Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Completación de Espacios Pre-casi-uniformes

Tesis que presenta

Adolfo Javier Pimienta Acosta

Para obtener el grado de
Doctor en Ciencias Matemáticas

Asesor:
Dr. Adalberto García-Máynez y Cervantes

Jurado Calificador:

Presidente: Dr. Richard Gordon Wilson Roberts	UAM-I
Secretario: Dr. Mikhail Tkachenko Gelievich	UAM-I
Vocal: Dr. Ángel Tamariz Mascarúa	UNAM
Vocal: Dr. Manuel Sanchis López	UJI

Ciudad de México

8 de Julio de 2016

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

Fecha : 06/07/2016
Página : 1/1

CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO

La Universidad Autónoma Metropolitana extiende la presente CONSTANCIA DE PRESENTACION DE DISERTACIÓN PÚBLICA de DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS) al alumno ADOLFO JAVIER PIMIENTA ACOSTA, matrícula 209382532, quien cumplió con los 312 créditos correspondientes a las unidades de enseñanza aprendizaje del plan de estudio. Con fecha ocho de julio del 2016 presentó la DEFENSA de su DISERTACIÓN PÚBLICA cuya denominación es:

COMPLETACION DE ESPACIOS PRE-CASI-UNIFORMES

Cabe mencionar que la aprobación tiene un valor de 180 créditos y el programa consta de 492 créditos.

El jurado del examen ha tenido a bien otorgarle la calificación de:

APROBAR

JURADO

Presidente	Secretario
DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS	DR. MIKHAIL TKACHENKO GALIEVICH
Vocal	**Vocal**
DR. ANGEL TAMARIZ MASCARUA	DR. MANUEL SANCHIS LOPEZ

Dedicatoria

$\boxed{\text{A la memoria del Dr. Adalberto García-Máynez y Cervantes (1941-2016)}}$

Quien fue un gran maestro y un gran amigo, y aunque físicamente no estés con nosotros, siempre estarás en nuestros corazones y en nuestras mentes

Contenido

Resumen

En el primer capítulo, se definen los conceptos básicos de la teoría de espacios pre-uniformes, tipos importantes de pre-uniformidades, filtros de Cauchy y tipos especiales de filtros de Cauchy. También nos concentramos en el estudio de espacios pre-uniformes completos, por último analizamos y nos enfocamos en la existencia de la completación de todo espacio T_2-pre-uniforme.

El segundo capítulo contiene las definiciones básicas de la teoría de espacios casi-uniformes, plasmada en algunos hechos importantes y algunos ejemplos. También analizamos una de las muchas técnicas de completación de esta teoría, apoyandonos en el siguiente concepto de filtro de Cauchy: Un filtro de $\mathcal{F}$ sobre un espacio casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ se dice *Pervin-Sieber* o filtro PS-Cauchy (ver [50]) si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $x \in X$ tal que $U(x) \in \mathcal{F}$. Una ventaja obvia de esta definición es que todo filtro $\tau_{\mathcal{U}}$-convergente posee esta propiedad. Un espacio casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es llamado PS-*completo*, si todo filtro PS-Cauchy tiene un punto adherente.

En el tercer capítulo de nuestra tesis se basa en el estudio de las bases anulares, es decir una base $\mathcal{B}$ de un espacio topológico (X,τ) que es cerrada bajo uniones e intersecciones finitas.

También estudiamos las casi-uniformidades y casi-proximidades transitivas, es decir casi-uniformidades con la propiedad de que cada $U \in \mathcal{U}$ cumple que $U^2 = U$. En este capítulo probamos que existe una biyección entre el conjunto de todas las bases anulares de un espacio topológico (X,τ) y el conjunto de todas las casi-proximidades transitivas sobre X que inducen a τ.

Se establecen algunas propiedades de los espacios topológicos (X,τ) las cuales implican que τ es la única base anular, respondiendo parcialmente al problema planteado en ([12], **Problema B**).

Finalmente en el capítulo cuatro estudiamos las estructuras pre-casi-uniformes. Estas estructuras son estructuras más generales que las estructuras casi-uniformes con la ventaja de que cada espacio pre-casi-uniforme tiene una extensión canónica en la que cada filtro minimal Cauchy es filtro de vecindades de alguno de sus puntos. Este tipo débil de completación puede mejorarse se se requiere que el espacio original posea algunas propiedades adicionales: por ejemplo, la extensión canónica es completa por convergencia si y sólo si todo filtro de cauchy en el espacio original tiene un subfiltro el cual es minimal Cauchy.

Agradecimientos

Antes que nada quiero agradecerle a Dios, Padre Todopoderoso, por darme la sabiduría para alcanzar una meta más en mi vida.

Son muchas las personas especiales a las que me gustaría agradecer su amistad, apoyo, ánimo y compañía en las diferentes etapas de mi vida. Algunas están conmigo y otras en mis recuerdos y en mi corazón. Sin importar en dónde estén o si alguna vez llegan a leer estas palabras quiero darles gracias por formar parte de mí, por todo lo que me han brindado y por todas su bendiciones.

A las dos mujeres más importantes en mi vida, Roquelina Acosta Padilla (mi mamá) y Margarita Gary Gutiérrez (mi amada esposa) la primera por enseñarme el valor de la vida y a trabajar duro para conseguir las cosas deseadas, la segunda por creer en mí y hacerme un hombre nuevo gracias a su amor y comprensión y por estar ahí cada vez que la necesité. Te amo preciosa gordita.

Papi, este es un logro que quiero compartir contigo, gracias por creer en mí.

A mis hermanos: Danys y Jorge porque aunque lejos siempre están conmigo.

A la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa, en particular, al departamento de Matemáticas y a sus profesores, en especial a los doctores: Luís Miguel Villegas Silva, Mario Pineda Ruelas, Bernardo LLano Pérez, Joaquín Delgado Fernández y Roberto Quezada Batalla y a la doctora Patricia Saavedra Barrera, por haberme hecho parte de esta casa.

A las secretarias del Departamento de Matemáticas, que me recibieron con una sonrisa cada vez que fui a visitarlas.

Al Dr. Adalberto García-Máynez y Cervantes, quien sin conocerme, aceptó asesorar este trabajo y guiarme en el largo camino de la topología general. Gracias por su apoyo en todos los sentidos, sus enseñanzas, su orientación y sobre todo su paciencia, por resolver mis dudas siempre con una sonrisa y motivarme siempre a salir adelante.

A los Doctores Richard Gordon Wilson, Mikhail Tkachenko Gelievich, Ángel Tamariz Mascarúa y Manuel Sanchis López por haberse tomado la molestia de leer este trabajo, además de los comentarios y observaciones que hicieron para la mejora de la misma. Les reitero mi profunda admiración.

Al Concejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), por darme la oportunidad de poder mantenerme en México con su beca. A la Maestra María Iseo, por la voluntad que siempre tuvo para hacer las cosas y siempre darme una solución a todo, a México por la oportunidad que me dio, de cumplir una meta más en mi vida.

A mi gran amigo en México Juan José Bernal por toda su ayuda y por estar ahí cuando lo necesitamos.

A la señora Eulalia Pendragón, por ser mi mamá en México, a la señora Alma García Oliveros por su amistad y su amor, a la señora Virginia Cangas del Campo, por recibirme y tratarme con cariño cada vez que fui a visitar a Beto.

En general, agradezco a todos los que no mencioné aquí pero que de alguna forma aportaron para que este sueño, mi sueño, se hiciera realidad.

A todos los que acabo de mencionar les digo: **Muchas Gracias**.

Introducción

Si se elimina la simetría en la definición de *pseudo-métrica*, obtenemos la definición de *casi-pseudo-métrica.*

Las funciones de distancia asimétrica ya se conocian en la obra de Hausdorff al inicio del siglo XX cuando en su libro sobre Teoría de Conjuntos (ver [20]), él analiza la llamada *métrica de Hausdorff* de un espacio métrico. Una familia de pseudo-métricas sobre un conjunto genera una *uniformidad.* Similarmente, una familia de casi-pseudo-métricas sobre un conjunto genera una *casi-uniformidad* (ver [46]).

En 1937 *Weil* publicó un libro sobre (entornos) uniformidades, el cual es considerado como el inicio de la teoría moderna de uniformidades. Tres años después *Tukey* sugirió una aproximación a las uniformidades via cubiertas uniformes. El estudio de las casi-uniformidades inició en 1948 con las investigaciones de *Nachbin's* (registrada en [39]) sobre espacios uniformes pre-ordenados, esto es, espacios topológicos pre-ordenados cuyo pre-orden esta dado por la intersección de los entornos de una casi-uniformidad (filtro) $\mathcal{U}$ y cuya topología es inducida por la uniformidad supremo asociada $\mathcal{U} \vee \mathcal{U}^{-1}$. Él probó que los espacios topológicos ordenados de este tipo se pueden caracterizar por la propiedad de que todos ellos admiten compactificaciones ordenadas T_2.

El filtro $\mathcal{U}^{-1}$ de relaciones inversas de una casi-uniformidad $\mathcal{U}$ es también una casi-uniformidad. Similarmente, toda casi-seudo-métrica tiene una conjugada obvia intercambiando el orden de los puntos. Por lo tanto las casi-uniformidades y las casi-pseudo-métricas producen de manera natural espacios bi-topológicos (en el sentido de Kelley ver [24]), esto es, un conjunto dotado de dos topologías.

El termino de *casi-proximidad* aparece por primera vez en los artículos de *Pervin* y *Steiner* (Ver [43] y [51]). La conexión entre las casi-uniformidades totalmente acotadas y las casi-proximidades generaliza la muy conocida correspondencia entre las uniformidades totalmente acotadas y las proximidades.

Los trabajos de *Fox*, *Junnila* y *Kofner* mostrarón que en la clase de los espacios T_1 los conceptos de γ-espacio (= un espacio topológico admite una casi-uniformidad local con una base numerable), espacios casi-pseudo-metrizables y no arquimedianamente casi-pseudo-metrizables son todos distintos (ver [13] y [25]) y que la casi-uniformidad fina de un espacio metrizable y subordenable (= espacio ordenado generalizado) tiene una base consistente de entornos transitivos (ver [23] y [26]).

Császar en [4], desarrolló la teoría de la bi-completación para espacios casi-uniformes, que fue popularizada después por *Fletcher*, *Lindgren* y *Salbany* (ver [10] y [49]).

En 1962, W. Pervin (ver [44]), muestra que todo espacio topológico (X, τ) es casi-uniformizable, esto es que la topología τ, es compatible con una casi-uniformidad dada $\mathcal{U}$ ($\tau = \tau_{\mathcal{U}}$). Este resultado estableció una interesante analogía entre los espacios metrizables y los espacios topológicos. Así como un espacio metrizable puede ser estudiado con referencia a métricas compatibles particulares, un espacio topológico también puede ser estudiado con referencias a casi-uniformidades compatibles particulares. Por ejemplo, el Teorema de Niemytzki-Tychonoff ("Un espacio metrico es compacto si y solamente si es completo en toda metrica equivalente") tiene un perfecto análogo en espacios casi-uniformes. En esto y muchos otros aspectos, una casi-uniformidad es una generalización más natural de una métrica que una uniformidad.

La idea más simple de completación se presenta en espacios métricos cuando extendemos el espacio y también la métrica con objeto de que el espacio extendido sea *completo*, es decir, que tenga la propiedad de que todas sus sucesiones de Cauchy sean convergentes. En estructuras un poco más generales, como los espacios uniformes, sustituimos la métrica por una familia de cubiertas con propiedades específicas y las sucesiones de Cauchy por filtros en el espacio los cuales intersectan a todas las cubiertas. Estos filtros reciben el nombre de filtros de Cauchy (respecto a la estructura). El proceso de completación consiste entonces en extender el conjunto, las cubiertas y los filtros, conservando las propiedades de cubiertas y de manera que los filtros de Cauchy respecto a la estructura extendida sean todos convergentes.

A. Császar y J. Deák, estudiaron en detalle el siguiente problema acerca de extensiones de casi-uniformidades (Ver [4] y [5]): Sea $\mathcal{U}$ una casi-uniformidad sobre un conjunto X, $\tau_{\mathcal{U}}$ la topología inducida por $\mathcal{U}$, y $\tilde{\tau}_{\mathcal{U}}$ una extensión de $\tau_{\mathcal{U}}$ definida en el conjunto $Y \supseteq X$; describir aquellas casi-uniformidades $\mathcal{V}$ que extienden a $\mathcal{U}$ y que son compatibles con $\tilde{\tau}_{\mathcal{U}}$. El caso especial donde $\mathcal{V}$ es transitiva o totalmente acotada, o el residuo $Y \setminus X$ es finito, o X es denso, doblemente denso (esto es, denso en $(Y, \mathcal{V})$, también como en su conjugado), o sup-denso (esto es, denso en $(Y, \mathcal{V}^s)$) en Y han atraído interés especial. J. Deák en [5] y [6] mostró que varios métodos desarrollados por Bing y Hausdorff para el caso de extensiones de (pseudo)métricas, se podían aplicar también ajustando la asimetría.

El objetivo de esta tesis es presentar una estructura más general, que la estructura casi-uniforme, en donde se pueda llevar a cabo este proceso de completación. De hecho probaremos que todo espacio pre-casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$, tiene una extensión canónica $\widehat{(X,\mathcal{U})}$, con un tipo débil de completez en el que todo filtro minimal $\widehat{\mathcal{U}}$-Cauchy es un filtro de $\tau_{\widehat{\mathcal{U}}}$-vecindades estos resultados se pueden ver en [18].

La completez clásica de esta extensión se obtiene si y sólo si todo filtro $\mathcal{U}$-Cauchy en el espacio original contiene un subfiltro minimal $\mathcal{U}$-Cauchy. Entre estos espacios que podríamos llamar completables se encuentran los espacios casi-uniformes precompactos y, desde luego, todos los espacios uniformes.

Capítulo 1

Espacios pre-uniformes y sus completaciones

En este capítulo se establecen algunas definiciones y propiedades básicas, sobre espacios pre-uniformes, necesarias para la comprensión de esta tesis. Las referencias que se pueden consultar, que son relevantes para este capítulo son las siguientes: (Ver [16] y [36]).

1.1. Filtros y bases de filtros

Definición 1.1. Sea X un conjunto. Decimos que $\mathcal{F}$ es un *filtro* sobre X, donde $\mathcal{F}$ es una subfamilia no vacía de $\mathcal{P}(X)$, si cumple las siguientes condiciones:

(F1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$.

(F2) Si $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$, entonces $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}$.

(F3) Si $A \in \mathcal{F}$ y $A \subseteq A_1 \subseteq X$, entonces $A_1 \in \mathcal{F}$.

Un filtro $\mathcal{F}$ en X es un *filtro maximal* ó un *ultrafiltro* sobre X, si para todo filtro $\mathcal{F}'$ en X que contiene a $\mathcal{F}$, tenemos $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$.

Una *base de filtro* en X es una familia no vacía $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(X)$ tal que:

(FB1) $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

(FB2) Si $A_1, A_2 \in \mathcal{B}$, entonces existe un $A_3 \in \mathcal{B}$ tal que $A_3 \subset A_1 \cap A_2$.

El lector puede ver en ([52]. 3.2) una muy buena referencia de los siguientes resultados.

Observación 1.2. Sea (X, τ) un espacio topológico, y $\mathcal{N}_\tau(x)$ la familia de todas las vecindades de $x \in X$. Entonces $\{\mathcal{N}_\tau(x)\}_{x\in X}$ tiene las siguientes propiedades:

i) Para toda $x \in X$, $\mathcal{N}_\tau(x)$ es un filtro.

ii) $x \in X$, $E \in \mathcal{N}_\tau(x)$ implica que existe $F \in \mathcal{N}_\tau(x)$ tal que para toda $y \in F, E \in \mathcal{N}_\tau(y)$.

Definición 1.3. Una familia $\gamma \subseteq \mathcal{P}(X)$ no vacía se llama *centrada*, si $\cap\mu \neq \emptyset$ para todo finito $\mu \subset \gamma$.

Proposición 1.4. 1. Cualquier filtro es base de filtro.

2. Toda base de filtro es una familia centrada.

Demostración. 1. El primer axioma es el mismo para el filtro y la base de filtro. El segundo axioma de filtro es más fuerte, así que todo filtro es base de filtro.

2. Sea γ una base de filtro. Por definición tenemos que $\gamma \neq \emptyset$. Dada una familia $\mu = \{A_1, \ldots, A_n\} \subset \gamma$, demostraremos que $\cap\mu \neq \emptyset$ utilizando la inducción sobre n. Si $n = 1$, entonces $\cap\mu = A_1 \neq \emptyset$ debido a (1.1 (FB1)).

   Supongamos que para cualesquiera k elementos de γ su intersección no es vacía y fijemos $A_1, \ldots, A_k, A_{k+1} \in \gamma$. De acuerdo con (1.1 (FB2)) existe un $A'_k \in \gamma$ tal que $A'_k \subset A_k \cap A_{k+1}$. De modo que $A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1} \supset A_1 \cap \cdots \cap A_{k-1} \cap A'_k \neq \emptyset$ por la hipótesis inductiva. De aquí se sigue que $A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap A_{k+1} \neq \emptyset$ y (2) está probado. $\square$

Proposición 1.5. Sea $\mathcal{B}$ una base de filtro en X. Entonces, la familia:
$\mathcal{F}_\mathcal{B} = \{A \subseteq X \colon \text{existe un } B \in \mathcal{B} \text{ tal que } B \subset A\}$ es un filtro en X. En particular, toda base de filtro es subfamilia de un filtro.

Demostración. Es claro que $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}_\mathcal{B}$, por lo que $\mathcal{F}_\mathcal{B} \neq \emptyset$. Si $\emptyset \in \mathcal{F}_\mathcal{B}$, entonces existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset \emptyset$. Esto quiere decir que $B = \emptyset$ lo que contradice a (1.1 (FB1)). Por tanto, $\mathcal{F}_\mathcal{B}$ tiene la propiedad (1.1 (F1)). Verifiquemos (1.1 (F2)) para $\mathcal{F}_\mathcal{B}$. Dados $A_1, A_2 \in \mathcal{F}_\mathcal{B}$, tomemos $B_1 \subset A_1$ y $B_2 \subset A_2$ tales que $B_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, 2$. Como $\mathcal{B}$ es base de filtro, existe un $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset B_1 \cap B_2$. Ahora vemos que $B \subset B_1 \cap B_2 \subset A_1 \cap A_2$ y esto significa que $A_1 \cap A_2 \in \mathcal{F}_\mathcal{B}$.

Finalmente, si $A \in \mathcal{F}_\mathcal{B}$ y $A \subset A'$, entonces tomando algún $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subset A$, obtenemos $B \subset A'$ por lo que $A' \in \mathcal{F}_\mathcal{B}$. $\square$

Definición 1.6. Sea X un conjunto arbitrario. Una relación $\leq$ en X se llama *orden parcial*, si:

1) $x \leq x$ para todo $x \in X$;

2) Si $x \leq y$ y $y \leq x$, entonces $x = y$;

3) Si $x \leq y$ y $y \leq z$, entonces $x \leq z$.

El par $(X, \leq)$ se llama conjunto *parcialmente ordenado*.

Definición 1.7. Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Un elemento $x_0 \in X$ se llama maximal, si $x_0 \leq y \in X$ implica $x_0 = y$. Un subconjunto $A \subset X$ se llamará *cadena*, si $a \leq b$ ó $b \leq a$ para cualesquiera $a, b \in A$. El conjunto $(X, \leq)$ tiene *todas sus cadenas acotadas*, si para toda cadena $A \subset X$ existe un $x \in X$ tal que $a \leq x$ para cada $a \in A$.

Ejemplo 1.8. 1) Cualquier $X \subset \mathbb{R}$ con el orden natural en $\mathbb{R}$ es parcialmente ordenado. Dependiendo de X, X puede tener cadenas acotadas o no acotadas y puede tener más de un elemento maximal.

2) Sea Y un conjunto y $\gamma \subseteq \mathcal{P}(Y)$. Dados $U, V \in \gamma$, diremos que $U \leq V$ si $U \subset V$. Entonces, $(\gamma, \leq)$ es parcialmente ordenado. Existen familias γ que tienen cadenas acotadas y elementos maximales, los que pueden ser muchos. También hay γ's con cadenas no acotadas y sin elementos maximales.

3) Si se tiene un conjunto F de funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ (no necesariamente continuas), definimos la relación $\leq$ como $f \leq g$ si y sólo si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entonces, $\leq$ es un orden parcial en F. Dependiendo de F, el orden definido puede tener o no tener todas sus cadenas acotadas. Existen familias F sin elementos maximales, o familias con un número infinito de los mismos.

Los siguientes teoremas son muy conocidos, por lo que omitiremos sus demostraciones, pero daremos las referencias exactas donde pueden consultarse (Ver [19], capítulo 2).

Teorema 1.9. [Lema de Zorn] Todo conjunto parcialemente ordenado, con todas sus cadenas acotadas, tiene un elemento maximal.

Teorema 1.10. Sea X un conjunto arbitrario. Entonces:

1) Para todo filtro $\mathcal{F}$ en X, existe un ultrafiltro ξ en X tal que $\mathcal{F} \subset \xi$;

2) Para toda familia centrada $\mathcal{F}$ en X, existe una familia centrada maximal ξ en X tal que $\mathcal{F} \subset \xi$.

Teorema 1.11. [Caracterización de los ultrafiltros] Sea X un conjunto arbitrario. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1) ξ es un ultrafiltro en X;

2) ξ es una familia centrada maximal en X;

3) ξ es base de filtro y para toda $A \subset X$ tal que $A \notin \xi$, existe un $B \in \xi$ tal que $B \cap A = \emptyset$;

4) ξ es base de filtro y para toda $A \subset X$ si $A \cap B \neq \emptyset$ para cada $B \in \xi$, entonces $A \in \xi$;

5) ξ es una familia centrada y para toda $A \subset X$, se tiene $A \in \xi$ ó $X \setminus A \in \xi$.

Definición 1.12. Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ filtros en X. Decimos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ se *mezclan*, en símbolos $\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G}$, si $F \cap G \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$ y para todo $G \in \mathcal{G}$. Equivalentemente:

- $\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G}$ si y sólo si existe un filtro $\mathcal{H}$ en X tal que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son subfiltros de $\mathcal{H}$.

Definición 1.13. Sea $\mathcal{F}$ un filtro en un espacio topológico (X, τ).

1) El conjunto:
$$\operatorname{Adh}(\mathcal{F}) = \cap\{Cl(F) \colon F \in \mathcal{F}\}$$
recibe el nombre de *adherencia* del filtro $\mathcal{F}$.

2) Si $x \in \mathrm{Adh}(\mathcal{F})$, x recibe el nombre de punto *adherente* a $\mathcal{F}$.

3) Se dice que el filtro $\mathcal{F}$ *converge* a un punto $p \in X$, si $\mathcal{F} \supseteq \eta_p$.

4) El conjunto:

$$\mathrm{Conv}(\mathcal{F}) = \{p \in X : p \text{ es punto de convergencia de } \mathcal{F}\}$$

recibe el nombre de *convergencia* del filtro $\mathcal{F}$.

Notación 1.14. i) Si $p \in \mathrm{Adh}(\mathcal{F})$, entonces escribimos: $\mathcal{F} \mapsto p$.

ii) Si $p \in \mathrm{Conv}(\mathcal{F})$, entonces escribimos: $\mathcal{F} \to p$.

Observación 1.15. Si X es un espacio topológico, es un hecho muy conocido que:

$$\mathrm{Adh}(\mathcal{F}) \supseteq \mathrm{Conv}(\mathcal{F}), \text{ es decir, si } \mathcal{F} \to p, \text{ entonces } \mathcal{F} \mapsto p.$$

Además ambos conjuntos son cerrados en X.

Definición 1.16. Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro en X. $\mathcal{F}$ se dice τ-*balanceado* o simplemente *balanceado*, si siempre que $\mathcal{F} \mapsto p$, entonces $\mathcal{F} \to p$.

Ejemplo 1.17. Todo ultrafiltro en un espacio topológico (X, τ) es un filtro balanceado.

Demostración. En efecto, si $\mathcal{F}$ es un filtro, entonces es claro que $\mathcal{F} \mapsto p$ si y sólo si $\mathcal{F}$ y η_p están contenidos en un mismo filtro. Si $\mathcal{F}$ es un ultrafiltro en X tal que $\mathcal{F} \mapsto p$ y si $\mathcal{G}$ es un filtro en X tal que $\eta_p \subseteq \mathcal{G}$ y $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$, entonces $\mathcal{F} = \mathcal{G}$. Por tanto, $\eta_p \subseteq \mathcal{F}$ por lo cual $\mathcal{F} \to p$. $\square$

En el ejemplo que sigue observaremos lo que ocurre cuando $\mathcal{F}$ es únicamente filtro.

Ejemplo 1.18. En el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_u)$ con τ_u la topología euclidiana de $\mathbb{R}$, es decir, la inducida por el valor absoluto, la sucesión $\{a_n\}_n$ con término general $a_n = (-1)^n(1 - \frac{1}{n})$, genera un filtro $\mathcal{F}$ que no converge, pero que tiene a 1 y -1 en su adherencia. En otras palabras, $\mathrm{Adh}(\mathcal{F}) = \{1, -1\}$ y $\mathrm{Conv}(\mathcal{F}) = \emptyset$.

Definición 1.19. Sea (X, τ) un espacio topológico y $\mathcal{F}$ un filtro en X.

1. $\mathcal{F}$ se dice *regular* si para cada $F \in \mathcal{F}$ existe $G \in \mathcal{F}$ tal que $Cl(G) \subseteq \mathrm{int}(F)$.

2. $\mathcal{F}$ se dice *regular maximal* si:

   i) $\mathcal{F}$ es regular.

   ii) $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ para todo filtro regular tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.

3. $\mathcal{F}$ se dice *abierto*[a] si para cada $F \in \mathcal{F}$ también $\mathrm{int}(F) \in \mathcal{F}$. Equivalentemente, si $\mathcal{F} \cap \tau$ es una base del filtro $\mathcal{F}$.

[a]Notemos que la definición de filtro abierto es algo distinta a la tratada en [8]

4. $\mathcal{F}$ se dice *abierto maximal* si:

   i) $\mathcal{F}$ es abierto.

   ii) $\mathcal{F} = \mathcal{G}$ para todo filtro abierto tal que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{G}$.

Teorema 1.20. Sean (X, τ) un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro abierto maximal en X y $V \subseteq X$ un conjunto abierto no vacío. Entonces $V \in \mathcal{F}$ si y sólo si $V \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Obvia.
($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{G}$ el filtro de superconjuntos de V. La hipótesis $V \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$ implica que $\mathcal{G} \leftrightarrow \mathcal{F}$, es decir $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$ se mezclan, y esto sucede si y sólo si existe un filtro $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{F}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$ (véase (1.12)). Además, en este caso, $\mathcal{H}$ es también abierto, pues $\operatorname{int}(G \cap F) = \operatorname{int}(G) \cap \operatorname{int}(F)$ para todo $G \in \mathcal{G}$, $F \in \mathcal{F}$. Pero $\mathcal{F}$ es maximal, de modo que $\mathcal{F} = \mathcal{H}$ y $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$. Por tanto $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ y así $V \in \mathcal{F}$. □

Notemos que si $\{\mathcal{F}_i : i \in J\}$ es una cadena de filtros abiertos, (respectivamente, regulares) en un espacio topológico X, entonces $\bigcup_{i \in J} \mathcal{F}_i$ es un filtro abierto, (respectivamente regular) en X. Usando el Lema de Zorn deducimos que existen elementos maximales en la familia de filtros abiertos y en la familia de filtros regulares en X, lo que permite establecer el siguiente corolario:

Observación 1.21. Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces cada filtro abierto (regular) está contenido en un filtro abierto maximal (regular maximal).

Teorema 1.22. Sean (X, τ) un espacio topológico, $\mathcal{F}$ un filtro regular maximal en X y sea $V \subseteq X$ un abierto no vacío. Entonces $V \in \mathcal{F}$ si y sólo si existe una sucesión $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de abiertos no vacíos en X tales que:

i) $V \supseteq Cl(V_1)$.

ii) $Cl(V_{n+1}) \subseteq V_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

iii) $V_n \cap F \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y para todo $F \in \mathcal{F}$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Trivial. En efecto, supongamos $V \in \mathcal{F}$. Por la regularidad de $\mathcal{F}$ existe $O_1 \in \tau \setminus \{\emptyset\}$, tal que

$$O_1 \subseteq Cl(O_1) \subseteq \operatorname{int}(V).$$

Tomemos $V_1 = \operatorname{int}(O_1)$ y apliquemos nuevamente la regularidad. De manera inductiva construimos una sucesión de abiertos no vacíos V_n de X, los cuales satisfacen $i), ii)$ y $iii)$.
($\Leftarrow$) Tomemos:

$$\mathcal{G} = \{G \subseteq X : V_n \subseteq G \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

Claramente $\mathcal{G}$ es un filtro regular en X. Además $\mathcal{G} \leftrightarrow \mathcal{F}$ por lo que existe un filtro $\mathcal{H}$ tal que $\mathcal{G}, \mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$. De hecho $\mathcal{H} = \{G \cap F : G \in \mathcal{G}, F \in \mathcal{F}\}$. Probemos que $\mathcal{H}$ es regular.

Fijemos $G \in \mathcal{G}, F \in \mathcal{F}$ y tomemos $G_1 \in \mathcal{G}$ y $F_1 \in \mathcal{F}$ de manera que $Cl(G_1) \subseteq \text{int}(G)$ y $Cl(F_1) \subseteq \text{int}(F)$. Ahora bien $G_1 \cap F_1 \in \mathcal{H}$ y además se cumple que:

$$Cl(G_1 \cap F_1) \subseteq Cl(G_1) \cap Cl(F_1) \subseteq \text{int}(G) \cap \text{int}(F) = \text{int}(G \cap F).$$

Esto demuestra que $\mathcal{H}$ es regular. Por tanto, $\mathcal{F} = \mathcal{H}, \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ y $V \in \mathcal{F}$. $\square$

Teorema 1.23. Sea (X, τ) un espacio topológico regular y $\mathcal{F}$ un filtro regular en X con la propiedad de que $\text{Adh}(\mathcal{F}) = \emptyset$. Sea $p \notin X$ y sea $Y = X \cup \{p\}$. Entonces, las siguientes condiciones:

i) $\eta_p = \{F \cup \{p\} \colon F \in \mathcal{F}\}$.

ii) Para cada $x \in X$, η_x es el filtro de vecindades de x en (X, τ).

iii) $A \subseteq Y$ es abierto en Y si para todo $z \in A, A \cap X \in \eta_z$,

definen una topología τ^* para Y tal que (Y, τ^*) es regular, X es un subespacio abierto y denso de Y y $\tau^*|_X = \tau$.

Demostración. Primero notemos que si $x \in X$, el filtro de vecindades η_x de x en X es una base de filtro en Y. Sea $y \in W \in \tau^*$. Si $y \in X$, existe $V_y \in \eta_y$ (filtro de vecindades de y en X) tal que $V_y \subseteq W$. Como $\text{Adh}(\mathcal{F}) = \emptyset$ existen $F_y \in \mathcal{F}$ y $T_y \in \eta_y$ tales que $F_y \cap T_y = \emptyset$. Sea ahora $U_y \in \tau$ tal que:

$$y \in U_y \subseteq Cl_X(U_y) \subseteq T_y \cap V_y.$$

Afirmación: $Cl_X(U_y)$ es cerrado en Y. En efecto, como $(\{p\} \cup F_y) \cap U_y = \emptyset$ se tiene que $p \notin Cl_Y(U_y)$, por lo que:

$$Cl_X(U_y) = Cl_Y(U_y).$$

Así vemos que $Cl_X(U_y)$ es cerrado en Y. Por tanto, Y es regular en cada punto de X. Ahora si $y = p$ con $p \in W \in \tau^*$, entonces por definición $\{p\} \cup F \subseteq W$ para algún $F \in \mathcal{F}$. Por ello existe $G \in \mathcal{F}$ tal que $Cl_X(G) \subseteq \text{int}_X(F)$. Finalmente notemos que:

$$Cl_Y(\{p\} \cup G) = \{p\} \cup Cl_X(G),$$

pues $Cl_Y(G) \subseteq Cl_X(G) \cup \{p\}$. De donde, $Cl_Y(\{p\} \cup G) = \{p\} \cup Cl_X(G) \subseteq \{p\} \cup F$. Por lo cual Y es regular en p. $\square$

1.2. Pre-uniformidades

Los resultados más importantes sobre pre-uniformidades se pueden consultar en [16].

Definición 1.24. Sea X un conjunto no vacío.

1. Si α es una cubierta de X y $B \subseteq X$, entonces se define la *estrella* de B con respecto a α como:
$$St(B,\alpha) = \bigcup\{L \in \alpha \colon B \cap L \neq \emptyset\} \tag{1.1}$$
$\alpha^* = \{St(A,\alpha) \colon A \in \alpha\}$.

2. Sea α una cubierta de X. Para cada $p \in X$, defínase la *coestrella* de p respecto a α con la fórmula:
$$Cost(p,\alpha) = \cap\{L \colon p \in L \in \alpha\} \tag{1.2}$$
La cubierta $\{Cost(p,\alpha) \colon p \in X\}$ se denota como α^{∇} y recibe el nombre de cubierta *cobaricéntrica* de α.

3. Sean α y β dos cubiertas de X. Se dice que α es un *refinamiento* de β si para cada $U \in \alpha$ existe $V \in \beta$ tal que $U \subseteq V$ (en símbolos $\alpha \leq \beta$).

4. Sea $\mathcal{U}$ una familia de cubiertas de X dirigida por refinamientos. La *topología generada* por $\mathcal{U}$, denotada por $\tau_{\mathcal{U}}$, se define mediante la siguiente condición:
   - $L \in \tau_{\mathcal{U}}$ si y sólo si para toda $p \in L$, existe $\alpha_p \in \mathcal{U}$ tal que $St(p,\alpha_p) \subseteq L$.

Definición 1.25. Sea $\mathcal{U}$ una familia no vacía de cubiertas de X. La familia $\mathcal{U}$ recibe el nombre de *base de pre-uniformidad* en X si :

i) Dados $\alpha, \beta \in \mathcal{U}$, existe $\gamma \in \mathcal{U}$ tal que $\gamma \leq \alpha$ y $\gamma \leq \beta$.

ii) Dada $\alpha \in \mathcal{U}$, existe $\beta \in \mathcal{U}$ tal que $\beta \leq \{\operatorname{int}_\tau A \colon A \in \alpha\}$, en donde τ es la topología asociada a $\mathcal{U}$.

Una *pre-uniformidad* en X es una base de pre-uniformidad $\mathcal{U}$ en X tal que si γ es cubierta de X y existe $\alpha \in \mathcal{U}$ con $\alpha \leq \gamma$, entonces $\gamma \in \mathcal{U}$.

Un *espacio pre-uniforme* es una pareja $(X,\mathcal{U})$, en donde X es un conjunto no vacío y $\mathcal{U}$ es una pre-uniformidad en X.

Definición 1.26. 1. Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases de pre-uniformidad en X. Se dice que $\mathcal{B}_1$ *precede* a $\mathcal{B}_2$, lo cual se denota por $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$, si para toda $\alpha \in \mathcal{B}_1$ existe $\beta \in \mathcal{B}_2$ tal que $\beta \leq \alpha$.

2. Sean $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ bases de pre-uniformidad en X. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ se dicen *equivalentes*, lo cual se denota por: $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$, si para toda $\alpha \in \mathcal{B}_1$ existe $\beta \in \mathcal{B}_2$ tal que $\beta \leq \alpha$, y para toda $\beta \in \mathcal{B}_2$ existe $\gamma \in \mathcal{B}_1$ tal que $\gamma \leq \beta$.

Observación 1.27. i) Si $\mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases de pre-uniformidad en X y si $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$, entonces $\tau_{\mathcal{B}_1} \subseteq \tau_{\mathcal{B}_2}$. También se tiene que $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2$ implica $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$.

ii) De la definición 1.25, se deduce que $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ si y sólo si $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}_2 \leq \mathcal{B}_1$.

iii) $\sim$ es una *relación de equivalencia* en el conjunto de todas las bases de pre-uniformidad sobre el conjunto X.

Definición 1.28. Sea $\mathcal{B}$ una base de pre-uniformidad en X. Se define:

$$\mathcal{F}(\mathcal{B}) = \{\gamma\colon \gamma \text{ es cubierta de } X \text{ y existe } \alpha \in \mathcal{B} \text{ tal que } \alpha \leq \gamma\} \tag{1.3}$$

Observemos que $\mathcal{B}$ es pre-uniformidad si y sólo si $\mathcal{B} = \mathcal{F}(\mathcal{B})$.

De la observación (1.27) se obtienen los siguientes resultados:

Proposición 1.29. Si $\mathcal{B}, \mathcal{B}_1$ y $\mathcal{B}_2$ son bases de pre-uniformidad en un conjunto X, se tiene:

1. $\mathcal{B}_1 \leq \mathcal{B}_2$ si y sólo si $\mathcal{F}(\mathcal{B}_2) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{B}_1)$. Por tanto $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ si y sólo si $\mathcal{F}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{F}(\mathcal{B}_2)$.

2. $\mathcal{B} \sim \mathcal{F}(\mathcal{B})$.

