* conjunto supervisor de M sobre N *al conjunto totalmente ordenado*

$$SV_N^M = \left\{C \in \{C_{k_j}\}_{j=1}^{t} \;\middle|\; \exists\ D \in \{D_{h_l}\}_{l=1}^{s} \text{ tal que } C \left({}^{M} \searrow {}_{N}\right) D\right\}$$

y llamamos conjunto supervisado de N en M *al conjunto totalmente ordenado*

$$sv_N^M = \left\{D \in \{D_{h_l}\}_{l=1}^{s} \;\middle|\; \exists\ C \in \{C_{k_j}\}_{j=1}^{t} \text{ tal que } D \left({}_{N} \nearrow {}^{M}\right) C\right\}$$

Ejemplo 4.15 *Consideremos R, M, N, y K como en el Ejemplo 4.12. Entonces tenemos lo siguiente:*

(i) Para M y N, tenemos que

$$SV_N^M = \{C_2\}, \quad sv_N^M = \{C_2\}, \quad SV_M^N = \{C_2\} \quad y \quad sv_M^N = \{C_2\}.$$

(ii) Para N y K, tenemos que

$$SV_N^K = \{C_3\}, \quad sv_N^K = \{C_2\}, \quad SV_K^N = \varnothing \quad y \quad sv_K^N = \varnothing.$$

Teorema 4.16 *Sea R un anillo Artiniano cadena y m su longitud. Sean $M \cong \bigoplus_{j=1}^{t} C_{k_j}^{(\eta_j)}$ y $N \cong \bigoplus_{l=1}^{s} D_{h_l}^{(\lambda_l)}$ tales que cumplen las condiciones $(\star)$. Sean $SV_N^M = \{C_{k_{t_\alpha}}\}_{\alpha=1}^{x}$ y $sv_N^M = \{D_{h_{s_\beta}}\}_{\beta=1}^{y}$ los conjuntos supervisor de M sobre N y supervisado de N en M, respectivamente. Si $SV_N^M \neq \varnothing$ y $sv_N^M \neq \varnothing$, entonces*

(i) $x = y$.

(ii) $C_{k_{t_\alpha}} \left({}^{M} \searrow {}_{N}\right) D_{h_{s_\alpha}}$ y $D_{h_{s_\alpha}} \left({}_{N} \nearrow {}^{M}\right) C_{k_{t_\alpha}}$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$.

(iii) $D \rightarrowtail C$ y $C \twoheadrightarrow D$, donde $D \in \{D_{h_l}\}_{l=s_{(\alpha-1)}+1}^{s_\alpha}$ y $C \in \{C_{k_j}\}_{j=t_\alpha}^{t_{(\alpha+1)}-1}$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$, donde $s_0 = 0$ y $t_{x+1} = t + 1$.

(iv) $\displaystyle\sum_{l=s_{(\alpha-1)}+1}^{s_\alpha} \lambda_l \leqslant \sum_{j=t_\alpha}^{t_{(\alpha+1)}-1} \eta_j$ si y sólo si $\displaystyle\bigoplus_{l=s_{(\alpha-1)}+1}^{s_\alpha} D_{h_l}^{(\lambda_l)} \rightarrowtail \bigoplus_{j=t_\alpha}^{t_{(\alpha+1)}-1} C_{k_j}^{(\eta_j)}$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$, donde $s_0 = 0$ y $t_{x+1} = t + 1$.

(v) $\displaystyle\sum_{l=s_{(\alpha-1)}+1}^{s_\alpha} \lambda_l \leqslant \sum_{j=t_\alpha}^{t_{(\alpha+1)}-1} \eta_j$ si y sólo si $\displaystyle\bigoplus_{j=t_\alpha}^{t_{(\alpha+1)}-1} C_{k_j}^{(\eta_j)} \twoheadrightarrow \bigoplus_{l=s_{(\alpha-1)}+1}^{s_\alpha} D_{h_l}^{(\lambda_l)}$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$, donde $s_0 = 0$ y $t_{x+1} = t + 1$.

Demostración:

(i) Para cada $C_{k_{t_\alpha}}$, consideremos $\mathcal{D}_\alpha = \{D \in \{D_{h_l}\}_{l=1}^{s} \mid D \rightarrowtail C_{k_{t_\alpha}}\}$. Notemos que $\mathcal{D}_\alpha \neq \varnothing$ pues $C_{k_{t_\alpha}} \in SV_N^M$ y $D_{h_1} \in \mathcal{D}_\alpha$. Por definición de submódulo cíclico supervisado, tenemos que $\widehat{D_\alpha} := max\ \mathcal{D}_\alpha \in sv_N^M$. Ahora, probamos que $|\{\widehat{D_\alpha}\}_{\alpha=1}^{x}| = x$. Supongamos que $max\ \mathcal{D}_{\alpha_1} = max\ \mathcal{D}_{\alpha_2}$. Entonces, $\mathcal{D}_{\alpha_1} = \mathcal{D}_{\alpha_2}$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $C_{k_{t_{\alpha_1}}} \prec C_{k_{t_{\alpha_2}}}$. De esta manera, se tiene que $C_{k_{t_{\alpha_2}}} \notin SV_N^M$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $|\{\widehat{D_\alpha}\}_{\alpha=1}^{x}| = x$ y $\{\widehat{D_\alpha}\}_{\alpha=1}^{x} \subseteq \{D_{h_{s_\beta}}\}_{\beta=1}^{y}$. Concluimos que $x \leqslant y$.

De la misma manera, se tiene que $y \leqslant x$. Así, concluimos que $x = y$. Por definición de conjunto supervisor y supervisado, se sigue que $x \leqslant min\{t, s\}$.

(ii) Notemos que $C_{k_{t_\alpha}} \left({}^{M} \searrow {}_{N}\right) \widehat{D_\alpha}$ y $\widehat{D_\alpha} \left({}_{N} \nearrow {}^{M}\right) C_{k_{t_\alpha}}$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$. Probamos por inducción sobre α que $D_{h_{s_\alpha}} = \widehat{D_\alpha}$.

Consideremos $D_{h_{s_1}}$ y $\widehat{D_1}$. Supongamos que $D_{h_{s_1}} \neq \widehat{D_1}$. Dado que $\widehat{D_1} \in sv_N^M$, se tiene que $\widehat{D_1} \nprec D_{h_{s_1}}$. Entonces, $D_{h_{s_1}} \prec \widehat{D_1}$. Esto implica que $D_{h_{s_1}} \in \mathcal{D}_1$, de donde se sigue que $D_{h_{s_1}} \notin \{D_{h_{s_\alpha}}\}_{\alpha=1}^x$, lo cual no es posible. Por lo tanto, $D_{h_{s_1}} = \widehat{D_1}$. Esto implica que $C_{k_{t_1}} = SV_N^M(D_{h_{s_1}})$ y $D_{h_{s_1}} = sv_N^M(C_{k_{t_1}})$.

Ahora, supongamos que $D_{h_{s_\beta}} = \widehat{D_\beta}$ para cada $\beta \leqslant \alpha$. Consideremos $D_{h_{s_{\alpha+1}}}$ y $\widehat{D_{\alpha+1}}$. Supongamos que $D_{h_{s_{\alpha+1}}} \neq \widehat{D_{\alpha+1}}$. Si $D_{h_{s_{\alpha+1}}} \prec \widehat{D_{\alpha+1}}$, entonces $D_{h_{s_{\alpha+1}}} \in \mathcal{D}_{\alpha+1}$ y así, $D_{h_{s_{\alpha+1}}} \notin sv_N^M$, lo cual no es posible. Si $\widehat{D_{\alpha+1}} \prec D_{h_{s_{\alpha+1}}}$, entonces $\widehat{D_{\alpha+1}} = D_{h_{s_\beta}} = \widehat{D_\beta}$ para algún $\beta \leqslant \alpha$. Esto implica que $\mathcal{D}_{\alpha+1} = \mathcal{D}_\beta$. De esta manera, se tiene que $C_{k_{t_{\alpha+1}}} \notin SV_N^M$, lo cual no es posible.

Por lo tanto, $D_{h_{s_{\alpha+1}}} = \widehat{D_{\alpha+1}}$. Esto implica que $C_{k_{t_{\alpha+1}}} \left({}^M \searrow {}_N\right) D_{h_{s_{\alpha+1}}}$ y $D_{h_{s_{\alpha+1}}} \left({}_N \nearrow {}^M\right) C_{k_{t_{\alpha+1}}}$.

(iii) Se sigue de (ii).

(iv) Se sigue de (iii) y [2, Teorema 38].

(v) $(\Rightarrow)$ Es claro.

$(\Leftarrow)$ Se sigue del Lema 4.13 (i).

(vi) $(\Rightarrow)$ Es claro.

$(\Leftarrow)$ Se sigue del Lema 4.13 (ii). ■

Ejemplo 4.17 *Consideremos R como en el Ejemplo 4.12. Sean*

$$M \cong (C_2)^{(\aleph_0)} \oplus (C_4)^{(2)} \qquad y \qquad N \cong (C_1)^{(3)} \oplus (C_2)^{(5)} \oplus (C_3)^{(\aleph_0)}$$

Notemos que

$$C_2 \left({}^M \searrow {}_N\right) C_2, \qquad C_2 \left({}_N \nearrow {}^M\right) C_2,$$

$$C_4 \left({}^M \searrow {}_N\right) C_3, \qquad y \qquad C_3 \left({}_N \nearrow {}^M\right) C_4$$

Por lo tanto, $SV_N^M = \{C_2, C_4\}$ y $sv_N^M = \{C_2, C_3\}$. Es claro que $C_2 \rightarrowtail C_2$ y $C_3 \rightarrowtail C_4$.

Dado que $3 + 5 = 8 < \aleph_0$, por el Teorema 4.16 (iv) se sigue que

$$(C_1)^{(3)} \oplus (C_2)^{(5)} \rightarrowtail (C_2)^{(\aleph_0)}$$

Sin embargo, dado que $\aleph_0 \nleqslant 2$, no existe un monomorfismo $(C_3)^{(\aleph_0)} \to (C_4)^{(2)}$.

Con los resultados mostrados anteriormente, podemos probar uno de los resultados principales de este capítulo.

Teorema 4.18 *Sea R un anillo Artiniano cadena y m su longitud. Sean $M \cong \bigoplus_{j=1}^t C_{k_j}^{(\eta_j)}$ y $N \cong \bigoplus_{l=1}^s D_{h_l}^{(\lambda_l)}$ tales que cumplen las condiciones $(\star)$. Sean $SV_N^M = \{C_{k_{t_\alpha}}\}_{\alpha=1}^x$ y $sv_N^M = \{D_{h_{s_\alpha}}\}_{\alpha=1}^x$ los conjuntos supervisor de M sobre N y supervisado de N en M, respectivamente.*

(i) Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) *Existe un monomorfismo* $\phi : N \to M$.

(2) $D_{h_s} \rightarrowtail C_{k_t}$ *y* $\bigoplus_{l=s_{(\alpha-1)}+1}^{s} D_{h_l}^{(\lambda_l)} \rightarrowtail \bigoplus_{j=t_\alpha}^{t} C_{k_j}^{(\eta_j)}$ *para cada* $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$, *donde* $s_0 = 0$.

(3) $D_{h_s} \rightarrowtail C_{k_t}$ *y* $\sum_{i=\alpha}^{x} \xi_i \leqslant \sum_{i=\alpha}^{x} \zeta_i$ *para cada* $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$, *donde* $\xi_\alpha = \sum_{v=s_{(\alpha-1)}+1}^{s_\alpha} \lambda_v$ *y* $\zeta_\alpha = \sum_{v=t_\alpha}^{t_{(\alpha+1)}-1} \eta_v$ *para cada* $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$, *donde* $s_0 = 0$ *y* $t_{x+1} = t + 1$.

(ii) Las siguientes condiciones son equivalentes:

(1) *Existe un epimorfismo* $\phi : M \to N$.

(2) $C_{k_t} \twoheadrightarrow D_{h_s}$ *y* $\bigoplus_{j=t_\alpha}^{t} C_{k_j}^{(\eta_j)} \twoheadrightarrow \bigoplus_{l=s_{(\alpha-1)}+1}^{s} D_{h_l}^{(\lambda_l)}$ *para cada* $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$, *donde* $s_0 = 0$.

(3) $C_{k_t} \twoheadrightarrow D_{h_s}$ *y* $\sum_{i=\alpha}^{x} \xi_i \leqslant \sum_{i=\alpha}^{x} \zeta_i$ *para cada* $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$, *donde* $\xi_\alpha = \sum_{v=s_{(\alpha-1)}+1}^{s_\alpha} \lambda_v$ *y* $\zeta_\alpha = \sum_{v=t_\alpha}^{t_{(\alpha+1)}-1} \eta_v$ *para cada* $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$, *donde* $s_0 = 0$ *y* $t_{x+1} = t + 1$.

Demostración:

(i) $(1) \Rightarrow (2)$: Supongamos que $N \rightarrowtail M$. Por la Proposición 4.10 (i), se tiene que $D_{h_s} \rightarrowtail C_{k_t}$, $SV_N^M \neq \varnothing$ y $sv_N^M \neq \varnothing$. Por el Teorema 4.16 (ii), se sigue que $C_{k_{t_\alpha}} \left({}^{M} \searrow {}_{N}\right) D_{h_{s_\alpha}}$ y $D_{h_{s_\alpha}} \left({}_{N} \nearrow {}^{M}\right) C_{k_{t_\alpha}}$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$.

Sea $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$. Consideremos $l \in \{s_{(\alpha-1)}+1, \ldots, s\}$. Entonces no existe un monomorfismo $D_{h_l} \to C_{k_j}$ para cada $j \in \{1, \ldots, t_\alpha - 1\}$. Por [9, Lema 2.5], no existe un monomorfismo $D_{h_l}^{(\lambda_l)} \to C_{k_j}^{(\eta_j)}$ para cada $j \in \{1, \ldots, t_\alpha - 1\}$ y para cada $l \in \{s_{(\alpha-1)} + 1, \ldots, s\}$. Esto implica que no existe un monomorfismo $\bigoplus_{l=s_{(\alpha-1)}+1}^{s} D_{h_l}^{(\lambda_l)} \to \bigoplus_{j=t_1}^{t_\alpha-1} C_{k_j}^{(\eta_j)}$

Por lo tanto, se concluye que $\bigoplus_{l=s_{(\alpha-1)}+1}^{s} D_{h_l}^{(\lambda_l)} \rightarrowtail \bigoplus_{j=t_\alpha}^{t} C_{k_j}^{(\eta_j)}$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$.

