



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
UNIDAD IZTAPALAPA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
MAESTRÍA EN CIENCIAS  
MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES

MODELOS MATEMÁTICOS DE ASIGNACIÓN DE TRÁNSITO.  
APLICACIÓN A LA RED METROPOLITANA DE LA CIUDAD DE  
MÉXICO  
Y  
SUS EFECTOS EN EL STC-METRO

TESIS  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRA EN CIENCIAS  
(MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

PRESENTA  
Ana Guadalupe Fernández Olivares

ASESORES

Dr. L. Héctor Juárez Valencia

M. en C. Elsa P. Omaña Pulido

México, D.F., abril 2013



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA  
UNIDAD IZTAPALAPA  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS  
MAESTRÍA EN CIENCIAS  
MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES

MODELOS MATEMÁTICOS DE ASIGNACIÓN DE TRÁNSITO.  
APLICACIÓN A LA RED METROPOLITANA DE LA CIUDAD DE  
MÉXICO  
Y  
SUS EFECTOS EN EL STC-METRO

TESIS  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE  
MAESTRA EN CIENCIAS  
(MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES)

PRESENTA  
Ana Guadalupe Fernández Olivares

ASESORES

Dr. L. Héctor Juárez Valencia

M. en C. Elsa P. Omaña Pulido

México, D.F., abril 2013

# ÍNDICE GENERAL

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Problemas de Flujo en Redes</b>	<b>4</b>
2.1. Ejemplos . . . . .	5
2.2. Problema de Flujo a Costo Mínimo . . . . .	8
2.2.1. Formulación General . . . . .	8
2.3. Dual del Problema de Flujo a Costo Mínimo . . . . .	10
2.4. Modelos de Flujo a Costo Mínimo . . . . .	12
2.5. Generalidades de los Algoritmos de Solución . . . . .	14
2.6. Modelos de Asignación de Tránsito . . . . .	15
<b>3. Conceptos Básicos: El Modelo Lineal de Asignación de Tránsito</b>	<b>17</b>
3.1. Red de Tránsito . . . . .	17
3.2. Estrategias . . . . .	20
3.3. Representación Generalizada de la Red de Tránsito . . . . .	22
3.4. Construcción del Modelo sin Congestión . . . . .	26
3.5. Modelo de Asignación de Tránsito sin Congestión. . . . .	27
3.6. Linealización del Modelo . . . . .	29
3.7. Problema Dual del Problema de Asignación de Tránsito sin Congestión.	30
3.7.1. Condiciones de Holgura Complementaria. . . . .	32
3.7.2. Interpretación del Problema Dual. . . . .	33
3.8. Algoritmo de Solución . . . . .	34

<b>4. Modelo de Asignación de Tránsito con Costos Generalizados</b>	<b>40</b>
4.1. Funciones Volumen-Demora . . . . .	41
4.1.1. Funciones BPR . . . . .	41
4.1.2. Funciones Cónicas . . . . .	43
4.2. Asignación de Tránsito con Costos Generalizados . . . . .	45
4.3. Algoritmo de Solución: Macro CONGTRAS . . . . .	49
<b>5. Modelo de Asignación de Tránsito con Restricciones de Capacidad</b>	<b>52</b>
5.1. El Problema de Líneas Comunes con Congestión . . . . .	53
5.2. Modelo de Equilibrio de Red . . . . .	55
5.3. Algoritmo de Solución. . . . .	62
5.3.1. Implementación en EMME: Macro CAPTRAS . . . . .	63
<b>6. Aplicación a la Red Metropolitana de la Ciudad de México y sus Efectos en el STC-Metro</b>	<b>66</b>
6.1. Características Generales de la Red de Tránsito . . . . .	67
6.1.1. Modos de Transporte . . . . .	69
6.1.2. Tipos de Vehículos . . . . .	69
6.1.3. Líneas de Tránsito . . . . .	70
6.1.4. Funciones Volumen-Demora y de Tránsito . . . . .	72
6.2. Asignación de Tránsito con el Modelo Lineal . . . . .	75
6.2.1. Preparación del Escenario . . . . .	76
6.2.2. Resultados . . . . .	76
6.3. Asignación no Lineal con Costos Generalizados . . . . .	89
6.4. Asignación no Lineal con Restricciones de Capacidad . . . . .	89
6.4.1. Función de Volumen-Demora BPR . . . . .	90
6.4.2. Función de Volumen-Demora Cónica . . . . .	101
<b>7. Conclusiones</b>	<b>115</b>
<b>A. EMME</b>	<b>117</b>
<b>B. Algoritmo de Dijkstra</b>	<b>119</b>
<b>C. Método de Promedios Sucesivos (MSA)</b>	<b>121</b>
<b>D. Ajuste de Funciones Cónicas</b>	<b>123</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Metro de la Ciudad de México. . . . .	5
2.2. Localización de un hospital usando GPS. . . . .	6
2.3. Red de Tuberías de la ciudad de Guadalajara. . . . .	6
2.4. Mapa de la ruta más corta entre dos ciudades. . . . .	7
2.5. Redes de telecomunicaciones y de cableado de equipo eléctrico. . . . .	7
2.6. Representación gráfica del problema no balanceado . . . . .	10
3.1. Red de tránsito. . . . .	18
3.2. Red de tránsito. . . . .	20
3.3. Red generalizada. . . . .	24
3.4. Red simplificada. . . . .	25
3.5. Arco generalizado de $(i,d)$ . . . . .	34
4.1. Funciones BPR . . . . .	42
4.2. Funciones cónicas . . . . .	43
5.1. Líneas comunes de $O$ a $D$ . . . . .	53
5.2. Tiempo total esperado de viaje. . . . .	56
6.1. Red Metropolitana: Ciudad de México y área conurbada. . . . .	68
6.2. Línea 6 del metro. . . . .	70
6.3. Modelo de estaciones de correspondencia. . . . .	71
6.4. Correspondencias en Línea 8 del Metro. . . . .	72
6.5. Línea 1a, dirección Observatorio. . . . .	78
6.6. Línea 6a, dirección Martín Carrera. . . . .	78
6.7. Línea 6b, dirección el Rosario. . . . .	79

6.8. Línea 8b dirección, Garibaldi. . . . .	80
6.9. Línea 9a, dirección Tacubaya. . . . .	81
6.10. Línea Ab, dirección Pantitlán. . . . .	81
6.11. Línea Ba, dirección Buenavista. . . . .	82
6.12. Línea 104-1. . . . .	83
6.13. Volumen auxiliar. . . . .	84
6.14. Demanda asignada por zonas con el modelo lineal. . . . .	85
6.15. Zonas de mayor demanda. . . . .	86
6.16. Actividades en los nodos. . . . .	87
6.17. Convergencia CAPTRAS. . . . .	91
6.18. Línea Ab, iteración 1. . . . .	92
6.19. Línea Ab, iteración 5. . . . .	93
6.20. Línea Ab, iteración 11. . . . .	93
6.21. Línea Ab, iteración 22. . . . .	94
6.22. Línea Ba, iteración 1. . . . .	94
6.23. Línea Ba, iteración 9. . . . .	95
6.24. Actividades en los nodos. . . . .	97
6.25. Comparación de volúmenes. . . . .	100
6.26. Línea 1a, asignación inicial. . . . .	103
6.27. Línea 3a, asignación inicial. . . . .	103
6.28. Línea Ab, asignación inicial. . . . .	104
6.29. Línea Ba, asignación inicial. . . . .	104
6.30. Línea Ab, iteración 4. . . . .	106
6.31. Línea Ab, iteración 10. . . . .	107
6.32. Línea Ab, iteración 18. . . . .	107
6.33. Línea Ab, iteración 24. . . . .	108
6.34. Línea Ba, iteración 2. . . . .	108
6.35. Línea Ba, iteración 7. . . . .	109
6.36. Línea EE1. . . . .	110
6.37. Actividades en los nodos. . . . .	112
6.38. Comparación de volúmenes. . . . .	114
D.1. Datos y gráfica de la función $fd1$ . . . . .	124
D.2. Datos y gráfica de la función $fd2$ . . . . .	125
D.3. Datos y gráfica de la función $fd3$ . . . . .	125
D.4. Datos y gráfica de la función $fd4$ . . . . .	126
D.5. Datos y gráfica de la función $fd6$ . . . . .	126
D.6. Datos y gráfica de la función $fd5$ . . . . .	127

D.7. Datos y gráfica de la función $fd7$ . . . . .	128
D.8. Datos y gráfica de la función $fd8$ . . . . .	129
D.9. Gráfica de la función $fdcaptras$ . . . . .	130

## ÍNDICE DE CUADROS

6.1. Modos de transporte. . . . .	69
6.2. Tipos de vehículos. . . . .	70
6.3. Volumen en tránsito auxiliar. . . . .	84
6.4. Zonas de mayor demanda. . . . .	85
6.5. Resultados para el metro en el modelo lineal. . . . .	88
6.6. CAPTRAS-BPR. Zonas de mayor demanda. . . . .	96
6.7. Resultados para el metro con CAPTRAS-BPR . . . . .	98
6.8. CAPTRAS Cónica. Zonas de mayor demanda. . . . .	105
6.9. Iteraciones para descongestionar líneas del metro. . . . .	109
6.10. CAPTRAS-Cónica. Zonas de mayor demanda. . . . .	111
6.11. Resultados para el metro con CAPTRAS Cónica. . . . .	113



## AGRADECIMIENTOS

A CONACYT por las becas otorgadas para estudiar el posgrado, así como para realizar una estancia en el CIRRELT de la Universidad de Montreal.

A Michael Florian y Yolanda Noriega de INRO, por su apoyo para aprender a utilizar el programa EMME, necesario para la realización de esta tesis. Gracias sus conocimientos y experiencias que han compartido conmigo.

Al Ing. Pablo Torres de la Subgerencia de Planeación Estratégica del STC-Metro, por su apoyo y orientación para realizar las simulaciones necesarias en la red del Valle de México.

A mis asesores de tesis, por su paciencia, consejos y esfuerzo para realizar este trabajo.

A mis profesores del posgrado por su experiencia y conocimientos en matemáticas aplicadas.

Finalmente, pero no menos importante, a mi familia y amigos por estar a mi lado en esta etapa de mi vida, por su cariño y apoyo.

## **Resumen**

La planificación del transporte urbano es un problema fundamental en las grandes ciudades. El presente trabajo forma parte de un proyecto de planeación cuyo objetivo es predecir el comportamiento de los usuarios en un sistema de transporte. Específicamente, se estudian modelos matemáticos de asignación de tránsito que están basados en el supuesto de que los usuarios utilizan estrategias de tipo óptimo para alcanzar su destino. Los modelos y sus algoritmos de solución se aplican a la red de transporte del Valle de México, utilizando el programa EMME, el cual tiene incorporadas las herramientas que permiten predecir la asignación de la demanda en escenarios con congestión y restricciones de capacidad en las líneas de transporte.

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

Los pasajeros que utilizan las redes de transporte público para desplazarse de un lugar a otro, en las grandes ciudades, cotidianamente experimentan situaciones de estrés, debido a que la gran mayoría de ellos deben viajar en vehículos de transporte que están saturados de pasajeros, además de padecer retrasos por la congestión vial, sobre todo en horas pico. Desafortunadamente, el crecimiento de la población seguirá aumentando en los próximos años, por lo que el problema de congestión vial, y el hacinamiento en los vehículos de transporte público en las grandes ciudades, no disminuirán en el corto plazo. Además, se debe considerar que los problemas asociados, como el deterioro de la salud de los pasajeros, manejo de multitudes, seguridad, desperdicio de energía, contaminación y la economía entre otros, deben tomarse en cuenta para encontrar soluciones que permitan mejorar la calidad de vida de los habitantes. De manera más global, los problemas de transporte forman parte de la planeación urbana y del desarrollo sustentable en las grandes ciudades, y se encuentran dentro del tipo de problemas complejos, los cuales requieren del concurso interdisciplinario y de la participación de diferentes instituciones.

Afortunadamente, durante las últimas décadas se han hecho grandes esfuerzos, sobre todo en países desarrollados, para generar modelos matemáticos que contribuyan a evaluar los impactos sobre las redes de transporte público cuando se hacen cambios en la red de transporte, ó bien cuando se modifica el patrón de servicio. Algunas de las acciones que se utilizan para intentar mejorar el servicio de transporte público son: cambio de rutas, introducción de nuevos modos de transporte y de nuevas líneas, crecimiento de la infraestructura, cambio en el sentidos de algunas ejes viales,

entre muchos otros. Para estudiar este tipo de problemas se requiere de métodos de asignación adecuados para evaluar ó predecir el impacto de estas acciones y cambios. Además, las herramientas de evaluación operativa y estratégica ayudan a la planeación y mejoran la eficiencia del sistema, al permitir ahorro de recursos, el diseño de mejores políticas de operación, anticipar acciones de contingencia, mejorar el impacto en el medio ambiente, entre otros. Asimismo, ayudan a proporcionar un mejor servicio a los usuarios.

Un modelo de asignación de tránsito describe la forma en que los usuarios de un sistema de transporte público emplean la infraestructura disponible entre diferentes orígenes y destinos para planear y realizar sus viajes. El propósito es distribuir sobre todas las posibles líneas y rutas, la demanda de viajes de todos los orígenes a todos los destinos, de tal manera que el tiempo total de viaje sea mínimo, desde la óptica de los usuarios.

El objetivo de este trabajo es introducir cierta clase de modelos matemáticos de asignación de tránsito, en donde se supone que los usuarios eligen sus rutas basados en estrategias de tipo óptimo [11]. Para este trabajo es de especial interés tomar en cuenta la congestión y las restricciones de capacidad de las unidades de transporte [7], [6], debido a que son muy útiles para la planificación urbana en redes de transporte de gran escala, como la Red Metropolitana del Valle de México, la cual incluye a la Ciudad de México y área conurbada. En este contexto, esta tesis forma parte de un proyecto de fondos mixtos CONACYT-ICYTDF denominado *Modelos Matemáticos para Mejorar la Operación de la Red del Metro* y uno de los objetivos, del proyecto, es auxiliar a la Subgerencia de Planeación Estratégica (SPE) del SCT-Metro, en el entendimiento de dichos modelos y su adecuada utilización. Cabe señalar que la SPE ha utilizado desde hace algunos años el software comercial EMME (ver Apéndice A) para realizar algunas simulaciones, debido a que tiene incorporadas la herramientas computacionales y el despliegue interactivo de resultados.

El presente trabajo es de especial importancia y utilidad para los sistemas de transporte urbano por al menos dos razones:

- *Para la planeación estratégica*, al utilizarse como herramienta principal para definir un plan maestro que permita planear futuras ampliaciones de la red de transporte y la introducción de servicios complementarios.
- *Para la planeación operativa de líneas de transporte*: ya que permite medir el impacto generado en una red, al poner en operación otros modos y líneas de

transporte; permite la planeación de servicios en escenarios de contingencia; ayuda a estimar los cambios en la afluencia de usuarios a la red, generados por cierres parciales de algunas líneas; mide el impacto del incremento/decremento del número de unidades en operación, entre los más importantes.

Debido a su formulación sobre redes, los problemas de asignación de tránsito también se consideran problemas de flujo en redes y es por ello que en el Capítulo 2 se presenta una descripción de este tipo de problemas. En el Capítulo 3 se desarrolla el modelo de asignación lineal de tránsito sin congestión, así como su algoritmo de solución. En los Capítulos 4 y 5 se presentan los modelos de asignación de tránsito con costos generalizados y con restricciones de capacidad, respectivamente, así como sus algoritmos de solución. En el Capítulo 6 se presentan los resultados de los modelos de asignación, lineal, costos generalizados y con restricciones de capacidad, aplicados sobre la red metropolitana de la Ciudad de México; para ello se utiliza la base de datos proporcionada por el STC-Metro, la cual incluye funciones BPR. Además de la construcción de escenarios en los que se consideran funciones cónicas como funciones de volumen-retraso, con el objetivo de comparar los tiempos de viaje y volúmenes del metro medidos en campo con los resultados obtenidos. Finalmente, en el Capítulo 7 se establecen las conclusiones de este trabajo, así como el posible trabajo futuro.

## CAPÍTULO 2

# PROBLEMAS DE FLUJO EN REDES

Con el objetivo de poner en un contexto más amplio a los problemas de asignación de tránsito, a continuación se describen brevemente algunos problemas de flujo en redes y se discuten algunos aspectos que comparten estos problemas, así como la formulación de los modelos correspondientes. Posteriormente, se mencionan brevemente los tipos de modelos de asignación que se utilizan en este trabajo.

Algunos problemas de optimización en redes son modelados mediante problemas de programación lineal (*PL*), en donde se incluye una función objetivo lineal y un conjunto de restricciones también lineales y, desde luego, en el contexto de matemáticas aplicadas las variables de decisión son no negativas.

Los modelos de redes tienen dos grandes ventajas con respecto a los modelos generales de la programación lineal.

1. Ellos pueden resolverse de manera más eficiente. Los problemas de flujo en redes al ser resueltos con programación lineal son modelados con matrices ralas por lo que, al utilizar gráficas se pueden evitar operaciones innecesarias y, por lo tanto, reducir el número de operaciones. Las redes son representadas por medio de gráficas (conjuntos de nodos y aristas), y las estructuras de datos para representarla permiten desarrollar métodos primales, duales o primales-duales que requieren menos espacio de memoria para llegar a la solución óptima.
2. Estos modelos son muy versátiles, por lo que son útiles para una gran variedad de problemas y múltiples aplicaciones.

Los problemas de flujo en redes ocurren con frecuencia y son considerados como una herramienta importante para la toma de decisiones. Por ejemplo, sus aplicaciones abarcan redes de transporte, redes de comunicación, sistema de vuelos en los aeropuertos, rutas de navegación de los cruceros, estaciones de bombeo que transportan fluidos a través de tuberías, rutas entre ciudades, redes de conductos, y todas aquellas situaciones que puedan ser modeladas mediante una red. Una red puede representarse mediante nodos y arcos, en donde los nodos representan las estaciones o las ciudades, los arcos pueden representar los caminos, las líneas aéreas, los cables, las tuberías. Por otro lado, el flujo puede representar el movimiento de los camiones, mensajes y fluidos que pasan por la red. En un problema de flujo en redes, el objetivo puede consistir en encontrar la ruta mas corta si se considera una red de caminos, o enviar el máximo flujo si se considera una red de tuberías.

## 2.1. Ejemplos

A continuación se presentan algunos de los modelos más importantes en las que se puede aplicar la optimización en redes.



Determinar la ruta más corta que une dos lugares (un origen y un destino) en una red de caminos existentes como lo es la red del metro de la Ciudad de México, en donde los nodos de la red están representados por las estaciones y las arcos corresponden a las conexiones establecidas por cada una de las líneas.

Figura 2.1: Metro de la Ciudad de México.

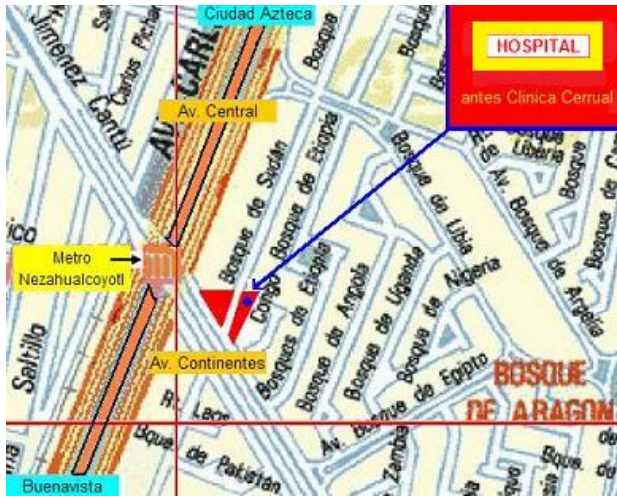


Figura 2.2: Localización de un hospital usando GPS.

Localización de servicios de emergencias, cuyo objetivo es minimizar los tiempos de servicio (Google Maps, GPS, Sección Amarilla, etc.). En este tipo de redes los nodos son representados por lugares de referencia entre los servicios a localizar y las aristas corresponden a las calles o carreteras a seguir para acceder a estos servicios.

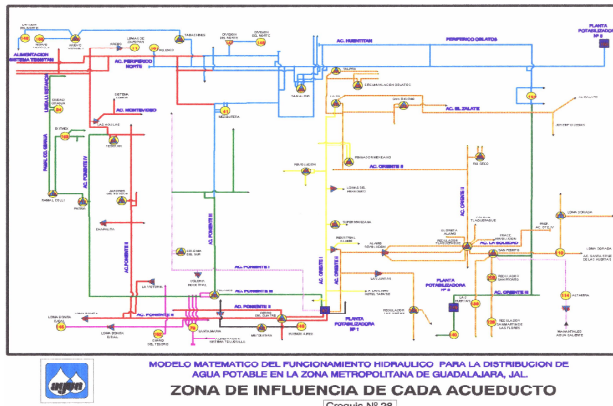


Figura 2.3: Red de Tuberías de la ciudad de Guadalajara.

Diseño de una red de tuberías de agua para enviar la máxima cantidad de agua a diferentes localidades, o el diseño de una red de tuberías de gas natural mar adentro que conecta fuentes del golfo de México con un punto de entrega en tierra con el objetivo de minimizar el costo de construcción. Los nodos de la red equivalen a las ciudades de entrega de agua o gas y las aristas a las tuberías.





Figura 2.4: Mapa de la ruta más corta entre dos ciudades.

Diseño de redes de transporte para minimizar el costo total de proporcionar conexiones (vías ferroviarias, carreteras, etc.), donde los nodos corresponden a las ciudades a conectar y las aristas a las vías o carreteras.

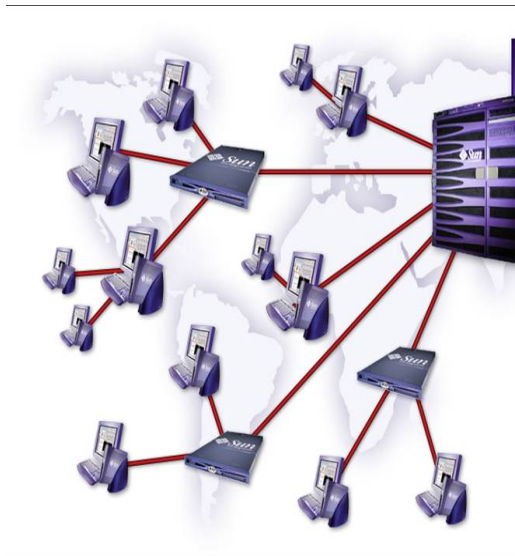


Figura 2.5: Redes de telecomunicaciones y de cableado de equipo eléctrico.

Diseño de redes de telecomunicación (redes de fibra óptica, de computadores, telefónicas, de televisión por cable, etc.) con el objetivo de minimizar el costo de cableado. O el diseño de una red de cableado en equipo eléctrico o sistemas de cómputo con el objetivo de minimizar la longitud total del cable. En este tipo de redes los nodos corresponden a los equipos y las aristas a los cables de conexión.

## 2.2. Problema de Flujo a Costo Mínimo

Resolver el Problema de Flujo a Costo Mínimo (*PFCM*) consiste en encontrar la forma de enviar una cantidad determinada de flujo desde uno o varios orígenes a uno o varios destinos para satisfacer una demanda al menor costo posible a través de una red de flujo que es representada mediante una gráfica  $G$ .

En la gráfica dirigida  $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ , el conjunto de nodos  $\mathcal{N} = \{1, 2, \dots, N\}$  representa el conjunto de orígenes y destinos, y  $\mathcal{A} = \{(i, j) \mid i, j \in \mathcal{N}\}$  es el conjunto de arcos o aristas que representan las conexiones entre los nodos, de forma tal que enviar una unidad desde el nodo  $i$  al nodo  $j$  tiene un costo  $a_{ij}$ .

En la Sección 2.2.1 se hace la formulación general del PFCM como un problema de programación lineal. En la Sección 2.3 se presenta el problema dual asociado al PFCM, así como su interpretación económica. En la Sección 2.4 se enlistan todos los problemas que pueden representarse como modelos de optimización de flujo a costo mínimo. Finalmente, en la Sección 2.5 se enuncian características generales de los algoritmos de solución del PFCM.

### 2.2.1. Formulación General

El Problema de Flujo a Costo Mínimo como un modelo de Programación Lineal con restricciones en los arcos es [1]:

$$\text{mín} \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} a_{ij} x_{ij} \quad (2.1)$$

$$\text{s. a.} \quad \sum_{\{k \mid (i,k) \in \mathcal{A}\}} x_{ik} - \sum_{\{k \mid (k,i) \in \mathcal{A}\}} x_{ki} = s_i, \quad \text{para todo } i \in \mathcal{N} \quad (2.2)$$

$$b_{ij} \leq x_{ij} \leq c_{ij}, \quad \text{para todo } (i, j) \in \mathcal{A} \quad (2.3)$$

Las variables de decisión  $x_{ij}$  representan la cantidad de flujo enviado del nodo  $i$  al nodo  $j$  y los escalares representan

- El costo  $a_{ij}$  asociado al arco  $(i, j)$ .
- Las cotas inferiores y superiores de  $x_{ij}$  son,  $b_{ij}$  y  $c_{ij}$ , respectivamente. Estos valores son interpretados como las capacidades en los arcos, mínima y máxima respectivamente. La ecuación (2.3) se llama *restricción de capacidad*.

- La cantidad de flujo  $s_i$  producido o demandado en el nodo  $i$ , cuando  $s_i > 0$  o  $s_i < 0$ , respectivamente. Si  $s_i = 0$ , el nodo  $i$  es un nodo de transbordo, es decir, producción o demanda cero.

La ecuación (2.2) se llama restricción de *conservación de flujo* y quiere decir que la todo lo que sale menos todo lo que entra en el nodo  $i$ , es igual a la producción o demanda en el correspondiente nodo. La formulación más sencilla de un problema de flujo a costo mínimo sólo supone condiciones de no negatividad en las variables de decisión.

En general, sin importar si las variables de decisión son no negativas o acotadas se supone que los modelos de flujo a costo mínimo satisfacen

$$\sum_{i=1}^N s_i = 0 \quad (2.4)$$

en cuyo caso se les llama *Problemas Balanceados* [2]. Cuando ésta condición no se satisface, siempre es posible agregar un nodo ficticio (origen o destino) para balancear el problema. Este nodo origen (destino) debe estar conectado a cada nodo destino (origen) por medio de arcos ficticios, a los cuales se les asignan costos muy altos para no considerarlos como parte de la solución. En el siguiente ejemplo se muestra esta técnica para balancear un problema:

**Ejemplo 2.1** (Problema no Balanceado). *Una empresa energética dispone de tres plantas de generación para satisfacer la demanda eléctrica de cuatro ciudades. Las plantas 1, 2 y 3 pueden satisfacer 35, 50 y 40 millones de kWh respectivamente. El valor máximo de consumo ocurre a las 2 PM y es de 40, 20, 30 y 30 millones de kWh en las ciudades 1, 2, 3 y 4 respectivamente. El costo de enviar 1 kWh depende de la distancia que deba recorrer la energía. La siguiente tabla muestra los costos de envío unitario desde cada planta a cada ciudad.*

Desde	Hacia			
	Ciudad 1	Ciudad 2	Ciudad 3	Ciudad 4
Planta 1	8	6	10	9
Planta 2	9	12	13	7
Planta 3	14	9	16	5

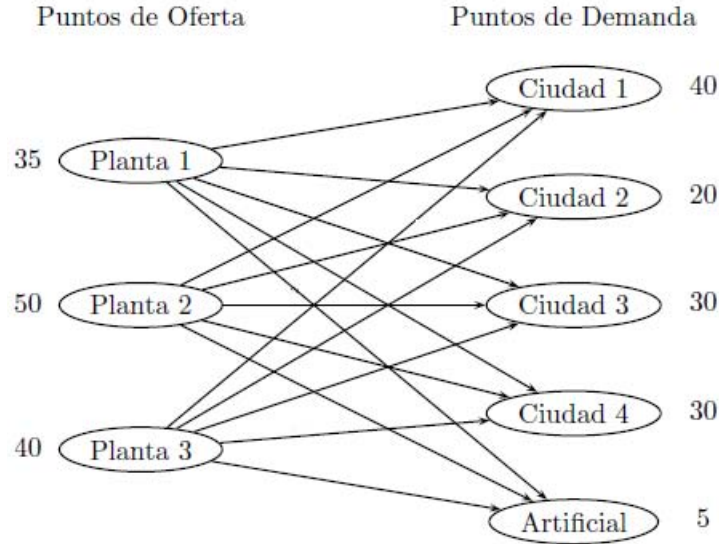


Figura 2.6: Representación gráfica del problema no balanceado

Como la oferta total supera a la demanda total, se puede balancear el problema incorporando un nodo de demanda artificial que tiene como demanda el excedente de oferta del problema.

## 2.3. Dual del Problema de Flujo a Costo Mínimo

En la programación lineal los modelos duales asociados a los problemas primales tienen una gran importancia, no solo por su relevancia teórica, sino también por su utilidad práctica. En este caso en particular, es de interés formular el problema dual del PFCM.

Para obtener el problema dual se define una variable dual para cada restricción primal, y para cada variable primal existe una restricción dual. Sean  $p_i$  y  $p_j$  con  $i, j \in \mathcal{N}$  las variables asociadas a las restricciones de conservación de flujo (2.2) y las variables  $\delta_{ij}$  y  $\gamma_{ij}$  son asociadas a las restricciones de capacidad (2.3). El problema dual asociado al PFCM es

$$\text{máx} \quad \sum_{i \in \mathcal{N}} s_i p_i + \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} b_{ij} \delta_{ij} - \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} c_{ij} \gamma_{ij} \quad (2.5)$$

$$\text{s. a.} \quad p_i - p_j + \delta_{ij} - \gamma_{ij} \leq a_{ij}, \quad \text{para todo } (i, j) \in \mathcal{A} \quad (2.6)$$

$$\delta_{ij}, \gamma_{ij} \geq 0, \quad \text{para todo } (i, j) \in \mathcal{A} \quad (2.7)$$

$$p_i \text{ no restringida} \quad (2.8)$$

### Condiciones de Holgura Complementaria.

Dadas las soluciones  $x_{ij}$  y  $(p_i, \delta_{ij}, \gamma_{ij})$  de los problemas primal y dual, respectivamente, éstas son óptimas si y sólo si satisfacen las condiciones de holgura complementaria.

$$x_{ij} = \begin{cases} c_{ij}, & \text{si } p_i - p_j > a_{ij}, \gamma_{ij} = 0 \\ b_{ij}, & \text{si } p_i - p_j \leq a_{ij}, \delta_{ij} = 0 \end{cases} \quad (2.9)$$

Además, cuando  $b_{ij} < x_{ij} < c_{ij}$ ,  $p_i - p_j = a_{ij}$ .

### Interpretación Económica

Sean  $\mathbf{x} = (x_{ij})$  y  $\mathbf{p} = (p_i)$  los vectores que representan las soluciones óptimas del PFCM primal y dual respectivamente. Por cada unidad de flujo  $x_{ij}$  que se envía del nodo  $i$  al nodo  $j$  a lo largo del arco  $(i, j)$  se debe pagar un costo de transporte  $a_{ij}$ , además de un costo de almacenamiento  $p_j$  por el número de unidades enviadas al nodo  $j$ , así como un costo  $p_i$  por cada unidad de flujo residual  $c_{ij} - x_{ij}$  que no es enviada desde el nodo  $i$  y que por lo tanto se almacena en el nodo  $i$ . Entonces, el costo total generado por enviar el flujo  $x_{ij}$  desde el nodo  $i$  a cada nodo  $j$  es

$$\begin{aligned} \text{costos} &= (a_{ij} + p_j)x_{ij} + (c_{ij} - x_{ij})p_i \\ &= (a_{ij} + p_j - p_i)x_{ij} + c_{ij}p_i \end{aligned}$$

y lo que se desea es que dichos costos sean lo más bajos posibles, es decir, minimizar  $(a_{ij} + p_j - p_i)x_{ij}$  (ya que  $c_{ij}p_i$  es un valor constante, que no contribuye en la búsqueda del óptimo). Además de costos mínimos también se desea obtener el máximo beneficio, entonces el vector de precios  $p$  también ha de satisfacer las condiciones del problema (2.5).

## 2.4. Modelos de Flujo a Costo Mínimo

Algunos problemas de flujo en redes que pueden representarse como modelos de optimización de flujo a costo mínimo son los siguientes:

**Problema de Transporte.** El objetivo es encontrar la manera más eficiente, en términos de costos, de transportar bienes desde ciertos orígenes a ciertos destinos para satisfacer una demanda. Este tipo de problemas juegan un papel importante en la toma de decisiones de las empresas para reducir sus costos de producción y mejorar sus servicios.

### Formulación

$$\text{mín} \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} a_{ij} x_{ij} \quad (2.10)$$

$$\text{sujeto a} \quad (2.11)$$

$$\sum_{\{j|(i,j) \in \mathcal{A}\}} x_{ij} = \alpha_i, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, m, \quad (2.12)$$

$$\sum_{\{i|(i,j) \in \mathcal{A}\}} x_{ij} = \beta_j, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, n, \quad (2.13)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq \min\{\alpha_i, \beta_j\}, \quad \text{para todo } (i, j) \in \mathcal{A} \quad (2.14)$$

Las variables de decisión  $x_{ij}$  representan la cantidad de flujo enviado del nodo  $i$  al nodo  $j$  y los valores  $a_{ij}$  representan los costos unitarios de transporte desde el nodo  $i$  hasta el nodo  $j$ , y son atributos asociados a los arcos. Las ecuaciones (2.12) y (2.13) representan las restricciones de conservación de flujo.

Los escalares  $\alpha_i$  y  $\beta_j$  son valores positivos que representan la producción total en el nodo  $i$  y la demanda total en el nodo  $j$ , respectivamente y determinan un problema balanceado si se satisface

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i = \sum_{j=1}^n \beta_j$$

**Problema de Ruta más Corta.** Este problema consiste en determinar la trayectoria de mínima longitud (o costo mínimo) desde un origen  $i_1$  a un destino

dado  $i_d$ .

### Formulación

$$\text{mín} \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} a_{ij} x_{ij} \quad (2.15)$$

$$\text{sujeto a} \quad (2.16)$$

$$\sum_{\{j|(i,j) \in \mathcal{A}\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i) \in \mathcal{A}\}} x_{ji} = s_i = \begin{cases} 1, & \text{si } i = 1 \\ -1, & \text{si } i = d \\ 0, & \text{si } i \neq 1 \text{ ó } d \end{cases} \quad (2.17)$$

$$0 \leq x_{ij}, \text{ para todo } (i, j) \in \mathcal{A} \quad (2.18)$$

Las variables de decisión  $x_{ij}$  representan la cantidad de flujo enviado del nodo  $i$  al nodo  $j$ , que en este caso se considera que es sólo una unidad. Los escalares  $a_{ij}$  representan el costo (tiempo, distancia o dinero) asociado al arco  $(i, j)$ .

El nodo origen tiene una producción de una unidad  $s_1 = 1$ , el nodo destino tiene una demanda de una unidad  $s_d = -1$  y los nodos intermedios representan nodos de transbordo. Se elige el valor 1, ya que en este caso lo más importante es encontrar la ruta más corta para un usuario o producto.

**Problema de Asignación** Normalmente, se tienen un grupo de  $n$  objetos que han de ser asignados a  $m$  tareas y dependiendo del contexto del problema,  $a_{ij}$  representa el costo o beneficio por asignar el objeto  $i$  a la tarea  $j$ . Entonces el objetivo del problema, dependiendo del enfoque, es minimizar costos o maximizar beneficios.

### Formulación

$$\text{mín (máx)} \quad \sum_{(i,j) \in \mathcal{A}} a_{ij} x_{ij} \quad (2.19)$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{\{j|(i,j) \in \mathcal{A}\}} x_{ij} = 1, \quad \text{para todo } i = 1, \dots, n \quad (2.20)$$

$$\sum_{\{i|(i,j) \in \mathcal{A}\}} x_{ij} = 1, \quad \text{para todo } j = 1, \dots, m \quad (2.21)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \text{para todo } (i, j) \in \mathcal{A} \quad (2.22)$$

La variable  $x_{ij} = 1$  si el objeto  $i$  es asignado a la tarea  $j$  y en caso contrario  $x_{ij} = 0$ . Las ecuaciones (2.20) y (2.21) representan el hecho de que un objeto sólo puede ser asignado a una tarea y una tarea sólo puede ser asignada a un objeto, respectivamente.