3. Si $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ con $\mathcal{B}_1 = \mathcal{F}(\mathcal{B}_1)$ y $\mathcal{B}_2 = \mathcal{F}(\mathcal{B}_2)$, entonces $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.

Demostración. 1. Supongamos que $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$. Entonces $\mathcal{F}(\mathcal{B}_2) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{B}_2)$ y $\mathcal{F}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{F}(\mathcal{B}_2)$. Recíprocamente, $\mathcal{F}(\mathcal{B}_1) = \mathcal{F}(\mathcal{B}_2)$ implica $\mathcal{F}(\mathcal{B}_2) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{B}_1)$ y $\mathcal{F}(\mathcal{B}_1) \subseteq \mathcal{F}(\mathcal{B}_2)$ y, por tanto, $\mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$.

2. y 3. Son inmediatas.

□

Corolario 1.30. Sea X un conjunto no vacío. Sea $\mathcal{D}$ el conjunto de todas las bases de pre-uniformidad sobre X y sea $\mathcal{D}/\sim$ el conjunto cociente que consta de todas las clases de equivalencia de la relación dada en la definición 1.25. Entonces cada clase de equivalencia contiene una sola pre-uniformidad.

Demostración. Para cada base de pre-uniformidad $\mathcal{B}$, se tiene que $\mathcal{F}(\mathcal{B})$ es una pre-uniformidad equivalente a $\mathcal{B}$. Por la proposición (1.29) inciso 3, dos pre-uniformidades equivalentes coinciden.

Por otra parte, nótese que el recíproco de la observación (1.27 (i)), no es válido, es decir, $\tau_{\mathcal{B}_1} = \tau_{\mathcal{B}_2} \not\Rightarrow \mathcal{B}_1 \sim \mathcal{B}_2$ (**Ejemplo:** Sea (X, τ) es un espacio regular T_1 no numerablemente compacto, $\mathcal{B}_1$ =cubiertas abiertas finitas, $\mathcal{B}_2$ =cubiertas abiertas numerables). □

Definición 1.31. 1. Sea $\mathcal{B}$ una base de pre-uniformidad en el conjunto X.

- $\mathcal{B}$ se dice *abierta*, si cada $\alpha \in \mathcal{B}$ está contenida en $\tau_{\mathcal{B}}$.

2. La base de pre-uniformidad $\mathcal{U}$, en el espacio topológico (X, τ), se dice que es *compatible* si $\tau_{\mathcal{U}} = \tau$.

Teorema 1.32. Todo espacio topológico (X, τ) que sea R_0[b] admite una base de pre-uniformidad abierta $\mathcal{U}$ que induce la topología τ. Esto es, todo espacio topológico R_0 tiene una base de pre-uniformidad admisible y compatible.

[b]Un espacio topológico (X, τ) se dice que cumple el axioma de separación R_0 si todo subconjunto abierto de X es unión de subconjuntos cerrados de X.

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ la familia de todas las cubiertas abiertas de X. Claramente $\mathcal{B}$ es una base de pre-uniformidad en X y $\tau_{\mathcal{B}} \subseteq \tau$. Por otro lado, por ser X un espacio R_0, $p \in V \in \tau$ implica $Cl(\{p\}) \subseteq V$. Por tanto, si $\alpha = \{V, X \setminus Cl(\{p\})\}$, se tiene que $St(p, \alpha) = V$ y por ello $\tau \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$. $\square$

Es posible establecer un recíproco del teorema (1.32).

Teorema 1.33. Si $\mathcal{B}$ es una base de pre-uniformidad abierta en X, entonces $\tau_{\mathcal{B}}$ es R_0.

Demostración. Bastará demostrar que para cada $\alpha \in \mathcal{B}$ y para toda $C \subseteq X$ se tiene que:

$$Cl(C) \subseteq St(C, \alpha).$$

En efecto, si $p \in Cl(C)$ y $p \in L \in \alpha$, entonces $L \cap C \neq \emptyset$ (pues L es abierto y $p \in Cl(C)$). Por tanto, $p \in L \subseteq St(C, \alpha)$ y $Cl(C) \subseteq St(C, \alpha)$. $\square$

Definición 1.34. Sean $(X,\mathcal{U})$, $(Y, \mathcal{V})$ dos espacios pre-uniformes y sea $\varphi\colon X \to Y$ una función.

1. Se dice que φ es *uniformemente continua* si para todo $v \in \mathcal{V}$,

$$\delta = \{\varphi^{-1}(L)\colon L \in v\} \in \mathcal{U}.$$

2. Se dice que φ es un *unimorfismo* si φ es una biyección y φ y φ^{-1} son ambas uniformemente continuas. En este caso se dice que los espacios $(X,\mathcal{U})$ y $(Y, \mathcal{V})$ son unimórficos.

3. Se dice que φ es un *encaje unimórfico* si φ es un unimorfismo de $(X,\mathcal{U})$, sobre un subespacio denso de $(Y, \mathcal{V})$.

De la definición anterior, es inmediata la siguiente relación entre la continuidad uniforme y la continuidad en el sentido tradicional. Esto nos recuerda a los espacios métricos.

Teorema 1.35. Sean $(X,\mathcal{U})$ y $(Y, \mathcal{V})$ dos espacios pre-uniformes. Si $\varphi\colon (X,\mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ es una función uniformemente continua, entonces $\varphi\colon (X, \tau_{\mathcal{U}}) \to (Y, \tau_{\mathcal{V}})$ es una función continua.

Demostración. La prueba completa se puede ver en [16]. $\square$

1.3. Existencia de cierta pre-uniformidad en un espacio T_2

Este es el resultado principal de trabajo realizado por A. García-Máynez y R. Mancio-Toledo en [16].

Definición 1.36. Sea (X, τ) un espacio topológico.

1) X es un *espacio topológico R-cerrado* si X es T_3 y siempre que exista $\varphi\colon X \to Z$ homeomorfismo, en donde Z es un subespacio de un espacio Y el cual es T_3, entonces Z es cerrado en Y.

2) X es un *espacio topológico H-cerrado*[c] si X es T_2 y siempre que exista $\varphi\colon X \to Z$ homeomorfismo, en donde Z es un subespacio de un espacio Y el cual es T_2, entonces Z es cerrado en Y.

Teorema 1.37. En todo espacio topológico T_3 X, las siguientes condiciones son equivalentes:

i) X es T_3-cerrado.

ii) Todo filtro regular $\mathcal{F}$ en X es tal que $\mathrm{Adh}(\mathcal{F}) \neq \emptyset$.

Demostración. ($i) \Rightarrow ii)$) Por el teorema 1.33 en [16], si $\mathcal{F}$ fuera un filtro regular en X sin puntos de adherencia, entonces X tiene una extensión propia T_3 (véase [16]). De manera que X no podría ser T_3-cerrado.
($ii) \Rightarrow i)$) Si X no fuera T_3-cerrado, X tendría alguna extensión T_3 agregando un único punto cerrado $Y = X \cup \{p\}$. Es decir,

$$X \hookrightarrow Y \text{ con } Y \text{ espacio topológico } T_3 \text{ y } Cl_Y(X) \setminus X = \{p\}.$$

Sea

$$\mathcal{F} = \{V \cap X \colon V \in \eta_p\}.$$

$\mathcal{F}$ es una base de filtro en Y y el filtro que genera converge a p. Por tanto, $\mathcal{F}$ es un filtro en X que por ser Y espacio T_2 debe cumplir con que $\mathrm{Adh}_X(\mathcal{F}) = \emptyset$. Para terminar esta parte, probemos que $\mathcal{F}$ es un filtro regular en X. Sean V y W vecindades abiertas de p en Y tales que $Cl_Y(W) \subseteq V$. Entonces, $Cl_X(W \cap X) = Cl_Y(W) \cap X \subseteq V \cap X$, lo que demuestra que $\mathcal{F}$ es regular en X. Esto es una contradicción a la hipótesis *ii*). $\square$

Teorema 1.38. Todo espacio T_3 (X, τ) tiene una extensión T_2 Y con las siguientes propiedades:

i) Todo filtro regular en Y tiene al menos un punto de adherencia en Y.

ii) X es abierto en Y.

Demostración. Si X es T_3-cerrado, el teorema es obvio. Si esto no sucede, la familia:

$$\{\xi_i \colon i \in J\}$$

de filtros regulares maximales de X sin puntos de adherencia en X no es vacía. Para cada $i \in J$, tomemos un punto $p_i \notin X$, de tal forma que $i, j \in J$, $i \neq j$ implica que $p_i \neq p_j$ y definamos:

$$Y = X \cup \{p_i \colon i \in J\}.$$

[c]Estos espacios también reciben casi siempre el nombre de *Hausdorff- Cerrados* ó simplemente *H-cerrados*.

Para cada $i \in J$, sea

$$\eta_{p_i} = \{\widehat{V}\colon V \in \xi_i\}, \text{ en donde } \widehat{V} = V \cup \{\xi_i\colon V \in \xi_i\}.$$

Claramente cada η_{p_i} es una base de filtro en Y formada por subconjuntos de Y que contienen a p_i. Además, para cada $x \in X$ sea η_x el filtro de vecindades de x en el espacio X. Con todas estas bases de filtro construimos una topología τ^* para Y tal que (Y, τ^*) resulte ser una extensión T_2 de (X, τ). En efecto, primero es claro que cualesquiera dos puntos distintos de X tienen τ^*-vecindades ajenas. Ahora consideremos $x \in X$ e $i \in J$. Existen W vecindad de x y $V \in \xi_i$ tales que $W \cap V = \emptyset$ (esto por no terner ξ_i puntos de adherencia). Por tanto, $W \cap \widehat{V} = \emptyset$. Para terminar, dados $i, j \in J$ tales que $i \neq j$. Sabemos que existe $V \in \xi_i \setminus \xi_j$ y por el teorema (1.22), existe un abierto $W \subseteq X$ y un elemento $F \in \xi_i$ tales que $Cl(W) \subseteq V$ y $W \cap F = \emptyset$. Por tanto $\widehat{W} \cap \widehat{F} = \emptyset$. De esta manera hemos probado que Y es T_2.

Tomemos ahora un filtro regular $\mathcal{G}$ en Y. Entonces $\mathcal{G}|_X$ es también un filtro regular. Por el corolario (1.21), existe ξ filtro regular maximal en X tal que $\mathcal{G}|_X \subseteq \xi$. Si ξ tiene un punto de adherencia $x_0 \in X$, entonces claramente x_0 es punto de adherencia de $\mathcal{G}$. Si ξ carece de puntos de adherencia, entonces $\xi = \xi_i$, para algún $i \in J$ y, por tanto, p_i es punto de adherencia de $\mathcal{G}$. Por otra parte se sigue de la definición de Y que X es abierto en Y. $\square$

Observación 1.39. La extensión Y del espacio X descrita en el teorema anterior nunca es regular, a menos, que $Y = X$, es decir, Y es regular únicamente si X mismo es T_3-cerrado.

Definición 1.40. Un filtro η en un espacio pre-uniforme $(X, \mathcal{U})$ es $\mathcal{U}$-*Cauchy* (o Cauchy en $(X, \mathcal{U})$) si para todo $\alpha \in \mathcal{U}$, tenemos $\eta \cap \alpha \neq \emptyset$. Si no hay problema de confusión un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy sera llamado simplemente *filtro de Cauchy.*

Definición 1.41. Para todo filtro de Cauchy $\mathcal{F}$ en un espacio pre-uniforme $(X, \mathcal{U})$, definimos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}' &= \{S_T(F, \alpha)\colon F \in \mathcal{F}, \alpha \in \mathcal{U}\}^+ \\ \mathcal{F}^r &= \{S_T^*(\mathcal{F}, \alpha)\colon \alpha \in \mathcal{U}\}^+ \\ \mathcal{F}^{rr} &= \{S_T^{**}(F, \alpha)\colon \alpha \in \mathcal{U}\}^+ \end{aligned}$$

donde $S_T^*(\mathcal{F}, \alpha) = \cup\{A \in \alpha\colon A \cap F \neq \emptyset, \text{ para todo } F \in \mathcal{F}\}$ y $S_T^{**}(\mathcal{F}, \alpha) = \cup\{A\colon A \in \mathcal{F} \cap \alpha\}$.

Observación 1.42. Si $\mathcal{F}$ es un filtro de Cauchy en un espacio pre-uniforme $(X, \mathcal{U})$, entonces $\mathcal{F}', \mathcal{F}^r, \mathcal{F}^{rr}$, son también filtros en X y tenemos:

$$\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}^r \subseteq \mathcal{F}^{rr} \subseteq \mathcal{F}.$$

Definición 1.43. Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio pre-uniforme y sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en X.

1. $\mathcal{F}$ se llama *minimal Cauchy* si $\mathcal{F}$ es de Cauchy y no contiene propiamente a ningún otro filtro de Cauchy.

2. $\mathcal{F}$ se dice *débilmente redondo* si $\mathcal{F} = \mathcal{F}^{rr}$.

3. $\mathcal{F}$ se dice *redondo* si $\mathcal{F} = \mathcal{F}^r$.

4. $\mathcal{F}$ se dice *fuertemente redondo* si $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.

Resumimos en un teorema, las más importantes relaciones entre estos diferentes tipos de filtros. Las pruebas se pueden encontrar en [16] y [36].

Teorema 1.44. 1. Todo filtro fuertemente redondo es redondo.

2. Todo filtro redondo es débilmente redondo.

3. Todo filtro débilmente redondo es minimal.

4. Dos filtros redondos $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ en un espacio pre-uniforme $(X,\mathcal{U})$ se mezclan si y sólo si $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.

5. Todo filtro de vecindades es débilmente redondo.

Definición 1.45. Un espacio pre-uniforme $(X,\mathcal{U})$ se dice *completo* si todo filtro en $(X,\mathcal{U})$ converge.

Lema 1.46. Sea $\varphi\colon (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ un unimorfismo entre espacios pre-uniformes y sea η un filtro débilmente redondo en X. Entonces $\varphi(\eta) = \{\varphi(N)\colon N \in \eta\}$ es un filtro débilmente redondo en $(Y,\mathcal{V})$.

Demostración. Fijemos un elemento $N \in \eta$ y sea $\alpha \in \mathcal{U}$ tal que:

$$H(\alpha) = \cup\{L\colon L \in \eta \cap \alpha\} \subseteq N.$$

Sea $\beta \in \mathcal{V}$ tal que $\beta \leq \varphi(\alpha) = \{\varphi(A)\colon A \in \alpha\}$. Vamos a demostrar que $K(\beta) = \cup\{B\colon B \in \varphi(\eta) \cap \beta\} \subseteq \varphi(N)$. Para cada $B \in \beta$ tomemos un elemento $A_B \in \alpha$ tal que $B \subseteq \varphi(A_B)$. Por lo tanto, si también $B \in \varphi(\eta)$, tenemos $\varphi(A_B) \in \varphi(\eta)$ y $A_B \in \eta$ (recordemos que φ es una función biyectiva). Por lo tanto.

$$K(\beta) \subseteq \cup\{\varphi(A)\colon A \in \eta \cap \alpha\} = \varphi(H(\alpha)) \subseteq \varphi(N).$$

□

Lema 1.47. Sea η un filtro débilmente redondo en un espacio pre-uniforme $(X,\mathcal{U})$ y sea $A \subseteq X$. Entonces $\eta|_A$ es un filtro débilmente redondo en $(A,\mathcal{U}_A)$.

Demostración. Ver [16]. □

Definición 1.48. Un espacio pre-uniforme completo $(Y,\mathcal{V})$ es una *completación* de un espacio pre-uniforme $(X,\mathcal{U})$ si existe un encaje unimórfico $\varphi\colon (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$.

Definición 1.49. Un espacio pre-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es *propio* si todo filtro Cauchy en $(X,\mathcal{U})$ contiene un filtro débilmente Cauchy.

Notación 1.50. Sea $(X,\mathcal{U}_1)$ un espacio pre-uniforme T_0 y escojamos una base de pre-uniformidad abierta $\mathcal{U}$ equivalenete a $\mathcal{U}_1$. Sea $\widehat{X} = \{\xi\colon \xi$ es un filtro débilmente redondo en $(X,\mathcal{U})\}$. Para todo $A \subseteq X$ y todo $\alpha \in \mathcal{U}$, definimos:

$$\begin{aligned}\widehat{A} &= \{\xi \in \widehat{X}\colon A \in \xi\}\\ \widehat{\alpha} &= \{\widehat{A}\colon A \in \alpha\}\end{aligned}$$

y sea $\widehat{\mathcal{U}} = \{\widehat{\alpha}\colon \alpha \in \mathcal{U}\}$. Para todo $x \in X$, sea $\varphi(x) = \eta_x =$ filtro de $\tau_{\mathcal{U}}$-vecindades de x.

Teorema 1.51. Mantengamos la notación dada en (1.50) y supongamos que $\tau_{\mathcal{U}}$ es T_0. Entonces $\widehat{\mathcal{U}}$ es una base de pre-uniformidad abierta en $\widehat{X}$ y φ es un encaje unimórfico de $(X,\mathcal{U})$ en $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}})$. Además, todo filtro débilmente redondo en $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}})$ es convergente.

Demostración. Todo se prueba en [16] y [36], excepto la última parte. Sea $\mathcal{F}$ un filtro débilmente redondo en $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}})$. Definamos:

$$\eta = \{A \in \cup\{\alpha\colon \alpha \in \mathcal{U}\}\colon \widehat{A} \in \mathcal{F}\}.$$

Es claro que η es filtro de Cauchy en $(X,\mathcal{U})$. Sólo nos resta probar que η es débilmente redondo. Escojamos un elemento $L \in \eta$. Por la defnición de η, existe una cubierta $\alpha \in \mathcal{U}$ y un elemento $A \in \alpha$ tal que $A \subseteq L$ y $\widehat{A} \in \mathcal{F}$. Dado que $\mathcal{F}$ es débilmente redondo en $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}})$, existe una cubierta abierta $\beta \in \mathcal{U}$ tal que $\cup\{\widehat{B}\colon \widehat{B} \in \mathcal{F} \cap \widehat{\beta}\} \subseteq \widehat{A}$. Tomemos un elemento $B \in \eta \cap \beta$. Por lo tanto, $\widehat{B} \in \mathcal{F} \cap \widehat{\beta}$ y $\widehat{B} \subseteq \widehat{A}$. Recíprocamente, $B = \varphi^{-1}(\widehat{B}) \subseteq \varphi^{-1}(\widehat{A}) = A \subseteq L$. Por lo tanto, η es débilmente redondo en $(X,\mathcal{U})$ y $\eta \in \widehat{X}$. Nos resta probar que $\mathcal{F} \to \eta$. Tomemos un conjunto $W \in \tau_{\widehat{\mathcal{U}}}$ que contiene a η. Dado que $\cup\{\widehat{\alpha}\colon \alpha \in \mathcal{U}\}$ es una base para la topología $\tau_{\widehat{\mathcal{U}}}$, podemos suponer que W coincide con $\widehat{A}$, donde $A \in \alpha$ para algún $\alpha \in \mathcal{U}$. Esto implica que $A \in \eta$ y, por lo tanto, $\widehat{A} \in \mathcal{F}$. Así , el filtro de $\tau_{\widehat{\mathcal{U}}}$-vecindades de η esta contenido en $\mathcal{F}$ y $\mathcal{F} \to \eta$. □

Teorema 1.52. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio pre-uniforme T_0. $(X,\mathcal{U})$ admite a lo más una completación si y sólo si $(X,\mathcal{U})$ es propio.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sea $(Y,\mathcal{V})$ una completación de $(X,\mathcal{U})$ y sea $\varphi\colon (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ un encaje unimórfico. Sea η un filtro de Cauchy en $(X,\mathcal{U})$. Entonces $\mathcal{F} = \varphi(\eta)$ es un filtro de Cauchy en $(Y,\mathcal{V})$ y por lo tanto, existe un elemento $y \in Y$ tal que $\mathcal{F} \to y$. Sea $\mathcal{F}_y$ el filtro de $\tau_{\mathcal{V}}$-vecindades de y. Por (1.44, 5)), $\mathcal{F}_y$ es un filtro débilmente redondo en $(Y,\mathcal{V})$. Además, $\mathcal{F}_y \subseteq \mathcal{F}$ porque $\mathcal{F} \to y$. Usando los lemas (1.46) y (1.47), deducimos que $\eta_0 = \varphi^{-1}(\mathcal{F}_y|_{\varphi(X)})$ es un filtro débilmente redondo en $(X,\mathcal{U})$ contenido en η.

($\Leftarrow$) Probaremos ahora que $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}})$ es una completación de $(X,\mathcal{U})$. Sea $\mathcal{F}$ un filtro de Cauchy en $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}})$ y sea:

$$\eta = \{A \in \bigcup_{\alpha\in\mathcal{U}} \alpha\colon \widehat{A} \in \mathcal{F}\}.$$

Es fácil probar que η es un filtro de Cauchy en $(X,\mathcal{U})$. Dado que $(X,\mathcal{U})$ es propio, existe un filtro débilmente redondo η_0 en $(X,\mathcal{U})$ contenido en η. Probemos que $\mathcal{F} \to \eta_0$. Sea $\alpha \in \mathcal{U}$ y

$A \in \alpha$ tal que $\eta_0 \in \widehat{A}$. Por lo tanto, $A \in \eta_0 \subseteq \eta$ y $\widehat{A} \in \mathcal{F}$. Así, todo filtro de $\tau_{\widehat{\mathcal{U}}}$-vecindades de η_0, vive en $\mathcal{F}$, esto es, $\mathcal{F} \to \eta_0$. □

Definición 1.53. Una cubierta abierta α de un espacio topológico (X, τ) es *densamente finita* si existen $A_1, \ldots, A_n \in \alpha$ tales que:

$$X = Cl(A_1) \cup Cl(A_2) \cup \cdots \cup Cl(A_n).$$

Teorema 1.54. En todo espacio T_2 X, las siguientes condiciones son equivalentes:

i) X es H-cerrado.

ii) Todo filtro abierto en X tiene al menos un punto de adherencia.

iii) Todo filtro abierto maximal en X tiene al menos un punto de adherencia.

iv) Todo filtro abierto maximal es convergente.

v) Toda cubierta abierta de X es densamente finita.

Demostración. ($i) \Rightarrow ii)$) Demostraremos que si $\mathcal{F}$ es un filtro abierto en X sin puntos de adherencia, entonces X tiene una extensión T_2 Y a un sólo punto cerrado p (y, por tanto, X no sería H-cerrado). En efecto, escojamos $p \notin X$ y pongamos $Y = X \cup \{p\}$. Enseguida definamos una topología en Y como sigue:

$$\eta_p = \{F \cup \{p\} \colon F \in \mathcal{F}\}$$

y para cada $x \in X$, sea:

$$\eta_x = \{H \colon H \text{ es vecindad de } x \text{ en } X\}.$$

Afirmamos que la topología τ^* inducida en Y por todos los filtros de vecindades es T_2. En efecto, si $x \in X$, existen $V \in \eta_x$ y $F \in \mathcal{F}$ tales que $V \cap F = \emptyset$. Por tanto, V y $F \cup \{p\}$ son vecindades ajenas de x y p, respectivamente. Además X es un subespacio abierto y denso de Y, lo cual demuestra que Y es la extensión buscada.

($ii) \Rightarrow iii)$) Obvio.

($iii) \Rightarrow iv)$) Sea $\mathcal{F}$ un filtro abierto maximal en X y sea $p \subset \text{Adh}(\mathcal{F})$. Si ahora $V \subseteq X$ es abierto y $p \in V$, tenemos que $V \cap F \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$, pero según el teorema (1.20), $V \in \mathcal{F}$. Por tanto, $\mathcal{F} \to p$.

($iv) \Rightarrow ii)$) Úsese el hecho de que todo filtro abierto está contenido en un filtro abierto maximal.

($ii) \Rightarrow v)$) Sea $\alpha = \{V_i \colon i \in J\}$ una cubierta por abiertos para X, Si α no fuese densamente finita, para cada $J_0 \subseteq J$ finito, el conjunto $T(J_0) = X \setminus \cup\{Cl(V_i) \colon i \in J_0\}$ sería un abierto no vacío de X y el conjunto:

$$\mathcal{F} = \{T(J_0) \colon J_0 \subseteq J, J_0 \text{ finito}\}$$

sería un filtro abierto en X sin puntos de adherencia.

$(v) \Rightarrow i))$ Procediendo por contradicción, supongamos que X no es T_2-cerrado. Entonces X tiene una extensión T_2 Y a un sólo punto p. Es decir, $Y \setminus X = \{p\}$. Para cada $x \in X$, usemos la propiedad T_2 de Y y encotremos un abierto U_x en Y tal que $x \in u_x$ pero $p \notin Cl_Y(U_x)$. La familia $\{U_x \colon x \in X\}$ es entonces una cubierta abierta de X. Por hipótesis, existen $x_1 \ldots, x_n \in X$ tales que $Y = Cl_Y(\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i})$. Pero esto contradice al hecho de que $p \notin Cl_Y(U_{x_i})$ para cada $i = 1, \ldots, n$. □

Corolario 1.55. Sea $\mathcal{U}$ la familia de cubiertas densamente finitas de un espacio topológico T_2 (X, τ). Entonces:

i) $\mathcal{U}$ es base de pre-uniformidad compatible en X.

ii) Todo filtro $\mathcal{U}$-Cauchy tiene un subfiltro $\mathcal{U}$-redondo.

iii) La completación $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}})$ es una extensión T_2-cerrada de X. Es decir, $(\widehat{X}, \tau_{\widehat{\mathcal{U}}})$ es una completación T_2-cerrada de (X, τ).

Demostración. La demostración se puede ver en detalle en ([36]). □

Capítulo 2
Completación de espacios casi-uniformes

En este capítulo se establecen algunas definiciones y propiedades básicas, sobre espacios pre-uniformes, necesarias para la comprensión de esta tesis. Las referencias que se pueden consultar, que son relevantes para este capítulo son las siguientes: (Ver [4], [12] y [38]).

2.1. Casi-uniformidades

Definición 2.1. Sea $X \neq \emptyset$ un conjunto. La *diagonal* $\Delta(X)$ de X se define como $\Delta(X) = \{(x,x)\colon x \in X\}$. Decimos que $E \subset X \times X$ es un *conector* de X si $\Delta(X) \subseteq E$ ó equivalentemente, si E es una relación reflexiva en X. Un filtro $\mathcal{U}$ en $X \times X$ es una *casi-uniformidad* en X si :

i) Cada $U \in \mathcal{U}$ es un conector de X.

ii) Para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \circ V \subseteq U$.
(Aquí $V^2 = V \circ V = \{(x,y) \in X \times X\colon \exists z \in X \text{ tal que } (x,z) \in V \ \wedge \ (z,y) \in V\}$.)

iii) Una casi-uniformidad en X es *uniformidad* en X, si $U \in \mathcal{U}$ implica que $U^{-1} \in \mathcal{U}$, donde $U^{-1} = \{(x,y) \in X \times X\colon (y,x) \in U\}$.

- El par $(X,\mathcal{U})$ es llamado un *espacio casi-uniforme*. Notemos que para cualquier casi-uniformidad $\mathcal{U}$ sobre X, el filtro $\mathcal{U}^{-1} = \{U^{-1}\colon U \in \mathcal{U}\}$ es también una casi-uniformidad sobre X llamada la *conjugada* de $\mathcal{U}$.

Definición 2.2. Un conector $U \in X$ es *transitivo* si $U^2 = U$.

Observación 2.3. Toda casi-uniformidad $\mathcal{U}$ sobre un conjunto X induce una *topología* $\tau_{\mathcal{U}}$ como sigue:

$$\tau_{\mathcal{U}} = \{V \subseteq X\colon \forall x \in V, \exists U \in \mathcal{U} \text{ tal que } U(x)^{\text{a}} \subseteq V\}$$

[a] $U(x) = \{y \in X\colon (x,y) \in U\}$, cuando $U \in \mathcal{U}$ y $x \in X$.

Ejemplo 2.4. Sea $\mathbb{R}$ el conjunto de los números reales. Para cada $\epsilon > 0$, definamos los conectores U_ϵ, Q_ϵ en $\mathbb{R}$ como siguen:

$$U_\epsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon |x-y| < \epsilon\}$$
$$Q_\epsilon = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon x-y < \epsilon\}$$

Sean $\mathcal{U}_\mathbb{R}$ y $\mathcal{Q}$ los filtros en $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ que tienen como base a $\{U_\epsilon \colon \epsilon > 0\}$ y $\{Q_\epsilon \colon \epsilon > 0\}$. Entonces $\mathcal{U}_\mathbb{R}$ es una uniformidad en $\mathbb{R}$, mientras que $\mathcal{Q}$ es una casi-uniformidad en $\mathbb{R}$.

Observación 2.5. Una casi-uniformidad $\mathcal{U}$ sobre un conjunto X es llamada *totalmente acotada*, si para cada $U \in \mathcal{U}$, existe una cubierta finita $\mathcal{A}$ de X tal que $A \times A \subseteq U$ cuando $A \in \mathcal{A}$. Un espacio casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es *precompacto*, si para cada $U \in \mathcal{U}$, existe un subconjunto finito F de X tal que $U(F) = X$. Aquí ($U(F) = \cup\{U(x) \colon x \in F\}$ para $F \subseteq X$).

Ejemplo 2.6. (a) Sea (X,τ) un espacio topológico y E la colección de todas las funciones semi-continuas inferiormente en X, tal que si $G \in \tau$ y $x \in X$, entonces existe $f \in E$ tal que $f(x) = 1$ y $f(X \setminus G) = 0$. El filtro generado por la base:

$\{U_{(\epsilon,f)} \colon f \in E, \epsilon > 0\}$ en $X \times X$ es llamado *casi-uniformidad semi-continua* $\mathcal{SC}$ de X. (Donde $U_{(\epsilon,f)} = \{(x,y) \colon f(x) - f(y) < \epsilon\}$).

(b) Sea (X,τ) un espacio topológico. El filtro generado por la base:

$\{[G \times G] \cup [(X \setminus G) \times X] \colon G$ es abierto en $X\}$ en $X \times X$ es llamado *casi-uniformidad de Pervin* $\mathcal{P}$ de X. La casi-uniformidad $\mathcal{P}$ es compatible con la topología de X.

(c) Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $\mathcal{B}$ la colección de todos los conectores transitivos V en X para el cual $V(x) \in \tau$ para todo $x \in X$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base(filtro) para la *casi-uniformidad transitiva fina* $\mathcal{FT}$ de X. (Esta casi-uniformidad es compatible con la topología de X, i.e. $\tau_{\mathcal{FT}} = \tau$.)

Definición 2.7. Una *cubierta indicada* de X es una función $\varphi \colon X \to \mathcal{P}(X)$, en donde $x \in \varphi(x)$ para cada $x \in X$. La notación más usada es $\{U_x \colon x \in X\}$, en donde $x \in U_x = \varphi(x)$ para cada $x \in X$.

Cada conector V de X tiene asociada una cubierta indicada, a saber: $\lambda(V) = \{V(x) \colon x \in X\}$, en donde $V(x) = \{y \in X \colon (x,y) \in V\}$.
Recíprocamente, cada cubierta indicada: $\alpha = \{A_x \colon x \in X\}$ tiene asociado un conector de X, a saber: $V(\alpha) = \bigcup\{\{x\} \times A_x \colon x \in X\}$. La inversa α^{-1} de α se define como: $\alpha^{-1} = \{A_x^{-1} \colon x \in X\}$, en donde $y \in A_x^{-1}$ si y sólo si $x \in A_y$. Además, para cada conector F de X, se tiene: $F = V(\lambda(F))$ y para cada cubierta indicada α de X, $\alpha = \lambda(V(\alpha))$.

Ejemplo 2.8. Sea ξ una cubierta arbitraria de X. Entonces $\xi^\Delta = \{St(x,\xi) \colon x \in X\}$, es una cubierta indicada de X, en donde $St(x,\xi) = \bigcup\{L \colon x \in L \in \xi\}$ y su conector $E(\xi^\Delta)$ es simétrico. De hecho: $E(\xi^\Delta) = E_0(\xi) = \bigcup\{G \times G \colon G \in \xi\}$.

Definición 2.9. Sea X un conjunto (no vacío). Una función real no negativa d sobre $X \times X$ es llamada una *casi-seudo-métrica* si:

(i) $d(x, x) = 0$, para todo $x \in X$.

(ii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para cualesquiera $x, y, z \in X$.

El filtro generado por $\{U_\epsilon : \epsilon > 0\}$[b] en $X \times X$, recibe el nombre de *casi-uniformidad inducida por la casi-seudo-métrica* d en X y es denotada por $\mathcal{U}_d$.

La topología $\tau_{\mathcal{U}_d}$ es llamada la *topología* inducida por d en X.

Observación 2.10. Una casi-seudo-métrica d es llamada:

- *casi-métrica* si para cada $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ implica que $x = y$.
- *seudo-métrica* si para cada $x, y \in X$, $d(x, y) = d(y, x)$.
- *no arquimediana* si satisface $d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\}$, cuando $x, y, z \in X$.

Ejemplo 2.11.

- Sea $X = \mathbb{R}$, definamos $d : X \times X \to \mathbb{R}$, como sigue: $d(x, y) = 1$, si $x > y$, y $d(x, y) = y - x$ si $x \leq y$. Entonces (X, d) es un espacio casi-métrico, llamado *recta de Sorgenfrey*.

Definición 2.12. Sean $\alpha = \{A_x : x \in X\}$ y $\beta = \{B_x : x \in X\}$ dos cubiertas indicadas de X. Decimos que $\alpha \leq_w \beta$ si $A_x \subseteq B_x$ para cada $x \in X$ y $\alpha \leq_R \beta$ si $A_x \cap A_z^{-1} \neq \emptyset$ implica que $z \in B_x$.

Observación 2.13. De lo anterior observamos que:

a) $\alpha \leq_w \beta \Longleftrightarrow E(\alpha) \subseteq E(\beta)$;

b) $\alpha \leq_R \beta \Longleftrightarrow E(\alpha) \circ E(\alpha) \subseteq E(\beta)$.

Demostración. b) Supongamos que $\alpha \leq_R \beta$. Sea $(x, z) \in E(\alpha) \circ E(\alpha)$. Por tanto, existe $y \in X$ tal que $(x, y), (y, z) \in E(\alpha)$. De aquí que $y \in A_x \cap A_z^{-1}$. Por hipótesis, $z \in B_x$ y $(x, z) \in E(\beta)$.

Recíprocamente, supongamos que $E(\alpha) \circ E(\alpha) \subseteq E(\beta)$ y sean $x, z \in X$ tales que $A_x \cap A_z^{-1} \neq \emptyset$. Escojamos $y \in A_x \cap A_z^{-1}$. Por tanto, $(x, y) \in E(\alpha)$, $(z, y) \in E(\alpha)^{-1}$. De donde, $(x, y), (y, z) \in E(\alpha)$ y $(x, z) \in E(\alpha) \circ E(\alpha)$. Por hipótesis, $(x, z) \in E(\beta)$ y $z \in B_x$.

$\square$

Observación 2.14. Si $\mathcal{B}$ es una base para una casi-uniformidad $\mathcal{U}$, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{B^n : B \in \mathcal{B}\}$ es también una base para $\mathcal{U}$.

Demostración. Sea $F \in \mathcal{F}$. Por tanto, existe $G \in \mathcal{F}$ tal que $G^{2^n} \subseteq F$. Si $B \in \mathcal{B}$ es tal que $B \subseteq G$, entonces:

$$B^n \subseteq G^n \subseteq G^{2^n} \subseteq F.$$

$\square$

[b] $U_\epsilon = \{(x, y) \in X \times X : d(x, y) < \epsilon\}$.

Definición 2.15. Si $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ son bases para casi-uniformidades de X, decimos que $\mathcal{B}_1$ es más fina que $\mathcal{B}_2$ (ó que $\mathcal{B}_2$ es más gruesa que $\mathcal{B}_1$) si $\mathcal{B}_1$ es subdirección de $\mathcal{B}_2$ (equivalentemente, si $\mathcal{B}_2^+ \subseteq \mathcal{B}_1^+$). En particular, una casi-uniformidad $\mathcal{U}_1$ es más fina que una casi-uniformidad $\mathcal{U}_2$ si $\mathcal{U}_2 \subseteq \mathcal{U}_1$. Dos bases de casi-uniformidad que determinan la misma casi-uniformidad reciben el nombre de equivalentes.

