



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA-IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍAS

**SOLUCIONES GRAVITACIONALES INSPIRADAS
POR NO-CONMUTATIVIDAD**

Tesis que presenta
Blanca Angélica González Morales
Para obtener el grado de
Doctora en Ciencias (Física)

ASESOR: Dr. ROMÁN LINARES ROMERO

SINODALES:

PRESIDENTE: Dra. NORA EVA BRETÓN BAÉZ

SECRETARIO: Dr. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARÍA

VOCAL: Dr. ROMÁN LINARES ROMERO

VOCAL: Dr. ALFREDO HERRERA AGUILAR

VOCAL: Dr. JUAN MANUEL ROMERO SANPEDRO

CIUDAD DE MÉXICO, JULIO DE 2018

Dedicado especialmente a mi hija Samantha.

*A mi familia con mucho cariño por estar conmigo en todo momento:
mis padres Graciela Morales y Javier González,
mis hermanos Juan, Miguel, Lidia y Karina.
A mi pareja Julio.*

Agradecimientos

Agradezco especialmente al Dr. Román Linares Romero por darme la oportunidad de trabajar con él en estos temas de gran interés en el ámbito de la investigación científica. Por brindarme toda su paciencia y apoyo incondicional proporcionado a lo largo de todo este proceso y, que en lo personal ha sido muy constructivo en mi formación académica.

Agradezco al Dr. Marco Antonio Maceda Santamaría por su dedicación e interés en este trabajo, así como las discusiones constructivas sobre el tema en conjunto con el Dr. Román Linares.

A las secretarias y personal académico de la UAM-I que siempre han estado conmigo, especialmente a Lupita.

A los sinodales por sus oportunas observaciones que contribuyeron a mejorar esta tesis.

Al departamento de Física por proporcionarme los medios necesarios para la conclusión exitosa del trabajo. Especialmente al Dr. Abel Camacho.

A mis colegas del Posgrado en Física por su amistad.

A todos ustedes mis más sinceros agradecimientos.

Resumen

El objetivo de este trabajo es analizar los efectos de la no conmutatividad de las coordenadas en las propiedades físicas de dos distintos tipos de soluciones gravitacionales inspiradas por no conmutatividad:

1. El espacio-tiempo de Einstein-Proca no conmutativo.
2. El agujero negro Einstein-Born-Infeld-anti-de Sitter no conmutativo.

Las soluciones a las ecuaciones de Einstein se obtienen al inducir la no conmutatividad en el contexto de los denominados estados coherentes. En este formalismo las fuentes puntuales del campo gravitacional son remplazadas por distribuciones gaussianas que dependen del parámetro de no conmutatividad θ , el cual tiene dimensiones de $[\text{longitud}]^2$. Las fuentes gaussianas conforman la estructura del tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$, mientras que la geometría está constituida por los valores esperados de los operadores coordenados. Estas características del formalismo no conmutativo permiten resolver las ecuaciones de campo con los métodos matemáticos usuales. Para el caso 1 discutimos los efectos de la no conmutatividad en las soluciones así obtenidas al sistema de ecuaciones Einstein-Proca. La solución estándar no deformada muestra una contribución al campo gravitacional que proviene de la energía clásica total de los campos, lo que implica la presencia de una singularidad desnuda y cuando el campo de Proca es nulo, la solución se reduce al agujero negro de Reissner-Nordström. En contraste la correspondiente solución inspirada por no conmutatividad es regular y los horizontes pueden evadirse. En el límite $\theta \rightarrow 0$ recobramos la solución no deformada. Para el caso 2 la deformación no conmutativa se realiza de dos formas:

- a) se considera una distribución de masa gaussiana y una distribución de carga puntual,
- b) se considera una distribución de carga gaussiana y una distribución de masa puntual.

En ambos casos se obtiene la solución en dimensión arbitraria y se calculan algunas propiedades termodinámicas de las soluciones como; temperatura, presión, entalpía y calor específico. Se analizan los efectos de la no conmutatividad en el caso particular de $(3 + 1)$ -dimensiones y se discute la existencia de puntos críticos, a través de la ecuación de estado $P - v$ y el diagrama de Gibbs. Dentro de los resultados se encuentra que la no

conmutatividad para la deformación de masa muestra puntos críticos y los diagramas se comportan similarmente a los de la termodinámica. Nuevamente como es de esperarse, en el límite $\theta \rightarrow 0$ se recupera la solución no deformada.

Índice general

Resumen	I
Introducción	1
1. Relatividad General	6
1.1. Las ecuaciones de Einstein	7
1.2. Simetría esférica	10
1.3. Soluciones esféricas con $T^0_0 = T^r_r$	12
1.3.1. Materia isotrópica ($p_r = p_\perp$)	13
1.3.2. Materia anisotrópica ($p_r \neq p_\perp$)	13
1.4. Solución esférica en vacío	14
1.5. Condiciones de energía	15
1.6. Soluciones máximamente simétricas	17
1.6.1. Espacio-tiempo de Sitter	19
1.6.2. Espacio-tiempo anti-de Sitter	23
2. Agujeros negros	26
2.1. Agujero negro de Schwarzschild	30
2.1.1. Solución de Schwarzschild en $3 + 1$ dimensiones	30
2.1.2. Solución de Schwarzschild en $d + 1$ dimensiones	33
2.1.3. Solución de Schwarzschild-(A)dS	35
2.1.4. Solución de Schwarzschild anisotrópica en $3 + 1$	36
2.2. Solución eléctrica de Reissner-Nordström	38
2.2.1. Reissner-Nordström en $3 + 1$	41
2.3. Termodinámica de agujeros negros	47

2.3.1.	Schwarzschild en $(3 + 1)$ -dimensiones	49
2.3.2.	Reissner-Nordström en $(3 + 1)$ -dimensiones	50
2.3.3.	Schwarzschild-Anti-de Sitter en $(3 + 1)$ -dimensiones	53
2.4.	Termodinámica en el espacio fase extendido	55
2.4.1.	Reissner-Nordström-anti-de Sitter en $(3+1)$ -dimensiones	57
3.	Soluciones de Einstein-Born-Infeld	62
3.1.	La teoría de Born-Infeld	64
3.1.1.	El lagrangiano de Born-Infeld	64
3.1.2.	Ecuaciones de movimiento	65
3.1.3.	Tensor de energía momento	66
3.1.4.	Solución estática y simetría esférica	68
3.2.	Solución eléctrica de Einstein-Born-Infeld	70
3.2.1.	Agujero negro EBI ₃₊₁ eléctrico	71
3.2.2.	Agujero negro EBIAdS eléctrico	74
3.3.	Termodinámica del agujero negro EBIAdS	76
4.	No conmutatividad y Estados Coherentes	80
4.1.	Niveles de Landau	82
4.1.1.	Proyección al nivel más bajo de Landau	83
4.2.	Formalismo de Weyl-Wigner-Groenewold-Moyal	84
4.2.1.	La transformada de Weyl y la función de Wigner	84
4.2.2.	Producto $*$ de Gronewold-Moyal	87
4.3.	Estados coherentes	89
4.3.1.	Propiedades de estados coherentes de Glauber	90
4.3.2.	Estados coherentes inspirados por no conmutatividad	92
4.3.3.	Efectos no conmutativos	95
4.4.	Soluciones asintóticamente de agujero negro	98
4.4.1.	Solución asintóticamente Reissner-Nordström	99
4.4.2.	Solución asintóticamente Schwarzschild	102
5.	Espacio-tiempo de Einstein-Proca no conmutativo	106

5.1. Einstein-Proca no conmutativo	108
6. Termodinámica del agujero negro Einstein-Born-Infeld-anti-de Sitter no conmutativo en dimensión arbitraria	116
6.1. Modelo A: Deformación no conmutativa de masa	117
6.2. Modelo B: Deformación no conmutativa de carga eléctrica	120
6.3. Propiedades Termodinámicas	121
6.3.1. Termodinámica en el modelo A	123
6.3.2. Termodinámica en el modelo B	126
Conclusiones	134
A. Tensor de Ricci	138
B. Integrales	140
C. Auto-energía	141
D. Fórmulas	145
E. Masa ADM	146
F. Radiación Hawking	148
G. Cálculo de la temperatura	152

Introducción

“ The black holes of nature are the most perfect macroscopic objects there are in the universe: the only elements in their construction are our concepts of space and time ”

Subrahmanyan Chandrasekhar

El siglo XX fue testigo del surgimiento de dos teorías que revolucionaron nuestro conocimiento sobre la naturaleza: la Relatividad General y la Mecánica Cuántica. La primera cambió nuestros conceptos de espacio, tiempo y materia, la segunda dotó al microcosmos de un carácter discreto, al mismo tiempo que expulsó el determinismo de las ecuaciones que lo rigen. Desde entonces un reto de la física moderna es la construcción de una teoría cuántica de la gravedad. ¿Por qué deberíamos estar interesados en una teoría de este tipo? Porque existen tres fenómenos físicos que involucran de manera natural la escala de validez de ambas teorías, estos son: la gran explosión, los agujeros negros y el estudio de la colisión de gravitones de muy alta energía. La escala de energía E_P o equivalentemente de longitud ℓ_P o tiempo t_P en las cuales la gravedad cuántica es relevante se obtiene combinando adecuadamente las tres constantes fundamentales: la velocidad de la luz c , la constante gravitacional de Newton G y la constante de Planck \hbar , esta escala es la conocida escala de Planck y sus valores son: $E_P \approx 1.22 \times 10^{19} \text{GeV.}$, $l_P \approx 1.6 \times 10^{-35} \text{m.}$ y $t_P \approx 5.4 \times 10^{-44} \text{s.}$

A la escala de Planck surgen varias preguntas cuyas respuestas nos pueden dar una primera idea de la estructura del espacio-tiempo a esa escala, por ejemplo, si la materia tiene unidades fundamentales e indivisibles (partículas elementales) ¿El espacio-tiempo tiene una estructura similar? ¿Podemos dividir el espacio-tiempo indefinidamente en partes más pequeñas? si no es el caso ¿Existen entonces “átomos de espacio-tiempo”? un razonamiento sencillo de estas cuestiones nos lleva a conclusiones extraordinarias.

Si podemos dividir el espacio-tiempo de manera indefinida, el principio de incertidumbre de Heisenberg introduce una objeción profunda. Según este principio mientras mayor sea la certeza respecto del instante que algún fenómeno ocurre, mayor será la incertidumbre de su energía. Así en un espacio-tiempo continuo en el que las partículas elementales sean consideradas puntuales, el tamaño nulo del punto que estas ocupan estaría asociada a una energía infinita según el principio de Heisenberg y dado que en

principio la partícula puede estar en cualquier posición, esto valdría para todos los puntos del espacio-tiempo. Por otro lado la Relatividad General nos dice que la acumulación de energía en una región pequeña da origen a un agujero negro, una singularidad que desgarraría el tejido del espacio-tiempo. En conclusión, si el espacio-tiempo puede dividirse indefinidamente y las partículas son puntuales, el universo estaría repleto de agujeros negros microscópicos. Concluimos que así como en el universo microscópico tenemos dificultades para discernir si un electrón es una onda o una partícula, lo cual hace que los constituyentes de la materia se vuelvan elusivos, tenemos que al llegar a la escala de Planck la geometría dejará de parecerse a lo que conocemos. Las nociones de punto, curva y superficie se verán afectadas por la mancha difusa que impregna el principio de incertidumbre y por tanto el concepto de geometría a esas escalas deja de existir, como también dejan de tener sentido los conceptos de espacio y de tiempo.

Dado que aún no contamos con una teoría de gravedad cuántica ¿Cómo podemos analizar los fenómenos físicos relevantes a la escala de Planck? Existen diferentes intentos para construir una gravedad cuántica, entre ellos, la teoría de cuerdas, la correspondencia AdS/CFT, la teoría de lazos, la no conmutatividad, etc. Ninguno de ellos ha logrado su objetivo, sin embargo cada uno de estos intentos nos ha permitido analizar diferentes aspectos de la física a la escala de Planck utilizando diferentes perspectivas y aproximaciones semiclásicas. En esta tesis analizamos algunos aspectos físicos de soluciones gravitacionales en el contexto de la no conmutatividad de las coordenadas espaciales inspirada por estados coherentes. En particular analizamos las propiedades termodinámicas de una solución gravitacional tipo agujero negro y como preámbulo analizamos una solución gravitacional que en su versión conmutativa estándar posee una singularidad desnuda.

Quizá uno de los objetos más intrigantes en la historia de la física teórica son los agujeros negros, ya que no existen elementos experimentales suficientes que corroboren su existencia, aunque hoy en día existe evidencia astrofísica veraz que indica lo contrario. Teóricamente los agujeros negros son soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein de la Relatividad General, y estos objetos resultan sumamente importantes en la construcción de teorías que pretenden describir la estructura de nuestro universo. La geometría de estos objetos se comporta similarmente a las leyes de la termodinámica, tal como lo estableció por primera vez Bekenstein (1973) al establecer que el área que define el horizonte de eventos se comporta similarmente a la entropía, esto dio una gran motivación para tratar a los agujeros negros (objetos macroscópicos) desde el punto de vista termodinámico. En 1975, S. Hawking mostró que los agujeros negros emiten radiación térmica, al construir un modelo semiclásico en el que en la inmediatez del horizonte de eventos se crean pares de partícula-antipartícula virtuales con energía positiva y negativa respectivamente, la de energía positiva real escapa al exterior infinito lo que da origen a la radiación, mientras que la de energía negativa es capaz de atravesar el potencial gravitacional debido al efecto túnel y eventualmente caerá a la singularidad; el agujero negro pierde masa en forma de radiación, proceso conocido como evaporación. La primera descripción termodinámica de agujeros negros que se hizo fue trabajando con espacios asintóticamente Minkowski, sin embargo el espacio fase que se genera resulta estar incompleto, ya que solamente

aparecen las variables termodinámicas de entropía, temperatura, potenciales eléctricos y energía interna (masa). Es necesario trabajar en un espacio-tiempo de fondo que permita definir otras variables termodinámicas, o lo que es lo mismo, obtener un espacio fase extendido. El espacio en el que se trabaja comúnmente es el de anti-de Sitter, aquí el potencial gravitacional se comporta como una caja de paredes infinitas pero de volumen finito tal que el número de partículas y carga permanecen fijos, de modo que se espera que el agujero negro esté contenido dentro de la caja y que al evaporarse puede coexistir de manera estable con la radiación térmica, la cual queda confinada en el volumen V . En su trabajo pionero, Hawking y Page encontraron que hay una transición de fase en el agujero negro de Schwarzschild-anti-de Sitter, más aún, la evaporación del agujero se comporta de manera similar a la transición de fase líquido-gas y por tanto puede describirse con la ecuación de Van der Waals, además de que los agujeros negros pueden estar en equilibrio estable con la radiación térmica a una temperatura fija.

En este trabajo nos concentramos en las soluciones gravitacionales con simetría esférica y estática. El primer espacio que se estudia es Einstein-Proca no conmutativo, aquí se analizan los efectos de la no conmutatividad en las soluciones y se comparan los resultados con el caso no deformado. El segundo espacio-tiempo que se estudia es el sistema Einstein-Born-Infeld, en el que se analizan los efectos de la no conmutatividad en algunas de sus propiedades termodinámicas. Estas soluciones dependen del parámetro de Born-Infeld b que es la intensidad del campo eléctrico en la posición de la carga y cuyo caso límite $b \rightarrow 0$ corresponde a la solución de Schwarzschild, mientras que el límite $b \rightarrow \infty$ corresponde al agujero negro de Reissner-Nordström. La electrodinámica no lineal de Born-Infeld es una generalización de la teoría de Maxwell y, el propósito de su construcción consistió en regularizar las divergencias que se obtienen al considerar interacciones (puntuales) en la teoría electrodinámica; de esta forma se obtiene como resultado que la auto-energía de una carga eléctrica puntual es finita, ya que es regularizada por b . No obstante que la electrodinámica de Born-Infeld tiene un mejor comportamiento en la posición de la carga, los agujeros negros presentan singularidades en el origen $r = 0$, lo cual induce que sus cantidades termodinámicas, como la temperatura, hereden este comportamiento divergente. Una propuesta alternativa para evitar las divergencias UV en las interacciones puntuales, fue dada por W. Heisenberg en los albores de la Mecánica Cuántica. Fue sin embargo Snyder (1946) quien implementó estas ideas al desarrollar un proceso de cuantización del espacio-tiempo, caracterizado por coordenadas no conmutativas

$$[\hat{x}_k, \hat{x}_l] = i\hat{\theta}_{kl},$$

que proveen de un principio de incertidumbre en las coordenadas, y por tanto, discretizan el espacio-tiempo con celdas de tamaño θ . Existen diversas formas de inducir no conmutatividad en una teoría. La más conocida es el formalismo de Weyl-Wigner-Moyal en el que básicamente el producto punto es sustituido por el producto estrella, que contiene la información del espacio no conmutativo, sin embargo este formalismo no garantiza que se conserve la unitariedad e invarianza de Lorentz. En este trabajo empleamos un método diferente para introducir no conmutatividad, el cual se basa en el formalismo de los estados coherentes de Mecánica Cuántica. El formalismo consiste en realizar foliaciones del

espacio-tiempo en semiplanos de dos dimensiones en los que se fija la dirección temporal, esto garantiza que se conserve la unitariedad y todos los observadores de cada plano miden el mismo $\theta = cte.$, lo que permite restringirse a un semi-plano efectivo para el cual las coordenadas no conmutativas (que son operadores coordenados) no tienen valores propios en común. Sin embargo se definen nuevos operadores que son combinaciones de estos, y que además satisfacen

$$[\hat{Z}, \hat{Z}^\dagger] = \theta,$$

los cuales actúan en la misma forma que los operadores de creación y aniquilación de la Mecánica Cuántica, con los que se construye una base en el espacio no conmutativo 2-dimensional para la cual pueden generarse estados propios en la misma forma que se construyen usando estados coherentes en Mecánica Cuántica. No está de más enfatizar que a pesar del paralelismo en la construcción, los estados son de naturaleza totalmente distinta. El resultado final es que las fuentes de campo puntuales son remplazadas por distribuciones gaussianas del espacio no conmutativo, lo que genera una deformación no conmutativa del tensor de energía momento, mientras que la geometría del espacio permanece formalmente intacta, lo que significa que se preserva la invarianza de Lorentz y por tanto las ecuaciones de campo se resuelven con los métodos usuales. Dentro de las soluciones a las ecuaciones de campo, se producen soluciones de agujero negro que son reguladas por el parámetro de no conmutatividad θ , así, uno de los resultados más importantes es que la temperatura de Hawking tiene un valor finito, primero llega a una temperatura máxima antes de llegar al cero absoluto, es decir ya no diverge en $r = 0$.

La tesis consta de 6 capítulos y 7 apéndices. En el capítulo 1 damos un repaso de las soluciones estáticas y esféricamente simétricas a las ecuaciones de Einstein y revisamos las soluciones de curvatura constante. En el capítulo 2 repasamos las características principales de las soluciones tipo agujero negro, entre ellas, del agujero negro de Schwarzschild y el agujero negro de Reissner-Nordström, tanto en sus versiones asintóticamente plana como asintóticamente AdS. El capítulo 3 lo dedicamos al estudio de las propiedades básicas de la electrodinámica de Born-Infeld y del agujero negro de Einstein-Born-Infeld-AdS. En el capítulo 4 se hace una presentación de los aspectos básicos de la no conmutatividad, especialmente de la versión basada en estados coherentes. Los resultados originales de esta tesis son presentados en los capítulos 5 y 6. En el capítulo 5 obtenemos una solución al sistema Einstein-Proca no conmutativo y analizamos los efectos de la no conmutatividad en las soluciones, ya que ahora dependerán del parámetro θ para que sea regular; además encontramos que en el límite donde $\theta \rightarrow 0$ se recupera la solución no deformada. En el capítulo 6 resolvemos el sistema Einstein-Born-Infeld-anti-de Sitter no conmutativo en dimensión arbitraria, cuyas soluciones de agujero negro dependerán ahora de la variación del parámetro de Born-Infeld b y del de no conmutatividad θ , y por lo tanto, también sus propiedades termodinámicas dependerán de estos parámetros. Específicamente nos concentramos en la ecuación de estado P - v y la función de Gibbs, para estudiar las posibles transiciones de fase. Básicamente lo que se hace es deformar el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ en el que las fuentes de campo puntuales son remplazadas por perfiles gaussianos definidos en el espacio-tiempo no conmutativo a través del formalismo de los estados

coherentes. La parte geométrica de las ecuaciones de Einstein no se modifica y obtenemos soluciones de agujero negro con los procedimientos ya conocidos, luego calculamos algunas de sus propiedades termodinámicas las cuales dependen de b y θ . Específicamente nos concentramos en el caso $(3 + 1)$ -dimensional y analizamos la ecuación de estado y función de Gibbs para saber si existen puntos en donde ocurren transiciones de fase. Uno de los resultados que proviene de la no conmutatividad, es que ésta modifica el comportamiento de las soluciones, ya que aparecen puntos críticos en donde antes no había (caso conmutativo), además los diagramas de P - v y de Gibbs se comportan similarmente a los de la termodinámica. Para $r < \theta$ la física de agujeros negros requiere de argumentos cuánticos (o semiclásicos). Mientras que en el límite $\theta \rightarrow 0$, donde los efectos de la no conmutatividad son bastante pequeños si no es que se suprimen, recuperamos las expresiones de las soluciones singulares no deformadas.

Los resultados originales mostrados en la presente tesis han sido publicados en:

- Thermodynamics of a higher dimensional noncommutative anti-de Sitter-Einstein-Born-Infeld black hole.
B. A. González, R. Linares, M. Maceda and O. Sánchez-Santos.
International Journal of Theoretical Physics 57 (2018) 2041-2063. arXiv:1508.01284 [hep-th].
- Noncommutative Einstein-Proca spacetime.
B. A. González, R. Linares, M. Maceda and O. Sánchez-Santos.
Physical Review D90 (2014) 124085. arXiv:1409.3759 [hep-th].

1

Relatividad General

La Relatividad General de Einstein (1915)¹ es sin duda una de las teorías más revolucionarias en la historia de la ciencia. Esta teoría describe una de las propiedades físicas omnipresentes del universo; la *gravedad*, en términos de una estructura matemática elegante, la *geometría diferencial de espacios-tiempo curvos*, unidas a través de un principio físico fundamental: el *principio de equivalencia*. Las explicaciones y predicciones físicas de la Relatividad General sobre los fenómenos gravitacionales, descansan sobre un andamiaje robusto de verificaciones experimentales, entre las que se encuentran²:

- 1) La explicación de la precesión anómala de la órbita del planeta Mercurio alrededor del Sol.
- 2) La deflexión de los rayos de luz producida por el campo gravitacional, confirmada por Arthur Eddington durante un eclipse solar en 1919.
- 3) El corrimiento de la frecuencia de la luz hacia el rojo ocasionado por la gravedad.
- 4) La detección de ondas gravitacionales realizada por el experimento LIGO en 2015

¹Existe una gran cantidad de excelentes textos donde se desarrolla en detalle los aspectos más relevantes de la Relatividad General. Para la elaboración de este trabajo hemos utilizado entre las diferentes opciones, las referencias [1, 2, 3, 4, 5, 7].

²La lista de confirmaciones experimentales es mucho más extensa que la mencionada aquí. El lector interesado en un mayor detalle de los experimentos existentes puede consultar [8].

[9, 10], lo cual originó el otorgamiento del premio Nobel en física 2017 a los físicos Kip Thorne, Rainer Weiss y Barry C. Barish.

En esta tesis tenemos como objetivo resolver las ecuaciones de movimiento de la Relatividad General y explorar las consecuencias físicas de estas soluciones, para geometrías generadas por tensores de energía momento provenientes de la formulación de estados coherentes no conmutativos de materia, en particular las debidas a un campo de Proca y a las de un campo eléctrico en el contexto de la electrodinámica no lineal de Born-Infeld. Para lograr este objetivo, en este capítulo revisamos los elementos mínimos que necesitaremos de la Relatividad General.

1.1. Las ecuaciones de Einstein

De la misma manera en que las ecuaciones de Maxwell gobiernan la respuesta de los campos eléctricos \vec{E} y magnéticos \vec{B} , a las densidades de carga ρ y corriente \vec{J} , las ecuaciones de campo de Einstein gobiernan la respuesta de la métrica $g_{\mu\nu}$ a las densidades de energía y momento $T_{\mu\nu}$. En otras palabras, las fuentes de campo gravitacional son distribuciones de materia y momento que curvan al espacio-tiempo, estableciendo que la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo causada por la presencia de dicha materia. La métrica $g_{\mu\nu}$ codifica las propiedades geométricas del espacio-tiempo (en ausencia de materia $g_{\mu\nu}$, es la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$). Una medida de la curvatura es proporcionada por el tensor de Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ ³, el cual es un tensor formado por segundas derivadas de la métrica y satisface las identidades de Bianchi; de éste se construye el tensor de Ricci $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$, y a su vez, del tensor de Ricci se construye el escalar de curvatura $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$. Las ecuaciones de Einstein fueron formuladas originalmente en un espacio-tiempo de 4-dimensiones (3 dimensiones espaciales y 1 dimensión temporal), sin embargo, debido a la relevancia que las soluciones gravitacionales tienen en teorías y modelos formulados en espacios-tiempo con dimensiones espaciales extra, en esta tesis discutimos las ecuaciones de Einstein en una variedad \mathcal{M} de dimensión $d + 1$ (d dimensiones espaciales y 1 temporal). Estas ecuaciones se obtienen de la acción de Hilbert S_H (ver por ejemplo [1, 2, 3, 4, 5, 7]), la cual es invariante ante transformaciones generales de coordenadas y considera como variable dinámica a la métrica $g_{\mu\nu}$ (para la cual supondremos signatura $(-, +, \dots, +)$)

$$S_H[g_{\mu\nu}] = \frac{c^3}{16\pi G_{d+1}} \int_{\mathcal{M}} d^{d+1}x \sqrt{-g} R + \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \mathcal{L}_M + \text{TF}. \quad (1.1)$$

Aquí g es el determinante de la métrica, c la velocidad de la luz, \mathcal{L}_M la densidad lagrangiana de materia, es decir, esta parte del lagrangiano contiene los campos que originan que el espacio-tiempo se curve y G_{d+1} es la constante gravitacional de Newton, lo cual es consistente con el hecho de que en el límite de campo gravitatorio débil, la componente

³La forma explícita de los diferentes tensores se puede consultar en el apéndice A.

g_{00} corresponde al potencial Newtoniano en un espacio-tiempo de dimensión $d + 1$. Las dimensiones de la constante de Newton son $[G_{d+1}] = L^d/MT^2$. Si la variedad \mathcal{M} tiene frontera, se incluye el término de frontera TF a la acción. Aplicando el principio de mínima acción se obtienen las ecuaciones de Einstein

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_{d+1}}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad (1.2)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein y $T_{\mu\nu}$ es el tensor de energía-momento métrico (o de Rosenfeld) asociado a S_M

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad \text{y} \quad T_{\mu\nu} \equiv -\frac{2c}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (1.3)$$

La parte izquierda de las ecuaciones de Einstein (1.2) contiene la información geométrica del espacio-tiempo, mientras que la parte derecha contiene a las fuentes, las cuales en un sistema de referencia local representan: T_{00} a la densidad de energía ρ , las componentes T_{ii} a la densidad de presión p_i y, las componentes fuera de la diagonal al flujo de energía o densidad de momento. En general este tensor puede depender de la métrica misma. Las ecuaciones son no lineales, esto implica que dadas dos soluciones de las ecuaciones no podemos superponerlas para encontrar una tercera. Es por tanto muy difícil resolver las ecuaciones de Einstein, aún en vacío, donde $T_{\mu\nu} = 0$, lo que hace necesario introducir suposiciones adicionales que las simplifiquen. El tipo de argumento simplificador más popular, es considerar métricas con algún tipo de simetría, en este trabajo nos restringiremos a métricas con simetría esférica.

El hecho de que la acción sea invariante ante transformaciones generales de coordenadas se puede elevar al rango de principio, llamado *principio de covarianza general de la relatividad* y constituye uno de los pilares de la Relatividad General. Este principio es una generalización del principio de relatividad (especial) y establece que todas las leyes de la física deben ser invariantes de forma o *covariantes*, bajo cambios arbitrarios de sistemas de referencia. Dado que cualquier teoría de campo relativista en espacio-tiempo plano consistente requiere del uso de la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-, +, \dots, +)$, la cual es invariante únicamente bajo transformaciones entre sistemas de referencia relacionados por transformaciones de Poincaré, la covarianza general en una teoría de campo se obtiene al sustituir la métrica $\eta_{\mu\nu}$ por un campo métrico $g_{\mu\nu}(x)$ y la sustitución de todas las derivadas parciales ∂_μ por derivadas covariantes ∇_μ . Tanto la métrica como las derivadas covariantes se comportan como tensores ante cambios generales de coordenadas.

Debido a la covarianza de la teoría, el tensor energía-momento satisface la ecuación⁴

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad (1.4)$$

y por tanto también lo hace el tensor de Einstein: $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, ambos $G_{\mu\nu}$ y $T_{\mu\nu}$ son simétricos en los índices μ y ν . Debido a esta simetría las ecuaciones de Einstein forman

⁴Esta ecuación se obtiene de aplicar el principio de relatividad general a la ecuación de conservación $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Sin embargo (1.4) no es una ecuación de conservación debido al término adicional de conexión.

un conjunto de $(d+1)(d+2)/2$ ecuaciones diferenciales parciales no lineales acopladas de segundo orden, las cuales coinciden en número con las $(d+1)(d+2)/2$ componentes independientes de la métrica que debemos determinar. Sin embargo debido a las $d+1$ restricciones $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$, resulta que hay sólo $d(d+1)/2$ ecuaciones independientes. En realidad esto es apropiado dado que si una métrica es solución de las ecuaciones de Einstein en un sistema coordenado x^μ , ésta también debería ser solución en cualquier otro sistema coordenado x'^μ . Esto significa que hay $d+1$ componentes de $g_{\mu\nu}$ no físicas, representadas por las $d+1$ funciones $x'^\mu = x'^\mu(x^\mu)$ y, por tanto debe suceder que las ecuaciones de Einstein sólo restringen a los $d(d+1)/2$ grados de libertad independientes de las coordenadas.

Una forma alternativa de expresar las ecuaciones de Einstein se obtiene al tomar la traza en ambos lados de la ecuación (1.2) obteniéndose

$$R = -16\pi G_{d+1} T / (d-1)c^4, \quad (1.5)$$

por lo que las ecuaciones de Einstein toman la forma

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_{d+1}}{c^4} \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{d-1} g_{\mu\nu} T \right). \quad (1.6)$$

Esta forma de las ecuaciones de Einstein es completamente equivalente a la forma (1.2) y soluciones a un conjunto de ecuaciones, necesariamente son soluciones al otro conjunto de ecuaciones. Sin embargo para propósitos prácticos, en algunas situaciones físicas es más sencillo trabajar con las ecuaciones (1.6). Por ejemplo si tenemos materia para la cual la traza del tensor de energía momento se anula, las ecuaciones se simplifican a la forma

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_{d+1}}{c^4} T_{\mu\nu}. \quad (1.7)$$

Las ecuaciones de Einstein se simplifican aún más en vacío, escribiéndose simplemente como

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.8)$$

En este trabajo discutimos la solución de las ecuaciones de Einstein para diferentes tipos de materia, entre ellas:

- Constante cosmológica: $\mathcal{L}_M = -\frac{c^4}{8\pi G_{d+1}} \Lambda$.
- Campo eléctrico en la electrodinámica de Maxwell: $\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} F^{0r} F_{0r}$.
- Campo de Proca: $\mathcal{L}_M = -\frac{1}{2} F^{0r} F_{0r} + \frac{1}{2} A_0 A^0$.
- Campo eléctrico en la electrodinámica de Born-Infeld: $\mathcal{L}_M = b^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{F_{0r} F^{0r}}{b^2}} \right)$.

Desde luego, adicionalmente a las ecuaciones de Einstein, es necesario introducir y resolver las ecuaciones de movimiento asociadas a los campos de materia.

1.2. Simetría esférica

En este trabajo nos restringiremos a situaciones físicas estáticas con simetría esférica. Este conjunto de soluciones contiene a muchas de las soluciones más famosas a las ecuaciones de Einstein, por ejemplo: los espacios máximamente simétricos de curvatura constante positiva (de Sitter), de curvatura constante negativa (anti-de Sitter), los agujeros negros de Schwarzschild, de Reissner-Nordström y del sistema Einstein-Born-Infeld entre otros. El Ansatz del espacio-tiempo estático simétricamente esférico en $(d + 1)$ -dimensiones es

$$ds^2 = -e^{2\mu(r)}c^2dt^2 + e^{2\nu(r)}dr^2 + r^2d\Omega_{(d-1)}^2. \quad (1.9)$$

Esta forma de la métrica es consecuencia del hecho de que un espacio esféricamente simétrico puede ser foliado por S^{d-1} esferas. Localmente el grupo de simetría rotacional de la esfera es $SO(d)$, por lo que para todas estas soluciones tendremos al menos $d(d - 1)/2$ vectores de Killing asociados a las rotaciones en los diferentes planos coordenados cartesianos. El elemento de línea de la S^{d-1} esfera unitaria está dado por

$$d\Omega_{(d-1)}^2 = d\theta_1^2 + \sin^2\theta_1d\theta_2^2 + \cdots + \sin^2\theta_1 \cdots \sin^2\theta_{d-2}d\theta_{d-1}^2 = \sum_{j=1}^{d-1} \left(\prod_{i=0}^{j-1} \sin^2\theta_i \right) d\theta_j^2, \quad (1.10)$$

y subtendiendo un ángulo sólido total

$$\Omega_{(d-1)} = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \quad (1.11)$$

Para un espacio-tiempo con esta simetría sólo hay $d+1$ componentes del tensor de Einstein y del tensor de energía-momentos que son no nulas. Utilizando las definiciones del apéndice A y la métrica (1.9), resulta que las 3 ecuaciones de Einstein no triviales e independientes son

$$e^{-2\nu} \left[\frac{(d-1)(d-2)}{2r^2} - \frac{(d-1)}{r} \partial_r \nu \right] - \frac{(d-1)(d-2)}{2r^2} = \frac{8\pi G_{d+1}}{c^4} T^0_0, \quad (1.12)$$

$$e^{-2\nu} \left[\frac{(d-1)(d-2)}{2r^2} + \frac{(d-1)}{r} \partial_r \mu \right] - \frac{(d-1)(d-2)}{2r^2} = \frac{8\pi G_{d+1}}{c^4} T^r_r, \quad (1.13)$$

$$e^{-2\nu} \left[\partial_r^2 \mu + (\partial_r \mu)^2 - \partial_r \mu \partial_r \nu + \frac{d-2}{r} \partial_r (\mu - \nu) + \frac{(d-2)(d-3)}{2r^2} \right] - \frac{(d-2)(d-3)}{2r^2} = \frac{8\pi G_{d+1}}{c^4} T^{\theta_1}_{\theta_1}. \quad (1.14)$$

Las restantes $d - 2$ ecuaciones de Einstein son iguales a la ecuación (1.14) ya que $G^{\theta_1}_{\theta_1} = G^{\theta_2}_{\theta_2} = \dots = G^{\theta_{d-1}}_{\theta_{d-1}}$. Este hecho lleva a una restricción importante sobre el tensor de energía-momento para un espacio esféricamente simétrico. Para que las ecuaciones de Einstein tengan solución debe suceder que

$$T^{\theta_1}_{\theta_1} = T^{\theta_2}_{\theta_2} = \dots = T^{\theta_{d-1}}_{\theta_{d-1}}. \quad (1.15)$$

Dado que todas las componentes con índices angulares son iguales, denotaremos a todas ellas simplemente como T^θ_θ . Físicamente el tensor de energía-momento está representando una distribución de materia en equilibrio estático, la cual es esféricamente simétrica. La simetría esférica implica que en coordenadas canónicas el tensor es diagonal y sólo depende de la coordenada r

$$T^\mu_\nu(r) = \text{diag}(T^0_0, T^r_r, T^{\theta_1}_{\theta_1}, \dots, T^{\theta_{d-1}}_{\theta_{d-1}}) \equiv \text{diag}(-\rho, p_r, p_\perp, \dots, p_\perp). \quad (1.16)$$

Sin especificaciones adicionales entre las componentes $T^0_0(r)$, $T^r_r(r)$ y $T^\theta_\theta(r)$, la forma de las ecuaciones de Einstein es completamente general. Las cantidades $T^r_r(r)$ y $T^\theta_\theta(r)$ pueden contener contribuciones de la presión de fluidos, así como otros tipos de momentos. En la literatura se utiliza la nomenclatura “presión” radial para referirse a p_r y “presión” tangencial a p_\perp [11], lo cual no debe generar confusión con las presiones hidrostáticas ordinarias. Avancemos en la solución de las ecuaciones (1.12)-(1.14) sin imponer aún ninguna relación adicional. Restando la ecuación (1.12) de (1.13) obtenemos

$$e^{-2\nu} \frac{(d-1)}{r} \partial_r(\mu + \nu) = \frac{8\pi G_{d+1}}{c^4} (T^r_r - T^0_0). \quad (1.17)$$

Por otra parte podemos integrar directamente la ecuación (1.12) en términos de T^0_0 , notando que podemos reescribir la ecuación como

$$\frac{d-1}{2} \frac{d}{r^{d-1}} \frac{d}{dr} [r^{d-2}(e^{-2\nu} - 1)] = \frac{8\pi G_{d+1}}{c^4} T^0_0, \quad (1.18)$$

obteniendo para la función $\nu = \nu(r)$ que

$$e^{-2\nu} = 1 - \frac{2G_{d+1}M(r)}{c^2 r^{d-2}}, \quad \text{donde} \quad M(r) \equiv -\frac{8\pi}{(d-1)c^2} \int r^{d-1} T^0_0(r) dr. \quad (1.19)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (1.13), encontramos que la ecuación diferencial puede reescribirse como

$$\frac{d\mu(r)}{dr} = \frac{8\pi G_{d+1} r^d T^r_r + G_{d+1} c^2 M(r) (d-1)(d-2)}{c^2 r [c^2 r^{d-2} - 2G_{d+1} M(r)] (d-1)}. \quad (1.20)$$

Por otro lado de la ecuación de conservación del tensor de energía-momento, podemos encontrar una relación diferencial entre las diferentes componentes del tensor. De la componente r de la ecuación: $\nabla_\mu T^{\mu r} = 0$ obtenemos

$$\frac{dT^r_r}{dr} = (T^r_r - T^0_0) \frac{d\mu}{dr} + \frac{d-1}{r} (T^\theta_\theta - T^r_r). \quad (1.21)$$

Finalmente combinando las ecuaciones (1.20) y (1.21) obtenemos la ecuación generalizada de Tolman-Oppenheimer-Volkoff ([11], [1])

$$\frac{dT^r_r}{dr} = (T^r_r - T^0_0) \frac{8\pi r^d T^r_r + c^2 M(r) (d-1)(d-2)}{c^2 r [c^2 r^{d-2} - 2G_{d+1} M(r)] (d-1)} G_{d+1} + \frac{d-1}{r} (T^\theta_\theta - T^r_r). \quad (1.22)$$

En resumen, las ecuaciones de Einstein (1.12)-(1.13) más la ecuación de conservación del tensor de energía-momento (1.4), las hemos rescrito en las ecuaciones (1.17), (1.19) y (1.22).

En esta tesis estamos interesados en soluciones con simetría esférica que satisfacen la condición adicional $T^0_0 \neq T^r_r$ (sistema Einstein-Proca, cap. 5), así como en soluciones que satisfacen la condición $T^0_0 = T^r_r$ (agujeros negros). En este último caso dividiremos aún más las soluciones en soluciones isotrópicas: $T^r_r = T^\theta_\theta$ y en soluciones anisotrópicas $T^r_r \neq T^\theta_\theta$. Queda claro que el término isotrópico se refiere al hecho de que las componentes espaciales de la diagonal del tensor de energía-momento son iguales. Elaboremos un poco más sobre las soluciones con $T^0_0 = T^r_r$.

1.3. Soluciones esféricas con $T^0_0 = T^r_r$

Examinando las ecuaciones de Einstein (1.12)-(1.14) nos muestra que tenemos 3 ecuaciones independientes y 5 funciones desconocidas ($\mu(r), \nu(r), \rho(r), p_r(r), p_\perp(r)$). Por lo tanto para resolver completamente el sistema de ecuaciones es necesario especificar dos ecuaciones de estado, por ejemplo: $p_r = p_r(\rho)$ y $p_\perp = p_\perp(\rho)$. En este trabajo estamos interesados en soluciones que satisfacen la ecuación de estado

$$T^r_r(r) = T^0_0(r) \quad \Rightarrow \quad p_r(r) = -\rho(r). \quad (1.23)$$

En este caso deducimos de la ecuación (1.17) que: $\mu(r) = -\nu(r)$ y por tanto la forma de la métrica (1.9) se reduce a la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2G_{d+1}M(r)}{r^{d-2}} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2G_{d+1}M(r)}{r^{d-2}} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{(d-1)}^2, \quad (1.24)$$

con $M(r)$ dada en términos de T^0_0 a través de la ecuación (1.19). Esta será la forma de la métrica para los espacios máximamente simétricos (ver sección 1.6) y los agujeros negros (ver capítulos 3 y 6 y sección 4.4). En cuanto a la ecuación (1.14), ésta se puede reescribir como

$$\frac{1}{2} \nabla^2 (e^{2\mu} - 1) + \frac{d-3}{2r^{d-1}} \frac{d}{dr} [r^{d-2} (e^{2\mu} - 1)] = \frac{8\pi G_{d+1}}{c^4} T^\theta_\theta, \quad (1.25)$$

y puede mostrarse que no es independiente de la ecuación de Einstein (1.18). La única ecuación que nos queda por analizar es (1.22) y sus implicaciones las podemos dividir en dos casos.

1.3.1. Materia isotrópica ($p_r = p_\perp$)

Adicionalmente a la ecuación de estado (1.23), debemos introducir otra ecuación de estado para poder determinar las soluciones de manera completa. En el caso en que localmente la materia es isotrópica la ecuación de estado se obtiene de demandar que las componentes espaciales del tensor de energía-momento sean iguales $T^r_r(r) = T^\theta_\theta(r)$, concluyendo que

$$p_r(r) = p_\perp(r) \quad \Rightarrow \quad p_\perp(r) = -\rho(r). \quad (1.26)$$

En este caso la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff se reduce simplemente a la condición

$$\frac{dp_r(r)}{dr} = 0, \quad \Rightarrow \quad T^\mu_\nu = cte. \quad (1.27)$$

Como veremos, un ejemplo de este caso es el de un espacio con constante cosmológica Λ .

1.3.2. Materia anisotrópica ($p_r \neq p_\perp$)

En este caso la ecuación de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (1.22) nos provee de la ecuación de estado que relaciona la presión tangencial p_\perp con la presión radial p_r

$$p_\perp = p_r + \frac{r}{d-1} \frac{dp_r}{dr} \quad \Rightarrow \quad p_\perp = -\rho - \frac{r}{d-1} \frac{d\rho}{dr}. \quad (1.28)$$

Note que no tenemos una ecuación de estado que gobierne el gradiente de la presión tangencial p_\perp . Sin embargo, esto es de esperarse dado que las ecuaciones de Einstein (sujetas a condiciones de frontera adecuadas) determinan la variación radial de p_r y ρ . La ecuación de estado $p_\perp = p_\perp(\rho)$ nos da automáticamente $p_\perp(r)$. Si ahora escribimos la ecuación (1.22) en la forma

$$\begin{aligned} \frac{dp_r}{dr} = & \frac{(d-1)(d-2)\rho M}{c^2 r^{d-1}} \left(1 + \frac{p_r}{\rho}\right) \left(1 + \frac{8\pi r^d p_r}{(d-1)(d-2)Mc^2}\right) \left(1 - \frac{2G_{d+1}M}{c^2 r^{d-2}}\right)^{-1} G_{d+1} \\ & + \frac{d-1}{r} (p_\perp - p_r), \end{aligned} \quad (1.29)$$

con $M = M(r)$. Es claro que se trata de una ecuación para el equilibrio hidrostático, que en el límite Newtoniano simplemente es

$$\frac{dp_r}{dr} = \frac{(d-2)\rho M(r)}{r^{d-1}} + \frac{d-1}{r} (p_\perp - p_r), \quad (1.30)$$

que no es más que la ecuación de equilibrio hidrostático para una distribución de masa con simetría esférica. Lejos de la fuente esférica el campo gravitacional es isotrópico por lo tanto $p_r = p_\perp$, así tenemos que en $r = 0$ el término $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{p_\perp - p_r}{r} = 0$ es finito, sin embargo el término $\frac{M\rho}{r^{d-1}}$ es singular por lo que se deben imponer condiciones a M en r . Estos resultados son totalmente equivalentes al problema de campo gravitacional central en

el interior de una distribución esférica de masa gravitatoria de tamaño r para esferas anisotrópicas [1], por lo que el término de anisotropía es entonces de origen Newtoniano [11].

Ejemplos de estas soluciones son los agujeros negros anisotrópicos (ver sección 2.1.4) [12]-[16], en los que la constante cosmológica Λ actúa como una presión interna contenida en un radio de longitud mínima, mientras que se considera una presión tangencial sobre la hipersuperficie que define el horizonte de eventos.

1.4. Solución esférica en vacío

Analicemos ahora las soluciones en vacío. Como hemos discutido, en este caso las ecuaciones de Einstein están dadas por (1.8). Así lo que debemos calcular son las componentes del tensor de Ricci, las cuales para la métrica (1.9) producen las siguientes ecuaciones no triviales

$$R_{00} = e^{2(\mu-\nu)} \left(\partial_r^2 \mu + (\partial_r \mu)^2 - \partial_r \mu \partial_r \nu + \frac{d-1}{r} \partial_r \mu \right) = 0, \quad (1.31)$$

$$R_{rr} = -\partial_r^2 \mu - (\partial_r \mu)^2 + \partial_r \mu \partial_r \nu + \frac{d-1}{r} \partial_r \nu = 0, \quad (1.32)$$

$$R_{\theta_1, \theta_1} = e^{-2\nu} (r(\partial_r \nu - \partial_r \mu) - (d-2)) + d-2 = 0, \quad (1.33)$$

$$R_{\theta_j, \theta_j} = \prod_{i=1}^{j-1} \sin^2 \theta_i R_{\theta_1, \theta_1} = 0. \quad (1.34)$$

Sumando las ecuaciones (1.31) y (1.32) nos lleva a la ecuación

$$\frac{d-1}{r} \partial_r (\mu + \nu) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = -\nu, \quad (1.35)$$

y por tanto la métrica tendrá la forma

$$ds^2 = -e^{2\mu} c^2 dt^2 + e^{-2\mu} dr^2 + r^2 d\Omega_{(d-1)}^2. \quad (1.36)$$

Note que esta forma de la métrica es la misma que (1.19) con la diferencia de que en aquel caso la función $\mu(r)$ se determinó integrando la ecuación de Einstein

$$G^0_0 = (8\pi G_{d+1}/c^4) T^0_0, \quad (1.37)$$

mientras que en este caso se obtiene de integrar la ecuación de Einstein en espacio vacío (1.33). Dejaremos esta integración para el capítulo siguiente, donde discutiremos el agujero negro de Schwarzschild.

1.5. Condiciones de energía

Con el objetivo de entender algunas propiedades generales de las soluciones a las ecuaciones de Einstein en presencia de fuentes “realistas” de energía y momento, es útil trabajar con las ecuaciones sin especificar la materia de la cual se obtiene el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$. Desde luego esto nos deja con una gran arbitrariedad. Una posible estrategia es considerar tipos específicos de fuentes, tales como campos escalares, polvo o campos electromagnéticos, sin embargo, ocasionalmente desearíamos entender propiedades de las soluciones que se satisfagan para una variedad amplia de fuentes. En esta circunstancia es conveniente imponer *condiciones de energía* que limiten la arbitrariedad de $T_{\mu\nu}$ [5].

Las condiciones de energía son restricciones invariantes de coordenadas sobre el tensor de energía-momento. Se debe entonces construir escalares a partir de $T_{\mu\nu}$, lo cual se logra típicamente contrayéndolo con vectores tipo tiempo t^μ o vectores nulos l^μ . Por ejemplo tenemos la llamada

• **Condición de Energía Débil** o **WEK**⁵. Establece que $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$ para todo vector tipo tiempo t^μ , o equivalentemente establece que $\rho \geq 0$ y $\rho + p \geq 0$.

Con el objetivo de entender esta condición y educar nuestra intuición, es útil considerar el caso especial cuando la fuente es un fluido perfecto, para el cual el tensor de energía momento está dado por la expresión

$$T_{\mu\nu} = \rho U_\mu U_\nu + p (g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu), \quad (1.38)$$

donde U^μ representa la $(d+1)$ -velocidad del fluido y por tanto es un vector tipo tiempo $U_\mu U^\mu = -1$. Dado que la presión es isotrópica: $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu$ será no-negativa para todo vector tipo tiempo t^μ , si se satisface simultáneamente $T_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \geq 0$ y $T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu \geq 0$ para algún vector nulo l^μ . Evaluando estos escalares obtenemos

$$T_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = \rho, \quad T_{\mu\nu}l^\mu l^\nu = (\rho + p) (U_\mu l^\mu)^2. \quad (1.39)$$

Por lo tanto, la condición de energía débil implica que $\rho \geq 0$ y $\rho + p \geq 0$. La primer condición nos dice como esperaríamos, que la densidad de energía no puede ser negativa. La segunda condición nos dice que la presión no es demasiado grande comparada con la densidad de energía. Desde luego aquí hemos utilizado el tensor de energía-momento de un fluido perfecto para ganar intuición, pero el resultado es general para un tensor de energía-momento arbitrario.

Adicionalmente a la WEC, existen diferentes condiciones de energía, las cuales son apropiadas para diferentes situaciones físicas. Algunas de las más populares son las siguientes:

• **Condición de Energía Dominante** o **DEC**⁶. Incluye la WEC ($T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$ para todo vector tipo tiempo t^μ), así como el requisito adicional de que el vector $T^{\mu\nu}t_\mu$ no

⁵Por sus siglas en inglés Weak Energy Condition.

⁶Por sus siglas en inglés Dominant Energy Condition.

sea tipo espacio (esto es que $T_{\mu\nu}T^\nu{}_\lambda t^\mu t^\lambda \leq 0$). Para un fluido perfecto estas condiciones juntas son equivalentes al requisito más simple: $\rho \geq |p|$, la densidad de energía debe ser positiva y más grande o igual que la magnitud de la presión.

• **Condición de Energía Fuerte** o **SEC**⁷. Establece que $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq \frac{1}{2}T^\lambda{}_\lambda t^\sigma t_\sigma$ para todos los vectores tipo tiempo t^μ , o equivalentemente: $\rho + p \geq 0$ y $\rho + 3p \geq 0$. Note que la SEC no implica la WEC. Es posible mostrar que esta condición de energía implica que la gravitación es atractiva [5].

La mayoría de formas clásicas de materia ordinaria, incluyendo los campos escalares y electromagnéticos obedecen la DEC y por tanto las condiciones menos restrictivas como la WEC. La SEC es útil en la demostración de algunos teoremas de singularidad, pero puede ser violada por ciertas formas de materia, como por ejemplo un campo escalar masivo.

Debemos enfatizar que las condiciones de energía no están relacionadas con la conservación de la energía, ya que la identidad de Bianchi garantiza que la ecuación (1.4) se satisface independientemente de que se impongan condiciones adicionales sobre el tensor $T_{\mu\nu}$. Más bien, ellas sirven para evitar otras propiedades que pensamos como no-físicas, tales como energía que se propaga más rápido que la velocidad de la luz, o que la energía no puede aparecer espontáneamente de la nada, entre otras.

Para soluciones de agujero negro regulares, se viola la condición de energía fuerte o SEC en alguna región dentro del horizonte de eventos, pero satisface la condición de energía débil (WEK) o la condición de energía dominante (DEC) en todas partes. La solución de simetría esférica y estática (1.9) en $d = 3$ en conjunto con la solución métrica $1 - \frac{2G_A m(r)}{c^2 r}$ producen las componentes del tensor de energía momento siguientes

$$T_0^0 = T_r^r = \frac{2c^2}{8\pi r^2} \frac{dm(r)}{dr}, \quad T_{\theta_1}^{\theta_1} = T_{\theta_2}^{\theta_2} = \frac{c^2}{8\pi r} \frac{d^2 m(r)}{dr^2},$$

lo que hace que la condición de energía débil pueda escribirse como las condiciones para la función de masa siguientes

$$\frac{1}{r^2} \frac{dm(r)}{dr} \geq 0,$$

y

$$\frac{2}{r} \frac{dm(r)}{dr} \geq \frac{d^2 m(r)}{dr^2}.$$

Las soluciones de agujero negro regulares que satisfacen la condición de energía débil (WEC) y cuyo tensor de energía momento satisface $T_0^0 = T_r^r$, necesariamente tienen un comportamiento de Sitter [6] en $r \rightarrow 0$.

⁷Por sus siglas en inglés Strong Energy Condition.

1.6. Soluciones máximamente simétricas

Antes de que Hubble diera a conocer sus observaciones sobre la expansión del universo, Einstein propuso el modelo del universo estático en el que introdujo el término de la constante cosmológica y del que tiempo después expresó que había sido un error el introducirlo. Sin embargo años más tarde la constante cosmológica cobraría sentido principalmente en la cosmología. ¿Cómo podemos entender esta constante cosmológica? Cuando en la física no se involucra a la gravitación, únicamente son medibles *cambios* en la energía de un estado a otro, con lo cual la normalización de la energía es arbitraria. Por ejemplo en Mecánica Clásica, el movimiento de una partícula con energía potencial $V(x)$ es precisamente el mismo que el de la misma partícula en un potencial $V(x) + V_0$, para cualquier valor constante V_0 . En gravitación sin embargo, el valor de la energía importa, no sólo las diferencias de energía entre estados. Esta característica abre la puerta para considerar una *energía del vacío*, es decir, una densidad de energía característica del espacio vacío. Los términos “constante cosmológica” y “energía del vacío” son esencialmente intercambiables. Una propiedad esperada de este vacío es que satisfaga el *principio Copernicano* de no tener una dirección privilegiada, má aún, según el modelo cosmológico o teoría del estado estacionario, se establece que: *en cualquier momento, el universo es homogéneo e isotrópico a grandes escalas*, es decir, es uniforme y no hay direcciones privilegiadas independientemente de la evolución del universo (Bondi, Gold y Hoyle en 1948), lo cual desde un punto de vista matemático nos lleva al concepto de un espacio máximamente simétrico, es decir, un espacio que es homogéneo e isotrópico en todo punto⁸. Dada la importancia de estos conceptos recordemos sus definiciones precisas:

Definición 1.1 Una variedad \mathcal{M} es homogénea, si para dos puntos dados $p, q \in \mathcal{M}$ hay una isometría global $\mathcal{A} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ tal que $\mathcal{A}(p) = q$.

Definición 1.2 Una variedad \mathcal{M} es isotrópica alrededor de un punto $p \in \mathcal{M}$ si, dados $v, w \in T_p\mathcal{M}$ hay una isometría, con transporte paralelo $\mathcal{A} : T_p\mathcal{M} \rightarrow T_p\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{A}(v) = w$.

Físicamente es posible tener una densidad de energía no nula si el tensor de energía-momento asociado es invariante de Lorentz en un sistema coordenado inercial local. La invariancia de Lorentz implica que el tensor debe tener la forma $T_{\mu\nu} = -\rho_\Lambda \eta_{\mu\nu}$, relación que podemos generalizar directamente a un sistema coordenado arbitrario

$$T_{\mu\nu}^\Lambda = -\rho_\Lambda g_{\mu\nu} \equiv -\frac{c^4}{8\pi G_{d+1}} \Lambda g_{\mu\nu}. \quad (1.40)$$

Comparando esta forma del tensor con la del fluido perfecto (1.38), encontramos que el vacío se ve como un fluido perfecto con una presión isotrópica opuesta en signo a la

⁸Homogeneidad e isotropía son dos características independientes, por ejemplo una variedad puede ser homogénea pero no ser isotrópica en punto alguno, tal como sucede con la variedad $\mathbb{R} \times S^2$, o puede ser isotrópico en un punto sin ser homogéneo, tal como en un cono, el cual es isotrópico alrededor del vértice, pero ciertamente no homogéneo.

densidad de energía⁹

$$p_\Lambda = -\rho_\Lambda. \quad (1.41)$$

Que coincide justamente con la ecuación de estado (1.23). Más aún, esta densidad de energía debe ser constante a través de todo el espacio-tiempo dado que un gradiente no sería invariante de Lorentz en todo el espacio-tiempo. Utilizando la definición del tensor de energía-momento (1.3), podemos comprobar que la densidad lagrangiana de materia que estamos considerando tiene la forma

$$\mathcal{L}_M \equiv \mathcal{L}_\Lambda = -\frac{c^3}{8\pi G_{d+1}}\Lambda, \quad (1.42)$$

y por tanto la acción de Hilbert (1.1) es

$$S_H = \frac{c^3}{16\pi G_{d+1}} \int_{\mathcal{M}} d^{d+1}x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda). \quad (1.43)$$

Dos propiedades importantes de los espacios máximamente simétricos es que

- 1) tienen el número máximo de simetrías posibles
- 2) son variedades de curvatura constante.