(i) $(2) \Rightarrow (1)$: Supongamos que $D_{h_s} \rightarrowtail C_{k_t}$. Entonces, $SV_N^M \neq \varnothing$ y $sv_N^M \neq \varnothing$. Por el Teorema 4.16 (ii), se tiene que $C_{k_{t_\alpha}} \left({}^{M} \searrow {}_{N}\right) D_{h_{s_\alpha}}$ y $D_{h_{s_\alpha}} \left({}_{N} \nearrow {}^{M}\right) C_{k_{t_\alpha}}$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$. Ahora, supongamos que $\bigoplus_{l=s_{(\alpha-1)}+1}^{s} D_{h_l}^{(\lambda_l)} \rightarrowtail \bigoplus_{j=t_\alpha}^{t} C_{k_j}^{(\eta_j)}$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$. Para $\alpha = 1$, se concluye que $N \rightarrowtail M$.

(i) $(2) \Rightarrow (3)$: Supongamos que $D_{h_s} \rightarrowtail C_{k_t}$. Entonces $SV_N^M \neq \varnothing$ y $sv_N^M \neq \varnothing$. Por el Teorema 4.16 (ii), se tiene que $C_{k_{t_\alpha}} \left({}^M \searrow {}_N\right) D_{h_{s_\alpha}}$ y $D_{h_{s_\alpha}} \left({}_N \nearrow {}^M\right) C_{k_{t_\alpha}}$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$. Dado que $\displaystyle\bigoplus_{l=s_{(\alpha-1)}+1}^{s} D_{h_l}^{(\lambda_j)} \rightarrowtail \bigoplus_{j=t_\alpha}^{t} C_{k_j}^{(\eta_j)}$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$, por el Lema 4.13 (i) se concluye que $\displaystyle\sum_{i=\alpha}^{x} \xi_i \leqslant \sum_{i=\alpha}^{x} \zeta_i$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$.

(i) $(3) \Rightarrow (2)$: Supongamos que $D_{h_s} \rightarrowtail C_{k_t}$. Entonces $SV_N^M \neq \varnothing$ y $sv_N^M \neq \varnothing$. Por el Teorema 4.16 (ii), se tiene que $C_{k_{t_\alpha}} \left({}^M \searrow {}_N\right) D_{h_{s_\alpha}}$ y $D_{h_{s_\alpha}} \left({}_N \nearrow {}^M\right) C_{k_{t_\alpha}}$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$. Dado que $\displaystyle\sum_{i=\alpha}^{x} \xi_i \leqslant \sum_{i=\alpha}^{x} \zeta_i$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$, debemos probar que $\displaystyle\bigoplus_{l=s_{(\alpha-1)}+1}^{s} D_{h_l}^{(\lambda_l)} \rightarrowtail \bigoplus_{j=t_\alpha}^{t} C_{k_j}^{(\eta_j)}$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$.

Sea $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$. Por el Teorema 4.16 (ii), se tiene que $D \rightarrowtail C$ donde $D \in \{D_{h_l}\}_{l=s_{(\alpha-1)}+1}^{s_\alpha}$ y $C \in \{C_{k_j}\}_{j=t_\alpha}^{t}$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$. Dado que $\xi_\alpha \leqslant \displaystyle\sum_{i=\alpha}^{x} \zeta_i$, se tiene que $\displaystyle\bigoplus_{l=s_{(\alpha-1)}+1}^{s_\alpha} D_{h_l}^{(\lambda_l)} \rightarrowtail \bigoplus_{j=t_\alpha}^{t} C_{k_j}^{(\eta_j)}$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$. Por lo tanto, concluimos que $\displaystyle\bigoplus_{l=s_{(\alpha-1)}+1}^{s} D_{h_l}^{(\lambda_l)} \rightarrowtail \bigoplus_{j=t_\alpha}^{t} C_{k_j}^{(\eta_j)}$ para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x\}$.

(ii) Por el Teorema 4.16 (ii), (iv) y (vi), la Proposición 4.10 (ii), el Lema 4.13 (ii), y por [2, Teorema 38] y [9, Lema 2.5], la prueba es similar a (i). ■

4.2. Módulos sobre anillos c-uniseriales

Como vimos en la sección anterior, el Teorema 4.18 describe la estructura de submódulos y cocientes de un módulo sobre anillos Artinianos cadena. En esta sección mostramos la estructura de submódulos y cocientes de los módulos sobre anillos c-uniseriales. Esto generaliza el Teorema 4.18.

Recordemos que todo módulo sobre un anillo c-uniserial es suma directa de módulos cíclicos uniseriales. Denotamos como R-ucyc a un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de módulos cíclicos uniseriales en R-Mod. De la misma manera, denotamos como $ucyc(M)$ a un conjunto completo de representantes de clases de isomorfismo de submódulos cíclicos uniseriales de M.

En esta sección, consideramos a R como un anillo c-uniserial tal que $R \cong \prod_{k=1}^{n} R_k$, donde R_k es un anillo Artiniano cadena para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$. Consideremos que cada R_k es de longitud finita igual a n_k. Entonces

$$\mathcal{L}(R) = \left\{ \prod_{k=1}^{n} I_{k,h} \;\middle|\; I_{k,h} \cong (J_k)^h \leqslant R_k \text{ para cada } h \in \{0, \ldots, n_k\} \right\}$$

donde J_k es el radical de Jacobson de R_k (ver [31, Ejemplo 2.14.2.(ii), p.12]). Notemos que todo módulo cíclico uniserial C es isomorfo a

$$R/(R_1 \times \cdots \times R_{k-1} \times (J_k)^h \times R_{k+1} \times \cdots \times R_n)$$

para alguna $k \in \{1, \ldots, n\}$ y para alguna $h \in \{0, \ldots, n_k\}$. Denotemos a C como $C_{k,h}$. De esta manera, consideremos

$$R\text{-ucyc} = \{C_{k,h} \mid k \in \{1, \ldots, n\} \text{ y } h \in \{0, \ldots, n_k\}\}$$

Es fácil ver que los $C_{k,h}$ "heredan" el orden que tenían en R_k, es decir,

$$0 = C_{k,0} \prec C_{k,1} \prec \cdots \prec C_{k,n_k-1} \prec C_{k,n_k} \cong R(0, \ldots, 0, \underbrace{1_{R_k}}_{\text{coordenada } k}, 0, \ldots, 0)$$

para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$. Por lo tanto, los resultados obtenidos en la Sección 4.1 se generalizan para anillos c-uniseriales considerando dichos resultados coordenada a coordenada. Por esta razón, se omiten la mayoría de las pruebas en esta sección.

Para mostrar los resultados de la Sección 4.1 considerando R un anillo c-uniserial, necesitamos establecer una convención para los R-módulos. En esta sección, cuando escribamos un R-módulo M como la suma directa

$$\bigoplus_{j=1}^{m} \left(\bigoplus_{i=1}^{t_j} C_{k_j,h_i}^{(\eta_{j,i})} \right),$$

vamos a convenir en las siguientes condiciones:

$$\left.\begin{array}{rl} (i) & M \neq 0 \\ (ii) & m \leqslant n \text{ y } t_j \leqslant n_{k_j} \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, m\} \\ (iii) & C_{k_j,h_i} \in R\text{-ucyc para cada } j \in \{1, \ldots, m\} \text{ y } i \in \{1, \ldots, t_j\} \\ (iv) & C_{k_j,h_\alpha} \prec C_{k_j,h_\beta} \text{ si y sólo si } \alpha < \beta \\ (v) & 0 < \eta_{j,i} \in \mathbf{Cn} \text{ para cada } j \in \{1, \ldots, m\} \text{ y } i \in \{1, \ldots, t_j\} \end{array}\right\} \cdots (\star\star)$$

Sea $M \in R$-Mod. Notemos que $ucyc(M)$ tiene m cadenas finitas. Entonces $ucyc(M)$ tiene m elementos máximos. La siguiente proposición describen a estos elementos máximos así como a $ucyc(M)$, generalizando la Proposición 4.9.

Proposición 4.19 *Sea R un anillo c-uniserial. Si $M \cong \bigoplus_{j=1}^{m} \left(\bigoplus_{i=1}^{t_j} C_{k_j,h_i}^{(\eta_{j,i})} \right)$ es tal que cumple las condiciones $(\star\star)$, entonces*

$$\begin{aligned} ucyc(M) &= \{C \in R\text{-}ucyc \mid \exists\, j \in \{1, \ldots, m\} \text{ tal que } C \rightarrowtail C_{k_j,h_{t_j}}\} \\ &= \{C \in R\text{-}ucyc \mid \exists\, j \in \{1, \ldots, m\} \text{ tal que } C_{k_j,h_{t_j}} \twoheadrightarrow C\} \end{aligned}$$

Demostración:
Del hecho que todo $C \in R$-ucyc es isomorfo a $C_{k,h}$ para alguna $k \in \{1, \ldots, n\}$ y para alguna $h \in \{0, \ldots, n_k\}$, fijando cada coordenada la prueba es similar a la de la Proposición 4.9. ■

La siguiente proposición generaliza a la Proposición 4.10. Esta proposición ayuda a caracterizar los submódulos y cocientes de un módulo sobre un anillo c-uniserial.

Proposición 4.20 *Sea R un anillo c-uniserial. Consideremos $M \cong \bigoplus_{j=1}^{m} \left(\bigoplus_{i=1}^{t_j} C_{k_j,h_i}^{(\eta_{j,i})} \right)$ y $N \cong \bigoplus_{q=1}^{w} \left(\bigoplus_{p=1}^{s_q} D_{g_q,f_p}^{(\lambda_{q,p})} \right)$ tales que cumplen las condiciones $(\star\star)$.*

(i) Si $N \rightarrowtail M$, entonces para cada $q \in \{1, \ldots, w\}$ y cada $p \in \{1, \ldots, s_q\}$ existen $j_q \in \{1, \ldots, m\}$ y $i_q \in \{1, \ldots, t_{j_q}\}$ tales que $D_{g_q,f_p} \rightarrowtail C_{k_{j_q},h_{i_q}}$.

(ii) Si $M \twoheadrightarrow N$, entonces para cada $q \in \{1, \ldots, w\}$ y cada $p \in \{1, \ldots, s_q\}$ existen $j_q \in \{1, \ldots, m\}$ y $i_q \in \{1, \ldots, t_{j_q}\}$ tales que $C_{k_{j_q},h_{i_q}} \twoheadrightarrow D_{g_q,f_p}$.

Demostración:
Del hecho que todo $C \in R$-ucyc es isomorfo a $C_{k,h}$ para alguna $k \in \{1, \ldots, n\}$ y para alguna $h \in \{0, \ldots, n_k\}$, fijando cada coordenada la prueba es similar a la de la Proposición 4.10. ■

Para generalizar la Definición 4.11, debemos considerar los submódulos cíclicos supervisores y supervisados para cada coordenada. Así, definimos lo siguiente.

Definición 4.21 *Sea R un anillo c-uniserial. Consideremos $M \cong \bigoplus_{j=1}^{m} \left(\bigoplus_{i=1}^{t_j} C_{k_j,h_i}^{(\eta_{j,i})} \right)$ y $N \cong \bigoplus_{q=1}^{w} \left(\bigoplus_{p=1}^{s_q} D_{g_q,f_p}^{(\lambda_{q,p})} \right)$ tales que cumplen las condiciones $(\star\star)$. Sean $R_\varepsilon \in \{R_{k_j}\}_{j=1}^{m} \cap \{R_{g_q}\}_{q=1}^{w}$, $C \in \{C_{\varepsilon,h_i}\}_{i=1}^{t_\varepsilon}$ y $D \in \{D_{\varepsilon,f_p}\}_{p=1}^{s_\varepsilon}$.*

- *Decimos que $C \in \{C_{\varepsilon,h_i}\}_{i=1}^{t_\varepsilon}$ es un* submódulo cíclico R_ε-supervisor de M sobre N *si existe $D \in \{D_{\varepsilon,f_p}\}_{p=1}^{s_\varepsilon}$ tal que $C \twoheadrightarrow D$ y C es el menor elemento en $\{C_{\varepsilon,h_i}\}_{i=1}^{t_\varepsilon}$ con esta propiedad. Denotamos esta situación como $C \left({R_\varepsilon}^{M} \searrow {}_{N} \right) D$.*

- *Decimos que $D \in \{D_{\varepsilon,f_p}\}_{p=1}^{s_\varepsilon}$ es un* submódulo cíclico R_ε-supervisado de N en M *si existe $C \in \{C_{\varepsilon,h_i}\}_{i=1}^{t_\varepsilon}$ tal que $D \rightarrowtail C$ y D es el mayor elemento en $\{D_{\varepsilon,f_p}\}_{p=1}^{s_\varepsilon}$ con esta propiedad. Denotamos esta situación como $D \left(R_{\varepsilon N} \nearrow {}^{M} \right) C$.*

Al igual que en la Definición 4.11, si no existe un monomorfismo $N \rightarrowtail M$, no está garantizada la existencia de módulos cíclicos R_ε-supervisores y R_ε-supervisados entre M y N.

Ejemplo 4.22 *Sea* $R \cong \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{16} \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_9$. *Tenemos que*

$$R\text{-}ucyc = \{0, C_{1,1}, C_{1,2}, C_{1,3}, C_{2,1}, C_{2,2}, C_{2,3}, C_{2,4}, C_{3,1}, C_{4,1}, C_{4,2}\}$$

Tomemos

$$M \cong (C_{1,2})^{(\aleph_0)} \oplus C_{1,3} \oplus C_{2,4} \oplus C_{3,1} \oplus (C_{4,1})^{(2)}, \quad y \quad N \cong (C_{1,1})^{(\aleph_0)} \oplus (C_{2,2})^{(10)} \oplus C_{4,2}$$

(*i*) *Consideremos* $R_1 = \mathbb{Z}_8$. *Tenemos que*

$$C_{1,2}\left({R_1}^M \searrow_N\right) C_{1,1}, \qquad C_{1,1}\left(R_{1N} \nearrow^M\right) C_{1,2} \quad y \quad C_{1,1}\left(R_{1N} \nearrow^M\right) C_{1,3}.$$

(*ii*) *Consideremos* $R_2 = \mathbb{Z}_{16}$. *Tenemos que*

$$C_{2,4}\left({R_2}^M \searrow_N\right) C_{2,2} \quad y \quad C_{2,2}\left(R_{2N} \nearrow^M\right) C_{2,4}.$$

(*iii*) *Consideremos* $R_4 = \mathbb{Z}_9$. *Entonces no existen submódulos cíclicos* R_4*-supervisores de* M *sobre* N *ni submódulos cíclicos* R_4*-supervisados de* N *en* M.

El siguiente lema generaliza al Lema 4.13 estableciendo el resultado para anillos c-uniseriales.

