Casa abierta al tiempo

# Acciones de Supercampo y Simetría Local en los Modelos Cosmológicos

Tesis que presenta:

**J. Juan Rosales García**

para la obtención del grado de doctor

en ciencias, especialidad en gravitación

Mayo, 1997

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

# AGRADECIMIENTOS

A los Dres. Alberto Alejandro García Díaz, Alfredo Macías Alvarez, Luis Octavio Pimentel Rico, por sus comentarios, críticas y valiosas sugerencias que le hicieron a este trabajo.

A los Dres. Vladímir Ivánovich Tkach y Octavio José Obregón Díaz por sus enseñanzas, críticas y apoyo que me brindaron durante mis estudios de doctorado.

A la Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa por ser uno de sus alumnos del posgrado en ciencias.

Al Instituto de Física de la Universidad de Guanajuato por brindarme todas las facilidades para conseguir esta meta personal.

A todos los profesores, estudiantes y personal administrativo del instituto de Física de la Universidad de Guanajuato, que de una u otra manera me apoyaron. En particular a los Dres. José Socorro García, Alejandro Cabo y Haret Rosu por las constantes sugerencias que me hicieron. A las Secretarias Claudia Rodríguez y Norma Angélica López por su valiosa ayuda en este trabajo.

# DEDICATORIA

*A mis padres y abuelos por darme la oportunidad de haber nacido en este mundo tan maravilloso.*

*A mi esposa, amiga y amante Irina Constantinovna Lyanzuridi por brindarme el apoyo moral que necesité en muchas ocasiones.*

*A mi hijo Daniel Alberto por darme la satisfacción de sentirme realizado como padre.*

*A todos aquellos para los cuales una respuesta son dos preguntas.*

# Contenido

# 1.- Introducción

Una de las preocupaciones de mayor importancia que tiene la Ciencia en nuestros días es la creación de una teoría unificada, la cual combine todas las partículas y sus interacciones en una teoría consistente. Por tal motivo, se han venido desarrollando con gran interés dos de las áreas de mayor importancia en la física fundamental: la física de partículas elementales, la cual describe las interacciones de los constituyentes básicos (átomos, núcleos, electrones, quarks, etc.) de la materia que forma nuestro Universo, y la relatividad general, la cual describe el campo gravitacional como una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo.

Después de la creación de la mecánica cuántica como una necesidad para explicar fenómenos, que ocurren a escalas del órden del átomo y la cual nos da realmente una descripción más completa de la naturaleza de la materia, es natural pensar en buscar la compatibilidad de ésta teoría con la de la relatividad general. La cuantización de la gravedad nos daría información sobre el orígen de nuestro Universo, y probablemente podríamos contestar a algunas de las siguientes interrogantes: De qué está realmente formado el espacio-tiempo? De dónde y cómo surgío nuestro Universo?

La cuantización de la gravedad se encuentra con problemas serios. Primero, las dificultades matemáticas, el problema principal en éste contexto es que cuando la teoría es considerada como una teoría de campos, y es cuantizada, ésta tiene inconsistencias matemáticas inherentes a la idealización implícita de el límite a distancias infinitesimales, de tal manera que no pueden ser eliminadas mediante la renormalización. Segundo, se tienen dificultades de carácter conceptual. En la teoría de Einstein el campo gravitacional se refleja como la curvatura del espaco-tiempo. Por lo tanto, existe gran diferencia entre la teoría de la gravedad y las teorías que describen otras fuerzas fundamentales de la naturaleza. Una de las diferencias más remarcadas es que en una teoría de partículas uno asume, que los campos se propagan en un espacio-tiempo de fondo no dinámico, mientras que en la teoría de la gravedad es precisamente el espacio-tiempo de fondo el que juega el papel de campo dinámico. Por lo tanto, uno podría hablar sobre la cuantización del espacio-tiempo. Que sentido tiene ésto?

Hasta el momento se han propuesto diferentes métodos ó formalismos para la cuantización de la gravedad sin hasta hoy en día tener una teoría consistente. Esto se debe en gran parte a que no se tienen guías experimentales (como lo fué la radiación del cuerpo negro para la mecánica cuántica), de cómo modificar nuestros métodos ó teorías, y entonces se tiene que seguir intentando cuantizar la gravedad mediante métodos estándares o quizá se debe hacer una "excursión teórica" dejando los experimentos a un lado y tratando de suponer de qué tipo de modificaciones necesitan las teorías ya existentes, posiblemente guiados por la belleza matemática.

La teoría de supercuerdas [1] es un tipo de "excursión teórica" que no tiene un soporte experimental. En los últimos años se ha considerado como uno de los candidatos más fuertes para la cuantización de la gravedad e inclusive de una teoría del todo (gran unificación). La idea fundamental de la teoría de cuerdas es que los constituyentes básicos de la materia son objetos extendidos tipo cuerdas unidimensionales en lugar de objetos puntuales (teoría cuántica del campo). La teoría de cuerdas se puede ver como una síntesis de los muchos intentos anteriores para cuantizar la gravedad: supergravedad, teorías de Kaluza-Klein, teorías de espín superior, etc.

Debido a la complejidad técnica de los formalismos existentes para la cuantización de la gravedad uno debe buscar obtener información aproximada del universo actual en un tiempo donde la mecánica cuántica fué relevante. Estas aproximaciones se obtienen al suponer que el espacio-tiempo es homogéneo, es decir, que la métrica es independiente de las coordenadas espaciales y contienen un número finito de grados de libertad. A éstas aproximaciones se les conoce como modelos cosmológicos. Entonces, la cuantización de la gravedad se reduce a cuantizar los grados de libertad finitos, que son obtenidos mediante la reducción espacial, lo que se conoce como cosmología cuántica. La esperanza puesta en el contexto de la cosmología cuántica es poder conocer de una forma aproximada el comportamiento de la gravedad cuántica.

Después de la formulación canónica de la relatividad general [2,3], la ecuación de Wheeler-DeWitt [4,5] ha sido considerada para los modelos cosmológicos [6]. La cosmología cuántica resultante es entonces governada por una ecuación similar a la ecuación de Klein-Gordon para la función de onda que caracteriza al Universo, con todos los problemas inherentes de interpretar éstas funciones de estado como densidades de probabilidad. La primera idea que surge, es tratar de obtener la raíz cuadrada a la Dirac de dicho hamiltoniano (ecuación de Wheeler-DeWitt) de tal manera que el hamiltoniano sea lineal en los momenta y su cuadrado nos de la ecuación original de Wheeler-DeWitt. Este tipo de raíz cuadrada ha sido encontrada en las métricas tipo Bianchi clase A [7], y en particular para los modelos de Bianchi I y el Taub la ecuación tipo Dirac resultante ha sido completamente resuelta. Sin embargo, existe un problema, el cual consiste en que la solución es un vector con varias componentes y no hay una interpretación natural de dichas componentes.

Después de que la supersimetría fué descubierta [8], y el papel importante que ésta tuvo en la física de altas energías [9], y en supergravedad, es natural por analogía estudiar la formulación hamiltoniana de la supergravedad [10,11,12,13]. En la supergravedad el campo gravitacional es combinado con su compañero supersimétrico el gravitino, para el cual los grados de libertad físicos están dados por el campo de espín 3/2. La supersimetría es local, es decir los parámetros espinoriales, que definen una transformación infinitesimal de supersimetría $\epsilon^{A}(x)$ y $\epsilon^{A'}(x)$ dependen del espacio-tiempo. La formulación hamiltoniana de la supergravedad, usando espinores de dos componentes, ha sido obtenida en [13]. Los generadores de la supersimetría local en la teoría hamiltoniana clásica se escriben como $S_A$ y $\bar{S}_{A'}$, y sus paréntesis de Dirac [14] dan $H_{AA'}$, el cual es la versión espinorial de $H_i$ y $H_0$ en la formulación de ADM combinada en un tetra-vector. En la cuantización uno tiene operadores fermiónicos $S_A$ y $\bar{S}_{A'}$, para los cuales el anticonmutador es proporcional a $H_{AA'}$. También se tienen los generadores de las rotaciones locales de Lorentz sobre los índices espinoriales $J_{AB}$ y $\bar{J}_{A'B'}$ necesarios en una teoría con fermiones. Entonces, es suficiente resolver las constricciones supersimétricas $S_A|\psi>= 0$ , $\bar{S}_{A'}|\psi>= 0$ y las constricciones debidas a la invariancia bajo rotaciones $J_{AB}|\psi>= 0$ y $\bar{J}_{A'B'}|\psi>= 0$ para resolver la constricción remanente $H_{AA'}|\psi>= 0$, la cual incluye la ecuación de Wheeler-DeWitt. Entonces, las constricciones cuánticas supersimétricas $S_A$ y $J_{AB}$ son de primer orden en los momentos gravitacionales, éstas son más fáciles de resolver que la ecuación de Wheeler-DeWitt (ecuación de segundo orden). Las constricciones supersimétricas son análogas a la ecuación de Dirac, por lo tanto, uno espera tener densidades de probabilidad positivas definidas para los modelos cosmológicos, lo cual no sucede si uno tuviera solamente la ecuación de Wheeler-DeWitt debido a que ésta es una ecuación de segundo orden del tipo Klein-Gordon.

Los modelos cosmológicos supersimétricos pueden ser obtenidos de la supergravedad mediante la reducción espacial [15,16] ó mediante el método de simetría escondida [17]. El estudio de éstos modelos con y sin materia ha sido el objetivo de una serie de trabajos [18 y referencias ahí citadas].

La idea principal de éste trabajo es establecer la supersimetría local en los modelos cosmológicos. Esto nos permitirá dar una formulación de supercampo para éstos modelos.

Nuestro formalismo está basado en la generalización de la invariancia de reparametrización temporal a una $n = 2$ supersimetría local. Este procedimiento es bien conocido en las teorías modernas de partículas espinoriales [19,20,21], superpartículas [22] y superpartículas espinoriales [23]. Introduciendo funciones en un superespacio uno construye la acción de supercampo para un modelo cosmológico dado, la cual es invariante bajo transformaciones locales de supersimetría [24,25,26]. Con esta supersimetría local uno obtiene de manera clara y sistemática los campos fermiónicos asociados a los campos bosónicos, y permite la inclusión de materia [27,28].

Este trabajo esta organizado de la siguiente manera: en la sección 2 se presenta la mecánica cuántica supersimétrica y tres de las consecuencias de la supersimetría global, tambien se muestra como se construye una acción de supercampo en un ejemplo mecánico-cuántico; en la sección 3 se muestra como se construye una acción para partículas espinoriales, la cual es invariante bajo transformaciones locales de reparametrización temporal, esto se hace introduciendo variables de Grassmann; en la sección 4 se analiza un desplazamiento twistorial en un sistema, el cual consiste de una superpartícula y un supermultiplete Maxweliano de fondo en el espacio-tiempo D=1+2; Las secciones anteriores han sido escritas mas que nada para fijar ideas y notaciónes que serán utilizadas en ésta tesis, la sección 5 dedicamos a dar la formulación de supercampos para el modelo de FRW, en ésta se obtienen los generadores cuánticos para el modelo; en la sección 6 se generaliza el trabajo anterior, es decir, se obtiene la acción de supercampos para todos los modelos tipo Bianchi; en la sección 7 se analiza el rompimiento espontáneo de la supersimetría para el modelo de FRW en los casos $k = 0$ y $k = 1$; en la sección 8 se generaliza el trabajo anterior, incluyendo un conjunto de campos de materia chiral, esto se hace con el objetivo de construir un mecanismo general de rompimiento espontáneo de la supersimetría en los campos de materia chiral y los campos de dilaton-axion en la cosmología, así como tambien establecer una relación entre el potencial efectivo de éstos campos en las teorías de supergravedad y supercuerdas; en la sección 9 damos las concluciones y perspectivas de nuestro trabajo, y por último, en la sección 10 se encuentran las referencias.

# 2.- Mecánica Cuántica Supersimétrica

## 2.1 Descripción del sistema

En el presente capítulo estudiaremos las propiedades fundamentales de la supersimetría mediante un ejemplo sencillo: mecánica cuántica supersimétrica, siguiendo el trabajo [29].

El modelo más sencillo en el cual puede ser introducido el concepto de supersimetría con todas sus propiedades características fué propuesto por E. Witten [30], y después fué investigado desde diferentes puntos de vista en una serie de trabajos [31,32].

Consideremos un problema mecánico-cuántico: El movimiento de una partícula espinorial en un potencial unidimensional interactuando con un campo magnético. Se entiende que en éste problema no existe la posibilidad de distinguir los niveles bosónicos y fermiónicos del sistema en el mismo sentido que le damos a los bosones y fermiones en una teoría de campos. Sin embargo, existe cierto operador, el cual divide todos los estados en dos clases. Podemos considerar, que una clase se compone de excitaciones "bosónicas" y la otra clase de excitaciones "fermiónicas". Estudiemos el siguiente Hamiltoniano

$$H = \frac{1}{2}\Big(\frac{p^2}{m} + W^2(x) + \frac{\sigma_3}{\sqrt{m}}\frac{dW(x)}{dx}\Big), \tag{2.1.1}$$

donde $p$ es el impulso y el operador correspondiente es $p = -i\frac{d}{dx}$, $\sigma_3$ es la matriz de Pauli y $W(x)$ una función arbitraria de $x$. Físicamente éste hamiltoniano describe el movimiento de un electrón a lo largo del eje $x$ en un campo magnético, teniendo solamente la tercera componente, la cual solo depende de $x$. Ahora comparemos (2.1.1) con la ecuación de Schrödinger para el electrón en un campo magnético externo $\vec{\mathcal{H}}$

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{ie}{2m}\nabla\cdot\vec{A} - \frac{e}{m}\vec{A}\cdot\vec{p} + \frac{e^2}{2m}|\vec{A}|^2 + \frac{e}{2m}\vec{\sigma}\cdot\vec{\mathcal{H}}, \tag{2.1.2}$$

si las componentes primera y tercera del potencial vectorial son iguales a cero, y la segunda depende de $x$, entonces tenemos

$$A_1 = A_3 = 0, \qquad A_2 = \frac{W(x)\sqrt{m}}{|e|}, \tag{2.1.3}$$

fácilmente se puede ver que de (2.1.2) se obtiene inmediatamente el hamiltoniano (2.1.1). Es importante que el momento magnético que figura en el último término de (2.1.2) sea el momento magnético del electrón. De otra manera el hamiltoniano (2.1.2) no podría ser escrito en la forma de (2.1.1). El estado del sistema (hamiltoniano) se describe mediante espinores de dos componentes:

$$\psi(x) = \phi(x)\begin{pmatrix}\alpha(x)\\ \beta(x)\end{pmatrix}, \qquad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1, \tag{2.1.4}$$

donde $\phi(x)$ es la función de onda. Si $\alpha = 1, \beta = 0$, el espín del electrón esta dirigido hacia arriba $|\uparrow>$. Cuando $\alpha = 0, \beta = 1$, el espín esta dirigido hacia abajo $|\downarrow>$. Recordemos, que el operador de espín $\sigma_3$ conmuta con el hamiltoniano, es decir el espín se conserva estríctamente.

La formulación matemática de la supersimetría consiste en que el hamiltoniano (2.1.1) puede ser representado en forma del cuadrado de cierto operador llamado supercarga. En nuestro caso, existen dos supercargas construidas del operador impulso y de las matrices de Pauli,

$$S_1 = \frac{1}{2}\Big(\sigma_1 \frac{p}{\sqrt{m}} + \sigma_2 W(x)\Big), \tag{2.1.5}$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\Big(\sigma_2 \frac{p}{\sqrt{m}} - \sigma_1 W(x)\Big), \tag{2.1.6}$$

éstas supercargas cumplen el siguiente álgebra

$$\{S_i, S_j\} = \delta_{ij} H. \qquad i,j = 1,2 \tag{2.1.7}$$

El hecho de que en el álgebra de las supercargas figure un anticonmutador, muestra la naturaleza fermiónica de éstos operadores. En una teoría de campos las supercargas se transforman mediante la representación espinorial del grupo de Lorentz.

Las dos supercargas se conservan es decir,

$$\dot{S}_1 = -i[S_1, H] = 0 \quad , \quad \dot{S}_2 = -i[S_2, H] = 0. \tag{2.1.8}$$

La igualdad a cero de los conmutadores es debido a que H $= 2S_1^2 = 2S_2^2$.

## 2.2 Propiedades del Sistema

Por sencillez, supongamos que la función $W(x)$ es tal que

$$|W(x)| \to \infty \qquad \text{cuando} \qquad x \to \pm\infty \tag{2.2.1}$$

eliminando de la consideración las condiciones del espectro continuo nos quedamos solamente con niveles de energía discretos. Antes de todo, demostremos que la energía del estado más bajo se anula, una de las consecuencias fundamentales de la supersimetría no rota. Cuando uno habla sobre el rompimiento o nó rompimiento de la simetría, desde luego se entiende que el rompimiento no es explícito, ya que las relaciones de (anti)conmutación (2.1.7) se cumplen en el sentido operacional. Sin embargo, la simetría del hamiltoniano no garantiza la correspondiente simetría del espectro, ya que, en general existe el peligro de un rompimiento espontáneo de la simetría. Matemáticamente esta circunstancia es equivalente a lo siguiente:. Los operadores de supercarga deben de aniquilar al estado base (vacío),

$$\mathrm{S}_1|0>=0 \quad \mathrm{S}_2|0>=0. \tag{2.2.2}$$

Debido a que ésta relación se vé muy transparente, hagamos ciertas observaciones: Recordemos el ejemplo de simetría bosónica. Digamos, la invariancia isotópica del vacío significa que para un giro en el iso-espacio el estado de vacío coincide con el inicial,

$$\exp(i\omega^a T^a)|0>=|0>, \tag{2.2.3}$$

donde $T^a$ son los generadores de las iso-rotaciones y $\omega^a$ son los parámetros del giro. Desarrollando en serie la exponencial obtenemos

$$T^a|0>=0. \tag{2.2.4}$$

Si tenemos en cuenta, que $\mathrm{S}_\mathrm{i}$ son los generadores de las supertransformaciones, entonces la analogía entre (2.2.2) y (2.2.4) está clara. Utilizando la relación explícita para las supercargas (2.1.5, 2.1.6) encontramos la función de onda, que cumple la relación (2.2.2). Debido a que $\mathrm{S}_2 = -\mathrm{i}\sigma_3\mathrm{S}_1$ es suficiente resolver la primera ecuación $\mathrm{S}_1|0>=0$, la cual como se puede ver tiene la siguiente forma

$$\frac{d\psi}{dx} = \sqrt{m}W(x)\sigma_3\psi(x). \tag{2.2.5}$$

La solución de ésta ecuación diferencial de primer orden es trivial y tiene la forma

$$\psi(x) = C \exp\Big(\int_0^x \sqrt{m} W(y)\sigma_3 dy\Big).\{|\uparrow>, |\downarrow>\}, \tag{2.2.6}$$

donde $C$ es una constante de normalización. Para normalizar la función de onda es necesario y suficiente, que la función $W(y)$ tenga un comportamiento asintótico cuando $y \to +\infty$, y sea de otro signo en comparación con la asintótica $W(y \to -\infty)$, (de aquí se sigue que $W(x)$ tiene un número impar de ceros). Por ejemplo, $W(y) = const.y$ ó $const.y(y^2 - a^2)$. Veamos, si $W(y \to +\infty) > 0$ entonces en (2.2.6) es necesario escoger el estado con espín dirigido hacia abajo y $\sigma_3$ en el exponente tiende a -1. En el caso contrario escogemos el estado con espín dirigido hacia arriba y $\sigma_3$ tiende a +1. Debido a la relación que existe entre las supercargas $\mathrm{S_i}|\psi>= 0$ y el hamiltoniano $\mathrm{H} = 2\mathrm{S}_1^2 = 2\mathrm{S}_2^2$ se deduce que el estado construido es el estado propio del hamiltoniano con energía cero. Además, la escritura del hamiltoniano en forma de cuadrado de un operador hermitiano garantiza que el espectro es no negativo. Por lo tanto, se puede estar seguro, que el estado (2.2.6) es el mínimo de energía (vacío). La afirmación sobre la nulidad de la energía del vacío en el caso de no rompimiento de supersimetría es general, ésta es válida no solamente en mecánica cuántica. El deseo de anular la energía del vacío en la teoría de campos fué uno de los motivos para introducir en la fenomenología de quarks y leptones los modelos supersimétricos. Estudiemos otro aspecto general de la supersimetría, la auto-aniquilación de correcciones cuánticas bosónicas y fermiónicas. En otras palabras, veamos como surge la nulidad de la energía del vacío en la teoría de perturbaciones. Consideremos como ejemplo el siguiente potencial $W(x) = \sqrt{m}\omega x(1-\xi x^2)$, donde $\omega$ es una constante de normalización y $\xi$ es un parámetro, el cual se considera pequeño. La gráfica de la función $W^2(x)$ está representada en la figura (1).

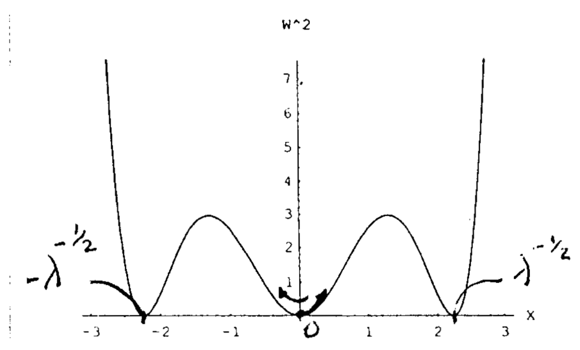


Fig. 1. Representa la energía potencial del Hamiltoniano (2.1.1)

A nivel clásico el sistema que se encuentra en uno de los mínimos, $-\xi^{-1/2}, 0, +\xi^{-1/2}$ estará en estado de reposo, y su energía será igual a cero. A nivel cuántico surgen oscilaciones pequeñas, las cuales afectan a la energía, inclusive si despreciamos el angarmonismo, es decir si ponemos $\xi = 0$. En éste límite la parte bosónica en el hamiltoniano (2.1.1) queda como $m\omega^2 x^2$ (el factor $\omega$ se introduce de tal manera que la expresión del hamiltoniano coincida con la forma estándar del oscilador armónico). La energía de las oscilaciones nulas para el oscilador armónico se supone son conocidas e igual a $\frac{\omega}{2}$. La parte "fermiónica" en el hamiltoniano (2.1.1) es

$$\frac{\sigma_3}{2}\frac{1}{\sqrt{m}}\frac{dW(x)}{dx} = \frac{\sigma_3}{2}\omega(1 - 3\xi x^2) \to \frac{\sigma_3 \omega}{2} + 0(\xi). \tag{2.2.7}$$

Tomando los valores propios de $\sigma_3$ como negativos $\psi(x) \sim |\downarrow>$, comprobamos que la energía del nivel más bajo es

$$E_0 = \frac{\omega}{2} - \frac{\omega}{2} + 0(\xi) = 0 + 0(\xi). \tag{2.2.8}$$

No es nada complicado seguir este ejercicio. En particular, la corrección de primer orden respecto a $\xi$ en (2.2.8) tiene la forma:

$$\Delta E = \xi \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{m\omega}{\pi}\right)^{1/2} e^{-m\omega x^2} \{-m\omega^2 x^4 + \frac{3}{2}\omega x^2\}, \tag{2.2.9}$$

donde el exponente representa el cuadrado de la función de onda del estado base del oscilador armónico, y los primero y segundo sumandos dentro de los paréntesis están relacionados con el angarmonismo $W^2(x)$ y $dW/dx$ correspondientemente. Entonces calculando la integral, ésta es idénticamente igual a cero.