Definición 2.16. Sea $\{\mathcal{U}_i \colon i \in I\}$ una familia de casi-uniformidades en un conjunto X. El supremo de $\{\mathcal{U}_i \colon i \in I\}$ es la más gruesa casi-uniformidad en X que es más fina que cada $\mathcal{U}_i$. Y lo denotaremos por:

$$\sup\{\mathcal{U}_i \colon i \in I\} = \bigvee_{i \in I} \mathcal{U}_i$$

De hecho:

$$\bigvee_{i \in I} \mathcal{U}_i = \{E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n \colon n \in \mathbb{N}, i_1, i_2, \ldots, i_n \in I \ , E_1 \in \mathcal{U}_{i_1}, \ldots, E_n \in \mathcal{U}_{i_n}\}.$$

Obsérvese que si $E_1 \cap E_2 \cdots \cap E_n \subseteq F$, entonces $F = (F \cup E_1) \cap (F \cup E_2) \cap \cdots \cap (F \cup E_n)$. Definimos el ínfimo de $\{\mathcal{U}_i \colon i \in I\}$ como la más fina casi-uniformidad que es más gruesa que cada $\mathcal{U}_i$. Y lo denotaremos por:

$$\text{ínf}\{\mathcal{U}_i \colon i \in I\} = \bigwedge_{i \in I} \mathcal{U}_i.$$

En este caso:

$$\bigwedge_{i \in I} \mathcal{U}_i = \bigvee \{\mathcal{U}'_j \colon \mathcal{U}'_j \subseteq \bigcap_{i \in I} \mathcal{U}_i\}$$

Observación 2.17. Si $\mathcal{U}$ es una casi-uniformidad en X, entonces la familia $\{U \cap U^{-1} \colon U \in \mathcal{U}\}$ es base para una uniformidad $\mathcal{U}^*$, la cual es la más gruesa de las que contienen a $\mathcal{U}$ y a $\mathcal{U}^{-1}$, (es decir, $\mathcal{U}^* = \mathcal{U} \vee \mathcal{U}^{-1}$).
La uniformidad que tiene a $\{\Delta(X)\}$ como base (es decir, la familia de todos los conectores de X) recibe el nombre de *uniformidad discreta* de X y es el supremo de todas las casi-uniformidades de X. Cada conjunto no vacío tiene una uniformidad más gruesa que cualquier casi-uniformidad de X. Esta consiste de un sólo elemento, a saber $X \times X$ y es la *uniformidad indiscreta* de X.

Proposición 2.18. Sea $\mathcal{B}$ una base para una casi-uniformidad $\mathcal{U}$ en X. Entonces existe una única topología $\tau_{\mathcal{B}}$ en X con la propiedad $W \in \tau_{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \forall x \in W \ \exists B_x \in \mathcal{B}$ tal que $B_x(x) \subseteq W$. Además, si $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ son bases de casi-uniformidad y $\mathcal{B}$ es más fina que $\mathcal{B}'$, entonces $\tau_{\mathcal{B}'} \subseteq \tau_{\mathcal{B}}$. Por tanto, si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son equivalentes, entonces $\tau_{\mathcal{B}} = \tau_{\mathcal{B}'} = \tau_{\mathcal{B}^+}$.

Proposición 2.19. Sea $\mathcal{B}$ una base para una casi-unifomidad $\mathcal{U}$ en X. Entonces, para cada $x \in X$ y cada $B \in \mathcal{B}$, $B(x)$ es $\tau_{\mathcal{B}}$-vecindad de x.

Demostración. Sean $x \in X$ y $B \in \mathcal{B}$. Debemos probar que existe $B' \in \mathcal{B}$ tal que para cada $y \in B'(x)$, existe $B_y \in \mathcal{B}$ tal que $B_y(y) \subseteq B(x)$. Sea $C \in \mathcal{B}$ tal que $C \circ C \subseteq B$ y pongamos $B' = C$ y $B_y = C$ para cada $y \in B'(x)$. Si $y \in C(x)$ y $z \in C(y)$, tenemos $(x, y) \in C$ y $(y, z) \in C$. Por tanto, $(x, z) \in C \circ C \subseteq B$ y $z \in B(x)$, es decir, $C(y) \subseteq B(x)$. □

En la demostración de la proposición (2.19), se utiliza el siguiente lema:

Lema 2.20. Sea X un conjunto. Supongamos que para cada $x \in X$ existe una base de filtro $\mathcal{N}_x$ formada de subconjuntos de X que contienen a x, Sea:

$$\tau = \{V \in \mathcal{P}(X)\colon \forall x \in V, \exists N \in \mathcal{N}_x \text{ tal que } N \subseteq V\}.$$

Entonces τ es una topología de X. Si cumple además la siguiente condición:

*) Si $x \in X$ y $N \in \mathcal{N}_x$, existe $N' \in \mathcal{N}_x$ tal que para cada $y \in N'$, existe $N'' \in \mathcal{N}_y$ tal que $N'' \subseteq N$, entonces, para cada $A \subseteq X$ se tiene:

**) $\operatorname{int}_\tau A = \{x \in A\colon \exists N \in \mathcal{N}_x \text{ tal que } N \subseteq A\}$.
Por tanto, en este caso, si $x \in X$ y $N \in \mathcal{N}_x$, entonces N es τ-vecindad de x.

Demostración. Omitimos la obvia demostración de que τ es una topología de X. Supongamos que se cumple $*$) y probemos $**$). Llamemos B al conjunto $\{x \in A\colon \exists N \in \mathcal{N}_x \text{ tal que } N \subseteq A\}$. Es claro que $\operatorname{int}_\tau A \subseteq B \subseteq A$. Bastará probar entonces que $B \in \tau$. Sea $x \in B$. Por tanto existe $N \in \mathcal{N}_x$ tal que $N \subseteq A$. Por $*$), existe $N' \in \mathcal{N}_x$ tal que para cada $y \in N'$, podemos encontrar $N'' \in \mathcal{N}_y$ tal que $N'' \subseteq N$. Esto implica que $N' \subseteq B$. Por tanto, $B \in \tau$. □

Veremos ahora una forma alternativa de definir uniformidades en un conjunto X.
Para cada cubierta α en X y cada $B \subseteq X$, definimos:

$$\begin{aligned} St(B,\alpha) &= \bigcup\{L \in \alpha\colon B \cap L \neq \emptyset\} \\ \alpha^* &= \{St(A,\alpha)\colon A \in \alpha\} \end{aligned}$$

Si $B = \{x\}$, escribimos $St(x,\alpha)$ en lugar de $St(\{x\},\alpha)$. Definimos también:

$$\begin{aligned} \alpha^\Delta &= \{St(x,\alpha)\colon x \in X\} \\ E_0(\alpha) &= \bigcup\{L \times L\colon L \in \alpha\} \\ \alpha|B &= \{L \cap B\colon L \in \alpha\} \end{aligned}$$

Si α_1, α_2 son cubiertas de X, decimos que α_1 *refina* a α_2 si cada elemento de α_1 está contenido en un elemento de α_2. Este hecho se denota como $\alpha_1 \leq \alpha_2$. $\alpha_1 \leq_w \alpha_2$ significa que α_1 *refina débilmente* a α_2 es decir, que para cada $x \in X$ se tiene $St(x,\alpha_1) \subseteq St(x,\alpha_2)$. En terminos de cubiertas indicadas $\alpha_1 \leq_w \alpha_2$ es equivalente a $\alpha_1^\Delta \leq_w \alpha_2^\Delta$. $\alpha_1 \leq_R \alpha_2$ simboliza el hecho de que α_1 *refina regularmente* a α_2, es decir, que cada par de puntos en la unión de dos elementos intersectantes de α_1 pertenecen a un mismo elemento de α_2. En el lenguaje de cubiertas indicadas $\alpha_1 \leq_R \alpha_2$ es equivalente a $\alpha_1^\Delta \leq_R \alpha_2^\Delta$. Por tanto:

$$\alpha_1 \leq_w \alpha_2 \Leftrightarrow E(\alpha_1^\Delta) \subseteq E(\alpha_2^\Delta) \Leftrightarrow E_0(\alpha_1) \subseteq E_0(\alpha_2)$$

$$\alpha_1 \leq_R \alpha_2 \Leftrightarrow E(\alpha_1^\Delta)^2 \subseteq E(\alpha_2^\Delta) \Leftrightarrow E_0(\alpha_1)^2 \subseteq E_0(\alpha_2)$$

Veremos dos formas alternativas de definir uniformidades.
Primera definición. Sea $\mathcal{B}$ una familia de cubiertas del conjunto X. $\mathcal{B}$ es una base de uniformidad en X si dadas $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ existe $\gamma \in \mathcal{B}$ tal que $\gamma^{\Delta} \leq \alpha$ y $\gamma^{\Delta} \leq \beta$. En este caso, $\{E_0(\alpha)\colon \alpha \in \beta\}$ es base de uniformidad a través de conectores.
Segunda definición. Sea $\mathcal{B}$ una familia de cubiertas del conjunto X. $\mathcal{B}$ es una base de uniformidad en X si dadas $\alpha, \beta \in \mathcal{B}$ existe $\gamma \in \mathcal{B}$ tal que $\gamma \leq_R \alpha$ y $\gamma \leq_R \beta$.
Con la primera definición $\{E(\alpha^{\Delta})\colon \alpha \in \mathcal{B}\}$ es una base de conectores simétricos. Con la segunda definición la base es $\{E_0(\alpha)\colon \alpha \in \mathcal{B}\}$. Como $E_0(\alpha) = E(\alpha^{\Delta})$, ambas bases coinciden.

Definición 2.21. Sea $\mathcal{U}$ una casi-uniformidad de X y sean $A \subseteq B \subseteq X$. Decimos que B es un $\mathcal{U}$-*entorno* de A si existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U(A) \subseteq B$.

Proposición 2.22. Toda $\tau_{\mathcal{U}}$-vecindad W de un conjunto compacto K es un $\mathcal{U}$-entorno de K.

Demostración. Existen conectores $V_1, V_2, \ldots, V_n \in \mathcal{U}$ y puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ tales que:

$$K \subseteq V_1(x_1) \cup \cdots \cup V_n(x_n) \subseteq V_1^2(x_1) \cup \cdots \cup V_n^2(x_n) \subseteq W.$$

Si $V_1 \cap \cdots \cap V_n = V$ y $z \in V(x)$ con $x \in K$, tenemos $x \in V_j(x_j)$ para alguna $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por tanto $(x_j, z) \in V_j^2$ y $z \in V_j^2(x_j) \subseteq W$, es decir $V(K) \subseteq W$. □

Observación 2.23. La topología inducida por el supremo de una familia $\{\mathcal{U}_i\colon i \in I\}$ de casi-uniformidades en un conjunto X es el supremo de las topologías inducidas por las $\mathcal{U}_i$. Por tanto, si $\tau_{\mathcal{U}_i} = \tau$ para toda $V_i \in I$, tenemos $\tau_{\bigvee_{i \in I} \mathcal{U}_i} = \tau$.

Demostración. Sea $\tau_{\mathcal{U}_i} = \tau$ y $\tau^* = \bigvee_{i \in I} \tau_i$. Un conjunto $V \subseteq X$ pertenece a τ^* si y sólo si para toda $x \in V$ existen $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ y $V_1 \in \tau_{i_1}, V_2 \in \tau_{i_2}, \ldots, V_n \in \tau_{i_n}$ tales que $x \in V_1 \cap V_2 \cdots \cap V_n \subseteq V$. Por tanto $V \in \tau^*$ si y sólo si para toda $x \in V$, existen $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ y $U_1 \in \tau_{\mathcal{U}_{i_1}}, U_2 \in \tau_{\mathcal{U}_{i_2}}, \ldots, U_n \in \tau_{\mathcal{U}_{i_n}}$ tales que $(U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n)(x) \subseteq V$, es decir, $V \in \tau^*$ si y sólo si $V \in \tau_{\bigvee_{i \in I} \mathcal{U}_i}$. □

Observación 2.24. Sea d una casi-seudo-métrica en el conjunto X. Entonces los conectores $B_n = \{(x, y)\colon d(x, y) < \frac{1}{2^n})\}$, $n \in \mathbb{N}$ constituyen una base para una casi-uniformidad $\mathcal{U}_d$ en X y $\tau_{\mathcal{U}_d} = \tau_d$. La conjugada de la casi-seudo- métrica d se denota como d^{-1} y se define como:

$$d^{-1}(x, y) = d(y, x) \; \forall x, y \in X.$$

Si d genera la casi-uniformidad $\mathcal{U}$, entonces d^{-1} genera a $\mathcal{U}^{-1}$.

Lema 2.25. Sean $X = U_0, U_1, U_2, \ldots$ conectores en un conjunto X tales que $U_n^2 \subseteq U_{n-1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces existe una casi-seudo-métrica ρ en X tal que:

$$U_{n+1} \subseteq \left\{(x, y)\colon \rho(x, y) < \frac{1}{2^n}\right\} \subseteq U_{n-1}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Si cada U_n es simétrica, ρ puede escogerse de manera que sea seudo-métrica. Si para cada $x \in X$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n(x) = \{x\}$, ρ puede escogerse de manera que sea casi-métrica.

Demostración. Definamos $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ mediante la fórmula:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n(x) \\ 1 & \text{si } y \neq U_1(x) \\ 2^{-n} & \text{si } y \in U_n(x) - U_{n+1}(x). \end{cases}$$

d satisface las siguientes propiedades:

a) $d(x,x) = 0$ para toda $x \in X$;

b) Si $\varepsilon > 0$ es tal que $d(x,y) < \varepsilon$ y $d(y,z) < \varepsilon$, entonces $d(x,z) < 2\varepsilon$.

Verifiquemos *b*). Observemos que $d(x,y) \leq 2^{-n}$ si y sólo si $y \in U_n(x)$. Si $d(x,y) \geq \frac{1}{2}$ o $d(y,z) \geq \frac{1}{2}$, la conclusión es clara pues $2\varepsilon > 1$. Supongamos entonces que existe un entero $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$d(x,y) \leq \frac{1}{2^{k+1}} < \varepsilon \text{ y } d(y,z) \leq \frac{1}{2^{k+1}} < \varepsilon.$$

Se tiene entonces que $(x,y),(y,z)$ pertenecen ambos a U_{k+1}. Por tanto, como $U_{k+1}^2 \subseteq U_k$, tenemos $(x,z) \in U_k$ y $d(x,z) \leq \frac{1}{2^k} < 2\varepsilon$. Definamos ahora $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ como sigue:

$$\begin{aligned} \rho(x,y) \quad = \quad & \text{ínf}\{d(x,x_1) + d(x_1,x_2) + \cdots + d(x_{n-1},x_n) + d(x_n,y)\colon \\ & x_1, x_2, \ldots, x_n \text{ sucesión finita en } X\}. \end{aligned}$$

Comprobemos que ρ es una casi-seudo-métrica en X. Si ρ no cumple la desigualdad triangular, existen puntos $x,y,z \in X$ tales que pasa lo siguiente $\rho(x,z) > \rho(x,y) + \rho(y,z)$. Si $2\varepsilon = \rho(x,z) - \rho(x,y) - \rho(y,z) > 0$, existen sucesiones finitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ y $y_1, y_2, \ldots, y_m$ en X tales que $\rho(y,z) + \varepsilon > d(y,y_1) + d(y_1,y_2) + \cdots + d(y_m,z)$ y $\rho(x,y) + \varepsilon > d(x,x_1) + d(x_1,x_2) + \cdots + d(x_n,y)$. En consecuencia:

$$\rho(x,z) > d(x,x_1) + \cdots + d(x_n,y) + d(y,y_1) + \cdots + d(y_m,z),$$

lo cual contradice la definición de $\rho(x,z)$. Probemos ahora que para cada sucesión finita $x, x_1, \ldots, x_n, y \in X$ se tiene la desigualdad:

c) $d(x,y) \leq 2d(x,x_1) + 4d(x_1,x_2) + \cdots + 4d(x_{n-1},x_n) + 2d(x_n,y)$.

Suponiendo falsa la desigualdad *c*), sea N el mínimo natural tal que existen $x, y, x_1, \ldots, x_N \in X$ con la propiedad:

$$d(x,y) > 2d(x,x_1) + 4d(x_1,x_2) + \cdots + 4d(x_{N-1},x_N) + 2d(x_N,y). \qquad (*)$$

Obviamente $N > 0$. Si $N = 1$, se tendría

$$d(x,y) > 2d(x,x_1) + 2d(x_1,y).$$

Tomando ε tal que $d(x,x_1) + d(x_1,y) < \varepsilon < \dfrac{d(x,y)}{2}$, y $d(x,x_1) < \varepsilon, d(x_1,y) < \varepsilon$ *b*) implicaría que $d(x,y) < 2\varepsilon < d(x,y)$, una contradicción. Así pues, $N > 1$. La propiedad *b*) también implica que para cada v, con $1 \leq v \leq N$, se tiene que $d(x,y) \leq 2d(x,x_v)$ o $d(x,y) \leq 2d(x_v,y)$, pues si ambos números $d(x, x_v)$ y $d(x_v, y)$ son menores que $\frac{1}{2}d(x, y)$ podemos escoger ε tal que $d(x, x_v) \vee d(x_v, y) < \varepsilon < \frac{d(x,y)}{2}$. Aplicando la propiedad b), tendríamos $d(x, y) < 2\varepsilon < d(x, y)$, una contradicción. Para $v = 1$, se tiene $d(x, y) \leq 2d(x_1, y)$ porque en el caso contrario se tendría:

$$d(x, y) \leq 2d(x, x_1) \leq 2d(x, x_1) + 4d(x_1, x_2) + \cdots + 4d(x_{N-1}, x_N) + 2d(x_N, y)$$

contrario a la desigualdad $(*)$. Tiene sentido entonces definir:

$$k = \max\{v \colon 1 \leq v \leq N \text{ y } d(x, y) \leq 2d(x_v, y)\}.$$

Sabemos que $k \geq 1$. Veamos que k no puede ser N. Si $k = N$, entonces $d(x, y) \leq 2d(x_N, y) \leq 2d(x, x_1)+4d(x_1, x_2)+\cdots+4d(x_{N-1}, x_N)+2d(x_N, y)$, lo cual contradice nuevamente a $*$). Así pues $1 \leq k < N$ y, por definición de k, se sigue que $d(x, y) \leq 2d(x, x_{k+1})$ y $d(x, y) \leq 2d(x_k, y)$. Luego $d(x, y) \leq d(x, x_{k+1})+d(x_k, y) \leq [2d(x, x_1)+4d(x_1, x_2)+\cdots+4d(x_{k-1}, x_k)+2d(x_k, x_{k+1})] +[2d(x_k, x_{k+1})+4d(x_{k+1}, x_{k+2})+\cdots+4d(x_{N-1}, x_N)+2d(x_N, y)] = 2d(x, x_1)+4d(x_1, x_2)+\cdots+ 4d(x_{N-1}, x_N) + 2d(x_N, y)$, lo cual es una contradicción, y la desigualdad c) queda probada. Como caso particular de c), tenemos que:

$$\frac{d(x, y)}{4} \leq d(x, x_1) + d(x_1, x_2) + \cdots + d(x_{N-1}, x_N) + d(x_N, y)$$

para cada sucesión finita $x, x_1, \ldots, x_N, y$ en X. Por tanto, $\frac{d(x,y)}{4} \leq \rho(x, y)$ para cada $(x, y) \in X \times X$. Además es claro que $\rho(x, y) \leq d(x, y)$. Falta probar que

$$U_{n+1} \subseteq \big\{(x, y) \colon \rho(x, y) < \frac{1}{2^n}\big\} \subseteq U_{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si $(x, y) \in U_{n+1}$, tenemos $y \in U_{n+1}(x)$ y, por tanto, $d(x, y) \leq 2^{-n-1}$. De donde $\rho(x, y) \leq d(x, y) \leq 2^{-n-1} < 2^{-n}$. Ahora, si $\rho(x, y) < 2^{-n}$, entonces $d(x, y) \leq 4\rho(x, y) < 2^{-n+2}$. Esto implica que $d(x, y) \leq 2^{-n+1}$, es decir, $(x, y) \in U_{n-1}$. Si los conectores U_n son simétricos, entonces $d(x, y) = d(y, x)$ para toda $(x, y) \in X \times X$ y, por tanto, ρ es seudo-métrica. ρ es casi-métrica si y sólo si $d(x, y) = 0$ implica que $x = y$, es decir, si y sólo si $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n(x) = \{x\}$ para cada $x \in X$.

□

Corolario 2.26. Un espacio casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es casi-seudo metrizable si y sólo si $\mathcal{U}$ tiene una base numerable.

Corolario 2.27. Si $(X,\mathcal{U})$ es un espacio casi-uniforme, existe una familia $\{d_i \colon i \in I\}$ de casi-seudo métricas en X tal que $\tau_{\mathcal{U}} = \bigvee_{i\in I} \tau_{d_i}$

Corolario 2.28. Si $(X,\mathcal{U})$ es un espacio uniforme, la topología $\tau_{\mathcal{U}}$ es completamente regular.

Definición 2.29. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea W un conector de X tal que para cada $x \in X$, $W(x)$ es una τ-vecindad de x. W recibe entonces el nombre de *covecindad* de (X, τ). Una covecindad W de (X, τ) es simétrica (respectivamente, transitiva) si $W = W^{-1}$ (respectivamente, si $W = W^2$) y abierta (respectivamente, cerrada) si para cada $x \in X$, $W(x)$ es τ-abierto (respectivamente, τ-cerrado). W es *indistinta* si para cada $x \in X$, $y \in W(x) \cap W^{-1}(x)$ implica que $W(x) = W(y)$.

Observación 2.30. Sea W una covecindad de $(X,\mathcal{U})$. Entonces W es indistinta si para cualesquiera $x, y \in X$, $x \in W(y)$ y $y \in W(x)$ implica que $W(x) = W(y)$. Si además W es simétrica, entonces W es transitiva si y sólo si W es indistinta si y sólo si W es relación de equivalencia.

Definición 2.31. Una sucesión de covecindades $U_1, U_2, \ldots$ de un espacio (X, τ) es *normal* si $U_{n+1}^2 \subseteq U_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Una covecindad U es *normal* si pertenece a una sucesión normal de covecindades.

Observación 2.32. Para toda sucesión de covecindades $U_1, U_2, \ldots$ tenemos lo siguiente:

1. Toda covecindad transitiva es normal;
2. si $U_1, U_2, \ldots$ es una sucesión normal de covecindades, entonces $U_1 \circ U_2 \circ \cdots \circ U_k \subseteq U_1^k$ y $U^\infty = \bigcap_{n=1}^\infty U_n$ es una relación transitiva;
3. Si $(X,\mathcal{U})$ es un espacio casi-uniforme, cada $U \in \mathcal{U}$ es una covecindad normal en $(X, \tau_\mathcal{U})$.

Demostración. 2) Obviamente $U_1 \circ U_2 \subseteq U_1^2$. Inductivamente, supongamos que $U_1 \circ U_2 \circ \cdots \circ U_{k-1} \subseteq U_1^{k-1}$ y tomemos $(x, z) \in U_1 \circ U_2 \circ \cdots \circ U_k$. Por tanto, existe y tal que $(x, y) \in U_k$ y $(y, z) \in U_1 \circ U_2 \circ \cdots \circ U_{k-1}$. Por las hipótesis previas tenemos $(x, y) \in U_1$ y $(y, z) \in U_1^{k-1}$. Por tanto, $(x, z) \in U_1^k$.

3) Tomemos $(x, y), (y, z) \in U^\infty$ y sea $k \in \mathbb{N}$. Como $(x, y), (y, z) \in U_{k+1}$, tenemos $(x, z) \in U_{k+1}^2 \subseteq U_k$. Por tanto, $(x, z) \in U^\infty$ y U^∞ es transitiva.

□

Observación 2.33. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea V una covecindad de (X, τ). Entonces, para cada $A \subseteq X$, $\bar{A} \subseteq V^{-1}(A)$ y los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) V^{-1} es covecindad de (X, τ);

(b) V contiene una covecindad simétrica de (X, τ);

(c) Para cada subconjunto A de X, $\bar{A} \subseteq V(A)$.

Demostración. Sea $A \subseteq X$. Si $p \in \overline{A}$, tenemos $V(p) \cap A \neq \emptyset$, así que $p \in V^{-1}(A)$ y $\overline{A} \subseteq V^{-1}(A)$. Las implicaciones $(a) \Rightarrow (b)$ y $(b) \Rightarrow (c)$ son evidentes. Probemos que $(c) \Rightarrow (a)$. Sabemos que para subconjunto A de X, tenemos $\overline{A} \subseteq V(A)$. Fijemos $x \in X$. Evidentemente $x \notin \overline{(X \setminus V^{-1}(x))}$. Esto implica que x pertenece al interior de $V^{-1}(x)$ y, por tanto, V^{-1} es covecindad de (X, τ). □

Proposición 2.34. Sea $\mathcal{B}$ una base para una casi-uniformidad $\mathcal{U}$ en conjunto X y sea $A \subseteq X$. Entonces la $\tau_\mathcal{U}$-cerradura de A coincide con $\bigcap\{U^{-1}(A) \colon U \in \mathcal{B}\}$.

Demostración. Por la observación anterior, $\overline{A} \subseteq \cap\{U^{-1}(A) \colon U \in \mathcal{B}\}$. Recíprocamente, si $p \in U^{-1}(A)$ para toda $U \in \mathcal{B}$, entonces $U(p) \cap A \neq \emptyset$ para toda $U \in \mathcal{B}$, es decir, $p \in \overline{A}$. □

Definición 2.35. Un espacio topológico (X,τ) es R_0 si siempre que $x \in V \in \tau$, se tiene $\overline{\{x\}} \subseteq V$. Equivalentemente, (X,τ) es R_0 si las cerraduras de cada dos puntos coinciden o son ajenas.

Proposición 2.36. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio casi-uniforme. Entonces:

a) $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ es R_0 si y sólo si $\bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\}$ es simétrica;

b) $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ es T_0 si y sólo si $\bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\}$ es un orden parcial, es decir, es transitiva y antisimétrica;

c) $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ es T_0 si y sólo si $(X,\tau_{\mathcal{U}^*})$ es T_2, en donde $\mathcal{U}^* = \mathcal{U} \vee \mathcal{U}^{-1}$;

d) $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ es T_1 si y sólo si $\bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\} = \Delta(X)$;

e) $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ es T_2 si y sólo si $\bigcap\{U^{-1} \circ U : U \in \mathcal{U}\} = \Delta(X)$.

Demostración. a) $(\Rightarrow)$ Sean $x, y \in X$ tales que $y \in U(x)$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Por tanto, $x \in \bigcap_{U\in\mathcal{U}} U^{-1}(y) = \overline{\{y\}}$. Como $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ es R_0 y $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} \neq \emptyset$, tenemos $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. Por tanto, $y \in U^{-1}(x)$ para cada $U \in \mathcal{U}$. De donde, $\bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\}$ es simétrica.
$(\Leftarrow)$ Sean $x \in X$ y $y \in \overline{\{x\}} = \bigcap_{U\in\mathcal{U}} U^{-1}(x)$. Por tanto, $(y,x) \in \bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\}$. Por hipótesis, $(x,y) \in \bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\}$, es decir, $x \in U^{-1}(y)$ para cada $U \in \mathcal{U}$, por lo que $x \in \overline{\{y\}}$ y $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$.

b) $(\Rightarrow)$ Probemos que $\bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\}$ es transitiva. Sean $(x,y),(y,z) \in \bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\}$. Por tanto, $x \in \overline{\{y\}}$ y $y \in \overline{\{z\}}$. De donde, $x \in \overline{\{y\}} \subseteq \overline{\{z\}}$ y $(x,z) \in \bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\}$.
Probemos ahora que $\bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\}$ es antisimétrica. Sean $x, y \in X$ tales que $(x,y),(y,x) \in \bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\}$. Por tanto, $y \in \overline{\{x\}}$ y $x \in \overline{\{y\}}$. Como $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ es T_0, tenemos $x = y$ y hemos terminado.
$(\Leftarrow)$ Tomemos $x, y \in X$ tales que $x \in \overline{\{y\}}$ y $y \in \overline{\{x\}}$. Por tanto, $(x,y),(y,x) \in \bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\}$. Por hipótesis, $x = y$ y $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ es T_0.

c) $(\Rightarrow)$ Sean $x, y \in X$ puntos distintos. Por *b*), no es posible que ambas parejas $(x,y),(y,x)$ pertenezcan a $\bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\}$, digamos $(x,y) \notin \bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\}$. Esto implica que $y \notin \overline{\{x\}}$. Sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \notin U(y)$. Por tanto, $y \notin U^{-1}(x)$. Sea $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subseteq U$. Aseguramos que $V^{-1}(x) \cap V(y) = \emptyset$. Si, por el contrario, existe $z \in V^{-1}(x) \cap V(y)$, tendríamos $(x,z) \in V^{-1}, (y,z) \in V$. De donde, $(y,x) \in V^2 \subseteq U$ y $x \in U(y)$, en contradicción con $y \notin U^{-1}(x)$. Por tanto, $(X,\tau_{\mathcal{U}^*})$ es un espacio T_2.
$(\Leftarrow)$ Sean $x, y \in X$ tales que $x \in \overline{\{y\}}$ y $y \in \overline{\{x\}}$. Debemos probar que $x = y$, Si $x \neq y$, existiría, por hipótesis, $V \in \mathcal{U}$ tal que $(V \cap V^{-1})(x) \cap (V \cap V^{-1})(y) = \emptyset$. Como $x \in V(y)$ y $y \in V(x)$, tendríamos que $(x,y) \in V \cap V^{-1}$ y $y \in (V \cap V^{-1})(x) \cap (V \cap V^{-1})(y)$, una contradicción.

d) $(\Rightarrow)$ Sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Como $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ es T_1, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $y \notin U(x)$ y $x \notin U(y)$. Por tanto, $(x,y),(y,x) \notin \bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\}$ y $\bigcap\{U : U \in \mathcal{U}\} = \Delta(X)$.
$(\Leftarrow)$ Sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Como $(x,y) \notin \Delta(X)$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $(x,y) \notin U, (y,x) \notin U$. De donde, $y \notin U(x)$ y $x \notin U(y)$ y $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ es T_1.

e) ($\Rightarrow$) Sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Por hipótesis, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U(x) \cap U(y) = \emptyset$. Por tanto, $(x, y) \notin U^{-1} \circ U$ y $\bigcap\{U^{-1} \circ U \colon U \in \mathcal{U}\} = \Delta(X)$.
($\Leftarrow$) Sean $x, y \in X$, $x \neq y$. Por hipótesis, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $(x, y) \notin U^{-1} \circ U$. Esto implica que $U(x) \cap U(y) = \emptyset$ y $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ es T_2.

□

Proposición 2.37. Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio casi-uniforme. Entonces $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ es T_1 si y sólo si la siguiente condición se cumple:

- Si un filtro $\mathcal{F}$ en X $\tau_{\mathcal{U}^{-1}}$-converge a un punto $x \in X$, entonces $\mathcal{F}$ tiene a lo más a x como punto de $\tau_{\mathcal{U}}$-adherencia.

Demostración. ($\Rightarrow$) Por hipótesis, $U^{-1}(x) \in \mathcal{F}$ para toda $U \in \mathcal{U}$. Sea $y \in X$ tal que $U(y) \cap F \neq \emptyset$ para toda $U \in \mathcal{U}$ y toda $F \in \mathcal{F}$. Por tanto, $U(y) \cap U^{-1}(x) \neq \emptyset$ para toda $U \in \mathcal{U}$. Supongamos que $x \neq y$. Sea $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \notin U(y)$ y sea $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subseteq U$. Escojamos $z \in V(y) \cap V^{-1}(x)$. Por tanto, $(x, z) \in V^{-1}, (y, z) \in V$ lo que implica que $(y, x) \in V^2 \subseteq U$ y $x \in U(y)$, una contradicción.
($\Leftarrow$) El filtro $\mathcal{F} = \{U^{-1}(x) \colon U \in \mathcal{U}\}$ es $\tau_{\mathcal{U}^{-1}}$-convergente a x. Por hipótesis, x es el único punto posible de $\tau_{\mathcal{U}}$-adherencia de $\mathcal{F}$. Si $y \neq x$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U(y) \cap U^{-1}(x) = \emptyset$. Por tanto, $x \notin U(y)$ y el conjunto $\{x\}$ es $\tau_{\mathcal{U}}$-cerrado. □

Definición 2.38. Sean $(X, \mathcal{U}), (Y, \mathcal{V})$ espacios casi-uniformes. Una función $\psi \colon X \to Y$ es *uniformemente continua* si para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\psi(U(x)) \subseteq V(\psi(x))$ para cada $x \in X$. Equivalentemente, si para cada $V \in \mathcal{V}$, el conjunto $(\psi \times \psi^{-1})(V) \in \mathcal{U}$.

Observación 2.39. La composición de dos funciones uniformemente continuas es uniformemente continua.

Observación 2.40. Si $\psi \colon (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ es uniformemente continua, entonces $\psi \colon (X, \tau_{\mathcal{U}}) \to (Y, \tau_{\mathcal{V}})$ es continua.

Definición 2.41. Una biyección $\psi \colon (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ es *unimorfismo* si ambas funciones ψ, ψ^{-1} son uniformemente continuas.

Proposición 2.42. Sean $\{\mathcal{U}_i \colon i \in I\}$ y $\{\mathcal{V}_i \colon i \in I\}$ familias de casi-uniformidades en X, Y, respectivamente, y sean $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{U}_i \colon i \in I\}$ y $\mathcal{V} = \sup\{\mathcal{V}_i \colon i \in I\}$. Si para cada $i \in I$, $\psi \colon (X, \mathcal{U}_i) \to (Y, \mathcal{V}_i)$ es uniformemente continua, también $\psi \colon (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ lo es.

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$, $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I$ y $V_k \in \mathcal{V}_{i_k}$ para $k = 1, 2, \ldots, n$. Entonces $V = V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$ es un elemento típico de $\mathcal{V}$. Para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, existe un elemento $U_k \in \mathcal{U}_{i_k}$ tal que $\psi(U_k(x)) \subseteq V_k(\psi(x))$ para toda $x \in X$. Consideremos el conector $U = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{U}$. Debemos demostrar que $\psi(U(x)) \subseteq V(\psi(x))$ para cada $x \in X$. Si $x \in X$ y $z \in U(x)$, tenemos $z \in U_k(x)$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$ y, por tanto, $\psi(z) \in V_k(\psi(x))$ para cada $k = 1, 2, \ldots, n$. Esto implica que $\psi(z) \subseteq V(\psi(x))$ y $\psi(U(x)) \subseteq V(\psi(x))$. □

Proposición 2.43. Si $\psi \colon (X, \mathcal{U}) \to (Y, \mathcal{V})$ es uniformemente continua, también lo son $\psi \colon (X, \mathcal{U}^{-1}) \to (Y, \mathcal{V}^{-1})$ y $\psi \colon (X, \mathcal{U} \vee \mathcal{U}^{-1}) \to (Y, \mathcal{V} \vee \mathcal{V}^{-1})$.

Proposición 2.44. Sea X un conjunto. Para cada $i \in I$, sea $(Y, \mathcal{V}_i)$ un espacio casi-uniforme y sea $\psi_i \colon X \to Y_i$. La familia de todos los conjuntos de la forma $(\psi_i \times \psi_i)^{-1}(V)$ con $i \in I$, $V \in \mathcal{V}_i$ constituyen una sub-base para una casi-uniformidad en X y es la mínima que hace a cada ψ_i uniformemente continua.

Definición 2.45. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio casi-uniforme y sea $E \subseteq X$. Definimos $\mathcal{U}_E = \{U \cap (E \times E) \colon U \in \mathcal{U}\}$ y es una casi-uniformidad en E, llamada la casi-uniformidad *inducida* por $\mathcal{U}$.

Observación 2.46. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio casi-uniforme y sea $E \subseteq X$. Entonces:

1. $\tau_{\mathcal{U}_E} = \tau_{\mathcal{U}}|E$;

2. Si $\psi \colon (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ es uniformemente continua, también $\psi|E \colon (E,\mathcal{U}_E) \to (Y,\mathcal{V})$ es uniformemente continua;

3. Si $F \subseteq E \subseteq X$, entonces $\mathcal{U}_F = (\mathcal{U}_E)_F$.

Definición 2.47. Un espacio casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ está *encajado* en un espacio casi-uniforme $(Y,\mathcal{V})$ si existe una función inyectiva $\psi \colon X \to Y$ tal que:

a) $\psi \colon (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ es uniformemente continua;

b) $\psi(X)$ es un subespacio denso de $(Y, \tau_{\mathcal{V}})$;

c) $\psi^{-1} \colon (\psi(X), \mathcal{V}_{\psi(X)}) \to (X,\mathcal{U})$ es uniformemente continua.

Definición 2.48. Sea $\{(X_i,\mathcal{U}_i) \colon i \in I\}$ una familia de espacios casi-uniformes y sea $X = \prod_{i\in I} X_i$. La *casi-uniformidad producto* en X es la mínima casi-uniformidad en X para la cual todas las proyecciones $\pi_i \colon X \to X_i$ son uniformemente continuas.

La familia de conjuntos de la forma $\{(x,y) \in X \times X \colon (\pi_i(x), \pi_i(y)) \in U\}$ para cada $i \in I$ y $U \in \mathcal{U}_i$, es una sub-base para la casi-uniformidad producto o , con cubiertas indicadas, $\lambda(i,U)_x = \{\pi_i^{-1}(\cup(\pi_i(x))) \colon x \in X\}$. En particular, si $(X,\mathcal{U}), (Y,\mathcal{V})$ son espacios casi-uniformes, una base para la casi-uniformidad producto en $X \times Y$ con cubiertas indicadas es, para $U \in \mathcal{U}$ y $V \in \mathcal{V}$,

$$\lambda(U,V) = \{U(x) \times V(y) \colon (x,y) \in X \times Y\}.$$

Observación 2.49. La topología inducida en $X = \prod_{i\in I} X_i$ por la casi-uniformidad producto es la topología producto de $\{(X_i, \tau_{\mathcal{U}_i}) \colon i \in I\}$.

