Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

TEORÍA CLÁSICA DE DUALIDAD

Tesis que presenta
Margarita del Carmen Gary Gutiérrez
para obtener el grado de
Maestra en Ciencias
(Matemáticas)

Asesor: Dr. Constancio Hernández García

Sinodales:

Presidente: Dr. Adalberto García-Maynez y Cervantes UNAM

Secretario: Dr. Richard Gordon Wilson UAM-I

Vocal : Dr. Constancio Hernández García UAM-I

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Departamento de Matemáticas

11 de noviembre de 2011

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00064
Matrícula: 209382516

TEORIA CLASICA DE DUALIDAD

En México, D.F., se presentaron a las 15:00 horas del día 11 del mes de noviembre del año 2011 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. ADALBERTO GARCIA MAYNEZ Y CERVANTES
DR. CONSTANCIO HERNANDEZ GARCIA
DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRA EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: MARGARITA DEL CARMEN GARY GUTIERREZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó a la interesada el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

MARGARITA DEL CARMEN GARY GUTIERREZ
ALUMNA

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JOSÉ ANTONIO DE LOS REYES HEREDIA

PRESIDENTE

DR. ADALBERTO GARCIA MAYNEZ Y CERVANTES

VOCAL

DR. CONSTANCIO HERNANDEZ GARCIA

SECRETARIO

DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS

Teoría Clásica de Dualidad

Margarita del Carmen Gary Gutiérrez

Tesis de Maestría

Asesor:
Constancio Hernández García
Universidad Autónoma Metropolitana
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Noviembre de 2011

Índice general

Agradecimientos

Es posible que estas líneas no expresen lo agradecida que me siento y tampoco todas las personas a quienes les debo esta acción. Sin embargo, intentaré hacer lo mejor posible.

Como siempre, me gustaría empezar agradeciéndole a *Dios* por colocarme en este camino y ayudarme a llegar a este momento de la mejor manera.

Al *país*, en particular, al *Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología*, (CONACYT), por ser mi sustento mientras realicé la maestría, pues sin su generoso apoyo, el camino hubiese sido escabroso.

A la *Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa*, en particular, al Departamento de Matemáticas por adoptarme y abrirme las puertas a esta nueva senda. En este punto, agradezco de manera muy especial a los doctores: *Mario Pineda*, *Luís Miguel Villegas*, *Joaquín Delgado* y *Constancio Hernández* porque siempre han estado dispuestos a ayudarme en todo lo que he necesitado. A la maestra *María Iseo* y a las *secretarias*, por su amabilidad, gran cariño y excepcional colaboración en todo cuanto les fue posible.

A mi *familia*, por su desmedido amor y apoyo espiritual, fundamentales para llegar a este punto en mi vida. Por ser el motor que siempre me impulsó a seguir adelante aunque las cosas no fueran tan fáciles de sobrellevar.

A *Adolfo y su familia*, por estar a mi lado y apoyarme en todo lo que necesité. Gracias por tu paciencia y comprensión, Adolfo.

Una vez más al *Dr. Constancio Hernández García*, agradezco su disposición, dedicación y amistad. Pero, sobretodo porque, sin conocerme, propuso y asesoró este magnífico trabajo. Gracias por su apoyo en todos los sentidos, sus enseñanzas y extraordinaria paciencia.

Al *Dr. Leonardo Rodríguez* y a mis sinodales, *Dr. Richard Gordon Wilson* y *Dr. Adalberto García-Maynez y Cervantes*, por tomarse el tiempo de leer y mejorar este trabajo, con comentarios precisos y enriquecedores.

Para concluir, agradezco a toda aquella persona que de una u otra forma me ayudó a llegar hasta donde estoy y a quienes prefiero no mencionar explícitamente para evitar omitir a alguien. Los llevo en mi corazón.

A usted cordial lector, por tener en cuenta este trabajo.

Introducción

Uno de los logros fundamentales en el estudio de los grupos topológicos abelianos es la teoría de dualidad de Pontryagin-van Kampen que introduce la estructura de grupo topológico localmente compacto en el grupo formado por los caracteres y permite identificar todo grupo abeliano localmente compacto G con el grupo $\hat{\hat{G}}$ de los caracteres de su grupo de caracteres $\hat{G}$. Este resultado ha sido extendido a varias clases de grupos topológicos abelianos y ha encontrado aplicación en otras áreas de las matemáticas, como la Teoría de Números y el Análisis Armónico.

Muy recientemente, se han encontrado nuevas e interesantes aplicaciones a la teoría de códigos. Este trabajo se enmarca dentro del contexto general de los grupos topológicos y, más específicamente, de los grupos topológicos abelianos.

Nuestra motivación es la importancia de la teoría de dualidad en el estudio de los códigos y sistemas lineales.

Un grupo topológico G es un grupo dotado de una topología que hace continua tanto a la operación del grupo como a la función que a cada elemento del grupo le asigna su inverso. Ahora, si G es un grupo topológico abeliano, su dual, el cual denotaremos por $\hat{G}$, es el conjunto de los homomorfismos continuos de G en $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1$, que también son llamados caracteres, con la topología de la convergencia uniforme en compactos, también llamada topología compacto-abierta. La función evaluación $E\colon G \times \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, dada por $E(\chi, x) = \chi(x)$, nos permite definir un homomorfismo $E(-, x) = \phi_x\colon \hat{G} \to \mathbb{T}$ mediante $\phi_x(\chi) = \chi(x)$, para toda $\chi \in \hat{G}$. Esto es, por cada $x \in G$, tenemos un $\phi_x \in \hat{\hat{G}}$. Más aún, es fácil ver que la función dada por $\alpha(x) = \phi_x$ es un homomorfismo entre G y $\hat{\hat{G}}$. Decimos que un grupo topológico G es reflexivo si α es un isomorfismo topológico.

La meta en nuestro trabajo es demostrar el Teorema de Dualidad de Pontryagin-van Kampen, para grupos localmente compactos, que establece que todo grupo abeliano localmente compacto es reflexivo; pues a partir de él podemos definir los duales de espacios de sucesiones sobre grupos abelianos localmente compactos, que nos permirtirán determinar los duales de los grupos de códigos, uno de los principales objetos de estudio en nuestro futuro trabajo doctoral.

El Teorema de Dualidad de Pontryagin-van Kampen para grupos localmente compactos es la base de la teoría de dualidad para grupos topológicos abelianos. Desde el siglo pasado, la dualidad de Pontryagin ha demostrado ser una poderosa herramienta para el análisis de la estructura y propiedades de los grupos abelianos localmente compactos, grupos ALC. Estos grupos se encuentran en las raíces del Análisis de Fourier, a través de la medida de Haar y el Teorema de Bochner.

La dualidad de Pontryagin en los grupos ALC actúa como un espejo que refleja las propiedades de un grupo en su grupo dual (que también es localmente compacto), y viceversa. Por ejemplo, para un grupo abeliano G, se tiene que si G es discreto, su dual es compacto; si G es compacto, su dual es discreto o si G es compacto, entonces G es metrizable si, y sólo, si su dual es numerable. Esto motiva al estudio de las clases más grandes de los grupos que también cumplen la dualidad de Pontryagin, los grupos reflexivos.

Resumen histórico

Los fundamentos de la teoría de grupos abelianos localmente compactos y de su dualidad fueron sentados por *Lev Pontryagin* en 1934. Su tratamiento se basó en grupos que eran segundo-numerables y compactos o discretos. Esto fue mejorado, para cubrir a los grupos abelianos localmente compactos, en general, por *E.R. van Kampen* en 1935 y *André Weil* en 1953. En 1932 Haar introduce una medida sobre grupos, posteriormente llamada la *medida de Haar*, que permite definir sobre grupos localmente compactos una integral análoga a la de *Lebesgue*. Esta medida fue utilizada por *Von Neumann* y por *Pontryagin* en *1934*, y por *A. Weil* en *1940* para construir una teoría abstracta de análisis armónico conmutativo.

En el ámbito de los grupos abelianos las representaciones unitarias irreducibles son exactamente los caracteres. La idea de *Pontryagin* fue dar estructura de grupo al conjunto de tales caracteres y observar que dado un grupo G discreto y numerable, o bien, compacto y separable, cada elemento de G determina un caracter sobre $\hat{G}$, estableciéndose una correspondencia entre G y $\hat{\hat{G}}$. La teoría de la dualidad se origina al demostrar *Pontryagin* que esta correspondencia es un isomorfismo topológico.

Van Kampen (1935) extendió la dualidad de *Pontryagin* a la clase de los grupos abelianos localmente compactos, utilizando una nueva topología sobre $\hat{G}$, la topología compacto-abierta, que coincidía con la definida por *Pontryagin* para el dual de un grupo compacto y separable o para el dual de un grupo discreto y numerable. Esta teoría de dualidad es el punto de encuentro entre el Análisis Armónico y la topología de Bohr.

La dualidad de Pontryagin-van Kampen ha sido extendida, posteriormente a clases más generales de grupos topológicos, abelianos y no abelianos; el caso no abeliano tiene características específicas debido, principalmente, a que el dual de un grupo no commutativo ya no es un grupo y es necesario utilizar estructuras menos conocidas para su estudio. La primera extensión se debe a *Kaplan* que entre *1948* y *1950* prueba que la clase de los grupos Pontryagin-reflexivos es cerrada para productos arbitrarios y sumas directas; además, propone el problema de la caracterización de los grupos topológicos abelianos que satisfacen la dualidad de Pontryagin, es decir, que son Pontryagin-reflexivos.

Posteriormente, se han dedicado muchos trabajos a resolver esta cuestión, pueden citarse, como ejemplo, las contribuciones de *Banaszczyk*, *Venkatamaran* y *Kye*. En estos dos últimos ejemplos lo que se caracteriza es la Pontryagin-semireflexividad de los grupos considerados.

0.1. Objetivos

0.1.1. General

Estudiar la teoría clásica de dualidad para desarrollar, posteriormente, un trabajo de investigación en Teoría de Códigos y Sistemas Lineales.

0.1.2. Específicos

Presentar un estudio de la teoría de dualidad poniendo particular atención al teorema de Pontryagin-van Kampen sobre dualidad de grupos abelianos localmente compactos.

Capítulo 1

Preliminares

En este apartado se establecen algunas definiciones y notaciones básicas, necesarias para la comprensión de este proyecto.

Todas la demostraciones se omiten. En cambio, el lector encontrará la referencia donde se demuestran los resultados mencionados. Todos los resultados se encuentran en [4], [11] y [8]. En lo sucesivo G denotará un grupo topológico abeliano Hausdorff y e_G el elemento G.

Escribiremos $\mathbb{T}$ para referirnos al subgrupo multiplicativo $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$. En ocasiones, recurriremos a $\mathbb{T}$ como el cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ bajo el isomorfismo canónico exponencial de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ en $\mathbb{S}^1$.

Definimos $\hat{G}$ como el conjunto de los homomorfismos continuos de G en $\mathbb{T}$. Se puede verificar que $\hat{G}$ es un grupo abeliano si para cada $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$ definimos $(\chi_1 + \chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$, para todo $g \in G$. Y por eso $\hat{G}$ denotará al *grupo dual* de G, también llamado *grupo de caracteres* de G.

Denotamos con $C(X, Y)$ al conjunto de funciones continuas de X en Y, donde X y Y son espacios topológicos. La aplicación $E\colon C(X, Y) \times X \to Y$ dada por $E(f, x) = f(x)$ se llama *función evaluación* de $C(X, Y)$.

Dados G y H grupos topológicos y $f\colon G \to H$ un homomorfismo. Entonces f es un *isomorfismo topológico* si es biyectivo y bicontinuo. Decimos que G y H son *localmente isomorfos* si existen U, vecindad de e_G, V, vecindad de e_H y $f\colon U \to V$, un homeomorfismo, tales que si x, y y xy son elementos de U, entonces $f(xy) = f(x)f(y)$. Por ejemplo, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{T}$ son localmente isomorfos.

Recordemos que una aplicación continua $f\colon X \to Y$ es *perfecta* si X es un espacio Hausdorff, f es cerrada y todas sus fibras son subconjuntos compactos de X. En particular, si f es inyectiva, entonces es perfecta si, y sólo si, es una aplicación cerrada.

Teorema 1.1. *Si $f\colon X \to Y$ es una aplicación perfecta, entonces para todo subespacio $Z \subset Y$ compacto, la imagen inversa $f^{-1}(Z)$ es compacto.*

Teorema 1.2 (de la Aplicación Abierta)**.** *Sean G un grupo localmente compacto que es σ-compacto y f cualquier homomorfismo continuo y suprayectivo de G en un grupo Hausdorff localmente compacto, H. Entonces f es una aplicación abierta.*

Teorema 1.3 (de Wallace)**.** *Si A_s es un subespacio compacto de un espacio topológico X_s para $s \in S$, entoces para todo subconjunto abierto W del producto cartesiano $\prod_{s\in S} X_s$ que contiene al conjunto $\prod_{s\in S} A_s$ existen conjuntos abiertos $U_s \subset X_s$ tales que $U_s \neq X_s$ sólo para un número finito de $s \in S$ y $\prod_{s\in S} A_s \subset \prod_{s\in S} U_s \subset W$.*

1.1. Espacios uniformes

Introducimos algunas notaciones y teoremas convenientes para el desarrollo de este proyecto. Sean X un conjunto y $X \times X = X^2$ el producto de X consigo mismo. Si $V \subset X^2$, entonces V^{-1} denota al conjunto $\{(y,x) : (x,y) \in V\} \subseteq X^2$. Si U y V son subconjuntos de X^2, entonces UV denota al conjunto de todos los pares (x,z) tales que para algún $y \in X$, $(x,y) \in U$ y $(y,z) \in V$. Haciendo $V = U$ definimos U^2. El conjunto $\{(x,x) : x \in X\}$ es llamado la *diagonal.*

Definición 1.4. Una *uniformidad* sobre un conjunto X es una familia no vacía $\mathcal{U}$ de subconjuntos de $X \times X$ tal que

i. Cada miembro de $\mathcal{U}$ contiene la diagonal.

ii. Si $U \in \mathcal{U}$, entoces $U^{-1} \in \mathcal{U}$.

iii. Si $U \in \mathcal{U}$, entoces existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subset U$.

iv. Si $U \in \mathcal{U}$ y $V \in \mathcal{U}$, entonces $U \cap V \in \mathcal{U}$.

v. Si $U \in \mathcal{U}$ y $U \subseteq V \subseteq X^2$, entonces $V \in \mathcal{U}$.

El par $(X, \mathcal{U})$ se llama *espacio uniforme.*

En lo sucesivo escribiremos X en lugar de $(X, \mathcal{U})$ para referirnos al espacio uniforme X.

Definición 1.5. Sea X un conjunto. Si $V \subset X \times X$ contiene a la diagonal del producto cartesiano de $X \times X$ y $V = V^{-1}$, entonces V se llama *entorno de la diagonal.*

La familia de todos los entornos de la diagonal del producto cartesiano de $X \times X$ se denotará por $\mathcal{D}_X$. Si $x_0 \in X$ y $V \in \mathcal{D}_X$. Entonces el conjunto $B(x_0, V) = \{x \in X : (x_0, x) \in V\}$ es la *bola con centro x_0 y radio V.*

Ejemplo 1.6. Si $\mathbb{R}$ es el conjunto de los números reales, entonces la *uniformidad usual* para $\mathbb{R}$ es la familia
$\mathcal{U} = \{U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \{(x, y) : (\exists r \in \mathbb{R}^+)(\mid x - y \mid < r)\} \subseteq U\}$.

Toda uniformidad $\mathcal{U}$ sobre un conjunto X induce una topología τ sobre X. En consecuencia, todo espacio uniforme, $(X, \mathcal{U})$, define un espacio topológico, (X, τ). Más exactamente, tenemos

Teorema 1.7. *Para toda uniformidad $\mathcal{U}$ sobre un conjunto X la familia $\tau = \big\{G \subset X : \text{para todo } x \in G \text{ existe } V \in \mathcal{U} \text{ tal que } B(x, V) \subset G\big\}$ es una topología sobre el conjunto X y el espacio topológico (X, τ) es T_1.*

La topología τ es la *topología inducida por la uniformidad* $\mathcal{U}$. En lo sucesivo, denotaremos con F^E a la colección de todas las funciones $f \colon E \to F$.

Definición 1.8. Sean E y F espacios topológicos, $\mathcal{M}$ cualquier colección de subconjuntos M y $\mathcal{V}$ una base de conjuntos abiertos en F. Sea $P(M, V) = \{f \in F^E : f(M) \subseteq V\}$. Entonces la familia $\{P(M, V)\}_{M \in \mathcal{M}, V \in \mathcal{V}}$ es una subbase para una topología en F^E. Se puede verificar con facilidad que si F es un espacio Hausdorff y $\mathcal{M}$ una cubierta de E, esta topología es Hausdorff.

Dos casos importantes de esta topología se dan cuando:

i. $\mathcal{M}$ es la colección de todos los subconjuntos finitos de E, y en este caso, la topología se le llama *p-topología* o *topología de la convergencia puntual.*

ii. $\mathcal{M}$ es la colección de todos los subconjuntos compactos de E, y, en este caso, la topología se le llama k_0*-topología, topología compacto-abierta* o *topología de la convergencia uniforme en compactos.*

Se pueden considerar otras topologías tomando a $\mathcal{M}$ como la colección de los subconjuntos acotados de E y, en este caso, la topología se llama *topología acotado-abierta*. Además, si E es un grupo topológico y $\mathcal{M}$ es la colección de los subgrupos precompactos de E, la topología se llama *topología precompacto-abierta*. En este trabajo nos centraremos en *i* y *ii*.

Como todo conjunto finito es compacto, la k_0-topología es más fina que la p-topología. Por lo que un subconjunto de F^E que es k_0-compacto, también es p-compacto. Nosotros estamos interesados en el conjunto $C(E, F) \subset F^E$ de las funciones continuas de E en F y deseamos hallar condiciones que garanticen la k_0-compacidad para subconjuntos de él.

Definición 1.9. Sean E y F espacios topológicos y $G \subset F^E$. Decimos que una topología en G es *conjuntamente continua* si la función evaluación $E\colon G \times E \to F$ es continua.

Teorema 1.10. *Sean E y F espacios topológicos y $G \subset C(E, F)$. Entonces G es k_0-compacto si*

i. G es k_0-cerrado en $C(E, F)$,

ii. la clausura del conjunto $\{g(x) : g \in G\}$ es compacta para cada $x \in G$ y

ii. la p-topología en $Cl_p(G)$ en F^E es conjuntamente continua.

Definición 1.11. Sean E un espacio topológico y $(F, \mathcal{U})$ un espacio uniforme. Un subconjunto G de $C(E, F)$ es *equicontinuo* en el punto $x \in E$ si para cada $U \in \mathcal{U}$ existe una vecindad V de x tal que $\big(g(y), g(x)\big) \in U$, para todo $y \in V$ y $g \in G$. La familia G es *equicontinua* si es equicontinua en cada $x \in E$.

Teorema 1.12. *Sea $G \subset C(E, F)$ una familia equicontinua en $x \in E$. Entonces la p-clausura de G, $\overline{G}$, en F^E también es equicontinua en x.*

Demostración. Sean $U \in \mathcal{U}$ y $x \in E$. Entonces existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W^3 \subset U$. Además, por la equicontinuidad de $\mathcal{F}$, existe V vecindad de x tal que $\big(f(x'), f(x)\big) \in W$, para todo $f \in \mathcal{F}$ y $x' \in E$. Sean $g \in Cl_p(\mathcal{F})$ y $x' \in E$. Veamos que $\big(g(x'), g(x)\big) \in U$. Consideremos el conjunto $\mathcal{O} = M\big(\{x\}, B(g(x), W)\big) \cap M\big(\{x'\}, B(g(x'), W)\big)$, entonces $\mathcal{O}$ es un abierto en la p-topología que contiene a g, lo cual implica que $\mathcal{O} \cap \mathcal{F} \neq \phi$. Sea $h \in \mathcal{O} \cap \mathcal{F}$. Entonces $\big(g(x'), h(x')\big)$, $\big(h(x'), h(x)\big)$ y $\big(h(x), g(x)\big)$ son elementos de W, por lo que $\big(g(x'), g(x)\big) \in W^3 \subset U$. □

Teorema 1.13. *Sea G una subfamilia equicontinua de $C(E, F)$. Entonces la p-topología de G es conjuntamente continua.*

Combinando los dos teoremas anteriores obtenemos el siguiente.