Lema 4.23 *Sea* R *un anillo c-uniserial. Consideremos* $M \cong \bigoplus_{j=1}^{m}\left(\bigoplus_{i=1}^{t_j} C_{k_j,h_i}^{(\eta_{j,i})}\right)$ *y* $N \cong \bigoplus_{q=1}^{w}\left(\bigoplus_{p=1}^{s_q} D_{g_q,f_p}^{(\lambda_{q,p})}\right)$ *tales que cumplen las condiciones* $(\star\star)$. *Supongamos que existe* $R_\varepsilon \in \{R_{k_j}\}_{j=1}^{m} \cap \{R_{g_q}\}_{q=1}^{w}$. *Sean* $\{C_{\varepsilon,h_{i_\gamma}}\}_{\gamma=1}^{x} \subseteq \{C_{\varepsilon,h_i}\}_{i=1}^{t_\varepsilon}$ *y* $\{D_{\varepsilon,f_{p_\delta}}\}_{\delta=1}^{y} \subseteq \{D_{\varepsilon,f_p}\}_{p=1}^{s_\varepsilon}$.

(*i*) *Si* $\displaystyle\bigoplus_{\delta=1}^{y} D_{\varepsilon,f_{p_\delta}}^{(\lambda_{\varepsilon,p_\delta})} \rightarrowtail \bigoplus_{\gamma=1}^{x} C_{\varepsilon,h_{i_\gamma}}^{(\eta_{\varepsilon,i_\gamma})}$, *entonces* $\displaystyle\sum_{\delta=1}^{y} \lambda_{\varepsilon,p_\delta} \leqslant \sum_{\gamma=1}^{x} \eta_{\varepsilon,i_\gamma}$

(*ii*) *Si* $\displaystyle\bigoplus_{\gamma=1}^{x} C_{\varepsilon,h_{i_\gamma}}^{(\eta_{\varepsilon,i_\gamma})} \twoheadrightarrow \bigoplus_{\delta=1}^{y} D_{\varepsilon,f_{p_\delta}}^{(\lambda_{\varepsilon,p_\delta})}$, *entonces* $\displaystyle\sum_{\delta=1}^{y} \lambda_{\varepsilon,p_\delta} \leqslant \sum_{\gamma=1}^{x} \eta_{\varepsilon,i_\gamma}$

Demostración:
Del hecho que todo $C \in R$-ucyc es isomorfo a $C_{k,h}$ para alguna $k \in \{1, \ldots, n\}$ y para alguna $h \in \{0, \ldots, n_k\}$, fijando la coordenada ε la prueba es similar a la del Lema 4.13.■

Definición 4.24 *Sea* R *un anillo c-uniserial. Consideremos* $M \cong \bigoplus_{j=1}^{m}\left(\bigoplus_{i=1}^{t_j} C_{k_j,h_i}^{(\eta_{j,i})}\right)$ *y* $N \cong \bigoplus_{q=1}^{w}\left(\bigoplus_{p=1}^{s_q} D_{g_q,f_p}^{(\lambda_{q,p})}\right)$ *tales que cumplen las condiciones* $(\star\star)$. *Sea* $R_\varepsilon \in \{R_{k_j}\}_{j=1}^{m} \cap \{R_{g_q}\}_{w}^{s_q}$. *Llamamos* conjunto R_ε-supervisor de M sobre N *al conjunto totalmente ordenado*

$$SV_N^M R_\varepsilon = \left\{C \in \{C_{\varepsilon,h_i}\}_{i=1}^{t_\varepsilon} \;\middle|\; \exists\ D \in \{D_{\varepsilon,f_p}\}_{p=1}^{s_\varepsilon} \text{ tal que } C\left({R_\varepsilon}^M \searrow_N\right) D\right\}$$

y llamamos conjunto R_ε-supervisado de N en M *al conjunto totalmente ordenado*

$$sv_N^M R_\varepsilon = \left\{D \in \{D_{\varepsilon,f_p}\}_{p=1}^{s_\varepsilon} \;\middle|\; \exists\ C \in \{C_{\varepsilon,h_i}\}_{i=1}^{t_\varepsilon} \text{ tal que } D\left(R_{\varepsilon N} \nearrow^M\right) C\right\}$$

Ejemplo 4.25 *Consideremos R, M y N como en el Ejemplo 4.22. Se tiene lo siguiente:*

$$SV_N^M R_1 = \{C_{1,2}\}, \qquad sv_N^M R_1 = \{C_{1,1}\}, \qquad SV_N^M R_2 = \{C_{2,4}\},$$

$$sv_N^M R_2 = \{C_{2,2}\}, \qquad SV_N^M R_4 = \varnothing \qquad y \qquad sv_N^M R_4 = \varnothing$$

Teorema 4.26 *Sea R un anillo c-uniserial. Consideremos $M \cong \bigoplus_{j=1}^{m}\left(\bigoplus_{i=1}^{t_j} C_{k_j,h_i}^{(\eta_{j,i})}\right)$ y $N \cong \bigoplus_{q=1}^{w}\left(\bigoplus_{p=1}^{s_q} D_{g_q,f_p}^{(\lambda_{q,p})}\right)$ tales que cumplen las condiciones $(\star\star)$. Supongamos que $\{R_{\varepsilon_\gamma}\}_{\gamma=1}^{z} \subseteq \{R_{k_j}\}_{j=1}^{m} \cap \{R_{g_q}\}_{q=1}^{w}$ es no vacío tal que $\varnothing \neq SV_N^M R_{\varepsilon_\gamma} = \{C_{\varepsilon_\gamma,h_{i_\alpha}}\}_{\alpha=1}^{x_\gamma}$ y $\varnothing \neq sv_N^M R_{\varepsilon_\gamma} = \{D_{\varepsilon_\gamma,f_{p_\beta}}\}_{\beta=1}^{y_\gamma}$ para cada $\gamma \in \{1,\ldots,z\}$. Entonces las siguientes afirmaciones son verdaderas para cada $\gamma \in \{1,\ldots,z\}$:*

(i) $x_\gamma = y_\gamma$.

(ii) $C_{\varepsilon_\gamma,h_{i_\alpha}} \left(R_{\varepsilon_\gamma}{}^{M} \searrow {}_{N}\right) D_{\varepsilon_\gamma,f_{p_\alpha}}$ *y* $D_{\varepsilon_\gamma,f_{p_\alpha}} \left(R_{\varepsilon_\gamma}{}_{N} \nearrow {}^{M}\right) C_{\varepsilon_\gamma,h_{i_\alpha}}$ *para cada* $\alpha \in \{1,\ldots,x_\gamma\}$.

(iii) $D \rightarrowtail C$ *y* $C \twoheadrightarrow D$, *donde* $D \in \{D_{\varepsilon_\gamma,f_p}\}_{p=p_{(\alpha-1)}+1}^{p_\alpha}$ *y* $C \in \{C_{\varepsilon_\gamma,h_i}\}_{i=i_\alpha}^{i_{(\alpha+1)}-1}$ *para cada* $\alpha \in \{1,\ldots,x_\gamma\}$, *donde* $p_0 = 0$ *y* $i_{(x_\gamma)+1} = t_{\varepsilon_\gamma} + 1$.

(iv) *Las siguientes condiciones son equivalentes para cada* $\alpha \in \{1,\ldots,x_\gamma\}$, *donde* $p_0 = 0$ *e* $i_{(x_\gamma)+1} = t_{\varepsilon_\gamma} + 1$:

(a) $$\sum_{p=p_{(\alpha-1)}+1}^{p_\alpha} \lambda_{\varepsilon_\gamma,p} \leqslant \sum_{i=i_\alpha}^{i_{(\alpha+1)}-1} \eta_{\varepsilon_\gamma,i}.$$

(b) $$\bigoplus_{p=p_{(\alpha-1)}+1}^{p_\alpha} D_{\varepsilon_\gamma,f_p}^{(\lambda_{\varepsilon_\gamma,p})} \rightarrowtail \bigoplus_{i=i_\alpha}^{i_{(\alpha+1)}-1} C_{\varepsilon_\gamma,h_i}^{(\eta_{\varepsilon_\gamma,i})}.$$

(c) $$\bigoplus_{i=i_\alpha}^{i_{(\alpha+1)}-1} C_{\varepsilon_\gamma,h_i}^{(\eta_{\varepsilon_\gamma,i})} \twoheadrightarrow \bigoplus_{p=p_{(\alpha-1)}+1}^{p_\alpha} D_{\varepsilon_\gamma,f_p}^{(\lambda_{\varepsilon_\gamma,p})}.$$

Demostración:
Del hecho que todo $C \in R$-ucyc es isomorfo a $C_{k,h}$ para alguna $k \in \{1,\ldots,n\}$ y para alguna $h \in \{0,\ldots,n_k\}$, fijando cada coordenada ε_γ la prueba es similar a la del Teorema 4.16. ■

Ejemplo 4.27 *Consideremos R como en el Ejemplo 4.22. Tomemos*

$$M \cong (C_{2,2})^{(4)} \oplus (C_{2,3})^{(5)} \oplus (C_{2,4})^{(2)} \oplus (C_{4,2})^{(\aleph_0)}$$

y

$$N \cong (C_{2,1})^{(3)} \oplus (C_{2,2})^{(5)} \oplus (C_{2,4})^{(\aleph_0)} \oplus (C_{4,1})^{(\aleph_0)}.$$

Para $R_{\varepsilon_1} = R_2 = \mathbb{Z}_{16}$ *tenemos que*

$$C_{2,2}\left(R_{\varepsilon_1}{}^{M}\searrow_{N}\right)C_{2,2}, \qquad C_{2,2}\left(R_{\varepsilon_1 N}\nearrow^{M}\right)C_{2,2},$$

$$C_{2,4}\left(R_{\varepsilon_1}{}^{M}\searrow_{N}\right)C_{2,4} \qquad y \qquad C_{2,4}\left(R_{\varepsilon_1 N}\nearrow^{M}\right)C_{2,4}.$$

Para $R_{\varepsilon_2} = R_4 = \mathbb{Z}_9$ *tenemos que*

$$C_{4,2}\left(R_{\varepsilon_2}{}^{M}\searrow_{N}\right)C_{4,1} \qquad y \qquad C_{4,1}\left(R_{\varepsilon_2 N}\nearrow^{M}\right)C_{4,2}.$$

Entonces

$$SV_N^M R_{\varepsilon_1} = \{C_{2,2}, C_{2,4}\}, \qquad sv_N^M R_{\varepsilon_1} = \{C_{2,2}, C_{2,4}\},$$
$$SV_N^M R_{\varepsilon_2} = \{C_{4,2}\} \qquad y \qquad sv_N^M R_{\varepsilon_2} = \{C_{4,1}\}.$$

Es claro que $C_{2,2} \rightarrowtail C_{2,2}$, $C_{2,4} \rightarrowtail C_{2,4}$, *y* $C_{4,1} \rightarrowtail C_{4,2}$.

Dado que $3+5 < 4+5$, *por el Teorema 4.26 (iv) se tiene que*

$$(C_{2,1})^{(3)} \oplus (C_{2,2})^{(5)} \rightarrowtail (C_{2,2})^{(4)} \oplus (C_{2,3})^{(5)}.$$

Sin embargo, dado que $\aleph_0 \nleq 2$, *por el Teorema 4.26 (iv) se tiene que no existe un monomorfismo* $(C_{2,3})^{(\aleph_0)} \to (C_{2,4})^{(2)}$.

Dado que $\aleph_0 = \aleph_0$, *por el Teorema 4.26 (iv) se tiene que*

$$(C_{4,1})^{(\aleph_0)} \rightarrowtail (C_{4,2})^{(\aleph_0)}.$$

Con los resultados mostrados anteriormente, podemos generalizar el Teorema 4.18 para anillos c-uniseriales, uno de los resultados principales de este capítulo.

Teorema 4.28 *Sea* R *un anillo c-uniserial. Consideremos* $M \cong \bigoplus_{j=1}^{m}\left(\bigoplus_{i=1}^{t_j} C_{k_j,h_i}^{(\eta_{j,i})}\right)$ *y* $N \cong \bigoplus_{q=1}^{w}\left(\bigoplus_{p=1}^{s_q} D_{g_q,f_p}^{(\lambda_{q,p})}\right)$ *tales que cumplen las condiciones* $(\star\star)$. *Supongamos que* $\{R_{\varepsilon_\gamma}\}_{\gamma=1}^{z} \subseteq \{R_{k_j}\}_{j=1}^{m} \cap \{R_{g_q}\}_{q=1}^{w}$ *es no vacío tal que* $\varnothing \neq SV_N^M R_{\varepsilon_\gamma} = \{C_{\varepsilon_\gamma,h_{i_\alpha}}\}_{\alpha=1}^{x_\gamma}$ *y* $\varnothing \neq sv_N^M R_{\varepsilon_\gamma} = \{D_{\varepsilon_\gamma,f_{p_\alpha}}\}_{\alpha=1}^{x_\gamma}$ *para cada* $\gamma \in \{1,\ldots,z\}$.

(I) Las siguientes condiciones son equivalentes:

- *(i) Existe un monomorfismo* $\phi : N \to M$.
- *(ii) Para cada* $q \in \{1,\ldots,w\}$ *existe* $j_q \in \{1,\ldots,m\}$ *tal que*

$$\bigoplus_{p=1}^{s_q} D_{g_q,f_p}^{(\lambda_{q,p})} \rightarrowtail \bigoplus_{i=1}^{t_{j_q}} C_{k_{j_q},h_i}^{(\eta_{j_q,i})}.$$

- *(iii) Las siguientes afirmaciones se cumplen:*
  - (1) $z = w$ *y* $\{R_{\varepsilon_\gamma}\}_{\gamma=1}^{z} = \{R_{g_q}\}_{q=1}^{w}$.

(2) *Para cada* $\gamma \in \{1, \ldots, w\}$ *existe* $j_\gamma \in \{1, \ldots, m\}$ *tal que* $D_{g_\gamma, f_{s_\gamma}} \rightarrowtail C_{\varepsilon_\gamma, h_{t_{j_\gamma}}}$.

(3) *Para cada* $\gamma \in \{1, \ldots, w\}$ *existe* $j_\gamma \in \{1, \ldots, m\}$ *tal que*

$$\bigoplus_{p=p_{(\alpha-1)}+1}^{s_\gamma} D_{g_\gamma, f_p}^{(\lambda_{\gamma,p})} \rightarrowtail \bigoplus_{i=i_\alpha}^{t_{j_\gamma}} C_{k_{j_\gamma}, h_i}^{(\eta_{j_\gamma,i})}$$

para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x_\gamma\}$, *donde* $p_0 = 0$.

(iv) *Las siguientes condiciones se cumplen:*

(1) $z = w$ *y* $\{R_{\varepsilon_\gamma}\}_{\gamma=1}^{z} = \{R_{g_q}\}_{q=1}^{w}$.

(2) *Para cada* $\gamma \in \{1, \ldots, w\}$ *existe* $j_\gamma \in \{1, \ldots, m\}$ *tal que* $D_{g_\gamma, f_{s_\gamma}} \rightarrowtail C_{\varepsilon_\gamma, h_{t_{j_\gamma}}}$.

