



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

Fecha : 07/02/2017
Página : 1/1

CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO

La Universidad Autónoma Metropolitana extiende la presente CONSTANCIA DE PRESENTACION DE EXAMEN DE GRADO de MAESTRO EN CIENCIAS (CIENCIAS Y TECNOLOGIAS DE LA INFORMACION) del alumno JOSE CARLOS JAVIER VELASCO, matrícula 2143805558, quien cumplió con los 132 créditos correspondientes a las unidades de enseñanza aprendizaje del plan de estudio. Con fecha ocho de febrero del 2017 presentó la DEFENSA de su EXAMEN DE GRADO cuya denominación es:

APLICACIÓN DE PSO-3P AL PROBLEMA DE PORTAFOLIO DE INVERSIÓN

Cabe mencionar que la aprobación tiene un valor de 60 créditos y el programa consta de 192 créditos.

El jurado del examen ha tenido a bien otorgarle la calificación de:

Aprobos

JURADO

Presidenta

Secretario


DRA. MARIA ELENA LARRAGA RAMIREZ


DR. SÉRGIO GERARDO DE LOS COBOS SILVA

Vocal


DR. MIGUEL ANGEL GUTIERREZ ANDRADE



**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA**

**APLICACIÓN DE PSO-3P AL PROBLEMA DE
PORTAFOLIO DE INVERSIÓN**

Tesis que presenta
José Carlos Javier Velasco
Para obtener el grado de
Maestro en ciencias y tecnologías de la información

Asesores: Dr. Sergio Gerardo de los Cobos Silva
Dr. Eric Alfredo Rincón García

Jurado calificador:
Presidente: Dra. María Elena Larraga Ramírez
Secretario: Dr. Sergio Gerardo de los Cobos Silva
Vocal: Dr. Miguel Ángel Andrade Gutiérrez

Ciudad de México, Febrero 2017

Agradecimientos

A mis padres, Mauricio Javier Carreño y Verónica Velasco Aragón, por el apoyo incondicional que siempre me han brindado.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT) por brindarme el financiamiento económico, que ha sido de gran ayuda para desarrollar este grado académico.

A la Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa por darme la oportunidad de crecer profesionalmente.

A la Dra. María Elena Larraga Ramírez (Universidad Nacional Autónoma de México) y al Dr. Miguel Ángel Andrade Gutiérrez (Universidad Autónoma Metropolitana - Iztapalapa) por su valioso tiempo empleado en las revisiones de esta Idónea Comunicación de Resultados, asimismo, por sus valiosas observaciones para mejorar este trabajo.

A mis asesores, Dr. Sergio Gerardo de los Cobos Silva (Universidad Autónoma Metropolitana – Iztapalapa) y Dr. Eric Alfredo Rincón García (Universidad Autónoma Metropolitana – Azcapotzalco) por aceptarme y guiarme con mucha paciencia durante todo el proyecto. Por su valioso tiempo, sus consejos, los comentarios y las correcciones que ayudaron el desarrollo de este trabajo, en general por todas las enseñanzas.

Contenido

1. Resumen	2
2. Conceptos y definiciones	3
2.1. Portafolio de inversión	3
2.2. Sistemas inteligentes	4
3. Introducción	6
3.1. Planteamiento del problema	6
3.2. Objetivo del trabajo	7
3.3. Metodología empleada	7
4. Sistemas inteligentes	9
4.1. Optimización por Enjambre de Partículas	9
4.1.1. Topología de las partículas	11
4.1.2. Método de Optimización por Enjambre de Partículas (PSO)	12
4.1.3. Método derivado de Optimización por Enjambre de Partículas (PSO-3P)	14
5. Estado del arte	17
5.1. Portafolio de inversión	17
5.2. Modelo de media-varianza	18
5.3. Formulación del modelo de media-varianza	19
5.3.1. Modelo extendido del modelo de media-varianza	24
5.4. Modelos derivados del modelo original de media-varianza	25
5.5. Modelo extendido de Markowitz	28
5.6. Trabajo de Chang et al.	32
6. PSO y PSO-3P adaptados al problema del portafolio de inversión	35
7. Simulación computacional	41
7.1. Experimentos y resultados	41
8. Conclusiones y recomendaciones para trabajo futuro	46

CONTENIDO	1
-----------	---

Referencias	48
-------------	----

Capítulo 1

Resumen

El problema del portafolio de inversión es un problema que ha sido trabajado por muchos investigadores durante muchos años. De hecho, actualmente se siguen publicando una gran variedad de estudios en esta área de investigación. En algunos trabajos, se proponen diferentes formas de modelar el problema, estos modelos en su mayoría son generados tomando como base el modelo de media-varianza propuesto por Markowitz en 1952. Asimismo se proponen distintos métodos para resolver algunos modelos del problema del portafolio de inversión.

En este trabajo de tesis se hace uso del modelo propuesto por Markowitz, en el cual se busca optimizar una función objetivo que combina mediante una suma ponderada el retorno y el riesgo de un portafolio dado, en este caso, el ponderador empleado en la función objetivo representa un parámetro de aversión¹ de riesgo. Asimismo, se emplean restricciones de no negatividad, para prohibir soluciones con “inversiones negativas”, así como restricciones que garanticen la inversión de todo el capital disponible. Para encontrar soluciones de buena calidad, se proponen dos algoritmos basados en las metaheurísticas Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) y Optimización por Enjambre de Partículas de tres fases (PSO-3P). PSO ha sido empleado, en su forma original y con distintas modificaciones, por distintos autores para la solución de una gran variedad de problemas de optimización. Por otro lado, PSO-3P es un método de reciente creación que ha reportado muy buenos resultados en problemas de optimización continua.

Para poder evaluar el desempeño de los algoritmos desarrollados, se consideraron cinco instancias empleadas en la literatura especializada. Los resultados obtenidos se compararon con los reportados por otros autores, quienes emplearon algoritmos inspirados en Recocido Simulado, Búsqueda Tabú y Algoritmos Genéticos. Los resultados muestran un desempeño sobresaliente de PSO-3P sobre la versión clásica de PSO. Además, la calidad de las soluciones generadas por PSO-3P, fue mejor que las obtenidas por Recocido Simulado, Búsqueda Tabú y Algoritmos Genéticos, en algunas regiones del frente de Pareto.

¹La aversión se define como el rechazo o repugnancia frente a alguien o algo. [1]

Capítulo 2

Conceptos y definiciones

La finalidad de éste capítulo es exponer algunos conceptos básicos que ayudarán al entendimiento del presente trabajo de tesis. El capítulo se encuentra dividido en dos secciones: 2.1) Portafolio de inversión y 2.2) Sistemas inteligentes. Los conceptos y las explicaciones dadas en éste capítulo son base del trabajo realizado.

2.1. Portafolio de inversión

En finanzas se entiende por portafolio de inversión a un conjunto de dos o más activos¹ que se cotizan en el mercado bursátil, en los que una persona física o moral decide emplear o invertir su dinero. Las inversiones se realizan con base en el estudio previo del retorno y el riesgo de los activos. Para comprender mejor el tema del portafolio de inversión se presentan a continuación las definiciones de riesgo y retorno. El retorno esperado de un portafolio o cartera de inversión no es más que el promedio ponderado de los retornos esperados de los activos o acciones que constituyen dicho portafolio. Para definir el riesgo se utilizará el siguiente ejemplo. Suponga que compra un bono² del banco de México (bono M), que vence en un período de un año, con un retorno fijo del 9% de la inversión. Si el bono es conservado todo el año, obtendrá del gobierno el 9% garantizado de retorno sobre la inversión realizada, no más ni menos. Ahora, si en lugar de comprar un bono con un retorno fijo se realiza la compra de una acción³ en cualquier empresa, y de igual manera ésta se conserva durante el período de un año, el dividendo en efectivo que espera recibir puede o no materializarse como se desea, ya que el precio de la acción puede fluctuar, y al final del año puede ser mucho menor de lo esperado, tal vez incluso menor del precio inicial. Entonces el rendimiento real sobre esta inversión puede diferir sustancialmente de su rendimiento esperado. Si se define el riesgo como la variabilidad de los rendimientos con respecto a los que se esperan, el bono M sería un valor sin riesgo, mientras que la acción sería un valor riesgoso. Cuanto mayor sea la variabilidad, más riesgosa será la inversión.

¹Un activo es un instrumento financiero que otorga a su comprador el derecho de recibir un ingreso futuro.

²Un bono es un activo financiero.

³Se entiende por acción a una proporción en la que se divide el capital o importe monetario de los bienes de los socios de una sociedad anónima o empresa.

2.2. Sistemas inteligentes

A continuación se presentan algunos conceptos referentes al tema de sistemas inteligentes, necesarios para una clara comprensión de los algoritmos desarrollados en este trabajo de tesis.

Un sistema inteligente es un programa computacional el cual cumple con características propias de la inteligencia de seres vivos como los son: la comunicación, el aprendizaje, la evolución, la reproducción, etc. Usualmente los sistemas inteligentes son empleados en problemas de optimización.

En optimización se hace uso de la palabra heurística para referirse al tratamiento que se le da a un problema “muy difícil” para encontrar o mejorar una solución. Se utilizan métodos heurísticos para obtener “buenas soluciones” de problemas cuando al aplicar métodos exactos los tiempos de cómputo son exageradamente altos, o bien cuando un problema no puede ser resuelto por un método exacto por alguna de las siguientes razones [16]:

1. El espacio de búsqueda de soluciones es demasiado grande.
2. El problema es tan complicado que al simplificar el modelo se llega a una solución poco útil.
3. La función de evaluación que describe la calidad de cada solución en el espacio de búsqueda varía con el tiempo y/o tiene ruido.
4. El espacio factible ocupa una proporción muy pequeña del espacio de soluciones, por lo cual es muy complicado generar soluciones factibles.

Entonces, se emplean métodos heurísticos para obtener soluciones de buena calidad. De manera opuesta a los métodos exactos, los cuales nos garantizan una solución óptima a un problema dado, los métodos heurísticos pretenden generar buenas soluciones, sin embargo esto no quiere decir que encuentren una solución óptima. Como se menciona en [5] el tiempo empleado por un método exacto, en caso de que exista, en la solución de un problema difícil es de un orden mucho mayor al de una heurística, a veces este tiempo es tan grande que resulta inconveniente aplicar técnicas exactas. Por este motivo para problemas de optimización reales, por ejemplo el problema del portafolio de inversión, usualmente se recurre a métodos heurísticos. Bienstock menciona que algunos modelos derivados del modelo de media-varianza de Markowitz, en particular cuando se agregan restricciones de cardinalidad y restricciones en la proporción del capital a invertir, es un problema de tipo NP-duro (*NP-hard*) [3]. Se debe mencionar que este tipo de restricciones no fueron empleadas en las pruebas de este trabajo. Por otra parte, una metaheurística es un método que dirige la interacción entre un proceso de mejora y estrategias de alto nivel, para crear un proceso capaz de escapar de un óptimo local y realizar una búsqueda robusta en el espacio de soluciones [6]. Las metaheurísticas pueden dividirse en dos clases, metaheurísticas basadas en población, y metaheurísticas basadas en una solución. Algunos ejemplos de metaheurísticas basadas en una solución se

encuentran: Búsqueda Tabú, Búsqueda en Vecindades Variables (VNS, del inglés, *Variable Neighborhood Search*), Búsqueda Local Iterativa (ILS, del Inglés, *Iterated Local Search*), Recocido Simulado, etc., [7] en estos casos se emplea una sola solución la cual se modifica en cada iteración. Algunas de las metaheurísticas basadas en población son: Optimización por Colonia de Hormigas (ACO, del inglés, *Ant Colony Optimization*), Algoritmos Genéticos, Evolución Diferencial, etc., como su nombre lo indica emplean un conjunto de soluciones para realizar una exploración en el espacio de búsqueda. En este trabajo de tesis se propone el uso de una metaheurística, llamada Optimización por Enjambre de Partículas (PSO), que se basa en una población, y en la interacción entre los individuos que la forman, para generar soluciones de buena calidad para el problema de portafolio de inversión. Se emplea esta técnica como inspiración para proponer dos algoritmos, el primero de ellos emplea una versión clásica de PSO, mientras que el segundo se basa en una versión modificada llamada PSO-3P. Es importante destacar que estas versiones de PSO fueron diseñadas para optimizar problemas con un solo objetivo. Por lo tanto, cuando se está trabajando con dos o más objetivos ambas técnicas guían su proceso de búsqueda y optimización mediante el uso de una suma ponderada. Al emplear diferentes combinaciones de ponderadores, se alcanzan soluciones de diferente calidad las cuales, de forma ideal, serán óptimas en el sentido de Pareto. El concepto de óptimo de Pareto define toda situación en la que no es posible beneficiar un objetivo sin provocar modificaciones en otro. De esta forma, un frente de Pareto se define como un conjunto de óptimos de Pareto con los cuales se comparan los resultados obtenidos al resolver algún problema de multi-objetivo, como es el caso del portafolio de inversión, donde se pretende maximizar un retorno a la par de reducir el riesgo al realizar una inversión. En este trabajo la función objetivo está formada por la suma ponderada del riesgo y el retorno, a través de un parámetro de aceptación de riesgo. De esta forma, al encontrar un óptimo de Pareto, no será posible mejorar el retorno sin aumentar el riesgo, o viceversa.

Capítulo 3

Introducción

En este capítulo se presenta una breve introducción al problema del portafolio de inversión, se describen los objetivos propuestos y la metodología empleada para cumplirlos.

3.1. Planteamiento del problema

La construcción de portafolios de inversión es una de las tareas más complejas que se encuentran en el mundo financiero, consiste en la selección de uno o varios activos en los cuales una persona física o moral invertirá su capital. Para construir un portafolio de inversión se debe seleccionar un conjunto de activos, por ejemplo: acciones, las cuales son activos de renta¹ variable emitidos por empresas privadas no necesariamente pertenecientes al sector bancario o financiero. Cabe destacar que la utilidad producida por las acciones se ve afectada entre otras cosas por el entorno económico, social y político. Por lo tanto, para la elección de cada activo que formará parte del portafolio, se tiene que analizar cuidadosamente el riesgo y el retorno que puede ofrecer dicho activo. Uno de los problemas típicos de portafolio consiste en construir un portafolio, o cartera, de inversión de tal manera que se obtenga el retorno máximo a la par de obtener un bajo nivel de riesgo². Este problema a simple vista parece muy sencillo, pero tiene muchas posibles soluciones debido a las múltiples combinaciones de activos que se pueden considerar, y a las diferentes ponderaciones, o importancia relativa, que se puede asociar al riesgo y al retorno, así como las distintas restricciones que se pueden agregar al modelo del problema del portafolio de inversión, según las preferencias del inversor. Para construir un portafolio de inversión se deben equilibrar las pérdidas y ganancias, repartiendo y compensando el riesgo de los diferentes activos. La intención de formular un portafolio de inversión es obtener una ganancia mayor y un menor riesgo al realizar una inversión. Es un hecho que al invertir el capital en un solo activo el riesgo es mayor que al invertir el capital en diversos activos. Suponiendo que se invierte todo el capital en un solo activo y en caso de que este activo no devuelva los resultados esperados se podría tener una gran pérdida, incluso se podría perder todo el capital invertido. Cuando se construye un portafolio de inversión con diversos activos se está disminuyendo el riesgo, ya que la pérdida de uno de los

¹Renta se define como la utilidad o beneficio que rinde anualmente algo, o lo que de ello se cobra. [1]

²Existen otros tipos de problemas como los que se mencionan en la sección (5.2)

activos que conforman el portafolio puede compensarse con las ganancias de los otros activos.

El problema del portafolio de inversión es un problema que ha sido modelado de distintas maneras para su solución, la mayoría de ellas parten de un mismo modelo, el modelo de media-varianza propuesto por Harry Markowitz en 1952. A partir de ese momento se pueden encontrar diferentes propuestas para formular el problema. En la literatura especializada se ha reportado, por ejemplo, el uso de un modelo extendido del modelo de media-varianza, que consiste en agregar restricciones de cardinalidad, las cuales aseguran que el número de activos que se incluirán en el portafolio se encuentra dentro de los límites establecidos por el inversor. Estos dos modelos, son la base para el problema del portafolio de inversión. En la actualidad se sigue proponiendo el uso de distintas técnicas metaheurísticas para resolver los distintos modelos del problema del portafolio de inversión, lo cual ha motivado al desarrollo de nuevos métodos para encontrar mejores soluciones. Es por ello que en este trabajo de tesis se proponen dos algoritmos basados en las metaheurísticas Optimización por Enjambre de Partículas (PSO) y Optimización por Enjambre de Partículas de tres fases (PSO-3P) para la solución del modelo de media-varianza.