Por ejemplo, en el espacio euclidiano \mathbb{R}^{d+1} (con isometrías en las traslaciones y rotaciones en $d + 1$ dimensiones), un punto fijo p se mueve a lo largo de $d + 1$ ejes de traslación independientes y por tanto hay $d + 1$ simetrías de traslación. Las rotaciones, centradas en p , son aquellas transformaciones que dejan a p invariante, éstas las podemos pensar rotando uno de los ejes coordenados a través de p en otro. Dado que hay $d + 1$ ejes y para cada eje hay otros d ejes que pueden ser rotados uno en otro, pero no debemos contar por ejemplo la rotación de $y \rightarrow x$ como independiente de la rotación $x \rightarrow y$, tenemos que el número total de rotaciones independientes es $d(d + 1)/2$, así

$$d + 1 + \frac{d}{2}(d + 1) = \frac{1}{2}(d + 1)(d + 2), \quad (1.44)$$

es el número total de simetrías independientes o vectores de Killing en \mathbb{R}^{d+1} . Por tanto, *una variedad $(d + 1)$ -dimensional con $\frac{1}{2}(d + 1)(d + 2)$ vectores de Killing es un espacio máximamente simétrico*. Esta definición es válida para variedades Riemannianas y no sólo para variedades Euclideas.

En cuanto a la curvatura, tenemos de contraer las ecuaciones de Einstein (1.2) con el tensor $g^{\mu\nu}$ a ambos lados de la ecuación

$$R - \frac{d + 1}{2}R = -\Lambda(d + 1) \quad \Rightarrow \quad R = \frac{2(d + 1)}{(d - 1)}\Lambda. \quad (1.45)$$

⁹Las observaciones cosmológicas indican que $|\rho_\Lambda^{obs}| \leq (10^{-12}\text{GeV})^4 \sim 10^{-8} \text{ erg/cm}^3$.

Con lo cual concluimos que la curvatura de estos espacios-tiempo es constante en todo punto. Si $\Lambda > 0$ el espacio-tiempo se conoce como de Sitter (dS_{d+1}), si $\Lambda = 0$ el espacio-tiempo es Minkowski y si $\Lambda < 0$ el espacio-tiempo es anti-de Sitter (AdS_{d+1}). Por completez calculemos el escalar de Kretschmann para comprobar que debido a la constancia de la curvatura, no existen puntos singulares. Es posible mostrar que para los espacios máximamente simétricos el tensor de Riemann toma la forma [5]

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{d(d+1)} (g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\sigma}g_{\nu\rho}) R, \quad (1.46)$$

y por tanto el escalar de Kretschmann es

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{2}{d(d+1)} R^2 = \frac{8(d+1)}{d(d-1)^2} \Lambda^2. \quad (1.47)$$

Para concluir, podemos dar la forma explícita de la métrica (1.24) para estos espacios. Lo único que debemos calcular es la integral (1.19)

$$M(r) \equiv -\frac{8\pi}{c^2(d-1)} \int_0^r r^{d-1} \left(-\frac{c^4\Lambda}{8\pi G_{d+1}} \right) dr = \frac{c^2\Lambda}{(d-1)G_{d+1}} \frac{r^d}{d}. \quad (1.48)$$

Así, definiendo

$$\ell \equiv \begin{cases} \sqrt{-\frac{d(d-1)}{2\Lambda}} & \Lambda < 0, \\ \sqrt{\frac{d(d-1)}{2\Lambda}} & \Lambda > 0, \end{cases} \quad (1.49)$$

tenemos que la forma de la métrica para los espacios-tiempo de de Sitter y anti-de Sitter respectivamente es

$$ds^2 = -\left(1 \mp \frac{r^2}{\ell^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 \mp \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{(d-1)}^2. \quad (1.50)$$

Aunque ya tenemos la forma de la métrica de estos espacios, es muy ilustrativo hacer el análisis de sus propiedades geométricas al encajar estructuras geométricas $(d+1)$ -dimensionales en el espacio de Minkowski de $(d+2)$ -dimensiones. A continuación discutimos brevemente estos encajes.

1.6.1. Espacio-tiempo de Sitter

El espacio-tiempo **de Sitter** $(d+1)$ -dimensional (dS_{d+1}) se obtiene encajando la hipersuperficie descrita por el hiperboloide $(d+1)$ -dimensional \mathbb{H}^{d+1}

$$dS_{d+1} : \quad -X_0^2 + X_1^2 + \cdots + X_d^2 + X_{d+1}^2 = \ell^2, \quad (1.51)$$

en el espacio de Minkowski $(d+2)$ -dimensional¹⁰

$$ds^2 = -dX_0^2 + dX_1^2 + \cdots + dX_d^2 + dX_{d+1}^2. \quad (1.52)$$

¹⁰Esta construcción se debe a E. Schrödinger (1956) [17].

En (1.51) ℓ es un parámetro con unidades de longitud llamado el *radio de Sitter* y como veremos coincide con el parámetro definido en (1.49). El grupo de isometría de la métrica de Minkowski (1.52) es el grupo de Poincaré $(d+2)$ -dimensional, el cual tiene dimensión $(d+2)(d+3)/2$. La ecuación (1.51) que define al hiperboloide \mathbb{H}^{d+1} es invariante por la izquierda ante el subgrupo de Lorentz $SO(d+1, 1)$, el cual tiene dimensión $(d+1)(d+2)/2$ y así la métrica inducida sobre el hiperboloide \mathbb{H}^{d+1} por la métrica de Minkowski tiene como grupo de isometría a $SO(d+1, 1)$ y por tanto es un espacio máximamente simétrico.

El hiperboloide tiene topología cilíndrica $\mathbb{R} \times S^d$ y es tipo tiempo. Las esferas S^d surgen de tomar secciones de $X_0 = \text{cte}$.

$$X_1^2 + \cdots + X_d^2 + X_{d+1}^2 = \ell^2 + X_0^2 = \text{constante} > 0. \quad (1.53)$$

Es posible introducir diferentes sistemas coordenados que parametrizen el hiperboloide de manera global, o al menos localmente. Los diferentes sistemas coordenados son sugeridos al agrupar los términos en (1.51) de diferentes maneras. No es nuestro objetivo discutir las propiedades de todos los sistemas coordenados conocidos [18], sin embargo discutiremos al menos dos para visualizar la geometría del espacio-tiempo de Sitter y una tercera para ver la relación con la forma (1.50) de la métrica.

- Coordenadas globales (t, θ_a)

Podemos ver que una solución a la ecuación (1.51) viene dada por la parametrización

$$X_0 = \ell \sinh(ct/\ell), \quad X_a = n_a \ell \cosh(ct/\ell), \quad (1.54)$$

donde n_a con $a = 1, 2, \dots, d+1$ es un vector unitario sobre la S^d esfera unitaria. Esto significa que

$$\delta_{ab} n_a n_b = 1, \quad \delta_{ab} n_a dn_b = 0, \quad \delta_{ab} dn_a dn_b = d\Omega_d^2. \quad (1.55)$$

encontramos así que la métrica de Sitter es

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + \ell^2 \cosh^2(ct/\ell) d\Omega_d^2. \quad (1.56)$$

Estas coordenadas cubren el hiperboloide globalmente y las simetrías manifiestas son las simetrías de la S^d esfera, esto es, el subgrupo $SO(d+1) \subset SO(d+1, 1)$ del total del grupo de isometrías. La geometría del espacio-tiempo de de Sitter describe una S^d esfera espacial de radio variable, que inicialmente en $t = -\infty$ tiene un radio infinito, luego se encoge a un radio mínimo ℓ en $t = 0$, para después expandirse nuevamente hasta alcanzar un radio ∞ en $t = +\infty$. Note que la sección espacial es compacta (finita) excepto para el pasado y futuro más lejanos. En este sistema coordenado $\frac{\partial}{\partial t}$ no es un vector de Killing y la falta de esta simetría rompe la conservación de la energía de manera tal que el Hamiltoniano no está definido adecuadamente.

- Coordenadas conformes (t', θ_a)

A partir de las coordenadas globales podemos pasar a un tiempo conforme con el objetivo de construir el diagrama de Penrose del espacio-tiempo de de Sitter. Para ello

reescribimos la métrica (1.56) en la forma

$$ds^2 = \cosh^2(ct/\ell) \left(-\frac{c^2 dt^2}{\cosh^2(ct/\ell)} + \ell^2 d\Omega_d^2 \right), \quad (1.57)$$

e introducimos el tiempo conforme t' mediante la relación

$$\cosh(ct/\ell) = \frac{1}{\cos(ct'/\ell)}, \quad (1.58)$$

con $-\frac{\pi}{2} < ct' < \frac{\pi}{2}$, la métrica (1.57) es ahora

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2(ct'/\ell)} d\bar{s}^2, \quad (1.59)$$

donde $d\bar{s}^2$ es la métrica del universo estático de Einstein, es decir

$$d\bar{s}^2 = -(cdt')^2 + d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega_{d-1}^2. \quad (1.60)$$

Note que hay una correspondencia uno-a-uno entre las coordenadas globales (1.56) y las coordenadas conformes (1.59), lo cual significa que el sistema coordenado conforme describe también el espacio de de Sitter de manera completa. En el diagrama conforme del espacio de de Sitter [5] (Figura [1.1]), cada línea de $t' = cte.$ es una S^d , las líneas punteadas representan los polos norte y sur de la S^d . Adicionalmente, cualquier geodésica nula con respecto a la métrica conforme (1.59) también es nula en la métrica transformada conformalmente

$$d\bar{s}^2 \equiv \cos^2\left(\frac{ct'}{\ell}\right) ds^2 = -c^2 dt'^2 + \ell^2 d\Omega_d^2. \quad (1.61)$$

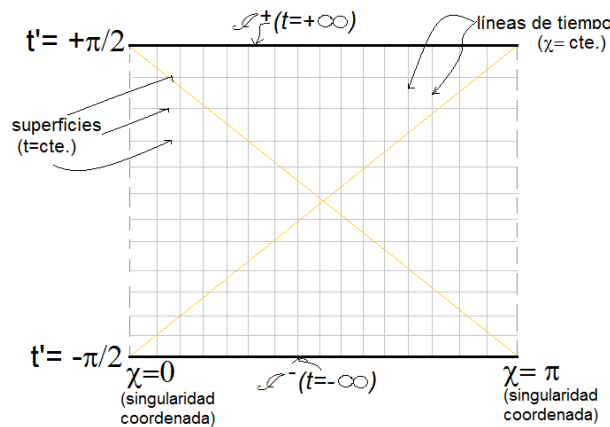


Figura 1.1: Diagrama de Penrose del espacio-tiempo de de Sitter.

Así, líneas a 45° son rayos de luz, el espacio se extiende indefinidamente en dirección futuro \mathcal{I}^+ y pasado \mathcal{I}^- . Cada punto en el diagrama es una S^{d-1} y, los polos son puntos

no esferas. Por tanto el diagrama de Penrose para el espacio dS_{d+1} se puede identificar de la métrica (1.61), la cual contiene la información completa acerca de la estructura causal del espacio dS_{d+1} pero las distancias están fuertemente distorcidas. Como hemos mencionado anteriormente, la topología del espacio de de Sitter es cilíndrica $\mathbb{R} \times S^d$, de manera tal que el proceso de elaborar el diagrama de Penrose es cambiar el hiperboloide en un cilindro $(d+1)$ -dimensional de altura finita $I \times S^d$ ($I = [-\pi/2, \pi/2]$). Note nuevamente que el sistema coordenado conforme no incluye una simetría de Killing temporal, de manera tal que no podemos elegir al Hamiltoniano como una cantidad conservada.

- Coordenadas estáticas (t, r, θ_i)

Los dos sistemas coordenados discutidos anteriormente son explícitamente dependientes del tiempo (con una coordenada temporal diferente en cada caso). Es posible introducir localmente un sistema coordenado que sea independiente del tiempo. Para ello reescribamos la ecuación del hiperboloide (1.51) en la forma

$$X_1^2 + \cdots + X_d^2 \equiv \sum_{a=1}^d X_a^2 = \ell^2 + X_0^2 - X_{d+1}^2, \quad (1.62)$$

e introduzcamos una coordenada radial espacial $r^2 \equiv \sum_{a=1}^d X_a^2$ ($0 \leq r < \infty$), con lo cual podemos reescribir la ecuación anterior como

$$1 - \frac{r^2}{\ell^2} = \frac{X_{d+1}^2}{\ell^2} - \frac{X_0^2}{\ell^2}. \quad (1.63)$$

Una elección natural de coordenadas es

$$\frac{X_0}{\ell} = -\sqrt{1 - \frac{r^2}{\ell^2}} \sinh\left(\frac{ct}{\ell}\right), \quad \frac{X_I}{\ell} = \frac{r}{\ell} n_I, \quad \frac{X_{d+1}}{\ell} = -\sqrt{1 - \frac{r^2}{\ell^2}} \cosh\left(\frac{ct}{\ell}\right), \quad (1.64)$$

donde n_I con $I = 1, \dots, d$ son vectores unitarios sobre la S^{d-1} esfera, lo cual nos lleva a la métrica (1.50)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}.$$

Dado que

$$-X_0 + X_{d+1} = -\sqrt{\ell^2 - r^2} \exp(-ct/\ell) \leq 0 \quad y \quad X_0 + X_{d+1} = -\sqrt{\ell^2 - r^2} \exp(ct/\ell) \leq 0$$

la región $r \leq \ell$ cubre sólo un cuarto del espacio dS_{d+1} completo. De hecho la hipersuperficie $r = \ell$ corresponde a un horizonte de este espacio.

En estas coordenadas sí se tiene un vector de Killing temporal $\partial/\partial t$ y por tanto se puede definir un Hamiltoniano, sin embargo la existencia de este vector de Killing temporal se pierde para la región fuera del horizonte $r = \ell$, lo cual es consecuencia de que no existe un vector de Killing temporal en el espacio completo de de Sitter.

1.6.2. Espacio-tiempo anti-de Sitter

El espacio-tiempo **anti-de Sitter** $(d+1)$ -dimensional (AdS_{d+1}) se obtiene encajando la hipersuperficie

$$\text{AdS}_{d+1} : \quad -X_0^2 + X_1^2 + \cdots + X_d^2 - X_{d+1}^2 = -\ell^2, \quad (1.65)$$

en el espacio de Minkowski $(d+2)$ -dimensional (1.52). Dado que esta ecuación es invariante ante transformaciones en $SO(d, 2)$, este espacio-tiempo tiene grupo de isometría $SO(d, 2)$. La dimensión de este grupo es la misma que la de los grupos $SO(d+1, 1)$ y $SO(d+2)$ y por tanto la ecuación (1.65) define el espacio máximamente simétrico anti-de Sitter¹¹. Resulta que $SO(d, 2)$ es también el *grupo conforme*, esto es, el grupo de simetría del espacio-tiempo de Minkowski $(d+1)$ -dimensional y, este es uno de los ingredientes fundamentales de la famosa correspondencia AdS/CFT que relaciona teorías gravitacionales en espacios-tiempo AdS_{d+2} , con teorías de campo conformes en espacios-tiempo de Minkowski de dimensión $d+1$ (ver por ejemplo [19]). Es esta correspondencia la que hace interesante estudiar soluciones gravitacionales de agujero negro que sean asintóticamente AdS, en vez de ser asintóticamente planos.

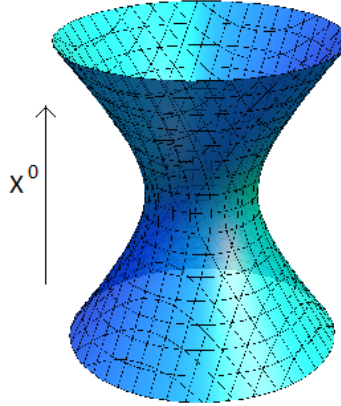


Figura 1.2: Hiperbolóide del espacio tiempo anti-de Sitter.

- Coordenadas globales y estáticas¹².

Las coordenadas globales se obtienen al escribir la solución general de (1.65) en la forma

$$X_0^2 + X_{d+1}^2 = \ell^2 \cosh^2 \rho, \quad X_1^2 + \cdots + X_d^2 = \ell^2 \sinh^2 \rho, \quad (1.66)$$

con lo cual la parametrización de las coordenadas es

$$X_0 = \ell \sin \tau \cosh \rho, \quad X_{d+1} = \ell \cos \tau \cosh \rho,$$

¹¹En realidad el espacio AdS_{d+1} se toma como la cubierta universal del espacio descrito por (1.65) [5].

¹²Formalmente podemos construir sistemas coordenados para el espacio-tiempo AdS partiendo de los sistemas coordenados para el espacio-tiempo dS si hacemos el cambio de coordenada y parámetro $X_{d+1} \rightarrow iX_{d+1}$ y $\ell \rightarrow i\ell$.

$$X_i = n_i \ell \sinh \rho, \quad (1.67)$$

donde n_i con $i = 1, \dots, d$ es un vector unitario sobre la S^{d-1} esfera unitaria. Tenemos entonces que la métrica es

$$ds^2 = \ell^2 [-\cosh^2 \rho d\tau^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{d-1}^2], \quad (1.68)$$

donde $0 \leq \rho < \infty$. Estas coordenadas hacen manifiesta la naturaleza periódica de la dirección temporal de AdS. El hiperboloide encajado estaría cubierto si elegimos a τ como una variable angular con periodo 2π . Sin embargo, en el espacio cubierta universal los puntos τ y $\tau + 2\pi$ no se identifican con lo cual las curvas tipo tiempo no son cerradas y el rango de τ es: $-\infty < \tau < \infty$. En contraste con el espacio-tiempo dS_{d+1} , AdS_{d+1} tiene un vector de Killing global ∂_τ tipo tiempo. En el espacio-tiempo **anti-de Sitter** la curvatura es $\kappa < 0$ (con topología $S^1 \times \mathbb{R}^d$).

El diagrama conforme del espacio-tiempo anti-de Sitter corresponde a la mitad del universo estático de Einstein, el cual se extiende infinitamente, y se obtiene introduciendo una coordenada conforme a través de la coordenada radial

$$\cosh \rho = \frac{1}{\cos \chi},$$

con lo cual se tiene

$$ds^2 = \frac{\ell^2}{\cos^2 \chi} d\bar{s}^2,$$

donde $d\bar{s}^2$ representa la métrica en el universo estático de Einstein y, la coordenada radial ahora aparece en el factor conforme donde $0 \leq \chi < \frac{\pi}{2}$.

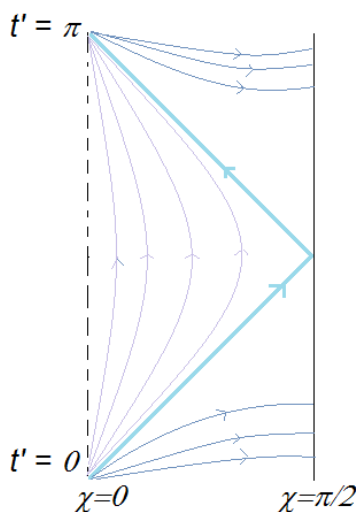


Figura 1.3: Diagrama conforme del espacio-tiempo anti-de Sitter.

En la figura (1.3) del diagrama conforme, las geodésicas que van de $\chi = 0$ a $\chi = \pi/2$ son de espacio y, de $t' = 0$ a $t' = \pi$ son de tiempo. Las líneas a 45° son rayos de luz. La

línea punteada representa un punto en el origen espacial y, los puntos a la derecha son S^2 . El infinito en anti-de Sitter toma la forma de una hipersuperficie de tiempo, definida por $\chi = \pi/2$. Dado que el infinito es como de-tiempo, el espacio no es globalmente hiperbólico y el diagrama se extiende en el tiempo infinito. Una geodésica que comienza moviéndose radialmente al exterior de $t' = 0$, $\chi = 0$, eventualmente regresará al punto $t' = \pi$, $\chi = 0$ y luego nuevamente al exterior de forma cíclica.

Finalmente si en la métrica (1.68) hacemos el cambio de variable $\sinh \rho = r/\ell$ y $\tau\ell \rightarrow t$ obtenemos la métrica (1.50)

$$ds^2 = - \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{r^2}{\ell^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}.$$

2

Agujeros negros

Históricamente, John Michell (1783) y Pierre Simon Laplace (1799) fueron los primeros en describir la posible existencia de estrellas masivas con un intenso campo gravitacional (denominados objetos compactos) que ni la luz podría escapar de ellas [20]. La herramienta teórica que se utiliza para entender estos objetos es la Relatividad General (ver capítulo 1) y, las soluciones a las ecuaciones de Einstein que los describen se les conoce genéricamente como soluciones de agujero negro, término acuñado por John A. Wheeler (1967). Actualmente se piensa que los agujeros negros astrofísicos son el resultado del colapso gravitacional de estrellas lo suficientemente masivas y ocurre cuando la estrella agota todas sus fuentes de energía termonuclear, generándose así, un desequilibrio entre la fuerza ejercida por la presión térmica de las partículas y la fuerza gravitacional, seguida de una gran explosión (supernova) que expulsa toda la materia de la corona estelar al exterior de la estrella y, finalmente la estrella comienza un proceso de colapso gravitacional indefinido, en el que ni la luz puede escapar de ella. Se piensa que estos objetos son fundamentales en la estructura del universo, ya que la materia y energía se concentran en su entorno. Por esta razón, se cree que existen agujeros negros en los centros de las galaxias. Los astrónomos sospechan de la existencia de un agujero negro supermasivo en el centro de nuestra Vía Láctea, debido a los efectos de gravedad que causa el objeto sobre los cuerpos celestes que le rodean. En observaciones astronómicas a finales de los 60's, se detectaron pulsares (estrellas de neutrones) y fuentes de rayos X, lo que confirmó la existencia de una fuente de rayos X de un sistema binario¹, conformado por la estrella gigante HDE226868 (magnitud aparente de 8.9) y el agujero negro Cygnus X-1 (1964) de $14,81 \pm 0,98M_{\odot}$ en la constelación del Cisne, detectado por el satélite Uhuru. En la

¹Los sistemas binarios en centros galácticos, generan radiación de luz o rayos X, así, la acreción de gas en los agujeros negros es una de las fuentes de energía más poderosas en el universo.

actualidad, la detección de ondas gravitacionales²; reforzó la existencia de agujeros negros. La primera de varias detecciones se anunció el 11 de febrero de 2016 [9, 10].

Esencialmente, las estrellas son esferas de gas (átomos de hidrógeno) con presión $p \sim nkT$, (en la aproximación de gas ideal) donde n es la densidad del número de átomos, e inicialmente la energía es

$$E = E_{grav} + E_{cin},$$

donde la energía gravitacional y cinética están dadas por

$$E_{grav} \sim -\frac{GM^2}{R}, \quad E_{cin} \sim nR^3 \langle E \rangle.$$

Aquí $\langle E \rangle$ es la energía cinética promedio de los átomos, M la masa y R el radio de la estrella. Cuando la fusión concluye la estrella se enfría y su temperatura $T \rightarrow 0$, no obstante la presión de degeneración hace que la presión sea no nula $p \neq 0$. La primera degeneración que se presenta es la de los electrones ya que $m_e \ll m_p$ a una densidad numérica de un electrón en un cubo de tamaño de la longitud de Compton, esto es

$$n_e^{-1/3} \sim \frac{\hbar}{\langle p_e \rangle},$$

donde $\langle p \rangle$ es el momento promedio. Existen dos posibles comportamientos diferentes ante este proceso que dependen de la masa M de la estrella. Si M es muy pequeña el radio R se incrementa hasta que los electrones se vuelven no relativistas (donde $\langle E \rangle \sim \frac{\langle p_e \rangle^2}{m_e}$) y la contracción gravitacional es contrarrestada por la presión de degeneración de electrones, convirtiéndose la estrella en una *enana blanca*. No obstante, para M muy grande tal que los electrones se vuelven relativistas (donde $\langle E \rangle = \langle p_e \rangle c = \hbar c n_e^{1/3}$), el radio R continúa decreciendo y no es contrarrestado por la presión de degeneración de electrones³, provocando un colapso gravitacional. Existe entonces una masa M_C y un radio R_C críticos que divide estos dos comportamientos⁴

$$M_C \sim \frac{1}{m_p^2} \left(\frac{\hbar c}{G} \right)^{3/2} \Rightarrow R_C \sim \frac{1}{m_e m_p} \left(\frac{\hbar^3}{G c} \right)^{1/2}, \quad (2.1)$$

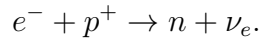
por lo que para cantidades superiores a M_C indican que una estrella no puede terminar como una enana blanca. Este se conoce como el *límite de Chandrasekhar* [22], [23] y establece que la masa máxima final posible (después de expulsar materia al exterior) para

²La primera detección de ondas gravitacionales fue realizada por LISA, Virgo y GEO600, (Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. <https://www.ligo.caltech.edu/detection>. La segunda detección proviene de dos agujeros negros en colisión, a través del interferómetro de Láser (LIGO) <http://www.ligo.org/>.

³Hay dos contribuciones a la presión total p : una se debe a la materia y la otra a la radiación [21]

⁴ $\hbar = 6,63 \times 10^{-34} J \cdot s$ es la constante de Planck, $m_e = 9,1 \times 10^{-31} kg$ la masa del electrón, $m_p = 1,67 \times 10^{-27} kg$ la masa del protón, $c = 3 \times 10^8 m/s$ la velocidad de la luz y $G = G_4 = 6,67 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2}$ la constante de gravitación universal.

una enana blanca es de $M_C \simeq 1,44M_\odot$ y, para masas $M > M_C$ la estrella colapsará y terminará como una estrella de neutrones (la masa máxima que puede soportar es dada por el *límite de Tolman-Oppenheimer-Volkoff* y es de $3M_\odot$), mientras que para estrellas con $M > 3M_\odot$ pueden derivar en un agujero negro. El análisis astrofísico para este colapso lleva a tomar en cuenta ahora la presión por degeneración de neutrones, la cual reemplaza a la degeneración de electrones debido al decaimiento β inverso



La aproximación de gas ideal produce un resultado parecido a (2.1), pero ahora reemplazando $m_e \rightarrow m_p$. Como la masa crítica es independiente de m_e , el análisis no afecta esta expresión, sin embargo el radio crítico es ahora $R_C \sim \frac{6M_C}{c^2}$, el cual se conoce como el *radio de Schwarzschild*. Este resultado es una indicación de que no se justifica desprestigiar los efectos de relatividad general; adicionalmente para densidades de materia nuclear la aproximación de gas ideal tampoco se justifica. Una aproximación más razonable es la de un fluido perfecto cuya presión es función de la densidad $p(\rho)$. Utilizando el comportamiento conocido de $p(\rho)$ a bajas densidades nucleares, da como resultado $M_{max} \sim 3M_\odot$ y la estrella terminará como una *estrella de neutrones* o sufrirá un *colapso gravitacional*. En el límite de $M_C \simeq 3M_\odot$ el colapso se puede aproximar adecuadamente suponiendo que el material que se colapsa es una bola de fluido libre de presión. La figura (2.1) muestra las etapas de la evolución estelar.

En el contexto de la teoría de la Relatividad General, Schwarzschild (1916) [24] tuvo el honor de obtener la primer solución exacta a las ecuaciones de Einstein, para un espacio-tiempo esféricamente simétrico. La solución queda determinada completamente por el parámetro de masa M y presenta dos singularidades; una en $r = 0$ (intrínseca) y la otra en el radio de Schwarzschild R_s llamado *horizonte de eventos* $r = R_s$ (removible)⁵. Poco tiempo después Reissner (1916) [25] resolvió las ecuaciones de Einstein acopladas al campo de Maxwell y, paralelamente Nordström (1918) [26] obtuvo la misma solución denominada actualmente el agujero negro de *Reissner -Nordström*. En este caso la solución también es para un espacio-tiempo esféricamente simétrico y estático, donde los parámetros son la masa M y la carga eléctrica Q . 30 años más tarde, Chandrashekar (en su trabajo sobre enanas blancas), Landau (1932) y Oppenheimer (1939) entre otros, encontraron que era posible la existencia de estrellas de neutrones con un radio menor al gravitacional r_H , lo que hacía más factible suponer la existencia de agujeros negros.

La definición más común que encontramos en la literatura de agujero negro, consiste de una región del espacio-tiempo donde el campo gravitacional es tan intenso que ni la luz puede escapar de él. Oppenheimer y Snyder (1939) [27] estudiaron el colapso gravitacional de estrellas masivas y la posible existencia de agujeros negros. Ellos dieron una interpretación física del tensor $T_{\mu\nu}$, que consiste en la distribución de materia en una simetría esférica donde $T_{\mu\nu}$ está constituido de dos partes; una corresponde a la parte de

⁵Cuando la masa de una estrella colapsa, se concentra en un radio menor a su radio gravitacional, radio de Schwarzschild u horizonte de eventos $R_s = 2G_4M/c^2$, donde c es la velocidad de la luz.

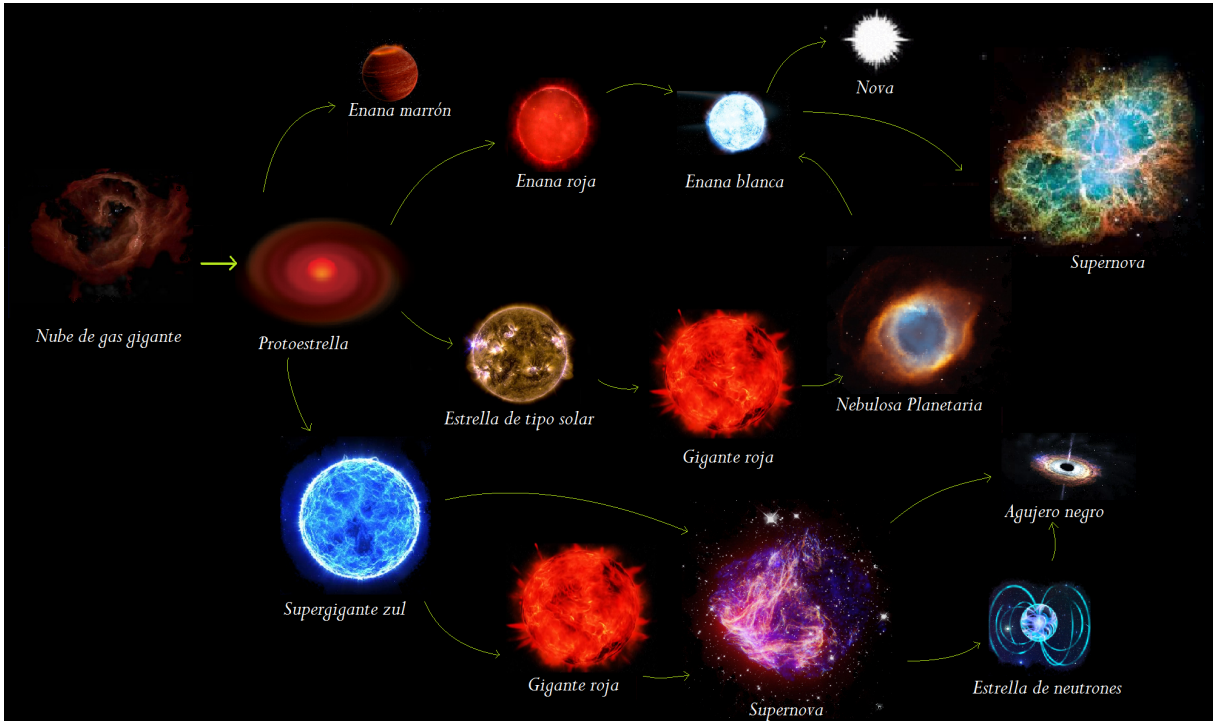


Figura 2.1: En la evolución estelar, las estrellas que soportan una masa máxima de $M_C \simeq 1,44M_\odot$ terminará como enana blanca, si la masa máxima es de $\simeq 3M_\odot$ será una estrella de neutrones, pero para masas $> 3M_\odot$ colapsará y terminará en un agujero negro.

materia debida a los electrones, protones, neutrones y otros núcleos, y la otra corresponde a la parte de material que se está moviendo en una dirección radial, donde hay una relación definida entre la presión, densidad y temperatura. Además, la radiación podría ser parte del equilibrio con la materia a esta temperatura, en resumen, se da cuando el radio de la estrella se aproxima asintóticamente a su radio gravitacional, que para un observador externo, notará que la luz tiene un corrimiento al rojo. En 1963, Kerr encontró la solución que describe un agujero negro de masa M con simetría axial y en rotación (momento angular J) [28] y, quizá, la solución más general que se conoce hasta hoy es el *agujero negro de Kerr-Newman*, desarrollada por Newman en 1965 [29, 30], en la que está contenida toda la familia de agujeros negros; Schwarzschild (M), Reissner-Nordström (M, Q) y Kerr (M, J). Los agujero negros son de vital importancia, ya que son esenciales en las construcción de teoría que describan la estructura del universo tal como ocurre en el análisis de gravedad-cuántica, la correspondencia AdS/CFT, teoría de cuerdas entre otras.

2.1. Agujero negro de Schwarzschild

La solución de Schwarzschild⁶ describe el campo gravitacional simétricamente esférico y estático en *ausencia de materia*, que uno encuentra fuera de cualquier objeto esféricamente simétrico y estático (estrella, planeta, etc.). Esta es la solución no trivial más simple, que lleva al concepto de *agujero negro*, los cuales constituyen un laboratorio teórico privilegiado para realizar *Gedankenexperimente* en gravedad clásica y cuántica. La interpretación física de esta solución es un punto importante y no trivial dado que la fuente, localizada por definición en la región donde NO resolvemos las ecuaciones de Einstein, es desconocida. Más aún, el estudio de estos objetos introduce nuevos conceptos como el de horizonte de eventos. Algunas de las propiedades clásicas de los agujeros negros pueden ser formuladas como leyes de la termodinámica, pero, clásicamente, la analogía no es completa. Un nuevo concepto de origen cuántico, la radiación de Hawking, es lo que hace la analogía termodinámica completa, impulsando a la comunidad a tomar estas ideas seriamente. Sin embargo estas propiedades introducen a su vez nuevos retos como la interpretación estadística de la entropía de agujeros negros y el problema de información.

2.1.1. Solución de Schwarzschild en 3 + 1 dimensiones

Dado que la solución se obtiene para espacio libre de materia, debemos resolver las ecuaciones de Einstein en el vacío (1.8) y como la solución es esféricamente simétrica y estática, entonces por nuestra discusión en la sección 1.4 sabemos que la métrica tiene la forma (1.36). Lo único que nos resta es integrar la ecuación (1.33), la cual puede reescribirse como (en el caso $d = 3$)

$$\frac{\partial}{\partial r}(re^{2\mu}) = 1 \quad \Rightarrow \quad e^{2\mu} = 1 - \frac{R_s}{r}, \quad (2.2)$$

donde R_s es una constante de integración. Introduciendo esta forma del coeficiente en la métrica (1.36) vemos que para $r \rightarrow \infty$ ésta se aproxima a la de Minkowski, se dice entonces que la métrica es asintóticamente plana. Físicamente, el requisito de asintoticidad plana significa que estamos trabajando con sistemas aislados, con una fuente de campo gravitacional confinada en un volumen finito. La constante R_s tiene dimensión de longitud y su significado físico puede obtenerse bajo el argumento siguiente. Dado que para valores grandes de r , donde el campo gravitacional es débil, las trayectorias de partículas de prueba masivas (geodésicas) se aproximan a las órbitas Keplerianas que ellas describirían si estuvieran sujetas al campo gravitacional Newtoniano producido por un objeto esféricamente simétrico, de masa total $M = c^2 R_s / 2G_4$ centrado en $r = 0$. Entonces se identifica a M con la masa del objeto que estamos describiendo en relatividad general y R_s es el radio de Schwarzschild asociado con tal objeto. Podemos llegar a la misma conclusión utilizando la fórmula de masa ADM (ver apéndice E). Por lo tanto M es la

⁶Adicionalmente a los textos sobre Relatividad General mencionados en el capítulo 1. Para los detalles técnicos de agujeros negros hemos utilizado también [22, 31, 32, 33, 34].

masa ADM de la solución de Schwarzschild y se toma como positiva por dos razones. Primero, nadie ha visto un objeto gravitacional con masa negativa y segundo, la solución de Schwarzschild con masa negativa tiene una *singularidad desnuda*, como explicaremos más adelante, lo cual se considera inaceptable desde el punto de vista físico.

Tenemos entonces que la solución de Schwarzschild es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_s}{r} \right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{R_s}{r}} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2. \quad (2.3)$$

Dado que el interés en este trabajo radica en comparar las predicciones físicas de las soluciones gravitacionales inspiradas por la no conmutatividad, con su análogo conmutativo, no haremos un análisis exhaustivo de todas las propiedades conocidas del agujero negro de Schwarzschild, sin embargo mencionaremos las que serán relevantes para nuestra comparación posterior.

Propiedades del agujero negro de Schwarzschild:

- Teorema de Birkhoff: La solución de Schwarzschild es la única solución a las ecuaciones de Einstein en vacío, con simetría esférica [4].

- La solución de Schwarzschild es estable bajo perturbaciones pequeñas de índole gravitacional o asociadas con campos externos [31].

- La métrica (2.3) describe el campo gravitacional creado por un objeto masivo, esféricamente simétrico como es visto por un observador estático lejano a la fuente, en la región de vacío, para quien las coordenadas $\{t, r, \theta_1, \theta_2\}$ son coordenadas adaptadas.

- La métrica de Schwarzschild es singular⁷ en $r = 0$ y $r = R_s$. Sin embargo la singularidad en R_s es una singularidad coordenada, mientras que la singularidad en $r = 0$ es una singularidad física del espacio-tiempo de Schwarzschild que está presente en cualquier sistema coordenado, como lo muestra el escalar de Kretschmann

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = 48 \frac{G_4^2 M^2}{c^4 r^6} + \dots, \quad (2.4)$$

- Usualmente la solución de Schwarzschild se utiliza de $r = \infty$ a algún valor finito $r = r_E > R_s$, donde ésta es pegada a otra métrica simétricamente esférica y estática que sea solución de las ecuaciones de Einstein para algún tensor de energía-momento adecuado que describa una estrella con las mismas simetrías que el espacio de Schwarzschild y, cuya superficie se encuentre en $r = r_E$. Estas métricas llamadas *soluciones interiores de Schwarzschild* describen el espacio-tiempo en el interior de las estrellas y, la métrica (2.3) describe sus exteriores debido al teorema de Birkhoff (ver la subsección 2.1.4).

- El comportamiento de la singularidad coordenada $r = R_s$ puede analizarse al tomar geodésicas radiales nulas donde $d^2s = 0$ y $d^2\Omega_2 = 0 \Rightarrow c \frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{1 - \frac{R_s}{r}}$. En $r \rightarrow \infty$ se tiene $c \frac{dt}{dr} = \pm 1$ y tenemos conos de luz inclinados a 45° . En $r \rightarrow R_s$ tenemos que

⁷Que una métrica sea singular significa que el $\det g_{\mu\nu} = 0$ o que ciertas componentes de $g_{\mu\nu}$ divergen.

$c \frac{dt}{dr} = \pm\infty$, esto es, la pendiente crece en valor absoluto y los conos de luz se cierran al aproximarse a la superficie $r = R_s$, lo cual es una señal de que se trata de una singularidad coordinada, la cual puede removerse a través de un cambio de coordenadas. Primero se introducen las coordenadas de *Edington-Finkelstein* (v, u, θ, ϕ) , para que la métrica (2.3) tome la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dvdu + r^2 d\Omega_2^2, \quad (2.5)$$

donde las nuevas coordenadas están dadas por

$$v = ct + r^*, \quad u = ct - r^*, \quad -\infty < v < +\infty, \quad -\infty < u < +\infty,$$

que llevan a la hipersuperficie $r = R_s$ al infinito, por lo cual es necesario hacer otro cambio de coordenadas para compactificar esos infinitos a un punto del espacio-tiempo (diagrama de Kruskal) y, así construir el diagrama de Penrose. Las coordenadas que se deben introducir son coordenadas de Kruskal definidas por

$$v = \tan V, \quad u = \tan U, \quad -\frac{\pi}{2} < V < +\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < U < +\frac{\pi}{2},$$

que llevan al elemento de línea (2.5) a la forma compactificada

$$ds^2 = \frac{1}{(2 \cos V \cos U)^2} \left[-4 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dV dU + 4r^2 \cos^2 V \cos^2 U d\Omega^2 \right],$$

o equivalentemente, introduciendo la coordenada de *Regge-Wheeler*

$$r^* = \frac{1}{2} (v - u) = \frac{\sin(V - U)}{2 \cos V \cos U},$$

nos da la expresión

$$ds^2 = \frac{1}{(2 \cos V \cos U)^2} \left[-4 \left(1 - \frac{R_s}{r}\right) dV dU + 4 \left(\frac{r}{r^*}\right)^4 \sin^2(V - U) U d\Omega^2 \right].$$

• Los horizontes de eventos de agujeros negros estacionarios son usualmente *horizontes de Killing*, esto es, hipersuperficies que son invariantes bajo una isometría donde el modulo del vector de Killing correspondiente k^μ se anula, $k^2 = 0$. En el caso de Schwarzschild es $k^\mu = \delta^{\mu t}$ y generara traslaciones en el tiempo: $k^2 = 0|_{r=R_s} = e^{2\mu(r)}|_{r=R_s} = 0$ ($g_{tt} = e^{2\mu(r)}$ y $g_{rr} = e^{2\nu(r)}$). Más aún, la hipersuperficie correspondiente al horizonte $r = R_s$ es, como un todo, invariante ante traslaciones temporales. Los horizontes de Killing (y por tanto los horizontes de eventos) son hipersuperficies nulas⁸. Más aún, para cada valor de t , el horizonte de Killing es una S^2 de radio R_s .

⁸Se dice que una hipersuperficie es nula si su campo vectorial normal es nulo. Este campo vectorial, debido a la signatura Lorentziana de la métrica, siempre pertenece al espacio tangente de la hipersuperficie nula.

• Para horizontes de Killing se puede definir, siguiendo a Boyer [35], la cantidad conocida como *superficie de gravedad* κ , dada por la fórmula

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla^\mu k^\nu)(\nabla_\mu k_\nu) \Big|_{r_H}. \quad (2.6)$$

En el caso particular de métricas estáticas esféricamente simétricas (1.9), el vector de Killing k^μ es justo $\delta^{\mu t}$ y la superficie de gravedad toma la forma

$$\kappa = \frac{1}{2} \frac{\partial_r g_{tt}}{\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}} c = \frac{1}{2} \frac{\partial_r e^{2\mu}}{\sqrt{-e^{2\mu}e^{2\nu}}} c, \quad (2.7)$$

donde t es la coordenada temporal y r la radial. Para Schwarzschild κ toma el valor constante

$$\kappa = \frac{c^4}{4G_4M} = \frac{c^2}{2R_s}. \quad (2.8)$$

• Existe otro tipo de diagrama que puede ser útil para estudiar la estructura causal del espacio-tiempo, el *diagrama de Penrose*: Como en $r \rightarrow \infty$ la métrica (2.10) es asintóticamente Minkowski, entonces i_0 (infinito espacial) y las \mathcal{I}_\pm son trayectorias de luz, son las de Minkowski. La singularidad $r = 2G_4M$ es removible, por lo que se puede hacer una extensión analítica a 4 regiones, I y IV son asintóticamente Minkowski, II y III contienen a la singularidad intrínseca $r = 0$. Las i_+ e i_- (infinitos temporales, futuro + y pasado -) no están en la singularidad, por lo que las trayectorias de-tiempo van de i_- a i_+ , las trayectorias de luz son líneas rectas a 45° y, las que entran en la región II y III caen inevitablemente a la singularidad $r = 0$. Los i_0 , i_+ e i_- son infinitos compactificados a un punto en el diagrama. Las trayectorias de espacio salen de i_0 y regresan a i_0 , como se observa en la Figura ([2.2]).

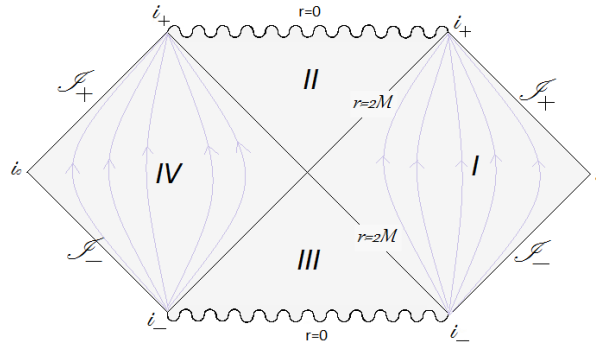


Figura 2.2: Diagrama de Penrose para la métrica de Schwarzschild.

2.1.2. Solución de Schwarzschild en $d + 1$ dimensiones

Históricamente fue Tangherlini (1963) [36] quien estudió por vez primera la solución de agujero negro de Schwarzschild en una dimensión mayor a $3+1$. Hoy día estas soluciones

son muy apreciadas y utilizadas por la comunidad que se dedica a estudiar teorías y modelos que incorporan dimensiones extras, como lo son la comunidad de teoría de cuerdas [19, 37, 38], supergravedad [39], etc.⁹ Debido a la relevancia actual de estas soluciones, exponemos brevemente aquí la forma en que se obtienen, la cual como se puede adivinar, no difiere en mucho de la forma en que se obtiene la solución de Schwarzschild en $3+1$.

Dada la discusión en la sección (1.4) sabemos que la métrica tiene la forma (1.36). Para encontrar la función μ debemos integrar la ecuación (1.33), la cual puede reescribirse como

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^{d-2}e^{2\mu}) = (d-2)r^{d-3} \quad \Rightarrow \quad e^{2\mu} = 1 - \frac{m}{r^{d-2}}, \quad (2.9)$$

con lo cual la métrica que se obtiene es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{m}{r^{d-2}}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{m}{r^{d-2}}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2. \quad (2.10)$$

La constante de integración m tiene dimensión de longitud a la potencia $d-2$ y está relacionada a la masa ADM M en la forma¹⁰

$$m = \frac{16\pi G_{d+1}}{c^2(d-1)\Omega_{d-1}} M. \quad (2.11)$$

En particular para $d=3$, $m=R_s$. Estas soluciones son generalizaciones directas de la solución de Schwarzschild 4-dimensional en todo aspecto. Sin embargo mencionemos explícitamente algunas de sus propiedades.

- Que la métrica sea esféricamente simétrica significa que tenemos invarianza bajo una simetría global $SO(d)$, que es el grupo de simetría de las S^{d-1} esferas, representadas en la métrica por el elemento $d\Omega_{d-1}$.
- No hay agujeros negros de Schwarzschild para espacios-tiempo de dimensión $d+1 < 4$.
- La métrica tiene un horizonte de eventos r_H en $r = r_H = m^{1/(d-2)}$ con las mismas propiedades del estudiado en $(3+1)$ -dimensiones. También tiene una singularidad física en $r=0$.
- Estas soluciones son las únicas soluciones esféricamente simétricas y estáticas a las ecuaciones de Einstein en vacío [40].
- Para $d+1 \geq 5$ no existe un teorema de unicidad para soluciones estacionarias, como lo prueba el hecho de que existan aros negros rotantes [41].

⁹Es interesante notar que la motivación de Tangherlini no fue ninguna de éstas. Su objetivo como él lo expone, se basa en una observación del filósofo Immanuel Kant, llevada a la física por Ehrenfest y Whitrow, sobre la posibilidad de incluir axiomas generales en la física que nos permitieran concluir a manera de teorema, cual debería de ser la dimensión del espacio-tiempo. El tipo de axiomas que ellos consideraron eran del tipo: 1) los campos producidos por cuerpos a largas distancias deben aproximarse asintóticamente a un valor constante, 2) deben existir órbitas estables para cuerpos que interactúen a través de estos campos, etc.

¹⁰El hecho de denotar la constante en la métrica con m enfatiza el hecho de que este término en la métrica es originado por la masa del agujero negro.

2.1.3. Solución de Schwarzschild-(A)dS

En la sección (1.6) hemos obtenido la solución de los espacios-tiempo de dS_{d+1} y AdS_{d+1} resolviendo las ecuaciones de Einstein con el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$ dado por (1.40). Para ello al integrar explícitamente la componente T^0_0 para obtener la función $M(r)$ utilizamos la condición inicial $M(0) = 0$. Por otro lado para obtener la solución de Schwarzschild al integrar la ecuación (2.9) utilizamos una condición inicial diferente, de hecho en ese caso $M(0) = \text{constante} \neq 0$. Así, si en (1.48) tomamos una constante no nula al integrar obtenemos

$$M(r) = \pm \frac{r^d}{2G_{d+1}\ell^2} + \frac{m}{2G_{d+1}}, \quad (2.12)$$

y sustituyendo en la métrica (1.24) tenemos la solución Schwarzschild-(A)dS $_{d+1}$

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{m}{r^{d-2}} \pm \frac{r^2}{\ell^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{m}{r^{d-2}} \pm \frac{r^2}{\ell^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2. \quad (2.13)$$

Estas soluciones describen un agujero negro de masa M (cuya relación con m viene dada por la ec. (2.11)) inmerso en un fondo (anti)-de Sitter (A)dS $_{d+1}$. Para distancias pequeñas la solución se asemeja a la de Schwarzschild y, para distancias grandes la solución tiende asintóticamente al espacio-tiempo (A)dS $_{d+1}$.

Como es de esperarse, el escalar de Kretschmann es en este caso

$$K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2}{r^6} + \frac{2d(d+1)}{\ell^4}, \quad (2.14)$$

en donde es claro observar que hay una singularidad en $r = 0$ por el término de Schwarzschild y que para $M = 0$ el espacio-tiempo es regular.

El agujero negro Schwarzschild-dS fue originalmente estudiado en [42] y sale del objetivo principal de esta tesis. En nuestro caso estamos interesados en revisar las soluciones de agujero negro Schwarzschild-AdS. Por ejemplo tenemos que el agujero negro de Schwarzschild-AdS (S-AdS) en 3+1 dimensiones está dado por la expresión

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{R_s}{r} + \frac{r^2}{\ell^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r} + \frac{r^2}{\ell^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2. \quad (2.15)$$

La ecuación que determina el horizonte de eventos es una ecuación cúbica

$$r_H \left(1 + \frac{r_H^2}{\ell^2} \right) = R_s. \quad (2.16)$$

Esta ecuación tiene una raíz real y dos raíces complejas, por lo que el agujero negro tiene un único horizonte de eventos r_H . Explícitamente la raíz real de la ecuación está dada por

$$r_H = \sqrt{\frac{\ell^2}{3}} \sinh \left[\frac{1}{3} \sinh^{-1} \left(\sqrt{27} \frac{R_s}{\ell} \right) \right]. \quad (2.17)$$

2.1.4. Solución de Schwarzschild anisotrópica en 3 + 1

A finales de los 60's Sakharov sugirió la existencia de soluciones de agujeros negros regulares, él propuso la ecuación de estado $p = -\rho$ para enormes densidades de materia y energía [45, 46] y, como hemos discutido (ver sección 1.3), esta relación la satisfacen diversos sistemas físicos. E. B. Gliner (1966) sugirió que para densidades muy grandes, toda la materia (partículas, etc.) sufren una transición a un estado de vacío (físico) descrito por el tensor $T_{\alpha\beta}^{\Lambda}$ (1.40) y la geometría de Sitter, donde finalmente la densidad de materia se concentra en una región finita del espacio tiempo a una escala de longitud mínima. Aquí Λ actúa como una presión interna que contrarresta el colapso gravitacional, lo que da origen a las soluciones regulares en $r = 0$. En 1968 Bardeen encontró la primer solución regular de Reissner-Nordström parametrizada por la masa M y la carga eléctrica Q , con coeficiente métrico

$$e^{-2\nu} = 1 - \frac{2Mr^2}{(r^2 + Q^2)^{3/2}} = 1 - \left(\frac{M}{Q}\right) \frac{2(r/Q)^2}{\left[\left(\frac{r}{Q}\right)^2 + 1\right]^{3/2}}, \quad (2.18)$$

para $r \gg Q$ el coeficiente se reduce al de Schwarzschild, en $r \rightarrow \infty$ al de Minkowski, y en $r \rightarrow 0$ es de Sitter ya que $e^{-2\nu} \approx 1 - 2\frac{M}{Q}r^2$. El horizonte interno es un horizonte de Cauchy¹¹ y la región interna se vuelve más y más de Sitter, eventualmente terminará con un origen regular en $r = 0$. La solución de Bardeen es el primer caso que plasma las ideas de Sakharov y Gliner, ya que se *reemplaza la singularidad por un núcleo de Sitter regular*. E. Poisson y W. Israel (1988) postularon la posible transición del espacio-tiempo de Schwarzschild al de Sitter, donde la singularidad es sustituida por un núcleo dS_4 y un ejemplo concreto de un agujero negro con esta propiedad fue construido en [12]. Para ello se *postula* una densidad de energía dependiente de la coordenada radial en la forma

$$T^0_0(r) = T^r_r(r) = -\rho_{\Lambda} \exp\left(-\frac{r^3}{\ell^2 R_s}\right), \quad (2.19)$$

con ℓ el radio de dS_4 y R_s el radio de Schwarzschild en (3+1)-dimensiones. Utilizando la ecuación (1.19) se puede calcular la función $M(r)$, el resultado es

$$M(r) = M \left(1 - \exp\left(-\frac{r^3}{\ell^2 R_s}\right)\right), \quad (2.20)$$

donde M es la masa total de la densidad de energía (2.19) dada por la expresión

$$M = -\frac{4\pi}{c^2} \int_0^{\infty} T^0_0(r) r^2 dr, \quad (2.21)$$

¹¹Una Superficie de Cauchy es aquella hipersuperficie para la cual ninguna curva causal intersecta más de una vez.

y coincide con la masa de Schwarzschild. Tenemos así finalmente que la métrica de Schwarzschild anisotrópica tiene la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2G_4 M(r)}{c^2 r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2G_4 M(r)}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2. \quad (2.22)$$

Es habitual definir la función radio de Schwarzschild como

$$R_s(r) \equiv \frac{2G_4 M(r)}{c^2} = R_s \left[1 - \exp \left(-\frac{r^3}{\ell^2 R_s} \right) \right]. \quad (2.23)$$

Para tener todas las cantidades físicas de la solución debemos calcular la expresión de las presiones tangenciales $T^\theta_\theta = p_\perp$, utilizando para ello las ecuación de Einstein (1.14). Es directo verificar que la expresión que se obtiene es

$$T^\theta_\theta = p_\perp = \rho_\Lambda \left(1 - \frac{3r^3}{2\ell^2 R_s} \right) \exp \left(-\frac{r^3}{\ell^2 R_s} \right). \quad (2.24)$$

Esta solución tiene las características siguientes:

- La solución simétricamente esférica (2.22), prácticamente coincide con la solución de Schwarzschild (2.3) para $r \gg \ell^2 R_s$ y se comporta como la solución de Sitter para $r \ll \ell^2 R_s$.

- Para $r \ll \ell^2 R_s$ ocurre la isotropización de la solución y el tensor de energía-momento toma la del vacío isotrópico (1.40). Cuando $r \rightarrow 0$ la densidad de energía tiende a ρ_Λ . Para $r \gg \ell^2 R_s$ todas las componentes del tensor de energía momento tienden rápidamente a cero.

- La métrica tiene dos horizontes que se obtienen de $e^{-2\nu(r)} = 0$; uno externo r_+ y otro interno r_- dados aproximadamente por

$$r_+ \approx R_s \left[1 - \exp \left(-\frac{R_s^2}{\ell^2} \right) \right], \quad r_- \approx \ell \left[1 - \exp \left(-\frac{\ell}{4R_s} \right) \right]. \quad (2.25)$$

La métrica describe un objeto con las misma propiedades que un agujero negro donde r_+ es un horizonte de eventos. El horizonte interno r_- es un horizonte de Cauchy. Ambas singularidades son removibles, es decir, se pueden eliminar mediante una transformación adecuada de la métrica.

- La solución es no singular en todo punto, como puede verse del escalar de Kretschmann

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta} = 4 \frac{R_s^2(r)}{r^6} + 4 \left[\frac{3}{\ell^2} e^{-r^3/r_*^3} - \frac{R_s(r)}{r^3} \right]^2 + \left[\frac{2R_s(r)}{r^3} - \frac{9r^3}{\ell^4 R_s} e^{-r^3/r_*^3} \right]^2, \quad (2.26)$$

al calcular el límite $r \rightarrow 0$, el cual es finito y por supuesto es igual al valor del escalar en el caso de Sitter $24/\ell^4$. Note que $R_s(r=0) = 0$.