Teorema 1.14 (de Ascoli)**.** *Sean E un espacio topológico y F un espacio uniforme. Si $G \subset C(E, F)$, entonces G es k_0-compacto si*

i. *G es k_0-cerrado en $C(E, F)$,*

ii. *la k_0-clausura del conjunto $\{g(x) : g \in G\}$ es k_0-compacta para cada $x \in E$ y*

iii. *G es equicontinua.*

Observación 1.15. Si E es un espacio Hausdorff localmente compacto y F un espacio Hausdorff uniforme, es fácil verificar el recíproco del teorema anterior.

1.1.1. Espacios de funciones

Sea $f\colon Z \times X \to Y$ una función. Definimos la función $\Lambda(f)\colon Z \to Y^X$ mediante la fórmula

$$[\Lambda(f)(z)](x) = f(z, x).$$

Es claro que Λ establece una biyección entre las funciones de $Z \times X$ en Y y las funciones de Z en Y^X. Llamamos a Λ la *función exponencial.*

Decimos que una topología sobre $C(X, Y)$ es *propia* si para todo espacio Z y toda $f \in C(Z \times X, Y)$, la función $\Lambda(f)$ es elemento de $C\big(Z, C(X, Y)\big)$, es decir, $\Lambda\big(C(Z\times X, Y)\big) \subseteq C\big(Z, C(X, Y)\big)$. Es claro que si τ y τ' son topologías sobre $C(X, Y)$ tales que τ es propia y $\tau' \subseteq \tau$, entonces τ' es propia.

De manera similar, decimos que una topología sobre $C(X, Y)$ es *admisible* si para todo espacio Z y toda $g \in C\big(Z, C(X, Y)\big)$, la función $\Lambda^{-1}(g)$ es elemento de $C(Z \times X, Y)$, es decir, $\Lambda^{-1}\Big(C\big(Z, C(X, Y)\big)\Big) \subseteq C(Z \times X, Y)$. En este caso, tenemos que si τ y τ' son topologías sobre $C(X, Y)$ tales que τ es admisible y $\tau \subseteq \tau'$, entonces τ' es admisible.

Teorema 1.16. *Una topología τ sobre $C(X, Y)$ es admisible si, y sólo si, la función evaluación, $E\colon C(X, Y) \times X \to Y$, definida por $E(f, x) = f(x)$, es continua.*

Demostración. Observe que para $Z = C(X,Y)$ con la topología τ y $g = \mathrm{id}_{C(X,Y)}$ tenemos $\Lambda^{-1}(g) = E\colon C(X,Y)\times X \to Y$. Por lo tanto, si la topología sobre $C(X,Y)$ es admisible, entonces $g = \mathrm{id}_{C(X,Y)}$ la función $\Lambda^{-1}(g) = E$ es continua.

Ahora, suponga que la evaluación $E\colon C(X,Y) \times X \to Y$ es continua con la topología τ y sea Z un espacio topológico y $g \in C\big(Z, C(X,Y)\big)$. La función $\Lambda^{-1}(g)$ es continua porque $\Lambda^{-1}(g) = E \circ (g \times \mathrm{id}_X)$. □

Teorema 1.17. *Si τ y τ' son topologías sobre $C(X,Y)$ tales que τ es propia y τ' es admisible, entonces $\tau \subseteq \tau'$.*

Demostración. Denote con $C_{\mathcal{O}}(X,Y)$ al espacio de funciones continuas de X en Y con la topología $\mathcal{O}$. Del Teorema (1.16), tenemos que la evaluación $E\colon C_{\tau'}(X,Y) \times X \to Y$ es continua. Como τ es propia, tenemos que $\Lambda(E)\colon C_{\tau'}(X,Y) \to C_{\tau}(X,Y)$ es continua. Pero $\Lambda(E)$ es la identidad. Por lo tanto, $\tau \subseteq \tau'$. □

Observe que la topología de la convergencia punto por punto es propia. En efecto, sea $f \in C(Z \times X, Y)$. La función $\Lambda(f)\colon Z \to Y^X$ es continua si, y sólo si, $p_{x_0} \circ \Lambda(f)$ es continua para cada $x_0 \in X$, donde $p_{x_0}\colon Y^X \to Y$ es la proyección sobre la coordenada x_0. Como $p_{x_0} \circ \Lambda(f)(z) = f(z, x_0)$ para toda $z \in Z$, tenemos la continuidad de $\Lambda(f)$. Más aún, si restringimos la función exponencial a funciones continuas, entonces cuando consideramos una topología propia sobre $C(X,Y)$ la función exponencial es una función de $C(Z \times X, Y)$ en $C\big(Z, C(X,Y)\big)$, esto es, $\Lambda\colon C(Z \times X, Y) \to C\big(Z, C(X,Y)\big)$. Si consideramos la topología de la convergencia punto por punto en todos los espacios de funciones considerados, entonces Λ es una inmersión topológica. En efecto, para $(z_0, x_0) \in Z \times X$ y V abierto en Y, $\Lambda\big(M\big(\{z_0, x_0\}, V\big)\big) = M\big(\{z_0,\}, M\big(\{x_0\}, V\big)\big)$.

Teorema 1.18. *Para cada par de espacios topológicos, X y Y, la topología compacto abierta en $C(X,Y)$ es propia.*

Demostración. Sea Z un espacio topológico y f una función en $C(X,Y)$. Tome un conjunto abierto básico $M(K,U) \subseteq C(X,Y)$, donde K es compacto en X y U es abierto en Y. Observe que

$$\begin{aligned}
[\Lambda(f)]^{-1}(M(K,U)) &= \{z \in Z : [\Lambda(f)](x) \in U, \text{ para toda } x \in K\} \\
&= \{z \in Z : f(z,x) \in U, \text{ para toda } x \in K\} \\
&= \{z \in Z : f(\{z\} \times K) \in U\} \\
&= \{z \in Z : \{z\} \times K \in f^{-1}(U)\}.
\end{aligned}$$

Por el teorema de Wallace, para cada $z \in Z$, existe un abierto W tal que $W \times K \subseteq f^{-1}(U)$. Esto es, el conjunto $\{z \in Z : \{z\} \times K \in f^{-1}(U)\}$ es abierto y, por lo tanto, $\Lambda(f)$ es continua. Es decir, $C_k(X,Y)$ es propia. $\square$

Teorema 1.19. *Si X es localmente compacto, entonces para cada espacio topológico, Y, la topología compacto abierta en $C(X,Y)$ es admisible.*

Demostración. Probaremos que la función evaluación, $E\colon C(X,Y)\times X \to Y$, es continua. Sea $(f,x) \in C(X,Y) \times X$ y V un abierto en Y que contiene a $E(f,x) = f(x)$. Como f es continua y X es localmente compacto, existe una vecindad compacta K de x tal que $f(K) \subseteq V$. Observe que $M(K,V) \times K$ es una vecindad de (f,x) tal que $E(M(K,V) \times V) \subseteq V$. Por lo tanto, E es continua y, por el Teorema (1.16), la topología compacto-abierta es admisible. $\square$

1.1.2. Pseudoequicontinuidad

Decimos que una familia de funciones $\mathcal{F}$ de X en Y es *pseudo-equicontinua* si para toda $x \in X$, toda $y \in Y$ y toda vecindad V de y, existe una vecindad U de x y una vecindad W de y tal que la condiciones $f \in \mathcal{F}$ y $f(x) \in W$ implican $f(U) \subseteq V$, esto es, $E[(\mathcal{F} \cap M(\{x\},W)) \times U] \subseteq V$, donde E es la función evaluación. De esta definición, vemos que todo elemento f en $\mathcal{F}$ es una función continua. También de la definición tenemos el siguiente resultado.

Teorema 1.20. *Si una familia de funciones $\mathcal{F} \subseteq C(X,Y)$ es pseudo-equicontinua, entonces la función evaluación, $E\restriction_{\mathcal{F}\times X}$ es continua respecto a la topología de la convergencia punto por punto en $\mathcal{F}$.*

Como la topología compacto-abierta es propia, entonces la aplicación $\mathrm{id}\restriction_{\mathcal{F}} = \Lambda(E\restriction_{\mathcal{F}})\colon \mathcal{F} \to C_{k_0}(X,Y)$ es continua. Esto es, $\mathcal{F}$ recibe de $C_p(X,Y)$ y de $C_{k_0}(X,Y)$ la misma topología.

Teorema 1.21. *Sean Y un espacio regular y $\mathcal{F} \subseteq Y^X$ una familia de funciones pseudo-equicontinuas. Entonces la cerradura, $\overline{\mathcal{F}}$ en Y^X es pseudo-equicontinua. En particular, $\mathcal{F}$ es cerrado en $C(X,Y)$ si, y sólo si, es cerrado en Y^X.*

Demostración. Sean $x_0 \in X$, $y_0 \in X$ y V una vecindad de y_0 en Y. Sea V' una abierto en Y tal que $y_0 \in V' \subseteq \overline{V'} \subseteq V$. Como $\mathcal{F}$ es pseudo-equicontinua, existe una vecindad U de x_0 y una vecindad W de y_0 tal que

$E\big[\big(\mathcal{F}\cap M\big(\{x_0\},W\big)\big)\times U\big] \subseteq V'$. Sea $f \in \overline{\mathcal{F}}$ y suponga que $f \in M\big(\{x_0\},W\big)$. Si existiera $x \in U$ tal que $f(x) \notin V$, entonces f es elemento del abierto $M\big(\{x\}, X\setminus\overline{V}'\big)$. Por lo tanto, existe $g \in \mathcal{F}\cap M\big(\{x_0\},W\big)\cap M\big(\{x\},X\setminus V'\big)$. Esto contradice la elección de U. Por lo tanto, $E\big[\big(\mathcal{F}\cap M\big(\{x_0\},W\big)\big)\times U\big] \subseteq V$. Esto es, $\overline{\mathcal{F}}$ es pseudo-equicontinua. □

Teorema 1.22. *Sean Y un espacio regular y X un espacio topológico. Si una familia de funciones $\mathcal{F} \subseteq C_p(X,Y)$ es compacta en $C_p(X,Y)$ y $E\restriction_{\mathcal{F}\times X}$ es continua, entonces $\mathcal{F}$ es pseudo-equicontinua.*

Demostración. Sean $x \in X$, $y \in Y$ y V una vecindad de y. Como Y es regular, podemos tomar una vecindad W de y tal que $\overline{W} \subseteq V$. Es claro que $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}\cap M(\{x\},\overline{W})$ es compacta. Como $E\big(\mathcal{F}_0\times\{x\}\big) \subseteq V$, tenemos que $\mathcal{F}_0\times\{x\} \subseteq (E\restriction_{\mathcal{F}\times X})^{-1}(V)$. Ahora, existe una vecindad U de x tal que $E(\mathcal{F}_0\cap U) \subseteq V$. Esto es, $\mathcal{F}$ es pseudo-equicontinua. □

Definición 1.23. Un espacio topológico X es llamado un *k-espacio* si es un espacio Hausdorff y es la imagen de un espacio localmente compacto bajo una aplicación cociente.

Teorema 1.24. *Sean X un k-espacio y $\mathcal{F}$ un subconjunto compacto de $C_{k_0}(X,Y)$. Entonces $E\restriction_{\mathcal{F}\times X}$ es continua.*

Demostración. Como $\mathcal{F}\times X$ es un k-espacio, es suficiente verificar que para todo subconjunto compacto H de X, la restricción $E_0 = E\restriction_{\mathcal{F}\times H}$ es continua. Como la topología compacto abierta es admisible para espacios localmente compactos, entonces la evaluación correspondiente $E_H\colon C_{k_0}(H,Y)\times H \to Y$ es continua. Por lo tanto, $E_0 = E_H\restriction_{\mathcal{F}\restriction_H}\times H$, donde $\mathcal{F}\restriction_H = \{f\restriction_H : f\in\mathcal{F}\}$, es continua. □

A continuación, la versión del Teorema de Ascoli sin equicontinuidad

Teorema 1.25 (de Ascoli)**.** *Sean X un k-espacio y Y un espacio de Tychonoff. Un subconjunto $\mathcal{F}$ del espacio $C_{k_0}(X,Y)$ es compacto si, y sólo si, $\mathcal{F}$ es una familia pseudo-equicontinua de funciones, $\mathcal{F}$ es cerrado y el conjunto $\{f(x) : f\in\mathcal{F}\} \subseteq Y$ tiene cerradura compacta, para toda $x\in X$.*

Capítulo 2

Dualidad

La teoría de Pontryagin-van Kampen establece que todo grupo abeliano localmente compacto G es el grupo dual de su grupo dual, donde el grupo dual de G, $\hat{G}$, es el grupo de todos los homomorfismos continuos de G al grupo del círculo $\mathbb{T}$ con la topología compacto abierta. Cualquier grupo abeliano compacto puede caracterizarse mediante propiedades puramente algebraicas de su grupo dual discreto. Por ejemplo, para cualquier grupo abeliano G tenemos que:

i. $\hat{G}$ es discreto si G es compacto,

ii. $\hat{G}$ es compacto si G es discreto,

iii. G es conexo si, y sólo si, $\hat{G}$ es libre de torsión,

iv. si G es un grupo compacto Hausdorff, entonces G es metrizable si, y sólo si, $\hat{G}$ es numerable.

Definición 2.1. Si G es un grupo topológico abeliano, entonces un homomorfismo continuo $\chi\colon G \to \mathbb{T}$ es un *caracter*. La colección de todos los caracteres se llama *grupo dual* de G o *grupo de caracteres* de G y lo denotamos por $\hat{G}$.

Observación 2.2. Se puede verificar que $\hat{G}$ es un grupo abeliano si para cada par de elementos $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$ definimos $(\chi_1 + \chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$ para cada $g \in G$.

Para estudiar ejemplos de los duales de grupos clásicos como son el grupo de los números enteros, el grupo del círculo y los reales, estableceremos previamente algunos resultados.

Consideremos a $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Proposición 2.3. *Si G es un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}$, entonces $G = \mathbb{T}$ o G es un grupo cíclico finito.*

Demostración. Sea G un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}$ con $G \neq \{0\}$ y consideremos al homomorfismo canónico $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Entonces $\varphi^{-1}(G)$ es un subgrupo cerrado de $\mathbb{R}$ (pues φ es un homomorfismo continuo) y, por lo tanto, $\varphi^{-1}(G) = \mathbb{R}$ o $\varphi^{-1}(G)$ es un grupo cíclico discreto (Ver este resultado en el capítulo 2 de [8]).

Si $\varphi^{-1}(G) = \mathbb{R}$, entonces $G = \varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, por la suprayectividad de φ.

Si $\varphi^{-1}(G) = \langle \alpha \rangle$, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $G = \langle \varphi(\alpha) \rangle$, para algún $\varphi(\alpha) \in \mathbb{T}$. Se puede ver, fácilmente, que $G = \langle \varphi(\alpha) \rangle$ es discreto, con lo que completamos la demostración. $\square$

Proposición 2.4. *Sean $\varphi\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ y $\chi\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ homomorfismos continuos y suprayectivos tales que $\ker \varphi = \ker \chi$. Entonces existe un automorfismo continuo $\alpha\colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ tal que $\alpha \circ \varphi = \chi$.*

Demostración. Para cada $x \in \mathbb{T}$, definimos $\alpha(x) = \chi(m)$ siempre que $x = \varphi(m)$ para algún $m \in \mathbb{T}$. Claramente, α define una función. En efecto, si $x_1, x_2 \in \mathbb{T}$ son tales que $\alpha(x_1) \neq \alpha(x_2)$, entonces existen $m_1, m_2 \in \mathbb{T}$ tales que $x_1 = \varphi(m_1)$ y $x_2 = \varphi(m_2)$. Así, $\chi(m_1) = \alpha(x_1) \neq \alpha(x_2) = \chi(m_2)$, lo cual implica que $(m_1 - m_2) \notin \ker \chi = \ker \varphi$, esto es, $\varphi(m_1 - m_2) \neq 0$. Por lo que $x_1 = \varphi(m_1) \neq \varphi(m_2) = x_2$.

Además, α es inyectiva pues si $x_1, x_2 \in \mathbb{T}$ son tales que $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$, entonces existen $m_1, m_2 \in \mathbb{T}$ tales que $x_1 = \varphi(m_1)$ y $x_2 = \varphi(m_2)$, luego $\chi(m_1) = \alpha(x_1) = \alpha(x_2) = \chi(m_2)$. De donde, $(m_1 - m_2) \in \ker \chi = \ker \varphi$, esto es, $\varphi(m_1 - m_2) = 0$. Por lo tanto, $x_1 = \varphi(m_1) = \varphi(m_2) = x_2$.

Por otra parte, α es suprayectiva, pues si $y \in \mathbb{T}$, existen $m, b \in \mathbb{T}$ tales que $y = \chi(m)$ y $b = \varphi(m)$. Así, $\alpha(b) = \chi(m) = y$ para algún $b \in \mathbb{T}$.

Asimismo, α es un homomorfismo, pues si $x_1, x_2 \in \mathbb{T}$, existen $m_1, m_2 \in \mathbb{T}$ tales que $x_1 = \varphi(m_1)$ y $x_2 = \varphi(m_2)$. Luego, $\alpha(x_1) = \chi(m_1)$ y $\alpha(x_2) = \chi(m_2)$; además, $x_1 + x_2 = \varphi(m_1 + m_2)$. Por lo cual, $\alpha(x_1 + x_2) = \chi(m_1 + m_2) = \chi(m_1) + \chi(m_2) = \alpha(x_1) + \alpha(x_2)$.

En conclusión, $\alpha : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ es un automorfismo. Además, $\alpha \circ \varphi = \chi$, pues si $x \in \mathbb{T}$ existe $m \in \mathbb{T}$ tal que $m = \varphi(x)$; así, $\alpha(m) = \chi(x)$. Por lo que, $(\alpha \circ \varphi)(x) = \alpha(\varphi(x)) = \alpha(m) = \chi(x)$.

Finalmente, α es continua, puesto que $\alpha \circ \varphi = \chi$ es continua y φ es cociente. $\square$

Denotaremos con $\dfrac{k}{2^n}$ a la clase $\left[\dfrac{k}{2^n}+\mathbb{Z}\right]$.

Proposición 2.5. *Si φ es un automorfismo de $\mathbb{T}$, entonces $\varphi\Big(\dfrac{k}{2^n}\Big)=\dfrac{k}{2^n}$ o $\varphi\Big(\dfrac{k}{2^n}\Big)=-\dfrac{k}{2^n}$, para todo $k<2^n$ y $n\in\mathbb{N}$.*

Demostración. Probaremos el caso $\varphi\Big(\dfrac{k}{2^n}\Big)=\dfrac{k}{2^n}$, pues el caso $\varphi\Big(\dfrac{k}{2^n}\Big)=-\dfrac{k}{2^n}$ es análogo.

Procederemos por inducción sobre n.

Para $n=1$, $k=1$ y $\varphi\Big(\dfrac{1}{2}\Big)=\dfrac{1}{2}$. En efecto, $\varphi(1)=1$, así $1=\varphi\Big(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\Big)=2\varphi\Big(\dfrac{1}{2}\Big)$.

Supongamos que $\varphi\Big(\dfrac{k}{2^r}\Big)=\dfrac{k}{2^r}$, para todo $k<2^r$ y y $r<n$. Veamos que $\varphi\Big(\dfrac{k}{2^n}\Big)=\dfrac{k}{2^n}$. Para ello, primero mostremos que $\varphi\Big(\dfrac{1}{2^n}\Big)=\dfrac{1}{2^n}$. En efecto, por hipótesis de inducción, tenemos que $\varphi\Big(\dfrac{1}{2^{n-1}}\Big)=\dfrac{1}{2^{n-1}}$. Así, $\dfrac{1}{2^{n-1}}=\varphi\Big(\dfrac{1}{2^{n-1}}\Big)=\varphi\Big(\dfrac{2}{2^n}\Big)=2\varphi\Big(\dfrac{1}{2^n}\Big)$, de donde, $\varphi\Big(\dfrac{1}{2^n}\Big)=\dfrac{1}{2\cdot 2^{n-1}}=\dfrac{1}{2^n}$.

Ahora bien, sabemos que si $\dfrac{k}{2^n}$ es un elemento de orden $\dfrac{k}{2^n}$, entonces $k=2m+1$, para algún $m\in\mathbb{Z}$.