Por último, estudiaremos otra de las importantes manifestaciones de la supersimetría, como lo es, la degeneración de todos los niveles con energía no nula (evaporación de los niveles). Cada estado bosónico en el espectro excepto el vacío, es acompañado por fermiones y viceversa. Desde luego que en el caso de la mecánica cuántica unidimensional no se puede hablar en serio sobre bosones y fermiones. Por tal motivo, hablemos de estados del tipo bosónicos $|\downarrow>$ y del tipo fermiónicos $|\uparrow>$. Esquemáticamente la representación del espectro se dá en la figura (2).

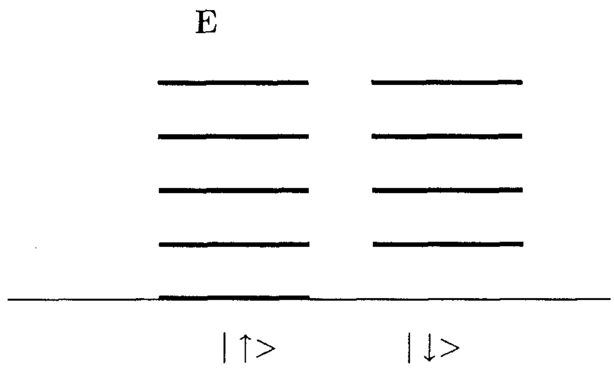


Fig. 2. Representa el espectro de energia del sistema mecánico-cuántico del Hamiltoniano (2.1.1)

Supongamos que $\psi_{bos}$ es cierto estado propio del hamiltoniano (2.1.1), al cual le corresponde el valor propio E. Entonces $(E/2)^{-1/2} S_1 \psi_{bos}$ también es un estado propio del hamiltoniano con el mismo valor propio, pero ya del tipo fermiónico

$$\psi_{ferm} = \frac{1}{\sqrt{E/2}} S_1 \psi_{bos}. \tag{2.2.10}$$

El coeficiente $(E/2)^{-1/2}$ se introdujo para tener una normalización correcta. Empezemos con la segunda afirmación. Debido a que la supercarga $S_1$ contiene solamente matrices de Pauli antidiagonales $\sigma_{1,2}$, es evidente que $S_1$ transforme al espinor $|\downarrow>$ en $|\uparrow>$, es decir bosón en fermión y viceversa, de acuerdo con la terminología aquí descrita. La primera afirmación es aún más trivial, debido a que las supercargas $S_{1,2}$ conmutan con el hamiltoniano.

## 2.3 Superespacio

Para el lector puede ser que le surga la pregunta: ¿cómo fué posible construir el hamiltoniano supersimétrico (2.1.1), el cual posee una forma muy especial? Realmente en los primeros trabajos sobre la búsqueda de modelos supersimétricos, no existía un método para la construcción de éstos modelos. Sin embargo, un formalismo elegante y sistemático fué desarrollado en [33]. Este formalismo, el cual nos permite construir lagrangianos supersimétricos, está basado en agrandar el espacio-tiempo introduciendo coordenadas fermiónicas adicionales, las cuales juntas con las coordenadas bosónicas forman un espacio llamado superespacio. En el superespacio el álgebra de la supersimetría se realiza de forma lineal. Además los campos bosónicos y fermiónicos se unen en un supercampo único. Debido a que el formalismo de supercampo es la base de ésta tésis es necesario antes mostrar en un ejemplo sencillo como éste formalismo funciona.

De la mecánica cuántica se sabe que un movimiento unidimensional es caracterizado por una variable dinámica $\varphi(t) \equiv \varphi^i(t)$ i=1,2,...,s y la acción correspondiente está dada por

$$S = \int dt \Big\{ \frac{1}{2} \Big( \frac{d\varphi}{dt} \Big)^2 - V(\varphi) \Big\} \tag{2.3.1}$$

donde $V(\varphi)$ es la energía potencial, se considera que la masa de la partícula es $m = 1$. La generalización supersimétrica del tiempo $t$ se construye adicionándole dos coordenadas complejas de Grassmann $\eta$ y $\bar{\eta}$ (donde $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 + i\eta_2), \bar{\eta} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta_1 - i\eta_2)$).

Hagamos un paréntesis para ver algunas de las propiedades de los números de Grassmann. Todas las propiedades aritméticas de los números de Grassmann son las mismas que las propiedades de los números que conocemos, la única diferencia, es que los números de Grassmann anticonmutan. Es decir,

$$\eta_1\eta_2 = -\eta_2\eta_1, \qquad \eta\bar{\eta} = -\bar{\eta}\eta \tag{2.3.2}$$

De aquí se deduce, en particular, que el cuadrado de un número de Grassmann es igual a cero $\eta_1^2 = \eta_2^2 = \eta^2 = \bar{\eta}^2 = 0$. Debido a la anticonmutación la regla de diferenciación se modifica. Tenemos para la diferenciación

$$\Big(\frac{d}{d\eta_i}\Big)1 = 0, \Big(\frac{d}{d\eta_i}\Big)\eta_j = \delta_{ij}, \Big(\frac{d}{d\eta_i}\Big)\Big(\eta_k\eta_\ell\Big) = \delta_{ik}\eta_\ell - \delta_{i\ell}\eta_k. \tag{2.3.3}$$

Así como las reglas de diferenciación se han modificado también las reglas de integración sobre los números de Grassmann pueden ser introducidas. Tenemos

$$\int d\eta_i = 0 \qquad \int d\eta_i\eta_j = \delta_{ij} \qquad \int \eta d\bar{\eta} = \int \bar{\eta} d\eta = 0 \qquad \int \eta d\eta = \int \bar{\eta} d\bar{\eta} = 1 \tag{2.3.4}$$

Si $c$-es un número cualquiera, entonces

$$d(c\eta_i) = c^{-1} d\eta_i. \tag{2.3.5.}$$

La definición de la función delta también es generalizada a las variables de Grassmann. Es fácil demostrar que

$$\delta(\eta_1 - \eta_2)\delta(\eta_1' - \eta_2') = (\eta_1 - \eta_2)(\eta_1' - \eta_2'), \tag{2.3.6}$$

a pesar de la forma polinomial, la expresión (2.3.6) posee todas las propiedades de la función delta que conocemos. Así para una función arbitraria $f(\eta, \bar{\eta})$ tenemos

$$\int d\bar{\eta}_1 d\eta_2 \delta(\eta_1 - \eta_2)\delta(\eta_1' - \eta_2') f(\eta_1, \eta_1') = f(\eta_2, \eta_2'). \tag{2.3.7}$$

Las variables $\eta$ y $\bar{\eta}$ tienen dimensión $[l]^{1/2}$ y las diferenciales $d\eta$ y $d\bar{\eta}$ tienen $[l]^{-1/2}$. Estas propiedades de los números de Grassmann serán suficientes para construir los lagrangianos supersimétricos.

El siguiente paso es, en lugar de la variable $\varphi(t)$ introducir una supervariable $\Phi(t, \eta, \bar{\eta})$ dada en un superespacio (una construcción análoga en la teoría de campos es llamada supercampo, vamos a utilizar éste nombre aunque en mecánica cuántica unidimensional no existe dependencia de las coordenadas espaciales). El desarrollo de $\Phi(t, \eta, \bar{\eta})$ en serie de Taylor respecto a $\eta, \bar{\eta}$, siempre se corta, debido a que $\eta^2 = \bar{\eta}^2 = 0$. Si ponemos la condición de realidad, $\Phi^* = \Phi$. Entonces tenemos

$$\Phi(t, \eta, \bar{\eta}) = \varphi(t) + i\eta\chi(t) + i\bar{\eta}\bar{\chi}(t) + \eta\bar{\eta}F(t) \tag{2.3.8}$$

donde $\varphi(t)$ y $F(t)$ son variables reales del tipo bosónicas, $\chi$ y su complejo conjugado $\bar{\chi}$ son del tipo fermiónicas. Análogamente, como ocurre en el espacio-tiempo (en nuestro caso el tiempo $t$) donde se realiza una acción en el generador de traslaciones

$$t \to t + a \qquad a = const, \tag{2.3.9}$$

el superespacio nos permite realizar todos los generadores de la supersimetría. Para las transformaciones globales de supersimetría las coordenadas del supertiempo $(t, \eta, \bar{\eta})$ se transforman como:

$$\delta t = \frac{i}{2}(\eta\beta + \bar{\eta}\bar{\beta}), \qquad \delta\eta = \frac{1}{2}\bar{\beta}, \qquad \delta\bar{\eta} = \frac{1}{2}\beta, \tag{2.3.10}$$

donde $\beta$ y $\bar{\beta}$ son parámetros de Grassmann de las supertransformaciones globales, es decir, $\beta$ y $\bar{\beta}$ no dependen del parámetro temporal t. Dos transformaciones consecutivas con parámetros $\beta$ y $\bar{\beta}$, como es fácil ver, nuevamente son iguales a las transformaciones del mismo tipo más un desplazamiento en el tiempo (2.3.9) con $a = i\beta\bar{\beta} - i\bar{\beta}\beta$. Por lo tanto, realmente tenemos una realización de supergrupo. Además la realización (2.3.10) no es única.

Veamos ahora como cambian las componentes del supercampo $\Phi(t, \eta, \bar{\eta})$ debido a las supertransformaciones. Sustituyendo (2.3.10) en la serie (2.3.8) y limitándonos hasta el segundo orden en $\beta, \bar{\beta}$, obtenemos

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= \frac{i}{2}(\bar{\beta}\chi + \beta\bar{\chi}), \qquad \delta\chi = \frac{\beta}{2}(\dot{\varphi} - iF), \\ \delta\bar{\chi} &= \frac{\bar{\beta}}{2}(\dot{\varphi} + iF), \qquad \delta F = \frac{1}{2}(\beta\dot{\bar{\chi}} - \bar{\beta}\dot{\chi}), \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

Notemos que el incremento de F(t) da una derivada total. Esta no es una propiedad específica del problema dado, es fácil comprender que la última componente de cualquier supercampo, real ó chiral, siempre cambia en una derivada total cuando se le aplica una supertransformación. Tomando la integral en el superespacio (en mecánica cuántica en el tiempo), obtenemos una expresión super-invariante. De tal manera, que hemos obtenido una receta sencilla y efectiva para construir lagrangianos supersimétricos. Cabe mencionar que cualquier combinación lineal de supercampos es nuevamente un supercampo. Así como la multiplicación de dos supercampos es también un supercampo. La primera afirmación es fácil de demostrar, por tal motivo nos concentraremos en la demostración de la segunda afirmación. Supongamos que $\Phi_1$ y $\Phi_2$ son dos supercampos reales (2.3.8) entonces según la segunda afirmación el producto $\Phi = \Phi_1\Phi_2$ deberá ser nuevamente un supercampo. Tenemos

$$\begin{aligned} &\varphi = \varphi_1\varphi_2, \qquad \bar{\chi} = \bar{\chi}_1\varphi_2 + \bar{\chi}_2\varphi_1, \qquad \chi = \chi_1\varphi_2 + \chi_2\varphi_1, \\ &F = F_1\varphi_2 + F_2\varphi_1 + \chi_2\bar{\chi}_1 + \chi_1\bar{\chi}_2, \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

de (2.3.11) obtenemos, por ejemplo, que

$$\begin{aligned} \delta\varphi = \varphi_1\delta\varphi_2 + \varphi_2\delta\varphi_1 &= \frac{i}{2}\varphi_1(\beta\bar{\chi}_2 + \bar{\beta}\chi_2) + \frac{i}{2}\varphi_2(\beta\bar{\chi}_1 + \bar{\beta}\chi_1) = \\ &= \frac{i}{2}\beta(\varphi_1\bar{\chi}_2 + \varphi_2\bar{\chi}_1) + c.c = \frac{i}{2}(\bar{\beta}\chi + \beta\bar{\chi}), \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

es decir, justamente la ley de transformación de las componentes del supercampo. Matemáticamente el hecho de que el producto de supercampos sea nuevamente un supercampo, explica que las transformaciones de supersimetría se realizan en los supercampos de una manera lineal. Es evidente también, que, diferenciando el supercampo respecto al tiempo nuevamente obtengamos un supercampo $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$. Sin embargo, la diferenciación respecto a $\eta$ está fuera de la clase de supercampos. Así por ejemplo: $\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}(t,\eta,\bar{\eta})$ para éste objeto no podemos decir que sus componentes se transforman linealmente una en otra respecto a las transformaciones de supersimetría (2.3.10).

Podemos sin embargo, corregir la derivada $\frac{\partial}{\partial\eta}$ completando una derivada covariante, la cual se representa como $D_\eta$ y juega un papel muy importante en el formalismo de supercampos,

$$D_\eta = \frac{\partial}{\partial\eta} + i\bar{\eta}\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \bar{D}_\eta = -\frac{\partial}{\partial\bar{\eta}} - i\eta\frac{\partial}{\partial t}. \tag{2.3.14}$$

Ahora $D_\eta\Phi$ ya forma un supercampo

$$D_\eta\Phi = i\chi + (i\dot{\varphi} + F)\bar{\eta} + \dot{\chi}\eta\bar{\eta}. \tag{2.3.15}$$

Es fácil ver que el anticonmutador de las derivadas covariantes es

$$\{D_\eta, \bar{D}_\eta\} = -2i\frac{\partial}{\partial t} \tag{2.3.16}$$

## 2.4 Lagrangiano de la Mecánica Cuántica Supersimétrica

Hasta ahora hemos visto el material necesario para la construcción de lagrangianos supersimétricos mediante un método claro y sistemático. Empezaremos por la acción de la mecánica cuántica dada en (2.3.1) cambiemos el campo $\varphi(t)$ por el supercampo $\Phi(t,\eta,\bar{\eta})$ de (2.3.8), las derivadas temporales por las derivadas covariantes (2.3.14) y la integral de espacio-tiempo por una integral en el superespacio: Tenemos

$$S_{SUSY} = \int \left[\frac{1}{2}\bar{D}_\eta\Phi D_\eta\Phi - g(\Phi)\right] d\eta d\bar{\eta} dt, \tag{2.4.1}$$

donde $g(\Phi)$ es una función arbitraria del supercampo, llamada superpotencial. Antes de todo ilustraremos que la acción obtenida es super-invariante. Efectivamente, la expresión en los paréntesis cuadrados de la acción (2.4.1) es cierto supercampo real. Recordando las reglas de integración antes introducidas (2.3.4) nos cercioramos que la integral $d\eta d\bar{\eta}$ divide la componente F(t) de éste supercampo (todas las demás componentes no dan ninguna aportación en (2.4.1)). Además, el incremento de la componente F(t) bajo las transformaciones supersimétricas dá una derivada total respecto al tiempo. Entonces cuando se integra con respecto a dt la derivada total desaparece. Por tal motivo el lagrangiano automáticamente es invariante respecto a las transformaciones de supersimetría (hasta la derivada total).

Probablemente no quede muy claro que la acción (2.4.1) describa el mismo sistema mecánico, el cual fué estudiado en el capítulo (2.1) (ver hamiltonino (2.1.1)). En particular, pueden surgir las siguientes preguntas: en la expresión (2.4.1), dónde quedó el término cinético? y si la normalización es o no correcta, cuál es la relación entre las funciones $g(\varphi)$ y $W(x)$? etc. Para contestar a éstas preguntas es necesario escribir la superacción (2.4.1) en sus componentes. Para esto, necesitamos realizar las operaciones correspondientes utilizando las superderivadas covariantes (2.3.14), el supercampo(2.3.8) y desarrollar el superpotencial en serie de Taylor

$$g(\Phi) = g(\varphi) + \frac{\partial g}{\partial \varphi}(\Phi - \varphi) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}(\Phi - \varphi)^2 + .... \tag{2.4.2}$$

Vemos que la serie se corta en el segundo término esto es debido a que $(\Phi - \varphi)$ es nilpotente. Después de operaciones no muy complicadas obtenemos la acción en sus componentes, la cual tiene la siguienta forma,

$$S_{SUSY} = \int \Big(\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + i\dot{\bar{\chi}}\chi + \frac{1}{2}F^2 - F\frac{\partial g}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}\bar{\chi}\chi\Big)\eta\bar{\eta}d\eta d\bar{\eta}dt, \tag{2.4.3}$$

entonces integrando sobre las variables de Grassmann según la fórmula (2.3.4) podemos identificar al lagrangiano supersimétrico

$$L_{SUSY} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + i\dot{\bar{\chi}}\chi + \frac{1}{2}F^2 - F\frac{\partial g}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}\bar{\chi}\chi. \tag{2.4.4}$$

En el lagrangiano F(t) no tiene término cinético, es decir no es una variable dinámica y por lo tanto, puede ser eliminada de la ecuación de movimiento. Variando el lagrangiano (2.4.4) respecto a F(t) obtenemos una ecuación algebráica sencilla, la cual tiene como solución

$$F = \frac{\partial g}{\partial \varphi}. \tag{2.4.5}$$

Sustituyendo ésta solución en el lagrangiano (2.4.4) obtenemos

$$L_{SUSY} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 + i\dot{\bar{\chi}}\chi - \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g}{\partial\varphi}\Big)^2 + \frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\bar{\chi}\chi. \tag{2.4.6}$$

Ahora pasemos a la representación matricial para las variables fermiónicas $\chi$. Afortunadamente éste procedimiento es bien conocido, el paso inverso de n ecuaciones de Shrödinger a una descripción de campo esta basada en la segunda cuantización [34]. En nuestro caso la solución es muy simple debido a que tenemos solamente una varible fermiónica $\chi$ y su conjugado $\bar{\chi}$. Todo lo que hay que hacer es imponer las siguientes relaciones de anticonmutación canónicas:

$$\{\chi(t),\chi(t)\} = \{\bar{\chi}(t),\bar{\chi}(t)\} = 0, \qquad \{\chi(t),\bar{\chi}(t)\} = 1, \tag{2.4.7}$$

Para ésto $\chi$, y $\bar{\chi}$ las podemos escoger como

$$\bar{\chi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_+ \quad , \quad \chi = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_- \tag{2.4.8}$$

donde $\sigma_+$ y $\sigma_-$ son combinaciones de las matrices de Pauli $\sigma^+ = \frac{\sigma_1 + i\sigma_2}{2}$ y $\sigma^- = \frac{\sigma_1 - i\sigma_2}{2}$. Para considerar la naturaleza fermiónica de $\chi$ escribamos el último término del lagrangiano (2.4.6) como $\frac{1}{2}[\bar{\chi}\chi](\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2})$ y pasemos del lagrangiano al hamiltoniano

$$H_{SUSY} = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial g}{\partial\varphi}\Big)^2 + \frac{1}{2}\sigma_3\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}. \tag{2.4.9}$$

Si ahora igualamos $\frac{\partial g}{\partial\varphi}$ con $W(x)$ y $m = 1$ entonces la expresión (2.4.9) y (2.2.1) coinciden completamente.

Cabe mencionar que el lagrangiano (2.4.6) posee cargas que se conservan,

$$f = \bar{\chi}\chi, \tag{2.4.10}$$

que es el número de estados fermiónicos. (La conservación de $f$ se vé claramente de las ecuaciones de movimiento $\dot{\chi} = i\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\chi, \dot{\bar{\chi}} = -i\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\bar{\chi}$). En la representación matricial la carga $f$ se escribe como

$$f \to \frac{1}{2}(1 + \sigma_3). \tag{2.4.11}$$

De éste modo, el postulado que vimos anteriormente: de acuerdo con el cual los estados del tipo $|\downarrow>$ son llamados bosónicos y los del tipo $|\uparrow>$ son llamados fermiónicos, encuentran su explicación natural.

## 2.5 Rompimiento Espontáneo de la Supersimetría

En el capítulo (2.2) fué obtenida la solución a la ecuación

$$S_{1,2}\psi = 0. \tag{2.5.1}$$

La función de onda correspondiente describe el estado propio del hamiltoniano con energía nula, (vacío). La solución fué normalizada mediante ciertas condiciones impuestas a la función $W(x)$, por ejemplo, se impuso que los signos de la función cuando $x \to +\infty$ y $x \to -\infty$ fueran de signo contrario, es decir que tenga un número impar de ceros. Ahora nos preguntamos, que pasará si la condición no se cumple? Un ejemplo de tal situación se refleja en las siguientes gráficas:

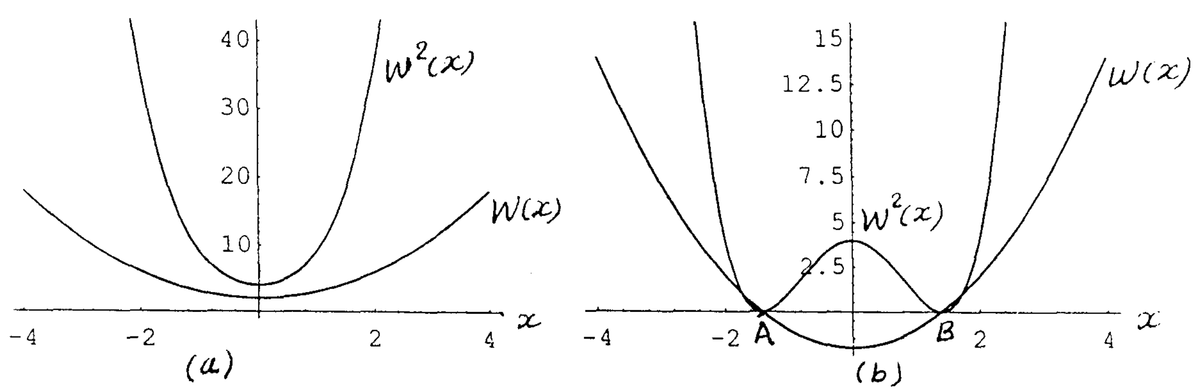


Fig. 3. Ejemplo de funciones $W(x)$ y $W^2(x)$ para los cuales la supersimetría no es rota espontaneamente.

la solución formal de la ecuación (2.5.1), dada en la fórmula (2.2.6), ahora es no normalizada, debido a que al escoger alguno de los estados espinoriales ya sea $|\uparrow>$ ó $|\downarrow>$, la expresión

$$\exp\{\sqrt{m}\sigma_3 \int_0^x W(y)dy\} \tag{2.5.2}$$

es positiva en más y en menos infinito, y entonces el exponente crece en uno de los límites. En otras palabras, no existe un estado normalizado que sea invariante bajo transformaciones de supersimetría y como consecuencia tenemos un rompimiento espontáneo de la supersimetría. Recordemos que para no tener un rompimiento de supersimetría la energía del estado base debe ser cero. Sin embargo, puede existir rompimiento espontáneo de la supersimetría es decir, $S_{1,2}|0>\neq 0$, entonces

$$< 0|\ H|0 = 2 < 0|S_1, S_1|0 >= 2 < 0'|0' >> 0, \qquad (2.5.3)$$

donde $|0'>= S_1|0>$. Por lo tanto, para tener rompimiento espontáneo de la supersimetría es necesario y suficiente que el valor medio de la energía del vacío sea positiva.