3.2. Objetivo del trabajo

El objetivo de este trabajo es aplicar PSO y PSO-3P al modelo de media-varianza para analizar el comportamiento de ambas estrategias al resolver el problema de portafolio de inversión. Por lo anterior, se desarrollarán dos algoritmos basados en PSO y PSO-3P que se aplicarán a un conjunto de instancias de prueba. Los resultados obtenidos podrán compararse con los reportados en el trabajo de Chang et al., [17], que es un trabajo de referencia para muchos autores que trabajan con el problema del portafolio de inversión. Asimismo, se realizarán análisis estadísticos que permitirán entender las ventajas y deficiencias de ambos algoritmos en este tipo de problemas.

3.3. Metodología empleada

En este trabajo de tesis el problema del portafolio de inversión se presentó a través del modelo de media-varianza, se emplearon restricciones de no negatividad, para prohibir soluciones con "inversiones negativas", y restricciones que garanticen la inversión de todo el capital disponible, mientras que mediante la función objetivo se buscó un equilibrio entre riesgo y retorno mediante una suma ponderada. Para la solución de este modelo se implementó la técnica metaheurística, Optimización por Enjambre de Partículas (PSO), que ha reportado muy buenos resultados para la solución de este tipo de problemas. Asimismo, se propuso el uso de una técnica basada en PSO llamada PSO-3P, la cual se caracteriza por dividir en tres fases el proceso de búsqueda original de PSO. Para poder evaluar el desempeño de los algoritmos desarrollados, se consideraron 5 instancias reportadas en la literatura especializada. Los resultados obtenidos fueron evaluados estadísticamente y comparados con los

reportados por Chang et al., quienes emplearon algoritmos inspirados en Recocido Simulado, Búsqueda Tabú y Algoritmos Genéticos.

El resto del trabajo se divide de la siguiente forma. En el capítulo cuatro se explica el funcionamiento de las estrategias de optimización PSO y PSO-3P, y se presenta el pseudocódigo de cada una de ellas. En el capítulo cinco se incluye la revisión de la literatura especializada. En este espacio se realiza una introducción a la teoría del portafolio de inversión, se presenta la formulación del modelo de media-varianza, y se hace mención de un modelo de media-varianza con restricciones de cardinalidad. Asimismo se describen algunos de los modelos que se han propuesto para la construcción de los portafolios de inversión partiendo del modelo de media-varianza, y se presenta la revisión de algunos de los métodos empleados para la solución de estos modelos. Para finalizar el capítulo cinco se describe detalladamente el trabajo de Chang et al., que sirvió como referencia para este trabajo de tesis. En el capítulo seis se describe la adaptación de los métodos de PSO y PSO-3P al problema del portafolio de inversión. En el capítulo siete se muestran los resultados, y análisis estadísticos, de los experimentos computacionales realizados sobre las instancias reportadas en el trabajo de Chang et al. El último capítulo, capítulo ocho, se presentan las conclusiones y las recomendaciones para trabajo futuro.

Capítulo 4

Sistemas inteligentes

Dentro de las metaheurísticas basadas en poblaciones, se puede hacer una subdivisión con aquellas inspiradas en la naturaleza. Una metodología de este tipo se basa principalmente en la forma en que seres auto-organizados no centralizados resuelven sus problemas trabajando de forma independiente, pero compartiendo información periódicamente. A través de las observaciones que se han hecho de los sistemas naturales se han propuesto nuevos paradigmas de computación [4] por ejemplo, las formas complejas en las que vuelan las aves en una parvada sin chocar entre sí, las rutas óptimas que encuentran algunas hormigas para trasladarse desde su nido hasta un sitio donde se proveen de alimentos, la manera en que sobreviven ciertos ecosistemas naturales, la evolución, etc., son procesos naturales que han servido de inspiración para desarrollar una gran variedad de métodos computacionales. Así es como se han llegado a desarrollar varios métodos de optimización como por ejemplo: Colonia Artificial de Abejas, Optimización por Colonia de Hormigas, Cardumen de Peces (AFSA, del inglés, *Artificial Fish-Swarm Algorithm*) [15], Algoritmo de Luciérnagas (FA, del inglés, *Firefly Algorithm*) [13], Algoritmo de Murciélagos (BA, del inglés, *Bat-Inspired Algorithm*) [14], entre otros. En este trabajo de tesis se emplea un algoritmo basado en la estrategia metaheurística Optimización por Enjambre de Partículas, por lo cual las siguientes secciones se dedican a explicar de forma detallada, algunas de las características más importantes de su funcionamiento.

4.1. Optimización por Enjambre de Partículas

Cuando el ser humano enfrenta un problema comúnmente lo resuelve hablando con otras personas, ya que a través de la experiencia de los demás o de alguna información que tengan otras personas es posible encontrar una solución, y es así como trabaja principalmente el enjambre de partículas, mediante interacción social [8]. Optimización por Enjambre de Partículas (PSO, del inglés, *Particle Swarm Optimization*) es una estrategia creada en 1995 por Eberhart y Kennedy. PSO es una metaheurística que trabaja con agentes, llamados partículas, que se mueven a través de un espacio de búsqueda utilizando los principios de evaluación, comparación e imitación. Cada agente representa una solución del problema, y en cada iteración se mueven a través del espacio de soluciones. Por medio de estos recorridos

recolectan información que posteriormente comparten entre sí, de esta forma el agente que se encuentre en la mejor posición (el mejor global) influirá en los demás atrayéndolos hacia su vecindario. Para poder realizar estos desplazamientos la partícula se apoya en los datos que forman parte de su estructura, estructura que se describe a continuación:

- Un vector β que describe la posición de la partícula en el espacio de soluciones. El tamaño de este vector depende del número de variables que implica el problema en cuestión.
- El valor de β'_g que es el mejor valor encontrado por alguna partícula del enjambre.
- El valor de β'_i que es el mejor valor encontrado por una partícula.
- Un vector \vec{v} que representa la velocidad de una partícula.

La posición y velocidad de cada partícula i , en un tiempo t , quedarán representadas de la siguiente manera $\beta_{i,t}$ y $v_{i,t}$, respectivamente. Estos valores se sumarán para encontrar la nueva posición de la partícula en el tiempo $t + 1$, $\beta_{i,t+1}$. Estos movimientos realizados en PSO, son para que cada una de las partículas realice la búsqueda de una solución óptima en áreas con una probabilidad alta de contener soluciones de buena calidad. En cada iteración del método, cada partícula i , irá modificando su dirección considerando la mejor posición visitada por la partícula, β'_i , y la mejor posición visitada por el enjambre, β'_g , hasta ese momento. En la Figura (4.1) se representa el movimiento de una partícula en dos dimensiones. Se observa que para una partícula i , la nueva posición $\beta_{i,t+1}$, se obtiene como resultado de operaciones vectoriales entre su velocidad actual, $v_{i,t}$, su posición actual $\beta_{i,t}$, la mejor posición visitada por la partícula, β'_i , y la mejor posición conocida por el enjambre, β'_g .

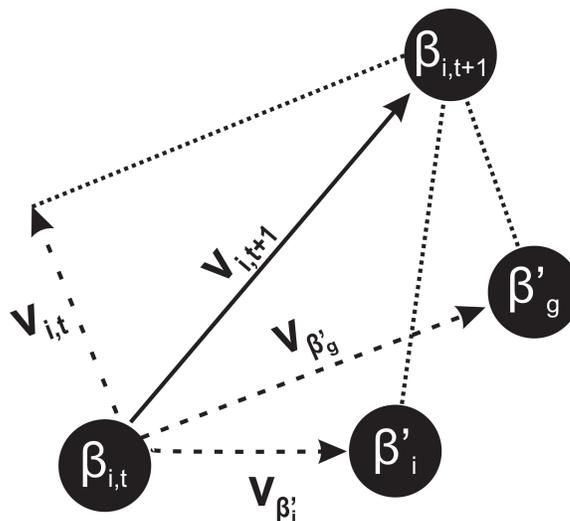


Figura 4.1: Desplazamiento de una partícula en PSO.

4.1.1. Topología de las partículas

La comunicación entre las partículas está determinada por una topología de red que define quiénes son los vecinos de cada agente, con los cuales se comunicará para transferir información [4, 8]. Existen diferentes topologías reportadas en la literatura, y cada una de ellas influye en la rapidez con que se propaga la información en el enjambre, y por supuesto en la velocidad de convergencia del algoritmo, ver Figura 4.2. La topología empleada en esta tesis es la topología *gbest* (mejor global, del inglés *global best*) donde se plantea que la partícula β'_g con la mejor posición de todas influenciará la posición y la velocidad de todas las partículas en el enjambre. Esta topología puede ser conceptualizada como un grafo totalmente conectado, ver Figura 4.2(a), aunque en la práctica sólo significa que el programa debe conservar la mejor solución visitada por el enjambre, y que cada una de las partículas se verá influenciada por dicha solución. De esta forma, la propagación de las partículas en el espacio de búsqueda para encontrar la mejor solución a través de la topología *gbest*, se realiza mediante el desplazamiento de todo el enjambre hacia la región del espacio de búsqueda donde se encuentra la mejor solución conocida hasta ese momento, β'_g , con lo cual dicha región se convierte en el mejor vecindario para todas las partículas. Conforme las partículas convergen, empiezan a realizar una búsqueda en el vecindario β'_g . Posteriormente puede ocurrir que otra partícula encuentre una mejor solución, y esta región de búsqueda se convertirá en el nuevo mejor vecindario, que empezará a atraer a las partículas. Al final, la mejor posición visitada es devuelta como la mejor solución construida por la partículas.

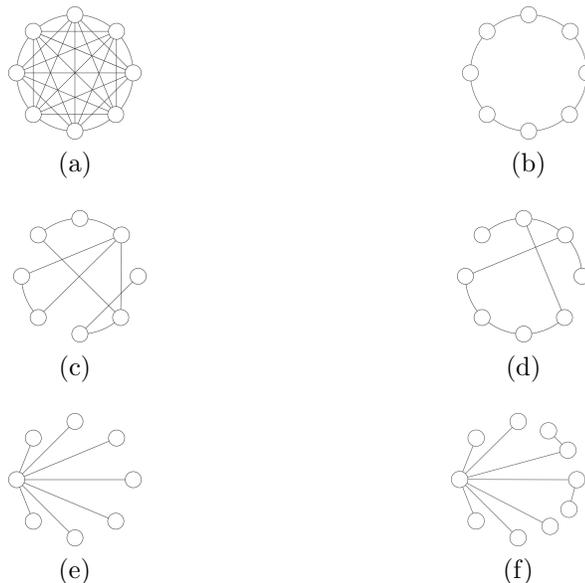


Figura 4.2: Topologías: (a) Mejor global, *gbest*. (b) Mejor local, *lbest*. (c) Arcos aleatorios. (d) Circular con conexiones variantes y 2 subvecindarios. (e) Rueda. (f) Rueda con conexiones variantes.

4.1.2. Método de Optimización por Enjambre de Partículas (PSO)

Al iniciar PSO todos los agentes se generan de manera aleatoria, lo cual implica asignar valores aleatorios a las soluciones y a las velocidades de cada partícula. Posteriormente, en cada iteración, la velocidad de cada partícula es modificada de manera aleatoria, guiada principalmente por la mejor posición conocida por la partícula, y por la mejor posición conocida por todos sus vecinos. La nueva velocidad es empleada para modificar la posición de la partícula, y se calcula su nuevo costo. Todo esto se realiza con base en la evaluación, comparación e imitación [9].

- **Evaluación:** Es la tendencia al estímulo para evaluar si los valores, son positivos o negativos, atractivos o repulsivos, que es la principal característica de los seres vivos. El aprendizaje no ocurre a menos que el organismo pueda evaluar, o distinguir si las características del medio ambiente son atractivas o repelentes, poder discernir lo malo de lo bueno.
- **Comparación:** Los estándares para comportamientos sociales son establecidos con base en la comparación con otros. La comparación sirve como un tipo de motivación para aprender y cambiar, en la mayoría de las cosas que se piensan y hacen, se juzgan a través de comparaciones con otros, como la apariencia, riqueza, inteligencia, etc., En PSO las partículas imitan a sus semejantes que se encuentran en una mejor posición que ellas mismas, es así como el mejor global atrae a su vecindario a las demás partículas.
- **Imitación:** Se podría pensar que la imitación puede darse en cualquier lugar en la naturaleza, ya que es una forma efectiva de aprender a hacer las cosas. Sin embargo, Lorenz afirma que muy pocos animales son capaces de imitar; de hecho, él asegura que sólo los humanos y algunas aves son capaces de hacerlo. La verdadera imitación es esencial para la sociabilidad humana, y es también fundamental para la adquisición y mantenimiento de las habilidades mentales.

A continuación se describen los principales pasos empleados por PSO basados en [4].

1. Crear una población de n partículas distribuidas en el espacio factible. Normalmente se realiza mediante la generación de soluciones aleatorias.
 2. Evaluar la calidad, o costo, de la posición de cada una de las partículas de acuerdo a una función objetivo (función de aptitud).
 3. Al conocer el costo de la posición de cada partícula, se podrá determinar si la posición actual es mejor que la posición previa, y en su caso se deberá actualizar el vector β'_i .
-

4. Determinar si se ha encontrado una solución que mejore el costo de β_g , en caso de que así sea se deberá la actualizar la posición de β_g .

5. Actualizar las velocidades de las partículas $i = 1, 2, \dots, n$, de acuerdo a:

$$v_{i,t+1} = \alpha v_{i,t} + rand(0, \varphi_1)[\beta'_i - \beta_{i,t}] + rand(0, \varphi_2)[\beta'_g - \beta_{i,t}] \quad (4.1)$$

6. Mover las partículas a sus nuevas posiciones de acuerdo a:

$$\beta_{i,t+1} = \beta_{i,t} + v_{i,t+1} \quad (4.2)$$

7. Ir al paso 2 hasta que el criterio de paro se satisfaga.

donde:

- $v_{i,t+1} = \alpha v_{i,t} + rand(0, \varphi_1)[\beta'_i - \beta_{i,t}] + rand(0, \varphi_2)[\beta'_g - \beta_{i,t}]$
- $v_{i,t}$ es la velocidad de la i -ésima partícula en el tiempo t .
- $v_{i,t+1}$ es la velocidad de la i -ésima partícula en el tiempo $t+1$.
- $\beta_{i,t}$ es la posición de la partícula i -ésima en el tiempo t .
- β'_g es la mejor posición conocida por el enjambre.
- β'_i es la mejor posición de la partícula i -ésima.
- $rand(0, \varphi)$ es un valor aleatorio con distribución uniforme en el intervalo $[0, \varphi]$.

A continuación se presenta el pseudocódigo de PSO:

Algoritmo 1: Pseudocódigo de PSO

```

1 Sean  $M$  el número de iteraciones, y  $N$  el número de partículas en el enjambre.
2 Asignar de forma aleatoria una posición a las  $N$  partículas:  $\beta_{1,0}, \beta_{2,0}, \dots, \beta_{N,0}$ .
3 Inicializar los valores de las velocidades de cada partícula:  $v_{1,0}, v_{2,0}, \dots, v_{N,0}$ 
4 Evaluar mediante la función objetivo el costo asociado a la posición de cada partícula.
5 Actualizar el valor de  $\beta'_i$  para cada partícula y el valor de  $\beta'_g$ 
6 Para  $t = 0$  hasta  $t < M$  hacer
7   Para  $i < N$  hacer
8     Actualizar la velocidad de la partícula  $i$  mediante la siguiente ecuación.
9      $v_{i,t+1} = \alpha v_{i,t} + rand(0, \varphi_1)[\beta'_i - \beta_{i,t}] + rand(0, \varphi_2)[\beta'_g - \beta_{i,t}]$ 
10    Actualizar la posición de la partícula  $i$  mediante la ecuación
11     $\beta_{i,t+1} = \beta_{i,t} + v_{i,t+1}$ 
12    Si la nueva posición mejora el costo de  $\beta'_i$ , entonces  $\beta'_i \leftarrow \beta_{i,t+1}$ .
13  fin
14  En caso de haber encontrado una mejor posición, se deberá actualizar el valor de  $\beta'_g$ 
15   $t = t + 1$ 
16 fin

```

4.1.3. Método derivado de Optimización por Enjambre de Partículas (PSO-3P)

PSO es un método robusto que gracias a la aleatoriedad que emplea en la generación de las soluciones evita quedar atrapado en óptimos locales. Sin embargo, se han propuesto diferentes estrategias que ayuden a mejorar el desempeño de esta técnica. Recientemente, de los Cobos propuso en su trabajo *SC-System Of Convergence Theory And Foundations*, una nueva variante de PSO, llamada PSO-3P [11]. PSO-3P es una estrategia que busca mejorar el desempeño de la versión clásica de PSO, mediante la modificación de la posición de las partículas empleando tres estrategias, cada una de las cuales se aplica en tres momentos o fases diferentes durante el proceso de búsqueda, para mayores referencias sobre PSO-3P se recomienda [10, 12].