Así, $\varphi\Big(\dfrac{k}{2^n}\Big)=\varphi\Big(\dfrac{2m}{2^n}\Big)+\varphi\Big(\dfrac{1}{2^n}\Big)=\varphi\Big(\dfrac{m}{2^{n-1}}\Big)+\varphi\Big(\dfrac{1}{2^n}\Big)=\dfrac{m}{2^{n-1}}+\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{2m+1}{2^n}=\dfrac{k}{2^n}$. $\square$

Lema 2.6. Si $\varphi:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ es un isomorfismo topológico, entonces $\varphi=1_{\mathbb{T}}$ o $\varphi=-1_{\mathbb{T}}$.

Demostración. Sea $\varphi:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$ un isomorfismo topológico y consideremos $D=\Big\{\dfrac{k}{2^n}: k<2^n, n\in\mathbb{N}\Big\}$. Sabemos que D es denso en $\mathbb{T}$, y, por la Proposición 2.5, tenemos que para todo $x\in D$, $\varphi(x)=x$ o $\varphi(x)=-x$. Por lo tanto, $\varphi=1_{\mathbb{T}}$ o $\varphi=-1_{\mathbb{T}}$. $\square$

En el siguiente ejemplo demostraremos que el dual de $\mathbb{T}$ es $\mathbb{Z}$.

Ejemplo 2.7. Consideremos el grupo $\mathbb{T}$. Entonces todo caracter χ de $\mathbb{T}$ puede expresarse de la forma $\chi(x) = mx$, donde m es un entero que caracteriza al homomorfismo χ y, por lo tanto, $\hat{\mathbb{T}}$ es algebraicamente isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Solución. Sea χ un caracter de $\mathbb{T}$ y denotemos con K al núcleo de χ. Entonces K es un subgrupo cerrado de $\mathbb{T}$, lo cual implica que $K = \mathbb{T}$ o K es un grupo cíclico finito.

Si $K = \mathbb{T}$, entonces para todo $x \in \mathbb{T}$, $\chi(x) = 0$, así $\chi \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ se define trivialmente por $\chi(x) = 0 \cdot x$ para todo $x \in \mathbb{T}$. Y, en este caso, el isomorfismo η entre $\mathbb{Z}$ y $\hat{\mathbb{T}}$ está definido por $\eta(m) = \chi_0(m)$, para todo $m \in \mathbb{Z}$, donde $\chi_0(x) = 0 \cdot x$, para todo $x \in \mathbb{T}$.

Si K es un grupo cíclico finito de $\mathbb{T}$, entonces $\chi(\mathbb{T}) = \mathbb{T}$ pues si $\chi(\mathbb{T}) = \{0\}$, entonces $K = \mathbb{T}$ lo cual contradice el hecho que K es un grupo cíclico finito de $\mathbb{T}$.

Ahora, consideremos la aplicación $\chi_r \colon \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, dada por $\chi_r(x) = rx$, para cada $r \in \mathbb{Z}$. Veamos que χ_r es un homomorfismo continuo y suprayectivo.

En efecto

i. χ_r es un homomorfismo: Sean $x_1, x_2 \in \mathbb{T}$. Entonces $\chi_r(x_1 + x_2) = r(x_1 + x_2) = rx_1 + rx_2 = \chi_r(x_1) + \chi_r(x_2)$.

ii. χ_r es continua en $\mathbb{T}$: Por tratarse de un espacio homogéneo, basta ver que χ_r es continua en cero. Sea U una vecindad del cero. Queremos hallar una vecindad V del cero tal que $\chi_r(V) \subseteq U$. Como U es una vecindad del cero, sin pérdida de generalidad, podemos considerar $U = (-\varepsilon, \varepsilon)$, para $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$. Entonces existe $V = \left(\dfrac{-\varepsilon}{r}, \dfrac{\varepsilon}{r}\right)$ tal que $\chi_r(V) \subseteq U$. En efecto, si $x \in V$, entonces $\dfrac{-\varepsilon}{r} < x < \dfrac{\varepsilon}{r}$, además, $\chi_r(x) = rx$; así, $-\varepsilon < rx < \varepsilon$, lo cual implica que $\chi_r(x) = rx \in (-\varepsilon, \varepsilon) = U$.

En resumen, para todo $x \in V$, $\chi_r(x) \in U$. Por lo tanto, $\chi_r(V) \subseteq U$.

iii. χ_r es suprayectiva: Sea $y \in \mathbb{T}$. Entonces $y = a + \mathbb{Z}$, para algún $a \in \mathbb{R}$, luego, existe $x = \dfrac{a}{r} + \mathbb{Z} \in \mathbb{T}$ tal que $\chi_r(x) = rx = r\left(\dfrac{a}{r} + \mathbb{Z}\right) = a + \mathbb{Z} = y$.

Finalmente, $\ker \chi_r = \ker \chi$. Sabemos que $\ker \chi_r = \left\{0, \dfrac{1}{r}, \ldots, \dfrac{r-1}{r}\right\}$, además, $\ker \chi = \{0, a, 2a, \ldots, (r-1)a\}$, para algún $a \in \mathbb{T}$. Si hacemos $a = \dfrac{1}{r}$, tenemos que $\ker \chi_r = \ker \chi$.

En conclusión, χ_r y χ son homomorfismos continuos y suprayectivos tales que $\ker \chi_r = \ker \chi$, entonces, por la Proposición 2.4, existe un automorfismo continuo α de $\mathbb{T}$ tal que $\alpha \circ \chi_r = \chi$; y, por el Lema 2.6, tenemos que $\alpha = 1_{\mathbb{T}}$ o $\alpha = -1_{\mathbb{T}}$. De aquí, $\chi(x) = (\alpha \circ \chi_r)(x) = \alpha(\chi_r(x) = \alpha(rx)$.

En consecuencia, $\chi(x) = rx$ o $\chi(x) = -rx$ para cada $x \in \mathbb{T}$.

Por lo tanto, cada caracter χ de $\mathbb{T}$ es de la forma $\chi = \chi_m$, para algún $m \in \mathbb{Z}$, donde $\chi_m(x) = mx$, para todo $x \in \mathbb{T}$. Además, $\chi_m + \chi_n = \chi_{m+n}$, pues si $x \in \mathbb{T}$, entonces $(\chi_m + \chi_n)(x) = \chi_m(x) + \chi_n(x) = mx + nx = (m+n)x = \chi_{m+n}(x)$.

Así, existe un isomorfismo $\eta\colon \mathbb{Z} \to \hat{\mathbb{T}}$, dado por $\eta(m) = \chi_m$, para cada $m \in \mathbb{Z}$.

Por lo tanto, $\mathbb{Z}$ es algebraicamente isomorfo a $\hat{\mathbb{T}}$. □

Ejemplo 2.8. El dual de $\mathbb{Z}$ es el grupo del círculo.

Ejemplo 2.9. El dual de $\mathbb{R}$ es él mismo: En efecto, considere el isomorfismo $\varphi\colon \mathbb{R} \to \hat{\mathbb{R}}$ definido por $\varphi(d) = \chi_d$, donde χ_d es el caracter de $\mathbb{R}$ dado por $\chi_d(r) = e^{2\pi i d r}$, para cada $r \in \mathbb{R}$.

Proposición 2.10. *Sean $K \subset G$ un compacto y $U \subset \mathbb{T}$ un abierto. Si $\chi \in M(K,U)$, entonces existe una k_0-vecindad de $e_{\hat{G}}$, W, tal que $\chi + W \subset M(K,U)$.*

Demostración. Sean $k \in K$ y $V_{\varepsilon(k)}$ una vecindad de $e_{\mathbb{T}}$, que depende de k_0, para un $\varepsilon > 0$ dado, tales que $\chi(k)V_{2\varepsilon} \subset U$. Elijamos U_k, vecindad de k_0, de tal forma que $\overline{U_k}$ sea compacta y $\chi(\overline{U_k}) \subset \chi(k)V_\varepsilon$. Entonces $\{U_k\}_{k\in K}$ es una cubierta abierta de K, por lo que existen $k_1, \ldots, k_n \in K$ tales que $K \subset \bigcup_{i=1}^n U_{k_i}$. Además, $\bigcap_{i=1}^n M(\overline{U_{k_i}}, V_\varepsilon(k_i))$ es una k_0-vecindad de $e_{\hat{G}}$ tal que $\chi \in \chi + \bigcap_{i=1}^n M(\overline{U_{k_i}}, V_\varepsilon(k_i))$ y $\chi + \bigcap_{i=1}^n M(\overline{U_{k_i}}, V_\varepsilon(k_i)) \subset M(K,U)$. En efecto, sean $\varphi = \chi + \psi$, para algún $\psi \in \bigcap_{i=1}^n M(\overline{U_{k_i}}, V_\varepsilon(k_i))$ y $g \in K$. Veamos que $\varphi(g) \in U$. Como $g \in K$, entonces $g \in U_{k_i}$, para algún $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Así, $\psi(g) \in V_\varepsilon(k_i)$, para algún $i \in \{1,2,\ldots,n\}$; luego $\varphi(g) = (\chi+\psi)(g) = \chi(g)\psi(g) \in \chi(g)V_\varepsilon(k_i) \in \chi(\overline{U_{k_i}})V_\varepsilon(k_i) \subset \chi(k_i)V_\varepsilon(k_i)V_\varepsilon(k_i) \subset \chi(k_i)V_{2\varepsilon}(k_i) \subset U$. Así, $\varphi(g) \in U$, para todo $g \in K$, lo cual implica que $\varphi \in M(K,U)$, como se quería demostrar. □

La siguiente proposición nos permite dar estructura de grupo topológico al dual de un grupo topológico.

Proposición 2.11. *Sea G un grupo topológico abeliano. Entonces $\hat{G}$ dotado con la k_0-topología es un grupo topológico abeliano de Hausdorff.*

Demostración. Sea G un grupo topológico abeliano. Veamos que $\hat{G}$ dotado con la k_0-topología es un grupo topológico abeliano de Hausdorff.

Primero, veamos que $(\hat{G}, +)$ es un grupo, donde $(\chi_1+\chi_2)(g) = \chi_1(g)\chi_2(g)$, para todo $g \in G$ y $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$.

En efecto, si χ_1 y χ_2 son elementos de $\hat{G}$, entonces $(\chi_1 + \chi_2)(g_1 +' g_2) = \chi_1(g_1 +' g_2)\chi_2(g_1 +' g_2)$ y, por ser χ_1 y χ_2 homomorfismos, tenemos que $(\chi_1 + \chi_2)(g_1 +' g_2) = [\chi_1(g_1)\chi_1(g_2)][\chi_2(g_1)\chi_2(g_2)] = [\chi_1(g_1)\chi_2(g_1)][\chi_1(g_2)\chi_2(g_2)] = [(\chi_1 + \chi_2)(g_1)][(\chi_1 + \chi_2)(g_2)]$. Por lo tanto, $\chi_1 + \chi_2$ es un homomorfismo; además, es continuo porque χ_1 y χ_2 lo son.

El elemento neutro es el homomorfismo $e_{\hat{G}} \colon G \to \mathbb{T}$ definido por $e_{\hat{G}}(g) = 1_{\mathbb{T}}$, para todo $g \in G$ y $\chi \in \hat{G}$; el inverso es el homomorfismo $-\chi \in \hat{G}$, definido por $(-\chi)(g) = [\chi(g)]^{-1}$, para todo $g \in G$. Claramente, $(\hat{G}, +)$ es abeliano, pues $\mathbb{T}$ es abeliano.

Ahora, consideremos la familia $\mathcal{M} = \{M(K, U_\varepsilon) : K \subseteq G, U_\varepsilon \in \mathcal{U}\}$, donde K es compacto, $U_\varepsilon = \{e^{2\pi i\theta} \in \mathbb{T} : \theta \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$, $M(K, U_\varepsilon) = \{\chi \in \hat{G} : \chi(K) \subseteq U_\varepsilon\}$ y $\mathcal{U} = \{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$.

Veamos que $\mathcal{M}$ satisface las siguientes propiedades:

i. Para todo $M(K, U_\varepsilon) \in \mathcal{M}$ existe $M(K', U_{\varepsilon'}) \in \mathcal{M}$ tal que $2M(K', U_{\varepsilon'}) \subseteq M(K, U_\varepsilon)$.

En efecto, sea $M(K, U_\varepsilon) \in \mathcal{M}$. Entonces $M(K, U_{\frac{\varepsilon}{2}}) \in \mathcal{M}$ es tal que $2M(K, U_{\frac{\varepsilon}{2}}) \subseteq M(K, U_\varepsilon)$, pues si $\chi \in 2M(K, U_{\frac{\varepsilon}{2}})$, entonces existen $\chi_1, \chi_2 \in M(K, U_{\frac{\varepsilon}{2}})$ tales que $\chi = \chi_1 + \chi_2$. Es claro que, para todo $k \in K$, $\chi(k) = (\chi_1 + \chi_2)(k) = \chi_1(k)\chi_2(k) \in U_\varepsilon$, puesto que $\chi_1(k), \chi_2(k) \in U_{\frac{\varepsilon}{2}}$. Por lo tanto, $\chi(K) \subseteq U_\varepsilon$, lo cual implica que $\chi \in M(K, U_\varepsilon)$ y, como χ no es fijo, tenemos que $2M(K, U_{\frac{\varepsilon}{2}}) \subseteq M(K, U_\varepsilon)$.

ii. Para todo $M(K, U_\varepsilon) \in \mathcal{M}$ existe $M(K', U_{\varepsilon'}) \in \mathcal{M}$ tal que $-M(K', U_{\varepsilon'}) \subseteq M(K, U_\varepsilon)$.

En efecto, si $M(K, U_\varepsilon) \in \mathcal{M}$, entonces $-M(K, U_\varepsilon) \subseteq M(K, U_\varepsilon)$, pues si $\chi \in -M(K, U_\varepsilon)$, existe $\chi_1 \in M(K, U_\varepsilon)$ tal que $\chi = -\chi_1$; luego, para todo $k \in K$, $\chi(k) = (-\chi_1)(k) = -[\chi_1(k)] \in U_\varepsilon$. Así, $\chi(K) \subseteq U_\varepsilon$, lo cual implica que $\chi \in M(K, U)$ y como χ no es fijo, tenemos la contención deseada.

iii. Consideremos, ahora, a $\mathbb{T}$ como el subgrupo cociente $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ (Ver preliminares) y veamos que para todo $M(K, U_\varepsilon) \in \mathcal{M}$, y $\chi \in M(K, U_\varepsilon)$, existe

$M(K', U_{\varepsilon'}) \in \mathcal{M}$ tal que $M(K', U_{\varepsilon'}) + \chi \subseteq M(K, U_\varepsilon)$. Recordemos que en este caso $U_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$.

En efecto, sean $M(K, U_\varepsilon) \in \mathcal{M}$ y $\chi \in M(K, U_\varepsilon)$. Entonces, por la compacidad de K y la continuidad del homomorfismo χ, $\chi(K) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$ es un compacto y, por lo tanto, $\chi(K) \subset U_m$, para algún $m = \text{máx}\{|\ \sup \chi(K)\ |, |\ \text{ínf}\, \chi(K)\ |\}$. Hagamos $\delta = \varepsilon - m$. Entonces $M(K, U_\delta) \in \mathcal{M}$ es tal que $M(K, U_\delta) + \chi \subseteq M(K, U_\varepsilon)$, pues si $\chi_1 \in M(K, U_\delta) + \chi$, existe $\chi' \in M(K, U_\delta)$ tal que $\chi_1 = \chi' + \chi$. Así, para todo $k \in K$, $\chi_1(k) \in U_\delta$ y $\chi(k) \in U_m$, lo cual implica que $\chi_1(k) = (\chi' + \chi)(k) = \chi'(k)\chi(k) \in U_\varepsilon$. Por lo tanto, $\chi_1(K) \subseteq U_\varepsilon$, de donde, $\chi_1 \in M(K, U_\varepsilon)$ y como χ' no es fijo, tenemos que $M(K, U_\delta) + \chi \subseteq M(K, U_\varepsilon)$.

iv. Para todo $M(K, U_\varepsilon) \in \mathcal{M}$ y $\chi \in \hat{G}$, existe $M(K', U_{\varepsilon'}) \in \mathcal{M}$ tal que $\chi + M(K', U_{\varepsilon'}) - \chi \subseteq M(K, U_\varepsilon)$.

En efecto, si $M(K, U_\varepsilon) \in \mathcal{M}$ y $\chi \in \hat{G}$, entonces $\chi + M(K, U_\varepsilon) - \chi \subseteq M(K, U_\varepsilon)$ pues si $\chi' \in \chi + M(K, U_\varepsilon) - \chi$, existe $\chi_1 \in M(K, U_\varepsilon)$ tal que $\chi' = \chi + \chi_1 - \chi$, y, puesto que $\hat{G}$ es abeliano, tenemos que $\chi' = \chi_1 \in M(K, U_\varepsilon)$. Puesto que χ' no es fijo, concluimos que $\chi + M(K, U_\varepsilon) - \chi \subseteq M(K, U_\varepsilon)$.

v. Para todo $M(K', U_{\varepsilon'})$ y $M(K'', U_{\varepsilon''})$ en $\mathcal{M}$, existe $M(K, U_\varepsilon) \in \mathcal{M}$ tal que $M(K, U_\varepsilon) \subseteq (M(K', U_{\varepsilon'}) \cap M(K'', U_{\varepsilon''}))$.

En efecto, si $M(K', U_{\varepsilon'})$ y $M(K'', U_{\varepsilon''})$ son elementos de $\mathcal{M}$, entonces $M(K' \cup K'', U_{\varepsilon'} \cap U_{\varepsilon''}) \subseteq M(K', U_{\varepsilon'}) \cap M(K'', U_{\varepsilon''})$; pues si $\chi \in M(K' \cup K'', U_{\varepsilon'} \cap U_{\varepsilon''})$, $\chi(K' \cup K'') \subseteq (U_{\varepsilon'} \cap U_{\varepsilon''})$, lo cual implica que $\chi(K') \subseteq \chi(K' \cup K'') \subseteq (U_{\varepsilon'} \cap U_{\varepsilon''}) \subseteq U_{\varepsilon'}$ y $\chi(K'') \subseteq \chi(K' \cup K'') \subseteq (U_{\varepsilon'} \cap U_{\varepsilon''}) \subseteq U_{\varepsilon''}$. Por lo tanto, $\chi \in M(K', U_{\varepsilon'}) \cap M(K'', U_{\varepsilon''})$ y, puesto que χ no es fijo, tenemos la contención.

vi. $\{e_{\hat{G}}\} = \bigcap \mathcal{M}$. En efecto, supongamos que existe $\chi \in \bigcap \mathcal{M}$ tal que $\chi \neq e_{\hat{G}}$. Entonces $\chi(g) \neq 1_{\mathbb{T}}$ para algún $g \in G$, luego $\chi(g) = e^{2\pi i\theta}$, donde $\theta \neq 0$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $\theta > 0$. Entonces $M\big(\{e_G, g\}, U_\theta\big) \in \mathcal{M}$ y $\chi \notin M\big(\{e_G, g\}, U_\theta\big)$, pues de no ser así, $\chi(g) = e^{2\pi i\theta} \in U_\theta$ lo cual es un absurdo. Por lo tanto, $\chi \notin \bigcap \mathcal{M}$ que es una contradicción. En conclusión, $\chi = e_{\hat{G}}$, con lo que tenemos la afirmación.

Puesto que $\hat{G}$ es un grupo y la familia $\mathcal{M}$ de subconjuntos de $\hat{G}$ satisface las condiciones i-vi, concluimos que la familia $\mathcal{B}_{\mathcal{M}} = \{M(K, U_\varepsilon) + \chi \colon \chi \in \hat{G}, M(K, U_\varepsilon) \in \mathcal{M}\}$ es una base para una topología T_1, $\tau_{\mathcal{M}}$ sobre $\hat{G}$; pero, por 2.10, tenemos que ésta también es una base para la k_0-topología, por lo tanto, $\hat{G}$, con esta topología, es un grupo topológico T_1 y, en consecuencia, de Hausdorff; además, la familia $\left\{\chi + M(K, U_\varepsilon) \colon \chi \in \hat{G}, M(K, U_\varepsilon) \in \mathcal{M}\right\}$ es una base para dicha topología en $\hat{G}$. $\square$

Teorema 2.12. *Si G es un grupo abeliano localmente compacto (ALC), entonces $\hat{G}$ dotado con la k_0-topología es un grupo ALC.*

Demostración. Claramente $\hat{G}$ siempre es abeliano y, por el teorema anterior, tenemos que $(\hat{G}, \tau_k)$ es un grupo abeliano. Sólo debemos ver que es localmente compacto. Para ésto es suficiente probar la compacidad local en $e_{\hat{G}}$. En efecto, sean U cualquier vecindad compacta de e_G y $V_{\frac{1}{4}} = \left\{e^{2\pi i x} : -\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}\right\}$ subcojunto de $\mathbb{T}$. Entonces $V_{\frac{1}{4}}$ es una vecindad de la identidad de $\mathbb{T}$, $e_{\mathbb{T}}$ (tomando a $\mathbb{T}$ como el grupo multiplicativo $\mathbb{S}^1$).