• Existe una masa crítica M_{cr} para la cual los dos horizontes se degeneran en uno solo $r_+ = r_-$, esta masa crítica nos da un límite inferior a la masa del agujero negro. Dependiendo del valor de la masa M , existen 3 tipos de configuraciones:

1) si $M > M_{cr}$ tenemos un agujero negro con dos horizontes,

2) Si $M = M_{cr}$ tenemos un agujero negro extremo,

3) si $M < M_{cr}$ tenemos una partícula Λ , esto es, la solución tiene una estructura tipo partícula, sin horizontes hecha de un vacío simétricamente esférico autogravitante.

Es importante mencionar para los propósitos de este trabajo que la densidad de energía (2.19) es una propuesta ad hoc para resolver el problema de la singularidad, pero no fue sugerida de una teoría más fundamental. Como veremos en el capítulo 4, se pueden obtener funciones de densidad de energía $T^0_0(r)$ similares partiendo de proponer que las coordenadas del espacio-tiempo satisfacen relaciones no conmutativas.

2.2. Solución eléctrica de Reissner-Nordström

En la naturaleza no existen objetos macroscópicos con carga eléctrica neta, sin embargo se piensa que en algún instante de la formación de agujeros negros, éstos pueden poseer una pequeña cantidad de carga eléctrica que es contrarrestada inmediatamente por su entorno debido a que el campo eléctrico ocurre fuera del horizonte de eventos y, en consecuencia, un observador en el infinito lo ve como una carga puntual en reposo (cuando un agujero negro con carga eléctrica rota genera un campo magnético [32]). El agujero negro con carga eléctrica de Reissner-Nordström es una solución estática y esféricamente simétrica a las ecuaciones de Einstein (1.2), donde el tensor de energía-momento es el debido a un campo eléctrico producido por una fuente puntual de carga eléctrica Q . Dado que los fenómenos electromagnéticos están descritos por las ecuaciones de Maxwell, se asume que la densidad Lagrangiana de materia \mathcal{L}_M corresponde a la de la electrodinámica lineal de Maxwell en un espacio-tiempo curvo, así la acción que describe al sistema Einstein-Maxwell está dada por la expresión¹²

$$S[g_{\mu\nu}, A_\mu] = \frac{c^3}{16\pi G_{d+1}} \int_{\mathcal{M}} d^{d+1}x \sqrt{-g} (R - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \quad (2.27)$$

donde el tensor de Faraday $F_{\mu\nu}$ es definido en términos del vector potencial electromagnético $A_\mu = (-\phi, \vec{A})$, como: $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ ¹³, esto es, $F_{0i} = -F_{i0} = -E_i$. En el caso

¹²En estas unidades, al igual que la métrica $g_{\mu\nu}$, el vector potencial A_μ es adimensional. Existen muchos autores que incluyen un factor de 1/4 frente al término de Maxwell (por ejemplo [7]), sin embargo muchos otros no incluyen este factor [22, 47, 48]; aquí trabajaremos en las convenciones de estos últimos.

¹³De acuerdo con nuestra discusión en la sección 1.1 sobre la covarianza de las ecuaciones de campo en la relatividad general, la definición del tensor de Faraday es: $F_{\mu\nu} \equiv \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$, donde ∇ denota

de (3+1)-dimensiones las componentes F_{ij} del tensor de Faraday se pueden escribir en términos de un vector de campo magnético: $F_{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k$. Dado que en la acción (2.27) deseamos considerar el campo eléctrico debido a una carga puntual, repasemos brevemente como se obtiene este campo. La acción de Maxwell con fuentes en unidades de Heaviside está dada por¹⁴

$$S_{Maxwell}[A^\mu] = \frac{1}{c} \int d^{d+1}x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{c} A_\mu j^\mu \right), \quad (2.28)$$

Aquí el vector j^μ contiene las densidades de carga y corriente: $j_\mu = (-c\rho_Q, \vec{j})$. Note que la acción sólo depende de uno de los dos invariantes relativistas de la electrodinámica: $F \equiv F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ ¹⁵. Aplicando el principio de mínima acción de Hilbert a la acción (2.28) obtenemos la ecuación de movimiento

$$\nabla_\nu F^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu. \quad (2.29)$$

Esta ecuación es válida en un espacio-tiempo de dimensión arbitraria, y en el caso de (3 + 1)-dimensiones, representa a las dos ecuaciones de Maxwell con fuentes: la ecuación de Gauss eléctrica y la ecuación de Ampere-Maxwell

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho_Q, \quad \nabla \times \vec{B} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\vec{j}}{c}. \quad (2.30)$$

Las otras dos ecuaciones de Maxwell en 3+1: la ecuación de Gauss magnética y la ecuación de Faraday

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (2.31)$$

en su forma covariante están dadas como una restricción geométrica conocida como la identidad de Bianchi

$$\nabla_\mu F_{\nu\rho} + \nabla_\nu F_{\rho\mu} + \nabla_\rho F_{\mu\nu} = 3\nabla_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0, \quad (2.32)$$

la cual es una ecuación válida para un espacio-tiempo curvo de dimensión arbitraria. En (3+1)-dimensiones esta ecuación puede escribirse de manera equivalente en términos del tensor dual como¹⁶

$$\nabla_\mu \tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \quad (2.33)$$

la derivada covariante. Sin embargo debido a la antisimetría del tensor, los términos proporcionales a la conexión se anulan entre si y sólo contribuyen los términos en derivada parcial.

¹⁴Obtendremos el campo eléctrico en unidades de Heaviside-Lorentz, que es uno de los sistemas de unidades más utilizados en electrodinámica y al final pasaremos al sistema de unidades en las que hemos escrito la acción (2.27). En unidades de Heaviside-Lorentz, el potencial electromagnético tiene dimensiones: $[A_\mu] = M^{1/2} T^{-1} L^{2-d/2}$, la densidad de corriente: $[j_\mu] = M^{1/2} T^{-2} L^{1-d/2}$, la carga eléctrica: $[Q] = M^{1/2} T^{-1} L^{d/2}$ y en (3+1)-dimensiones la fuerza de Coulomb tiene la forma $F = Q_1 Q_2 / 4\pi r^2$.

¹⁵El argumento para que esto sea así es que en el caso plano, $F = 2(B^2 - E^2)$ es un escalar ante transformaciones de Lorentz, mientras que $G \equiv -4\vec{E} \cdot \vec{B}$ es un pseudoescalar.

¹⁶En un espacio-tiempo curvo de (3+1)-dimensiones el tensor dual está definido como: $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}$.

donde $\tilde{F}^{\mu\nu}$ es el tensor dual de $F_{\mu\nu}$. Estas ecuaciones de Maxwell se satisfacen automáticamente si se asume que $F_{\mu\nu}$ se escribe en términos de un vector potencial A_μ .

Para obtener la solución de Reissner-Nordström debemos entonces resolver las ecuaciones (2.29) para una partícula puntual de carga Q colocada en el origen de coordenadas. Dado que la solución tiene simetría esférica y la solución es estática, el vector potencial es nulo $\vec{A} = 0$ y la única componente no nula del tensor de Faraday es $F_{0r}(r) = -F_{r0}(r) = -E_r(r)$, con lo cual, $F^{0r} = -F^{r0} = e^{-(2\mu+2\nu)} E_r$. Así sólo debemos resolver la ecuación con fuentes, para la componente $\mu = 0$

$$\nabla_\nu F^{0\nu} = e^{-2\mu} Q \frac{\delta^d(\vec{0})}{\sqrt{-g}}, \quad (2.34)$$

la cual nos permite determinar la forma funcional de $E_r(r)$. Calculando la integral de volumen sobre las d coordenadas espaciales tenemos que

$$\int d^d x \frac{d}{dr} (\sqrt{-g} e^{-(2\mu+2\nu)} E_r(r)) = \int d^d x e^{-2\mu} Q \delta^d(\vec{0}). \quad (2.35)$$

La integral del lado derecho es simplemente igual a la carga Q . Dado que $\sqrt{-g} = e^{\mu+\nu} r^{d-1}$, tenemos aplicando el teorema de Gauss a la integral del lado izquierdo que

$$e^{-(\mu+\nu)} r^{d-1} E_r(r) \oint d^{d-1} \Omega = e^{-(\mu+\nu)} r^{d-1} E_r(r) \Omega_{d-1}, \quad (2.36)$$

con lo cual la magnitud del vector de campo eléctrico es $E = Q/(\Omega_{d-1} r^{d-1})$, donde hemos utilizado el hecho de que para un agujero negro $\mu(r) + \nu(r) = 0$. Pasando al sistema de unidades de la acción (2.27) tenemos finalmente que el vector campo eléctrico es¹⁷

$$\vec{E} = \frac{4\pi G_{d+1}}{c^2 \Omega_{d-1}} \cdot \frac{Q}{r^{d-1}} \hat{r}. \quad (2.37)$$

El potencial eléctrico es por tanto

$$\phi = \frac{4\pi G_{d+1}}{c^2 (d-2) \Omega_{d-1}} \cdot \frac{Q}{r^{d-2}} + \Phi, \quad (2.38)$$

donde Φ una constante que elegiremos más adelante cuando discutamos las propiedades termodinámicas de los agujeros negros. Note que \vec{E} diverge en la posición de la carga, con lo cual, al calcular la auto-energía $U_{Maxwell}$ de la partícula obtenemos un resultado divergente.

¹⁷Los dos sistemas de unidades están relacionados por un reescalamiento del vector potencial, de la forma $A_\mu \rightarrow \frac{c^2}{\sqrt{4\pi G_{d+1}}} A_\mu$. Adicionalmente para obtener el campo eléctrico, reescalamos la densidad de corriente en la forma $\vec{j}^\mu \rightarrow \sqrt{4\pi G_{d+1}} \vec{j}^\mu$. En estas unidades, el vector potencial A_μ es adimensional, la carga tiene dimensión de masa: $[Q] = M$ y la fuerza de Coulomb en $(3+1)$ -dimensiones es $\vec{F}_C = G_4 \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}$.

El invariante F de la teoría resulta entonces

$$F = -2 \left(\frac{4\pi G_{d+1}}{c^2 \Omega_{d-1}} \right)^2 \frac{Q^2}{r^{2d-2}}. \quad (2.39)$$

Una vez que hemos obtenido la expresión del campo estamos en posición de calcular el tensor de energía-momento correspondiente. De la definición (1.3) y del lagrangiano (2.27) obtenemos

$$T_{\mu\nu} = \frac{c^4}{4\pi G_{d+1}} \left(F_{\mu\rho} F_{\nu}{}^\rho - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F \right), \quad (2.40)$$

y sustituyendo el campo eléctrico (2.37) obtenemos que las componentes no nulas del tensor son

$$T^0{}_0 = T^r{}_r = -T^\theta{}_\theta = \frac{c^4}{4\pi G_{d+1}} \cdot \frac{1}{4} F = -\frac{4\pi G_{d+1}}{2\Omega_{d-1}^2} \cdot \frac{Q^2}{r^{2d-2}}. \quad (2.41)$$

Dado que $T^0{}_0 = T^r{}_r$ sabemos que la métrica debe tener la forma (1.24). Introduciendo la expresión de $T^0{}_0$ en (1.19) obtenemos

$$e^{-2\nu} = 1 - \frac{m}{r^{d-2}} + \frac{q^2}{r^{2(d-2)}}, \quad (2.42)$$

con m definida en (2.11) y q es un parámetro relacionado con la carga Q en la forma¹⁸

$$q = \frac{8\pi G_{d+1}}{c^2 \Omega_{d-1} \sqrt{2(d-1)(d-2)}} Q. \quad (2.43)$$

Así la solución métrica en dimensión arbitraria es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{m}{r^{d-2}} + \frac{q^2}{r^{2(d-2)}} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{m}{r^{d-2}} + \frac{q^2}{r^{2(d-2)}} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2. \quad (2.44)$$

2.2.1. Reissner-Nordström en 3 + 1

Para explorar las consecuencias de los agujeros negros de Reissner-Nordström, concentremos en el caso $d = 3$. Al igual que en el caso de Schwarzschild, las propiedades de los agujeros negros de dimensión mayor son similares al espacio-tiempo de $(3 + 1)$ -dimensiones¹⁹. Explícitamente para esta dimensión del espacio-tiempo, la función $e^{2\mu(r)}$ está dada por

$$e^{2\mu(r)} = 1 - \frac{2MG_4}{r} + \frac{G_4^2 Q^2}{r^2}, \quad (2.45)$$

lo cual nos permite obtener las propiedades del agujero negro de Reissner-Nordström:

¹⁸Las dimensiones de q son: $[q] = L^{d-2}$.

¹⁹Con el objetivo de que nuestras ecuaciones se vean más simétricas, trabajaremos en unidades de $c = 1$ y cuando lo requiramos, podemos introducir nuevamente los factores de c utilizando análisis dimensional.

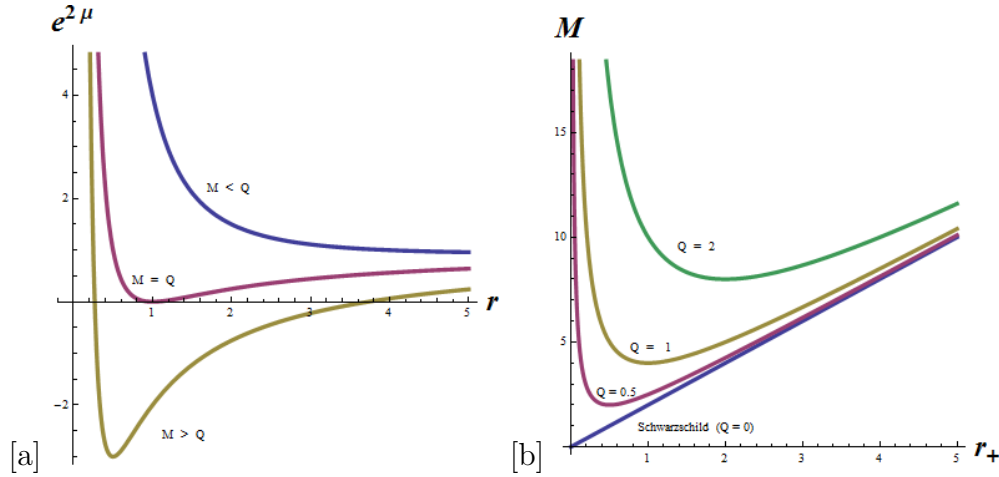


Figura 2.3: (a) En Reissner-Nordström los horizontes de eventos se localizan en $e^{2\nu} = 0$, tomamos valores de masa $M = 0.5$ y $M = 1$. Existen tres posibilidades; para el caso $M > Q$ hay dos horizontes de eventos r_+ (externo) y r_- , mientras que para $M = Q$ hay un horizonte degenerado (caso extremo) y, en $M < Q$ no hay horizonte de eventos. (b) La gráfica de la función de masa $M = M(r_+)$ en RN como función del horizonte de eventos externo r_+ para una carga eléctrica $Q = 0$ (schwarzschild), $Q = 0.5$, 1, 2.

- La métrica de Reissner-Nordström tiene una singularidad intrínseca en $r = 0$, lo cual se concluye del escalar de Kretschmann

$$K = R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{48M^2r^2 - 96MQ^2r + 56Q^2}{r^8}. \quad (2.46)$$

Adicionalmente se obtiene que $R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} = \frac{Q^4}{r^8}$.

- Los **horizontes de eventos** se obtienen al resolver la ecuación $e^{2\mu(r)} = 0$, lo cual nos lleva a la ecuación de segundo orden

$$r^2 - 2MG_4r + Q^2G_4^2 = 0, \quad (2.47)$$

de donde se obtienen las raíces

$$r_{\pm} = MG_4 \pm G_4\sqrt{M^2 - Q^2} \quad (2.48)$$

ya que escribimos $\Delta(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} = 0$ o equivalentemente $r^2\Delta = (r - r_+)(r - r_-) = 0$. En la figura (2.3) se muestran horizontes para diferentes valores de M y Q , así como en (b) se muestra la gráfica $M-r_+$. Como resultado, debemos analizar 3 diferentes casos.

Caso 1: Para $M^2 < |Q^2|$, los r_{\pm} son imaginarios (no hay singularidades en $r = r_{\pm}$) y $\Delta > 0$, t es de tiempo y r de espacio, por lo tanto, $r = 0$ es una singularidad desnuda, es decir, “no hay horizonte de eventos” que la rodeen y carece de sentido físico. En $r \rightarrow \infty$, el espacio-tiempo es Minkowski e infinito en el diagrama de Penrose (Figura [2.4]). A diferencia de los agujeros negros (los cuales surgen de un colapso gravitacional donde ninguna señal puede escapar del horizonte de eventos), una *singularidad desnuda*

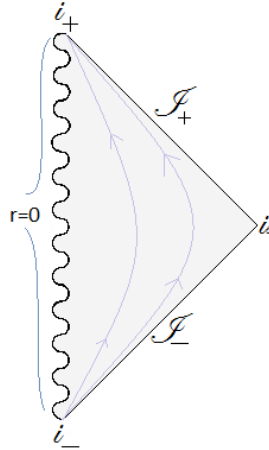


Figura 2.4: Diagrama de Penrose para $M^2 < |Q^2|$.

es aquella donde una señal que sale desde $r = 0$ puede llegar al futuro nulo. Por lo tanto se establece la *Conjetura de Censura C3smica*: Las singularidades desnudas no pueden formarse de un colapso gravitacional en un espacio-tiempo asint3ticamente Minkowski que no es singular en alguna hipersuperficie inicialmente de tipo espacio (superficie de Cauchy).

Caso 2: En $M^2 = |Q^2|$, tenemos que $r_+ = r_- = MG_4$ es *extremo*. La masa m3nima del agujero negro es $M_{min} = Q$. Hay un horizonte de Killing degenerado [22] y, la superficie de gravedad es $\kappa = 0$. Si ahora escribimos $\Delta = (r - r_+)(r - r_-) = (r - M)^2$, tenemos que la m3trica de Reissner-Nordstr3m (2.44) en $d = 3$ toma la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dt^2 + \left(1 - \frac{M}{r}\right)^{-2} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (2.49)$$

Observamos que $r = M$ es una singularidad removible, es decir que puede evitarse con un cambio de variables adecuado, por lo tanto se introduce el cambio de coordenada radial *Regge-Wheeler*

$$dr^* = \frac{dr}{\left(1 - \frac{M}{r}\right)^2}, \quad \longrightarrow \quad r^* = r + 2M \ln \left| \frac{r - M}{M} \right| - \frac{M^2}{r - M},$$

donde $M < r < +\infty$ y $-\infty < r^* < +\infty$, luego se introducen las coordenadas *Eddington-Finkelstein* definidas por

$$v = t + r^*, \quad u = t - r^*,$$

con $-\infty < v < +\infty$ y $-\infty < u < +\infty$, as3 la m3trica (2.49) en la coordenada v es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{M}{r}\right)^2 dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2,$$

donde la única singularidad intrínseca es $r = 0$ y, $\xi = \frac{\partial}{\partial v}$ es el vector de Killing²⁰.

Caso 3: Para $M^2 > |Q^2|$ los r_{\pm} son reales en $\Delta = 0$. En $r > r_+$ y $r < r_-$ se tiene que $\Delta > 0$ y, para $r_- < r < r_+$ es $\Delta < 0$, haciendo que $r = 0$ sea de tipo espacio cubierta por los horizontes r_{\pm} los cuales son singularidades coordenadas que pueden ser removidas a través de un cambio de coordenadas. Si se introduce la coordenada de *Regge-Wheeler*;

$$dr^* = \frac{r^2}{\Delta} dr = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}} dr,$$

es decir

$$r^* = r + \frac{1}{2k_+} \ln \left(\frac{|r - r_+|}{r_+} \right) + \frac{1}{2k_-} \ln \left(\frac{r - r_-}{r_-} \right) + cte.,$$

donde $r_+ < r < +\infty$ y $-\infty < r^* < +\infty$ donde para cada signo $k_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2r_{\pm}^2}$. Ahora se introducen las coordenadas (nulas) de *Eddington-Finkelstein* (v, r, θ, φ) con $v = t + r^*$ donde $-\infty < v < +\infty$, el resultado al que se llega es

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2.$$

Vemos que hay una singularidad intrínseca en $r = 0$ y el único vector de Killing es $\xi = \frac{\partial}{\partial v}$, que en $r \rightarrow +\infty$ tiene norma $\xi^2 \rightarrow -1$. El campo vectorial de Killing $\xi = \frac{\partial}{\partial v}$ está conformado por los horizontes $r = r_{\pm}$, por esta razón existen dos superficies de gravedad²¹

$$\kappa_{\pm} = \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2r_{\pm}^2},$$

las cuales definen horizontes de Killing.

Definición 2.1 Sea $S(x)$ una función suave de las coordenadas del espacio-tiempo x^{μ} y consideramos una familia de hipersuperficies $S = \text{conts.}$ Los vectores normales a la hipersuperficie son $l = f(x) (g^{\mu\nu} \partial_{\nu} S) \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$, donde $f(x)$ es una función no nula. Si $l^2 = 0$ para una hipersuperficie \mathcal{N} (de la familia de hipersuperficies $S = \text{conts.}$), decimos que \mathcal{N} es una hipersuperficie nula.

Definición 2.2 Horizonte de Killing: Una hipersuperficie nula \mathcal{N} es un horizonte de Killing de un campo vectorial de Killing ξ , si en \mathcal{N} se tiene que ξ es normal a \mathcal{N} . Luego, sea l normal a \mathcal{N} tal que $l \cdot D l^{\mu} = 0$, entonces ya que en \mathcal{N}

$$\xi = Fl,$$

²⁰Un campo vectorial de Killing κ está asociado con la simetría de la acción que define a la fuente puntual, por lo tanto se relaciona a las cargas conservadas y, su forma diferencial es $\kappa = \kappa^{\mu} \partial_{\mu}$, donde κ^{μ} es un vector de Killing.

²¹Una superficie de gravedad κ es la aceleración de una partícula estática cerca del horizonte de eventos medida en el infinito espacial.

para alguna función F , se sigue que

$$\xi \cdot D\xi^\mu = \kappa \xi^\mu, \quad \text{en } \mathcal{N}, \quad (2.50)$$

donde $\kappa = \xi \cdot \partial \ln |F|$ es llamada la superficie de gravedad.

Theorema 2.2.1 *El horizonte de eventos de un espacio-tiempo estacionario asintóticamente Minkowski es un horizonte de Killing. No necesariamente de $\frac{\partial}{\partial t}$. (Teorema de Hawking).*

Para analizar la estructura causal del espacio podemos realizar un esquema del diagrama de Penrose, para lo cual se introducen las *coordenadas Kruskal-Szekeres* (v, u, θ, φ) definidas por

$$v = t + r^*, \quad u = t - r^*,$$

donde $-\infty < v < +\infty$ y $-\infty < u < +\infty$, luego, la métrica Reissner-Nordström toma la forma

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} dv du + r^2 d\Omega^2, \quad (2.51)$$

con $\Delta = r^2 + 2MrG_4 + Q^2G_4^2$ y, la variable r definida por

$$r^* = \frac{v - u}{2}.$$

Luego se definen e introducen nuevas coordenadas dadas por

$$V^\pm = e^{\kappa_\pm v}, \quad U^\pm = -e^{\kappa_\pm u},$$

en la expresión métrica (2.51) de modo que

$$ds^2 = \frac{\Delta}{r^2} \frac{dV^+ dU^+}{\kappa_+^2 V^+ U^+} + r^2 d\Omega^2,$$

con r dada ahora por la relación

$$V^+ U^+ = -e^{-\kappa_+(v-u)} = -e^{2\kappa_+ r^*},$$

o equivalentemente se tiene

$$V^+ U^+ = -e^{2\kappa_+ r} \left(\frac{r - r_+}{r_+} \right) \left(\frac{r - r_-}{r_-} \right)^{\frac{\kappa_+}{\kappa_-}}.$$

Por lo tanto, el elemento de línea en coordenadas (U^+, V^+) se escribe como

$$ds^2 = -\frac{r_+ r_-}{\kappa_+^2} \frac{e^{2\kappa_+ r}}{r^2} \left(\frac{r_-}{r - r_-} \right) dV^+ dU^+ + r^2 d\Omega^2,$$

mientras que en las coordenadas (U^-, V^-) es

$$V^-U^- = -e^{2\kappa_- r} \left(\frac{r_- - r}{r_-} \right) \left(\frac{r_+ - r}{r_+} \right)^{\frac{\kappa_-}{\kappa_+}},$$

por lo tanto se tiene que

$$ds^2 = -\frac{r_+r_-}{\kappa_-^2} \frac{e^{2\kappa_- r}}{r^2} \left(\frac{r_+}{r_+ - r} \right) dV^- dU^- + r^2 d\Omega^2.$$

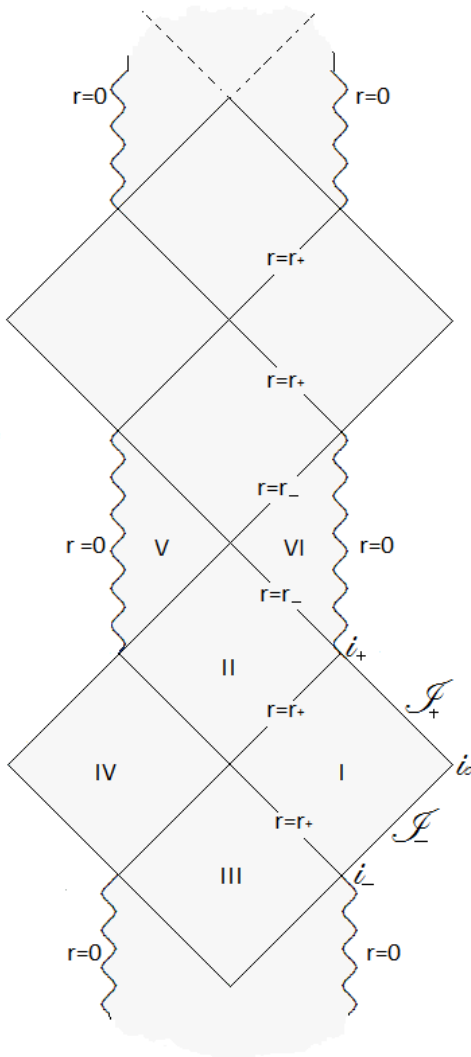


Figura 2.5: Diagrama de Penrose para $M^2 > |Q^2|$.

La introducción de estas coordenadas nos da información de la estructura del espacio al analizar el diagrama de Penrose. Contrario a lo que ocurre para el caso Schwarzschild, el diagrama de Penrose de Reissner-Nordström es infinito como puede observarse en la figura (2.5), donde las regiones I y IV son asintóticamente Minkowski. La región II (en coordenadas (U^+, V^+)) se une a la región de las coordenadas (U^-, V^-) . Luego, las regiones V y VI contienen a la singularidad intrínseca $r = 0$, mientras que la región II se conecta al siguiente diagrama que ya no es Minkowski. En el diagrama se puede hacer extensiones analíticas indefinidas y por lo tanto las geodésicas tendrán una longitud indefinida.

La solución Reissner-Nordström al igual que Schwarzschild es una solución métrica estática, para la cual la superficie de gravedad κ se calcula de la expresión (2.7) y adquiere un valor constante en el horizonte de eventos como se ve en (2.8), por lo que el área de la S^2 que define el horizonte de eventos es constante e incluso tiende a aumentar (por ejemplo en una colisión de agujeros negros). Este comportamiento llevó a pensar que el área que define el horizonte de eventos se comporta similarmente a la propiedad termodinámica de entropía S (Bekenstein [43]), por lo tanto se pensó que debían existir otras propiedades físicas de los agujeros negros que se comportasen similarmente a las leyes de la termodinámica, pero debido a las interacciones clásicas, estos objetos solamente son capaces de absorber partículas lo que hace que su temperatura sea nula, sin

embargo, cuando se consideran las interacciones cuánticas en la inmediatez del horizonte de eventos, los efectos cuánticos predicen la creación y emisión de partículas con una temperatura dada por $\frac{\hbar\kappa}{2\pi k_B} \approx 10^{-6} \left(\frac{M_\odot}{M}\right)^0 K$ (la temperatura de Hawking), donde κ es la superficie de gravedad del agujero negro. De donde puede concluirse que la emisión térmica hace que la masa del agujero negro decrezca hasta desaparecer, es decir, *los agujeros negros se evaporan* [44]. Precisamente fue Hawking quien dio una interpretación más rigurosa en la termodinámica de agujeros negros y, encontró que para la solución de Schwarzschild $\hbar\beta = 2\pi/\kappa$ y el equilibrio térmico está dada por la temperatura de Hawking $T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{\hbar}{k_B}$, donde k_B es la constante de Boltzman o equivalentemente $T_H = \frac{\kappa}{2\pi}$ (donde $\hbar = 1 = k_B$). Concluiremos este capítulo discutiendo algunas de las propiedades termodinámicas de los agujeros negros Schwarzschild y Reissner-Nordström, los cuales nos permitirán analizar nuestros resultados en el espacio tiempo Einstein-Born-Infeld-anti-de Sitter.

2.3. Termodinámica de agujeros negros

La primera relación que se estableció entre gravedad-cuántica fue propuesta por Hawking; él considero las interacciones cuánticas de los agujeros negros con sus alrededores y la forma en la que lo hizo fue suponer que el tensor de energía momento en las ecuaciones de Einstein es el valor esperado de vacío de algún operador. Es decir, uso los principios de cuantización para el espacio-tiempo de los que estableció que los agujeros negros emiten radiación térmica. Básicamente, el efecto Hawking consiste en la emisión de partículas por un agujero negro formado por el colapso gravitacional, donde fuera del horizonte de eventos r_H se crean pares de partícula-antipartícula debido a las fluctuaciones cuánticas del vacío. La antipartícula con energía negativa se encuentra en la región clásicamente prohibida pero puede cruzar el horizonte (por el efecto túnel, el cual considera la probabilidad de que una partícula pueda atravesar una barrera de potencial) y caer a la singularidad, mientras que la partícula con energía positiva escapa al infinito sin cambio alguno, lo que hace que el agujero negro pierda masa más rápido de lo que absorbe haciendo que se evapore (ver apéndice F). Resulta entonces que la geométrica de los agujeros negros se comportan como las leyes de la termodinámica, siendo la temperatura T y entropía S de carácter geométrico ya que dependen del horizonte de eventos r_H , además, la masa M del agujero negro (cantidad medida asintóticamente, la masa ADM) corresponderá a la energía interna E , esto es

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} \frac{\hbar}{k_B}, \quad S = \frac{\mathcal{A}}{4l_{Pl}^2}, \quad E = Mc^2, \quad (2.52)$$

donde κ es la superficie de gravedad y k_B la constante de Boltzmann. Sin embargo el comportamiento similar al de la termodinámica no queda plenamente justificado, ya que el espacio fase termodinámico de agujeros negros está conformado solamente por S , T , carga y potencial electromagnético. Con objeto de entender más acerca de las propiedades que definen dicha termodinámica, a continuación enunciamos las *leyes de la termodinámica*

de agujeros negros, construidas en el año de 1973 por Bardeen, Carter y Hawking ([32], [51]).

- **Ley cero:** “Si $T_{\mu\nu}$ obedece la condición de energía dominante (1.5), entonces la superficie de gravedad κ es constante en el horizonte de eventos futuro.”
- **Primera ley:** Si un agujero negro estacionario de masa M , carga Q y momento angular J , con horizonte de eventos futuro de superficie de gravedad κ , el potencial superficial eléctrico Φ_{r_H} y velocidad angular Ω_{r_H} , es perturbado tal que se establece a otro agujero negro con masa $M + \delta M$, carga $Q + \delta Q$ y momento angular $J + \delta J$, entonces

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega_{r_H} dJ + \Phi_{r_H} dQ. \quad (2.53)$$

- **Segunda ley:** “Si $T_{\mu\nu}$ satisface la condición de energía débil y asumimos que la hipótesis del censor de conjetura cósmica es verdad, entonces el área del horizonte de eventos futuro de un espacio-tiempo asintóticamente Minkowski es una función no decreciente en el tiempo.”

$$\Delta A \geq 0.$$

- **Tercera ley:** “Es imposible por cualquier procedimiento, no importa que tan idealizado sea, reducir la temperatura de un agujero negro a cero por una secuencia finita de operaciones.”

La *ley cero* indica un estado de equilibrio con κ de un agujero negro estacionario y, es constante en el horizonte de eventos. La *primera ley* es la fórmula de masa de Smarr [51];

$$\delta M c^2 = \frac{c^2 \kappa}{8\pi G_4} \delta \mathcal{A} + \Omega \delta J + \phi \delta Q,$$

donde ϕ es el potencial eléctrico, y todas las variables son medidas en el horizonte de eventos. La *segunda ley* indica que la entropía (área) nunca decrece, así por ejemplo, en la colisión de agujeros negros, \mathcal{A} (el área en el horizonte de eventos) de cada agujero negro no decrece con el tiempo $\delta \mathcal{A} \geq 0$ y el área final es más grande que las áreas de los horizontes iniciales $\mathcal{A} > \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$. La *tercera ley* establece que la temperatura²² de un agujero negro desaparece simultáneamente con κ ($\kappa > 0$ siempre), esto es solamente posible si un agujero negro aislado es extremo: $M^2 = a^2 + Q^2$, lo cual es casi imposible, así como en $M^2 < a^2 + Q^2$ no tiene sentido físico porque hay una singularidad desnuda [51]. En la siguiente tabla se resumen las similitudes de agujeros negros con las leyes de la termodinámica.

Ley	Termodinámica	Agujeros Negros
Cero	$T = cte.$ en equilibrio térmico	$\kappa = cte.$ en el horizonte de eventos r_+
Primera	$\delta E = T\delta S - P\delta V$	$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega_H \delta J_H + \phi \delta Q$ (Fórmula de Smarr)
Segunda	$\delta S \geq 0$ en todo proceso	$\delta A \geq 0$ en todo proceso
Tercera	$T > 0$ en todo proceso	$\kappa > 0$ en todo proceso

²²La temperatura efectiva de un agujero negro es el cero absoluto.

Por mencionar, la *fórmula de masa* fue deducida por Smarr en 1973 ([51], [52]). Él encontró la relación entre la masa de un agujero negro estacionario y las características geométricas del horizonte de eventos (en donde $r \rightarrow \infty$) y la velocidad angular Ω , el potencial eléctrico Φ y κ son constantes. Además, encontró que el área superficial es constante en la solución de Kerr, ya que el área del horizonte de eventos no decrece; el resultado que obtuvo fue

$$\mathcal{A} = 4\pi \left[2M^2 + 2(M^4 - J^2 - M^2Q^2)^{1/2} - Q^2 \right], \quad (2.54)$$

y dedujo la relación entre \mathcal{A} , J y Q con M ;

$$M = \left[\frac{\mathcal{A}}{16\pi} + \frac{4\pi J^2}{\mathcal{A}} + \frac{Q^2}{2} + \frac{\pi Q^4}{\mathcal{A}} \right]^{1/2}. \quad (2.55)$$

Luego, el *diferencial de masa* dM es

$$dM = Td\mathcal{A} + \Phi dQ + \Omega dJ.$$

Si tomamos $J = 0$ lo que se obtiene es la masa de Reissner-Nordström. Debemos aclarar que las fórmulas de masa integral y diferencial se relacionan entre sí, no obstante, la fórmula de masa M no se obtiene al integrar el diferencial de masa dM , sin embargo si podemos obtener la fórmula diferencial de masa a partir de la fórmula integral de masa. Al evaluar el diferencial de masa en r_H , se tiene que

$$dM = TdS + \Phi_{r_H} dQ + \Omega_{r_H} dJ, \quad (2.56)$$

lo cual nos permite identificar al agujero negro como un fluido, donde la variación dM es la energía total conformada por una parte interna, electrostática y rotacional, lo que da sentido físico a la primera ley termodinámica de agujeros negros, no obstante aún no está bien definida físicamente, ya que para los espacios asintóticamente Minkowski el espacio fase sólo se conforma de las variables T , S , $M = E$ y potenciales pero no aparecen las variables de volumen ni presión esenciales para la primera ley puesto que toda la información termodinámica de agujeros negros está contenida en la *fórmula de masa*, desarrollada por Smarr y Bekenstein. Una medida de la estabilidad para las soluciones de agujero negro es proporcionada por el calor específico dado por

$$C = \frac{\partial E}{\partial T} = T \frac{\partial S}{\partial T}. \quad (2.57)$$

Si el calor específico es finito, el agujero negro alcanza el equilibrio termodinámico con sus alrededores, adicionalmente, si además es negativo $C < 0$ entonces es inestable.

2.3.1. Schwarzschild en (3 + 1)-dimensiones

El área que genera el horizonte de eventos del agujero negro de Schwarzschild es $4\pi R_s^2$ y su superficie de gravedad es constante, por lo tanto la temperatura y entropía son

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G_4 M} \quad y \quad S = \frac{4\pi G_4 M^2}{\hbar c}, \quad (2.58)$$

mientras que la primera ley de la termodinámica y la fórmula de Smarr están dadas por

$$dMc^2 = TdS \quad \text{y} \quad Mc^2 = 2TS. \quad (2.59)$$

Estas expresiones nos dan las características termodinámicas principales del agujero negro de Schwarzschild:

- La temperatura del AN de Schwarzschild (y de todos los agujeros negros lejos del límite extremo (ver sección 2.2)) disminuye cuando la masa (energía) aumenta, por tanto tiene un calor específico negativo como puede verse de

$$C^{-1} = \frac{\partial T}{\partial M} = -\frac{\hbar c^3}{8\pi G_4 M^2} < 0, \quad (2.60)$$

lo cual implica que se enfría cuando absorbe materia, en vez de cuando radia (como lo hacen los sistemas termodinámicos ordinarios). Así, no podemos poner un AN en equilibrio con un reservorio de calor infinito por que el agujero negro absorbería la energía y crecería sin límite.

- La temperatura aumenta cuando la masa disminuye (por ejemplo, en la evaporación) y diverge cuando la masa se aproxima a cero. Al mismo tiempo el valor absoluto del calor específico aumenta aunque sigue siendo negativo. Si estas fórmulas son válidas en todo el intervalo de masas, en particular cuando $M \rightarrow 0$, el estado final de la evaporación de Hawking de un AN sería una explosión violenta en la cual el AN desaparecería. Sin embargo, cuando el tamaño del radio de Schwarzschild R_s es del orden de la longitud de onda de Compton del AN (esto sucede cuando $M \sim M_{Planck}$, lo cual implica que $R_s \sim l_{Planck}$) los efectos de gravedad cuántica deben ser importantes y deberían determinar (no sabemos como) el destino final del agujero negro.

Para entender el destino de los agujeros negros es necesario contar con una teoría cuántica de la gravedad, teoría que no tenemos aún. Existen diferentes candidatos como la teoría de cuerdas, la gravedad cuántica de lazos o la no conmutatividad. En esta tesis se utiliza una construcción no-conmutativa del espacio-tiempo basada en la teoría de estados coherentes (ver capítulo 4). Como veremos, esta teoría da una posible explicación del destino de los agujeros negros durante el proceso de evaporación.

2.3.2. Reissner-Nordström en $(3 + 1)$ -dimensiones

La mayor parte de los resultados de la termodinámica del agujero negro de Schwarzschild se pueden generalizar a agujeros negros que contienen cargas o momento angular. En particular, la ley cero y la segunda ley de la termodinámica toman exactamente la misma forma. Explícitamente la temperatura y la entropía son

$$T = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left[e^{2\mu(r)} \right] \Big|_{r_+} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{2MG_4}{r_+^2} - \frac{2G_4^2 Q^2}{r_+^3} \right] = \frac{1}{2\pi G_4} \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}, \quad (2.61)$$

y

$$S = \frac{\mathcal{A}}{4} = \frac{(4\pi r_+^2)}{4} = \pi r_+^2 = \pi G_4 \left(M + \sqrt{M^2 - Q^2} \right)^2, \quad (2.62)$$

respectivamente. La primera ley requiere la inclusión de un nuevo término que toma en cuenta los cambios posibles en la masa del agujero negro debido a los cambios en la carga. Así

$$dM = \frac{1}{8\pi G_a} \kappa dA + \phi_H dQ, \quad (2.63)$$

donde ϕ_H es el potencial electrostático sobre el horizonte

$$\phi_h = \phi(r_+) = \frac{2G_4 Q}{r_+}, \quad (2.64)$$

y la fórmula de Smarr toma la forma

$$M = 2TS + Q\phi_H. \quad (2.65)$$

Todas las fórmulas anteriores las hemos obtenido utilizando una métrica de Reissner-Nordström genérica, esto es, no extremal. Sin embargo, como hemos discutido en la sección 2.2, el límite $M \rightarrow Q$, en el cual nos aproximamos al agujero negro extremal, no es continuo: la topología del AN RNE y su estructura causal difieren de la de los AN no extremales. Más aún, sucede que el límite extremo no se puede alcanzar mediante una serie finita de procesos físicos (la tercera ley de la termodinámica) y se ha argumentado que la descripción termodinámica de los AN de RN deja de ser válida cuando nos aproximamos a este límite, al final de esta sección se muestra que $T = 0$ para el caso extremo es inconsistente. Físicamente, cuando estamos lo suficientemente cerca del límite extremo, la emisión de un sólo cuanto con energía igual a la temperatura de Hawking llevaría a un valor de la masa del agujero negro, más allá del límite extremo. Así, la carga en la métrica del espacio-tiempo causada por la radiación de Hawking sería muy grande y la suposición realizada por Hawking en el cálculo de la radiación del agujero negro, que consiste en ignorar la reacción de la métrica sobre la radiación, deja de ser válida, lo cual necesariamente lleva a una inconsistencia.

En la figura (2.6) se muestra el comportamiento de la temperatura como función de la masa para un agujero negro de Reissner-Nordström de carga fija. Como puede observarse, para valores grandes de la masa la temperatura disminuye, tal y como sucede en el caso del agujero negro de Schwarzschild, mientras que para valores de la masa comparables a la carga, cercano al límite extremo, la temperatura crece con la masa, como sucede en cualquier sistema termodinámico ordinario. Hay un máximo de temperatura en la gráfica, el cual corresponde a un valor de la masa $M^* = 2Q/\sqrt{3}$. El valor máximo correspondiente de la temperatura está dado por

$$T^* = \frac{1}{6\sqrt{3}\pi G_4 |Q|}. \quad (2.66)$$

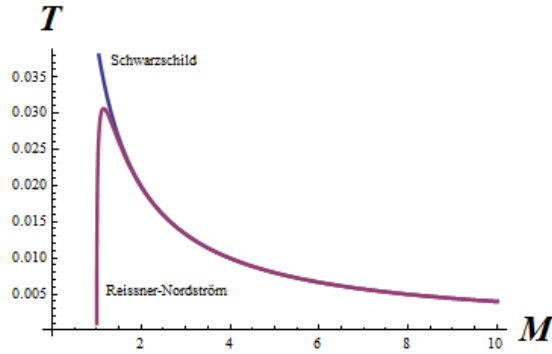


Figura 2.6: La función de temperatura $T - M$ Reissner-Nordström (línea azul) para una carga fija $Q = 1$, y para $Q = 0$ es la temperatura de Schwarzschild.

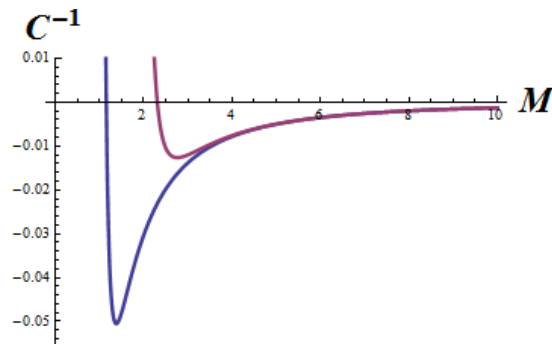


Figura 2.7: El calor específico $C^{-1} = \partial T / \partial M$ en Reissner-Nordström, para la carga fija $Q = 1$ (línea azul) y $Q = 2$ (línea rosa).

También es ilustrativo graficar el calor específico en función de la masa a carga constante (fig. 2.7), cuya expresión es

$$C^{-1} = \frac{\partial T}{\partial M} = \frac{1}{2\pi G_4} \frac{M - 2\sqrt{M^2 - Q^2}}{\sqrt{M^2 - Q^2} (M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2}. \quad (2.67)$$

Claramente se distinguen dos regiones: Una en la cual el comportamiento termodinámico es el “stándard” (calor específico positivo) y otra donde el comportamiento es “tipo Schwarzschild” (calor específico negativo). En el punto M^* en el cual la temperatura alcanza su valor máximo, $\partial T / \partial M = 0$ y el calor específico diverge.

Como hemos mencionado antes, la carga eléctrica se pierde más rápido que la masa y antes de que se alcance el límite extremo, se tendría un agujero negro sin carga, es decir, de Schwarzschild, cuyo destino discutimos en la subsección anterior (2.3.1). Sin embargo también podríamos especular sobre la posibilidad de que la carga del agujero negro fuera de algún tipo no asociada a una partícula elemental, de forma tal que ésta no se perdiera por radiación de Hawking, o alternativamente, de que los portadores de este tipo de carga fueran partículas extremadamente pesadas (a diferencia de los electrones) de manera tal que la descarga del agujero negro se diera a un ritmo mucho más lento que el ritmo de

pérdida de masa. En ambos casos, si asumimos que no sucede nada especial cuando la masa es tal que $\partial T/\partial M = 0$, uno esperaría que el agujero negro se aproxime al límite extremo en un proceso muy largo y duradero (tal vez eterno) en el cual el agujero negro pierde masa y temperatura a ritmos menores. Se ha conjeturado que el agujero negro eterno de Reissner-Nordström podría ser un agujero negro remanente que almacena toda la información contenida en el agujero negro original que no se pierde por radiación.

Para el caso $Q = 0$ en Reissner-Nordström se obtienen la temperatura para Schwarzschild, siendo la entropía correspondiente a la simetría esférica que es igual en ambos casos. Por otra parte, a partir de la primera ley termodinámica de agujeros negros ((2.53) para $J = 0$ y $\mu = \frac{Q}{r_+}$), encontramos que

$$\left(\frac{\partial M}{\partial r_+}\right)_Q = T \left(\frac{\partial S}{\partial r_+}\right)_Q, \quad \left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right)_{r_+} = \frac{Q}{r_+}.$$

Además, el caso extremo $M = Q$ en RN contradice a la tercera ley termodinámica de agujeros negros ya que $T = 0$ como se ve de

$$T = \frac{1}{2\pi G_4} \frac{\sqrt{M^2 - Q^2}}{(M + \sqrt{M^2 - Q^2})^2} = 0, \quad S = \pi Q^2 \neq 0,$$

lo cual es imposible porque no se puede obtener $T = 0$ para un agujero negro a través de finitos procesos físicos.

2.3.3. Schwarzschild-Anti-de Sitter en $(3 + 1)$ -dimensiones

El estudio de la termodinámica de agujeros negros en un espacio-tiempo de anti de Sitter fue realizado por Hawking y Page [53]. Este estudio es muy interesante porque resulta que estos agujeros negros son termodinámicamente estables a diferencia de los agujeros negros asintóticamente Minkowski. La temperatura de Hawking correspondiente es

$$k_B T = \frac{\ell^2 + 3r_H^2}{4\pi\ell^2 r_H}. \quad (2.68)$$

Invirtiéndola podemos expresar el horizonte de eventos r_H como una función de T (considerada como variable independiente). Para ello debemos resolver la ecuación cuadrática resultante, obteniendo

$$r_H = \frac{2}{3}\pi\ell^2 k_B T \pm \frac{2}{3}\sqrt{4\pi^2\ell^4 k_B^2 T^2 - 3\ell^2}. \quad (2.69)$$

Esta expresión nos lleva a concluir que tenemos tres diferentes posibilidades las cuales dependen del valor del discriminante en la raíz. Definiendo la temperatura mínima T_{min} como el valor para el cual se anula el discriminante

$$k_B T_{min} \equiv \frac{\sqrt{3}}{2\pi\ell}, \quad (2.70)$$

tenemos las posibilidades siguientes:

- Para $T < T_{min}$, no existe agujero negro y físicamente estamos en una fase de radiación pura.

- Para $T = T_{min}$, se tiene un único agujero negro cuyo horizonte de eventos tiene un valor de

$$r_H = \frac{\ell}{\sqrt{3}}. \quad (2.71)$$

- Para $T > T_{min}$ existen un par de agujeros negros (grande/pequeño) con horizontes de eventos r_{Hg} y r_{Hp} dados por

$$r_{H_{g,p}} = \frac{k_B T}{2\pi(k_B T_{min})^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{T_{min}^2}{T^2}} \right). \quad (2.72)$$

Claramente $r_{Hg} > \ell/\sqrt{3}$ y $r_{Hp} < \ell/\sqrt{3}$.

Para tener información sobre la estabilidad termodinámica de las soluciones calculamos la capacidad calorífica

$$C_p = -2\pi r_H^2 \frac{\ell^2 + 3r_H^2}{\ell^2 - 3r_H^2}, \quad (2.73)$$

la cual diverge para el valor de $r_H = \ell/\sqrt{3}$. Así $C_p > 0$ para los agujeros negros grandes y por tanto estos son estables. Los agujeros negros pequeños son inestables ya que $C_p < 0$. La cuestión de estabilidad también puede investigarse calculando los puntos críticos de la energía libre de Gibbs G

$$G \equiv M - TS = \frac{r_H}{2} \left(1 + \frac{r_H^2}{\ell^2} \right) - \pi k_B T r_H^2. \quad (2.74)$$

De hecho este análisis da mayor información sobre la termodinámica de los agujeros negros. Un agujero negro en equilibrio térmico con el espacio-tiempo de fondo corresponde a puntos estacionarios de G para $T > T_{min}$.

- Para $T < T_{min}$, la función G sólo tiene un mínimo global en $r_H = 0$ y el sistema se encuentra en una fase de radiación pura.

- Para $T = T_{min}$, G tiene un punto de inflexión en $r_H = 1/2\pi T_{min} = \ell/\sqrt{3}$.

- Para $T > T_{min}$, G tiene un máximo local y un mínimo. El máximo corresponde al agujero negro pequeño y es inestable, mientras que el mínimo corresponde al agujero negro grande. Cuando la temperatura aumenta respecto a T_{min} , el valor mínimo de G (que es positivo) corresponde a un mínimo local y disminuye hasta alcanzar el valor $G = 0$ a la temperatura $T = \frac{M}{S}$.

2.4. Termodinámica en el espacio fase extendido

El espacio fase generado en las soluciones asintóticamente Minkowski no es suficiente para asociar una similitud completa entre agujeros negros con las leyes de la termodinámica, dado que las únicas variables que aparecen son la temperatura, entropía, energía interna (la masa del agujero negro) y potenciales electromagnéticos, además de que el valor negativo del calor específico indica que las soluciones son inestables conforme el agujero negro pierde masa, por lo que no puede establecerse un ensamble canónico. Necesitamos trabajar con un espacio tiempo de fondo que contenga el término de presión P y volumen V . Al igual que estos espacios, el espacio tiempo anti-de Sitter no tiene una temperatura asociada, sin embargo, aquí los agujeros negros son capaces de emitir partículas con una temperatura determinada por la superficie de gravedad, además de que existen varias razones para ser considerado en la descripción termodinámica de agujeros negros ya que

- La constante cosmológica $\Lambda < 0$ se interpreta como una energía de vacío con densidad negativa (ver sección 1.6), por lo tanto se comporta como una variable de presión termodinámica P . El estado de vacío es periódico en el tiempo real.

- Tiene topología $S^1 \times R^3$ donde S^1 es de tipo tiempo, por lo tanto es periódico en el tiempo y contiene curvas cerradas de tipo tiempo.

- Las soluciones asintóticamente anti-de Sitter son estables.

- La temperatura de un estado térmico disminuye (ya que depende de κ) y la energía neta de la radiación térmica será finita. En un estado térmico el flujo de partículas entrantes y salientes están en equilibrio. El agujero negro se ve como un fluido de partículas.

Por lo tanto, el espacio anti-de Sitter genera un espacio fase extendido que contiene a las variables termodinámicas de agujeros negros P y V . Una consecuencia, es que la primera ley termodinámica de agujeros negros puede escribirse como una ecuación de fluido perfecto $dE = TdS - PdV$, en la que el espacio anti-de Sitter se comporta como una caja que contiene al agujero negro el cual pierde masa en forma de radiación hasta desaparecer (se evapora), esto es, su masa se transforma en radiación y queda confinada en la caja que define el espacio anti-de Sitter, por lo tanto el número de partículas es fijo. La radiación puede chocar con las paredes infinitas y rebotar al interior de la caja; además, hay un flujo termodinámico en equilibrio. En el trabajo seminal de Hawking y Page, se encontró que hay una transición de fase del agujero negro Schwarzschild-anti-de Sitter [53], más tarde se encontró que la solución Reissner-Nordström-anti-de Sitter exhibía un comportamiento similar al de la transición de fase **líquido-gas** descrito por la ecuación de Van der Waals definido en la termodinámica, en donde los exponentes críticos describen el comportamiento cerca del punto crítico en donde ocurren las transiciones de fase, son cantidades fijas. La constante cosmológica $\Lambda < 0$ será un parámetro externo que actúa como una presión cuya variable termodinámica conjugada es V el cual está relacionado al volumen geométrico Newtoniano del agujero negro, en el espacio anti-de Sitter fijo. Al introducir Λ en la primera ley se satisface la relación de Smarr y la masa del agujero negro actuará como la entalpía y no como la energía interna E [49]. Por lo que la solución

Reissner-Nordström-anti-de Sitter en el espacio fase extendido indica que hay una analogía con un fluido de Van der Waals. De esta forma, la presión definida en el espacio anti-de Sitter es

$$P = -\rho = -\frac{\Lambda}{8\pi G_N}, \quad (2.75)$$

y su variable termodinámica conjugada es el volumen termodinámico V del agujero negro, con $V = \left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_{S, Q_i, J_k}$, que para Reissner-Nordström es

$$V = \frac{4}{3}\pi r_+^3. \quad (2.76)$$

Las transiciones de fase se rastrean encontrando los puntos críticos en los que ocurren las transiciones de fase, a partir de la ecuación de estado $P = P(V, T)$ y del análisis de la función de Gibbs. Dado que vemos al agujero negro como un fluido, entonces debería comportarse en la misma forma que la termodinámica de un fluido, por lo tanto al identificar P y V , la variación de masa (2.56) ahora puede escribirse en su forma simple

$$dM = TdS + VdP,$$

que al reescribirla como

$$d(M - PV) = TdS - PdV$$

podemos identificar otras propiedades termodinámicas potenciales, tales como

$$U = M - PV, \quad M = H = U + PV, \quad F = U - TS, \quad G = H - TS,$$

donde U es la energía interna, H la entalpía, F la energía de Helmholtz y G la energía libre de Gibbs. Básicamente, el agujero negro se puede ver como un gas encerrado en un volumen V sujeto a la presión P . La relación de este comportamiento termodinámico esta contenido en la temperatura de Hawking y Λ es remplazada por P , lo que se traduce en una ecuación de estado para agujeros negros ($P - V$). La ecuación de estado significa que puede haber diferentes cambios o fases del sistema, por lo que los agujeros negros cargados se describen a la Van der Waals, así, al emitir radiación los agujeros negros se evaporan y se comportan en la misma forma que la transición de fase líquido-gas descrito por la ecuación de Van der Waals, la cual considera el tamaño e interacción de las partículas y se define por

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = k_B T, \quad (2.77)$$

donde k_B es la constante de Boltzmann, $v = V/N$ el volumen específico del fluido, N el número de partículas (fijo), a es una constante positiva relacionada con la atracción entre las partículas y b una constante positiva relacionada al tamaño de las partículas. La expresión (2.77) puede escribirse como una ecuación cúbica para el volumen específico v como

$$Pv^3 - (k_B T + bP)v^2 + av - ab = 0, \quad (2.78)$$

y los puntos críticos en donde ocurren las transiciones de fase se calculan a partir de $P = P(v)$ que tiene puntos de inflexión en

$$\frac{\partial P}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = 0.$$

Al tomar una temperatura crítica T_C , en tal forma que la ecuación de cúbica se escribe $P_c(v - v_C)^3 = 0$ y comparando los coeficientes, se concluye que

$$kT_C = \frac{8a}{27b}, \quad v_C = 3b, \quad P_C = \frac{a}{27b^2}, \quad (2.79)$$

de donde el subíndice C indica una cantidad crítica, así el cociente da como resultado

$$\frac{P_C v_C}{kT_C} = \frac{3}{8}, \quad (2.80)$$

que coincide con el de los fluidos. Si $T < T_C$ hay una transición de fase líquido-gas. Para estudiar el comportamiento de la transición de fase hacemos uso de la función de la energía libre de Gibbs G para un número fijo de partículas, que en su forma diferencial es $dG = -Sdt + v dP$ y que para un gas ideal se tiene la expresión

$$G = -k_B T \left(1 + \ln \left[\frac{(v-b) T^{3/2}}{\Phi} \right] \right) - \frac{a}{v} + Pv.$$

donde $G(T, P)$, $v = v(P, T)$ y $\Phi = cte.$ que caracteriza al gas. Lo que queda ahora es analizar algunas propiedades termodinámicas de Reissner-Nordström anti-de Sitter.