**Problema de Flujo Máximo.** En una red en donde cada arco tiene una capacidad máxima, el problema consiste en determinar el máximo número de unidades que pueden ser enviadas de los orígenes (*fuentes*  $s$ ) a los destinos (*sumideros*  $t$ ), de forma tal que se aproveche al máximo la capacidad de la red.

### Formulación

$$\text{máx} \quad f_{st} \quad (2.23)$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{\{j|(i,j) \in \mathcal{A}\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i) \in \mathcal{A}\}} x_{ji} = 0, \quad i \neq s \text{ ó } t \in \mathcal{N} \quad (2.24)$$

$$\sum_{\{j|(i,j) \in \mathcal{A}\}} x_{ij} - \sum_{\{j|(j,i) \in \mathcal{A}\}} x_{ji} = f_{ts}, \quad (2.25)$$

$$b_{ij} \leq x_{ij} \leq c_{ij}, \quad \text{para } (i, j) \in \mathcal{A} \text{ con } (i, j) \neq (t, s). \quad (2.26)$$

El valor  $f_{st}$ , representa el flujo enviado desde el nodo origen  $s$  al nodo destino  $t$ . Los parámetros  $b_{ij}$  y  $c_{ij}$  determinan cotas de las capacidades en los arcos, inferior y superior respectivamente. Las ecuaciones (2.24) y (2.25) representan la ley de conservación de flujos para los nodos de transbordo y para el nodo destino y respectivamente.

## 2.5. Generalidades de los Algoritmos de Solución

Ahora que se han definido ambos problemas, primal y dual, conviene mencionar algunos de los algoritmos de solución para el PFCM. Existen al menos tres tipos diferentes de algoritmos iterativos.

**Algoritmos primales.** En cada iteración se mejora el valor de la función objetivo primal, generando una sucesión de flujos  $x_{ij}$  que sean factibles en el primal, hasta alcanzar el valor óptimo.

**Algoritmos primal dual.** Por un lado en cada iteración se mejora el valor de la función objetivo del problema dual, hasta alcanzar su valor óptimo al construir una sucesión de precios  $p_i$ . Por otro lado también se genera una sucesión de flujos  $x_{ij}$ , que deben ser factibles para el problema primal.



**Subasta.** Estos algoritmos generan una sucesión de precios aproximados, que imita el proceso de las subastas reales. Los precios duales y los flujos se relacionan entre si por medio de una forma aproximada de las condiciones de HC (2.9).

En la práctica, es difícil decir que tipo de algoritmo es *el mejor*, ya que dependerá del problema a resolver [2], es decir de su tamaño así como de los datos a manejar. Usualmente al aplicar un algoritmo para resolver un problema se está interesado en

1. Obtener la solución en el menor tiempo posible.
2. Poder iniciar la implementación mediante una solución inicial.
3. Obtener ventaja del hardware para cálculos en paralelo, cuando sea necesario.
4. Ahorrar memoria.

La diversidad de estas consideraciones hace imposible afirmar que exista un algoritmo más eficiente que los demás en todas las instancias. Entonces, al resolver un problema será necesario entender las propiedades de los diferentes algoritmos, por ejemplo número de operaciones, criterios de terminación y las características de las estructuras de datos.

## 2.6. Modelos de Asignación de Tránsito

Un modelo de *asignación de tránsito* tiene como objetivo describir la forma en como los usuarios de un sistema de transporte público utilizan la infraestructura disponible para viajar de sus diferentes orígenes a sus correspondientes destinos sobre una red, esta asignación puede ser modelada tomando o no en cuenta los efectos de la congestión. El aumento en la demanda del servicio generalmente repercute en los tiempos de viaje de los usuarios, generando:

- Incremento de los tiempos de espera por un vehículo disponible para abordar.
- Disminución de la frecuencia de los vehículos.
- Disconfort que experimentan los usuarios al disminuir el espacio libre en los vehículos que abordan.

En el presente trabajo se estudian y utilizan los modelos de asignación de tránsito desarrollados por:

Spiess y Florian (1989) [11], quienes desarrollaron un modelo sin congestión basado en *estrategias óptimas* y tiempos esperados de espera que dependen del interarribo de los vehículos de las diferentes líneas de transporte, denominadas *frecuencias efectivas*. Este modelo de asignación de tránsito es un problema no lineal, sin embargo mediante una reformulación se puede expresar como un problema de PL y su algoritmo de solución es implementado en el paquete de programación EMME descrito de manera general en el Apéndice A.

En 1993, Spiess presenta el modelo de asignación de tránsito con costos generalizados [17], en el cual se consideran tiempos de viaje como funciones dependientes del volumen, por lo que se consideran como costos generalizados que determinan el discomfort que experimentan los usuarios cuando incrementa el número de pasajeros. El algoritmo de solución es desarrollado en la macro CONGTRAS (Congested Transit Assignment) en EMME.

Cominetti y Correa (2001) [7], quienes desarrollaron un modelo de asignación basado en el llamado *problema de líneas comunes*. El problema de líneas comunes se aborda inicialmente entre un solo origen-destino, en donde el efecto de congestión se modela por medio de la introducción de frecuencias efectivas, las cuales son funciones decrecientes que dependen del volumen de pasajeros. Posteriormente ellos extienden el modelo a una red de tránsito congestionada con múltiples orígenes-destinos, en donde además también consideran *los tiempos de viaje* como funciones dependientes del volumen.

Finalmente, Cepeda, Cominetti y Florian (2006) [6], retoman las ideas desarrolladas por Spiess, Cominetti y Florian en los modelos mencionados en los párrafos anteriores, y formulan el problema de asignación con restricciones de capacidad, basado en líneas comunes, en términos de un problema de minimización de una función de holgura (GAP), problema que es posible resolver por medio de algoritmos heurísticos de tipo iterativo. El algoritmo de solución está implementado en la macro CAPTRAS (Capacited Transit Assignment) de EMME.

## CAPÍTULO 3

# CONCEPTOS BÁSICOS: EL MODELO LINEAL DE ASIGNACIÓN DE TRÁNSITO

En este capítulo, en las Secciones 3.1 y 3.2 se definen conceptos básicos como líneas de tránsito y estrategias, así como los atributos asociados a los elementos de la red de tránsito, además de la representación de la red de tránsito mediante gráficas. Finalmente, la construcción de modelo básico de asignación de tránsito sin congestión, así como su algoritmo de solución.

### 3.1. Red de Tránsito

Una red de transporte urbano es un sistema que incluye líneas de tránsito relacionadas con todos los modos de transporte disponibles en un área en particular, donde cada modo de transporte tiene asociado un tipo de vehículo propio. Una red de este tipo se denominará *red de tránsito*.

Una red de tránsito es representada por medio de una gráfica  $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$  fuertemente conexa y no dirigida, donde  $\mathcal{N}$  denota el conjunto de nodos y  $\mathcal{A}$  contiene un conjunto de arcos que representan segmentos de *líneas de tránsito* o caminos peatonales. Entonces, las líneas de tránsito se representan mediante trayectorias de nodos y arcos, sin repetición, donde cada nodo representa una estación de tránsito.

En esta representación los nodos y arcos de  $G$  están definidos como:

- $N_s \subseteq \mathcal{N}$  es el conjunto de nodos que representan las estaciones y son llamados *nodos-estación*.
- Cada línea  $l$  representa un conjunto de *nodos de línea*  $N_l \subseteq \mathcal{N}$ . Es decir, cada nodo en  $N_l$  conecta el siguiente nodo de línea por medio de un segmento de línea.
- Cada nodo de línea en  $N_l$  se conecta con el nodo estación correspondiente en  $N_s$  por medio de *arcos de ascenso y descenso*.
- Existen *arcos peatonales* que conectan directamente un par de nodos estación.
- $\mathcal{A}_i^+ = \{a : i_a = i\}$  y  $\mathcal{A}_i^- = \{a : j_a = i\}$  son los arcos que salen del ó entran al nodo  $i \in \mathcal{N}$ , igual que en el modelo sin congestión.
- $\mathcal{D} \subset \mathcal{N}$  denota al conjunto de todos los nodos destino.

La Figura 3.1 representa una red de tránsito y en ella se indican los nodos estación y los nodos de línea.

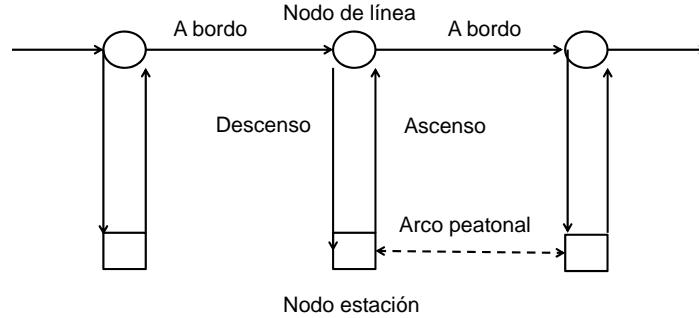


Figura 3.1: Red de tránsito.

Para cada nodo  $i \in \mathcal{N}$  de la gráfica  $G$  se supone que:

1. Es posible el ascenso y descenso de usuarios, mediante arcos peatonales que conectan nodos estación y nodos de línea.
2. Se conocen tanto la distribución de los tiempos de inter-arribo de los vehículos, como la tasa de arribo de los usuarios.

Para cada arco  $a \in \mathcal{A}$  de  $G$  se supone que:

1. Los usuarios se trasladan en vehículos de las líneas de tránsito o a pie sobre arcos peatonales.
2. Los arcos peatonales se consideran como líneas de tránsito con tiempo de espera cero.
3. Los tiempos de viaje sobre cada arco se supone que son constantes y conocidos en los modelos básicos y dependientes del volumen de pasajeros en modelos más generales.

Gracias a las características anteriores es posible determinar de manera directa:

1. La *distribución de los tiempos de espera* de un vehículo para una línea dada.
2. El *tiempo esperado* de llegada del primer vehículo.
3. La *probabilidad* de que un vehículo de una línea dada llegue primero a un nodo dado.

Esto permite determinar el *tiempo total esperado de viaje*, desde un nodo origen a un destino dado, como una suma ponderada de

$$\text{tiempo de espera} + \text{tiempo de viaje} + \text{tiempo de caminata}$$

Es necesario hacer hincapié en que este problema de asignación difiere del problema en una red de tráfico, pues en este último caso un automovilista selecciona una sola ruta de un conjunto de posibles rutas en una **red de tráfico**, mientras que un viajero en un red de tránsito, generalmente escoge un conjunto de posibles trayectorias y deja que el vehículo que llegue primero en cada estación determine su ruta. En general, el usuario de una **red de tránsito** elige trayectorias de acuerdo a criterios muy específicos que serán definidos en la siguiente sección, como los tiempos de espera y la probabilidad de abordar un vehículo. Los problemas de tráfico y tránsito **coinciden cuando no hay tiempo de espera** en ningún nodo, es decir, cuando se elimina el elemento estocástico del problema. Por lo tanto, para la construcción del modelo de tránsito es decisivo estudiar el comportamiento de los usuarios al momento en que definen la ruta que les permita alcanzar su destino [11], [7], [6].

## 3.2. Estrategias

El conjunto de reglas que permiten al viajero alcanzar su destino determinan su *estrategia*. El número y el tipo de diferentes estrategias a elegir por el usuario depende de su experiencia, así como del tipo y cantidad de información de la que dispone durante su viaje, mientras espera en una estación a que una línea sea servida. Si la única información disponible es el conjunto de rutas disponibles, entonces una estrategia simplemente define una trayectoria.

Con el objeto de ilustrar las ideas y conceptos a introducir, se considera una red simple con cuatro líneas y cuatro estaciones, como se ilustra en el Figura 3.2. Para cada línea se indica el *headway*, es decir el tiempo (en minutos) de arribo de un vehículo después del inmediato anterior. También se supone conocido el tiempo de viaje de un vehículo en cada uno de los arcos de la red que, para simplificar, inicialmente se asumen constantes. Posteriormente se relajarán estas condiciones.

**Ejemplo 3.1.** Considere la red de tránsito de la Figura 3.2. Un usuario desea ir de la estación A a la estación B, y mientras espera en la estación A podría definir una estrategia a partir de alguna de las siguientes decisiones:

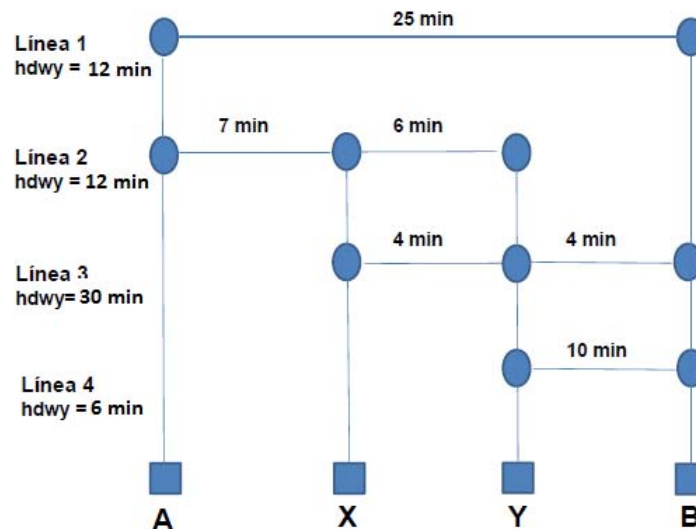


Figura 3.2: Red de tránsito.

1. Utilizar la línea 2 para ir al nodo Y, transbordar a la línea 3 y descender en el nodo B.

2. Abordar el primer vehículo que arribe al nodo A, que sirva a las línea 1 o 2; si es la línea 1, descender en B; si es la línea 2, transbordar en el nodo Y a cualquiera de las líneas 3 o 4 y descender en B.

Obsérvese que la segunda estrategia es más elaborada, debido a que en cada estación el usuario aborda el primer vehículo y debe decidir en que estación descende, mientras que en la primera estrategia el usuario ha decidido seguir una ruta determinada. Para llevar a cabo la segunda estrategia, se supone que el viajero conoce no solo las líneas disponibles sino también una estimación de los tiempos de espera para las diferentes líneas. Si el usuario tuviera más información, como los tiempos de llegada de los vehículos, entonces el conjunto de posibles estrategias resultaría más complejo. En este trabajo sólo se consideran estrategias que satisfacen la siguiente definición [11].

**Definición 3.1.** *Una estrategia es el conjunto de decisiones que toma el usuario en cada nodo de la red para llegar a su destino. Estas decisiones se basan en el conocimiento de las líneas que le permiten alcanzar su destino (líneas atractivas), así como de los tiempos de espera en cada uno de los nodos.*

Entonces, cada estrategia se puede describir por medio de la especificación de un conjunto no vacío de líneas atractivas en cada nodo, y por cada una de estas líneas, el nodo siguiente en el que el viajero descende.

Por lo tanto, dada una estrategia, un viaje real puede llevarse a cabo de acuerdo al siguiente algoritmo

1. Nombrar al nodo  $i$  en el que se encuentra el usuario, como el nodo origen.
2. Abordar el primer vehículo que llegue, del conjunto de líneas atractivas.
3. Descender en un nodo predeterminado  $j$ .
4. Si el nodo  $j$  no es el nodo destino, regresar a 1. En caso contrario, el destino ha sido alcanzado.

En este contexto, una estrategia se considera *factible* si la gráfica definida por las líneas atractivas de la estrategia no contiene ciclos y se considera *óptima* si su ejecución minimiza el **tiempo total esperado de viaje**.

En el modelo sin congestión (modelo básico) se supone que las líneas tienen capacidad suficiente para transportar a todo el volumen de pasajeros. Por lo tanto, en este caso es natural suponer que los tiempos de viaje sobre cada arco de la red son constantes, es decir no hay retraso cuando el volumen de viajeros aumenta. El modelo se construye tomando el conjunto de estrategias factibles como el conjunto sobre el cual los viajeros hacen su elección de ruta. Es importante resaltar que, debido a que los tiempos de viaje no son afectados por el volumen de pasajeros, es posible separar el problema por cada nodo destino, como se verá más adelante. Por esta razón se dice que el modelo es separable por destinos.

En general, en una red de tránsito el usuario realiza las siguientes acciones para poder alcanzar su destino.

- Acceder desde el origen a nodos estación.
- Esperar por el primer vehículo de transporte en un nodo de línea.
- Viajar a bordo de un vehículo de una línea de tránsito.
- Descender de un vehículo en un nodo de línea.
- Caminar entre dos nodos de estación.
- Salir de una estación de tránsito al destino final.

Es muy importante observar que cada una de estas componentes de viaje se mide por medio de un tiempo (costo) no negativo, excepto aquella componente en donde hay que “esperar un vehículo de transporte”, que se cuantifica mediante la distribución de tiempos de espera por el primer vehículo para abordar y en donde los tiempos de espera dependen de las frecuencias de interarribo de las distintas líneas de tránsito.

### **3.3. Representación Generalizada de la Red de Tránsito**

Para modelar el comportamiento de los usuarios al desplazarse sobre la red de tránsito es necesario determinar la distribución del tiempo de espera por el primer vehículo que servirá a los arcos  $a \in \mathcal{A}$ . Entonces es necesario caracterizar los arcos que inciden en un nodo dado, a través de la siguiente definición.



**Definición 3.2.** Sea  $\mathcal{A}_i^+(\mathcal{A}_i^-)$  el conjunto de arcos que salen del (entran al) nodo  $i \in \mathcal{N}$ . Cada arco  $a \in \mathcal{A}$  tiene asociados los parámetros  $(t_a, f_a)$ , donde  $t_a$  es el tiempo de viaje sobre el arco de línea  $a$  y  $f_a$  es la frecuencia de interarribo de vehículos sobre el arco  $a$ .

A partir de esta caracterización de arcos en la red de tránsito, algunas componentes de viaje para los usuarios pueden definirse como:

- Arco de ascenso, cuyos atributos son  $(0, f_a)$ , es decir el tiempo de viaje es cero y el tiempo de espera esta determinado por la frecuencia  $f_a$ . Este tipo de arco conecta un nodo estación con un nodo de línea.
- Arco de viaje, con atributos  $(t_a, \infty)$ , es decir, el tiempo de viaje es  $t_a$  (dado por la línea) y el tiempo de espera es cero, por lo que la frecuencia es infinita. Este tipo de arco conecta dos estaciones de tránsito.
- Arco de descenso, cuyos atributos son  $(0, \infty)$ , es decir, el tiempo de viaje es cero y el tiempo de espera es cero. Este tipo de arco conecta un nodo de línea con un nodo estación.
- Arco peatonal, con atributos  $(t_a, \infty)$ , es decir, su tiempo de viaje es el del recorrido  $t_a$  y tiempo de espera nulo. Este tipo de arco conecta dos nodos estación.

Estos arcos y sus respectivos nodos formarán una **red generalizada** sobre la cual se estudiará el problema de asignación de tránsito. El siguiente proceso de construcción define formalmente la red generalizada asociada a la red de tránsito:

- Para cada nodo estación  $i$  se crean tantos nodos en paralelo  $i_k$  como líneas  $k$  existan en el conjunto  $\mathcal{A}_i^+$  y se les llama *nodos de línea*, como en la Sección 3.1.
- Cada nodo de línea está conectado a su correspondiente nodo estación por medio de arcos peatonales que representan el ascenso o descenso de usuarios.

Para ilustrar lo anterior, en la Figura 3.3 se muestra la red generalizada correspondiente a la red de la Figura 3.2. Los arcos que *llegan* y *salen* de los nodos estación  $A$ ,  $X$ ,  $Y$  y  $B$  representan el *descenso* y *ascenso* de pasajeros, respectivamente.

Los nodos  $Ai$ ,  $Bj$ ,  $Xk$  y  $Ym$  son nodos de línea asociados a las líneas  $i$ ,  $j$ ,  $k$  o  $m$ , con  $i \in \{1, 2\}$ ,  $j \in \{2, 3\}$ ,  $k$  y  $m \in \{2, 3, 4\}$ .

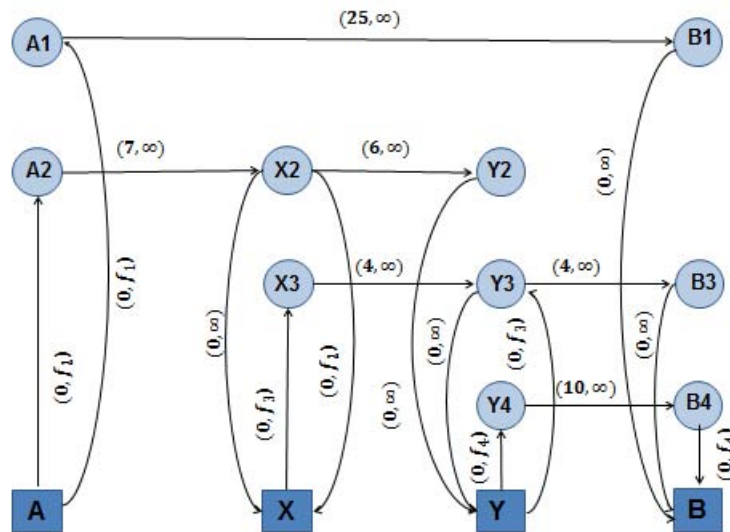


Figura 3.3: Red generalizada.

En el ejemplo de la Figura 3.3, los nodos de línea  $A1$ ,  $A2$ ,  $B1$ ,  $B3$ ,  $B4$ ,  $X3$ ,  $Y2$  y  $Y4$ , así como sus correspondientes arcos sirven sólo de enlace entre un nodo estación  $i$  y cada uno de los nodos de línea  $i_l$  correspondientes a ese nodo estación, es decir, no proporcionan información relevante sobre la red de tránsito.

En este ejemplo, el nodo de línea  $A2$  es un nodo intermedio entre los nodos  $A$  y  $X2$ , y está conectado a ellos por medio de los arcos  $(A, A2)$  y  $(A2, X2)$ , arcos que tienen asociados los parámetros  $(0, f_2)$  y  $(7, \infty)$ , respectivamente. Si se elimina este nodo y sus correspondientes arcos, se genera el arco  $(A, X2)$  que tendrá asociados los parámetros  $(t_a, f_a) = (7, f_2)$ , es decir, este arco conserva la información de los arcos eliminados.

Del ejemplo anterior se observa que en la red generalizada algunos de los nodos de línea y sus correspondientes arcos, uno en  $\mathcal{A}_{i_k}^+$  y otro en  $\mathcal{A}_{i_k}^-$ , pueden ser eliminados, es decir, realizar una **simplificación de la red** que contenga sólo la información más importante. Esta simplificación es muy conveniente, debido a que permite reducir la

estructura de datos de la red, ahorrar memoria y tiempo de cómputo. A continuación se describe formalmente el proceso para simplificar la red generalizada.

En general, para cada nodo de línea  $i_k$  en la red generalizada con un solo arco de entrada y también un solo arco de salida, es decir,  $|\mathcal{A}_{i_k}^+| = |\mathcal{A}_{i_k}^-| = 1$ , se realiza la siguiente contracción.

- El nodo de línea  $i_k$  desaparece de la red.
- En la red generalizada, los arcos  $a = (i, i_k)$  y  $b = (i_k, j)$  con parámetros asociados  $(t_a, f_a)$  y  $(t_b, f_b = \infty)$  respectivamente, se sustituyen por un arco  $c = (i, j)$  cuyos parámetros son  $(t_a + t_b, f_a)$ .

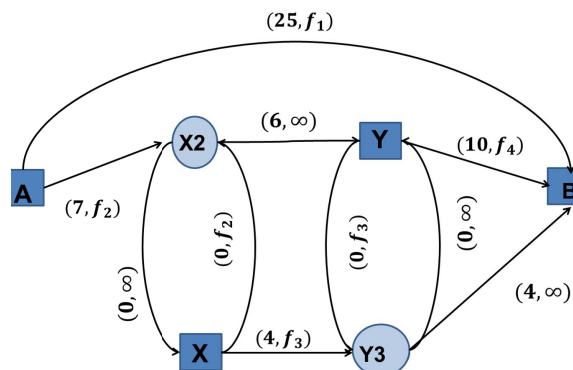


Figura 3.4: Red simplificada.

En la Figura 3.4 se muestra la red simplificada correspondiente al ejemplo 3.1. En esta representación una vez identificada una estrategia ya no se representan explícitamente las líneas de tránsito, sino que solo se indican los arcos  $\bar{A}$  que las representan. Entonces, una estrategia del usuario para alcanzar su nodo destino  $d \in \mathcal{D}$  está definida por una subred  $G_d = (\mathcal{N}, \bar{A})$ , donde  $\mathcal{D} = \{\text{todos los destinos}\} \subset \mathcal{N}$ . En lo que sigue, se utilizará la convención de que *cada arco es servido por vehículos*, y de que cada pasajero, en lugar de esperar un vehículo de cierta línea, espera a que *un arco sea servido*.

### 3.4. Construcción del Modelo sin Congestión

Para construir el modelo de asignación de tránsito sin congestión es conveniente describir algunos conceptos importantes sobre la red simplificada como el concepto de estrategia, definido en la Sección 2.2.

Una estrategia se denota por el correspondiente conjunto de arcos  $\bar{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}$ , o también por la partición de dichos arcos que representan las líneas atractivas de acuerdo al conjunto de nodos donde inciden estas líneas atractivas, así  $\bar{\mathcal{A}}_i^+ = \mathcal{A}_i^+ \cap \bar{\mathcal{A}}$ ,  $i \in \mathcal{N}$  denota el conjunto de nodos iniciales de las líneas atractivas.

Una estrategia **factible** debe contener al menos una trayectoria desde cada nodo  $i \in \mathcal{N} - \{d\}$  al nodo destino  $d$ . Entonces una estrategia óptima  $\bar{\mathcal{A}}^*$  es una estrategia factible que minimiza el tiempo de viaje total esperado.

La notación que se utilizará en el resto de este trabajo es la siguiente:

- $W(\bar{\mathcal{A}}_i^+)$  denota el **tiempo combinado esperado de espera** para la llegada del primer vehículo que sirve a cualquiera de los arcos  $a \in \bar{\mathcal{A}}_i^+$ .
- $P_a(\bar{\mathcal{A}}_i^+)$  denota la probabilidad de que el arco  $a$  sea servido primero entre los arcos  $\bar{\mathcal{A}}_i^+$ . Por convención  $P_a(\bar{\mathcal{A}}_i^+) = 0$  para todas aquellas líneas  $a$  que no pertenecen a  $\bar{\mathcal{A}}_i^+$ .
- $g_i^d$ ,  $i \in \mathcal{N}$ , denota la demanda, en número de pasajeros, desde el nodo  $i$  al nodo destino  $d$ .
- $v_a$  denota el volumen en número de pasajeros sobre el arco  $a$ .
- $t_a$  denota el tiempo de viaje asociado al arco  $a$ .

El tiempo combinado esperado de espera  $W(\bar{\mathcal{A}}_i^+)$ , y la probabilidad de que el arco  $a$  sea servido primero  $P_a(\bar{\mathcal{A}}_i^+)$ , son valores que dependen de las frecuencias  $f_a$  sobre el arco  $a$ , como se indica a continuación:

$$W(\bar{\mathcal{A}}_i^+) = \frac{\alpha}{\sum_{a \in \bar{\mathcal{A}}_i^+} f_a}, \quad 0 < \alpha \leq 1, \quad (3.1)$$

$$P_a(\bar{\mathcal{A}}_i^+) = \frac{f_a}{\sum_{a' \in \bar{\mathcal{A}}_i^+} f_{a'}}, \quad a \in \bar{\mathcal{A}}_i^+ \quad (3.2)$$

Cuando el usuario espera en promedio la mitad del tiempo de interarribo de los vehículos de las correspondientes líneas atractivas, se asigna un valor para  $\alpha$  de 0.5, lo que representa un servicio regular. Por otro lado,  $0.5 < \alpha < 1$  se usa para modelar situaciones en las que el servicio es irregular, mientras que un valor menor a 0.5 se utiliza si el arribo de los usuarios coincide con los tiempos de llegada de los vehículos, es decir, cuando los pasajeros conocen los horarios de los vehículos [8].

Sin pérdida de generalidad, para la construcción del modelo se supone  $\alpha = 1$ , lo cual corresponde al caso en que la tasa de arribo de los pasajeros es uniforme y que la distribución de tiempos de interarribo de vehículos es exponencial con media  $1/f_a$ .

### 3.5. Modelo de Asignación de Tránsito sin Congestión.

La idea principal de este modelo es asignar la demanda generada en todos y cada uno de los nodos origen a un destino  $d$ , para todos los posibles destinos  $d$ .

El volumen total de pasajeros  $V_i$  en un nodo  $i \in \mathcal{N}$  es la suma de todos los volúmenes de las líneas que llegan al nodo  $i$  más la demanda en ese nodo

$$V_i = \sum_{a \in \mathcal{A}_i^-} v_a + g_i^d, \quad i \in \mathcal{N} \quad (3.3)$$

El volumen  $V_i$  es distribuido sobre las líneas atractivas de acuerdo a las probabilidades de línea de la estrategia  $\bar{\mathcal{A}}$ , lo que define la política de asignación de flujo en la red de tránsito, así

$$v_a = P_a(\bar{\mathcal{A}}_i^+) V_i, \quad a \in \mathcal{A}_i^+, \quad i \in \mathcal{N} \quad (3.4)$$

Al sumar los volúmenes  $v_a$  sobre todos los arcos  $a \in \mathcal{A}_i^+$ , y tomando en cuenta que  $\sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} P_a(\bar{\mathcal{A}}_i^+) = 1$ , se obtiene

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} v_a = V_i \quad (3.5)$$

Entonces, de las ecuaciones (3.3) y (3.5) se obtiene para cada nodo  $i \in \mathcal{N}$  **la ley de conservación de flujo**

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} v_a - \sum_{a \in \mathcal{A}_i^-} v_a = g_i^d, \quad i \in \mathcal{N} \quad (3.6)$$

Con el objetivo de simplificar el modelo es posible hacer una extensión a todo el conjunto de arcos  $a \in A$  por medio de la función indicadora

$$\chi_a = \begin{cases} 0, & \text{si } a \notin \bar{\mathcal{A}} \\ 1, & \text{si } a \in \bar{\mathcal{A}} \end{cases}$$

entonces, las restricciones que definirán a el modelo son:

$$\begin{aligned} v_a &= \frac{\chi_a f_a}{\sum_{a' \in \mathcal{A}_i^-} f_{a'} \chi_{a'}} V_i, \quad a \in \mathcal{A}_i^+, \quad i \in \mathcal{N} \\ V_i &= \sum_{a \in \mathcal{A}_i^-} v_a + g_i^d, \quad i \in \mathcal{N} \\ V_i &\geq 0, \quad i \in \mathcal{N} \\ \chi_a &= 0 \text{ o } 1, \quad a \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Para concluir la construcción del modelo falta especificar la función objetivo, la cual cuantifica el tiempo total esperado de viaje utilizando el conjunto de posibles estrategias factibles. El tiempo total esperado de viaje es el tiempo total de viaje sobre los arcos más el tiempo total de espera sobre los nodos:

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} t_a v_a + \sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{V_i}{\sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} f_a \chi_a}$$

Por lo tanto, el **modelo de asignación de tránsito sin congestión** es:

$$\text{mín} \quad \sum_{a \in \mathcal{A}} t_a v_a + \sum_{i \in \mathcal{N}} \frac{V_i}{\sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} f_a \chi_a} \quad (3.7)$$

$$\text{sujeto a} \quad v_a = \frac{\chi_a f_a}{\sum_{a' \in \mathcal{A}_i^-} f_{a'} \chi_{a'}} V_i, \quad a \in \mathcal{A}_i^+, \quad i \in \mathcal{N} \quad (3.8)$$

$$V_i = \sum_{a \in \mathcal{A}_i^-} v_a + g_i^d, \quad i \in \mathcal{N} \quad (3.9)$$

$$V_i \geq 0, \quad i \in \mathcal{N} \quad (3.10)$$

$$\chi_a = 0 \text{ o } 1, \quad a \in \mathcal{A}. \quad (3.11)$$

Como puede observarse dadas las definiciones de tiempo combinado de espera y probabilidad de que el arco  $a$  sea servido, el problema (3.7)-(3.11) es un problema de programación no lineal [11].

### 3.6. Linealización del Modelo

El modelo descrito por las ecuaciones (3.7)-(3.11) se puede reescribir como un problema de programación lineal, por medio del proceso que se describe a continuación.

Como las demandas y los volúmenes en cada nodo son variables no negativas se concluye que la no negatividad del volumen  $V_i$  puede reemplazarse por

$$v_a \geq 0, \quad a \in \mathcal{A} \quad (3.12)$$

Previamente se demostró que al sumar los volúmenes  $v_a$  sobre todos los arcos  $a \in \mathcal{A}_i^+$  se obtiene la ley de conservación de flujos, por lo que la ecuación (3.9) se reemplaza por la ley de conservación de flujo definida por la ecuación (3.6) para cada nodo  $i$  en  $\mathcal{N}$ .

Si  $w_i$  denota el tiempo total de espera para todos los viajes en el nodo  $i$ , hacia un destino dado  $d$ , entonces

$$w_i = \frac{V_i}{\sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} f_a \chi_a}, \quad i \in \mathcal{N} \quad (3.13)$$

Entonces, al restringir el conjunto de arcos a aquellos determinados por las estrategias, la ecuación (3.8) se reemplaza por  $v_a \leq f_a w_i$ .

Por lo tanto, al introducir los cambios anteriores, se obtiene el siguiente problema de programación:

$$\text{mín} \quad \sum_{a \in \mathcal{A}} t_a v_a + \sum_{i \in \mathcal{N}} w_i \quad (3.14)$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} v_a - \sum_{a \in \mathcal{A}_i^-} v_a = g_i^d, \quad i \in \mathcal{N} \quad (3.15)$$

$$v_a \leq f_a w_i, \quad a \in \mathcal{A}_i^+, \quad i \in \mathcal{N} \quad (3.16)$$

$$v_a \geq 0, \quad a \in \mathcal{A} \quad (3.17)$$

Obsérvese que este problema de programación si es un problema lineal. Además este problema es equivalente al problema no lineal (3.7)-(3.11) como se demuestra en [11].

Es importante hacer notar que la solución de este problema de programación lineal proporciona la estrategia óptima  $\mathcal{A}^*$  para cada nodo destino  $d$  y la correspondiente asignación de volúmenes en la red de transporte. Es decir, hay que resolver en forma simultánea tantos problemas de este tipo como nodos destinos tenga la red. Es en este sentido que se dice que el modelo de asignación básico (sin congestión) es separable por nodo destino.

### 3.7. Problema Dual del Problema de Asignación de Tránsito sin Congestión.

Se sabe que a cualquier problema de programación lineal le corresponde un problema dual. El problema dual no solo es importante desde el punto de vista teórico sino también desde el punto de vista práctico, ya que permite desarrollar algoritmos de solución eficientes en muchos problemas de programación lineal.

El problema de programación lineal (3.14)-(3.17) se denomina el problema primal y para obtener el problema dual asociado. Es necesario recordar que:

- Existe una variable dual por cada restricción primal.
- Se obtiene una restricción del dual por cada variable primal.

Habiendo dicho lo anterior, entonces para cada arco  $a = (i, j) \in \mathcal{A}$  se denotan por  $u_i$  y  $u_j$ , las variables duales asociadas con las restricciones de conservación de flujos (3.15). Así mismo, se denotan por  $\mu_a$  a las variables duales asociadas a las restricciones de volumen (3.16) para cada arco  $a \in \mathcal{A}$ . Entonces, la función Lagrangiano es la siguiente

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\mu}) &= \sum_{a \in \mathcal{A}} t_a v_a + \sum_{i \in \mathcal{N}} w_i + \sum_{i \in \mathcal{N}} u_i \left( g_i^d - \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} v_a + \sum_{a \in \mathcal{A}_i^-} v_a \right) \\ &+ \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} \mu_a (v_a - f_a w_i) \end{aligned} \quad (3.18)$$



En donde los vectores  $\mathbf{v} = \{v_a\}_{a \in \mathcal{A}}$  y  $\mathbf{w} = \{w_i\}_{i \in \mathcal{N}}$  son los vectores de flujo y tiempo de espera, respectivamente. Análogamente para los vectores de variables duales  $\mathbf{u}$  y  $\mu$ .