En la primera fase de PSO-3P se realiza una búsqueda semejante a la empleada en la versión clásica de PSO. Sin embargo, PSO-3P agrega dos estrategias de búsqueda que ayudan a diversificar e intensificar la exploración en el espacio de soluciones, dando como resultado mejores soluciones que las que se pueden encontrar aplicando el método original de PSO. PSO-3P agrega en sus dos últimas fases la generación y sustitución aleatoria de partículas. En la segunda fase, después de un número preestablecido de iteraciones sin que se haya podido actualizar la posición de β'_g , se genera una partícula de forma aleatoria la cual sustituye a una partícula del enjambre. En la tercera fase, después de un número preestablecido de iteraciones sin que se haya podido actualizar la posición de β'_g , se genera una partícula de manera aleatoria dentro del vecindario de β'_g , y se emplea para sustituir una partícula del

enjambre elegida aleatoriamente. Las características de las fases 2 y 3 hacen destacar los resultados obtenidos por PSO-3P. A continuación se explica a detalle cada una de las fases establecidas para PSO-3P.

En la primera fase, conocida como estabilización, se aplica el método original de PSO, tal como se describe en la sección (4.1). Por lo tanto, se inicia generando un conjunto aleatorio de partículas, y durante $F1$ iteraciones la posición y la velocidad de las partículas se modifica de acuerdo a las ecuaciones (4.1) y (4.2). De esta forma, se espera que al final de la fase 1 las partículas se encuentren concentradas en una región prometedora del espacio de soluciones.

Al terminar la fase 1 se inicia una estrategia de tipo primero en amplitud, llamada fase 2. En esta fase, la cual dura $F2$ iteraciones, si la mejor solución global no es mejorada después de un número predeterminado de iteraciones consecutivas, se generan de forma aleatoria $N * prop$ partículas nuevas, con $prop \in [0, 1]$. Cada una de estas partículas puede ser incorporada en la población con una probabilidad de 0.5, sustituyendo a otra partícula en el enjambre. De esta forma, el tamaño de la población permanece constante. Sin embargo, se debe tener cuidado de no perder a la partícula con la mejor posición en el enjambre. De esta forma, parte del enjambre se dispersa en el espacio de soluciones, pero puede ser atraído nuevamente hacia la mejor región visitada hasta el momento.

En la última etapa del método se inicia la fase 3, durante la cual se emplea un estrategia primero en profundidad. En esta fase, si la mejor solución no es mejorada durante cierto número de iteraciones consecutivas, se generan $N * prop$ partículas en un vecindario de la mejor solución conocida. Nuevamente, cada una de estas partículas puede ser incorporada en la población con una probabilidad de 0.5, sustituyendo a otra partícula en el enjambre, de tal forma que el tamaño de la población permanezca constante. Con esta técnica se busca intensificar la búsqueda en una región prometedora.

A continuación se presenta el pseudo-código de PSO-3P.

Algoritmo 2: Pseudocódigo de PSO-3P

```

1 Establecer variables de entrada C1, F1, F2, F3 y prop.
2 Sean M el número de iteraciones, y N el número de partículas en el enjambre.
3 Asignar de forma aleatoria una posición a las N partículas:  $\beta_{1,0}, \beta_{2,0}, \dots, \beta_{N,0}$ .
4 Inicializar los valores de las velocidades de cada partícula:  $v_{1,0}, v_{2,0}, \dots, v_{N,0}$ 
5 Evaluar mediante la función objetivo el costo asociado a la posición de cada partícula.
6 Actualizar el valor de  $\beta'_i$  para cada partícula y el valor de  $\beta'_g$ 
7 Para iteraciones < M hacer
8   Para i < N hacer
9     si  $\beta'_g$  no ha mejorado entonces
10      | cont = cont + 1
11     fin
12     en otro caso
13      | cont = 0
14     fin
15     Actualizar la velocidad de la partícula i, acorde a la ecuación (4.1)
16     Actualizar la posición de la partícula i, acorde a la ecuación (4.2)
17     si  $F1 < \text{iteraciones} \leq F2$  entonces
18       si cont = C1 entonces
19         n = 1
20         Mientras n < N * prop hacer
21           si  $\text{rand}[0, 1] \geq 0.5$  entonces
22             | Generar una partícula de manera aleatoria y sustituirla de forma aleatoria por una
23             | partícula del enjambre.
24             | n = n + 1
25           fin
26         fin
27         cont = 0
28       fin
29     si  $F2 < \text{iteraciones} \leq F3$  entonces
30       si cont = C1 entonces
31         n = 1
32         Mientras n < N * prop hacer
33           si  $\text{rand}[0, 1] \geq 0.5$  entonces
34             | Generar una partícula de manera aleatoria dentro del vecindario del mejor global  $\beta'_g$  y
35             | sustituirla por una partícula elegida aleatoriamente.
36             | n = n + 1
37           fin
38         fin
39         cont = 0
40       fin
41     Si  $\beta_{i, \text{iteraciones}+1}$  tiene un mejor costo que  $\beta'_i, \beta'_i \leftarrow \beta_{i, \text{iteraciones}+1}$ 
42   fin
43   En caso de haber encontrado una mejor posición, se deberá actualizar el valor de  $\beta'_g$ 
44 fin

```

En el Capítulo 6 se describen a detalle los algoritmos PSO y PSO-3P adaptados al problema del portafolio de inversión.

Por otra parte, en el siguiente capítulo se presenta el estado del arte, incluyendo distintos modelos y métodos empleados para resolver el problema del portafolio de inversión. También se incluye una descripción del trabajo de Chang et al., ya que este trabajo fue base para comparar resultados obtenidos por PSO y PSO-3P con los resultados obtenidos mediante Recocido Simulado, Búsqueda Tabú y Algoritmos Genéticos.

Capítulo 5

Estado del arte

El problema de selección de portafolios de inversión es visto como un problema de optimización de doble criterio, riesgo-retorno, de acuerdo con el modelo de media-varianza [20, 21] propuesto por Harry Markowitz (1952, 1959). Markowitz muestra cómo producir posibles combinaciones eficaces de riesgo y retorno, cómo formular un conjunto de portafolios de inversión eficientes, y entre ellos un portafolio de inversión óptimo. También introduce cómo se puede reducir el riesgo total de un portafolio de inversión mediante la diversificación de los activos cuyos rendimientos no se vean afectados de la misma manera por los factores que produzcan variaciones en los mismos. En este capítulo se hace una revisión del estado del arte incluyendo: la formulación del modelo de media-varianza, algunos modelos del problema del portafolio de inversión, así como algunos métodos usados para resolver dichos modelos. También se explica a detalle el artículo publicado por Chang et al., el cual contiene las instancias y resultados que fueron usados como punto de referencia para validar el desempeño de los algoritmos propuestos en esta tesis.

5.1. Portafolio de inversión

La teoría moderna del portafolio tiene sus orígenes en el modelo de media-varianza [20] introducido por Harry Markowitz (1952), trabajo en el cual establece una relación entre el retorno y el riesgo a través de la media y la varianza del portafolio. Como resume Harms en [18], las siguientes premisas son fundamento del modelo de media-varianza: 1) un inversionista puede estimar la rentabilidad y la distribución de probabilidad para todo activo o portafolio de inversión, 2) la media de esa distribución representa el retorno esperado, 3) la varianza o desviación estándar representa el riesgo del portafolio o el activo, 4) es preferible un portafolio o cartera con un mayor retorno y menor riesgo, 5) un portafolio es eficiente si ofrece el mayor retorno para un riesgo dado y 6) para cada inversionista un portafolio es óptimo cuando este se encuentra en el punto de tangencia entre el conjunto de portafolios eficientes y una de las curvas de indiferencia al riesgo ¹ del inversionista, como se muestra en la Figura (5.1).

¹Una curva de indiferencia al riesgo es un conjunto de puntos en el espacio de combinaciones entre el riesgo y el retorno de un portafolio de inversión para los cuales la satisfacción del inversionista es idéntica, es decir, que para todos los puntos pertenecientes a una de las curvas el inversionista no tiene una preferencia por la combinación representada por uno de los puntos sobre otro.

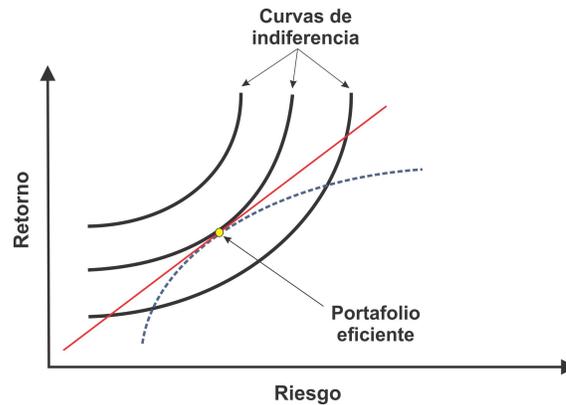


Figura 5.1: Punto de tangencia entre un portafolio eficiente y una curva de indiferencia al riesgo.

Según mencionan en [18], un inversionista puede aumentar el retorno del portafolio sólo mediante la aceptación de mayor riesgo, esto solo es aplicable para casos de inversiones en un sólo activo o un conjunto de activos en el cual la inversión se hace de manera independiente entre los activos mismos. Al realizar la formulación de portafolios de inversión se busca la posibilidad de reducir el riesgo mediante la diversificación del portafolio, esto sin reducir el retorno del mismo.

5.2. Modelo de media-varianza

Un portafolio de inversión es un conjunto de dos o más activos que se cotizan en el mercado bursátil, en los que una persona física o moral decide emplear o invertir su dinero. Este capítulo está basado en el trabajo [19] presentado por Gupta et al., en el cual muestran el modelo de media-varianza con algunas definiciones y la formulación del modelo. “Un buen portafolio de inversión es aquel que entrega una mejor ganancia para un determinado nivel de riesgo o el que presenta menos riesgos a determinado nivel de ganancia. Así un buen portafolio estaría conformado por distintos activos que sean diferentes y no sean similares respecto a esas características”. El problema matemático del portafolio puede formularse de distintas formas, a continuación se muestran las más comunes:

1. Minimizar el riesgo para una ganancia específica esperada.
2. Maximizar la ganancia para un riesgo específico determinado.
3. Reducir el riesgo y maximizar la ganancia esperada utilizando un factor de aversión al riesgo².
4. Minimizar el riesgo independientemente de la ganancia esperada.

²El factor de aversión al riesgo es una manera de medir el riesgo al cual se expone un inversionista al invertir su capital en un activo o un portafolio de inversión.

5. Maximizar la ganancia independientemente del riesgo esperado.

Harry Markowitz se dio a la tarea de proponer un modelo para seleccionar un buen portafolio de inversión, en 1952 publicó su teoría llamada *Portfolio Selection* [20]. Markowitz suponía que las creencias o proyecciones respecto a los activos obedecían a las mismas reglas de probabilidad que las variables aleatorias. De esta suposición, se estableció que (i) el retorno esperado del portafolio es un promedio ponderado de los retornos esperados de cada uno de los activos, y (ii) la varianza del retorno del portafolio es una función particular de las varianzas y las covarianzas entre los activos, y sus pesos en el portafolio.

Markowitz sugiere que la selección de portafolios debe basarse en creencias razonables acerca del futuro, en lugar de los comportamientos pasados. Elecciones basadas en resultados anteriores sólo asumen que en los rendimientos obtenidos en el pasado son buenas estimaciones de "probables" retornos en el futuro; y la variabilidad del retorno en el pasado es una buena medida de incertidumbre del retorno futuro.

5.3. Formulación del modelo de media-varianza

A continuación se describe la formulación del modelo matemático de media-varianza, propuesto por Markowitz. Tambición se presentan algunas definiciones que ayudan a comprender algunos términos respecto al portafolio de inversión. Para la formulación del modelo de media-varianza, sea R_i una variable aleatoria que representa la cantidad de retorno (por período) del i -ésimo activo ($i = 1, 2, \dots, n$). Asimismo, β_i sea una proporción del capital total invertido en el i -ésimo activo.

El retorno de un activo puede ser expresado como la tasa de retorno que es definida durante un período dado. El período de retorno puede ser en un día, una semana, un mes o un año. En particular, para el i -ésimo activo la realización para $r_{i,t}$ de la variable R_i durante el período t ($t = 1, 2, \dots, T$) está definida como:

$$r_{i,t} = \frac{p_{i,t} - p_{i,t-1} + d_{i,t}}{p_{i,t-1}} \quad (5.1)$$

donde $p_{i,t}$ denota el precio de cierre del i -ésimo activo durante el período t , $p_{i,t-1}$ es el precio de cierre durante el período $t - 1$, $d_{i,t}$ es el dividendo del i -ésimo activo durante el período t . El retorno esperado (por período) de la inversión (portafolio) está dado por:

$$r(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = E \left[\sum_{i=1}^n R_i \beta_i \right] = \left[\sum_{i=1}^n E[R_i] \beta_i \right] = \sum_{i=1}^n r_i \beta_i$$

donde $E[R_i]$ representa el valor esperado de la variable aleatoria y $r_i = E[R_i]$. El valor esperado de la variable aleatoria puede ser aproximado por el promedio derivado de los datos pasados, i.e.:

$$r_i = E[R_i] = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{i,t} \quad (5.2)$$

Markowitz sugiere que la varianza que mide la dispersión del retorno esperado puede ser usada para cuantificar el riesgo del portafolio. La varianza del i -ésimo activo denotado por σ^2 es expresada como:

$$\sigma_i^2 = v(R_i) = E [(R_i - E[R_i])^2] = E [(R_i - r_i)^2]$$

También sugirió que la desviación estándar es otra medida de dispersión. La desviación estándar del i -ésimo activo está expresada como:

$$s_i = \sqrt{v(R_i)} = \sqrt{E[(R_i - E[R_i])^2]} = \sqrt{E[(R_i - r_i)^2]}$$

La varianza del retorno en un portafolio no está determinada solamente por las varianzas individuales de los retornos de los activos. Esto también depende de la covarianza entre el retorno de los activos. La covarianza $\sigma_{i,j}$ entre el retorno de los activos R_i y R_j es expresada como:

$$\sigma_{i,j} = E [(R_i - E[R_i])(R_j - E[R_j])]$$

Así, $\sigma_{i,j}$ puede aproximarse de la siguiente manera:

$$\sigma_{i,j} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{i,t} - r_i)(r_{j,t} - r_j) \quad (5.3)$$

Además la covarianza puede ser expresada en términos de la correlación, $\rho_{i,j}$, de la siguiente manera:

$$\sigma_{i,j} = \rho_{i,j} s_i s_j$$

donde $\rho_{i,j}$ es la correlación existente entre el activo i y el activo j , s_i es la desviación estándar del activo i y s_j es la desviación estándar del activo j .

La varianza de retorno de un portafolio es obtenida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} v = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) &= E \left[\left(\sum_{i=1}^n R_i \beta_i - E \left[\sum_{i=1}^n R_i \beta_i \right] \right)^2 \right] \\ &= E \left[\left(\sum_{i=1}^n R_i \beta_i - \sum_{i=1}^n r_i \beta_i \right)^2 \right] = E \left[\left(\sum_{i=1}^n (R_i - r_i) \beta_i \right)^2 \right] \\ &= E \left[\sum_{i=1}^n \beta_i^2 (R_i - r_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \beta_i \beta_j (R_i - r_i)(R_j - r_j) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^n \beta_i^2 E [(R_i - r_i)^2] + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \beta_i \beta_j E [(R_i - r_i)(R_j - r_j)] \\
&= \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \beta_i \beta_j \sigma_{i,j}
\end{aligned}$$

Si se usa el hecho que $v(R_i) = \sigma_{i,j}$, entonces se tiene que:

$$v(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i \beta_j \sigma_{i,j}$$

Nota 1 *Se debe destacar que para este trabajo se optó por emplear la correlación debido a que los datos proporcionados en las instancias empleadas, no incluían la covarianza pero sí la correlación entre los activos.*

Ahora, se presentan las dos distintas formulaciones del modelo de media-varianza de Markowitz, modelo basado en los siguientes supuestos derivados de lo que anteriormente se ha hablado:

1. Los precios de todos los activos en cualquier momento son estrictamente positivos.
2. La tasa de retorno R_i ($i = 1, 2, \dots, n$) es una variable aleatoria finita.
3. Un inversionista puede ser dueño de una fracción de un activo. Este supuesto es conocido como divisibilidad.
4. Un activo puede ser comprado o vendido a cambio de cualquier cantidad en el mercado. Este supuesto se conoce como liquidez.
5. No hay costos de intermediación/transacción.