Sea $N_{\frac{1}{4}} = M(U, V_{\frac{1}{4}}) = \{\chi \in \hat{G} : (\forall g \in U)(\chi(g) \in V_{\frac{1}{4}})\}$. Entonces $N_{\frac{1}{4}}$ es una vecindad de $e_{\hat{G}}$, (tomando a $\hat{G}$ como un grupo multiplicativo). Veamos que $Cl_k(N_{\frac{1}{4}})$, esto es, la k_0-clausura de $N_{\frac{1}{4}}$, es compacta.

i. Es claro que $Cl_k(N_{\frac{1}{4}})$ es k_0-cerrado en $\hat{G}$.

ii. El conjunto $\overline{\{\chi(g) \in \mathbb{T} : \chi \in N_{\frac{1}{4}}\}}$ es compacto para todo $g \in G$, por ser un subconjunto cerrado de $\mathbb{T}$, quien es compacto.

iii. $Cl_k(N_{\frac{1}{4}})$ es equicontinua en e_G: Afirmamos que $N_{\frac{1}{4}}$ es equicontinua e_G. En efecto, sean $\varepsilon > 0$ dado y $V_\varepsilon = \{t \in \mathbb{T} : t = e^{2\pi i x}, -\varepsilon < x < \varepsilon\}$ una vecindad de $e_{\mathbb{T}}$. Queremos ver que existe U_1 vecindad de e_G tal que para todo $\chi \in N_{\frac{1}{4}}$ y todo $k \in U_1$, $\chi(k) \in V_\varepsilon$. Es decir, $N_{\frac{1}{4}} \subset M(U_1, V_\varepsilon)$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $\varepsilon < \dfrac{1}{4}$ y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{4} < n\varepsilon$. Además, sea U_1 una vecindad de e_G tal que $U_1^n \subset U$. Entonces, $N_{\frac{1}{4}} = M(U, V_{\frac{1}{4}}) \subset M(U_1^n, V_{\frac{1}{4}}) = M(U_1, V_{\frac{1}{4n}}) \subset M(U_1, V_\varepsilon)$. Por lo tanto, $N_{\frac{1}{4}}$ es equicontinua en e_G, lo cual implica, por el Teorema 1.12, que $Cl_p(N_{\frac{1}{4}})$ es equicontinua en e_G, y como $Cl_k(N_{\frac{1}{4}}) \subset Cl_p(N_{\frac{1}{4}})$, entonces $Cl_k(N_{\frac{1}{4}})$ es equicontinua en e_G y, por lo tanto, es equicontinua en G.

Así, de *i,ii* y *iii*, concluimos, por el Teorema de Ascoli, que $Cl_k(N_{\frac{1}{4}})$ es compacta, lo que demuestra la compacidad local de $\hat{G}$ en su identidad, hecho que implica, por la homogeneidad de $(\hat{G}, \tau_k)$, que $\hat{G}$ es localmente compacto con la k_0-topología. $\square$

Como consecuencia de la demostración del teorema anterios tenemos el siguiente resultado

Corolario 2.13. *Sean G un grupo ALC, K una vecindad compacta de e_G y $V_a = \{e^{2\pi i\theta} : -a < \theta < a\}$, para algún número real positivo $a < \frac{1}{4}$. Entonces $\overline{M(K, V_a)}$ es una vecindad compacta de $e_{\hat{G}}$.*

Lema 2.14. Si $K \subset G$ es compacto, entonces $M\Big(\big(K \cup \{e_G\}\big)^{n_0}, V_{\frac{1}{4}}\Big) = M\Big(K, V_{\frac{1}{4n_0}}\Big)$ para $n_0 \in \mathbb{N}$ fijo.

Demostración. Sean G un grupo ALC, K un subconjunto compacto de G y $n_0 \in \mathbb{N}$ fijo.

i. $M\Big(K, V_{\frac{1}{4n_0}}\Big) \subseteq M\Big(\big(K \cup \{e_G\}\big)^{n_0}, V_{\frac{1}{4}}\Big)$: Sean $\chi \in M\Big(K, V_{\frac{1}{4n_0}}\Big)$ y $k \in \big(K \cup \{e_G\}\big)^{n_0}$. Entonces $k = k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_{n_0}$, donde $k_1, k_2, \ldots, k_{n_0} \in \big(K \cup \{e_G\}\big)$. Luego, $\chi(k) = \chi(k_1) \cdot \ldots \cdot \chi(k_{n_0})$, donde $\chi(k_i) = e^{2\pi i\theta}$, con $-\dfrac{1}{4n_0} < \theta_i < \dfrac{1}{4n_0}$, para $i \in \{1, 2, \ldots, n_0\}$. Así, $\chi(k) = e^{2\pi i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n_0})}$, donde $-\dfrac{n_0}{4n_0} < \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{n_0} < \dfrac{n_0}{4n_0}$, lo cual implica que $\chi(k) \in V_{\frac{1}{4}}$, para todo $k \in \big(K \cup \{e_G\}\big)^{n_0}$. Por lo que, $\chi\big((K \cup \{e_G\})^{n_0}\big) \subset V_{\frac{1}{4}}$, con lo cual se tiene que $\chi \in M\Big(\big(K \cup \{e_G\}\big)^{n_0}, V_{\frac{1}{4}}\Big)$.

ii. $M\Big(\big(K \cup \{e_G\}\big)^{n_0}, V_{\frac{1}{4}}\Big) \subseteq M\Big(K, V_{\frac{1}{4n_0}}\Big)$: Sean $\chi \in M\Big(\big(K \cup \{e_G\}\big)^{n_0}, V_{\frac{1}{4}}\Big)$ y $k \in K$. Entonces $k, k^2, \ldots, k^{n_0} \in \big(K \cup \{e_G\}\big)^{n_0}$, lo cual implica que $\chi(k), [\chi(k)]^2, \ldots, [\chi(k)]^{n_0} \in V_{\frac{1}{4}}$. Como $\chi(k) \in V_{\frac{1}{4}}$, entonces $\chi(k) = e^{2\pi i\theta}$, donde $-\dfrac{1}{4} < \theta < \dfrac{1}{4}$.

$\square$

Teorema 2.15. *Sea G un grupo topológico.*

i. Si G es compacto, entonces $\hat{G}$ es discreto;

ii. Si G es discreto, entonces $\hat{G}$ es compacto.

Demostración. Sea G un grupo topológico.

i. Supongamos que G es compacto. Es suficiente mostrar que $\{e_{\hat{G}}\}$ es un k_0-abierto. En efecto, consideremos la vecindad de $e_{\mathbb{T}}$, $V_{\frac{1}{4}}$. Entonces $M\Big(G, V_{\frac{1}{4}}\Big) = \{e_{\hat{G}}\}$. En efecto, sean $\chi \in M\Big(G, V_{\frac{1}{4}}\Big)$ y $g \in G$. Entonces para todo $k \in \mathbb{N}$, $\chi(G^k) \subset V_{\frac{1}{4}}$; por lo que $\chi \in M\Big(G^k, V_{\frac{1}{4}}\Big) = M\Big(G, V_{\frac{1}{4k}}\Big)$, luego $\chi(g) \in V_{\frac{1}{4k}}$, para todo $k \in \mathbb{N}$, lo cual implica que $\chi(g) = e_{\mathbb{T}}$. Así, $\{e_{\hat{G}}\}$ es un k_0-abierto.

ii. Supongamos que G es discreto. Entonces $\{e_G\}$ es abierto y, por el Corolario 2.13, $\overline{M\Big(\{e_G\}, V_{\frac{1}{4}}\Big)}$ es compacto. Pero $\overline{M\Big(\{e_G\}, V_{\frac{1}{4}}\Big)} = \hat{G}$, pues todo $\chi \in \hat{G}$ satisface $\chi(e_G) = e_{\mathbb{T}} \in V_{\frac{1}{4}}$. Por lo tanto, $\hat{G}$ es compacto.

$\square$

Capítulo 3

Introducción al teorema de dualidad de Pontryagin-van Kampen

Uno de los logros fundamentales en el estudio de los grupos topológicos abelianos es la teoría de dualidad de Pontryagin-van Kampen que introduce la estructura de grupo topológico localmente compacto en el grupo formado por los caracteres y permite identificar todo grupo abeliano localmente compacto G con el grupo $\hat{\hat{G}}$ de los caracteres de su grupo de caracteres $\hat{G}$. Este resultado ha sido extendido a varias clases de grupos topológicos abelianos y ha encontrado aplicación en otras áreas de las matemáticas, como la Teoría de Números y el Análisis Armónico.

El Teorema de Dualidad de Pontryagin-van Kampen para grupos localmente compactos es la base de la teoría de dualidad para grupos topológicos abelianos. Desde el siglo pasado, la dualidad de Pontryagin ha demostrado ser una poderosa herramienta para el análisis de la estructura y propiedades de los grupos abelianos localmente compactos, grupos ALC.

Definición 3.1. Sea G un grupo abeliano. Definimos la *evaluación canónica* α de G en $\hat{\hat{G}}$ como $\alpha(g) = \hat{g}$, donde $\hat{g}\colon \hat{G} \to \mathbb{T}$ está dada por $\hat{g}(\chi) = \chi(g)$. Si α es un isomorfismo topológico, decimos que G es *reflexivo*.

Lema 3.2. Sea G un grupo abeliano. Si $g \in G$ es fijo, entonces la aplicación $\hat{g}\colon \hat{G} \to \mathbb{T}$ definida por $\hat{g}(\chi) = \chi(g)$ es un homomorfismo continuo.

Demostración. Sea $g \in G$ fijo.

i. $\hat{g}$ es un homomorfismo: Sean $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\hat{g}(\chi_1 + \chi_2) &= (\chi_1 + \chi_2)(g) \\
&= \chi_1(g)\chi_2(g) \\
&= \hat{g}(\chi_1)\hat{g}(\chi_2)
\end{aligned}$$

ii. $\hat{g}$ es continuo: Sea V_ε un abierto de $\mathbb{T}$. Entonces

$$\begin{aligned}
(\hat{g})^{-1}(V_\varepsilon) &= \{\chi \in \hat{G} : \hat{g}(\chi) \in V_\varepsilon\} \\
&= \{\chi \in \hat{G} : \chi(g) \in V_\varepsilon\} \\
&= \{\chi \in \hat{G} : \chi(\{g\}) \subset V_\varepsilon\} \\
&= M(\{g\}, V_\varepsilon)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(\hat{g})^{-1}(V_\varepsilon) = M(\{g\}, V_\varepsilon)$ es un abierto de $\hat{G}$ y como V_ε no es fijo, tenemos la afirmación.

$\square$

Lema 3.3. Sea G un grupo ALC. Si α es la evaluación canónica de G en $\hat{\hat{G}}$, entonces α es un homomorfismo continuo.

Demostración. Veamos que α es un homomorfismo continuo.

i. α es un homomorfismo: Sean $g_1, g_2 \in G$ y $\chi \in \hat{G}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\alpha(g_1 + g_2)(\chi) &= (g_1 \hat{+} g_2)(\chi) \\
&= \chi(g_1 + g_2) \\
&= \chi(g_1)\chi(g_2) \\
&= [\hat{g}_1(\chi)][\hat{g}_2(\chi)] \\
&= [\alpha(g_1)(\chi)][\alpha(g_2)(\chi)]
\end{aligned}$$

En resumen, puesto que $\chi \in \hat{G}$ no es fijo, tenemos que $\alpha(g_1 + g_2)(\chi) = [\alpha(g_1)(\chi)][\alpha(g_2)(\chi)]$, para todo $\chi \in \hat{G}$, lo cual implica que $\alpha(g_1 + g_2) = [\alpha(g_1)][\alpha(g_2)]$, lo que demuestra la afirmación.

ii. α es continuo: Para ésto es suficiente probar la continuidad de α en la identidad de G, e_G. Sea V una vecindad de la identidad en $\hat{\hat{G}}$, $e_{\hat{\hat{G}}}$. Veamos que existe U' vecindad de e_G tal que $\alpha(U') \subset V$. En efecto, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $V = M(K, V_\varepsilon)$ para algún $K \subset \hat{G}$ compacto y $V_\varepsilon \subset \mathbb{T}$ abierto. Sea U cualquier vecindad de e_G tal que $\overline{U}$ es compacto. Es claro que $M\big(\overline{U}, V_{\frac{\varepsilon}{2}}\big)$ es una vecindad de $e_{\hat{G}}$, puesto que si $\chi \equiv e_{\hat{G}}$, entonces $\chi(x) = 1_\mathbb{T}$, para todo $x \in \overline{U}$, por lo que $\chi(x) = 1_\mathbb{T} \in V_{\frac{\varepsilon}{2}}$, para todo $x \in \overline{U}$; esto es, $\chi(\overline{U}) \subset V_{\frac{\varepsilon}{2}}$, lo cual implica que $\chi \equiv e_{\hat{G}} \in M(\overline{U}, V_{\frac{\varepsilon}{2}})$. Entonces la colección $\big\{\chi + M\big(\overline{U}, V_{\frac{\varepsilon}{2}}\big)\big\}_{\chi \in \hat{G}}$ cubre al compacto K. Esto es, $K \subseteq \bigcup_{\chi \in \hat{G}} \Big(\chi + M\big(\overline{U}, V_{\frac{\varepsilon}{2}}\big)\Big)$. Así, existen $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ en $\hat{G}$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} \Big(\chi_i + M\big(\overline{U}, V_{\frac{\varepsilon}{2}}\big)\Big)$. Sean U_1 una vecindad de e_G tal que $U_1 \subseteq \overline{U}$, $\chi_i(g) \in V_{\frac{\varepsilon}{2}}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ y $g \in U_1$. Afirmamos que U_1 es la vecindad de e_G tal que $\alpha(U_1) \subset V$. En efecto, sea $g \in U_1$. Como $\alpha(g) \in \hat{\hat{G}}$, entonces $\alpha(g) = \chi$, para algún $\chi \in \hat{G}$. Sea $\psi \in K$. Veamos que $\alpha(g)(\psi) \in V_\varepsilon$. Puesto que $\psi \in K$, $\psi \in \chi_i + M(\overline{U}, V_{\frac{\varepsilon}{2}})$, para algún $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, esto es, $\psi = \chi_i + \chi$, para algún $\chi \in M(\overline{U}, V_{\frac{\varepsilon}{2}})$, lo cual implica que $\psi - \chi_i \in M(\overline{U}, V_{\frac{\varepsilon}{2}})$; así, $(\psi - \chi_i)(g) \in V_{\frac{\varepsilon}{2}}$, para todo $g \in \overline{U}$. En particular, $(\psi - \chi_i)(g) \in V_{\frac{\varepsilon}{2}}$, para todo $g \in U_1 \subseteq \overline{U}$. Como $\chi_i(g) \in V_{\frac{\varepsilon}{2}}$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, entonces $\psi(g) = \chi_i(g) - \chi(g) \in V_{\frac{\varepsilon}{2}} + V_{\frac{\varepsilon}{2}} \subseteq V_\varepsilon$. Así, para todo $\psi \in K$ $\alpha(g)(\psi) = \hat{g}(\psi) = \psi(g) \in V_\varepsilon$, lo cual implica que $\alpha(g) \in V$ y como $g \in U_1$ no es fijo, concluimos que para todo $g \in U_1$, $\alpha(g) \in V$, con lo que tenemos la afirmación.

$\square$

De la demostración obtendremos que α es un homomorfismo siempre que G sea abeliano. Existen ejemplos de grupos donde α no es continua (ver en [2]).

Del mismo modo, se conocen casos donde α es continua, esto es, cuando G es: localmente compacto, como vimos en el lema anterior; un k_0-grupo, como se puede ver en [9]; o pseudocompacto, como se puede ver en [2], entre otros.

Hemos demostrado que α es un homomorfismo continuo para cualquier grupo ALC, G. Pero la pregunta que surge naturalmente es bajo qué condiciones α es un isomorfismo topológico. El teorema de dualidad de Pontryagin-van Kampen establece a la compacidad local como condición suficiente para responder a dicho interrogante. Inmediato a ésto podemos preguntarnos si los grupos ALC son los únicos reflexivos. La respuesta a esta pregunta es, no; y el Teorema de Kaplan que afirma que el producto infinito de espacios reflexivos es reflexivo, lo justifica. Así, vemos grupos reflexivos que no son locamente compactos, pues el producto infinito de localmente compactos, no compactos, no es localmente compacto. En este trabajo, aunque no demostramos el Teorema de Kaplan, incluimos una versión finita de éste. Cabe anotar que en [9] puede verse que un subgrupo cerrado de un grupo reflexivo puede no ser reflexivo.

Teorema 3.4. *Si $G_1, G_2, \ldots, G_n$ son grupos ALC, entonces $\hat{G} = \prod_{i=1}^n \hat{G}_i$, donde $G = \prod_{i=1}^n G_i$.*

Demostración. Es suficiente probarlo para el caso $n = 2$. En efecto, sean G_1 y G_2 grupos ALC. Supongamos que $G = G_1 \times G_2$. Veamos que $\hat{G} = \hat{G}_1 \times \hat{G}_2$.

