Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Límites Inductivos de Álgebras Topológicas

T E S I S

que presenta

Aura Carina Márquez Martínez

para obtener el grado de

Maestra en Ciencias Matemáticas

ASESORA:

Dra. Ma. de Lourdes Palacios Fabila

JURADO CALIFICADOR:

Dr. Slaviša Djordjević
Dra. Ma. de Lourdes Palacios Fabila
Dr. Richard Gordon Wilson Roberts

Ciudad de México, México.
20 de Abril de 2018

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Universidad Autónoma Metropolitana - Unidad Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

LÍMITES INDUCTIVOS DE ÁLGEBRAS TOPOLÓGICAS

T E S I S

que presenta

Aura Carina Márquez Martínez

para obtener el grado de

Maestra en Ciencias Matemáticas

ASESORA: Dra. Ma. de Lourdes Palacios Fabila

JURADO CALIFICADOR:

Presidente: Dr. Richard Gordon Wilson Roberts.
Departamento de Matemáticas, UAM-I.

Secretario: Dra. Ma. de Lourdes Palacios Fabila.
Departamento de Matemáticas, UAM-I.

Vocal: Dr. Slaviša Djordjević.
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, BUAP.

Ciudad de México, 20 de Abril de 2018.

Agradecimientos

A mi madre Graciela,
por su apoyo incondicional en todo momento, por sus enseñanzas, sus valores, por su motivación constante, lo que me ha permitido ser una persona de bien, por ser el pilar fundamental de lo que ahora soy, pero más que nada por su amor infinito.

A mi padre Juan,
por enseñarme que la vida no es fácil y que existen muchos motivos por los cuales debo salir adelante y superarme.

A mi hermano Jovanny,
por el cariño y los buenos momentos que pasamos juntos.

A mis abuelos Roberto y Guadalupe,
por ser siempre un ejemplo a seguir y estar a mi lado en todo momento, por su inigualable amor.

A Luis Roberto,
por ser mi compañero académico y de vida, por su cariño y amor.

A mis maestros Lourdes y Carlos,
por creer en mí, por su paciencia, su apoyo y sus conocimientos transmitidos.

Resumen

Los límites inductivos han sido estudiados por diversos autores y en diversas categorías, cada uno de ellos con su complejidad; sin embargo son muy utilizados pues hay algunas propiedades que se preservan a través de ellos, pero hay propiedades que no como por ejemplo el de ser de Hausdorff o de Fréchet.

En este trabajo presentamos y describimos con detalle e ilustramos con ejemplos las principales nociones y resultados relacionados con los límites inductivos en la categoría de los espacios vectoriales localmente convexos, espacios vectoriales bornológicos y en diferentes tipos de álgebras topológicas, a saber las localmente convexas y las localmente m-convexas.

Este trabajo está dividido en cinco capítulos.

En el capítulo 1 damos una breve introducción sobre la importancia de, en palabras del matemático Henri Hogbe Nlend, "A caminar sobre las dos piernas". Una la topología, otra la bornología.

En el capítulo 2 abordamos algunos de los conceptos, notaciones y propiedades básicas en espacios localmente convexos, así como en álgebras topológicas. Además en las correspondientes secciones introducimos el estudio de dualidad, el cual juega un papel importante en el desarrollo de la teoría de espacios localmente convexos, de los límites inductivos, las diferentes topologías convexas en los espacios duales caracterizadas por el teorema de Mackey-Arens, cuyo estudio requiere de elementos más profundos de topología general y a los espacios barrilados cuya noción es útil en muchos otros contextos. El material anteriormente mencionado es necesario para hablar ampliamente sobre límites inductivos en las diversas categorías abordadas en los próximos capítulos.

En el capítulo 3 nos dedicamos a estudiar los límites inductivos de espacios vectoriales topológicos. Se abordan los dos conceptos importantes para el desarrollo de esta tesis: la topología y la bornología, cuyo estudio ha permitido el avance de la investigación para los límites inductivos topológicos y bornológicos y posteriormente los límites inductivos de álgebras topológicas. Incluimos una descripción de las topologías límite inductivo (ó direc-

to) lineal topológico y algunas consideraciones sobre el límite proyectivo (ó inverso) lineal topológico. Los casos especiales de cocientes, productos y sumas directas de espacios localmente convexos los tratamos de forma particular, así como los resultados más importantes de permanencia de ciertas propiedades en los espacios localmente convexos bajo la formación de límites inductivos o proyectivos. Por ejemplo que todo límite inductivo de espacios barrilados es barrilado y que todo producto o suma directa de espacios completos es completo. Además introducimos las nociones básicas de bornología, espacios vectoriales bornológicos y morfismos lineales acotados, enfocándonos especialmente en una bornología de un espacio vectorial topológico, la bornología de Von Neumann-Kolmogorov. Entonces pasamos al concepto de nuestro interés, el límite inductivo bornológico y un caso especial; los espacios de Mackey, cuyas propiedades son muy bien preservadas mediante el límite directo o inductivo. Después hablamos de un tipo especial de límite, el límite inductivo estricto cuyas características permiten la preservación de propiedades como el ser de Hausdorff o el ser un espacio de Montel y con algunas hipótesis extra, la completitud o el ser un conjunto acotado en los factores así como en el límite. Finalmente en este capítulo se abordan algunos casos particulares de los límites inductivos lineales topológicos y ejemplos.

En el capítulo 4 estudiamos los límites inductivos en la categoría de álgebras topológicas, para ello introducimos la definición de límite inductivo en la categoría de álgebras, para después definirlo en álgebras topológicas. Un tipo de límite inductivo en esta categoría, estudiado por el estadounidense Seth L. Warner en el año de 1956, es el límite inductivo algebraico de álgebras localemente m-convexas, estudiamos las propiedades que se preservan mediante este límite. Además se hace una descripción detallada de cuando el límite inductivo topológico y el límite inductivo algebraico coinciden y cuya relación es importante para las topologías de ciertos espacios localmente convexos, por ejemplo en la teoría de distribuciones y la teoría de integración. Tratamos algunas álgebras especiales, álgebras que poseen propiedades análogas a los espacios vectoriales bornológicos: las i-bornológicas, las P-álgebras y las álgebras metrizables. Discutimos la extensión de propiedades i-bornológicas que se preservan mediante el limite inductivo algebraico en estas álgebras. Todo se ilustra mediante ejemplos. Posteriormente abordamos el límite inductivo de álgebras más generales; las álgebras localmente convexas, estudiado por el matemático italiano Alberto Arosio en el año de 1974. Aquí se proponemos un estudio reemplazando la m-convexidad por la convexidad. Enfatizamos sobre la falta de una hipótesis en uno de los resultados importantes para este tipo de límite y hacemos una serie de demostraciones originales para resultados que señalan la descomposición de ciertos límites inductivos en factores de álgebras más conocidas.

En el capítulo 5 estudiamos en detalle el álgebra $\mathscr{D}(P)$ de todas las funciones complejo valuadas infinitamente diferenciables de soporte compacto a modo de ilustración, pues es una de las álgebras más completas que posee propiedades que ejemplifican casi todos los conceptos y propiedades descritas en esta tesis. Además concluimos con un resultado importante, "el puente" entre la bornología y la topología mediante el límite inductivo, cuya demostración, aunque sencilla, es original.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Una construcción que se ha utilizado ampliamente en teoría de conjuntos, álgebra, topología y otras áreas de las matemáticas es la de límite inductivo o directo. Un caso especial importante de un límite inductivo es el límite inductivo de una familia dirigida de estructuras matemáticas del mismo tipo. Sin embargo, las preguntas comienzan a surgir cuando se conjuntan el álgebra lineal, el álgebra y la topología, entonces si partimos de un espacio vectorial y lo topologizamos de forma tal que las operaciones suma y multiplicación por escalar sean continuas y los morfismos lineales sean continuos, entonces nos trasladamos a los espacios vectoriales topológicos. Análogamente, si partimos de un álgebra dotada de una topología compatible con su estructura algebraica (i.e. las operaciones suma, multiplicación escalar son continuas y el producto es separadamente continuo) y los morfismos de álgebras son continuos, entonces nos trasladamos a la categoría de álgebras topológicas, cuyo estudio comenzó a desarrollarse durante la década de los cuarenta del siglo XX.

Es entonces cuando surge una teoría abundante sobre el estudio de los límites inductivos en estas dos clases, los espacios vectoriales topológicos, las álgebras topológicas y en otro tipo de espacios estudiados y caracterizados por el matemático camerunés Henri Hogbe Nlend en su obra *Bornologies and functional analysis* en el año de 1977 (ver [19]); a saber, los espacios vectoriales bornológicos. Además es importante señalar que para que muchas de las propiedades se mantengan mediante el límite inductivo es necesario que los conceptos: topología y bornología, vayan de la mano, esto lo cita Hogbe Nlend en 1971 en una de sus conferencias:

> *A cada tipo de problema le corresponde necesariamente un tipo apropiado de estructura. La bornología y la topología vectoriales son dos aspectos necesarios, distintos y complementarios, de una sola realidad. Utilizar de manera apropiada el uno o el otro es, a nuestro entender, como saber caminar sobre ambas piernas.*

Así es como nos internamos en el estudio de los límites inductivos tanto topológicos como bornológicos en las diferentes ramas de la matemática y el puente que pudiera haber entre la topología y la bornología mediante este concepto.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Espacios Vectoriales Topológicos

En esta sección introducimos algunos aspectos básicos de la teoría de espacios vectoriales topológicos .

Sea un espacio vectorial E sobre el campo $\mathbb{K}$ de los números reales o complejos. Es útil extender a subconjuntos de E la notación para combinaciones lineales de elementos. Usamos las siguientes notaciones:
Sean $x \in A$ y $A \subseteq E,\ x + A = \{x + y : y \in A\}$
Sean $A \subseteq E$ y $B \subseteq E,\ A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ y $A \subseteq E,\ \lambda A = \{\lambda x : x \in A\}$
Si $\mathscr{A}$ es un conjunto de subconjuntos de E, $x + \mathscr{A} = \{x + A : A \in \mathscr{A}\}$.

Observación 2.1.1. *El conjunto $A + A \neq 2A$. Por ejemplo si consideramos*

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \wedge -1 \leq x \leq 1 \text{ ó } x = 0 \wedge -1 \leq y \leq 1\}$$

obtenemos que

$$\begin{gathered} A + A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq \ y \ \leq 1\} \\ \neq 2A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \wedge -2 \leq x \leq 2 \text{ ó } x = 0 \wedge -2 \leq y \leq 2\} \end{gathered}$$

.

Definición 2.1.1. *Un subconjunto A de un espacio vectorial E es llamado **convexo** si $\lambda A + \mu A \subseteq A$ siempre que $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ y $\lambda + \mu = 1$ (en otras palabras, pedimos que $\lambda x + (1 - \lambda)y \in A$ para todo par $x, y \in A$ y todo $\lambda \in [0, 1]$).*

Definición 2.1.2. *Un subconjunto A de un espacio vectorial E es llamado **balanceado** si $\lambda A \subseteq A$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \leq 1$ (es decir, para todo $x \in A$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\lambda| \leq 1$,*

tenemos que $\lambda x \in A$).
Para cualquier subconjunto U de E, la ***envolvente balanceada*** *de U se define como*

$$bal\ (U) = \bigcup_{|\lambda|\leq 1} \lambda U,$$

$bal\ (U)$ es balanceado y es el mínimo balanceado que contiene a U.

Observación 2.1.2. *Es importante observar que para cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$bal\ (\gamma U) = \gamma\ bal\ (U)$$

ya que para $x \in bal\ (\gamma U)$ existe $|\lambda| \leq 1$ y $u \in U$ tales que $x = \lambda\gamma u$, si y sólo si $x = \gamma\lambda u$ si y sólo si $x \in \gamma\ bal\ (U)$.

Definición 2.1.3. *Un subconjunto A de un espacio vectorial E es llamado* ***absolutamente convexo*** *si es convexo y balanceado.*

Lema 2.1.1. *Un subconjunto A es absolutamente convexo si y sólo si para toda $x, y \in A$, $\lambda x + \mu y \in A$ cuando $|\lambda| + |\mu| \leq 1$.*

Demostración. Si $A \subseteq E$ satisface la propiedad anterior, entonces para $x, y \in A$ y $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ tales que $\lambda + \mu = 1$, se sigue como caso particular de la propiedad anterior que $\lambda x + \mu y \in A$, cuando $|\lambda| + |\mu| = \lambda + \mu = 1$, así A es convexo; ahora, si $\mu = 0$, $|\lambda| \leq 1$, por lo tanto para cualesquiera $x, y \in A$, tenemos que $\lambda x + \mu y = \lambda x \in A$, así A es balanceado.

Inversamente, si suponemos que A es absolutamente convexo, es decir, un subconjunto de E convexo y balanceado, sean $x, y \in A$ y $|\lambda| + |\mu| \leq 1$. Si $\lambda = 0$ o $\mu = 0$, entonces $\lambda x + \mu y \in A$, ya que A es balanceado. Si $\lambda \neq 0$ y $\mu \neq 0$, entonces $(\frac{\lambda}{|\lambda|})x \in A$, $(\frac{\mu}{|\mu|})y \in A$, ya que A es balanceado y $\frac{|\lambda|}{|\lambda|+|\mu|} + \frac{|\mu|}{|\lambda|+|\mu|} = 1$ así que,

$$\lambda x + \mu y = (|\lambda| + |\mu|)(\tfrac{|\lambda|}{|\lambda|+|\mu|}\tfrac{\lambda x}{|\lambda|} + \tfrac{|\mu|}{|\lambda|+|\mu|}\tfrac{\mu y}{|\mu|}) \in A$$

por ser A balanceado y convexo.

□

Se sigue inmediatamente de las definiciones que si A es convexo, entonces $x + \lambda A$ es convexo para cada $x \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$; si $x \in E$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, sean $x', y' \in x + \lambda A$ y $\alpha \geqslant 0, \mu \geqslant 0$ con $\alpha + \mu = 1$, entonces existen $u, v \in A$ tales que:

$$\alpha x' + \mu y' = \alpha(x + \lambda u) + \mu(x + \lambda v) = (\alpha + \mu)x + \lambda(\alpha u + \mu v) \in x + \lambda A.$$

Además si A y B son absolutamente convexos, entonces también lo son $A+B$ y λA, para cada $\lambda \in \mathbb{K}$. En efecto, sean $x, y \in A+B$ y $|\alpha|+|\mu| \leq 1$, entonces existen $a, a' \in A$ y $b, b' \in B$ tales que:

$$\alpha x + \mu y = \alpha(a+b) + \mu(a'+b') = (\alpha a + \mu a') + (\alpha b + \mu b') \in A+B.$$

Para $\lambda \in \mathbb{K}$, sean $x, y \in \lambda A$, y $|\alpha| + |\mu| \leq 1$,

$$\alpha x + \mu y = \alpha(\lambda a) + \mu(\lambda a') = \lambda(\alpha a + \mu a') \in \lambda A.$$

Algunas de las propiedades de la convexidad absoluta son resumidas en el siguiente

Lema 2.1.2. *Supongamos que A es un conjunto no vacío absolutamente convexo, entonces:*

i) $0 \in A$,

ii) $\lambda A \subseteq \mu A$ *siempre que* $|\lambda| \leqslant |\mu|$, *y*

iii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i A) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|\right) A$, *para toda* $\lambda_i \in \mathbb{K}$.

Demostración.

i) Sea $x \in A$; entonces $0 = \frac{1}{2}x + (-\frac{1}{2})x \in A$.

ii) Si $\mu = 0$, entonces $\lambda A = \mu A = 0$; si $\mu \neq 0$ y $x \in A$ entonces $|(\frac{\lambda}{\mu})| \leq 1$ y, como A es balanceado, tenemos que $(\frac{\lambda}{\mu})x \in A$. Por lo tanto $\lambda x \in \mu A$; entonces $\lambda A \subseteq \mu A$.

iii) Hacemos la prueba por inducción, para el caso $n = 2$ probamos que $\lambda A + \mu A = (|\lambda| + |\mu|)A$. Si $\lambda = \mu = 0$ esto es trivial, supongamos que $\lambda \neq 0$ o $\mu \neq 0$ entonces dado que A es absolutamente convexo,

$$\frac{\lambda}{|\lambda| + |\mu|} A + \frac{\mu}{|\lambda| + |\mu|} A \subseteq A$$

y así $\lambda A + \mu A \subseteq (|\lambda| + |\mu|)A$. Por otro lado, por (ii)),

$$(|\lambda| + |\mu|)A \subseteq |\lambda| A + |\mu| A \subseteq \lambda A + \mu A$$

El caso general se sigue de forma similar por inducción.

$\square$

Observación 2.1.3.

- *Cualquier intersección de conjuntos convexos es un conjunto convexo;*

  Demostración. Sean $x, y \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$, donde F_γ es convexo, para cada $\gamma \in \Gamma$ y sean $\alpha \geqslant 0, \mu \geqslant 0$ con $\alpha + \mu = 1$; $\alpha x + \mu y \in F_\gamma$ para cada γ, así $\alpha x + \mu y \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$. □

- *La unión de una familia de conjuntos convexos totalmente ordenada por la inclusión,* $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} C_\gamma$*, es un conjunto convexo;*

  Demostración. Sean $x, y \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} C_\gamma$ y $\lambda \in [0, 1]$, existen γ y δ, tales que $x \in C_\gamma$ y $y \in C_\delta$, pero la familia es totalmente ordenada por la inclusión, entonces sin pérdida de generalidad podemos suponer que $C_\gamma \subseteq C_\delta$, entonces $x, y \in C_\delta$ i.e. $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C_\delta \subseteq \bigcup_{\gamma\in\Gamma} C_\gamma$. □

- *Cualquier intersección (o unión) de conjuntos balanceados es un conjunto balanceado;*

  Demostración. Sea $x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$, donde F_γ es balanceado, para cada $\gamma \in \Gamma$ y sea $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq 1$; $\lambda x \in F_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$, así $\lambda x \in \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$. Para la unión es similar: sea $x \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$, donde F_γ es balanceado, para cada $\gamma \in \Gamma$ y sea $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq 1$;

  $\lambda x \in F_\gamma$ para alguna γ, así $\lambda x \in F_\gamma \subseteq \bigcap_{\gamma\in\Gamma} F_\gamma$.

  □

Definición 2.1.4. *Dado cualquier subconjunto A de E, el conjunto de todas las combinaciones lineales $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ con $\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ y cada $x_i \in A$ es un conjunto convexo que contiene a A llamada la* ***envolvente convexa*** *de A (conv (A)). Esta es la intersección de todos los subconjuntos convexos de E que contienen a A y así es el conjunto convexo más pequeño que contiene a A.*
La ***envolvente absolutamente convexa*** *de A ($\Gamma(A)$) es el conjunto de todas las combinaciones lineales $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ con $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leqslant 1$ y cada $x_i \in A$, es el conjunto absolutamente convexo más pequeño que contiene a A.*

Decimos que un conjunto $A \subseteq E$ genera a E si todo elemento de E puede expresarse como combinación lineal de los elementos de A.

Si A es un conjunto absolutamente convexo que genera a E, entonces para $x \in E$, existe $\lambda > 0$ con $x \in \lambda A$. En efecto, si $x \in E$, existe una combinación lineal $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$ con cada $x_i \in A$, por el Lema 2.1.2 (iii)), $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in (\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|)A$, así $\lambda = \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|$. Más aún, por el Lema 2.1.2 (ii)), $x \in \mu A$ para toda μ con $\mu \geqslant \lambda$.

Definición 2.1.5. *Un subconjunto A de un espacio vectorial es **absorbente** si para cada $x \in E$ existe $\lambda > 0$ tal que para toda $|\mu| \geqslant \lambda$ tenemos que $x \in \mu A$.*

Esto es equivalente a decir que existe $\delta > 0$ tal que $\gamma x \in A$ para todo $\gamma \in \mathbb{C}$ con $|\gamma| \leqslant \delta$, simplemente considerando el cambio de variables $\delta = \left(\frac{1}{\lambda}\right)$ y $\gamma = \left(\frac{1}{\mu}\right)$.

Observación 2.1.4. *Una intersección finita de conjuntos absorbentes es claramente absorbente, ya que si $x \in E$ y $\{F_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$, es un conjunto finito de conjuntos absorbentes, para cada $1 \leqslant i \leqslant n$, existe $\lambda_i > 0$ tal que $x \in \mu_i A$ para toda μ_i con $|\mu_i| \geqslant \lambda_i$; consideramos $\lambda = \text{mín}\{\lambda_i; 1 \leqslant i \leqslant n\}$, entonces (por el Lema 2.1.2, ii)) $x \in \mu F_i$ para cada $1 \leqslant i \leqslant n$ y $|\mu| \geqslant \lambda$, así $x \in \mu \bigcap_{i=1}^{n} F_i$, para cada $|\mu| \geqslant \lambda$.*

Un conjunto absolutamente convexo es absorbente si y sólo si este genera a E; esto equivale a que

$$E = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A.$$

Pero para cada $\lambda > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|\lambda| < n$, así por el Lema 2.1.2, ii),

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA.$$

Observación 2.1.5. *Para cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$, conv $(\lambda U) = \lambda$ conv (U) y $\Gamma(\lambda U) = \lambda \Gamma(U)$. Para probar esto, consideramos*

$$\begin{aligned}
x \in conv\ (\lambda U) \quad &\Leftrightarrow \quad x = \sum_{1 \leq i \leq n} \mu_i \lambda u_i, \sum_{1 \leq i \leq n} \mu_i = 1, u_i \in U \ y \ \mu_i \geq 0 \ para\ toda\ i. \\
&\Leftrightarrow \quad x = \lambda \sum_{1 \leq i \leq n} \mu_i u_i, \sum_{1 \leq i \leq n} \mu_i = 1, u_i \in U \ y \ \mu_i \geq 0 \ para\ toda\ i. \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \lambda \ conv\ (U).
\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} x \in \Gamma(\lambda U) &\Leftrightarrow x = \sum_{1\le i\le n} \mu_i \lambda u_i, \sum_{1\le i\le n} |\mu_i| \le 1, u_i \in U, \textit{para toda } i. \\ &\Leftrightarrow x = \lambda \sum_{1\le i\le n} \mu_i u_i, \sum_{1\le i\le n} |\mu_i| \le 1, u_i \in U, \textit{para toda } i. \\ &\Leftrightarrow x \in \lambda\Gamma(U). \end{aligned}$$

Hasta aquí se han estudiado algunas propiedades algebraicas, a continuación introducimos algunos conceptos topológicos.

Definición 2.1.6. *Una **topología** en un conjunto E, es una colección τ de subconjuntos de E que satisfacen las siguientes condiciones:*

O.1 *Toda unión de elementos de τ es un elemento de τ;*

O.2 *Toda intersección finita de conjuntos de τ es un elemento de τ;*

O.3 *El conjunto vacío $\emptyset$ y el espacio total E, son elementos de τ;*

*Los elementos de la colección τ son llamados conjuntos **τ-abiertos** o simplemente conjuntos **abiertos** si la topología τ se sobreentiende; además, los conjuntos cuyos complementos (el complemento de un conjunto A lo denotamos por A^c) son τ-abiertos se llaman conjuntos **τ-cerrados** o simplemente conjuntos **cerrados** si no es necesario indicar la topología. Cualquier intersección, o cualquier unión finita de conjuntos cerrados es cerrado; $\emptyset$ y E son cerrados.*

*Un conjunto E en el cual se define una familia de subconjuntos abiertos que satisfacen los axiomas **O.1**-**O.3** se llama un **espacio topológico** y sus elementos son frecuentemente llamados **puntos**.*

Dado un punto x de un espacio topológico E, el conjunto U es una **vecindad** de x si existe un conjunto abierto V tal que $x \in V \subseteq U$. El punto x es un **punto interior** de un subconjunto A de E si existe una vecindad U de x contenida en A. El conjunto de todos los puntos interiores de A, o bien, la unión de todos los abiertos contenidos en A es un conjunto abierto en A, llamado el **interior** de A denotado como A° y A es abierto si y sólo si es idéntico a su interior.

El punto x es llamado un **punto de cerradura** del conjunto A si cada vecindad de x intersecta a A. El conjunto de todos los puntos de cerradura de A, o bien, la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A, es un conjunto cerrado que evidentemente contiene a A es llamada la **cerradura** de A y denotada por $\overline{A}$ o bien por $cl(A)$ (Si es necesario indicar el conjunto o la topología bajo la cual se define la cerradura, entonces la denotamos por $cl_E(A)$ o $cl_\tau(A)$ en lugar de $\overline{A}$). El conjunto A es cerrado si y sólo si es idéntico a su cerradura.

Si A y B son subconjuntos de E, A es llamado **denso** en B si $B \subseteq \overline{A}$.

Si $\mathscr{U}_x$ denota el conjunto de vecindades del punto x de un espacio topológico E, entonces $\mathscr{U}_x$ tiene las siguientes propiedades:

ET.1 $x \in U$ para toda $U \in \mathscr{U}_x$;

ET.2 si $U \in \mathscr{U}_x$ y $V \in \mathscr{U}_x$ entonces $U \cap V \in \mathscr{U}_x$;

ET.3 si $U \in \mathscr{U}_x$ y $U \subseteq V$ entonces $V \in \mathscr{U}_x$;

ET.4 si $U \in \mathscr{U}_x$, existe $V \in \mathscr{U}_x$ con $U \in \mathscr{U}_y$ para toda $y \in V$.

(En **ET.4**, podemos considerar a V como el interior de U).

Inversamente, supongamos que E es cualquier conjunto y que para cada elemento $x \in E$ es dado un conjunto (no vacío) $\mathscr{U}_x$ de subconjuntos de E. Entonces, si las condiciones **ET.1-ET.4** son satisfechas, exactamente una topología conjunto-abierto puede ser definida en E la cual hace de $\mathscr{U}_x$ el conjunto de vecindades de x para cada x. (Llamamos al conjunto $A \subseteq E$ **abierto** si para cada $x \in A$, existe algún $U \in \mathscr{U}_x$ con $U \subseteq A$).

Un subconjunto $\mathscr{V}_x$ del conjunto de vecindades de x ($\mathscr{U}_x$) es una **base de vecindades de** x si, dado $U \in \mathscr{U}_x$, existe $V \in \mathscr{U}_x$ tal que $V \subseteq U$. Los conjuntos abiertos que contienen a x forman una base de vecindades para x. Si $\mathscr{V}_x$ es una base de vecindades de x entonces $\mathscr{U}_x$ es el conjunto de todos los $U \subseteq E$ tales que existe $V \in \mathscr{V}_x$ con $V \subseteq U$.

Es posible definir diferentes topologías en el mismo conjunto E. Si ξ y η son dos topologías en E, decimos que ξ **es más fina que** η (o η es más gruesa que ξ) si cada conjunto que es abierto en el espacio (E, η) es también abierto en (E, ξ) y lo denotamos por $\eta \preceq \xi$, decimos que ξ **es estrictamente más fina que** η (o η es estrictamente más gruesa que ξ) si cada conjunto que es abierto en el espacio (E, η) es también abierto en (E, ξ) y además existe al menos un abierto en (E, ξ) que no es abierto en (E, η), lo denotamos por $\eta \prec \xi$.

Si $\mathscr{U}_x^\xi$ es el conjunto de vecindades de x en la topología ξ y $\mathscr{V}_x^\xi$ es una base de estas vecindades, entonces ξ es más fina que η si y sólo si $\mathscr{U}_x^\eta \subseteq \mathscr{U}_x^\xi$ para toda $x \in E$, o equivalentemente si, dada $U \subseteq \mathscr{V}_x^\eta$ existe $V \in \mathscr{V}_x^\xi$ con $V \subseteq U$.

Es importante señalar que dos topologías en E pueden ser no comparables; cada una puede tener conjuntos abiertos que no son abiertos en la otra.

Ejemplo 2.1.1. *Consideramos en $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ los subconjuntos*

$$\tau_1 = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{m \in \mathbb{N} : m \leq n\} : n \in \mathbb{N}\} \; y$$
$$\tau_2 = \{\emptyset, \mathbb{N}\} \cup \{\{m \in \mathbb{N} : m \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}.$$

τ_1 y τ_2 son dos topologías no comparables en $\mathbb{N}$.

Primero observamos que τ_1 es una topología:

Es claro que **O.3** se cumple. Ahora si

$$U = \bigcup_{n_k \in K \subseteq \mathbb{N}} \{1, 2, 3, ..., n_k\} = \{1, 2, 3, ..., n_{k'}\}_{n_{k'} = \text{máx}\{n_k \in K\}},$$

entonces $U \in \tau_1$ y **O.1** se satisface. Por último, para $I \subseteq \mathbb{N}$ finito, sea

$$V = \bigcap_{n_k \in I} \{1, 2, 3, ..., n_k\} = \{1, 2, 3, ..., n_{k'}\}_{n_{k'} = \text{mín}\{n_k \in I\}},$$

$V \in \tau_1$ y también $V \cap \emptyset$, $V \cap \mathbb{N}$ pertenecen a τ_1, así **O.2** se cumple.

De manera similar τ_2 es una topología:

O.3 se cumple. Ahora si

$$W = \bigcup_{n_k \in K \subseteq \mathbb{N}} \{n_k, n_k + 1, n_k + 2, ...\} = \{n_{k'}, n_{k'} + 1, n_{k'} + 2, ...\}_{n_{k'} = \text{mín}\{n_k \in K\}},$$

entonces $W \in \tau_2$ y **O.1** se satisface. Por último, para $I \subseteq \mathbb{N}$ finito, sea

$$W' = \bigcap_{n_k \in I} \{n_k, n_k + 1, n_k + 2, ...\} = \{n_{k'}, n_{k'} + 1, n_{k'} + 2, ...\}_{n_{k'} = \text{máx}\{n_k \in I\}},$$

$W' \in \tau_2$ y también $W' \cap \emptyset$, $V \cap \mathbb{N}$ pertenecen a τ_2, así **O.2** se cumple.

Para demostrar la última parte observamos que para $n_0 \in \mathbb{N}$, el conjunto $\{\{1, 2, 3, ..., n_0\}$ esta en τ_1 pero no en τ_2, lo mismo para $\{n_0, n_0 + 1, n_0 + 1, ...\} \in \tau_2$ pero no en τ_1.

Observación 2.1.6. *Sean η y ξ son dos topologías tales que $\eta \preceq \xi$ en el espacio E, y sea $V \subseteq E$; entonces $cl_\xi(V) \subseteq cl_\eta(V)$. En efecto, sea $x \in cl_\xi(V)$; entonces para cualquier V_x^η vecindad de x en la topología η, esta es vecindad de x en la topología ξ y como $x \in cl_\xi(V)$, entonces $V_x^\eta \cap V \neq \emptyset$.*

Definición 2.1.7. *Un espacio topológico es llamado* ***separado o de Hausdorff*** *si cada dos puntos distintos tienen vecindades disjuntas.*

Observación 2.1.7. *Si E es un espacio de Hausdorff con la topología η, entonces E es de Hausdorff con cualquier topología más fina que η, digamos ξ. En efecto, ya que para x, y dos elementos diferentes en E, existen abiertos U, V en η tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$; pero cualquier abierto en (E, η) es abierto en (E, ξ), así U, V son los abiertos en (E, ξ) que separan a x y y.*

Definición 2.1.8. *Una función real valuada d, definida para cada par de elementos x, y de un conjunto E, es llamada una **métrica** si esta satisface:*

M.1 *$d(x, y) \geq 0$, $d(x, x) = 0$ y $d(x, y) > 0$ si $x \neq y$;*

M.2 *$d(x, y) = d(y, x)$;*

M.3 *$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ para cada $x, y, z \in E$, la desigualdad del triángulo.*

*Un conjunto E provisto con una métrica es llamado **espacio métrico** y $d(x, y)$ es llamada la distancia entre x y y.*

Sea $V(x, \epsilon)$ el conjunto de todos los elementos de $y \in E$ tales que $d(x, y) < \epsilon$. Entonces, decimos que U es una vecindad de x si $V(x, \epsilon) \subseteq U$ para algún $\epsilon > 0$, el conjunto $\mathscr{U}_x$ de todas las vecindades de x satisfacen **ET.1-ET.4** y definen una topología en E. Un espacio topológico es llamado **metrizable** si su topología puede ser definida por una métrica. Si diferentes métricas definen la misma topología; estas son llamadas **equivalentes**.

Si E es un espacio topológico y H un subconjunto de E, H es un espacio topológico dotado de la topología definida al considerar la intersección de H con conjuntos abiertos de E, siendo estos ahora conjuntos abiertos de H. Los axiomas **O.1- O.3** se satisfacen y la topología así definida en H por estos abiertos es llamada la **topología inducida o relativa** a la topología original de E. Los subconjuntos cerrados de H en esta topología son las intersecciones de los subconjuntos cerrados de E con H y las vecindades de algún punto de H son las intersecciones de las vecindades de este punto en E con H.

Si E es espacio de Hausdorff o metrizable, H tiene la misma propiedad. Efectivamente, supongamos que E es un espacio de Hausdorff, para ver que H también es de Hausdorff, consideramos $x, y \in H \subseteq E$ para los cuales existen vecindades ajenas U, V en E tales que $x \in U$ y $y \in V$, entonces las vecindades $U \cap H$ y $V \cap H$ son las respectivas vecindades en H que separan a x y y. Por otro lado, supongamos que E es metrizable con su topología dada por una métrica d entonces $d|_{H \times H}$ (d restringida a $H \times H$) es una métrica para H, así H es un espacio metrizable.

Sean E y F dos espacios topológicos. La función f con dominio E y codominio F es llamada **continua en el punto** x de E si, para cada vecindad V de $f(x)$ en F corresponde una vecindad U de x en E tal que si $x \in U$, entonces $f(x) \in V$, y así $f(U) \subseteq V$.

Si $f^{-1}(B)$ denota el conjunto de todas las $x \in E$ con $f(x) \in B$, f es continua en x si y sólo si $f^{-1}(V)$ es una vecindad de x para cualquier vecindad V de $f(x)$. Si f es continua en cada punto de E, se dice que f es **continua** (en E). Las siguientes dos condiciones son equivalentes para la continuidad de f:

- $f^{-1}(B)$ es un subconjunto abierto de E para cualquier subconjunto abierto B de F;

- $f^{-1}(B)$ es un subconjunto cerrado de E para cualquier subconjunto cerrado B de F.

Una biyección f de E en F es **bicontinua** si f y su inversa f^{-1} son continuas. Entonces f lleva a E en F, junto con sus topologías, en una correspondencia uno a uno; decimos que E y F son **homeomorfos** y que f es un **homeomorfismo**.

Si E, F son dos espacios topológicos, para el producto cartesiano de E con F ($E \times F$), se puede construir una topología que esté convenientemente relacionada con las topologías de E y F. Para ello consideramos las proyecciones

$$\pi_E : E \times F \to E \text{ tal que } \pi_E(x,y) = x \text{ y}$$
$$\pi_F : E \times F \to F \text{ tal que } \pi_F(x,y) = y,$$

que son funciones que relacionan de manera natural a $E \times F$ con E y F. Entonces la topología más gruesa (o más débil) que hace a las proyecciones π_E y π_F continuas, es tal topología y es llamada la **topología producto**. Una base para esta topología es el conjunto

$$\{\pi_E^{-1}(V) \cap \pi_F^{-1}(U) : V \in \mathscr{V} \text{ y } U \in \mathscr{U}\},$$

donde $\mathscr{V}$ es una base para E y $\mathscr{U}$ es una base para F. En la Subsección 3.1.3 se abordará con más detalle esta topología, para un caso particular de espacios.

Definición 2.1.9. *Sea E un espacio vectorial sobre el campo real o complejo $\mathbb{K}$. Una topología ξ en E se dice compatible con la estructura algebraica de E si las operaciones algebraicas en E son continuas, así la suma*

$$\begin{aligned} + : E \times E &\to E, \\ (x,y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

es una función continua del par de variables "x, y" y la multiplicación por escalar

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times E &\rightarrow E, \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda x \end{aligned}$$

es una función continua del par de variables "λ, x". Un ***espacio vectorial topológico*** *sobre $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con una topología compatible.*

Las siguientes proposiciones dan las consecuencias de las condiciones de continuidad.

Proposición 2.1.1. *Para cada $a \in E$ la traslación f: $f(x) = x + a$ es un homeomorfismo de E en sí mismo. En particular si $\mathscr{U}$ es una base de vecindades del origen, $\mathscr{U} + a$ es la base de vecindades de a, es decir $\mathscr{U} + a = \mathscr{U}_a$.*

Demostración. Sean $x, y \in E$ tales que $f(x) = f(y) \Rightarrow x + a = y + a \Rightarrow x = y$, así f es inyectiva. Para $y \in E$, $y = y - a + a = f(y - a)$ con $y - a \in E$, así f es sobreyectiva. Dado que $f(x) = x + a = y$, entonces $f^{-1}(y) = x = y - a$ entonces f es una función inyectiva de E sobre si mismo, la cual junto con su inversa, es continua. Por lo tanto f es un homeomorfismo. Ahora veamos que $\mathscr{U} + a \subseteq \mathscr{U}_a$; para $U \in \mathscr{U}$, existe un U_0 abierto tal que $U_0 \subseteq U$, entonces $a + U_0$ es abierto y $a + U_0 \subseteq a + U$.
Inversamente, $\mathscr{U}_a \subseteq \mathscr{U} + a$, ya que si $V \in \mathscr{U}_a$, existe $V' \in \mathscr{U}_a$ abierto, tal que $a + (-a + V') = V' \subseteq V$. De donde $(-a) + V'$ es abierto y como $a \in V'$, $0 = (-a) + a \in (-a) + V'$, entonces $(-a) + V' \in \mathscr{U}$ y

$$(-a) + V' \subseteq (-a) + V = U.$$

Por lo tanto, $U \in \mathscr{U}$ y $V = a + U$ para algún $U \in \mathscr{U}$. □

Así, toda la estructura topológica de E está determinada por una base de vecindades del origen, (en adelante llamamos simplemente vecindades a las vecindades del origen, en caso contrario se especificará). Si U es una vecindad, $U + a$ corresponde a una vecindad de a, y $x \in U + a$ si y sólo si $x - a \in U$.

Observación 2.1.8. *Sea $\alpha = 0 \in \mathbb{K}$, entonces para cualquier vecindad V, existe un abierto W tal que $0 \cdot W \subseteq W \subseteq V$, así el morfismo $f(x) = \alpha x = 0 \cdot x = 0$ es continuo.*

Proposición 2.1.2. *Para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ diferente de cero, el morfismo $f(x) = \alpha x$ es un homeomorfismo de E sobre si mismo. En particular, si U es una vecindad, αU para cada $\alpha \neq 0$ también lo es.*

Demostración. Si $f(x) = \alpha x = y$, entonces $f^{-1}(y) = x = \alpha^{-1}y$. Por lo que f es bicontinua y así un homeomorfismo. □

Proposición 2.1.3. *Si $\mathscr{U}$ es una base de vecindades entonces, para cada $U \in \mathscr{U}$, se tiene,*

i) U es absorbente ;

ii) existe $V \in \mathscr{U}$ tal que $V + V \subseteq U$;

iii) hay una vecindad balanceada $W \subseteq U$.

Demostración.

i) Si $a \in E$ y $f(\lambda) = \lambda a$, f es continua en $\lambda = 0$ y así existe una vecindad $\{\lambda : |\lambda| \leq \epsilon\}$ de cero cuya imagen esta contenida en U. Entonces $\lambda a \in U$ para $|\lambda| \leq \epsilon$ y así $a \in \mu U$ para $|\mu| \geq \epsilon^{-1}$.

ii) Si $g(x, y) = x + y$, g es continua en $x = 0, y = 0$ y así existen vecindades V_1 y V_2 con $x + y \in U$ para $x \in V_1$ y $y \in V_2$. Entonces existe $V \in \mathscr{U}$ con $V \subseteq V_1 \cap V_2$; entonces $V + V \subseteq U$.

iii) Si $h(\lambda, x) = \lambda x$, h es continua en $\lambda = 0, x = 0$ y existe una vecindad V y $\epsilon > 0$ con $\lambda x \in U$ para $|\lambda| \leqslant \epsilon$ y $x \in V$. Por lo tanto $\lambda V \subseteq U$ para $|\lambda| \leqslant \epsilon$, sea $\mu \in \mathbb{K}$ con $|\mu| \geq 1$, $|\frac{\lambda}{\mu}| \leqslant \epsilon$ entonces $\frac{\lambda}{\mu}V \subseteq U$, y así $\epsilon V \subseteq \mu U$ para $|\mu| \geq 1$. Por lo tanto $\epsilon V \subseteq W = \bigcap_{|\mu|\geq 1} \mu U$. Pero ϵV es una vecindad (Proposición 2.1.2) y así W es también una vecindad. Si $x \in W$ y $0 < |\lambda| \leq 1$ entonces, si $|\mu| \geq 1$, $x \in \frac{\mu}{\lambda}U$ y así $\lambda x \in \mu U$ para $|\lambda| \leq 1$. Por lo tanto $\lambda x \in W$, así que W es balanceada y claramente esta contenida en U.

□

Definición 2.1.10. *Un espacio vectorial topológico* ***localmente convexo*** *es aquel que tiene una base de vecindades convexas del origen. Por simplicidad, nos referimos a un espacio vectorial topológico localmente convexo como un espacio localmente convexo.*

Teorema 2.1.1. *Un espacio localmente convexo E tiene una base $\mathscr{U}$ de vecindades con las siguientes propiedades:*

i) si $U \in \mathscr{U}$, $V \in \mathscr{U}$, existe un $W \in \mathscr{U}$ con $W \subseteq U \cap V$;

ii) si $U \in \mathscr{U}$ *y* $\alpha \neq 0$, $\alpha U \in \mathscr{U}$ *;*

iii) cada $U \in \mathscr{U}$ *es absolutamente convexa y absorbente;*

Inversamente, dado un conjunto (no vacío) $\mathscr{U}$ *de subconjuntos de un espacio vectorial* E *con las propiedades i)-iii), existe una topología que hace de* E *un espacio localmente convexo con* $\mathscr{U}$ *una base de vecindades.*

Demostración. Si E es un espacio localmente convexo, existe una base de vecindades convexas. Sea U una de ellas; $\bigcap\limits_{|\mu|\geqslant 1} \mu U$ es una vecindad balanceada contenida en U (ver la construcción en la demostración de iii), Proposición 2.1.3); esta es también convexa, ya que es una intersección de conjuntos convexos, por lo tanto estos conforman una base $\mathscr{V}$ de vecindades absolutamente convexas, pues $\bigcap\limits_{|\mu|\geqslant 1} \mu U \subseteq U$ para cada vecindad convexa U de la base original.

Entonces el conjunto $\mathscr{U}$ de todos los conjuntos αV con $\alpha \neq 0$ y $V \in \mathscr{V}$ es la base requerida. Los conjuntos de $\mathscr{U}$ son vecindades, por la Proposición 2.1.2, y $\mathscr{U}$ es una base, entonces **ET.2** implica i), la condición ii) se sigue de la construcción de $\mathscr{U}$ y la condición iii) también se sigue de esta y de la Proposición 2.1.3.

Inversamente, supongamos que $\mathscr{U}$ es un conjunto de subconjuntos de E con las propiedades i)-iii), sea $\mathscr{V}$ el conjunto de todos los subconjuntos de E que contienen un conjunto de $\mathscr{U}$, y para cada $a \in E$, tomamos $\mathscr{V}_a = \mathscr{V} + a$, el conjunto de vecindades de a. Probamos las propiedades **ET.1- ET.4** para demostrar que $\{\mathscr{V}_a\}_{a\in E}$ define una topología en E y que esta topología es compatible con la estructura algebraica de E.

Es evidente que $a \in U_a$ para todo $U_a \in \mathscr{V}_a$, así se cumple **ET.1**; para ver que se satisface **ET.2**, si $U_a, V_a \in \mathscr{V}_a$ entonces $U_a = a + U,\ V_a = a + V$ para $U, V \in \mathscr{V}$, así existen $U', V' \in \mathscr{U}$ tales que $U' \subseteq U,\ V' \subseteq V$, por i) existe $W \in \mathscr{U}$ tal que $W \subseteq U \cap V$ y entonces $a + W = W_a = U_a \cap V_a$; para ver **ET.3**, sean $U_a \in \mathscr{V}_a$ y $a + U = U_a \subseteq V = (V - a) + a$, con $U \in \mathscr{U}$; así $V - a \in \mathscr{V}$, pues $U \subseteq V - a$; por último para ver **ET.4**, si $V_a \in \mathscr{V}_a$ con $V_a = a + V$ para alguna $V \in \mathscr{V}$ para la cual existe $U \in \mathscr{U}$ absolutamente convexa y absorbente (por iii)) y $U \subseteq V$, entonces $V_a = a + V$ es una vecindad para cada punto de $U'_a = \left(\frac{1}{2}\right) U + a$ pues $\left(\frac{1}{2}\right) U \subseteq U$.

Para demostrar la continuidad de la suma en $x = a,\ y = b$, sea $U \in \mathscr{U}$; entonces si $x \in \left(\frac{1}{2}\right) U + a$ y $y \in \left(\frac{1}{2}\right) U + b$, $x + y \in U + a + b$. Finalmente, para demostrar que λx es continua en $\lambda = \alpha,\ x = a$, es suficiente con encontrar η y δ tales que $\lambda x - \alpha a \in U$ siempre que $|\lambda - \alpha| < \eta$ y $x \in \delta U + a$. Ahora existe $\mu > 0$ con $a \in \mu U$; elegimos η tal que $0 < 2\eta < \mu^{-1}$ y entonces δ tal que $0 < 2\delta < (|\alpha| + \eta)^{-1}$. Entonces

$$\lambda x - \alpha a = \lambda(x-a) + (\lambda - \alpha)a \in (|\alpha| + \eta)\delta U + \eta\mu U \subseteq \tfrac{1}{2}U + \tfrac{1}{2}U \subseteq U,$$

ya que $||\lambda| - |\alpha|| < |\lambda - \alpha| < \eta$ implica que $|\lambda| < \eta + |\alpha|$. □

Corolario 2.1.1. *Sea $\mathscr{V}$ un conjunto de subconjuntos absolutamente convexos y absorbentes de un espacio vectorial E. Entonces existe una topología en E compatible con la estructura algebraica en la cual cada conjunto en $\mathscr{V}$ es una vecindad. Con esta topología, E es un espacio localmente convexo y es la topología localmente convexa más gruesa. Una base de vecindades está formada por los conjuntos:*

$$\epsilon \bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} V_i \ (\epsilon > 0, V_i \in \mathscr{V})$$

Demostración. El conjunto $\mathscr{U}$ de subconjuntos de la forma

$$\epsilon \bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} V_i \ (\epsilon > 0, V_i \in \mathscr{V})$$

satisface las condiciones i)-iii) del teorema 2.1.1 y por lo tanto $\mathscr{U}$ es una base de vecindades de una topología ξ en E que hace de E un espacio localmente convexo. También en cualquier topología compatible en la cual los conjuntos de $\mathscr{V}$ son vecindades, los conjuntos de $\mathscr{U}$ deben ser vecindades (por **O.2** y Proposición 2.1.2); entonces ξ es dicha topología más gruesa. □

Proposición 2.1.4. *En un espacio vectorial topológico, la cerradura de un conjunto convexo es convexa, la cerradura de un conjunto balanceado es balanceada y la cerradura de un conjunto absolutamente convexo es absolutamente convexa.*

Demostración. Sea A un conjunto convexo y sean $a, b \in \overline{A}$ y $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$ tales que $\lambda + \mu = 1$. Por la Proposición 2.1.3, para cualquier vecindad U existe una vecindad balanceada V tal que $V + V \subseteq U$; entonces existen puntos $x \in A \cap (a + V)$ y $y \in A \cap (b + V)$, así

$$\begin{aligned} & \lambda x + \mu y \in \lambda(A \cap (a+V)) + \mu(A \cap (b+V)) \\ = \ & \lambda A \cap \lambda(a+V) + \mu A \cap \mu(b+V) \\ = \ & (\lambda A + \mu A) \cap (\lambda a + \lambda V + \mu b + \mu V) \\ \subseteq \ & A \cap (\lambda a + \mu b + V + V) \\ \subseteq \ & A \cap (\lambda a + \mu b + U). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda a + \mu b \in \overline{A}$ y entonces $\overline{A}$ es convexa.

Sea A un conjunto balanceado y sean $a \in \overline{A}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| \leq 1$. Por la Proposición 2.1.3 para cualquier vecindad U, existe una vecindad balanceada V con $V \subseteq U$; entonces existe $x \in A \cap (a + V)$ y así

$$\begin{aligned} & \lambda x \in \lambda(A \cap (a+V)) \\ = \ & \lambda A \cap \lambda(a+V) \\ = \ & \lambda A \cap (\lambda a + \lambda V) \\ \subseteq \ & A \cap (\lambda a + V) \\ \subseteq \ & A \cap (\lambda a + U). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda a \in \overline{A}$ y entonces $\overline{A}$ es balanceada.

Sea A un conjunto absolutamente convexo y sean $a, b \in \overline{A}$ y $|\lambda| + |\mu| \leq 1$. Para cualquier vecindad U, existe una vecindad balanceada V con $V + V \subseteq U$ (por la Proposición 2.1.3); entonces existen puntos $x \in A \cap (a + V)$ y $y \in A \cap (b + V)$ y así

$$\begin{aligned} & \lambda x + \mu y \in \lambda(A \cap (a+V)) + \mu(A \cap (b+V)) \\ = \ & \lambda A \cap \lambda(a+V) + \mu A \cap \mu(b+V) \\ = \ & (\lambda A + \mu A) \cap (\lambda a + \lambda V + \mu b + \mu V) \\ \subseteq \ & A \cap (\lambda a + \mu b + V + V) \\ \subseteq \ & A \cap (\lambda a + \mu b + U). \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lambda a + \mu b \in \overline{A}$ y entonces $\overline{A}$ es absolutamente convexa.

□

Corolario 2.1.2. *Todo espacio vectorial topológico tiene una base de vecindades balanceadas cerradas; además, todo espacio localmente convexo tiene una base de vecindades cerradas con las propiedades i)- iii) del Teorema 2.1.1.*

Demostración. Las cerraduras de los conjuntos en una base $\mathscr{U}$ de vecindades balanceadas (esta existe por la Proposición 2.1.3) forman una base de vecindades. En efecto, si $U \in \mathscr{U}$, existe una vecindad $V \in \mathscr{U}$ tal que $V + V \subseteq U$. Entonces si $x \in \overline{V}$, $x + V$ intersecta a V y por lo tanto $x \in V - V = V + V \subseteq U$. De esta forma cualquier espacio vectorial topológico tiene una base de vecindades balanceadas cerradas.

Para un espacio localmente convexo, tomamos $\mathscr{U}$ la base del Teorema 2.1.1. La Proposición 2.1.4 asegura que las cerraduras de los conjuntos de $\mathscr{U}$ permanecen absolutamente convexas, además si $U, V \in \mathscr{U}$ existe $W \in \mathscr{U}$ tal que $W \subseteq \overline{W} \subseteq \overline{U \cap V} \subseteq \overline{U} \cap \overline{V}$. Por otro lado, $\overline{\alpha U} = \alpha\overline{U}$ por la Proposición 2.1.2, y por la Proposición 2.1.3 la cerradura de cada elemento de $\mathscr{U}$ es absorbente, así se satisfacen dichas propiedades. $\square$

Proposición 2.1.5. *Si $\mathscr{U}$ es una base de vecindades en el espacio vectorial topológico E, entonces E es de Hausdorff si y sólo si*

$$\bigcap_{U\in\mathscr{U}} U = \{0\}$$

Demostración. Si E es de Hausdorff y $x \neq 0$, existe una $U \in \mathscr{U}$ tal que $x \notin U$ y por lo tanto

$$\bigcap_{U\in\mathscr{U}} U = \{0\}$$

Inversamente, supongamos que esta última condición se satisface, y sean $x, y \in E$ tales que $x \neq y$. Entonces $x - y \neq 0$ y por lo tanto existe una vecindad $U \in \mathscr{U}$ tal que $x - y \notin U$. Por la Proposición 2.1.3 existe una vecindad balanceada V con $V + V \subseteq U$. Así $x + V$ y $y + V$ son dos vecindades disjuntas de x y y, ya que si existe $z \in (x + V) \cap (y + V)$ entonces,

$$x - y = (z - y) - (z - x) \in V - V = V + V \subseteq U.$$

Pero esto es una contradicción, por lo tanto E es de Hausdorff. $\square$

Definición 2.1.11. *Sea E un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$. Una función $p : E \to [0, \infty)$ es llamada una **seminorma** si satisface:*

S.1 $p(x) \geqslant 0$*;*

S.2 $p(\lambda x) = |\lambda|p(x)$*;*

S.3 $p(x + y) \leqslant p(x) + p(y)$*;*

para cada $x, y \in E$ y toda $\lambda \in \mathbb{K}$.

En **S.2**, $p(0) = 0$, pero puede suceder que $p(x) = 0$ para alguna $x \neq 0$. En efecto, $K = p^{-1}(0)$ es un subespacio de E, pues para $x, y \in K$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ tenemos $p(x + \lambda y) \leqslant p(x) + p(\lambda y) = p(x) + |\lambda|p(y) = 0 + |\lambda|0 = 0$, así, $x + \lambda y \in K$.

Definición 2.1.12. *Una seminorma p para la cual $p(x) = 0$ implica que $x = 0$ es llamada una **norma**.*

Se sigue de **S.3** que: $p(x) \leq p(y) + p(x - y),\ p(y) \leq p(x) + p(y - x)$, y así

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y),$$

una desigualdad que frecuentemente es usada. Así también lo es el

Lema 2.1.3. *Supongamos que p y q son dos seminormas en E y que $q(x) \leq 1$ siempre que $p(x) < 1$. Entonces $q(x) \leqslant p(x)$ para toda $x \in E$.*

Demostración. Supongamos que no, entonces existe $x \in E$, $\alpha > 0$ con $0 \leq p(x) < \alpha < q(x)$ y por lo tanto $p\left(\frac{x}{\alpha}\right) < 1$, pero $q\left(\frac{x}{\alpha}\right) > 1$, lo que contradice la hipótesis.

□

Como lo muestra la siguiente Proposición, las seminormas están relacionadas con conjuntos absolutamente convexos y absorbentes:

Proposición 2.1.6.

i) Sea p una seminorma en E. Entonces para cada $\alpha > 0$, los conjuntos

$$\{x : p(x) < \alpha\} \text{ y } \{x : p(x) \leqslant \alpha\}$$

son absolutamente convexos y absorbentes.

ii) A cada subconjunto absolutamente convexo y absorbente A de E le corresponde una seminorma p_A, definida por

$$p_A(x) = \text{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$$

y con la propiedad

$$\{x : p_A(x) < 1\} \subseteq A \subseteq \{x : p_A(x) \leqslant 1\}$$

Demostración.

i) Sean $x, y \in \{x : p(x) < \alpha\}$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tales que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$, entonces de **S.2**, **S.3** y del hecho de que p es finita, se sigue que

$$p(\lambda x + \mu y) \leq p(\lambda x) + p(\mu y) \leq |\lambda| p(x) + |\mu| p(y) < |\lambda|\alpha + |\mu|\alpha = (|\lambda| + |\mu|)\alpha \leq \alpha.$$

Así el conjunto es absolutamente convexo. Veamos que es absorbente; para cada $x \in E$, existe $\lambda > 0$ tal que $p(x) < \lambda$, sea $\gamma \in \mathbb{C}$ con $|\gamma| \leq \frac{1}{\lambda}$, tenemos que

$$p(\gamma x) = |\gamma| p(x) < \left(\frac{1}{\lambda}\right)\lambda = 1, \text{ así } \gamma x \in \{x : p(x) < \alpha\}$$

para toda $|\gamma| \leq \frac{1}{\lambda}$.

Sean $x, y \in \{x : p(x) \leq \alpha\}$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tales que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$, entonces de **S.2**, **S.3** y del hecho de que p es finita se sigue que

$$p(\lambda x + \mu y) \leq p(\lambda x) + p(\mu y) \leq |\lambda| p(x) + |\mu| p(y) \leq |\lambda|\alpha + |\mu|\alpha = (|\lambda| + |\mu|)\alpha \leq \alpha.$$

Así el conjunto es absolutamente convexo. Veamos que es absorbente; para cada $x \in E$, existe $\lambda > 0$ tal que $p(x) \leq \lambda$, sea $\gamma \in \mathbb{C}$ con $|\gamma| \leq \frac{1}{\lambda}$, tenemos que

$$p(\gamma x) = |\gamma| p(x) \leq \left(\frac{1}{\lambda}\right) \lambda = 1, \text{ así } \gamma x \in \{x : p(x) \leq \alpha\}$$

para toda $|\gamma| \leq \frac{1}{\lambda}$.

ii) Dado que A es absorbente $p_A(x) = \text{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$ existe para cada $x \in E$, pues para $x \in E$ existe $\lambda > 0$ tal que $x \in \mu A$ para toda $|\mu| \geq \lambda$, así $p_A(x) \leq \lambda$. Por definición $p_A(x) \geq 0$ y así se cumple **S.1**.

Para ver **S.2** sea $\mu \in \mathbb{C}$ y $x \in E$, si $\mu = 0$, $\mu x = 0$, entonces

$$p_A(\mu x) = p_A(0) = \text{ínf}\{\lambda > 0 : 0 \in \lambda A\} = 0.$$

Ahora supongamos $\mu \neq 0$, entonces $|\mu| > 0$ y

$$\begin{aligned} |\mu| p_A(x) =& |\mu| \text{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\} \\ =& \text{ínf}\{|\mu|\lambda > 0 : x \in \lambda A\} \\ =& \text{ínf}\{|\mu|\lambda > 0 : \frac{\mu}{|\mu|} x \in \frac{\mu}{|\mu|} \lambda A\}. \end{aligned}$$

Dado que A es balanceado y $|\frac{\mu}{|\mu|}| = 1$, además por ii) del Lema 2.1.2, entonces

$$\begin{aligned} =& \text{ínf}\{|\mu|\lambda > 0 : \frac{\mu}{|\mu|} x \in \lambda A\} \\ =& \text{ínf}\{t > 0 : \mu x \in tA\} \\ =& p_A(\mu x). \end{aligned}$$

Por último, para **S.3**, considerando

$$p_A(x) = \text{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\},$$

A es absolutamente convexo y absorbente; así por el Lema 2.1.2, $\lambda A \subseteq \mu A$ siempre que $|\lambda| \leq |\mu|$ y entonces dado $\epsilon > 0$ existen $\mu_r, \mu_s > 0$ tales que :

$$p_A(x) < \mu_r \leq p_A(x) + \tfrac{\epsilon}{2} \text{ con } x \in \mu_r A \text{ y}$$
$$p_A(y) < \mu_s \leq p_A(y) + \tfrac{\epsilon}{2} \text{ con } y \in \mu_s A\ .$$

Además se tiene que $(s+t)A = sA + tA$ para todo $s, t \in \mathbb{R}^+$, así:

$$\mu_r + \mu_s \leq p_A(x) + p_A(y) + \epsilon$$
$$\text{y } (x+y) \in \mu_r A + \mu_s A = (\mu_r + \mu_s)A.$$

Por otro lado, como $p_A(x+y) = \text{ínf}\{\lambda > 0 : x+y \in \lambda A\}$ y $p_A(x+y) \leq \mu_r + \mu_s$, obtenemos que para cada $\epsilon > 0$, $p_A(x+y) \leq \mu_r + \mu_s \leq p_A(x) + p_A(y) + \epsilon$. Esto implica que

$$p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y).$$

□

Definición 2.1.13. *La seminorma $p_A(x) = \text{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}$ correspondiente al conjunto absolutamente convexo absorbente A es llamado el* ***funcional de Minkowski****.*

Sean A, B dos conjuntos absolutamente convexos absorbentes; de la definición se obtiene:

FM.1 Si $\alpha \neq 0$, el funcional de Minkowski de αA es $|\alpha|^{-1} p_A$, ya que para $x \in E$,

$$\begin{aligned} p_{\alpha A}(x) &= \text{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda\,(\alpha A)\} \\ &= \text{ínf}\{\lambda > 0 : x \in (\lambda\alpha) A\} \\ &= \text{ínf}\{\lambda > 0 : \alpha^{-1}x \in \lambda A\} \\ &= p_A(\alpha^{-1}x) = |\alpha|^{-1} p_A(x). \end{aligned}$$

FM.2 El funcional de Minkowski de $A \cap B$ es $\sup\{p_A, p_B\}$; para $x \in E$ se tiene

$$\begin{aligned} p_{A\cap B}(x) &= \text{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda\,(A \cap B)\} \\ &= \text{ínf}(\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\} \cap \{\beta > 0 : x \in \beta B\}) \\ &\geq \sup\{\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\}, \{\beta > 0 : x \in \beta B\}\} \\ &= \sup\{p_A, p_B\}. \end{aligned}$$

Supongamos que $\alpha = p_{A\cap B}(x) > \sup\{p_A, p_B\}$ y, sin pérdida de generalidad que, $p_A(x) \leqslant p_B(x)$; entonces existe $\epsilon > 0$ tal que

$$0 \leqslant p_A(x) \leqslant p_B(x) < p_B(x) + \epsilon < \alpha.$$

Así, dado que A, B son conjuntos absolutamente convexos, $x \in (p_B(x) + \epsilon)(A \cap B)$; pero esto contradice el hecho de que $\alpha = p_{A\cap B}(x)$ y por lo tanto

$$p_{A\cap B}(x) = \sup\{p_A, p_B\}.$$

FM.3 Si $A \subseteq B$ entonces $p_B(x) \leq p_A(x)$ para toda $x \in E$. Sea

$$x \in E, \text{ para } \gamma \in \{\lambda > 0 : x \in \lambda A\},$$

por hipótesis, $x \in \gamma A \subseteq \gamma B$ y así $x \in \{\beta > 0 : x \in \beta B\}$. Se sigue que

$$\text{ínf}\{\beta > 0 : x \in \beta B\} \leq \text{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda A\},\ p_B(x) \leq p_A(x).$$

Observación 2.1.9. *Si p_A es el funcional de Minkowski de A, este es también el funcional de Minkowski de todo conjunto absolutamente convexo absorbente B que satisface:*

$$C = \{x : p_A(x) < 1\} \subseteq B \subseteq D = \{x : p_A(x) \leq 1\}$$

Demostración. Por **FM.3**, para $x \in E$, $p_D(x) \leq p_B(x) \leq p_C(x)$; supongamos que existen $r, t > 0$ tales que $p_D(x) < r < t < p_C(x)$, de lo cual

$$x \in rD \text{ luego } \tfrac{1}{r}x \in D \text{ y } p_A(\tfrac{1}{r}x) \leq 1,$$

se sigue que

$$p_A(\tfrac{1}{t}x) = p_A(\tfrac{r}{r}\tfrac{1}{t}x) = |\tfrac{r}{t}|p_A(\tfrac{1}{r}x) \leq \tfrac{r}{t} < 1,$$

así $\frac{1}{t}x \in C$. Por lo tanto, $p_C(\frac{1}{t}x) \leq 1 \Rightarrow p_C(x) \leq t$, lo cual contradice la hipótesis y entonces $p_C(x) = p_D(x) = p_B(x)$.

□

La conexión entre seminormas y conjuntos absolutamente convexos absorbentes permite describir la topología de un espacio localmente convexo en términos de seminormas. Las propiedades básicas sobre continuidad que son requeridas se mencionan en la siguiente proposición:

Proposición 2.1.7.

i) En un espacio localmente convexo E, una seminorma p es continua si y sólo si ésta es continua en el origen.

ii) Si p_U es el funcional de Minkowski de un conjunto absolutamente convexo absorbente U, p_U es continua si y sólo si U es una vecindad. En este caso el interior de U es $\{x : p_U(x) < 1\}$ y la cerradura de U es $\{x : p_U(x) \leq 1\}$.

Demostración.

i) Supongamos que p es continua en el origen y sea $\epsilon > 0$. Existe una vecindad V con $p(x) < \epsilon$ para $x \in V$. Sea a cualquier punto de E, entonces

$$|p(x) - p(a)| \leq p(x - a) < \epsilon \text{ para } x \in a + V.$$

Por otro lado, si p es una seminorma continua, ésta lo es en particular en el origen.

ii) Primero supongamos que U es una vecindad absolutamente convexa y absorbente; sea $\epsilon > 0$. Por la Proposición 2.1.6 $U \subseteq \{x : p_U(x) \leq 1\}$, entonces para cada $x \in \epsilon U$ se satisface que $p_U(x) \leq \epsilon$; entonces p_U es continua en el origen y por el inciso i) también lo es en todo E.

Por otro lado, si p_U es continua entonces el conjunto $V = \{x : p_U(x) < 1\}$ es abierto pues es la imagen inversa continua del intervalo abierto $(-1, 1)$. Pero además $V \subseteq U$ y así U es una vecindad.

Afirmamos que $\overline{V} = \{x : p_U(x) \leq 1\}$. En efecto, el conjunto $\{x : p_U(x) \leq 1\}$ es cerrado pues es la imagen inversa continua del conjunto cerrado $[-1, 1]$ y además contiene a V, entonces $\overline{V} \subseteq \{x : p_U(x) \leq 1\}$. Inversamente, sea $x \in \{x : p_U(x) \leq 1\}$ y sea W cualquier vecindad, entonces como W es absorbente existe $\beta > 0$ tal que para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq \beta$, $\lambda x \in W$. En particular para $0 < \mu < 1$, y $\mu < |\lambda| \leq \beta$ tal que $-\mu x \in W$ tenemos que

$$(1 - \mu)x \in x + W \text{ y } p_U((1 - \mu)x) = (1 - \mu)p_U(x) \leq 1 - \mu < 1.$$

Entonces $(1 - \mu)x \in V$ y así $x + W$ intersecta a V, por lo tanto $x \in \overline{V}$.