Caso 1: El modelo de optimización del portafolio para minimizar el riesgo y forzar el retorno esperado del portafolio es formulado de la siguiente forma:

En principio se establece la función a minimizar, en este caso es la función del riesgo del portafolio. La cual incluye los valores de la covarianza entre los activos i y j , $\sigma_{i,j}$, el porcentaje del capital a invertir en el activo i , β_i , y en el activo j , β_j . Donde n es el número de activos que conformarán el portafolio. Está ecuación se queda expresada de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i \beta_j \sigma_{i,j}$$

Las siguientes ecuaciones conforman las restricciones de la función objetivo. La ecuación del riesgo del portafolio esta restringida por la siguiente ecuación, la cual asegura que el retorno esperado del portafolio al final de un período de tenencia debe ser igual al retorno esperado del portafolio r_0 , valor deseado por el inversionista. Donde r_i es el retorno del activo i y β_i es la proporción del capital que se invertirá en el activo i .

$$\sum_{i=1}^n r_i \beta_i = r_0$$

La siguiente ecuación obliga a invertir el 100% del capital disponible para invertir en el portafolio, donde β_i representa la proporción del capital que se invertirá en el activo i .

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$$

Por último, la siguiente restricción limita a que la proporción del capital que se invertirá en el activo i sea mayor o igual a 0 y menor o igual a 1.

$$0 \leq \beta_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

De esta manera el modelo queda representado de la siguiente forma:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i \beta_j \sigma_{i,j}, \quad (5.4)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n r_i \beta_i = r_0, \quad (5.5)$$

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 1, \quad (5.6)$$

$$0 \leq \beta_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.7)$$

donde:

- β_i es el porcentaje del capital a invertir en el activo i .
 - β_j es el porcentaje del capital a invertir en el activo j .
 - $\sigma_{i,j}$ es la covarianza entre el retorno del activo i y el activo j .
 - r_i es el retorno del activo i .
-

- r_0 es el retorno esperado del portafolio.
- n es el número total de activos que conformarán el portafolio.

En (5.4) $\sigma_{i,j}$ se expresará en términos de la correlación entre los activos i y j , $\rho_{i,j}$ ($-1 \leq \rho_{i,j} \leq 1$), de la desviación estándar del activo i , s_i , y de la desviación estándar del activo j , s_j , quedando de la siguiente forma: $\sigma_{i,j} = \rho_{i,j}s_i s_j$.

Caso 2: A continuación se muestra el modelo de optimización de portafolio maximizando el retorno esperado y restringiendo el riesgo del portafolio. El modelo está formulado de la siguiente manera:

La ecuación que será la función a maximizar será la ecuación del retorno esperado del portafolio, el cual incluye el retorno del activo i , r_i , y β_i que es la proporción del capital que se invertirá en el activo i . Donde n es el número de activos que conformarán el portafolio. Está ecuación se queda expresada de la siguiente manera:

$$\max \sum_{i=1}^n r_i \beta_i$$

Las restricciones para la función del retorno esperado, estarán definidas por las siguientes ecuaciones. La primera de ellas representa la varianza del portafolio que el inversionista esta dispuesto a tomar al invertir en ese conjunto de activos y es representada por v_0 . Esta ecuación esta conformada por el porcentaje del capital a invertir en el activo i , β_i , el porcentaje del capital a invertir en el activo j , β_j , y por la la covarianza entre los activos i y j , $\sigma_{i,j}$.

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i \beta_j \sigma_{i,j} = v_0$$

La siguiente ecuación, obliga a invertir el 100% del capital disponible para invertir en el portafolio, donde β_i representa la proporción del capital que se invertirá en el activo i .

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$$

Por último, la siguiente restricción garantiza que la proporción del capital que se invertirá en el activo i sea mayor o igual a 0 y menor o igual a 1.

$$0 \leq \beta_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

De esta manera el modelo quedará representado de la siguiente forma:

$$\max \sum_{i=1}^n r_i \beta_i, \quad (5.8)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i \beta_j \sigma_{i,j} = v_0, \quad (5.9)$$

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 1, \quad (5.10)$$

$$0 \leq \beta_i \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.11)$$

donde:

- β_i es el porcentaje del capital a invertir en el activo i .
- β_j es el porcentaje del capital a invertir en el activo j .
- $\sigma_{i,j}$ es la covarianza entre el retorno del activo i y el activo j .
- r_i es el retorno del activo i .
- v_0 es el riesgo que el inversionista esta dispuesto a tomar.
- n es el número total de activos que conformarán el portafolio.

5.3.1. Modelo extendido del modelo de media-varianza

Como se mencionó anteriormente el modelo extendido del modelo de media-varianza, llamado *ccmv* (por sus siglas en inglés, *cardinality-constrained mean-variance*), consiste en agregar restricciones de cardinalidad que limitan la construcción del portafolio a tener un número específico de activos, e impone límites en las proporciones del capital a invertir en un activo. Basados en [17] el modelo extendido de Markowitz está representado de la siguiente manera:

$$\min \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i \beta_j \sigma_{i,j} - (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n r_i \beta_i, \quad (5.12)$$

Sujeto a:

$$\sum_{i=1}^n \beta_i = 1, \quad (5.13)$$

$$\sum_{i=1}^n z_i = K, \quad (5.14)$$

$$\varepsilon_i z_i \leq \beta_i \leq \delta_i z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.15)$$

$$z_i \in [0, 1], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.16)$$

donde:

- λ es el parámetro de aversión al riesgo $\lambda \in [0, 1]$.
- n es el número de activos diferentes.
- β_i es un porcentaje del capital que será invertida en el activo i .
- β_j es un porcentaje del capital que será invertida en el activo j .
- $\sigma_{i,j}$ es la covarianza entre el retorno del activo i y el activo j .
- r_i es la media de retorno del activo i .
- z_i es una variable de decisión binaria, el activo i será incluido en el portafolio si $z_i = 1$, de lo contrario no será incluido en el portafolio.
- K es el número de activos que se incluirán al portafolio.
- ε_i es límite inferior del porcentaje del capital disponible que se invertirá en el portafolio.
- δ_i es límite superior del porcentaje del capital disponible que se invertirá en el portafolio.
- n es el número total de activos que conformarán el portafolio.

En (5.12) cuando λ es cero, el modelo maximiza el retorno esperado del portafolio sin considerar el riesgo. En contraste, cuando λ es igual a uno, el modelo minimiza el riesgo del portafolio sin tomar en cuenta el retorno esperado, (5.13) asegura que la suma de los porcentajes que se invertirán en cada activo es igual al 100 % del presupuesto disponible, (5.14) asegura que exactamente K activos sean incluidos en el portafolio, (5.15) asegura que si algún activo i está incluido ($z_i = 1$) el porcentaje β_i deberá estar entre ε_i y δ_i mientras que si ($z_i = 0$) el porcentaje β_i es igual a cero. Por último (5.16) asegura que el activo i sea incluido en el portafolio si $z_i = 1$, de lo contrario no se incluirá.

5.4. Modelos derivados del modelo original de media-varianza

En la literatura especializada se encuentran una gran variedad de trabajos que reportan modificaciones al modelo original de Markowitz. Dentro de las primeras publicaciones de este tipo está la presentada por Sharpe en 1971 [22]. En este artículo Sharpe con base en el modelo de media-varianza de Markowitz afirma que si la esencia del análisis del problema del portafolio de inversión podía ser capturada en una forma adecuada para métodos de

programación lineal, las perspectivas para la aplicación práctica serían mejoradas en gran medida. Otro trabajo basado en el modelo de media-varianza es el de Konno [23], donde se propone un modelo lineal para el problema de portafolio como alternativa al modelo de Markowitz. Este modelo está resumido en [24], un trabajo de Konno que se basa en el modelo de riesgo L_1 (riesgo de desviación absoluta promedio³), en el cual se emplea como medida de riesgo la desviación absoluta promedio en lugar de la varianza y no hacen uso de la matriz de covarianzas. Los resultados obtenidos mostraron que el modelo L_1 genera portafolios, muy similares a los generados con el modelo de Markowitz. Finalmente concluyen que el modelo L_1 puede ser usado como alternativa al modelo de Markowitz ya que la construcción de portafolios óptimos y su rendimiento son bastante similares entre sí.

Speranza en (1993) [25] plantea un modelo equivalente al modelo propuesto por Konno y Yamazaki. En este modelo Speranza emplea como función de riesgo una combinación lineal entre la desviación semi-absoluta media, es decir, las desviaciones por encima y por debajo de la tasa de retorno del portafolio de inversión, siempre y cuando la suma de los coeficientes de la combinación lineal sea positiva. Speranza dice que este modelo también es equivalente al modelo de Markowitz, cuando la tasa de retorno está distribuida normalmente. Posteriormente Speranza, en 1996, presenta un modelo lineal entero mixto que generaliza el modelo propuesto por Konno y Yamazaki [26]. Este modelo fue puesto a prueba con datos obtenidos del mercado de acciones de Milán. Esta propuesta divide las restricciones en dos grupos, restricciones duras y restricciones suaves. Las restricciones duras hacen referencia a características observables, como son los costos de transacción y el número mínimo de transacciones. Mientras que las restricciones suaves se refieren a las preferencias del inversionista, tales como el máximo número de activos y el mínimo número de adquisiciones. El resultado es, como se mencionó anteriormente, un modelo de programación lineal entero mixto, y la complejidad de este dependerá del número de variables binarias y enteras, así como de la aplicación específica. Para resolver este modelo Speranza propuso una técnica heurística basada en dos fases, que reflejan el enfoque empírico del inversionista respecto al problema. En la primera fase las características reales del problema que dan lugar a las variables enteras son ignoradas y la versión continua del modelo es resuelta. En la segunda fase las soluciones continuas son adaptadas a las restricciones actuales. Los resultados computacionales mostraron que esta heurística generaba un error menor al 4.1 %, y que el error disminuía cuando el capital invertido incrementaba, para más detalles consultar [26].

A continuación se presentan algunas de las técnicas que se han empleado para resolver los modelos alternos al modelo de media-varianza. En [30] Loraschi *et al.* (1995) emplean una variante de algoritmos genéticos (GA), a la cual llaman algoritmo genético distribuido de grano grueso⁴, basado en una máquina virtual paralela MVP ejecutado en *clusters* de una *workstation*. Este algoritmo fue evaluado satisfactoriamente en funciones estándar de prueba, y posteriormente se aplicó a un problema del portafolio de inversión real. De acuerdo al artículo se formularon portafolios considerando 53 activos y también se realizaron pruebas

³La desviación absoluta promedio es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones.

⁴“Tipo de algoritmo que se caracteriza porque la proporción entre el tiempo de cómputo y el consumido en comunicación es alta”. [31]

con más de 100 activos, en este trabajo los autores no reportan la fuente de los activos. En los experimentos realizados concluyen que el método GA distribuido encontró el óptimo de manera más frecuente que el GA secuencial, y también que el problema fue resuelto de manera más rápida y eficaz por el GA distribuido.

Crama (2003) reporta el uso de Recocido Simulado (SA), en [40], método programado en C (*ANSI C*) y aplicado al modelo original de Markowitz con restricciones adicionales, tales como: el límite mínimo y máximo de la proporción del capital que se invertirá en un activo, el límite máximo que tendrá la variación del precio de un activo en el período actual (impuestos, comisiones, poca liquidez⁵, ...), restricciones de transacción y el límite de activos que se incluirán en el portafolio. Para este trabajo se emplearon 151 acciones que cubrían diferentes sectores tradicionales. Los datos fueron obtenidos en un total de 458 días, esto último con el fin de estimar sus retornos medios y la matriz de covarianzas. La finalidad de este trabajo no fue llegar a una conclusión respecto a las empresas, o el mercado de valores, o la construcción de portafolios óptimos, la meta fue sólo probar el rendimiento computacional del SA. Para la implementación del SA consideraron dos estrategias aplicadas en versiones diferentes, el vecindario y la violación de restricciones. El SA realiza una búsqueda basada en vecindarios, pero es posible que un vecindario contenga soluciones no factibles. Para evitar este problema acotaron el vecindario de tal forma que sólo se generaban soluciones factibles. En cuanto al tema de la violación de restricciones, con el fin de obtener mejores resultados, agregaron un término de penalización por cada restricción violada, de esta manera mientras mayor era la violación a las restricciones el valor de la función objetivo era más penalizado, entonces usando esta penalización las soluciones no factibles poco a poco quedarían excluidas, para mayor información consultar [40]. Uno de los experimentos fue comparar los resultados obtenidos de formular un portafolio con el programa LINGO con 30 activos, comparado con la implementación de SA al problema, obteniendo con SA soluciones muy cerca del óptimo y en un corto tiempo computacional.

En [33], Zhou y Li (2014) implementan un método de optimización multi-objetivo basado en PSO, y lo emplean para obtener un grupo de soluciones no dominadas para el modelo de selección de portafolio multi-objetivo restringido. El modelo propuesto por Zhou y Li, está basado en el modelo original de Markowitz y considera tres criterios (retorno, riesgo y liquidez). Lo particular de este modelo es que la medida de la liquidez está dada en números borrosos (*fussy*). En este trabajo asumen que el cambio de precio de los activos está dado por números borrosos trapezoidales para estimar el cambio de precio futuro de los activos. Para las pruebas numéricas utilizaron el valor de los retornos y el cambio de los precios de 30 activos. Estos datos fueron recolectados mensualmente en el período de 2004 a 2012 de la bolsa de valores de Shangai.

En [34] Kang, Wu y Hsueh (2015) proponen un método modificado de algoritmo inmune (IA, del inglés, *Immune Algorithm*) para resolver un modelo basado en el modelo de media-varianza, utilizando un método llamado *VaR* (*Value At Risk*) el cual es utilizado para representar el riesgo del portafolio, y la función objetivo tiene origen en el retorno del portafolio

⁵La liquidez representa la cualidad de los activos para ser convertidos en dinero efectivo de forma inmediata sin pérdida significativa de su valor.

y el riesgo representado por VaR. Para este trabajo utilizaron el precio del mercado durante el período de 2002 a 2009 para entrenamiento y de 2010 a 2013 para pruebas. Los mercados objetivo eran Taiwan 50 y el mercado de valores eléctrico de Taiwan. El modelo de selección de portafolio utilizado en este trabajo es un modelo derivado del modelo de Markowitz llamado valor en riesgo (VaR, del inglés *Value at Risk*). Al realizar pruebas computacionales, el algoritmo propuesto obtuvo resultados con un significativo retorno mayor al que se obtuvo al resolver por GA y PSO, asimismo proponen un híbrido de IA y PSO (IA-PSO), y un híbrido de GA y PSO. Como resultados finales el híbrido IA-PSO mantuvo un mayor retorno y al mismo tiempo era más estable.

En [37] Pouya, Solimanpur, Rezaee (2016) proponen un método de optimización por hierba invasiva (IWO, del inglés *Invasive Weed Optimization*), método basado en la vida y crecimiento de hierba invasiva, es importante mencionar, como afirman los autores, que en este trabajo se presenta por primera vez la aplicación de IWO al problema del portafolio de inversión. El modelo para la selección del portafolio fue el modelo de media-varianza, a este modelo le agregaron dos objetivos más, P/E criterio y recomendaciones de expertos en el mercado financiero. En general, el criterio P/E representa las ganancias obtenidas a través de un activo en relación con su precio de mercado que puede ser importante y eficaz para los compradores y asesores de inversión. En este artículo el modelo de selección de portafolio multi-objetivo lo convierten a un solo objetivo a través de normalización borrosa y una estrategia llamada diseño uniforme, con la cual se busca generar individuos que exploren el espacio de soluciones uniformemente y dirijan su búsqueda hacia una región específica del frente de Pareto real. Este modelo fue resuelto por el método propuesto basado en IWO y PSO. Los métodos exactos no son eficientes en la construcción de portafolios de inversión de gran tamaño, pero son muy útiles para la solución de pequeños problemas y para validar los resultados de métodos heurísticos, por ejemplo, en este trabajo emplearon el método (RGM) del inglés *reduced gradient method* para la validación de los resultados obtenidos de los métodos IWO y PSO. Se concluyó que IWO y PSO tenían el mismo rendimiento en muchos aspectos importantes, sin embargo IWO superó a PSO en el tiempo de solución del problema y presentó un mejor rendimiento en el dominio de soluciones ineficientes. Mientras que PSO obtuvo mejores resultados en cuanto a la violación de restricciones, es decir, en las pruebas PSO violó menos restricciones que IWO. Las instancias empleadas en este trabajo fueron tomadas mensualmente de más de 50 compañías de la bolsa de valores de Theran en 2013.