(3) *Para cada* $\gamma \in \{1, \ldots, w\}$ *existe* $j_\gamma \in \{1, \ldots, m\}$ *tal que* $\sum_{\delta=\alpha}^{x_\gamma} \xi_{\gamma,\delta} \leqslant \sum_{\delta=\alpha}^{x_\gamma} \zeta_{j_\gamma,\delta}$

para cada $\alpha \in \{1, \ldots, x_\gamma\}$, *donde*

- $\xi_{\gamma,\alpha} = \sum_{p=p_{(\alpha-1)}+1}^{p_\alpha} \lambda_{\gamma,p}$
- $\zeta_{j_\gamma,\alpha} = \sum_{i=i_\alpha}^{i_{(\alpha+1)}-1} \eta_{j_\gamma,i}$
- $p_0 = 0$
- $i_{(x_\gamma)+1} = i_\gamma + 1$

(II) *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) *Existe un epimorfismo* $\phi : M \to N$.

(ii) *Para cada* $q \in \{1, \ldots, w\}$ *existe* $j_q \in \{1, \ldots, m\}$ *tal que*

$$\bigoplus_{i=1}^{t_{j_q}} C_{k_{j_q}, h_i}^{(\eta_{j_q,i})} \twoheadrightarrow \bigoplus_{p=1}^{s_q} D_{g_q, f_p}^{(\lambda_{q,p})}.$$

(iii) *Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) $z = w$ *y* $\{R_{\varepsilon_\gamma}\}_{\gamma=1}^{z} = \{R_{g_q}\}_{q=1}^{w}$.

(2) *Para cada* $\gamma \in \{1, \ldots, w\}$ *existe* $j_\gamma \in \{1, \ldots, m\}$ *tal que* $C_{\varepsilon_\gamma, h_{t_{j_\gamma}}} \twoheadrightarrow D_{g_\gamma, f_{s_\gamma}}$.

(3) *Para cada* $\gamma \in \{1, \ldots, w\}$ *existe* $j_\gamma \in \{1, \ldots, m\}$ *tal que*

$$\bigoplus_{i=i_\alpha}^{t_{j_\gamma}} C_{k_{j_\gamma}, h_i}^{(\eta_{j_\gamma,i})} \twoheadrightarrow \bigoplus_{p=p_{(\alpha-1)}+1}^{s_\gamma} D_{g_\gamma, f_p}^{(\lambda_{\gamma,p})}$$

(iv) *Las siguientes afirmaciones se cumplen:*

(1) $z = w$ *y* $\{R_{\varepsilon_\gamma}\}_{\gamma=1}^{z} = \{R_{g_q}\}_{q=1}^{w}$.

(2) *Para cada* $\gamma \in \{1, \ldots, w\}$ *existe* $j_\gamma \in \{1, \ldots, m\}$ *tal que* $C_{\varepsilon_\gamma, h_{t_{j_\gamma}}} \twoheadrightarrow D_{g_\gamma, f_{s_\gamma}}$.

(3) *Para cada* $\gamma \in \{1, \ldots, w\}$ *existe* $j_\gamma \in \{1, \ldots, m\}$ *tal que* $\sum\limits_{\delta=\alpha}^{x_\gamma} \xi_{\gamma,\delta} \leqslant \sum\limits_{\delta=\alpha}^{x_\gamma} \zeta_{j_\gamma,\delta}$ *para cada* $\alpha \in \{1, \ldots, x_\gamma\}$, *donde*

- $\xi_{\gamma,\alpha} = \sum\limits_{p=p_{(\alpha-1)}+1}^{p_\alpha} \lambda_{\gamma,p}$
- $\zeta_{j_\gamma,\alpha} = \sum\limits_{i=i_\alpha}^{i_{(\alpha+1)}-1} \eta_{j_\gamma,i}$
- $p_0 = 0$
- $i_{(x_\gamma)+1} = i_\gamma + 1$

Demostración:

(I) $(i) \Leftrightarrow (ii)$ y (I) $(ii) \Rightarrow (iii)(1)$ son inmediatas.

(I) $(ii) \Rightarrow (iii)(2)$: Se sigue de la Proposición 4.20 (i).

(I) $(ii) \Rightarrow (iii)(3)$: Por $(iii)(1)$, $(iii)(2)$, la Proposición 4.20 (i) y el Teorema 4.26 (ii), la prueba es similar a la del Teorema 4.18 (i) $(1) \Rightarrow (2)$.

(I) $(iii) \Rightarrow (ii)$: Por $(iii)(1)$, $(iii)(2)$ y el Teorema 4.26 (ii), la prueba es similar a la del Teorema 4.18 (i) $(2) \Rightarrow (1)$.

(I) $(iii)(3) \Rightarrow (iv)(3)$: Se sigue del Lema 4.23 (i).

$(iv)(3) \Rightarrow (iii)(3)$: Se sigue del Teorema 4.26.

(II) Por el Teorema 4.26,la Proposición 4.20 (ii), el Lema 4.23 (ii), [2, Teorema 38] y [9, Lema 2.5], la prueba es similar a (i). ∎

Capítulo 5

La estructura reticular de R-ad para anillos c-uniseriales

En este capítulo consideramos a R un anillo c-uniserial. Como vimos en la Sección 3.3, los intervalos en R-ad para anillos Artinianos semisimples están completamente descritos. En este capítulo, para describir los intervalos en R-ad, utilizamos la descripción de los submódulos y cocientes de cualquier módulo sobre anillos Artinianos cadena y anillos c-uniseriales mostrada en el Capítulo 4.

5.1. Descripción de la retícula R-ad para anillos c-uniseriales

Consideremos R un anillo c-uniserial, digamos $R \cong \prod_{k=1}^{n} R_k$ donde R_k es un anillo Artiniano cadena con longitud (finita) n_k para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$. Consideremos (ver Sección 4.2)

$$R\text{-ucyc} = \{C_{k,h} \mid k \in \{1, \ldots, n\} \text{ y } h \in \{0, \ldots, n_k\}\}.$$

Entonces, por la Definición 3.8 y por el Teorema 4.28 tenemos que

$$ad_\alpha(C_{k,h}) = \left\{ M \;\middle|\; M \cong \bigoplus_{j=1}^{h} C_{k,j}^{(\eta_{k,j})} \begin{array}{c} \text{donde } \eta_{k,j} < \alpha \text{ para} \\ \text{cada } j \in \{1, \ldots, h\} \end{array} \right\} = \bigoplus_{j=1}^{h} ad_\alpha(C_{k,j})$$

para cada $\alpha \in \mathbf{ICn}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, y $h \in \{1, \ldots, n_k\}$. De la misma manera, tenemos que

$$ad_\infty(C_{k,h}) = \left\{ M \;\middle|\; M \cong \bigoplus_{j=1}^{h} C_{k,j}^{(\eta_{k,j})} \begin{array}{c} \text{donde } \eta_{k,j} \in \mathbf{Cn} \text{ para} \\ \text{cada } j \in \{1, \ldots, h\} \end{array} \right\} = \bigoplus_{j=1}^{h} ad_\infty(C_{k,j}).$$

Sean $\alpha_{1,1}, \ldots, \alpha_{n_1,1}, \ldots, \alpha_{n_n,n} \in \overline{\mathbf{ICn}}$. Definimos la *clase u-cardinal (asociada a*

$((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})$ como la clase

$$\mathcal{U}(((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}) := \bigoplus_{k=1}^{n}\left(\bigoplus_{h=1}^{n_k} ad_{\lambda_{k,h}}(C_{k,h})\right)$$

donde $\lambda_{k,h} = max\{\alpha_{k,j} \mid h \leqslant j \leqslant n_k\}$ para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$ y cada $h \in \{1,\ldots,n_k\}$.

Notemos que $C_{k,h} \in \mathcal{U}(((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})$ si y sólo si $\lambda_{k,h} \neq -\infty$.

Ejemplo 5.1 *Sea $R = \mathbb{Z}_{12} \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4$. Notemos que R tiene tres módulos cíclicos uniseriales diferentes de cero no isomorfos: $R/R\overline{6}, R/R\overline{4}$, y $R/R\overline{3}$. Entonces R-ucyc $= \{0, C_{1,1}, C_{2,1}, C_{2,2}\}$. Estamos llamando $C_{1,1}, C_{2,1}$ y $C_{2,2}$ a los cocientes $R/R\overline{4}, R/R\overline{6}$, y $R/R\overline{3}$, respectivamente. Sean $\alpha_{1,1} = \aleph_0$, $\alpha_{2,1} = -\infty$ y $\alpha_{2,2} = \aleph_0^+$. Entonces la clase u-cardinal (asociada a $(\aleph_0, (-\infty, \aleph_0^+))$) es*

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}((\aleph_0, (-\infty, \aleph_0^+))) &= ad_{\aleph_0}(C_{1,1}) \oplus ad_{(\aleph_0^+)}(C_{2,1}) \oplus ad_{(\aleph_0^+)}(C_{2,2}) \\
&= \left\{ M \;\middle|\; \begin{array}{l} M \cong (C_{1,1})^{(n)} \oplus (C_{2,1})^{(\lambda_1)} \oplus (C_{2,2})^{(\lambda_2)} \\ \text{donde } n \in \mathbb{N} \text{ y } \lambda_1, \lambda_2 < \aleph_0^+ \end{array} \right\} \\
&= \mathcal{U}((\aleph_0, (\aleph_0, \aleph_0^+))) \\
&= \mathcal{U}((\aleph_0, (\aleph_0^+, \aleph_0^+)))
\end{aligned}$$

Como en el ejemplo anterior, es fácil ver que en general

$$\mathcal{U}(((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}) = \mathcal{U}((((\beta_{k,h}))_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})$$
$$\text{si y sólo si}$$
$$\text{máx}\{\alpha_{k,j} \mid h \leqslant j \leqslant n_k\} = \text{máx}\{\beta_{k,j} \mid h \leqslant j \leqslant n_k\}$$

para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$ y cada $h \in \{1,\ldots,n_k\}$. De este modo, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\alpha_{k,1} \geqslant \alpha_{k,2} \geqslant \cdots \geqslant \alpha_{k,n_k}$ para cada $k \in \{1,\ldots,n\}$.

La Proposición 3.13 se puede generalizar a anillos c-uniseriales. Para esto, necesitamos el siguiente resultado.

Proposición 5.2 *Sea R un anillo c-uniserial y $\{\mathcal{X}_j\}_{j=1}^{m}$ una familia no vacía de clases aditivas. Entonces*

$$\bigvee_{j=1}^{m} \mathcal{X}_j = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{X}_j$$

Demostración:

($\subseteq$) Por el Teorema 2.10, tenemos que $\bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{X}_j \subseteq subquot(\bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{X}_j) = \bigvee_{j=1}^{m} \mathcal{X}_j$.

($\supseteq$) Sea $M \in subquot(\bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{X}_j)$. Entonces existe el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
K & \longrightarrow & L & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \\
 & & M & & \\
 & & \uparrow & & \\
 & & 0 & &
\end{array}$$

donde $K \in \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{X}_j$. Así, $K \cong \bigoplus_{j=1}^{m} K_j$, donde $K_j \in \mathcal{X}_j$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$. Como R es c-uniserial, tenemos que $K_j \cong \bigoplus_{l=1}^{n_j} \left(\bigoplus_{i=1}^{t_l} C_{j,k_l,h_i}^{(\eta_{j,l,i})} \right)$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ tal que cumple las condiciones $(\star\star)$.

Por el Teorema 4.28 (ii), para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ existe $L_j \in \mathcal{X}_j$ tal que $L_j \cong \bigoplus_{\alpha=1}^{x_j} \left(\bigoplus_{\beta=1}^{r_\alpha} B_{j,f_\alpha,g_\beta}^{(\lambda_{i,\alpha,\beta})} \right)$ que cumplen las condiciones $(\star\star)$, $K_j \twoheadrightarrow L_j$, y $L \cong \bigoplus_{j=1}^{m} L_j$.

Por el Teorema 4.28 (i), para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ existe $M_j \in \mathcal{X}_j$ tal que $M_j \cong \bigoplus_{p=1}^{w_j} \left(\bigoplus_{q=1}^{s_p} D_{j,\gamma_p,\delta_q}^{(\kappa_{j,p,q})} \right)$ que cumplen las condiciones $(\star\star)$, $M_j \rightarrowtail L_j$, y $M \cong \bigoplus_{j=1}^{m} M_j$.

Por lo tanto, $M \in \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{X}_j$. ■

Proposición 5.3 *Sea R un anillo c-uniserial. Entonces cada clase u-cardinal es aditiva.*

Demostración:
Sea $\alpha_{k,h} \in \overline{\mathbf{ICn}}$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ y cada $h \in \{1, \ldots, n_k\}$. Por la Proposición 5.2 tenemos que

$$\mathcal{U}(((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}) = \bigoplus_{k=1}^{n} \left(\bigoplus_{h=1}^{n_k} ad_{\alpha_{k,h}}(C_{k,h}) \right) = \bigvee_{k=1}^{n} \left(\bigvee_{h=1}^{n_k} ad_{\alpha_{k,h}}(C_{k,h}) \right) \in R\text{-ad}. \qquad ■$$

Consideremos la clase

$$\mathbb{U} = \left\{ \mathcal{U}(((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}) \;\middle|\; \begin{array}{c} \alpha_{k,h} \in \overline{\mathbf{ICn}} \text{ tal que } \alpha_{k,1} \geqslant \alpha_{k,2} \geqslant \cdots \geqslant \alpha_{k,n_k} \\ \text{para cada } k \in \{1, \ldots, n\} \end{array} \right\}$$

La Proposición 5.3 muestra que $\mathbb{U} \subseteq R$-ad. Para probar que R-ad $\subseteq \mathbb{U}$, ajustamos la Definición 3.16 para anillos c-uniseriales.

Definición 5.4 *Sea R un anillo c-uniserial, digamos $R \cong \prod_{k=1}^{n} R_k$, donde R_k es un anillo Artiniano cadena. Consideremos R-ucyc $= \{C_{k,h} \mid k \in \{1, \ldots, n\}$ y $h \in \{0, \ldots, n_k\}\}$. Sea $\mathcal{X} \in R$-ad tal que $size_{\mathcal{X}}(C_{k,h}) = \alpha_{k,h}$ donde $\alpha_{k,h} \in \overline{\mathbf{ICn}}$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ y cada $h \in \{1, \ldots, n_k\}$. Definimos el* tamaño uniserial aditivo de $\mathcal{X}$ *como la n-tupla de n_k-tuplas $((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}$. Denotamos esto como $Size(\mathcal{X})$.*

En la Definición 5.4, dado que $\mathcal{X} \in R$-ad, es fácil ver que $\alpha_{k,1}, \geqslant \alpha_{k,2} \geqslant \cdots \geqslant \alpha_{k,n_k}$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$.