Además el interior de $\overline{V}$ es V: sea $x \in \overline{V}^\circ$, existe una vecindad W tal que $x + W \subseteq \overline{V}$. También existe μ con $0 < \mu < 1$ y $\mu x \in W$, así $(1 + \mu)x \in \overline{V} \Rightarrow p_U((1 + \mu)x) \leq 1$ y así $p_U(x) < 1$, entonces $x \in V$. Por otro lado, dado que $V \subseteq \overline{V}$ entonces $V = V^\circ \subseteq \overline{V}^\circ$. Finalmente, $V \subseteq U \subseteq \overline{V}$ y por la definición de interior y cerradura de un conjunto, $U^\circ = V$ y $\overline{U} = \overline{V}$.

□

La Proposición 2.1.7 muestra condiciones que en conjunto con i), ii) y iii) del Teorema 2.1.1, formulan el siguiente Teorema en términos de seminormas. Lo que es más útil para establecer una topología de espacio vectorial localmente convexa.

Teorema 2.1.2. *Dado un conjunto Q de seminormas sobre un espacio vectorial E, existe una topología más gruesa en E compatible con la estructura algebraica en la cual cada seminorma en Q es continua. Con esta topología E es un espacio localmente convexo y una base de vecindades cerradas esta formada por los conjuntos:*

$$\{x : \sup_{1\leq i\leq n} p_i(x) \leq \epsilon\} \ (\epsilon > 0, p_i \in Q).$$

Demostración. Por la Proposición 2.1.6, Q da lugar a $\mathscr{V}$ una familia de conjuntos absolutamente convexos y absorbentes. Entonces por el Corolario 2.1.1 existe una topología más gruesa en E compatible con la estructura algebraica en la cual cada conjunto en $\mathscr{V}$ es una vecindad y con esta topología E es localmente convexo. Se sigue de la Proposición 2.1.7 y del Corolario 2.1.1 que cada $q \in Q$ es continua y que para la vecindad básica

$$\epsilon \bigcap_{1\leq i\leq n} V_i \text{ (con } \epsilon > 0 \text{ y } V_i \in \mathscr{V}),$$

$\epsilon^{-1} \sup_{1\leq i\leq n} p_i$ es su funcional de Minkowski. Entonces los conjuntos cerrados

$$\{x : \sup_{1\leq i\leq n} p_i(x) \leq \epsilon\} \ (\epsilon > 0, p_i \in Q),$$

forman una base de vecindades cerradas.

□

En el caso anterior decimos que la topología de E está **determinada** por el conjunto de seminormas Q.

Proposición 2.1.8. *Bajo la topología determinada por el conjunto de seminormas Q, E es de Hausdorff si y sólo si para cada $x \in E$ no cero, existe alguna $p \in Q$ con $p(x) > 0$.*

Demostración. Supongamos que E es de Hausdorff y $x \in E$ no cero, por la Proposición 2.1.5 y el Teorema 2.1.2, existe $\epsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \notin \{y : \sup_{1\leq i\leq n} p_i(y) \leq \epsilon\} \ , (p_i \in Q)$$

así que $p(x) = p_i(x) > 0$ para alguna $1 \leq i \leq n$.

Supongamos que E no es de Hausdorff pero que para cada $x \in E$ no cero, existe alguna $p \in Q$ con $p(x) > 0$. Por la Proposición 2.1.5 existe $y \neq 0$ en E que pertenece a cada vecindad básica correspondiente a la topología definida por la familia de seminormas Q, esto contradice la hipótesis puesto que para $\mu > 0$ con $p(y) > \mu > 0$, $y \notin \{x : p(x) \leq \mu\}$, la cual es una vecindad básica en tal topología.

$\square$

Observación 2.1.10. *Si E es un espacio localmente convexo no de Hausdorff, existen $x \neq 0$ con $p(x) = 0$ para toda seminorma continua p. Sea N el conjunto de todos estos puntos $x \cup \{0\}$, N es un subespacio vectorial de E, ya que si $x, y \in N$, $\lambda \in \mathbb{K}$, p es una seminorma continua, tenemos:*

$$p(x + \lambda y) \leq p(x) + |\lambda| p(y) = 0$$

y así $x + \lambda y \in N$. Si $\mathscr{U}$ es una base de vecindades absolutamente convexas, entonces $N = \bigcap_{U \in \mathscr{U}} U$. En efecto, sea $x \in N$ entonces $x \neq 0$ y $p_U(x) = 0$ para toda $U \in \mathscr{U}$ y así $x \in \{x : p_U(x) < 1\} \subseteq U$ y $x \in \bigcap_{U \in \mathscr{U}} U$. Ahora, para toda seminorma continua p, si $x \in \bigcap_{U \in \mathscr{U}} U$ y $x \neq 0$, se sigue de la continuidad de p que $p(x) = 0$, en efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una vecindad básica $U_0 \in \mathscr{U}$, tal que $p(x) < \frac{1}{n}$ y $x \in U_0$, entonces $p(x) = 0$, si $x = 0$ entonces $p(x) = 0$, por lo tanto $\bigcap_{U \in \mathscr{U}} U \subseteq N$.

Afirmamos que N es la cerradura del conjunto que consiste sólo del origen: si $x \in N$ cada $U \in \mathscr{U}$ es vecindad de x. Además $U \cap \{0\} \neq \emptyset$ para cada U, entonces $x \in \overline{0}$. Por otro lado, si $x \in \overline{0}$ entonces $x + U \cap \{0\} \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathscr{U}$, así $0 - x = -x \in U$. Notamos que U es balanceada, entonces $x \in U$ para cada $U \in \mathscr{U}$ eso dice que $x \in N$.

Si p es una norma en E, la topología determinada en E por $Q = \{p\}$ es de Hausdorff, por la Proposición 2.1.8.

Definición 2.1.14. *El espacio E es llamado **normable** si su topología puede ser definida por una norma p.*

El campo escalar con su topología natural, es normable. En efecto, $p(\lambda) = |\lambda|$ es una norma adecuada ya que para $\lambda, \beta \in \mathbb{K}$, $p(\lambda) = |\lambda| \geq 0$ y $p(\lambda) = 0$ si y sólo si $\lambda = 0$, $p(\beta\lambda) = |\beta\lambda| = |\beta||\lambda| = |\beta| p(\lambda)$; finalmente $p(\lambda + \beta) = |\lambda + \beta| \leq |\lambda| + |\beta| = p(\lambda) + p(\beta)$.

Definición 2.1.15. *En un espacio normado general, la norma del punto x es usualmente denotada por $\|x\|$. Entonces el conjunto $\overline{B}(0, 1) = \{x : \|x\| \leq 1\}$ es llamada la **bola unitaria***

cerrada *(con centro en el origen) y los conjuntos* $\epsilon\overline{B}(0,1) = \overline{B}(0,\epsilon)$ $(\epsilon > 0)$ *forman una base de vecindades.*

Para $x \in E$ *denotamos la* ***bola abierta*** *de radio* $\epsilon > 0$ *con centro en* x *como:* $B(x,\epsilon) = \{y : \|x-y\| < \epsilon\}$.

Un espacio normado es metrizable y su métrica está dada por

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

En general :

Teorema 2.1.3. *El espacio localmente convexo* E *es metrizable si y sólo si este es de Hausdorff y existe una base numerable de vecindades. La topología de un espacio metrizable puede ser siempre definida por una métrica que es invariante bajo traslaciones.*

Demostración. Si E es un espacio metrizable, es de Hausdorff, pues si d es la métrica que induce la topología y $x \in E$ es tal que $x \neq 0$, $d(x,0) = \|x\| = r > 0$. Entonces $B(x, \frac{r}{2})$ y $B(0, \frac{r}{2})$ son dos conjunto abiertos disjuntos que contienen a x y 0 respectivamente. Además la colección $\{B(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ forma una base numerable de vecindades del origen.

Ahora, si E es de Hausdorff y tiene una base numerable, cada vecindad contiene una vecindad absolutamente convexa y por lo tanto hay una base $\mathscr{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ de vecindades absolutamente convexas. Sea p_{U_n} el funcional de Minkowski de U_n. Sea

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{ínf}\{p_{U_n}(x), 1\}$$

Entonces para $x, y \in E$ por las propiedades de ínfimo y la convergencia de la serie geométrica tenemos que $f(x) \leq 2$ y $f(y) \leq 2$, así

$$f(x+y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{ínf}\{p_{U_n}(x+y), 1\} \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} (\operatorname{ínf}\{p_{U_n}(x), 1\} + \operatorname{ínf}\{p_{U_n}(y), 1\}) =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{ínf}\{p_{U_n}(x), 1\} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{ínf}\{p_{U_n}(y), 1\} = f(x) + f(y)$$

Por otro lado, dado que p_{U_n} es una seminorma,

$$f(-x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{ínf}\{p_{U_n}(-x), 1\} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \operatorname{ínf}\{|-1| p_{U_n}(x), 1\} = f(x)$$

y si $f(x) = 0$ entonces $p_{U_n}(x) = 0$ para toda n y $x = 0$ ya que E es de Hausdorff. Definimos a d como sigue:

$$d(x,y) = f(x-y);$$

entonces d es una métrica y además $d(x+z, y+z) = f((x+z)-(y+z)) = f(x-y) = d(x, y)$, así d es invariante bajo traslaciones. En la topología métrica, los conjuntos

$$V_n = \{x : f(x) < 2^{-n}\}$$

forman una base de vecindades. Pero V_n es abierto en E con la topología original, ya que cada p_{U_n} es continua y por lo tanto f también lo es; también $V_n \subseteq U_n$, ya que si $x \in V_n$ pero $x \notin U_n$, entonces $p_{U_n}(x) \geq 1$ y por lo tanto $f(x) \geq 2^{-n}$, lo que contradice la hipótesis. Por lo tanto d define la topología original en E. □

Corolario 2.1.3. *Si la topología de un espacio localmente convexo de Hausdorff E es la topología localmente convexa más gruesa (débil) que hace a una sucesión de conjuntos absolutamente convexos absorbentes, vecindades (o a una sucesión de seminormas, continuas), entonces E es metrizable.*

Demostración. Para tal topología localmente convexa más gruesa que hace a los conjuntos V_n vecindades, los conjuntos $s^{-1} \bigcap_{1 \leq i \leq r} V_{n_i}$ (r y s enteros positivos) forman una base de vecindades (Corolario 2.1.1), la cual es numerable.

□

La función f construida en la demostración del Teorema 2.1.3 no es una norma, pues $f(\lambda x)$ no es igual a $|\lambda| f(x)$.

2.1.1. Dualidad

En esta sección introducimos el estudio de dualidad el cual juega un papel importante en el desarrollo de la teoría de espacios localmente convexos.

Definición 2.1.16. *Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el mismo campo $\mathbb{K}$ (de números reales o complejos). El morfismo f de E en F es llamado* ***lineal*** *(homomorfismo o morfismo en la categoría de espacios vectoriales) si*

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \;\; f(\lambda x) = \lambda f(x),$$

para cada $x \in E$, $y \in E$, y $\lambda \in \mathbb{K}$. Un morfismo lineal es usualmente llamado una transformación lineal. El morfismo lineal f es inyectivo si y sólo si el subespacio vectorial $f^{-1}(0)$ satisface que $f^{-1}(0) = \{0\}$.

En el conjunto L de todos los morfismos lineales de E en F la suma y multiplicación por escalares pueden definirse por:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ (\lambda f)(x)=\lambda(f(x))\ ;$$

así, L es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$. Cuando E y F son ambos espacios vectoriales topológicos, los morfismos lineales continuos de E en F forman un subespacio vectorial de L, porque la continuidad de f y g implican la continuidad de $f+g$ y λf. Existe un criterio simple para la continuidad de transformaciones lineales:

Proposición 2.1.9. *Si E y F son dos espacios vectoriales topológicos y si f es una transformación lineal de E en F, entonces f es continua en todo E si y sólo si f es continua en el origen.*

Demostración. Si f es continua en el origen y V es una vecindad en F, existe una vecindad U en E tal que $f(U)\subseteq V$. Entonces para cada punto $a\in E$, $f(a+U)=f(a)+f(U)\subseteq f(a)+V$ y así f es continua en a. $\square$

Corolario 2.1.4. *Si $(E,\|.\|_{1)}$ y $(F,\|.\|_{2)}$ son dos espacios normados y f es una transformación lineal de E en F, entonces f es continua si y sólo si existe una constante $\alpha>0$ con $\|f(x)\|_2\leq\alpha\|x\|_1$ para toda $x\in E$.*

Demostración. f es continua en el origen si y sólo si existe $\alpha>0$ tal que $\|f(x)\|_2\leq\alpha\|x\|_1$ para toda $x\in E$. En efecto, para V una vecindad en F cualquiera, existe $\lambda>0$ tal que $\lambda\overline{B}_F(0,1)$ (bola cerrada con centro en el origen de F, de radio λ) está contenida en V, y por la continuidad de f, existe $\epsilon>0$ tal que $\overline{B}_E(0,\epsilon)\subseteq f^{-1}(\overline{B}_F(0,\lambda))$. Como f es lineal, $f(\overline{B}_E(0,\epsilon))=\epsilon f(\overline{B}_E(0,1))\subseteq\lambda\overline{B}_F(0,1)$. Entonces para $\alpha=\frac{\lambda}{\epsilon}>0$, $\|f(x)\|_2\leq\alpha$ siempre que $\|x\|_1\leq 1$. Por lo tanto por el Lema 2.1.3 $\|f(x)\|_2\leq\alpha\|x\|_1$ para toda $x\in E$.

Por otro lado, supongamos que existe una constante α con $\|f(x)\|_2\leq\alpha\|x\|_1$ para toda $x\in E$. Sea $B_F(0,\epsilon)$ una vecindad en F; entonces

$$B_E(0,\tfrac{\epsilon}{\alpha})\subseteq f^{-1}(B_F(0,\epsilon)).$$

En efecto, si $x\in B_E(0,\frac{\epsilon}{\alpha})$ entonces $\|x\|_1\leq\frac{\epsilon}{\alpha}$. Por otro lado, $\|f(x)\|_2\leq\alpha\|x\|_1\leq\alpha(\frac{\epsilon}{\alpha})=\epsilon$. Así $f^{-1}(B_F(0,\epsilon))$ es una vecindad en E, por lo tanto f es continua en cero. Se sigue de la Proposición 2.1.9 que f es continua en todo E. $\square$

Sea T un subconjunto de L; $f\in T$ es continua si y sólo si para cada $f\in T$ y cada vecindad V en F, existe una vecindad U_f con $f(U_f)\subseteq V$.

Definición 2.1.17. *Si para cada vecindad V en F existe una vecindad U en E tal que $f(U)\subseteq V$, para cada f en T, o equivalentemente, para cada vecindad V en F, $\bigcap\limits_{f\in T}f^{-1}(V)$ es una vecindad en E, el conjunto T es llamado **equicontinuo**.*

Cuando E y F son espacios normados, entonces T es equicontinuo si y sólo si existe una constante α con $\|f(x)\| \leq \alpha\|x\|$ para toda $f \in T$.

Sean E y F dos espacios vectoriales topológicos y f un morfismo lineal de E en F, si f es una biyección de E en F, entonces f^{-1} es un morfismo lineal de F sobre E. Si además f es bicontinua decimos que f es un **isomorfismo** de E sobre F y los espacios vectoriales topológicos E y F son **isomorfos**. Cuando E y F son espacios normados se sigue del Corolario 2.1.4 que la transformación lineal f es un isomorfismo si y sólo si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ con :

$$\alpha\|x\| \leq \|f(x)\| \leq \beta\|x\|.$$

Definición 2.1.18. *Si E es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, un morfismo lineal del espacio E en el campo escalar $\mathbb{K}$ es llamado un **funcional o función lineal**. El conjunto de todos los funcionales de E es un espacio vectorial (sobre el campo $\mathbb{K}$) llamado el **dual algebraico (o conjugado algebraico)** de E y es denotado por E^*.*

Existen suficientes funcionales en E^* para distinguir los elementos de E, en el sentido siguiente.

Proposición 2.1.10. *Para cada $0 \neq a \in E$ existe un funcional $f \in E^*$ con $f(a) \neq 0$.*

Demostración. Si $a \neq 0 \in E$, dado que $\{a\}$ es un subconjunto linealmente independiente de E, este puede ser extendido por el axioma de elección a una base $\beta = \{a = a_0, a_1, ..., a_j\}_{j \in J}$ de E; definimos $f(a) = 1$ (por ejemplo) y $f(y) = 0$ para cada $y \in \beta \setminus \{a\}$, extendiendo a E por linealidad, es decir, para cada $u \in E$ existen escalares α_i, tales que

$$u = \sum_{j=0}^{n} \alpha_i a_i,$$

entonces definimos la extensión $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ de f como:

$$\tilde{f}(u) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_i f(a_i).$$

$\square$

Si f es un funcional no cero en E, entonces $H = f^{-1}(0)$ es un subespacio vectorial propio de E. El conjunto $\{H, a\}$ genera a E para cada $a \notin H$, ya que si $x \in E$, entonces $x - \frac{f(x)}{f(a)}a \in H$ pues por la linealidad $f(x - \frac{f(x)}{f(a)}a) = f(x) - \frac{f(x)}{f(a)}f(a) = 0$. Así $x = x - \frac{f(x)}{f(a)}a + \frac{f(x)}{f(a)}a$ (donde a y H son linealmente independientes). Entonces no existe un subespacio vectorial propio de

E que contenga estrictamente a H. En otras palabras, H es un subespacio vectorial propio maximal de E.

Inversamente, si H es un subespacio vectorial propio maximal de E, existen funcionales f tales que $f^{-1}(0) = H$ (porque existe algún $a \notin H$, y entonces cualquier elemento de E es de la forma $x + \lambda a$ con $x \in H$; sea $f(a) = \alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$, definimos $f(x + \lambda a) = \lambda\alpha$).

Cuando E es un espacio vectorial topológico, el subespacio vectorial de E^* que consiste de todos los funcionales que son continuos es llamado **el dual continuo** de E, y es denotado por E'. En un espacio vectorial topológico general es posible que el único funcional continuo sea el morfismo cero $f(x) = 0$ para toda $x \in E$. Una propiedad importante de los espacios localmente convexos es que el dual continuo es no trivial.

Observación 2.1.11. *Un funcional en E es continuo si y sólo si este es acotado en alguna vecindad. (Pues si f es continua, para $B(0, \epsilon)$ una vecindad en el campo $\mathbb{K}$, existe una vecindad V en E tal que $f(V) \subseteq B(0, \epsilon)$, entonces f es acotado en V. Inversamente, si $|f(x)| \leq \alpha$ en U, entonces $|f(x)| \leq \epsilon$ en $\epsilon\alpha^{-1}U$ y así f es continuo por la Proposición 2.1.9). Si E es un espacio localmente convexo y p es una seminorma continua tal que $|f(x)| \leq p(x)$ para toda $x \in E$, entonces f es continua, pues es acotada en la vecindad $\{x : p(x) \leq 1\}$. Si f es continua entonces $|f|$ es una seminorma continua.*

Un funcional no cero f está completamente especificado si su espacio nulo $f^{-1}(0) = H$ está dado y el valor de f en algún otro punto $a \notin H$ se conoce. Por ejemplo, H y un punto a donde $f(a) = 1$, f fijo. (Pues $x \in E \Rightarrow f(x) = f(x + \lambda a) = \lambda f(a)$).

Lema 2.1.4. *Sea f un funcional en un espacio vectorial, $f^{-1}(0) = H$, $f(a) = 1$ y $V = \{x : |f(x)| < 1\}$. Entonces, si U es un conjunto balanceado, $(a + U) \cap H = \emptyset$ si y sólo si $U \subseteq V$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que existe $x \in U$ pero que $x \notin V$; entonces $|f(x)| \geq 1 \Rightarrow |\frac{1}{f(x)}| \leq 1$. Por otro lado por ser U balanceado, $y = -\frac{x}{f(x)} \in U$ y por lo tanto $f(a + y) = 0$; así, $(a + U) \cap H \neq \emptyset$, lo que contradice la hipótesis. Entonces $x \in V$.

$\Leftarrow$) Supongamos que $U \subseteq V$. Sea $y \in (a + U)$, entonces existe $x \in U$ con $y = a + x$, pero $x \in V \Rightarrow |f(x)| < 1$, así $f(x) \neq -1$ y por lo tanto $f(y) = f(a + x) = 1 + f(x) \neq 0$. Entonces $y \notin H$, así $(a + U) \cap H = \emptyset$. □

Teorema 2.1.4. *Si f es un funcional en un espacio vectorial topológico E, entonces f es continuo si y sólo si $f^{-1}(0)$ es cerrado.*

Demostración. Si f es continuo, dado que $\{0\}$ es cerrado en $\mathbb{K}$, entonces la imagen inversa $f^{-1}(0)$ es cerrada. Supongamos ahora que $H = f^{-1}(0)$ es cerrado y sea $V = \{x : |f(x)| < 1\}$;

si f es el funcional cero, entonces es continuo, por lo tanto supongamos que $f \neq 0$. Entonces existe un punto $a \in E$ con $f(a) = 1$. Así, $a \notin H$ y como H es cerrado, existe una vecindad balanceada U tal que $(a + U) \cap H = \emptyset$. Por el Lema 2.1.4, $U \subseteq V$, así V es una vecindad en la cual f es acotada. De esta manera f es continuo (ver la Observación 2.1.11).

□

La demostración puede ser adaptada para demostrar que $f^{-1}(0)$ es ya sea cerrado ó denso en todo el espacio E es decir $\overline{f^{-1}(0)} = E$, pero una demostración más directa está basada en:

Proposición 2.1.11. *Si M es un subespacio vectorial de un espacio vectorial topológico, entonces $\overline{M}$ es un subespacio vectorial.*

Demostración. Sean $x, y \in \overline{M}$ y sea U una vecindad. Existe una vecindad V tal que $V + V \subseteq U$. Entonces $x + V$ y $y + V$ intersectan a M y $x + y + V + V \subseteq x + y + U$ por lo que $x + y + U$ intersecta a $M + M = M$. Por lo tanto, $x + y \in \overline{M}$. Ahora, si $\lambda = 0$, es claro que $\lambda x = 0 \in M \subseteq \overline{M}$. Si $\lambda \neq 0 \in \mathbb{K}$, para U vecindad, $\frac{1}{\lambda}U$ es también vecindad, entonces $x + \frac{1}{\lambda}U$ intersecta a M, así $\lambda x + U = \lambda(x + \frac{1}{\lambda}U)$ intersecta a $\lambda M = M$ y por lo tanto $\lambda x \in \overline{M}$, para toda $\lambda \in \mathbb{K}$. □

Corolario 2.1.5. *$f^{-1}(0)$ es cerrado ó denso en E.*

Demostración. $f^{-1}(0)$ es un subespacio vectorial propio maximal. □

Sea E un espacio localmente convexo con dual continuo E'. Entonces E' es un subespacio del dual algebraico E^* de E, $E' \subseteq E^*$. También a cada elemento x de E le corresponde un funcional $\tilde{x}$ en E' definido por $\tilde{x}(f) = f(x)$. El morfismo $x \mapsto \tilde{x}$ (definido de E en E'^*) es claramente lineal; si E es de Hausdorff, este morfismo es inyectivo, porque $\tilde{x} = \tilde{y}$ si y sólo si $f(x) = f(y)$ para toda $f \in E'$, si y sólo si $x = y$ (ver [34], Corolario 3, Teorema 3, pág. 29). Entonces E es identificado con un subespacio vectorial $\tilde{E}$ de E'^*. Vamos a ver que esta simetría algebraica entre E y E' en la cual cada uno es (isomorfo a) un subespacio vectorial del dual algebraico del otro, se extiende a uno topológico; existen topologías en E' bajo las cuales este es un espacio de Hausdorff convexo con dual continuo E.

Definición 2.1.19. *Sean E, F y G espacios vectoriales sobre el campo $\mathbb{K}$, un morfismo f de $E \times F$ en G es llamado **bilineal** si para cada $x \in E$ y cada $y \in F$, los morfismos $f_x : y \to f(x, y)$ y $f_y : x \to f(x, y)$ son lineales.*

Denotamos los elementos de E' por $x', y', ...$ y escribimos $\langle x, x' \rangle$ para el valor del funcional x' en el punto x de E. Entonces $\langle x, x' \rangle$ es una forma bilineal en E y E' respectivamente (por la Definición 2.1.19, para cada $x' \in E'$ fijo, este es un funcional en E y para cada $x \in E$ fijo, este es un funcional en E'), y las siguientes dos condiciones se satisfacen:

D.1 Para cada $x \neq 0$ en E, existe algún $x' \in E'$ con $\langle x, x' \rangle \neq 0$;

D.2 Para cada $x' \neq 0$ en E', existe algún $x \in E$ con $\langle x, x' \rangle \neq 0$;

En general, sean E y F dos espacios vectoriales sobre el mismo campo escalar (real o complejo), y sea $\langle x, y \rangle \neq 0$ una forma bilineal de $E \times F$ en $\mathbb{K}$ que satisface las condiciones **D.1** y **D.2**. Entonces existe un morfismo lineal natural de F en E^* ($\phi : F \longrightarrow E^*$), en el cual la imagen de $y \in F$ es el funcional f en E^* ($\phi(y) = f$) donde $f(x) = \langle x, y \rangle$.

Este morfismo es inyectivo por **D.2**, pues $\phi(y) = f = 0$ si y sólo si $f(x) = \langle x, y \rangle = 0$ para toda $x \in E$ lo que implica que $y = 0$ y así F es (isomorfo a) un subespacio vectorial de E^*. Similarmente, **D.1** implica que E es (isomorfo a) un subespacio vectorial de F^*; llamamos entonces a (E, F) un **par dual**. Claramente si (E, F) es un par dual, así lo es (F, E).

Mostramos más adelante que si E es un espacio localmente convexo de Hausdorff con dual continuo E', entonces (E, E') y también (E', E) son pares duales. Para cualquier espacio vectorial E con dual algebraico E^*, (E, E^*) es un par dual (pues **D.1** es consecuencia de la Proposición 2.1.10).

Definición 2.1.20. *Sea (E, E'), para cada $x' \in E'$ corresponde una seminorma "p" en E definida por $p(x) = |\langle x, x' \rangle|$. La topología más gruesa en E que hace a todas esas seminormas continuas (ver el Teorema 2.1.2) es llamada **la topología débil** en E determinada por E', y denotada por $\sigma(E, E')$. Ésta es claramente la topología más gruesa en E bajo la cual todos los funcionales en E' son continuos. En $(E, \sigma(E, E'))$, los conjuntos*

$$\{x : \sup_{1 \leq i \leq n} |\langle x, x_i' \rangle| \leqslant 1\} \ (x_i' \in E')$$

*forman una base de vecindades cerradas. (El 'ϵ' del Teorema 2.1.2 puede ser reemplazado por 1 ya que, $|\langle x, y' \rangle| \leqslant \epsilon$ si y sólo si $|\langle x, \epsilon^{-1} y' \rangle| \leqslant 1$.) La topología $\sigma(E, E')$ es localmente convexa y de Hausdorff, ya que **D.1** asegura las condiciones para la Proposición 2.1.8.*

Sea (E, τ) un espacio localmente convexo de Hausdorff y consideremos el espacio $(E, \sigma(E, E'))$, entonces el dual continuo E' de (E, τ) esta contenido en el dual continuo E'_σ de $(E, \sigma(E, E'))$. En efecto, sea $f \in E'$, entonces para cada $\epsilon > 0$, existe una vecindad abierta U en (E, τ) tal que $|f(x)| < \epsilon$ para cada $x \in U$, sin embargo $U = \{x \in E : \sup|\frac{1}{\epsilon}f(x)| \leq 1\}$ la cual es una vecindad en la topología débil $\sigma(E, E')$.

Ahora mostramos que es exactamente igual a E'. Primero demostramos el siguiente lema.

Lema 2.1.5. *Si $f_0, f_1, f_2, ..., f_n$ son funcionales en el espacio vectorial E, entonces f_0 es una combinación lineal de $f_1, f_2, ..., f_n$ o existe un elemento a de E tal que $f_0(a) = 1$ y $f_1(a) = f_2(a) = ...f_n(a) = 0$.*

Demostración. Suponemos que $f_1, f_2, ..., f_n$ son linealmente independientes, (en caso contrario, consideramos por eliminación, el subconjunto linealmente independiente más grande). Para $n = 0$ y $f_0 \neq 0$ existe $a_0 \in E$ tal que $f_0(a_0) = c \neq 0$ así $f_0(\frac{a_0}{c}) = 1$, supongamos que el resultado se satisface para $n - 1$. Entonces para cada i con $1 \leq i \leq n$, f_i no es combinación lineal de $f_1, f_2, ..., f_{i-1}, f_{i+1}, ..., f_n$. Por hipótesis de inducción existen elementos $a_i \in E$ con $f_i(a_j) = 0$ para cada $i \neq j$ y $f_i(a_i) = 1$. Para cada $x \in E$

$$x - \sum_{1 \leq i \leq n} f_i(x)a_i \in \bigcap_{1 \leq i \leq n} f_i^{-1}(0) = N,$$

Entonces existe un elemento $a \in N$ con $f_0(a) = 1$ y $f_i(a) = 0$ para toda $1 \leq i \leq n$, o $f_0(y) = 0$ para toda $y \in N$. En este caso, para cada $x \in E$

$$f_0(x) = \sum_{1 \leq i \leq n} f_i(x)f_0(a_i) = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i f_i(x)$$

y asi,

$$f_0 = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i f_i.$$

$\square$

Corolario 2.1.6. *Si $f_1, f_2, ..., f_n$ son funcionales linealmente independientes en un espacio vectorial E, entonces existen elementos $a_1, a_2, ..., a_n \in E$ con $f_i(a_i) = 1$ y $f_i(a_j) = 0$ para $i \neq j$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n)$.*

Proposición 2.1.12. *Si (E, E') es un par dual, entonces el dual continuo de $(E, \sigma(E, E'))$ es E'.*

Demostración. Sea f un funcional en E continuo en la topología $\sigma(E, E')$. Entonces $|f(x)| \leq \alpha < 1$ en alguna vecindad de la forma

$$U = \{x : \sup_{1 \leq i \leq n} |\langle x, x_i' \rangle| \leqslant 1\} \ (x_i' \in E').$$

Por el Lema 2.1.5, f es combinación lineal de $x'_1, x'_2, ..., x'_n$ o existe $a \in E$ tal que $f(a) = 1$ y $\langle a, x_i^{'} \rangle = 0$ para $1 \leq i \leq n$, así este último caso implica que $a \in U$. Pero $|f(a)| = 1 > \alpha$, lo que contradice la continuidad de f. Por lo tanto

$$f = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i x'_i \in E'$$

y f es continuo en la topología de E. Ahora cada $x' \in E'$ es continua en la topología $\sigma(E, E')$ y así el dual continuo de $(E, \sigma(E, E'))$ es E'. □

Si E es un espacio localmente convexo con dual continuo E', entonces (E', E) es un par dual y $\sigma(E', E)$ es una topología localmente convexa de Hausdorff en E' con la cual el dual continuo es E.

Definición 2.1.21. *Si (E, E') es un par dual, cualquier topología localmente convexa en E con la cual el dual continuo es E' es llamada una **topología del par dual** (E, E').*

La Proposición 2.1.12 muestra que $\sigma(E, E')$ es una de estas topologías; es la topología más gruesa (débil) del par dual (E, E'). Ya que ésta es de Hausdorff, todas las demás lo son. Aparentemente las propiedades topológicas dependen sólo del par dual y no de la topología particular del par dual. Esto significa que el estudio de tales propiedades en espacios localmente convexos de Hausdorff pueden ser llevados a la topología débil si es más conveniente. Tal propiedad es exhibida por:

Proposición 2.1.13. *Si (E, E') es un par dual y A es un subconjunto convexo de E, entonces la cerradura de A, $\overline{A}$, es la misma para cada topología del par dual (E, E').*

Demostración. Sea ξ cualquier otra topología del par dual (E, E') y denotamos por $\sigma = \sigma(E, E')$ y $\overline{A}_\sigma$ (resp. $\overline{A}_\xi$) la cerradura en la topología correspondiente, dado que $\sigma \preceq \xi$, $\overline{A}_\xi \subseteq \overline{A}_\sigma$ (pues ξ tiene más abiertos y por consiguiente más cerrados que σ). Por otro lado, para ver que $\overline{A}_\sigma \subseteq \overline{A}_\xi$, supongamos que $a \notin \overline{A}_\xi$, entonces por (ver [34], Proposición 5, Corolario 1, pág. 30) existe un funcional continuo $x' \in E'$ tal que $\langle a, x' \rangle \notin \overline{\langle A, x' \rangle}$. Por lo tanto, existe algún $\delta > 0$ tal que $|\langle a - x, x' \rangle| \geq \delta$ para toda $x \in A$. Sea $U = \{x : |\langle x, x' \rangle| < \delta\}$. Entonces U es una vecindad en σ tal que $a + U$ no intersecta a A. Entonces $a \notin \overline{A}_\sigma$ y así $\overline{A}_\sigma \subseteq \overline{A}_\xi$. □

Definición 2.1.22. *Sea (E, E') un par dual. Si A es un subconjunto de E, el subconjunto de E' que consiste de todos los x' para los cuales*

$$\sup\{|\langle x, x' \rangle| : x \in A\} \leq 1$$

es llamada la ***polar*** *de A (en E') y es denotada por A^0.*

Proposición 2.1.14. *Sea (E, E') un par dual. Entonces las polares en E' de subconjuntos de E satisfacen las siguientes propiedades:*

i) *A^0 es absolutamente convexa y $\sigma(E', E)$-cerrada;*

ii) *Si $A \subseteq B$ entonces $B^0 \subseteq A^0$;*

iii) *Si $\lambda \neq 0$, entonces $(\lambda A)^0 = (\frac{1}{|\lambda|})A^0$;*

iv) $\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)^0 = \bigcap_\alpha A_\alpha^0$.

Demostración.

i) Sean $x', y' \in A^0$ y escalares $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tales que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$, veamos que $\lambda x' + \mu y' \in A^0$. En efecto, para $x \in A$

$$|\langle x, \lambda x' + \mu y' \rangle| = |\lambda||\langle x, x' \rangle| + |\mu||\langle x, y' \rangle| \leq |\lambda| + |\mu| \leq 1,$$

esto para cada $x \in A$, así finalmente

$$\sup\{|\langle x, \lambda x' + \mu y' \rangle| : x \in A\} \leq 1.$$

entonces A^0 es absolutamente convexa. Ahora veamos que A^0 es $\sigma(E', E)$-cerrada, pero

$$A^0 = \bigcap_{x \in A} \{x' : |\langle x, x' \rangle| \leqslant 1\},$$

la cual es una intersección de imágenes inversas de conjuntos cerrados por funciones $\sigma(E', E)$-continuas; por lo tanto A^0 es $\sigma(E', E)$-cerrada.

ii) Sea $x' \in B^0$, entonces $\sup\{|\langle x, x' \rangle| : x \in B\} \leq 1$, pero $A \subseteq B$, en particular $\sup\{|\langle x, x' \rangle| : x \in A\} \leq 1$, entonces $x' \in A^0$.

iii) Sea $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned} x' \in (\lambda A)^0 &\Leftrightarrow \sup\{|\langle x, x' \rangle| : x \in \lambda A\} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow \sup\{|\langle \left(\frac{\lambda}{\lambda}\right) x, x' \rangle| : \frac{x}{\lambda} \in A\} \leq 1. \end{aligned}$$

Por bilinealidad y haciendo un cambio de variable obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \sup\{|\langle y, |\lambda| x'\rangle| : y \in A\} \leq 1\\
&\Leftrightarrow |\lambda| x' \in A^0\\
&\Leftrightarrow x' \in (\frac{1}{|\lambda|})A^0.
\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
x' \in \left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)^0 &\Leftrightarrow \sup\{|\langle x, x'\rangle| : x \in \bigcup_\alpha A_\alpha\} \leq 1\\
&\Leftrightarrow \sup\{|\langle x, x'\rangle| : x \in A_\alpha\} \leq 1 \;\text{ para cada }\; \alpha,\\
&\Leftrightarrow x' \in A^0_\alpha \;\text{ para cada }\; \alpha,\\
&\Leftrightarrow x' \in \bigcap_\alpha A^0_\alpha.
\end{aligned}$$

□

Existen algunos casos especiales importantes de los conjuntos polares. Si M es un subespacio vectorial de E, entonces $\sup\{|\langle x, x'\rangle| : x \in M\} \leq 1$ implica que $\langle x, x'\rangle = 0$ para toda $x \in M$. En efecto, si $\sup\{|\langle x, x'\rangle| : x \in M\} \leq 1$ entonces $x' \in M^0$. Supongamos que existe $y \in M$ tal que $0 < |\langle y, x'\rangle| = \lambda \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \frac{1}{\lambda}$, sea $\mu \in \mathbb{K}$ tal que $\frac{1}{\lambda} < \mu$; dado que M es un subespacio, $\mu x \in M$ para toda $x \in M$, así $|\langle \mu y, x'\rangle| = |\mu||\langle y, x'\rangle| = \mu|\langle y, x'\rangle| \leq 1 \Rightarrow \mu \leq \frac{1}{\lambda}$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto M^0 consiste de aquellos elementos de E' que se anulan en M y así este es el subespacio de E' **ortogonal** a M.

Si E es un espacio localmente convexo de Hausdorff, un subconjunto A' de su dual continuo E' es equicontinuo si y sólo si existe una vecindad U con $|\langle x, x'\rangle| = \lambda \leq 1$ para toda $x \in U$ y $x' \in A'$. Entonces A' es equicontinuo si y sólo si A' está contenida en la polar de alguna vecindad.

La operación de tomar la polar puede ser repetida: si (E, E') y (E', F) son pares duales y A es un subconjunto de E, la polar A^{00} de A^0 en F es llamada la **bipolar** de A en F, los casos más interesantes ocurren cuando F es E o E'^*. Estos son cubiertos si consideramos el caso aún más general en el cual sólo suponemos que $E \subseteq F \subseteq E'^*$. Esto asegura que (E', F) es un par dual siempre que (E, E') lo sea. Entonces $z \in A^{00}$ si y sólo si $|\langle z, x'\rangle| \leq 1$ siempre que $x' \in A^0$, lo cual sucede siempre que $sup\{|\langle x, x'\rangle| : x \in A\} \leq 1$. Entonces $z \in A^{00}$ si y sólo si

$$|\langle z, x'\rangle| \leq sup\{|\langle x, x'\rangle| : x \in A\}$$

por Lema 2.1.3. Ya que $A \subseteq E \subseteq F$, entonces $A \subseteq A^{00}$.

Teorema 2.1.5. *Sea (E, E') un par dual y F un subespacio vectorial de E'^* que contiene a E. Entonces la bipolar de A^{00} en F de un subconjunto A de E es la envolvente absolutamente convexa $\sigma(F, E')$-cerrada de A.*

Demostración. Sea B la envolvente absolutamente convexa $\sigma(F, E')$-cerrada de A. Por la Proposición 2.1.14, A^{00} es un conjunto absolutamente convexo $\sigma(F, E')$-cerrado que contiene a A, y así $B \subseteq A^{00}$. Si $a \notin B$ existe un funcional continuo $x' \in E'$ tal que $|\langle a, x'\rangle| > 1$ y $|\langle x, x'\rangle| \leq 1$ para toda $x \in B$ (ver [34], Corolario 1, Proposición 'Teorema de separación de Hahn- Banach', pág.29). Ahora $A \subseteq B$ y así $x' \in A^0$; entonces $a \notin A^{00}$. Por lo tanto, $A^{00} \subseteq B$ y así $B = A^{00}$. □

Corolario 2.1.7. *Si E es un espacio localmente convexo de Hausdorff con dual continuo E' y A es un subconjunto de E, entonces la bipolar A^{00} de A en E es la envolvente absolutamente convexa cerrada de A.*

Demostración. Por el Teorema 2.1.5 A^{00} es la envolvente absolutamente convexa $\sigma(E, E')$-cerrada de A y por la Proposición 2.1.13 $\sigma(E, E')$ puede ser reemplazada por la topología dada en E. □

En un espacio localmente convexo de dimensión finita se pueden considerar ciertas propiedades que a continuación se demostrarán. Primero consideramos un espacio vectorial de dimensión finita E y $(e_1, e_2, ..., e_n)$ una base para E, existe una **base dual** $(e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ en el dual algebraico E^* de E, con la propiedad de que $\langle e_i, e_j^*\rangle$ es igual a 1 cuando $i = j$ y 0 en otro caso. En efecto, cualquier elemento $x \in E$ se puede expresar de forma única como $\sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i e_i$ con $\langle x, e_i^*\rangle = \lambda_i$. Es fácil entonces verificar que los e_i^* son linealmente independientes, ya que $\sum_{1\leq j\leq n} \mu_j e_j^* = 0$ implica que $0 = \langle e_i, 0\rangle = \langle e_i, \sum_{1\leq j\leq n} \mu_j e_j^*\rangle = \sum_{1\leq j\leq n} \mu_j \langle e_i, e_j^*\rangle = \mu_i$, esto para cada i. También los e_i^* generan a E^* ya que si $x^* \in E^*$ y $x = \sum_{1\leq i\leq n} \lambda_i e_i$ con $\langle x, e_i^*\rangle = \lambda_i \in E$, entonces

$$\langle x, x^*\rangle = \sum_{1\leq j\leq n} \lambda_i \langle e_i, x^*\rangle = \sum_{1\leq i\leq n} \mu_i \langle x, e_i^*\rangle = \langle x, \sum_{1\leq i\leq n} \mu_i e_i^*\rangle,$$

con

$$\mu_i = \langle e_i, x^* \rangle, \text{ y así } x^* = \sum_{1 \leq i \leq n} \mu_i e_i^*.$$

Ahora, si E es de dimensión finita y (E, E') es un par dual, entonces $E' = E^*$, ya que si E y E^* tienen la misma dimensión entonces también E' y E'^*, además $E' \subseteq E^*$ y $E \subseteq E'^*$, todos deben tener la misma dimensión ($\dim E = \dim E^* \geq \dim E' = \dim E'^*$, por otro lado $\dim E' = \dim E'^* \geq \dim E = \dim E^*$). Por lo tanto $E' = E^*$.

Proposición 2.1.15. *Un espacio vectorial de dimensión finita tiene sólo una topología con la cual este es un espacio localmente convexo de Hausdorff.*

Demostración. Demostramos que para E un espacio localmente convexo de Hausdorff de dimensión finita, su topología (τ) es idéntica a $\sigma(E, E^*)$. Ya que el dual de E debe ser E^*, su topología es más fina que $\sigma(E, E^*)$ ($\sigma(E, E^*) \preceq \tau$). Ahora consideramos $(e_1, e_2, ..., e_n)$ cualquier base de E y $(e_1^*, e_2^*, ..., e_n^*)$ la correspondiente base dual de E^* y sea U una vecindad absolutamente convexa en E. Dado que U es absorbente, para cada e_i existe $\mu_i > 0$ tal que $e_i \in \mu_i U$, sea $\mu = \text{máx}\{\mu_i : 1 \leq i \leq n\}$, entonces por el Lema 2.1.2 $e_i \in \mu_i U \subseteq \mu U$ para cada $1 \leq i \leq n$. Entonces

$$V = \{x : \sup_{1 \leq i \leq n} |\langle x, e_i^* \rangle| \leq (\mu n)^{-1}\}$$

es una $\sigma(E, E^*)$- vecindad; si $x = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i e_i \in V$ para algunos $\lambda_i \in \mathbb{K}$, el Lema 2.1.2 implica

$$x \in \sum_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \mu U = \sum_{1 \leq i \leq n} |\langle x, e_i^* \rangle| \mu U \subseteq n(\mu n)^{-1} \mu U = U.$$

Así se demuestra que toda vecindad en τ lo es en $\sigma(E, E^*)$ ($\tau \preceq \sigma(E, E^*)$), por lo tanto ambas topologías son idénticas. □

Esta única topología en un espacio de dimensión finita es normable; correspondiente a cada base $(e_1, e_2, ..., e_n)$, se puede tomar, por ejemplo, la norma Euclidiana

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|^2}$$

para $x = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i e_i$. A esta única topología se le llama la **topología Euclidiana**.

Teorema 2.1.6. *Sea M un subespacio vectorial de dimensión finita de un espacio localmente convexo de Hausdorff. Entonces M es cerrado en E y la topología inducida en M es la topología Euclidiana.*

Demostración. La segunda parte es una consecuencia de la Proposición 2.1.15, porque la topología inducida hace a M un espacio vectorial topológico la cual es localmente convexa y de Hausdorff.

Para la primera parte, si $(e_1, e_2, ..., e_n)$ es una base de M y si $a \notin M$, entonces son linealmente independientes y con respecto a $a, e_1, e_2, ..., e_n$ como funcionales definidos del dual continuo E' de E en el campo $\mathbb{K}$ (por las valuaciones, si $x \in E$ se define $\widehat{x} : E' \longrightarrow \mathbb{K}$ por $\langle x, x' \rangle = \widehat{x}(x') = x'(x)$), por el Lema 2.1.5 existe $x' \in E$ tal que $\langle a, x' \rangle = 1$ y $\langle e_i, x' \rangle = 0$ para $1 \leq i \leq n$. Sea $U = \{x : |\langle x, x' \rangle| < 1\}$. Entonces U es una vecindad y $a+U$ es una vecindad de a que no intersecta a M, ya que si existe $x \in M$ y $x \in a+U$, entonces $x = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i e_i = a + y$ para escalares λ_i y algún $y \in U$, pero $\langle y, x' \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} \lambda_i \langle e_i, x' \rangle - \langle a, x' \rangle = -1$, pero esto contradice el hecho de que $y \in U$, así $a \notin \overline{M}$, por lo tanto $\overline{M} \subseteq M$ y M es cerrado.

□

Definición 2.1.23. *Supongamos que (E, E') y (F, F') son dos pares duales y t un morfismo lineal de E en F. Entonces $\langle t(x), y' \rangle$ es una función bilineal en las dos variables x y y'. Denotamos por $t'(y')$ el funcional en E el cual resulta de esta función bilineal fijando a $y' \in F'$, así que t' es definida por la identidad*

$$\langle x, t'(y') \rangle = \langle t(x), y' \rangle$$

*válida para cada $x \in E$ y cada $y' \in F'$. Entonces para cada $y' \in F'$, $t'(y') \in E^*$ y t' es un morfismo lineal de F' en E^*. Llamamos a t' la **transpuesta** del morfismo lineal t, (también llamada **adjunta, conjugada o dual**).*

Proposición 2.1.16. *Sean (E, E') y (F, F') pares duales y sea t un morfismo lineal de E en F con traspuesta t'. Entonces $t'(F') \subseteq E'$ si y sólo si es t es continuo cuando E y F están dotadas de sus topologías débiles $\sigma(E, E')$ y $\sigma(F, F')$ respectivamente.*

Demostración. Primero supongamos que t es continuo; entonces para cada $y' \in F'$ fijo, $\langle t(x), y' \rangle$ es un funcional continuo en E con la topología $\sigma(E, E')$, pues t y y' lo son; además $\langle t(x), y' \rangle = \langle x, t'(y') \rangle$ para cada $y' \in F'$, $t'(y') \in E^*$, así $t'(y')$ es continuo y $t'(y') \in E'$, entonces $t'(F') \subseteq E'$.

Ahora supongamos que $t'(F') \subseteq E'$ y sea

$$V = \{y : \sup_{1 \leq i \leq n} |\langle y, y'_i \rangle| \leq 1\}$$

una $\sigma(F, F')$-vecindad. Entonces si

$$U = \{x : \sup_{1\le i\le n} |\langle x, t'(y_i')\rangle| \le 1\}$$

es una $\sigma(E,E')$-vecindad tal que $t(U) \subseteq V$, pues para cada $x \in U \subseteq E$ tenemos

$$\langle x, t'(y')\rangle = \langle t(x), y'\rangle \Rightarrow \langle x, t'(y_i')\rangle = \langle t(x), y_i'\rangle \qquad \text{para todo } 1 \le i \le n.$$

Puesto que $x \in U$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \sup_{1\le i\le n} |\langle x, t'(y_i')\rangle| \le 1 \\ &\Leftrightarrow \sup_{1\le i\le n} |\langle t(x), y_i'\rangle| \le 1 \end{aligned}$$

así $t(x) \in V$, por lo tanto $t(U) \subseteq V \Rightarrow U \subseteq t^{-1}V$ y entonces t es continuo. □

Definición 2.1.24. *Un morfismo lineal $t : E \to F$ es **débilmente continuo** si este es continuo como una función $t : (E, \sigma(E,E')) \to (F, \sigma(F,F'))$.*

La operación de tomar la transpuesta de un morfismo lineal puede claramente ser repetida. En efecto, si (E,E'), (E',E''), (F,F'), (F',F'') son todos pares duales, y si t es un morfismo débilmente continuo de E en F, entonces t' aplica F' en E' y su transpuesta t'' aplica E'' en F'^*. Por la Proposición 2.1.16, t'' aplica E'' en F'' si y sólo si t' es continua cuando F' y E' tienen las topologías $\sigma(F',F'')$ y $\sigma(E',E'')$. El caso más simple surge cuando $E'' = E$ y $F'' = F$; entonces t'' coincide con t y así tenemos por la Proposición 2.1.16,

Corolario 2.1.8. *Si t es débilmente continuo, entonces su transpuesta t' lo es.*

Proposición 2.1.17. *Si t es un morfismo lineal continuo de un espacio localmente convexo de Hausdorff E (con dual continuo E') en un espacio localmente convexo de Hausdorff F (con dual continuo F'), entonces t también es continuo cuando E y F tienen asociadas las topologías débiles $\sigma(E,E')$ y $\sigma(F,F')$.*

Demostración. Para cada $y' \in F'$ fijo, $\langle t(x), y'\rangle$ es un funcional continuo en E y así $t'(y') \in E'$. Por lo tanto $t'(F') \subseteq E'$ y el resultado se sigue de la Proposición 2.1.16.

□

La implicación contraria de este resultado no es válida en general (tomando, por ejemplo, el morfismo identidad de E con una topología μ en E con otra topología τ estrictamente más fina que la topología del par dual, pues no toda vecindad W en la topología τ lo será en μ). Existe una relación algebraica que se requerirá más adelante.

Lema 2.1.6. *Sean (E, E') y (F, F') pares duales y sea t un morfismo lineal débilmente continuo de E en F, con transpuesta t'. Entonces, para cada subconjunto $A \subseteq E$,*

$$(t(A))^0 = t'^{-1}(A^0).$$

Demostración. Por definición, para $y' \in (t(A))^0$

$$|\langle t(x), y'\rangle| \leq 1 \Leftrightarrow |\langle x, t'(y')\rangle| \leq 1, \text{ para toda } x \in A$$

si y sólo si $t'(y') \in A^0$, es decir, $y' \in t'^{-1}(A^0)$. □

2.1.2. Topologías en espacios duales

Continuamos con el estudio de dualidad es esta sección. Primero consideramos un método general para definir topologías convexas en el dual de un espacio localmente convexo, tomando como vecindades del origen las polares de ciertos conjuntos en el espacio localmente convexo. Los conjuntos que son adecuados forman la clase importante de conjuntos acotados. El resultado principal es el teorema de Mackey-Arens el cual caracteriza todas las topologías localmente convexas con un dual dado. Resulta que para el conjunto de todas estas topologías existe un elemento mínimo y un elemento máximo, la topología débil y una más fina, respectivamente. Esta sección requiere de elementos más profundos de topología general que las anteriores, los subconjuntos compactos y precompactos de un espacio localmente convexo entran en desarrollo aquí y usamos el concepto de espacio completo.

Definición 2.1.25. *En un espacio vectorial se dice que el conjunto A* ***absorbe*** *al conjunto B si existe $\alpha > 0$ tal que $B \subseteq \lambda A$ para toda λ con $|\lambda| \geq \alpha$. Un conjunto absorbente A es aquel que absorbe puntos. En un espacio localmente convexo E (en general un espacio vectorial topológico), un conjunto A es llamado* ***acotado*** *(en el sentido de Von Neumann-Kolmogorov, ver el Ejemplo 3.2.1) si este es absorbido por cada vecindad.*

Lema 2.1.7. *Si $\mathscr{U}$ es una base de vecindades absolutamente convexas, el conjunto A es acotado si y sólo si para cada $U \in \mathscr{U}$ existe un $\lambda > 0$ tal que $A \subseteq \lambda U$ (esto implica que $A \subseteq \mu U$ para toda $|\mu| \geq \lambda$).*

Demostración. En efecto, si A es acotado, para cada $U \in \mathscr{U}$, la cual es vecindad, existe $\lambda > 0$ tal que $A \subseteq \mu U$ para toda μ con $|\mu| \geq \lambda$; pero U es una vecindad absolutamente convexa, así por el Lema 2.1.2, $\lambda U \subseteq \mu U$. Inversamente, si W es una vecindad en el espacio localmente convexo E, existe $U \in \mathscr{U}$ tal que $U \subseteq W$, por hipótesis existe $\lambda > 0$ tal que $A \subseteq \mu U \subseteq \mu W$ para toda $|\mu| \geq \lambda$. □

Lema 2.1.8. *Si la topología de E está determinada por el conjunto de seminormas Q, donde los conjuntos*

$$\{x : \sup_{1\leq i\leq n} p_i(x) \leq \epsilon\} \ (p_i \in Q)$$

forman una base de vecindades, entonces A es acotado si y sólo si $p(A)$ es un conjunto acotado de los números reales para cada $p \in Q$.

Demostración. En efecto, si A es acotado, entonces para $\epsilon > 0$, $[-\epsilon, \epsilon]$ es una vecindad básica cerrada en $\mathbb{R}$, y sea $p \in Q$ la cual es continua por el Teorema 2.1.2. Observamos que $U_p = \{x : p(x) \leq \epsilon\} \subseteq p^{-1}([-\epsilon, \epsilon])$, entonces existe un $\lambda > 0$ tal que $A \subseteq \lambda U_p$, lo que implica que $p(A) \subseteq \lambda[-\epsilon, \epsilon]$, así $p(A)$ es acotada, esto para cada $p \in Q$. Por otro lado, sea

$$U_n = \{x : \sup_{1\leq i\leq n} p_i(x) \leq \epsilon\}$$

un elemento de la base en E, para cada $p_i \in Q$ con $1 \leq i \leq n$; $p_i(A)$ es acotado, es decir, para la vecindad $[-\epsilon, \epsilon]$ existe $\lambda_i > 0$ tal que $p_i(A) \subseteq \lambda_i[-\epsilon, \epsilon]$, para cada i. Sea $\lambda = \max\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$, entonces $A \subseteq \lambda U_n$. En particular A es un conjunto acotado en $\sigma(E, E')$ si y sólo si $\langle A, x'\rangle$ es acotada para cada $x' \in E'$. □

Lema 2.1.9.

i) La cerradura, la envolvente convexa y la envolvente absolutamente convexa de un conjunto acotado son acotadas;

ii) cualquier subconjunto o múltiplo escalar de un conjunto acotado es acotado;

iii) cualquier unión finita o suma finita de conjuntos acotados es acotada.

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ una base de vecindades cerradas absolutamente convexas.

i) Si A es un conjunto acotado y B la cerradura, la envolvente convexa o la envolvente absolutamente convexa de A; entonces $A \subseteq B$. Para $U \in \mathscr{U}$, existe $\lambda > 0$ tal que $A \subseteq \lambda U$, así, tomando la cerradura, la envolvente convexa o la envolvente absolutamente convexa de ambos conjuntos en la contención y por la Proposición 2.1.4, $B \subseteq \lambda U$, B es acotado.

ii) Sea A un conjunto acotado; para $U \in \mathscr{U}$ existe $\lambda > 0$ tal que $A \subseteq \lambda U$. Si B es un subconjunto de A, $B \subseteq \lambda U$ y entonces B es acotado. Sea $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces puesto que U es absolutamente convexo y por el Lema 2.1.2, $\alpha A \subseteq \alpha\lambda U \subseteq \beta U$ con $\beta = |\alpha|\lambda > 0$, por lo tanto αA es acotado.

iii) Sean $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ conjuntos acotados; para $U \in \mathscr{U}$ y cada A_i con $1 \leq i \leq n$, existe $\lambda_i > 0$ tal que $A_i \subseteq \lambda_i U$. Sea $\lambda = \text{máx}\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$, puesto que U absolutamente convexo, por el Lema 2.1.2 $\lambda_i U \subseteq \lambda U$ para cada i y entonces

$$\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i \subseteq \bigcup_{1 \leq i \leq n} \lambda_i U \subseteq \lambda U,$$

así la unión finita de conjuntos acotados es acotada. Por otro lado usando iii) del Lema 2.1.2, sea $\beta = \sum_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ se tiene

$$\sum_{1 \leq i \leq n} A_i \subseteq \sum_{1 \leq i \leq n} (\lambda_i U) \subseteq \left(\sum_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i| \right) U \subseteq \beta U,$$

por lo tanto la suma finita de conjuntos acotados es acotada.

□

Proposición 2.1.18. *La imagen bajo un morfismo lineal continuo de un conjunto acotado es acotada.*

Demostración. Supongamos que t es un morfismo lineal continuo de E en F (dos espacios localmente convexos) y que A es un subconjunto acotado de E. Para cada vecindad absolutamente convexa V en F, $t^{-1}(V)$ es una vecindad en E y de aquí que exista $\lambda > 0$ tal que $A \subseteq \lambda t^{-1}(V)$. Entonces $t(A) \subseteq t(\lambda t^{-1}(V)) \subseteq \lambda t(t^{-1}(V)) \subseteq \lambda V$, por lo tanto $t(A)$ es acotado en F. □

En un espacio normado las bolas $\overline{B}(0, \epsilon) = \{x : \|x\| \leq \epsilon\}$ forman una base de vecindades que consiste de conjuntos acotados. Es suficiente con demostrar que la bola unitaria lo es, pues si $\overline{B}(0, \epsilon)$ con $\epsilon > 0$ es un elemento de la base, entonces $\overline{B}(0,1) \subseteq \left(\frac{1}{\epsilon}\right) \overline{B}(0, \epsilon)$ y por la Definición 2.1.25, $\overline{B}(0,1)$ es acotada.

Esta propiedad caracteriza a los espacios normados:

Teorema 2.1.7. *Si un espacio localmente convexo de Hausdorff E contiene una vecindad acotada, entonces E es normable.*

Demostración. Sea U una vecindad absolutamente convexa contenida en la vecindad acotada; entonces U es acotada por el Lema 2.1.9, ii). Por lo tanto, si V es cualquier vecindad, existe $\lambda > 0$ tal que $U \subseteq \lambda V$ y así $(\frac{1}{\lambda})U \subseteq V$. Entonces los conjuntos $\{\epsilon U\}(\epsilon > 0)$ forman una base de vecindades. Ya que el espacio es de Hausdorff, el funcional de Minkowski de U es una norma que define la topología (ver la Proposición 2.1.7 y la Proposición 2.1.8). □

Este teorema demuestra incidentalmente que las bolas $\overline{B}(0,\epsilon)$ de un espacio localmente convexo metrizable no normable no son necesariamente conjuntos acotados. Si ξ y η son dos topologías localmente convexas en E tales que ξ es más fina que η ($\eta \preceq \xi$), un conjunto acotado en ξ es también acotado en η; esto por el simple hecho de que todo abierto básico en η, es vecindad en ξ. En particular, si E' es el dual continuo de E bajo la topología de Hausdorff ξ, entonces los conjuntos ξ-acotados son también débilmente acotados ($\sigma(E,E')$-acotados).

Sea (E,E') un par dual y $\mathscr{A}$ cualquier conjunto de subconjuntos débilmente acotados de E. Entonces los elementos de la familia $\{A^0 : A \in \mathscr{A}\}$ son absolutamente convexos y absorbentes (Proposición 2.1.14). Entonces por el Corolario 2.1.1, existe una topología ξ' en E' en la cual éstas son vecindades. Una base de vecindades en ξ' está formada por los conjuntos de la forma

$$\epsilon \bigcap_{1\leqslant i\leqslant n} A_i^0 = (\epsilon^{-1} \bigcup_{1\leqslant i\leqslant n} A_i)^0 \ (\epsilon > 0, A_i \in \mathscr{A})$$

Resulta que la convergencia en ξ' es equivalente a la convergencia uniforme en cada $A \in \mathscr{A}$.

Definición 2.1.26. *La topología ξ' es llamada la* ***topología de convergencia uniforme en los conjuntos de $\mathscr{A}$****, o la* ***topología de $\mathscr{A}$-convergencia****. Llamamos a cualquier topología definida en este sentido una* ***topología polar****.*

En la práctica es necesario saber que $\mathscr{A}$ satisface:

BP.1 Si $A, B \in \mathscr{A}$, entonces existe $C \in \mathscr{A}$ con $A \cup B \subseteq C$.

BP.2 Si $A \in \mathscr{A}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. entonces $\lambda A \in \mathscr{A}$.

BP.3 $\displaystyle\bigcup_{A\in\mathscr{A}} A$ genera a E.

Las condiciones **BP.1** y **BP.2** aseguran que las polares de los conjuntos de $\mathscr{A}$ forman una base de vecindades para ξ', porque entonces si $\epsilon > 0$ y $A_i \in \mathscr{A}$ para $1 \leq i \leq n$, existe algún $C \in \mathscr{A}$ con

$$\epsilon^{-1} \bigcup_{1\leq i\leq n} A_i \subseteq C$$

y así, por Proposición 2.1.14 $C^0 \subseteq \epsilon \displaystyle\bigcap_{1\leq i\leq n} A_i^0$.

También **BP.3** es una condición suficiente para que cada $x \in E$ sea acotado en algún A^0 y así definir un funcional ξ'-continuo en E'. Entonces ξ' es más fina que $\sigma(E,E')$ y por lo tanto es de Hausdorff. Una topología polar puede ser descrita por seminormas. Para cada $A \in \mathscr{A}$ sea

$$\begin{aligned} p'_A(x') &= \inf\{\lambda > 0 : \left(\frac{1}{\lambda}\right) x' \in A^0\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 : \sup\{|\langle x, \left(\frac{1}{\lambda}\right) x'\rangle|, x \in A\} \leq 1\} \\ &= \inf\{\lambda > 0 : \sup\{|\langle x, x'\rangle|, x \in A\} \leq \lambda\} \\ &= \sup\{|\langle x, x'\rangle| : x \in A\}. \end{aligned}$$

Entonces p'_A definido anteriormente, es el funcional de Minkowski de A^0 y el conjunto $\{p'_A : A \in \mathscr{A}\}$ determina la topología de la $\mathscr{A}$-convergencia. Cuando $\mathscr{A}$ es el conjunto de todos los subconjuntos finitos de E, la topología de la $\mathscr{A}$-convergencia es $\sigma(E', E)$, la cual es la topología polar más gruesa (de **BP.3** y la Proposición 2.1.15). La topología polar más fina es obtenida tomando a $\mathscr{A}$ como el conjunto de todos los subconjuntos débilmente acotados de E. Esta topología es denotada por $\beta(E', E)$ y es a veces llamada la **topología más fuerte en** E'. Si E es un espacio normado y $\mathscr{A}$ es el conjunto de todas las bolas $\overline{B}(0, \epsilon)$ ($\epsilon > 0$), la topología de la $\mathscr{A}$-convergencia es normable, cuya norma es:

$$\|x'\| = \sup\{|\langle x, x'\rangle| : \|x\| \leq 1\}.$$

Proposición 2.1.19. *Cada topología localmente convexa de Hausdorff es una topología polar, llamada,* ***la topología de la convergencia uniforme sobre subconjuntos equicontinuous del espacio dual****.*

Demostración. Sea $\mathscr{U}$ una base de vecindades absolutamente convexas cerradas para la topología localmente convexa de Hausdorff ξ. Entonces $U = U^{00}$ (por el Corolario 2.1.7) y así ξ es la topología de la convergencia uniforme en los conjuntos U^0 ($U \in \mathscr{U}$). Si A' es equicontinuo, existe $U \in \mathscr{U}$ con $A' \subseteq U^0$. En efecto, por ser A' equicontinuo, para $\epsilon = 1$ existe una única vecindad $U \in \mathscr{U}$ tal que $|\langle x, a'\rangle| < \epsilon$ para cada $x \in U$ y $a' \in A'$, es decir, $\sup\{|\langle x, a'\rangle| : x \in U\} \leq 1$, por lo que $a' \in U^0$. Siguiendo con la demostración, ξ es la topología de la convergencia uniforme sobre subconjuntos equicontinuos del dual. $\square$

En un espacio localmente convexo metrizable, el 'tamaño' de un subconjunto A puede ser medido por el diámetro

$$d(A) = \sup_{x,y \in A} d(x, y).$$

Esto puede ser expresado en términos de vecindades de la forma $U_\epsilon = \{x : d(x,0) \leq \epsilon\}$. Entonces $d(A) \leq \epsilon$ si y sólo si $x - y \in U_\epsilon$ para toda $x, y \in A$. De esta forma, la idea se generaliza al tomar espacios localmente convexos.