La función dual está definida como

$$\mathcal{L}^*(\mu, \mathbf{u}) = \text{mín } \mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mu) \quad (3.19)$$

$$\text{sujeto a } v_a \geq 0, \text{ para todo } a \in \mathcal{A} \quad (3.20)$$

$$w_i \in \mathbb{R} \text{ para todo } i \in \mathcal{N} \quad (3.21)$$

Agrupando los términos en  $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mu)$  de acuerdo a las variables  $v_a$  y  $w_i$  se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mu) &= \sum_{i \in \mathcal{N}} g_i^d u_i + \sum_{i \in \mathcal{N}} w_i \left( 1 - \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} \mu_a f_a \right) \\ &+ \sum_{a \in \mathcal{A}} (t_a + \mu_a - u_i + u_j) v_a, \quad \text{con } a = (i, j) \end{aligned} \quad (3.22)$$

En un punto estacionario  $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mu)$  se deben cumplir las siguientes condiciones (de primer orden)

$$\begin{aligned} w_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} &= 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} \geq 0, \quad \text{para } i \in \mathcal{N} \\ v_a \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_a} &= 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_a} \geq 0, \quad \text{para } a \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Entonces,  $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}, \mu)$  alcanza su valor mínimo cuando

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} \mu_a f_a &= 0, \quad i \in \mathcal{N} \\ t_a + \mu_a - u_i + u_j &\geq 0, \quad a \in \mathcal{A} \end{aligned}$$

Así, el problema dual asociado está dado por

$$\text{máx} \quad \mathcal{L}^*(\mu, \mathbf{u}) \quad (3.23)$$

$$\text{sujeto a} \quad u_i - u_j - \mu_a \leq t_a, \quad a = (i, j) \in \mathcal{A} \quad (3.24)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} f_a \mu_a = 1, \quad i \in \mathcal{N} \quad (3.25)$$

$$\mu_a \geq 0, \quad a \in \mathcal{A} \quad (3.26)$$

Por lo tanto el problema dual asociado al problema lineal de asignación de tránsito está dado por

$$\text{máx} \quad \sum_{i \in \mathcal{N}} g_i^d u_i \quad (3.27)$$

$$\text{sujeto a} \quad u_i - u_j - \mu_a \leq t_a, \quad a = (i, j) \in \mathcal{A} \quad (3.28)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} f_a \mu_a = 1, \quad i \in \mathcal{N} \quad (3.29)$$

$$\mu_a \geq 0, \quad a \in \mathcal{A} \quad (3.30)$$

### 3.7.1. Condiciones de Holgura Complementaria.

Sean  $(v^*, w^*)$  y  $(u^*, \mu^*)$  soluciones factibles de los problemas primal (3.14)-(3.17) y dual (3.27)-(3.30), respectivamente. De la teoría de dualidad de PL se tiene que éstas son soluciones óptimas si y sólo si satisfacen las condiciones de holgura complementaria:

- *Restricciones primales por variables duales:*

$$(v_a^* - f_a w_i^*) \mu_a^* = 0, \quad \text{para } a \in \mathcal{A}_i^+, i \in \mathcal{N}$$

lo cual implica que

$$v_a^* = f_a w_i^*, \quad \text{cuando } \mu_a^* > 0 \quad (3.31)$$

$$\mu_a^* = 0, \quad \text{cuando } v_a^* < f_a w_i^* \quad (3.32)$$

- *Restricciones duales por variables primales*

$$(u_i^* - u_j^* - \mu_a^* - t_a)v_a^* = 0, \quad \text{para } a \in \mathcal{A}^*$$

lo cual implica que

$$u_i^* - u_j^* - \mu_a^* - t_a = 0, \quad \text{cuando } v_a^* > 0 \quad (3.33)$$

$$v_a^* = 0, \quad \text{cuando } u_i^* - u_j^* - \mu_a^* - t_a < 0 \quad (3.34)$$

### 3.7.2. Interpretación del Problema Dual.

La ecuación (3.33) permite interpretar a  $\mu_a$  como una variable de holgura y suponer que  $u_i - u_j - t_a \geq 0$  lo que indica que las variables duales correspondientes  $u_i$  y  $u_j$  también representan tiempos. De hecho, cada  $u_i$  representa el tiempo total esperado de viaje del nodo  $i$  al nodo destino  $d$ . Por lo tanto, como se había mencionado, la función objetivo del problema dual es maximizar el tiempo total esperado de viaje de todos los usuarios  $g_i^d$  (la demanda) desde cada nodo  $i$  a su destino  $d$ .

Ahora, como en la solución óptima los arcos  $a$  que pertenecen a una estrategia óptima siempre se usan, entonces los volúmenes sobre ellos siempre son estrictamente positivos, es decir  $v_a^* > 0$  para todo  $a \in \bar{\mathcal{A}}^*$ , y en este caso se obtiene de (3.33) que  $\mu_a = u_i - u_j - t_a$ . Por lo tanto, al sustituir  $\mu_a$  en la restricción dual (3.29) se obtiene

$$1 = \sum_{a \in \bar{\mathcal{A}}_i^+} f_a \mu_a = \sum_{a \in \bar{\mathcal{A}}_i^+} f_a (u_i - u_j - t_a), \quad i \in \mathcal{N}.$$

Al despejar las variables duales  $u_i$  asociadas a los nodos  $i$  se obtiene:

$$u_i = \frac{1}{\sum_{a \in \bar{\mathcal{A}}_i^+} f_a} + \frac{\sum_{a \in \bar{\mathcal{A}}_i^+} f_a (u_j + t_a)}{\sum_{a \in \bar{\mathcal{A}}_i^+} f_a}. \quad (3.35)$$

que, al interpretarse en términos de los tiempos de espera en el nodo  $i$  y las probabilidades de arco, se puede escribir de la siguiente manera

$$u_i = W(\bar{\mathcal{A}}_i^+) + \sum_{a \in \bar{\mathcal{A}}_i^+} P_a(\bar{\mathcal{A}}_i^+) (u_j + t_a) \quad (3.36)$$

Por lo tanto el tiempo total esperado de viaje  $u_i$  desde el nodo  $i$  al nodo  $d$  queda determinado por la suma del tiempo total de espera en el nodo  $i$  más el tiempo de viaje sobre un “arco generalizado” que va de  $i$  a  $d$  con tiempo de viaje constante  $t_a + u_j$ .

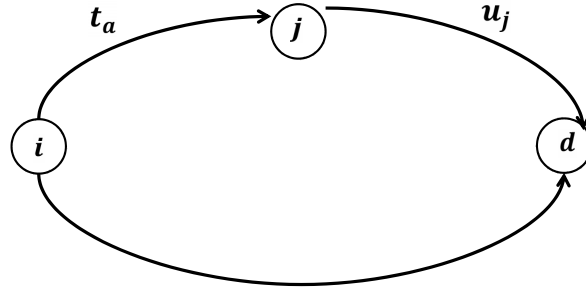


Figura 3.5: Arco generalizado de (i,d).

### 3.8. Algoritmo de Solución

Por un lado, la ecuación (3.35) define el proceso recursivo hacia atrás desde el destino  $d$  que permite determinar los tiempos totales esperados de viaje  $u_i$  para cada nodo  $i \in \mathcal{N} - \{d\}$ , en términos de los tiempos  $u_j$  desde el nodo  $j \in \mathcal{A}_i^+$ . Este proceso también proporciona el conjunto de arcos que definen una estrategia óptima para los usuarios.

Por otro lado, el proceso de asignación de flujo se realiza desde cada nodo origen  $i \in \mathcal{N} - \{d\}$  hasta llegar al destino  $d$  por medio de la ecuación (3.31)

$$\begin{aligned} v_a^* &= f_a w_i^* \\ &= \frac{f_a}{\sum_{a \in \bar{\mathcal{A}}_i^+} f_a} V_i^*. \end{aligned}$$

debido a que las variables  $\mu_a$  son estrictamente positivas para cada arco  $a \in \bar{\mathcal{A}}^*$ .

Entonces, los flujos  $v_a^*$  son no negativos para los arcos que pertenecen a una estrategia óptima  $\bar{\mathcal{A}}^*$  y es posible realizar la asignación de los volúmenes de arco  $v_a$  con los

volúmenes de nodo  $V_i$ , moviéndose hacia adelante desde cada nodo origen  $i \in \mathcal{N} - d$  al nodo destino  $d$ . Debido a que al iniciar en un nodo origen se tiene  $v_i = g_i^d$  y en cada paso se actualiza el volumen en el nodo  $j$  del arco  $a = (i, j)$ , entonces se obtiene  $V_j = V_i + v_a$ .

### Algoritmo.

El algoritmo se desarrolla en dos etapas, la primera etapa está basada en el problema dual y la segunda etapa en el problema primal. En la primera etapa se calculan los tiempos de viaje totales esperados  $u_i^*$  desde cada nodo origen  $i \in \mathcal{N} - \{d\}$  al nodo destino  $d$ , y simultáneamente se calcula la estrategia óptima  $\bar{\mathcal{A}}^*$ . En la segunda etapa se asignan los volúmenes  $v_a$  a los arcos de la estrategia óptima.

## ETAPA 1: Cálculo de la estrategia óptima.

### 1.1 Inicialización

$$\begin{aligned} u_i &:= \infty, & i \in \mathcal{N} - \{d\}; & \quad u_d := 0; & \quad f_i := 0, & \quad i \in \mathcal{N}; \\ S &:= \mathcal{A}; & \bar{\mathcal{A}} &:= \emptyset. \end{aligned}$$

### 1.2 Iteraciones

#### 1.2.1 Determina el conjunto de arcos de la estrategia óptima.

Sí  $S = \emptyset$ , entonces ir a **1.3**.

En caso contrario, encontrar la arista  $a = (i, j) \in S$  que satisfaga

$$u_j + t_a \leq u_{j'} + t_{a'}, \quad a' = (i', j') \in S;$$

Hacer  $S := S - \{a\}$ .

#### 1.2.2 Actualización de los tiempos $u_i$ y frecuencias $f_i$ asociadas a los nodos de la estrategia óptima.

Sí  $u_i \geq u_j + t_a$ , entonces

$$\begin{aligned} u_i &:= \frac{f_i u_i + f_a (u_j + t_a)}{f_i + f_a}, \\ f_i &:= f_i + f_a, & \bar{\mathcal{A}} &= \bar{\mathcal{A}} + \{a\}; \end{aligned}$$

Ir al paso **1.2.1**.

### 1.3 Terminar $\bar{\mathcal{A}}$ contiene los arcos correspondientes a la estrategia óptima.

## ETAPA 2: Asignación de volúmenes.

### 2.1 Inicialización

$$V_i := g_i^d, \quad i \in \mathcal{N};$$

### 2.2 Iteraciones: Asignación de los volúmenes a la estrategia óptima

Hacer para cada arco  $a \in \mathcal{A}$ , en orden decreciente para  $(u_j + t_a)$ :

$$\text{Si } a \in \bar{\mathcal{A}}, \text{ entonces } v_a := \frac{f_a}{f_i} V_i, \quad V_j := V_j + v_a,$$

en caso contrario  $v_a := 0$ .

Si  $\mathcal{A} := \emptyset$  ir a **2.3**

**2.3 Terminar** Se tiene el conjunto de volúmenes  $v_a$  para cada arco  $a$  en la estrategia óptima.

En el Ejemplo 3.2 se muestra la aplicación de este algoritmo para encontrar las estrategias óptimas y los volúmenes de asignación en una red de tránsito para un único destino.

**Ejemplo 3.2.** *Considere de nuevo la red de la Figura 3.2 en donde  $B$  es el nodo destino y  $\alpha = 0.5$ .*

**Etapa 1.** Cálculo de estrategias óptimas.

1. Líneas que salen del nodo  $Y$ ,  $\mathcal{A}_Y^+ = \{3, 4\}$

- $u_{Y3} = 4 + \frac{1/2}{1/30} = 19$  minutos
- $u_{Y4} = \frac{1/2}{1/30+1/6} + 4 \left( \frac{1/30}{1/30+1/6} \right) + 10 \left( \frac{1/6}{1/30+1/6} \right) = 11.5$  minutos

2. Líneas que entran al nodo  $Y$ ,  $\mathcal{A}_Y^- = \{2, 3\}$

- Línea 2: Termina.
- Línea 3: Permanecer a bordo del vehículo, 4 minutos hacia  $B$ . Pero, descender en el nodo  $Y$ , 11.5 minutos hacia  $B$ .
- Por lo tanto, es mejor permanecer a bordo.

3. Líneas que salen del nodo  $X$ ,  $\mathcal{A}_X^+ = \{2, 3\}$

- $u_{X3} = 8 + \frac{1/2}{1/30} = 23$  minutos
- $u_{X2} = \frac{1/2}{1/30+1/12} + 8 \left(\frac{2}{7}\right) + 17.5 \left(\frac{5}{7}\right) = 19.07$  minutos

4. Líneas que entran al nodo  $X$ ,  $\mathcal{A}_X^- = \{2\}$

- Línea 2: Permanecer a bordo. Tiempo de viaje hacia  $B$  de  $6 + 11.5$  minutos. Pero, descender en el nodo  $X$ . Tiempo de viaje hacia  $B$  de 19.07 minutos.
- Por lo que es mejor permanecer a bordo y descender en  $Y$ .

5. Líneas que salen del nodo  $A$ ,  $\mathcal{A}_A^+ = \{2, 1\}$

- $u_{A2} = 24.5 + \frac{1/2}{1/12} = 30.5$  minutos
- $u_{A1} = \frac{1/2}{1/12+1/12} + \frac{1}{2}24.5 + \frac{1}{2}25 = 27.75$  minutos

### Estrategias óptimas.

- En el nodo  $A$ , abordar el primer vehículo de la
  - línea 2 y descender en  $Y$ .
  - línea 1 y descender en  $B$ .
- En el nodo  $X$ , abordar el primer vehículo de la
  - línea 3 y descender en  $B$ .
  - línea 2 y descender en  $Y$ .
- En el nodo  $Y$ , abordar el primer vehículo de la
  - línea 3 y descender en  $B$ .
  - línea 4 y descender en  $B$ .

**Etapas 2.** Asignación de flujo de 100 usuarios.

- Nodo  $A$ :  $g_A^B$  + los pasajeros que descienden en  $A$

$$v_1 = v_2 = \frac{1/12}{1/12 + 1/12} 100 = 50$$

- Nodo X:  $g_X^B$  + los pasajeros que descienden en X. Volumen cero de acuerdo a las estrategias obtenidas.
- Nodo Y:  $g_Y^B$  + los pasajeros que descienden en Y

$$v_3 = \frac{1/30}{1/30 + 1/6} 50 = 8, \quad v_4 = \frac{1/6}{1/30 + 1/6} 50 = 42$$

### **Ventajas de este modelo.**

El modelo es muy simple y conceptualmente muy fácil de interpretar; esta basado en suposiciones de comportamiento (estrategias) que permiten una formulación de programación matemática clara. El algoritmo de solución es muy sencillo de programar: primero se encuentran las estrategias óptimas y después se asignan los volúmenes. El orden de complejidad del algoritmo es  $m^2$  por cada nodo destino, pero al usar modelar la red por medio de un *heap*, este orden se reduce a  $m \log(m)$ , en donde  $m$  es el número de arcos de la red.

Por las razones anteriores, el modelo se puede aplicar a redes de transporte de gran tamaño. De hecho ha sido aplicado a una gran cantidad y variedad de redes de transporte en Estados Unidos, Canada, Europa, Asia y Sudamérica. El modelo tiene solución única, dado que el modelo es un programa de optimización convexa [11]. Este modelo ha funcionado como base para la generación de modelos más sofisticados, algunos de los cuales serán introducidos más adelante. De hecho el algoritmo forma parte del núcleo del software EMME y es denominado el algoritmo básico (ó lineal) de asignación de tránsito.

Aunque el modelo no proporciona resultados reales, pues no toma en cuenta la congestión y la capacidad limitada de los vehículos de transporte, si proporciona tendencias consistentes de comportamiento de la red de transporte y permite obtener información cualitativa de la misma.



### **Desventajas del modelo.**

No toma en cuenta que los vehículos de transporte tienen capacidad limitada, por lo que los tiempos de tránsito en realidad se verán afectados por los tiempos de espera cuando algunos pasajeros no puedan abordar un vehículo que llega totalmente lleno.

En una red congestionada, no sólo es importante la capacidad de la red para satisfacer la demanda, lo cual afecta los tiempos de espera, sino también tomar en cuenta los efectos de congestión, pues en este caso es muy difícil sostener que los tiempos de viaje son constantes a lo largo de cada arco. Si además la red tiene límites de capacidad en los vehículos, es muy probable que también los tiempos de espera dependan de la demanda (volumen de pasajeros) en toda la red.

Por las razones anteriores, el modelo no proporciona resultados comparables con la realidad en redes congestionadas, pues al no tomar en cuenta los límites de capacidad de los vehículos de transporte asignará mayores volúmenes a los que soporta la red, sobre todo en los tramos de mayor demanda.

## CAPÍTULO 4

# MODELO DE ASIGNACIÓN DE TRÁNSITO CON COSTOS GENERALIZADOS

El modelo de asignación de tránsito con costos generalizados fue desarrollado por H. Spiess en 1993 [17]. En este modelo los tiempos asociados a los arcos,  $a \in \mathcal{A}$  de la red, se suponen funciones no decrecientes dependientes del volumen. Por lo tanto, los tiempos  $t_a(v_a)$  se interpretan como *costos generalizados* que experimentan los usuarios cuando incrementa el número de pasajeros, y su objeto es modelar el impacto de la aglomeración sobre los tiempos de recorrido.

Las funciones de costos generalizados  $t_a(v_a)$  usualmente se representan por medio de los tiempos de viaje constante  $t_a$  más una penalización que se obtiene mediante una *función volumen-demora*  $d_a(v_a)$  que depende del volumen  $v_a$ , y tienen la siguiente estructura

$$t_a(v_a) = t_a(1 + d_a(v_a)) \quad (4.1)$$

Por medio de las funciones volumen-demora  $d_a(v_a)$  es posible modelar el discomfort que experimentan los usuarios al desplazarse por un segmento de línea con volumen  $v_a$  y una capacidad  $c_a$ , por lo que el modelo de asignación de tránsito ya no puede considerarse un modelo lineal. Los algoritmos de solución para este tipo de modelos no lineales, en general serán del tipo iterativos, en los cuales el modelo básico lineal se resolverá en cada iteración y los tiempos y frecuencias de servicio serán penalizados mediante las funciones de volumen demora.

## 4.1. Funciones Volumen-Demora

El efecto del incremento del número de usuarios y la capacidad de los vehículos sobre los tiempos de tránsito es modelado por medio de las funciones volumen-demora  $d(v)$ . En EMME se utilizan funciones volumen-demora del tipo BPR y cónicas, aún cuando actualmente existe una variedad más amplia. Este tipo de funciones se definen un poco más adelante, pero antes de introducirlas conviene comentar las características generales que usualmente se consideran para construir las funciones volumen-demora.

Las funciones  $d(v)$  son expresadas por medio de funciones  $f(v/c)$ , donde la razón  $v(\text{volumen})/c(\text{capacidad})$  es una medida relativa de la saturación del vehículo.

$$d(v) = f\left(\frac{v}{c}\right) \quad (4.2)$$

Condiciones que deben satisfacer las funciones volumen-demora:

1.  $f(x)$  es estrictamente creciente. Esta condición es necesaria para que la asignación de tránsito tenga una solución única, como se verá más adelante.
2.  $f(0) = 0$  y  $f(1) = 1$ . Es decir, cuando no hay congestión, el costo total de viaje es un tiempo de viaje constante, como en el caso lineal; y cuando el volumen es igual a la capacidad el costo total de viaje se duplicará.
3.  $f'(x)$  existe y es estrictamente creciente. Esta propiedad implica que la función  $f(x)$  es una función convexa.
4.  $f'(1) = \alpha$ . El parámetro  $\alpha$  define los cambios en los efectos de la congestión cuando el volumen es igual a la capacidad.
5.  $f'(x) < M\alpha$ , con  $M$  una constante positiva. La pendiente de la curva es acotada. Esto es para evitar que los costos totales de viaje sean muy grandes cuando los valores de  $v/c > 1$ .
6.  $f'(0) > 0$ . Esta condición garantiza unicidad en los volúmenes obtenidos en la asignación de tránsito.

### 4.1.1. Funciones BPR

Existen muchos y diferentes tipos de funciones de volumen-demora, una de las más utilizadas por los ingenieros del transporte son las llamadas *funciones BPR* (Bureau of Public Roads) y están definidas como

$$f(x) = \beta x^\alpha \quad (4.3)$$

Donde  $x = v/c$ . La Figura 4.2 muestra las gráficas de funciones BPR para  $\beta = 1$  y  $\alpha = 2, 4, 8, 12$ .

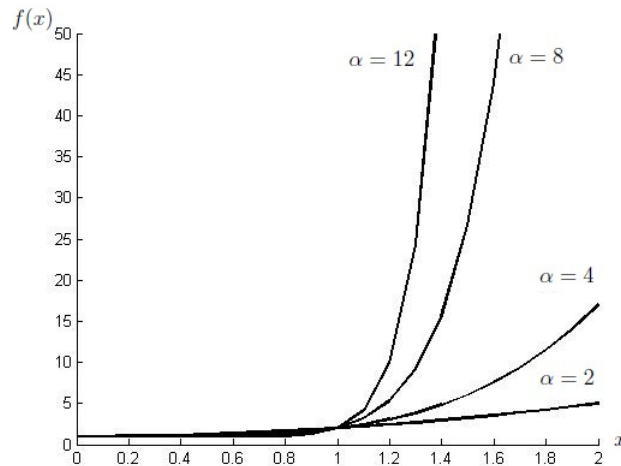


Figura 4.1: Funciones BPR

La simplicidad de estas funciones es una de las razones que hacen que sean las más utilizadas en la práctica. Obviamente las funciones BPR satisfacen las condiciones 1-4 de una función de congestión. En cuanto a las condiciones 5 y 6, las funciones BPR tienen algunos inconvenientes:

- Durante las primeras asignaciones de tránsito en un algoritmo iterativo, el valor de  $x$  puede ser mayor que uno y los valores de los tiempos de tránsito pueden ser muy grandes, lo que provocaría que la convergencia de un algoritmo iterativo sea lenta. Por ejemplo si  $\alpha = 12$  y  $x = 3$ , el factor  $1 + 3^{12} = 531443$  minutos, es decir, cada minuto de viaje se convierte en 369 días de viaje debido a la congestión.
- Cuando se usan valores muy grandes para el exponente  $\alpha$  y se tienen valores de  $x < 1$ , se generan costos totales de tránsito independientes del volumen. Por ejemplo, si  $\beta = 1$ ,  $\alpha = 20$  y  $c = 1000$ , cuando  $v = 0$  o  $v = 100$ , los costos totales de tránsito no son afectados y ambos son iguales a los tiempos de viaje  $f(0)$ .

### 4.1.2. Funciones Cónicas

Las funciones cónicas son funciones volumen-demora desarrolladas por Spiess en 1989 [16]. Las funciones cónicas tienen la siguiente estructura

$$f(x) = 2 + \sqrt{\alpha^2(1-x)^2 + \beta^2} - \alpha(1-x) - \beta \quad (4.4)$$

donde  $x = v/c$  y  $\beta$  está dado por

$$\beta = \frac{2\alpha - 1}{2\alpha - 2} \quad (4.5)$$

y  $\alpha$  es cualquier número mayor que 1.

La Figura 4.2 muestra las gráficas de funciones cónicas para  $\alpha = 2, 4, 8, 12$ .

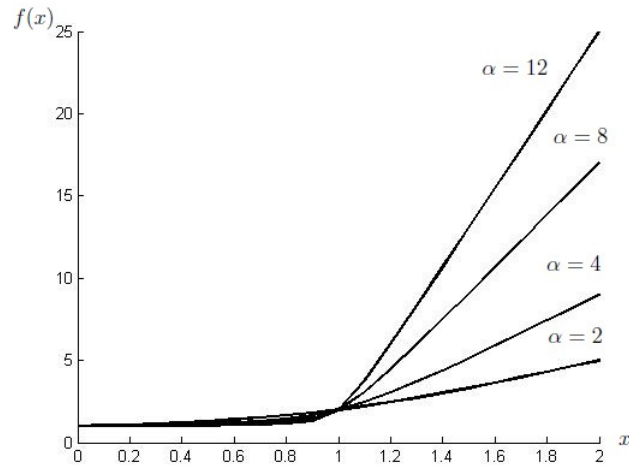


Figura 4.2: Funciones cónicas

Las funciones cónicas satisfacen las propiedades de las funciones volumen-demora, como se verifica a continuación.

**Condición 1.** Basta con demostrar que  $f'(x) > 0$  para todo  $x$ .

$$f'(x) = \alpha \left( 1 + \frac{\alpha(x-1)}{\sqrt{\alpha^2(1-x)^2 + \beta^2}} \right) \quad (4.6)$$

Como  $\alpha^2(x-1)^2 < \alpha^2(1-x)^2 + \beta^2$ , entonces

$$-1 \leq \frac{\alpha(x-1)}{\sqrt{\alpha^2(1-x)^2 + \beta^2}} \leq 1$$

Así,  $f'(x) > 0$  para todo  $x$ . Por lo tanto  $f(x)$  es estrictamente creciente.

**Condición 2.** Cuando  $x = 0$ ,  $f(0) = 2 + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \alpha - \beta$  y de ecuación (4.5) se tiene

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta - 1)^2 \quad (4.7)$$

al sustituir esta expresión en  $f(0)$  se obtiene,  $f(0) = 1$ .

**Condición 3.** La existencia de la derivada de la función cónica ya se ha demostrado. Entonces, sólo es necesario probar que  $f'(x)$  es estrictamente creciente, para ello basta con demostrar que  $f''(x) > 0$  para todo  $x$ .

$$f''(x) = \frac{\alpha^2 \beta^2}{(\alpha^2(1-x)^2 + \beta^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Obviamente  $f''(x) > 0$ , por lo tanto  $f'(x)$  es estrictamente creciente.

**Condición 4.** En la demostración de la Condición 1, se calculó la derivada de  $f(x)$ , al sustituir  $x = 1$  en (4.6) se obtiene  $f'(1) = \alpha$ .

**Condición 5.** Como  $\alpha^2(x-1)^2 < \alpha^2(1-x)^2 + \beta^2$ , entonces

$$\frac{\alpha(x-1)}{\sqrt{\alpha^2(1-x)^2 + \beta^2}} \leq 1$$

Por lo tanto  $f'(x) < 2\alpha$ .

**Condición 6.** En la demostración de la Condición 1, se calculó la derivada de  $f(x)$ , al sustituir  $x = 0$  en (4.6) se obtiene

$$f'(0) = \alpha \left( 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) \quad (4.8)$$

y al sustituir (4.7) en (4.8), se tiene

$$f'(0) = \frac{\alpha}{2\alpha^2 - 2\alpha + 1} > \frac{1}{2\alpha}$$

Por lo tanto  $f'(0) > 0$ .

## 4.2. Asignación de Tránsito con Costos Generalizados

Al considerar los costos generalizados  $t_a(v_a)$  como “tiempos de viaje”, el problema de asignación de tránsito ya no puede abordarse de manera separable, es decir, resolverlo para cada nodo destino. La razón principal es que el volumen total sobre un arco  $a \in \mathcal{A}$  es la suma de los volúmenes sobre  $a$  para cada nodo destino  $d \in \mathcal{D}$ , es decir

$$v_a = \sum_{d \in \mathcal{D}} v_a^d,$$

por lo que ya no es posible separar el problema por nodo destino, como en el caso en que los tiempos de viaje eran constantes e independientes del volumen.

En este contexto, los tiempos esperados de viaje dependen del volumen de pasajeros sobre los arcos de las líneas atractivas, por lo que ahora para caracterizar a las estrategias óptimas es posible apelar al segundo principio de Wardrop [12]

*El costo promedio de viaje es mínimo.*

Este principio de Wardrop implica que sólo estrategias con costos generalizados esperados mínimos serán utilizadas por los pasajeros.

Antes de definir el modelo es necesario introducir la siguiente notación, a partir del problema lineal de asignación de tránsito.

- La demanda hacia el destino  $d$  desde el nodo  $i \neq d$  se denota por  $g_i^d \geq 0$ .
- El flujo de pasajeros sobre el arco  $a$  que se dirigen al destino  $d$  se denota por  $v_a^d \geq 0$ .
- El tiempo total de espera de todos los usuarios en el nodo  $i$  al destino  $d \in \mathcal{D}$  está dado por  $w_i^d$ .

El problema de asignación de tránsito con costos generalizados, y que generaliza el problema lineal (3.14), es posible expresarlo mediante el siguiente problema de optimización no lineal:

$$\text{mín} \quad \sum_{a \in \mathcal{A}} \int_0^{v_a} t_a(x) dx + \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{d \in \mathcal{D}} w_i^d \quad (4.9)$$

$$\text{s. a.} \quad v_a = \sum_{d \in \mathcal{D}} v_a^d, \quad a \in \mathcal{A} \quad (4.10)$$

$$v_a^d \leq f_a w_i^d, \quad a \in \mathcal{A}_i^+, i \in \mathcal{N}, d \in \mathcal{D} \quad (4.11)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} v_a^d - \sum_{a \in \mathcal{A}_i^-} v_a^d = g_i^d, \quad i \in \mathcal{N}, d \in \mathcal{D} \quad (4.12)$$

$$v_a^d \geq 0, \quad a \in \mathcal{A}, d \in \mathcal{D} \quad (4.13)$$

La restricción (4.10) representa el volumen total sobre cada arco  $a \in \mathcal{A}$  como resultado de la suma de volúmenes para cada uno de los destinos  $d \in \mathcal{D}$ . Las restricciones (4.11)-(4.13) son equivalentes a las ecuaciones (3.15)-(3.17) del modelo de asignación de tránsito sin congestión, pero ahora para cada destino  $d \in \mathcal{D}$ .

En términos de las funciones volumen-demora, la función objetivo del problema (4.9) está dada por

$$\text{mín} \sum_{a \in \mathcal{A}} t_a v_a + \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{d \in \mathcal{D}} w_i^d + \sum_{a \in \mathcal{A}} t_a \int_0^{v_a} d_a(x) dx \quad (4.14)$$

donde

- $\sum_{a \in \mathcal{A}} t_a v_a + \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{d \in \mathcal{D}} w_i^d$  representa el tiempo total esperado de viaje ( $T$ ), equivalente a la función objetivo del problema primal del modelo lineal de asignación de tránsito.
- $\sum_{a \in \mathcal{A}} t_a \int_0^{v_a} d_a(x) dx$  representa los *costos de congestión* sobre los arcos  $a \in \mathcal{A}$ , que representan la penalización sobre los tiempos de tránsito de acuerdo a los niveles de volumen  $v_a$ .

A continuación, se demuestra que la solución de este modelo asignación de tránsito con costos generalizados satisface los principios de Wardrop. Para ello es necesario introducir la siguiente notación.

- El conjunto  $S_d$  contiene todas las posibles estrategias  $s$  que permiten alcanzar el destino  $d$ .



- $w_i^s$  es el tiempo de espera en el nodo  $i$ , con destino  $d$  utilizando la estrategia  $s \in S_d$
- $v_a^s$  es el volumen sobre el arco  $a$  usando la estrategia  $s \in S_d$ .
- $\delta_a^s$  es igual a 1 si el arco  $a$  pertenece a la estrategia  $s \in S_d$  y es igual a 0 en otro caso.
- $h_i^d$  es parte de la demanda  $g_i^d$  que utiliza la estrategia  $s \in S_d$ .

$$\sum_{s \in S_d} h_i^s = g_i^d, \quad i \in \mathcal{N}, \quad s \in S_d, \quad d \in \mathcal{D} \quad (4.15)$$

- $b_i^s$  es el tiempo esperado de viaje desde  $i$  hasta el destino  $d$ , usando la estrategia  $s \in S_d$ .
- $u_i^d$  es el mínimo tiempo esperado de viaje desde  $i$  hasta el destino  $d$ .

En términos de estas variables, el modelo de asignación con costos generalizados queda representado como

$$\text{mín} \quad \sum_{a \in \mathcal{A}} \int_0^{v_a} t_a(x) dx + \sum_{s \in S_d} \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{d \in \mathcal{D}} w_i^s \quad (4.16)$$

$$\text{s. a.} \quad v_a = \sum_{s \in S_d} v_a^s, \quad a \in \mathcal{A}, \quad d \in \mathcal{D} \quad (4.17)$$

$$v_a^s = f_a \delta_a^s w_i^s, \quad a \in \mathcal{A}_i^+, \quad i \in \mathcal{N}, \quad d \in \mathcal{D}, \quad s \in S_d \quad (4.18)$$

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} v_a^s - \sum_{a \in \mathcal{A}_i^-} v_a^s = h_i^s, \quad i \in \mathcal{N}, \quad d \in \mathcal{D}, \quad s \in S_d \quad (4.19)$$

$$\sum_{s \in S_d} h_i^s = g_i^d, \quad i \in \mathcal{N}, \quad d \in \mathcal{D} \quad (4.20)$$

$$v_a^s \geq 0, w_i^s \geq 0, h_i^s \geq 0, \quad i \in \mathcal{N}, \quad a \in \mathcal{A}, \quad s \in S_d, \quad d \in \mathcal{D} \quad (4.21)$$

Se denotan por  $b_i$  y  $b_j$ , las variables duales asociadas con las restricciones de conservación de flujos (4.19). Así mismo, se denotan por  $\mu_a$  a las variables duales asociadas a las restricciones de volumen (4.18) para cada arco  $a \in \mathcal{A}$  y  $u_i^d$  las variables duales asociadas a la restricción (4.20). Entonces, la función Lagrangiano es la siguiente

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{h}, \mathbf{u}, \mu, \mathbf{b}) &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \int_0^{v_a} t_a(x) dx + \sum_{s \in S_d} \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{d \in \mathcal{D}} w_i^s \\
&+ \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{s \in S_d} \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} \mu_a^s (v_a^s - f_a \delta_a^s w_i^s) \\
&+ \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{s \in S_d} s_i^s \left( h_i^s - \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} v_a^s + \sum_{a \in \mathcal{A}_i^-} v_a^s \right) \\
&+ \sum_{i \in \mathcal{N}} \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{s \in S_d} u_i^d \left( g_i^d - \sum_{s \in S_d} h_i^s \right)
\end{aligned}$$

Agrupando los términos en  $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{h}, \mathbf{u}, \mu, \mathbf{b})$  de acuerdo a las variables  $v_a^s$  y  $w_i^s$  se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{h}, \mathbf{u}, \mu, \mathbf{b}) &= \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{s \in S_d} \sum_{i \in \mathcal{N}} g_i^d u_i + \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{s \in S_d} \sum_{i \in \mathcal{N}} h_i^s (b_i^s - u_i^d) \\
&+ \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{s \in S_d} \sum_{i \in \mathcal{N}} w_i^s \left( 1 - \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} \mu_a^s f_a \delta_a^s \right) \\
&+ \sum_{d \in \mathcal{D}} \sum_{s \in S_d} \sum_{a \in \mathcal{A}} \left( \int_0^{v_a} t_a(x) dx + \mu_a^s - s_i^s + b_j^s \right) v_a^s
\end{aligned}$$

En un punto estacionario  $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{h}, \mathbf{u}, \mu, \mathbf{b})$  se deben cumplir las siguientes condiciones (de primer orden)

$$w_i^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i^s} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i^s} \geq 0, \quad \text{para } i \in \mathcal{N}, s \in S_d, d \in \mathcal{D} \quad (4.22)$$

$$v_a^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_a^s} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_a^s} \geq 0, \quad \text{para } a \in \mathcal{A}, s \in S_d, d \in \mathcal{D} \quad (4.23)$$

$$h_i^s \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_i^s} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial h_i^s} \geq 0, \quad \text{para } a \in \mathcal{A}, s \in S_d, d \in \mathcal{D} \quad (4.24)$$

Entonces,  $\mathcal{L}(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{h}, \mathbf{u}, \mu, \mathbf{b})$  alcanza su valor mínimo cuando

$$\begin{aligned}
1 - \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} \mu_a^s \delta_a^s f_a &= 0, \quad i \in \mathcal{N}, s \in S_d, d \in \mathcal{D} \\
t_a(v_a^s) + \mu_a^s - b_i^s + b_j^s &\geq 0, \quad a \in \mathcal{A}, i \in \mathcal{N}, s \in S_d, d \in \mathcal{D} \\
b_i^s - u_i^d &= 0, \quad i \in \mathcal{N}, s \in S_d, d \in \mathcal{D}
\end{aligned}$$

Finalmente de (4.24), se tienen las condiciones de Wardrop

$$\begin{aligned}
b_i^s &= u_i^d, \quad \text{si } h_i^s > 0 \\
b_i^s &\geq u_i^d, \quad \text{si } h_i^s = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la solución del modelo de asignación de tránsito con costos generalizados satisface las condiciones de Wardrop.

