Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

“ALGUNOS ASPECTOS DE LA TOPOLOGÍA DE ZARISKI PARA MÓDULOS MULTIPLICACIÓN Y SUS MARCOS Y CUANTALES ADJUNTOS”

Tesis que presenta
Edgar Gutiérrez Suárez
Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Matemáticas)

Asesor: Dra. Martha Lizbeth Shaid Sandoval Miranda
Co-asesor: Dr. Rogelio Fernández-Alonso González

Jurado calificador:

Presidenta: Dra. José María Arroyo Paniagua
Secretario: Dr. Rogelio Fernández-Alonso González
Vocal: Dr. Mauricio Medina Bárcenas

Iztapalapa, Ciudad de México, abril 2021

Agradecimientos

Agradezco a las personas más importantes de mi vida: mi familia, en especial a mi madre María del Carmen, a mis tías Clara, Martha, Juana y Micaela, y a mi difunto abuelo José.

A mi gran amigo Adrián, quien siempre ha creído en mí, y me ha brindado todo su apoyo; a mis amigos Abraham, Adán, Cesar, Edgar, Edoardo, Enrique, Erik, Magdiel, Marco Polo, Omar, Roberto, Tonathiu y Yarely.

A mis asesores de tesis la Doctora Lizbeth Shaid Sandoval Miranda, por ser siempre tan gentil y simepre me ha me brindado sus sabios consejos y las numerosas enseñanzas que me ha dejado; al Doctor Rogelio Fernández-Alonso González por todo su apoyo incondicional. Gran parte de lo que yo sé de Álgebra es gracias a él.

A mis sinodales el Doctor Mauricio Medina, la Doctora María José Arroyo y el Doctor Rogelio Fernández-Alonso González, quienes fueron tan cautelosos en la revisión de mi tesis. Estoy sumamente agradecido con ellos por todos los consejos, sugerencias y observaciones que me hicieron saber.

A la Maestra Iseo, quien me apoyó en los procesos administrativos durante mis estudios de maestría.

A los profesores Mario Pineda, Rubén Becerril y Felipe Zaldivar, de quienes aprendí demasiado.

Un especial agradeciemiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Conacyt) por el apoyo económico que me ortorgó, mes con mes, durante mis estudios de maestría.

Finalmente, agradezco a mi alma máter, la Universidad Autónoma Metropolitana por brindarme un apoyo económico, el cual fue vital para la culminación de este trabajo de investigación.

Índice general

Introducción

Los módulos multiplicación fueron introducidos en 1974 por F. Mehdi en [26]. El estudio de estos módulos (definidos, primeramente, sobre anillos conmutativos) surge, precisamente, de generalizar el concepto de ideal multiplicación[1]. En la literatura, existe una gran cantidad de trabajos acerca del estudio de la clase de módulos multiplicación (Ver [15], [16], [37], [38], [42], [43]). Muchos de estos trabajos consiguen caracterizar los R-módulos multiplicación por medio de los ideales del anillo R, examinan bajo qué condiciones tales módulos son finitamente generados o cíclicos, obtienen resultados interesantes acerca de las localizaciones de un R-módulo multiplicación cuando R es conmutativo, etc. Algunos de estos resultados han sido el fundamento para llevar a cabo este trabajo de investigación, más aún, este trabajo está basado e inspirado en resultados de J. Castro, J. Ríos y G. Tapia en [10], en algunos resultados y definiciones de J. Beachy en [5], así como en algunos de M. Medina, L. Morales, L. Sandoval y Á. Zaldívar en [27].

Los objetivos principales de este trabajo son: estudiar los módulos multiplicación sobre anillos no necesariamente conmutativos; estudiar algunas propiedades y resultados que se presentan en la teoría de anillos con la finalidad de obtener versiones análogas en la teoría de módulos, de tal forma que cuando consideremos el caso el módulo igual al anillo, recuperemos lo que sabemos de la teoría de anillos, en un aspecto más general: por ejemplo, consideraremos el concepto de (sub)módulo primo en el sentido de Raggi et al ([30], Definition 13), denotando por $Spec(M)$ al conjunto de todos los submódulos primos de un módulo dado M; y finalmente, para cualquier módulo multiplicación M sobre un anillo conmutativo R, $Spec(M)$ y $Max(M) = \{N \leq M \mid N \text{ es un submódulo máximo de } M\}$ estarán dotados de una topología como la de Zariski. Entonces: i) Investigar la relación entre las propiedades topológicas de algunos subespacios de $Spec(M)$ y algunas propiedades algebraicas de los submódulos de M; y ii) Demostrar que la retícula $SPm(M)$ de submódulos semiprimitivos de M es un marco espacial, es decir, $SPm(M) \cong \mathcal{O}(Max(M))$.

Este trabajo está organizado en 6 capítulos. A continuación, hacemos una pre-

[1] Dado un anillo conmutativo R e I ideal de R. Decimos que I es un ideal multiplicación si para todo ideal B de R con $B \subseteq I$, existe un ideal C de R tal que $B = IC$.

sentación en forma sintética de cada uno de ellos:

El primer capítulo está destinado a la presentación de algunos conceptos y resultados que se conocen de la teoría de Anillos y Módulos, así como de la teoría de Retículas y la teoría de Prerradicales que resultan ser relevantes para los capítulos posteriores. Por ejemplo, el concepto de Conexión de Galois está presente en cada capítulo de este trabajo.

En el siguiente capítulo, mencionamos algunos conceptos y resultados que destacan del artículo de J. Beachy ([5]), como son: el concepto de módulo M-ideal; un producto de módulos y el resultado en ([5], Proposition 5.5). Este último, hemos notado que se le puede dar una versión analóga para módulos multiplicación (concepto que presentaremos en el siguiente capítulo) y módulos casi-proyectivos.

En el tercer capítulo presentamos el concepto de módulo multiplicación (sobre cualquier anillo conmutativo) tal como ha sido introducido por F. Mehdi en [26]. Presentamos algunos resultados dados en [10], el cuál ha sido de motivación para la realización de este trabajo de investigación.

Además, en este capítulo, presentamos un producto de módulos dado por Bican et al ([6]), así como algunas propiedades que cumple este producto. Demostraremos que este y el producto dado por J. Beachy (definido en el tercer capítulo) coinciden sobre la retícula de submódulos de cualquier módulo casi-proyectivo y cualquier módulo multiplicación sobre cualquier anillo conmutativo, más aún, demostraremos que el resultado en ([5], Proposition 5.5) también es válido para estas dos clases de módulos en cuestión.

Una vez familiarizados con el concepto de módulo multiplicación, dado un anillo R, es claro que el comportamiento de sus módulos multiplicación depende eventualmente del comportamiento de ese anillo, es decir, depende de las propiedades intrínsecas que posee R. A pesar de que estos módulos fueron definidos sobre anillos conmutativos, existen, por ejemplo, los trabajos de A. Tuganbaev ([42], [43]) donde fueron introducidos sobre anillos no necesariamente conmutativos: anillos invariantes derechos[2] (todo ideal derecho es ideal izquierdo) con multiplicación conmutativa de ideales. Como motivación a esto último, al final de este capítulo, presentamos algunos resultados de módulos multiplicación sobre anillos invariantes izquierdos con multiplicación conmutativa de ideales (no necesariamente conmutativos); en particular, sobre una clase muy peculiar de esta clase anillos: anillos locales uniseriales, que recientemente han sido estudiados por R. Fernández y S. Gavito en [19]. En el primer caso, recordaremos algunos resultados de A. Tuganbaev ([42], [43]), los cuales (bajo ciertas hipótesis) establecen una correspondencia entre la retícula de ideales de cualquier anillo en cuestión y la retícula de submódulos de un módulo multiplicación, y que más tarde será de

[2]Un anillo invariante derecho resulta ser equivalente a un anillo invariante izquierdo.

vital importancia para mostrar la relación que existe entre los ideales primos (resp. ideales semiprimos) y los submódulos primos (resp. submódulos semiprimos) de un módulo multiplicación.

Para el estudio de módulos multiplicación sobre anillos locales uniseriales, demostraremos que, dado cualquier anillo local uniserial R, los únicos R-módulos multiplicación distintos de cero (salvo isomorfismo) son los ideales del anillo y el anillo mismo en cuestión.

En la literatura, existen diversas definciones de un (sub)módulo primo. En este trabajo vamos a considerar los conceptos de (sub)módulo primo y (sub)módulo semiprimo en el sentido de Raggi et al ([30], Definition 11) y en el sentido de Raggi et al ([34], Definition 10), respectivamente. El capítulo 4 está dedicado al estudio exclusivo de (sub)módulos primos (resp. semiprimos) de un módulo: casi-proyectivo y un módulo multiplicación. También demostraremos que, para cualquier módulo multiplicación M tal que genera a todos sus submódulos sobre cualquier anillo R invariante izquierdo con multiplicación conmutativa de ideales, bajo ciertas hipótesis, existe una correspondencia entre los submódulos primos (resp. semiprimos) de M y los ideales primos (resp. semiprimos) de R. Esta situación es similar a lo que sucede para módulos multiplicación sobre anillos conmutativos como lo demuestran J. Castro et al en [10].

En el penúltimo capítulo, dado un módulo multiplicación M, vamos a considerar $Spec(M)$ el espectro primo de M y le dotaremos de una topología $\mathcal{T}$: la topología de Zariski. Observamos que ciertas funciones definidas entre la retícula de submódulos de M y el conjunto potencia de $Spec(M)$ inducen una conexión de Galois antítona, en la cual, bajo ciertas condiciones, existe una anti-correspondencia biunívoca entre los submódulos semiprimos de M y los conjuntos cerrados de la topología $(Spec(M), \mathcal{T})$. Esta situación no es de sorprenderse: existe una situación análoga en la álgebra conmutativa y en la geometría algebraica. Al final de este capítulo caracterizamos a los subconjuntos abiertos densos de la forma $\mathcal{U}(N)$ de $(Spec(M), \mathcal{T})$ en términos de los submódulos esenciales N de M.

En el capítulo 6, presentaremos algunos conceptos retículares: cuantales, marcos y marcos espaciales (un marco se dice que es espacial si es isomorfo a $\mathcal{O}(X)$ el marco de abiertos de algún espacio topológico X). De hecho, exhibiremos algunos ejemplos que están asociados a un módulo multiplicación. Introduciremos a los submódulos primitivos de un módulo M, así como a los submódulos semiprimitivos (un submódulo N de M se dice que es semiprimitivo si es una intersección de submódulos primitivos de M) de M. Para un módulo M, denotamos $SPm(M) = \{N \leq M \mid N \text{ es submódulo semiprimitivo de} M\} \cup \{M\}$.

Dado cualquier módulo multiplicación M sobre cualquier anillo conmutativo R, demostraremos que existe una conexión de Galois antítona entre la retícula completa $\Lambda(M)$ y la retícula $\mathscr{P}(Max(M))$, donde $Max(M) = \{N \leq$

$M \mid N$ es un submódulo máximo de $M\}$ forma un espacio topológico con la topología hull-kernel $\mathcal{T}$ (Ver [43], Proposition 5.12). En esta Conexión de Galois, demostraremos que hay una anti-correspondencia biyectiva entre la subretícula de submódulos semiprimitivos de M y la colección de conjuntos cerrados del espacio topológico $(Max(M), \mathcal{T})$, más aún, probaremos que $SPm(M)$ es un marco que resulta ser espacial, es decir, $SPm(M) \cong \mathcal{O}(Max(M))$.

Finalmente, para un módulo multiplicación M sobre cualquier anillo conmutativo R, establecemos condiciones para que $Spec(M)$ (resp. espectro máximo $Max(M)$) resulte ser un espacio topológico normal en términos de la retícula $Semp(M)$ (resp. $SPm(M)$).

En este trabajo consideraremos anillos asociativos R con identidad y módulos izquierdos unitales. Denotamos por R-Mod a la categoría de R-módulos izquierdos. Un R-módulo M se llama módulo multiplicación si para cada submódulo N existe un ideal $I \leq R$ tal que $N = IM$. Dado $N \leq M$. Decimos que N es un submódulo totalmente invariante de M si $f(N) \subseteq N$ para todo $f \in End(M)$. En tal caso, escribimos $N \leq_{f.i} M$. Para un R-módulo M, $\Lambda(M)$ denota a la retícula de submódulos de un módulo M y $\Lambda^{f.i}(M)$ denota la retícula de submódulos totalmente invariantes de M. Decimos que un R-módulo X es subgenerado por M si X es isomorfo a un submódulo de un módulo M-generado. Recuerde que N es M-generado si existe un R-epimorfismo de una suma directa de copias del módulo M sobre N, es decir, X es M-generado si y sólo si $Tr_M(X) = X$. La categoría $\sigma[M]$ es una subcategoría plena de la categoría R-Mod cuyos objetos son todos los R-módulos subgenerados por M. Si $R = M$, entonces $\sigma[M]$ coincide con la categoría R-Mod.

Capítulo 1

Preliminares

En esta parte preliminar brindaremos las herramientas necesarias para las secciones posteriores, así como notación y terminología de la cuál haremos uso:

1.1. Conexiones de Galois, operadores y sistemas

Recordemos que un conjunto parcialmente ordenado (copo) es una estructura $\langle P, \leq \rangle$ donde P es un conjunto y $\leq$ es una relación de orden parcial sobre P, es decir, la relación $\leq$ es reflexiva, transitiva y antisimétrica.

Definición 1.1.1. ([40], Chapter III, §1) *Dados los copos $\langle P, \leq \rangle$ y $\langle P', \preceq \rangle$. Un morfismo de copos $f : P \to P'$ es una función que preserva orden, es decir, $f : P \to P'$ es una función tal que para cada $a, b \in P$ con $a \leq b$ implica que $f(a) \preceq f(b)$.*

Decimos que $f : P \to P'$ es un isomorfismo de copos si existe un morfismo $g : \langle P', \preceq \rangle \to \langle P, \leq \rangle$ tal que $gf = 1_P$ y $fg = 1_{P'}$.

Proposición 1.1.2. ([21], pág 20) *Dados los copos $\langle P, \leq \rangle$ y $\langle P', \preceq \rangle$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$f : \langle P, \leq \rangle \to \langle P', \preceq \rangle$ es un isomorfismo de copos;*

2. *$f : P \to P'$ es suprayectiva y se cumple la siguiente condición: para cada $a, b \in P$ sucede que $a \leq b$ si y sólo si $f(a) \preceq f(b)$.*

Definición 1.1.3. ([40], Chapter III, §1) *Dados las retículas $\langle P, \leq, \wedge, \vee \rangle$ y $\langle P', \preceq, \wedge', \vee' \rangle$. Decimos que $f : P \to P'$ es un morfismo de retículas si es un morfismo de copos. Además:*

1. *Para cada $a, b \in P$ sucede que $f(a \wedge b) = f(a) \wedge' f(b)$;*

2. *Para cada* $a, b \in P$ *sucede que* $f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b)$.

En general, dadas dos retículas $\langle P, \leq, \wedge, \vee \rangle$ y $\langle P', \preceq, \wedge', \vee \rangle$ un morfismo de orden $f : P \to P'$ no necesariamente es un morfismo de retículas. Sin embargo, es cierto el siguiente resultado:

Proposición 1.1.4. ([40], Chapter III, §1, Proposition 1.1) *Dadas dos retículas* $\langle P, \leq, \wedge, \vee \rangle$ *y* $\langle P', \preceq, \wedge', \vee \rangle$. *Todo isomorfismo de copos es isomorfismo de retículas.* $\square$

El concepto de Conexión de Galois generaliza al de isomorfismo de copos.

Las definiciones presentadas a continuación las hacemos para conglomerados parcialmente ordenados (también llamados grandes copos) ya que estas definiciones son congruentes con conjuntos y clases, ya que cada conjunto es una clase y cada clase es un conglomerado. Lo anterior es un caso particular del modelo de universos de Grothendieck (Ver [23], Capítulo II).

Definición 1.1.5. ([17], [29], [40]) *Dados dos grandes copos* $\langle P, \leq \rangle$ *y* $\langle Q, \preceq \rangle$. *Una conexión de Galois isótona (antítona) es una pareja de asignaciones de grandes copos* $f : P \to Q$ *y* $g : Q \to P$ *tales que:*

$$\forall p \in P\ \forall q \in Q\ \ [f(p) \preceq q \iff p \leq g(q)] \quad ([q \preceq f(p) \iff p \leq g(q)])\,.$$

En tal caso, dicha pareja se suele denotar como $\langle f, g \rangle$. Se puede demostrar que la siguiente definición es equivalente a la anterior:

Definición 1.1.6. ([17], [29], [40]) *Dados dos grandes copos* $\langle P, \leq \rangle$ *y* $\langle Q, \preceq \rangle$. *Una conexión de Galois isótona (antítona) es una pareja* $\langle f, g \rangle$ *de asignaciones* $f : P \to Q$ *y* $g : Q \to P$ *tales que*

1. f *y* g *preservan orden* (*invierten el orden*).
2. $\forall p \in P \quad p \leq gf(p)$.
3. $\forall q \in Q \quad fg(q) \preceq q \qquad (q \preceq fg(q))$.

Lema 1.1.7. ([17], [29], [40]) *Si* $\langle f, g \rangle$ *es una conexión de Galois, entonces*

1. $fgf = f$.
2. $gfg = g$.

En consecuencia, $Im\, gf = Im\, g$ *y* $Im\, fg = Im\, f$. $\square$

Proposición 1.1.8. ([17], [29], [40]) *Sea* $\langle f, g \rangle$ *es una conexión de Galois isótona (antítona). Sean* C_P *el conglomerado de puntos fijos de* P *bajo* gf *y* O_Q *el conglomerado de puntos fijos de* Q. *Entonces:*

1. $C_P = Im\, g$;

2. $O_Q = Im\, f$.

$\square$

El concepto de conexión de Galois guarda una estrecha relación con el concepto de operador cerradura (interior) que aparece, no sólo en la topología sino en otras áreas de las Matemáticas.

Definición 1.1.9. ([17], [29], [40]) *Dado un gran copo $\langle P, \leq \rangle$. Un operador cerradura (interior) sobre P es una asignación $h : P \to P$ tal que:*

1. *h preserva orden: si $p_1 \leq p_2$, entonces $h(p_1) \leq h(p_2)$;*

2. *$\forall p \in P$ se tiene que $p \leq h(p)$ $(h(p) \leq p)$;*

3. *h es un operador idempotente: $h \circ h = h$.*

Corolario 1.1.10. ([17], [29], [40]) *Si $\langle f, g \rangle : \langle P, \leq \rangle \to \langle Q, \preceq \rangle$ es una conexión de Galois isótona (antítona), entonces gf es un operador cerradura en P y fg es un operador interior (cerradura) en Q.* $\square$

Una manera alternativa de definir estos conceptos es refiriéndose a los elementos cerrados o abiertos como sigue:

Definición 1.1.11. ([17], [29], [40]) *Sea $\langle P, \leq \rangle$ un gran copo. Un sistema de cerrados (abiertos) de P es un subconglomerado Q de P tal que para todo $p \in P$ el conglomerado $\{q \in Q |\ p \leq q\}$ $(\{q \in Q |\ q \leq p\})$ tiene elemento menor (mayor) denotado por $\bar{p}$ $(\ p^{\circ})$.*

Proposición 1.1.12. ([17] [29], [40]) *Si $\langle f, g \rangle : \langle P, \leq \rangle \to \langle Q, \preceq \rangle$ es una conexión de Galois isótona (antítona), entonces C_P es un sistema de cerrados de P y O_Q es un sistema de abiertos de Q (un sistema de cerrados de Q), más aún, existe un isomorfismo (anti-isomorfismo) de copos $C_P \to O_Q$ $(C_P \to C_Q)$.* $\square$

Observación 1.1.13. *Considere un gran copo $\langle P, \leq \rangle$. Si Q es un sistema de cerrados del gran copo P, entonces Q es la imagen del operador cerradura $\varphi : P \to P$ definido como $\varphi(p) = \overline{p} = \min\{b \in Q \mid p \leq b\}$ (y por tanto, Q es cerrado bajo ínfimos arbitrarios). Recíprocamente, si dado un operador cerradura $h : P \to P$ sobre un gran copo P, entonces el gran copo $Im\, h$ define un sistema de cerrados en P.*

Bajo las asignaciones anteriores se establece la siguiente correspondencia biunívoca:

Proposición 1.1.14. ([17], [29], [40]) *Si $\langle P, \leq \rangle$ es un gran copo, existe una correspondencia biunívoca entre:*

1. *Los sistemas cerrados de P y los operadores cerradura de P;*

2. *Los sistemas de abiertos de P y los operadores interior de P.*

$\square$

Proposición 1.1.15. ([17], [29], [40]) *Si L es una gran retícula completa, entonces todo sistema de cerrados* (abiertos) *de L es cerrado bajo ínfimos* (supremos) *arbitrarios. En tal caso, todo sistema de cerrados es una gran retícula completa.* $\square$

1.2. Polaridades

Existe un tipo muy especial y amplio de conexiones de Galois (antítonas) que están inducidas por una relación binaria: *Polaridades*.

Definición 1.2.1. *Sean A y B conjuntos. Una polaridad entre los conjuntos potencia $\mathscr{P}(A)$ y $\mathscr{P}(B)$, ordenados por la contención es una conexión de Galois (antítona) $\langle f_{\mathcal{R}}, g_{\mathcal{R}} \rangle$:$\mathscr{P}(X) \leftrightarrows \mathscr{P}(Y)^{op}$.*

La definición anterior está motivada por el Teorema Fundamental de la Teoría de Galois.

Dados dos conjuntos X y Y. El siguiente Teorema establece una correspondencia entre conexiones de Galois entre los conjuntos potencia $\mathscr{P}(X)$ y $\mathscr{P}(Y)$ y las relaciones $\mathcal{R}$ de X en Y.

Teorema 1.2.2. ([17], [29], [40]) *Sean X, Y conjuntos. Entonces:*

1. *Dada una relación $\mathcal{R}$ de X en Y, se definen las siguientes funciones:*
   $f_{\mathcal{R}}$:$\mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(Y)$ *y* $g_{\mathcal{R}}$:$\mathscr{P}(Y) \to \mathscr{P}(X)$. *Si $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$:*
   $$f_{\mathcal{R}}(A) = \{y \in Y \mid (a, y) \in \mathcal{R} \text{ para toda } a \in A\};$$
   $$g_{\mathcal{R}}(B) = \{x \in X \mid (x, b) \in \mathcal{R} \text{ para toda } b \in B\},$$
   entonces $\langle f_{\mathcal{R}}, g_{\mathcal{R}} \rangle$:$\mathscr{P}(X) \leftrightarrows \mathscr{P}(Y)^{op}$ es una conexión de Galois antítona.

2. *Dada una polaridad $\langle f, g \rangle$:$\mathscr{P}(X) \leftrightarrows \mathscr{P}(Y)^{op}$. Se definen las siguientes relaciones de X en Y :*
   $$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in f(\{x\})\};$$
   $$\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in X \times Y \mid x \in g(\{y\})\}.$$
   Entonces $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$.

3. *Existe una correspondencia biunívoca entre las relaciones de X en Y y las conexiones de Galois antítonas entre $\mathscr{P}(X)$ y $\mathscr{P}(Y)^{op}$.*

Conexiones de Galois que surgen de las relaciones binarias (Polaridades) son estudiadas en el Análisis formal de conceptos [14], donde la relación se denomina *Relación de incidencia* de un contexto formal.

Para un análisis más exhaustivo acerca de las Conexiones de Galois, operadores, sistemas y polaridades, consultar [17], [21], [29] y [40]. Sin embargo, las definiciones y resultados mencionados anteriormente son suficientes para describir las conexiones de Galois importantes en este trabajo.

1.3. Prerradicales y clases de R-módulos.

En 1964, los conceptos de prerradical y radical fueron introducidos por Maranda (Ver [25]). Una década más tarde, la teoría general de los prerradicales fue desarrollada por Bican et al [7]. Asimismo, en la década de los noventa, los matemáticos F. Raggi, R. Fernández-Alonso, J. Ríos, H. Rincón y C. Signoret estudiaron exhaustivamente la retícula de prerradicales sobre un anillo R. En este trabajo, los prerradicales juegan un rol muy importante pues están involucrados en ciertas conexiones de Galois antítonas que aparecen a lo largo del mismo. Más aún, estas inducen un anti-isomorfismo de retículas.

En esta sección presentamos la definición de prerradical, así como algunas propiedades básicas que suceden en el conglomerado de todos los prerradicales sobre un anillo R, denotado por R-pr. Además, presentamos dos operaciones binarias (producto y coporducto) sobre este conglomerado. Se define, de manera natural, un orden parcial sobre este mismo con lo que resulta ser una gran retícula completa.

Se presentan algunos conglomerados de prerradicales que cumplen una cierta propiedad de cerradura: prerradicales idempotentes, exactos izquierdos, radicales y t-radicales.

También se presentan dos clases de R-módulos que poseen ciertas propiedades de cerradura. Una de ellas está en correspondencia biunívoca con los prerradicales idempotentes; y la otra, con los radicales. Ambas están inducidas por conexiones de Galois antítionas ([40], capítulo VI, Proposición 1.4).

Definición 1.3.1. *Un prerradical σ sobre un anillo R es una asignación σ: R-Mod $\to$ R-Mod tal que para cada $M \in R$-Mod, se tiene $\sigma(M) \leq M$ y para cada morfismo $f : M \to N$, $f(\sigma(M)) \leq \sigma(N)$, es decir, los prerradicales en R-Mod son los subfuntores del funtor identidad.*

Denotemos por R-pr al conglomerado de todos los prerradicales sobre R-Mod.

Existe un orden parcial natural dado de la siguiente manera: dados $\sigma, \tau \in R$-pr. Decimos que $\sigma \preceq \tau$ si y solo si $\sigma(M) \leq \tau(M)$ para cada $M \in R$-Mod.

Definición 1.3.2. *Si $\sigma, \tau \in R$-pr, consideramos las siguientes operaciones binarias:*

$\sigma \vee \tau$ es tal que para cada $M \in R$-Mod, $(\sigma \vee \tau)(M) = \sigma(M) + \tau(M)$;
$\sigma \wedge \tau$es tal que para cada $M \in R$-Mod, $(\sigma \wedge \tau)(M) = \sigma(M) \cap \tau(M)$.

Observación 1.3.3. *Dada una colección* $\{r_i\}_{i \in \mathcal{X}}$ (indicada por un conglomerado $\mathcal{X}$) *de prerradicales sobre R-Mod. Consideremos las siguientes asignaciones para cada $M \in$$R$-Mod:*

$$\left(\bigvee_{i \in \mathcal{X}} r_i\right)(M) := \sum_{i \in \mathcal{X}} r_i(M); \tag{1.1}$$

$$\left(\bigwedge_{i \in \mathcal{X}} r_i\right)(M) := \bigcap_{i \in \mathcal{X}} r_i(M). \tag{1.2}$$

Observe que para cada $i \in \mathcal{X}$, $r_i(M) \in \Lambda(M)$. Entonces, $\{r_i(M) |\ i \in \mathcal{X}\}$ es un conjunto, es decir,

$$\left(\bigvee_{i \in \mathcal{X}} r_i\right)(M) = \sum_{i \in X} r_i(M);$$

$$\left(\bigwedge_{i \in \mathcal{X}} r_i\right)(M) = \bigcap_{i \in X} r_i(M),$$

donde X es un conjunto (que depende de M).

Las asignaciones en 1.1 y 1.2 resultan ser prerradicales sobre R-Mod. Además, 1.1 y 1.2 satisfacen la propiedad del supremo y del ínfimo para una colección arbitraria de prerradicales sobre R-Mod, respectivamente.

En particular,

$$1_{R-Mod} = \bigvee_{r \in R-pr} r.$$

$$0_{R-Mod} = \bigwedge_{r \in R-pr} r.$$

Como consecuencia, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.3.4. ([31], Capítulo VI, Ejercicio §1.7) $\langle R\text{-}pr, \preceq, \bigvee, \bigwedge \rangle$ *es una gran retícula completa.*

En la siguiente proposición vemos cómo se comportan los prerradicales sobre R-Mod con respecto al producto directo y suma directa.

Proposición 1.3.5. *Sean* $r \in R\text{-}pr$ *y* $\{M_\alpha\}_{\alpha \in X}$ *una familia de* R*-módulos. Entonces:*

1. $r\left(\prod_{\alpha \in X} M_\alpha\right) \leq \prod_{\alpha \in X} r(M_\alpha)$;
2. $r\left(\bigoplus_{\alpha \in X} M_\alpha\right) = \bigoplus_{\alpha \in X} r(M_\alpha)$.

Demostración. Primero observe que

$$r\left(\prod_{\alpha \in X} M_\alpha\right) \leq \prod_{\alpha \in X} M_\alpha \ \ y \ \ \prod_{\alpha \in X} r(M_\alpha) \leq \prod_{\alpha_\in X} M_\alpha.$$

También

$$r\left(\bigoplus_{\alpha \in X} M_\alpha\right) \leq \bigoplus_{\alpha_\in X} M_\alpha \ \ y \ \ \bigoplus_{\alpha \in X} r(M_\alpha) \leq \bigoplus_{M_\alpha} M_\alpha,$$

pues r es prerradical.

1. Consideremos para cada $\beta \in X$, $\Pi_\beta : \prod_{\alpha \in X} \to M_\beta$ la proyección natural. Entonces $\Pi_\beta\left(r\left(\prod_{\alpha \in X} M_\alpha\right)\right) \leq r\left(M_\beta\right)$ para cada β. Por tanto, $r\left(\prod_{\alpha \in X} M_\alpha\right) \leq \prod_{\alpha \in X} M_\alpha$.

2. Para cada $\beta \in X$ considere la inclusión y la proyección natural:

$$\eta_\beta : M_\beta \to \bigoplus_{\alpha \in X} M_\alpha$$

$$\Pi_\beta : \bigoplus_{\alpha \in X} M_\alpha \to M_\beta$$

   Entonces

(1) $\Pi_\beta\left(r\left(\bigoplus_{\alpha\in X} M_\alpha\right)\right) \leq r\left(M_\beta\right)$ para cada $\beta \in X$.

(2) $\eta_\beta(r\left(M_\beta\right)) \leq r\left(\bigoplus_{\beta\in X} M_\beta\right)$ para cada $\beta \in X$.

De (1), $r\left(\bigoplus_{\alpha\in X} M_\alpha\right) \leq \prod_{\alpha\in X} r(M_\alpha)$ pero además,

$r\left(\bigoplus_{\alpha\in X} M_\alpha\right) \leq \bigoplus_{\alpha\in X} M_\alpha$. Así $r\left(\bigoplus_{\alpha\in X} M_\alpha\right) \leq \bigoplus_{\alpha\in X} r(M_\alpha)$.

De (2), se tiene que

$$\bigoplus_{\alpha\in X} r\left(M_\alpha\right) \leq r\left(\bigoplus_{\alpha\in X} M_\alpha\right)$$

pues $r\left(\bigoplus_{\alpha\in X} M_\alpha\right)$ es submódulo y por tanto, cerrada bajo sumas (finitas).

Concluimos que $r\left(\bigoplus_{\alpha\in X} M_\alpha\right) = \bigoplus_{\alpha\in X} r(M_\alpha)$.

□

En $\langle R-pr, \preceq, \bigvee, \bigwedge\rangle$ se pueden definir otras dos operaciones binarias:

Definición 1.3.6. *Sean $\sigma, \tau \in R$-pr. Entonces:*

- *El producto de σ y τ se define como $(\sigma\tau)(M) := \sigma(\tau(M))$ para cada $M \in R$-Mod;*
- *El coproducto[1] de σ y τ denotado por $(\sigma:\tau)(M)$ es el submódulo de M tal que $(\sigma:\tau)(M)/\sigma(M) = \tau\left(M/\sigma(M)\right)$ para todo $M \in R$-Mod.*

La definición de producto y coproducto se pueden comparar como se muestra a continuación:

Proposición 1.3.7. *Sean $\sigma, \tau \in R$-pr. Entonces se tiene que*

$$\sigma\tau \preceq \sigma \wedge \tau \preceq \sigma, \tau \preceq \sigma \vee \tau \preceq (\sigma:\tau)\,.$$

[1]Por el teorema de la correspondencia, el coproducto en R-pr está bien definido.

Demostración. Sea M un R-módulo. Considerando la inclusión $i : \tau(M) \hookrightarrow M$, se tiene $\sigma(\tau(M)) \hookrightarrow \sigma(M)$ y además, $\sigma(\tau(M)) \leq \tau(M)$. Por tanto, $\sigma(\tau(M)) \leq \sigma \cap \tau$, de donde, $\sigma\tau \preceq \sigma \wedge \tau$. Por otro lado, $\sigma \preceq (\sigma : \tau)$ y $\tau \preceq (\sigma : \tau)$ pues si $M \in R$-Mod, por definición $\sigma(M) \leq (\sigma : \tau)(M)$ y considerando la proyección canónica e inclusiones naturales:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "P"] & M/\sigma(M) \\ \tau(M) \arrow[u, hook] \arrow[r] & \tau(M/\sigma(M)) \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

Conmuta el diagrama anterior pues τ es un prerradical. Lo anterior quiere decir que $P(\tau(M)) \leq \tau(M/\sigma(M)) = (\sigma : \tau)(M)/\sigma(M)$. Se sigue que

$$\tau(M) \leq P^{-1}((\sigma : \tau)/\sigma(M)) = (\sigma : \tau)(M).$$

Así que $\sigma(M) + \tau(M) \preceq (\sigma : \tau)(M)$. Por consiguiente, $\sigma \vee \tau \preceq (\sigma : \tau)$. □

Se sabe que la gran retícula $\langle R - pr, \preceq, \bigvee, \bigwedge \rangle$ en general no es distributiva. Sin embargo, se prueba que es completa, modular, superiormente continua y fuertemente pseudocomplementada.

Proposición 1.3.8. $(Ley\ Modular)$ *Dados $\sigma, \tau, \eta \in R$-pr, se cumple lo siguiente:*

$$\textit{Si } \sigma \preceq \tau, \textit{ implica que } \tau \wedge (\sigma \vee \eta) = \sigma \vee (\tau \wedge \eta).$$

Proposición 1.3.9. ([31], Teorema 8) *Sea $\{\sigma_i\}_{i\in I} \subseteq R$-pr una subclase de prerradicales sobre R-Mod indicada por una clase I y $\tau \in R$-pr . Entonces:*

1. $\left(\bigwedge_{i\in I} \sigma_i\right)\tau = \bigwedge_{i\in I}(\sigma_i\tau);$

2. $\left(\bigvee_{i\in I} \sigma_i\right)\tau = \bigvee_{i\in I}(\sigma_i\tau);$

3. $\left(\tau : \bigwedge_{i\in I} \sigma_i\right) = \bigwedge_{i\in I}(\tau : \sigma_i);$

4. $\left(\tau : \bigvee_{i\in I} \sigma_i\right) = \bigvee_{i\in I}(\tau : \sigma_i).$

Demostración. Sea $M \in R$-Mod.

1.

$$\left[(\bigwedge \sigma_i)\tau\right](M) = \left(\bigwedge \sigma_i\right)[\tau(M)] = \bigcap \sigma_i(\tau(M)) = \bigcap(\sigma_i\tau)(M)$$
$$= \left[\bigwedge(\sigma_i\tau)\right](M).$$

2.

$$\left[(\bigvee \sigma_i)\tau\right](M) = \left(\bigvee \sigma_i\right)[\tau(M)] = \sum \sigma_i(\tau(M)) = \sum(\sigma_i\tau)(M)$$
$$= \left[\bigvee(\sigma_i\tau)\right](M).$$

3.

$$\begin{aligned}\left(\tau : \bigwedge \sigma_i\right)(M)/\tau M &= \left(\bigwedge \sigma_i\right)(M/\tau M)\\ &= \bigcap \sigma_i\,(M/\tau M)\\ &= \bigcap((\tau : \sigma_i)(M)/\tau M) \leq M/\tau M.\end{aligned}$$

Por el teorema de la correpondencia,

$$\begin{aligned}&= \left[\bigcap(\tau : \sigma_i)(M)\right]/\tau M\\ &= [\bigwedge(\tau : \sigma_i)](M)/\tau M\end{aligned}$$

Se concluye que

$$(\tau : \bigvee \sigma_i)(M) = \left[\bigvee(\tau : \sigma_i)\right](M).$$

4.

$$\begin{aligned}\left(\tau : \bigvee \sigma_i\right)(M)/\tau M &= \left(\bigvee \sigma_i\right)(M/\tau M)\\ &= \sum \sigma_i\,(M/\tau M)\\ &= \sum((\tau : \sigma_i)(M)/\tau M \leq M)/\tau M.\end{aligned}$$

Por el teorema de la correpondencia,

$$\begin{aligned}&= \left[\sum(\tau : \sigma_i)(M)\right]/\tau M\\ &= [\bigvee(\tau : \sigma_i)](M)/\tau M.\end{aligned}$$

Se sigue que

$$(\tau : \bigvee \sigma_i)(M) = \left[\bigvee (\tau : \sigma_i)\right](M).$$

□

Las operaciones binarias $\wedge$, $\vee$ presentadas en la Definición 1.3.2, y **:** , **·** en la Definición 1.3.6 son asociativas y preservan orden. Sin embargo, las primeras dos operaciones en la Definición 1.3.2 son conmutativas y distributivas; mientras que las de la Definición 1.3.6 no son conmutativas en general y son distributivas por un lado como se observa en la Proposición 1.3.9 (Ver [30], [31] y [32]).

Definición 1.3.10. *Un endofuntor $F : R$-Mod $\to R$-Mod es exacto izquierdo si para toda sucesión exacta $0 \to N \to M \to L \to 0$ se tiene que la sucesión $0 \to F(N) \to F(M) \to F(L)$ es exacta.*

Análogamente, se define un funtor exacto derecho y funtor exacto.

A continuación se presentan algunas clases especiales de prerradicales.

Definición 1.3.11. [31] Sea $\sigma \in R$-pr. Se dice que

1. σ es idempotente si $\sigma^2 = \sigma$.
2. σ es radical si $(\sigma : \sigma) = \sigma$.
3. σ es exacto izquierdo si σ como funtor es exacto izquierdo.
4. σ es t-radical si $\sigma(M) = \sigma(R)M$ para todo $M \in R$-Mod. Equivalentemente, el funtor $1/\sigma : R$-Mod $\to R$-Mod dado por $(1/\sigma)(M) = M/\sigma(M)$ es exacto derecho.

Observación 1.3.12. *$\sigma \in R$-pr es radical si y sólo si $\sigma(M/\sigma(M)) = 0$ para cada $M \in R$-Mod. En efecto: dado $M \in R$-Mod y supongamos que σ es radical. Entonces por definición $\sigma(M/\sigma(M)) = (\sigma : \sigma)(M) = \sigma(M)/\sigma(M) = 0$. Recíprocamente, si se cumple $(\sigma : \sigma)(M)/\sigma(M) = \sigma(M/\sigma(M)) = 0$, se sigue que σ es radical.*

Sea σ un t-radical. Entonces para toda $M \in R$-Mod sucede que $\sigma(M/\sigma(M)) = I(M/IM) = 0$, con $I = \sigma(R)$ un ideal izquierdo de R. Por tanto, todo t-radical es radical.

Notación 1.3.13. *Dado un anillo R. Denotamos por:*

1. *R-idem al conglomerado de todos los prerradicales idempotentes sobre R;*
2. *R-rad al conglomerado de todos los radicales sobre R;*

3. *R-radidem al conglomerado de todos los radicales idempotentes sobre R;*

4. *R-trad al conjunto de todos los t-radicales sobre R;*

5. *R-prex al conglomerado de todos los prerradicales exactos izquierdos.*

Recordemos que existe una correspondencia biyectiva entre los t-radicales y los ideales bilaterales del anillo ([8], Teorema 4.11). Por tanto, R-*trad* es cardinable.

A cada prerradical en R-pr se le puede asociar dos clases especiales de R-módulos como vemos a continuación:

Definición 1.3.14. *Sea $\sigma \in R$-pr. Definimos las siguientes clases de R-módulos:*

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_\sigma =& \{M \in \boldsymbol{R}\text{-}Mod \mid \sigma(M) = M\}. \\ \mathbb{F}_\sigma =& \{N \in \boldsymbol{R}\text{-}Mod \mid \sigma(N) = 0\}. \end{aligned}$$

Más adelante, veremos que las clases $\mathbb{T}_\sigma$ y $\mathbb{F}_\sigma$ asociadas a $\sigma \in R$-pr cumplen con una cierta propiedad de cerradura.

Observación 1.3.15. *Si $r : R$-Mod $\to R$-Mod es un prerradical siempre preserva monomorfismos: Si $0 \to N \to M$, entonces $0 \to r(N) \to r(M)$ es exacto.*

Proposición 1.3.16. *Para $\sigma \in R$-pr son equivalentes:*

1. *σ es exacto izquierdo (como funtor);*

2. *Para cada $N \subseteq M \in R$-Mod, se tiene $\sigma(N) = N \cap \sigma(M)$;*

3. *σ es idempotente y $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo submódulos.*

Demostración.

$(1) \implies (2)$: Supongamos que σ es exacto izquierdo. Sean $M \in R$-Mod y $N \subseteq M$. Tenemos la sucesión exacta: $0 \to N \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/N \to 0$.

Por tanto, la siguiente sucesión es exacta:

$$0 \to \sigma(N) \xrightarrow{\sigma(i)} \sigma(M) \xrightarrow{\sigma(p)} \sigma(M/N).$$

Entonces

$$\begin{aligned} Im\,\sigma(i) &= Ker\,\sigma(p). \\ Im\,\sigma(i) &= \sigma(N). \\ Ker\,\sigma(p) &= \sigma(M) \cap N. \end{aligned}$$

Por tanto, $\sigma(N) = \sigma(M) \cap N$ como se quería probar.

$(2) \implies (3)$: Sea $M \in R$-Mod. Tenemos que $\sigma(M) \leq M$. Por hipótesis, $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M) \cap \sigma(M) = \sigma(M)$. Por tanto, σ es idempotente. Por otro lado, sea $M \in \mathbb{T}_\sigma$. Sea $N \subseteq M$. Por hipótesis, $\sigma(N) = N \cap \sigma(M) = N \cap M = N$. Por consiguiente, $N \in \mathbb{T}_\sigma$. Se concluye que $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo submódulos.

$(3) \implies (1)$: Sea $0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} L \to 0$ una sucesión exacta y consideremos la sucesión:

$$0 \to \sigma(N) \xrightarrow{f'} \sigma(M) \xrightarrow{g'} \sigma(L).$$

Ya sabemos que f' es monomorfismo y también $g'f' = 0$, es decir, $Im\ f' \leq Ker\ g'$. Sea $K = Ker\ g = Im\ f$. Por tanto, $K \cong N$ que induce un isomorfismo $\sigma(K) \cong \sigma(N)$. Tenemos que $Ker\ g' = \sigma(M) \cap K = \sigma(M), Im\ f' = \sigma(K)$. Por otro lado, $\sigma(K) \leq \sigma(M) \cap K$, pues $K \leq M$. Observe que $\sigma(M) \in \mathbb{T}_\sigma$, pues σ es idempotente. Como $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrado bajo monomorfismos, entonces $\sigma(M) \cap K \leq \sigma(K)$, pues $\sigma(K)$ es el mayor submódulo de K en $\mathbb{T}_\sigma$. Se concluye que $\sigma(K) = \sigma(N) \cap K$, es decir, $Im\ f' = Ker\ g'$.

Como consecuencia de la Proposición 1.3.16, todo prerradical exacto izquierdo es idempotente. □

Observación 1.3.17. *Dado cualquier $\sigma \in R$-pr, se define para cualquier $M \in R$-Mod, $\eta_\sigma(M) := M \cap \sigma(E(M))$, donde $E(M)$ es la cápsula inyectiva de M. Se verfica que es un prerradical en R-Mod, más aún, η_σ es el menor prerradical exacto izquierdo tal que $\sigma \preceq \eta_\sigma$. En efecto: sean $N \subseteq M \subseteq E(M)$, donde $E(M)$ es la cápsula inyectiva de M.*

η_σ es exacto izquierdo:

$$\eta_\sigma(N) = N \cap \sigma(E(M)) = N \cap M \cap \sigma(E(M)) = N \cap \eta_\sigma(M).$$

η_σ contiene a σ :

$$\sigma(M) = M \cap \sigma(M) \subseteq M \cap \sigma(E(M)) = \eta_\sigma(M).$$

η_σ es el menor prerradical exacto izquierdo que contiene a σ : supongamos que τ es un prerradical exacto izquierdo tal que $\sigma \preceq \tau$. Sean $M \subseteq E(M) \in R$-Mod. Entonces $\eta_\sigma = M \cap \sigma(E(M)) \subseteq M \cap \tau(E(M)) = \tau(M)$. Por tanto, $\eta_\sigma \preceq \tau$. En consecuencia, si σ es un prerradical exacto izquierdo, entonces $\eta_\sigma = \sigma$.