Proposición 2.50. Sea $\psi \colon (X,\mathcal{U}) \to \prod_{i\in I}(Y_i, \mathcal{V}_i)$. Entonces ψ es uniformemente continua si y sólo si para cada $i \in I$, $\pi_i \circ \psi$ es uniformemente continua.

Demostración. Sólo tenemos que probar la suficiencia. Fijemos $i \in I$, $V \in \mathcal{V}_i$. Dado que $\pi_i \circ \psi \colon (X,\mathcal{U}) \to (Y_i, \mathcal{V}_i)$ es uniformemente continua, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $\pi_i(\psi(U(x))) \subseteq V(\pi_i(\psi(x)))$ para cada $x \in X$. Equivalentemente:

$$\psi(U(x)) \subseteq \pi_i^{-1}(V(\pi_i(\psi(x))) \quad \forall x \in X,$$

es decir, $\psi(U(x)) \subseteq \lambda(i, V)_{\psi(x)}$ para cada $x \in X$. Por tanto, ψ es uniformemente continua. □

Proposición 2.51. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ casi-uniformidades en X y sean $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{V}$ y $M \subseteq X \times X$. Entonces $U \circ M \circ V$ es una vecindad de M en el espacio producto $(X, \tau_{\mathcal{V}^{-1}}) \times (X, \tau_{\mathcal{U}})$.

Demostración. Fijemos $(x_1, x_2) \in M$. Si $(p, q) \in V^{-1}(x_1) \times U(x_2)$, tenemos $(p, x_1) \in V$, $(x_2, q) \in U$. Por tanto, $(p, q) \in U \circ M \circ V$. □

Corolario 2.52. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio casi-uniforme. Entonces:

$$\mathcal{B} = \{U \in \mathcal{U} \colon U \text{ es abierto en } (X, \tau_{\mathcal{U}^{-1}}) \times (X, \tau_{\mathcal{U}})\}$$

es una base de $\mathcal{U}$.

Demostración. Sea τ la topología producto de $(X, \tau_{\mathcal{U}^{-1}}) \times (X, \tau_{\mathcal{U}})$. Por la proposición anterior, sabemos que para cada $V \in \mathcal{U}$, se tiene $V \subseteq \operatorname{int}_\tau V^3$. Por tanto, dado $U \in \mathcal{U}$, tomemos $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^3 \subseteq U$. De donde, $\operatorname{int}_\tau V^3 \in \mathcal{U}$ y $V \subseteq \operatorname{int}_\tau V^3 \subseteq U$, es decir, $\operatorname{int}_\tau V^3 \in \mathcal{B}$. □

Ejemplo 2.53. Sea $\mathcal{U}$ la casi-uniformidad en $\mathbb{R}$ que tiene como base $\mathcal{B} = \{Q_\varepsilon \colon \epsilon > 0\}$, en donde $(x, y) \in Q_\varepsilon$ si y sólo si $x - y < \varepsilon$.
Claramente $Q_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, +\infty)$ y Q_ε consta de los puntos del plano arriba de la recta $x - y = \varepsilon$. Si $(x, x) \in \Delta(\mathbb{R})$, claramente Q_ε no es vecindad de $\Delta(x)$, pues para cada $\delta > 0$, existen puntos de $Q_\delta(x) \times Q_\delta(x)$ debajo de $x - y = \varepsilon$

Proposición 2.54. Sean τ_1, τ_2 topologías en un conjunto X, sea $(Y, \mathcal{V})$ un espacio casi-uniforme y sea $\psi \colon X \to Y$ una función $\tau_1 - \tau_{\mathcal{V}}$ y $\tau_2 - \tau_{\mathcal{V}^{-1}}$ continua. Entonces, para cada $V \in \mathcal{V}$, $(\psi \times \psi)^{-1}(V)$ es una $\tau_2 \times \tau_1$-vecindad de $\Delta(X)$.

Demostración. Sea $V \in \mathcal{V}$ y sea $W \in \mathcal{V}$ tal que $W^2 \subseteq V$. Sea $x \in X$. Existen $G_1 \in \tau_1$ y $G_2 \in \tau_2$ tales que $x \in G_1 \cap G_2$ y además $\psi(G_1) \subseteq W(\psi(x))$ y $\psi(G_2) \subseteq W^{-1}(\psi(x))$. Es fácil verificar que $(x, x) \in G_1 \times G_2 \subseteq (\psi \times \psi)^{-1}(V)$. □

Proposición 2.55. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ casi-uniformidades en X y sea $M \subseteq X \times X$. Entonces la cerradura de M en la topología $\tau_{\mathcal{U}} \times \tau_{\mathcal{V}}$ está dada por:

$$Cl_\tau M = \overline{M} = \bigcap \{V^{-1} \circ M \circ U \colon U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}.$$

Demostración. Por la proposición (2.19), cada $V^{-1} \circ M \circ U$ es vecindad de M respecto a la topología $\tau_{\mathcal{U}} \times \tau_{\mathcal{V}}$. De hecho, para cada $(x, y) \in \overline{M}$, cada $U \in \mathcal{U}$ y cada $V \in \mathcal{V}$, se tiene $(x, y) \in V^{-1} \circ M \circ U$.
En efecto, sean p, q tales que $(p, q) \in (U(x) \times V(y)) \cap M$. Por tanto, $(x, p) \in U$, $(p, q) \in M$, $(q, y) \in V^{-1}$, lo que implica $(x, y) \in V^{-1} \circ M \circ U$. Recíprocamente, si $(x, y) \notin \overline{M}$, existen $U \in \mathcal{U}$ y $V \in \mathcal{V}$ tales que $(U(x) \times V(y)) \cap M = \emptyset$. Por tanto, $(x, y) \notin V^{-1} \circ M \circ U$. □

Corolario 2.56. Sea $\mathcal{U}$ una casi-uniformidad en X. Entonces $\{U\colon U\in\mathcal{U}$ y U es $\tau_{\mathcal{U}}\times\tau_{\mathcal{U}^{-1}}-$ cerrado$\}$ es una base de $\mathcal{U}$.

Demostración. Dado $U\in\mathcal{U}$ y sea $V\in\mathcal{U}$ tal que $V^3\subseteq U$.Por (2.55), la cerradura de V en $\tau_{\mathcal{U}}\times\tau_{\mathcal{U}^{-1}}$ está contenida en V^3. Por tanto, tales cerraduras forman una base de $\mathcal{U}$. □

Teorema 2.57. Sea (X,τ) un espacio compacto T_2 y sea G un orden parcial en X tal que G es $\tau\times\tau$-cerrado. Entonces existe exactamente una casi-uniformidad $\mathcal{U}$ en X tal que $\bigcap\mathcal{U}=G$ y $\tau_{\mathcal{U}^*}=\tau$.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ la familia de $\tau\times\tau$ vecindades de G. Claramente $\mathcal{U}$ es un filtro en $X\times X$ y $\bigcap\mathcal{U}=G$. Supongamos que $\mathcal{U}$ no es una casi-uniformidad en X. Por tanto, existe un $\tau\times\tau$-abierto $U\in\mathcal{U}$ tal que para toda $V\in\mathcal{U}$, $V^2\setminus U\neq\emptyset$. Para cada $V\in\mathcal{U}$, sea:

$$V'=\{((x,y),z)\in X^2\times X\colon (x,y)\notin U,(x,z)\in V,(z,y)\in V\}.$$

La familia $\mathcal{B}=\{V'\colon V\in\mathcal{U}\}$ es una base de filtro en $(X^2\setminus U)\times X$ (pues $V,W\in\mathcal{U},V\subseteq W$ implica $V'\subseteq W'$). Como $(X^2\setminus U)\times X$ es compacto, $\mathcal{B}$ tiene un punto de adherencia $((a,b),c)$. Aseguramos que $(a,c)\in G$. Supongamos, por el contrario, que $(a,c)\notin G$. Como G es compacto, existen abiertos ajenos V,H en X^2 tales que $G\subseteq V$ y $(a,c)\in H$. Pongamos $W=\{((x,y),z)\colon (x,z)\in H\}$. Entonces $((a,b),c)\in W$ y $W\cap V'=\emptyset$, contradiciendo el hecho de que $((a,b),c)$ es punto de adherencia de $\mathcal{B}$. Por tanto, $(a,c)\in G$. En forma similar se prueba que $(c,b)\in G$. Como G es transitiva, se tiene $(a,b)\in G\subseteq U$, una contradicción. (Siempre podemos tomar $V\subseteq U$). $\mathcal{U}$ es entonces una casi-uniformidad en X. Finalmente es evidente que $\tau_{\mathcal{U}^*}\subseteq\tau$. Como $\bigcap\mathcal{U}$ es un orden parcial, $\tau_{\mathcal{U}^*}$ es una topología T_2. Por ser (X,τ) compacto y T_2, tenemos $\tau_{\mathcal{U}^*}=\tau$.
Para probar la unicidad de $\mathcal{U}$, supongamos que $\mathcal{U}_1$ es una casi-uniformidad en X tal que $\bigcap\mathcal{U}_1=G$ y $\tau_{\mathcal{U}_1^*}=\tau$. Debemos probar que $\mathcal{U}_1=\mathcal{U}$. Por (2.19), todos los miembros de $\mathcal{U}_1$ son $\tau\times\tau$-vecindades de G (pues $\tau_{\mathcal{U}_1}\subseteq\tau$ y $\tau_{\mathcal{U}_1^{-1}}\subseteq\tau$). De aquí deducimos que $\mathcal{U}_1\subseteq\mathcal{U}$. supongamos ahora que existe $V\in\mathcal{U}\setminus\mathcal{U}_1$. Por tanto $\{U\setminus V\colon U\in\mathcal{U}_1\}$ es base de de un filtro $\mathcal{F}$ en $X\times X$. Como (X,τ) es compacto, $\mathcal{F}$ tiene un $\tau\times\tau$-punto de adherencia (x,y) el cual no pertence a G, pues $G\subseteq V$. Como $\mathcal{U}_1\subseteq\mathcal{F}$, (x,y) es también punto de adherencia de $\mathcal{U}_1$. Pero por el corolario (2.56) deducimos que la intersección de las $\tau\times\tau$-cerraduras de los miembros de $\mathcal{U}_1$ es G, una contradicción. □

Corolario 2.58. Sea (X,τ) un espacio compacto T_2. Entonces la única uniformidad compatible con τ es la familia de todas las vecindades de $\Delta(X)$.

Teorema 2.59. Sean $(X,\mathcal{U})$ y $(Y,\mathcal{V})$ espacios casi-uniformes y supongamos que $(X,\mathcal{U}^*)$ es compacto T_2. Si $\psi\colon X\to Y$ es $\tau_{\mathcal{U}}-\tau_{\mathcal{V}}$ continua y $\tau_{\mathcal{U}^{-1}}-\tau_{\mathcal{V}^{-1}}$ continua, entonces $\psi\colon(X,\mathcal{U})\to(Y,\mathcal{V})$ es uniformemente continua.

Demostración. Sea $V\in\mathcal{V}$. Por el corolario (2.52), $(\psi\times\psi)^{-1}(V)$ es una $\tau_{\mathcal{U}^{-1}}-\tau_{\mathcal{U}}$ vecindad de $\Delta(x)$ y, por tanto, de $\bigcap\mathcal{U}$ (pues $U\subseteq U^{-1}(x)\times U(x)$ para cada $x\in X$ y cada $U\in\mathcal{U}$). Por el teorema (2.57), concluimos que $(\psi\times\psi)^{-1}(V)\in\mathcal{U}$. (Recuérdese que $\mathcal{U}$ está formada por todas las $\tau_{\mathcal{U}^*}\times\tau_{\mathcal{U}^*}$ vecindades de $\bigcap\mathcal{U}$). □

Definición 2.60. Un espacio casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es *totalmente acotado* si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe una cubierta finita α de X tal que para cada $A \in \alpha$, $A \times A \subseteq \alpha$ (esta definición podría aplicarse a un solo conector U en X).

Observación 2.61. Para un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$ son equivalentes:

1. $(X,\mathcal{U})$ es totalmente acotado;
2. $(X,\mathcal{U}^{-1})$ es totalmente acotado;
3. $(X,\mathcal{U}^{*})$ es totalmente acotado.

Observación 2.62. La propiedad de ser totalmente acotado se preserva por funciones uniformemente continuas y por productos cartesianos. Por tanto, cada factor de un producto totalmente acotado de espacios casi-uniformes es también totalmente acotado. El supremo de una familia de casi-uniformidades totalmente acotadas es totalmente acotada.

2.2. Resultados importantes

Notación 2.63. Dada η una base de filtro en un espacio casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$, notaremos por $\mathcal{F}(\eta)$, al filtro generado por η.

Definición 2.64. Una base de filtro η en un espacio casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es *$\mathcal{U}$-Cauchy* si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $x_U \in X$ tal que $U(x_U) \in \mathcal{F}(\eta)$. Por tanto, un filtro $\mathcal{F}(\eta)$ es $(X,\mathcal{U})$ es $\mathcal{U}$-Cauchy si para cada $U \in \mathcal{U}$, existe, $x_U \in X$ tal que $U(x_U) \in \mathcal{F}(\eta)$.

Observación 2.65. Sea $\mathcal{F}$ un filtro convergente en un espacio casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$. Entonces $\mathcal{F}$ es $\mathcal{U}$-Cauchy.

Demostración. Supongamos $\mathcal{F} \to p$, $p \in X$. Si $U \in \mathcal{U}$, claramente $U(p)$ es $\tau_{\mathcal{U}}$-vecindad de p y, por tanto, $U(p) \in \mathcal{F}$. □

Observación 2.66. Sean η_1 y η_2 bases de filtro en un espacio casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$. Si $\mathcal{F}(\eta_1) \subseteq \mathcal{F}(\eta_2)$ y si η_1 es $\mathcal{U}$-Cauchy, también η_2 es $\mathcal{U}$-Cauchy.

Observación 2.67. Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son casi-uniformidades en X y si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, entonces toda base de filtro $\mathcal{V}$-Cauchy es también $\mathcal{U}$-Cauchy.

Observación 2.68. Sea η una base de filtro en un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$. Si η es $\mathcal{U}^*$-Cauchy, en donde $\mathcal{U}^* = \mathcal{U} \vee \mathcal{U}^{-1}$, entonces η es simultaneámente $\mathcal{U}$-Cauchy y $\mathcal{U}^{-1}$-Cauchy.

Proposición 2.69. Sea η una base de filtro en un espacio uniforme $(X,\mathcal{U})$. Entonces η es $\mathcal{U}^*$-Cauchy si y sólo si para cada $U \in \mathcal{U}$, existe $N \in \eta$ tal que $N \times N \subseteq U$.

Demostración. ($\Leftarrow$) Fijemos $U \in \mathcal{U}$ y sea $N \in \eta$ tal que $N \times N \subseteq U$. Para cada $x \in N$ tenemos $N \subseteq (U \cap U^{-1})(x)$ por tanto, η es $\mathcal{U}^*$-Cauchy.

($\Rightarrow$) Sea η una base de filtro $\mathcal{U}^*$-Cauchy y sea $U \in \mathcal{U}$. Escojamos $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subseteq U$. Como η es $\mathcal{U}^*$-Cauchy, existe $x \in X$ tal que $(V \cap V^{-1})(x) \in \mathcal{F}(\eta)$. Si $N \in \eta$ es tal que $N \subseteq (V \cap V^{-1})(x)$, claramente se tiene $N \times N \subseteq U$, pues si $(a,b) \in N \times N$, entonces $(a,x) \in V$ y $(x,b) \in V$. Por tanto $(a,b) \in V^2 \subseteq U$. □

Definición 2.70. Una casi-uniformidad, se dice:

1. *Punto-simétrica*, si para cada $U \in \mathcal{U}$ y $x \in X$, existe un $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^{-1}(x) \subseteq U(x)$.

2. *Localmente-simétrica*, si para cada $U \in \mathcal{U}$ y $x \in X$, existe un $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^{-1}(V(x)) \subseteq U(x)$.

Ejemplo 2.71. Existe un espacio casi-uniforme localmente simétrico $(X,\mathcal{U})$ y un filtro $\tau_{\mathcal{U}}$-convergente que no es $\mathcal{U}^*$-Cauchy.

Demostración. Sea $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $U_n = \Delta(X) \cup \{(0, \frac{1}{k}) \colon k > n\}$. Cada U_n es transitivo, pues $(0,y) \in U_n \circ U_n$ implica que existe z tal que $(0,z),(z,y) \in U_n$. $z = 0$, obviamente $(0,y) \in U_n$ y si $z \neq 0$, necesariamente $z = y$ en cualquier caso, $(0,y) \in U_n$. si $(x,y) \in U_n \circ U_n$ con $x \neq 0$, existe z tal que $(x,z),(z,y) \in U_n$. En este caso $z = y$ y, por tanto, $(x,y) \in U_n$. La familia $\{U_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ es entonces base de una casi-uniformidad $\mathcal{U}$ es X. Para probar que $\mathcal{U}$ es localmente simétrica, hacemos los siguientes cáculos:

$$\begin{aligned} U_n(\frac{1}{m}) &= \{\frac{1}{m}\} & U_n(0) &= \{0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \cdots\} \\ U_n^{-1}(0) &= \{0\} & U_n^{-1}(\frac{1}{m}) &= \{\frac{1}{m}, 0\} \text{ si } m > n \\ U_n^{-1}(\frac{1}{m}) &= \{\frac{1}{m}\} & &\text{si } m \leq n \end{aligned}$$

Por tanto, $(U_n^{-1} \circ U_n)(0) = U_n(0)$ y

$$(U_n^{-1} \circ U_n)(\frac{1}{m}) = \begin{cases} \{\frac{1}{m}, 0\} & \text{si } m > n \\ \{\frac{1}{m}\} & \text{si } m \leq n \end{cases}$$

Esta última igualdad implica que $(U_m^{-1} \circ U_m)(\frac{1}{m}) = U_n(\frac{1}{m})$. Por tanto, $\mathcal{U}$ es una casi-uniformidad transitiva y localmente simétrica en X. El filtro $\tau_{\mathcal{U}}$-vecindades de 0 no es $\mathcal{U}^*$-Cauchy, pues para cada vecindad B de 0, $B \times B - U_n \neq \emptyset$ para cada $\in \mathbb{N}$. □

Proposición 2.72. Sea $f \colon (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ una función uniformemente continua entre los espacios casi-uniformes $(X,\mathcal{U})$ y $(Y,\mathcal{V})$. Si η es una base de filtro $\mathcal{U}$-Cauchy, entonces $f(\eta)$ es una base de filtro $\mathcal{V}$-Cauchy.

Demostración. Si $A, B \in \eta$, tenemos $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$. Por tanto, si $C \in \eta$ es tal que $C \subseteq A \cap B$, entonces $f(C)$ es un elemento de $f(\eta)$ contenido en $f(A) \cap f(B)$, es decir, $f(\eta)$ es una base de filtro en Y. Si $V \in \mathcal{V}$ es arbitrario, la hipótesis de continuidad uniforme implica que existe $U \in \mathcal{U}$ tal que la cubierta indicada $\{U(x) \colon x \in Y\}$ refina a $\{f^{-1}((V(y)) \colon y \in Y\}$. si $U(x) \in \eta^+$ y si $y \in Y$ es tal que $U(x) \subseteq f^{-1}(V(y))$, concluimos que $V(y) \in f(\eta)^+$. □

Proposición 2.73. Sea X un conjunto, sea $\{(Y_i, \mathcal{V}_i) \colon i \in I\}$ una familia de espacios uniformes y para cada $i \in I$, sea $f_i \colon Y_i$ una función. Sea $\mathcal{U}$ la más pequeña casi-uniformidad en X que convierte a cada f_i en una función uniformemente continua. Entonces una base de filtro η en X es $\mathcal{U}$-Cauchy si y sólo si para cada $i \in I$, $f_i(\eta)$ es $\mathcal{V}_i$-Cauchy.

Demostración. Supongamos que todos los espacios uniformes están definidos a través de cubiertas. Si η es $\mathcal{U}$-Cauchy, la proposición 2.72 implica que cada $f_i(\eta)$ es $\mathcal{V}_i$-Cauchy. Recíprocamente, supongamos que cada $f_i(\eta)$ es $\mathcal{V}_i$-Cauchy. Un elemento típico de $\mathcal{U}$ es una cubierta α de X de la forma:

$$f^{-1}(\beta_1) \wedge f^{-1}(\beta_2) \wedge \cdots \wedge f^{-1}(\beta_n)$$

en donde $\beta_k \in \mathcal{V}_{i_k}$ para alguna $i_k \in I$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Por hipótesis existen elementos $T_k \in \beta_k \cap f_{i_k}(\eta)^+$. Escogiendo $N_k \in \eta$ tal que $f_{i_k}(N_k) \subseteq T_k$ y tomando $N \in \eta$ tal que $N \subseteq N_1 \cap N_2 \cap \cdots \cap N_k$, tenemos $N \subseteq \bigcap_{k=1}^{n} f^{-1}(T_k)$ y por tanto $\alpha \cap \eta^+ \neq \emptyset$. $\square$

Proposición 2.74. Sea X un conjunto y sea $(Y, \mathcal{V})$ un espacio casi-uniforme. Sea $f \colon X \to Y$ una función suprayectiva y sea $\mathcal{U}$ la más pequeña casi-uniformidad en X que convierte a f en una función uniformemente continua. Sea η una base de filtro en X tal que $f(\eta)$ es $\mathcal{V}$-Cauchy. Entonces η es $\mathcal{U}$-Cauchy.

Demostración. Basta probar que para cada $V \in \mathcal{V}$, $(f \times f)^{-1}(V)(x)$, para alguna $x \in X$, contiene un elemento de η. Sea $y \in Y$ tal que $V(y) \supseteq f(\eta)$ para alguna $N \in \eta$ y escojamos $x \in f^{-1}(y)$. Si $z \in N$ es arbitrario, tenemos $f(z) \in V(y)$, es decir, $(y, f(z)) \in V$. Por tanto, $(x, z) \in (f \times f)^{-1}(V)$ y $z \in (f \times f)^{-1}(V)(x)$, es decir, $N \subseteq (f \times f)^{-1}(V)(x)$. $\square$

Ejemplo 2.75. Sea $X = Y_1 = Y_2 = \mathbb{R}$ y sean $f_1 = f_2$ el mapeo idéntico de $\mathbb{R}$. Sean $\mathcal{V}_1 = \{V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon$ para alguna $x \in \mathbb{R}, \Delta(\mathbb{R}) \cup (x, \infty) \times \mathbb{R} \subseteq V\}$ y $\mathcal{V}_2 = \{V \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon$ para alguna $x \in \mathbb{R}, \Delta(\mathbb{R}) \cup (-\infty, x) \times \mathbb{R} \subseteq V\}$. Sea $\mathcal{U}$ la más pequeña casi-uniformidad en $\mathbb{R}$ que convierte a f_1 y f_2 en funciones uniformemente continuas. Entonces $\Delta(\mathbb{R}) \in \mathcal{U}$ y, por tanto, $\mathcal{U}$ es la uniformidad discreta en $\mathbb{R}$. Sin embargo, $\eta = \{\mathbb{R}\}$ no es un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy aun cuando $f_i(\eta)$ $(i = 1, 2)$ es $\mathcal{V}_i$-Cauchy.

Definición 2.76. Un espacio casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es *completo* (respectivamente, *completo por convergencia*) si todo filtro $\mathcal{U}$-Cauchy tiene un punto de adherencia (respectivamente, un punto de convergencia).

Observación 2.77. Un espacio casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es completo si y sólo si todo ultrafiltro en X converge.

Observación 2.78. Un espacio casi-uniforme regular $(X,\mathcal{U})$ es completo si y sólo si toda base de filtro abierta tiene un punto de adherencia.

Demostración. Sea η una base de filtro en X. Si η no tiene puntos de adherencia, para cada $p \in X$ existen un abierto W_p y un elemento $N_p \in \eta$ tales que $p \in W_p \subseteq \overline{W_p} \subseteq X \setminus \overline{N_p}$. Esto implica que cada $\overline{N_p}$ es intersección de cerraduras de abiertos, digamos $\overline{N_p} =$

$\bigcap\{W_{p,i}\colon W_{p,i}$ abierto, $i \in J_p\}$ con $\bigcap\{\overline{W_{p,i}}\colon i \in J_p\} = \overline{N_p}$. Por tanto, la familia de intersecciones finitas de los $W_{p,i}$, con $p \in X$, $i \in J_p$, es una base de filtro abierta sin puntos de adherencia, una contradicción. $\square$

Ejemplo 2.79. Existe un espacio casi-uniforme punto simétrico $(X,\mathcal{U})$ que es completo pero que no es completo por convergencia. (Ver Ejemplo 3.8 en [12]).

Proposición 2.80. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio casi-uniforme localmente simétrico. Si η es una base de filtro $\mathcal{U}$-Cauchy, entonces todo punto de adherencia de η es punto de convegencia de η.

Demostración. Sea $p \in X$ tal que $\eta \mapsto p$. Sea $U \in \mathcal{U}$ y sea $V \in \mathcal{U}$, simétrico, tal que $V^3(p) \subseteq U(p)$. Como η es $\mathcal{U}$-Cauchy, existe $x \in X$ tal que $V(x) \in \eta$. Como $\eta \mapsto p$, tenemos $V(x) \cap V(p) \neq \emptyset$. Si $y \in V(x) \cap V(p)$ y si $z \in V(x)$ es arbitrario, tenemos $(z,x),(x,y),(y,p) \in V$ y, por tanto, (z,p) y $(p,z) \in V^3$, es decir, $z \in U(p)$ y $V(x) \subseteq U(p)$. Esto implica que $\eta \mapsto p$. $\square$

Corolario 2.81. Todo espacio casi-uniforme completo y localmente simétrico es completo por convergencia.

Proposición 2.82. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio casi-uniforme completo (por convergencia) y sea F un cerrado en $(X,\tau_{\mathcal{U}})$. Entonces $(F,\mathcal{U}|_{F\times F})$ es completo (por convergencia).

Ejemplo 2.83. Un subespacio completo de un espacio casi-uniforme (localmente simétrico) y Hausdorff no es necesariamente cerrado.

Demostración. Sea $(X,\mathcal{U})$ el espacio casi-uniforme descrito en el ejemplo 2.71. Entonces $\mathcal{U}$ induce la topología discreta en el subespacio $Y = \{\frac{1}{n}\colon n \in \mathbb{N}\}$. Por tanto, Y es un subespacio completo el cual no es cerrado en $(X,\tau_{\mathcal{U}})$. $\square$

Proposición 2.84. Sea $\{(X_i,\mathcal{V}_i)\colon i \in J\}$ una familia de espacios casi-uniformes y sea $(X,\mathcal{U})$ el espacio casi-uniforme producto. Entonces $(X,\mathcal{U})$ es completo (por convergencia) si y sólo si $(X_i,\mathcal{V}_i)$ es completo (por convergencia) para cada $i \in J$.

Demostración. Supongamos que cada $(X_i,\mathcal{V}_i)$ es completo por convergencia y sea η un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy. Por la proposición 2.72, cada $\pi_i(\eta)$ es un filtro $\mathcal{V}_i$-Cauchy y, por tanto, converge, digamos $\pi_i(\eta) \to x_i$ $(i \in J)$. Como $(X,\tau_{\mathcal{U}})$ es el producto topológico de $\{(X_i,\tau_{\mathcal{V}_i})\colon i \in J\}$, concluimos que $\eta \mapsto x$, en donde $\pi_i(x) = x_i$ para cada $i \in J$. Recíprocamente, supongamos que $(X,\mathcal{U})$ es completo por convergencia. Escojamos $i \in J$ y sea η_i una base $\mathcal{V}_i$-base de filtro de Cauchy. Para cada $j \in J$, $j \neq i$ escojamos un punto $x_j \in X_j$ y sea η_j el filtro de $\tau_{\mathcal{V}_j}$-vecindades de x_j. Definamos la base de filtro η en X como el conjunto de cajas $\prod\limits_{j\in J} N_j$, en donde $N_j \in \eta_j$ para cada $j \in J$ y con un número finito de excepciones, $N_j = X_j$. Es claro que η es una base de filtro $\mathcal{U}$-Cauchy y, por hipótesis, existe $x \in X$ tal que $\eta \mapsto x$. Por tanto, $\pi_i(\eta) = \eta_i \to x(i)$ y el espacio $(X_i,\mathcal{V}_i)$ es completo por convergencia. El resto de la demostración de la proposición de prueba de forma similar. $\square$

Proposición 2.85. Sea $f\colon (X,\tau) \to (Y,\tau')$ una función perfecta. Denotemos por $\mathcal{U}$ a la casi-uniformidad de *Pervin* (respectivamente, punto finita, localmente finita, semi-continua, fina-transitiva, fina) de (X,τ) y denotemos como $\mathcal{V}$ a la casi-uniformidad correspondiente en (Y,τ'). Entonces $(X,\mathcal{U})$ es completo cuando $(Y,\mathcal{V})$ lo sea.

Demostración. Supongamos que $(Y,\mathcal{V})$ es completo y sea η un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy sin puntos de adherencia. Utilizando la proposición 2.17 en [12], f es uniformemente continua y por la proposición 2.72, $f(\eta)$ es un filtro $\mathcal{V}$-Cauchy. Por tanto, existe $p \in Y$ tal que $f(\eta) \mapsto p$. Como f es perfecta, existe $q \in f^{-1}(p)$ tal que $\eta \mapsto q$, y esto es una contradicción. Por tanto, $(X,\mathcal{U})$ es completo.

Por el corolario 2.81, esta proposición también se cumple para espacios completos por convergencia siempre y cuando el espacio (X,τ) sea regular. $\square$

Definición 2.86. Un espacio casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es *precompacto* si para cada $U \in \mathcal{U}$, existe un conjunto finito $F_U \subseteq X$ tal que $X = U(F_U)$.

Proposición 2.87. a) Todo producto de espacios precompactos es precompacto.

b) Si $\mathcal{U},\mathcal{V}$ son casi-uniformidades en un conjunto X, si $\mathcal{U}$ es precompacta y si $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{V}$, entonces $\mathcal{V}$ es precompacta.

c) El supremo de dos casi-uniformidades precompactas no es necesariamente precompacta.

d) Todo conector totalmente acotado es precompacto.

e) El cuadrado de todo conector simétrico y precompacto es totalmente acotado.

f) Un subespacio de un espacio precompacto $(X,\mathcal{U})$ no es necesariamente precompacto

La demostración de los incisos *c*) y *f*) las daremos más adelante.

Proposición 2.88. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio casi-uniforme.

a) $(X,\mathcal{U})$ es precompacto si y sólo si todo ultrafiltro en X es $\mathcal{U}$-Cauchy.

b) $(X,\mathcal{U})$ es totalmente acotado si y sólo si todo ultrafiltro en X es $\mathcal{U}^*$-Cauchy.

Demostración. a) Supongamos que $(X,\mathcal{U})$ es precompacto y sea H un ultrafiltro en X. Fijemos $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ y sea $F \subseteq X$ finito tal que $X = U(F)$. Como H es ultrafiltro, existe un elemento $x \in F$ tal que $U(x) \in H$, así que H es $\mathcal{U}$-Cauchy. Recíprocamente, supongamos que cada ultrafiltro en X es $\mathcal{U}$Cauchy y sea $U \in \mathcal{U}$. Si para cada subconjunto finito $F \subseteq X$ tuviéramos $X \neq U(F)$, la familia:

$$\mathcal{B} = \{X \setminus U(F)\colon F \subseteq X \text{ finito}\}$$

sería una base de filtro en X y existiría un ultrafiltro H en X tal que $H \supseteq \mathcal{B}$. Para alguna $x \in X$ tendríamos $U(x) \in H$, pero por otro lado $X \setminus U(x) \in \mathcal{B} \subseteq H$, lo cual es una contradicción. Por tanto, existe $F \subseteq X$, finito, tal que $X = U(F)$.

b) Supongamos que $\mathcal{U}$ es totalmente acotada y sea H un ultrafiltro en X. Fijemos $U \in \mathcal{U}$ y sea $\alpha = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ una cubierta finita de X en donde $L_i \times L_i \subseteq U$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Escojamos $x_i \in L_i$ para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Por tanto $U(x_i) \supseteq L_i$ y también $U^{-1}(x_i) \supseteq L_i$. Por consiguiente, $X = \bigcup_{i=1}^{n}(U \cap U^{-1})(x_i)$ y existe $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que $(U \cap U^{-1})(x_i) \in H$, es decir H es $\mathcal{U}^*$-Cauchy.

Recíprocamente, supongamos que cada ultrafiltro en X es $\mathcal{U}^*$-Cauchy, y sea $U \in \mathcal{U}$. Sea $V \in \mathcal{U}^*$ simétrico tal que $V^2 \subseteq U \cap U^{-1}$ y sea $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \cap W^{-1} \subseteq V$ por *a*), W y W^{-1} son precompactos. Por tanto, $W \cap W^{-1}$ y V son precompactos. Por la proposición 2.87 inciso *e*), V^2 es totalmente acotado. Como $V^2 \subseteq U \cap U^{-1} \subseteq U$, U también es totalmente acotado y la demostración está completa. □

Corolario 2.89. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio uniforme. Entonces $(X,\mathcal{U})$ es precompacto si y sólo si es totalmente acotado.

Proposición 2.90. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio casi-uniforme completo el cual contiene un subespacio denso y precompacto $(Y,\mathcal{V})$. Entonces toda base de filtro abierta η en X tiene al menos un punto de adherencia.

Demostración. Claramente $\eta|_Y$ está contenida en un ultrafiltro H en Y. Por la proposición 2.88 inciso *a*), H es $\mathcal{V}$-Cauchy. Por tanto, H es también $\mathcal{U}$-Cauchy. Como $(X,\mathcal{U})$ es completo, $H \mapsto p$ para alguna $p \in X$. Como $\eta|_Y \subseteq H$, tambien $\eta \mapsto p$. □

Proposición 2.91. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio casi-uniforme. Entonces $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ es compacto si y sólo si $(X,\mathcal{U})$ es precompacto y completo.

Corolario 2.92. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio casi-uniforme completo y regular el cual tiene un subespacio denso precompacto. Entonces $(X, \tau_{\mathcal{U}})$ es compacto.

Lema 2.93. Sea $\mathcal{G}^{(i)} = \{A_n^{(i)} \colon n \in \mathbb{Z}\}$, $i \in \mathbb{N}$ una familia de espectros punto finitos. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $\mathcal{G}_m$ la familia de conjuntos no vacíos de la forma:

$$A_{n_1}^{(1)} \cap A_{n_2}^{(2)} \cap \cdots \cap A_{n_m}^{(m)} - \left(A_{n_1-1}^{(1)} \cup A_{n_2-1}^{(2)} \cup \cdots \cup A_{n_m-1}^{(m)}\right)$$

Entonces $\mathcal{G}_m$ es una partición numerable de X y para cada $Y \subseteq X$, Y puede ser cubierta con una cantidad finita de elementos de la forma $A_{n_1}^{(1)} \cap A_{n_2}^{(2)} \cap \cdots \cap A_{n_m}^{(m)}$.

Demostración. Sea $x \in X$. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, existe un único entero n_i tal que $x \in A_{n_i}^{(i)} - A_{n_i-1}^{(i)}$. Claramente $A_{n_1}^{(1)} \cap A_{n_2}^{(2)} \cap \cdots \cap A_{n_m}^{(m)} - \left(A_{n_1-1}^{(1)} \cap A_{n_2-1}^{(2)} \cap \cdots \cap A_{n_m-1}^{(m)}\right)$. Por tanto, $\mathcal{G}_m$ es cubierta de X. $\mathcal{G}_m$ es partición de X, pues si $\bigcap_{i=1}^{m} A_{n_i}^{(i)} - \bigcup_{i=1}^{m} A_{n_i-1}^{(i)}$ y $\bigcap_{i=1}^{m} A_{n_i'}^{(i)} - \bigcup_{i=1}^{m} A_{n_i'-1}^{(i)}$ son elementos intersectantes y distintos de $\mathcal{G}_m$ y si, por ejemplo, $n_i' < n_i$, entonces $n_i' < n_i - 1$ y $A_{n_i}^{(i)} - A_{n_i-1}^{(i)}$ y $A_{n_i'}^{(i)}$ serían intersectantes por contener a elementos intersectantes de $\mathcal{G}_m$. esta contradicción prueba que $\mathcal{G}_m$ es una partición de X. Falta probar que cada $Y \subseteq X$ puede ser cubierto por una cantidad finita de elementos de la forma $\bigcap_{i=1}^{n} A_{n_i}^{(i)}$: si esto no fuera cierto, existirían enteros $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ tales que $Y \cap (A_{\lambda_i}^{(i)} - A_{\lambda_i-1}^{(i)}) \neq \emptyset$ para alguna $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, contradiciendo la finitud local de $\mathcal{G}^{(i)}$. □

Proposición 2.94. Sea (X, τ) un espacio topológico y sea $\mathcal{A}$ la colección de todos los espectros finitos en (X, τ). Entonces todo subespacio de $(X, \mathcal{U}_{\mathcal{A}})$ es precompacto, en donde $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ es la casi-uniformidad de X generada por los conectores de los espectros finitos de (X, τ).