Definición 2.1.27. *Si U es una vecindad de un espacio localmente convexo E, el subconjunto A de E es llamado **de orden pequeño** U, si $x - y \in U$ para todo $x, y \in A$. Un subconjunto A de un espacio localmente convexo es llamado **precompacto**, si para cada vecindad absolutamente convexa U, A puede ser cubierto por un número finito de conjuntos $(A_1, A_2, ..., A_n)$ de orden pequeño U.*

Con respecto a la definición anterior, si $a_i \in A_i$ para cada i entonces

$$A \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq n} (a_i + U).$$

Esto sucede ya que, si $x \in A$, entonces $x \in A_j$ para alguna j, pero A_j es de orden pequeño U, entonces $x - a_j \in U$, así $x \in a_j + U$, por lo tanto $x \in \bigcup\limits_{1\leq i\leq n} (a_i + U)$. Inversamente, un conjunto A con la propiedad de que para cada vecindad U existen puntos $a_1, a_2, ...a_n$ con

$$A \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq n} (a_i + U),$$

es precompacto. En efecto, sea U una vecindad absolutamente convexa, por la Proposición 2.1.3, existe una vecindad V tal que $V + V \subseteq U$, por hipótesis existen $a'_1, a'_2, ...a'_m$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq m} (a'_i + V),$$

entonces $A \cap (a'_k + V) \neq \emptyset$ al menos para algún k, así podemos considerar todos los conjuntos $A_j = A \cap (a'_j + V) \neq \emptyset$, con $1 \leq j \leq n$ y $n \leq m$, por lo tanto

$$A \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq m} A \cap (a'_i + V) \subseteq \bigcup_{1\leq j\leq n} A_j.$$

Cada A_j es de orden pequeño U, pues para cada $x, y \in A_j$, existen $u, v \in V$ tales que $x - y = (a'_j + u) - (a'_j + v) = u - v \in V + V \subseteq U$, luego A es precompacto.

Lema 2.1.10.

i) La cerradura de un conjunto precompacto es precompacto.

ii) Todo subconjunto o múltiplo escalar de un conjunto precompacto es precompacto.

iii) Toda unión o suma finita de conjuntos precompactos es precompacta.

Demostración. Sea A un subconjunto precompacto de un espacio localmente convexo E.

i) Por el Corolario 2.1.2 podemos considerar una base de vecindades absolutamente convexas cerradas $\mathscr{U}$, así para $U \in \mathscr{U}$ existen $a_i \in E$ $(1 \leq i \leq n)$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq n} (a_i + U) \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{\bigcup_{1\leq i\leq n} (a_i + U)} = \bigcup_{1\leq i\leq n} \overline{(a_i + U)} = \bigcup_{1\leq i\leq n} (a_i + U),$$

por lo tanto $\overline{A}$ es precompacto.

ii) Veamos que λA es precompacto para cualquier $\lambda \in \mathbb{K}$. Sea $\mathscr{W}$ la base de vecindades del Teorema 2.1.1, para $W \in \mathscr{W}$ y $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$, $\frac{1}{\lambda}W$ es una vecindad absolutamente convexa para la cual existe un número finito de conjuntos $A_1, ..., A_m$ de orden pequeño $\frac{1}{\lambda}W$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq m} A_i \Rightarrow \lambda A \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq m} \lambda A_i,$$

donde cada λA_i es de orden pequeño W, pues para cada $\lambda y, \lambda y' \in \lambda A_i$ se tiene que $\lambda y - \lambda y' = \lambda(y - y') \in \lambda(\frac{1}{\lambda}W) = W$. Ahora si $\lambda = 0$ y $a \in A$, para U una vecindad absolutamente convexa, existen $B_1, ..., B_p$ conjuntos de orden pequeño U tales que

$$0 \in a - A \subseteq a - \bigcup_{1\leq i\leq m} B_i = \bigcup_{1\leq i\leq m} a - B_i,$$

donde cada $a - B_i$ es de orden pequeño W, ya que para $r, s \in a - B_i$, existen $r', s' \in B_i$ tales que

$$r - s = (a - r') - (a - s') = s' - r' \in U,$$

así 0 es precompacto. Por lo tanto λA es precompacto para cualquier escalar λ.

Por otro lado si $B \subseteq A$, para la vecindad U

$$B \subseteq A \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq m} B_i,$$

esto demuestra que B es precompacto.

Ahora procedemos por inducción. Sean A_1, A_2 conjuntos precompactos y sea V una vecindad absolutamente convexa en el espacio localmente convexo E.

iii) Existen $C_1, ..., C_t$ y $D_1, ..., D_l$ conjuntos de orden pequeño V tales que

$$A_1 \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq t} C_i \text{ y } A_2 \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq l} D_i$$

lo cual implica que

$$A_1 \cup A_2 \subseteq (\bigcup_{1\leq i\leq t} C_i) \cup (\bigcup_{1\leq i\leq l} D_i) \subseteq \bigcup_{\substack{1\leq j\leq t\\ 1\leq i\leq l}} C_j \cup D_i,$$

si consideramos a $D_k = C_{t+k}$ para $k = 1, ..., l$, tenemos:

$$A_1 \cup A_2 \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq t+l} C_i,$$

donde cada C_i es de orden pequeño V. Se sigue por inducción de forma similar que la unión finita de conjuntos precompactos es precompacta.

Finalmente, para la vecindad V existe una vecindad básica V' en la base del Teorema 2.1.1, donde $V' \subseteq V$ y $\frac{1}{2}V'$ es una vecindad para la cual existen puntos $c_1, ..., c_k$ y $d_1, ..., d_q$ en E tales que

$$A_1 \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq k} c_i + \frac{1}{2}V' \text{ y } A_2 \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq q} d_i + \frac{1}{2}V',$$

entonces

$$A_1 + A_2 \subseteq \bigcup_{\substack{1\leq j\leq k\\ 1\leq i\leq q}} (c_j + \frac{1}{2}V') + (d_i + \frac{1}{2}V') \subseteq \bigcup_{\substack{1\leq j\leq k\\ 1\leq i\leq q}} (c_j + d_i + V') \subseteq \bigcup_{\substack{1\leq j\leq k\\ 1\leq i\leq q}} (c_j + d_i + V).$$

De forma similar para cualquier suma finita de conjuntos precompactos, así cualquier suma finita de precompactos es precompacta.

□

Lema 2.1.11. *La imagen bajo un morfismo lineal continuo de un conjunto precompacto es precompacto.*

Demostración. Sea f un morfismo lineal continuo entre dos espacios localmente convexos E y F. Consideramos a K un subconjunto precompacto de E, si V es una vecindad absolutamente convexa en F, existe una vecindad absolutamente convexa V en E tal que $f(U) \subseteq V$ y puntos $x_1, ..., x_n \in E$ tales que

$$\begin{aligned} K &\subseteq \bigcup_{1\leq i\leq n} x_i + U \Rightarrow \\ f(K) &\subseteq f(\bigcup_{1\leq i\leq n} x_i + U) = \bigcup_{1\leq i\leq n} f(x_i + U) = \bigcup_{1\leq i\leq n} f(x_i) + f(U) \\ &\subseteq \bigcup_{1\leq i\leq n} f(x_i) + V, \end{aligned}$$

por lo tanto $f(K)$ es precompacto. □

Proposición 2.1.20. *Un conjunto precompacto es acotado.*

Demostración. Si U es una vecindad absolutamente convexa y

$$A \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq n} (a_i + U),$$

entonces existe $\lambda > 0$ tal que $a_i \in \lambda U$ para $1 \leq i \leq n$. Por lo tanto $A \subseteq (1+\lambda)U$, debido a la convexidad de U. □

Un concepto topológico que nos es de gran utilidad es el de conjunto compacto en espacios localmente convexos.

Definición 2.1.28. *Sea E un espacio topológico y A un subconjunto de E. Un conjunto $\mathscr{C}$ de subconjuntos de E se dice que forma una **cubierta** de A si A está contenido en la unión de elementos de $\mathscr{C}$; si los elementos de $\mathscr{C}$ son abiertos, $\mathscr{C}$ es llamada una **cubierta abierta** de A. El conjunto A es llamado **compacto** si cada cubierta abierta de A contiene una subcubierta finita.*

Lema 2.1.12. *Supongamos que ξ y η son dos topologías en el mismo espacio topológico y que ξ es más fina que η en el conjunto A. Si A es ξ-compacto entonces A es también η-compacto.*

Demostración. Sea $\mathscr{C}$ una cubierta η-abierta, ésta es una cubierta ξ-abierta, entonces existe una subcubierta finita que contiene a A, por lo tanto A es η-compacto.

□

Si E es un espacio localmente convexo, y A es un subconjunto compacto de E entonces A es precompacto. En efecto, para U una vecindad abierta, la familia de conjuntos $\{x+U : x \in A\}$ es una cubierta abierta de A, entonces existe un número finito de puntos, digamos $x_1, x_2, ..., x_n$ tales que $A \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq n} (x_i + U)$. Además por la Proposición 2.1.20 A es acotado. En conclusión, todo subconjunto compacto de un espacio localmente convexo es acotado.

Lema 2.1.13. *En un espacio localmente convexo:*

i) cualquier múltiplo escalar de un conjunto compacto es compacto;

ii) cualquier suma finita de subconjuntos compactos es compacta;

iii) la suma de un conjunto compacto y un conjunto cerrado es un conjunto cerrado.

Demostración. i) Consideramos A un conjunto compacto y $\lambda \in \mathbb{K}$, para $\lambda = 0$ y $\mathscr{C}$ una cubierta abierta de λA, existe $C \in \mathscr{C}$ tal que $0 \in C$. Si $\lambda \neq 0$, y $\mathscr{C}$ una cubierta abierta de λA

$$\lambda A \subseteq \bigcup_{C\in\mathscr{C}} C \Rightarrow A \subseteq \frac{1}{\lambda} \bigcup_{C\in\mathscr{C}} C \subseteq \bigcup_{C\in\mathscr{C}} \frac{1}{\lambda} C,$$

pero para cada $C \in \mathscr{C}$, $\frac{1}{\lambda}C$ sigue siendo abierto, y todos ellos forman una cubierta abierta de A que es compacto, así existe una subcubierta finita tal que

$$A \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq n} \frac{1}{\lambda} C_i \Rightarrow A \subseteq \frac{1}{\lambda} \bigcup_{1\leq i\leq n} C_i \Rightarrow \lambda A \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq n} C_i.$$

ii) Sean $A_1, A_2, ..., A_n$ conjuntos compactos, procedemos por inducción. Sean A_1, A_2 dos conjuntos compactos y sea $\mathscr{C}$ una cubierta abierta de $A_1 + A_2$. Para $x \in A_1, y \in A_2$, existe una vecindad abierta absolutamente convexa $U_{(x,y)}$ del origen para la cual $x + y + U_{(x,y)}$ está contenido en algún conjunto de $\mathscr{C}$. Si x es fijo, y y varía en todo A_2, los conjuntos $y + \frac{1}{2}U_{(x,y)}$ forman una cubierta abierta de A_2, pero A_2 es compacto, así

$$\{y_j + \tfrac{1}{2}U_{(x,y_j)} : 1 \leq j \leq n_x\}$$

es una subcubierta abierta, sea

$$V_x = \bigcap_{1\leq j\leq n_x} \frac{1}{2} U_{(x,y_j)}.$$

Entonces los conjuntos $x+V_x$ forman una cubierta abierta de A_1, que es compacto. Sea

$$\{x_{_i} + V_{x_i} : 1 \leq i \leq m\}$$

una subcubierta finita. Entonces

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &\subseteq \bigcup_{1\leq i\leq m} (x_{_i} + V_{x_i}) + A_2 \\ &\subseteq \bigcup_{1\leq i\leq m} \bigcup_{1\leq j\leq n_{x_i}} (x_{_i} + y_{_j} + \frac{1}{2}U_{(x_i,y_j)} + \frac{1}{2}U_{(x_i,y_j)}). \end{aligned}$$

pero lo anterior esta contenido en una unión finita de conjuntos de $\mathscr{C}$. Entonces A_1+A_2 es compacto. Se sigue para n que $\sum_{k=1}^{n} A_k$ es compacto.

iii) Sean A un conjunto compacto, B un conjunto cerrado y $a \notin A+B$, entonces $a \notin x+B$, para cada $x \in A$. Si $x \in A$, $x + B$ es un conjunto cerrado, así existe una vecindad absolutamente convexa U_x de x tal que

$$(a + U_x) \cap (x + B) = \emptyset.$$

Lo cual implica que $a \notin x + U_x + B$. Pero los conjuntos $x + \frac{1}{2}U_x$ forman una cubierta abierta del conjunto compacto A, por lo que existe una subcubierta finita

$$\{x_i + \tfrac{1}{2}U_{x_i} : 1 \leq i \leq n\}$$

de A. Ahora consideramos

$$V = \bigcap_{1\leq i\leq n} \frac{1}{2}Ux_i.$$

Entonces

$$A + V \subseteq \bigcup_{1\leq i\leq n} (x_i + \frac{1}{2}U_{x_i}) + \frac{1}{2}U_{x_i} \subseteq \bigcup_{x\in A} x + U_x,$$

Por lo tanto $a \notin A + V + B$ y $(a + V) \cap (A + B) = \emptyset$, lo que significa que $a \notin \overline{A + B}$, $\overline{A + B} \subseteq A + B$ y finalmente $A + B$ es cerrado.

$\square$

Muchas de las propiedades de espacios métricos pueden ser descritas de manera conveniente en términos de sucesiones, como por ejemplo: $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe una sucesión de puntos de A que convergen a x, la función f es continua en x si y sólo si $f(x_n) \to f(x)$ siempre que $x_n \to x$. Estas propiedades se conservan en espacios topológicos bajo una noción de generalización del concepto de sucesión, los filtros.

Definición 2.1.29. *Sea E cualquier conjunto. Un conjunto $\mathscr{F}$ no vacío de subconjuntos no vacíos de E ($\mathscr{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$) es llamado un **filtro** si satisface:*

Fi.1 $\emptyset \notin \mathscr{F}$

Fi.2 *Si $A \in \mathscr{F}$ y $B \in \mathscr{F}$, entonces $A \cap B \in \mathscr{F}$.*

Fi.3 *Si $A \in \mathscr{F}$ y $A \subseteq B$, entonces $B \in \mathscr{F}$.*

Por ejemplo, si A es un subconjunto fijo de E, el conjunto de todos los subconjuntos que contienen a A es un filtro; otro ejemplo ilustrativo de filtro es el conjunto de todas las vecindades de un punto de un espacio topológico. Como el conjunto de vecindades de un punto, un filtro puede ser generado por una base.

Definición 2.1.30. *Un conjunto no vacío $\mathscr{B}$ de subconjuntos no vacíos de E es llamado una **base de filtro** si satisface:*

BFi.1 *Si $A \in \mathscr{B}$ y $B \in \mathscr{B}$, existe $C \in \mathscr{B}$ tal que $C \subseteq A \cap B$.*

*El conjunto $\mathscr{F}$ de todos los conjuntos que contienen a algún conjunto de la base de filtro $\mathscr{B}$ es entonces un filtro, llamado el **filtro generado** por $\mathscr{B}$.*

Si f es una función de E en F y $\mathscr{B}$ es una base de filtro (o un filtro) en E, entonces $f(\mathscr{B})$ es una base de filtro en F, ya que para A' y $B' \in f(\mathscr{B})$ existen $A, B \in \mathscr{B}$ tales que $f(A) = A'$ y $f(B) = B'$; por ser $\mathscr{B}$ una base de filtro (o un filtro), existe $C \in \mathscr{B}$ (en caso de ser $\mathscr{B}$ un filtro, $C = A \cap B$) con $C \subseteq A \cap B \Rightarrow f(C) \subseteq f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$, pero $f(C) \in f(\mathscr{B})$.

Si E es un espacio topológico, **el filtro (o base de filtro)** $\mathscr{F}$ se dice que **converge** a x si cada vecindad de x contiene a algún elemento de $\mathscr{F}$, en este caso denotamos la convergencia por $\mathscr{F} \to x$. En el caso de ser $\mathscr{F}$ un filtro, $\mathscr{F} \to x$ si y sólo si cada vecindad de x pertenece a $\mathscr{F}$. Ya que si V_x es una vecindad de x, existe $U \in \mathscr{F}$ tal que $U \subseteq V_x$, por **Fi.3**, $V_x \in \mathscr{F}$. Inversamente, si V_x es una vecindad de x, $V_x \in \mathscr{F}$ y se contiene a sí misma, por lo tanto $\mathscr{F} \to x$. Una consecuencia inmediata de este resultado es que si $\mathscr{F} \to x$, entonces $x \in \overline{U}$ para cada $U \in \mathscr{F}$, esto ya que para cada V_x vecindad de x, $V_x \in \mathscr{F}$, entonces por **Fi.1** y **Fi.2** si $U \in \mathscr{F}$, $U \cap V_x \neq \emptyset \Rightarrow x \in \overline{U}$.

Definición 2.1.31. *En un espacio localmente convexo, el filtro $\mathscr{F}$ es un* ***filtro de Cauchy*** *si para cada vecindad U, $\mathscr{F}$ contiene un conjunto de orden pequeño U.*

Todo filtro convergente es un filtro de Cauchy. Si $\mathscr{F} \to a$ y U es una vecindad absolutamente convexa, $a + \frac{1}{2}U$ es una vecindad de a, entonces $a + \frac{1}{2}U \in \mathscr{F}$, para $F \in \mathscr{F}$ $(a + \frac{1}{2}U) \cap F \neq \emptyset$, así existe $A = (a + \frac{1}{2}U) \cap F \in \mathscr{F}$ tal que $A \subseteq (a + \frac{1}{2}U)$ y entonces A es de orden pequeño U ya que si $x, y \in A$ entonces $x - y = (a + \frac{1}{2}u) - (a + \frac{1}{2}v)$ para algunos $u, v \in U$, pero U es convexo, entonces $x - y \in \frac{1}{2}U + \frac{1}{2}U = U$. Si inversamente, cada filtro de Cauchy es convergente, el espacio E es llamado **completo**; en general, el **subconjunto** A de E es llamado **completo** si cada filtro de Cauchy al cual pertenece A converge a un punto de A.

Lema 2.1.14. *Sean $\mathscr{F}$ un filtro en un conjunto E y $f : E \to F$ una función en un conjunto F,*

i) Si f es suprayectiva, $f(\mathscr{F})$ es un filtro en F.

ii) Si E, F son dos espacios localmente convexos y f es además (de suprayectiva) una transformación lineal continua y $\mathscr{F}$ es un filtro de Cauchy en E, entonces $f(\mathscr{F})$ es un filtro de Cauchy en F.

Demostración.

i) Veamos que se satisfacen las condiciones para que $f(\mathscr{F})$ sea un filtro en F. Como $\emptyset \notin \mathscr{F} \Rightarrow \emptyset \notin f(\mathscr{F})$, así se cumple **Fi.1**. Sea $A' \in f(\mathscr{F})$ y $B' \subseteq A'$, existe $A \in \mathscr{F}$ tal que $f(A) = A' \Rightarrow A \subseteq f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(A')$, como $\mathscr{F}$ es un filtro, por **Fi.3** $f^{-1}(f(A)) \in \mathscr{F}$. Además f es suprayectiva, así $f(f^{-1}(B')) = B'$. Entonces

$$f^{-1}(B') \subseteq f^{-1}(A') \Rightarrow f^{-1}(B') \in \mathscr{F} \Rightarrow B' \in f(\mathscr{F}).$$

Por lo tanto se satisface **Fi.3**. Para ver **Fi.2**, sean $A', B' \in f(\mathscr{F})$, por la discusión anterior, $f^{-1}(A')$ y $f^{-1}(B') \in \mathscr{F}$, entonces por **Fi.2** y la suprayectividad de f

$$f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B') \in \mathscr{F} \Rightarrow f(f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')) \in f(\mathscr{F})$$
$$f(f^{-1}(A')) \cap f(f^{-1}(B')) \in f(\mathscr{F}) \Rightarrow A' \cap B' \in f(\mathscr{F}).$$

ii) Sea U una vecindad en F, por la continuidad de f, $f^{-1}(U)$ es una vecindad en E, así por hipótesis existe $A \in \mathscr{F}$ de orden pequeño $f^{-1}(U)$, entonces $f(A)(\in f(\mathscr{F}))$ es de orden pequeño U, ya que para $x', y' \in f(A)$, existen $x, y \in A$ tales que $f(x) = x'$ y $f(y) = y'$ pero entonces $x - y \in f^{-1}(U)$ para todo $x, y \in A$, por ser f lineal y sobreyectiva se tiene que

$$f(x) - f(y) \in f(f^{-1}(U)) = U \Rightarrow x' - y' \in U.$$

Por lo tanto, por el inciso $i)$ y lo anterior $f(\mathscr{F})$ es un filtro de Cauchy en el espacio localmente convexo F.

□

Definición 2.1.32. *Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ (también denotada por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$) en un espacio localmente convexo es llamada una* ***sucesión de Cauchy*** *si para cada vecindad U, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para cualesquiera naturales $m, n \geq k$ se satisface que $x_n - x_m \in U$.*

Un teorema fundamental en el estudio de espacios localmente convexos es:

Teorema 2.1.8 (Teorema de Mackey-Arens)**.** *Supongamos que (E, E') es un par dual, y que (E, ξ) es un espacio localmente convexo de Hausdorff. Entonces (E, ξ) es el dual continuo de E' si y sólo si ξ es una topología de la convergencia uniforme sobre un conjunto de subconjuntos absolutamente convexos $\sigma(E', E)$-compactos de E'.*

Demostración. Si E tiene dual continuo E' bajo la topología ξ, entonces ξ es la topología de la convergencia uniforme sobre los conjuntos U^0 (Proposición 2.1.19), si U es vecindad en la topología ξ y cada U^0 es absolutamente convexa, entonces por el Teorema 6 ([34], pág. 61), U^0 es $\sigma(E', E)$-compacto.

Inversamente, si ξ es una topología de la convergencia uniforme sobre un conjunto de subconjuntos absolutamente convexos $\sigma(E', E)$-compactos de E', entonces por la Proposición 8 ([34], pág. 55) aplicada a E y E' intercambiadas y con la topología $\sigma(E', E)$ en E', esto demuestra que el dual continuo de E es precisamente E'. □

Este teorema demuestra que existe una topología más fina del par dual (E, E'), llamada la topología de la convergencia uniforme sobre el conjunto de todos los subconjuntos absolutamente convexos $\sigma(E', E)$-compactos de E'. Esta topología es denotada por $\tau(E, E')$ y algunas veces es llamada la **topología de Mackey**, ésta es más gruesa que $\beta(E, E')$, la topología polar más fina; si, bajo $\beta(E, E')$, el dual continuo de E es E', entonces $\beta(E, E')$ es idéntica a $\tau(E, E')$.

2.1.3. Espacios Barrilados

En esta sección estudiamos y caracterizamos a los espacios barrilados, la noción de un espacio barrilado es útil en muchos otros contextos como lo vemos en capítulos posteriores.

Definición 2.1.33. *En un espacio localmente convexo, un subconjunto es llamado un* ***barril*** *si este es absolutamente convexo, absorbente y cerrado. Cada espacio localmente convexo tiene una base de vecindades que consiste de barriles, un espacio localmente convexo es llamado* ***barrilado*** *si cada barril es una vecindad.*

Si (E, E') es un par dual, por la Proposición 2.1.13 la cerradura de un conjunto absolutamente convexo de E es la misma para todas las topologías del par dual (E, E') y por lo tanto la propiedad de ser un barril en E depende sólo del par dual (E, E').

Proposición 2.1.21. *Sea E un espacio localmente convexo de Hausdorff con dual continuo E'. Entonces el subconjunto B de E es un barril si y sólo si B es la polar de un subconjunto $\sigma(E', E)$-acotado de E'.*

Demostración. Primero demostramos que para un par dual (E, E'), A es un subconjunto débilmente acotado de E si y sólo si A^0 es un subconjunto absorbente de E'. En efecto, si A es débilmente acotado, para cada $x' \in E'$, $\langle A, x'\rangle$ es acotado, así, existe $\epsilon > 0$ tal que $|\langle x, x'\rangle| < \epsilon$ para toda $x \in A$; entonces $\frac{1}{\epsilon}x' \in A^0$, así A^0 es absorbente en E'. Inversamente, supongamos que A^0 es un subconjunto absorbente de E' y $\{x : \sup_{1\leq i\leq n} |\langle x, x'_i\rangle| \leq 1\}$, con $x'_i \in E'$ para cada i, un elemento básico para la topología débil. Para cada $x'_i \in E'$ existe $\lambda_i > 0$ tal que para cada $|\gamma_i| \leq \lambda_i$, $\gamma_i x'_i \in A^0$, entonces para $\lambda = \min_{1\leq i\leq n} \lambda_i$, $\lambda A \subseteq \{x : \sup_{1\leq i\leq n} |\langle x, x'_i\rangle| \leq 1\}$, así A es débilmente acotado. Ahora procedemos a la demostración de la proposición, la polar de un conjunto B $\sigma(E', E)$-acotado es absolutamente convexo cerrado por la Proposición 2.1.14 y la Proposición 2.1.13, y por lo anterior, también es absorbente, por lo tanto B es un barril. Inversamente, si B es un barril, entonces $B = B^{00}$ (por el Corolario 2.1.7) y B^0 es $\sigma(E', E)$-acotado por la equivalencia anterior. □

Lema 2.1.15. *En un espacio localmente convexo, un barril absorbe a cada conjunto compacto convexo.*

Demostración. Sea B un barril y A un conjunto compacto convexo. Es suficiente con demostrar la existencia de un entero positivo n, una vecindad U y un punto x en A tales que:

$$A \cap (x+U) \subseteq nB, \text{ es decir } (A-x) \cap U \subseteq nB - x.$$

Ya que si esto sucede, dado que A es compacto, por la Proposición 2.1.20 A es acotado y entonces $A-x$ también es acotado, así $A-x \subseteq \lambda U$ para algún $\lambda \geq 1$; además $0 \in A-x$ y $A-x$ es convexo, así para cualquier $y \in A-x$ tenemos $0(1-\frac{1}{\lambda}) + y(\frac{1}{\lambda}) \in A-x$ lo que implica que $y \in \lambda(A-x)$. Por lo que

$$A - x \subseteq \lambda(A-x) \cap \lambda U \subseteq \lambda(nB - x)$$

y entonces $A \subseteq \lambda nB - (\lambda-1)x \subseteq \mu B$ para algún μ, así B es absorbente.

Veamos que se satisface lo anterior por contradicción, supongamos que ningún n, U, x satisface la condición $A \cap (x+U) \subseteq nB$. Entonces, para $n=1$, algún $x_0 \in A$ y alguna vecindad abierta U_0, existe

$$x_1 \in A \cap (x_0 + U_0) \cap B^c.$$

Ahora $(x_0+U_0) \cap B^c$ es abierto, así por el Corolario 2.1.2 existe U_1 tal que $x_1 + \overline{U_1} \subseteq (x_0+U_0) \cap B^c$. Tomando $n=2, x=x_1, U=U_1$, existe $x_2 \in A \cap (x_1+U_1) \cap 2B^c$. Ahora $(x_1+U_1) \cap 2B^c$ es abierto, así existe U_2 tal que $x_2 + \overline{U_2} \subseteq (x_1+U_1) \cap 2B^c$. Haciendo esta construcción recursivamente $(A \cap (x_n + \overline{U_n}))$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados no vacíos. Dado que A es compacto, todos ellos tienen en común un punto $a \in A$ (ver [42], Teorema 7.1.13, pág. 124). Para cada n, $a \notin nB$ y así B no es absorbente, lo cual contradice el hecho de que B es un barril.

□

Teorema 2.1.9. *Los conjuntos acotados son los mismos en cada topología de un par dual.*

Demostración. Si ξ es cualquier topología del par dual (E, E'), los conjuntos ξ-acotados son $\sigma(E,E')$- acotados. Inversamente, sea A un conjunto $\sigma(E,E')$- acotado y U una vecindad absolutamente convexa cerrada en la topología ξ. Por la Proposición 2.1.21 A^0 es un barril en E' (con la topología $\sigma(E',E)$) y U^0 es absolutamente convexo y $\sigma(E',E)$-compacto por el Teorema 6 ([34], pág. 61); por lo tanto A^0 absorbe a U^0 (por el Lema 2.1.15). Además por la Proposición 2.1.14, U^{00} absorbe a A^{00}. Pero $U = U^{00}$ (por el Corolario 2.1.7) y $A \subseteq A^{00}$, por lo tanto U absorbe a A. Entonces A es ξ-acotado. □

Los espacios localmente convexos se pueden clasificar, a continuación damos la siguiente:

Definición 2.1.34. *Un espacio localmente convexo (E,τ) es un **espacio de Fréchet** si el espacio vectorial topológico (E,τ) es completo y metrizable (o completamente metrizable, como algunos autores lo llaman), es decir, (E,τ) es completo (ver la Definición 2.1.31) y la* *topología τ puede ser definida por una métrica. Un espacio localmente convexo es un **espacio de Banach** si es completo y normado.*

Es claro que todo espacio de Banach es un espacio de Fréchet, pero no todo espacio de Fréchet es un espacio de Banach.

Ejemplo 2.1.2. *Consideramos $E = \prod_{n=1}^{\infty} \mathbb{R}_n$ con la topología producto (ver la Subsección 3.1.3), donde cada $\mathbb{R}_n$ es una copia de los números reales con la topología euclidiana. Entonces E es un espacio de Fréchet pero no de Banach ya que un producto de espacios de Banach es un espacio de Banach si y sólo si es finito (ver [37], 2.2, pág.41).*

Teorema 2.1.10. *Todo espacio de Fréchet es barrilado. En particular, todo espacio de Banach es barrilado.*

Demostración. Si E es un espacio de Fréchet, existe $\mathscr{U}_n$ una base numerable de vecindades tal que $U_{n+1} \subseteq U_n$, para toda n (ver [42], Lema 5.1.6, pág. 79). Supongamos que E no es barrilado, entonces si B es un barril en E y B no es una vecindad en E, para cada n, $\frac{1}{n}U_n \nsubseteq B$, por lo que existe x_n tal que $x_n \in U_n$ pero $x_n \notin nB$. Entonces $x_n \to 0$, pues la base es anidada, y así $A = \{x_n\} \cup \{0\}$ es compacto, pues toda sucesión en A tiene un punto de acumulación. Pero la envolvente convexa cerrada de A es compacta (ver [34], Corolario, Teorema 5, pág. 60). Por lo tanto, por el Lema 2.1.15, este es absorbido por B, entonces existe $\lambda > 0$ con $x_n \in \lambda B$ para toda n, lo cual es una contradicción. $\square$

Definición 2.1.35. *Para el par dual (E, E') consideramos la topología $\beta(E', E)$(la topología polar más fina, que es la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos acotados de E). Entonces E'' el dual de E', bajo esta topología es llamado el **bidual** de E; como (E', E'') es un par dual, el espacio E'' puede ser dotado de varias topologías polares, de las cuales, la más fina es $\beta(E'', E')$, la topología de la convergencia uniforme sobre el conjunto de todos los subconjuntos $\sigma(E', E'')$-acotados de E' (o equivalentemente los subconjuntos $\beta(E', E)$-acotados los cuales también llamamos **fuertemente acotados** de E'). En su caso llamamos a los subconjuntos $\sigma(E', E)$-acotados de E' **débilmente acotados**.*

Sea ξ una topología localmente convexa de Hausdorff en E y $\mathscr{U}$ una base de vecindades absolutamente convexas cerradas para esta topología; las bipolares U^{00}, tomadas en E'' de los elementos de $\mathscr{U}$ forman una base de vecindades para una topología ξ^{00}. Como $U^{00} \cap E = U$ (ver el Corolario 2.1.7), ξ^{00} induce ξ en E. Entonces ξ^{00} puede ser pensada como la topología extendida de E en E''. En este caso, para E un espacio localmente convexo de Hausdorff con topología ξ, dual E' y bidual E'' existen dos topologías naturales consideradas en E'', la topología ξ^{00} de la convergencia equicontinua y la topología fuerte $\beta(E'', E')$. (El morfismo identidad de E en E'' es siempre un isomorfismo topológico sobre su imagen, cuando E'' tiene la topología ξ^{00}.)

Proposición 2.1.22. *Sea E un espacio localmente convexo de Hausdorff con dual continuo E' y con bidual E'' bajo la topología $\beta(E'', E')$. Entonces el morfismo identidad de E en E'' es un isomorfismo si y sólo si cada subconjunto fuertemente acotado de E' es equicontinuo.*

Demostración. Se sigue de la observación anterior y del Corolario del Lema 2 en [34] pág.71, de identificar las topologías ξ^{00} y $\beta(E'', E')$, donde ξ es la topología de E. Además de la Proposición 2.1.19. □

2.2. Álgebras Topológicas

Anteriormente introducimos la teoría básica de espacios vectoriales topológicos, ahora nos trasladamos a una categoría más compleja, la categoría de álgebras topológicas. Comenzamos por introducir algunas definiciones que nos ayudarán con el desarrollo de las siguientes secciones.

Sean E, F y G tres espacios vectoriales topológicos localmente convexos:

Definición 2.2.1. *Un morfismo bilineal f de $E \times F$ en G es llamado* ***separadamente continuo*** *si, para toda $x \in E$, el morfismo f_x de F en G es continuo y para toda $y \in F$, el morfismo lineal f_y de E en G es continuo. (ver [11], III pág.28, Definición 1).*

Definición 2.2.2. *Un* ***álgebra topológica*** *A sobre un campo $\mathbb{K}$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) es un espacio vectorial topológico con una multiplicación asociativa separadamente continua que hace de A un álgebra sobre $\mathbb{K}$.*

Definición 2.2.3. *Un álgebra topológica A es un* ***álgebra normada*** *si su topología está dada por una norma de álgebra 'p', i.e. p es una norma (ver la Definición 2.1.12) y p es submultiplicativa:*

$$p(xy) \leq p(x)p(y), \text{ para toda } x, y \in A.$$

Definición 2.2.4. *Un* ***álgebra localmente convexa*** *A, es un álgebra topológica cuyo espacio vectorial topológico subyacente es un espacio localmente convexo, i.e. es un álgebra* *equipada con una estructura de espacio localmente convexo (no necesariamente de Hausdorff) respecto a la cual la multiplicación es separadamente continua. Su topología puede ser definida por una familia de seminormas* $\{p_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$.

Definición 2.2.5. *Sea* A *un álgebra sobre el campo* $\mathbb{K}$*. Un subconjunto* I *de* A *es llamado* ***idempotente*** *si* $I^2 \subseteq I$*. Una topología* ***localmente multiplicativamente convexa*** *(abreviada "localmente m-convexa")* τ *en* A*, es una topología localmente convexa en el espacio vectorial* A *tal que tiene un sistema fundamental de vecindades de cero que son idempotentes (Ver [27] Definición 2.1). Equivalentemente,* τ *está definida por una familia de seminormas* $\{p_\alpha\}$ *donde cada una satisface la desigualdad multiplicativa*

$$p_\alpha(xy) \leq p_\alpha(x)p_\alpha(y), \text{ para toda } x, y \in A.$$

La multiplicación es entonces continua (conjuntamente continua) donde quiera. A*, dotada con esta topología es llamada un* ***álgebra localmente m-convexa****.*

Lema 2.2.1. *Sea* A *un álgebra topológica, entonces para cada subconjuntos* $C, D \subseteq A$*, se cumple:*

$$\overline{C}\cdot \overline{D} \subseteq \overline{C\cdot D}.$$

En particular, si $C\cdot D \subseteq F$*, entonces* $\overline{C}\cdot \overline{D} \subseteq \overline{F}$*.*

Demostración. Sean $x \in \overline{C}$ y $y \in \overline{D}$, y sean redes $(x_\alpha), (y_\delta)$ en C y D respectivamente, tales que $x_\alpha \to x$ y $y_\delta \to y$. Entonces, por la continuidad separada de la multiplicación tenemos que

$$\begin{aligned} xy &= (\lim_\alpha x_\alpha)y = \lim_\alpha (x_\alpha y) \\ &= \lim_\alpha (x_\alpha \lim_\delta y_\delta) = \lim_\alpha(\lim_\delta x_\alpha y_\delta). \end{aligned}$$

De donde $x_\alpha y_\delta \in C\cdot D$ y el $\lim x_\alpha y_\delta \in \overline{C\cdot D}$, ya que existe una red en $C\cdot D \subseteq A$ que converge a este producto (ver [42], Teorema 5.2.8, pág.88). Por lo tanto $xy \in \overline{C\cdot D}$ y así $\overline{C}\cdot\overline{D} \subseteq \overline{C\cdot D}$. Para la segunda parte, simplemente observamos que

$$C\cdot D \subseteq F \Rightarrow \overline{C\cdot D} \subseteq \overline{F}, \text{ pero } \overline{C}\cdot\overline{D} \subseteq \overline{C\cdot D} \Rightarrow \overline{C}\cdot\overline{D} \subseteq \overline{F}.$$

□

Proposición 2.2.1. *Si* I *es un subconjunto idempotente de un álgebra* A*, entonces también lo es su envolvente convexa (conv* (I)*), su envolvente balanceada (bal* (I)*), y la imagen directa o inversa bajo cualquier homomorfismo (de álgebras) en* A*. Si* A *es un álgebra topológica, entonces la cerradura de un conjunto idempotente* I *sigue siendo idempotente.*

Demostración. Para la primera parte, supongamos que A es un álgebra.

- Sea $I \subseteq A$ un conjunto idempotente, y sean $x, y \in conv\ (I)$, entonces $x = \sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i x_i$ y $y = \sum_{1\leq j\leq m} \beta_j y_j$, con $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{K}^+ \cup \{0\}$, $x_i, y_j \in I$ (para toda $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m$, $m, n \in \mathbb{N}$) y $\sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i = 1$, $\sum_{1\leq j\leq m} \beta_j = 1$. Entonces

$$\begin{aligned} xy &= (\sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i x_i)(\sum_{1\leq j\leq m} \beta_j y_j) = \sum_{1\leq i\leq n} \sum_{1\leq j\leq m} (\alpha_i x_i)(\beta_j y_j) \\ &= \sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \alpha_i \beta_j x_i y_j. \end{aligned}$$

  Donde $\alpha_i\beta_j \geq 0$ y $\sum_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \alpha_i\beta_j = \sum_{1\leq i\leq n} \alpha_i \sum_{1\leq j\leq m} \beta_j = 1$, además I es idempotente, así $x_i y_j \in I$, para toda i, j. Finalmente $xy \in conv\ (I)$ y $conv\ (I)$ es idempotente.

- Sea $I \subseteq A$ un conjunto idempotente, y sean $x, y \in bal\ (I)$. Entonces existen escalares λ, β ($|\lambda|, |\beta| \leq 1$) y elementos $x', y' \in I$ tales que $x = \lambda x'$ y $y = \beta y'$. Por lo tanto

$$xy = (\lambda x')(\beta y') = (\lambda\beta)x'y' = \sigma x'y',$$

  donde $|\sigma| \leq 1$ y $x'y' \in I$. Se sigue que $xy \in bal\ (I)$ y $bal\ (I)$ es un conjunto idempotente.

- Sea $f : A \to F$ un homomorfismo de álgebras, con F cualquier álgebra. Sea $I \subseteq A$ un subconjunto idempotente, entonces

$$I \cdot I \subseteq I \Rightarrow f(I \cdot I) = f(I)f(I) \subseteq f(I),$$

  por lo tanto $f(I)$ es un subconjunto idempotente de F.

- Sea $f : A \to F$ un homomorfismo de álgebras, con F cualquier álgebra. Sea $I \subseteq F$ un subconjunto idempotente, entonces

$$I \cdot I \subseteq I \Rightarrow f^{-1}(I \cdot I) = f^{-1}(I)f^{-1}(I) \subseteq f^{-1}(I),$$

  por lo tanto $f^{-1}(I)$ es un subconjunto idempotente de A.

Ahora supongamos que A es un álgebra topológica.

- Sea I un subconjunto idempotente de A, entonces

$$I \cdot I \subseteq I \Rightarrow \overline{I \cdot I} \subseteq \overline{I},$$

por el Lema 2.2.1 $\overline{I} \cdot \overline{I} \subseteq \overline{I}$, así la cerradura de I es idempotente.

$\square$

Por la Proposición 2.2.1, si A es un álgebra localmente m-convexa entonces existe un sistema fundamental de vecindades de cero que son balanceadas, convexas e idempotentes (absolutamente convexas e idempotentes). Por otro lado en [11] (Proposición 4, Capítulo I, pág 5) se demuestra que:

Proposición 2.2.2. *En un espacio vectorial topológico E sobre un campo $\mathbb{K}$ existe un sistema fundamental de vecindades cerradas de cero, $\mathscr{B}$, tales que:*

EVT.1 *Cada elemento $V \in \mathscr{B}$ es balanceado y absorbente.*

EVT.2 *Para cada $V \in \mathscr{B}$ y $\lambda \neq 0$ en $\mathbb{K}$, $\lambda V \in \mathscr{B}$.*

EVT.3 *Para cada $V \in \mathscr{B}$, existe $W \in \mathscr{B}$ tal que $W + W \subset V$.*

*Inversamente, sea E un espacio vectorial en $\mathbb{K}$, y sea $\mathscr{B}$ una base de filtro en E que satisface las condiciones **EVT.1**-**EVT.3**. Entonces existe una topología (y es única) en E, compatible con la estructura de espacio vectorial de E, y para la cual $\mathscr{B}$ es un sistema fundamental de vecindades de* 0.

Demostración. Para V cualquier vecindad, *bal* (V) es también una vecindad. En efecto, por la continuidad de la multiplicación por escalar, existe $\alpha > 0$ y una vecindad W de 0 tal que si $|\lambda| \leq \alpha$ y $x \in W$, entonces $\lambda x \in V$ (ver el Lema 2.1.2). Además como $\mathbb{K}$ es el campo de los números reales o complejos, existe $\mu \neq 0$ en $\mathbb{K}$ con $|\mu| \leq \alpha$ y μW es una vecindad tal que $\mu W \subset V$. También si $\gamma \in \mathbb{K}$ y $|\gamma| \leq 1$ entonces $|\gamma\mu| \leq \alpha$ y $\gamma\mu W \subset V \subset bal\ (V)$, por lo que *bal* (V) es una vecindad. También por la Proposición 2.1.4, $\overline{bal\ (V)}$ es balanceada. Entonces el conjunto $\mathscr{B}$ de vecindades cerradas balanceadas de cero, forman un sistema fundamental de vecindades de cero en E. Como cada vecindad es absorbente, entonces se cumple **EVT.1**, por la Proposición 2.1.2 se satisface **EVT.2**. Finalmente **EVT.3** se sigue de la Proposición 2.1.3. Así se cumple la primera parte.

Ahora sea E un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$ y $\mathscr{B}$ una base de filtro en E que satisface **EVT.1-EVT.3**. El axioma **EVT.1** demuestra que para cada $V \in \mathscr{B}$, $-V = V$ y

$0 \in V$, esto junto con el axioma **EVT.3**, demuestran que $\mathscr{B}$ es un sistema fundamental de vecindades de cero para una topología en E, compatible con la estructura de grupo aditivo de E. Por otro lado, los axiomas **EVT.1** y **EVT.2** aseguran la Proposición 2.1.2, pues para $V \in \mathscr{B}$, $\lambda V \subseteq V$ para toda $|\lambda| \leq 1$ y $\lambda V \in \mathscr{B}$. $\square$

Observación 2.2.1. *Entonces si $\mathscr{V}$ es una base de filtro que consiste de subconjuntos de A idempotentes, absorbentes, balanceados y convexos tal que si $V \in \mathscr{V}$ y $|\lambda| \leq 1$ implica que $\lambda V \in \mathscr{V}$, entonces existe una topología localmente m-convexa en A para la cual $\mathscr{V}$ forma un sistema fundamental de vecindades de cero. En efecto, por la Proposición 2.2.2, es suficiente que $\mathscr{V}$ satisfaga las condiciones **EVT.1**- **EVT.3**. Para **EVT.1**, evidentemente cada $V \in \mathscr{V}$ es balanceado y absorbente. Sea $V \in \mathscr{V}$ y λ es cualquier escalar no cero; si $|\lambda| \leq 1$, entonces por hipótesis $\lambda V \in \mathscr{V}$; si $|\lambda| \geq 1$, entonces por el Lema 2.1.2 $V \subseteq \lambda V$, pero $\mathscr{V}$ es un filtro así que **EVT.2** se cumple; finalmente **EVT.3** se sigue de la Proposición 2.1.3.*

Observación 2.2.2. *También observamos que la intersección de una familia de conjuntos idempotentes es también idempotente, por lo tanto la topología generada por una familia de topologías localmente m-convexas en A es nuevamente localmente m-convexa. Para demostrar esto:*

- *Primero supongamos que $\mathcal{F}$ es una familia de conjuntos que son idempotentes. Sean $x, y \in \bigcap\limits_{F \in \mathcal{F}} F$, entonces para cualquier $F \in \mathcal{F}$*

$$xy \in FF \subseteq F, \text{ entonces } xy \in \bigcap_{F \in \mathcal{F}} F.$$

- *Una topología τ es generada por una base que consiste de intersecciones finitas de elementos de una subbase (ver [42], Definición 3.2.20, pág. 52) que en este caso esta formada por vecindades convexas e idempotentes de correspondientes topologías localmente m-convexas τ_α. Entonces por lo anterior y la Observación 2.1.3, τ tiene una base de vecindades que son convexas e idempotentes, por lo tanto τ es localmente m-convexa.*

Si A es un álgebra arbitraria, entonces para $x, y \in A$ escribimos "$x \circ y = x + y - xy$", donde $\circ$ es una composición asociativa en A con el elemento identidad cero, llamada **la casi-multiplicación**. Si x tiene un inverso x' para esta composición i.e. $x \circ x' = x' \circ x = 0$, entonces x es llamado **casi-invertible** y x' el **casi-inverso** de x y en ocasiones es denotado por x°. Si F es cualquier subconjunto de A, y $\mathcal{F}$ es cualquier subfamilia de subconjuntos de A, entonces denotamos:

- $F \circ x = \{z \circ x : z \in F\}$;
- $\mathcal{F} \circ x = \{F \circ x : F \in \mathcal{F}\}$.

Y por G_A^q el conjunto de todos los elementos casi-invertibles de A.

Definición 2.2.6. *Un álgebra topológica A es llamada **Q-álgebra** si el conjunto G_A^q es abierto. A es llamada un álgebra **advertiblemente completa** si cada sucesión de Cauchy (x_δ)(o filtro de Cauchy $\mathscr{F}$) en A con la propiedad: $x_\delta \circ x \to 0$ y $x \circ x_\delta \to 0$, para alguna $x \in A$ (o $\mathscr{F} \circ x \to 0$ y $x \circ \mathscr{F} \to 0$), converge en A. En este caso $x \in G_A^q$ con casi-inverso $x^\circ = \lim x_\delta$.*

Por la Proposición 6.14 de [17], pág. 80, un álgebra topológica A es una Q-álgebra si y sólo si el conjunto G_A^q es una vecindad de cero en A.

Definición 2.2.7. *Un álgebra topológica A es **metrizable** si A como espacio vectorial topológico es metrizable.*

Definición 2.2.8. *Un álgebra topológica cuyo espacio vectorial subyacente es metrizable y completo es una **F-álgebra**.*

Definición 2.2.9. *Un álgebra topológica localmente convexa, completa y metrizable es llamada un **álgebra de Fréchet**.*

Definición 2.2.10. *Un álgebra localmente m-convexa es **idempotente barrilada (i-barrilada)** si cada barril idempotente es vecindad. Un álgebra topológica es una B_0**-álgebra** si es localmente m-convexa, completa y metrizable.*

Como un caso particular al Teorema 2.1.10, las álgebras de Fréchet son i-barriladas.

Los conceptos anteriores son relevantes para abordar los capítulos siguientes. Con este material preliminar pasamos al estudio detallado de los límites inductivos en diversas categorías.

Capítulo 3

Límites Inductivos de Espacios Vectoriales Topológicos

3.1. Límite Inductivo Topológico

Dado un espacio vectorial y ciertos morfismos lineales asociados, surge frecuentemente la pregunta de cómo topologizar el espacio de tal manera que los morfismos sean continuos. Existen dos casos dependiendo de si los morfismos lineales van de otros espacios localmente convexos en el espacio dado o parten del espacio dado a otros espacios localmente convexos. Este capítulo contiene una descripción de las topologías límite inductivo (directo) lineal topológico y algunas consideraciones sobre el límite proyectivo (inverso) lineal topológico , las cuales proporcionan las respuestas naturales a las preguntas anteriores. Los casos especiales de cocientes, productos y sumas directas de espacios localmente convexos se tratan de forma particular. No hay un teorema central en este capítulo; los resultados más importantes expresan la permanencia de ciertas propiedades deseables de los espacios localmente convexos bajo la formación de límites inductivos o proyectivos. Por ejemplo, todo límite inductivo de espacios barrilados es barrilado y todo producto o suma directa de espacios completos es completo. Hay una dualidad imperfecta entre las nociones de límite inductivo topológico y límite proyectivo lineal topológico, bien ilustrado por el hecho de que cada espacio localmente convexo es un límite proyectivo de espacios normados (o inclusive de Banach), mientras que sólo ciertos espacios localmente convexos pueden expresarse como límites inductivos (lineal topológico) de espacios normados [34].

3.1.1. Espacios cociente

Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea M un subespacio de E. Entonces la relación $x - y \in M$ es de equivalencia en E y el conjunto de clases de equivalencia $\overline{x}, \overline{y}, ...$ definen un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, llamado **espacio cociente de** E **por** M y denotado por E/M.

Si $\overline{x}, \overline{y} \in E/M$ y $\lambda \in \mathbb{K}$ entonces

$$\begin{aligned} \overline{x} + \overline{y} &= \overline{x+y} \in E/M, \\ \lambda\overline{x} &= \overline{\lambda x} \in E/M \; \textit{para} \; \lambda \neq 0 \end{aligned}$$

y $0\overline{x} = [M]$, el **origen en** E/M.

Dado cualquier elemento $x \in E$, la clase de equivalencia $\pi(x)$ a la cual x pertenece es $x + M$, y π es un morfismo lineal, llamado el **morfismo canónico** de E sobre E/M

$$\pi : E \longrightarrow E/M, \pi(x) = x + M.$$

Si F es otro espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, cada morfismo lineal t de E en F $(t : E \longrightarrow F)$ que se anula en M, tiene una descomposición $t = u \circ \pi$, donde u es un morfismo lineal de E/M en F; $u(\overline{x})$ es el valor común de $t(x)$ para $x \in \overline{x}$. El morfismo

$$t \longrightarrow u$$

es un isomorfismo del espacio vectorial de todos los morfismos lineales de E en F que se anulan en M $(L_M(E, F))$ sobre el espacio vectorial de todos los morfismos lineales de E/M en F $(L(E/M, F))$. En efecto, sea

$$\psi : L_M(E, F) \longrightarrow L(E/M, F) \text{ tal que } t \longrightarrow u$$

$(\psi(t) = u$, con $t : E \longrightarrow F$ y $\ker t = M)$. Además $t(x) = (u \circ \pi)(x) = u(x + M) = u(\overline{x})$, para cada $x \in \overline{x}$. Primero veamos que ψ es lineal; sean $t_1, t_2 \in L_M(E, F)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, sean u_1 y $u_2 \in L(E/M, F)$ tales que $\psi(t_1) = u_1$ y $\psi(t_2) = u_2$; supongamos que $\psi(t_1 + \lambda t_2) = u$, así

$$u(\overline{x}) = (t_1 + \lambda t_2)(x) = t_1(x) + (\lambda t_2)(x) = t_1(x) + \lambda(t_2(x)) = u_1(\overline{x}) + \lambda(u_2(\overline{x})) = \\ u_1(\overline{x}) + (\lambda u_2)(\overline{x}) = (u_1 + \lambda u_2)(\overline{x}),$$

para cada $x \in \overline{x}$. Por lo tanto

$$\psi(t_1 + \lambda t_2) = u = u_1 + \lambda u_2 = \psi(t_1) + \lambda\psi(t_2).$$

Si $t = 0$, $u \circ \pi = 0$, así $u = 0$, por lo que ψ esta bien definido. Además si $\psi(t) = u = 0$ entonces $u(\overline{x}) = t(x) = 0$, para toda $x \in \overline{x}$ y $x \in E$, lo que implica que $t = 0$, así ψ es inyectiva. Por otro lado, sea $u \in L_M(E, F)$ así $u(x + M) = u(\overline{x}) = t(x)$ para cada $x \in \overline{x}$ en E, entonces $\psi(t) = u$, por lo tanto ψ es sobreyectiva.

Si E es un espacio localmente convexo y $\mathscr{U}$ es una base de vecindades absolutamente convexas, los conjuntos $\pi(U)$, $(U \in \mathscr{U})$, forman una base de vecindades en una topología sobre E/M, llamada la **topología cociente** con la cual E/M es un espacio localmente convexo.

Para $U \in \mathscr{U}$, $\pi(U)$ es convexo, en efecto, sean $\overline{x}, \overline{y} \in \pi(U)$ y $\lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda\overline{x} + (1 - \lambda)\overline{y} = \lambda(x + M) + (1 - \lambda)(y + M) = (\lambda x + (1 - \lambda)y) + M \in \pi(U),$$

para alguna $x \in \overline{x}$ y $y \in \overline{y}$. Además $\pi(U)$ es balanceado, ya que si $\overline{x} \in \pi(U)$ y $|\lambda| \leq 1$,

$$\lambda\overline{x} = \lambda x + M \in \pi(U).$$

Por último $\pi(\mathscr{U})$ es base, en efecto, para $\overline{U_1}$ y $\overline{U_2} \in \pi(\mathscr{U})$,

$$\overline{U_1 \cap U_2} = \pi(U_1 \cap U_2) \subset \pi(U_1) \cap \pi(U_2) = \overline{U_1} \cap \overline{U_2}.$$

Como $U \subseteq \pi^{-1}(\pi(U))$, para cada $U \in \mathscr{U}$, π es continua; de hecho la topología cociente es la topología más fina en E/M bajo la cual π es continua. Si p es el funcional de Minkowski de una vecindad absolutamente convexa U, entonces el funcional de Minkowski q de $\pi(U)$ es:

$$q(\overline{x}) = \text{ínf}\{\lambda \geq 0 : \overline{x} \in \lambda\pi(U)\}.$$

Ahora $\overline{x} \in \lambda\pi(U)$ si y sólo si existe algún $x \in \overline{x}$ con $x \in \lambda U$; veamos, $\overline{x} \in \lambda\pi(U)$, si y sólo si existe $\overline{y} \in \pi(U)$ tal que $\overline{x} = \lambda\overline{y} = \overline{\lambda y}$, si y sólo si $x \in \lambda U$, y así,

$$q(\overline{x}) = \text{ínf}\{\text{ínf}\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda U\} : x \in \overline{x}\}$$

por lo que

$$q(\overline{x}) = \text{ínf}\{p(x) : x \in \overline{x}\}$$

Proposición 3.1.1. *E/M con la topología cociente es de Hausdorff si y sólo si M es un subespacio vectorial cerrado de E.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si E/M es de Hausdorff, el conjunto que consiste sólo del origen de E/M es cerrado, pues todo punto en un espacio de Hausdorff es cerrado, así su imagen inversa M por el morfismo continuo π ($\pi^{-1}(0) = M$), es un subconjunto cerrado de E.
$\Leftarrow$) Supongamos que M es un subespacio vectorial cerrado de E y sea $\overline{x} \in E/M, \overline{x} \neq 0$ entonces para cada $x \in \overline{x}$ y $x \notin M$ existe una vecindad absolutamente convexa U, con $(x+U) \cap M = \emptyset$, $x \notin U + M$. Por lo tanto $\overline{x} \notin \pi(U)$, así $x \notin \overline{M} = M$, entonces E/M es de Hausdorff. □

Si E es metrizable y M es cerrado, entonces E/M es de Hausdorff, por la Proposición 3.1.1 y además metrizable, ya que E tiene una base local numerable y así E/M tiene una base local numerable de vecindades.

Si E es normado y M cerrado, E/M es también normado y

$$\|\overline{x}\| = \text{ínf}\{\|x\| : x \in \overline{x}\} = \underset{m \in M}{\text{ínf}} \|x + m\|. \tag{3.1}$$

Veamos que es norma:

- $$\begin{aligned} \|\overline{x}\| = 0 &\Leftrightarrow \text{ínf}\{\|x\| : x \in \overline{x}\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{ínf}\{\|z\| : x - z \in M\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{ínf}\{\|x - y\| : y \in M\} = 0 \\ &\Leftrightarrow d(x, M) = 0 \\ &\Leftrightarrow x \in \overline{M} = M \\ &\Leftrightarrow \overline{x} = M. \end{aligned}$$

  Donde d es la métrica inducida por la norma en E.

- Sea $\lambda \in \mathbb{K}$,

  $$\begin{aligned} \|\lambda\overline{x}\| &= \text{ínf}\{\|\lambda x\| : \lambda x \in \lambda\overline{x}\} \\ &= \text{ínf}\{|\lambda|\|x\| : \lambda x \in \lambda\overline{x}\} \\ &= \text{ínf}\{|\lambda|\|x\| : x \in \overline{x}\} \\ &= |\lambda|\{\|x\| : x \in \overline{x}\} \\ &= |\lambda|\|\overline{x}\|. \end{aligned}$$

- Sean $\overline{x}, \overline{y} \in E/M$ y $x \in \overline{x}, y \in \overline{y}$; entonces existen $x^{'} \in \overline{x}, y^{'} \in \overline{y}; m_1, m_2 \in M$ tales que $m_1 = x - x^{'}$ y $m_2 = y - y^{'}$,

$$\|x^{'} + y^{'}\| = \|x - m_1 + y - m_2\| \leqslant \|x - m_1\| + \|y - m_2\|$$

entonces,

$$\begin{aligned} \|\overline{x} + \overline{y}\| &= \text{ínf}\{\|x^{'} + y^{'}\| : x^{'} + y^{'} \in \overline{x} + \overline{y}\} \\ &\leqslant \text{ínf}\{\|x - m_1\| : m_1 \in M\} + \text{ínf}\{\|y - m_2\| : m_2 \in M\} \\ &= \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|. \end{aligned}$$

Si t es un morfismo lineal del espacio localmente convexo E en el espacio localmente convexo F que se anula en el subespacio vectorial M (de E), vimos que podemos escribir $t = u \circ \pi$ donde u aplica a E/M en F y π es el morfismo canónico de E sobre E/M. Ahora t es continua si y sólo si para cada vecindad $V \in F$

$$t^{-1}(V) = (u \circ \pi)^{-1}(V) = \pi^{-1}(u^{-1}(V))$$

es una vecindad en E , i.e. $u^{-1}(V)$ es una vecindad en E/M. Entonces t es continua si y sólo si u lo es. Un caso especial útil de este resultado es:

Proposición 3.1.2. *Todo morfismo lineal de un espacio localmente convexo E en el espacio localmente convexo F tiene una descomposición $t = u \circ \pi$, donde u es un morfismo lineal inyectivo de $E/t^{-1}(0)$ en F y π es el morfismo canónico de E sobre $E/t^{-1}(0)$; t es continua si y sólo si u lo es.*

Demostración. Aplicamos los resultados anteriores a $M = t^{-1}(0)$. Veamos que u es inyectiva bajo estas hipótesis; sea $\overline{x} \in \ker u$ si y sólo si

$$u(\overline{x}) = u(\pi(x)) = u \circ \pi(x) = 0, \text{ para cada } x \in \overline{x},$$

si y sólo si $x \in t^{-1}(0)$, entonces ker $u = t^{-1}(0) = \overline{0}$. Así u es inyectiva. □

Proposición 3.1.3. *Si M es un subespacio vectorial de un espacio localmente convexo E con dual continuo $E^{'}$; entonces el espacio dual continuo de E/M es la polar M^0 de M en $E^{'}$.*

Demostración. El espacio de los funcionales continuos en E/M es isomorfo al espacio de los funcionales continuos en E que se anulan en M, ya que $L_M(E, \mathbb{K}) \cong L(E/M, \mathbb{K})$ y además este isomorfismo conserva la continuidad pues como vimos antes, $t = u \circ \pi$ y t es continuo si y sólo si u lo es.

Ahora veamos que M^0 es el conjunto de funcionales continuos en E que se anulan en M. Esto es así pues si $t \in E'$, tal que $t(M) = 0$, entonces $t \in M^0$. Inversamente, si $t \in M^0$, entonces $t \in E'$ y

$$\sup_{x \in M} |\langle x, t \rangle| \leqslant 1.$$

Pero $t(x) = u(\overline{x}) = u(\overline{0}) = 0$ para cada $x \in M$, así t es un funcional continuo en E' que se anula en M. Con lo cual concluimos que el espacio dual continuo de E/M es M^0.

□

Notamos que la traspuesta π' del morfismo canónico de E en E/M es el morfismo identidad de M^0 en E'. En efecto, si $y \in M^0$, por la Proposición 3.1.3, y es un funcional continuo en E/M, así para cada $x \in E$

$$\langle x, \pi'(y) \rangle = \langle \pi(x), y \rangle$$

entonces,

$$(\pi'(y))(x) = y(\pi(x)) = y(\overline{x}) = y(x)$$

por lo tanto $(\pi'(y)) = y$ para cada $y \in M^0$, entonces π' es la identidad.

3.1.2. Límite Inductivo Topológico

Supongamos que $\{E_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ es una familia de espacios localmente convexos, todos ellos subespacios de un espacio vectorial E, (aún no topologizado), con la propiedad de que su unión genera a E. Es natural preguntarse si sus topologías pueden ser reconstruidas para inducir una topología en E. Específicamente ¿puede E ser dotado con una topología localmente convexa de tal manera que cada morfismo lineal definido en E sea continuo si y sólo si es continuo en cada E_γ? Probamos la existencia de dicha topología y estudiamos sus propiedades. En lugar de requerir que los E_γ sean subespacios vectoriales de E, basta con que se consideren morfismos lineales u_γ de E_γ en E, por lo que la topología en E_γ puede transferirse a $u_\gamma(E_\gamma)$; entonces suponemos que $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} u_\gamma(E_\gamma)$ genera a E.

Proposición 3.1.4. *Para cada $\gamma \in \Gamma$, sea E_γ un espacio localmente convexo y u_γ un morfismo lineal de E_γ en un espacio vectorial E, tal que $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} u_\gamma(E_\gamma)$ genera a E. Entonces existe una topología localmente convexa más fina en E bajo la cual todos los u_γ son continuos. Una base de vecindades para esta topología está formada por el conjunto $\mathscr{U}$ de todos los subconjuntos absolutamente convexos U de E, tales que, para cada γ, $u_\gamma^{-1}(U)$ es una vecindad en E_γ.*

Demostración. Si U es una vecindad absolutamente convexa para alguna topología en E que hace a todos los morfismos u_γ continuos, entonces cada $u_\gamma^{-1}(U)$ es una vecindad en E_γ y así $U \in \mathscr{U}$. Pero para cada $x \in E$ existen $x_{\gamma_i} \in u_{\gamma_i}(E_{\gamma_i})$ y $\lambda_{\gamma_i} \in \mathbb{K}$ tales que

$$x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_{\gamma_i} x_{\gamma_i},$$

pues $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} u_\gamma(E_\gamma)$ genera a E. Para $U \in \mathscr{U}$ la vecindad $u_\gamma^{-1}(U)$ es absorbente en E_γ, entonces para $x_\gamma \in E_\gamma$ existe $\lambda_\gamma > 0$ tal que $\lambda_\gamma x_\gamma \in u_\gamma^{-1}(U)$, lo que implica que $\lambda_\gamma u_\gamma(x_\gamma) \in U$, es decir, U absorbe a todos los elementos de $u_\gamma(U)$, para cada γ. Por lo tanto, para cada x_{γ_i}, existen $\alpha_{\gamma_i} > 0$ tales que $\alpha_{\gamma_i} x_{\gamma_i} \in U$. Por el Lema 2.1.2 y porque:

$$x = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_{\gamma_i}}{\alpha_{\gamma_i}} \alpha_{\gamma_i} x_{\gamma_i} \in \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_{\gamma_i}}{\alpha_{\gamma_i}} U$$

tenemos que:

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_{\gamma_i}}{\alpha_{\gamma_i}} U = \beta U \text{ siendo } \beta = \left(\sum_{i=0}^{n} \left| \frac{\lambda_{\gamma_i}}{\alpha_{\gamma_i}} \right| \right).$$

Entonces $x \in \beta U$ con $\beta > 0$, es decir U absorbe a E. Por lo que $\mathscr{U}$ satisface las condiciones del Teorema 2.1.1 y es una base de vecindades para una topología localmente convexa en E, la cual es la topología localmente convexa más fina que hace a cada morfismo u_γ continuo.

□

Corolario 3.1.1. *Si, para cada $\gamma \in \Gamma$, $\mathscr{V}_\gamma$ es una base de vecindades absolutamente convexas en E_γ, entonces el conjunto $\mathscr{V}$ de envolventes absolutamente convexas de los conjuntos de la forma $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} u_\gamma(V_\gamma)$ con $V_\gamma \in \mathscr{V}_\gamma$, forman una base de vecindades para E.*

Demostración. De la Proposición 3.1.4, los elementos de $\mathscr{V}$ son vecindades en E. Si U es alguna vecindad absolutamente convexa en E, para cada γ, $u_\gamma^{-1}(U)$ contiene una vecindad $V_\gamma \in \mathscr{V}_\gamma$ y entonces la envolvente absolutamente convexa de

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} u_\gamma(V_\gamma)$$

es un elemento de $\mathscr{V}$ contenido en U. Entonces $\mathscr{V}$ es una base de vecindades para E.