Regresemos al potencial representado en las gráficas (3 a,b) la energía mínima en los estados es positiva, esto se vé claramente de (3 a). Aquí a nivel clásico el sistema tiene una energía diferente de cero $E_{vac} = \frac{W^2(x)}{2}$ $(x = 0)$. Si el angarmonismo es pequeño, entonces las correcciones cuánticas, se entiende, no pueden desplazar el valor de la $E_{vac}$ a cero. Es fácil mostrar que la serie en teoría de perturbaciones para $E_{vac}$, en sí está ausente (compensación de correcciones cuánticas) y la respuesta clásica para $E_{vac}$ dada arriba es correcta con una exactitud de hasta el exponencial no perturbativo pequeño. Respecto al potencial representado en la gráfica (3 b) la situación no es tan trivial. A nivel clásico el sistema posee dos estados con energía nula (puntos A y B en la gráfica (3 b)). Antes mostramos, que empezando con alguno de los estados y calculando la energía en forma de desarrollo no lineal, obtenemos un resultado para $E_{vac}$, orden a orden. Desde luego, el análisis en el capítilo (2.2) se basó solamente en la circunstancia de que $W(x)$ tiene un cero cuando $x = x_o$ y que en las cercanías del cero la función $W(x)$ se puede desarrollar en series alrededor de $x - x_o$. Si para $x = x_o$ el cero es único, entonces no existe rompimiento de la supersimetría. Además, en cualquier orden finito es importante solamente el comportamiento de la función $W(x)$ en regiones pequeñas de $x_o$, y la existencia o nó existencia de otros ceros, de la cual depende la existencia de un nivel nulo normalizado de ninguna manera se refleja en la teoría de perturbaciones. La teoría de perturbaciones dá una energía nula del vacío, lo que significa que no existe rompimiento espontáneo de la supersimetría. Sin embargo, esperemos un poco. Las consideraciones dadas al principio de éste capítulo demuestran, que en el espectro del problema cuántico correspondiente a la gráfica (3 b) no existe un estado de vacío supersimétrico. Esto es claro, debido a que los efectos no perturbativos difieren de cero, desplazando la energía del vacío de cero hasta cierto valor positivo. Qué podemos extraer de éstos ejemplos?. Antes de todo, en el régimen de la interacción débil existen dos posibles escenarios para el rompimiento espontáneo de la supersimetría: ($a$) la energía potencial clásica no se anula y entonces $E_{vac} > 0$ en las aproximaciones: ($b$) si en el nivel $E_{vac} = 0$, entonces la supersimetría se conserva en la teoría de perturbaciones y el rompimiento espontáneo de la supersimetría puede tener lugar solamente debido a los efectos no perturbativos (por ejemplo; instantones). Por otro lado, el hecho de tener rompimiento o nó rompimiento de supersimetría depende solamente de las características globales del potencial, tales como el signo de la asintótica $W(x)$ ó la cantidad de ceros. Las deformaciones continuas de la función $W(x)$ (localizadas en $x$) no cambian la situación. Por lo tanto, todos los potenciales se dividen en clases, y si nos interesamos solamente en el rompimiento espontáneo de la supersimetría debemos variar $W(x)$ respecto a la clase dada. Parece ser que ésto fué lo que llevó a Witten a pensar en cómo introducir ciertas características topológicas de la teoría (más tarde recibieron el nombre de índices de Witten), la cual no dependa de valores concretos de los parámetros; masa, constante de ligamiento, volúmen normalizado en el caso de teorías tetradimensionales etc. y que nos dé la respuesta sobre el rompimiento espontáneo de la supersimetría.

# Resúmen del Capítulo 2

En éste capítulo hemos ilustrado tres consecuencias fundamentales de la supersimetría mediante un ejemplo sencillo de un sistema mecánico-cuántico. Tales consecuencias son:

a) .- La anulación de la energía del vacío;

b) .- La eliminación exacta de bosones y fermiones;

c) .- La degenaración de masa para los bosones y fermiones;

Tambien se mostró, que el hamiltoniano (2.4.9) obtenido de la generalización de la acción (2.3.1) es equivalente al hamiltoniano (2.1.1). Tal generalización se hizo utilizando el formalismo llamado supercampo, el cual, en general, consiste en agrandar el espacio-tiempo $x_\mu$ mediante la introducción de variables que anticonmutan $\theta^\alpha$ y $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$. En el caso unidimensional esto es equivalente a introducir variables tipo temporales, las cuales serían las compañeras de la variable temporal, es decir, en lugar de tener un tiempo t tendríamos un supertiempo $(t, \eta, \bar{\eta})$. La acción de supercampo obtenida en (2.4.1) es invariante bajo transformaciones globales de la supersimetría $n = 2$ (2.3.10).

# 3.- Partícula Puntual Masiva

Con el objetivo de establecer la supersimetriía local en los modelos cosmológicos, y debido a la analogía entre éstos modelos y las partículas, en éste capítulo analizaremos la acción que describe el movimiento de una partícula sin espín y de masa $m$, la cual es invariante bajo transformaciones de reparametrización temporal [19]. Después se hace la generalización a una partícula espinorial. El movimiento de una partícula puntual sin espín de masa $m$ se describe mediante la acción;

$$S = m \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{\dot{\phi}^2}, \tag{3.1}$$

la cual representa la integral a lo largo de la línea de mundo de la partícula entre dos puntos $\phi^\mu(t_i)$ y $\phi^\mu(t_f)$ donde $t$ es un parámetro arbitrario y $\dot{\phi}^2 \equiv \dot{\phi}_\mu \dot{\phi}^\mu$. La acción es invariante bajo las transformaciones de reparametrización

$$t \to t' = a(t), \tag{3.2}$$

donde $a(t)$ es una función arbitraria del parámetro $t$. La ecuación de movimiento de la partícula está dada por

$$\frac{d}{dt} p^\mu(t) = 0, \tag{3.3}$$

donde $p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}^\mu}$ es el momento canónico conjugado a $\phi$. Como consecuencia de la invariancia de la acción tenemos la siguiente constriccion primaria

$$p^2 - m^2 = 0, \tag{3.4}$$

la cual es desde luego la condición de mass-shell. Es factible trabajar en la calibración del tiempo propio dada por

$$p^\mu = m\dot{\phi}^\mu, \tag{3.5}$$

después la ecuación de movimiento la podemos escribir como

$$\ddot{\phi}^\mu = 0, \tag{3.6}$$

ésta ecuación tiene la siguiente solución

$$\phi^\mu = q^\mu + p^\mu t. \tag{3.7}$$

Finalmente la constricción se escribe como

$$\dot{\phi}^2 = 1. \tag{3.8}$$

La ecuación de movimiento (3.6) puede ser derivada del lagrangiano lineal

$$L = \frac{1}{2} m^2 \dot{\phi}^2, \tag{3.9}$$

el cual es invariante solamente bajo transformaciones del parámetro $t$. Para extender éste lagrangiano al caso de una partícula espinorial necesitamos reescribir el lagrangiano anterior. El lagrangiano (3.9) es jústamente el lagrangiano de Klein-Gordon unidimensional si consideramos a $\phi$ como un campo. Es bien conocido que el lagrangiano de Klein-Gordon puede tomar una forma covariante introduciendo el tensor métrico o lo que es equivalente el campo vierbein $e^a_\mu$ donde $a$ es el índice plano y $\mu$ es el índice curvo. Entonces el tensor métrico puede ser representado como

$$e^a_\mu \eta_{ab} e^b_\nu = g_{\mu\nu}, \qquad 3.10)$$

donde $\eta_{ab}$ es la métrica plana. Para una dimensión arbitraria tenemos el siguiente lagrangiano

$$L = -\frac{1}{2} e e^\mu_a e^\nu_b \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \eta^{ab}, \tag{3.11}$$

donde $e \equiv dete^a_\mu$. Es fácil demostrar que la acción correspondiente es invariante bajo ciertas transformaciones generales de las coordenadas $x \to x' = x - a(x)$ si $e^a_\mu$ y $\phi$ se transforman como

$$\begin{aligned} \delta e^a_\mu &= a^\lambda \partial_\lambda e^a_\mu + \partial_\mu a^\lambda e^a_\lambda \\ \delta \phi &= a^\lambda \partial_\lambda \phi. \end{aligned} \tag{3.12}$$

En una dimensión $e^a_\mu \equiv N(t)$ y entonces tenemos

$$\begin{aligned} \delta N &= (aN)^{\cdot} \\ \delta \phi &= a\dot{\phi}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Un lagrangiano generalmente covariante en una dimensión es ahora dado por

$$L = \frac{1}{2}\Big(\frac{\dot{\phi}^2}{N} + Nm^2\Big). \tag{3.14}$$

El término "gravitacional" $Nm^2$ no rompe la invariancia de reparametrización y se ha introducido para darle una masa finita a la partícula. La acción correspondiente a (3.14) es diferente de (3.1) en ésta tenemos dos campos $N(t)$ y $\phi(t)$ los cuales deben variarse independientemente. Es fácil verificar que ésta acción es equivalente a la formulación anterior si usamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para $N(t)$ y sustituyendo en el lagrangiano (3.14). De (3.14) obtenemos la ecuación de movimiento

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\dot{\phi}}{N}\Big) = 0, \tag{3.15}$$

y la constricción

$$\dot{\phi}^2 = N^2 m^2, \tag{3.16}$$

Donde la calibración del tiempo propio corresponde a la elección de $N = \frac{1}{m}$ después de lo cual recobramos la ecuación de movimiento (3.6) y la constricción (3.8). Es interesante remarcar que el límite $m \to 0$ es singular en (3.1) pero no en (3.14). Esto significa que para una partícula sin masa y sin espín no podemos eliminar el campo vierbein para escribir una acción con solamente $\phi^\mu(t)$.

Ahora veamos el caso de una partícula relativísta espinorial sin masa. Esta partícula se describe por su posición $\phi^\mu(t)$ junto con la variable adisional $\lambda^\mu(t)$ la cual conmuta con $\phi(t)$ pero anticonmuta con sí misma,

$$\lambda^\mu\lambda^\nu + \lambda^\nu\lambda^\mu = 0, \tag{3.17}$$

para ciertos valores escogidos de $\mu$ y $\nu$. Procediendo como lo hicimos anteriormente construyamos una acción invariante bajo reparametrización incluyendo el campo de vierbein $N(t)$. El lagrangiano más simple que tiene éstas propiedades es la generalización obvia de (3.14) y está dado por

$$L = \frac{1}{2}\Big(\frac{\dot{\phi}^2}{N} - i\lambda\dot{\lambda}\Big). \tag{3.18}$$

Este lagrangiano claramente se transforma como una derivada total bajo reparametrización si $\lambda$ se transforma como un escalar al igual que $\phi$ en (3.13). Explícitamente se encuentra que

$$\delta L = \frac{d}{dt}(aL), \tag{3.19}$$

de tal manera que la acción correspondiente es invariante. Debido a la componente temporal del campo $\lambda^\mu$ existe la posibilidad de que aparescan estados de norma negativos en el espectro. Para desacoplarlos se requiere de una invariancia adisional e inspirándose en el modelo de Neveu-Schwarz-Ramond es natural demandar la invariancia bajo transformaciones locales de supercalibración. Esto se puede hacer introduciendo la contraparte fermiónica $\psi(t)$ al campo de vierbein y escribiendo el siguiente lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}\Big(\frac{\dot{\phi}^2}{N} - i\lambda\dot{\lambda} - \frac{i}{N}\psi\dot{\phi}\lambda\Big). \tag{3.20}$$

La acción correspondiente a (3.18) es ahora invariante bajo reparametrización y supercalibración si $\psi$ se transforma de la misma forma que $N$ bajo reparametrización

$$\delta\psi = (a\psi)^{\cdot}, \tag{3.21}$$

si tomamos las siguientes transformaciones de supercalibración

$$\begin{aligned} \delta\phi &= i\beta\lambda, \\ \delta\lambda &= \beta\Big(\frac{\dot{\phi}}{N} - \frac{i}{2N}\psi\lambda\Big), \\ \delta N &= i\beta\psi, \\ \delta\chi &= 2\dot{\beta}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Donde $\beta(t)$ es un elemento del álgebra de Grassmann el cual es una función arbitraria de $t$. Es fácil checar que bajo las transformaciones (3.22) el lagrangiano (3.20) es una derivada total

$$\delta L = \frac{d}{dt}\Big(\frac{i}{2N}\beta\dot{\phi}\lambda\Big). \tag{3.23}$$

Entonces nuestra acción tiene las invariancias requeridas. Si ahora interpretamos a $\phi(t)$, $\lambda(t)$, $N(t)$ y $\psi(t)$ como campos unidimensionales vemos que $\psi^\mu(t)$ es el análogo del campo de Rarita-Schwinger, el cual aparece en la supergravedad, y el lagrangiano (3.20) representa la interacción entre supergravedad y supermateria en una dimensión.

# 4.- Dinámica Twistorial Generalizada de Superpartículas

En los últimos años se ha puesto especial atención al estudio de sistemas dinámicos (p. ej. los $\sigma$ modelos bidimensionales [35] y superpartículas [22]), los cuales poseen al mismo tiempo dos tipos de supersimetrías; supersimetría local "pequeña"( en ésta los parámetros de las transformaciones de la susy son variables complejas de Grassmann y dependen solamente del parámetro temporal) y la supersimetría global (SUSY en donde los parámetros de las transformaciones son espinores constantes, tambien se le conoce como SUSY rígida), en las cuales se desarrolla la dinámica del sistema. El estudio de tales teorías estimuló la necesidad de un entendimiento más profundo de la estructura geométrica de la teoría de cuerdas y supercuerdas y la aclaración de las razones básicas de su interrelación, lo cual puede ser una ayuda sustancial en la realización de una primera y segunda cuantización covariante que sea consistente en la teoría de cuerdas. Por éstas razones es importante establecer el orígen de la simetría de Siegel [36] en las teorías de supercuerdas y superpartículas. La simetría de Siegel juega un papel definitivo en la eliminación de grados de libertad no físicos en las teorías de supercuerdas y superpartículas [1]. En el trabajo [22] fué propuesto un formalismo twistorial para la construcción de lagrangianos que describan las superpartículas, éstos lagrangianos poseen supersimetría local pequeña y supersimetría global. Tal formulación de la mecánica de las superpartículas permitió considerar la simetría de Siegel como una manifestación del grupo de la supersimetría local que realiza la reparametrización del supertiempo $(t, \eta)$ donde $t$ es un parámetro temporal real bosónico y $\eta$ es el supercompañero Grassmaniano, el cual toma valores en los números: reales (R), complejos (C), cuaterniones (H) u octaniones (O) dependiendo en qué dimensión del espacio-tiempo se mueve la superpartícula $D = 2, 3, 4, 6, 10$. El álgebra de la supersimetría local de Siegel en la teoría es generada por un conjunto irreducible de constricciones de primera clase Lorentz-covariantes.

El uso de espinores de tipo twistorial que conmutan permitió establecer en la mecánica de partículas relativistas ( tomando en cuenta las ecuaciones de movimiento) la equivalencia [22] de los lagrangianos clásicos en las teorías de N = 1 superpartículas sin masa [37] y las partículas de Dirac [38,20,21].

La dinámica twistorial de las partículas relativistas fué generalizada en [39] adicionándole ciertos términos a los lagrangianos estándares, los cuales dependen solamente de las componentes twistoriales y de sus derivadas respecto al tiempo propio. Entonces existe una transformación no trivial de las variables (desplazamiento twistorial). La dinámica generalizada de partículas libres es equivalente a la dinámica estándar. Sin embargo, cuando las partículas interactúan con campos externos ésta equivalencia se pierde, esto se manifiesta através de la introducción en la teoría de un parámetro de interacción no local $l$ y la apariencia de una serie infinita $l^n$ de términos de interacción no mínima incuyendo el tensor de Maxwell y sus derivadas de órden superior en el caso de un campo electromagnético externo.

La dinámica generalizada de una superpartícula interactuando con un campo Maxweliano de fondo se describe mediante la acción [40]

$$S = \int dtd\eta\Big(iE^{-1}DE^{\alpha}DE^{\beta}(\gamma_m)_{\alpha\beta}DE^{m} + lE^{-1}E^{\alpha}DE_{\alpha} + DE^{A}A_{A}\Big), \tag{4.1}$$

donde $D = \partial_\eta + i\eta\partial_t$ es una derivada covariante de la supersimetría "pequeña" sobre la trayectoria mundial, la cual es parametrizada por el parámetro temporal $t$ y su compañero supersimétrico Grassmaniano $\eta$; $E_M^A(z)$ es el superdreibein estándar del espacio plano con las coordenadas $z^M = (X^m, \Theta^\alpha)$, las cuales son supercampos escalares respecto a la supersimetría pequeña, donde

$$X^m = x^m + i\eta\chi^m, \qquad \Theta^\alpha = \theta^\alpha + \eta\lambda^\alpha, \tag{4.2}$$

donde $\chi^m$ es el supercompañero de la coordenada bosónica $x^m$ y $\lambda^\alpha$ es un espinor que anticonmuta, el cual representa la primera mitad del twistor; $E^{-1} = N^{-1} - i\eta\frac{\psi}{N^2}$ es el análogo de $1D$ supergravedad en la línea mundial; $\mathrm{A_A(z^M)}$ es un supercampo del supermultiplete Maxweliano de fondo; y $l$ es un parámetro que tiene dimensiones de longitud.

El desplazamieto twistorial es generado por una transformación a unas nuevas coordenadas espacio temporales

$$\hat{X}^{\alpha\beta} = X^{\alpha\beta} + \frac{l}{2\hat{\mu}D\Theta}\Big(\hat{\mu}^{\alpha}D\Theta^{\beta} + \hat{\mu}^{\beta}D\Theta^{\alpha}\Big), \tag{4.3}$$

donde $\hat{\mu}^{\alpha} = \mu^{\alpha} + \eta d^{\alpha}$ es un supercampo par, el cual contiene la segunda mitad de la componente del twistor, $\mu^{\alpha}$, y su supercompañero $d^{\alpha}$. Aquí

$$\hat{\mu}_{\alpha} = iX_{\alpha\beta}, \qquad X_{\alpha\beta} = X_m(\gamma^m)_{\alpha\beta}, \qquad \hat{\mu}D\Theta = \hat{\mu}_{\alpha}D\Theta^{\alpha}. \tag{4.4}$$

Tomando en cuenta las ecuaciones de movimiento después del desplazamiento twistorial a primer orden en $l$, obtenemos la siguiente acción

$$\hat{S} = \int dtd\eta\Big(iE^{-1}D\Theta\gamma_m D\Theta D\hat{X}^m + \hat{\Omega}^m A_m + \frac{1}{2}l\hat{\Omega}^{\alpha\beta}(\sigma^{mn})_{\alpha\beta}F_{mn}\Big), \tag{4.5}$$

donde $\hat{\Omega}^m$ es una forma, la cual es invariante bajo transformaciones de la supersimetría pequeña y transformaciones globales de la supersimetría en el superespacio, dado por

$$\hat{\Omega}^m = D\hat{X}^m + i\Theta\gamma^m D\Theta + iD\Theta\gamma^m\Theta. \tag{4.6}$$

En $D = 3$, un campo vectorial entra en el supermultiplete espinorial [41]

$$A_{\alpha} = l_{\alpha} + B\Theta_{\alpha} + V_{\alpha\beta}\Theta^{\beta} + W_{\alpha}\Theta\Theta \tag{4.7}$$

donde $V_{\alpha\beta} = V^m(\gamma_m)_{\alpha\beta}$ y $h_{\alpha}$ son campos vectoriales de calibración y sus supercompañeros correspondientes. Si imponemos la calibración de Wess-Zumino, es decir, $l = B = 0$ y la constricción adicional

$$F_{\alpha\beta}(\hat{X},\Theta) = 0, \qquad T^a_{\alpha\beta}(\hat{X},\Theta) = 2i\gamma^a_{\alpha\beta}, \tag{4.8}$$

se tiene solamente un submultiplete irreducible de los campos físicos de la teoría. La acción (4.5) entonces puede ser escrita como

$$\tilde{S} = \int dtd\eta\Big\{iE^{-1}D\Theta\gamma_m D\Theta D\hat{X}^m - \frac{i}{2}\hat{\Omega}^m\Big(V_m\frac{1}{2}\Theta_{\beta}(\gamma_m)^{\alpha\beta}\hbar_{\alpha} - \frac{i}{2}\Theta\Theta\epsilon^{k\ell}_m F_{k\ell}\Big) + \tag{4.9}$$
$$+\frac{i}{2}\ell\epsilon^{nmk}\hat{\Omega}_k\Big(F_{nm} + \Theta_{\alpha}(\gamma_n)^{\alpha\beta}\partial_m\hat{h}_{\beta} - \frac{i}{2}\Theta\Theta\epsilon^{k\ell}_m\partial_n F_{k\ell}\Big)\Big\}$$

donde $\epsilon^{nmk}$ es la densidad de Levi-Civita y $F_{nm}$ el tensor de Maxwell.