Demostración. Sea $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}$ y sea $Y \subseteq X$. Existen espectros finitos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathcal{A}$ tales que $Y \subseteq B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_s$ en donde cada B_k es de la forma $\bigcap_{i=1}^{m} A_{n_i}^{(i)}$, en donde $A_{n_i}^{(i)} \in a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Por tanto existe un conjunto finito $F \subseteq Y$ tal que $Y \subseteq (\bigcap_{i=1}^{m} U_{a_i})(F) \subseteq U(F)$. $\square$

Proposición 2.95. Sea (X, τ) un espacio topologico. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) (X, τ) es numerablemente compacto;

(b) Toda cubierta abierta numerable preservadora de interiores tiene subcubierta finita;

(c) $\mathcal{SC}$ es hereditariamente precompacta;

(d) $\mathcal{SC}$ es precompacta;

(e) Toda función s.c.i tiene una cota inferior.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$ y $(c) \Rightarrow (d)$ son obvias, $(b) \Rightarrow (c)$ se desprende de la proposición 2.88 y de la proposición 2.94. Probemos que $(d) \Rightarrow (e)$ sea $f \colon X \to \mathbb{R}$ una función s.c.i. Supongamos que $f(X)$ no tiene cotas inferiores. Por tanto, existen $x_1, x_2, \ldots \in X$ tales que $f(x_{i+1}) < f(x_i) - 1$ para cada $i \in \mathbb{N}$. Como el conector $U_{(1,f)}$ es precompacto, para alguna $z \in X$, $U_{(1,f)}(z)$ contiene una infinidad de x_i. Pero $x_i \in U_{(1,f)}(z)$ implica que $f(z) - f(x_i) < 1$, es decir, $f(x_i) \in (f(z) - 1, +\infty)$. Por tanto, la semirrecta $(f(z) - 1, +\infty)$ no puede contener una infinidad de x_i. Falta demostrar que $(e) \Rightarrow (a)$. Supongamos que X no es numerablemente compacto. Existe entonces un subconjunto numerable $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ sin puntos de acumulación. Defínase $f \colon X \to \mathbb{R}$ mediante $f(x_n) = -n$ $(n \in \mathbb{N})$ y $f(x) = 0$ si $x \notin D$. Claramente $f^{-1}(a, +\infty) = \emptyset$ si $a \geq 0$. si $a < 0$, $f^{-1}(a, +\infty)$ es la unión de $X - D$ y un subconjunto finito de D. Al tener complemento cerrado, concluimos que cada $f^{-1}(a, +\infty)$ es abierto en X. Por tanto, f es s.c.i pero no tiene cota inferior, una contradicción. $\square$

Observación 2.96. Sea (X, τ) un espacio topológico. Entonces $\mathcal{PF}$ es precompacta si y sólo si toda cubierta abierta punto finita tiene subcubierta finita.

Proposición 2.97. Sea (X, τ) un espacio regular y T_1. Entonces $\mathcal{PF}$ es precompacta si y sólo si (X, τ) es numerablemente compacto.

Demostración. Supongamos primero que (X, τ) no es numerablemente compacto. Existe entonces un conjunto infinito numerable $D = \{x_1, x_2, \ldots\}$ sin puntos de acumulación. Como (X, τ) es regular y T_1, para cada $i \in \mathbb{N}$ existe un abierto V_i tal que $x_i \in V_i$, $V_i \cap D = \{x_i\}$ y para $i \neq j$, $V_i \cap V_j = \emptyset$. Entonces $\{X - D\} \cup \{V_i \colon i \in \mathbb{N}\}$ es una cuberta abierta punto finita sin subcubierta finita. Por la observación 2.96, $\mathcal{PF}$ no es precompacta. Supongamos ahora que (X, τ) es numerablemente compacto, y sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta punto finita de X. Sea $\mathcal{G}$ la colección de todas las subcolecciones ”superfluas”$\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}$, es decir, tales que $\mathcal{C} - \mathcal{A}$ sigue cubriendo a X. Aplicando el lema de Zorn, podemos hallar una subcolección superflua η de $\mathcal{C}$ que sea maximal entre las subcolecciones superfluas de $\mathcal{C}$. Por el teorema de Arens-Dugundji, $\mathcal{C} - \eta$ es una subcubierta finita de $\mathcal{C}$. □

Proposición 2.98. Sea (X, τ) un espacio T_1. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) $\mathcal{LF}$ es totalmente acotado;

(b) $\mathcal{LF}$ es precompacto;

(c) Toda cubierta abierta localmente finita de tiene subcubierta finita;

(d) Toda cubierta abierta localmente finita es finita.

Demostración. Como (d)⇒(a)⇒(b)⇒(c) son evidentes, sólo debemos probar que (c)⇒(d). Sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta infinita y localmente finita de X. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\mathcal{C}$ es numerable, digamos $\mathcal{C} = \{C_n : n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escojamos $x_n \in C_n$ y pongamos $G_n = C_n - \{x_i : x_i \neq x_n\}$. Entonces $\{G_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una cubierta abierta localmente finita de X la cual no tiene subcubierta finita, una contradicción. Por tanto, $\mathcal{LF} = \mathcal{P}$ y $\mathcal{P}$ es totalmente acotada. □

Observación 2.99. En espacios $T_{3\frac{1}{2}}$, la condición (c) en la proposición anterior es equivalente a pseudocompacidad y en espacios T_4 pseudocompacidad es equivalente a compacidad numerable. Por tanto, en espacios T_4 todas las propiedades en las tres proposiciones anteriores son equivalentes.

Proposición 2.100. Sea F un cerrado G_δ en un espacio topológico (X, τ). Tenemos entonces $\mathcal{SC}_X|F \times F = \mathcal{SC}_F$.

Demostración. Sea $\{G_n : n \in \mathbb{Z}\}$ un espectro abierto de F y sea $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ una sucesión decreciente de abiertos en X tal que $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Sean $H_1 \supseteq H_2 \supseteq \cdots$ abiertos en X tales que $G_{-n} = H_n \cap F$ y sean $S_0 \subset S_1 \subset \cdots$ abiertos en X tales que $G_n = S_n \cap F$. Para $n \geq 0$, defínase $K_n = S_n \cup (X - F)$ y para $n > 0$, $K_{-n} = H_n \cap A_n \cap S_0$. Es claro que $\{K_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un espectro abierto en X y $K_n \cap F = G_n$ para cada $n \in \mathbb{Z}$. Por tanto, $\mathcal{SC}_F \subseteq \mathcal{SC}_X|F \times F$. La inclusión contraria $\mathcal{SC}_X|F \times F \subseteq \mathcal{SC}_F$ es obvia. □

Proposición 2.101. Sea (X, τ) un espacio de Hausdorff. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) $\mathcal{SC}$ es totalmente acotada;

(b) $\mathcal{PF}$ es totalmente acotada;

(c) X es un conjunto finito.

Demostración. (a)⇒(b). Por la proposición (2.95), (b)⇔(c), concluimos que $\mathcal{SC} = \mathcal{PF}$. (b)⇒(c) usando ahora la equivalencia (a)⇔(b) en (2.95), concluimos que $\mathcal{PF} = \mathcal{P}$. Supongamos que el conjunto X es infinito. Entonces existe una colección infinita numerable $\mathcal{C}$ la cual consta de abiertos mutuamente ajenos. Entonces $\mathcal{C} \cup \{X\}$ es una cubierta punto finita de X sin subcubierta finita, una contradicción. Deducimos entonces que el conjunto X es finito. La implicación (c)⇒(a) es obvia. □

Proposición 2.102. Sea (X, τ) un espacio topológico. Si toda cubierta abierta de X bien ordenada por la inclusión tiene subcubierta finita, entonces (X, τ) es compacto.

Corolario 2.103. Sea X un espacio infinito, T_2 y numerablemente compacto. Entonces $\mathcal{SC}_X$ es hereditariamente precompacta pero no totalmente acotada.

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta abierta de X y sea $m = \text{mín}\{|C'| \colon C'$ es una subcubierta de $\mathcal{C}\}$. Supongamos que m es infinito y sea $C' = \{G_\alpha \colon \alpha < m\}$ una subcubierta de $\mathcal{C}$ de cardinalidad m. Para cada $\alpha < m$, sea

$$H_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} G_\beta$$

Entonces $\{H_\alpha \colon \alpha < m\}$ es una cubierta bien ordenada por inclusión de X. Por hipótesis, existe $\alpha_0 < m$ tal que $H_{\alpha_0} = X$. Pero esto contradice la definición de m. □

Teorema 2.104. Sea (X, τ) un espacio topológico. Los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) Toda casi-uniformidad compatible es completa;

(b) Existe una casi-uniformidad compatible la cual es completa y precompacta;

(c) Toda casi-uniformidad compatible es completa y precompacta;

(d) Toda casi-uniformidad compatible es precompacta;

(e) $\mathcal{FT}$ es precompacta;

(f) (X, τ) es compacto.

Demostración. Son evidentes (f)⇒(a)⇒(b)⇒(f)⇒(c)⇒(d)⇒(e). Basta probar entonces que (e)⇒(f). Sea $\mathcal{U}$ una cubierta preservadora de interiores de X si X $\mathcal{U} = \{U_i \colon i < m\}$, m cardinal infinito, si $i < m$ y $\bigcap\{U_j \colon j < i\} \neq \emptyset$, el conjunto $V_i = \text{int} \cap \{U_j \colon j < i\}$ es un abierto no vacío y $\{V_i \colon i < m\}$ es una cubierta abierta de X bien ordenada por inclusión. Como $\mathcal{FT}$ es precompacta, existe $i < m$ tal que $V_i = X$. Por la proposición (2.88), (X, τ) es compacto. □

Ejemplo 2.105. Existe un espacio topológico T_1 (X, τ) en el que ninguna casi-uniformidad compatible es completa por convergencia.

Demostración. Para cada entero no negativo n, sea $X_n = \mathbb{R}\times\{n\}$ y sea $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n = \mathbb{R}\times\mathbb{N}$. Defínase $g\colon \mathbb{N}\times X \to \mathcal{P}(X)$ como sigue: Para cada $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ y $p = (x, 0)$, sea $g(m, p) = \{p\} \cup \bigcup_{i=m}^{\infty} (X_i - \{(x, i)\})$ y para $p = (x, n) \in \mathbb{R}\times\mathbb{N}$ y $m \in \mathbb{N}$, sea $g(m, p) = (x - \frac{1}{m}, x + \frac{1}{m}) \times \{n\}$. Sea τ la topología de X para la cual $\{g(n, p)\colon n \in \mathbb{N}, p \in X\}$ es una base.

$$\text{Sea } \mathcal{F} = \{F \subseteq X\colon \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } \bigcup_{i=n}^{\infty} X_i \subseteq F\}$$

y sea $\mathcal{U}$ la casi-uniformidad fina de X. Probemos que $\mathcal{F}$ es $\mathcal{U}$-Cauchy pero no es convergente. Supongamos por el contrario, que $\mathcal{F}$ no es $\mathcal{U}$-Cauchy. Existe entonces $U \in \mathcal{U}$ tal que $U(p) \notin \mathcal{F}$ para cada $p \in X$. Sea $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subseteq U$. Entonces para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$\{n \in \mathbb{N}\colon (x, n) \notin V((x, 0))\}$$

es infinito. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea:

$$A_n = \{x \in \mathbb{R}\colon U((x, 0)) \cap X_n\} = V((x, 0)) \cap X_n = X_n - \{(x, n)\}.$$

Existe $n \in \mathbb{N}$ tal que A_n es no numerable y, por tanto, existe $z \in \mathbb{R}$ tal que para cada $\varepsilon > 0$,

$$(z - \varepsilon, z + \varepsilon) \cap (A_n - \{z\}) \neq \emptyset.$$

Sea $A = A_n - \{z\}$. Entonces $(z, n) \in \bigcap_{x\in A} V((x, 0))$ y $X_n \cap V((z, n)) \subseteq X_n \cap \bigcap_{x\in A} V^2((x, 0)) \subseteq (\mathbb{R} - A) \times \{n\}$, una contradicción. Por tanto, $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{U}$-filtro de Cauchy no convergente. $\square$

2.3. Técnicas de completación en espacios casi-uniformes

Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio casi-uniforme y sea Z la familia de filtros $\mathcal{U}$-Cauchy sin adherencia. Sea $\widehat{X} = X \cup Z$. Sea $\Phi = \{g\colon Z \to \mathcal{P}(X)\colon g(\eta) \in \eta \text{ para cada } \eta \in Z\}$. Dadas $U \in \mathcal{U}$ y $g \in \Phi$, sea $S(U, g) = U \cup \Delta(\widehat{X}) \cup \{(\eta, x) \in Z \times X\colon x \in U(g(\eta))\}$.

Probemos que $U, V \in \mathcal{U}$, $V^2 \subseteq U$ y $g \in \Phi$ implican que $S(V, g)^2 \subseteq S(U, g)$. En efecto, supongamos que $(\eta, x), (x, y) \in S(V, g)$ con $(x, y) \in V$ Debemos probar que $(\eta, y) \in S(U, g)$. La hipótesis $(\eta, x) \in S(V, g)$ implica que $x \in V(g(\eta))$. Si $N = g(\eta)$, tenemos $N \in \eta$ y para alguna $z \in N$, $x \in V(z)$. Por tanto, $(z, x), (x, y)$ pertenecen ambos a V y $(z, y) \in V^2 \subseteq U$. De donde, $y \in U(z) \subseteq U(N) = U(g(\eta))$ y $(\eta, y) \in S(U, g)$. Observemos ahora que si $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ y $g_1, g_2 \in \Phi$, se tiene $S(U_1, g_1) \cap S(U_2, g_2) \supseteq S(U_1 \cap U_2, g_3)$, en donde $g_3(\eta) = g_1(\eta) \cap g_2(\eta)$ para cada $\eta \in Z$. Hemos probado entonces que la familia $\{S(U, g)\colon U \in \mathcal{U}, g \in \Phi\}$ es base de una casi-uniformidad $\widehat{\mathcal{U}}$ en $\widehat{X}$. Es claro además que $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}})$ contiene a $(X,\mathcal{U})$ como un subespacio denso.

Lema 2.106. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio casi-uniforme T_1. Entonces $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}})$ es T_1 si y sólo si para cada $\eta \in Z$, η no tiene adherencia en $(X, \tau_{\mathcal{U}^{-1}})$.

Demostración. Supongamos que $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}})$ es un espacio T_1 y sean $\eta \in Z$ y $p \in X$. Entonces existen $U \in \mathcal{U}$ y $g \in \Phi$ tales que $p \notin S(U,g)(\eta)$. Sea $N = g(\eta)$. Por tanto, $p \notin U(N)$ y $U^{-1}(p) \cap N = \emptyset$. Recíprocamente, supongamos que ningún $\eta \in Z$ tiene adherencia en $(X, \tau_{\mathcal{U}^{-1}})$ y sea $p \in \widehat{X}$. Si $p \in X$, tenemos $\bigcap\{S(U,g)(p) \colon U \in \mathcal{U}, g \in \Phi\} = \bigcap\{U(p) \colon U \in \mathcal{U}\} = \{p\}$.

Si $p = \eta \in Z$, entonces:

$$\bigcap\{S(U,g)(\eta) \colon U \in \mathcal{U}, g \in \Phi\} = \{\eta\} \cup \{x \in X \colon x \in U(g(\eta)) \forall U \in \mathcal{U}, g \in \Phi\}$$

Este último conjunto es vacío, pues si $x \in X$ fuera tal que $x \in U(g(\eta))$ para cada $U \in \mathcal{U}$ y $g \in \Phi$ y si $N \in \eta$ es arbitrario, existe $g \in \Phi$ tal que $g(\eta) = N$ y, por tanto, $x \in U(N)$ para cada $U \in \mathcal{U}$, es decir, $U^{-1}(x) \cap N \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{U}$, una contradicción. □

Lema 2.107. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio casi-uniforme y sea μ un ultrafiltro Cauchy no convergente en $(\widehat{X},\widehat{\mathcal{U}})$. Entonces $X \in \mu$ y $\mu|X$ es un ultrafiltro Cauchy no convergente en $(X,\mathcal{U})$.

Demostración. Sean $U_1 \in \mathcal{U}$ y $g_1 \in \Phi$. Como μ es $\widehat{\mathcal{U}}$-Cauchy, existe $p_1 \in \widehat{X}$ tal que $S(U_1,g_1)(p_1) \in \mu$. Como μ no se adhiere a p_1, existen $U_2 \in \mathcal{U}$, $g_2 \in \Phi$ y $M \in \mu$ tales que $S(U_2,g_2)(p_1) \cap M = \emptyset$. Por tanto, $L = S(U_1,g_1)(p_1) - S(U_2,g_2)(p_1) \in \mu$. Además, $L \subseteq X$, pues si $\eta \in Z \cap L$, necesariamente $\eta = p_1$ y $\eta = p_1 \in S(U_2,g_2)(p_1)$, una contradicción. Tenemos entonces que $X \in \mu$ y $\mu|X \subseteq \mu$. Esto implica que $\mu|X$ no es convergente. Es fácil probar que $\mu|X$ es un ultrafiltro en X, pues si $L \subseteq X$ y $L \notin \mu|X$, tenemos $\widehat{X} - L \in \mu$ y, por tanto, $(\widehat{X} - L) \cap X = X - L \in \mu|X$.

Para probar que $\mu|X$ es $\mathcal{U}$-Cauchy, tomemos $U \in \mathcal{U}$ y sea $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subseteq U$. Sea $g \in \Phi$, tal que para cada $\eta \in Z$, existe $x_\eta \in X$ tal que $g(\eta) = V(x_\eta) \in \eta$. Como μ es $\widehat{\mathcal{U}}$-Cauchy, existe $p \in \widehat{X}$ tal que $S(V,g)(p) \in \mu$. Si $p \in X$, $S(V,g)(p) = V(p) \in \mu|X$; Si $p \in Z$, entonces $S(V,g)(p) = \{p\} \cup V(g(p))$. Tomando $x \in X$ tal que $V(x) \in p$ y $g(p) = V(x)$, concluimos que $U(x) \in \mu|X$. □

Teorema 2.108. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio casi-uniforme T_1. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(a) $(X,\mathcal{U})$ tiene una completación T_1.

(b) Para cada filtro $\mathcal{U}$-Cauchy η, $\mathrm{Adh}_{\tau_{\mathcal{U}^{-1}}} \eta \subseteq \mathrm{Adh}_{\tau_{\mathcal{U}}} \eta$.

(c) Para cada filtro $\mathcal{U}$-filtro η, si $\mathrm{Adh}_{\tau_{\mathcal{U}^{-1}}} \eta \neq \emptyset$, también $\mathrm{Adh}_{\tau_{\mathcal{U}}} \eta \neq \emptyset$.

Demostración. (a)⇒(b). Supongamos que $v \colon (X,\mathcal{U}) \to (Y,\mathcal{V})$ es un encaje unimórfico de $(X,\mathcal{U})$ en un espacio casi-uniforme, completo y T_1 $(Y,\mathcal{V})$. Sea η un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy y sea $x \in \mathrm{Adh}_{\tau_{\mathcal{U}^{-1}}} \eta$. Entonces η está contenido en un ultrafiltro μ el cual converge a x en $\tau_{\mathcal{U}^{-1}}$. Claramente $v(\mu)$ es base de un ultrafiltro $\mathcal{V}$-Cauchy el cual converge a $v(x)$ en $\tau_{\mathcal{V}^{-1}}$. Como $(Y,\mathcal{V})$ es completo, $v(\mu)$ converge en $\tau_{\mathcal{V}}$ a un punto y. Por la proposición (2.37), tenemos

$y = v(x)$. Además $v^{-1}v(\mu)$ es una base de filtro en X contenida en μ que converge a x en $(X, \tau_{\mathcal{U}})$. Por tanto, $x \in \operatorname{Adh}_{\tau_{\mathcal{U}}} \eta$.

(b)$\Rightarrow$(c) obvio.

(c)$\Rightarrow$(a). Suponemos ahora que para cada filtro $\mathcal{U}$-Cauchy η, se tiene $\operatorname{Adh}_{\tau_{\mathcal{U}}} \eta \neq \emptyset$ siempre que $\operatorname{Adh}_{\tau_{\mathcal{U}^{-1}}} \eta \neq \emptyset$. Probaremos que $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}})$ es una completación T_1 de $(X, \mathcal{U})$. Por el lema (2.107), $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}})$ es un espacio T_1. Sabemos también que $(X, \mathcal{U})$ es un subespacio denso y abierto de $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}})$. Para probar que $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}})$ es completo, supongamos, por el contrario que existe un ultrafiltro $\widehat{\mathcal{U}}$-Cauchy μ el cual es no convergente. Por el lema (2.107), $\mu|X$ es un ultrafiltro $\mathcal{U}$-Cauchy no convergente. Por tanto, $\mu|X \in Z$. Pero $\mu|X$ es un $\tau(\widehat{\mathcal{U}})$ punto de adherencia de μ, una contradicción. $\square$

Corolario 2.109. Sea (X, τ) un espacio topológico T_1 y sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ casi-uniformidades en X compatibles con τ. Si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$ y $(X, \mathcal{U})$ tiene una completación T_1, lo mismo vale para $(X, \mathcal{V})$.

Corolario 2.110. Todo espacio casi-uniforme punto simétrico y T_1, tiene una completación T_1.

Demostración. Sea $(X, \mathcal{U})$ un espacio casi-uniforme, punto simétrico y T_1. Según (2.106), $\tau_{\mathcal{U}} \subseteq \tau_{\mathcal{U}^{-1}}$. Por tanto, se cumple la condición (c) del teorema. $\square$

Proposición 2.111. Sea (X, τ) un espacio topológico tal que cada casi-uniformidad compatible con τ tiene completación. Entonces (X, τ) es compacto.

Demostración. Supongamos que existe un filtro $\mathcal{F}$ en X sin puntos de adherencia. Sea $\mathcal{B} = \{B \in \tau \colon B \cap F = \emptyset$ para alguna $F \in \mathcal{F}\} \cup \{X\}$. Es fácil probar que $\mathcal{B}$ es una base cerrada bajo uniones e intesecciones finitas en X. La casi-uniformidad $\mathcal{U}$ asociada a $\mathcal{B}$ está generada por todos los conectores de la forma $U_B = B \times B \cup [(X - B) \times X]$ en donde $B \in \mathcal{B}$. Por tanto, si $B \in \mathcal{B}$, siempre existe un punto x_B tal que $U_B(x_B) = X$. Esto prueba que $\mathcal{F}$ es un $\mathcal{U}_{\mathcal{B}}$-filtro de Cauchy. Para demostrar que $(X, \mathcal{U}_{\mathcal{B}})$ no tiene completación T_1, bastará probar, usando el teorema anterior, que $\operatorname{Adh}_{\tau_{\mathcal{U}^{-1}}} \mathcal{F} \neq \emptyset$. De hecho probaremos que $\operatorname{Adh}_{\tau_{\mathcal{U}^{-1}}} \mathcal{F} = X$. Sean $x \in X$, $U \in \mathcal{U}$ y $F \in \mathcal{F}$. Sea $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subseteq U$. Existe entonces un espectro finito:

$$\emptyset \subsetneqq B_1 \subsetneqq B_2 \subsetneqq \cdots \subsetneqq B_{n-1} \subsetneqq X,$$

en donde cada $B_i \in \mathcal{B}$, $i = 1, \ldots, n-1$ y tal que:

$$B_1 \times B_1 \cup (B_2 - B_1) \times B_2 \cup \cdots \cup (B_{n-1} - B_{n-2}) \times B_{n-1} \cup (X - B_{n-1}) \times X \subseteq V.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $B_{n-1} \subseteq X - F^-$. Por tanto, para cada $x' \in X - B_{n-1}$, se tiene $V(x') = X$. Tomando $x' \in F^-$, tenemos $(x', x) \in V$ y $V^{-1}(x) \cap F^- \neq \emptyset$. Por tanto, $U^{-1}(x) \supseteq V^{-1}(V^{-1}(x))$ y $V^{-1}(x) \subseteq \operatorname{int}_{\tau_{\mathcal{U}^{-1}}} U^{-1}(x)$. Esto implica que $U^{-1}(x) \cap F \neq \emptyset$ y, por tanto, $x \in \operatorname{Adh}_{\tau_{\mathcal{U}^{-1}}} \mathcal{F}$. $\square$

Capítulo 3

Bases anulares, espacios unibásicos y espacios casi-próximos

3.1. Bases anulares y casi-uniformidades transitivas

El resultado principal de esta sección establece una biyección entre el conjunto de todas las bases anulares de un espacio topológico (X, τ) y el conjunto de todas las casi-proximidades transitivas en X que inducen τ. Los resultados sobre bases anulares y espacios unibásicos, se encuentran en [17].

Definición 3.1. Una base $\mathcal{B}$ de un espacio topológico (X, τ) es *anular* si satisface las siguientes condiciones:

i) $\emptyset \in \mathcal{B}$ y $X \in \mathcal{B}$;

ii) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ implica que $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$ y $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$.

Como un ejemplo de base anular tenemos, las uniones finitas de intervalos con extremos en un denso numerable.

Definición 3.2.

1. Un abierto V en (X, τ) es *siempre básico* ($s.b.$) si V pertenece a toda base anular de X.
2. Un espacio topológico (X, τ) es *unibásico* si τ es la única base anular de X.
3. (X, τ) es *mínimamente básico* si X tiene una base anular $\mathcal{B}_0$ contenida en todas las bases anulares $\mathcal{B}$ de X.

Observación 3.3.

1. Todos los elementos de una base anular mínima $\mathcal{B}_0$ de X son $s.b.$ y todos los espacios unibásicos son mínimamente básicos.
2. Todo subconjunto compacto y abierto de un espacio topológico X es $s.b.$. Por lo tanto, todo espacio hereditariamente compacto es unibásico.

Notación 3.4. Si $\mathcal{G}$ es una familia de subconjuntos de X, definimos: $C(\mathcal{G}) = \{H \colon X \backslash H \in \mathcal{G}\}$.

Definición 3.5. Sea $\mathcal{B}$ una base anular de un espacio topológico (X,τ).

a) $\mathcal{B}$ es *disyuntiva* (o una *base de Wallman*) si siempre que $x \in B \in \mathcal{B}$, existe un elemento $H_x \in C(\mathcal{B})$ tal que $x \in H_x \subseteq B$.

b) $\mathcal{B}$ es *regular* si siempre que $x \in B \in \mathcal{B}$, existen un elemento $D \in \mathcal{B}$ y un elemento $H \in C(\mathcal{B})$ tales que $x \in D \subseteq H \subseteq B$.

c) $\mathcal{B}$ es *normal* si para todo par H, K de elementos disjuntos de $C(\mathcal{B})$, existe un par B, D de elementos disjuntos de $\mathcal{B}$ tales que $H \subseteq B$ y $K \subseteq D$.

Claramente, toda base anular regular es disyuntiva y toda base anular normal y disyuntiva es regular.

Un resultado bien conocido sobre bases de Wallman normales es el siguiente:

Teorema 3.6. (Ver [11]). Un espacio topológico (X,τ) es completamente regular si y sólo si τ admite una base de Wallman normal.

Ejemplos 3.7. Ahora daremos algunos ejemplos de bases de Wallman normales:

1. Si (X,τ) es un espacio completamente regular, $\mathcal{B} = \{U \subseteq X : U$ es un cocero en $X\}$.

2. Si (X,τ) es localmente compacto y T_2, $\mathcal{B} = \{V \in \tau : V^-$ ó $X - V$ es compacto$\}$.

3. Si (X,τ) es periféricamente compacto, $\mathcal{B} = \{V \in \tau : FrV$ compacto$\}$.

4. Si (X,τ) es cero dimensional, $\mathcal{B} = \{V \in \tau : FrV = \emptyset\}$.

Definición 3.8. Un espacio topológico (X,τ) es $\mathcal{R}_0$ si siempre que $x \in V \in \tau$ existe un conjunto cerrado H_x tal que $x \in H_x \subseteq V$ y (X,τ) es $\mathcal{R}_1$ si siempre que $x, y \in X$ y $\overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}}$, existen abiertos disjuntos V, W tales que $x \in V$ y $y \in W$.

Observación 3.9. Un espacio topológico (X,τ) es $\mathcal{R}_0$ si y sólo si τ es una base de Wallman de (X,τ). También (X,τ) es regular si y sólo si admite una base de Wallman regular. También es claro que todo espacio $\mathcal{R}_1$ es $\mathcal{R}_0$ y que todo espacio regular o Hausdorff es $\mathcal{R}_1$.

Definición 3.10. Un subconjunto S de X es un *semi-bloque* de un conector E de X si $S \times S \subseteq E$. Un semi-bloque S de un conector E es un *bloque* de E si S no está propiamente contenido en ningún otro semi-bloque de E.

Usando el *Lema de Zorn* es fácil probar que todo semi-bloque S de E está contenido en un bloque de E. También es fácil probar que la colección de bloques de un conector E de X constituye una cubierta de X que se llama la *cubierta de bloque* de X. Un conector E es *totalmente acotado* si X lo podemos cubrir con un número finito de semi-bloques de E.

Definición 3.11. Una relación δ en $\mathcal{P}(X)$ es una *casi-proximidad* de X si satisface las siguientes condiciones:

a) $(X, \emptyset) \notin \delta$ y $(\emptyset, X) \notin \delta$;

b) $(C, A \cup B) \in \delta$ si y sólo si $(C, A) \in \delta$ o $(C, B) \in \delta$;

c) $(A \cup B, C) \in \delta$ si y sólo si $(A, C) \in \delta$ o $(B, C) \in \delta$;

d) $(\{x\}, \{x\}) \in \delta$ para cada $x \in X$;

e) Si $(A, B) \notin \delta$, existe $C \subseteq X$ tal que $(A, C) \notin \delta$ y $(X \setminus C, B) \notin \delta$.

Una casi-proximidad δ en X es *proximidad* si $\delta = \delta^{-1}$, esto es $(A, B) \in \delta$ si y sólo si $(B, A) \in \delta$.

Al para (X, δ), se le dice *espacio casi-próximo* o *espacio de casi-proximidad*(ver [11], [15] y [40]).

Por brevedad, escribiremos $A\delta B$ en lugar de $(A, B) \in \delta$ y $A\overline{\delta}B$ en lugar de $(A, B) \notin \delta$.

Teorema 3.12. (ver [11] , 1.27) Si (X, δ) es un espacio de casi-proximidad. Para cada $A \subseteq X$, definimos $\widetilde{A} = \{x \in X : \{x\}\delta A\}$. Entonces la asignación $A \to \widetilde{A}$ es un *operador clausura de Kuratowski* sobre X.

Definición 3.13. Una casi-proximidad δ en un conjunto X es *punto-simétrica* si $A\delta\{x\}$ implica $\{x\}\delta A$. Equivalentemente, δ es punto-simétrica si $\tau_\delta \subseteq \tau_{\delta^{-1}}$.

Definición 3.14. Una casi-proximidad δ en un conjunto X es *localmente-simétrica* si $A\delta G$ para toda G τ-vecindad de x implica que $\{x\}\delta A$.

Observación 3.15. Toda proximidad en X es localmente-simétrica y toda casi-proximidad localmente-simétrica es punto-simétrica.

Definición 3.16.

1. Sea δ una casi-proximidad en un conjunto X. Dos conjuntos $A, B \subseteq X$ se dicen *δ-remotos* si existen conjuntos disjuntos $H, K \subseteq X$ tales que $A \subseteq H$, $B \subseteq K$, $(X \setminus H)\overline{\delta}H$ y $(X \setminus K)\overline{\delta}K$.

2. Una casi-proximidad δ en un conjunto X es de *tipo Wallman* si para todo par A, B de conjuntos δ-remotos, existe una vecindad G de A tal que $A\overline{\delta}(X \setminus G)$ y $B\overline{\delta}G$.

Tenemos una lista de algunos teoremas sobre casi-uniformidades y casi- proximidades que serán necesarios en esta sección.

Teorema 3.17. Sea $\mathcal{U}$ una casi-uniformidad en X y sea $\delta_{\mathcal{U}}$ la relación en $\mathcal{P}(X)$ definida por:

$$A\delta_{\mathcal{U}}B \Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{U}, (A \times B) \cap U \neq \emptyset.$$

Entonces $\delta_{\mathcal{U}}$ es una casi-proximidad de X y $\tau(\mathcal{U}) = \tau(\delta_{\mathcal{U}})$. Además,
$A << _{\delta_{\mathcal{U}}} B \Leftrightarrow$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U(A) \subseteq B$.

Demostración. Es claro que $X\bar{\delta}_{\mathcal{U}}\emptyset$ y $\emptyset\bar{\delta}_{\mathcal{U}}X$. Si $C\delta_{\mathcal{U}}(A \cup B)$ tenemos $[C \times (A \cup B)] \cap U \neq \emptyset$ para toda $U \in \mathcal{U}$. Si $C\bar{\delta}_{\mathcal{U}}A$ y $C\bar{\delta}_{\mathcal{U}}B$, existirían $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ tales que $(C \times A) \cap U_1 = \emptyset$ y $(C \times B) \cap U_2 = \emptyset$. Por tanto, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$ y $[C \times (A \cup B)] \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ $\sharp$. Por otro lado, $C\delta_{\mathcal{U}}A$ y $A \subseteq D \subseteq X$ implica que $C\delta_{\mathcal{U}}D$. De donde, $C\delta_{\mathcal{U}}A$ o $C\delta_{\mathcal{U}}B$ implica que $C\delta(A \cup B)$. La propiedad $\{x\}\delta\{x\}$ para cada $x \in X$ es obvia, pues cada $U \in \mathcal{U}$ es conector. Finalmente, supongamos que $A\bar{\delta}B$. Por tanto, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $(A \times B) \cap U = \emptyset$. Sea $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subseteq U$ y sea $C = V^{-1}(B)$. Si $A\delta_{\mathcal{U}}C$, tendríamos $(A \times V^{-1}(B)) \cap V \neq \emptyset$. Por tanto, existirían $a \in A, b \in B, c \in X$ tales que $(a, c) \in V, (b, c) \in V^{-1}$. De donde, $(a, c), (c, b) \in V$ y $(a, b) \in V^2 \subseteq U$ y $(a, b) \in (A \times B) \cap U$ lo cual es una contradicción. De donde, $A\overline{\delta_{\mathcal{U}}}V^{-1}(B)$. Si $(X \setminus V^{-1}(B))\delta_{\mathcal{U}}B$, tendríamos $[(X \setminus V^{-1}(B)) \times B] \cap V \neq \emptyset$. Por tanto, existirián $a \in X \setminus V^{-1}(B)$ y $b \in B$ tales que $(a, b) \in V$. De donde, $(b, a) \in V^{-1}$ y $a \in V^{-1}(B)$ (una contradicción). De donde, $(X \setminus V^{-1}(B))\ \not\delta_{\mathcal{U}}B$. Ahora, para cada $A \subseteq X$, $Cl_{\tau(\delta_{\mathcal{U}})}A = \{x \colon \{x\}\delta_{\mathcal{U}}A\} = \{x \colon U(x) \cap A \neq \emptyset\ \forall U \in \mathcal{U}\} = Cl_{\tau(\mathcal{U})}A$. Si $A <<_{\delta_{\mathcal{U}}} B$, tenemos $A\bar{\delta}_{\mathcal{U}}(X \setminus B)$. Por tanto, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $[A \times (X \setminus B)] \cap U = \emptyset$ y $U(A) \subseteq B$. □

Definición 3.18. Si $(X,\mathcal{U})$ es un espacio casi-uniforme, la *casi-proximidad inducida* por $\mathcal{U}$ es $\delta_{\mathcal{U}}$. Una casi-uniformidad $\mathcal{U}$ es compatible con una casi-proximidad δ si $\delta_{\mathcal{U}} = \delta$. Si δ es una casi-proximidad en X, entonces $\pi(\delta)$ denota la clase de todas las casi-uniformidades compatibles con δ. Dos casi-uniformidades que pertenecen a la misma clase de casi-proximidad reciben el nombre de *qp-equivalentes*.

Proposición 3.19. Sean $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ casi-uniformidades en un conjunto X. Si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, entonces $\tau(\mathcal{U}) \subseteq \tau(\mathcal{V})$ y $\delta_{\mathcal{V}} \subseteq \delta_{\mathcal{U}}$.

Demostración. Supongamos que $A\delta_{\mathcal{V}}B$. Por tanto, para toda $V \in \mathcal{V}$, se tiene $(A \times B) \cap V \neq \emptyset$. Como $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, se tiene también $(A \times B) \cap U \neq \emptyset$ para toda $U \in \mathcal{U}$ y $A\delta_{\mathcal{U}}B$. □

Proposición 3.20. Sea δ una casi-proximidad en un conjunto X y sea $E \subseteq X$. Entonces $\delta_E = \delta \cap (\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E))$ es una casi-proximidad en E y $\tau(\delta_E) = \tau(\delta)|E$. Además $\mathcal{U}|(E \times E)$ induce a δ_E

Ejemplo 3.21. Sea (X, δ) un espacio seudo-métrico. Dados $A, B \subseteq X$, definamos $A\delta B \Leftrightarrow A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ y $d(A, B) = \text{ínf}\{d(a, b) \colon a \in A, b \in B\} = 0$. Entonces δ es una proximidad en X y $\tau_\delta = \tau_d$.