2.4.1. Reissner-Nordström-anti-de Sitter en (3+1)-dimensiones

Finalizamos este capítulo con un breve análisis de la termodinámica de la solución Reissner-Nordström-anti de Sitter, que para $(d+1)$ -dimensiones la solución es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{m}{r^{d-3}} + \frac{q^2}{r^{2(d-3)}} + \frac{r^2}{\ell^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{m}{r^{d-3}} + \frac{q^2}{r^{2(d-3)}} + \frac{r^2}{\ell^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-2}^2, \quad (2.81)$$

en particular, para el caso $d = 3$ la solución se reduce a

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2MG_4}{r} + \frac{G_4^2 Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{\ell^2} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2MG_4}{r} + \frac{G_4^2 Q^2}{r^2} + \frac{r^2}{\ell^2} \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_2^2, \quad (2.82)$$

donde el parámetro M representa la masa ADM del agujero negro y está asociada a la entalpía del sistema, Q es la carga total. El área de la S^2 que define el horizonte de eventos es $A = 4\pi r_+^2$ por lo que la entropía es $S = \frac{A}{4} = G_4 \pi r_+^2$, además, el potencial eléctrico Φ , V y P son medidos en el infinito con respecto al horizonte de eventos dados por

$$\Phi = \frac{Q}{r_+}, \quad V = \frac{4}{3} \pi r_+^3, \quad P = -\frac{1}{8\pi} \Lambda = \frac{3}{8\pi} \frac{1}{\ell^2}.$$

Para encontrar la ecuación de estado del sistema, lo que se hace primero es encontrar la expresión de temperatura a través de $T = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} [e^{2\mu(r)}]_{r_+}$, lo que da como resultado

$$T = \frac{1}{4\pi r_+} \left(1 + \frac{3r_+^2}{\ell^2} - \frac{G_4^2 Q^2}{r_+^2} \right), \quad (2.83)$$

mientras que la primera ley termodinámica de agujeros negros toma la forma

$$dM = TdS + \Phi dQ + VdP, \quad (2.84)$$

de donde se obtiene la relación de Smarr $M = 2(TS - VP) + \Phi Q$. Cuando $P = cte.$ ($\Lambda = cte.$) entonces (2.84) se reduce a la primera ley estándar en el espacio fase “no extendida”. En el ensamble canónico la carga Q es un parámetro fijo ([49], [50]). De la ecuación de temperatura (2.83) se calcula la *ecuación de estado* $P = P(V, T)$ para un agujero negro anti-de Sitter cargado, esto es

$$P = \frac{T}{2r_+} - \frac{1}{8\pi r_+^2} + \frac{G_4^2 Q^2}{8\pi r_+^4}, \quad r_+ = \left(\frac{3V}{4\pi} \right)^{1/3}. \quad (2.85)$$

La relación entre P y T es a través del volumen específico v , que se obtiene al observar

$$Presión = \frac{\hbar c}{l_P^2} P, \quad Temp = \frac{\hbar c}{\kappa} T,$$

donde $l_P^2 = \frac{\hbar G_N}{c^3}$ es la longitud de Planck; luego, se multiplica a (2.85) por $\frac{\hbar c}{l_P^2}$

$$Presión = \frac{\hbar c}{l_P^2} P = \frac{\hbar c}{l_P^2} \frac{T}{2r_+} + \dots = \frac{\kappa Temp}{2l_P^2 r_+} + \dots,$$

que al comparar con la ecuación de Van del Waals (2.77) es posible identificar al volumen específico es dado por la expresión $v = 2l_P^2 r_+$ en el radio del horizonte de eventos r_+ y se asocia al volumen del fluido. Conviene entonces escribir la ecuación de estado en función del volumen específico como

$$P = \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2} + \frac{2G_4^2 Q^2}{\pi v^4},$$

para $Q \neq 0$. Los puntos de inflexión están en $\frac{\partial P}{\partial v} = 0$ y $\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = 0$. Luego, se identifica $a = \frac{3}{4\pi}$ y $b = \frac{2\sqrt{6}Q}{3}$ tal que

$$T_C = \frac{\sqrt{6}}{18\pi Q}, \quad v_C = 2\sqrt{6}Q, \quad P_C = \frac{1}{96\pi Q^2}, \quad (2.86)$$

de donde el cociente

$$\frac{P_C v_C}{T_C} = \frac{3}{8}, \quad (2.87)$$

es el característico de los fluidos. La masa para $\Lambda = cte.$ corresponde a la entalpía del sistema, de la cual podemos calcular a la energía libre de Gibbs con Q fija; primero se calcula el parámetro de masa haciendo $e^{2\mu(r_+)} = 0$ tal que

$$M = \frac{r_+}{2G_4} + \frac{G_4 Q^2}{2r_+} + \frac{r_+^3}{2G_4 \ell^2}, \quad (2.88)$$

con $r_+ = r_+(P, T)$ y a partir de la relación $G = M - TS$ obtenemos la energía libre de Gibbs

$$G = G(T, P) = \frac{1}{4} \left(\frac{r_+}{G_4} - \frac{8\pi}{3G_4} P r_+^3 + \frac{3G_4 Q^2}{r_+} \right),$$

o equivalentemente en función del volumen específico la masa es

$$M = \frac{v}{4G_4} + \frac{G_4 Q^2}{v} + \frac{v^3 \pi P}{6G_4}, \quad (2.89)$$

mientras que la energía libre de Gibbs

$$G = \frac{v}{8G_4} - \frac{\pi P}{12G_4} v^3 + \frac{3G_4 Q^2}{2v}. \quad (2.90)$$

El calor específico se calcula como

$$C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_P, \quad C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V, \quad (2.91)$$

donde primero calculamos $\frac{\partial T}{\partial S}$. En la expresión $G = M - TS$ sustituimos (2.89) y (2.90), luego despejamos $T = \frac{1}{S} (M - G)$ en donde se sustituye $v = 2\sqrt{\frac{S}{G_4 \pi}}$, por lo que

$$T = \frac{1}{\sqrt{S\pi}} \frac{1}{G_4^{3/2}} \left(1 - \frac{Q^2 \pi G_4^3}{S} + \frac{8PS}{G_4} \right). \quad (2.92)$$

De aquí el calor específico $C_V = 0$, mientras que

$$C_P = 2S \frac{SG_4 - Q^2 \pi G_4^4 + 8PS^2}{-SG_4 + 3Q^2 \pi G_4^4 + 8PS^2}, \quad (2.93)$$

que será estable si $C_P > 0$. Hay una singularidad en C_P cuando $-SG_4 + 3Q^2 \pi G_4^4 + 8PS^2 = 0$, que equivalentemente para $S = G_4 \pi r_+^2$ se escribe

$$-\pi r_+^2 + 3Q^2 \pi G_4^2 + 8P\pi^2 r_+^4 = 0, \quad (2.94)$$

exactamente en el punto crítico. En esta solución hay una transición de fase a primer orden. En los diagramas (2.9), (2.10) y (2.11) se muestra el comportamiento termodinámico de la solución Reissner-Nordström-anti-de Sitter.

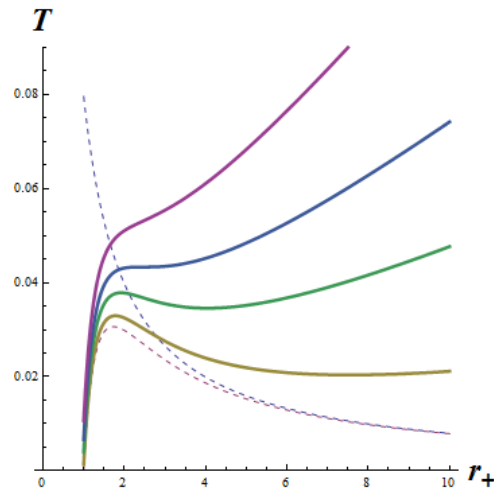


Figura 2.8: La función de temperatura $T - r_+$ Reissner-Nordström-anti-de Sitter con $Q = 1$, la línea discontinua superior corresponde a Schwarzschild, la inferior a Reissner-Nordström, el resto es Reissner-Nordström-anti-de Sitter. Se deducen de $T = \frac{1}{4\pi} (de^{2\mu(r)}/dr)(r_+)$. Valores de $P = 0.2 (1/96/\pi)$, $0.6 (1/96/\pi)$, $(1/96/\pi)$ y $1.6 (1/96/\pi)$.

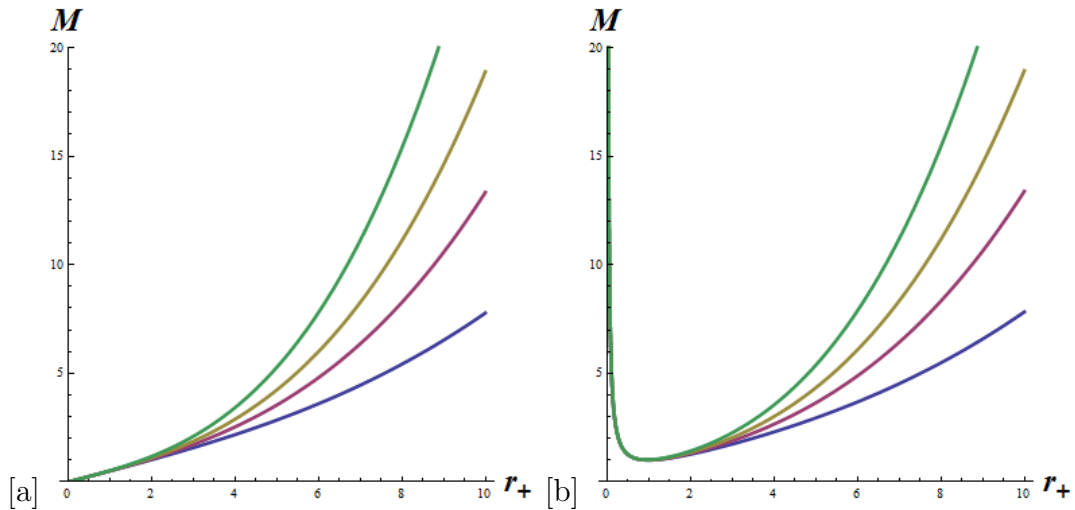


Figura 2.9: La masa M_{ADM} se obtiene de $e^{2\mu(r_+)} = 0$, para $P = 0.2 (1/96/\pi)$, $0.6 (1/96/\pi)$, $(1/96/\pi)$ y $1.6 (1/96/\pi)$. En (a) para Reissner-Nordström-anti-de Sitter con $Q = 1$ y, (b) la función M_{ADM} para Schwarzschild-anti-de Sitter con $Q = 0$.

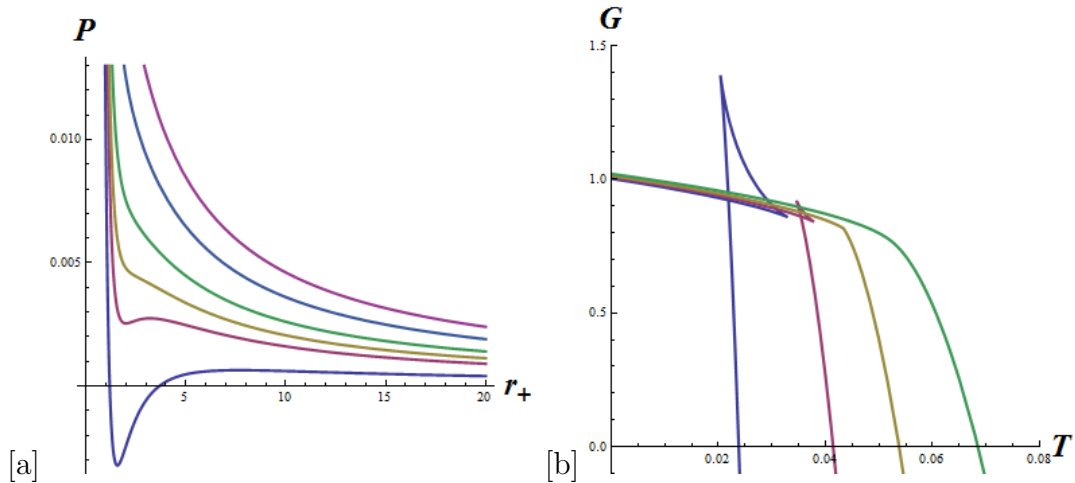


Figura 2.10: Reissner-Nordström-anti-de Sitter con carga fija $Q = 1$: en (a) la gráfica $P - r_+$ para $T = 0.1, 0.08$ y 0.06 corresponden a temperaturas mayores que la temperatura crítica T_C y son líneas que corresponden al gas ideal, pero para $T = 0.049$ se tiene $T = T_C$, mientras que para temperaturas menores a T_C como $T = 0.04$ y 0.02 hay un punto de inflexión por lo tanto una transición de fase. Los valores de temperatura se leen de arriba ($T = 0.1$) hacia abajo ($T = 0.02$). En (b) es la función de Gibbs G como función de T , para $P = 0.2 (1/96/\pi)$ (línea azul), $0.6 (1/96/\pi)$ (línea rosa), $(1/96/\pi)$ y $1.6 (1/96/\pi)$ (línea verde). La presión incrementa de $P/P_C = 0.1$ de arriba hacia abajo a $P/P_C = 1.6$. Las transiciones de fase se observan en los picos donde $P/P_C = 1.6$ con $P < P_C$, para la tercera línea (de izquierda a derecha) $P = P_C = 0.0033$ y, la línea verde tiene $P > P_C$. Se observa que para $T < T_C = 0.043$ hay una transición de primer orden (agujero negro pequeño)-(agujero negro grande).

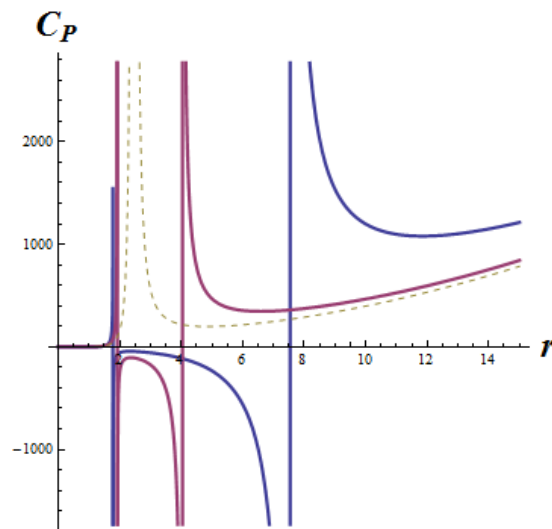


Figura 2.11: Calor específico C_P para carga fija $Q = 1$ y $P = 0.2 (1/96/\pi)$ (línea azul), $0.6 (1/96/\pi)$ (línea roja), $(1/96/\pi)$ (línea discontinúa).

3

Soluciones de Einstein-Born-Infeld

La teoría que describe los fenómenos electromagnéticos es la electrodinámica de Maxwell (1872). Esta teoría nos dice que las ecuaciones del electromagnetismo en presencia de materiales, en unidades de Heaviside-Lorentz toman la forma

$$\nabla \times \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (3.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}, \quad \nabla \cdot \vec{D} = \rho_Q, \quad (3.2)$$

donde ρ_Q y \vec{j} son las cargas y corrientes no ligadas a los materiales, denominadas fuentes libres, es decir, éstas no incluyen la polarización eléctrica ni las corrientes de magnetización del medio material, propiedades físicas que son incorporadas en la teoría a través de los campos \vec{D} y \vec{H} ¹. De hecho, dado un material, adicionalmente a las ecuaciones (3.1) y (3.2), uno debe introducir relaciones fenomenológicas, llamadas relaciones constitutivas, que expresen a \vec{D} y \vec{H} en términos de \vec{E} y \vec{B}

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}, \vec{B}), \quad \vec{H} = \vec{H}(\vec{E}, \vec{B}). \quad (3.3)$$

Por ejemplo, los dieléctricos lineales satisfacen² $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ y $\vec{H} = \vec{B}$, donde ϵ es la constante de permitividad eléctrica, mientras que los materiales magnéticos lineales satisfacen $\vec{B} =$

¹Usualmente los vectores \vec{E} y \vec{H} son conocidos como los vectores de *intensidad* eléctrica y magnética respectivamente, mientras que los vectores \vec{D} y \vec{B} son conocidos como los vectores de *inducción* eléctrica y magnética respectivamente.

²Las ecuaciones constitutivas en este párrafo están escritas en el Sistema Internacional para enfatizar que los campos \vec{D} y \vec{E} , así como \vec{B} y \vec{H} no son iguales aún para medios lineales. Sin embargo fuera de este párrafo las ecuaciones constitutivas las escribimos en el sistema de unidades de Heaviside-Lorentz, donde para medios lineales se reducen a $\vec{D} = \vec{E}$ y $\vec{B} = \vec{H}$.

$\mu\vec{H}$ y $\vec{D} = \vec{E}$, donde μ es la constante de permeabilidad magnética. Para materiales más complicados las relaciones constitutivas no son lineales y en estos casos las ecuaciones (3.3) definen una teoría no lineal de la electrodinámica.

En la electrodinámica de Maxwell se considera que las ecuaciones *fundamentales* son las ecuaciones en el vacío, es decir, las ecuaciones (3.1) y las ecuaciones (3.2) donde se reemplazan los campos $\vec{D} \rightarrow \vec{E}$ y $\vec{H} \rightarrow \vec{B}$, mientras que las ecuaciones en un medio material (3.2) que involucran a los campos \vec{D} y \vec{H} se deducen de las ecuaciones en el vacío y por tanto se consideran de validez limitada, dado que ellas involucran materiales, a la mayoría de los cuales no podemos realizarles un análisis exacto. De manera opuesta las teorías no lineales de la electrodinámica sugieren que las ecuaciones (3.1) y (3.2) son tan fundamentales como las de Maxwell y consideran que el vacío mismo se comporta como un medio material. En general las teorías de electrodinámica no lineal se construyen satisfaciendo las propiedades físicas siguientes:³

- Invarianza de norma \Rightarrow la teoría se construye con el tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$.
- Invarianza de Lorentz \Rightarrow la teoría se construye con escalares de Lorentz.
- Las ecuaciones de movimiento son (3.1) y (3.2).

Las diferentes teorías electrodinámicas no lineales difieren entre sí por las diferentes relaciones constitutivas (3.3) que satisfacen. Para obtener una electrodinámica no lineal en particular, uno introduce uno o más criterios físicos adicionales a los tres anteriores. En este capítulo estamos interesados en la electrodinámica no lineal propuesta por Max Born y Leopold Infeld en su trabajo *Foundations of the New Field Theory* [54] de 1934. Esta electrodinámica se obtiene introduciendo dos criterios adicionales:⁴

- Existe un valor máximo del campo eléctrico cuando $\vec{B} = 0$.
- La teoría se reduce a la de Maxwell para valores pequeños de \vec{E} y \vec{B} .

Una consecuencia física de estos requisitos adicionales es que la auto-energía de una carga eléctrica puntual es finita, contrario al valor infinito que se obtiene para la misma

³En realidad originalmente Born e Infeld en vez de imponer invarianza de Lorentz, demandaron invarianza ante transformación general de coordenadas. Por simplicidad aquí discutimos la construcción de las electrodinámicas no lineales en espacio plano y obtenemos su generalización en espacio curvo, aplicando la regla de cambiar la métrica de Minkowski por una métrica curva: $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ y las derivadas parciales por derivadas covariantes.

⁴La deducción original de Born e Infeld es para un espacio-tiempo de (3+1)-dimensiones, donde podemos hablar de los vectores \vec{B} y \vec{H} , sin embargo podemos generalizar su electrodinámica a espacios de dimensión arbitraria donde se pueden definir aún los vectores \vec{E} y \vec{D} pero ya no los vectores \vec{B} y \vec{H} .

carga en el caso de la electrodinámica de Maxwell.

En este capítulo resumimos los fundamentos básicos de esta teoría, exponemos la obtención del lagrangiano en espacio plano siguiendo la exposición original de Born e Infeld en (3+1)-dimensiones y señalamos la generalización de esta acción al caso de un espacio-tiempo curvo y de dimensión arbitraria. Discutiremos las soluciones tipo agujero negro que se obtienen de acoplar la electrodinámica de Born-Infeld a la gravedad de Einstein con constante cosmológica e incluimos el análisis termodinámico de estas soluciones.

3.1. La teoría de Born-Infeld

3.1.1. El lagrangiano de Born-Infeld

Born e Infeld consideraron que así como para una partícula relativista existe una cota en el valor de su velocidad $v \leq c$, era natural pensar que también puede existir un valor máximo para la magnitud del campo eléctrico $|\vec{E}| \leq b$. La razón física para introducir esta cota está relacionada con el valor infinito que se obtiene para la auto-energía de una partícula puntual en reposo en la electrodinámica clásica de Maxwell. Este valor infinito en la energía es consecuencia del valor infinito del campo eléctrico mismo, en la posición de la carga. Born e Infeld pensaron que si el campo eléctrico alcanzara un valor máximo, entonces la auto-energía también lo haría. Con esta idea en mente, ellos construyeron un lagrangiano en (3+1)-dimensiones que satisface los cinco criterios que hemos mencionado. La densidad lagrangiana más general posible se construye con un tensor de segundo rango $a_{\mu\nu}$ sin simetría específica y para que el lagrangiano sea invariante ante transformaciones de Lorentz este tensor debe aparecer en la acción en la forma $\sqrt{-|a_{\mu\nu}|}$, donde $|a_{\mu\nu}|$ es el determinante del tensor $a_{\mu\nu}$. Descomponiendo este tensor en su parte simétrica $a_{(\mu\nu)} = \eta_{\mu\nu}$ que asociamos a la métrica del espacio-tiempo, y su parte antisimétrica $a_{[\mu\nu]} = f_{\mu\nu}$ que asociamos hasta un factor constante al tensor del campo electromagnético ($f_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}/b$), concluimos que la forma más simple de la densidad lagrangiana \mathcal{L} consiste en la combinación lineal

$$\mathcal{L} = \alpha \sqrt{-|\eta_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}|} + \beta \sqrt{-|\eta_{\mu\nu}|} + \gamma \sqrt{|f_{\mu\nu}|}. \quad (3.4)$$

Dado que $|f_{\mu\nu}| = |F_{\mu\nu}/b| = (\vec{E} \cdot \vec{B})^2/b^4$, el tercer término $\sqrt{|f_{\mu\nu}|} = (\vec{E} \cdot \vec{B})/b^2$, el cual puede escribirse como una derivada total si $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, relación necesaria para tener invarianza de norma y, dado que las derivadas totales no cambian las ecuaciones de movimiento, concluimos que $\gamma = 0$. Dado que $|\eta_{\mu\nu}| = -1$, parece ocioso mantener el segundo término en la acción, sin embargo este término es necesario para satisfacer el criterio de que para valores pequeños de los campos obtengamos la acción de Maxwell. Calculando explícitamente el determinante de $a_{\mu\nu}$ tenemos

$$-|\eta_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}| = 1 + (f_{23}^2 + f_{31}^2 + f_{12}^2 - f_{10}^2 - f_{20}^2 - f_{30}^2) - |f_{kl}|, \quad (3.5)$$

y en la aproximación de campo débil

$$\beta\sqrt{-|\eta_{\mu\nu}|} + \alpha\sqrt{-|\eta_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}|} \approx \beta + \alpha \left(1 + \frac{1}{4b^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \dots \right). \quad (3.6)$$

Así para obtener la acción de Maxwell libre (2.28) en este límite, concluimos que $\alpha = -\beta = -b^2$, y la densidad lagrangiana de Born-Infeld en el espacio de Minkowski 4D es

$$\mathcal{L} = b^2 \left(\sqrt{-|\eta_{\mu\nu}|} - \sqrt{-|\eta_{\mu\nu} + f_{\mu\nu}|} \right) = b^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{F}{2b^2} - \frac{G^2}{16b^4}} \right), \quad (3.7)$$

donde F y G son los dos invariantes de Lorentz de la electrodinámica (ver sección 2.2). Físicamente la constante b representa el valor límite del campo eléctrico⁵. Note que en la acción aparece el cociente $F_{\mu\nu}/b$, de manera análoga al caso de la acción de la partícula relativista donde aparece el cociente v/c .

La generalización de esta acción a un espacio-tiempo curvo de dimensión arbitraria $d + 1$, se obtiene reemplazando la métrica de Minkowski por una métrica curva e imponiendo ahora invarianza ante transformación general de coordenadas. La acción tiene la forma

$$S_{BI} = \frac{b^2}{c} \int d^{d+1}x \left(\sqrt{-g} - \sqrt{-\left| g_{\mu\nu} + \frac{F_{\mu\nu}}{b} \right|} \right), \quad (3.8)$$

con la característica que la contracción de índices se realiza con la métrica curva $g_{\mu\nu}$.

3.1.2. Ecuaciones de movimiento

Veamos ahora como calcular las ecuaciones de movimiento en un espacio-tiempo curvo de dimensión arbitraria, las cuales de acuerdo con nuestra discusión al inicio de este capítulo, deben reducirse a (3.1) y (3.2), para el espacio de Minkowski en (3 + 1)-dimensiones. Como hemos discutido en la sección 2.2 el primer par de ecuaciones (3.1), es equivalente a la identidad de Bianchi (2.32), y ésta se satisface automáticamente si se asume que $F_{\mu\nu}$ se escribe en términos de un vector potencial A_μ . Para el segundo par de ecuaciones (3.2) sabemos que en el caso de la electrodinámica de Maxwell éstas se obtienen de variar la acción de Maxwell (2.28), obteniéndose (2.29). El resultado está desde luego en términos de los campos \vec{E} y \vec{B} . Así en el caso no lineal, queda claro que si nos restringimos a (3+1)-dimensiones, la forma de las ecuaciones debe ser la misma si reemplazamos los campos \vec{E} y \vec{B} por \vec{D} y \vec{H} , lo cual implica introducir un nuevo tensor antisimétrico de rango 2 que denotaremos como $P_{\mu\nu}$, para el cual $P_{i0} = P^{0i} = D_i$ y $P_{ij} = P^{ij} = \epsilon^{ijk} H_k$, esto es, la forma covariante de estas ecuaciones debe tener la forma

$$\partial_\nu P^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu. \quad (3.9)$$

⁵Las dimensiones del parámetro b son $[b] = M^{1/2}T^{-1}L^{1-d/2}$.

En realidad esta ecuación es válida para un espacio-tiempo de dimensión arbitraria. Más aún, dado que la variación de un lagrangiano que represente a una electrodinámica no lineal con fuentes es de la forma

$$\frac{1}{c} \delta \int d^{d+1}x \left(\mathcal{L}(F_{\mu\nu}) + \frac{1}{c} j^\mu A_\mu \right) = \frac{1}{c} \int d^{d+1}x \delta A_\mu \left[\partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}} \right) + \frac{1}{c} j^\mu \right]. \quad (3.10)$$

Podemos obtener las ecuaciones (3.9) al variar la acción de la electrodinámica no lineal, si identificamos

$$P^{\mu\nu} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}. \quad (3.11)$$

Pero precisamente la relación (3.11) son las relaciones constitutivas que relacionan los campos $P^{\mu\nu}$ y $F_{\mu\nu}$ y constituyen la forma covariante de las ecuaciones (3.3). Enfatizamos el hecho de que las ecuaciones de Maxwell sin fuentes (2.33), las ecuaciones de movimiento (3.9) y las relaciones constitutivas (3.11), son las ecuaciones que definen una electrodinámica no lineal en un espacio-tiempo plano de dimensión $d + 1$. Si en vez de espacio plano tenemos un espacio-tiempo curvo de $(d + 1)$ -dimensiones, las ecuaciones de la electrodinámica no lineal son:

$$3\nabla_{[\mu} F_{\nu\rho]} = 0, \quad \nabla_\nu P^{\mu\nu} = \frac{1}{c} j^\mu, \quad \sqrt{-g} P^{\mu\nu} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{\mu\nu}}. \quad (3.12)$$

Así el lagrangiano de Born-Infeld (3.8) nos permite calcular una forma funcional específica de las relaciones constitutivas (tercer ecuación en (3.12)), las cuales en el caso particular de (3+1)-dimensiones se escriben explícitamente de manera covariante como

$$P^{\mu\nu} = \frac{F^{\mu\nu} - \frac{G}{4b^2} \tilde{F}^{\mu\nu}}{\sqrt{1 + \frac{F}{2b^2} - \frac{G^2}{16b^4}}}. \quad (3.13)$$

En el caso particular de espacio plano, ellas se escriben en término de los campos de intensidad e inducción eléctrica y magnética en la forma

$$\vec{H} = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{B}} = \frac{\vec{B} - \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2} \vec{E}}{\sqrt{1 - \frac{E^2 - B^2}{b^2} - \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{b^4}}}, \quad \vec{D} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \vec{E}} = \frac{\vec{E} + \frac{\vec{E} \cdot \vec{B}}{b^2} \vec{B}}{\sqrt{1 - \frac{E^2 - B^2}{b^2} - \frac{(\vec{E} \cdot \vec{B})^2}{b^4}}}. \quad (3.14)$$

3.1.3. Tensor de energía momento

El tensor de energía-momento de la teoría de Born-Infeld se obtiene de la definición (1.3) y la acción (3.8). Explícitamente la expresión del tensor es

$$T^\nu{}_\mu = P^{\nu\rho} F_{\rho\mu} - \delta^\nu{}_\mu \mathcal{L}, \quad (3.15)$$

el cual satisface la propiedad de conservación $\partial_\nu T^\nu{}_\mu = 0$ en el espacio-tiempo plano y $\nabla_\nu T^\nu{}_\mu = 0$ en un espacio-tiempo curvo. La componente $T^0{}_0$ de este tensor nos da la

densidad de energía Hamiltoniana \mathcal{H}^6 . Note que en la teoría hamiltoniana el tensor $P^{\mu\nu}$ se interpreta como el momento canónico conjugado del tensor $F_{\mu\nu}$. La forma natural de escribir \mathcal{H} , es en términos de los momentos $P^{\mu\nu}$ en vez de los campos $F_{\mu\nu}$, lo cual se puede lograr si invertimos las relaciones constitutivas y obtenemos la forma funcional de $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(P^{\rho\delta})$. Esto implica también escribir la densidad lagrangiana (3.8) $\mathcal{L} = \mathcal{L}(F_{\mu\nu}, g_{\mu\nu})$, ahora como función de $P^{\mu\nu}$: $\mathcal{L} = \mathcal{L}(P^{\mu\nu}, g_{\mu\nu})$. Haremos esta inversión de manera explícita en (3+1)-dimensiones y aunque el resultado no es general, nos permite obtener el resultado para dimensiones mayores cuando \vec{E} y \vec{D} son los únicos campos no nulos. Dado que $\tilde{F}^{\mu\nu} = -F^{\mu\nu}$, tenemos de (3.13) que

$$\tilde{P}^{\mu\nu} = \frac{\tilde{F}^{\mu\nu} + \frac{G}{4b^2} F^{\mu\nu}}{\sqrt{1 + \frac{F}{2b^2} - \frac{G^2}{16b^4}}}. \quad (3.16)$$

De la identificación de $P^{\mu\nu}$ con los campos \vec{D} y \vec{H} podemos calcular los invariantes⁷

$$P^{\mu\nu} P_{\mu\nu} = -\tilde{P}^{\mu\nu} \tilde{P}_{\mu\nu} \equiv P = 2(H^2 - D^2), \quad \text{y} \quad P^{\mu\nu} \tilde{P}_{\mu\nu} \equiv Q = -4\vec{D} \cdot \vec{H}, \quad (3.17)$$

y de las relaciones (3.13) y (3.16) su relación con los invariantes F y G

$$Q = G, \quad \text{y} \quad P = \frac{F - \frac{G^2 F}{16b^4} - \frac{G^2}{2b^2}}{1 + \frac{F}{2b^2} - \frac{G^2}{16b^4}}. \quad (3.18)$$

De la segunda de estas ecuaciones podemos despejar al invariante F en función del resto de invariantes y podemos sustituir $G \rightarrow Q$, obteniendo una expresión de $F = F(P, Q)$

$$F = \frac{P + \frac{Q^2}{2b^2} - \frac{PQ^2}{16b^4}}{1 - \frac{P}{2b^2} - \frac{Q^2}{16b^4}}, \quad (3.19)$$

de la cual concluimos que las relaciones inversas buscadas son

$$F^{\mu\nu} = \frac{P^{\mu\nu} + \frac{Q}{4b^2} \tilde{P}^{\mu\nu}}{\sqrt{1 - \frac{P}{2b^2} - \frac{Q^2}{16b^4}}} \quad \text{y} \quad \tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{\tilde{P}^{\mu\nu} - \frac{Q}{4b^2} P^{\mu\nu}}{\sqrt{1 - \frac{P}{2b^2} - \frac{Q^2}{16b^4}}}. \quad (3.20)$$

Con esta relación del tensor $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}(P^{\rho\delta})$ obtenemos de la definición (3.15) que la densidad Hamiltoniana es

$$\mathcal{H} = T_0^0 = b^2 \left(\sqrt{1 - \frac{P}{2b^2} - \frac{Q^2}{16b^4}} - 1 \right). \quad (3.21)$$

⁶De acuerdo con la ecuación (3.10) la energía está dada por la expresión $U = \int d^d x \mathcal{H}$.

⁷En las ecuaciones (3.17)-(3.22) estamos utilizando la letra Q para denotar un invariante electromagnético y en el capítulo 2 y a partir de la sección 3.1.4, la utilizamos para denotar la carga eléctrica. Esperamos no causar confusión con este doble uso de Q , el cual sólo en estas ecuaciones aparecerá para denotar al invariante.

En notación vectorial tenemos que las ecuaciones constitutivas inversas (3.20), se pueden obtener a partir del hamiltoniano como

$$\vec{B} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{H}} = \frac{\vec{H} - \frac{Q}{4b^2} \vec{D}}{\sqrt{1 - \frac{P}{2b^2} - \frac{Q^2}{16b^4}}}, \quad \vec{E} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{D}} = \frac{\vec{D} + \frac{Q}{4b^2} \vec{H}}{\sqrt{1 - \frac{P}{2b^2} - \frac{Q^2}{16b^4}}}. \quad (3.22)$$

Desde luego la primer ecuación es válida sólo en (3+1)-dimensiones, mientras que la segunda es válida en cualquier dimensión.

3.1.4. Solución estática y simetría esférica

Consideramos una carga puntual Q en reposo, en un espacio-tiempo estático con simetría esférica (1.9). Dado que la carga está en reposo los campos no nulos son \vec{E} y \vec{D} , los cuales no dependen del tiempo y dada la simetría del espacio, su única componente no nula es la componente radial, la cual a su vez sólo depende de la coordenada radial: $\vec{E} = E_r(r)\hat{r}$ y $\vec{D} = D_r(r)\hat{r}$. El potencial vectorial es de la forma $A_\mu = (\phi(r), \vec{0}_d)$ y por tanto la única componente no nula del tensor de Maxwell es $F_{0r} = -F_{r0} = -E_r$. Como consecuencia las únicas componentes no nulas del tensor contravariante son $F^{0r} = -F^{r0} = E_r e^{-(2\mu+2\nu)}$. Sucede algo similar para el tensor $P_{0r} = -P_{r0} = D_r$. De hecho los dos invariantes no nulos de la electrodinámica de Born-Infeld asociada a la carga puntual son

$$F = -2E_r^2(r)e^{-(2\mu+2\nu)} \quad \text{y} \quad P = -2D_r^2(r)e^{-(2\mu+2\nu)}. \quad (3.23)$$

La forma de la acción se obtiene de (3.8)

$$S = \frac{b^2}{c} \int d^{d+1}x \sqrt{-g_{d+1}^S} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{F}{2b^2}} \right), \quad (3.24)$$

donde g_D^S es el determinante de la métrica esférica (1.9). Mientras que la relación constitutiva se obtienen de la tercer ec. en (3.12)

$$P^{0r} = \frac{F^{0r}}{\sqrt{1 + \frac{F}{2b^2}}} \quad \Rightarrow \quad D_r(r) = \frac{E_r(r)}{\sqrt{1 + \frac{F}{2b^2}}}. \quad (3.25)$$

En cuanto a las componentes del tensor de energía-momento (3.15), lo primero que notamos de su definición es que las componentes T_0^0 y T_r^r tienen la misma expresión

$$T_0^0 = T_r^r = -P^{0r} F_{0r} - \mathcal{L} = b^2 \left(\sqrt{1 - \frac{P}{2b^2}} - 1 \right). \quad (3.26)$$

Algo similar sucede para las componentes de la forma $T_{\theta_a}^{\theta_a}$, ya que todas ellas son iguales:

$$T_{\theta_a}^{\theta_a} = -\mathcal{L} = b^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{P}{2b^2}}} \right). \quad (3.27)$$

Pero hemos visto en el capítulo (1) que si se satisface que $T_0^0 = T_r^r$, la solución a las ecuaciones de Einstein implica que $\mu + \nu = 0$. Condición que introducimos en los invariantes (3.23).

Lo único que nos resta es calcular el vector de desplazamiento \vec{D} ; para ello no es necesario resolver la ecuación con fuentes (segunda ec. en (3.12)), ya que esta ecuación es la misma que (2.34) si reemplazamos $F^{0r} \rightarrow P^{0r}$. Tenemos entonces que el vector de desplazamiento eléctrico es

$$\vec{D} = \frac{1}{\Omega_{d-1}} \frac{Q}{r^{d-1}} \hat{r}. \quad (3.28)$$

Note que \vec{D} diverge en la posición de la carga de manera análoga a como lo hace el campo eléctrico (2.37) debido a la misma carga en la electrodinámica de Maxwell. Lo importante en la electrodinámica de Born-Infeld es que el campo eléctrico resulta tener ahora un valor finito cuando se evalúa en la posición de la carga. Para obtener esta expresión del campo eléctrico en función de r , debemos invertir la ecuación (3.25) para tener una expresión del campo eléctrico \vec{E} en función de \vec{D} . Realizando esta inversión, el resultado que se obtiene puede inferirse de la segunda ecuación en (3.22)

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\sqrt{1 - \frac{P}{2b^2}}} = \frac{D_r(r)}{\sqrt{1 + D_r^2(r)/b^2}} \hat{r}. \quad (3.29)$$

Note que si calculamos el cuadrado de esta ecuación obtenemos

$$E^2 = \frac{D^2}{b^2 + D_r^2(r)} b^2, \quad (3.30)$$

de donde concluimos inmediatamente que el campo eléctrico está acotado por el parámetro b y desde luego también es menor que el campo divergente D

$$E \leq b \quad \text{y} \quad E \leq D. \quad (3.31)$$

Para finalizar con este ejemplo, notemos que tal y como Born e Infeld previeron, la autoenergía de la partícula es finita. Esta se obtiene calculando la integral de volumen de la densidad Hamiltoniana⁸

$$U = \int d^d x \sqrt{-g_d^S} b^2 \left(\sqrt{1 - \frac{P}{2b^2}} - 1 \right) = Q^{\frac{d}{d-1}} b^{\frac{d-2}{d-1}} \left(\frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{2\pi^{d/2}} \right)^{\frac{1}{d-1}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2d-2}) \Gamma(\frac{d-2}{2d-2})}{2d\sqrt{\pi}}. \quad (3.32)$$

En el caso particular de (3+1)-dimensiones, $d = 3$ y la autoenergía es

$$U_{4D} \approx \frac{4,382}{4\pi} b^{1/2} Q^{3/2}. \quad (3.33)$$

⁸En el apéndice C se presenta el cálculo explícito de la integral.

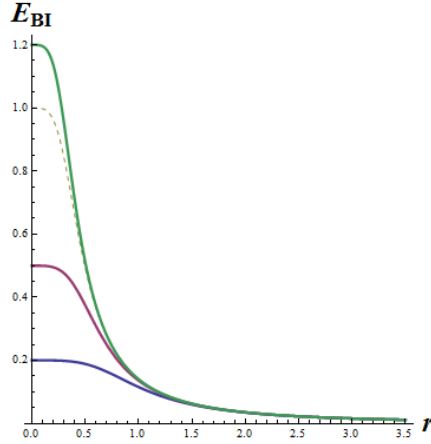


Figura 3.1: El campo eléctrico de Born-Infeld E_{BI} para $d = 3$ (3.29) con $Q = 1$, de arriba hacia abajo para el parámetro de Born-Infeld $b = 1.2, 1, 0.5$ y 0.2 .

3.2. Solución eléctrica de Einstein-Born-Infeld

Para obtener soluciones gravitacionales de agujero negro, debemos acoplar la relatividad general al lagrangiano de Born-Infeld. Al igual que para el caso de Reissner-Nordström, en la literatura existen diferentes convenciones para realizar este acoplamiento y aquí utilizamos la misma convención que en la acción (2.27)⁹. Por completez incluimos el término de constante cosmológica (1.43)

$$S = \frac{c^3}{16\pi G_{d+1}} \int d^{d+1}x \sqrt{-g_{d+1}^S} \left(R - 2\Lambda + 4b^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{F}{2b^2}} \right) \right), \quad (3.34)$$

con el invariante F dado por (3.23). Como consecuencia las ecuaciones de Einstein toman la forma (1.12)-(1.14), donde la expresión de las componentes del tensor de energía-momento están dadas por las expresiones (3.26)-(3.27) multiplicadas por un factor de $c^4/4\pi G_{d+1}$, más la parte de constante cosmológica (1.40)

$$T_0^0 = T_r^r = \frac{c^4}{4\pi G_{d+1}} \left[b^2 \left(\sqrt{1 - \frac{P}{2b^2}} - 1 \right) - \frac{\Lambda}{2} \right], \quad (3.35)$$

$$T_{\theta_a}^{\theta_a} = \frac{c^4}{4\pi G_{d+1}} \left[b^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{P}{2b^2}}} \right) - \frac{\Lambda}{2} \right]. \quad (3.36)$$

Finalmente la ecuación del campo electromagnética (3.9) en el espacio libre de cargas es, de acuerdo con la ecuación constitutiva (3.25)

$$\nabla_\mu \left(\frac{F^{\nu\mu}}{\sqrt{1 - \frac{P}{2b^2}}} \right) = 0. \quad (3.37)$$

⁹Esta convención se utiliza por ejemplo en [55, 56].

Como el vector de desplazamiento eléctrico en estas unidades es

$$\vec{D} = \frac{4\pi G_{d+1}}{c^2 \Omega_{d-1}} \frac{Q}{r^{d-1}} \hat{r} = \sqrt{\frac{(d-1)(d-2)}{2}} \frac{q}{r^{d-1}} \hat{r}, \quad (3.38)$$

con q definida en (2.43), la solución a la ecuación de movimiento (3.37) es

$$\vec{E} = \frac{\sqrt{(d-1)(d-2)} bq}{\sqrt{2b^2 r^{2d-2} + (d-1)(d-2)q^2}}. \quad (3.39)$$

Dado que el tensor de energía-momento satisface la condición $T_0^0 = T_r^r$, la solución métrica tiene la forma general (1.36) y la función métrica $e^{2\mu}$ se obtiene de la ecuación (1.19), donde

$$M(r) = \mp \frac{c^2 r^d}{2G_{d+1} \ell^2} + \frac{2c^2 b^2}{(d-1)G_{d+1}} \left(\sqrt{\frac{(d-1)(d-2)}{2}} \frac{q}{b} \right)^{d/d-1} \int_0^x \left(\sqrt{1+x^{2d-2}} - x^{d-1} \right) dx.$$

La integral puede evaluarse explícitamente (ver apéndice B) obteniéndose

$$M(r) = \mp \frac{c^2 r^d}{2G_{d+1} \ell^2} + \frac{mc^2}{2G_{d+1}} - \frac{2b^2 c^2 r^d}{d(d-1)G_{d+1}} + \frac{c^2 br \sqrt{4b^2 r^{2d-2} + 2(d-1)(d-2)q^2}}{G_{d+1} d(d-1)} + \frac{(d-1)c^2 q^2}{dG_{d+1} r^{d-2}} {}_2F_1 \left[\frac{d-2}{2d-2}, \frac{1}{2}, \frac{3d-4}{2d-2}, -\frac{(d-1)(d-2)q^2}{2b^2 r^{2d-2}} \right], \quad (3.40)$$

donde ${}_2F_1$ es la función hipergeométrica. Finalmente el coeficiente métrico $e^{2\mu(r)}$ queda dado por la expresión [56]

$$e^{2\mu(r)} = 1 - \frac{m}{r^{d-2}} + \left[\frac{4b^2}{d(d-1)} \pm \frac{1}{\ell^2} \right] r^2 - \frac{2b \sqrt{4b^2 r^{2d-2} + 2(d-1)(d-2)q^2}}{d(d-1)r^{d-3}} + \frac{2(d-1)q^2}{dr^{2d-4}} {}_2F_1 \left[\frac{d-2}{2d-2}, \frac{1}{2}, \frac{3d-4}{2d-2}, -\frac{(d-1)(d-2)q^2}{2b^2 r^{2d-2}} \right]. \quad (3.41)$$

La métrica obtenida es conocida como la solución de agujero negro del sistema Einstein-Born-Infeld-anti-de Sitter (EBIAdS) si $\Lambda < 0$ y como EBIdS si $\Lambda > 0$.

3.2.1. Agujero negro EBI₃₊₁ eléctrico

Para ganar intuición con esta solución de agujero negro, analicemos el caso (3+1)-dimensional, sin constante cosmológica. Como en los agujeros negros analizados anteriormente, estudiar el caso (3+1)-dimensional nos permite entender las características cualitativas principales del agujero, mismas que son válidas para agujeros negros de EBI

en otras dimensiones. Como puede verse directamente de (2.43) $q = G_4 Q/c^2$ y de las ecuaciones (3.23) y (3.38) $P = -2G_4^2 Q^2/c^4 r^4$. La solución general (3.41) se reduce a

$$e^{2\mu(r)} = 1 - \frac{R_s}{r} + \frac{2b^2 r^2}{3} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2 r^4}} \right) + \frac{4q^2}{3r^2} {}_2F_1 \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{q^2}{b^2 r^4} \right]. \quad (3.42)$$

En la literatura algunas veces se escribe esta solución en términos de la función elíptica incompleta de Legendre de primer tipo $F(\beta, k) = \int_{\beta}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 s}} [57]$

$$e^{2\mu(r)} = 1 - \frac{R_s}{r} + \frac{2b^2 r^2}{3} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2 r^4}} \right) + \frac{2q^2}{3r} \sqrt{\frac{b}{q}} F \left[\arccos \left(\frac{\frac{br^2}{q} - 1}{\frac{br^2}{q} + 1} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right]. \quad (3.43)$$

En esta forma de escribir la solución hemos utilizado la expresión

$$\int_r^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^4 + \frac{q^2}{b^2}}} = \sqrt{\frac{b}{q}} F \left[\arccos \left(\frac{\frac{br^2}{q} - 1}{\frac{br^2}{q} + 1} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right]. \quad (3.44)$$

Cada una de estas dos formas equivalentes de escribir la solución de agujero negro tiene sus propias ventajas. Ambas soluciones contienen dos términos que dependen de la carga Q (a través de q). Uno de ellos se encuentra en ambas expresiones y depende como r^2 . Sin embargo ellas difieren en la forma de escribir el segundo término que depende de Q . En la forma (3.42) este término va explícitamente como $1/r^2$, lo cual recuerda directamente al término de carga en la solución de Reissner-Nordström (2.45). Por otro lado en la solución (3.43) el término análogo va explícitamente como $1/r$, lo cual nos permite hacer una comparación directa con el término de Schwarzschild de la solución. Desde luego ambas soluciones son iguales y dependen en r de la misma forma, pero parte de esa dependencia se encuentra codificada en las definiciones de las funciones hipergeométrica y elíptica de Legendre.

La solución depende de tres parámetros. El parámetro de Born-Infeld b , el radio de Schwarzschild R_s que depende de la masa ADM y la distancia q que depende de la carga Q . Si tomamos R_s y q fijas, tenemos que en el límite $b \rightarrow 0$ recuperamos la expresión de $e^{2\mu(r)}$ del agujero negro de Schwarzschild, mientras que en el límite $b \rightarrow \infty$ obtenemos la correspondiente expresión métrica del agujero negro de Reissner-Nordström.

Si $b \neq 0$ y finito, la métrica es asintóticamente plana (Minkowski) para distancias r muy grandes ($r \rightarrow \infty$). Mientras que el comportamiento de la métrica en $r \rightarrow 0$ depende del segundo y cuarto términos de la ecuación (3.43) y existen tres situaciones diferentes:

- Si $M > \frac{Q^2}{3} \sqrt{\frac{b}{q}} F \left[\arccos \left(\frac{\frac{br^2}{q} - 1}{\frac{br^2}{q} + 1} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$, $e^{2\mu(r)} \rightarrow -\infty$.
- Si $M < \frac{Q^2}{3} \sqrt{\frac{b}{q}} F \left[\arccos \left(\frac{\frac{br^2}{q} - 1}{\frac{br^2}{q} + 1} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$, $e^{2\mu(r)} \rightarrow +\infty$.

- Si $M = \frac{Q^2}{3} \sqrt{\frac{b}{q}} F \left[\arccos \left(\frac{\frac{br^2}{q} - 1}{\frac{br^2}{q} + 1} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$, $e^{2\mu(r)} \rightarrow finita$ (no diverge).

A pesar de que en el último caso la función $e^{2\mu(r)}$ es finita, la métrica diverge en $r = 0$. Esta conclusión se obtiene del análisis del escalar de Weyl.

Los horizontes de eventos de estas soluciones se obtienen de examinar los ceros en $e^{2\mu(r)} = 0$. Debido a la función hipergeométrica (o elíptica de Legendre), en general este análisis se hace numéricamente. Si se hace el cambio de variables adimensionales $r = uM$ y $q = \alpha M$, la expresión de la solución métrica toma la forma

$$e^{2\mu(r)} = 1 - \frac{2}{u} + \frac{2}{3} (bM)^2 u^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{(bM)^2 u^4}} \right) + \frac{2\alpha^2}{3u} \sqrt{\frac{bM}{\alpha}} \mathcal{F} \left[\arccos \left(\frac{\frac{bMu^2}{\alpha} - 1}{\frac{bMu^2}{\alpha} + 1} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right]. \quad (3.45)$$

En la figura (3.2) se visualizan los horizontes de eventos, los cuales se determinan a partir de $e^{2\mu(r)} = 0$. Para valores de $b < 1$ hay un horizonte interno r_- y otro externo en r_+ , además, como observamos en el caso extremo $r_- = r_+$ la raíz debe ser positiva al variar el parámetro b . En el caso extremo, se debe satisfacer que $e^{2\mu(r)}$ y su derivada $de^{2\mu(r)}/dr$

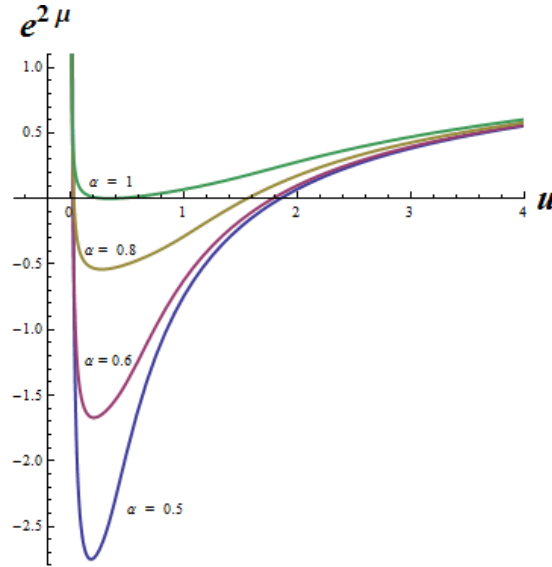


Figura 3.2: Los horizontes de eventos se encuentran en $e^{2\mu(r)} = 0$ en donde se fija $q = 1$ y se varia al parámetro de Born-Infeld b , los valores que se toman son $b = 4,5, 2,5, 1,03, 0,5225$. De arriba hacia abajo la gráfica que intersecta al eje u es la solución de Schwarzschild, mientras que el resto corresponde a la solución de Reissner- Nordström.

son cero en el horizonte de eventos, lo que nos lleva a la condición

$$1 + 2 \left(b^2 r_{ext}^2 - b \sqrt{r_{ext}^4 b^2 + q^2} \right) = 0,$$

que tiene como solución

$$r_{ext}^2 = q^2 - \frac{1}{4b^2},$$

por lo tanto, los horizontes depende de la raíz positiva para que r_{ext} tenga un valor real;

$$4q^2b^2 - 1 > 0,$$

por lo que habrá dos horizontes de eventos sólo cuando $qb > \frac{1}{2}$. En el caso $q < \frac{1}{2b}$ existe una singularidad desnuda. La masa del agujero negro ahora es función de r_{ext} , ya que se debe satisfacer la condición $e^{2\mu(r_{ext})} = 0$, así, la *masa ADM* está dada por

$$M = \frac{r_{ext}}{2} - \frac{b^2 r_{ext}^3}{3} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2 r_{ext}^4}} \right) + \frac{q^2}{3} \sqrt{\frac{b}{q}} \mathcal{F} \left[\arccos \left(\frac{\frac{br_{ext}^2}{q} - 1}{\frac{br_{ext}^2}{q} + 1} \right), \frac{1}{\sqrt{2}} \right], \quad (3.46)$$

que como puede observarse, la función M depende ahora del parámetro b , por lo tanto puede concluirse que no sólo hay una solución de agujero negro, si no que existe una familia completa de agujeros negros extremos para cada valor fijo de q ya que $q > \frac{1}{2b}$.

3.2.2. Agujero negro EBIAdS eléctrico

Analícemos ahora el sistema Einstein-Born-Infeld con constante cosmológica [55] dada en la expresión (3.34) que tiene solución métrica (3.41), respondiéndonos al caso $d = 3$. Básicamente, la solución tendrá una contribución debido a Λ y, por la simetría esférica se tiene

$$R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\Lambda = \frac{\partial \mathcal{L}_{BI}}{\partial g_{\mu\nu}} - \frac{g_{\mu\nu}}{2} \left(\mathcal{L}_{BI} - \frac{\partial \mathcal{L}_{BI}}{\partial g^{ab}} g^{ab} \right),$$

donde $\mathcal{L}_{BI} = 4b^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{F}{2b^2}} \right)$ corresponde al lagrangiano de Born-Infeld en $d = 3$, por lo que

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{BI}}{\partial g^{\mu\nu}} = \frac{-2F_{\alpha\nu}F_{\mu}^{\alpha}}{\sqrt{1 + \frac{F}{2b^2}}},$$

para el caso de campo eléctrico radial. Las ecuaciones de Einstein se reducen a la ecuación

$$(re^{2\mu(r)})' = 1 - \Lambda r^2 + 2b \left(r^2b - \sqrt{q^2 + r^4b^2} \right), \quad (3.47)$$

la cual al integrar directamente nos da la solución métrica siguiente

$$e^{2\mu(r)} = 1 - \frac{2M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + 2b \left(\frac{r^2b}{3} - \frac{1}{r} \int_r^\infty \sqrt{q^2 + r^4b^2} \right). \quad (3.48)$$

Si se toma el límite $b \rightarrow \infty$ en la ecuación (3.47) y luego integramos directamente, lo que se tiene es la solución de *Reissner-Nordström anti-de Sitter* ($\Lambda < 0$);

$$e^{2\mu(r)} = 1 - \frac{R_s}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} + \frac{q^2}{r^2},$$

en donde es claro que si $\Lambda = 0$ retomamos la solución Einstein-Born-Infeld.

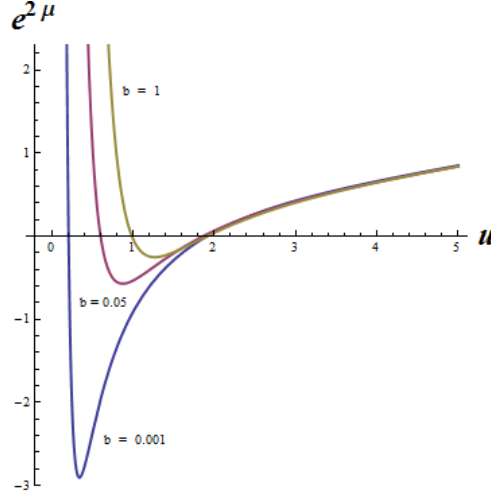


Figura 3.3: En la solución Reissner-Nordström-anti-de Sitter los horizontes de eventos se localizan en $e^{2\mu(r)} = 0$ (3.49), para una carga fija $q = 1$, con $\ell = 10$, $M = 1$ y $b = 0,001, 0,05, 1$.