### 4.3. Algoritmo de Solución: Macro CONGTRAS

El algoritmo de solución implementado en EMME en la macro CONGTRAS (CON-Gested TRansit ASSignment) [8] para resolver el problema (4.14) sujeto a las condiciones (4.10) a (4.13) es el siguiente algoritmo iterativo:

■ **Inicio.**

- Definir los costos de congestión ( $cc$ ) iniciales como nulos.
- Calcular el número total de usuarios  $G = \sum_{i,j \in \mathcal{N}} g_i^j$ .
- Inicializar el contador  $k = 0$ .
- Utilizar los tiempos de viaje  $t_a$  para obtener los volúmenes iniciales  $v^0$  y los tiempos totales esperados de viaje  $T^0$ , resolviendo el problema lineal de asignación de tránsito sin congestión, visto en la Sección 3.6.
- Calcular  $cc = \sum_{a \in \mathcal{A}} t_a^0 d_a(v_a)$

■ **Iteraciones.**

- Incrementar contador  $k \leftarrow k + 1$
- Calcular  $cc = t_a d_a(v_a^{k-1})$  para cada arco  $a$ .

- Utilizar los valores de  $cc$  para obtener los volúmenes  $\hat{v}$  y los tiempos de tránsito  $\hat{T}$ , resolviendo el problema de asignación de tránsito sin congestión, visto en la Sección 3.6.
- Calcular  $\text{GAP} = \sum_{a \in \mathcal{A}} t_a^0 d_a(v_a^{k-1})(\hat{v}_a - v_a^{k-1})$  para utilizar este valor como criterio de paro.
- Obtener  $\lambda = \lambda^k$  que anule la derivada de la función objetivo

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} t_a^0 d_a(v_a^{k-1} + \lambda(\hat{v}_a - v_a^{k-1}))(\hat{v}_a - v_a^{k-1}) + (\hat{T} - T^{k-1}) \quad (4.25)$$

sobre el segmento de recta  $(1 - \lambda^k)(v_a^{k-1}, w_i^{k-1}) + \lambda^k(\hat{v}_a, \hat{w}_i)$ .

- Actualizar los volúmenes  $v^k = v^{k-1} + \lambda^k(\hat{v} - v^{k-1})$ .
  - Actualizar los tiempos totales de tránsito  $T^k = T^{k-1} + \lambda^k(\hat{T} - T^{k-1})$ .
- **Terminación.** Si  $\text{GAP} < \epsilon G$ : TERMINA, en caso contrario, regresar a **Iteraciones**.

Con el objetivo de evitar resolver directamente el problema de minimización se utiliza el método de Muller [5] para obtener  $\lambda^k$  que anule la derivada (4.25) de la función objetivo (4.14).

### Ventajas del modelo.

La idea básica de este modelo es muy simple y realista, el volumen de pasajeros con destino  $d$  influye en el volumen sobre cada arco de la red. Es decir, la cantidad de pasajeros que utilizarán el arco  $a$  depende del destino  $d$ .

Este modelo toma como base el modelo lineal básico, es decir en la función objetivo se cuantifican los tiempos de viaje sobre los arcos, pero se suman penalizaciones o costos generados por el exceso de volumen en los vehículos.

El algoritmo de solución es sencillo, por cada iteración se resuelve el modelo lineal básico, es decir se obtienen estrategias y volúmenes, pero se calcula un costo de congestión, el cual se añade como una penalización sobre los tiempos de viaje en los arcos. Estos tiempos o costos generalizados se toman como los tiempos de viaje para la siguiente iteración.

## **Desventajas.**

Este enfoque tiene algunas limitaciones como lo es el hecho de suponer que todos los pasajeros que abordan un vehículo sufren el mismo nivel de discomfort, cuando en la realidad no es así. Los pasajeros que abordan inicialmente tienen más oportunidad de conseguir asiento. Además, en la realidad los tiempos en vehículo que se invierten en las paradas de tránsito podrían depender del número de pasajeros que ascienden y descienden del vehículo. Esta dependencia no se considera explícitamente en el modelo.

En este modelo aún no se toman en cuenta las restricciones de capacidad de los vehículos de transporte de las diferentes líneas, por lo que implícitamente se supone que los usuarios siempre podrán abordar el primer vehículo (del conjunto de líneas atractivas que llegan a una estación ó nodo). Esta suposición no siempre será válida, ya que en un escenario con congestión, y en tramos de la red con mucha demanda, es muy común que no todos los usuarios podrán ó desearán abordar el primer vehículo. Por otro lado, en una red de transporte real, los grandes volúmenes de demanda y la congestión afectan la frecuencia de interarribo de los vehículos, provocando retrasos. En consecuencia, este modelo subestima el tiempo de espera de los usuarios en escenarios con congestión. En el siguiente capítulo se introduce un modelo más general que toma en cuenta la congestión y las restricciones de capacidad de los vehículos.

## CAPÍTULO 5

# MODELO DE ASIGNACIÓN DE TRÁNSITO CON RESTRICCIONES DE CAPACIDAD

El modelo de asignación de tránsito con restricciones de capacidad está basado en el Modelo de Líneas Comunes introducido por Cominetti y Correa en [7]. Este modelo es una generalización de los modelos de equilibrio en redes de tránsito basados en estrategias; toma en cuenta los efectos de la congestión en términos de exceso de volumen de pasajeros, así como la capacidad de las líneas de tránsito y su impacto en los tiempos de tránsito, efectos que representan de forma más realista el comportamiento de los usuarios en una red de tránsito congestionada.

Este modelo y sus resultados teóricos fueron posteriormente extendidos por Cepeda, Cominetti y Florian [6] para obtener una nueva caracterización del equilibrio que permite formular un problema equivalente de optimización en términos de una función de "holgura" (gap function) que se anula en el mínimo global. Finalmente, este enfoque permitió la construcción de un algoritmo que se ha aplicado con éxito en redes de transporte a gran escala, y que consideramos que es apropiado para la red metropolitana del Valle de México. Afortunadamente el algoritmo está ya integrado a EMME por medio de una macro denominada CAPTRAS.

## 5.1. El Problema de Líneas Comunes con Congestión

Considere una red simple que consiste de un nodo origen  $O$  conectado a un nodo destino  $D$  por  $n$  líneas de tránsito  $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_n\}$ , ver Figura 5.1. Cada línea  $a \in \mathcal{A}$  se caracteriza por medio de un tiempo de viaje constante  $t_a$  y una función de frecuencia efectiva suave  $f_a$  que satisface:

$$f_a : [0, \bar{v}_a) \mapsto (0, \infty) \text{ con } f_a(v_a) < 0 \text{ y } \lim_{v_a \rightarrow \bar{v}_a} f_a(v_a) = 0$$

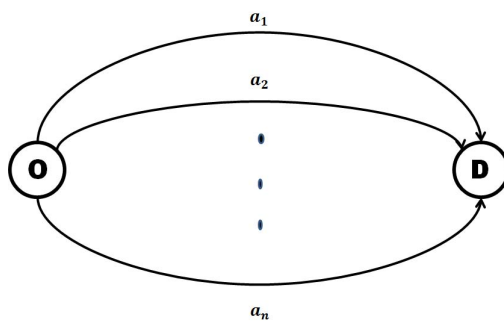


Figura 5.1: Líneas comunes de  $O$  a  $D$ .

Para ir de  $O$  a  $D$ , los pasajeros seleccionan un subconjunto no vacío de líneas  $s \subset \mathcal{A}$ , llamadas líneas atractivas o estrategia, de entre todas las posibles estrategias  $\mathcal{S}$  y toman la primer línea que sea servida con espacio disponible.

El flujo total  $x \geq 0$  se divide entre todas las posibles estrategias  $s \in \mathcal{S}$  y satisface

$$x = \sum_{s \in \mathcal{S}} h_s$$

donde,  $h_s \geq 0$  denota el flujo de la estrategia  $s \in \mathcal{S}$ .

Dada una estrategia  $s \in \mathcal{S}$ , el usuario que utiliza esta estrategia aborda la línea  $a \in s$  con una probabilidad <sup>1</sup>

$$\pi_a^s = \frac{f_a(v_a)}{\sum_{b \in s} f_b(v_b)}$$

---

<sup>1</sup> $\pi_a^s$  equivale a la probabilidad de que el arco  $a$  sea servido primero  $P_a(\bar{\mathcal{A}}_i^+)$  (3.2)

Cada vector de flujos de estrategia  $h = (h_s)_{s \in \mathcal{S}}$  induce un único vector de flujos de línea  $v = v(h)$ , y la relación entre ambos se obtiene del sistema de ecuaciones

$$v_a = \sum_{s \subset \mathcal{S}, a \in s} h_s \frac{f_a(v_a)}{\sum_{b \in s} f_b(v_b)} \quad \text{para toda } a \in \mathcal{A} \quad (5.1)$$

El vector de flujos  $v = v(h)$  permite determinar el *tiempo esperado de tránsito* para cada estrategia como la suma del tiempo esperado de espera más el tiempo de viaje

$$T_s(v) = \frac{1 + \sum_{a \in s} t_a f_a(v_a)}{\sum_{a \in s} f_a(v_a)} \quad (5.2)$$

De acuerdo al principio de Wardrop [12], un vector de flujos de estrategia  $h \geq 0$  que satisface  $\sum_{s \in \mathcal{S}} h_s = x$  se dice que es un flujo **de equilibrio** si y sólo si todas las estrategias usadas generan tiempos mínimos, es decir,

$$h_s > 0 \Rightarrow T_s(v(h)) = \tau(v(h)) \quad (5.3)$$

donde  $\tau(v) = \min_{s \in \mathcal{S}} T_s(v)$ .

El conjunto de flujos de equilibrio  $h$  se denotará por  $H_x$ , y el correspondiente conjunto inducido de flujos de línea  $v(h)$  se denotará por  $V_x$ . Una caracterización de este vector de flujos de equilibrio,  $V_x$ , está dada por el siguiente resultado [6], [7]:

**Teorema 5.1.**  $v \in V_x$  si y sólo si  $v \geq 0$ ,  $\sum_{a \in \mathcal{A}} v_a = x$  y existe  $\delta \geq 0$  tal que

$$\frac{v_a}{f_a(v_a)} \begin{cases} = \delta, & \text{sí } t_a < \tau(v) \\ \leq \delta, & \text{sí } t_a = \tau(v) \\ = 0, & \text{sí } t_a > \tau(v) \end{cases} \quad (5.4)$$

Cada una de las instancias de este resultado se interpretan de la siguiente forma:

- Todos los arcos con tiempo de viaje estrictamente menor que  $\tau(v)$  deben transportar una cantidad de flujo que induce el mismo tiempo de espera  $\delta$ , por lo que estos arcos, en algún sentido, se encuentran igualmente congestionados.
- Los arcos con tiempo de viaje igual a  $\tau(v)$  deben tener tiempos de espera a lo más  $\delta$ .
- Los arcos con tiempo de viaje mayor al de equilibrio no son utilizados.



En lo que resta del capítulo se desarrollará la forma en que el problema de líneas comunes se puede extender, con el objeto de obtener una formulación alternativa en redes generales de tránsito con múltiples orígenes y destinos. El modelo de red que se obtiene consiste de un conjunto de problemas de líneas comunes (uno por cada par O-D), unidos todos por medio de restricciones de conservación de flujo. Posteriormente se realizará la reformulación del problema general en términos de un problema de optimización de la función de holgura y, finalmente, se presentará el algoritmo de solución.

## 5.2. Modelo de Equilibrio de Red

### Construcción de la Red

Una red de tránsito se representa por una gráfica dirigida  $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ . En esta representación los nodos y arcos de  $G$  están definidos como en la Sección 3.1. En lo que resta del capítulo se utilizará la siguiente notación:

- La demanda para cada nodo  $i \neq d$  cuyo destino es  $d$  se denota por  $g_i^d \geq 0$ . Obsérvese que  $g_i^d$  es estrictamente positiva solo en nodos estación  $i \in N_s$ .
- El flujo de pasajeros sobre el arco  $a$  que van al destino  $d$  se denota por  $v_a^d \geq 0$ .
- El conjunto  $\mathcal{V} = [0, \infty)^{\mathcal{A} \times \mathcal{D}}$  es el espacio de vectores  $v$  de flujo para alcanzar el destino  $d$ , con componentes  $v_a^d$ , es decir  $v = (v_a^d)_{(a,d) \in \mathcal{A} \times \mathcal{D}}$ .
- El conjunto  $\mathcal{V}_0$  es el conjunto de flujos factibles. Por convención  $v_a^d = 0$  para todo  $a \in \mathcal{A}_d^+$ .

Los atributos asociados a los arcos satisfacen las siguientes propiedades:

1. El tiempo de viaje es una función  $t_a : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty)$  que satisface lo siguiente:
  - Es no negativa, continua y acotada.
  - Para los arcos que no son utilizados se supone que los tiempos  $t_a(\cdot) \equiv 0$ .
2. La frecuencia efectiva es una función  $f_a : \mathcal{V} \rightarrow [0, \infty)$  que satisface lo siguiente:
  - Es no negativa, estrictamente decreciente, continua y puede ser no acotada o bien acotada en todo el dominio.

- Si  $f_a$  es acotada, entonces se supone que  $f_a(v) \rightarrow 0$  cuando  $v_a^d \rightarrow \infty$ .
- El valor  $f_a(v) = 0$  indica que el volumen sobrepasa la capacidad de la línea.

## Flujo de Equilibrio

Uno de los conceptos de mayor importancia en los modelos de optimización de tráfico y tránsito es el flujo de equilibrio. A continuación se definen formalmente los vectores de flujo de equilibrio.

Considérese un usuario que desea alcanzar su destino  $d$  a partir del nodo  $i$ . Para continuar su viaje desde  $i$  considera el conjunto de las líneas  $a \in \mathcal{A}_i^+$  que lo llevarán a un siguiente nodo intermedio  $j_a$ , como en la Figura 5.2. Entonces, el tiempo total esperado de viaje desde  $i$  hasta  $d$  esta dado por el tiempo de viaje  $t_a$  de  $i$  a  $j_a$  más el mínimo tiempo esperado de viaje  $\tau_{j_a}^d$  desde  $j_a$  al destino  $d$ , esta suma representa una aproximación a la solución del problema llamado de líneas comunes y se denota por el tiempo esperado de viaje  $\tau_i^d$  desde el nodo  $i$  al nodo destino  $d$ .

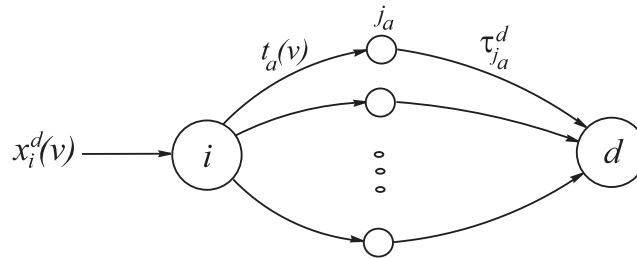


Figura 5.2: Tiempo total esperado de viaje.

A diferencia del modelo lineal sin congestión, las variables  $\tau_i^d$  y  $v_a^d$  se determinan simultáneamente a partir de un modelo de líneas comunes para cada par  $(i, d)$ .

En este modelo también se satisface la ley de conservación de flujos para cada nodo  $i$  con destino  $d$ . Específicamente para cada vector de flujo  $v \in \mathcal{V}$  la **ley de conservación de flujos** queda establecida como

$$x_i^d(v) = g_i^d + \sum_{a \in \mathcal{A}_i^-} v_a^d,$$

y los tiempos esperados de viaje  $\tau_i^d$  son las soluciones únicas de las ecuaciones de Bellman generalizadas [7],[11]:

$$\tau_d^d = 0, \quad (5.5)$$

$$\tau_i^d = \min_{s \in \mathcal{S}_i} \frac{1 + \sum_{a \in s} [t_a(v) + \tau_{j_a}^d(v)] f_a(v)}{\sum_{a \in s} f_a(v)}, \quad \forall i \neq d, \quad (5.6)$$

donde  $\mathcal{S}_i$  representa la colección de subconjuntos no vacíos de estrategias  $s \subset \mathcal{A}_i^+$  y  $t_a(v) + \tau_{j_a}^d(v)$  representa el tiempo mínimo para llegar a  $d$  a través del arco  $a \in s$ .

Sea  $V_i^d(v)$  el conjunto de flujos de equilibrio local, entonces un flujo  $v$  es un equilibrio global si  $v \in V_i^d$  para todo destino  $d$ . La siguiente definición establece formalmente el concepto de flujos de equilibrio.

**Definición 5.1.** *Un flujo factible  $v \in \mathcal{V}_0$  se denomina flujo de equilibrio sí y solo sí para todo  $d \in \mathcal{D}$  e  $i \neq d$  los flujos  $(v_a^d)_{a \in \mathcal{A}_i^+}$  pertenecen a  $V_i^d$ . Se denotará a los flujos de equilibrio de red por medio de  $\mathcal{V}_0^*$ .*

Sean  $h_s^d$  los flujos de la estrategia  $s$  con destino  $d$ . Entonces el vector  $v \in \mathcal{V}$  es un flujo de equilibrio si y sólo si para todo  $d \in \mathcal{D}$  e  $i \neq d$  existen  $\tau_i^d \in \mathbf{R}$  y un flujo de estrategia  $h_s^d \geq 0$  para  $s \in \mathcal{S}_i$ , que satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_i} h_s^d = x_i^d(v) \quad (5.7)$$

$$v_a^d = \sum_{a \in s} h_s^d \frac{f_a(v)}{\sum_{b \in s} f_b(v)}, \quad \text{para toda } a \in \mathcal{A}_i^+ \quad (5.8)$$

así como las condiciones de equilibrio de Wardrop

$$T_s^d(v) \begin{cases} = \tau_i^d, & \text{sí } h_s^d > 0, \\ \geq \tau_i^d, & \text{sí } h_s^d = 0, \end{cases} \quad (5.9)$$

en donde el tiempo de tránsito asociado a la estrategia  $s \in \mathcal{S}_i$  está dado por

$$T_s^d(v) = \frac{1 + \sum_{a \in s} [t_a(v) + \tau_{j_a}^d(v)] f_a(v)}{\sum_{a \in s} f_a(v)}. \quad (5.10)$$

Las variables  $\tau_{j_a}^d$  representan el tiempo esperado de viaje desde el nodo  $j_a$  del arco  $a = (i, j_a)$  en  $\mathcal{A}$  hasta el destino  $d$ .

## Caracterización del Equilibrio.

En el teorema 2.1 en Cominetti y Correa [7] se demuestra que el conjunto de flujos de equilibrio  $\mathcal{V}_0^*$  es no vacío si se satisfacen las siguientes condiciones:

- Cada nodo  $i$  puede conectarse a cada nodo destino  $d$  por una trayectoria formada por arcos con frecuencia infinita, por ejemplo una trayectoria peatonal.
- Existen constantes  $\bar{t}_a < \infty$  tales que  $t_a(v) \leq \bar{t}_a$  para todo  $v \in \mathcal{V}$ .
- Para cada arco  $a \in \mathcal{A}$  con flujo  $v_a^d$  fijo,  $f_a(v)$  es máxima cuando todos los flujos restantes sobre los demás arcos son cero.

El teorema no implica que en el equilibrio se utilicen las trayectorias peatonales, a menos que la capacidad de los vehículos no sea suficiente para satisfacer la demanda y entonces obligue a que un porcentaje del flujo total utilice dichos arcos.

Una consecuencia directa del teorema 2.1 en Cominetti y Correa [7] es la siguiente caracterización de equilibrio de red:

**Teorema 5.2.** : *El vector de flujo  $v$  es un flujo de equilibrio, es decir,  $v \in \mathcal{V}_0^*$  si y solo si  $v \in \mathcal{V}_0$  y existe  $\alpha_i^d \geq 0$  tal que para todo  $d \in \mathcal{D}$  e  $i \neq d$*

$$\frac{v_a^d}{f_a(v)} \begin{cases} = \delta_i^d & \text{si } t_a^d(v) < \tau_i^d(v), \\ \leq \delta_i^d & \text{si } t_a^d(v) = \tau_i^d(v), \\ = 0 & \text{si } t_a^d(v) > \tau_i^d(v), \end{cases}$$

donde  $t_a^d(v) = t_a(v) + \tau_{j_a}^d(v)$ .

Esta caracterización del equilibrio de flujo permite obtener una *función GAP* cuyo valor mínimo corresponde precisamente a los flujos de equilibrio, dicha función GAP se deriva del siguiente teorema.

**Teorema 5.3.** *Para todo  $v \in \mathcal{V}_0$ ,  $d \in \mathcal{D}$  e  $i \neq d$ , se satisface la siguiente desigualdad*

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} [t_a(v) + \tau_{j_a}^d(v)] v_a^d + \max_{a \in \mathcal{A}_i^+} \frac{v_a^d}{f_a(v)} \geq \tau_i^d(v) \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} v_a^d. \quad (5.11)$$

Además,  $v \in \mathcal{V}_0^*$  si y solo si  $v \in \mathcal{V}_0$  y estas desigualdades se satisfacen como igualdades.

**Demostración.** De acuerdo a las condiciones de equilibrio de Wardrop, el costo de una estrategia  $s \in \mathcal{S}_i$ , satisface la relación

$$\frac{1}{\sum_{b \in s} f_b(v)} + \sum_{a \in s} [t_a(v) + \tau_{j_a}^d] \pi_a^s \geq \tau_i^d.$$

Multiplicando esta expresión por  $h_s^d \geq 0$ , y sumando sobre todo  $s \in \mathcal{S}_i$ , se obtiene

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_i} \frac{h_s^d}{\sum_{b \in s} f_b} + \sum_{s \in \mathcal{S}_i} h_s^d \sum_{a \in s} [t_a(v) + \tau_{j_a}^d] \pi_a^s \geq \tau_i^d \sum_{s \in \mathcal{S}_i} h_s^d.$$

Al utilizar la conmutación  $\sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} \sum_{s \ni a} = \sum_{s \in \mathcal{S}_i} \sum_{a \in s}$ , se puede reescribir la anterior expresión como

$$\sum_{s \in \mathcal{S}_i} \frac{h_s^d}{\sum_{b \in s} f_b} + \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} [t_a(v) + \tau_{j_a}^d] \sum_{s \ni a} h_s^d \pi_a^s \geq \tau_i^d \sum_{s \in \mathcal{S}_i} h_s^d. \quad (5.12)$$

Para demostrar la desigualdad (5.11) es necesario transformar todos los términos de (5.12) en expresiones equivalentes que contengan flujos de arco  $v_a^d$  en lugar de flujos de estrategia  $h_s^d$ . Entonces,

1. Se sabe de la ecuación de flujo (5.8), que

$$v_a^d = \sum_{s \ni a} h_s^d \pi_a^s, \quad (5.13)$$

2. Sumando la expresión anterior sobre todos los arcos  $a \in \mathcal{A}_i^+$ , obtenemos

$$\sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} v_a^d = \sum_{s \in \mathcal{S}_i} \sum_{a \in s} h_s^d \pi_a^s = \sum_{s \in \mathcal{S}_i} h_s^d \sum_{a \in s} \pi_a^s = \sum_{s \in \mathcal{S}_i} h_s^d. \quad (5.14)$$

3. De (5.13) se obtiene  $v_a^d/f_a(v) = \sum_{s \ni a} h_s^d / \sum_{b \in s} f_b(v)$  para todo arco  $a \in \mathcal{A}_i^+$ . Por lo tanto, extendiendo la suma a toda  $s \in \mathcal{S}_i$ , se obtiene

$$\max_{a \in \mathcal{A}_i^+} \frac{v_a^d}{f_a(v)} = \sum_{s \in \mathcal{S}_i} \frac{h_s^d}{\sum_{b \in s} f_b(v)}. \quad (5.15)$$

Finalmente, sustituyendo (5.13), (5.14) y (5.15) en (5.12), se obtiene la desigualdad (5.11) del teorema.

Por otro lado, las desigualdades (5.11) se convierten en igualdades sí y solo sí para toda  $s$  con  $h_s^d > 0$  se cumple

$$\frac{1 + \sum_{a \in s} [t_a(v) + \tau_{j_a}^d] f_a(v)}{\sum_{b \in s} f_b(v)} = \tau_i^d,$$

es decir, si todas las estrategias en (5.13) son óptimas. Esto equivale a que todos los arcos de  $s$  satisfacen que  $t_a^d < \tau_i^d$  y ningún arco cumple que  $t_a^d > \tau_i^d$  (Lema 2.1 en [6]). Pero esto último a su vez corresponde exactamente a la condición de que  $f_a/v_a$  es máximo si  $t_a^d < \tau_i^d$  y es 0 si  $t_a^d > \tau_i^d$ . Entonces, de acuerdo al Teorema 5.2 se obtiene que (5.11) se cumple como igualdad sí y solo sí  $v$  es un flujo de equilibrio de red. ■

En la expresión (5.11),  $\max_{a \in \mathcal{A}_i^+} \frac{v_a^d}{f_a(v)}$  es el máximo tiempo de espera total del flujo  $v$  para los arcos  $a \in \mathcal{A}_i^+$  y  $\tau_i^d(v) \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} v_a^d$  es el tiempo esperado de viaje para el flujo  $v$  desde  $i$  hacia el destino  $d$ .

Entonces en cualquier flujo de equilibrio  $v \in \mathcal{V}_0^*$  la función  $G(v)$  alcanza su mínimo global, con valor óptimo igual a 0.

$$G(v) = \sum_{d \in \mathcal{D}, i \neq d} \left\{ \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} [t_a(v) + \tau_{j_a}^d(v)] v_a^d + \max_{a \in \mathcal{A}_i^+} \frac{v_a^d}{f_a(v)} - \tau_i^d(v) \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} v_a^d \right\}, \quad (5.16)$$

Las siguientes identidades son utilizadas para obtener la función  $GAP$ , (5.16):

1.  $\sum_{i \neq d} \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} t_a(v) v_a^d = \sum_{a \in \mathcal{A}} t_a(v) v_a^d.$
2.  $\sum_{i \neq d} \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} \tau_{j_a}^d(v) v_a^d = \sum_{i \neq d} \sum_{a \in \mathcal{A}_i^-} \tau_i^d(v) v_a^d.$
3. La ley de conservación de flujos  $\sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} v_a^d = g_i^d + \sum_{a \in \mathcal{A}_i^-} v_a^d$ , para todo  $i \neq d$ .

La función  $GAP$ , representa el tiempo total de viaje + tiempo total de espera – el tiempo total sobre las estrategias más cortas.

$$G(v) = \sum_{d \in \mathcal{D}} \left\{ \sum_{a \in \mathcal{A}} t_a(v) v_a^d + \sum_{i \neq d} \max_{a \in \mathcal{A}_i^+} \frac{v_a^d}{f_a(v)} - \sum_{i \neq d} g_i^d \tau_i^d(v) \right\}. \quad (5.17)$$

Entonces el problema de optimización es

$$\text{mín} \quad \sum_{d \in \mathcal{D}} \left( \sum_{a \in \mathcal{A}} t_a(v) v_a^d + \sum_{i \in \mathcal{N}} \alpha_i^d - \sum_{i \in \mathcal{N}} g_i^d \tau_i^d(v) \right) \quad (5.18)$$

$$\text{s. a.} \quad \sum_{a \in \mathcal{A}_i^+} v_a^d - \sum_{a \in \mathcal{A}_i^-} v_a^d = g_i^d, \quad i \in \mathcal{N}, d \in \mathcal{D} \quad (5.19)$$

$$v_a^d \leq \alpha_i^d f_a(v), \quad a \in \mathcal{A}_i^+, i \in \mathcal{N}, d \in \mathcal{D} \quad (5.20)$$

$$v_a^d \geq 0, \quad a \in \mathcal{A}, d \in \mathcal{D} \quad (5.21)$$

donde  $\alpha_i^d$  se interpreta como el máximo tiempo de espera para el flujo total  $v$  en el nodo  $i$  del arco  $a \in \mathcal{A}_i^+$ .

Al retomar el modelo de asignación de tránsito sin congestión, de la función  $GAP$  se observa que

$$\sum_{a \in \mathcal{A}} t_a(v) v_a^d + \sum_{i \neq d} \max_{a \in \mathcal{A}_i^+} \frac{v_a^d}{f_a(v)}$$

es la función objetivo del problema primal mencionado y

$$\sum_{i \neq d} g_i^d \tau_i^d(v)$$

es la función objetivo del problema dual asociado. El mínimo global de  $G(v)$  se obtiene cuando ésta toma el valor cero, y el punto donde ocurre es donde las funciones objetivo del problema primal y el problema dual coinciden.

### 5.3. Algoritmo de Solución.

El hecho de que el valor mínimo de esta función GAP es 0 permite utilizar  $G(v)$  como parte de los criterio de paro en un algoritmo iterativo de minimización. El algoritmo utilizado en EMME para resolver este problema de equilibrio es el método de promedios sucesivos (method of successive averages, MSA), y el cual se explica en al Apéndice C. El **algoritmo de promedios sucesivos** para el modelo de asignación de tránsito con restricciones de capacidad está dado por [6]:

Sea  $\alpha_k \in (0, 1)$  con  $\alpha_k \rightarrow 0$  y  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k = \infty$ .

■ **Inicio.**

1. Calcular  $v^0 \in \mathcal{V}_0$ , resolviendo el problema de asignación de tránsito sin congestión.
2. Definir  $\epsilon > 0$ . Este valor es pequeño y se utiliza como tolerancia para parar las iteraciones.
3. Inicializar el contador  $k = 0$ .

■ **Iteraciones.** Mientras  $G(v^k) > \epsilon$

1. **Actualizar**  $k = k + 1$ , el tamaño de paso es  $\alpha_k = 1/k$ , donde k es el número de iteraciones.
2. **Calcular** los tiempos  $t_a = t_a(v^k)$  y las frecuencias  $f_a = f_a(v^k)$ .
3. **Determinar** las estrategias para cada  $d \in \mathcal{D}$  y los flujos  $\hat{v}_a^d$  para cada arco  $a \in \mathcal{A}^*$  resolviendo el problema de asignación de tránsito sin congestión.
4. **Actualizar**  $v^{k+1} = (1 - \alpha_k) v^k + \alpha_k \hat{v}^k$ .
5. **Evaluar** el vector de flujos  $v^k$ , si  $G(v^k) < \epsilon$  ir a Terminación, en caso contrario regresar a 1.

■ **Terminación.** El vector  $v^k$  es el vector de flujos de equilibrio.

En cada iteración se calculan los flujos de equilibrio que se obtienen al fijar los tiempos de viaje y las frecuencias con los valores determinados por los flujos calculados en la iteración previa. Después se actualizan estos flujos promediando los de la iteración anterior con los valores actuales. Las trayectorias obtenidas utilizando las estrategias



pueden calcularse por medio del algoritmo de Dijkstra descrito en [7] y que se muestra en el Anexo B de este trabajo.

### Algunas observaciones sobre el algoritmo

- Es posible que el flujo inicial sea no factible, y para evitar este problema se supone la existencia de una subred peatonal tal manera que todo  $i \in \mathcal{N}$  está conectado con cada destino  $d \in \mathcal{D}$ .
- Cuando la red de tránsito esta saturada los tiempos de espera puedan ser extremadamente grandes. Entonces, el método revelará cuales son los arcos con capacidad insuficiente para satisfacer la demanda de transporte.

El algoritmo de promedios sucesivos está implementado como la macro CAPTRAS en EMME [8].

#### 5.3.1. Implementación en EMME: Macro CAPTRAS

El algoritmos MSA con una asignación inicial sin congestión es implementada en la macro CAPTRAS (CAPacited TRansit ASsignment) [8], en la cual se consideran los tiempos de viaje  $t_a$  y frecuencias efectivas  $f_a \rightarrow \infty$  excepto en los arcos de ascenso donde

$$f_a(v) = \begin{cases} \mu \left[ 1 - \left( \frac{v_a}{\mu c - v_{a'} + v_a} \right)^\beta \right], & \text{si } v_{a'} < \mu c \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.22)$$

- El flujo  $v_a$  representa a los usuarios que abordan el vehículo en una estación.
- El flujo  $v_{a'}$  representa a los usuarios que están a bordo inmediatamente después de que el vehículo sale de una estación. Se hace notar que ( $v_{a'} > v_a$ ).
- El parámetro  $\mu$  denota la frecuencia de servicio de la línea correspondiente.
- El valor  $c$  denota la capacidad de los vehículos.

Así que  $\mu c - v_{a'}$  es la capacidad residual esperada después de que el vehículo se detiene en una estación. En la implementación de CAPTRAS se ha impuesto la condición de que el máximo headway sea de 999 minutos, entonces las frecuencias efectivas se calculan como  $\tilde{f}_a = \max\{f_a(v), 1/999\}$ .

## Ventajas del modelo.

Este modelo toma en cuenta que el volumen de pasajeros con destino determinado  $d$  influye en el volumen sobre cada arco de la red. Es decir, la cantidad de pasajeros que utilizarán el arco  $a$  depende del destino  $d$ , pero cuando el volumen excede la capacidad del arco, algunos usuarios prefieren buscar otras opciones en su camino en lugar de sentirse incómodos dentro del vehículo.

El modelo también toma en cuenta la capacidad limitada de las líneas de transporte. Asimismo, incorpora tiempos de espera crecientes cuando el flujo de pasajeros satura la capacidad de los vehículos. Conforme los segmentos de tránsito se congestionan, el nivel de comodidad decrece y los tiempos de espera crecen. Este fenómeno es modelado por funciones de costo convexas para modelar la incomodidad y con headways crecientes (frecuencias decrecientes) para modelar los tiempos de espera creciente.

Este modelo toma como base el modelo lineal básico, en donde a los tiempos de viaje en la función objetivo ahora se le agregan los costos generados por el exceso de vehículos. Además se añade una función de frecuencia efectiva, en la cual se toma en cuenta la capacidad limitada de los vehículos de transporte, de tal forma que cuando el volumen de usuarios es cada vez mayor, la frecuencia del servicio de transporte disminuye.

El algoritmo de solución, es un algoritmo iterativo simple, en donde en cada iteración se resuelve el modelo lineal básico. Es decir, en cada iteración se obtiene la estrategia óptima del problema lineal y con ella se asignan los volúmenes sobre los arcos, pero además se añade una penalización sobre los tiempos de viaje en los arcos. Estos tiempos o costos generalizados se toman como los tiempos de viaje para la siguiente iteración. También se ven afectadas las frecuencias de servicio por medio de la función de frecuencia efectiva (5.22).

Las anteriores propiedades permiten la aplicación de este modelo a redes de transporte urbanas congestionadas y de gran tamaño, como la red de tránsito del Valle de México en las horas de mayor demanda (horas pico).

## **Desventajas.**

Una de las limitaciones de este modelo es suponer que todos los pasajeros que abordan un vehículo sufren el mismo nivel de discomfort, al igual que el modelo de costos generalizados. Además, el modelo no toma en cuenta que los tiempos a bordo de los vehículos en las paradas de tránsito también puede depender del volumen de pasajeros que ascienden y descienden de los mismos.

El enfoque de esta sección fue calcular el equilibrio, de una red completamente congestionada, por medio de la minimización de la función GAP. Sin embargo, los algoritmos de descenso pueden quedar atrapados en mínimos locales, por lo que sería útil probar que para el presente modelo no hay mínimos locales, ó bien que todo mínimo local es global. Esto en realidad no ha sido probado para este modelo y permanece como un problema abierto. Sin embargo, se ha podido probar en casos simplificados, como por ejemplo el problema de líneas comunes con un solo par origen-destino (ver ref. [6]).

## CAPÍTULO 6

# APLICACIÓN A LA RED METROPOLITANA DE LA CIUDAD DE MÉXICO Y SUS EFECTOS EN EL STC-METRO

En este capítulo se describe la red de tránsito de la Ciudad de México y del área metropolitana, es decir, los elementos que la conforman y sus respectivos atributos. En la Sección 6.2 se describen los datos necesarios para realizar una asignación de tránsito en EMME. Las bases de datos que contienen toda esta información son las que utiliza el STC-Metro. Finalmente, se presentan los resultados obtenidos después de ejecutar CAPTRAS sobre la red de tránsito descrita previamente, así como la comparación de los volúmenes resultantes en diferentes escenarios.