Demostración. Probemos únicamente la condición d) de la definición (3.11). Sean $A, B \subseteq X$ tales que $A\bar{\delta}B$. Si $A = \emptyset$, pongamos $C = X$. Por tanto, $A\bar{\delta}C$ y $(X \setminus C)\bar{\delta}B$. Si $A \neq \emptyset \neq B$, tenemos $d(A, B) = 2\varepsilon > 0$. Pongamos $C = V_\varepsilon^d(B)$. Por tanto, $d(A, C) \geq \varepsilon$ y $d(X \setminus C, B) \geq \varepsilon$. De donde, $A\bar{\delta}C$ y $(X \setminus C)\bar{\delta}B$. Para cada $A \subseteq X$, tenemos:

$$Cl_{\tau(\delta)}A = \{x \colon d(x, A) = 0\} = Cl_{\tau_d}A.$$

□

Teorema 3.22. Sea (X, δ) un espacio de casi-proximidad. Entonces existe una única casi-uniformidad totalmente acotada compatible con δ y ésta es la más chica casi-uniformidad compatible con δ.

Demostración. Si $A, B \subseteq X$, definamos $T(A,B) = X \times X \setminus A \times B = [(X \setminus A) \times X] \cup [X \times (X \setminus B)]$. Obsérvese que si $A \cap B = \emptyset$, entonces $T(A,B)$ es conector de X. Sea:

$$\mathcal{S} = \{T(A,B) \colon A\overline{\delta}B\}.$$

Probaremos que $\mathcal{S}$ es sub-base para una casi-uniformidad totalmente acotada $\mathcal{U}_\delta$ compatible con δ que $\mathcal{U}_\delta \subseteq \mathcal{U}$ para cada casi-uniformidad $\mathcal{U}$ compatible con δ y que $\mathcal{U}_\delta$ es el único miembro totalmente acotado de $\pi(\delta)$.

i) Toda intersección finita de miembros de $\mathcal{S}$ es no vacía. En efecto, supongamos $A_i\overline{\delta}B_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Entonces cada $T(A_i, B_i)$ contiene a $\Delta(X)$ y lo mismo sucede para $\bigcap\limits_{i=1}^{n} T(A_i, B_i)$.

ii) Cada $T(A,B) \in \mathcal{S}$ contiene el cuadrado de la intersección de dos miembros de $\mathcal{S}$. En efecto, si $A\overline{\delta}B$, existe $C \subseteq X$ tal que $A\overline{\delta}C$ y $(X \setminus C)\overline{\delta}B$. Probaremos que:

$$[T(A,C) \cap T(X \setminus C, B)]^2 \subseteq T(A,B).$$

Tomemos $(x,y) \in [T(A,C) \cap T(X \setminus C, B)]^2$. Existe entonces $z \in X$ tal que $(x,z), (z,y) \in T(A,C) \cap T(X \setminus C, B)$. Debemos probar que $(x,y) \in T(A,B)$, es decir, que $x \notin A$ o $y \notin B$. Si, por el contrario, $x \in A$ y $y \in B$, entonces $(x,z) \in T(A,C)$ implica que $z \notin C$ y $(z,y) \in T(X \setminus C, B)$ implica que $z \in C$, una contradicción.

iii) Cada $T(A,B) \in \mathcal{S}$ es totalmente acotado. En efecto:
$X = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$, $(X \setminus A) \times (X \setminus A) \cup (X \setminus B) \times (X \setminus B) \subseteq T(A,B)$. Por tanto, las intersecciones finitas de elementos de $\mathcal{S}$ constituyen una base para una casi-uniformidad totalmente acotada $\mathcal{U}_\delta$. Probemos que $\mathcal{U}_\delta$ es compatible con δ. En efecto, sea α la casi-proximidad inducida por $\mathcal{U}_\delta$. Tenemos entonces:

$$A\alpha B \iff \forall U \in \mathcal{U}_\delta, \quad (A \times B) \cap U \neq \emptyset.$$

Si $A\overline{\delta}B$, tenemos $(A \times B) \cap T(A,B) = \emptyset$ y $A\overline{\alpha}B$. Supongamos ahora que $A\overline{\alpha}B$. Existen entonces, $E_1, E_2, \ldots, E_n, F_1, F_2, \ldots, F_n \subseteq X$ tales que $E_i\overline{\delta}F_i$ para toda $i = 1, 2, \ldots, n$ y

$$(A \times B) \cap \bigcap_{i=1}^{n} T(E_i, F_i) = \emptyset, \text{ es decir :}$$

$$(A \times B) \cap \bigcap_{i=1}^{n} (X \times X \setminus (E_i \times F_i)) = \emptyset.$$

Por tanto, $A \times B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (E_i \times F_i)$. Si $n = 1$, deducimos inmediatamente que $A\overline{\delta}B$. Procediendo por inducción, supongamos que:

$$G \times H \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} (E_i \times F_i)$$

implica que $G\overline{\delta}H$. Como $A\times B\setminus(E_n\times F_n) = [(A\setminus E_n)\times B]\cup[A\times(B\setminus F_n)]$, deducimos, por la hipótesis inductiva:

$$(A \setminus E_n)\overline{\delta}B \ \text{ y } \ A\overline{\delta}(B \setminus F_n).$$

Como: $A \times B = [(A \setminus E_n) \times (B \setminus F_n)] \cup [(A \setminus E_n) \times (B \cap F_n)]$
$\cup [(A \cap E_n) \times (B \setminus F_n)] \cup [(A \cap E_n) \times (B \cap F_n)]$ y como cada una de las cuatro parejas en los paréntesis rectangulares satisfacen la relación $\overline{\delta}$, deducimos que $A\overline{\delta}B$. Hemos probado entonces que $A\alpha B \iff A\delta B$, es decir $\alpha = \delta$. De donde, $\mathcal{U}_\delta \in \pi(\delta)$.
Probemos que $\mathcal{U}_\delta \subseteq \mathcal{U}$ para cada $\mathcal{U} \in \pi(\delta)$: Si $A\overline{\delta}B$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $(A\times B)\cap U = \emptyset$. Por tanto, $U \subseteq T(A, B)$ y $\mathcal{U}_\delta \subseteq \mathcal{U}$.

Finalmente probemos que $\mathcal{U}_\delta$ es la única casi-uniformidad totalmente acotada compatible con δ:
Sea $\mathcal{U}$ una casi-uniformidad totalmente acotada compatible con δ. Debemos probar que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\delta$. Bastará probar entonces que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_\delta$. Sea $U \in \mathcal{U}$ y escojamos $W \in \mathcal{U}$ tal que $W^2 \subseteq U$. Como $\mathcal{U}$ es totalmente acotada, existe una cubierta finita $\{A_i \colon 1 \leq i \leq n\}$ de X tal que $A_i \times A_i \subseteq W$ para cada $1 \leq i \leq n$. Como $A_i \times (X \setminus W(A_i)) \cap W = \emptyset$ (pues $(x, y) \in A_i \times (X \setminus W(A_i)) \Rightarrow x \in A_i, A_i \times \{y\} \subseteq X \times X \setminus W \Rightarrow (x, y) \notin W$), tenemos $A_i\overline{\delta}(X \setminus W(A_i))$. Sea:

$$V = \bigcap_{i=1}^{n} T(A_i, X \setminus W(A_i)).$$

Por tanto, $V \in \mathcal{U}_\delta$ y $V \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(A_i \times W(A_i)) \subseteq W^2 \subseteq U$ (pues cada $A_i \times A_i \subseteq W$). Desglosando: $(x, y) \in V \in A_i \Rightarrow y \in W(A_i)$. De ahí la inclusión $V \subseteq \bigcup_{i=1}^{n}(A_i\times W(A_i))$. Concluimos entonces que $U \in \mathcal{U}_\delta$ y que $\mathcal{U} = \mathcal{U}_\delta$.

□

Corolario 3.23. Sea (X, δ) un espacio de proximidad. La colección de todos los conjuntos de la forma $T(A, B)$, con $A\overline{\delta}B$ es una sub-base para una uniformidad totalmente acotada $\mathcal{U}_\delta$, la cual es compatible con δ. Además, $\mathcal{U}_\delta$ es la más pequeña casi-uniformidad en $\pi(\delta)$ y es el único miembro totalmente acotado de $\pi(\delta)$.

Corolario 3.24. Si δ y ρ son casi-proximidades de X tales que $\delta \subseteq \rho$, entonces $\mathcal{U}_\rho \subseteq \mathcal{U}_\delta$.

Demostración. $\delta \subseteq \rho \Rightarrow (A\delta B \Rightarrow A\rho B)$. Por tanto, $A\overline{\rho}B \Rightarrow A\overline{\delta}B$ y todo básico $T(A, B) \in \mathcal{U}_\rho$ pertenece también a $\mathcal{U}_\delta$ y $\mathcal{U}_\rho \subseteq \mathcal{U}_\delta$. □

Corolario 3.25. Sea (X, δ) un espacio de casi-proximidad. Una base para $\mathcal{U}_\delta$ es la colección $\mathcal{N}$ de todos los conjuntos de la forma $\bigcup\{A_i \times B_i \colon 1 \leq i \leq n\}$, en donde $\{A_i \colon 1 \leq i \leq n\}$ es una cubierta finita de X y $A_i << B_i$ para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Demostración. Sea $V = \bigcup\{A_i \times B_i \colon 1 \leq i \leq n\}$ un elemento de $\mathcal{N}$. Sea $U = \bigcap_{i=1}^{n} T(A_i, X \setminus B_i)$. Como $A_i << B_i$ implica que $A_i\overline{\delta}(X \setminus B_i)$, deducimos que $U \in \mathcal{U}_\delta$ y $U(A_i) \subseteq B_i$. □

Definición 3.26. Si $\mathcal{U}$ es una casi-uniformidad en X, entonces $\mathcal{U}_\omega$ denota al único miembro totalmente acotado de $\pi(\delta_{\mathcal{U}})$.

Proposición 3.27. $\mathcal{U}_\omega$ es la máxima casi-uniformidad totalmente acotada en X contenida en $\mathcal{U}$.

Demostración. Sea $\mathcal{V}$ una casi-uniformidad totalmente acotada contenida en $\mathcal{U}$. Por tanto, por el corolario (3.24), $\mathcal{U}_{\delta_{\mathcal{V}}} = \mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}_{\delta_{\mathcal{U}}} = \mathcal{U}_{\mathcal{U}_\omega}$. □

Observación 3.28. La familia de todas las casi-proximidades en un conjunto X puede ser parcialmente ordenada como sigue: $\delta \leq \rho$ si y sólo si $\rho \subseteq \delta$. Por tanto, cada conjunto X tiene una *máxima* y una *mínima* casi-proximidad. La máxima (o discreta) está dada por $A\delta B \Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset$ y la mínima (o indiscreta) está dada por $A\delta B \Leftrightarrow A \neq \emptyset \neq B$.

Proposición 3.29. Sea $\{\delta_i \colon i \in I\}$ una familia no vacía de casi-proximidades en un conjunto X y defínase δ_0 como sigue: $A\delta_0 B$ si y sólo si para cada cubierta finita $\mathcal{A}$ de A y cada cubierta finita $\mathcal{B}$ de B, existen $A' \in \mathcal{A}$ y $B' \in \mathcal{B}$ tales que $A'\delta_i B'$ para cada $i \in I$. Entonces δ_0 es una casi-proximidad en X y es el supremo de la familia $\{\delta_i \colon i \in I\}$ con el orden parcial definido en 3.28.

Demostración. Claramente $\delta_0 \subseteq \delta_i$ para cada $i \in I$ y $A \cap B \neq \emptyset$ implica que $A\delta_0 B$. También es claro que $X\overline{\delta}_0\emptyset$ y $\emptyset\overline{\delta}_0 X$. Supongamos ahora que $A\delta_0(B \cup C)$ y supongamos también que $A\overline{\delta}_0 C$. Existen entonces una cubierta finita $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ de A y una cubierta finita $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ de C tales que para cada pareja $(\lambda, \mu) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$, existe $i(\lambda, \mu) \in I$ tal que $A_\lambda \overline{\delta}_{i(\lambda,\mu)} C_\mu$. Probemos que $A\delta_0 B$. Sean $\{A'_1, A'_2, \ldots, A'_s\}$ y $\{B_1, B_2, \ldots, B_t\}$ cubiertas finitas de A y B, respectivamente. Como $A\delta_0(B \cup C)$, existe algún alemento $A_\lambda \cap A'_{\lambda'}$ de la cubierta de A formada por todas las posibles intersecciones $A_i \cap A'_j$ y algún elemento D de la cubierta $\{B_1, B_2, \ldots, B_t, C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ de $B \cup C$ tales que $(A_\lambda \cap A'_{\lambda'})\delta_i D$ para cada $i \in I$. No podemos tener $D = C_\mu$ para alguna $\mu \in \{1, \ldots, n\}$ pues de lo contrario tendríamos $A_\lambda \delta_i C_\mu$ para cada $i \in I$, una contradicción. Por tanto, $D = B_j$ para alguna $j \in \{1, \ldots, t\}$ y $A'_{\lambda'}\delta_i B_j$ para toda $i \in I$, es decir, $A\delta_0 B$. Probaremos ahora que $A\delta_0 B$ y $B \subseteq C$ implica que $A\delta_0 C$. En efecto, sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, $\{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ cubiertas finitas de A y C, respectivamente. Como $\{B \cap C_1, B \cap C_2, \ldots, B \cap C_n\}$ es una cubierta finita de B y como $A\delta_0 B$, existen $\lambda \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y $\mu \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $A_\lambda \delta_i (B \cap C_\mu)$ para toda $i \in I$. Por tanto, $A_\lambda \delta_i C_\mu$ para toda $i \in I$ y $A\delta_0 C$. La propiedad $\{x\}\delta_0\{x\}$ para cada $x \in X$ es trivial. Supongamos ahora que $A\overline{\delta}_0 B$. Debemos encontrar un conjunto C tal que $A\overline{\delta}_0 C$ y $(X \setminus C)\overline{\delta}_0 B$. Como $A\overline{\delta}_0 B$ existen cubiertas finitas $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ de A y $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ de B tales que para cada pareja $(\lambda, \mu) \in \{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$, existe $i(\lambda, \mu) \in I$ tal que $A_\lambda \overline{\delta}_{i(\lambda,\mu)} B_\mu$. Por tanto, para cada pareja (λ, μ) en $\{1, 2, \ldots, m\} \times \{1, 2, \ldots, n\}$ existe un conjunto $C_{\lambda,\mu}$ tal que $A_\lambda \overline{\delta}_{i(\lambda,\mu)} C_{\lambda,\mu}$ y $(X \setminus C_{\lambda,\mu})\overline{\delta}_{i(\lambda,\mu)} B_\mu$. Definamos:

$$C_\lambda = C_{\lambda,1} \cup C_{\lambda,2} \cup \cdots \cup C_{\lambda,m}, \qquad \lambda \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

y

$$C = C_1 \cap C_2 \cap \cdots \cap C_m.$$

Demostraremos que $A\overline{\delta}_0 C$ y $(X \setminus C)\overline{\delta}_0 B$. Si tuviéramos $A\delta_0 C$, existiría $\lambda \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $A_\lambda \delta_i C$ para toda $i \in I$. En particular, $A_\lambda \delta_{i(\lambda,\mu)} C$ para cada $\mu \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Como $C \subseteq C_\lambda$, también $A_\lambda \delta_{i(\lambda,\mu)} C_\lambda$ para cada $\mu \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Por la definición de C_λ, existe $\mu \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $A_\lambda \delta_{i(\lambda,\mu)} C_{\lambda,\mu}$, una contradicción. Si tuviéramos $(X \setminus C)\delta_0 B$, existiría $\mu \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $(X \setminus C)\delta_i B_\mu$ para toda $i \in I$. Como $X \setminus C = \bigcup_{\lambda=1}^{m} (X \setminus C_\lambda)$, existiría $\lambda \in \{1, 2, \ldots, m\}$ tal que $(X \setminus C_\lambda)\delta_i B_\mu$ para toda $i \in I$. Pero $X \setminus C_\lambda \subseteq X \setminus C_{\lambda,\mu}$. Por tanto, tendríamos $(X \setminus C_{\lambda,\mu})\delta_{i(\lambda,\mu)} B_\mu$, una contradicción. Falta probar que si $\delta \subseteq \delta_i$ para cada $i \in I$, entonces $\delta \subseteq \delta_0$. Sean A, B tales que $A\delta B$ y sean $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, $\{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ cubiertas finitas de A y B, respectivamente. Existen entonces $\lambda \in \{1, 2, \ldots, m\}$ y $\mu \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tales que $A_\lambda \delta B_\mu$. Por tanto, $A_\lambda \delta_i B_\mu$ para cada $i \in I$, es decir, $A\delta_0 B$. □

Corolario 3.30. Sea δ una casi-proximidad en X y sea $\delta^* = \sup\{\delta, \delta^{-1}\}$. Entonces $A\delta^* B$ si y sólo si para cada cubierta finita $\{A_1, \ldots, A_m\}$ de A y cada cubierta finita $\{B_1, \ldots, B_n\}$ de B existen $i \in \{1, \ldots, m\}$ y $j \in \{1, \ldots, n\}$ tales que $A_i \delta B_j$ y $B_j \delta A_i$.

Ejemplo 3.31. Definamos la casi-uniformidad Q de $\mathbb{R}$ que tiene como base a $\{Q_\varepsilon \colon \varepsilon > 0\}$, en donde $Q_\varepsilon = \{(x, y) \colon x - y < \varepsilon\}$. Entonces $\delta_{Q^*} \neq (\delta_Q)^*$.

Demostración. Claramente Q^* es la uniformidad usual de $\mathbb{R}$. Por tanto, $A\delta_{Q^*} B$ si y sólo si $d(A, B) = 0$. Si A son los enteros positivos pares y B los enteros positivos impares, tenemos $d(A, B) = 1$ y, por tanto, $A\overline{\delta}_{Q^*} B$. Sin embargo, $A(\delta_Q)^* B$ pues si $\{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ es una cubierta finita de A y $\{B_1, B_2 \ldots, B_n\}$ es una cubierta finita de B y escogemos A_i, B_j ambos finitos, entonces $A_i \delta_Q B_j$ y $B_j \delta_Q A_i$. □

Proposición 3.32. Sea X un conjunto, sea $\{\mathcal{U}_i \colon i \in I\}$ una colección de casi-uniformidades totalmente acotadas, sea $\delta_0 = \sup\{\delta_{\mathcal{U}_i} \colon i \in I\}$ y sea $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{U}_i \colon i \in I\}$. Entonces $\delta_0 = \delta_{\mathcal{U}}$.

Demostración. Para cada $i \in I$, tenemos $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}$ y $\delta_{\mathcal{U}} \subseteq \delta_{\mathcal{U}_i}$. Por tanto, $\delta_{\mathcal{U}} \subseteq \delta_0$. Notemos ahora que si $A\overline{\delta}_{\mathcal{U}_i} B$ entonces $A\overline{\delta}_0 B$ (pues $\delta_0 \subseteq \delta_{\mathcal{U}_i}$ para cada $i \in I$) y si $T(A, B) \in \mathcal{U}_i$ también $T(A, B) \in \mathcal{U}_{\delta_0}$ (pues $\delta_0 = \delta_{\mathcal{U}_{\delta_0}} \subseteq \delta_{\mathcal{U}_i}$ lo que implica que $\mathcal{U}_i \subseteq \mathcal{U}_{\delta_0}$). Por tanto, $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{U}_i \colon i \in I\} \subseteq \mathcal{U}_{\delta_0}$, lo que implica que $\delta_0 \subseteq \delta_{\mathcal{U}}$. □

Corolario 3.33. Si $\{\delta_i \colon i \in I\}$ es una familia de casi-proximidades en un conjunto X, entonces $\sup\{\delta_i \colon i \in I\}$ induce $\sup\{\tau(\delta_i) \colon i \in I\}$.

Demostración. Sea $\mathcal{U}_i = \mathcal{U}_{\delta_i}$. Por la proposición (3.32), tenemos que $\delta_0 = \sup\{\delta_i \colon i \in I\} = \delta_{\mathcal{U}}$, en donde $\mathcal{U} = \sup\{\mathcal{U}_i \colon i \in I\}$. Por tanto:

$$\tau(\delta_0) = \tau(\delta_{\mathcal{U}}) = \tau(\mathcal{U}) = \sup\{\tau(\mathcal{U}_i) \colon i \in I\} = \sup\{\tau_{\delta_i} \colon i \in I\}.$$

□

Lema 3.34. Sea (X, δ) un espacio de casi-proximidad y sea $V \subseteq X \times X$ tal que para cada $C \subseteq X$, $C << V(C)$. Entonces $C << (U \cap V)(C)$ para cada $C \subseteq X$ y cada $U \in \mathcal{U}_\delta$.

Demostración. Sea $C \subseteq X$ y sea $U \in \mathcal{U}_\delta$. Por el teorema (3.22), podemos suponer que $U = \bigcap_{i=1}^{n} T(A_i, B_i)$, en donde, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ se tiene $A_i \overline{\delta} B_i$. Verifiquemos primero que $C << (U \cap V)(C)$ para el caso $n = 1$, es decir, cuando $U = T(A, B) = [(X \setminus A) \times X] \cup [A \times (X \setminus B)]$. En este caso, $(U \cap V)(C) = (U \cap V)(C \cap A) \cup (U \cap V)(C \setminus A) = [V \cap (A \times (X \setminus B))(C \cap A)] \cup [V \cap ((X \setminus A) \times X)(C \setminus A)] = [(X \setminus B) \cap V(C \cap A)] \cup V(C \setminus A)$. Por hipótesis, $C \cap A << V(C \cap A)$ y $C \setminus A << V(C \setminus A)$ y como $A \overline{\delta} B$, también $(C \cap A) \overline{\delta} B$ y $C \cap A << X \setminus B$. Por tanto, $C << (U \cap V)(C)$. El resultado se sigue entonces por inducción sobre n: si $W = \bigcap_{i=1}^{n-1} T(A_i, B_i)$, tenemos $C << (W \cap V)(C)$. Por el caso $n = 1$,

$$C << (T(A_n, B_n) \cap V)(C).$$

Por tanto, $C << (W \cap T(A_n, B_n) \cap V)(C) = (U \cap V)(C)$. □

Proposición 3.35. Sean $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ casi-uniformidades en un conjunto X. Si $\mathcal{U}$ es totalmente acotada, entonces $\delta_{\mathcal{U} \vee \mathcal{V}} = \delta_{\mathcal{U}} \vee \delta_{\mathcal{V}}$.

Demostración. Como $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{W}$ implica que $\delta_{\mathcal{W}} \subseteq \delta_{\mathcal{U}}$, tenemos $\delta_{\mathcal{U} \vee \mathcal{V}} \subseteq \delta_{\mathcal{U}} \vee \delta_{\mathcal{V}}$. Denotemos por $<<$ y $<<'$ las inclusiones fuertes determinadas por $\delta_{\mathcal{U}} \vee \delta_{\mathcal{V}}$ y $\delta_{\mathcal{U} \vee \mathcal{V}}$, respectivamente. Demostraremos que $\delta_{\mathcal{U}} \vee \delta_{\mathcal{V}} \subseteq \delta_{\mathcal{U} \vee \mathcal{V}}$ estableciendo que $A <<' B$ implica $A << B$. (Esto es equivalente a probar que el complemento de $\delta_{\mathcal{U} \vee \mathcal{V}}$ está contenido en el complemento de $\delta_{\mathcal{U}} \vee \delta_{\mathcal{V}}$). Supongamos entonces que $A <<' B$. Existe entonces $T \in \mathcal{U} \vee \mathcal{V}$ tal que $(A \times (X \setminus B)) \cap T = \emptyset$. Por tanto, $T(A) \subseteq B$. Como $T \in \mathcal{U} \vee \mathcal{V}$, existen $U \in \mathcal{U}$ y $V \in \mathcal{V}$ tales que $U \cap V \subseteq T$. Por tanto, $(U \cap V)(A) \subseteq B$. Para cada subconjunto $C \subseteq X$, se tiene $C <<_{\delta_{\mathcal{V}}} V(C)$, pues $C \times (X \setminus V(C)) \cap V = \emptyset$. Como $\delta_{\mathcal{U}} \vee \delta_{\mathcal{V}} \subseteq \delta_{\mathcal{U}}$, tenemos $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{\delta_{\mathcal{U}}} \subseteq \mathcal{U}_{\delta_{\mathcal{U}} \vee \delta_{\mathcal{V}}}$. Por el lema (3.34), tenemos $A << (U \cap V)(A) \subseteq B$. □

Corolario 3.36. Sea X un conjunto y sea $\{\mathcal{U}_i \colon i \in I\}$ una colección de casi-uniformidades en X y supongamos que para a lo más una $i \in I$, $\mathcal{U}_i$ no es totalmente acotada. Entonces la casi-proximidad inducida por el $\sup\{\mathcal{U}_i \colon i \in I\}$ es el supremo de $\{\delta_{\mathcal{U}_i} \colon i \in I\}$.

Corolario 3.37. Sean $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ casi-uniformidades en un conjunto X. Entonces $\mathcal{U}_\omega \vee \mathcal{V}$ y $\mathcal{U} \vee \mathcal{V}_\omega$ son *qp*-equivalentes.

Corolario 3.38. Si $\mathcal{U}$ es una casi-uniformidad totalmente acotada, entonces:

$$\delta_{\mathcal{U}^*} = \delta_{\mathcal{U} \vee \mathcal{U}^{-1}} = \delta_{\mathcal{U}} \vee \delta_{\mathcal{U}^{-1}} = (\delta_{\mathcal{U}})^*$$

Proposición 3.39. Sea $\mathcal{U}$ una casi-uniformidad en el conjunto X, y sea δ una casi-proximidad en X. Entonces:

(a) $(\delta_{\mathcal{U}})^{-1} = \delta_{\mathcal{U}^{-1}}$;

(b) $(\mathcal{U}_{\delta_{\mathcal{U}}})^{-1} = \mathcal{U}_{\delta_{\mathcal{U}^{-1}}}$;

(c) $(\mathcal{U}_\delta)^{-1} = \mathcal{U}_{\delta^{-1}}$;

(d) $(\mathcal{U}_\delta)^* = \mathcal{U}_{\delta^*}$.

Demostración. a) $(A,B) \in (\delta_\mathcal{U})^{-1}$ si y sólo si $(B \times A) \cap U \neq \emptyset$ para toda $U \in \mathcal{U}$ si y sólo si $(A \times B) \cap U^{-1} \neq \emptyset$ para toda $U \in \mathcal{U}$ si y sólo si $(A,B) \in \delta_{\mathcal{U}^{-1}}$.

b) $V \in (\mathcal{U}_{\delta_\mathcal{U}})^{-1}$ si y sólo si $V^{-1} \in \mathcal{U}_{\delta_\mathcal{U}}$ si y sólo si $\bigcap_{i=1}^{n} T(A_i, B_i) \subseteq V^{-1}$, en donde $A_i \overline{\delta}_\mathcal{U} B_i$ para cada $i =, \ldots, n$, si y sólo si $\bigcap_{i=1}^{n} T(A_i, B_i) \subseteq V^{-1}$ y $(A_i \times B_i) \cap U_i = \emptyset$ para ciertas $U_i \in \mathcal{U}$, $i = 1, \ldots, n$, si y sólo si $\bigcap_{i=1}^{n} T(B_i, A_i) \subseteq V$ y $(B_i \times A_i) \cap U_i^{-1} = \emptyset$ para ciertas $U_i^{-1} \in \mathcal{U}^{-1}$, $i = 1, \cdots, n$ si y sólo si $\bigcap_{i=1}^{n} T(B_i, A_i) \subseteq V$ con $B_i \overline{\delta}_{\mathcal{U}^{-1}} A_i$ para cada $i = 1 \ldots, n$ si y sólo si $V \in \mathcal{U}_{\delta_{\mathcal{U}^{-1}}}$.

c) $U \in (\mathcal{U}_\delta)^{-1}$ si y sólo si $U^{-1} \in \mathcal{U}_\delta$, si y sólo si $\bigcap_{i=1}^{n} T(A_i, B_i) \subseteq U^{-1}$ en donde $A_i \overline{\delta}^{-1} B_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, si y sólo si $\bigcap_{i=1}^{n} T(B_i, A_i) \subseteq U$ en donde $B_i \overline{\delta^{-1}} A_i$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, si y sólo si $U \in \mathcal{U}_{\delta^{-1}}$.

d) $(\mathcal{U}_\delta)^* = \mathcal{U}_\delta \vee (\mathcal{U}_\delta)^{-1} = \mathcal{U}_\delta \vee \mathcal{U}_{\delta^{-1}}$. Como $\delta^* = \delta \vee \delta^{-1}$, tenemos $\delta^* \subseteq \delta$ y $\delta^* \subseteq \delta^{-1}$. Por otro lado, por la proposición (3.35),

$$\delta_{\mathcal{U}_\delta \vee \mathcal{U}_{\delta^{-1}}} = \delta_{\mathcal{U}_\delta} \vee \delta_{\mathcal{U}_{\delta^{-1}}} = \delta \vee \delta^{-1} = \delta^*.$$

Por tanto, $\mathcal{U}^* \subseteq \mathcal{U}_\delta \vee \mathcal{U}_{\delta^{-1}}$ y $\mathcal{U}_\delta \vee \mathcal{U}_{\delta^{-1}} = \mathcal{U}^*$.

□

Proposición 3.40. Sea (X, δ) un espacio de casi-proximidad. Entonces son equivalentes:

(a) $A \delta B$;

(b) $Cl_{\delta^*} A \delta Cl_{\delta^*} B$;

(c) $Cl_{\delta^{-1}} A \delta Cl_\delta B$.

Demostración. $(a) \Rightarrow (b)$. Es claro del hecho $A \subseteq Cl_{\delta^*} A$ y $B \subseteq Cl_{\delta^*} B$.

$(b) \Rightarrow (c)$. Como $\delta^* \subseteq \delta$ y $\delta^* \subseteq \delta^{-1}$ tenemos $Cl_{\delta^*} A \subseteq Cl_{\delta^{-1}} A$ y $Cl_{\delta^*} B \subseteq Cl_\delta B$. Por tanto, $(b) \Rightarrow (c)$.

$(c) \Rightarrow (a)$. Procediendo por contradicción, supongamos que $Cl_{\delta^{-1}} A \delta Cl_\delta B$ pero $A \overline{\delta} B$. Entonces existe $C \subseteq X$ tal que $A \overline{\delta} C$ y $(X \setminus C) \overline{\delta} B$. De aquí se sigue que $Cl_\delta B \subseteq C$, de manera que $A \overline{\delta} Cl_\delta B$ y $Cl_\delta B \overline{\delta}^{-1} A$. Existe entonces $D \subseteq X$ tal que $Cl_\delta B \overline{\delta}^{-1} D$ y $(X \setminus D) \overline{\delta}^{-1} A$. Esto último implica que $Cl_{\delta^{-1}} A \subseteq D$, de manera que $Cl_\delta B \overline{\delta}^{-1} Cl_{\delta^{-1}} A$ y $Cl_{\delta^{-1}} A \overline{\delta} Cl_\delta B$, una contradicción. □

Teorema 3.41. Sea (X, τ) es un espacio topológico. Entonces existe una biyección entre la familia de las casi-uniformidades totalmente acotadas en X que inducen τ y la familia de todas las casi-proximidades en X que inducen τ.

Definición 3.42. Una casi-proximidad en un conjunto X es *transitiva* si la casi-uniformidad $\mathcal{U}_\delta$ es transitiva.

Teorema 3.43. Si (X, τ) es un espacio topológico, la relación $A\delta_0 B$ si y sólo si $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$ define una casi-proximidad transitiva en X que induce τ. Por lo tanto, $\mathcal{P} = \mathcal{U}_{\delta_0}$ es una casi-uniformidad transitiva totalmente acotada que induce τ. $\mathcal{P}$ es llamada la *casi-uniformidad de Pervin* (ver [43]) en el espacio (X, τ) y $\mathcal{P}$ es la casi-uniformidad más chica en (X, τ) que induce a δ_0, esto es, $\delta_{\mathcal{P}} = \delta_{\mathcal{U}_{\mathbf{F}}} = \delta_0$.

Lema 3.44. Sea $\mathcal{B}$ una base anular de un espacio topológico (X, τ). Definamos $A\delta B$ si y sólo si $A \cap H \neq \emptyset$ para toda $H \in C(\mathcal{B})$ que contiene a B. Entonces δ es una casi-proximidad transitiva en X que induce τ.

Demostración. Claramente $X\overline{\delta}\emptyset$ y $\emptyset\overline{\delta}X$. Si $(A \cup B)\delta C$, tenemos que $A\delta C$ o $B\delta C$. En efecto, $A\overline{\delta}C$ y $B\overline{\delta}C$ implican la existencia de $H_1, H_2 \in C(\mathcal{B})$ tales que $H_1 \cap H_2 \supseteq C$, $A \cap H_1 = \emptyset = B \cap H_2$. Por tanto $(A \cup B) \cap H_1 \cap H_2 = \emptyset$ y $H_1 \cap H_2$ es un elemento de $C(\mathcal{B})$ que contiene a C, esto es, $(A \cup B)\overline{\delta}C$, una contradicción. Análogamente se prueba que $C\delta(A \cup B)$ implica que $C\delta A$ o $C\delta B$. Es claro que $\{x\}\delta\{x\}$ para cada $x \in X$. Finalmente supongamos que $A\overline{\delta}B$. Por tanto, existe un elemento $H \in C(\mathcal{B})$ tal que $H \supseteq B$ y $A \cap H = \emptyset$. Por tanto, $A\overline{\delta}H$ y $(X \setminus H)\overline{\delta}B$.

Observe que $(X \setminus H)\overline{\delta}H$ para toda $H \in C(\mathcal{B})$ y $T(X \setminus H, H) = X \times X \setminus [(X \setminus H) \times H] = (H \times X) \cup [X \times (X \setminus H)]$. Por lo tanto, si $A\overline{\delta}B$ y $H \in C(\mathcal{B})$ satisface $B \subseteq H \subseteq X \setminus A$, tenemos $T(X \setminus H, H) \subseteq [(X \setminus A) \times X] \cup [X \times (X \setminus B)] = T(A, B)$. Esto prueba que la casi-uniformidad $\mathcal{U}_\delta$ es transitiva.

Finalmente, debemos probar que $\tau_\delta = \tau$. Para esto, tomemos cualquier conjunto $C \subseteq X$ y consideremos el conjunto $C_1 = \{x \in X \colon \{x\}\delta C\}$. Es suficiente probar que $C_1 = \overline{C}$. Si $x \in X \setminus \overline{C}$, existe un conjunto $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq X \setminus \overline{C}$. Por tanto, $X \setminus B \in C(\mathcal{B})$ y $X \setminus B \supseteq C$, esto es, $\{x\}\overline{\delta}C$ y $X \setminus \overline{C} \subseteq X \setminus C_1$. Por otro lado, si $x \in X \setminus C_1$, esto es, si $\{x\}\overline{\delta}C$, existe un conjunto $H \in C(\mathcal{B})$ tal que $H \supseteq C$ y $x \notin H$. Por tanto, $x \in X \setminus \overline{C}$ y la prueba esta completa. □

Teorema 3.45. Si $\mathcal{B}$ es una base anular de un espacio topológico (X, τ) y si δ es la casi-proximidad en X asociada a $\mathcal{B}$. Entonces:

i) $\mathcal{B}$ es disyuntiva si y sólo si δ es punto simétrica.

ii) $\mathcal{B}$ es regular si y sólo si δ es localmente simétrica.

iii) $\mathcal{B}$ es normal si y sólo si δ es de tipo Wallman.

Demostración. Sólo probaremos *iii*). Supongamos que δ es de tipo Wallman y sean $H, K \in C(\mathcal{B})$ disjuntos. Como H y K son δ- remotos, existe una vecindad G de H tal que $H\overline{\delta}(X \setminus G)$

y $K\overline{\delta}G$. Esta ultima condición implica la existencia de un elemento $H_1 \in C(\mathcal{B})$ tal que $K \subseteq X \setminus H_1 \subseteq X \setminus G$. La primera condición implica la existencia de un elemento $K_1 \in C(\mathcal{B})$ tal que $X \setminus G \subseteq K_1 \subseteq X \setminus H$. Por lo tanto, $X \setminus K_1$ y $X \setminus H_1$ son elementos disjuntos de $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ es normal.

Supongamos ahora que $\mathcal{B}$ es normal. Sean A, B conjuntos δ-remotos y sean $H, K \in C(\mathcal{B})$ conjuntos disjuntos tales que $A \subseteq H$ y $B \subseteq K$. Como $\mathcal{B}$ es normal, existen elementos disjuntos $C, D \in \mathcal{B}$ tales que $H \subseteq C$ y $K \subseteq D$. Definiendo $G = C$, tenemos $H\overline{\delta}(X \setminus G)$ y $K\overline{\delta}G$, esto es, δ es de tipo Wallman. □

Corolario 3.46. Toda casi-proximidad transitiva punto-simétrica de tipo Wallman es localmente simétrica y su topología inducida es completamente regular

Lema 3.47. Sea δ una casi-proximidad transitiva en un espacio topológico (X, τ) y supongamos que $\tau_\delta = \tau$. Entonces $\mathcal{B} = \{V \in \tau \colon V\overline{\delta}(X \setminus V)\}$ es una base anular de (X, τ).