Primero, veamos que $\hat{G}$ es topológicamente isomorfo a $\hat{G}_1 \times \hat{G}_2$. Sea $\theta\colon \hat{G}_1 \times \hat{G}_2 \to G_1 \hat{\times} G_2$ dada por $\theta\big((\chi_1, \chi_2)\big) = [\chi_1, \chi_2]$, donde $[\chi_1, \chi_2]\colon G_1 \times G_2 \to \mathbb{T}$ es la aplicación definida por $[\chi_1, \chi_2]\big((g_1, g_2)\big) = \chi_1(g_1)\chi_2(g_2)$.

i. θ está bien definida, puesto que $[\chi_1, \chi_2]$ es un homomorfismo, por ser χ_1 y χ_2 homomorfismos; además, es continuo, puesto que el producto de aplicaciones continuas es una aplicación continua. Y usando ésto, se puede probar, fácilmente, que θ es un homomorfismo.

ii. θ es inyectiva: Sean (χ_1, χ_2) y $(\chi_1^{'}, \chi_2^{'})$ elementos de $\hat{G}_1 \times \hat{G}_2$ tales que $\theta\big((\chi_1, \chi_2)\big) = \theta\big((\chi_1^{'}, \chi_2^{'})\big)$. Veamos que $(\chi_1, \chi_2) = (\chi_1^{'}, \chi_2^{'})$. Como $[\chi_1, \chi_2] = [\chi_1^{'}, \chi_2^{'}]$, ntonces $[\chi_1, \chi_2](g_1, g_2) = [\chi_1^{'}, \chi_2^{'}](g_1, g_2)$ para todo $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$, en particular, para (g_1, e_{G_2}) y (e_{G_1}, g_2); lo cual implica que $\chi_1(g_1) = \chi_1^{'}(g_1)$ y $\chi_2(g_2) = \chi_2^{'}(g_2)$ para todo $g_1 \in G_1$ y $g_2 \in G_2$. Por lo tanto, $\chi_1 = \chi_1^{'}$ y $\chi = \chi_2^{'}$, como se quería demostrar.

iii. θ es suprayectiva: Sea $\varphi \in G_1 \hat{\times} G_2$. Entonces $\varphi\colon G_1 \times G_2 \to \mathbb{T}$ es un homomorfismo continuo, además, para todo $(g_1, g_2) \in G_1 \times G_2$, $\varphi\big((g_1, g_2)\big) = \varphi\big((g_1, e_{G_2}) +_{\hat{G}_1 \times \hat{G}_2} (e_{G_1}, g_2)\big) = \varphi\big((g_1, e_{G_2})\big)\varphi\big((e_{G_1}, g_2)\big)$. Definamos $\chi_1\colon G_1 \to \mathbb{T}$ por $\chi_1(g_1) = \varphi\big((g_1, e_{G_2})\big)$ y $\chi_2\colon G_2 \to \mathbb{T}$ por $\chi_2(g_2) = \varphi\big((e_{G_1}, g_2)\big)$. Entonces $\chi_1 \in \hat{G}_1$ y $\chi_2 \in \hat{G}_2$, además, $\varphi = [\chi_1, \chi_2]$. Por lo tanto, existe $(\chi_1, \chi_2) \in \hat{G}_1 \times \hat{G}_2$ tal que $\theta\big((\chi_1, \chi_2)\big) = [\chi_1, \chi_2] = \varphi$, con lo que tenemos la suprayectividad.

iv. θ es continua: Es suficiente mostrar la continuidad de θ en la identidad $(e_{\hat{G}_1}, e_{\hat{G}_2})$ de $\hat{G}_1 \times \hat{G}_2$. En efecto, sea $M(K, V_\varepsilon)$ una vecindad de $e_{G_1 \hat{\times} G_2}$, donde $K \subset G_1 \times G_2$ es compacto. Veamos que existe una vecindad W de $(e_{\hat{G}_1}, e_{\hat{G}_2})$ en $\hat{G}_1 \times \hat{G}_2$ tal que $\theta(W) \subset M(K, V_\varepsilon)$. Si hacemos $K_1 = p_1(K)$ y $K_2 = p_2(K)$, donde p_1 y p_2 son las proyecciones de $G_1 \times G_2$ sobre G_1 y G_2, respectivamente, entonces $W = M\big(K_1, V_{\frac{\varepsilon}{2}}\big) \times M\big(K_2, V_{\frac{\varepsilon}{2}}\big)$ es una vecindad de $(e_{\hat{G}_1}, e_{\hat{G}_2})$ tal que $\theta\Big(M\big(K_1, V_{\frac{\varepsilon}{2}}\big) \times M\big(K_2, V_{\frac{\varepsilon}{2}}\big)\Big) \subset M(K, V_\varepsilon)$. Sean $\chi \in \theta\Big(M\big(K_1, V_{\frac{\varepsilon}{2}}\big) \times M\big(K_2, V_{\frac{\varepsilon}{2}}\big)\Big)$ y $k \in K$. Por demostrar, que $\chi(k) \in V_\varepsilon$. Sean $\chi_1 \in M\big(K_1, V_{\frac{\varepsilon}{2}}\big)$ y $\chi_2 \in M\big(K_2, V_{\frac{\varepsilon}{2}}\big)$ tales que $\chi = \theta\big((\chi_1, \chi_2)\big) = [\chi_1, \chi_2]$, $k_1 \in K_1$ y $k_2 \in K_2$ tales que $k = (k_1, k_2)$. Entonces $\chi(k) = [\chi_1, \chi_2](k_1, k_2) = \chi_1(k_1)\chi_2(k_2) \subset V_{\frac{\varepsilon}{2}} V_{\frac{\varepsilon}{2}} \subset V_\varepsilon$. Por lo que $\chi(k) \in V_\varepsilon$, para todo $k \in K$, lo cual implica que $\chi(K) \subset V_\varepsilon$, esto es, $\chi \in M(K, V_\varepsilon)$, y ésto, para todo χ, con lo que queda demostrada la afirmación.

v. θ^{-1} es continua en $e_{G_1 \hat{\times} G_2}$: Sea W una vecindad de $(e_{\hat{G}_1}, e_{\hat{G}_2})$. Veamos que existe W' vecindad de $e_{G_1 \hat{\times} G_2}$ tal que $\theta(W') \subset W$ o, equivalentemente, $W' \subset \theta(W)$.

Sin pérdida de generalidad, tomemos $W = M(K_1, V_\varepsilon) \times M(K_2, V_\varepsilon)$, vecindad de $(e_{\hat{G}_1}, e_{\hat{G}_2})$. Entonces $W' = M\Big(\big(K_1 \cup \{e_{G_1}\}\big) \times \big(K_2 \cup \{e_{G_2}\}\big), V_\varepsilon\Big)$ es una vecindad de $e_{G_1 \hat{\times} G_2}$ tal que $W' \subset \theta(W)$. En efecto, sea $\chi \in W'$ y definamos: $\chi_1 \colon G_1 \to \mathbb{T}$ y $\chi_2 \colon G_2 \to \mathbb{T}$ por $\chi_1(g_1) = \chi(g_1, e_{G_2})$ y $\chi_2(g_2) = \chi(e_{G_1}, g_2)$. Entonces $\chi_1 \in \hat{G}_1$ y $\chi_2 \in \hat{G}_2$, además, $\chi_1 \in M(K_1, V_\varepsilon)$ y $\chi_2 \in M(K_2, V_\varepsilon)$. Finalmente, $\chi = [\chi_1, \chi_2]$, pues $\chi\big((g_1, g_2)\big) = \chi\big((g_1, e_{G_2})\big)\chi\big((e_{G_1}, g_2)\big) = [\chi_1, \chi_2](g_1, g_2)$. Así, existe $(\chi_1, \chi_2) \in M(K_1, V_\varepsilon) \times M(K_2, V_\varepsilon) = W$ tal que $\chi = \theta\big((\chi_1, \chi_2)\big)$, por lo que $\chi \in \theta(W)$.

De *i,ii,iii,iv* y *v*, concluimos que θ es un isomorfismo topológico. Por lo tanto, el dual del producto de un número finito de grupos topológicos es el producto de sus respectivos duales. □

Definición 3.5. Un grupo D es *divisible* si $D = \{x^n : x \in D\}$, para toda $n \in \mathbb{N}$. Esto es, todo elemento de D tiene una raíz n-ésima.

Lema 3.6. *Sean G un grupo abeliano y H un subgrupo de G. Si $\varphi \colon H \to D$, donde D es un grupo divisible, es un homomorfismo, entonces φ se puede extender a $\langle H \cup \{x\} \rangle$, para todo $x \in G \setminus H$.*

Demostración. Sea $x \in G \backslash H$ y consideremos al grupo $\langle H \cup \{x\}\rangle = \{hx^n : h \in H, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$. Veamos que φ puede extenderse a $\langle H \cup \{x\}\rangle$. Supongamos que $x^n \notin H$, para todo $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Definamos $\psi(hx^n) = \varphi(h)$. Claramente, ψ está bien definida, pues si hx^n y $h'x^{n'}$ son elementos de $\langle H \cup \{x\}\rangle$ tales que $hx^n = h'x^{n'}$, entonces $h(h')^{-1} = x^{n'-n}$, lo cual implica que $x^{n'-n} \in H$ y ésto, por nuestro supuesto, se da sólo si $n' - n = 0$. Por lo tanto, $h = h'$, con lo cual tenemos que $\psi(hx^n) = \psi(h'x^{n'})$. Además, por la conmutatividad de G, podemos ver, fácilmente, que ψ es un homomorfismo y, por la forma en que lo definimos, vemos que $\psi \restriction_H = \varphi$. Ahora, supongamos que $x^n \in H$, para algún $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Sea $k = \text{mín}\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : x \in H\}$. Entonces $\varphi(x^k) = d \in D$, por lo que existe $z \in D$ tal que $z^k = d$ (ésto por ser D divisible). Definamos $\psi(hx^n) = \varphi(h)z^n$. Veamos que ψ está bien definida. Sean hx^n y $h'x^{n'}$ en $\langle H \cup \{x\}\rangle$ tales que $hx^n = h'x^{n'}$. Entonces $h(h') = x^{n'-n} \in H$, de donde, $n' - n = km$, para algún $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (1) ; luego $n = ak + r$ y $n' = bk + r$, para algunos $a, b, r \in \mathbb{Z}$, con $a \neq 0 \neq b$ y $r > 0$. (2) Así, $z^n = z^{ka+r} = (z^k)^a z^r = d^a z^r$ y $z^{n'} = d^b z^r$. Por otra parte, de (1) y (2) tenemos $hx^{ak}x^r = hx^{bk}x^r$, esto es, $hx^{ak} = h'x^{bk}$; así $\varphi(hx^{ak}) = \varphi(h'x^{bk})$, de aquí, $\varphi(h)\varphi(x^{ak}) = \varphi(h')\varphi(x^{bk})$, $\varphi(h)[\varphi(x^k)]^a = \varphi(h')[\varphi(x^k)]^b$, de donde, $\varphi(h)d^a = \varphi(h')d^b$ y $\varphi(h)d^a z^r = \varphi(h')d^b z^r$. Luego, $\varphi(h)z^n = \varphi(h')z^{n'}$, lo cual implica que $\psi(hx^n) = \psi(h'x^{n'})$. Usando la conmutatividad de G se prueba que ψ es un homomorfismo y, por la forma como está definida ésta, tenemos que extiende a φ. □

Lema 3.7. *Sean G y K grupos abelianos, H un subgrupo de G y $\varphi \colon H \to K$ un homomorfismo. Si todo homomorfismo $\psi \colon M \to K$, donde M es un subgrupo de G, se puede extender a $\langle M \cup \{x\}\rangle$, para todo $x \in G$, entonces φ se puede extender a G.*

Demostración. Consideremos el conjunto

$\mathcal{F} = \{\psi \in \text{Hom}(M, K) : M$ es un subgrupo de $G, \psi \restriction_H = \varphi\}$. Entonces $\mathcal{F} \neq \varnothing$, pues $\varphi \in \mathcal{F}$ y $(\mathcal{F}, \subseteq)$ es un COPO. Sea $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ una cadena. Luego, $\bigcup \mathcal{C}$ es una cota superior para $\mathcal{C}$. Veamos que $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$. En efecto, $\bigcup \mathcal{C} \colon \bigcup_{\psi \in \mathcal{C}} \text{dom}\, \psi \to K$ es una función, pues si (a_1, b_1) y (a_2, b_2) están en $\bigcup \mathcal{C}$ y $a_1 = a_2$, entonces existen $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}$ tales que $(a_1, b_1) \in \psi_1$ y $(a_2, b_2) \in \psi_2$. Como $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}$, entonces $\psi_1 \subseteq \psi_2$ o $\psi_2 \subseteq \psi_1$. Si $\psi_1 \subseteq \psi_2$, (a_1, b_1) y (a_2, b_2) están en ψ_2 y, puesto que ψ_2 es una función, tenemos que $b_1 = b_2$. De la misma forma se procede si $\psi_2 \subseteq \psi_1$. Además, $\bigcup \mathcal{C}$ es un homomorfismo, pues si $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in \bigcup \mathcal{C}$, existen $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}$ tales que $(a_1, b_1) \in \psi_1$ y $(a_2, b_2) \in \psi_2$. Si $\psi_1 \subset \psi_2$, (a_1, b_1) y (a_2, b_2) están en ψ, lo cual implica que

$(a_1{+}a_2, b_1{+}b_2) \in \psi_2$, por ser ψ_2 un homomorfismo. Así, $(a_1{+}a_2, b_1{+}b_2) \in \bigcup \mathcal{C}$. Del mismo modo se procede si $\psi_2 \subseteq \psi_1$. Claramente, $\bigcup_{\psi \in \mathcal{C}} \operatorname{dom} \psi \leq G$, pues si $x_1, x_2 \in \bigcup_{\psi \in \mathcal{C}} \operatorname{dom} \psi$, existen $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{C}$ tales que $x_\in \operatorname{dom} \psi_1$ y $x_2 \in \operatorname{dom} \psi_2$. Si $\psi_1 \subseteq \psi_2$, entonces $\operatorname{dom} \psi_1 \subseteq \operatorname{dom} \psi_2$, por lo que $x_1, x_2 \in \operatorname{dom} \psi_2 \leq G$; así, $x_1 + x_2 \operatorname{dom} \psi_2 \subset \bigcup_{\psi \in \mathcal{C}} \operatorname{dom} \psi$. Análogamente se prueba si $\psi_2 \subseteq \psi_1$.

Finalmente, es fácil ver que $\bigcup \mathcal{C} \restriction_H = \varphi$, pues si $(x, y) \in \varphi$, entonces $(x, y) \in \psi \restriction_H$, para todo $\psi \in \mathcal{F}$, en particular, $(x, y) \in \psi \restriction_H$, para todo $\psi \in \mathcal{C}$. Así, $(x, y) \in \bigcup \mathcal{C} \restriction_H$. Por lo tanto, $\bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{F}$, lo cual implica que toda cadena está acotada superiormente y ésto, por el lema de *Zorn*, implica que $\mathcal{F}$ tiene un elemento maximal. Sea $\lambda \colon M' \to K$ dicho elemento. Veamos que $M' = G$. Supongamos que $G \setminus M' \neq \varnothing$. Sea $k \in G \setminus M'$. Entonces λ se puede extender a $\langle M' \cup \{k\} \rangle$, lo que contradice la maximalidad de λ. Por lo tanto, $G \setminus M' = \varnothing$, por lo que $G = M'$. $\square$

De los dos lemas anteriores se concluye la siguiente proposición

Proposición 3.8. *Si K es un subgrupo de un grupo abeliano G y $\varphi \colon K \to D$ es un homomorfismo, donde D es un grupo abeliano divisible, entonces φ se puede extender a un homomorfismo $\psi \colon G \to D$.*

Corolario 3.9. *Si G es un grupo abeliano, entonces para cualquier g y h en G, con $g \neq h$, existe un homomorfismo $\varphi \colon G \to \mathbb{T}$ tal que $\varphi(g) \neq \varphi(h)$.*

Demostración. Es suficiente mostrar que para cada $g \neq e_G$ existe un homomorfismo $\varphi \colon G \to \mathbb{T}$ tal que $\varphi(g) \neq e_{\mathbb{T}}$.

i. Supongamos que $g^n = e_G$ y $g^k \neq e_G$ para $0 < k < n$. Sea $H = \{g^m : m \in \mathbb{Z}\}$. Definamos $\varphi \colon G \to \mathbb{T}$ por $\varphi(g^m) = r^m$, para cada m, donde $r = \sqrt[n]{e_{\mathbb{T}}} \neq e_T$. Ahora, por la Proposición 3.8, podemos extender φ a todo G.

ii. Supongamos que $g^n \neq e_G$ para todo n. Definamos $\varphi(g) = z$ para algún $z \neq e_{\mathbb{T}} \in \mathbb{T}$. Extendemos φ a H y, por la Proposición 3.8, a todo G.

$\square$

Proposición 3.10. *Sean G un grupo abeliano y H un subgrupo abierto y discreto de G. Entonces G es topológicamente isomorfo a $H \times G/H$, donde G/H es un grupo discreto.*

Ver la demostración en [8].

Proposición 3.11. *Sean A y B grupos ALC y $f\colon A \to B$ un homomorfismo continuo. Si $\hat{f}\colon \hat{B} \to \hat{A}$ es la aplicación dada por $\hat{f}(\chi)(a) = (\chi \circ f)(a)$, para todo $\chi \in \hat{B}$ y $a \in A$, entonces $\hat{f}$ es un homomorfismo continuo. Además, si f es suprayectiva, entonces $\hat{f}$ es inyectiva; y si f es abierta e inyectiva, entonces $\hat{f}$ es suprayectiva.*

Demostración. Supongamos que $\hat{f}\colon \hat{B} \to \hat{A}$ es la aplicación definida por $\hat{f}(x)(a) = (\chi \circ f)(a)$, para todo $\chi \in \hat{B}$ y $a \in A$. Veamos que $\hat{f}$ es un homomorfismo continuo. Sean $\chi_1, \chi_2 \in \hat{B}$ y $a \in A$. Entonces $\hat{f}(\chi_1 + \chi_2)(a) = (\chi_1 +_{\hat{B}} \chi_2)(f(a)) = [\chi_1(f(a))][\chi_2(f(a))] = [\hat{f}(\chi_1)(a)][\hat{f}(\chi_2)(a)] = [\hat{f}(\chi_1) +_{\hat{A}} \hat{f}(\chi_2)](a)$. Por lo que $\hat{f}(\chi_1 +_{\hat{B}} \chi_2) = \hat{f}(\chi_1) +_{\hat{A}} \hat{f}(\chi_2)$.

Para ver la continuidad de $\hat{f}$ consideremos $M(K,U)$ un abierto subbásico de $\hat{A}$. Entonces $(\hat{f})^{-1}(M(K,U)) = M(f(K),U)$ es un abierto subbásico de $\hat{B}$. En efecto, sea $\chi \in (\hat{f})^{-1}(M(K,U))$. Entonces $\hat{f}(\chi) \in M(K,U)$, lo cual implica que $\hat{f}(\chi)(K) \subset U$, esto es, $\hat{f}(k) \in U$, para todo $k \in K$; por lo que $\chi f(k) \in U$, para todo $k \in K$. Así, $\chi(f(K)) \subset U$, por lo tanto, $\chi \in M(f(K),U)$, lo cual demuestra que $(\hat{f})^{-1}(M(K,U)) \subseteq M(f(K),U)$. En forma análoga se demuestra que $M(f(K),U) \subseteq (\hat{f})^{-1}(M(K,U))$, con lo que se completa la igualdad.

Ahora, supongamos que f es suprayectiva. Por demostrar que $\hat{f}$ es inyectiva. Sean χ_1, y χ_2 en $\hat{B}$ tales que $\hat{f}(\chi_1) = \hat{f}(\chi_2)$. Entonces $\hat{f}(\chi_1)(a) = \hat{f}(\chi_2)(a)$, para todo $a \in A$. Así $\chi_1(f(a)) = \chi_2(f(a))$, para todo $a \in A$ y, por la suprayectividad de f, $\chi_1(b) = \chi_2(b)$, para todo $b \in B$. Por lo tanto, $\chi_1 = \chi_2$, con lo que tenemos la inyectividad de $\hat{f}$.

Finalmente, supongamos que f es abierta e inyectiva y demostremos que $\hat{f}$ es suprayectiva. Sea $\chi \in \hat{A}$. Queremos ver que existe $\varphi \in \hat{B}$ tal que $\hat{f}(\varphi) = \chi$, esto es, $\varphi \circ f = \chi$. Como f es una aplicación inyectiva, existe una aplicación $g\colon B \to A$ tal que $g \circ f = 1_A$. Si hacemos $\psi = g \restriction_{\operatorname{Im} f}$, entonces ψ es un homomorfismo, por lo que $\sigma = \chi \circ \psi\colon \operatorname{Im} f \to \mathbb{T}$ es un homomorfismo. Así, existe un homomorfismo $\varphi\colon B \to \mathbb{T}$ que extiende a σ, tal que $\varphi \circ f = \chi$ y φ es continuo. En efecto, si $a \in A$, entonces $(\varphi \circ f)(a) = \varphi(f(a)) = \sigma(f(a)) = (\chi \circ \psi)(f(a)) = \chi(\psi(f(a))) = \chi(g(f(a))) = \chi(a)$, con lo que tenemos la igualdad entre $\varphi \circ f$ y χ.