Una consecuencia de la Proposición 1.3.9, es que el conglomerado de los prerradicales idempotentes y el de los t-radicales son cerradas bajo supremos arbitrarios y el conglomerado: de radicales y de los prerradicales exactos izquierdos son cerradas bajo ínfimos arbitrarios como lo muestra la siguiente proposición:

Proposición 1.3.18. *Sea $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha \in I} \subseteq R$-pr un conglomerado de prerradicales indicadas por un conglomerado I. Entonces:*

1. *Si* $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq R$*-idem, entonces* $\bigvee_{\alpha\in I} \sigma_\alpha \in R$*-idem;*

2. *Si* $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq R$*-rad, entonces* $\bigwedge_{\alpha\in I} \sigma_\alpha \in R$*-rad;*

3. *Si* $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq R$*-trad, entonces* $\bigvee_{\alpha\in I} \sigma_\alpha \in R$*-trad;*

4. *Si* $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq R$*-prex, entonces* $\bigwedge_{\alpha\in I} \sigma_\alpha \in R$*-prex.*

Demostración.

1. Sean $\{\sigma_\alpha\}_{\alpha\in I} \subseteq R$-idem y considere $\sigma = \bigvee_{\alpha\in I} \sigma_\alpha$. Entonces por las proposiciones 1.3.7 y 1.3.9 (2) sesigue que

$$\sigma = \bigvee_{\alpha\in I} \sigma_\alpha = \bigvee_{\alpha\in I} (\sigma_\alpha\sigma_\alpha) \preceq \bigvee_{\alpha\in I} (\sigma_\alpha\sigma) = \left(\bigvee_{\alpha\in I} \sigma_\alpha\right) \sigma = \sigma\sigma \preceq \sigma.$$

Las demostraciones de 2, 3 y 4 son similares a 1.

□

Consideremos las siguientes clases de cerradura que puede tener una clase de R-módulos.

Definición 1.3.19. *Una subclase $\mathcal{C}$ de R-Mod se dice que es cerrada bajo:*

1. *Monomorfismos si para cada monomorfismo $0 \to M \to N$ tal que $N \in \mathcal{C}$, entonces $M \in \mathcal{C}$;*

2. *Epimorfismos si para cada epimorfismo $L \to M \to 0$ tal que $L \in \mathcal{C}$, entonces $M \in \mathcal{C}$;*

3. *Sumas directas si para cada familia arbitraria $\{M_i\}_{i\in I}$ de R-módulos en $\mathcal{C}$, se tiene $\bigoplus_{i\in I} M_i \in \mathcal{C}$;*

4. *Productos directos si para cada familia arbitraria $\{M_i\}_{i\in I}$ de R-módulos en $\mathcal{C}$, se tiene $\prod_{i\in I} M_i \in \mathcal{C}$.*

Observación 1.3.20. *Las clases $\mathcal{C}$ que consideraremos serán siempre cerradas bajo isomorfismos. Por tanto, es equivalente que una clase $\mathcal{C}$ sea cerrada bajo monomorfismos a que sea cerrada bajo submódulos. Similarmente, $\mathcal{C}$ es cerrada bajo epimorfismos equivale a que es cerrada bajo cocientes.*

Definición 1.3.21. *Una subclase $\mathcal{C}$ de R-Mod se llama:*

1. *Clase de pretorsión, si es cerrada bajo epimorfismos y sumas directas.*
2. *Clase pre-libre de torsión, si es cerrada bajo monomorfismos y productos directos.*

Vimos en la Definición 1.3.14 que a cada $\sigma \in R$-pr se le asigna dos clases especiales de R-módulos, a saber, las clases $\mathbb{T}_\sigma$ y $\mathbb{F}_\sigma$. La clase $\mathbb{T}_\sigma$ es cerrada bajo epimorfismos y sumas directas, mientras que la clase $\mathbb{F}_\sigma$ es cerrada bajo monomorfismos y productos directos.

Proposición 1.3.22. *Si $r \in R$-pr, entonces*

1. *$\mathbb{T}_\sigma$ es una clase de pretorsión.*
2. *$\mathbb{F}_\sigma$ es una clase pre-libre de torsión.*

Demostración.

1. i. Sean $M, L \in R$-Mod, $M \in \mathbb{T}_\sigma$ y $g : M \to L$ un epimorfismo. Entonces, siendo σ prerradical:
$$L \leq g(M) = g(\sigma(M)) \leq \sigma(N) \leq L.$$
Así, $\sigma(L) = L$, es decir $L \in \mathbb{T}_\sigma$.

   ii. Sea $\{M_i\}_{i\in X}$ una familia de R-módulos tales que $M_i \in \mathbb{T}_\sigma$ para toda $i \in X$. Por la Proposición 1.3.5 se tiene que
$$\sigma\left(\bigoplus_{i\in X} M_i\right) = \bigoplus_{i\in X} \sigma(M_i) = \bigoplus_{i\in X} M_i$$
Por tanto, $\bigoplus\limits_{i\in X} M_i \in \mathbb{T}_\sigma$.

2. i. Sean $N, M \in R$-Mod, $M \in \mathbb{F}_\sigma$ y $f : N \to M$ un monomorfismo. Entonces $f(\sigma(N)) \leq \sigma(M) = 0$ pues $M \in \mathbb{F}_\sigma$. Como f es monomorfismo, $\sigma(N) = 0$. Por tanto, $N \in \mathbb{F}_\sigma$.

   ii. Sea $\{M_i\}_{i\in X} \subseteq R$-Mod con $M_i \in \mathbb{F}_\sigma$ para toda $i \in X$. Entonces $\sigma\left(\prod\limits_{i\in X} M_i\right) \leq \prod\limits_{i\in X} \sigma(M_i) = 0$. Por tanto, $\prod\limits_{i\in X} M_i \in \mathbb{F}_\sigma$.

□

Definición 1.3.23. *Sean $\mathcal{A}$ una clase de R-módulos y $M \in R$-Mod.*

1. *Se dice que $\mathcal{A}$ genera a M si existe un conjunto X y una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in X}$ contenida en $\mathcal{A}$ y un epimorfismo $\bigoplus\limits_{\alpha \in X} A_\alpha \to M \to 0$.*

2. *Se dice que $\mathcal{A}$ genera finitamente a M si existe un conjunto $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ contenida en $\mathcal{A}$ y un epimorfismo $\bigoplus\limits_{i=1}^{n} A_i \to M \to 0$.*

Definición 1.3.24. *Sean $\mathcal{A}$ una clase de R-módulos y $M \in R$-Mod.*

1. *Se dice que $\mathcal{A}$ cogenera a M si existe un conjunto X y una familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in X}$ contenida en $\mathcal{A}$ y un monomorfismo $0 \to M \to \prod\limits_{\alpha \in X} A_\alpha$.*

2. *Se dice que $\mathcal{A}$ cogenera finitamente a M si existe un conjunto finito $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ contenida en $\mathcal{A}$ y un monomorfismo $0 \to M \to \prod\limits_{i=1}^{n} A_i$.*

Notación 1.3.25. *Dada una clase $\mathcal{A}$ en R-Mod. Entonces:*

1. $Gen(\mathcal{A})$=$\{M \in$ **R**-$Mod \mid \mathcal{A}$ *genera a* **M**$\}$;
2. $Cog(\mathcal{A})$=$\{M \in$ **R**-$Mod \mid \mathcal{A}$ *cogenera a* **M**$\}$.

Las siguientes clases son ejemplos muy conocidos, ilustran los conceptos de generar y cogenerar y algunos de estos cumplen alguna de las propiedades de cerradura que mencionamos anteriormente.

Ejemplo 1.3.26.

1. $Gen({}_RR) = R$-*Mod.*
2. $Gen\ (\{\mathbb{Z}_n \mid n \geq 2\}), = \mathfrak{T}$[2], *la clase de los grupos abelianos de Torsión.*
3. $Cog(\mathbb{Q}) = \mathfrak{F}$[3], *la clase de los grupos abelianos libres de Torsión.*

Proposición 1.3.27. *$Gen(\mathcal{A})$ es la menor clase en R-Mod tal que:*

1. $\mathcal{A} \subseteq Gen(\mathcal{A})$;

[2]En [12] (1964), Dickson introdujó el concepto de una teoría de Torsión para una categoría abeliana. De hecho, él da una definición alternativa por medio de operadores.

[3]Las Teorías de Torsión han sido muy útiles en el estudio de anillos y módulos, incluso, han ayudado a generalizar los conceptos de localización de un anillo [20].

2. *$Gen(\mathcal{A})$ es una clase de pretorsión.*

Proposición 1.3.28. *$Cog(\mathcal{A})$ es la menor clase en R-Mod tal que:*

1. *$\mathcal{A} \subseteq Cog(\mathcal{A})$;*

2. *$Cog(\mathcal{A})$ es una clase pre-libre de torsión.*

Definición 1.3.29. *Sean $\mathcal{C}$ una clase de$R$-módulos cualquiera y M un R-módulo. Se definen los siguientes submódulos de M :*

1. *$Tr_{\mathcal{C}}(M)$*[4]=*$\sum\{Imf \mid f \in \text{Hom}(A, M)$ para algún $A \in \mathcal{C}\}$ y se lee como la traza de M respecto a $\mathcal{C}$.*

2. *$Rej_{\mathcal{C}}(M)$*[5]=*$\bigcap\{kerg \mid g \in \text{Hom}(M, A)$ para algún $A \in \mathcal{C}\}$ y se lee como el rechazo de M respecto a $\mathcal{C}$.*

Observe que dada una clase $\mathcal{C}$ y un R-módulo M, la *traza* es el mayor submódulo K de M tal que $K \in Gen(\mathcal{C})$ y el *rechazo* es el menor submódulo L de M tal que $M/K \in Cog(\mathcal{C})$. Como consecuencia, se tiene el siguiente resultado:

Proposición 1.3.30. *Dada una clase $\mathcal{C}$ de R-módulos y M un R-módulo. Entonces:*

1. *$M \in Gen(\mathcal{C})$ si y sólo si $Tr_{\mathcal{C}}(M) = M$;*

2. *$M \in Cog(\mathcal{C})$ si y sólo si $Rej_{\mathcal{C}}(M) = 0$.*

Proposición 1.3.31. *Dada una clase cualquiera $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod. Entonces:*

1. *$Tr_{\mathcal{C}}(\_)$ es un prerradical;*

2. *$Rej_{\mathcal{C}}(\_)$ es un prerradical.*

Demostración. Sean $\mathcal{C}$ una clase cualquiera de R-módulos y $h \in \hom(M, N)$.

1. Sea $x \in Tr_{\mathcal{C}}(M)$=$\sum\{Imf \mid f \in \text{Hom}(A, M)$ para algún $A \in \mathcal{C}\}$. Entonces $x = f_1(a_1) + f_2(a_2) + \cdots + f_n(a_n)$, donde $f_i : A_i \to M$, $A_i \in \mathcal{C}$, $a_i \in A_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Luego,

$$h(x) = hf_1(a_1) + hf_2(a_2) + \cdots + hf_n(a_n) \in Tr_{\mathcal{C}}(N)$$

Por tanto, $h(Tr_{\mathcal{C}}(M)) \leq Tr_{\mathcal{C}}(N)$. Concluimos que $Tr_{\mathcal{C}}(\_)$ es un prerradical.

[4] La *traza* es un submódulo de M pues la colección $\{Imf|f \in \text{Hom}(A, M)$ para algún $A \in \mathcal{C}\}$ es un conjunto pues está basado en submódulos de M.

[5] El *rechazo* es un submódulo de M pues, al igual que la *traza*, la colección $\{kerg|g \in \text{Hom}(M, A)$ para algún $A \in \mathcal{C}\}$ es un conjunto pues está basado en submódulos de M.

2. Similarmente se prueba que $Rej_{\mathcal{C}}\,(\_)$ es un prerradical.

□

Proposición 1.3.32. *Sea $\mathcal{C}$ una clase de R-módulos y M un R-módulo. Se tiene que:*

1. $Tr_{\mathcal{C}}(Tr_{\mathcal{C}}(M)) = Tr_{\mathcal{C}}(M)$;
2. $Rej_{\mathcal{C}}(M/Rej_{\mathcal{C}}(M)) = 0$.

Demostración.

1. Como $Tr_{\mathcal{C}}(M) \in Gen(\mathcal{C})$, por la Proposición 1.3.30 inciso 1. se tiene que $Tr_{\mathcal{C}}(Tr_{\mathcal{C}}(M)) = Tr_{\mathcal{C}}(M)$.
2. Puesto que $M/Rej_{\mathcal{C}}(M) \in Cog(\mathcal{C})$, por la Proposición 1.3.30 inciso 2. se sigue que $Rej_{\mathcal{C}}(M/Rej_{\mathcal{C}}(M)) = 0$.

□

Corolario 1.3.33. *Sea $\mathcal{C}$ una clase de R-módulos y M un R-módulo. Entonces:*

1. *El prerradical $Tr_{\mathcal{C}}\,(\_)$ es idempotente;*
2. *El prerradical $Rej_{\mathcal{C}}\,(\_)$ es radical.*

Lema 1.3.34. *Dado un anillo R :*

1. $\langle \psi_1, \varphi_1 \rangle : R$*-pr* $\rightleftarrows \mathscr{P}(R$*-Mod) es una conexión de Galois isótona, donde:*

   $\psi_1 : R$*-pr*$\to \mathscr{P}(R$*-Mod) está dada por* $\sigma \mapsto \mathbb{T}_\sigma$;

   $\varphi_1 : \mathscr{P}(R$*-Mod)* $\to R$*-pr está dada por* $\mathcal{C} \mapsto Tr_{\mathcal{C}}$.

2. $\langle \psi_2, \varphi_2 \rangle : R$*-pr* $\rightleftarrows \mathscr{P}(R$*-Mod) es una conexión de Galois antítona, donde:*

   $\psi_2 : R$*-pr*$\to \mathscr{P}(R$*-Mod) dada por* $\sigma \mapsto \mathbb{F}_\sigma$;

   $\varphi_2 : \mathscr{P}(R$*-Mod)* $\to R$*-pr dada por* $\mathcal{C} \mapsto Rej_{\mathcal{C}}$.

Demostración.

1. i. La asignación $\psi_1 : R$-*pr*$\to \mathscr{P}(R$-Mod) dada por $\sigma \mapsto \mathbb{T}_\sigma$ preserva el orden:

   Sean $\sigma, \tau \in R$-pr tales que $\sigma \preceq \tau$ y $M \in \mathbb{T}_\sigma$. Entonces $M = \sigma(M) \leq \tau(M) \leq M$, lo cual implica que $\tau(M) = M$. Así, $M \in \mathbb{T}_\tau$. Por consiguiente, $\mathbb{T}_\sigma \subseteq \mathbb{T}_\tau$.

ii. La asignación $\varphi_1 : \mathscr{P}(R\text{-Mod}) \to R\text{-}pr$ dada por $\mathcal{C} \mapsto Tr_{\mathcal{C}}$ preserva el orden:

   Sean $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ y sea $M \in R$-Mod.

   Entonces $\{Imf | f : C \to M, C \in \mathcal{C}\} \subseteq \{Imf | f : D \to M, D \in \mathcal{D}\}$. Como M es arbitrario, se sigue que $Tr_{\mathcal{C}}(M) \leq Tr_{\mathcal{D}}(M)$. Por tanto, $Tr_{\mathcal{C}} \preceq Tr_{\mathcal{D}}$.

iii. Si $\sigma \in R$-pr, entonces $Tr_{\mathbb{T}_\sigma} \preceq \sigma$. En efecto: Sean $M \in R$-Mod, $f : T \to M$ con $T \in \mathbb{T}_\sigma$, es decir, $\sigma(T) = T$. Como σ es prerradical, $Imf = f(T) = f(\sigma(T)) \leq \sigma(M)$. Por tanto, $Tr_{\mathbb{T}_\sigma}(M) = \sum \{Imf | f : T \to M, T \in \mathbb{T}_\sigma\} \leq \sigma(M)$. Así, $Tr_{\mathbb{T}_\sigma} \preceq \sigma$.

iv. Si $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod, entonces $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{T}_{Tr_{\mathcal{C}}}$ pues si $C \in \mathcal{C}$, entonces $Tr_{\mathcal{C}}(C) = C$ ya que considerando $1_c : C \to C$ es tal que $Im1_C = C$.

Se concluye que $\langle \psi_1, \varphi_1 \rangle$ forma una conexión de Galois isótona.

2. i. La asignación $\psi_2 : R\text{-}pr \to \mathscr{P}(R\text{-Mod})$ dada por $\sigma \mapsto \mathbb{F}_\sigma$ invierte el orden:

   Sean $\sigma, \tau \in R$-pr tales que $\sigma \preceq \tau$ y $N \in \mathbb{F}_\sigma$ lo cual implica que $\sigma(N) \leq \tau(N) = 0$. Así, $\tau(N) = N$. Así, $N \in \mathbb{F}_\sigma$. Por consiguiente, $\mathbb{F}_\tau \subseteq \mathbb{F}_\sigma$.

ii. La asignación $\varphi_2 : \mathscr{P}(R\text{-Mod}) \to R\text{-}pr$ dada por $\mathcal{C} \mapsto Rej_{\mathcal{C}}$ invierte el orden:

   Sean $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ y $M \in R$-Mod. Entonces$\{Kerg | \ g : M \to C, C \in \mathcal{C}\} \subseteq \{Kerg | \ g : M \to D, D \in \mathcal{D}\}$. Pero $\bigcap\{Kerg | \ g : M \to D, D \in \mathcal{D}\} \subseteq \bigcap\{Kerg | \ g : M \to C, C \in \mathcal{C}\}$. Como M es arbitrario, se sigue que $Rej_{\mathcal{D}}(M) \leq Rej_{\mathcal{C}}(M)$. Concluimos que $Rej_{\mathcal{D}} \preceq Rej_{\mathcal{C}}$.

iii. Si $\sigma \in R$-pr, entonces $\sigma \preceq Rej_{\mathbb{F}_\sigma}$. En efecto: Sea $M \in R$-Mod. Sea $g : M \to C$, con $C \in \mathbb{F}_\sigma$ es decir, $\sigma(C) = 0$. Como σ es prerradical, $g(\sigma(M)) \leq \sigma(C) = 0$, esto implica que $g(\sigma(M)) = 0$. Así, $\sigma(M) \leq Kerg$. Como $g : M \to C$ es cualquiera con M arbitrario, se obtiene $\sigma(M) \leq \bigcap \{Kerg | \ g : M \to C, C \in \mathbb{F}_\sigma\} = Rej_{\mathbb{F}_\sigma}(M)$.

iv. Si $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod, entonces $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_{Rej_{\mathcal{C}}}$. En efecto: Sea $C \in \mathcal{C}$. Entonces $Rej_{\mathcal{C}}(C) = 0$ pues al considerar $1_C : C \to C$ es tal que $Ker1_C = 0$.

Se concluye que $\langle \psi_2, \varphi_2 \rangle$ forma una conexión de Galois antítona.

$\square$

Ahora nos preguntamos: ¿Cuáles son los puntos fijos de cada lado, en ambas conexiones de Galois?

Proposición 1.3.35. *Sean $\sigma \in R$-pr, $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod y $\langle \psi_1, \varphi_1 \rangle$, $\langle \psi_2, \varphi_2 \rangle$ son conexiones de Galois como en el Lema anterior. Entonces:*

1. $\psi_1\varphi_1(\sigma) = \sigma$ *si y sólo si* σ *es idempotente;*

2. $\varphi_1\psi_1(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ *si y sólo si* $\mathcal{C}$ *es clase de pretorsión;*

3. $\psi_2\varphi_2(\sigma) = \sigma$ *si y sólo si* σ *es radical;*

4. $\varphi_2\psi_2(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ *si y sólo si* $\mathcal{C}$ *es clase pre-libre de torsión.*

Demostración.

1. Ya sabemos que $Tr_{\mathcal{C}}$ es un prerradical idempotente para toda $\mathcal{C} \subseteq R$-Mod y supongamos que $\psi_1\varphi_1(\sigma) = \sigma$, es decir, $Tr_{\mathbb{T}_\sigma} = \sigma$. Por consiguiente, σ es idempotente. Recíprocamente, supongamos que σ es idempotente. Ya sabemos que $Tr_{\mathbb{T}_\sigma} \preceq \sigma$. Inversamente, Si $M \in R$-Mod, entonces como σ es idempotente, $\sigma(\sigma(M)) = \sigma(M)$, es decir, $\sigma(M) \in \mathbb{T}_\sigma$. Podemos considerar la inclusión natural: $\iota_M : \sigma(M) \hookrightarrow M$ que es tal que $Im\iota_M = \sigma(M)$. Así que $\sigma(M) = Im\iota_M \leq \sum\{Imf | \; f : T \to M, T \in \mathbb{T}_\sigma\} = Tr_{\mathbb{T}_\sigma}(M)$. Conclcuimos que $\psi_1\varphi_1(\sigma) = \sigma$.

2. Ya sabemos que $\mathbb{T}_\sigma$ es una clase de pretorsión para todo $\sigma \in R$-pr y supóngase que $\varphi_1\psi_1(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, es decir, $\mathbb{T}_{Tr_{\mathcal{C}}} = \mathcal{C}$. Así, $\mathcal{C}$ es una clase de pretorsión. Recípocamente, supóngase que $\mathcal{C}$ es una clase de pretorsión. Ya se sabe que $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{T}_{Tr_{\mathcal{C}}}$. Falta ver que $\mathbb{T}_{Tr_{\mathcal{C}}} \subseteq \mathcal{C}$. Dado $T \in \mathbb{T}_{Tr_{\mathcal{C}}}$, se tiene $T = Tr_{\mathcal{C}}(T) = \sum\{Imf | \; f : C \to T, C \in \mathcal{C}\} = ImF$, donde $F : \bigoplus_{C \in \mathcal{C}'} C^{(X_C)} \to T$, donde $X_c = \mathrm{Hom}(C, T)$. Tal R-homomorfismo existe por la propiedad universal de la suma directa:

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{C\in\mathcal{C}'} C^{(X_C)} \arrow[r, dashed, "F"] & T \\ & C \arrow[ul, hook', "i"] \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

   Y como consecuecia, $ImF = Tr_{\mathcal{C}}(T)$ y como $\mathcal{C}$ es clase de pretorsión, $\bigoplus_{C \in \mathcal{C}'} C^{(X_C)} \in \mathcal{C}$ e $ImF \in \mathcal{C}$. Por tanto, $T = Tr_{\mathcal{C}}(T) \in \mathcal{C}$. Concluimos que $\mathbb{T}_{Tr_{\mathcal{C}}} = \mathcal{C}$, es decir, $\varphi_1\psi_1(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

   La prueba de 3 y 4 es análoga a 1 y 2, respectivamente.

$\square$

Con estas aplicaciones, sabemos cuáles son los puntos fijos entre las clases de pretorsión y los prerradicales idempotentes y los puntos fijos entre las clases pre-libres de torsión y radicales, más aún:

Corolario 1.3.36. *Existen correpondencias biunívocas entre:*

1. *Clases de pretorsión y prerradicales idempotentes (preservan orden);*

2. *Clases pre-libres de torsión y radicales (invierten orden).*

$\square$

Notación 1.3.37. *Si $\sigma \in R$-pr y además, $\langle \psi_1, \varphi_1 \rangle$, $\langle \psi_2, \varphi_2 \rangle$ son conexiones de Galois y son como en el Lema 1.3.34, entonces introducimos la siguiente notación ([40], pág 137):*

$$\widehat{\sigma} := Tr_{\mathbb{T}_\sigma} = \varphi_1(\psi_1(\sigma)).$$
$$\overline{\sigma} := Rej_{\mathbb{F}_\sigma} = \varphi_2(\psi_2(\sigma)).$$

Como consecuencia de la notación anterior, se tiene lo siguiente:

Proposición 1.3.38. *Dado $\sigma \in R$-pr. Entonces:*

1. $\widehat{\sigma} \preceq \sigma$;

2. *$\widehat{\sigma}$ es un prerradical idempotente;*

3. *$\widehat{\sigma}$ es el mayor idempotente menor o igual que σ.*

Demostración. Sea $\langle \psi_1, \varphi_1 \rangle$ como en el Lema 1.3.34. Ya sabemos que $\widehat{\sigma}$ es un prerradical idempotente y por inciso 1. iii del Lema 1.3.34, se tiene que $\widehat{\sigma} \preceq \sigma$. Resta ver que es el mayor en cuestión. Supongamos que existe $\sigma' \in R$-pr idempotente tal que $\sigma' \preceq \sigma$. Entonces $\mathbb{T}_{\sigma'} \subseteq \mathbb{T}_\sigma$. Por consiguiente, $Tr_{\mathbb{T}'_\sigma} \preceq Tr_{\mathbb{T}_\sigma} = \widehat{\sigma} \preceq \sigma$. Concluimos que $\widehat{\sigma}$ es el mayor idempotente menor o igual que σ. $\square$

Hemos usado el hecho de que φ_1 y ψ_1 preservan orden.

Dualmente, se tiene que para cada prerradical $\sigma \in R$-pr, existe el menor radical por encima de σ como se muestra a continuación:

Proposición 1.3.39. *Dado $\sigma \in R$-pr. Entonces:*

1. $\sigma \preceq \overline{\sigma}$;

2. *$\overline{\sigma}$ es un radical;*

3. *$\overline{\sigma}$ es el menor radical mayor o igual que σ.*

Demostración. Sea $\langle \psi_2, \varphi_2 \rangle$ como en el Lema 1.3.34. Ya sabemos que $\overline{\sigma}$ es radical y por el inciso 2.iii del Lema 1.3.34, se tiene que $\sigma \preceq \overline{\sigma}$. Basta ver que $\overline{\sigma}$ es el menor radical mayor o igual que σ. En efecto: Si $\sigma \preceq \sigma'$, entonces $\mathbb{F}_{\sigma'} \subseteq \mathbb{F}_{\sigma}$ pues ψ_2 invierte orden. Así, $\sigma \preceq \overline{\sigma} = Rej_{\mathbb{F}_\sigma} \preceq Rej_{\mathbb{F}'_\sigma}$ puesto que φ_2 invierte orden. Se concluye que $\overline{\sigma}$ es el menor radical por encima de σ. $\square$

Observación 1.3.40. *Dado $\sigma \in R$-pr. Entonces:*

1. *σ es idempotente si y sólo si $\widehat{\sigma} = \sigma$;*

2. *σ es radical si y sólo si $\overline{\sigma} = \sigma$.*

Proposición 1.3.41. ([40], capítulo VI, Proposición 1.6) *Sea $\sigma \in R$-pr. Sucede que:*

1. *Si σ es idempotente, $\overline{\sigma}$ también lo es;*

2. *Si σ es radical, $\widehat{\sigma}$ es radical.*

1.4. Prerradicales alfa y omega

Vamos a definir dos tipos especiales de conglomerados de prerradicales: prerradicales alfa y omega pues cada prerradical se puede escribir como supremo de prerradicales alfa e ínfimo de prerradicales omega.

Definición 1.4.1. ([*31*], *Definition 4*) *Dados un $M \in R$-Mod, $N \leq M$ fijos y K cualquier otro R-módulo, se definen los prerradicales α_N^M, ω_N^M como sigue:*

1. $\alpha_N^M(K) := \sum\{f(N) | \; f : M \to K\}$.

2. $\omega_N^M(K) := \bigcap\{g^{-1}(N) | \; g : K \to M\}$.

Definición 1.4.2. *Sea $M \in R$-Mod y $N \leq M$. Decimos que N es un submódulo totalmente invariante de M si para todo $f \in End(M)$, se tiene que $f(N) \leq N$.*

Notación 1.4.3. *Si $N \leq M \in R$-Mod es un submódulo totalmente invariante de M, entonces lo denotaremos como $N \leq_{f.i} M$.*

Notación 1.4.4. *Para cada $M \in R$-Mod, denotamos por $\Lambda^{f.i}(M)$ al conjunto de todos los submódulos totalmente invariantes de M.*

En caso de que $N \leq M \in R$-Mod sea un submódulo totalmente invariante de M, se cumple que $\alpha_N^M(M) = N$ y $\omega_N^M(M) = N$. En tal caso, los prerradicales α_N^M y ω_N^M se llaman prerradicales $alfa$ y $omega$, respectivamente. En particular, si $N = M$, entonces $\alpha_M^M = Tr_M$. Si $N = 0$, entonces $\omega_0^M = Rej_M$. En ambos casos, 0 y M son siempre submódulos totalmente invariantes de M.

También observe que dado un $\sigma \in R$-pr, $\sigma(M) \leq_{f.i} M$, para cada $M \in R$-Mod.

Proposición 1.4.5. *Son equivalentes para $N \leq M \in R$-pr:*

1. $N \leq_{f.i} M$;
2. $\alpha_N^M(M) = N$;
3. $\omega_N^M(M) = N$.

Demostración.

$(1) \implies (2)$: Observe que considerando la identidad: $id_M : M \to M$, se tiene $N \leq \alpha_N^M(M)$. Inversamente, si $f \in End(M)$, por hipótesis $f(N) \leq N$. Así, $\alpha_N^M(M) \leq N$.

$(2) \implies (1)$: Sea $f : M \to M$, Entonces $f(N) \leq \alpha_N^M(M) = N$. Por consiguiente, $N \leq_{f.i} M$.

Análogamente, $(1) \iff (3)$.

□

Corolario 1.4.6. $N \leq_{f.i} M$ *si y sólo si existe* $\sigma \in R$*-pr tal que* $N = \sigma(M)$.

Demostración.

$\implies$) : Por la proposición anterior.

$\impliedby$) : Si $f : M \to M$, $f(N) = f(\sigma(M)) \leq \sigma(M) = N$. □

Corolario 1.4.7. $\Lambda^{f.i}(M)$ *es una subretícula completa de* $\Lambda(M)$. □

Definición 1.4.8. *Dados $\tau, \eta \in R$-pr, se puede definir el intervalo:*

$$[\tau, \eta] := \{\sigma \in R\text{-}pr \mid \tau \preceq \sigma \preceq \eta\}.$$

Proposición 1.4.9. *Para $\sigma \in R$-pr y cada $N \leq_{f.i} M \in R$-Mod. Son equivalentes:*

1. $\sigma(M) = N$;
2. $\alpha_N^M \preceq \sigma \preceq \omega_N^M$.

Demostración.

$(1) \implies (2)$: Sean $K \in R$-Mod y $f : M \to K$. Entonces $f(N) = f(\sigma(M)) \leq \sigma(K)$, pues σ es prerradical. Por tanto, $\alpha_N^M(K) \preceq \sigma(K)$. Se sigue que $\alpha_N^M \preceq \sigma$. Análogamente, se obtiene que $\sigma \preceq \omega_N^M$.

$(2) \implies (1)$: Siendo $N \leq_{f.i} M$, se tiene que $N = \alpha_N^M(M) \leq \sigma(M) \leq \omega_N^M(M) = N$. Concluimos que $\sigma(M) = N$. □

Corolario 1.4.10. *Sean $M \in R$-Mod y $N \leq_{f.i} M$. Entonces:*

1. α_N^M *es el menor prerradical σ tal que $\sigma(M) = N$;*

2. ω_N^M *es el mayor prerradical σ tal que $\sigma(M) = N$.*

Corolario 1.4.11. *Si $N \leq_{f.i} M$, entonces*

$$\left[\alpha_N^M, \omega_N^M\right] = \{\sigma \in R\text{-}pr \mid \sigma(M) = N\}.$$

Proposición 1.4.12. *Si $M \in R$-Mod, $N \leq N' \leq M$, entonces*

1 $\alpha_N^M \preceq \alpha_{N'}^M$;

2 $\omega_N^M \preceq \omega_{N'}^M$.

Demostración.

1. Sean $K \in R$-Mod y $f : M \to K$ un homomorfismo. Entonces $f(N) \leq f(N') \leq \alpha_{N'}^M(K)$. Por lo tanto, $\alpha_N^M \leq \alpha_{N'}^M$. Concluimos que $\alpha_N^M \preceq \alpha_{N'}^M$.

2. Es similar a 1.

□

Los prerradicales $alfa$ y $omega$ son muy importantes en la teoría de prerradicales pues todo prerradical se puede escribir como supremo de prerradicales alfa e infimo de prerradicales omega como se muestra en la siguiente proposición:

Proposición 1.4.13. *Sea $\sigma \in R$-pr cualquiera. Entonces:*

1. $\sigma = \displaystyle\bigvee_{M \in R-Mod} \alpha_{\sigma(M)}^M$;

2. $\sigma = \displaystyle\bigwedge_{M \in R-Mod} \omega_{\sigma(M)}^M$.

Demostración.

1. Sea $K \in R$-Mod. Como $\sigma(K) \leq_{f.i} K$, entonces

   $\sigma(K) = \alpha^K_{\sigma(K)}(K) \leq \left[\bigvee_{R-Mod} \alpha^M_{\sigma(M)}\right](K)$. Por consiguiente,

   $\sigma \preceq \bigvee_{R-Mod} \alpha^M_{\sigma(M)}$. Inversamente, sea $M \in R$-Mod. Como $\sigma(M) = \sigma(M)$, por la propiedad de alfa, $\alpha^M_{\sigma(M)} \preceq \sigma$. Por tanto, $\bigvee_{R-Mod} \alpha^M_{\sigma(M)} \preceq \alpha$. Se concluye que $\sigma = \bigvee_{M \in R-Mod} \alpha^M_{\sigma(M)}$.

2. Es análoga a la prueba de 1.

□

Lema 1.4.14. *Sea $Q \in R$-Mod inyectivo. Sea $N \leq Q$. Entonces ω^Q_N es exacto izquierdo.*

Demostración. Sea $K \leq M \in R$-Mod. Por la Proposición 1.3.16, hay que demostrar que $\omega^Q_N(K) = K \cap \omega^Q_N(M)$. En efecto: Primero, es claro que $\omega^Q_N(K) \leq K \cap \omega^Q_N(M)$. Por otro lado, tenemos $\omega^Q_N(K) = \cap\{g^{-1}(N) \mid g : K \to Q\}$. Sea $g : K \to Q$ cualquiera y considere la inclusión natural $i : K \to M$. Como Q es inyectivo, entonces existe $\bar{g} : M \to Q$ tal que $\bar{g}i = g$. Entonces $\bar{g}^{-1}(N) \cap K = g^{-1}(N)$ pues dado $x \in M$, $x \in K$, $\bar{g}(x) \in N$ si y sólo si $g(x) \in N$. Por lo tanto, $K \cap \omega^Q_N(M) \leq K \cap \bar{g}^{-1}(N) = \bar{g}^{-1}(N)$. Esto sucede para cada $g : K \to Q$. Por consiguiente, $K \cap \omega^Q_N(M) \leq \omega^Q_N(K)$. Se concluye que ω^Q_N es un prerradical exacto izquierdo. □

El siguiente resultado caracteriza a los conglomerados de prerradicales idempotentes, exactos izquierdos, t-radicales y radicales.

Proposición 1.4.15. *Sea $\sigma \in R$-pr. Entonces:*

1. *σ es idempotente si y sólo si $\sigma = \bigvee_{M \in \mathbb{T}_\sigma} \alpha^M_M$;*

2. *σ es radical si y sólo si $\sigma = \bigwedge_{M \in \mathbb{F}_\sigma} \omega^M_0$;*

3. *σ es exacto izquierdo si y sólo si $\sigma = \bigwedge_{Q \in \mathcal{E}} \omega^Q_{\sigma Q}$, donde $\mathcal{E}$ es la clase de todos los R-módulos inyectivos;*

4. *σ es t-radical si y sólo si $\sigma = \alpha^R_I$, con I ideal de R.*

Demostración.

1. Sea $\langle \varphi_1, \psi_1 \rangle$ una conexión de Galois como en el Lema 1.3.34. Por el mismo Lema, σ es idempotente si y sólo si
$$\sigma = \varphi_1\psi_1(\sigma) = Tr_{\mathbb{T}_\sigma} = \bigvee_{M \in \mathbb{T}_\sigma} \alpha_M^M.$$

2. Sea $\langle \varphi_2, \psi_2 \rangle$ una conexión de Galois como en el Lema 1.3.34. Por el mismo Lema, σ es radical si y sólo si
$$\sigma = \varphi_2\psi_2(\sigma) = Rej_{\mathbb{F}_\sigma} = \bigwedge_{M \in \mathbb{F}_\sigma} \omega_0^M.$$

3. Sea $Q \in R$-Mod inyectivo. Sea $N \leq Q$. Por el Lema 1.4.14 el prerradical ω_N^Q es exacto izquierdo. Ahora, por el inciso 4 de la Proposición 1.3.18,
$$\sigma = \bigwedge_{Q \in \mathcal{E}} \omega_{\sigma Q}^Q$$
Por consiguiente, σ es exacto izqierdo.

   Inversamente, si σ es exaxcto izquierdo, por la propiedad de omega, para cada $Q \in \mathcal{E}$, $\sigma \preceq \omega_{\sigma Q}^Q$. Por tanto, $\sigma \preceq \bigwedge_{Q \in \mathcal{E}} \omega_{\sigma Q}^Q$. Recíprocamente, para toda $M \in R$-Mod. Sea
$$\begin{aligned} x \in \left[\bigwedge_{Q \in \mathcal{E}} \omega_{\sigma Q}^Q\right](M) \leq M. \\ = \bigcap_{Q \in \mathcal{E}} \omega_{\sigma Q}^Q(M). \end{aligned}$$
Considerando $E(M) \in \mathcal{E}$ la cápsula inyectiva de M y la inclusión $i : M \hookrightarrow E(M)$. En particular, $x \in \omega_{\sigma E(M)}^{E(M)}(M)$. En particular, $x \in \bar{\eta}^{-1}(\sigma(E(M)))$, es decir, $x \in \sigma(E(M)) \cap M = \sigma(M)$, pues σ es exacto izquierdo. Se ha demostrado que
$$\left[\bigwedge_{Q \in \mathcal{E}} \omega_{\sigma Q}^Q\right](M) \leq \sigma(M),$$
de donde, $\bigwedge_{Q \in \mathcal{E}} \omega_{\sigma Q}^Q \preceq \sigma$. Se concluye que $\sigma = \bigwedge_{Q \in \mathcal{E}} \omega_{\sigma Q}^Q$.

4. Observe que si $f : R \to M$, entonces $f = d_x$, con $x \in M$, definida como $d_x(r) = rx$ y como $Hom(R, M) = \{d_x \,|\, x \in M\} \cong M$. Así que $f(I) = Ix$ (observe que si ${}_RI \leq R$, entonces I es ideal de R si y sólo si ${}_RI \leq_{f.i} R$). Por tanto, si I es ideal de R, entonces $\alpha_I^R(M) = \sum_{x \in M} Ix = IM$. En particular, $\alpha_{\sigma R}^R(M) = \sigma(R)M$. De la igualdad anterior, si σ es t-radical, se deduce que $\sigma = \alpha_{\sigma R}^R$. Recíprocamente, si $\alpha_I^R = \sigma$, para algún $I \leq R$, entonces de la igualdad anterior, se tiene que $IM = \alpha_I^R(M) = \sigma(M)$. Nuevamente, de la hipótesis, $I = \alpha_I^R(R) = \sigma(R)$, es decir, $I = \sigma(R)$. Por consiguiente, $\sigma(M) = IM = \sigma(R)M$. Concluimos que σ es t-radical.

$\square$

Capítulo 2

Módulos M-ideales y M-primos

En esta sección presentamos algunas definiciones y resultados que suceden en [5] y que serán relevantes para secciones posteriores. Consideramos el producto de módulos que define J. Beachy en ([5], Definition 1.5). Este producto posee propiedades interesantes y veremos, más adelante, que comparte similitudes con otro producto definido por Bican et al en [6] que será mencionado en la siguiente sección.

2.1. Módulos M-ideales

Recuerde que N es M-generado si existe un R-epimorfismo de una suma directa de copias del módulo M sobre N. Equivalentemente, X es M-generado si y sólo si $Tr_M(X) = X$. Sea M un R-módulo. Decimos que un R-módulo X es M-subgenerado si existen morfismos: $M^{(I)} \to L \to 0$ (L es un módulo M-generado) y $0 \to X \to L$ (X se sumerge en L). La categoría $\sigma[M]$ es una subcategoría plena de la categoría R-Mod cuyos objetos son todos los R-módulos subgenerados por M. Si $R = M$, entonces $\sigma[M]$ coincide con la categoría R-Mod. Más generalmente, $\sigma[M] = R$-Mod si y sólo si $R \subset M^k$ para algún $k \in \mathbb{N}$. La categoría $\sigma[M]$ es cerrada bajo sumas directas (coproductos), núcleos, conúcleos. Por tanto, existen pullbacks y pushouts en $\sigma[M]$ (Ver [13] y [44]).

El concepto de módulo M-ideal ha sido definido y estudiado por Beachy en [5].

Definición 2.1.1. *Sean M un R-módulo izquierdo y $\mathcal{C}$ una clase de módulos en R-Mod. En* ([5], *Definition 1.1*) *se define el anulador de la clase $\mathcal{C}$ en el módulo M como*

$$Ann_M(\mathcal{C}) = \bigcap_{K\in\Omega} K, \textit{ donde}$$

$$\Omega = \{K \subseteq M |\ \textit{existe}\ W \in \mathcal{C}\ \textit{y}\ f \in Hom(M, W)\ \textit{con}\ K = \ker f\}.$$

Definición 2.1.2. ([5], *Definition 1.2*) *Dado $M \in R$-Mod y $N \leq M$. Decimos que N es M-ideal si existe una clase $\mathcal{C}$ de módulos en $\sigma[M]$ tal que $N = Ann_M(\mathcal{C})$.*

Ejemplo 2.1.3. *Dado un $I \leq R$ un ideal izquierdo, es posible definir un prerradical ρ en R-Mod como sigue: $\rho(X) := IX$, para cada $X \in R$-Mod. Se verifica que es un prerradical y además, ρ resulta ser un radical. También resulta que $\mathbb{F}_\rho$ es cerrada bajo epimorfismos (es decir, ρ es un t-radical y por tanto, $\rho = \alpha_I^X$). En efecto: ρ es un radical puesto que $\rho(M/\rho(M)) = I(M/IM) = 0$. Ahora, veamos que $\mathbb{F}_\rho$ es cerrada bajo epimorfismos: Sea $g : M \to L$ epimorfismo con $M \in \mathbb{F}_\rho$, es decir, $IM = \rho(M) = 0$. Si $y \in L$, $y = g(x)$ para algún $x \in M$. Si $a \in I$, entonces $ay = ag(x) = g(ax) = 0$. Se sigue que $\rho(L) = IL = 0$. Por tanto, $L \in \mathbb{F}_\rho$. Por el inciso 3 de la Proposición 1.3.35 se tiene que $IX = \rho(X) = Rej_{\mathbb{F}_\rho}(X) = Ann_X(\mathbb{F}_\rho)$. Entonces, por definición, el submódulo $IM = \rho(M)$ es un ejemplo de un M-ideal. En particular, si $M = R$, entonces I es un R-ideal y, recíprocamente, si ${}_RI \leq R$ es un R-ideal, entonces existe $\rho \in R$-rad tal que $I = \rho(R)$, es decir, I es un ideal bilateral. Por tanto, I es ideal bilateral de R si y sólo si I es R-ideal.*

Recuerde que dado un $X \in R$-Mod fijo, el funtor contravariante $\mathrm{Hom}(\_, X) : R{-}\mathrm{Mod} \to \mathbf{Ab}$ asigna a cada R-módulo M el conjunto $\mathrm{Hom}_R(M, X)$ y a cada $f : M \to N$ R-homomorfismo le asigna $\mathrm{Hom}_R(f, X) = f^*$, donde $f^* : \mathrm{Hom}_R(N, X) \to \mathrm{Hom}_R(M, X)$ es tal que si $h \in \mathrm{Hom}_R(N, X)$, entonces $f^*(h) = hf$.

Las siguientes condiciones son equivalentes para un submódulo de M que caracterizan a los M-ideales.

Proposición 2.1.4. *Sea $M \in R$-Mod y $N \leq M$. Sean $i : N \hookrightarrow M$, $p : M \to M/N$ la inclusión y proyección natural, respectivamente. Son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. *N es un M-ideal;*
2. *Existe un radical $\rho \in R$-pr tal que $N = \rho(M)$;*
3. *$g(N) = 0$ para toda $g \in Hom_R(M, M/N)$;*
4. *$N = Ann_M(M/N)$;*
5. *$N = \omega_0^{M/N}(M)$;*
6. *$\alpha_N^M(M/N) = 0$;*

7. *El homomorfismo*

$$i^* = Hom_R(i, M/N) : Hom_R(M, M/N) \to Hom_R(N, M/N)$$

es el morfismo cero;

8. *El homomorfismo*

$$p^* = Hom_R(p, M/N) : Hom_R(M/N, M/N) \to Hom_R(M, M/N)$$

es un isomorfismo;

9. $\overline{\alpha_N^M} \preceq \omega_0^{M/N}$;

10. $N = \overline{\alpha_N^M}(M)$.

Demostración.