Sea $(\overline{\mathbf{ICn}})^w$ el producto Cartesiano de w copias de $\overline{\mathbf{ICn}}$ (ver Sección 3.3), donde $w = \sum_{k=1}^{n} n_k$. Consideremos la subretícula

$$\mathbb{S} := \left\{ ((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n} \;\middle|\; \begin{array}{c} \alpha_{k,h} \in \overline{\mathbf{ICn}} \text{ tal que } (\alpha_{k,j} \geqslant \alpha_{k,i} \Leftrightarrow j < i) \text{ para cada} \\ k \in \{1, \ldots, n\} \text{ y cada } h \in \{1, \ldots, n_k\} \end{array} \right\}$$

de $(\overline{\mathbf{ICn}})^w$. El siguiente teorema generaliza al Teorema 3.17 considerando la subretícula $\mathbb{S}$ de $(\overline{\mathbf{ICn}})^w$.

Teorema 5.5 *Sea R un anillo c-uniserial tal que $R \cong \prod_{k=1}^{n} R_k$, donde cada R_k es un anillo Artiniano cadena de longitud finita n_k. Entonces la correspondencia*

$$\begin{aligned} Size : R\text{-}ad &\to \mathbb{S} \\ \mathcal{X} &\mapsto Size(\mathcal{X}) \end{aligned}$$

es biyectiva.

Demostración:
Consideremos R-ucyc $= \{C_{k,h} \mid h \in \{0, \ldots, n_k\}$ y $k \in \{1, \ldots, n\}\}$.

$Size$ es inyectiva: Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in R$-ad. Supongamos que $Size(\mathcal{X}) = Size(\mathcal{Y}) = ((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}$. Sea $M \cong \bigoplus_{j=1}^{m} \left(\bigoplus_{i=1}^{t_j} C_{k_j,h_i}^{(\eta_{j,i})} \right) \in \mathcal{X}$ tal que cumple con las condiciones $(\star\star)$. Si $\alpha_{j,i} = -\infty$, entonces $\eta_{j,i} = 0$ lo cual es absurdo. Por lo tanto, $\alpha_{j,i} \in \mathbf{ICn}$. Esto implica que $\eta_{j,i} < \alpha_{j,i}$. Así, tenemos que $C_{k_j,h_i}^{(\eta_{j,i})} \in \mathcal{Y}$ para cada $j \in \{1, \ldots, m\}$ y cada $i \in \{1, \ldots, t_j\}$. Concluimos que $N \in \mathcal{Y}$. De la misma manera se prueba que $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$.

$Size$ es suprayectiva: Sea $((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n} \in \mathbb{S}$. Probaremos que

$$Size(\mathcal{U}(((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})) = ((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}.$$

Para ello, es suficiente probar que $size_{ad_{\alpha_{k,h}}(C_{k,h})}(C_{k,h}) = \alpha_{k,h}$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ y cada $h \in \{1, \ldots, n_k\}$.

- Supongamos que $\alpha_{k,h} = -\infty$. Entonces $C_{k,h} \notin ad_{\alpha_{k,h}}(C_{k,h}) = 0$. Por lo tanto, $size_{ad_{\alpha_{k,h}}(C_{k,h})}(C_{k,h}) = \alpha_{k,h}$.

- Supongamos que $\alpha_{k,h} \in \mathbf{ICn}$. Entonces $C_{k,h}^{(\eta)} \in ad_{\alpha_{k,h}}(C_{k,h})$ para todo $\eta \leqslant \alpha_{k,h}$. Notemos que $C_{k,h}^{(\lambda)} \notin ad_{\alpha_{k,h}}(C_{k,h})$ para cualquier $\lambda \geqslant \alpha_{k,h}$ y $\alpha_{k,h}$ es el menor número cardinal con esta propiedad. Por lo tanto, $size_{ad_{\alpha_{k,h}}(C_{k,h})}(C_{k,h}) = \alpha_{k,h}$.

- Si $\alpha_{k,h} = \infty$, entonces $C_{k,h}^{(\eta)} \in ad_{\alpha_{k,h}}(C_{k,h})$ para todo $\eta \in \mathbf{Cn}$. Por lo tanto, $size_{ad_{\alpha_{k,h}}(C_{k,h})}(C_{k,h}) = \alpha_{k,h}$. ■

Corolario 5.6 *Sea R un anillo c-uniserial tal que $R \cong \prod_{k=1}^{n} R_k$, donde cada R_k es un anillo Artiniano cadena de longitud finita n_k. Entonces*

$$R\text{-}ad = \mathbb{S} = \left\{ ((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n} \;\middle|\; \begin{array}{c} \alpha_{k,h} \in \overline{\mathbf{ICn}} \text{ tal que } (\alpha_{k,j} \geqslant \alpha_{k,i} \Leftrightarrow j < i) \text{ para cada} \\ k \in \{1, \ldots, n\} \text{ y cada } h \in \{1, \ldots, n_k\} \end{array} \right\}$$

Demostración:

($\subseteq$) Sea $\mathcal{X} \in R$-ad. Consideremos la clase $\mathcal{U}(Size(\mathcal{X}))$. Por el Teorema 5.5, tenemos que $\mathcal{X} = \mathcal{U}(Size(\mathcal{X})) \in \mathbb{S}$.

($\supseteq$) Se sigue de la Proposición 5.3. ■

Teorema 5.7 *Sea R un anillo c-uniserial tal que $R \cong \prod_{k=1}^{n} R_k$, donde cada R_k es un anillo Artiniano cadena de longitud finita n_k.*

(*i*) *La correspondencia*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{U} : \mathbb{S} & \rightarrow & R\text{-}ad \\ ((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n} & \mapsto & \mathcal{U}(((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}) \end{array}$$

es inversa de Size.

(*ii*) *Las correspondencias Size y $\mathcal{U}$ preservan el orden.*

Demostración:
Consideremos R un anillo c-uniserial tal que

$$R\text{-ucyc} = \{C_{k,h} \mid h \in \{0, \ldots, n_k\} \text{ y } k \in \{1, \ldots, n\}\}.$$

(*i*) Se sigue del Teorema 5.5 y del Corolario 5.6.

(*ii*) $Size$ preserva el orden: Supongamos que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. Por el Corolario 5.6, tenemos que $\mathcal{X} = \mathcal{U}(Size(\mathcal{X})) = \mathcal{U}(((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})$ y $\mathcal{Y} = \mathcal{U}(Size(\mathcal{Y})) = \mathcal{U}(((\eta_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})$. Entonces, $ad_{\alpha_{k,h}}(C_{k,h}) \subseteq ad_{\eta_{k,h}}(C_{k,h})$ para cada $h \in \{1, \ldots, n_k\}$ y cada $k \in \{1, \ldots, n\}$. Si sucede que $\eta_{k,h} < \alpha_{k,h}$, entonces $C_{k,h}^{(\eta_{k,h})} \in ad_{\alpha_{k,h}}(C_{k,h}) \subseteq ad_{\eta_{k,h}}(C_{k,h})$. Esto implica que $\eta_{k,h} < \eta_{k,h}$, lo cual es absurdo. Por lo tanto, $\alpha_{k,h} \leqslant \eta_{k,h}$ para cada $h \in \{1, \ldots, n_k\}$ y cada $k \in \{1, \ldots, n\}$. Esto implica que $Size(\mathcal{X}) \leqslant Size(\mathcal{Y})$.

(*ii*) $\mathcal{U}$ preserva el orden: Supongamos que $((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n} = Size(\mathcal{X}) \leqslant Size(\mathcal{Y}) = ((\eta_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}$. Entonces $\alpha_{k,h} \leqslant \eta_{k,h}$ para cada $h \in \{1, \ldots, n_k\}$ y cada $k \in \{1, \ldots, n\}$. Por la Proposición 3.11 (*i*), tenemos que $ad_{\alpha_{k,h}}(C_{k,h}) \subseteq ad_{\eta_{k,h}}(C_{k,h})$ para cada $h \in \{1, \ldots, n_k\}$ y cada $k \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces $\mathcal{U}(Size(\mathcal{X})) \subseteq \mathcal{U}(Size(\mathcal{Y}))$. Por el Corolario 5.6, se sigue que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$. ■

Finalmente, juntando todos estos hechos, concluimos que R-ad y $\mathbb{S}$ son isomorfas como grandes retículas, como se muestra en el siguiente corolario.

Corolario 5.8 *Sea R un anillo c-uniserial tal que $R \cong \prod_{k=1}^{n} R_k$, donde cada R_k es un anillo Artiniano cadena de longitud finita n_k. Entonces, existe un isomorfismo de retículas entre R-ad y*

$$\mathbb{S} = \left\{ ((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n} \;\middle|\; \begin{array}{c} \alpha_{k,h} \in \overline{\mathbf{ICn}} \text{ tal que } (\alpha_{k,j} \geqslant \alpha_{k,i} \Leftrightarrow j < i) \text{ para cada} \\ k \in \{1, \ldots, n\} \text{ y cada } h \in \{1, \ldots, n_k\} \end{array} \right\}.$$

Demostración:
Se sigue de los Teoremas 5.5 y 5.7. ■

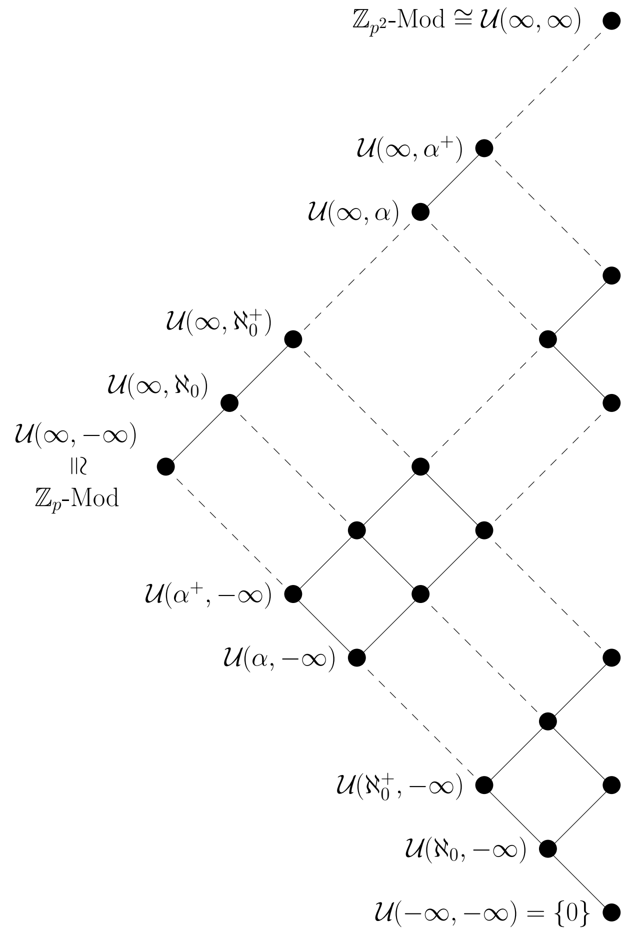


Figura 5.1: **Diagrama de Hasse de $\mathbb{Z}_{p^2}$-ad donde p es cualquier número primo.**

Ejemplo 5.9 *Sea $R=\mathbb{Z}_{p^2}$ donde p es un número primo cualquiera. Notemos que R tiene dos módulos cíclicos uniseriales diferentes de cero no isomorfos: $R\overline{p}$ y $R\overline{1}$. Entonces R-ucyc $=\{0,C_{1,1},C_{1,2}\}$. Estamos llamando $C_{1,1}$ y $C_{1,2}$ a los ideales $R\overline{p}$ y $R\overline{1}$, respectivamente. Entonces para cada clase aditiva $\mathcal{X}$ existen $\alpha_{1,1},\alpha_{1,2}\in\overline{\mathbf{ICn}}$ tales que $\mathcal{X}=\mathcal{U}(\alpha_{1,1},\alpha_{1,2})$. El diagrama de Hasse de R-ad se muestra en la Figura 5.1.*

Ejemplo 5.10 *Sea $R=\mathbb{Z}_{p^2}\times\mathbb{Z}_q$ donde p y q son cualesquiera dos números primos diferentes. Notemos que R tiene tres módulos cíclicos uniseriales diferentes de cero no isomorfos: $R(\overline{p},\overline{0}),R(\overline{1},\overline{0})$ y $R(\overline{0},\overline{1})$. Entonces R-ucyc $=\{0,C_{1,1},C_{1,2},C_{2,1}\}$. Estamos llamando $C_{1,1},C_{1,2}$ y $C_{2,1}$ a los ideales $R(\overline{p},\overline{0}),R(\overline{1},\overline{0})$ y $R(\overline{0},\overline{1})$, respectivamente. Entonces para cada clase aditiva $\mathcal{X}$ existen $\alpha_{1,1},\alpha_{1,2},\alpha_{2,1}\in\overline{\mathbf{ICn}}$ tales que $\mathcal{X}=\mathcal{U}((\alpha_{1,1},\alpha_{1,2}),\alpha_{2,1})$. El diagrama de Hasse de R-ad se muestra en la Figura 5.2. Los puntos gruesos en la figura representan a las siguientes clases:*

A: $\mathcal{U}((-\infty,-\infty),-\infty)$, *la clase cero.*

B: $\mathcal{U}((\infty, -\infty), -\infty)$ *isomorfo a* $\mathbb{Z}_p$*-Mod.*

C: $\mathcal{U}((\infty, \infty), -\infty)$ *isomorfo a* $\mathbb{Z}_{p^2}$*-Mod.*

D: $\mathcal{U}((-\infty, -\infty), \infty)$ *isomorfo a* $\mathbb{Z}_q$*-Mod.*

E: $\mathcal{U}((\infty, -\infty), \infty)$ *isomorfo a* $(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$*-Mod.*

F: $\mathcal{U}((\infty, \infty), \infty)$ *isomorfo a* R*-Mod.*

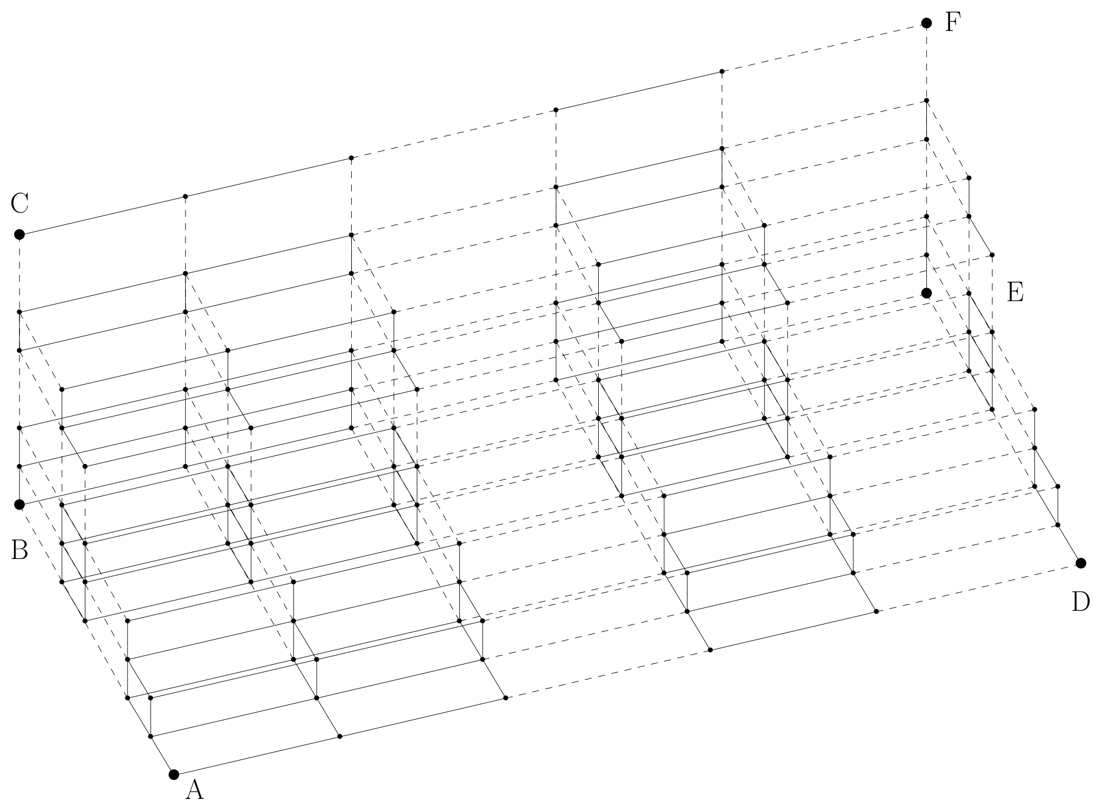


Figura 5.2: **Diagrama de Hasse de** $(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_q)$**-ad donde** p **y** q **son cualesquiera dos números primos diferentes.**

5.2. Caracterizaciones de R-bad y R-pretors para anillos c-uniseriales

En esta sección, caracterizamos las clases R-bad y R-pretors cuando R es un anillo c-uniserial. Además, describimos los átomos e intervalos en la gran retícula R-ad.