5.5. Modelo extendido de Markowitz

El modelo extendido del modelo original de Markowitz, *ccmv*, consiste en agregar restricciones de cardinalidad que limitan la construcción del portafolio a tener un número específico de activos, e impone límites en las proporciones del capital a invertir en un activo. Como mencionan distintos autores, al agregar al modelo restricciones apegadas a la realidad, la complejidad computacional del problema del portafolio de inversión se incrementa. Ejemplos de estas restricciones es la restricción de *floor-ceiling* [38], la cual consiste en establecer un

límite inferior y/o superior al porcentaje del capital que se puede invertir en un activo. Otra de estas restricciones es conocida como (*total weight assigned to asset classes*), que es muy parecida a la restricción *floor-ceiling*, y establece el límite del porcentaje del capital que se puede invertir en una clase o sector de activos. Por ejemplo, la industria del acero, la industria automotriz, entre otras representan diferentes sectores. Este tipo de restricciones incrementa la complejidad del problema del portafolio de inversión, por lo cual los métodos exactos no son viables para poder encontrar una solución óptima en tiempos de cómputo aceptables; por lo que es conveniente implementar estrategias metaheurísticas, capaces de generar soluciones de buena calidad en un tiempo razonable. A continuación se presentan algunos métodos metaheurísticos que se han empleado al modelo de media-varianza con otras restricciones y el modelo de CCMV.

Zhu, Wang, Wang y Chen (2011) en [39] presentan la implementación del método original de PSO al problema del portafolio de inversión y lo aplican al modelo extendido de media-varianza con y sin restricciones, para guiar la convergencia la frontera eficiente utilizó como función objetivo el *Radio de Sharpe*, que combina la información de media y varianza de un activo. Es una medida ajustada al riesgo de la media de retorno. El algoritmo basado en PSO fue programado en *Matlab* y fue comparado con GA que fue desarrollado en una herramienta de desarrollo de software llamada *GeneHunter*. También se realizaron comparaciones con un método (no especifican el método empleado) usando VBA (*Visual Basic Application*). Las instancias fueron extraídas en el período del 1 de mayo al 3 de abril del 2009 y pertenecían a la *Shanghai Stock Exchange 50 Index*. Se formularon portafolios con restricciones considerando 8, 15 y 49 activos y de igual manera con el mismo número de activos se formularon portafolios sin restricciones. Para este caso, y para estas instancias PSO mostró superioridad según los resultados obtenidos en la función *Radio de Sharpe*.

Chen, Liang y Liu (2012) presentan en [27] una adaptación de la metaheurística Colonia Artificial de Abejas (ABC) al problema del portafolio de inversión aplicado al modelo CCMV. [27] fue de los primeros trabajos en implementar ABC a un problema de este tipo, los resultados computacionales fueron comparados con Recocido Simulado, Búsqueda Tabú (TS), y Búsqueda en Vecindarios Variables (VNS, del inglés *Variable Neighborhood Search*). Las instancias utilizadas en este trabajo fueron extraídas de un total de cuatro índices del mercado de valores, Las instancias utilizadas en este trabajo son *Hang Seng* de Hong Kong, *DAX 100* en Alemania, *FTSE 100* en UK, *S&P 100* en USA y *Nikkei 225*.

Mishra, Panda y Majhi (2014) proponen en [29] un método llamado optimización multi-objetivo por enjambre de partículas mediante ordenamiento no dominado (NS-MOPSO, del inglés *non-dominated sorting multiobjective particle swarm optimization*), método utilizado para la solución del modelo extendido de Markowitz (CCMV). Los resultados del rendimiento del algoritmo propuesto fueron comparados con métodos evolutivos multi-objetivo (MOEAs) y métodos evolutivos mono-objetivo. Los métodos evolutivos multi-objetivo utilizados en este trabajo son cuatro, basados en la no-dominancia, (NSGA-II) del inglés *non-dominated sorting genetic algorithm-II*, (SPEA-2) del inglés *strength Pareto evolutionary algorithm 2*, (PESA-II) del inglés *Pareto envelope-based selection algorithm-II*, (2LB-MOPSO) del inglés *two-lbest based multiobjective particle swarm optimizer* y un método (MOEA) basado en descomposición

(MOEA/D). Los métodos evolutivos mono-objetivo fueron Algoritmos Genéticos, Búsqueda Tabú, Recocido Simulado, y Optimización por Enjambre de Partículas. Las instancias utilizadas fueron tomadas de seis distintos índices del mercado de valores, *Hang Seng* de Hong Kong, *DAX 100* en Alemania, *FTSE 100* en UK, *S&P 100* en USA, *Nikkei 225* en Japón y *BSE-500* en la India.

En [32] Lwin, Qu, y Kendall (2014), basados en el modelo extendido de Markowitz (CCMV), proponen un método híbrido evolutivo multi-objetivo de aprendizaje guiado. El método propuesto es comparado con cuatro métodos evolutivos multi-objetivo: Los resultados computacionales fueron reportados y están disponibles en *OR-Library*, los datos fueron tomados de siete índices de mercado incluyendo hasta 1318 activos. Los resultados del experimento demostraron una superioridad significativa del algoritmo propuesto sobre los métodos antes mencionados.

En [35] Chen (2015) emplea el modelo extendido de Markowitz bajo restricciones apegadas al mundo real bajo el supuesto que el retorno de los activos es presentado con números borrosos, dando como resultado un modelo de programación no lineal entero mixto, para el cual los métodos convencionales exactos no son eficientes. Por lo cual, propone resolver el problema, mediante una variante de ABC (MABC), MABC consiste en modificar los procesos de ABC, por ejemplo para generar la población inicial, normalmente se hace uso de generadores de números aleatorios, pero como se menciona en este trabajo, el generador empleado puede afectar el desempeño del algoritmo, para evitar esto emplean un generador llamado *chaos-based initialization* el cual está inspirado en el caos existente en una colonia de abejas, para mayores detalles sobre este generador se recomienda consultar [36]. También en MABC modifican el método de búsqueda de soluciones, complementan el método de búsqueda con una estrategia propia de PSO, de manera que MABC ahora guarda información de *mejores locales* y el *mejor global*, aprovechando la información de estas soluciones para mejorar el proceso de búsqueda de ABC. Los resultados obtenidos con este método fue comparado con GA, SA, PSO, Evolución Diferencial (DE), y un modelo estándar de ABC. MABC mostró mejor desempeño que los demás métodos en exactitud, convergencia, velocidad, estabilidad y robustez. Las instancias empleadas fueron de 30 activos extraídos de la bolsa de valores de Shanghai de noviembre del 2004 a noviembre de 2005.

En 2015 Yin, Ni, y Zhai presentan en [28] un método de optimización por enjambre de partículas para una población múltiple heterogénea (HMPPSO), este método está basado en una estrategia de población múltiple heterogénea en donde toda la población es dividida en subpoblaciones, las cuales exploran el espacio de soluciones y se comunican entre si con variantes de PSO. Se empleo este método en el modelo de media-varianza con restricciones de cardinalidad. Las instancias utilizadas son las ya antes mencionadas *Hang Seng* de Hong Kong, *DAX 100* en Alemania, *S&P 100* en USA y *Nikkei 225* en Japón. En este trabajo realizan dos experimentos para comparar el método propuesto. En el primer experimento comparan la eficacia de HMPPSO con tres variantes “clásicas” de PSO: WPSO del inglés *PSO with inertia weight*, CPSO del inglés *PSO with compressibility factor* y CLPSO del inglés *comprehensive learning PSO*, para más información de estos métodos consultar [28]. El segundo experimento compara HMPPSO con tres métodos de PSO para múltiple pobla-

ción no heterogénea llamados MPWPSO, MPCPSO y MPCLPSO, ver [28].

Debido a que en este trabajo de tesis se empleará el método original de PSO y una variante llamada PSO-3P, se consideró importante buscar en la literatura especializada las primeras aplicaciones de esta estrategia al problema del portafolio de inversión. Se encontró que los primeros en implementar un método basado en PSO fueron:

En 2005 Kendall y Su, [41], hacen la implementación de PSO al problema del portafolio de inversión basado en el modelo de original de Markowitz. En este trabajo la función objetivo del modelo es: la diferencia entre el retorno del portafolio y el retorno esperado dividida entre la varianza del portafolio. PSO fue empleado al modelo de media-varianza con y sin restricciones. Para el modelo con restricciones se emplearon siete instancias obtenidas a partir de la bolsa de valores de siete países distintos (*USA, Alemania, UK, Japón, Australia, Canada y Francia*) para estas instancias se utilizaron 50 partículas con 500 iteraciones y fue comparado con las soluciones obtenidas por un programa en *Excel* desarrollado específicamente para este tipo de problemas, para más información de este programa consultar [41]. Para el modelo sin restricciones se emplearon 5, 12 y 20 activos obtenidos del índice de *Hang Seng* de la bolsa de valores de *Hong Kong* y fueron elegidos de manera aleatoria. Para el portafolio de 5 activos emplearon 30 partículas con 300 iteraciones, para el portafolio de 12 activos usaron 300 partículas con 800 iteraciones y para el portafolio de 20 activos emplearon 800 partículas y 5000 iteraciones. Para la formulación de los portafolios con y sin restricciones PSO demostró ser superior frente al programa en *Excel* sólo para portafolios con menos de 15 activos, PSO construyó portafolios de inversión eficaces en menos tiempo que el programa en *Excel* para un máximo de 15 activos, y también encontraron que el programa en *Excel* no es viable para resolver portafolios con múltiple número de activos con muchas correlaciones negativas y está limitado por el número de activos con los que puede operar.

Chen, Zhang, Cai y Zhu en 2006, [42], presentan el uso de PSO original y un PSO con límite de velocidad, estos dos métodos fueron aplicados al modelo original de Markowitz añadiendo al modelo costos de transacción e impuestos. Para este trabajo se emplearon 8 activos del mercado de valores de China. Los métodos fueron programados en *C++* y el equipo de cómputo contaba con un procesador (*Pentium, 2GHz*). Para evaluar el desempeño de los métodos se consideraron 5 aspectos: tasa de éxito (la precisión deseada es igual a 10^{-5}), iteraciones, iteraciones promedio, el valor de la función objetivo y el valor promedio de la función objetivo. Como conclusión encontraron que PSO con límite de velocidad encontró soluciones óptimas de manera más precisa y rápida que el método de PSO original.

Xu, Chen, y Yang en 2007, [43] proponen un método llamado optimización por enjambre de partículas mejorado (IPSO). Las instancias que emplearon fueron tomadas del retorno neto de 9 acciones: *American Tobacco, AT&T, United States Steel, General Motors, Atchison, Topeka y Santa Fe, Coca-Cola, Borden, y Firestone y Sharon Steek*, en el período de 1937 a 1954. Además, el método fue implementado en el lenguaje de programación *C++*, y se ejecutó en una PC Pentium 2 GHz, los resultados de IPSO fueron comparados contra los obtenidos por el método estándar de PSO, donde IPSO, para este problema en específico, demostró superioridad al método estándar de PSO. Como conclusión obtuvieron que IPSO

pudo encontrar un mejor óptimo global pero su velocidad de convergencia fue muy lenta y la principal "debilidad" de IPSO.

Cura (2009) en [44] emplea el método de PSO agregando, al método original, funciones para la actualización de la velocidad y la posición de la partícula. Este método fue empleado al modelo extendido de Markowitz con restricciones de cardinalidad. Las instancias empleadas fueron *Hang Seng* de Hong Kong, *DAX 100* en Alemania, *FTSE 100* en UK, *S&P 100* en USA y *Nikkei 225* en Japón. Los resultados obtenidos al implementar PSO fueron comparados con los resultados obtenidos al emplear SA, GA, y TS. En esta variante de PSO hacen una modificación en la formación del enjambre. Consideran que debe haber M dimensiones, cada una representando un activo. Entonces, como se mencionó anteriormente, la formación del enjambre tendrá dos modificaciones: la primera, cada partícula incluirá variables de proporción denotadas por $x_{pi}(p = 1, \dots, P)$ (donde P es el número de partículas en el enjambre); segunda, cada partícula incluirá variables de decisión denotadas por z_{pi} . Así, la dimensión de cada una de sus partículas será igual a $2 \times M$.

5.6. Trabajo de Chang et al.

A continuación se presenta el trabajo realizado por Chang et al. [17] en el cual describen las instancias empleadas para el problema del portafolio de inversión, así como los resultados obtenidos por los algoritmos basados en Recocido Simulado, Búsqueda Tabú y Algoritmos Genéticos.

Las instancias empleadas, mismas que se emplean en esta tesis, fueron extraídas de un total de cuatro índices del mercado de valores, *Hang Seng* de Hong Kong, *DAX 100* en Alemania, *FTSE 100* en UK, *S&P 100* en USA y *Nikkei 225* en Japón. Cada uno tiene diferentes número de activos: 31 para *Hang Seng*, 85 para *DAX*, 89 para *FTSE*, 98 para *S&P* y 225 para *Nikkei*. Sus retornos y covarianzas son determinados por los valores de los índices semanales a partir de marzo de 1992 hasta septiembre de 1997, instancias disponibles en OR-Library⁶. Para resolver el modelo de media-varianza sin restricciones, y el modelo media-varianza extendido con las instancias antes mencionadas, Chang et al. hicieron uso de tres metaheurísticas: Búsqueda Tabú, Recocido Simulado y Algoritmos Genéticos. Los métodos fueron programados en FORTRAN y ejecutados en una *workstation Silicon Graphics Indigo* (R4000, 100MHz, 48MB *main memory*). Según lo reportado para cada uno de los métodos se hicieron $1000N$ llamadas a la función objetivo, siendo N el número de activos de cada índice. Para evaluar los resultados obtenidos al implementar los métodos metaheurísticos, se compararon con la frontera eficiente sin restricciones (UEF, del inglés *Unconstrained Efficient Frontier*), de manera que se obtuvo un porcentaje de error entre los portafolios creados y los portafolios óptimos. A continuación se describen a grandes rasgos los métodos metaheurísticos empleados en el trabajo:

⁶<http://people.brunel.ac.uk/mastjbb/jeb/orlib/portinfo.html>

Algoritmos Genéticos es un método inspirado en el proceso biológico evolutivo de los organismos en la naturaleza. Durante el curso de la evolución, las poblaciones naturales se ven envueltas en el principio de selección natural y “*sobrevive el más apto*”. Los individuos de las poblaciones que se adaptan de mejor manera tendrán mejor oportunidades de sobrevivir y reproducirse, mientras que los individuos que son menos aptos serán eliminados de la población. Para la reproducción de los individuos con mejores resultados emplearon un método de cruce uniforme el cual consiste en que dos padres tienen un solo hijo, y una estrategia de reemplazo de la población llamado *steady-state*. El tamaño de la población inicial fue de 100 individuos.

El principio de Búsqueda Tabú es que un “movimiento”, dada una solución de partida, genera una serie de posibles soluciones. En términos de búsqueda local esas soluciones son conocidas como vecindario. Para prevenir ciclos Búsqueda Tabú cuenta con una lista de “movimientos tabú”. Normalmente esta lista prohíbe algunos movimientos que darían lugar a volver a visitar una solución de partida encontrada previamente. Esta lista de movimientos tabú es actualizada a medida que avanza el método, así que un movimiento que fue agregado es removido después de determinado número de iteraciones. En esta implementación para cada corrida se generaban 1000 soluciones de manera aleatoria, y la de menor costo era seleccionada para iniciar el proceso de búsqueda y mejora.

Recocido Simulado está basado en el tratamiento térmico de los metales o aleaciones sólidas las cuales después de ser elevadas a altas temperaturas son enfriadas lentamente para mejorar sus propiedades mecánicas. Este método al igual que Búsqueda Tabú realiza modificaciones a una solución, para generar soluciones vecinas diferentes. Recocido Simulado incorpora un elemento estadístico en los “movimientos”, cuando se encuentra una “mala” solución, esta puede ser aceptada según una probabilidad que disminuye conforme el método avanza. En la implementación reportada por Chang et al., el método iniciaba construyendo una solución de forma aleatoria, y establecía la temperatura inicial como un décimo del costo de dicha solución. En cada temperatura se realizaron $2N$ iteraciones, donde N es el número de activos empleados, y el factor de enfriamiento se fijó en 0.95.