Integrando respecto a $\eta$, y fijando la solución de la ecuación de movimiento con respecto a $\chi$ en la forma

$$\chi^m = -(\theta\gamma^m\lambda + \lambda\gamma^m\theta), \tag{4.10}$$

obtenemos la acción en sus componentes de donde podemos identificar al lagrangiano. Esta elección de la solución asociada con el primer término en la acción (4.5) fué discutida en [42]. Regresemos ahora al término $D\Theta^{\alpha}A_{\alpha}$ en la acción (4.5). Escribiendo ésta expresión en forma de sus componentes y usando la ecuación de movimiento en términos de $N$, fácilmente se puede ver que éste término duplica cierto término en la acción (4.5) por eso redefiniendo los coeficientes en ellos. El lagrangiano total despues del desplazamiento twistorial toma la siguente forma:

$$\tilde{L} = -\Big(N^{-1}\lambda\gamma_m\lambda - \Big(V_m + \frac{1}{2}\theta_\beta\gamma_m^{\beta\alpha}h_\alpha - \frac{i}{4}\theta\theta\epsilon_m^{kl}F_{kl}\Big) + \tag{4.11}$$

$$+l\epsilon_m^{nk}\Big(F_{nk} + \frac{1}{2}\theta_\alpha\gamma_n^{\alpha\beta}\partial_k h_\beta - \frac{i}{4}\theta\theta\epsilon_m^{kl}\partial_n F_{kl}\Big)\Big)\omega^m,$$

$$d\omega^m = d\hat{x}^m - i\theta\gamma^m d\theta + id\theta\gamma^m\theta + 2\lambda\gamma^m\lambda d\tau. \tag{4.12}$$

El lagrangiano (4.11) es invariante bajo las siguientes transformaciones de la supersimetría global

$$\delta V_m = -\epsilon_\beta(\gamma_m)^{\beta\alpha}h_\alpha, \qquad \delta\Theta_\beta = \epsilon_\beta, \qquad \delta h_\alpha = \frac{i}{2}\epsilon^\beta(\sigma^{nm})_{\beta\alpha}F_{nm}, \tag{4.13}$$

con el parámetro impar $\epsilon_\beta$. Por lo tanto, con el procedimiento del desplazamiento twistorial es posible eliminar el término no deseado $\dot{\theta}\dot{\theta}$ en la acción (esto es importante debido, a que cuando pasamos a una teoría de campos, éste término rompe la relación entre el espín y la estadística). El procedimiento twistorial da entonces lugar a una serie infinita de potencias del parámetro no local $l$ en el sector bosónico. Esta serie incluye el tensor de Maxwell y sus derivadas de orden superior. El sector fermiónico, el cual esta presente en el caso de la superpartícula, es tambien modificado del esquema del campo mínimo en la forma usual, a un esquema no mínimo con derivadas de orden igual al orden de la expanción en $l$ del supercompañero del campo vectorial. Este esquema puede ser generalizado en una forma natural a dimensiones más altas $D = 4, 6$. desafortunadamente el caso $D = 10$, el cual es el más interesante no puede ser construido, debido a que aparece el sector taxión. Sin embargo investigaciones en ésta dirección se estan continuando muy activamente.

Es importante mencionar que siguiendo la analogía que existe entre partículas espinoriales y las acciones para los modelos cosmológicos uno puede aplicar la formulación twistorial [43] en el minisuperespacio con el objetivo de ver si existe una relación entre la supersimetría local conforme del tiempo propio y la supersimetría del espacio-tiempo (como sucede en las teorías de superpartículas espinoriales), y en base a ésto construir una teoría cuántica de la cosmología. Esta es la idea funadamental de ésta tésis. Sin embargo, lo que se ha logrado hasta el momento es establecer la supersimetría local en los modelos cosmológicos, lo cual representa un gran paso para la formulación twistorial de éstos modelos.

# 5.- Descripción de supercampos en el modelo de FRW

Debido a la imposibilidad de tener una teoría cuántica de la gravedad uno busca tener información aproximada del Universo actual en un tiempo en que la mecánica cuántica fué relevante. Estas aproximaciones se obtienen cuando uno reduce de un número infinito de grados de libertad (teoría de campo) a un número finito de grados de libertad (mecánica cuántica). A éstas aproximaciones se les conoce como modelos cosmológicos (ó minisuperespacios). Entonces, la cuantización de la gravedad se reduce a cuantizar los grados de libertad finitos, que son obtenidos vía reducción espacial, lo que se conoce como cosmología cuántica. La esperanza puesta en el contexto de la cosmología cuántica es poder conocer de una forma aproximada el comportamiento de la gravedad cuántica. En el minisuperespacio las variables del campo gravitacional y las de materia son reducidas a un número finito de grados de libertad. La ecuación que gobierna el comportamiento de los modelos cosmológicos es la ecuación de Wheeler-DeWitt [4,5]. Esta ecuación es obtenida mediante la reducción espacial de la gravedad de $(1 + 3)$ a $(1 + 0)$ dimensiones, la cual resulta en un Hamiltoniano cuadrático que nos lleva a una ecuación tipo Klein-Gordon con todos sus problemas de interpretación, como lo es la densidad de probabilidad.

Después de que se descubrió la supersimetría [8] y consecuentemente la supergravedad muchos investigadores han estado facinados por ésta teoría. Existen razones para esto. Primero, las teorías de supergravedad son las únicas teorías consistentes, las cuales acoplan la partícula fundamental de espín 3/2 a la gravedad. Segundo, las teorías de supergravedad no presentan divergencias como la relatividad general. Existen algunas indicaciones para pensar que la teoría de supergravedad pura $N = 1$ es finita [18].

La formulación canónica de $N = 1$ supergravedad fué presentada en [12] según la notación espinorial de cuatro componentes y en la notación espinorial de dos componentes [13]. Para encontrar un estado físico, es suficiente resolver la constricción de Lorentz y la supersimétrica de la teoría; el álgebra de las constricciones implica que la función de onda física obedecerá también la constricción hamiltoniana [13].

En los últimos años los modelos cosmológicos supersimétricos han sido objeto de un constante estudio. Estos modelos han sido investigados mediante diferentes formalismos, citemos los más importantes:

i).- Los modelos basados en la supergravedad. Estos han sido estudiados usando la formulación canónica de ADM y el formalismo espinorial de cuatro componentes [15,44,45] así como también usando variables ADM en el formalismo espinorial de dos componentes [46,47,48], siguiendo éste esquema en los trabajos [49,50] se introdujo materia tomando $N = 1$ así como también $N = 2$ supergravedades. Además las variables de Ashtekar han sido consideradas [51,52] en la formulación de Jacobson de la supergravedad [53,54]. Una transformación canónica apropiada de las variables de ADM a un formalismo espinorial de dos componentes ha sido recientemente propuesto [55].

ii).- Aquellos definidos mediante la supersimetría global [17,56,57,58]. Sin embargo, éste formalismo no permite identificar de una manera clara a las variables de Grassmann como los compañeros de las variables bosónicas.

Es bien conocido que la acción de Einstein-Hilbert para el campo gravitacional en el espacio-tiempo es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Entonces cuando uno hace la reducción espacial la invariancia de reparametrización temporal de la acción se conserva. Por lo tanto, uno puede exigir la invariancia local de la acción para los modelos cosmológicos, por tal razón una simetría extendida debe ser local. De lo anterior, en éste trabajo se propone extender las transformaciones de reparametrización temporal a una $n = 2$ supersimetría local "pequeña" esto nos permitió formular una acción de supercampo, primero para el modelo de FRW [24], en el trabajo [25] se introdujo una nueva reparametrización en los campos y después se obtuvo la formulación de supercampos para los modelos tipo Bianchi [26]. Con éste formalismo podemos identificar las variables de Grassmann como los compañeros de las variables bosónicas y hacer un estudio sobre las simetrías escondidas en éstos modelos, así como también nos da una procedura para incluir campos de materia en una forma sencilla y sistemática [27,28].

Para mostrar nuestro formalismo primero consideremos el modelo cosmológico más sencillo al cual se le conoce como modelo de Friedmann-Robertson-Walker (FRW). Para éste modelo la métrica es homogénea e isotrópica, la cual esta definida por el elemento de línea

$$ds^2 = -N^2(t)dt^2 + R^2(t)d\Omega_3^2, \tag{5.1}$$

donde $d\Omega_3^2$ es la métrica espacial estándar del modelo de (FRW) sobre el espacio tridimensional. $N(t)$ y $R(t)$ son las funciones lapse y el factor de escala respectívamente, los cuales solo dependen del parámetro temporal $t$.

La reducción espacial de la acción de Einstein-Hilbert de cuatro dimensiones para la gravedad al modelo de FRW con la métrica dada en (5.1) tiene la forma

$$S_{grav} = \int \Big( -\frac{R\dot{R}^2}{2N} + \frac{1}{2}kNR\Big)dt, \tag{5.2}$$

donde $k = 1, 0, -1$ para los espacios esférico, plano ó hiperesférico y $\dot{R} = \frac{dR}{dt}$. Esta acción es invariante bajo reparametrización temporal

$$t' = t + a(t), \tag{5.3}$$

si $R(t)$ y $N(t)$ se transforman como

$$\delta R = a\dot{R}, \qquad \delta N = (aN)^{\cdot}, \tag{5.4}$$

ver (3.13). Las variaciones con respecto a $R(t)$ y $N(t)$ nos dan las ecuaciones clásicas del movimiento para el factor de escala $R(t)$ y la constricción, la cual genera la transformación local de $R(t)$ y $N(t)$. La constricción nos da la ecuación estándar de Wheeler-DeWitt para la cosmología cuántica.

La acción (5.2) se puede ver como un modelo unidimensional simple de interacción entre el campo "material" $R(t)$ y el campo gravitacinal $N(t)$, definido por la métrica unidimensional (5.1).

Para obtener la formulación de supercampo de la acción (5.2), extenderemos las transformaciones de reparametrización temporal (5.3) a una $n = 2$ supersimetría local. Entonces obtenemos las siguientes transformaciones

$$\delta t = a(t) + \frac{i}{2}\eta\beta'(t) + \frac{i}{2}\bar{\eta}\bar{\beta}'(t),$$

$$\delta\eta = \frac{1}{2}\bar{\beta}'(t) + \frac{1}{2}\Big(\dot{a}(t) + ib(t)\Big)\eta + \frac{i}{2}\dot{\bar{\beta}}'\eta\bar{\eta}, \tag{5.5}$$
$$\delta\bar{\eta} = \frac{1}{2}\beta'(t) + \frac{1}{2}\Big(\dot{a}(t) - ib(t)\Big)\bar{\eta} - \frac{i}{2}\dot{\beta}'\eta\bar{\eta},$$

las cuales son la generalización de las transformaciones (5.3). Estas transformaciones se realizan en un superespacio con las coordenadas $(t, \eta, \bar{\eta})$ donde las variables $\eta$ y $\bar{\eta}$ son coordenadas "temporales". En la ley de transformaciones $\eta$ es un parámetro impar complejo, es decir, $\eta$ anticonmuta, $\beta(t)' = N^{1/2}\beta(t)$ es un parámetro complejo de Grassmann de las transformaciones supersimétricas locales "pequeñas" $n = 2$ (Note que a diferencia de las transformaciones (2.3.10) las transformaciones (5.5) son locales, es decir, los parámetros dependen del tiempo) y $b(t)$ es el parámetro de las rotaciones locales en $\eta$.

Las transformaciones de supersimetría (5.5) pueden ser escritas en términos de una superfunción $\mathbb{A}(t, \eta, \bar{\eta})$ sobre el superespacio de la siguiente manera

$$\delta t = \mathbb{A}(t, \eta, \bar{\eta}) + \frac{1}{2}\bar{\eta}\bar{D}_\eta \mathbb{A}(t, \eta, \bar{\eta}) - \frac{1}{2}\eta D_\eta \mathbb{A}(t, \eta, \bar{\eta}),$$
$$\delta\eta = \frac{i}{2}\bar{D}_\eta \mathbb{A}(t, \eta, \bar{\eta}), \tag{5.6}$$
$$\delta\bar{\eta} = -\frac{i}{2}D_\eta \mathbb{A}(t, \eta, \bar{\eta}),$$

donde la superfunción está definida como

$$\mathbb{A}(t, \eta, \bar{\eta}) = a(t) + i\eta\beta'(t) + i\bar{\eta}\bar{\beta}'(t) + b(t)\eta\bar{\eta}, \tag{5.7}$$

y $D_\eta = \partial_\eta + i\bar{\eta}\partial_t, \bar{D}_\eta = -\partial_{\bar{\eta}} - i\eta\partial_t$ $\Big(\{D_\eta, \bar{D}_\eta\} = -2i\partial_t\Big)$ son las derivadas supercovariantes de la supersimetría global "pequeña" del parámetro generalizado correspondiente al parámetro temporal $t$. Las derivadas locales supercovariantes tienen la siguiente forma $\tilde{D}_\eta = \mathbb{N}^{-1/2}D_\eta$ y $\tilde{\bar{D}}_\eta = \mathbb{N}^{-1/2}\bar{D}_\eta$.

Entonces, la acción de supercampo para la acción (5.2), la cual es invariante bajo las transformaciones de supersimetría (5.5) tiene la forma

$$S_{grav} = \int \Big( -\frac{1}{2}\mathbb{N}^{-1}\mathbb{R}\bar{D}_\eta \mathbb{R} D_\eta \mathbb{R} + \frac{\sqrt{k}}{2}\mathbb{R}^2\Big) d\eta d\bar{\eta} dt. \tag{5.8}$$

En ésta acción puede ser incluido el término $c\int \mathbb{R}^3 d\eta d\bar{\eta} dt$ (c-constante) invariante bajo las transformaciones de la supersimetría (5.6), el cual contiene información sobre el término cosmológico. Este término no se incluyó en la acción (5.8), debido a que se quiere comparar los modelos cosmológicos con la supergravedad de Poincaré ó con la teoría efectiva de supercuerdas, para las cuales el término cosmológico surge debido a que la energía del vacío de los campos escalares es diferente de cero [62], a diferencia de la supergravedad OSP(1,4) donde dicho término debe ser incluido. En la acción (5.8) $I\!N(t,\eta,\bar{\eta})$ es el supercampo de la gravedad. Haciendo el desarrollo en serie de Taylor respecto a $\eta$ y $\bar{\eta}$. Tenemos

$$I\!N(t,\eta,\bar{\eta}) = N(t) + i\eta\psi'(t) + i\bar{\eta}\bar{\psi}'(t) + \eta\bar{\eta}V'(t), \tag{5.9}$$

donde a diferencia del trabajo [24] utilizamos la siguiente reparametrización [25] $\psi'(t) = N^{1/2}\psi(t)$, $\bar{\psi}'(t) = N^{1/2}\bar{\psi}(t)$ y $V' = N.V - \bar{\psi}\psi$. Las transformaciones de coordenadas (5.6) del supercampo $(t,\eta,\bar{\eta})$ generan la regla de transformación para el vector del supercampo $I\!N(t,\eta,\bar{\eta})$. Tenemos

$$\delta I\!N = \left(I\!\Lambda I\!N\right)^{\cdot} + \frac{i}{2}\bar{D}_\eta I\!\Lambda D_\eta I\!N + \frac{i}{2}D_\eta I\!\Lambda \bar{D} I\!N, \tag{5.10}$$

la transformación (5.10) es una generalización de la transformación para $N(t)$ en (5.4). Las componentes del supercampo $I\!N(t,\eta,\bar{\eta})$ en (5.9) son campos de calibración de la supergravedad unidimensional $n = 2$ extendida. $N(t)$ es el einbein, $\psi(t)$ y $\bar{\psi}(t)$ son las componentes temporales de los campos de Rarita-Schwinger $\psi^\alpha_\mu$, $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}_\mu$ que son obtenidos mediante la reducción espacial de la supergravedad en 4-dimensiones a la métrica (5.1), y $V(t)$ es un $U(1)$ campo de calibración.

De la expresión (5.10) podemos obtener la ley de transformación para $N(t)$, $\psi(t)$, $\bar{\psi}(t)$ y $V(t)$. Estos campos se transforman como

$$\begin{aligned}
\delta N &= (aN)^{\cdot} + \frac{i}{2}(\bar{\beta}\psi + \beta\bar{\psi}) \\
\delta\psi &= (a\psi)^{\cdot} + D\beta + \frac{i}{2}\hat{b}\psi \\
\delta\bar{\psi} &= (a\bar{\psi})^{\cdot} + D\bar{\beta} - \frac{i}{2}\hat{b}\bar{\psi}, \\
\delta V &= (aV)^{\cdot} + \dot{\hat{b}}
\end{aligned} \tag{5.11}$$

donde $D\beta = \dot{\beta} - \frac{i}{2}\beta V$ es una U(1) derivada covariante y $\hat{b} = b + \frac{1}{2N}(\beta\bar{\psi} - \bar{\beta}\psi)$.

El supercampo real de "materia" $I\!R(t,\eta,\bar\eta)$ puede ser escrito de la siguiente manera

$$I\!R(t,\eta,\bar\eta)=R(t)+i\eta\lambda'(t)+i\bar\eta\bar\lambda'(t)+B'(t)\eta\bar\eta, \tag{5.12}$$

donde $\lambda'(t)=N^{1/2}\lambda(t)$, $\bar\lambda'(t)=N^{1/2}\bar\lambda(t)$ y $B'(t)=NB-\frac{1}{2}(\bar\psi\lambda-\psi\bar\lambda)$. La regla de transformación para el supercampo escalar $I\!R(t,\eta,\bar\eta)$ puede ser obtenida de (5.6)

$$\delta I\!R=I\!\Lambda\dot{I\!R}+\frac{i}{2}\bar D_\eta I\!\Lambda D_\eta I\!R+\frac{i}{2}D\eta I\!\Lambda\bar D_\eta I\!R, \tag{5.13}$$

la cual viene siendo una generalización de la transformación para $R(t)$ en (5.4). La componente B(t) en (5.12) es un campo auxiliar, $\lambda(t)$ y $\bar\lambda(t)$ son grados de libertad dinámicos que quedan al hacer la reducción espacial del campo de Rarita-Schwinger a los modelos cosmológicos y son los compañeros fermiónicos del factor de escala R(t). De la expresión (5.13) obtenemos la ley de transformación para los campos R(t), $\lambda(t)$, $\bar\lambda(t)$ y B(t),

$$\begin{aligned}\delta R&=a\dot R+\frac{i}{2}(\bar\beta\lambda+\beta\bar\lambda)\\ \delta\lambda&=a\dot\lambda+\frac{\beta}{2}\Big(\frac{DR}{N}-iB\Big)+\frac{i}{2}\hat b\lambda,\\ \delta\bar\lambda&=a\dot{\bar\lambda}+\frac{\bar\beta}{2}\Big(\frac{DR}{N}+iB\Big)-\frac{i}{2}\hat b\bar\lambda\end{aligned} \tag{5.14}$$

$$\delta B=a\dot B+\frac{1}{2N}\Big\{\beta\Big[D\bar\lambda-\frac{1}{2}\Big(\frac{DR}{N}+iB\Big)\bar\psi\Big]-\bar\beta\Big[D\lambda-\frac{1}{2}\Big(\frac{DR}{N}-iB\Big)\psi\Big]\Big\},$$

donde $DR=\dot R-\frac{i}{2}(\psi\bar\lambda+\bar\psi\lambda)$ es una derivada supercovariante y $D\lambda=\dot\lambda-\frac{i}{2}\lambda V$ es una U(1) derivada covariante.

Las transformaciones infinitesimales de la acción de supercampo (5.8) bajo las transformaciones (5.10) y (5.13) tienen la siguiente forma

$$\delta S=\frac{i}{2}\int\Big\{\bar D_\eta\Big[I\!\Lambda D_\eta\Big(-\frac{I\!R}{2I\!N}\bar D_\eta I\!R D_\eta I\!R+\sqrt{k}I\!R^2\Big)\Big]+ \tag{5.15}$$

$$+D_\eta\Big[I\!\Lambda\bar D_\eta\Big(-\frac{I\!R}{2I\!N}\bar D_\eta I\!R D_\eta I\!R+\sqrt{k}I\!R^2\Big)\Big]\Big\}d\eta d\bar\eta dt$$

de donde podemos ver que (5.15) nos da una derivada total. Por lo tanto la acción de supercampo (5.8) es invariante bajo las transformaciones locales (5.6).

Para escribir la acción (5.8) en sus componentes es necesario integrar la acción de supercampo respecto a las variables $\eta\bar{\eta}$ (ver reglas de diferenciación e integración en (2.3.3) y (2.3.4)). Después de realizar la integración obtenemos la siguiente acción en sus componentes

$$S_{grav} = \int \Big\{ -\frac{1}{2}\Big(\frac{R(DR)^2}{N} - 2iR\bar{\lambda}D\lambda + NRB^2 - NB\bar{\lambda}\lambda\Big) + \tag{5.16}$$

$$+N\sqrt{k}RB - N\sqrt{k}\bar{\lambda}\lambda - \frac{\sqrt{k}}{2}R(\bar{\psi}\lambda - \psi\bar{\lambda})\Big\}dt$$

La acción (5.16) es invariante bajo las transformaciones supersimétricas (5.6). El campo auxiliar $B(t)$ puede ser obtenido de las ecuaciones de movimiento, y después de sustituirlo en la acción y haciendo la reedifinición de los campos $\lambda \to R^{-1/2}\lambda$ y $\bar{\lambda} \to R^{-1/2}\bar{\lambda}$ obtenemos

$$S_{grav} = \int \Big\{ -\frac{1}{2N}R(DR)^2 + i\bar{\lambda}D\lambda - \frac{\sqrt{k}}{2}\sqrt{R}(\bar{\psi}\lambda - \psi\bar{\lambda}) + \frac{\sqrt{k}}{2R}N\bar{\lambda}\lambda + \frac{1}{2}kNR\Big\}dt. \tag{5.17}$$

Dada la acción supersimétrica pasemos a la formulación hamiltoniana, para esto definamos los momentos $\pi_R$ conjugados a $R(t)$ como

$$\pi_R = -\frac{R}{N}DR = -\frac{R}{N}\Big[\dot{R} - \frac{i}{2\sqrt{R}}(\bar{\psi}\lambda + \psi\bar{\lambda})\Big], \tag{5.18}$$

con respecto a los paréntesis canónicos de Poisson $\{R, \pi_R\} = 1$, y para los momentos $\pi_\lambda$ y $\pi_{\bar{\lambda}}$ conjugados a las variables fermiónicas $\lambda$ y $\bar{\lambda}$ se tienen las siguientes constricciones

$$\Pi_{\bar{\lambda}} \equiv \pi_{\bar{\lambda}} + \frac{i}{2}\lambda \approx 0, \qquad \Pi_\lambda \equiv \pi_\lambda + \frac{i}{2}\bar{\lambda} \approx 0. \tag{5.19}$$

estas constricciones son de segunda clase, y pueden ser eliminadas mediante la procedura de Dirac. El resultado de éste procedimiento es la eliminación de los momentos conjugados a las variables fermiónicas, quedando solamente los siguientes paréntesis de Dirac diferentes de cero

$$\{\lambda, \bar{\lambda}\}^* = -i, \qquad \{R, \pi_R\}^* = \{R, \pi_R\} = 1. \tag{5.20}$$

En una teoría cuántica, los paréntesis de Dirac (5.20) deben ser reemplazados por conmutadores o anticonmutadores. Es decir,

$$[R, \pi_R] = i, \qquad \{\lambda, \bar{\lambda}\} = 1. \tag{5.21}$$

De la acción (5.17) uno obtiene las constricciones de primera clase variando respecto a $N(t)$, $\psi(t)$, $\bar{\psi}(t)$ y $V(t)$

$$H = -\frac{\pi_R^2}{2R} - \frac{kR}{2} + \frac{\sqrt{k}}{2R}\bar{\lambda}\lambda, \qquad \mathcal{F} = \bar{\lambda}\lambda,$$

$$S = \Big(\frac{\pi_R}{\sqrt{R}} - i\sqrt{k}\sqrt{R}\Big)\lambda, \qquad \bar{S} = \Big(\frac{\pi_R}{\sqrt{R}} + i\sqrt{k}\sqrt{R}\Big)\bar{\lambda}. \tag{5.22}$$

Estas constricciones son debido a la invariancia de la acción (5.17) bajo las transformaciones locales. El hamiltoniano general es la suma de todas las constricciones

$$H_G = NH + \frac{i}{2}\bar{\psi}S + \frac{i}{2}\psi\bar{S} + \mathcal{F}(-\frac{V}{2}). \tag{5.23}$$

En una teoría cuántica las constricciones de primera clase imponen condiciones a la función de onda, tales que para cierto estado físicamente permitido se deben obedecer las siguientes constricciones cuánticas

$$H|\psi>= 0, \qquad S|\psi>= 0, \qquad \bar{S}|\psi>= 0, \qquad \mathcal{F}|\psi>= 0, \tag{5.24}$$

éstas constricciones cuánticas son obtenidas cuando uno cambia las variables dinámicas por operadores $\pi_R = -i\frac{d}{dR}$ y para los grados de libertad fermiónicos se escoge una representación adecuada. Para los generadores cuánticos $H, S, \bar{S}$ y $\mathcal{F}$ obtenemos la siguiente super-álgebra cerrada

$$\{S, \bar{S}\} = -2H, \qquad [S, H] = 0, \qquad [\mathcal{F}, S] = -S,$$

$$S^2 = \bar{S}^2 = 0, \qquad [\bar{S}, H] = 0, \qquad [\mathcal{F}, \bar{S}] = \bar{S}, \tag{5.25}$$

donde $H$ es el hamiltoniano del sistema, $S$ es la carga supersimétrica compleja de la mecánica cuántica supersimétrica $n = 2$ y $\mathcal{F}$ es el operador fermiónico.