Para ver la continuidad de φ en B, basta probar dicha continuidad en e_B. Sea $U \in \mathbb{T}$ una vecindad de $e_{\mathbb{T}}$. Veamos que existe V vecindad de e_B tal que $\varphi(V) \subset U$. Como χ es continua, en particular, en e_A existe W vecindad de e_A tal que $\chi(W) \subset U$, esto es, $(\varphi \circ f)(W) \subset U$; de donde, $\varphi(f(W)) \subset U$. Como f es un homomorfismo y W es una vecindad de e_A, entonces $f(W)$ es una vecindad de e_B, si tomamos $V = f(W)$, completamos lo que queríamos ver. Por lo tanto, $\varphi \in \hat{B}$ y $\hat{f}(\varphi) = \varphi \circ f = \chi$, lo cual demuestra la suprayectividad de $\hat{f}$. $\square$

Corolario 3.12. *Si B es un grupo cociente de A, donde A y B son grupos abelianos compactos de Hausdorff o grupos abelianos discretos, entonces $\hat{B}$ es topológicamente isomorfo a un subgrupo de $\hat{A}$.*

Demostración. Sean A y B grupos abelianos compactos de Hausdorff. Supongamos que $B = A/H$ es un grupo cociente de A. Consideremos el homomorfismo cociente $\varphi\colon A \to B$, donde $B = A/H$. Entonces φ es un homomorfimo continuo, suprayectivo y abierto. Por el teorema anterior, la aplicación $\hat{\varphi}\colon \hat{B} \to \hat{A}$ es un homomorfismo continuo e inyectivo. Entonces la aplicación $\psi\colon \hat{B} \to \operatorname{Im}\hat{\varphi}$ dada por $\psi(\chi)(a) = \hat{\varphi}(\chi)(a) = \chi(a)$, para todo $a \in A$ es un homomorfismo continuo y biyectivo. Ahora, como $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son discretos e $\operatorname{Im}\hat{\varphi}$ es un subgrupo de $\hat{A}$, entonces $\psi^{-1}\colon \operatorname{Im}\hat{\varphi} \to \hat{B}$ es continua. Así, ψ es un isomorfismo topológico. Del mismo modo, si A y B son discretos y usamos la proposición anterior, considerando las aplicaciones $\varphi, \hat{\varphi}$ y ψ como en el caso anterior, tenemos que $\psi\colon \hat{B} \to \operatorname{Im}\hat{\varphi}$ es un homomorfismo continuo y biyectivo. Ahora, como $\hat{A}$ y $\hat{B}$ son compactos, entonces $\operatorname{Im}\hat{\varphi}$ es un subgrupo compacto de $\hat{A}$ y, por lo tanto, de Hausdorff; y, puesto que ψ es continua y biyectiva, ψ es un homomorfismo, por lo que ψ es un isomorfismo topológico. $\square$

Corolario 3.13. *Sean A y B grupos abelianos discretos. Si A es subgrupo de B, entonces $\hat{A}$ es un grupo cociente de $\hat{B}$.*

Demostración. Consideremos la función inclusión de A en B, $f\colon A \hookrightarrow B$. Entonces f es un homomorfismo continuo, inyectivo y abierto; por la proposición anterior, la aplicación $\hat{f}\colon \hat{B} \to \hat{A}$ es un homomorfismo continuo y suprayectivo. Así, el primer teorema de isomorfismos implica que existe un isomorfismo $\varphi\colon \hat{A} \to \hat{B}/\ker\hat{f}$. Claramente, $\ker\hat{f}$ es un subgrupo cerrado de $\hat{B}$ por lo que $\hat{B}/\ker\hat{f}$ es un grupo cociente de $\hat{B}$. Veamos que φ es un isomorfismo topológico. Sólo falta ver que φ y φ^{-1} son continuas. En efecto, puesto que $\hat{f}$ es cerrada y suprayectiva, entonces $\hat{f}$ es cociente. Además, por el primer teorema de isomorfismos, $\varphi\circ\hat{f} = \pi$, donde π es el homomorfismo cociente de $\hat{B}$ en $\hat{B}/\ker\hat{f}$. Entonces φ es continuo y, como $\varphi^{-1} \circ \pi = \hat{f}$, tenemos la continuidad de φ^{-1}. Por lo tanto, φ es un isomorfismo topológico. $\square$

Lema 3.14. *Sea G un grupo ALC. Entonces la evaluación canónica α es uno a uno si, y sólo, si G tiene suficientes caracteres para separar puntos. Esto es, para cada g y h en G, con $g \neq h$, existe $\chi \in \hat{G}$ tal que $\chi(g) \neq \chi(h)$.*

Demostración. Supongamos que α es uno a uno y que existen g y h en G tales que $g \neq h$ y $\chi(g) = \chi(h)$, para todo $\chi \in \hat{G}$. Entonces $\hat{g}(\chi) = \hat{h}(\chi)$, para todo $\chi \in \hat{G}$, por lo que $\hat{g} = \hat{h}$, esto es, $\alpha(g) = \alpha(h)$ y, por la inyectividad de α, tenemos que $g = h$, lo que contradice nuestro supuesto. Por lo tanto, para cada g y h en G, con $g \neq h$, existe $\chi \in \hat{G}$ tal que $\chi(g) \neq \chi(h)$.

Recíprocamente, supongamos que G tiene suficientes caracteres para separar puntos. Veamos que α es inyectiva. En efecto, sean g y h en G con $g \neq h$. Entonces existe $\chi \in \hat{G}$ tales que $\chi(g) \neq \chi(h)$; Así $\hat{g}(\chi) \neq \hat{h}(\chi)$, para algún $\chi \in \hat{G}$, lo cual implica que $\hat{g} \neq \hat{h}$. Por lo tanto, $\alpha(g) \neq \alpha(h)$, con lo que tenemos la inyectividad. □

Proposición 3.15. *Sea G un grupo ALC reflexivo y tal que todo grupo cociente no trivial de Hausdorff de $\hat{G}$, $\hat{G}/B$, tiene un caracter no trivial. Si A es un subgrupo de $\hat{G}$ que separa puntos de G, entonces A es denso en $\hat{G}$.*

Demostración. Supongamos que A no es denso en $\hat{G}$. Entonces $B = \overline{A} \subset \hat{G}$ y $\hat{G}/B$ es un grupo ALC. Así, existe un homomorfismo continuo no trivial $\chi\colon \hat{G}/B \to \mathbb{T}$. Sea $\varphi\colon \hat{G} \to \hat{G}/B$ el homomorfismo cociente. Entonces $\chi \circ \varphi\colon G \to \mathbb{T}$ es un homomorfismo continuo tal que $\chi \circ \varphi(\hat{G}) = \chi(\varphi(\hat{G})) = \chi(\hat{G}/B) \neq \{e_{\mathbb{T}}\}$, pues χ es no trivial, pero $(\chi \circ \varphi)(B) = \chi(\varphi(B)) = \chi(\{\hat{G}/B\}) = \{e_{\mathbb{T}}\}$. Como G es reflexivo y $\chi \circ \varphi \in \hat{\hat{G}}$, existe $g \in G$ tal que $\hat{g} = \alpha(g) = \chi \circ \varphi$. Así, $\hat{g}(\psi) = (\chi \circ \varphi)(\psi)$, para todo $\psi\hat{G}$, esto es, $(\chi \circ \varphi)(\psi) = \psi(g)$, para todo $\psi \in \hat{G}$. Por lo cual, $\psi(g) = e_{\mathbb{T}}$, para todo $\psi \in \hat{G}$, en particular, para todo $\psi \in A$. Como A separa puntos de G, $g = e_G$. Luego, $\hat{g} = \hat{e}_G$. Así, $(\chi \circ \varphi)(\hat{G}) = \hat{g}(\hat{G}) = \hat{e}_g(\hat{G}) = \{e_{\mathbb{T}}\}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, A es denso en $\hat{G}$. □

Capítulo 4

Dualidad para grupos compactos y discretos

Teorema 4.1 (Peter, Weyl, van Kampen). *Todo grupo abeliano compacto tiene suficientes caracteres para separar puntos.*

Ver apéndice [B].

Corolario 4.2. *Sea G un grupo abeliano compacto. Entonces G es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado del producto $\prod_{i\in I} T_i$, donde cada T_i es topológicamente isomorfo a $\mathbb{T}$ e I es algún conjunto de índices.*

Demostración. Por el Teorema 4.1, G tiene suficientes caracteres para separar puntos. Definamos la aplicación $\delta\colon G \to \prod_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{T}_\chi$ por $\delta(g) = \{\chi(g)\}_{\chi\in\hat{G}} \in \prod_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{T}_\chi$. Claramente, δ está bien definida y es un homomorfismo continuo. Además, es inyectiva, por el lema anterior y el hecho que separa puntos. Consideremos la aplicación $\varphi\colon G \to \operatorname{Im}\delta$ dada por $\varphi(g) = \delta(g)$. Entonces φ es un homomorfismo, continuo y suprayectivo de un compacto en un Hausdorff, por lo que φ es un homeomorfismo. Así, φ es un isomorfismo topológico de G en un subgrupo cerrado del $\prod_{\chi\in\hat{G}} \mathbb{T}_\chi$ que es topológicamente isomorfo al $\prod_{i\in I} T_i$, lo cual implica que G es un subgrupo cerrado del $\prod_{i\in I} T_i$. $\square$

Corolario 4.3. *Sea G un grupo abeliano compacto. Entonces toda vecindad U de e_G contiene un subgrupo cerrado H tal que G/H es topológicamente isomorfo a $\mathbb{T}^n \times D$, para algún grupo discreto y finito D y $n \geq 0$.*

Demostración. Por el Corolario 4.2, G es topológicamente isomorfo a un subgrupo cerrado de $\prod = \prod_{i\in I} T_i$, donde cada T_i es isomorfo a $\mathbb{T}$. Por lo cual, si V es un abierto canónico de $\prod$, entonces $G \cap V$ es un abierto de G. Consideremos, para cada $i \in I$, al conjunto $G_i = \{x \in \prod : x(\beta) = 1, i \neq \beta\}$. Entonces $G_i \cong \mathbb{T}$. Además, $G_i \cap G \leq \mathbb{T}$ es cerrado. Entonces $G_i \cap G$ es $\mathbb{T}$ o un grupo cíclico finito. Ahora, consideremos, para cada $i \in I$, al conjunto

$$H_i = \begin{cases} T_i, & si\ i \in A \setminus J \\ \{1\}, & si\ i \in J \end{cases}$$

donde $|J| < \aleph_0$. Entonces $\prod_{i \in I} H_i$ es un subgrupo cerrado de $\prod_{i \in I} T_i$. Sea $H = (\prod_{i \in I} H_i) \cap G$. Entonces H es un subgrupo cerrado de G tal que G/H es topológicamente isomorfo a $\prod_{i \in I} N_i$, donde

$$N_i = \begin{cases} \{1\}, & si\ i \in A \setminus J \\ G_i \cap G, & si\ i \in J \end{cases}$$

$\square$

Proposición 4.4. *Sea G un grupo abeliano discreto. Si A es un subgrupo de $\hat{G}$ que separa puntos de G, entonces A es denso en $\hat{G}$.*

Demostración. Sea $M(K, U)$ un abierto subbásico de $\hat{G}$. Veamos que $M(K, U) \cap A \neq \{e_{\hat{G}}\}$. Como G es discreto y $K \subset G$ es compacto, entonces K es finito. Sean $H = \langle K \rangle$, $f \colon H \hookrightarrow G$ el homomorfismo inclusión y $\hat{f} \colon \hat{G} \to \hat{H}$ la aplicación dada por $\hat{f}(\chi) = \chi \restriction_H$. Entonces, por la Proposición 3.11, $\hat{f}$ es un homomorfismo continuo, suprayectivo y abierto. Como A separa puntos de G, $\hat{f}(A)$ separa puntos de H y como H es un grupo abeliano, discreto y finitamente generado, entonces H es reflexivo; además, todo grupo cociente no trivial de H, H/B tiene un caracter no trivial. Por lo tanto, la Proposición 3.15 implica que $\hat{f}(A)$ es denso en $\hat{H}$. Así, en particular, $\hat{f}(M(K, U)) \cap \hat{f}(A) \neq \varnothing$. Esto es, existe $\varphi \in \hat{f}(M(K, U))$ y $\varphi \in \hat{f}(A)$. Luego, existen $\chi_1 \in A$ y $\chi_2 \in M(K, U)$ tales que $\chi_1 \restriction_H = \chi_2 \restriction_H$. Ahora, $(\chi_1 \restriction_H)(K) = (\chi_2 \restriction_H)(K)$. Por lo que existe $\chi_1 \in A$ tal que $\chi_1 \restriction_H \in M(K, U)$. Por lo tanto, $A \cap M(K, U) \neq \varnothing$. $\square$

El siguiente teorema garantiza la reflexividad de los grupos compactos.

Teorema 4.5. *Todo grupo abeliano compacto es reflexivo.*

Demostración. Como G es compacto, el Teorema 4.1 implica que G tiene suficientes caracteres para separar puntos. Por lo tanto, la aplicación α es inyectiva. Además, por el Lema 3.3, α es un homomorfismo continuo. Claramente, $\alpha(G)$ separa puntos de $\hat{G}$. En efecto, sean $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$ tales que $\chi_1 \neq \chi_2$. Entonces existe $g \in G$ tal que $\chi_1(g) \neq \chi_2(g)$. Puesto que $g \in G$, $\alpha(g) = \hat{g} \in \alpha(G)$, así, existe $\hat{g} \in \alpha(G)$ tal que $\hat{g}(\chi_1) = \chi_1(g) \neq \chi_2(g) = \hat{g}(\chi_2)$. Ahora, como G es compacto, $\hat{G}$ es discreto y, por la proposición anterior, $\alpha(G) \leq \hat{\hat{G}}$ es denso en $\hat{\hat{G}}$. Además, $\alpha(G)$ es cerrado en $\hat{\hat{G}}$, por ser subconjunto compacto de un Hausdorff, así, $\alpha(G) = \overline{\alpha(G)} = \hat{\hat{G}}$. Por lo tanto, α es suprayectiva. En resumen, α es una aplicación continua y biyectiva de un compacto en un Hausdorff, por lo cual α es un homeomorfismo y, puesto que α es un homomorfismo, concluimos que α es un isomorfismo topológico. □

Corolario 4.6. *Sea G un grupo abeliano y compacto. Si A es un subgrupo de $\hat{G}$ que separa puntos de G, entonces $A = \hat{G}$.*

Demostración. Como G es compacto, por el Teorema 4.5, G es reflexivo; además, todo grupo cociente no trivial de $\hat{G}$ tiene un caracter no trivial. En efecto, sea $\hat{G}/B$, donde B es un subgrupo cerrado de $\hat{G}$, un grupo cociente no trivial de $\hat{G}$, entonces $\hat{G}/B \neq \hat{G}$ y $\hat{G}/B \neq e_{\hat{G}}$. Así, existe $\chi \in \hat{G}/B$ con $\chi \neq e_{\hat{G}} \in \hat{G}/B$, por el Corolario 3.9, existe un homomorfismo $\varphi\colon \hat{G}/B \to \mathbb{T}$ tal que $\varphi(\chi) \neq \varphi(e_{\hat{G}}) = e_{\mathbb{T}}$, lo cual implica que φ es no trivial; además, φ es continuo, puesto que $\hat{G}/B$ es discreto. Por lo tanto, φ es un caracter no trivial de $\hat{G}/B$. Entonces, por la Proposición 3.15, como A es un subgrupo de $\hat{G}$ que separa puntos de G, tenemos que A es denso en $\hat{G}$; y, puesto que A cerrado, por ser $\hat{G}$ discreto, tenemos que $A = \hat{G}$. □

Corolario 4.7. *Sean G un grupo ALC con suficientes caracteres para separar puntos y K un subgrupo compacto de G. Entonces todo caracter de K se puede extender a un caracter de G.*

Demostración. Sea A la colección de todos los caracteres de K que se pueden extender a caracteres de G. Entonces A es un subgrupo de $\hat{K}$. Ahora, como G tiene suficientes caracteres para separar puntos, entonces A separa puntos de K, pues si k_1 y k_2 son elementos de $K \subset G$ tales que $k_1 \neq k_2$, entonces existe $\chi \in \hat{G}$ tal que $\chi(k_1) \neq \chi(k_2)$; si tomamos $\varphi = \chi \restriction_K$, entonces $\varphi \in A$ y $\varphi(k_1) = \chi(k_1) \neq \chi(k_2) = \varphi(k_2)$. Aplicando el Corolario 4.6 a K tenemos que $A = \hat{K}$. □

Corolario 4.8. *Sean B un grupo ALC con suficientes caracteres para separar puntos, A un grupo compacto y $f\colon A \to B$ un homomorfismo continuo e* *inyectivo. Entonces la aplicación $\hat{f}\colon \hat{B} \to \hat{A}$, definida en la Proposición 3.11, es un homomorfismo cociente.*

Demostración. Como A y B son grupos ALC y $f\colon A \to B$ es un homomorfismo continuo, la Proposición 3.11 implica que $\hat{f}\colon \hat{B} \to \hat{A}$, dada por $[\hat{f}(\chi)](a) = (\chi \circ f)(a)$, para todo $a \in A$, es un homomorfismo continuo. Para ver que $\hat{f}$ es cociente basta demostrar que $\hat{f}$ es abierta y suprayectiva. La primera afirmación es evidente, puesto que $\hat{A}$ es discreto. Para ver que $\hat{f}$ es suprayectiva debemos demostrar que $\hat{f}(\hat{B})$, subgrupo de $\hat{A}$, separa puntos de A y aplicar el Corolario 4.6. En efecto, sean $a_1, a_2 \in A$ con $a_1 \neq a_2$. Entonces $f(a_1) \neq f(a_2)$, por la inyectividad de f, y como B tiene suficientes caracteres para separar puntos, existe $\chi \in \hat{B}$ tal que $\chi(f(a_1)) \neq \chi(f(a_2))$. Así, existe $\hat{f}(\chi) \in \hat{f}(\hat{B})$ tal que $[\hat{f}(\chi)](a_1) = \chi(f(a_1)) \neq \chi(f(a_2)) = [\hat{f}(\chi)](a_2)$, con lo cual tenemos que $\hat{f}(\hat{B})$ separa puntos de A, y , por el Corolario 4.6, tenemos que $\hat{f}(\hat{B}) = \hat{A}$. En conclusión, puesto que $\hat{f}$ es abierto y suprayectivo, $\hat{f}$ es cociente. □

El siguiente teorema garantiza la reflexividad de los grupos discretos.

Teorema 4.9. *Todo grupo abeliano discreto es reflexivo.*

Demostración. Por el Lema 3.3, α es un homomorfismo continuo. Por otra parte, $\alpha(G)$ es un subgrupo de $\hat{\hat{G}}$ que separa puntos de $\hat{G}$, pues si $\chi_1, \chi_2 \in \hat{G}$ son tales que $\chi_1 \neq \chi_2$ existe $g \in G$ tal que $\chi_1(g) \neq \chi_2(g)$; así, existe $\hat{g} = \alpha(g) \in \alpha(G)$ tal que $\hat{g}(\chi_1) = \chi_1(g) \neq \chi_2(g) = \hat{g}(\chi_2)$. Además, como $\hat{G}$ es compacto, el Corolario 4.6 implica que $\alpha(G) = \hat{\hat{G}}$, por lo cual tenemos la suprayectividad de α. Ahora, como G tiene suficientes caracteres para separar puntos, pues si $g_1, g_2 \in G$ son tales que $g_1 \neq g_2$, entonces, por el Corolario 3.9, existe un homomorfismo $\varphi\colon G \to \mathbb{T}$ tal que $\varphi(g_1) \neq \varphi(g_2)$; pero φ es continuo, puesto que G es discreto, lo que demuestra nuestra afirmación. Así, el Lema 3.14 implica que α es inyectiva, por lo que α es un isomorfismo y, además, bicontinuo, puesto que G y $\hat{\hat{G}}$ son discretos. Por lo tanto, α es un isomorfismo topológico. □

Definición 4.10. Un grupo topológico G es *monotético* si tiene un subgrupo cíclico denso.

Ejemplo 4.11. $\mathbb{T} = \mathbb{S}^1$ es monotético. En efecto, considere el conjunto $H = \langle e^{2\pi i t} \rangle$, donde $t \in (0, 1)$ es un irracional. Entonces H es un subgrupo cíclico infinito denso de $\mathbb{T}$.

Teorema 4.12. *Sea G un grupo ALC monotético. Entonces G es compacto o es topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}$.*

Demostración. Supongamos que G es discreto. Entonces $G = \mathbb{Z}$ o G es un grupo cíclico finito y, por lo tanto, compacto.

Supongamos que G no es discreto. Sea $H = \{x_n : n \in \mathbb{Z}\}$ el subgrupo cíclico denso que G contiene por ser monotético, donde $x_n + x_m = x_{n+m}$, para todo $n, m \in \mathbb{Z}$. Entonces H es infinito, pues de lo contrario sería discreto y, por lo tanto, cerrado en G; lo cual implica que $H = G$, es decir, G es discreto. Sea V una vecindad simétrica de e_G tal que $\overline{V}$ es compacta. Si $g \in G$, entonces $(V+g) \cap H \neq \varnothing$, puesto que H es denso; así, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x_k \in V + g$, lo cual implica que $g - x_k \in V$, por lo que existe W, vecindad simétrica de e_G, tal que $(g - x_k) + W \subset V$. Como G no es discreto, W contiene un número infinito de los x_n y, como W es simétrico, si $x_n \in W$, entonces $x_{-n} \in W$. Por lo tanto, existe $j < k$ tal que $x_j \in W$. Haciendo $i = k - j$, tenemos que $i > 0$ y $g - x_i = g - x_{k-j} = g - (x_k - x_j) = g - x_k + x_j \in (g - x_k) + W \subset V$. De donde, $g \in V + x_i$, para algún $i \in \mathbb{Z}^+$; así, $G \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V + x_i$. Ahora, como $\overline{V} \subset G \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} V + x_i$ es compacto, existen $x_1, \ldots, x_N$ en W tales que $\overline{V} \subset \bigcup_{i=1}^{N} V + x_i$. Para cada $g \in G$, sea $n = n(g)$ el entero positivo más pequeño tal que $g \in \overline{V} + x_n$; luego, $g - x_n \in \overline{V} \subset \bigcup_{i=1}^{N} x_i + V$, $x_n - g \in x_i + V \subset x_i + \overline{V}$, para algún $i \in \{1, \ldots, N\}$. Luego, $x_n - x_i - g \in \overline{V}$, para algún $i \in \{1, \ldots, N\}$, esto es, $x_{n-i} - g \in \overline{V}$, para algún $i \in \{1, \ldots, N\}$, de donde, $g - x_{n-i} \in \overline{V}$. Así, $g \in x_{n-i} + \overline{V}$, para algún $i \in \{1, \ldots, N\}$. Ahora, por la elección de n, tenemos que $n - i \leq 0$, de donde, $n \leq i \leq N$; por lo que para cada $g \in G$, $n \leq N$. Así, $G = \bigcup_{i=1}^{N} \overline{V} + x_i$, lo cual implica que G es compacto, pues cada $\overline{V} + x_i$ es compacto. ☐

Definición 4.13. Sea G un grupo ALC. Entonces G es *compactamente generado* si tiene un subconjunto compacto V tal que $G = \langle V \rangle$.