$\square$

El espacio localmente convexo E con esta topología es llamado el **límite inductivo topológico** de los espacios localmente convexos E_γ para los morfismos u_γ(ver la Figura 3.1).

$$\begin{tikzcd}
E_\alpha \arrow[r, "u_\alpha"] \arrow[d, "f_{\beta\alpha}"'] & E = \langle \bigcup\limits_{\gamma\in\Gamma} u_\gamma(E_\gamma)\rangle \\
E_\beta \arrow[ur, "f_\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

Figura 3.1

Proposición 3.1.5. *Sea E el límite inductivo topológico de los espacios localmente convexos E_γ por los morfismos u_γ, y sea t un morfismo lineal de E en un espacio localmente convexo F. Entonces t es continua si y sólo si, para cada γ, $t\circ u_\gamma$ es un morfismo continuo de E_γ en F. En general, el conjunto T de morfismos lineales de E en F es equicontinuo si y sólo si cada conjunto $T\circ u_\gamma$ es equicontinuo.*

Demostración. El morfismo lineal t es continuo si y sólo si para cada vecindad absolutamente convexa V en F, $t^{-1}(V)$ es una vecindad en E. Como cada morfismo u_γ es continuo, entonces

$$u_\gamma^{-1}(t^{-1}(V)) = (t\circ u_\gamma)^{-1}(V)$$

es una vecindad en E_γ, para cada γ. Así cada $t\circ u_\gamma$ es continuo.

Inversamente, si V es una vecindad absolutamente convexa en F, $(t\circ u_\gamma)^{-1}(V)$ es una vecindad en E_γ para cada γ. Observamos que $t^{-1}(V)$ es un conjunto absolutamente convexo: para los escalares λ y μ tales que $|\lambda|+|\mu|\leq 1$ y elementos $x,y\in t^{-1}(V)$

$$t(\lambda x+\mu y)=\lambda t(x)+\mu t(y)\in \lambda V+\mu V\subseteq V,$$

por lo tanto $\lambda x+\mu y\in t^{-1}(V)$. Por último, por la Proposición 3.1.4 $t^{-1}(V)$ es una vecindad básica en E, así t es continua.

T es equicontinuo si para cada vecindad V en F, $\bigcap\limits_{t\in T} t^{-1}(V)$ es una vecindad en E. Entonces, sea V una vecindad absolutamente convexa en F, por la continuidad de cada u_γ

$$u_\gamma^{-1}(\bigcap_{t\in T} t^{-1}(V)) = \bigcap_{t\in T} u_\gamma^{-1}(t^{-1}(V)) = \bigcap_{t\in T}(t\circ u_\gamma)^{-1}(V)$$

es una vecindad en E_γ, para cada γ. Así $T \circ u_\gamma$ es equicontinuo.

Inversamente, para γ fijo supongamos que $T \circ u_\gamma$ es equicontinuo, entonces $\bigcap_{t \in T} (t \circ u_\gamma)^{-1}(V)$ es una vecindad en E_γ. Además, $t^{-1}(V)$ es un conjunto absolutamente convexo para cualquier vecindad absolutamente convexa V, por lo tanto para escalares λ y μ tales que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ y elementos $x, y \in \bigcap_{t \in T} t^{-1}(V)$, $\lambda x + \mu y \in t^{-1}(V)$ para cada $t \in T$, así

$$\lambda x + \mu y \in \bigcap_{t \in T} t^{-1}(V) \text{ y } \bigcap_{t \in T} t^{-1}(V)$$

es un conjunto absolutamente convexo. Por la Proposición 3.1.4, $\bigcap_{t \in T} t^{-1}(V)$ es una vecindad básica en E. Entonces T es equicontinuo. □

Corolario 3.1.2. *Una topología de límite inductivo topológico de Hausdorff es la topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos A' del dual continuo tal que, para cada γ, $u'_\gamma(A')$ es equicontinuo, donde u'_γ es la transpuesta de u_γ.*

Demostración. Se sigue de la Proposición 2.1.19 que la topología de límite inductivo topológico es la topología de la convergencia uniforme sobre subconjuntos equicontinuos A' del espacio dual. Por la Proposición 3.1.5 A' es equicontinuo si y sólo si cada $u'_\gamma(A') = A' \circ u_\gamma$ es equicontinuo.

□

Ejemplo 3.1.1. *Un caso extremo de una topología de límite inductivo topológico es la topología cociente. Si $E = E_0/M$ y π el morfismo canónico de E_0 sobre E, la topología cociente en E es la topología localmente convexa más fina que hace a π continuo.*

Frecuentemente los espacios localmente convexos E_γ son subespacios vectoriales de E cuya unión genera a E, y los morfismos lineales u_γ son todos restricciones a E_γ del morfismo identidad en E. Entonces la topología de límite inductivo topológico es la topología localmente convexa más fina en E, la cual induce en cada E_γ una topología más gruesa que la topología dada, y un conjunto absolutamente convexo U es una vecindad en E si y sólo si $U \cap E_\gamma$ es una vecindad en E_γ para cada γ. Finalmente, si t es un morfismo lineal de E en otro espacio localmente convexo F, t es continuo si y sólo si este es continuo en cada E_γ, además T (el conjunto de morfismos lineales de E en F) es equicontinuo si y sólo si T es equicontinuo en cada E_γ (Por la Proposición 3.1.5).

Un límite inductivo topológico en general de espacios localmente convexos E_γ con respecto a los morfismos u_γ, puede ser reducido a un caso especial: si $u_\gamma(E_\gamma)$ es un subespacio vectorial de E y la topología de E_γ puede ser transferida a $u_\gamma(E_\gamma)$, considerando como vecindades en

$u_\gamma(E_\gamma)$ a las imágenes de las vecindades en E_γ bajo el morfismo u_γ. Es fácil ver que E es también el límite inductivo topológico de sus subespacios $u_\gamma(E_\gamma)$ por la caracterización de las vecindades en E dada en la Proposición 3.1.4. Ya que por lo anterior y por la Proposición 3.1.4, si V es una vecindad en E, $V \cap u_\gamma(E_\gamma)$ es una vecindad en $u_\gamma(E_\gamma)$ para cada γ, entonces existe V_γ vecindad en E_γ tal que

$$V_\gamma \subseteq u_\gamma^{-1}(u_\gamma(V_\gamma)) \subseteq u_\gamma^{-1}(V \cap u_\gamma(E_\gamma)) \subseteq u_\gamma^{-1}(V)$$

para cada γ y u_γ es continua.

Ciertas propiedades de los espacios localmente convexos se preservan al tomar el límite inductivo topológico.

Proposición 3.1.6. *Un límite inductivo topológico de espacios barrilados es barrilado.*

Demostración. Sea E el límite inductivo topológico de espacios barrilados $\{E_\gamma\}$ por los morfismos u_γ y B un barril en E. Entonces, por la continuidad de u_γ para cada γ, $u_\gamma^{-1}(B)$ es cerrado.

Además *la imagen inversa de cualquier morfismo lineal de un subconjunto absolutamente convexo, absorbente es absolutamente convexa, absorbente.* En efecto, dado que B es absolutamente convexo, absorbente y u_γ un morfismo lineal para cada γ, sean λ y μ escalares tales que $|\lambda| + |\mu| \leq 1$ y sean $x_\gamma, y_\gamma \in u_\gamma^{-1}(B)$, entonces

$$u_\gamma(\lambda x_\gamma + \mu y_\gamma) = \lambda u_\gamma(x_\gamma) + \mu u_\gamma(y_\gamma) \in \lambda B + \mu B \subseteq B,$$

así $\lambda x_\gamma + \mu y_\gamma \in u_\gamma^{-1}(B)$ y $u_\gamma^{-1}(B)$ es absolutamente convexo. Ahora, si $x_\gamma \in E_\gamma$, $u_\gamma(x_\gamma) \in E$ y como B es absorbente entonces existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda u_\gamma(x_\gamma) \in B$, lo que implica que $u_\gamma(\lambda x_\gamma) \in B$ por lo tanto $\lambda x_\gamma \in u_\gamma^{-1}(B)$, finalmente $u_\gamma^{-1}(B)$ es absorbente.

Con esto demostramos que $u_\gamma^{-1}(B)$ es un barril en E_γ y como E_γ es barrilado, entonces $u_\gamma^{-1}(B)$ es una vecindad en E_γ. Entonces por la Proposición 3.1.4 B es una vecindad en E, así E es barrilado.

□

Corolario 3.1.3. *Un cociente de un espacio barrilado es barrilado.*

Demostración. Se sigue del Ejemplo 3.1.1 y de la Proposición 3.1.6. □

En la siguiente sección discutimos otra propiedad la cual es preservada bajo el límite inductivo topológico. Cabe mencionar que un límite inductivo topológico de espacios localmente convexos de Hausdorff no necesariamente es de Hausdorff. Además es posible definir una topología de límite inductivo en un espacio vectorial E sin suponer que $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} u_\gamma(E_\gamma)$ genera a E. Entonces las vecindades en E son aquellos conjuntos absolutamente convexos U para los cuales $u_\gamma^{-1}(U)$ es una vecindad en E_γ para cada γ. Con esta modificación, los resultados de esta sección permanecen válidos para un límite inductivo topológico más general.

3.1.3. Espacios Producto y Sumas Directas

Si $\{E_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ es una familia de conjuntos, su **producto cartesiano** o simplemente el producto, denotado por $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$, es el conjunto de todas las familias $x = (x_\gamma)$ con $x_\gamma \in E_\gamma$, para $\gamma \in \Gamma$. Análogo al caso familiar que es cuando Γ es un conjunto finito, los elementos x_γ se llaman las **coordenadas** de x y el morfismo p_γ el cual asigna a cada x su γ-ésima coordenada, i.e. x_γ, es llamado el **morfismo proyección** de $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ sobre E_γ.

Cuando los E_γ son todos espacios vectoriales sobre el mismo campo $\mathbb{K}$, $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ puede ser definido como un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, definiendo las operaciones algebraicas de la siguiente manera:

$$(x_\gamma) + (y_\gamma) = (x_\gamma + y_\gamma) \text{ y } \lambda(x_\gamma) = (\lambda x_\gamma)$$

para $(x_\gamma), (y_\gamma) \in \prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. La proyección p_γ es entonces un morfismo lineal de $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ sobre E_γ.

Si cada E_γ es un espacio localmente convexo, el espacio $E = \prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ puede ser dotado de una topología localmente convexa en la cual los morfismos proyección p_γ son continuos. Esta topología es llamada la **topología producto** en E y es la topología más gruesa bajo la cual las proyecciones son continuas. Si para cada γ, $\mathscr{U}_\gamma$ es una base de vecindades absolutamente convexas en E_γ, el conjunto de intersecciones finitas de los conjuntos $p_\gamma^{-1}(U_\gamma)(U_\gamma \in \mathscr{U}_\gamma, \gamma \in \Gamma)$ forma una base de vecindades absolutamente convexas en E, el espacio producto dotado de esta topología se considera como un límite proyectivo lineal topológico (ver [34], Proposición 11, pág. 84).

Proposición 3.1.7. *El producto* $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ *es un espacio de Hausdorff si y sólo si para cada* $\gamma \in \Gamma$, E_γ *es de Hausdorff.*

Demostración. Primero observamos que un punto x pertenece a cada vecindad del producto si y sólo si para cada $\gamma \in \Gamma$, $p_\gamma(x)$ pertenece a cada vecindad de E_γ.

Esto sucede ya que si $x \in V$ para cualquier vecindad V del producto. Para cada $\gamma \in \Gamma$ sea V_γ cualquier vecindad en E_γ, por la continuidad de p_γ se tiene que $p_\gamma^{-1}(V_\gamma)$ es una vecindad en $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$, así $x \in p_\gamma^{-1}(V_\gamma)$ y $p_\gamma(x) \in V_\gamma$.

Inversamente, si para cada $\gamma \in \Gamma$, $p_\gamma(x)$ pertenece a cada vecindad de E_γ y sea V una vecindad en el producto, existe un subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ y U_δ abierto en E_δ para cada $\delta \in \Delta$, tales que

$$\bigcap_{\delta\in\Delta} p_\delta^{-1}(U_\delta) \subseteq V.$$

Pero para cada $\delta \in \Delta$, $p_\delta(x) \in U_\delta$ lo que implica que $x \in p_\delta^{-1}(U_\delta)$ y así $x \in V$. Ahora si $\mathscr{V}$ es una base de vecindades absolutamente convexas en el producto y para cada $\gamma \in \Gamma$, $\mathscr{V}_\gamma$ es una base de vecindades absolutamente convexas en E_γ. Si $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ es un espacio de Hausdorff, por la Proposición 2.1.5

$$\bigcap_{V\in\mathscr{V}} V = \{0\},$$

si y sólo si

$$\bigcap_{V_\gamma\in\mathscr{V}_\gamma} V_\gamma = \{0\},$$

por lo tanto E_γ es un espacio de Hausdorff por la misma proposición. □

Proposición 3.1.8. *El subconjunto $A = \prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ de $E = \prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ es completo si y sólo si cada una de sus proyecciones A_γ es completa.*

Demostración. Si cada A_γ es completa y $\mathscr{F}$ es un filtro de Cauchy en E tal que $A \in \mathscr{F}$, entonces $p_\gamma(\mathscr{F})$ es un filtro de Cauchy en E_γ, para cada $\gamma \in \Gamma$ (por el Lema 2.1.14). Pero además p_γ es sobreyectiva, entonces

$$p_\gamma(A) = A_\gamma \in p_\gamma(\mathscr{F})$$

y A_γ es completo. Por la observación inmediata a la Definición 2.1.31 existe $x_\gamma \in A_\gamma$ tal que

$$p_\gamma(\mathscr{F}) \to x_\gamma \text{ en } A_\gamma, \text{ para cada } \gamma.$$

Afirmamos que $\mathscr{F} \to x = (x_\gamma)$. En efecto, sea V una vecindad de x, existe $I \subseteq \Gamma$ un subconjunto finito, tal que $\bigcap_{\gamma\in I} p^{-1}(V_\gamma) \subseteq V$, con V_γ vecindad de x_γ en A_γ, para cada $\gamma \in I$. Pero $V_\gamma \in p_\gamma(\mathscr{F})$, entonces existe $W \in \mathscr{F}$ tal que

$$p_\gamma(W) = V_\gamma \text{ y } W \subseteq p_\gamma^{-1}(V_\gamma),$$

por **Fi.3** $p_\gamma^{-1}(V_\gamma) \in \mathscr{F}$, así por **Fi.2** concluimos que $\bigcap_{\gamma\in I} p^{-1}(V_\gamma) \in \mathscr{F}$ y de nuevo por **Fi.3** $V \in \mathscr{F}$.

Inversamente, supongamos que $A = \prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ es completo en E y que para $\gamma \in \Gamma$, $\mathscr{G}_\gamma$ es un filtro de Cauchy en E_γ tal que $A_\gamma \in \mathscr{G}_\gamma$. Entonces afirmamos que existe un filtro de Cauchy $\mathscr{F}$ en E tal que

$$A \in \mathscr{F} \text{ y } p_\gamma(\mathscr{F}) = \mathscr{G}_\gamma.$$

En efecto, si $\delta \neq \gamma$, elegimos algún filtro de Cauchy $\mathscr{F}_\delta$ en E_δ con $A_\delta \in \mathscr{F}_\delta$, así el producto de $\mathscr{G}_\gamma$ y los $\mathscr{F}_\delta$ genera en E a tal filtro $\mathscr{F}$. Por lo tanto, existe $x \in A$ tal que $\mathscr{F} \to x$ en A (pues A es completo y $\mathscr{F}$ es de Cauchy en E), y como cada p_γ es continua, $\mathscr{G}_\gamma \to p_\gamma(x) \in A_\gamma$. Entonces A_γ es completo, para cada γ. $\square$

Corolario 3.1.4. *El producto $E = \prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ es completo si y sólo si cada E_γ es completo.*

Demostración. Es inmediato de la Proposición 3.1.8. $\square$

Si E es el producto de espacios vectoriales E_γ, existe una forma natural de sumergir cada E_γ en E, de la siguiente manera; para cada $x_\gamma \in E_\gamma$, denotamos por $j_\gamma(E_\gamma)$ el elemento de E cuyas coordenadas son todas 0 excepto la γ-ésima, la cual es x_γ. Así j_γ es un morfismo lineal inyectivo llamado el **morfismo inyección** de E_γ en $E = \prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$. Algebraicamente, $p_\gamma \circ j_\gamma$ es el morfismo identidad en E_γ y p_γ restringido a $j_\gamma(E_\gamma)$ es el morfismo inverso de j_γ. Si γ y δ son dos elementos diferentes de Γ, $p_\delta \circ j_\gamma$ es el morfismo cero de E_γ en E_δ.

Proposición 3.1.9. *Si cada E_γ es un espacio localmente convexo y $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ tiene la topología producto, entonces cada inyección j_γ es un isomorfismo de E_γ sobre su imagen $j_\gamma(E_\gamma)$. Si cada E_γ es un espacio de Hausdorff, entonces $j_\gamma(E_\gamma)$ es cerrado en $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$.*

Demostración. Para $\gamma \in \Gamma$ fijo, el morfismo j_γ es continuo pues $p_\delta \circ j_\gamma$ es continuo, para cada $\delta \in \Gamma$. En efecto, sea $\delta \in \Gamma$ y V un abierto en el espacio localmente convexo E_δ, si $\gamma \neq \delta$ el morfismo $p_\delta \circ j_\gamma = 0$ es continuo ya que $E_\gamma \subseteq 0^{-1}(V)$, si $\gamma = \delta$ entonces el morfismo $p_\gamma \circ j_\gamma$ es la identidad y es continuo ya que $V \subseteq i^{-1}(V)$. Entonces por el Teorema 4.1.3 ([42], pág. 62), el morfismo j_γ es continuo para cada $\delta \in \Gamma$.

Ahora $j_\gamma^{-1} = p_\gamma$ (restringido a $j_\gamma(E_\gamma)$) y así j_γ^{-1} es también continuo. Entonces j_γ es un homeomorfismo. Finalmente,

$$j_\gamma(E_\gamma) = \bigcap_{\delta\in\Gamma,\delta\neq\gamma} p_\delta^{-1}(0),$$

si E_δ es un espacio de Hausdorff, entonces $\{0\}$ es un subconjunto cerrado de E_δ, esto para cada $\delta \in \Gamma$. Entonces por continuidad $p_\delta^{-1}(0)$ es cerrado en el producto y así la intersección es cerrada, por lo tanto $j_\gamma(E_\gamma)$ es cerrado en el producto. □

Como consecuencia de este resultado, a menudo es conveniente identificar a E_γ con su imagen isomorfa $j_\gamma(E_\gamma)$ en el producto $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$. Cuando esto sucede, a los espacios localmente convexos E_γ los consideramos como subespacios vectoriales del producto, los cuales son disjuntos excepto por el origen. Pues si y es un elemento diferente del origen que pertenece a E_γ y a E_δ, con $\gamma \neq \delta$, entonces

$$y \simeq j_\gamma(y) \neq j_\delta(y) \simeq y,$$

lo cual es una contradicción. De forma análoga, si $\Delta \subseteq \Gamma$, el producto topológico $\prod_{\gamma\in\Delta} E_\gamma$ puede ser sumergido, bajo isomorfismo, en el producto $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$, que a su vez es un subespacio cerrado siempre que cada E_γ es de Hausdorff.

Definición 3.1.1. *En el producto* $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ *de espacios vectoriales* E_γ*, el subespacio vectorial generado por* $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ *o precisamente por* $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} j_\gamma(E_\gamma)$*, donde* j_γ *es el morfismo inyección de* E_γ *en el producto, es llamado la* ***suma directa*** *de los espacios vectoriales* E_γ*, es denotado por* $\sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ *y es el conjunto de aquellos elementos del* $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ *cuyas coordenadas son casi todas* 0*, es decir, todas son cero excepto un número finito de ellas.*

Cuando Γ es un conjunto finito, $\sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ coincide con el producto $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$. Si p_γ es el morfismo proyección del producto sobre E_γ, cualquier elemento $x \in \prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ (x diferente del origen) es la suma de un número finito de sus coordenadas no cero $p_\gamma(x)$.

Es natural escribir $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma(x)$, interpretada como la suma de sus coordenadas no cero. Si $x = 0$ todas sus proyecciones correspondientes $p_\gamma(x)$ son cero y la expresión $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma(x)$ se interpreta razonablemente como la suma de ceros.

Si cada E_γ es un espacio localmente convexo, la suma directa $E = \sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ puede ser dotada de la topología inducida por la topología producto de $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$, a la cual llamamos la **topología producto en** $E = \sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$. Por la Proposición 3.1.9 esta topología induce la topología original en cada E_γ, pero en general ésta no es la topología localmente convexa más fina. La topología localmente convexa más fuerte es obtenida considerando a E como el límite inductivo topológico de los espacios localmente convexos E_γ por los morfismos inyecciones j_γ. A esta topología la llamamos la **topología suma directa** en E y E equipado con esta topología es llamado la **suma directa topológica** de los espacios localmente convexos E_γ.

Proposición 3.1.10. *La topología suma directa en $E = \sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ es más fina que la topología producto. Para cada subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$, ambas topologías coinciden en $\sum_{\gamma\in\Delta} E_\gamma$ (considerado como subespacio vectorial de $\sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$). La topología suma directa induce la topología original en cada E_γ.*

Demostración. Denotamos por ξ a la topología suma directa y por η a la topología producto en

$$E = \sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma.$$

Cada inyección $j_\gamma : E_\gamma \to E$ es continua en la topología η (ver la Proposición 3.1.9).

Veamos que $\eta \preceq \xi$. Sea U un abierto en (E, η), $j_\gamma^{-1}(U)$ es abierto en E_γ, para cada $\gamma \in \Gamma$. Si $\mathscr{W}_\gamma$ es una base de vecindades absolutamente convexas en E_γ, existe $W \in \mathscr{W}_\gamma$ tal que $W \subseteq j_\gamma^{-1}(U)$, por lo tanto $j_\gamma(W) \subseteq U$. Notamos que $j_\gamma(W)$ es un conjunto absolutamente convexo, ya que para $\mu, \lambda \in \mathbb{K}$ con $|\mu| + |\lambda| \leq 1$ y $x, y \in j_\gamma(W)$, existen $x', y' \in W$ tales que:

$$j_\gamma(x') = x \text{ y } j_\gamma(y') = y.$$

Entonces $\mu x' + \lambda y' \in W$, de aquí que

$$\mu j_\gamma(x') + \lambda j_\gamma(y') \in j_\gamma(W) \text{ y } \mu x + \lambda y \in j_\gamma(W).$$

Además

$$W \subseteq j_\gamma^{-1}(j_\gamma(W)) \text{ y } E_\gamma \subseteq j_\delta^{-1}(j_\gamma(W)) \text{ si } \delta \neq \gamma.$$

Así, por la Proposición 3.1.4, U es un abierto en el espacio (E, ξ). Por lo tanto η es más gruesa que ξ, donde ξ es la topología más fina que hace a los morfismos j_γ continuos.

Ahora para Δ un subconjunto finito de Γ, veamos que ξ y η coinciden en $\sum_{\gamma\in\Delta} E_\gamma$. Supongamos que Δ tiene n elementos, y que U es cualquier vecindad absolutamente convexa en la topología ξ. Entonces $U \cap E_\gamma$ es una vecindad en E_γ, para cada γ; en efecto, $j_\gamma^{-1}(U) \cap E_\gamma$ es una vecindad en E_γ por lo que existe W_γ abierto tal que

$$W_\gamma \subseteq j_\gamma^{-1}(U) \cap E_\gamma, \text{ así } j_\gamma(W_\gamma) \subseteq j_\gamma(j_\gamma^{-1}(U)) \cap j_\gamma(E_\gamma)$$

(identificando $j_\gamma(E_\gamma) \simeq E_\gamma$). Entonces $W_\gamma \subseteq U \cap E_\gamma$. Luego

$$V = \tfrac{1}{n} \bigcap_{\gamma\in\Delta} p_\gamma^{-1}(U \cap E_\gamma)$$

es una vecindad en η y $U \cap E_\gamma$ es un abierto en E_γ, para cada γ.

Ahora bien, existe un elemento básico V_γ absolutamente convexo en E_γ tal que $V_\gamma \subseteq U \cap E_\gamma$ y

$$\bigcap_{\gamma\in\Delta} p_\gamma^{-1}(V_\gamma) \subseteq \bigcap_{\gamma\in\Delta} p_\gamma^{-1}(U \cap E_\gamma).$$

Este último es un abierto en la topología producto y por la Proposición 2.1.2, V es una η-vecindad. Observamos que en $\sum_{\gamma\in\Delta} E_\gamma$, si $x \in V$ entonces $p_\gamma(x) \in \frac{1}{n}U$ para cada $\gamma \in \Delta$. Efectivamente

$$\begin{aligned} nx \in \bigcap_{\gamma\in\Delta} p_\gamma^{-1}(U \cap E_\gamma), \text{ así } np_\gamma(x) &\in \bigcap_{\gamma\in\Delta} p_\gamma(p_\gamma^{-1}(U \cap E_\gamma)) \\ &\subseteq \bigcap_{\gamma\in\Delta} U \cap E_\gamma \subseteq \bigcap_{\gamma\in\Delta} U \subseteq U. \end{aligned}$$

Como U es convexo

$$x = \sum_{\gamma\in\Delta} p_\gamma(x) \in U.$$

Finalmente

$$V \cap \sum_{\gamma\in\Delta} E_\gamma \subseteq U \cap \sum_{\gamma\in\Delta} E_\gamma,$$

y η es más fina que ξ en $\sum_{\gamma\in\Delta} E_\gamma$.

Para el caso especial $\Delta = \{\gamma\}$, tenemos que $\sum_{\gamma\in\Delta} E_\gamma = j_\gamma(E_\gamma) \simeq E_\gamma$. Y por la Proposición 3.1.9, la topología suma directa induce la topología original en cada E_γ.

$\square$

En general, las topologías producto y suma directa coinciden sólo en sumas directas finitas. En efecto, si Δ es infinito y cada E_γ con $\gamma \in \Delta$ contiene una vecindad U_γ diferente de E_γ en sí mismo, la topología suma directa es estrictamente más fina que la topología producto en $\sum_{\gamma\in\Delta} E_\gamma$. Esto porque $\bigcap_{\gamma\in\Delta} p_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ es una vecindad en la topología suma directa pero no en la topología producto. Efectivamente, para $\delta \in \Delta$ consideramos $x \in j_\delta(U_\delta)$ y si $\gamma \neq \delta$ entonces $p_\gamma(x) = 0$, además como $0 \in U_\gamma$, $x \in p_\gamma^{-1}(U_\gamma)$. Por otro lado, si $\gamma = \delta$, $p_\delta(x) = x$ y así $x \in p_\delta^{-1}(U_\delta)$, por lo que $j_\delta(U_\delta) \subseteq \bigcap_{\gamma\in\Delta} p_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ para cada $\delta \in \Delta$. Luego $\bigcap_{\gamma\in\Delta} p_\gamma^{-1}(U_\gamma)$ es una vecindad en la topología suma directa y no lo es en la topología producto ya que la intersección no es de un conjunto finito o no contiene alguna intersección finita de imágenes inversas de proyecciones.

Proposición 3.1.11. *La suma directa topológica $\sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ es de Hausdorff si y sólo si cada E_γ es un espacio de Hausdorff. En este caso cada E_γ es cerrado en $\sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$.*

Demostración. Supongamos que $\sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ es de Hausdorff, entonces cada E_γ es un espacio de Hausdorff, ya que la topología suma directa (ξ) induce en E_γ la topología original (ver la Proposición 3.1.10).

Por otro lado, si cada E_γ es un espacio de Hausdorff, entonces por la Proposición 3.1.7 el producto $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ con la topología producto (η) es un espacio de Hausdorff y por lo tanto lo es con la topología más fina (ξ) (ver la Observación 2.1.7). Además, por la Proposición 3.1.9, cada E_γ es cerrado en $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ con la topología η, entonces $E_\gamma^c \in \eta \subseteq \xi$ y E_γ es cerrado en $\sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ con la topología ξ. $\square$

El siguiente resultado trata con la completitud en sumas directas topológicas.

Lema 3.1.1. *La suma directa topológica $\sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ tiene una base de vecindades absolutamente convexas las cuales son cerradas en la topología producto.*

Demostración. Para cada $\gamma \in \Gamma$, consideramos a $\mathscr{V}_\gamma$ una base de vecindades absolutamente convexas en E_γ. Por el Corolario 3.1.1, las envolventes absolutamente convexas de los conjuntos de la forma

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} j_\gamma(V_\gamma) \text{ (para } V_\gamma \in \mathscr{V}_\gamma)$$

forman una base de vecindades $\mathscr{V}$, para la topología suma directa ξ en $E = \sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$. Pero como $j_\gamma(E_\gamma) \simeq E_\gamma$, decimos que las envolventes absolutamente convexas de los conjuntos de la forma $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma$ constituyen esta base $\mathscr{V}$ (bajo isomorfismo). Ahora veamos que las cerraduras en la topología producto η de los elementos de $\mathscr{V}$, forman la base de vecindades requerida (a la que denotamos por $\mathscr{V}'$). Primero demostramos que $cl_\eta(V) \subseteq 3V$, para cada $V \in \mathscr{V}$. Sea $x \in cl_\eta(V)$ en el espacio $\sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$, para el cual existe un subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$, tal que $p_\gamma(x) = 0$, para $\gamma \notin \Delta$, es decir

$$x = \sum_{\gamma\in\Delta} p_\gamma(x).$$

Como

$$W = \tfrac{1}{n} \bigcap_{\gamma\in\Delta} p_\gamma^{-1}(V \cap E_\gamma)$$

es una η-vecindad (ver la demostración de la Proposición 3.1.10), $x + W$ es una η-vecindad de x. Entonces $x + W \cap V \neq \emptyset$, por lo que existe $y \in x + W$ y $y \in V$, así $x - y \in W$ lo que implica que

$$\begin{aligned} p_\gamma(x-y) \in p(W) &= p_\gamma\left(\frac{1}{n}\bigcap_{\gamma\in\Delta} p_\gamma^{-1}(V\cap E_\gamma)\right) \\ &\subseteq \frac{1}{n}\left(\bigcap_{\gamma\in\Delta} p_\gamma(p_\gamma^{-1}(V\cap E_\gamma))\right) \\ &\subseteq \frac{1}{n}\left(\bigcap_{\gamma\in\Delta}(V\cap E_\gamma)\right) \\ &\subseteq \frac{1}{n}V, \end{aligned}$$

para cada $\gamma \in \Delta$. Ahora por la convexidad de V, $\sum_{\gamma\in\Delta} p_\gamma(x-y) \in V$.

Así, como V es la envolvente absolutamente convexa de $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} V_\gamma$ (V_γ vecindad en E_γ, para cada $\gamma \in \Gamma$). Si $y \in V$, existe un número finito ($\Lambda \subseteq \Gamma$) de escalares diferentes de cero ($\lambda_\gamma \in \mathbb{K}$, $\gamma \in \Lambda$) , tales que

$$\sum_{\gamma\in\Lambda} |\lambda_\gamma| \leq 1 \text{ y } y = \sum_{\gamma\in\Lambda} \lambda_\gamma y_\gamma \text{ con } y_\gamma \in V_\gamma \subseteq V \cap E_\gamma.$$

Entonces

$$p_\gamma(y) = \lambda_\gamma y_\gamma \in \lambda_\gamma V.$$

Por lo tanto, por el Lema 2.1.2 y las hipótesis para los λ'_γs:

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma\in\Gamma\cap\Delta^c} p_\gamma(x-y) &= \sum_{\gamma\in\Gamma\cap\Delta^c} p_\gamma(x)-p_\gamma(y)\\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma\cap\Delta^c} p_\gamma(x)-\sum_{\gamma\in\Gamma\cap\Delta^c} p_\gamma(y)\\
&= -\sum_{\gamma\in\Gamma\cap\Delta^c} p_\gamma(y)\\
&\subseteq \sum_{\gamma\in\Gamma\cap\Delta^c} \lambda_\gamma V\\
&\subseteq \left(\sum_{\gamma\in\Gamma\cap\Delta^c} |\lambda_\gamma|\right) V\\
&\subseteq V.
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\sum_{\gamma\in\Delta} p_\gamma(x-y)\in V \;\Rightarrow x-y &= \sum_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma(x-y)\\
&= \sum_{\gamma\in\Gamma\cap\Delta^c} p_\gamma(x-y)+\sum_{\gamma\in\Delta} p_\gamma(x-y)\\
&\in V+V=2V
\end{aligned}$$

y entonces

$$x=\sum_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma(x-y)+y\in 3V.$$

Finalmente, para $U\in\xi$, existe $V\in\mathscr{V}$ tal que $V\subseteq U$. Entonces por lo anterior $\frac{1}{3}cl_\eta(V)\subseteq V\subseteq U$. Además la cerradura de un conjunto absolutamente convexo, es absolutamente convexo (ver la Proposición 2.1.4) y por la Proposición 2.1.2

$$\tfrac{1}{3}cl_\eta(V)\in\mathscr{V}',$$

con $\mathscr{V}'$ una base de vecindades para ξ.

□

Lema 3.1.2. *Cualquier subconjunto cerrado B de un conjunto completo A, es completo.*

Demostración. Si A es completo y B es un subconjunto cerrado de A, sea $\mathscr{F}$ un filtro de Cauchy tal que $B\in\mathscr{F}$, entonces $A\in\mathscr{F}$ por **Fi.2** de la Definición 2.1.29. Como A es completo, existe $a\in A$ tal que $\mathscr{F}\to a$, así para U_a vecindad de a, $U_a\in\mathscr{F}$ y $B=\overline{B}\in\mathscr{F}$. Por **Fi.1** $B\cap U_a\in\mathscr{F}$, luego $B\cap U_a\neq\emptyset$, finalmente $a\in\overline{B}$. □

Proposición 3.1.12. *La suma directa topológica de espacios localmente convexos de Hausdorff E_γ es completa si y sólo si cada E_γ es completo.*

Demostración. $\Rightarrow$) Si $E = \sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ es completa, por la Proposición 3.1.11, cada E_γ es un subespacio vectorial cerrado en (E,ξ), entonces por el Lema 3.1.2, cada E_γ es completo.
$\Leftarrow$) Supongamos que cada E_γ es completo y consideramos a $\mathscr{F}$ un filtro de Cauchy en E (en la topología ξ). Entonces $\mathscr{F}$ es también la base de un filtro de Cauchy en $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ con la topología producto η (ver la observación inmediata a la Definición 2.1.30 y considerar el morfismo inclusión con las topologías: $i : (E,\xi) \to (\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma, \eta))$, entonces por el Corolario 3.1.4 de la Proposición 3.1.8, $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ es completo. Por lo tanto, existe $x \in \prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ tal que $\mathscr{F} \to x$ en la topología η. Veamos que $x \in E$ y que esta convergencia es también en la topología ξ. Consideramos Δ, el subconjunto de Γ de todos los índices γ tales que $p_\gamma(x) \neq 0$. Además como E_γ es un espacio de Hausdorff, entonces para cada $\gamma \in \Delta$ existe una vecindad absolutamente convexa U_γ en E_γ con $p_\gamma(x) \notin U_\gamma$. Sea

$$U = \tfrac{1}{2} \bigcap_{\gamma\in\Delta} p_\gamma^{-1}(U_\gamma)$$

una vecindad en la topología ξ. Puesto que $\mathscr{F}$ es de Cauchy en (E,ξ), existe $A \in \mathscr{F}$ de orden pequeño U. Sea $y \in A \subseteq E$, supongamos que Δ es infinito, existe $\delta \in \Delta$ tal que $p_\delta(y) = 0$. Como $\mathscr{F} \to x$ en η y $A \in \mathscr{F}$, entonces $x \in cl_\eta(A)$, por lo tanto la η-vecindad $x + \frac{1}{2}p_\delta^{-1}(U_\delta)$ de x intersecta a A en algún punto z. Por un lado para $y, z \in A$ tenemos que $y - z \in U$, así

$$\begin{aligned}
y \in z + U \Rightarrow y \in (x + \frac{1}{2}p_\delta^{-1}(U_\delta)) + U \quad &\Rightarrow \quad x \in (y + \frac{1}{2}p_\delta^{-1}(U_\delta)) + U \\
&\Rightarrow \quad p_\delta(x) \in p_\delta(y) + \frac{1}{2}p_\delta(p_\delta^{-1}(U_\delta)) + p_\delta(U) \\
&\Rightarrow \quad p_\delta(x) \in \frac{1}{2}U_\delta + p_\delta(\frac{1}{2}\bigcap_{\gamma\in\Delta} p_\gamma^{-1}(U_\gamma)) \\
&\Rightarrow \quad p_\delta(x) \in \frac{1}{2}U_\delta + \frac{1}{2}\bigcap_{\gamma\in\Delta} p_\delta(p_\gamma^{-1}(U_\gamma)) \\
&\Rightarrow \quad p_\delta(x) \in \frac{1}{2}U_\delta + \frac{1}{2}U_\delta \subseteq U_\delta.
\end{aligned}$$

Lo cual es una contradicción, pues $p_\delta(x) \notin U_\delta$. Por lo tanto Δ es a lo más finito y así $x = \sum_{\gamma\in\Delta} p_\gamma(x) \in E$.

Finalmente, sea $\mathscr{V}$ la base de vecindades en la topología ξ que son cerradas en la topología η (ver la Lema 3.1.1) y sea $V \in \mathscr{V}$. Como $\frac{1}{2}V$ es una vecindad en la topología ξ, existe $B \in \mathscr{F}$ de orden pequeño $\frac{1}{2}V$, para $z \in B$ entonces

$$B - z \subseteq \tfrac{1}{2}V \text{ y } B \subseteq z + \tfrac{1}{2}V.$$

Además $x \in cl_\eta(B)$ y V es η-cerrado, entonces

$$x \in cl_\eta(B) \subseteq cl_\eta(z + \tfrac{1}{2}V) = z + \tfrac{1}{2}V,$$

por lo que $z \in x + \frac{1}{2}V$ y así $B \subseteq x + \frac{1}{2}V + \frac{1}{2}V = x + V$. Pero por **Fi.3**, $x + V \in \mathscr{F}$, con lo que concluimos que $\mathscr{F} \to x$ en la topología ξ, entonces E es completo. □

Proposición 3.1.13. *En una suma directa topológica de Hausdorff* $\sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$*, el conjunto* A *es acotado o precompacto si y sólo si* A *está contenido en una suma finita de subconjuntos de los* E_γ $(\gamma \in I)$ *con la misma propiedad.*

Demostración. Supongamos que A es acotado o precompacto en $\sum_{\gamma\in I} E_\gamma$, entonces la imagen bajo cada una de sus proyecciones, $p_\gamma(A)$, tiene la misma propiedad (por la Proposición 2.1.18 y el Lema 2.1.11). Por lo tanto, como $A \subseteq \sum_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma(A)$, basta con demostrar que a lo más un número finito de estas proyecciones son diferentes de $\{0\}$. Supongamos lo contrario, entonces existe una sucesión $(\gamma(n))$ en Γ y una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $x_n \neq 0$ y $x_n \in p_{\gamma(n)}(A)$. Por la Proposición 3.1.11, cada E_γ es de Hausdorff, por lo tanto existen vecindades absolutamente convexas $U_{\gamma(n)}$ tales que $x_n \notin nU_{\gamma(n)}$. Para los subíndices $\gamma \notin \{\gamma(n)\}$, consideramos a $U_\gamma = E_\gamma$. Entonces por el Corolario 3.1.1 y la Observación 2.1.3, si U es la envolvente convexa de la unión de todas las vecindades U_γ, entonces U es una vecindad en la topología suma directa y $p_{\gamma(n)}(U) \subseteq U_{\gamma(n)}$, para cada n. Por lo tanto $A \nsubseteq nU$, para cualquier $n \in \mathbb{N}$, ya que de lo contrario existiría $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_{n_0} \in p_{\gamma(n_0)}(A) \subseteq p_{\gamma(n_0)}(n_0 U) \subseteq n_0 p_{\gamma(n_0)}(U) \subseteq n_0 U_{\gamma(n_0)}$$

lo que es una contradicción. Pero si para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $A \nsubseteq nU$, entonces A no puede ser acotado y por lo tanto por la Proposición 2.1.20, A no puede ser precompacto, lo cual contradice cualquiera de las hipótesis sobre A. Entonces, hay a lo más un número finito de proyecciones $p_\gamma(A)$ diferentes de cero, es decir, existe $I \subseteq \Gamma$ conjunto finito tal que

$$A \subseteq \sum_{\gamma\in I} p_\gamma(A),$$

donde cada $p_\gamma(A)$ es acotado o precompacto, según sea el caso de A.

Inversamente, supongamos que A esta contenido en una suma finita de subconjuntos E_γ ($\gamma \in I$, con I finito). Si cada E_γ ($\gamma \in I$) es acotado, por iii) del Lema 2.1.9 $\sum_{\gamma\in I} E_\gamma$ es acotada y por ii) del mismo Lema, A como subconjunto de $\sum_{\gamma\in I} E_\gamma$ es acotado. Ahora si cada E_γ ($\gamma \in I$) es precompacto, se sigue de iii) y ii) del Lema 2.1.10 que A es precompacto. □

Corolario 3.1.5. *En una suma directa topológica $\sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ de Hausdorff, el conjunto cerrado A es compacto si y sólo si está contenido en una suma finita de subconjuntos compactos de los E_γ.*

Demostración. Primero supongamos que para A un conjunto cerrado en $\sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$, A está contenido en una suma finita de subconjuntos compactos $A_\gamma \subseteq E_\gamma$, es decir, existe un conjunto finito I tal que $A \subseteq \sum_{\gamma\in I} A_\gamma$. Por ii) del Lema 2.1.13, $\sum_{\gamma\in I} A_\gamma$ es compacta y como todo subconjunto cerrado de un conjunto compacto es compacto, entonces A es compacto.

Ahora, si A es compacto y cerrado entonces A es precompacto. Por la Proposición 3.1.13 existe I finito tal que

$$A \subseteq \sum_{\gamma\in I} p_\gamma(A),$$

con $p_\gamma(A) \subseteq E_\gamma$ compacto para cada $\gamma \in I$ (ya que la imagen bajo un morfismo continuo de un conjunto compacto es compacto). Así, A esta contenido en una suma finita de subconjuntos compactos de los E_γ. □

Proposición 3.1.14. *El dual continuo del producto topológico $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ es la suma directa $\sum_{\gamma\in\Gamma} E'_\gamma$ de los duales. Si cada E_γ es de Hausdorff y E'_γ tiene la topología de la $\mathscr{A}_\gamma$-convergencia (donde los elementos de $\mathscr{A}$ son considerados absolutamente convexos), entonces la suma directa topológica en $\sum_{\gamma\in\Gamma} E'_\gamma$ es la topología de la $\mathscr{A}$-convergencia, donde $\mathscr{A}$ es el conjunto de todos los productos $\prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma$ tal que $A_\gamma \in \mathscr{A}_\gamma$ para cada $\gamma \in \Gamma$.*

Demostración. Sea x' un funcional continuo en el producto, por la Observación 2.1.11 existe una vecindad $U = \bigcap_{\gamma\in\Delta} p_\gamma^{-1}(U_\gamma)$, tal que $\Delta \subseteq \Gamma$ es finito y cada U_γ es una vecindad en E_γ, donde x' es acotada. Entonces x' se anula en E_γ para cada $\gamma \notin \Delta$, así $x' = \sum_{\gamma\in\Delta} x'_\gamma$, donde $x'_\gamma = x' \circ j_\gamma$ es la restricción de x' a E_γ, luego $x' \in \sum_{\gamma\in\Gamma} E'_\gamma$. Para la otra contención, de la Proposición 25 ([34], pág.93)

$$\left(\sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma\right)' = \prod_{\gamma\in\Gamma} E'_\gamma,$$

entonces

$$x' \in \sum_{\gamma\in\Gamma} E'_\gamma \subseteq \prod_{\gamma\in\Gamma} E'_\gamma = \left(\sum_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma\right)' \subseteq \left(\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma\right)'.$$

La suma directa topológica tiene una base de vecindades que consta de envolventes absolutamente convexas de conjuntos de la forma $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A^0_\gamma$ donde $A_\gamma \in \mathscr{A}_\gamma$ (la polar de A_γ es considerada en E'_γ). Demostramos que los conjuntos A^0 $(A \in \mathscr{A})$ definen la misma topología. La demostración estará completa si para cada

$$A = \prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma \in \mathscr{A}, \text{ se tiene que } V' \subseteq A^0 \subseteq 2V',$$

donde V' es la envolvente absolutamente convexa de $\bigcup_{\gamma\in\Gamma} A^0_\gamma$.

La contención $V' \subseteq A^0$ es válida. En efecto, primero considerando la observación anterior, recordamos que

$$A^0 = \{y' \in \sum_{\gamma\in\Gamma} E'_\gamma : \sup\{|\langle y, y'\rangle| : y \in A = \prod_{\gamma\in\Gamma} A_\gamma\} \leq 1\}.$$

Ahora para $x' \in V'$, existe un número finito de escalares λ_i y de elementos $x'_i \in \bigcup_{\gamma\in\Gamma} A^0_\gamma$, con $i \in I$ (finito), tales que

$$x' = \sum_{i\in I} \lambda_i x'_i \text{ y } \sum_{i\in I} |\lambda_i| \leq 1,$$

entonces para cada $i \in I$ existe una $\gamma \in \Gamma$ tal que $x'_i \in A^0_\gamma$. Por otro lado, para $y \in A$

$$|\langle y, x'\rangle| = |\langle y, \sum_{i\in I} \lambda_i x'_i\rangle| = |\sum_{i\in I} \lambda_i \langle y, x'_i\rangle|,$$

aplicando supremo sobre los $y \in A$ en ambos lados de la desigualdad tenemos :

$$\sup_{y\in A} |\langle y, x'\rangle| \leq \sum_{i\in I} |\lambda_i| \sup_{y\in A} |\langle y, x'_i\rangle| = \sum_{i\in I} |\lambda_i| \sup_{y\in j_\gamma(A_\gamma)\cong A_\gamma} |\langle y, x'_i\rangle| \leq \sum_{i\in I} |\lambda_i| \leq 1,$$

por lo tanto $x' \in A^0$.
Para demostrar la segunda contención $A^0 \subseteq 2V'$, sea $x' \in A^0$. Así x' pertenece al dual continuo del producto de los E_γ, que por la primera parte de la Proposición, es igual a la suma de los E'_γ. Por lo tanto $x' = \sum_{\gamma \in \Gamma} x'_i$. Sea Δ el subconjunto finito de Γ para el cual

$$\lambda_\gamma = \sup_{x_\gamma \in A_\gamma} |\langle x_\gamma, x'_\gamma \rangle| > 0.$$

Entonces $x' - \sum_{\gamma \in \Delta} x'_\gamma$ se anula en A, además como

$$x' - \sum_{\gamma \in \Delta} x'_\gamma \in \bigcup \{x'_\gamma \in A'_\gamma : \sup_{x_\gamma \in A_\gamma} |\langle x_\gamma, x'_\gamma \rangle| \leq 1\} \subseteq V' \text{ implica que } x' \in V' + \sum_{\gamma \in \Delta} x'_\gamma.$$

Pero

$$\sum_{\gamma \in \Delta} x'_\gamma = \sum_{\gamma \in \Delta} \lambda_\gamma (\frac{1}{\lambda_\gamma} x'_\gamma) \in \sum_{\gamma \in \Delta} \lambda_\gamma A^0_\gamma \subseteq V',$$

pues

$$\sup_{x \in A} |\langle x, x' \rangle| = \sum_{\gamma \in \Delta} |\lambda_\gamma| \leq 1.$$

Entonces en conclusión $x' \in V' + V' = 2V'$. □

Proposición 3.1.15. *Sea E el límite inductivo topológico de los espacios localmente convexos E_γ con respecto a los morfismos u_γ. Entonces E es isomorfo a un cociente de la suma directa $\sum_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$.*

Demostración. Sea $u : \sum_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma \to E$ el morfismo lineal definido para $x \in \sum_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$ mediante:

$$u(x) = u(\sum_{\gamma \in \Gamma} x_\gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} u_\gamma(x_\gamma),$$

donde $\sum_{\gamma \in \Gamma} u_\gamma(x_\gamma) \in E = \langle \bigcup_{\gamma \in \Gamma} u_\gamma(E_\gamma) \rangle$. u es sobreyectivo ya que para $x' \in E$, existen escalares α_i y elementos $x'_i \in \bigcup_{\gamma \in \Gamma} u_\gamma(E_\gamma)$, con $i = 1, ..., n$ tales que :

$$x' = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i x'_i.$$

Para cada i existe $\gamma_i \in \Gamma$ tal que $x'_i \in u_{\gamma_i}(E_{\gamma_i})$, por lo tanto existe $x_{\gamma_i} \in E_{\gamma_i}$ con $u_{\gamma_i}(x_{\gamma_i}) = x'_i$. Sea $x = \sum\limits_{\gamma_i \in \Gamma} \alpha_i x_{\gamma_i}$ para el cual x_{γ_i} es cero excepto para un número finito de γ_i, entonces $x \in \sum\limits_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma$ y $u(x) = \sum\limits_{\gamma_i \in \Gamma} \alpha_i u_{\gamma_i}(x_{\gamma_i}) = \sum\limits_{1 \leq i \leq n} \alpha_i x'_i = x'$. Además u es lineal por como se definen las operaciones algebraicas en el producto y por ser cada u_γ un morfismo lineal. Así u es un morfismo lineal sobreyectivo. Por otro lado, observamos que para cada γ, $u \circ j_\gamma = u_\gamma$, donde u_γ y j_γ son continuas, entonces u es continua.

Ahora u puede ser descompuesta en $u = v \circ \pi$, donde π es el morfismo canónico de la suma directa sobre $F = \sum\limits_{\gamma \in \Gamma} E_\gamma / u^{-1}(0)$ y v es el morfismo inyectivo continuo de F sobre E (ver la Proposición 3.1.2). Veamos que v^{-1} es continuo. En efecto, para cada γ, $u_\gamma = v \circ \pi \circ j_\gamma$ así $v^{-1} \circ u_\gamma = \pi \circ j_\gamma$, que es una composición continua. Por la Proposición 3.1.5, v^{-1} es continuo. Entonces v es el isomorfismo de F sobre E que buscamos.

□

3.2. Límite Inductivo Bornológico

En esta sección introducimos las nociones básicas de bornología, espacios vectoriales bornológicos y morfismos lineales acotados, enfocándonos especialmente en una bornología de un espacio vectorial topológico, la bornología de Von Neumann-Kolmogorov.

Denotamos por $I \neq \emptyset$, al conjunto parcialmente ordenado de índices el cual es **dirigido**, i.e. para cada par $(i, j) \in I \times I$ existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ y $j \leq k$.

Sea $\{E_i\}_{i \in I}$ una familia de espacios vectoriales sobre un campo $\mathbb{K}$. Supongamos que para cada par $(i, j) \in I \times I$ tal que $i \leq j$, existe un morfismo lineal $u_{ji} : E_i \to E_j$ tal que el sistema de morfismos $\{u_{ji}\}_{i,j \in I, i \leq j}$ satisface las siguientes condiciones:

i) Para cada $i \in I$, $u_{ii} : E_i \to E_i$ es el morfismo identidad;

ii) Para cada i, j, k elementos de I tales que $i \leq j \leq k$ tenemos que $u_{ki} = u_{kj} \circ u_{ji}$.

El sistema (E_i, u_{ji}) es llamado un **sistema inductivo de espacios vectoriales** (ver la Figura 3.2).

$$\begin{tikzcd} E_i \arrow[rr, "u_{ki}"] \arrow[dr, "u_{ji}"'] & & E_k \\ & E_j \arrow[ur, "u_{kj}"'] & \end{tikzcd}$$

Figura 3.2

Sea (E_i, u_{ji}) un sistema inductivo de espacios vectoriales sobre $\mathbb{K}$. Por la Definición y la Proposición 7.94 de [35], págs. 505-506, existe un espacio vectorial E sobre el campo $\mathbb{K}$ y para cada $i \in I$ un morfismo lineal $u_i : E_i \to E$, tales que:

LI.1 $u_i = u_j \circ u_{ji}$ siempre que $i \leq j$;

LI.2 Para cada espacio vectorial F y familia de morfismos lineales $v_i : E_i \to F$ tales que $v_i = v_j \circ u_{ji}$ para cada $i \leq j$, existe un único morfismo lineal $v : E \to F$ que satisface $v_i = v \circ u_i$ (ver la Figura 3.3).

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, dashed, "v"] & & F \\ & E_i \arrow[ul, "u_i"] \arrow[ur, "v_i"'] \arrow[d, "u_{ji}"'] & \\ & E_j \arrow[uul, "u_j"] \arrow[uur, "v_j"'] & \end{tikzcd}$$

Figura 3.3

El espacio vectorial E existe y es único salvo isomorfismo y es llamado el **límite inductivo** del sistema inductivo (E_i, u_{ji}). Para cada $i \in I$ el morfismo $u_i : E_i \to E$ es llamado el **morfismo canónico** de E_i en E.

Definición 3.2.1. *Una* ***bornología*** *es una familia $\mathscr{B}$ de subconjuntos de X que satisfacen los siguientes axiomas:*

BR.1 *$\mathscr{B}$ es una cubierta de X, i.e. $X = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} B$;*

BR.2 *$\mathscr{B}$ es estable (cerrado) bajo inclusiones, i.e si $A \in \mathscr{B}$ y B es un subconjunto de X tal que $B \subseteq A$, entonces $B \in \mathscr{B}$;*

BR.3 *$\mathscr{B}$ es estable (cerrado) bajo uniones finitas.*

Un par $(X, \mathscr{B})$ que consiste de un conjunto X y una bornología $\mathscr{B}$ es llamado un **conjunto bornológico**, y los elementos de $\mathscr{B}$ son llamados subconjuntos **acotados** de X. Una **base de una bornología** $\mathscr{B}$ en X es una subfamilia $\mathscr{B}_0$ de $\mathscr{B}$ tal que cada elemento de $\mathscr{B}$ está contenido en un elemento de $\mathscr{B}_0$. Una familia $\mathscr{B}_0$ de subconjuntos de X es una base para una bornología en X si y sólo si $\mathscr{B}_0$ cubre a X y toda unión finita de elementos de $\mathscr{B}_0$ está contenido en algún elemento de $\mathscr{B}_0$. Entonces la colección de aquellos subconjuntos de X que estén contenidos en algún elemento de $\mathscr{B}_0$ definen una bornología $\mathscr{B}$ en X teniendo a $\mathscr{B}_0$ como base. Una bornología se dice que es una **bornología con una base numerable** si posee una base que consiste de una sucesión de conjuntos **acotados**. Tal sucesión puede suponerse siempre creciente.

Sea E un espacio vectorial sobre un campo $\mathbb{K}$. Una bornología $\mathscr{B}$ en E se dice que es una *bornología compatible con la estructura de espacio vectorial de E,* o bien una **bornología vectorial** en E, si $\mathscr{B}$ es estable bajo la adición, homotecias y formación de envolventes balanceadas, en otras palabras, si los conjuntos $A+B$, λA, $\bigcup_{|\alpha|\leq 1} \alpha A$ pertenecen a $\mathscr{B}$ siempre que A, B pertenezcan a $\mathscr{B}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Con la notación anterior, $(E, \mathscr{B})$ es un **espacio vectorial bornológico**.

Notamos que cualquier familia estable $\mathscr{B}$ de subconjuntos balanceados de E que satisfacen las tres condiciones anteriores es necesariamente estable bajo uniones finitas: en efecto, si $A, B \in \mathscr{B}$, entonces A y B son balanceados, por lo tanto contienen a cero y en consecuencia, $A \cup B \subset A + B$.

Definición 3.2.2. *Una bornología vectorial en un espacio vectorial E es llamada una **bornología vectorial convexa** si ésta es estable bajo la formación de envolventes convexas.*

Tal bornología es estable bajo la formación de envolventes absolutamente convexas, ya que la envolvente convexa de un conjunto balanceado es balanceada (ver la Definición 2.1.3). Un espacio vectorial bornológico $(E, \mathscr{B})$ cuya bornología $\mathscr{B}$ es convexa es llamado un **espacio vectorial bornológico convexo**.

Un espacio vectorial bornológico **separado** (o con una **bornología separada** $\mathscr{B}$) es aquel en el cual el conjunto $\{0\}$ es el único subespacio vectorial acotado de E.

Definición 3.2.3. *Sean X y Y dos conjuntos bornológicos (resp. espacios vectoriales bornológicos) y $u : X \to Y$ una función (resp. morfismo lineal) de X en Y. Decimos que u es un **morfismo acotado (resp. morfismo lineal acotado)** si la imagen bajo u de cualquier subconjunto acotado de X es acotado en Y (ver la Subsección 3.2.4).*

Es claro que el morfismo identidad de cualquier conjunto bornológico (resp. espacio vectorial bornológico) es acotado. Además si X, Y, Z son tres conjuntos bornológicos (resp. espacios vectoriales bornológicos) y $u : X \to Y$, $v : Y \to Z$ dos funciones acotadas (resp. morfismos lineales acotados), entonces la función (resp. el morfismo) composición $v \circ u : X \to Z$ es acotado. En efecto, sea A un subconjunto de X acotado, $u(A)$ es acotado en Y, y aplicando v tenemos que $v \circ u(A) = v(u(A))$ es acotado en Z.

Una bornología $\mathscr{B}_1$ en un conjunto bornológico X (resp. espacio vectorial bornológico), es una **bornología más fina** que una bornología $\mathscr{B}_2$ en X (o $\mathscr{B}_2$ es una **bornología más gruesa** que $\mathscr{B}_1$) si el morfismo identidad $(X, \mathscr{B}_1) \to (X, \mathscr{B}_2)$ es acotado. Esto equivale a decir que $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}_2$. Un **isomorfismo bornológico** entre dos conjuntos bornológicos (resp. espacios vectoriales bornológicos) es una biyección u, tal que los morfismos u y u^{-1} son acotados. Un **funcional acotado** en un espacio vectorial bornológico E es un morfismo lineal acotado de E en el campo escalar $\mathbb{K}$ (con la bornología usual definida por su valor absoluto).

3.2.1. Bornología inicial

Teorema 3.2.1. *Sean I un conjunto no vacío, $(X_i, \mathscr{B}_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos bornológicos indicados por I y X un conjunto. Supongamos que, para cada $i \in I$, existe un morfismo $u_i : X \to X_i$ y consideramos $\mathscr{B}$ el conjunto de todos los subconjuntos A de X con la siguiente propiedad: para cada $i \in I$, $u_i(A)$ es acotado en X_i.*

Entonces

i) $\mathscr{B}$ es una bornología en X y es la bornología más gruesa en X para la cual cada morfismo u_i es acotado;

ii) si X es un espacio vectorial y si para cada $i \in I$, X_i es un espacio vectorial, $\mathscr{B}_i$ es una bornología vectorial (resp. convexa) en X_i y el morfismo u_i es lineal, entonces $\mathscr{B}$ es una bornología vectorial (resp. convexa) en X.

Demostración. i) Observamos que $X = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} B$ y sea $x \in A$. Entonces para cada $i \in I$, $u_i(x) \subseteq X_i \subseteq B'$, para algún $B' \in \mathscr{B}_i$. Así $x \in u^{-1}(B')$ con $u^{-1}(B') \in \mathscr{B}$ ya que $u(u^{-1}(B')) \subseteq B'$. Sean $A \in \mathscr{B}$ y $B \subseteq X$ tales que $B \subseteq A$, entonces $u_i(B) \subseteq u_i(A)$, por lo tanto $u(B)$ es acotado y $B \in \mathscr{B}$. Finalmente, sean $A, B \in \mathscr{B}$, $u_i(A\cup B) = u_i(A)\cup u_i(B)$ que es un acotado en X_i, por lo tanto $A \cup B \in \mathscr{B}$. Esto demuestra que $\mathscr{B}$ es una bornología.

Sea $\mathscr{B}'$ cualquier bornología para X, bajo la cual cada u_i es acotado. Sea $A' \in \mathscr{B}'$, entonces $u_i(A')$ es acotado en X_i, por lo tanto $A' \in \mathscr{B}$, i.e. $\mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}$.

ii) Veamos que $\mathscr{B}$ es estable bajo la adición, homotecias y envolventes balanceadas (resp. envolventes convexas): Para $A, B \in \mathscr{B}$ y para cada $i \in I$,

$$u_i(A+B) \subseteq u_i(A) + u_i(B) \in \mathscr{B}.$$

Sea $\lambda \in \mathbb{K}$, $u_i(\lambda A) \subseteq \lambda u_i(A) \in \mathscr{B}_i$. Además

$$u_i(\bigcup_{|\alpha|\leq 1} \alpha A) \subseteq \bigcup_{|\alpha|\leq 1} \alpha u_i(A) \in \mathscr{B}_i$$

(resp. para x un elemento de la envolvente convexa de A, $x = \sum_{1\leq k\leq n} \alpha_k x_k$, donde $0 < \alpha_k \in \mathbb{R}$, $x_k \in A$ (para cada k) y $\sum_{1\leq k\leq n} \alpha_k = 1$. Entonces $u_i(x) = \sum_{1\leq k\leq n} \alpha_k u_i(x_k)$, que es un elemento de la envolvente convexa de $u_i(A) \in \mathscr{B}_i$).

Por lo tanto $A+B, \lambda A, \bigcup_{|\alpha|\leq 1} \alpha A \in \mathscr{B}$ (resp. la envolvente convexa de A pertenece a $\mathscr{B}$).

□

La bornología $\mathscr{B}$ en X definida en el Teorema 3.2.1 es llamada la **bornología inicial** en X para los morfismos u_i.

Definición 3.2.4. *Sea $(X, \mathscr{B})$ un conjunto bornológico, sea Y un subconjunto de X e $i : Y \hookrightarrow X$ la inclusión canónica. Entonces la **bornología inducida** en Y por $(X, \mathscr{B})$ es la bornología inicial en Y por la inclusión i. Y equipado con esta bornología es llamado un **subconjunto bornológico**. Si $(X, \mathscr{B})$ es un espacio vectorial bornológico, la bornología inducida en Y es una bornología vectorial y Y es llamado un **subespacio bornológico**.*

Una base para la bornología inducida en Y por $(X, \mathscr{B})$ es dada por la familia $\{A \cap Y : A \in \mathscr{B}\}$.

Observación 3.2.1. *Para un conjunto X y $\{\mathscr{B}_i\}_{i\in I}$ una familia de bornologías en X, indicadas por un conjunto no vacío I, consideramos el morfismo identidad id_i de X sobre $(X, \mathscr{B}_i)$, para cada $i \in I$. La **intersección de las bornologías** $\mathscr{B}_i$ es la bornología inicial $\mathscr{B}$ en X para los morfismos id_i, ya que si A es un acotado en $\mathscr{B}$, A es acotado en $\mathscr{B}_i$, para cada*

$i \in I$. Por otro lado $\mathscr{B}$ es la bornología más gruesa que hace al morfismo id_i acotado, entonces $\mathscr{B} = \bigcap_{i\in I} \mathscr{B}_i$. Además $\bigcap_{i\in I} \mathscr{B}_i$ es una base para la bornología $\mathscr{B}$.

*Sea X un conjunto (resp. espacio vectorial) y sea $\mathscr{A}$ una familia de subconjuntos de X. La **bornología generada por** $\mathscr{A}$ es la intersección de todas las bornologías (resp. bornologías vectoriales o vectoriales convexas) que contienen a $\mathscr{A}$. Si $\mathscr{A}$ cubre a X, la bornología generada por $\mathscr{A}$ consiste de subconjuntos de uniones finitas de conjuntos de $\mathscr{A}$ (ver [29], pág. 168).*

3.2.2. Bornología final

Teorema 3.2.2. *Sean I un conjunto no vacío, $(X_i, \mathscr{B}_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos bornológicos y un conjunto X. Supongamos que, para cada $i \in I$, existe un morfismo $v_i : X_i \to X$ y consideramos $\mathscr{B}$ la bornología en X generada por la familia $\mathscr{A} = \bigcup_{i\in I} v_i(\mathscr{B}_i)$. Entonces*

i) $\mathscr{B}$ es la bornología más fina en X para la cual cada morfismo v_i es acotado;

ii) Si X es un espacio vectorial y si, para cada $i \in I$, X_i es un espacio vectorial, $\mathscr{B}_i$ es una bornología vectorial (resp. convexa) y el morfismo v_i es lineal, entonces la bornología vectorial (resp. convexa) en X generada por $\mathscr{A}$ es la bornología vectorial más fina (resp. convexa) en X para la cual todos los morfismos v_i son acotados.

Demostración.

i) Por la Observación 3.2.1, $\mathscr{B}$ es la intersección de todas las bornologías de X que contienen a $\mathscr{A}$, para cualquier otra bornología $\mathscr{B}'$ que hace acotados a los morfismos v_i (para cada $i \in I$), $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}'$.

ii) Se sigue de las definiciones y de i).