Es importante mencionar que en la teoría de supergravedad en cuatro dimensiones naturalmente existe la constricción de Lorentz [18], la cual corresponde a las transformaciones locales de Lorentz. Esta misma constricción está presente y en la formulación tetrádica de la gravedad. Sin embargo, cuando uno hace la reducción de la gravedad a los modelos cosmológicos tal constricción no existe. Una reducción correcta para los fermiones en la acción de la supergravedad, en la cual se utilizan espinores que conmutan sobre las configuraciones espaciales nos lleva a que la constricción de Lorentz se reduce a la constricción correspondiente $\mathcal{F} = \bar{\lambda}\lambda$ de las transformaciones locales del grupo $U(1)$ en el caso de la $n = 2$ susy local y de $SU(2)$ en el caso de la $n = 4$ susy local, la cual corresponde al grupo de holonomías de las configuraciones espaciales en el caso de $n = 4$ ó de su subgrupo en el caso de $n = 2$.

Cabe mencionar que los generadores (5.22) fueron encontrados en los trabajos [17,56] utilizando el método llamado simetría escondida en los modelos cosmológicos, pero el superalgebra (5.25) de esos generadores corresponde a una simetría global. La supersimetría local del subgrupo de reparametrización global sale de los generadores (5.22). Entonces podemos decir que la acción (5.17) tiene la forma de versión localizada en la $N = 2$ mecánica cuántica supersimétrica. Los generadores (5.22) satisfacen el superalgebra (5.25). El caso para $k = -1$ requiere de algunos comentarios. En tal caso el tercer término en el hamiltoniano de (5.22) lo hace no-hermitiano, éste es el modelo isotrópico correspondiente al modelo tipo Bianchi V. Es bien conocido [59] que en la cosmológía cuántica estándar, la cuantización de los modelos tipo Bianchi B guardan ciertos problemas. Sin embargo, no está claro si la no-hermiticidad del hamiltoniano (5.24) para $k = -1$ es consecuencia de las dificultades que se tienen en la cosmología estándar. De todas maneras éste caso reserva un estudio más cuidadoso.

# Conclusiones

En base a una $n = 2$ supersimetría local la acción de supercampo para el modelo cosmológico de FRW ha sido obtenida. Se mostró que la acción (5.17) tiene la forma de versión localizada de la $N = 2$ mecánica cuántica supersimétrica, es decir, los operadores de supercarga constituyen la "raíz cuadrada" del operador hamiltoniano, como en el caso de otros modelos en la cosmología cuántica supersimétrica [18]. Debido al álgebra que cumplen éstos generadores (5.25), la ecuación de Wheeler-DeWitt (ecuación de segundo orden) puede ser reemplazada por los dos operadores de supercarga, los cuales constituyen su "raíz cuadrada". Además la aniquilación de la función de onda por los operadores de supercarga constituyen ahora un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden acopladas (ecuaciones tipo Dirac) en el minisuperespacio.

Los trabajos involucrados en ésta sección son;


1.- O. Obregón, J.J. Rosales and V.I. Tkach, Phys. Rev. D**53**, R1750, (1996).

2.- J.J. Rosales, V.I, Tkach and O. Obregón, Proceedings in Workshops on Particles and Fields and Phenomenology of Fundamental Interactions, AIP Press 517-520, Puebla, Mexico (1995).

# 6.- Acción Supersimétrica para los Modelos Cosmológicos tipo Bianchi

Una 3-geometría espacialmente homogénea es una 3-variedad sobre la cual uno de los grupos tridimensionales de Lie actúa transitivamente [60]. De tal manera, que sobre la 3-variedad existen tres vectores de Killing linealmente independientes $\xi_i$ $i = 1, 2, 3$ los cuales satisfacen el álgebra de Lie $[\xi_i, \xi_j] = C^k_{ij}\xi_k$, donde $C^k_{ij} = -C^k_{ji}$ son las constantes de estructura del grupo. los grupos de Lie tridimensionales han sido clasificados por Bianchi [ver 61] en nueve posibles conjuntos de constantes de estructura $C^k_{ij}$.

Para los modelos cosmológicos tipo Bianchi la métrica en el minisuperespacio puede ser escrita en coordenadas generalizadas $q^\lambda = (\alpha, \beta_+, \beta_-)$ como

$$dS^2 = G_{\mu\nu}(q^\lambda)dq^\mu dq^\nu. \tag{6.1}$$

La métrica en el minisuperespacio es fijada hasta un factor conforme escrito como $\exp[2\omega(q)$ [61]. Todos los modelos Bianchi son conformalmente planos

$$G_{\mu\nu}(q) = e^{2\Omega(q)}G^{(0)}_{\mu\nu}, \tag{6.2}$$

con $G^0_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1)$. El inverso de éste factor conforme aparece en el potencial de cada modelo *i.e.*

$$\mathcal{U}(q) = e^{-2\Omega(q)}\mathcal{U}_0(q), \tag{6.3}$$

con el potencial $\mathcal{U}_0 = -{}^3g\,{}^3R$, donde ${}^3g$ es el determinante y ${}^3R$ es el escalar de curvatura de la métrica tridimensional. La acción para los modelos cosmológicos tipo Bianchi puede ser escrita como

$$S = \frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{N}G_{\mu\nu}(q^\lambda)\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu + N\mathcal{U}(q^\lambda)\right]dt. \tag{6.4}$$

La acción (6.4) es invariante bajo reparametrización de $t' \to t + a(t)$, si las transformaciones de $q^\mu(t)$ y $N(t)$ son definidas como

$$\delta q^\mu(t) = a(t)\dot{q}^\mu, \qquad \delta N(t) = (aN)^{\cdot}. \tag{6.5}$$

Es decir, $q^\mu(t)$ se tansforma como un escalar y $N(t)$ como un vector unidimensional y su dimensionalidad es inversa a la de $a(t)$. Explícitamente encontramos

$$\delta S = \frac{1}{2}\int \left[\frac{a}{N}G_{\mu\nu}(q^\lambda)\dot{q}^\mu\dot{q}^\nu + aN\mathcal{U}(q^\lambda)\right]^{\cdot} dt, \tag{6.6}$$

de tal manera que la acción para los modelos cosmológicos tipo Bianchi es invariante. En la acción (6.4) $\mathcal{U}(q)$ corresponde al potencial, el cual depende del modelo en cuestión. Este potencial puede ser escrito de la siguiente manera

$$\mathcal{U}(q) = \frac{1}{2} G^{\mu\nu} \frac{\partial \phi(q)}{\partial q^{\mu}} \frac{\partial \phi(q)}{\partial q^{\nu}}. \tag{6.7}$$

Gracias a la existencia de ésta relación la simetría escondida para el modelo cosmológico Bianchi IX fué encontrada [17]. Esto permitió construir una mecánica cuántica supersimétrica correspondiente [30]. En éste caso la supersimetría es global. Por otro lado, uno puede exigir que los modelos cosmológicos sean invariantes bajo un principio más fundamental como lo son las transformaciones locales. Por tal razón, una simetría extendida debe ser invariante bajo transformaciones locales. debido a la generalización del parámetro temporal usual $t$ a $(t, \eta, \bar{\eta})$, los campos $q^{\mu}(t)$ y $N(t)$ son vistos como supercampos $\P^{\mu}(t, \eta, \bar{\eta})$ , $I\!N(t, \eta, \bar{\eta})$ y la supermétrica $G_{\mu\nu}$ es ahora una función del supercampo $\P^{\lambda}$. Entonces, la generalización de la acción (6.4) para los modelos cosmológicos tipo Bianchi a una acción de supercampo tiene la siguiente forma

$$S = \frac{1}{2} \int \left[ I\!N^{-1} G_{\mu\nu}(\P^{\lambda}) \bar{D}_{\eta} \P^{\mu} D_{\eta} \P^{\nu} + \phi(\P^{\lambda}) \right] d\eta d\bar{\eta} dt. \tag{6.8}$$

Note, que en la acción (6.4) $N(t)$ aparece en el denominador del primer término. Esto es debido a la presencia de la derivada temporal de $q^{\mu}(t)$, y en al segundo término el cual es el término de interacción, $N(t)$ está en el numerador. A diferencia de la acción de supercampo (6.8) donde $I\!N(t, \eta, \bar{\eta})$ esta ausente en el numerador del segundo término. Esto se debe a que $BerE_B^A$ tiene las siguientes componentes $E_B^A(t, \eta, \bar{\eta})$ [19]: $E_{\eta}^{\eta} = I\!N^{\frac{1}{2}}(t, \eta, \bar{\eta}), E_{\bar{\eta}}^{\bar{\eta}} = I\!N^{\frac{1}{2}}(t, \eta, \bar{\eta}), E_t^{\eta} = -i\bar{\eta} I\!N(t, \eta, \bar{\eta}), E_t^{\bar{\eta}} = -i\eta I\!N(t, \eta, \bar{\eta}), E_t^t = I\!N(t, \eta, \bar{\eta})$ y $E_{\eta}^{\bar{\eta}} = E_{\bar{\eta}}^{\eta} = E_{\eta}^t = E_{\bar{\eta}}^t = 0$. Entonces el super-Jacobiano de las transformaciones generalizadas (5.5) es igual a uno $BerE_B^A = (I\!N^{\frac{1}{2}} I\!N^{\frac{1}{2}})^{-1} I\!N = 1$ y $dt d\eta d\bar{\eta}$ es un elemento de volúmen invariante. El inverso del super-dreibein $E_B^A$ tiene como derivadas supercovariantes $\widetilde{D}_{\eta} = E_{\eta}^B \partial_B = I\!N^{-\frac{1}{2}} D_{\eta}, \widetilde{\bar{D}}_{\eta} = E_{\bar{\eta}}^B \partial_B = I\!N^{\frac{1}{2}} \bar{D}_{\eta}$. Por consiguiente, el superpotensial $\phi(\P^{\lambda})$ en la acción de supercampo (6.8) es invariante bajo las transformadas (5.5 ) sin $I\!N(t, \eta, \bar{\eta})$. En la acción (6.8) $I\!N(t, \eta, \bar{\eta})$ es el supercampo real de la gravedad, el cual ha sido definido anteriormente (5.9). El supercampo real $\P^{\mu}(t, \eta, \bar{\eta})$ tiene la forma

$$\P^{\mu}(t, \eta, \bar{\eta}) = q^{\mu}(t) + i\eta \lambda'^{\mu}(t) + i\bar{\eta} \bar{\lambda}'^{\mu}(t) + B'^{\mu}(t) \eta \bar{\eta}, \tag{6.9}$$

y es un supercampo de "materia" , donde $\lambda'^{\mu} = N^{1/2}\lambda^{\mu}$ y $B'^{\mu} = B^{\mu}N - \frac{1}{2}(\bar{\psi}\lambda^{\mu} - \psi\bar{\lambda}^{\mu})$. Las componentes de éste supercampo $\lambda^{\mu}(t)$ y $\bar{\lambda}^{\mu}(t)$ son grados de libertad dinámicos remanentes de la parte espacial del campo de Rarita-Schwinger, obtenidas de la reducción de las teorías de supergravedad pura a modelos cosmológicos, los cuales son los supercompañeros de $q^{\mu}$. Las componentes $B^{\mu}(t)$ del supercampo $\P^{\mu}(t,\eta,\bar{\eta})$ son grados de libertad auxiliares. Las transformaciones del supercampo escalar $\P^{\mu}(t,\eta,\bar{\eta})$, son obtenidas de (5.6)

$$\delta\P^{\mu} = I\!\!\Lambda\dot{\P}^{\mu} + \frac{i}{2}\bar{D}_{\eta}I\!\!\Lambda D_{\eta}\P^{\mu} + \frac{i}{2}D_{\eta}I\!\!\Lambda\bar{D}_{\eta}\P^{\mu}. \tag{6.10}$$

Las transformaciones para las componentes del supercampo $\P^{\mu}(t,\eta,\bar{\eta})$ se siguen de (6.10) y tienen la forma

$$\begin{aligned}
\delta q^{\mu} &= a\dot{q}^{\mu} + \frac{i}{2}(\bar{\beta}\lambda^{\mu} + \beta\bar{\lambda}^{\mu}),\\
\delta\lambda^{\mu} &= a\dot{\lambda}^{\mu} + \frac{\beta}{2}\left(\frac{Dq^{\mu}}{N} - iB^{\mu}\right) - \frac{i}{2}\hat{b}\lambda^{\mu},\\
\delta B^{\mu} &= a\dot{B}^{\mu} + \frac{1}{2N}\Bigg[\beta D\bar{\lambda}^{\mu} - \frac{\beta}{2}\left(\frac{Dq^{\mu}}{N} + iB^{\mu}\right)\bar{\psi} - \bar{\beta}D\lambda^{\mu} -\\
&\quad -\frac{\bar{\beta}}{2}\left(\frac{Dq^{\mu}}{N} - iB^{\mu}\right)\psi\Bigg],
\end{aligned} \tag{6.11}$$

donde $Dq^{\mu} = \dot{q}^{\mu} - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\lambda^{\mu} + \psi\bar{\lambda}^{\mu})$ es una derivada supercovariante y $D\lambda^{\mu} = \dot{\lambda}^{\mu} - \frac{i}{2}V\lambda^{\mu}$ es una $U(1)$ derivada covariante. Las transformaciones infinitesimales de la acción (6.8) bajo las transformaciones (5.10) y (6.10) tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\delta S = \frac{i}{2}\int\Bigg\{&\bar{D}_{\eta}\left[I\!\!\Lambda D_{\eta}\left(\frac{G_{\mu\nu}}{2I\!\!N}\bar{D}_{\eta}\P^{\mu}D_{\eta}\P^{\nu} + +\phi(\P^{\rho})\right)\right] +\\
&+ D_{\eta}\left[I\!\!\Lambda\bar{D}_{\eta}\left(\frac{G_{\mu\nu}}{2I\!\!N}\bar{D}_{\eta}\P^{\mu}D_{\eta}\P^{\nu} + \phi(\P^{\rho})\right)\right]\Bigg\}d\eta d\bar{\eta}dt.
\end{aligned} \tag{6.12}$$

De donde podemos ver que bajo la integración se encuentra una derivada total. Es decir, la acción (6.8) es invariante bajo las supertransformaciones locales (5.6).

## La Acción en sus Componentes

Para escribir la acción (6.8) en componentes del supercampo $I\!\!N(t,\eta,\bar{\eta})$ y el supercampo "material" $\P^{\mu}(t,\eta,\bar{\eta})$ es necesario integrar la acción de supercampos sobre las coordenadas de Grassmann $\eta, \bar{\eta}$. Después de integrar obtenemos la siguiente acción

$$
\begin{aligned}
S = \int \Big[ & \frac{1}{2N} G_{\mu\nu} Dq^\mu Dq^\nu + \frac{N}{2} B^\mu B_\mu - \frac{i}{2} G_{\mu\nu} \bar{\lambda}^\mu \widetilde{D} \lambda^\mu - \frac{i}{2} G_{\mu\nu} \lambda^\mu \widetilde{D} \bar{\lambda}^\nu \\
& + \frac{N}{4} \frac{\partial^2 G_{\mu\nu}}{\partial q^\rho \partial q^\sigma} (\lambda^\rho \bar{\lambda}^\sigma + \lambda^\sigma \bar{\lambda}^\rho) \bar{\lambda}^\mu \lambda^\nu - N \Gamma_{\rho,\mu\nu} \bar{\lambda}^\mu \lambda^\nu B^\rho \\
& + \frac{N}{2} B^\mu \frac{\partial \phi}{\partial q^\mu} - \frac{1}{4} (\bar{\psi} \lambda^\mu - \psi \bar{\lambda}^\mu) \frac{\partial \phi}{\partial q^\mu} - \frac{N}{4} \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^\mu \partial q^\nu} (\bar{\lambda}^\nu \lambda^\mu + \bar{\lambda}^\mu \lambda^\nu) \Big] dt,
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

donde $Dq^\mu = \dot{q}^\mu - \frac{i}{2}(\bar{\psi}\lambda^\mu + \psi\bar{\lambda}^\mu)$ , $\widetilde{D}\lambda^\mu = D\lambda^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\dot{q}^\rho\lambda^\nu = \dot{\lambda}^\mu - \frac{i}{2}V\lambda^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\dot{q}^\rho\lambda^\nu$ y $\Gamma_{\rho,\mu\nu}$ son los símbolos de Christoffel en el minisuperespacio con la métrica $G_{\mu\nu}(q^\rho)$. El término $\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\dot{q}^\nu\lambda^\rho$ en la derivada covariante $\widetilde{D}\lambda^\mu$ nos lleva a la ley de transformación homogénea de ésta derivada cuando uno escoje coordenadas de parametrización de $q^\mu(t)$ en el minisuperespacio. En la acción (6.13) las componentes $B^\mu(t)$ del supercampo $\P^\mu(t,\eta,\bar{\eta})$ aparecen sin derivadas, es decir, son variables no dinámicas. La solución para la ecuación de $B^\mu(t)$ es algebráica y puede ser escrita como

$$
B^\mu(t) = \Gamma^\mu{}_{\rho\nu}\bar{\lambda}^\rho\lambda^\nu - \frac{1}{2}G^{\mu\nu}\frac{\partial\phi}{\partial q^\nu}, \tag{6.14}
$$

y después de sustituirla nuevamente en la acción (6.13), tenemos

$$
\begin{aligned}
S = \int \Big\{ & \frac{1}{2N} G_{\mu\nu} Dq^\mu Dq^\nu - \frac{N}{2} G^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - i G_{\mu\nu} \bar{\lambda}^\mu \widetilde{D} \lambda^\nu + \\
& + \frac{N}{2} R_{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\lambda}^\mu \lambda^\nu \bar{\lambda}^\rho \lambda^\sigma - N \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \bar{\lambda}^\mu \lambda^\nu + \frac{1}{2} \psi \bar{\lambda}^\mu \partial_\mu \phi \\
& - \frac{1}{2} \bar{\psi} \lambda^\mu \partial_\mu \phi \Big\} dt,
\end{aligned}
\tag{6.15}
$$

donde todos los términos de la acción (6.15) tienen una forma covariante y no dependen del sistema escogido en el minisuperespacio, *i.e.* ellos estan dados por el tensor de curvatura $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ y derivadas covariantes $\nabla_\mu$ sobre una variedad con la métrica $G_{\mu\nu}(q)$. En la acción (6.15) los campos $N(t), \psi(t), \bar{\psi}(t)$y $V(t)$ no son términos cinemáticos. En nuestro caso de supergravedad unidimensional estos campos juegan el papel de multiplicadores de Lagrange.

## Análisis Hamiltoniano

Para cuantizar nuestro modelo usamos el hecho de que los fermiones pueden ser escritos como $\lambda^a = e^a_\mu \lambda^\mu$, lo cual relaciona fermiones originales por medio de la base ortogonal (vierbein) $e^a_\mu$ y su inversa $e^\mu_a$. Entonces la métrica es representada por $G_{\mu\nu}(q^\lambda)$

$$G_{\mu\nu}(q) = e^a_\mu(q) e^b_\nu(q) \eta_{ab}, \tag{6.16}$$

con $\eta_{ab} = diag(-1,1,1)$. El momento conjugado a $q^\mu(t)$ esta dado clásicamente por la siguiente expresión

$$\pi_\mu = \frac{1}{N} G_{\mu\nu} D q^\nu - i\omega_{\mu(a)(b)} \bar{\lambda}^{(a)} \lambda^{(b)}, \tag{6.17}$$

con respecto a los paréntesis de Poisson $\{q_\mu, \pi^\nu\} = \delta^\nu_\mu$, donde la conección de espin $\omega_{\mu(a)(b)}$ es una funcion de $q^\mu$ definida por

$$\omega_{\mu(a)(b)} = -e_{(a)\nu}(\partial_\mu e^\nu_{(b)} + \Gamma^\nu_{\mu\lambda} e^\lambda_{(b)}), \tag{6.18}$$

si la métrica $G_{\mu\nu}(q)$ es conforme con la métrica constante *i.e.* $G_{\mu\nu}(q) = e^{2\Omega(q)}\ G^{(0)}_{\mu\nu}$ con la parametrización $(\alpha, \beta_+, \beta_-)$, como es el caso de los modelos cosmológicos tipo Bianchi, entonces tenemos

$$\omega_{\mu(a)(b)} = \frac{\partial \Omega}{\partial q^\lambda}(e^\lambda_{(a)} e_{(b)\mu} - e^\lambda_{(b)} e_{(a)\mu}). \tag{6.19}$$

Como es usual con los sistemas fermiónicos, el cálculo de los momentos conjugados a variables que anticomutan originan constricciones primarias, las cuales representaremos como

$$\bar{\sqcap}_\mu \equiv \bar{\Pi}_\mu - \frac{i}{2}\lambda_\mu \approx 0 \qquad\qquad \sqcap_\nu \equiv \Pi_\nu - \frac{i}{2}\bar{\lambda}_\nu \approx 0, \tag{6.20}$$

donde $\bar{\Pi}_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}^\mu}$ y $\Pi_\nu = \frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\lambda}}^\nu}$. Las constricciones $\bar{\sqcap}_\mu$ and $\sqcap_\nu$ son de segunda clase y pueden ser eliminadas según la procedura de Dirac [3]. Definamos la matriz de constricción $C_{\mu\nu}$ como el paréntesis de Poisson de dos constricciones

$$C_{\mu\nu} = \{\bar{\sqcap}_\mu, \sqcap_\nu\} = -iG_{\mu\nu} \tag{6.21}$$

y su matríz inversa $(C^{-1})_{\mu\nu} = iG^{\mu\nu}$. Los Paréntesis de Dirac $\{\ ,\ \}^*$ son entonces definidos por

$$\{A,B\}^* = \{A,B\} - \{A,\bar{\sqcap}_\mu\} C^{-1}_{\mu\nu} \{\sqcap_\nu, B\} - \{A, \sqcap_\mu\} C^{-1}_{\mu\nu} \{\bar{\sqcap}_\nu, B\}. \tag{6.22}$$

Como resultado de ésta procedura es la eliminación del momento conjugado a las variables fermiónicas, quedando únicamente los siguientes paréntesis de Dirac

$$\{q_\mu, \pi^\nu\}^* = \delta^\nu_\mu, \qquad\qquad \{\lambda_\mu, \bar{\lambda}^\nu\}^* = -i\delta^\nu_\mu. \tag{6.23}$$

Después de la cuantización de los paréntesis de Dirac (6.23) obtenemos las relaciones de conmutación y anticonmutación del álgebra canónica

$$[q^\mu, \pi_\nu] = i\delta^\mu_\nu, \qquad \{\lambda^\mu, \bar{\lambda}_\nu\} = \delta^\mu_\nu, \tag{6.24}$$

esto lo podemos escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} &[p_\mu, p_\nu] = -R_{\mu\nu\lambda\rho}\bar{\lambda}^\lambda\lambda^\rho, \qquad [p_\mu, \bar{\lambda}^\nu] = i\Gamma^\nu_{\mu\rho}\bar{\lambda}^\rho, \\ &[q^\mu, p_\nu] = i\delta^\mu_\nu, \qquad [p_\mu, \lambda^\nu] = i\Gamma^\nu_{\mu\lambda}\lambda^\lambda, \end{aligned} \tag{6.25}$$

donde $p_\mu = \pi_\mu + i\omega_{\mu(a)(b)}\bar{\lambda}^{(a)}\lambda^{(b)}$ son los momentos covariantes y $\pi_\mu$ es el momento canónico conjugado a $q^\mu$.