Este trabajo es parte del proyecto *Modelos Matemáticos Para Mejorar la Operación del STC-Metro* (Proyecto de fondos mixtos CONACYT-ICYTDF) que lleva a cabo el área de Análisis Numérico y Modelación Matemática de la UAM-I. El tipo de modelos estudiados en este trabajo, sus métodos de solución, y el software utilizados, son de mucha importancia para el STC-METRO por dos razones:

1. Para la planeación estratégica, al utilizarse como herramienta principal para definir el plan maestro del metro al corto, mediano y largo plazo, y las futuras ampliaciones de la red de metro (por ejemplo, la Línea 12), ó de servicios de otros medios de transporte complementarios como metrobús.
2. Para la planeación operativa de las líneas: al medir los impactos en la red de metro, generados al poner en operación de líneas de metrobús, metro y

suburbano; planeación de Servicios Emergentes de Frecuencia Intensiva (SEFI) a base de autobuses de RTP, cuando se da mantenimiento mayor a tramos de líneas; estimación de cambios en la afluencia de usuarios a la red de metro, generados por cierres parciales de líneas; incremento/decremento del número de trenes en operación, entre los más importantes.

## 6.1. Características Generales de la Red de Tránsito

Las siguientes son características de la red de tránsito de la ciudad de México y área metropolitana, contenidas en la base de datos que posee el STC-Metro. Esta información, que se explica brevemente a continuación, conforma lo que se denomina el **escenario base** para las simulaciones de asignación en EMME, y en el cual aún no está definida la línea 12 del metro, algunas líneas de metrobús y el mexibús. El estudio de escenarios cuando se incluyan la línea 12, las líneas del metrobús y mexibús forman parte de un proyecto de estudio posterior a este trabajo de tesis. Las características generales son:

- 18 modos de transporte.
- 1705 centroides.
- 7241 nodos regulares.
- 31720 arcos.
- 11 tipos de vehículos de tránsito.
- 845 líneas de tránsito.
- 46981 segmentos de línea.

La Figura 6.1 muestra una gráfica de la red metropolitana en donde se incluyen principalmente los nodos regulares, centroides y los arcos.

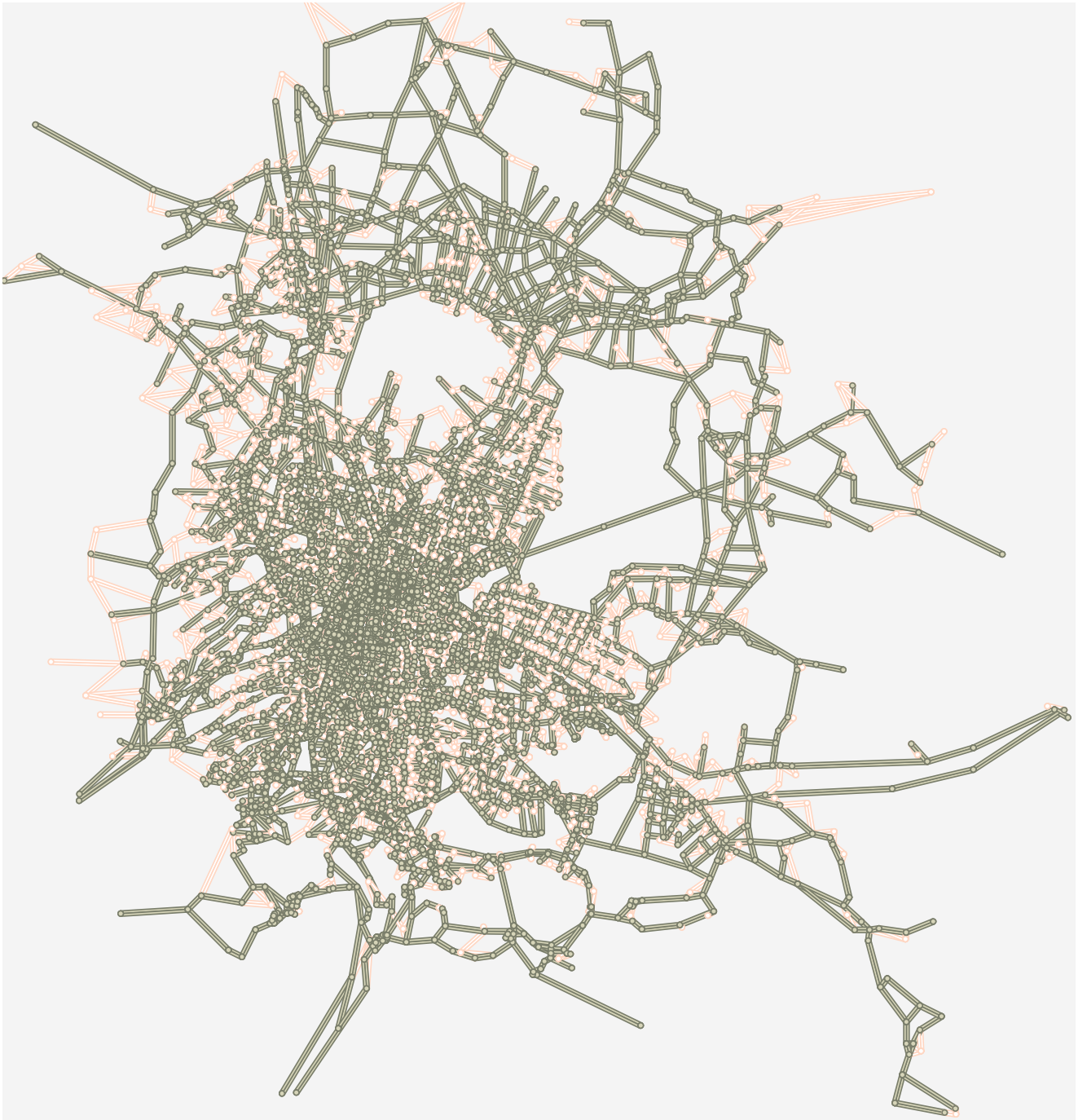


Figura 6.1: Red Metropolitana: Ciudad de México y área conurbada.

En esta representación, los arcos de color gris representan los arcos que integran la red de tránsito y los de color rojo son conectores entre la red de tránsito y los centroides, estos arcos representan el inicio de su viaje hasta que llega a la red de tránsito. Un centroide es un nodo asociado a una zona de afluencia de pasajeros. En la base de datos utilizada el área metropolitana (A.M.), la cual incluye el Distrito Federal y los municipios conurbados del Estado de Mexico, se considera dividida en 1705 zonas destino (centroides).

Se observa que existe mayor concentración de nodos en la ciudad de México, en donde la densidad de población y la actividad del transporte es más intensa, mientras que en la periferia se mantiene una menor agregación.

### 6.1.1. Modos de Transporte

Los modos de transporte se dividen en: tráfico, tránsito y tránsito auxiliar. En donde, tráfico se refiere al transporte privado, es decir, autos; tránsito se refiere al transporte público y en tránsito auxiliar se definen caminos peatonales, así como medios de acceso al transporte público.

Tránsito				Tránsito auxiliar	
b	bus del DF	m	metro	p	peaton
f	metro ferreo	r	trolebús	o	correspondencia metro
s	suburbano	t	tren ligero	i	acceso suburbano
y	taxi de sitio	c	colectivo	u	acceso metrobús
z	taxi independiente	v	tranvia	n	banda transportadora
x	bus del Edo. de México	e	metrobús		

Cuadro 6.1: Modos de transporte.

### 6.1.2. Tipos de Vehículos

Se consideran 12 tipos de vehículos, cada uno relacionado a cada uno de los 12 modos de transporte mostrados en el cuadro anterior. La siguiente tabla contiene la información correspondiente, así como la capacidad de cada vehículo para transportar pasajeros sentados (scap) y la capacidad total (tcap).

vehículo	1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
modo	b	ba	m	t	s	x	f	v	r	c	e	y	z
scap	40	80	360	200	224	50	240	80	40	24	80	4	4
tcap	90	160	1530	600	460	50	1020	160	90	40	160	4	4

Cuadro 6.2: Tipos de vehículos.

**Nota:** En el Cuadro 6.2 *ba* indica un tipo de autobús articulado.

### 6.1.3. Líneas de Tránsito

En la red de tránsito se han incorporado 845 líneas, de las cuales se tienen

- 20 de metro.
- 2 de metro ferreo.
- 102 de bus del DF.
- 16 de trolebús.
- 2 de suburbano.
- 2 de tren ligero.
- 18 de metrobús.
- 97 de bus del Edo. de México.
- 586 de colectivos.

Aún cuando en esta base de datos no están definidas líneas de tranvía, el área de Planeación Estratégica del STC-Metro ha hecho simulaciones donde se consideran líneas de tranvía en el centro histórico del D.F.

En EMME cada línea de tránsito se representa por medio de dos líneas independientes, es decir, se tiene una línea por dirección. Por ejemplo, la línea 6 del metro, una línea es en dirección El Rosario y otra línea es en dirección Martín Carrera, Figura 6.2

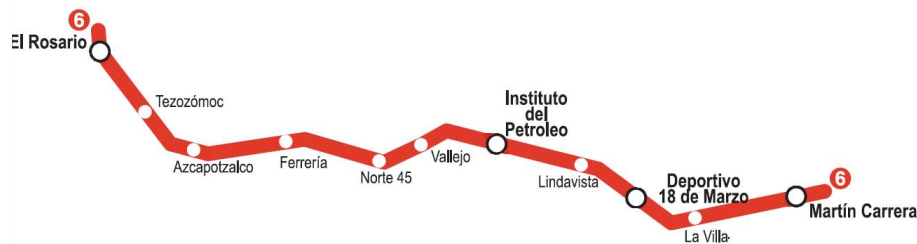


Figura 6.2: Línea 6 del metro.



Otra característica muy importante de la forma en que se han modelado las líneas del metro, en esta base de datos, es que por cada estación en la que existen correspondencias con otras líneas, o mejor dicho transbordo de pasajeros a otras líneas se agregan (ver la Figura 6.3):

- Un nodo extra (artificial) de correspondencia.
- El correspondiente arco que une a la estación de transbordo con el nodo de correspondencia. Este arco tiene longitud cero.
- Arcos de correspondencia que simulan el transbordo de usuarios entre líneas.

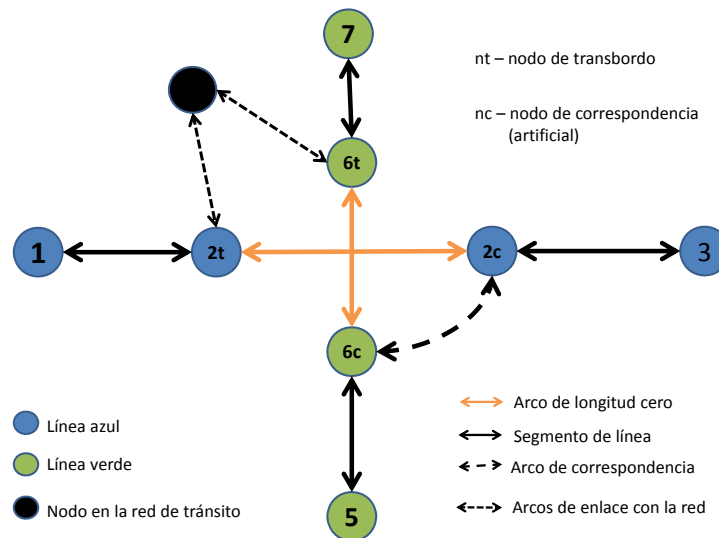


Figura 6.3: Modelo de estaciones de correspondencia.

Entonces, de acuerdo a este procedimiento, la línea 8 del metro que tiene 19 estaciones, en EMME se modela como una línea de 26 estaciones donde los siete nodos de diferencia corresponden a las 7 estaciones de correspondencia, véase la Figura 6.4, en la cual los números 808011, 808021, y 808031, son los números correspondientes a los nodos de las estaciones Garibaldi, Bellas Artes y San Juan de Letrán, respectivamente; los nodos 808013 y 808023 son los nodos artificiales que representan las correspondencias de la línea 8 con las líneas B y 2, respectivamente.

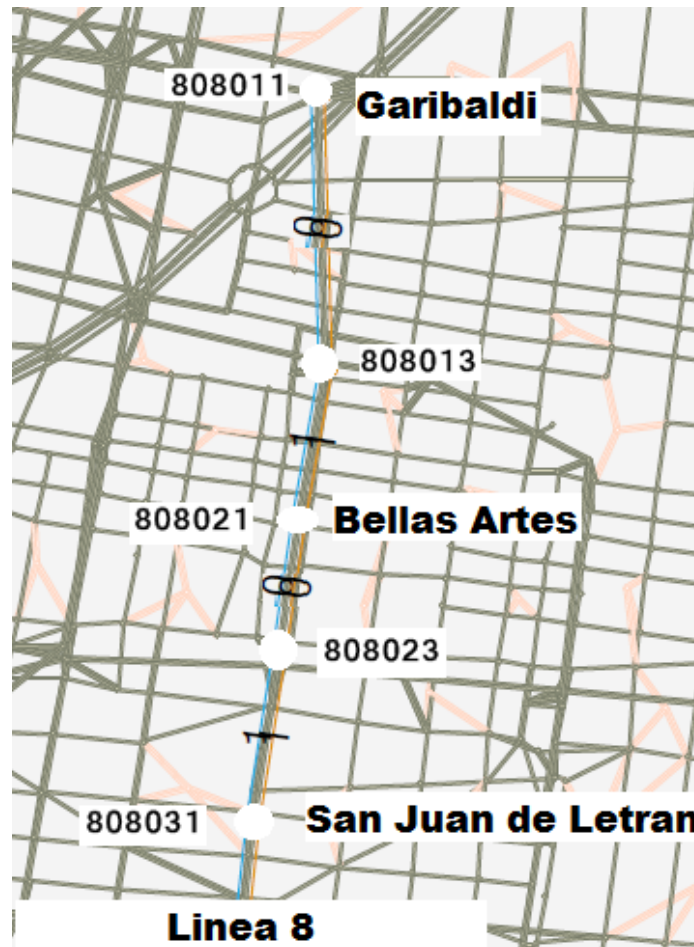


Figura 6.4: Correspondencias en Linea 8 del Metro.

#### 6.1.4. Funciones Volumen-Demora y de Tránsito

Las **funciones volumen-demora** que son utilizadas en el modelo para la red metropolitana fueron definidas por tipo de vialidad y sólo han sido validadas por el STC-Metro, de acuerdo al manual de Louis J. Pignataro, *Traffic Engineering Theory and Practice* [13], y son las siguientes:

- $fd1 = length * 0.67 (1 + 3.5 ((volau + volad)/(lanes * 3000))^3)$
- $fd2 = length * 0.75 (1 + 3((volau + volad)/(lanes * 3000))^3)$

- $fd3 = length * 0.75 (1 + 9((volau + volad)/(lanes * 1200))^3)$
- $fd4 = length * 1 (1 + 6.5 ((volau + volad)/(lanes * 1200))^3)$
- $fd5 = length * 1 (1 + 6.5 ((volau + volad)/(lanes * 1200))^3)$
- $fd6 = length * 1.5 (1 + 4((volau + volad)/(lanes * 1200))^3)$
- $fd7 = length * 1 (1 + 6.5 ((volau + volad)/(lanes * 1200))^3)$
- $fd8 = length * 1.5 (1 + 4((volau + volad)/(lanes * 1200))^3)$

Los ocho correspondientes tipos de vialidades consideradas son:

1. Autopistas de cuota.
2. Carreteras federales libres.
3. Carriles centrales periférico, viaducto y circuito.
4. Laterales de vialidad de acceso controlado, viaducto, circuito y periférico.
5. Ejes viales.
6. Carriles en contra flujo.
7. Vialidades primarias semaforizadas.
8. Caminos peatonales accesos o salidas a vialidad controlada.

Las **funciones de tránsito** representan los tiempos de viaje  $t_a$  y en la base de datos de la red metropolitana se han definido de la siguiente forma:

- $ft1 = (timau * 3).max.(length * 60/speed)$ , función asignada a las líneas de tránsito que circulan sobre avenidas. Donde *.max.* se interpreta como la selección del valor máximo entre ambos valores de la función.
- $ft2 = length * 60/speed$ , función asignada a las líneas de tránsito que circulan sobre carriles exclusivos, como el metrobus.

En las funciones volumen-demora definidas arriba se utilizan las siguientes variables:

- *timau* es el tiempo total de viaje en auto y es resultado de una asignación de tráfico ejecutada previamente en el escenario base. Por lo tanto, la función *ft1* indica que en ocasiones realizar un viaje en transporte público tomará tres veces el tiempo que toma realizar el mismo viaje en automóvil.
- *volau* o volúmenes de auto, representa el número de vehículos asignado sobre arcos o vueltas, como resultado de la asignación de tráfico ejecutada previamente.
- *volad* o volúmenes adicionales, es decir, el número de autos equivalentes al número de vehículos de carga, como resultado de la asignación de tráfico ejecutada previamente.
- *lanes* representa el número de carriles sobre un arco.
- *length* es la longitud de arco.
- *speed* es la velocidad de la línea.

En EMME el algoritmo de asignación de tráfico (es decir, de automóviles particulares) es una adaptación del método de Frank and Wolfe [8], [12], aplicado a un modelo de tráfico no lineal que es muy similar al descrito por las ecuaciones (4.9)-(4.13), en donde los tiempos de espera  $w_i$  son cero y los volúmenes son de autos en lugar de personas.

Un aspecto muy importante para obtener buenos resultados en la simulaciones es la calibración de los parámetros de las funciones volumen-demora. Las funciones definidas anteriores se utilizan sin hacer ninguna modificación, pues son las que el personal del STC-Metro ha venido utilizando durante algunos años. Un estudio más minucioso requiere de la introducción de una selección más cuidadosa y una clasificación más amplia, con el objeto de representar mejor la realidad. Para ello se requieren tomar en cuenta los aspectos particulares de la red y de las condiciones de tránsito, así como la recolección de datos de campo. Este proceso requiere de grandes recursos humanos y económicos así como de una planeación muy cuidadosa, y es una de las tareas que se recomienda abordar en el futuro.

## 6.2. Asignación de Tránsito con el Modelo Lineal

La plataforma EMME está cuidadosamente organizada por módulos, en donde se ejecutan las diferentes tareas, como la alimentación de la información, la construcción de la red, la preparación de las corridas, la ejecución de las macros, entre otros. Por ejemplo, módulo 5.11 de EMME se utiliza en la preparación del escenario para la asignación de tránsito sin congestión, algoritmo que a su vez se ejecuta en el módulo 5.31. La preparación comienza con la selección del tipo de asignación deseada: ya sea, asignación de tráfico con demanda fija o variable, ó bien una asignación de tránsito. La parte principal de la preparación consiste en especificar las matrices correspondientes como, la demanda o los tiempos resultantes, los modos de tránsito y los parámetros que se deben establecer para llevar a cabo la asignación deseada.

Los parámetros **necesarios** son:

- Headways. Los headways pueden ser: 1) los que se han definido para cada línea, con o sin un máximo; 2) atributos definidos por el usuario para cada línea o segmento. El headway debe tener un valor entre 0.01 y 999.99 minutos.
- Tiempo para abordar. Este tiempo es la penalización asociada con cada abordaje y podría representar el tiempo en corredores, escaleras, etc. Es posible definir este tiempo como un promedio para toda la red, por nodo y/o por línea o ambos. El tiempo para abordar puede tomar un valor entre 0.00 and 999.99.
- Factor de tiempo de espera. Este factor es un parámetro utilizado para calcular los tiempos de espera ( $\alpha$ , ver ecuación (3.1)) y puede definirse para toda la red o como un atributo de nodo; debe tener un valor entre 0.01 y 1.00.
- Pesos. Son definidos para el tiempo de espera, el tiempo de tránsito auxiliar y el tiempo para abordar. Estos pesos deben tener valores entre 0.00 and 999.99. Por ejemplo, un peso de 2.5 para el tiempo de espera significa que los pasajeros perciben un minuto de espera como 2.5 minutos.
- Factor de distribución. Este parámetro se introduce para representar la tendencia de los pasajeros al considerar más o menos líneas atractivas durante su viaje. Por default, el factor de distribución es 1 y en general puede tomar valores entre 0.01 and 999.99. En la asignación, el tiempo de espera se multiplica por el peso y el factor de distribución.

### 6.2.1. Preparación del Escenario

En la sección anterior se mencionó que para realizar la asignación de tránsito lineal se utiliza el modulo 5.31, y que para ello hay que utilizar el módulo 5.11 para preparar el escenario, es decir para introducir los datos y la información necesaria. Los datos utilizados en este trabajo fueron proporcionados por el STC-Metro. A continuación se especifican los valores para preparar el escenario para ejecutar una asignación lineal:

- Matriz de demanda: llamada mf40 - Matriz de Demanda Público Matutino 2008. Obtener una matriz O-D es costoso y generalmente se lleva a través de una encuesta origen destino cuidadosamente planeada. Sin embargo, este tipo de información generalmente es escasa y muy difícil de generar. La encuesta origen destino más reciente que incluye las delegaciones del D.F. y municipios de la zona conurbada, fue tomada en 2007 y liberada públicamente hasta 2008.
- Matriz de impedancias: es la matriz que se prepara para guardar, después de una asignación lineal, los resultados de los tiempos totales esperados de viaje y se ha denominado mf3 - Resultados Asignación Lineal.
- Headways: *headways percibidos*, calculados a partir de la función de frecuencias efectivas (5.22).
- Tiempo para abordar: 4.0 minutos.
- Factor de tiempo de espera: 0.90.
- Pesos: espera = 4.00, tránsito auxiliar = 4.00, tiempo para abordar = 4.00.
- Factor de distribución: 1.

Los tiempos y pesos fueron definidos por el área de planeación estratégica del STC-Metro de tal forma que reflejen el comportamiento del volumen de usuarios en la red de tránsito. La matriz de demanda contiene información correspondiente al periodo de 6-9 am, entonces el periodo de simulación es de 3 horas.

### 6.2.2. Resultados

Como se mencionó en el Capítulo 3.6, en el modelo de asignación lineal de tránsito no se consideran restricciones de capacidad ni la congestión. Por lo tanto, la asignación de volumen de pasajeros en las diferentes líneas puede dar como resultado

un desbordamiento de la capacidad en muchas de las líneas de la red metropolitana de transporte público. Al restringir estos resultados a la red del STC-Metro, se observa que, con los parámetros introducidos previamente, este desbordamiento de la capacidad se obtiene en las siguientes líneas:

- Línea 1a, dirección Observatorio.
- Línea 6, ambas direcciones, Martín Carrera-El Rosario.
- Línea 8b, dirección Garibaldi.
- Línea 9a, dirección Tacubaya.
- Línea Ab, dirección Pantitlán.
- Línea Ba, dirección Buenavista.

Aún cuando en las líneas del metro los resultados no corresponden exactamente con lo que ocurre en realidad, si proporcionan información sobre el comportamiento de los usuarios, las líneas y los respectivos tramos en donde se requiere mayor capacidad de para evitar congestión y planear e implementar mejoras en el servicio.

Las gráficas mostradas en las Figuras 6.5-6.11 representan el nivel de desbordamiento de la capacidad de dichas líneas, es decir en donde la demanda sobrepasa la que realmente puede soportar el Metro. En dichas gráficas, las secciones de color naranja en las barras representan el volumen de pasajeros que sobrepasa la capacidad de esos segmentos de la línea correspondiente. Los triángulos de color verde (que apuntan hacia arriba) representan las cantidades de pasajeros que abordan, los de color azul (que apuntan hacia abajo) representan las cantidades de pasajeros que descienden y los de color amarillo (que apuntan a la derecha) representan los niveles de pasajeros que ya van a bordo de la línea de tránsito. En las mismas gráficas, los segmentos en rojo, en la parte superior derecha, indican el trazo de la línea del Metro correspondiente dentro de la red metropolitana.

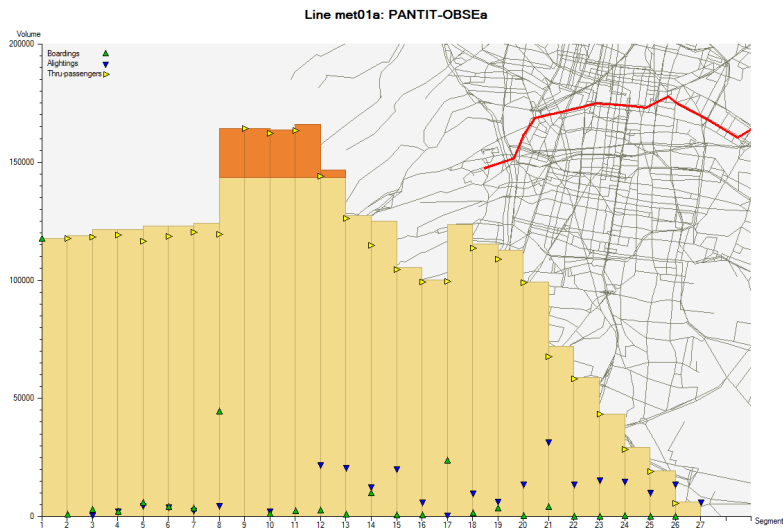


Figura 6.5: Línea 1a, dirección Observatorio.

En la gráfica de la línea 1, de la Figura 6.5, es posible observar que la línea se satura alrededor de las estaciones San Lázaro a Pino Suárez, es decir donde existe correspondencia con las línea 2 y B del metro. Además de que en San Lázaro existe la central de autobuses, denominada como TAPO (terminal de autobuses de pasajeros de oriente).

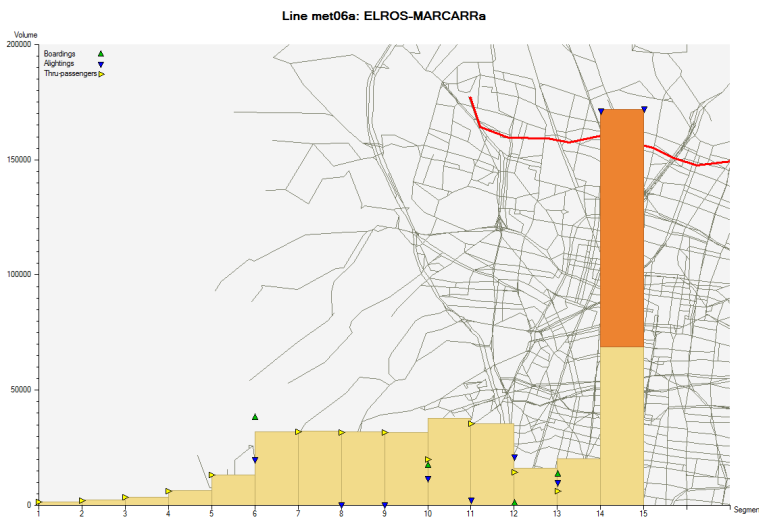


Figura 6.6: Línea 6a, dirección Martín Carrera.



En la Figura 6.6, la tendencia indica que la línea se satura alrededor de la estación El Rosario, ya que muchos usuarios transborban a la línea 7, con dirección Barranca del Muerto o se dirigen hacia el CETRAM el Rosario, donde es posible abordar autobuses hacia el estado de México.

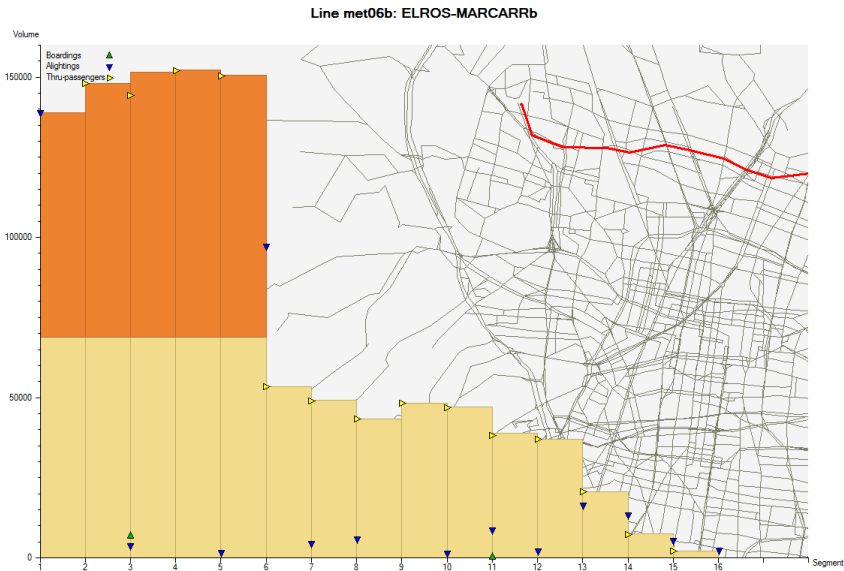


Figura 6.7: Línea 6b, dirección el Rosario.

En la Figura 6.7, se observa que que la línea se satura alrededor de las estaciones Martín Carrera e Instituto del Petróleo, ya que muchos usuarios transborban a la línea 4, que conecta con más líneas, la línea 3 con dirección Universidad o la línea 5 con dirección Politécnico.

En la Figura 6.8, se observa que que la línea se satura entre los tramos de las estaciones UAM-I y Salto del Agua. La línea 8 tiene correspondencia con las líneas B, 1, 2, 4 y 9. Regularmente los usuarios se dirigen a sus lugares de trabajo y centros escolares que se encuentran más hacia el centro de la ciudad.

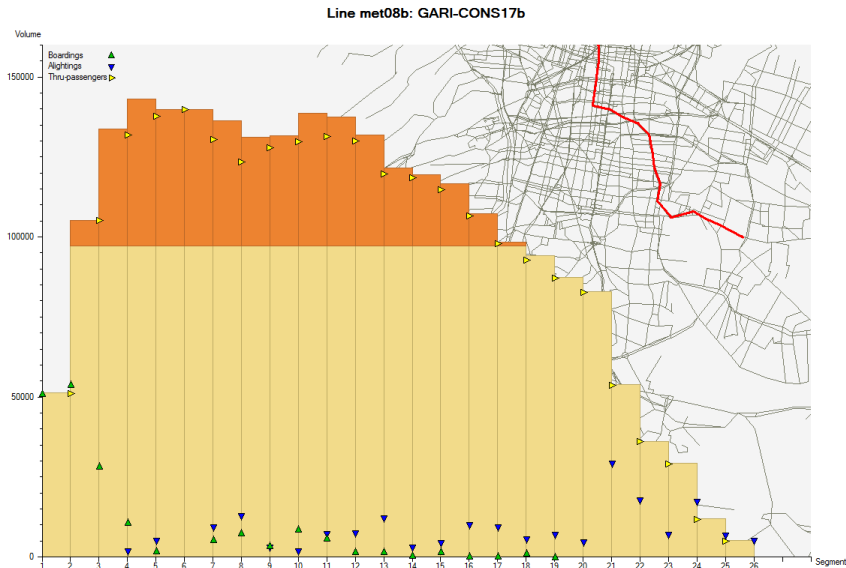


Figura 6.8: Línea 8b dirección, Garibaldi.

En la Figura 6.9, se observa que que la línea se satura alrededor de las estaciones Pantitlán y Chabacano. Los usuarios que abordan desde Pantitlán en el periodo matutino generalmente se dirigen al centro de la ciudad, o bien al norte, mediante las líneas de correspondencia 4 y 2, respectivamente.

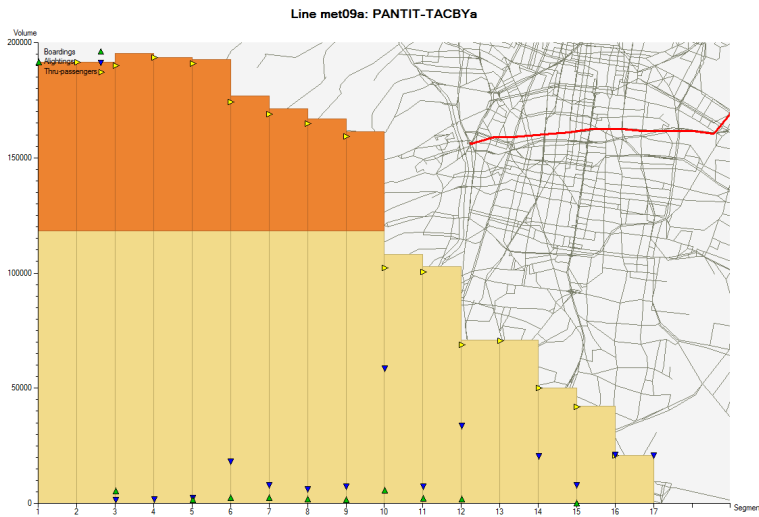


Figura 6.9: Línea 9a, dirección Tacubaya.

En la Figura 6.10, se observa que que la línea se satura alrededor de las estaciones los reyes y Pantitlán. La línea A del metro es la línea que dá acceso a la red del metro a usuarios que provienen de zonas de alta densidad poblacional como son Texcoco, Los Reyes, Nezahualcoóyotl e Iztapalapa, por lo que el tráfico de vehículos es muy intenso y el transporte público reporta un alta congestión.

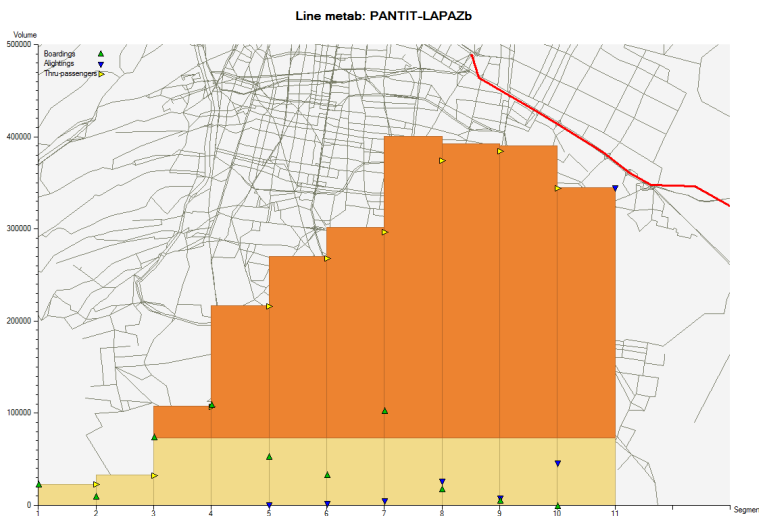


Figura 6.10: Línea Ab, dirección Pantitlán.

En la Figura 6.11, se observa que la línea B en dirección Buenavista está saturada completamente. Esta línea del metro dá acceso a los usuarios al suburbano, en Buenavista y al mexibús, en Ciudad Azteca, así como permitir a los usuarios del estado de México acceder a la red del metro. Además, la línea B transporta usuarios de zonas densamente pobladas y de bajo nivel económico como son Ecatepec, Valle de Aragón y zonas aledañas.

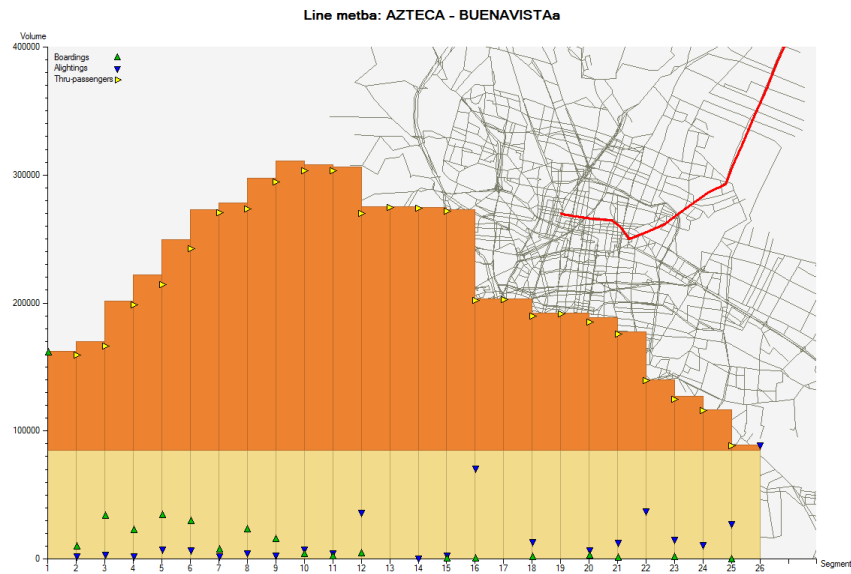


Figura 6.11: Línea Ba, dirección Buenavista.