□

Definición 3.2.5. *La bornología $\mathscr{B}$ en X construida en el Teorema 3.2.2(i))(resp. Teorema 3.2.2(ii))) es llamada la **bornología final** (resp. la **bornología vectorial final**, resp. la **bornología final convexa**) en X para los morfismos v_i.*

Observación 3.2.2. *Sea Y un conjunto bornológico y sea X equipado con la bornología final para los morfismos v_i. Entonces un morfismo $v : X \to Y$ es acotado si y sólo si $v \circ v_i$ es acotado para cada $i \in I$. En efecto, si v es acotado, la composición de morfismos acotados es acotado, por lo tanto $v \circ v_i$ es acotado para cada $i \in I$. Ahora si C es un subconjunto* *acotado de X, por el Teorema 3.2.2 y la Observación 3.2.1,* $C \subseteq \bigcap_{B_i \in \mathscr{B}_i} v_i(B_i)$ *lo que implica que* $v(C) \subseteq v \circ v_i(B_i)$*, para* $B_i \in \mathscr{B}_i, (i \in I)$*, entonces por hipótesis,* $v(C)$ *es acotado en* Y*.*

Ejemplo 3.2.1. ***La bornología de Von Neumann-Kolmogorov de un espacio vectorial topológico****. Un conjunto acotado A de un espacio vectorial topológico E es un subconjunto que es absorbido por cada vecindad (ver la Definición 2.1.25). Esta definición fue dada por el matemático John Von Neumann en el año de 1935. La colección de todos los subconjuntos acotados de E forman una bornología vectorial en E (como consecuencia del Lema 2.1.7 y del Lema 2.1.9), llamada la bornología de Von Neumann-Kolmogorov de E.*

Ejemplo 3.2.2. ***La bornología definida por una familia de seminormas*** *es definida como sigue: consideramos E un espacio vectorial y $\Gamma = (p_i)_{i \in I}$ una familia de seminormas en E indicada por un conjunto no vacío I. Un subconjunto A de E es un subconjunto acotado para la familia de seminormas Γ, si para cada $i \in I$, $p_i(A)$ es acotada en $\mathbb{R}$.*

Los subconjuntos de E que están acotados para la familia Γ definen una bornología convexa en E, la bornología definida por Γ (por como se define la envolvente absolutamente convexa de un conjunto y las propiedades que satisface una seminorma).

Tal bornología es separada si y sólo si Γ separa a E, i.e. si para cada $x \in E$ con $x \neq 0$, existe $i \in I$ tal que $p_i(x) \neq 0$. En efecto, si la bornología es separada, sea $x \neq 0$ en E, entonces el espacio generado por x, $\langle x \rangle$, no es acotado, por lo que existe $i \in I$ tal que $p_i(\langle x \rangle) \neq 0$, i.e. $p_i(x) \neq 0$.

Inversamente, supongamos que existe un espacio vectorial acotado $B \neq \{0\}$ de E. Así existe $x \neq 0$ en B e $i \in I$ tal que $p_i(x) = \alpha \neq 0$. Además $nx \in B$, para cada $n \in \mathbb{N}$ pero $p_i(nx) = nx \to \infty$, por lo que B no es acotado, lo que es una contradicción.

En un espacio localmente convexo con la bornología $\mathscr{S}$ definida por una familia de seminormas Γ, la bornología de Von Neumann-Kolmogorov en E coincide con la bornología $\mathscr{S}$ (ver la Lema 2.1.8).

3.2.3. Límite Inductivo Bornológico

Sea I un conjunto no vacío dirigido y sea (X_i, v_{ji}) un sistema inductivo de espacios, indicados por I, tal que para cada $i \in I$, X_i es un conjunto bornológico con bornología $\mathscr{B}_i$. Entonces el sistema (X_i, v_{ji}) es llamado un **sistema inductivo de conjuntos bornológicos** si los morfismos $v_{ji} : X_i \to X_j$ son acotados, siempre que $i \leq j$. Si los X_i's son espacios vectoriales bornológicos (resp. espacios bornológicos convexos) y todos los morfismos v_{ji} son acotados y lineales, entonces el sistema (X_i, v_{ji}) es llamado un **sistema inductivo de espacios vectoriales bornológicos** (resp. espacios bornológicos convexos).

Sea (X_i, v_{ji}) un sistema inductivo de conjuntos bornológicos (resp. espacios vectoriales bornológicos, resp. espacios bornológicos convexos) y sea X el límite inductivo del sistema (X_i, v_{ji}). Para cada $i \in I$, denotamos por $\mathscr{B}_i$ a la bornología de X_i y por v_i al morfismo canónico de X_i en X.

El **límite inductivo bornológico** en X con respecto a las bornologías $\mathscr{B}_i$ es el espacio X dotado de la bornología final en X para los morfismos v_i. Para cada $i \in I$, sea

$$v_i(\mathscr{B}_i) = \{v_i(A) : A \in \mathscr{B}_i\}.$$

Entonces la familia $\mathscr{B} = \bigcup_{i \in I} v_i(\mathscr{B}_i)$ es precisamente la bornología final en X. En efecto, del Teorema 3.2.2 tenemos que $\mathscr{B}$ genera la bornología final, además $X = \bigcup_{i \in I} v_i(\mathscr{B}_i)$ y $\mathscr{B}$ es necesariamente una bornología. Se sigue que si (X_i, v_{ji}) es un sistema inductivo de espacios vectoriales bornológicos (resp. espacios bornológicos convexos), entonces el límite inductivo bornológico en X es necesariamente una bornología vectorial (resp. convexa). X es llamado el **límite inductivo bornológico** del sistema inductivo bornológico (X_i, v_{ji}) y denotado por:

$$(X, \mathscr{B}) = \varinjlim_{b} (X_i, \mathscr{B}_i)$$

3.2.4. Espacios de Mackey

Supongamos que E es un espacio localmente convexo y que t es un morfismo lineal de E en otro espacio localmente convexo F, vimos en la Proposición 2.1.18 que si t es continuo, entonces t manda subconjuntos acotados de E en subconjuntos acotados de F. Cualquier morfismo lineal t que satisface esta propiedad es llamado un **morfismo acotado**. Probamos más adelante que si E es en espacio normado o metrizable, inversamente la propiedad de ser t acotado asegura su continuidad.

Definición 3.2.6. *Un espacio localmente convexo E con la propiedad de que cada morfismo lineal acotado en E es continuo, es llamado* ***espacio de Mackey****, algunas veces* ***bornológico****.*

Un espacio de Mackey y además de Hausdorff E con dual continuo E' tiene la topología de Mackey $(\tau(E, E'))$, porque si ξ es la topología de E entonces el morfismo identidad, $id : (E, \xi) \to (E, \tau(E, E'))$ es acotado (por el Teorema 2.1.9) y así continuo.

Definición 3.2.7. *En un espacio vectorial topológico E, un subconjunto B es llamado* ***bornívoro*** *si este absorbe a cada subconjunto acotado de E.*

Observación 3.2.3. *Es importante señalar que algunos autores usan el término 'Espacio de Mackey' para un espacio localmente convexo equipado con la topología de Mackey, pero nosotros reservamos este término para una clase más restrictiva de espacios. Además en la teoría es común ver que un espacio localmente convexo es* ***bornológico*** *si cada subconjunto absolutamente convexo, bornívoro (ver la Definición 3.2.7) de E es vecindad. La equivalencia entre estas dos definiciones se demuestra en [29], (teorema 13.2.7, pág. 444).*

Proposición 3.2.1. *Un límite inductivo topológico de espacios de Mackey es un espacio de Mackey.*

Demostración. Sea E el límite inductivo topológico de espacios de Mackey E_γ mediante los morfismos u_γ, $\gamma \in \Gamma$. Sea t un morfismo lineal acotado de E en un espacio localmente convexo F. Si A es un subconjunto acotado de E_γ, por la continuidad de u_γ y la acotabilidad de t, $(t \circ u_\gamma)(A) = t(u_\gamma(A))$ es acotado en F. Entonces, para cada $\gamma \in \Gamma$ $t \circ u_\gamma$ es acotado y así continuo. Por lo tanto t es continuo por la Proposición 3.1.5. □

Proposición 3.2.2. *Cada espacio localmente convexo metrizable es un espacio de Mackey.*

Demostración. Sea E un espacio localmente convexo metrizable, existe (U_n) una base de vecindades absolutamente convexas numerable tal que $U_{n+1} \subseteq U_n$, para cada n (ver [42], Lema 5.1.6, pág. 79). Sea t un morfismo lineal acotado de E en un espacio localmente convexo F, supongamos que t no es continuo, entonces existe una vecindad V en F para la cual $t^{-1}(V)$ no es una vecindad en E. Por lo tanto, para cada n existen puntos $x_n \in U_n$ tales que $x_n \notin nt^{-1}(V)$, así $t(x_n) \notin nV$. Además $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es un conjunto acotado. En efecto, para cada U_m, se tiene que $x_r \in U_m$ para toda $r \geq m$, pero U_m es absorbente, así para cada x_r con $r < m$ existe $\lambda_r > 0$ tal que $\lambda_r x_r \in U_m$ lo que implica que $x_r \in \frac{1}{\lambda_r} U_m$. Ahora como U_m es una vecindad absolutamente convexa, para $\lambda = \text{máx}\{\frac{1}{\lambda_r}, 1 : r < m\}$ se tiene que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in \lambda U_m$, así $\frac{1}{\lambda}\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in U_m$. Pero $\{t(x_n)\}$ no es acotado, lo que contradice el hecho de ser t acotado, así t es continuo y entonces E es un espacio de Mackey. □

Corolario 3.2.1. *Cada límite inductivo topológico de espacios localmente convexos metrizables es un espacio de Mackey.*

Demostración. Sea E el límite inductivo topológico de espacios localmente convexos metrizables E_γ, $\gamma \in \Gamma$. De la Proposición 3.2.2 cada E_γ es un espacio de Mackey y por la Proposición 3.2.1, E es un espacio de Mackey. □

Este nos conduce a una forma conversa del Corolario 3.2.1, de la siguiente forma:

Lema 3.2.1. *Sea E un espacio localmente convexo de Hausdorff con topología ξ. Entonces existe una topología localmente convexa más fina η en E, con la cual E tiene los mismos conjuntos acotados que ξ. (E, η) es un espacio de Mackey y es el límite inductivo topológico de una familia de subespacios vectoriales normados que generan a E. Las topologías ξ y η son idénticas si y sólo si E es un espacio de Mackey con la topología ξ.*

Demostración. Denotamos por $\mathscr{G}$ al conjunto de todos los subconjuntos absolutamente convexos de E que son cerrados y acotados en la topología ξ. Sea $A \in \mathscr{G}$ y E_A el subespacio vectorial generado por A, como A es acotado y E es de Hausdorff con la topología ξ, entonces el funcional de Minkowski de A es una norma en E_A. En efecto, sea $\mathscr{U}$ una base para la topología ξ, para cada $U \in \mathscr{U}$ existe $\lambda_U > 0$ tal que $A \subseteq \lambda_U U$, sea $x \in E_A$, supongamos que $p_A(x) = 0$ y $x \neq 0$, entonces:

$$p_{\lambda_U U}(x) \leq p_A(x) = 0, \text{ así } p_{\lambda_U U}(x) = |\lambda_U|^{-1} p_U(x) = 0 \text{ y } p_U(x) = 0 \text{ para cada } U \in \mathscr{U},$$

pero por ser E de Hausdorff existe $W \in \mathscr{U}$ tal que $x \notin W$, así $p_W(x) > 1$, lo que es una contradicción. Por lo tanto E_A es un espacio normado con la topología η_A dada por la norma p_A en E_A, esta topología es más fina que la topología inducida en E_A por ξ, pues si U_A es un abierto en E_A con la topología inducida, existe U abierto en (E, ξ) tal que $U_A = U \cap E_A$, como A es acotado, existe $\lambda_U > 0$ tal que $\frac{1}{\lambda_U} A \subseteq U$, así

$$\begin{aligned} E_A \cap \tfrac{1}{\lambda_U} A \subseteq U \cap E_A = U_A \\ \Leftrightarrow \tfrac{1}{\lambda_U} A \subseteq U_A \\ \Rightarrow p_{U_A}(x) \leq p_{\frac{1}{\lambda_U} A}(x), x \in E_A, \end{aligned}$$

así $\{x : p_{\frac{1}{\lambda_U} A}(x) < 1\} \subseteq U_A$, y U_A es un abierto en E_A con la topología η_A.

Ahora, sea $\mathscr{L}$ una base de vecindades en una topología localmente convexa ζ en E. El conjunto A es acotado en la topología ζ si y sólo si para cada $V \in \mathscr{L}$, existe un $\lambda > 0$ tal que $\lambda A \subseteq V \cap E_A$, es decir, si y sólo si ζ induce en E_A una topología más gruesa que η_A, ya que si $\lambda A \subseteq V \cap E_A$, entonces $\{x : p_{\lambda A}(x) < 1\} \subseteq V \cap E_A$, e inversamente, si ζ induce en E_A una topología más gruesa que η_A, existe $\alpha > 0$ tal que $\{x : p_A(x) \leq \alpha\} \subseteq V \cap E_A$, entonces $\frac{1}{\alpha} A \subseteq V \cap E_A$.

Ahora bien, cada conjunto ξ-acotado B, está contenido en un conjunto absolutamente convexo cerrado y acotado en la topología ξ, digamos $B' \in \mathscr{G}$ (simplemente tomando su envolvente absolutamente convexa ξ-cerrada), entonces la topología localmente convexa más fina ζ, para la cual cada conjunto ξ-acotado es ζ-acotado, es la topología de límite inductivo topológico η con respecto a los espacios normados (E_A, η_A) y las inclusiones $i_A : E_A \hookrightarrow E$, para cada $A \in \mathscr{G}$.

En efecto, primero veamos que E es generado por la unión de los subespacios E_A, $A \in \mathscr{G}$, claramente $E_A \subseteq E$ para cada $A \in \mathscr{G}$. Por otro lado, si $x \in E$, $\{x\}$ es acotado en ξ, pues ξ tiene una base de vecindades absolutamente convexas absorbentes, así $\{x\}$ es absorbido por cada elemento de la base. Consideramos entonces la envolvente absolutamente convexa ξ-cerrada de $\{x\}$ que también es ξ-acotada (digamos $C \in \mathscr{G}$), entonces $x \in E_C$ lo que implica que $E \subseteq \langle \bigcup\limits_{A \in \mathscr{G}} i_A(E_A) \rangle$.

Ahora si B es acotado en ξ, el morfismo inclusión $i_{B'} : (E_{B'}, \eta_{B'}) \hookrightarrow (E, \eta)$ es continuo, así, para V un abierto en (E, η), $V \cap E_{B'}$ es abierto en $(E_{B'}, \eta_{B'})$, entonces η induce en $E_{B'}$ una topología más gruesa que $\eta_{B'}$, y por lo anterior, B' es η-acotado, por consiguiente, B es η-acotado. Además observamos que η es más fina que ξ ($\xi \preceq \eta$), cada η-acotado es ξ-acotado, pues si B es un conjunto η-acotado, para U un abierto en E con la topología ξ (i.e. en η), existe un elemento básico W_ξ de una base para la topología ξ y $\lambda > 0$ tales que $\lambda B \subseteq W_\xi \subseteq U$.

Entonces B es η-acotado, en conclusión η es la topología localmente convexa más fina la cual tiene los mismos conjuntos acotados que ξ. Por el Corolario 3.2.1, dado que (E, η) es el límite inductivo topológico de espacios normados que generan a E, en particular espacios localmente convexos metrizables, entonces (E, η) es un espacio de Mackey.

Finalmente, si E con la topología ξ es un espacio de Mackey, el morfismo identidad $id : (E, \xi) \to (E, \eta)$ es acotado (pues los acotados son los mismos en ambas topologías), por lo tanto también continuo, así ξ es más fina que η ($\eta \preceq \xi$), por lo que son idénticas ambas topologías, inversamente si $\xi = \eta$ entonces (E, ξ) es un espacio de Mackey.

$\square$

Lema 3.2.2. *Si, en el Lema 3.2.1, (E, ξ) es completo, entonces bajo (E, η) es el límite inductivo topológico de una familia de espacios Banach.*

Demostración. Demostramos que cada E_A es completo en la topología η_A. Sea $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en E_A, entonces $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es también una sucesión de Cauchy en (E, ξ). En efecto, como η_A es más fina que la topología inducida en E_A por ξ, para cada abierto W en (E, ξ), $W \cap E_A$ contiene a algún $W_A \in \eta_A$ para el cual existe k entero tal que $x_n - x_m \in W_A \subseteq W \cap E_A \subseteq W$ para todo entero $m, n \geq k$. Entonces como E es completo en la topología ξ, existe $x \in E$ tal que $x_n \to x$ en la topología ξ. Veamos que $x \in E_A$ y que $x_n \to x$ en la topología η_A. Para $\epsilon > 0$, $\{x : p_A(x) < \epsilon\}$ es un abierto en E_A con la topología η_A para el cual existe un entero positivo l tal que $p_A(x_n - x_m) < \epsilon$ para toda $n, m \geq l$, así $\frac{1}{\epsilon} p_A(x_n - x_m) < 1$ y $p_{\epsilon A}(x_n - x_m) < 1$, entonces $x_n - x_m \in \epsilon A$, para toda $n, m \geq l$. Pero el conjunto ϵA es cerrado (pues A se toma cerrado en el Lema 3.2.1), por lo tanto, si $n \to \infty$, $x - x_m \in \epsilon A$ para toda $m \geq l$. Esto demuestra que $x \in E_A$ y $p_A(x - x_m) < \epsilon$, para toda $m \geq l$, entonces $x_n \to x$ en η_A. Así E_A es completo. □

En la demostración del Lema 3.2.2 es suficiente ver que cada sucesión de Cauchy en (E, ξ) es convergente, la cual es una condición más débil que la completitud de E si E no es metrizable.

Teorema 3.2.3. *Un espacio localmente convexo de Hausdorff es un espacio de Mackey si y sólo si este es un límite inductivo topológico de espacios normados. Un espacio de Mackey completo y de Hausdorff es un límite inductivo topológico de espacios de Banach.*

Demostración. Si E es un espacio localmente convexo de Hausdorff, supongamos que E es un espacio de Mackey, entonces por el Lema 3.2.1, E es un límite inductivo topológico de subespacios normados, cuya unión genera a E. Inversamente, si E es un límite inductivo topológico de espacios normados, i.e. metrizables, por el Corolario 3.2.1, E es un espacio de Mackey.

Ahora supongamos que además E es un espacio completo, entonces por el Lema 3.2.1, las topologías ξ y η son las mismas, ya que E es un espacio de Mackey. Entonces por el Lema 3.2.2, E es el límite inductivo topológico de una familia de espacios de Banach. □

Es fácil extender el Teorema 3.2.3 a espacios que no son de Hausdorff, reemplazando cada espacio normado por un espacio cuya topología está dada por una sola seminorma.

Proposición 3.2.3. *En el dual continuo E' de un espacio de Mackey y de Hausdorff E, cada subconjunto $\beta(E', E)$-acotado es equicontinuo.*

Demostración. La topología en E de la convergencia uniforme en los subconjuntos $\beta(E', E)$-acotados de E' es más fina que la topología inicial de E y tiene los mismos conjuntos acotados (ver el Teorema 2.1.9). Por el Lema 3.2.1 ambas topologías coinciden, ya que por hipótesis E es un espacio de Mackey, así por la Proposición 2.1.19 cada subconjunto $\beta(E', E)$-acotado es equicontinuo. □

Corolario 3.2.2. *El morfismo identidad de un espacio de Mackey y de Hausdorff en su bidual es un isomorfismo.*

Demostración. Por la Proposición 3.2.3, en E (un espacio de Mackey y de Hausdorff) cada subconjunto $\beta(E', E)$-acotado es equicontinuo, así por la Proposición 2.1.22, el morfismo identidad es un isomorfismo. □

Proposición 3.2.4. *Un espacio de Mackey completo y de Hausdorff es barrilado.*

Demostración. Por el Lema 3.2.2, un espacio de Mackey completo y de Hausdorff E es un límite inductivo topológico de espacios de Banach y cada uno de ellos es barrilado (ver el Teorema 2.1.10) y así por la Proposición 3.1.6, E es barrilado. □

3.3. Límite Inductivo Estricto

Tanto los espacios de Fréchet como los límites inductivos de espacios de Fréchet, surgen frecuentemente en las aplicaciones. En la práctica cierto tipo especial de estos límites inductivos lineales tienen algunas propiedades adicionales que no poseen en general los límites inductivos lineales de espacios de Fréchet. Algunas de estas propiedades no dependen de la definición de los espacios de Fréchet y entonces estudiamos límites inductivos lineales especiales sin ninguna restricción inicial en los espacios definidos.

Supongamos que E es un espacio vectorial y que $\{E_n\}$ es una sucesión estrictamente creciente de subespacios vectoriales cuya unión es E. Supongamos también que cada E_n tiene una topología ξ_n con la cual este es un espacio localmente convexo y que para cada n, es la topología inducida en E_n por la topología ξ_{n+1} en E_{n+1}. Entonces cada E_n es sumergida algebraica y topológicamente en E_{n+1} (y entonces en E_{n+r} para cada r). Sea ξ la topología de límite inductivo en E, así que ξ es la topología localmente convexa más fina en E que induce en cada E_n una topología más gruesa que ξ_n. Entonces E con la topología localmente convexa ξ es llamado **el límite inductivo estricto** de los subespacios E_n. En este caso veamos que la topología en E induce exactamente ξ_n en cada E_n.

Proposición 3.3.1. *Sea E el espacio localmente convexo con la topología ξ, el cual es el límite inductivo estricto de los espacios localmente convexos E_n, con las topologías ξ_n respectivamente. Entonces ξ induce ξ_n en cada E_n.*

Demostración. Supongamos que $\xi|_n$ es la topología inducida en E_n por ξ, entonces por definición del límite, $\xi|_n \preceq \xi_n$, para cada n. Por otro lado, sea U_n cualquier vecindad absolutamente convexa en (E_n, ξ_n), demostramos que existe una ξ-vecindad U en E con $U \cap E_n = U_n$, y así ξ induce en E_n una topología más fina idéntica a ξ_n. En efecto, como ξ_{n+1} induce ξ_n en E_n, existe una ξ_{n+1}-vecindad U_{n+1} tal que $U_{n+1} \cap E_n \subseteq U_n$.

Haciendo lo mismo por recursión, definimos para cada r una ξ_{n+r}-vecindad U_{n+r} absolutamente convexa tal que

$$U_{n+r} \cap E_{n+s} \subseteq U_{n+s} \text{ para } 0 \leq s \leq r,$$

pues

$$U_{n+r} \cap E_{n+r-1} \subseteq U_{n+r-1},$$
$$U_{n+r} \cap E_{n+r-2} = U_{n+r} \cap E_{n+r-1} \cap E_{n+r-2} \subseteq U_{n+r-1} \cap E_{n+r-2} \subseteq U_{n+r-2}$$

y así sucesivamente. Sea $U = \Gamma(\bigcup_{r=0}^{\infty} U_{n+r})$, entonces como $U_{n+r} \subseteq E_{n+r}$,

$$U_{n+r} \subseteq U \cap E_{n+r} \text{ para } r \geq 0.$$

Además para $m \leq n$, $U \cap E_m \subseteq U_n \cap E_m$, ya que si suponemos lo contrario existe $x \in U \cap E_m$, pero $x \notin U_n \cap E_m$, entonces $x \in U$ pero $x \notin U_n$, por lo anterior $x \notin E_n$ ó $x \notin U_{n+1}$. En el primer caso, $x \notin E_m$ y tenemos una contradicción. En el segundo caso, $x \notin E_{m+1}$ ó $x \notin U_{n+2}$, recursivamente. En cualquier caso se llega a una contradicción. Entonces para $m \leq n$, $U \cap E_m = U_n \cap E_m$ y U es la ξ-vecindad requerida. □

Proposición 3.3.2. *El límite inductivo estricto de una sucesión de espacios localmente convexos de Hausdorff es de Hausdorff.*

Demostración. Si E es el límite inductivo estricto de espacios localmente convexos de Hausdorff E_n y si $x \neq 0$, entonces existe n con $x \in E_n$. Por la hipótesis existe U_n vecindad en E_n tal que $x \notin U_n$. Por la Proposición 3.3.1, existe una vecindad U en E tal que $U \cap E_n \subseteq U_n$ y así $x \notin U$. Por lo tanto E es de Hausdorff. □

Proposición 3.3.3. *El límite inductivo estricto de una sucesión de espacios localmente convexos completos de Hausdorff es completo.*

Demostración. Sea E el límite inductivo estricto de espacios localmente convexos completos de Hausdorff E_n, supongamos que E no es completo, entonces existe $x \in \widehat{E}$ (donde $\widehat{E}$ es la completación del espacio E, ver [38], Teorema 5.2, pág.41) pero no en E, i.e. para cualquier n, $x \notin E_n$. Por la Proposición 3.3.1, cada E_n es cerrado en E i.e. en $\widehat{E}$, entonces existe una vecindad absolutamente convexa W_n en $\widehat{E}$ tal que $(x + W_n) \cap E_n = \emptyset$. Lo mismo pasa para $n+1$, existe U_{n+1} en $\widehat{E}$ tal que $(x+U_{n+1}) \cap E_{n+1} = \emptyset$, sea $W_{n+1} = U_{n+1} \cap W_n \subseteq W_n$ entonces

$$(x + (U_{n+1} \cap W_n)) \cap E_{n+1} \subseteq (x + U_{n+1}) \cap E_{n+1} = \emptyset.$$

Por lo tanto se puede elegir $W_{n+1} \subseteq W_n$ para cada n. Sea $U = \Gamma(\bigcup_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2}W_n \cap E_n))$ una vecindad en E (ver el Corolario 3.1.1) y entonces su cerradura $\overline{U}$ es una vecindad en $\widehat{E}$. Por definición de $\widehat{E}$, E es isomorfo a un subespacio denso en $\widehat{E}$, por lo que $x + \overline{U}$ intersecta a E y entonces a algún E_n. Pero $\overline{U} \subseteq W_n + E_n$, en efecto, $\overline{U} \subseteq U + \frac{1}{2}W_n$ y cualquier elemento de U es de la forma $\sum_{1\le r\le s} \lambda_r x_r$ con $x_r \in \frac{1}{2}W_r \cap E_r$ y $\sum_{1\le r\le s} |\lambda_r| = 1$. Entonces

$$\sum_{r\le n} \lambda_r x_r \in \sum_{r\le n} \lambda_r E_r \subseteq E_n \text{ y } \sum_{r>n} \lambda_r x_r \in \sum_{r>n} \lambda_r \frac{1}{2} W_r \subseteq \frac{1}{2} W_n,$$

y por lo tanto $U \subseteq \frac{1}{2}W_n + E_n$. Esto implica que $\overline{U} \subseteq \frac{1}{2}W_n + E_n + \frac{1}{2}W_n = W_n + E_n$. Por lo anterior, $x+W_n+E_n$ intersecta a E_n i.e. $x+W_n$ intersecta a E_n , lo cual es una contradicción. Entonces E es completo.

□

Proposición 3.3.4. *Supongamos que E es el límite inductivo estricto de los espacios localmente convexos E_n, y que para cada n, E_n es un subespacio vectorial cerrado de E_{n+1}. Entonces un subconjunto de E es acotado si y sólo si este está contenido y es acotado en algún E_n.*

Demostración. Si B es un subconjunto acotado en E_n, entonces B es acotado en E por la continuidad del morfismo inclusión en el límite inductivo. Ahora supongamos que B no está totalmente contenido en cualquiera de los subespacios E_n. Entonces es posible elegir una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \in B \cap E_n^c$.

Construimos una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que para cada $k \geq 1$,

$$x_{n_k} \notin E_{n_k} \text{ y } x_{n_k} \in E_{n_{k+1}}.$$

Existe una sucesión creciente de conjuntos absolutamente convexos $\{V_k\}$ tales que V_k es una vecindad en E_{n_k},

$$V_{k+1} \cap E_{n_k} = V_k \text{ y } \tfrac{1}{k}x_{n_k} \notin V_{k+1}.$$

En efecto, si V_k es una vecindad absolutamente convexa en E_{n_k} y como E_{n_k} es cerrado en $E_{n_{k+1}}$, $E_{n_{k+1}}/E_{n_k}$ es un espacio de Hausdorff. Por lo tanto existe una vecindad $U_{n_{k+1}}$ en $E_{n_{k+1}}$, tal que

$$U_{n_{k+1}} \cap E_{n_k} \subseteq V_k \text{ y } U_{n_{k+1}} \cap (\tfrac{1}{k}x_{n_k} + E_{n_k}) = \emptyset.$$

Consideramos $V_{k+1} = \Gamma(U_{n_{k+1}} \cup V_k)$. V_{k+1} es una vecindad en $E_{n_{k+1}}$ para el cual $V_{k+1} \cap E_{n_k} = V_k$. Si suponemos que $\frac{1}{k}x_{n_k} \in V_k$, entonces $\frac{1}{k}x_{n_k} = \alpha x + \beta y$, donde $x \in V_k$ y $y \in U_{n_{k+1}}$ $(\alpha + \beta = 1)$. Por lo tanto $\beta y = \frac{1}{k}x_{n_k} - \alpha x \in U_{n_{k+1}} \cap \frac{1}{k}x_{n_k} + E_{n_k}$, lo cual es imposible.

Entonces $V = \bigcup_{k=1}^{\infty} V_k$ es una ξ-vecindad y $\frac{1}{k}x_{n_k} \notin V$, para toda $k \geq 1$, i.e. la sucesión $\frac{1}{k}x_{n_k}$ no tiende a cero en E, entonces B no puede ser acotado (ver [36], Teorema 1.30, pág. 22). $\square$

Proposición 3.3.5. *Supongamos que E es el límite inductivo estricto de los espacios localmente convexos E_n y que, para cada n, E_n es un subespacio cerrado de E_{n+1}. Entonces E no es metrizable.*

Demostración. Si $\{U_n\}$ es una sucesión decreciente de vecindades en E, existen puntos $x_n \in U_n$ con $x_n \notin E_n$. Entonces por la Proposición 3.3.4, el conjunto $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ no puede ser acotado. Por ser decreciente tal sucesión de vecindades, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es absorbida por cada U_n. Por la Definición 2.1.25, $\{U_n\}$ no puede ser una base de vecindades, por lo tanto E no es metrizable. (ver [42], Ejemplo 3.2.5, pág. 49). $\square$

Definición 3.3.1. *Un espacio barrilado (ver la Definición 2.1.33) de Hausdorff en donde cada subconjunto acotado es relativamente compacto (i.e. su cerradura es compacta) es un **espacio de Montel**.*

Observación 3.3.1. *Cualquier límite inductivo estricto E de una sucesión de espacios de Montel $\{E_n\}$ es un espacio de Montel.*

Demostración. Por la Proposición 3.1.6, E es barrilado, por la Proposición 3.3.2, E es de Hausdorff. Sea B un subconjunto acotado de E, $\overline{B}$ es cerrado y está contenido en algún $E_{n'}$ $(n' \in \mathbb{N})$, así por hipótesis $E_{n'}$ es un espacio de Montel y $\overline{B}$ es compacto en $E_{n'}$, pero por la continuidad de los morfismos inclusión, $\overline{B}$ es compacto en E. Finalmente E es un espacio barrilado de Hausdorff donde cada conjunto acotado es relativamente compacto. $\square$

3.4. Suplementos Topológicos

Sea E un espacio localmente convexo y M, N subespacios vectoriales de E tales que E es la suma algebraica de M y N (las condiciones necesarias y suficientes para ello son: $M + N = E$ y $M \cap N = \{0\}$). E no tiene por que ser la suma directa topológica de M y N cuando se equipan de la topología inducida. Por otro lado, el isomorfismo algebraico natural entre E/M y N no tiene por que ser topológico.

Proposición 3.4.1. *Sea E un espacio localmente convexo la suma directa algebraica de los subespacios M y N, sean p y q las proyecciones de E sobre M y N y sean h y k los morfismos canónicos de E sobre E/M y E/N. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) E es la suma directa topológica de M y N;

ii) p es continua;

iii) q es continua;

iv) h es un isomorfismo de N sobre E/M;

v) k es un isomorfismo de M sobre E/N.

Demostración. Observamos que $p+q$ es el morfismo identidad de E sobre si mismo, por hipótesis $E = M + N$, $p(E) = M$ y $q(E) = N$, por lo que $id_E(E) = E = M + N = p(E) + q(E) = (p + q)(E)$. Entonces ii) y iii) son equivalentes.

Ahora, si $E = M + N$ es la suma directa topológica i.e. la topología más fina que coincide con la topología dada en M y N. Por la Proposición 3.1.10, ésta coincide con la topología producto y es la más débil que hace continuos a los morfismos p y q. Inversamente si p es continuo, entonces q es continuo y E tiene la topología producto, así por la Proposición 3.1.10 E es la suma directa topológica y por lo tanto i), ii) y iii) son equivalentes.

Para las otras equivalencias primero demostramos lo siguiente:

- Para cada vecindad U en E, $k(U \cap M)$ es una vecindad en E/N si y sólo si $(U \cap M) + N = p^{-1}(U \cap M)$ es una vecindad en E.

En efecto, porque si $x \in k(U \cap M) = U \cap M + N$, $x = l + z$ con $l \in U \cap M$ y $z \in N$, entonces $p(x) = p(l + z) = l$, por lo tanto $x \in p^{-1}(U \cap M)$. Por otro lado, si $x \in p^{-1}(U \cap M)$, entonces $p(x) \in U \cap M$, pero $x = p(x) + q(x)$, así $x \in U \cap M + N$. Además, observamos que k es la restricción a M del morfismo canónico

$$\pi : E \to E/N \text{ i.e. } k : M \to E/N,$$

k es continuo con respecto a la topología cociente y que también es un isomorfismo algebraico. Consideramos a U una vecindad en E entonces $U \cap M$ es una vecindad en M, así $k(U \cap M)$ es una vecindad en E/N, por lo tanto:

$$W \subseteq k^{-1}(k(W)) \subseteq k^{-1}(k(U \cap M)) = U \cap M, \text{ para algún abierto } W \text{ en } E.$$

Esto significa que $U \cap M$ es una vecindad en E i.e. $U \cap M + N$ es una vecindad en E.

Inversamente, supongamos que $p^{-1}(U \cap M) = k(U \cap M)$ es una vecindad en E, entonces existe W abierto en E tal que $W \subseteq k(U \cap M)$, $k(W) \subseteq k(U \cap M + N) = k(U \cap M)$ es vecindad en E/N.

Ya demostrada la propiedad anterior, procedemos con la equivalencia de ii) y v). Primero supongamos que p es continua, como $U \cap M$ es un abierto en M (para U un abierto en E), $p^{-1}(U \cap M)$ es una vecindad en E y por lo anterior, k es un morfismo abierto.

Además $\pi = p \circ k$ también es continua, entonces k es continua. Pero sabemos que k es un isomorfismo algebraico de M en E/N, entonces k es un isomorfismo topológico. Ahora supongamos v), para cada vecindad U en E, $k(U \cap M)$ es una vecindad en E/N si y sólo si $p^{-1}(U \cap M)$ es una vecindad en E, entonces p es continuo. De manera similar se demuestra la equivalencia de iii) y iv). □

Corolario 3.4.1. *Si el espacio localmente convexo E es la suma directa algebraica del subespacio vectorial de dimensión finita M y el subespacio vectorial cerrado N, entonces E es la suma directa topológica de M y N.*

Demostración. Por la Proposición 3.1.1, E/N es un espacio de Hausdorff. Ahora, k es un morfismo lineal inyectivo de M sobre E/N que además es continuo pues k es el morfismo canónico de E sobre E/N. Por la Observación 2.1.7, M también es de Hausdorff y por la Proposición 2.1.15 k es un isomorfismo topológico de M sobre E/N, lo cual demuestra v) de la Proposición 3.4.1. Entonces E es la suma directa topológica de M y N. □

Para E un espacio localmente convexo y M un subespacio vectorial de E, si N es cualquier subespacio vectorial tal que E es la suma directa topológica de M y N; este es llamado **el suplemento topológico** de M en E. Desafortunadamente, esto no significa que siempre sea posible encontrar un suplemento topológico como siempre ocurre en el caso simplemente algebraico.

En primer lugar, bajo las hipótesis anteriores, si E es de Hausdorff por la Proposición 3.1.11 M es cerrado en la suma topológica $E = M + N$. Pero no es cierto que todo subespacio vectorial cerrado tenga suplementos topológicos. Cualesquiera dos suplementos topológicos de M en E son isomorfos y ambos son además isomorfos a E/M(ver la Proposición 3.4.1).

Proposición 3.4.2. *El subespacio vectorial M del espacio localmente convexo E tiene un suplemento topológico si y sólo si existe un morfismo lineal continuo p de E sobre M tal que $p^2 = p$.*

Demostración. Si N es un suplemento topológico de M en E y p es el morfismo proyección de $M+N$ sobre M, entonces p tiene las propiedades requeridas. Inversamente, si p es tal morfismo y $N = p^{-1}(0)$; entonces p es el morfismo proyección de $M+N$ sobre M y por la Proposición 3.4.1 E es la suma directa topológica de M y N. □

Un morfismo lineal p de un espacio vectorial E en si mismo con la propiedad $p^2 = p$ es llamado un **proyector**; E es entonces la suma directa algebraica de $p(E)$ y $p^{-1}(0)$.

Proposición 3.4.3. *En un espacio locamente convexo de Hausdorff, cada subespacio vectorial de dimensión finita tiene suplemento topológico.*

Demostración. Sea $e_1, e_2, ..., e_n$ una base para el subespacio vectorial de dimensión finita. Por el Corolario 2.1.6 existen funcionales continuos $f_1, f_2, ..., f_n$ tales que $f_i(e_j) = 0$ si $i \neq j$ y $f_i(e_i) = 1$ (viendo a los e_i como funcionales en el espacio dual). Por lo tanto

$$p(x) = \sum_{1\leq i\leq n} f_i(x)e_i,$$

entonces

$$\begin{aligned} p^2(x) &= \sum_{1\leq j\leq n} f_j(\sum_{1\leq i\leq n} f_i(x)e_i)e_j = \sum_{1\leq i\leq n}\sum_{1\leq j\leq n} f_i(x)f_j(e_i)e_j \\ &= \sum_{1\leq i\leq n} f_i(x)f_i(e_i)e_i = \sum_{1\leq i\leq n} f_i(x)e_i = p(x). \end{aligned}$$

Por la continuidad de las operaciones en un espacio vectorial topológico, p es un proyector continuo sobre M y por la Proposición 3.4.2 M tiene un suplemento topológico.

□

3.4.1. Algunas caracterizaciones

Concluimos este capítulo con la descripción de algunos casos particulares de los límites inductivos lineales topológicos y ejemplos.

3.4.1.1. La topología localmente convexa más fina

Si Γ es cualquier conjunto de índices, el conjunto $\prod_{\gamma\in\Gamma} E_\gamma$ en el cual cada E_γ es identificado con el conjunto fijo E, es denotado usualmente por E^Γ y es el conjunto de todas las funciones definidas en Γ que toman valores en E. Si E es un espacio vectorial, entonces también lo es el producto E^Γ. Como por ejemplo, si S es cualquier conjunto, el espacio vectorial de todas las funciones $\mathbb{K}$-valuadas ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) en S dotado con la topología de la convergencia puntual determinada por las seminormas

$$p_t(x) = |x(t)|, \text{ para cada } t \in S$$

es un espacio localmente convexo, más aún, esta es la topología producto en $\mathbb{K}^S$ (ver [42], Teorema 5.2.14).

Algunas ocasiones conviene considerar el dual algebraico E^* de un espacio vectorial E, como un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^E$ y alternativamente, si β es cualquier base de E, E^* puede ser identificado con $\mathbb{K}^\beta$ y la topología débil $\sigma(E^*, E)$ es entonces la topología producto en $\mathbb{K}^\beta$. Además, el espacio vectorial E puede ser identificado con una suma directa de copias de $\mathbb{K}$ (uno para cada elemento de la base β de E). La topología suma directa, la más fina que induce la topología usual (Euclidiana) en cada copia de $\mathbb{K}$, es además la topología localmente convexa más fina $\tau(E, E^*)$. Otra forma útil de ver a $\tau(E, E^*)$ es considerándola como la topología de límite inductivo definida por todos los subespacios vectoriales de E de dimensión finita con su (única) topología Euclidiana.

3.4.1.2. Topología de Hausdorff asociada

En la práctica es común que los espacios localmente convexos son de Hausdorff, pero en caso contrario pueden ser convertidos en espacios de Hausdorff mediante la identificación de elementos cuya diferencia pertenece a N(ver la Observación 2.1.10), i.e. tomando cocientes. Así que podemos restringirnos a espacios de Hausdorff. En efecto, si E no es de Hausdorff y N es como en la Observación 2.1.10 (la cerradura del conjunto que consiste sólo del origen), entonces N es un subespacio vectorial cerrado de E y por la Proposición 3.1.1, E/N es un espacio localmente convexo de Hausdorff.

El morfismo canónico π de E sobre E/N, así como la función g que manda conjuntos abiertos sobre conjuntos abiertos, tiene la propiedad adicional de que la imagen de un conjunto cerrado es cerrado. En efecto, si A es un subconjunto cerrado de E y $\pi(A)$ no es cerrado, entonces existe $a \in E$ tal que $\pi(a) \in \overline{\pi(A)}$ pero $\pi(a) \notin \pi(A)$, lo que significa que $a \notin A$. Pero como A es cerrado entonces existe una vecindad absolutamente convexa U tal que $(a + 2U) \cap A = \emptyset$. Y además

$$\bigcap_{V \in \mathscr{V}} V = N \subseteq U$$

donde $\mathscr{V}$ es cualquier base en E, por lo tanto $(a + U + N) \cap A = \emptyset$ y así $\pi(a) + \pi(U)$ no intersecta a $\pi(A)$, lo que es una contradicción. Ahora, si A es un conjunto cerrado entonces

A^c es un conjunto abierto que bajo la función sobreyectiva g, $g(A^c)$ es abierto y entonces $g(A)$ cerrado.

Cualquier morfismo lineal continuo t de E en un espacio localmente convexo de Hausdorff F que debe anularse en N. En efecto, para cualquier vecindad W en F existe U vecindad en E tal que $U \subseteq t^{-1}(W)$, pero $N \subseteq U$, entonces

$$N \subseteq t^{-1}(W) \Rightarrow t(N) \subseteq W \text{ esto para toda vecindad } W \text{ en } F$$

y por lo tanto

$$t(N) \subseteq \bigcap W = \{0\}.$$

Entonces por la Proposición 3.1.2, t tiene una descomposición canónica $t = u \circ \pi$, donde u es un morfismo lineal continuo de E/N en F. En particular E y E/N tienen el mismo dual continuo, ya que por la observación anterior, para cualquier $x' \in E'$, $x'(N) = 0$ y $x' \in N^0$, así $N^0 = E'$, por lo tanto por la Proposición 3.1.3 E y E/N tienen el mismo dual.

3.4.1.3. Límites Inductivos Topológicos

Supongamos que E es un espacio vectorial y que $\{E_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ es una familia de subespacios vectoriales de E, donde cada E_γ es un espacio localmente convexo con una topología ξ_γ. Denotamos la topología de límite inductivo topológico en E por ξ con respecto a los morfismos inclusiones $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Si ahora $\{F_\delta : \delta \in \Delta\}$ es otra subfamilia de subespacios vectoriales de E, cada F_δ con una topología localmente convexa η_δ, en E puede considerarse también la topología de límite inductivo topológico η con respecto a esta última familia y a los morfismos inclusiones $\{g_\delta\}_{\delta\in\Delta}$.

Un criterio para relacionar ambas topologías (η y ξ) es el siguiente: si para cada E_γ existe F_δ tal que $E_\gamma \subseteq F_\delta$ y η_δ es más gruesa que ξ_γ, entonces η es más gruesa que ξ (para esto aseguramos que η induce en cada E_γ una topología más gruesa que ξ_γ). En efecto, si $V \in \eta$, $g_\delta^{-1}(V) \in \eta_\delta$ y por la hipótesis $g_\delta^{-1}(V) \in \xi_\gamma$, entonces $g_\delta^{-1}(V) \cap E_\gamma$ es un abierto en E_γ, pero

$$g_\delta^{-1}(V) \cap E_\gamma \subseteq f_\gamma^{-1}(V)$$

así $f_\gamma^{-1}(V)$ es un abierto en E_γ para cada γ, por lo que $V \in \xi$. Cuando el criterio también se satisface con los papeles invertidos para E_γ y F_δ junto con sus respectivas topologías, entonces η y ξ son idénticas.

Una consecuencia usual de lo anterior es que el límite inductivo topológico de la familia $\{E_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ de subespacios es el mismo que el límite inductivo topológico de la subfamilia

$\{E_\gamma : \gamma \in \Delta\}$ donde $\Delta \subseteq \Gamma$, siempre que para cada E_γ exista algún E_δ que lo contenga, con $\delta \in \Delta$, y que la topología en E_γ inducida por E_δ es más gruesa que la topología original de E_γ. En efecto, si η es la topología de límite inductivo topológico en E por la subfamilia $\{E_\gamma : \gamma \in \Delta\}$ y ξ la topología de límite inductivo topológico por la familia $\{E_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$, entonces por la observación anterior $\eta \preceq \xi$. Por otro lado, si $V \in \xi$, $V \cap E_\gamma$ es una vecindad en E_γ para toda $\gamma \in \Gamma$, en particular para toda $\gamma \in \Delta$, así $\xi \preceq \eta$ y $\eta = \xi$. A continuación ilustramos esto con un ejemplo:

Ejemplo 3.4.1. *Sea $\mathcal{K}(S)$ el conjunto de todas las funciones $\mathbb{K}$-valuadas ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) continuas y de soporte compacto, con dominio en el espacio localmente compacto de Hausdorff S. El* ***soporte*** *de una función es el conjunto cerrado más pequeño fuera del cual f se anula, es denotado por $supp(f)$ y entonces*

$$supp(f) := \overline{\{t \in S : f(t) \neq 0\}}.$$

En él consideramos la topología de la convergencia uniforme dada por la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in S} |f(t)|$$

o la topología de la convergencia compacta (la más fuerte) o cualquier otra topología relevante para la teoría de integración. Para cada subconjunto compacto A de S, sea $\mathcal{K}_A(S)$ el subespacio vectorial de $\mathcal{K}(S)$ que consiste de las funciones que tienen soporte contenido en A. Sea $\mathscr{U}$ el conjunto de todos los subconjuntos U absolutamente convexos absorbentes de $\mathcal{K}(S)$ tales que, para el conjunto compacto A, $U \cap \mathcal{K}_A(S)$ es una vecindad en $\mathcal{K}_A(S)$ (con la topología de la convergencia uniforme en A). Entonces $\mathscr{U}$ es una base de vecindades para una topología localmente convexa en $\mathcal{K}(S)$, la cual es en efecto, la topología localmente convexa más fina que induce en cada $\mathcal{K}_A(S)$ una topología más gruesa que su topología original, la de la convergencia uniforme. La anterior es una topología de limite inductivo topológico y es más fina que la topología de la convergencia compacta o la topología de la convergencia uniforme; bajo la cual $\mathcal{K}(S)$ es de Hausdorff. Cuando $S = \mathbb{R}$, la topología no es metrizable (ver la Proposición 3.3.5). Ahora si consideramos $\mathscr{A}$ una base de subconjuntos compactos de S con la propiedad de que cualquier conjunto compacto en S está contenido en algún elemento de $\mathscr{A}$, y tomamos el límite inductivo topológico con respecto a la familia $\{\mathcal{K}_A(S) : A \in \mathscr{A}\}$, entonces ambas topologías de límite inductivo coinciden, ya que para cualquier subconjunto compacto C de S, existe $A \in \mathscr{A}$ tal que

$$\mathcal{K}_C(S) \subseteq \mathcal{K}_A(S)$$

y la topología de ambos espacios es la de la convergencia uniforme, además la topología de $\mathcal{K}_C(S)$ coincide con la topología inducida por $\mathcal{K}_A(S)$.

3.4.1.4. Límites Inductivos de Topologías Extremas

Consideramos la topología de Mackey (τ) (ver el Teorema 2.1.8). Cualquier límite inductivo topológico (de Hausdorff) de espacios con la topología τ tiene la topología τ. En efecto, si E es el límite inductivo de los espacios E_γ con respecto a los morfismos u_γ, la topología de límite inductivo ξ es la más fina que hace a los morfismos u_γ continuos. Además E' es el dual continuo de E y cada E_γ tiene la topología $\tau(E_\gamma, E'_\gamma)$, la topología más fina $\tau(E, E')$ también hace continuos a los morfismos u_γ (ver [34], Proposición 14, pág.62) y por lo tanto ξ es idéntica a $\tau(E, E')$.

Capítulo 4

Límites Inductivos de Álgebras Topológicas

Anteriormente estudiamos límites inductivos en la categoría de espacios vectoriales topológicos, ahora los estudiamos en la categoría de álgebras topológicas. Comenzamos la construcción de este nuevo límite desde su forma puramente algebraica.

4.0.1. Límite Inductivo de Álgebras

Sea $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$ un sistema inductivo de álgebras $(E_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$ con respecto a los morfismos $f_{\beta\alpha}$ (ver la Sección 3.2). Cuando cada E_α tiene unidad e_α, entonces suponemos que $f_{\beta\alpha}(e_\alpha) = e_\beta$, siempre que $\alpha \leq \beta$.

Sea $E_0 = \sum_{\alpha\in\Gamma} E_\alpha$ la unión disjunta de la familia $(E_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$; $x, y \in E_0$ (entonces existen $\alpha, \beta \in \Gamma$ tales que $x \in E_\alpha$ y $y \in E_\beta$) son **equivalentes** $(x \sim y)$ si existe $\gamma \in I$ tal que $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \gamma$ y $f_{\gamma\alpha}(x) = f_{\gamma\beta}(y)$.

El álgebra cociente '$E_0/\sim$' es llamada el **límite inductivo o directo** del sistema inductivo $(E_\alpha, f_{\beta\alpha})$. Y es denotado por

$$\varinjlim E_\alpha \text{ ó } \varinjlim (E_\alpha, f_{\beta\alpha}).$$

Para cada $\alpha \in \Gamma$ sea $i_\alpha : E_\alpha \to E_0$ la inclusión y $\pi : E_0 \to E_0/\sim$ el morfismo cociente. Entonces,

$$f_\alpha = \pi \circ i_\alpha : E_\alpha \to E$$

es un morfismo llamado el **morfismo canónico** (del límite inductivo) de E_α en E. Cuando el límite inductivo tiene elemento unidad e, entonces suponemos que $f_\alpha(e_\alpha) = e$ para cada $\alpha \in \Gamma$.

Es sabido que

$$\begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[dr, "i_\alpha"'] & E_0/\sim = \varinjlim E_\alpha \\ & E_0 \arrow[u, "\pi"'] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} E_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "f_{\beta\alpha}"'] & E = \varinjlim E_\alpha \\ E_\beta \arrow[ur, "f_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Figura 4.1

$$E = \bigcup_{\alpha\in I} f_\alpha(E_\alpha).$$

Además, $f_\beta \circ f_{\beta\alpha} = f_\alpha$ siempre que $\alpha \leq \beta$ y $f_\alpha(E_\alpha) \subseteq f_\beta(E_\beta)$, para cualquier $\alpha, \beta \in \Gamma$ con $\alpha \leq \beta$. Por lo tanto las operaciones algebraicas pueden ser definidas en el $\varinjlim E_\alpha$ (ver [26], págs. 110,111).

Si consideramos el límite inductivo de álgebras topológicas (A_α, τ_α), donde ahora los morfismos $f_{\beta\alpha} : A_\alpha \to A_\beta$ $(\alpha, \beta \in I,\ \alpha \leq \beta)$ son continuos y el límite inductivo

$$A = \varinjlim A_\alpha$$

es equipado con la topología final (τ_f) definida por los morfismos f_α, es decir,

$$\tau_l = \{U \subset A : f_\alpha^{-1}(U) \in \tau_\alpha \text{ para cada } \alpha \in \Gamma\}.$$

Entonces los morfismos canónicos $f_\alpha : A_\alpha \to A$ son continuos para cada $\alpha \in \Gamma$(ver [26], pág.113).

$$\begin{tikzcd} A_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] \arrow[d, "f_{\beta\alpha}"'] & A = \varinjlim A_\alpha \\ A_\beta \arrow[ur, "f_\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Figura 4.2

Proposición 4.0.1. *Sea (A, τ) un álgebra topológica conmutativa, la cual es el límite inductivo de Q-álgebras conmutativas $(A_\alpha, \tau_\alpha)_{\alpha\in\Gamma}$, si τ es la topología de límite inductivo en A. Entonces, (A, τ) es una Q-álgebra.*

Demostración. Para ver que (A, τ) es una Q-álgebra, veamos que el grupo G_A^q es una vecindad en A (ver la Observación inmediata a la Definición 2.2.6). Para cada $\alpha \in \Gamma$, sea $f_\alpha : A_\alpha \to A$ el morfismo canónico, con (A_α, τ_α) una Q-álgebra. Existe un abierto U_α en A_α tal que

$$U_\alpha \subseteq G^q_{A_\alpha}.$$

Entonces

$$f_\alpha(U_\alpha) \subseteq f_\alpha(G^q_{A_\alpha}) \subseteq G^q_A, \text{ para cada } \alpha \in \Gamma.$$

Veamos que se cumple esta última contención. Como $A = \bigcup_{\alpha \in I} f_\alpha(A_\alpha)$ entonces $f_\alpha(G^q_{A_\alpha}) \subseteq A$, para cada $\alpha \in \Gamma$. Sea $x \in f_\alpha(G^q_{A_\alpha})$, por lo que existe $x_\alpha \in G^q_{A_\alpha} \subseteq A_\alpha$ tal que $x = f_\alpha(x_\alpha)$. También existe $y_\alpha \in G^q_{A_\alpha}$ tal que

$$x_\alpha \circ y_\alpha = y_\alpha \circ x_\alpha = 0.$$

Sea $y = f_\alpha(y_\alpha)$, entonces

$$\begin{aligned}
x \circ y &= f_\alpha(x_\alpha) \circ f_\alpha(y_\alpha) \\
&= f_\alpha(x_\alpha) + f_\alpha(y_\alpha) - f_\alpha(x_\alpha) f_\alpha(y_\alpha) \\
&= f_\alpha(x_\alpha + y_\alpha) - f_\alpha(x_\alpha y_\alpha) \\
&= f_\alpha(x_\alpha + y_\alpha - x_\alpha y_\alpha) = f_\alpha(0) = 0
\end{aligned}$$

De forma similar

$$\begin{aligned}
y \circ x &= f_\alpha(y_\alpha) \circ f_\alpha(x_\alpha) \\
&= f_\alpha(y_\alpha) + f_\alpha(x_\alpha) - f_\alpha(y_\alpha) f_\alpha(x_\alpha) \\
&= f_\alpha(y_\alpha + x_\alpha) - f_\alpha(y_\alpha x_\alpha) \\
&= f_\alpha(y_\alpha + x_\alpha - y_\alpha x_\alpha) = f_\alpha(0) = 0.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $x \in G^q_A$. Además

$$U = \bigcup_{\alpha \in \Gamma} f_\alpha(U_\alpha) \subseteq G^q_A.$$

Pero $U_\alpha \subseteq \bigcup_{\beta \in \Gamma} f_\alpha^{-1}(f_\beta(U_\beta)) \subseteq f_\alpha^{-1}(\bigcup_{\beta \in \Gamma} f_\beta(U_\beta)) = f_\alpha^{-1}(U)$ y entonces $f_\alpha^{-1}(U)$ es un abierto en A_α, para cada α. Concluimos que U es una vecindad en A y así G^q_A es una vecindad en (A, τ). $\square$

4.1. Límite Inductivo de Álgebras Localmente m-Convexas

En esta sección damos algunos de los resultados más importantes sobre los límites inductivos de álgebras topológicas, especialmente las localmente m-convexas.

Sea A un álgebra sobre un campo $\mathbb{K}$, $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de álgebras localmente m-convexas, g_α un homomorfismo (de álgebras) de A_α en A. Existe una topología localmente m-convexa mínima en A para la cual todos los homomorfismos g_α son continuos, a saber, la topología cuyos únicos conjuntos abiertos son A y $\emptyset$. Esto sucede ya que para $\alpha \in \Gamma$, $\emptyset \subseteq g_\alpha^{-1}(\emptyset)$ y $A_\alpha \subseteq g_\alpha^{-1}(A)$, por tal motivo podemos hallar una topología más fuerte que esta topología.

Definición 4.1.1. *La* ***topología de límite inductivo algebraico*** *en A con respecto a las álgebras localmente m-convexas $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ y homomorfismos $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ es la topología localmente m-convexa más fuerte en A, para la cual todos los homomorfismos g_α son continuos. A dotada con esta topología es llamada el* ***límite inductivo algebraico de las álgebras*** *$\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$* ***con respecto a los homomorfismos*** *$\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$.*

Usualmente las álgebras $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ son consideradas como subálgebras del álgebra A y g_α los morfismos inclusión de A_α en A, para cada α. En este caso omitimos referencia explicita sobre los g'_αs.

Proposición 4.1.1. *Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de álgebras localmente m-convexas, g_α un morfismo (de álgebras por supuesto) de A_α en el álgebra A, para toda α. Si V es un subconjunto absorbente, convexo, balanceado e idempotente de A, entonces V es una vecindad para la topología de límite inductivo algebraico si y sólo si $g_\alpha^{-1}(V)$ es una vecindad en A_α, para cada α. Si F es un álgebra localmente m-convexa A equipada con la topología de límite inductivo algebraico y si f es un morfismo de A en F, entonces f es continua si y sólo si $f \circ g_\alpha$ es continuo para cada α.*

Demostración. La familia $\mathscr{U}$ de todos los subconjuntos idempotentes, absorbentes, balanceados convexos (ó absolutamente convexos) V, tales que $g_\alpha^{-1}(V)$ es una vecindad en A_α para cada α, es un sistema fundamental de vecindades de cero para una topología localmente m-convexa τ en A. En efecto, $A \in \mathscr{U}$ y si $U, V \in \mathscr{U}$, por la Observación 2.2.2 y la Observación 2.1.3 tenemos que $U \cap V$ es un subconjunto idempotente, absorbente, balanceado y convexo de A, tal que

$$g_\alpha^{-1}(U \cap V) = g_\alpha^{-1}(U) \cap g_\alpha^{-1}(V) \text{ es una vecindad en } A_\alpha, \text{ para cada } \alpha.$$

Entonces se satisface el Teorema 3.2.15 de [34] (ver pág. 50) y por lo tanto τ existe.

Ahora veamos que τ es la topología localmente m-convexa más fina que hace a los morfismos g_α continuos. Supongamos que $\mathscr{W}$ es un sistema fundamental de vecindades de cero que son absolutamente convexas e idempotentes para cualquier otra topología localmente m-convexa τ' en A para la cual cada g_α es continuo, entonces cada $W \in \mathscr{W}$ es absorbente (ver la Proposición 2.1.3) y $g_\alpha^{-1}(W)$ es una vecindad en E_α para toda α; por lo tanto $\mathscr{W} \subseteq \mathscr{U}$ y entonces $\tau' \preceq \tau$, lo que significa que τ es la topología más fuerte, i.e, τ es la topología de límite inductivo algebraico.

Si f es un morfismo continuo de A con la topología τ en F, entonces cada morfismo $f \circ g_\alpha$ es continuo, pues cada g_α lo es. Por otro lado supongamos que f es un homomorfismo tal que $f \circ g_\alpha$ es continuo, para cada α. Sea U una vecindad absolutamente convexa idempotente de cero en F. Entonces $f^{-1}(U)$ es absolutamente convexa, idempotente y absorbente (ver la demostración de la Proposición 3.1.6 y la Proposición 2.2.1). Finalmente, por hipótesis $g_\alpha^{-1}(f^{-1}(U)) = (f \circ g_\alpha)^{-1}(U)$ es una vecindad en A_α para cada α; por lo tanto, por la primer parte de la proposición, $f^{-1}(U)$ es vecindad en A. Entonces f es continua.

$\square$

Observación 4.1.1. *La topología de límite inductivo algebraico es localmente convexa y por lo tanto es más débil que la topología más fuerte localmente convexa en A para la cual todos los g_α son continuos, i.e., la topología de límite inductivo topológico. Por lo que ambas topologías coinciden si y sólo si la topología de límite inductivo topológico es además localmente m-convexa.*

A continuación demostramos mediante un ejemplo que ambas topologías pueden llegar a ser diferentes aún si se definen por medio de una sucesión creciente $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ de subálgebras de A tales que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, donde cada A_n está equipada con la topología inducida (o relativa) por una topología localmente m-convexa metrizable en A.

Ejemplo 4.1.1. *Sea A un álgebra, A' un subespacio **total** (i.e, para cada $h \in A$ ($h \neq 0$), existe $t^* \in A'$ tal que $t^*(h) \neq 0$, ver [22], pág. 68) del dual algebraico de A. Si A' es generado por los funcionales multiplicativos en A', entonces la topología débil $\sigma(A, A')$ definida en A por A' es localmente m-covexa. Por el Teorema 1 de [41], pág. 1026, es necesario y suficiente demostrar que para cada $g \in A'$,* $\ker g$ *contiene un ideal débilmente cerrado de codimensión finita. En efecto, para $g \in A'$,* $\ker g$ *es un ideal débilmente cerrado de codimensión finita, pues* $\ker g$ *es un subgrupo aditivo de A por la linealidad de g y si $x \in A$ y $y \in \ker g$*

$$g(xy) = g(x)g(y) = g(x) \cdot 0 = 0 \text{ y } g(yx) = g(y)g(x) = 0 \cdot g(x) = 0.$$

Por lo tanto $\ker g$ *es un ideal. Dado que $\sigma(A, A')$ es la topología más débil en A que hace continua a la seminorma $p(x) = |g(x)|$, entonces* $\ker p = \ker g$ *es débilmente cerrado. Por otro* *lado, dim$(A/\ker g)$ = cod$_A \ker g$ (la codimensión de $\ker g$ en A) y un resultado del álgebra lineal asegura que si p es un funcional en A entonces cada funcional en A que se anula en el subespacio nulo de p ($\ker p = \ker g$) es un múltiplo de p. Si $p \neq 0$, entonces $\ker g$ tiene codimensión 1. En efecto, si $p \neq 0$ existe $x_0 \in A$ tal que $p(x_0) \neq 0$ y si $r \in A/\ker g$:*

$$r = t + \ker g \text{ para alguna } t \in A, \text{ así } p(t + \tfrac{-p(t)}{p(x_0)} x_0) = 0,$$

por lo tanto

$$r = t - t + \tfrac{p(t)}{p(x_0)} x_0 + \ker p = \tfrac{p(t)}{p(x_0)}(x_0 + \ker p),$$

donde $x_0 + \ker p$ es base para el cociente y entonces la cod$_A \ker g$ es 1. Si $p = 0$, $\ker g = A$ i.e. cod$_A \ker g = 0$. Concluimos que $\ker g$ es un ideal débilmente cerrado de codimensión finita, por lo tanto A dotada de la topología $\sigma(A, A')$ es un álgebra localmente convexa.

Ejemplo 4.1.2. *Sean $A = \mathbb{K}[x_i]_{i=1}^{\infty}$ el álgebra de todos los polinomios en las indeterminadas $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, A_n la subálgebra $\mathbb{K}[x_i]_{i=1}^{n}$ de A. Para alguna sucesión de escalares $t = \{t_i\}_{i=1}^{\infty}$, sea t^* el funcional multiplicativo definido en A por $t^*(h) = h(t)$. Sea $H_n = \{\{t_i\}_{i=1}^{\infty} : t_i$ es un racional no negativo, para toda i, y $t_i = 0$ si $i > n\}$ y sea $H = \{t^* : t \in \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n\}$. Por un Teorema estándar de álgebra, si $t^*(h) = 0$ para cada $t^* \in H$, entonces $h = 0$. Por lo tanto, si A' es el subespacio del dual algebraico A^* generado por H, A' es total. La topología débil $\sigma(A, A')$ es localmente m-convexa (ver el Ejemplo 4.1.1) y dado que $\{V_n\}$ forma una base numerable para esta topología, donde*

$$V_n = \{h : \sup_{1 \leq i \leq n} |h(x_i)| \leq 1\}, \ x_i \in \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n.$$

Entonces A' es metrizable. Veamos que si a cada A_n se le dota con la topología localmente m-convexa inducida por $\sigma(A, A')$, entonces las topologías de límite inductivo algebraico y lineal topológico definidas en A por la familia $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ son diferentes.