De la acción (6.15) uno obtiene las constricciones de primer clase variando la acción respecto a $N(t), \bar{\psi}(t), \psi(t)$ y $V(t)$. Obtenemos

$$H = \frac{1}{2}p^\mu p_\mu - \frac{1}{2}R_{\mu\nu\sigma\rho}\bar{\lambda}^\mu\lambda^\nu\bar{\lambda}^\sigma\lambda^\rho + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\bar{\lambda}^\mu\lambda^\nu, \tag{6.26}$$

$$S = (p_\mu - i\partial_\mu\phi)\lambda^\mu, \tag{6.27}$$

$$\bar{S} = (p_\mu + i\partial_\mu\phi)\bar{\lambda}^\mu, \tag{6.28}$$

$$\mathcal{F} = \bar{\lambda}^\mu\lambda_\mu. \tag{6.29}$$

Las constricciones (6.26 - 6.29) son debido a la invariancia de la acción (6.15) bajo las transformaciones locales supersimétricas (5.5). El Hamiltoniano general es la suma de todas éstas constricciones, es decir

$$\begin{aligned} H_G &= NH + \frac{i\bar{\psi}}{2}S + \frac{i\psi}{2}\bar{S} + \mathcal{F}\left(\frac{V}{2}\right) \\ &= N\left(\frac{1}{2}p^\mu p_\mu - \frac{1}{2}R_{\mu\nu\sigma\rho}\bar{\lambda}^\mu\lambda^\nu\bar{\lambda}^\sigma\lambda^\rho + \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \nabla_\mu\nabla_\nu\phi\bar{\lambda}^\mu\lambda^\nu\right) \\ &+ \frac{i}{2}\bar{\psi}\lambda^\mu p_\mu + \frac{\bar{\psi}}{2}\lambda^\mu\partial_\mu\phi + \frac{i\psi}{2}\bar{\lambda}^\mu p_\mu - \frac{\psi}{2}\bar{\lambda}^\mu\partial_\mu\phi + \frac{1}{2}\bar{\lambda}^\mu\lambda_\mu V. \end{aligned} \tag{6.30}$$

En ésta expresión las constricciones primarias correspondientes a los momentos conjugados de las variables $N, \psi, \bar{\psi}$ y $V$ estan ausentes. Esto es debido a que sus momentos conjugados son cero. Entonces, en nuestro caso de supergravedad unidimensional los campos

$N, \psi, \bar{\psi}$ y $V$ juegan el papel de campos de calibración, para los cuales la derivada temporal es arbitraria, éstos no son campos dinámicos. Por ésta razón podemos eliminarlos del Hamiltoniano general $H_G$. En una teoría cuántica las constricciones de primera clase (626-6.29) asociadas con la invariancia de la acción (6.15) son condiciones sobre la función de onda, así que ciertos estados físicos permitibles deben obedecer las siguientes constricciones cuánticas $H \mid \psi >= 0, S \mid \psi >= 0, \overline{S} \mid \psi >= 0$ y $\mathcal{F} \mid \psi > 0$, las cuales son obtenidas cuando uno cambia las variables clásicas por operadores con la ragla de conmutación (6.24).

Para los generadores cuánticos $H, S, \bar{S}$ y $\mathcal{F}$ obtenemos la siguiente super-álgebra cerrada

$$
\begin{aligned}
[S, \bar{S}] = 2H \qquad [S, H] = 0 \qquad [\mathcal{F}, S] = -S \\
S^2 = \bar{S}^2 = 0 \qquad [\bar{S}, H] = 0 \qquad [\mathcal{F}, \bar{S}] = \bar{S},
\end{aligned}
\tag{6.31}
$$

donde $H$ es el Hamiltoniano, $S$ es la carga supersimétrica de la $n = 2$ mecánica cuántica supersimétrica y $\mathcal{F}$ es el operador fermiónico.

# Conclusiones

En ésta sección hemos obtenido la acción general de supercampos (6.8) en los modelos cosmológicos tipo Bianchi. Dado el potencial y la métrica de un modelo en particular, uno obtiene fácilmente el modelo supersimétrico.

El trabajo de ésta sección es:


1.- V.I. Tkach, J.J. Rosales and O. Obregón, Class. Quantum Grav. **13**, 2349 (1996).

# 7.- Rompimiento de la supersimetría en el modelo de FRW

El propósito de éste trabajo es estudiar el modelo supersimétrico de FRW interactuando con un supermultiplete de materia escalar real, así como el rompimiento espontáneo de la supersimetría para los casos $k = 0$ y $k = 1$.

La descripción de supercampo para el modelo de FRW sin materia fué obtenida en la sección (5) de ésta tésis (ver 5.8). Esta acción tiene la siguiente forma

$$S_{grav} = \frac{1}{\kappa^2}\int\left\{-\frac{I\!N^{-1}}{2} I\!R\bar{D}_{\bar{\eta}} I\!R D_\eta I\!R + \frac{\sqrt{k}}{2} I\!R^2\right\}d\eta d\bar{\eta}dt, \tag{7.1}$$

en ésta acción hemos introducido el parámetro $\kappa = \sqrt{\frac{4\pi G}{3}}$, donde $G$ es la constante de Newton para la gravedad. En la acción (7.1) los supercampos $I\!N(t,\eta,\bar{\eta})$ y $I\!R(t,\eta,\bar{\eta})$ son los mismos que estan definidos en (5.9) y (5.12) respectivamente. Escribamos la acción (7.1) en sus componentes $R(t)$, $\lambda(t)$, $\bar{\lambda}(t)$, $B(t)$, $N(t)$, $\psi(t)$, $\bar{\psi}(t)$ y $V(t)$ (ver 5.16)

$$\begin{aligned} S_{grav} = \int\Big\{&-\frac{R}{2N\kappa^2}(DR)^2 + iR\bar{\lambda}D\lambda - \frac{NR}{2}B^2 + \frac{N\kappa}{2}B\bar{\lambda}\lambda + \frac{\sqrt{k}}{\kappa}RNB- \\ &-\frac{R\sqrt{k}}{2\kappa}(\bar{\psi}\lambda - \psi\bar{\lambda}) - N\sqrt{k}\bar{\lambda}\lambda\Big\}dt. \end{aligned} \tag{7.2}$$

Esta acción es invariante bajo las transformaciones (5.11) y (5.14).

## Acción supersimétrica para el campo material

Ahora vamos a estudiar uno de los casos más simples de materia. Consideremos el supermultiplete de materia escalar real $\Phi(t,\eta,\bar{\eta})$, el cual consiste de un campo de materia real espacialmente homogéneo $\varphi(t)$, dos grados de libertad fermiónicos $\chi(t)$ y $\bar{\chi}(t)$, un campo bosónico auxiliar $F(t)$ asi como un superpotencial arbitrario, el cual depende solamente del supercampo material, *i.e.* $g(\Phi)$. Las componentes del supercampo material real se pueden escribir de la siguiente forma

$$\Phi(t,\eta,\bar{\eta}) = \varphi(t) + i\eta\chi'(t) + i\bar{\eta}\bar{\chi}'(t) + F'(t)\eta\bar{\eta}, \tag{7.3}$$

donde $\chi'(t) = N^{1/2}\chi(t)$, $\bar\chi'(t) = N^{1/2}\bar\chi(t)$ y $F'(t) = NF - \frac{1}{2}(\bar\psi\chi - \psi\bar\chi)$. Las transformaciones del superespacio (5.6) generan las reglas de transformación del supercampo material. Tenemos en analogía a (5.13)

$$\delta\Phi = I\!\!\Lambda\dot\Phi + \frac{i}{2}\bar D_\eta I\!\!\Lambda D_\eta\Phi + \frac{i}{2}D_\eta I\!\!\Lambda\bar D_\eta\Phi. \tag{7.4}$$

De donde podemos obtener fácilmente las reglas de transformación para las componentes del supercampo $\varphi(t), \chi(t), \bar\chi(t)$ y $F(t)$. Tenemos

$$\begin{aligned}
\delta\varphi &= a\dot\varphi + \frac{i}{2}(\bar\beta\chi + \beta\bar\chi),\\
\delta\chi &= a\dot\chi + \frac{\beta}{2}\left(\frac{D\varphi}{N} - iF\right) + \frac{i}{2}\hat b\chi,\\
\delta\bar\chi &= a\dot{\bar\chi} + \frac{\bar\beta}{2}\left(\frac{D\varphi}{N} + iF\right) - \frac{i}{2}\hat b\bar\chi,\\
\delta F &= a\dot F + \frac{1}{2N}(\beta\hat D\bar\chi - \bar\beta\hat D\chi),
\end{aligned} \tag{7.5}$$

donde $\hat D\chi = D\chi - \frac{1}{2}\left(\frac{D\varphi}{N} - iF\right)\psi$, $\hat D\bar\chi = D\bar\chi - \frac{1}{2}\left(\frac{D\varphi}{N} + iF\right)\bar\psi$ y $D\varphi = \dot\varphi - \frac{i}{2}\left(\bar\psi\chi + \psi\bar\chi\right)$ son derivadas supercovariantes, $D\chi = \dot\chi - \frac{i}{2}V\chi$ y $D\bar\chi = \dot{\bar\chi} + \frac{i}{2}V\bar\chi$ son las $U(1)$ derivadas covariantes. Entonces la acción de supercampo para el supermultiplete de materia escalar, la cual es invariante bajo las transformaciones (5.10), (5.13) y (7.4) tiene la forma

$$S_{matt} = \int\left\{\frac{I\!\!N^{-1}}{2}I\!\!R^3\bar D_\eta\Phi D_\eta\Phi - I\!\!R^3 g(\Phi)\right\}d\eta\, d\bar\eta\, dt. \tag{7.6}$$

Las transformaciones infinitesimales de la acción de supercampo bajo las transformaciones (5.10), (5.13) y (7.4) tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\delta S_{matt} = \frac{i}{2}\int\Bigg\{&\bar D_\eta\left[I\!\!\Lambda D_\eta\left(\frac{I\!\!N^{-1}}{2}I\!\!R^3\bar D_\eta\Phi D_\eta\Phi - I\!\!R^3 g(\Phi)\right)\right] +\\
&+ D_\eta\left[I\!\!\Lambda\bar D_\eta\left(\frac{I\!\!N^{-1}}{2}I\!\!R^3\bar D_\eta\Phi D_\eta\Phi - I\!\!R^3 g(\Phi)\right)\right]\Bigg\}d\eta\, d\bar\eta\, dt.
\end{aligned} \tag{7.7}$$

De donde se puede ver que bajo la integración se encuentra una derivada total, es decir, la acción (7.6) es invariante bajo las supertransformaciones (5.5). Después de integrar la acción (7.6) sobre las variables de Grassmann $\eta\bar\eta$ obtenemos la acción en sus componentes, esta tiene la forma

$$
\begin{aligned}
S_{matt} = \int \Bigg\{ & \frac{R^3}{2N}(D\varphi)^2 + \frac{3iR^2}{2}\kappa D\varphi(\bar{\lambda}\chi + \lambda\bar{\chi}) - iR^3\bar{\chi}D\chi + \frac{3\kappa R^2}{2}NB\bar{\chi}\chi - \\
& - 3\kappa R^2 g(\varphi)NB + \frac{N}{2}R^3F^2 + \frac{3NR^2}{2}\kappa F(\lambda\bar{\chi} - \bar{\lambda}\chi) - NR^3F\frac{\partial g}{\partial\varphi} - \\
& - \frac{3\kappa^2R^2}{4}(\bar{\psi}\lambda - \psi\bar{\lambda})\bar{\chi}\chi - 3\kappa^2NR\bar{\lambda}\lambda\bar{\chi}\chi + \frac{R^3}{2}\frac{\partial g}{\partial\varphi}(\bar{\psi}\chi - \psi\bar{\chi}) + \\
& + NR^3\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\bar{\chi}\chi + 3\kappa NR^2\frac{\partial g}{\partial\varphi}(\bar{\chi}\lambda + \bar{\lambda}\chi) + \frac{3}{2}\kappa R^2 g(\varphi)(\bar{\psi}\lambda - \psi\bar{\lambda}) + \\
& + 6\kappa^2 NRg(\varphi)\bar{\lambda}\lambda\Bigg\}\, dt.
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

Esta acción es invariante bajo las leyes de transformación (5.11), (5.14) y (7.5). Podemos ver que en la acción (7.8) aparecen dos campos auxiliares $B(t)$ y $F(t)$, a diferencia de la acción (7.2) donde aparece solamente $B(t)$. Este hecho es debido a que tenemos un campo material interactuando con el modelo cosmológico de FRW. Haciendo una expanción en serie de Taylor para el superpotencial $g(\Phi)$, uno puede escribirlo como $g(\Phi) = g(\varphi) + \frac{\partial g}{\partial\varphi}(\Phi - \varphi) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}(\Phi - \varphi)^2 + \ldots$, con $\Phi$ dada por (7.3). Esta expanción en serie se corta en el segundo término debido a la propiedad, de que $(\Phi - \varphi)$ es nilpotentente. Entonces, el sistema gravedad materia consiste de la suma de las acciones de supercampo, o lo que es equivalente, a la suma de las dos acciones supersimétricas dadas en (7.2) y (7.8). Es decir

$$
S = S_{grav} + S_{matt}. \tag{7.9}
$$

Es claro que la acción (7.9) es invariante bajo las transformaciones locales de la supersimetría (5.5) si las leyes de transformación para las componentes están dadas por (5.11), (5.14) y (7.5). Los campos auxiliares $B(t)$ y $F(t)$ pueden ser determinados variando la acción (7.9) respecto a éstos. Las ecuaciones para estos campos son algebráicas y tienen las siguientes soluciones

$$
B(t) = \frac{\kappa}{2R}\bar{\lambda}\lambda + \frac{\sqrt{k}}{\kappa} + \frac{3\kappa R}{2}\bar{\chi}\chi - 3\kappa Rg(\varphi), \tag{7.10}
$$

$$
F(t) = -\frac{3\kappa}{2R}(\lambda\bar{\chi} - \bar{\lambda}\chi) + \frac{\partial g}{\partial\varphi}, \tag{7.11}
$$

sustituyendo la expresión para éstos campos en la acción (7.9) y haciendo las siguientes reedefiniciones de los campos $\lambda \to R^{-1/2}\lambda, \bar{\lambda} \to R^{-1/2}\bar{\lambda}, \chi \to R^{-3/2}\chi, \bar{\chi} \to R^{-3/2}\bar{\chi}$

obtenemos la siguiente acción supersimétrica

$$
\begin{aligned}
S = \int \Big\{ & -\frac{R}{2\kappa^2 N}(DR)^2 + \frac{NRk}{2\kappa^2} + \frac{R^3}{2N}(D\varphi)^2 + \frac{9}{2}\kappa^2 N R^3 g^2(\varphi) - \\
& - \frac{NR^3}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)^2 - N\sqrt{k}R^2 g(\varphi) + \frac{3i}{2}\kappa D\varphi(\bar{\lambda}\chi + \lambda\bar{\chi}) + i\bar{\lambda}D\lambda - \\
& - i\bar{\chi}D\chi - \frac{N\sqrt{k}}{2R}\bar{\lambda}\lambda - \frac{\sqrt{k}\sqrt{R}}{2\kappa}(\bar{\psi}\lambda - \psi\bar{\lambda}) + \frac{3N\sqrt{k}}{2R}\bar{\chi}\chi - \\
& - \frac{9}{2}\kappa^2 N g(\varphi)\bar{\chi}\chi + \frac{9}{2}\kappa^2 N g(\varphi)\bar{\lambda}\lambda + \frac{3}{2}\kappa N \frac{\partial g}{\partial \varphi}(\bar{\chi}\lambda + \bar{\lambda}\chi) - \\
& - \frac{3\kappa}{4R^{3/2}}(\bar{\psi}\lambda - \psi\bar{\lambda})\bar{\chi}\chi + \frac{R^{3/2}}{2}\frac{\partial g}{\partial \varphi}(\bar{\psi}\chi - \psi\bar{\chi}) + N\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}\bar{\chi}\chi + \\
& + \frac{3}{2}\kappa R^{3/2} g(\varphi)(\bar{\psi}\lambda - \psi\bar{\lambda}) \Big\} dt,
\end{aligned}
\tag{7.12}
$$

Como se puede ver de la acción (7.12), para los campos $N(t), \psi(t), \bar{\psi}(t)$ y $V(t)$ no existe término cinético. Estos campos aparecen como multiplicadores de Lagrange.

# Análisis hamiltoniano

Procedamos con el análisis hamiltoniano de nuestro sistema. Los momentos $\pi_R$ y $\pi_\varphi$ conjugado a $R(t)$ y $\varphi(t)$ respectivamente estan dados por

$$
\begin{aligned}
\pi_R &= -\frac{R}{\kappa^2 N} DR = -\frac{R}{\kappa^2 N}\left[\dot{R} - \frac{i\kappa}{2\sqrt{R}}(\psi\bar{\lambda} + \bar{\psi}\lambda)\right], \\
\pi_\varphi &= \frac{R^3}{N}\left[\dot{\varphi} - \frac{i}{2R^{3/2}}(\bar{\psi}\chi + \psi\bar{\chi})\right] + \frac{3i\kappa}{2}(\bar{\lambda}\chi + \lambda\bar{\chi}).
\end{aligned}
\tag{7.13}
$$

Los paréntesis de Poisson son

$$
\{R, \pi_R\} = 1, \qquad \{\varphi, \pi_\varphi\} = 1. \tag{7.14}
$$

Como en los capítulos anteriores, debido a las variables de Grassmann, tendremos constricciones de segunda clase, las cuales se escriben como

$$
\begin{aligned}
\Pi_\lambda &\equiv \pi_\lambda + \frac{i}{2}\bar{\lambda} \approx 0, & \Pi_{\bar{\lambda}} &\equiv \pi_{\bar{\lambda}} + \frac{i}{2}\lambda \approx 0, \\
\Pi_\chi &\equiv \pi_\chi - \frac{i}{2}\bar{\chi} \approx 0, & \Pi_{\bar{\chi}} &\equiv \pi_{\bar{\chi}} - \frac{i}{2}\chi \approx 0,
\end{aligned}
\tag{7.15}
$$

donde $\pi_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}$ y $\pi_\chi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}}$ son los momentos conjugados a las variables dinámicas que anticonmutan $\lambda(t)$ y $\chi(t)$ respectivamente. Similarmente, para las variables $\bar{\lambda}(t)$ y $\bar{\chi}(t)$. Debido a que las variables $N(t), \psi(t), \bar{\psi}(t)$ y $V(t)$ no son variables dinámicas para éstas el momento conjugado es cero, entonces juegan el papel de multiplicadores de Lagrange. Las constricciones (7.15) son de segunda clase y pueden ser eliminadas siguiendo el procedimiento de Dirac [3]. Para esto definamos la matriz de constricción $C_{ik}(i,k=\lambda,\bar{\lambda},\chi,\bar{\chi})$ como un paréntesis de Poisson, el cual tiene los siguientes elementos matriciales diferentes de cero

$$C_{\bar{\lambda}\lambda} = C_{\lambda\bar{\lambda}} = \{\sqcap_\lambda, \sqcap_{\bar{\lambda}}\} = i, \qquad C_{\bar{\chi}\chi} = C_{\chi\bar{\chi}} = \{\sqcap_\chi, \sqcap_{\bar{\chi}}\} = -i, \tag{7.16}$$

con sus elementos matriciales inversos $(C^{-1})^{\bar{\lambda}\lambda} = (C^{-1})^{\lambda\bar{\lambda}} = -i$ and $(C^{-1})^{\bar{\chi}\chi} = (C^{-1})^{\chi\bar{\chi}} = i$. Los paréntesis de Dirac $\{\ ,\}^*$ son entonces definidos

$$\{A,B\}^* = \{A,B\} - \{A,\sqcap_i\}(C^{-1})^{ik}\{\sqcap_k, B\}. \tag{7.17}$$

El resultado de éste procedimiento es la eliminación de los momentos conjugados a las variables fermiónicas, quedando solamente los siguientes paréntesis de Dirac

$$\begin{aligned} &\{R,\pi_R\}^* = \{R,\pi_R\} = 1, \qquad &&\{\varphi,\pi_\varphi\}^* = \{\varphi,\pi_\varphi\} = 1 \\ &\{\lambda,\bar{\lambda}\}^* = i, &&\{\chi,\bar{\chi}\}^* = -i. \end{aligned} \tag{7.18}$$