$(1) \implies (2)$: Supongamos que $N = Ann_M(\mathcal{C})$, para alguna clase $\mathcal{C} \in \sigma[M]$. Entonces $N = Rej_{\mathcal{C}}(M)$ para el radical $\rho = Rej_{\mathcal{C}}(M)$ cogenerado por la clase $\mathcal{C}$.

$(2) \implies (3)$: Existe un radical $\rho \in R$-pr tal que $\rho(M) = N$. Como ρ es radical, entonces $\rho(M/N) = \rho(M/\rho(M)) = 0$. Sea $g \in Hom(M, M/N)$. Como ρ es prerradical, $g(N) = g(\rho(M)) \subseteq \rho(M/N) = 0$. Se concluye que $g(N) = 0$ $\forall g \in Hom(M, M/N)$.

$(3) \implies (4)$: Siempre es cierto $Ann_M(M/N) \subseteq N$. Por otro lado, sea $g \in Hom(M, M/N)$ y por hipótesis, $N \subseteq Ker g$. Como g es arbitraria, se sigue que $N \subseteq \bigcap\{ker\ g \mid g \in Hom(M, M/N)\}$. Se sigue que $N = Ann_M(M/N)$.

$(4) \implies (1)$: Se sigue de la definición de un M-ideal.

$(3) \iff (5)$ y $(3) \iff (6)$ son inmediatas.

$(7) \iff (8)$: Considere el funtor contravariante $Hom(\_, M/N)$ y aplicarlo a la sucesión exacta corta: $0 \to N \hookrightarrow M \twoheadrightarrow M/N \to 0$.

$(5) \implies (9)$: Supongamos que $N = \omega_0^{M/N}(M)$. Por la propiedad de alfa se tiene que $\alpha_N^M \preceq \omega_0^{M/N}$. Como $\omega_0^{M/N}$ es radical, por la Proposición 1.3.39 se sigue que $\overline{\alpha_N^M} \preceq \omega_0^{M/N}$.

$(9) \implies (10)$: Supongamos que $\overline{\alpha_N^M} \preceq \omega_0^{M/N}$. Así que $N \leq \alpha_N^M \leq \overline{\alpha_N^M}(M) \preceq \omega_0^{M/N}(M) \leq N$. Concluimos que $N = \overline{\alpha_N^M}(M)$.

$(10) \implies (2)$: Es obvio. □

Corolario 2.1.5. *Si* $\{N_i\}_i \subseteq \Lambda(M)$ *es una colección de* M*-ideales, entonces* $\cap_{i \in I} N_i$ *es un* M*-ideal.*

Demostración. Sea $\{N_i\}_i \subseteq \Lambda(M)$ una colección de M-ideales, entonces para cada $i \in I$ existe un radical $\rho_i \in R$-pr tal que $\rho_i(M) = N_i$. Sean $N = \cap_{i \in I} N_i$ y $\eta = \bigwedge_{i \in I} \rho_i$, entonces por el inciso 2 de la Proposición 1.3.18 se sigue que η es radical sobre R-Mod y además es tal que $\eta(M) = N$. □

Proposición 2.1.6. ([5], *Proposition 1.4*) *Sea K un M-ideal y sea $N \subseteq K$ un submódulo de M.*

1. *El módulo cociente K/N es un (M/N)-ideal (en M/N).*

2. *Si N es un K-ideal (en K), entonces N es un M-ideal.*

Demostración.

1. Sean $f \in Hom_R(M/N, M/K)$ y $\pi : M \to M/N$ la proyección natural. Considere el homomorfismo $f\pi : M \to M/K$. Como K es un M-ideal, entonces $f\pi(K) = 0$. Así que $f(K/N) = 0$. Concluimos que K/N es un (M/N)-ideal.

2. Si $f \in Hom_R(M, M/N)$. Como $N \subseteq K$, entonces se induce un epimorfismo $\pi : M/N \to M/K$. Considere la composición $\pi f : M \to M/K$. Como K es un M-ideal, entonces $\pi f(K) = 0$, es decir, $f(K) \subseteq K/N$. Lo anterior induce el siguiente R-homomorfismo: $g : K \to K/N$ dado por $g(x) = f(x)$, $\forall x \in K$. Se verifica fácilmente que g está bien definida y es un morfismo de R-módulos. Por consiguiente, $g(N) = 0$ pues N es un K-ideal. Se sigue que $f(N) = 0$, de donde $f(N) = 0$. Concluimos que N es un M-ideal.

□

Lo siguiente será introducir un producto entre dos módulos dado por J. Beachy en [5]. Será vital estudiar algunas de las propiedades que posee.

Definición 2.1.7. ([5], *Proposition 1.5*) *Sea N un submódulo de M. Para cada $X \in R$-Mod definimos*

$$N \cdot X = Ann_X(\mathcal{C}) = \bigcap_{K \in \Omega} K,$$

donde

$$\mathcal{C} = \{W \in R\text{-}Mod \mid f(N) = 0 \ \ \forall f \in Hom_R(M, W)\}$$

y

$$\Omega = \{K \subseteq X \mid \text{ existe } W \in \mathcal{C} \text{ y } f \in Hom(X, W) \text{ con } K = \ker f\}.$$

Lema 2.1.8. ([5], *pág 6*) *Sean $N \subseteq M$ y $X \in R$-Mod. Entonces*

$$N \cdot X = 0 \text{ si y sólo si } f(N) = 0 \ \ \forall f \in Hom_R(M, X).$$

Demostración. Supongamos que existe $f \in Hom_R(M, X)$ tal que $f(n) \neq 0$. Considere el funtor contravariante $Hom_R(\_, W)$ y aplicado a f resulta del morfismo: $f^* = Hom_R(f, W) : Hom_R(X, W) \to Hom_R(M, W)$. Para toda $g \in Hom_R(X, W)$ $g(f(n)) = gf(n) = 0$, es decir, $0 \neq f(n) \in Ker\ g, \forall g \in Hom_R(X, W)$. Se sigue que $N \cdot X = \bigcap\{\ker g \,|\, g \in Hom_R(X, W)\} \neq 0$. Por tanto, $N \cdot X \neq 0$. Inversamente, supongamos que $f(N) = 0 \ \ \forall f \in Hom_R(M, X)$. Por lo anterior, observe que $X \in \mathcal{C}$. Considerando $f = id_X$, entonces $ker\ f = 0$. Concluimos que $N \cdot X = Ann_X(\mathcal{C}) = \bigcap_{K \in \Omega} K = 0$. □

Proposición 2.1.9. ([5], *pág 6*) *La clase $\mathcal{C}$ como en la Definición 2.1.7 es una clase pre-libre de torsión.*

Demostración.

1. $\mathcal{C}$ es cerrada bajo monomorfismos: sea $h : L \to K$ un monomorfismo con $K \in \mathcal{C}$. Sea $g : M \to L$ un R-homomorfismo. Considerando la composición $hg : M \to K$. Por hipótesis, $hg(N) = 0$. Como h es monomorfismo, entonces $g(N) = 0$. Como g es arbitraria, concluimos que $L \in \mathcal{C}$.

2. $\mathcal{C}$ es cerrada bajo productos directos: sea $\{N_\alpha\}_{\alpha \in X} \subseteq \mathcal{C}$. Vamos a demostrar que $\prod\limits_{\alpha \in X} N_\alpha \in \mathcal{C}$, es decir, $f(N) = 0$ para toda $f \in Hom_R(M, \prod\limits_{\alpha \in X} N_\alpha)$. Supongamos lo contrario: existe $f^* \in Hom_R(M, \prod\limits_{\alpha \in X} N_\alpha)$ tal que $f^*(N) \neq 0$. Pero $f^*(N) \in \prod\limits_{\alpha \in X} N_\alpha$. Por tanto, existe $\beta \in X$ tal que $f^*(N)(\beta) \neq 0$. Sea la proyección natural $\pi_\beta : \prod\limits_{\alpha \in X} N_\alpha \to N_\beta$. Entonces $\pi_\beta(f^*(N)) \neq 0$. Notamos que $\pi_\beta f^* \in Hom_R(M, N_\beta)$ y cumple que $\pi_\beta f^*(N) \neq 0$. Lo cual es una contradicción pues $N_\beta \in \mathcal{C}$. Debe suceder que $f(N) = 0$ para toda $f \in Hom_R(M, \prod\limits_{\alpha \in X} N_\alpha)$. Concluimos que $\mathcal{C}$ es cerrada bajo productos directos arbitrarios.

□

Proposición 2.1.10. ([5], *pág 6*) *$N \cdot X$ es el menor submódulo Y de X tal que $N \cdot (X/Y) = 0$*

Demostración. Sea Ω como en la Definición 2.1.1. Primero observe que si $L \leq X$ tal que $N \cdot (X/L) = 0$, entonces $X/L \in \mathcal{C}$ y $L \in \Omega$. En efecto: $N \cdot (X/L) = 0$ si y sólo si $f(N) = 0 \ \ \forall f \in Hom_R(M, X/L)$. Así, $X/L \in \mathcal{C}$ y si consideramos $h = \pi : X \to X/L$ la proyección natural, entonces $L = ker\ h$. Por tanto,

$L \in \Omega$. Inversamente, si $K \in \Omega$, entonces, por definición, existe $W \in \mathcal{C}$ y $f \in Hom_R(X, W)$ tal que $K = Ker f$. Por el primer teorema de isomorfismo, se sigue que $X/K = X/Ker\ f \cong Im\ f \leq W \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es cerrado bajo submódulos, se sigue que $X/K \in \mathcal{C}$, lo cual implica que $h(N) = 0\, \forall h \in Hom_R(M, X/K)$ si y sólo si $N \cdot (X/K) = 0$. Hemos probado: $\{L \leq X \mid N \cdot (X/L) = 0\} = \Omega$, más aún,

$$N \cdot X = Ann_X(\mathcal{C}) = \bigcap \{L \leq X \mid N \cdot (X/L) = 0\}.$$

Considere la colección de proyecciones naturales $\{\pi_L : X \to X/L \mid X/L \in \mathcal{C}\}$. Por la propiedad universal del producto directo, existe un único morfismo g que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, dashed, "\exists g"] \arrow[drr, "\pi_L"'] & & \prod_{X/L \in \mathcal{C}} X/L \arrow[d, two heads, "\pi_\beta"] \\
& & X/L
\end{tikzcd}$$

Y como consecuencia,

$$kerg = \bigcap_{X/L \in \mathcal{C}} ker\ (\pi_L : X \to X/L) = \bigcap_{X/L \in \mathcal{C}} L = N \cdot X.$$

Por el primer teorema de isomorfismo, $X/(N \cdot X) = X/kerg \cong Img \leq \prod_{X/L \in \mathcal{C}} X/L$.

Como $\mathcal{C}$ es cerrada bajo submódulos y productos directos, se sigue que $X/(N \cdot X) \in \mathcal{C}$. Esto implica que $f(N) = 0 \quad \forall f \in Hom_R(M, X/(N \cdot X))$ si y sólo si $N \cdot (X/(N \cdot X)) = 0$. Concluimos que $N \cdot X$ es el menor submódulo Y de X tal que $N \cdot (X/Y) = 0$.

□

Proposición 2.1.11. ([5], *pág 6*) *Sea $M \in R$-Mod. Sean $N \subseteq M$ y $X \in R$-Mod cualquiera. Entonces $\sum\{f(N) \mid f \in Hom_R(M, X)\} \subseteq N \cdot X$.*

Demostración. Basta ver que para cada $f \in Hom_R(M, X)$ se tiene que $f(N) \subseteq N \cdot X$. En efecto: sea $f \in Hom_R(M, X)$ y consideremos $\pi f : M \to X/(N \cdot X)$, donde $\pi : X \to X/(N \cdot X)$ es la proyección natural. Entonces por el Lema 2.1.8 y por la Proposición 2.1.10 se tiene que $h(N) = 0 \quad \forall h \in Hom_R(M, X/(N \cdot X))$ si y sólo si $N \cdot (X/(N \cdot X)) = 0$. En este caso, $\pi f = h \in Hom_R(M, X/(N \cdot X))$ es tal que $\pi f(N) = h(N) = 0$, lo cual implica que $f(N) \subseteq Ker \pi = N \cdot X$. □

Proposición 2.1.12. ([5], *pág 6*) *Dado $N \leq M \in R$-Mod. Entonces $N \cdot (\_)$ es un prerradical en R-Mod, más aún, por la Proposición 2.1.10, $N \cdot (\_)$ es un radical.* □

Corolario 2.1.13. ([5], *Proposition 1.6*) *Sea $M \in R$-Mod. Sean $N \subseteq M$ y X un R-módulo cualquiera. Entonces $N \cdot X = 0$ si y sólo si $N \subseteq Ann_M(X)$.*

Demostración. $N \cdot X = 0$ si y sólo si $f(N) = 0 \quad \forall f \in Hom_R(M, X)$ si y sólo si $N \in ker\ f \quad \forall f \in Hom_R(M, X)$ si y sólo si $N \subseteq Ann_M(X)$. □

Corolario 2.1.14. ([5], *Corollary 1.7*) *Si N es un submódulo de M, entonces N es un M-ideal si y sólo si $N \cdot (M/N) = 0$.*

Lema 2.1.15. ([5], *Lemma 1.8*) *Si $N \subseteq M \in R$-Mod. Entonces $N \cdot (\_)$ es el menor radical ρ de R-Mod tal que $N \subseteq \rho(M)$.*

Demostración. Sea $\rho \in R$-rad tal que $N \subseteq \rho(M)$. Considere la clase $\mathbb{F}_\rho$. Sea $W \in \mathbb{F}_\rho$. Por tanto, $\rho(W) = 0$ Como ρ es un prerradical, se tiene que $f(N) \subseteq f(\rho(M)) \leq \rho(W) = 0$, es decir, $W \in \mathcal{C} =\{W \in$ ***R*-Mod** $\mid f(N) = 0\ \forall f \in Hom_R(M, W)\}$. Entonces $\mathbb{F}_\rho \subseteq \mathcal{C}$. Por el Lema 1.3.34 y por el inciso 3 de la Proposición 1.3.35 se tiene que $N \cdot X = Ann_X(\mathcal{C}) = Rej_{\mathcal{C}}(X) \leq Rej_{\mathbb{F}_\rho}(X) = \rho(X)$ para cada $X \in R$-Mod. Concluimos que $N \cdot (\_)$ es el menor radical ρ de R-Mod tal que $N \subseteq \rho(M)$. □

Algunos resultados que suceden para los ideales bilaterales de un anillo R, estos se pueden extender a los M-ideales. En particular, el producto de dos M-ideales es un M-ideal y está contenido en su intersección como se muestra a continuación:

Proposición 2.1.16. ([5], *Proposition 1.9*) *Sea $N, K \leq M$. Entonces:*

1. *Si $N \subseteq K$, entonces $N \cdot X \subseteq K \cdot X$ para toda $X \in R$-Mod;*
2. *Si K es un M-ideal, entonces $N \cdot K$ es un M-ideal;*
3. *El submódulo $N \cdot M$ es el menor M-ideal que contiene a N;*
4. *Si N es un M-ideal, entonces $N \cdot K \subseteq N \cap K$;*
5. *Si $X_0 \leq X \in R$-Mod, entonces $N \cdot X_0 \subseteq N \cdot X$.*

Demostración.

1. Considere las clases $\mathcal{C}$ =$\{W \in$ *R-Mod* $\mid f(N) = 0 \ \ \forall f \in Hom_R(M, W)\}$ y $\mathcal{D}$ =$\{W \in$ *R-Mod* $\mid f(K) = 0 \ \ \forall f \in Hom_R(M, W)\}$. Es fácil ver que $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. Por el inciso 2 del Lema 1.3.34, se sigue que

   $N \cdot X = Ann_X(\mathcal{C})$ =$Rej_{\mathcal{C}}(X) \subseteq$$Rej_{\mathcal{D}}(X) = Ann_X(\mathcal{D})$ =$K \cdot X$ para cada $X \in R$-Mod.

2. Por definición $N \cdot K$ es un K-ideal (en K). Como K es un M-ideal, por el inciso 2 de la Proposición 2.1.6 se sigue que $N \cdot K$ es un M-ideal.

3. Si $N \subseteq K$ y K es un M-ideal, entonces $K = \rho(M)$, para algún $\rho \in R$-rad. Por el Lema 2.1.15, se tiene que $N \cdot M \subseteq \rho(M) = K$.

4. Es claro que $N \cdot K \subseteq K$. Por otro lado, por la parte 3, se tiene que $N \cdot K \subseteq N \cdot M = N$, pues N es un M-ideal.

5. Se sigue de $N \cdot (\_)$ es un prerradical en R-Mod.

$\square$

Definición 2.1.17. *Decimos que un R-módulo izquierdo M se llama proyectivo si tiene la siguiente propiedad de "levantamiento":*

Para todo epimorfismo $g : N \to L$ y todo homomorfismo $f : M \to L$, existe un homomorfismo $h : M \to N$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ N \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es decir, $f = gh$.

Proposición 2.1.18. (Definición alternativa de un módulo proyectivo M usando el funtor covariante $Hom_R(M, \_)$). *Un R-módulo M es proyectivo si y sólo si para cada epimorfismo $g : N \to L$, el homomorfismo de grupos $g_* : Hom_R(M, N) \to Hom_R(M, L)$ es un epimorfismo.*

Definición 2.1.19. *Dado $M \in R$-Mod. Decimos que M es casi-proyectivo si para cada epimorfismo $h : M \to L$ y todo homomorfismo $f : M \to L$, existe $h \in End_R(M)$ tal que conmuta el siguiente diagrama:*

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Observación 2.1.20. *Es claro que un R-módulo simple es un módulo casi-proyectivo. También se observa que todo R-módulo proyectivo es casi-proyectivo.*

Los módulos casi-proyectivos forman parte de nuestro objeto de estudio para secciones posteriores. Por ejemplo, estos módulos caracterizan a sus submódulos totalmente invariantes como se ve a continuación:

Proposición 2.1.21. ([5], *Proposition 5.1*) *Si M es casi-proyectivo, entonces $N \leq M$ es un M-ideal si y sólo si es un submódulo totalmente invariante de M.*

Demostración. Sea $h \in End_R(M)$. Supongamos que $N \leq M \in R$-Mod es un M-ideal. Considere la siguiente sucesión: $N \xrightarrow{i} M \xrightarrow{h} M \xrightarrow{p} M/N$. Por hipótesis, $\pi hi = 0$. Entonces $h(n) + N = \pi hi(n) = 0$ en M/N para toda $n \in N$. Así que $h(n) \in N$ para toda $n \in N$. Por tanto, $h(N) \subseteq N$. Recíprocamente, supongamos $N \leq_{f.i} M$. Si $f \in Hom_R(M, M/N)$, y si consideramos $\pi : M \to M/N$ la proyección natural, por ser M casi-proyectivo, existe $h \in End_R(M)$ tal que $\pi h = f$. Entonces $h(N) \subseteq N$. Por tanto, $f(N) = \pi h(N) = 0$ en M/N. Por el inciso 3 de la Proposición 2.1.4 se concluye que N es un M-ideal. $\square$

Notemos que para la necesidad de la Proposición 2.1.21 no es necesario que M sea un R-módulo casi-proyectivo.

Definición 2.1.22. *Decimos que un R-módulo M es dúo si todo submódulo es un submódulo totalmente invariante.*

En la Proposición 2.1.4 presentamos una caracterización de los M-ideales. Ahora damos otra caracterización en términos de los prerradicales omega y $N \cdot (\_)$.

Proposición 2.1.23. *Sea $N \leq_{f.i} M$. Son equivalentes las siguientes condiciones:*

1. $N \cdot (\_) \preceq \omega_0^{M/N}$;
2. *N es M-ideal;*
3. $N \cdot (\_) \preceq \omega_N^M$.

Demostración.

$(1) \implies (2)$: Si $N \cdot (\_) \preceq \omega_0^{M/N}$, entonces $N \subseteq N \cdot M \subseteq \omega_0^{M/N}(M) \subseteq N$. Por tanto, $N = N \cdot M$. Así, N es M-ideal.

$(2) \implies (1)$: Si N es M-ideal, entonces $N \cdot (M/N) = 0$. Por la propiedad omega, se sigue que $N \cdot (\_) \preceq \omega_0^{M/N}$.

$(2) \implies (3)$: Supongamos que N es M-ideal. Entonces $N \leq_{f.i} M$, y sucede que $N = \omega_N^M(M)$. Además, como $N \cdot M$ es el menor M-ideal que contiene a N

y N es M-ideal, entonces $N = N \cdot M$. Por la propiedad omega, se obtiene que $N \cdot (\_) \preceq \omega_N^M$.

(3) $\implies$ (2) : Si $N \cdot (\_) \preceq \omega_N^M$, entonces $N \subseteq N \cdot M \subseteq \omega_N^M(M) = N$. Así que $N = N \cdot M$. Concluimos que N es M-ideal. □

Corolario 2.1.24. *Sea $N \leq_{f.i} M$. Entonces:*

$$N \text{ es } M\text{-ideal si y sólo si } \alpha_N^M \preceq N \cdot (\_) \preceq \omega_N^M.$$

□

Proposición 2.1.25. ([5], *Proposition 1.10*) *Sea $X \in R$-Mod. Entonces:*

1. $Ann_M(X) = Ann_M(Tr_M(X)) = Ann_M(M \cdot X)$;
2. *Sea $N \leq M$. Consideremos $T = \sum\{f(N) \mid f \in Hom_R(M, X)\}$ y $A = Ann_M(X)$. Entonces $Ann_R(T) = Ann_R((N + A)/A)$;*
3. $Ann_R(Tr_M(X)) = Ann_R(M/Ann_M(X))$.

Demostración.

1. Si $f \in Hom_R(M, X)$, entonces $f(M) \subseteq Tr_M(X) \subseteq M \cdot X$. Se sigue que $Hom_R(M, X) \subseteq Hom_R(M, Tr_M(X)) \subseteq Hom_R(M, M \cdot X)$. Por otro lado, como $Tr_M(X), M \cdot X \leq X$ entonces $Hom_R(M, M \cdot X) \subseteq Hom_R(M, X)$ y $Hom_R(M, Tr_M(X)) \subseteq Hom_R(M, X)$. Así se da la igualdad y por tanto, $Ann_M(X) = Ann_M(Tr_M(X)) = Ann_M(M \cdot X)$.
2. Considere el conjunto $C = Hom_R(M, Tr_M(X))$. Por la Propiedad Universal del Producto Directo, se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, dashed, "\exists g"] \arrow[dr, "f_c"'] & (Tr_M(X))^C \arrow[d, two heads, "\pi_c"] \\ & Tr_M(X) \end{tikzcd}$$

Como consecuencia, $kerg = \bigcap\{Kerf \mid f \in C = Hom_R(M, Tr_M(X))\} = Ann_M(Tr_M(X))$. Por la primera parte y por el primer teorema de isomorfismo, $M/Ann_M(X) = M/Ann_M(Tr_M(X)) = M/Kerg \cong Img \leq$

$(Tr_M(X))^C$. Así, $M/Ann_M(X)$ se sumerge en un producto directo de copias de $Tr_M(X)$. Ahora, sea $N \leq M$. Consideremos $T = \sum\{f(N) \mid f \in Hom_R(M,X)\}$ y $A = Ann_M(X)$. Puesto que $\pi_c g = f_c$ para cada $f_c \in Hom_R(M, Tr_M(X)) = Hom_R(M,X)$ y $g(N) \subseteq Im\ g$, entonces

$$\pi_c((N+A)/A) = \pi_c(g(N)) = (\pi_c g)(N) = f_c(N)$$

para cada $f_c \in Hom_R(M,X)$. Así, $\pi_c((N+A)/A) \subseteq T$. En consecuencia, $(N+Ann_M(X))/Ann_M(X) \subseteq T^C$, es decir, $(N+A)/A$ se sumerge en un producto directo de copias de T. Se sigue que $Ann_M(T) \subseteq Ann_M((N+A)/A)$.

La otra contención se demuestra de manera similar.

3. Se sigue de la parte 2 tomando $N = M$.

□

2.2. Módulos M-primos

Las siguientes definiciones y resultados también se presentan en ([5], Chapter 2).

Definición 2.2.1. *Un R-módulo X se dice que es un módulo primo si es distinto de cero y $Ann_R(Y) = Ann_R(X)$ para todos los submódulos $0 \neq Y \subseteq X$.*

La siguiente definición generaliza la definición anterior para un módulo distinto de cero.

Definición 2.2.2. ([5], *Definition 2.1*) *Un R-módulo X se dice que es M-primo si $Hom_R(M,X) \neq 0$ y $Ann_M(Y) = Ann_M(X)$ para todos los submódulos $Y \subseteq X$ tales que $Hom_R(M,Y) \neq 0$.*

En en caso $M = R$, se tiene que $Hom_R(M,X) = Hom_R(R,X) \neq 0$ si y sólo si $X \neq 0$, así que un módulo R-primo es módulo primo como en la definición anterior.

El siguiente resultado es una caracterización para los módulos M-primos e involucra la definición de producto de módulos que se ha dado previamente.

Proposición 2.2.3. ([5], *Proposition 2.2*) *Sean $M \in R$-Mod y X un R-módulo tal que $Hom_R(M,X) \neq 0$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es un módulo M-primo;*

2. *Si* $N \cdot Y = 0$, *entonces* $N \cdot X = 0$ *para cualquier submódulo* $N \subseteq M$ *y para cualquier submódulo* $Y \subseteq X$, *con* $M \cdot Y \neq 0$;

3. *Para cada* $m \in M \setminus Ann_M(X)$ *y para cada* $0 \neq f \in Hom_R(M, X)$, *existe* $g \in Hom_R(M, f(M))$ *tal que* $g(m) \neq 0$;

4. *Si* $N \cdot Y = 0$, *entonces* $N \cdot X = 0$ *para cada* M*-ideal* $N \subseteq M$ *y para cada submódulo* M*-generado* $0 \neq Y \subseteq X$.

Demostración.

$(1) \implies (2)$: Sean N un submódulo de M y $Y \leq X$, con $M \cdot Y \neq 0$. Entonces $Hom_R(M, Y) \neq 0$. Así, $Ann_M(Y) = Ann_M(X)$ pues X es M-primo. Por el Corolario 2.1.13, se tiene que $N \cdot Y = 0$ si y sólo si $N \subseteq Ann_M(Y) \subseteq Ann_M(X)$, es decir, $N \cdot X = 0$.

$(2) \implies (3)$: Sean $m \in M \setminus Ann_M(X)$ y $0 \neq f \in Hom_R(M, X)$. Por hipótesis, $N \cdot f(M) \neq 0$, para el submódulo $Rm = N \leq M$ y el submódulo $f(M) \leq X$ con $M \cdot f(M) \subseteq M \cdot X \neq 0$. Por el Corolario 2.1.13, $Rm \nsubseteq Ann_M(f(M))$. Por tanto, existe $g \in Hom_M(M, f(M))$ tal que $g(m) \neq 0$.

$(3) \implies (4)$: Sean $0 \neq Y \leq X$ un submódulo M-generado de X y N un M-ideal tal que $N \cdot Y = 0$. Si $N \cdot X \neq 0$, por el Corolario 2.1.13 sucede que $N \nsubseteq Ann_M(X)$, es decir, existe $m \in N \setminus Ann_M(X)$. Como Y es M-generado, existe un epimorfismo de una suma directa de copias del módulo M sobre Y. Así, existe $0 \neq f \in Hom_R(M, Y)$. Aplicando la hipótesis, existe $g \in Hom_R(M, Y)$ con $g(m) \neq 0$. Entonces el submódulo $Rm = N \nsubseteq Ann_M(Y)$, es decir, $N \cdot Y \neq 0$ lo cual es una contradicción.

$(4) \implies (1)$: Sea $0 \neq Y \leq X$ con $Hom_R(M, Y) \neq 0$. Consideremos $N = Ann_M(Y)$. Como $Hom_R(M, Y) \neq 0$, entonces existe un morfismo distinto de cero $f : M \to Y$. Entonces $N \cdot f(M) = 0$. Aplicando la hipótesis se tiene que $N \cdot X = 0$. Por el Corolario 2.1.13, $Ann_M(Y) = N \subseteq Ann_M(X)$. La otra contención es clara. Concluimos que X es un módulo M-primo. $\square$

Las condiciones equivalentes de la Proposición 2.2.3 extienden las siguientes condiciones que son equivalentes para un $X \in R$-Mod para el caso $M = R$.

1. X es un módulo R-primo.

2. Si $IY = 0$, entonces $IX = 0$ para cualquier ideal izquierdo I de R y para cualquier $0 \neq Y \subseteq X$.

3. Para cada $a \in R \setminus Ann_R(X)$ y cada $0 \neq x \in X$, existe $r \in R$ tal que $arx \neq 0$.

4. Si $IY = 0$, entonces $IX = 0$ para cualquier ideal (bilateral) I de R y para cualquier $0 \neq Y \subseteq X$.

Corolario 2.2.4. ([5], *Corollary 2.3*) *Sea $X \in R$-Mod un módulo M-primo. Un submódulo Y de X es M-primo si y sólo si $Hom_R(M, Y) \neq 0$.*

Demostración. Se sigue del inciso 2 de la Proposición 2.2.3. □

Corolario 2.2.5. ([5], *Corollary 2.4*) *Dado $X \in R$-Mod tal que $Hom_R(M, X) \neq 0$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *X es un módulo M-primo;*
2. *$M \cdot X$ es un módulo M-primo;*
3. *$Tr_M(X)$ es un módulo M-primo.*

Demostración. De la Proposición 2.1.11, tenemos que $Tr_M(X) \subseteq M \cdot X \subseteq X$. Por otra parte, en la demostración del inciso 1 de la Proposición 2.1.25 se observó que

$$Hom_R(M, X) = Hom_R(M, Tr_M(X)) = Hom_R(M, M \cdot X).$$

Por el Corolario 2.2.4 se sigue que (1) implica (2) y (2) implica (3). (3) implica (1) se sigue de la condición 4 de la Proposición 2.2.3 puesto que todo submódulo M-generado de X está contenido en $Tr_M(X)$. □

Observación 2.2.6. *Notemos que $X \in R$-Mod es M-primo si no tiene submódulos propios no triviales M-generados o si M no posee M-ideales propios no triviales, entonces todo módulo X con $Hom_R(M, X) \neq 0$ es M-primo.*

Ejemplo 2.2.7. *Si R es un anillo simple, entonces todo R-módulo izquierdo distinto de cero X es un módulo R-primo.*

El siguiente ejemplo muestra que los módulos M-primos no necesariamente son R-primos y viseversa.

Ejemplo 2.2.8. *En la categoría de $\mathbb{Z}$-Módulos, considere el $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z}_{p^\infty}$, para algún primo p.*

1. *M es M-primo: Sabemos que $Hom_R(M, M) \cong Hom_R(M, M/K)$ para cualquier submódulo propio K de M. Por el inciso 3 de la Proposición 2.1.4 se sigue que ningún submódulo propio no trivial K puede ser M-ideal. También, como $Hom_R(M, K) = 0$ para todo $K \subsetneq M$, entonces ningún submódulo no trivial K puede ser M-generado. Así que M es M-primo.*

2. *M no es $\mathbb{Z}$-primo: Como todo submódulo propio tiene anulador distinto de cero en $\mathbb{Z}$. En efecto: Sea $N \subsetneq M$, es decir, $N = \langle \frac{1}{p^i} + \mathbb{Z} \rangle$, para algún i. Entonces $Ann_{\mathbb{Z}}(N) = \{r \in \mathbb{Z} \mid rN = 0\} \neq 0$, pues observe que $p^{i+1}(\frac{1}{p^i} + \mathbb{Z}) = \frac{p^{i+1}}{p^i} + \mathbb{Z}$, pero $Ann_{\mathbb{Z}}(M) = 0$. Por tanto, M no es $\mathbb{Z}$-primo.*

3. *$\mathbb{Z}$ es $\mathbb{Z}$-primo: Basta ver que $Ann_{\mathbb{Z}}(n\mathbb{Z}) = Ann_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z})$ para cada $n \neq 0$.*

4. *$\mathbb{Z}$ no es M-primo: Observe que $Hom_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z}) = 0$.*

Proposición 2.2.9. *Sea $X \in R$-Mod un módulo M-primo. Si $Hom_R(M, Y) \neq 0$ para todos los submódulos $0 \neq Y \subseteq X$, entonces $Tr_M(X)$ es un módulo R-primo.*

Demostración. Sea $0 \neq Y \leq Tr_M(X)$. Por hipótesis, $Hom_R(M, Y) \neq 0$. Como X es M-primo, $Ann_M(Y) = Ann_M(X)$. Sabemos que $Ann_R(Tr_M(X)) \subseteq Ann_R(Y)$. Resta demostrar que $Ann_R(Y) \subseteq Ann_R(Tr_M(X))$. En efecto:

$$\begin{aligned} Ann_R(Y) \subseteq Ann_R(Tr_M(Y)) &= Ann_R(M/Ann_M(Y)) \\ &= Ann_R(M/Ann_M(X)) \\ &= Ann_R(Tr_M(X)). \end{aligned}$$

La primer y tercera igualdad suceden por la Proposición 2.1.25. En consecuencia, $Ann_R(Y) = Ann_R(Tr_M(X))$. Concluimos que $Tr_M(X)$ es un módulo R-primo. $\square$

Proposición 2.2.10. ([5], *Proposition 2.6*) *Sea $X \in R$-Mod. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *Todo submódulo de X distinto de cero cogenera a X;*

2. *Para cada $M \in R$-Mod tal que $\sigma[M] = \sigma[X]$ y X es M-generado, entonces X es M-primo.*

3. *Para cada $M \in R$-Mod tal que $Hom_R(M, X) \neq 0$, se tiene que X es M-primo.*

Demostración.

(1) $\implies$ (3) : Sea $0 \neq Y \leq X$. Por hipótesis Y cogenera a X. Entonces para cualquier $M \in R$-Mod se tiene que $Ann_M(Y) \subseteq Ann_M(X)$. Por tanto, $Ann_M(Y) = Ann_M(X)$. Concluimos que X es M-primo.

(3) $\implies$ (2) : Sean X y M R-módulos tales que $\sigma[M] = \sigma[X]$ y X es M-generado. Entonces existe un R-epimorfismo de una suma directa de copias de M

sobre X. Por consiguiente, existe $0 \neq f \in Hom_R(M, X)$. Por la suposición en 3, se sigue que X es M-primo.

$(2) \implies (1)$: Dado $0 \neq Y \leq X$. Considere el módulo $M = X \oplus Y$. Considerando la inclusion natural $i : X \to M$, se sigue que X es M-generado. Además, $\sigma[M] = \sigma[X]$ pues $X \in \sigma[M]$ y $M \in \sigma[X]$ pues $Y \in \sigma[X]$ ya que esta categoría es cerrada bajo submódulos. Por la suposición en 2, se sigue que X es M-primo. Entonces $Ann_M(Y) = Ann_M(X) = 0$. Así, $Ann_M(Y) = 0$. Concluimos que Y cogenera a X. □

2.3. M-ideal primo

Lo siguiente es introducir la noción de M-ideal primo dada por J. Beachy en [5]. Esta noción, para un módulo multiplicación M, bajo ciertas condiciones, es equivalente al concepto de submódulo primo de M como se introduce en el siguiente capítulo.

Definición 2.3.1. ([5], *Definition 3.1*) *Un M-ideal P se dice que es un M-ideal primo si existe un R-módulo M-primo X tal que $P = Ann_M(X)$.*

Proposición 2.3.2. ([5], *Proposition 3.2*) *Si P es un M-ideal primo, entonces $P = Ann_M(X)$ para algún módulo M-primo M-generado X.*

Recuerde que el radical de un anillo R es definido como la intersección de ideales izquierdos máximos de R, más aún, se puede mostrar que éste es la intersección de todos los ideales primitivos de R (un ideal de R es primitivo si es igual al anulador en R de un módulo izquierdo simple). Esta situación se puede extender a los módulos: el radical de Jacobson $J(X)$ de un R-módulo X se define como la intersección de todos los submódulos máximos de X (si X no tiene submódulos máximos, entonces se define como X), equivalentemente, $J(X) = Ann_X(\mathscr{C})$, donde $\mathscr{C}$ es la clase de R-módulos simples. Usando la noción de un M-ideal, podemos definir la noción de un módulo M-ideal primitivo de tal forma que el radical de Jacobson sea la intersección de todos los M-ideales primitivos.

Definición 2.3.3. ([5], *Definition 3.5*) *Un M-ideal P se dice que es un M-ideal primitivo si $P = Ann_M(S)$, para algún módulo izquierdo simple S.*

La noción de ideales máximos de R también se puede generalizar inmediatamente a los M-ideales. La siguiente proposición lo verifica.

Proposición 2.3.4. ([5], *Proposition 3.6*) *Sea P un M-ideal propio.*

1. *Si P es un M-ideal máximo, entonces P es un M-ideal primo.*

2. *Si P es un M-ideal primitivo, entonces P es un M-ideal primo.*

Capítulo 3

Módulos multiplicación

En 1974, F. Mehdi introduce el concepto de módulo multiplicación sobre cualquier anillo conmutativo [26]. Esta noción es una generalización de los ideales multiplicación[1]. Más tarde, en [4], A. Barnard obtiene resultados significativos que dieron pauta a posteriores trabajos. Por ejemplo, [4], [15], [16], [36], [37], [38]. A principios del siglo XXI, A. Tuganbaev estudia a los módulos multiplicación sobre anillos más generales (no necesariamente conmutativos): anillos invariantes derechos (todo ideal derecho es bilateral) con multiplicación conmutativa de ideales (Ver [42] y [43]).

En esta sección presentamos algunos resultados de módulos multiplicación sobre anillos conmutativos; y algunos, sobre anillos más generales (no necesariamente conmutativos).

Usaremos el producto de módulos definido por Bican et al en [6] y mostraremos que si M es un R-módulo multiplicación, entonces este producto de módulos es conmutativo y asociativo (Ver [10]).

Si R es un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación, entonces mostraremos que el producto definido por Beachy en [5] y el producto que se define en esta sección coinciden en la retícula de los submódulos de M. Más aún, demostraremos que el resultado en ([5], Proposition 5.5) también es válido para: módulos casi-proyectivos y módulos multiplicación sobre cualquier anillo conmutativo.

Finalmente, estudiaremos a todo módulo multiplicación (distinto de cero) sobre dos clases especiales de anillos (no necesariamente conmutativos): 1) anillos invariantes izquierdos con multiplicación conmutativa de ideales; 2) anillos locales uniseriales.

[1] Dado un anillo conmutativo R e I ideal de R. Decimos que I es un ideal multiplicación si para todo ideal B de R con $B \subseteq I$, existe un ideal C de R tal que $B = IC$.

A continuación, presentamos la definición de módulo multiplicación tal y como F. Medhi los introdujó en 1974. Consideremos R un anillo conmutativo. Decimos que $M \in R$-Mod es un módulo multiplicación si dado cualquier submódulo N de M, existe un ideal I de R tal que $N = IM$. A pesar de que el concepto de módulo multiplicación fue dado sobre cualquier anillo conmutativo, en la actualidad existen algunos trabajos de módulos multiplicación sobre anillos no necesariamente conmutativos, por ejemplo, están los trabajos de P. Smith [39] y Askar Tuganbaev [42] y [43].

Muchos de los resultados conocidos sobre módulos multiplicación sobre anillos conmutativos fueron extendidos a los módulos sobre anillos no necesariamente conmutativos (anillos invariantes derechos[2] con multiplicación conmutativa de ideales) por A. Tuganbaev en [42].

En virtud de lo anterior, tiene sentido referirnos a los módulos multiplicación sobre cualquier anillo R dado.

Definición 3.0.1. *Dado cualquier anillo R. Un R-módulo M es un módulo multiplicación si y sólo si cualquier submódulo N de M es de la forma $N = IM$ para algún ideal I de R.*

En este trabajo estamos interesados en estudiar a los módulos multiplicación sobre cualquier anillo conmutativo; sobre cualquier anillo invariante izquierdo[3] con multiplicación conmutativa de ideales o sobre anillos locales uniseriales[4].

Dados cualesquiera X y Y subconjuntos de un módulo M sobre un anillo R, el conjunto $\{r \in R \mid rX \subseteq Y\} \subseteq R$ se denota por $(Y :_R X)$. Si Y es un submódulo de M y X es cualquier subconjunto de M, entonces es claro que el conjunto $(Y :_R X)$ es un ideal izquierdo de R. Finalmente, si X y Y son dos submódulos de M, entonces $(Y :_R X)$ resulta un ideal bilateral de R.

Proposición 3.0.2. ([43], Note 1.3) *Sea R un anillo. Un R módulo M es multiplicación si y sólo si para $N \leq M$ es tal que $N = (N :_R M)M$.*

Proposición 3.0.3. ([15], Proposition 1.1) *Sea R un anillo conmutativo. Un R-módulo M es un módulo multiplicación si y sólo si para cada $m \in M$, existe un ideal I de R tal que $Rm = IM$.*

Ejemplo 3.0.4.

1. *Todo módulo simple es módulo multiplicación.*

---

[2] Decimos que un anillo$R$ es invariante derecho si todo ideal derecho es izquierdo

[3] Decimos que un anillo R es invariante izquierdo si todo ideal izquierdo es bilateral.

[4] Decimos que un anillo R es local uniserial si es un anillo artiniano uniserial de ideales principales, donde uniserial significa que la retícula de ideales del anillo R es una cadena.

2. *Si R es un anillo conmutativo, entonces ${}_RR$ es un módulo multiplicación* ([42], Lemma 2.1).

3. *Sea $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}_{p^n}$, para algún primo p y alguna $n \geq 2$. Es claro que M es un $\mathbb{Z}$-módulo multiplicación. Observe que $\Lambda(M)$ es una cadena finita:*

$$0 \leq p^{n-1}\mathbb{Z}_{p^n} \leq \cdots \leq p\mathbb{Z}_{p^n} \leq \mathbb{Z}_{p^n}.$$

4. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo finitamente generado, entonces M es módulo multiplicación si y sólo si M es casi-proyectivo, dúo*[5] *y coatómico*[6] ([3], Lemma 2.9).

Recuerde que un R-módulo M se llama dúo si cada uno de sus submódulos es un submódulo totalmente invariante.

Proposición 3.0.5. ([43], Note 1.5(1)) *Todo R módulo multiplicación es módulo dúo.*

Observación 3.0.6. *Sea M un R-módulo multiplicación. Entonces para todo $N \in \Lambda(M)$, existe $\alpha^R_{(N:_RM)} \in R$-trad tal que $N = \alpha^R_{(N:_RM)}(M)$. En tal caso, todo submódulo de M es un M-ideal.*

La siguiente definición está dada por Bican et al [6]:

Definición 3.0.7. *Sean R un anillo, $M \in R\text{-}Mod$, $K \leq M$ y $L \in R\text{-}Mod$. Se define el producto*

$$K_M L = \sum \{f(K) | f \in Hom(M, L)\}.$$

Sabemos que si N es un submódulo de M, existe un submódulo $\overline{N} \subset M$ tal que $\overline{N}$ es el menor submódulo totalmente invariante de M que contiene a N. De hecho, $\overline{N} = \sum \{f(K) | f \in End_R(M)\}$. Por tanto $\overline{N} = N_M M$. En efecto, considerando la identidad $id_M : M \to M$. Entonces

$$N = id_M(N) \subseteq \sum \{f(N) | f \in End(M)\} = N_M M = \overline{N}.$$

Para cualquier $f \in End(M)$, $f(N) \subseteq \sum \{f(N) | f \in End(M)\} = \overline{N}$. Sea $g \in End(M)$. Considere $gf : M \to M$. Entonces $gf \in End(M)$, y por tanto $gf(N) \subseteq \sum \{f(K) | f \in End(M)\}$ para toda $g \in End(M)$. Se sigue

$$g(\overline{N}) = \sum_{f \in End(M)} g(f(N)) = \sum_{f \in End(M)} gf(N) \subseteq \sum_{f \in End(M)} f(N).$$

[5]Decimos que un módulo es dúo si todos sus submódulos son totalmente invariantes

[6]Decimos que un módulo M es coatómico si todo submódulo propio está contenido en un submódulo máximo de M.

Por consiguiente, $g(\overline{N}) \subseteq \overline{N}$. Supongamos que existe L un submódulo totalmente invariante de M tal que $N \leq L$. Sea $g : M \to M$ cualquiera. Entonces $g(L) \leq L$ con $N \leq L$. Entonces $g(N) \leq g(L) \leq L$ para cualquier $g : M \to M$. Entonces $\sum g(N) \leq L$. Por tanto, $\overline{N} \leq L$. Por consiguiente, se tiene que $\overline{N}$ es el menor submódulo totalmente invariante de M que contiene a N. También es claro que si $K, L \leq M$, entonces $\sum\{f(\overline{K})|f \in Hom(M, L)\} = \sum\{f(K)|f \in Hom(M, L)\}$. Por consiguiente, $\overline{K}_M L = K_M L$. Por lo anterior, si K es un submódulo de M, entonces supongamos, sin pérdida de generalidad, K es un submódulo totalmente invariante de M.