Lema 4.14. *Sean A, B grupos ALC y H un subgrupo de A finitamente generado (no necesariamente cerrado). Si $f \colon A \to B$ es un homomorfismo continuo tal que $\ker f \subset H$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}^n$, para algún $n \geq 1$, y $f(H)$ contiene un subgrupo topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}$, entonces H contiene un subgrupo topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}^{n+1}$.*

Ver en [8].

Proposición 4.15. *Sean G un grupo ALC y V una vecindad simétrica y compacta de e_G. Si $G = \langle V \rangle$, entonces G tiene un subgrupo cerrado A*

topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}^n$, para algún $n \geq 0$, tal que G/A es compacto y $V \cap A = \{e_G\}$.

Demostración. Sea V una vecindad simétrica y compacta de e_G tal que $G = \langle V \rangle$. Si hacemos $V_1 = V$ y $V_{n+1} = V_n + V$, para cada $n \geq 1$, entonces $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$. Como $V_2 = V_1 + V = V + V = 2V$, entonces V_2 es compacto y $V_2 \subset V + V \subset \bigcup_{g \in V} g + V$, existen $g_1, \ldots, g_m \in G$ tales que $V_2 \subset \bigcup_{i=1}^{m} g_i + V$. Sea $H = \langle \{g_1, \ldots, g_m\} \rangle$. Entonces $V_i \subset V + H$, para $i = 1, 2$.

Supongamos que $V_n \subset V + H$. Veamos que $V_{n+1} \subset V + H$. En efecto, $V_{n+1} = V_n + V \subset V + H + V = V + V + H = V_2 + H \subset V + H + H = V + H$. Así, por inducción, queda demostrado que $V_n \subset V + H$, para todo $n \geq 1$, lo cual implica que $G \subset V + H$, puesto que $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} V_n \subset V + H$, y, como $V + H \subset G$, tenemos $G = V + H$. Sea $H_i = \langle g_i \rangle$, para $i \in \{1, \ldots, m\}$, y consideremos su clausura $\overline{H}$ en G. Entonces $H = H_1 + \cdots + H_m$.

Supongamos que cada $\overline{H}_i$ es compacto. Entonces $\overline{H}$ es compacta, pues $\overline{H} \subset \overline{H}_1 + \cdots + \overline{H}_m$ es subconjunto cerrado de un compacto. Así, $G = V + \overline{H}$ es compacto. En este caso, la proposición se verifica para $n = 0$, tomando a $A = \{e_G\}$ que es isomorfo a $\mathbb{Z}^0$, y $G/A = G$, el cual es compacto.

Supongamos que existe $i \in \{1, \ldots, m\}$ tal que H_i no es compacto. Entonces, por el Teorema 4.12, H_i, que es un grupo monotético (por ser un subgrupo cíclico finito y denso en $\overline{H}_i$), es topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}$, por lo que H es discreto y, por lo tanto, $H = \overline{H}$. Así, $H = H_1 + \cdots + H_m$ contiene un subgrupo topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}$.

> En resumen, si $G = V + H$, donde H es finitamente generado, y G no es compacto, entonces $H = H_1 + \cdots + H_m$ contiene un subgrupo topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}$.$(*)$

Como H es finitamente generado (y todo subgrupo de un grupo abeliano con p generadores puede ser generado por n elementos, con $n \leq p$), podemos considerar $n \leq m$ como el natural más grande tal que A es topológicamente isomorfo $\mathbb{Z}^n$, donde A es un subgrupo de H. Puesto que A es discreto y V es compacto, $A \cap V$ es finito, por ser un subconjunto cerrado y discreto de un compacto. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $A \cap V = \{e_G\}$, pues de no ser así, reemplazamos A por un conjunto A' que también sea topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}$ tal que $A' \cap V = \{e_G\}$. Por ejemplo, si $A = \big\langle \{a_1, \ldots, a_n\} \big\rangle$ y r es tal que $A \cap V \subset \big\{ \sum_{i=1}^{n} k_i a_i : k_i \in [1-r, 1+r], i \in \{1, \ldots, n\} \big\}$, entonces $A' = \big\langle \{ra_1, \ldots, ra_n\} \big\rangle$. Sea $\varphi \colon G \to K$ el homomorfismo cociente, donde $K = G/A$. Luego, $K = G/A = \varphi(G) =$

$\varphi(V+H) = \varphi(V)+\varphi(H)$; de donde, se tiene que $\varphi(H)$ no tiene un subgrupo topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}$, pues de ser así el Lema 4.14 implicaría que H contiene un subgrupo topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}^{n+1}$, lo cual contradice la elección de n. Aplicando el contrarecíproco de $*$ a K, en lugar de aplicarlo a G, tenemos que K es compacto, esto es, G/A es compacto, como se quería demostrar. $\square$

El siguiente resultado garantiza la inyectividad de la evaluación canónica α para grupos ALC.

Teorema 4.16. *Todo grupo ALC tiene suficientes caracteres para separar puntos.*

Demostración. Sea G cualquier grupo ALC y $g \neq e_G$. Sea V una vecindad abierta, simétrica de e_G que contiene a g y tal que $\overline{V}$ es compacta. Entonces $\overline{V}$ es una vecindad simétrica y compacta de e_G que contiene a g. Si hacemos $W = \overline{V}$, entonces el subgrupo $H = \langle W \rangle$ es abierto en G, pues para todo $h \in H$, $hV \subset H$. Por Proposición 4.15, H tiene un subgrupo cerrado A tal que H/A es compacto y $H \cap A = \{e_G\}$. Consideremos la evaluación canónica $\varphi\colon H \to H/A$. Entonces $\varphi(g) \neq e_{H/A}$, pues de lo contrario $g \in \ker\varphi = A$, lo cual implica que $H \cap A \neq \{e_G\}$. Puesto que H/A es compacto, tiene suficientes caracteres para separar puntos, así, existe un caracter $\psi\colon H/A \to \mathbb{T}$ tal que $\psi(\varphi(g)) \neq e_{\mathbb{T}}$. Por lo tanto, $\psi \circ \varphi$ es un caracter de H y, por la Proposición 3.8, $\psi \circ \varphi$ se puede extender a un homomorfismo $\chi\colon G \to \mathbb{T}$ que además es continuo, por la continuidad de $\psi \circ \varphi$, y tal que $\chi(g) \neq e_{\mathbb{T}}$, como se quería demostrar. $\square$

El siguiente corolario garantiza que todo grupo ALC contiene un subgrupo abierto y compactamente generado.

Corolario 4.17. *Todo grupo ALC tiene un subgrupo abierto y compactamente generado.*

Demostración. Sean G un grupo ALC y W una vecindad simétrica y compacta de e_G. Entonces $H = \langle W \rangle$ es un subgrupo abierto de G y compactamente generado. Por lo tanto, G tiene un subgrupo abierto y compactamente generado. $\square$

Lema 4.18. *Si D es un subgrupo discreto de un grupo abeliano G, entonces G y G/D son localmente isomorfos.*

Demostración. Como D es discreto, existe una vecindad V de e_G tal que $V \cap D = \{e_G\}$. Si consideramos al homomorfismo canónico $\varphi\colon G \to G/D$, entonces $\varphi(V)$ es una vecindad de $e_{G/D}$, por ser φ una aplicación abierta. Por lo tanto, la aplicación $\psi\colon V \to \varphi(V)$, dada por $\psi(v) = \varphi(v)$ es un homeomorfismo, como se quería demostrar. $\square$

Teorema 4.19. *Sea G un grupo topológico abeliano localmente isomorfo a $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Entonces G es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}^a \times \mathbb{T}^b \times D$, donde D es un grupo discreto y $a + b = n$.*

Ver la demostración en [8].

A continuación, se demuestra el teorema de estructura para los grupos ALC que son compactamente generados, el cual nos garantiza que éste tiene un subconjunto compacto K tal que G/K es topológicamente isomorfo al producto $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times \mathbb{T}^c \times F$, que es un grupo reflexivo, por los Ejemplos 2.7, 2.8, 2.9 y los Teoremas 3.4 y 4.9, donde F es un grupo abeliano discreto finito y $a, b, c \in \mathbb{N}$.

Proposición 4.20. *Si G es un grupo ALC compactamente generado, entonces tiene un subgrupo compacto K tal que G/K es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times \mathbb{T}^c \times F$, donde F es un grupo abeliano discreto finito y $a, b, c \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Como G es compactamente generado, sin pérdida de generalidad, podemos afirmar que es algebraicamente generado por una vecindad simétrica y compacta de e_G. Por la Proposición 4.15, G tiene un subgrupo cerrado D topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}^n$, para algún $n \in \mathbb{N}$, tal que G/D es compacto. Como D es topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}^n$, D es discreto y finitamente generado. Sea N una vecindad simétrica y compacta de e_G tal que $3N \cap D = \{e_G\}$. Sea $f\colon G \to G/D$ el homomorfismo cociente. Entonces $f(N)$ es una vecindad de $e_{G/D}$ y como G/D es compacto, el Corolario 4.3 implica que existe un subgrupo cerrado $B \subset f(N)$ tal que $(G/D)/B$ es topológicamente isomorfo a $\mathbb{T}^n \times E$, donde E es un grupo discreto, finito y $n \geq 0$. Si hacemos $K' = f^{-1}(B)$, entonces G/K' es topológicamente isomorfo a $\mathbb{T}^n \times E$. Sea $K = K' \cap N$. Como K' es cerrado y N es compacto, entonces K es compacto, además, $f(K) = f(f^{-1}(B)) \cap f(N) = B \cap f(N) = B$. Afirmamos que K es un subgrupo de G, pues si $x, y \in K$, entonces $x - y \in K'$, por lo que existe $z \in K$ tal que $f(z) = f(x - y)$; lo cual implica que $x - y - z \in \ker f = D$, de donde, $x - y - z = e_G$, puesto que $3N \cap D = \{e_G\}$. Luego, $x - y = z \in K$, lo cual implica que K es un subgrupo de G. Además, $K' = K + D$, pues si

$k' \in K' = f^{-1}(B)$, existe $k \in K$ tal que $f(k') = f(k)$, de donde, $k' - k \in D$; luego, $k' = k + (k' - k) \in K + D$, con lo cual tenemos que $K' \subset K + D$. El recíproco es claro, puesto que $\ker f = D$. Por lo tanto, K' es topológicamente isomorfo a $K \times D$. Así, si $\pi\colon G \to G/K$ es el homomorfismo cociente, entonces $\pi(D)$ es topológicamente isomorfo a D y $(G/K)/\pi(D)$ es topológicamente isomorfo a G/K', quien es topológicamente isomorfo a $\mathbb{T}^n \times E$. Como $\pi(D)$ y E son discretos, por el Lema 4.18, G/K es localmente isomorfo a $\mathbb{T}^n$ y, en consecuencia, a $\mathbb{R}^n$. Por el Teorema 4.19, G/K es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}^a \times \mathbb{T}^c \times S$, donde S es un grupo discreto y $a + c = n$. Como G es compactamente generado, entonces G/K y, por consiguiente, S son compactamente generados. Así, S es un grupo abeliano discreto finitamente generado y, por lo tanto, topológicamente isomorfo a $\mathbb{Z}^m \times F$, para algún grupo discreto y finito F y $m \geq 0$. En conclusión, G/K es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}^a \times \mathbb{T}^c \times \mathbb{Z}^m \times F$, donde $a, b, m \in \mathbb{N}$ y F es un grupo discreto y finito. $\square$

Capítulo 5

Demostración del teorema de dualidad de Pontryagin-van Kampen

Hemos demostrado que todo grupo ALC, G, tiene un subgrupo compacto, K, tal que G/K es reflexivo. Además, K es reflexivo, por el Teorema 4.5. Aunque no podemos concluir que G es topológicamente isomorfo a $K \times G/K$, introducimos la técnica de sucesiones exactas para demostrar su reflexividad.

Definición 5.1. Sean A, B y C grupos topológicos, y $f_1\colon A \to B$ y $f_2\colon B \to C$, homomorfismos continuos. La sucesión

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f_1} B \xrightarrow{f_2} C \longrightarrow 0$$

es *exacta* si

i. f_1 es uno a uno,

ii. f_2 es suprayectiva y

iii. $\ker f_2 = f_1(A)$.

Proposición 5.2. *Sean G un grupo ALC y K un subgrupo compacto de G. Si la sucesión*

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f_1} G \xrightarrow{f_2} G/K \longrightarrow 0$$

es exacta, donde f_1 es un homeomorfismo de K sobre su imagen en G y f_2 es un homomorfismo continuo y abierto, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow (G\hat{/}K) \xrightarrow{\hat{f}_2} \hat{G} \xrightarrow{\hat{f}_1} \hat{K} \longrightarrow 0$$

es exacta, $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$ son homomorfismos continuos y abiertos.

Demostración. Por la Proposición 3.11, $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$ son homomorfismos continuos, $\hat{f}_2$ es uno a uno y $\hat{f}_1$ es suprayectiva. Veamos que $\ker(\hat{f}_1) = \hat{f}_2(\widehat{G/K})$.

i. $\ker(\hat{f}_1) \subseteq \hat{f}_2(\widehat{G/K})$: Sea $\chi \in \ker(f_1)$. Entonces $\chi \in \hat{G}$ y $\hat{f}_1(\chi) = e_{\hat{K}}$, esto es, $(\chi \circ f_1)(k) = e_{\mathbb{T}}$, para todo $k \in K$, lo cual implica, por la Proposición A.3, que existe un homomorfismo $\varphi \colon G/K \to \mathbb{T}$ tal que $\varphi \circ f_2 = \chi$ y que, además, es continuo, por ser χ continua y f_2 cociente. Así, existe $\varphi \in \widehat{G/K}$ tal que $\chi = \varphi \circ f_2 = \hat{f}_2(\varphi)$, lo cual demuestra que $\chi \in \hat{f}_2(\widehat{G/K})$.

ii. $\hat{f}_2(\widehat{G/K}) \subseteq \ker(\hat{f}_1)$: Sea $\chi \in \hat{f}_2(\widehat{G/K})$. Entonces $\chi = \hat{f}_2(\varphi) = \varphi \circ f_2$, para algún $\varphi \in \widehat{G/K}$. Queremos ver que $\hat{f}_1(\chi) = e_{\hat{K}}$. Sea $k \in K$. Entonces $[\hat{f}_1(\chi)](k) = (\chi \circ f_1)(k) = [(\varphi \circ f_2) \circ f_1](k) = \varphi[f_2(f_1(k))] = e_{\mathbb{T}}$. Así, $\chi \in \ker(\hat{f}_1)$.

De *i* y *ii*, tenemos la igualdad deseada. Por lo tanto, la sucesión es exacta y sólo falta ver que $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$ son abiertos. En efecto, por el Teorema 4.16, G tiene suficientes caracteres para separar puntos y como f_1 es un homomorfismo continuo e inyectivo del compacto K en G, el Corolario 4.8 nos permite concluir que $\hat{f}_1$ es un homomorfismo cociente y, por lo tanto, abierto.

Para ver que $\hat{f}_2$ es abierto, consideremos al abierto subbásico, $M(C,U) \subset \widehat{G/K}$, donde $C \subset G/K$ es compacto y $U \subset \mathbb{T}$ es abierto. Como C es compacto y f_2 perfecta, existe $S = f_2^{-1}(C) \subset G$ compacto tal que $f_2(S) = C$. Vemos que $\varphi \circ f_2 \in M(S,U)$, donde φ es cualquier elemento de $M(C,U)$; así, $M(S,U)$ es un abierto subbásico de $\hat{G}$ tal que $\hat{f}_2(M(C,U)) = M(S,U) \cap \hat{f}_2(\widehat{G/K})$, lo cual implica que $\hat{f}_2(M(C,U))$ es un abierto de $\hat{f}_2(\widehat{G/K})$. Por lo tanto, $\hat{f}_2$ es un homeomorfismo de $\widehat{G/K}$ sobre su imagen en $\hat{G}$. Como $\hat{K}$ es discreto, $\ker(\hat{f}_1) = (\hat{f}_1)^{-1}(\{e_{\hat{K}}\})$ es abierto en $\hat{G}$. Pero, $\hat{f}_2(\widehat{G/K}) = \ker(\hat{f}_1)$, así, $\hat{f}_2(\widehat{G/K})$ es un abierto en $\hat{G}$. Por lo tanto, $\hat{f}_2(M(C,U)) = M(S,U) \cap \hat{f}_2(\widehat{G/K})$ es un abierto de $\hat{G}$, lo cual implica, por la proposición A.4, que $\hat{f}_2$ es una aplicación abierta. $\square$

Proposición 5.3. *Sean G un grupo ALC y A un subgrupo abierto de G . Si la sucesión*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f_1} G \xrightarrow{f_2} G/A \longrightarrow 0$$

es exacta, f_1 y f_2 son homomorfismos continuos y abiertos, entonces la sucesión

$$0 \longrightarrow \widehat{G/A} \xrightarrow{\hat{f}_2} \hat{G} \xrightarrow{\hat{f}_1} \hat{A} \longrightarrow 0$$

es exacta, $\hat{f}_2$ es un homeomorfismo de $\widehat{G/A}$ sobre su imagen en $\hat{G}$ y $\hat{f}_1$ es un homomorfismo continuo y abierto.

Demostración. Por Proposición 3.11, $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$ son homomorfismos continuos, además, $\hat{f}_2$ es uno a uno y $\hat{f}_1$ es suprayectiva. Veamos que $\ker(\hat{f}_1) = \hat{f}_2(\widehat{G/A})$. Sea $\chi \in \hat{f}_2(\widehat{G/A})$. Entonces $\chi = \hat{f}_2(\varphi) = \varphi \circ f_2$, para algún $\varphi \in \widehat{G/A}$. Ahora, si $a \in A$, entonces $[\hat{f}_1(\chi)](a) = (\chi \circ f_1)(a) = [(\varphi \circ f_2) \circ f_1](a) = \varphi[f_2(f_1(a))] = \varphi(e_{G/A}) = e_{\mathbb{T}}$. Así, para todo $a \in A$, $[\hat{f}_1(\chi)](a) = e_{\mathbb{T}}$, lo cual implica que $\hat{f}_1(\chi) = e_{\hat{A}}$, esto es, $\chi \in \ker \hat{f}_1$. Por lo tanto, $\hat{f}_2(\widehat{G/A}) \subseteq \ker \hat{f}_1$. Recíprocamente, sea $\chi \in \ker \hat{f}_1$. Entonces $\hat{f}_1(\chi) = e_{\hat{A}}$, lo cual implica que $[\hat{f}_1(\chi)](a) = e_{\mathbb{T}}$, para todo $a \in A$. Así, por la Proposición A.3, existe un homomorfismo $\psi\colon G/A \to \mathbb{T}$ tal que $\psi \circ f_2 = \chi$. Además, ψ es continuo, puesto que f_2 es cociente y χ es continuo. Por lo tanto, existe $\psi \in \widehat{G/A}$ tal que $\chi = \psi \circ f_2 = \hat{f}_2(\psi)$, lo cual implica que $\chi \in \hat{f}_2(\widehat{G/A})$. Así, $\ker(\hat{f}_1) \subseteq \hat{f}_2(\widehat{G/A})$, con lo que queda probada la igualdad. Con esto queda demostrado que la sucesión es exacta.