En una teoría cuántica los paréntesis de Dirac $\{\ ,\}^*$ deben ser reemplazados por conmutadores $[\ ,\ ]$ o por anticonmutadores $\{\ ,\}$. Tenemos

$$\begin{aligned} &[R,\pi_R] = i\{R,\pi_R\}^* = i, \qquad &&[\varphi,\pi_\varphi] = i\{\varphi,\pi_\varphi\}^* = i \\ &\{\lambda,\bar{\lambda}\} = i\{\lambda,\bar{\lambda}\}^* = -1, &&\{\chi,\bar{\chi}\} = i\{\chi,\bar{\chi}\}^* = 1. \end{aligned} \tag{7.19}$$

Las constricciones de primer orden pueden ser obtenidas de la acción (7.12) mediante la variación independiente de $N(t), \psi(t), \bar{\psi}(t)$ y $V(t)$ respectivamente. Después de la variación se obtienen las siguientes constricciones de primera clase

$$\begin{aligned} H = &-\frac{\kappa^2}{2R}\pi_R^2 - \frac{kR}{2\kappa^2} + \frac{1}{2R^3}\pi_\varphi^2 - \frac{9}{2}\kappa^2 R^3 g^2(\varphi) + \frac{R^3}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right)^2 + \\ &+ 3\sqrt{k}R^2 g(\varphi) - \frac{3i\kappa\pi_\varphi}{2R^3}(\bar{\lambda}\chi + \lambda\bar{\chi}) - \frac{9\kappa^2}{4R^3}\bar{\chi}\chi\bar{\lambda}\lambda + \\ &+ \frac{\sqrt{k}}{2R}\bar{\lambda}\lambda - \frac{9}{2}\kappa^2 g(\varphi)\bar{\lambda}\lambda - \frac{3\sqrt{k}}{2R}\bar{\chi}\chi + \frac{9}{2}\kappa^2 g(\varphi)\bar{\chi}\chi - \end{aligned}$$

$$-\frac{3\kappa}{2}\frac{\partial g}{\partial\varphi}(\bar{\chi}\lambda+\bar{\lambda}\chi)-\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\bar{\chi}\chi, \tag{7.20}$$

$$S=\left(\frac{\kappa\pi_R}{\sqrt{R}}-\frac{i\sqrt{k}\sqrt{R}}{\kappa}-\frac{3i\kappa}{2\sqrt{R^3}}\bar{\chi}\chi+3i\kappa\sqrt{R^3}g(\varphi)\right)\lambda+$$
$$+\left(\frac{\pi_\varphi}{\sqrt{R^3}}+i\sqrt{R^3}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right)\chi, \tag{7.21}$$

$$\bar{S}=\left(\frac{\kappa\pi_R}{\sqrt{R}}+\frac{i\sqrt{k}\sqrt{R}}{\kappa}+\frac{3i\kappa}{2\sqrt{R^3}}\bar{\chi}\chi-3i\kappa\sqrt{R^3}g(\varphi)\right)\bar{\lambda}+$$
$$+\left(\frac{\pi_\varphi}{\sqrt{R^3}}-i\sqrt{R^3}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right)\bar{\chi}, \tag{7.22}$$

$$\mathcal{F}=-\bar{\lambda}\lambda+\bar{\chi}\chi. \tag{7.23}$$

Las constricciones (7.20-7.23) son debidas a la invariancia de la acción (7.12) bajo las transformaciones de supersimetría local "pequeña" (5.5). El hamiltoniano general es la suma de todas éstas constricciones y tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}
H_G = {}& NH+\frac{i}{2}\psi\bar{S}+\frac{i}{2}\bar{\psi}S+\mathcal{F}\left(\frac{V}{2}\right)=N\Bigg[-\frac{\kappa^2}{2R}\pi_R^2-\frac{kR}{2\kappa^2}+\\
&+\frac{1}{2R^3}\pi_\varphi^2-\frac{9}{2}\kappa^2R^3g^2(\varphi)+\frac{R^3}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right)^2+3\sqrt{k}R^2g(\varphi)-\\
&-\frac{3i\kappa\pi_\varphi}{2R^3}\left(\bar{\lambda}\chi+\lambda\bar{\chi}\right)+\frac{9\kappa^2}{4R^3}\bar{\chi}\chi\bar{\lambda}\lambda+\frac{\sqrt{k}}{2R}\bar{\lambda}\lambda-\frac{9}{2}\kappa^2g(\varphi)\bar{\lambda}\lambda-\\
&-\frac{3\sqrt{k}}{2R}\bar{\chi}\chi+\frac{9}{2}\kappa^2g(\varphi)\bar{\chi}\chi-\frac{3\kappa}{2}\frac{\partial g}{\partial\varphi}(\bar{\chi}\lambda+\bar{\lambda}\chi)-\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\bar{\chi}\chi\Bigg]+\\
&+\frac{i\psi}{2}\Bigg[\frac{\kappa\pi_R}{\sqrt{R}}\bar{\lambda}+\frac{i\sqrt{k}\sqrt{R}}{\kappa}\bar{\lambda}+\frac{3i\kappa}{2\sqrt{R^3}}\bar{\chi}\chi\bar{\lambda}-3i\kappa\sqrt{R^3}g(\varphi)\bar{\lambda}+\\
&+\frac{\pi_\varphi}{\sqrt{R^3}}\bar{\chi}-i\sqrt{R^3}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\bar{\chi}\Bigg]+\frac{i\bar{\psi}}{2}\Bigg[\frac{\kappa\pi_R}{\sqrt{R}}\lambda-\frac{i\sqrt{k}\sqrt{R}}{\kappa}\lambda-\\
&-\frac{3i\kappa}{2\sqrt{R^3}}\bar{\chi}\chi\lambda+3i\kappa\sqrt{R^3}g(\varphi)\lambda+\frac{\pi_\varphi}{\sqrt{R^3}}\chi+i\sqrt{R^3}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\chi\Bigg]+\\
&+\frac{1}{2}(-\bar{\lambda}\lambda+\bar{\chi}\chi)V.
\end{aligned} \tag{7.24}$$

En la teoría cuántica las constricciones de primera clase (7.20-7.23) imponen condiciones a la función de onda, tales que para cierto estado físico permitido deben obedecer las siguientes constricciones cuánticas

$$H|\psi>=0,\quad S|\psi>=0,\quad \bar{S}|\psi>=0 \text{ y } \mathcal{F}|\psi>=0, \tag{7.25}$$

éstas constricciones cuánticas son obtenidas cuando uno cambia las variables dinámicas por operadores $\pi_R = -i\frac{\partial}{\partial R}, \pi_\varphi = -i\frac{\partial}{\partial \varphi}$ y para los grados de libertad fermiónicos se escoge la siguiente representación matricial para $\lambda, \bar{\lambda}, \chi$ y $\bar{\chi}$

$$\begin{aligned} \lambda &= -\sigma^{(-)} \otimes \mathbf{1}, & \bar{\lambda} &= \sigma^{(+)} \otimes \mathbf{1}, \\ \chi &= \sigma^3 \otimes \sigma^{(-)}, & \bar{\chi} &= \sigma^3 \otimes \sigma^{(+)}, \end{aligned} \tag{7.26}$$

las cuales obedecen las reglas de conmutación (anticonmutación) con $\sigma^{(\pm)} = \frac{\sigma_1 \pm i\sigma_2}{2}$, donde $\sigma_1$, $\sigma_2$ y $\sigma_3$ son las matrices de Pauli. Para los generadores $H, S, \bar{S}$ y $\mathcal{F}$ obtenemos la siguiente super-álgebra cerrada

$$\begin{aligned} \{S, \bar{S}\} &= 2H & [S, H] &= 0 & [\mathcal{F}, S] &= -S \\ S^2 = \bar{S}^2 &= 0 & [\bar{S}, H] &= 0 & [\mathcal{F}, \bar{S}] &= \bar{S}, \end{aligned} \tag{7.27}$$

donde $H$ es el hamiltoniano del sistema, $S$ es la carga supersimétrica compleja de la $n = 2$ mecánica cuántica supersimétrica, y $\mathcal{F}$ es el operador fermiónico.

# Rompimiento espontáneo de la supersimetría

Para estudiar el rompimiento espontáneo de la supersimetría consideremos el caso más sencillo del modelo de FRW, éste es $k = 0$ (el caso plano). En éste caso el hamiltoniano (7.20) y las supercargas (7.21,7.22) tienen la forma

$$\begin{aligned} H =& -\frac{\kappa^2\pi_R^2}{2R} + \frac{\pi_\varphi^2}{2R^3} + R^3\left[-\frac{9}{2}\kappa^2 g^2(\varphi) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)^2\right] - \\ & - \frac{3i\kappa}{2}\frac{\pi_\varphi}{R^3}(\bar{\lambda}\chi + \lambda\bar{\chi}) - \frac{9}{4}\frac{\kappa^2}{R^3}\bar{\chi}\chi\bar{\lambda}\lambda - \frac{9}{2}\kappa^2 g(\varphi)\bar{\lambda}\lambda + \\ & + \frac{9}{2}\kappa^2 g(\varphi)\bar{\chi}\chi - \frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2}\bar{\chi}\chi - \frac{3\kappa}{2}\frac{\partial g}{\partial \varphi}(\bar{\chi}\lambda + \bar{\lambda}\chi), \end{aligned} \tag{7.28}$$

$$\begin{aligned} S =& \left(\frac{\kappa\pi_R}{\sqrt{R}} - \frac{3i\kappa}{2\sqrt{R^3}}\bar{\chi}\chi + 3i\kappa\sqrt{R^3}g(\varphi)\right)\lambda + \\ & + \left(\frac{\pi_\varphi}{\sqrt{R^3}} + i\sqrt{R^3}\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)\chi, \end{aligned} \tag{7.29}$$

$$\begin{aligned} \bar{S} =& \left(\frac{\kappa\pi_R}{\sqrt{R}} + \frac{3i\kappa}{2\sqrt{R^3}}\bar{\chi}\chi - 3i\kappa\sqrt{R^3}g(\varphi)\right)\bar{\lambda} + \\ & + \left(\frac{\pi_\varphi}{\sqrt{R^3}} - i\sqrt{R^3}\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)\bar{\chi}. \end{aligned} \tag{7.30}$$

El potencial efectivo $V(\varphi)$ para el campo escalar $\varphi$ esta relacionado con el superpotencial $g(\varphi)$ y entonces de (7.28) tenemos

$$V(\varphi) = -\frac{9}{2}\kappa^2 g^2(\varphi) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)^2. \qquad (7.31)$$

En el límite cuando $\kappa \to 0(i.e.\kappa = \frac{1}{M_p}, dondeM_p$ es la masa de Planck) obtenemos la expresión para le energía del campo escalar en el caso de la supersimetría global $V = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)^2$. De (7.31) se puede ver, que $V(\varphi)$ puede tomar valores negativos en el caso de la supersimetría local. Los parámetros del superpotencial $g(\varphi)$ pueden ser escogidos de tal manera, que la constante cosmológica no aparesca. Es decir, la densidad de energía del vacío sea cero. Para éste propósito es necesario, que en el mínimo $\partial_\varphi V(\varphi)|_{\varphi=\varphi_0} = 0$ correspondiente a $\varphi = \varphi_0 =< \varphi >$, tambien el valor del vacío del potencial del campo escalar $V(\varphi)$ sea cero. La condición $\partial_\varphi V(\varphi) = 0$ permite establecer la siguiente relación en el mínimo $\varphi_0$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 9\kappa^2 g(\varphi), \qquad (7.32)$$

bajo el requerimiento de que $\frac{\partial g}{\partial \varphi} \neq 0$. Los parámetros del superpotencial $g(\varphi)$ deben ser escogidos de tal manera, que tambien $V(\varphi_0) = 0$, es decir la relación

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = 3\kappa g(\varphi), \qquad (7.33)$$

debe cumplirse para $\varphi = \varphi_0$. Entonces, podemos escoger el superpotencial de la siguiente manera

$$g(\varphi) = \frac{\mu}{\kappa^2} f(\kappa\varphi), \qquad (7.34)$$

donde $\mu$ es el parámetro de rompimiento espontáneo de la supersimetría ($[\mu] = L^{-1}$), y $f(\kappa\varphi)$ es una función adimensional de $\varphi$. Para una función dada $f(\kappa\varphi)$ sus parámetros deben ser exactamente fijados, asi que la ecuación (7.33) se debe cumplir estríctamente cuando $V(\varphi_0) = 0$, y el potencial mínimo es encontrado en $\varphi_0$. Podemos considerar las relaciones (7.33,7.34) como las ecuaciones para encontrar una función $f(\kappa\varphi)$, la cual para los valores del vacío del campo escalar asegure que el potencial (7.31) sea cero. Encontramos que el superpotencial $g(\varphi)$ tiene la forma

$$g(\varphi_0) = \frac{\mu}{\kappa^2} e^{3\kappa\varphi_0}. \qquad (7.35)$$

Por otro lado, los términos fermiónicos bilineales del hamiltoniano (7.28) son

$$-\frac{9}{2}\kappa^2 g(\varphi)\bar{\lambda}\lambda + \frac{9}{2}\kappa^2 g(\varphi)\bar{\chi}\chi - \frac{3}{2}\kappa\frac{\partial g}{\partial\varphi}(\bar{\lambda}\chi + \bar{\chi}\lambda) - \frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\bar{\chi}\chi. \tag{7.36}$$

haciendo una redefinición para $\lambda$

$$\widetilde{\lambda} = \lambda + \frac{1}{3\kappa g(\varphi)}\frac{\partial g}{\partial\varphi}\chi, \tag{7.37}$$

la variable fermiónica $\chi$ puede ser eliminada, y entonces obtenemos el término bilineal fermiónico en la fase del rompimiento espontáneo de la supersimetría

$$-\frac{9}{2}\kappa^2 g(\varphi_0)\bar{\widetilde{\lambda}}\widetilde{\lambda} = -\frac{9}{2}\mu f(\kappa\varphi_0)\bar{\widetilde{\lambda}}\widetilde{\lambda}. \tag{7.38}$$

En (7.38) $\frac{9}{2}\mu f(\kappa\varphi_0)$ es la masa del gravitino $m_{3/2}$. Entonces, para el hamiltoniano (7.28), las supercargas (7.29,7.30) y para el operador fermiónico (7.23) en el caso de rompimiento espontáneo de la supersimetría, tenemos

$$H = -\frac{\kappa^2\pi_R}{2R} - \frac{9}{4}\frac{\kappa^2}{R^3}\bar{\chi}\chi\bar{\widetilde{\lambda}}\widetilde{\lambda} - \frac{9}{2}\kappa^2 g(\varphi_0)\bar{\widetilde{\lambda}}\widetilde{\lambda}, \tag{7.39}$$

$$S = \left(\frac{\kappa\pi_R}{\sqrt{R}} - \frac{3i\kappa}{2\sqrt{R^3}}\bar{\chi}\chi + 3i\kappa\sqrt{R^3}g(\varphi_0)\right)\widetilde{\lambda} - \frac{\kappa\pi_R}{\sqrt{R}}\chi, \tag{7.40}$$

$$\bar{S} = \left(\frac{\kappa\pi_R}{\sqrt{R}} + \frac{3i\kappa}{2\sqrt{R^3}}\bar{\chi}\chi - 3i\kappa\sqrt{R^3}g(\varphi_o)\right)\bar{\widetilde{\lambda}} - \frac{\kappa\pi_R}{\sqrt{R}}\bar{\chi}, \tag{7.41}$$

$$\mathcal{F} = (-\bar{\widetilde{\lambda}}\widetilde{\lambda} + \bar{\chi}\widetilde{\lambda} + \bar{\widetilde{\lambda}}\chi). \tag{7.42}$$

Para la densidad de energía cero $V(\varphi_0) = 0$ la expresión (7.33) se cumple, y el paso a las variables $\widetilde{\lambda}$ (7.37) toman la forma $\widetilde{\lambda} = \lambda + \chi$. Entonces, el término cinético para $\chi$, el cual es el supercompañero de $\varphi$, desaparece en el lagrangiano de (7.12). Este cambio nos da la posibilidad de reedefinir las constricciones de segunda clase para los fermiones. Como resultado tenemos, los siguientes anticonmutadores para $\widetilde{\lambda}, \bar{\widetilde{\lambda}}, \chi$ y $\bar{\chi}$.

$$\{\chi, \bar{\chi}\} = 1, \{\widetilde{\lambda}, \bar{\chi}\} = 1, \{\bar{\widetilde{\lambda}}, \chi\} = 1. \tag{7.43}$$

Teniendo (7.43), $[R, \pi_R] = i\{R, \pi_R\}^* = i$ y $[\varphi, \pi_\varphi] = \{\varphi, \pi_\varphi\}^* = i$, es fácil checar que el hamiltoniano (7.39), las supercargas (7.40,7.41) y el operador fermiónico (7.42) obedecen el super-álgebra (7.27). En el caso cuando la curvatura es $k = -1$ (curvatura negativa), la acción (7.12) es no hermitiana, y en éste trabajo no lo discutiremos.

Para el caso de $k = 1$ (curvatura positiva) el potencial depende de dos variables

$$U(R, \varphi) = -\frac{R}{2\kappa^2} + 3R^2 g(\varphi) + R^3 V(\varphi), \tag{7.44}$$

donde $V(\varphi)$ es el potencial efectivo para el campo escalar $\varphi$ (7.31). La presencia de $3R^2 g(\varphi)$ es una consecuencia de la acción supersimétrica. En éste modelo la supersimetría tambien es rota, como en el caso de $k = 0$, cuando la energía del vacío es $V(\varphi_0) = 0$, así como $V(\varphi_0) \sim m_{3/2}^2 M_p^2$.

# Conclusiones

En éste trabajo se mostró que el rompimiento de la supersimetría en los modelos anteriores es una característica general y parecida a la de los modelos con supersimetría global. Los modelos cosmológicos con supersimetría local nos permiten tener rompimiento de supersimetría cuando la densidad de energía del vacío del campo escalar es cero para $k = 0$ y $k = 1$. Para éste último caso la supersimetría tambien se rompe cuando $V(\varphi_0) \sim m_{3/2}^2 M_p^2$. Estos modelos simples de Universo construidos en base a una supersimetría local "pequeña" exiben propiedades similares a los modelos de $N = 1$ supergravedad acoplada a $N = 1$ materia chiral en el espacio-tempo [62]. La generalización de éste trabajo se estudiará en el siguiente capítulo de la presente tésis.

El trabajo involucardo en ésta sección es:

1.- V I Tkach, O Obregón and J J Rosales, Class. Quantum Grav. 14, 339, (1997).

# 8.- FRW supersimétrico con campos de materia chiral

En el trabajo anterior se consideró el modelo de FRW interactuando con el supermultiplete más sencillo de materia, el campo escalar. Se mostró que en éste modelo de Universo con supersimetría local, cuando la energía del vacío es igual a cero permite tener rompimiento espontáneo de la supersimetría.

El presente trabajo es una generalización del anterior y vamos a considerar el modelo de FRW interactuando con un conjunto de supermultipletes complejos de materia y se mostrará que la acción supersimétrica obtenida para éste modelo corresponde a un dilaton-axion y a las componentes chirales de la teoría de supergravedad.

Es bien conocido que la acción para el modelo de FRW es invariante bajo la reparametrización temporal $t' \to t+a(t)$. Entonces uno puede obtener la formulación de supercampo mediante la introducción de variables "temporales" $\eta$ y $\bar{\eta}$. Esta procedura ha sido estudiada en la presente tésis. La acción para el caso del modelo de FRW interactuando con un conjunto de supermultipletes complejos de materia se puede escribir de la siguiente manera

$$\begin{aligned} S = \int \Big\{ & -\frac{I\!N^{-1}}{2\kappa^2} I\!R \bar{D}_\eta I\!R D_\eta I\!R + \frac{\sqrt{k}}{2\kappa^2} I\!R^2 + \\ & + \frac{I\!N^{-1} I\!R^3}{4}\Big(\bar{D}_\eta \bar{Z}^a D_\eta Z^a + \bar{D}_\eta Z^a D_\eta \bar{Z}^a\Big) - I\!R^3 |g(Z)| \Big\} d\eta d\bar{\eta} dt, \end{aligned} \tag{8.1}$$

donde $\kappa = \sqrt{\frac{4\pi G}{3}}$ y $G$ es la constante de Newton de la gravedad. Los supercampos $I\!N(t,\eta,\bar{\eta})$ y $I\!R(t,\eta,\bar{\eta})$ han sido definidos anteriormente (ver 5.9 y 5.12 )

El supermultiplete complejo escalar de materia $Z^a$ consiste de un conjunto de campos de materia compleja escalar homogéneos $z^a(t)$, $\bar{z}^a(t)(a=1,\dots n)$, cuatro grados de libertad fermiónicos $\chi^a(t)$, $\bar{\chi}^a(t)$, $\phi^a(t)$ y $\bar{\phi}^a(t)$, dos campos bosónicos auxiliares $F^a(t)$ y $\bar{F}^a(t)$ y un superpotencial del tipo $|g(Z)|$. Las componentes del supercampo material complejo pueden ser escritas de la siguiente manera

$$Z^a(t,\eta,\bar{\eta}) = z^a(t) + i\eta\chi'^a(t) + i\bar{\eta}\bar{\phi}'^a(t) + F'^a(t)\eta\bar{\eta}, \tag{8.2}$$

donde $\chi'^a(t) = N^{1/2}\chi^a(t), \bar{\phi}'^a(t) = N^{1/2}\bar{\phi}^a(t)$ y $F'^a(t) = NF^a - \frac{1}{2}(\bar{\psi}^a\chi^a - \psi^a\bar{\chi}^a)$. Análogamente a las transformaciones para los supercampos (5.10,5.13), podemos escribir la ley de transformación para el supercampo material

$$\delta Z^a = I\!\Lambda \dot{Z}^a + \frac{i}{2}\bar{D}_\eta I\!\Lambda D_\eta Z^a + \frac{i}{2}D_\eta I\!\Lambda \bar{D}_\eta Z^a. \tag{8.3}$$

Es claro que la acción de supercampo (8.1) es invariante bajo las transformaciones de la $n = 2$ supersimetría local (5.6) si los supercampos se transforman como (5.10, 5.13, 8.3). Realizando las operaciones correspondientes en la acción (8.1), uno obtiene la expresión para la acción en sus componentes, donde los campos auxiliares $B(t), F^a(t)$ y $\bar{F}^a(t)$ aparecen. Haciendo la variación con respecto a éstos campos auxiliares uno obtiene ecuaciones algebráicas, las cuales tienen las siguientes soluciones

$$B(t) = \frac{\kappa}{2R}\bar{\lambda}\lambda + \frac{\sqrt{k}}{\kappa} + \frac{3\kappa}{4}R(\bar{\chi}^a\chi^a + \bar{\phi}^a\phi^a) - 3\kappa R|g|, \tag{8.4}$$

$$F^a(t) = -\frac{3\kappa}{2R}(\lambda\bar{\phi}^a - \bar{\lambda}\chi^a) + 2\frac{\partial|g|}{\partial\bar{z}_a}, \tag{8.5}$$

y

$$\bar{F}^a(t) = -\frac{3\kappa}{2R}(\lambda\bar{\chi}^a - \bar{\lambda}\phi^a) + 2\frac{\partial|g|}{\partial z_a}, \tag{8.6}$$

y después de sustituirlas en la acción obtenida de (8.1) y haciendo las siguientes reedefiniciones $\lambda \to R^{-1/2}\lambda$, $\bar{\lambda} \to R^{-1/2}\bar{\lambda}$, $\chi^a \to 2^{1/2}R^{-3/2}\chi^a$, $\bar{\chi}^a \to 2^{1/2}R^{-3/2}\bar{\chi}^a$, $\phi^a \to 2^{1/2}R^{-3/2}\phi^a$ y $\bar{\phi}^a \to 2^{1/2}\ R^{-3/2}\bar{\phi}^a$.