Observación 3.0.8. *Dado un R-módulo M. Entonces:*

1. *Si $K, L \leq M$, entonces $K_M L \subseteq \overline{K} \cap L$;*
2. *Si $K, L \leq M$ con $L \leq_{f.i} M$, entonces $K_M L \leq_{f.i} M$;*
3. *Si $M = R$, entonces $K_M L$ coincide con el producto usual de ideales izquierdos de R;*
4. *Si K es un submódulo totalmente invariante de M, entonces es claro que $K_M(\_) = \alpha_K^M$;*
5. *Si X es un R-módulo cualquiera, entonces de la Definición 3.0.7 se tiene la traza de X en M, $Tr_M(X)$, es decir, $Tr_M(X) = M_M X$.*

Dada la Definición 3.0.7, se sigue otra lista de propiedades:

Proposición 3.0.9. ([9], Proposition 1.3) *Sean $M \in R\text{-}Mod$ y K, L submódulos de M. Entonces:*

1. *Si $K \subseteq L$, entonces $K_M X \subseteq L_M X$ para cualquier $X \in R\text{-}Mod$;*
2. *Si $X \in R\text{-}Mod$ y $Y \subseteq X$, entonces $K_M Y \subseteq K_M X$;*
3. *$0_M X = 0$ para cualquier $X \in R\text{-}Mod$;*
4. *$K_M X = 0$ si y sólo si $f(K) = 0$, para cualquier $f \in Hom(M, X)$;*
5. *Si $X, Y \leq M \in R\text{-}Mod$, entonces $K_M X + K_M Y \subseteq K_M(X + Y)$;*
6. *Si $\{K_i\}_{i \in I} \subseteq M$, entonces $[\sum K_i]_M N = \sum K_{iM} N$;*
7. *Si $\{K_i\}_{i \in I}$ es una familia de R-módulos, entonces $K_M[\bigoplus X_i] = \bigoplus K_M X_i$.*

Observación 3.0.10. *Si $M \in R$-Mod, entonces para un submódulo totalmente invariante N de M, ocurre que $\alpha_N^M(K) = N_M K$ para toda $K \in R$-Mod.*

Proposición 3.0.11. ([9], Proposition 1.8) *Sean M un R-módulo casi-proyectivo y K un submódulo totalmente invariante. Entonces*

$$K_M(M/K) = 0.$$

La Proposición 3.0.11 también es cierta si M es un R-módulo multiplicación.

Proposición 3.0.12. *Sean M un módulo multiplicación y $N \leq M$. Entonces*

$$N_M(M/N) = 0.$$

Demostración. Sea $N \leq M$. Como M es módulo multiplicación, por la Observación 3.0.6 todo submódulo de M es M-ideal, entonces por el inciso 3 de la Proposición 2.1.4 tenemos que $g(N) = 0$ para toda $g \in Hom_R(M, M/N)$, y por tanto, por el inciso 4 de la Proposición 3.0.9, $N_M(M/N) = 0$. $\square$

Observación 3.0.13. *En general, lo anterior no siempre es cierto. Para ver esto, consideremos el $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ y $K = \mathbb{Z}_p$. Sabemos que K es un submódulo totalmente invariante y además, $M/K \cong M$. Así que $K_M(M/K) \cong K_M(M) = K \neq 0$.*

Recuerde que en la sección anterior se presentó otro producto de módulos dado por J. Beachy en ([5], *Definition 1.5*)*. El siguiente ejemplo muestra que en general ambos productos no coinciden.*

Ejemplo 3.0.14. *Consideremos el grupo abeliano $M = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ para algún p primo, $X = M$ y $N = \mathbb{Z}_p$ un submódulo propio de M. Recuerde que todos los submódulos de M son totalmente invariantes. En particular, N es un submódulo totalmente invariante de M. Entonces $N_M X = N_M M = \mathbb{Z}_p$. Por otro lado, tenemos el producto $N \cdot M = N \cdot X = \mathbb{Z}_p \cdot \mathbb{Z}_{p^\infty}$. Por el inciso 3 de la Proposición 2.1.16, tenemos que $N \cdot M$ es el menor M-ideal que contiene a N, pero sabemos que M no tiene M-ideales no triviales. Por tanto, $N \cdot X = N \cdot M = M$. En consecuencia, $N \cdot X$ contiene propiamente a $N_M X$.*

Recuerde que si $\sigma \in R$-pr, entonces $\overline{\sigma}$ denota el menor radical mayor o igual que σ. Usando este concepto, el producto de módulos definido en 3.0.7 y el producto de R-módulos definido por Beachy 2.1.7 se tiene el siguiente resultado:

Proposición 3.0.15. ([9], Proposition 1.6) *Sea $M \in R$-Mod y N un submódulo totalmente invariante de M. Entonces:*

1. *Los prerradicales α_N^M y $N \cdot (\_)$ tienen la misma clase pre-libre de torsión;*

2. $\overline{\alpha_N^M} = N \cdot (\_)$;

3. α_N^M *es un radical si y sólo si* $\alpha_N^M = N \cdot (\_)$.

Demostración.

1. $X \in \mathbb{F}_{\alpha_N^M(\_)}$ si y sólo si $\alpha_N^M(X) = 0$ si y sólo si $f(N) = 0 \; \forall f \in Hom_R(M, X)$ si y sólo si $N \cdot X = 0$ si y sólo si $X \in \mathbb{F}_{N \cdot (\_)}$.

2. Por el inciso 1, sabemos que $\mathbb{F}_{\alpha_N^M}(\_) = \mathbb{F}_{N\cdot(\_)}$. Por el inciso 3 de la Proposición 1.3.35 se tiene que $\overline{\alpha_N^M}(\_) = N \cdot (\_)$.

3. Si $\alpha_N^M(\_)$ es radical en R-Mod, entonces por el inciso 2 de la Proposición 1.4.15 se tiene que $\alpha_N^M(\_) = \bigwedge\{\omega_0^W \mid \alpha_N^M(W) = 0\}$. Sea $X \in R$-Mod. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\alpha_N^M(X) &= \bigcap\{\omega_0^W(X) \mid \alpha_N^M(W) = 0\}\\ &= \bigcap\{\omega_0^W(X) \mid f(N) = 0 \; \forall f \in Hom_R(M, W)\}\\ &= \bigcap\{Ker\ g \mid \textit{para algún } g \in Hom_R(X, W) \textit{ y } W \in \mathcal{C}\},\end{aligned}$$

   donde $\mathcal{C}$ es la clase de R-módulos W tales que $f(N) = 0$, para toda $f \in Hom_R(M, W)$, misma que aparece en la Definición 2.1.7. Por tanto, el prerradical $\alpha_N^M(\_)$ coincide con el prerradical $N \cdot (\_)$.

□

La Proposición 3.0.15 ilustra bajo qué condiciones ambos productos de R-módulos en cuestión coinciden, ya que el Ejemplo 3.0.14 muestra que no necesariamente son iguales.

En virtud de la Proposición 3.0.15 y de los resultados de Raggi et al, en donde se establecen condiciones (generales) sobre los anillos R, de tal forma que, todo prerradical sobre R-Mod sea un radical ([33], Theorem 4.18, Theorem 4.19)*; un t-radical* ([33], Theorem 4.20) *o un radical exacto izquierdo* ([35], Theorem 1)*, se obtiene que ambos productos de módulos de las definiciones 2.1.7 y 3.0.7 coinciden en la categoría de R-módulos.*

También notamos lo siguiente:

Proposición 3.0.16. *Si R es un anillo simple Artiniano y $N \leq M$ es un M-ideal, entonces*

$$N_M(\_) = N \cdot (\_).$$

Demostración. Se sigue de ([31], Theorem 9) y del Corolario 2.1.24. $\square$

Corolario 3.0.17. *Si R es un anillo simple Artiniano y M es un módulo multiplicación, entonces*

$$N_M(\_) = N \cdot (\_).$$

para todo $N \leq M$. $\square$

Uno de los resultados más importantes en este trabajo acerca de módulos multiplicación sobre anillos conmutativos que será de relevante importancia para posteriores resultados, es que todo módulo multiplicación sobre un anillo conmutativo genera a sus submódulos.

Lema 3.0.18. ([10], Lemma 1.3) *Sea R un anillo conmutativo y $M \in R\text{-}Mod$. Si M es un R-módulo multiplicación, entonces M genera a todos sus submódulos.*

Demostración. Sea N un submódulo de M. Como M es un R-módulo multiplicación, entonces existe un ideal I de R tal que $N = IM$. Sabemos que M genera a N si y solo si $Tr_M(N) = N$. Entonces $Tr_M(N) = \sum\{f(M) | f \in Hom(M, IM)\}$. Para cada $\alpha \in I$ podemos definir el siguiente R-homomorfismo:

$$f_\alpha : M \to IM \text{ definida como } f_\alpha(m) = \alpha m$$

Como R es un anillo conmutativo, cada f_α resulta ser un R-homomorfismo. Así que $\sum f_\alpha(M) = IM$. Pero $\sum f_\alpha(M) \subseteq Tr_M(N)$. Por consiguiente, $N = IM \subseteq Tr_M(N)$. Se sigue que $Tr_M(N) = N$. Concluimos que M genera a todos sus submódulos. $\square$

Notemos que es necesaria la conmutatividad del anillo en 3.0.18.

Por el Lema 3.0.18, se tiene que $M_M N = N$ para cualquier $N \leq M$.

Proposición 3.0.19. ([10], Proposition 1.4) *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Entonces para cada N, L submódulos de M se tiene $N_M L = L_M N$.*

Demostración. Como M es un R-módulo multiplicación, existen ideales I, J de R tales que $N = IM$ y $L = JM$. Entonces $N_M L = \sum\{f(IM) | f \in Hom(M, L)\} = I\sum\{f(M) | f \in Hom(M, L)\} = I\,Tr_M(L) = IL = I(JM) = (IJ)M$. Como R es conmutativo, entonces se tiene que $(IJ)M = (JI)M = L_M N$. Concluimos que $N_M L = L_M N$. $\square$

Corolario 3.0.20. ([10], Corollary 1.5) *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Si K, L, N son submódulos de M, entonces $K_M(L_M N) = (K_M L)_M N$.*

Demostración. Como M es un R módulo multiplicación, entonces existen ideales I, J y B de R tales que $N = IM, L = JM, K = BM$. De la demostración en la Proposición 3.0.19 se tiene $N_M L = (IJ)M, L_M K = (JB)M$. Así, $(N_M L)_M K = \sum_{f:M\to K} f(IJM) = IJ\sum_{f:M\to K} f(M) = IJ\,Tr_M(K) = IJK = (IJ)BM$.

Por otro lado, $N_M(L_M K) = \sum_{f:M\to L_M K} f(N) = \sum_{f:M\to L_M K} f(IM) = I\sum_{f:M\to L_M K} f(M) = I\,Tr_M(JBM) = I(JB)M$. Como $(IJ)BM = I(JB)M$, concluimos $(N_M L)_M K = N_M(L_M K)$. □

Observación 3.0.21. *Si R es un anillo conmutativo, M es un R-módulo multiplicación $N \leq M$ y $\{N_i\}_{i\in I} \in \Lambda(M)$, entonces por las proposiciones 3.0.9(6) y 3.0.19 se tiene*

$$N_M \sum_{i\in I} N_i = [\sum_{i\in I} N_i]_M N = \sum_{i\in I}(N_{i_M} N) = \sum_{i\in I}(N_M N_i).$$

Una consecuencia de la Observación 3.0.21 es la siguiente:

Proposición 3.0.22. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Si $\{N_i\}_{i\in I} \subseteq \Lambda(M)$, entonces*

$$\bigcap_{i\in I} Ann_M(N_i) = Ann_M(\sum_{i\in I} N_i).$$

Demostración. Sea $\{N_i\}_{i\in I} \subseteq \Lambda(M)$ y consideremos $N = \sum_{i\in I} N_i$. Como $N_i \leq N$ para toda $i \in I$, sucede que $Ann_M(N) \subseteq Ann_M(N_i)$ para toda $i \in I$. Por tanto, $Ann_M(N) \subseteq \bigcap_{i\in I} Ann_M(N)$. Falta ver que $\bigcap_{i\in I} Ann_M(N_i) \subseteq Ann_M(\sum_{i\in I} N_i)$. En efecto: $\bigcap_{i\in I} Ann_M(N_i) \subseteq Ann_M(\sum_{i\in I} N_i)$ si y sólo si $[\bigcap_{i\in I} Ann_M(N_i)]_M(\sum_{i\in I} N_i) = 0$ por el inciso 4 de la Proposición 3.0.9 si y sólo si $\sum_{i\in I}[(\cap_{i\in I} Ann_M N_i)_M N_i] = 0$ por la Observación 3.0.21. Pero notemos que $Ann_M(N_i)_M N_i = 0$ para toda $i \in I$. Por consiguiente, $[(\cap_{i\in I} Ann_M N_i)_M N_i] = 0$ para cada $i \in I$. Entonces se cumple que $\sum_{i\in I}[(\cap_{i\in I} Ann_M N_i)_M N_i] = 0$. Así que $\bigcap_{i\in I} Ann_M(N_i) \subseteq Ann_M(\sum_{i\in I} N_i)$. □

Los resultados en la Proposición 3.0.19 y en el Corolario 3.0.20 no son ciertos en general.

Ejemplo 3.0.23. *Consideremos el $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ para algún p primo, $X = M$ y $N = \mathbb{Z}_p$ un submódulo propio de M. Puesto que N es un submódulo totalmente invariante de M, entonces $N_M X = \mathbb{Z}_p$. Por otro lado, sabemos que no existen $\mathbb{Z}$-homomorfismos distintos de cero de M a cualquier submódulo propio K no trivial. En particular, tenemos que $Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}_{p^\infty}, \mathbb{Z}_p) = 0$. Entonces $X_M N = 0$. Concluimos que $N_M X \neq X_M N$.*

El ejemplo anterior muestra que no se debe omitir cualquiera de la hipótesis de la Proposición 3.0.19. En este caso, $M = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ no es un módulo multiplicación.

El siguiente ejemplo ha sido tomado de ([6], Lemma 2.1):

Ejemplo 3.0.24. *Si $\mathbb{Z}$ es el grupo aditivo de los enteros; y $\mathbb{Q}$, el de los racionales, entonces* $0 = (\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Z})_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q} \neq \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Notemos que la Proposición 3.0.19 y el Corolario 3.0.20 siguen siendo ciertos para algunos módulos multiplicación sobre anillos con multiplicación conmutativa de ideales (anillos no necesariamente conmutativos) como veremos en seguida.

Proposición 3.0.25. *Sean R un anillo con multiplicación conmutativa de ideales y M un R-módulo multiplicación tal que genera a todos sus submódulos. Entonces para cada N, L submódulos de M se tiene $N_M L = L_M N$.*

Demostración. Basta ver lo siguiente: sean $N, L \leq M$. Como M es un módulo multiplicación y genera a sus submódulos, entonces $N = IM$ y $L = JM$ para algunos $I, J \leq R$ y sucede que $N_M L = (IJ)M$. El resto de la demostración es similar a la demostración en 3.0.19. □

Corolario 3.0.26. *Sean R un anillo con multiplicación conmutativa de ideales y M un R-módulo multiplicación tal que genera a todos sus submódulos. Si K, L, N son submódulos de M, entonces $K_M(L_M N) = (K_M L)_M N$.* □

Observación 3.0.27. *Si R un anillo con multiplicación conmutativa de ideales y M un R-módulo multiplicación tal que genera a todos sus submódulos, entonces por las proposiciones 3.0.9(6) y 3.0.25 se tiene*

$$N_M \sum_{i \in I} N_i = [\sum_{i \in I} N_i]_M N = \sum_{i \in I}(N_{i_M} N) = \sum_{i \in I}(N_M N_i).$$

En ([5], Proposition 5.5(a)), Beachy demuestra que el producto de R-módulos definido en 2.1.7 coincide con el producto definido en 3.0.7 si M es proyectivo en $\sigma[M]$. Este resultado sigue siendo válido si cambiamos la hipótesis por M casi-proyectivo. Para mostrar esto, necesitamos el siguiente lema:

Lema 3.0.28. *Sea $M \in R$-Mod casi-proyectivo. Si $N, L \leq M$, entonces*

$$N_M(L/N_M L) = 0.$$

Demostración. Sea $y \in N_M(L/N_M(L))$. Entonces $y = \sum_{i=1}^{k} f_i(n_i)$, donde $f_i \in Hom_R(M, L/N_M(L))$, $n_i \in N$ para $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$ con $k \in \mathbb{N}$. Primero, observemos que para $L, N \leq M$ obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & N_M L \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "id"] & L \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "j"] & L/N_M L \arrow[r] \arrow[d, "p_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_M L \arrow[r, "i_2"] & M \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "p"] & M/N_M L \arrow[r] \arrow[d, "p_2"] & 0 \\
 & & M/L \arrow[r, "id"] \arrow[d] & M/L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Además, el siguiente diagrama conmutativo es un pullback:

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "j"] & L/N_M L \arrow[r] \arrow[d, "p_1"] & 0 \\
M \arrow[r, "\pi_2"] & M/N_M L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Continuando con la demostración del lema, como $f_i \in Hom_R(M, L/N_M L)$, consideramos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[d, "f_i"] \arrow[ddl, bend right=60, "g_i"'] \arrow[dd, bend left=60, "p_1 f_i"] \\
L \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "j"] & L/N_M L \arrow[d, "p_1"] \\
M \arrow[r, "\pi_2"] & M/N_M L
\end{tikzcd}$$

Como M es casi-proyectivo y π_2 es un epimorfismo, entonces existe $g_i : M \to M$ tal que $p_1 f_1 = \pi_2 g_i$ para cada $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$.

Dado que el segundo diagrama es un pullback y $\pi_2 g_i = p_1 f_i$, entonces por la propiedad universal del pullback, existe un único morfismo $\varphi_i : M \to L$ tal que $\pi_1 \varphi_i = f_i$ para cada $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "\varphi_i"] \arrow[drr, bend left, "f_i"] \arrow[ddr, bend right, "g_i"'] & & \\
& L \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "j"] & L/N_M L \arrow[d, "p_1"] \\
& M \arrow[r, "\pi_2"] & M/N_M L
\end{tikzcd}$$

Por tanto, tenemos que $\varphi_i \in Hom_R(M, L)$ para cada i y como $n_i \in N$, entonces $\varphi_i(n_i) \in N_M L$ para cada i. De donde, $f_i(n_i) = \pi_1\varphi_i(n_i) = \pi_1(\varphi_i(n_i)) = 0$ en $L/N_M L$. En consecuencia, $y = \sum_{i=1}^{k} f_i(n_i) = 0$ en $L/N_M L$. Concluimos que

$$N_M(L/N_M L) = 0.$$

□

Observación 3.0.29. *Lo anterior nos hace notar que si $N \in \Lambda(M)$, entonces la restricción de $N_M(\_)$ a la retícula $\Lambda(M)$ se comporta como un radical cuando tomamos M casi-proyectivo.*

El resultado en ([5], Proposition 5.5) sigue siendo válido para un R-módulo M casi-proyectivo.

Proposición 3.0.30. *Sea M es casi-proyectivo. Si $N, X \leq M$, entonces*

1. $N \cdot X = N_M X$;
2. $N \cdot (X/Y) = 0$ *si y sólo si* $N \cdot X \subseteq Y$ *para cualquier* $Y \subseteq X$;
3. *Si* $N = Ann_M(X/Y)$, *entonces* $Ann_M(X/(N \cdot X)) = N$ *para cualquier* $Y \subseteq X$.

Demostración.

1. Siempre ocurre que $N_M X = \sum\{f(N) \mid f \in Hom_R(M, X)\} \subseteq N \cdot X$. Para la otra contención, por el Lema 3.0.28, se tiene que $N_M(X/N_M X) = 0$ para cualesquiera submódulos N, X de M. Por el inciso 4 de la Proposición 3.0.9 se tiene que $f(N) = 0$ para cada $f \in Hom_R(M, X/N_M X)$ si y sólo si $N \cdot (X/N_M X) = 0$, por el Lema 2.1.8. Pero por la Proposición 2.1.10 se sigue que $N \cdot X \subseteq N_M X$. Concluimos que $N \cdot X = N_M X$ para cualesquiera $N, X \leq M$.

2. Si $N \cdot (X/Y) = 0$, por la Proposición 2.1.10 se tiene que $N \cdot X \subseteq Y$. Por otro lado, si $N \cdot X \subseteq Y$, entonces $\sum\{f(N) \mid f \in Hom_R(M, X)\} \subseteq Y$. Por tanto, $f(N) \subseteq Y$ para cada $f \in Hom_R(M, X)$. Sea $g \in Hom_R(M, X/Y)$ y usando un argumento similar de la demostración del Lema 3.0.28, se tiene el siguiente pulback:

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[d, "g"] \arrow[ddl, bend right, "h"'] \arrow[dd, bend left=60, "p_1 g"] \\
X \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "j"] & X/Y \arrow[d, "p_1"] \\
M \arrow[r, "\pi_2"] & M/Y
\end{tikzcd}$$

Como M es casi-proyectivo y π_2 es un epimorfismo, entonces existe $h : M \to M$ tal que $p_1 g = \pi_2 h$.

Por la Propiedad universal del pullback, existe un único R-homomorfismo $\varphi : M \to X$ tal que $\pi_1 \varphi = g$.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, "\varphi"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& X \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "j"] & X/Y \arrow[d, "p_1"] \\
& M \arrow[r, "\pi_2"] & M/Y
\end{tikzcd}$$

Entonces $g(N) = \pi_1\varphi(N) = \pi_1(\varphi(N))$ y como $f(N) \subseteq Y$ para toda $f \in Hom_R(M, X)$, entonces $\pi_1\varphi(N) = \pi_1(\varphi(N)) = 0$ en X/Y. Se sigue que $g(N) = 0$. Como $g \in Hom_R(M, X/Y)$ es arbitraria, concluimos que $N \cdot (X/Y) = 0$.

3. Supongamos que $N = Ann_M(X/Y)$ y sea $Ann_M(X/(N \cdot X)) = A$. Por el inciso 2 se tiene que $N \cdot (X/(N \cdot X)) = 0$ y así, $N \subseteq A$. Por otro lado, como $A \cdot (X/(N \cdot X)) = 0$, por el inciso 2, $A \cdot X \subseteq N \cdot X \subseteq Y$. Nuevamente, por inciso 2 se sigue que $A \cdot (X/Y) = 0$. Por tanto, $A \subseteq Ann_M(X/Y) = N$. Concluimos que $Ann_M(X/(N \cdot X)) = N$.

$\square$

En ([1], pág 186) y [41] se mencionan las clases de proyectividad e inyectividad, así como los dominios de proyectividad e inyectividad. En ([1], pág 186) denota a estas clases como sigue:

1. $\mathscr{P}(M)$ es la clase de todos los módulos M-proyectivos.
2. $\mathscr{I}(M)$ es la clase de todos los módulos M-inyectivos.
3. Para cualquier $A \in R$-Mod, el *dominio de proyectividad de* A se define como $\mathscr{P}^{-1}(A) = \{M \in R\text{-Mod} \mid \text{A es M-proyectivo}\}$.
4. Para cualquier $A \in R$-Mod, el *dominio de inyectividad de* A se define como $\mathscr{I}^{-1}(A) = \{M \in R\text{-Mod} \mid \text{A es M-inyectivo}\}$.

Proposición 3.0.31. ([1], Proposition 16.7) *Sean $M, U \in R$-Mod. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *U es M-proyectivo;*
2. *Para cualquier sucesión exacta corta (con M en medio)*

$$0 \to K \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0,$$

entonces la sucesión

$$0 \to Hom_R(U, K) \xrightarrow{f_*} Hom_R(U, M) \xrightarrow{g_*} Hom_R(U, N) \to 0$$

es exacta;

3. *Para cualquier $K \leq M$, todo morfismo $h : U \to M/K$, se factoriza através del epimorfismo canónico $\pi_K : M \to M/K$.*

Definición 3.0.32. *Sea $M \in R$-Mod. Un par (P, π) es una cubierta proyectiva de M si $P \in R$-Mod es proyectivo y el morfismo $\pi : P \to M$ es un epimorfismo superfluo (es decir, $Ker\pi$ es superfluo en P). Una cubierta $\pi : P \to M$ se dice que es única salvo isomorfismo si cuando $\pi' : P' \to M$ es otra cubierta proyectiva de M, entonces existe un isomorfismo $\varphi : P' \to P$ tal que $\pi\varphi = \pi'$.*

Ejemplo 3.0.33.

1. *Es claro que todo módulo proyectivo tiene cubierta proyectiva, digamos, él mismo.*

2. *Si* (R, m) *es un anillo local, entonces* R *junto con el epimorfismo canónico* $R \to R/m$ *es una cubierta proyectiva para el módulo* R/m.

3. *No todo* R*-módulo tiene cubierta proyectiva* ([1], Example 17.16 (2)).

Observación 3.0.34. *Recuerde que si* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *y* $\{N_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *son familias en* R*-Mod, ambas, indicadas por un mismo conjunto* A *y sea* $\{f_\alpha : M_\alpha \to N_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *una familia de* R*-homomorfismos, entonces es posible definir de manera natural un morfismo* $\prod_\alpha M_\alpha \to \prod_\alpha N_\alpha$*, denotado por* $\prod f_\alpha$ *como sigue:* $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \mapsto (f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha\in A}$*, el cual, hace conmutar el siguiente diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} \prod_\alpha M_\alpha & \xrightarrow{\prod f_\alpha} & \prod_\alpha N_\alpha \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'_\alpha} \\ M_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & N_\alpha \end{array}$$

donde $\{\prod_\alpha M_\alpha, \pi_\alpha\}$ *y* $\{\prod_\alpha N_\alpha, \pi'_\alpha\}$*, con* π_α *y* π'_α *proyecciones naturales, son los respectivos productos directos de las familias* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *y* $\{N_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Similarmente, se define de manera natural un R*-homomorfismo* $\oplus_\alpha M_\alpha \to \oplus_\alpha N_\alpha$ *como:* $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \mapsto (f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha\in A}$ *(donde* $x_\alpha \in M_\alpha$ *y para casi toda* $\alpha \in A$ $x_\alpha = 0$*. También,* $f_\alpha(x_\alpha) \in N_\alpha$ *y para casi toda* $\alpha \in A$, $f_\alpha(x_\alpha) = 0$*) que hace conmutar el diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_\alpha M_\alpha & \xrightarrow{\oplus f_\alpha} & \bigoplus_\alpha N_\alpha \\ {\scriptstyle i_\alpha}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle i'_\alpha} \\ M_\alpha & \xrightarrow{f_\alpha} & N_\alpha \end{array}$$

donde $\{\bigoplus_\alpha M_\alpha, i_\alpha\}$ *y* $\{\bigoplus_\alpha N_\alpha, i'_\alpha\}$*, con* i_α *y* i'_α *inclusiones naturales, son las respectivas sumas directas de las familias* $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *y* $\{N_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Proposición 3.0.35. *Sean* $\{M_\alpha\}$, $\{N_\alpha\}$, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$, $\prod f_\alpha$ *y* $\oplus f_\alpha$ *como en el párrafo anterior. Entonces:*

1. $Ker\ (\prod_\alpha f_\alpha) = \prod_\alpha Ker\ f_\alpha$*. Mas, aún,* f_α *es monomorfismo para cada* $\alpha \in A$ *si y sólo si* $\prod_\alpha f_\alpha$ *es monomorfismo;*

2. $Im\ (\prod_\alpha f_\alpha) = \prod_\alpha Im\ f_\alpha$*. Mas, aún,* f_α *es epimorfismo para cada* $\alpha \in A$ *si y sólo si* $\prod_\alpha f_\alpha$ *es epimorfismo;*

3. $Ker\ (\oplus_\alpha f_\alpha) = \bigoplus_\alpha Ker\ f_\alpha$*; En consecuencia,* f_α *es monomorfismo para cada* $\alpha \in A$ *si y sólo si* $\oplus_\alpha f_\alpha$ *es monomorfismo;*

4. $Im\ (\oplus_\alpha f_\alpha) = \bigoplus_\alpha Im\ f_\alpha$. *Consecuentemente,* f_α *es epimorfismo para cada* $\alpha \in A$ *si y sólo si* $\oplus_\alpha f_\alpha$ *es epimorfismo.*

Demostración. Sólo se demostrará 1 y 2: 1: $(x_\alpha)_{\alpha\in A} \in Ker\ (\prod_\alpha f_\alpha)$ si y sólo si $\prod_\alpha f_\alpha(x_\alpha) = 0$ si y sólo si $(f_\alpha(x_\alpha))_{\alpha\in A} = 0$ si y sólo si $f_\alpha(x_\alpha) = 0$ para toda $\alpha \in A$ si y sólo si $x_\alpha \in Ker\ f_\alpha$ para cada $\alpha \in A$ si y sólo si $(x_\alpha) \in \prod_\alpha Ker\ f_\alpha$.

2: $(y_\alpha) \in Im\ (\prod_\alpha f_\alpha)$ si y sólo si existe $(x_\alpha) \in \prod_\alpha f_\alpha$ tal que $(f_\alpha(x_\alpha)) = \prod_\alpha f_\alpha(x_\alpha) = (y_\alpha)$ si y sólo si $f_\alpha(x_\alpha) = y_\alpha$ para cada $\alpha \in A$ si y sólo si $y_\alpha \in Im\ f_\alpha$ para cada $\alpha \in A$ si y sólo si $(y_\alpha) \in \prod_\alpha Im\ f_\alpha$.

La demostración de 3 y 4 es similar. □

Corolario 3.0.36. ([1], Corollary 16.5) *Sea* $(U_\alpha)_{\alpha\in A}$ *una familia de* R*-módulos indicada por un conjunto* A. *Si* M, N R*-módulos izquierdos, entonces existen* $\mathbb{Z}$*-isomorfismos* η_M, η_N, ν_M *y* ν_N *tales que para cualquier* R*-homomorfismo* $f : M \to N$, *los siguientes diagramas conmutan en* $\mathbb{Z}$*-Mod:*

$$\begin{tikzcd} Hom_R(\oplus_\alpha U_\alpha, M) \arrow[r, "Hom_R(\oplus U_\alpha, f)"] \arrow[d, "\eta_M"'] & Hom_R(\oplus_\alpha U_\alpha, N) \arrow[d, "\eta_N"] \\ \prod_\alpha Hom_R(U_\alpha, M) \arrow[r, "\prod_\alpha Hom_R(U_\alpha, f)"] & \prod_\alpha Hom_R(U_\alpha, N) \end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd} Hom_R(N, \prod_\alpha U_\alpha,) \arrow[r, "Hom_R(f, \prod U_\alpha)"] \arrow[d, "\nu_N"'] & Hom_R(M, \prod_\alpha U_\alpha) \arrow[d, "\nu_M"] \\ \prod_\alpha Hom_R(N, U_\alpha) \arrow[r, "\prod_\alpha Hom_R(f, U_\alpha)"] & \prod_\alpha Hom_R(M, U_\alpha) \end{tikzcd}$$

Proposición 3.0.37. *Si* $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ *es una familia de* R*-módulos tales que el* R*-módulo* $\bigoplus_\alpha U_\alpha$ *es* M*-proyectivo, entonces* U_α *es* M*-proyectivo para cada* $\alpha \in A$.

Demostración. Sea $g : M \to N \to 0$ un epimorfismo.

Para cada $\alpha \in A$, aplicamos el funtor $Hom_R(U_\alpha, \_)$ al morfismo g y obtenemos

$$g_{*\alpha} : Hom_R(U_\alpha, M) \to Hom_R(U_\alpha, N).$$

Como $\bigoplus_\alpha U_\alpha$ es M-proyectivo, entonces

$$g_* : Hom_R(\bigoplus_\alpha U_\alpha, M) \to Hom_R(\bigoplus_\alpha U_\alpha, N) \to 0$$

es un epimorfismo.

Por la Observación 3.0.35 y el Corolario 3.0.36, tenemos el siguiente diagrma conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_R(\oplus_\alpha U_\alpha, M) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\eta_M"'] & Hom_R(\oplus_\alpha U_\alpha, N) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_N"] & 0 \\
\prod_\alpha Hom_R(U_\alpha, M) \arrow[r, "\prod_\alpha g_{*\alpha}"] \arrow[d, "\pi_\alpha"'] & \prod_\alpha Hom_R(U_\alpha, N) \arrow[r] \arrow[d, "\pi'_\alpha"] & 0 \\
Hom_R(U_\alpha, M) \arrow[r, "g_{*\alpha}"] & Hom_R(U_\alpha, N) &
\end{tikzcd}$$

donde π_α, π'_α son proyecciones canónicas, η_M, η_N son tales que hacen conmutar el cuadrado superior anterior y $\prod_\alpha g_{*\alpha}$ es inducido por las dos familias de $\mathbb{Z}$-módulos $\{Hom_R(U_\alpha, M)\}_{\alpha\in A}$ y $\{Hom_R(U_\alpha, N)\}_{\alpha\in A}$ y son tales que hacen conmutar el diagrama inferior anterior. Por cacería de diagramas, se cumple que $g_{*\alpha}$ es un epimorfismo para cada $\alpha \in A$. Concluimos que U_α es M-proyectivo para cada $\alpha \in A$.

$\square$

El recíproco de la Proposición 3.0.37 también es cierta y se verá más adelante.

El siguiente resultado caracteriza a todos los R-módulos de proyectividad relativa con cubierta proyectiva.

Lema 3.0.38. *Sean $A, N \in R$-módulos y supongamos que A tiene cubierta proyectiva (P, π), donde $\pi : P \to A$ es un epimorfismo superfluo. Entonces A es N-proyectivo si y sólo si para todo homomorfismo $\varphi : P \to N$, existe un homomorfismo $\overline{\varphi} : A \to N$ tal que $\overline{\varphi}\pi = \varphi$. Equivalentemente, $\varphi(Ker\ \pi) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $\pi : P \to A$ es un epimorfismo superfluo. Sea $\varphi : P \to N$ un homomorfismo. Sea $K = Ker\ \pi$. Vamos a demostrar que $\varphi(K) = 0$. Consideremos la proyección natural $\pi_{\varphi(K)} : N \to N/\varphi(K)$.

Como $\pi_{\varphi(K)}\varphi(Ker\ \pi) = \pi_{\varphi(K)}\varphi(K) = 0$, es decir, $Ker\ \pi \subseteq Ker\ (\pi_{\varphi(K)}\varphi)$. Por el teorema del factor existe un único homomorfismo $\overline{\varphi} : A \to N/\varphi(K)$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"] & N \arrow[d, "\pi_{\varphi(K)}"] & \\ A \arrow[r, "\overline{\varphi}"] & N/\varphi(K) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como $\pi_{\varphi(K)}$ es un epimorfismo y por hipótesis, A es N-proyectivo, entonces existe un homomorfismo $\beta : A \to N$ tal que $\overline{\varphi} = \pi_{\varphi(K)}\beta$. Sea $\gamma := \varphi - \beta\pi : P \to N$. Entonces $\pi_{\varphi(K)}\gamma = \pi_{\varphi(K)}(\varphi - \beta\pi) = \pi_{\varphi(K)}\varphi - \pi_{\varphi(K)}\beta\pi = \pi_{\varphi(K)}\varphi - \overline{\varphi}\pi = \overline{\varphi}\pi - \overline{\varphi}\pi = 0$. Se sigue que $\gamma(P) \subseteq Ker\pi_{\varphi(K)} = \varphi(K)$. Ahora, afirmamos que $\beta\pi = \varphi$. Sea $X = \{p \in P \mid \beta\pi(p) = \varphi(p)\}$. Dado $p \in P$. Como $(\varphi - \beta\pi)(P) = \gamma(P) \subseteq \varphi(K)$, entonces existe $k \in K$ tal que $\varphi(p-k) - \beta\pi(p-k) = 0$, pues $\beta\pi(k) = 0$. Entonces $p - k \in X$. En consecuencia, $P = Ker\pi + X$. Como $Ker\pi \ll P$, entonces $P = X$ y por tanto, $(\varphi - \beta\pi)(P) = 0$. En particular, $(\varphi - \beta\pi)(Ker\pi) = 0$, es decir, $\varphi(Ker\pi) = 0$. Por el teorema del factor, existe un homomorfismo $\varphi' : A \to N$ tal que $\varphi'\pi = \varphi$.

Recíprocamente, sea $\varphi : A \to K$ un homomorfismo y $g : N \to K$ un epimorfismo. Por la proyectividad de P, existe un homomorfismo $\varphi' : P \to N$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi'"] & A \arrow[d, "\varphi"] & \\ N \arrow[r, "g"] & K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es decir, $\varphi\pi = g\varphi'$. Aplicando la hipótesis, existe $\hat{\varphi} : A \to N$ tal que $\hat{\varphi}\pi = \varphi'$. En consecuencia, $\varphi\pi = g\varphi' = g\hat{\varphi}\pi$. Como π es un epimorfismo, entonces $\varphi = g\hat{\varphi}$. Concluimos que A es N-proyectivo.

$\square$

Proposición 3.0.39. ([41], [1], pág 186) *Sean $M, A \in R$-Mod. Entonces*

1. $\mathscr{P}(M)$ *es cerrada bajo formación de sumas directas y sumandos directos.*

2. $\mathscr{I}(M)$ *es cerrada bajo formación de productos directos y factores directos.*

3. $\mathscr{P}^{-1}(A)$ *es cerrada bajo submódulos, imágenes homomórficas y formación de sumas directas finitas. Si A tiene cubierta proyectiva, entonces $\mathscr{P}^{-1}(A)$ es cerrada bajo formación de productos directos arbitrarios (por consiguiente, sumas directas arbitrarias).*

4. $\mathscr{I}^{-1}(A)$ *es cerrada bajo submódulos, imágenes homomórficas y sumas directas arbitrarias.*

Demostración.

1. $\mathscr{P}(M)$ es cerrado bajo formación de sumas directas: Sea $\{U_\alpha\} \subseteq \mathscr{P}(M)$. Sea $g : M \to N \to 0$ un epimorfismo, por el inciso 3 de la Proposición 3.0.31, es suficiente demostrar que

   $g_* : Hom_R(\bigoplus_\alpha U_\alpha, M) \to Hom_R(\bigoplus_\alpha U_\alpha, N)$ es un epimorfismo. En efecto:

   Sea $g : M \to N \to 0$ epimorfismo. Por hipótesis, $g_{*\alpha} : Hom_R(U_\alpha, M) \to Hom_R(U_\alpha, N) \to 0$ es un $\mathbb{Z}$-epimorfismo para cada $\alpha \in A$. Por la Observación 3.0.34 y el Corolario 3.0.36 se tiene el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
Hom_R(\oplus_\alpha U_\alpha, M) \arrow[r, "g_*"] \arrow[d, "\eta_M"'] & Hom_R(\oplus_\alpha U_\alpha, N) \arrow[d, "\eta_N"] & \\
\prod_\alpha Hom_R(U_\alpha, M) \arrow[r, "\prod_\alpha g_{*\alpha}"] \arrow[d, "\pi_\alpha"'] & \prod_\alpha Hom_R(U_\alpha, N) \arrow[d, "\pi'_\alpha"] & \\
Hom_R(U_\alpha, M) \arrow[r, "g_{*\alpha}"] & Hom_R(U_\alpha, N) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

   Se sigue que

$$\prod_\alpha Hom_R(U_\alpha, g) = \prod_\alpha g_{*\alpha} : \prod_\alpha Hom_R(U_\alpha, M) \to \prod_\alpha Hom_R(U_\alpha, N)$$

   es un epimorfismo. Puesto que los morfismos η_M y η_N son isomorfismos, entonces se sigue que

$$Hom_R(\bigoplus_\alpha U_\alpha, M) \to Hom_R(\bigoplus_\alpha U_\alpha, N)$$

   es un epimorfismo. Concluimos que $\bigoplus_\alpha U_\alpha$ es un M-proyectivo.

   $\mathscr{P}(M)$ es cerrada bajo sumandos directos: Sea $P \cong K \oplus L$, donde P es M-proyectivo. Es fácil ver que si $P \cong P'$, entonces P es M-proyectivo si y sólo si P' es M-proyectivo. Así que, si P es M-proyectivo, entonces $K \oplus L$ es M-proyectivo y por la Proposición 3.0.37 se sigue que K y L son M-proyectivos.

2. Se demuestra de manera dual al inciso 1.

3. $\mathscr{P}^{-1}(A)$ es cerrado bajo submódulos e imágenes homomórficas: Sean $M \in \mathscr{P}^{-1}(A)$ y $N \leq M$. Consideremos la sucesión exacta corta:

$$0 \to N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M/N \to 0$$

Si $h : M/N \to N' \to 0$ es un epimorfismo y como A es M-proyectivo y hg un epimorfismo, entonces $h_* g_* = (hg)_*$ es epimorfismo. Entonces h_* es epimorfismo. Por el inciso 2 de la Proposición 3.0.31, se sigue que $M/N \in \mathscr{P}^{-1}(A)$.

Ahora, sea $K \leq N$. Entonces consideremos el siguiente diagrama conmutativo con renglones y última columna exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \longrightarrow & M/N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \pi_K \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & N/K & \longrightarrow & M/K & \longrightarrow & M/N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Aplicando el funtor $Hom_R(A, \_)$ al diagrama anterior, resulta:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Hom_R(A,N) & \longrightarrow & Hom_R(A,M) & \longrightarrow & Hom_R(A,M/N) & \to & 0 \\
 & & (\pi_K)_* \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Hom_R(A,N/K) & \to & Hom_R(A,M/K) & \to & Hom_R(A,M/N) & \to & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Como los funtores preservan isomorfismos, el tercer renglón es exacto y por hipótesis, A es M-proyectivo, entonces el renglón de en medio, es exacto. Nuevamente, por cacería de diagramas, $(\pi_K)_*$ es un epimorfismo. Por el inciso 3 de la Proposición 3.0.31 se sigue que $N \in \mathscr{P}^{-1}(A)$.

$\mathscr{P}^{-1}(A)$ es cerrado bajo sumas directas finitas: Basta demostrar que $\mathscr{P}^{-1}(A)$ es cerrado bajo sumas directas finitas con dos sumandos. En efecto: sean $N_1, N_2 \in \mathscr{P}^{-1}(A)$. Sea $K \leq N_1 \oplus N_2$. Entonces obtenemos el siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactas:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N_1 & \xrightarrow{\eta_1} & N_1 \oplus N_2 & \xrightarrow{\pi_2} & N_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \pi_K \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (N_1+K)/K & \to & (N_1 \oplus N_2)/K & \to & (N_1 \oplus N_2)/(N_1+K) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

donde η_1 es una inclusión natural y π_2 es una proyección natural, respectivamente.

Aplicando $Hom_R(A, \_)$ al diagrama anterior, se tiene

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Hom_R(A, N_1) & \longrightarrow & Hom_R(A, N_1 \oplus N_2) & \longrightarrow & Hom_R(A, N_2) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & (\pi_K)_* \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & Hom_R(A, \frac{N_1+K}{K}) & \longrightarrow & Hom_R(A, \frac{N_1 \oplus N_2}{K}) & \longrightarrow & Hom_R(A, \frac{N_1 \oplus N_2}{N_1+K}) & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & & & 0 & &
\end{array}$$

Notemos que la primera y tercera columna son exactas ya que $N_1, N_2 \in \mathscr{P}^{-1}(A)$. Por cacería de diagramas se sigue que $(\pi_K)_*$ es un epimorfismo. Por el inciso 3 de la Proposición 3.0.31 se sigue que $N_1 \oplus N_2 \in \mathscr{P}^{-1}(A)$. Concluimos que $\mathscr{P}^{-1}(A)$ es cerrada bajo sumas directas finitas.

$\mathscr{P}^{-1}(A)$ es cerrada bajo productos directos arbitrarios si A tiene cubierta proyectiva: Sea $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \mathscr{P}^{-1}(A)$. Supongamos que $P \to A$ es un epimorfismo esencial. Sean $\prod_{\alpha \in A} N_\alpha \to L \to 0$ un epimorfismo y $f : A \to L$ un homomorfismo. Como P es proyectivo, entonces P es $\prod_\alpha N_\alpha$-proyectivo, entonces existe un homomorfismo $h : P \to \prod_\alpha N_\alpha$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[d, "\pi"] \arrow[ddl, "h"'] & \\
 & A \arrow[d, "f"] & \\
\prod_\alpha N_\alpha \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Sean $\pi_\beta : \prod_\alpha N_\alpha \to \pi_\beta$ las proyecciones canónicas para cada $\beta \in A$. Como A es N_α-proyectivo para cada $\beta \in A$, por el Lema 3.0.38, se tiene que $\pi_\beta h(Ker\pi) = 0$, para cada $\beta \in A$. Así que $h(Ker\pi) = 0$ por el teorema del factor, existe un homomorfismo $\varphi : A \to \prod_\alpha N_\alpha$ tal que $\varphi\pi = h$. Por consiguiente, $f\pi = gh = g\varphi\pi$. Como π es un epimorfismo, entonces $f = g\varphi$, es decir, conmuta el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\varphi"'] \arrow[d, "f"] & \\ \prod_\alpha N_\alpha \arrow[r, "g"] & L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Concluimos que $\prod_\alpha N_\alpha \in \mathscr{P}^{-1}(A)$, es decir, $\mathscr{P}^{-1}(A)$ es cerrada bajo productos directos arbitrarios. Y por consiguiente, cerrada bajo sumas directas arbitrarias.