Lema 5.11 *Sea R un anillo c-uniserial. Sean $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in R$-ad. Entonces $cyc(\mathcal{X}) = cyc(\mathcal{Y})$ si y sólo si $ucyc(\mathcal{X}) = ucyc(\mathcal{Y})$.*

Demostración:

($\Rightarrow$) Inmediato.

($\Leftarrow$) Se sigue de [27, Teorema Fundamental, p. 174]. ■

El siguiente teorema extiende al Teorema 3.25.

Teorema 5.12 *Sea R un anillo c-uniserial tal que $R \cong \prod_{k=1}^{n} R_k$, donde cada R_k es un anillo Artiniano cadena de longitud finita n_k. Entonces,*

$$(i)\ \ R\text{-}bad = \left\{ \mathcal{U}(((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}) \;\middle|\; \begin{array}{c} ((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n} \in ((\{-\infty, \aleph_0\})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n} \\ \textit{tal que } (\alpha_{k,j} \geqslant \alpha_{k,i} \Leftrightarrow j < i) \end{array} \right\}.$$

$$(ii)\ \ R\text{-}pretors = \left\{ \mathcal{U}(((\beta_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}) \;\middle|\; \begin{array}{c} ((\beta_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n} \in ((\{-\infty, \infty\})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n} \\ \textit{tal que } (\beta_{k,j} \geqslant \beta_{k,i} \Leftrightarrow j < i) \end{array} \right\}.$$

Demostración:

(i) Sea

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathcal{U}(((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}) \;\middle|\; \begin{array}{c} ((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n} \in ((\{-\infty, \aleph_0\})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n} \\ \text{tal que } (\alpha_{k,j} \geqslant \alpha_{k,i} \Leftrightarrow j < i) \end{array} \right\}.$$

Probamos que R-bad $= \mathcal{B}$.

($\subseteq$) Sea $\mathcal{X} \in R$-bad tal que $Size(\mathcal{X}) = ((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}$. Por el Corolario 5.6 se tiene que $\mathcal{X} = \mathcal{U}(((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})$. Dado que toda clase aditiva acotada está determinada de forma única por los módulos cíclicos que contiene, y por la Proposición 3.10, tenemos que $\alpha_{k,h} \in \{-\infty, \aleph_0\}$ con la condición ($\alpha_{k,j} \geqslant \alpha_{k,i}$ si y sólo si $j < i$) para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ y cada $h \in \{1, \ldots, n_k\}$. Por lo tanto, $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$.

($\supseteq$) Sea $\mathcal{X} \in \mathcal{B}$. Por la Proposición 5.3 se tiene que $\mathcal{X} \in R$-ad. Sea $\mathcal{Y} \in R$-ad tal que $cyc(\mathcal{X}) = cyc(\mathcal{Y})$. Entonces $ucyc(\mathcal{X}) = ucyc(\mathcal{Y})$ por el Lema 5.11. De esta manera, $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ por el Teorema 5.7 (ii). Por lo tanto, $\mathcal{X} \in R$-bad.

(ii) Sea

$$\mathcal{C} = \left\{ \mathcal{U}(((\beta_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}) \;\middle|\; \begin{array}{c} ((\beta_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n} \in ((\{-\infty, \infty\})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n} \\ \text{tal que } (\beta_{k,j} \geqslant \beta_{k,i} \Leftrightarrow j < i) \end{array} \right\}.$$

Probamos que R-pretors $= \mathcal{C}$.

($\subseteq$) Sea $\mathcal{X} \in R$-pretors tal que $Size(\mathcal{X}) = ((\beta_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}$. Por el Corolario 5.6 se tiene que $\mathcal{X} = \mathcal{U}(((\beta_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})$. Es fácil ver que $\beta_{k,h} \in \{-\infty, \infty\}$ con la condición ($\beta_{k,j} \geqslant \kappa_{k,i}$ si y sólo si $j < i$) para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ y cada $h \in \{1, \ldots, n_k\}$ Por lo tanto, $\mathcal{X} \in \mathcal{C}$.

($\supseteq$) Inmediata. ■

Corolario 5.13 *Sea R un anillo c-uniserial tal que $R \cong \prod_{k=1}^{n} R_k$, donde cada R_k es un anillo Artiniano cadena de longitud finita n_k. Entonces $|R\text{-}bad| = |R\text{-}pretors| = \prod_{k=1}^{n}(n_k+1)$.*

Así como se obtiene en el Teorema 3.27, de cada clase aditiva $\mathcal{X}$ podemos generar una clase aditiva acotada y una clase de pretorsión hereditaria de la siguiente forma:

Sea $\mathcal{X} \in R$-ad tal que $\mathcal{X} = \mathcal{U}(((\kappa_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})$. Sean $\alpha_{k,h}, \beta_{k,h} \in \overline{\mathbf{ICn}}$ para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ y cada $h \in \{1, \ldots, n_k\}$ tales que

$$\alpha_{k,h} = \begin{cases} \aleph_0 & \text{si } \kappa_{k,h} \neq -\infty \\ -\infty & \text{otro caso} \end{cases} \tag{5.1}$$

y

$$\beta_{k,h} = \begin{cases} \infty & \text{si } \kappa_{k,h} \neq -\infty \\ -\infty & \text{otro caso} \end{cases} \tag{5.2}$$

Entonces por el Teorema 5.12 tenemos que $\mathcal{U}(((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})$ es una clase aditiva acotada y $\mathcal{U}(((\beta_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})$ es una clase de pretorsión hereditaria. El siguiente teorema establece que dichas clases son precisamente $bad(\mathcal{X})$ y $strong(\mathcal{X})$.

Teorema 5.14 *Sea R un anillo c-uniserial tal que $R \cong \prod_{k=1}^{n} R_k$, donde cada R_k es un anillo Artiniano cadena de longitud finita n_k. Si $\mathcal{X} \in R$-ad, entonces $bad(\mathcal{X}) = \mathcal{U}(((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})$ y $strong(\mathcal{X}) = \mathcal{U}(((\beta_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})$, donde cada $\alpha_{k,h}$ satisface la Ecuación 5.1 y cada $\beta_{k,h}$ satisface la Ecuación 5.2.*

Demostración:
Primero, probamos que $bad(\mathcal{X}) = \mathcal{U}(((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})$.

Dado que $cyc(\mathcal{X}) = cyc(bad(\mathcal{X}))$, se tiene que $ucyc(\mathcal{X}) = ucyc(bad(\mathcal{X}))$ por el Lema 5.11. Por el Teorema 5.12 (i), se concluye que $bad(\mathcal{X}) = \mathcal{U}(((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})$.

De manera similar, por el Lema 5.11 y el Teorema 5.12 (ii), se prueba que $strong(\mathcal{X}) = \mathcal{U}(((\beta_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})$. ■

Recordemos que en la Sección 2.4 probamos que existe una asignación suprayectiva ϕ de las clases aditivas hacia los filtros lineales del anillo. Para una clase aditiva $\mathcal{X}$, denotamos por $[\mathcal{X}]_{\sim_\phi}$ a la clase de todas las clases aditivas que tienen asociado el mismo filtro lineal que $\mathcal{X}$. Probamos que $[\mathcal{X}]_{\sim_\phi} = [bad(\mathcal{X}), strong(\mathcal{X})]$ (Teorema 2.32) y que la familia $\{[bad(\mathcal{X}), strong(\mathcal{X})] \mid \mathcal{X} \in R\text{-ad}\}$ forma una partición de R-ad (Corolario 2.33).

Corolario 5.15 *Sea R un anillo c-uniserial tal que $R \cong \prod_{k=1}^{n} R_k$, donde cada R_k es un anillo Artiniano cadena de longitud finita n_k. Si $\mathcal{X} \in R$-ad, entonces el intervalo de clases aditivas asociado al filtro lineal $\phi(\mathcal{X})$ es $[\mathcal{U}(((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}), \mathcal{U}(((\beta_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})]$, donde cada $\alpha_{k,h}$ satisface la Ecuación 5.1 y cada $\beta_{k,h}$ satisface la Ecuación 5.2. Por lo tanto, R-ad está particionado en $\prod_{k=1}^{n}(n_k+1)$ intervalos de la forma $[\mathcal{U}(((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}), \mathcal{U}(((\beta_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})]$.*

Demostración:
Se sigue del Teorema 5.14 y del Corolario 5.13. ■

Notemos que si $\mathcal{X} = \{0\}$, entonces

$$\mathcal{U}(((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}) = \mathcal{U}(((\beta_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}) = \mathcal{U}((-\infty, \ldots, -\infty), \ldots, (-\infty, \ldots, -\infty)) = \{0\}$$

y así, $[\mathcal{U}(((\alpha_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}), \mathcal{U}(((\beta_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})]$ es un intervalo que consta de una sola clase aditiva, la clase cero.

Teorema 5.16 *Sea R un anillo c-uniserial tal que $R \cong \prod_{k=1}^{n} R_k$, donde cada R_k es un anillo Artiniano cadena de longitud finita n_k. Entonces*

$$|R\text{-}simp| = m \qquad si\ y\ sólo\ si \qquad atm(R\text{-}ad) = m.$$

Demostración:
La prueba es similar a la del Teorema 3.29. ■

Ejemplo 5.17 *Sea $R = \mathbb{Z}_{p^2}$ como en el Ejemplo 5.9. Por el Teorema 5.16, R-ad tiene sólo un átomo, $\mathcal{U}(\aleph_0, -\infty)$. Por el Corolario 5.15, R-ad está particionada en tres intervalos:*

$\mathscr{A}$: $[\mathcal{U}(-\infty, -\infty), \mathcal{U}(-\infty, -\infty)] = \{0\}$

$\mathscr{B}$: $[\mathcal{U}(\aleph_0, -\infty), \mathcal{U}(\infty, -\infty)]$

$\mathscr{C}$: $[\mathcal{U}(\aleph_0, \aleph_0), \mathcal{U}(\infty, \infty)]$

De esta manera, cada clase aditiva pertenece a exactamente uno de estos tres intervalos. Dichos intervalos se muestran en la Figura 5.3.

Ejemplo 5.18 *Sea $R \cong \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_q$ como en el Ejemplo 5.10. Por el Teorema 5.16, R-ad tiene dos átomos, $\mathcal{U}((\aleph_0, -\infty), -\infty)$ y $\mathcal{U}((-\infty, -\infty), \aleph_0)$. Por el Corolario 5.15, R-ad está particionada en seis intervalos:*

$\mathscr{A}$: $[\mathcal{U}((-\infty, -\infty), -\infty), \mathcal{U}((-\infty, -\infty), -\infty)]$.

$\mathscr{B}$: $[\mathcal{U}((\aleph_0, -\infty), -\infty), \mathcal{U}((\infty, -\infty), -\infty)]$.

$\mathscr{C}$: $[\mathcal{U}((\aleph_0, \aleph_0), -\infty), \mathcal{U}((\infty, \infty), -\infty)]$.

$\mathscr{D}$: $[\mathcal{U}((-\infty, -\infty), \aleph_0), \mathcal{U}((-\infty, -\infty), \infty)]$.

$\mathscr{E}$: $[\mathcal{U}((\aleph_0, -\infty), \aleph_0), \mathcal{U}((\infty, -\infty), \infty)]$.

$\mathscr{F}$: $[\mathcal{U}((\aleph_0, \aleph_0), \aleph_0), \mathcal{U}((\infty, \infty), \infty)]$.

De esta manera, cada clase aditiva pertenece a exactamente uno de estos seis intervalos. Dichos intervalos se muestran en la Figura 5.4. Cada clase marcada con letra mayúscula es el supremo del intervalo y es una clase de pretorsión hereditaria por el Teorema 5.14. Cada clase marcada con letra minúscula es el ínfimo del intervalo y es una clase aditiva acotada por el Teorema 5.14.

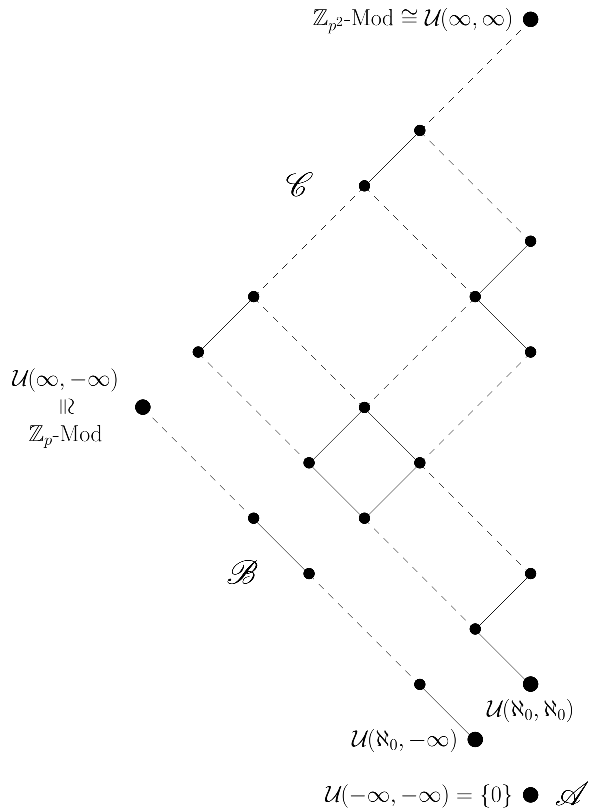


Figura 5.3: **Diagrama de Hasse de cada intervalo en $\mathbb{Z}_{p^2}$-ad donde p es cualquier número primo.**

El siguiente teorema extiende al Teorema 3.33.