En general, se observa que en el periodo matutino, las líneas del metro que tienen exceso de volumen son utilizadas por usuarios que se transportan principalmente hacia sus lugares de trabajo ó centros escolares. Este comportamiento se ve reflejado y ha sido analizado por la subgerencia del área de Planeación Estratégica del STC-Metro en lo que ellos llaman polígonos de carga, es decir, los niveles de volumen acumulado en el metro en los diferentes periodos de servicio, matutino, vespertino y de medio día.

En cuanto a la asignación de demanda, tiempo esperado de viaje y segmentos de línea congestionados, se tienen los siguientes resultados.

- Demanda total asignada: 4928501.
- Demanda en tránsito auxiliar: 464421 (9.42 %).
- Tiempo promedio esperado de viaje en el periodo de simulación (3 hrs.): 211 minutos, considerando también los tiempos percibidos, como los tiempos de abordaje.
- Porcentaje de segmentos de línea con exceso de volumen: 14.89.
- Segmento de línea con el máximo exceso de volumen: línea 104-1-Valentín Gómez Farías, segmento 505001-505003, del modo de transporte colectivo. Valor máximo de volumen/capacidad: 90.66. Línea que alimenta la línea A del metro proveniente desde Texcoco, ver Figura 6.12.

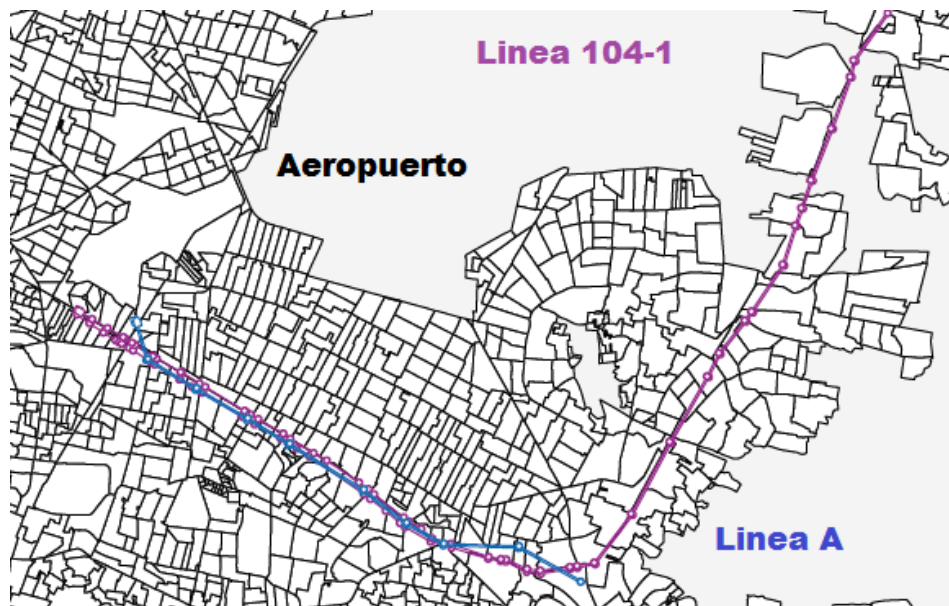


Figura 6.12: Línea 104-1.

En el tránsito auxiliar se observa que el mayor volumen de usuarios se da en los arcos que permiten tener acceso desde el metro al suburbano o colectivos del estado de México, e incluso un transbordo entre las líneas A y 9 del metro. El cuadro 6.3 contiene el desglose de esta información. Ver Figura 6.13.

arco	nodo i	nodo j	modo	volumen
a: acceso del metro al suburbano	830012	168014	i	229269
b: correspondencia entre las líneas A y 9	821012	809011	o	201962
c: conexión del metro a autobuses del Edo de México	422027	822011	p	151698

Cuadro 6.3: Volumen en tránsito auxiliar.



Figura 6.13: Volumen auxiliar.

La gráfica de la Figura 6.14 contiene información de la demanda asignada por zonas.

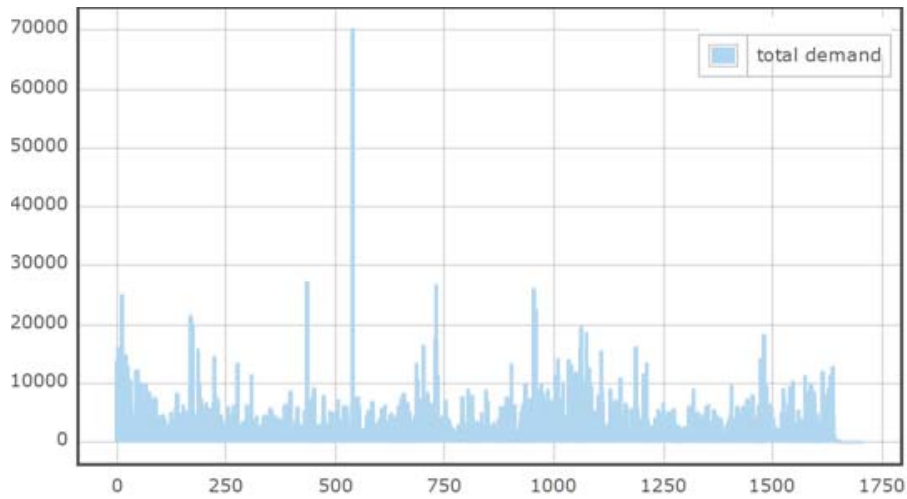


Figura 6.14: Demanda asignada por zonas con el modelo lineal.

En el Cuadro 6.4 se describe la información correspondiente a las 5 zonas de mayor demanda que se aprecian en la gráfica de la Figura 6.14.

zona	demanda	d. tránsito auxiliar	abordajes	t. promedio
12	24938	0	85250	261.67
435	27063	0	84331	285.79
539	69990	925	172277	235.91
730	26448	1995	60618	337.88
953	25883	0	69366	424.95

Cuadro 6.4: Zonas de mayor demanda.

Donde d.tránsito auxiliar es la demanda asignada sobre arcos donde están definidos los modos de tránsito auxiliar, que incluyen correspondencias de metro, accesos a suburbano y metrobús. El tiempo promedio esperado de viaje, dado en minutos, está en la columna t. promedio.

En la gráfica de la Figura 6.14 sobresale la zona 539, zona en la que la demanda es mucho mayor que en las demás (alrededor de 70000 usuarios). También existen cuatro zonas más con demanda asignada promedio de 25,000 usuarios, otras 20 zonas con demanda entre 10,000 y 20,000, las restantes se encuentran por debajo de los 10,000 usuarios. Esto refleja la complejidad no solo de la red sino de las actividades



de los usuarios del transporte en la red metropolitana, como son abordar, descender o transbordar, entre otras.

En la Figura 6.15 se indican las zonas de mayor demanda sobre el mapa del área metropolitana .

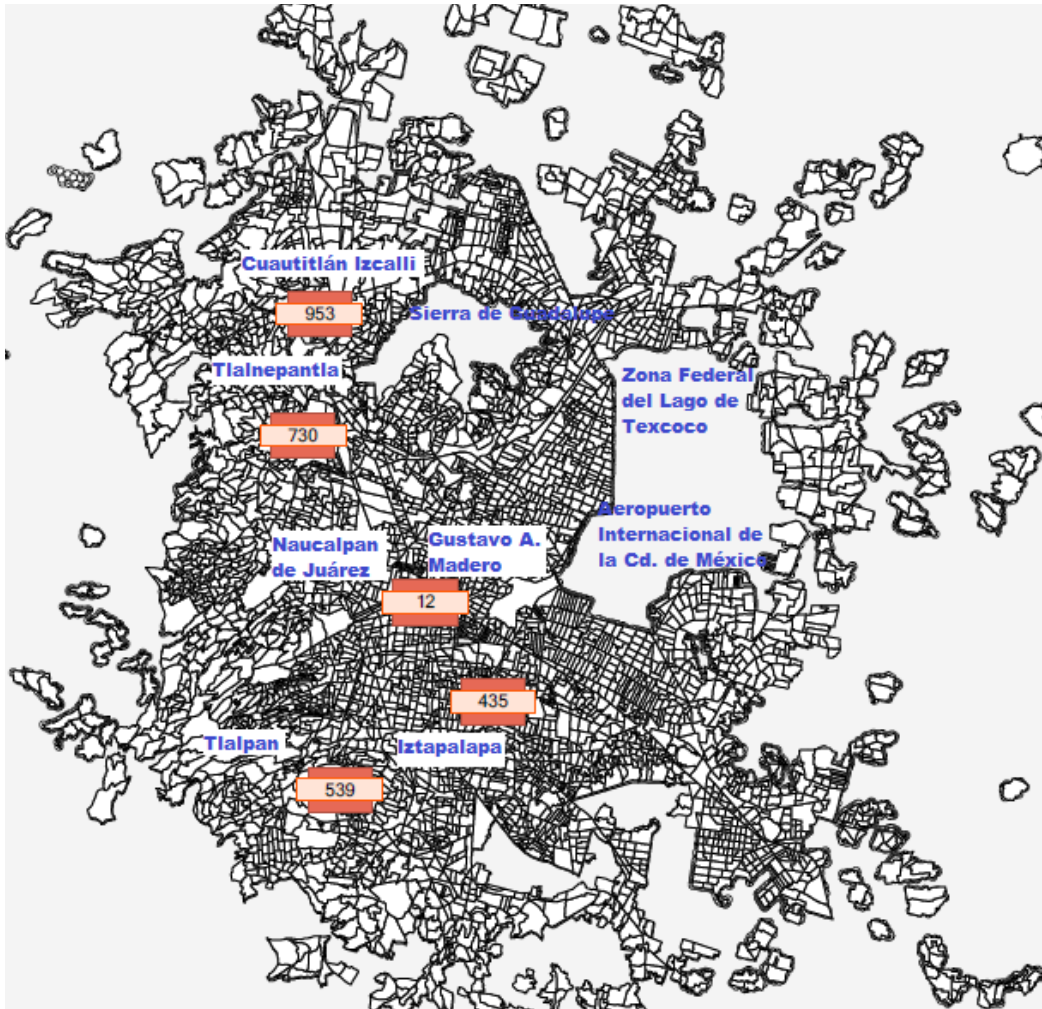


Figura 6.15: Zonas de mayor demanda.



En la Figura 6.16 se representan, por nodos, las siguientes actividades:

- Abordajes iniciales (Node value 1).
- Abordajes correspondientes a transferencias (Node value 2).
- Descensos correspondientes a transferencias (Node value 3).
- Descensos finales (Node value 4).

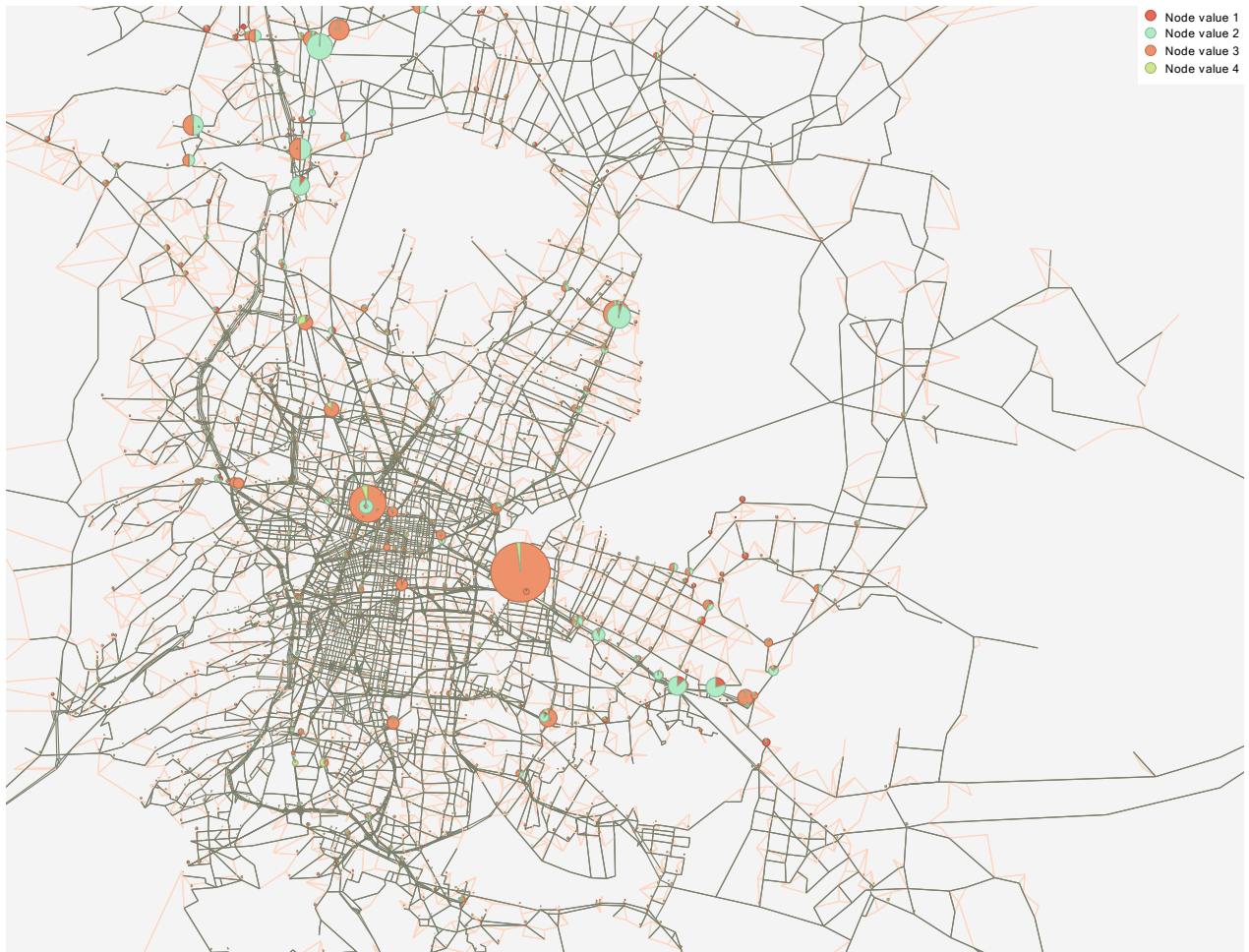


Figura 6.16: Actividades en los nodos.

Los nodos como mayor actividad corresponden a las zonas de mayor demanda en el oriente y el norte del D.F. El mayor número de abordajes ocurre en la estación del

metro Pantitlán, así como en la estación Buenavista, donde además también ocurre el mayor número de transbordos de los usuarios del metro y el suburbano, como se describió a partir de la Figura 6.13.

En el Cuadro 6.5 se muestran los tiempos de recorrido en cada línea del STC-metro, así como los volúmenes máximos totales asignados cuando se utiliza el modelo lineal. En dicho cuadro 't. medido' indica el tiempo de viaje medido en campo por el STC-metro en promedio, mientras que 't. calculado' indica el tiempo calculado al ejecutar el algoritmo lineal.

Línea	headway	t. medido	t. calculado	máx. volumen
1a	1.92	31.00	28.62	150286
1b	1.92	31.25	28.62	32815
2a	2.17	37.17	35.44	51613
2b	2.17	36.83	35.44	119209
3a	2.08	38.17	36.91	79801
3b	2.08	38.25	36.91	31140
4a	5.83	15.58	14.98	21320
4b	5.83	15.42	14.98	16178
5a	4.17	22.08	22.09	7713
5b	4.17	22.83	22.11	76580
6a	4.00	17.75	17.67	34787
6b	4.00	18.08	17.67	28020
7a	3.75	25.25	24.05	56125
7b	3.75	25.25	24.05	59283
8a	2.83	29.00	27.39	25115
8b	2.83	29.00	27.39	139436
9a	2.33	21.25	20.05	215892
9b	2.33	21.50	20.05	10758
Aa	2.50	26.50	20.62	5423
Ab	2.50	26.50	20.62	437473
Ba	3.25	34.50	34.09	316409
Bb	3.25	35.00	34.09	35116

Cuadro 6.5: Resultados para el metro en el modelo lineal.

Es importante resaltar la impresionante coincidencia entre los tiempos medido y los tiempos calculados por medio del modelo lineal, se cree que las pequeñas diferencias se deben al hecho de que en la definición de las líneas de tránsito en la base de datos

no se incluye el tiempo de servicio (*dwell time*), es decir el tiempo que tarda en abrir y cerrar puertas. Aún así en estos resultados, la mayor diferencia se da en la línea A, 5.88 minutos, línea que presenta el mayor exceso de volumen y por lo tanto el tiempo de servicio debe ser mayor.

### 6.3. Asignación no Lineal con Costos Generalizados

Como se describió en la Sección 4.3, para poder resolver el problema de asignación no lineal con costos generalizados es necesario realizar una asignación lineal como asignación inicial y para la preparación del escenario, en este experimento se han tomado los mismos datos que se utilizaron en la Sección 6.2.1.

En este algoritmo se penalizan los tiempos de tránsito por medio de una función volumen-demora, como  $t_a(1 + d(v_a))$ , por lo que se utilizó la siguiente función BPR:

$$d(v_a) = 3 \left( \frac{v_a}{c_a} \right)^3 \quad (6.1)$$

donde  $c_a$  representa la capacidad del segmento de la línea.

En este caso no fue posible completar el experimento con la macro CONGTRAS. Como criterios de paro se utilizaron una tolerancia de  $\epsilon = 0,01$  y un tope de 75 iteraciones. Sin embargo, debido al consumo de memoria, sólo fue posible realizar 5 iteraciones. Los cálculos se realizaron en una computadora Dell con procesador Core i5, memoria RAM de 16 GB. Se decidió no realizar más experimentos con esta macro debido a que no fue posible resolver los problemas de memoria. Afortunadamente, este inconveniente no afecta el desarrollo del proyecto y tampoco las necesidades del STC-Metro, pues una de las prioridades del STC-Metro es realizar asignaciones de tránsito en donde se tome en cuenta no solo la congestión sino también la capacidad limitada de los vehículos de transporte.

### 6.4. Asignación no Lineal con Restricciones de Capacidad

Como ya se mencionó en la Sección 5.3, para poder resolver el problema de asignación no lineal con restricciones de capacidad es necesario realizar una asignación lineal,

cuyo resultado se utiliza como el estado inicial para inicializar el algoritmo iterativo CAPTRAS. Además, para ejecutar dicho algoritmo se deben penalizar las frecuencias de servicio y los tiempos de tránsito. Para penalizar las frecuencias de servicio se utiliza la función (6.2)

$$hdwy(v_a) = \begin{cases} hdwy_a \left[ 1 - \left( \frac{v_a}{c_a - v_{a'} + v_a} \right)^\beta \right], & \text{si } v_{a'} < c_a \\ 999,98, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6.2)$$

en donde:

- La variable  $hdwy_a$  representa el tiempo de interarribo de los vehículos que pasan por el segmento  $a$ .
- El volumen  $v_a = \sum_{d \in \mathcal{D}} v_a^d$  representa el número de usuarios que abordan el vehículo en la estación, sumado sobre todos los destinos  $d \in \mathcal{D}$ .
- El volumen  $v_{a'}$  representa el número de pasajeros que están a bordo después de que el vehículo se detiene en una estación.
- La variable  $c_a$  representa la capacidad del arco  $a$ .

Para penalizar los tiempos de tránsito se han utilizado dos tipos de funciones de volumen-demora, BPR y cónicas. Las funciones utilizadas y los resultados obtenidos se muestran por separado en las siguientes dos subsecciones.

### 6.4.1. Función de Volumen-Demora BPR

Para la preparación del escenario, en este experimento se han tomado los mismos datos que se utilizaron en la Sección 6.2.1. En este caso se penalizan los tiempos de tránsito por medio de la función volumen-demora de tipo BPR (6.3):

$$d(v_a) = 3 \left( \frac{v_a}{c_a} \right)^3 \quad (6.3)$$

donde  $c_a$  representa la capacidad de la línea sobre el segmento  $a$ .

La siguiente simulación se realizó para un periodo de 3 horas, periodo matutino, de 6 a 9 am, en el que normalmente se llevan a cabo las mediciones en el STC-Metro.

## Resultados.

Como ya se mencionó, el algoritmo iterativo CAPTRAS se inicia con la solución del modelo lineal, y en este caso se ha utilizado una tolerancia de  $\epsilon = 0.1$  (ver Sección 5.3) para detener las iteraciones. Para llegar a la convergencia el algoritmo realizó 150 iteraciones, como se muestra en la Figura 6.17, en donde se gráfica el número de iteraciones contra el valor de la función GAP.

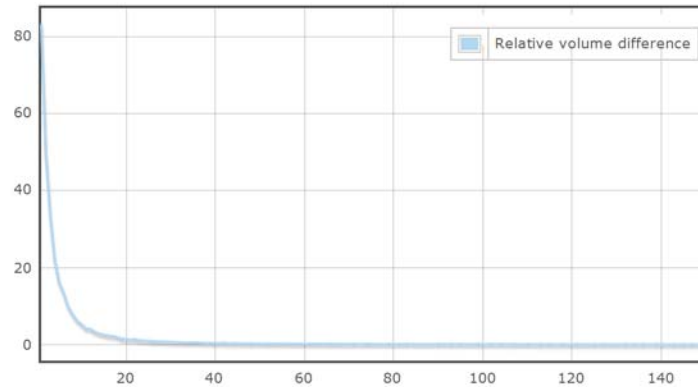


Figura 6.17: Convergencia CAPTRAS.

Después de **22 iteraciones**, el resultado de la asignación de la demanda muestra que la red del Metro se encuentra totalmente descongestionada. La línea Ab, dirección Pantitlán, es aquella que toma más iteraciones en descongestionarse, (las 22 iteraciones). En las Figuras 6.18-6.21 se ilustran los niveles de desbordamiento en dicha línea, y que se obtienen en las iteraciones 1, 5, 11 y 22. Las otras líneas en las que se desborda la capacidad, les toma menos iteraciones para descongestionarse. La lista de estas líneas y el número de iteraciones para cada una de ellas se muestra a continuación.

- Línea 1a, dirección Observatorio, 1 iteración.
- Línea 6, ambas direcciones, 3 iteraciones.
- Línea 8b, dirección Garibaldi, 1 iteración.
- Línea 9a, dirección Tacubaya, 2 iteraciones.
- Línea Ba, dirección Buenavista, 9 iteraciones (ver Figuras 6.22-6.23).

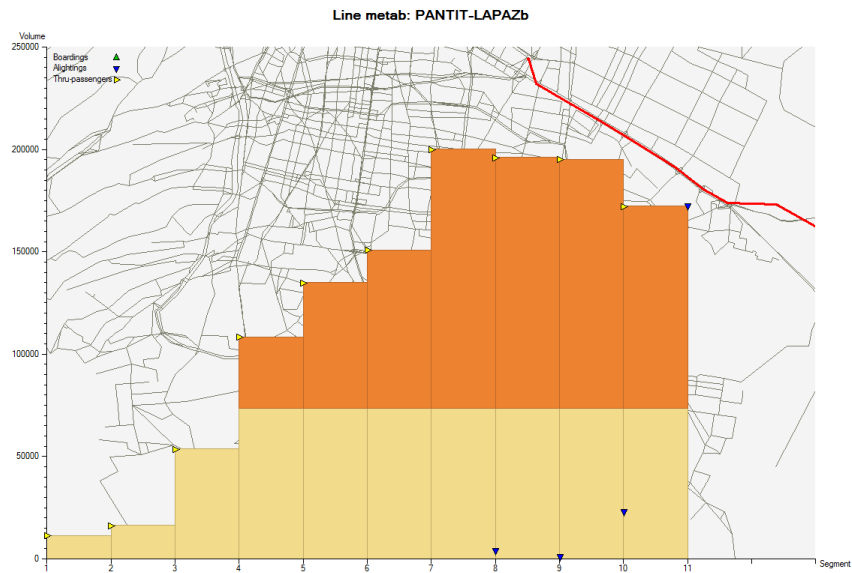


Figura 6.18: Línea Ab, iteración 1.

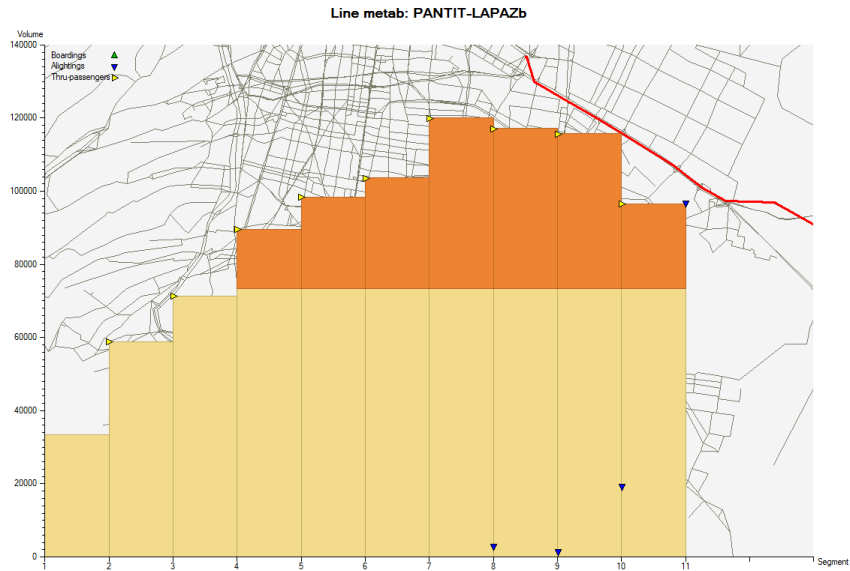


Figura 6.19: Línea Ab, iteración 5.

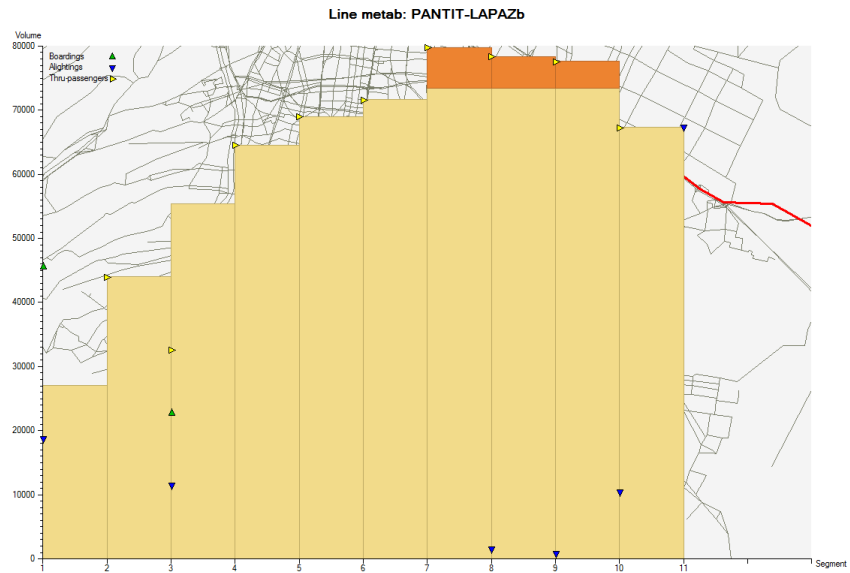


Figura 6.20: Línea Ab, iteración 11.

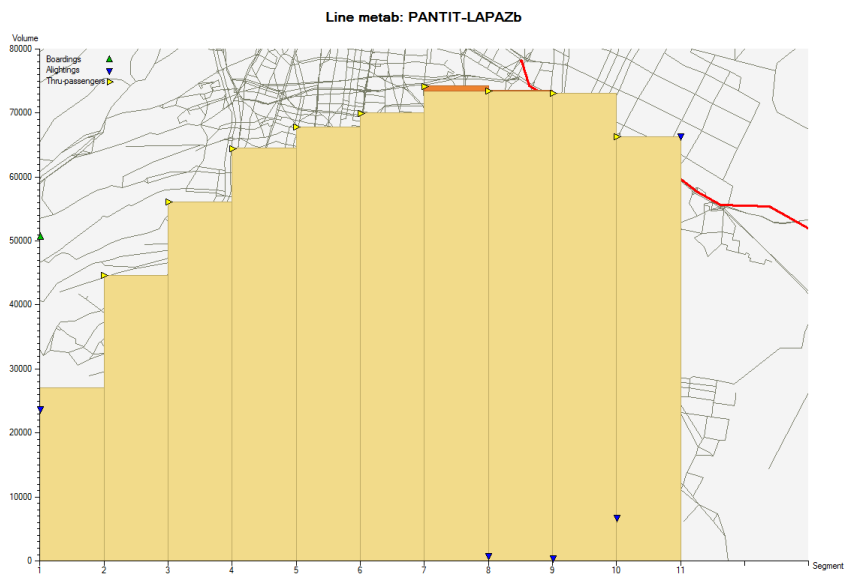


Figura 6.21: Línea Ab, iteración 22.

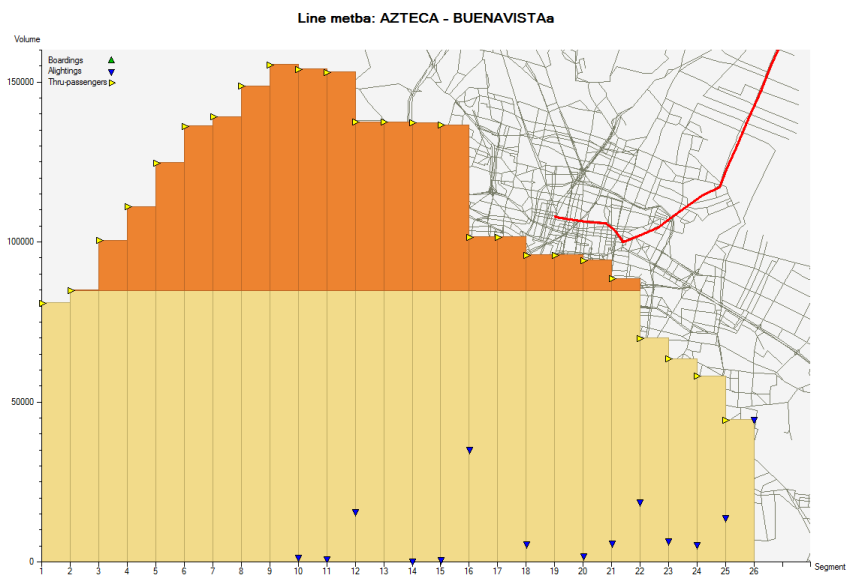


Figura 6.22: Línea Ba, iteración 1.



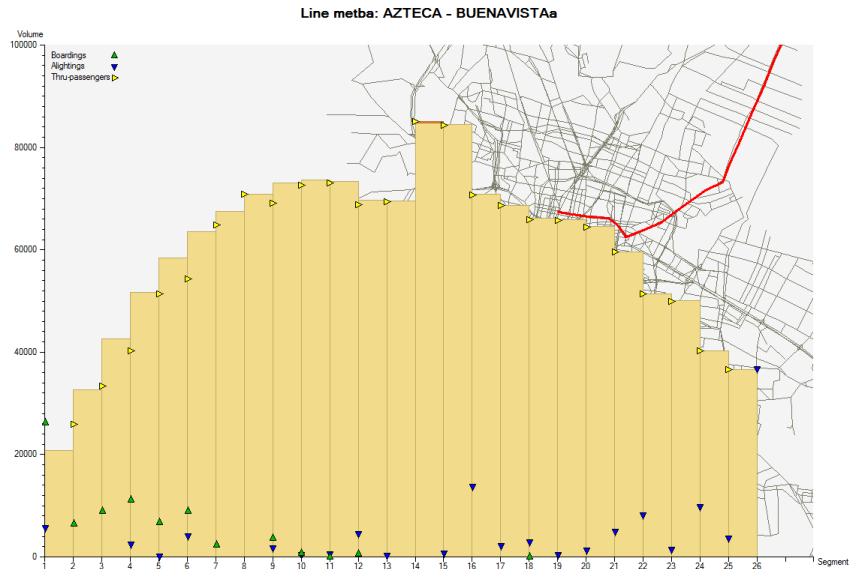


Figura 6.23: Línea Ba, iteración 9.

**En la iteración 150**, la iteración final, se obtienen los siguientes resultados.

- Demanda total asignada: 5121359.
- Demanda en tránsito auxiliar: 2718364 (53.08 %).
- Tiempo promedio esperado de viaje en el periodo de simulación (3 hrs.): 460 minutos, considerando también los tiempos percibidos, como los tiempos de abordaje.
- Porcentaje de segmentos con exceso de volumen: 0.83.
- Segmento con el máximo exceso de volumen: línea EE1-Insurgentes-UV Guerrero, segmento: 194006-194000, del modo de transporte trolebús. Valor máximo de volumen/capacidad: 1.32.

Las actividades en las zonas de mayor demanda se describen en el Cuadro 6.6.

zona	demanda	d. tránsito auxiliar	abordajes	t. promedio de viaje
12	24938	7945	27610	789.17
435	27063	16512	18714	633.05
539	70115	11313	96094	540.19
730	26520	24483	2611	638.80
953	25883	13872	25625	1189.03

Cuadro 6.6: CAPTRAS-BPR. Zonas de mayor demanda.

En la Figura 6.24 se representan, por nodos, las siguientes actividades:

- Abordajes iniciales (Node value 1).
- Transferencias, nodo de ascenso (Node value 2).
- Transferencias, nodo de descenso (Node value 3).
- Descensos finales (Node value 4).



Figura 6.24: Actividades en los nodos.

Los nodos con mayor actividad corresponden a las zonas de mayor demanda en el oriente, el norte y la franja sur del D.F. El mayor número de transbordos ocurre en la estación del metro Pantitlán, en varias de las estaciones centrales de la línea 1, en la zona norte en la estación Indios Verdes, en la zona sur-poniente en Barranca del Muerto y Mixcoac, en el sur en Taxqueña y en Tlahuac-Canal de Chalco sobre el Periférico. Esto último justifica la reciente introducción de la línea 12 del metro.

En el Cuadro 6.7 se muestran los resultados obtenidos para el tiempo de recorrido para cada línea del metro, así como los volúmenes máximos asignados al ejecutar el algoritmo básico lineal (max. vol. Lin.), y al ejecutar CAPTRAS con las funciones BPR (max. vol. BPR).

Línea	headway	t. medido	t. calculado	máx. vol. Lin.	máx. vol. BPR
1a	1.92	31.00	28.62	150286	114693
1b	1.92	31.25	28.62	32815	17150
2a	2.17	37.17	35.44	51613	38776
2b	2.17	36.83	35.44	119209	73848
3a	2.08	38.17	36.91	79801	79728
3b	2.08	38.25	36.91	31140	52370
4a	5.83	15.58	14.98	21320	3847
4b	5.83	15.42	14.98	16178	1185
5a	4.17	22.08	22.09	7713	3567
5b	4.17	22.83	22.11	7658	20448
6a	4.00	17.75	17.67	34787	6745
6b	4.00	18.08	17.67	28020	11335
7a	3.75	25.25	24.05	56125	16396
7b	3.75	25.25	24.05	59283	10971
8a	2.83	29.00	27.39	25115	4210
8b	2.83	29.00	27.39	139436	77737
9a	2.33	21.25	20.05	215892	61823
9b	2.33	21.50	20.05	10758	4355
Aa	2.50	26.50	20.62	5423	1146
Ab	2.50	26.50	20.62	437437	69135
Ba	3.25	34.50	34.09	316409	74934
Bb	3.25	35.00	34.09	53116	6425
Volúmenes totales				1968456	750824

Cuadro 6.7: Resultados para el metro con CAPTRAS-BPR

De estos resultados se observa que los tiempos de viaje obtenidos con CAPTRAS son exactamente iguales a los tiempos obtenidos con el modelo lineal, por lo que, de nuevo, son muy cercanos a los medidos en campo. Esta coincidencia puede parecer no convincente, pero se puede explicar observando que los tiempos calculados se obtienen con la macro CAPTRAS cuando ya no hay exceso de volumen (en las últimas iteraciones) y, por lo tanto, idealmente no hay retrasos. Además las frecuencias del metro no cambian mucho aún y cuando haya congestión y solo se observan cambios significativos en momentos de contingencia ó fallas extraordinarias. Por esta misma razón se puede decir que los tiempos calculados son un poco menores a los reales, principalmente en las líneas de mayor demanda. También se observa que la línea que más volumen perdió es la línea B, con 87.9% del volumen asignado, la que menos volumen perdió fue la línea 3a con 0.09% y por el contrario, la línea 3b, ganó volumen, 68.18% del volumen de pasajeros. Estos resultados se ven reflejados en la Figura 6.25.