Por otra parte, como A es abierto en G, la Proposición A.1 implica que G/A es discreto y, por lo tanto, $\widehat{G/A}$ es compacto. Por ser $\hat{f}_2$ inyectiva, $\hat{f}_2$ es una biyección de $\widehat{G/A}$ sobre su imagen en $\hat{G}$ y, puesto que $\widehat{G/A}$ es compacto, $\hat{f}_2$ es un homeomorfismo de $\widehat{G/A}$ sobre su imagen en $\hat{G}$.

Para finalizar, veamos que $\hat{f}_1$ es una aplicación abierta. En efecto, sean V_a una vecindad de $e_{\mathbb{T}}$, donde $a < \frac{1}{4}$, y K un subconjunto compacto de G tal que $K \subset A$. Entonces $M(K, V_a)$ es un abierto en $\hat{G}$ y $\hat{f}_1\big(M(K, V_a)\big) = M\big(f_1^{-1}(K), V_a\big)$ es un abierto en $\hat{A}$, puesto que $f_1^{-1}(K)$ es un compacto, por el Teorema 1.1. Además, la restricción de $\hat{f}_1$ a $M(K, V_a)$ es una aplicación abierta y suprayectiva de $M(K, V_a)$ en $\hat{f}_1\big(M(K, V_a)\big)$. Por lo tanto, por la Proposición A.4, $\hat{f}_1$ es una aplicación abierta. □

Proposición 5.4. *Sean A, B, C, D, E y F grupos abelianos y $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$ y f_7 homomorfismos continuos, como se indica en el siguiente dia-*

grama

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \big\downarrow{\scriptstyle f_5} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_6} & & \big\downarrow{\scriptstyle f_7} & & \\ 0 & \longrightarrow & D & \xrightarrow[f_3]{} & E & \xrightarrow[f_4]{} & F & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Cada una de las sucesiones horizontales es exacta y el diagrama respectivo es conmutativo. Si f_5 y f_7 son isomorfismos algebraicos, entonces f_6 también es un isomorfismo algebraico.

Demostración. Veamos que f_6 es biyectiva.

i. f_6 es inyectiva: Sea $b \in \ker f_6$. Entonces $f_6(b) = e_E$, además, $f_7(f_2(b)) = (f_7 \circ f_2)(b) = (f_4 \circ f_6)(b) = f_4(f_6(b)) = f_4(e_E) = e_F$, lo cual implica que $f_2(b) \in \ker f_7 = \{e_C\}$, por la inyectividad de f_7. Así, $f_2(b) = e_C$, por lo que $b \in \ker f_2 = f_1(A)$, esto es, $b = f_1(a)$, para algún $a \in A$. Como $a \in A$, $f_5(a) \in D$, luego $f_3(f_5(a)) = (f_3 \circ f_5)(a) = (f_6 \circ f_1)(a) = f_6(f_1)(a) = f_6(b) = e_E$; pero $f_3 \circ f_5$ es inyectiva, así, $a = e_A$. Por lo tanto, $b = e_B$, lo cual implica que $\ker f_6 = \{e_B\}$.

ii. f_6 es suprayectiva: Sea $k \in E$. Veamos que existe $b' \in B$ tal que $f_6(b') = k$. Como $k \in E$, $f_4(k) \in F$ y, por la suprayectividad de f_7, existe $c \in C$ tal que $f_7(c) = f_4(k)$. Puesto que $c \in C$ y f_2 es suprayectiva, existe $b \in B$ tal que $f_2(b) = c$; así, $f_4(k) = f_7(c) = f_7(f_2(b)) = f_4(f_6(b))$, entonces $k - f_6(b) \in \ker f_4 = f_3(D)$. Luego, existe $d \in D$ tal que $f_3(d) = k - f_6(b)$ y, puesto que f_5 es suprayectiva, existe $a \in A$ tal que $f_5(a) = d$. Por lo tanto, $k - f_6(b) = f_3(d) = f_3(f_5(a)) = f_6(f_1(a))$, de donde, $k = f_6(b + f_1(a))$. En conclusión, existe $b' = b + f_1(a) \in B$ tal que $k = f_6(b')$.

De *i* y *ii*, concluimos la biyectividad de f_6 y, por lo tanto, su isomorfía algebraica. □

El siguiente resultado nos garantiza que los grupos ALC compactamente generados son reflexivos.

Teorema 5.5. *Todo grupo ALC compactamente generado es reflexivo.*

Demostración. Sea G un grupo ALC compactamente generado. Veamos que la evaluación canónica $\alpha\colon G \to \hat{\hat{G}}$ es un isomorfismo topológico. En efecto, por la Proposición 4.20, G tiene un subgrupo compacto K tal que G/K es topológicamente isomorfo a $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times \mathbb{T}^c \times F$, que es reflexivo, donde $a, b, c \in \mathbb{N}$ y F es un grupo abeliano, discreto y finito. Ahora, consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{f_1} G \xrightarrow{f_2} G/K \longrightarrow 0$$

donde f_1 es el homomorfismo inclusión y f_2 es el homomorfismo cociente. Entonces f_1 es un homeomorfismo de K sobre su imagen en G y f_2 es continua y abierta, luego, por la Proposición 5.2, la sucesión

$$0 \longrightarrow \widehat{G/K} \xrightarrow{\hat{f}_2} \hat{G} \xrightarrow{\hat{f}_1} \hat{K} \longrightarrow 0$$

es exacta, además, $\hat{f}_1$ y $\hat{f}_2$ son homomorfismos continuos y abiertos; lo cual implica, por la Proposición 5.3, que la sucesión

$$0 \longrightarrow \hat{\hat{K}} \xrightarrow{\hat{\hat{f}}_1} \hat{\hat{G}} \xrightarrow{\hat{\hat{f}}_2} \widehat{\widehat{G/K}} \longrightarrow 0$$

es exacta, donde $\hat{\hat{f}}_1$ es un homeomorfismo de $\hat{\hat{K}}$ sobre su imagen en $\hat{\hat{G}}$ y $\hat{\hat{f}}_2$ es un homomorfismo abierto y continuo.

Por otra parte, es fácil ver que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\alpha_K"] & G \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "\alpha"] & G/K \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{G/K}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{\hat{K}} \arrow[r, "\hat{\hat{f}}_1"'] & \hat{\hat{G}} \arrow[r, "\hat{\hat{f}}_2"'] & \widehat{\widehat{G/K}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, donde α_K y $\alpha_{G/K}$ son las evaluaciones canónicas de K en $\hat{\hat{K}}$ y de G/K en $\widehat{\widehat{G/K}}$, respectivamente. En efecto, si $k \in K$, $(\alpha \circ f_1)(k) = \alpha(f_1(k)) = \widehat{f_1(k)} \in \hat{\hat{G}}$ y se define por $\widehat{f_1(k)}(\chi) = (\chi \circ f_1)(k)$, para todo $\chi \in \hat{G}$. Por otra parte, $(\hat{\hat{f}}_1 \circ \alpha_K)(k) = \hat{\hat{f}}_1(\alpha_K(k)) = \hat{\hat{f}}_1(\hat{k}) \in \hat{\hat{G}}$, donde $\hat{k} \in \hat{\hat{K}}$ y $\hat{\hat{f}}_1(\hat{k})$ se define como en la Proposición 3.11, esto es, $\hat{\hat{f}}_1(\hat{k}) = \hat{k} \circ \hat{f}_1$. Así, $\hat{\hat{f}}_1(\hat{k}) \in \hat{\hat{G}}$ es dado por $\hat{\hat{f}}_1(\hat{k})(\chi) = (\hat{k} \circ \hat{f}_1)(\chi) = \hat{k}\big(\hat{f}_1(\chi)\big) = \hat{k}(\chi \circ f_1) = (\chi \circ f_1)(k)$, para todo $\chi \in \hat{G}$. Por lo tanto, $(\alpha \circ f_1)(k) = (\hat{\hat{f}}_1 \circ \alpha_K)(k)$, para todo $k \in K$, lo cual implica que $\alpha \circ f_1 = \hat{\hat{f}}_1 \circ \alpha_K$. En un procedimiento análogo se demuestra que $\alpha_{G/K} \circ f_2 = \hat{\hat{f}}_2 \circ \alpha$.

Puesto que K y G/K son reflexivos, esto es, α_K y $\alpha_{G/K}$ son isomorfismos topológicos, entonces la Proposición 5.4 implica que α es un isomorfismo algebraico.

Ahora, como α es una aplicación continua y suprayectiva definida de un grupo compactamente generado, G, a un grupo Hausdorff localmente compacto, $\hat{\hat{G}}$, entonces el Teorema de la Aplicación Abierta implica que α es una aplicación abierta y, por lo tanto, es un isomorfismo topológico. $\square$

Teorema 5.6 (Dualidad de Pontryagin-Van Kampen)**.** *Todo grupo abeliano localmente compacto es reflexivo.*

Demostración. Sea G un grupo abeliano localmente compacto. Entonces, por el Corolario 4.17, G tiene un subgrupo A que es compactamente generado y abierto. Ahora, consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\ i\ } G \xrightarrow{\ \pi\ } G/A \longrightarrow 0$$

donde i es el homomorfismo inclusión y π es el homomorfismo cociente. Entonces la Proposición 5.3 implica que la sucesión

$$0 \longrightarrow \widehat{G/A} \xrightarrow{\ \hat{\pi}\ } \hat{G} \xrightarrow{\ \hat{i}\ } \hat{A} \longrightarrow 0$$

es exacta, $\hat{i}$ es un homomorfismo abierto y continuo, además, $\hat{\pi}$ es un homeomorfismo de $\widehat{G/A}$ sobre su imagen en $\hat{G}$. Y, por la Proposición 5.2, tenemos que la sucesión

$$0 \longrightarrow \hat{\hat{A}} \xrightarrow{\ \hat{\hat{i}}\ } \hat{\hat{G}} \xrightarrow{\ \hat{\hat{\pi}}\ } \widehat{\widehat{G/A}} \longrightarrow 0$$

es exacta; también se tiene que los homomorfismos $\hat{\hat{i}}$ y $\hat{\hat{\pi}}$ son abiertos y continuos. Por otra parte, es fácil ver que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\alpha_A"] & G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\alpha"] & G/A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{G/A}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \hat{\hat{A}} \arrow[r, "\hat{\hat{i}}"'] & \hat{\hat{G}} \arrow[r, "\hat{\hat{\pi}}"'] & \widehat{\widehat{G/A}} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Como A es un grupo ALC compactamente generado y G/A es un grupo discreto, entonces α_A y $\alpha_{G/A}$ son isomorfismos topológicos; así, por la Proposición 5.4, α es un isomorfismo algebraico. Además, α es una aplicación abierta, puesto que $A \subset G$ es un abierto tal que $\alpha(A) = \alpha\big(i(A)\big) = (\alpha \circ i)(A) = (\hat{\hat{i}} \circ \alpha_A)(A) = \hat{\hat{i}}\big(\alpha_A(A)\big)$ es abierto y la restricción de α a A es una aplicación abierta y suprayectiva de A en su imagen $\alpha(A)$. Por lo tanto, la Proposición A.4 implica que α es un isomorfismo topológico. $\square$

Capítulo 6

Conclusiones y futuras investigaciones

La teoría de dualidad es una herramienta que nos permite estudiar la estructura de los grupos topológicos abelianos, en particular, la estructura de los grupos abelianos localmente compactos.

En el desarrollo de esta teoría estudiamos resultados muy significativos. Por ejemplo, si G es un grupo ALC, entonces:

i. G es discreto si, y sólo si, $\hat{G}$ es compacto;

ii. G es compacto si, y sólo si, $\hat{G}$ es discreto.

También se demostró que la reflexividad es una propiedad que se hereda bajo productos finitos y que los grupos compactos, discretos y compactamente generados son reflexivos.

En este trabajo estudiamos la teoría clásica de dualidad, poniendo particular atención al *Teorema de Dualidad de Pontryagin-van Kampen* porque es éste quien nos permite establecer los duales de espacios de sucesiones sobre grupos abelianos localmente compactos, que nos ayudarán a determinar los duales de los grupos de códigos, uno de los principales objetos de estudio en nuestro futuro trabajo doctoral.

Apéndice A

Cocientes de Grupos Topológicos

En lo que sigue, introducimos algunos resultados elementales de los cocientes de grupos topológicos. Todas la demostraciones se omiten. En cambio, el lector encontrará la referencia donde se demuestran los resultados mencionados. Todos los resultados se encuentran en [1].

Proposición A.1. *Sean G un grupo topológico y H un subgrupo cerrado de G. Entonces G/H con la topología cociente es discreto si, y sólo si, H es abierto en G.*

Teorema A.2. *Sea G un grupo topológico $\mathcal{U}$ una base abierta de e_G. Entonces:*

i. *para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subset U$;*

ii. *para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^{-1} \subset U$;*

iii. *para cada $U \in \mathcal{U}$ y $x \in U$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $Vx \subset U$;*

iv. *para cada $U \in \mathcal{U}$ y $x \in G$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $xVx^{-1} \subset U$;*

v. *para cada par $U, V \in \mathcal{U}$ existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \subset U \cap V$;*

vi. $\{e_G\} = \bigcap \mathcal{U}$

Recíprocamente, si G es un grupo y $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos abiertos de G que satisfacen las condiciones i-vi, entonces la familia $\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{Ua : a \in G, U \in \mathcal{U}\}$ es una base para una topología T_1, $\tau_{\mathcal{U}}$, sobre G. Con esta topología, G es un grupo topológico y la familia $\{aU : a \in G, U \in \mathcal{U}\}$ es una base para la misma topología sobre G.

Proposición A.3. *Sean* $\varphi\colon G \to H$ *y* $\psi\colon G \to K$ *homomorfismos continuos de grupos topológicos* G*,* H *y* K *tales que* $\psi(G) = K$ *y* $\ker\psi \subset \ker\varphi$*. Si el homomorfismo* ψ *es abierto, existe un homomorfismo continuo* $f\colon K \to H$ *tal que* $\varphi = f \circ \psi$*.*

A continuación presentamos un resultado que nos proporciona condiciones suficientes para que un homomorfismo continuo de grupos topológicos sea abierto.

Proposición A.4. *Sean* G *y* H *grupos topológicos con elemento identidad* e_G *y* e_H*, respectivamente, y* $p\colon G \to H$ *un homomorfismo continuo y suprayectivo tal que, para algún* $U \subset G$ *no vacío, el conjunto* $p(U)$ *es abierto en* H *y la restricción de* p *a* U *es una aplicación abierta y suprayectiva de* U *sobre* $p(U)$*. Entonces el homomorfismo* p *es abierto.*

Apéndice B

Compacidad y sus Generalizaciones en Grupos Topológicos

Este capítulo introduce al lector a la Teoría de Dualidad de Pontryagin-van Kampen con el principal propósito de establecer los resultados necesarios para la demostración del Teorema 4.1, quien establece que la familia de los homomorfismos continuos de un grupo abeliano compacto en el grupo del cículo, $\mathbb{T}$, separa puntos del grupo.

B.1. Existencia de caracteres continuos no triviales sobre grupos abelianos compactos

El resultado principal de esta sección es el Teorema B.8. Este implica que los homomorfismos continuos de un grupo abeliano compacto, G, sobre el grupo del círculo, $\mathbb{T}$, separan puntos de G. Este resultado se conoce como el *Teorema de Peter, Weyl, van Kampen*. Para ello usaremos la noción de integral de Haar. Recordemos que la *integral de Haar* es un funcional lineal $\phi\colon C(G) \to \mathbb{R}$, $\phi(f) = \int f(x)dx$, donde $C(G)$ es el conjunto de funciones continuas de G en $\mathbb{C}$ con la topología compacto abierta, que satisface:

i. Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx$;

ii. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

iii. si $f(x) \geq 0$, para todo $x \in G$, entonces $\int f(x)dx \geq 0$;

iv. si $f(x) = 1$, para todo $x \in G$, entonces $\int f(x)dx = 1$;

v. $\int f(x)dx = \int f(xa)dx$, para todo $a \in G$.

Teorema B.1 (Von Neumann)**.** *Si G es un grupo topológico compacto, entonces existe una única integral de Haar que, además, satisface:*

i. *$\int f(x)dx = \int f(ax)dx$, para todo $a \in G$;*

ii. *$\int f(x^{-1})dx = \int f(x)dx$;*

iii. *si $f(x) \geq 0$, para todo $x \in G$, y $f(y) > 0$, para algún $y \in G$, entonces $\int f(x)dx > 0$.*

Definición B.2. Sea ϕ una función de valores complejos definida sobre G. Decimos que está *definida positivamente* si

$$\sum_{i,j=1}^{n} \lambda_i \overline{\lambda}_j \phi(g_i g_j^{-1})$$

es un número real no negativo, para todo $n \geq 1$, cualquier sistema de números complejos y cualesquiera elementos $g_1, \ldots, g_n \in G$.

Proposición B.3. *Sean f y g funciones definidas positivamente sobre G y μ un número real no negativo. Entonces:*

a) *$f + g$ es una función definida positivamente;*

b) *μf es también una función definida positivamente.*

Teorema B.4. *Para cualquier función f de valores reales sobre un grupo abeliano compacto G, la función ϕ_f definida por la regla $\phi_f(x) = \int f(xy)f(y)dy$, para cada $x \in G$, es definida positivamente.*

Proposición B.5. *Sea f cualquier función definida positivamente sobre G. Entonces, para cada transformación $T(a, s, \theta)$, la función $T(a, s, \theta)f$ es definida positivamente y, para cada transformación adjunta $T^* = T^*(a, s, \theta)$, la función T^*f es también definida positivamente.*

Proposición B.6. *Para todo $s \in G$ con $s \neq e_G$, existe una función continua ϕ de valores reales definida positiva sobre G con $\phi(e_G) = 1$ y una función de k_0 sobre G continua, simétrica y de valores reales no negativos tal que la función f sobre G definida por*

$$f(x) = \int k(xy)\phi(y^{-1})dy$$

satisface la condición $f(s) \neq f(e_G)$.

Teorema B.7. *Sean ϕ una función continua definida positiva sobre G tal que $\phi(e_G) = 1$ y k_0 una función continua, simétrica y no negativa, de valores reales sobre G. Entonces la función f sobre G definida por la fórmula $f(x) = \int k(xy)\phi(y^{-1})dy$ está en la p-clausura de la envolvente de $\hat{G}$.*

El siguiente teorema es el resultado principal de esta sección

Teorema B.8 (F. Peter and H. Weyl). *Para todo grupo abeliano compacto G y todo $a \in G$, con $a \neq e_G$, existe $\chi \in \hat{G}$ tal que $\chi(a) \neq e_{\mathbb{T}}$.*

Demostración. Por la Proposición B.6, existen una función continua ϕ sobre G, de valores reales y definida positiva tal que $\phi(e) = 1$ y una función continua k_0 sobre G, de valores reales, simétrica y no negativa tal que la función f sobre G definida por $f(x) = \int k(xy)\phi(y^{-1})dy$ satisface la condición $f(a) \neq f(e)$.

Por el Teorema B.7, la función f está en la clausura de la envolvente del conjunto de todos los caracteres de G, con la topología de la convergencia puntual. Puesto que $f(a) \neq f(e)$ tenemos que al menos uno de estos caracteres debe tomar valores distintos en a y en e. □

Bibliografía

[1] Arhangel'skii. A. y Tkachenko. M., *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Press, 2008.

[2] Andanza. S, Chasco. M, Domínguez. X y Tkachenko. M., *Precompact noncompact reflexive Abelian groups*, Forum Math. (2010), 1-14.

[3] Banaszczyk. W., *Additive Subgroups of Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, Polonia, 1991.

[4] Engelking. R., *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[5] Gillman. L. y Jerison. M., *Rings of Continuous Functions*, Springer Verlag, Berlin, 1976.

[6] Hewitt. E. y Ross. K., *Abstract Harmonic Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1963.

[7] Kelley. J., *General Topology*, Springer-Verlag, New York, 1975.

[8] Morris. S., *Pontryagin Duality and the Structure of Locally Compact Abelian groups*, Cambridge University Press, 1977.

[9] Noble. N., *k-GROUPS AND DUALITY*, American Mathematical Society. **151** (1970), 551-561.

[10] Pontryagin. L., *Topological Groups*, Gordon and Breach, Science Publishers, inc, New York, 1966.

[11] Tkachenko. M, Villegas. L, Hernández. C y Rendón. O., *Grupos Topológicos*, Libros de texto, manuales de prácticas y antologías, México, 1997.