Al evaluar la integral en (3.48), en la que se considera el rango r a ∞ para que las soluciones sean de agujero negro, encontramos la expresión explícita de la solución Einstein-Born-Infeld-anti de Sitter

$$e^{2\mu(r)} = 1 - \frac{R_s}{r} + \frac{r^2}{\ell^2} + \frac{2b^2r^2}{3} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2r^4}} \right) + \frac{4q^2}{3r^2} {}_2F_1 \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{q^2}{b^2r^4} \right]. \quad (3.49)$$

En el límite $b \rightarrow \infty$ y con $q \neq 0$ la solución métrica (3.49) se reduce a la solución Reissner-Nordström-anti-de Sitter, mientras que para $q = 0$ en el límite $b \rightarrow 0$ se reduce a Schwarzschild-anti-de Sitter. En la figura (3.3) se observa la localización de los horizontes de eventos para diferentes valores de b .

La masa M_{ADM} se calcula a partir de $e^{2\mu(r_+)} = 0$ evaluada en el horizonte de eventos externos r_+ , lo que nos da

$$M(r_+, q, b) = \frac{r_+}{2} + \frac{r_+^3}{2\ell^2} + \frac{b^2r_+^3}{3} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2r_+^4}} \right) + \frac{2q^2}{3r_+} {}_2F_1 \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{q^2}{b^2r_+^4} \right]. \quad (3.50)$$

Para el caso extremo, sabemos que la función métrica $e^{2\mu(r)}$ así como su derivada $\frac{de^{2\mu(r)}}{dr}$ deben ser cero en el horizonte degenerado, por lo tanto al calcularlas y evaluarlas en r_{ext} para después relacionarlas algebraicamente, se llega a la condición

$$1 + \left(2b^2 + \frac{3}{\ell^2} \right) r_{ext}^2 - 2b^2 \sqrt{r_{ext}^4 + \frac{q^2}{b^2}} = 0,$$

que tiene solución

$$r_{ext}^2 = \frac{\ell^2}{6} \left(\frac{1 + \frac{3}{2b^2\ell^2}}{1 + \frac{4}{4b^2\ell^2}} \right) \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{12 \left(1 + \frac{3}{4b\ell^2} \right)}{b^2\ell^2 \left(1 + \frac{3}{2b^2\ell^2} \right)^2} \left(b^2q^2 - \frac{1}{4} \right)} \right],$$

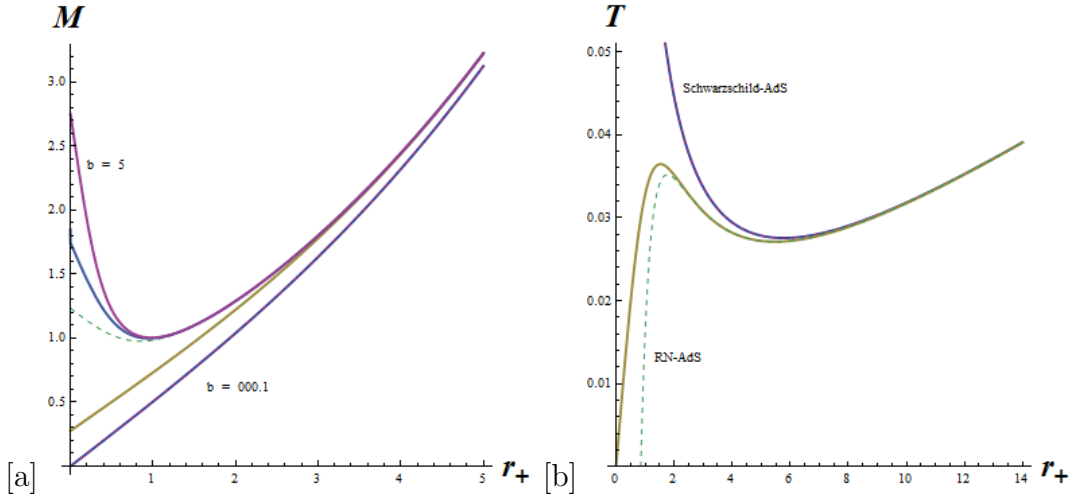


Figura 3.4: (a) La función de masa $M_{ADM} = M_{ADM}(r_+)$ en Born-Infeld-anti-de Sitter para $b = 0,00001, 0,0001, 0,05, 2$ y 5 de abajo hacia arriba, y (b) La temperatura de Hawking T con $b = 0,5, 1$, y tomamos $\ell = 10$, la línea superior corresponde a Schwarzschild-anti-de Sitter ($q = 0$), mientras que las líneas inferiores corresponden a Reissner-Nordström-anti-de Sitter.

para que la raíz sea real entonces $bq \geq 0.5$, en $bq = 0.5$ se tiene que $r_{ext}^2 = 0$. En el límite $b \rightarrow \infty$ la función r_{ext}^2 se reduce a Reissner-Nordström-anti-de Sitter. La región $0 \leq bq < 0.5$ no contiene el caso Born-Infeld-anti-de Sitter extremo, mientras que para el rango $0.5 \leq bq \leq \infty$ la cota inferior corresponde a Born-Infeld-anti-de Sitter, mientras que la superior corresponde al caso de Reissner-Nordström-anti-de Sitter. Para la región $bq \geq 0.5$, la masa del agujero negro extremo es

$$M_{ext} \equiv M(r_{ext}, q, b).$$

El comportamiento de la función de masa (3.50) se muestra en la figura (3.4-[a]). Existen tres diferentes regiones para las cuales

- En el primer caso consideramos la región $bq > 0.5$, en donde si el valor de la masa es $M > M_{ext}$, entonces hay dos horizontes de eventos; uno interno r_- y otro externo r_+ , pero cuando $M = M_{ext}$ existe un horizonte degenerado en $r_- = r_+ = r_{ext}$, mientras que para valores de $M < M_{ext}$ no hay horizontes de eventos si no una singularidad desnuda.
- En el punto extremo $bq = 0.5$ ($r_{ext} = 0$) para $M > M_{ext}$ hay sólo un horizonte de eventos r_+ .
- En la región $0 \leq bq < 0.5$ no hay solución de agujero negro.

3.3. Termodinámica del agujero negro EBIAdS

Para finalizar esta sección, ahora analicemos el comportamiento termodinámico en la solución Einstein-Born-Infeld-anti-de Sitter para ganar intuición en los resultados que

se obtienen en el caso no conmutativo (capítulo 6). Primero calculamos la temperatura de Hawking T , para así obtener la ecuación de $P - v$ (que se obtiene mediante la descripción a la Van der Waals) y analizar si existen puntos críticos en los que ocurren las transiciones de fase. Recuerde que la presión es identificada con el término de la constante cosmológica Λ donde $P = -\frac{1}{8\pi}\Lambda = \frac{3}{8\pi}\frac{1}{l^2}$ y, el volumen termodinámico $V = \left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_{S, Q_i, J_k}$ es función del horizonte de eventos externo r_+ , que para una simetría esférica toma la forma $V = \frac{4}{3}\pi r_+^3$, pero en este caso trabajamos con el volumen específico definido como $v = \frac{V}{N}$.

Comenzamos pues por calcular la *temperatura de Hawking* a partir de $T = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r} e^{2\mu(r)}\right) |_{r_+}$ evaluada en el horizonte de eventos r_+ , lo que nos da

$$T(r_+, q, b) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r_+} + \frac{3r_+}{\ell^2} + 2b^2 r_+ \left(1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2 r_+^4}} \right) \right], \quad (3.51)$$

de donde para $b \rightarrow \infty$ y $q \neq 0$ se reduce a la temperatura de de Reissner-Nordström-anti-de Sitter.

La **cuación de estado** $P - v$ se obtiene de la expresión (3.51), en la que se ha empleado el procedimiento usado en (2.4), lo cual nos da

$$P = \frac{T}{2r_+} - \frac{1}{8\pi r_+^2} - \frac{b^2}{4\pi} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2 r_+^4}} \right),$$

que como función del volumen termodinámico $v = 2r_+$ se escribe

$$P = \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2} - \frac{b^2}{4\pi} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{16q^2}{b^2 v^4}} \right).$$

Ahora, podemos analizar si existen puntos críticos en donde ocurren las transiciones de fase y, su localización está determinada en aquellos puntos de inflexión que se obtienen de calcular la primera y segunda derivadas de la presión, esto es

$$\frac{\partial P}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = 0,$$

las gráficas (3.5) muestran el comportamiento de la primera y segunda derivadas. La ecuación a la que se llega a partir de $\frac{\partial P}{\partial v} = 0$ y $\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} = 0$ es

$$-\frac{256q^4}{b^2 \left(v^4 + \frac{16q^2}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{24q^2}{\left(v^4 + \frac{16q^2}{b^2}\right)} - 1 = 0, \quad (3.52)$$

que al introducir el cambio de variable

$$x^{-2} = v^4 + \frac{16q^2}{b^2},$$

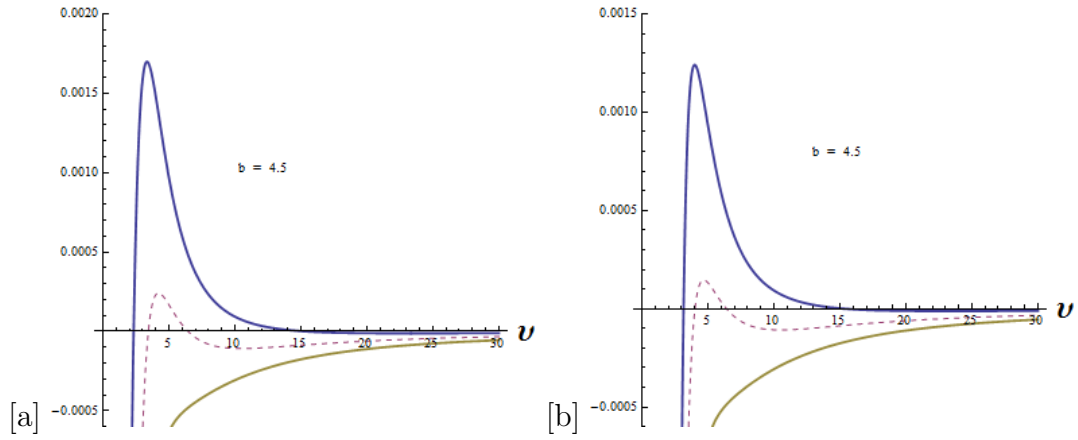


Figura 3.5: Gráficas de (a) la primera derivada $\frac{\partial P}{\partial v} = 0$ y, (b) para la segunda derivada $\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}$. Con $b = 0.45$ y $T = 0.02, 0.04, 0.06$.

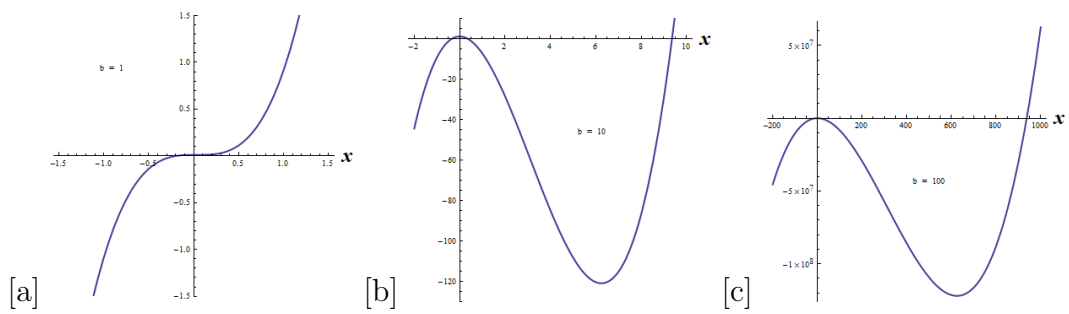


Figura 3.6: Ecuación cúbica (3.53) para cara fija $q = 1$ con parámetro BI (a) $b = 1$, (b) $b = 10$ y (c) $b = 100$.

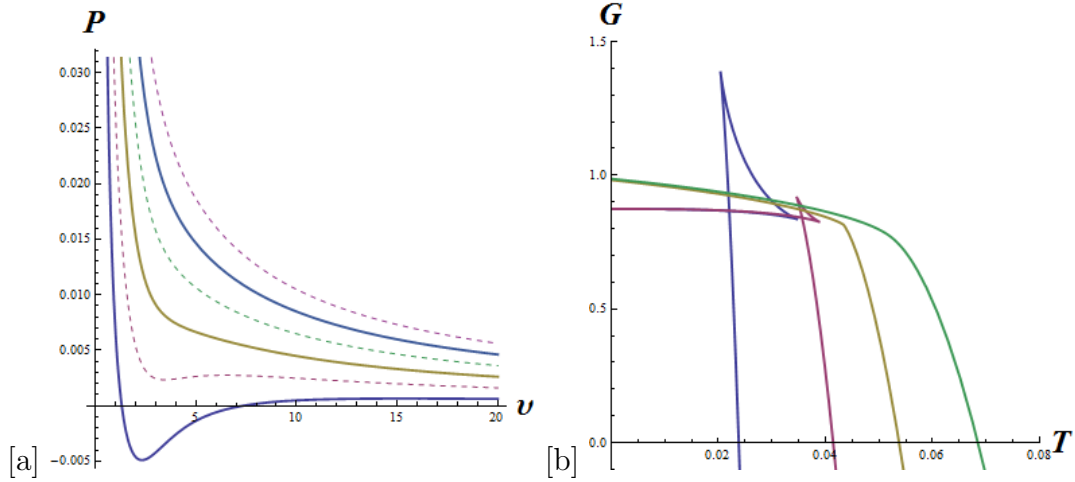


Figura 3.7: En (a) la ecuación de estado $P - v$, para $T = 0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.1, 0.12$ (de abajo hacia arriba) con $b = 0.5225$. En (b) la función de Gibbs $G = M_{ADM} - TS$, con $P = 0.2(1/96\pi)$ (línea azul), $0.6(1/96\pi)$ (línea rosa), $1(1/96\pi)$ (línea amarilla), $1.6(1/96\pi)$ (línea verde), con $q = 1$ y $b = 1$.

se tiene la ecuación cúbica

$$x^3 + cx^2 + d = 0, \quad (3.53)$$

donde $c = -\frac{3b^2}{32q^2}$ y $d = \frac{b^2}{256q^4}$.

Finalmente, la **función de Gibbs** se calcula como $G = M_{ADM} - TS$, obteniéndose así la expresión

$$G(P, r_+) = \frac{r_+}{4} - \frac{2\pi P}{3} r_+^3 - \frac{2b^2 r_+^3}{6} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2 r_+^4}} \right) + \frac{2q^2}{3r_+} {}_2F_1 \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{q^2}{b^2 r_+^4} \right], \quad (3.54)$$

para al cual se sustituye el volumen específico $v = 2r_+$, por lo que tenemos

$$G(P, v) = \frac{v}{8} - \frac{\pi P}{12} v^3 - \frac{b^2 v^3}{48} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{16q^2}{b^2 v^4}} \right) + \frac{4q^2}{3v} {}_2F_1 \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}, -\frac{16q^2}{b^2 v^4} \right]. \quad (3.55)$$

En la figura (3.3) se muestra el comportamiento de (a) la ecuación de estado $P - v$ y, (b) la función de Gibbs.

4

No conmutatividad y Estados Coherentes

En el capítulo anterior hemos discutido una propuesta clásica para modificar la electrodinámica de Maxwell, con el propósito de obtener una auto-energía finita para el electrón, en este capítulo discutimos una propuesta diferente que tiene el mismo objetivo, pero ahora en el contexto de la mecánica cuántica. La autoenergía se analiza cuánticamente utilizando la teoría cuántica de campos, en particular la electrodinámica cuántica. Debido a la divergencia de los campos de Maxwell en la posición de la carga puntual, la teoría cuántica hereda divergencias conocidas como divergencias Ultra Violeta (divergencias debidas a la contribución de energías altas), lo cual da origen a una autoenergía infinita para el electrón, y para remover esta divergencia es necesario introducir procedimientos de regularización. Con el propósito de evitar las divergencias y por tanto de evitar regularizar en electrodinámica cuántica, en los años 30 del siglo pasado, Werner Heisenberg sugirió hacer una modificación de la mecánica cuántica estándar, pero fue hasta 1946 cuando H. S. Snyder desarrolló estas ideas en su trabajo sobre la *Cuantización del espacio-tiempo* [58]. En esta contribución Snyder notó que aunque el espacio-tiempo se supone usualmente como un continuo, esto no es un requisito para que el espacio-tiempo sea invariante de Lorentz, como consecuencia, introdujo la idea de un *espacio-tiempo discreto* invariante de Lorentz, lo que da origen a una nueva unidad de *longitud fundamental* θ , la cual juega el papel de un parámetro de corte natural de energías altas en la teoría cuántica, evitándose con ello las divergencias UV. Explícitamente el origen de tener un espacio-tiempo discreto se debe a las relaciones de conmutación que satisfacen las coordenadas espaciales

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij}, \quad (4.1)$$

donde θ^{ij} es un objeto de dos índices, anti-simétrico y que en primera aproximación podemos considerar constante, este objeto se conoce como el *parámetro de no conmutatividad*¹. Así, el álgebra de Heisenberg es sustituida por el *álgebra de Snyder*. Dado que en el espacio fase de la mecánica cuántica, las coordenadas clásicas x^i y p^i son remplazadas por operadores hermíticos \hat{x}^i y \hat{p}^i , los cuales satisfacen las reglas de conmutación $[\hat{x}^k, \hat{p}^l] = i\hbar\delta^{kl}$, por lo que en consecuencia existe una relación de incertidumbre de Heisenberg $\Delta x^k \Delta p^l \geq \frac{\hbar}{2}$, es lógico pensar que también en el espacio-tiempo no-conmutativo, debido a la relación de conmutación (4.1) se tiene una incertidumbre $\Delta x^k \Delta x^l \geq \frac{|\theta^{kl}|}{2}$, de lo cual se concluye que el espacio-tiempo no conmutativo resulta estar discretizado por celdas de tamaño θ eliminando así las singularidades espaciales.

Existen varias formas de introducir no conmutatividad en una teoría. La forma más común que encontramos en la literatura es a través del *formalismo de Weyl-Wigner-Groenewold-Moyal*, del cual daremos algunas definiciones con el objetivo de entender ciertas características de la no conmutatividad. Tal formalismo es un método de aproximación semiclásico donde la información del espacio tiempo no conmutativo está contenida en un nuevo producto (el producto estrella \star), que sustituye al producto punto. Esta forma de introducir la no conmutatividad, no garantiza la unitariedad ni la invariancia de Lorentz. Una forma diferente de introducir la no conmutatividad se basa en los *Estados Coherentes* que se construyen en un plano no conmutativo [59]. Esta versión no hace uso del producto \star pero si del parámetro $\theta = cte.$ y, tiene como característica que no deforma la geometría del espacio porque trabajamos con los valores esperados definidos en el plano no conmutativo y, básicamente estamos trabajando con coordenadas, mientras que la información de no conmutativa está incrustada en las fuentes del campo que definen al tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$, lo cual lleva a que la unitariedad e invariancia de Lorentz estén garantizadas. Las ecuaciones de Einstein se resuelven con los métodos matemáticos ya conocidos. En este capítulo discutimos brevemente ambas formas de introducir la no conmutatividad, poniendo énfasis principalmente en la noción de no conmutatividad inspirada en los denominados estados coherentes y analizaremos su implementación y consecuencias en soluciones que son asintóticamente agujero negro.

Para tener una noción intuitiva de la no conmutatividad en las coordenadas, comenzaremos discutiendo el conocido problema fenomenológico de los niveles de Landau, consiste en una partícula cargada en un campo magnético externo muy intenso, de manera tal que el estado de Landau relevante en el problema es el más bajo. El proyectar el

¹Si se define a θ como una magnitud promedio de un elemento de θ^{kl} , entonces, físicamente $1/\sqrt{\theta}$ corresponde a la escala de energía de la variedad diferencial del espacio-tiempo no conmutativo [62]. La fenomenología de la no conmutatividad aparece en escalas de energías intermedias entre el Modelo Estándar de la física de partículas y la escala de Planck. Los límites impuestos a la no conmutatividad vienen de varios experimentos. Observaciones de blazares dan $|\theta| < (10^3 \text{TeV})^{-2}$, transiciones atómicas en la mecánica cuántica no conmutativa y el corrimiento Lamb en QED da $|\theta| < (10 \text{TeV})^{-2}$, violaciones espino-estáticas en QED no conmutativa de Gran Sasso y Super-Kamiokande dan $|\theta| < (10^5 \text{TeV})^{-2}$, extensiones no conmutativas del modelo estándar dan $|\theta| < (10 \text{TeV})^{-2}$ y, la estructura no conmutativa en la mecánica clásica y el perihelio de Mercurio dan $|\theta| < (10^{13} \text{TeV})^{-2}$ [63]. En algunos casos físicos donde el parámetro de no conmutatividad es pequeño, los límites son del orden de $|\theta| < (10 \text{TeV})^{-2}$.

lagrangiano del sistema al estado más bajo tiene como consecuencia que las coordenadas perpendiculares a la dirección del campo magnético no conmutan.

4.1. Niveles de Landau

En 1930, Landau (ver por ejemplo [1, 60, 61]) dió una solución al problema de las degeneraciones de energía² para una partícula puntual de masa m (p. e. el electrón), con carga eléctrica e , inmersa en un campo magnético intenso B (que consideraremos sin pérdida de generalidad perpendicular al plano $x_1 - x_2$), que como veremos resulta ser un problema donde las coordenadas no conmutan. La dinámica de la partícula que interactúa con B es dada por la fuerza de Lorentz $\vec{F} = e \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}/c \right)$, donde $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ y el lagrangiano está dado por

$$L = \frac{1}{2}m (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{e}{c} (\dot{x}_1 A_{x_1} + \dot{x}_2 A_{x_2} + \dot{x}_3 A_{x_3}). \quad (4.2)$$

Implementando la transformada de Legendre se encuentra que el Hamiltoniano que describe el movimiento de la partícula es

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A} \right)^2, \quad (4.3)$$

donde $\vec{p} = m\vec{v} + e\vec{A}/c$ es el momento canónico de la partícula. Para generar un campo magnético en la dirección x_3 imponemos la *norma de Landau*: $\vec{A} = (0, x_1 B, 0)$, para la cual se verifica que: $\nabla \times \vec{A} = B\hat{x}_3$. Dado que $\nabla \cdot A = 0$ si $B = \text{cte.}$ y $[\hat{p}, \hat{A}] = -i\hbar \nabla \cdot \hat{A}$, entonces concluimos que el momento \hat{p} conmuta con el operador \hat{A} y el operador Hamiltoniano se escribe como

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p}_{x_1}^2 + \hat{p}_{x_3}^2 + \left(\hat{p}_{x_2} - \frac{ex_1 B}{c} \right)^2 \right), \quad (4.4)$$

Dado que el Hamiltoniano no depende de las coordenadas x_2 y x_3 , \hat{H} conmuta con \hat{p}_{x_2} y \hat{p}_{x_3} y, los estados propios $|\Psi\rangle$ del Hamiltoniano son también estados propios de los operadores de momento \hat{p}_{x_2} y \hat{p}_{x_3} , con valores propios continuos. Explícitamente tenemos que: $\hat{p}_{x_2}|\Psi\rangle = \hbar k_{x_2}|\Psi\rangle$ y $\hat{p}_{x_3}|\Psi\rangle = \hbar k_{x_3}|\Psi\rangle$. Así la ecuación de valores propios $\hat{H}|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle$ se reduce a una ecuación de valores propios en una dimensión con operador Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hbar k_{x_3})^2 + \frac{1}{2m} \left(\hat{p}_{x_1}^2 + \left(\frac{eB}{c} \right)^2 \left(x_1 - \frac{c\hbar k_{x_2}}{eB} \right)^2 \right). \quad (4.5)$$

A partir de este punto suprimimos el movimiento de la partícula en la dirección z dado que éste no está cuantizado, concentrándonos únicamente en el movimiento de la partícula

²En este problema, la alta degeneración de las energías propias producen el efecto Hall Cuántico.

a lo largo del plano $x_1 - x_2$. El segundo término es el hamiltoniano que corresponde a un oscilador armónico en la dirección x_1 , de frecuencia $\omega = \frac{eB}{cm}$ y corrido una distancia $c\hbar k_{x_2}/eB$. El término k_{x_2} es un índice libre. Tenemos así que las energías propias del sistema están dadas por

$$E_n = \hbar \frac{eB}{mc} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad (4.6)$$

mientras que los estados propios $|\Psi\rangle$ sobre el plano están etiquetados por el número natural n y el número real k_{x_2} : $|\Psi\rangle = |n, k_{x_2}\rangle$. A cada energía propia E_n se le conoce como un nivel de Landau, los cuales están infinitamente degenerados en k_{x_2} . Note que los niveles de Landau están separados por una energía $\frac{eB\hbar}{mc}$. Finalmente las funciones propias en el espacio de coordenadas están dadas por

$$\langle x_1, x_2 | n, k_{x_2} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ik_{x_2}x_2} \phi_n \left(x_1 - \frac{c\hbar k_{x_2}}{eB} \right), \quad (4.7)$$

donde $e^{ik_{x_2}x_2}$ es la solución de onda plana y ϕ_n son funciones de onda del oscilador armónico normalizado

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right) H_n(x), \quad (4.8)$$

con $H_n(x)$ los polinomios de Hermite.

4.1.1. Proyección al nivel más bajo de Landau

Dado que la separación ΔE entre los niveles de energía de Landau es del orden de $\mathcal{O}(B/m)$, tenemos que si el campo magnético es intenso, únicamente el nivel de energía de Landau más bajo es relevante debido a que los estados de Landau siguientes están esencialmente desacoplados del primero, puesto que tienen energías tendientes a infinito ($\Delta E \rightarrow \infty$). El límite de campo magnético intenso: $B \rightarrow \infty$, equivale al límite de masa pequeña: $m \rightarrow 0$. Sustituyendo este límite en el lagrangiano (4.2) produce (en la norma de Landau) un lagrangiano que describe únicamente el nivel de Landau más bajo

$$L = \frac{e}{c} B x_1 \dot{x}_2. \quad (4.9)$$

Físicamente, el límite establece que la energía cinética del sistema es mucho menor que el término proveniente de la interacción con el campo, de modo que no puedan excitarse niveles superiores al primer nivel. Con esta modificación, y añadiendo al lagrangiano un término potencial $V(x_1, x_2)$ que represente las impurezas en el plano, tenemos que: $L = \frac{e}{c} B x_1 \dot{x}_2 - V(x_1, x_2)$, el cual tiene la forma $L = p\dot{q} - H$. Comparando ambas expresiones concluimos que \hat{x}_2 y \hat{p} forman un par canónico de operadores, con $\hat{p} = \frac{e}{c} B \hat{x}_1$ y conmutador

$$\left[\frac{eB}{c} \hat{x}_1, \hat{x}_2 \right] = -i\hbar \quad \Rightarrow \quad [\hat{x}_1, \hat{x}_2] = -i \frac{\hbar c}{eB}. \quad (4.10)$$

Concluimos así que restringiendo la partícula al primer nivel de Landau, el espacio en el que se mueve la partícula ya no obedece el álgebra de Heisenberg estándar.

Es importante señalar que al añadir un potencial $V(x_1, x_2)$, que sea débil comparado con el término magnético del lagrangiano, la estructura global de los niveles de Landau no se altera, pero puede romperse la degeneración en cada nivel. Por lo general los potenciales considerados son potenciales armónicos débiles y simétricos en las coordenadas.

Para finalizar mencionemos que el fenómeno de obtener un espacio no-conmutativo no es específico de proyectar al primer nivel de Landau, ya que se obtiene la generalización matricial de este resultado si se proyecta a un número arbitrario finito de niveles de Landau [61].

4.2. Formalismo de Weyl-Wigner-Groenewold-Moyal

El formalismo de Weyl-Wigner-Groenewold-Moyal (WWGM) nos proporciona un enlace poderoso entre funciones del espacio fase de la física clásica y operadores cuánticos. El formalismo ha sido aplicado en diferentes ramas de la física cuántica, como por ejemplo, en física estadística, teoría de colisiones cuánticas, óptica cuántica (ver por ejemplo [] y las referencias ahí citadas). El formalismo también juega un papel importante en la gravedad auto-dual, los grupos cuánticos y es relevante en el contexto de este trabajo porque nos proporciona una manera sistemática de describir espacios no-conmutativos en general y por tanto estudiar teorías de campo no conmutativas. Para una presentación detallada del formalismo se puede consultar por ejemplo [64]-[74]. En esta sección nos limitaremos a presentar una descripción breve de las ideas principales del formalismo WWGM y por simplicidad en nuestra exposición nos restringimos al caso en que el tensor θ^{ij} en (4.1) es constante, aunque el formalismo se puede extender al caso en que $\theta^{ij}(x)$ depende de las coordenadas.

4.2.1. La transformada de Weyl y la función de Wigner

Básicamente la transformada de Weyl (1927) establece una relación entre campos clásicos en el espacio fase, con los operadores de la mecánica cuántica definidos en el espacio de Hilbert \mathcal{H} . Explícitamente la transformada de Weyl de un operador \hat{A} se define como

$$\tilde{A}(x, p) = \int e^{-ipy/\hbar} \left\langle x + y/2 \left| \hat{A} \right| x - y/2 \right\rangle dy, \quad (4.11)$$

donde el operador lo hemos expresado en la base x como la matriz $\langle x' | \hat{A} | x \rangle$. Denotaremos la transformada de Weyl con una tilde \tilde{A} y representa una función en el espacio fase. Es posible definir la transformada de Weyl en términos de los elementos de matriz del

operador en la base de momentos

$$\tilde{A}(x, p) = \int e^{-ixu/\hbar} \langle p + u/2 | \hat{A} | p - u/2 \rangle du. \quad (4.12)$$

Utilizando la transformada de Weyl es directo mostrar que la traza del producto de dos operadores \hat{A} y \hat{B} está dado por la integral sobre el espacio fase del producto de sus transformadas de Weyl

$$Tr [\hat{A}\hat{B}] = \frac{1}{h} \int \int \tilde{A}(x, p) \tilde{B}(x, p) dx dp, \quad (4.13)$$

mientras que el valor esperado de un observable \hat{A} se calcula como

$$Tr [\hat{\rho}\hat{A}] = Tr [|\psi\rangle\langle\psi|A] = \langle\psi | \hat{A} | \psi\rangle = \frac{1}{h} \int \tilde{\rho}\tilde{A} dx dp = \langle A \rangle, \quad (4.14)$$

donde $\hat{\rho}$ es el operador de densidad para un estado puro $|\psi\rangle$ ³: $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$.

La función de Wigner⁴ en el espacio de configuraciones se define como

$$W(x, p) = \frac{\tilde{\rho}}{h} = \frac{1}{h} \int e^{-ipy/\hbar} \psi(x + y/2) \psi^*(x - y/2) dy, \quad (4.15)$$

que puede verse como la transformada de Weyl del operador de densidad $\hat{\rho}$. En términos de esta función, el valor esperado de \hat{A} es

$$\langle\hat{A}\rangle = \int \int W(x, p) \tilde{A}(x, p) dx dp. \quad (4.16)$$

Tenemos entonces que el valor esperado de \hat{A} se obtiene por lo que parece el promedio en el espacio fase de la cantidad física representada por $\tilde{A}(x, p)$ con una densidad de “probabilidad” $W(x, p)$ caracterizando al estado.

Si la función de Wigner (4.15) se integra únicamente sobre el momento p o sobre la coordenada q se obtiene

$$\int W(x, p) dp = \psi^*(x) \psi(x), \quad \int W(x, p) dp = \varphi^*(p) \varphi(p). \quad (4.17)$$

La primera ecuación integral produce la densidad de probabilidad en el espacio de configuraciones, mientras que la segunda produce la densidad de probabilidad en el espacio de momentos, o en otra palabras, la proyección de $W(x, p)$ sobre el eje x produce la distribución de probabilidad en x , mientras que la proyección sobre el eje p produce la distribución en p . Físicamente la función de Wigner exhibe la distribución de probabilidad

³El operador de densidad tiene la propiedad de que $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ y entonces $Tr [\hat{\rho}^2] = Tr [\hat{\rho}] = 1$.

⁴La función de Wigner fue introducida por Eugene Wigner en 1932 para estudiar correcciones cuánticas a las propiedades estadísticas de la termodinámica de sistemas cuánticos.

simultáneamente en las variables x y p . Dado que $W(x, p)$ puede tomar valores negativos, a la función misma se le da el título de “cuasi-probabilística”

Propiedades

- La transformada de Weyl del operador unitario $\hat{1}$ es 1;

$$\hat{1} = \int e^{-ipy/\hbar} \langle x + y/2 | \hat{1} | x - y/2 \rangle dy = \int e^{-ipy/\hbar} \delta(x + y/2 - (x - y/2)) dy = 1,$$

por lo tanto

$$\int \int W(x, p) dx dp = Tr[\hat{\rho}] = 1,$$

con $W(x, p)$ normalizada en el espacio $x - p$, tal que $\int \int W(x, p)^2 dx dp = h^{-1}$.

- En el espacio de configuraciones, si $\psi(x) \rightarrow \psi(x - b)$ entonces $W(x, p) \rightarrow W(x - b, p)$.
- En el espacio de momentos, si $\psi(x) \rightarrow \psi(x) e^{-ixb_p/\hbar}$ entonces $W(x, p) \rightarrow W(x, p - b_p)$.

La función de Wigner actúa como una función de peso que puede tomar valores negativos. Así, los valores esperados de funciones que definen al hamiltoniano \hat{H} son

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \int \int W(x, p) x dx dp, & \langle p \rangle &= \int \int W(x, p) p dx dp, \\ \langle T \rangle &= \int \int W(x, p) T(p) dx dp, & \langle U \rangle &= \int \int W(x, p) U(x) dx dp, \end{aligned}$$

de los cuales el valor esperado del operador hamiltoniano \hat{H} es $\langle H \rangle = \int \int W(x, p) H(x, p) dx dp$.

Un ejemplo de la aplicación de la función de Wigner lo encontramos en el **oscilador armónico simple** que tiene el operador hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2, \quad (4.18)$$

y el cálculo se realiza para el estado base

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\pi^2} \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^{1/4} e^{-\frac{x^2}{2} \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)}. \quad (4.19)$$

Para encontrar $\langle H \rangle$ necesitamos primero calcular la función de Wigner para el estado base ψ_0 , lo cual resulta

$$W_0(x, p) = \frac{2}{h} e^{-\frac{p^2}{m\omega\hbar} - \frac{x^2 m\omega}{\hbar}},$$

luego, el valor esperado de \hat{H} en el estado base es

$$\langle H \rangle = \int \int W_0(x, p) \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) dx dp = \frac{\hbar\omega}{2}.$$

En d – dimensiones, la transformada de Weyl del operador \hat{A} se generaliza como

$$\tilde{A}(x_1, x_2, \dots, p_1, p_2, \dots) = \int \int \dots e^{-i(p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots)/\hbar} \\ \times \left\langle x_1 + y_1/2, x_2 + y_2/2, \dots \left| \hat{A} \right| x_1 - y_1/2, x_2 - y_2/2, \dots \right\rangle dy_1 dy_2 \dots$$

mientras que la función de Wigner para un estado puro $\psi(x_1, x_2, \dots)$ es

$$W(x_1, x_2, \dots, p_1, p_2, \dots) = \frac{1}{h^n} \int \int \dots e^{-i(p_1 y_1 + p_2 y_2 + \dots)/\hbar} \\ \times \psi(x_1 + y_1/2, x_2 + y_2/2, \dots) \psi^*(x_1 - y_1/2, x_2 - y_2/2, \dots) dy_1 dy_2 \dots$$

Se puede concluir que el “formalismo de Wigner-Weyl” [67] asocia una función en el espacio fase con un operador en \mathcal{H} , donde el operador lineal actúa en la forma

$$\hat{A} \rightarrow a(x, p) \quad \Longrightarrow \quad \hat{x} \rightarrow p, \quad \hat{p} \rightarrow x,$$

en donde la matriz de densidad es remplazada por la función de Wigner

$$\hat{\rho} \rightarrow W(x, p).$$

Algunas propiedades fundamentales son:

$$\text{Tr}(\hat{A}\hat{\rho}) = \int dx dp a W, \quad \hat{A}\hat{B} \rightarrow ab + \mathcal{O}(\hbar), \quad -\frac{i}{\hbar} [\hat{A}, \hat{B}] \rightarrow \{a, b\} + \mathcal{O}(\hbar).$$

Para establecer el formalismo Weyl-Wigner-Moyal, lo que se hace ahora es introducir un ordenamiento en el mapeo Weyl-Wigner a través del producto- \star .

4.2.2. Producto \star de Gronewold-Moyal

Un ordenamiento normal o simétrico definen una base en el álgebra de operadores $\hat{\mathcal{A}}$ y en el producto- \star está contenida la prescripción de orden, es asociativo, no conmutativo y relaciona funciones conmutativas $f(x)$ sobre un espacio no conmutativo. Así, el mapeo W establece un isomorfismo entre las bases de $\hat{\mathcal{A}}$ y \mathcal{A} [72] (un isomorfismo entre las bases monomiales contenidas en $\hat{\mathcal{A}}$ con un ordenamiento simétrico de la base de $\hat{\mathcal{A}}$). Básicamente, la deformación de un álgebra conmutativa (\mathcal{A}) a una no conmutativa ($\hat{\mathcal{A}}$), tienen la misma topología y leyes de adición pero el producto es el estrella (\star) el cual tiene incrustado el carácter no conmutativo, ya que

- el producto- \star sustituye al producto punto \Rightarrow es *único*
- es la única deformación asociativa que *no viola el principio de correspondencia*.
- puede preservar la unitariedad, aunque sí rompe la simetría de Lorentz.

En la correspondencia Weyl-Wigner con ordenamiento, surge el parámetro de no conmutatividad θ , y en el límite $\theta \rightarrow 0$ se recuperan las expresiones no deformadas. El producto- \star puede construirse a través de un ordenamiento normal o simétrico [72], el cual define una base del álgebra $\hat{\mathcal{A}}$.

Theorema 4.2.1 *La aplicación de Weyl $W : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ es un álgebra isomorfa de (\mathcal{A}, \star) en (\mathcal{A}, \cdot) .*

Los cálculos explícitos en donde aparece el producto- \star pueden consultarse en ([71]), donde el \star contiene la información de no conmutatividad y aparece en la definición

$$A \star B = A \exp\left(\frac{i\hbar \overleftarrow{\mathcal{P}}}{2}\right) B. \quad (4.20)$$

Esta es la forma usual que encontramos en la literatura, donde $\overleftarrow{\mathcal{P}} := \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial x} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial p} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial p} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial x}$. Otra es

$$(A \star B) = \exp\left(\frac{1}{2}\theta_{ij}\partial_i\partial_j\right) A(x) B(y) |_{x=y}.$$

En el límite $\hbar \rightarrow 0$ el producto- \star de Moyal se reduce a

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} (A \star B) = AB,$$

para cada $A, B \in \mathcal{A}$. El espacio tiempo no conmutativo está discretizado por celdas de tamaño θ . Ahora, si se desarrolla la exponencial en serie de potencias de (4.20), se tiene que

$$(f \star g)(x) = f(x) \cdot g(x) + \theta \frac{i}{2} \{f(x), g(x)\} + \mathcal{O}(\theta^2),$$

donde el \star es único para cada corchete de Poisson. Para las funciones en $\hat{\mathcal{A}}$ el conmutador se define por

$$[\hat{f}, \hat{g}] = \hat{f} \star \hat{g} - \hat{g} \star \hat{f}.$$

Algunas propiedades del producto- \star o de Moyal son:

1. El producto- \star de funciones es

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h) \quad y \quad \int dt dy f \star g = \int dt dy f \cdot g. \quad (4.21)$$

2. En el plano $(x_1 - x_2)$ no conmutativo, el conmutador se escribe

$$x_1 \star x_2 - x_2 \star x_1 = [x_1, x_2]_{\star} = i\theta.$$

3. Las coordenadas x_3 y \bar{x}_3 en el plano complejo \mathbb{C} no conmutativo, se definen por

$$x_3 = x_1 + ix_2 \quad \bar{x}_3 = x_1 - ix_2, \quad (4.22)$$

con el conmutador

$$[x_3, \bar{x}_3]_\star = 2\theta, \quad (4.23)$$

y los análogos de los operadores de creación a^\dagger y aniquilación a son

$$a = \frac{x_3}{\sqrt{2\theta}} \quad y \quad a^\dagger = \frac{\bar{x}_3}{\sqrt{2\theta}} \quad \implies \quad [a, a^\dagger]_\star = 1. \quad (4.24)$$

4. El producto estrella puede definirse en un espacio fase (x, p) en 2-dimensiones ([73],[74]) a través del producto de funciones $f(x, p)$, $g(x, p)$.

Física cuántica y brackets de Moyal: El producto estrella $f \star g$ de las funciones f y g , con $\lambda = i\hbar/2$, es entonces

$$f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} P^n(f, g) = f e^{\lambda \overleftrightarrow{P}} g, \quad (4.25)$$

donde P^n representa a la n -ésima potencia del bracket de Poisson, así

$$\{f, g\} \equiv f \overleftrightarrow{P} g = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial x^i} = P(f, g),$$

de tal forma que el resultado es el bracket de Moyal

$$\{f, g\}_M \equiv [f, g]_\star \equiv (f \star g - g \star f) / i\hbar,$$

que en esencia es el mapeo de la *ley de composición* $(f, g) \mapsto f \star g$. En el formalismo Weyl-Wigner-Moyal el producto- \star aparece directamente en el producto de campos, a nivel de las ecuaciones de campo, etc., mientras que en los estados coherentes inspirados en no conmutatividad no, ya que sólo dependen de $\theta = cte$.

4.3. Estados coherentes

Originalmente, los “*estados coherentes*” clásicos fueron propuestos por Schrödinger en 1926 en el problema del oscilador armónico simple (donde la función de onda ψ corresponde al movimiento clásico de una partícula con perfil estacionario). En 1963 Glauber los introdujo en su estudio sobre *la coherencia de los campos de radiación cuantizados* [75], donde les dio su nombre. La representación de estados coherentes es una aproximación semiclásica, donde se introducen como estados cuánticos del oscilador armónico y, son estados de mínima incertidumbre cuya coherencia no se deforma al evolucionar,

por lo que se pueden definir como los estados generadores (eigenestados) del operador de aniquilación, o como estados de mínima dispersión, o como los estados generados por el operador de desplazamiento a partir del estado base.

Debido a las propiedades de los estados coherentes, se pensó que en el espacio tiempo no conmutativo también era posible construir objetos que se comporten en la misma forma que los propuestos por Glauber. Básicamente, lo que se hace es una foliación de la variedad del espacio-tiempo no conmutativo en semiplanos, donde la combinación de las coordenadas (operadores) trabajan en la misma forma que los operadores de creación y aniquilación (4.22) pero en el plano complejo no conmutativo, donde se define una base y en consecuencia generan estados coherentes no conmutativos. Los estados coherentes no contienen productos- \star , por lo que no se deforma el espacio-tiempo y, además se fija la dirección temporal, esto garantiza la unitariedad e invarianza de Lorentz; además hay un corte natural (y entonces finitudes UV) dado por $\theta = cte$. En esta formulación, el momento canónico conmutativo se deja intacto, lo cual garantiza la preservación de la unitariedad [76] y la información de la no conmutatividad está contenida solamente en las fuentes de campo que definen a $T_{\mu\nu}$, por lo que las ecuaciones de Einstein se resuelven con los métodos matemáticos usuales. Comenzamos con una breve descripción de las propiedades de los estados coherentes de Glauber de la mecánica cuántica.

4.3.1. Propiedades de estados coherentes de Glauber

El conjunto $\{|\alpha\rangle\}$, con $\alpha \in \mathbb{C}$, denota a los estados coherentes, los cuales se definen como eigenestados del operador de aniquilación, entonces, para un estado $|\alpha\rangle$;

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (4.26)$$

donde $|n\rangle$ son los *estados coherentes*⁵ y, los operadores de creación a^\dagger y aniquilación a satisfacen

$$a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

Luego, se desarrolla el estado $|\alpha\rangle$ en la base $|n\rangle$. Así, dado que $\{|n\rangle\}$ son los eigenestados del operador $\hat{N} = a^\dagger a$ ($\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$), entonces se tiene que

$$|\alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n|\alpha\rangle,$$

los cuales satisfacen la condición de normalización $\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$,

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*m}\alpha^n}{\sqrt{m!n!}} \langle m|n\rangle = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} = |\langle 0|\alpha\rangle|^2 e^{|\alpha|^2} = 1, \quad (4.27)$$

⁵Los *estados coherentes* son superposiciones que corresponden a paquetes de mínima dispersión, es decir, paquetes de máxima coherencia.

donde los coeficientes son

$$\langle n | \alpha \rangle = \left\langle 0 \left| \frac{a^n}{\sqrt{n!}} \right| \alpha \right\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0 | \alpha \rangle,$$

de tal forma que el estado coherente $|\alpha\rangle$ es igual a

$$|\alpha\rangle = \langle 0 | \alpha \rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle.$$

Además, de la expresión (4.27) se obtiene $\langle 0 | \alpha \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2}$. Al comparar esta expresión con el estado fundamental del oscilador armónico

$$|\psi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi_0^n}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\xi_0^2/4} |n\rangle,$$

donde $\alpha = \xi_0/\sqrt{2}$, entonces identificamos el estado fundamental con desplazamiento en ξ_0 del oscilador armónico como un caso particular del estado coherente. De esta forma, los estados coherentes son

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad \langle \alpha | = e^{-|\alpha|^2} \sum_n \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \langle \alpha |, \quad (4.28)$$

que son construidos como la superposición de estados de $|n\rangle$ fotones. La probabilidad del estado $|n\rangle$ es definida por

$$P_n(\alpha) = |\langle n | \alpha \rangle|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}}{n!} e^{-|\alpha|^2} = \frac{1}{n!} \left(\frac{m\omega}{2\hbar} x_0^2 \right)^n e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x_0^2},$$

y es una distribución de Poisson⁶ con valor medio $\bar{n} = |\alpha|^2 = \frac{m\omega}{2\hbar} x_0^2$. Al sustituir $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle$ en (4.28) obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{(\alpha a^\dagger)^n}{n!} |0\rangle \\ &= e^{-|\alpha|^2/2 + \alpha a^\dagger} |0\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle, \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde $\hat{D}(\alpha) = e^{-|\alpha|^2/2 + \alpha a^\dagger}$ es llamado el operador desplazamiento y puede interpretarse como el operador del estado coherente $|\alpha\rangle$, que actúa sobre el vacío del estado coherente (del oscilador armónico). En el producto de los operadores⁷ sustituimos

$$e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a} = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} e^{-\alpha^* a} = e^{|\alpha|^2/2} e^{-\alpha^* a} e^{\alpha a^\dagger},$$

⁶La distribución de Poisson es: $P_n(x) = x^n e^{-x}/n!$.

⁷El producto de dos operadores que conmutan entre sí, satisfacen las condiciones $[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$, y $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A, B]} = e^B e^A e^{\frac{1}{2}[A, B]}$.

y ahora, el estado coherente se escribe como

$$|\alpha\rangle = e^{\hbar^{-1/2}(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)} |0\rangle \equiv \hat{D}(\alpha, \alpha^*) |0\rangle,$$

donde $\hat{D}(\alpha, \alpha^*) \equiv e^{\hbar^{-1/2}(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)}$ es un operador unitario

$$\hat{D}^\dagger(\alpha, \alpha^\dagger) = \hat{D}(-\alpha, -\alpha^\dagger) = \hat{D}^{-1}(\alpha, \alpha^\dagger),$$

luego, la normalización de $|\alpha\rangle$ es

$$\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle 0|\hat{D}^\dagger(\alpha, \alpha^*)\hat{D}(\alpha, \alpha^*)|0\rangle = \langle 0|0\rangle = 1.$$

También se define al número medio de fotones ($|\alpha|^2 = \alpha\alpha^*$) como

$$\langle N\rangle \equiv \langle \hat{N}\rangle \equiv \langle\alpha|a^\dagger a|\alpha\rangle = \frac{|\alpha|^2}{\hbar},$$

con el operador número $\hat{N} = a^\dagger a$ que actúa como $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$. Por lo tanto, el estado fundamental del oscilador armónico ($|0\rangle$ definido por $a|0\rangle = 0$) corresponde al estado coherente $\alpha = 0$. Una propiedad de los estados coherentes es la construcción o generación de estados coherentes a partir del estado base, por ejemplo;

$$|\alpha\rangle = \int \int \frac{d^2\alpha'}{\pi\hbar} |\alpha'\rangle \langle\alpha'|\alpha\rangle = \int \int \frac{d^2\alpha'}{\pi\hbar} |\alpha'\rangle e^{-\frac{1}{2\hbar}(|\alpha|^2 + |\alpha'|^2) + \frac{1}{\hbar}\alpha\alpha'^*},$$

Los operadores a y a^\dagger están relacionados a los operadores \hat{x} y \hat{p} , según las relaciones

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{x} + i\hat{p}), \quad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}}(\hat{x} - i\hat{p}),$$

$$\hat{x} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}}(a^\dagger + a), \quad \hat{p} = i\sqrt{\frac{\hbar}{2}}(a^\dagger - a),$$

y las coordenadas x y p del espacio fase son función de los eigenvalores de estados coherentes

$$x \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha^* + \alpha), \quad p \equiv \frac{i}{\sqrt{2}}(\alpha^* - \alpha).$$

4.3.2. Estados coherentes inspirados por no conmutatividad

Otro método que induce no conmutatividad en una teoría son los estado coherentes inspirados por no conmutatividad. Básicamente, en el espacio no conmutativo se hace una construcción que se comporte en la misma forma que los estados coherentes de Glauber, además, tiene la propiedad de que sólo dependen del parámetro de no conmutatividad θ , no contiene al producto- \star y preservan la unitariedad e invarianza de Lorentz ya que solamente se afecta a las fuentes de campo que definen a $T_{\mu\nu}$, con $\theta = cte$. El parámetro θ es una propiedad intrínseca del espacio no conmutativo y una longitud fundamental que lo discretiza, además regula divergencias UV. En una teoría de campo, la *formulación de estados coherentes inspirados en no conmutatividad* hace que las fuentes de campo puntuales (deltas de Dirac) sean sustituidas por perfiles gaussianos, ([59], [76]).

Estados coherentes en el plano No conmutativo

Basados en la idea de los estados coherentes como aproximación semiclásica en la mecánica cuántica, se pensó que un mecanismo similar debía existir en la teoría cuántica de campos formulada en el espacio-tiempo no conmutativo definido por las coordenadas de d operadores hermitianos \hat{x}^μ que satisfacen

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\hat{\theta}^{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, \dots, d.$$

La construcción se hace en tal forma que

- se fija la dirección de la coordenada temporal: $\hat{\theta}^{0k} = 0 \Rightarrow$ garantizan la unitariedad,
- al satisfacer el principio de covarianza \Rightarrow se hacen foliaciones del espacio-tiempo no conmutativo. Se garantiza la invarianza de Lorentz.

Por otra parte, la matriz antisimétrica $\hat{\theta}^{\mu\nu}$ puede llevarse a su forma diagonal como

$$\hat{\theta}^{\mu\nu} = \text{diag} \left(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_{d/2} \right),$$

donde cada bloque es $\hat{\theta}_k \equiv \theta_k \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, por lo que pueden hacerse foliaciones del espacio-tiempo no conmutativo y, entonces tendremos semiplanos donde cada observador medirá la misma $\theta = cte.$ en el (2+1)-plano no conmutativo, ya que es una propiedad intrínseca del espacio-tiempo no conmutativo. Por simplicidad se consideran solamente los planos de dimensión par, para los cuales sus coordenadas sean 2-vectores $\vec{\hat{x}}_k$ tales que $\vec{\hat{x}}_k \equiv (\hat{y}_{1k}, \hat{y}_{2k})$ donde $(\hat{y}_{1k}, \hat{y}_{2k})$ son coordenadas del k -ésimo 2-plano no conmutativo que satisface el conmutador

$$[\hat{y}_{1k}, \hat{y}_{2k}] = i\theta_k,$$

estas consideraciones nos permiten reducirnos a un 2 -plano efectivo para el cual $\theta = cte.$ En consecuencia, necesitamos usar estados coherentes⁸ en el 2 -plano no conmutativo porque no existen eigenestados de las coordenadas no conmutativas y, debemos definir los valores medios a partir de la construcción de operadores que se comporten en la misma forma que los operadores de creación y aniquilación de la mecánica cuántica, es decir, que satisfagan las reglas usuales de conmutación de la mecánica cuántica. Así por ejemplo, en el k -ésimo plano no conmutativo, los operadores a_k y a_k^\dagger son

$$a_k = \frac{1}{2} (\hat{y}_{1k} + i\hat{y}_{2k}), \quad a_k^\dagger = \frac{1}{2} (\hat{y}_{1k} - i\hat{y}_{2k}),$$

que satisfacen las reglas canónicas de conmutación $[a_k, a_l^\dagger] = \delta_{kl}\theta_k$, además de que se satisfacen los conmutadores

$$[\hat{x}^k, \hat{x}^l] = i\theta\epsilon^{kl}, \quad [\hat{x}^k, \hat{p}_l] = i\delta_l^k \quad [\hat{p}_k, \hat{p}_l] = 0, \quad k, l = 1, 2, \quad (4.30)$$

⁸Aquí, los llamados *Estados Coherente* difieren a los usados en la Óptica.

donde \hat{p}_k es el momento conjugado. Se toman unidades $\hbar = c = 1$ y las dimensiones del parámetro no conmutativo son $[\theta] = [longitud]^2$. El momento canónico es conmutativo ya que se fija la dirección temporal [76]. Para el 2 – plano efectivo las coordenadas \hat{x}^1, \hat{x}^2 satisfacen

$$[\hat{x}^1, \hat{x}^2] = i\theta, \quad (4.31)$$

pero no tienen eigenestados en común debido a (4.31) [77]. Precisamente, en éste punto es donde se necesita introducir estados coherentes en el 2-plano no conmutativo, que al igual que en los estados coherentes de Glauber, se construyen al definir operadores que actúen en la misma forma que los operadores a y a^\dagger de la mecánica cuántica, por lo que se definen nuevos operadores dados por

$$\hat{Z} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}^1 + i\hat{x}^2), \quad \hat{Z}^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x}^1 - i\hat{x}^2),$$

que satisfacen el conmutador

$$[\hat{Z}, \hat{Z}^\dagger] = \theta.$$

En está formulación, no existen estados coherentes que sean eigenestados del operador de aniquilación, sin embargo, existen eigenestados y operadores Z y Z^\dagger que satisfacen

$$\hat{Z} | Z \rangle = z | Z \rangle, \quad \langle Z | \hat{Z}^\dagger = \langle Z | \bar{z},$$

donde los eigenvalores $z \in \mathbb{C}$, luego los estados $| Z \rangle$ son normalizados en la misma forma que (4.29), por lo tanto

$$| Z \rangle \equiv \exp\left(-\frac{z\bar{z}}{2\theta}\right) \exp\left(-\frac{z}{\theta}\hat{Z}^\dagger\right) | 0 \rangle.$$

El estado de vacío es aniquilado por \hat{Z} , esto es $\hat{Z} | 0 \rangle = 0$. Los estados $| \hat{Z} \rangle$ son estados coherentes del plano no conmutativo. En esta formulación se satisface la relación de completez

$$\frac{1}{\pi\theta} \int dz d\bar{z} | Z \rangle \langle Z | = 1,$$

y los “valores esperados” de las coordenadas no conmutativas \hat{x}^1 y \hat{x}^2 se definen como

$$\langle Z | \hat{x}^1 | Z \rangle = \sqrt{2}Re(z) = \sqrt{2}x^1, \quad \langle Z | \hat{x}^2 | Z \rangle = \sqrt{2}Im(z) = \sqrt{2}x^2, \quad (4.32)$$

por lo que el vector $\vec{x} = (x_1, x_2)$ representa la “posición media” de la partícula sobre el plano no conmutativo. Los valores medios no representan valores propios y se pueden medir simultáneamente, a pesar de la no conmutatividad de las coordenadas. Lo que significa que las ecuaciones de Einstein se resuelven en las formas ya conocidas, ya que los valores medios preservan la estructura geométrica del espacio.