Demostración. Claramente $\emptyset \in \mathcal{B}$ y $X \in \mathcal{B}$. Supongamos que B_1, B_2 están en $\mathcal{B}$. Si $B_1 \cup B_2 \notin \mathcal{B}$, tendríamos $(B_1 \cup B_2)\delta(X \setminus B_1) \cap (X \setminus B_2)$. Por tanto $B_1\delta(X \setminus B_1) \cap (X \setminus B_2)$ o $B_2\delta(X \setminus B_1) \cap (X \setminus B_2)$. Esto implicaría que $B_1\delta(X \setminus B_1)$ o $B_2\delta(X \setminus B_2)$, una contradicción. Por tanto, $B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$. De manera similar probamos que $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$. Falta probar que $\mathcal{B}$ es una base de (X, τ). Supongamos entonces que $x \in V \in \tau$. Por tanto $\{x\}\overline{\delta}(X \setminus V)$ (recordemos que $\tau_\delta = \tau$). Sea $R \in \mathcal{U}_\delta$ un conector transitivo contenido en $T(\{x\}, X \setminus V)$ .Probaremos que $R(x) \subseteq V$. Si $y \in R(x)$, tenemos que $(x, y) \in R \subseteq T(\{x\}, X \setminus V) = [(X \setminus \{x\}) \times X] \cup [\{x\} \times V]$. Por tanto, $(x, y) \in \{x\} \times V$, esto es, $y \in V$. Por otra parte $R(x)\overline{\delta}(X \setminus R(x))$ porque $R(x)\delta(X \setminus R(x))$ implica que $[R(x) \times (X \setminus R(x))] \cap R \neq \emptyset$. Dado que R es un conector transitivo, esta ultima afirmación es falsa. Por lo tanto, debemos tener que $R(x)\overline{\delta}(X \setminus R(x))$. Esto implica que $R(x) \cap \overline{(X \setminus R(x))} = \emptyset$. De lo anterior deducimos que $R(x)$ es abierto. Por lo tanto, $R(x) \in \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ es una base anular de (X, τ). □

Teorema 3.48. Si (X, τ) es un espacio topológico, entonces existe una correspondencia biyectiva entre la colección de bases anulares de (X, τ) y la colección de casi-proximidades transitivas en X que inducen a τ. Por lo tanto, (X, τ) es mínimamente básico si y sólo si la familia de casi-uniformidades transitivas totalmente acotadas de X que inducen a τ tiene un elemento mínimo y (X, τ) es unibásico si y sólo si $\mathcal{P} = \mathcal{U}_{\delta_0}$ es la única casi-uniformidad transitiva totalmente acotada que induce a τ.

Teorema 3.49. Sea B un conjunto siempre básico en un espacio topológico (X, τ) y supongamos que $B \neq X$. Si $K \subseteq X$ es cerrado y $K \subseteq B$, entonces K es compacto.

Demostración. Supongamos que K no es compacto. Entonces existe una familia $\mathcal{G} = \{B_i \colon i \in J\} \subseteq \tau$ tal que $K \subseteq \cup\{B_i \colon i \in J\} \subseteq B$, pero para cada subconjunto finito $J_0 \subseteq J$, tenemos $K \setminus \cup\{B_i \colon i \in J_0\} \neq \emptyset$. Sea $\mathcal{B}' = \{L \in \tau \colon L \subseteq \cup\{B_i \colon i \in J_0\}$ para algún $J_0 \subseteq J$, finito$\}$ y sea $\mathcal{B}'' = \{L \in \tau \colon L \cap K = \emptyset\} \cup \{X\}$. Es fácil ver que $\mathcal{B} = \{L_1 \cup L_2 \colon L_1 \in \mathcal{B}'$ y $L_2 \in \mathcal{B}''\}$ es una base anular de (X, τ). Pero $B \notin \mathcal{B}$, contradiciendo el hecho de que B es siempre básico. Por lo tanto, K es compacto. □

Teorema 3.50. Sea $\mathcal{B}$ un subconjunto siempre básico de un espacio topológico (X,τ) $\mathcal{R}_1$ tal que $B \neq X$. Entonces B es compacto.

Demostración. Por el teorema (3.49), es suficiente probar que $Fr(B) = \emptyset$. Supongamos lo contrario, esto es, que existe un punto $p \in Fr(B)$. Definamos $\mathcal{B}_1 = \{V \in \tau \colon p \notin \overline{V}\}$ y $\mathcal{B}_2 = \{W \in \tau \colon p \in W\}$. Si $\mathcal{B} = \{V \cup W \colon V \in \mathcal{B}_1 \text{ y } W \in \mathcal{B}_2\}$ es claro que $\mathcal{B}$ es una base anular de (X,τ). Observemos que para todo $T = V \cup W \in \mathcal{B}$, se tiene que $p \notin Fr(T)$ (porque $Fr(T) \subseteq Fr(V) \cup Fr(W) \subseteq X \setminus \{p\}$). Esto implica que $B \notin \mathcal{B}$, contradiciendo el hecho de que B es siempre básico. □

Definición 3.51. Un espacio topológico (X,τ) es *hiperconexo* si todo conjunto abierto no vacío $V \in \tau$ es denso en X. Equivalentemente, (X,τ) es hiperconexo si todo par de subconjuntos abiertos no vacíos de X tienen intersección no vacía.

Teorema 3.52. Sea $B \neq X$ un subconjunto siempre básico de un espacio topológico (X,τ). Si $X \setminus B$ es hiperconexo, entonces B es compacto.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta de B. Si $\mathcal{B}'$ es la familia de conjuntos abiertos $L \in \tau$ que están contenidos en una unión finita de miembros de $\mathcal{U}$ y si $\mathcal{B}'' = \{\emptyset\} \cup \{M \in \tau \colon M \setminus B \neq \emptyset\}$, claramente $\mathcal{B} = \{L \cup M \colon L \in \mathcal{B}' \text{ y } M \in \mathcal{B}''\}$ es una base anular de (X,τ). Sin embargo, $B \notin \mathcal{B}$, una contradicción. □

Como consecuencia de los teoremas (3.50) y (3.52), tenemos los siguientes resultados:

Teorema 3.53. Un espacio topológico $\mathcal{R}_1$ (X,τ) es mínimamente básico si y sólo si (X,τ) es localmente compacto y cero-dimensional.

Teorema 3.54. Si (X,τ) es un espacio unibásico y si $x \in X$, entonces $X \setminus \overline{\{x\}}$ es compacto. Por lo tanto, si X tiene un subespacio compacto cerrado y no vacío, entonces X es compacto.

Teorema 3.55. Todo espacio unibásico $\mathcal{R}_1$ (X,τ) tiene topología finita. De hecho, para todo $x \in X$, $\overline{\{x\}}$ es abierto y X es una unión finita de clausuras de puntos.

3.2. Espacios unibásicos

Definición 3.56. Sea (X,τ) un espacio topológico $\mathcal{R}_0$.

a) (X,τ) es $\mathcal{R}_1'$ si todo subconjunto compacto abierto de X es cerrado.

b) (X,τ) es $\mathcal{R}_1''$ si toda intersección de subespacios compactos y abiertos de X es compacta.

Observación 3.57. $\mathcal{R}_1 \Rightarrow \mathcal{R}_1' \Rightarrow \mathcal{R}_1'' \Rightarrow \mathcal{R}_0$.

Demostración. ($\mathcal{R}_1 \Rightarrow \mathcal{R}_1'$) Es suficiente observar que si (X,τ) es $\mathcal{R}_1$, $K \subseteq X$ es compacto, $V \subseteq X$ es abierto y $K \subseteq V$, entonces $\overline{K} \subseteq V$. □

Lema 3.58. Sea R es un conector transitivo de un conjunto X; si $x \in X$ y si $A \subseteq X$ es un semi-bloque de R que intersecta a $R(x)$, entonces $A \subseteq R(x)$.

Demostración. Tomemos $y \in A \cap R(x)$ y sea $z \in A$. Por tanto, $(x, y) \in R$ y $(y, z) \in A \times A \subseteq R$. Dado que R es transitivo, deducimos que $(x, z) \in R$, esto es, $z \in R(x)$. □

Definición 3.59. Sea α una cubierta de un conjunto X. Para cada $p \in X$, definimos $Cost(p, \alpha) = \cap\{L \colon p \in L \in \alpha\}$. La cubierta indicada $\{Cost(x, \alpha) \colon x \in X\}$ la denotamos como α^{∇} y es llamada la *cubierta cobaricéntrica* de α.

Observación 3.60. Sea α una cubierta de un conjunto X. Entonces el conector $E(\alpha^{\nabla})$ de la cubierta cobaricéntrica α^{∇} es un conector transitivo de X. Recíprocamente, si R es un conector transitivo de X, tenemos $\lambda(E)^{\nabla} = \lambda(E)$.

Definición 3.61. Una cubierta α de un espacio topológico (X, τ) es *preservadora de interiores* si para toda $x \in X$, $Cost(x, \alpha)$ es una τ-vecindad de x. Equivalentemente, α es preservadora de interiores si el conector $E(\alpha^{\nabla})$ es una τ-covecindad.

Comentario: Sea (X, τ) un espacio topológico y consideremos la familia $\mathcal{G}$ de todas las cubiertas preservadoras de interiores de X. Entonces la colección $\{E(\alpha^{\nabla}) \colon \alpha \in \mathcal{G}\}$ es una base para una casi-uniformidad en X. La casi-uniformidad correspondiente es transitiva e induce a τ. Esta casi-uniformidad contiene a cualquiera casi-uniformidad transitiva que induzca a τ y recibe el nombre de *casi-uniformidad transitiva fina* en X y la denotaremos como $\mathcal{FT}$. La familia $\mathcal{H}$ de todas las cubiertas finitas preservadoras de interiores de X determina también una base de casi-uniformidad $\{E(\alpha^{\nabla}) \colon \alpha \in \mathcal{H}\}$ y la casi-uniformidad correspondiente es la *casi-uniformidad de Pervin* $\mathcal{P}$ (ver [38]). Cualquier otra casi-uniformidad transitiva totalmente acotada que induzca a τ está contenida en $\mathcal{P}$.

Lema 3.62. Sea R un conector transitivo totalmente acotado en un conjunto X. Entonces la familia $\{L \colon L = R(x) \text{ para algún } x \in X\}$ es finita.

Demostración. Sea $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ una cubierta finita de X que consiste de semi-bloques de R. Por el lema (3.58), cada $R(x)$ es unión de conjuntos A_i que intersectan a $R(x)$. Por tanto la familia $\{L \colon L = R(x) \text{ para algún } x \in X\}$ tiene a lo más 2^n elementos. □

En el siguiente resultado damos una respuesta positiva a la pregunta planteada por P. Fletcher and W. Lindgren, planteado en ([12], p.19).

Teorema 3.63. (Ver, [17]). Sea (X, τ) un espacio topológico. Consideremos las siguientes propiedades:

1. τ es finita.

2. $\mathcal{P}$ es la única casi-uniformidad en X que induce a τ.

3. Toda cubierta preservadora de interiores de X es finita.

4. (X, τ) es hereditariamente compacto.
5. $\delta_{\mathcal{P}}$ es la única casi-proximidad en X que induce a τ.
6. $\delta_{\mathcal{P}}$ es la única casi-proximidad transitiva en X que induce a τ.
7. (X, τ) es unibásico.

Entonces 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 6) $\Rightarrow$ 7); si (X, τ) es $\mathcal{R}_1''$, 7) $\Rightarrow$ 4) y si (X, τ) es $\mathcal{R}_1'$, 7) $\Rightarrow$ 1).

Demostración. Las pruebas de las implicaciones 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 5) aparecen en [11]. Sin embargo, usando el lema (3.62) obtenemos una prueba rápida de la implicación 2) $\Rightarrow$ 3). Suponiendo 2), deducimos que $\mathcal{P} = \mathcal{FT}$. Por tanto, si α es una cubierta preservadora de interiores de X, el conector $R = E(\alpha^{\nabla})$ es transitivo y totalmente acotado. Por lo tanto, por el lema (3.62), la familia $\{L \colon L = R(x)$ para algún $x \in X\}$ es finita. Esto, a su vez, implica que α es finita. En efecto, consideremos la topología de X cuyos conjuntos cerrados son uniones arbitrarias de intersecciones de elementos de α. Las clausuras de puntos en esta topología son precisamente los conjuntos $Cost(x, \alpha)$, donde $x \in X$. Dado que todo conjunto cerrado en esta topología es una unión de clausuras de puntos, concluimos que esta topología es finita y, por tanto, α es finita. La implicación 5) $\Rightarrow$ 6) es evidente y 6) $\Rightarrow$ 7) es una consecuencia del teorema (3.48). Si (X, τ) es $\mathcal{R}_1''$ y $V \in \tau$, $V \neq X$, claramente V es la intersección de todos los conjuntos compactos abiertos de $X \setminus \overline{\{x\}}$, donde $x \in X \setminus V$. Por hipótesis, V debe ser compacto. Hemos probado entonces que 7) $\Rightarrow$ 4) cuando (X, τ) es un espacio $\mathcal{R}_1''$. Finalmente , si (X, τ) es $\mathcal{R}_1'$, cada conjunto $X \setminus \overline{\{x\}}$ es compacto y abierto y, por tanto, es también cerrado. Por ende, cada clausura de punto es abierta. Como X es compacto, X es la cerradura de un subconjunto finito de X. Dado que (X, τ) es $\mathcal{R}_0$, la topología τ debe ser finita. $\square$

Künzi. H.-P en [33] probó que las propiedades 3), 4), 5), 6), 7) y

2' $\mathcal{P}$ es la única casi-uniformidad totalmente acotada en X que induce τ

son equivalentes (ver [29]).

La validez de la implicación 7)$\Rightarrow$2) todavía sigue abierta.

Ejemplos típicos de espacios topológicos que admiten una única casi-uniformidad totalmente acotada, son los espacios hereditariamente compactos y el conjunto ω dotado con la topología inferior $\{[0, n] \colon n \in \omega\} \cup \{\emptyset, \omega\}$.

El espacio con el conjunto $\omega + 2$ y la topología $\{[0, \alpha] \colon \alpha \in \omega + 2\} \cup \{(\omega + 2) \setminus \{\omega + 1\}, \omega + 2, (\omega + 2) \setminus \{\omega\}, \emptyset\}$ admite una única casi-uniformidad totalmente acotada, mientras que esto no es cierto para el subespacio $(\omega + 2) \setminus \{\omega\}$ (ver ejemplo de la pagina 148 en [28]).

Ejemplo 3.64. (Ver ejemplo 1 en [33]). Sea N el conjunto de los enteros positivos dotado de la topología $\tau = \{\{1, \ldots, n\} \colon n \in N\} \cup \{\emptyset, N\}$. Obviamente, todo subconjunto propio abierto de N es compacto, pero N no es compacto. Este ejemplo muestra que un espacio topológico que admite una única casi-proximidad compatible no necesariamente debe ser compacto.

Pregunta: Son las propiedades "(X, τ) es unibásico" y "$\mathcal{P}$ es la única casi-uniformidad compatible" equivalentes?

Aquí $\mathcal{P}$, representa la casi-uniformidad de Pervin.

Capítulo 4
Una Técnica de Completación y Compactificación en espacios pre-casi-uniformes

4.1. Completación de espacios pre-casi-uniformes

El objetivo de esta sección es proporcionar una técnica para completar espacios pre-casi-uniformes. La mayoría de los conceptos utilizados en espacios casi-uniformes, se pueden aplicar a los espacios pre-casi-uniformes. Vamos a estudiar las principales propiedades de esta clase de espacios que contiene la clase de los espacios casi-uniformes.

Todos los resultados de este capítulo, se encuentran en [18]

Definición 4.1. Sea X un conjunto no vacío y $\mathcal{U}$ un filtro en $X \times X$ formado por conectores. La topología $\tau_{\mathcal{U}}$ inducida por $\mathcal{U}$ en X es:

$$\tau_{\mathcal{U}} = \{V \subseteq X \colon \forall x \in V, \exists U \in \mathcal{U} \text{ tal que } U(x) \subset V\}$$

Aquí $U(x) = \{y \in X \colon (x, y) \in U\}$, cuando $U \in \mathcal{U}$ y $x \in X$.

Definición 4.2. Sea X un conjunto no vacío. Un filtro $\mathcal{U}$ sobre $X \times X$ formado por conectores de X, se dice *pre-casi-uniformidad* en X si cumple:

$$\forall U \in \mathcal{U}, \exists V \in \mathcal{U} \text{ tal que } V(x) \subseteq \operatorname{int} U(x) \ \forall x \in X. \tag{4.1}$$

Un *espacio pre-casi-uniforme* es un par $(X, \mathcal{U})$, donde X es un conjunto no vacío y $\mathcal{U}$ es una pre-casi-uniformidad en X.

Observación 4.3. Es claro que toda casi-uniformidad sobre X es una pre-casi-uniformidad sobre X.

Definición 4.4. Una *cubierta indicada* de X es una función $\varphi \colon X \to \mathcal{P}(X)$, en donde $x \in \varphi(x)$ para cada $x \in X$. La notación más usada es $\{U_x \colon x \in X\}$, en donde $x \in U_x = \varphi(x)$ para cada $x \in X$.

Cada conector F de X tiene asociada una cubierta indicada, a saber: $\lambda(F) = \{F(x) \colon x \in X\}$, en donde $F(x) = \{y \in X \colon (x, y) \in F\}$.

Recíprocamente, cada cubierta indicada: $\alpha = \{A_x \colon x \in X\}$ tiene asociado un conector de X, a saber: $E(\alpha) = \bigcup\{\{x\} \times A_x \colon x \in X\}$. La inversa α^{-1} de α se define como: $\alpha^{-1} = \{A_x^{-1} \colon x \in X\}$, en donde $y \in A_x^{-1}$ si y sólo si $x \in A_y$. Además, para cada conector F de X, se tiene: $F = E(\lambda(F))$ y para cada cubierta indicada α de X, $\alpha = \lambda(E(\alpha))$.

Ejemplo 4.5. Sea ξ una cubierta arbitraria de X. La *cubierta baricéntrica* ξ^{Δ}, es la cubierta indicada $\xi^{\Delta} = \{St(x, \xi) \colon x \in X\}$, donde $St(x, \xi) = \bigcup\{G \in \xi \colon x \in G\}$. En este caso:

$$E(\xi^{\Delta}) = \cup\{G \times G \colon G \in \xi\}$$

es un conector simétrico.

La *cubierta cobaricéntrica* ξ^{∇} es la cubierta indicada

$$\xi^{\nabla} = \{Cost(x, \xi) \colon x \in X\},$$

donde $Cost(x, \xi) = \cap\{G \in \xi \colon x \in G\}$. En este caso:

$$E(\xi^{\nabla}) = \cup\{\{x\} \times Cost(x, \xi) \colon x \in X\}$$

es un conector transitivo.

Definición 4.6. Una base de filtro $\mathcal{B}$ en un espacio pre-casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es $\mathcal{U}$-*Cauchy* si para cada $U \in \mathcal{U}$ existen un punto $x \in X$ y $B \in \mathcal{B}$ tales que $B \subseteq U(x)$. Por tanto un filtro $\mathcal{F}$ sobre $(X,\mathcal{U})$ se dice $\mathcal{U}$-Cauchy si para cada $U \in \mathcal{U}$, existe un punto $p \in X$ tal que $U(p) \in \mathcal{F}$.

Definición 4.7. Un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy $\mathcal{F}$ se dice $\mathcal{U}$-*Cauchy minimal* si $\mathcal{F}$ no contiene propiamente a ningún otro filtro $\mathcal{U}$-Cauchy.

Observación 4.8. Sea $\mathcal{F}$ un filtro convergente en un espacio pre-casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$. Entonces $\mathcal{F}$ es $\mathcal{U}$-Cauchy.

Demostración. Supongamos $\mathcal{F} \to p$, $p \in X$. Si $U \in \mathcal{U}$, claramente $U(p)$ es $\tau_{\mathcal{U}}$-vecindad de p y, por tanto, $U(p) \in \mathcal{F}$. □

Observación 4.9.

a) Sean $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ bases de filtro en un espacio pre-casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$. Si $\mathcal{F}(\mathcal{B}_1)$[a] $\subseteq \mathcal{F}(\mathcal{B}_2)$[b] y si $\mathcal{B}_1$ es $\mathcal{U}$-Cauchy, entonces $\mathcal{B}_2$ es $\mathcal{U}$-Cauchy.

b) Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son pre-casi-uniformidades sobre X y si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{V}$, entonces toda base de filtro $\mathcal{V}$-Cauchy es también una base de filtro $\mathcal{U}$-Cauchy.

c) Sea $\mathcal{B}$ una base de filtro en un espacio pre-casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$. Si $\mathcal{U}^* = \mathcal{U} \vee \mathcal{U}^{-1}$ y $\mathcal{B}$ es $\mathcal{U}^*$-Cauchy, entonces $\mathcal{B}$ es simultáneamente $\mathcal{U}$-Cauchy y $\mathcal{U}^{-1}$-Cauchy.

[a] $\mathcal{F}(\mathcal{B}_1)$ = filtro generado por $\mathcal{B}_1$.
[b] $\mathcal{F}(\mathcal{B}_2)$ = filtro generado por $\mathcal{B}_2$.

d) Sea $\mathcal{B}$ una base de filtro en un espacio pre-casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$. Entonces $\mathcal{B}$ es $\mathcal{U}^*$-Cauchy si y sólo si para todo $U \in \mathcal{U}$, existe un elemento $N \in \mathcal{B}$ tal que $N \times N \subseteq U$.

Definición 4.10. Un espacio casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es *localmente simétrico* si para todo $U \in \mathcal{U}$ y todo $x \in X$, existe $V \in \mathcal{U}$ simétrico tal que $V^2(x) \subseteq U(x)$.

Ejemplo 4.11. Existe un espacio casi-uniforme localmente simétrico $(X,\mathcal{U})$ y un filtro $\tau(\mathcal{U})$-convergente que no es $\mathcal{U}^*$-Cauchy.

Demostración. Sea $X = \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \colon n \in \mathbb{N}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $U_n = \Delta(X) \cup \{(0, \frac{1}{k}) \colon k > n\}$. Cada U_n es transitivo, pues $(0, y) \in U_n \circ U_n$ implica que existe z tal que $(0, z), (z, y) \in U_n$. Si $z = 0$, obviamente $(0, y) \in U_n$ y si $z \neq 0$, necesariamente $z = y$. En cualquier caso, $(0, y) \in U_n$. Si $(x, y) \in U_n \circ U_n$ con $x \neq 0$, existe z tal que $(x, z), (z, y) \in U_n$. En este caso $z = y$ y, por tanto, $(x, y) \in U_n$. La familia $\{U_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ es entonces base de una casi-uniformidad $\mathcal{U}$ en X. Para probar que $\mathcal{U}$ es localmente simétrica, hacemos los siguientes cálculos:

$$\begin{array}{rl} U_n\Big(\dfrac{1}{m}\Big) = \Big\{\dfrac{1}{m}\Big\} & U_n(0) = \Big\{0, \dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n+2}, \cdots\Big\} \\ U_n^{-1}(0) = \{0\} & U_n^{-1}\Big(\dfrac{1}{m}\Big) = \Big\{\dfrac{1}{m}, 0\Big\} \text{ si } m > n \\ U_n^{-1}\Big(\dfrac{1}{m}\Big) = \Big\{\dfrac{1}{m}\Big\} & \text{si } m \leq n \end{array}$$

Por tanto, $(U_n^{-1} \circ U_n)(0) = U_n(0)$ y

$$(U_n^{-1} \circ U_n)\Big(\frac{1}{m}\Big) = \begin{cases} \{\frac{1}{m}, 0\} & \text{si } m > n \\ \{\frac{1}{m}\} & \text{si } m \leq n \end{cases}$$

Esta última igualdad implica que $(U_m^{-1} \circ U_m)(\frac{1}{m}) = U_n(\frac{1}{m})$. Por tanto, $\mathcal{U}$ es una casi-uniformidad transitiva y localmente simétrica en X. El filtro de $\tau(\mathcal{U})$-vecindades de 0 no es $\mathcal{U}^*$-Cauchy, pues para cada vecindad B de 0, $B \times B - U_n \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Definición 4.12. [Comparar [12], 3.8] Un espacio pre-casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ se dice *completo* si todo filtro $\mathcal{U}$-Cauchy tiene un punto adherente. Si todo filtro $\mathcal{U}$-Cauchy converge, el espacio $(X,\mathcal{U})$ se dice *completo por convergencia*.

Definición 4.13. Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ filtros en X. Decimos que $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ se *mezclan* (en símbolos $\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{G}$), si $F \cap G \neq \emptyset$ para todo $F \in \mathcal{F}$ y para todo $G \in \mathcal{G}$.

Observación 4.14. a) Dos filtros $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ en un conjunto X son filtros que se mezclan si y sólo si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son subfiltros de un filtro $\mathcal{H}$ en X.

b) Si un filtro $\mathcal{F}$ en un espacio topológico se adhiere a un punto $p \in X$ (i.e., si $\mathcal{F} \mapsto p$) entonces $\mathcal{F}$ y el filtro de vecindades $\mathcal{F}_p$ son filtros que se mezclan.

Definición 4.15. Un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy $\mathcal{F}$ en un espacio pre-casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es *débilmente redondo* si para cada $L \in \mathcal{F}$, existe $V \in \mathcal{U}$, simétrico, tal que:

$$H(V) = \cup\{V(y) \colon V(y) \in \mathcal{F}\} \subseteq L.$$

Lema 4.16. Todo filtro débilmente redondo en un espacio pre-casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es $\mathcal{U}$-Cauchy minimal.

Demostración. Sea $\mathcal{F}$ un filtro débilmente redondo. Procediendo por contradicción, supongamos que existe un filtro $\mathcal{G}$, $\mathcal{U}$-Cauchy, tal que $\mathcal{G} \subsetneqq \mathcal{F}$.

Tomemos $L \in \mathcal{F} - \mathcal{G}$. Por hipótesis, existe un conector $V \in \mathcal{U}$, simétrico, tal que $H(V) = \cup\{V(y)\colon V(y) \in \mathcal{F}\} \subseteq L$. Sea $y_0 \in X$ tal que $V(y_0) \in \mathcal{G}$. Como $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, también $V(y_0) \in \mathcal{F}$. Pero entonces $V(y_0) \subseteq H(V) \subseteq L$ y $L \in \mathcal{G}$, una contradicción. □

Definición 4.17. Un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy $\mathcal{F}$ en un espacio pre-casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es *redondo* si para cada $L \in \mathcal{F}$, existe $V \in \mathcal{U}$, simétrico, tal que:

$$S^*_T(\mathcal{F}, V) = \cup\{V(y)\colon N \cap V(y) \neq \emptyset \ , \forall N \in \mathcal{F}\} \subseteq L$$

Observación 4.18. Todo filtro redondo $\mathcal{F}$ en un espacio pre-casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es débilmente redondo.

Demostración. $S^*_T(\eta, V) \supseteq H(V)$ □

Proposición 4.19. a) Dos filtros redondos que se mezclan $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ en un espacio pre-casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ coinciden.

b) Si p es un punto adherente de un filtro redondo $\mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ converge a p siempre que el filtro de vecindades $\mathcal{F}_p$ sea redondo.

c) Todo filtro de vecindades $\mathcal{F}_x$ en un espacio casi-uniforme localmente simétrico $(X,\mathcal{U})$ es redondo.

Demostración. c) Tomemos $U(x) \in \mathcal{F}_x$, con $U \in \mathcal{U}$. Sea $V \in \mathcal{U}$, V simétrico, tal que $V^3(x) \subseteq U(x)$. Sea $y \in X$ tal que $V(y) \cap L \neq \emptyset\ \forall L \in \mathcal{F}_x$, en particular, $V(y) \cap V(x) \neq \emptyset$. Elijamos un punto $z \in V(y) \cap V(x)$. Por tanto $(x,z),(z,y) \in V$. Por tanto $y \in V^2(x)$. Por tanto $V(y) \subseteq V^3(x) \subseteq U(x)$.

□

Proposición 4.20. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio casi-uniforme precompacto. Entonces todo filtro $\mathcal{U}$-Cauchy en X contiene un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy minimal.

Demostración. Si la proposición es falsa, existe una sucesión transfinita estrictamente decreciente $\{\mathcal{F}_i\colon i < \alpha\}$ de filtros $\mathcal{U}$-Cauchy, donde α es un ordinal límite y $\mathcal{F}^* = \bigcap\{\mathcal{F}_i\colon i < \alpha\}$ no es un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy. Obtendremos una contradicción si probamos que $\mathcal{F}^*$ es $\mathcal{U}$-Cauchy. Sea $U \in \mathcal{U}$ arbitrario y sea $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subseteq U$. Dado que $(X,\mathcal{U})$ es pre-compacto, existe un conjunto finito $\{y_1, y_2, \ldots, y_s\} \subseteq X$ tal que $X = \bigcup\limits_{j=1}^{s} V(y_j)$. Para cada $i < \alpha$, al menos un conjunto de la familia $\{U(y_1), U(y_2), \ldots, U(y_s)\}$ pertenece a $\mathcal{F}_i$. De hecho, ya que $\mathcal{F}_i$ es $\mathcal{U}$-Cauchy, existe un punto $z \in X$ tal que $V(z) \in \mathcal{F}_i$. Dado que $X = \bigcup\limits_{j=1}^{s} V(y_j)$, existe un índice k $(1 \leq k \leq s)$, tal que $z \in V(y_k)$. Entoncces $V(z) \subseteq V^2(y_k) \subseteq U(y_k)$ y $U(y_k) \in \mathcal{F}_i$. Para cada $j = 1, 2, \ldots, s$, sea $A_j = \{i < \alpha \colon U(y_j) \in \eta_i\}$. Si algún A_j es cofinal con α, entonces $U(y_j) \in \mathcal{F}^*$. Pero no puede suceder que ningún conjunto A_j sea cofinal con α porque en este caso cada A_j tiene un último elemento i_j y tomando i^* como el máximo de los $i_1, i_2, \ldots, i_s$, ninguno de los filtros $\mathcal{F}_i$, con $i^* < i < \alpha$ sería $\mathcal{U}$-Cauchy. Por lo tanto $\mathcal{F}^*$ es $\mathcal{U}$-Cauchy, lo cual es una contradicción. □

Definición 4.21. Un espacio $(X,\mathcal{U})$ T_0-pre-casi-uniforme, se dice *concreto* si todo filtro $\mathcal{U}$-Cauchy minimal es redondo y todo filtro $\tau_{\mathcal{U}}$ de vecindades es $\mathcal{U}$-Cauchy minimal.

Observación 4.22. a) Todo espacio pre-casi-uniforme concreto es T_2.

b) Todo espacio uniforme-T_0 $(X,\mathcal{U})$ es concreto.

Definición 4.23. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ pre-casi-uniformidades sobre un mismo conjunto X.

a) $(X,\mathcal{U})$ y $(X,\mathcal{V})$ son *similares* si $\tau_{\mathcal{U}} = \tau_{\mathcal{V}}$.

b) $(X,\mathcal{U})$ y $(X,\mathcal{V})$ son *comparables* si tienen los mismos filtros de Cauchy.

Ejemplo 4.24. Sea $\mathcal{U}_s$ la casi-uniformidad de Sorgenfrey sobre la recta real $\mathbb{R}$ and sea $\mathcal{U}_u$ la uniformidad usual sobre $\mathbb{R}$. Entonces $(\mathbb{R},\mathcal{U}_s)$ and $(\mathbb{R},\mathcal{U}_u)$ son comparables pero no son similares.

Ejemplo 4.25. Sea d una métrica totalmente acotada sobre $\mathbb{R}$ equivalente a la métrica usual d_u. Entonces $(\mathbb{R},\mathcal{U}_d)$ y $(\mathbb{R},\mathcal{U}_{d_u})$ son similares pero no son comparables, puesto que todos los ultrafiltros sobre $\mathbb{R}$ son $\mathcal{U}_d$-Cauchy pero no todos ellos son $\mathcal{U}_{d_u}$-Cauchy (véase [12], 3.14 (a)).

Observación 4.26. Sean $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ pre-casi-uniformidades similares sobre un mismo conjunto X. Si $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ es completo por convergencia, entonces $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son comparables.

Ahora probaremos que todo espacio pre-casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ tiene una extensión $\widehat{(X,\mathcal{U})}$ donde cada filtro $\widehat{\mathcal{U}}$-Cauchy minimal es un filtro de $\tau_{\widehat{\mathcal{U}}}$-vecindades.

Teorema 4.27. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio pre-casi-uniforme arbitrario. Entonces $(X,\mathcal{U})$ tiene una extensión pre-casi-uniforme $\widehat{(X,\mathcal{U})}$ donde todo filtro $\widehat{\mathcal{U}}$-Cauchy minimal es convergente y, por lo tanto, es un filtro de $\tau_{\widehat{\mathcal{U}}}$- vecindades.

Demostración. Sea Z la familia de los filtros $\mathcal{U}$-Cauchy minimales no convergentes en $(X,\mathcal{U})$ y sea $\widehat{X} = X \cup Z$ (unión disjunta). Para cada $A \subseteq X$, sea $\widehat{A} = \operatorname{int} A \cup \{\xi \in Z \colon A \in \xi\}$. Es claro que para todo par A, B de subconjuntos de X, se tiene que $\widehat{(A \cap B)} = \widehat{A} \cap \widehat{B}$ y $\widehat{A} \subseteq \widehat{B}$ cuando $A \subseteq B$. Si $\xi \in Z$, consideremos la familia ξ_0 de todas las posibles intersecciones del tipo:

$$\operatorname{int} U_1(x_1) \cap \operatorname{int} U_2(x_2) \cap \cdots \cap \operatorname{int} U_k(x_k)$$

donde $U_1, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$, $x_1, \ldots, x_k \in X$ y cada $\operatorname{int} U_i(x_i) \in \xi$. Es claro que $\mathcal{F}(\xi_0) = \{L \subseteq X \colon \text{para algún } M \in \xi_0, M \subseteq L\}$ es un subfiltro $\mathcal{U}$-Cauchy de ξ. Dado que ξ es $\mathcal{U}$-Cauchy minimal, se tiene que $\xi = \mathcal{F}(\xi_0)$. Por lo tanto, si $L \in \xi$, también $\operatorname{int} L \in \xi$. Observe que para cada $A \subseteq X$, tenemos que $\widehat{A} \cap X = \operatorname{int} A$.

Sea $U \in \mathcal{U}$. Una función $g\colon \widehat{X} \to \mathcal{P}(X)$ es *U-selectiva* si para cada $x \in X$, $g(x) = U(x)$ y para cada $\xi \in Z$, $g(\xi) = U(y)$, donde $y \in X$ es tal que $U(y) \in \xi$. Si $U \in \mathcal{U}$ y g es U-selectiva, definimos la cubierta indicada:

$$\{S(U,g)(\xi)\colon \xi \in \widehat{X}\}$$

donde $S(U,g)(\xi) = g(\xi)\widehat{}$ para cada $\xi \in \widehat{X}$. Consideremos el filtro $\widehat{\mathcal{U}}$ de conectores de $\widehat{X}$ generado por todos los conectores de la forma:

$$S(U,g) = \bigcup_{\xi \in \widehat{X}} \{\xi\} \times S(U,g)(\xi).$$

Debemos probar que $\widehat{\mathcal{U}}$ es una pre-casi-uniformidad sobre $\widehat{X}$. De hecho, vamos a probar que la familia $\mathcal{G} = \{U(x)\widehat{}\colon U \in \mathcal{U}, x \in X\}$ es una sub-base de $\tau_{\widehat{\mathcal{U}}}$. Llamemos $\mathcal{T}$ la topología de $\widehat{X}$ generada por la familia $\mathcal{G}$. Si $\xi' \in S(U,g)(\xi)$, tenemos $\xi' \in g(\xi)\widehat{} \in \mathcal{G}$ y por lo tanto $\tau_{\widehat{\mathcal{U}}} \subseteq \mathcal{T}$. Por otro lado, cada $U(y)\widehat{}$ es de la forma:

$$U(y)\widehat{} = S(U,g)(\xi)$$

para algún $\xi \in U(y)\widehat{}$ y alguna función U-selectiva g, de modo que $\mathcal{T} \subseteq \tau_{\widehat{\mathcal{U}}}$. Hemos probado entonces que $\tau_{\widehat{\mathcal{U}}} = \mathcal{T}$. Esto implica que $\widehat{\mathcal{U}}$ es una pre-casi-uniformidad sobre $\widehat{X}$. También tenemos la fórmula:

$$S(U,g) \cap (X \times X) = U$$

y por lo tanto $(X,\mathcal{U})\widehat{}$ es una extensión pre-casi-uniforme de $(X,\mathcal{U})$.

Tomemos ahora un filtro $\widehat{U}$-Cauchy $\mathcal{F}$ en $\widehat{X}$. Definamos:

$$\mathcal{F}_0 = \{A \subseteq X\colon \widehat{A} \in \mathcal{F}\}.$$

Es claro que $\mathcal{F}_0$ es un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy en X. De aquí se deduce que si $\mathcal{F}$ es un filtro $\widehat{\mathcal{U}}$-Cauchy minimal, entonces $\mathcal{F}_0$ es un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy minimal. Si tomamos un elemento típico $U_1(x_1) \cap \cdots \cap U_k(x_k) \in \mathcal{F}_0$, donde cada $U_i(x_i) \in \mathcal{F}_0$, tenemos $\mathcal{F}_0 \in U_1(x_1)\widehat{} \cap \cdots \cap U_k(x_k)\widehat{}$. Por lo tanto, todo filtro $\widehat{\mathcal{U}}$-Cauchy minimal en $\widehat{X}$ es un filtro de $\tau_{\widehat{\mathcal{U}}}$-vecindades y la prueba es completada. □

Probaremos ahora algunas propiedades del espacio pre-casi-uniforme $(X,\mathcal{U})\widehat{}$.