### **Comparación de volúmenes.**

Al comparar los volúmenes de asignación en las líneas del metro después de ejecutar CAPTRAS se obtiene la Figura 6.25, en la cual se muestra la redistribución de volúmenes de asignación sobre dichas líneas. Los segmentos de líneas de colores representan dichos volúmenes asignados sobre la red del metro, los de color rojo pertenecen solamente al escenario copia (304), donde se ejecutó CAPTRAS y los de color verde sólo pertenecen al escenario base (30) donde se ejecutó una asignación lineal. Es decir, los segmentos de color verde representan los volúmenes de pasajeros ganados sobre las líneas, por ejemplo la 3, y los de color rojo representan los volúmenes perdidos en líneas como la A y la B del metro después de ejecutar CAPTRAS.

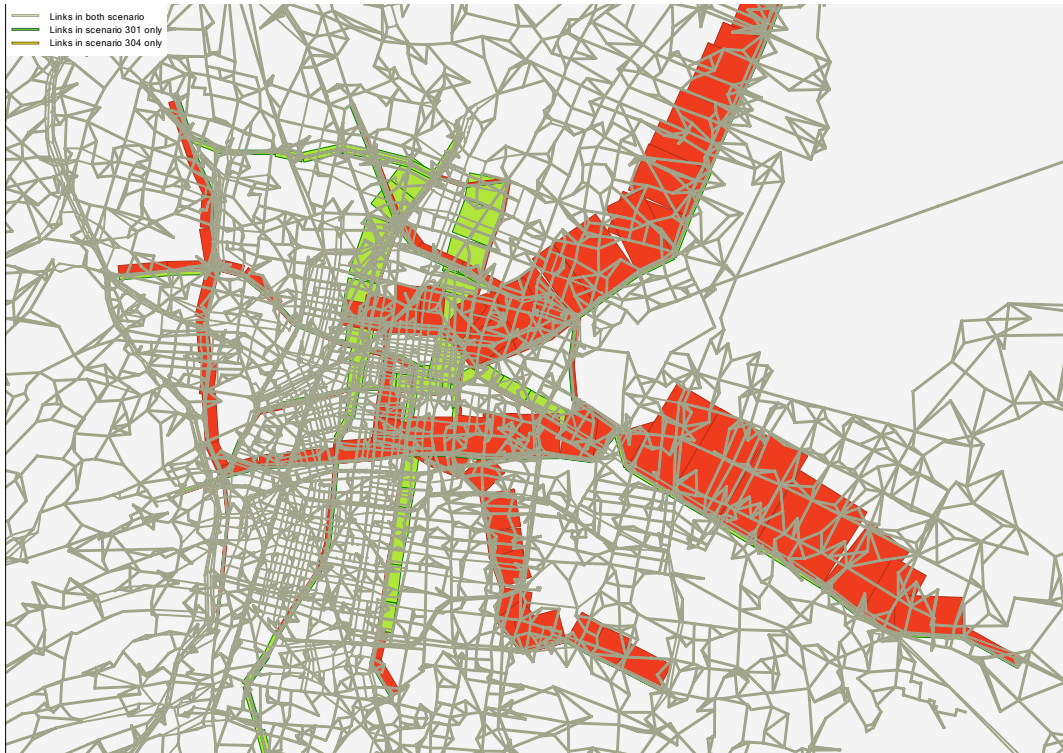


Figura 6.25: Comparación de volúmenes.

## 6.4.2. Función de Volumen-Demora Cónica

Dado que en la base de datos del STC-Metro no existen funciones cónicas, fue necesario generarlas a partir de datos almacenados y calculados en EMME. La información fue extraída de los segmentos de líneas de tránsito que tienen asociada una función volumen-demora del tipo BPR, en la base de datos proporcionada por el STC-Metro. Con estos datos se realizó un proceso de ajuste para obtener las funciones cónicas correspondientes a cada una de la funciones BPR.

A continuación se presentan las ocho funciones cónicas obtenidas para cada tipo de vialidad considerada en la base de datos del STC-Metro.

### Funciones Cónicas.

1.  $fd1 = 2.3540 * (\sqrt{(1.2358 * (1 - x))^2 + 9,7372}) + 2 - 1.2358 * (1 - x) - 3.1204$
2.  $fd2 = 2.6834 * (\sqrt{(1.3225 * (1 - x))^2 + 6,5045}) + 2 - 1.3225 * (1 - x) - 2.5504$
3.  $fd3 = 3.1942 * (\sqrt{(3.8705 * (1 - x))^2 + 1,3787}) + 2 - 3.8705 * (1 - x) - 1.1742$
4.  $fd4 = 2.2226 * (\sqrt{(1.9636 * (1 - x))^2 + 2,3069}) + 2 - 1.9636 * (1 - x) - 1.5189$
5.  $fd5 = 2.4720 * (\sqrt{(2.2386 * (1 - x))^2 + 1,9704}) + 2 - 2.2386 * (1 - x) - 1.4037$
6.  $fd6 = 3.7925 * (\sqrt{(1.7130 * (1 - x))^2 + 2,8943}) + 2 - 1.7130 * (1 - x) - 1.7013$
7.  $fd7 = 2.6552 * (\sqrt{(1.6992 * (1 - x))^2 + 2,9417}) + 2 - 1.6992 * (1 - x) - 1.7151$
8.  $fd8 = 6.0256 * (\sqrt{(1.5090 * (1 - x))^2 + 3,9296}) + 2 - 1.5090 * (1 - x) - 1.9823$

Para las funciones  $fd1$  y  $fd2$  la variable  $x$  está dado por

$$x = (volau + volad)/(lanes * 3000)$$

y para el resto de las funciones  $x$  representa

$$x = (volau + volad)/(lanes * 1200)$$

Los datos utilizados para el ajuste de funciones cónicas se presentan en el Apéndice D.

## Preparación del escenario.

Para la preparación del escenario, en este experimento se han tomado los mismos datos que se utilizaron en la Sección 6.2.1. En este caso se penalizan los tiempos de tránsito por medio de la función volumen-demora de tipo cónica (6.4):

$$fd_{captras} = 2.4240(\sqrt{1.6576(1-x)^2 + 3.0988} + 2 - 1.6576(1-x) - 1.7603) \quad (6.4)$$

donde  $x = v/c$ , véase la Sección 4.1.

La siguiente simulación se realizó para un periodo de 3 horas, como en los casos anteriores.

## Resultados.

En la **iteración inicial** del algoritmo CAPTRAS (ver Sección 5.3) se obtiene una asignación inicial en la que no se toman en cuenta restricciones de capacidad ni la congestión. Por lo tanto, la asignación del volumen de pasajeros en las diferentes líneas puede generar un desbordamiento de la capacidad de las líneas. En este experimento con funciones cónicas, se obtiene el desbordamiento en las siguientes líneas:

- Línea 1a, dirección Observatorio.
- Línea 3a, dirección Indios verdes.
- Línea 6, ambas direcciones.
- Línea 8b, dirección Garibaldi.
- Línea 9a, dirección Tacubaya.
- Línea Ab, dirección Pantitlán.
- Línea Ba, dirección Buenavista.

Las gráficas de las Figuras 6.26-6.29 representan el nivel de desbordamiento de la capacidad en algunas de estas líneas, es decir en donde la demanda sobrepasa la que realmente puede soportar el Metro.



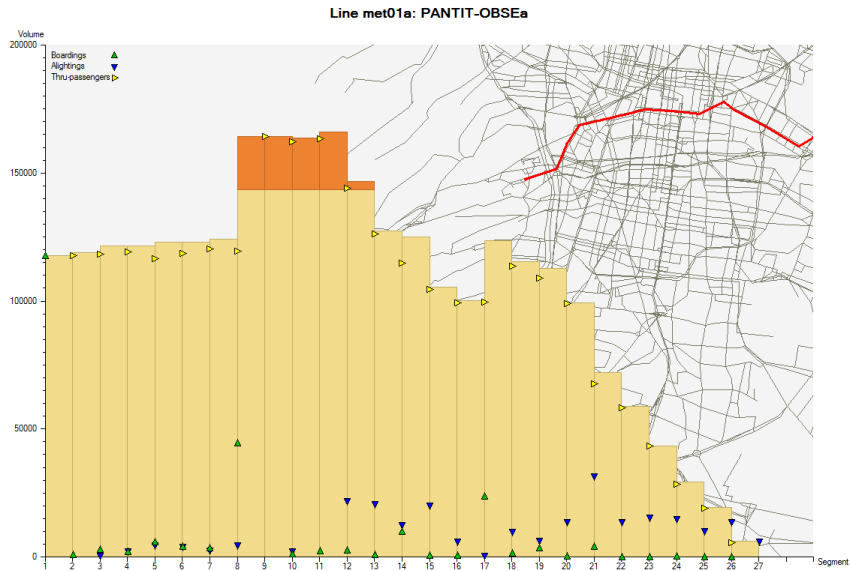


Figura 6.26: Línea 1a, asignación inicial.

En la Figura 6.27 se observa que la línea se satura alrededor de las estación Guerrero en donde hay correspondencia con la línea B del metro, donde los usuarios pueden provenir incluso del suburbano, desde el estado de México.

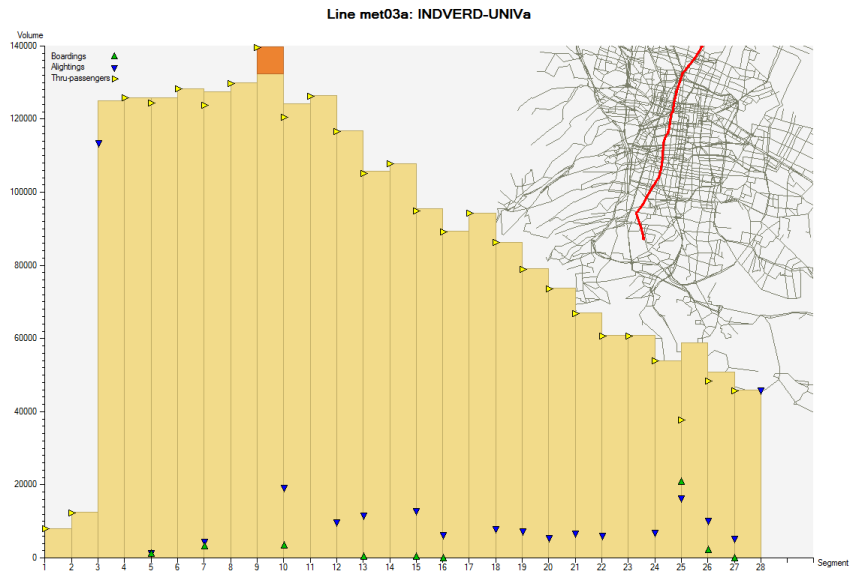


Figura 6.27: Línea 3a, asignación inicial.

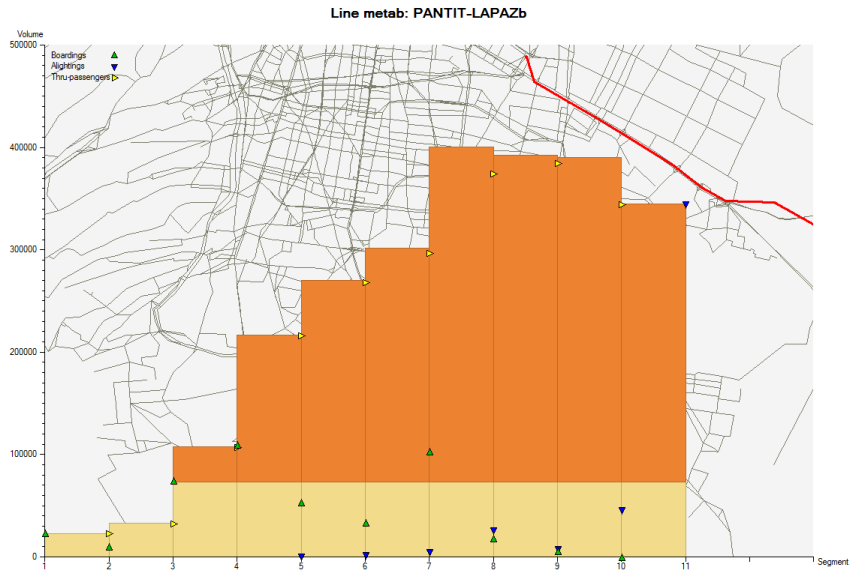


Figura 6.28: Línea Ab, asignación inicial.

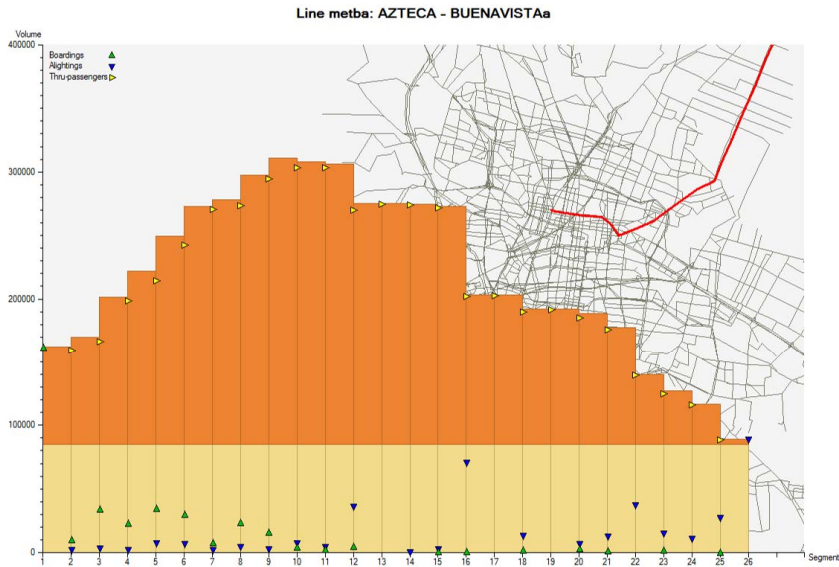


Figura 6.29: Línea Ba, asignación inicial.

En general en este experimento, el comportamiento de los usuarios reflejado en las gráficas anteriores, es muy similar al observado en los resultados de la asignación lineal utilizando funciones BPR, de la Sección 6.2. Cabe señalar que se obtiene una

línea más en la que se tiene exceso de volumen, la línea 3 del metro y el resultado obtenido, cualitativamente, coincide con la realidad.

En cuanto a la asignación de demanda, tiempo esperado de viaje y segmentos de línea congestionados, se tienen los siguientes resultados para el periodo de simulación de tres horas.

- Demanda total asignada: 4928501.
- Demanda en tránsito auxiliar: 464421 (9.42 %).
- Tiempo promedio de viaje: 211 minutos.
- Porcentaje de segmentos de línea con exceso de volumen: 14.89.
- Segmento de línea con el máximo exceso de volumen: línea 104-1-Valentín Gómez Farias, segmento 505001-505003, del modo de transporte colectivo. Valor máximo de volumen/capacidad: 90.66.

Las actividades en las zonas de mayor demanda se describen en el Cuadro 6.8.

zona	demanda	d. tránsito auxiliar	abordajes	t. promedio de viaje
12	24938	0	85250	261.67
435	27063	0	84331	285.79
539	70115	925	172277	235.91
730	26520	1995	60618	337.88
953	25883	0	69366	424.95

Cuadro 6.8: CAPTRAS Cónica. Zonas de mayor demanda.

Note que estos resultados coinciden exactamente con los resultados obtenidos en la iteración inicial de CAPTRAS al emplear funciones BPR. Véase la Sección 6.4.1.

Después de **24 iteraciones**, la red del metro se encuentra totalmente descongestionada. La línea a: Pantitlán-La Paz, es aquella que toma más iteraciones para descongestionarse, 24 iteraciones. En las Figuras 6.30-6.33 se muestran los volúmenes obtenidos para esta línea en las iteraciones 4, 10, 18 y 24.

Las otras líneas en las que se desborda la capacidad, les toma menos iteraciones para descongestionarse. El número de iteraciones para cada una de ellas se muestra a continuación:

- Línea 1, dirección Observatorio, 1 iteración.
- Línea 3, dirección Indios verdes, 2 iteración.
- Línea 6, ambas direcciones, 4 iteraciones.
- Línea 8, dirección Garibaldi, 1 iteración.
- Línea 9, dirección Tacubaya, 2 iteraciones.
- Línea b, dirección Buenavista, 7 iteraciones (ver Figuras 6.34-6.35).

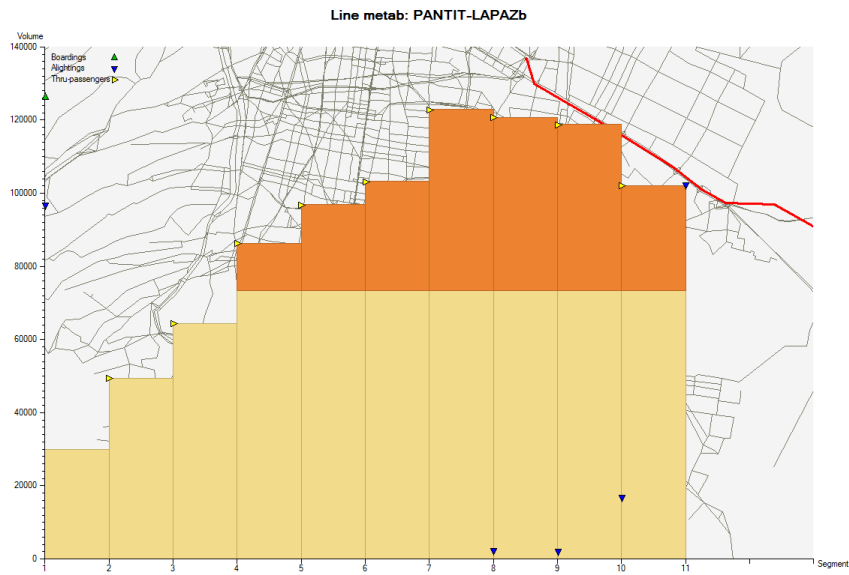


Figura 6.30: Línea Ab, iteración 4.

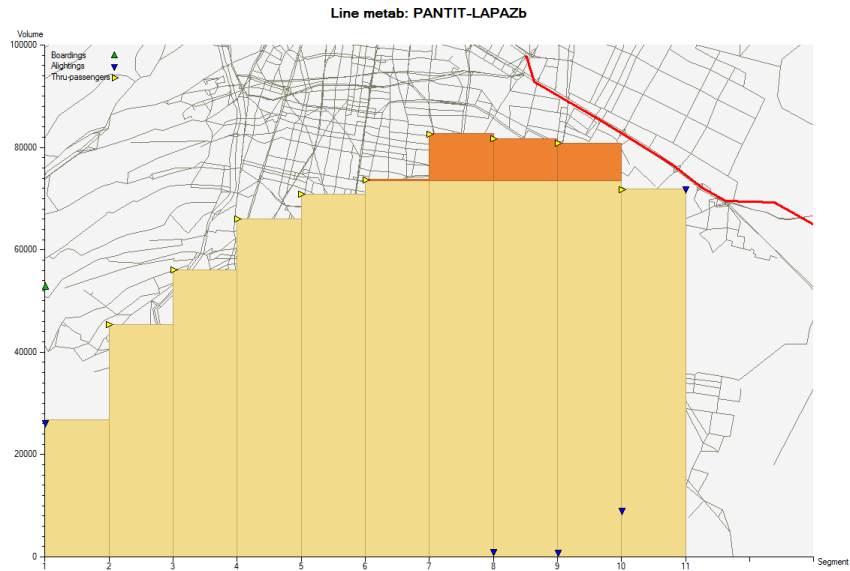


Figura 6.31: Línea Ab, iteración 10.

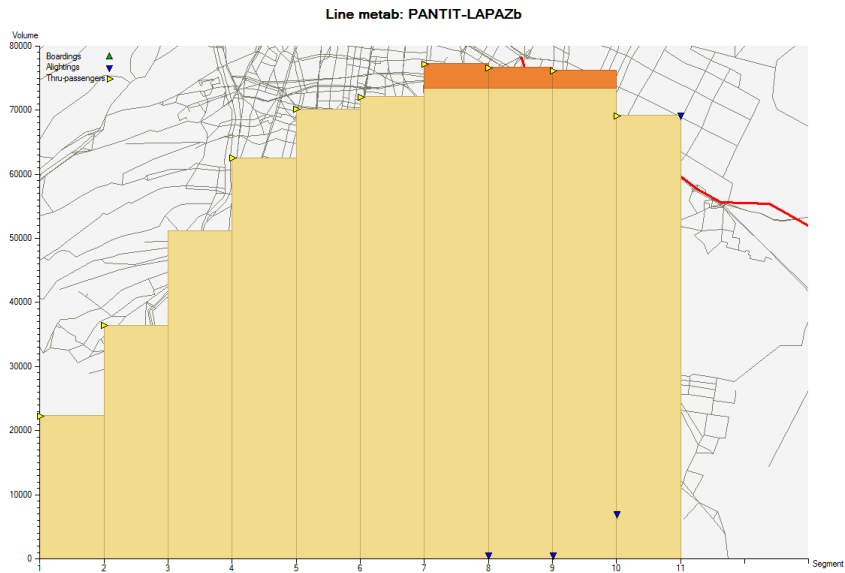


Figura 6.32: Línea Ab, iteración 18.

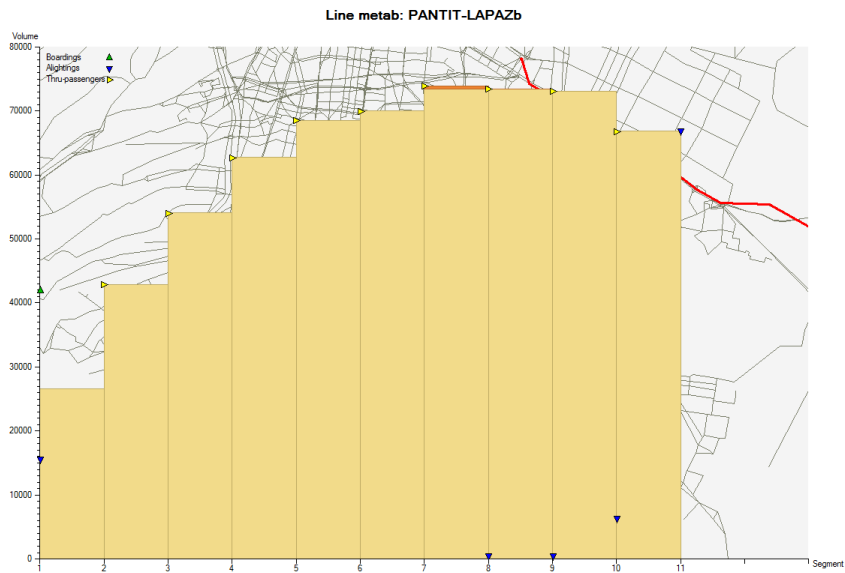


Figura 6.33: Línea Ab, iteración 24.

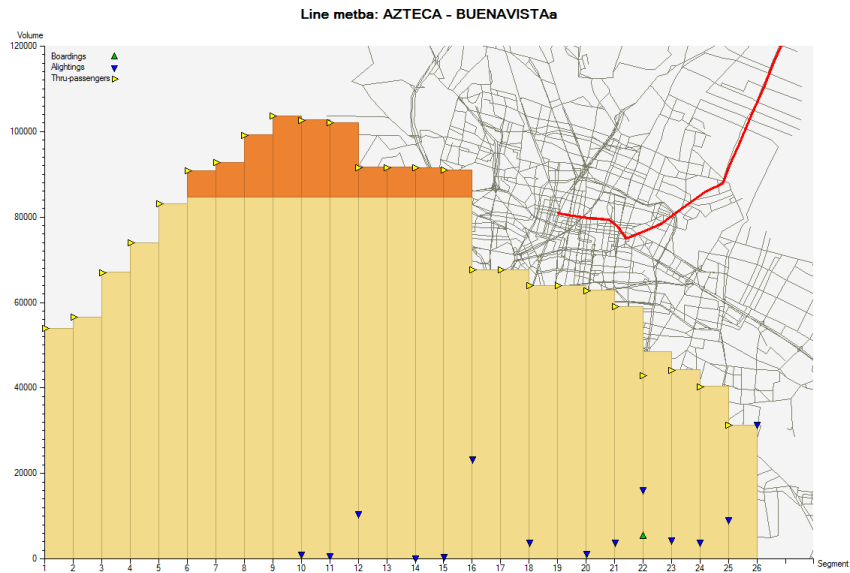


Figura 6.34: Línea Ba, iteración 2.

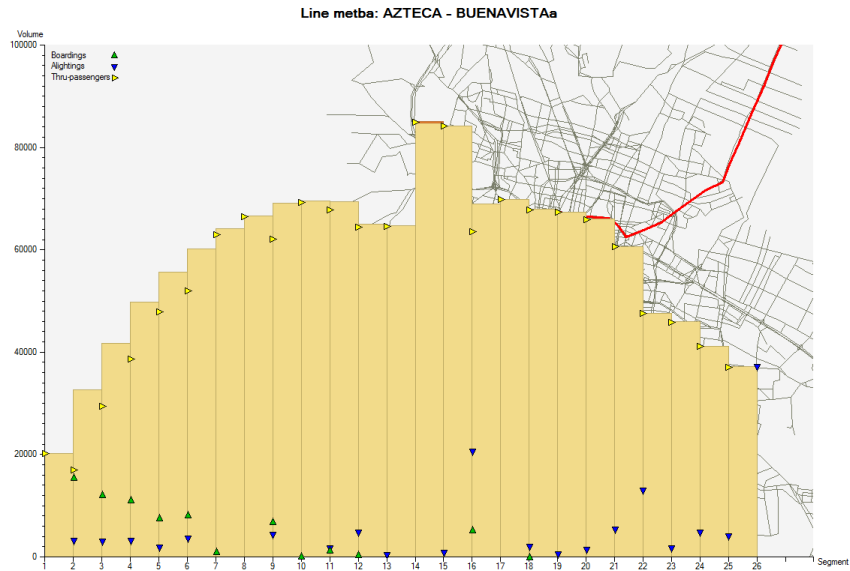


Figura 6.35: Línea Ba, iteración 7.

La comparación del número de iteraciones para descongestionar las líneas, 1a, 6, 8b y 9a, Ba y Ab, al usar funciones BPR y Cónicas, se describe en el Cuadro

Línea	Iteraciones BPR	Iteraciones Cónica
1a	1	1
6a	3	3
6b	3	3
8b	1	1
9a	2	2
Ab	22	24
Ba	9	7

Cuadro 6.9: Iteraciones para descongestionar líneas del metro.

En la iteración 150, la iteración final, se obtienen los siguientes resultados.

- Demanda total asignada: 5121359.
- Demanda en tránsito auxiliar: 2965652 (57.91 %).
- Tiempo total esperado promedio de viaje: 473 minutos.
- Porcentaje de segmentos con exceso de volumen: 0.27.
- Segmento con el máximo exceso de volumen: línea EE1-Insurgentes-UV Guerrero, segmento: 194006-194000, del modo de transporte trolebús. Valor máximo de volumen/capacidad: 1.2. Ver Figura 6.36

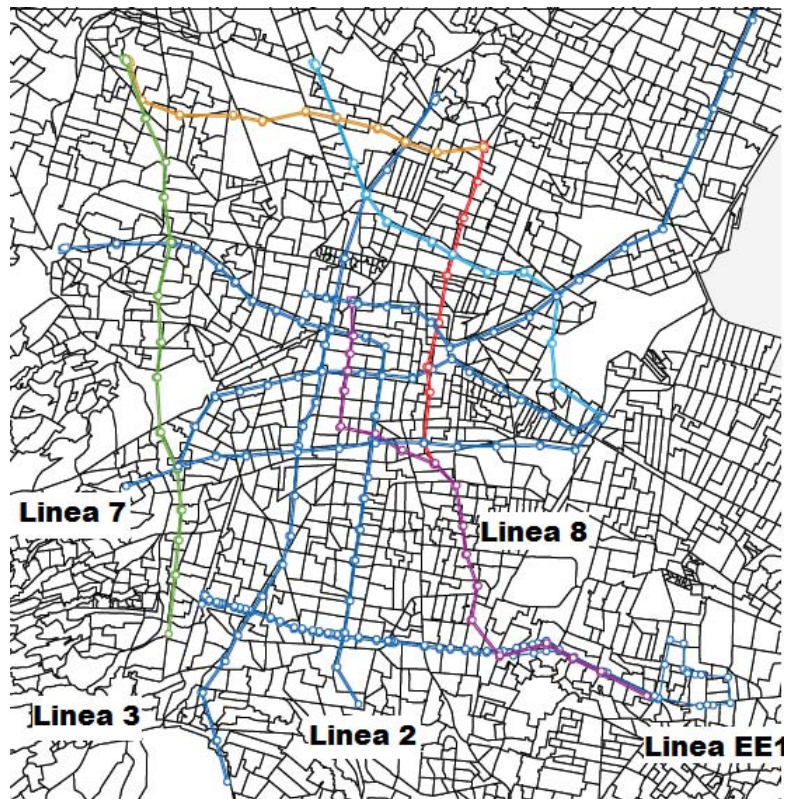


Figura 6.36: Línea EE1.



Aún cuando la demanda asignada a tránsito auxiliar y el tiempo promedio esperado de viaje son mayores en este experimento que los obtenidos con CAPTRAS BPR, se observa que el porcentaje de segmentos con exceso de volumen disminuyó de 0.83 a 0.27. Además, para el segmento de la línea EE1, la razón volumen/capacidad disminuyó de 1.32 a 1.2. Por lo que es posible afirmar que cuando se utilizan funciones cónicas, se obtiene una mejor asignación de volúmenes, al obtener un menor exceso de volumen en el mismo número de iteraciones. Sin embargo, es recomendable hacer un estudio exhaustivo sobre las funciones volumen-demora para la red del Valle de México.

Las actividades en las zonas de mayor demanda se describen en el Cuadro 6.10.

zona	demanda	d. tránsito auxiliar	abordajes	t. promedio de viaje
12	24938	8116	21890	808.32
435	27063	17636	15828	646.59
539	70115	15749	82621	571.43
730	26520	25117	1709	640.36
953	25883	17306	19524	1207.46

Cuadro 6.10: CAPTRAS-Cónica. Zonas de mayor demanda.

Todos los valores del Cuadro 6.10 son mayores con respecto a los del Cuadro 6.6 que contiene la información correspondiente a los resultados de la iteración 150 de CAPTRAS BPR.

En la Figura 6.37 se representan, por nodos, las siguientes actividades:

- Abordajes iniciales (Node value 1).
- Transferencias, nodo de ascenso (Node value 2).
- Transferencias, nodo de descenso (Node value 3).
- Descensos finales (Node value 4).



Figura 6.37: Actividades en los nodos.

Los nodos con mayor actividad corresponden a las zonas de mayor demanda en el oriente, el norte y la franja sur del D.F. El mayor número de transbordos ocurre en la estación del metro Pantitlán, en varias de las estaciones centrales de la línea 1, en la zona norte, alrededor de la línea B, en la zona sur-poniente en Barranca del Muerto y Mixcoac, en el sur en Taxqueña y en Tlahuac-Canal de Chalco sobre el Periférico. En comparación con los resultados obtenidos al usar funciones BPR, en este caso no se reflejan los viajes en la zona norte, correspondientes a la estación indicos verdes y sobre el suburbano.

En el Cuadro 6.11 se muestran los resultados obtenidos para el tiempo de recorrido para cada línea del metro, así como los volúmenes máximos asignados al ejecutar CAPTRAS con funciones BPR (max. vol. BPR), y al ejecutar CAPTRAS con las funciones Cónicas (max. vol. Cón.). Al igual que en cálculos anteriores los tiempos de recorrido calculados son los mismos, independientemente de si se utilizan funciones BPR ó Cónicas con CAPTRAS, ó bien si se realiza la asignación con el algoritmo básico lineal.

Línea	headway	t. medido	t. calculado	max. vol. BPR	max. vol. Cón.
1a	1.92	31.00	28.62	114693	111764
1b	1.92	31.25	28.62	17150	19017
2a	2.17	37.17	35.44	38776	40670
2b	2.17	36.83	35.44	73848	69924
3a	2.08	38.17	36.91	79728	74473
3b	2.08	38.25	36.91	52370	56715
4a	5.83	15.58	14.98	3847	3178
4b	5.83	15.42	14.98	1185	1219
5a	4.17	22.08	22.09	3567	4773
5b	4.17	22.83	22.11	20448	21581
6a	4.00	17.75	17.67	6745	5952
6b	4.00	18.08	17.67	11335	8825
7a	3.75	25.25	24.05	16396	18217
7b	3.75	25.25	24.05	10971	13005
8a	2.83	29.00	27.39	4210	6676
8b	2.83	29.00	27.39	77737	77910
9a	2.33	21.25	20.05	61823	63901
9b	2.33	21.50	20.05	4355	4640
aa	2.50	26.50	20.62	1146	3156
ab	2.50	26.50	20.62	69135	68017
ba	3.25	34.50	34.09	74934	72477
bb	3.25	35.00	34.09	6425	6594
Volúmenes totales				750824	752684

Cuadro 6.11: Resultados para el metro con CAPTRAS Cónica.

Al comparar los volúmenes obtenidos, se observa que en 8 de las 22 líneas del metro se asignó menos volumen de pasajeros al utilizar CAPTRAS con funciones cónicas que con funciones BPR.

## Comparación de Volúmenes

La Figura 6.38 muestra la redistribución de volúmenes de asignación entre los escenarios en los cuales se ejecutó CAPTRAS con funciones BPR y CAPTRAS con funciones cónicas. Los segmentos de líneas de colores representan los volúmenes de asignación sobre la red del metro, los segmentos de color rojo pertenecen solamente al escenario 305, donde se ejecutó CAPTRAS con funciones cónicas y los de color verde pertenecen sólo al escenario 304 donde se ejecutó CAPTRAS con funciones BPR. Entonces, en general los volúmenes obtenidos con CAPTRAS BPR son mayores que los volúmenes calculados con CAPTRAS-Cónica.



Figura 6.38: Comparación de volúmenes.

El presente trabajo permitió el estudio y la aplicación de una metodología para resolver problemas propios del transporte público. En particular, se estudió una clase de modelos de asignación de tránsito en donde se incorporan los efectos de exceso de demanda de usuarios y los límites de capacidad de los vehículos de transporte. Esta metodología sustenta los algoritmos de simulación de asignación de tránsito del programa EMMÉ: lineal, con costos generalizados (CONGTRAS) y con restricciones de capacidad (CAPTRAS). Los modelos están basados en conceptos clave como son las estrategias óptimas, las frecuencias efectivas y las funciones de volumen-demora. Estos modelos se aplicaron a la red de transporte público del Valle de México y se analizaron los resultados y su impacto sobre la red del STC-Metro.

Acerca de los algoritmos de solución de dichos modelos se puede mencionar lo siguiente. Aunque el modelo lineal de asignación de tránsito no proporciona resultados reales, pues no toma en cuenta los efectos de la congestión y la capacidad limitada de los vehículos de transporte, sí proporciona tendencias consistentes de comportamiento en la red y permite obtener información cualitativa de la misma. Al utilizar el modelo basado en costos generalizados (CONGTRAS) no fue posible realizar experimentos completos con los recursos de cómputo disponibles, debido a la cantidad de memoria necesaria para realizar los cálculos correspondientes a estos costos y a las penalizaciones de tiempos de viaje con las funciones de volumen-demora disponibles. Por otro lado, el modelo con restricciones de capacidad (CAPTRAS), el cual toma en cuenta la congestión y la disminución de la frecuencia del servicio, proporciona los mejores resultados, pues se obtuvieron volúmenes de asignación que generan tiempos

de servicio muy cercanos a los medidos en campo y libres de flujo por el STC-Metro.

Durante los experimentos fue necesario entender la importancia de calibrar de forma efectiva los tiempos promedios de abordaje y los parámetros de las correspondientes funciones de volumen-demora con el propósito de conseguir resultados consistentes con la realidad. Para elegir estos y otros parámetros se tomaron en cuenta las sugerencias y recomendaciones del ingeniero Pablo Torres de la Subgerencia de Planeación Estratégica del STC-Metro. Asimismo, la base de datos utilizada en las simulaciones fue proporcionada por él. Por otro lado, se incorporaron a la base de datos del STC-Metro funciones volumen-demora del tipo cónicas. La construcción y calibración de las mismas se realizó utilizando un ajuste de mínimos cuadrados, tomando como base las funciones BPR. Los tiempos de viaje obtenidos con funciones cónicas fueron básicamente los mismos que los calculados con funciones BPR. Las diferencias más relevantes se obtuvieron al calcular la asignación de volúmenes, obteniéndose menor saturación en algunas líneas del metro al utilizar las funciones cónicas.