4.3.3. Efectos no conmutativos

El resultado de inducir no conmutatividad a través de los estados coherentes consiste en remplazar las fuentes de campo puntuales por distribuciones gaussianas que dependen de $\theta = cte.$; además, los métodos matemáticos son exactamente los mismos que se emplean en el caso no deformado. Podemos consultar algunos resultados en ([76], [77], [78]), por ejemplo el cálculo de la función de onda en el plano no conmutativo, el cual se obtiene a partir de la onda plana $\exp i(\vec{p} \cdot \vec{q})$, donde $\vec{p} = (p_1, p_2)$ es un vector de 2-componentes tal que el valor medio de $\exp i(\vec{p} \cdot \vec{q})$ se calcula como

$$\langle Z | e^{ip_1 \hat{x}^1 + ip_2 \hat{x}^2} | Z \rangle = \exp \left(-\theta \frac{\vec{p}^2}{4} + i\vec{p} \cdot \vec{x} \right), \quad (4.33)$$

en donde se han definido las variables

$$p_- \equiv \frac{p_1 - ip_2}{2}, \quad p_+ \equiv \frac{p_1 + ip_2}{2}.$$

Introduciendo la descomposición de Backer-Campbell-Hausdorff, el resultado es

$$\langle Z | e^{ip_j \hat{x}^j} | Z \rangle = \langle Z | e^{ip_+ \hat{Z}^\dagger} e^{ip_- \hat{Z}} e^{\frac{p_- p_+}{2} [\hat{Z}^\dagger, \hat{Z}]} | Z \rangle,$$

que es el valor medio de la onda plana y es el primer paso para construir la transformada de Fourier no conmutativa. En (4.33) el vector \vec{p} es conjugado canónico a la *posición media* \vec{x} y es el *momento lineal medio*, por lo tanto, la *función de onda de una "partícula puntual libre" no relativista en el plano no conmutativo* es

$$\psi_{\vec{p}}(\vec{x}) \equiv \langle \vec{p} | \vec{x} \rangle_\theta \equiv \exp \left(-\theta \frac{\vec{p}^2}{4} + i\vec{p} \cdot \vec{x} \right), \quad (4.34)$$

en tal forma que al calcular la amplitud entre dos estados (usado en la formulación de la integral de camino de Feynman), está dada por

$$\langle \vec{y} | \vec{x} \rangle = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \langle \vec{y} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x} \rangle = \left(\frac{1}{2\pi\theta} \right) \exp \left(-\frac{(\vec{x} - \vec{y})^2}{2\theta} \right).$$

Note que ahora el resultado es una función gaussiana que depende de θ con anchura-media $\sqrt{\theta}$ (corresponde a la longitud mínima) y no una delta de Dirac. En el límite conmutativo $\theta \rightarrow 0$ recuperamos la δ de Dirac. Este resultado constituye la base para la formulación de la integral de camino no conmutativa dada en [76]. Así, partiendo de la amplitud discretizada entre dos puntos cercanos y que son de la forma (4.33), entonces se calcula

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}_{(i+1)}, \epsilon | \vec{x}_{(i)}, 0 \rangle &= \langle \vec{x}_{(i+1)} | e^{-i\epsilon H} | \vec{x}_{(i)} \rangle, \\ &= \langle \vec{x}_{(i+1)} | 1 - i\epsilon H + \mathcal{O}(\epsilon^2) | \vec{x}_{(i)} \rangle, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{d^2 p_{(i)}}{(2\pi)^2} \langle \vec{x}_{(i+1)} | \vec{p}_{(i)} \rangle \langle \vec{p}_{(i)} | \vec{x}_{(i)} \rangle e^{-i\epsilon H(\vec{x}_{(i)}, \vec{p}_{(i)})}, \\
&= \int \frac{d^2 p_{(i)}}{(2\pi)^2} e^{i(\vec{x}_{(i+1)} - \vec{x}_{(i)}) \cdot \vec{p}_{(i)}} \exp \left(-i\epsilon H(\vec{x}_{(i)}, \vec{p}_{(i)}) - \theta \frac{\vec{p}_{(i)}^2}{2} \right), \quad (4.35)
\end{aligned}$$

y realizando los cálculos usuales, el resultado que se obtiene en [76] es la versión no conmutativa de la integral de camino para el kernel de propagación

$$K_\theta(x - y; T) = N \int [D_x] [D_p] \exp \left\{ i \int_y^x \vec{p} \cdot d\vec{x} - \int_0^T d\tau \left(H(\vec{p}, \vec{x}) + \frac{\theta}{2T} \vec{p}^2 \right) \right\}, \quad (4.36)$$

donde el efecto de la no conmutatividad nuevamente se refleja por un factor gaussiano. Lo mismo ocurre si se calcula el propagador de partícula libre en el plano no conmutativo (4.34), así

$$K_\theta(x - y; T) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{2\pi m}{T + m\theta} \right) \exp \left\{ -\frac{m(\vec{x} - \vec{y})^2}{2(T + m\theta)} \right\},$$

que para un límite de tiempo corto (o nulo), el kernel de propagación es

$$K_\theta(x - y; 0) = \left(\frac{1}{2\pi\theta} \right) \exp \left\{ -\frac{(\vec{x} - \vec{y})^2}{2\theta} \right\},$$

en donde es claro que la función delta ha sido remplazada por una función gaussiana, localizada dentro de una celda de área θ en el plano no conmutativo. Así mismo, la función de Green, la cual se define por la transformada de Laplace, tiene la forma

$$G_\theta(x - y; E) \equiv \int_0^\infty dT e^{-ET} K_\theta(x - y; T) = \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} e^{i\vec{p} \cdot (\vec{x} - \vec{y})} G_\theta(E; \vec{p}^2),$$

y en el espacio de momentos la función de Green está dada por

$$G_\theta(E; \vec{p}^2) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^2 \frac{\exp(-\theta \vec{p}^2 / 2)}{E + \frac{\vec{p}^2}{2m}},$$

donde $G_\theta(E; \vec{p}^2)$ muestra un corte exponencial para los momentos. Otro ejemplo es el problema de la *función de onda de una "partícula puntual libre" relativista en el plano no conmutativo*. La versión relativista de $G_\theta(x - y; E)$ es entonces

$$G(x - y; m^2) \equiv N \int [De] [Dx] [Dp] \exp \left\{ i \int_y^x p_\mu dx^\mu - \int_0^T d\tau \left[e(\tau) (p^2 + m^2) + \frac{\theta}{2T} \vec{p}^2 \right] \right\},$$

donde, $e(\tau)$ es un multiplicador de Lagrange; así, el resultado final para el caso relativista es

$$G_\theta(x - y; m^2) = N \int_0^\infty ds e^{-sm^2} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{ip_\mu (x-y)^\mu} \exp \left\{ - (s + \theta) \frac{\vec{p}^2}{2} \right\}$$

$$\equiv \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{ip_\mu(x-y)^\mu} G_\theta(p^2; m^2),$$

donde el propagador de Feynman en el espacio de momentos está dado por

$$G_\theta(\bar{p}^2; m^2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \frac{\exp[-\theta\bar{p}^2/2]}{p^2 + m^2}.$$

Nuevamente, la no conmutatividad del espacio induce un corte exponencial en la función de Green.

Por otra parte, así como en el formalismo de Weyl-Wigner-Moyal, los estados coherentes $|Z\rangle$ son un método de aproximación semiclásica que asocia funciones reales $F(z)$ con operadores de la forma $F(\hat{x}^1, \hat{x}^2)$ del espacio plano no conmutativo, esto es

$$F(z) \equiv \langle Z | F(\hat{x}^1, \hat{x}^2) | Z \rangle,$$

por lo tanto, necesitamos definir a la transformada de Fourier no conmutativa. Para ello decimos que $F(\hat{x}^1, \hat{x}^2) = \exp(ip_j \hat{x}^j)$ corresponde a la función de onda (4.33), tal que

$$F(z) = \int \frac{d^2 p}{2\pi} f(p) \langle Z | \exp(ip_j \hat{x}^j) | Z \rangle,$$

para la cual introducimos (4.32) y usamos la descomposición Baker-Campbell-Hausdorff; el resultado que se obtiene en [77] es la versión no conmutativa de la transformada de Fourier dada por

$$F(z) = \int \frac{d^2 p}{2\pi} f(p) \exp\left[-\frac{\theta}{4}(p_1^2 + p_2^2)\right] \exp\left[+i\frac{p_1}{\sqrt{2}}(z + \bar{z}) + \frac{p_2}{\sqrt{2}}(z - \bar{z})\right], \quad (4.37)$$

en donde nuevamente aparece un factor gaussiano como efecto de la no conmutatividad. Si $f(p) = \text{const.}$, entonces se reduce a

$$F(z) = \frac{4\pi}{\theta} \exp\left(-\frac{4}{\theta}z\bar{z}\right), \quad (4.38)$$

en el límite $\theta \rightarrow 0$ se recupera la expresión de la función delta de Dirac. Básicamente, la transformada de Fourier para una onda plana es remplazada por la transformada de Fourier de un paquete de onda gaussianas. Luego, usando la forma de la ecuación de onda no conmutativa (4.33) puede encontrarse el propagador de Feynman no conmutativo para un campo escalar de la forma

$$\phi(t, z) = \sum_{E, p} [a_p^\dagger \exp(-iEt) \langle Z | \exp(ip_j \hat{x}^j) | Z \rangle + h.c.],$$

con los operadores a_p^\dagger de creación y a_p de aniquilación, usuales en el espacio de Fock con estados de energía y momento definidos; dado que el momento conmuta consigo mismo,

estos serán los mismos. Por lo tanto, la versión no conmutativa del propagador de Feynman que se obtiene en [77] es

$$\begin{aligned} G(t_1 - t_2, z_1 - z_2) &= \langle \vec{p} = 0 | T[\phi(t_1, z_1)\phi(t_2, z_2)] | \vec{p} = 0 \rangle, \\ &= \int \frac{dE}{\sqrt{2\pi}} \exp[-iE(t_1 - t_2)] \int \frac{d^2p}{2\pi} G(E, \vec{p}) \times \\ &\quad \exp\left[i\frac{p_1}{\sqrt{2}}(z_1 + \bar{z}_1 - z_2 - \bar{z}_2) + \frac{p_2}{\sqrt{2}}(z_1 - \bar{z}_1 - z_2 + \bar{z}_2)\right], \end{aligned}$$

donde el propagador en el espacio de momentos está dado por la expresión

$$G(E, \vec{p}^2) \equiv \frac{1}{-E^2 + \vec{p}^2 + m^2} \exp\left(-\frac{\theta}{2}\vec{p}^2\right). \quad (4.39)$$

Note que se observa un cut-off UV dado por θ , lo cual es un efecto de la no conmutatividad. Por lo tanto, la modificación de la transformada de Fourier se reduce a la definición del valor medio de estados coherentes, así, la función de Green del propagador de Feynman es

$$\begin{aligned} [-\partial_t^2 + \partial_{z_1}\partial_{\bar{z}_1} + m^2] G(t_1 - t_2, z_1 - z_2) &= \delta(t_1 - t_2) \times \\ \frac{2\pi}{\theta} \exp\left[-\frac{1}{4\theta}(z_1 + \bar{z}_1 - z_2 - \bar{z}_2)^2 + \frac{1}{4\theta}(z_1 - \bar{z}_1 - z_2 + \bar{z}_2)^2\right]. \end{aligned}$$

La función delta de Dirac es remplazada por una función gaussiana como efecto de la no conmutatividad. En el límite $\theta \rightarrow 0$ recuperamos las expresiones no deformadas (conmutativas). En estas deducciones, las soluciones son reguladas por θ .

4.4. Soluciones asintóticamente de agujero negro

En esta parte analizamos la solución Einstein-Maxwell en el formalismo de los estados coherentes inspirados por no conmutatividad, la solución es asintóticamente Reissner-Nordström que para carga eléctrica nula es Schwarzschild. Básicamente, se resuelven las ecuaciones de Einstein con simetría esférica y estática (1.12-1.14) y, solamente se modifica el tensor $T_{\mu\nu}$ ya que las fuentes de campo puntuales son remplazadas por perfiles gaussianos⁹ de masa y carga eléctrica regulados por θ ([49], [78], [79]). Así, para el caso $d = 3$ tenemos que

$$\delta \rightarrow \rho_\theta(r) = \frac{M}{(4\pi\theta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\theta}\right), \quad (4.40)$$

$$e\delta \rightarrow \rho_{\theta el.}(r) = \frac{e}{(4\pi\theta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\theta}\right), \quad (4.41)$$

⁹Las fuentes de campo no conmutativas están localizadas en una región de tamaño $\sqrt{\theta}$ debido a $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta$

y el *tensor de energía-momento no conmutativo* \mathfrak{T}_ν^μ tiene la forma [62] $\mathfrak{T}_0^0 = \mathfrak{T}_r^r$ y $\mathfrak{T}_{\theta_1}^{\theta_1} = \mathfrak{T}_{\theta_2}^{\theta_2}$, esto es

$$\mathfrak{T}_\nu^\mu = \text{diag}(-\rho_\theta, p_r, p_\perp, p_\perp), \quad (4.42)$$

que satisface la ecuación de covarianza $\mathfrak{T}_{;\nu}^{\mu\nu} = 0$ y las ecuaciones de estado son modificadas a

$$p_r = -\rho_\theta, \quad y \quad p_\perp = -\rho_\theta - \frac{r}{2} \partial_r \rho_\theta(r). \quad (4.43)$$

En $\theta \rightarrow 0$ recuperamos el tensor convencional de fluido perfecto. La densidad de materia ρ_θ (o carga) (4.40) ahora está regulada por el parámetro θ en $r = 0$, como se ve

- en $r \ll \sqrt{\theta}$ (cerca del origen), $\frac{d\rho_\theta}{dr} \simeq 0 \Rightarrow \rho_\theta \simeq \rho_\theta(0)$,
- en $r \geq 4\sqrt{\theta}$, $\frac{d\rho_\theta}{dr} \simeq 0 \Rightarrow \rho_\theta \simeq \text{const.} \ll \rho_\theta(0)$,
- asintóticamente, en $r \gg 2M$, $\rho_\theta = 0$.

En consecuencia, el parámetro θ también regula al potencial gravitacional en el origen $\phi(r=0) = -G_N \frac{M}{\sqrt{\pi(2\theta)}} [59]$.

4.4.1. Solución asintóticamente Reissner-Nordström

La parte geométrica de las ecuaciones de campo se resuelve en la misma forma que en la sección 2.2.1, pero el tensor definido por los campos \mathfrak{T}_μ^ν dependerá de los perfiles gaussianos de masa $\rho_\theta(r) = \frac{m_0}{(4\pi\theta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\theta}\right)$ (4.40) y carga eléctrica $\rho_e(r) = \frac{Q}{(4\pi\theta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{r^2}{4\theta}\right)$ (4.41), así, la ecuación de movimiento (2.29) se modifica en la siguiente forma

$$J^\nu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}),$$

que para el caso de un campo puramente radial con $F^{\mu\nu} = \delta^{0[\mu} \delta^{r|\nu]} E(r)$, se reduce a

$$J^\mu(x) = \rho_e(x) \delta_0^\mu,$$

para el cual el campo eléctrico es regulado por θ en el origen como se aprecia en la expresión

$$E(r) = \frac{2Q}{\sqrt{\pi} r^2} \gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\theta}\right). \quad (4.44)$$

En la figura (4.1) se muestra el comportamiento de E , depende de θ para que sea regular en $r = 0$. Por lo tanto basándonos en [79], se resuelven las ecuaciones de Einstein con simetría esférica y estática (1.10) y (1.12)-(1.14) para el caso $d = 3$, lo que da la solución métrica

$$e^{2\mu(r)} = 1 - \frac{2m(r)}{r} + \frac{Q^2}{\pi r^2} \left[\gamma^2\left(\frac{1}{2}; \frac{r^2}{4\theta}\right) - \frac{r}{\sqrt{2\theta}} \gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{r^2}{4\theta}\right) \right], \quad (4.45)$$

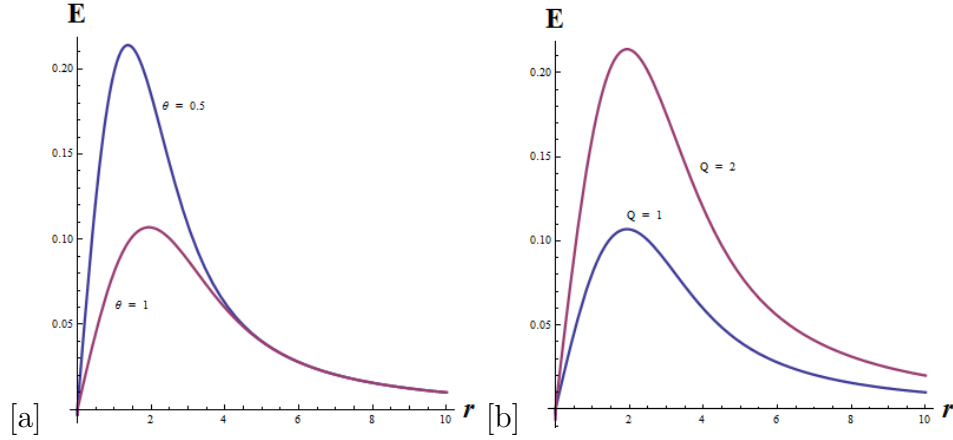


Figura 4.1: Campo eléctrico E no conmutativo (4.44). En (a) la carga fija es $Q = 1$ y el parámetro de no conmutatividad es $\theta = 0.5, 1$. En (b) $\theta = 1$, carga $Q = 1, Q = 2$.

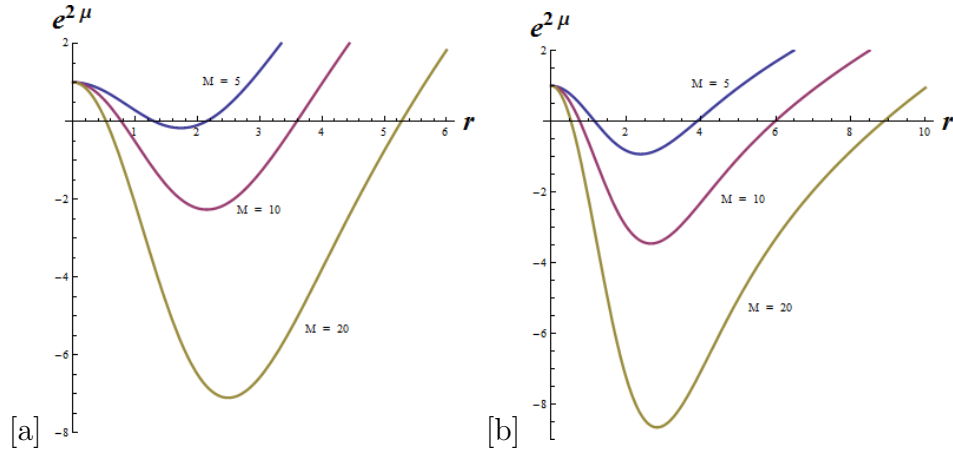


Figura 4.2: Horizontes de eventos en Reissner-Nordström no conmutativo con carga fija $Q = 1$ y $M = 5, 10, 20$, en (a) $\theta = 1$ y en (b) $\theta = 10$.

donde el parámetro de masa es

$$m(r) = \frac{2m_0}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\theta}\right).$$

En el límite $r \rightarrow \infty$ en $m(r)$ tenemos la masa total del agujero negro y, γ es la función gamma incompleta por abajo definida por

$$\gamma\left(\frac{a}{b}; x\right) \equiv \int_0^x \frac{du}{u} u^{a/b} e^{-u}.$$

Para r pequeña el parámetro de masa es finito y la métrica (4.45) tiene la forma de de Sitter como se ve de

$$e^{2\mu(r)} = 1 - \frac{m_0}{3\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} r^2 + \mathcal{O}(r^4),$$

por lo que puede decirse que el parámetro de no conmutatividad θ puede ser relacionado con la constante cosmológica Λ . Por otra parte, la masa total puede calcularse a partir de la integral de flujo de \mathfrak{T}_ν^0 , esto es

$$M = \oint_{\Sigma} d\sigma^\mu (\mathfrak{T}_\nu^0 |_{\text{matt.}} + \mathfrak{T}_\nu^0 |_{\text{el.}}),$$

que para $t = \text{cte.}$ se integra sobre una 3-superficie Σ . Finalmente, la solución asintóticamente Reissner-Nordström en función de la masa ADM es

$$e^{2\mu(r)} = 1 - \frac{4M}{\sqrt{\pi}r} \gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\theta}\right) + \frac{Q^2}{\pi r^2} \left[\gamma^2\left(\frac{1}{2}; \frac{r^2}{4\theta}\right) - \frac{r}{\sqrt{2\theta}} \gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{r^2}{4\theta}\right) \right] + \sqrt{\frac{2}{\theta}} r \gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r^2}{4\theta}\right), \quad (4.46)$$

y los horizontes de eventos se obtienen de $e^{2\mu(r)} = 0$, que en este caso hay uno interno r_- y otro externo r_+ . El comportamiento de r_- es que decrece con la masa mientras que r_+ incrementa con la masa. Al calcular la masa total M en el horizontes de eventos r_+ tenemos

$$M = \frac{Q^2}{2\sqrt{2\pi}\theta} + \frac{1}{\gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r_+^2}{4\theta}\right)} \left[\frac{\sqrt{\pi}}{4} r_+ + \frac{Q^2}{4\sqrt{\pi}r_+} \left[\gamma^2\left(\frac{1}{2}; \frac{r_+^2}{4\theta}\right) - \frac{r_+}{\sqrt{2\theta}} \gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{r_+^2}{4\theta}\right) \right] \right],$$

de donde si M_0 es la masa de un agujero negro extremo y representa el estado final, y entonces el proceso final de la evaporación de Hawking, entonces

- para el valor $M > M_0$ hay dos horizontes de eventos,
- en $M = M_0$ es un horizonte degenerado,
- en $M < M_0$ no hay horizonte (figura 4.2).

Una consecuencia es que la energía del campo eléctrico incrementa la masa total y el valor mínimo de masa M_0 se obtiene en el caso $Q = 0$ en $m(r)$. Con esto se puede calcular la *temperatura de Hawking* como $T = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} [e^{2\mu(r)}] |_{r_+}$ en función del parámetro θ y el horizonte de eventos externo como

$$4\pi T = \frac{1}{r_+} \left[1 - r_+ \frac{\gamma'\left(\frac{3}{2}; \frac{r_+^2}{4\theta}\right)}{\gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r_+^2}{4\theta}\right)} \right] - \frac{16GQ^2}{r_+^3} \left[\gamma^2\left(\frac{3}{2}; \frac{r_+^2}{4\theta}\right) + \frac{r_+}{4} \left[\gamma^2\left(\frac{1}{2}; \frac{r_+^2}{4\theta}\right) - \frac{r_+}{\sqrt{2\theta}} \gamma\left(\frac{1}{2}; \frac{r_+^2}{4\theta}\right) \right] \frac{\gamma'\left(\frac{3}{2}; \frac{r_+^2}{4\theta}\right)}{\gamma\left(\frac{3}{2}; \frac{r_+^2}{4\theta}\right)} \right]. \quad (4.47)$$

En consecuencia puede concluirse que las cantidades de masa y temperatura, evaluadas en el horizonte de eventos r_+ , son reguladas por θ . En la figura (4.3) se muestra el comportamiento de T .

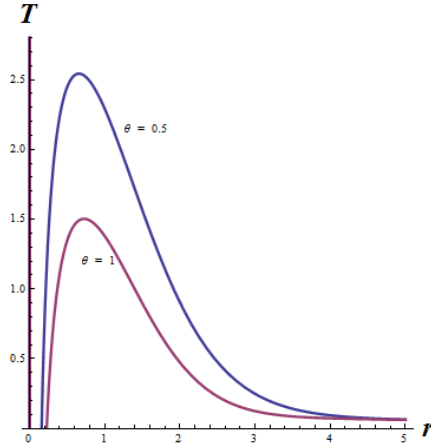


Figura 4.3: Temperatura del agujero negro de Reissner-Nordström no conmutativo con carga fija $Q = 1$ y $\theta = 0.5, 1$.

4.4.2. Solución asintóticamente Schwarzschild

La solución métrica para este caso se obtiene de (4.46) para el caso de carga nula. Por otra parte, de la ley de conservación covariante $\mathfrak{T}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ se tiene que

$$\partial_r \mathfrak{T}^r_r = -\frac{1}{2} e^{2\mu(r)} \partial_r e^{2\mu(r)} (\mathfrak{T}^r_r - \mathfrak{T}^0_0) - g^{\theta_1\theta_1} \partial_r g_{\theta_1\theta_1} (\mathfrak{T}^r_r - \mathfrak{T}^{\theta_1}_{\theta_1}),$$

en donde $\mathfrak{T}^r_r = \mathfrak{T}^0_0 = -\rho_\theta(r)$ y $\mathfrak{T}^{\theta_1}_{\theta_1} = p_\perp$ para el caso anisotrópico, por lo tanto la ecuación de estado para la presión tangencial ahora es

$$p_\perp = -\rho_\theta - \frac{r}{2} \partial_r \rho_\theta(r).$$

Finalmente, la solución asintóticamente Schwarzschild ([79], [81]) que se obtiene es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta} \right) \right) dt^2 + \left(1 - \frac{4M}{r\sqrt{\pi}} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta} \right) \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta_1^2 + \sin^2 \theta_1 d\theta_2^2), \quad (4.48)$$

donde $\gamma(3/2, r^2/4\theta)$ es la función gamma incompleta por abajo

$$\gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta} \right) \equiv \int_0^{\frac{r^2}{4\theta}} dt t^{1/2} e^{-t},$$

y el parámetro θ representa una longitud mínima relacionada al radio de Sitter que evita el colapso gravitacional. Para $r \lesssim \theta$ las cantidades ρ_θ , p_r y p_\perp son reguladas por θ , mientras que en $r/\sqrt{\theta} \rightarrow +\infty$ se anulan y la métrica (4.48) es asintóticamente Schwarzschild. Por otra parte, el parámetro de masa se obtiene de (4.40), es decir, integrando directamente \mathfrak{T}^0_0 sobre la superficie de la S^2 , en tal forma que el parámetro de masa es

$m(r) = 2M\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)/\sqrt{\pi}$, donde M representa la masa total de la fuente, mientras que los horizontes de eventos r_H están ubicados en $e^{2\mu(r)} = 0$, de lo que resulta

$$r_H = \frac{4M}{\sqrt{\pi}}\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\theta}\right), \quad (4.49)$$

a partir de la cual no es posible despejar la variable r_H que define a los horizontes de eventos, sin embargo podemos hacer la gráfica de la función (4.49) para ubicar la localización de los horizontes de eventos tal como se observa en la figura (4.4), por otra parte, como r_H es ahora función de M debemos considerar los siguientes casos:

- para $M > M_0$ hay dos horizontes ubicados en $r_+ = 6.00\sqrt{\theta}$ y $r_- = 1.60\sqrt{\theta}$,
- para $M = M_0$ (caso extremo): hay un horizonte degenerado en $r_0 = 3.0\sqrt{\theta}$,
- para $M < M_0$ no hay horizonte de eventos.

Existe entonces un límite de masa mínima $M = M_0 = 1.9\sqrt{\theta}/G$ para que la solución sea de agujero negro, ya que en $M < M_0$ no hay solución tipo agujero negro sino una singularidad desnuda. Asintóticamente en $M \gg M_0$, el horizonte interno r_- se contrae al origen $r = 0$ y el horizonte externo r_+ se aproxima al valor de Schwarzschild $r_+ = r_H = 2M$. Si ahora se reescribe la función $\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \Gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)$, entonces la expresión (4.49) es ahora

$$r_H = 2M \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{M^2}{\theta}\right) \right], \quad (4.50)$$

donde es claro que el primer término corresponde al radio de Schwarzschild, mientras que el segundo término son correcciones en θ , el cual puede ser identificado o relacionado al núcleo de Sitter. Si se toma en cuenta que para el régimen $r_H^2/4\theta \gg 1$ se tiene que

$$\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \Big|_{\frac{r^2}{4\theta} \gg 1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \Gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \Big|_{\frac{r^2}{4\theta} \gg 1} \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{2} \frac{r}{\sqrt{\theta}} e^{-r^2/4\theta},$$

entonces, a primer orden en $M/\sqrt{\theta}$ la forma del horizonte (4.50) es

$$r_H = 2M \left(1 - \frac{M}{\sqrt{\pi\theta}} e^{-\frac{M^2}{\theta}} \right).$$

En la figura (4.4) se muestra el comportamiento regular del coeficiente métrico $e^{2\mu(r)}$ como consecuencia de la no conmutatividad, para distintos valores de M . Por otra parte, para $r/\sqrt{\theta} \rightarrow +\infty$ es Schwarzschild, mientras que en $r_H \simeq \sqrt{\theta}$ hay efectos cuánticos.

El efecto de la no conmutatividad en la expresión métrica (4.48) hace que sea regular en el origen, como lo muestra el *escalar de curvatura*

$$R(0) = \frac{4M}{\sqrt{\pi\theta^{3/2}}},$$

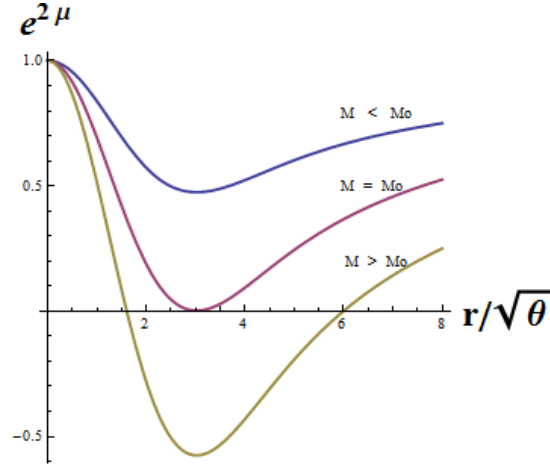


Figura 4.4: Los horizontes de eventos se localizan en $e^{2\mu(r)} = 0$ para Schwarzschild no conmutativo.

la cual es regulada por el parámetro θ , ya que es constante y positiva en $r \ll \sqrt{\theta}$, lo que significa que al igual que para las soluciones en el espacio anti-de Sitter, una singularidad desnuda es remplazada por una geometría regular de Sitter donde ahora es evidente que $\Lambda = M/3\sqrt{\pi}\theta^{3/2}$, en otras palabras, hay una presión radial interna en el núcleo regular de Sitter debido a Λ que evita el colapso gravitacional.

Si ahora se calcula la temperatura de Hawking, evaluada en el radio del horizonte de eventos externo r_+ ([79], [80], [81]), se observa que ahora depende de θ , como se ve de

$$T \equiv \frac{1}{4\pi} \left[\frac{\partial e^{2\mu(r)}}{\partial r} \right]_{r=r_+} = \frac{1}{4\pi r_+} \left[1 - \frac{r_+^3}{4\theta^{3/2}} \frac{e^{-r_+^2/4\theta}}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right)} \right], \quad (4.51)$$

donde la función de masa es

$$M^{-1} = \frac{4}{r_+ \sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_+^2}{4\theta}\right). \quad (4.52)$$

Ya que la temperatura depende del parámetro M , entonces se consideran los siguientes casos

- para $r_+ \simeq \sqrt{\theta}$, T alcanza un máximo en $r_+ \simeq 4.7\sqrt{\theta}$ que corresponde a $M \approx 2.4\sqrt{\theta}/G_N$, y luego decae a cero en $r_+ = r_0 = 3.0\sqrt{\theta}$ (radio del agujero negro extremo),
- en $M \gg M_0$, T alcanza un máximo en $r_+ \simeq 2.4\sqrt{\theta}$ y decae en $M \rightarrow M_0$.
- en $M = M_0$, $T_H = 0$ y el horizonte de eventos es degenerado.

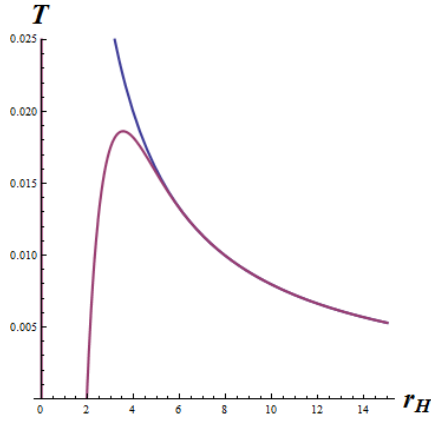


Figura 4.5: Comportamiento de la función de temperatura (4.51) en Schwarzschild no conmutativo. Alcanza su máximo en $T \approx 0.015(1/\sqrt{\theta})$ para un valor de masa $M \approx 2.4\sqrt{\theta}$ y, su mínimo en $T = 0$ se ubica en $r_+ = 3.0\sqrt{\theta}$ y corresponde al caso extremo. La línea superior corresponde a Schwarzschild conmutativo.

Para el caso clásico $r_+^2/4\theta \gg 1$ la temperatura es $T = \frac{1}{4\pi r_+}$. En la figura (4.5) se muestra el comportamiento de la temperatura y se compara con el caso no deformado (conmutativo). Podemos ver entonces, que el efecto de la no conmutatividad hace que la masa y la temperatura tengan un comportamiento regular debido al parámetro θ . En lo que resta de este trabajo analizamos los efectos no conmutativos en los espacios-tiempo de Einstein-Proca no conmutativo y Einstein-Born-Infeld-anti-de Sitter no conmutativo en dimensión arbitraria, en ambos casos se induce la no conmutatividad a través del formalismo de los estados coherentes inspirados por no conmutatividad.

5

Espacio-tiempo de Einstein-Proca no conmutativo

En la naturaleza los mediadores de las interacciones fundamentales para la fuerza eléctrica, débil y fuerte son los vectores de bosones, mientras que para la fuerza gravitacional es el tensor de bosones [82]. De estas, la fuerza electromagnética es descrita por la teoría de Maxwell la cual tiene la propiedad de ser invariante de gauge con dos grados de libertad que corresponden a los estados transversos de la onda electromagnética (grados de polarización), donde el causante de la interacción es el fotón (de masa $m = 0$), pero ¿qué ocurre si $m \neq 0$?, en 1934 Proca desarrolló una extensión a la teoría de Maxwell a la que agrego un término de masa que rompe la simetría que hace que ya no sea un invariante de gauge (fotón masivo), en consecuencia la condición de Lorentz es una restricción del campo vectorial, además de que ahora aparecerá otro grado de libertad que corresponde al estado longitudinal de la partícula. El resultado es que la ecuación de Proca es una ecuación de onda relativista para una partícula de espín-1 de un campo vectorial masivo real, que describe la interacción débil donde el mediador es un vector de boson y, se establecen rangos \pm de energía y carga, así como de espín entero $s \neq 0$ (finito). Por mencionar, otras ecuaciones de onda relativista son la ecuación de Klein-Gordon (para $m \neq 0$ y espín-0), de Dirac ($m \neq 0$ y espín 1/2), de Maxwell ($m = 0$ y espín-1), etc. El lagrangiano de Proca se define como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu - j_\mu A^\mu, \quad (5.1)$$

donde el tensor de Faraday $F^{\mu\nu}$ depende de A^μ que es el 4-potencial y j_μ es la densidad de corriente. De aquí que al variar la acción se tiene que las ecuaciones de campo de Proca

resultantes son

$$A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) + m^2 A^\nu = j^\nu, \quad (5.2)$$

de donde para $m = 0$ se recuperan las ecuaciones de Maxwell. Cuando se acopla el campo de Proca con gravedad, la solución de este modelo con métrica esféricamente simétrica y estática (1.9) para dimensión $d = 3$, describe un campo vectorial masivo ϱ de espín-1 donde las ecuaciones a resolver son ecuaciones de onda altamente no lineales que se resuelven a través de la teoría de perturbaciones, dando como resultado un espectro de masas que a primer orden con $\varrho \rightarrow 0$ se reduce a la solución Reissner-Nordström. Sin embargo, la solución presenta una contribución asociada al campo de Proca que impide la formación del horizonte de eventos y se genera una singularidad desnuda [83]. Por otra parte, a la fuerza de interacción se le conoce como interacción de Proca¹ por lo que a la carga de la fuerza se le denomina carga de Proca. Tenemos entonces que la densidad lagrangiana de Proca es

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} (\alpha F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \beta A_\mu A^\mu), \quad (5.3)$$

donde $g = \det[g_{\mu\nu}]$ y las ecuaciones de campo (5.2) son ahora $\partial_\mu F^{\mu\nu} + \varrho^2 A^\nu = 0$ con $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu A_\nu - \nabla_\nu A_\mu$, con la constante $\frac{\beta}{2\alpha} = -\varrho^2$, por lo tanto, la ecuación de Proca se escribe

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) - \frac{\beta}{2\alpha} A^\nu = 0.$$

Mientras que el tensor de energía momento de Proca se calcula a partir de la variación

$$T_{\mu\nu} = -\frac{\alpha_M}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (5.4)$$

la constante α_M es un parámetro que indica que tan fuertemente el tensor de energía-momento contribuye a la fuerza gravitacional. Específicamente tenemos la expresión

$$T_{\mu\nu} = 2\alpha F_\mu^\rho F_{\nu\rho} + \beta A_\mu A_\nu - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\alpha F_{\sigma\rho} F^{\sigma\rho} + \beta A_\sigma A^\sigma),$$

el cual no tiene traza y como $F_{10} = A'_0 = -F_{01}$ por la simetría, escribimos al tensor de energía momento de Proca en forma explícita como

$$T_{\mu\nu} = \alpha A_0^2 \begin{pmatrix} -e^{-2\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2\mu(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 e^{-2\nu(r)-2\mu(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta e^{-2\nu(r)-2\mu(r)} \end{pmatrix} \\ + \frac{\beta A_0^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\nu(r)-2\mu(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 e^{-2\mu(r)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta e^{-2\mu(r)} \end{pmatrix}.$$

¹La fuerza generada por la carga se refiere a la carga de Proca. En el modelo de Proca los cúmulos de carga de Proca no se cancelan entre sí, por lo tanto hay una contribución al campo gravitacional debido al campo de Proca.

Luego se resuelven las ecuaciones de Einstein-Proca usando métodos perturbativos, nuestro trabajo se basa en el método empleado en [83] el cual puede consultarse para entender los detalles. Básicamente consiste en calcular la ecuación de continuidad y por otra parte escribir la componente R_{00} como una función de ν , para luego realizar el cambio de variable $e^\nu = f$ (coeficiente métrico 00) en ambas ecuaciones, de donde se define $\alpha = -\frac{\epsilon_0}{2}$ y $\beta = \rho^2 \epsilon_0$. Aquí la constante ϵ_0 actúa como la permitividad eléctrica, pero en este caso para el campo de Proca, además, se define $\epsilon = \kappa \frac{q^2 \varrho^2}{\epsilon_0}$ donde q se refiere a la carga de Proca. Por otra parte se definen los parámetros $x \equiv \varrho r$ (adimensional) para la coordenada r y $A_0 \equiv su$ para el potencial, en las cuales se realiza una expansión de la forma

$$f = f_0 + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots, \quad (5.5)$$

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots, \quad (5.6)$$

y luego son remplazadas en las ecuaciones de campo. Por lo tanto, a orden cero se tiene el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\left(f_0'' + \frac{2}{x} f_0' \right) f_0^2 = 0, \quad (5.7)$$

$$\left(u_0'' + \frac{2}{x} u_0' \right) f_0^2 = u_0 f_0 (f_0 + x f_0'), \quad (5.8)$$

donde la primera (5.7) tiene la solución

$$f_0 = a + \frac{b}{x}.$$

Luego se hace la expansión a primer orden, la cual da correcciones a la métrica, por lo que la solución que se obtiene de resolver el sistema de ecuaciones a orden cero en conjunto con el sistema de ecuaciones resultantes a primer orden es

$$e^{2\nu(r)} = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q}{\epsilon_0} \left(\frac{e^{-2\varrho r}}{r^2} + \varrho^2 \int_r^\infty \frac{e^{-2\varrho r}}{r^2} dr \right), \quad (5.9)$$

donde el término entre paréntesis es la solución particular que se obtiene a primer orden. En el límite $\varrho \rightarrow 0$ la solución corresponde a un rango infinito para el vector potencial, de donde se recupera la solución Reissner-Nordström. Note que hay una contribución al campo gravitacional que proviene de la energía clásica total de los campo, lo que implica la presencia de una singularidad desnuda.

5.1. Einstein-Proca no conmutativo

El espacio-tiempo Einstein-Proca no conmutativo en $(3 + 1)$ – *dimensiones* es la primera de las soluciones gravitacionales que analizamos en este trabajo. Aquí, resolvemos el espacio-tiempo con la métrica

$$ds^2 = e^{\nu(r)} dt^2 - e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (5.10)$$

y empleamos el formalismo de los estados coherentes inspirados por no conmutatividad como se estableció en la sección (4.3), en donde aprendimos que la parte geométrica de las ecuaciones de Einstein corresponde a los valores esperados de los operadores de posición y básicamente se comportan como coordenadas del espacio tiempo, mientras que para el tensor de energía momento generado por las fuentes que producen los campos sufre cambios relevantes, ya que las fuentes puntuales de campo que lo definen son remplazadas por perfiles gaussianos de masa (4.40) y carga (4.41) los cuales son regulados por el parámetro de no conmutatividad θ [84], llegando a la conclusión de que las ecuaciones se resuelven a través de los mismos métodos matemáticos empleados para el caso conmutativo. Por lo tanto, se resuelven las ecuaciones de campo usando la teoría de perturbaciones tal como en ([83]). De esta manera, se define entonces al tensor no conmutativo \mathfrak{T}_μ^ν como

$$(\mathfrak{T}_{nc})_\nu^\mu |_{materia} = \text{diag}(h_1, h_1, h_3, h_3), \quad h_3 := h_1 + \frac{1}{2}x\partial_x h_1,$$

en donde la función h_1 sólo depende del parámetro no conmutativo θ como se ve de

$$h_1 := -\rho_m = -\frac{M}{(4\pi\theta)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{r^2}{4\theta}},$$

físicamente podemos pensar en que ahora la fuente de campo gravitacional está contenida en una celda de tamaño θ , que en el límite $\theta \rightarrow 0$ el término de materia ρ_m corresponderá a una fuente de campo gravitacional puntual localizada en el origen. El tensor satisface la ecuación de continuidad $\nabla_\mu (T_{nc})^{\mu\nu} = 0$, de donde se obtiene

$$(\mathfrak{T}_{nc})_\nu^\mu |_{eléctrico} = 2\alpha F_\mu^\delta F_{\nu\delta} + \beta A_\mu A_\nu - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} (\alpha F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} + \beta A_\rho A^\rho),$$

con A_μ el 4-potencial electromagnético, $F_{\mu\nu} := \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, por lo tanto se tiene

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu (\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) - \frac{\beta}{2\alpha}A^\nu = \frac{1}{4\alpha}J_{nc}^\nu,$$

en donde J_{nc}^μ define un flujo de corriente no conmutativo ya que

$$J_{nc}^\mu = \left(g_1, \vec{0} \right), \quad g_1 := \rho_e = \frac{Q}{(4\pi\theta)^{\frac{3}{2}}}e^{-\frac{r^2}{4\theta}},$$

para la cual ρ_e es una distribución gaussiana de carga eléctrica (4.41). Para resolver las ecuaciones de campo tomamos $A^\mu = (A_0, 0, 0, 0)$ e introducimos las parametrizaciones

$$\alpha = -\frac{1}{2}\epsilon_0, \quad \beta = \varrho^2\epsilon_0, \quad s = \frac{q\varrho}{\epsilon_0},$$

junto con las variables dimensionales de posición r y de campo eléctrico u ;

$$x \equiv \varrho r, \quad A_0 \equiv su.$$

Lo que sigue es realizar expansiones en serie, de donde para h_1 , h_3 y g_1 se define el parámetro

$$\epsilon = \kappa \frac{q^2 \varrho^2}{\epsilon_0},$$

que consideramos muy pequeño. El primer paso consiste en desarrollar las expansiones de las ecuaciones de campo a orden cero, lo que nos deja el conjunto de ecuaciones

$$-\frac{1}{x^2} + \frac{e^{-\nu_0}}{x^2} - \frac{e^{-\nu_0 \kappa h_1}}{\varrho^2} - \frac{\nu'_0}{x} = 0, \quad (5.11)$$

$$-\frac{\kappa h_3 e^{-\nu_0}}{\varrho^2} - \frac{\nu'_0}{x} - \frac{1}{2} \nu_0'^2 - \frac{1}{2} \nu_0'' = 0, \quad (5.12)$$

$$-\frac{g_1}{2s\varrho^2\epsilon_0} - e^{-\nu_0} u_0 + 2 \frac{u_0'}{x} + u_0'' = 0 \quad (5.13)$$

las cuales describen el campo gravitacional de una distribución de masa con carga eléctrica definida en el espacio-tiempo no conmutativo, la derivada es $\prime = d/dr$. Como segundo paso desarrollamos ahora a primer orden en ϵ , obteniéndose así el conjunto de ecuaciones

$$-\frac{1}{2} e^{-2\nu_0} u_0^2 + \frac{e^{-\nu_0} \lambda_1}{x^2} - \frac{\kappa h_1 e^{-\nu_0} \lambda_1}{\varrho^2} - \frac{1}{2} e^{-\nu_0} u_0'^2 + \frac{\lambda_1'}{x} = 0, \quad (5.14)$$

$$\frac{1}{2} e^{-2\nu_0} u_0^2 + \frac{e^{-\nu_0} \lambda_1}{x^2} - \frac{\kappa h_1 e^{-\nu_0} \lambda_1}{\varrho^2} - \frac{1}{2} e^{-\nu_0} u_0'^2 + \frac{\nu_1'}{x} = 0, \quad (5.15)$$

$$\frac{1}{2} e^{-2\nu_0} u_0^2 - \frac{\kappa h_3 e^{-\nu_0} \lambda_1}{\varrho^2} + \frac{1}{2} e^{-\nu_0} u_0'^2 + \frac{\lambda_1'}{2x} + \frac{1}{4} \lambda_1' \nu_0' - \frac{\nu_1'}{2x} - \frac{3}{4} \nu_1' \nu_0' - \frac{1}{2} \nu_1'' = 0, \quad (5.16)$$

$$e^{-\nu_0} u_1 - \frac{g_1 \lambda_1}{2s\varrho^2\epsilon_0} - e^{-\nu_0} u_0 \lambda_1 - \frac{g_1 \nu_1}{2s\varrho^2\epsilon_0} + 2 \frac{u_1'}{x} + \frac{1}{2} \lambda_1' u_0' - \frac{1}{2} \nu_1' u_0' + u_1'' = 0. \quad (5.17)$$

Solución de las ecuaciones de campo: Primero resolvemos a orden cero en ϵ para (5.11) - (5.13), donde multiplicamos (5.11) por $-x^2 e^{\nu_0}$, e integramos directamente en tal forma que el coeficiente métrico e^ν tiene solución

$$e^{\nu_0} = 1 + \frac{b}{x} - \frac{\kappa}{\varrho^2} \int_0^x z^2 h_1(z) dz,$$

para la cual sí b es una constante de integración que pedimos sea $b = 0$, entonces existen soluciones regulares en $x = 0$. Al sustituir h_1 obtenemos en la expresión anterior se tiene

$$e^{\nu_0} = 1 - \frac{\kappa \varrho M}{2\pi^{3/2} x} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{x^2}{4\varrho^2 \theta} \right), \quad (5.18)$$

la función gamma incompleta por debajo γ define un límite diferente de cero

$$\gamma(n, z) := \int_0^z t^{n-1/2} e^{-t} dt.$$

Por otra parte, de la ecuación 5.13 encontramos el potencial $u_0(x)$, en el cual (5.18) se interpreta como una corrección en el espacio de Minkowski, esto es

$$e^{\nu_0} = 1 + \epsilon(x),$$

que al comparar con (5.18), se identifica

$$\epsilon(x) = -\frac{\kappa \varrho M}{2\pi^{3/2}} \frac{1}{x} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{x^2}{4\varrho^2\theta}\right),$$

la cual representa una pequeña perturbación que puede tomarse como cero y $e^{\nu_0} = 1$, de tal forma que (5.13) se reduce a

$$-\frac{g_1}{2s\varrho^2\epsilon_0} - u_0 + 2\frac{u_0'}{x} + u_0'' = 0,$$

que tiene solución homogénea en $y_0 = e^{-x}/x$ y $y_1 = e^x/x$ y, la variación de algoritmo de parámetros nos da la solución

$$u_0 = c_0 y_0 + c_1 y_1 - y_0 \int_0^x dz \frac{y_1(z)}{W(y_0, y_1)(z)} \frac{g_1}{2s\varrho^2\epsilon_0} + y_1 \int_0^x dz \frac{y_0(z)}{W(y_0, y_1)(z)} \frac{g_1}{2s\varrho^2\epsilon_0},$$

donde $W(y_0, y_1) = 2/z^2$ es el Wronskiano de y_0 y y_1 . Note que para $y_1 = e^x/x$ hay divergencia en $x \rightarrow \infty$, sin embargo del último término vemos que

$$e^{\varrho^2\theta} \int_0^x dz z e^{-(z+2\varrho^2\theta)^2/4\varrho^2\theta},$$

de esta forma elegimos

$$c_1 = -e^{\varrho^2\theta} \int_0^\infty dz z e^{-(z+2\varrho^2\theta)^2/4\varrho^2\theta},$$

para regular la solución en ∞ ya que $c_1 y_1$ converge en $x \rightarrow \infty$, luego al agrupar $c_1 y_1$ con el cuarto término y $c_0 y_0$ con el tercer término, aparecen funciones gamma incompletas por arriba y por abajo respectivamente. Finalmente, la solución para el potencial u_0 es

$$u_0(x) = c_0 \frac{e^{-x}}{x} - \frac{Q}{(4\pi\theta)^{3/2}} \frac{e^{\varrho^2\theta}}{4s\varrho^2\epsilon_0} \times 2\varrho^2\theta \tilde{u}_0(x) \quad (5.19)$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned} \tilde{u}_0(x) = & \frac{e^{-x}}{x} \left\{ \gamma \left[1, \frac{(x-2a)^2}{4a} \right] + \sqrt{a} \gamma \left[\frac{1}{2}, \frac{(x-2a)^2}{4a} \right] \right\} \\ & + \frac{e^x}{x} \left\{ \Gamma \left[1, \frac{(x+2a)^2}{4a} \right] - \sqrt{a} \Gamma \left[\frac{1}{2}, \frac{(x+2a)^2}{4a} \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.20)$$

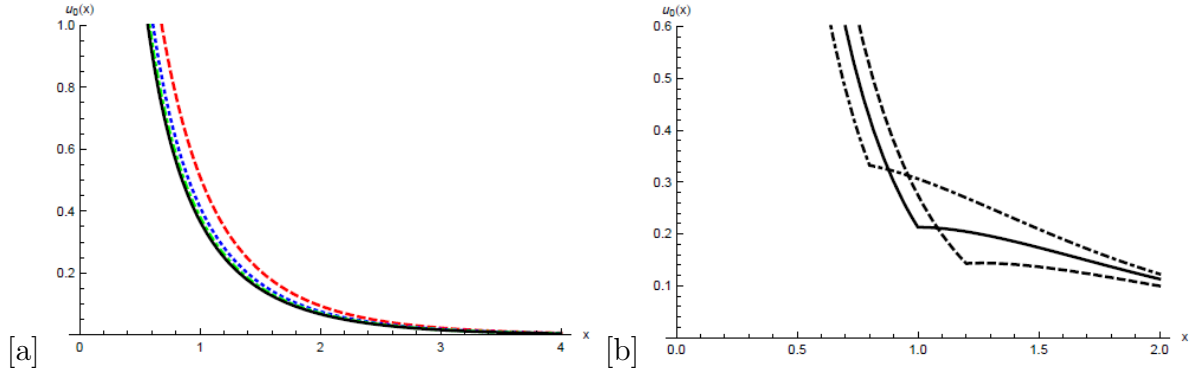


Figura 5.1: (a) En el límite $a \rightarrow 0$ la función \tilde{u}_0 es e^{-x}/x . La función $\tilde{u}_0(x)$ con $a = 0.05, 0.005, 0.0005$ de abajo hacia arriba. (b) En $x = 2a = 2\rho^2\theta$ la función tiene un pico alrededor de a en $x = 0.5$. La función $\tilde{u}_0(x)$ con $a = 0.4, 0.5, 0.6$ de izquierda a derecha.

aquí $a := \rho^2\theta$, $\gamma(n, z)$ es la función gamma incompleta por abajo y $\Gamma(n, z)$ la función gamma incompleta por arriba

$$\Gamma(n, z) := \int_z^\infty t^{n-1/2} e^{-t} dt.$$

La ecuación (5.20) es una función simétrica para el potencial adimensional u_0 . Las gráficas (5.1) muestran el comportamiento de u_0 (5.20).

Ahora resolvemos a primer orden en el mismo camino que se hizo para el caso de orden cero, esto es, encontramos ϵ a partir de las ecuaciones (5.14)-(5.17), donde el término de tipo Schwarzschild en e^{ν_0} define la función

$$\epsilon = -\frac{\kappa\rho M}{2\pi^{3/2}} \frac{1}{x} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{x^2}{4a}\right),$$

y definimos el parámetro $\delta := \frac{\kappa\rho M}{8\pi^{3/2}}$ que es muy pequeño, en tal forma que

$$e^{-\nu_0} = 1 - \epsilon(x) \quad \implies \quad e^{-2\nu_0} = 1 - 2\epsilon(x),$$

donde $\nu'_0 = \epsilon'(x)$ es bastante pequeña, además, ya que por definición $\nu_1(x)$ es de primer orden, también es de primer orden en δ , por lo tanto eliminando términos de orden superior

$$\nu_1'' + 2\frac{\nu_1'}{x} = F(x),$$

que tiene solución

$$\nu_1 = d_0 + \frac{d_1}{x} + \int_0^x zF(z) dz - \frac{1}{x} \int_0^x z^2 F(z) dz, \quad (5.21)$$

donde

$$F(z) = \frac{x}{2} e^{-2\nu_0} \nu_0' u_0^2 + 2e^{-2\nu_0} u_0^2 + e^{-\nu_0} u_0'^2 - \frac{2\kappa}{\rho^2} e^{-\nu_0} h_3 \int^x dz z e^{-2\nu_0} u_0^2.$$

Finalmente, la solución de la función métrica en esta aproximación es

$$e^\nu = 1 - \frac{\kappa \varrho M}{2\pi^{3/2}} \frac{1}{x} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{x^2}{4a}\right) + \nu_1(x).$$

Comportamiento asintótico del potencial electromagnético $u_0(x)$;

- En el límite $\varrho \neq 0$ y $\theta \rightarrow 0$, la solución se reduce a

$$u_0(x) = c_0 \frac{e^{-x}}{x} \quad \Longrightarrow \quad \nu_1(x) = \frac{c_0^2}{2} \left(\frac{e^{-2x}}{x^2} - \int \frac{e^{-2x}}{x^2} dx \right).$$

- En el límite $\varrho \rightarrow 0$ y $\theta \neq 0$, tenemos:

$$u_0(r) = -\frac{2\theta A}{r} \int e^{-r^2/4\theta} dr,$$

donde $A := Q/2s\epsilon_0(4\pi\theta)^{3/2}$ y el campo eléctrico ([62]) está dado por

$$E(r) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right).$$

Notemos que si el potencial escalado u_0 y la función métrica ν_1 son regulares en el origen, entonces la función $F(x)$ corresponde a

$$F(x) = u_0'^2 + 2u_0^2,$$

donde se usó el hecho de que $e^{\nu_0} = 1$ en el orden más bajo y, en $x = 0$ la solución es regular. Es claro ver que si tomamos $d_0 = d_1 = 0$ en la expresión (5.21), la solución debe ser regular para $\nu_1(x)$ en $x = 0$ y puede verse con mayor detalle sí

$$\nu_1(x) = \frac{\chi^2}{a} \left[1 + 8e^a a \Gamma\left(\frac{1}{2}, a\right) \right] x + \dots$$

donde el término $\chi := Q/4\sqrt{\pi}q$ es el parámetro que mide la fuerza de la carga Q de una partícula de prueba a la carga de Proca q , en esta interpretación, por simplicidad puede asumirse que $\chi \ll 1$. Por otro lado, sí $x \ll 1$ entonces $F(x)$ es positiva y finita en $x = 0$ y por tanto ν_1 también lo es, por consiguiente un horizonte que surge de la solución a orden cero y de (5.18) sufrirá un cambio de su posición original cuando se toma la corrección ν_1 , lo cual es un efecto que surge de la no conmutatividad. Dado que no se tienen cálculos explícitos, consideramos el caso cuando $a \gg 1$ (en el régimen fuerte de la no-conmutatividad) para elegir un c_0 adecuado, luego tenemos la expresión asintótica:

$$u_0(x) = \frac{2\chi}{\sqrt{a}} \frac{1 - e^{-x}}{x} = \frac{2\chi}{\sqrt{a}} \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}x & \text{para } x \ll 1, \\ \frac{1}{x} & \text{para } x \gg 1, \end{cases}$$

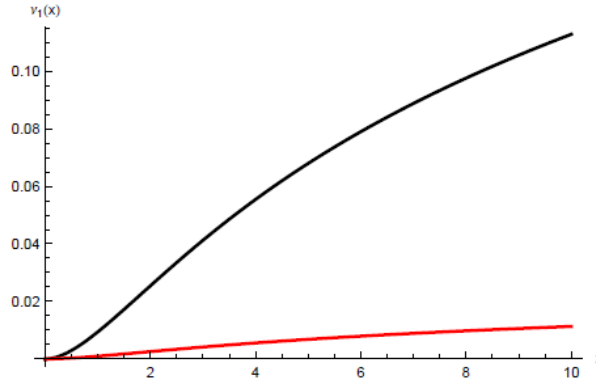


Figura 5.2: La función $\nu_1(x)$ para $a = 1, 10$ ($\chi = 0.1$) de arriba hacia abajo.

como $a \rightarrow \infty$. La función $F(x)$ en este caso es

$$F(x) = \frac{4\chi^2}{ax^4} [1 + 2x^2 - 2e^{-x} - 2xe^{-x} - 4x^2e^{-x} + e^{-2x} + 2xe^{-2x} + 3x^2e^{-2x}] \\ + e^{-2x} + 2xe^{-2x} + 3x^2e^{-2x}],$$

y las dos integrales $\int_0^x zF(z)dz$ y $\int_0^x z^2F(z)dz$ pueden calcularse, tal que la función métrica es

$$\nu_1(x) = \frac{\chi^2}{a} \left[4f_1(x) - 2\frac{e^{-2x}}{x^2} f_2(x) \right],$$

donde

$$f_1(x) = f_0 - \frac{1}{2x^2} [1 - 2e^{-x} - 2xe^{-x} - e^{-2x} + 2xe^{-2x} \\ - 2x^2 Ei(-2x) + 6x^2 Ei(-x) - 4x^2 \ln(x)]$$

y

$$f_2(x) = -2 - 3x + 4e^x + 8xe^x - 2e^{2x} - 5xe^{2x} + 4x^2e^{2x}$$

aquí $f_0 := -\frac{1}{2} + 2\gamma - \ln(2)$ y γ es la constante de Euler dada por

$$Ei(z) = \int_{-z}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

La gráfica (5.2) muestra la solución ν_1 para algunos valores del parámetro a .