Teorema 5.19 *Sea R un anillo c-uniserial. Entonces R-ad es una gran retícula fuertemente atómica.*

Demostración:

Supongamos que $R \cong \prod_{k=1}^{n} R_k$, donde cada R_k es un anillo Artiniano cadena de longitud finita n_k. Sean $\mathcal{X},\mathcal{Y} \in R$-ad tales que $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, $Size(\mathcal{X}) = ((\kappa_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}$, y $Size(\mathcal{Y}) = ((\eta_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}$. Consideremos el intervalo $[\mathcal{X}, Y]$. Por el Corolario 5.6, estamos tratando con el intervalo $[\mathcal{U}(((\kappa_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}), \mathcal{U}((((\eta_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n})]$. Notemos que, si $\kappa_{k_0,h_0} < \eta_{k_0,h_0}$ para algún $h_0 \in \{1,\ldots,n_k\}$ y para algún $k_0 \in \{1,\ldots,n\}$, entonces

$$\mathcal{U}(((\kappa_{k,h})_{h=1}^{n_k})_{k=1}^{n}) \prec \mathcal{U}\left(\begin{array}{c}(\kappa_{1,1},\ldots,\kappa_{1,n_1})\\ \vdots \\ (\kappa_{k_0,1},\ldots,\kappa_{k_0,(h_0-1)},\kappa_{k_0,h_0}^{+},\kappa_{k_0,(h_0+1)},\ldots,\kappa_{k_0,n_{k_0}})\\ \vdots \\ (\kappa_{n,1},\ldots,\kappa_{n,n_n})\end{array}\right)$$

y esta clase es un átomo en $[\mathcal{X}, Y]$. Se concluye que $[\mathcal{X}, Y]$ es atómico. ■

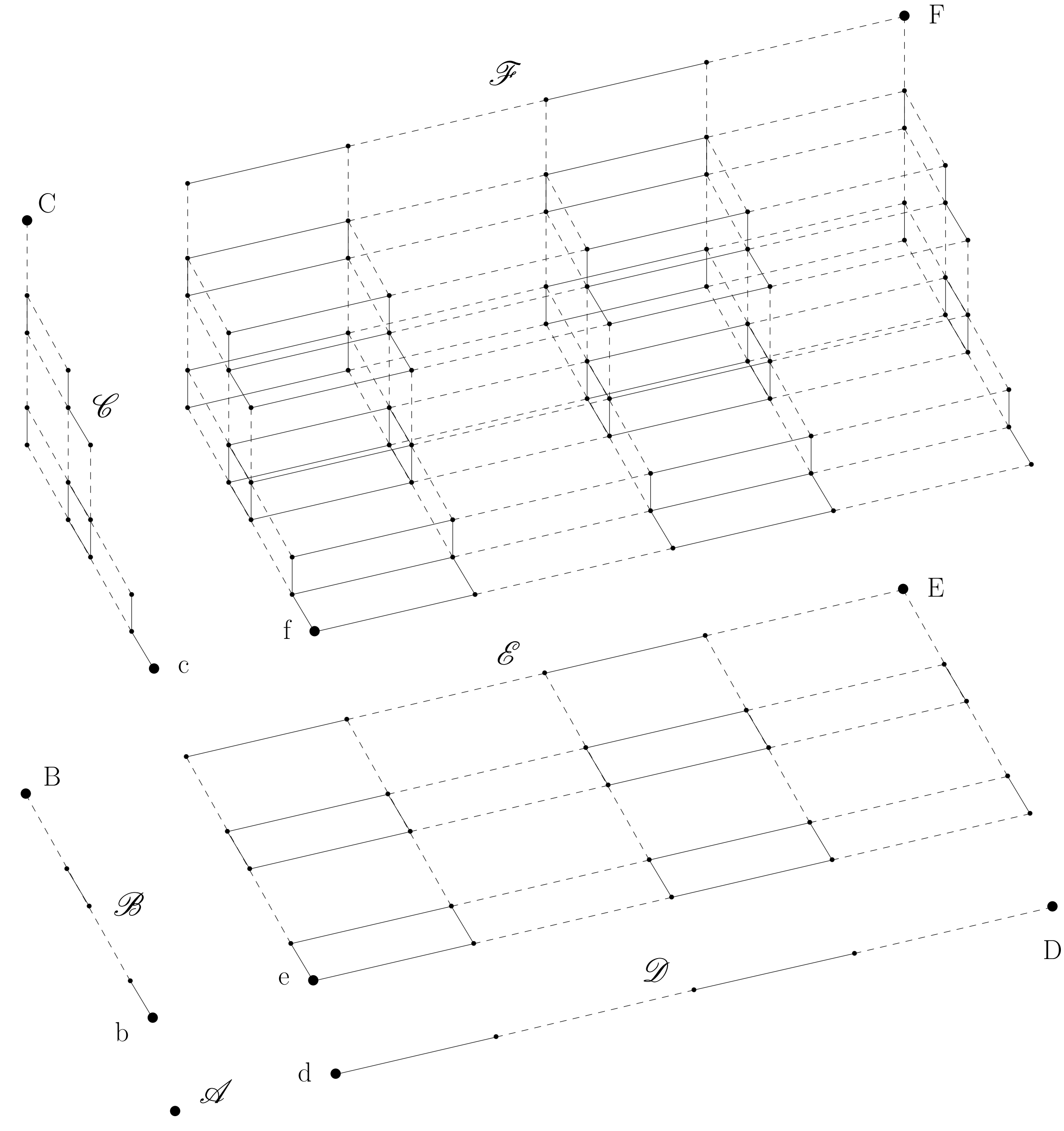


Figura 5.4: **Diagrama de Hasse de cada intervalo en $(\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_q)$-ad donde p y q son cualesquiera dos números primos diferentes.**

Apéndice A

Aritmética cardinal

En este apéndice exponemos algunos resultados sobre la aritmética en los números cardinales.

A.1. Números cardinales

Para hablar de números cardinales, necesitamos mencionar a los números ordinales.

Definición A.1 *Sea α un conjunto. Diremos que α*

(*i*) *es* transitivo *si todo elemento de α es un subconjunto de α.*

(*ii*) *está* bien ordenado *por un orden total $<$ si α está parcialmente ordenado por $<$ y es tal que cada subconjunto no vacío de α tiene un elemento menor.*

(*iii*) *es un* (número) ordinal *si es transitivo y está bien ordenado por $\in$.*

La clase de todos los ordinales la denotamos como **On**. Definimos un orden total en **On** de la siguiente forma:

$$\alpha < \beta \quad \text{si y sólo si} \quad \alpha \in \beta.$$

Notemos que los números naturales se pueden definir como números ordinales *finitos* de la siguiente forma:

$$0 := \varnothing, \qquad 1 = 0 \cup \{0\}, \quad \dots \quad , n+1 = n \cup \{n\}, \quad , \dots$$

Definición A.2 *Sean X, Y dos conjuntos. Diremos que X y Y tienen la misma* cardinalidad *si existe un isomorfismo entre X y Y. A esto lo denotamos como $|X| = |Y|$.*

Podemos definir un orden parcial sobre la cardinalidad de dos conjuntos de la siguiente forma: $|X| \leqslant |Y|$ si y sólo si existe una función inyectiva $f : X \to Y$. Notemos que $|X| < |Y|$ si y sólo si $|X| \leqslant |Y|$ y $|X| \neq |Y|$.

El siguiente teorema es importante para determinar que el concepto de cardinalidad no es trivial:

Teorema A.3 (Cantor) *Para cada conjunto X, $|X| < |P(X)|$.*

Demostración:
Ver [19, Teorema 3.1, p. 27]. ■

Teorema A.4 (Cantor-Bernstein) *Si $|X| \leqslant |Y|$ y $|Y| \leqslant |X|$, entonces $|X| = |Y|$.*

Demostración:
Ver [19, Teorema 3.2, p. 28]. ■

Definición A.5 *Sea κ un ordinal. Diremos que κ es un* (número) cardinal *si $|\kappa| \neq |\alpha|$ para toda $\alpha < \kappa$. Denotamos como* **Cn** *a la clase de todos los números cardinales.*

Para un conjunto X, decimos que su cardinalidad es $\kappa \in \mathbf{Cn}$ si existe un isomorfismo entre X y κ. A esto lo denotaremos simplemente como $|X| = \kappa$. El Axioma de Elección garantiza que todo conjunto tiene asociado un cardinal.

A.2. Aritmética cardinal

Sobre los números cardinales, se pueden definir las operaciones de suma, multiplicación y exponenciación de la siguiente manera:

Definición A.6 *Sean X, Y conjuntos infinitos tales que $|X| = \kappa$ y $|Y| = \lambda$. Definimos*

$$\kappa + \lambda := |X \sqcup Y| = max\{\kappa, \lambda\}$$

$$\kappa \cdot \lambda := |X \times Y| = max\{\kappa, \lambda\}$$

$$\kappa^{\lambda} := |X^{Y}|$$

Como observamos en la definición anterior, $+$ y $\cdot$ tienen el mismo resultado. De esta manera, notemos que $+$ y $\cdot$ son operaciones asociativas, conmutativas y distributivas. Para la exponenciación, tenemos los siguientes resultados:

Lema A.7 *Sean X un conjunto y $\kappa, \lambda, \mu \in$* **Cn**.

(*i*) *Si $|X| = \kappa$, entonces $|P(X)| = 2^{\kappa}$.*

(*ii*) $(\kappa \cdot \lambda)^{\mu} = \kappa^{\mu} \cdot \lambda^{\mu}$.

(*iii*) $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^{\lambda} + \kappa^{\mu}$.

(*iv*) $(\kappa^{\lambda})^{\mu} = \kappa^{\lambda\cdot\mu}$.

(*v*) *Si* $\kappa \leqslant \lambda$, *entonces* $\kappa^{\mu} \leqslant \lambda^{m}u$.

(*vi*) *Si* $0 < \lambda \leqslant \mu$, *entonces* $\kappa^{\lambda} \leqslant \kappa^{\mu}$.

(*vii*) $\kappa^{0} = 1, 1^{\kappa} = 1$ *y* $0^{\kappa} = 0$ *si* $\kappa > 0$.

(*viii*) *Si* $2 \leqslant \kappa \leqslant \lambda$ *y* λ *es infinito, entonces* $\kappa^{\lambda} = 2^{\lambda}$.

Demostración:
Ver [19, Lema 3.3, p. 28; Observaciones (3.4)-(3.10), p. 29; Lema 5.6, p. 51]. ■

Definición A.8 *Sea* $\{\kappa_i\}_{i\in I}$ *un conjunto indexado de números cardinales. Definimos*

$$\sum_{i\in I}\kappa_i := \left|\bigsqcup_{i\in I} X_i\right| \qquad y \qquad \prod_{i\in I}\kappa_i := \left|\prod_{i\in I} X_i\right|$$

donde $\{X_i\}_{i\in I}$ *es una familia de conjuntos tales que* $|X_i| = \kappa_i$ *para toda* $i \in I$.

Notemos que esta definición no depende de la elección de $\{X_i\}_{i\in I}$ gracias al Axioma de Elección.

Observación A.1 *Si* $\kappa, \lambda \in$ **Cn** *tales que* $\kappa_i = \kappa$ *para cada* $i \in I$ *con* $|I| = \lambda$, *entonces*

$$\sum_{i\in I}\kappa_i = \lambda \cdot \kappa \qquad y \qquad \prod_{i\in I}\kappa_i = \kappa^{\lambda}.$$

Lema A.9 *Si* λ *es un cardinal infinito y* $\kappa_i > 0$ *para cada* $i < \lambda$, *entonces*

$$\sum_{i<\lambda}\kappa_i = \lambda \cdot sup_{i<\lambda} k_i.$$

Demostración:
Ver [19, Lema 5.8, p. 52]. ■

Lema A.10 *Si* λ *es un cardinal infinito y* $\{\kappa_i\}_{i\leqslant\lambda}$ *forman una sucesión no decreciente de cardinales diferentes de cero, entonces*

$$\prod_{i<\lambda}\kappa_i = (sup_{i<\lambda} k_i)^{\lambda}.$$

Demostración:
Ver [19, Lema 5.9, p. 54]. ■

Teorema A.11 (König) *Si* $\kappa_i < \lambda_i$ *para cada* $i \in I$*, entonces*

$$\sum_{i\in I} \kappa_i < \prod_{i\in I} \lambda_i.$$

Demostración:
Ver [19, Teorema 5.10, p. 54]. ■

Corolario A.12 $\kappa < 2^\kappa$ *para cada* $\kappa \in \mathbf{Cn}$.

Demostración:
Consideremos $|I| = \kappa$, $\sum_{i\in I} 1$ y $\prod_{i\in I} 2$. Por el Teorema A.11 y los Lemas A.9 y A.10 tenemos que

$$\kappa = \sum_{i\in I} 1 < \prod_{i\in I} 2 = 2^\kappa.$$

Conclusiones y perspectivas

I. Conclusiones

El objetivo de esta investigación fue ampliar la descripción reticular de la gran retícula de clases aditivas, denotada como R-ad, para cualquier anillo. El resultado fue la obtención de propiedades reticulares para R-ad cuando R es cualquier anillo con unidad, además, en casos particulares, para cuando R es un anillo Artiniano semisimple y un anillo c-uniserial.

Aunado a lo anterior, obtuvimos una caracterización para anillos Noetherianos: R es Noetheriano si y sólo si la clase aditiva generada por R es la clase de todos los módulos finitamente generados si y sólo si toda clase aditiva acotada está formada únicamente por módulos finitamente generados.

Para R un anillo cualquiera, obtuvimos que R-ad es una gran retícula atómica superiormente continua. Los átomos en R-ad son clases aditivas acotadas generadas por un único módulo simple. Para R un anillo Artiniano semisimple, obtuvimos que R-ad es un gran marco fuertemente atómico. Además, R-ad es isomorfa como retícula a un producto finito de copias de **ICn**, la clase de todos los números cardinales infinitos. Para R un anillo c-uniserial, obtuvimos que R-ad es una gran retícula fuertemente atómica. Además, R-ad es isomorfa como retícula a una subretícula de un producto finito de copias de **ICn**.

Para obtener los isomorfismos mencionados anteriormente, estudiamos una descripción de submódulos y cocientes para módulos sobre anillos Artinianos cadena y anillos c-uniseriales. Definimos los conceptos de módulo cíclico supervisor y supervisado, así como los conceptos de conjunto supervisor y supervisado. Con estos conceptos, caracterizamos a todos los submódulos y a todos los cocientes de todo módulo sobre anillos Artinianos cadena y anillos c-uniseriales.