4. Se demuestra de manera dual al inciso 3.

$\square$

Si M es proyectivo en $\sigma[M]$, de([5], Proposition 5.6) se tiene que el producto de R-módulos definido en 2.1.7 es asociativo. En ([28], Remark 4.2 (2)), los autores demuestran que para un R-módulo M proyectivo en $\sigma[M]$, el producto en 2.1.7 cumple que $K_M(\sum_{i\in I} X_i) = \sum_{i\in I}(K_M X_i)$ para toda familia dirigida de submódulos $\{X_i \mid i \in I\}$ de M. En virtud del inciso 3 de la Proposición 3.0.39, si M es casi-proyectivo, y además, $\mathscr{P}^{-1}(M)$ es cerrada bajo formación de sumas directas arbitrarias, entonces se tiene lo siguiente:

Proposición 3.0.40. *Supongamos que M es casi-proyectivo y $\mathscr{P}^{-1}(M)$ es cerrado bajo formación de sumas directas arbitrarias. Entonces:*

1. $K \cdot (N \cdot X) = (K \cdot N) \cdot X$ *para cualesquiera* $K, N, X \leq M$;

2. $K_M(\sum_{i\in I} X_i) = \sum_{i\in I}(K_M X_i)$ *para cualquier familia dirigida* $\{X_i \mid i \in I\} \subseteq \Lambda(M)$.

Demostración.

1. Supongamos que M es casi-proyectivo y $\mathscr{P}^{-1}(M)$ es cerrado bajo formación de sumas directas arbitrarias. Por el inciso 1 de la Proposición 3.0.28 sabemos que el producto definido en 2.1.7 y el producto definido en 3.0.7 coinciden. Sea $x \in K\cdot(N\cdot X) \subseteq (K\cdot N)\cdot X$, por hipótesis, $x = \sum_{i=1}^n f_i m_i$ con $f_i \in Hom_R(M, N\cdot X)$ y $m_i \in K$. Basta ver el comportamiento sobre

unos de los $f_i \in Hom_R(M, N \cdot X)$ y $m_i \in K$ en cuestión, es decir, sea $f = f_i$ y $m = m_i$ para algún $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Sea $I = Hom_R(M, X)$. Por la propiedad universal de la suma directa, existe un R-homomorfismo de $h : M^{(I)} \to X$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} M^{(I)} \arrow[r, dashed, "h"] & X \\ & M \arrow[ul, "\lambda_j"] \arrow[u, "f \in I"'] \end{tikzcd}$$

Si g es la restricción de h a $N^{(I)}$, entonces en tal caso, $Im\ g = N \cdot X$. Como $M \in \mathscr{P}^{-1}(M)$ y $\mathscr{P}^{-1}(M)$ es cerrada bajo sumas directas arbitrarias, en particular, $M^{(I)} \in \mathscr{P}^{-1}(M)$. Como $N \leq M$ y $\mathscr{P}^{-1}(M)$ es cerrada bajo submódulos, se sigue que $N^{(I)} \in \mathscr{P}^{-1}(M)$, es decir, M es $N^{(I)}$-proyectivo. Así existe un morfismo $\overline{f} : M \to N^{(I)}$ tal que $g\overline{f} = f$. Entonces $\overline{f}(m) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \pi_j(\overline{f}(m))$, para algunas poyecciones e inclusiones naturales: $\pi_j : M^{(I)} \to M$ $\lambda_j : M \to M^{(I)}$. Observe que $\pi_j \overline{f}(m) : M \to M$, para cada j, con $\pi_j \overline{f}(M) \subseteq N$. Puesto que $m \in K$, entonces $\pi_j \overline{f}(m) \in K_M N = K \cdot N$. Entonces, $h\lambda_j : M \to X$, y por consiguiente, $h\lambda_j \pi_j \overline{f}(m) \in h\lambda_j(K \cdot N)$, lo cual implica que $h\lambda_j \pi_j \overline{f}(m) \in (K \cdot N) \cdot X$. En consecuencia, $f(m) = h\overline{f}(m) = \sum_{j=1}^{n} h\lambda_j \pi_j \overline{f}(m)$, es decir, $f(m) \in (K \cdot N) \cdot X$. Como $m \in K$ es algún m_i y $f \in Hom_R(M, N \cdot X)$, algún f_i para algún i. Por tanto, $x = \sum_{i=1}^{n} f_i m_i \in (K \cdot N) \cdot X$. Concluimos que $K \cdot (N \cdot X) \subseteq (K \cdot N) \cdot X$.

La contención $(K \cdot N) \cdot X \subseteq K \cdot (N \cdot X)$ es fácil de ver.

2. Es similar a la demostración en ([28], Remark 4.2 (2)).

□

Una consecuencia de la Proposición 3.0.30 que notamos cuando M es un módulo casi-proyectivo es lo siguiente:

Corolario 3.0.41. *Sea M es un R-módulo casi-proyectivo. Si $N \cdot X = 0$, entonces $N \cdot f(X) = 0$ para cualquier imagen homomórfica $f(X)$ de X y cualesquiera $N, X \leq M$.*

Demostración. Sean $N, X \leq M$, $f : X \to L$. Supongamos $N \cdot X = 0$. Sea $h : M \to f(X)$. Como M es casi-proyectivo y su dominio de proyectividad es cerrado bajo submódulos, entonces X es M-proyectivo y por tanto, existe un morfismo $g : M \to X$ tal que hace conmutan el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "h"] & \\ X \arrow[r, "f"] & f(X) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

es decir, existe un morfismo $g : M \to X$ tal $fg = h$. Por tanto, $0 = fg(N) = h(N)$. Se sigue que $h(N) = 0$ para toda $h \in Hom_R(M, f(X))$. Concluimos que $N \cdot f(X) = 0$.

$\square$

Por otro lado, vamos a demostrar que para módulos multiplicación sobre anillos conmutativos, el resultado en ([5], Proposition 5.5) sigue siendo válido.

El siguiente resultado será vital para demostrar que si M un R-módulo multiplicación, entonces los productos $(\_)_M(\_)$ y $(\_) \cdot (\_)$ coinciden cuando nos restringimos a la retícula $\Lambda(M)$.

Lema 3.0.42. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Si $N, L \leq M$, entonces $N_M(L/N_M L) = 0$.*

Demostración. Sean $N, L \leq M$. Como M es un módulo multiplicación, entonces $N = IM$ y $L = JM$ para algunos ideales I, J de R. Ahora,

$$\begin{aligned} N_M(L/N_M L) &= \sum\{f(N) \mid f \in Hom_R(M, L/N_M L)\} \\ &= \sum\{f(IM) \mid f \in Hom_R(M, L/N_M L)\} \\ &= I\sum\{f(M) \mid f \in Hom_R(M, L/N_M L)\} \\ &= I\,Tr_M(L/N_M L) \\ &\leq I(L/N_M L) \\ &= I(JM/(IJ)M). \end{aligned}$$

Y además, $I(JM/(IJ)M) = 0$ pues: sea $x + (IJ)M \in JM/(IJ)M$. Si $a \in I$, entonces $ax + (IJ)M = (IJ)M$. Concluimos que $N_M(L/N_M L) = 0$ como se quería. $\square$

Proposición 3.0.43. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Si $N, X \leq M$, entonces*

1. $N \cdot X = N_M X$;
2. $N \cdot (X/Y) = 0$ *si y sólo si* $N \cdot X \subseteq Y$ *para cualquier* $Y \subseteq X$;
3. *Si* $N = Ann_M(X/Y)$, *entonces* $Ann_M(X/N \cdot X) = N$ *para cualquier* $Y \subseteq X$.

Demostración.

1. Recordemos que siempre sucede $N_M X \subseteq N \cdot X$. Para ver la otra contención, por el Lema 3.0.42 tenemos que $N_M(X/N_M X) = 0$, y por tanto, $f(N) = 0$ para toda $f \in Hom_R(M, X/N_M X)$ si y sólo si $N \cdot (X/N_M X) = 0$, y esto implica que $N \cdot X \subseteq N_M X$ por la Proposición 2.1.10. Concluimos que $N \cdot X = N_M X$.

2. Supongamos que $N \cdot (X/Y) = 0$. Por la Proposición 2.1.10 se sigue que $N \cdot X \subseteq Y$. Por otro lado, si se cumple que $N \cdot X \subseteq Y$, entonces por el inciso anterior $N_M X \subseteq Y$. Como M es un módulo multiplicación, entonces existen ideales I, J y K de R tales que $N = IM$, $X = JM$ y $Y = KM$. Queremos ver que $N \cdot (X/Y) = 0$. Observemos que, por un argumento similar en la demostración del Lema 3.0.42, se tiene que $N \cdot (X/Y) \leq I(JM/KM)$ y afirmamos que $I(JM/KM) = 0$. En efecto: consideremos $x + KM \in JM/KM$. Si $a \in I$, entonces $a(x + KM) = ax + KM = KM$ pues $ax \in I(JM) = (IJ)M \subseteq KM$. Por consiguiente, $N \cdot (X/Y) = 0$ como se quería.

3. La demostración es similar al inciso 3 de la Proposición 3.0.30 pero cambiando la hipótesis a M un R-módulo multiplicación.

□

Corolario 3.0.44. *Si R es un anillo conmutativo y M es un R-módulo multiplicación, entonces para cualesquiera $N, K, L \leq M$ sucede que:*

1. $N \cdot K = K \cdot N$;

2. $N \cdot (K \cdot L) = (N \cdot K) \cdot L$.

Demostración. Los incisos 1 y 2 se siguen de las proposiciones 3.0.19, 3.0.20 y del inciso 1 de la Proposición 3.0.43. □

3.1. Módulos multiplicación sobre anillos invariantes izquierdos con multiplicación conmutativa de ideales

En esta capítulo presentamos algunos resultados de módulos multiplicación sobre anillos R invariantes izquierdos (todo ideal izquierdo de R es ideal bilateral) con multiplicación conmutativa de ideales no conmutativos. No todo anillo invariante izquierdo con multiplicación conmutativo de ideales es conmutativo, por ejemplo, si R es un anillo no conmutativo con división, entonces él mismo es un ejemplo de un anillo con multiplicación conmutativa de ideales izquierdos (derechos), más aún, es invariante izquierdo (derecho), pues: $I = RI = IR$ para cualquier ideal izquierdo I de R.

P. Smith, en [37] hace un análisis exhaustivo acerca de las propiedades de ciertos morfismos de orden entre la retícula completa de ideales de un anillo conmutativo R y la retícula completa de submódulos de un R-módulo izquierdo M. En particular, determina cuándo estos son morfismos de retículas y más aún, cuándo son isomorfas. En particular, existe un par de funciones que es relevante en [37] y que es de suma importancia en este trabajo como veremos a continuación.

Definición 3.1.1. *Sean R un anillo y M un R-módulo. Considere la retícula $\Lambda(R)$ de todos los ideales del anillo R y la retícula $\Lambda(M)$ de todos los submódulos del módulo M. Se define la función $\lambda : \Lambda(R) \to \Lambda(M)$ tal que $\lambda(I) = IM$, para cada $I \leq R$. Por otro lado, se define $\mu : \Lambda(M) \to \Lambda(R)$ como sigue: para cada $N \leq M$ se tiene que $\mu(N) = (N :_R M) = Ann_R(M/N)$.*

$$\begin{tikzcd} \Lambda(R) \arrow[r, shift left, "\lambda"] & \Lambda(M) \arrow[l, shift left, "\mu"] \end{tikzcd}$$

Observación 3.1.2. *La pareja $\langle \lambda, \mu \rangle$ forma una conexión de Galois isótona de copos pues es claro que:*

1. *Para cualesquiera $I, J \leq R$ tales que $I \leq J$ implica que $\lambda(I) \leq \lambda(J)$;*

2. *Para cualesquiera $L, N \in \Lambda(M)$ con $L \leq N$ sucede que $\mu(L) \leq \mu(N)$;*

3. *Para cada ideal I de R, $I \subseteq (IM :_R M) = \mu\lambda(I)$;*

4. *Para cada submódulo N de M, se tiene que $\lambda\mu(N) = (N :_R M)M \subseteq N$.*

Observación 3.1.3. *Sean R un anillo y M un R-módulo. La función λ definida como en la Definición 3.1.1 preserva supremos arbitrarios, es decir, para cualesquiera ideales $I, J \leq R$, se tiene que $\lambda(I \vee J) = \lambda(I) \vee \lambda(J)$. Así que, $\lambda : \Lambda(R) \to \Lambda(M)$ es un morfismo de retículas si y sólo si $\lambda(I \wedge J) = \lambda(I) \wedge \lambda(J)$ para cualesquiera $I, J \leq R$.*

Cuando R es un anillo conmutativo, en virtud de la observación 3.1.3, para la clase constituida por R-módulos multiplicación que son fieles, observamos que el morfismo λ de la Definición 3.1.1 es un morfismo de retículas.

Teorema 3.1.4. ([37], Theorem 2.12) *Sea R un anillo conmutativo. Supongamos que λ es como en la Definición 3.1.1. Si M es un R-módulo multiplicación fiel, entonces λ es un morfismo de retículas.* □

También en [37], el autor demuestra que λ es isomorfismo de retículas si y sólo si M es un R-módulo multiplicación fiel finitamente generado ([37], Theorem 4.3). En tal caso, λ y el morfismo de copos $\mu : \Lambda(M) \to \Lambda(R)$ dado por $\mu(N) = Ann_R(M/N)$ es isomorfismo. En tal caso, son inversas una de la otra.

Teorema 3.1.5. ([37], Theorem 4.3) *Sea R un anillo conmutativo y M un R-módulo. Supongamos que λ y μ son como en la Definición 3.1.1. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *La función $\lambda : \Lambda(R) \to \Lambda(M)$ es un isomorfismo de retículas;*
2. *La función $\mu : \Lambda(M) \to \Lambda(R)$ es un isomorfismo de retículas;*
3. *M es un R-módulo multiplicación y $B = (BM :_R M)$ para cada $B \leq R$;*
4. *M es R-módulo multiplicación fiel finitamente generado.*

□

El Teorema 3.1.5 nos indica que existe una correspondencia biunívoca entre los ideales de un anillo conmutativo R y los submódulos de un R-módulo multiplicación fiel finitamente generado.

Hemos notado que para un anillo conmutativo R, M un R-módulo multiplicación y $\langle \lambda, \mu \rangle$ la conexión de Galois como antes, es posible estudiar los elementos de $\Lambda(R)$ que quedan fijados por el operador $\mu\lambda$ y los elementos de $\Lambda(M)$ que quedan fijados por el operador $\lambda\mu$.

Lema 3.1.6. *Sean R un anillo conmutativo, M un R-módulo multiplicación y $\langle \lambda, \mu \rangle$ como en la Observación 3.1.2. Para cada $X \leq M$,*

1.- *λ manda $Ann_R(X)$ en $Ann_M(X)$.*

2.- *μ manda $Ann_M(X)$ en $Ann_R(X)$.*

Demostración. Sea $X \leq M$.

1.- Consideremos $Ann_R(X) \leq R$. Note que $Ann_R(X) = Ann_R(Tr_M(X)) = Ann_R(M/Ann_M(X))$, donde la primera igualdad se justifica por el Lema 3.0.18; y la segunda, por el inciso 3 de la Proposición 2.1.25. Por consiguiente,

$$\begin{aligned}\lambda(Ann_R(X)) &= Ann_R(X)M = Ann_R(Tr_M(X))M \\ &= Ann_R(M/Ann_M(X))M = Ann_M(X).\end{aligned}$$

2.- Consideremos $Ann_M(X) \leq M$. Entonces

$$\mu(Ann_M(X)) = Ann_R(M/Ann_M(X)) = Ann_R(Tr_M(X) = Ann_R(X),$$

donde las dos últimas igualdades suceden por el inciso 3 de la Proposición 2.1.25 y el Lema 3.0.18, respectivamente.

□

Como consecuencia, sabemos cuáles son los puntos fijos en la conexión de Galois en cuestión.

Teorema 3.1.7. *Sean R un anillo conmutativo, M un R-módulo multiplicación y $\langle \lambda, \mu \rangle$ como en la Observación 3.1.2. Entonces:*

- *$\mu\lambda(I) = I \leq R$ si y sólo si $I = Ann_R(X)$, donde $X \in \Lambda(M)$;*
- *$\lambda\mu(N) = N \leq M$ si y sólo si $N = Ann_M(X)$, donde $X \in \Lambda(M)$.*

Corolario 3.1.8. *Sean R un anillo conmutativo, M un R-módulo multiplicación y $\langle \lambda, \mu \rangle$ como en la Observación 3.1.2. Entonces $\langle \lambda, \mu \rangle$ induce un isomorfismo de retículas:*

$$\{Ann_R(X) \mid X \in \Lambda(M)\} = Im\ \mu \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} Im\ \lambda = \{Ann_M(X) \mid X \in \Lambda(M)\}\ ,$$

es decir, la conexión de Galois $\langle \lambda, \mu \rangle$ es un isomorfismo de retículas si y sólo si $Im\mu = \Lambda(R)$ y $Im\lambda = \Lambda(M)$.

El Corolario 3.1.8 nos dice bajo qué condiciones la pareja $\langle \lambda, \mu \rangle$ es un isomorfismo de retículas en términos de sus respectivos puntos fijos.

Definición 3.1.9. *Sean R un anillo invariante izquierdo (todos los ideales izquierdos de R son bilaterales) con multiplicación conmutativa de ideales, sean M un R-módulo y $r(M) = Ann_R(M)$. Sean $\Lambda(R/r(M))$ la retícula de todos los ideales $J/r(M)$ del anillo $R/r(M)$ y $\Lambda(M)$ la retícula de todos los submódulos de M. Definimos $\varphi : \Lambda(R/r(M)) \to \Lambda(M)$ tal que $\varphi(I/r(M)) = IM$ para cada ideal $I/r(M)$ de $R/r(M)$. Por otro lado, definamos $\psi : \Lambda(M) \to \Lambda(R/r(M))$ como $\psi(N) = Ann_R(M/N)/r(M)$ para cada $N \leq M$ (Observemos que para cada $N \leq M$, se tiene que $r(M) \subseteq Ann_R(M/N)$).*

Observación 3.1.10. *Es claro que las funciones φ y ψ forman una conexión de Galois isótona, es decir,* a) *φ y ψ preservan orden,* b) $1 \leq \psi\varphi$ *y* c) $\varphi\psi \leq 1$.

Los siguientes resultados son una versión análoga a los resultados en 3.1.8 y 3.1.7, respectivamente.

Teorema 3.1.11. *Sean R un anillo invariante izquierdo con multiplicación conmutativa de ideales, M un R-módulo multiplicación fiel tal que genera a todos sus submódulos, y $\langle \varphi, \psi \rangle$ la conexión de Galois como en la observación 3.1.10. Entonces:*

- $\psi\varphi(I) = I \leq R$ *si y sólo si* $I = Ann_R(X)$, *donde* $X \in \Lambda(M)$;
- $\varphi\psi(N) = N \leq M$ *si y sólo si* $N = Ann_M(X)$, *donde* $X \in \Lambda(M)$.

Demostración. La demostración es similar a la del Teorema 3.1.7. □

Corolario 3.1.12. *Sean R un anillo invariante izquierdo con multiplicación conmutativa de ideales, M un R-módulo multiplicación fiel tal que genera a todos sus submódulos, y $\langle \varphi, \psi \rangle$ la conexión de Galois como en la observación 3.1.10. Entonces $\langle \varphi, \psi \rangle$ induce un isomorfismo de retículas:*

$$\{Ann_R(X) \mid X \in \Lambda(M)\} = Im\ \psi \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} Im\ \varphi = \{Ann_M(X) \mid X \in \Lambda(M)\}\ ,$$

es decir, la conexión de Galois $\langle \varphi, \psi \rangle$ es un isomorfismo de retículas si y sólo si $Im\psi = \Lambda(R)$ y $Im\varphi = \Lambda(M)$.

Demostración. La demostración es similar a la del Corolario 3.1.8. □

Observación 3.1.13. *Dados R un anillo, M un R-módulo. Sean λ y μ como en la Definición 3.1.1 y φ y ψ como en la Definición 3.1.9 y $r(M) = Ann_R(M)$. Entonces el epimorfismo canónico $\pi : R \to R/r(M)$ induce el morfismo $\overline{\pi} : \Lambda(R) \to \Lambda(R/r(M))$ y es tal que hace conmutar los siguientes diagramas:*

$$\begin{tikzcd} \Lambda(R) \arrow[r, "\overline{\pi}"] \arrow[d, "\lambda"] & \Lambda(R/r(M)) \arrow[dl, "\varphi"] \\ \Lambda(M) & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \Lambda(R) \arrow[r, "\overline{\pi}"] & \Lambda(R/r(M)) \\ \Lambda(M) \arrow[u, "\mu"] \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Observación 3.1.14. *En general, las funciones φ y ψ no necesariamente son morfismos de retículas. Sin embargo, si suponemos que M es un módulo multiplicación sobre un anillo R invariante izquierdo con multiplicación conmutativa de ideales, entonces:* a) *φ es suprayectiva;* b) *φ preserva ínfimos por* ([43], Theorem 4.3). *En consecuencia, φ es un morfismo de retículas, más aún, φ es un isomorfismo de copos si y sólo si M es un R-módulo multiplicación finitamente generado por* ([43], Theorem 4.10). *En tal caso, φ y ψ son inversas una de la otra.*

En virtud de la observación 3.1.13, si $r(M) \neq 0$, la pareja (λ, μ) se factoriza através de la pareja (φ, ψ). En otro caso, $\lambda = \varphi$ y $\mu = \psi$. En cualquiera de las situaciones anteriores, bajo ciertas condiciones, algunos resultados para módulos multiplicación sobre anillos conmutativos expuestos anteriormente también son ciertos sobre un anillo invariante izquierdo con multiplicación conmutativa de ideales como veremos más adelante.

Teorema 3.1.15. *Sea R un anillo invariante izquierdo con multiplicación conmutativa de ideales. Sea M un R-módulo multiplicación distinto de cero. Entonces:*

1. *Todo submódulo propio de M está contenido en un submódulo máximo de M;*

2. *K es un submódulo máximo de M si y sólo si existe un ideal máximo P de R tal que $K = PM \neq M$.*

Demostración.

1. Por ([43], Theorem 4.15) se tiene que el radical de Jacobson $J(M)$ de M es un submódulo superfluo de M. Sabemos que si $J(M)$ es superfluo en M implica que todo submódulo propio de M está contenido en un submódulo máximo de M.

2. Por ([43], Note 1.10) se tiene que si P es un ideal máximo tal que $PM \neq M$, entonces PM es un submódulo máximo de M. Recíprocamente, sea $K \leq M$ submódulo máximo. Entonces M/K es simple. Considere $Q = Ann_M(M/K)$. Entonces Q es un ideal máximo de R y es tal que $K = Ann_R(M/K)M = QM$.

□

3.2. Módulos multiplicación sobre anillos locales uniseriales

En esta parte vamos a estudiar a los módulos multiplicación sobre otra clase de anillos que no necesariamente son conmutativos: anillos locales uniseriales. En la literatura, existen diversas definiciones de un anillo uniserial. Esta noción ha sido estudiada por Nakayama, G. Puniski, C. Faith, G. Köthe, K. Assano, entre otros. En este trabajo, un anillo *local uniserial* R es un anillo artiniano uniserial de ideales principales, donde uniserial significa que la retícula de ideales de R forma una cadena.

Recientemente, en [19], R. Fernández y S. Gavito han descrito detalladamente la retícula de prerradicales sobre cualquier anillo local uniserial. Un ejemplo muy conocido de anillo local uniserial es: $\mathbb{Z}_{p^n}$ con p primo y alguna $n \geq 1$.

También en [19], los autores presentan las siguientes dos consecuencias de anillos locales uniseriales:

Proposición 3.2.1. ([19], Corollary 3.1) *Para cualquier anillo local uniserial con longitud n, la retícula de ideales izquierdos (y de ideales derechos) es una cadena finita de la forma*

$$0 = J^n < J^{n-1} < \cdots < J^2 < J < R, \tag{3.1}$$

donde J es el radical de Jacobson del anillo R.

En ([19], Corollary 3.1), los autores observan que esta cadena es la única serie de composición (cuya longitud es n) para ${}_RR$ y R_R.

Proposición 3.2.2. ([19], Corollary 3.2) *Sea R un anillo local uniserial. Entonces todo R-módulo izquierdo* (*y derecho*) *es isomorfo a una suma directa de ideales de R.*

Observación 3.2.3. *De hecho, en la demostración de* ([19], Corollary 3.2)*, los autores notaron que es suficiente demostrar que todo módulo cíclico izquierdo sobre un anillo local uniserial R es isomorfo a un ideal del anillo R, esto es debido a que todo anillo local uniserial es un anillo de Köthe* [22] (*un anillo de Köthe es un anillo R tal que cada R-módulo izquierdo y derecho es una suma directa de submódulos cíclicos*)*.*

Observación 3.2.4. *Todo ideal izquierdo* (*derecho*) *de un anillo local uniserial es ideal derecho* (*izquierdo*)*. No necesariamente los anillos locales uniseriales son conmutativos.*

En ([45], *pág 312*)*, W. Xue exhibe un ejemplo de anillo local uniserial no conmutativo con longitud de composición $n = 3$:*

Sean F un campo y $K = F(X)$ el campo de funciones racionales sobre F con derivada formal $()'$. Consideremos

$$R = K \times K \times K.$$

como grupo abeliano. Ahora, sean $(k_1, k_2, k_3), (l_1, l_2, l_3) \in R$, definimos un producto en R como sigue:

$$(k_1, k_2, k_3)(l_1, l_2, l_3) := (k_1l_1, k_1l_2 + k_2l_1, k_1l_3 + k_2l_2 + k_3l_1 + k_1'l_2).$$

Es claro que R es un anillo no conmutativo. Por otra parte, observe que los únicos ideales (bilaterales) no triviales del anillo R son:

$$I_1 = \{(0, k_2, k_3) \mid k_2, k_3 \in K\} = \langle(0, X, X)\rangle$$

y

$$I_2 = \{(0, 0, k_3) \mid k_3 \in K\} = \langle(0, 0, X)\rangle.$$

Además, R/I_2 es conmutativo.

Finalmente, observe que la retícula de R forma una cadena:

$$0 = I_3 \leq I_2 \leq I_1 \leq R.$$

Observación 3.2.5. *Es claro que en un anillo local uniserial la multiplicación de ideales es conmutativa. En consecuencia, todo anillo local uniserial es un anillo invariante izquierdo con multiplicación conmutativa de ideales.*

Observación 3.2.6. *Si R es un anillo local uniserial, entonces es claro que todo ideal izquierdo de R y R mismo son módulos multiplicación izquierdos.*

Proposición 3.2.7. *Sea R un anillo con multiplicación conmutativa de ideales e I un ideal de R tal que $I \subseteq J$, donde J es el radical de Jacobson del anillo R y M es un R-módulo multiplicación. Entonces $IM = M$ implica que $M = 0$.*

Demostración. Sea $x \in M$. Considere $Rx \leq M$. Como M es módulo multiplicación, entonces $Rx = KM$ para algún ideal K de R. Ahora

$$Ix = I(KM) = (IK)M = (KI)M = K(IM) = KM = Rx.$$

Entonces $(1-m)x = 0$ para algún $m \in I \subseteq J$. Pero $1-m \in R^*$. En consecuencia, $x = 0$.

□

Corolario 3.2.8. *Si R es un anillo local uniserial con J el radical de Jacobson de R y M es un R-módulo multiplicación distinto de cero, entonces $JM \neq M$.*

En ([4], Proposition 4), Barnard demuestra que todo módulo multiplicación sobre un anillo conmutativo semi-local R es un módulo cíclico. Sin embargo, hemos notado que este resultado en cuestión sigue siendo válido para anillos locales con multiplicación conmutativa de ideales (un anillo no necesariamente conmutativo). Por otro lado, en ([43], Proposition 3.1), Tuganbaev demuestra que en un anillo invariante izquierdo, todo módulo cíclico es un módulo multiplicación.

En virtud de lo mencionado en el párrafo anterior y de la Proposición 3.2.7 se tiene lo siguiente:

Proposición 3.2.9. *Sean R un anillo local invariante izquierdo con multiplicación conmutativa de ideales y $M \in R$-Mod distinto de cero. Entonces M es un módulo multiplicación si y sólo si M es cíclico.*

Corolario 3.2.10. *Sean R un anillo local uniserial y $M \in R$-Mod distinto de cero. Entonces M es un módulo multiplicación si y sólo si M es cíclico.*

El siguiente resultado se sigue de la Observación 3.2.3 y del Corolario 3.2.10.

Proposición 3.2.11. *Sean R es un anillo local uniserial con longitud de composición $n \geq 1$ y M un R-módulo multiplicación distinto de cero. Entonces*

$$M \cong I_s$$

para algún $s \in \{1, 2, \ldots, n-1, n\}$, donde $I_s := J^{n-s}$ y J es el radical de Jacobson del anillo R. Si además M es fiel, resulta que

$$M \cong R.$$

El resultado en la Proposición 3.2.11 es muy significativo pues indica cómo son los módulos multiplicación distintos de cero sobre cualquier anillo local uniserial y tiene algunas consecuencias inmediatas como vemos a continuación.

Corolario 3.2.12. *Los únicos módulos multiplicación (salvo isomorfismo) distintos de cero sobre cualquier anillo local uniserial R son los ideales del anillo R y el mismo.*

Demostración. Se sigue de la observación 3.2.6 y de la Proposición 3.2.11. □

Sea R un anillo local uniserial. Dado M un R-módulo multiplicación, podemos considerar su clase de isomorfismo de módulos multiplicación:

$$[M] = \{X \mid X \text{ es un } R\text{-módulo multiplicación y } X \cong M\}$$

En virtud de la Proposición 3.2.11, se tiene el siguiente resultado:

Corolario 3.2.13. *Las clases de isomorfismo de R-módulos multiplicación forman un conjunto.*

Más aún, se puede elegir un representante de cada clase de isomorfismo y así obtener un conjunto finito, completo e irredundante.

Corolario 3.2.14. *Si R es un anillo local uniserial con longitud de composición $n \geq 1$, entonces existe un conjunto de cardinalidad n, completo e irredundante.*

Finalmente, de ([19], Proposition 6.3) y de la Proposición 3.2.11, se sigue que para cualquier módulo multiplicación distinto de cero y fiel sobre cualquier anillo local uniserial R, $\Lambda(M) \cong \Lambda(R)$. Más aún, $\Lambda(M)$ está en correspondencia con los radicales en R-pr.

Capítulo 4

Módulos Primos y Semiprimos

En esta sección introducimos los conceptos de (sub)módulos primos y semiprimos definidos en [30] y en [34], respectivamente. Presentamos algunas propiedades de estos módulos y caracterizamos los submódulos primos (semiprimos) de un módulo: a) casi-proyectivo; b) multiplicación sobre cualquier anillo invariante izquierdo con multiplicación conmutativa de ideales.

Motivados en la definición de radical $\sqrt{I}$ de un ideal I de un anillo conmutativo R, también existe una versión análoga en módulos: se define el radical $\sqrt{N}$ de un submódulo totalmente invariante de un módulo M ([10], Definition 2.15).

Uno de los resultados más importantes de esta sección es demostrar que para cualquier módulo multiplicación M sobre cualquier anillo R invariante izquierdo con multiplicación conmutativa de ideales, al igual que en el caso conmutativo estudiado por J. Castro et al en [10], se tiene, bajo ciertas condiciones, una correspondencia biunívoca entre los ideales primos (resp. semiprimos) de R y los submódulos primos (resp. semiprimos) de M.

Definición 4.0.1. ([30], Definition 11) *Sean $M \in R\text{-}Mod$ y $P \subset M$ un submódulo totalmente invariante. Decimos que P es un submódulo primo de M si para cualesquiera K, L submódulos totalmente invariantes de M tales que $K_M L \leq P$ se tiene que $K \subseteq P$ o $L \subseteq P$.*

Decimos que M es un módulo primo si el submódulo 0 es submódulo primo de M.

Definición 4.0.2. *Dado un R-módulo M definimos el siguiente conjunto de submódulos de M :*

$$Spec(M) = \{K \leq_{f.i} M \mid K \text{ es un submódulo primo de } M\}.$$

Observación 4.0.3. *Si $M = R$, entonces la Definición 4.0.1 y la definición de ideal primo de R coinciden.*

Proposición 4.0.4. ([9], Proposition 1.13) *Sea $M \in R$-Mod. Supongamos que M genera a todos sus submódulos totalmente invariantes. Si N es un submódulo máximo totalmente invariante de M, entonces N es un submódulo primo de M.* □

Corolario 4.0.5. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Si N es un submódulo máximo de M, entonces N es submódulo primo de M.*

Demostración. Como M es un R-módulo multiplicación, entonces por el Lema 3.0.18 M genera a todos sus submódulos. Por la Proposición 4.0.4, se sigue que todo submódulo máximo de N es submódulo primo de M. □

Lema 4.0.6. ([10], Lemma 2.3) *Sean R un anillo, $M \in R$-Mod y $N \subset M$ un submódulo totalmente invariante de M. Si N es un submódulo de K tal que K/N es un submódulo totalmente invariante de M/N, entonces K es un submódulo totalmente invariante de M.*

Demostración. Sea $\varphi \in End(M)$. Como $\varphi(N) \leq N$, entonces φ induce el endomorfismo: $\bar{\varphi}$: $M/N \to M/N$ definida por $\bar{\varphi}(m + N) = \varphi(m) + N$ $\forall m \in M$. Como K/N es un submódulo totalmente invariante de M/N, entonces $\bar{\varphi}(K/N) \leq K/N$. Se sigue que $\varphi(K) \leq K + N = K$. Por tanto $\varphi(K) \leq K$. Se concluye K es submódulo totalmente invariante de M. □

Lema 4.0.7. [30] *Sean R un anillo, $M \in R$-Mod casi-proyectivo y K un submódulo totalmente invariante de M. Si N es un submódulo de M, entonces $\frac{K+N}{N}$ es un submódulo totalmente invariante de M/N.*

Lema 4.0.8. *Sea M un R-módulo casi-proyectivo. Si N, K, L, P son submódulos totalmente invariantes de M tales que $N \subseteq K$, $N \subseteq L$, y $N \subseteq P$, entonces $(K/N)_{M/N}(L/N) \subseteq P/N$ si y sólo si $K_M L \subseteq P$. En particular, si $N = P$, entonces $(K/N)_{M/N}(L/N) = 0$ si y sólo si $K_M L \subseteq N$.*

Demostración. Supongamos que $(K/N)_{M/N}(L/N) \subseteq P/N$. Sea $f : M \to L$ cualquiera. Consideremos $\pi f : M \to L/N$, donde $\pi : L \to L/N$ es la proyección natural. Como $N \leq_{f.i} M$, entonces $\pi\, f(N) = 0$. Por tanto, se induce el siguiente morfismo: $\overline{f} : M/N \to L/N$ definido como $\overline{f}(x + N) = f(x) + N$. Es claro que está bien definida y es R-homomorfismo de módulos. Por hipótesis se sigue que $\overline{f}(K/N) \subseteq P/N$, es decir, $\overline{f}(x + N) = f(x) + N \in P/N$ para toda $x \in K$. Así, $f(K) \subseteq P$. Por consiguiente, $K_M L \subseteq P$.

Recíprocamente, supongamos que $K_M L \subseteq P$. Sean $g : M/N \to L/N$ un R-homomorfismo cualquiera y $\pi_1 : M \to M/N$ y $\pi_2 : L \to L/N$ las proyecciones naturales. Como $L \leq M$ y M es casi-proyectivo, sabemos que el dominio de proyectividad de un módulo es cerrado bajo submódulos, entonces M es L-proyectvo, así que existe un morfismo $f : M \to L$ tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "f"] & M/N \arrow[d, "g"] \\ L \arrow[r, "\pi_2"] & L/N \end{tikzcd}$$

En consecuencia, $g(K/N) = g\,\pi_1(K) = \pi_2\, f(K) = \pi_2(f(K))$. Como $f : M \to L$ y por hipótesis, $K_M L \subseteq P$, entonces $f(K) \subseteq P$. por tanto, $\pi_2(f(K)) \subseteq P/N$. Concluimos que $(K/N)_{M/N}(L/N) \subseteq P/N$. $\square$

Proposición 4.0.9. ([30], Proposition 18) *Sea R un anillo, $M \in R$-Mod casi-proyectivo y $N \leq_{f.i} M$. Entonces N es submódulo primo de M si y sólo si M/N es un módulo primo.*

Demostración. Supongamos que $K/N, L/N \leq_{f.i} M/N$ tales que

$(K/N)_{M/N}(L/N) = 0$. Por el Lema 4.0.6, K, L son submódulos totalmente invariantes de M y por el Lema 4.0.8 se sigue que $K_M L \subseteq N$. Como N es un submódulo primo de M, entonces $K \subseteq N$ o $L \subseteq N$. Así, $K/N = 0$ o $L/N = 0$. Se sigue que M/N es módulo primo.

Recíprocamente, supongamos que M es casi-proyectivo. Sean $K, L \leq M$ submódulos totalmente invariantes de M tales que $K_M L \leq N$. Por el Lema 4.0.7 se tiene que $\frac{K+N}{N}, \frac{L+N}{N}$ son submódulos totalmente invariantes de M/N y tales que $(\frac{K+N}{N})_{\frac{M}{N}}(\frac{L+N}{N}) = 0$. Como M/N es un módulo primo, se tiene que $\frac{K+N}{N} = 0$ o $\frac{L+N}{N} = 0$. Entonces $K + N \subseteq N$ o $L + N \subseteq N$ y por tanto, $K \subseteq N$ o $L \subseteq N$. Se concluye que N es un submódulo primo de M. $\square$

Observación 4.0.10. *En la suficiencia de la Proposición 4.0.9 notemos que no usamos que $N \in \Lambda^{f.i}(M)$. En tal caso, podemos escribir el siguiente resultado:*

Proposición 4.0.11. *Sea R un anillo, $M \in R$-Mod casi-proyectivo. Si M/N es módulo primo, entonces para cualesquiera $K, L \leq_{f.i} M$ tales que $K_M L \subseteq N$, implica que $K \subseteq N$ o $L \subseteq N$.* $\square$

En la Proposición 4.0.11, al elemento $N \in \Lambda(M)$ se dice que es un primo relativo a $\Lambda^{f.i}(M)$.

Observación 4.0.12. *Dado un R-módulo M. Los elementos primos de $\Lambda(M)$ relativos a $\Lambda^{f.i}(M)$ se les llama primos largos de M. Al conjunto de primos largos de M se denotará por $LgSpec(M)$. Para más información, consultar los trabajos de M. Medina et al* ([27] y [28]).

Corolario 4.0.13. ([3], Remark 3.12) *Sea M un R-módulo. Entonces:*

1. *Si M es dúo y casi-proyectivo, todo submódulo máximo de M es submódulo primo de M;*

2. *Si M es casi-proyectivo y K es un submódulo máximo totalmente invariante de M, entonces $K \in Spec(M)$.*

$\square$

Corolario 4.0.14. [30] *Sean R un anillo, $M \in R\text{-}Mod$ y N, P submódulos de M tales que $N \subsetneq P$. Si P/N es submódulo primo en M/N, entonces M/P es un módulo primo.*

Demostración. Supongamos que P/N es submódulo primo de M/N. Por la Proposición 4.0.9, se sigue que $(M/N)/(P/N) \cong M/P$ es un módulo primo.

$\square$

Corolario 4.0.15. [30] *Sean R un anillo, M un R-módulo y N submódulo de M. Supongamos que P es un submódulo propio totalmente invariante de M tal que $N \subsetneq P$. Si P es submódulo primo en M, entonces P/N es un submódulo primo en M/N.*

Demostración. Sean $K/N, L/N$ submódulos totalmente invariantes de M/N tales que $(K/N)_{M/N}(L/N) \leq P/N$. Por el Lema 4.0.6, K, L son submódulos totalmente invariantes de M y por Lema 4.0.8, $K_M L \leq P$. Como P es submódulo primo de M, entonces $K \leq P$ o $L \leq P$, o bien, $K/N \leq P/N$ o $L/N \leq P/N$. Concluimos que P/N es un submódulo primo en M/N. $\square$

La parte recíproca del Corolario 4.0.15 también es cierta:

Corolario 4.0.16. *Sean R un anillo, M un R-módulo casi-proyectivo y N, P submódulos totalmente invariantes de M con $N \subsetneq P$. Si P/N es un submódulo primo de M/N, entonces P es primo.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 4.0.9 y del Corolario 4.0.14. $\square$

Lema 4.0.17. [44] *Sean R un anillo, $M \in R\text{-}Mod$ y N un submódulo totalmente invariante de M. Si M es casi-proyectivo, entonces M/N es un módulo casi-proyectivo.*

Demostración. Sea $L \leq M$ tal que contiene a N. Considere el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M/N \arrow[d, "\phi"] & \\ M/N \arrow[r, "\psi"] & M/L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Ahora, sea $\pi : M \to M/N$ la proyección natural y por tanto, se tiene el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\exists g"'] \arrow[d, "\phi\pi"] & \\ M \arrow[r, "\phi\pi"'] & M/L \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Como M es casi-proyectivo, entonces existe $g : M \to M$ tal que $\psi\pi g = \phi\pi$. Como N es submódulo totalmente invariante de M, entonces $g(N) \leq N$. Este induce el siguiente R-homomorfismo:

$$f : M/N \to M/N$$

definida como $f(m+N) = g(m) + N$. Ahora, para cada $m \in M$ se tiene

$$\psi f(m+N) = \psi\pi g(m) = \phi\pi(m) = \phi(m+N).$$

Por tanto $\psi f = \phi$. En consecuencia el primer diagrama es conmutativo. Se concluye que M/N es casi-proyectivo. □

Corolario 4.0.18. ([10], Corollary 2.10) *Sean R un anillo, $M \in R$-Mod casi-proyectivo, N un submódulo totalmente invariante de M y P un submódulo propio de M tal que $N \subseteq P$. Si P/N es un submódulo totalmente invariante de M/N tal que M/P es un módulo primo, entonces:*

1. *P/N es primo en M/N;*
2. *P es primo en M.*

Demostración.

1. Supóngase que M es casi-proyectivo y N es un submódulo totalmente invariante de M. Por el Lema 4.0.17 se tiene M/N es casi-proyectivo y si P/N es un submódulo totalmente invariante de M/N tal que $M/P \cong \frac{M/N}{P/N}$ es un módulo primo, entonces por la Proposición 4.0.9 P/N es primo en M/N.
2. Se sigue del Lema 4.0.7 y de la Proposición 4.0.9.

□

El siguiente resultado caracteriza a los submódulos primos de un módulo casi-proyectivo.

Proposición 4.0.19. *Sean R un anillo, M un R-módulo casi-proyectivo y supongamos que su domimio de proyectividad $\mathscr{P}^{-1}(M)$ es cerrado bajo formación de sumas directas arbitrarias. Si P un submódulo totalmente invariante de M, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *P es primo en M;*

2. *Si $K, L \leq M$ son tales que $K_M L \leq P$, entonces $K \subseteq P$ o $L \subseteq P$;*

3. *Para cualesquiera $K, L \leq M$ que contienen a P tales que $K_M L \leq P$, entonces $K = P$ o $L = P$;*

4. *M/P es un módulo primo.*

Demostración.

$(1) \implies (2)$: Sean $K, L \leq M$. Como $K_M L = \overline{K}_M L$, donde $\overline{K}$ es el menor submódulo totalmente invariante de M que contiene a K, entonces sin pérdida de generalidad podemos suponer que K es tal que $K \leq_{f.i} M$. Si $K_M L \subseteq P$, entonces $(K_M L)_M M \subseteq P_M M = P$. Como M es casi-proyectivo, por la Proposición 3.0.30 se tiene que $(\_)_M(\_) = (\_) \cdot (\_)$. Además, por la Proposición 3.0.40 se sigue que $(K_M L)_M M = K_M(L_M M)$. Entonces $K_M(L_M M) \subseteq P$. Como $L_M M$ es un submódulo totalmente invariante de M y P es un submódulo primo de M, entonces $K \subseteq P$ o $L_M M \subseteq P$, es decir, $K \subseteq P$ o $L \subseteq P$.

$(2) \implies (3)$: Es claro.

$(3) \implies (1)$: Sean $K, L \leq M$ tales que $K_M L \subseteq P$. Afirmamos que $K_M(L + P) \subseteq P$. En efecto: Como $K_M L \subseteq L \cap P$, entonces por el inciso 2 de la Proposición 3.0.30, se tiene que $K_M(L/L \cap P) = 0$. Pero $L/L \cap P \cong L + P/P$. Así que $K_M((L + P)/P) = 0$. Nuevamente, por el inciso 2 de la Proposición 3.0.30, implica $K_M(L+P) \subseteq P$. Por otro lado, se tiene que $(K+P)_M(L+P) = K_M(L + P) + P_M(L + P) \subseteq P$, pues P es submódulo totalmente invariante de M. Entonces, por hipótesis, se cumple que $K + P = P$ o $L + P = P$, es decir, $K \leq P$ o $L \leq P$. Concluimos que P es un submódulo primo de M.