Veamos la demostración. Sea $B_n = \{t^* : t = \{t_i\}_{i=1}^{\infty} \in H_n$ y cada t_i es un entero menor o igual a $n\}$. Ya que B_n es finito, $V_n = \{h \in A_n : |t^*(h)| < 2^{-n}$ para toda $t^* \in B_n\}$ es una vecindad en A_n (pues $0 \in V_n$ y B_n es finito, entonces V_n tiene la forma de un abierto de la topología $\sigma(A, A')$) y que además es balanceada, convexa e idempotente. En efecto,

- es convexa: sean $p, q \in V_n$ y $0 \leq \lambda \leq 1$ ($\lambda \in \mathbb{R}$)

$$|t^*(\lambda p + (1-\lambda)q)| \leq \lambda |t_*(p)| + (1-\lambda)|t^*(q)| \leq 2^{-n};$$

- es balanceada: sea $p \in V_n$ y $|\lambda| \leq 1 (\lambda \in \mathbb{C})$

$$|t^*(\lambda p)| \leq |\lambda||t^*(p)| \leq 2^{-n};$$

- es idempotente: sean $p, q \in V_n$

$$|t^*(pq)| = |t^*(p)t^*(q)| = |t^*(p)||t^*(q)| \leq 2^{-2n} \leq 2^{-n}.$$

Sea V la envolvente convexa de $\bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Por el Corolario 3.1.1, V es una vecindad para el límite inductivo topológico en A.

Ahora, necesitamos demostrar dos hechos:

i) Sea $t^* \in B_j$, $g \in V_j$ y sea $g = \sum_{1 \leq n \leq j} g_n$, donde g_n es la suma de los términos de g en E_n pero no en E_{n-1}. Entonces $|t^*(g_n)| < 2^{n-1-j} < 1$.

Para ver la demostración de esto procedemos por inducción sobre j. Si $n = 1 = j$, $t^* \in B_1$, $g \in V_1$ y $g = g_1$, lo que implica que $g_1 \in E_1$ tal que $|t^*(g_1)| < 2^{-1} < 1$. Entonces supongamos que $|t^*(g_n)| < 2^{n-1-j}$ para todos los enteros positivos $n \leq j, (n < j+1)$. Veamos que es válido para $j+1$ o bien que $|t^*(g_n)| < 2^{n-1-j}$ para cada entero positivo $n \leq j+1$, por la hipótesis basta ver que es válido para $n = j+1$.

Sean $t = \{t_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ tales que $y_i = t_i$ para $i \leq n$, $y_i = 0$ para $i > n$, con $n = j+1$. Entonces

$$y^*(g) = y^*(\sum_{1 \leq k \leq j+1} g_k) = \sum_{1 \leq k \leq n} y^*(g_k),$$

$y^*(g_k) = t^*(g_k)$, para $1 \leq k \leq n$ y $t^* \in B_{j+1} = B_n$, $g \in V_{j+1}$, por lo que $g \in E_{j+1}$, entonces $|y^*(g)| < 2^{-j-1}$.

Por hipótesis de inducción:

$$|y^*(g_k)| = |t^*(g_k)| < 2^{k-j-1}, \text{ para toda } k \leq j = n-1,$$

así

$$\begin{aligned}|t^*(g_{j+1})| = |t^*(g_n)| &= |y^*(g_n)| \leq |y^*(g)| + \sum_{1\leq k\leq j=n-1} |y^*(g_k)| \\ &< 2^{-j-1} + \sum_{1\leq k\leq j=n-1} 2^{k-j-1} \\ &= 2^{-j}(2^{-1} + \sum_{0\leq k\leq n-1} 2^{k-1} - 2^{-1}) \\ &= 2^{-1}(\sum_{0\leq k\leq n-1} 2^{k-1}). \qquad (4.1)\end{aligned}$$

Usando la fórmula

$$\sum_{p\leq k\leq n} s^{k-1} = s^{p-1}\left(\frac{s^{n-p+1}-1}{s-1}\right), \text{ para } s \neq 1 \text{ y } 0 \leq p \leq n,$$

la ecuación Ecuación 4.1 es

$$= 2^{-j}(2^{-1}\tfrac{2^{n-1+1}-1}{2-1}) = 2^{n-j-1} - 2^{-j-1} < 2^{-j+n-1}.$$

ii) Si $h \in V$ es tal que cada uno de sus términos pertenece a A_n pero no a A_{n-1} entonces, para cada $t^* \in B_n$, $|t^*(h)| < 1$.

Efectivamente, sea $h = \sum_{1\leq j\leq r} \lambda_j g_j$, donde $r \geq n$, $\lambda_j \geq 0$, para toda j; $\sum_{1\leq j\leq r} \lambda_j = 1$ y $g_j \in V_j$. Sea $g_j = \sum_{1\leq i\leq j} g_{ji}$ con g_{ji} la suma de todos los términos de g_j en A_i, pero no en A_{i-1}. Entonces por hipótesis

$$h = \sum_{n\leq j\leq r} \lambda_j g_{jn}.$$

Para cada $j \geq n$, $t^* \in B_n \subseteq B_j$, así por i), $|t^*(g_{jn})| < 1$. Por lo tanto

$$|t^*(h)| \leq \sum_{n\leq j\leq r} \lambda_j |t^*(g_{jn})| < 1.$$

Ya demostrados ambos hechos, supongamos que V es una vecindad para la topología de límite inductivo algebraico. Entonces V contiene a una vecindad W idempotente y balanceada para la topología de límite inductivo algebraico. Para cada entero positivo n, consideramos $\eta = \{n_j\}_{i=1}^{\infty}$, donde $n_j \geq n$ para toda $j \leq n$ y $n_j = 0$ para toda $j > n$. Como W es absorbente y balanceada, para cada entero positivo n escogemos $\alpha_n > 0$ tal que $\alpha_n x_n \in W$. Entonces para algún entero positivo m, $(\alpha_1 x_1)^m(\alpha_n x_n) = \alpha_1^m \alpha_n x_1^m x_n \in W \subseteq V$. Por lo tanto por ii), dado que $\eta^* \in B_n$, entonces $|\eta^* \alpha_1^m \alpha_n x_1^m x_n| < 1$, así $(\alpha_1 n)^m(\alpha_n n) < 1$, lo que implica que $\alpha_1 n \leq (\alpha_n n)^{-\frac{1}{m}}$. Pero lo anterior pasa para toda m, entonces

$$\alpha_1 n \leq \lim_{m\to\infty} (\alpha_n n)^{-\frac{1}{m}} = 1.$$

Observamos que $\alpha_1 \leq \frac{1}{n}$ para cada n, entonces $\alpha_1 = 0$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto V no es una vecindad para la topología de límite inductivo algebraico y entonces concluimos que ambas topologías son distintas. Con lo que concluimos la demostración del Ejemplo 4.1.2.

Sin embargo, existen condiciones que aseguran que tanto el límite inductivo algebraico como el lineal coinciden. La siguiente Proposición nos indica algunas de ellas y nos será útil para resultados posteriores.

Proposición 4.1.2. *Sean A un álgebra normada, $\{A_\alpha\}$ una sucesión de subálgebras, cada una dotada con la topología inducida por A, donde $A = \bigcup_\alpha A_\alpha$. Si se satisface cualquiera de las siguientes dos condiciones:*

i) Cada A_α es un ideal.

ii) $\{A_\alpha\}$, ordenado por las inclusiones, es un conjunto totalmente ordenado.

Entonces la topología de límite inductivo topológico y la de límite inductivo algebraico coinciden.

Demostración. Sea V una vecindad absolutamente convexa para la topología de límite inductivo topológico. Para cada α, sea ϵ_α tal que $0 < \epsilon_\alpha \leq 1$ y $W_\alpha = \{x \in A_\alpha : \|x\| \leq \epsilon_\alpha\} \subseteq V \cap A_\alpha$. Sea $W = \bigcup_\alpha W_\alpha$. Entonces $W \subseteq V$ y en cualquiera de los casos (i), ii)), W es absorbente e idempotente. En efecto, si $x \in A$, existe α tal que $x \in A_\alpha$, pero W_α es absorbente y convexo en A_α, por lo tanto existe $\beta > 0$ tal que $\beta x \in W_\alpha \subseteq W$, concluimos que W es absorbente. Para ver que W es idempotente, consideramos $x, y \in W$ para los cuales existen α, β subíndices tales que $x \in W_\alpha$ y $y \in W_\beta$. Bajo la hipótesis i) cada A_α es un ideal, entonces $xy \in A_\alpha$ y además $\|y\| \leq \epsilon_\beta \leq 1$, por lo tanto:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \leq \|x\| \leq \epsilon_\alpha,$$

concluimos que $xy \in W_\alpha \subseteq W$. Bajo la hipótesis ii), supongamos sin pérdida de generalidad que para α, β, $A_\beta \subseteq A_\alpha$. Entonces $x, y \in A_\alpha$, pero A_α es subálgebra de A, i.e. $xy \in A_\alpha$ y $x \in W_\alpha$, por lo tanto:

$$\|xy\| \leq \|x\|\|y\| \leq \|x\| \leq \epsilon_\alpha,$$

concluimos que $xy \in W_\alpha \subseteq W$. Ahora consideramos $U = \Gamma(W)$, entonces $U \subseteq V$. Por otro lado W es idempotente y absorbente, entonces por la Proposición 2.2.1, U es también absorbente e idempotente. Finalmente, $W_\alpha \subseteq W \cap A_\alpha \subseteq U \cap A_\alpha$ es una vecindad en A_α (esto para cada α). Entonces por la Proposición 4.1.1, U es una vecindad absolutamente convexa, absorbente e idempotente de cero para la topología de límite inductivo algebraico en A. Por la Observación 4.1.1, ambas topologías coinciden.

□

Proposición 4.1.3. *Sea τ una topología localmente m-convexa en A, $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de ideales, cada uno equipado con la topología inducida por τ, tal que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Entonces las topologías límite inductivo topológico y algebraico en A, con respecto a la familia de ideales A_n, coinciden.*

Demostración. Sea $\{p_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ una familia de seminormas submultiplicativas que definen a la topología τ. Consideramos V una vecindad absolutamente convexa para la topología de límite inductivo topológico. Para cada entero positivo k, elegimos $0 < \epsilon_k \leq 1$, un subconjunto finito Γ_k de Γ y $V_k = \{x \in A_k : p_\alpha(x) \leq \epsilon_k$ para toda $\alpha \in \Gamma_k\} \subseteq V \cap A_k$. Para cada entero positivo n, sea

$$W_n = \{x \in A_n : p_\alpha(x) \leq \text{mín}\{\epsilon_k : 1 \leq k \leq n\}, \text{ para toda } \alpha \in \bigcup_{k=1}^{n} \Gamma_k\}.$$

Por construcción W_n es una vecindad A_n. Si $W = \bigcup_{n=1}^{\infty} W_n$,por ser cada W_n absorbente, entonces lo es W y además para $x \in W_n$, $x \in A_n$ y $p_\alpha(x) \leq \text{mín}\{\epsilon_k : 1 \leq k \leq n\} \leq \epsilon_n$ para toda $\alpha \in \bigcup_{k=1}^{n} \Gamma_k$, en particular para cada $\alpha \in \Gamma_k$, por lo que $x \in V_n$, así $W_n \subseteq V_n$ para toda n. En consecuencia, $W \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n \subseteq V$, donde W es un conjunto idempotente , efectivamente, si $x, y \in W$ existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x \in W_n$ y $y \in W_m$ sin pérdida de generalidad supongamos que $n \leq m$, entonces $E_n \subseteq E_m$ y como E_n es un ideal, $xy \in E_n$. Además como $\bigcup_{k=1}^{n} \Gamma_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{m} \Gamma_k$, $p_\alpha(y) \leq \text{mín}\{\epsilon_k : 1 \leq k \leq m\} \leq 1$,

$$p_\alpha(xy) \leq p_\alpha(x)p_\alpha(y) \leq p_\alpha(x) \min\{\epsilon_k : 1 \leq k \leq n\}.$$

Esto demuestra que $xy \in W_n \subseteq W$. Si U es la envolvente absolutamente convexa de W. Por ser V absolutamente convexa y $W \subseteq V$, entonces $U \subseteq V$ y también U es absorbente e idempotente. Finalmente

$$W_n \subseteq W \cap A_n \subseteq U \cap A_n$$

es una vecindad en A_n. Por la Proposición 4.1.1, U es una vecindad para la topología de límite inductivo algebraico en A que junto con la Observación 4.1.1 implican la coincidencia de ambas topologías. □

4.1.1. Álgebras i-bornológicas

En adelante, todas las álgebras localmente m-convexas serán consideradas de Hausdorff (i.e el espacio subyacente es de Hausdorff) a menos que se indique lo contrario.

Si C es un subconjunto de un álgebra A, la **envolvente idempotente** de C (*idem* (C)) es el conjunto idempotente más pequeño que contiene a C, i.e. es la intersección de todos los subconjuntos idempotentes de A que contienen a C. Entonces

$$idem\ (C) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C^n.$$

Efectivamente, primero observamos que $\bigcup_{n=1}^{\infty} C^n$ es un conjunto idempotente. Sean $x, y \in \bigcup_{n=1}^{\infty} C^n$, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x \in C^n$ y $y \in C^m$, entonces $xy \in C^n C^m = C^{n+m} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C^n$ y por definición $idem\ (C) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} C^n$. Por otro lado, es claro que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $C^n \subseteq idem\ (C)$, así $\bigcup_{n=1}^{\infty} C^n \subseteq idem\ (C)$.

Definición 4.1.2. *Si C es un subconjunto de un álgebra A, la* ***envolvente idempotente*** *de A es el subconjunto idempotente más pequeño que contiene a C.*

Definición 4.1.3. *Sea A un álgebra localmente m-convexa, $C \subseteq A$. C es* ***idempotentemente acotado*** *(abreviado i-acotado), si para algún $\lambda > 0$, λC está contenido en algún subconjunto idempotente y acotado de A, o equivalentemente, si para algún $\lambda > 0$, idem (λC) es acotada.*

Definición 4.1.4. *Sea f una función de un álgebra localmente m-convexa A en otra álgebra localmente m-convexa E. f es **idempotentemente acotada** (abreviado i-acotada), si para cualquier subconjunto i-acotado C de A, $f(C)$ es acotado en E.*

Definición 4.1.5. *Un álgebra localmente m-convexa A es **i-bornológica** si para cada homomorfismo i-acotado de A en cualquier álgebra localmente m-convexa E, es continuo.*

Definición 4.1.6. *Un álgebra localmente m-convexa A es **puntualmente idempotentemente acotada** (abreviada **p.i.a.**), si para cada $x \in A$, $\{x\}$ es i-acotado.*

Ejemplo 4.1.3. *Cada álgebra normada A es p.i.a. En efecto, para cada $x \in A$ existe $t > 0$ tal que $\|x\| < t$, sea $\beta = \frac{\epsilon}{t}$, con $0 \leq \epsilon \leq 1$ y sea $U = \{x \in A : \|x\| < \epsilon\}$, entonces $\beta x \in U$ ya que $\|\frac{\epsilon}{t}x\| < |\frac{\epsilon}{t}|\|x\| < \frac{\epsilon}{t}t = \epsilon$. Observamos que U es un conjunto i-acotado ya que si $W = \{y \in A : \|y\| < \delta\}$ es cualquier vecindad abierta en A y $x \in U$, entonces $\|\delta x\| < \delta\epsilon < \delta$, así $\delta x \in W$ y por lo tanto U es acotado. Por otro lado U es idempotente ya que para cualesquiera $x, y \in U$, $\|xy\| \leq \|x\|\|y\| < \epsilon^2 \leq \epsilon$. Esto demuestra que cada elemento de A es absorbido por un conjunto idempotente y acotado, entonces A es p.i.a.*

Proposición 4.1.4.

i) Si B es i-acotado, entonces lo son cualquier múltiplo escalar de B, cualquier subconjunto, la cerradura y la envolvente convexa y balanceada de B.

ii) Si A es un álgebra normada, B es acotado en A si y sólo si B es i-acotado.

iii) Si A es un álgebra topológica con multiplicación conjuntamente continua conmutativa y si B y C son conjuntos acotados e idempotentes de A, entonces BC y la cerradura de la envolvente absolutamente convexa e idempotente de $B \cup C$ son acotadas e idempotentes; por lo tanto el producto y la unión de cualquier familia finita de subconjuntos i-acotados de A son i-acotados.

iv) Si $\{x^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado, entonces para cualquier $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $|\alpha| < 1$, $(\alpha x)^n \to 0$; entonces A es p.i.a. si y sólo si, para toda $x \in A$, existe $\lambda > 0$ tal que $(\lambda x)^n \to 0$.

v) Si A es el límite inductivo algebraico de álgebras p.i.a. $\{A_\alpha\}$ con respecto a los morfismos $g_\alpha : A_\alpha \to A$ tal que $A = \bigcup_\alpha g_\alpha(A_\alpha)$, entonces A es p.i.a.

Demostración.

i) La siguiente demostración es original. Como B es i-acotado, existe un conjunto idempotente y acotado U y un escalar $\beta > 0$ tales que $\beta B \subseteq U$. Primero veamos que para cualquier escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, λB es i-acotado. Sea $\lambda \in \mathbb{K}$, si $\lambda = 0$, es inmediato que $\lambda A = \{0\}$ es idempotente y acotado. Si $\lambda \neq 0$, sea $\gamma = \frac{\beta}{\lambda}$, entonces $\gamma(\lambda B) = \frac{\beta}{\lambda}\lambda B = \beta B \subseteq U$. Entonces cualquier múltiplo escalar real de B es i-acotado. Ahora consideramos cualquier subconjunto $C \subseteq B$, $\beta C \subseteq \beta B \subseteq U$, por lo tanto C es i-acotado.

   Para ver que *bal* (B) es i-acotado, observamos que β *bal* $(B) \subseteq$ *bal* (U), pero *bal* (U) es idempotente y acotada. En efecto, por ser U acotado, para cualquier vecindad absolutamente convexa idempotente W en A, existe $\alpha > 0$ tal que $U \subseteq \alpha W$, así *bal* $(U) \subseteq$ *bal* $(\alpha W) = \alpha$ *bal* $(W) \subseteq \alpha W$ i.e. $\frac{1}{\alpha}$*bal* $(U) \subseteq W$, lo que significa que *bal* (U) es acotada. Además *bal* (U) es idempotente, ya que para $x, y \in$ *bal* (U) existen $|\lambda| \leq 1, |\beta| \leq 1$ y $x', y' \in U$ tales que $x = \lambda x'$ y $y = \beta y'$, entonces $xy = (\lambda x')(\beta y') = \lambda\beta x'y'$, con $|\lambda\beta| = |\lambda||\beta| \leq 1$ y como U es idempotente $x'y' \in U$, por lo que $xy \in$ *bal* (U). Entonces *bal* (B) es i-acotado.

   De forma similar, *conv* (B) es i-acotada. En efecto, *conv* $(\beta B) \subseteq \beta$ *conv* $(B) \subseteq$ *conv* (U), pero por el Lema 2.1.9 y el Proposición 2.2.1, *conv* (U) es idempotente y acotado, por lo tanto *conv* (B) es i-acotado. Y como $\beta\overline{B} = \overline{\beta B} \subseteq \overline{U}$, entonces por el mismo Lema y la misma Proposición, $\overline{U}$ es idempotente y acotado, así $\overline{B}$ es i-acotado.

ii) La bola unitaria $\overline{B}(0,1)$ es una vecindad idempotente y acotada en el álgebra normada A , ya que para cualquier $x, y \in \overline{B}(0,1)$, $\|xy\| = \|x\|\|y\| \leq 1$, i.e. $xy \in \overline{B}(0,1)$ y usando la Definición 2.1.15, para $\epsilon > 0$, $\overline{B}(0,1) \subseteq \frac{2}{\epsilon}\overline{B}(0,\epsilon)$. Si B es acotado, existe $\alpha > 0$ tal que $B \subseteq \alpha\overline{B}(0,1)$, por lo tanto B es i-acotado. Por otro lado si B es i-acotado, para cualquier vecindad V de cero en A, existen escalares $\lambda, \beta > 0$ y W un conjunto idempotente y acotado tales que

$$\lambda B \subseteq W \subseteq \beta V,$$

   entonces B es acotado.

iii) Supongamos que B, C son dos subconjuntos idempotentes y acotados del álgebra topológica conjuntamente continua conmutativa A, como la multiplicación en esta álgebra es conjuntamente continua y bilineal, entonces por la Proposición 2.1.18 BC es acotado, además por la conmutatividad $(BC)^2 = BCBC = BBCC = B^2C^2 \subseteq BC$, por lo tanto BC es idempotente y acotado. Por el Lema 2.1.9, la unión $B \cup C \cup BC$ es un conjunto acotado y

$$(B \cup C \cup BC)^2 \subseteq B^2 \cup BC \cup B^2C \cup C^2 \cup CBC \cup BCBC \subseteq B \cup C \cup BC,$$

lo que indica que $B \cup C \cup BC$ es idempotente, además $(B \cup C)^2 = B^2 \cup C^2 \cup BC \subseteq B \cup C \cup BC$ entonces *idem* $(B \cup C) \subseteq B \cup C \cup BC$ y por otro lado $B \cup C \cup BC \subseteq (B \cup C) \cup (B \cup C)^2 \subseteq$ *idem* $(B \cup C)$, por lo tanto *idem* $(B \cup C) = B \cup C \cup BC$ es idempotente y acotado. Se sigue del Lema 2.1.9 y de la Proposición 2.2.1 que la cerradura de la envolvente absolutamente convexa e idempotente de $B \cup C$ es acotada e idempotente.

Ahora si consideramos $\mathscr{L} = \{F_i\}_{i=1}^n$ una familia finita de subconjuntos de A que son i-acotados, para cada $1 \leq i \leq n$ existen $\lambda_i > 0$ y un conjunto idempotente y acotado F_i' tales que $\lambda_i F_i \subseteq F_i'$, entonces

$$(\lambda_1\lambda_2...\lambda_n) \bigcup_{1\leq i\leq n} F_i = \lambda_1\lambda_2...\lambda_n F_1 \cup \lambda_1\lambda_2...\lambda_n F_2 \cup ... \cup \lambda_1\lambda_2...\lambda_n F_n \subseteq \lambda_2...\lambda_n F_1' \cup$$
$$\lambda_1\lambda_3...\lambda_n F_2' \cup ... \cup \lambda_1\lambda_2...\lambda_{n-1}F_n' \subseteq \textit{idem}\ (\lambda_2...\lambda_n F_1' \cup \lambda_1\lambda_3...\lambda_n F_2' \cup ... \cup \lambda_1\lambda_2...\lambda_{n-1}F_n').$$

Pero por el inciso i) y la demostración anterior, la envolvente idempotente de una unión finita de conjuntos acotados e idempotentes es acotada e idempotente, por lo que $\bigcup_{1\leq i\leq n} F_i$ es i-acotada. Para el producto de la familia $\mathscr{L}$, observamos que

$$(\lambda_1\lambda_2...\lambda_n)F_1F_2...F_n = (\lambda_1F_1)(\lambda_2F_2)...(\lambda_nF_n) \subseteq F_1'F_2'...F_n',$$

pero el producto finito de conjuntos acotados e idempotentes es acotado e idempotente, entonces $F_1F_2...F_n$ es i-acotado.

iv) Un subconjunto B de un espacio vectorial topológico es acotado si y sólo si para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ y cualquier sucesión de escalares $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\alpha_n \to 0$, entonces $\alpha_n x_n \to 0$ (ver [36], Teorema 1.30, pág. 22). Se sigue de este resultado que si $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotado, entonces para cualquier $\alpha \in \mathbb{K}$ con $|\alpha| < 1$, $\alpha^n \to 0$ y entonces $(\alpha x)^n = \alpha^n x^n \to 0$. Ahora si A es un álgebra p.i.a., para cualquier $x \in A$, $\{x\}$ es i-acotado, entonces para algún $\beta > 0$, *idem* (βx) es acotada, entonces $\{\beta^n x^n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto acotado y si $|\alpha| < 1$, entonces $(\alpha\beta x)^n \to 0$, así para $\lambda = \beta\alpha > 0$ $(\lambda x)^n \to 0$. Inversamente, supongamos que para $x \in A$ existe $\lambda > 0$ tal que $(\lambda x)^n \to 0$, entonces $\{(\lambda x)^n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto acotado e idempotente, en efecto, para $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de escalares que converge a cero, $\alpha_n(\lambda x)^n \to 0$ y además es la envolvente idempotente de λx, por lo tanto $\{x\}$ es i-acotado, así A es p.i.a.

v) Sea $x \in A$, como $A = \bigcup_{\alpha} g_\alpha(A_\alpha)$, existe γ y $y \in A_\gamma$, tal que $g_\gamma(y) = x$. Por iv), como A_γ es un álgebra p.i.a., existe $\lambda > 0$ tal que $(\lambda x)^n \to 0$, entonces para g_γ un morfismo de álgebras continuo:

$$(\lambda x)^n = (\lambda g_\gamma(y))^n = (g_\gamma(\lambda y))^n = g_\gamma((\lambda y)^n) \to 0,$$

por lo tanto, nuevamente por iv) A es p.i.a.

□

Ejemplo 4.1.4. *Un álgebra normada A es i-bornológica.*

Demostración. Primero observamos que por la Proposición 4.1.4, cualquier subconjunto acotado de un álgebra normada es i-acotado. Ahora supongamos que f es un homomorfismo i-acotado de A en otra álgebra localmente m-convexa F, entonces f es un morfismo acotado ya que para cada acotado B en A, B es i-acotado, entonces $f(B)$ es acotado en F. Por otro lado A es un álgebra normada, en consecuencia metrizable, entonces por la Proposición 3.2.2 A es un espacio de Mackey (o bornológico), lo que implica que f es un morfismo continuo, así A es i-bornológica. En general, si A es un álgebra localmente m-convexa bornológica (álgebra localmente m-convexa cuyo espacio vectorial topológico subyacente es bornológico, ver la Definición 3.2.6) tal que cada conjunto acotado es i-acotado, entonces A es i-bornológica. □

Para τ una topología localmente m-convexa de Hausdorff en A, asociamos una topología i-bornológica más fuerte τ^* que coincidirá con τ si y sólo τ es i-bornológica. La caracterización de τ^* lleva a la demostración de que un álgebra i-bornológica es el límite inductivo algebraico de álgebras normadas de forma similar a la de espacios de Mackey (ó bornológicos) (ver el Teorema 3.2.3). El objetivo es preservar ciertas propiedades de completitud de E a las álgebras normadas inducidas, lo cual permite resolver ciertos problemas sobre álgebras i-bornológicas trasladando tales problemas al caso de álgebras normadas y por medio de la topología τ^* conocer más a τ.

Definición 4.1.7. *Sea τ una topología localmente m-convexa en A. Un subconjunto B de A es* ***i-bornívoro*** *si B es absolutamente convexo, absorbente, idempotente y si B absorbe a cada conjunto i-acotado de (A, τ).*

Proposición 4.1.5. *Sea τ una topología localmente m-convexa en A.*

i) La familia de todos los conjuntos i-bornívoros forma un sistema fundamental de vecindades de cero para una topología localmente m-convexa más fuerte τ^* en A.

ii) τ *y* τ^* *tienen los mismos conjuntos i-acotados.*

iii) (A, τ^*) *es i-bornológica; además, si* f *es un homomorfismo de* A *en cualquier otra álgebra localmente m-convexa* F*, entonces* f *es i-acotado en* (A, τ) *si y sólo* f *es continua en* (A, τ^*)*.*

iv) (A, τ) *es i-bornológica si y sólo si* $\tau = \tau^*$*, i.e., si y sólo si cada conjunto i-bornívoro es una vecindad.*

Demostración. La siguiente demostración contiene argumentos originales.

Sea $\mathscr{A}$ la colección de todos los conjuntos i-bornívoros de (A, τ).

i) $\mathscr{A}$ es una base de filtro (ver la Definición 2.1.30) ya que:

- $A \in \mathscr{A}$, $\mathscr{A} \neq \emptyset$,
- si $B_i, B_j \in \mathscr{A}$, $B_i \cap B_j$ es un conjunto absolutamente convexo, absorbente e idempotente (ver la Observación 2.1.3, la Observación 2.1.4 y la Observación 2.2.2). $B_i \cap B_j$ absorbe a cada i-acotado de (A, τ), efectivamente, si B es i-acotado existen $\lambda_i > 0$ y $\lambda_j > 0$ tales que $\lambda_i B \subseteq B_i$ y $\lambda_j B \subseteq B_j$, por lo tanto

$$\lambda_i \lambda_j B \subseteq \lambda_j B_i \cap \lambda_i B_j \subseteq \max\{\lambda_i, \lambda_j\}(B_i \cap B_j),$$

entonces para $\lambda' = \frac{\lambda_i \lambda_j}{\max\{\lambda_i, \lambda_j\}} > 0$, $B_i \cap B_j$ absorbe a B.

Por otro lado, para cualquier $0 < |\lambda| \leq 1$ y $B' \in \mathscr{A}$, $\lambda B' \in \mathscr{A}$: en efecto, anteriormente se demostró que cualquier múltiplo escalar de un conjunto absolutamente convexo sigue siendo absolutamente convexo. Como B' es absorbente, para cualquier $x \in A$ existe $\beta > 0$, tal que $\beta x \in B'$ lo que implica $(\lambda\beta)x \in \lambda B'$ y así $\lambda B'$ es absorbente. Además $\lambda B'$ es idempotente pues como $|\lambda| \leq 1$, por el Lema 2.1.2,

$$(\lambda B')(\lambda B') = \lambda^2 B' B' \subseteq \lambda B'.$$

Por último si C es un conjunto i-acotado de (A, τ), existe $\mu > 0$ tal que

$$\mu C \subseteq B' \text{ así } |\lambda| \mu C \subseteq |\lambda| B' \subseteq \lambda B',$$

entonces $\lambda B'$ absorbe a los i-acotados. Concluimos que $\lambda B' \in \mathscr{A}$.

Por la Observación 2.2.1, $\mathscr{A}$ forma un sistema fundamental de vecindades de cero para una topología localmente m-convexa τ^*. $\tau \preceq \tau^*$ ya que cada vecindad absolutamente convexa idempotente en τ es absorbente y absorbe a cada conjunto acotado i.e. a cada conjunto i-acotado.

ii) Para B un conjunto i-acotado en τ^*, existen $\lambda > 0$ y W un conjunto idempotente y acotado en τ^* tales que $\lambda B \subseteq W$. Pero para cualquier $V \in \tau \preceq \tau^*$ existe $\beta > 0$ tal que $W \subseteq \beta V$. Se sigue que W es acotado en τ i.e B es i-acotado en τ.

Inversamente, si B es i-acotado en τ existe $\beta > 0$ y W idempotente y acotado (i.e. i-acotado) en τ. Pero cada $B' \in \mathscr{A}$ es i-bornívoro y absorbe a W, entonces W es acotado en τ^*, por lo tanto B es i-acotado en τ^*.

iii) Primero veamos que (A, τ^*) es i-bornológica. Sea f un homomorfismo i-acotado en (A, τ^*) y V una vecindad absolutamente convexa idempotente en la imagen de f en F. Sabemos que $f^{-1}(V)$ es absolutamente convexa idempotente y absorbente en A (ver la demostración de la Proposición 3.1.6 y la Proposición 2.2.1). También $f^{-1}(V)$ absorbe a todos los conjuntos i-acotados de A, en efecto, si B es un conjunto i-acotado, $f(B)$ es acotado, entonces $\lambda f(B) \subseteq V$, para alguna $\lambda > 0$ en consecuencia

$$\lambda B \subseteq f^{-1}(f(\lambda B)) \subseteq f^{-1}(V).$$

Por lo tanto $f^{-1}(V) \in \mathscr{A}$ y así f es continua en (A, τ^*). Entonces τ^* es una topología i-bornológica en A.

Si f es i-acotado en (A, τ) también lo es en (A, τ^*), entonces f es continua en el álgebra i-bornológica (A, τ^*). Por otro lado, si f es continua en (A, τ^*) y B es un conjunto i-acotado en (A, τ), este es i-acotado en (A, τ^*) (por ii)). Pero por la Proposición 2.1.18, $f(B)$ es acotado, finalmente f es i-acotado en (A, τ).

iv) Si (A, τ) es i-bornológica, consideramos

$$id : (A, \tau) \to (A, \tau^*),$$

por ii) todo conjunto i-acotado V en (A, τ) es i-acotado en (A, τ^*). Entonces id es un morfismo i-acotado i.e. continuo, en consecuencia $\tau^* \preceq \tau$, por lo tanto $\tau = \tau^*$. Inversamente, si $\tau = \tau^*$, (A, τ) es i-bornológica (por iii)). El resto se sigue de i).

□

Corolario 4.1.1. *Si la topología de un álgebra localmente m-convexa A es la topología localmente m-convexa más fuerte posible, entonces A es i-bornológica. Inversamente, si A es un álgebra i-bornológica tal que el conjunto H de todos los conjuntos i-cotados es una subálgebra de A de dimensión finita, entonces la topología de A es la topología localmente m-convexa más fuerte posible.*

Demostración. Sea τ la topología de A, por hipótesis $\tau = \tau^*$, entonces por iv) de la Proposición 4.1.5, A es i-bornológica. Supongamos que A es i-bornológica y que H es una subálgebra de dimensión finita, sea τ' la topología localmente m-convexa más fina en A e

$$id : (A, \tau) \to (A, \tau')$$

el morfismo identidad. Sea B un conjunto i-acotado en A (i.e. $B \in H$), por Corolario 2, cap. I, pág. 14 de [11], $id|_H$ es continuo, así $id(B)$ es acotado. Así id es un morfismo i-acotado. Pero A es i-bornológica, entonces id es un morfismo continuo y $\tau' = \tau$. □

Sea B un subconjunto absolutamente convexo, cerrado y acotado de un espacio localmente convexo de Hausdorff E. En el subespacio generado por B (E_B), el funcional de Minkowski

$$p_B(x) = \text{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda B\}$$

es una norma (ver la demostración del Lema 3.2.1) cuya bola unitaria cerrada es B. Esto se debe a que p_B en E_B es continua y por la Proposición 2.1.7 se tiene la afirmación anterior.

Además si E es un álgebra y B es idempotente, para $x, y \in E$

$$\{\lambda > 0 : x \in \lambda B\}\{\beta > 0 : y \in \beta B\} \subseteq \{\gamma > 0 : xy \in \gamma B\}. \tag{4.2}$$

Efectivamente, sean $\lambda > 0$ y $\beta > 0$ tales que

$$\tfrac{x}{\lambda}\tfrac{y}{\beta} \in BB = B^2 \subseteq B,$$

entonces $xy \in \lambda\beta B$. Ahora aplicando el ínfimo a la ecuación 4.2 tenemos que

$$p_B(xy) \leq p_B(x)p_B(y),$$

concluimos que p_B es una norma submultiplicativa.

Teorema 4.1.1. *Sea (A, τ) un álgebra i-bornológica, $\mathscr{B}$ la familia de todos los subconjuntos absolutamente convexos, cerrados, acotados, e idempotentes de A. Para cada $B \in \mathscr{B}$ el subespacio vectorial generado por B, A_B, es una subálgebra que equipada con la norma p_B es un álgebra normada. Denotamos por τ_B a la topología de A_B generada por p_B, a S_B la bola unitaria abierta en (A_B, τ_B). Entonces (A, τ) es el límite inductivo algebraico de $\{(A_B, \tau_B)\}_{B\in\mathscr{B}}$ con respecto a los morfismos inclusión. Además:*

i) A es p.i.a. si y sólo si $A = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} A_B$.

ii) Si A es conmutativa y p.i.a., entonces $S = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} S_B$ es una vecindad absolutamente convexa e idempotente.

iii) Si A es un álgebra secuencialmente completa, entonces cada A_B, $B \in \mathscr{B}$ lo es.

iv) Si A es un álgebra advertiblemente completa, entonces cada A_B, $B \in \mathscr{B}$ lo es.

Demostración. Para $B \in \mathscr{B}$, A_B es una subálgebra pues si $x, y \in A_B$ existen escalares α_i, β_j y elementos $x_i, y_j \in B$ tales que $x = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i x_i$ y $y = \sum_{1 \leq j \leq m} \beta_j y_j$, entonces

$$xy = (\sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i x_i)(\sum_{1 \leq j \leq m} \beta_j y_j) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \alpha_i \beta_j x_i y_j,$$

donde $x_i y_j \in BB \subseteq B$. Por lo tanto $xy \in A_B$.

Sea V una vecindad balanceada en τ y $B \in \mathscr{B}$, existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda B \subseteq V$. Entonces

$$\lambda B \subseteq V \cap A_B$$

y como λB es una vecindad en A_B (ver la Proposición 2.1.7 y la Proposición 2.1.2) entonces la topología inducida en A_B por τ es más débil que τ_B.

Para ver que τ es efectivamente el límite inductivo algebraico, por la Proposición 4.1.1, es suficiente demostrar que si W es un subconjunto absolutamente convexo, absorbente e idempotente de A tal que $W \cap A_B$ es una vecindad en el álgebra normada A_B (para toda $B \in \mathscr{B}$), entonces W es una vecindad para τ. En efecto, para cada $B \in \mathscr{B}$, $W \cap A_B$ es una vecindad en A_B. Entonces $W \cap A_B$ absorbe a B ya que existe $\epsilon > 0$ (ver el Teorema 2.1.2) tal que

$$\tfrac{\epsilon}{2} B \subseteq \{x \in A_B : p_B(x) < \epsilon\} \subseteq W \cup A_B \subseteq W.$$

Por lo tanto W absorbe a todo $B \in \mathscr{B}$. Además cada subconjunto i-acotado de A está contenido en un múltiplo escalar de algún $B \in \mathscr{B}$. En efecto, si U es un conjunto i-acotado existe un conjunto idempotente y acotado B' y $\lambda > 0$ tal que

$$\lambda U \subseteq \ B' \subseteq \overline{\Gamma(B')} \in \mathscr{B}$$

(ver el Lema 2.1.9 y la Proposición 2.2.1). Esto significa que W absorbe a cada conjunto i-acotado de A, por lo tanto W es i-bornívoro. Por iv) de la Proposición 4.1.5, ésta es una vecindad para τ. Concluimos que (A, τ) es el límite inductivo algebraico de la familia de álgebras normadas $\{(A_B, \tau_B)\}_{B \in \mathscr{B}}$.

Ahora demostramos los incisos:

i) Supongamos que A es p.i.a., entonces para $x \in A$, $\{x\}$ es un i-acotado. Así existe $\lambda > 0$ y un conjunto idempotente y acotado U tal que

$$\{\lambda x\} \subseteq U.$$

Entonces $B = \overline{idem\ (\Gamma(\lambda x))} \subseteq \overline{idem\ (\Gamma(U))}$. Por el Lema 2.1.9 y la Proposición 2.2.1, B es i-acotado y por lo tanto acotado. Así $B \in \mathscr{B}$ y $x \in A_B$ (para $\beta = \frac{1}{\lambda}$, $\beta(\lambda x) = x \in A_B$). Por otro lado, si

$$x \in \bigcup_{B \in \mathscr{B}} A_B,$$

existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in A_B \subseteq A$. Finalmente $A = \bigcup\limits_{B \in \mathscr{B}} A_B$.

Ahora supongamos que $A = \bigcup\limits_{B \in \mathscr{B}} A_B$. Para $x \in A$ existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in A_B$, así

$$x = \sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_i x_i \in \sum_{1 \leq i \leq m} \lambda_i B = (\sum_{1 \leq i \leq m} |\lambda_i|)B = \frac{1}{\lambda}B,$$

entonces $\lambda x \in B$, y $\{x\}$ es i-acotado.

ii) Supongamos que A es conmutativa y p.i.a. Sea

$$S = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} S_B.$$

Por ser cada S_B la bola unitaria en (A_B, τ_B), ésta es absolutamente convexa e idempotente. Afirmamos que S tiene las mismas propiedades. Para ver que S es absolutamente convexa, por la Observación 2.1.3, es suficiente demostrar que la familia

$$\{S_B : B \in \mathscr{B}\}$$

es cofinal con el orden parcial definido por la inclusión. Sean $B', B \in \mathscr{B}$ y C la cerradura de la envolvente absolutamente convexa e idempotente de $B' \cup B$. Por iii) de la Proposición 4.1.4, C es acotado y por lo tanto $C \in \mathscr{B}$. Por **FM.3** para $x \in A_{B'}$, $p_{B'}(x) \geq p_C(x)$. De forma similar si $x \in A_B$, $p_B(x) \geq p_C(x)$. Por lo tanto $x \in S_{B'} \cup S_B$, implica que $p_{B'}(x) < 1$ ó $p_B(x) < 1$, así

$$p_C(x) \leq \text{mín}\{p_{B'}(x), p_B(x)\} < 1.$$

y $S_{B'} \cup S_B \subseteq S_C$, lo cual demuestra la afirmación.

S es idempotente, ya que si $x, y \in S$, existen $B', B \in \mathscr{B}$, tales que $x \in S_{B'}$ y $y \in S_B$ para los cuales existe $C \in \mathscr{B}$ con

$$xy \in S_{B'}S_B \subseteq S_C S_C \subseteq S_C \subseteq S.$$

S es absorbente porque si $x \in A$, existe $B \in \mathscr{B}$ tal que $x \in A_B$ y sea $r > 0$ tal que $p_B(x) < r$, entonces

$$p_B(\tfrac{1}{r}x) < \tfrac{1}{r}p_B(x) < 1,$$

así $\frac{1}{r}x \in S_B \subseteq S$. Para ver que S es una vecindad, para cada $B \in \mathscr{B}$, S_B absorbe a B, entonces S absorbe a cada B y por lo tanto a cualquier conjunto i-acotado. Lo que implica que S es i-bornívoro y por iv) de la Proposición 4.1.5, S es una vecindad.

iii) La siguiente demostración es original. Supongamos que A es secuencialmente completa. Consideramos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en A_B. Por la continuidad de la inclusión de A_B en A, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es también una sucesión de Cauchy en (A, τ). En efecto, si W es una vecindad en τ, existe $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon B \subseteq W \cap A_B$. Entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m, n > N$,

$$x_n - x_m \in \epsilon B \subseteq W.$$

Siguiendo con la demostración, por hipótesis existe $x \in A$ tal que $x_n \to x$ en (A, τ). Sea $\epsilon_k = 2^{-k-1}$, pero $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en A_B, así existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$p_B(x_{l_k} - x_{s_k}) \leq \epsilon_k < 2^{-k}, \text{ para toda } l_k, s_k \geq n_k,$$

entonces $x_{l_k} - x_{s_k} \in 2^{-k}B$, lo que implica que $x_{l_k} \in 2^{-k}B + x_{n_k}$ para toda $l_k \geq n_k$. Si k varía en $\mathbb{N}$, $\{2^{-k}B + x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión decreciente.

Por otro lado, por ser B cerrado, $\bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k}B + x_{n_k}$ es cerrada en (A, τ) y $\{x_{l_k}\} \to x$, entonces

$$x = \lim_{k\to\infty} x_{l_k} \in \lim_{k\to\infty} 2^{-k}B + x_{n_k} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k}B + x_{n_k} \subseteq A_B$$

y $x_{n_k} \to x$ en (A_B, τ_B). Pero el álgebra es de Hausdorff, entonces $x_n \to x$ en (A_B, τ_B). Así A_B es secuencialmente completa.

iv) Supongamos que A es advertiblemente completa. Sea $\mathscr{F}$ un filtro de Cauchy en (A_B, τ_B) tal que

$$z \circ \mathscr{F} \to 0 \text{ y } \mathscr{F} \circ z \to 0$$

en A_B, para algún $z \in A_B$. Como τ_B es más fuerte que la topología inducida en A_B por τ, entonces $\mathscr{F}$ es una base de filtro de Cauchy en A (para V una vecindad en τ, existe $P \in \mathscr{F}$ de orden pequeño V tal que $x - y \in V \cap A_B \subseteq V$, para toda $x, y \in P$). Además

$$z \circ \mathscr{F} \to 0 \text{ y } \mathscr{F} \circ z \to 0$$

en (A, τ). Entonces existe $z' \in A$ tal que $\mathscr{F} \to z'$ en (A, τ). Por lo tanto,

$$z \circ \mathscr{F} \to 0 \text{ y } z \circ \mathscr{F} \to z \circ z' \text{ , } \mathscr{F} \circ z \to 0 \text{ y } \mathscr{F} \circ z \to z' \circ z.$$

Por ser A de Hausdorff $z' \circ z = z \circ z' = 0$.

Veamos que $z' \in A_B$: para la vecindad B en A_B existe $F \in \mathscr{F}$ de orden pequeño B i.e. para $y \in F$, $F - y \subseteq B$, lo que implica que $F \subseteq B + y$. Pero como B es cerrado en (A, τ) también lo es $y + B$. Además cualquier vecindad $V_{z'}$ de z' esta contenida en $\mathscr{F}$, entonces $V_{z'} \cap F \neq \emptyset$ por lo que $z' \in \overline{F} \subseteq \overline{y + B} = y + B \subseteq A_B$. Finalmente, por hipótesis

$$\mathscr{F} = 0 \circ \mathscr{F} = (z' \circ z) \circ \mathscr{F} = z' \circ (z \circ \mathscr{F}) \to z' \circ 0 = z' \text{ en } (A_B, \tau_B).$$

Y entonces A_B es advertiblemente completa.

$\square$

Corolario 4.1.2. *Un álgebra i-bornológica secuencialmente completa es el límite inductivo algebraico de álgebras de Banach. Un álgebra i-bornológica advertiblemente completa es el límite inductivo algebraico de Q-álgebras normadas.*

Demostración. Si A es un álgebra i-bornológica secuencialmente completa. Por el Teorema 4.1.1, A es el límite inductivo algebraico de álgebras normadas secuencialemente completas A_B. Dado que cada espacio métrico es completo si cada sucesión de Cauchy es convergente, entonces el álgebra normada secuencialmente completa A_B es completa, por lo tanto de Banach. Ahora si A es un álgebra i-bornológica advertiblemente completa, por el Teorema 4.1.1, A es el límite inductivo algebraico de álgebras normadas advertiblemente completas A_B. Por el Teorema 6.5 de [17] (pág. 71), cada A_B es una Q-álgebra normada. □

Si A' es un subespacio total (ver el Ejemplo 4.1.1) del dual algebraico de un álgebra localmente m-convexa A, tal que existen topologías localmente m-convexas en A para las cuales A' es el dual continuo, existe una topología localmente m-convexa más fuerte que denotamos por $\chi(A, A')$.

Definición 4.1.8. *Sea f una transformación lineal de un álgebra localmente m-convexa A en F otra álgebra localmente m-convexa. Decimos que f es* ***i-bornológica*** *si para cada vecindad V en F, $f^{-1}(V)$ contiene a algún conjunto i-bornívoro.*

Cualquier transformación lineal continua f entre dos álgebras localmente m-convexas A y F es i-bornológica. En efecto, si V es una vecindad en F, $f^{-1}(V)$ contiene una vecindad W absolutamente convexa, absorbente e idempotente en A que absorbe a cualquier conjunto acotado en A, i.e. a cualquier i-acotado. Entonces $f^{-1}(V)$ contiene al conjunto i-bornívoro W, así f es i-bornológica.

Además cada transformación i-bornológica f es i-acotada, en efecto, para B un conjunto i-acotado y V una vecindad en F, $f^{-1}(V)$ contiene un conjunto i-bornívoro C, para el cual existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda B \subseteq C \subseteq f^{-1}(V)$. Por lo tanto $\lambda f(B) \subseteq V$, entonces $f(B)$ es acotado y f es i-acotado.

También si f es un homomorfismo, entonces f es i-acotado si y sólo si f es i-bornológico. Efectivamente, supongamos que f es i-acotado y V una vecindad absolutamente convexa e idempotente en F. Por la Proposición 3.1.6 y la Proposición 2.2.1 $f^{-1}(V)$ es absolutamente convexa, absorbente e idempotente. Si B es un conjunto i-acotado, $f(B)$ es acotado, entonces existe $\lambda > 0$ tal que $f(B) \subseteq \lambda V$, lo que implica que $B \subseteq \lambda f^{-1}(V)$. Así $f^{-1}(V)$ es i-bornívoro y f es i-bornológica. La otra implicación se sigue de la observación anterior.

Por último observamos que la imagen lineal continua de un conjunto i-acotado es i-acotada. Efectivamente, si f es una transformación lineal continua y C un conjunto i-acotado en un álgebra localmente m-convexa A. Existe un conjunto idempotente y acotado I y un escalar $\beta > 0$ tales que $\lambda C \subseteq I$. Entonces $\lambda f(C) \subseteq f(I)$. Por las Proposiciones 2.2.1, 2.1.18, $f(I)$ es idempotente y acotado. Así $f(C)$ es i-acotado.

Proposición 4.1.6. *El límite inductivo algebraico de álgebras i-bornológicas es i-bornológico.*

Demostración. Si A es el límite inductivo algebraico de álgebras i-bornológicas

$$\{A_\alpha\}_{B\in\mathscr{B}},$$

con respecto a los morfismos $\{g_\alpha\}$. Sea f un homomorfismo i-acotado de A en un álgebra localmente m-convexa F. Por ser cada g_α un morfismo lineal continuo, sea C un conjunto i-acotado en A_α, $g_\alpha(C)$ es i-acotado en A y entonces

$$f(g_\alpha(C)) = (f \circ g_\alpha)(C) \text{ es acotado en } F,$$

lo que significa que $f \circ g_\alpha$ es i-acotado para cada α. Pero A_α es i-bornológica, entonces $f \circ g_\alpha$ es continuo para cada α. Por la Proposición 4.1.1, f es un morfismo continuo, por lo tanto A es i-bornológica. $\square$

Corolario 4.1.3. *Si A es un álgebra i-bornológica y H un ideal cerrado de A, entonces A/H es i-bornológica.*

Demostración. La topología de A/H es la topología localmente m-convexa más fuerte que hace al morfismo canónico $\pi : A \to A/H$ continuo (ver [26], pág.70). Además π es un homomorfismo de álgebras, entonces A/H es el límite inductivo algebraico de A con respecto al morfismo π, por la Proposición 4.1.6, A/H es i-bornológica. $\square$

Corolario 4.1.4. *Si A es un álgebra i-bornológica y f un homomorfismo abierto, continuo de A sobre F (álgebra localmente m-convexa), entonces F es i-bornológica.*

El diagrama de la derecha es ilustrativo para la demostración del Corolario 4.1.4.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & A/\ker f \arrow[d, "g"] \\ & F \cong Im\ f \end{tikzcd}$$

Figura 4.3

Demostración. Sabemos que F es algebraicamente isomorfa a $A/\ker f$ por el primer Teorema de isomorfía de Noether, además por la Proposición 4.1.1 g es continua y además es abierta (ver la Figura 4.3), entonces el isomorfismo es topológico. Concluimos por el Corolario 4.1.3 que F es i-bornológica. $\square$

Ejemplo 4.1.5. *Sea A la suma directa de álgebras $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$, cada A_k dotada con una topología localmente m-convexa τ_k. La topología de límite inductivo algebraico coincide con la topología de límite inductivo topológico, ya que si F_n es la suma directa de las álgebras $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ con la topología producto τ_n' de $\prod_{k=1}^{n} A_k$ (ver la Subsección 3.1.3); la topología de límite inductivo* *topológico (resp. algebraico) en A con respecto a las álgebras $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ es idéntica con la topología de límite inductivo topológico (resp. algebraico) con respecto a $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ (ver la Subsubsección 3.4.1.3). Además $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente de ideales cuya unión es A, ciertamente, si $x \in F_n$ y $y \in A$, $x = \sum_{k=1}^{n} x_k$ $(x_k \in A_k)$ y $y = \sum_{\alpha} x_\alpha =$ (donde $x_\alpha \neq 0$ para un número finito de $\alpha' s$), como el producto es componente a componente y cada A_k es un álgebra, entonces*

$$xy = \sum_{j=1}^{m} x_j x_{\alpha_j},\ m \leq n.$$

Por lo que $xy \in F_m \subseteq F_n$. Si τ es la restricción de la topología producto a A, τ induce τ_n' en F_n y por la Proposición 4.1.3 ambos límites coinciden.

Corolario 4.1.5. *La suma directa topológica de álgebras i-bornológicas es i-bornológica.*

Demostración. Por el Ejemplo 4.1.5, la topología de límite inductivo algebraico es la suma directa topológica, entonces el resultado se sigue de la Proposición 4.1.6. □

Teorema 4.1.2. *Sea (A, τ) un álgebra localmente m-convexa de Hausdorff, A' el dual continuo de A. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

IB.1 *A es i-bornológica.*

IB.2 *Ninguna topología localmente m-convexa estrictamente más fuerte en A tiene los mismos conjuntos i-acotados.*

IB.3 *Cada conjunto i-bornívoro es una vecindad.*

IB.4 *A es el límite inductivo algebraico de álgebras normadas.*

IB.5 *$\tau = \chi(A, A')$ y cada funcional i-bornológica de A en algún álgebra localmente m-convexa es continua.*

IB.6 *Cada transformación lineal i-bornológica de A en cualquiera otra álgebra localmente m-convexa F es continua.*

Demostración.

- Por la Proposición 4.1.5, **IB.1** es equivalente a **IB.3** y **IB.2** implica **IB.1**, ya que $\tau \preceq \tau^*$ y ambas topologías tienen los mismos acotados, por lo que τ es la topología más fuerte que hace a A i-bornológica.

- **IB.3** implica **IB.2**: supongamos que τ' es una topología localmente m-convexa en A más fuerte que τ pero con los mismos conjuntos i-acotados. Cada vecindad absolutamente convexa e idempotente V en τ' es absorbente y absorbe a cada subconjunto i-acotado de (A,τ), por lo que V es un i-bornívoro de (A,τ). Por hipótesis concluimos que V es una vecindad para la topología τ, por lo tanto $\tau = \tau'$.

- **IB.6** implica **IB.1**: consideramos el morfismo identidad $id : (A,\tau) \to (A,\tau^*)$ que por ii) de la Proposición 4.1.5 es i-acotado, entonces por las observaciones previas a la Proposición 4.1.6, id es una transformación lineal i-bornológica que por hipótesis es continua. Lo anterior significa que $\tau^* \preceq \tau$, entonces $\tau^* = \tau$ y así A es i-bornológica.

- **IB.3** implica **IB.6**: sea f una transformación lineal i-bornológica de A en F y V una vecindad en F, $f^{-1}(V)$ contiene a un conjunto i-bornívoro que por hipótesis es vecindad, así f es continua.

- **IB.2** implica **IB.5**: por el Teorema 2.1.9, las topologías τ y χ tienen los mismos conjuntos acotados y por lo tanto los mismos conjuntos i-acotados, entonces por hipótesis $\tau = \chi$. Por otro lado, los incisos anteriores demuestran la equivalencia de **IB.2** y **IB.6**, entonces como $\tau = \tau^*$, cada funcional i-bornológica es continua.

- **IB.5** implica **IB.1**: bajo las hipótesis de **IB.5**, afirmamos que (A,τ) y (A,τ^*) tienen el mismo dual continuo. La siguiente demostración es original, si f es un funcional τ-continuo en A y como $\tau \preceq \tau^*$, entonces f es τ^*-continuo, por otro lado si f es un funcional τ^*-continuo y $B(0,\epsilon)$ ($\epsilon > 0$) es una bola abierta en el campo, existe un conjunto i-bornívoro W en la topología τ^* (y también en la topología τ por la Proposición 4.1.5) tal que $W \subseteq f^{-1}(B(0,\epsilon))$, entonces f es i-bornológica i.e. por hipótesis f es continua en τ. Siguiendo con la demostración, por como se define la topología χ, $\chi(A,A') = \tau \preceq \tau^* \preceq \chi(A,A')$, así $\tau = \tau^*$ y (A,τ) es i-bornológica.

- La equivalencia **IB.1** y **IB.4** se sigue del Teorema 4.1.1 y de la Proposición 4.1.6, ya que cada álgebra normada es i-bornológica (ver el Ejemplo 4.1.4).

□

Ejemplo 4.1.6. *Retomando el Ejemplo 3.4.1, consideramos $\mathcal{K}(S)$ con $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, para cada subconjunto compacto A de S, $\mathcal{K}_A(S)$ es un ideal. En efecto, f, g son dos funciones en $\mathcal{K}_A(S)$, la suma de dos funciones continuas es continua y*

$$supp(f+g) \subseteq supp(f) \cup supp(g) \subseteq A \cup A = A$$

(ver [21], pág.318). Entonces $f + g \in \mathcal{K}_A(S)$*. Ahora si consideramos*

$$g \in \mathcal{K}(S) \text{ y } f \in \mathcal{K}_A(S),$$

$fg = gf$ *es una función continua y*

$$supp(fg) \subseteq supp(f) \cap supp(g) \subseteq A \cap A = A.$$

Por lo tanto $fg = gf \in \mathcal{K}_A(S)$*. Y también*

$$\mathcal{K}(S) = \bigcup \{\mathcal{K}_A(S) : A \text{ es un subconjunto compacto de } S\}.$$

Entonces, por la Proposición 4.1.2, $\mathcal{K}(S)$ *es el límite inductivo algebraico (cuya topología coincide con la de límite inductivo topológico y es llamada en ocasiones la* ***topología de la medida****) con respecto a las subálgebras* $\{\mathcal{K}_A(S) : A \text{ es un subconjunto compacto de } S\}$*. Y como cada subálgebra* $\mathcal{K}_A(S)$ *es normada, por el Teorema 4.1.2,* $\mathcal{K}(S)$ *es i-bornológica.*

4.1.2. P-álgebras y álgebras metrizables

Una de las propiedades importantes de las álgebras normadas compartida con una clase más grande de álgebras localmente m-convexas, es que los elementos cuyas potencias convergen a cero forman una vecindad. Aquí damos algunas de las características de estas álgebras y su relación con tomar el límite inductivo algebraico.

Definición 4.1.9. *Un álgebra localmente m-convexa* A *es una* ***P-álgebra ó fuertemente secuencial*** *si el conjunto* $\{x : x^n \to 0\}$ *es una vecindad.*

Ejemplo 4.1.7. *El álgebra i-bornológica* $\mathcal{K}(S)$ *del Ejemplo 3.4.1 y del Ejemplo 4.1.6 dotada con la topología de límite inductivo algebraico es una P-álgebra y una Q-álgebra.*

Demostración. Si $V = \{x \in \mathcal{K}(S) : |x(t)| < 1 \text{ para toda } t \in S\}$, entonces V es una vecindad para la topología de la convergencia uniforme y por lo tanto para la topología más fuerte, la topología de límite inductivo algebraico.

Si $x \in V$ y por ser S localmente compacto, existe $A \subseteq S$ compacto tal que

$$x \in \mathcal{K}_A(S) \text{ y } x^n \to 0 \text{ en } \mathcal{K}_A(S)$$

(en la topología de la convergencia uniforme). Como la inclusión $i_A : \mathcal{K}_A(S) \hookrightarrow \mathcal{K}(S)$ es continua, $x^n \to 0$ en la topología de límite inductivo algebraico. Por lo tanto

$$V \subseteq \{x : x^n \to 0\},$$

entonces $\mathcal{K}(S)$ es una P-álgebra.

Ahora demostramos que $V \subseteq G^q_{\mathcal{K}(S)}$: si $x \in V \subseteq \mathcal{K}(S)$, $x(t) \neq 1$ para toda $t \in S$, la función $\frac{x}{x-1}$ es continua en S, ya que para $t_0 \in S$, existe $A' \subseteq S$ compacto con $t_0 \in A'$. Sean $\epsilon > 0$, α tal que $|x(t_0)| < \alpha < 1$ y U vecindad de t_0 tal que $|x(t)| < \alpha$, para toda $t \in U$, entonces por una consecuencia de la desigualdad del triángulo para los números reales

$$|x(t) - 1| \geq ||x(t)| - 1|,$$

por lo que

$$|x(t_0) - 1||x(t) - 1| \geq |x(t_0) - 1|||x(t)| - 1| \geq |x(t_0) - 1|(1 - \alpha),$$

ya que $1 - |x(t)| > 1 - \alpha$ para toda $t \in U$. Por la continuidad de x en t_0, para $\epsilon' = \epsilon(1-\alpha)(|x(t_0) - 1|)$, existe W tal que $|x(t) - x(t_0)| < \epsilon'$, para toda $t \in W$. Por lo tanto, para toda $t \in W \cap U$

$$\begin{aligned}
|\tfrac{x}{x-1}(t) - \tfrac{x}{x-1}(t_0)| &= |\tfrac{x(t)x(t_0) - x(t) - x(t_0)x(t) + x(t_0)}{(x(t)-1)(x(t_0)-1)}| \\
&= |\tfrac{-x(t)+x(t_0)}{(x(t)-1)(x(t_0)-1)}| \\
&= \tfrac{|x(t)-x(t_0)|}{|(x(t)-1)||(x(t_0)-1)|} \\
&< \tfrac{\epsilon'}{|(x(t)-1)||(x(t_0)-1)|} \\
&= \tfrac{\epsilon(1-\alpha)(|x(t_0)-1|)}{(1-\alpha)(|x(t_0)-1|)} = \epsilon.
\end{aligned}$$

(ya que cada una de las funciones x, $x-1$ son continuas en S y $x(t)-1 \neq 0$, para toda $t \in S$). También $supp(\frac{x}{x-1}) = supp((x)(\frac{1}{x-1})) \subseteq supp(x) \cap supp(\frac{1}{x-1}) \subseteq S$, con todo lo anterior se demuestra que $\frac{x}{x-1} \in \mathcal{K}(S)$. Además

$$x \circ y = x + y - xy = x \circ (\tfrac{x}{x-1}) = x + (\tfrac{x}{x-1}) - (\tfrac{x^2}{x-1}) = \tfrac{x^2 - x + x - x^2}{x-1} = 0 = +(\tfrac{x}{x-1}) + x - (\tfrac{x^2}{x-1}) = y + x - yx = y \circ x.$$

Entonces $\frac{x}{x-1}$ es el casi-inverso de x, i.e. $x \in G^q_{\mathcal{K}(S)}$. Por lo tanto $\mathcal{K}(S)$ es una Q-álgebra. □

Observación 4.1.2. *Cualquier P-álgebra A es p.i.a.*

Demostración. Se sigue de iv) de la Proposición 4.1.4, ya que si $y \in A$ y el conjunto $\{x : x^n \to 0\}$ es vecindad, existe $\alpha > 0$ tal que $(\alpha y)^n \to 0$.

□

La siguiente Proposición demuestra que la equivalencia de una P-álgebra y un álgebra p.i.a. se presenta bajo ciertas restricciones. Primero veamos la siguiente Proposición.

Proposición 4.1.7. *Si A es conmutativa y si $A' = \{x \in A : \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotado$\}$, entonces A' es absolutamente convexo, idempotente y $2^{-1}\overline{A'} \subseteq A'$.*

Demostración. Consideramos el coeficiente binomial $C_j^n = \frac{n!}{j!(n-j)!}$, además $x, y \in A'$ y $0 \leq \alpha \leq 1$. Si V es una vecindad absolutamente convexa e idempotente, para los conjuntos acotados $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}, \{y^n\}_{n=1}^{\infty}$, existen escalares $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ tales que: $x^n \in \lambda_1 V$ y $y^n \in \lambda_2 V$, para toda n. Tomando $\lambda = \max\{\lambda_1, \lambda_2\}$, tenemos que $x^n \in \lambda V$ y $y^n \in \lambda V$, para toda n. Por lo tanto

$$(\alpha x + (1-\alpha)y)^n = \sum_{j=0}^{n} \alpha^{n-j}(1-\alpha)^j C_j^n x^{n-j} y^j \in \sum_{j=0}^{n} \alpha^{n-j}(1-\alpha)^j C_j^n \lambda^2 V = \lambda^2 V$$

ya que

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha^{n-j}(1-\alpha)^j C_j^n = (\alpha + 1 - \alpha)^n = 1.$$

Esto demuestra que $\{(\alpha x + (1-\alpha)y)^n\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto acotado, i.e. $\alpha x + (1-\alpha)y \in A'$, por lo que A' es convexa. Por otro lado, $\{(xy)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{x^n y^n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \{x^n\}_{n=1}^{\infty}\{y^n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotado (por la Proposición 4.1.4), i.e. A' es idempotente. De la Proposición 4.1.4 se sigue que A' es balanceado, pues si $x \in A'$ y $|\alpha| \leq 1$, $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotado y $(\alpha x)^n \to 0$, por lo tanto $\{(\alpha x)^n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotado. Para demostrar la última parte de la Proposición, sea $y \in \overline{A'}$ y V una vecindad absolutamente convexa e idempotente de cero, existe $x \in A' \cap (y + V)$ i.e.

$$x - y \in V \text{ y } \{x^n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \lambda V, \text{ para alguna } \lambda > 0.$$

Se sigue que para cualquier n:

$$(2^{-1}y)^n = (2^{-1}(y-x) + 2^{-1}x)^n = \sum_{n=1}^{n} 2^{-1} C_j^n (y-x)^{n-j} x^j \in \sum_{n=1}^{n} 2^{-1} C_j^n \; V \; \lambda V = \lambda V^2 \subseteq \lambda V.$$

Entonces $\{(2^{-1}y)^n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotado y $2^{-1}y \in A'$. □

Proposición 4.1.8. *Sea A un álgebra i-barrilada conmutativa. Entonces A es p.i.a. si y sólo si A es una P-álgebra. Además, si A es p.i.a. y advertiblemente completa, entonces $\{x : -\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ existe y es el casi-inverso de $x\}$ es una vecindad y por lo tanto A es una Q-álgebra. En particular, una B_0-álgebra conmutativa, p.i.a. es una P y Q-álgebra.*

Demostración. Si A es un álgebra i-barrilada conmutativa y $V = \{x : x^n \to 0\}$. Supongamos que A es una P-álgebra, de la Observación 4.1.2, A es p.i.a. Ahora si A es p.i.a. y $A' = \{x : \{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotado$\}$. Entonces A' es absorbente, ya que por iv) de la Proposición 4.1.4 , para $x \in A$ existe $\lambda > 0$ tal que $(\lambda x)^n \to 0$, así $\{(\lambda x)^n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada y $\lambda x \in A'$. De lo cual se tiene que $\overline{A'}$, y por lo tanto, $\frac{1}{4}\overline{A'}$ es absorbente. De la misma Proposición 4.1.4, si $\{(\lambda x)^n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, $(2^{-1}x)^n \to 0$, entonces $2^{-1}A' \subseteq V$. De la Proposición 4.1.7, $\frac{1}{4}\overline{A'} \subseteq V$ con $\frac{1}{4}\overline{A'}$ un i-barril contenido en V, por ser A i-barrilada V es una vecindad i.e. una P-álgebra.