Para comparar el desempeño de cada una de estas técnicas emplearon la siguiente estrategia. Para una solución dada, (x^*, y^*) , donde el eje horizontal representa el retorno y el eje vertical representa el riesgo, se calculó la distancia horizontal, y la distancia vertical, al frente de Pareto, y se definió al mínimo de estas distancias como el porcentaje de error de desviación asociado a la solución (x^*, y^*) . Sin embargo, aunque el frente de Pareto real es continuo, en la práctica sólo se cuenta con 2000 soluciones óptimas para cada instancia, por lo cual no siempre es posible medir la distancia real de la solución (x^*, y^*) al frente de Pareto. Para evitar este problema, se realiza una interpolación lineal del frente de Pareto aproximado empleando el siguiente método. Sean (x_i, y_i) , $1 \leq i \leq 2000$, las soluciones óptimas conocidas para cada instancia. Sea (x^*, y^*) una solución generada por algunos de los algoritmos antes descritos. Sea j el índice de la solución óptima que cumple con la siguiente condición $y_j = \min[y_i | y_i \geq y^*]$. Sea k el índice de la solución óptima que cumple con la siguiente condi-

ción $y_k = \max[y_i | y_i \leq y^*]$. Con estos datos se calcula $x^{**} = x_k + (x_j - x_k)[(y^* - y_k)/(y_j - y_k)]$. Con lo cual se propone una medida para el porcentaje de error de desviación con respecto al eje horizontal como:

$$|100(x^* - x^{**})/x^{**}| \quad (5.17)$$

Este valor no será calculado si j o k no existen.

Para la interpolación lineal en la dirección del eje y vertical se realiza una operación semejante. Sea j el índice de la solución óptima que cumple con la siguiente condición $x_j = \min[x_i | x_i \geq x^*]$. Sea k el índice de la solución óptima que cumple con la siguiente condición $x_k = \max[x_i | x_i \leq x^*]$. Con estos puntos se calcula $y^{**} = y_k + (y_j - y_k)[(x^* - x_k)/(x_j - x_k)]$. Con lo cual se obtiene una medida para el porcentaje de error de desviación con respecto al eje vertical como:

$$|100(y^* - y^{**})/y^{**}| \quad (5.18)$$

Este valor no será calculado si j o k no existen.

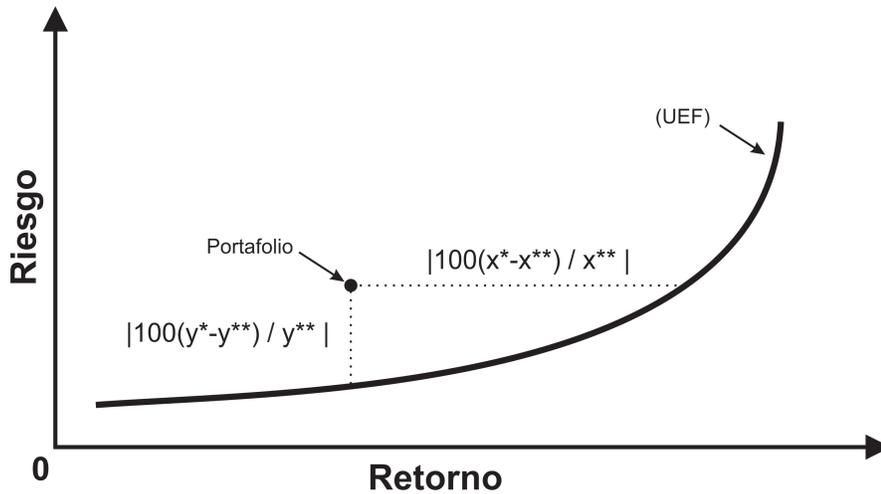


Figura 5.2: Error de desviación de un portafolio de inversión, respecto al eje vertical y horizontal.

En la Figura (5.2) se muestra el error de desviación vertical y horizontal, en la relación riesgo-retorno, de un portafolio de inversión respecto al frente de Pareto óptimo (UEF). Finalmente, para cada solución (x^*, y^*) generada por los algoritmos, se define el porcentaje de error de desviación como el mínimo entre (5.17) y (5.18).

Para más detalles relacionados con las implementaciones de estas estrategias se recomienda consultar [17].

PSO y PSO-3P adaptados al problema del portafolio de inversión

En el presente capítulo se presenta la adaptación de los métodos de PSO y PSO-3P a los algoritmos que se desarrollaron como propuesta para la solución del problema del portafolio de inversión. Para la solución del modelo de media-varianza se implementó la técnica metaheurística optimización por enjambre de partículas (PSO), que ha reportado muy buenos resultados para la solución de este tipo de problemas. Asimismo, se propone el uso de una técnica basada en PSO llamada PSO-3P, la cual se caracteriza por dividir en tres fases el proceso de búsqueda original de PSO. Para poder evaluar el desempeño de los algoritmos desarrollados, se emplearon 5 instancias reportadas en la literatura especializada. Los resultados obtenidos fueron evaluados estadísticamente y se compararon con los reportados por Chang et al., quienes emplearon algoritmos inspirados en Recocido Simulado, Búsqueda Tabú y Algoritmos Genéticos. Los resultados muestran un desempeño sobresaliente de PSO-3P sobre la versión clásica de PSO. Además, la calidad de las soluciones generadas por PSO-3P, fue mejor que las obtenidas por Recocido Simulado, Búsqueda Tabú y Algoritmos Genéticos, en algunas regiones del frente de Pareto. PSO y PSO-3P no pudieron ser comparados con ningún trabajo de PSO presentado en el estado del arte ya que en su mayoría contemplaban otras restricciones o empleaban modelos del problema del portafolio de inversión distintos al modelo de media-varianza. A continuación se describen detalladamente los algoritmos PSO y PSO-3P adaptados al modelo de media-varianza.

En principio se definirá el portafolio de inversión como una partícula, la cual estará representada por un vector β_k , que contendrá tantas entradas como número n de activos se encuentren disponibles, por lo tanto $\beta_k \in \mathfrak{R}^n$. Para determinar el porcentaje del capital que se invertirá en algún activo, basta con revisar la entrada correspondiente en el vector β_k , por ejemplo, se puede considerar que se tienen 5 activos en los que se desea invertir, entonces el vector: $\beta_k = (\beta_{k,0}, \beta_{k,1}, \beta_{k,2}, \beta_{k,3}, \beta_{k,4})$ representa una posible estrategia de inversión. Cada posición $j = (0, 1, 2, 3, 4)$ del vector β_k contiene un porcentaje del capital a invertir en cada activo y la suma de todas las entradas debe ser igual al 100% del capital. Es muy importante considerar las restricciones propias del problema de portafolio de inversión, una de ellas implica que no se puede exceder el 100% del capital. Para evitar la violación de esta restricción, todas las soluciones obtenidas serán normalizadas. De esta forma, cada partícula

será generada de manera aleatoria cumpliendo las restricciones, y será evaluada con base en la función objetivo representada por la Ecuación (6.1). Asimismo la función objetivo requiere de más datos, los cuales forman parte de los datos de entrada para los algoritmos de PSO y PSO-3P.

A continuación se presentan los datos de entrada requeridos por el método de PSO:

1. La matriz de correlación, representada por ρ , dónde los vectores fila ρ_i representan los activos i y los vectores columna ρ_j representan los activos j . De esta manera cada posición $\rho_{i,j}$ de la matriz ρ es la correlación del retorno esperado entre los activos i y los activos j .
2. El valor de la desviación estándar del retorno esperado del activo i , desviación estándar que será guardada en cada posición i del vector s . De esta forma, la desviación estándar del retorno del activo i queda expresada como s_i .
3. El valor del retorno esperado del activo i almacenado en un vector r_i donde cada posición i del vector contendrá el retorno esperado del activo i .
4. Los parámetros de PSO, descritos en la sección (4.1.2).

Para PSO-3P se emplean los mismos datos de entrada, más los parámetros descritos en la sección (4.1.3) propios de esta heurística.

La función objetivo está dada por la suma ponderada del riesgo (5.4) y retorno (5.8). En este caso, el ponderador representa un parámetro de aversión de riesgo, λ , al cual se le asignarán valores entre 0 y 1, $\lambda \in [0, 1]$. A continuación se muestra el modelo planteado en [17], mismo que se empleará en esta tesis:

$$\min \quad \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_{k,i} \beta_{k,j} \rho_{i,j} s_i s_j - (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n r_i \beta_{k,i}, \quad (6.1)$$

$$\sum_{i=1}^n \beta_{k,i} = 1, \quad (6.2)$$

$$0 \leq \beta_{k,i} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.3)$$

donde:

- n es el número de los diferentes activos.
- $\beta_{k,i}$ es porcentaje del capital a invertir en el activo i del portafolio k .
- $\beta_{k,j}$ es porcentaje del capital a invertir en el activo j del portafolio k .

- $\rho_{i,j}$ es la correlación entre los activos i y j ($-1 \leq \rho_{i,j} \leq 1$).
- s_i es la desviación estándar del retorno del activo i .
- s_j es la desviación estándar del retorno del activo j .
- r_i es el retorno del activo i .

A continuación se describen los principales pasos de los algoritmos basados en PSO y PSO-3P, desarrollados para resolver el problema del portafolio de inversión.

El algoritmo basado en PSO inicia generando de manera aleatoria una posición para cada una de las partículas, $\beta_k = (\beta_{k,1}, \beta_{k,2}, \dots, \beta_{k,n})$, $1 \leq k \leq N$. Es importante destacar que de acuerdo al planteamiento del modelo de media-varianza, es necesario que ($0 \leq \beta_{k,j} \leq 1$), por lo que, cada uno de estos valores se genera empleando una distribución uniforme entre 0 y 1. Asimismo, es necesario invertir el 100 % del capital para lo cual se propone aplicar una normalización del vector $(\beta_{k,1}, \beta_{k,2}, \dots, \beta_{k,n})$. Una vez que se han generado y evaluado las posiciones de las N partículas consideradas por el algoritmo, se almacena la mejor posición de cada partícula, β'_k , y la mejor posición conocida por todo el enjambre, β'_g . Posteriormente, se repiten los siguientes pasos, para cada partícula, durante un número preestablecido de iteraciones. Se actualiza la velocidad de cada partícula por medio de la Ecuación (4.1). Se emplea la nueva velocidad para desplazar a las partículas hacia una nueva posición dada por (4.2). Posteriormente se revisa que todas las partículas cumpla con las restricciones del problema. Si $\beta_{k,j}$ es mayor a 1 se redondea a 1. Si $\beta_{k,j}$ es menor a 0 se redondea a 0. Si la suma de todas las entradas de la nueva posición de la partícula es mayor o menor que 1 se realiza una normalización. Se evalúa el valor de la nueva posición β_k mediante la función objetivo, y en caso de existir una mejora, se actualiza el vector β'_k . Al finalizar la actualización de las partículas y de sus mejores posiciones, se actualiza la mejor partícula de toda la población, β'_g . Este proceso se resume en el Algoritmo 3.

Algoritmo 3: Algoritmo de PSO aplicado al modelo de media-varianza

```

1 Datos de entrada: Los parámetros de PSO, el retorno esperado de cada activo,  $r_i$ , la
  desviación estándar del retorno esperado de cada activo,  $s_i$ , y una matriz de correlación del
  retorno esperado entre los activos  $i$  y  $j$ ,  $\rho_{i,j}$ .
2 Datos de salida: El porcentaje que se invertirá en cada activo que conforme el portafolio
  de inversión, así como el retorno y riesgo esperados.
3 Implementación:
4 Sea  $I$  el número de iteraciones.
5 Sea  $\beta'_k$  la mejor posición alcanzada por la partícula  $k$  y  $\beta'_g$  la mejor posición conocida por
  todo el enjambre de partículas.
6 Inicializar la velocidad de todas las partículas en cero.
7 Generar de forma aleatoria la posición de  $N$  partículas, considerando  $n$  activos.
8 Para  $k < N$  hacer
9   Para  $j < n$  hacer
10     $\beta_{k,j} \leftarrow \text{rnd}(0, 1)$ 
11   fin
12   Normalizar la partícula  $\beta_k = (\beta_{k,0}, \beta_{k,1}, \dots, \beta_{k,n})$ .
13   Evaluar  $\beta_k$  de acuerdo a la función objetivo (6.1).
14   Actualizar el valor de  $\beta'_k$ .
15 fin
16 Actualizar el valor de  $\beta'_g$ .
17 iteraciones=0
18 Para iteraciones  $< I$  hacer
19   Para  $k < N$  hacer
20     Actualizar la velocidad de la partícula,  $v_k$ , acorde a la ecuación (4.1).
21     Actualizar la posición de la partícula,  $\beta_k$ , acorde a la ecuación (4.2).
22     Para  $j < n$  hacer
23       Si el valor  $\beta_{k,j}$  es mayor a 1,  $\beta_{k,j} = 1$ .
24       Si el valor  $\beta_{k,j}$  es menor a 0,  $\beta_{k,j} = 0$ .
25     fin
26     Normalizar el vector  $\beta_k$ .
27     Evaluar  $\beta_k$  con la función objetivo (6.1).
28     Si  $\beta_k$  es mejor que  $\beta'_k$ ,  $\beta'_k \leftarrow \beta_k$ .
29   fin
30   Actualizar el valor de  $\beta'_g$ .
31   iteraciones = iteraciones + 1
32 fin

```

El Algoritmo basado en PSO-3P inicia con la generación aleatoria de las posiciones de cada una de las partículas, empleando una distribución uniforme entre 0 y 1. Posteriormente, se realiza una normalización para asegurar que cada vector representa a una solución factible. Una vez que todas las partículas han sido generadas se evalúan mediante la función objetivo, y se actualizan los vectores β'_k y β'_g .

Una vez obtenidos todos los datos antes mencionados se inicia el método de PSO-3P. La primera fase de PSO-3P se repite durante $F1$ iteraciones, y es igual que el método clásico de PSO. Se actualizan las velocidades de desplazamiento de cada partícula por medio de la Ecuación (4.1), y se mueven a las partículas a una nueva posición dada por (4.2). Posteriormente se revisa que todas las partículas cumpla con las restricciones del problema. Si $\beta_{k,j}$ es mayor a 1 se redondea a 1. Si $\beta_{k,j}$ es menor a 0 se redondea a 0. Si la suma de todas las entradas de la nueva posición de la partícula es mayor o menor que 1 se realiza una normalización. Se evalúa el valor de la nueva posición β_k mediante la función objetivo, y en caso de existir una mejora, se actualiza el vector β'_k . Al finalizar la actualización de las partículas y de sus mejores posiciones, se actualiza la mejor partícula de toda la población, β'_g .

Al terminar la fase 1, se inicia la fase 2, que se repite durante $F2$ iteraciones. En este momento las partículas ya han explorado el espacio de soluciones y se espera que se encuentren en una región prometedora. Durante esta fase, se repiten los mismos pasos indicados en la fase 1, pero se agrega la siguiente condición: si la mejor solución global no es mejorada después de un número predeterminado de iteraciones consecutivas, $C1$, se generan, con probabilidad 0.5, $n * prop$ partículas nuevas, que sustituyen a otras partículas en el enjambre, sin perder el valor de la mejor partícula de toda la población, β'_g . De esta forma, el tamaño de la población permanece constante. Este proceso, permite que parte del enjambre se disperse en el espacio de soluciones, pero puede ser atraído nuevamente hacia la mejor región visitada hasta el momento.

Finalmente, se ejecuta la fase 3 durante $F3$ iteraciones. En esta etapa, si la mejor solución no es mejorada durante cierto número de iteraciones consecutivas, se generan, con probabilidad 0.5, $n * prop$ partículas en un vecindario de la mejor posición conocida por toda la población, β'_g , que sustituyen a otras partículas en el enjambre, de tal forma que el tamaño de la población permanece constante. Con esta técnica se busca intensificar la búsqueda en una región prometedora.

Cabe destacar que al final de cada una de las tres fases de PSO-3P se evalúa el valor de las nuevas soluciones β_k con la función objetivo, y a su vez se actualiza el valor de las mejores posiciones alcanzadas por cada una de las partículas, β'_k . Al finalizar la actualización de las mejores posiciones, se comprueba si el valor de la mejor posición conocida por la población, β'_g , fue mejorado. Si el costo de β'_g no fue mejorado, un contador, $cont$, se incrementa en uno. En caso de que se haya encontrado una solución con un mejor valor que β'_g , este vector se actualiza y el contador se iguala a cero, $cont = 0$. Cuando el contador alcanza un valor preestablecido, $C1$, y el algoritmo se encuentra en la fase 2 o 3, se realizan las estrategias de diversificación e intensificación descritas anteriormente. Este proceso se resume en el Algoritmo 4.