$(1) \iff (4)$: Se sigue de la Proposición 4.0.9. □

Si R es un anillo conmutativo y M es un R-módulo multiplicación, entonces también se tiene una caracterización para los submódulos primos de M como vemos a continuación:

Proposición 4.0.20. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación y $P \neq M$ un submódulo totalmente invariante de M. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *P es un submódulo primo de M;*

2. *Para cualesquiera submódulos $K, L \leq M$ que contienen a P tales que $K_M L \leq P$, entonces $K = P$ o $L = P$.*

Demostración.

$(1) \implies (2)$: Se sigue facilmente de la Definición 4.0.1 y del hecho que $\Lambda(M) = \Lambda^{f.i}(M)$.

$(2) \implies (1)$: Sean $K, L \leq_{f.i} M$ tales que $K_M L \leq P$. Afirmamos que $K_M(L+P) \leq P$. En efecto: Por la Proposición 3.0.19 y por el inciso 6 de la Proposición 3.0.9 se tiene que $K_M(L+P) = (L+P)_M K = L_M K + P_M K = K_M L + P_M K \leq P$. Por tanto $K_M(L+P) \leq P$. Así que, $(K+P)_M(L+P) = K_M(L+P) + P_M(L+P) \leq P$ pues P es un submódulo totalmente invariante de M. Por la hipótesis, se cumple que $K+P = P$ o $L+P = P$. Se sigue que $K \leq P$ o $L \leq P$. Concluimos que P es un submódulo primo de M.

□

En la sección anterior presentamos a los módulos M-ideales primos ([5], §3).

Observación 4.0.21. *En general, la noción de M-ideal primo dado en la Definición 2.3.1 no coincide con la definición de submódulos primos de M dada en 4.0.1. Para ver esto, considere el $\mathbb{Z}$-módulo $M = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ para algún primo p. En la sección anterior observamos que M es un módulo M-primo. Luego, $0 = Ann_M(M)$ es un M-ideal primo. Por otra parte, 0 no es un submódulo primo de M puesto que $\mathbb{Z}_{p M}\mathbb{Z}_{p^2} = 0$ pero $\mathbb{Z}_p \neq 0$, $\mathbb{Z}_{p^2} \neq 0$, pues recordemos que $Hom_{\mathbb{Z}}(M,N) = 0$ para cualquier $0 \neq N \subsetneq M$.*

Anteriormente, vimos que si M es un R-módulo multiplicación, entonces todo submódulo N es un M-ideal. Por otro lado, si N es un submódulo M-ideal, entonces es claro que N es un submódulo totalmente invariante de M. También sabemos que todo submódulo de M es M-generado.

El siguiente resultado es una caracterización de los módulos M-ideales primos con M un R-módulo multiplicación. De hecho, este está inspirado en ([5], Proposition 5.7).

Proposición 4.0.22. *Sean R un anillo conmutativo, M un módulo multiplicación, $P \subset M$ un M-ideal y $X \in R$-Mod tal que $Ann_M(X) = P$. Si para cada $0 \neq Y \subseteq X$ se tiene que $Hom_R(M,Y) \neq 0$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *P es un M-ideal primo.*

2. *$N \cdot K \subseteq P$ implica que $N \subseteq P$ o $K \subseteq P$ para cualesquiera $N, K \leq M$.*

3. *M/P es un módulo M-primo.*

Demostración.

$(1) \Rightarrow (2)$: Supongamos que P es un M-ideal primo y sean $N, K \leq M$ tales que $N \cdot K \subseteq P$ con $K \nsubseteq P$. Como P es un M-ideal primo, existe un módulo M-primo X tal que $P = Ann_M(X)$. Por el Corolario 3.0.44 se sigue que $N \cdot (K \cdot X) = (N \cdot K) \cdot X = 0$, es decir, $N \subseteq Ann_M(K \cdot X)$. Afirmamos que $Ann_M(K \cdot X) = Ann_M(X)$. En efecto: como $K \cdot X \neq 0$ y por hipótesis, $Hom_R(M, Y) \neq 0$ para todo $0 \neq Y \subseteq X$, entonces $Ann_M(N \cdot X) = Ann_M(X)$ pues X es M-primo. Por tanto, $N \subseteq P$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Sean N un M-ideal y K/P un submódulo distinto de cero de M/P tal que $N \cdot (K/P) = 0$. Por el inciso 2 de la Proposición 3.0.43 se tiene que $N \cdot K \subseteq P$. Por hipótesis se sigue que $N \subseteq P$ o $K \subseteq P$. Puesto que $K/P \neq 0$, entonces $K \nsubseteq P$, y por tanto, $N \subseteq P$. Además, $N = N \cdot M$, pues N es M-ideal. Así que $N \cdot M \subseteq P$, por el inciso 2 de la Proposición 3.0.43, se tiene $N \cdot (M/P) = 0$. Por la Proposición 2.2.3 concluimos que M/P es un módulo M-primo.

$(3) \Rightarrow (1)$: Si M/P es un módulo M-primo, entonces $P = Ann_M(M/P)$. Así que P es un M-ideal primo. □

En vista de la caracterización recientemente dada en esta sección de los módulos M-ideales primos definidos en 2.3.1 y la caracterización 4.0.20 para los submódulos primos dados en 4.0.1 de un R-módulo, es fácil ver que para un módulo multiplicación M son equivalentes ambos conceptos.

Proposición 4.0.23. *Sean R un anillo conmutativo, M un R-módulo multiplicación, $P \subset M$ y $X \in R$-Mod tal que $Ann_M(X) = P$. Si para todo $0 \neq Y \subseteq X$ se tiene que $Hom_R(M, Y) \neq 0$, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *P es un M-ideal primo;*

2. *P es un submódulo primo de M.*

Demostración. Se sigue de las proposiciones 3.0.43, 4.0.20 y 4.0.22. □

Definición 4.0.24. ([34], Definition 10) *Sean R un anillo y $M \in R$-Mod. Decimos que un submódulo totalmente invariante N de M es semiprimo si para cualquier submódulo totalmente invariante K de M tal que $K_M K \leq N$, implica $K \leq N$.*

Observe que si $M = R$, un ideal de R es semiprimo I de acuerdo a la definición dada si y sólo si I es un ideal semiprimo de R.

Es claro que todo submódulo primo de un módulo M es un submódulo semiprimo de M.

Observación 4.0.25. *Notemos que los resultados que se han obtenido en la Proposición 4.0.9 y en los corolarios 4.0.15 y 4.0.16 que ocurren para submódulos primos también se pueden dar en términos de submódulos semiprimos de un módulo M.*

Proposición 4.0.26. *Sean R un anillo, M un R-módulo dúo y N un submódulo propio de M. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *N es un submódulo semiprimo de M;*

2. *Si $m \in M$ es tal que $Rm_M Rm \leq N$, entonces $m \in N$;*

3. *N es una intersección de submódulos primos de M.*

Demostración.

$(1) \implies (2)$: Supongamos que N es un submódulo semiprimo de M. Si $m \in M$ es tal que $Rm_M Rm \leq N$. Como N es semiprimo, entonces $Rm \leq N$. Se sigue que $m \in Rm \leq N$. Por tanto $m \in N$.

$(2) \implies (3)$: Como $N \neq M$, sea $0 \neq m_0 \in M - N$. Entonces $Rm_{0_M} Rm_0 \nleq N$. Sea $0 \neq m_1 \in Rm_{0_M} Rm_0$ tal que $m_1 \notin N$. Así $Rm_{1_M} Rm_1 \leq Rm_{0_M} Rm_0$. Por consiguiente, tenemos una sucesión de elementos de M distintos de cero $\{m_0, m_1, \ldots m_n, \ldots\}_{i \in I}$ tales que $m_i \notin N$ para toda $i \in I$ y $Rm_{i+1_M} Rm_{i+1} \leq Rm_{i_M} Rm_i$, para toda $i \in I$.
Considere $\mathscr{C}$=$\{K \leq M | N \leq K \ \ m_i \notin K, \forall i \in I\}$. Observe que $\langle \mathscr{C}, \subseteq \rangle$ es un copo y $\mathscr{C}$ es no vacío pues $N \in \mathscr{C}$. Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $\mathscr{C}$. Entonces se tiene que $\cup_{K \in \mathcal{C}} K$ pertenece a $\mathscr{C}$. Es claro que $N \subseteq \cup_{K \in \mathcal{C}} K$. Además, $m_i \notin \cup_{K \in \mathcal{C}} K$ para toda i pues si sucede lo contrario, existe $m_{i_0} \in N_j$ para algún $N_j \in \mathcal{C}$, lo cual es una contradicción. Así que $\cup_{K \in \mathcal{C}} K \in \mathscr{C}$. Por el lema de Zorn, $\langle \mathscr{C}, \subseteq \rangle$ tiene elemento máximo, digamos, P. Afirmamos que P es submódulo primo de M. En efecto: Sean K, L submódulos totalmente invariantes de M tales que $K \nleq P$ y $L \nleq P$. Por tanto, existen $m_i \in K$ y $m_j \in L$ tales que $m_i, m_j \notin P$. Supongamos que $i \leq j$. Entonces $Rm_{i_M} Rm_i \leq K$. Por construcción, se tiene $m_j \in Rm_{i_M} Rm_i$. Por tanto, $m_j \in K$. Si escojemos k=máx$\{i, j\}$, se tiene que $m_k \in K$ y $m_k \in L$. Por consiguiente, $Rm_{k_M} Rm_k \leq K_M L$. Y así, $K_M L \nleq P$. En consecuencia, P es un submódulo primo de M.

Ahora, afirmamos que $N = \mathcal{J} := \cap P_i$, donde P_i es un submódulo primo de M tal que $N \subseteq P_i$. Es claro que $N \subseteq \mathcal{J}$. Resta verificar que $\mathcal{J} \subseteq N$. Supongamos lo contrario, es decir, existe $m \in \mathcal{J}$ tal que $m \notin N$ ($m \neq 0$). Nuevamente, se obtiene una sucesión de elementos distintos de cero $\mathcal{G} = \{m = m_0, m_1, m_2, \ldots, m_n, \ldots\}$ de M tales que $m_i \notin N$ y $Rm_{i+1_M} Rm_{i+1} \leq Rm_{i_M} Rm_i$ para cada i. Por el lema de Zorn existe un submódulo Q, con $N \leq Q$ máximo con la propiedad $m_i \notin Q$ para toda i. Por un argumento similar al párrafo anterior, se demuestra que Q es un submódulo primo de M, lo cual es imposible pues se tiene que $N \leq Q$ pero $\mathcal{J} \nsubseteq Q$. Por lo tanto $N = \mathcal{J}$. Concluimos que N es una intersección de submódulos primos de M.

$(3) \implies (1):$ Es claro.

□

Por otra parte, notamos que en la hipótesis de la Proposición 4.0.26 sólo bastó considerar que M fuera un R-módulo dúo. Por consiguiente, sucede lo siguiente:

Corolario 4.0.27. ([10], Proposition 2.13) *Sean R un anillo, M un R-módulo multiplicación y N un submódulo propio de M. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *N es un submódulo semiprimo de M;*
2. *Si $m \in M$ es tal que $Rm_M Rm \leq N$, entonces $m \in N$;*
3. *N es una intersección de submódulos primos de M.*

Demostración. Todo módulo multiplicación es módulo dúo. □

Observación 4.0.28. *La condición 2 de la Proposición 4.0.26 y la 2 de la Proposición 4.0.27 implica la existencia de submódulos primos dn M para módulos dúo y módulos multiplicación, respectivamente.*

Definición 4.0.29. ([3], Definition 3.17) *Sea P un submódulo primo de M. Dado $L \leq_{f.i} M$, con $L \neq M$. Decimos que P es mínimo por encima de L si P es un elemento mínimo del conjunto:*

$$\{K \in Spec(M) \mid L \subseteq K\},$$

es decir, si P contiene a L y además, no existe un submódulo primo de M tal que contenga a L y esté estrictamente contenido en P. Decimos que P es mínimo en $Spec(M)$ si P es mínimo por encima del submódulo 0.

Definición 4.0.30. *Sea M un R-módulo. Decimos que M es*

1. *coatómico si todo submódulo propio de M está contenido en un submódulo máximo de M.*
2. *$f.i$-coatómico si todo submódulo totalmente invariante propio de M está contenido en un submódulo máximo totalmente invariante de M.*

Lema 4.0.31. ([3], Lemma 3.18) *Sea M un R-módulo casi-proyectivo y $f.i$-coatómico. Entonces para cada $L < M$, existe $K \in Spec(M)$ tal que es mínimo por encima de L. En particular, $Spec(M)$ tiene elementos mínimos.*

Demostración. Sea $L \leq_{f.i} M$ un submódulo propio de M. Considere el conjunto $\mathcal{V}= \{K \in Spec(M) \,|\, L \subseteq K\}$. Puesto que M es casi-proyectivo y $f.i$-coatómico, por el inciso 2 del Corolario 4.0.13 se sigue que $\mathcal{V}$ es no vacío, además, es claro que $\mathcal{V}$ es un conjunto parcialmente ordenado con el orden de la inclusión. Sea $\mathcal{C}$ una cadena descendente en $\mathcal{V}$. Consideremos $K = \bigcap_{N\in\mathcal{V}} N$. Es claro que $L \subseteq K$. También sucede que K es un submódulo primo de M. En efecto: Sean $X, Y \leq_{f.i} M$ submódulos propios de M tales que $X_M Y \leq K$ con $Y \nsubseteq K$. Sea $y \in Y$ tal que $y \notin K$. Entonces existe $K_0 \in \mathcal{C}$ tal que $y \notin K_0$. Sea $W \in \mathcal{C}$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena en $\mathcal{V}$, $K_0 \subseteq W$ o $W \subseteq W$. Si $K_0 \subseteq W$, $X \subseteq K_0 \subseteq W$. Si $W \subseteq K_0$, entonces $y \notin W$, y por tanto, $X_M Y \subseteq K \subseteq W$, así que $X \subseteq W$ pues W es un submódulo primo de M. Por lo tanto, K es un submódulo primo de M. En consecuencia, $K \in \mathcal{V}$. Por el lema de Zorn se sigue que $\mathcal{V}$ tiene un elemento mínimo. Para la última parte, aplicar argumento a $L = 0$. Por tanto, $Spec(M)$ tiene elementos mínimos. □

Lema 4.0.32. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Entonces para cada $L \leq M$, $L \neq M$ existe $K \in Spec(M)$ tal que es mínimo por encima de L. En particular, $Spec(M)$ tiene elementos mínimos.*

Demostración. Como R es un anillo conmutativo y M es un R-módulo multiplicación, entonces por ([15], Theorem 2.5) tenemos que todo submódulo propio de M está contenido en un submódulo máximo de M. Además, por el Corolario 4.0.5 se sigue que todo submódulo propio máximo de M es submódulo primo en M. Entonces el conjunto $\mathcal{V}= \{K \in Spec(M) \mid L \subseteq K\}$ es no vacío. Aplicando el mismo argumento en la demostración del Lema 4.0.31 se sigue que para cada $L \leq M$ submódulo propio existe $K \in Spec(M)$ tal que es mínimo por encima de L. En particular, se sigue que $Spec(M)$ tiene elementos mínimos. □

Observación 4.0.33. *Con las hipótesis del Lema 4.0.32 hacemos hincapié en lo siguiente: Todo submódulo propio N de M está contenido en un submódulo primo P de M.*

Recordemos que si R es un anillo conmutativo e I es un ideal de R, se define el radical de I, $\sqrt{I}$, se define como:

$$\sqrt{I} = \{x \in R \mid x^n \in I \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}$$

En el caso de módulos, se da la siguiente definición introducida por J. Castro et al en [10].

Definición 4.0.34. ([10], Definition 2.15) *Sean R un anillo, M un R-módulo y $N \leq_{f.i} M$. El radical de N en M se define como sigue:*

$$\sqrt{N} = \bigcap \{P \subseteq M \mid P \textit{ es un submódulo primo de } M \textit{ y } N \subseteq P\}.$$

Si M no tiene submódulos primos P tales que $N \subseteq P$, entonces $\sqrt{N} = M$. En particular, $\sqrt{M} = M$. En ambos casos, $N \subseteq \sqrt{N}$.

Observación 4.0.35. *Si M es un R-módulo. Un submódulo totalmente invariante N de M es semiprimo en M si sólo si $N = \sqrt{N}$, por el Corolario 4.0.27.*

Proposición 4.0.36. ([10], Corollary 2.17) *Sea R un anillo, M un R-módulo multiplicación y $N \leq_{f.i} M$, $N \neq M$. Si $\sqrt{N} \neq M$, entonces $\sqrt{N}$ es el menor submódulo semiprimo de M tal que $N \subseteq \sqrt{N}$.* □

Corolario 4.0.37. ([10], Remark 2.16) *Si R un anillo conmutativo, M un R-módulo multiplicación y $N \leq_{f.i} M$, $N \neq M$, entonces $\sqrt{N}$ es el menor submódulo semiprimo de M tal que $N \subseteq \sqrt{N}$.* □

Corolario 4.0.38. *Si R un anillo, M un R-módulo casi-proyectivo y $f.i$-coatómico y $N \leq_{f.i} M$, $N \neq M$, entonces $\sqrt{N}$ es el menor submódulo semiprimo de M tal que $N \subseteq \sqrt{N}$.*

Demostración. Sea $L \leq_{f.i} M$ un submódulo propio de M. Puesto que M es casi-proyectivo y $f.i$-coatómico, por el inciso 2 del Corolario 4.0.13 se sigue que existen submódulos primos que contienen a L. Por tanto, $\sqrt{N} \neq M$. Por la Proposición 4.0.36 se sigue que $\sqrt{N}$ es el menor submódulo semiprimo de M tal que $N \subseteq \sqrt{N}$. □

A continuación se enlistan algunas propiedades del radical de un submódulo totalmente invariante de M.

Proposición 4.0.39. ([10], Proposition 2.18) *Sea R un anillo, M un R-módulo. Si $N, L \leq_{f.i} M$, entonces:*

1. *Si $N \subseteq L$, entonces $\sqrt{N} \subseteq \sqrt{L}$;*
2. $\sqrt{N} = \sqrt{\sqrt{N}}$;
3. $\sqrt{N + L} = \sqrt{\sqrt{N} + \sqrt{L}}$;
4. $\sqrt{N \cap L} \subseteq \sqrt{N} \cap \sqrt{L}$;
5. $\sqrt{N_M L} \subseteq \sqrt{N} \cap \sqrt{L}$.

Demostración. Se sigue fácilmente por definición de radical de N en 4.0.34. □

Observación 4.0.40. *Si definimos $N^2 := N_M N$, entonces por inducción, para cualquier entero $n \geq 1$, definimos $N^n := N_M N^{n-1}$. Notemos que si N es un submódulo primo de M, entonces $\sqrt{N^n} = N$.*

Proposición 4.0.41. ([10], Proposition 1.6) *Sea R un anillo conmutativo, M un R-módulo multiplicación fiel y sea P un ideal primo de R tal que $PM \subsetneq M$. Si I es un ideal de R tal que $IM \subseteq PM$, entonces $I \subseteq P$.* $\square$

Corolario 4.0.42. ([10], Corollary 1.7) *Sea R un anillo conmutativo, M un R-módulo multiplicación fiel. Supongamos que P y P' son ideales primos de R tales que $PM \subsetneq M$ y $P'M \subsetneq M$. Si $PM = P'M$, entonces $P = P'$.* $\square$

Corolario 4.0.43. ([10], Corollary 1.8) *Sea R un anillo conmutativo, M un R-módulo multiplicación fiel tal que $PM \subsetneq M$ para todos los ideales máximos P de R. Si Q es un ideal semiprimo de R e I es un ideal de R tal que $IM \subseteq QM$, entonces $I \subseteq Q$.* $\square$

Corolario 4.0.44. ([10], Corollary 1.9) *Sea R un anillo conmutativo y M es un R-módulo multiplicación fiel tal que $QM \subsetneq M$ para todos los ideales máximos Q de R. Si P y P' son ideales semiprimos de R tales que $PM = P'M$, entonces $P = P'$.* $\square$

Los siguientes resultados muestran que, bajo la hipótesis del Teorema 3.1.5, los ideales primos (respectivamente, ideales semiprimos) de R corresponden a submódulos primos (respectivamente, submódulos semiprimos de M) de , M y reciprocamente, cada submódulo primo (respectivamente, submódulos semiprimos de M) de M, corresponde a un único ideal primo (respectivamente, ideal semiprimo de R) de R.

Proposición 4.0.45. ([10], Proposition 2.21) *Supongamos que λ y μ son como en la Definición 3.1.1. Si R es un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación distinto de cero, entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Si N es un submódulo primo de M, entonces $\mu(N) = Ann_R(M/N)$ es un ideal primo de R;*

2. *Si M es un R-módulo multiplicación fiel y Q es un ideal primo de R tal que $QM \neq M$, entonces $\lambda(Q) = QM$ es un submódulo primo de M, más aún, $Q = Ann_R(M/QM)$.*

Demostración.

1. Supongamos que I y J son ideales de R tales que $IJ \subseteq Ann_R(M/N)$. Así que $(IJ)M \subseteq N$. Considere los submódulos $K = IM, L = JM$. Como M es un módulo multiplicación, entonces $K_M L = (IJ)M \subseteq N$. Como N es submódulo primo de M, entonces $IM = K \subseteq N$ o $JM = L \subseteq N$. Por consiguiente, $I \subseteq Ann_R(M/N)$ o $J \subseteq Ann_R(M/N)$. Por tanto, $Ann_R(M/N)$ es un ideal primo de R.

2. Sean $K, L \leq M$ tales que $K_M L \subseteq QM$. Como M es un módulo multiplicación, entonces existen ideales I y J de R tales que $K = IM$, $L = JM$. En consecuencia, $(IJ)M = (IM)_M(JM) = K_M L \subseteq QM$. Por 4.0.41 tenemos que $IJ \subseteq Q$. Como Q es un ideal primo de R, $I \subseteq Q$ o $J \subseteq Q$. Por tanto, $IM \subseteq QM$ o $JM \subseteq QM$. En consecuencia, QM es un submódulo primo de M. Para la última parte, sabemos que $N = QM$ es un submódulo primo de M, y por el inciso 1 $Ann_R(M/N)$ es un ideal primo de R. Como $QM = N = Ann_R(M/N)M$, por el Corolario 4.0.41 tenemos que $Q = Ann_R(M/N) = Ann_R(M/QM)$.

□

Observemos que se puede obtener un resultado análogo a la Proposición 4.0.45 en términos de submódulos semiprimos de M e ideales semiprimos de R.

Proposición 4.0.46. ([10], Proposition 2.23, Corollary 2.24) *Si R un anillo conmutativo, M un R-módulo multiplicación distinto de cero y λ y μ son como en la Definición 3.1.1, entonces se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Si N es un submódulo semiprimo de M, entonces $\mu(N) = Ann_R(M/N)$ es un ideal semiprimo de R;*

2. *Si M es un R-módulo multiplicación fiel, supongamos que para todo ideal máximo de R, $PM \neq M$ y Q es un ideal semiprimo de R tal que $QM \neq M$, entonces $\lambda(Q) = QM$ es un submódulo semiprimo de M, más aún, $Q = Ann_R(M/QM)$.*

□

Corolario 4.0.47. ([10], Corollary 2.26) *Sean R un anillo conmutativo, M un R módulo multiplicación fiel y λ y μ son como en la Definición 3.1.1. Supongamos que $QM \neq M$ para todo ideal máximo Q de R. Entonces:*

1. *Un submódulo N de M es primo en M si y sólo si existe un único ideal primo P de R tal que $N = PM$;*

2. *Un submódulo L de M es submódulo semiprimo de M si y sólo si existe un único ideal semiprimo Q de R tal que $L = QM$.*

Demostración.

1. Supongamos que $N \leq M$ es un primo de M, entonces por el inciso 1 de la Proposición 4.0.45 se tiene que el ideal $\mu(N) = Ann_R(M/N)$ es un ideal primo de R. Como M es un R-módulo multiplicación, entonces $N = Ann_R(M/N)M$. Recíprocamente, supongamos que existe un ideal primo I de R tal que $N = IM$. Por el inciso 2 de la Proposición 4.0.45 se tiene que el submódulo $\lambda(I) = IM = N$ es un submódulo primo de M.

2. La demostración es similar al inciso 1.

□

Corolario 4.0.48. [10] *Sean R un anillo conmutativo, M un R-módulo multiplicación tal que $M \neq QM$ para todo ideal máximo Q de R y μ son como en la Definición 3.1.1. Entonces:*

1. $\lambda_{|_{Spec(R)}} : Spec(R) \to Spec(M)$ *es biyectiva;*

2. *Existe una correspondencia biyectiva entre los ideales semiprimos de R y los submódulos semiprimos de M.*

Demostración. Se sigue de el Corolario 4.0.47. □

Teorema 4.0.49. ([10], Theorem 2.27) *Sea R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación fiel tal que $QM \neq M$ para todo ideal máximo Q de R. Entonces $\sqrt{IM} = \sqrt{I}M$ para todos los ideales I de R, donde $\sqrt{I}$ es el radical de I.*

Demostración. Dado un ideal I de R. Entonces $\sqrt{I} = \cap_{i \in X} P_i$, donde P_i es un ideal primo de R tal que $I \subseteq P_i$ para cada $i \in X$. Por [[15], Theorem 1.6] tenemos que $\sqrt{I}M = \bigcap_{i \in X}(P_i M)$. Por el inciso 2 de la Proposición 4.0.45, $P_i M$ es un submódulo primo de M para cada $i \in X$. Entonces $\sqrt{I}M$ es un submódulo semiprimo de M por la Proposición 4.0.27. Como $I \subseteq \sqrt{I}$, entonces $IM \subseteq \sqrt{I}M$. Por el Corolario 4.0.37 se sigue que $\sqrt{IM} \subseteq \sqrt{I}M$. Por otro lado, considere el conjunto $\mathcal{N} = \{N' \subset M \mid N'$ es submódulo primo de M y $IM \subseteq N'\}$. Entonces $\sqrt{IM} = \cap_{N \in \mathcal{N}} N'$. Si $N' \in \mathcal{N}$, entonces $N' = P'M$, con P' es ideal primo de R. Entonces $IM \subseteq P'M$, y así, por la Proposición 4.0.41 tenemos que $I \subseteq P'$. Así que $\sqrt{I}M \subseteq P'M = N'$. Como es cierto para cada $N' \in \mathcal{N}$, concluimos que $\sqrt{I}M \subseteq \sqrt{IM}$. □

Corolario 4.0.50. ([10], pág 1295) *Sea R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación fiel tal que $QM \neq M$ para todo ideal máximo Q de R. Si N es un submódulo propio de M e $I \leq R$ es tal que $N = IM$, entonces $\sqrt{N} = \sqrt{I}M$.*

Demostración. Si N es un submódulo propio de M, entonces $N = IM$ para algún ideal I de R. Por el Teorema 4.0.49, se sigue que $\sqrt{N} = \sqrt{I}M$. $\square$

Los siguientes resultados muestran que para cualquier módulo multiplicación M sobre cualquier anillo R invariante izquierdo con multiplicación conmutativa de ideales, al igual que en el caso conmutativo, se tiene, bajo ciertas condiciones, una correspondencia entre los ideales primos (resp. semiprimos) de R y los submódulos primos (resp. semiprimos) de M, más aún, bajo ciertas condiciones, dicha correspondencia es biunívoca. Todos estos resultados fueron posibles gracias a algunos de los resultados de Tuganvaev ([43]) y que fueron expuestos en la sección anterior.

Teorema 4.0.51. *Sean R un anillo invariante izquierdo con multiplicación conmutativa de ideales, M un R-módulo multiplicación, $\langle \mu, \lambda \rangle$ y $\langle \psi, \varphi \rangle$ conexiones de Galois como antes, y sea $r(M) = Ann_R(M)$. Entonces:*

1. *Si $N \leq M$ es un submódulo primo, entonces $\psi(N) = Ann_R(M/N)/r(M)$ es un ideal primo de R/rM;*

2. *Supongamos que M es fiel. Si $N \leq M$ es un submódulo primo, entonces las funciones ψ y μ coinciden y además, $\psi(N) = Ann_R(M/N)$ es ideal primo de R, más aún, ψ es morfismo de copos;*

3. *Supongamos que M es fiel, M genera a todos sus submódulos y supongamos que $PM \neq M$ para todo ideal máximo $P \leq R$. Si $Q \leq R$ es un ideal primo tal que $QM \neq M$, entonces $\varphi = \lambda$ coinciden y $\varphi(Q) = QM$ es submódulo primo de M. Más aún, $Q = Ann_R(M/QM)$.*

Demostración.

1. Por teorema de la correspondencia, es suficiente probar que $Ann_R(M/N)$ es ideal primo en R. Sean $I, J \leq R$ tales que contienen a $r(M)$ y $IJ \subseteq Ann_R(M/N)$. Entonces $(IJ)M \subseteq N$. Consideremos los submódulos $K = IM$ y $L = JM$. Puesto que M es R-módulo multiplicación, entonces $K_M L \leq (IJ)M \subseteq N$. Como N es submódulo primo de M, entonces $IM = K \subseteq N$ o $JM = L \subseteq N$, es decir, $I \subseteq Ann_R(M/N)$ o $J \subseteq Ann_R(M/N)$. Por tanto, $Ann_R(M/N)$ es un ideal que contiene a $r(M)$. Concluimos que $Ann_R(M/N)/r(M)$ es ideal primo de $R/r(M)$.

2. Si M es fiel, entonces los morfismos de copos ψ y μ coinciden, y el resto de la demostración es similar a la del inciso 1.

3. Sean $K, L \leq M$ tales que $K_M L \subseteq QM$. Como M es módulo multiplicación, entonces existen ideales $I, J \leq R$ tales que $K = IM$, $L = JM$. En consecuencia, $(IJ)M = (IM)_M(JM) = K_M L \subseteq QM$. Por ([43], Theorem 3.11) implica que $IJ \subseteq Q$. Como Q es ideal primo de R, entonces $I \subseteq Q$ o $J \subseteq Q$, es decir, $IM \subseteq QM$ o $JM \subseteq QM$. Entonces QM es submódulo primo de M. Finalmente, por el inciso anterior $Ann_R(M/N)$ es ideal primo de R. Como $QM = N = Ann_R(M/N)M$. Por ([43], Theorem 3.11) se sigue que $Q = Ann_R(M/N)$. Concluimos que $Q = Ann_R(M/QM)$.

□

Teorema 4.0.52. *Sean R un anillo invariante izquierdo con multiplicación conmutativa de ideales, M un R-módulo multiplicación, $\langle \mu, \lambda \rangle$ y $\langle \psi, \varphi \rangle$ conexiones de Galois como antes y sea $r(M) = Ann_R(M)$. Entonces se cumple lo siguiente:*

1. *Si $N \leq M$ es submódulo semiprimo, $\psi(N) = Ann_R(M/N)/r(M)$ es un ideal semiprimo de $R/r(M)$;*

2. *Si M es fiel, entonces:*

   a. *Los morfismos de copos φ y μ coinciden;*

   b. *Si $N \leq M$ es semiprimo, entonces $\varphi(N) = Ann_R(M/N)$ es un ideal semiprimo de R.*

3. *Si M es fiel, entonces:*

   a. *Los morfismos de copos φ y μ coinciden;*

   b. *Supongamos que M genera a todos sus submódulos y que $PM \neq M$ para cualquier ideal máximo P de R. Si Q es ideal semiprimo de R tal que $QM \neq M$, entonces $\varphi(Q) = QM$ es submódulo semiprimo de M, más aún, $Q = Ann_R(M/QM)$.*

Demostración. Sólo demostraremos el inciso 3. Supongamos que M es fiel. Entonces claramente $\varphi = \lambda$. Por otro lado, sea Q ideal semiprimo de R tal que $QM \neq M$. Sea $K \leq M$ tal que $K_M K \subseteq QM$. Como M es módulo multiplicación, entonces $K = IM$ para algún ideal I de R. Así, $(II)M = K_M K \subseteq QM$. Por ([43], Theorem 3.11) se tiene que $II \subseteq Q$. Como Q es ideal semiprimo, entonces $I \subseteq Q$, lo cual implica que $IM \subseteq QM$. Por tanto, QM es submódulo semiprimo. □

Teorema 4.0.53. *Sean R un anillo invariante izquierdo con multiplicación conmutativa de ideales y M un R-módulo multiplicación fiel. Supongamos que $QM \neq M$ para todo ideal máximo Q de R. Entonces:*

1. *Un submódulo N de M es primo en M si y sólo si existe un (único) ideal primo P de R tal que $N = PM$;*

2. *Un submódulo L de M es semiprimo en M si y sólo si existe un (único) ideal semiprimo P de R tal que $L = PM$;*

3. *Un submódulo K de M es submódulo máximo si y sólo si existe un único ideal máximo J de R tal que $K = JM$.*

Demostración.

1. Supongamos que N es un submódulo primo de M. Entonces por el inciso 2 del Teorema 4.0.51, $Ann_R(M/N)$ es un ideal primo de R y además, es tal que $N = Ann_R(M/N)M$, como se quería. La otra implicación se sigue facilmente del inciso 3 del Teorema 4.0.51.

2. Supongamos que L es un submódulo semiprimo de M. Por el Corolario 4.0.27 tenemos que $L = \bigcap_{i\in X} N_i$, donde N_i es submódulo primo de M para cada $i \in X$. Ahora, del inciso 2 del Teorema 4.0.52 se sigue que para cada $i \in X$, $Ann_R(M/N_i)$ es un ideal semiprimo de R y $N_i = Ann_R(M/N_i)M$. En consecuencia, $L = \bigcap_{i\in X} N_i = \bigcap_{i\in X}[Ann_R(M/N_i)M]$. Pero por ([43], Theorem 4.3) se tiene que $L = [\bigcap_{i\in X} Ann_R(M/N_i)]M$. Más aún,

$$\bigcap_{i\in X} Ann_R(M/N_i)$$

   es un ideal semiprimo de R.

   Recíprocamente, supongamos que P es un ideal semiprimo de R. Entonces $P = \bigcap_{i\in Y} P_i$, donde P_i es ideal primo de R para cada $i \in Y$, pero por ([43], Theorem 4.3) se obtiene que $N = PM = \bigcap_{i\in Y}(P_iM)$. En consecuencia, por el inciso 3 del Teorema 4.0.52, tenemos que cada P_iM es un submódulo semiprimo de M. Concluimos que N es un submódulo semiprimo de M por el Corolario 4.0.27.

3. Ver el Teorema 3.1.15.

□

Capítulo 5

Topología de Zariski para módulos multiplicación

Dado un módulo multiplicación M sobre un anillo conmutativo R, se sabe que $(Spec(M), \mathcal{T})$ es un espacio topológico (Ver [10], Proposition 3.1), donde $\mathcal{T}$ es la topología de Zariski. Dado un módulo multiplicación M, veremos que hay una conexión de Galois antítona entre la retícula de submódulos de M y el conjunto potencia del espectro primo de M, más aún, veremos que existe una correspondencia biunívoca entre los conjuntos cerrados de $(Spec(M), \mathcal{T})$ y los submódulos semiprimos de M. Esta situación generaliza lo que sabemos que sucede en álgebra conmutativa (cuando $M = R$, donde R es un anillo conmutativo).

Presentamos algunas propiedades que cumplen los conjuntos abiertos. Análogamente, propiedades que satisfacen por los conjuntos cerrados.

En [10], los autores caracterizan a los conjuntos de la forma $\mathcal{U}(N)$ en términos de: submódulos finitamente generados; submódulos uniformes.

En este trabajo caracterizamos a los conjuntos $\mathcal{U}(N)$ en términos de los submódulos esenciales.

Consideremos la retícula $\Lambda(M)$ de todos los submódulos de un R-módulo arbitrario M. Sea $X = Spec(M) = \{P \leq M \mid P$ es un submódulo primo de $M\}$.

Proposición 5.0.1. ([10], Proposition 3.1) *Sea R un anillo y M es un R-módulo multiplicación. Entonces $Spec(M)$ es un espacio topológico cuyos subconjuntos cerrados están dados por $\mathcal{V}(N) = \{P \in Spec(M) \mid N \subseteq P\}$. Dualmente, sus subconjuntos abiertos son de la forma $\mathcal{U}(N) = \{P \in Spec(M) \mid N \nsubseteq P\}$.*

A continuación presentamos algunas propiedades que tienen los subconjuntos abiertos del espacio topológico $(Spec(M), \mathcal{T})$, con M un módulo multiplicación sobre un anillo conmutativo.

Lema 5.0.2. ([10], Lemma 3.3) *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Si $N, L \leq M$, entonces se cumple lo siguiente:*

1. $\mathcal{U}(L) \cap \mathcal{U}(N) = \mathcal{U}(L_M N)$;
2. $\mathcal{U}(L) = \varnothing$ *si y sólo si* $L \subseteq \sqrt{0}$;
3. $\mathcal{U}(L) = Spec(M)$ *si y sólo si* $L = M$;
4. $\mathcal{U}(L) = \mathcal{U}(N)$ *si sólo si* $\sqrt{L} = \sqrt{N}$;
5. $\mathcal{U}(N) = \mathcal{U}(\sqrt{N})$ *para todo* $N \leq M$.

□

Observación 5.0.3. ([10], Remark 3.2) *Del inciso 5 del Lema 5.0.2 podemos observar que $\mathcal{T} = \{\mathcal{U}(N) \mid N$ submódulo semiprimo de $M\}$. En consecuencia, podemos considerar los conjuntos abiertos como $\mathcal{U}(N)$ con N submódulo semiprimo de M o $N = M$.*

Si E es cualquier subconjunto de $M \in R$-Mod y $\langle E \rangle = \sum_{x \in E} Rx$, entonces $\mathcal{V}(E)$=$\mathcal{V}(\langle E \rangle)$ y $\mathcal{V}(\langle E \rangle)^c$ de $\mathcal{V}(\langle E \rangle)$ es el conjunto $\mathcal{U}(\langle E \rangle)$. Los conjuntos $\mathcal{V}(\langle E \rangle)$ satisfacen los axiomas de conjuntos cerrados en la topología de Zariski. También, notemos que $\mathcal{V}(\langle \{m\} \rangle)^c$= $\mathcal{V}(Rm)^c$= $\mathcal{U}(Rm)$ para cada $m \in M$.

El siguiente resultado muestra que existe una base formada por una clase especial de conjuntos abiertos para la topología de Zariski $(Spec(M), \mathcal{T})$, con M un R-módulo dúo.

Proposición 5.0.4. ([10], Proposition 3.5) *Sean R un anillo y M un R-módulo dúo. Entonces la colección $\mathcal{B}$= $\{\mathcal{U}(Rm) \mid m \in M\}$ es una base de conjuntos abiertos para la topología de Zariski $(Spec(M), \mathcal{T})$.*

Demostración. $\mathcal{B}$= $\{\mathcal{U}(Rm) \mid m \in M\} \subseteq \mathcal{T}$ es una base para $(Spec(M), \mathcal{T})$ si y sólo si

1. $X = \bigcup \mathcal{B}$= $\bigcup\{\mathcal{U}(Rm) \mid m \in M\}$
2. Si para cada $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$$\in \mathcal{B}$ y $P \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$, existe $\mathcal{B}_3 \in \mathcal{B}$ tal que $P \in \mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$.

   En efecto:

   1. $X = Spec(M) = \mathcal{U}(M) = \mathcal{U}(\sum_{m \in M} Rm) = \bigcup_{m \in M} \mathcal{U}(Rm) = \bigcup \mathcal{B}$.

2. Sean $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2 \in \mathcal{B}$ y $P \in \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$. Entonces $\mathcal{B}_1 = \mathcal{U}(Rm_1), \mathcal{B}_2 = \mathcal{U}(Rm_2)$ para algunos $m_1, m_2 \in M$.
   Por el inciso 1 del Lema 5.0.2 se tiene que $\mathcal{U}(Rm_1) \cap \mathcal{U}(Rm_2) = \mathcal{U}(Rm_{1M}Rm_2)$. Como $P \in \mathcal{U}(Rm_1) \cap \mathcal{U}(Rm_2)$, entonces existe $m_0 \in (Rm_{1M}Rm_2)\backslash P$, y por tanto, $Rm_0 \subseteq (Rm_{1M}Rm_2)\backslash P$. Por consiguiente,
   $P \in \mathcal{U}(Rm_0) \subseteq \mathcal{U}(Rm_{1M}Rm_2) = \mathcal{U}(Rm_1) \cap \mathcal{U}(Rm_2) = \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$. Si consideramos $\mathcal{B}_3 = \mathcal{U}(Rm_0)$, entonces $P \in \mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2$. Concluimos que $\mathcal{B}$ es una base de conjuntos abiertos para la topología $(Spec(M), \mathcal{T})$.

$\square$

Observación 5.0.5. *Considere la función:*

$$\mathcal{V}\colon \Lambda(M) \to \mathscr{P}(X) \text{ dado por } \mathcal{V}(N) = \{P \in Spec(M) \mid N \subseteq P\}.$$

que satisface:
Si $N, K \leq M$ tales que $N \subseteq K$, entonces $\mathcal{V}(K) \subseteq \mathcal{V}(N)$.

Observación 5.0.6. *Se puede obtener una construcción recíproca de $\mathcal{V}$:*

Para cada $\mathcal{A} \subseteq Spec(M)$, definimos

$$\mathcal{I} : \mathscr{P}(Spec(M)) \to \Lambda(M) \quad \text{como} \quad \mathcal{I}(\mathcal{A}) := \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Notemos que si $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq Spec(M)$ con $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, entonces $\mathcal{I}(\mathcal{B}) \leq \mathcal{I}(\mathcal{A})$. Además se cumple que:

1. $\mathcal{I}(\bigcup_{i \in X} U_i) = \bigcap_{i \in X} \mathcal{I}(U_i)$ *para cada* $\{U_i\}_{i \in X} \in Spec(M)$.
2. $\mathcal{I}(\{p\}) = p$ *para cada* $p \in Spec(M)$.

Bajo ciertas condiciones, las correpondencias anteriores son inversas una de las otra, y para probar probar esto, se usarán las propiedades y conceptos siguientes:

Recordemos que si $N \leq_{f.i} M$, se define el radical de N como

$$\sqrt{N} = \bigcap\{P \in Spec(M) \mid N \subseteq P\}.$$

En particular, $\sqrt{0} = \bigcap\limits_{P \in Spec(M)} P = \mathcal{I}(Spec(M))$. Si M no contiene submódulos primos P tales que $N \subseteq P$, entonces $\sqrt{N} = M$. En particular, $\sqrt{M} = M$.

Observamos que $\sqrt{0} = M$ si y sólo si $Spec(M) = \varnothing$.

Observación 5.0.7. *Como $\mathcal{V}$ e $\mathcal{I}$ invierten orden y son tales que:*

- $N \leq \mathcal{IV}(N)$ *para cada* $N \leq M$;
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{VI}(\mathcal{A})$ *para cada* $\mathcal{A} \subseteq Spec(M)$.

Entonces la pareja $(\mathcal{V}, \mathcal{I})$ *forma una conexión de Galois antítona.*

Sabemos que si $\langle f, g \rangle : \langle P, \leq \rangle \to \langle Q, \preceq \rangle$ es una conexión de Galois antítona, entonces $Im\ g$ y $Im\ f$ son sistemas de cerrados de P y Q, respectivamente. Asimismo, existe un anti-isomorfismo entre éstos. En virtud de las definiciones de $\mathcal{V}$ y $\mathcal{I}$ y de la Observación 5.0.7, el siguiente resultado nos permitirá caracterizar los elementos de los sistemas de cerrados $Im\mathcal{V}$ y $Im\mathcal{I}$ en la conexión de Galois antítona $(\mathcal{V}, \mathcal{I})$ como en la Observación 5.0.7.

Lema 5.0.8. *Sean R un anillo, M un R-módulo multiplicación. Entonces:*

1. *Si* $N \leq M$, *entonces* $\mathcal{IV}(N) = \sqrt{N}$;
2. *Si* $\mathcal{A} \subseteq Spec(M)$, *entonces* $\mathcal{VI}(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{A}}$, *donde* $\overline{\mathcal{A}}$ *es la cerradura del subconjunto* $\mathcal{A}$ *en el espacio topológico* $(Spec(M), \mathcal{T})$.

Demostración.