Para la segunda parte de la Proposición, sea $V = \{x : x^n \to 0\}$ y A un álgebra p.i.a. advertiblemente completa, demostramos que para cualquier $x \in 2^{-1}V$, $-\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ existe y es el casi-inverso de x. Sea W una vecindad absolutamente convexa de cero y $z \in V$. Como $z^n \to 0$, para W existe $N \in \mathbb{N}$, tal que para toda $n \leq N$, $z^n \in W$, pero para cada z^m $(m \leq N)$, existe $\lambda_m > 0$ con: $z^m \in \lambda_m W$. Tomando $\lambda = \max\{\lambda_m : m \leq N\}$, $z^n \in \lambda W$ para toda n. Ahora si $S_n = -\sum_{j=1}^{n}(2^{-1}z)^j$, como

$$\sum_{j=m+1}^{p}(2^{-1})^j = \frac{2^{-p-1} - 2^{-m-1}}{2^{-1} - 1} = 2(2^{-m-1} - 2^{-p-1}) = 2^{-m} - 2^{-p} < 2^{-m}$$

entonces

$$\sum_{j=m+1}^{p}(2^{-1}z)^j \in \sum_{j=m+1}^{p} 2^{-j}\ \lambda W \subseteq 2^{-m}\ \lambda W, \text{ para todo entero } p > m.$$

Lo que demuestra que $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de Cauchy. También $(2^{-1}z \circ S_n) = (S_n \circ 2^{-1}z) = 2^{-1}z - \sum_{j=1}^{n}(2^{-1}z)^j + \sum_{j=1}^{n}(2^{-1}z)^{j+1} = (2^{-1}z)^{n+1} \to 0$. Pero A es advertiblemente completa, entonces la sucesión de Cauchy anterior converge a algún $w \in A$ que es el casi-inverso de $2^{-1}z$ por la continuidad en cero. Otra de las hipótesis es que A es p.i.a., se sigue de la primera parte que A es P-álgebra y $2^{-1} \subseteq G_A^q$, entonces A es Q-álgebra.

Finalmente si A es conmutativa, p.i.a. y una B_0-álgebra, entonces es completa i.e. advertiblemente completa, además es un álgebra i-barrilada, entonces por la primera parte de esta Proposición, A es una P-álgebra y por la segunda parte una Q-álgebra. □

Ejemplo 4.1.8. *Sea T un espacio de Hausdorff localmente compacto, no compacto, pseudo-compacto (un espacio T es pseudo-compacto si toda función real-valuada continua con dominio T, es acotada, ver [18]). El álgebra $\mathcal{C}(T)$ de todas las funciones real-valuadas continuas en T, equipada con la topología compacto-abierta* ***es p.i.a., completa*** *pero* ***no es una P-álgebra****.*

Demostración. La siguiente demostración es original. Sea $f \in \mathcal{C}(T)$, f es acotada, entonces existe $\lambda > 0$ tal que

$$|f(t)| < \lambda \text{ para toda } t \in T, \text{ así } |\tfrac{1}{\lambda} f(t)| < 1 \text{ para toda } t \in T.$$

Consideramos la envolvente idempotente de $\frac{1}{\lambda} f$, i.e. $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{\lambda} f)^n$. Veamos que I es acotada. Sea U un abierto para la topología compacto-abierta, entonces existen subconjuntos compactos K_i de T y escalares positivos $\epsilon_i > 0$ $(i = 1, ..., n)$ tales que:

$$U = \{g \in \mathcal{C}(T) : |g(K_i)| < \epsilon_i, \text{ para toda } i = 1, ..., n\}.$$

Si $\epsilon = (min\{\epsilon_i : i = 1, ..., n\})/2$, $\epsilon I \subseteq U$. Ya que si $h \in \epsilon I$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $h = \epsilon(\frac{1}{\lambda} f)^n$ y para cualquier $t_i \in K_i$

$$|h(t_i)| = |\epsilon||\tfrac{1}{\lambda} f(t_i)^n| < \epsilon < \epsilon_i, \text{ para cualquier } i = 1, ..., n.$$

Lo que demuestra que I es acotada, entonces para $\beta = \frac{1}{\lambda} > 0$ e I un conjunto idempotente y acotado, $\{f\}$ es i-acotada, así $\mathcal{C}(T)$ es p.i.a. Ahora como T es de Hausdorff localmente compacto, por el Teorema 7.2.4 de [42] (pág. 129), T es un espacio de Tychonoff, por lo tanto es completamente regular, entonces por el Teorema 5.8.7 de [29] (pág.131), $\mathcal{C}(T)$ es un espacio completo. Para ver que $\mathcal{C}(T)$ no es una P-álgebra, consideramos cualquier subconjunto compacto $K \subset T$ y $\epsilon > 0$, por ser T no compacto existe $t_0 \in T$ y $t_0 \notin K$, además por el Lema 7.1.7 de [42], pág.123, K es un subespacio cerrado del espacio completamente regular T, así para los reales $a = 0$ y $b > 1$, existe una función continua real-valuada en T tal que $f(t_0) = b$ y $f(K) = a = 0$. Por lo tanto

$$f \in \{g \in \mathcal{C}(T) : |g(K)| < \epsilon\}$$

pero f^n no converge a cero, pues $f^n \to 0$ si y sólo si para cualquier subconjunto compacto K y $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f^n(t)| < r, \text{ para toda } t \in K \text{ y } n \geq N_0.$$

Y para el compacto $K' \subset T$ tal que $t_0 \in K'$, no pasa lo anterior, con lo que concluimos que $\mathcal{C}(T)$ no es una P-álgebra. □

Ejemplo 4.1.9. *Sea T un espacio no compacto, completamente regular. Consideramos el álgebra $E = (\mathcal{K}(T), \tau_c)$, donde τ_c es la topología compacto-abierta. $(\mathcal{K}(T), \tau_c)$* ***es*** *un álgebra* ***p.i.a. pero no*** *es una* ***P-álgebra****,* ***ni i-bornológica****.*

Demostración. Sea τ' la topología definida por la norma uniforme (ver el Ejemplo 3.4.1). Entonces

$$B = \{x \in E : |x(t)| \leq 1, \text{ para toda } t \in T\}$$

es acotado e idempotente en las topologías τ' y τ_c ya que si $W \in \tau'$ tal que

$$W = \{f \in E : \|f\|_\infty < \epsilon\},$$

entonces $\frac{\epsilon}{2}B \subseteq W$. Ahora para $U \in \tau_c$ tal que

$$U = \{g \in \mathcal{C}(T) : |g(K_i)| < \epsilon_i, \text{ para toda } i = 1, ..., n\}.$$

Con K_i subconjuntos compactos de T y $\epsilon_i > 0$, para cada i. Si $\epsilon = (min\{\epsilon_i : i = 1, ..., n\})/2$, $\epsilon B \subseteq U$. Además claramente B es idempotente. También observamos que cualquier subconjunto idempotente y acotado de $(\mathcal{K}(T), \tau_c)$(resp. de $(\mathcal{K}(T), \tau')$) está contenido en B. En efecto, si D es un subconjunto idempotente y acotado de $(\mathcal{K}(T), \tau_c)$ (resp. de $(\mathcal{K}(T), \tau_c)$), supongamos que existe $x \in D$ pero $x \notin B$, entonces $x^n \in D$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y existe $t_0 \in T$ tal que $|x(t_0)| > 1$, por lo que $|x(t_0)| = s + 1$, para algún real $s > 0$. Luego

$$|x^n(t_0)| = |x(t_0)|^n = (s + 1)^n \geq ns,$$

lo que demuestra que x^n no es acotado, pues para el compacto K' que contiene a t_0 y $y \in D$, no existe un escalar que acote a $y(t)$, para toda $t \in K'$, lo cual contradice la suposición (de forma similar para $(\mathcal{K}(T), \tau_c)$). De lo anterior se concluye que tanto τ_c y τ', tienen los mismos conjuntos i-acotados. Ahora como τ_c es completamente regular, pero no compacta, $B \in \tau'$ pero $B \notin \tau_c$, entonces $\tau_c \prec \tau'$, así por el Teorema 4.1.2, E no es i-bornológica.

Para ver que (E, τ_c) es p.i.a., observamos que (E, τ') es normada y por el Ejemplo 4.1.3, entonces (E, τ') es p.i.a., pero ambas topologías tienen los mismos conjuntos idempotentes y acotados, entonces (E, τ_c) es p.i.a.

Finalmente (E, τ_c) no es P-álgebra, ya que si $K \subset T$ es un subconjunto compacto, existe $y \in E$ tal que $y(t_0) = 1$ y $y(K) = 0$, entonces para $z \in E$ tal que $t_0 \in \ supp(z)$ y $z(t_0) > 1$,

$$x(t_0) = (yz)(t_0), \text{ implica que } x(K) = 0 \text{ y } x(t_0) > 1 \text{ para algún } t_0 \in T.$$

Esto significa que $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ no converge uniformemente a cero en el compacto K, por lo tanto $V = \{x : x^n \to 0\}$ no es vecindad y E no es una P-álgebra.

En particular si además T **es hemicompacto** (i.e. tiene una familia numerable $\{K_n\}$ de subconjuntos compactos, tal que cada subconjunto compacto K de T está contenido en algún K_n), por el Teorema 5.8.5 de [29] (pág. 130) E es **metrizable, p.i.a., pero no es una P-álgebra, ni i-bornológica**. □

Proposición 4.1.9. *Un álgebra i-bornológica, p.i.a., conmutativa A es una P-álgebra.*

Demostración. Por el Teorema 4.1.1, A es el límite inductivo algebraico de álgebras normadas A_B con bola unitaria S_B y

$$S = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} S_B$$

es una vecindad en A. Si $x \in S$, $x \in S_B$ para algún B, entonces $x^n \to 0$ en el álgebra normada A_B y por la continuidad del morfismo inclusión $(i_B : A_B \hookrightarrow A)$ $x^n \to 0$ en A. Entonces

$$S \subseteq V = \{x : x^n \to 0\},$$

por lo tanto V es una vecindad y A es una P-álgebra. □

Teorema 4.1.3. *Sea A un álgebra localmente m-convexa, metrizable, conmutativa. Entonces A es p.i.a. e i-bornológica si y sólo si A es una P-álgebra.*

Demostración. Si A es i-bornológica y p.i.a., por la Proposición 4.1.9, A es una P-álgebra. Por otro lado, bajo la hipótesis de que A es una P-álgebra, veamos mediante la equivalencia de **IB.1** y **IB.3** del Teorema 4.1.2 que A es i-bornológica. Sea C un conjunto i-bornívoro y supongamos que C no es vecindad. Sea $V = \{x : x^n \to 0\}$ y como A es localmente m-convexa, metrizable, existe $\mathscr{V} = \{V_n\}_{n=1}^{\infty}$ un sistema fundamental de vecindades de cero absolutamente convexas, idempotentes tal que para cada n,

$$V_{n+1} \subseteq V_n \subseteq V.$$

Entonces $\{\frac{1}{n}V_n\}$ es un sistema fundamental de vecindades de cero. Ahora dado que C no es vecindad, para cada n existe un elemento $x_n \in \frac{1}{n}V_n$ pero $x_n \notin C$.

Sea B la envolvente idempotente de $\{nx_n\}_{n=1}^{\infty}$. Veamos que B es acotado: si $x \in B$, entonces

$$x = \prod_{m \in S} (mx_m)^{r_m},$$

donde S es un subconjunto no vacío finito de enteros positivos y $r_m > 0$ para toda $m \in S$. Sea V_p cualquier vecindad básica en $\mathscr{V}$. Para cualquier n, $nx_n \in V_n \subseteq V$ lo que implica que

$$\lim_{r \to \infty} (nx_n)^r = 0.$$

Entonces existe $r_0 \geq 1$ tal que si $r \geq r_0$, $(mx_m)^r \in V_p$ para toda m, en particular para $1 \leq m < p$. Además V_p es absorbente, así para cada $0 \leq s_m < r_0$ y $1 \leq m < p$, existe $\lambda_m > 0$ tal que

$$(mx_m)^m \in \lambda_{s_m} V_p.$$

Tomando $\lambda' = \text{máx}\{\lambda_{s_m}, 1 : s_m < r_0\}$, tenemos que

$$\prod_{m=1}^{p-1} (mx_m)^{s_m} \in (\lambda' V_p)^{p-1} \subseteq (\lambda')^{p-1} V_p.$$

Así para $\lambda = (\lambda')^{p-1} \geq 1$,

$$\prod_{m=1}^{p-1} (mx_m)^{s_m} \in \lambda V_p.$$

Ahora consideramos los conjuntos:

$$\begin{aligned} S_1 &= \{m \in S : 1 \leq m < p \ y \ r_m < r_0\} \\ S_2 &= \{m \in S : 1 \leq m < p \ y \ r_m \geq r_0\} \\ S_3 &= \{m \in S : m \geq p\} \end{aligned}$$

Por lo anterior, observamos que si $S_1 \neq \emptyset$ entonces

$$\prod_{m \in S_1} (mx_m)^{r_m} \in \lambda V_p.$$

Si $S_2 \neq \emptyset$, entonces $\prod\limits_{m \in S_2} (mx_m)^{r_m} \in V_p$, efectivamente, ya que para $1 \leq m < p$ y $r_m \geq r_0$, $(mx_m)^{r_m} \in V_p$, la afirmación se sigue porque V_p es idempotente.

Por último, si $m \in S_3$

$$(mx_m)^{r_m} \in (V_m)^{r_m} \subseteq V_m \subseteq V_p,$$

entonces si $S_3 \neq \emptyset$,

$$\prod_{m \in S_3} (mx_m)^{r_m} \in V_p.$$

Por hipótesis $x \in B$, en conclusión $S_i \neq \emptyset$ al menos para alguno de los $i = 1, 2, 3$. Como V_p es balanceado e idempotente, para $\lambda \geq 1$

$$\begin{aligned} x &= \prod_{m \in S} (mx_m)^{r_m} = \prod_{m \in S_1 \cup S_2 \cup S_3} (mx_m)^{r_m} \\ &= \prod_{m \in S_1} (mx_m)^{r_m} \cdot \prod_{m \in S_2} (mx_m)^{r_m} \cdot \prod_{m \in S_3} (mx_m)^{r_m} \\ &\in \lambda V_p \cdot V_p \cdot V_p = \lambda V_p^3 \subseteq \lambda V_p. \end{aligned}$$

Por lo tanto B es un conjunto idempotente y acotado, así C absorbe a B. Sin embargo, para todo

$$n \in \mathbb{Z}^+,\ nx_n \in B \text{ pero } nx_n \notin nC,$$

es decir, $nx_n \notin \lambda C$ para toda $\lambda < n$, lo que es una contradicción. Finalmente C es una vecindad, por lo que A es un álgebra i-bornológica. □

Teorema 4.1.4. *Si A es un álgebra i-barrilada, p.i.a., metrizable, conmutativa (en particular, si A es una B_0-álgebra, p.i.a., conmutativa), entonces A es i-bornológica.*

Demostración. Por la Proposición 4.1.8, A es una P-álgebra y por el Teorema 4.1.3, A es i-bornológica. □

Corolario 4.1.6. *Si A es una B_0-álgebra conmutativa, entonces A es el límite inductivo algebraico de álgebras de Banach $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ con respecto a los morfismos $\{g_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$, tal que $A = \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma} g_\alpha(A_\alpha)$ si y sólo A es p.i.a.*

Demostración. Supongamos que A es el límite inductivo algebraico de álgebras de Banach. Por el Ejemplo 4.1.3, A es el límite inductivo algebraico de álgebras p.i.a., tal que

$$g_\alpha : A_\alpha \to A \text{ y } A = \bigcup_{\alpha\in\Gamma} g_\alpha(A_\alpha).$$

Se sigue de la Proposición 4.1.4 que A es p.i.a.

Inversamente, supongamos que A es una B_0-álgebra, conmutativa, p.i.a. Por el Teorema 4.1.4, A es i-bornológica, entonces por el Teorema 4.1.1 A es el límite inductivo de álgebras normadas $\{A_B\}_{B\in\mathscr{B}}$ con respecto a las inclusiones $\{i_B\}_{B\in\mathscr{B}}$. Como A es p.i.a., entonces

$$A = \bigcup_{B\in\mathscr{B}} i_B(A_B).$$

Por otro lado, como A es completa entonces A es secuencialmente completa y por el Corolario 4.1.2, A es el límite inductivo algebraico de álgebras de Banach.

□

Para que un álgebra localmente m-convexa conmutativa sea p.i.a. e i-bornológica, es necesario que ésta sea una P-álgebra (ver la Proposición 4.1.9). Para álgebras metrizables esta condición es también suficiente. Sin embargo, esto en general no es suficiente para álgebras conmutativas no metrizables como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.1.10. *Sea E el álgebra de todas las funciones $\mathbb{R}$-valuadas acotadas en $\mathbb{R}$ que tienen primera derivada continua. Sea*

$$N(x) = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| \tag{4.3}$$

y para cada conjunto compacto K

$$N_K(x) = \sup_{t\in K} |(Dx)(t)|. \tag{4.4}$$

Entonces E dotada con la topología τ definida por las seminormas de la Ecuación 4.3 y $\{N_K : K$ es compacto y numerable $\}$, es una P-álgebra conmutativa pero no i-bornológica.

Demostración. Sea τ' la topología definida por las seminormas N y $\{N_K : K \text{ es compacto}\}$. Las topologías τ y τ' son topologías localmente m-convexas:

- Observamos que N es submultiplicativa:

$$\begin{aligned} N(xy) &= \sup_{t\in\mathbb{R}} |(xy)(t)| \\ &\leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)| \sup_{t\in\mathbb{R}} |y(t)| \\ &\leq N(x)N(y). \end{aligned}$$

  Y para un subconjunto compacto y numerable K de $\mathbb{R}$, cada vecindad absolutamente convexa $V(K,\epsilon) = \{x \in E : N(x) \leq \frac{1}{2}\epsilon \text{ y } N_K(x) \leq \frac{1}{2}\epsilon\}$ es idempotente: si $x, y \in V(K,\epsilon)$

$$\begin{aligned} N_K(xy) &= \sup_{t\in K} |D(xy)(t)| \\ &\leq \sup_{t\in K} |xD(y)(t)| + \sup_{t\in K} |yD(x)(t)| \\ &\leq N(x)N_K(y) + N(y)N_K(x) = \frac{1}{2}\epsilon^2 \leq \frac{1}{2}\epsilon. \end{aligned}$$

  Por lo tanto, la familia de conjuntos $V(K,\epsilon)$ da lugar a una base de vecindades absolutamente convexas e idempotentes para la topología τ.

- De manera similar, para K un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, cada vecindad absolutamente convexa $V'(K,\epsilon) = \{x \in E : N(x) \leq \frac{1}{2}\epsilon \text{ y } N_K(x) \leq \frac{1}{2}\epsilon\}$ es idempotente y forma una base para la topología τ'.

Ahora para ver que E es una P-álgebra, demostramos que para K subconjunto compacto y numerable de $\mathbb{R}$, $V(K,1) \subseteq \{x : x^n \to 0\}$: en efecto, para $x \in V(K,1)$, $N(x) < 1$. Por el Lema 5.1.1, $N_K(x^n) \to 0$ (con $p = 1$ y Dx continua), para cada conjunto compacto. En particular se cumple para los compactos numerables. También $N(x^n) \to 0$, así $x^n \to 0$ en las topologías τ y τ'. Por lo tanto (E,τ) es una P-álgebra.

Veamos ahora que (E,τ) y (E,τ') tienen los mismos conjuntos i-acotados. Es importante recalcar que $\tau \prec \tau'$, entonces cada conjunto idempotente y acotado en (E,τ') es idempotente y acotado en (E,τ). Por otro lado, si B es un conjunto idempotente y acotado en (E,τ) pero no acotado en (E,τ'), entonces existe K compacto tal que $N_K(B)$ no es acotado. En efecto, si $\epsilon > 0$, $\lambda B \nsubseteq V(K,\epsilon)$, es decir, existe

$$b \in B \text{ tal que } \lambda N_K(b) > \tfrac{\epsilon}{2} \text{ y } \lambda N(b) > \tfrac{\epsilon}{2},$$

para cada $\lambda > 0$.

Por lo tanto, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B$ tal que $N_K(x_n) > n$. Elegimos $t_n \in K$, así $|(Dx_n)(t_n)| > n$. Pero $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ y K es compacto, entonces existe una subsucesión $(t_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ que converge a $s \in K$.

Sea $L = (t_{n_j})_{n\in\mathbb{N}} \cup \{s\}$ que es un conjunto compacto numerable, entonces $N_L(B)$ es un conjunto acotado en (E,τ). Pero

$$N_L(x_{n_j}) \geq |(Dx_{n_j})(t_{n_j})| > n_j \geq j,$$

lo que implica que $N_L(B)$ no es acotado y ésto es una contradicción.

De todo lo anterior se concluye que (E,τ) y (E,τ') tienen los mismos conjuntos idempotentes y acotados, y por lo tanto los mismos i-acotados. Por **IB.2** del Teorema 4.1.2, (E,τ) no es i-bornológica. □

4.2. Límite Inductivo de Álgebras Localmente Convexas

En la sección 4.1, estudiamos el caso de un álgebra A dotada con la topología localmente m-convexa más fina que hace a los morfismos inclusión continuos, con respecto a una familia de subálgebras $\{A_i\}_{i\in I}$, donde cada álgebra A_i es dotada con una estructura de álgebra normada.

Desde la perspectiva de A.Arosio [8] los límites inductivos localmente convexos son más importantes que los localmente m-convexos (o algebraicos topológicos), aquí se propone un estudio del argumento anterior, reemplazando la m-convexidad por la convexidad. Para comenzar, en esta sección cada álgebra es considerada sobre el campo complejo ($\mathbb{C}$) y con unidad e, además cada subálgebra contiene, por supuesto, la unidad del álgebra.

En esta sección nos interesamos en la siguiente situación:

($*$) Sea A un álgebra, $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de subálgebras de A tales que

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i,$$

donde para cada $i \in I$, (A_i, τ_i) es un álgebra normada, la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ es dirigida por las inclusiones continuas; es decir, para cada $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que

$$A_i \subseteq A_k,\ A_j \subseteq A_k$$

y los morfismos inclusión son continuos.

Si τ es una topología localmente convexa en A la cual hace a los morfismos inclusión $\varphi_i : A_i \hookrightarrow A$ continuos, para cada $i \in I$, entonces cada vecindad en (A, τ), absorbe a la bola unitaria de A_i, denotada por S_i, para cada $i \in I$. En efecto, si V es una vecindad absolutamente convexa en (A, τ), $\varphi_i^{-1}(V)$ es una vecindad en (A_i, τ_i), para cada $i \in I$. Como la bola unitaria S_i es acotada en (A_i, τ_i) (ver la demostración de ii) en la Proposición 4.1.4), existe $\lambda > 0$ tal que

$$\lambda S_i \subseteq \varphi_i^{-1}(V), \text{ así } \lambda\varphi_i(S_i) \subseteq V$$

y por lo tanto $\lambda S_i \subseteq V$.

Entonces, entre el conjunto de todas estas topologías, existe la más fina denotada por τ_l que no es necesariamente de Hausdorff: un sistema fundamental de cero para la topología τ_l es la familia de todos los subconjuntos absolutamente convexos de A que absorben a S_i, para cada $i \in I$.

Observación 4.2.1. *Por la Proposición 3.1.5, cada morfismo lineal $\psi : A \to E$, donde E es un espacio localmente convexo, es τ_l-continuo si y sólo si la restricción $\psi \circ \varphi_i$ es continuo en el álgebra (A_i, τ_i), para cada $i \in I$.*

Como caso especial, para cada $x \in A$, los morfismos $p_1 : y \to xy$ y $p_2 : y \to yx$ son τ_l-continuos. Ciertamente, ya que si $x \in A$, existe $j \in I$ tal que $x \in A_j$. Sea $y \in A$ arbitrario para el cual también existe $l \in I$ con $y \in A_l$. Como la familia es dirigida por las inclusiones continuas, existe $k \in I$ tal que $x \in A_j \subseteq A_k$ y $y \in A_l \subseteq A_k$. Pero A_k es un álgebra normada, entonces los morfismos

$$p_{1k} : y \to xy \text{ y } p_{2k} : y \to yx$$

son continuos en A_k. En particular, si $p_1 : A \to A$ es tal que $p_1(y) = xy$ (resp. $p_2 : A \to A$ es tal que $p_2(y) = yx$) como cada restricción $p_1|_{A_k} = p_{1k}$ (resp. $p_2|_{A_k} = p_{2k}$) es continua, entonces p_1 y p_2 son continuas en (A, τ_l).

Observación 4.2.2. *Si A, $\{A_i\}_{i\in I}$ y τ_l se definen como anteriormente, decimos que $\{A_i\}_{i\in I}$ es una **L-familia** para A y a la topología τ_l la llamamos la **topología de límite inductivo localmente convexa (LILC)**, relativa a la familia $\{A_i\}_{i\in I}$.*

Definición 4.2.1. *Sea A un álgebra localmente convexa. Decimos que A es un **álgebra BM-CA** si y sólo si es posible encontrar una L-familia para A, para la cual A lleva la topología de LILC relativa a esta familia. Además decimos que A es un **álgebra de Banach-BMCA**, cuando es posible encontrar una L-familia que consta de álgebras de Banach. Finalmente, decimos que A es un **álgebra $\aleph_0$-BMCA**, cuando es posible encontrar una L-familia numerable.*

Hemos señalado que la topología de LILC no tiene que ser necesariamente de Haudorff: la siguiente Proposición nos asegura que siempre podemos estar en el contexto preestablecido. Además es importante señalar que el ideal considerado es esta Proposición debe ser necesariamente cerrado, para lo cual se da una prueba original.

Para poder dar una demostración completa de esta Proposición veamos lo siguiente: sea A un álgebra y J un ideal bilateral de A, consideramos el espacio cociente A/J como en la Subsección 3.1.1. Entonces definimos una multiplicación en A/J por:

$$\overline{xy} = (x + J)(y + J) = xy + J, \text{ para cada } \overline{xy} \in A/J. \tag{4.5}$$

Esta multiplicación hace de A/J un álgebra compleja y a $\pi : A \to A/J$ un morfismo de álgebras, sobreyectivo, con $\ker \pi = J$.

Ahora, pasamos a la Proposición:

Proposición 4.2.1. *Sea A un álgebra BMCA (resp. de Banach-BMCA, $\aleph_0$-BMCA). Para cada ideal bilateral **cerrado** J de A, el cociente topológico A/J es, con la multiplicación usual definida en 4.5, un álgebra BMCA (resp. de Banach-BMCA, $\aleph_0$-BMCA). Como un caso particular, el espacio de Hausdorff asociado a A ($A/\overline{\{0\}}$) es, con la multiplicación usual definida en 4.5, un álgebra BMCA (resp. de Banach-BMCA, $\aleph_0$-BMCA).*

Demostración. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una L-familia para (A, τ_l) donde τ_l es la topología de LILC relativa a la L-familia anterior. Para J un ideal bilateral **cerrado** consideramos el morfismo canónico

$$\pi : A \to A/J.$$

Aseguramos que si $\pi(A_i) = A_i/J$ está equipada con la norma cociente (ver la Ecuación 3.1) respecto a A_i y π, para cada $i \in I$, entonces la familia $\{\pi(A_i)\}_{i\in I}$ es una L-familia para A/J mediante los morfismos ϕ_i (ver la Figura 4.4) y entonces la topología de LILC relativa a esta familia (τ_l^c) coincide con la topología cociente (τ_c)(ver la Subsección 3.1.1) en A/J.

En efecto, primero observamos que para cada $i \in I$, $(A_i, \|\cdot\|_i)$ es un álgebra normada, entonces por la Ecuación 3.1 la norma cociente en cada $\pi(A_i)$ es:

$$\|\overline{x}\|_{A_i/J} = \inf_{m\in J} \|x+m\|_i.$$

Aquí es importante notar que J debe ser un ideal bilateral **cerrado** en A, de lo contrario existiría $x \in A$ con $x \neq 0$ tal que $x \in \overline{J} \setminus J$. Pero como

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i,$$

existe $i_0 \in I$, tal que $x \in A_{i_0}$, así $x \in \overline{J} \cap A_{i_0} \setminus J \cap A_{i_0}$, por lo que

$$\begin{aligned} x \in \overline{J} \cap A_{i_0} &\Rightarrow \|\overline{x}\|_{A_{i_0}/J} = 0 \\ x \notin J \cap A_{i_0} &\Rightarrow \overline{x} \neq 0 \end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Entonces J es un ideal cerrado y A_i/J es un espacio normado cuya norma satisface que para cada $\overline{x}, \overline{y} \in A_i/J$

$$\begin{aligned} \|\overline{xy}\|_{A_i/J} &= \inf_{m\in J} \|xy+m\|_i \\ &\leq \inf_{r,s\in J} \|(x+r)(y+s)\|_i \\ &\leq \inf_{r,s\in J} \|x+r\|\|y+s\|_i \\ &\leq \|\overline{x}\|_{A_i/J}\|\overline{y}\|_{A_i/J}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $i \in I$, $\pi(A_i)$ es un álgebra normada. Además

$$A/J = \pi(A) = \pi(\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} \pi(A_i).$$

Y para cada par $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que

$$A_i \hookrightarrow A_k \text{ y } A_j \hookrightarrow A_k, \text{ así } \pi(A_i) \hookrightarrow \pi(A_k) \text{ y } \pi(A_j) \hookrightarrow \pi(A_k).$$

Además $\phi_i \circ \pi(A_i) = \phi_i(A_i/J) = \pi \circ \varphi_i(A_i)$ (ver la Figura 4.4). Concluimos que $\{\pi(A_i)\}_{i\in I}$ es una L-familia para A/J y con respecto a los morfismos $\{\phi_i\}_{i\in I}$, A/J es un álgebra BMCA.

Ahora, para ver la equivalencia de las topologías τ_c y τ_l^c, es evidente por definición que $\tau_c \preceq \tau_l^c$. Por otro lado, si $U \in \tau_l^c$, existe $W \in \tau_l$ tal que $\pi(W) \subseteq U$, esto indica que $U \in \tau_c$.

Si la familia $\{A_i\}_{i\in I}$ consta de álgebras de Banach, por el Teorema 2 de [21], pág. 138, cada $\pi(A_i)$ es completa y normada, por lo tanto es un álgebra de Banach. Entonces A/J tiene una L-familia de álgebras de Banach y así es un álgebra de Banach-BMCA. Si la familia $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es numerable, también lo es la familia $\{\pi(A_i)\}_{i\in I}$ y A/J es un álgebra $\aleph_0$-BMCA.

Por la Proposición 3.1.1, $A/\{\overline{0}\}$ es de Hausdorff y de lo anterior, A/J es un álgebra BMCA (resp. de Banach-BMCA ó $\aleph_0$-BMCA). $\square$

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & A_i/J \arrow[d, "\phi_i"] \\ A \arrow[r, "\pi"'] & A/J \end{tikzcd}$$

Figura 4.4

La siguiente Proposición es muy importante pues es una contraparte interesante del hecho de que cada álgebra localmente convexa es isomorfa a una subálgebra densa en un límite inverso o proyectivo de álgebras de Banach. Para ello tenemos las siguientes definiciones:

Definición 4.2.2. *Una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio vectorial topológico E,* ***converge en el sentido de Mackey*** *a $y \in E$ si y sólo si existe un subconjunto acotado C y una sucesión de números reales $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que*

$$\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0 \text{ y } x_n - y \in \epsilon_n C, \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Y una sucesión de Cauchy $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ converge en el sentido de Mackey a $y \in E$ si y sólo si existe un subconjunto acotado C y una sucesión de números reales $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tales que

$$\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0 \text{ y } x_n - x_m \in \epsilon_n C, \text{ para cada } m, n \in \mathbb{N},\ m \geq n.$$

Claramente cada sucesión que converge en el sentido de Mackey es una sucesión de Cauchy en el sentido de Mackey. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $m \in \mathbb{N}, m \geq n$

$$\begin{aligned} x_n - y &= x_n - x_m + x_m - y \in \epsilon_n C \\ &\Rightarrow x_n - x_m \in \epsilon_n C - \epsilon_m C \\ &\Rightarrow x_n - x_m \in \gamma_n C. \end{aligned}$$

Proposición 4.2.2. *Sea A un álgebra BMCA de Hausdorff. Entonces A puede ser identificada con una subálgebra de un álgebra de Banach-BMCA A', tal que cada $y \in A'$ es el límite (en en sentido de Mackey) de una sucesión contenida en A.*

Demostración. Esta demostración contiene aportaciones originales.

Supongamos que A tiene la topología de LILC (τ_l) relativa a una L-familia $\{A_i\}_{i\in I}$. Sea S_i la bola unitaria en A_i, para cada $i \in I$. Podemos suponer que S_i es cerrada en A, para cada $i \in I$. Si no fuera así, entonces tomamos la cerradura de S_i ($\overline{S_i}$) en A y sea $A_{\overline{S_i}}$ el espacio generado por $\overline{S_i}$ en A. Afirmamos que $\overline{S_i}$ es un subconjunto absolutamente convexo, idempotente y acotado de A ya que cada vecindad en τ_l absorbe a S_i, así éste es acotado en la topología τ_l y entonces por la Proposición 2.1.4, la Proposición 2.2.1 y el Lema 2.1.9 se obtiene lo anterior. Además cada S_i es absorbente en A_i, por lo tanto, $\overline{S_i}$ lo es. Entonces $A_{\overline{S_i}}$ dotado con la norma dada por el funcional de Minkowski de $\overline{S_i}$ ($p_{\overline{S_i}}$), el álgebra resultante es normada (ver la Observación que antecede a la Ecuación 4.2).

Veamos que $\{A_{\overline{S_i}} : i \in I\}$ es una L-familia para A:

- si $x \in A$, existe $i_0 \in I$ tal que $x \in A_{i_0}$, entonces $\lambda x \in \overline{S_{i_0}}$ para algún $\lambda > 0$, por lo tanto $x \in A_{\overline{S_{i_0}}}$ y
$$A = \bigcup_{i\in I} A_{\overline{S_i}}.$$
- Para ver que la familia es dirigida por las inclusiones continuas, para $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $(A_i, \|\cdot\|_i) \subseteq (A_k, \|\cdot\|_k)$ y $(A_j, \|\cdot\|_j) \subseteq (A_k, \|\cdot\|_k)$ y las inclusiones son continuas. Así $S_k \cap A_i$ es una vecindad en A_i, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que
$$\epsilon S_i \subseteq S_k \cap A_i \text{ lo que implica que } \epsilon\overline{S_i} \subseteq \overline{S_k} \cap \overline{A_i} \subseteq \overline{S_k},$$
pero $\langle \epsilon\overline{S_i}\rangle = \langle \overline{S_i}\rangle$, así $A_{\overline{S_i}} \subseteq A_{\overline{S_k}}$. La continuidad de esta inclusión se sigue de **FM.3** y el Corolario 2.1.4.

Entonces, siempre se puede considerar a A con la topología de LILC relativa a una L-familia $\{A_{\overline{S_i}} : i \in I\}$, donde $\overline{S_i}$ es la bola unitaria cerrada de $A_{\overline{S_i}}$, para cada $i \in I$.

Se puede identificar a A con un subespacio vectorial de su completación $\widetilde{A}$ (ver [25], pág. 148 y pág. 208). También para cada $i \in I$, identificamos sólo algebraicamente a $\widetilde{A_i}$, la completación de A_i, con un subespacio lineal de $\widetilde{A}$. Ésto es posible ya que la única extensión continua $\widetilde{\varphi}_i$ a la completación del morfismo $\varphi_i : A_i \to A$ es inyectiva, para cada $i \in I$ (ver la Figura 4.5). En efecto, sea $x \in \ker(\widetilde{\varphi}_i)$, veamos que $x = 0 \in \widetilde{A_i}$. Como $x \in \ker(\widetilde{\varphi}_i)$, entonces $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en A_i tal que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ en A, por lo que existe una sucesión de números reales $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que
$$\lim_{n\to\infty} \epsilon_n = 0 \text{ y } x_n - x_m \in \epsilon_n S_i, \text{ para cada } m \geq n,$$

(recordando que estamos bajo el supuesto de que S_i es cerrada en A y es la bola unitaria en A_i, para cada $i \in I$). Entonces si hacemos que $m \to \infty$ en la topología de A, obtenemos que

$$x_n \in \epsilon_n S_i.$$

Por lo tanto $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ en A_i y $x = 0 \in \widetilde{A_i}$.

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\zeta_i"] \arrow[d, "\varphi_i"'] & \widetilde{A_i} \arrow[d, "\widetilde{\varphi_i}"] \\ A \arrow[r, "\zeta"'] & \widetilde{A} \end{tikzcd}$$

Figura 4.5

Para cada $i \in I$, $\widetilde{A_i}$ es un álgebra de Banach. En efecto, sean $x, y \in \widetilde{A_i}$, entonces existen sucesiones de Cauchy en A_i, digamos $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que $x_n \to x$ y $y_n \to y$. Pero A_i es un álgebra normada, entonces

$$x_n y_n \in A_i \text{ y } \{x_n y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ es una sucesión de Cauchy en } A_i$$

y la multiplicación de x con y puede ser definida como

$$xy = \lim_{n\to\infty} x_n y_n. \tag{4.6}$$

Así, $\{\overline{A_i}\}_{i\in\Gamma}$ es una L-familia para el subespacio vectorial

$$A' = \bigcup_{i\in I} \widetilde{A_i}.$$

Efectivamente, pues por las hipótesis, para cada $i, j \in I$ existe $k \in I$ tal que $A_i \hookrightarrow A_k$ y $A_j \hookrightarrow A_k$ continuamente. Entonces $cl(A_i) \hookrightarrow cl(A_k)$ y $cl(A_j) \hookrightarrow cl(A_k)$, y por ser un espacio vectorial topológico de Hausdorff denso en su completación (bajo isomorfismo) (ver [21] Teorema 1, pág. 131) tenemos que $\widetilde{A_i} \hookrightarrow \widetilde{A_k}$ y $\widetilde{A_j} \hookrightarrow \widetilde{A_k}$ continuamente.

Así A' con la multiplicación de $\widetilde{A}$ definida como en 4.6, y dotado de la topología de LILC (τ_l') relativa a la L-familia $\{\widetilde{A_i}\}_{i\in I}$, es un álgebra de Banach-BMCA. El morfismo inclusión $\psi : A' \hookrightarrow \widetilde{A}$ es continuo (ver la Figura 4.6), ya que la restricción a $\widetilde{A_i}$ es el morfismo $\widetilde{\varphi_i}$ para cada $i \in I$ y por una observación anterior, ésta resulta continua.

$$
\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, hook, "\psi"] & \widetilde{A} \\
\widetilde{A_i} \arrow[u, hook, "\xi_i"] \arrow[ur, "\widetilde{\varphi_i}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Figura 4.6

En consecuencia, la topología inducida por A' en A $(\tau_{A'|_A})$ es más fina que la topología inducida por $\widetilde{A}$ $(\tau_{\widetilde{A}|_A} = \tau_l)$, es decir $\tau_l \preceq \tau_{A'|_A}$. Además por como se definen las topologías $\tau_{A'|A} \preceq \tau_l$, entonces $\tau_{A'|_A}$ resulta ser la topología dada en A. Por otro lado, para $i \in I$ cada inclusión $\xi_i \circ \zeta_i : A_i \hookrightarrow A'$ es continua, entonces por la Observación 4.2.1, A es algebraicamente y topológicamente una subálgebra de A'.

Si $y \in A'$, existe $i' \in I$ tal que $y \in \widetilde{A_{i'}}$. Además el morfismo $\zeta_{i'}$ tiene una imagen densa en $\widetilde{A_{i'}}$ (de hecho para cada $i \in I$), así existe una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \in A_{i'} \subseteq A$ tal que $y_n \to y$ en $\widetilde{A_{i'}}$. Veamos que esta convergencia es la convergencia en el sentido de Mackey en A'. Efectivamente, pues de lo anterior $y_n - y \to 0$ en $\widetilde{A_{i'}}$, que es un álgebra de Banach y por (5) de [25] (pág. 380), existe una sucesión de números positivos $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ con $t_n \to \infty$, tal que $t_n(y_n - y) \to 0$ en $\widetilde{A_{i'}}$. Por lo tanto la sucesión $\{\frac{1}{t_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a cero y para la bola unitaria acotada $\widetilde{S_{i'}}$ de $\widetilde{A_{i'}}$

$$y_n - y \in \tfrac{1}{t_n}\widetilde{S_{i'}}.$$

Finalmente por la continuidad de la inclusión ξ_i, esta convergencia es de Mackey en A'. □

Corolario 4.2.1. *Sea A un álgebra BMCA de Hausdorff, si cada sucesión de Cauchy converge en el sentido de Mackey, entonces A es un álgebra de Banach-BMCA.*

Demostración. Por la Proposición 4.2.2 A es identificada con una subálgebra de A' y cada $y \in A'$ es el límite en el sentido de Mackey de una sucesión $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en A, i.e.

$$y_n \to y.$$

Además, $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el sentido de Mackey en A, por hipótesis existe $x \in A$ tal que $y_n \to x$, pero A es de Hausdorff, así $x = y$ y $A' = A$. De nuevo por la Proposición 4.2.2, A es un álgebra de Banach-BMCA. □

Lema 4.2.1. *Sea A una Q-álgebra, si $y \in A$ y $\{x_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ es una red de Cauchy tal que*

$$\lim x_\alpha y = \lim y x_\alpha = e, \tag{4.7}$$

entonces y es invertible.

Demostración. Sea W una vecindad de e que consiste de elementos invertibles, entonces por 4.7 existe $\alpha_0 \in \Delta$ tal que $x_\alpha y \in W$, para cada $\alpha \geq \alpha_0$, así $x_\alpha y$ es invertible y en consecuencia y tiene un inverso izquierdo, ya que existe $z_\alpha \in W$ tal que $z_\alpha(x_\alpha y) = e$ y $(z_\alpha x_\alpha)y = e$. Análogamente y tiene inverso derecho, así y es invertible. □

Teorema 4.2.1. *Sea A un álgebra BMCA conmutativa de Hausdorff. Son equivalentes:*

i) A es una Q-álgebra

ii) A lleva la topología de LILC relativa a una L-familia de Q-álgebras normadas.

Demostración. ii) $\Rightarrow$ i). Se sigue de la Proposición 4.0.1.

Para i) $\Rightarrow$ ii). Por hipótesis existe una L-familia $\{A_i\}_{i\in I}$ para A con la topología de LILC, donde S_i es la bola unitaria de A_i, para cada $i \in I$. Definimos $\{\widetilde{A_i}\}_{i\in I}$ como en la Proposición 4.2.2 y consideramos $A'_i = \widetilde{A_i} \cap A$ con la topología inducida por $\widetilde{A_i}$, entonces A'_i es un álgebra normada cuya bola unitaria es:

$$S'_i = A'_i \cap \widetilde{S}_i = \widetilde{A_i} \cap A \cap \widetilde{S}_i = \widetilde{S}_i \cap A, \text{ donde } \widetilde{S}_i \text{ es la bola unitaria de } \widetilde{A_i}.$$

Fijando $i \in I$: si $y \in S'_i$, entonces la sucesión $x_n = \sum_{k=0}^{n} y^k$ es una sucesión de Cauchy en A'_i y entonces en A. Además

$$yx_n = y\sum_{k=0}^{n} y^k = \sum_{k=0}^{n} yy^k = \sum_{k=0}^{n} y^k y = x_n y$$

Y así

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}(e-y)x_n &= \lim_{n\to\infty} x_n(e-y) = \lim_{n\to\infty}(e-y)\sum_{k=0}^{n} y^k = \\
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} y^k - \sum_{k=0}^{n} y^{k+1} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} y^k - \sum_{k=1}^{n+1} y^k = e - \lim_{n\to\infty} y^{n+1} = e
\end{aligned}$$

en A'_i, por lo tanto en A. Así por el Lema 4.2.1, $e-y$ es invertible en A. Por otro lado $y \in \widetilde{S}_i \subseteq \widetilde{A_i}$, ésta última es un álgebra de Banach, por lo tanto $e-y$ también es invertible en $\widetilde{A_i}$, así $e-y$ es invertible en A'_i. Por el Corolario 6.6 de [17], pág 72, A'_i es una Q-álgebra.

Finalmente $\{A'_i\}_{i\in I}$ es una L-familia para A:

- $A = \bigcup_{i\in I}(\widetilde{A_i} \cap A) = \bigcup_{i\in I} A'_i$, pues $A \subseteq A' = \bigcup_{i\in I}\widetilde{A_i}$.

- Para $i, j \in I$, existe $k \in I$ tal que $\widetilde{A_i} \hookrightarrow \widetilde{A_k}$ y $\widetilde{A_j} \hookrightarrow \widetilde{A_k}$, por lo tanto

$$A_i' = \widetilde{A_i} \cap A \hookrightarrow A_k' = \widetilde{A_k} \cap A \text{ y } A_j' = \widetilde{A_j} \cap A \hookrightarrow A_k' = \widetilde{A_k} \cap A.$$

- La topología τ' de LILC relativa a la L-familia $\{A_i'\}_{i\in I}$ es la topología τ_l de LILC relativa a la L-familia $\{A_i\}_{i\in I}$. En efecto, sea $W \in \tau'$, W absorbe a $S_i' = \widetilde{S}_i \cap A$, pero en la demostración de la Proposición 4.2.2 se obtiene que $\tau_{\widetilde{A}|_A} = \tau_l$, entonces $W \in \tau_l$. Por otro lado, si $W \in \tau_l$, entonces por la misma observación anterior, $W \in \tau_{\widetilde{A}|_A}$. Sea $V \in \tau_{\widetilde{A}}$ tal que $W = V \cap A$, $U = \widetilde{\varphi}_i^{-1}(V)$ es una vecindad en $\widetilde{A_i}$, entonces $U \cap A_i'$ es vecindad en A_i'

$$A_i' \cap U = V \cap \widetilde{A_i} \cap A_i' = V \cap \widetilde{A_i} \cap A = W \cap \widetilde{A_i} \supseteq V_i' \text{ con } V_i' \text{ vecindad en } A_i'.$$

  La cual absorbe a la bola unitaria S_i', para cada $i \in I$ y hace continuo al morfismo $A_i' \hookrightarrow A$, entonces $W \in \tau'$.

□

Para A un álgebra localmente convexa, denotamos por $\mathscr{B}_A$ la clase de todos los subconjuntos absolutamente convexos, idempotentes, cerrados y acotados de A que contienen a la unidad de A.

Lema 4.2.2. *Sea A un álgebra topológica, C un subconjunto idempotente y acotado de A, entonces existe $B \in \mathscr{B}_A$ tal que $C \subseteq B$.*

Demostración. El conjunto $C \cup \{e\}$ es idempotente y acotado ya que

$$(C \cup \{e\})(C \cup \{e\}) = C^2 \cup C \cup C \cup \{e\} = C \cup \{e\}.$$

Entonces por la Proposición 2.2.1, la Proposición 2.1.4 y el Lema 2.1.9, se sigue que

$$B = \overline{\Gamma(C \cup \{e\})}$$

es el conjunto buscado. □

Al igual que en el Sección 4.1, para A un álgebra topológica y $B \in \mathscr{B}_A$ denotamos por A_B al espacio vectorial generado por B en A, seminormado con el funcional de Minkowski p_B.

Lema 4.2.3. *Sea A un álgebra localmente convexa de Hausdorff. Para cada $B \in \mathscr{B}_A$, (A_B, p_B) es un álgebra normada. $A = \bigcup_{B\in\mathscr{B}_A} A_B$ si y sólo si para cada $x \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\lim_{k\to\infty} (\epsilon x)^k = 0$. Para las siguientes afirmaciones:*

i) $\mathscr{B}_A$ es dirigida por las inclusiones, *ii) la familia* $\{A_B : B \in \mathscr{B}_A\}$ *es dirigida por las inclusiones continuas,*

iii) para cada $B', B'' \in \mathscr{B}_A$*, el conjunto* $B'B''$ *es acotado.*

Entonces i)⇒ii)⇒iii). Si A *es conmutativa, entonces i),ii) y iii) son equivalentes y son implicadas por la continuidad conjunta de la multiplicación de* A*.*

Demostración. La siguiente demostración es original. Para $B \in \mathscr{B}_A$, se demostró anteriormente que el álgebra (A_B, p_B) es normada. Para la siguiente parte, demostramos que $A = \bigcup_{B\in\mathscr{B}_A} A_B$. Supongamos que para $x \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\lim_{k\to\infty} (\epsilon x)^k = 0$, entonces el conjunto $\{(\epsilon x)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado (ver [36], Teorema 1.30, pág. 22) e idempotente. Por el Lema 4.2.2, existe $B \in \mathscr{B}_A$ tal que

$$\{(\epsilon x)^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq B.$$

Por lo tanto $\epsilon x \in B$ y $x \in \frac{1}{\epsilon}B$, finalmente $x \in A_B$. Además es claro que $A_B \subseteq A$, para cada $B \in \mathscr{B}_A$.

Inversamente, ahora supongamos que $A = \bigcup_{B\in\mathscr{B}_A} A_B$. Así, para $x \in A$, $x \in A_B$ para algún $B \in \mathscr{B}_A$. Por lo que existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda x \in B$. Pero B es un conjunto idempotente y acotado, entonces $\{(\lambda x)^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en B y si $0 < \alpha < 1$, $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = 0$. Lo que implica que

$$\lim_{n\to\infty} \alpha^n(\lambda x)^n = \lim_{n\to\infty} (\alpha\lambda x)^n = 0,$$

con $\epsilon = \alpha\lambda$ se tiene que $\lim_{k\to\infty} (\epsilon x)^k = 0$. Así queda demostrada la segunda parte.

Para ver que i)⇒ii), sean A_B y $A_C \in \{A_B : B \in \mathscr{B}_A\}$, por la hipótesis, existe $D \in \mathscr{B}_A$ tal que $B \subseteq D$ y $C \subseteq D$, entonces $A_B \subseteq A_D$ y $A_C \subseteq A_D$. Por **FM.3** y la Proposición 2.1.7, estas inclusiones son continuas.

Para ver que ii)⇒iii), sean $B', B'' \in \mathscr{B}_A$, para los cuales existe $C \in \mathscr{B}_A$ tal que $A_{B'} \subseteq A_C$ y $A_{B''} \subseteq A_C$ continuamente. Por lo tanto existen $\lambda, \beta > 0$ tales que

$$\lambda B' \subseteq C \text{ y } \beta B'' \subseteq C,$$

así $B'B''$ es acotado ya que

$$(\lambda B')(\beta B'') \subseteq \lambda\beta B'B'' \subseteq C^2 \subseteq C.$$

Si A es conmutativa, para demostrar las equivalencias veamos que iii)⇒i). En efecto, sean $B', B'' \in \mathscr{B}_A$, $B' \subseteq B'B''$ y $B'' \subseteq B'B''$, con $B'B''$ idempotente pues

$$(B'B'')(B'B'') = (B'B')(B''B'') = B'B'',$$

además por hipótesis $B'B''$ es acotado. Por el Lema 4.2.2, $B'B'' \subseteq C$, para algún $C \in \mathscr{B}_A$.

Si además el producto es conjuntamente continuo y V es una vecindad, existen vecindades de cero U, W tales que $UW \subseteq V$. Como B', B'' son conjuntos acotados

$$\lambda' B' \subseteq U \text{ y } \beta' B'' \subseteq W, \text{ para algunas } \lambda', \beta' > 0.$$

Por lo tanto,

$$\lambda' \beta' B' B'' \subseteq UW \subseteq V.$$

Esto demuestra iii) y así la última parte del Lema.

□

Para el siguiente resultado, es necesaria la definición:

Definición 4.2.3. *Un* ***álgebra bornológica*** (A, τ)*, es un álgebra topológica cuyo espacio subyacente es* ***bornológico*** *localmente convexo (ver la Observación 3.2.3), es decir, la topología* τ *es bornológica.*

Proposición 4.2.3. *Sea* (A, τ) *un álgebra localmente convexa de Hausdorff y* $\mathscr{K}$ *una subfamilia de* $\mathscr{B}_A$ *dotada con una de las siguientes propiedades:*

i) cada subconjunto acotado de A *es absorbido por un elemento de* $\mathscr{K}$*,*

ii) la familia $\{A_B : B \in \mathscr{K}\}$ *es dirigida por las inclusiones continuas y si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión en* A *entonces* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ *si y sólo si existe* $B \in \mathscr{K}$ *tal que* $x_n \in A_B$*, para cada* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *y* $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ *en* A_B*.*

Entonces, $\{A_B : B \in \mathscr{K}\}$ *es una L-familia para A; la topología de LILC* (τ_l) *relativa a esta familia es la topología original* τ *de* A *si y sólo si* τ *es bornológica.*

Si A' *es una subálgebra de* A *y* $\mathscr{K}' = \{B \cap A' : B \in \mathscr{K}\}$*, entonces* $\{A'_{C'} : C' \in \mathscr{K}'\}$ *es una L-familia para* A'*; la topología de LILC* (τ_l) *relativa a esta familia es la topología inducida* $\tau|_{A'}$ *por* A *si y sólo si* $\tau|_{A'}$ *es bornológica.*

Demostración. Primero veamos que $\{A_B : B \in \mathscr{K}\}$ es una L-familia para A;

- $A = \bigcup\limits_{B\in\mathscr{K}} A_B$. En efecto, es claro que $A_B \subseteq A$, para cada $B \in \mathscr{K}$. Ahora, sea $x \in A$, $\{x\}$ es un conjunto acotado y
    - bajo la hipótesis i), existe $C \in \mathscr{K}$ y $\lambda > 0$ tal que $\lambda x \in C$, así $x \in A_C$.

- por otro lado, la sucesión $\{\frac{1}{n}x\}_{n\in\mathbb{N}} \in A$ es tal que $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}x) = 0$ en A (ver [36], Teorema 1.30, pág. 22). Entonces bajo la hipótesis ii), existe $B \in \mathscr{K}$ con $\frac{1}{n}x \in B$, para toda $\mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}x) = 0$ en A_B, por lo que $x \in B$, i.e. $x \in A_B$.

- La familia $\{A_B : B \in \mathscr{K}\}$ es dirigida por las inclusiones continuas. Efectivamente,

  - si i) se cumple. Sean $B_1, B_2 \in \mathscr{K}$, entonces $B_1 \cup B_2$ es un acotado para el cual existe $D \in \mathscr{K}$ que absorbe a $B_1 \cup B_2$. Por lo tanto, existe $\lambda > 0$ tal que

  $$\lambda B_1 \subseteq \lambda(B_1 \cup B_2) \subseteq D \text{ y } \lambda B_2 \subseteq \lambda(B_1 \cup B_2) \subseteq D.$$

  Así $A_{B_1} \subseteq A_D$ y $A_{B_1} \subseteq A_D$ continuamente (ver **FM.3** y la Proposición 2.1.7).

  - bajo la hipótesis ii) ya se cumple.

Entonces (A, τ_l) es el LILC de la familia $\{A_B : B \in \mathscr{K}\}$. Si $\tau_l = \tau$, entonces τ es bornológica, ciertamente ya que cada álgebra (A_B, p_B) es normada, por lo tanto es bornológica. Entonces por la Proposición 3.2.1, (A, τ) es de Mackey, i.e. τ es bornológica.

Inversamente, supongamos que (A, τ) es un álgebra bornológica, demostramos que $\tau = \tau_l$; primero, cada álgebra (A_B, p_B) es bornológica y para cualquier conjunto acotado F en A_B, i.e. $F \subseteq \lambda B$, para algún $\lambda > 0$, F es acotado en (A, τ). Entonces las inclusiones $i'_B : (A_B, p_B) \hookrightarrow (A, \tau)$ son continuas, para cada $B \in \mathscr{K}$ (ver la Definición 3.2.6). τ es una de las topologías localmente convexas que hacen a las inlcusiones continuas y $\tau \preceq \tau_l$. Para ver que $\tau_l \preceq \tau$;

- supongamos que i) se cumple, sea $W \in \tau_l$ una vecindad absolutamente convexa que absorbe a la bola unitaria de A_B (S_B), para cada $B \in \mathscr{K}$. Si L es un subconjunto acotado en A, por hipótesis existe $C \in \mathscr{K}$ que absorbe a L. Así existen escalares $\lambda, \beta > 0$ tales que

$$\lambda L \subseteq C \text{ y } \beta C \subseteq S_C, \text{ lo que implica que } \lambda\beta L \subseteq C.$$

  De esta manera W absorbe a cualquier conjunto acotado de A y W es bornívoro. Pero τ es bornológica, entonces $W \in \tau$.

- bajo la hipótesis ii), veamos que el morfismo $id : (A, \tau) \to (A, \tau_l)$ es continuo. Sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en (A, τ) tal que $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0$, entonces existe $B \in \mathscr{K}$ tal que $x_n \in A_B$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ en A_B, y por la continuidad de la inclusión $i_B : A_B \hookrightarrow (A, \tau_l)$, $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ en τ_l. Entonces por (4) de [25], pág. 383., id resulta ser continuo.

Para demostrar la última parte de esta Proposición, observamos que $\mathscr{K}' \subseteq \mathscr{B}_{A'}$, pues si $C' \in \mathscr{K}'$ entonces $C' = C \cap A'$ (con $C \in \mathscr{K} \subseteq \mathscr{B}_A$) es cerrado en A' e idempotente ya que

$$C'C' = (C \cap A')(C \cap A') = CC \cap A'C \cap CA' \cap A'A' \subseteq C \cap A' = C'.$$

También C' es absolutamente convexo y acotado en A'; lo primero ya que C es absolutamente convexo en A y lo segundo ya que C es acotado en A', por lo tanto, para $V \cap A'$ vecindad en A' con V es vecindad en A, $\lambda C \subseteq V$ para alguna $\lambda > 0$. Así

$$\lambda C' \subseteq \lambda C \cap \lambda A' \subseteq V \cap A'.$$

De lo anterior concluimos que $C' \in \mathscr{B}_A$.

Siguiendo con la demostración, las hipótesis i) y ii) sobre $\mathscr{K}$ son heredadas por $\mathscr{K}'$:

- si se cumple i) y C' es un conjunto acotado en A', éste es acotado en A. En consecuencia C' es absorbido por un elemento $B \in \mathscr{K}$, i.e. por $B \cap A' \in \mathscr{K}'$.

- bajo la hipótesis ii), la familia $\{A'_{C'} : C' \in \mathscr{K}'\}$ también es dirigida por las inclusiones continuas. Ciertamente, pues para $C', D' \in \mathscr{K}'$, $C' \subseteq C$ y $D' \subseteq D$ $(C, D \in \mathscr{K})$, existe $E \in \mathscr{K} \subseteq \mathscr{B}_A$ tal que

$$C' \subseteq C \subseteq E \text{ y } D' \subseteq D \subseteq E, \text{ así } C' \subseteq E' = E \cap A' \text{ y } D' \subseteq E' = E \cap A'.$$

  Esto implica que $A'_{C'} \subseteq A'_{E'}$ y $A'_{D'} \subseteq A'_{E'}$, cuyas inclusiones son continuas.

Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $A' \hookrightarrow A$, con

$$\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0 \text{ en } A' \hookrightarrow A$$

esto si y sólo si existe $B \in \mathscr{K}$ tal que $x_n \in A_B$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ en A_B. Como $x_n \in A_B$, $x_n = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, donde $x_i \in B$ y escalares λ_i, para cada i. Sin embargo B es una vecindad absolutamente convexa en A_B. Así

$$x_n \in |\sum_{i=1}^{n} \lambda_i| B = \lambda B,$$

por lo tanto $\frac{1}{\lambda} \in B \cap A'$. Por lo que

$$x_n \in A'_{B\cap A'} = A'_{B'} \text{ y } \lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0 \text{ en } A'_{B'}.$$

La demostración concluye aplicando la primera parte de la Proposición.

$\square$

En general una subálgebra de un álgebra BMCA no es necesariamente un álgebra BMCA, sin embargo la Proposición 4.2.3 nos permite saber los casos particulares para cuando esto es válido.

Definición 4.2.4. *Un álgebra localmente convexa tiene la* ***acotación de Allan*** *si y sólo si cada conjunto acotado de A es absorbido por un elemento de* $\mathscr{B}_A$.

Hay álgebras muy particulares que tienen la acotación de Allan y que a continuación describimos.

Proposición 4.2.4. *Toda álgebra A BMCA es bornológica.*

Demostración. La siguiente demostración es original. Sea (A, τ_l) un álgebra BMCA con respecto a la L-familia $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$, la bola unitaria S_α de A_α es acotada en A por la continuidad del morfismo $i_\alpha : A_\alpha \hookrightarrow A$. Entonces si B un conjunto absolutamente convexo bornívoro en A, este absorbe a S_α, para cada $\alpha \in I$. Pero entonces B es una vecindad en la topología de LILC y así (A, τ_l) es bornológica.

□

Proposición 4.2.5. *Para un álgebra A localmente convexa de Hausdorff, son equivalentes:*

i) *A es un álgebra* $\aleph_0$*-BMCA,*

ii) (A, τ) *es bornológica y existe una subfamilia numerable* $\mathscr{K}$ *de* $\mathscr{B}_A$ *tal que cada conjunto acotado de A es absorbido por un elemento de* $\mathscr{K}$.

Demostración. i)⇒ii). Supongamos que A es un álgebra $\aleph_0$-BMCA. Por la Proposición 4.2.4, (A, τ) es bornológica. Sea $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una L-familia numerable para A, i.e. $|I| = \aleph_0$ y D un conjunto acotado en A. Entonces existen acotados $D_{\alpha_i} \in A_{\alpha_i}$ tales que

$$D \subseteq \sum_{i=1}^{n} D_{\alpha_i} \subseteq cl\ (\sum_{i=1}^{n} D_{\alpha_i})$$

(ver la Proposición 3.1.13). Pero la L-familia es dirigida por inclusiones continuas, por lo que existe $k \in I$ tal que $A_{\alpha_i} \hookrightarrow A_k$, para $i = 1, ..., n$ y D_{α_i} es acotado en A_k (para cada i). Sea S_k la bola unitaria de A_k, para cada i existe $\lambda_i > 0$ tal que

$$D_{\alpha_i} \subseteq \lambda_i S_k.$$

Lo que implica que

$$\sum_{i=1}^{n} D_{\alpha_i} \subseteq (\sum_{i=1}^{n} \lambda_i) S_k \subseteq t S_k.$$

Se sigue que $D \subseteq t\ cl_A(S_k)$. Sin embargo $cl_A(S_k) \in \mathscr{B}_A$ y como k es un elemento de I, efectivamente la unión de todos estos elementos forman la subfamilia $\mathscr{K}$.

ii)⇒i). Se sigue de la Proposición 4.2.3. □

Proposición 4.2.6. *Sea A un álgebra localmente m-convexa conmutativa, metrizable, supongamos que existe una vecindad V tal que*

$$\lim_{k\to\infty} x^k = 0 \text{ para cada } x \in V.$$

Entonces $\{A_B : B \in \mathscr{B}_A\}$ es una familia dirigida por las inclusiones continuas. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en A entonces $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ si y sólo si existe $B \in \mathscr{B}_A$ tal que $x_n \in A_B$, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ en A_B.

Demostración. Como A es un álgebra localmente m-convexa conmutativa, la multiplicación es conjuntamente continua, entonces por el Lema 4.2.3, la familia $\{A_B : B \in \mathscr{B}_A\}$ es dirigida por las inclusiones continuas.

El resto de la demostración es sustancialmente tomada de la demostración del Teorema 4.1.3. El álgebra A es además metrizable y por lo tanto i-bornológica, entonces por el Teorema 4.1.1 tenemos que si $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ en A_B, para algún $B \in \mathscr{B}_A$, entonces $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ en A, bajo la inclusión continua $i_B : A_B \hookrightarrow A$. Antes de proceder con la demostración, observamos que si $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en V, tal que $\lim_{n\in\mathbb{N}} z_n = 0$. Consideramos

$$D = idem\ (\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \cup \{e\}).$$

Afirmamos que D es acotado. Efectivamente, si fijamos una vecindad W tal que $WW \subseteq W \subseteq V$, existe $n' \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \in W$ para todo $n \geq n'$. Ahora si $z \in D$

$$z = z_1^{m_1} z_2^{m_2} \cdots z_{n'}^{m_{n'}} \cdot \prod_{n'<n} z_n^{m_n},$$

donde $\{m_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de enteros no negativos finalmente cero. Y el término $z_i^{m_i}$ pertenece al conjunto acotado $\{z_i^m : m = 0, 1, ...\}$. Por lo tanto, para cada $i = 1, ..., n'$ existe $k_i \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{z_i^m : m = 0, 1, ...\} \subseteq k_i W.$$

Además como W es idempotente

$$\prod_{n'<n} z_n^{m_n} \in W \subseteq V.$$

Tomamos $k = \max\{k_i : i = 1, ..., n'\}$,

$$z \in (kW)^{n'} W \subseteq k^{n'} W,$$

pero k y n' no depende del z elegido, concluimos que D es acotado.