Proposición 4.28. Siempre que $U \in \mathcal{U}$, $x_1, x_2, \ldots, x_m \in X$ y $\widehat{X} = U(x_1)\widehat{} \cup U(x_2)\widehat{} \cup \cdots \cup U(x_m)\widehat{}$, el conector simétrico $E = \bigcup_{i=1}^{m} U^2(x_i)\widehat{} \times U^2(x_i)\widehat{}$ pertenece a $\widehat{\mathcal{U}}$.

Demostración. Definamos una función U-selectiva $g\colon \widehat{X} \to \mathcal{P}(X)$ como sigue: if $\xi \in Z$, $g(\xi) = U(x_i)$, donde i es el primer índice tal que $\xi \in U(x_i)\widehat{}$.Vamos a probar la inclusión $S(U,g) \subseteq E$. Si $x \in X$ e i es el primer índice tal que $x \in U(x_i)\widehat{}$, tenemos $x \in U(x_i)$ y por lo tanto $U(x) \subseteq U^2(x_i)$. De donde, tanto cuando $(x,y) \in U = S(U,g) \cap (X \times X)$, $U^2(x_i)$ es una vecindad común de x e y y por consiguiente $U \subseteq E$. Si $(x,\xi) \in S(U,g)$, cuando $x \in X$ y $\xi \in Z$, entonces $U(x) \in \xi$ y $U(x)$ es una $\tau_{\mathcal{U}}$-vecindad de X. Obtenemos, como antes $(x,\xi) \in U^2(x_i)\widehat{\ } \times U^2(x_i)\widehat{\ } \subseteq E$. Si $\xi \in Z$ y el par (ξ,ξ') pertenece a $S(U,g)$, tenemos que $U(x_i) \in \xi \cap \xi'$. Dado que $U(x_i) \subseteq U^2(x_i)$, se tiene que $(\xi,\xi') \in U^2(x_i)\widehat{\ } \times U^2(x_i)\widehat{\ } \subseteq E$. Esto implica que $E \in \widehat{\mathcal{U}}$. $\square$

Proposición 4.29. $(X,\mathcal{U})\widehat{\ }$ es completo por convergencia si y sólo si todo filtro $\mathcal{U}$-Cauchy no convergente contiene un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy minimal.

Demostración. Supongamos primero que $(X,\mathcal{U})\widehat{\ }$ es completo por convergencia y sea $\mathcal{M}$ un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy no convergente. Si $\mathcal{F} = \{\widehat{M} \colon M \in \mathcal{M}\}$, $\mathcal{F}$ es $\widehat{\mathcal{U}}$-Cauchy. En efecto, si $U \in \mathcal{U}$ y g es una función U-selectiva arbitraria, tenemos un elemento $x \in X$ tal que $U(x) \in \mathcal{M}$ y por lo tanto $S(U,g)(x) = U(x)\widehat{\ } \in \mathcal{F}$. Por tanto, $\mathcal{F}$ converge a un punto $\xi \in Z$ y ξ es un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy minimal contenido en $\mathcal{M}$.

Supongamos ahora que todo filtro $\mathcal{U}$-Cauchy no convergente contiene un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy minimal y sea $\mathcal{F}$ un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy. Sea $\mathcal{F}_0 = \{A \subseteq X \colon \widehat{A} \in \eta\}$. Si para algún $x \in X$, $\mathcal{F}_0 \to x$ también $\mathcal{F} \to x$. Si $\mathcal{F}_0$ es no convergente, entonces $\mathcal{F}_0$ contiene un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy minimal $\mathcal{F}'$, donde $\mathcal{F}' \in Z$. Entonces $\mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ y $(X,\mathcal{U})\widehat{\ }$ es completo por convergencia. $\square$

Proposición 4.30. $(X,\mathcal{U})\widehat{\ }$ es completo por adherencia si y sólo si todo filtro $\mathcal{U}$-Cauchy no adherente se mezcla con un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy minimal.

Demostración. Supongamos primero que $(X,\mathcal{U})\widehat{\ }$ es completo por adherencia y sea $\mathcal{F}_0$ un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy no adherente. Si $\mathcal{F} = \{\widehat{A} \colon A \in \mathcal{F}_0\}$, entonces $\mathcal{F}$ es un filtro $\widehat{\mathcal{U}}$-Cauchy. Por hipótesis, existe un punto $z \in \widehat{X}$ tal que $\mathcal{F} \mapsto z$. Dado que $\mathcal{F}_0$ es no adherente, $z \in Z$. Por lo tanto, $\mathcal{F}$ se mezcla con el filtro de $\tau_{\widehat{\mathcal{U}}}$-vecindades de z. Esto implica que $\mathcal{F}_0$ se mezcla con el filtro $\mathcal{U}$-Cauchy minimal z.

Recíprocamente, supongamos que todo filtro $\mathcal{U}$-Cauchy no adherente $\mathcal{F}_0$ se mezcla con un filtro $\mathcal{U}$-Cauchy minimal ξ y sea $\mathcal{F}$ un filtro $\widehat{\mathcal{U}}$-Cauchy arbitrario. Si $\mathcal{F}_0 = \{A \subseteq X \colon \widehat{A} \in \mathcal{F}\}$ y si $\mathcal{F}_0 \mapsto x$ para algún $x \in X$, entonces también $\mathcal{F} \mapsto x$. Si $\mathcal{F}_0$ es no adherente, entonces existe $\xi \in Z$ tal que $\mathcal{F} \leftrightarrow \xi$. Entonces $\mathcal{F}$ se mezcla con el filtro de $\tau_{\widehat{\mathcal{U}}}$-vecindades de ξ, i.e., $\mathcal{F} \mapsto \xi$. Por lo tanto, $(X,\mathcal{U})\widehat{\ }$ es completo por adherencia. $\square$

Corolario 4.31. Si $(X,\mathcal{U})$ es un espacio pre-casi-uniforme concreto, entonces $(\widehat{X},\tau_{\widehat{\mathcal{U}}})$ es un espacio de Hausdorff.

Demostración. Esto es consecuencia de la proposición 4.19 a). $\square$

Definición 4.32. Un espacio pre-casi-uniforme concreto es *especial* si siempre que $\xi \in \widehat{X}$, $U \in \mathcal{U}$, $x \in X$ satisfacen que $U(x) \in \xi$, existe $T \in \mathcal{U}$, simétrico, y un $y \in X$ tal que $T(y) \in \xi$ y $T^2(y) \subseteq U(x)$.

Proposición 4.33. Si $(X,\mathcal{U})$ es concreto y $\mathcal{U}$ es una casi-uniformidad, entonces $(X,\mathcal{U})$ es especial.

Demostración. Sea $\xi \in \widehat{X}$, $U \in \mathcal{U}$, $x \in X$ que satisfacen que $U(x) \in \xi$. Dado que ξ es $\mathcal{U}$-redondo, existe un conector simétrico $W \in \mathcal{U}$ tal que $St^*(\xi, W) \subseteq U(x)$. Además como $\mathcal{U}$ es una casi-uniformidad, existe un conector $T \in \mathcal{U}$ tal que $T^2 \subseteq W$. Sea $p \in X$ tal que $T(p) \in \xi$. Dado que ξ es $\mathcal{U}$-redondo, podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que T es simétrico. Tenemos entonces $T^2(p) \subseteq W(p)$ y $W(p) \in \xi$. De lo anterior tenemos que $W(p) \subseteq St^*(\xi, W) \subseteq U(x)$. Por lo tanto $T^2(p) \subseteq U(x)$. $\square$

Teorema 4.34. Sea $(X,\mathcal{U})$ un espacio casi-uniforme pre-compacto y concreto. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $(X,\mathcal{U})\widehat{}$ es pre-compacto.

2. El espacio $(\widehat{X}, \tau_{\widehat{\mathcal{U}}})$ es compacto y T_2.

3. $\widehat{\mathcal{U}}$ contiene una uniformidad $\mathcal{U}_0$ tal que $\tau_{\widehat{\mathcal{U}}} = \tau_{\mathcal{U}_0}$.

4. $\mathcal{U}$ contiene una uniformidad $\mathcal{U}_0$ tal que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}_0$ son comparables y similares.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Por las proposiciones 4.20 y 4.29, $(X,\mathcal{U})\widehat{}$ es una completación por convergencia T_2 de $(X,\mathcal{U})$. Usando (1), concluimos que la topología $\tau_{\widehat{\mathcal{U}}}$ es compacta y T_2.

(2) $\Rightarrow$ (3) La hipótesis implica que cualquier base anular en $(\widehat{X}, \tau_{\widehat{\mathcal{U}}})$ es una base de Wallman normal y por lo tanto ella genera un única uniformidad $\overline{\mathcal{U}}_0$ en $\widehat{X}$ compatible con $\tau_{\widehat{\mathcal{U}}}$.

Para continuar con la demostración de (2) $\Rightarrow$ (3) probaremos primero los siguientes tres lemas:

Lema 4.35. Para cada cubierta finita $\widehat{X} = H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n$, donde $H_i = U_{i1}(x_{i1})\widehat{} \cap U_{i2}(x_{i2})\widehat{} \cap \cdots \cap U_{ik_i}(x_{ik_i})\widehat{}$ $(U_{ij} \in \mathcal{U}, x_{ij} \in X\ \forall i,j)$, definamos $G_i = U^2_{i1}(x_{i1})\widehat{} \cap U^2_{i2}(x_{i2})\widehat{} \cap \cdots \cap U^2_{ik_i}(x_{ik_i})\widehat{}$. Entonces el conector simétrico $\bigcup_{i=1}^{n} G_i \times G_i$ pertenece a $\widehat{\mathcal{U}}$.

Demostración. Definamos la función U_{ij}-selectiva g_{ij} como sigue:

$$g_{ij}(\xi) = U_{ij}(x_{ij})$$

si $\xi \notin X$ e i es el índice más pequeño tal que $\xi \in H_i$. Naturalmente, $g_{ij}(\xi) = U_{ij}(x)$ si $\xi \in X$. Afirmamos que $\bigcap_{i,j} S(U_{ij}, g_{ij}) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (G_i \times G_i)$. Tomemos entonces un par $(\xi, \xi') \in \bigcap_{i,j} S(U_{ij}, g_{ij})$. Por lo tanto $g_{ij}(\xi) = U_{ij}(x_{ij})$ si $\xi \notin X$ y $g_{ij}(x) = U_{ij}(x)$, if $\xi = x \in X$. En el primer caso:

$$(\xi, \xi') \in U_{ij}(x_{ij})\widehat{} \times U_{ij}(x_{ij})\widehat{} \subseteq U^2_{ij}(x_{ij})\widehat{} \times U^2_{ij}(x_{ij})\widehat{} \quad \forall j = 1, 2, \ldots, k_i,$$

y por lo tanto $(\xi, \xi') \in G_i \times G_i$. Si $\xi \in X$, afirmamos que $\xi = x \in X$,

$$(\xi, \xi') \in U_{ij}(x)\widehat{} \times U_{ij}(x)\widehat{}.$$

Dado también que $U_{ij}(x_{ij}) \in \xi = x$, tenemos que $x \in U_{ij}(x_{ij})$ y por lo tanto $U_{ij}(x) \subseteq U^2_{ij}(x_{ij})$ y $(\xi, \xi') \in G_i \times G_i$. $\square$

Corolario 4.36. Sea $\overline{\mathcal{U}}_0$ el filtro en $\widehat{X} \times \widehat{X}$ generado por todos los conectores simétricos del tipo $\bigcup_{i=1}^{n}(G_i \times G_i)$. Entonces $\tau_{\overline{\mathcal{U}}_0}$ es una topología compacta contenida en $\tau_{\widehat{\mathcal{U}}}$.

Demostración. Sólo tenemos que observar que la función identidad $id\colon (\widehat{X}, \widehat{\mathcal{U}}) \to (\widehat{X}, \overline{\mathcal{U}}_0)$ es uniformemente continua. □

Lema 4.37. $\{\widehat{U^2(x)}\colon U \in \mathcal{U}, x \in X\}$ es una sub-base de $\tau_{\overline{\mathcal{U}}_0}$

Demostración. Sean $\xi \in \widehat{U^2(x)}$, $\xi \in \widehat{X}$, $U \in \mathcal{U}$, $x \in X$. Si $\xi' \in \widehat{X}$, $\xi' \neq \xi$, los filtros ξ, ξ' tiene entonces elementos disjuntos $L \in \xi$, $L' \in \xi'$. Podemos suponer (ver Teorema 4.27) que $L = U_1(x_1) \cap U_2(x_2) \cap \cdots \cap U_k(x_k) \subseteq U^2(x)$ y $L' = V_1(y_1) \cap V_2(y_2) \cap \cdots \cap V_h(y_h)$, donde $U_i, V_j \in \mathcal{U}$, $x_i, y_j \in X$, $U_i(x_i) \in \xi, V_j(y_j) \in \xi'$ $\forall i, j$. Dado que $\mathcal{U}$ es especial, existen conectores simétricos $L_1, L_2, \ldots, L_k, M_1, M_2, \ldots, M_h \in \mathcal{U}$ y puntos $x'_1, x'_2, \ldots, x'_k, y'_1, y'_2, \ldots, y'_h \in X$ tales que $L_i^2(x'_i) \subseteq U_i(x_i), M_j^2(y'_j) \subseteq V_j(y_j)$ y con $L_i(x'_i) \in \xi$, $M_j(y'_j) \in \xi'$ $\forall i, j$. Como el conjunto $S = \widehat{X} - \bigcap_{i=1}^{k} \widehat{L_i(x'_i)}$ es compacto, podemos cubrir a S con un número finito de conjuntos de la forma $\widehat{W(z)}$ con el requerimiento extra que $\xi \notin \widehat{W^2(z)}$. Tenemos entonces la cubierta finita de $\widehat{X}$:

$$\alpha = \left\{\bigcap_{i=1}^{k} \widehat{L_i(x'_i)}\right\} \cup \{\widehat{W_s(z_s)}\colon s = 1, 2, \ldots, t\}.$$

Si

$$\beta = \left\{\bigcap_{i=1}^{k} \widehat{L_i^2(x'_i)}\right\} \cup \{\widehat{W_s^2(z_s)}\colon s = 1, 2, \ldots, t\},$$

Tenemos entonces:

$$St(\xi, \beta) = \bigcap_{i=1}^{k} \widehat{L_i^2(x'_i)} \subseteq \bigcap_{i=1}^{k} \widehat{U_i(x_i)} \subseteq \widehat{U^2(x)}.$$

□

Corolario 4.38. $\overline{\mathcal{U}}_0$ es una pre-uniformidad (i.e., una pre-casi-uniformidad con una base consistente de conectores simétricos)

Lema 4.39. La topología $\tau_{\overline{\mathcal{U}}_0}$ es Hausdorff.

Demostración. Tomemos $\xi, \xi' \in \tilde{X}$, $\xi \neq \xi'$. Razonando como en la prueba del lema 4.37, podemos encontrar elementos disjuntos $\bigcap_{i=1}^{k} L_i^2(x'_i) \in \xi$, $\bigcap_{j=1}^{h} M_j^2(y'_j) \in \xi'$. Por lo tanto $\xi \in \bigcap_{i=1}^{k} \widehat{L_i^2(x'_i)}$, $\xi' \in \bigcap_{j=1}^{h} \widehat{M_j^2(y'_j)}$ y $(\widehat{X}, \tau_{\overline{\mathcal{U}}_0})$ es T_2. □

Corolario 4.40. $\tau_{\widehat{\mathcal{U}}} = \tau_{\overline{\mathcal{U}}_0}$.

Con estos tres lemas, se completa la prueba de (2) $\Rightarrow$ (3).

(3) $\Rightarrow$ (4). Sea $\mathcal{U}_0 = \overline{\mathcal{U}}_0|X$. Dado que $\overline{\mathcal{U}}_0 \subseteq \widehat{\mathcal{U}}$, tenemos que $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$. Por la observación 4.26, $\widehat{\mathcal{U}}$ y $\overline{\mathcal{U}}_0$ tienen los mismos filtros de Cauchy. Deducimos entonces que $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}_0$ son similares y comparables.

(4) $\Rightarrow$ (1). Dado que $(X,\mathcal{U})$ es pre-compacto y $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$, $\mathcal{U}_0$ es también pre-compacto. Como $\mathcal{U}$ y $\mathcal{U}_0$ son similares y comparables, la completación canónica $(X,\mathcal{U})\widehat{}$ y la completación uniforme $(X,\mathcal{U}_0)\widehat{}$ son idénticas como espacios topológicos. Pero $(X,\mathcal{U}_0)\widehat{}$ es compacto y T_2. Por lo tanto la topología $\tau_{\widehat{\mathcal{U}}}$ es también compacta y T_2. En conclusión $(X,\mathcal{U})\widehat{}$ es precompacto. □

Ejemplo 4.41. *Una completación de la recta de Sorgenfrey* $(\mathbb{R},\mathcal{U}_s)$.

Sea $\eta(0)$ la colección de $\tau_{\mathcal{U}_s}$-vecindades del 0. Para cada $V \in \eta(0)$, consideremos la cubierta indicada:

$$\alpha_V = \{x + V : x \in \mathbb{R}\}.$$

Es claro que la familia de conectores $\{E(\alpha_V) : V \in \eta(0)\}$ es una base para $\mathcal{U}_s$. Claramente $\mathcal{U}_s$ contiene la uniformidad usual $\mathcal{U}_u$ de $\mathbb{R}$. Concluimos que $(\mathbb{R},\mathcal{U}_s)$ y $(\mathbb{R},\mathcal{U}_u)$ tienen los mismos filtros de Cauchy, es decir, los filtros convergentes en $(\mathbb{R},\mathcal{U}_u)$. Inferimos del teorema 4.27 que la completación canónica de $(\mathbb{R},\mathcal{U}_s)$ consiste de los filtros de $\mathcal{U}_s$-vecindades de puntos de $\mathbb{R}$ y los puntos al infinito son los filtros de $\mathcal{U}_u$-vecindades de puntos de $\mathbb{R}$. Ambas copias de $\mathbb{R}$ son disjuntas y la primera es densa en $(\mathbb{R},\mathcal{U}_s)\widehat{}$. Desafortunadamente, la topología de $(\mathbb{R},\mathcal{U}_s)\widehat{}$ no es homogenea, por lo que $(\mathbb{R},\mathcal{U}_s)\widehat{}$ no es un candidato para una completación de $(\mathbb{R},\mathcal{U}_s)$ como un grupo paratopológico.

Ejemplo 4.42. El espacio casi-uniforme $(X,\mathcal{U}^{-1})$, donde $\mathcal{U}$ es como en el ejemplo 4.11 no produce una compactificación $(X,\mathcal{U}^{-1})\widehat{}$.

Demostración. Si $(X,\mathcal{U}^{-1})\widehat{}$ fuera compacto, existiría una uniformidad $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}^{-1}$ tal que $\tau_{\mathcal{U}_0} = \tau_{\mathcal{U}^{-1}}$ y $\mathcal{U}_0, \mathcal{U}^{-1}$ tienen los mismos filtros de Cauchy.

El filtro convergente η contiene el filtro de $\tau_{\mathcal{U}}$-vecindades de un punto $x \in X$. Dado que $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$, η es también $\mathcal{U}_0$-Cauchy. Pero entonces η es $\mathcal{U}^{-1}$-Cauchy, lo cual es una contradicción. □

Conclusiones y perspectivas

Hemos demostrado en esta tesis que todo espacio pre-casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$, tiene una extensión canónica $\widehat{(X,\mathcal{U})}$, con un tipo débil de completez en el que todo filtro minimal $\widehat{\mathcal{U}}$-Cauchy es un filtro de $\tau_{\widehat{\mathcal{U}}}$-vecindades.

La completez clásica de esta extensión se obtiene si y sólo si todo filtro $\mathcal{U}$-Cauchy en el espacio original contiene un subfiltro minimal $\mathcal{U}$-Cauchy.

Falta un estudio que decida cuándo la extensión canónica $\widehat{(X,\mathcal{U})}$, de un espacio casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ sea también un espacio casi-uniforme.

La precompacidad del espacio original implica que la extensión canónica sea completa por convergencia. Sería interesante encontrar otras condiciones en el espacio original para que esto suceda. Tal vez cuando la pre-casi-uniformidad original sea punto simétrica o localmente simétrica se logre esta meta.

No conocemos si otras propiedades como la equinormalidad o la propiedad de Lebesgue produzcan propiedades parecidas en la extensión canónica.

Algunos problemas

En el siguiente apartado se enuncian algunos problemas, que los autores encontraron en la revisión de la literatura y en la realización de este proyecto.

Problema 1:

[Ver [31]] ¿ Es todo espacio topológico (X,τ), T_1, cuya topología es la única base anular, hereditariamente compacto ?

Resultado:

Se puede ver en ([31], proposición 2.4) que este problema tiene una solución positiva si todo punto de X es un conjunto G_δ.

Definición 4.43 ([12])**.** Una casi-uniformidad $\mathcal{U}$ se dice *transitiva* si tiene una base $\mathcal{B}$ consistente de conectores transitivos (i.e. cada $B \in \mathcal{B}$ cumple que $B^2 = B$).

Un espacio topológico (X,τ) es llamado *transitivo* si la casi-uniformidad más fina compatible sobre X es transitiva.

Observación 4.44. Es conocido que la casi-uniformidad semi-continua $\mathcal{SC}$ de cualquier espacio topológico es transitiva (ver [12], corolario 2.13).

Muchas preguntas acerca de espacios transitivos que son fáciles de afirmar permanecen abiertos.

Problema 2:

[Ver [12], problema M] ¿ Son los espacios Hausdorff compactos transitivos ?

Resultado:

Podemos ver en ([31]) que los espacios hereditariamente compactos son transitivos.

Problema 3:

[Ver [12], problema P] ¿ Son los espacios no arquimedianamente casi-seudo-metrizables transitivos ?

Definición 4.45. Una colección $\mathcal{B}$ de subconjuntos de un espacio topológico (X, τ) es una *red* si para cada conjunto abierto G de X y cada punto $x \in G$, existe $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B \subseteq G$.

Observación 4.46. Parece que no se sabe si todo espacio topológico (X, τ) con una base σ-disjunta es transitiva. Sin embargo, se demuestra en ([31]) que todo espacio no arquimedianamente casi-seudo-metrizable con una red σ-localmente finita es transitiva. Por otra parte, los espacios topológicos con una red numerable son transitivos (ver [31]).

Definición 4.47. Un filtro $\mathcal{U}$ de conectores sobre un conjunto $X \neq \emptyset$, se dice *casi-uniformidad local*, si para cualquier $x \in X$ y $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2(x) \subseteq U(x)$.

Definición 4.48. Un espacio T_1, (X, τ) es llamado:

- *desarrollable*, si existe una sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de cubiertas abiertas de X tal que si $x \in X$ y G es un conjunto abierto que contiene a x, entonces existe un $n \in \mathbb{N}$ yal que $St(x, \mathcal{G}_n) \subseteq G$. Un espacio desarrollable regular es llamado un *espacio Moore*.

- *monotónicamente normal*, si a cada par de subconjuntos cerrados disjuntos de X, podemos asignar un conjunto abierto D(H,K) tal que:

  i) $H \subseteq D(H, K) \subseteq \overline{D(H, K)} \subseteq X \setminus K$;

  ii) si $H \subseteq H'$ y $K \supseteq K'$, entonces $D(H, K) \subseteq D(H', K')$.

- *γ-espacio* si posee una casi-uniformidad local con una base numerable. Cada espacio casi-metrizable es un γ-espacio. El recíproco no se cumple (ver [14]).

Problema 4:

a) [[12], Problema R] ¿ Son los espacios casi-metrizables de Moore no arquimedianamente casi-metrizables?

b) [[12], Problema R] ¿ Son los espacios de Moore transitivos?

c) ¿ Son los espacios monotónicamente normales transitivos?

d) ¿ Es la imagen (continua) compacto abierta de cualquier espacio transitivo transitiva?

Definición 4.49. Un espacio topológico (X, τ) es llamado *submetalindelöf*, si toda cubierta abierta de X tiene una sucesión $\{\mathcal{G}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de refinamientos abiertos tal que para cada $x \in X$, existe un $n \in \mathbb{N}$, con $ord(x, \mathcal{G}_n) \leq \omega_0$.

Problema 5:

¿ Es todo γ-espacio localmente compacto (no arquimedianamente) casi-metrizable?

Resultado:

[Ver [33]]

- Cada espacio submetalindelöf regular es un espacio de Moore no arquimedianamente casi-metrizable.
- Cada γ-espacio localmente compacto cero-dimensional es no arquimedianamente casi-metrizable.

Definición 4.50 (ver [30])**.** Un *bi-espacio* (X, τ, τ'), es una terna consistente de un conjunto $X \neq \emptyset$ equipado con dos topologías τ y τ'. Es llamado *completamente regular* si existe una casi-uniformidad $\mathcal{U}$ sobre X tal que $\tau_{\mathcal{U}} = \tau$ y $\tau_{\mathcal{U}^{-1}} = \tau'$. Un bi-espacio completamente regular es llamado *fuertemente cero-dimensional*, si su casi-uniformidad más fina totalmente acotada es transitiva. Se observa en ([30], proposición 4) que la casi-uniformidad más fina compatible sobre un bi-espacio no arquimedianamente casi-seudo-metrizable es transitiva.

Problema 6:

a) Caracterizar aquellos bi-espacios fuertemente cero-dimensionales cuya casi-uniformidad más fina compatible es transitiva.

b) Sea (X, τ, τ') un bi-espacio casi-seudo-metrizable fuertemente cero-dimensional tal que sus dos topologías son no arquimedianamente casi-seudo-metrizables. ¿ Es (X, τ, τ') no arquimedianamente casi-seudo-metrizable?

Observación 4.51. Por (ver [33], proposición 3), la casi-uniformidad más fina compatible sobre un bi-espacio fuertemente cero-dimensional (X, τ, τ') es transitiva, si cada colección finita de conjuntos abiertos en el espacio topológico $(X, \tau \vee \tau')$ es numerable.

Resultado:

[Ver [33], proposición 5] La parte b) del problema anterior, tiene una respuesta positiva si las dos topologías de X tienen una base σ-punto finita.

Observación 4.52. Algunas preguntas abiertas sobre casi-uniformidades transitivas, están relacionadas con problemas básicos en la teoría de cubiertas abiertas de espacios topológicos.

Definición 4.53. Un espacio topológico (X, τ) es llamado:

- *σ-ortocompacto*, si para cualquier cubierta $\mathcal{C}$ de X, existe una sucesión $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de covecindades transitivas de X tal que para cada $x \in X$, existe un $n \in \mathbb{N}$ y un $C \in \mathcal{C}$ con $T_n(x) \subseteq C$.

- *débilmente Lindelöf*, si cada cubierta abierta $\mathcal{C}$ de X tiene una subfamilia numerable cuya unión es densa en X.

- *numerablemente punto-estrella preortocompacto*, si para toda cubierta abierta numerable $\mathcal{C}$ de X, existe una covecindad V de X tal que $V^2(x) \subseteq St(x, \mathcal{C})$ cuando $x \in X$.

- *a lo más preortocompacto* (= 2 completamente preortocompacto (ver [32])), si para cada cubierta abierta $\mathcal{C}$ de X existe una covecindad V de X tal que si $x \in X$, $a \in V^2(x)$ y $b \in V(x)$, entonces $\{a, b\} \subseteq C$ para algún $C \in \mathcal{C}$.

- *p-espacio*, si la intersección de cualquier colección numerable de conjuntos abiertos es abierta.

Problema 7:

[[12], Problema I, p. 102] ¿ Es todo espacio topológico numerablemente ortocompacto σ-ortocompacto un espacio ortocompacto?

Resultados parciales:

- Todo espacio metacompacto σ-ortocompacto es ortocompacto. Por lo tanto todo espacio T_1 separable numerablemente ortocompacto σ-ortocompacto es ortocompacto (ver [[12], Proposición 5.9 y 5.13]).

- Todo espacio regular débilmente Lindelöf numerablemente punto-estrella preortocompacto es numerablemente metacompacto (ver [[34]]).

- El espacio X' de los puntos no aislados de un espacio a lo más preortocompacto X con diagonal G_δ es numerablemente metacompacto (ver [[34]]).

- Un espacio normal a lo más preortocompacto con diagonal G_δ es numerablemente paracompacto. Cada P-espacio σ-ortocompacto es orthocompacto (ver [[34]]).

Observación 4.54. Otro criterio útil para mostrar que ciertos espacios no admiten casi-uniformidades completas se establecen en (ver [34], proposición 3.2). El siguiente problema, sin embargo aún continua abierto.

Problema 8:

(ver [9])¿ Es la casi-uniformidad fina de todo espacio casi-seudo-metrizable (regular) completa?

Definición 4.55. (ver [12]) Un espacio casi-uniforme $(X,\mathcal{U})$ es llamado *bi-completo*, si su uniformidad $\mathcal{U}^*$ es completa.

Observación 4.56. La casi-uniformidad fina de la topología cofinita sobre un conjunto no numerable no es bi-completa. Aquellos espacios topológicos que tienen una casi-uniformidad semi-continua bi-completa son caracterizados en [9], proposición 8. Entre otras cosas se prueba en ([9]) que la casi-uniformidad semi-continua de un espacio casi-sober hereditariamente numerablemente metacompacto X es bi-completa si y sólo si X es hereditariamente cerrada y completa. Además la casi-uniformidad semi-continua de cualquier espacio completamente regular hereditariamente realcompacto se demuestra que es bi-completa.

Problema 9:

a) [[9]]¿ Es la casi-uniformidad fina de un espacio topológico completa (bi-completa) si y sólo si su casi-uniformidad transitiva fina es completa (bi-completa).

b) [[48]] ¿ Qué espacios casi-seudo-metrizables admiten casi-seudo-métricas bi-completas?

Bibliografía

[1] Andrikopoulos. A., *Completeness in quasi-uniform spaces.* Acta Math. Hungar. **105(1-2)** (2004), 151-173.

[2] Barnhill. C y Fletcher. P., *Topological spaces with a unique compatible quasi-uniform structure*. Arch Math. **XXI** (1970), 206-209.

[3] Császar. Á., *A new results on quasi-uniform extension*. Rend. Ist.Mat. Univ. Trieste, **30** (1999), 75-85.

[4] Császar. Á., *Fondements de la topologie générale*. Budapest-Paris, 1960.

[5] Deák. J., *A survey of compatible extensions (presenting 77 unsolved problems)*. Colloq. Math. Soc. János Bolyai 55, Top., Pécs (Hungary), (1989), 127-175.

[6] Deák. J., *Extending a quasi-metric*. Studia Sci. Math. Hungar., **28**, (1993), 105-113.

[7] Deák. J., *Short notes on quasi-uniform spaces. V properties preserved by extensions.* Acta Math. Hungar.**79**(3)(1998), 169-177.

[8] Engelking. R., *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[9] Ferrario. N and Künzi. H.-P., *Bicompleteness of the fine quasi-uniformity*. Math. Proc. Camb. Phill. Soc.**109**(1991), 167-186.

[10] Fletcher. P and Lindgren. W., *A construction of the pair completion of a quasi-uniform spaces*, Canad. Math. Bull. **21**(1978), 53-59.

[11] Fletcher. P and Lindgren. W., *C-complete quasi-uniform spaces.* Acta Math. Hungar.**30**(1978), 175-180.

[12] Fletcher. P and Lindgren. W., *Quasi-uniform spaces.* Lecture Notes in Pure and Appl. Math.,**Vol 77**, Marcel Dekker Inc., New York, 1982.

[13] Fox. R., *Solution of the γ-space problem*, Proc. Amer. Math. Soc., **85** (1982), 606-608.

[14] Fox. R. and Kofner. J, *A regular counterexample to the γ-space conjecture*, Proc. Amer. Math. Soc. **94**(1985), 502-506.

[15] A. García-Máynez, y A. Tamariz., *Topología General*, Editorial Porrúa, S. A., México, 1988.

[16] García-Maynez. A and Mancio-Toledo. R., *Completions of pre-uniform spaces.* Applied General Topology.**8**, No. 2, (2007), 213-221.

[17] García-Maynez. A and Pimienta Acosta. A, *Annular Bases and Transitive Quasi-Proximities*, Applied General Topology: Aceptado.

[18] García-Maynez. A and Pimienta Acosta. A, *Completion of pre-quasi-uniform spaces.* Topology and its Applications: Aceptado.

[19] Gillman. L. y Jerison. M., *Rings of Continuous Functions*, Springer Verlag, Berlin, 1976.

[20] Hausdorff. F., *Grundzüge der Mengenlehre*, Leipzig, 1914.

[21] Hunsaker. W y Fletcher. P., *Construction of quasi-uniformities*, Math. Ann.**188**,(1970), 39-42.

[22] Jafari. S, Latif. R y Moshokoa. S., *A note on generalized topological spaces and preorder*, Cubo a Mathematical Journal.**2**, No. 2, (2010), 123-126.

[23] Junnila. H., *Neighbornets*, Pacific. J. Math. **76**,(1978), 83-108.

[24] Kelley. J., *General Topology*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[25] Kofner. J., *Δ-metrizable spaces.* (Russian). Mat. Zametki **13** (1973), 277-287; (Translation=Math. Notes **13** (1973), 168-174).

[26] Kofner. J., *Transitivity and the γ-space conjecture in ordered spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **81** (1981), 629-635.

[27] Kofner. J., *On quasi-metrizability*, Top. Proc. **5** (1980), 111-138.

[28] Künzi. H.-P., *An introduction quasi-uniform spaces*, Contemporary Math.**486**, (2009), 239-304.

[29] Künzi. H.-P., *Quasi-uniform spaces-eleven years later*, Topology Proceeedings.**18**, (1993), 143-171.

[30] Künzi. H.-P., *Strongly zero-dimensional bispaces*, J. Austral. Math. Soc. (Series A)**53**, (1992), 327-337.

[31] Künzi. H.-P., *Some remarks on quasi-uniform spaces*, Glasgow Math Journal,**31** (1989), 309-320.

[32] Künzi. H.-P., *Generalizations of preorthocompactness*, Questions Answers Gen. Topology.**4** (1986), 15-35.

[33] Künzi. H.-P., *Topological spaces with a unique compatible quasi-proximity*, Arch. Math., **43**, (1984), 559-561.

[34] Künzi. H.-P., *Kelley's conjecture and preorthocompactness*, Top. Appl., **26**, (1987), 13-23.

[35] Lindgren. W., *Topological spaces with unique uniform structure*, Arch der Math.**XXII**, (1971), 417-419.

[36] Mancio-Toledo. R., *Los espacios pre-uniformes y sus completaciones*, Ph. D. Thesis, Universidad Nacional Autónoma de México, 2006.

[37] Morita. K., *On the simple extension of a space with respect to a uniformity, I, II, III and IV*. Proc. Japan Acad, **27** (1951), 65-72, 130-137, 166-171 and 632-636. **14** (1953), 68-69.

[38] Nachbin, L., *Sur les espaces uniformes ordonnés*, C.R. Acad. Sci. , Paris **226** (1948), 774-775.

[39] Nachbin, L., *Topology and Order*, D. van Nostrand, Princenton, 1965.

[40] Naipally. S and Warrack. B., *Promimity spaces*, Cambridge Tracts in Mathematical Physics, No. 59, Cambridge University Press, London-New York, 1970.

[41] Nauwelaerts, M., *The Cartesian closed topological hull of the category of (quasi)-uniform spaces (revisited)*, Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste, Suppl. 2 **XXXII**, (2001), 101-125 (2001).

[42] Nielsen. R y Sloyer. C., *Quasi-uniformizability*, Math. Ann,**182** (1969), 273-274.

[43] Pervin. W., *Quasi-proximities for topological spaces*, Math. Ann, **150** (1963), 325-326.

[44] Pervin. W., *Quasi-uniformization of topological spaces*, Math. Ann, **147** (1962), 316-317.

[45] Popa. E., *Completion of quasi-uniform spaces*, Math. Ann.**186**, (1970), 297-298.

[46] Reilly. I., *Quasi-gauge spaces*, J. London. Math. Soc. **6**, (1973), 481-487.

[47] Romaguera. S., *A new class of quasi-uniform spaces*, Mathematica Pannonica.**11/1** (2000), 17-28.

[48] Romaguera. S and Sslbany. S., *On bicomplete quasi-pseudo-metrizability*, Top. Appl.**50**, (1993), 283-289.

[49] Salbany. S., *Bitopological spaces, Compactifications and Completions*, Math. Monographs, No.**1**, Dept. Math. Univ. Cape Town, 1974.

[50] Sieber. J and Pervin. W., *completeness in quasi-uniform spaces*, Math. Ann, **158** (1965), 79-81.

[51] Steiner. E., *The relation between quasi-proximities and topological spaces*, Math. Ann. **155** (1964), 194-195.

[52] V. Tkachuk., *Curso Básico de Topología General*, Libros de texto, manuales de prácticas y antologias, Editorial UAM., México, 1999.

Índice alfabético