1. $\sqrt{N} = \bigcap\{P \in Spec(M) \mid N \subseteq P\} = \bigcap\{P \in Spec(M) \mid P \in \mathcal{V}(N)\} = \mathcal{IV}(N)$.
2. Como $\mathcal{I}(\mathcal{A}) = \bigcap_{P \in \mathcal{A}} P$, entonces $\mathcal{I}(\mathcal{A}) \subseteq P$ para cada $P \in \mathcal{A}$, por tanto, $P \in \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{A})) = \mathcal{VI}(\mathcal{A})$. Por consiguiente, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{VI}(\mathcal{A})$. Por ser $(\mathcal{V}, \mathcal{I})$ conexión de Galois y como $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{A}))$ es cerrado que contiene a $\mathcal{A}$, entonces $\overline{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{VI}(\mathcal{A})$. Recíprocamente, sea $Y \subseteq Spec(M)$. Observe que $\overline{Y} = \mathcal{V}(N)$ para algún $N \leq M$, así que $N \subseteq \bigcap_{P \in Y} P = \mathcal{I}(Y)$. Como $\mathcal{V}$ invierte orden, entonces $\mathcal{V}(\mathcal{I}(Y)) \subseteq \mathcal{V}(N) = \overline{Y}$. Concluimos que $\mathcal{VI}(Y) = \overline{Y}$.

□

Corolario 5.0.9. *Sean R un anillo y M un R-módulo multiplicación. Dado $N \in \Lambda(M)$, $\mathcal{A} \in \mathscr{P}(Spec(M))$. Entonces:*

1. $\mathcal{IV}(N) = N$ *si y sólo si* N *es submódulo semiprimo de* M *o* $N = M$;
2. $\mathcal{VI}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ *si y sólo si* $\mathcal{A}$ *es un conjunto cerrado en el espacio topológico* $(Spec(M), \mathcal{T})$.

Demostración.

1. Supongamos que $\mathcal{IV}(N) = N$. Por el inciso 1 del Lema 5.0.8 tenemos que $\mathcal{IV}(N) = \sqrt{N}$. Así que $N = \sqrt{N}$. Entonces N es semiprimo en M. Recíprocamente, supongamos que N es semiprimo en M, entonces $N = \sqrt{N}$. Por el inciso 1 del Lema 5.0.8 concluimos que $\mathcal{IV}(N) = N$.

2. Supongamos que $\mathcal{VI}(\mathcal{A})= \mathcal{A}$. Por el inciso 2 del Lema 5.0.8 implica que $\mathcal{VI}(\mathcal{A})= \overline{\mathcal{A}}$. En consecuencia, $\mathcal{A}$ es cerrado en $(Spec(M), \mathcal{T})$. Por otro lado, si $\mathcal{A}$ es cerrado en el espacio topológico $(Spec(M), \mathcal{T})$. Por el inciso 2 del Lema 5.0.8 se sigue fácilmente que $\mathcal{VI}(\mathcal{A})= \mathcal{A}$.

□

Observación 5.0.10. *Si M es un R-módulo multiplicación y $(\mathcal{V}, \mathcal{I})$ es la conexión como en el Corolario 5.0.9, entonces identificamos a $Im\ \mathcal{I}$ como el conjunto de submódulos semiprimos de M pues sabemos que todo submódulo N de M tal que $N = \sqrt{N}$ es un submódulo semiprimo de M. De aquí en adelante, hacemos la siguiente notación:*

$$\begin{aligned} Semp(M) &= \{N \leq M \mid N \text{ es submódulo semiprimo de } M\} \cup \{M\}. \\ &= \{N \leq M \mid N = \sqrt{N}\} \cup \{M\}. \end{aligned}$$

Además, observe que $(Semp(M), \subseteq, \wedge, \vee', \sqrt{0}, M)$ es una (sub)retícula completa. En efecto: por la Proposición 1.1.15 se tiene que el sistema de cerrados $Semp(M)$ de la retícula completa $\Lambda(M)$ es cerrada bajo ínfimos arbitarios, y por consiguiente, cerrada bajo supremos arbitrarios donde $\bigvee' X := \mathcal{IV}(\bigvee(X))$ para cualquier $X \subseteq Semp(M)$, esto es, $\bigvee'_{N\in X} N = \sqrt{\sum_{N\in X} N}$.

Corolario 5.0.11. *Sean R un anillo, M un R-módulo multiplicación y $(\mathcal{V}, \mathcal{I})$ la conexión de Galois como en el Corolario 5.0.9. Entonces existe un anti-isomorfismo entre las (sub)retículas completas:*

$$Im\,\mathcal{V} = \{\mathcal{A} \subseteq Spec(M) \mid \mathcal{A}= \overline{\mathcal{A}}\} \quad y \quad Im\,\mathcal{I} = \{N \in \Lambda(M) | \ N = \sqrt{N}\} \cup \{M\}.$$

Demostración. Se sigue de las proposiciones 1.1.12 y 1.1.15. □

Definición 5.0.12. *Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ es Noetheriano si y sólo si toda cadena ascendente (descendiente) de abiertos (cerrados) se estaciona.*

Corolario 5.0.13. *Sean R un anillo, M un R-módulo multiplicación y $(\mathcal{V}, \mathcal{I})$ la conexión de Galois como en el Corolario 5.0.7. Entonces*

1. *Existe una anti-correspondencia entre:*

   el conjunto $\{N \leq M \mid N$ es submódulo semiprimo de $M\} \cup \{M\}$ y los subconjuntos cerrados del espacio topológico $(Spec(M), \mathcal{T})$.

2. *$(Spec(M), \mathcal{T})$ es Noetheriano si y sólo si $(Semp(M), \subseteq)$ satisface la condición de cadena ascendente si y sólo si todo subconjunto abierto $\mathcal{U}(N)$ de $(Spec(M), \mathcal{T})$ es compacto.*

Demostración.

1. Identificando a $Im\ \mathcal{V}$ como el conjunto de cerrados de $(Spec(M), \mathcal{T})$ y a $Im\ I$ como el conjunto de submódulos semiprimos N de M o $N = M$, por la Proposición 1.1.12 existe dicha anti-correspondencia.

2. La primera equivalencia se sigue del inciso 1. Para demostrar la segunda equivalencia, primero supongamos que $(Semp(M), \subseteq)$ cumple la condición de cadena ascendente. Sea $\mathcal{U}(N)$ un conjunto abierto de $(Spec(M), \mathcal{T})$ y sea $\{\mathcal{U}(Rm_i) \mid m_i \in I\}$ una cubierta abierta de $\mathcal{U}(N)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que para cada $i \in I$ el submódulo Rm_i es semiprimo pues se tiene que $\mathcal{U}(N) = \mathcal{U}(\sqrt{N})$ por la Observación 5.0.3. Considere la colección $\{Rm_i \mid m_i \in I\}$ que constituye a la cubierta de $\mathcal{U}(N)$ en cuestión. Como $(Semp(M), \subseteq)$ satisface la condición ascendente de cadena, entonces existe un conjunto finito $J = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ de I tal que

$$\sqrt{\sum_{i \in I} Rm_i} = \sqrt{\sum_{i \in J} Rm_i} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} Rm_{i_k}}.$$

Luego,

$$\mathcal{U}(N) \subseteq \textstyle\bigcup_{i \in I} \mathcal{U}(Rm_i) = \mathcal{U}\left(\displaystyle\sum_{i \in I} Rm_i\right) = \mathcal{U}\left(\sqrt{\sum_{i \in I} Rm_i}\right).$$

Pero

$$\mathcal{U}\left(\sqrt{\sum_{i \in I} Rm_i}\right) = \mathcal{U}\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} Rm_{i_k}}\right) = \mathcal{U}\left(\sum_{k=1}^{n} Rm_{i_k}\right) = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{U}(Rm_{i_k}).$$

La penúltima igualdad se sigue de la Observación 5.0.3. Por consiguiente, $\mathcal{U}(N)$ es un conjunto abierto compacto de $(Spec(M), \mathcal{T})$. Recíprocamente, supongamos que todo conjunto abierto $\mathcal{U}(N)$ de $(Spec(M), \mathcal{T})$ es compacto. Sea

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \cdots \subseteq N_l \subseteq \cdots \tag{5.1}$$

una cadena en $(Semp(M), \subseteq)$.

Entonces

$$\mathcal{U}(\sqrt{N_1}) \subseteq \mathcal{U}(\sqrt{N_2}) \subseteq \mathcal{U}(\sqrt{N_3}) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{U}(\sqrt{N_l}) \subseteq \cdots$$

Consideremos $X = \sqrt{\sum_{k\geq 1} N_k}$. Por tanto,

$\mathcal{U}(X) = \mathcal{U}\left(\sqrt{\sum_{k\geq 1} N_k}\right) = \mathcal{U}\left(\sum_{k\geq 1} N_k\right) = \bigcup_{k\geq 1} \mathcal{U}(N_k)$. Por hipótesis, todo conjunto abierto de $(Spec(M), \mathcal{T})$ es un subconjunto compacto. Por tanto, existe un natural $n \geq 1$ tal que $\mathcal{U}(X) = \bigcup_{k=1}^{n} \mathcal{U}(N_k) = \mathcal{U}(N_n)$. Por consiguiente, $X = N_n$, y por tanto, la cadena en (5.1) se estaciona, esto es, $(Semp(M), \subset)$ satisface la condición de cadena ascendente.

□

Definición 5.0.14. *Sea X un espacio topológico. Decimos que X es irreducible si no se puede escribir como la unión de dos subconjuntos propios cerrados, equivalentemente, la intersección de dos subconjuntos abiertos no vacíos es no vacía. Un subconjunto no vacío Y de X es irreducible si el subespacio Y con la topología relativa es irreducible, i.e., si para cualesquiera subconjuntos cerrados relativos C_1, C_2 de Y tales que si $Y \subseteq C_1 \cup C_2$, implica que $Y \subseteq C_1$ o $Y \subseteq C_2$.*

Proposición 5.0.15. *Sea $Y \subseteq X$ un espacio topológico. Si Y es irreducible entonces $\overline{Y}$ es irreducible.*

Demostración. Si $\overline{Y} = V_1 \cup V_2$, donde V_1, V_2 son cerrados en $\overline{Y}$. Como Y es cerrado en X, entonces V_1 y V_2 son cerrados de X. Además, $Y = (Y \cap V_1) \cup (Y \cap V_2)$, donde $(Y \cap V_1)$ y $(Y \cap V_2)$ son cerrados en Y. Como Y es irreducible, entonces $Y = Y \cap V_1$ o $Y = Y \cap V_2$, y por tanto, $Y \subseteq V_1$ o $Y \subseteq V_2$, lo cual implica que $\overline{Y} \subseteq \overline{V_1} = V_1$ o $\overline{Y} \subseteq \overline{V_2} = V_2$, es decir, $\overline{Y} = V_1$ o $\overline{Y} = V_2$. Concluimos que $\overline{Y}$ es irreducible en X. □

Observación 5.0.16. *Una componente irreducible Y es un subconjunto irreducible máximo de X. Por la Proposición 5.0.15 se tiene que las componentes irreducibles son cerradas.*

Proposición 5.0.17. *Sean R un anillo, M un R-módulo dúo. Entonces $Y \subseteq Spec(M)$ es irreducible si y sólo si $\mathcal{I}(Y)$ es un submódulo primo de M.*

Demostración. Suponga que Y es un subconjunto irreducible de $(Spec(M), \mathcal{T})$. Entonces $Y \neq \varnothing$ y $\mathcal{I}(Y) \neq M$. Supongamos que $\mathcal{I}(Y)$ no es un submódulo primo de M, entonces existen $N, L \leq M$ tales que $N_M L \subseteq \mathcal{I}(Y)$ pero $N \nsubseteq \mathcal{I}(Y)$ y

$L \nsubseteq \mathcal{I}(Y)$. Sin embargo, $Y \subseteq \mathcal{V}(N_M L)$ y por tanto, $Y \subseteq Y \cap \mathcal{V}(N_M L) = Y \cap [\mathcal{V}(N) \cap \mathcal{V}(L)] = (Y \cap \mathcal{V}(N)) \cap (Y \cap \mathcal{V}(L))$. Como Y es irreducible, $Y \subseteq Y \cap \mathcal{V}(N)$ o $Y \cap \mathcal{V}(L)$, es decir, $Y \subseteq \mathcal{V}(N)$ o $Y \subseteq \mathcal{V}(L)$, lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathcal{I}$ es un submódulo primo de M.

Recíprocamente, supongamos que $\mathcal{I}(Y)$ es un submódulo primo de M. Por definición, $\mathcal{I}(Y) \neq M$, implica $Y \neq \varnothing$. Supongamos que $Y = (Y \cap \mathcal{V}(L)) \cup (Y \cap \mathcal{V}(N))$. Aplicando $\mathcal{I}$ se obtiene :

$\mathcal{I}(Y) = \mathcal{I}((Y \cap \mathcal{V}(L)) \cup (Y \cap \mathcal{V}(N))) = \mathcal{I}(Y \cap \mathcal{V}(L)) \cap \mathcal{I}(Y \cap \mathcal{V}(N))$. Puesto que M es R-módulo dúo, entonces

$\mathcal{I}(Y \cap \mathcal{V}(L))_M\, \mathcal{I}(Y \cap \mathcal{V}(N)) \subseteq \mathcal{I}(Y \cap \mathcal{V}(L)) \cap \mathcal{I}(Y \cap \mathcal{V}(N)) = \mathcal{I}(Y)$. Como $\mathcal{I}(Y)$ es submódulo primo de M, entonces $\mathcal{I}(Y \cap \mathcal{V}(L)) \subseteq \mathcal{I}(Y)$ o $\mathcal{I}(Y \cap \mathcal{V}(N)) \subseteq \mathcal{I}(Y)$, y por tanto, $Y \subseteq Y \cap \mathcal{V}(L)$ o $Y \subseteq Y \cap \mathcal{V}(N)$. Concluimos que Y es un subconjunto irreducible de $(Spec(M), \mathcal{T})$. □

Corolario 5.0.18. *Si M es un R-módulo multiplicación, entonces $Y \subseteq Spec(M)$ es irreducible si y sólo si $\mathcal{I}(Y)$ es un submódulo primo de M.* □

Corolario 5.0.19. *Sean R un anillo y M un R-módulo multiplicación. Entonces:*

1. *$Spec(M)$ es irreducible si y sólo si $\sqrt{0}$ es submódulo primo de M;*

2. *Si M es casi-proyectivo, entonces*

   $Max(M) = \{L \leq M \mid L$ es submódulo máximo de$M\}$ es irreducible si y sólo si $Rad(M)$ es un submódulo primo de M.

3. *Si R es anillo conmutativo y M es un R-módulo multiplicación, entonces $Max(M) = \{L \leq M \mid L$ es submódulo máximo de$M\}$ es irreducible si y sólo si $Rad(M)$ es un submódulo primo de M.*

Demostración.

1. Se sigue de la observación: $\sqrt{0} = \bigcap_{K \in Spec(M)} K = \mathcal{I}(Spec(M))$.

2. Como M es casi-proyectivo y dúo, por inciso 1 del Corolario 4.0.13 se sigue que $Max(M) \subseteq Spec(M)$. Por la Proposición 5.0.17 se sigue que $Max(M)$ es irreducible si y sólo si $\mathcal{I}(Max(M)) = \bigcap_{K \in Max(M)} = Rad(M)$ es submódulo primo de M.

3. Como R anillo conmutativo y M es un R-módulo multiplicación, por la Proposición 4.0.5 se sigue que $Max(M) \subseteq Spec(M)$. Por la Proposición 5.0.17 se sigue que $Max(M)$ es irreducible en $(Spec(M), \mathcal{T})$ si y sólo si $\mathcal{I}(Max(M)) = Rad(M)$ es submódulo primo de M.

$\square$

Proposición 5.0.20. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. En la anti-correspondencia en 5.0.11, los subconjuntos cerrados irreducibles corresponden a los submódulos primos de M. En particular, las componentes irreducibles de $Spec(M)$ corresponden a los submódulos primos mínimos.*

Demostración. Es claro que $Spec(M) \subseteq Im\, \mathcal{I}$ pues todo submódulo primo es semiprimo de M. Sea $K \in Spec(M)$, entonces $\mathcal{IV}(K) = K$. Por la Proposición 5.0.17 tenemos que $\mathcal{V}(K)$ es un conjunto cerrado irreducible en $(Spec(M), \mathcal{T})$. Recíprocamente, sea $Y = \mathcal{V}(N)$ un conjunto cerrado irreducible para algún $N \in \Lambda(M)$. Por el Corolario 5.0.9, $Y = \overline{Y} = \mathcal{V}(\mathcal{I}(Y))$, y por tanto, por la Proposición 5.0.17 se tiene que $\mathcal{I}(Y) = \sqrt{N}$ es un submódulo primo de M.

Ahora, veremos que las componentes irreducibles de $(Spec(M), \mathcal{T})$ están en correspondencia con los submódulos primos mínimos. Por el Lema 4.0.32 se tiene que $Spec(M)$ tiene submódulos primos mínimos. Entonces por la primera parte, si K es un submódulo primo mínimo en $Spec(M)$, entonces $\mathcal{V}(K)$ es un conjunto cerrado irreducible máximo pues $\mathcal{V}$ manda ínfimos arbitrarios en supremos arbitrarios. Por tanto, $\mathcal{V}(K)$ es una componente irreducible de $Spec(M)$.

Recíprocamente, si β es una componente irreducible de $Spec(M)$, entonces β es cerrada por la Observación 5.0.16. Así que $\beta = \mathcal{V}(K)$ para algún $K \leq M$. Como β es irreducible, por la primera parte $K = \mathcal{IV}(K)$ y $\mathcal{I}(\beta) = \sqrt{K}$ es submódulo primo de M. Por último, si $\mathcal{I}(\beta)$ no fuera mínimo en $Spec(M)$, entonces existe $W \in Spec(M)$ tal que $W \subsetneq \mathcal{I}(\beta)$. Pero $\beta = \mathcal{V}(N) = \mathcal{VIV}(N) = \mathcal{VI}(\beta) \subsetneq \mathcal{V}(W)$ es una contradicción pues $\mathcal{V}(W)$ es irreducible. Debe ocurrir que $\mathcal{I}(\beta)$ es submódulo primo mínimo en $Spec(M)$. $\square$

Observación 5.0.21. *Dado $P \in Spec(M)$, por el Lema 5.0.8 y el inciso 2 de la Observación 5.0.6 se sigue que $\overline{\{P\}} = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\{P\})) = \mathcal{V}(P)$. En particular, para $K \in Spec(M) : K \in \overline{\{L\}}$ si y sólo si $L \subseteq K$.*

Lema 5.0.22. *Sean R un anillo conmutativo, M un R-módulo multiplicación. Si $L \leq M$, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $L \in Max(M)$;
2. $L \in Spec(M)$ *y* $\mathcal{V}(L) = \{L\}$;
3. $\{L\}$ *es cerrado en* $(Spec(M), \mathcal{T})$.

Demostración.

$(1) \Rightarrow (2)$: Por la Proposición 4.0.5, $Max(M) \subseteq Spec(M)$. Además, por la Observación 5.0.21 tenemos que $\overline{\{L\}} = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\{L\})) = \mathcal{V}(L)$. Vamos a demostrar que $\{L\} = \overline{\{L\}}$. Si $N \in \overline{\{L\}}$, entonces $L \subseteq N$. Como L es un submódulo máximo de M, entonces $N = L$. Por tanto, $\{L\} = \overline{\{L\}}$.

$(2) \Rightarrow (3)$: Es claro.

$(3) \Rightarrow (1)$: Supongamos que $\{L\}$ es cerrado en $(Spec(M), \mathcal{T})$, entonces $\{L\} = \mathcal{V}(N)$ para algún $N \leq M$. Si L no es máximo en M, entonces existe $P \in Max(M)$ tal que $L \subsetneq P$. Por tanto, $\{L, P\} \subseteq \mathcal{V}(N) = \{L\}$ lo cual es una contradicción. Entonces L es submódulo máximo de M.

□

Corolario 5.0.23. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Entonces el espacio topológico $(Spec(M), \mathcal{T})$ es un espacio T_0.*

Demostración. Sean $P, Q \in Spec(M)$ tal que $P \neq Q$. Entonces $P \subsetneq Q$ o $Q \subseteq P$. Por la Observación 5.0.21 $Q \notin \overline{\{P\}} = \mathcal{V}(P)$ o $P \notin \overline{\{Q\}} = \mathcal{V}(Q)$, es decir, $Q \notin \mathcal{V}(P)$ o $P \notin \mathcal{V}(Q)$. Entonces $Q \in \mathcal{U}(P)$ o $P \in \mathcal{U}(Q)$. Concluimos que $(Spec(M), \mathcal{T})$ es T_0. □

Corolario 5.0.24. *Sean R es un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Entonces $Spec(M) = Max(M)$ si y sólo si $(Spec(M), \mathcal{T})$ es T_1.*

Demostración. Se sigue del Lema 5.0.22 y del hecho de que un espacio topológico es T_1 si y sólo si todo subconjunto con un único elemento es cerrado. □

Definición 5.0.25. *Sea X un espacio topológico y $Y \subseteq X$ un subconjunto cerrado. Un punto $y \in Y$ se dice que es un punto genérico si $Y = \overline{\{y\}}$. Si todo conjunto cerrado irreducible de X tiene un único punto genérico, entonces llamamos a X un espacio sobrio.*

Corolario 5.0.26. *Sea R un anillo conmutativo, M un R-módulo multiplicación. Entonces $(Spec(M), \mathcal{T})$ es un espacio sobrío.*

Demostración. Sea $\mathcal{Y} \subseteq Spec(M)$ un subconjunto cerrado irreducible. Por la Proposición 5.0.17 $\mathcal{I}(\mathcal{Y})$ es un submódulo primo de M, y por tanto, por la Observación 5.0.21 se tiene la primera igualdad:

$$\overline{\{\mathcal{I}(\mathcal{Y})\}} = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\mathcal{Y})) = \mathcal{Y},$$

donde la segunda igualdad se sigue del Corolario 5.0.9. Se sigue que $\mathcal{I}(\mathcal{Y})$ es un punto genérico de $\mathcal{Y}$. Ahora supongamos que q es otro punto genérico de $\mathcal{Y}$. Entonces $\mathcal{Y} = \overline{\{q\}} = \mathcal{V}(\mathcal{I}(\{q\})) = \mathcal{V}(q)$. De la igualdad anterior y el inciso 2 del Lema 5.0.8 se tiene que $\mathcal{I}(\mathcal{Y}) = \mathcal{I}(\mathcal{V}(q)) = q$. Entonces $(Spec(M), \mathcal{T})$ es un espacio sobrío. □

5.1. Subconjuntos compactos, conexos, irreducibles y densos

Recuerde que si M es R-módulo dúo, en la Proposición 5.0.4 mostramos que $\mathcal{B} = \{\mathcal{U}(Rm) | m \in M\}$ forma una base para el espacio topológico $(Spec(M), \mathcal{T})$. Más aún, si M es un módulo multiplicación fiel sobre un anillo conmutativo R y $QM \neq M$ para todo ideal máximo Q de R, entonces cada conjunto $\mathcal{U}(Rm)$ con $m \in M$ es un subconjunto compacto de $Spec(M)$ como se muestra en el siguiente resultado:

Proposición 5.1.1. *Sean R un anillo conmutativo, M un R-módulo multiplicación fiel y supongamos que $QM \neq M$ para todo ideal máximo Q de R. Entonces todo abierto básico $\mathcal{U}(Rm)$ con $m \in M$ es compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}(Rm)$ un abierto básico de $(Spec(M), \mathcal{T})$ con $m \in M$ y sea $\{\mathcal{U}(Rm_i) \mid m_i \in M, i \in I\}$ una cubierta abierta para $\mathcal{U}(Rm)$, es decir,

$$\mathcal{U}(Rm) \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}(Rm_i).$$

Sea N el submódulo generado por los Rm_i con $m_i \in M$ e $i \in I$. Entonces

$$\mathcal{V}(Rm) \supseteq \bigcap_{i \in I} \mathcal{V}(Rm_i) = \mathcal{V}(\sum_{i \in I} Rm_i) = \mathcal{V}(N).$$

Por el inciso 5 de la Proposición 5.0.2 se tiene que $\mathcal{V}(\sqrt{Rm}) \supseteq \mathcal{V}(\sqrt{N})$, es decir, $\sqrt{Rm} \subseteq \sqrt{N}$. Por el Corolario 4.0.50 se tiene que $\sqrt{N} = \sqrt{I}M$ para algún $I \leq R$ donde $\sqrt{I}$ es el radical del ideal I de R. Entonces $m \in \sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i$, donde $\alpha_i \in \sqrt{I}, m_i \in M$ para $1 \leq i \leq n$. Como $\alpha_i \in \sqrt{I}$, entonces existe un entero positivo k_i tal que $\alpha_i^{k_i} \in I$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Consideremos $l = \sum_{i=1}^{n} k_i$. Entonces $\alpha_i^{l} \in I$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ahora, como M es un R-módulo multiplicación, $Rm_i = N_i M$, con $N_i \leq R$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. En consecuencia,

$$m \in \sum_{i=1}^{n} \alpha_i N_i M = (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i N_i) M$$

Así,

$$m^l \in (\sum_{i=1}^{n} \alpha_i N_i)^l M \subseteq IM = N.$$

Por tanto,

$$\mathcal{V}(Rm) = \mathcal{V}(Rm^l) \supseteq \mathcal{V}((\sum_{i=1}^{n} \alpha_i N_i)^l M) \supseteq \mathcal{V}(N) \quad (= \bigcap_{i \in I} \mathcal{V}(Rm_i)).$$

Concluimos que $\mathcal{U}(Rm)$ es un conjunto abierto básico compacto. $\square$

Proposición 5.1.2. ([10], Proposition 4.1) *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *M es finitamente generado;*
2. *$(Spec(M), \mathcal{T})$ es compacto.*

Demostración. Supongamos que M es finitamente generado. Recordando que $\mathcal{B} = \{\mathcal{U}(Rm) \mid m \in M\}$ es una base para $Spec(M)$, entonces es suficiente demostrar que existe un subconjunto finito $\{\mathcal{U}(Rm_1), \mathcal{U}(Rm_2), \ldots, \mathcal{U}(Rm_n)\}$ de $\mathcal{B}$ tal que

$$Spec(M) = \mathcal{U}(M) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}(Rm_i).$$

Supongamos que

$$Spec(M) = \bigcup_{m \in M} \mathcal{U}(Rm) = \mathcal{U}(\sum_{m \in M} Rm).$$

Entonces $M = \sum_{m \in M} Rm$. Como M es finitamente generado, existe un conjunto finito $\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ de M tal que

$$M = \sum_{i=1}^{n} Rm_i \text{ si y sólo si } Spec(M) = \mathcal{U}(M) = \mathcal{U}(\sum_{m \in M} Rm).$$

Por tanto, $Spec(M)$ es compacto.

Recíprocamente, supongamos que $(Spec(M), \mathcal{T})$ es compacto. Primero observe que

$$\mathcal{U}(M) = \mathcal{U}(\sum_{m \in M} Rm) = \bigcup_{m \in M} \mathcal{U}(Rm).$$

Ya que $\mathcal{B} = \{Rm \mid m \in M\}$ forma una base para el espacio $(Spec(M), \mathcal{T})$ y $\mathcal{U}(M) = Spec(M)$ es compacto, entonces existe un conjunto finito $\{\mathcal{U}(Rm_1), \mathcal{U}(Rm_2), \ldots, \mathcal{U}(Rm_n)\} \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$Spec(M) = \mathcal{U}(M) = \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{U}(Rm_i) = \mathcal{U}(\sum_{i=1}^{n} Rm_i) \quad \text{si y sólo si} \quad M = \sum_{i=1}^{n} Rm_i.$$

Concluimos que M es finitamente generado. □

Corolario 5.1.3. ([10], Corollary 4.2) *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Si M es finitamente generado y N es un submódulo de M tal que N es un sumando directo de M, entonces $\mathcal{U}(N)$ es compacto en $(Spec(M), \mathcal{T})$.*

Proposición 5.1.4. ([10], Proposition 4.3) *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Si $N \leq M$ tal que $\mathcal{U}(N)$ es compacto, entonces existe un submódulo finitamente generado L de N tal que $\mathcal{U}(N) = \mathcal{U}(L)$.*

Demostración. Sea $N \leq M$ tal que $\mathcal{U}(N)$ es compacto. Observe que

$$\mathcal{U}(N) = \mathcal{U}(\sum_{n\in N} Rn) = \bigcup_{n\in N} \mathcal{U}(Rn).$$

Por hipótesis, $\mathcal{U}(N)$ es compacto, entonces existen $n_1, n_2, \ldots, n_r \in N$ tales que $\mathcal{U}(N) = \bigcup_{j=1}^{r} \mathcal{U}(Rn_j)$. Pero $\bigcup_{j=1}^{r} \mathcal{U}(Rn_j) = \mathcal{U}(\sum_{j=1}^{r} Rn_j)$. Por consiguiente, existe un submódulo finitamente generado L de N tal que $\mathcal{U}(N) = \mathcal{U}(L)$.

$\square$

Corolario 5.1.5. ([10], Proposition 4.4) *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Todo conjunto abierto compacto de $Spec(M)$ es de la forma $\mathcal{U}(L)$, donde L es un submódulo finitamente generado de M.* $\square$

Definición 5.1.6. *Un espacio topológico X se dice que es conexo si no es una unión disjunta de subconjuntos abiertos propios no vacíos y disjuntos. Un subconjunto Y es un subconjunto conexo en X si el subespacio Y de X es conexo con la topología relativa.*

Proposición 5.1.7. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Supongamos que $\sqrt{0}$ es un submódulo primo de M. Si N es un submódulo distinto de cero, entonces $\mathcal{U}(N)$ es conexo en $Spec(M)$. En particular, $Spec(M)$ es un espacio conexo.* $\square$

Demostración. Sea $0 \neq N \leq M$. Queremos demostrar que $\mathcal{U}(N)$ es un subespacio conexo en $Spec(M)$. Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que existen abiertos $\mathcal{U}(L)$,$\mathcal{U}(K)$ de $Spec(M)$ tales que

$$\mathcal{U}(N) = [\mathcal{U}(N) \cap \mathcal{U}(L)] \cup [\mathcal{U}(N) \cap \mathcal{U}(K)].$$
$$\varnothing = [\mathcal{U}(N) \cap \mathcal{U}(L)] \cap [\mathcal{U}(N) \cap \mathcal{U}(K)].$$
$$\varnothing \neq [\mathcal{U}(N) \cap \mathcal{U}(L)] \quad \text{y} \quad \varnothing \neq [\mathcal{U}(N) \cap \mathcal{U}(K)].$$

Observe que la igualdad $[\mathcal{U}(N) \cap \mathcal{U}(L)] \cap [\mathcal{U}(N) \cap \mathcal{U}(K)] = \varnothing$ implica por el inciso 1 del Lema 5.0.2 que

$$\mathcal{U}((N_M L)_M (N_M K)) = \mathcal{U}(N_M L) \cap \mathcal{U}(N_M K) = \varnothing.$$

Por el inciso 2 del Lema 5.0.2 se sigue que $(N_M L)_M (N_M K) \subseteq \sqrt{0}$. Como $\sqrt{0}$ es primo en M, entonces $N_M L \subseteq \sqrt{0}$ o $N_M K \subseteq \sqrt{0}$. Nuevamente, por el inciso 2 del Lema 5.0.2 implica $\mathcal{U}(N) \cap \mathcal{U}(L) = \mathcal{U}(N_M L) = \varnothing$ o $\mathcal{U}(N) \cap \mathcal{U}(K) = \mathcal{U}(N_M L) = \varnothing$, lo cual es imposible. Debe suceder que $\mathcal{U}(N)$ es conexo.

$\square$

Proposición 5.1.8. ([10], Proposition 4.6) *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Supongamos que M es un módulo semiprimo. Si N es un submódulo de M tal que $\mathcal{U}(N)$ es un conjunto irreducible en $(Spec(M), \mathcal{T})$, entonces N es un módulo uniforme. En particular, Si $\mathcal{U}(M) = Spec(M)$ es irreducible, entonces M es uniforme.* □

Proposición 5.1.9. ([10], Proposition 4.7) *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Si N es un submódulo de M y $\sqrt{0}$ es primo en M, entonces $\mathcal{U}(N)$ es un conjunto irreducible en $(Spec(M), \mathcal{T})$.* □

Definición 5.1.10. *Un subespacio B de un espacio topológico X se dice que es denso en X si $U \cap B \neq \varnothing$ para cualquier conjunto abierto $\varnothing \neq U$ de X.*

Proposición 5.1.11. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Supongamos que $\sqrt{0}$ es un submódulo primo de M. Si $N \neq 0$ es un submódulo de M tal que $\mathcal{U}(N) \neq \varnothing$, entonces $\mathcal{U}(N)$ es denso en el espacio topológico $(Spec(M), \mathcal{T})$.*

Demostración. Sea $\mathcal{U}(L) \neq \varnothing$ un conjunto abierto denso en $(Spec(M), \mathcal{T})$. Supongamos que $\mathcal{U}(N) \cap \mathcal{U}(L) = \varnothing$. Por el inciso 1 del Lema 5.0.2 se tiene que $\varnothing = \mathcal{U}(N) \cap \mathcal{U}(L) = \mathcal{U}(N_M L)$ y por el inciso 2 del Lema 5.0.2, implica que $N_M L \subseteq \sqrt{0}$. Como $\sqrt{0}$ es submódulo primo de M, entonces $N \subseteq \sqrt{0}$ o $L \subseteq \sqrt{0}$ pero por el inciso 2 del Lema 5.0.2 se obtiene $\mathcal{U}(N) = \varnothing$ o $\mathcal{U}(L) = \varnothing$, lo cual es una contradicción. Debe suceder que $\mathcal{U}(N) \cap \mathcal{U}(L) \neq \varnothing$. Concluimos que $\mathcal{U}(N)$ es denso en el espacio topológico $(Spec(M), \mathcal{T})$. □

Notemos que la Proposición 5.1.11 no es cierta en general.

Ejemplo 5.1.12. [10] *Sea $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}_{p^n}$, para algún primo p y alguna $n \geq 2$. Es claro que M es un $\mathbb{Z}$-módulo multiplicación. Observe que $\Lambda(M)$ es una cadena finita:*

$$0 \leq p^{n-1}\mathbb{Z}_{p^n} \leq \cdots \leq p\mathbb{Z}_{p^n} \leq \mathbb{Z}_{p^n}.$$

Notemos que $N = p\mathbb{Z}_{p^n}$ es un submódulo uniforme y además, es el único submódulo primo de M. Por consiguiente, $\sqrt{N} = N$. Así que $\mathcal{U}(N) = \varnothing$. Por tanto, $\mathcal{U}(N)$ no es denso en el espacio topológico $(Spec(\mathbb{Z}_{p^n}), \mathcal{T})$.

Corolario 5.1.13. ([10], Corollary 4.12) *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación primo. Si $N \neq 0$ es un submódulo de M, $\mathcal{U}(N)$ es un subconjunto denso en $(Spec(M), \mathcal{T})$.*

Demostración. Basta demostrar que $\mathcal{U}(N) \neq \varnothing$. En efecto: supongamos que $\mathcal{U}(N) = \varnothing$. Entonces por el inciso 2 del Lema 5.0.2 se sigue que $N \subseteq \sqrt{0}$. Como

M es módulo primo, entonces 0 es un submódulo primo de M, y por consiguiente, $\sqrt{0} = 0$. Entonces $N = 0$ lo cual es una contradicción. Por tanto, $\mathcal{U}(N) \neq \varnothing$. Por la Proposición 5.1.11 concluimos que $\mathcal{U}(N)$ es denso en el espacio topológico $(Spec(M), \mathcal{T})$. $\square$

Proposición 5.1.14. *Sean R anillo conmutativo, M un R-módulo multiplicación. Sea $K \neq 0$, $K \neq M$. Supongamos que M es un módulo primo. Si $\mathcal{U}(K) \neq \varnothing$ es denso en $(Spec(M), \mathcal{T})$, entonces K es un submódulo esencial de M.*

Demostración. Supongamos que $K \leq M$ no es un submódulo esencial de M. Entonces existe $N \leq M$ con $N \neq 0$ tal que $K \cap N = 0$. Por el inciso 2 del Lema 5.0.2 se sigue que $\mathcal{U}(K) \cap \mathcal{U}(N) = \mathcal{U}(K_M N) \subseteq \mathcal{U}(K \cap N) = \varnothing$. Finalmente, vamos a demostrar que $\mathcal{U}(N) \neq \varnothing$. En efecto: supongamos que $\mathcal{U}(N) = \varnothing$. Entonces por el Lema 2 del Lema 5.0.2 se tiene que $N \subseteq \sqrt{0}$. Puesto que M es un módulo primo, entonces $\sqrt{0} = 0$, y por tanto, $N = 0$. Contradicción. Debe suceder que $\mathcal{U}(N) \neq \varnothing$. Concluimos que $\mathcal{U}(K)$ no es denso en $(Spec(M), \mathcal{T})$. $\square$

Capítulo 6

Algunos marcos espaciales asociados a un módulo multiplicación

En esta sección estudiaremos la relación entre las retículas completas $\Lambda(M)$ y $\mathscr{P}(Max(M))$, donde M es un módulo multiplicación y $Max(M) = \{N \leq M \mid N$ es un submódulo máximo de $M\}$ (Se sabe que $Max(M)$ es un espacio topológico para cualquier módulo multiplicación M (Ver [43], Proposition 5.12)). De hecho, existe una conexión de Galois antítona entre estas retículas.

Introduciremos algunos conceptos retículares: cuantales y marcos. De hecho, además de exhibir los ejemplos de cuantales y marcos dados por J. Castro et al en [10], exhibiremos algunos más: demostraremos que: 1) si R es un anillo con multiplicación conmutativa de ideales y M es un R-módulo multiplicación tal que genera a sus submódulos, entonces $\{\Lambda(M), \leq, \vee, \wedge, M, 0, (\_)_M(\_)\}$ es un cuantal bilateral; 2) si M es un módulo multiplicación sobre cualquier anillo conmutativo, entonces $SPm(M) = \{N \leq M \mid N$ es submódulo semiprimitivo de $M\} \cup \{M\}$ es un marco. Más aún, es un marco espacial.

Finalmente, para un módulo multiplicación, daremos condiciones para que el espectro $Spec(M)$ (resp. espectro máximo $Max(M)$) sea un espacio topológico normal en términos de la retícula $Semp(M)$ (resp. $SPm(M)$).

Definición 6.0.1. *Dada una retícula completa* $(A, \leq, \bigvee, \wedge, 1, 0)$. *Decimos que* A *es un marco si* A *satisface:*

$$a \wedge \left(\bigvee X\right) = \bigvee \{a \wedge x \mid x \in X\} \textit{ para todo } a \in A \textit{ y todo subconjunto } X \textit{ de } A.$$

Desde luego, el ejemplo por excelencia de un marco viene de la topología. Consideremos un espacio topológico arbitrario $(X, \mathcal{T})$. Sea $\mathcal{O}(X)$ la colección de abiertos del espacio X. Entonces $(\mathcal{O}(X), \subseteq)$ es una retícula completa, donde

$$\bigvee_{\alpha\in I} U_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha.$$
$$\bigwedge_{\alpha\in I} U_\alpha = int(\bigcap_{\alpha\in I} U_\alpha),$$

para cualquier colección de abiertos $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ de X, más aún, $\mathcal{O}(X)$ es un marco, y se conoce como el marco de abiertos del espacio topológico $(X, \mathcal{T})$.

Definición 6.0.2. *Un marco A se dice que es espacial si es isomorfo al marco de abiertos de algún espacio topológico X.*

Definición 6.0.3. *Dada una retícula completa A. Decimos que A es un cuantal si A posee una operación binaria $* : A \times A \to A$ asociativa y es tal que*

$$a * \left(\bigvee X\right) = \bigvee\{a * x \mid x \in X\},$$

y

$$\left(\bigvee Y\right) * b = \bigvee\{y * b \mid y \in Y\}.$$

para cada $a, b \in A$ y cada $X, Y \subseteq A$. Decimos que A es cuantal derecho si existe un elemento $e \in A$ tal que $e(a) = a$ para cada $a \in A$. Análogamente, decimos que A es un cuantal izquierdo si existe $e \in A$ tal que $(a)e = a$ para cualquier $a \in A$. Si A es un cuantal derecho e izquierdo, entonces decimos que A es un cuantal bilateral.

Un ejemplo trivial de una retícula completa que resulta ser un cuantal es el siguiente: Dado un monoide $(G, *)$. Entonces $(\mathscr{P}(G), \subseteq)$ es una retícula completa, donde

$$X \wedge Y = X \cap Y,$$
$$X \vee Y = X \cup Y,$$

$\varnothing$ es el elemento menor y G es el elemento mayor. Además, podemos definir un producto en $(\mathscr{P}(G), \subseteq)$ como sigue:

$$XY := \{x * y \mid x, y \in G\} \text{ para cualesquiera } X, Y \text{ subconjuntos de } G.$$

Entonces esta operación es asociativa y satisface la ley distributiva de la Definición 6.0.3 pues el producto anterior se hereda del monoide $(G, *)$.

Proposición 6.0.4. ([10], Proposition 5.2) *Si R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación, entonces $\{\Lambda(M), \leq, \vee, \wedge, M, 0, (\_)_M(\_)\}$ es cuantal bilateral.*

Demostración. Sabemos que $\Lambda(M)$ es una retícula completa, donde $\leq$ es la inclusión usual de conjuntos. Como R es un anillo conmutativo, entonces por la Proposición 3.0.19 se tiene que $(\_)_M(\_) : \Lambda(M) \times \Lambda(M) \to \Lambda(M)$ es un producto conmutativo. Ahora, por el inciso 6 de la Proposición 3.0.9 se tiene que para cualquier familia $\{K_i\}_{i\in I} \subseteq M$, $[\sum K_i]_M N = \sum K_{iM} N$. Por otra parte, por las proposiciones 3.0.19 y 3.0.9 (6) se sigue que

$$N_M \sum_{i\in I} K_i = \left[\sum_{i\in I} K_i\right]_M N = \sum_{i\in I}(K_{iM}N) = \sum_{i\in I}(N_M K_i)$$

para cada $N \leq M$ y para cualquier familia $\{K_i\}_{i\in I}$ de submódulos de M. En consecuencia, $\{\Lambda(M), \leq, \vee, \wedge, M, 0, (\_)_M(\_)\}$ es un cuantal, más aún, como todo submódulo N de M es totalmente invariante, entonces $N = N_M M$. Además, por el Lema 3.0.18 se tiene que M genera a todos sus submódulos, es decir, $M_M N = Tr_M(N) = N$. Concluimos que $\{\Lambda(M), \leq, \vee, \wedge, M, 0, (\_)_M(\_)\}$ es un cuantal bilateral. □

Observemos que para algunos módulos multiplicación sobre cualquier anillo con multiplicación conmutativa de ideales se obtiene el análogo de la Proposición 6.0.4.

Proposición 6.0.5. *Si R es un anillo con multiplicación conmutativa de ideales y M es un R-módulo multiplicación tal que genera a todos sus submódulos, entonces $\{\Lambda(M), \leq, \vee, \wedge, M, 0, (\_)_M(\_)\}$ es cuantal bilateral.*

Demostración. La demostración es similar a la de 6.0.4 observando que el producto $(\_)_M(\_) : \Lambda(M) \times \Lambda(M) \to \Lambda(M)$ es un producto conmutativo por la Proposición 3.0.25 y por la Observación 3.0.27 se tiene que para cualquier familia $\{K_i\}_{i\in I} \subseteq M$ y cada $N \leq M$,

$$N_M \sum_{i\in I} K_i = \sum_{i\in I}(N_M K_i).$$

□

Teorema 6.0.6. ([10], Theorem 5.5) *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Entonces $(Semp(M), \subseteq, \wedge, \vee', \sqrt{0}, 1)$ es un marco. Más aún, es un marco espacial, esto es,*

$$Semp(M) \cong \Omega(Spec(M)).$$

Demostración. Por la Observación 5.0.10 $(Semp(M), \subseteq, \wedge, \vee', \sqrt{0}, 1)$ es una retícula completa. Resta demostrar que $(Semp(M), \subseteq, \wedge, \vee', \sqrt{0}, 1)$ es un marco. En efecto: sean $N \leq M$ y $\{N_i\}_{i\in I}$ una familia de submódulos semiprimos de M. Puesto que

$$N \wedge (\bigvee_{i\in I} N_i) = N \bigcap \left(\sqrt{\textstyle\sum_{i\in I} N_i}\right) \text{ y } \bigvee_{i\in I} ((N \wedge N_i) = \sqrt{\sum_{i\in I}(N \cap N_i)},$$

entonces, si $N = M$, entonces se cumple la igualdad deseada. Supongamos que $N \neq M$. Como $N \cap N_i \subseteq N_i$ para cada $i \in I$, entonces $\sum_{i\in I}(N \cap N_i) \subseteq N$. Como $N \in Semp(M)$, por el inciso 3 de la Proposición 4.0.27 se tiene que N es una intersección de submódulos primos de M, y además, contiene a $\sum_{i\in I}(N \cap N_i)$, entonces $\sqrt{\sum_{i\in I}(N \cap N_i)} \subseteq N$. También observe que $N \cap N_i \subseteq N_i \subseteq \sum_{i\in I} N_i$. Entonces $\sum_{i\in I}(N \cap N_i) \subseteq \sum_{i\in I} N_i$. Por el inciso 1 de la Proposición 4.0.39 se sigue que $\sqrt{\sum_{i\in I}(N \cap N_i)} \subseteq \sqrt{\sum_{i\in I} N_i}$. En consecuencia, $\sqrt{\sum_{i\in I}(N \cap N_i)} \subseteq N \cap \sqrt{\sum_{i\in I} N_i}$. Por otro lado, sea P un submódulo primo de M tal que $\sum_{i\in I}(N \cap N_i) \subseteq P$. Entonces $N \cap N_i \subseteq P$ para cada $i \in I$. Como M es módulo multiplicacón, entonces N es un submódulo totalmente invariante, así que $N_M N_i \subseteq N \cap N_i \subseteq P$. Como P es un submódulo primo de M, entonces $N \subseteq P$ o $N_i \subseteq P$. Si $N \subseteq P$, Entonces $N_i \cap (\sqrt{\sum_{i\in I} N_i}) \subseteq P$. Si $N \nsubseteq P$, entonces $N_i \subseteq P$ para cada $i \in I$, y por tanto $\sum_{i\in I} N_i \subseteq P$. Entonces, $\sqrt{\sum_{i\in I} N_i} \subseteq P$. Así que $N \cap \sqrt{\sum_{i\in I} N_i} \subseteq P$. En consecuencia, $\sqrt{\sum_{i\in I} N_i} \subseteq \sqrt{\sum_{i\in I}(N \cap N_i)}$. Entonces en ambos casos sucede que $N \cap \sqrt{\sum_{i\in I} N_i} \subseteq \sqrt{\sum_{i\in I}(N \cap N_i)}$. Concluimos que $N \cap \sqrt{\sum_{i\in I} N_i} = \sqrt{\sum_{i\in I}(N \cap N_i)}$.