Algoritmo 4: Algoritmo de PSO-3P aplicado al modelo de media-varianza

```

1 Datos de entrada: Los parámetros de PSO-3P, el retorno esperado de cada activo,  $r_i$ , la desviación estándar del retorno esperado de
  cada activo,  $s_i$ , y una matriz de correlación del retorno esperado entre los activos  $i$  y  $j$ ,  $\rho_{i,j}$ .
2 Datos de salida: El porcentaje que se invertirá en cada activo, el retorno y riesgo esperados del portafolio de inversión.
3 Implementación:
4 Sea  $I$  el número de iteraciones.
5 Sea  $\beta'_k$  la mejor posición alcanzada por la partícula  $k$  y  $\beta'_g$  la mejor posición conocida por todo el enjambre de partículas.
6 Inicializar la velocidad de todas las partículas en cero.
7 Generar de forma aleatoria la posición de  $n$  partículas, considerando  $m$  activos.
8 Para  $k < n$  hacer
9   Para  $j < m$  hacer
10     $\beta_{k,j} \leftarrow \text{rnd}(0,1)$ 
11   fin
12   Normalizar la partícula  $\beta_k$ .
13   Evaluar  $\beta_k$  de acuerdo a la función objetivo (6.1).
14   Actualizar el valor de  $\beta'_k$ .
15 fin
16 Actualizar el valor de  $\beta'_g$ .
17 iteraciones=0
18 Para  $\text{iteraciones} < I$  hacer
19   Para  $k < n$  hacer
20     Actualizar la velocidad de la partícula,  $v_k$ , acorde a la ecuación (4.1).
21     Actualizar la posición de la partícula,  $\beta_k$ , acorde a la ecuación (4.2).
22     Para  $j < m$  hacer
23       Si el valor  $\beta_{k,j}$  es mayor a 1 redondear el valor de  $\beta_{k,j}$  a 1.
24       Si el valor  $\beta_{k,j}$  es menor a 0 redondear redondear el valor de  $\beta_{k,j}$  a 0.
25     fin
26     Normalizar la partícula  $\beta_k$ .
27     si  $F1 < \text{iteraciones} \leq F2$  entonces
28       si  $\text{cont} = C1$  entonces
29          $a = 1$ 
30         Mientras  $a < n * \text{prop}$  hacer
31           si  $\text{rand}[0, 1] \geq 0.5$  entonces
32             Generar una partícula, de manera aleatoria,  $\beta_{new}$ .
33             Elegir una partícula de forma aleatoria,  $\beta_{rnd}$ , perteneciente al enjambre.
34             Sustituir la partícula  $\beta_{rnd}$  por la partícula  $\beta_{new}$ .
35              $a++$ 
36           fin
37         fin
38          $\text{cont} = 0$ 
39       fin
40     si  $F2 < \text{iteraciones} \leq F3$  entonces
41       si  $\text{cont} = C1$  entonces
42          $a = 1$ 
43         Mientras  $a < n * \text{prop}$  hacer
44           si  $\text{rand}[0, 1] \geq 0.5$  entonces
45             Generar una partícula de manera aleatoria dentro del vecindario del mejor global,  $\beta_{new}$ .
46             Elegir una partícula de forma aleatoria,  $\beta_{rnd}$ , perteneciente al enjambre.
47             Sustituir la partícula  $\beta_{rnd}$  por la partícula  $\beta_{new}$ .
48              $a++$ 
49           fin
50         fin
51          $\text{cont} = 0$ 
52       fin
53     fin
54     Evaluar  $\beta_k$  con la función objetivo (6.1).
55     Si  $\beta_k$  es mejor que  $\beta'_k$ ,  $\beta'_k \leftarrow \beta_k$ .
56   fin
57   si si se encontró una solución mejor que  $\beta'_g$  entonces
58     Actualizar el valor de  $\beta'_g$ .
59      $\text{cont} = 0$ 
60   fin
61   en otro caso
62      $\text{cont} = \text{cont} + 1$ 
63   fin
64    $\text{iteraciones} = \text{iteraciones} + 1$ 
65 fin
66 fin

```

En el siguiente capítulo se describen los detalles más importantes relacionados con los experimentos computacionales realizados con PSO y PSO-3P. Finalmente, se presentan los resultados obtenidos y los análisis estadísticos realizados.

Capítulo 7

Simulación computacional

En la siguiente sección se presentan los parámetros propuestos para PSO y PSO-3P, así como los resultados obtenidos por ambos algoritmos al aplicarlos a las cinco instancias reportadas por Chang et al., *Hang Seng*, *DAX*, *FTSE*, *S&P* y *Nikkei*.

7.1. Experimentos y resultados

Los algoritmos basados en PSO y PSO-3P, propuestos en esta tesis, fueron desarrollados en el lenguaje de programación *C*, y fueron simulados en una PC con un procesador *Intel i7 - 4470* a $3.40GHz$. Las instancias empleadas fueron las mismas que emplearon Chang et al. Para ambos algoritmos se empleó una calibración basada en fuerza bruta, como se describe en [2]. Para PSO y PSO-3P se obtuvieron como resultado, $\alpha = 00,84$, $\varphi_1 = 1$ y $\varphi_2 = 2$, la velocidad inicial para todas las partículas fue 0. El número de partículas empleadas por PSO fue de 20, mientras que el número de partículas empleadas por PSO-3P fue de 10. Para hacer comparables estos resultados con los reportados por Chang et al., se realizaron $1000N$ llamadas a la función objetivo. Para evitar que el efecto estocástico inherente a toda técnica heurística afectara el análisis de estos algoritmos, se realizaron 20 corridas, cada una de las cuales proporcionó una aproximación al frente de Pareto óptimo. Para cada aproximación obtenida en una corrida, se calculó el error de desviación porcentual, como se describió en la sección (5.6). Finalmente, empleando los errores de desviación porcentual de las veinte corridas, se calculó el error promedio y la mediana del error para PSO y PSO-3P.

Para ilustrar el desempeño de la versión clásica de PSO y PSO-3P se incluyen en las Figuras (7.1 - 7.5) las soluciones de la corrida con el menor porcentaje de error de desviación obtenidas por PSO y PSO-3P, en las 5 instancias consideradas. Cada punto de las gráficas representa un portafolio de inversión y sus coordenadas representan el riesgo y retorno asociado al portafolio. Los puntos en color azul representan el frente de Pareto óptimo, UEF, para cada una de las instancias. Los puntos en color gris representan los portafolios obtenidos por PSO y los puntos en color naranja representan las soluciones alcanzadas por PSO-3P. En todas las figuras se observa un mejor desempeño de PSO-3P, al lograr una mejor convergencia al frente de Pareto.

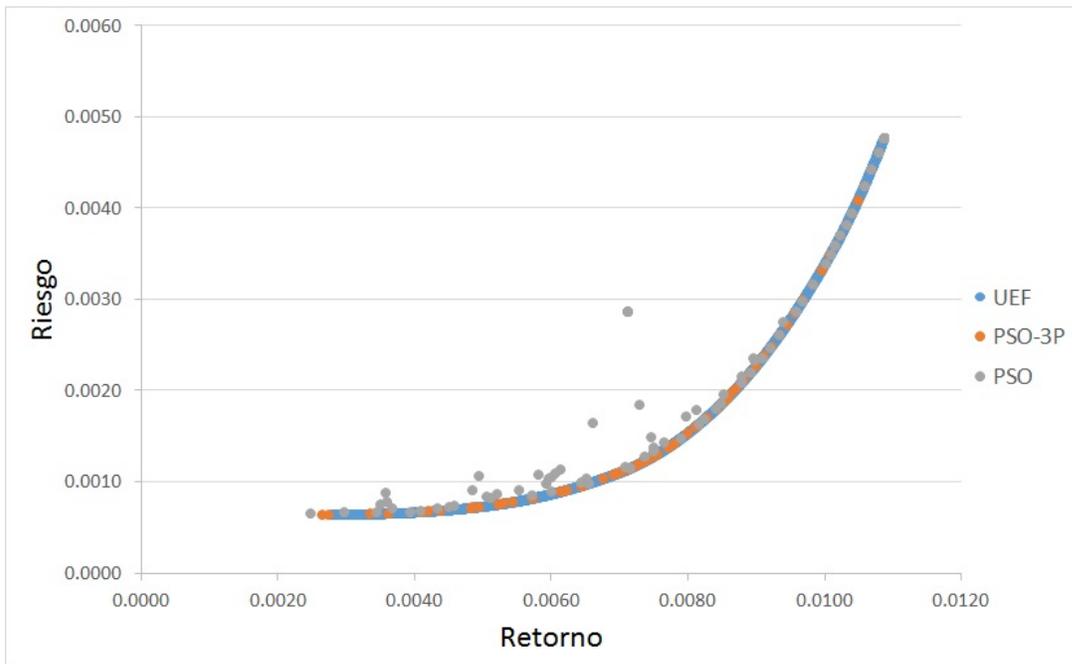


Figura 7.1: Relación riesgo-retorno obtenidos por PSO y PSO-3P, instancia *Hang Seng*.

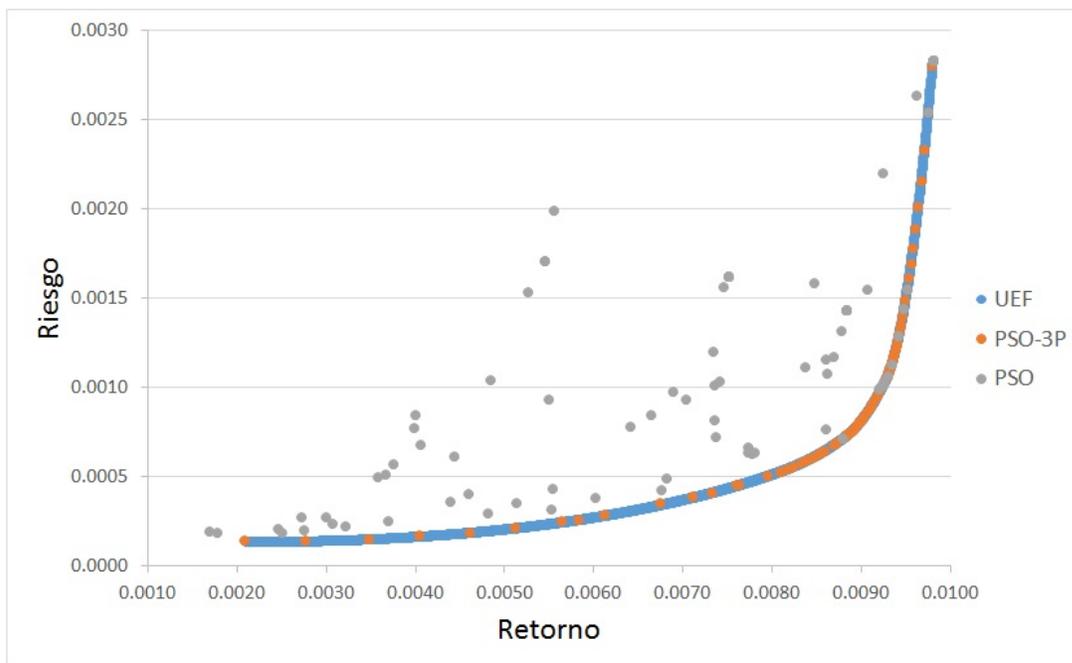


Figura 7.2: Relación riesgo-retorno obtenidos por PSO y PSO-3P en la instancia *DAX*.

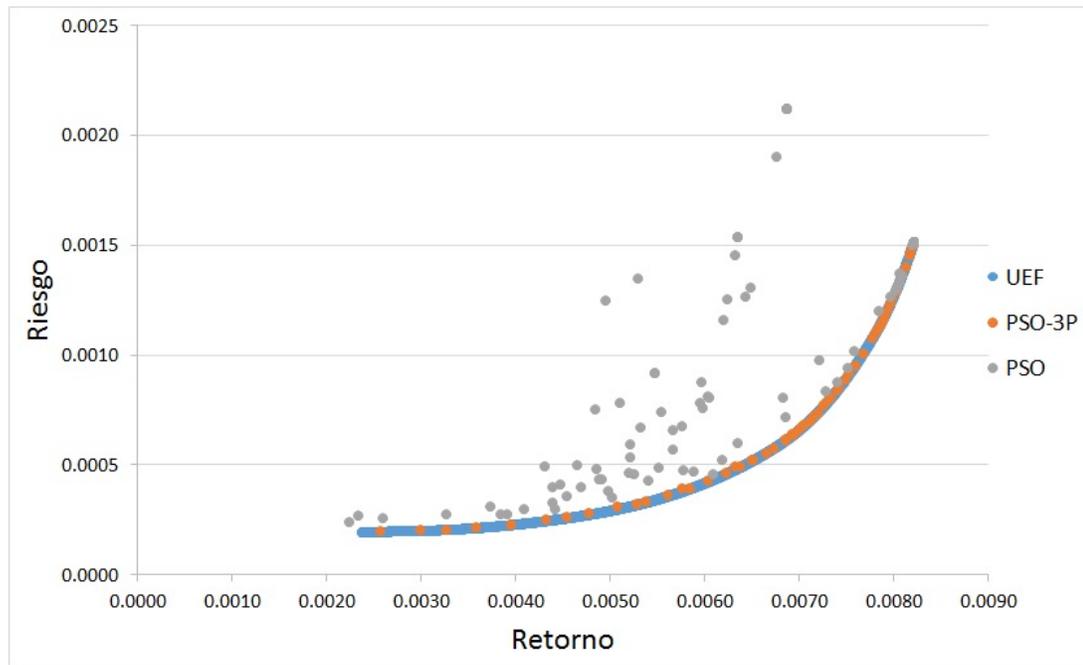


Figura 7.3: Relación riesgo-retorno obtenidos por PSO y PSO-3P en la instancia *FTSE*.

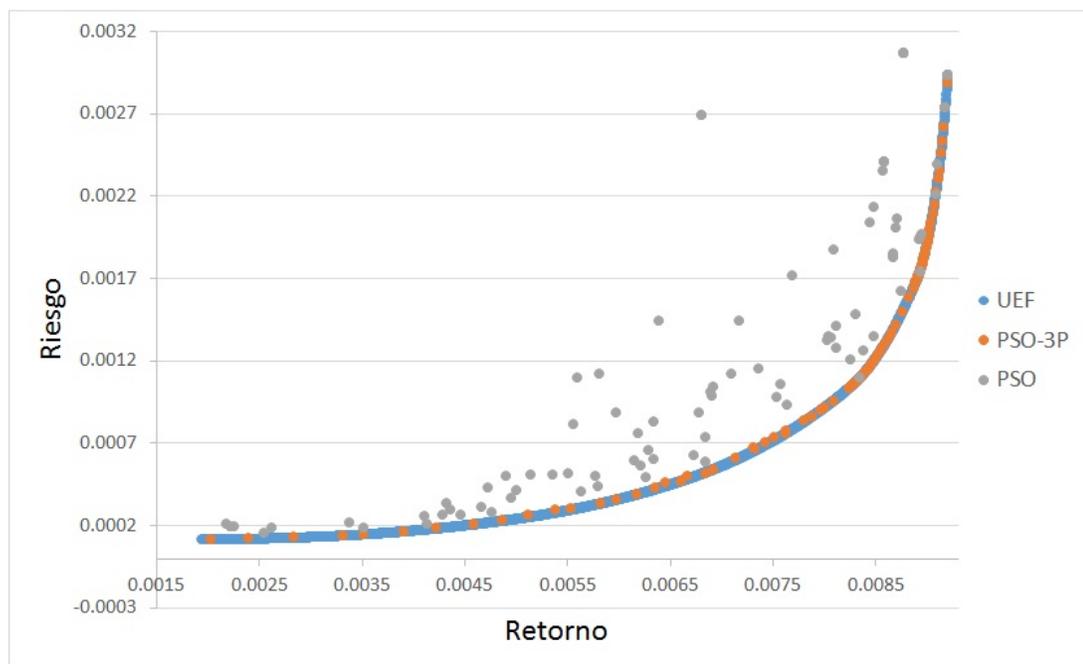


Figura 7.4: Relación riesgo-retorno obtenidos por PSO y PSO-3P en la instancia instancia *S&P*.