De esta manera, las clases aditivas sobre estos anillos están determinadas por el número de componentes en la descomposición del anillo, así como del número cardinal de copias que contengan de cada submódulo isomorfo a estas componentes. Esta caracterización fue posible definiendo los conceptos de clase α-aditiva, clase u-cardinal y tamaño aditivo.

Definimos los operadores *bad* y *strong* y con ellos probamos que la clase de todas las clases aditivas acotadas, R-bad y el conjunto de todas las clases de pretorsión hereditaria, R-pretors, son isomorfas como retículas.

Obtuvimos una descripción de intervalos de clases aditivas, generados por la correspondencia entre la gran retícula de las clases aditivas y el conjunto de todos los filtros lineales del anillo, que generan una partición en R-ad. Los extremos de cada intervalo son una clase aditiva acotada y una clase de pretorsión hereditaria. Para anillos c-uniseriales, caracterizamos a todas las clases aditivas acotadas y a todas las clases de pretorsión hereditaria por medio de clases α-aditivas y clases u-cardinales.

Por todo lo mencionado anteriormente, podemos concluir que en los anillos con un número finito de ideales (con un número finito de ideales máximos) se describe completamente la gran retícula R-ad.

II. Perspectivas

El estudio de la gran retícula de clases aditivas y sus propiedades reticulares continúa en desarrollo. A continuación se enuncian algunos temas por abordar y preguntas por responder.

1. En [30, Definición 1.3, p. 515], Walker y Walker introdujeron la definición de clase aditiva completa: Una clase aditiva $\mathcal{X}$ es *completa* si para cualquier $\kappa \in \mathbf{ICn}$ y cualquier $M \in \mathcal{X}$ se tiene que $M^{(\kappa)} \in \mathcal{X}$. Llamamos R-cad al conglomerado de todas las clases aditivas completas. Es fácil ver que R-pretors $\subseteq$ R-cad para cualquier anillo R. En su artículo, Walker y Walker dan una caracterización para toda clase aditiva completa cuando R es un anillo conmutativo. Sin embargo, ellos no estudiaron al conglomerado R-cad ni sus propiedades reticulares; sólo usaron a las clases aditivas completas para dar una representación diferente a las clases de torsión hereditaria. Un trabajo a futuro sería estudiar el conglomerado R-cad y sus propiedades reticulares. Conjeturamos que R-cad $=$ R-pretors si y sólo si R es un anillo c-uniserial.

2. En este trabajo mencionamos y caracterizamos a aquellas clases aditivas que son esenciales en R-ad (Teorema 2.26) y dimos un par de condiciones para que toda clase aditiva diferente de cero sea esencial en R-ad (Teorema 2.27). ¿Existen condiciones dualmente similares a la de los Teoremas 2.26 y 2.27 para clases aditivas supérfluas?

3. En este trabajo mencionamos y caracterizamos a los átomos en R-ad para cualquier anillo R así como para anillos Artinianos simples, Artinianos semisimples, Artinianos cadena y c-uniseriales. Sin embargo, no sabemos nada acerca de coátomos en R-ad. ¿Existen coátomos en R-ad? Si la respuesta es afirmativa, ¿para qué anillos existen coátomos en R-ad? Si la respuesta es negativa, ¿por qué no existen coátomos en R-ad?

4. En este trabajo caracterizamos a los anillos Noetherianos por medio de clases aditivas acotadas. Un trabajo a futuro sería caracterizar otros anillos por medio de clases aditivas o propiedades de R-ad.

5. Como se puede observar en los Capítulos 3 y 5 de este trabajo, un papel importante en la descripción de la estructura reticular de R-ad recae en la descripción de los módulos sobre anillos Artinianos simples, Artinianos semisimples, Artinianos cadena y c-uniseriales. En concreto, estos anillos son casos particulares de *anillos de Köthe*: Un anillo R es *Köthe* si todo R-módulo izquierdo y derecho es suma directa de submódulos cíclicos. Un trabajo a futuro sería estudiar la estructura reticular de R-ad para anillos de Köthe.

6. Otra propiedad que comparten los anillos Artinianos simples, Artinianos semisimples, Artinianos cadena y c-uniseriales es que son Artinianos semilocales. Un trabajo a futuro sería estudiar la estructura reticular de R-ad para anillos Artinianos semilocales.

7. En la Sección 3.2 definimos las clases α-aditivas generadas por una clase $\mathcal{X}$ cualquiera como aquellas clases que están formadas por subcocientes de sumas directas con menos de α sumandos (los cuales pertenecen a $\mathcal{X}$), donde $\alpha \in \mathbf{ICn}$. Esta definición nos permite extender de manera natural el concepto de clase aditiva de la siguiente manera.

   Definición. *Sea $\alpha \in \mathbf{ICn}$. Decimos que una clase de módulos $\mathcal{X}$ es* cerrada bajo α-sumas directas *si para toda $M \in \mathcal{X}$ y para todo $\kappa \geqslant \alpha$ se tiene que $M^{(\kappa)} \notin \mathcal{X}$ y α es el menor número cardinal con esta propiedad.*

   Definición. *Sea $\alpha \in \mathbf{ICn}$. Decimos que una clase de módulos $\mathcal{X}$ es* α-aditiva *si $\mathcal{X}$ es cerrada bajo submódulos, cocientes y α-sumas directas. Denotamos como R-α-ad al conglomerado de todas las clases α-aditivas.*

   Un trabajo a futuro sería estudiar el conglomerado R-α-ad y su estructura reticular para cualquier anillo. Conjeturamos que la estructura reticular de R-α-ad para anillos Artinianos semisimples y c-uniseriales será similar a la de R-ad para todo $\alpha \in \mathbf{ICn}$.

8. Recordemos que $\overline{\mathbf{ICn}} = \mathbf{ICn} \cup \{-\infty, \infty\}$. Como se puede observar en los Capítulos 3 y 5, R-ad es isomorfo a $(\overline{\mathbf{ICn}})^{(m)}$ para R un anillo Artiniano semisimple e isomorfo a una subretícula de $(\overline{\mathbf{ICn}})^{(m)}$ para R un anillo c-uniserial, donde m depende de la descomposición de R. ¿Existen otras subretículas de $(\overline{\mathbf{ICn}})^{(m)}$ isomorfas a R-ad para algún anillo particular R? Si la respuesta es afirmativa, ¿qué características debe tener el anillo para que suceda el isomorfismo? Si la respuesta es negativa, ¿porque sólo para anillos Artinianos semisimples y c-uniseriales sí existen los isomorfismos?

9. En caso de que la conjetura expuesta en el punto 7 sea cierta, conjeturamos que R-α-ad es isomorfo a una subretícula de $(\overline{\mathbf{ICn}})^{(m)}$ para anillos c-uniseriales. En caso de que esta conjetura sea cierta, ¿existirán otras subretículas de $(\overline{\mathbf{ICn}})^{(m)}$ isomorfas a R-α-ad para algún anillo particular R? Si la respuesta es afirmativa, ¿qué características debería tener el anillo para que suceda el isomorfismo? Si la respuesta es negativa, ¿porque sólo para anillos c-uniseriales sí existirían los isomorfismos?

10. Recordemos que dos anillos R y S son *Morita-equivalentes* si R-Mod y S-Mod son equivalentes, es decir, si existen funtores covariantes $F : R\text{-Mod} \to S\text{-Mod}$ y $G : S\text{-Mod} \to R\text{-Mod}$ tales que existen isomorfismos naturales entre GF y $1_{R\text{-Mod}}$ y entre FG y $1_{S\text{-Mod}}$. En [5, Corolario 22.6, p. 265] se prueba que R es Morita-equivalente a $\mathbb{M}_n(R)$, el anillo de matrices completas sobre R. Por otro lado, si $\mathcal{P}$ es una propiedad de anillos, decimos que $\mathcal{P}$ es *Morita-invariante* si, siempre que R tenga la propiedad $\mathcal{P}$, S tiene la propiedad $\mathcal{P}$. Notemos que una propiedad $\mathcal{P}$ de un anillo R es Morita-invariante si puede ser caracterizada en términos de módulos en R-Mod (sin hacer referencia a los elementos de los módulos o al anillo). De esta manera, algunas propiedades de anillos que son Morita-invariantes son "simple", "semisimple" y "Artiniano".

    Suponiendo que R y S son Morita-equivalentes y R es c-uniserial, ¿es S un anillo c-uniserial? La respuesta es negativa. Por ejemplo, $\mathbb{Z}_{p^2}$ y $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_{p^2})$ son Morita-equivalentes pero $\mathbb{Z}_{p^2}$ es c-uniserial pues es completamente primario, pero $\mathbb{M}_2(\mathbb{Z}_{p^2})$ no es c-uniserial pues no es local.

    Ahora, suponiendo que R es uniserial, ¿es S un anillo uniserial? La respuesta es afirmativa, pues la propiedad "serial" (en módulos) es Morita-invariante y un anillo es uniserial si y sólo si todo módulo es serial. Por lo tanto, sería interesante estudiar y describir la retícula R-ad para un anillo R uniserial.

Bibliografía

[1] Alvarado, A., Rincón, H., Ríos, J. (2010). On Big Lattices of Classes of R-modules Defined by Closure Properties. En: Van Huynh, D., López-Permouth, S. R. eds. *Advances in Ring Theory*. Trends in Mathematics. Birkhäuser Basel. 19–36.

[2] Alvarado, A., Rincón, H., Ríos, J. (2006). On some lattices of module classes. *Journal of Algebra and Its Applications*. **5**(1):105–117.

[3] Alvarado, A., Rincón, H., Ríos, J. (2001). On the lattices of natural and conatural classes in R-Mod. *Comm. Algebra*. **29**(2):541–556.

[4] Amini, A., Amini, B. (2012). On Strongly Superfluous Submodules. *Comm. Algebra*. **40**(8):2906–2919.

[5] Anderson, F. W., Füller, K. R. (1992). *Rings and Categories of Modules*. Graduate Texts in Mathematics **13**, 2da Ed. Springer-Verlag New York.

[6] Asano, K. (1939). Über verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexen Operatorenring und ihre Anwendungen. *Japan J. Math. Soc*. 15:231–253.

[7] Dauns, J. (1994). *Modules and Rings*. Cambridge University Press.

[8] Dauns, J., Zhou, Y. (2006). *Classes of modules*. Chapman & Hall/CRC. Taylor and Francis Group Boca Ratón.

[9] Dung, N. V; Facchini, A. (1998). Direct summands of serial modules. *J. Pure and Applied Algebra*. 133: 93–106.

[10] Eisenbud, D; Griffith, P. (1971). Serial rings. *J. Algebra*. 17: 389–400.

[11] Facchini, A. (2012). *Module theory. Endomorphism rings and direct sum decompositions in some classes*. Birkhäuser.

[12] Faith, C. (1976). *Algebra II: Ring Theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Verlag Berlin Heidelberg.

[13] Faith, C. (1966). On Köthe Rings. *Math. Ann*. 164:207–212

[14] Grätzer, G. (2011). *Lattice Theory: Foundations*. Birkhäuser Basel.

[15] Golan, J. S. (1987). *Linear topologies on a ring: an overview*. Pitman Research Notes in Mathematics **159**. Longman Scientific & Technical Harlow Essex.

[16] Golan, J. S. (1986). *Torsion Theories*. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **29**, Longman Scientific and Technical Harlow Essex.

[17] Köthe, G. (1934). Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexen Operatorenring. *Math Z.* 39:31–44.

[18] Simmons, H. (2014). *An introduction to idioms*. Notes from school of Mathematics, England: University of Manchester. http://www.cs.man.ac.uk/˜hsimmons.

[19] Jech, T. (2003). *Set Theory: The Third Millennium Edition, revised and expanded*. Springer Monographs in Mathematics, 3ra Ed. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[20] Kashu, A. I. (1969). Closed Classes of left A-Modules and Closed Sets of left Ideals of Ring A. *Matematicheskie Zametki*. **5**(3):381–390.

[21] Leonard, W. W. (1966). Small modules. *Proc. Amer. Math. Soc.* **17**:527–531.

[22] Raggi, F., Rincón, H., Signoret, C. (1999). On some classes of R-modules and congruences in R-tors. *Comm. Algebra*. **27**(2):889–901.

[23] Raggi, F., Ríos, J., Wisbauer, R. (2001). The lattice structure of hereditary pretorsion classes. *Comm. Algebra*. **29**(1):131–140.

[24] Raggi, F., Signoret, C. (1996). Serre Subcategories of R-Mod. *Comm. Algebra*. **24**(9):2877–2886.

[25] Raggi, F; Signoret, C. (1998). Serre Subcategories and Linear Filters. *Kyungpook Mathematical Journal*. **38**(2): 411–419.

[26] Signoret, C; Zamora-Erazo, S. (2017). On some Classes of Modules and Characterizations of Ring. *Comm. Algebra*. 45(11):4771–4782.

[27] Skornyakov, L. A. (1969). When are all modules semichain modules? *Math. Zametki*. 5(2):173–182.

[28] Stenström, B. (1975). *Rings of Quotients*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[29] Viola-Prioli, A. M., Viola-Prioli, J. E., Wisbauer, R. (1994). Module categories with linearly ordered closed subcategories. *Comm. Algebra*. **22**(9):3613–3627.

[30] Walker, C., Walker, E. (1972). Quotient Categories and Rings of Quotients. *Rocky Mountain Journal of Math.* **2**(4):513–555.

[31] Wisbauer, R. (1991). *Foundations of Module and Ring Theory.* Gordon and Breach Science Publishers Reading.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00063
Matrícula: 2112800096

Sobre la gran retícula de Clases Aditivas y su descripción particular en algunos anillos uniseriales.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 15:00 horas del día 5 del mes de diciembre del año 2018 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. JOSE RIOS MONTES
DRA. MARIA JOSE ARROYO PANIAGUA
DR. ROGELIO FERNANDEZ ALONSO GONZALEZ
DRA. SILVIA CLAUDIA GAVITO TICOZZI
DR. ALEJANDRO ALVARADO GARCIA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

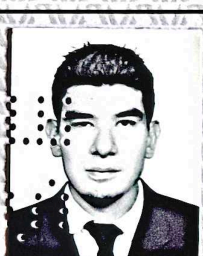
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

DE: SERGIO ZAMORA ERAZO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



SERGIO ZAMORA ERAZO
ALUMNO

REVISÓ

DR. JOSE ANTONIO DE LOS REYES HEREDIA
SECRETARIO GENERAL

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

José Ríos M.

DR. JOSE RIOS MONTES

VOCAL

DRA. MARIA JOSE ARROYO PANIAGUA

VOCAL

R. Fernández A.

DR. ROGELIO FERNANDEZ ALONSO GONZALEZ

VOCAL

Silvia C. Gavito T.

DRA. SILVIA CLAUDIA GAVITO TICOZZI

SECRETARIO

DR. ALEJANDRO ALVARADO GARCIA