Resultados: Se analizaron los efectos de la no conmutatividad en el espacio-tiempo de Einstein-Proca. Al evaluar la solución en el límite $\theta \rightarrow 0$ se recupera la solución no deformada (conmutativa), la cual tiene la característica de que el término de Proca contribuye al campo gravitacional. Además, si se analiza el límite $\varrho \rightarrow 0$ la solución se reduce a Reissner-Nordström².

²Teóricamente se piensa que la mayoría de los micro agujeros negros se crearon en el universo temprano, y que se están evaporando como consecuencia de la radiación térmica que emiten, sin embargo, ya que la solución de Proca considera rangos positivos y negativos de energía, entonces la parte positiva de la solución describe a dichos objetos pero con una singularidad desnuda [83].

Al analizar el resultado, solamente se consideraron como posibles soluciones a aquellas que hacen a la función métrica regular en el origen (en $x = 0$). La ecuación para el potencial $u_0(x)$ depende de exponenciales decrecientes y funciones gamma incompletas por arriba y por abajo que permiten elegir las constantes adecuadas que hacen a la solución regular. Otro resultado es que los horizontes pueden evadirse como consecuencia de la contribución de ν_1 , lo que garantiza $a \neq 0$. Finalmente, en el límite de no-conmutatividad medido por $a \rightarrow \infty$, la función $\nu_1(x)$ toma valores en ese régimen y se percibe como una pequeña perturbación en el coeficiente métrico a orden cero e^{ν_0} . Así, en $a \rightarrow \infty$ la perturbación es

$$1 - \frac{1}{3} \frac{\delta}{a^{3/2}} x.$$

6

Termodinámica del agujero negro Einstein-Born-Infeld-anti-de Sitter no conmutativo en dimensión arbitraria

En este último capítulo analizamos algunas propiedades termodinámicas de la solución Einstein-Born-Infeld-anti-de Sitter no conmutativo. Las ecuaciones de campo se resuelven en dimensión arbitraria y, luego se analiza el caso en $(3 + 1)$ dimensiones. Es interesante analizar este tipo de soluciones, ya que los agujeros negros son objetos macroscópicos en donde la fuerza de gravedad se impone, sin embargo, a través de sus propiedades termodinámicas es posible establecer una relación entre gravedad-cuántica, derivada de la emisión de radiación por la cual los agujeros negros se evaporan hasta desaparecer. Precisamente en este proceso los efectos cuánticos se vuelven relevantes, ya que se piensa que se crean pares de partícula-antipartícula que dan origen a la radiación ([85], [86], [87], [55], [88], [89], [90]). Por otra parte, los efectos de no conmutatividad en estas soluciones muestran resultados bastante interesantes que permiten un estudio más completo de dichos objetos, así por ejemplo, un ejemplo concreto es el cálculo de la temperatura de Hawking, en donde a diferencia del caso no deformado T es finita en el origen $r = 0$ debido a que depende solamente de θ . Se espera que la no conmutatividad cure algunas divergencias en propiedades termodinámicas de agujeros negros.

La solución Einstein-Born-Infeld-anti-de Sitter no conmutativo inspirado en los estados coherentes se obtiene introduciendo un tensor de energía-momento no conmutativo, según lo aprendido en el capítulo (4.3), ya que la no conmutatividad está incrustada en las fuentes de campo en $T_{\mu\nu}$, mientras que la geometría del espacio básicamente se trabaja

con el uso de los valores esperados de las coordenadas no conmutativas lo que origina que estos se comporten en la misma forma que las coordenadas del espacio-tiempo conmutativo. Como ya hemos mencionado con anterioridad, el formalismo de los estado coherentes inspirados por no conmutatividad garantiza que se preserve la unitariedad e invarianza de Lorentz. Así, el problema se resuelve para el caso de simetría esférica y estática en dimensión arbitraria $(d + 1) - dimensiones$, como se ve de (1.31)-(1.33). En este trabajo, la no conmutatividad se induce en dos distintos casos, para los cuales determinamos que:

- En el modelo **A** la carga eléctrica no se deforma \Rightarrow tenemos entonces que $\delta \rightarrow \rho_\theta^{Masa}$ (4.40) y $\rho_\theta^{Carga}(r) = e\delta$.
- En el modelo **B** la masa no se deforma \Rightarrow tenemos entonces que $e\delta \rightarrow \rho_\theta^{Carga}(r)$ (4.41) y $\rho_\theta^{Masa} = \delta$.

Con esto en mente procedemos a resolver cada modelo.

6.1. Modelo A: Deformación no conmutativa de masa

En este modelo, la modificación de la estructura del tensor de energía momento en dimensión arbitraria es dada por la deformación de la masa y tiene la expresión

$$\mathfrak{T}_\nu^\mu = \text{diag}(h_1, h_1, h_3, \dots, h_3), \quad h_3 = (r^2 h_1)_{,r} / 2r, \quad (6.1)$$

donde las primas indican la derivada $r = d/dr$ y, la función h_1 es el perfil gaussiano de masa

$$h_1 = -\rho_m(r) = -\frac{M}{(4\pi\theta)^{d/2}} e^{-r^2/4\theta}.$$

En el límite $\theta \rightarrow 0$ se recupera la expresión de la función delta para una fuente puntual de masa total M localizada en el origen $r = 0$. Necesitamos ahora normalizar la densidad de masa $\rho_m(r)$ para futuros cálculos, entonces lo que se hace es integrar

$$\int d^d x \rho_m(r) = M,$$

por lo tanto se normaliza al tensor (6.1). El resultado nos deja la forma del tensor $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$ como

$$\mathfrak{T}_{\mu\nu} = \text{diag}(-h_1, h_1, h_3, \dots, h_3). \quad (6.2)$$

Por otra parte, como se obtuvo en el capítulo 3 para el caso Einstein-Born-Infeld-anti-de Sitter, las ecuaciones de campo a resolver son las siguientes

$$R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{\partial L(F)}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \left[-L(F) + \frac{\partial L(F)}{\partial g^{\rho\sigma}} g^{\rho\sigma} \right] + 8\pi \left(\mathfrak{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathfrak{T}_\lambda^\lambda \right),$$

pero con un tensor no conmutativo definido por (6.2). Recordemos además que trabajamos con un campo eléctrico radial, por lo que $F_{tr} = E(r)$ debido a la simetría esférica y estática. De esta forma se obtienen las siguientes relaciones que simplifican los cálculos

$$\frac{\partial L(F)}{\partial g^{00}} = -\frac{\partial L(F)}{\partial g^{11}}, \quad \frac{\partial L(F)}{\partial g^{22}} = \frac{\partial L(F)}{\partial g^{33}} = 0,$$

aquí escribimos $e^{2\mu} = g_{00}$, $e^{-2\mu} = g_{11}$ y $g_{ii} = g_{\theta_i\theta_i}$ (con $i = 1, 2$) y, $L(F)$ corresponde al lagrangiano de Born-Infeld en dimensión arbitraria dado por

$$L(F) = 4b^2 \left(1 - \sqrt{1 - E(r)^2/b^2} \right),$$

de donde puede encontrarse la expresión del campo eléctrico en dimensión arbitraria, el cual es claramente regulado por b en $r = 0$ como se aprecia de

$$E(r) = \frac{Q}{\sqrt{r^{2(d-1)} + Q^2/b^2}}. \quad (6.3)$$

Continuando con el desarrollo, partimos de las ecuaciones (1.31) y (1.32) en donde encontramos la relación constitutiva

$$R_{00} = -R_{11} \quad \Rightarrow \quad \mu + \nu = 0,$$

y usando la expresión (1.33), obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d-2}{r^2} - \frac{1}{r^{d-1}} (r^{d-2} e^{-2\nu})_r = \Lambda - \frac{1}{2} L(F) + \frac{\partial L(F)}{\partial g^{00}} g^{00} - 8\pi h_1,$$

que al sustituir el término de campo eléctrico (6.3) toma la forma

$$\frac{d-2}{r^2} - \frac{(r^{d-2} e^{-2\nu})_r}{r^{d-1}} = \Lambda - \frac{2}{r^{d-1}} b \left(br^{d-1} - \sqrt{Q^2 + b^2 r^{2(d-1)}} \right) + \frac{8\pi M}{(4\pi\theta)^{d/2}} e^{-r^2/4\theta},$$

o equivalentemente se escribe

$$(r^{d-2} e^{-2\nu})_r = (d-2) r^{d-3} - \Lambda r^{d-1} + 2b \left(br^{d-1} - \sqrt{Q^2 + b^2 r^{2(d-1)}} \right) - \frac{8\pi M}{(4\pi\theta)^{d/2}} r^{d-1} e^{-r^2/4\theta}, \quad (6.4)$$

la cual ahora puede integrarse directamente. De esta forma la solución métrica es

$$e^{-2\nu} = 1 + \frac{b_0}{r^{d-2}} - \frac{1}{d} \Lambda r^2 + \frac{2}{d} b^2 r^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{Q^2}{b^2 r^{2(d-1)}}} \right) + \frac{2(d-1)}{d} \frac{Q^2}{r^{d-2}} \\ \times \int_r^\infty \frac{ds}{\sqrt{s^{2(d-1)} + \frac{Q^2}{b^2}}} - \frac{8\pi M}{2\pi^{d/2}} \frac{1}{r^{d/2}} \gamma \left(\frac{d}{2}, \frac{r^2}{4\theta} \right),$$

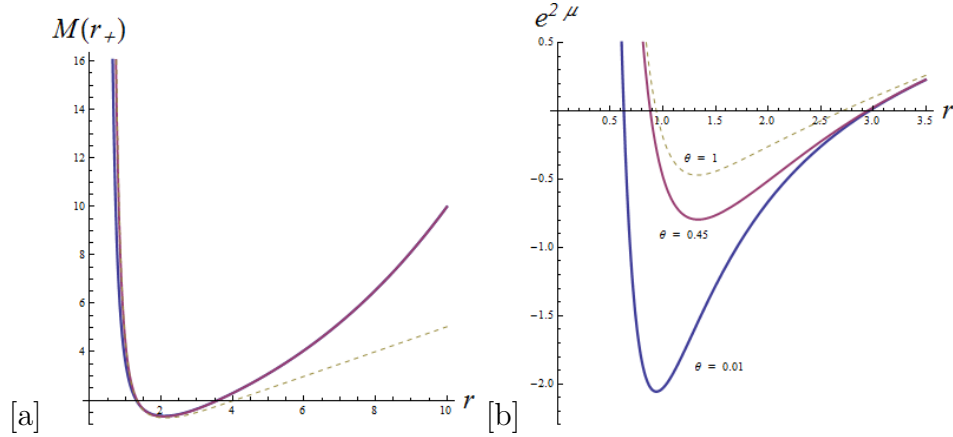


Figura 6.1: En (a) la masa ADM para $Q = 1$ y $b = 0.1$ (línea azul), $b = 10$ (línea roja), $b = 10$ (línea discontinúa) para $\theta = 0.45$ y $\ell = 10$. En (b) se localizan los horizontes de eventos en $e^{2\mu} = 0$ para carga fija $Q = 1$, $\ell = 10$, $b = 1$ para valores de $\theta = 0.01$ (línea azul), $\theta = 0.45$ (línea roja) y $\theta = 1$ (línea discontinúa).

aquí b_0 es una constante arbitraria y $\gamma(n, z)$ es la función gamma por abajo definida por

$$\gamma(n, z) \equiv \int_0^z dt t^{n-1} e^{-t}.$$

Luego, se hace uso de la identidad

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, c; c+1; -z\right) = c \int_0^1 \frac{t^{c-1} dt}{(1+zt)^{1/2}},$$

con $c = cte..$ Equivalentemente la solución métrica [91] toma la forma

$$e^{-2\nu} = 1 + \frac{b_0}{r^{d-2}} - \frac{1}{d}\Lambda r^2 + \frac{2}{d}b^2 r^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{Q^2}{b^2 r^{2(d-1)}}}\right) + \frac{2(d-1)}{d(d-2)} \frac{Q^2}{r^{2(d-2)}} \\ \times {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{d-2}{2(d-1)}; \frac{3d-4}{2(d-1)}; -\frac{Q^2}{b^2 r^{2(d-1)}}\right) - \frac{8\pi M}{2\pi^{d/2}} \frac{1}{r^{d/2}} \gamma\left(\frac{d}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right), \quad (6.5)$$

la cual en este caso, depende ahora directamente de los parámetros de Born-Infeld b y de no conmutatividad θ . Para el análisis de la solución, nos restringimos ahora al caso particular $(3+1)$ -dimensional de la solución (6.5), en donde

- si tomamos el límite conmutativo $\theta \rightarrow 0$ se tiene lo siguiente

$$e^{-2\nu} = 1 + \frac{b_0 - 2M}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2 + \frac{Q^2}{r^2} + \dots,$$

de aquí notamos que si hacemos $b_0 = 0$ el segundo término corresponde a Schwarzschild.

- mientras que para valores pequeños de r la función gamma incompleta por abajo toma un valor aproximado $\sim (r^2)^{3/2}$, entonces la cantidad

$$\frac{1}{r} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \sim \frac{1}{r} \times (r^2)^{3/2} \sim r^2,$$

deja la expresión de la métrica como

$$e^{-2\nu} = 1 - 2bQ + \frac{\beta}{r} - \alpha r^2 + \dots$$

con $\alpha = \frac{M}{3\pi^{1/2}\theta^{3/2}}$ y $\beta = \frac{1}{3} \frac{\Gamma(1/4)^2}{\Gamma(1/2)} b^{1/4} Q^{3/2}$. Hay una singularidad en el origen $r = 0$ debido al término que va como $\sim 1/r$, la cual se hace evidente al calcular el escalar de curvatura

$$R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = 12 \frac{\beta^2}{r^6}, \quad R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{b(18 - 10b)Q^2}{r^4}, \quad R = \frac{4bQ}{r^2}.$$

De los resultados en el modelo A se puede concluir que la solución no es regular y se debe a la singularidad proveniente del campo de Born-Infeld, como vimos en el capítulo 3. La solución se vuelve regular solamente para $b_0 = -\beta$ (6.5), sin embargo, ya no aparecerá el límite de Schwarzschild-de Sitter. La solución depende ahora de los parámetros b y θ , por lo que la masa ADM y los horizontes de eventos también, como puede apreciarse en la figura (6.1) para el modelo A.

6.2. Modelo B: Deformación no conmutativa de carga eléctrica

En éste caso las ecuaciones de Einstein en dimensión arbitraria se modifican reemplazando la fuente puntual de campo eléctrico por el perfil gaussiano de carga (4.41) en el tensor de energía momento, en tal forma que se modifica la ley de conservación (3.37) y que ahora se escribe como

$$\nabla_{\mu} \left(\frac{F^{\mu\nu}}{\sqrt{1 + F^2/2b^2}} \right) = \mathfrak{J}^{\nu}, \quad (6.6)$$

note que ahora hay un *vector de corriente no conmutativa* definido por

$$\mathfrak{J}^{\nu} = [\rho_Q(r), \vec{0}] \equiv \left[\frac{Q}{(4\pi\theta)^{d/2}} e^{-r^2/4\theta}, \vec{0} \right],$$

que para un campo eléctrico radial $F_{tr} = E(r)$, la ley de conservación (6.6) toma la siguiente forma

$$\partial_r \left(\frac{e^{-2(\mu+\nu)} r^{d-1} E(r)}{\sqrt{1 - E(r)^2/b^2}} \right) = - \frac{Q}{(4\pi\theta)^{d/2}} e^{\mu+\nu} r^{d-1} e^{-r^2/4\theta},$$

en donde al introducir la relación constitutiva $\mu + \nu = 0$, el campo eléctrico que se obtiene en d dimensiones es

$$E(r) = \frac{H(r)}{\sqrt{r^{2(d-1)} + H(r)^2/b^2}}.$$

Aquí H es una función relacionada a la densidad de carga eléctrica que se define como

$$H(r) = \frac{Q}{(4\pi\theta)^{d/2}} \int_0^r dz z^{d-1} e^{-z^2/4\theta} = \frac{Q}{2\pi^{d/2}} \gamma\left(\frac{d}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right).$$

La densidad de carga eléctrica no conmutativa modifica al tensor de energía momento, ya que habrá una contribución proveniente de la no conmutatividad la cual define al tensor no conmutativo \mathfrak{T}_ν^μ . Al introducir \mathfrak{T}_ν^μ en las ecuaciones de campo y simplificar el conjunto de ecuaciones resultantes, se obtiene la ecuación diferencial para la función métrica

$$(r^{d-2} e^{-2\nu})_{,r} = (d-2)r^{d-3} - \Lambda r^{d-1} + 2b^2 \left(r^{d-1} - \sqrt{\frac{H^2(r)}{b^2} + r^{2(d-1)}} \right), \quad (6.7)$$

la cual puede integrarse directamente, dando así como resultado

$$e^{-2\nu} = 1 + \frac{b_0}{r^{d-2}} - \frac{1}{d}\Lambda r^2 + 2b^2 \int_r^\infty ds \left(\sqrt{\frac{H^2(s)}{b^2} + s^{2(d-1)}} - s^{d-1} \right), \quad (6.8)$$

para la cual identificamos a $b_0 = -2M$ como el término de Schwarzschild. De forma equivalente podemos escribir la solución (6.8) como

$$e^{-2\nu} = 1 - \frac{2M}{r^{d-2}} - \frac{1}{d}\Lambda r^2 + \frac{2}{d}b^2 r^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{H^2(r)}{b^2 r^{2(d-1)}}} \right) + \frac{2}{d} \frac{1}{r^{d-2}} \int_r^\infty ds \frac{-H(s) s^2 \rho_Q(s) + (d-1) H^2(s)}{\sqrt{s^{2(d-1)} + H^2(s)/b^2}}. \quad (6.9)$$

Note que el término que va como $\sim 1/r^{d-2}$ hace que la solución métrica no sea regular, ya que corresponde al término de Schwarzschild. En el límite conmutativo $\theta \rightarrow 0$ se recupera la solución Einstein-Born-Infeld-anti-de Sitter. La única condición para que el coeficiente métrico $e^{-2\nu}$ sea una solución regular es haciendo $b_0 = 0$, sin embargo la solución ya no será asintóticamente Schwarzschild-anti de Sitter. Nosotros estamos interesados en analizar los efectos no conmutativos en algunas de las propiedades termodinámicas para éste tipo de soluciones, que en este caso lo hacemos para la distribución de masa no conmutativa y después para la distribución de carga eléctrica no conmutativa. A continuación analicemos algunas de sus propiedades termodinámicas.

6.3. Propiedades Termodinámicas

Antes de comenzar a analizar las propiedades termodinámicas de los modelos A y B, conviene decir que un agujero negro en el espacio infinito puede ser termodinámicamente estable si $\Lambda < 0$, para ello, se debe ajustar la temperatura para que el tamaño del horizonte sea fijo y se hace al imponer que $\Lambda = cte.$, luego la expresión de la temperatura se obtiene

al calcular la energía interna. Por lo tanto, se calcula la densidad de energía de superficie en $r = R = cte.$ [88], a través de la expresión

$$\epsilon(R) = \frac{\kappa(R)}{8\pi} - \epsilon_0(R),$$

donde $\epsilon_0(R)$ es la densidad de energía de superficie que puede elegirse de forma convencional, κ es la traza de la curvatura extrínseca κ_{ab} de la $(d-1)$ -hipersuperficie definida por la métrica $r^2 ds_{(d-1)}^2$. En general, al evaluar la métrica ds^2 con $r = cte.$ obtenemos

$$-N^2 dt^2 + \sigma_{ab} (dx^a + V^a dt) (dx^b + V^b dt), \quad (6.10)$$

donde asociamos alguna función métrica σ_{ab} , N es la función lapse y V^a es el vector de corrimiento. Una vez calculada la densidad de energía de superficie $\epsilon(R)$, puede calcularse la expresión correspondiente de la cuasi-energía total

$$E(R) = \int d^{(d-1)}x \sqrt{\sigma} \epsilon(R), \quad (6.11)$$

en la cual la integración se hace sobre la hipersuperficie $(d-1)$ -dimensional definida por $r^2 ds_{(d-1)}^2$ y $\sigma \equiv \det(\sigma_{ab})$; por lo tanto, la expresión (6.11) es la energía interna termodinámica dentro de la frontera R , por lo tanto, la temperatura del agujero negro [88] se obtiene de la expresión

$$T(R) = \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right) = \frac{1}{2\pi} \frac{\kappa_H}{N(R)}.$$

Otras cantidades que se obtienen a partir de la energía interna son la presión

$$\mathcal{P} = - \left(\frac{\partial E(R)}{\partial (\Omega_{(d-1)} R^{d-1})} \right), \quad (6.12)$$

y el calor específico

$$C_R \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right) = \left(\frac{\partial E(R)}{\partial r_H} \right) / \left(\frac{\partial T(R)}{\partial r_H} \right),$$

donde la superficie de gravedad en el horizonte de eventos r_H es κ_H y, la entropía del agujero negro es $S \Omega_{(d-1)} r_H^{d-1} / 4$. Por otra parte, de la expresión (6.10) se establece que

$$N^2(r_H) = -e^{2\mu(r_H)} = -e^{-2\nu(r_H)} = 0,$$

con el propósito de que la masa conservada coincida con la energía en la hipersuperficie, de tal forma que la función lapse nos da una expresión para $M = M(r_H, R)$.

6.3.1. Termodinámica en el modelo A

Partimos de la expresión para la densidad de energía

$$\epsilon(R) = -\frac{1}{8\pi} \frac{2N(R)}{R} - \epsilon_0(R) = -\frac{1}{4\pi} \frac{2N(R)}{R} - \epsilon_0(R),$$

de donde puede calcularse la energía cuasi-total $E(R)$, la cual viene dada por

$$E(R) = -RN(R) - 4\pi R^2 \epsilon_0(R),$$

donde se elige a $\epsilon_0(R)$ sea

$$\epsilon_0(R) = -\frac{1}{4\pi R} \sqrt{1 - \frac{1}{3}\Lambda R^2}, \quad (6.13)$$

lo que significa que $\epsilon(R)$ desaparece para el espacio-tiempo anti-de Sitter (en este caso con $M = 0 = Q$). Luego, la presión de superficie termodinámica es entonces de acuerdo a (6.12);

$$\mathcal{P} = \frac{\partial}{\partial(4\pi R^2)} (RN(R)) + \frac{\partial(R^2 \epsilon_0(R))}{\partial R^2},$$

y la función lapse $N^2(r)$ se deduce de (6.5), de donde para $N(r_H) = 0$ encontramos la expresión de la masa

$$\begin{aligned} 8\pi M &= \frac{2\pi^{d/2} r_H^{d/2}}{\gamma\left(\frac{d}{2}, \frac{r_H^2}{4\theta}\right)} \left[1 - \frac{1}{d}\Lambda r_H^2 + \frac{2}{d}b^2 r_H^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{Q^2}{b^2 r_H^{2(d-1)}}} \right) \right] \\ &+ \frac{2(d-1)}{d(d-2)} \frac{Q^2}{r_H^{2(d-2)}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{d-2}{2(d-1)}; \frac{3d-4}{2(d-1)}; -\frac{Q^2}{b^2 r_H^{2(d-1)}}\right). \end{aligned}$$

Por otra parte, al evaluar la expresión (6.4) en el horizonte de eventos r_H encontramos que la superficie de gravedad viene dada por

$$\kappa_H = \frac{1}{2r_H^{d-2}} \left[(d-2)r_H^{d-3} - \Lambda r_H^{d-1} + 2b^2 r_H^{d-1} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{Q^2}{b^2 r_H^{2(d-1)}}} \right) - \frac{8\pi M}{(4\pi\theta)^{d/2}} r_H^{d-1} e^{-r_H^2/4\theta} \right],$$

de la cual se obtiene la temperatura de Hawking.

Si nos restringimos ahora al caso $d = 3$, la temperatura en la hipersuperficie $r = R = cte. > r_H$ es

$$T(R) = \frac{1}{N(R)} \frac{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right)}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\theta}\right)} \frac{1}{4\pi r_H} \left[1 - \Lambda r_H^2 + 2b^2 r_H^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{Q^2}{b^2 r_H^4}} \right) - \frac{8\pi M}{(4\pi\theta)^{3/2}} r_H^2 e^{-r_H^2/4\theta} \right], \quad (6.14)$$

donde

$$N^2(R) = 1 - \frac{1}{3}\Lambda R^2 + \frac{2}{3}b^2 R^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{Q^2}{b^2 R^4}}\right) + \frac{4Q^2}{3R^2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{Q^2}{b^2 R^4}\right) - \frac{8\pi M}{2\pi^{3/2}} \frac{1}{R} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{R^2}{4\theta}\right),$$

y la expresión de la masa ADM

$$8\pi M = \frac{2\pi^{3/2} r_H}{\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\theta}\right)} \left[1 - \frac{1}{3}\Lambda r_H^2 + \frac{2}{3}b^2 r_H^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{Q^2}{b^2 r_H^4}}\right) + \frac{4Q^2}{3r_H^2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{Q^2}{b^2 r_H^4}\right)\right]. \quad (6.15)$$

Note que en el límite conmutativo $\theta \rightarrow 0$ la función gamma es $\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\theta}\right) \rightarrow 1$.

Ecuación de estado $P - v$

Se calcula ahora la ecuación de estado $P - v$ para analizar el sistema. Primero identificamos algunas propiedades termodinámicas para el caso $d = 3$, tales como la entropía S y el área A , que para la simetría esférica y estática son

$$S = \frac{1}{4}A, \quad \text{donde} \quad A = 4\pi r_H^2.$$

Y como se vio en la sección (2.3), la ecuación de estado para las soluciones anti-de Sitter se obtiene al relacionar a la constante cosmológica Λ con la presión termodinámica P , en donde el volumen termodinámico y la presión asociada a Λ son respectivamente

$$V = \frac{4\pi}{3}r_H^3, \quad P = -\frac{1}{8\pi}\Lambda.$$

Por otra parte, se calcula la temperatura de Hawking como $T = \kappa_H/2\pi$ y, luego se despeja la variable P para obtener la ecuación de estado $P - v$ final como

$$P = \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2} - \frac{b^2}{4\pi} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{16Q^2}{b^2 v^4}}\right) + \frac{M}{(4\pi\theta)^{3/2}} e^{-v^2/16\theta},$$

donde $v = 2r_H$ es el volumen específico (que depende del horizonte de eventos), en lugar del volumen termodinámico V .

A partir de la ecuación de estado se localizan los puntos en los cuales ocurren las transiciones de fase para una temperatura crítica T_C a través de las condiciones

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_{T_C} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}\right)_{T_C} = 0,$$

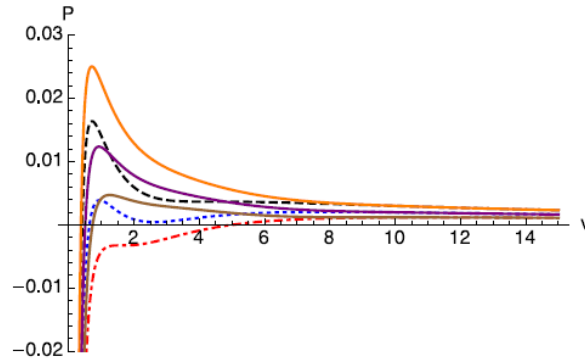


Figura 6.2: Diagrama $P - v$ del agujero negro de Born-Infeld no conmutativo (deformación de masa). Las líneas gruesas corresponden a la ecuación de estado no conmutativa con $\theta = 1$ para $T = 0.04517, 0.035$ y 0.026885 (de arriba hacia abajo); las líneas punteadas son las correspondientes al caso conmutativo en el mismo orden $Q = 1, M = 10$ y $b = 0.45$.

lo que nos conduce a la ecuación cúbica para el volumen específico

$$x^3 + px + q = ae^{-\frac{1}{16\theta}\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{16Q^2}{b^2}}} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{16Q^2}{b^2} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{16Q^2}{b^2}} - 24\theta \right), \quad (6.16)$$

donde se ha definido

$$p = -\frac{3b^2}{2^5 Q^2}, \quad q = \frac{b^2}{2^8 Q^4}, \quad a = \frac{8\pi M b^2}{2^{20} Q^4 \pi^{3/2} \theta^{7/2}},$$

además de la variable

$$x^{-2} = v^4 + \frac{16Q^2}{b^2}, \quad |x| \leq b/4Q.$$

En el caso conmutativo la parte derecha de (6.16) es cero, mientras que en el caso no conmutativo se transforma en una ecuación trascendental. Al tomar el límite $\theta \rightarrow 0$ en la expresión (6.16) se reduce a la ecuación cúbica $x^3 + px + q = 0$. En las figuras (6.3) se muestra el comportamiento de (6.16). A diferencia del caso conmutativo (línea continua), el caso deformado presenta el surgimiento de puntos de inflexión como efecto de la no conmutatividad que corresponden a la línea punteada.

Energía libre de Gibbs

El análisis del comportamiento del sistema asociado es dado por la energía libre de Gibbs, la cual nos da información de los puntos críticos (si existen) y entonces saber si existen transiciones de fase. La expresión de la función de Gibbs se obtiene a partir de

$$G = \beta (M_{ADM} - TS) = \beta (M - TS),$$

donde M representa la masa que depende del radio del horizonte r_H (6.15), T es la temperatura en r_H , S la entropía y $\beta = cte..$ Nuevamente nos enfocamos al caso de $d = 3$,

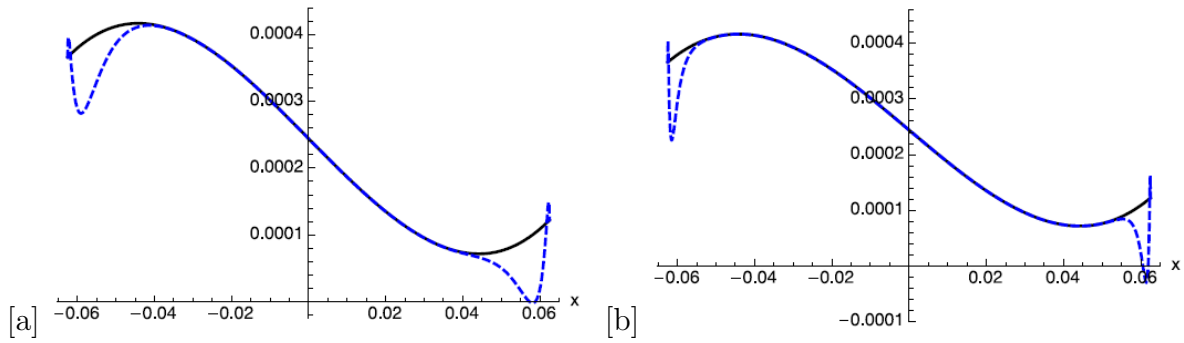


Figura 6.3: En el caso conmutativo (línea continua) no hay puntos críticos en $b < b_0 = 1/\sqrt{8}Q$ tal que $|x| < b/4Q$; la no conmutatividad modifica este comportamiento y los puntos críticos surgen como una consecuencia del efecto no conmutativo. En (a) $\theta = 0.1$ y en (b) $\theta = 0.05$.

de modo que la función de Gibbs en este caso es

$$G = \beta \left(M \left[1 - \frac{r_H}{4(4\pi\theta)^{3/2}} e^{-r_H^2/4\theta} \right] - \frac{1}{4} \left[r_H - \Lambda r_H^3 + 2b^2 r_H^3 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{Q^2}{b^2 r_H^4}} \right) \right] \right),$$

donde $M = M(r_H)$ es la dada en (6.15). El comportamiento es muy similar al caso no deformado. Básicamente los diagramas muestran un comportamiento característico a la transición de fase de primer orden. En la figura (6.4) se observan diferentes gráficas para diferentes valores de b y θ , en donde se aprecia que la no conmutatividad cambia la ubicación de los puntos donde ocurren las transiciones de fase de primer orden.

6.3.2. Termodinámica en el modelo B

Para este modelo la energía termodinámica interna es dada por

$$E(R) = -RN(R) - 4\pi R^2 \epsilon_0(R),$$

mientras que la presión

$$\mathcal{P} = \frac{\partial}{\partial(4\pi R^2)} (RN(R)) + \frac{\partial (R^2 \epsilon_0(R))}{\partial R^2},$$

donde $\epsilon_0(R)$ es la misma que en (6.13). Por otra parte, la función lapse se calcula de la expresión (6.9) en tal forma que la expresión para la masa M es

$$M = \frac{r_H^{d-2}}{2} \left[1 - \frac{1}{d} \Lambda r_H^2 + \frac{2b^2 r_H^2}{d} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{H^2(r_H)}{b^2 r_H^{2(d-1)}}} \right) \right] + \frac{2}{d} \frac{1}{r_H^{d-2}} \int_{r_H}^{\infty} ds \frac{-H(s) s^2 \rho_Q(s) + (d-1) H^2(s)}{\sqrt{s^{2(d-1)} + H^2(s)/b^2}},$$

en donde se uso la condición $N(r_H) = 0$. También, sabemos que la superficie de gravedad se calcula a partir de la derivada (6.7), lo que nos da

$$\kappa_H = \frac{1}{2r_H^{d-2}} \left[(d-2)r_H^{d-3} - \Lambda r_H^{d-1} + 2b^2 r_H^{d-1} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{H^2(r_H)}{b^2 r_H^{2(d-1)}}} \right) \right].$$

Una vez establecidas las relaciones termodinámicas en dimension arbitraria, ahora analizamos el caso para $d = 3$, lo que nos deja la expresión de la función lapse como

$$N^2(R) = 1 - \frac{2M}{R} - \frac{1}{3}\Lambda R^2 + \frac{2}{3}b^2 R^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{H^2(R)}{b^2 R^4}} \right) + \frac{2}{3} \frac{1}{R} \int_R^\infty ds \frac{-H(s) s^3 \rho_Q(s) + 2H^2(s)}{\sqrt{s^4 + H^2(s)}/b^2},$$

por lo que la temperatura de Hawking en la hipersuperficie $r = R = cte.$ es dada por

$$T = \frac{1}{N(R)} \frac{1}{4\pi r_H} \left[1 - \Lambda r_H^2 + 2b^2 r_H^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{H^2(r_H)}{b^2 r_H^4}} \right) \right],$$

y la masa del agujero negro que se obtiene es

$$M = \frac{r_H}{2} \left[1 - \frac{1}{3}\Lambda r_H^2 + \frac{2}{3}b^2 r_H^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{H^2(r_H)}{b^2 r_H^4}} \right) + \frac{2}{3} \frac{1}{r_H} \int_{r_H}^\infty ds \frac{-H(s) s^3 \rho_Q(s) + 2H^2(s)}{\sqrt{s^4 + H^2(s)}/b^2} \right].$$

Con estas cantidades podemos encontrar otras variables termodinámicas, al igual que se realizó para el modelo A. Calculemos pues la ecuación de estado $P-v$ así como la función de Gibbs.

Ecuación de estado $P-v$

De la temperatura $T = \kappa_H/2\pi$ y, la presión $P = -\Lambda/8\pi$ con volumen específico $v = 2r_H$, la ecuación de estado $P-v$ a la que se llega es

$$P = \frac{T}{v} - \frac{1}{2\pi v^2} - \frac{b^2}{4\pi} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{16H^2(v)}{b^2 v^4}} \right), \quad (6.17)$$

donde $H(v)$ es una función de carga eléctrica no conmutativa, por lo que sustituye a la carga eléctrica Q . En la gráfica (6.5) se muestra el comportamiento de la ecuación de estado $P-v$, en donde puede verse que al igual que en el modelo A su comportamiento es bastante similar al caso no deformado.

Los puntos críticos se obtienen a partir de las siguientes condiciones

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v} \right)_{T_C} = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2} \right)_{T_C} = 0, \quad (6.18)$$

en donde se define la variable

$$x^{-2} = v^4 + \frac{16H^2(v)}{b^2}, \quad (6.19)$$

para la cual se obtiene la ecuación cúbica

$$x^3 + p(v)x + q(v) = 0, \quad (6.20)$$

con las siguientes cantidades

$$s(v)p(v) = -\frac{b^2}{4} [v^2 H'^2(v/2) + v^2 H(v/2) H''^2(v/2)] - 6vH(v/2)H'(v/2) + 6H^2(v/2),$$

$$s(v)q(v) = \frac{b^2}{16},$$

$$s(v) = [2vH(v/2)H'(v/2) - 4H^2(v/2)]^2.$$

En el límite $\theta \rightarrow 0$, las funciones $p(v)$ y $q(v)$ se reducen a las expresiones $-3b^2/32Q^2$ y $3b^2/256Q^2$ respectivamente del caso no deformado. En la gráfica (6.6) se exhibe el comportamiento de $x^3 + p(v)x + q(v) = 0$, para $\theta = 0.1$ y $\theta = 0.2$. En este caso, la no conmutatividad no produce puntos críticos en la región $|x| < b/4Q$.

Energía libre de Gibbs

Similarmente, la energía de Gibbs se calcula a partir de la expresión

$$G = \beta (M_{ADM} - TS) = \beta (M - TS),$$

que para este caso (en $d = 3$) se obtiene

$$G = \frac{\beta}{4} \left[r_H + \frac{1}{3} \Lambda r_H^3 - \frac{2b^2 r_H^3}{3} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{H^2(r_H)}{b^2 r_H^4}} \right) + \frac{4}{3} \int_{r_H}^{\infty} ds \frac{-H(s) s^3 \rho_Q(s) + 2H^2(s)}{\sqrt{s^4 + H^2(s)/b^2}} \right].$$

En la figura (6.7) se muestran algunas gráficas que muestran el comportamiento bastante similar al caso no deformado, pero que ahora depende de los valores de los parámetros b y θ para que existan soluciones asintóticamente Schwarzschild-anti-de Sitter o Reissner-Nordström-anti-de Sitter.

Resultados: Dentro de nuestros resultados, se encontró que la solución Einstein-Born-Infeld-anti-de Sitter no conmutativa en dimensión arbitraria depende ahora de b y θ para que existan soluciones de agujero negro. En este caso para una simetría esférica y estática, son soluciones asintóticamente Reissner-Nordström-anti-de Sitter y Schwarzschild-anti-de Sitter.

- Se encontró que para el modelo A (masa no conmutativa), el efecto de la no conmutatividad modifica el comportamiento de los puntos críticos. La no conmutatividad

hace que aparezcan puntos críticos a diferencia del caso conmutativo, como puede verse en la figura (6.3).

- Al evaluar las soluciones y propiedades termodinámicas en el límite conmutativo $\theta \rightarrow 0$, la solución se reduce al caso no deformado. De aquí, la variación de b produce Reissner-Nordström-anti-de Sitter y Schwarzschild-anti-de Sitter.

- La variación de los parámetros b y θ en los diagramas $P - v$, así como en la función de Gibbs, hace que los diagramas sean bastante similares a los presentados para el caso conmutativo, es decir, se comportan en la misma forma que los de la termodinámica, pero a diferencia de estos la variación de θ hace que cambie la posición de los puntos críticos, como se observa en los diagramas de Gibbs para la deformación de masa (6.4) y para la deformación de carga eléctrica (6.7). La existencia de las transiciones de fase también dependen ahora de θ . Este comportamiento también es bastante similar al que se presenta en la termodinámica tal como observamos en la sección (2.4).

- La masa M y temperatura T son función del horizonte de eventos r_H , pero ahora también dependen de los parámetros b y θ . De los dos modelos analizados en este trabajo, el modelo A contiene puntos críticos. Para las gráficas de calor específico se tomaron las variables adimensionales $r_H \rightarrow r_S r_H$, $Q \rightarrow r_S Q$, $b \rightarrow b/r_S$, $\Lambda \rightarrow \Lambda/r_S^2$, $\theta \rightarrow r_S^2 \theta$, donde aquí r_S es una constante con dimensiones de longitud y se identifica con el radio de Schwarzschild de la fuente (ver figura (6.8)).

- Notamos primero que para $b = 100$ el primer punto crítico en el caso no conmutativo se desplaza a la derecha en comparación con el caso estándar no deformado. Además para $b = 0.1$, el primer punto crítico cuando el valor de θ es pequeño (límite conmutativo), pero permanece para valores de θ de orden uno. La figura (6.9) muestra la situación en el plano $r_H - \Lambda$ para $b = 100$ y valores pequeños de b .

- El trabajo puede extenderse al caso de Kerr-Newman.

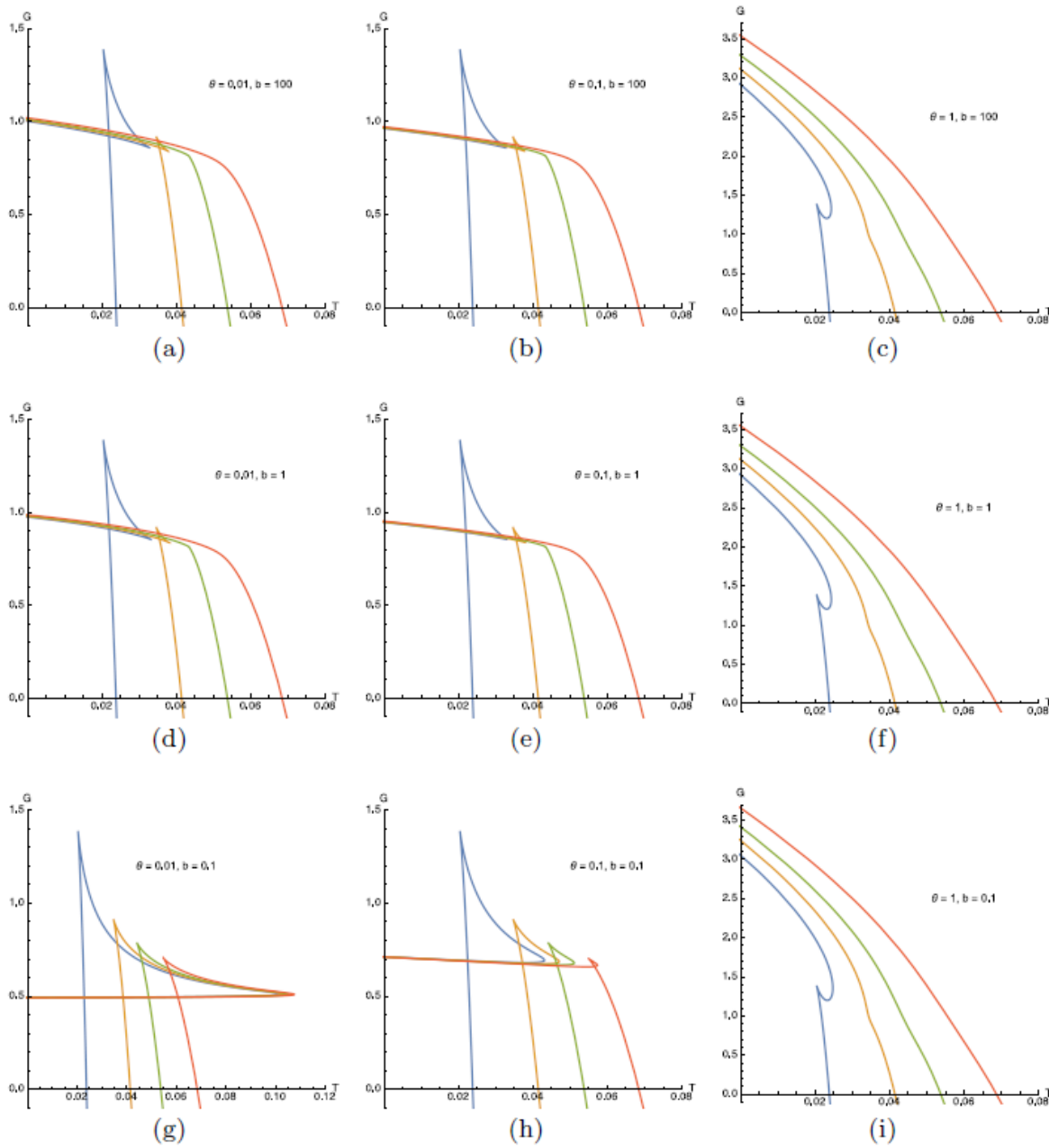


Figura 6.4: Las gráficas muestran la función de Gibbs G para el modelo A, para diferentes valores del parámetro de Born-Infeld b y el parámetro no conmutativo θ , G es función de la temperatura para la presión fija y carga fija $Q = 1$. En la figura 3(a) se ve el comportamiento para el caso de Reissner-Nordström mientras, que en la figura 3(g) se muestra el comportamiento típico para la solución de Schwarzschild.

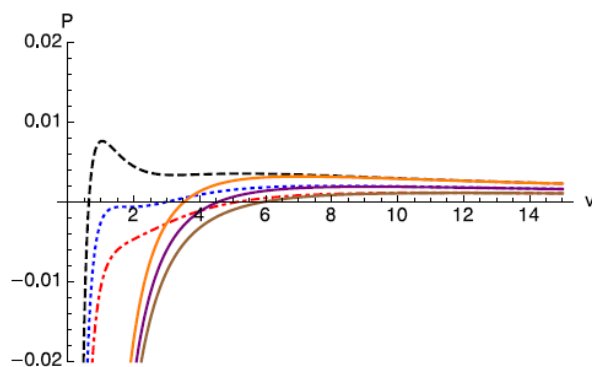


Figura 6.5: Diagrama $P - v$ para la deformación del agujero negro de Born-Infeld (deformación de carga). Las líneas gruesas corresponden a la ecuación no conmutativa de estado con $\theta = 0.1$ para $T = 0.04517, 0.035$ y 0.026885 de arriba hacia abajo; las líneas punteadas corresponden a los casos conmutativos. Hemos tomado $Q = 10$ y $b = 0.45$.

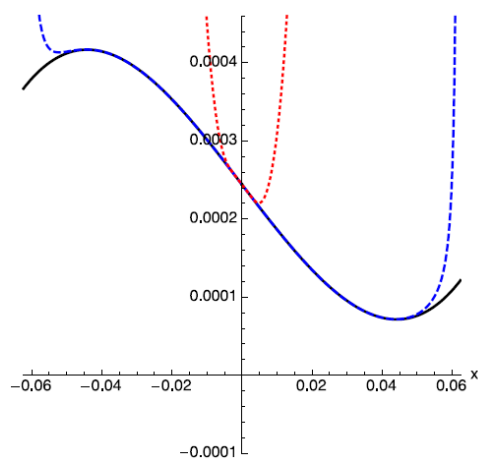


Figura 6.6: En el caso conmutativo (línea continua) no hay puntos críticos para $b < b_0 = 1/\sqrt{8}Q$, tal que $|x| < b/4Q$; en el modelo no conmutativo B ésta estructura está aún presente: la gráfica muestra el comportamiento para $\theta = 0.1$ (líneas discontinúa) y $\theta = 0.2$ (línea punteada).

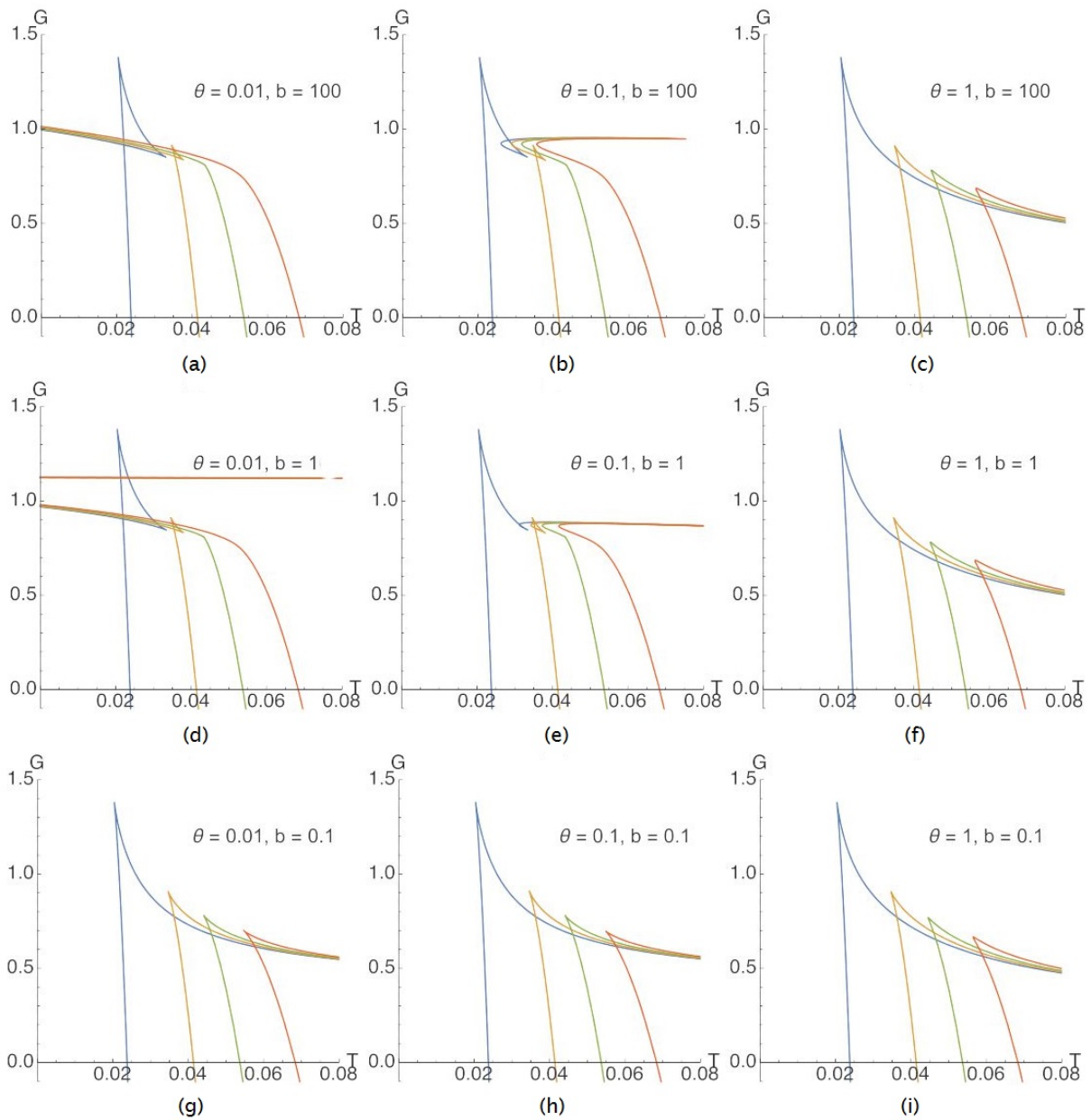


Figura 6.7: Las gráficas muestran la función de Gibbs para el modelo B para diferentes valores del parámetro de Born-Infeld b y el parámetro no conmutativo θ , donde G es una función de temperatura para la presión fija y carga fija $Q = 1$. En la figura 6(a) se reproduce el comportamiento para el caso de Reissner-Nordström, mientras que en la figura 6(g) se muestra el comportamiento típico para la solución de Schwarzschild. En éste caso, cuando se considera el valor fijo de b la no conmutatividad puede eliminar algunos puntos críticos.

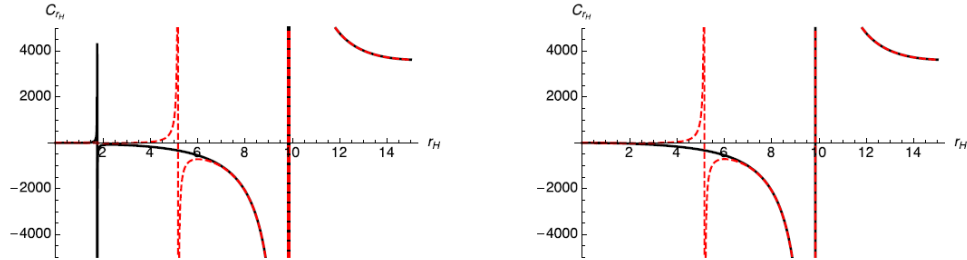


Figura 6.8: El calor específico C_{r_H} como una función del radio del horizonte para $b = 100$ (figura izquierda) y $b = 0.1$ (figura derecha). La línea continua (negra) es la curva para $\theta = 10^{-2}$ y la línea discontinua (roja) la curva para $\theta = 1$. Los valores $\Lambda = -0.01$, $Q = 1$ están fijos en todos los casos.

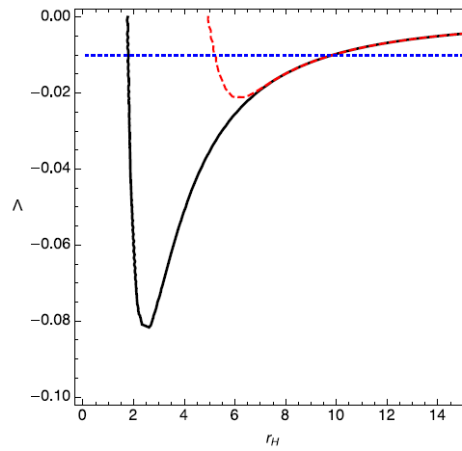


Figura 6.9: Las curvas en el plano $r_H - \Lambda$ donde el calor específico C_{r_H} diverge para $\theta = 10^{-2}$ (línea continua negra) y $\theta = 1$ (línea discontinua roja); la línea horizontal punteada corresponde al valor $\Lambda = -0.01$ y los otros parámetros tienen valores $b = 100$, $Q = 1$.