Prosiguiendo con la demostración de la Proposición, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en A tal que $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ en A. A es metrizable, así existe una sucesión de números reales $\{\epsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $\epsilon_n \to 0$ y $\epsilon_n^{-1}(x_n - x_0) \to 0$ en A (ver [36], Teorema 1.28, pág. 20).

Sean $z_n = \epsilon_n^{-1}(x_n - x_0)$ y $n'' \in \mathbb{N}$ tal que $z_n \in V$ para toda $n > n''$. Entonces por lo anterior, para la sucesión $\{z_n\}_{n>n''}$,

$$C = idem\ (\{z_n\}_{n>n''} \cup \{e\}), \text{ es un acotado.}$$

Por otro lado, como V es una vecindad y absorbe puntos, existe $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon x_i \in V$, con $i = 1, ..., n''$. En consecuencia, para cada $i = 1, ..., n'$ el conjunto $C_i = \{(\epsilon x_i)^m : m = 0, 1, ...\}$ es acotado. Entonces

$$C' = C \cdot \prod_{0\leq i\leq n''} C_i \text{ contiene a } C \text{ y a } C_i\ (i = 1, ..., n'').$$

Sin embargo, el producto finito de conjuntos acotados es acotado (ver la Proposición 4.1.4) lo que implica que C' es acotado. C' es idempotente ya que para $x, y \in C'$

$$\begin{aligned} xy &= (\prod_{k>n''} z_k^{\alpha_k} \cdot \prod_{0\leq i\leq n''} (\epsilon x_i)^{m_i})(\prod_{k>n''} z_k^{\beta_k} \cdot \prod_{0\leq i\leq n''} (\epsilon x_i)^{t_i}) \\ &= \prod_{k>n''} z_k^{\alpha_k+\beta_k} \cdot \prod_{0\leq i\leq n''} (\epsilon x_i)^{m_i+t_i}. \end{aligned}$$

C' es idempotente y acotado en A, por el Lema 4.2.2 existe $B \in \mathscr{B}_A$, tal que $C' \subseteq B$. Por lo tanto $C_i \subseteq B$ y entonces $x_i \in A_B$ para $i = 1, ..., n''$. También $C \subseteq B$ y como $x_n - x_0 = \epsilon_n z_n \in \epsilon_n C \subseteq \epsilon_n B$, para cada $n > n''$, entonces $x_n \in \epsilon_n B + x_0 \subseteq A_B$. Con esto concluimos que

$$\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A_B \text{ y } \lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0 \text{ en } A_B.$$

$\square$

Lema 4.2.4. *Sea A un álgebra localmente convexa conmutativa con una topología metrizable y completa, con la propiedad:*

$$\textit{para cada } x \in A \textit{ existe } \epsilon > 0 \textit{ tal que } \lim_{k\to\infty}(\epsilon x)^k = 0$$

Entonces A es un álgebra localmente m-convexa.

Demostración. Para un álgebra localmente convexa conmutativa metrizable y completa el ser un álgebra localmente m-convexa es equivalente a:

para cada $x \in A$ y cada función entera $\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \lambda^k$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ converge en A.

(ver [43], Teorema 13.8, pág.47). Veamos que esto se cumple. Sea $x \in A$ y $\varphi(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ una función entera, sea $\epsilon > 0$ tal que

$$\lim_{k \to \infty} (\epsilon x)^k = 0$$

y consideramos $D = \Gamma\{(\epsilon x)^k : k = 0, 1, ...\}$, $y_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda_k$. Entonces

$$y_n - y_m = \sum_{k=n+1}^{m} a_k x^k = \sum_{k=n+1}^{m} a_k(\epsilon^{-k})(\epsilon x)^k \in (\sum_{k=n+1}^{m} |a_k|\epsilon^{-k})D, \text{ para cada } m > n.$$

Como la serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \epsilon^{-k}$ converge absolutamente al número $\varphi(\epsilon^{-1})$ y D es acotado, entonces la sucesión $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy en A que es completa, entonces $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge en A. $\square$

Ahora nos vamos a restringir a álgebras localmente convexas conmutativas equipadas con una topología completa y metrizable (un álgebra de Fréchet) y a la clase generada por éstas mediante el límite inductivo localmente convexo.

Definición 4.2.5. *Si A es un álgebra con unidad e, el* ***espectro*** *(*$sp_A(x)$*) de un elemento $x \in A$ es*

$$sp_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \notin G_A\}.$$

En un álgebra arbitraria A, el espectro de un elemento $x \in A$ es

$$sp_A(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda^{-1} x \notin G_A^q\} \cup \{0\}.$$

El ***radio espectral*** *(*$r_A(x)$*) de x es*

$$r_A(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in sp_A(x)\}.$$

Proposición 4.2.7. *Sea (A, τ) una F-álgebra, localmente convexa, conmutativa (o un álgebra de Fréchet conmutativa). Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

i) Para cada $x \in A$ existe $\epsilon > 0$ tal que $\lim_{k \to \infty} (\epsilon x)^k$.

ii) A es localmente m-convexa y existe una vecindad V tal que

$$\lim_{k\to\infty} x^k = 0 \textit{ para cada } x \in V.$$

iii) $\{A_B : B \in \mathscr{B}_A\}$ *es una familia dirigida por las inclusiones continuas. Si* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión en* A *entonces* $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ *si y sólo si existe* $B \in \mathscr{B}_A$ *tal que* $x_n \in A_B$*, para cada* $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ *y* $\lim_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ *en* A_B*.*

iv) A *es un álgebra de Banach-BMCA.*

v) A *es una Q-álgebra y el morfismo* $x \longmapsto x^{-1}$ *es continuo.*

vi) A *es una Q-álgebra.*

Las propiedades anteriores son heredadas para subálgebras cerradas de A *y cocientes topológicos bajo ideales cerrados (equipados con la topología producto).*

Demostración. Esta demostración contiene argumentos originales. i)⇒ii). Por el Lema 4.2.4, A es un álgebra localmente m-convexa, además por la Proposición 4.1.4, A es un álgebra p.i.a. Finalmente por la Proposición 4.1.8, V es una vecindad.

ii)⇒iii). Se sigue de la Proposición 4.2.6.

iii)⇒iv). Por hipótesis A es un álgebra metrizable y por lo tanto bornológica (ver [21], Proposición 3, pág. 222). Además por la Proposición 4.2.3, (A,τ) es el LILC de la L-familia $\{A_B : B \in \mathscr{B}_A\}$. Veamos que cada álgebra normada A_B es completa y así de Banach. Efectivamente, sea $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en A_B, ésta es de Cauchy en A. Sin embargo A es completa, entonces existe $x \in A$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, dado que A de de Hausdorff y por la hipótesis concluimos que $x \in A_B$. Por lo tanto A_B es un álgebra completa i.e. de Banach.

iv)⇒v). Por el Teorema 4.2.1, A es una Q-álgebra. Además el conjunto de los elementos invertibles G_A es abierto, entonces es un G_δ-conjunto (es decir, es la intersección numerable de conjuntos abiertos). Por la Proposición 2 de [39], pág. 113, el morfismo $x \longmapsto x^{-1}$ es continuo.

v)⇒vi). Por hipótesis A es una Q-álgebra.

vi)⇒i). Si A es una Q-álgebra, entonces

$$V = \{x \in A : r_A(x) < 1\}$$

es una vecindad (ver [17], Proposición 6.14, pág. 80). Además $(e-x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ (ver [9], Lema 3.3.18, pág. 126), por lo que

$$x^k = e - (e-x)(\sum_{j=0}^{k-1} x^j) \text{ y } \lim_{k \longrightarrow \infty} x^k = 0.$$

Pero como la vecindad V absorbe puntos, entonces para cualquier $x \in A$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon x \in V$ y $\lim_{k \longrightarrow \infty} (\epsilon x)^k = 0$.

Finalmente si M es una subálgebra cerrada (resp. un ideal cerrado) de A, entonces M (resp. A/M) es un álgebra de Fréchet. Así es suficiente con demostrar que i) es heredado por M (resp. A/M). En efecto, para cada $x \in M$ i) se cumple (resp. para $\overline{x} \in A/M$, existe $x \in A$ tal que $\pi(x) = \overline{x} = x + M$, por lo que $\lim_{k \longrightarrow \infty} (\epsilon x)^k = 0$ para algún $\epsilon > 0$, lo que implica que $\lim_{k \longrightarrow \infty} (\epsilon \pi(x))^k = \lim_{k \longrightarrow \infty} (\epsilon \overline{x})^k = M$).

□

Proposición 4.2.8. *Sea A un álgebra de Fréchet conmutativa. Si A tiene la acotación de Allan entonces A cumple las equivalencias de la Proposición 4.2.7. Si A es un espacio de Montel y A cumple alguna de las equivalencias de la Proposición 4.2.7, entonces A tiene la acotación de Allan.*

Demostración. Supongamos que A tiene la acotación de Allan, entonces como cada punto es acotado, éste es absorbido por algún elemento $B \in \mathscr{B}_A$. Entonces

$$\lambda x \in B, \text{ para algún } \lambda > 0.$$

Pero B es un conjunto idempotente y acotado, entonces $\lim_{k \longrightarrow \infty} (\lambda x)^k = 0$. Por lo tanto se satisface i) de la Proposición 4.2.7.

Por otro lado si A es un espacio de Montel, entonces cada acotado B de A es relativamente compacto y por el Corolario de la Proposición 7 de [8], pág. 346, A tiene la acotación de Allan.

□

Concluímos esta sección definiendo un tipo de LILC, debilitando oportunamente en $(*)$ una de las hipótesis para la familia $\{A_i\}_{i \in I}$. Si A_i no es necesariamente un álgebra normada, pero si un álgebra localmente convexa, podemos hablar de la topología de límite inductivo localmente convexo (LILC), la cual es la topología localmente convexa más fina τ_{lc} en A que hace a los morfismos inclusión de A_i en A continuos, para cada $i \in I$. Esta topología admite como un sistema fundamental de vecindades de cero a la familia de todos los subconjuntos de A absolutamente convexos que absorben a alguna vecindad en A_i, para cada $i \in I$.

Los siguientes resultados son citados en [8] sin demostración, por lo que la demostración presentada aquí es original.

Proposición 4.2.9. *Sea A un álgebra conmutativa y $(A_i)_{i\in I}$ una familia de subálgebras de A tales que*

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i,$$

donde para cada $i \in I$, (A_i, τ_i) es un álgebra localmente m-convexa, metrizable y el conjunto

$$V_i = \{x \in A_i : \lim_{k\to\infty} x^k = 0\}$$

es una vecindad en A_i (resp. para cada $i \in I$, (A_i, τ_i) es un álgebra de Fréchet que satisface una de las propiedades de la Proposición 4.2.7). Además la familia $(A_i)_{i\in I}$ dirigida por las inclusiones continuas.

Entonces A con la topología τ_{lc} de LILC respecto a la familia $(A_i)_{i\in I}$ es un álgebra BMCA (resp. una Banach-BMCA)

Demostración. Primero supongamos que cada álgebra A_i es conmutativa, localmente m-convexa, metrizable y el conjunto

$$V_i = \{x \in A_i : \lim_{k\to\infty} x^k = 0\}$$

es una vecindad en A_i. Por la Proposición 4.2.6, la familia $\{(A_i)_{B_i} : B_i \in \mathscr{B}_{A_i}\}$ es dirigida por las inclusiones continuas con la propiedad:

si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en A_i entonces $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ si y sólo si existe $B_i \in \mathscr{B}_{A_i}$ tal que $x_n \in (A_i)_{B_i}$, para cada $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ y $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = x_0$ en $(A_i)_{B_i}$.

Entonces se satisfacen las hipótesis de la Proposición 4.2.3, por lo que $\{(A_i)_{B_i} : B_i \in \mathscr{B}_{A_i}\}$ es una L-familia para (A_i, τ_{l_i}) (con τ_{l_i}, la topología de LILC). Además (A_i, τ_i) es metrizable y así bornológica. Esto significa que $\tau_i = \tau_{l_i}$. Y para cada $i \in I$,

$$A_i = \varinjlim (A_i)_{B_i}.$$

Veamos que la unión de todas estas familias,

$$\bigcup_{i\in I}\{(A_i)_{B_i} : B_i \in \mathscr{B}_{A_i}\} \tag{4.8}$$

forman una L-familia para el álgebra A. En efecto,

- es claro que cada $(A_i)_{B_i}$ es una subálgebra normada de A_i, así de A, para cada $i \in I, B_i \in \mathscr{B}_{A_i}$. También

$$A = \bigcup_{i\in I} A_i = \bigcup_{\substack{i\in I\\ B_i\in\mathscr{B}_{A_i}}} (A_i)_{B_i} = \bigcup_{i\in I}\{(A_i)_{B_i} : B_i \in \mathscr{B}_{A_i}\}.$$

- La familia 4.8 es dirigida por las inclusiones continuas: sean $B_i \in \mathscr{B}_{A_i}$ y $C_j \in \mathscr{B}_{A_j}$,

  $$(A_i)_{B_i} \hookrightarrow A_i \text{ y } (A_j)_{C_j} \hookrightarrow A_j.$$

  Por hipótesis, la familia $(A_i)_{i\in I}$ dirigida por las inclusiones continuas. Entonces existe $k \in I$ tal que $A_i \hookrightarrow A_k$ y $A_j \hookrightarrow A_k$. Por lo tanto los conjuntos B_i, C_j son idempotentes y acotados en A_k. Tomando

  $$L_k = cl_{A_k}(B_i) \text{ y } M_k = cl_{A_k}(C_j),$$

  por el Lema 2.1.9 y la Proposición 2.2.1, L_k y $M_k \in \mathscr{B}_{A_k}$, así existe $N_k \in \mathscr{B}_{A_k}$ tal que

  $$(A_i)_{B_i} \hookrightarrow (A_k)_{N_k} \text{ y } (A_j)_{C_j} \hookrightarrow (A_k)_{N_k}.$$

Entonces (A, τ_l) es el LILC relativo a la L-familia 4.8 y A es un álgebra BMCA. Finalmente veamos que $\tau_l = \tau_{lc}$. Sea $W \in \tau_{lc}$, absolutamente convexa que absorbe a alguna vecindad de A_i, esto para cada $i \in I$. Afirmamos que para cada $i \in I$ y $B_i \in \mathscr{B}_{A_i}$, W absorbe a la bola unitaria S_{B_i} de $(A_i)_{B_i}$. En efecto, sea V_i la vecindad en $\tau_i = \tau_{l_i}$ que W absorbe, por definición de una base fundamental de vecindades de cero para τ_{l_i}, V_i absorbe a la bola unitaria S_{B_i} de $(A_i)_{B_i}$, para cada $B_i \in \mathscr{B}_{A_i}$. Así existen escalares λ, β tales que

$$\beta(\lambda S_{B_i}) \subseteq \beta V_i \subseteq W.$$

Lo que significa que W es un elemento básico para la topología τ_l, así $\tau_{lc} \preceq \tau_l$.

Por otro lado, sea $W \in \tau_l$ una vecindad absolutamente convexa que absorbe a la bola unitaria S_{B_i} de $(A_i)_{B_i}$, para cada $i \in I$ y $B_i \in \mathscr{B}_{A_i}$. Entonces $A_i \cap W \in \tau_i = \tau_{l_i}$ y $A_i \cap W \subseteq W$. Entonces W absorbe a alguna vecindad de A_i, esto se puede obtener para cada $i \in I$. Por definición, W es una vecindad básica en la topología τ_{lc} y $\tau_l \preceq \tau_{lc}$.

Para la otra parte de la demostración, observamos que para cada $i \in I$, (A_i, τ_i) se supone un álgebra de Fréchet que satisface una de las propiedades de la Proposición 4.2.7, en particular que cada A_i es una Banach-BMCA. Entonces existe una L-familia $\{(A_i)_k\}_{k\in K}$ que consta de álgebras de Banach, de manera similar a la prueba anterior, se demuestra que la topología τ_{lc} con respecto a esta familia es la topología τ_l con respecto a la familia $\bigcup_{i\in I}\{(A_i)_k : k \in K\}$. $\square$

Proposición 4.2.10. *Sea A un álgebra conmutativa y $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de subálgebras de A tal que*

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n,$$

supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, (A_n, τ_n) es una B_0-álgebra y Q-álgebra con la topología τ_n de Montel, A_n un subespacio topológico (cerrado) de A_{n+1}. Entonces A con la topología relativa localmente convexa τ_{lc} es un álgebra de Banach-BMCA cuya topología es completa de Hausdorff y con la acotación de Alan:

si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en A entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ en A si y sólo si existe $B \in \mathscr{B}_A$ tal que $x_n \in A_B$, para toda n y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ en A_B.

Demostración. Por la Proposición 3.3.2 y la Proposición 3.3.3, (A, τ_{lc}) es de Haudorff y completa. Como cada A_n es Q-álgebra con las hipótesis de la Proposición 4.2.7, cada A_n es una Banach-BMCA y por la Proposición 4.2.8 tiene la acotación de Allan. Entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una L-familia de álgebras de Banach $\{A_{n_i} : i \in I_n\}$, se sigue de la misma manera a la demostración de la Proposición 4.2.9 que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{A_{n_i} : i \in I_n\} \tag{4.9}$$

es una L-familia para (A, τ_l), con τ_l la topología de límite inductivo localmente convexo respecto a la L-familia 4.9 y que $\tau_{lc} = \tau_l$.

Además A tiene la acotación de Alan, en efecto, primero observamos que $A_n = A_{n+1} \cap A_n$, donde A_{n+1} es cerrado en τ_{n+1}, entonces por la Proposición 3.3.4 para B un conjunto acotado en A, B es acotado en $A_{n'}$ para algún $n' \in \mathbb{N}$, por lo tanto es absorbido por algún $C \in \mathscr{B}_{A_{n'}}$. Por la continuidad de la inclusión, C es acotado, absolutamente convexo, idempotente y contiene a la unidad de A_n i.e. la de A, así

$$\lambda B \subseteq \lambda cl_A(B) \subseteq cl_A(C).$$

Donde $cl_A(C) \in \mathscr{B}_A$ (o bien ver el Lema 4.2.2). Por lo tanto, A tiene la acotación de Alan. $\square$

Capítulo 5

Ejemplo especial

5.1. El álgebra $\mathcal{E}(P)$

Sea P un subconjunto abierto o la cerradura de un subconjunto de $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{E}(P)$ el álgebra de todas las funciones $\mathbb{K}$-valuadas infinitamente diferenciables en $\mathbb{R}^m$ que se anulan fuera de P, con las operaciones algebraicas definidas puntualmente y la **topología de Schwartz** definida de la siguiente manera:

Para cada subconjunto compacto K de P y cualquier multi-índice $p = (p_1, p_2, ..., p_m)$ de enteros no negativos, donde $|p| = \sum_{i=1}^{m} p_i$. Sea $t = (t_1, t_2, ..., t_m) \in \mathbb{R}^m$ y $\partial_j = \frac{\partial}{\partial t_j}$ la j-ésima derivada parcial para $j = 1, ..., m$. Sea

$$D^p = \partial_1^{p_1} \partial_2^{p_2} \cdots \partial_m^{p_m} := \frac{\partial^{|p|}}{\partial t_1^{p_1} \partial t_2^{p_2} \dots \partial t_m^{p_m}};$$

si $|p| = 0$, $D^p x = x$ con $x \in \mathcal{E}(P)$.

Ahora, sean $x, y \in \mathcal{E}(P)$ y otro multi-índice $q = (q_1, q_2, ..., q_m)$ de enteros no negativos, consideramos la regla de Leibnitz para la derivada de un producto

$$D^p(xy)(t) = \sum_{q \leq p} \binom{p}{q} D^p x(t) D^{p-q} y(t),\ t \in \mathbb{R}^m,$$

donde $q \leq p$ significa que $q_j \leq p_j$ para cada $j = 1, ..., m$ y

$$\binom{p}{q} = \binom{p_1}{q_1}\binom{p_2}{q_2} \cdots \binom{p_m}{q_m}.$$

Sea

$$N_K^p(x) = \sup_{t \in K} |D^p x(t)|. \tag{5.1}$$

Si r es un entero positivo y $0 < \epsilon \leq 1$, sea

$$V(K,r,\epsilon) = \{x \in \mathcal{E}(P) : N_K^p(x) \leq 2^{-r}\epsilon \text{ para todo multi-índice } p \text{ tal que } |p| \leq r\}.$$

La regla de Leibniz para la derivada de un producto demuestra que cada $V(K,r,\epsilon)$ es idempotente con $K \subseteq P$ compacto, $r \in \mathbb{N}$ y $0 < \epsilon \leq 1$. En efecto, sean $x, y \in V(K,r,\epsilon)$. Primero observamos que como

$$supp(xy) \subset supp(x) \cap supp(y) \subset P \cap P = P$$

(ver el Ejemplo 3.4.1), entonces $xy \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ y se anula fuera de P. Ahora sean $t = (t_1, ..., t_m) \in \mathbb{R}^m$ y $p = (p_1, ..., p_m)$ un multi-índice de enteros no negativos ordenados, donde $|p| = \sum_{1\leq i\leq m} p_i$ tal que $|p| \leq r$. Entonces por la fórmula de Leibniz:

$$\begin{aligned}
N_K^p(xy) &= \sup_{t\in K} |D^p(xy)(t)| = \sup_{t\in K} |\sum_{q\leq p} \binom{p}{q} D^p x(t) D^{p-q} y(t)| \\
&\leq \sup_{t\in K} \sum_{q\leq p} \binom{p}{q} |D^p x(t)||D^{p-q} y(t)| \\
&= \sum_{q\leq p} \binom{p}{q} \sup_{t\in K} |D^p x(t)| \cdot \sup_{t\in K} |D^{p-q} y(t)| \\
&= \sum_{q\leq p} \binom{p}{q} N_K^p(x) N_K^{p-q}(y)
\end{aligned}$$

Además $|p-q| \leq r$, ya que cada $i = 1, ..., m$, $p_i \geq q_i$, así

$$0 \leq |p-q| = \sum_{1\leq i\leq m} p_i - q_i = \sum_{1\leq i\leq m} p_i - \sum_{1\leq i\leq m} q_i \leq r.$$

Por otro lado, como $\binom{p}{q} = \binom{p_1}{q_1}\binom{p_2}{q_2}...\binom{p_m}{q_m}$ y

$$\sum_{q\leq p} \binom{p}{q} = \sum_{q_i\leq p_i} \binom{p_1}{q_1}\binom{p_2}{q_2}...\binom{p_m}{q_m} \leq \sum_{q_i\leq p_1} \binom{p_1}{q_i} \sum_{q_i\leq p_2} \binom{p_2}{q_i} ... \sum_{q_i\leq p_m} \binom{p_m}{q_i} \leq 2^{p_1}2^{p_2}...2^{p_m} \leq 2^r.$$

Entonces de la ecuación 5.2

$$\leq \sum_{q\leq p} \binom{p}{q} 2^{-r}\epsilon\ 2^{-r}\epsilon\ 2^r\ \epsilon^2 \leq 2^r\epsilon.$$

Finalmente, $xy \in V(K,r,\epsilon)$ y $V(K,r,\epsilon)$ es idempotente.

También veamos que la familia $\mathscr{B}$ de todas las $V(K,r,\epsilon)$ forman una base local de vecindades absolutamente convexas:

Para $V(K,r,\epsilon)\in\mathscr{B}$, sean λ y β escalares tales que $|\lambda|+|\beta|\leq 1$ y $x,y\in V(K,r,\epsilon)$

$$\begin{aligned} N_K^p(\lambda x+\beta y) &= \sup_{t\in K}|D^p(\lambda x+\beta y)(t)|\leq|\lambda|\sup_{t\in K}|D^p x(t)|+|\beta|\sup_{t\in K}|D^p y(t)| \\ &\leq |\lambda|2^{-1}\epsilon+|\beta|2^{-1}\epsilon\leq(|\lambda|+|\beta|)2^{-1}\epsilon\leq 2^{-1}\epsilon. \end{aligned}$$

Por lo que $\lambda x+\beta y\in V(K,r,\epsilon)$ y entonces $V(K,r,\epsilon)$ es absolutamente convexo. Para ver que $\mathscr{B}$ es una base local: sean K,K' subconjuntos compactos de P y sean $p=(p_1,p_2,...,p_m)$, $q=(q_1,q_2,...,q_m)$ multi-índices de enteros no negativos para considerar N_K^p y $N_{K'}^q$. Si r,s son enteros positivos y $0\leq\epsilon,\delta\leq 1$, sean $V(K,r,\epsilon)$ y $V(K',s,\delta)$. Definimos $T=K\cap K'$, entonces T es un subconjunto compacto de P y para $w=\text{máx}\{r,s\}$, $\sigma=\text{mín}\{\epsilon,\delta\}$,

$$V(T,w,\sigma)\subseteq V(K,r,\epsilon)\cap V(K',s,\delta).$$

Como la familia de todos los $V(K,r,\epsilon)$ forman un sistema fundamental de vecindades de cero para la topología definida por las seminormas N_K^p, ésta es una topología localmente m-convexa.

Observación 5.1.1. *Vemos que cada $N_K^p(x)$ es una seminorma en $\mathcal{E}(P)$ (ver la ecuación 5.2). En efecto, para $x,y\in\mathcal{E}(P)$ y $\lambda\in\mathbb{K}$:*

- $N_K^p(x)=\sup_{t\in K}|D^p x(t)|\geq 0.$

- $$\begin{aligned} N_K^p(\lambda x) &= \sup_{t\in K}|D^p(\lambda x)(t)|=\sup_{t\in K}|\lambda D^p x(t)|=\sup_{t\in K}|\lambda||D^p x(t)| \\ &= |\lambda|\sup_{t\in K}|D^p x(t)|=|\lambda|N_K^p(x). \end{aligned}$$

- $$\begin{aligned} N_K^p(x+y) &= \sup_{t\in K}|D^p(x+y)(t)|=\sup_{t\in K}|D^p x(t)+D^p y(t)| \\ &\leq \sup_{t\in K}|D^p x(t)|+\sup_{t\in K}|D^p y(t)|=N_K^p(x)+N_K^p(y). \end{aligned}$$

Además por la ecuación 5.2, cada N_K^p es una seminorma submultiplicativa, cuya familia definen la topología de $\mathcal{E}(P)$, entonces por la Definición 2.2.5, $\mathcal{E}(P)$ es un álgebra localmente m-convexa.

Ahora, como $\mathbb{R}^m$ es la unión de la sucesión:

$$K_n=\{x\in\mathbb{R}^m:|x|\leq n+1\},n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

los cuales forman una sucesión exhaustiva o fundamental de subconjuntos compactos, es decir, para cada compacto $K \subseteq \mathbb{R}^m$ existe $n' \in \mathbb{N}$, tal que $K \subseteq K_{n'}$. Veamos que la familia $\{P_n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$, donde

$$P_n(x) = \sup_{\substack{t\in K_n \\ |\alpha|\leq n}} |D^\alpha x(t)| \tag{5.2}$$

es de seminormas submultiplicativas y define una topología en $\mathcal{E}(K)$, equivalente a la que define la familia 5.1. En efecto, para $x, y \in \mathcal{E}(K)$ y $\lambda \in \mathbb{K}$:

- $P_m(x) \geq 0$.
- $$P_m(x)(\lambda x) = \sup_{\substack{t\in K_m \\ |\alpha|\leq m}} |D^\alpha(\lambda x)(t)| = \sup_{\substack{t\in K_m \\ |\alpha|\leq m}} |\lambda D^\alpha x(t)| =$$
  $$= |\lambda| \sup_{\substack{t\in K_m \\ |\alpha|\leq m}} |D^\alpha x(t)| = |\lambda| P_m(x).$$
- $$P_m(x+y) = \sup_{\substack{t\in K_m \\ |\alpha|\leq m}} |D^\alpha(x+y)(t)| = \sup_{\substack{t\in K_m \\ |\alpha|\leq m}} |D^\alpha x(t) + D^\alpha y(t)|$$
  $$\leq \sup_{\substack{t\in K_m \\ |\alpha|\leq m}} |D^\alpha x(t)| + \sup_{\substack{t\in K_m \\ |\alpha|\leq m}} |D^\alpha y(t)| = P_m(x) + P_m(y).$$
- La submultiplicatividad se debe a la regla de Leibniz, similar a la ecuación 5.2.

Ahora, ambas familias de seminormas definen la misma topología. Para ello, vemos que en [21], pág. 96 ó [29], pág. 152 es suficiente con:

- Sea N_K^l como en la Ecuación 5.1, donde K es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^m$, y p un multi-índice de enteros no negativos. Entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subseteq K_{n_0}$. Sea $n' = \max\{n_0, |p|\}$, así
  $$N_K^p \leq P_{n'}.$$
- Consideramos la seminorma P_n, con $n \in \mathbb{N}$. Entonces
  $$P_n \leq \sum_{|l|\leq n} N_{K_n}^l.$$

Con esto, observamos por el Teorema 2.1.3 que la topología definida anteriormente por ambas familias de seminormas es metrizable.

A continuación, un lema para describir algunas de las propiedades del álgebra en cuestión.

Lema 5.1.1. *Sea $p = (p_1, ..., p_m)$ un multi-índice de enteros no negativos; no todos cero, sea x una función $\mathbb{K}$-valuada en $\mathbb{R}^m$ tal que $D^p(x)$ existe y es continua, y sea $K \subseteq \mathbb{R}^m$ un subconjunto compacto. Si $r = \sup_{t\in K} |x(t)| < 1$, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} N_K^p(x^n) = 0.$$

Demostración. Por inducción observamos que

$$D^p(x^n) = \sum n!(n - |p| + |j|)!^{-1} x^{n-|p|+|j|} h_{p,p-j}((D^q x)_{0<q\leq p}),$$

la suma es sobre todas los multi-índices j, tales que $j \leq p$ y $0 \leq |j| \leq |p| - 1$, donde $h_{p,p-j}$ es un polinomio de $(p_1 + 1)(p_2 + 1) \cdots (p_m + 1) - 1$ indeterminadas.

Ahora sean :

$$\begin{aligned} k_j &= \sup_{t\in K} |h_{p,p-j}((D^q x)_{0<q\leq p})(t)|, \\ k &= \max\{k_j : 0 \leq |j| \leq |p| - 1, j \leq p\} \text{ y} \\ c &= (p_1 + 1)(p_2 + 1) \cdots (p_m + 1). \end{aligned}$$

Entonces para $n > |p|$,

$$\begin{aligned} N_K^p(x^n) &= \sup_{t\in K} |D^p(x^n)(t)| \\ &= \sup_{t\in K} |(\sum n!(n - |p| + |j|)!^{-1} x^{n-|p|+|j|} h_{p,p-j}((D^q x)_{0<q\leq p})))(t)| \\ \leq \sum \quad n! &\quad (n - |p| + |j|)!^{-1} \sup_{t\in K} |x^{n-|p|+|j|}(t)| \sup_{t\in K} |h_{p,p-j}(D^q x(t))_{0<q\leq p}|. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Pero $r = \sup_{t\in K} |x(t)| < 1$ implica que $r^s < 1$, para cada $s \in \mathbb{N}$. Y para cada $t \in K$, $|x^{n-|p|+|j|}(t)| < |x^{n-|p|}(t)| < 1$, así

$$\sup_{t\in K} |x^{n-|p|+|j|}(t)| \quad \leq \quad r^{n-|p|}. \tag{5.4}$$

Además

$$\sup_{t\in K} |h_{p,p-j}(D^q x(t))_{0<q\leq p}| \leq k \tag{5.5}$$

y si $|p| < n$

$$\frac{n!}{(n - |p| + |j|)!} \leq \frac{n!}{(n - |p|)!} = n(n - 1) \cdots (n - |p| + 1). \tag{5.6}$$

Observamos que la suma es sobre todos los j's y $j \leq p$, con lo que $j_i \leq p_i$ para cada i. Entonces de las ecuaciones 5.4, 5.5, 5.6, se tiene que la ecuación 5.3 es

$$\begin{aligned} &\leq \sum n(n-1)\cdots(n-|p|+1)r^{n-|p|+1}k \\ &\leq cn(n-1)\cdots(n-|p|+1)r^{n-|p|}k \\ &\leq kcn^{|p|}r^{n-|p|}. \end{aligned}$$

Como $0 \leq r < 1$, para $\epsilon = \frac{1}{2^{m|p|}}$ $(m \in \mathbb{N})$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $r^n < \frac{1}{2^{n|p|}}$ para cada $n \geq N$, entonces $n^{|p|}r^{n-|p|} < \frac{n^{|p|}}{2^{n|p|}}(r^{-|p|})$. Así $\lim\limits_{n\to\infty} kcn^{|p|}r^{n-|p|} = 0$, por lo tanto

$$\lim_{n\to\infty} N_K^p(x^n) = 0.$$

□

Proposición 5.1.1. *Si K es la cerradura de un subconjunto relativamente compacto, abierto de $\mathbb{R}^m$, entonces $\mathcal{E}(K)$ es una P-álgebra, metrizable, conmutativa y por lo tanto i-bornológica.*

Demostración. Sea K la cerradura de un subconjunto relativamente compacto, abierto de $\mathbb{R}^m$. Para $r' = 1$ y $\epsilon < 1$

$$V(K, r', \epsilon) = \{x \in \mathcal{E}(K) : N_K^p(x) \leq 2^{-r}\epsilon < 1 \text{ para todo multi-índice } p \text{ tal que } |p| \leq r'\}$$

es una vecindad básica de cero para la topología de Schwartz. Pero la topología de Schwartz es la topología de la convergencia uniforme sobre compactos, de las funciones $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ y todas sus derivadas. Entonces para $x \in V(K, r, \epsilon)$, $N_K^p(x) < 1$. En particular $N_K^0(x) < 1$, entonces por el Lema 5.1.1

$$N_K^p(x^n) \to 0$$

para todo multi-índice p no cero. Además

$$N_K^0(x^n) = \sup_{t\in K} |x^n(t)| = (\sup_{t\in K} |x(t)|)^n = (N_K^0)^n \to 0.$$

Por lo tanto $x^n \to 0$ en $\mathcal{E}(K)$. Esta convergencia es uniforme en todas sus derivadas. Entonces

$$V(K, r, \epsilon) \subseteq \{x \in \mathcal{E}(K) : x \to 0\}$$

y así $\mathcal{E}(K)$ es una P-álgebra.

El álgebra $\mathcal{E}(K)$ es metrizable por una observación anterior. Por lo tanto, por el Teorema 4.1.3, $\mathcal{E}(K)$ es una P-álgebra, metrizable, conmutativa, p.i.a. e i-bornológica. □

Si P es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$, denotamos por $\mathscr{D}_P$ el álgebra de todas las funciones $\mathbb{K}$-valuadas en $\mathbb{R}^m$ infinitamente diferenciables de soporte compacto en P. Sea Ω la familia de todos los subconjuntos cerraduras de abiertos relativamente compactos de P, entonces

$$\mathscr{D}_P = \bigcup_{K \in \Omega} \mathcal{E}(K)$$

y la topología de Schwartz en $\mathscr{D}_P$ es la topología de límite inductivo topológico con respecto a la familia $\{\mathcal{E}(K)\}_{K\in\Omega}$. Esta topología es la misma que la topología de límite inductivo topológico respecto a la sucesión $\{\mathcal{E}(K_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ y morfismos inclusión $i_N : \mathcal{E}(K_n) \hookrightarrow \mathscr{D}_P$, donde $K_n \in \Omega$, $P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ y $K_n \subseteq K_{n+1}^o$. Entonces $\{\mathcal{E}(K_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de ideales (ver el Ejemplo 4.1.6) cuya unión es $\mathscr{D}_P$, cada ideal dotado de la topología localmente m-convexa inducida por $\mathcal{E}(P)$. Por lo tanto, por la Proposición 4.1.3, $\mathscr{D}_P$ es un álgebra localmente m-convexa y el límite inductivo algebraico es la también la topología de Schwartz en $\mathscr{D}_P$.

Proposición 5.1.2. *Si P es un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$, $\mathscr{D}_P$ es un álgebra i-bornológica, p.i.a.*

Demostración. Como se acaba de ver, $\mathscr{D}_P$ es el límite inductivo algebraico de álgebras i-bornológicas, p.i.a. cuya unión es $\mathscr{D}_P$. Por lo tanto, por la Proposición 4.1.4 y la Proposición 4.1.6, $\mathscr{D}_P$ es un álgebra i-bornológica, p.i.a. □

5.2. Los espacios vectoriales bornológicos $\mathscr{E}(P)$ y $\mathscr{D}(P)$

5.2.1. $\mathscr{E}(P)$

Sea P un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. $C^\infty(P)(\mathscr{E}(P))$ denota el conjunto de todas las funciones complejo-valuadas x en P infinitamente diferenciables, i.e. para cada $\alpha \in \mathbb{N}^n$, la derivada parcial $D^\alpha x$ existe y es continua en P. Una bornología definida en el espacio $C^\infty(P)$ es como sigue: un subconjunto A de $C^\infty(P)$ se dice **acotado** si para cada subconjunto compacto $K \subset P$ y para cada $m \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$\sup_{x\in A} \sup_{\substack{t\in K \\ |\alpha|\leq m}} |D^\alpha x(t)| < +\infty. \tag{5.7}$$

En efecto, veamos que se satisfacen las condiciones de la Definición 3.2.1 para $\mathscr{B}$ la bornología definida anteriormente,

i) para $x \in \mathscr{E}(P)$, $\{x\}$ es acotado en el sentido anterior, ya que para cualquier subconjunto compacto $K \subset P$ y $m \in \mathbb{N}$,

$$|x^{(\alpha)}(t)| < +\infty, \text{ para cada } |\alpha| \leq m \text{ y } t \in K. \tag{5.8}$$

Así $\sup\limits_{\{x\}} \sup\limits_{\substack{t \in K \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha x(t)| < +\infty$, lo que significa que $\mathscr{E}(P) = \bigcup \mathscr{B}$.

ii) Sean $B \in \mathscr{B}$ y $A \subseteq B$. Por las propiedades del supremo

$$\sup_{x \in A} \sup_{\substack{t \in K \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha x(t)| \leq \sup_{x \in B} \sup_{\substack{t \in K \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha x(t)| < +\infty, \tag{5.9}$$

para cada subconjunto compacto $K \subset P$ y para cada $m \in \mathbb{N}$.

iii) Sean $B_1, ..., B_n \in \mathscr{B}$,

$$\sup_{x \in \cup B_i} \sup_{\substack{t \in K \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha x(t)| = \sup\{\sup_{x \in B_1} \sup_{\substack{t \in K \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha x(t)|, ..., \sup_{x \in B_n} \sup_{\substack{t \in K \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha x(t)|\} < +\infty. \tag{5.10}$$

Observación 5.2.1. *Además la bornología $\mathscr{B}$ es convexa:*

Para $B \in \mathscr{B}$, sea $x \in conv\ (B) = C$, entonces existen escalares $\lambda_i > 0$ y elementos $x_i \in B$ con

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \text{ y } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1.$$

Entonces para $m \in \mathbb{N}$ y $t \in \mathbb{R}$

$$|x^{(m)}(t)| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |x_i^{(m)}(t)|,$$

así para cualquier subconjunto compacto $K \subseteq \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in C} \sup_{\substack{t \in K \\ |\alpha| \leq m}} |x^{(\alpha)}(t)| \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sup_{x_i \in B} \sup_{\substack{t \in K \\ |\alpha| \leq m}} |x_i^{(\alpha)}(t)| < +\infty,$$

por lo que $C \in \mathscr{B}$. Esta bornología es llamada la bornología $\mathscr{C}^\infty$.

La bornología $\mathscr{C}^\infty$ puede ser definida por la familia de seminormas

$$p_{K,m}(x) = \sup_{\substack{t \in K \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha x(t)|.$$

Si $\{K_j\}$ es una sucesión exhaustiva de conjuntos compactos de P, lo que significa que es una sucesión de conjuntos compactos que cubren a P tal que $K_i \subset int(K_{i+1})$ (ver [14], Cap. 8) y además cada subconjunto compacto K de P está contenido en uno de los K_i, la sucesión

$$P_m(x) = \sup_{\substack{t \in K_m \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha x(t)|, \tag{5.11}$$

de seminormas define la bornología $\mathscr{C}^\infty$ de $C^\infty(P)$. En efecto, A es acotado en la bornología $\mathscr{C}^\infty$ anterior si todas las seminormas P_m son acotadas en A cuando K recorre todos los subconjuntos compactos de P y m recorre todos los enteros no negativos. La topología (τ) generada por esta familia de seminormas es localmente convexa metrizable como vimos anteriormente y entonces $\mathscr{C}^\infty$ es la bornología de Von Neumann-Kolmogorov. Además la bornología de $C^\infty(P)$ es separada, ya que para cada $0 \neq x \in C^\infty(P)$, existe un subconjunto compacto $K' \subseteq \mathbb{R}^n$ tal que para algún $t \in K'$, $x(t) \neq 0$, i.e. $P_m(x) \neq 0$. Con esta bornología, el espacio $C^\infty(P)$ es denotado por $\mathscr{E}(P)$. También τ es llamada la topología conónica de $\mathscr{E}(P)$.

5.2.2. $\mathscr{D}(P)$

Consideramos el álgebra $\mathscr{D}(P)$ de todas las funciones complejo valuadas infinitamente diferenciables de soporte compacto y definimos la bornología canónica $\mathscr{B}_c$ de $\mathscr{D}(P)$ como: $B \subseteq \mathscr{D}(P)$ es acotado ($B \in \mathscr{B}_c$) si y sólo si:

i) Existe $K \subseteq P$ compacto tal que $supp(x) \subseteq K$, para cada $x \in B$.

ii) Para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\sup_{x \in B} \sup_{\substack{t \in K \\ |\alpha| \leq m}} |D^\alpha x(t)| < +\infty. \tag{5.12}$$

$\mathscr{B}_c$ define una bornología convexa, separada en $\mathscr{D}(P)$. En efecto, veamos que $\mathscr{B}_c$ satisface las condiciones de la Definición 3.2.1:

i) para $x \in \mathscr{D}(P)$, $\{x\}$ es acotado en el sentido anterior, ya que por ser $\mathbb{R}$ σ-compacto, existe $K_n \subseteq P$ compacto tal que $supp(x) \subseteq K_n$ y para $m \in \mathbb{N}$ se cumple 5.8. Así, $\mathscr{D}(P) = \bigcup \mathscr{B}_c$.

ii) Sean $B \in \mathscr{B}_c$ y $A \subseteq B$. Para cada $x \in B$, $supp(x) \subseteq K$ (para algún subconjunto compacto $K \subseteq P$) y por 5.9, $A \in \mathscr{B}_c$.

iii) Sean $B_1, ..., B_n \in \mathscr{B}_c$, $K = \bigcup_{i=1}^{n} K_i$ la unión de los compactos para los cuales $supp(x_i) \subseteq K_i$, (para cada $x_i \in B_i$). Entonces K es compacto, $supp(x) \subseteq K$ para cada $x \in \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ y se cumple 5.10.

$\mathscr{B}_c$ es convexa y separada (ver la Observación 5.2.1 y para $x \neq 0$, $supp(x) \subseteq K$, con K compacto. Entonces para $t \in K$, $x(t) \neq 0$ y $p_{K,m} \neq 0$).

Para cada subconjunto compacto $K \subset P$, sea

$$\mathscr{D}_K(P) = \{f \in C^{\infty}(P) : supp(f) \subseteq K\}.$$

Entonces $\mathscr{D}_K(P)$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{E}(P)$ y por lo tanto puede ser dotada de una bornología, la inducida por $\mathscr{E}(P)$. Sea $\mathscr{C}_K^{\infty}$ la bornología en $\mathscr{D}_K(P)$ inducida por $(\mathcal{E}(\Omega), \mathscr{C}^{\infty})$. Es decir, $C \in \mathscr{C}_K^{\infty}$ si

- $C \subseteq \mathscr{D}_K(P)$
- $C \in \mathscr{C}^{\infty}$.

Sea I el conjunto de todos los subconjuntos compactos de P, dirigido por las inclusiones "$\subset$": ya que si $K, K' \in I$, $K \cup K' \in I$ y $K \subseteq K \cup K', K' \subseteq K \cup K'$. Para $K \subset K'$, $\mathscr{D}_K(P) \subseteq \mathscr{D}_{K'}(P)$, la inclusión canónica

$$i_{K',K} : \mathscr{D}_K(P) \to \mathscr{D}_{K'}(P)$$

es acotada. En efecto, sea $B \in \mathscr{C}_K^{\infty}$, $B \subseteq \mathscr{D}_K(P) \subseteq \mathscr{D}_{K'}(P)$ y $B \in \mathscr{C}^{\infty}$. Por lo tanto $B \in \mathscr{C}_{K'}^{\infty}$.

Como

$$\mathscr{D}(P) = \bigcup_{K \in I} \mathscr{D}_K(P)$$

Entonces $(\mathscr{D}(P), \mathscr{B})$ es el límite inductivo bornológico con respecto al sistema inductivo $\{(\mathscr{D}_K, \mathscr{B}_K), i_{K',K}\}_{K \subset K'}$, i.e.

$$(\mathscr{D}(P), \mathscr{B}) = \underset{\longrightarrow_b}{\text{lím}} (\mathscr{D}_K, \mathscr{C}_K^{\infty})$$

Notamos que la inclusión $\mathscr{D}(P) \hookrightarrow \mathscr{E}(P)$ es acotada porque lo son todas las inclusiones $\mathscr{D}_K(P) \hookrightarrow \mathscr{E}(P)$. Entonces veamos que

$$(\mathscr{D}(P), \mathscr{B}) = (\mathscr{D}(P), \mathscr{B}_c) = \underset{\longrightarrow_b}{\text{lím}} (\mathscr{D}_K, \mathscr{C}_K^{\infty}).$$

En efecto, por definición $\mathscr{B}$ es una bornología más fina que $\mathscr{B}_c$ ($\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}_c$). Por otro lado si $B' \in \mathscr{B}_c$, $B' \subseteq \mathscr{D}(P)$, entonces existe $K' \subseteq P$ compacto, tal que $supp(x) \subseteq K'$, para cada $x \in B'$ y para cada $m \in \mathbb{N}$ se cumple 5.12. Entonces $B' \subseteq \mathscr{D}_{K'}(P)$ y como para cualquier otro subconjunto compacto $K \subseteq P$ tal que

$$K \cap K' = \emptyset \text{ ó } K' \subseteq K, \text{ entonces toda } x \in B' \text{ se anula en } K \text{ ó en } K \setminus K' \text{ respectivamente,}$$

y en todo subconjunto compacto $K \subseteq P$ tal que

$$K \cap K' \neq \emptyset \text{ ó } K \subseteq K', \text{ el supremo existe.}$$

Entonces por 5.7, $B' \in \mathscr{C}^\infty$, así $B' \in \mathscr{C}^\infty_{K'}$ y finalmente $B' \in \mathscr{B}$ (ver la Subsección 3.2.3 y la Observación 3.2.1).

5.3. Relación entre Límite Inductivo Topológico y Límite Inductivo Bornológico

En el desarrollo de esta tesis, hemos abordado dos conceptos sumamente importantes para el estudio de los límites inductivos en espacios vectoriales topológicos y álgebras topológicas; la topología y la bornología. Como menciona el matemático Henri Hogbe Nlend en el año 1971:

> A cada tipo de problema le corresponde necesariamente un tipo apropiado de estructura. La bornología y la topología vectoriales son dos aspectos necesarios, distintos y complementarios, de una sola realidad. Utilizar de manera apropiada el uno o el otro es, a nuestro entender, como saber caminar sobre ambas piernas.

Entonces el siguiente resultado muestra "el puente" entre la bornología y la topología mediante el límite inductivo:

Proposición 5.3.1. *Sea $(E_i, f_{ji})_{i,j\in I}$ un sistema inductivo de espacios vectoriales localmente convexos (E_i, τ_i). Sea E el límite inductivo de este sistema inductivo y para cada $i \in I$, sea $f_i : E_i \to E$ el morfismo canónico (ver la Sección 3.2). Para cada $i \in I$, sea $\mathscr{B}_{\tau_i}$ la bornología de Von Neumann-Kolmogorov del espacio (E_i, τ_i), además consideramos el límite inductivo bornológico*

$$(E, \mathscr{B}) = \varinjlim_b (E_i, \mathscr{B}_{\tau_i})$$

y el límite inductivo topológico

$$(E,\tau)=\underset{\longrightarrow_b}{\text{lím}}(E_i,\tau_i).$$

Entonces

$$\mathscr{B}\subset\mathscr{B}_\tau.$$

Donde $\mathscr{B}_\tau$ *es la bornología de Von Neumann-Kolmogorov del espacio* (E,τ)*.*

Demostración. La siguiente demostración es original. Por la Subsección 3.2.3, $\mathscr{B}$ es la bornología final, generada por la familia $\mathscr{A}=\bigcup_{i\in I} f_i(\mathscr{B}_i)$. Entonces si $B\in\mathscr{B}$,

$$B\subseteq\bigcup_{i=1}^{n} f_i(B_i), \tag{5.13}$$

con $B_i\in\mathscr{B}_i$ (ver la Subsección 3.2.3 y la Observación 3.2.1). Veamos que B es acotado en la topología τ. Si $\mathscr{V}$ es una base de vecindades de cero absolutamente convexas para τ y $V\in\mathscr{V}$, $f_i^{-1}(V)$ es una vecindad en E_i, para cada $i\in I$. Además para cada $1\leq i\leq n$, $B_i\in\mathscr{B}_i$, existe $\lambda_i>0$ tal que

$$\lambda_i B_i\subseteq f_i^{-1}(V),$$

lo que implica que

$$\lambda_i f_i(B_i)\subseteq f_i(f_i^{-1}(V))\subseteq V.$$

Sea $\lambda=\text{mín}\{\lambda_i:1\leq i\leq n\}$, por 5.13

$$B\subseteq\bigcup_{i=1}^{n} f_i(B_i)=\bigcup_{i=1}^{n}(\lambda_i)^{-1}V\subseteq\lambda V.$$

Por lo tanto, $B\in\mathscr{B}_\tau$. $\square$

Definición 5.3.1. *Sea* $I\neq\emptyset$ *un conjunto de índices, sea* $\{E_i\}_{i\in I}$ *una familia de espacios vectoriales bornológicos y sea* E *el espacio vectorial suma directa de los* $Ei's$*. Para cada* $i\in I$*, denotamos por* $\mathscr{B}_i$ *la bornología de* E_i *y por* v_i *el morfismo canónico de* E_i *en* E*.* ***La bornología suma directa*** $\mathscr{B}$ *con respecto a las bornologías* $\mathscr{B}_i$ *es la bornología final en* E *para los morfismos* v_i*.* E *con la bornología* $\mathscr{B}$ *es* ***la suma directa bornológica*** *y la denotamos por:*

$$(E, \mathscr{B}) = \sum_{i \in I} (E_i, \mathscr{B}_i).$$

Proposición 5.3.2. *Sea $(E, \mathscr{B})$ la suma directa bornológica de la familia $(E_i, \mathscr{B}_i)_{i\in I}$. La familia*

$$\mathcal{F} = \{B \subseteq E : B = \sum_{i \in K} B_i, K \subseteq I \textit{ finito y } B_i \in \mathscr{B}_i \textit{ para cada } i \in K\},$$

es una base para la bornología suma directa en E.

Demostración. Primero veamos que $\mathcal{F}$ es una base para una bornología $(\mathscr{B}_{\mathcal{F}})$. Por la observación inmediata a la Definición 3.2.1, primero veamos que $\mathcal{F}$ cubre a E. Es claro que $\mathcal{F} \subseteq E$, ahora si $x \in E$ entonces

$$x = \sum_{i \in I_n} x_i, \text{ para } I_n \subset I \text{ finito y } x_i \in E \text{ para toda } i \in I_n.$$

Por lo tanto, existe $B_i \in \mathscr{B}_i$ tal que $x_i \in B_i$, para cada $i \in I_n$. Así,

$$x \in \sum_{i \in I_n} B_i = B' \in \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B.$$

Además la unión finita de elementos de $\mathcal{F}$ es elemento de $\mathcal{F}$. Así, esta familia es una base para una bornología.

Por otro lado, $\mathcal{F}$ es estable bajo la formación de sumas finitas y múltiplos escalares. En efecto, si $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned} B_1 + B_2 &= \sum_{i\in I} B_{1i} + \sum_{j \in J} B_{2j} = \sum_{i=j\in I} B_{1i} + B_{2j} + \sum_{i\neq j \in I} B_{1i} + \sum_{i \neq j \in J} B_{2i} \in \mathcal{F} \\ \lambda B_1 &= \lambda \sum_{i \in I} B_{1i} = \sum_{i\in I} \lambda B_{1i} \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

ésto ya que cada $\mathscr{B}_i$ es una bornología vectorial en E. También es cerrada bajo envolventes balanceadas ya que si $B \in \mathcal{F}$

$$\bigcup_{|\lambda|\leq 1} \lambda \sum_{i \in J} B_j = \bigcup_{|\lambda| \leq 1} \sum_{i\in J} \lambda B_j \in \mathcal{F}.$$

Entonces la bornología $\mathscr{B}_{\mathcal{F}}$ generada por $\mathcal{F}$ es una bornología vectorial para la cual los morfismos v_i son acotados, efectivamente, si

$$B_i \in \mathscr{B}_i,\ v_i(B_i) = B_i \subseteq E \text{ y } B_i \in \mathcal{F} \subseteq \mathscr{B}_{\mathcal{F}}.$$

Por lo tanto, $\mathscr{B}_{\mathcal{F}}$ contiene a la bornología generada por

$$\bigcup_{i\in I} v_i(\mathscr{B}_i)$$

y entonces $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{B}_{\mathcal{F}}$. Por otro lado, $\mathscr{B}$ contiene todas las sumas finitas de la forma

$$\sum_{i\in I_m} B_i,$$

ya que los morfismos v_i son inyectivos, finalmente ambas bornologías coinciden y $\mathcal{F}$ es una base para $\mathscr{B}$. □

Corolario 5.3.1. *Si en la Proposición 5.3.1, cada topología τ_i es de Hausdorff y además*

$$E = \sum_{i\in I} E_i$$

entonces $\mathscr{B} = \mathscr{B}_{\tau}$.

Demostración. Se sigue de la Proposición 3.1.13 y de la Proposición 5.3.2. □

Conclusiones y Perspectivas

En el desarrollo de este trabajo hemos presentado un panorama general y detallado de algunos de los resultados y avances más importantes sobre límites inductivos en las categorías de espacios vectoriales topológicos y álgebras topológicas, así como en otro tipo de espacios, los bornológicos.

El planteamiento toma como punto de partida algunas de las propiedades fundamentales y conceptos básicos que se manejan en espacios vectoriales topológicos y que se preservan mediante el límite inductivo, como el ser barrilado o el ser un espacio de Mackey, no sin antes presentar y desarrollar una serie de conocimientos en las distintas áreas de la matemática necesarias para este trabajo: la topología, el álgebra, el análisis funcional, etc. Además estudiamos algunos límites inductivos particulares que preservan propiedades como el ser de Hausdorff, completo o de Montel.

También estudiamos la descomposición de espacios localmente convexos como los de Mackey de Hausdorff o Mackey completos de Hausdorff, en espacios más simples como los normados o los de Banach, respectivamente.

Posteriormente añadimos un ingrediente más a la estructura anterior y nos trasladamos a estudiar algunas de las propiedades anteriores y otras más en la categoría de álgebras topológicas. En este contexto fueron las álgebras localmente convexas y las localmente m-convexas las de nuestro mayor interés, pues son álgebras que han sido mayormente estudiadas y utilizadas, después de las ya conocidas álgebras de Banach. En esta nueva categoría, la topología juega un papel de suma importancia a la hora de definir el límite inductivo de ciertas álgebras topológicas.

Entonces, al trabajar con cada límite inductivo en su marco correspondiente, ilustramos la diferencia entre un límite inductivo topológico (de espacios localmente convexos) y uno algebraico (de álgebras localmente m-convexas) mediante un ejemplo importante, el álgebra de polinomios (ver el Ejemplo 4.1.2); también analizamos las propiedades bajo las cuales ambos límites coinciden.

Hicimos una minuciosa investigación y estudio sobre las posibles descomposiciones de ciertas álgebras localmente convexas y localmente m-convexas en álgebras más conocidas como por ejemplo las álgebras normadas, las álgebras de Banach, las álgebras de Fréchet o las Q-álgebras. Asimismo, estudiamos la preservación de propiedades de los factores al límite inductivo (y viceversa) como por ejemplo ser: Q-álgebra, puntualmente idempotentemente acotada, i-bornológica, bornológica, etc., ésto mediante el límite inductivo correspondiente.

Por otro lado, enfatizamos la importancia de una propiedad topológica para un ideal (el ser cerrado) en las hipótesis de un resultado relevante (ver la Proposición 4.2.1) y de forma original, demostramos dos propiedades de descomposición de álgebras con ciertas características, en álgebras normadas o de Banach.

A lo largo del trabajo se dan una serie de ejemplos ilustrativos para las propiedades ya mencionadas y concluimos con un ejemplo muy especial para el análisis funcional y otras áreas de la matemática: el álgebra las funciones complejo valuadas, infinitamente diferenciables de soporte compacto; este es un ejemplo muy completo que nos sirvió para ilustrar los diferentes tipos de límites inductivos manejados en este trabajo.

Finalmente, dimos la relación entre el conocido concepto de topología y el no tan conocido concepto de bornología, mediante límites inductivos, esto a nivel de espacios vectoriales topológicos, observamos que en ocasiones la topología no es suficiente para poder preservar o heredar propiedades mediante el límite inductivo y entonces la consideración simultánea de bornología en conjunto con la topología provee una rica teoría para ello.

Con respecto a las perspectivas de desarrollo para el tema aquí presentado, podemos mencionar lo siguiente:

1. Profundizar en el estudio de las propiedades topológicas y bornológicas que definen una clase de álgebras topológicas y que se preserven al tomar límites inductivos, topológicos y bornológicos, tanto en álgebras más generales (por ejemplo dentro de las álgebras localmente convexas las localmente pseudoconvexas, las localmente A-convexas y las localmente uniformemente A-convexas), como en álgebras más particulares (por ejemplo las álgebras normadas involutivas, las C^*-álgebras o las localmente C^*-álgebras). Estas propiedades a estudiar pueden ser, en el caso más general, la advertivilidad, la completitud advertiva, el carácter de ser topológicamente-Q o Mackey-Q, etc.

2. Investigar sobre las descomposiciones de álgebras generales en límites inductivos de álgebras “más sencillas” como el caso de las álgebras pseudo-completas (ver [6]) o las BMCA (ver [8]). En este sentido ya han sido estudiadas las álgebras pseudo-Q (ver [7]).

3. Estudiar la categoría de las "Álgebras Bornológicas" como una categoría independiente e investigar sus propiedades relacionadas con los límites inductivos.

Bibliografía

[1] Abel M., Pérez Tiscareño R.M., *Locally pseudoconvex inductive limit of locally pseudo-convex Q-algebras*, Contemporary Mathematics, Volume 657, 2016.

[2] Akkar M., *Etude spectrale et structures d'algèbres topologiques ou bornologiques complétes* , Thése. Sc. Math. Bordeaux, 1976.

[3] Akkar M., *Sur la théorie spectrale des opérateurs fortement bornés dans les espaces topologiques*, C. R. Acad. Sc. Paris, Série A, 274, 1972.

[4] Akkar M., Oubbi L., Oudadess M., *Algèbres à bases bornées*, Collect. Math. 38, 1987.

[5] Akkar M., Oubbi L., Oudadess M., *Algèbres A-convexes et problème de Michaël*, Proc. Amer. Math. Soc. 110, 1990.

[6] Allan G.R., Dales H.G., McCLURE J.P., *Pseudo-Banach algebras*, Studia. Math. 40, 1971.

[7] Arizmendi H., Carrillo A., *Pseudo-(Normed Q) Algebras*, Mathematical Proceedings of the Royal Irish Academy Vol. 115A, No. 2 (2015), pp. 1-13.

[8] Arosio A., *Locally convex inductive limits of normed algebras*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 51, 1974, 333-359.

[9] Balachandran V.K., *Topological Algebras*, North-Holland Mathematics Studies, 185. Elsevier, Amsterdam, 2000.

[10] Bourbaki N., *General Topology, Chapters* $1-4$, Elements of Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1987, 1995.

[11] Bourbaki N., *Topological vector spaces, Chapters* $1-5$, First English edition, Springer, 1987.

[12] Buck R.C., *Bounded continuous functions on a locally compact space*, Michigan Math. J. 5, 1958.

[13] Cochran A.C., *Inductive limits of A-convex algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 37, 1973.

[14] Dieudonné J., *Eléments d'analyse, Vol. I*, Gauthier-Villars , Paris, 1968.

[15] El Kinani A., Nejjari M. A., Oudadess M., *Cônes normaux et structure d'algèbres de Banach involutives*, Ann. Sci. Math. Québes 26 (2), 2002, 161-169.

[16] Esterle J., *Sur la métrisabilité de certaines algèbres d'op érateurs*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 24, 1979.

[17] Fragoulopoulou M., *Topological algebras with involution*, North-Holland Mathematics Studies, 200. Elsevier Science, Amsterdam, First Edition, 2005.

[18] Hewitt E., *Rings of real-valued continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 64, 1948, 45-99.

[19] Hogbe-Nlend H., *Bornologies and functional analysis*, NorthHolland, Math. Studies 26, 1977.

[20] Hogbe-Nlend H., *Les fondements de la théorie spectrale des algèbres bornologiques*, Bol. Soc: Brasil Mat. 3, 1973.

[21] Horváth J., *Topological vector spaces and distributions*, Addison- Wesley Publishing Company, University of Maryland, Volume I, 1966.

[22] Jacobson N., *Structure of rings*, American Mathematical Society, Colloquium Publications volume $XXXVII$, 1956.

[23] Kaniuth E., *A course in commutative Banach algebras*, Graduate Texts in Mathematics 246, Springer, Editorial Board, 2009.

[24] Kirillov A.A., Gvishiani A.D., *Theorems and Problems in Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics 246, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1982.

[25] Köthe G., *Topological vector spaces I*, Springer-Verlag New York Inc., 1969.

[26] Mallios A., *Topological algebras. Selected topics*, North-Holland Mathematics Studies, 124. North-Holland, Amsterdam, 1986.

[27] Michael E., *Locally multiplicatively-convex topological algebras*, Memoirs of the American Mathematical Society, No.11, 1952.

[28] Narici L., Beckenstein E., Sufeel C., *Topological algebras*, North-Holland Mathematics Studies, 24. North-Holland, Amsterdam, 1977.

[29] Narici L., Beckenstein E., *Topological vector spaces*, Second Edition, Editorial Board, 1985.

[30] Oubbi L., *Limites Inductives D'Algèbres A-Convexes et Opérateurs Bornés*, Bulletin de la Societé Royale des Sciences de Li.

[31] Oubbi L., *Topologies m-convexes dans les algèbres A-Convexes*, Pub. Math. Echole Norm. Sup. Takaddoum 8.

[32] Oudadess M., *Inductive limits of normed algebras and m-convex structures*, Proc. Amer. Math. Soc. 109, 1990.

[33] Oudadess M., *Topological inductive limits of C^*-algebras*, To appear.

[34] Robertson A.P., Robertson W., *Topological vector spaces*, second edition, Cambridge at the University Press, 1973.

[35] Rotman J., *Advanced Modern Algebra*, first edition, Prentice Hall (2002), 2nd printing, 2003.

[36] Rudin W., *Functional Analysis*, McGraw-Hill Book Company, 1921.

[37] Schaefer H., *Topological vector spaces*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1971.

[38] Treves F., *Topological vector spaces, distributions and kernels*, Academic Press, New York, 1967.

[39] Waelbroeck L., *Topológical vector spaces and algebras*, Springer Lecture Notes in Mathematics, 230, 1971.

[40] Warner S., *Inductive limits of normed algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 82, 1956.

[41] Warner S., *Weak Locally multiplicatively-convex algebras*, Pacific Journal of Mathematics vol. 5, 1955.

[42] Wilson R., Benítez R., *Topología general*, primera edición, Editorial Trillas, 2017.

[43] Żelazko W., *Metric generalizations of Banach algebras*, Rozprawy Matematyczne, vol. 47, PWN-Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1965.

[44] Żelazko W., Aarhus., *Selected topics in topological algebras*, Universitet, Matematisk Institut, 1971.

Índice alfabético

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00176
Matrícula: 2152800909

LÍMITES INDUCTIVOS DE ÁLGEBRAS TOPOLÓGICAS

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 20 del mes de abril del año 2018 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS
DR. SLAVISA DJORDJEVIC V.
DRA. MARIA DE LOURDES PALACIOS FABILA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretaria la última, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: AURA CARINA MARQUEZ MARTINEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

AURA CARINA MARQUEZ MARTINEZ
ALUMNA

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS

VOCAL

DR. SLAVISA DJORDJEVIC V.

SECRETARIA

DRA. MARIA DE LOURDES PALACIOS FABILA