Por otro lado, definimos $\phi : Semp(M) \to \Omega(Spec(M))$ tal que $\phi(N) = \mathcal{U}(N)$. Por [[40], Chapter III, Proposition 1.1] es suficiente demostrar que ϕ es un isomorfismo de copos. En efecto, sean $N_1, N_2 \in Semp(M)$ tales que $N_1 \subseteq N_2$. Si $P \in \mathcal{U}(N_1)$, entonces $N_1 \nsubseteq P$, y por tanto, $N_2 \nsubseteq P$, esto es, $P \in \mathcal{U}(N_2)$. Así, $\phi(N_1) \subseteq \phi(N_2)$. Ahora, supongamos que $\phi(N_1) = \phi(N_2)$. Entonces es claro que $N_1 = N_2$. Por tanto, ϕ es inyectiva. Sea $\mathcal{U}(N) \in \Omega(Spec(M))$. Por el inciso 5 de la Proposición 5.0.2 se puede suponer que N es submódulo semiprimo de M. Entonces ϕ es suprayectiva. Así que ϕ es biyectiva , y $\phi^{-1}(\mathcal{U}(N)) = N$. Supongamos que $\mathcal{U}(N_1) \subseteq \mathcal{U}(N_2)$. Entonces para todo $P \notin \mathcal{U}(N_2)$, sucede que $P \notin \mathcal{U}(N_1)$. Y como N_1, N_2 son submódulos semiprimos de M, por la Proposición 4.0.27, debe suceder que $N_1 \subseteq N_2$. Concluimos que ϕ es un isomorfismo de copos, es decir, es un isomorfismo de marcos. □

Corolario 6.0.7. ([10], Corollary 5.6) *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Entonces $Semp(M/N)$ es un marco espacial para cualquier $N \leq M$.*

Demostración. Como M es un R-módulo multiplicación, entonces para cada $N \leq M$, M/N también es un R-módulo multiplicación. Por el Teorema 6.0.6 se sigue que $Semp(M/N) \cong \mathcal{O}(Spec(M/N))$. □

Teorema 6.0.8. ([10], Theorem 5.10) *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación fiel y $PM \neq M$, para todo ideal máximo P de R. Entonces los espacios topológicos $Spec(R)$ y $Spec(M)$ son homeomorfos.*

Demostración. Recordemos que $\lambda_{|_{Spec(R)}} : Spec(R) \to Spec(M)$ es biyectiva por el inciso 1 del Corolario 4.0.48, donde $\lambda : \Lambda(R) \to \Lambda(M)$ está definida como $\lambda(I) = IM$ para todo $I \in \Lambda(R)$. Denotemos esta restricción de λ como f. Afirmamos que f es continua. En efecto, sea $\mathcal{U}(N)$ un abierto de $(Spec(M), \mathcal{T})$. Como M es un R-módulo multiplicación, existe un ideal I de R tal que $N = IM$. Entonces $J \in f^{-1}(\mathcal{U}(N))$ si y sólo si $J \in f^{-1}(\mathcal{U}(IM))$ si y sólo si $f(J) \in \mathcal{U}(IM)$ si y sólo si $JM \in \mathcal{U}(IM)$ si y sólo si $IM \nsubseteq JM$. Por el Corolario 4.0.41 lo anterior implica que $I \nsubseteq J$. Por tanto, $J \in \mathcal{U}(I)$. En consecuencia, $f^{-1}(\mathcal{U}(N))$ es un subconjunto abierto de $Spec(R)$ con la topología de Zariski. Afirmamos que f es abierta, es decir, $f(\mathcal{U}(I)) = \mathcal{U}(IM)$ para cada $\mathcal{U}(I)$ abierto en el espacio $Spec(R)$. En efecto: Sea $\mathcal{U}(I)$ un abierto en el espacio $Spec(R)$ y sea $P \in f(\mathcal{U}(I))$. Entonces existe $J \in \mathcal{U}(I)$ tal que $f(J) = P$, es decir, $JM = P$. Pero $J \in \mathcal{U}(I)$, implica que $I \nsubseteq J$. Entonces $IM \nsubseteq JM = P$. Por tanto, $P \in \mathcal{U}(IM)$. Recíprocamente, sea $P \in \mathcal{U}(IM)$. Entonces $IM \nsubseteq P$. Por el inciso 1 del Corolario 4.0.47 se sigue que existe un único ideal primo J de R tal que $P = JM$. En consecuencia, $IM \nsubseteq JM$, y por tanto, $I \nsubseteq J$. Entonces $J \in \mathcal{U}(I)$. Luego $f(J) \in f(\mathcal{U}(I))$, es decir, $P = JM = f(J) \in f(\mathcal{U}(I))$. Como f es continua, abierta y biyectiva, concluimos que f es un homeomorfismo, es decir, $Spec(R) \cong Spec(M)$. □

Teorema 6.0.9. ([10], Theorem 5.11) *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación fiel y $QM \neq M$ para todo ideal máximo Q de R. Entonces*

$$Semp(R) \cong Semp(M)$$

como marcos.

Demostración. Sabemos que

$$Semp(M) = \{N \leq M \mid N \text{ es submódulo semiprimo de } M\} \cup \{M\},$$

es un marco por la Proposición 6.0.6. También sabemos que

$$Semp(R) = \{I \leq R \mid I \text{ es un ideal semiprimo de } R\} \cup \{R\}.$$

Y además, $\lambda_{|_{Semp(R)}} : Semp(R) \to Semp(M)$ es biyectiva por el inciso 2 del Corolario 4.0.48, donde $\lambda : \Lambda(R) \to \Lambda(M)$ está dada por $\lambda(I) = IM$ para cada ideal I de R. Denotamos esta restricción de λ como g. Además, $g^{-1}(N) = Ann_M(M/N)$ es tal que si $N_1 \subseteq N_2$ tales que $N_1, N_2 \in Semp(M)$, se sigue que $Ann_M(M/N_1)M = N_1 \subseteq N_2 = Ann_M(M/N_2)M$, donde los ideales

$Ann_M(M/N_1), Ann_M(M/N_2) \in Semp(R)$ por el inciso 2 del Corolario 4.0.47. Por la Proposición 4.0.41 la última desigualdad implica que $Ann_M(M/N_1) \subseteq Ann_M(M/N_2)$, es decir, $g^{-1}(N_1) \subseteq g^{-1}(N_2)$. Por tanto, $g = \lambda_{|_{Semp(R)}}$ es un isomorfismo de copos. Por ([40], Chapter III, Proposition 1.1), concluimos que g es un isomorfismo de marcos. $\square$

En esta última parte del trabajo presentamos otro ejemplo de marco espacial asociado a un módulo multiplicación sobre un anillo conmutativo. Este resultado se encuentra motivado al introducir algunas definiciones que se encuentran en el trabajo de M. Medina, L. Morales, L. Sandoval y Á. Zaldivar en [27], más aún, resulta ser una versión análoga a ([27], Teorema 3.13). Antes de introducir lo ya mencionado, necesitamos observar lo siguiente:

Notación 6.0.10. ([43], Note 5.10) *Sea M un R-módulo. Dado $N \leq M$. Denotamos por $cl(N)$ al conjunto de submódulos máximos de M tales que continen a N. Similarmente, denotamos por $op(L)$ al conjunto de submódulos máximos de M tales que no contienen a L.*

Es fácil verificar lo siguiente:

1. $cl(0) = op(M) = Max(M);\quad cl(M) = op(0) = \varnothing;$

   $op(N) = Max(M) \backslash cl(N)$ *para cada submódulo N de M.*

2. *Para cualquier familia $\{N_i\}_{i \in I} \subseteq \Lambda(M)$, se tiene que:*

   a. $\displaystyle\bigcap_{i \in I} cl(N_i) = cl(\sum_{i \in I} N_i);$

   b. $\displaystyle\bigcup_{i \in I} op(N_i) = (\sum_{i \in I} N_i).$

Definición 6.0.11. ([43], Note 5.10) *Un módulo $M \in R$-Mod se dice que es un módulo espectral si el conjunto $Max(M)$ de todos sus submódulos máximos es un espacio topológico tal que el conjunto de todos sus cerrados coincide con $\{cl(N) \mid N \in \Lambda(M)\}$ y se cumpla que*

$$cl(X) \cup cl(Y) = cl(X \cap Y) \text{ para cualesquiera } X, Y \in \Lambda(M).$$

Observación 6.0.12. *El espacio topológico de la Definición 6.0.11 en* ([43], Note 5.10) *se denota como $\overline{max}(M)$, en este trabajo lo denotaremos por $Max(M)$.*

Proposición 6.0.13. ([43], Proposition 5.12) *Todo módulo multiplicación es espectral.* $\square$

Definición 6.0.14. *Sea M un R-módulo y $N \leq M$. Decimos que N es un submódulo primitivo si $N = Ann_M(S)$ para algún módulo simple $S \in \sigma[M]$. Decimos que M es módulo primitivo si 0 es submódulo primitivo.*

Definición 6.0.15. *Un submódulo N de $M \in R$-Mod es llamado submódulo semiprimitivo si N es una intersección de submódulos primitivos.*

Proposición 6.0.16. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Si K es un submódulo máximo de M, entonces K es primitivo.*

Demostración. Sea $K \in Max(M)$. Como $K_M M = K$ pues M es módulo multiplicación, por el inciso 2 de la Proposición 3.0.43 se tiene $K_M(M/K) = 0$, lo que implica que $K \subseteq Ann_M(M/K)$ pero como K es submódulo máximo, entonces $K = Ann_M(M/K)$. Concluimos que K es primitivo. $\square$

Corolario 6.0.17. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación y N un submódulo de M. Entonces*

$$\bigcap\{Ann_M(M/K) \mid N \leq K \in Max(M)\} = \bigcap\{K \in Max(M) \mid N \leq K\}.$$

Demostración. Se sigue de la Proposición 6.0.16. $\square$

Recuerde que un módulo M es coatómico si cada submódulo propio está contenido en algún submódulo máximo K de M.

Ejemplo 6.0.18. *Los ejemplos de módulos coatómicos son: los módulos finitamente generados; los módulos semisimples; módulos semiperfectos; los módulos sobre un anillo perfecto izquierdo; los módulos multiplicación sobre un anillo conmutativo y los módulos multiplicación sobre un anillo invariante izquierdo con multiplicación conmutativa de ideales.*

Observación 6.0.19. *Si M es un módulo multiplicación sobre un anillo conmutativo, entonces $Max(M) \neq \varnothing$ y podemos considerar la siguiente situación:*

Consideramos $\Lambda(M)$ y $Max(M)$. Definimos los operadores cl y $\mathcal{J}$ como sigue:

1. *Para cada $N \in \Lambda(M)$, definimos $cl : \Lambda(M) \to \mathscr{P}(Max(M))$ tal que $cl(N) = \{K \in Max(M) \mid N \subseteq K\}$. Como M es multiplicación, la colección $\{cl(N) \mid N \in \Lambda(M)\}$ forma, precisamente, los cerrados del espacio topológico $(Max(M), \mathcal{T})$ como en la Definición 6.0.11. También observe que el operador satisface lo siguiente:*

   Si $N, K \leq M$ tales que $N \subseteq K$, entonces $cl(K) \subseteq cl(N)$.

2. *Para cada $\mathcal{A} \subseteq Max(M)$, definimos*

$$\mathcal{J} : \mathscr{P}(Max(M)) \to \Lambda(M) \quad \textit{como} \quad \mathcal{J}(\mathcal{A}) := \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A.$$

Además se cumple que:

1. *Si* $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq Max(M)$ *con* $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, *entonces* $\mathcal{J}(\mathcal{B}) \leq \mathcal{J}(\mathcal{A})$.
2. $\mathcal{J}(\bigcup_{i \in X} U_i) = \bigcap_{i \in X} \mathcal{J}(U_i)$ *para cada* $\{U_i\}_{i \in X} \subseteq Max(M)$.

Como cl *e* $\mathcal{J}$ *invierten orden y son tales que*

- $N \leq \mathcal{J}cl(N)$ *para cada* $N \leq M$;
- $\mathcal{A} \subseteq cl\mathcal{J}(\mathcal{A})$ *para cada* $\mathcal{A} \subseteq Max(M)$.

Entonces la pareja $(cl, \mathcal{J})$ *forma una conexión de Galois antítona.*

Definición 6.0.20. *Sea* M *un* R*-módulo. Dado un submódulo* N *de* M. *Definimos:*

$$N^* := \bigcap \{K \in Max(M) \mid N \subseteq K\}.$$

En particular, $0^* = \mathcal{J}(Max(M))$. *Si* M *no contiene submódulos máximos* K *tales que* $N \subseteq K$, *entonces* $N^* = M$. *En particular,* $M^* = M$.

Lema 6.0.21. *Sean* M *un* R*-módulo y* $N \leq M$. *Si* N *es un submódulo primitivo, entonces* N *es una intersección de submódulos máximos.*

Demostración. Sea $N \leq M$ primitivo. Entonces $N = Ann_M(S)$ para algún $S \in \sigma[M]$. Entonces $N = \bigcap \{Ker\ f \mid f \in Hom_R(M, S)\}$. Consideremos $0 \neq f \in Hom_R(M, S)$. Entonces $f : M \to S$ es epimorfismo. Sea $K = Ker\ f$. Así que $M/K \cong S$ es simple si y sólo si K es submódulo máximo de M. En consecuencia, $N = \bigcap \{K < M \mid K$ es un submódulo máximo de $M\}$. □

Proposición 6.0.22. *Sean* M *un* R*-módulo y* $N \leq M$. *Si* N *es un submódulo semiprimitivo, entonces* $N = N^*$.

Demostración. Sea N un submódulo semiprimitivo de M. Entonces $N = \bigcap_{i \in X} P_i$, donde P_i es un submódulo primitivo de M. Por el Lema 6.0.21 tenemos que cada P_i es una intersección de submódulos máximos de M. Y además contienen a N. En consecuencia,

$$N^* \subseteq \bigcap_{i \in X} P_i \subseteq N.$$

por tanto, $N = N^*$. □

De la Conexión de Galois $(cl, \mathcal{J})$ anterior y de la Definición 6.0.20 se tiene el siguiente resultado previo para caracterizar los puntos fijos de los operadores cerradura $cl\mathcal{J}$ y $\mathcal{J}cl$.

Proposición 6.0.23. *Sean R un anillo, M un R-módulo multiplicación y la conexión de Galois $(cl, \mathcal{J})$ como en la Observación 6.0.19. Entonces:*

1. *Si $N \leq M$, entonces $\mathcal{J}cl(N) = N^*$;*

2. *Si $\mathcal{A} \subseteq Max(M)$, entonces $cl\mathcal{J}(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{A}}$, donde $\overline{\mathcal{A}}$ es la cerradura del subconjunto $\mathcal{A}$ en el espacio topológico $(Max(M), \mathcal{T})$.*

□

Observación 6.0.24. *De la Definición 6.0.20, del Corolario 6.0.17, y del inciso 1 de la Proposición 6.0.23 se obtiene otra descripción de la imagen de cualquier submódulo N de M bajo el operador cerradura $\mathcal{J}cl$:*

Si $N \leq M$, entonces $\mathcal{J}cl(N) = \bigcap\{Ann_M(M/K) \mid N \leq K \in Max(M)\}$, es decir, N^* es una intersección de submódulos primitivos de M.

De la Proposición 6.0.23 y la Observación 6.0.24 se tiene la siguiente caracterización de puntos fijos de los operadores $cl\mathcal{J}$ y $\mathcal{J}cl$.

Proposición 6.0.25. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación y $(cl, \mathcal{J})$ la conexión de Galois como en la Observación 6.0.19. Dados $N \in \Lambda(M), \mathcal{A} \in \mathscr{P}(Max(M))$. Entonces:*

1. *$\mathcal{J}cl(N) = N$ si y sólo si N es un submódulo semiprimitivo de M o $N = M$;*

2. *$cl\mathcal{J}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$ si y sólo si $\mathcal{A}$ es un conjunto cerrado del espacio topológico $(Max(M), \mathcal{T})$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{J}cl(N) = N$. Entonces $N = N^*$. Por la Observación 6.0.24 se tiene que N es semiprimitivo. Recíprocamente, supongamos que N es un submódulo semiprimitivo de M. Por la Proposición 6.0.22 se sigue que $N = N^*$, y por tanto, $\mathcal{J}cl(N) = N$. □

Corolario 6.0.26. *Sean R un anillo conmutativo, M un R-módulo multiplicación y $(cl, \mathcal{J})$ la conexión de Galois anterior. Entonces existe un anti-isomorfismo entre las (sub)retículas completas:*

$$Im\ cl = \{\mathcal{A} \subseteq Max(M) \mid \mathcal{A} = \overline{\mathcal{A}}\} \ \ y$$
$$Im\ \mathcal{J} = \{N \in \Lambda(M) \mid N \text{ es semiprimitivo}\} \cup \{M\}.$$

□

Notación 6.0.27. *Identificamos a $Im\ \mathcal{J}$ como el conjunto de submódulos semiprimitivos de M.*

Hacemos la siguiente notación:

$$\begin{aligned} SPm(M) &= \{N \leq M \mid N \text{ es submódulo semiprimitivo de} M\} \cup \{M\}. \\ &= \{N \leq M \mid N = N^*\} \cup \{M\}. \end{aligned}$$

Observación 6.0.28. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación y $(cl, \mathcal{J})$ la conexión de Galois como en la Observación 6.0.19. Entonces $(SPm(M), \subseteq, \wedge, \vee', 0^*, M)$ es una retícula completa. En efecto: por la Proposición 1.1.15 se tiene que el sistema de cerrados $SPm(M)$ de la retícula completa $\Lambda(M)$ es cerrada bajo ínfimos arbitarios, y por consiguiente, cerrada bajo supremos arbitrarios donde $\bigvee' X := \mathcal{J}cl(\bigvee(X))$ para cualquier $X \subseteq SPm(M)$, es decir, $\bigvee'_{N\in X} N = (\sum\limits_{N\in X} N)^*$.*

Lema 6.0.29. *Sean R un anillo conmutativo, M un R módulo multiplicación y $N \leq M$. Entonces N^* es el menor submódulo semiprimitivo de M que contiene a N.*

Demostración. Sea $N \leq M$. Por la Proposición 6.0.24 se sigue que N^* es semiprimitivo y $N \subseteq N^*$. Sea $L \leq M$ semiprimitivo tal que $N \subseteq L$. Entonces $L = \bigcap_{i\in X} P_i$, donde P_i es un submódulo primitivo de M tal que $N \subseteq L \subseteq P_i$ para cada $i \in I$. Por el Lema 6.0.21 se tiene que cada P_i es una intersección de submódulos máximos de M que contienen N. Entonces $N^* \subseteq \bigcap_{i\in I} P_i = L$. Concluimos que N^* es el menor submódulo semiprimitivo de M que contiene a N. □

A continuación presentamos algunas propiedades de los conjuntos abiertos del espacio topológico $(Max(M), \mathcal{T})$, donde M es un R-módulo multiplicación sobre un anillo conmutativo R y $\mathcal{T}$ es como en 6.0.10.

Lema 6.0.30. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Si $N, L \leq M$ y $\{N_i\}_{i\in I} \subseteq \Lambda(M)$, entonces:*

1. *$op(L) \cap op(N) = op(L_M N)$;*
2. *$op(L) = \varnothing$ si y sólo si $L \subseteq (0)^* = J(M)$;*
3. *$op(N) = op(N^*)$ para todo $N \leq M$;*
4. *$op(L) = op(N)$ si y sólo si $L^* = N^*$;*
5. *$op(L) = Max(M)$ si y sólo si $L = M$;*
6. *$op(\sum_{i\in I} N_i) = \bigcup_{i\in I} op(N_i)$.*

□

Observación 6.0.31. *Dado $N \leq M$, M módulo multiplicación. Por el inciso 3 del Lema 6.0.29, podemos suponer que*

$$\mathcal{T} = \{op(N) \mid N \in SPm(M)\}.$$

Teorema 6.0.32. *Sean R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Entonces $(SPm(M), \subseteq, \vee, \wedge')$ es un marco, más aún,*

$$SPm(M) \cong \mathcal{O}(Max(M)).$$

como marcos.

Demostración. Sean $N \in SPm(M)$ y $\{N_i\}_{i \in I} \subseteq SPm(M)$. Como

$$N \wedge (\bigvee_{i \in I} N_i) = N \cap (\sum_{i \in I} N_i)^*$$

y

$$\bigvee_{i \in I}(N \wedge N_i) = (\sum_{i \in I}(N \cap N_i))^*$$

Entonces, si $N = M$, no hay nada que demostrar. Supongamos que $N \neq M$. Es claro que $\sum_{i \in I}(N \cap N_i) \subseteq N$ y $\sum_{i \in I}(N \cap N_i) \subseteq (\sum_{i \in I} N_i)^*$. Por el Lema 6.0.29 se sigue que $(\sum_{i \in I}(N \cap N_i))^* \subseteq N$ y $(\sum_{i \in I}(N \cap N_i))^* \subseteq (\sum_{i \in I} N_i)^*$. Por consiguiente, $(\sum_{i \in I}(N \cap N_i))^* \subseteq N \cap (\sum_{i \in I} N_i)^*$. Falta ver que $N \cap (\sum_{i \in I} N_i)^* \subseteq (\sum_{i \in I}(N \cap N_i))^*$. En efecto: sea $K \in Max(M)$ tal que $\sum_{i \in I}(N \cap N_i) \subseteq K$. Entonces $N \cap N_i \subseteq K$ para toda $i \in I$. Como M es multiplicación, entonces $N_M N_i \subseteq N \cap N_i \subseteq K$. Puesto que K es máximo, por el Corolario 4.0.5 se sigue que K es primo en M. En consecuencia, $N \subseteq K$ o $N_i \subseteq K$. Si $N \subseteq K$, entonces $N \cap (\sum_{i \in I} N_i)^* \subseteq K$, y así, $N \cap (\sum_{i \in I} N_i)^* \subseteq (\sum_{i \in I}(N \cap N_i))^*$. Ahora, si $N \nsubseteq K$, entonces $N_i \subseteq K$ para toda $i \in I$. Esto implica que $\sum_{i \in I} N_i \subseteq K$, es decir, $(\sum_{i \in I} N_i)^* \subseteq K$. Entonces $N \cap (\sum_{i \in I} N_i)^* \subseteq K$. En consecuencia, $N \cap (\sum_{i \in I} N_i)^* \subseteq (\sum_{i \in I}(N \cap N_i))^*$. En ambos casos se tiene que $N \cap (\sum_{i \in I} N_i)^* \subseteq (\sum_{i \in I}(N \cap N_i))^*$. Concluimos que $N \cap (\sum_{i \in I} N_i)^* = (\sum_{i \in I}(N \cap N_i))^*$. Por tanto, $SPm(M)$ es un marco.

Por otra parte, definimos $\theta : SPm(M) \to \mathcal{O}(Max(M))$ tal que $\theta(N) = op(N)$, donde $op(N) = \{K \in Max(M) \mid N \nsubseteq K\}$. Por la Observación 6.0.31, se tiene que $op(N) = op(N^*)$ para cada $N \leq M$.Ahora, afirmamos que θ es isomorfismo de copos. Sean $N_1, N_2 \in SPm(M)$ tales que $N_1 \subseteq N_2$. Si $K \in op(N_1)$, entonces $N_1 \nsubseteq K$. Entonces $N_2 \nsubseteq K$. Así que $\theta(N_1) \subseteq \theta(N_2)$. Ahora, supongamos que $\theta(N_1) = \theta(N_2)$. Es fácil ver que si $op(N_1) = op(N_2)$, entonces $N_1^* = N_2^*$. En este caso, como $N = N^*$, entonces se sigue que $N_1 = N_2$. Por tanto, θ es inyectiva. Sea $op(N) \in \mathcal{O}(Max(M))$. Por la Observación 6.0.31, tenemos que N es semiprimitivo. Por consiguiente, θ es suprayectiva, es decir, θ es biyectiva y $\theta^{-1}(op(N)) = N$. Supongamos que $op(N_1) \subseteq op(N_2)$. Si K es un submódulo máximo de M tal que $N_2 \subseteq K$, entonces $N_1 \subseteq K$. Entonces debe suceder que $N_1^* \subseteq N_2^*$, es decir, $N_1 \subseteq N_2$. Así que θ es un isomorfismo de copos. Por ([40], Chapter III, Proposition 1.1) se concluye que θ es un isomorfismo de marcos. $\square$

Definición 6.0.33. *Un idioma* $(A, \leq, \bigvee, \wedge, 1, 0)$ *es una retícula completa, modular y superiormente continua, es decir, es una retícula completa que satisface las siguientes leyes distributivas:*

$$a \wedge (\bigvee X) = \bigvee\{a \wedge x \mid x \in X\}$$

para cada $a \in A$ *y para cada conjunto dirigido* $X \subseteq A$; *y*

$$a \leq b \Longrightarrow (a \vee c) \wedge b = a \vee (b \wedge c)$$

para cada $a, b, c \in A$.

Los ejemplos prototipo de idiomas son las retículas completas $\Lambda(M)$ y $\Lambda^{f.i}(M)$, para un módulo dado M.

Definición 6.0.34. *Un idioma multiplicativo es un idioma* $(A, \leq, \bigvee, \wedge, \cdot)$ *con una operación binaria asociativa que es compatible con la operación del ínfimo.*

Definición 6.0.35. *Sea* A *un idioma multiplicativo. Decimos que* A *es una retícula normal si para todo* $a, b \in A$ *con* $a \vee b = 1$, *entonces existen* $a', b' \in A$ *tales que* $a \vee b' = 1 = a' \vee b$ *y* $a'b' = 0$.

Dado un módulo multiplicación M sobre un anillo conmutativo R. Con las nociones retículares previas, damos condiciones para que el espacio topológico $Spec(M)$ y $Max(M)$ sea normal, en términos del marco $Semp(M)$ y $SPm(M)$, respectivamente.

Proposición 6.0.36. *Sean* R *es un anillo conmutativo y* M *un* R*-módulo multiplicación. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $Spec(M)$ *es un espacio topológico normal;*

2. $Semp(M)$ *es una retícula normal.*

Demostración. Supongamos que $(Spec(M), \mathcal{T})$ es un espacio topológico normal. Sean $N, L \in Semp(M)$ tal que $N + L = M$. Si $N = M$, entonces tomando $L' = 0$ y $N' = M$, entonces se satisface que $N + L' = M$; $N' + L = M$ y $N'_M L' = L'_M N' = 0$. Como que se quería demostrar. Ahora, supongamos que $N, L \neq M$ tales que $N + L = M$. Entonces

$$Spec(M) = \mathcal{U}(M) = \mathcal{U}(N + L) = \mathcal{U}(N) \cup \mathcal{U}(L)$$

si y sólo si

$$\varnothing = \mathcal{V}(N) \cap \mathcal{V}(L).$$

Como $Spec(M)$ es un espacio normal, entonces existen abiertos $\mathcal{U}(N')$ y $\mathcal{U}(L')$ de $(Spec(M), \mathcal{T})$ tales que $\mathcal{V}(N) \subseteq \mathcal{U}(L')$ y $\mathcal{V}(L) \subseteq \mathcal{U}(N')$ y $\mathcal{U}(N') \cap \mathcal{U}(L') = \varnothing$. Podemos suponer que $N', L' \in Semp(M)$ pues sabemos que $\mathcal{U}(N) = \mathcal{U}(\sqrt{N})$. Entonces $\mathcal{U}(N'_M L') = \varnothing$. Por tanto, $N'_M L' \subseteq \sqrt{0}$. Por tanto, $N'_M L' = \sqrt{0}$, es decir, $\sqrt{0} = 0$. También se tiene que $\varnothing = \mathcal{V}(N) \cap \mathcal{V}(L')$ y $\varnothing = \mathcal{V}(L) \cap \mathcal{V}(N')$, es decir, $Spec(M) = \mathcal{U}(M) = \mathcal{U}(N) \cup \mathcal{U}(L') = \mathcal{U}(N+L')$ y $Spec(M) = \mathcal{U}(M) = \mathcal{U}(L) \cup \mathcal{U}(N') = \mathcal{U}(L+N')$. En consecuencia, $M = N + L'$ y $M = L + N'$. Por tanto, $Semp(M)$ es una retícula normal. Recíprocamente, supongamos que $Semp(M)$ es una retícula normal. Sean $\mathcal{V}(N), \mathcal{V}(L)$ subconjuntos cerrados de $(Spec(M), \mathcal{T})$ tales que $\mathcal{V}(N) \cap \mathcal{V}(L) = \varnothing$. Entonces $\mathcal{U}(N + L) = \mathcal{U}(N) \cup \mathcal{U}(L) = Spec(M) = \mathcal{U}(M)$. Así, $N + L = M$. Como $Semp(M)$ es una retícula normal, entonces existen $N', L' \in Semp(M)$ tales que $N + L' = M = N' + L$ y $N'_M L' = \sqrt{0}$. También tenemos que $\mathcal{U}(N + L') = Spec(M)$ y $\mathcal{U}(N'+L) = Spec(M)$. Por consiguiente, $\mathcal{U}(N) \cup \mathcal{U}(L') = Spec(M)$ y $\mathcal{U}(L) \cup \mathcal{U}(N') = Spec(M)$, o bien, $\mathcal{V}(N) \cap \mathcal{V}(L') = \varnothing$ y $\mathcal{V}(N) \cap \mathcal{V}(L') = \varnothing$. Por lo tanto, $\mathcal{V}(N) \subseteq \mathcal{U}(L')$ y $\mathcal{V}(L) \subseteq \mathcal{U}(N')$. Finalmente, $\mathcal{U}(L'_M N') = \mathcal{U}(L') \cap \mathcal{U}(N') = \varnothing$ si y sólo si $L'_M N' = \sqrt{0}$. Pero $L'_M N' = \sqrt{0}$. Entonces sucede que $\mathcal{U}(L') \cap \mathcal{U}(N') = \varnothing$. Concluimos que $(Spec(M), \mathcal{T})$ es un espacio topológico normal. □

Corolario 6.0.37. *Dado un anillo conmutativo R. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $Spec(R)$ *es un espacio topológico normal;*

2. $Semp(R)$ *es una retícula normal.*

De manera similar, dado cualquier módulo multiplicación M sobre un anillo conmutativo R. Establecemos condiciones para que $(Max(M), \mathcal{T})$ sea normal en términos del marco $SPm(M)$.

Proposición 6.0.38. *Sea R un anillo conmutativo y M un R-módulo multiplicación. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $(Max(M), \mathcal{T})$ *es un espacio topológico normal;*

2. $SPm(M)$ *es una retícula normal.*

Demostración. La demostración es similar a la prueba en la Proposición 6.0.36. □

Corolario 6.0.39. *Dado un anillo conmutativo R. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. $Max(R)$ *es un espacio topológico normal;*

2. $SPm(R)$ *es una retícula normal.*

Conclusiones y Perspectivas

En gran parte de este trabajo están completamente involucradas algunas conexiones de Galois: algunas de ellas, fueron relevantes para llevar a cabo una correspondencia entre los ideales de un anillo (no necesariamente conmutativo) y los submódulos de un módulo multiplicación; otras fueron vitales para demostrar que, para un módulo multiplicación M, existe un anti-isomorfismo entre la retícula $\{N \in \Lambda(M)|\ N \text{ es semiprimitivo}\}$ y la colección de conjuntos cerrados del espacio topológico $(Max(M), \mathcal{T})$. Incluso, hemos demostrado que la retícula completa:

$$SPm(M) = \{N \in \Lambda(M)|\ N \text{ es semiprimitivo}\} \cup \{M\}$$

es un marco espacial, es decir, $SPm(M) \cong \mathcal{O}(Max(M))$. Cabe señalar que este resultado es una versión análoga al resultado en ([27], Theorem 3.13) para un módulo M proyectivo en $\sigma[M]$. Sin embargo, hay que enfatizar que los autores en ese resultado han implementado técnicas reticulares y algunas técnicas algebraicas desarrolladas en Teoría de Categorías (un caso particular del Teorema General del Funtor Adjunto) pero aplicado, en particular, para la categoría $\sigma[M]$. Además de estas herramientas, utilizan las técnicas provenientes de la topología de libre de puntos (point-free topology) aplicado a marcos previstos por módulos.

También hemos visto que para cualquier anillo local uniserial R, existe un conjunto (por tanto cardinable) completo e irredundante de clases de isomorfismo de R-módulos multiplicación. Esto refleja que hay situaciones en donde, para un anillo no necesariamente conmutativo, las clases de isomorfismo de módulos multiplicación es cardinable. Entonces: ¿Habrán otros tipos de anillos (no triviales) donde las clases de isomorfismo de módulos multiplicación no sea una clase propia, sino un conjunto?

Hemos notado que dados $N \leq M$ y M un módulo multiplicación sobre un anillo conmutativo R el producto definido por J. Beachy [5] y el producto definido por Bican et al [6] coinciden en la retícula de submódulos de M, es decir, $N \cdot X = N_M X$ para todo $X \in \Lambda(M)$. Entonces: ¿Bajo qué condiciones adicionales al módulo multiplicación M se obtiene que $N \cdot X = N_M X$ para todo $X \in R$-Mod?

A pesar de haber obtenido resultados significativos en este trabajo, no parece inverosimil que surjan otros resultados que los generalicen y/o complementen.

Finalmente, queda mencionar que surgieron las siguientes cuestiones que se relacionan con el concepto de módulo múltiplicación y que quedan como posibles lineas de investigación.

1.- Estudiar las propiedades y caracterizaciones de los prerradicales α_N^M, ω_N^M, α_M^M y ω_0^M cuando M es un módulo multiplicación.

2.- Dado que existe un concepto dual al concepto de los módulos multiplicación: los módulos *comultiplicación*[1]. Introducidos (sobre anillos no necesariamente conmutativos) y estudiados por H. Ansari-Toroghy y F. Farshadifar en [2]. Resulta interesante introducir una noción dual al concepto de (sub)módulo primo en el sentido de Raggi et al [30] y estudiar el comportamiento de los módulos comultiplicación sobre cualquier anillo local uniserial

3.- Recientemente, J. Castro, J. Rios y G. Tapia introdujeron en [11] a los módulos *M-multiplicación*[2], los cuales son una generalización de los módulos multiplicación, más aún, estos autores investigan propiedades de estos módulos y obtienen resultados que extienden los resultados de El-Bast y P. Smith en [15] y de Tuganbaev en [43]. Entonces, tal vez sea posible generalizar algunos resultados expuestos en este trabajo para esta clase de módulos.

[1] Decimos que M es un *módulo comultiplicación* si para todo submódulo N de M existe un ideal I de R tal que $N = (0 :_M I)$, donde $(0 :_M I) = \{m \in M \mid mI = 0\}$.

[2] Un módulo $N \in \sigma[M]$ es llamado un *módulo M-multiplicación* si para todo submódulo L de N existe un submódulo I de M tal que $L = I_M N$.

Bibliografía

[1] Anderson, F., Fuller, K. (1992). *Rings and Categories of Modules*. New-York: Springer-Verlag.

[2] Ansari-Toroghy, H., Farshadifar, F. *The dual notion of multiplication modules*. Taiwanese J. Math. 11 (4) (2007), 1189–1201.

[3] Abuhlail, J. *A Zariski Topology for Modules*. Comm Algebra. 39 (2011), no. 11, 4749-4768.

[4] A. Barnard, *Multiplication modules*. J. Algebra 71 (1981), no. 1, 174-178. https://doi. org/10.1016/0021-8693(81)90112-5

[5] Beachy, J. (2002). *M-injective modules and prime M-ideals*. Comm. Algebra. 30(10): 4639-4676.

[6] L. Bican, P. Jambor, T. Kepka, and P. Nemec, *Prime and coprime modules*. Fund. Math. 107 (1980), no. 1, 33 - 45. https://doi.org/10.4064/fm-107-1-33-45.

[7] L. Bican, T. Kepka, and P. Nemec, *Rings, Modules and Preradicals*. Marcel Dekker, New York (1982).

[8] L. Bican, P. Jambor, T. Kepka, and P. Nemec, *Hereditary and cohereditary preradicals*. Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 26 (1976), No. 2, 192-206.

[9] Castro, J. Rios, J. *Prime submódules and local Gabriel correspondence in sigma $\sigma[M]$*. Comm. Algebra 40 (1) (2012) 213-232.

[10] Castro, J., Ríos, J. and Tapia, G. *Some aspects of Zariski topology for multiplication modules and their attached frames and quantales*. J. Korean Math. Soc 56 (2018).

[11] Castro, J., Ríos, J. and Tapia, G. *A Generalization of Multiplication Modules*. J. Korean Math. Soc 0 (2019).

[12] Dickson, E., *A torsion theory for abelian categories*. Trans. Amer. Math. Soc. (1964) 223-235.

[13] Dung, N. V., Huynh, D. V., Smith, P. F., Wisbauer, R. *Extending modules*. Longman Group Limited: Essex (1994).

[14] Ganter, B., Wille, R. *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations*. Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media (1999).ISBN 3-3540-62771-5.

[15] El-Bast, Z. A., Smith, P.F. *Multiplication modules*. Comm. Algebra **16** (1988), no. 4, 755-779. http://doi.org/10.1080/00927878808823601

[16] Erdoǧdou, V. *Multiplication modules which are distributive*. J. Pure Appl. Algebra, 54, Nos. 2–3, 209–213 (1988).

[17] Erné, M., Koslowski, J., Melton, A., and G. Strecker,E. *A primer on Galois connections*, in: Papers on general topology and applications (Madison, WI, 1991), Ann. New YorkAcad. Sci., Vol. 704, (1993), pp. 103 -125.

[18] C. Faith, *On Köthe Rings*. Math. Ann. 164 (1966) 207–212.

[19] Fernández-Alonso, R., Gavito, S. *The lattice of preradicals over local uniserial rings*. Journal of Algebra and Its Applications 5(6), p.p. 731-746, 2006.

[20] Golan, J. *Localization of noncommutative rings*. Marcel Dekker, Inc. (1975).

[21] Grätzer, G. *General lattice theory*. Birkhäuser Verlag, (2003).

[22] Köthe, G. *Verallgemeinerte abelsche gruppen mit hyperkomplexen operatorenring*. Math. Z. 39 (1934) 31–44.

[23] Herrlich, H., Strecker, G. E., *Category Theory: An introduction*. Allyn and Bacon, Inc. (1973).

[24] Hochster, M. *Primal ideal structure in commutative rings*. Trans. Amer. Math. Soc. 142, 43-60 (1969).

[25] Maranda, J. M. *Injective structures*. Trans. Math. Soc 110 (1964), 98-135.

[26] F. Mehdi. *On Modules Multiplication*. Mathematics Student. 40 (1974), 149-153.

[27] Medina-Bárcenas, M. G.,Morales-Callejas, L., Zaldivar-Corichi, A., Sandoval-Miranda, M. L. S. *Attaching topological spaces to a module (I): Sobriety and spatialily*. J. Pure Appl. Algebra **222** (2018), no. 5, 1026-1048. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2017.06.005

[28] Medina-Bárcenas, M. G., Zaldivar-Corichi, A., Sandoval-Miranda, M. L. S. *A generalizations of quantals with applications to modules and rings*. J. Pure Appl. Algebra **220** (2016), no. 5, 1837-1857. https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2015.10.004

[29] Picado, J. *The quantale of Galois connections*. Algebra Univers. 52 (2004) pp. 527-540.

[30] Raggi, F., Rios, J., Rincón, H., Fernández-Alonso, R., and Signoret, C. *Prime and Irreducible Preradicals*. Journal of Algebra and Its Applications Vol 4 (2005), No. 4, 451-466.

[31] Raggi, F., Ríos, J., Rincón, H., Fernández-Alonso, R., and Signoret, C. *The lattice structure of preradicals*. Commun, Algebra, 30(3), 1533-1544 (2002).

[32] Raggi, F., Ríos, J., Rincón, H., Fernández-Alonso, R., and Signoret, C. *The lattice structure of preradicals II*. Journal of Algebra and its Applications, Vol. 1, No. 2 (2002) 201-214.

[33] Raggi, F., Ríos, J., Rincón, H., Fernández-Alonso, R., and Gavito, S. *Main modules and some characterizations of rings with global conditions on preradicals*. Journal of Algebra and Its Applications. Vol. 13, No. 2 (2014).

[34] Raggi, F., Ríos, J., and Fernández-Alonso. R. *Semiprime prerradicals*. Comm Algebra. 37, no. 8, (2009) 2811-2822 .

[35] Rincón, H. *When is every preradical of R-Mod a left exact radical*. Comm Algebra. 25:8, 2507-2515 (1997).

[36] S. Singh and F.Mehdi, *Multiplication modules*. Can. Math. Bull., 22, No. 1, 93–98 (1979).

[37] Smith, P. *Mappings between module lattices*. Inter. Electronic Journal Of Algebra, Vol. 15, (2014) 173-195.

[38] Smith, P. *Multiplication modules and projective modules*. Period. Math. Hungar. 29 (2) (1994), 163–168.

[39] P. F. Smith, T. Ukegawa, and N. Umaya, *On noncommutative Noetherian multiplication rings*. Math. Semin. Notes Kobe Univ, 11, No. 3, 259–276 (1983).

[40] Stenström, B. *Rings of quotients*. Graduate Texts in Mathematics, No. 79 Springer Verlag: New York, 1979.

[41] Varadarajan, K. *M-projective and strongly M-projective modules*. The University of Calgary, Alberta, 1975.

[42] Tuganbaev, A. *Multiplication modules over noncommutative rings*. Sb. Math. 194 (11-12) (2003), 1837-1864.

[43] Tuganbaev, A. *Multiplication modules*. J. Math. Sci. (N.Y.) 123(2) (2004), 3839-3905.

[44] Wisbauer, R. *Foundations of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach Science Publisher, Philadelphia. (1991).

[45] Xue, W. *Artinian duo rings and self-duality*. Proc. Amer. Math. Soc. Vol 105, No. 2 (1989), 309-313.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00216
Matrícula: 2183802406

Algunos aspectos de la topología de Zariski para módulos multiplicación y sus marcos y cuantales adjuntos

Con base en la Legislación de la Universidad Autónoma Metropolitana, en la Ciudad de México se presentaron a las 15:00 horas del día 23 del mes de abril del año 2021 POR VÍA REMOTA ELECTRÓNICA, los suscritos miembros del jurado designado por la Comisión del Posgrado:

DRA. MARIA JOSE ARROYO PANIAGUA
DR. MAURICIO MEDINA BARCENAS
DR. ROGELIO FERNANDEZ ALONSO GONZALEZ

Bajo la Presidencia de la primera y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: EDGAR GUTIERREZ SUAREZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, la presidenta del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
DIRECCIÓN DE SISTEMAS ESCOLARES

EDGAR GUTIERREZ SUAREZ
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTA

DRA. MARIA JOSE ARROYO PANIAGUA

VOCAL

DR. MAURICIO MEDINA BARCENAS

SECRETARIO

DR. ROGELIO FERNANDEZ ALONSO GONZALEZ

El presente documento cuenta con la firma –autógrafa, escaneada o digital, según corresponda- del funcionario universitario competente, que certifica que las firmas que aparecen en esta acta – Temporal, digital o dictamen- son auténticas y las mismas que usan los c.c. profesores mencionados en ella