### **Trabajo a futuro.**

Algunos aspectos que no se estudiaron exhaustivamente y que se consideran fundamentales para un trabajo futuro son: el estudio y calibración de diferentes funciones volumen-demora, incorporando mediciones de campo. Además, es recomendable realizar una mejor actualización de la demanda con modelos más sofisticados que incorporen mayor información disponible, como mediciones de volúmenes reales en ciertos arcos de la red. En otras palabras, se propone realizar un balanceo de la matriz origen-destino, que proyecte el crecimiento de la demanda en los últimos años de manera más confiable. Por otro lado, es necesario realizar simulaciones en donde se incorpore la línea 12 del metro, así como las líneas no incluidas del metrobús y el mexibús. Finalmente, en el largo plazo sería deseable estudiar otro tipo de modelos y enfoques en el estudio de los problemas del transporte.

## APÉNDICE A

EMME

El acrónimo EMME se deriva de "Equilibre Multimodal, Multimodal Equilibrium", que se refiere, en francés y en inglés, a la teoría del equilibrio de la red en los modelos multimodales de predicción de viajes.



- EMME. A finales de los años 70, EMME, un código experimental fue desarrollado en el Centro de Investigación en Transporte (CRT) de la Universidad de Montreal, ahora llamado CIRRELT (Interuniversity Research Centre on Enterprise Networks, Logistics and Transportation).
- EMME 2. A principios de los años 80, EMME 2 fue desarrollado también en el CRT, y continuó siendo desarrollado por INRO a partir de 1986.
- EMME 3. Desarrollado en INRO e incorpora los motores de EMME 2 y ENIF en un solo paquete. ENIF, un software que fue desarrollado en el 2000 por Heinz Spiess en el Centro de Apoyo en Suiza, para proporcionar una nueva interfaz gráfica para el acceso a bases de datos EMME 2.



EMME es un sistema de planificación de transporte urbano multimodal gráfico interactivo que cuenta con herramientas para modelar la demanda y la red multimodal, así como de análisis de resultados; su base de datos está estructurada para permitir la descripción simultánea, el análisis y la comparación de varios escenarios. Es posible realizar la comparación directa de escenarios futuros que pueden reflejar cambios en la red de carreteras y de tránsito o cambios en las características socio-económicas de la zona urbana estudiada.

EMME es un paquete completo que cuenta con una interfaz gráfica con más de 100 hojas de trabajo diseñadas para visualizar e interpretar los datos en la base de datos y consta de 50 módulos que se dividen en los siguientes grupos: utilidades, editor de red, editor de matrices, editor de funciones, procedimientos de asignación y resultados.



## APÉNDICE B

### ALGORITMO DE DIJKSTRA

Cominetti y Correa [7] proponen un algoritmo para calcular las hiper-trayectorias más cortas. Este método iterativo es una adaptación del algoritmo de Dijkstra, el cual en cada iteración actualiza un vector de tiempos  $\tau_j$  y un conjunto de nodos  $S$ .

- El conjunto  $S$  contiene aquellos nodos  $j$  para los cuales ya se ha calculado el tiempo mínimo hacia el destino  $d$ .
- Al actualizar los tiempos  $\tau_j$  se genera un vector de tiempos óptimos de tránsito desde un nodo  $i$  a un nodo  $k$  usando la estrategia  $s^i$ .
- La variable  $f^i$  denota las frecuencias de los arcos en  $s^i$ .

**Algoritmo B.1.** (*Hiper-trayectoria-Dijkstra*)

**INICIO:** Definir  $\tau_i = \infty$ ,  $\tau_k = 0$ ,  $f^i = 0$  para todo  $i \neq k$ ;  $s^i = \emptyset$ ,  $S = \emptyset$ .

**Iteraciones:** Actualizar los tiempos de tránsito  $\tau_j$  y el conjunto  $S$ .

**Mientras**  $S \neq \mathcal{N}$  **hacer**

- Encontrar  $j \notin S$  con mínimo tiempo  $\tau_j$  y hacer  $S \leftarrow S \cup \{j\}$ .
- **para**  $a = (i, j) \in \mathcal{A}$  con  $i \notin S$  **hacer**
- Calcular  $\tilde{t}_a = t_a + \tau_j$
- **si**  $(\tilde{t}_a) < \tau_i$  **entonces** añadir el arco  $a$  a la estrategia  $s^i$ .  $ADD(A)$ .

- **mientras** Exista un arco  $b \in s^i$  tal que  $\tilde{t}_b \leq \tau_i$  **hacer**
- **Eliminar**  $b$  de la estrategia  $s^i$ .  $REMOVE(b)$ .

Los procedimientos  $ADD(\cdot)$  y  $REMOVE(\cdot)$  para añadir y remover arcos de la estrategia  $s^i$ , respectivamente están definidos como:

**Algoritmo B.2** (Añadir un arco.).  $ADD(a)$

- Actualizar la estrategia  $s^i$ .

$$s^i \leftarrow s^i \cup \{a\}$$

- Calcular los tiempos  $\tau_i$ .

$$\tau_i \leftarrow \frac{f^i \tau_i + f_a \tilde{t}_a}{f^i + f_a}$$

- Actualizar el valor de la frecuencia.

$$f^i \leftarrow f^i + f_a$$

Con la convención de que  $f^i \tau_i = 1$  para el caso inicial  $f^i = 0$  y  $\tau_i = \infty$

**Algoritmo B.3** (Remover un arco.).  $REMOVE(b)$

- Actualizar la estrategia  $s^i$ .

$$s^i \leftarrow s^i - \{b\}$$

- Calcular los tiempos  $\tau_i$ .

$$\tau_i \leftarrow \frac{f^i \tau_i - f_b \tilde{t}_b}{f^i - f_b}$$

- Actualizar el valor de la frecuencia.

$$f^i \leftarrow f^i - f_b$$

## APÉNDICE C

### MÉTODO DE PROMEDIOS SUCESIVOS (MSA)

El método de promedios sucesivos (MSA siglas en inglés) es usado en aplicaciones de transporte como un método heurístico de descenso. En la práctica existen muchas variantes del MSA, pero el valor más usado para el tamaño de paso  $\alpha$  es

$$\alpha_n = \frac{1}{n}$$

Las iteraciones del algoritmo se ejecutan como

$$x^{n+1} = (1 - \alpha_n)x^n + \alpha_n x^n$$

donde  $x^n$  representa un vector de flujo.

El tamaño de paso  $\alpha$ , debe satisfacer dos propiedades:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \rightarrow \infty \tag{C.1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty \tag{C.2}$$

La propiedad (C.1) garantiza que el algoritmo no se detendrá antes de que la solución se haya encontrado.

El flujo  $x^n$  es una variable aleatoria si la dirección de búsqueda es aleatoria, entonces la propiedad (C.2) garantiza que la varianza de esta variable aleatoria disminuirá con el paso de las iteraciones. Para el lector interesado en los detalles de estas propiedades se sugiere consultar [15] o [14].

## APÉNDICE D

### AJUSTE DE FUNCIONES CÓNICAS

De los segmentos de líneas, que tienen asociada una función volumen-demora del tipo BPR, se extrajo información como *volau*, *volad*, *lanes* y *length* para generar los cocientes

$$x = (volau + volad)/(lanes * 3000) \quad (D.1)$$

$$x = (volau + volad)/(lanes * 1200) \quad (D.2)$$

Con los valores obtenidos se realizó un proceso de ajuste para obtener las funciones volumen demora del tipo cónicas (4.4). Funciones correspondientes a cada una de la funciones BPR introducidas en la Sección 6.1.

A continuación se presentan las ocho funciones cónicas obtenidas, así como los datos utilizados para el ajuste de dichas funciones, así como sus correspondientes gráficas; para cada uno de los ocho tipos de vialidades consideradas en la base de datos.

#### Funciones Cónicas.

$$1. \quad fd1 = 2.3540 * (\sqrt{(1.2358 * (1 - x))^2 + 9,7372} + 2 - 1.2358 * (1 - x) - 3.1204)$$

$$2. \quad fd2 = 2.6834 * (\sqrt{(1.3225 * (1 - x))^2 + 6,5045} + 2 - 1.3225 * (1 - x) - 2.5504)$$

$$3. \quad fd3 = 3.1942 * (\sqrt{(3.8705 * (1 - x))^2 + 1,3787} + 2 - 3.8705 * (1 - x) - 1.1742)$$

4.  $fd4 = 2.2226 * (\sqrt{(1.9636 * (1 - x))^2 + 2,3069} + 2 - 1.9636 * (1 - x) - 1.5189)$
5.  $fd5 = 2.4720 * (\sqrt{(2.2386 * (1 - x))^2 + 1,9704} + 2 - 2.2386 * (1 - x) - 1.4037)$
6.  $fd6 = 3.7925 * (\sqrt{(1.7130 * (1 - x))^2 + 2,8943} + 2 - 1.7130 * (1 - x) - 1.7013)$
7.  $fd7 = 2.6552 * (\sqrt{(1.6992 * (1 - x))^2 + 2,9417} + 2 - 1.6992 * (1 - x) - 1.7151)$
8.  $fd8 = 6.0256 * (\sqrt{(1.5090 * (1 - x))^2 + 3,9296} + 2 - 1.5090 * (1 - x) - 1.9823)$

Para las funciones  $fd1$  y  $fd2$  la variable  $x$  está dado por (D.1) y para el resto de las funciones  $x$  representa (D.2).

Con ayuda de MATLAB, se llevó a cabo el ajuste de funciones utilizando los datos que se muestran a continuación, así como las gráficas de los mismos y de las funciones generadas.

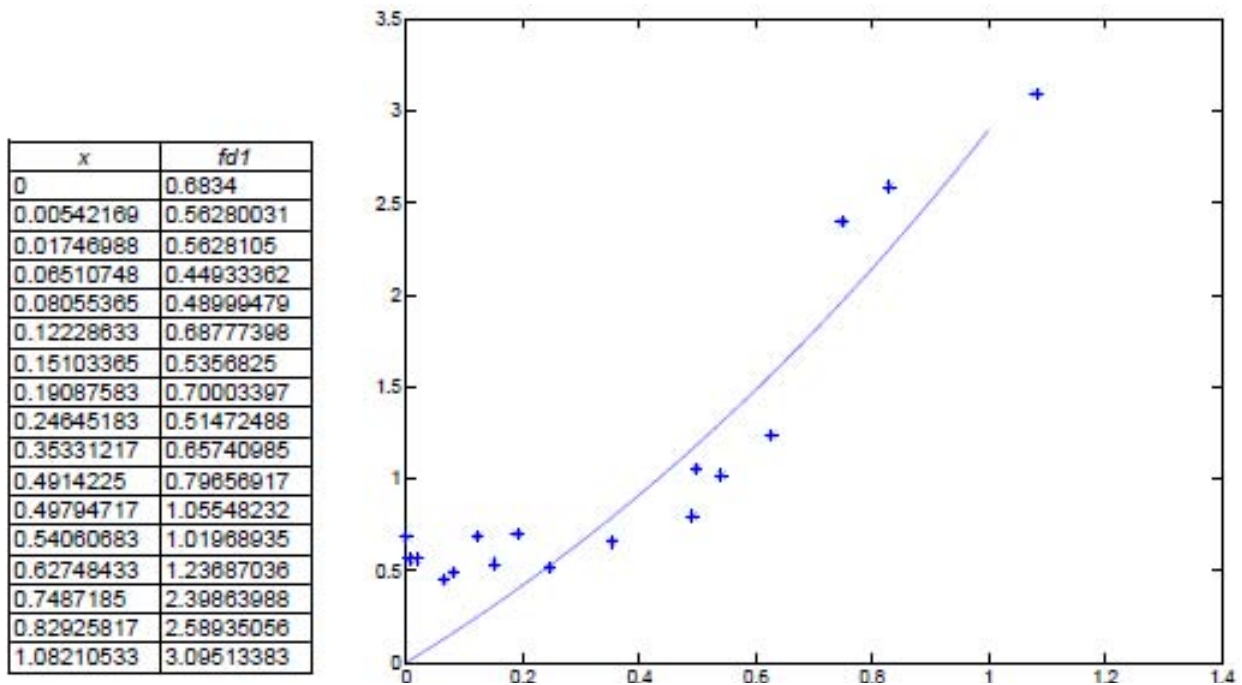


Figura D.1: Datos y gráfica de la función  $fd1$ .

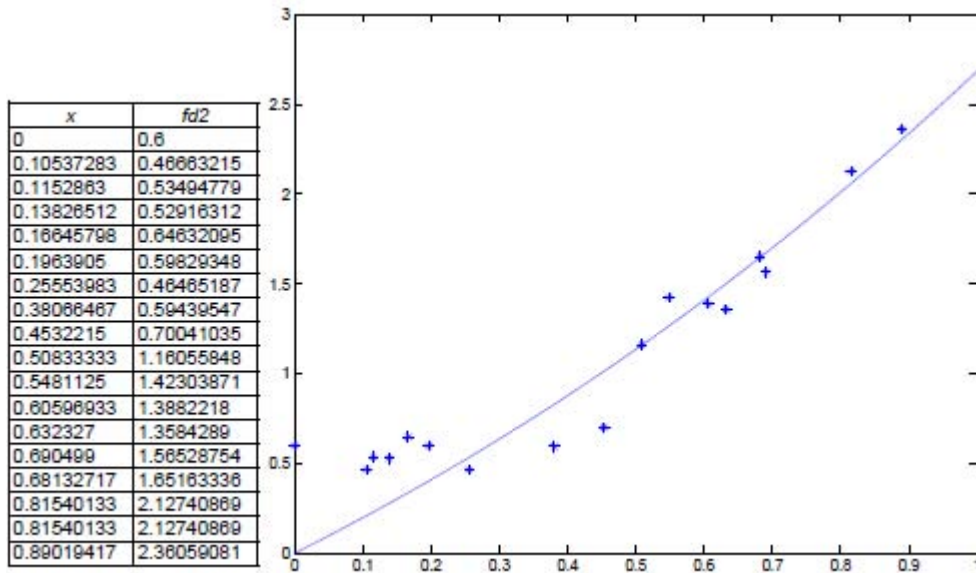


Figura D.2: Datos y gráfica de la función  $fd2$ .

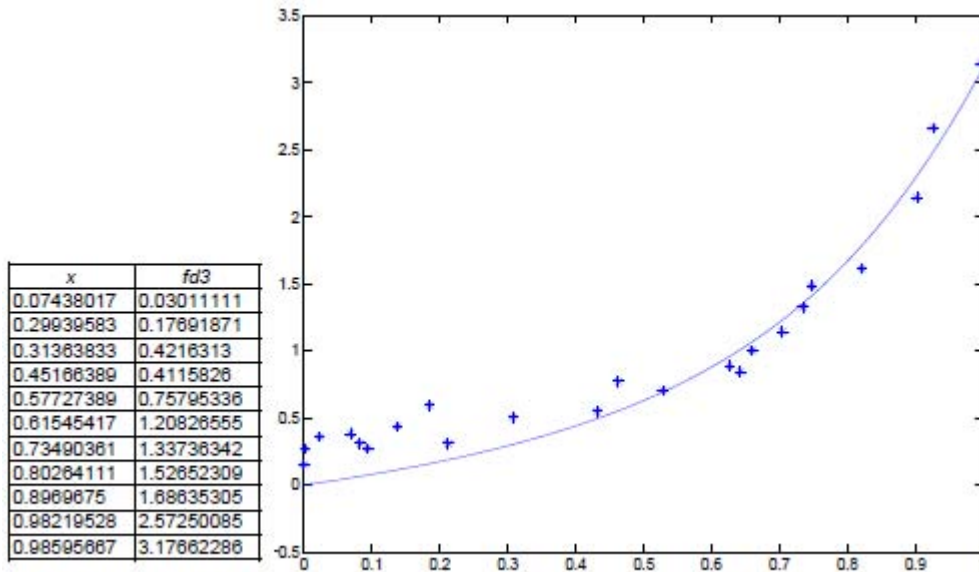


Figura D.3: Datos y gráfica de la función  $fd3$ .

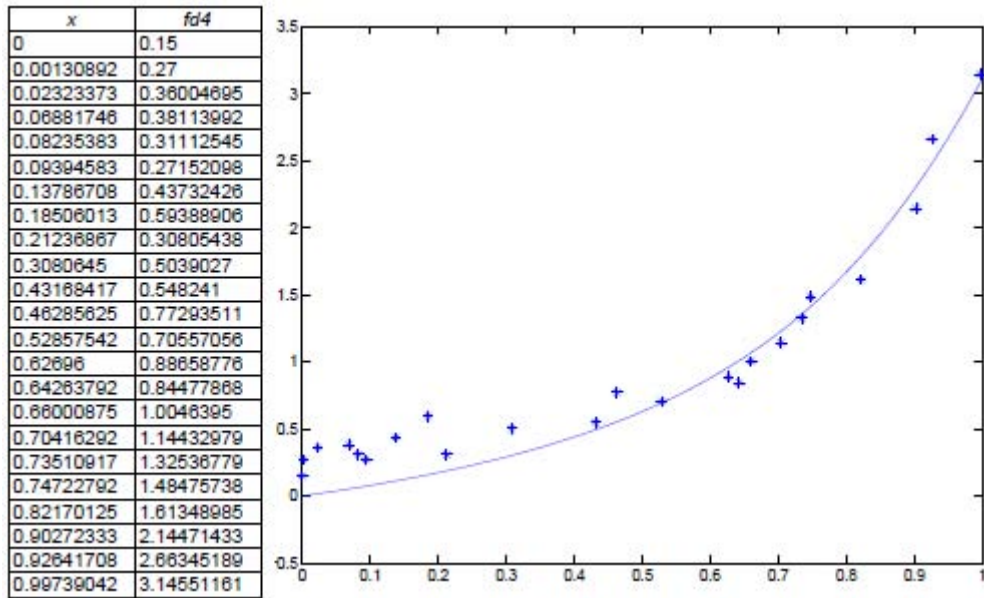


Figura D.4: Datos y gráfica de la función  $fd4$ .

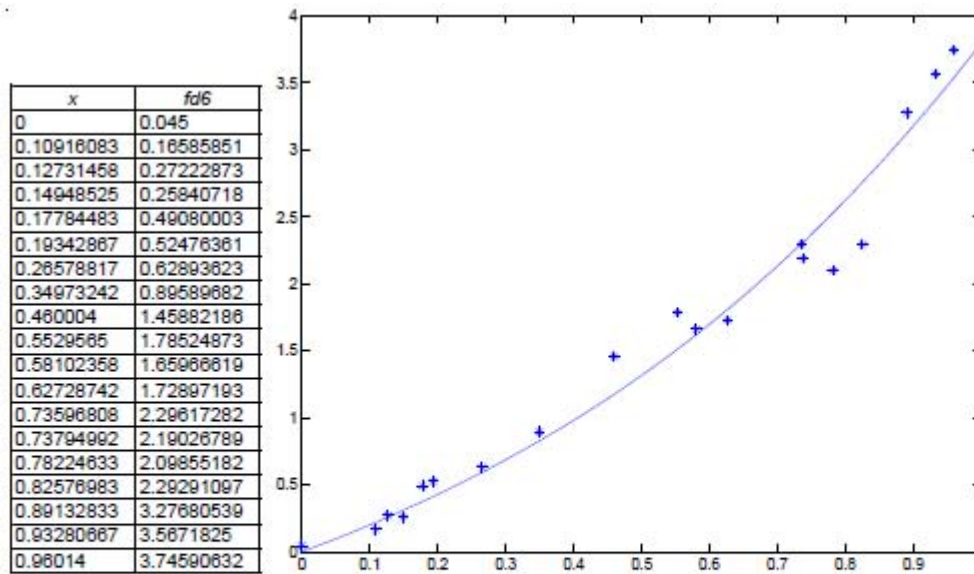


Figura D.5: Datos y gráfica de la función  $fd6$ .



$x$	$f(d5)$	
0	0.33	0.52289722
0.04204292	0.37017873	1.38905564
0.07791981	0.24073801	0.54159792
0.089857	0.3215091	1.78838722
0.11393739	0.33317288	0.563785
0.12945121	0.28387994	1.45170381
0.18329817	0.41600893	0.57204444
0.18971554	0.48391808	1.50738251
0.20941644	0.65104195	0.60764167
0.22192169	0.56765204	1.37688515
0.23128833	0.61582861	0.62498148
0.24940083	0.75957547	2.02418825
0.25036125	0.59608184	0.64287229
0.27025	0.73339189	2.07128072
0.30156778	0.77765546	0.66339839
0.32324521	0.98782576	2.54898564
0.33198778	0.8910571	0.67283333
0.35247833	0.96348723	2.32498435
0.41076917	1.00085364	0.68867729
0.4357415	1.19946404	0.70109292
0.45093708	1.59006031	2.10697344
0.46195972	1.54235642	0.71576148
0.48353879	1.44871426	0.71623542
0.47771222	1.48849799	2.23624844
0.4817475	1.24324401	0.72250208
0.4851945	1.2894051	0.7316
0.4925645	1.40366277	2.78631329
0.50161187	1.85854783	0.73686375
0.515890111	1.84603164	2.93127816
		0.75986333
		2.85774543
		0.76281271
		2.17440573
		0.775125
		2.37598649
		0.80129333
		2.86715016
		0.81783389
		3.3255627
		0.82201472
		3.04284657
		0.84411778
		3.5349483
		0.86887583
		3.63195213
		0.877835
		3.56198039
		0.94633278
		3.95963389
		0.95910533
		3.90813803
		0.96288
		3.60351314
		0.99408208
		3.81309312

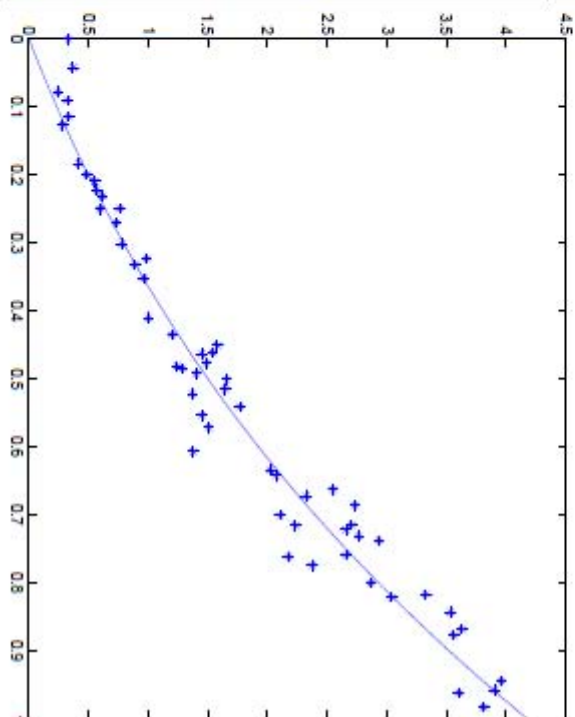


Figura D.6: Datos y gráfica de la función  $f d5$ .

x	f <sub>d7</sub>		
0.00012813	0.07	0.48520639	2.28854281
0.10233578	0.20139324	0.47560222	2.4808344
0.11810988	0.38398638	0.49205639	2.80353126
0.12355788	0.44534982	0.50336391	2.52396308
0.13185083	0.48711811	0.51283028	2.77746818
0.14823236	0.53100895	0.53476839	2.63236823
0.16152597	0.79109285	0.56371875	2.48741172
0.17841206	0.85028912	0.58438083	2.71082874
0.18338978	0.87307581	0.57382872	2.98348111
0.20481086	1.06823882	0.581815	2.85021417
0.21282544	1.2845643	0.60558194	2.76129336
0.22023386	1.37044484	0.61803944	3.19344794
0.24585281	1.37044484	0.63798981	3.30824055
0.26128989	1.38148238	0.64874844	4.05117777
0.28437797	1.41134208	0.63803806	3.08952098
0.29018871	1.81073485	0.68589187	3.98778408
0.29105139	2.01895083	0.67232881	3.80852897
0.29318804	1.68918836	0.68575187	4.24187005
0.31034	1.77947822	0.7638675	3.8338851
0.3199375	1.60262878	0.78888611	4.44182882
0.31777806	1.88539409	0.77522389	4.35053314
0.31858444	1.71848073	0.780017	4.20733338
0.34442839	1.79712889	0.8058875	4.35524034
0.34454833	1.84818527	0.82418833	4.50004537
0.35290187	1.65852286	0.83754194	4.52872275
0.36358987	1.73239288	0.83118306	4.58054988
0.37144722	1.84835887	0.85378917	4.88392451
0.38854894	1.81334303	0.888891	5.1301278
0.40255833	2.05080775	0.88745278	5.24278381
0.41888278	2.1828082	0.89181875	5.77554759
0.44372333	2.08528824	0.93752306	5.5288202
0.44787722	2.15418874	0.93840566	5.09709598
0.45102861	2.28879227	0.9840817	5.45850788
0.48280083	2.40089451	0.97117889	5.42414381

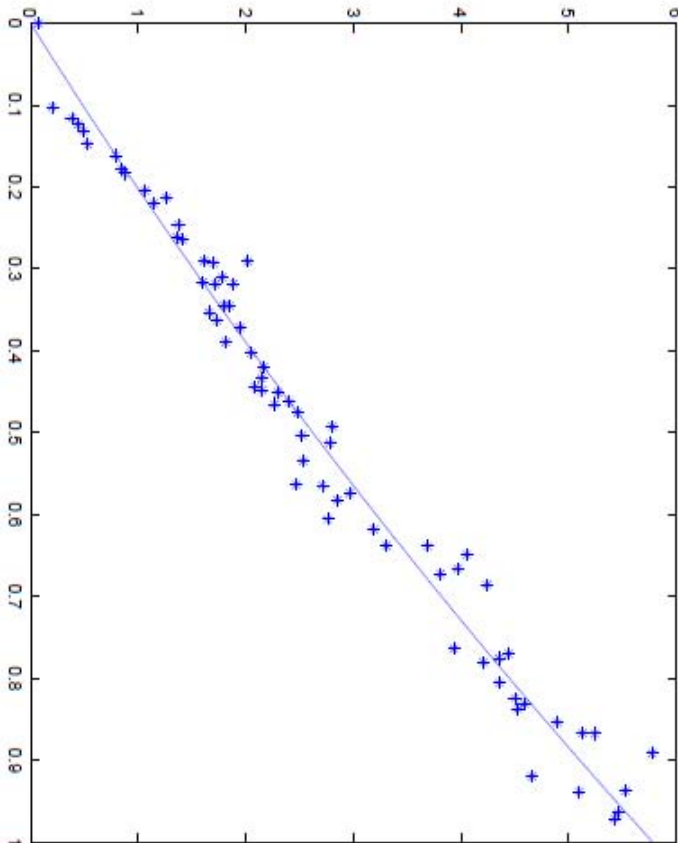


Figura D.7: Datos y gráfica de la función  $f_{d7}$ .

$x$	$fd8$		
0.01602339	0.09000148	0.40249904	1.68320565
0.023079	0.16500811	0.42446333	1.72378898
0.02996829	0.18001938	0.46116472	1.90050173
0.06066875	0.19517418	0.4982	1.8466
0.07458958	0.27044819	0.50516917	2.68273302
0.10238378	0.31635227	0.51181125	2.74225511
0.11343138	0.24140111	0.53500125	2.80579488
0.12040217	0.30209452	0.54769083	2.61001577
0.13161833	0.3481465	0.555495	2.73074782
0.14862292	0.33433342	0.56629708	2.71912513
0.17535775	0.36776493	0.59817625	3.09048196
0.18184517	0.41474139	0.60374625	3.01785752
0.19565558	0.50983003	0.63289083	3.14187079
0.20513671	1.07073802	0.66666	3.21216996
0.21159638	1.13649529	0.6921275	3.21019512
0.21544111	1.29479836	0.71132375	3.43992986
0.22722613	1.38194535	0.72542333	3.60095253
0.241211	1.21983855	0.79020708	3.74697119
0.25322421	1.18209392	0.81452167	4.12583983
0.26452963	1.38551524	0.83151333	4.30608403
0.27172375	1.5555594	0.84983917	4.50891312
0.28467488	1.44180955	0.91403583	5.16957294
0.30287158	1.5333609	0.93908292	5.82203898
0.36402754	1.52102141	0.96031958	6.33675892
0.37960679	1.57226149	0.96833375	5.90588653

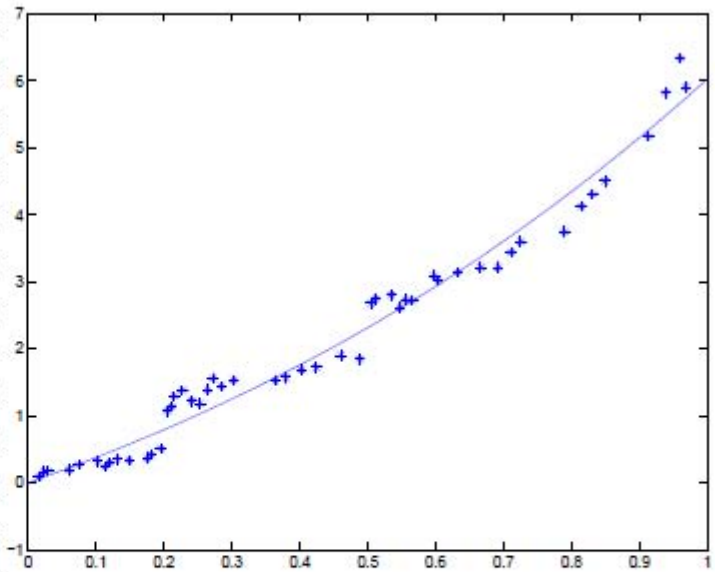


Figura D.8: Datos y gráfica de la función  $fd8$ .

Para poder ejecutar CAPTRAS, en el escenario que contiene las funciones cónicas, se deben definir parámetros para la función cónica que servirá para penalizar los tiempos de tránsito. Por lo que se utilizaron todos los datos de las muestras y se obtuvo la función (??).

$$fdcaptras = 2.4240(\sqrt{1.6576(1-x)^2 + 3.0988} + 2 - 1.6576(1-x) - 1.7603) \quad (D.3)$$

La Figura D.9 muestra el ajuste de la función  $fdcaptras$

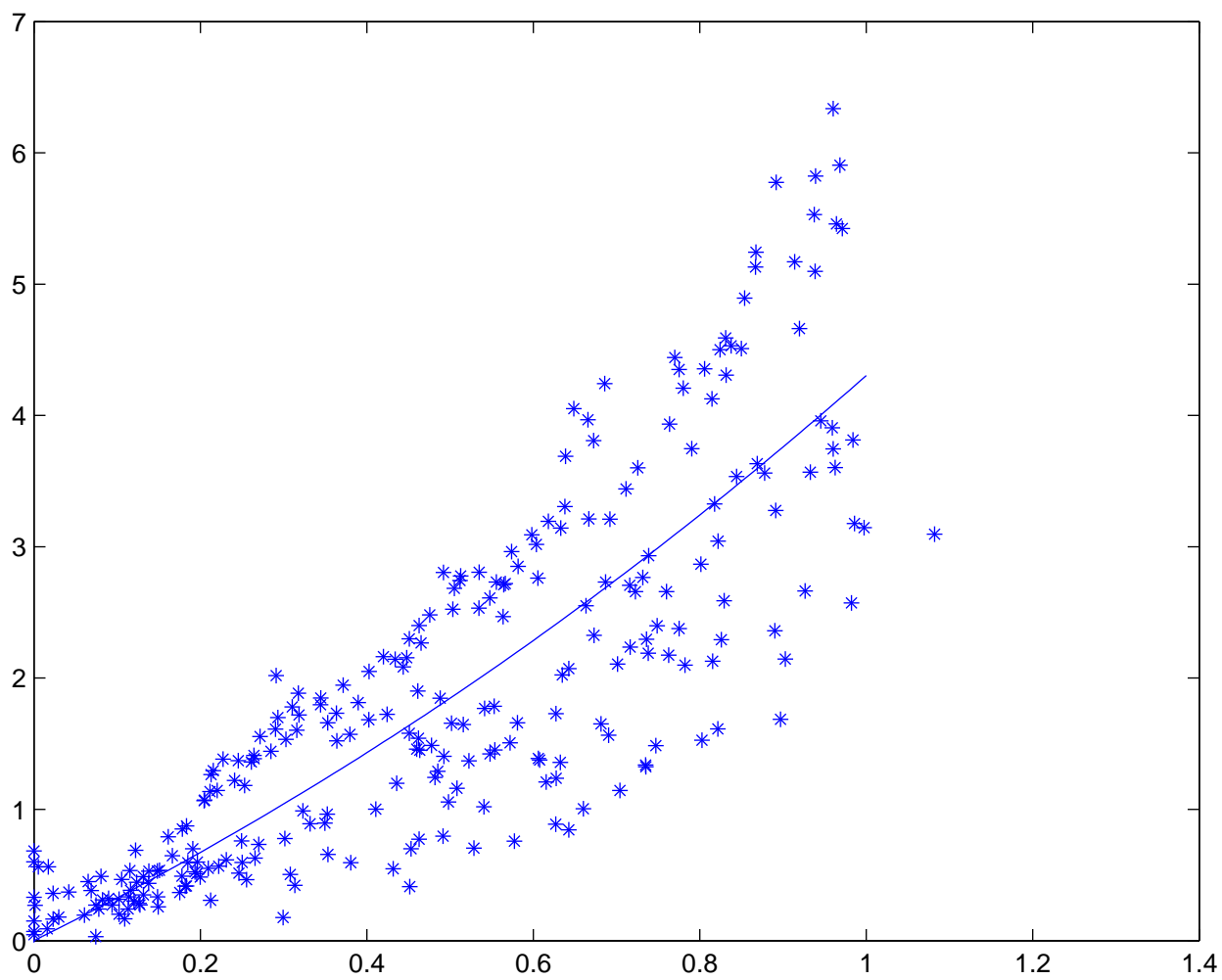


Figura D.9: Gráfica de la función  $fdcaptras$ .

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Bazaraa et. al. (1998). *Programación Lineal y Flujo en Redes*. Ed. Limusa, México, D.F.
- [2] Bertsekas, P. Dimitri. (1991). *Linear Network Optimization*. MIT Press.
- [3] Bertsekas, P. Dimitri. (1992). *Data Networks*. (2nd edition) Prentice Hall.
- [4] Bertsekas, P. Dimitri. (1990). *An Auction Algorithm for Shortest Paths*. SIAM J. on Optimization.
- [5] Burden, R. L., Faires, J. D.(2001), *Numerical Analysis*, Seventh Edition, Books/Cole, Thomson Learning.
- [6] Cepeda M., Cominetti R., Florian M., (2006) *A frequency-based assignment model for congested transit networks with strict capacity constraints: characterization and computation of equilibria*, Transportation Research Part B 40, 437?-459.
- [7] Cominetti R., Correa J., (2001), *Common-lines and passenger assignment in congested transit networks*, Transportation Science 35 (3), 250?-267.
- [8] <http://www.inro.ca/en/download/macros.php>
- [9] Florian M. (2011). *Static Assignment for Transit Networks: Optimal Strategies*. CIRRELT, University of Montreal. México, Septiembre 2011.
- [10] Florian M. (2011). *An algorithm for transit assignment with capacity considerations*. CIRRELT, University of Montreal. México, Septiembre 2011.

- [11] Florian M. and Spiess H.(1988). *Optimal Strategies: A New Assingment Model For Transit Networks*. Centre de recherche sur les transports. Université de Montréal.
- [12] Patrickson, M. (1994).*The Traffic Assignment Problem: Models and Methods*, V.S.P. Intl, Science.
- [13] Louis J. Pignataro. (1973) *Traffic Engineering Theory and Practice*. Prentice Hall.
- [14] Robbins H, Monro S (1951) *A stochastic approximation method*. Ann Math Stat.
- [15] Sheffi, Y. (1985). *Urban Tansportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods*, Prentice Hall, INC, EnglewoodCliffs, New Jersey.
- [16] Spiess, H. (1989) *Conical Volume-Delay Functions*. EMME/2 Suport Center.
- [17] Spiess, H. (1993) *Transit Equilibrium Assignment Based on Optimal Strategies: An Implementation in EMME/2*. EMME/2 Suport Center.