Conclusiones

En la literatura podemos encontrar variados ejemplos de agujeros negros regulares, algunos de ellos son consecuencia de tomar distribuciones de las fuentes de campo (masa y carga), o el resultado de electrodinámicas no lineales, entre otros casos. La no conmutatividad puede proveer de soluciones regulares y curar divergencia propias de la teoría cuántica, tal como ocurre en las interacciones de corto alcance. En este trabajo se analizó el efecto de la no conmutatividad en dos soluciones gravitacionales en el contexto del formalismo de los denominados estados coherentes inspirados por no conmutatividad. El formalismo nos permite analizar los efectos de la no conmutatividad en distintos tipos de soluciones a las ecuaciones de Einstein en donde proveen un comportamiento regular en estas y, un ejemplo claro es el agujero negro Schwarzschild-anti de Sitter donde la solución es regular y sólo depende del parámetro de no conmutatividad θ en $r = 0$, además, al identificar a Λ con el término de presión este término es relacionado a θ por lo que al analizar sus propiedades termodinámicas se encuentra que la temperatura no diverge. En los últimos años los agujeros negros han adquirido suma importancia, ya que constituyen uno de los elementos esenciales para la construcción de teorías que describan la estructura del espacio-tiempo tal como lo muestran la correspondencia AdS/CFT, la teoría de cuerdas, la teoría de lazos, entre otras. Más aún, recientemente gracias a la detección de ondas gravitacionales (algunas de ellas provenientes de la colisión de dos agujeros negros) se ha fortalecido la evidencia de su existencia. Estos objetos son elementales para nuestro conocimiento de gravedad cuántica, ya que al considerar las interacciones cuánticas de los alrededores con estos objetos macroscópicos se encuentra que poseen temperatura en forma de radiación térmica. Los agujeros negros tienen un comportamiento bastante similar con las leyes de la termodinámica, por ejemplo, al emitir radiación pierden masa hasta evaporarse, en este sentido emiten partículas elementales debido a los procesos de decaimiento. Resulta que el proceso de evaporación hasta llegar al estado final del agujero negro, se comporta de manera sumamente similar al de una transición de fase líquido-gas que puede ser descrita utilizando la ecuación de Van de Waals. Sin embargo, debido a la naturaleza singular de la geometría de este tipo de soluciones, es natural que las singularidades también aparezcan en sus propiedades termodinámicas. Con el objetivo de curar el comportamiento singular, se han propuesto diversos métodos, la no conmutatividad es uno de ellos y se introdujo históricamente con el propósito de regularizar las divergencias UV en las teorías cuánticas de campo. Existen diferentes formas de inducir no conmutatividad en una teoría y, nosotros hacemos uso de estados coherentes inspirados por no conmutati-

vidad. El resultado es que la deformación no conmutativa se ve reflejado solamente en el tensor de energía momento, donde las fuentes de campo puntuales (deltas de Dirac) que lo definen son remplazadas por distribuciones gaussianas de masa y carga eléctrica, mientras que la parte geométrica de las ecuaciones de Einstein produce los valores esperados de las coordenadas operadores que definen al espacio-tiempo no conmutativo (por ejemplo $\langle \hat{x}^1 \rangle = x^1$ indica la ubicación de la partícula en una de sus coordenadas; x^1), por lo que básicamente podemos resolver las ecuaciones de campo con los métodos matemáticos usuales, dejando así la unitariedad e invarianza de Lorentz intactas. Las soluciones contienen términos que dependen de $\theta = cte.$ en el cual está codificada la información del espacio tiempo no conmutativo. Algunos resultados que podemos encontrar en la literatura muestran que se genera un tipo de soluciones regulares que son asintóticamente agujeros negros.

En esta tesis analizamos los efectos de la no conmutatividad en las soluciones gravitacionales de los espacios-tiempo Einstein-Proca no conmutativo y Einstein-Born-Infeld-anti-de Sitter no conmutativo en dimensión arbitraria, en donde seguimos el procedimiento basado en los estados coherentes inspirados por no conmutatividad. Ambos problemas se resuelven para el caso de simetría esférica y estática. Para el segundo caso, se estudiaron las similitudes termodinámicas con la física de agujeros negros para el caso no deformado, y encontramos que al evaluar las propiedades termodinámicas en el límite $\theta \rightarrow 0$ recuperamos las expresiones conmutativas. En las soluciones de simetría esférica y estática el tensor de energía momento es similar al del fluido perfecto. De aquí aprendimos que para que sus propiedades físicas tengan una descripción termodinámica más adecuada físicamente y completa debemos trabajar con el espacio anti-de Sitter, lo que se traduce en extender el espacio fase. La constante cosmológica Λ queda plenamente identificada como la variable termodinámica de presión, mientras que la geometría del espacio anti-de Sitter actúa como una caja en la que el número de partículas, volumen y carga están fijas, por lo que el agujero negro cargado estará contenido en la caja, el cual pierde masa en forma de radiación térmica que queda confinada en la caja de paredes infinitas, es decir que en su estado final se evapora o desaparece en forma de radiación. Este comportamiento se corresponde similarmente con la transición de fase termodinámico líquido-gas, y que es descrita a través de la ecuación de Van der Waals. Estas similitudes hacen posible que a partir de las variables termodinámicas de agujeros negros así definidas, se pueda calcular su ecuación de estado $P-v$ para estos objetos y, en consecuencia encontrar los puntos críticos para los cuales ocurren transiciones de fase. Los diagramas de Gibbs muestran el comportamiento de las transiciones, y nos dan más información de tal comportamiento.

Específicamente estudiamos soluciones gravitacionales con simetría esférica y estática, el problema se dividió en dos casos; primero para una distribución de masa y después para una distribución carga eléctrica. En el caso conmutativo las soluciones métricas presentan singularidades, las cuales se ven reflejadas al calcular propiedades termodinámicas de agujeros negros, por lo tanto, estudiamos el comportamiento de este tipo de soluciones en el contexto de un espacio-tiempo no conmutativo. En nuestros resultados encontramos que en $\theta \rightarrow 0$ recuperamos la forma conmutativa estándar y, al variar el parámetro b en-

contramos la solución Reissner-Nordström-anti-de Sitter (en $b \rightarrow \infty$) y Schwarzschild-anti de Sitter (en $b \rightarrow 0$).

Para la solución gravitacional del espacio-tiempo Einstein-Proca no conmutativo, resolvemos utilizando el mismo método no perturbativo que se emplea al resolver el caso no deformado, en los que se emplea un desarrollo en serie para el parámetro de masa de Proca. Dentro de los resultados encontrados, observamos que en el límite $\theta \rightarrow 0$ a orden cero se recupera el caso conmutativo. De este desarrollo se obtienen ecuaciones a orden cero y primer orden en donde el potencial escalado es modificado como consecuencia de la no conmutatividad, ya que es una función que depende de exponenciales crecientes y decrecientes así como de funciones gamma incompletas por arriba y por abajo. Estos resultados determinan entonces que para que la solución final sea regular podemos elegir las constantes adecuadas con plena libertad, así se encontró que un resultado que proviene del efecto no conmutativo es que los horizontes de eventos pueden evitarse como consecuencia debido a la contribución de la corrección ν_1 y entonces $a \neq 0$, donde $a \rightarrow \infty$ es una medida de no conmutatividad y $\nu_1(x)$ toma valores en este régimen, el cual se persive como una pequeña perturbación en el coeficiente métrico a orden cero e^{ν_0} que se comporta como

$$1 - \frac{1}{3} \frac{\delta}{a^{3/2}} x,$$

cuando $a \rightarrow \infty$.

Para el espacio-tiempo Einstein-Born-Infeld-anti-de Sitter no conmutativo en dimensión arbitraria, las soluciones ahora dependen de los parámetros de no conmutatividad θ y de Born-Infeld b (con dimensiones de campo eléctrico). Nuevamente resolvemos usando el formalismo de los estados coherentes inspirados por no conmutatividad, pero en este caso lo hacemos en dos partes, primero para la deformación de masa (modelo A) y luego para la deformación de carga (modelo B), por lo tanto solamente se modifica el tensor de energía momento en cada caso. En este caso analizamos la influencia de la no conmutatividad en algunas de sus propiedades termodinámicas, explícitamente se obtienen las expresiones de masa y temperatura en dimensión arbitraria las cuales dependen del radio del horizonte de eventos. Se verificó que en el límite $\theta \rightarrow 0$ se recuperan las expresiones no deformadas. En ambos modelos, para el caso de $(3 + 1)$ -dimensiones los diagramas $(P - v)$ y de Gibbs son bastante similares a los no deformados. No obstante, la ecuación cúbica para encontrar los puntos críticos en donde ocurren las transiciones de fase ahora es una ecuación cúbica no homogénea, debido a una contribución que proviene de la no conmutatividad, esto hace difícil calcular explícitamente los puntos críticos en donde ocurren las transiciones de fase, sin embargo podemos graficar la función cúbica y entonces observar si existen puntos críticos debido a la influencia de la no conmutatividad. Por otra parte se calculó la expresión para la función de Gibbs y se observa que estos diagramas son bastante similares a los no deformados en los que se observa la existencia de puntos críticos, ya que ahora su existencia depende de los valores de θ . En ambos casos, la variación del parámetro b muestra el comportamiento de las soluciones Schwarzschild y Reissner-Nordström.

A diferencia del caso no deformado, en el modelo A (deformación de masa) surgen puntos críticos como efecto de la no conmutatividad en donde antes no había, mientras que para el modelo B (deformación de carga) no aparecen. La solución métrica regular implica que las constantes de integración eliminen el término de Schwarzschild que va como $1/r$, por lo que ya no aparece el término Schwarzschild-anti-de Sitter, por lo tanto para que la solución sea de agujero negro la métrica presenta singularidades como consecuencia de la electrodinámica de Born-Infeld. Otro efecto de la no conmutatividad se observa en el diagrama de calor específico, donde para $b = 100$ el punto crítico se desplaza a la derecha, y para $b = 0,1$ el primer punto crítico desaparece para valores pequeños de θ , pero permanece para valores de θ de orden uno.

Perspectivas:

En el contexto de la no conmutatividad, los agujeros negros pueden ser regularizados lo que da más información respecto al estado final de estos objetos. Se ha encontrado que la forma de estas soluciones es semejante a algunas propuestas en la literatura para obtener soluciones de agujero negro regulares. Motivados por estos resultados, el formalismo de los estados coherentes inspirados por la no conmutatividad puede aplicarse al caso de fuentes de masa rotantes (agujero negro de Kerr) e inclusive al caso general Kerr-Newman. Aquí puede hacerse un análisis del efecto de la no conmutatividad y ver si existen soluciones regulares, además de estudiar sus propiedades termodinámicas tales como la ecuación de estado $P - v$ para saber si existen puntos críticos en los que ocurren transiciones de fase. En el contexto de la termodinámica de agujeros negro, el espacio de fase puede extenderse aún más, por lo que tendrá más sentido físico el comportamiento similar de agujeros negros con las leyes de la termodinámica. Así por ejemplo, cuando se identifica al parámetro de Born-Infeld b con un comportamiento bastante similar al de la polarización del vacío, se encuentra entonces que la primera ley termodinámica de agujeros negros quedará mejor establecida. Es interesante el estudio de estos objetos ya que constituyen bases fundamentales en la construcción de teorías de gravedad-cuántica y, en el contexto de la no conmutatividad podemos encontrar soluciones de agujero negro que sean regulares, por otro lado, la no conmutatividad provee de una transición suave de un espacio anti-de Sitter a un espacio asintóticamente Minkowski. Los estados coherentes son un método de aproximación semi-clásica que puede emplearse en teorías de gravedad cuántica, por lo tanto podrían ser introducidos en distintos problemas de gran relevancia en la actualidad, por ejemplo la correspondencia AdS/CFT, teoría de cuerdas, etc.

Para el caso de simetría esférica y estática, las componentes no nulas del símbolo de Christoffel son

$$\begin{aligned} \Gamma_{00}^0 &= \dot{\mu}, & \Gamma_{rr}^0 &= e^{-2(\mu-\nu)}\dot{\nu}, & \Gamma_{\theta_{d-1}\theta_{d-1}}^r &= -re^{-2\nu}\sin^2\theta_1\dots\sin^2\theta_{d-2} \\ \Gamma_{00}^r &= e^{2(\mu-\nu)}\mu', & \Gamma_{r\theta_{d-1}}^{\theta_{d-1}} &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta_{d-2}\theta_{d-2}}^{\theta_{d-2}} &= \cot\theta_{d-2}. \\ \Gamma_{0r}^0 &= \mu', & \Gamma_{\theta_{d-1}\theta_{d-1}}^{\theta_{d-2}} &= -\sin\theta_{d-2}\cos\theta_{d-2}, \\ \Gamma_{0r}^r &= \dot{\nu}, & \Gamma_{\theta_i\theta_{d-1}}^{\theta_{d-1}} &= \cot\theta_i, \\ \Gamma_{rr}^r &= \nu', \end{aligned}$$

donde las funciones ν y μ sólo dependen de la coordenadas radial r . De los símbolos de Christoffel puede calcularse el tensor de curvatura de Riemann $R_{\mu\nu\rho}^\alpha$ el cual se define por

$$R_{\mu\nu\rho}^\alpha = \frac{\partial\Gamma_{\mu\rho}^\sigma}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma_{\mu\nu}^\sigma}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\mu\rho}^\beta\Gamma_{\nu\beta}^\alpha - \Gamma_{\mu\nu}^\beta\Gamma_{\rho\beta}^\alpha,$$

que tiene la propiedad

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\mu\delta}R_{\nu\rho\sigma}^\delta,$$

y satisface la suma cíclica

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\rho\sigma\nu} + R_{\mu\sigma\nu\rho} = 0,$$

donde el tensor de curvatura de Riemann $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ tiene las propiedades de simetría

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\nu\mu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}, \quad R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}.$$

Así, el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$ se define por la contracción

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\alpha\nu}^\alpha = g^{\alpha\lambda}R_{\alpha\mu\lambda\nu},$$

y es simétrico, esto es $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$. Luego, el escalar de Ricci es dado por

$$R = R_{\mu}^\mu = g^{\mu\sigma}R_{\mu\sigma} = g^{\mu\sigma}g^{\alpha\lambda}R_{\alpha\mu\lambda\sigma}.$$

Las expresiones para el tensor de Ricci R se obtiene en dimensión arbitraria, para la simetría esférica y estática (1.9), con las bases ortonormales para la parte geométrica

$$\theta^0 = e^{\mu(r)}dt, \quad \theta^1 = e^{\nu(r)}dr, \quad \theta^{a+1} = r \left(\prod_{i=1}^{a-1} \sin\theta_i \right) d\theta_a,$$

con $a = 1, \dots, d-1$ donde d es la dimensión espacial, por lo tanto, las únicas componentes no nulas del tensor de Ricci son

$$R_{00} = e^{-2\nu} \left(\mu'' + \mu'^2 + \mu'\nu' + \frac{d-1}{r}\mu' \right), \quad (\text{A.1})$$

$$R_{11} = e^{-2\nu} \left(-\mu'' - \mu'^2 + \mu'\nu' + \frac{d-1}{r}\nu' \right), \quad (\text{A.2})$$

$$R_{a+1,a+1} = \frac{d-2}{r^2} (1 - e^{-2\nu}) + \frac{1}{r} (-\mu' + \nu') e^{-2\nu}, \quad (\text{A.3})$$

las cuales introducimos en el tensor de Einstein

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (\text{A.4})$$

B

Integrales

Para el cálculo de la auto-energía y el cálculo de los agujeros negros en el contexto de la electrodinámica de Born-Infeld se utiliza una integral, la cual conviene revisar aquí

$$\int \sqrt{1+x^{2d-2}} dx = \frac{d-1}{d} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^{2d-2}}} + \frac{x}{d} \sqrt{1+x^{2d-2}} \quad (\text{B.1})$$

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^{2d-2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2d-2}\right) \Gamma\left(\frac{d-2}{2d-2}\right)}{2(d-1)\Gamma(1/2)} \quad (\text{B.2})$$

Así

$$\int_0^\infty \left(\sqrt{1+x^{2d-2}} - x^{d-1}\right) dx = \frac{d-1}{d} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^{2d-2}}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2d-2}\right) \Gamma\left(\frac{d-2}{2d-2}\right)}{2d\Gamma(1/2)}. \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{aligned} \int_0^x \left(\sqrt{1+x^{2d-2}} - x^{d-1}\right) dx &= \frac{x}{d} \sqrt{1+x^{2d-2}} - \frac{x}{d} + \frac{d-1}{d} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^{2d-2}}} \\ &= \frac{x}{d} \sqrt{1+x^{2d-2}} - \frac{x}{d} + \frac{d-1}{d} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^{2d-2}}} - \frac{d-1}{d} \int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^{2d-2}}} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\int_x^\infty \frac{dx}{\sqrt{a+x^{2d-2}}} = \frac{1}{(d-2)x^{d-2}} {}_2F_1\left[\frac{d-2}{2d-2}, \frac{1}{2}, \frac{3d-4}{2d-2}, -\frac{a}{x^{2d-2}}\right]. \quad (\text{B.5})$$

C

Auto-energía

La auto-energía de una partícula con carga eléctrica q en el campo de Born-Infeld se obtiene de calcular la integral de volumen de la densidad Hamiltoniana como

$$U = \int d^d x \mathcal{H}. \quad (\text{C.1})$$

En este caso se realiza el cálculo considerando solamente el campo eléctrico radial y en dimensión arbitraria $(d + 1)$, el cálculo es el siguiente

$$\begin{aligned} U &= b^2 \int d^d x \sqrt{-g_d^S} \left(\sqrt{1 + \frac{D^2}{b^2}} - 1 \right) = b^2 \int_0^\infty dr r^{d-1} \int d\Omega_{d-1} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\Gamma(\frac{d}{2}) q}{b 2\pi^{d/2}} \right)^2 \frac{1}{r^{2(d-1)}}} - 1 \right), \\ &= b^2 \int_0^\infty dr \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \left(\sqrt{\Gamma^{2(d-1)} + \left(\frac{\Gamma(\frac{d}{2}) q}{2b\pi^{d/2}} \right)^2} - r^{d-1} \right), \end{aligned}$$

luego se hace el cambio de variable

$$r = x \left(\frac{\Gamma(\frac{d}{2}) q}{2b\pi^{d/2}} \right)^{1/(d-1)} \quad \Rightarrow \quad dr = dx \left(\frac{\Gamma(\frac{d}{2}) q}{2b\pi^{d/2}} \right)^{1/(d-\frac{1}{2})},$$

así

$$U = b \int_0^\infty dx \left(\frac{\Gamma(\frac{d}{2}) q}{2b\pi^{d/2}} \right)^{1/(d-1)} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2})} \left(\frac{\Gamma(\frac{d}{2}) q}{2\pi^{d/2}} \right) \left(\sqrt{x^{2(d-1)} + 1} - x^{d-1} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= bq \left(\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) q}{2b\pi^{d/2}} \right)^{1/(d-1)} \int_0^\infty \left(\sqrt{x^{2(d-1)} + 1} - x^{d-1} \right) dx \\
&= q^{\frac{d}{d-1}} b^{\frac{d-2}{d-1}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right) q}{2b\pi^{d/2}} \right)^{1/(d-1)} \int_0^\infty \left(\sqrt{x^{2(d-1)} + 1} - x^{d-1} \right) dx,
\end{aligned}$$

donde la integral

$$\int_0^\infty \sqrt{1 + x^{2(d-1)}} dx = \int_0^\infty dx \frac{1 + x^{2(d-1)}}{\sqrt{1 + x^{2(d-1)}}} = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1 + x^{2(d-1)}}} + \int_0^\infty \frac{x^{2(d-1)}}{\sqrt{1 + x^{2(d-1)}}} dx,$$

tal que $\int_0^\infty \frac{x^{2(d-1)}}{\sqrt{1 + x^{2(d-1)}}} dx = \int_0^\infty x \frac{x^{2d-3}}{\sqrt{1 + x^{2(d-1)}}} dx$ puede integrarse por partes como

$$\begin{aligned}
du = \frac{x^{2d-3}}{\sqrt{1 + x^{2(d-1)}}} dx \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2(d-1)} \int \frac{dz}{z^{1/2}} = \frac{1}{d-1} z^{1/2} = \frac{1}{d-1} \sqrt{1 + x^{2(d-1)}}, \\
v = x, \quad du = dx.
\end{aligned}$$

por lo que

$$\int_0^\infty \frac{x^{2(d-1)}}{\sqrt{1 + x^{2(d-1)}}} dx = \frac{1}{d-1} x \sqrt{1 + x^{2(d-1)}} \Big|_0^\infty - \frac{1}{d-1} \int_0^\infty \sqrt{1 + x^{2(d-1)}} dx$$

de esta forma

$$\int_0^\infty \sqrt{1 + x^{2(d-1)}} dx = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1 + x^{2(d-1)}}} + \frac{1}{d-1} x \sqrt{1 + x^{2(d-1)}} \Big|_0^\infty - \frac{1}{d-1} \int_0^\infty \sqrt{1 + x^{2(d-1)}} dx,$$

o equivalentemente

$$\frac{d}{d-1} \int_0^\infty \sqrt{1 + x^{2(d-1)}} dx = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1 + x^{2(d-1)}}} + \frac{1}{d-1} x \sqrt{1 + x^{2(d-1)}} \Big|_0^\infty$$

entonces

$$\int_0^\infty \sqrt{1 + x^{2(d-1)}} dx = \frac{d-1}{d} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1 + x^{2(d-1)}}} + \frac{1}{d-1} x \sqrt{1 + x^{2(d-1)}} \Big|_0^\infty$$

por lo tanto

$$U = q^{\frac{d}{d-1}} b^{\frac{d-2}{d-1}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{2\pi^{d/2}} \right)^{1/(d-1)} \left(\frac{d-1}{d} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1 + x^{2(d-1)}}} + \frac{1}{d-1} x \sqrt{1 + x^{2(d-1)}} \Big|_0^\infty - \frac{1}{d} x^d \Big|_0^\infty \right).$$

En el límite

$$x \rightarrow \infty, \quad x\sqrt{1+x^{2(d-1)}} \approx x \cdot x^{d-1} = x^d$$

la integral

$$\int_0^{\infty} \left(\sqrt{1+x^{2(d-1)}} - x^{d-1} \right) dx = \frac{d-1}{d} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^{2(d-1)}}},$$

por lo tanto

$$U = \frac{d-1}{d} q^{\frac{d}{d-1}} b^{\frac{d-2}{d-1}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{2\pi^{d/2}} \right)^{1/(d-1)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^{2(d-1)}}}.$$

La integral se calcula utilizando utilizamos la representación de Schwinger de la función gamma definida como

$$\Gamma(z) = p^z \int_0^{\infty} e^{-pt} t^{z-1} dt,$$

en donde tomamos $z = 1/2$ y $p = 1 + x^{2(d-1)}$ tal que

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{1+x^{2(d-1)}} \int_0^{\infty} e^{-(1+x^{2(d-1)})t} t^{-1/2} dt,$$

por lo que

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^{2(d-1)}}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-(1+x^{2(d-1)})t} t^{-1/2} dt,$$

entonces

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^{2(d-1)}}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} \left(\int_0^{\infty} dx e^{-x^{2(d-1)}t} dx \right),$$

de donde

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} dx e^{-x^{2(d-1)}t} dx &= \int_0^{\infty} e^{-s} \frac{1}{2(d-1)} t^{-\frac{1}{2d-2}} s^{\frac{3-2d}{2d-2}} ds \\ &= \frac{1}{2(d-1)} t^{-\frac{1}{2d-2}} \int_0^{\infty} e^{-s} s^{\frac{1}{2d-2}-1} ds \\ &= \frac{1}{2(d-1)} t^{-\frac{1}{2d-2}} \Gamma\left(\frac{1}{2d-2}\right) \end{aligned}$$

y haciendo un cambio de variable

$$s = x^{2(d-1)}t, \quad \implies \quad ds = t - 2(d-1)x^{2d-3}dx = 2(d-1)t^{\frac{1}{2d-2}}s^{\frac{2d-3}{2d-2}}dx,$$

de esta forma

$$\int_0^{\infty} e^{-x^{2(d-1)}t} dx = \frac{1}{2(d-1)} t^{-\frac{1}{2d-2}} \Gamma\left(\frac{1}{2d-2}\right)$$

tal que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x^{2(d-1)}}} &= \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2d-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{1}{2(d-1)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} t^{-\frac{1}{2d-2}} dt \\ &= \frac{1}{2(d-1)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2d-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\frac{d-2}{2d-2}-1} dt = \frac{1}{2(d-1)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2d-2}\right) \Gamma\left(\frac{d-2}{2d-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \end{aligned}$$

entonces se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left(\sqrt{1+x^{2(d-1)}} - x^{d-1} \right) dx &= \frac{d-1}{d} \frac{1}{2(d-1)} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2d-2}\right) \Gamma\left(\frac{d-2}{2d-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2d} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2d-2}\right) \Gamma\left(\frac{d-2}{2d-2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \\ &= \frac{1}{2d\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2d-2}\right) \Gamma\left(\frac{d-2}{2d-2}\right), \end{aligned}$$

por lo tanto, la auto-energía de una partícula de carga eléctrica q para el campo de Born-Infeld es

$$U = \frac{1}{2d\sqrt{\pi}} \left[q^{\frac{d}{d-1}} b^{\frac{d-2}{d-1}} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{2\pi^{d/2}} \right)^{\frac{1}{d-1}} \right] \Gamma\left(\frac{1}{2d-2}\right) \Gamma\left(\frac{d-2}{2d-2}\right). \quad (\text{C.2})$$

D

Fórmulas

Algunas propiedades de la función hipergeométrica ${}_2F_1$ en $d = 3$ son

- Las derivadas

$$\frac{d}{dx} {}_2F_1 [a, b; c; x] = \frac{ab}{c} {}_2F_1 [a + 1, b + 1; c + 1; x], \quad (\text{D.1})$$

$$\frac{d}{dx} {}_2F_1 \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; -x \right] = \frac{a}{x} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - {}_2F_1 \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; -x \right] \right). \quad (\text{D.2})$$

- Las identidades

$$\frac{ax}{c} {}_2F_1 [a + 1, b + 1, c + 1; x] = {}_2F_1 [a + 1, b; c; x] - {}_2F_1 [a, b, c; x], \quad (\text{D.3})$$

$${}_2F_1 \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}; \frac{9}{4}; -x \right] = \frac{c}{bx} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x}} - {}_2F_1 \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; -x \right] \right). \quad (\text{D.4})$$

- La relación

$${}_2F_1 \left[\frac{5}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; -x \right] = \frac{1}{\sqrt{1+x}}. \quad (\text{D.5})$$



Masa ADM

En primera ley termodinámica de agujeros negros la masa ADM se identifica como la energía ADM del sistema. El formalismo ADM consiste en la formulación hamiltoniana de la relatividad general, en donde se identifica a un conjunto de variables canónicamente conjugadas a partir de una función lagrangiana donde el hamiltoniano será la transformada de Legendre en las velocidades de la función lagrangiana, donde se define un tensor métrico que define a $g_{\mu\nu}$ pero de dimensión menor, además de sus momentos canónicos conjugado, los cuales son las nuevas variables dinámicas en el formalismo ADM. Como sabemos, la energía está asociada con el tensor de energía momento $T^{\mu\nu}$ y puede ser conservada localmente para un espacio-tiempo que contenga un espacio vectorial de Killing como de tiempo (dependiente del tiempo) y, que sea asintóticamente Minkowski, ya que el formalismo consiste en definir una hipersuperficie a $t = cte.$. Lo que se hace es definir a la energía total como una integral de superficie en el infinito donde $\partial/\partial t$ es asintóticamente Killing en tales espacios-tiempo, así la métrica toma la forma

$$g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu},$$

en $r \rightarrow \infty$ y $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski. Por lo tanto, en coordenadas cartesianas tendremos

$$h_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right),$$

para poder hacer una linealización en ∞ a las ecuaciones de Einstein, esto es

$$h_{\mu\nu} + h_{\nu\mu} - 2h_{(\mu,\nu)} = -16\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}T \right), \quad (\text{E.1})$$

donde $\square = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu$, $h = \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$, $h_\mu = \eta^{\nu\sigma} h_{\sigma\mu\nu} = h^\nu_{\mu\nu}$ y $T = \eta^{\mu\nu} T_{\mu\nu}$, tal que al tomar la traza se tiene

$$h - h^\mu_{\mu} = 8\pi GT. \quad (\text{E.2})$$

Ahora, si se considera una fuente débil de polvo estático, entonces

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

con presión cero para el polvo. Para que sea estático se tiene $\dot{\rho} = 0$ y, una fuente débil con $4\pi G\rho \ll 1$ y $T_{0i} = 0$, tal que si es estática se supone $\dot{h}_{\mu\nu} = 0$, por lo que en (E.1) $\mu = \nu = 0$ de modo que esta expresión se escribe ahora como

$$\nabla^2 h_{00} = -8\pi GT_{00}, \quad (\text{E.3})$$

mientras que (E.2) es de la forma

$$-\nabla^2 h_{00} + \nabla^2 h_{jj} - h_{ij,ij} = -\nabla^2 h_{00} + \partial_i (\partial_i h_{jj} - \partial_j h_{ij}) = -8\pi GT_{00}, \quad (\text{E.4})$$

luego, al sumar (E.1)+(E.2) se obtiene el resultado

$$T_{00} = \frac{1}{16\pi G} \partial_i (\partial_i h_{ij} - \partial_j h_{ij}), \quad (\text{E.5})$$

en coordenadas cartesianas. Y dado que la fuente es débil, entonces se asume que el espacio-tiempo es Minkowskiano, por lo que $h_{\mu\nu}$ será ahora un campo definido en Minkowski, por lo tanto, la energía total se obtiene integrando a T_{00} en todo el espacio, esto es

$$E = \int_{t=cte.} d^3x T_{00}, \quad (\text{E.6})$$

con $t = cte.$ en todo el espacio. De la ley de Gauss, la integral ahora es de superficie

$$E = \frac{1}{16\pi G} \oint_{\infty} dS_i \partial_i (\partial_i h_{ij} - \partial_j h_{ij}), \quad (\text{E.7})$$

en coordenadas cartesianas. Las fuentes definidas asintóticamente ahora son identificadas como la energía total E y está contenida dentro de la hipersuperficie sobre la cual se integra. La energía total solamente vale para los espacios-tiempo asintóticamente planos.



Radiación Hawking

La radiación Hawking describe la emisión espontánea de partículas que acompañan la formación de un agujero negro. Algunos textos que encontramos en la literatura en donde se detalla el cálculo explícito de la temperatura de Hawking son ([44], [92]), en esta parte resumimos estas ideas. La radiación Hawking ocurre fuera del horizonte de eventos y su emisión provoca una pérdida de masa del agujero negro, entonces se pensaría que el área decrecerá a causa de un flujo de energía negativa que cruza el horizonte de eventos r_H , pero estaría en equilibrio con el flujo de energía positivo emitido al infinito, esto es, fuera del horizonte de eventos habrá pares virtuales de partícula-antipartícula, una con energía negativa y otra positiva. La negativa está en la región clásicamente prohibida, pero debido al efecto túnel puede cruzar el horizonte de eventos del agujero negro donde al interior el vector de Killing son las traslaciones espaciales. En esta región puede existir como una partícula real con un vector momento de tipo tiempo e incluso su energía relativa en el infinito medida por la traslación del vector de Killing es negativa. La otra partícula de energía positiva, puede escapar al infinito y constituye una parte de la emisión térmica del agujero negro. La probabilidad de que la energía negativa que cruza el r_H depende de la superficie de gravedad κ , ya que esta cantidad mide el gradiente de la magnitud de que tan rápido cambia el vector de Killing al de tipo espacio. Así, un agujero negro puede pensarse como un estado excitado del campo gravitacional, que decaerá cuánticamente por las fluctuaciones cuánticas de la métrica.

Recordemos que para un campo escalar que satisfaga la ecuación diferencial lineal de Klein-Gordon $\Delta\varphi = m^2\varphi$, podemos encontrar una base de soluciones $\varphi_\lambda(x)$ tales que

$$\varphi(x) = \int d\lambda a_\lambda \varphi_\lambda(x), \quad (\text{F.1})$$

y su transformada de Fourier es

$$\tilde{\varphi}(x) = \int d^d k e^{ik \cdot x} a_\lambda,$$

donde $\varphi_\lambda(x) = e^{ik \cdot x}$ corresponde a una energía positiva o negativa, tal que para $e^{ik \cdot x}$ el eigenvalor de la energía es el vector de Killing $i\partial_t$ tal que $E = -\lambda_0$, ya que $\lambda = (\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2, \lambda^3)$. Por lo que ahora (F.1) puede escribirse como

$$\varphi(x) = \int_{E>0} d\lambda \varphi_\lambda(x) a_\lambda + \int_{E<0} d\lambda \varphi_\lambda(x) a_\lambda^\dagger, \quad (\text{F.2})$$

que para Klein-Gordon se tiene

$$\varphi(x) = \int_{\lambda_0 = -\sqrt{m^2 + |k|^2}} d^3 \lambda e^{ik \cdot x} a_\lambda + \int_{\lambda_0 = -\sqrt{m^2 + |k|^2}} d^3 \lambda e^{ik \cdot x} a_\lambda^\dagger, \quad (\text{F.3})$$

y los operadores de creación a y aniquilación a^\dagger satisfacen $[a_\lambda, a_{\lambda'}^\dagger] = \hbar \delta_{\lambda\lambda'}$.

Con estas consideraciones, ahora para el espacio-tiempo de Schwarzschild, el cual es asintóticamente Minkowski dentro y fuera de r_H (el interior del agujero negro es no estacionario), por lo que se define un vacío $|0_{in}\rangle$ dentro y otro $\langle 0_{out}|$ fuera de r_h (un espacio de Fock). Luego, se define un campo escalar φ que satisfaga la ecuación de Klein-Gordon con métrica de Schwarzschild, en la que se introducen coordenadas radiales nulas salientes $u = t - r^*$ y entrantes $v = t + r^*$ (donde r^* es la coordenada radial de Regge-Wheeler tal que $dr^* = \frac{dr}{e^{2\mu}}$), en conjunto con la condición $e^{2\mu(r_H)} = 0$. Dado que el campo φ es auto-función del vector de Killing ∂_t con frecuencia positiva ω , se establece que

$$\varphi(t, r^*) = e^{-i\omega r} R(r^*), \quad (\text{F.4})$$

donde $R(r^*) = e^{\pm i\omega r^*}$ es solución a la ecuación de Klein-Gordon $[-\partial_t^2 + \partial_{r^*}^2] \varphi = 0$ (o en coordenadas entrantes y salientes es $\partial^2 \varphi / \partial u \partial v = 0$), en tal forma que

$$\varphi_\omega(u) = e^{-i\omega u}, \quad \varphi_\omega(v) = e^{-i\omega v}, \quad (\text{F.5})$$

o equivalentemente

$$\partial_u \varphi_\omega(v) = 0, \quad \partial_v \varphi_\omega(u) = 0. \quad (\text{F.6})$$

Por lo tanto, solución general para este sistema es

$$\varphi = \int \frac{d\omega}{\sqrt{2\pi}} (a_\omega e^{-i\omega v} + a_\omega^\dagger e^{i\omega v}), \quad (\text{F.7})$$

o

$$\varphi = \int \frac{d\omega'}{\sqrt{2\pi}} (b_{\omega'} e^{-i\omega' u} + b_{\omega'}^\dagger e^{i\omega' u}). \quad (\text{F.8})$$

La radiación se produce cuando una parte de un paquete de ondas es atraído al agujero negro y la otra parte permanece sin cambios, siendo algunos de los modos que penetran al agujero negro los causantes de la radiación, tal que los modos de la onda saliente deberán cumplir la condición de contorno

$$\Phi_\omega \xrightarrow{\mathcal{J}^+} e^{-i\omega u}, \quad (\text{F.9})$$

donde \mathcal{J}^+ ($r \rightarrow \infty, t \rightarrow \infty, u$ finito) es el futuro nulo infinito. Para calcular los coeficientes de Bogoliubov se debe establecer una relación entre los modos $\Phi_\omega(u)$ y $e^{-i\omega v}$ cercanamente fuera del r_H , entonces definimos

$$A_{\omega\omega'} = \tilde{\varphi}_\omega(\omega'), \quad B_{\omega\omega'} = \hat{\varphi}_\omega(\omega'), \quad (\text{F.10})$$

tal que

$$\Phi_\omega(v) = \int \frac{d\omega'}{\sqrt{2\pi}} \left[\tilde{\varphi}_\omega(\omega') e^{-i\omega'v} + \hat{\varphi}_\omega(\omega') e^{-i\omega'v} \right], \quad (\text{F.11})$$

donde los coeficientes de Bogoliubov (F.10) son calculados a través de las transformadas de Fourier, esto es

$$\tilde{\varphi}_\omega(\omega') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega'v} \Phi_\omega(v), \quad \hat{\varphi}_\omega(\omega') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dv}{\sqrt{2\pi}} e^{i\omega'v} \Phi_\omega(v), \quad (\text{F.12})$$

tal que $\Phi_\omega(v)$ cercana a \mathcal{J}^- es

$$\Phi_\omega(v) = \begin{cases} e^{\frac{i\omega}{\kappa} \log(-v)} & \text{si } v < 0, \\ 0 & \text{si } v > 0. \end{cases} \quad (\text{F.13})$$

por lo tanto los coeficientes de Bogoliubov son

$$A_{\omega\omega'} \simeq \int_{-\infty}^{\infty} dv \Phi_\omega(v) e^{i\omega'v} = \int_0^{\infty} dv e^{i\omega'v + \frac{i\omega}{\kappa} \log(-v)}, \quad (\text{F.14})$$

$$B_{\omega\omega'} \simeq \int_{-\infty}^{\infty} dv \Phi_\omega(v) e^{-i\omega'v} = \int_0^{\infty} dv e^{i\omega'v + \frac{i\omega}{\kappa} \log(v)}, \quad (\text{F.15})$$

que satisfacen $B_{\omega\omega'} = A_{\omega(-\omega')}$ y $B_{\omega\omega'} = -e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} A_{\omega\omega'}$. Por el proceso de cuantización, el número de partículas de cada modo i es dado por

$$\langle N_i \rangle = (B^\dagger B)_{ii} \quad (\text{F.16})$$

tal que el número total de partículas se obtiene calculando

$$\left\langle 0 \left| \sum_k b_i^\dagger b_i \right| 0 \right\rangle = \text{Tr}(B^\dagger B). \quad (\text{F.17})$$

Por lo tanto, el espectro de partículas que observaría un observador en el infinito asintóticamente plano se calcula a partir de las relaciones de los coeficientes de Bogoliubov dados en

$$u_j = \sum_k [A_{jk} f_k(x) + B_{jk} f_k^*(x)], \quad (\text{F.18})$$

donde $f_k(x)$ son las bases del espacio tiempo y $u_k(x)$ una combinación de estas, además, se satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} AA^\dagger - BB^\dagger &= 1, & AB^T - BA^T &= 0, \\ A^\dagger A - B^T B^* &= 1, & A^\dagger B - B^T A^* &= 0. \end{aligned}$$

y usando $B_{\omega\omega'} = -e^{-\frac{\pi\omega}{\kappa}} A_{\omega\omega'}$ con $AA^\dagger - BB^\dagger = 1$, entonces el espectro discreto será dado por

$$\sum_{\omega''} A_{\omega\omega''} A_{\omega''\omega'}^* - B_{\omega\omega''} B_{\omega''\omega'}^* = \delta_{\omega\omega'}, \quad (\text{F.19})$$

o equivalentemente

$$\left(e^{\frac{\pi}{\kappa}(\omega+\omega')} - 1 \right) \sum_{\omega''} B_{\omega\omega''} B_{\omega''\omega'}^\dagger = \delta_{\omega\omega'}, \quad (\text{F.20})$$

por lo tanto

$$\langle N_\omega \rangle = (B^\dagger B)_{\omega\omega} = (BB^\dagger)_{\omega\omega} = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} - 1}, \quad (\text{F.21})$$

es el número de partículas creadas en el modo de frecuencia ω que ve un observador en el infinito, ya que todas las partículas entrantes son capaces de atravesar el horizonte de eventos y salir de nuevo (lo cual no es así). Entonces, para una fracción Γ_ω se tiene que

$$\langle N_\omega \rangle = \frac{\Gamma_\omega}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa}} \pm 1}, \quad (\text{F.22})$$

donde el signo $+$ corresponde a los fermiones. Esta expresión afirma que el agujero negro tiene un espectro de emisión térmica que se corresponde con una temperatura $T = \frac{\kappa}{2\pi}$. Así, para el agujero negro de Schwarzschild donde el coeficiente métrico es $e^{2\mu(r)} = 1 - \frac{2M}{r}$ y su superficie de gravedad es $\kappa = \frac{1}{4M}$, se encuentra que el número de partículas es

$$\langle N_\omega \rangle = \frac{1}{e^{8\pi\omega M} - 1}. \quad (\text{F.23})$$

G

Cálculo de la temperatura

Para obtener la expresión de la temperatura del agujero negro $(3 + 1)$ -dimensional, se asume la métrica de simetría esférica y estática

$$ds^2 = -N^2(r) dt^2 + f^{-2}(r) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi), \quad (\text{G.1})$$

con $N(r) = f(r)$. Se tiene que la temperatura en $r = R$ es

$$\begin{aligned} T(R) &= \left(\frac{\partial E}{\partial S} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial(\pi r_H^2)} \int_{S^2} d^2x \sqrt{\sigma} \left[\frac{1}{8} \left(-\frac{2f(R)}{R} \right) - \epsilon_0(R) \right] \\ &= -\frac{4\pi R^2}{8\pi R} \frac{1}{f(R)} \frac{\partial f^2(R)}{\partial(\pi r_H^2)} = -\frac{R}{4\pi} \frac{1}{N(R)} \frac{\partial N^2(R)}{\partial r_H}. \end{aligned} \quad (\text{G.2})$$

Luego, asumimos que

$$N^2(r) = 1 - MW(r) + V(r, Q, \Lambda), \quad (\text{G.3})$$

donde W y V son funciones arbitrarias. La condición $N^2(r_H) = 0$ implica que

$$M = \frac{1}{W(r_H)} [1 + V(r_H, Q, \Lambda)], \quad (\text{G.4})$$

por lo que

$$T(R) = \frac{1}{N(R)} \frac{RW(R)}{4\pi r_H} \frac{\partial}{\partial r_H} \frac{1}{W(r_H)} [1 + V(r_H, Q, \Lambda)]. \quad (\text{G.5})$$

Por otra parte, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial N^2(r)}{\partial r} &= -MW_{,r} + V_{,r} \\ &= -\frac{1}{W(r_H)} [1 + V(r_H, Q, \Lambda)] W_{,r} + V_{,r}, \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

que al evaluar en el horizonte de eventos $r = r_H$ nos da

$$\left. \frac{\partial N^2(r)}{\partial r} \right|_{r_H} = W(r_H) \frac{\partial}{\partial r_H} \frac{1}{W(r_H)} [1 + V(r_H, Q, \Lambda)]. \quad (\text{G.7})$$

De esta forma, se obtiene la expresión para la temperatura

$$T(R) = \frac{1}{N(R)} \frac{RW(R)}{r_H W(r_H)} \frac{1}{4\pi} \left. \frac{\partial N^2(r)}{\partial r} \right|_{r_H}$$

dando como resultado o final

$$T(R) = \frac{1}{N(R)} \frac{RW(R)}{r_H W(r_H)} \frac{\kappa_H}{2\pi}. \quad (\text{G.8})$$

Bibliografía

- [1] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Mecánica Cuántica No-Relativista*, curso de Física Teoría. Vol. 3, Editorial Reverté (1983).
- [2] S. W. Hawking y G. F. R. Ellis, *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press (1973).
- [3] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press (1984).
- [4] R. D'Inverno, *Introducing Einstein's Relativity*, Oxford University Press (1992).
- [5] S. M. Carroll *An Introduction to General Relativity: Spacetime and Geometry*, Addison Wesley (2004).
- [6] L. Balart y E. C. Vagenas *Regular black hole metrics and the weak energy condition*, arXiv:gr-qc/1401.2136v2 (2014).
- [7] T. Ortín, *Gravity and strings*, Cambridge University Press (2004).
- [8] C. M. Will, *The Confrontation between general relativity and experiment*, Living Rev. Rel. **9** (2006).
- [9] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*, Phys. Rev. Lett. **116** (2016) 061102.
- [10] B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration), *GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence*, Phys. Rev. Lett. **116** (2016) 241103.
- [11] R. L. Bowers y E. P. T. Liang, *Anisotropic Spheres in General Relativity*. The Astrophysical Journal **188** (1974) 657-665.
- [12] I. Dymnikova, *Vacuum Nonsingular Black Hole*, Gen. Rel. Grav. **24** (1992) 235-242.
- [13] I. Dymnikova, Int. J. Mod. Phys. **D12** (2003) 1015-1034.
- [14] I. Dymnikova Korpusik, M. Grav. Cosmol. **17**, 35-37 (2011).

- [15] I. Dymnikova, *Regular electrically charged vacuum structures with de Sitter center in Nonlinear Electrodynamics coupled to General Relativity*, arXiv:gr-qc/0407072v3 (2004).
- [16] I. Dymnikova, *Cosmological term as a source of mass*, arXiv:gr-qc/0112052v1 (2001).
- [17] E. Schrödinger, *Expanding universes*, Cambridge University Press (1956).
- [18] M. Blau, *Lectures Notes on General Relativity*, Universität Bern (2017). <http://www.blau.itp.unibe.ch/GRLecturenotes.html>
- [19] B. Zwiebach, *A first course in string theory*, Cambridge University Press (2006).
- [20] S. W. Hawking, *Historia del tiempo, del Big Bang a los agujeros negros*. Editorial Crítica (1987).
- [21] S. Chandrasekhar, *On Stars, their evolution and their stability*, Nobel lecture, The University of Chicago (1983).
- [22] P. K. Townsend, *Black Holes Lectures notes*, University of Cambridge, ArXiv:gr-qc/9707012v1 (1997).
- [23] S. Chandrasekhar, *The Highly Collapsed Configurations of a Stellar Mass*, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. **95** (1935) 207-225.
- [24] K. Schwarzschild, *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (1916) 189-196.
- [25] H. Reissner, *Über die Eigengravitation des elektrischen Feldes nach der Einsteinschen Theorie*, Annalen der Physik **355** (1916) 106–120.
- [26] G. Nordström, *On the Energy of the Gravitation field in Einstein's Theory*, Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences **20** (1918) 1238-1245.
- [27] R. Oppenheimer y H. Snyder, *On Continued Gravitational Contraction*, University of California, Berkeley, Phys. Rev. **56** (1939) 455.
- [28] R. P. Kerr, *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*, Phys. Rev. Lett. **11** (1963) 237-238.
- [29] E. T. Newman y A. I. Janis, *Note on the Kerr spinning particle metric*, J. Math. Phys. **6** (1965) 915-917.
- [30] E. T. Newman, R. Couch, K. Chinnapared, A. Exton, A. Prakash y R. Torrence, *Metric of a Rotating, Charged Mass*, J. Math. Phys. **6** (1965) 918-919.

- [31] S. Chandrasekahr, *The Mathematical Theory of Black Holes*, University of Chicago, Clarendon Press, Oxford, Oxford University Press (1983).
- [32] V. P. Frolov e I. D. Novikov, *Black Hole Physics: Basic concepts and new developments*, Springer (1997).
- [33] E. F. Taylor y J. A. Wheeler, *Exploring Black Holes, Introduction to General relativity*, Addison Wesley Longman (2000).
- [34] Tai L. Chow, *Gravity, Black Holes, and the very early Universe An introduction to General Relativity and Cosmological*, Springer (2008).
- [35] R. H. Boyer, *Geodesic Killing orbits and bifurcate Killing horizons*, Proc. R. Soc. **311** (1969) 245–252.
- [36] F. R. Tangherlini, *Schwarzschild field in n dimensions and the dimensionality of space problem*, Nuovo Cim. **27** (1963) 636-651.
- [37] J. Polchinski, *String theory. Vol. 1: An introduction to the bosonic string*, Cambridge University Press, (2007).
- [38] J. Polchinski, *String theory. Vol. 2: Superstring theory and beyond*, Cambridge University Press, (2007).
- [39] D. Z. Freedman y A. Van Proeyen, *Supergravity*, Cambridge University Press (2012).
- [40] G. W. Gibbons, D. Ida y T. Shiromizu, *Uniqueness and nonuniqueness of static vacuum black holes in higher dimensions*, Prog. Theor. Phys. Suppl. **148** (2003) 284-290.
- [41] R. Emparan y H. S. Reall, *A Rotating black ring solution in five-dimensions*, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 101101.
- [42] G. W. Gibbons y S. W. Hawking, *Cosmological Event Horizons, Thermodynamics, and Particle Creation*, Phys. Rev. **D15** (1977) 2738-2751.
- [43] Jacob D. Bekenstein, *Commun. math. Phys.***31**, 161-170 (1973)
- [44] S. W. Hawking, *Commun. math. Phys.***43** (1975) 199.
- [45] S. Ansoldi, *Spherical black holes with regular center: A Review of existing models including a recent realization with Gaussian sources*, Conference on Black Holes and Naked Singularities Milan, Italy (2007).
- [46] S. Akcay y R. A. Matzner, *The Kerr-de Sitter Universe*, University of Texas at Austin, arXiv:1111.0479v1 [gr-qc] (2010).
- [47] A. Chamblin, R. Emparan, C. Johnson y R. C. Myers, *Charged AdS black holes and catastrophic holography*, Phys. Rev. **D60** (1999) 064018. arXiv: hep-th/9902170.

- [48] A. Chamblin, R. Emparan, C. Johnson y R. C. Myers, *Holography, thermodynamics and fluctuations of charged AdS black holes*, Phys. Rev. D **60** (1999) 104026. arXiv:hep-th/9904197.
- [49] S. Gunasekaran, R. B. Mann y D. Kubizňák *Extended phase space thermodynamics for charged and rotating black holes and Born-Infeld vacuum polarization*, ArXiv:1208.6251v2 (2012).
- [50] D. Kubizňák y R. B. Mann *P-V criticality of charged AdS black holes*, ArXiv:1205.0559v2 (2012).
- [51] J. M. Bardenn, B. Carter, y S. W. Hawking, *The Four Laws of Black Hole Mechanics*, Comm. Math. Phys. **31** (1973) 161.
- [52] L. Smarr, *Mass Formula for Kerr Black Holes*, (1973).
- [53] S.W. Hawking y D. N. Page, *Thermodynamics of black holes in Anti-de Sitter Space*. Phys. Rev. Lett. **87** (1983) 577-588.
- [54] M. Born y L. Infeld, *Foundations of the New Field Theory*, The Royal Society Cambridge (1934) 425.
- [55] S. Fernando y D. Krug, *Charged Black Hole Solutions in Einstein-Born-Infeld gravity with a Cosmological Constant*, Gen. Rel. Grav. **35** (2003) 129-137. arXiv:hep-th/0306120v3.
- [56] T. Kumar Dey, *Born-Infeld black holes in the presence of a cosmological constant*, Phys. Lett. **B595** (2004) 484-490. hep-th/0406169.
- [57] N. Bretón, *Born-Infeld generalization of the Reissner-Nordström black hole*, arXiv:gr-qc/0109022v1 (2001)
- [58] H. S. Snyder, *Quantized Space-Time*, Phys. Rev. **71**, 38-41 (1947).
- [59] A. Smailagic y E. Spallucci, *Lorentz invariance, Unitarity and UV-finiteness of QFT on noncommutative spacetime*, ArXiv:hep-th/0406174v1 (2004).
- [60] R. Jackiw, *Noncommuting fields and non-Abelian fluids*, ArXiv:0807.1939v2 [hep-th/0305027v1] (2003).
- [61] G. Magro, *Noncommuting Coordinates in the Landau problem*, ArXiv:0807.1939v2 [hep-th/0302001v1] (2003).
- [62] P. Nicolini, *Noncommutative black holes, the final appeal to quantum gravity: a review*, ArXiv:0807.1939v2 [hep-th] (2009).
- [63] V. O. Rivelles, *A Review of Noncommutative Field Theories*, Arxiv:hep-th/1101.4579v2 (2011).

- [64] M. Wohlgenannt, *Non-Commutative Geometry Physics*, ArXiv:hep-th/0602105v1 (2006).
- [65] F. Antonse, *The Wigner-Weyl-Moyal Formalism on Algebraic Structures*, ArXiv:quant-ph/9608042v1 (1996).
- [66] J. F. Plebanski y M. Przanowski, *The Weyl-Wigner-Moyal Formalism II. The Moyal Bracket*.
- [67] J. Mourad, *The Wigner-Weyl formalism and the relativistic semi-classical approximation 1*, ArXiv:hep-th/9307135v1 (1993).
- [68] J. Tosiek y M. Przanowski, *Weyl-Wigner-Moyal Formalism. I. Operator ordering*, Acta Physical Polonica B, **Vol. 26(11)**, 1703-1716 (1995).
- [69] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz y D. Sternheimer, *Deformation Theory and Quantization, Physical Applications*, ANNALS OF PHYSICS **110**, 111-151 (1978).
- [70] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz y D. Sternheimer, *Quantum Mechanics as a Deformation of Classical Mechanics, Letters in Mathematical Physics, Volume 1, Issue 6*, pp 521-530 (1977).
- [71] J. F. Plebański, M. Przanowski y J. Tosiek, *Weyl-Wigner-Moyal Formalism. II. The Moyal Bracket*, Acta Physica Polonica B, **Vol. 27(9)**, 1961-1990 (1996).
- [72] M. Wohlgenannt, *Non-Commutative Geometry Physics*, Arxiv:hep-th/0602105v1 (2006).
- [73] L. B. de Monvel, *Cours de M2: Star products, deformation quantization and Toeplitz operators*
- [74] D. B. Fairlie, *Moyal Brackets, Star Products and the Generalised Wigner Function*, Arxiv:hep-th/9806198 (1998).
- [75] R. J. Glauber, *Coherent and Incoherent States of the Radiation Field*, Phys. Rev. Letters **10, 84** (1963).
- [76] A. Smailagic y E. Spallucci, *Feynman Path Integral on the Noncommutative Plane*, ArXiv:hep-th/0307217v1 (2003).
- [77] A. Smailagic y E. Spallucci, *UV divergence-free QFT on noncommutative plane*, ArXiv:hep-th/0308193 (2004).
- [78] P. Nicolini y E. Spallucci, *Noncommutative geometry inspired wormholes and dirty black holes*, Arxiv:0902.4654v1 (2009).

- [79] E. Spallucci, A. Smailagic y P. Nicolini, *Non-commutative geometry inspired higher-dimensional charged, black holes*, arXiv:0801.3519v3 [hep-th] (2008)
- [80] D. Kubiznák y R. B. Mann, *P-V criticality of charged AdS black holes*, arXiv:1205.0559v2 [hep-th] (2012)
- [81] P. Nicolini, A. Smailagic y E. Spallucci, *Noncommutative geometry inspired Schwarzschild black hole*, arXiv:gr-qc/0510112v4 [hep-th] 12 Nov (2005)
- [82] D. N. Poenaru, *Proca Equations of a Massive Vector Boson Field*, Horia Hulubei National Institute of Physics and Nuclear Engineering, **PO Box MG-6, RO-077125** Bucharest-Magurele, Romania and Frankfurt Institute for Advanced Studies, J. W. Goethe University, Max-von-Laure-Str. **1, D-60438** Frankfurt am Main, Germany.
- [83] C. Vuille, *Einstein-Proca Model, Micro Black Holes, and Naked Singularities*, arXiv:1406.0497v1 [gr-qc] (2014).
- [84] R. Linares, M. Maceda, O. Sánchez y A. González, *Non-commutative Einstein-Proca Space-time*, Arxiv:hep-th/1409.3759v1 (2014).
- [85] B. J. Hiley, *Phase Space Description of Quantum Mechanics and Non-commutative Geometry: Wigner-Moyal and Bohm in a wider context*, TPRU, Birkbeck, University of London, Malet Street, London WC1E7HX (2007).
- [86] N. Straumann, *General Relativity and Relativistic Astrophysics*, Springer-Verlag (1984).
- [87] J. D. Bekenstein, *Black Holes and Entropy*, Phys. Rev. **D9**, 2333 (1973).
- [88] J. D. Brown, J. Creighton y R. B. Mann, *Temperature, Energy, and Heat Capacity of Asymptotically Anti-De Sitter Black Holes*, Phys. Rev. **D50**, 6394, DOI 10.1103/PhysRevD.50.6394 (1994)
- [89] A. Babbri y J. Navarro-Salas, *Modeling Black Holes Evaporation*, Imperial College Press (2005).
- [90] B. DeWitt, *The Global Approach to Quantum Field Theory*, Clarendon press, Oxford (2003).
- [91] R. Linares, M. Maceda, O. Sánchez-Santos y A. González, *Thermodynamics of a higher dimensional noncommutative anti-de Sitter-Einstein-Born-Infeld black holes*, arxiv:1508.01284v3 [hep-th] (2018).
- [92] J. M. Fernández Cristóbal, *Radiación de Hawking*, Revista mexicana de Física E **56**(29, 213-226 (2010).

Páginas Web:

[93] “ <http://www.ligo.caltech.edu/detection>”

[94] “ <http://www.ligo.org>”



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00044

Matrícula: 210382927

SOLUCIONES GRAVITACIONALES
INSPIRADAS POR
NO-COMUTATIVIDAD

En la Ciudad de México, se presentaron a las 16:00 horas del día 6 del mes de julio del año 2018 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

- DRA. NORA EVA BRETON BAEZ
- DR. JUAN MANUEL ROMERO SANPEDRO
- DR. ROMAN LINARES ROMERO
- DR. ALFREDO HERRERA AGUILAR
- DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA



BLANCA ANGELICA GONZALEZ MORALES

ALUMNA

Bajo la Presidencia de la primera y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTORA EN CIENCIAS (FISICA)

DE: BLANCA ANGELICA GONZALEZ MORALES

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, la presidenta del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REWSÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTA

DRA. NORA EVA BRETON BAEZ

VOCAL

DR. JUAN MANUEL ROMERO SANPEDRO

VOCAL

Román Linares Romero

DR. ROMAN LINARES ROMERO

VOCAL

DR. ALFREDO HERRERA AGUILAR

SECRETARIO

DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA