

**Una clase de transformaciones completamente
positivas no acotadas y conservatividad de la
solución minimal de la ecuación maestra**

**Tesis que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias presenta :**

Julio César García Corte

U A M - I
C. B. I.

1999
Asesor : Dr. Alexander M. Chebotarev

Una clase de transformaciones completamente
positivas no acotadas y conservatividad de la solución
minimal de la ecuación maestra

Julio César García Corte

Contenido

Introducción	3
1 Revisión de la teoría de semigrupos dinámicos cuánticos	7
1.1 Diferentes topologías en el espacio de operadores	7
1.2 Transformaciones completamente positivas y normales.	9
1.3 Semigrupos dinámicos cuánticos	14
1.4 Algunos ejemplos.	17
2 El Problema de la conservatividad.	25
2.1 La ecuación maestra y el QDS minimal.	25
2.2 Criterios de conservatividad.	32
2.3 Series geométricas aleatorias y la martingala de Azéma.	37
3 Una clase de transformaciones normales, completamente positivas y no acotadas.	45
3.1 Introducción.	45
3.2 Completaciones generadas por espacios de Hilbert	48
3.3 Completaciones generadas por límites proyectivos de espacios de Hilbert.	52
3.4 Ejemplos y Observaciones.	54
4 Estimaciones a priori para una clase de QDS	61
4.1 Introducción.	61
4.2 Un espacio de Banach importante.	61
4.3 Estimaciones a priori.	65
4.4 Una aplicación.	70
5 La ecuación de Lindblad con coeficiente dependiente del tiempo.	75
5.1 Introducción.	75
5.2 Hipótesis principales y resultados preliminares.	76
5.3 El cociclo minimal.	79
5.4 Un ejemplo: representación de interacción.	86
5.5 Conservatividad de cociclos covariantes.	89
Conclusiones	93
Referencias	94

Introducción.

En este trabajo examinamos algunos aspectos de la teoría de semigrupos dinámicos cuánticos: Definición, propiedades básicas, solución de la ecuación maestra y conservatividad.

El concepto de semigrupo dinámico cuántico (QDS según las iniciales en inglés) generaliza ideas aparentemente no relacionadas. Por un lado, extiende la noción de semigrupo (sub)markoviano de la teoría clásica de probabilidad; los QDS surgen como soluciones de la llamada *ecuación maestra* o *ecuación de Lindblad* que es una generalización no conmutativa de lo que en teoría clásica de probabilidad se conoce como ecuación hacia atrás de Kolmogorov (o ecuación de Kolmogorov-Feller) (ver [14],[16], [50], [68]).

Por otro lado, desde el punto de vista de la mecánica cuántica, la ecuación maestra es una generalización de la llamada ecuación de Heisenberg en presencia de ruido por lo que un QDS que resuelve la ecuación maestra describe una evolución irreversible (ver [25], [1] [68]).

Caracterizar al generador infinitesimal de un QDS es un problema de gran dificultad cuya solución parece lejana. Basta mencionar que tan solo tal caracterización en el caso en que el QDS es uniformemente continuo es un resultado altamente no trivial pese a que el generador también es acotado. Asociados con este trabajo hay nombres importantes como Lindblad ([60]) Gorini, Kossakovski y Sudarshan ([42]) quienes lograron la descripción completa del generador infinitesimal entre 1976 y 1977. En el Capítulo I formulamos sin demostración este importante resultado.

En muchas aplicaciones, el QDS no es uniformemente continuo por lo que el generador infinitesimal es no acotado. Diversos autores (E. Davies, [25], A.M. Chebotarev,[14], F. Fagnola,[32]) han estudiado la ecuación maestra proponiendo cierta expresión formal del generador infinitesimal. Para integrar a la ecuación maestra, E. Davies desarrolló un método en el espacio de operadores de traza finita, basado a su vez en un método de Kato para integrar los sistemas de ecuaciones diferenciales de Kolmogorov (ver [54]). La solución así obtenida la llamó *solución minimal*. Posteriormente, A.M. Chebotarev, propone un método para resolver la ecuación maestra en el espacio de operadores acotados (ver [14]). El enfoque de Chebotarev es una generalización del método iterativo, propuesto por Feller, para encontrar la solución minimal de los sistemas de Kolmogorov (ver [33]). Nosotros hacemos una breve descripción de ambos métodos en el Capítulo II.

Como lo demostró A.S Holevo (ver [50], Prop. 1 p. 262), ambos enfoques están estrechamente relacionados pues la solución minimal encontrada por Chebotarev es dual de la solución minimal de Davies.

El Capítulo I es una revisión de la teoría de semigrupos dinámicos cuánticos en donde exponemos algunos ejemplos que muestran que un QDS puede pensarse como una extensión del semigrupo asociado con un proceso de Markov.

La conservatividad (definida en el Capítulo II) de un QDS es otro tópico que encierra gran interés para nosotros. Desde el punto de vista de la Teoría de Probabilidad, el que un QDS sea conservativo está asociado con el concepto de no explosión de un proceso estocástico, es decir que todo el tiempo se encuentre en su espacio de estados y no escape

a infinito en tiempo finito. En el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias, con frecuencia es de interés saber cuándo hay una solución global, es decir soluciones que permanezcan acotadas en intervalos finitos de tiempo. Tal problema parece ser de mayor interés en el estudio de ecuaciones diferenciales estocásticas. Abundante es la literatura en este tópico (ver por ejemplo, [41], [52], [58], [61], [62], [76], [78], [79]). En semigrupos dinámicos cuánticos, autores como A.M. Chebotarev, F. Fagnola, A.S. Holevo han hecho aportaciones importantes en el estudio de la conservatividad del QDS que es la solución minimal de la ecuación maestra. En el Capítulo II hacemos una exposición de algunos de los resultados (ver Teorema 2.2.4) que fueron obtenidos por A.M. Chebotarev y como lo ilustraremos con al menos un ejemplo, son generalizaciones de criterios bien conocidos de no explosión para procesos estocásticos. Antes de que este autor los descubriera, poco se sabía sobre la conservatividad.

En la Sección 2.3, presentamos nuestra aportación al estudio del QDS asociado con la martingala de Azéma en donde aplicamos uno de los criterios de Chebotarev para la conservatividad.

En la ecuación maestra (ver ecuaciones (2.1.1) y (2.1.1)') hay dos componentes o coeficientes uno de ellos, $-G$, genera un semigrupo de contracciones fuertemente continuo en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y la otra componente, Φ , es una transformación completamente positiva cuyos valores son formas sesquilineales densamente definidas en $\mathcal{H}$ pero que no necesariamente son acotadas, ni siquiera cerrables. Sin embargo, mostramos que la componente completamente positiva se puede pensar como una transformación lineal acotada entre las álgebras $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{B}(\mathcal{F})$, donde $\mathcal{F}$ es un espacio de Hilbert densa y continuamente incluído en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es el álgebra de operadores acotados en $\mathcal{H}$, así como $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ es el álgebra de operadores acotados en $\mathcal{F}$.

Motivados por el estudio que hicimos en el Capítulo II de la parte completamente positiva que aparece en la ecuación maestra, en el Capítulo III presentamos una clase de transformaciones lineales completamente positivas y no acotadas. Estudiamos en detalle su estructura y damos varios ejemplos. De hecho probamos un Teorema que permite construir todos los ejemplos posibles. Hay que mencionar que para el caso de transformaciones acotadas, ya existen resultados en esta dirección (ver [59] o [75]). Este estudio, aunque relativamente sencillo, nos permitirá seguir investigando, en el Capítulo IV, criterios de conservatividad para la solución minimal de la ecuación maestra.

Tiempo atrás, se habían formulado ciertas conjeturas acerca de la cerrabilidad de las formas cuadráticas obtenidas con este tipo de transformaciones (ver [9], [14], citeCh twelve). La descripción de su estructura, permitió construir contraejemplos a las conjeturas (ver Ejemplos 3.4.1 y 3.4.2).

En el Capítulo IV aplicamos los resultados del Capítulo III al estudio de la conservatividad de cierta clase de QDS. Con nuestra técnica podemos dar un criterio de conservatividad que generaliza dos resultados recientemente demostrados por A.M. Chebotarev y F. Fagnola. El resultado principal del Capítulo es el Teorema 4.4.1. Asegura que las hipótesis A.1 y A.2 (ver Secciones 4.1 y 4.3) son suficientes para que la solución minimal

de la ecuación maestra sea conservativa. La hipótesis A.2 es un análogo no conmutativo de una condición de no explosión para la solución de una ecuación diferencial estocástica probada por Taniguchi ([78], Teo. 1).

Finalmente, en el Capítulo V presentamos condiciones para la existencia de la solución minimal de la ecuación maestra cuando el generador formal depende del tiempo.

Otros autores han investigado criterios de conservatividad. Por ejemplo, A.S. Holevo, en [49] y [50], introduce el concepto de que un QDS sea covariante respecto a la acción de un grupo y da un criterio de conservatividad, para la solución minimal, en términos de este concepto. Nosotros exponemos brevemente estos resultados en el Capítulo V y hacemos uso de ellos para dar un criterio de conservatividad de la solución minimal de la ecuación maestra con coeficiente dependiente del tiempo.

Reconocimientos. Aprovecho este espacio para agradecer al Dr. A.M. Chebotarev la supervisión de esta tesis así como la gran cantidad de sugerencias que me ha hecho y problemas abiertos que ha planteado. Espero que nuestras colaboraciones continúen. Por otro lado, quiero manifestar un especial reconocimiento al Dr. Roberto Quezada, por las importantes discusiones académicas que sostuvimos durante estos años. Sin ellas, este trabajo no hubiera sido posible. Asimismo agradezco a los miembros del jurado por los comentarios y observaciones que me hicieron para mejorar la presentación de la tesis. Debo mencionar que este trabajo fue parcialmente financiado por los proyectos de CONACYT 0233P-E9506 y 28520-E.

Por último, dedico la tesis a mi querida familia, Sol, Sarahí y Jimena; ojalá que pronto fructifiquen los sacrificios que todos hemos hecho.

Capítulo I

1 Revisión de la teoría de semigrupos dinámicos cuánticos

1.1 Diferentes topologías en el espacio de operadores

A lo largo de todo este capítulo, y el que sigue, supondremos que $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert complejo con producto interno denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y norma, $\| \cdot \|$. Recuérdese que

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle, \quad u \in \mathcal{H}.$$

Asimismo, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ será el álgebra de operadores lineales acotados en $\mathcal{H}$; la norma en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ la denotaremos por $\| \cdot \|_\infty$. Recordemos también que un operador lineal no necesariamente acotado, X , es *no negativo definido* (concepto que denotaremos por $X \geq 0$) si para todo $u \in \mathcal{H}$ que pertenezca a su dominio,

$$\langle u, Xu \rangle \geq 0.$$

Si se tuviera la desigualdad estricta para todo $u \neq 0$, se dice que X es *positivo definido*. Si un operador X es no negativo definido y su dominio es todo $\mathcal{H}$, entonces es acotado. El cono de operadores acotados no negativo definidos lo escribiremos como $\mathcal{B}_+(\mathcal{H})$. Por otro lado, $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ será el espacio de operadores de traza finita.

Es bien sabido que sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ hay diferentes topologías, algunas de las cuales revisaremos en esta sección con el fin de tener presentes sus propiedades básicas así como una notación homogénea. Sean $\mathcal{I}$ un conjunto dirigido, $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ una red en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

i) *Topología de la norma o uniforme*. Si $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces la norma se define como

$$\|X\|_\infty = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{H} \\ \|\varphi\|=1}} \|X\varphi\|$$

ii) *Topología fuerte*. Se dice que $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ converge fuertemente a X si

$$\lim_{\alpha} \|X_\alpha \varphi - X\varphi\| = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}.$$

que $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ converja fuertemente a X , será escrito simbólicamente como $X_\alpha \xrightarrow{s} X$.

iii) *Topología débil*. Se dice que $\{X_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$ converge débilmente a X si

$$\lim_{\alpha} \langle X_\alpha \psi, \varphi \rangle = \langle X\psi, \varphi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}.$$

En símbolos, este modo de convergencia lo denotaremos por $X_\alpha \xrightarrow{w} X$

iv) Topología ultradébil. $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ converge ultradébilmente, si

$$\lim_{\alpha} \operatorname{tr}\{\rho X_\alpha\} = \operatorname{tr}\{\rho X\} \quad \forall \rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$$

donde $\operatorname{tr}\{\theta\}$ es la traza del operador $\theta \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$.

Este modo de convergencia la denotaremos por $X_\alpha \xrightarrow{*w} X$.

Entre las relaciones básicas, están las siguientes (ver [6], Capítulo 2, Sección 2.4).

- a) Convergencia en la topología de la norma implica todos los demás modos de convergencia.
- b) Convergencia fuerte implica convergencia débil.
- c) Convergencia ultradébil implica convergencia débil.
- d) Las topologías fuerte y ultradébil no son comparables.
- e) Las topologías débil y ultradébil son equivalentes sobre subconjuntos $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ que son acotados en la norma, i.e., tales que

$$\sup\{\|X\|_\infty : X \in \mathcal{A}\} < \infty.$$

f) $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$ es el dual fuerte del espacio $(\mathcal{T}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$ donde

$$\|\rho\|_1 = \operatorname{tr}\{|\rho|\}, \quad \rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H}).$$

La dualidad está dada explícitamente por la asociación

$$(\rho, X) \mapsto \operatorname{tr}\{\rho X\}, \quad \rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H}), \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad (1.1.1)$$

La topología $\sigma(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}(\mathcal{H}))$, que esta dualidad genera en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, coincide con la topología ultradébil.

- g) Como consecuencia de la afirmación hecha en el inciso f) y el Teorema de Banach-Alaoglu [82], tenemos que los conjuntos $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, acotados en la norma son precompactos en la topología ultradébil. Recíprocamente, por el principio de acotamiento uniforme, los conjuntos precompactos en la topología ultradébil son acotados en la norma.
- h) Si $\{A_n\}_{n=1}^\infty, \{B_n\}_{n=1}^\infty$ son sucesiones en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que $A_n \xrightarrow{s} A, B_n \xrightarrow{s} B$ entonces $A_n B_n \xrightarrow{s} AB$.
- i) Si $\{X_n\}_n$ es una sucesión no decreciente en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que es acotada en norma entonces existe un elemento $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que X_n converge a X en las tres topologías, fuerte, débil y ultradébil. En este caso escribiremos

$$X = \sup_n X_n.$$

La dualidad (1.1.1) juega en probabilidad cuántica el mismo papel que en probabilidad clásica juega la dualidad entre el espacio de funciones medibles y acotadas y el espacio de medidas de varición total finita:

$$(f, \mu) \mapsto \int f d\mu.$$

Un operador X en $\mathcal{H}$ es de rango finito si su imagen tiene dimensión finita; X es de rango uno si su imagen tiene dimensión uno. Para designar los operadores de rango uno utilizaremos la notación de Dirac, es decir si $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, entonces $|\varphi\rangle\langle\psi|$ es el operador cuya acción sobre un elemento $x \in \mathcal{H}$ está dado por

$$|\varphi\rangle\langle\psi|x = \langle\psi, x\rangle\varphi.$$

En ocasiones, también designaremos por ρ_φ al operador $|\varphi\rangle\langle\varphi|$. Todo operador de rango finito es combinación lineal finita de operadores de rango uno. Los operadores de rango uno que son positivo definidos son de la forma $|\varphi\rangle\langle\varphi|$, es decir son múltiplos positivos de proyecciones ortogonales sobre subespacios de dimensión uno.

Si $\mathcal{H}$ es separable y $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ es una base ortonormal de $\mathcal{H}$ entonces $P_n = \sum_{i=1}^n |e_i\rangle\langle e_i|$ es la proyección ortogonal sobre el subespacio generado por $\{e_1, \dots, e_n\}$ y $P_n \xrightarrow{s} I$. Además, para cualquier $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $P_n A P_n$ es operador de rango finito,

$$\|P_n A P_n\|_\infty \leq \|A\|_\infty \quad \text{y} \quad P_n A P_n \xrightarrow{s} A.$$

Lo anterior prueba que, si $\mathcal{H}$ es separable, $P_n A P_n \xrightarrow{s} A$ y $P_n A P_n \xrightarrow{w} A$. Por tanto, el subespacio de operadores de rango finito es denso en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ respecto a las topologías fuerte y ultradébil. Además $P_n A P_n \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ si $A \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ por lo que todo operador positivo definido es aproximable por operadores positivo definidos de rango finito en esas topologías.

1.2 Transformaciones completamente positivas y normales.

En esta sección y la que sigue introducimos los conceptos que serán los objetos de estudio en este trabajo. Si $X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $X \leq Y$ ó $Y \geq X$ significa que $Y - X$ es un operador no negativo definido. En este capítulo denotaremos por

$$\mathcal{H}_n = \underbrace{\mathcal{H} \oplus \dots \oplus \mathcal{H}}_n$$

la suma directa de $\mathcal{H}$ consigo mismo n veces. Los elementos de $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ pueden representarse como matrices de $n \times n$ cuyas entradas son elementos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, i.e.,

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_n) \quad \text{con} \quad A_{ij} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Dados $\mathcal{F}$ otro espacio de Hilbert con producto interno

$$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$$

y $P : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{F})$ una transformación lineal, definimos $P^{(n)} : \mathcal{B}(\mathcal{H}_n) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{F}_n)$ como

$$P^{(n)} \left\{ \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} P(A_{11}) & \cdots & P(A_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ P(A_{n1}) & \cdots & P(A_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Es claro que $P^{(n)}$ también es una transformación lineal. Sea $\mathcal{B}_+(\mathcal{H}_n)$ el cono de operadores acotados en $\mathcal{H}_n$ que son positivo definidos.

Definición 1.2.1. [68] Decimos que P es n -positiva, si $P^{(n)}$ transforma $\mathcal{B}_+(\mathcal{H}_n)$ en $\mathcal{B}_+(\mathcal{F}_n)$. A las transformaciones 1-positivas las llamaremos positivas. También decimos que P es completamente positiva si es n -positiva para todo $n \in \mathbb{N}$.

Es inmediato probar que la composición de transformaciones completamente positivas también es completamente positiva y combinaciones lineales positivas de transformaciones completamente positivas son completamente positivas. Si $X_1, X_2, \dots, X_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y X_i^* denota el adjunto de X_i entonces

$$\begin{pmatrix} X_1^* X_1 & \cdots & X_1^* X_n \\ \vdots & & \vdots \\ X_n^* X_1 & \cdots & X_n^* X_n \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_+(h_n). \quad (1.2.1)$$

De aquí, es fácil probar lo siguiente:

Proposición 1.2.2. Si $P : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{F})$ es una transformación lineal completamente positiva, entonces se tiene que:

a) $\forall n \in \mathbb{N}, X_1, \dots, X_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), Y_1, \dots, Y_n \in \mathcal{B}(\mathcal{F}),$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Y_i^* P(X_i^* X_j) Y_j \geq 0 \quad (1.2.2)$$

b) $\forall n \in \mathbb{N}, X_1, \dots, X_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{F},$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \langle \varphi_i, P(X_i^* X_j) \varphi_j \rangle \rangle \geq 0 \quad (1.2.3)$$

Además (1.2.2) y (1.2.3) son equivalentes.

La propiedad algebraica de ser completamente positivo junto con la siguiente propiedad topológica, llamada normalidad, son dos conceptos centrales en este trabajo.

Definición 1.2.3. Sea $P : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ una transformación lineal y positiva. Se dice que es normal si $X, X_1, X_2, \dots \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots, \quad X = \sup_n X_n \text{ implica } \sup_n P(X_n) = P(X).$$

Un hecho importante y no trivial es el siguiente. Si $P : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{F})$ es lineal y positivo, entonces ser normal es equivalente a ser continuo en la topología ultradébil. Una prueba de ello se encuentra en [27], Cap. 4, Secc. 3, Teorema 2, p. 59.

Proposición 1.2.4. Tenemos lo siguiente:

- a) Los operadores de rango 1 que son positivo definidos en $\mathcal{H}_n$, son de la forma (1.2.1) con $X_j = |z\rangle\langle y_j|$ para ciertos $z, y_1, \dots, y_n \in \mathcal{H}$, con $\|z\| = 1$,
- b) Los operadores de la forma (1.2.1) generan un subespacio vectorial denso en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ respecto a las topologías fuerte y ultradébil.
- c) Si $P : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{F})$ es lineal y continuo en la topología ultradébil entonces la condición de ser completamente positivo es equivalente a la condición (1.2.2) (y a la condición (1.2.3)).
- d) Si $P : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{F})$ es como en el inciso anterior, entonces es acotado respecto a las normas $\|\cdot\|_\infty$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{B}(\mathcal{F})}$ de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{B}(\mathcal{F})$.

Demostración. Para probar la afirmación a), recordemos que los operadores positivos de rango uno en $\mathcal{H}_n$ son de la forma $|y\rangle\langle y|$ con $y \in \mathcal{H}_n \setminus \{0\}$. Por lo que existen $y_1, \dots, y_n \in \mathcal{H}$ tales que $y = (y_1, \dots, y_n)$. Consideremos algún y_i diferente de cero y hagamos $z = \frac{y_i}{\|y_i\|}$, $X_j = |z\rangle\langle y_j|$, $j = 1, \dots, n$. Como $X_j^* = |y_j\rangle\langle z|$ entonces $X_j^* X_k = |y_j\rangle\langle y_k|$ y no es difícil verificar, usando la definición de producto interno en $\mathcal{H}_n$, que $|y\rangle\langle y|$ se representa en la forma (1.2.1) con los operadores X_j .

La prueba de b) se sigue inmediatamente de a) y de que los operadores de rango finito forman un subespacio denso en $\mathcal{B}(\mathcal{H}_n)$ respecto a las topologías fuerte y ultradébil.

Para probar c), basta con demostrar que (1.2.3) implica positividad completa. Para simplificar la notación supondremos, sin pérdida de generalidad, que $\mathcal{F} = \mathcal{H}$. Sea $n \in \mathbb{N}$, y

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H}_n).$$

Por definición del producto interno en $\mathcal{H}_n$, para probar que

$$\begin{pmatrix} P(A_{11}) & \cdots & P(A_{1n}) \\ \vdots & & \vdots \\ P(A_{n1}) & \cdots & P(A_{nn}) \end{pmatrix}$$

es positivo definido, hay que verificar que para cualesquier $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in \mathcal{H}$,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle \varphi_i, P(A_{ij}) \varphi_j \rangle \geq 0.$$

Lo cual es cierto si se aproxima ultradébilmente el operador

$$\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

con combinaciones lineales positivas de operadores de la forma (1.2.1), se usa la continuidad de P en la topología ultradébil y la condición (1.2.3).

Finalmente, para probar la afirmación d), supongamos nuevamente que $\mathcal{F} = \mathcal{H}$. Puesto que P es una transformación lineal definida en todo el espacio de Banach $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, bastará probar que es P es cerrada y aplicar el Teorema de la Gráfica Cerrada.

Si $X_n \rightarrow X$ y $P(X_n) \rightarrow Y$ en la norma $\|\cdot\|_\infty$, entonces ambas sucesiones también convergen en las topologías fuerte y ultradébil. La normalidad de P implica que $P(X_n) \rightarrow P(X)$ en la topología ultradébil y como ésta es de Hausdorff, $P(X) = Y$. ■

Vale la pena hacer notar que no todo operador de la forma (1.2.1) es de rango uno.

Ejemplo 1.2.5. [59], [68]. Sea $\{A_j\}_{j=1}^\infty$ una sucesión en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\sum_{j=1}^\infty A_j^* A_j$ converge fuertemente. Entonces para todo $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\sum_{j=1}^\infty A_j^* X A_j$ converge fuerte y ultradébilmente. Sea $P : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, definido por

$$P(X) = \sum_{j=1}^\infty A_j^* X A_j. \quad (1.2.4)$$

Entonces la transformación P es lineal, completamente positiva y normal.

Demostración. Para probar que la serie dada por el lado derecho de (1.2.4) converge para todo $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, en cualquiera de las topologías fuerte, débil y ultradébil, basta con suponer que $X \geq 0$, pues todo elemento de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es combinación lineal de cuatro operadores no negativo definidos.

Sea $\varphi \in \mathcal{H}$. Como $\sum_{j=1}^\infty A_j^* A_j$ converge fuertemente, tenemos

$$0 \leq \sum_{k=1}^n \langle \varphi, A_k^* X A_k \varphi \rangle \leq \sum_{k=1}^{n+1} \langle \varphi, A_k^* X A_k \varphi \rangle \leq \|X\|_\infty \sum_{k=1}^\infty \|A_k \varphi\|^2 < \infty.$$

Lo que prueba que, para $X \geq 0$, la sucesión de sumas parciales en (1.2.4) es no decreciente y converge débilmente. Esto implica la convergencia fuerte y ultradébil, ([6]).

La linealidad de P es obvia. Si $\{X_j\}_{j=1}^\infty$ es una sucesión en $\mathcal{B}_+(\mathcal{H})$, monótona no decreciente, tal que

$$X = \sup_n X_n \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$$

entonces para cada $\varphi \in \mathcal{H}$ y $k \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \langle \varphi, A_k^* X_n A_k \varphi \rangle \leq \langle \varphi, A_k^* X_{n+1} A_k \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \langle \varphi, A_k^* X A_k \varphi \rangle,$$

Así pues, por el Teorema de Convergencia Monótona,

$$\langle \varphi, P(X_n) \varphi \rangle = \sum_{k=1}^\infty \langle \varphi, A_k^* X_n A_k \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^\infty \langle \varphi, A_k^* X A_k \varphi \rangle = \langle \varphi, P(X) \varphi \rangle$$

lo que prueba que $P(X_n) \xrightarrow{w} P(X)$. Como $0 \leq P(X_n) \leq P(X_{n+1}) \leq P(X) \leq \|X\|_\infty P(I)$ concluimos que $P(X_n) \xrightarrow{*w} P(X)$.

Si $n \in \mathbb{N}$, $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{H}$ entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i, P(X_i^* X_j) \varphi_j \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i, A_k^* X_i^* X_j A_k \varphi_j \rangle \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{i=1}^n X_i A_k \varphi_i \right\|^2 \geq 0. \end{aligned}$$

De tal forma que P es completamente positivo. ■

Definición 1.2.6. Por $CPn(\mathcal{H})$ denotaremos el cono de transformaciones lineales, completamente positivos y normales en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Como lo aseguramos antes, combinaciones lineales positivas de transformaciones completamente positivas son completamente positivas, lo que justifica que a $CPn(\mathcal{H})$ le demos el calificativo de cono. El siguiente resultado da una caracterización de $CPn(\mathcal{H})$ en el sentido de que proporciona todos los posibles ejemplos.

Teorema 1.2.7. (Kraus, 1973). Si $\mathcal{H}$ es separable, entonces $P \in CPn(\mathcal{H})$ si y sólo si es de la forma (1.2.4), para alguna sucesión $\{A_j\}_{j=1}^{\infty}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal $\sum_{j=1}^{\infty} A_j^* A_j$ converja fuertemente.

Demostración. En el ejemplo 1.2.5 probamos que las transformaciones de la forma (1.2.4) pertenecen a $CPn(\mathcal{H})$. El recíproco es propiamente el Teorema de Kraus y su prueba se encuentra en [59]. ■

Un hecho interesante es que si P es una transformación completamente positiva entonces aplica el cono $\mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ en sí mismo (positividad) pero la afirmación recíproca es falsa como lo muestra el siguiente (ver [16])

Ejemplo 1.2.8. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert de dimensión finita. Sea $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definido por

$$\Phi(X) = (\lambda \operatorname{tr} X) I - X, \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$$

Si $X \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ entonces $0 \leq X \leq \|X\|_\infty I \leq \operatorname{tr}(X) I$ por lo que Φ es positivo para $\lambda \geq 1$. Más aún, un cálculo directo muestra que para $n \in \mathbb{N}$, $X_1, \dots, X_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{H}$ se tiene

$$\sum_{i,j=1}^n \langle \varphi_i, \Phi(X_i^* X_j) \varphi_j \rangle = \lambda \sum_{i,j=1}^n \operatorname{tr}(X_i^* X_j) \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle - \left\| \sum_{i=1}^n X_i \varphi_i \right\|^2$$

por lo que si $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$, $n = 2$, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$, $\varphi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\varphi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ entonces

$$X_i^* = X_i = X_i^* X_i; \quad X_1^* X_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \operatorname{tr}(X_i^* X_i) = 1;$$

$$\begin{aligned} \text{tr}(X_1^* X_2) &= \frac{1}{2} = \text{tr}(X_2^* X_1); \quad X_1 \varphi_1 = \varphi_1; \quad X_2 \varphi_2 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2); \\ \|X_1 \varphi_1 + X_2 \varphi_2\|^2 &= \frac{5}{2}, \quad \sum_{i,j=1}^2 \langle \varphi_i, \Phi(X_i^* X_j) \varphi_j \rangle = 2\lambda - \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

lo que muestra que Φ no es completamente positivo si $\lambda < \frac{5}{4}$.

Para terminar esta sección, introducimos el concepto de transformación predual. Sea $T : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H})$ una transformación lineal y continua en la norma de la traza. Sea $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y considere la siguiente funcional lineal $f_X^T : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$

$$f_X^T(\rho) = \text{tr}\{T(\rho)X\}$$

Es claro que $f_X^T \in (\mathcal{T}(\mathcal{H}))^*$ por lo que existe un único $P(X) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$\text{tr}\{T(\rho)X\} = \text{tr}\{\rho P(X)\} \quad (1.2.5)$$

La transformación $P : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definido a través de (1.2.5) es claramente lineal y continuo en la topología ultradébil y se le conoce como la *transformación dual* de T , o bien T es la *transformación predual* de P . Recíprocamente, sea $P : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, lineal continuo en la topología ultradébil y sea $\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$. Entonces la siguiente funcional $g_\rho^P : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$

$$g_\rho^P(X) = \text{tr}\{\rho P(X)\}$$

es continua en la topología ultradébil de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Como la topología ultradébil coincide con la topología $\sigma(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \mathcal{T}(\mathcal{H}))$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ generada por la dualidad (1.1.1) (ver [6]) entonces existe un único $T(\rho) \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ tal que la ecuación (1.2.5) es válida ([70], Teo. IV.20, pág 114). No es difícil demostrar que T es lineal y acotado en $(\mathcal{T}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$ por lo que T es la transformación predual de P .

1.3 Semigrupos dinámicos cuánticos

Definición 1.3.1. *Un semigrupo dinámico cuántico es un familia, $\{P_t\}_{t \geq 0}$, de elementos en $CPn(\mathcal{H})$ tal que*

$$i) \quad P_s P_t(X) = P_{s+t}(X), \quad P_0(X) = X, \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

ii) *Es ultradébil continuo, es decir*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \text{tr}(P_t(X)\rho) = \text{tr}(X\rho), \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \rho \in \tau(\mathcal{H}).$$

$$iii) \quad P_t(I) \leq I, \quad \forall t \geq 0.$$

Abreviaremos el término semigrupo dinámico cuántico como QDS de acuerdo a las iniciales en inglés.

En seguida probamos dos propiedades elementales que todo QDS debe satisfacer. Aunque son resultados bien conocidos (ver por ejemplo [32]), incluimos la prueba para ilustrar como es que se aplican en la teoría de QDS los conceptos introducidos hasta el momento.

Proposición 1.3.2.

a) Todo QDS, $\{P_t\}_{t \geq 0}$ es contractivo, es decir

$$\|P_t(X)\|_\infty \leq \|X\|_\infty, \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

b) Si $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ la curva en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $t \mapsto P_t(X)$, es fuertemente continua.

Demostración. Seguiremos a [32].

a) Si $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces $0 \leq \begin{pmatrix} I & X \\ X^* & X^*X \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, dado que P_t es completamente positivo y satisface iii),

$$0 \leq \begin{pmatrix} P_t(I) & P_t(X) \\ P_t(X^*) & P_t(X^*X) \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} I & P_t(X) \\ P_t(X^*) & P_t(X^*X) \end{pmatrix}.$$

De aquí, es fácil deducir que $P_t(X)^* = P_t(X^*)$ y

$$P_t(X^*X) \geq P_t(X^*)P_t(X) \geq 0 \quad (1.3.1)$$

por lo que usando iii), la desigualdad (1.3.1) y el hecho de que $A \leq \|A\|_\infty I$ para cualquier $A \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$, tenemos

$$\|X^*X\|_\infty I \geq P_t(\|X^*X\|_\infty I) \geq P_t(X^*X) \geq P_t(X^*)P_t(X)$$

por tanto,

$$\|X\|_\infty^2 = \|X^*X\|_\infty \geq \|P_t(X^*)P_t(X)\|_\infty = \|P_t(X)\|_\infty^2$$

de donde se deduce que $\{P_t\}$ es contractivo.

b) Sea T_t la transformación predual de P_t (ver sección anterior). De i) y ii) tenemos que para $\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $h \geq 0$,

$$\text{tr}\{T_h(\rho)X\} = \text{tr}\{\rho P_h(X)\} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \text{tr}\{\rho X\}$$

lo que prueba que $\{T_t\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo que actúa sobre el espacio de Banach $(\mathcal{T}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$ y que es continuo en cero con respecto a la topología débil en $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ dada por la dualidad (1.1.1). Por tanto, $\{T_t\}_{t \geq 0}$ es fuertemente continuo en el espacio de Banach $(\mathcal{T}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_1)$ (ver [69], Cap. 2, Teo. 1.4, pág. 44).

Por otra parte, gracias a la desigualdad (1.3.1) tenemos que si $\varphi \in \mathcal{H}$, $t \geq 0$ y $A_h = P_h(X) - X$,

$$\begin{aligned} \|P_h(X)\varphi\|^2 &= \langle P_h(X)\varphi, P_h(X)\varphi \rangle = \langle \varphi, P_h(X^*)P_h(X)\varphi \rangle \\ &\leq \langle \varphi, P_h(X^*X)\varphi \rangle \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

$$\|P_{t+h}(X)\varphi - P_t(X)\varphi\|^2 = \|P_t(A_h)\varphi\|^2 \leq \langle \varphi, P_t(A_h^*A_h)\varphi \rangle$$

$$= \text{tr}\{|\varphi\rangle\langle\varphi|P_t(A_h^*A_h)\} = \text{tr}\{T_t(|\varphi\rangle\langle\varphi|)A_h^*A_h\} \quad (1.3.3)$$

$$\begin{aligned} \|P_{t-h}(X)\varphi - P_t(X)\varphi\|^2 &\leq \langle\varphi, P_{t-h}(A_h^*A_h)\varphi\rangle \\ &= \text{tr}\{T_{t-h}(\rho_\varphi)A_h^*A_h\} \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

donde $\rho_\varphi = |\varphi\rangle\langle\varphi|$.

Si $h \rightarrow 0$ en (1.3.2), entonces, debido a ii),

$$P_h(X) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{s} X.$$

De la misma manera, $P_h(X^*) \xrightarrow[h \rightarrow 0]{s} X^*$. Por tanto $A_h \xrightarrow{s} 0$ y $A_h^* \xrightarrow{s} 0$ por lo que $A_h^*A_h \xrightarrow{s} 0$. Como $\|A_h^*A_h\|_\infty \leq 4\|X\|_\infty^2$ concluimos que $A_h^*A_h \xrightarrow{w} 0$ y entonces el lado derecho de (1.3.3) tiende a cero si $h \rightarrow 0$. Lo mismo se tiene en (1.3.4) puesto que el semigrupo $\{T_t\}_{t \geq 0}$ es fuertemente continuo. Todo esto prueba que la curva $t \mapsto P_t(X)$ es fuertemente continua. ■

Observación. Que la curva $t \mapsto P_t(X)$ sea fuertemente continua para cada $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ no implica que el QDS $\{P_t\}_{t \geq 0}$ sea fuertemente continuo en $(\mathcal{B}(\mathcal{H}), \|\cdot\|_\infty)$. Por otro lado, debido a que $\{P_t\}$ es contractivo, el semigrupo predual, $\{T_t\}_{t \geq 0}$, también es de contracciones.

Definición 1.3.3. Un QDS es *conservativo* si $P_t(I) = I, \forall t \geq 0$.

Definición 1.3.4. Se dice que un QDS, $\{P_t\}_{t \geq 0}$, es *uniformemente continuo* si

$$\lim_{t \rightarrow 0} \sup_{\|X\|_\infty=1} \|P_t(X) - X\|_\infty = 0.$$

Según la teoría general de semigrupos, un QDS uniformemente continuo debe tener como generador infinitesimal a una transformación lineal y acotada $\mathcal{L} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Uno de los resultados más célebres es la siguiente caracterización del generador infinitesimal de cualquier QDS uniformemente continuo.

Teorema 1.3.5. (Lindblad, Gorini, Kossakowski, Sudarshan, 1976).

Si $\{P_t\}_{t \geq 0}$ es un QDS uniformemente continuo y conservativo, entonces su generador infinitesimal, $\mathcal{L}$, tiene la siguiente estructura: $\mathcal{L} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, es acotado y existen $\Phi \in CP_n(\mathcal{H})$, $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjunto tales que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X) &= \Phi(X) - \frac{1}{2}\{\Phi(I)X + X\Phi(I)\} + i[H, X], \\ &= \Phi(X) - G^*X - XG, \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

donde $[\cdot, \cdot]$ denota el conmutador, es decir

$$[H, X] = HX - XH \quad G = \frac{1}{2}\Phi(I) - iH$$

Recíprocamente, toda transformación $\mathcal{L}$ de la forma (1.3.5), para ciertos $\Phi \in CPn(\mathcal{H})$, $H \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ autoadjunto, es acotada y genera un QDS uniformemente continuo y conservativo.

Demostración. Ver [42] ó [60].

Si no pidiéramos la condición de conservatividad, entonces la estructura de $\mathcal{L}$ es la siguiente: Existen $\Phi \in CPn(\mathcal{H})$, $H, B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, con H autoadjunto y B positivo definido, tales que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(X) &= \Phi(X) - \frac{1}{2}\{\Phi(I)X + X\Phi(I)\} + i[H, X] - \frac{1}{2}(BX + XB) \\ &= \Phi(X) - G^*X - XG,\end{aligned}\tag{1.3.6}$$

donde $G = \frac{1}{2}\Phi(I) - iH + \frac{1}{2}B$.

Una prueba de esto se encuentra en [4].

A las ecuaciones (1.3.5) y (1.3.6) se les conoce como una *forma de Lindblad* del generador infinitesimal de $\mathcal{L}$. La forma de Lindblad $\mathcal{L}$ no es única; es decir, pueden existir diferentes $\Phi' \in CPn(\mathcal{H})$, $H', B' \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, con H' autoadjunto y B' positivo definido, tales que $\mathcal{L}$ se puede representar en la forma (1.3.5) o (1.3.6) con Φ, H, B reemplazados por Φ', H' y B' .

Por citar un ejemplo, supóngase que $\mathcal{L}$ se puede expresar en la forma (1.3.5). Sea $H' = H + \lambda I$ y $\Phi'(X) = \Phi(X) + \mu X$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\mu \in \mathbb{R}_+$ entonces es inmediato verificar que $\mathcal{L}$ se puede expresar en (1.3.5) con estos Φ' y H' .

1.4 Algunos ejemplos.

[68].

1.4.1. Sea $\{W_t\}_{t \geq 0}$ un semigrupo de contracciones fuertemente continuo en $\mathcal{H}$ y sea $-G$ su generador infinitesimal. La condición de que $\{W_t\}_{t \geq 0}$ sea contractivo implica que para todo $\varphi \in \mathcal{H}$, la función $t \mapsto \|W_t\varphi\|^2$ es decreciente por lo que si $\varphi \in \text{dom}G$ entonces

$$-2\text{Re}\langle \varphi, G\varphi \rangle = \frac{d}{dt}\|W_t\varphi\|^2 \Big|_{t=0} \leq 0.\tag{1.4.1}$$

Sea $P_t : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, definido como

$$P_t(X) = W_t^* X W_t, \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Entonces $\{P_t\}_{t \geq 0}$ es un QDS. Supóngase primeramente que $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es uniformemente continuo en $\mathcal{H}$. Entonces el semigrupo $\{P_t\}$ es uniformemente continuo y su generador infinitesimal está dado por

$$\mathcal{L}(X) = -G^*X - XG.$$

Como a G lo suponemos acotado entonces $W_t = e^{-tG}$ y

$$G = B - iH,$$

donde $B = \frac{G+G^*}{2}$ y $H = \frac{G^*-G}{2i}$ son dos operadores autoadjuntos. Además, por (1.4.1)

$$\langle \varphi, -B\varphi \rangle = 2\operatorname{Re}\langle \varphi, -G\varphi \rangle \leq 0.$$

Lo que prueba que B es positivo definido y por consiguiente, una forma de Lindblad para $\mathcal{L}$ es tomar $\Phi(X) = 0$, para todo $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y

$$\mathcal{L}(X) = i[H, X] - (BX + XB).$$

Supóngase ahora que $\{W_t\}_{t \geq 0}$ solo es fuertemente continuo. Entonces G no necesariamente es acotado pero $\{P_t\}_{t \geq 0}$ satisface que para cualquier $\psi, \varphi \in \operatorname{dom} G$ y $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$\frac{d}{dt} \langle \psi, P_t(X)\varphi \rangle = -\langle W_t\psi, XG W_t\varphi \rangle - \langle G W_t\psi, XW_t\varphi \rangle \quad (1.4.2)$$

1.4.2. En el ejemplo anterior, la condición de ser conservativo, se cumple si y solo si $\{W_t\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo de isometrías. En este caso la función $t \mapsto \|W_t\varphi\|^2$ es constante. Si además G fuera un operador acotado, entonces $B = 0$ por lo que $G = -iH$ y $\{W_t\}_{t \geq 0}$ sería un semigrupo de operadores unitarios. Por tanto, si definimos $W_{-t} = W_t^* = W_t^{-1}$, $P_{-t}(X) = W_{-t}^* X W_{-t}$, $t \geq 0$ tenemos que $\{P_t\}_{t \geq 0}$ puede extenderse a un grupo.

Por otra parte, si $\{W_t\}_{t \geq 0}$ fuera un grupo de isometrías entonces sería un grupo de operadores unitarios y G tendría la forma iH con H un operador autoadjunto no necesariamente acotado. En este caso, la ecuación (1.4.2) es la llamada *Ecuación de Schroedinger en la representación de Heisenberg*.

Los siguientes ejemplos tienen por objeto mostrar situaciones en que un QDS es una extensión de algún semigrupo de Markov. Tales QDS reciben el nombre de *extensiones cuánticas* del semigrupo de Markov.

Si $P : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ cualquier transformación y $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, decimos que $\mathcal{A}$ es P -invariante si $P(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$. Si $\{P_t\}_{t \geq 0}$ es un QDS uniformemente continuo con generador $\mathcal{L}$ y $\mathcal{A}$ es un subespacio vectorial cerrado en la norma $\|\cdot\|_\infty$, entonces $\mathcal{A}$ es P_t -invariante para todo $t \geq 0$ y sólo si es $\mathcal{L}$ -invariante.

Sean (Ω, S, μ) es un espacio de medida σ -finita, $L_p = L_p^{\mathbb{C}}(\Omega, S, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$ y $\mathcal{H} = L_2$. Sabemos que $L_\infty = L_1^*$ y la dualidad está dada por

$$(f, g) \mapsto \int_\Omega f g d\mu, \quad f \in L_\infty, \quad g \in L_1 \quad (1.4.3)$$

Denotemos por $\sigma(L_\infty, L_1)$ la topología en L_∞ generada por la dualidad (1.4.3). De manera natural, se puede identificar L_∞ con una subálgebra de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ asociando a cada $f \in L_\infty$ con el operador $m_f \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ de multiplicación por f . Esta identificación es una isometría lineal (no suprayectiva) entre la norma de L_∞ y la norma de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Asimismo es continua y abierta respecto a la $\sigma(L_\infty, L_1)$ -topología de L_∞ y

la topología ultradébil de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. En caso de que $\Omega = \mathbb{N}$ con la medida de conteo, escribiremos ℓ_p en lugar de L_p , $1 \leq p \leq \infty$.

Lema 1.4.3.

a) Sean $\Omega = \mathbb{N}$, $S = 2^{\mathbb{N}}$ y μ es la medida de conteo. Si $P : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una transformación lineal, positiva y normal. Supongamos además que ℓ_∞ es P -invariante. Entonces existe una matriz $\{p(i, j) : i, j \in \mathbb{N}\}$, con $p(i, j) \geq 0$, tal que

$$(Pf)(i) = \sum_{j \in \mathbb{N}} p(i, j) f(j), \quad f \in \ell_\infty \quad (1.4.4)$$

b) Sean $\Omega = \mathbb{R}^n$, S la σ -álgebra de Borel, μ la medida de Lebesgue y C_0 es el espacio de funciones continuas que se anulan en infinito. Sea $P : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, lineal y positivo que deja invariante a C_0 . Entonces existe una función $p : \Omega \times S \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que para cada $x \in \Omega$, $p(x, \cdot)$ es una medida finita y

$$P(f)(x) = \int_{\Omega} p(x, dy) f(y) \quad (1.4.5)$$

Demostración.

a) Sea $i \in \mathbb{N}$. Considérese la funcional lineal y positiva $P^i : \ell_\infty \rightarrow \mathbb{C}$

$$P^i(f) = (Pf)(i)$$

Como consecuencia de que la restricción de la transformación P a ℓ_∞ es $\sigma(\ell_\infty, \ell_1)$ -continua, se tiene que P^i es una funcional $\sigma(\ell_\infty, \ell_1)$ -continua. Por tanto existe $\{p(i, j)\}_{j=1}^\infty \in \ell_1$ tal que (1.4.4) se cumple (ver [70], Teo. IV.20, p. 114). Que $p(i, j) \geq 0$ se sigue de que P es positivo.

b) Notemos que no hay ningún supuesto de continuidad sobre P . Sean $x \in \Omega$ y $P^x : C_0 \rightarrow \mathbb{C}$,

$$P^x(f) = (Pf)(x).$$

P^x está bien definida porque C_0 es P -invariante. Además es una funcional lineal positiva porque P es positivo. Por tanto, P^x es una funcional continua en la norma del supremo de C_0 . Así que, por el teorema de Riesz-Markov ([70], Teo. IV. 18 p. 111), existe una medida finita $p(x, \cdot) : S \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que la ecuación (1.4.5) es válida. ■

Si en el lema anterior $P(I) \leq I$ ($P(I) = I$) entonces la matriz del inciso a) es subestocástica (estocástica) o bien la función P del inciso b) es un núcleo subestocástico (estocástico).

Por lo anterior tenemos que si X es el conjunto de números naturales con la medida de conteo, $\mathcal{H} = \ell_2$ y $\{P_t\}_{t \geq 0}$ es un QDS en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que deja invariante a ℓ_∞ , entonces

el QDS actúa sobre ℓ_∞ como un semigrupo submarkoviano (o Markoviano en caso de que $\{P_t\}$ sea conservativo). Algo similar podemos decir cuando $X = \mathbb{R}^n$ con la medida de Lebesgue si $\{P_t\}$ deja invariante a C_0 . Para examinar algunos ejemplos concretos de extensiones cuánticas de semigrupos de Markov, introduzcamos los siguientes operadores en $\mathcal{H} = \ell_2$

$$U(a_1, a_2, \dots) = (0, a_1, a_2, \dots)$$

$$U^*(a_1, a_2, \dots) = (a_2, a_3, \dots)$$

$$\text{dom } N \left\{ \{a_j\} \in \ell_2 : \{ja_j\} \in \ell_2 \right\}, \quad N(\{a_j\}) = \{ja_j\}.$$

Los operadores U, U^* y N reciben, respectivamente, los nombres de *corrimiento a la derecha*, *corrimiento a la izquierda* y *operador de número*. N es un operador no acotado, autoadjunto cuyo espectro es $\mathbb{N}$. Todos los elementos del espectro son valores propios simples. En este ejemplo, si $f \in \ell_\infty$ entonces el operador de multiplicación por f coincide con el operador $f(N)$, que se define por medio de cálculo funcional. Entonces $(f(N))^* = \bar{f}(N)$ donde $\bar{f}$ es la función conjugada compleja de f . Los ejemplos que siguen, fueron tomados de [68]

1.4.4. Sean $\lambda, \mu \in \ell_\infty$ fijas. Definamos $\Phi \in CPn(\mathcal{H})$ como

$$\Phi(X) = \lambda(N)U^*XU\lambda(N) + \bar{\mu}(N)UXU^*\mu(N) \quad (1.4.6)$$

Por tanto, si $f \in \ell_\infty$,

$$\begin{aligned} \Phi(f(N)) &= \bar{\lambda}(N)f(N+1)\lambda(N) + \bar{\mu}(N)g(N)\mu(N) \\ &= |\lambda(N)|^2 f(N+1) + |\mu(N)|^2 g(N) \end{aligned}$$

donde $g \in \ell_\infty$ está definido como

$$g(i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = 1 \\ f(i-1) & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$$

De aquí obtenemos que $\Phi(I) = |\lambda(N)|^2 + UU^*|\mu(N)|^2$.

Sea

$$\mathcal{L}(X) = \Phi(X) - \frac{1}{2}\{\Phi(I)X + X\Phi(I)\}. \quad (1.4.7)$$

$\mathcal{L}$ es una transformación lineal acotada, expresada en forma de Lindblad (1.3.5), con $H = 0$. Un cálculo directo muestra que ℓ_∞ es $\mathcal{L}$ -invariante y además

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f(N)) &= |\lambda(N)|^2 f(N+1) + |\mu(N)|^2 g(N) \\ &\quad - (|\lambda(N)|^2 + UU^*|\mu(N)|^2)f(N) \\ &= |\lambda(N)|^2 (f(N+1) - f(N)) + |\mu(N)|^2 (g(N) - f(N)) \end{aligned}$$

En otros términos, $\mathcal{L}$ transforma cada $f \in \ell_\infty$ en $h \in \ell_\infty$, donde

$$h(i) = \begin{cases} |\lambda(1)|^2 (f(2) - f(1)) - |\mu(1)|f(1) & \text{si } i = 1 \\ |\lambda(i)|^2 (f(i+1) - f(i)) + |\mu(i)|^2 (f(i+1) - f(i)) & \text{si } i \geq 2 \end{cases}$$

Lo que significa que $\mathcal{L}$ actúa sobre ℓ_∞ como el generador infinitesimal de un proceso de nacimiento y muerte con tasas de nacimiento $\{|\lambda(i)|^2 : i \in \mathbb{N}\}$ y tasas de muerte $\{|\mu(i)|^2 : i \in \mathbb{N}\}$. Si $P_t = e^{t\mathcal{L}}$, entonces $\{P_t\}$ actúa sobre ℓ_∞ como el semigrupo de Markov asociado a tal proceso. En general, se desconoce la expresión explícita de P_t ; sin embargo, cuando $\mu \equiv 0$ y $\lambda(i) \equiv \lambda$, $\mathcal{L}$ actúa sobre ℓ_∞ como el generador infinitesimal del proceso de Poisson con parámetro $|\lambda|^2$

$$\mathcal{L}(f(N)) = |\lambda|^2(f(N+1) - f(N)).$$

Un cálculo directo muestra que para todo $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$$P_t(X) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t\mathcal{L})^k}{k!}(X) = EU^{*Y(t)}XU^{Y(t)}$$

donde $\{Y(t) : t \geq 0\}$ es un proceso de Poisson con parámetro $|\lambda|^2$ y E es la esperanza matemática en el espacio de probabilidad donde $\{Y(t) : t \geq 0\}$ esté definido.

- 1.4.4. Sean $v \in \ell_\infty$, con valores reales, y $H = v(N)$. Sean $\Phi \in CPn(\mathcal{H})$ definido en (1.4.6) y

$$\mathcal{L}_1(X) = \Phi(X) - \frac{1}{2}\{\Phi(I)X + X\Phi(I)\} + i[H, X]$$

Entonces $\mathcal{L}_1 : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y también deja invariante a ℓ_∞ , ya que $[H, f(N)] = 0$ para cualquier $f \in \ell_\infty$. Por tanto, $\mathcal{L}_1$ también actúa en ℓ_∞ como el generador infinitesimal de un proceso de nacimiento y muerte y $e^{t\mathcal{L}_1}$ es otro QDS que es extensión cuántica del semigrupo de Markov asociado a tal proceso. Esto nos muestra que la extensión cuántica de un proceso de Markov, no necesariamente es única.

- 1.4.5. Sean X como en el inciso a) del Lema 1.4.3 y $\Phi \in CPn(\mathcal{H})$ que deja invariante a ℓ_∞ y $\Phi(I) = I$. Definamos

$$\mathcal{L}(X) = \Phi(X) - X$$

Entonces $\mathcal{L}$ es una transformación lineal y acotada en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ expresado en forma de Lindblad con $H = 0$. Obviamente $\mathcal{L}$ deja invariante a ℓ_∞ . Si ϕ y L denotan las restricciones a ℓ_∞ de Φ y $\mathcal{L}$, y $\{P_t\}$ representa el QDS generado por $\mathcal{L}$, entonces ℓ_∞ es P_t invariante y es una extensión cuántica del semigrupo e^{tL} que está asociado con un proceso saltos puro y cuya cadena de Markov encajada tiene a ϕ como función de transición.

- 1.4.6. Sean $X = \mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue y $\{Y(t) : t \geq 0\}$ un proceso estocástico con incrementos independientes y estacionarios con valores en $\mathbb{R}$, $Y(0) = 0$ y es continuo en probabilidad al tiempo $t = 0$. Sean $t \in \mathbb{R}$, y $U_t : L_2 \rightarrow L_2$, $(U_t g)(x) = g(x - t)$, $g \in L_2$. La familia $\{U_t : t \in \mathbb{R}\}$ es un grupo unitario cuyo generador infinitesimal, D , tiene como dominio y regla de correspondencia

$$\mathcal{D} = \{g \in L_2 : g' \text{ existe y } g' \in L_2\} \quad Dg = -g'$$

Observemos que para $f \in C_0$, $U_t^* f U_t = f_t \in C_0$ donde $(f_t)(x) = f(x+t)$.

Sea $t \geq 0$ y definamos $P_t : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, como

$$P_t(X) = E U_{Y(t)}^* X U_{Y(t)} \quad (1.4.8)$$

donde E es la esperanza en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ donde el proceso $\{Y(t) : t \geq 0\}$ está definido. Para ser explícitos, definamos el operador acotado $P_t(X)$ de (1.4.8) por medio de su forma sesquilineal:

Notemos que $\|U_{Y(t)}^* X U_{Y(t)}\|_\infty = \|X\|_\infty$. Si $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$, y $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definimos $Z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ como

$$Z(a) = Z(\varphi, \psi, X, a) = \langle U_a \varphi, X U_a \psi \rangle, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (1.4.9)$$

entonces, como consecuencia de que $\{U_a : a \in \mathbb{R}\}$ es un grupo de operadores unitarios fuertemente continuo, Z es una función uniformemente continua; además es acotada ya que

$$|Z(y)| \leq \|X\|_\infty \|\varphi\| \|\psi\| \quad (1.4.10).$$

Definimos $\langle \varphi, P_t(X) \psi \rangle := E Z(Y(t))$. Debido a la estimación (1.4.10), esta forma sesquilineal también es acotada, con la misma cota que en la desigualdad (1.4.10), y el operador $P_t(X)$ queda bien definido con norma menor o igual que $\|X\|_\infty$.

Sea $\{S_t\}$ es el semigrupo de Markov asociado con $\{Y(t) : t \geq 0\}$. S_t actúa en $C_b^u(\mathbb{R})$, el espacio de funciones uniformemente continuas y acotadas:

$$(S_t f)(x) = E f(x + Y(t)) = \int f(x+a) D_t(da) \quad f \in C_b^u(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}$$

Donde D_t denota la distribución de la variable aleatoria $Y(t)$. Observemos que $\langle \varphi, P_t(X) \psi \rangle = (S_t Z)(0)$.

Para verificar que la familia $\{P_t(\cdot)\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo, procedamos en dos etapas; por un lado, utilicemos que el proceso $\{Y(t) : t \geq 0\}$ tiene incrementos independientes y estacionarios por lo que un cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} \langle \varphi, P_{t+s}(X) \psi \rangle &= E Z(\varphi, \psi, X, Y(t+s)) \\ &= E Z(\varphi, \psi, X, Y(t+s) - Y(s) + Y(s)) \\ &= \int \int Z(\varphi, \psi, X, a+b) D_t(da) D_s(db). \end{aligned}$$

Por otro lado, como la función Z tiene la siguiente propiedad:

$$Z(\varphi, \psi, X, a+b) = Z(U_a \varphi, U_a \psi, X, b),$$

otro cálculo directo muestra que

$$\begin{aligned} \langle \varphi, P_t P_s(X) \psi \rangle &= \int \langle U_a \varphi, P_s(X) U_a \psi \rangle D_t(da) \\ &= \int E Z(U_a \varphi, U_a \psi, X, Y(s)) D_t(da) \\ &= \int \int Z(U_a \varphi, U_a \psi, X, b) D_s(db) D_t(da) \\ &= \int \int Z(\varphi, \psi, X, a+b) D_s(db) D_t(da). \end{aligned}$$

Lo que prueba que los operadores acotados $P_{t+s}(X)$ y $P_t P_s(X)$ tienen la misma forma sesquilineal por lo que son iguales.

También se puede demostrar, con el Teorema de Convergencia Monótona, que cada $P_t \in CP_n(\mathcal{H})$.

Para probar la continuidad ultradébil, sea $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Como $\|P_t(X)\|_\infty \leq \|X\|_\infty$, basta probar que la curva de operadores $t \mapsto P_t(X)$ es débil continua en $t = 0$. Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$. Puesto que el semigrupo $\{S_t\}$ es fuertemente continuo en $C_b^u(\mathbb{R})$ (ver [33]) entonces

$$\langle \varphi, P_t(X)\psi \rangle = (S_t Z)(0) \xrightarrow{t \rightarrow 0} Z(0).$$

Por último, probemos que $C_b^u(\mathbb{R})$ es P_t -invariante. Sea $f \in C_b^u(\mathbb{R})$ entonces

$$\langle \varphi, P_t(f)\psi \rangle = E Z(\varphi, \psi, f, Y(t)) = E \langle \varphi, U_{Y(t)}^* f U_{Y(t)} \psi \rangle =$$

$$E \int \bar{\varphi}(x) f(x + Y(t)) \psi(x) dx = \int \bar{\varphi}(x) S_t f(x) \psi(x) dx = \langle \varphi, (S_t f) \psi \rangle.$$

Lo que muestra que $P_t(f)$ coincide con el operador de multiplicación por $S_t f$. De la misma forma se puede probar que C_0 es P_t -invariante.

- 1.4.7. En una gran cantidad de ejemplos, como el anterior, el QDS $\{P_t\}_{t \geq 0}$, no es uniformemente continuo por lo que su generador infinitesimal es no acotado. El ejemplo más elemental nos lo brinda la siguiente extensión cuántica del semigrupo asociado al movimiento browniano.

$$(S_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x + y) \frac{e^{-\frac{y^2}{2t}}}{\sqrt{2\pi t}} dy, \quad f \in C_b^u(\mathbb{R})$$

En esta situación particular, nos proponemos deducir una ecuación diferencial satisfecha por la extensión cuántica del semigrupo del movimiento browniano. Sea G el operador $-\frac{1}{2}D^2$, donde D es el operador del ejemplo 1.4.6, es decir

$$\text{dom } G = \{\psi \in \text{dom } D : \psi' \in \text{dom } D\}; \quad G\psi = -\frac{1}{2}\psi''.$$

Si $\varphi, \psi \in \text{dom } G$ entonces la función $Z(y)$ definida en (1.4.9) tiene primera y segunda derivadas uniformemente continuas y acotadas pues

$$\begin{aligned} Z'(y) &= -Z(D\varphi, \psi, X, y) - Z(\varphi, D\psi, X, y) \\ Z''(y) &= Z(D^2\varphi, \psi, X, y) - 2Z(D\varphi, D\psi, X, y) + Z(\varphi, D^2\psi, X, y) \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \varphi, P_t(X)\psi \rangle &= \frac{d}{dt} (S_t(Z))(0) = -\frac{1}{2} S_t(Z'')(0) \\ &= -\langle G\varphi, P_t(X)\psi \rangle + \langle D\varphi, P_t(X)D\psi \rangle \\ &\quad - \langle \varphi, P_t(X)G\psi \rangle \end{aligned}$$

En vez de encontrar al dominio del generador infinitesimal del QDS $\{P_t\}$, hemos considerado, para cada $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, una forma sesquilineal, $\mathcal{L}(X)$, cuyo dominio es $\text{dom } G$ y tal que

$$\mathcal{L}(X)[\varphi, \psi] = \Phi(X)[\varphi, \psi] - \langle G\varphi, X\psi \rangle - \langle \varphi, X G\psi \rangle,$$

donde $\Phi(X)[\cdot, \cdot]$ es la forma sesquilineal,

$$\Phi(X)[\varphi, \psi] = \langle D\varphi, X D\psi \rangle \quad \varphi, \psi \in \text{dom } G$$

En otros términos, el QDS $\{P_t\}$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi, P_t(X)\psi \rangle = \mathcal{L}(P_t(X))[\varphi, \psi] \quad (1.4.9)$$

con la condición inicial

$$\langle \varphi, P_0(X)\psi \rangle = \langle \varphi, X\psi \rangle.$$

Ecuaciones diferenciales como (1.4.2) y (1.4.9) reciben el nombre de *ecuación maestra o ecuación de Lindblad* y como veremos en el próximo capítulo juegan un papel similar a la llamada ecuación hacia atrás (o ecuación de Kolmogorov-Feller) satisfecha por la función de transición del proceso estocástico subyacente.

Capítulo II

2 El Problema de la conservatividad.

2.1 La ecuación maestra y el QDS minimal.

En el capítulo anterior examinamos algunos ejemplos de QDS. Cuando el QDS es uniformemente continuo, la ecuación diferencial del semigrupo es

$$\frac{d}{dt}P_t(X) = \mathcal{L}(P_t(X)), \quad P_0(X) = X, \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Donde $\mathcal{L} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es una transformación lineal y acotada y la derivada se toma en la topología de la norma. Si el QDS no es uniformemente continuo, el generador es no acotado y la ecuación de arriba sólo es válida en el topología ultradébil para los elementos $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P_t(X) - X}{t}$$

existe en la topología ultradébil. Estos elementos constituyen el dominio del generador infinitesimal y su estudio es un problema de gran dificultad. Basta mencionar que en el caso de que el QDS fuera extensión cuántica de un semigrupo de Markov, éste no siempre tiene un generador infinitesimal completamente caracterizado.

Por otro lado, para los QDS de los ejemplos 1.4.1 y 1.4.7 mostramos que cumplen con las ecuaciones (1.4.2) y (1.4.9) respectivamente. En esos ejemplos, el QDS $\{P_t\}$ cumple con la siguiente propiedad: para $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ la curva, en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, $t \mapsto X_t = P_t(X)$ es solución de la ecuación deferencial con condición inicial,

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi, X_t \psi \rangle = \mathcal{L}(X_t)[\varphi, \psi] \quad \langle \varphi, X_0 \psi \rangle = \langle \varphi, X \psi \rangle \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}, \quad (2.1.1)$$

donde $\mathcal{D}$ es un subespacio denso en $\mathcal{H}$ y $\mathcal{L}$ es una transformación¹

$$\mathcal{L} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$$

A (2.1.1) la llamaremos *ecuación maestra o ecuación de Lindblad* y a $\mathcal{L}$, el *generador formal*.

La transformación $\mathcal{L}$ tiene la siguiente *expansión o forma de Lindblad*:

$$\mathcal{L}(X)[\varphi, \psi] = \Phi(X)[\varphi, \psi] - \langle G\varphi, X\psi \rangle - \langle \varphi, XG\psi \rangle \quad (2.1.2)$$

donde

II.1. Un operador G densamente definido en $\mathcal{H}$ con dominio $\text{dom } G$ tal que $-G$ genera un semigrupo de contracciones en $\mathcal{H}$, al que denotaremos por $\{W_t\}_{t \geq 0}$, $\mathcal{D} \subset \text{dom } G$ y es una *esencia*² de G .

¹Usaremos las siguientes notaciones $\mathcal{L}(X, \varphi, \psi) = \mathcal{L}(X)[\varphi, \psi]$ y $\mathcal{L}(X)[\varphi] = \mathcal{L}(X)[\varphi, \varphi]$,

²Es decir, para cada $u \in \text{dom } G$ existe una sucesión $\{u_n\}_n$ en $\mathcal{D}$ tal que $u_n \rightarrow u$ y $Gu_n \rightarrow Gu$.

II.2. La transformación

$$\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$$

tiene las siguientes propiedades:

- (a) Φ es lineal en la variable operador y sesquilineal en las variables vectoriales.
- (b) Es completamente positiva, es decir

$$\sum_{i,j=1}^n \Phi(X_i^* X_j)[\psi_i, \psi_j] \geq 0 \quad \text{para } n \in \mathbb{N}, \quad \psi_i \in \mathcal{D} \quad \text{y } X_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

- (c) Para $\psi \in \mathcal{D}$ fijo, $\Phi(\cdot)[\psi]$ es una funcional lineal normal en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ i.e.,

$$X = \sup X_n \quad \text{implica que} \quad \sup_n \Phi(X_n)[\psi] = \Phi(X)[\psi]$$

para cualquier sucesión no decreciente y acotada en norma $\{X_n\}$ de elementos positivos en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Una condición necesaria para que exista un QDS $\{P_t\}$ tal que para cada $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, la curva $t \mapsto P_t(X)$ resuelve la ecuación maestra (2.1.1) es la siguiente:

II.3. $\mathcal{L}(I)[\varphi] \leq 0$ $\varphi \in \mathcal{D}$ o de forma equivalente $\Phi(I)[\varphi] \leq 2\operatorname{Re}\langle G\varphi, \varphi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}$

En efecto, supóngase que $\{P_t\}$ es un QDS con esa propiedad. Como $P_t(I) \leq I \quad \forall t \geq 0$, entonces, de la ecuación maestra (2.1.1), tenemos

$$0 \geq \frac{d}{dt} \langle \psi, P_t(I)\psi \rangle|_{t=0} = \mathcal{L}(I)[\psi].$$

Así que en adelante supondremos que las condiciones II.1, II.2 y II.3 se cumplen. Como veremos después, ellas garantizan la existencia de al menos una solución de la ecuación maestra (Teorema 2.1.3), pero antes haremos algunas consideraciones previas.

En vista de (2.1.2), la ecuación (2.1.1) puede reescribirse como,

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi, X_t \psi \rangle = \Phi(X_t)[\varphi, \psi] - \langle G\varphi, X_t \psi \rangle - \langle \varphi, X_t G\psi \rangle \quad (2.1.1)'$$

En adelante, a $\Phi(\cdot)$ lo llamaremos el *coeficiente completamente positivo*, o la *parte completamente positiva*, de la ecuación maestra (2.1.1) y a $\mathcal{D}$ le daremos de la topología que induce la norma de la gráfica de G , es decir

$$\|\varphi\|_G = \|\varphi\| + \|G\varphi\|.$$

Sabemos que esta norma es equivalente a la siguiente norma

$$(\|\varphi\|^2 + \|G\varphi\|^2)^{1/2}$$

que proviene del producto interno

$$\langle \varphi, \psi \rangle + \langle G\varphi, G\psi \rangle.$$

Si la norma en un espacio de Banach es inducida por un producto interno, la llamaremos *norma de Hilbert*.

Como $-G$ genera un semigrupo fuertemente continuo de contracciones en $\mathcal{H}$, entonces

$$\operatorname{Re} \langle \varphi, G\varphi \rangle \geq 0,$$

por lo que la norma de la gráfica también es equivalente a la norma de Hilbert

$$\|\varphi\|_{\mathcal{D}} := \|\varphi + G\varphi\|.$$

De hecho,

$$\|\varphi\|_{\mathcal{D}} \leq \|\varphi\|_G \leq \sqrt{2} \|\varphi\|_{\mathcal{D}} \quad (2.1.3).$$

Lema 2.1.1. *Si $\mathcal{L}$, Φ y G están relacionados por la forma de Lindblad (2.1.2) donde G y Φ cumplen con la condiciones II.1, II.2 y II.3. Entonces $\mathcal{L}$ y Φ tienen las siguientes propiedades:*

- (i) $\mathcal{L}$ es condicionalmente completamente positivo, i.e., si $\psi_i \in \mathcal{D}$ y $X_j \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ son tales que $\sum_i^n X_i \psi_i = 0$ entonces

$$\sum_{i,j=1}^n \mathcal{L}(X_i^* X_j)[\psi_i, \psi_j] \geq 0.$$

Para cada $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

- (ii) $|\Phi(X)|[\varphi] \leq \|X\|_{\infty} \Phi(I)[\varphi]$ $\varphi \in \mathcal{D}$.
- (iii) $\mathcal{L}(X)[\cdot, \cdot]$ y $\Phi(X)[\cdot, \cdot]$ son formas sesquilineales continuas en $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ por lo que se les puede extender a $\operatorname{dom} G$. Esto permite suponer que $\mathcal{D} = \operatorname{dom} G$.
- (iv) Si $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es un conjunto acotado en la norma. Consideramos sobre $\mathcal{A}$ la topología inducida por la topología ultradébil entonces $\Phi : \mathcal{A} \times \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ es conjuntamente continua.

Demostración:

- (i) Sean $n \in \mathbb{N}$, $\psi_i \in \mathcal{D}$ y $X_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que $\sum_i^n X_i \psi_i = 0$. De la forma de Lindblad (2.1.2), tenemos que

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^n \mathcal{L}(X_i^* X_j)[\psi_i, \psi_j] &= \sum_{i,j=1}^n \Phi(X_i^* X_j)[\psi_i, \psi_j] - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle G\psi_i, X_i^* X_j \psi_j \rangle \\ &\quad - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \langle X_i \psi_i, X_j G\psi_j \rangle = \sum_{i,j=1}^n \Phi(X_i^* X_j)[\psi_i, \psi_j] \geq 0 \end{aligned}$$

- (ii) Sea $\varphi \in \mathcal{D}$. Como $\Phi(\cdot)[\varphi]$ es una funcional lineal positiva y normal entonces es continua en la topología ultradébil por lo que existe $\Phi^\dagger(\varphi) \in \tau(\mathcal{H})$ tal que

$$\Phi(X)[\varphi] = \text{tr}(X\Phi^\dagger(\varphi)), \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

(ver [70]). Por tanto

$$|\Phi(X)[\varphi]| \leq \|X\|_\infty \|\Phi^\dagger(\varphi)\|_1.$$

El operador $\Phi^\dagger(\varphi)$ es positivo definido pues

$$\langle u, \Phi^\dagger(\varphi)u \rangle = \text{tr}(|u\rangle\langle u|\Phi^\dagger(\varphi)) = \Phi(|u\rangle\langle u|)[\varphi] \geq 0,$$

por lo que

$$\|\Phi^\dagger(\varphi)\|_1 = \text{tr}\Phi^\dagger(\varphi) = \Phi(I)[\varphi].$$

de donde i) se sigue.

- (iii) A partir de II.3, (ii) y (2.1.3) tenemos

$$\begin{aligned} |\Phi(X)[\varphi]| &\leq \|X\|_\infty \Phi(I)[\varphi] \leq 2\|X\|_\infty \text{Re}\langle \varphi, G\varphi \rangle \\ &\leq \|X\|_\infty \|\varphi\|_{\mathcal{D}}^2 \end{aligned}$$

Lo que prueba la continuidad de $\Phi(X)[\cdot, \cdot]$ en $\mathcal{D}$ si $X \geq 0$. Para $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ cualquiera, lo expresamos como combinación lineal finita de operadores positivo definidos y usamos la linealidad de Φ en la variable operador para llegar a la conclusión.

Con la forma de Lindblad (2.1.2) se prueba que $\mathcal{L}(X)[\cdot, \cdot]$ es continua en $\mathcal{D}$.

- (iv) Debido a (iii), (iv) y la identidad de polarización, existe una constante positiva M tal que

$$|\Phi(X)[\varphi, \psi]| \leq M\|X\|_\infty \|\varphi\|_{\mathcal{D}} \|\psi\|_{\mathcal{D}} \quad (2.1.4).$$

Si $X, X_0 \in \mathcal{A}$, $\psi, \psi_0 \in \mathcal{D}$ y $K = \sup \{\|X\|_\infty : X \in \mathcal{A}\}$ entonces

$$\begin{aligned} |\Phi(X)[\psi] - \Phi(X_0)[\psi_0]| &\leq |\Phi(X)[\psi] - \Phi(X)[\psi, \psi_0]| + |\Phi(X)[\psi, \psi_0] - \Phi(X)[\psi_0]| \\ &\quad + |\Phi(X)[\psi_0] - \Phi(X_0)[\psi_0]| \\ &\leq \Phi(X)[\psi, \psi - \psi_0] + \Phi(X)[\psi - \psi_0, \psi_0] \\ &\quad + |\Phi(X)[\psi_0] - \Phi(X_0)[\psi_0]| \\ &\leq 2MK\|\psi\|_{\mathcal{D}}\|\psi - \psi_0\|_{\mathcal{D}} + |\Phi(X)[\psi_0] - \Phi(X_0)[\psi_0]|. \end{aligned}$$

Claramente, el último término de la desigualdad tiende a cero si $\psi \rightarrow \psi_0$ en la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{D}}$ y $X \rightarrow X_0$ en la topología ultradébil. ■

Corolario 2.1.2. *Bajo las condiciones del Lema 2.1.1 y suponiendo además que $\mathcal{D} = \text{dom } G$ tenemos que:*

- (i) Si $t \mapsto X_t$ es una curva en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, acotada en norma y ultradébil continua, entonces para cualesquier $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$

$$\int_0^t \Phi(X_s)[W_{t-s}\varphi, W_{t-s}\psi]ds$$

está bien definida y es la forma sesquilineal de un operador acotado en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

- (ii) La constante M en (2.1.4) puede elegirse igual a 1.

Demostración:

- (i): Sea $\mathcal{A}$ el rango de la curva $t \mapsto X_t$. El integrando es una función continua por la parte (iv) del Lema 2.1.1 y es acotada debido a la desigualdad (2.1.4).
(ii): Φ induce una transformación lineal, completamente positiva y normal

$$\tilde{\Phi} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{D})$$

$\tilde{\Phi}(X)$ es el elemento de $\mathcal{B}(\mathcal{D})$ asociado con la forma sesquilineal acotada en $\mathcal{D}$, $\tilde{\Phi}(X)[\cdot, \cdot]$, i.e.,

$$\langle \varphi, \tilde{\Phi}(X)\psi \rangle_{\mathcal{D}} = \Phi(X)[\varphi, \psi].$$

Si $X \geq 0$, entonces $\tilde{\Phi}(X) \geq 0$ por lo que es claro que, en este caso, $M = 1$ debido a la parte (iii) del Lema 2.1.1. Sea $I_{\mathcal{D}}$ el elemento identidad de $\mathcal{B}(\mathcal{D})$. Por las desigualdades que aparecen en la demostración de la parte (iv) del Lema 2.1.1,

$$\tilde{\Phi}(I) \leq I_{\mathcal{D}}$$

Un argumento similar a la prueba de la contractividad de un QDS (ver Proposición 1.3.2 a)) muestra que

$$\|\tilde{\Phi}(X)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{D})} \leq \|X\|_{\infty}$$

de donde concluimos que $M = 1$ para todo $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. ■

La ecuación maestra (2.1.1) es equivalente a la siguiente ecuación integral

$$\langle \varphi, X_t \psi \rangle = \langle \varphi, X \psi \rangle + \int_0^t \mathcal{L}(X_s)[\varphi, \psi]ds \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}. \quad (2.1.5)$$

Por el contrario, un hecho no trivial es la equivalencia de (2.1.1) (y por tanto de (2.1.5)) con la siguiente ecuación integral llamada *forma integral de la ecuación de Lindblad*

$$\langle \varphi, X_t \psi \rangle = \langle W_t \varphi, X W_t \psi \rangle + \int_0^t \Phi(X_{t-s})[W_s \varphi, W_s \psi]ds \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}. \quad (2.1.6)$$

Por el Corolario 2.1.2, la integral que aparece en el lado derecho de (2.1.6) está bien definida y es la forma sesquilineal de un operador acotado en $\mathcal{H}$. La prueba de la equivalencia entre (2.1.1) y (2.1.6) se puede encontrar en [13], [18], o en [49]. En el Capítulo V

damos los detalles de una generalización de esta equivalencia para la llamada *ecuación de Lindblad con coeficiente dependiente del tiempo*. Por lo pronto, admitiendo la equivalencia entre (2.1.1) y (2.1.6) recordamos un procedimiento iterativo para encontrar una solución de (2.1.6) (ver [9], [13], [14], [16] o [18])

$$P_t^{(0)}(X) \equiv 0; \quad P_t^{(1)}(X) = W_t^* X W_t.$$

y para $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$,

$$\langle \varphi, P_t^{(n+1)}(X)\psi \rangle = \langle \varphi, W_t^* X W_t \psi \rangle + \int_0^t d\tau \Phi(P_\tau^{(n)}(X)) [W_{t-\tau} \varphi, W_{t-\tau} \psi] d\tau \quad (2.1.7)$$

Se puede probar que si $X \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ entonces la sucesión

$$\{P_t^{(n)}(X) : n \in \mathbb{N}\}$$

tiene las siguientes propiedades:

Teorema 2.1.3 Bajo las hipótesis del Lema 2.1.1 entonces

(a) Para $X \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$, $0 \leq P_t^{(n)}(X) \leq P_t^{(n+1)}(X) \leq \|X\|_\infty I$.

(b) $P^n \in CPn(\mathcal{H})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(c) Si definimos

$$P_t(X) = \sup_n P_t^{(n)}(X) \quad X \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H}) \quad (2.1.8)$$

y extendemos la definición de P_t a todo $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ por linealidad, entonces

La convergencia en (2.1.8) se da en las topologías fuerte y ultradébil.

(d) Por cada $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ la curva $t \mapsto P_t(X)$ es solución de la ecuación de Lindblad en forma integral (2.1.6).

(e) $\{P_t\}_{t \geq 0}$ es un QDS

(f) Si $\{S_t(X)\}_{t \geq 0}$ es otra solución, no necesariamente QDS, de (2.1.6) entonces

$$P_t(X) \leq S_t(X) \quad \forall X \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H}).$$

Demostración: Ver [13], [14] o [16].

Debido a la propiedad (f) del Teorema 2.1.3., el QDS P_t construido mediante (2.1.8), recibe el nombre de *solución minimal* de (2.1.6) y será denotada por $P_t^{\min}$.

En el Capítulo V probamos con detalle una generalización del Teorema 2.1.3.

El enfoque de Davies para construir la solución minimal.

Otra forma de resolver la ecuación maestra (2.1.1) es plantearla en el espacio $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ de operadores de traza finita, predual de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Este enfoque se debe a Davies ([25]) aunque en [49] y [50] se estudia la relación entre el enfoque de Chebotarev y el de Davies. Puesto que

$$X \mapsto \mathcal{L}(X)[\varphi, \psi], \quad X \mapsto \Phi(X)[\varphi, \psi]$$

son ultradébil continuos, pueden representarse por medio de ciertos operadores de traza finita, $\mathcal{L}^\dagger(\varphi, \psi) \quad \Phi^\dagger(\varphi, \psi)$ i.e.,

$$\mathcal{L}(X)[\varphi, \psi] = \text{tr}(\mathcal{L}^\dagger(\varphi, \psi)X) \quad \Phi(X)[\varphi, \psi] = \text{tr}(\Phi^\dagger(\varphi, \psi)X).$$

Si definimos

$$\tilde{\mathcal{D}} = \text{span}\{|\varphi\rangle\langle\psi| : \varphi, \psi \in \mathcal{D}\} \quad (2.1.9)$$

y los operadores $\mathcal{L}^\dagger, \Phi^\dagger : \tilde{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H})$ definidos por

$$\mathcal{L}^\dagger(|\varphi\rangle\langle\psi|) = \mathcal{L}^\dagger(\varphi, \psi) \quad \Phi^\dagger(|\varphi\rangle\langle\psi|) = \Phi^\dagger(\varphi, \psi).$$

Entonces la forma sesquilineal $\mathcal{L}(X)$ expresada en forma de Lindblad (2.1.2), dá lugar a la siguiente representación para $\mathcal{L}^\dagger$:

$$\mathcal{L}^\dagger(|\varphi\rangle\langle\psi|) = \Phi^\dagger(|\varphi\rangle\langle\psi|) - |G\varphi\rangle\langle\psi| - |\varphi\rangle\langle G\psi|$$

Para probar que el operador densamente definido $\mathcal{L}^\dagger$ puede extenderse al generador de un semigrupo de contracciones en $\mathcal{T}(\mathcal{H})$, Davies considera, para cada $0 \leq r < 1$, el operador $\mathcal{L}_r^\dagger : \tilde{\mathcal{D}} \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H})$

$$\mathcal{L}_r^\dagger(|\varphi\rangle\langle\psi|) = r\Phi^\dagger(|\varphi\rangle\langle\psi|) - |G\varphi\rangle\langle\psi| - |\varphi\rangle\langle G\psi|$$

Teorema 2.1.4

- (a) La cerradura de $\mathcal{L}_r^\dagger$ es el generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo de contracciones, $\{T_t^r\}$, en el espacio de Banach $\mathcal{T}(\mathcal{H})$
- (b) Existe un semigrupo fuertemente continuo de contracciones, $\{T_t\}$, en el espacio de Banach $\mathcal{T}(\mathcal{H})$, tal que

$$T_t^r(\rho) \rightarrow T_t(\rho) \quad \text{si } r \rightarrow 1,$$

en la norma de $\mathcal{T}(\mathcal{H})$. Además, si $\rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$ es positivo, entonces, para $t \geq 0$ fijo, $T_t^r(\rho)$ crece a $T_t(\rho)$ cuando $r \uparrow 1$.

- (c) El generador de $\{T_t\}$ es una extensión, pero no necesariamente una cerradura, de $\mathcal{L}^\dagger$.
- (d) El semigrupo dual de $\{T_t\}$ es $\{P_t^{\min}\}$.

Demostración: Para (a), ver [25], Teo. 2.5, p. 173; para (b) y (c) ver la misma referencia, Teo. 3.1, p. 173; para (d), ver [50], Proposición 1, p.262. ■

2.2 Criterios de conservatividad.

Recordemos que un QDS se llama *conservativo* si $P_t(I) = I$ para todo $t \geq 0$. Este concepto corresponde con el concepto clásico de no explosión de un proceso estocástico. En esta sección enunciaremos algunos criterios para que un QDS sea conservativo. Algunos de los cuáles son generalizaciones de criterios bien conocidos de no explosión en la teoría de procesos estocásticos.

Una condición necesaria pero no suficiente para que $P_t^{\min}$ sea conservativo es

$$\mathcal{L}(I)[\psi] = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D} \quad (2.2.1)$$

Según el inciso (c) Teorema 2.1.4, el subespacio $\tilde{\mathcal{D}}$ de $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ definido por medio de (2.1.9) es una esencia de $\mathcal{L}_*^\dagger$ pero en general no es esencia de $\mathcal{L}^\dagger$. Sin embargo, si este es el caso, tenemos el siguiente resultado simple (ver [25], Teo. 3.2, p. 174 o [50], p.262).

Teorema 2.2.1 *Supongamos que $\tilde{\mathcal{D}}$ es una esencia de $\mathcal{L}^\dagger$ y que $\mathcal{L}$ cumple con la condición.*

$$\mathcal{L}(I)[\psi] = 0 \quad \forall \psi \in \mathcal{D}$$

Entonces T_t preserva la traza es decir,

$$\text{tr} T_t(\rho) = \text{tr}(\rho) \quad (2.2.2).$$

o equivalentemente, $P_t^{\min}$ es conservativo.

Demostración: Como $\mathcal{L}(I)[\cdot, \cdot]$ es una forma sesquilineal entonces es fácil probar que

$$\text{tr}(\mathcal{L}_*(|\varphi\rangle\langle\psi|)) = \mathcal{L}(I)[\varphi, \psi] = 0 \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}.$$

por lo tanto $\text{tr}(\mathcal{L}^\dagger(\rho)) = 0$ para cualquier $\rho \in \tilde{\mathcal{D}}$.

Además, para todo $\rho \in \text{dom } \mathcal{L}^\dagger$, existe una sucesión $\rho_n \in \tilde{\mathcal{D}}$ tal que

$$\rho_n \rightarrow \rho \quad \text{y} \quad \mathcal{L}^\dagger(\rho_n) \rightarrow \mathcal{L}^\dagger(\rho).$$

Por lo que $\text{tr}(\mathcal{L}^\dagger(\rho)) = 0$ para todo $\rho \in \text{dom } \mathcal{L}^\dagger$. Como $T_t(\rho_n) \in \text{dom } \mathcal{L}^\dagger$, entonces

$$0 = \text{tr}(\mathcal{L}^\dagger T_t(\rho_n)) = \text{tr}(T_t \mathcal{L}^\dagger(\rho_n)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{tr}(T_t \mathcal{L}^\dagger(\rho)).$$

Así que $\frac{d}{dt} \text{tr} T_t(\rho) = \text{tr}(T_t(\mathcal{L}^\dagger(\rho))) = 0$ y (2.2.2) se cumple.

La densidad de $\text{dom } \mathcal{L}^\dagger$ muestra que T_t preserva la traza y la dualidad entre $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ dada por

$$(\rho, X) \rightarrow \text{tr}(\rho, X) \quad \rho \in \mathcal{T}(\mathcal{H}), X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

muestra que $P_t^{\min}$ es conservativo. ■

Como consecuencia inmediata, tenemos que si $P_t^{\min}$ es uniformemente continuo, entonces $\mathcal{D} = \mathcal{H}$ y la igualdad (2.2.1) es condición suficiente para que $P_t^{\min}$ sea conservativo.

En los últimos años se han encontrado criterios de conservatividad más útiles. En seguida, hacemos una breve revisión de ellos. Seguiremos principalmente a [14], [17] y [18].

Denotemos por $\mathcal{L}^{\min}$ al generador infinitesimal de $\{P_t^{\min} : t \geq 0\}$. Su dominio, claramente, es el subespacio de todos los $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que

$$\mathcal{L}^{\min}(X) = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1}(P_t^{\min}(X) - X) \quad (2.2.3)$$

donde la convergencia se da en la topología ultradébil. El generador formal $\mathcal{L}$ de la ecuación maestra (2.1.1), es una extensión de $\mathcal{L}^{\min}$ en el siguiente sentido: Si $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces $\mathcal{L}(X)$ es una forma sesquilineal densamente definida en $\mathcal{H}$. Si además $X \in \text{dom } \mathcal{L}^{\min}$, entonces $\mathcal{L}^{\min}(X)$ es un elemento de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y

$$\langle u, \mathcal{L}^{\min}(X)v \rangle = \mathcal{L}(X)[u, v] \quad u, v \in \mathcal{D}.$$

Para $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\lambda > 0$ definimos sobre $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ la siguiente forma sesquilineal

$$\langle \varphi, Q_\lambda(X)\psi \rangle = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \Phi(X)[W_t\varphi, W_t\psi] dt \quad (2.2.4)$$

Lema 2.2.2 $Q_\lambda(X)$ es la forma sesquilineal de un operador acotado en $\mathcal{H}$ y que denotaremos también por $Q_\lambda(X)$. Además $Q_\lambda \in CPn(\mathcal{H})$.

Demostración: Del inciso (ii) del Teorema 2.1.1, tenemos, para $\varphi \in \text{dom } G$,

$$\begin{aligned} 0 \leq Q_\lambda(X)[\varphi] &\leq \|X\|_\infty \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} \Phi(I)[W_t\varphi] = \\ &= 2\|X\|_\infty \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} \text{Re}\langle W_t\varphi, GW_t\varphi \rangle = \\ &-2\|X\|_\infty \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} \frac{d}{dt} \|W_t\varphi\|^2 = \|X\|_\infty \left\{ \|\varphi\|^2 - \int_0^\infty \|W_t\varphi\|^2 e^{-\lambda t} \right\} \leq \|X\|_\infty \|\varphi\|^2 \end{aligned}$$

por lo tanto, $Q_\lambda(X) \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ para todo $X \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$.

La positividad completa es inmediata y la normalidad es consecuencia del Teorema de Convergencia Monótona. ■

La transformación Q_λ es la responsable de la conservatividad del QDS minimal de (2.1.8).

De acuerdo con [13], [17] y [18], una condición necesaria y suficiente para que la solución minimal sea conservativa es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_\lambda^n(I) = 0.$$

Para verificarla, introduzcamos las siguientes formas sesquilineales. Es fácil verificar que son acotadas en $\mathcal{H}$ por lo que corresponden a operadores acotados.

$$\langle \varphi, A_\lambda(X)\psi \rangle = \int_0^\infty e^{-\lambda s} \langle W_s \varphi, X W_s \psi \rangle ds \quad (2.2.5)$$

$$\langle \varphi, R_\lambda^{\min}(X)\mu \rangle = \int_0^\infty e^{-\lambda s} \langle \varphi, P_s^{\min}(X)\psi \rangle ds \quad (2.2.6)$$

Tenemos las siguientes representaciones de Q_λ en términos de A_λ y $R_\lambda^{\min}$

Teorema 2.2.3. [12],[14]

a) Para cada $\lambda > 0$ y $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, tenemos

$$R_\lambda^{\min}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_\lambda^n(A_\lambda(X)) \quad (2.2.7)$$

b) Para $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^n Q_\lambda^k(A_\lambda(I)) + \lambda^{-1} Q_\lambda^{(n+1)}(I) = \lambda^{-1} I \quad (2.2.8)$$

c) Existe un operador positivo y acotado Y tal que

$$R_\lambda^{\min}(I) + \lambda^{-1} Y = \lambda^{-1} I$$

Demostración.

a) Consideremos el esquema iterativo (2.1.7) con el que se construye $P_t^{\min}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definamos la transformada de Laplace de $P_t^{(n)}$ como

$$\langle \varphi, R_\lambda^{(n)}(X)\psi \rangle = \int_0^\infty e^{-\lambda s} \langle \varphi, P_s^{(n)}(X)\psi \rangle ds \quad (2.2.9)$$

Según el procedimiento iterativo (2.1.7), que define $P_t^{(n+1)}$ en términos de $P_t^{(n)}$, tendríamos que

$$\begin{aligned} \langle \varphi, R_\lambda^{(n+1)}(X)\psi \rangle &= \langle \varphi, A_\lambda(X)\psi \rangle \\ &\quad + \int_0^\infty dt e^{-\lambda t} \int_0^t \Phi(P_s^{(n)}(X)) [W_{t-s}\varphi, W_{t-s}\psi] ds \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $(r, s) = (t - s, s)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle \varphi, R_\lambda^{(n+1)}(X)\psi \rangle &= \langle \varphi, A_\lambda(X)\psi \rangle \\ &\quad + \int_0^\infty e^{-\lambda r} dr \int_0^\infty e^{-\lambda s} \Phi(P_s^{(n)}(X)) [W_r\varphi, W_r\psi] ds \\ &= \langle \varphi, A_\lambda(X)\psi \rangle + \langle \varphi, Q_\lambda(R_\lambda^{(n)}(X))\psi \rangle \end{aligned}$$

Así que, iterando n veces la última relación

$$\langle \varphi, R_\lambda^{(n+1)}(X)\psi \rangle = \langle \varphi, \sum_{k=0}^{n+1} Q_\lambda^k(A_\lambda(X))\psi \rangle \quad (2.2.10)$$

Por lo tanto, si $X \geq 0$

$$\langle \varphi, R_\lambda^{\min}(X)\psi \rangle = \sup_{n \geq 0} \langle \varphi, R_\lambda^{(n)}(X)\psi \rangle$$

lo que prueba a).

- b) Procedemos ahora por inducción. Sea $n = 0$. En la prueba del Lema 2.2.2, obtuvimos la igualdad

$$Q_\lambda(I)[\varphi] = \|\varphi\|^2 - \langle \varphi, \lambda A_\lambda(I)\varphi \rangle$$

lo que es equivalente a

$$A_\lambda(I) + \lambda^{-1}Q_\lambda(I) = \lambda^{-1}(I)$$

Si suponemos que (2.2.8) vale para n , apliquemos la transformación Q_λ en ambos lados de (2.2.8) y usamos la base de inducción para obtener que (2.2.8) vale para $n + 1$.

- c) Observemos que (2.2.8) implica que la sucesión de operadores $\{Q_\lambda^n(I)\}_{n=0}^\infty$ es decreciente, por lo que existe $Y \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ tal que $Q_\lambda^n(I) \rightarrow Y$, fuerte, débil y ultradébilmente.

Al restar la n -ésima iteración de (2.2.8) de la iteración $n + 1$ -ésima, obtenemos

$$\lambda^{-1}Q_\lambda^n(I) - \lambda^{-1}Q_\lambda^{n+1}(I) = Q_\lambda^n(A_\lambda(I))$$

Sumamos sobre $n \in \mathbb{N}$ y usamos el inciso a) de este Teorema para obtener

$$R_\lambda^{\min}(I) + \lambda^{-1}Y = \lambda^{-1}I \quad (2.2.11)$$

■

Tal vez el primer criterio de conservatividad que fuera fácil de verificar en un gran número de ejemplos concretos lo dió A.M Chebotarev y lo enunciamos enseguida.

Teorema 2.2.4. [14]. *Lo siguiente es equivalente*

- (a) $P_t^{\min}$ es conservativo
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_\lambda^n(I) = 0$ para algún $\lambda > 0$.
- (c) $I \in \text{dom } \mathcal{L}^{\min}$ y $\mathcal{L}^{\min}(I) = 0$

Demostración. La equivalencia entre (a) y (b) es inmediata con ayuda de la ecuación (2.2.11) pues, $P_t^{\min}(I) = I \ \forall t \geq 0$, si y sólo si $R_\lambda^{\min}(I) = \lambda^{-1}I$, si y sólo si $Y = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_\lambda^n(I) = 0$.

Por otro lado, es claro que (a) implica (c). Recíprocamente, si (c) es válida entonces, según la teoría general de semigrupos

$$R_\lambda^{\min}(I) = (\lambda I - \mathcal{L}^{\min}(I))^{-1} = \lambda^{-1}I.$$

Observación. Según la prueba del último Teorema, la afirmación (b) puede reformularse de manera equivalente sustituyendo la frase “para algún $\lambda > 0$ ” por “para todo $\lambda > 0$.”

Ejemplo 2.2.5. Demos ahora un ejemplo sencillo de cómo es que el criterio de Chebotarev para la conservatividad es una generalización de algunos criterios bien conocidos en probabilidad clásica para decidir si un proceso estocástico explota o no (ver [33] o [41]).

Consideremos una extensión cuántica del proceso puro del nacimiento (ver ejemplo 1.4.4). El generador formal tiene la siguiente expresión

$$\mathcal{L}(X)[\varphi, \psi] = \Phi(X)[\varphi, \psi] - \langle G\varphi, X\psi \rangle - \langle \varphi, XG\psi \rangle$$

donde

$$\Phi(X)[\varphi, \psi] = \langle U^* \lambda(N) \varphi, X U^* \lambda(N) \psi \rangle$$

$$G = \frac{1}{2} |\lambda(N)|^2$$

donde U^* y N son respectivamente, el corrimiento unilateral a la derecha y el operador de número definidos en ese ejemplo y λ es una función sobre $\mathbb{N}$ con valores complejos no necesariamente acotada.

Cálculos directos muestran que W_t , el semigrupo generado por $-G$, es el operador de multiplicación

$$W_t = e^{-\frac{1}{2} t |\lambda(N)|^2}$$

por lo que para $\beta > 0$

$$\begin{aligned} Q_\beta(I)[\varphi] &= \int_0^\infty e^{-\beta t} \Phi(I)[W_t \varphi] dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\beta t} \langle \varphi, |\lambda(N)|^2 e^{-t |\lambda(N)|^2} \varphi \rangle dt \\ &= \left\langle \varphi, \frac{|\lambda(N)|^2}{\beta + |\lambda(N)|^2} \varphi \right\rangle \end{aligned}$$

Puesto que

$$\langle U^* \varphi, Q_\beta(I) U^* \varphi \rangle = \left\langle \varphi, \frac{|\lambda(N+1)|^2}{\beta + |\lambda(N+1)|^2} \varphi \right\rangle$$

entonces, mediante un cálculo directo, se puede probar por inducción que para cada $k \in \mathbb{N}$

$$Q_\beta^k(I)[\varphi] = \left\langle \varphi, \prod_{\ell=0}^{k-1} \frac{|\lambda(N+\ell)|^2}{\beta + |\lambda(N+\ell)|^2} \varphi \right\rangle$$

Así, si φ es el n -ésimo elemento de la base canónica de ℓ_2 , es decir φ tiene todas sus componentes igual a cero excepto la n -ésima que es igual a 1, entonces

$$Q_\beta^k(I)[\varphi] = \prod_{\ell=0}^{k-1} \frac{|\lambda(n+\ell)|^2}{\beta + |\lambda(n+\ell)|^2}$$

De donde obtenemos el bien conocido criterio de no explosión para el proceso puro de nacimiento cuyas intensidades de nacimiento están dadas por la sucesión $\{|\lambda(n)|^2 : n = 1, 2, \dots\}$

$$Q_{\beta}^k(I) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \quad \text{si y sólo si} \quad \sum_{\ell=0}^{\infty} \log \left\{ \frac{1}{\frac{\beta}{|\lambda(\ell)|^2} + 1} \right\} = \infty$$

si y sólo si el proceso puro de nacimiento no explota.

2.3 Series geométricas aleatorias y la martingala de Azéma.

Empezamos la sección con un sencillo teorema que nos dá condiciones necesarias y suficientes para que una serie geométrica aleatoria sea divergente. Después, damos la forma de Lindblad (2.1.2) del generador infinitesimal de la martingala de Azéma. En seguida, usamos nuestro resultado sobre series aleatorias y el criterio de Chebotarev para decidir bajo qué condiciones el QDS minimal asociado con el generador de la martingala de Azéma es conservativo. Sea $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espacio de probabilidad y E la esperanza. Sea $L_p = L_p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. El objetivo es estudiar la serie aleatoria

$$\sum_{k=1}^{\infty} c^{2k} \xi_{k+1} \prod_{\ell=1}^k (1 + \xi_{\ell}) \quad (2.3.1)$$

donde c es una constante real diferente de 0 y $\{\xi_j : j = 1, 2, \dots\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (v.a.i.i.d.) definidas sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. En la literatura, se han estudiado series aleatorias del tipo de (2.3.1) (ver por ejemplo [44], [45] y [46]). Sin embargo, presentamos el siguiente análisis sencillo, basado en series geométricas aleatorias y que desarrollamos en [35].

Teorema 2.3.1. *Sea $\{\phi_j : j = 1, 2, \dots\}$ una sucesión de v.a.i.i.d. tales que $P(\phi_1 \neq 0) = 1$ y $\log |\phi_1| \in L_1$. Entonces*

(a) *$E \log |\phi_1| \geq 0$ implica que $\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\ell=1}^k \phi_j$ diverge con probabilidad 1*

(b) *$E \log |\phi_1| < 0$ implica que $\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\ell=1}^k \phi_j$ converge con probabilidad 1*

Demostración: Consideremos la potencia $\frac{1}{k}$ del k -ésimo sumando de nuestra serie. Por la Ley de los Números Grandes tenemos que, con probabilidad 1,

$$\left(\prod_{\ell=1}^k \phi_j \right)^{1/k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e^{E \log |\phi_1|}.$$

Si $E \log |\phi_1| < 0$ o $E \log |\phi_1| > 0$, entonces la conclusión se sigue del criterio de la raíz.

Para $E \log |\phi_1| = 0$, el criterio de la raíz no nos da información pero consideremos los conjuntos

$$A = \left\{ \omega \in \Omega : \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{\ell=1}^k \phi_{\ell}(\omega) \text{ converge} \right\}$$

$$B = \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{\ell=1}^k |\phi_{\ell}(\omega)| = 0 \right\} = \left\{ \omega \in \Omega : \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{\ell=1}^k \log |\phi_{\ell}(\omega)| = -\infty \right\}.$$

Puesto que $A \subset B$, será suficiente probar que $P(B) = 0$. El conjunto B es un evento cola respecto a la sucesión $\{\log |\phi_{\ell}| : \ell = 1, 2, \dots\}$ así que, por la Ley cero-uno de Kolomogorov, $P(B) = 0$ o $P(B) = 1$. Si esto último fuera lo correcto, entonces la caminata aleatoria $\left\{ \sum_{\ell=1}^k \log |\phi_{\ell}| : k = 1, 2, \dots \right\}$ sería transitoria cosa que no es posible porque $\log |\phi_1| \in L_1$ con valor esperado cero. (ver [7], Teorema 3.38, pag 56.)

Teorema 2.3.2. Sea $c \neq 0$ y $\{\xi_j : j = 1, 2, \dots\}$ una sucesión de v.a.i.i.d.

(a) Si $|c| \geq 1$ y ξ_1 es positiva entonces (2.3.1) diverge con probabilidad uno.

Por otro lado, si $|c| < 1$, $\xi_1 > -1$ y $\log(1 + \xi_1) \in L^1$ entonces

(b) Si $E \log c^2(1 + \xi_1) < 0$ entonces (2.3.1) converge casi seguramente.

(c) Si $E \log c^2(1 + \xi_1) \geq 0$, (2.3.1) diverge casi seguramente.

Demostración: Para (a), notemos que $c^{2k} \xi_{k+1} \prod_{\ell=1}^k (1 + \xi_{\ell}) \geq \xi_{k+1}$, que no tiende a cero debido a la condición de que las v.a son i.i.d. Por tanto (2.3.1) diverge casi seguramente.

Para (b) y (c), Sea $\phi_{\ell} = c^2(1 + \xi_{\ell})$, $Y_k = \prod_{\ell=1}^k \phi_{\ell}$ y $Z_k = \xi_{k+1} Y_k$. Entonces tenemos que

$$Y_{k+1} = Y_k c^2(1 + \xi_{k+1}) = c^2(Y_k + Z_k)$$

y

$$Z_k = c^{-2} Y_{k+1} - Y_k = (c^{-2} - 1) Y_{k+1} + Y_{k+1} - Y_k$$

de aquí que

$$\sum_{k=1}^n Z_k = (c^{-2} - 1) \left(\sum_{k=1}^n Y_{k+1} \right) + Y_{n+1} - Y_1 \geq (c^{-2} - 1) \left(\sum_{k=1}^n Y_{k+1} \right) - Y_1 \quad (2.3.2)$$

Por otro lado,

$$\sum_{k=1}^n Y_{k+1} = \phi_1 \left(\sum_{k=1}^n \prod_{\ell=1}^k \phi_{\ell+1} \right) \quad (2.3.3)$$

Puesto que $c^{-2} > 1$ y $\phi_t > 0$, (2.3.2) muestra que ΣZ_k es divergente si y sólo si ΣY_k es divergente. Además, la sucesión $\{\phi_j : j = 1, 2, \dots\}$ satisface la hipótesis del Teorema 2.3.1. De hecho, $E \log \phi_1 = E \log c^2(1 + \xi_1)$. Por lo tanto (b) y (c) se siguen del Teorema 2.3.1 aplicado a las sumas parciales del lado derecho de la ecuación (2.3.3). ■

Conservatividad del QDS minimal asociado a la martingala de Azéma.

Aplicamos nuestros resultados sobre series aleatorias y el criterio de Chebotarev sobre la conservatividad de un QDS minimal (Teorema 2.2.4) para dar las condiciones bajo las cuáles la llamada extensión cuántica del semigrupo asociado a la martingala de Azéma es conservativo. Se sabe que (ver [31] y [30]) el generador de la martingala de Azéma está dado por

$$(Lf)(x) = \begin{cases} \frac{f(cx) - f(x) - \beta x \frac{d}{dx} f(x)}{\beta^2 x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} f''(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

con $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, $c = 1 + \beta$.

Como fue probado en [19], el semigrupo de este proceso estocástico, tiene una extensión cuántica a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ donde $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$. El generador formal tiene la siguiente expansión de Lindblad:

Sean $\mathcal{D}$ el espacio de todos los $\psi \in \mathcal{H}$ que son infinitamente diferenciables, con soporte compacto, y que se anulan en una vecindad del 0. El operador G , con dominio $\mathcal{D}$, dado por

$$(Gf)(x) = -\frac{1+\beta}{2\beta^2 x^2} f(x) + \frac{1}{\beta x} f'(x)$$

Como se prueba en [19], G se extiende al generador infinitesimal del siguiente semigrupo de contracciones en $\mathcal{H}$:

$$(W_t f)(x) = \left(1 + \frac{2t}{\beta x^2}\right)^{-\frac{1+\beta}{4\beta}} f\left(x \sqrt{1 + \frac{2t}{\beta x^2}}\right) I_{\Gamma_t}(x)$$

donde $\Gamma_t = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq -\frac{2t}{\beta}\right\}$, e I_{Γ_t} es la función indicadora del conjunto Γ_t .

Al menos formalmente, para encontrar esta expresión de W_t se considera el siguiente problema de Cauchy

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t, x) = -\frac{1+\beta}{2\beta^2 x^2} g(t, x) + \frac{1}{\beta x} \frac{\partial}{\partial x} g(t, x) \quad g(0, x) = f(x)$$

y se le integra por el método de las características. El semigrupo dual de W_t está dado por ([19]):

$$(W_t^* f)(x) = \left(1 - \frac{2t}{\beta x^2}\right)^{\frac{1-\beta}{4\beta}} f\left(x \sqrt{1 - \frac{2t}{\beta x^2}}\right) I_{\Gamma_{-t}}(x)$$

El término $\Phi(\cdot)$ en la forma de Lindblad (2.1.2), se construye de la siguiente manera: Sea M el operador autoadjunto, no acotado, en $\mathcal{H}$, que es la multiplicación, por $\frac{1}{\beta x}$, es decir,

$$\text{dom } M = \{f \in \mathcal{H} : \frac{1}{\beta x} f(x) \in \mathcal{H}\} \quad (Mf) = \frac{1}{\beta x} f(x).$$

y sea el operador unitario

$$(D_c f)(x) = |c|^{-\frac{1}{2}} f\left(\frac{x}{c}\right).$$

Entonces

$$\Phi(B)[u] = \langle D_c M u, B D_c M u \rangle \quad u \in \mathcal{D}, \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

En particular, $\Phi(I)[\cdot]$ es la forma cuadrática del operador M^2 , es decir, es la forma cuadrática del operador de multiplicación por la función $\frac{1}{\beta^2 x^2}$. Sean $\{P_t : t \geq 0\}$ el QDS minimal asociado y Q_1 la transformación definida en (2.2.4). Puesto que $I \in L_\infty(\mathbb{R}, dx)$, que es un espacio invariante bajo Q_1 (cosa que probamos en el siguiente lema) tenemos que decidir si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_1^n(I) = 0 \quad \text{casi dondequiera.} \quad (2.3.4).$$

Lema 2.3.3 Para cualquier $f \in L_\infty(\mathbb{R}, dx)$ tenemos que $Q_1 f \in L_\infty(\mathbb{R}, dx)$ y $\|Q_1 f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. De hecho, sea $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ y $c = 1 + \beta$

(a) Si $\beta < 0$ entonces

$$(Q_1 f)(x) = E e^{\frac{1}{2}\beta x^2 \xi} f(cx\sqrt{1+\xi})$$

donde ξ es una variable aleatoria positiva con función de distribución

$$P(\xi \leq s) = 1 - (1+s)^{-\frac{1}{2\beta}}, \quad s \geq 0 \quad (2.3.5)$$

(b) Si $\beta > 0$ entonces

$$(Q_1 f)(x) = E e^{-\frac{1}{2}\beta x^2 \xi} f(cx\sqrt{1-\xi})$$

donde ξ es una variable aleatoria cuyos valores están en el intervalo $(0,1)$ y su función de distribución es

$$P(\xi \leq s) = 1 - (1-s)^{-\frac{1}{2\beta}}, \quad 0 \leq s \leq 1, \quad (2.3.6)$$

Demostración: Sea $f \in L_\infty(\mathbb{R}, dx)$. Un cálculo directo muestra que, para $x \neq 0$,

$$(Q_1 f)(x) =$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty dt e^{-t} \left(1 - \frac{2t}{\beta x^2}\right)^{\frac{1-\beta}{4\beta}} \frac{f\left(cx\sqrt{1 - \frac{2t}{\beta x^2}}\right)}{\beta^2 x^2 \left(1 - \frac{2t}{\beta x^2}\right)} \left(1 + \frac{2t}{\beta x^2 \left(1 - \frac{2t}{\beta x^2}\right)}\right)^{-\frac{1+\beta}{4\beta}} I_{\Gamma-t}(x) \cdot \\ & I_{\Gamma_t}\left(x\sqrt{1 - \frac{2t}{\beta x^2}}\right) \\ & = \int_0^\infty dt e^{-t} \left(1 - \frac{2t}{\beta x^2}\right)^{\frac{1}{2\beta}-1} \frac{f\left(cx\sqrt{1 - \frac{2t}{\beta x^2}}\right)}{\beta^2 x^2} I_{\Gamma-t}(x) \end{aligned}$$

(hemos usado que $I_{\Gamma_t}(x\sqrt{1-\frac{2t}{\beta x^2}}) \equiv 1$).

Así que si $\beta < 0$, como se supone en a), entonces $I_{\Gamma_t}(x) \equiv 1$ y el cambio de variable $s = \frac{-2t}{\beta x^2}$ nos lleva a que

$$(Q_1 f)(x) = - \int_0^\infty e^{\frac{1}{2}\beta s x^2} f(cx\sqrt{1+s}) d(1+s)^{\frac{1}{2\beta}} = E e^{\frac{1}{2}\beta \xi x^2} f(cx\sqrt{1+\xi})$$

donde ξ es una variable aleatoria con función de distribución (2.3.5).

Por otro lado, cuando $\beta > 0$, con el cambio de variable $s = \frac{2t}{\beta x^2}$ tenemos

$$(Q_1 f)(x) = - \int_0^1 e^{-\frac{1}{2}\beta s x^2} f(cx\sqrt{1-s}) d(1-s)^{\frac{1}{2\beta}} = E e^{-\frac{1}{2}\beta \xi x^2} f(cx\sqrt{1-\xi})$$

donde ξ es una variable aleatoria con función de distribución (2.3.6). Aquí hemos usado que $x \in \Gamma_{-t}$ si y sólo si $x^2 > \frac{2t}{\beta} = s x^2$ i.e., $I_{\Gamma_{-t}}(x) = 1$ si y sólo si $s < 1$.

En cualquier caso, es claro ahora que $Q_1 f \in L_\infty(\mathbb{R}, dx)$ y $\|Q_1 f\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. ■

El siguiente lema nos da una representación estocástica de las potencias $Q_1^n(I)$. Cuando $\beta < 0$, las sumas parciales la serie (2.3.1) están involucradas de tal forma que será claro que $Q_1^n(I)$ va a cero casi dondequiera si y sólo si (2.3.1) diverge con probabilidad uno.

Lema 2.3.4 Sea $\{\xi_\ell : \ell = 1, 2, \dots\}$ una sucesión de v.a.i.i.d. $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ y $c = 1 + \beta$.

(a) Si $\beta < 0$ y la función de distribución común de las ξ_ℓ , está dada por (2.3.5) entonces

$$Q_1^n(I)(x) = E \exp \left(\frac{1}{2} \beta x^2 \left\{ \xi_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c^{2k} \xi_{k+1} \prod_{\ell=1}^k (1 + \xi_\ell) \right\} \right) \quad (2.3.7)$$

(b) Si $\beta > 0$ y ξ_ℓ tiene función de distribución (2.3.6) entonces

$$Q_1^n(I)(x) = E \exp \left(-\frac{1}{2} \beta x^2 \left\{ \xi_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c^{2k} \xi_{k+1} \prod_{\ell=1}^k (1 - \xi_\ell) \right\} \right) \quad (2.3.8)$$

Demostración: Para (a), usemos el Teorema de Fubini y el Lema 2.3.3 para obtener

$$Q_1^2(I)(x) = E \exp \left(\frac{1}{2} \beta x^2 \left\{ \xi_2 + c^2 (1 + \xi_2) \xi_1 \right\} \right)$$

y en general, es posible probar que

$$Q_1^n(I)(x) = E \exp \left(\frac{1}{2} \beta x^2 \left\{ \xi_n + \sum_{k=1}^{n-1} c^{2k} \xi_{n-k} \prod_{\ell=1}^k (1 + \xi_{n-\ell+1}) \right\} \right)$$

pero la condición, sobre las v.a. ξ_ℓ , de ser i.i.d. implica (2.3.7).

De forma similar se prueba (b),

$$\begin{aligned}
Q_1^n(I)(x) &= E \exp \left(-\frac{1}{2}\beta x^2 \left\{ \xi_n + \sum_{k=1}^{n-1} c^{2k} \xi_{n-k} \prod_{\ell=1}^k (1 - \xi_{n-\ell+1}) \right\} \right) \\
&= E \exp \left(-\frac{1}{2}\beta x^2 \left\{ \xi_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c^{2k} \xi_{k+1} \prod_{\ell=1}^k (1 - \xi_\ell) \right\} \right)
\end{aligned}$$

Proposición 2.3.5 Sea ξ una variable aleatoria y las constantes β y c como en los lemas previos.

- (a) Si $\beta < 0$ y la función de distribución de ξ está dada por (2.3.5) entonces $\log(1 + \xi)$ tiene distribución exponencial con parametro $-\frac{1}{2\beta}$, i.e.

$$P(\log(1 + \xi) > x) = e^{\frac{x}{2\beta}} \quad (x \geq 0)$$

- (b) Si $\beta > 0$ y la distribución de ξ está dada por (2.3.6) entonces $-\log(1 - \xi)$ tiene distribución exponencial con parametro $\frac{1}{2\beta}$.

Demostración: Sea $x \geq 0$, entonces para (a)

$$P\{\log(1 + \xi) > x\} = P\{\xi > e^x - 1\} = e^{\frac{x}{2\beta}}.$$

De la misma forma se prueba (b).

El problema de decidir si las potencias $Q_1^n(I)$ convergen casi seguramente a 0, depende de la posición de β con respecto a $\beta^* \in (-2, 0)$, que es el único número real que resuelve la ecuación $(1 + x)e^{-x} = -1$. Aproximadamente, el valor de β^* es $-1.278\dots$

Teorema 2.3.6 Sean $\{\xi_\ell : \ell = 1, 2, \dots\}$ v.a.i.i.d. y β, c como en el Lema 2.3.1

- (a) Si $\beta > 0$ y ξ_1 tiene función de distribución (2.3.6) entonces

$$P\left\{\sum_{k=1}^{\infty} c^{2k} \xi_{k+1} \prod_{\ell=1}^k (1 - \xi_\ell) < \infty\right\} = 1$$

- (b) Si $\beta^* < \beta < 0$ y (2.3.5) es la función de distribución de ξ_1 entonces (2.3.1) converge con probabilidad uno.
- (c) Si $\beta \leq \beta^*$ y la distribución es nuevamente (2.3.5) entonces (2.3.1) diverge con probabilidad uno.

Demostración: Sea $f(\beta) = (1 + \beta)e^{-\beta}$. Por tanto $\log f^2(\beta) = \log(1 + \beta)^2 - 2\beta$. $0 < f(\beta) \leq 1$ si $\beta \geq 0$. En $\beta = 0$, f alcanza el máximo global.

Para probar (a), sea $\phi_\ell = c^2(1 - \xi_\ell)$ y observemos que

$$|c^{2k}\xi_{k+1} \prod_{\ell=1}^k (1 - \xi_\ell)| \leq \prod_{\ell=1}^k \phi_\ell$$

Los términos a la derecha de esta desigualdad forman una serie que, según el Teorema 2.3.1, converge casi seguramente pues

$$E \log \phi_\ell = \log (1 + \beta)^2 - 2\beta = \log f^2(\beta) < 0$$

pues $\beta > 0$.

Las partes (b) y (c) también son consecuencias directas del Teorema 2.3.1. En particular, en el caso $\beta = \beta^*$, la conclusión se sigue porque $\log(1 + \xi_1) \in L^1$ y $E \log c^2(1 + \xi_1) = 0$.

Corolario 2.3.7 *La solución minimal de la ecuación (2.1.6) es conservativa si y sólo si $\beta \leq \beta^*$.*

Demostración: Como ya lo señalamos, debemos verificar el criterio de Chebotarev para la conservatividad (Teorema 2.2.4). Pero las ecuaciones (2.3.7) y (2.3.8) junto con el Teorema 2.3.6 muestran que $P_t^{\min}$ es conservativo si y sólo si $\beta \leq \beta^*$. ■

Nota 2.3.8 El estudio de la conservatividad de este QDS fue hecho en [19]. Los autores obtuvieron el mismo resultado que en el Corolario 2.3.7 excepto el caso $\beta = \beta^*$, que no lograron cubrirlo con sus métodos.

Capítulo III

3 Una clase de transformaciones normales, completamente positivas y no acotadas.

3.1 Introducción.

En este capítulo, estudiamos la estructura de una clase de transformaciones lineales, normales, completamente positivas y no acotadas que introdujo A.M. Chebotarev ([13], [9]). La clase será denotada por $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$. Los elementos de esa familia son los coeficientes completamente positivos del generador formal de una gran variedad de QDS. Este estudio lo iniciamos en [21]. Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert separable, llamado *espacio inicial*. El producto interno lo denotamos con $\langle \cdot, \cdot \rangle$ y a la norma, $|\cdot|$. Sea $\mathcal{F}$ un espacio vectorial topológico denso y continuamente incluido en $\mathcal{H}$.

El capítulo está basado en [36] y tiene 4 secciones. Los resultados principales están en las Secciones 3.2 y 3.3. En la Sección 3.2, cuando $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert, el Teorema 3.2.5 y el Corolario 3.2.6 proporcionan caracterizaciones constructivas de $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ en el mismo sentido en que el Teorema de Kraus (ver Teorema 1.2.7) proporciona todos los posibles ejemplos de elementos de $CPn(\mathcal{H})$. En la Sección 3.3, $\mathcal{F}$ es el límite proyectivo de espacios de Hilbert, y el Teorema 3.3.1 junto con el Corolario 3.3.2 caracterizan $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$. En la Sección 3.4, presentamos algunos ejemplos y comentarios. Primero recordemos la definición de los conos $CPn(\mathcal{H})$ y $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ al tiempo de señalar sus propiedades básicas.

Definición 3.1.1. $CPn(\mathcal{H})$ es el cono de todos las transformaciones lineales

$$R: \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

que son completamente positivas y normales ([6],[68]).

Sea $R \in CPn(\mathcal{H})$. R está definido en toda el álgebra de Banach $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. Se puede probar que la normalidad de R implica que es cerrado, así que R es acotado.

El Teorema de Kraus ([59], Teorema 3.3, p. 217 o bien Cap. 1. Teorema 1.2.7) caracteriza a $CPn(\mathcal{H})$ en el sentido de proporcionar todos los ejemplos posibles de $CPn(\mathcal{H})$. Concretamente, R está en $CPn(\mathcal{H})$ si y sólo si existe una sucesión $\{A_k\}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\sum_k A_k^* A_k$ converge fuertemente a un operador acotado y

$$R(X) = \sum_k A_k^* X A_k \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Sólo para dar un ejemplo de una transformación lineal, normal, completamente positiva y no acotado, supóngase que $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$, y recordemos que en el ejemplo 1.4.7 se consideró el generador formal de Lindblad

$$\mathcal{L}(B) = \Phi(B) - \frac{1}{2} \{ \Phi(I)B + B\Phi(I) \} + i[H, B]$$

donde $B \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\Phi(B) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} B \frac{d}{dx}$ y $H = 0$.

Este generador puede considerarse como una extensión cuántica del Laplaciano en $\mathbb{R}$, y la ecuación maestra asociada corresponde con una extensión cuántica de la ecuación del calor. La transformación $\Phi(\cdot)$ es un ejemplo natural de una transformación completamente positiva no acotada.

Sobre $CPn(\mathcal{H})$ definamos la familia de pseudométricas

$$\mathcal{R}_{\mathcal{F}} = \{ \Theta_{A,B} : A \subset \mathcal{F}, B \subset \mathcal{B}(\mathcal{H}) \} \quad \Theta_{A,B} : CPn(\mathcal{H}) \times CPn(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{R}_+$$

Los índices son parejas (A, B) , donde A es un conjunto compacto y absolutamente convexo en $\mathcal{F}$, B es un conjunto compacto en la topología ultradébil de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, absolutamente convexo y

$$\Theta_{A,B}(\Phi_1, \Phi_2) = \sup_{\varphi, \psi \in A, X \in B} |\langle \varphi, \Phi_1(X)\psi \rangle - \langle \varphi, \Phi_2(X)\psi \rangle| \quad (3.1.1)$$

donde $\Phi_1, \Phi_2 \in CPn(\mathcal{H})$. Notemos que la familia de pseudométricas (3.1.1) depende del espacio $\mathcal{F}$.

Recordemos que los conjuntos precompactos de la topología ultradébil de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ son todos los conjuntos acotados en norma ([5]). $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ induce en $CPn(\mathcal{H})$ una estructura de espacio topológico uniforme por lo que tiene una completación ([57], Teorema. VI.28, p.196).

Definición 3.1.2. $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ es la completación de $CPn(\mathcal{H})$ con respecto a las pseudométricas (3.1.1).

Usamos la misma notación que en (3.1.1) para las pseudométricas en $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$.

De la forma en que se construyen completaciones de espacios topológicos uniformes, ([57], Teorema VI.28, p. 196), se sigue que $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ es el cono de todos las transformaciones $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$ tales que existe una red en $CPn(\mathcal{H})$, $\{\Phi_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{I}}$, ($\mathcal{I}$ es un conjunto dirigido) que converge a Φ en el sentido siguiente: para todo conjunto compacto en $\mathcal{F}$, $A \subset \mathcal{F}$ y todo subconjunto acotado en norma $B \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$\Theta_{A,B}(\Phi_\alpha, \Phi) \rightarrow 0. \quad (3.1.2)$$

Si $\mathcal{F} = \mathcal{H}$, es claro que $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = CPn(\mathcal{H})$. Si $\mathcal{F}$ es metrizable, las siguientes propiedades son condiciones necesarias para que un objeto Φ pertenezca a $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$.

Propiedades algebraicas:

- (a) $\Phi(\cdot)[\cdot, \cdot]$ es una transformación sesquilineal en las variables vectoriales y es lineal en la variable operador.
- (b) $\Phi(\cdot)[\cdot, \cdot]$ es *Completamente Positivo*, esto es

$$\sum_{i,j=1}^n \Phi(X_i^* X_j)[\psi_i, \psi_j] \geq 0 \quad \text{para } n \in \mathbb{N}, \quad \psi_i \in \mathcal{F} \quad \text{y } X_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Propiedades de continuidad:

(c) Para $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ fijo, $\Phi(X)[\cdot, \cdot]$ es continua en $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$.

(d) Para $\psi \in \mathcal{F}$ fijo, $\Phi(\cdot)[\psi]$ es una funcional lineal *normal* $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ i.e.,

$$X = \sup_n X_n \text{ implica que } \sup_n \Phi(X_n)[\psi] = \Phi(X)[\psi]$$

para cualquier sucesión creciente y acotada en norma $\{X_n\}$ de elementos positivos en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

De hecho, las propiedades algebraicas (a) y (b) son consecuencia de la convergencia puntual de elementos de $CPn(\mathcal{H})$ y las propiedades de continuidad (c) y (d) se siguen de la convergencia uniforme sobre conjuntos compactos.

Si R es un elemento de $CPn(\mathcal{H})$, entonces transforma operadores positivos en operadores positivos. Puesto que para cualquier operador acotado y autoadjunto X la desigualdad $X \leq \|X\|_\infty I$ se cumple, se sigue que

$$\|R(X)\|_\infty \leq \|X\|_\infty \|R(I)\|_\infty. \quad (3.1.3)$$

Una desigualdad similar se cumple para los elementos de $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ como consecuencia de las propiedades algebraicas (a) y (b):

$$|\Phi(X)[\psi, \psi]| \leq \|X\|_\infty |\Phi(I)[\psi, \psi]|, \quad (3.1.4),$$

donde X es acotado y autoadjunto y $\psi \in \mathcal{F}$. En adelante, supondremos que $\mathcal{F}$ es metrizable.

Una conjetura natural es que las condiciones (a)-(d) también son suficientes para que un elemento Φ pertenezca a $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$. Probaremos esta conjetura cuando $\mathcal{F}$ es un espacio de Hilbert (Sección 3.2) y cuando $\mathcal{F}$ es el límite proyectivo de espacios de Hilbert (Sección 3.3). Un ejemplo de esta última situación es $\mathcal{H} = L_2(\mathbb{R})$, y $\mathcal{F}$ es el espacio de Schwartz de funciones suaves y rápidamente decrecientes. Se sabe que ([67]) el espacio de Schwartz es el límite proyectivo de los espacios $\{\mathcal{H}_k\}_{k \geq 0}$, donde $\mathcal{H}_k$ es el dominio de $N^{\frac{k}{2}}$ y N es el llamado *oscilador armónico*

$$N = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1 \right)$$

De aquí en adelante para cualquier forma sesquilineal a , escribiremos $a[\psi] = a[\psi, \psi]$. Sea $\mathcal{B}_*(\mathcal{F})$ el espacio de formas sesquilineales continuas sobre $\mathcal{F}$.

Con estas notaciones, las condiciones necesarias (a)-(d) dicen que $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ está contenido en el conjunto de todas las transformaciones lineales $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}_*(\mathcal{F})$ que son completamente positivas y normales en el sentido de las condiciones (b) y (d).

Si $\mathcal{F}$ es un espacio de Hilbert, identificamos $\mathcal{B}_*(\mathcal{F})$ con el espacio $B(\mathcal{F})$ de operadores acotados sobre $\mathcal{F}$ por medio de la ecuación

$$a[\varphi, \psi] = \langle \varphi, A\psi \rangle_{\mathcal{F}},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{F}}$ es el producto interno en $\mathcal{F}$, $a \in \mathcal{B}_*(\mathcal{F})$ y A es el elemento de $B(\mathcal{F})$ que representa a la forma sesquilineal a .

3.2 Completaciones generadas por espacios de Hilbert

Esta sección la dedicamos al caso más simple cuando $\mathcal{F}$ es un espacio de Hilbert denso y continuamente incluido en $\mathcal{H}$. Primero establezcamos una propiedad sencilla de los conos $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ válida para cualquier espacio vectorial topológico metrizable $\mathcal{F}$.

Proposición 3.2.1. *Supongamos que $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son espacios vectoriales topológicos metrizables y $\mathcal{H}$ es un espacio de Hilbert $\mathcal{F}_1$ está denso y continuamente incluido en $\mathcal{F}_2$, y $\mathcal{F}_2$ está denso y continuamente incluido en $\mathcal{H}$. Entonces*

$$CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F}_2) \subseteq CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F}_1) \quad (3.2.1)$$

La transformación inclusión es uniformemente continua.

Demostración. Hay una forma natural de ver a $\mathcal{B}_*(\mathcal{F}_2)$ como subespacio de $\mathcal{B}_*(\mathcal{F}_1)$: Como $\mathcal{F}_1$ está contenido en $\mathcal{F}_2$ entonces cualquier forma sesquilineal continua en $\mathcal{F}_2$ es una forma sesquilineal sobre $\mathcal{F}_1$. Dado que la topología de $\mathcal{F}_1$ es más fuerte que la topología inducida por $\mathcal{F}_2$, la restricción también es una forma sesquilineal continua en $\mathcal{F}_1$. Por lo tanto, $\mathcal{B}_*(\mathcal{F}_2) \subseteq \mathcal{B}_*(\mathcal{F}_1)$.

Notemos que cualquier conjunto compacto en $\mathcal{F}_1$ también es un conjunto compacto en $\mathcal{F}_2$. De aquí que,

$$\mathcal{R}_{\mathcal{F}_1} \subseteq \mathcal{R}_{\mathcal{F}_2}$$

Esto muestra que la transformación identidad

$$i: (CPn(\mathcal{H}), \mathcal{R}_{\mathcal{F}_2}) \rightarrow (CPn(\mathcal{H}), \mathcal{R}_{\mathcal{F}_1})$$

es uniformemente continua. Entonces existe una única extensión uniformemente continua de i , que denotaremos, momentáneamente, por $\tilde{i}$, entre las completaciones i.e.,

$$\tilde{i}: CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F}_2) \rightarrow CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F}_1).$$

Sea $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F}_2)$; entonces $\Phi(X) \in \mathcal{B}_*(\mathcal{F}_2)$ para cada $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Así que, por restricción a $\mathcal{F}_1$, $\Phi(X) \in \mathcal{B}_*(\mathcal{F}_1)$ y existe una red $\{\Phi_\alpha\}_\alpha$ en $CPn(\mathcal{H})$ que converge a Φ en la topología inducida por $\mathcal{R}_{\mathcal{F}_2}$. Entonces $\Phi_\alpha = i(\Phi_\alpha)$ converge a $\tilde{i}(\Phi)$ en la topología inducida por $\mathcal{R}_{\mathcal{F}_1}$. Por lo tanto, $[\tilde{i}(\Phi)](X)$ es la restricción de $\Phi(X)$ a $\mathcal{F}_1$ y la inyectividad de $\tilde{i}$ se sigue de la densidad de $\mathcal{F}_1$ en $\mathcal{F}_2$. Así, obtenemos (3.2.1). ■

En adelante, ya no usaremos la notación $\tilde{i}$ para la transformación inclusión de

$$\tilde{i}: CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F}_2) \rightarrow CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F}_1),$$

sólo nos referiremos a ella como la *transformación inclusión*.

En el resto de la sección, supondremos que $\mathcal{F}$ es un espacio de Hilbert, denso y continuamente incluido en $\mathcal{H}$, con producto interno y norma denotados, respectivamente, por

$$\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle \quad \text{y} \quad \|\cdot\|$$

Proposición 3.2.2. *Existe un operador densamente definido, no negativo y autoadjunto A en $\mathcal{H}$ y que satisface que*

$$\mathcal{F} = \text{dom } A \quad \langle A\psi, A\varphi \rangle = \langle \langle \psi, \varphi \rangle \rangle \quad (3.2.2)$$

y 0 está en el conjunto resolvente de A .

Demostración. Puesto que $\mathcal{F}$ está continuamente incluido en $\mathcal{H}$, existe una constante positiva K tal que

$$|u| \leq K\|u\|, \quad u \in \mathcal{F}.$$

Sea $a[\psi, \varphi] = \langle \langle \psi, \varphi \rangle \rangle$. Se puede probar que la forma cuadrática a es densamente definida, positiva y cerrada con dominio $\mathcal{F}$. Por los Teoremas de Representación de Kato ([55], Teoremas VI. 2.1 y VI.2.23, pp. 322 y 331), existe un operador densamente definido, positivo y autoadjunto Λ tal que $\text{dom } \Lambda$ es un subespacio denso en $\mathcal{F}$, $\text{dom } \Lambda^{\frac{1}{2}} = \mathcal{F}$,

$$a[\psi, \varphi] = \langle \Lambda^{\frac{1}{2}}\psi, \Lambda^{\frac{1}{2}}\varphi \rangle \quad \psi, \varphi \in \mathcal{F},$$

y

$$a[\psi, \varphi] = \langle \psi, \Lambda\varphi \rangle \quad \varphi \in \text{dom } \Lambda; \psi \in \mathcal{F}.$$

Sea $A = \Lambda^{\frac{1}{2}}$. Debemos probar que 0 pertenece a su conjunto resolvente. Es suficiente con mostrar que Λ tiene inverso acotado. Para $u \in \text{dom } \Lambda$ tenemos

$$|\Lambda u| |u| \geq \langle u, \Lambda u \rangle = \|u\|^2 \geq K^{-2}|u|^2.$$

De aquí, es claro que $\ker \Lambda = 0$ y si $u \neq 0$

$$|\Lambda u| \geq K^{-2}|u|. \quad (3.2.3).$$

Como Λ es autoadjunto y $\ker \Lambda = 0$, su rango es denso en $\mathcal{H}$. Probaremos ahora que el rango de Λ también es cerrado. Sea $\{x_n\}$ una sucesión en $\text{dom } \Lambda$ y $y \in \mathcal{H}$ tal que $\Lambda x_n \rightarrow y$. Entonces por (3.2.3), $\{x_n\}$ es una sucesión acotada en $\mathcal{H}$ así que tiene una subsucesión $\{y_m\}$ que es débilmente convergente a algún $v \in \mathcal{H}$. Para cualquier $z \in \text{dom } \Lambda$,

$$\langle v, \Lambda z \rangle = \lim_m \langle y_m, \Lambda z \rangle = \lim_m \langle \Lambda y_m, z \rangle = \langle y, z \rangle.$$

Por lo tanto $v \in \text{dom } \Lambda^* = \text{dom } \Lambda$ y $y = \Lambda^*v = \Lambda v \in \text{rango de } \Lambda$. Dado que el rango de $\Lambda = \mathcal{H}$ y Λ^{-1} es un operador simétrico definido en todo $\mathcal{H}$, es acotado. ■

Nota 3.2.3.

- (i) Puesto que 0 está en el conjunto resolvente de A , entonces el operador A es un isomorfismo unitario entre $\mathcal{F}$ y $\mathcal{H}$. Esta es la clave para dar la caracterización de $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$.
- (ii) Sea $\lambda : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{F})$ definido por la ecuación $\lambda(X) = A^{-1}XA$. Debido a que A es una transformación unitaria de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{H}$, λ es un isomorfismo que transforma el operador I de $\mathcal{H}$ en el operador I de $\mathcal{F}$. En particular, λ es una transformación invertible, completamente positiva, normal e isométrica. λ^{-1} tiene las mismas propiedades.

- (iii) Por (3.2.3), Λ^{-1} tiene norma menor o igual que K^{-2} . El que Λ sea autoadjunto implica que A es mayor o igual que K veces el operador identidad en $\mathcal{H}$. Si fuera necesario, introducimos en $\mathcal{F}$ el siguiente producto interno, equivalente al original,

$$\langle\langle u, v \rangle\rangle + \langle u, v \rangle,$$

por lo que podemos suponer sin pérdida de generalidad, que $K = 1$ y $A \geq I$.

Escribiremos $A_\epsilon = A(1 + \epsilon A)^{-1}$, y para $x \in \mathcal{H}$ $x_\epsilon = (1 + \epsilon A)^{-1}x$.

Proposición 3.2.4 *Para cualquier $A \in \mathcal{F}$ que sea un compacto en la topología de $\mathcal{F}$, la convergencia*

$$|Ax_\epsilon \rangle \langle Ax_\epsilon| \rightarrow |Ax \rangle \langle Ax|$$

cuando $\epsilon \rightarrow 0$, con respecto a la norma de la traza, es uniforme en $x \in A$.

Demostración. Sea $z = Ax$, entonces $z_\epsilon = Ax_\epsilon$ y, por la desigualdad del triángulo

$$\| |z_\epsilon \rangle \langle z_\epsilon| - |z \rangle \langle z| \|_1 \leq 2 \|z_\epsilon - z\| \|z\| = 2 \|Ax_\epsilon - Ax\| \|Ax\|$$

que va a 0 si $\epsilon \rightarrow 0$. Para probar que la convergencia es uniforme en $x \in A$, notemos que $(1 + \epsilon A)^{-1}$ crece a 1 y Ax pertenece a $A(A) \subset \mathcal{H}$ que es un conjunto compacto debido a la continuidad de A como operador de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{H}$. Así que, podemos aplicar el Teorema de Dini para probar que $\|(I - (1 + \epsilon A)^{-1})u\|$ decrece a 0 uniformemente para $u \in A(A)$ si $\epsilon \rightarrow 0$. ■

El siguiente resultado nos da la caracterización completa del cono $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$. Sea λ la transformación definida en el inciso (ii) de la Nota 3.2.3.

Teorema 3.2.5. *Sea $\mathcal{G} = \{\lambda \circ R : R \in CPn(\mathcal{H})\}$ y sea $\mathcal{E}$ el conjunto de todos los elementos Φ que satisfacen las condiciones (a)-(d) de la Sección 3.1. Entonces*

$$\mathcal{G} = CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F}) = \mathcal{E}.$$

0

Demostración. Probaremos que $\mathcal{G} \subset CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ y $\mathcal{E} \subset \mathcal{G}$. Como $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F}) \subset \mathcal{E}$, la prueba estará completa.

Sea $R \in CPn(\mathcal{H})$. Cualquier elemento de la forma $\lambda \circ R$ es una transformación de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ en $\mathcal{B}(\mathcal{F}) = \mathcal{B}_*(\mathcal{F})$ (ver la Sección 3.1 para la notación). Cualquier $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $(\lambda \circ R)(X)$ tiene la siguiente expresión explícita como forma sesquilineal:

$$(\lambda \circ R)(X)[\varphi, \psi] = \langle\langle \varphi, A^{-1}R(X)A\psi \rangle\rangle = \langle A\varphi, R(X)A\psi \rangle \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{F}. \quad (3.2.4)$$

Definamos $R_\epsilon(X) = A_\epsilon R(X) A_\epsilon$. Notemos que $R_\epsilon(\cdot)$ pertenece a $CPn(\mathcal{H})$ porque $A_\epsilon \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Afirmamos que $R_\epsilon \rightarrow \lambda \circ R$ si $\epsilon \rightarrow 0$, con respecto a las pseudométricas (3.1.2).

Podemos probarlo de diferentes formas. Por ejemplo, usemos (3.1.3), (3.2.4) y el hecho de que A_ϵ es autoadjunto: si $\psi = \varphi \in \mathcal{F}$, tenemos

$$\begin{aligned} |\langle \psi, R_\epsilon(X)\psi \rangle - (\lambda \circ R)(X)[\psi]| &= |\langle A\psi_\epsilon, R(X)A\psi_\epsilon \rangle - \langle A\psi, R(X)A\psi \rangle| \\ &= |\text{tr}\{R(X)[|A\psi_\epsilon\rangle\langle A\psi_\epsilon| - |A\psi\rangle\langle A\psi|]\}| \leq \\ &\|X\|_\infty \|R(I)\|_\infty \| |A\psi_\epsilon\rangle\langle A\psi_\epsilon| - |A\psi\rangle\langle A\psi| \|_1. \end{aligned}$$

Esta desigualdad junto con la Proposición 3.2.4 muestran que la convergencia es uniforme si X se restringe a subconjuntos de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ acotados en la norma, y si ψ pertenece a cualquier subconjunto compacto de $\mathcal{F}$. Así, $\lambda \circ R \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$.

Por otro lado, sea $\Phi \in \mathcal{E}$. Para cada $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\Phi(X) \in \mathcal{B}_*(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(\mathcal{F})$ y es completamente positivo y normal en el sentido definido por las condiciones (b), (c). Sea $R = \lambda^{-1} \circ \Phi$. Por lo que R es una transformación lineal de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ en sí mismo. La positividad completa y la normalidad de R se siguen de la representación de R como composición de transformaciones completamente positivas y normales. Por lo tanto, R está en $CPn(\mathcal{H})$ y $\Phi = \lambda \circ R \in \mathcal{G}$. ■

Corolario 3.2.6. *Tenemos lo siguiente,*

1. *Para cualquier $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$, existe una sucesión de operadores acotados en $\mathcal{H}$, $\{A_k\} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\sum_k A_k^* A_k$ converge fuertemente y*

$$\Phi(X)[\psi, \varphi] = \sum_k \langle A_k A\psi, X A_k A\varphi \rangle \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad \psi, \varphi \in \mathcal{F}$$

2. *Las condiciones (a)-(d) de la Sección 1) son suficientes para que un elemento Φ se encuentre en $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$*
3. *Cualquier elemento de $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ es el límite de una sucesión de elementos en $CPn(\mathcal{H})$ con respecto a la topología inducida por $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$.*

Demostración. Sea $R \in CPn(\mathcal{H})$ y $\Phi = \lambda \circ R$. Para probar la parte 1, recordemos que por el Teorema de Kraus, existe una sucesión $\{A_k\}$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $\sum_k A_k^* A_k$ converge fuertemente y

$$R(X) = \sum_k A_k^* X A_k \quad \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Por lo tanto, por (3.2.4), tenemos que

$$\Phi(X)[\varphi, \psi] = \langle A\varphi, R(X)A\psi \rangle = \sum_k \langle A_k A\varphi, X A_k A\psi \rangle.$$

La parte 2 es inmediata. La prueba de la parte 3, se sigue de la prueba del Teorema 3.2.5: tomemos $\epsilon = \frac{1}{n}$, entonces $\{R_{\frac{1}{n}}\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión aproximante. ■

3.3 Completaciones generadas por límites proyectivos de espacios de Hilbert.

Supongamos ahora que $\mathcal{F}$ es un *espacio de Hilbert Contable* i.e., $\mathcal{F}$ es un espacio vectorial topológico localmente convexo y completo cuya topología está dada por una sucesión de seminormas de Hilbert $\{|\cdot|_n\}_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$. Sea $\mathcal{H}_n$ la completación de $\mathcal{F}$ con respecto a la seminorma $|\cdot|_n$. Se sabe que $\mathcal{F}$ es el *límite proyectivo* de la sucesión de espacios de Hilbert $\mathcal{H}_n$ y por lo tanto, es un espacio de Fréchet reflexivo. ([67], Proposición 1.2.1, p. 4); en particular, es metrizable.

Suponga que los espacios $\mathcal{H}_n$ forman una sucesión decreciente:

$$\mathcal{H}_0 \supseteq \mathcal{H}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{F}, \quad \mathcal{F} = \bigcap_n \mathcal{H}_n \quad (3.3.1)$$

y

$$|u|_{n+1} \leq |u|_n, \quad u \in \mathcal{F}. \quad (3.3.2)$$

Puesto que $\mathcal{F}$ es denso en cada $\mathcal{H}_n$, $\mathcal{H}_{n+1}$ está densa y continuamente incluido en $\mathcal{H}_n$.

Tomemos $\mathcal{H}_0$ como el espacio de Hilbert inicial $\mathcal{H}$. Por la Proposición 3.2.1, tenemos la siguiente sucesión creciente

$$CP_n(\mathcal{H}) \subseteq CP_{n*}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1) \subseteq CP_{n*}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_2) \subseteq \cdots \subseteq CP_{n*}(\mathcal{H}, \mathcal{F}). \quad (3.3.3)$$

Teorema 3.3.1. *La siguiente representación se cumple:*

$$CP_{n*}(\mathcal{H}, \mathcal{F}) = \bigcup_k CP_{n*}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_k). \quad (3.3.4)$$

Demostración. En vista de (3.3.3), la unión los conjuntos $CP_{n*}(\mathcal{H}, \mathcal{H}_k)$ está contenida en $CP_{n*}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$. Para probar la contención recíproca, notemos primero que cualquier elemento $G \in \mathcal{B}_*(\mathcal{F})$ es una forma sesquilineal continua por lo que existen dos seminormas $|\cdot|_k$ y $|\cdot|_m$, y una constante positiva M , que depende de G , tal que

$$|G[u, v]| \leq M |u|_k |v|_m \quad \text{para } u, v \in \mathcal{F}.$$

esto se puede probar imitando la demostración de la misma propiedad para formas bilineales conjuntamente continuas ([82], Capítulo 41, p. 420). Por (3.3.2), podemos suponer que $k = m$. Por lo que G tiene una única extensión conjuntamente continua a $\mathcal{H}_k$, dado que $\mathcal{F}$ es denso en $\mathcal{H}_k$.

Sea $\Phi \in CP_{n*}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$. Entonces $\Phi(X) \in \mathcal{B}_*(\mathcal{F})$ para cada $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, y existe un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_k$, al cual $\Phi(X)$ puede ser extendida como una forma sesquilineal conjuntamente continua. Denotaremos a esta última forma por el mismo símbolo $\Phi(X)$. El índice k depende de Φ y de X pero aseguramos que es posible elegir el mismo índice k para todo X , por lo que sólo dependerá de Φ . De hecho, consideremos un espacio de Hilbert $\mathcal{H}_k$ donde $\Phi(I)$ pueda ser extendida continuamente. Entonces, por (3.1.4), tenemos las

siguientes desigualdades para cualquier operador autoadjunto X , todo $\psi \in \mathcal{F}$, y alguna constante positiva M ,

$$|\Phi(X)[\psi]| \leq \|X\|_{\infty} |\Phi(I)[\psi]| \leq \|X\|_{\infty} M |\psi|_k^2.$$

Puesto que cualquier operador es combinación lineal de operadores autoadjuntos y Φ es lineal en la variable operador, $\Phi(X) \in \mathcal{B}_*(\mathcal{H}_k)$, para cada $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. En otras palabras, $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{H}_k)$. Así, obtenemos (3.3.4). ■

De (3.3.3) y (3.3.4), vemos que al conjunto $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ se le puede dar, de manera natural la topología de límite inductivo. Por definición, esta topología es la más fuerte en $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ que hace continuas las transformaciones inclusión de $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{H}_k)$ en $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ $k \geq 0$. Por la Proposición 3.2.1, la topología inducida por $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ también hace que sean continuas las transformaciones inclusión. Por lo tanto, esta topología es más débil o igual que la topología de límite inductivo. Es un problema abierto decidir si ambas topologías son equivalentes.

Corolario 3.3.2. *Tenemos lo siguiente,*

1. *Para cualquier $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$, existe un operador densamente definido, positivo y autoadjunto A y una sucesión $\{A_k\}$, de operadores acotados en $\mathcal{H}$ tales que $\sum_k A_k^* A_k$ es fuertemente convergente y*

$$\Phi(X)[\psi, \varphi] = \sum_k \langle A_k A \psi, X A_k A \varphi \rangle, \quad \forall X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}); \forall \psi, \varphi \in \mathcal{F}$$

2. *Las condiciones (a)-(d) en la Sección 3.1 son suficientes para que un elemento Φ pertenezca a $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$.*
3. *Cualquier elemento de $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ es el límite de una sucesión de elementos en $CPn(\mathcal{H})$ con respecto a la topología inducida por $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$.*

Demostración. Recordemos que $\mathcal{H}_0$ es nuestro espacio de Hilbert inicial $\mathcal{H}$. Sea $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$. Por el Teorema 3.3.1, existe un índice k tal que $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{H}_k)$. Para probar el Corolario, apliquemos la Proposición 3.2.2 y el Corolario 3.2.6 al espacio de Hilbert $\mathcal{H}_k$. Concretamente, sea A el operador densamente definido positivo y autoadjunto descrito en la Proposición 3.2.2; sea $\{A_k\}$ la sucesión en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y sea $\{R_{\frac{1}{k}}\}$ la sucesión en $CPn(\mathcal{H})$ del Corolario 3.2.6. $\{R_{\frac{1}{k}}\}$ converge a Φ en la topología de $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{H}_k)$ pero $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{H}_k)$ es continuamente incluido en $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ (Proposición 3.2.1); por lo que la convergencia de $\{R_{\frac{1}{k}}\}$ también es en la topología de $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$. Esto termina la prueba. ■

3.4 Ejemplos y Observaciones.

Los primeros dos ejemplos están relacionados con formas cuadráticas no cerrables.

Ejemplo 3.4.1. Presentamos aquí un ejemplo de $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$, donde $\Phi(I)$ es una forma cuadrática densamente definida en $\mathcal{H}$ pero existe un elemento X en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, tal que $\Phi(X)$ no es cerrable a pesar de que se cumple la desigualdad (3.1.4).

Recordemos que una forma cuadrática es *cerrable* si tiene una extensión cerrada ([55], Cap. VI, Sección 1). Una condición equivalente a la cerrabilidad es la siguiente ([55], Teo. VI.1.17, p. 315)

$$\psi_n \in \text{dom } a, \quad \psi_n \rightarrow 0 \quad \text{y} \quad a[\psi_n - \psi_m] \rightarrow 0 \quad \text{si} \quad n, m \rightarrow \infty, \quad \text{implica} \quad a[\psi_n] \rightarrow 0.$$

Sea $\mathcal{H} = \ell_2$, las sucesiones cuadrado sumables de números complejos. Sea N el operador de número que ya introdujimos en el Capítulo I i.e.,

$$\text{dom } N = \{(a_n) \in \mathcal{H} : (na_n) \in \mathcal{H}\}, \quad N((a_n)) = (na_n).$$

Para $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, sea $\mathcal{H}_k = \text{dom } N^{\frac{k}{2}}$ con producto interno $\langle \varphi, \psi \rangle_k = \langle N^{\frac{k}{2}} \varphi, N^{\frac{k}{2}} \psi \rangle$.

Sea $\mathcal{F} = \cap_k \mathcal{H}_k$. $\mathcal{F}$ es el espacio de todos los elementos en $\{a_n\} \in \mathcal{H}$ tales que para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\{n^k a_n\} \in \mathcal{H}$. Se sabe que $\mathcal{F}$ es denso en cada $\mathcal{H}_k$ ([70], pp. 142, 143). Definamos

$$\Phi(X)[\psi] = \langle N^{\frac{3}{2}} \psi, X N^{\frac{3}{2}} \psi \rangle$$

Sea $k = 3$ $A = N^{\frac{3}{2}}$, $A_1 = I$, y $A_\ell = 0$ para $\ell \geq 2$. Con estos operadores, Φ tiene la estructura descrita en el Corolario 3.2.6. Esto muestra que $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{H}_3)$ y por lo tanto $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$. Además, $\Phi(I)[\psi] = |N^{\frac{3}{2}} \psi|^2$ es una forma cuadrática positiva y densamente definida con $\text{dom } \Phi(I) = \text{dom } N^{\frac{3}{2}}$. Por la desigualdad de Schwartz, (3.1.4) se cumple para todo $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Sea $\{e_n\}$ la base canónica de $\mathcal{H}$, i.e., todas las coordenadas de e_n son cero excepto la n -ésima que es igual a uno.

Sea $\psi_n = N^{-\frac{1}{2}} e_n = n^{-\frac{1}{2}} e_n$. Entonces $\psi_n \rightarrow 0$ y $N^{\frac{3}{2}} \psi_n = n e_n$. Sea $x = (\frac{1}{n})_{n=1}^\infty \in \mathcal{H}$ y $X = |x\rangle\langle x|$. Tenemos

$$\langle x, N^{\frac{3}{2}} \psi_n \rangle = \langle x, n e_n \rangle = 1. \quad (3.4.1)$$

Para todo $\psi \in \mathcal{F}$,

$$\Phi(X)[\psi] = \langle N^{\frac{3}{2}} \psi, |x\rangle\langle x| N^{\frac{3}{2}} \psi \rangle = |\langle x, N^{\frac{3}{2}} \psi \rangle|^2. \quad (3.4.2)$$

En particular, usando (3.4.1) y (3.4.2) obtenemos

$$\Phi(X)[\psi_n] = |\langle x, N^{\frac{3}{2}} \psi_n \rangle|^2 = 1 \quad \forall n$$

y por otro lado,

$$\Phi(X)[\psi_n - \psi_m] = |\langle x, N^{\frac{3}{2}} (\psi_n - \psi_m) \rangle|^2 = 0.$$

Lo que demuestra que $\Phi(X)$ es una forma cuadrática positiva, densamente definida pero no es cerrable. ■

Ejemplo 3.4.2 Con una modificación del Ejemplo 3.4.2, presentamos en seguida un ejemplo de $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ tal que $\Phi(I)$ no es una forma cuadrática cerrable sobre $\mathcal{H}$. El ejemplo resalta el hecho clave en nuestro enfoque: $\Phi(I)$ no necesita ser una forma cuadrática cerrable en el espacio inicial pero debe ser acotada en algún espacio de Hilbert denso y continuamente incluido en el espacio inicial.

Sean $\mathcal{H}, \mathcal{F}$ y $x \in \mathcal{H}$ como en el ejemplo previo. Sea $y = \frac{x}{\|x\|}$. Entonces $|y\rangle\langle y|$ es una proyección ortogonal. Definamos $\Phi(\cdot)[\cdot, \cdot]$ de la siguiente manera:

$$\Phi(X)[u, v] = \langle |y\rangle\langle y| N^{\frac{3}{2}} u, X |y\rangle\langle y| N^{\frac{3}{2}} v \rangle.$$

Nuevamente, $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ porque $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{H}_3)$ con $A = N^{\frac{3}{2}}$, $A_1 = |y\rangle\langle y|$ y $A_k = 0$ para $k \geq 2$. Además,

$$\Phi(I)[u] = |\langle y, N^{\frac{3}{2}} u \rangle|^2$$

Así que esta forma cuadrática es igual a un múltiplo escalar de la forma cuadrática del Ejemplo 2; por lo que tampoco es cerrable en $\mathcal{H}$. ■

Ejemplo 3.4.3. Sea $\mathcal{F}$ un espacio de Hilbert denso y continuamente incluido en $\mathcal{H}$. Sea $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ un subespacio vectorial y $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$, una transformación que cumple con las condiciones II.2 del Capítulo II. Si las dos condiciones siguientes se cumplen entonces Φ se puede extender a una transformación, que seguiremos llamando Φ , definida sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ y tal que $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$:

- (i) $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{F}$
- (ii) Existe una constante positiva M tal que

$$\Phi(I)[\varphi] \leq M \|\varphi\|^2, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}.$$

Demostración. Las dos condiciones implican que $\Phi(I)$ es una forma cuadrática densamente definida, positiva y acotada en $\mathcal{F}$ por lo que tiene una única extensión a todo $\mathcal{F}$.

Si $X \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ entonces $X \leq \|X\|_\infty I$ por lo que para todo $\varphi \in \mathcal{D}$

$$0 \leq \Phi(X)[\varphi] \leq \|X\|_\infty \Phi(I)[\varphi] \leq M \|X\|_\infty \|\varphi\|^2,$$

lo que garantiza que $\Phi(X)[\cdot]$ también se puede extender de manera única y acotada a toda $\mathcal{F}$. Del mismo modo, puesto que todo $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ es combinación lineal de operadores positivos, se concluye que $\Phi(X)[\cdot]$ se extiende de manera acotada y única a toda $\mathcal{F}$.

Es claro que la transformación extendida Φ satisface las condiciones (a), (b) y (c) de la Sección 3.1. Falta verificar la condición de normalidad (d). Sean $0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \dots$ una sucesión no decreciente de elementos en $\mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ tales que $X = \lim_n X_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Por demostrar que $\Phi(X)[\varphi] = \lim_n \Phi(X_n)[\varphi] \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}$. Si $\varphi \in \mathcal{D}$ no hay nada que probar. Si $\varphi \in \mathcal{F}$ pero no necesariamente elemento de $\mathcal{D}$, entonces existe $\varphi_n \in \mathcal{D}$ tal que $\varphi_n \rightarrow \varphi$ en $\mathcal{F}$. Consideramos la sucesión numérica con doble índice,

$$\Phi(X_n)[\varphi_k]. \tag{3.4.3}$$

Es claro que si uno de los índices, n o k , permanece fijo y el otro se hace tender a infinito entonces hay límite. Sin embargo, aseguramos que $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(X_n)[\varphi_k]$ existe de manera uniforme en el índice n . Para probarlo notemos que, como cada X_n es positivo, $(\Phi(X_n)[\cdot])^{1/2}$ es una seminorma por lo que podemos utilizar la desigualdad del triángulo

$$\begin{aligned} |(\Phi(X_n)[\varphi_k])^{1/2} - (\Phi(X_n)[\varphi_\ell])^{1/2}| &\leq (\Phi(X_n)[\varphi_k - \varphi_\ell])^{1/2} \\ &\leq \|X_n\|_\infty^{1/2} (\Phi(I)[\varphi_k - \varphi_\ell])^{1/2} \leq M \|X\|_\infty^{1/2} \|\varphi_k - \varphi_\ell\| \xrightarrow{k, \ell \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el límite doble de (3.4.3) existe así como sus dos límites iterados; además los tres son iguales ([2], Tms. 19.6 y 19.10 pp 155-157). Por lo tanto

$$\Phi(X)[\varphi] = \lim_k \Phi(X)[\varphi_k] = \lim_k \lim_n \Phi(X_n)[\varphi_k] = \lim_n \lim_k \Phi(X_n)[\varphi_k] = \lim_n \Phi(X_n)[\varphi].$$

■

Ejemplo 3.4.4. En [17] y [18] se consideran operadores G, L_ℓ ($\ell = 1, 2, 3, \dots$) que satisfacen la siguiente hipótesis.

A El operador $-G$ es el generador infinitesimal de un semigrupo de contracciones fuertemente continuo W_t en $\mathcal{H}$. El dominio de los operadores $(L_\ell)_{\ell=1}^\infty$ contiene a $\mathcal{D}$, una esencia de G . Para todos $u, v \in \mathcal{D}$, tenemos

$$\langle -v, Gu \rangle - \langle Gv, u \rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle L_\ell v, L_\ell u \rangle = 0.$$

El objetivo de este ejemplo es probar que si definimos

$$\Phi(X)[v, u] = \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle L_\ell v, X L_\ell u \rangle \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad u, v \in \mathcal{D}$$

entonces Φ se puede extender, de forma única a un elemento de $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$, en donde a $\mathcal{F} = \text{dom } G$ y lo dotamos de la norma de Hilbert

$$\|u\| := |u + Gu|. \quad (3.4.4)$$

que como lo observamos en el capítulo anterior, es equivalente a la norma de la gráfica de G , debido a la desigualdad (2.1.3).

Bastará con probar que Φ satisface las condiciones del Ejemplo 3.4.3.

Las propiedades (a) y (b) de la Condición II.2 del Capítulo II, son obvias. Con el Teorema de Convergencia Dominada se puede probar la propiedad de normalidad, por lo que la Condición II.2 es satisfecha. Por hipótesis, $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{F}$. Para probar (ii) del Ejemplo 3.4.3, notemos que para cada $\ell = 1, 2, 3, \dots, u \in \mathcal{D}$,

$$|L_\ell u| \leq \Phi(I)[u] = 2\text{Re}\langle u, Gu \rangle \leq \|u\| \leq |u| + |Gu| \quad (3.4.5).$$

■

Nota. Puede ser de interés saber cuál es el operador positivo autoadjunto A cuya existencia asegura el Teorema 3.2.5. En este caso, $A = |I + G|$, el valor absoluto de $I + G$.

Ejemplo 3.4.5. Sea $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ un subespacio denso. Sea $\mathcal{L} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ con la expansión de Lindblad (2.1.2)

$$\mathcal{L}(X)[\varphi, \psi] = \Phi(X)[\varphi, \psi] - \langle \varphi, XG\psi \rangle - \langle G\varphi, X\psi \rangle$$

donde G , Φ y $\mathcal{D}$ satisfacen las condiciones II.1, II.2 y II.3 del Capítulo II. Si a $\mathcal{D}$ le damos la norma de Hilbert (3.4.4) entonces

- (i) Φ se puede extender, de manera única, a un elemento $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ donde $\mathcal{F} = \text{dom } G$ con la norma de Hilbert (3.4.4).
- (ii) Existe una sucesión de operadores $\{L_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ tales que $\bigcap_{\ell=1}^\infty \text{dom } L_\ell \supset \mathcal{D}$ y

$$\Phi(X)[\varphi, \psi] = \sum_{\ell=1}^\infty \langle L_\ell \varphi, X L_\ell \psi \rangle$$

Demostración.

- (i) Como $\mathcal{D}$ denso en $\mathcal{F}$ y Φ satisface las hipótesis del Lema 2.1.1 entonces, por II.3, la desigualdad

$$2\text{Re}\langle u, Gu \rangle \leq |I + Gu|^2$$

y la definición de la norma (3.4.4), Φ cumple con las hipótesis de nuestro Ejemplo 3.4.3, por lo que existe una única extensión $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \times \mathcal{F} \times \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$.

- (ii) Sea $A = |I + G|$, el valor absoluto de $I + G$. Como $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$, entonces, por el inciso 1 del Corolario 3.2.6, existe una sucesión $\{A_\ell\}_{\ell=1}^\infty$ en $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que

$$\Phi(X)[\varphi, \psi] = \sum_{\ell=1}^\infty \langle A_\ell A \varphi, X A_\ell A \psi \rangle.$$

Sea $L_\ell = A_\ell A$. Observemos que $\text{dom } L_\ell = \text{dom } A = \text{dom } G \supset \mathcal{D}$.

■

Nota: Si $\mathcal{F} = \text{dom } G$ con la norma (3.4.4), entonces

- (a) El Ejemplo 3.4.4 muestra que la hipótesis A de [17] y [18] implica que

$$\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F}) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}(I)[\varphi] = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}.$$

- (b) La afirmación (i) del Ejemplo 3.4.5 muestra que las condiciones II.1, II.2 y II.3 del Capítulo II implican que

$$\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}.$$

- (c) Una revisión cuidadosa de la afirmación (ii) del Ejemplo 3.4.5 muestra que las condiciones

$$\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F}) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}(I)[\varphi] = 0 \quad \varphi \in \mathcal{F}$$

implican la hipótesis A de [17] y [18]. Por lo tanto, tenemos que las siguientes condiciones son equivalentes

- (i) Hipótesis A de [17] y [18]
- (ii) II.1, II.2 del Capítulo II y $\mathcal{L}(I)[\varphi] = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}$
- (iii) $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ y $\mathcal{L}(I)[\varphi] = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}$.

Ejemplo 3.4.6. Sean $\mathcal{L}, G$ y Φ como en el ejemplo anterior pero

$$\Phi(I)[\varphi] = 2\operatorname{Re}\langle \varphi, G\varphi \rangle, \quad \varphi \in \mathcal{F}.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea F_n el operador positivo y definido sobre todo $\mathcal{H}$, a través de su forma cuadrática

$$\langle u, F_n u \rangle = \Phi(I)[nR(n, G)u]$$

donde $R(n, G)$ es el operador $(nI + G)^{-1}$, resolvente de G . Entonces

$$F_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Por otro lado sean Λ un operador densamente definido, positivo y autoadjunto, $\mathcal{F} = \operatorname{dom} \Lambda^{\frac{1}{2}}$ con la norma de la gráfica. Supóngase además que $\operatorname{dom} G \subset \mathcal{F}$ y que $\operatorname{dom} G$ es esencia de $\Lambda^{\frac{1}{2}}$. Si

$$\langle u, F_n u \rangle \leq C_n |\Lambda^{\frac{1}{2}} u|, \quad n \in \mathbb{N}, \quad u \in \operatorname{dom} G$$

donde la sucesión numérica $\{C_n\}$ es tal que $\liminf_{n \rightarrow \infty} C_n < \infty$. Entonces Φ tiene una única extensión a un elemento de $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$,

Demostración. Puesto que F_n es positivo y está definido en todo $\mathcal{H}$, concluimos que debe ser acotado.

Para probar la siguiente afirmación sea $M = \liminf_{n \rightarrow \infty} C_n$. Por el Lema 2.1.1, tenemos que para todo $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\varphi \in \operatorname{dom} G$

$$\Phi(I)[\varphi] = 2\operatorname{Re}\langle \varphi, G\varphi \rangle = \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi, F_n \varphi \rangle \leq M |\Lambda^{1/2} \varphi| = M \|\varphi\|^2$$

como estamos suponiendo que $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{F}$ entonces se satisfacen las condiciones del ejemplo 3.4.3, por lo que Φ se puede extender a un elemento de $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$. ■

Como lo mencionamos en la Sección 3.1.1, si $\mathcal{F}$ es un espacio de Hilbert denso y continuamente incluido en $\mathcal{H}$, hay una forma natural de ver al espacio de formas sesquilineales acotadas en $\mathcal{H}$ como un subespacio del espacio de formas sesquilineales acotadas en $\mathcal{F}$: si $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y restringimos

$$\langle u, Xv \rangle$$

a $u, v \in \mathcal{F}$. Por lo tanto, existe $j(X) \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ tal que

$$\langle u, Xv \rangle = \langle \langle u, j(X)v \rangle \rangle.$$

Un cálculo directo muestra que $j(X)$ es la restricción a $\mathcal{F}$ del operador $\Lambda^{-1}X$, donde Λ es el operador tal que $A = \Lambda^{1/2}$ de la Proposición 3.2.2. Esta transformación $j : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{F})$, jugará un papel muy importante en el siguiente capítulo.

Ejemplo 3.4.7 ([39]).

- (i) $j \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$. En particular j es continuo con respecto a las topologías ultradébiles de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{B}(\mathcal{F})$.
- (ii) El rango $j(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$ es ultradébil denso en $\mathcal{B}(\mathcal{F})$.

Demostración

- (i) Si u y v en $\mathcal{F}$ y $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$,

$$\langle \langle u, j(X)v \rangle \rangle = \langle u, Xv \rangle = \langle \Lambda^{-1/2} \Lambda^{1/2} u, X \Lambda^{-1/2} \Lambda^{1/2} v \rangle$$

por lo que $j \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ pues con los operadores $A = \Lambda^{1/2}$, $A_1 = \Lambda^{-1/2}$, $A_\ell = 0$, $\ell = 2, 3, \dots$, tiene la estructura descrita en el Corolario 3.2.6.

- (ii) Sean $B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ y X_ϵ el operador acotado en $\mathcal{H}$ definido por medio de

$$X_\epsilon = \Lambda(I + \epsilon\Lambda)^{-1/2} B(I + \epsilon\Lambda)^{-1/2},$$

Sea $B_\epsilon = j(X_\epsilon)$. Para cualquier $\varphi \in \mathcal{F}$ tenemos la convergencia

$$\langle \langle \varphi, B_\epsilon \varphi \rangle \rangle = \langle \Lambda^{1/2}(I + \epsilon\Lambda)^{-1/2} \varphi, \Lambda^{1/2} B(I + \epsilon\Lambda)^{-1/2} \varphi \rangle \rightarrow \langle \langle \varphi, B \varphi \rangle \rangle,$$

donde $\Lambda^{1/2} B : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{H}$ es un operador acotado. Usando la identidad de polarización obtenemos que $B_\epsilon \rightarrow B$, en la topología débil, cuando $\epsilon \rightarrow 0$. Ahora, el Principio de acotamiento uniforme nos permite mostrar que la familia $(B_\epsilon)_{\epsilon \geq 0}$ está uniformemente acotada en $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ y entonces $B_\epsilon \rightarrow B$, si $\epsilon \rightarrow 0$, con respecto a la topología ultradébil de $\mathcal{B}(\mathcal{F})$. ■

Ejemplo 3.4.8 Sea $(\Omega, \mathcal{S})$ un espacio medible con una medida σ -finita μ . Para cada $w \in \Omega$ sea $a(w)$ un operador densamente definido y cerrado en $\mathcal{H}$ con dominio $\text{dom } a(w)$. Sea $\mathcal{D}$ el subespacio lineal de todos los $\psi \in \mathcal{H}$ tales que existe un conjunto $C \in \mathcal{S}$ cuyo complemento tiene medida cero,

$$\psi \in \bigcap_{w \in C} \text{dom } a(w)$$

y la función real-valuada

$$w \mapsto |a(w)\psi|$$

es μ -medible y pertenece a $L^2(\mu)$, Supongamos que $\mathcal{D}$ es denso en $\mathcal{H}$. Sea

$$A[\varphi, \psi] = \int_{\Omega} \langle a(w)\varphi, a(w)\psi \rangle \mu(dw)$$

Es fácil ver que la forma cuadrática asociada con A es no negativa definida y cerrada. Por lo tanto, por el Teorema de Representación de Kato (ver [55]), existe un operador positivo y autoadjunto Λ tal que $\text{dom } \Lambda^{\frac{1}{2}} = \mathcal{D}$ y $A[\psi] = |\Lambda^{\frac{1}{2}}\psi|^2$. De hecho, $\Lambda = b^*b$, donde b , es el operador lineal con dominio $\mathcal{D}$, rango contenido en $L^2(\mu, \mathcal{H}) = L^2(\mu) \otimes \mathcal{H}$, y definido por $\psi \mapsto b\psi$ donde $b\psi \in L^2(\mu, \mathcal{H})$ es la clase de equivalencia (mod μ) de la función

$$w \mapsto a(w)\psi.$$

Sea $\mathcal{F} = \text{dom } \Lambda^{\frac{1}{2}}$ con norma inducida por el producto interno

$$\langle \langle \varphi, \psi \rangle \rangle := A[\varphi, \psi].$$

y la norma está dada por

$$\|\psi\| = \sqrt{A[\psi]}.$$

El que A sea cerrado implica que $\mathcal{F}$ es un espacio de Hilbert. Su topología es equivalente a la inducida por la norma de la gráfica de $\Lambda^{\frac{1}{2}} = |b|$.

Para $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ sea

$$\Phi(X)[\varphi, \psi] = \int \langle a(w)\varphi, Xa(w)\psi \rangle \mu(dw)$$

Puesto que las condiciones **II.2** del Capítulo II son satisfechas por Φ , además $\Phi(I)[\varphi, \psi] = A[\varphi, \psi]$,

$$\Phi(X)[\psi] \leq \|X\|_{\infty} \Phi(I)[\psi],$$

y $\mathcal{D} = \text{dom } b \text{ dom } \Lambda$ es denso en $\mathcal{F} = \text{dom } \Lambda^{\frac{1}{2}}$ entonces se cumplen las condiciones del ejemplo 3.4.3 por lo que

$$\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F}).$$

Capítulo IV

4 Estimaciones a priori para una clase de QDS

4.1 Introducción.

En este Capítulo mostramos que, bajo ciertas condiciones, es posible construir una extensión de la transformación Φ , que aparece como la parte completamente positiva del generador formal de un QDS, de tal manera que es posible aplicar Φ no sólo a operadores acotados X en $\mathcal{H}$ sino que se aplicará a formas sesquilineales densamente definidas en $\mathcal{H}$, pero posiblemente no acotadas en $\mathcal{H}$. También extendemos el semigrupo minimal P_t y damos estimaciones a priori de la extensión. Este problema fue tratado en [39]; aquí presentamos algunas simplificaciones y una nueva prueba del resultado principal, el Teorema 4.4.1.

En la Sección 4.2, introducimos conceptos que originalmente dieron la pauta para caracterizar $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ cuando $\mathcal{F}$ es un espacio de Hilbert (ver [37]). En todo el capítulo, el operador A de la Proposición 3.2.2 será denotado por $\Lambda^{\frac{1}{2}}$. Como en el Capítulo III, el espacio inicial $\mathcal{H}$ tiene producto interno y norma denotados por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \quad | \cdot |.$$

A lo largo del capítulo, trabajaremos bajo la siguiente hipótesis.

A.1 $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ donde $\mathcal{F}$ es un espacio de Hilbert denso y continuamente incluido en el espacio de Hilbert inicial $\mathcal{H}$. El producto interno y la norma de $\mathcal{F}$, los denotaremos por

$$\langle \langle \cdot, \cdot \rangle \rangle \quad \| \cdot \|$$

En la Sección 4.3 formulamos una hipótesis, la A.2, que permite hacer la extensión de Φ a formas sesquilineales no acotadas y calcular las estimaciones a priori del semigrupo minimal extendido. En lo que se refiere a la conservatividad del semigrupo P_t , en la Sección 4.4 mostramos que la Hipótesis A.2, es equivalente a la Hipótesis C de [18] y que el Teorema 4.4.1 es un criterio de conservatividad del cual los Teoremas 4.3 y 4.4 de [18] son corolarios.

4.2 Un espacio de Banach importante.

De acuerdo con lo que hicimos en el Capítulo III, cada $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ se puede pensar como una transformación $\Phi : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{F})$ lineal, completamente positiva, normal y acotada. Aunque el espacio predual de $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ es el espacio de elementos de $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ que tienen traza finita, en esta sección damos otra representación del espacio predual de $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ que será de gran importancia en las siguientes secciones.

Para empezar, notemos que el Teorema 3.2.5 y las ecuaciones (3.2.5) muestran que

$$\Phi(X)[u, v] = \langle \langle u, \Phi(X)v \rangle \rangle \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad u, v \in \mathcal{F}. \quad (4.2.1)$$

Definición 4.2.1

(a) Sea $\alpha : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{T}(\mathcal{H})$ la transformación definida por

$$\alpha(\rho) = \Lambda^{-\frac{1}{2}} \rho \Lambda^{-\frac{1}{2}}$$

Denotamos por $\mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H})$ la imagen de esta transformación lineal e inyectiva y por $\mathcal{T}_\Lambda^+(\mathcal{H})$ el rango del cono $\mathcal{T}^+(\mathcal{H})$ de los operadores positivos de traza finita.

(b) Sobre $\mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H})$, introducimos la norma

$$\|\rho\|_{\mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H})} = \|\alpha^{-1}(\rho)\|_1 \quad (4.2.2)$$

donde la transformación inversa de α , α^{-1} , está bien definido sobre $\mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H})$.

Con esta norma α es una isometría entre $\mathcal{T}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H})$ por lo que el último espacio es completo.

En seguida, hacemos un estudio detallado de $\mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H})$. Puesto que cada uno de sus elementos es combinación lineal de elementos en $\mathcal{T}_\Lambda^+(\mathcal{H})$, empezamos con el siguiente lema que da caracterizaciones útiles de este cono. La prueba se dió originalmente en [21] y en [37].

Lema 4.2.2 *Sea ρ un operador positivo de traza finita. Lo siguiente es equivalente:*

- (a) *rango $\rho^{\frac{1}{2}} \subset \text{dom } \Lambda^{\frac{1}{2}}$ y $\sigma := \Lambda^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}}$ es un operador de Hilbert-Schmidt.*
- (b) *El operador densamente definido $S := \rho^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}}$ tiene una extensión de Hilbert-Schmidt.*
- (c) *$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{tr}(\rho \Lambda_\epsilon)$ existe y es finito.*
- (d) *$\rho \in \mathcal{T}_\Lambda^+(\mathcal{H})$.*

Además, bajo cualquiera de estas condiciones tenemos que la extensión Hilbert-Schmidt de S es σ^* ,

$$\rho = \alpha(\sigma \sigma^*) \quad \text{y} \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{tr}(\rho \Lambda_\epsilon) = \text{tr}(\sigma \sigma^*)$$

Demostración: El esquema de la prueba será el siguiente: (a) implica (b); (b) implica (c); (c) implica (a); (a) implica (d); (d) implica (c).

(a) implica (b). Para cada $\psi \in \text{dom } \Lambda^{\frac{1}{2}}$ y $\varphi \in \mathcal{H}$

$$\langle \varphi, S\psi \rangle = \langle \Lambda^{\frac{1}{2}} \rho^{\frac{1}{2}} \varphi, \psi \rangle = \langle \sigma \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \sigma^* \psi \rangle$$

Por lo tanto, S tiene como extensión de Hilbert-Schmidt a σ^* .

(b) implica (c). Denotemos también por S la extensión de $\rho^{\frac{1}{2}}\Lambda^{\frac{1}{2}}$. Entonces $S(1 + \epsilon\Lambda)^{-\frac{1}{2}} = \rho^{\frac{1}{2}}\Lambda_\epsilon^{\frac{1}{2}}$, $(1 + \epsilon\Lambda)^{-\frac{1}{2}}S^* = \Lambda_\epsilon^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}$. Dado que S es un operador de Hilbert-Schmidt,

$$\infty > \text{tr}(SS^*) \geq \text{tr}(S(1 + \epsilon\Lambda)^{-1}S^*) = \text{tr}(\rho\Lambda_\epsilon)$$

Para todo $\epsilon > 0$. Por lo tanto, (c) se cumple porque $\text{tr}(\rho\Lambda_\epsilon)$ crece cuando ϵ decrece a 0.

(c) implica (a). Recordemos que $\psi \in \mathcal{H}$ pertenece a $\text{dom } \Lambda^{\frac{1}{2}}$ si y sólo si $\langle \psi, \Lambda_\epsilon \psi \rangle$ crece cuando $\epsilon \rightarrow 0$, al valor finito $|\Lambda^{\frac{1}{2}}\psi|^2$. Así que si $|\psi| = 1$,

$$\langle \rho^{\frac{1}{2}}\psi, \Lambda_\epsilon \rho^{\frac{1}{2}}\psi \rangle \leq \text{tr}(\rho^{\frac{1}{2}}\Lambda_\epsilon \rho^{\frac{1}{2}}) = \text{tr}(\Lambda_\epsilon \rho)$$

Por lo que (c) implica que $\text{rango } \rho^{\frac{1}{2}} \subset \text{dom } \Lambda^{\frac{1}{2}}$ y para cualquier base ortonormal, $\{\psi_k\}$, si usamos el Teorema de Convergencia Monótona,

$$\text{tr}(\sigma^*\sigma) = \sum_k |\Lambda^{\frac{1}{2}}\rho^{\frac{1}{2}}\psi_k|^2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_k \langle \rho^{\frac{1}{2}}\psi_k, \Lambda_\epsilon \rho^{\frac{1}{2}}\psi_k \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \text{tr}(\Lambda_\epsilon \rho) < \infty$$

(a) implica (d). Supongamos que ρ es un operador de traza finita que cumple con (a) y por lo tanto, con (b) y (c). Sea $\eta = \sigma\sigma^*$ así que $\eta \in \mathcal{T}^+(\mathcal{H})$. Sobre $\text{dom } \Lambda^{\frac{1}{2}}$, tenemos $\eta = \Lambda^{\frac{1}{2}}\rho\Lambda^{\frac{1}{2}}$ por lo que es claro que $\alpha(\eta) = \rho$.

(d) implica (c). Sea $\rho \in \mathcal{T}_\Lambda^+(\mathcal{H})$ y $\eta \in \mathcal{T}^+(\mathcal{H})$ tales que $\rho = \Lambda^{-\frac{1}{2}}\eta\Lambda^{-\frac{1}{2}}$ entonces,

$$\text{tr}(\rho\Lambda_\epsilon) = \text{tr}(\eta(1 + \epsilon\Lambda)^{-1}) \rightarrow \text{tr}(\eta).$$

si $\epsilon \rightarrow 0$

Esto termina la demostración. ■

Nota Puesto que todo $\rho \in \mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H})$ puede escribirse como combinación lineal de operadores positivos de traza finita tales que el rango de sus raíces cuadradas está contenido en $\text{dom } \Lambda^{\frac{1}{2}}$ entonces $\text{rango } \rho \subset \text{dom } \Lambda^{\frac{1}{2}}$. Así que $\alpha^{-1}(\rho)$ es una extensión de traza finita de $\Lambda^{\frac{1}{2}}\rho\Lambda^{\frac{1}{2}}$ pues sobre $\text{dom } \Lambda^{\frac{1}{2}}$, ambos operadores coinciden.

Consideremos el isomorfismo isométrico que introdujimos en el inciso (ii) de la Nota 3.2.3, $\lambda : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{F})$,

$$\lambda(X) = \Lambda^{-1/2}X\Lambda^{1/2}.$$

Definición 4.2.3

(a) Sea $\rho \in \mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H})$ y $B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$, definimos la *forma tracial o dualidad*

$$((B, \rho)) = \text{tr}(\lambda^{-1}(B)\alpha^{-1}(\rho)) \quad (4.2.3)$$

Consideremos la transformación lineal $j : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{F})$ definida por $X \mapsto j(X)$ y que presentamos en el ejemplo 3.4.7.

Proposición 4.2.4 Para todo $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\rho \in \mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H})$, tenemos la identidad

$$((j(X), \rho)) = \text{tr}\{X\rho\}.$$

En particular, si $\varphi \in \mathcal{F}$ entonces $((j(X), \rho_\varphi)) = \langle \varphi, X\varphi \rangle$.

Demostración.

$$\begin{aligned} ((j(X), \rho)) &= \text{tr}(\lambda^{-1}(j(X))\alpha^{-1}(\rho)) = \\ &\text{tr}(\Lambda^{-1/2}X\Lambda^{-1/2}\alpha^{-1}(\rho)) = \text{tr}(X\alpha\alpha^{-1}(\rho)) = \text{tr}\{X\rho\}. \end{aligned}$$

■

El siguiente Teorema da la caracterización de espacio dual de $\mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H})$.

Teorema 4.2.5 Sea $\mathcal{F}$ cualquier espacio de Hilbert densa y continuamente incluido en $\mathcal{H}$.

Cualquier elemento $B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ dá lugar a una funcional lineal acotada $f_B : \mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ definida como

$$f_B(\rho) = ((B, \rho))$$

La transformación $B \mapsto f_B$, es una biyección lineal entre $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ y $(\mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H}))^*$, que es una isometría y además un homeomorfismo entre la topología ultradébil de $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ y la topología débil * de $(\mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H}))^*$.

Demostración.

A partir de la Definición (4.2.3), y de que α y λ son isometrías, es claro que cualquier elemento de $B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$, induce una funcional lineal acotada, f_B , sobre $\mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H})$ en la forma indicada. Es claro que $\|f_B\| = \|B\|_{\mathcal{B}(\mathcal{F})}$. Por otro lado, sea $f : \mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ una funcional lineal acotada y sea $g : \mathcal{T}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathbb{C}$ la funcional $g = f \circ \alpha$. Es inmediato verificar que ésta es una funcional lineal acotada en $\mathcal{T}(\mathcal{H})$. Por lo tanto hay un único elemento $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, tal que

$$g(\eta) = \text{tr}\{X\eta\} \quad \forall \eta \in \mathcal{T}(\mathcal{H})$$

Así que, para cualquier $\rho \in \mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H})$, si $\eta = \alpha^{-1}(\rho)$ y $B = \lambda(X)$

$$f(\rho) = f(\alpha(\eta)) = g(\eta) = \text{tr}\{X\eta\} = ((B, \rho)) = f_B(\rho)$$

En otras palabras, $f = f_B$ y B es el único elemento en $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ que cumple con esta igualdad.

El que λ sea un homeomorfismo entre las topologías ultradébiles de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ implica que la asociación $B \mapsto f_B$ sea un homeomorfismo entre la topología ultradébil de $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ y la topología débil * de $(\mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H}))^*$.

■

Corolario 4.2.6

- (a) Existe una correspondencia uno a uno, denotada por $\dagger$ del cono $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ sobre el cono

$$\{\Phi^\dagger : T_\Lambda(\mathcal{H}) \rightarrow T(\mathcal{H}) \text{ lineal, acotado y que transforma } T_\Lambda^+(\mathcal{H}) \text{ en } T^+(\mathcal{H})\}$$

que satisface

$$((\Phi(X), \rho)) = \text{tr} \{ \Phi^\dagger(\rho) X \} \quad (4.2.4)$$

para cualquier $\rho \in T_\Lambda(\mathcal{H})$.

- (b) Si $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ y $u \in \mathcal{F}$ entonces $\text{tr} \{ X \Phi^\dagger(\rho_u) \} = ((\Phi(X), \rho_u)) = \Phi(X)[u]$ donde $\rho_u = |u\rangle\langle u|$.

Demostración:

- (a) Dado $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$, entonces es una transformación de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ en $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ sea $\Phi^\dagger : T_\Lambda(\mathcal{H}) \rightarrow T(\mathcal{H})$ su transformación predual, el cual existe por la normalidad de Φ .

$$\Phi^\dagger = R^\dagger \circ \lambda^\dagger = R^\dagger \circ \alpha^{-1}.$$

Observemos que, por la definición de la forma tracial, la transformación predual de λ es α^{-1} .

- (b) La primer igualdad es consecuencia de (a). Para probar la otra, usamos las ecuaciones (4.2.1) y (4.2.3)

$$((\Phi(X), \rho_u)) = \text{tr} \{ \lambda^{-1}(\Phi(X)) \alpha^{-1}(\rho_u) \} = \langle \langle u, \Phi(X)u \rangle \rangle = \Phi(X)[u].$$

■

4.3 Estimaciones a priori.

En esta sección y la que sigue, supondremos que se cumple la Hipótesis A de [18] (en el Ejemplo 3.4.4 dimos la formulación de esa hipótesis). Como lo señalamos en los comentarios de la Sección 3.4 el generador formal $\mathcal{L}$ está definido para $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, donde $\mathcal{D}$ es un subespacio denso de $\mathcal{H}$ con $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$, por medio de

$$\mathcal{L}(X)[\varphi, \psi] = \Phi(X)[\varphi, \psi] - \langle G\varphi, X\psi \rangle - \langle \varphi, XG\psi \rangle, \quad (4.3.1)$$

donde G es un operador definido sobre $\mathcal{D}$, $-G$ genera un semigrupo de contracciones en $\mathcal{H}$ y está relacionado con Φ de tal forma que la estimación

$$0 \leq \Phi(I)[\varphi] = 2\text{Re}\langle G\varphi, \varphi \rangle,$$

se cumple para todo $\varphi \in \mathcal{D}$.

En lo que queda del capítulo, consideraremos Λ un operador densamente definido, positivo y autoadjunto en el espacio $\mathcal{H}$. $\mathcal{F} = \text{dom } \Lambda^{\frac{1}{2}}$ con el producto interno

$$\langle \langle \varphi, \psi \rangle \rangle = \langle \Lambda^{\frac{1}{2}}\varphi, \Lambda^{\frac{1}{2}}\psi \rangle.$$

La norma inducida, será denotada por

$$\|\varphi\| = |\Lambda^{\frac{1}{2}}\varphi|$$

y es equivalente a la norma de la gráfica de $\Lambda^{\frac{1}{2}}$. La Hipótesis A.1 se supondrá válida con respecto a este espacio de Hilbert $\mathcal{F}$.

Nuestra hipótesis clave es la siguiente (en [18] y [51] se dan hipótesis similares).

A.2.

- El subespacio denso $\mathcal{D} = \text{dom } G$ es una esencia de $\Lambda^{1/2}$,
- Para todo $\varphi \in \mathcal{D}' = \text{dom } G^2$ $\sup_{\epsilon} \Phi(\Lambda_{\epsilon})[\varphi] < \infty$ y
- Existe una constante positiva c , tal que para $\varphi \in \mathcal{D}'$

$$\sup_{\epsilon} \Phi(\Lambda_{\epsilon})[\varphi] \leq c\|\varphi\|^2 + 2\text{Re}\langle\langle\varphi, \tilde{G}\varphi\rangle\rangle,$$

donde $\tilde{G}$ es la parte de G en $\mathcal{F}$.

Recordemos que la parte de G en $\mathcal{F}$ es la restricción de G al subespacio

$$\{\varphi \in \text{dom } G : G\varphi \in \mathcal{F}\}$$

Se sigue inmediatamente de la parte (c) del Lema 4.2.2 que el límite $\lim_{\epsilon} \Phi(\Lambda_{\epsilon})[\varphi]$ existe si y sólo si $\Phi^{\dagger}(\rho_{\varphi}) \in \mathcal{T}_{\Lambda}(\mathcal{H})$ donde $\rho_{\varphi} = |\varphi\rangle\langle\varphi|$. De hecho, puesto que $\Phi(\Lambda_{\epsilon}) \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$, para todo $\varphi \in \mathcal{D}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\epsilon} \Phi(\Lambda_{\epsilon})[\varphi] &= \lim_{\epsilon} ((\Phi(\Lambda_{\epsilon}), \rho_{\varphi})) \\ &= \lim_{\epsilon} \text{tr}[\Lambda_{\epsilon} \Phi^{\dagger}(\rho_{\varphi})] = \|\Phi^{\dagger}(\rho_{\varphi})\|_{\mathcal{T}_{\Lambda}(\mathcal{H})}. \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Por lo tanto, si $\varphi \in \mathcal{D}'$ entonces $\Phi^{\dagger}(\rho_{\varphi}) \in \mathcal{T}_{\Lambda}(\mathcal{H})$.

Nuestras Hipótesis A.1 y A.2 permiten extender la transformación Φ , definida sobre $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, a una transformación $\tilde{\Phi}$ definida sobre $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ de la siguiente forma.

Definición 4.3.1. Para $B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{D}'$, definimos

$$\tilde{\Phi}(B)[\varphi, \psi] := ((B, \Phi^{\dagger}(|\varphi\rangle\langle\psi|))).$$

Proposición 4.3.2. La transformación $\tilde{\Phi} : \mathcal{B}(\mathcal{F}) \times \mathcal{D}' \times \mathcal{D}' \rightarrow \mathbb{C}$ satisface lo siguiente

(i) Extiende a Φ en el siguiente sentido

$$\tilde{\Phi}(j(X))[\varphi, \psi] = \Phi(X)[\varphi, \psi] \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D}' \quad (4.3.3)$$

donde j es la transformación del Ejemplo 3.4.7.

- (ii) $\tilde{\Phi}$ es lineal en su variable operador y sesquilineal en sus variables vectoriales; es completamente positivo y normal.

Demostración.

- (i) Según la definición de $\tilde{\Phi}$, la Proposición 4.2.4 y el Corolario 4.2.6 tenemos

$$\tilde{\Phi}(j(X))[\varphi, \psi] = ((j(X), \Phi^\dagger(|\varphi\rangle\langle\psi|))) = \text{tr}\{X\Phi^\dagger(|\varphi\rangle\langle\psi|)\} = \Phi(X)[\varphi, \psi]$$

- (ii) El que $\tilde{\Phi}$ sea lineal en la variable operador, sesquilineal en las variables vectoriales y normal es inmediato de su definición (ver Definición 4.3.1). Para probar la positividad completa, sean $n \in \mathbb{N}$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{D}'$. Supongamos primeramente que existen $X_i \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ tales que $j(X_i) = B_i$. De las sencillas relaciones

$$j(X)j(Y) = j(X\Lambda^{-1}Y), \quad X, Y \in \mathcal{B}(\mathcal{H}),$$

$$j(X^*) = (j(X))^{\ast}$$

donde $B^{\ast}$ denota el adjunto de B en $\mathcal{F}$, tenemos

$$\sum_{i,j} \tilde{\Phi}(B_i^{\ast} B_j)[\varphi_i, \varphi_j] = \sum_{i,j} \Phi(X_i^{\ast} \Lambda^{-1} X_j)[\varphi_i, \varphi_j] =$$

$$\sum_{i,j} \Phi(\Lambda^{-1/2} X_i)^{\ast} (\Lambda^{-1/2} X_j)[\varphi_i, \varphi_j] \geq 0$$

Para $B_i \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ en general, el resultado se sigue de que el rango de j es ultradébil denso en $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ y $\tilde{\Phi}$ es normal. ■

Sea $I_{\mathcal{B}(\mathcal{F})}$ el operador identidad en $\mathcal{F}$; recordemos que $\Lambda_\epsilon = \Lambda(1 + \epsilon\Lambda)^{-1}$. Entonces $j(\Lambda_\epsilon) \rightarrow I_{\mathcal{B}(\mathcal{F})}$ en la topología fuerte de $\mathcal{B}(\mathcal{F})$; pero como

$$\|j(\Lambda_\epsilon)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{F})} = \|\Lambda^{-1}(j(\Lambda_\epsilon))\|_\infty = \|(1 + \epsilon\Lambda)^{-1}\|_\infty \leq 1$$

entonces la convergencia también es en la topología ultradébil de $\mathcal{B}(\mathcal{F})$. En consecuencia

$$\tilde{\Phi}(I_{\mathcal{B}(\mathcal{F})})[\varphi] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \tilde{\Phi}(j(\Lambda_\epsilon))[\varphi] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Phi(\Lambda_\epsilon)[\varphi].$$

Pero, por la ecuación (4.3.2),

$$\tilde{\Phi}(I_{\mathcal{B}(\mathcal{F})})[\varphi] = \|\Phi^\dagger(\rho_\varphi)\|_{\mathcal{T}_\Lambda(\mathcal{H})}, \quad \varphi \in \mathcal{D}' \quad (4.3.3).$$

La ecuación (4.3.3) no debemos confundirla con

$$\Phi(I)[\varphi] = \|\Phi^\dagger(\rho_\varphi)\|_1, \quad \varphi \in \mathcal{F}$$

que es consecuencia del inciso (b) en el Corolario 4.2.6.

Definición 4.3.3 Para todo $B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ y cualquier para $\varphi, \psi \in \mathcal{D}' = \text{dom } G^2$ definimos la forma sesquilineal de $\tilde{\mathcal{L}}(B)$ sobre $\mathcal{D}' \times \mathcal{D}'$ por medio de

$$\tilde{\mathcal{L}}(B)[\varphi, \psi] = \tilde{\Phi}(B)[\varphi, \psi] - \langle \langle \varphi, B(\tilde{G} + \frac{c}{2})\psi \rangle \rangle - \langle \langle (\tilde{G} + \frac{c}{2})\varphi, B\psi \rangle \rangle.$$

donde c es la constante positiva de la Hipótesis A.2.

Nota 4.3.4. (a) En términos de $\tilde{\mathcal{L}}(I_{\mathcal{B}(\mathcal{F})})$ nuestra suposición A.2 tiene la forma

$$\tilde{\mathcal{L}}(I_{\mathcal{B}(\mathcal{F})})[\varphi] \leq 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}',$$

Una suposición similar fue considerada en [21] junto con algunas hipótesis adicionales, entre las cuáles fue necesario suponer que $G \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$.

(b) Notemos que $\tilde{\mathcal{L}}(j(X))[\varphi] = \mathcal{L}(X)[\varphi] - c\langle \varphi, X\varphi \rangle$.

Nos proponemos demostrar que este $\tilde{\mathcal{L}}$ satisface las condiciones del Lema 2.1.1. que garantizan la existencia de un QDS minimal.

Teorema 4.3.5. Si las Hipótesis A.1, A.2 se cumplen entonces el C_0 -semigrupo de contracciones $(W_t)_{t \geq 0}$ sobre $\mathcal{H}$, generado por $-G$, deja invariante al espacio $\mathcal{F}$; W_t es un C_0 -semigrupo tal que

$$\|W_t\varphi\| \leq e^{ct}\|\varphi\|, \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}.$$

y para todo $\varphi \in \mathcal{D}' = \text{dom } G^2$ tenemos la identidad

$$\frac{d}{dt}\|W_t\varphi\|^2 = -2\text{Re}\langle \langle \tilde{G}W_t\varphi, W_t\varphi \rangle \rangle.$$

Demostración. Seguiremos a [18]. Por nuestra Hipótesis A.2, tenemos que para $\varphi \in \mathcal{D}'$ la siguiente igualdad se cumple

$$\begin{aligned} c\|\varphi\|^2 &\geq \tilde{\Phi}(I_{\mathcal{B}(\mathcal{F})})[\varphi] - 2\text{Re}\langle \langle \tilde{G}\varphi, \varphi \rangle \rangle \\ &\geq -2\text{Re}\langle \langle \tilde{G}\varphi, \varphi \rangle \rangle. \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Para $u = (I + \lambda^{-1}G)\varphi \in \mathcal{D} = \text{dom } G$, obtenemos a partir de (4.3.5) que

$$\|u\|^2 \geq \|\varphi\|^2 - c\lambda^{-1}\|\varphi\|^2 = (1 - c\lambda^{-1})\|\varphi\|^2.$$

Lo que implica que

$$\|(\lambda + G)^{-1}u\| \leq (\lambda - c)^{-1}\|u\|, \quad \forall u \in \mathcal{D}.$$

Dado que $\mathcal{D}$ es una esencia de $\Lambda^{1/2}$, entonces la misma estimación se cumple para $\varphi \in \mathcal{F}$.

Ahora, de la Proposición 4.2.1 en [77] se sigue que $\mathcal{F}$ es G -admisibile, i.e., W_t aplica $\mathcal{F}$ en $\mathcal{F}$; es un C_0 -semigrupo sobre $\mathcal{F}$ y

$$\|W_t\varphi\| \leq e^{ct}\|\varphi\|.$$

La identidad para la derivada se sigue inmediatamente de aquí. ■

Corolario 4.3.6. *El subespacio $\mathcal{D}' = \text{dom } G^2$ es esencia de $\Lambda^{1/2}$ y*

$$\|W_t \varphi\| \leq e^{\frac{\epsilon}{2}t} \|\varphi\| \quad \forall \varphi \in \mathcal{F}.$$

Demostración. Puesto que W_t actúa sobre $\mathcal{F}$ como un semigrupo fuertemente continuo entonces el dominio de cualquier potencia de su generador infinitesimal es denso en $\mathcal{F}$. En particular, $\text{dom } \tilde{G}^2$ es denso en $\mathcal{F}$; pero

$$\text{dom } \tilde{G}^2 \subset \text{dom } G^2 \subset \text{dom } \tilde{G} \subset \mathcal{F}$$

lo que prueba que $\text{dom } G^2$ es esencia de $\Lambda^{1/2}$.

Por otro lado, usando la desigualdad (4.3.5) y el hecho de que $\text{dom } G^2$ es invariante bajo W_t se prueba que para todo $\varphi \in \text{dom } G^2$

$$\frac{d}{dt} \|W_t \varphi\|^2 = -2 \text{Re} \langle \tilde{G} W_t \varphi, W_t \varphi \rangle \leq c \|W_t \varphi\|^2.$$

Entonces, por el Lema de Gronwall

$$\|W_t \varphi\|^2 \leq e^{ct} \|\varphi\|^2$$

y como ya sabemos que $\text{dom } G^2$ es denso en $\mathcal{F}$, tenemos que

$$\|W_t \varphi\| \leq e^{\frac{\epsilon}{2}t} \|\varphi\|, \quad \varphi \in \mathcal{F}.$$

■

Como consecuencia de lo anterior, tenemos que $-(\tilde{G} + \frac{\epsilon}{2})$ genera, en $\mathcal{F}$, al semigrupo de contracciones $M_t = e^{-\frac{\epsilon}{2}t} W_t$. Si al dominio $\text{dom } \tilde{G}$, le damos la norma de Hilbert

$$\|(I + \frac{c}{2} + \tilde{G})\varphi\|, \quad \varphi \in \text{dom } \tilde{G},$$

lo convertimos en un espacio de Hilbert y además

Corolario 4.3.7.

- (i) $\tilde{\Phi}$ tiene una única extensión a un elemento de $CPn_*(\mathcal{F}, \text{dom } \tilde{G})$
- (ii) Existe un QDS minimal, $\tilde{P}_t$, en $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ tal que para todo $B \in \mathcal{F}$ y $\varphi \in \text{dom } \tilde{G}$

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi, \tilde{P}_t(B) \varphi \rangle = \tilde{\mathcal{L}}(\tilde{P}_t(B))[\varphi], \quad \tilde{P}_0(B) = B$$

- (iii) $\tilde{P}_t(j(X)) = e^{-\alpha t} j(P_t^{\min}(X))$, $\tilde{R}_\lambda(j(X)) = j R_{\lambda+c}^{\min}(X) \quad \forall X \in \tilde{B}(\mathcal{H})$ donde $\tilde{R}_\lambda$ es el resolvente de $\tilde{P}_t$.

Demostración.

(i) La Hipótesis A.2, escrita en términos de $\tilde{\Phi}$, dice que

$$\tilde{\Phi}(I_{B(\mathcal{F})})[\varphi] \leq c\|\varphi\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle\varphi, \tilde{G}\varphi\rangle = 2\operatorname{Re}\langle\varphi, (\tilde{G} + \frac{c}{2})\varphi\rangle$$

pero como $\operatorname{dom} G^2$ es denso en $\mathcal{F}$ entonces, por la Proposición 4.3.2, concluimos que $\tilde{G} + c/2$ y $\tilde{\Phi}$ satisfacen las condiciones II.1 y II.2 del Capítulo II respecto al espacio de Hilbert $\mathcal{F}$ y su subespacio $\operatorname{dom} G^2$ por lo que la conclusión se sigue del ejemplo 3.4.3.

(ii) Es claro pues $\tilde{\Phi}$ satisface las condiciones del Lemas 2.1.1 y del Teorema 2.1.3.

(iii) Recordemos el procedimiento iterativo (2.1.7) para construir el QDS minimal $\tilde{P}_t$

$$\langle\varphi, \tilde{P}_t^{(1)}(B)\varphi\rangle = \langle\langle M_t\varphi, BM_t\varphi\rangle\rangle$$

$$\langle\varphi, \tilde{P}_t^{(n+1)}(B)\varphi\rangle = \langle\varphi, \tilde{P}_t^{(1)}(B)\varphi\rangle + \int_0^t ds \tilde{\Phi}(\tilde{P}_s^{(n)}(B))[M_{t-s}\varphi]$$

así que si B es de la forma $j(X)$, puesto que

$$M_t^* X M_t = e^{-\alpha t} W_t^* X W_t,$$

tenemos que

$$\tilde{P}_t^{(1)}(j(X)) = e^{-\alpha t} j(P_t^{(1)}(X))$$

de la misma manera podemos proceder inductivamente para probar que

$$\tilde{P}_t^{(n)}(j(X)) = e^{-\alpha t} j(P_t^{(n)}(X))$$

y haciendo $n \rightarrow \infty$,

$$\tilde{P}_t(j(X)) = e^{-\alpha t} j(P_t^{\min}(X)).$$

La última igualdad se sigue de la definición de resolvente para un semigrupo. ■

4.4 Una aplicación.

En esta sección usamos la relación que hay entre $\tilde{P}_t$ y $P_t^{\min}$ para dar un criterio de conservatividad que generaliza los dos resultados principales en [18]. La estructura de la sección es la siguiente: el Teorema 4.4.1 es el criterio de conservatividad. La Proposición 4.4.2 muestra que nuestra Hipótesis A.2. es equivalente a la Hipótesis C de [18]. Después enunciamos explícitamente cuáles son los resultados que nuestro criterio generaliza. Por último examinamos algunos ejemplos.

Recordemos que en el ejemplo 3.4.6 definimos, para cada $n \in \mathbb{N}$ un operador positivo y acotado, F_n , por medio de

$$\langle u, F_n u \rangle = \Phi(I)[nR(n, G)u], \quad u \in \mathcal{H}.$$

Usando la terminología de [18], F_n es la extensión acotada del operador

$$\sum_{\ell=1}^{\infty} (nL_{\ell}R(n, G))^* (nL_{\ell}R(n, G))$$

definido sobre $\mathcal{D} = \text{dom } G$ donde $\{L_{\ell}\}$ es la sucesión de operadores que prescribe la Hipótesis A de aquella referencia y $R(n, G) = (n + G)^{-1}$.

Teorema 4.4.1. *Si la Hipótesis A de [18] se cumple, así como la Hipótesis A.2 para algún operador positivo y autoadjunto Λ , entonces la Hipótesis A.1 es suficiente para que $P_t^{\min}$ sea conservativo, donde el espacio $\mathcal{F}$ de la Hipótesis A.1 es el dominio de $\Lambda^{1/2}$.*

Demostración. Es suficiente comprobar que $\langle \varphi, Q_{\lambda}^n(I)\varphi \rangle \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para algún $\lambda > 0$ y todo $\varphi \in \mathcal{D}' = \text{dom } G^2$

Recordemos que, (ver Lema 2.2.1. y Teorema 2.2.3)

$$Q_{\lambda}(X)[\varphi] = \int_0^{\infty} dt e^{-\lambda t} \Phi(X)[W_t \varphi].$$

El operador resolvente $R_{\lambda}(X)$ de $P_t^{\min}(X)$ puede representarse como

$$R_{\lambda}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_{\lambda}^n(A_{\lambda}(X))$$

donde

$$A_{\lambda}(X)[\varphi] = \int_0^{\infty} dt e^{-\lambda t} \langle W_t \varphi, X W_t \varphi \rangle$$

y la serie converge fuertemente. Como en [18] $A_{\lambda}(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Q_{\lambda}(I)$ fuerte y ultradébilmente. Por lo tanto, si procedemos como en la misma referencia y $\lambda > c$ y $\varphi \in \mathcal{D}'$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \langle \varphi, Q_{\lambda}^k(I)\varphi \rangle &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle \varphi, Q_{\lambda}^k(Q_{\lambda}(I))\varphi \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi, Q_{\lambda}^k(A_{\lambda}(F_n))\varphi \rangle \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \langle \varphi, Q_{\lambda}^k(A_{\lambda}(F_n))\varphi \rangle \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle \varphi, R_{\lambda}^{\min}(F_n)\varphi \rangle \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle \langle \varphi, j(R_{\lambda}^{\min}(F_n))\varphi \rangle \rangle \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \langle \langle \varphi, \tilde{R}_{\lambda-c}(j(F_n))\varphi \rangle \rangle \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\lambda - c} \|j(F_n)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{F})} \|\varphi\|^2 \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{m}{\lambda - c} \left(\frac{n}{n - c} \right)^2 \|\varphi\|^2 = \frac{m}{\lambda - c} \|\varphi\|^2 < \infty \end{aligned}$$

donde $m = \|\Phi(I)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{F})}$. Hemos hecho uso del Lema de Fatou, el Corolario 4.3.7, la Proposición 4.2.4 y la siguiente estimación para $\|j(F_n)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{F})}$, que es consecuencia del Teorema 4.3.5 si $n > c$,

$$\begin{aligned}\|j(F_n)\|_{\mathcal{B}(\mathcal{F})} &= \|\Lambda^{1/2} j(F_n) \Lambda^{-1/2}\|_{\infty} = \sup_{\substack{u \in \mathcal{H} \\ |u|=1}} \langle u, \Lambda^{-1/2} F_n \Lambda^{-1/2} u \rangle \\ &= \sup_{\substack{u \in \mathcal{H} \\ |u|=1}} \langle \Lambda^{-1/2} u, F_n \Lambda^{-1/2} u \rangle = \sup_{\substack{u \in \mathcal{H} \\ |u|=1}} \Phi(I)[nR(n, G) \Lambda^{-1/2} u] \\ &\leq m \sup_{\substack{u \in \mathcal{H} \\ |u|=1}} |\Lambda^{1/2} nR(n, G) \Lambda^{-1/2} u|^2 \\ &\leq m \left(\frac{n}{n-c} \right)^2 \sup_{\substack{u \in \mathcal{H} \\ |u|=1}} |\Lambda^{1/2} \Lambda^{-1/2} u|^2 = m \left(\frac{n}{n-c} \right)^2.\end{aligned}$$

Nota: Otra demostración del Teorema 4.4.1 se encuentra en [39].

En [18], p. 391, se enuncia la siguiente hipótesis acerca del operador Λ .³:

C

- El dominio de la raíz cuadrada, $\Lambda^{\frac{1}{2}}$ contiene a $\text{dom } G$ y $\text{dom } G$ es esencia de $\Lambda^{\frac{1}{2}}$,
- los subespacios vectoriales $L\ell(\text{dom } G^2)$, $\ell \geq 1$, están contenidos en el dominio de $\Lambda^{\frac{1}{2}}$,
- existe una constante positiva⁴ c tal que

$$-2\text{Re}\langle \Lambda^{\frac{1}{2}} u, \Lambda^{\frac{1}{2}} Gu \rangle + \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle \Lambda^{\frac{1}{2}} L_{\ell} u, \Lambda^{\frac{1}{2}} L_{\ell} u \rangle \leq c |\Lambda^{\frac{1}{2}} u|^2$$

Proposición 4.4.2 *La Hipótesis A.2 es equivalente a la Hipótesis C de [18].*

Demostración.

Si $\Phi(X)[\varphi] = \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle L_{\ell} \varphi, X L_{\ell} \varphi \rangle < \infty$, con $\text{dom } L_{\ell} \supset \text{dom } G = \mathcal{D}$ para todo $\ell \geq 1$; entonces la Hipótesis C en [18] y el Teorema de Convergencia Monótona implican que para $\varphi \in \text{dom } G^2$

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon} \Phi(\Lambda_{\epsilon})[\varphi] &= \lim_{\epsilon} \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle L_{\ell} \varphi, \Lambda_{\epsilon} L_{\ell} \varphi \rangle \\ &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle \Lambda^{1/2} L_{\ell} \varphi, \Lambda^{1/2} L_{\ell} \varphi \rangle \leq 2\text{Re}\langle \langle \varphi, \tilde{G} \varphi \rangle \rangle + c \|\varphi\|^2.\end{aligned}$$

³Aquí escribiremos la hipótesis con nuestra notación. En la referencia, los autores denotan por C al operador Λ y suponen que G es el generador de W_t y no, como nosotros, $-G$.

⁴En la referencia, es denotada por b .

y recíprocamente, dado que

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle \Lambda^{1/2} L_{\ell} \varphi, \Lambda^{1/2} L_{\ell} \varphi \rangle &= \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle L_{\ell} \varphi, L_{\ell} \varphi \rangle \\ &= \tilde{\Phi}(I_{\mathcal{B}_{\mathcal{F}}})[\varphi] = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Phi(\Lambda_{\epsilon})[\varphi] \leq 2\operatorname{Re} \langle \varphi, \tilde{G}\varphi \rangle + c\|\varphi\|^2, \end{aligned}$$

para $\varphi \in \mathcal{D}$; nuestra suposición A.2 implica la Hipótesis C en [18].

■

Los dos resultados principales de [18] son los Teoremas 4.3 y 4.4 pp. 393-394. Probamos enseguida que tales resultados son consecuencia de nuestro Teorema 4.4.1. En ambos Teoremas las Hipótesis generales son A y C (ver pp 385 y 391 de ese trabajo). La hipótesis A la hemos hecho explícitamente y la Hipótesis C es equivalente a nuestra Hipótesis A.2. En el Teorema 4.3 de [18] se supone además que

$$\langle u, F_n u \rangle \leq |\Lambda^{1/2} u|, \quad \forall u \in \operatorname{dom} G$$

por lo tanto, según nuestro ejemplo 3.4.6, $\Phi \in CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ ya que $\operatorname{dom} G$ es denso en $\mathcal{F}$.

Por otro lado, el Teorema 4.4 de la citada referencia supone la existencia de un operador densamente definido en $\mathcal{H}$, positivo y autoadjunto, al que se le denota por Φ y tal que

- (a) El dominio de la raíz cuadrada positiva $\Phi^{1/2}$ contiene al dominio de G y para cada u en $\operatorname{dom} G$ se tiene

$$2\operatorname{Re} \langle u, Gu \rangle = \sum_{\ell=1}^{\infty} \langle L_{\ell} u, L_{\ell} u \rangle = \langle \Phi^{1/2} u, \Phi^{1/2} u \rangle,$$

- (b) El dominio de Λ está contenido en el dominio de Φ y, para cada $u \in \operatorname{dom} \Lambda$ tenemos

$$\langle \Phi^{1/2} u, \Phi^{1/2} u \rangle \leq \langle \Lambda^{1/2} u, \Lambda^{1/2} u \rangle.$$

Es claro que esto implica que la forma cuadrática $\Phi(I)$ es cerrable y acotada en $\mathcal{F} = \operatorname{dom} \Lambda^{1/2}$.

En otras palabras las hipótesis de ambos resultados implican nuestra Hipótesis A.1 lo que los convierte en casos particulares de nuestro resultado.

Podemos aplicar nuestros resultados a todos los ejemplos dados en [18]. Además de la Hipótesis A.2, que es equivalente a la Condición C en ese trabajo, la única condición nueva que debemos verificar es que $\Phi(I)$ es una forma sesquilineal acotada en $\mathcal{F} \times \mathcal{F}$.

Usando la notación de arriba, podemos ver que en el primer ejemplo (Modelo de Colisión de Iones [25]) el acotamiento de $\Phi(I)$ se sigue del acotamiento relativo de G con respecto a $\Lambda = c(-\Delta + 1)$, c una constante. Para el segundo ejemplo, tenemos que $\Phi(I)[u] = \frac{1}{2}|\Lambda^{1/2}u|^2$ y el acotamiento de $\Phi(I)$ es inmediato. En el tercer ejemplo (Formas no cerrables) tenemos que

$$\Phi(I)[\varphi] = \frac{1}{2}|\varphi(0)|^2 \leq (|\varphi(0)|^2 + |\varphi'|^2) = |\Lambda^{1/2}\varphi|^2 = \|\varphi\|^2,$$

para $\varphi \in H^1(0, +\infty)$ y el acotamiento de $\Phi(I)$ se sigue de esta estimación.

Por último, debemos mencionar que nuestra Hipótesis A.2 (o bien la Hipótesis C de [18]) es un análogo no conmutativo de algunas condiciones suficientes para que no haya explosión en la solución de cierto tipo de ecuaciones diferenciales estocásticas. Concretamente, en [78] se cita un resultado clásico de Hasminskii (Teorema A, página 551 de esa referencia). Asimismo, en la misma referencia, el Teorema 1, página 552, es una generalización del resultado de Hasminskii. También en [76], Capítulo 10, Teorema 10.2.1, página 254, se da otra condición suficiente para que no haya explosión.

Capítulo V

5 La ecuación de Lindblad con coeficiente dependiente del tiempo.

5.1 Introducción.

Nuestro propósito en este capítulo es extender algunos de los resultados de Chebotarev sobre la existencia, unicidad y conservatividad de la solución de la llamada ecuación maestra (o de Lindblad) con coeficiente dependiente del tiempo.

$$\frac{d}{dt} \langle \varphi, X_t \psi \rangle = \mathcal{L}_t(X_t)[\varphi, \psi], \quad \varphi, \psi \in \mathcal{D} \quad (5.1.1)$$

donde $\mathcal{D}$ es un subespacio denso en $\mathcal{H}$, y, para cada $t \geq 0$, $\mathcal{L}_t$ tiene una expansión de Lindblad del tipo (2.1.7),

$$\mathcal{L}_t(X)[\varphi, \psi] = \Phi_t(X)[\varphi, \psi] - \langle G_t \varphi, X \psi \rangle - \langle \varphi, X G_t \psi \rangle, \quad (5.1.2)$$

Aquí G_t y Φ_t cumplen con las condiciones II.1, II.2 y II.3 del Capítulo II, y $\mathcal{D} \subset \cap_t \text{dom } G_t$

Para encontrar soluciones de (5.1.1), en la Sección 5.2, procedemos como en [14], [16], [17], [18] etc., estableciendo la equivalencia de (5.1.1) con cierta ecuación integral (la (5.2.6)) que es la versión dependiente del tiempo de la ecuación (2.1.6) del Capítulo II. Damos explícitamente las condiciones bajo las cuales ambas ecuaciones son equivalentes.

En la Sección 5.3 probamos la existencia y propiedades de un *Sistema de evolución minimal o cociclo minimal*, (MES según las iniciales en inglés), que es una solución de (5.1.1), por medio de un esquema iterativo como el (2.1.7). Mostramos que nuestras condiciones se pueden aplicar a la ecuación maestra (2.1.1) por lo que la prueba de nuestros resultados son una prueba alternativa (a las ya conocidas) de la equivalencia de las ecuaciones (2.1.1) y (2.1.6) así como del Teorema 2.1.3. Recordemos que en el Capítulo II sólo formulamos estos resultados pero no dimos sus pruebas.

En la Sección 5.4 damos un ejemplo explícito de un cociclo minimal, en la llamada *Representación de interacción*. y en la Sección 5.5 introducimos el concepto, ya estudiado por Holevo ([49], [50]) de covarianza respecto a una representación unitaria de un grupo, para dar una condición suficiente de conservatividad. En este capítulo volvemos a las notaciones usuales del producto interno y la norma en $\mathcal{H}$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \quad \| \cdot \|.$$

5.2 Hipótesis principales y resultados preliminares.

Para transformar la ecuación maestra en su forma diferencial (5.1.1) en una ecuación integral del tipo (2.1.7), introducimos algunos conceptos importantes.

Una familia de operadores $E(t, s) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ definida para $(t, s) \in \Delta := \{(t, s) : 0 \leq s \leq t < \infty\}$ es llamada un *sistema de evolución* ([43]) si

- (i) $E(t, s)$ es fuertemente continuo en Δ y $E(s, s) = I$ para todo $s \geq 0$.
- (ii) Para cada $T > 0$ existe una constante $K_T < \infty$ tal que $\|E(t, s)\|_\infty \leq K_T$, $0 \leq s \leq t \leq T$.
- (iii) $E(t, s) = E(r, s)E(t, r)$ para $0 \leq s \leq r \leq t$.

Decimos que un sistema de evolución, $E(t, s)$, es *fuerte* si existe una familia de operadores acretivos⁵ y cerrados $\{A_t, t \geq 0\}$, tal que

$$E(t, s) : \text{dom} A_t \rightarrow \text{dom} A_s \quad \text{para } t > s,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E(t, s) \varphi = -E(t, s) A_t \varphi \quad \text{para } t > s, \quad \varphi \in \text{dom} A_t,$$

y

$$\frac{\partial}{\partial s} E(t, s) \varphi = A_s E(t, s) \varphi, \quad \text{para } s < t, \quad \text{y } \varphi \in \text{dom} A_t. \quad (5.2.1)$$

La familia $\{A_t\}_{t \geq 0}$ es llamada *el generador* de $E(t, s)$.

Necesitamos la siguiente hipótesis:

V.1. La familia $\{G_t\}_{t \geq 0}$ es el generador de un sistema de evolución de contracciones $U(t, s)$, $(t, s) \in \Delta$. Esto es, $U(t, s)$ es un sistema de evolución fuerte y $\|U(t, s)\|_\infty \leq 1$ para cada $(t, s) \in \Delta$. Supongamos también que $U(t, s)^*$ es fuertemente continuo en Δ .

Nota 5.2.1.

- (a) Bajo la hipótesis V.1, la ecuación (5.2.1) se lee así

$$\frac{\partial}{\partial s} U(t, s) \varphi = G_s U(t, s) \varphi, \quad \text{para } s < t, \quad \text{y } \varphi \in \text{dom} G_t. \quad (5.2.1)'$$

- (b) Si $\{G_t\}_{t \geq 0}$ satisface las hipótesis usuales de Tanabe o de Kato-Tanabe (ver [69], [56] o [77]) entonces $\{G_t\}_{t \geq 0}$ genera un sistema de evolución fuerte de contracciones.
- (c) Cada C_0 -semigrupo de contracciones $W(t)$ define un sistema de evolución $U(t, s) = W(t - s)$.
- (d) Se sigue que el sistema adjunto $\{U(t, s)^* : (t, s) \in \Delta\}$ tiene las siguientes propiedades
 - (i) $U(s, s)^* = I$,

⁵que un operador, A , densamente definido sea *acretivo* significa que $\text{Re}\langle u, Au \rangle \geq 0$

- (ii) $\|U(t, s)^*\|_\infty \leq 1$,
- (iii) $U(t, s)^* = U(t, \tau)^* U(\tau, s)^*$ para $0 \leq s \leq \tau \leq t$.
- (e) Si $t > \tau$ y $\varphi \in \mathcal{D}$ entonces $U(t, \tau)\varphi \in \text{dom} G_\tau$. Así que, para cualquier curva cuyos valores son operadores, $\tau \mapsto X_\tau$, la función

$$\ell(t, \tau) = \Phi_\tau(X_\tau)[U(t, \tau)\varphi]$$

está bien definida.

En adelante, haremos uso del siguiente supuesto,

V.2. Si $0 \leq s \leq t$ y $\tau \mapsto X(\tau)$ una curva cuyos valores son operadores y es acotada en norma definida para $\tau \in [s, t]$, entonces $\tau \mapsto \ell(t, \tau)$ es Borel-medible.

Lema 5.2.2 Si para cada $t \geq 0$, G_t y Φ_t satisfacen las condiciones II.1, II.2 y II.3 del Capítulo II. Si la familia $\{G_t\}_{t \geq 0}$ cumple con la hipótesis V.1 y la familia $\{\Phi_t\}_{t \geq 0}$ cumple con la condición V.2 Entonces

- (a) La siguiente forma cuadrática positiva y que está definida sobre $\mathcal{D}$ es acotada

$$F(t, s)(X(\cdot))[\varphi] = \int_s^t d\tau \Phi_\tau(X(\tau))[U(t, \tau)\varphi] \quad \varphi \in \mathcal{D} \quad (5.2.2)$$

Denotemos por $F(t, s)$ a $F(t, s)(X(\cdot))$, si no hay confusión sobre cuál es la curva $X(\cdot)$. Asimismo, usemos la misma notación $F(t, s)$ para el operador acotado asociado a la forma cuadrática.

- (b) $F(t, s) \rightarrow 0$ fuertemente si $t - s \rightarrow 0$

- (c) Para $t' \geq t \geq s$ tenemos

$$F(t', s) = U(t', t)^* F(t, s) U(t', t) + F(t', t). \quad (5.2.3)$$

- (d) Para $s \geq 0$ fijo, $t \mapsto F(t, s)$ es fuertemente continuo por la derecha.

Demostración: Dado que $U(t, s)$ es un sistema de evolución fuerte, se sigue que, para $\varphi \in \mathcal{D}$, la función $\tau \mapsto \|U(t, \tau)\varphi\|^2$ es diferenciable y

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \|U(t, \tau)\varphi\|^2 = 2 \text{Re} \langle G_\tau U(t, \tau)\varphi, U(t, \tau)\varphi \rangle. \quad (5.2.4)$$

Así que, al tomar en cuenta los incisos (ii), (iii) del Lema 2.1.1, cuyos supuestos son satisfechos por cada Φ_t y G_t , tenemos que para $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} |F(t, s)[\varphi]| &= \left| \int_s^t d\tau \Phi_\tau(X_\tau)[U(t, \tau)\varphi] \right| \\ &\leq \|X\|_{[s, t]} \int_s^t d\tau \Phi_\tau(I)[U(t, \tau)\varphi] \\ &\leq \|X\|_{[s, t]} \int_s^t d\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \|U(t, \tau)\varphi\|^2 \\ &= \|X\|_{[s, t]} (\|\varphi\|^2 - \|U(t, s)\varphi\|^2), \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

donde $\|X\|_{[s,t]} = \sup_{\tau \in [s,t]} \|X(\tau)\|_{\infty}$. Esto prueba (a).

Por lo que,

$$0 \leq F(t, s)[\varphi] \leq \|X\|_{[s,t]} \|\varphi\|,$$

La conclusión (b) la probaremos en dos etapas: Primero, ya que $U(t, s)\varphi \rightarrow \varphi$ fuertemente si $t-s \rightarrow 0$ y $\mathcal{D}$ es denso entonces, por la estimación (5.2.5), $F(t, s) \rightarrow 0$ débilmente. Segundo, la convergencia fuerte a 0 se sigue de aquí pues

$$\begin{aligned} \|F(t, s)\varphi\|^2 &= \langle F(t, s)\varphi, F(t, s)\varphi \rangle = F(t, s)[F(t, s)\varphi, \varphi] \leq \\ &\leq |F(t, s)[\varphi]|^{1/2} |F(t, s)[F(t, s)\varphi]|^{1/2} \leq \\ &\leq |F(t, s)[\varphi]|^{1/2} (\|X\|_{[s,t]})^{1/2} \|F(t, s)\varphi\| \leq \\ &\leq (\|X\|_{[s,t]})^{3/2} \|\varphi\| |F(t, s)[\varphi]|^{1/2} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

si $t-s \rightarrow 0$.

Sea $t' \geq t \geq s$, entonces para $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle \varphi, U(t', t)^* F(t, s) U(t', t) \varphi \rangle = F(t, s)[U(t', t) \varphi] =$$

$$\begin{aligned} &= \int_s^t d\tau \Phi_\tau(X(\tau)) [U(t, \tau) U(t', t) \varphi] \\ &= \int_s^t d\tau \Phi_\tau(X(\tau)) [U(t', \tau) \varphi] \\ &= \int_s^{t'} d\tau \Phi_\tau(X(\tau)) [U(t', \tau) \varphi] \\ &\quad - \int_t^{t'} d\tau \Phi_\tau(X(\tau)) [U(t', \tau) \varphi] \\ &= F(t', s)[\varphi] - F(t', t)[\varphi]. \end{aligned}$$

Por lo tanto $U(t', t)^* F(t, s) U(t', t) = F(t', s) - F(t', t)$. Esto termina la demostración de (c)

Para probar (d), usemos (c) y el hecho de que $U(t', t)$ y $U(t', t)^*$ son acotados en norma y ambos convergen a I si $t' \downarrow t$. Usemos también (b) para ver que $F(t', t) \rightarrow 0$ fuertemente y $F(t', s) \rightarrow F(t, s)$ si $t' \downarrow t$.

■

Debido al inciso (a) del Lema 5.2.2, tiene sentido considerar la siguiente ecuación integral

$$\langle \varphi, X_t \psi \rangle = \langle \varphi, U(t, s)^* X U(t, s) \psi \rangle + \int_s^t d\tau \Phi_\tau(X_\tau) [U(t, \tau) \varphi, U(t, \tau) \psi] \quad (5.2.6)$$

donde $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ $\tau \mapsto X_\tau$ es una curva cuyos valores son operadores en $\mathcal{H}$ acotada en norma y ultradébil continua, tal que $X_s = X$ y el integrando sea Borel-medible como función de τ .

Proposición 5.2.3. *Bajo las mismas condiciones que en el Lema 5.2.2, si $t \geq s$ y $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ entonces la ecuación (5.2.6) es equivalente a la ecuación (5.1.1) junto con la condición inicial,*

$$X_s = X.$$

Demostración. Seguiremos a [49]. Reemplacemos en (5.2.6) t por τ , φ por $U(t, \tau)\varphi$ y ψ por $U(t, \tau)\psi$, entonces, con identidades como $U(\tau, r)U(t, \tau) = U(t, r)$ para $r \leq \tau \leq t$, obtenemos que

$$\begin{aligned} \langle U(t, \tau)\varphi, X_\tau U(t, \tau)\psi \rangle &= \\ \langle U(t, s)\varphi, XU(t, s)\psi \rangle + \int_s^\tau d\tau \Phi_\tau(X_\tau) [U(t, \tau)\varphi, U(t, \tau)\psi]. \end{aligned}$$

De aquí que,

$$\frac{d}{d\tau} \langle U(t, \tau)\varphi, X_\tau U(t, \tau)\psi \rangle = \Phi_\tau(X_\tau) [U(t, \tau)\varphi, U(t, \tau)\psi]$$

Para casi todo τ con respecto al medida de Lebesgue.

Si calculamos la derivada con la regla de Leibnitz, tomando en cuenta que $U(t, s)$ satisface (5.2.1)', y evaluamos en $\tau = t$ obtenemos que X_t satisface la siguiente ecuación de evolución

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \varphi, X_t \psi \rangle &= \Phi_t(X_t) [\varphi, \psi] - \langle G_t \varphi, X_t \psi \rangle - \\ &= -\langle \varphi, X_t G_t \psi \rangle = \\ &= \mathcal{L}_t(X_t) [\varphi, \psi], \end{aligned}$$

para casi todo t con respecto a la medida de Lebesgue, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Recíprocamente, si X_t es cualquier solución débilmente continua de (5.1.1) obtenemos que

$$\begin{aligned} &\int_s^t d\tau \{ \mathcal{L}_\tau(X_\tau) [U(t, \tau)\varphi, U(t, \tau)\psi] + \langle G_\tau U(t, \tau)\varphi, X_\tau U(t, \tau)\psi \rangle \\ &\quad + \langle U(t, \tau)\varphi, X_\tau G_\tau U(t, \tau)\psi \rangle \} \\ &= \int_s^t d\tau \frac{d}{d\tau} \langle U(t, \tau)\varphi, X_\tau U(t, \tau)\psi \rangle \\ &= \langle \varphi, X_t \psi \rangle - \langle U(t, s)\varphi, XU(t, s)\psi \rangle, \end{aligned}$$

$\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ y $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. entonces las ecuaciones (5.2.6) y (5.1.1) son equivalentes. ■

5.3 El cociclo minimal.

En toda la sección haremos los mismo supuestos que en el Lema 5.2.2. introducimos ahora un proceso iterativo que nos conducirá a una encontrar una solución (la minimal) de la ecuación integral (5.2.6).

Definición 5.3.1. Para $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $(t, s) \in \Delta$ consideremos la siguiente familia de operadores

$$P^{(0)}(t, s)(X) \equiv 0; \quad P^{(1)}(t, s)(X) = U(t, s)^* X U(t, s).$$

$$X_s^{(n)}(\tau) = P^{(n)}(\tau, s)(X) \quad J^{(n+1)}(t, s)(X) = F(t, s)(X_s^{(n)}(\cdot))$$

y

$$P^{(n+1)}(t, s)(X) = P^{(1)}(t, s)(X) + J^{(n+1)}(t, s)(X). \quad (5.3.1)$$

Lema 5.3.2. Bajo la hipótesis del Lema 5.2.2, tenemos

- (a) Para $X \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$, $0 \leq P^{(n)}(t, s)(X) \leq \|X\|_\infty I$.
- (b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, la familia $\{J^{(n+1)}(t, s)(X)\}_{(t,s) \in \Delta}$ es uniformemente acotada,
- (c) $P^{(n)}(t, s) \in CP_n(\mathcal{H})$.
- (d) $P^{(n)}(t, s)(X) \leq P^{(n+1)}(t, s)(X)$ para $X \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$.
- (e) $P^{(n)}(t, s)(X) \leq P^{(n)}(t, r)(P^{(n)}(r, s)(X))$ para $X \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ y $0 \leq s \leq r \leq t$.

Demostración:

Demostraremos (a) inductivamente.

Para $X \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ y $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$0 \leq \langle \varphi, P^{(1)}(t, s)(X)\varphi \rangle \leq \|U(t, s)^*\|_\infty \|U(t, s)\|_\infty \|X\|_\infty \|\varphi\|^2 \leq \|X\|_\infty \|\varphi\|^2.$$

Por lo que $P^{(1)}(t, s)$ satisface (a). Recordemos que $J^{(n+1)}(t, s)(X) = F(t, s)(P^{(n)}(\cdot, s))$. Si $P^{(n)}(t, s)$ satisface (a) entonces, como consecuencia de la estimación (5.2.5),

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \varphi, P^{(n+1)}(t, s)(X)\varphi \rangle = \langle U(t, s)\varphi, XU(t, s)\varphi \rangle + \langle \varphi, J^{(n+1)}(t, s)(X)\varphi \rangle \\ &\leq \|X\|_\infty \|U(t, s)\varphi\|^2 + \|X\|_\infty (\|\varphi\|^2 - \|U(t, s)\varphi\|^2) = \|X\|_\infty \|\varphi\|^2, \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$0 \leq P^{(n+1)}(t, s)(X) \leq \|X\|_\infty I,$$

esto prueba (a). De (5.2.5) obtenemos

$$J^{n+1}(t, s)(X)[\varphi] \leq \|X\|_\infty \|\varphi\|^2,$$

lo que prueba (b). Puesto que $P^{(1)}(t, s)(X) = U(t, s)^* X U(t, s)$ entonces $P^{(1)}(t, s)$ está en la Representación de Kraus por lo que es elemento de $CP_n(\mathcal{H})$.

Es claro que $P^{(1)}$ y $P^{(0)}$ satisfacen (b). Para $t \geq r \geq s$,

$$\begin{aligned} P^{(1)}(t, r) \left(P^{(1)}(r, s)(X) \right) &= U(t, r)^* U(r, s)^* X U(r, s) U(t, r) = \\ &= U(t, s)^* X U(t, s) = P^{(1)}(t, s)(X). \end{aligned}$$

Por lo tanto $P^{(1)}$ satisface la igualdad en (c).

Ahora, como hipótesis de inducción, supongamos que $P^{(n)}$ satisface (a)-(c) donde, en (b), $n + 1$ se reemplaza por n .

Sea $0 \leq X_k \uparrow X$ si $k \uparrow \infty$ entonces para $\varphi \in \mathcal{D}$,

$$\Phi_\tau(X_k)[\varphi] \uparrow \Phi_\tau(X)[\varphi]$$

Por lo que la normalidad de $P^{(n+1)}(t, s)$ se sigue de la normalidad de $P^{(1)}(t, s)$, el Teorema de Convergencia Monótona y la densidad de $\mathcal{D}$.

El que $P^{(n+1)}$ sea completamente positivo se sigue de esto, de que $P^{(1)}$, $P^{(n)}$ y Φ_τ lo son y de la densidad de $\mathcal{D}$.

Para probar (b) sea $\varphi \in \mathcal{H}$. Entonces

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \left(P^{(n+1)}(t, s)(X) - P^{(n)}(t, s)(X) \right) \varphi \rangle &= \\ \int_s^t d\tau \Phi_\tau \left(P^{(n)}(\tau, s)(X) - P^{(n-1)}(\tau, s)(X) \right) [U(t, \tau)\varphi] &\geq 0. \end{aligned}$$

Finalmente para establecer (c) tomemos $s \leq t \leq \tau \leq t'$, $Y = P^{(n+1)}(t, s)(X)$, y usemos la propiedad (c) del Lema 5.2.2,

$$\begin{aligned} P^{(n+1)}(t', s)(X) &= P^{(1)}(t', s)(X) + J^{(n+1)}(t', s)(X) = P^{(1)}(t', t) \left(P^{(1)}(t, s)(X) \right) \\ &+ U(t', t)^* J^{(n+1)}(t, s)(X) U(t', t) + F(t', t)(X_s^{(n)}(\cdot)) = \\ &= P^{(1)}(t', t) \left(P^{(n+1)}(t, s)(X) \right) + F(t', t)(X_s^{(n)}(\cdot)) = \\ &= P^{(1)}(t', t)(Y) + F(t', t)(X_s^{(n)}(\cdot)). \end{aligned} \tag{5.3.2}$$

Pero, por hipótesis de inducción y la ya probada propiedad (b) en este lema, tenemos que

$$\begin{aligned} X_s^{(n)}(\tau) = P^{(n)}(\tau, s)(X) &\leq \left(P^{(n)}(\tau, t) P^{(n)}(t, s)(X) \right) \leq P^{(n)}(\tau, t) \left(P^{(n+1)}(t, s)(X) \right) \\ &= P^{(n)}(\tau, t)(Y) = Y_t^{(n)}(\tau) \end{aligned}$$

Dado que Φ_τ preserva la positividad,

$$F(t', t)(X_s^{(n)}) \leq F(t', t)(Y_t^{(n)}) = J^{(n+1)}(t', t)(Y)$$

Entonces, con ayuda de (5.3.2),

$$\begin{aligned} P^{(n+1)}(t', s)(X) &\leq P^{(1)}(t', t)(Y) + J^{(n+1)}(t', t)(Y) = P^{(n+1)}(t', t)(Y) = \\ &= P^{(n+1)}(t', t) \left(P^{(n+1)}(t, s)(X) \right). \end{aligned}$$

Nota. (i) La función $\ell(t, \tau)$ también está bien definida para cualquier curva con valores en operadores $\tau \mapsto X_\tau$ si $U(t, \tau)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$. De hecho, la suposición V.1 puede reemplazarse por

(V.1)' La familia $\{G_t : t \geq 0\}$ está relacionada con el sistema de evolución contractivo $U(t, s)$, de la siguiente manera, existe un subespacio $\mathcal{D}$, denso en $\mathcal{H}$ tal que

$$\mathcal{D} \subset \cap_t \text{dom } G_t$$

$$U(t, s)\mathcal{D} \subset \mathcal{D}$$

$$\frac{\partial}{\partial s} U(t, s)\varphi = G_s U(t, s)\varphi$$

para $t > s$ y $\varphi \in \mathcal{D}$.

(ii) Es posible probar que la función

$$\tau \rightarrow \Phi_\tau(X_\tau)[U(t, \tau)\psi]$$

es continua usando propiedades de regularidad del sistema de evolución $U(t, s)$, como las probadas por Kato en [56], pero esto requiere hipótesis excesivas sobre la función $\tau \rightarrow G_\tau$. En algunos ejemplos de interés, la continuidad de esa función puede verificarse directamente, ver la Sección 5.4.

De la propiedad (d) del Lema 5.3.1, se sigue que existe una familia $P(t, s)$ de transformaciones lineales $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ en sí mismo tal que

$$P^{(n)}(t, s)(X) \uparrow P(t, s)(X) \quad \text{si } n \rightarrow \infty$$

fuerte, débil y ultradébilmente ([6]). La familia $\{P(t, s) : t \geq s \geq 0\}$ es la solución minimal de (5.2.6) como lo demostramos en el siguiente,

Teorema 5.3.3 *El sistema $\{P(t, s) : (t, s) \in \Delta_T\}$ tiene las siguientes propiedades.*

- (a) *Es solución de la ecuación maestra con coeficiente dependiente del tiempo en forma integral (5.2.6)*
- (b) *Para cada $(t, s) \in \Delta$, $P(t, s) \in CP_n(\mathcal{H})$*
- (c) *$P(t, s)(I) \leq I \quad \forall (t, s) \in \Delta$*
- (d) *Es un sistema de evolución o cociclo: $P(s, s) = I$, $P(t, s) = P(t, r)P(r, s)$ para $0 \leq s \leq r \leq t$.*
- (e) *Para $X \in \mathcal{B}_+\mathcal{H}$ y $s \geq 0$ fijos, $t \mapsto P(t, s)(X)$ es fuertemente continuo por la derecha. Para $t \geq 0$ fijo, $s \mapsto P(t, s)(X)$ es ultradébil continuo por la izquierda.*

- (f) Si $\{Q(t, s) : (t, s) \in \Delta\}$ es otra familia de transformaciones lineales que satisfacen la ecuación (5.2.6), entonces

$$P(t, s)(X) \leq Q(t, s)(X) \quad \forall X \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H}).$$

Observemos que no se pide que $\{Q(t, s) : (t, s) \in \Delta\}$ sea un sistema de evolución.

- (g) Si $\{P(t, s)\}$ es conservativo, i.e., $P(t, s)(I) = I \quad \forall (t, s)$, entonces $\{P(t, s)\}$ es la única solución de (5.2.6) que satisface las propiedades (a)-(e).

Demostración.

Para $X \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ fijo, $P^{(n)}(t, s)(X) \uparrow P(t, s)(X)$, fuerte, débil y ultradébilmente. Además, por la propiedad (a) del Lema 5.3.2

$$0 \leq P(t, s)(X) \leq \|X\|_\infty I$$

Por lo tanto, con la condición de normalidad, para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, y $\tau \in [s, t]$

$$\Phi_\tau(P^{(n)}(\tau, s)(X)) [U(t, \tau)\varphi] \uparrow_n \Phi_\tau(P(\tau, s)(X)) [U(t, \tau)\varphi]$$

así que la función $\tau \mapsto \Phi_\tau(P(\tau, s)(X)) [U(t, \tau)\varphi, U(t, \tau)\psi]$ es medible.

Por lo tanto, la integral

$$\int_s^t d\tau \Phi_\tau(P(\tau, s)(X)) [U(t, \tau)\varphi, U(t, \tau)\psi]$$

está bien definida en el sentido de Lebesgue y ahora es claro que $\{P(t, s)\}$ es una solución de (5.2.6): tomemos el límite, cuando $n \rightarrow \infty$, en la relación de recurrencia (5.3.1) que define a P^n . Esto prueba (a).

(b). La linelidad y la positividad completa se preservan bajo la toma de límites débiles. Para la normalidad, tomemos $0 \leq X_n \uparrow X$, entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \varphi, P(t, s)(X - X_n)\varphi \rangle \leq \langle \varphi, (P(t, s) - P^{(k)}(t, s))(X)\varphi \rangle \\ &\quad - \langle \varphi, (P(t, s) - P^{(k)}(t, s))(X_n)\varphi \rangle + \langle \varphi, (P^{(k)}(t, s))(X - X_n)\varphi \rangle \leq \\ &\quad \langle \varphi, (P(t, s) - P^{(k)}(t, s))(X)\varphi \rangle + \langle \varphi, P^{(k)}(t, s)(X - X_n)\varphi \rangle \end{aligned}$$

Si k es suficientemente grande, podemos hacer que el primer término sea menor que $\epsilon/2$ y, puesto que para esta k la transformación $P^{(k)}(t, s)$ es normal, podemos tomar n tan grande que el segundo término sea menor que $\epsilon/2$.

(c) Dado que $I \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ y $0 \leq P^{(n)}(t, s)(I) \leq I$ entonces $0 \leq P(t, s)(I) \leq I$.

(d) Como $U(s, s) = U(s, s)^* = I$ entonces para $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \langle \varphi, P(s, s)(X)\varphi \rangle &= \langle \varphi, X\varphi \rangle + \int_s^s d\tau \Phi_\tau(P(\tau, s)(X)) [U(t, \tau)\varphi, U(t, \tau)\psi] = \\ &= \langle \varphi, X\varphi \rangle, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$P(s, s) = I.$$

Hemos definido $X_s^{(n)}(t) = P^{(n)}(t, s)(X)$

Definamos las siguientes transformaciones positivas de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ en sí mismo.

$$\begin{aligned} D^{(0)}(t, s)(X) &= X_s^{(1)}(t) \\ D^{(k)}(t, s)(X) &= X_s^{(k+1)}(t) - X_s^{(k)}(t) \end{aligned}$$

Dado que $P^{(n+1)}(t, s)(X) = P^{(1)}(t, s)(X) + F(t, s)(X_s^{(n)}(\cdot))$ entonces

$$D^{(k)}(t, s)(X) = F(t, s)(X_s^{(k)}(\cdot) - X_s^{(k-1)}(\cdot)) = F(t, s)(D^{(k-1)}(\cdot, s)(X)).$$

Aseguramos lo siguiente

$$P^{(n)}(t, s)(X) = \sum_{k=0}^{n-1} D^{(k)}(t, s)(X), \quad (5.3.3)$$

y si $t \geq r \geq s$ entonces

$$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad D^{(n)}(t, s)(X) = \sum_{k=0}^n D^{(k)}(t, r) D^{(n-k)}(r, s)(X). \quad (5.3.4)$$

Para probar (5.3.3), observemos que

$$\begin{aligned} P^{(n)}(t, s)(X) &= X_s^{(n)}(t) = X_s^{(1)}(t) + \sum_{k=2}^n (X_s^{(k)}(t) - X_s^{(k-1)}(t)) \\ &= \sum_{k=1}^n D^{(k-1)}(t, s)(X) = \sum_{k=0}^{n-1} D^{(k)}(t, s)(X). \end{aligned}$$

Para probar (5.3.4), usemos inducción sobre n .

Si $n = 0$ entonces

$$D^{(0)}(t, s)(X) = P^{(1)}(t, s)(X) = P^{(1)}(t, r) (P^{(1)}(r, s)(X)) = D^{(0)}(t, r) (D^{(0)}(r, s)(X)).$$

Supongamos que (5.3.4) es válida para n . Entonces, para $t \geq r \geq s \geq 0$, por la propiedad (c) en el Lema 5.2.2,

$$\begin{aligned} D^{(n+1)}(t, s)(X) &= F(t, s)(D^{(n)}(\cdot, s)(X)) = U(t, r)^* F(r, s)(D^{(n)}(\cdot, s)(X)) U(t, r) + \\ &+ F(t, r)(D^{(n)}(\cdot, s)(X)) = D^{(0)}(t, r) (D^{(n+1)}(r, s)(X)) \\ &+ F(t, r)(D^{(n)}(\cdot, s)(X)) \\ &= D^{(0)}(t, r) (D^{(n+1)}(r, s)(X)) + F(t, r) \left[\sum_{k=0}^n D^{(k)}(\cdot, r) D^{(n-k)}(r, s)(X) \right] \\ &= D^{(0)}(t, r) D^{(n+1)}(r, s)(X) + \sum_{k=0}^n F(t, r) (D^{(k)}(\cdot, r) D^{(n-k)}(r, s)(X)) \\ &= D^{(0)}(t, r) D^{(n+1)}(r, s)(X) + \sum_{k=0}^n D^{(k+1)}(t, r) D^{(n-k)}(r, s)(X) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} D^{(k)}(t, r) D^{(n+1-k)}(r, s)(X). \end{aligned}$$

Así que para cualquier $\varphi \in \mathcal{H}$ y $X \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \varphi, P(t, s)(X)\varphi \rangle &= \langle \varphi, \sum_{k=0}^{\infty} D^{(k)}(t, s)(X)\varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle \varphi, D^{(k)}(t, s)(X)\varphi \rangle = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle \varphi, \sum_{\ell=0}^k D^{(\ell)}(t, r) D^{(k-\ell)}(r, s)(X)\varphi \rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\ell=0}^k \langle \varphi, D^{(\ell)}(t, r) D^{(k-\ell)}(r, s)(X)\varphi \rangle \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{k=\ell}^{\infty} \langle \varphi, D^{(\ell)}(t, r) D^{(k-\ell)}(r, s)(X)\varphi \rangle = \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \langle \varphi, D^{(\ell)}(t, r) P(r, s)(X)\varphi \rangle = \langle \varphi, P(t, r) P(r, s)(X)\varphi \rangle. \end{aligned}$$

Hemos usado que $D^{(\ell)}(t, r)$ es una transformación positiva y que la composición de transformaciones positivas es positiva.

$$P(t, s)(X) = P(t, r)P(r, s)(X) \quad \text{para } t \geq r \geq s, \quad \text{y } X \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H}).$$

La igualdad para cualquier otro X es obvia ahora.

(e) Sea $X_s(\tau) = P(\tau, s)(X)$. Al usar la notación del Lema 5.2.2, la ecuación integral maestra (5.2.6) es

$$P(t, s)(X) = P^{(1)}(t, s)(X) + F(t, s)(X_s(\cdot))$$

Usando la parte (d) en el Lema 5.2.2, y la continuidad fuerte de $P^{(1)}$ obtenemos la continuidad fuerte por la derecha de $t \mapsto P(t, s)(X)$.

Por la parte (b) en el mismo Lema, concluimos que $P(t, s)(X) \rightarrow 0$ cuando $t - s \rightarrow 0$ fuertemente.

Si $t \geq s \geq r \geq 0$, la propiedad de cociclo muestra que,

$$P(t, s)(X) - P(t, r)(X) = P(t, s)(X - P(s, r)(X))$$

Por lo tanto, si t y s quedan fijos y $r \uparrow s$, la normalidad de $P(t, s)$ muestra que $s \mapsto P(t, s)(X)$ es ultradébil continuo por la izquierda.

(f) Sea Q otra solución de (5.2.6), entonces para $X \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ es claro que

$$Q(t, s)(X) \geq P^{(1)}(t, s)(X).$$

Si suponemos $Q(t, s)(X) \geq P^{(n)}(t, s)(X)$ entonces, para $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \varphi, Q(t, s)(X)\psi \rangle &= \langle \varphi, P^{(1)}(t, s)(X)\varphi \rangle \\ &+ \int_s^t d\tau \Phi_\tau(Q(\tau, s)(X)) [U(t, \tau)\varphi, U(t, \tau)\psi] \\ &\geq \langle \varphi, P^{(1)}(t, s)(X)\varphi \rangle \\ &+ \int_s^t d\tau \Phi_\tau(P^{(n)}(\tau, s)(X)) [U(t, \tau)\varphi, U(t, \tau)\psi] \\ &= \langle \varphi, P^{(n+1)}(t, s)(X)\varphi \rangle \end{aligned}$$

Por lo que si $n \rightarrow \infty$

$$Q(t, s)(X) \geq P(t, s)(X).$$

Es suficiente probar (g) para $X \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H}) := \{Z \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : 0 \leq Z \leq I\}$. Sea $X = I$ entonces por la conservatividad de P , la contractividad de Q (i.e., la propiedad (e) en este Teorema), y la ya probada propiedad (f) tenemos que

$$I = P(t, s)(I) \leq Q(t, s)(I) \leq I.$$

Por lo tanto,

$$Q(t, s)(I) = P(t, s)(I) = I \quad \forall (t, s) \in \Delta_T.$$

Ahora, para cualquier $X \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$, sea $Y = I - X \in \mathcal{B}_1(\mathcal{H})$. Entonces

$$0 \leq Q(t, s)(I - X) - P(t, s)(I - X) = P(t, s)(X) - Q(t, s)(X),$$

entonces $Q(t, s)(X) \leq P(t, s)(X)$ por lo que $Q(t, s)(X) = P(t, s)(X)$. ■

Debido a la propiedad (f) del Teorema 5.3.3, a P le llamamos el *Cociclo Minimal* (MC según las iniciales en inglés) para la ecuación maestra con coeficiente dependiente del tiempo (5.2.6). y lo denotaremos por $P^{\min}$.

Antes de terminar la sección, consideremos un generador formal $\mathcal{L}$ con expansión de Lindblad (2.1.2) donde G y Φ satisfacen las hipótesis II.1, II.2 y II.3 del Capítulo II. Nos proponemos mostrar que con lo que hemos desarrollado en este capítulo, el esquema iterativo (2.1.7) converge a la solución minimal -definida en (2.1.8)- de la ecuación maestra (2.1.1); que las ecuaciones (2.1.1) y (2.1.6) son, efectivamente, equivalentes y que el Teorema 2.1.3 es un caso particular del Teorema 5.3.3.

Sea $\mathcal{L}_t = \mathcal{L} \quad \forall t \geq 0$. Por lo tanto, $G_t = G$ y $\Phi_t = \Phi$. Basta probar que se cumplen las condiciones V.1 y V.2. Es claro que el sistema de evolución generado por la familia G_t es

$$U(t, s) = W(t - s)$$

donde, como en los capítulos anteriores, W_t es el semigrupo fuertemente continuo y de contracciones generado por $-G$.

La condición V.2 es consecuencia del inciso (v) del Lema 2.1.1.

5.4 Un ejemplo: representación de interacción.

Sea

$$\mathcal{L}_0(X)[\varphi, \psi] = \Phi(X)[\varphi, \psi] - \langle G_0 \varphi, X \psi \rangle - \langle \varphi, X G_0 \psi \rangle \quad \varphi, \psi \in \text{dom } G_0 \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Sea H_1 un operador autoadjunto, no necesariamente acotado, con dominio $\mathcal{D} = \text{dom } H_1 \subset \text{dom } G_0$ y $\mathcal{D}$ esencia de G_0 . Denotemos por V_t al grupo generado por H_1 .

Sea

$$\mathcal{L}_t(X)[\varphi, \psi] = \mathcal{L}_0(V_t X V_{-t})[V_t \varphi, V_t \psi] \quad \varphi, \psi \in \text{dom} H_1; \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$$

Una forma de Lindblad para $\mathcal{L}_t$ es la siguiente

$$\mathcal{L}_t(X)[\varphi, \psi] = \Phi_t(X)[\varphi, \psi] - \langle G_t \varphi, \psi \rangle - \langle \varphi, G_t \psi \rangle \quad (5.4.1)$$

donde

$$\Phi_t(X)[\varphi] = \Phi(V_t X V_t^{-1})[V_t \varphi] \quad \varphi \in \text{dom} H_1$$

y

$$G_t \varphi = V_t^{-1} G_0 V_t \varphi \quad \varphi \in \text{dom} H_1$$

Proposición 5.4.1. Si $-G = (G_0 + iH_1)$, con dominio $\text{dom} H_1$, es el generador de un C_0 -semigrupo de contracciones $\{W_t\}$, entonces

(a) $\{\mathcal{L}_t : t \in \mathbb{R}\}$ satisface todas las hipótesis para la existencia de $P^{\min}(t, s)$ y

$$P^{\min}(t, s) = \beta(-t) \Pi^{\min}(t - s) \beta(s) \quad (5.4.2)$$

donde $\beta(s)$ es el QDS conservativo

$$\beta(s)(X) = V_s X V_{-s}$$

y $\Pi^{\min}(t)$ es el QDS minimal generado por

$$\mathcal{L}(X)[\varphi, \psi] = \mathcal{L}_0(X)[\varphi, \psi] - \langle iH_1 \varphi, X \psi \rangle - \langle \varphi, iX H_1 \psi \rangle$$

para $\varphi, \psi \in \text{dom} H_1$

(b) $P^{\min}(t, s)$ es conservativo si y sólo si $\Pi^{\min}(t)$ es conservativo.

Demostración.

(a) Cada G_t y Φ_t satisfacen las condiciones II.1, II.2 y II.3 del Capítulo II respecto al subespacio $\mathcal{D}$. Como $\text{dom} G_t = V_{-t} \text{dom} G_0$, entonces $\mathcal{D} \subset \cap_t \text{dom} G_t$.

Sea

$$U(t, s) = V_{-s} W(t - s) V_t,$$

Se sigue de la hipótesis de esta Proposición, W_t deja invariante a $\mathcal{D}$ por lo que

$$U(t, s)(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$$

y un cálculo directo muestra que

$$\frac{\partial}{\partial s} U(t, s) \varphi = G_s U(t, s) \varphi$$

para $t > s$ y $\varphi \in \mathcal{D}$. Por lo que la condición (V.I)' se satisface con $\mathcal{D} = \text{dom} H_1$

Una forma de Lindblad para $\mathcal{L}$, definido en el inciso (a) de la Proposición, es

$$\mathcal{L}(X)[\varphi, \psi] = \Phi(X)[\varphi, \psi] - \langle (G_0 + iH_1)\varphi, X\psi \rangle - \langle \varphi, X(G_0 + iH_1)\psi \rangle$$

Como $G_0 + iH_1$ genera un semigrupo fuertemente continuo, entonces $\mathcal{L}$ satisface las condiciones del Lema 2.1.1 y por el inciso (v) de tal lema, si $t \geq \tau$, es fijo y $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ la función

$$\tau \mapsto \Phi(X)[W(t-\tau)V_t\varphi, W(t-\tau)V_t\psi]$$

es uniformemente continua en todo X que pertenece a un conjunto acotado en norma, así que se cumple la condición V.2. Finalmente, para probar (a) notemos que con (5.4.3), para cada $n \in \mathbb{N}$, $(t, s) \in \Delta$, $X \in \mathcal{B}_+(\mathcal{H})$ y $\varphi \in \mathcal{D}$ tenemos, con ayuda de (5.4.3),

$$\begin{aligned} & \Phi_\tau(P^{(n)}(\tau, s)(X))[U(t, \tau)\varphi, U(t, \tau)\psi] = \\ & \Phi(V_t P^{(n)}(\tau, s)(X) V_{-t})[V_t U(t, \tau)\varphi, V_t U(t, \tau)\psi] \\ & = \Phi(\Pi^{(n)}(t-\tau)\beta(\tau)(X))[W(t-\tau)V_t\varphi, W(t-\tau)V_t\psi] \end{aligned}$$

la continuidad de

$$\tau \mapsto \Phi(\Pi^{(n)}(t-\tau)(X))[W(t-\tau)V_t\varphi, W(t-\tau)V_t\psi]$$

se sigue de la condición V.2, la continuidad fuerte y el acotamiento uniforme de $\{\Pi^{(n)}(t-\tau)\beta(\tau) : (t, \tau)t \geq \tau\}$ pues

$$0 \leq \Pi^{(n)}(t-\tau)\beta(\tau)(X) \leq \|\beta(\tau)(X)\|_\infty I = \|X\|_\infty I$$

Hemos probado que, en efecto, $P^{\min}(t, s)$ y $\Pi^{\min}$ existen. Probemos ahora (5.4.2). Como $P^{\min}(t, s) = \lim_n P^{(n)}(t, s)$ y $\Pi^{\min} = \lim \Pi^{(n)}(t, s)$ puntualmente en la topología ultradébil de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, basta con probar inductivamente que

$$P^{(n)}(t, s)(X) = \beta(-t)\Pi^{(n)}(t-s)\beta(s) \quad (5.4.3)$$

donde $\Pi^{(n)}(t, s)$ y $P^{(n)}(t, s)$ son, la n -ésima aproximación a $\Pi^{\min}(t-s)$ y $P^{\min}(t, s)$ respectivamente (ver las relaciones de recurrencia (2.1.7) y (5.2.8)). Para $n = 1$,

$$\begin{aligned} P^{(1)}(t, s)(X) &= V_{-t}\{W^*(t-s)\{V_s X V_{-s}\}W(t-s)\}V_t \\ &= \beta(-t)\Pi^{(1)}(t-s)\beta(s)(X) \end{aligned}$$

Supongamos que (5.4.3) es válida para n y probémosla para $n+1$. Consideremos la relación de recurrencia (5.2.8) entre $P^{(n+1)}$ y $P^{(n)}$ expresada en términos de formas cuadráticas: para $\varphi \in \text{dom } H_1$,

$$\langle \varphi, P^{(n+1)}(t, s)(X)\varphi \rangle = \langle \varphi, P^{(1)}(t, s)(X)\varphi \rangle + \int_s^t d\tau \Phi_\tau(P^{(n)}(\tau, s)(X))[U(t, \tau)\varphi]$$

$$\begin{aligned}
&= \langle V_t \varphi, \Pi^{(1)}(t-s)(\beta(s)(X))V_t \varphi \rangle \\
&+ \int_s^t d\tau \Phi_*(\beta(\tau)P^{(n)}(\tau, s)(X))[W(t-\tau)V_t \varphi] \\
&= \langle V_t \varphi, \Pi^{(1)}(t-s)(\beta(s)(X))V_t \varphi \rangle \\
&+ \int_s^t d\tau \Phi_*(\Pi^{(n)}(\tau-s)(\beta(s)(X)))[W(t-\tau)V_t \varphi] \\
&= \langle V_t \varphi, \Pi^{(n+1)}(t-s)(\beta(s)(X))V_t \varphi \rangle \\
&= \langle \varphi, \beta(-t)\Pi^{(n+1)}(t-s)(\beta(s)(X))\varphi \rangle
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$P^{(n+1)}(t, s) = \beta(-t)\Pi^{(n+1)}(t-s)\beta(t)$$

(b) Es claro a partir de la ecuación (5.4.2). ■

5.5 Conservatividad de cociclos covariantes.

En esta sección seguiremos a [49]. Nuestro propósito es extender un resultado de Holevo [49] respecto a un criterio para la conservatividad de cociclos covariantes.

Definición 5.5.1.

(a) Una familia de generadores formales $\{\mathcal{L}_t(X)[\varphi, \psi]\}_{t \geq 0}$ definida para $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ y $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, es *covariante* con respecto a representación unitaria y proyectiva, $g \rightarrow U_g$, de un grupo G en $\mathcal{H}$, si las siguientes condiciones se cumplen:

(i) $U_g \mathcal{D} \subset \mathcal{D}$;

(ii) Para cada $t \geq 0$ $\mathcal{L}_t(U_g^* X U_g)[\varphi, \psi] = \mathcal{L}_t(X)[U_g \varphi, U_g \psi]$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ y $g \in G$.

También decimos que $\mathcal{L}_t$ es $\mathcal{U}$ -covariante, $\mathcal{U} = \{U_g : g \in G\}$.

(b) Un cociclo $P(t, s)$ es $\mathcal{U}$ -covariante si

$$P(t, s)(U_g^* X U_g) = U_g^* P(t, s)(X) U_g, \quad g \in G, \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad (t, s) \in \Delta.$$

Si denotamos por α_g el grupo de transformaciones definidas por $\alpha_g(X) = U_g^* X U_g$, $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, entonces $P(t, s)$ es $\mathcal{U}$ -covariante si y sólo si $P(t, s)\alpha_g = \alpha_g P(t, s)$, $g \in G$ y $(t, s) \in \Delta$.

Proposición 5.5.2. *Bajo las condiciones del Lema 5.2.2 $P^{\min}(t, s)$ es $\mathcal{U}$ -covariante si y sólo si $\{\mathcal{L}_t\}_t$ es $\mathcal{U}$ -covariante.*

Demostración. Sea $P^{\min}(t, s)$ la solución minimal de (5.2.6), o equivalentemente, de (5.1.1) y sea

$$P^{U_g}(t, s)(X) = U_g^* P^{\min}(t, s)(U_g X U_g^*) U_g, \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad (t, s) \in \Delta.$$

Puesto que $\mathcal{L}_t(X)[\varphi, \psi]$ es covariante, se sigue que $P^{U_g}(t, s)$ es una solución de (5.1.1) que satisface $P^{U_g}(s, s)(X) = X$ y $P^{U_g}(t, s) \in CPn(\mathcal{H})$. Entonces por el Teorema 5.3.3 (f), se sigue que

$$P^{U_g}(t, s)(X) \geq P^{\min}(t, s)(X), \quad g \in G, \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Entonces si $Y = U_g X U_g^*$,

$$P^{\min}(Y) \geq U_g P^{\min}(t, s)(X) U_g^* = P^{U_g}(t, s)(Y)$$

y en consecuencia

$$P^{\min}(t, s)(X) = P^{U_g}(t, s)(X), \quad X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad g \in G,$$

esto es, $P^{\min}(t, s)$ es $\mathcal{U}$ -covariante.

Recíprocamente, si $P(t, s)$ es una solución $\mathcal{U}$ -covariante de (5.1.1) tenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \varphi, P(t, s)(U_g^* X U_g) \psi \rangle &= \mathcal{L}_t(P(t, s)(U_g^* X U_g)) [\varphi, \psi] = \\ &= \mathcal{L}_t(U_g^* P(t, s)(X) U_g) [\varphi, \psi] \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \varphi U_g^* P(t, s)(X) U_g \psi \rangle &= \frac{d}{dt} \langle U_g \varphi, P(t, s)(X) U_g \psi \rangle = \\ &= \mathcal{L}_t(UP(t, s)(X)) [U_g \varphi, U_g \psi], \end{aligned}$$

para $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ y $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Al evaluar en $t = s$ obtenemos $\mathcal{L}_t(U_g^* X U_g) [\varphi, \psi] = \mathcal{L}_t(X) [U_g \varphi, U_g \psi]$, esto es, $\mathcal{L}_t(X) [\varphi, \psi]$ es $\mathcal{U}$ -covariante. ■

Si $P(t, s)$ es cualquier solución $\mathcal{U}$ -covariante (5.1.1) y $\mathcal{A}$ es el álgebra de puntos fijos de $\mathcal{U}$, i.e., $\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : U_g^* X U_g = X, \forall g \in G\}$, entonces

$$U_g P(t, s)(U_g^* X U_g) U_g^* = P(t, s)(X).$$

Por lo que $P(t, s)$ puede restringirse a $\mathcal{A}$, i.e. $P(t, s)|_{\mathcal{A}}$ es una solución de (5.1.1) en $\mathcal{A}$. Como en [49] damos un criterio simple de conservatividad.

Teorema 5.5.3. Supongamos que $\{\mathcal{L}_t\}_t$ satisface las condiciones del Lema 5.2.2 y es $\mathcal{U}$ -covariante. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (i) $P^{\min}(t, s)$ es conservativo

- (ii) La función $X(t, s) \equiv I$, $(t, s) \in \Delta$, es la única solución positiva y débilmente continua de (5.1.1) en la clase de soluciones con valores en $\mathcal{A}$ tal que $X(s, s) = I$.

Demostración:

Si $P^{\min}(t, s)$ es conservativo, entonces $P^{\min}(t, s)(I) = I$, $(t, s) \in \Delta$, y, por el Teorema 5.3.3 (g), es la única solución positiva y débilmente continua de (5.1.1) en la clase de soluciones con valores en $\mathcal{A}$ tales que $P^{\min}(s, s)(I) = I$. Recíprocamente, si $X(t, s) = I$ es la única solución positiva y débil continua de (5.1.1), sea $P^{\min}(t, s)|_{\mathcal{A}}$ la restricción del cociclo minimal a $\mathcal{A}$, dado que $P^{\min}(t, s)(I) = I$, obtenemos $P^{\min}(t, s)(I) = X(t, s)$, i.e., $P^{\min}(t, s)$ es conservativo. ■

Corolario 5.5.4. Si $\{\mathcal{L}_t\}_t$ es $\mathcal{U}$ -covariante, $\mathcal{L}_t(I)[\varphi] = 0 \forall t \geq 0, \varphi \in \mathcal{D}$, y

$$|\mathcal{L}_t(X)[\varphi, \psi]| \leq C(t)\|\varphi\|\|\psi\|\|X\|_{\infty}, \quad (5.5.1)$$

para todos $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$, $X \in \mathcal{A}$, y $C(t)$ es una función de $t \geq 0$ que es localmente acotada, entonces $P^{\min}(t, s)$ es conservativo.

Demostración. Dado que $P^{\min}(t, s)$ es $\mathcal{U}$ -covariante, se le puede restringir a $\mathcal{A}$, i.e., $P^{\min}(t, s)|_{\mathcal{A}}$ es una solución de (5.1.1) en $\mathcal{A}$. Tomemos $X(t, s) = P^{\min}(t, s)(I)$. Ésta es una solución de (5.1.1) en $\mathcal{A}$ con $X(s, s) = I$. Además $X(t, s) \leq I$ y

$$\begin{aligned} |\langle \varphi, (I - X(t, s))\varphi \rangle| &= \left| \int_s^t d\tau \mathcal{L}_{\tau}(I - X(\tau, s))[\varphi] \right| \leq \\ &\leq \int_s^t d\tau \|\varphi\|^2 \|I - X(\tau, s)\|_{\infty} C(\tau) \leq \left(\sup_{s \leq \tau \leq t} C(\tau) \right) \|\varphi\|^2 \int_s^t d\tau \|I - X(\tau, s)\|_{\infty}, \end{aligned}$$

entonces

$$\|I - X(t, s)\|_{\infty} = \sup_{\varphi \in \mathcal{D}} \frac{1}{\|\varphi\|^2} \langle \varphi, (I - X(t, s))\varphi \rangle \leq \left(\sup_{\tau \in (s, t)} C(\tau) \right) \int_s^t d\tau \|I - X(\tau, s)\|_{\infty}.$$

Por lo que el Lema de Grownwall implica que $\|I - X(t, s)\|_{\infty} = 0$. Por lo tanto

$$P^{\min}(t, s)(I) = I, \quad (t, s) \in \Delta$$

Damos ahora una aplicación al ejemplo de la Sección anterior.

Corolario 5.5.5. Si a las hipótesis de la Proposición 5.4.1 agregamos las siguientes:

- (a) $\mathcal{L}_0(I)[\varphi] = 0$, $|\mathcal{L}_0(X)[\varphi, \psi]| \leq C\|\varphi\|\|\psi\|\|X\|_{\infty}$ con $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$ $X \in \mathcal{A}$ y que $\mathcal{L}_0$ es $\mathcal{U}$ -covariante.
- (b) $V_t U_g = Z(t, g) U_g V_t$ con $Z(t, g) \in \mathbb{C}$, $|Z(t, g)| = 1$, $U_g \in \mathcal{U}$.

Entonces $P^{\min}(t, s)$ es conservativo.

Demostración. Basta con probar que las hipótesis del Corolario 5.5.4. Las dos primeras las hemos hecho explícitamente. Falta verificar que la familia $\{\mathcal{L}_t\}_t$ es $\mathcal{U}$ -covariante. Notemos que $Z(t, g^{-1}) = Z(-t, g)$. La hipótesis (b) implica que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_t(U_g^* X U_g)[\varphi, \psi] &= \mathcal{L}_0(V_t U_g^* X U_g V_{-t})[V_t \varphi, V_t \psi] = \\ \mathcal{L}_0(Z(t, g^{-1}) U_g^* V_t X (Z(-t, g))^{-1} V_{-t} U_g)[V_t \varphi, V_t \psi] &= \\ \mathcal{L}_0(U_g^* V_t X V_{-t} U_g)[V_t \varphi, V_t \psi] &= \mathcal{L}_0(V_t X V_{-t})[U_g V_t \varphi, U_g V_t \psi] = \\ \mathcal{L}_0(V_t X V_{-t})[Z(t, g)^{-1} V_t U_g \varphi, (Z(t, g))^{-1} V_t U_g \psi] &= \\ \mathcal{L}_t(X)[U_g \varphi, U_g \psi] &= \end{aligned}$$

■

Conclusiones

En los últimos años se han investigado intensamente criterios que garanticen la conservatividad de la solución minimal de la ecuación maestra y que sean fácilmente verificables. Nuestra contribución fue a través del estudio detallado de la parte completamente positiva del generador formal (Capítulo III) y su aplicación al estudio de la conservatividad de una clase de QDS (Capítulo IV). Hay todavía una serie de problemas abiertos:

- i) Dado $\mathcal{F}$ un espacio vectorial topológico denso y continuamente incluido en $\mathcal{H}$, caracterizar el cono $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ en términos de algún resultado como el Teorema de Kraus. Cuando $\mathcal{F}$ es un espacio de Hilbert o un límite proyectivo de espacios de Hilbert, en el Capítulo III hicimos un uso sistemático del Teorema de Kato sobre la representación de formas cuadráticas, positivas, densamente definidas y cerradas en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ y por supuesto el Teorema de Kraus. Para el caso general aún no sabemos si podemos contar con resultados como esos.
- ii) Como lo mostramos en el Capítulo IV el estudio de $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$, cuando $\mathcal{F}$ es un espacio de Hilbert, arrojó una interesante relación con la condición A.2. Una pregunta natural es si la caracterización de $CPn_*(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ para espacios $\mathcal{F}$ más generales, pudiera dar indicios de nuevas condiciones de conservatividad.
- iii) Encontrar condiciones fácilmente verificables para la conservatividad de la solución minimal de la ecuación maestra con coeficiente dependiente del tiempo. Los criterios del Capítulo II dependen fuertemente del concepto de resolvente de un semigrupo. En el caso en que el coeficiente depende del tiempo sabemos que la solución de la ecuación maestra no es un semigrupo sino un sistema de evolución por lo que el concepto de resolvente no lo podemos emplear.

Referencias

- [1] R. Alicki and K. Lendi, *Quantum dynamical semigroups and applications. Lect. Notes Phys.* **286**, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1987).
- [2] Bartle, R. *Introducción al análisis matemático*. Ed. Limusa, México, 1980.
- [3] B.V.R. Bhat, K.B. Sinha, *Examples of unbounded generators leading to non-conservative minimal semigroups*, Quantum Probability and Related Topics. IX, 89-103 (1994).
- [4] B. V. R. Bhat, *Markov dilations of nonconservative dynamical semigroups and a quantum boundary theory* Ann. Inst. Henri Poincaré, V. 31,N: 4, pp. 601 – 651, 1995.
- [5] Bratteli,-Ola, On dynamical semigroups and compact group actions. TIC- Collection: Quantum probability and applications to the quantum theory of irreversible processes (Villa Mondragone, 1982), 46-61 SE- Lecture Notes in Math., 1055.
- [6] Bratteli, O., Robinson. D.W. *Operator Algebra and Quantum Statistical Mechanics*, V.1, Springer, Berlin, 1981.
- [7] Breiman, Leo. *Probability*. Addison-Wesley Series in Statistics, 1968.
- [8] A. M. Chebotarev, *Applications of Quantum Probability to Classical Stochastic*, Preprint, Centro V. Volterra, Univ. Degli studi di Roma, Tor Vergata, **246** (1996).
- [9] Chebotarev, A.M. *Minimal Solutions in Classical and Quantum Probability*. In Quantum Probability and related Topics. L. Accardi Ed. World Scientific, Singapore, pp. 79-91, 1992.
- [10] A. M. Chebotarev, " Necessary and sufficient conditions for conservativity of a dynamical semigroup," *J. Soviet Math.*, **56**, No. 5, 2697-2719 (1991).
- [11] Chebotarev, A. M. Quantum stochastic differential equation is unitary equivalent to a symmetric boundary value problem in Fock space.
- [12] A.M. Chebotarev, Sufficient conditions for conservativity of dynamical semigroups, *Theor. Math. Phys.* **80**, 2(1989).
- [13] Chebotarev, A.M. *Sufficient Conditions of the Conservatism of a Minimal Dynamical Semigroup*, Math. Notes, V. 52, No. 4, pp. 112-127, 1992.
- [14] Chebotarev, A.M. *The Theory of Conservative Dynamical Semigroups and its Applications*. Preprint MIEM Vol. March, 1990.
- [15] Chebotarev, A.M. *On the maximal C^* - algebra of zeros of completely positive mappings and on the boundary of a dynamical semigroups*. Math. Notes, 56, N. 5-6, 12711-1282 1994.
- [16] Chebotarev, A.M. *Twelve notes in Quantum Probability*, por aparecer.
- [17] Chebotarev, A.M., and Fagnola, F. *Sufficient conditions for conservativity of Quantum Dynamical Semigroups*. J. Funct. Anal. **118** (1993), pp. 131-153.

- [18] Chebotarev, A.M., and Fagnola, F. *Sufficient Conditions for Conservativity of Minimal Quantum Dynamical Semigroups*, J. Funct. Anal. 153, 382-404, 1998.
- [19] Chebotarev, A.M. and Fagnola, F. *On quantum extensions of the Azéma martingale semigroup*. Sem. Prob. XXIX, pp. 1-16. L.N.M. 1613, 1995.
- [20] A. M. Chebotarev, J. C. García, and R. B. Quezada "On the Lindblad equation with unbounded time-dependent coefficients", *Math. Notes* (Russian Acad. Sci.), 61, No1, 105-117 (1997)
- [21] Chebotarev, A.M., García, J., Quezada, R. *A Priori Estimates and Existence Theorems for the Lindblad Equation with Unbounded, Time-dependent Coefficients*, Recent Trends in Infinite Dimensional Non-Commutative Analysis, RIMS, Kokyuroku 1035, Kyoto, Japan, pp. 44-65, 1998.
- [22] Christensen, E., Evans, D. E. *Cohomology of operator algebras and quantum dynamical semigroups*, J. London Math. Soc., 20, No. 2, 358-368, 1979.
- [23] Da Prato, G. Zabczyk, J. *Nonexplosion, boundedness, and ergodicity for stochastic semilinear equations*. J. Differential Equations 98 (1992), no. 1, 181-195.
- [24] Davies, E.B. *Generators of Dynamical semigroups*, J. Func. Analysis 34, pp. 421-432, 1979.
- [25] Davies, E.B., *Quantum dynamical semigroups and the neutron-diffusion equation*. Rep. Math. Phys. 11, pp. 169-188, 1977.
- [26] E. B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Acad. Press, London (1976).
- [27] Dixmier, J., *Von Neumann Algebras* North Holland, Amsterdam 1981.
- [28] Ekhaguere, G.-O.-S., Odiobala, P.-O., *Completely positive conjugate-bilinear maps on partial *-algebras*. J.-Math.-Phys. 32 (1991), no. 11, 2951-2958.
- [29] Evans, D.E., *Quantum dynamical semigroups, symmetry groups, and locality*. Acta Appl. Math. 2, 333-352, 1984.
- [30] Emery, M. *Sur les Martingales d'Azema*. Sem. Prob. XXIV pp. 442-447, 1990.
- [31] Emery, M. *On Azema's Martingales*. Sem. Prob. XXIII, Lecture Notes in Math. V. 1372, pp. 67-87, 1989.
- [32] Fagnola, F. *Chebotarev's sufficient conditions for conservativity of quantum dynamical semigroups*. Quantum Prob. Related Topics, VIII, pp. 123-142, 1993.
- [33] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and its Applications*. V. 1-2, John Wiley and Sons, 1977.
- [34] Fukushima, Masatoshi, *Energy forms and diffusion processes*. TIC-Collection: Mathematics + physics. Vol. 1, 65-97 PUBL-World Sci. Publishing, Singapore, 1985.
- [35] García J. *Divergence Criteria for Random Series Related to the Azéma-Emery Martingale Process*, Mathematical Notes 57, N. 4, pp. 522-533, 1995.

- [36] García J.C., *On the structure of a cone of normal unbounded completely positive maps*. Math. Notes., V.65, N2, pp.194-205, 1999.
- [37] García J.C., *Characterization of a cone of normal unbounded completely positive maps*, Reporte de Investigación UAM-Iztapalapa 04.0405.I.1.01.99, México, 1999.
- [38] García, J. C., Quezada, R., *On strong perturbations of covariant generators of quantum dynamical semigroups*. Aportaciones matemáticas IV Simposio de Probabilidad y Procesos Estocásticos, 12 SMM, 1996.
- [39] García, J. C., Quezada, R., *A priori estimates for a class of quantum dynamical semigroups*. CINVESTAV Repote interno # 235. Por aparecer en Modelos estocásticos, Aportaciones matemáticas V simposio de Probabilidad y Procesos Estocásticos 1999.
- [40] C. W. Gardiner, *Quantum noise*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York (1992).
- [41] Gikhman, I. I. and Skhorohod, A. V. *The Theory of Stochastic Processes*, Springer-Verlag, 1974.
- [42] V. Gorini, A. Kossakovsky, and E. C. G. Sudarshan, "Completely positive dynamical semigroups of n -level systems," *J. Math. Phys.*, 17, No. 3, 821-825 (1976).
- [43] Grecksch, W., Tudor, C., *Stochastic Evolution Equations*, Akademie Verlag, 1995.
- [44] Grintsevichyus, A.K. *On the Continuity of the Distribution of a Sum of Dependent variables connected with Independent Walks on Lines*. Theory Prob. Applications, V. 19, N.1, pp. 163-168, 1974.
- [45] Grintsevichyus, A.K. *Limit theorems for Products of Random Linear Transformations on the Line*. Liet. Mat. Rinkiny, Vol. 15, No. 4, pp 61-77, 1975.
- [46] Grintsevichyus, A.K. *Limiting Behavior of Products of Random Triangular Matrices*. Liet. Mat. Rinkiny, Vol. 25, No. 4, pp 40-52, October-December, 1985.
- [47] Gudder, S.-P. *Families of completely positive mappings*. Internat.-J.-Theoret.-Phys. 18 (1979), no. 12, 935-944 (1980).
- [48] Hohnle, Rainer, *On global existence of solutions of SDE's with singular drift*. Math.-Nachr. 179 (1996), 145-160.
- [49] Holevo, A.S. *Conservativity of Covariant Dynamical Semigroups*. Rep. Math. Phys. 33, pp. 95-100, 1993.
- [50] Holevo, A.S., *On the structure of covariant dynamical semigroups*, J. Funct. Anal., 131, pp. 255-278, 1995.
- [51] A .S. Holevo, *Stochastic differential equations in Hilbert space and quantum Markovian evolution*, In: *Prob. Theor. & Math. Statistics* (S. Wanatabe, M. Fukujima, Yu. V. Prokhorov, and A. N. Shiryaev, editors), World Scientific, Proc. of Seventh Japan-Russia Symposium, Tokyo, 26-30 July 1995, 122-131 (1996).

- [52] Ichihara,-Kanji, *Explosion problems for symmetric diffusion processes*. Proc.-Japan-Acad.-Ser.-A-Math.-Sci. 60 (1984),no. 7, 243-245.
- [53] Joshi, K.D, *Introduction to General Topology*, John Wiley and Sons, New York, Chichester, Brisbane, Ontario, Singapore, 1983.
- [54] Kato, T., *On the semigroup generated by Kolmogoroff's differential equations*. J .Math. Soc. Japan. vol, 6, No. 1, March, 1954.
- [55] Kato, T, *Perturbation theory of linear operators*, Springer-Verlag, New York Inc., 1966.
- [56] Kato T., *Linear evolution equations of "hyperbolic" type*, Journal Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Num. 25, 1970, pp. 241-258.
- [57] Kelley, J.L, *General Topology*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1955.
- [58] Kersting,-G., Klebaner,-F.-C., *Sharp conditions for nonexplosions and explosions in Markov jump processes*. Ann.-Probab. 23 (1995), no. 1, 268-272.
- [59] Kraus, K., *General state changes in quantum theory*, Ann. Phys. V. 64, pp. 311-335, 1971.
- [60] G. Lindblad, *On the generators of quantum dynamical semigroups*, Commun. Math. Phys., 48, No. 2, 119-130 (1976).
- [61] Lebedev,-V.-A. *Absence of an explosion for the solution of a stochastic equation with respect to a martingale and a random measure*. Teor.-Veroyatnost.-i-Primenen. 28 (1983), No. 3, 579-583.
- [62] Lebedev,-V.-A., *On nonexplosion for the solution of a stochastic differential equation*. Stochastics 11 (1984), no. 3-4, 301-314.
- [63] Maksimov, V.M. *A Generalized Bernoulli Scheme and its Limits Distributions*, Theory Prob. Applications, V 18, N. 3, pp. 521-530, 1973.
- [64] G. McKean, *Stochastic Integrals*, Princeton Univ. Press, Princeton (1981).
- [65] Meyer, P. *Quantum probability for probabilists*, Springer,1993.
- [66] Narita,-K. *Explosion time of second-order Ito processes*. J.-Math.-Anal.-Appl. 104 (1984), no. 2, 418-427.
- [67] Obata, N, *White noise calculus and fock space*, Lecture Notes in Mathematics 1577, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1994.
- [68] Parthasaraty, K.R. *An introduction to Quantum Stochastic Calculus*, Birkhauser Verlag, 1992.
- [69] Pazy A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Applied Mathematical Sciences, Vol. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [70] Reed, M., Barry, S, *Methods of Modern Mathematical Physics*, Vol. 1 Functional Analysis, Academic Press. New York, London, Toronto, Sidney, San Francisco, 1980.

- [71] A. P. Robertson and W. Robertson, *Topological vector spaces*, Cambridge Univ. Press, 1964.
- [72] Scholz, Erasmus, *On completely positive maps in algebras of unbounded operators*. Math. Nachr. 152 (1991), 277–287.
- [73] Senf, Torsten, *On one-dimensional stochastic differential equations without drift and with time-dependent diffusion coefficients*. Stochastics-Stochastics-Rep. 43 (1993), no. 3, 4, 199–220.
- [74] Sobczyk, J. *On explosion of one-dimensional process under additive noise*. Demonstratio Math. 25 (1992), no. 1,2, 317–323.
- [75] Stinespring, W.F., *Positive functions on C^* algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., 6, 211–216, 1955.
- [76] Stroock, Varadhan. *Multidimensional Diffusion Processes*, Springer-Verlag, 1979.
- [77] Tanabe, H. *Equations of Evolution*, Pitman, London, 1979.
- [78] Taniguchi, Takeshi *On sufficient conditions for nonexplosion of solutions to stochastic differential equations*. J.-Math.-Anal.-Appl. 153 (1990), no. 2, 549–561.
- [79] Taniguchi, Setsuo, *The explosion property of holomorphic diffusion processes on a bounded pseudoconvex domain in C^n and its applications*. J.-Math.-Kyoto-Univ. 31 (1991), no. 2, 573–582.
- [80] Thieullen, M. *Temps d'explosion d'equations differentiales stochastiques du type Doleans-Dade*. Ann. Inst. H. Poincaré Prob. Statist. 27 (1991), No. 4, 549–557.
- [81] Timmermann, W., *On positive maps in algebras of unbounded operators*. Math.-Nachr. 154 (1991), 231–241.
- [82] Trèves, F., *Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1967.