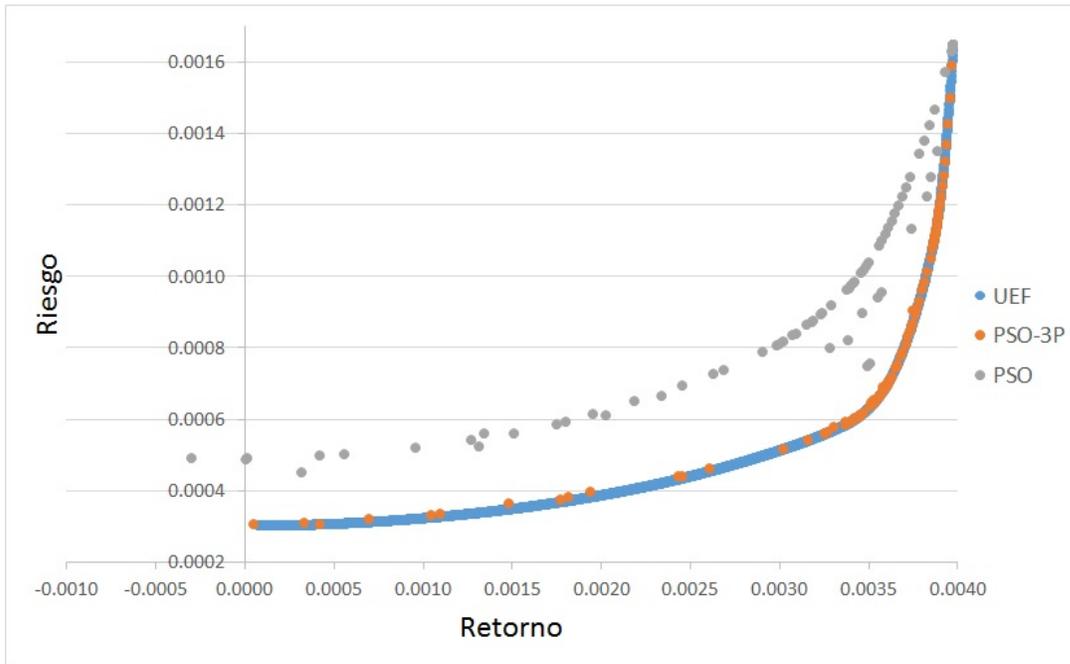


Figura 7.5: Relación riesgo-retorno obtenidos por PSO y PSO-3P en la instancia instancia *Nikkei*.

Esta observación se confirma al observar en el Cuadro (7.1), el promedio y la mediana del porcentaje de error de desviación, obtenidos al aplicar PSO y PSO-3P a las instancias antes descritas. Es importante mencionar que el cuadro está basado en el trabajo [17] y fue modificado para agregar los resultados de PSO y PSO-3P para su evaluación. En la primera columna del Cuadro (7.1) se encuentra el nombre de las instancias empleadas. En la segunda columna se incluye el número de activos para cada instancia. De la cuarta a la octava columna se incluyen la mediana y el promedio del porcentaje de error de desviación obtenidos por diferentes algoritmos. Finalmente, en el último renglón del cuadro se presenta el promedio del promedio de porcentaje de error de desviación de cada método en las 5 instancias. Se observa que PSO-3P obtiene porcentajes de error de desviación más pequeños que PSO en las 5 instancias. De forma adicional, al comparar PSO-3P con el algoritmo genético, reportado por Chang et al., como la mejor estrategia implementada por ellos, se observa que PSO-3P fue capaz de obtener medianas del porcentaje de error de desviación menores en las instancias de 31, 85 y 98 activos. Sin embargo, en las 5 instancias el Algoritmo Genético tiene un promedio del porcentaje de error de desviación menor que el obtenido por PSO-3P. Esta ventaja de PSO-3P al calcular las medianas, y desventaja al calcular los promedios, se puede explicar gracias a las Figuras (7.1 - 7.5), en las cuales se observa que PSO-3P tiene dificultades para converger a las soluciones ubicadas en la región inferior izquierda del frente de Pareto óptimo (UEF), por lo cual se eleva el promedio de los errores.

Cuadro 7.1: Promedios y medianas del porcentaje de error de desviación para las 5 instancias.

Instancia	Número de Activos (N)	Algoritmo GA	Algoritmo TS	Algoritmo SA	Algoritmo PSO	Algoritmo PSO-3P
Hang Seng	31	Mediana del porcentaje de error de desviación	1.0718	0.016	2.46424	0.00519
		Promedio del porcentaje de error de desviación	0.8973	0.1129	6.90330	0.15822
DAX	85	Mediana del porcentaje de error de desviación	2.7816	0.0033	15.49615	0.00006
		Promedio del porcentaje de error de desviación	3.5645	0.0394	20.25197	0.210472
FTSE	89	Mediana del porcentaje de error de desviación	3.0238	0.0426	18.52398	0.06663
		Promedio del porcentaje de error de desviación	3.273	0.2012	16.13370	0.50927
S&P	98	Mediana del porcentaje de error de desviación	4.278	0.0142	11.46651	0.00019
		Promedio del porcentaje de error de desviación	4.428	0.2158	14.03026	0.40294
Nikkei	225	Mediana del porcentaje de error de desviación	14.2668	0.8107	10.74391	0.02040
		Promedio del porcentaje de error de desviación	15.9163	1.7681	18.89446	0.42378
Promedio		0.0114	5.6158	0.4675	15.2427	0.3409

Conclusiones y recomendaciones para trabajo futuro

En este trabajo se presentó el problema de portafolio de inversión. Se explicaron diferentes modelos empleados para resolver este tipo de problemas, así como las restricciones que se mencionan con mayor frecuencia en publicaciones especializadas. Se decidió que el presente trabajo se centraría en el modelo de media-varianza propuesto por Markowitz, considerando restricciones de no negatividad, y que se utiliza el 100 % del capital disponible.

Dentro de la revisión bibliográfica se encontró que con frecuencia se recurre al uso de técnicas heurísticas para resolver los problemas de portafolio de inversión, y se estableció diseñar dos algoritmos basados en PSO y PSO-3P, para determinar su desempeño en este tipo de aplicaciones. Asimismo, se encontró un conjunto de instancias de prueba, extraídas de un total de cinco índices del mercado de valores, *Hang Seng* de Hong Kong, *DAX 100* en Alemania, *FTSE 100* en UK, *S&P 100* en USA y *Nikkei 225* en Japón, que fueron reportadas en [17]. Estas instancias ya han sido resueltas con algoritmos basados en Recocido Simulado, Búsqueda Tabú y Algoritmos Genéticos, por lo que la calidad de las soluciones reportadas en la literatura podían emplearse para evaluar el desempeño de los algoritmos propuestos en esta tesis.

Los algoritmos desarrollados, basados en PSO y PSO-3P, fueron calibrados y ejecutados de tal forma que sus resultados fueran estadísticamente comparables con los reportados en [17]. Finalmente, la calidad de las soluciones obtenidas se evaluó con en base al porcentaje de error de desviación propuesto en el artículo antes mencionado. Se observó que PSO tiene un desempeño muy débil, que le impide alcanzar el frente de Pareto de forma consistente. Por otro lado, PSO-3P fue capaz de obtener portafolios de buena calidad, lo cual quedó demostrado al observar que las medianas de los porcentajes de error de desviación eran menores que las reportadas en [17], en tres de las cinco instancias consideradas. Sin embargo, el promedio del porcentaje de error de desviación alcanzado por PSO-3P fue mayor que el mejor reportado en [17] en todas las instancias. Estos resultados, y las imágenes de las soluciones presentadas en las Figuras (7.1 - 7.5), apuntan a que PSO-3P tiene dificultades para converger a algunas regiones del frente de Pareto.

Estos resultados dan la pauta para el desarrollo de nuevas líneas de investigación, que incluyan, por ejemplo, algunas adaptaciones que permitan una mejor convergencia de PSO-3P, el uso de técnicas adaptativas o auto-adaptativas, un análisis de la influencia de la topología de las partículas en el desempeño del algoritmo, y un mayor número, o mejor selección, de los vecindarios empleados en la fase 3. Es importante destacar que por cuestiones de tiempo inherente a todo proyecto de Maestría no ha sido posible realizar esta investigación.

Referencias

- [1] REAL ACADEMIA ESPAÑOLA. (2014). *Diccionario de la lengua española* (23.a ed.). Madrid, España: Autor.
- [2] BIRATTARI, M., & KACPRZYK, J. (2009), TUNING METAHEURISTICS: A MACHINE LEARNING PERSPECTIVE (Vol. 197). Berlin: Springer.
- [3] BIENSTOCK, D. (1996). *Computational study of a family of mixed-integer quadratic programming problems*. *Mathematical programming*, 74(2), 121-140.
- [4] DE LOS COBOS, S., GODDART, J., GUTIÉRREZ, M. y MARTÍNEZ, ALMA. (2010), *Búsqueda y Exploración Estocástica*. CBI.
- [5] MARTÍ, R. & REINELT, G. (2011), *The linear ordering problem: exact and heuristic methods in combinatorial optimization* (Vol. 175). Springer Science & Media. ISO 690.
- [6] GLOVER, F. W., & KOCHENBERGER, G. A. (Eds.). (2006). *Handbook of metaheuristics* (Vol. 57). Springer Science & Business Media.
- [7] HASSANIEN, A. E., GROSAN, C., & TOLBA, M. F. (2015). *Applications of Intelligent Optimization in Biology and Medicine*. Springer.
- [8] KENNEDY, J. (2010), *Particle swarm optimization*. In *Encyclopedia of Machine Learning* (pp. 760-766). Springer US.
- [9] KENNEDY, J., EBERHART, R.C. & SHI Y. (2001), *Swarm Intelligence*. Morgan Kaufmann.
- [10] DE LOS COBOS SILVA, S. G., GUTIÉRREZ-ANDRADE, M. Á., RINCÓN-GARCÍA, E. A., LARA-VELÁZQUEZ, P., MORA-GUTIÉRREZ, R. A., & PONSICH, A. (2015). *SC: A Fuzzy Approximation for Nonlinear Regression Optimization*. In *Scientific Methods for the Treatment of Uncertainty in Social Sciences* (pp. 407-419). Springer International Publishing.
- [11] DE LOS COBOS SILVA, S. G. (2015). *SC-System of convergence theory and foundations*. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*, 22(2), 341-367. ISO 690.

-
- [12] DE LOS COBOS SILVA, S. G., GUTIÉRREZ-ANDRADE, M. Á., MORA-GUTIÉRREZ, R. A., LARA-VELÁZQUEZ, P., RINCÓN-GARCÍA, E. A., & PONSICH, A. (2015). *An Efficient Algorithm for Unconstrained Optimization*. Mathematical Problems in Engineering, 2015.
- [13] YANG, X. S. (2010), *Firefly algorithm, stochastic test functions and design optimisation*. International Journal of Bio-Inspired Computation, 2(2), 78-84.
- [14] YANG, X. S. (2010), *A new metaheuristic bat-inspired algorithm*. In Nature inspired cooperative strategies for optimization (NICSO 2010) (pp. 65-74). Springer Berlin Heidelberg.
- [15] LI, X. L., & SHAO, Z. J., & QIAN, J. X. (2002), *An optimizing method based on autonomous animates: fish-swarm algorithm*. Systems Engineering-theory & Practice, 11 32-38.
- [16] MEZURA-MONTES, E., CETINA-DOMINGUEZ, O., & HERNÁNDEZ-OCANA, B. (2010) *Nuevas Heurísticas Inspiradas en la Naturaleza para Optimización Numérica*. Mecatrónica, 249-272.
- [17] CHANG, T. J., MEADE, N., BEASLEY, J. E., & SHARAIHA, Y. M. (2000). *Heuristics for cardinality constrained portfolio optimisation*. Computers & Operations Research, 27(13), 1271-1302.
- [18] HÉCTOR SALAS HARMS. (2003) *La teoría de cartera y algunas consideraciones epistemológicas acerca de la teorización en las áreas económico-administrativas*. Revista Contaduría y Administración, (208):37-38.
- [19] GUPTA, P., MEHLAWAT, M. K., INUIGUCHI, M., & CHANDRA, S. (2014). *Fuzzy Portfolio Optimization*. Springer-Verlag, Berlin.
- [20] MARKOWITZ, H. (1952), *Portfolio selection*. The journal of finance, 7(1), 77 - 91.
- [21] MARKOWITZ, H. (1959), *Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments*. J. Wiley.
- [22] SHARPE, W. F. (1971). *A linear programming approximation for the general portfolio analysis problem*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 6(05), 1263-1275.
- [23] KONNO, H. (1988). *Portfolio optimization using L1 risk function*. IHSS, Tokyo.
- [24] KONNO, H., & YAMAZAKI, H. (1991). *Mean-absolute deviation portfolio optimization model and its applications to Tokyo stock market*. Management science, 37(5), 519-531.
- [25] M. G. SPERANZA (1993), *Linear programming models for portfolio optimization*. Finance 14, 107-123.
-

-
- [26] SPERANZA, M. G. (1996), *A heuristic algorithm for a portfolio optimization model applied to the Milan stock market*. Computers & Operations Research, 23(5), 433-441.
- [27] CHEN, A. H., LIANG, Y. C., & LIU, C. C. (2012, June). *An artificial bee colony algorithm for the cardinality-constrained portfolio optimization problems*. In Evolutionary Computation (CEC), 2012 IEEE Congress on (pp. 1-8). IEEE.
- [28] YIN, X., NI, Q., & ZHAI, Y. (2015, May). *A novel PSO for portfolio optimization based on heterogeneous multiple population strategy*. In Evolutionary Computation (CEC), 2015 IEEE Congress on (pp. 1196-1203). IEEE.
- [29] MISHRA, S. K., PANDA, G., & MAJHI, R. (2014). *A comparative performance assessment of a set of multiobjective algorithms for constrained portfolio assets selection*. Swarm and Evolutionary Computation, 16, 38-51.
- [30] LORASCHI, A., TETTAMANZI, A., TOMASSINI, M., & VERDA, P. (1995). *Distributed genetic algorithms with an application to portfolio selection*. Artificial Neural Nets and Genetic, 384-387.
- [31] ALBA, E. (1999). *Análisis y diseño de algoritmos genéticos paralelos distribuidos. Tesis Doctoral, Universidad de Málaga. Departamento de Lenguajes y Ciencias de la Computación. p. 164*
- [32] LWIN, K., QU, R., & KENDALL, G. (2014). *A learning-guided multi-objective evolutionary algorithm for constrained portfolio optimization*. Applied Soft Computing, 24, 757-772.
- [33] ZHOU, J., & LI, J. (2014, June). *An improved multi-objective particle swarm optimization for constrained portfolio selection model*. In Service Systems and Service Management (ICSSSM), 2014 11th International Conference on (pp. 1-5). IEEE.
- [34] KANG, P. Y., WU, I. C., & HSUEH, C. H. (2015, November). *Applying heuristic algorithms to portfolio selection problem*. In 2015 Conference on Technologies and Applications of Artificial Intelligence (TAAI) (pp. 323-329). IEEE.
- [35] CHEN, W. (2015). ARTIFICIAL BEE COLONY ALGORITHM FOR CONSTRAINED POSSIBILISTIC PORTFOLIO OPTIMIZATION PROBLEM. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 429, 125-139.
- [36] ALATAS, B. (2010). *Chaotic bee colony algorithms for global numerical optimization*. Expert Systems with Applications, 37(8), 5682-5687.
- [37] POUYA, A. R., SOLIMANPUR, M., & REZAEI, M. J. (2016). *Solving Multi-objective Portfolio Optimization Problem Using Invasive Weed Optimization*. Swarm and Evolutionary Computation. 28, 42-57.
-

-
- [38] PONSICH, A., JAIMES, A. L., & COELLO, C. A. C. (2013). *A survey on multiobjective evolutionary algorithms for the solution of the portfolio optimization problem and other finance and economics applications*. *Evolutionary Computation*, IEEE Transactions on, 17(3), 321-344.
- [39] ZHU, H., WANG, Y., WANG, K., & CHEN, Y. (2001). *Particle Swarm Optimization (PSO) for the constrained portfolio optimization problem*. *Expert Systems with Applications*, 38(8), 10161-10169.
- [40] CRAMA, Y., & SCHYNS, M. (2003). *Simulated annealing for complex portfolio selection problems*. *European Journal of operational research*, 150(3), 546-571.
- [41] KENDALL, G., & SU, Y. (2005, February). *A Particle Swarm Optimisation Approach in the Construction of Optimal Risky Portfolios*. In *Artificial Intelligence and Applications* (Vol. 453, pp. 140-145). ISO 690
- [42] CHEN, W., ZHANG, R. T., CAI, Y. M., & XU, F. S. (2006, August). *Particle swarm optimization for constrained portfolio selection problems*. In *Machine Learning and Cybernetics, 2006 International Conference on* (pp. 2425-2429). IEEE. ISO 690
- [43] XU, F., CHEN, W., & YANG, L. (2007, July). *Improved particle swarm optimization for realistic portfolio selection*. In *Software Engineering, Artificial Intelligence, Networking, and Parallel/Distributed Computing, 2007. SNPD 2007. Eighth ACIS International Conference on* (Vol. 1, pp. 185-190). IEEE.
- [44] CURA, T. (2009). *Particle swarm optimization approach to portfolio optimization*. *Non-linear Analysis: Real World Applications*, 10(4), 2396-2406.
-