Entonces obtenemos la siguiente acción en sus componentes

$$
\begin{aligned}
S = \int \Big\{ & - \frac{R}{2N\kappa^2}(DR)^2 + \frac{R^3}{2N} D\bar{z}^a D z^a + \frac{NRk}{2\kappa^2} + \frac{9}{2} N\kappa^2 R^3 |g(z)|^2 - \\
& - \frac{NR^3}{2} \frac{\partial g}{\partial z^a} \frac{\partial g}{\partial \bar{z}^a} - 3N\sqrt{k} R^2 |g| + i\bar{\lambda} D\lambda - i\bar{\phi}^a D\phi^a - i\bar{\chi}^a D\chi^a \\
& + \frac{3\sqrt{2}\kappa}{4} i Dz^a (\lambda\bar{\chi}^a + \bar{\lambda}\phi^a) + \frac{3\sqrt{2}\kappa}{4} i D\bar{z}^a (\bar{\lambda}\chi^a + \lambda\bar{\phi}^a) - \\
& - \frac{\sqrt{k}\sqrt{R}}{2\kappa}(\bar{\psi}\lambda - \psi\bar{\lambda}) - \frac{N\sqrt{k}}{2R}\bar{\lambda}\lambda + \frac{3N\sqrt{k}}{2R}(\bar{\phi}^a\phi^a + \bar{\chi}^a\chi^a) + \frac{9N\kappa^2}{4R^3}\bar{\chi}^a\chi^a\bar{\phi}^a\phi^a \\
& - \frac{3\sqrt{2}}{4R^{3/2}}\kappa(\bar{\psi}\lambda - \psi\bar{\lambda})(\bar{\phi}^a\phi^a + \bar{\chi}^a\chi^a) - \frac{9}{2}N\kappa^2|g|(\bar{\chi}^a\chi^a + \bar{\phi}^a\phi^a) \\
& + 2N\frac{\partial^2|g|}{\partial z_a \partial z_b}\bar{\phi}^a\chi^b + 2N\frac{\partial^2|g|}{\partial \bar{z}_a \partial \bar{z}_b}\bar{\chi}^a\phi^b + \frac{9}{2}\kappa^2 N|g|\bar{\lambda}\lambda \\
& + \frac{3\sqrt{2}}{2}\kappa N\left[\frac{\partial|g|}{\partial z_a}(\bar{\phi}^a\lambda + \bar{\lambda}\chi^a) + \frac{\partial|g|}{\partial \bar{z}_a}(\bar{\chi}^a\lambda + \bar{\lambda}\phi^a)\right] + 2N\frac{\partial^2|g|}{\partial z_a \partial \bar{z}_b}(\bar{\phi}^a\phi^b + \bar{\chi}^a\chi^b) \\
& + \frac{\bar{\psi}}{2}\left[\sqrt{2}R^{3/2}\frac{\partial|g|}{\partial z_a}\chi^a + \sqrt{2}R^{3/2}\frac{\partial|g|}{\partial \bar{z}_a}\phi^a + 3\kappa R^{3/2}|g|\lambda\right] \\
& - \frac{\psi}{2}\left[\sqrt{2}R^{3/2}\frac{\partial|g|}{\partial z_a}\bar{\phi}^a + \sqrt{2}R^{3/2}\frac{\partial|g|}{\partial \bar{z}_a}\bar{\chi}^a + 3\kappa R^{3/2}|g|\bar{\lambda}\right]\Big\} dt,
\end{aligned}
\tag{8.7}
$$

donde $DR = \dot{R} - \frac{i\kappa}{2\sqrt{R}}(\bar{\psi}\lambda + \psi\bar{\lambda})$, $Dz^a = \dot{z}^a - \frac{i}{\sqrt{2}\sqrt{R^3}}(\psi\bar{\phi}^a + \bar{\psi}\chi^a)$ y $D\bar{z}^a = \dot{\bar{z}}^a - \frac{i}{\sqrt{2}\sqrt{R^3}}(\bar{\psi}\phi^a + \psi\bar{\chi}^a)$ son las derivadas supercovariantes, $D\lambda = \dot{\lambda} - \frac{i}{2}V\lambda$ y $D\phi^a = \dot{\phi}^a + \frac{i}{2}V\phi^a$ son las derivadas covariantes. De la acción (8.1) podemos ver, que la acción para el conjunto de campos de supermateria compleja tiene la forma

$$
\int \left\{ \frac{1}{4}\left( \bar{D}_\eta \bar{Z}^a D_\eta Z^a + \bar{D}_\eta Z^a D_\eta \bar{Z}^a \right) - |g(Z)| \right\} d\eta d\bar{\eta} dt. \tag{8.8}
$$

Esta acción corresponde a la acción obtenida del modelo de Wess-Zumino mediante la reducción dimensional, con un superpotencial arbitrario $g(Z)$. La acción (8.8) tiene dos supercargas complejas $Q_1$ y $Q_2$. Debido a que la acción permanece invariante si cambiamos $Z^a \leftrightarrow \bar{Z}^a$, entonces las supercargas tambien permiten la invariancia bajo el cambio de $Q_1 \leftrightarrow \bar{Q}_2$. Por lo anterior, uno puede juntarlas en una supercarga compleja única, a la cual representaremos como $\widetilde{S} = Q_1 + \bar{Q}_2$ y $\bar{\widetilde{S}} = \bar{Q}_1 + Q_2$.

Ahora procedamos con el análisis hamiltoniano del sistema. Los momentos $\Pi_R, \Pi_z^a$ y $\Pi_{\bar{z}}^a$ conjugados a $R(t), z^a(t)$ y $\bar{z}^a(t)$ respectivamente, son dados por

$$\Pi_R = -\frac{R}{N\kappa^2}\left[\dot{R} - \frac{i}{2\sqrt{R}}(\psi\bar{\lambda} + \bar{\psi}\lambda)\right], \tag{8.9}$$

$$\Pi_z^a = \frac{R^3}{N}\left[\dot{\bar{z}}^a - \frac{i}{\sqrt{2}R^{3/2}}(\psi\bar{\chi}^a + \bar{\psi}\phi^a)\right] + \frac{3i\sqrt{2}\kappa}{4R^{3/2}}(\lambda\bar{\chi}^a + \bar{\lambda}\phi^a), \tag{8.10}$$

$$\Pi_{\bar{z}}^a = \frac{R^3}{N}\left[\dot{z}^a - \frac{i}{\sqrt{2}R^{3/2}}(\bar{\psi}\chi^a + \psi\bar{\phi}^a)\right] + \frac{3i\sqrt{2}\kappa}{4R^{3/2}}(\bar{\lambda}\chi^a + \lambda\bar{\phi}^a). \tag{8.11}$$

con los siguientes paréntesis canónicos de Poisson

$$\{R, \Pi_R\} = 1, \{z_a, \Pi_z^b\} = \delta_a^b, \{\bar{z}_a, \Pi_{\bar{z}}^b\} = \delta_a^b. \tag{8.12}$$

Los momentos conjugados a las variables fermiónicas, como en los casos anteriores, nos dan las siguientes constricciones

$$\sqcap_\lambda \equiv \Pi_\lambda + \frac{i}{2}\bar{\lambda} \approx 0, \qquad \sqcap_{\bar{\lambda}} \equiv \Pi_{\bar{\lambda}} + \frac{i}{2}\lambda \approx 0, \tag{8.13}$$

$$\sqcap_\chi^a \equiv \Pi_\chi^a - \frac{i}{2}\bar{\chi}^a \approx 0, \qquad \sqcap_{\bar{\chi}}^a \equiv \Pi_{\bar{\chi}}^a - \frac{i}{2}\chi^a \approx 0, \tag{8.14}$$

$$\sqcap_\phi^a \equiv \Pi_\phi^a - \frac{i}{2}\bar{\phi}^a \approx 0, \qquad \sqcap_{\bar{\phi}}^a \equiv \Pi_{\bar{\phi}}^a - \frac{i}{2}\phi^a \approx 0, \tag{8.15}$$

donde $\Pi_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \dot{\lambda}}, \Pi_\chi^a = \frac{\partial L}{\partial \dot{\chi}_a}$ y $\Pi_\phi^a = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}_a}$ son los momentos conjugados a las $\lambda(t)$, $\chi(t)$ y $\phi(t)$ respectivamente. Los momentos conjugados a $B(t), \psi(t), \bar{\psi}(t)$ y $V(t)$ son encontrados igual a cero, indicando que éstas variables juegan el papel de campos de calibración (gauge), para los cuales la derivada temporal es arbitraria, es decir son campos no dinámicos.

Las constricciones (8.13-8.15) son de segunda clase y pueden ser eliminadas mediante la procedura de Dirac. Para esto definamos $C_{ik}(i,k = \lambda, \bar{\lambda}, \chi^a, \bar{\chi}^a, \phi^a, \bar{\phi}^a)$ como el paréntesis de Poisson. Tenemos los siguientes elementos matriciales diferentes de cero

$$\begin{aligned} C_{\bar{\lambda}\lambda} = C_{\lambda\bar{\lambda}} = \{\sqcap_{\lambda a}, \sqcap_{\bar{\lambda}}{}^b\} = i\delta_a^b \quad &, \quad C_{\bar{\chi}\chi} = C_{\chi\bar{\chi}} = \{\sqcap_{\chi a}, \sqcap_{\bar{\chi}}^b\} = i\delta_a^b, \\ C_{\bar{\phi}\phi} = C_{\phi\bar{\phi}} = \{\sqcap_{\phi a}, \sqcap_{\bar{\phi}}{}^b\} = i\delta_a^b, & \end{aligned} \tag{8.16}$$

con su matriz inversa $(C^{-1})^{\bar{\lambda}\lambda} = -i, (C^{-1})^{\bar{\chi}\chi} = i$ y $(C^{-1})^{\bar{\phi}\phi} = i$. Los paréntesis de Dirac $\{\ ,\}^*$ estan definidos como en (6.22) Como en el capítulo anterior tenemos los siguientes paréntesis de Dirac diferentes de cero

$$\{R, \Pi_R\}^* = \{R, \Pi_R\} = 1, \qquad \{z_a, \Pi_z^b\}^* = \{z_a, \Pi_z^b\} = \delta_a^b,$$

$$\{\bar{z}_a, \Pi_{\bar{z}}^b\}^* = \{\bar{z}_a, \Pi_{\bar{z}}^b\} = \delta_a^b, \tag{8.17}$$

$$\{\lambda, \bar{\lambda}\}^* = i, \qquad \{\chi_a, \bar{\chi}^b\}^* = -i\delta_a^b, \qquad \{\phi_a, \bar{\phi}^b\}^* = -i\delta_a^b.$$

En una teoría cuántica los paréntesis de Dirac $\{\ ,\ \}^*$ deben ser reemplazados por conmutadores $[\ ,\ ]$ o anticonmutadores $\{\ ,\ \}$. Tenemos

$$\begin{gathered}
[R, \Pi_R] = i\{R, \Pi_R\}^* = i, \qquad [z_a, \Pi_z^b] = i\{z_a, \Pi_z^b\}^* = i\delta_a^b, \\
[\bar{z}_a, \Pi_{\bar{z}}^b] = i\{\bar{z}_a, \Pi_{\bar{z}}^b\}^* = i\delta_a^b, \\
\{\lambda, \bar{\lambda}\} = i\{\lambda, \bar{\lambda}\}^* = -1, \qquad \{\chi_a, \bar{\chi}^b\} = i\{\chi_a, \bar{\chi}^b\}^* = \delta_a^b, \\
\{\phi_a, \bar{\phi}^b\} = i\{\phi_a \bar{\phi}^b\}^* = \delta_a^b,
\end{gathered} \tag{8.18}$$

donde hemos tomado el sistema de unidades para el cual $\hbar = c = 1$. Las constricciones de primera clase pueden ser obtenidas de la acción (8.7), variando la acción independientemente respecto a $N(t), \psi(t), \bar{\psi}(t)$ y $V(t)$ respectivamente. Después de la variación se tienen las siguientes constricciones de primera clase

$$\begin{aligned}
H = & -\frac{\kappa^2 \Pi_R^2}{2R} - \frac{kR}{2\kappa^2} + \frac{2}{R^3}\Pi_z^a \Pi_{\bar{z}}^a - \frac{9\kappa^2}{2} R^3 |g(z)|^2 + \frac{R^3}{2}\frac{\partial g}{\partial z^a}\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}_a} + \frac{\sqrt{k}}{2R}\bar{\lambda}\lambda \\
& - \frac{3\sqrt{2}}{2} i\kappa \frac{\Pi_z^a}{R^3}(\lambda \bar{\phi}^a + \bar{\lambda}\chi^a) - \frac{3\sqrt{2}}{2}\frac{i\kappa \Pi_{\bar{z}}^a}{R^3}(\bar{\lambda}\phi^a + \lambda\bar{\chi}^a) - \frac{9\kappa^2}{4R^4}(\bar{\phi}^a\phi^a + \bar{\chi}^a\chi^a)\bar{\lambda}\lambda \\
& - \frac{3\sqrt{k}}{2R}(\bar{\phi}^a\phi^a + \bar{\chi}^a\chi^a) + \frac{9\kappa^2}{2}|g|\bar{\lambda}\lambda - \frac{9\kappa^2}{4R^3}\bar{\phi}^a\phi^a\bar{\chi}^a\chi^a + \frac{9\kappa^2}{2}|g|(\bar{\phi}^a\phi^a + \bar{\chi}^a\chi^a) \\
& - 2\frac{\partial^2 |g|}{\partial z_a \partial z_b}\bar{\phi}^a\chi^b - 2\frac{\partial^2 |g|}{\partial \bar{z}_a \partial \bar{z}_b}\bar{\chi}^a\phi^b - \frac{3\sqrt{2}}{2}\kappa\frac{\partial |g|}{\partial \bar{z}_a}(\bar{\lambda}\phi^a + \bar{\chi}^a\lambda) \\
& - \frac{3\sqrt{2}}{2}\kappa\frac{\partial |g|}{\partial z_a}(\bar{\lambda}\chi^a + \bar{\phi}^a\lambda) - 2\frac{\partial^2 |g|}{\partial z_a \partial \bar{z}_b}(\bar{\phi}^a\phi^b + \bar{\chi}^a\chi^b),
\end{aligned} \tag{8.19}$$

$$\begin{aligned}
S = & \left[\frac{\kappa \Pi_R}{\sqrt{R}} - \frac{i\sqrt{k}\sqrt{R}}{\kappa} - \frac{3i\kappa}{2\sqrt{R^3}}(\bar{\phi}^a\phi^a + \bar{\chi}^a\chi^a) + 3i\kappa\sqrt{R^3}|g|\right]\lambda + \\
& + \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{R^3}}\Pi_z^a + i\sqrt{2}\sqrt{R^3}\frac{\partial |g|}{\partial z^a}\right]\chi^a + \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{R^3}}\Pi_{\bar{z}}^a + i\sqrt{2}\sqrt{R^3}\frac{\partial |g|}{\partial \bar{z}_a}\right]\phi^a,
\end{aligned} \tag{8.20}$$

$$\begin{aligned}
\bar{S} = & \left[\frac{\kappa \Pi_R}{\sqrt{R}} + \frac{i\sqrt{k}\sqrt{R}}{\kappa} + \frac{3i\kappa}{2\sqrt{R^3}}(\bar{\phi}^a\phi^a + \bar{\chi}^a\chi^a) - 3i\kappa\sqrt{R^3}|g|\right]\bar{\lambda} + \\
& + \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{R^3}}\Pi_{\bar{z}}^a - i\sqrt{2}\sqrt{R^3}\frac{\partial |g|}{\partial \bar{z}_a}\right]\bar{\chi}^a + \left[\sqrt{2}\frac{\Pi_z^a}{\sqrt{R^3}} - i\sqrt{2}\sqrt{R^3}\frac{\partial |g|}{\partial z_a}\right]\bar{\phi}^a,
\end{aligned} \tag{8.21}$$

y

$$\mathcal{F} = (-\bar{\lambda}\lambda + \bar{\phi}^a \phi^a + \bar{\chi}^a \chi^a). \tag{8.22}$$

Las constricciones (8.19-8.22) se siguen de la invariancia de la acción (8.7) bajo las transformaciones locales "pequeñas" (5.5). El hamiltoniano general es la suma de todas las constricciones, es decir

$$H_G = NH + \frac{i}{2}\psi\bar{S} + \frac{i}{2}\bar{\psi}S + \mathcal{F}(\frac{1}{2}\mathrm{V}). \tag{8.23}$$

En una teoría cuántica las constricciones de primera clase asociadas a la invariancia de la acción (8.7) imponen condiciones sobre la función de onda con la regla de conmutación (8.18), de tal manera que todo estado físicamente permitido debe obedecer las constricciones cuánricas.

$$H|\psi>= 0, \quad S|\psi > 0, \quad \bar{S}|\psi >= 0, \quad \mathcal{F}|\psi >= 0, \tag{8.24}$$

las cuales son obtenidas cuando uno cambia las variables dinámicas clásicas por operadores $\Pi_R = -i\frac{\partial}{\partial R}, \Pi_Z^a = -i\frac{\partial}{\partial Z_a}$ y utilizando la siguiente representación matricial para las variables fermiónicas $\lambda, \bar{\lambda}, \chi, \bar{\chi}, \phi$ and $\phi$,

$$\begin{aligned} \lambda &= -\sigma^- \otimes 1 \otimes 1, & \bar{\lambda} &= \sigma^+ \otimes 1 \otimes 1, \\ \chi &= \sigma^3 \otimes \sigma^- \otimes 1, & \bar{\chi} &= \sigma^3 \otimes \sigma^+ \otimes 1, \\ \phi &= \sigma^3 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^+, & \bar{\phi} &= \sigma^3 \otimes \sigma^3 \otimes \sigma^-, \end{aligned} \tag{8.25}$$

donde $\sigma^\pm = \frac{\sigma_1 \pm i\sigma_2}{2}$ y $\sigma_1, \sigma_2$ and $\sigma_3$ son las matrices de Pauli. Para los generadores cuánticos $H, S, \bar{S}$ y $\mathcal{F}$ obtenemos la siguiente superalgebra

$$\{S, \bar{S}\} = 2H, [S, H] = 0, [\mathcal{F}, S] = -S \tag{8.26}$$

$$S^2 = \bar{S}^2 = 0, [\bar{S}, H] = 0, [\mathcal{F}, \bar{S}] = \bar{S},$$

donde $H$ es el hamiltoniano del sistema, $S$ es la carga supersimétrica compleja de la $n = 2$ mecánica cuántica supersimétrica y $\mathcal{F}$ es el operador fermiónico.

# Conclusiones

En base a una $n = 2$ supersimetría local, hemos considerado el modelo cosmológico de FRW con un conjunto de campos de materia chiral y un superpotencial $g(Z^a)$. Esto es con el fín de construir un mecanismo general de rompimiento espontáneo de supersimetría en los campos de materia chiral y dilaton-axion en la cosmología, así como tambien poder establecer una relación con los potenciales efectivos de éstos campos en los modelos de supergravedad y supercuerdas [63,64,65].

Este trabajo ha sido enviado

1.- V.I. Tkach and J.J. Rosales, Submited in Phys. Rev. Lett. (1996).

# 9.- Conclusiones y Perspectivas

Las teorías basadas en simetrías locales han tenido gran éxito en la construcción de una teoría unificada de las interacciones fundamentales. Es natural pensar que para la construcción de una teoría unificada, la cual incluya la gravedad, sea necesario desarrollar el principio de simetría local, introduciendo estructuras de grupo más complejas. Algunas de éstas estructuras han sido encontradas y estudiadas en las teorías recientes de partículas [19-21], superpartículas y supercuerdas [22]. En éste último se propuso una descripción twistorial en dichas teorías, en particular se mostró que las superpartículas poseen doble supersimetría: la supersimetría espacio-temporal (SUSY "grande") y la supersimetría local "pequeña". Esta línea de investigación abrió una nueva posibilidad en la construcción de una teoría cuántica de las superpartículas y supercuerdas.

En éste trabajo de tésis se estableció la supersimetría local pequena en los modelos cosmológicos partiendo de la analogía que existe entre éstos modelos y las superpartículas. Y por lo tanto, se han dado los primeros pasos a una formulación twistorial de la cosmología. Esto es con el objetivo de ver si existe una relación entre la supersimetría local pequena y la supersimetría del espacio-tiempo (como sucede en las teorías de superpartículas espinoriales), y en base a ésto construir una teoría cuántica de la cosmología.

Siguiendo la analogía que existe entre una partícula y un modelo cosmológico, para los cuales la acción es invariante bajo reparametrización temporal uno extiende las transformaciones de reparametrización temporal a una $n = 2$ supersimetría local pequeña. Esta generalización nos permitió formular una acción de supercampo para los modelos cosmológicos, dar una explicación sobre las simetrías escondidas [17] en tales modelos y construir un método sistemático para incluir campos de materia. Una vez construida la acción de supercampo para un modelo en particular, uno procede a la formulación canónica. Como se mostró en la presente tésis: Debido a que las acciones construidas son invariantes bajo transformaciones de una $n = 2$ supersimetría local, uno obtiene cuatro constricciones de primera clase, las cuales en una teoría cuántica son condiciones impuestas sobre la función de onda del modelo en cuestión. Se mostró que los generadores cuánticos cumplen un (super)álgebra cerrada, la cual coincide con el álgebra de la mecánica cuántica supersimétrica. Sin embargo, cabe mencionar que ésta última es invariante bajo transformaciones globales. Por lo tanto, uno obtiene que las acciones de supercampo aquí construidas tienen la forma de una versión lacalizada de la mecánica cuántica supersimétrica. Para describir los estados de éstos modelos podemos hacer uso del hecho, de que éstos estados están en correspondencia uno a uno con las p-formas diferenciales sobre las variedades [66]. Los estados serán de la misma estructura a los ya encontrados en [16-18]. Sin embargo, con el formalismo aquí propuesto, podemos exteneder la variedad con el fin de incluir la supermateria y buscar nuevas p-formas y sus correspondientes estados. Sobre ésto se esta trabajando intensamente.

El problema de rompimiento espontáneo de la supersimetría en el modelo cosmológico supersimétrico de FRW tambien fué analizado. Se mostró que el rompimiento de supersimetría para los casos $k = 0$ y $k = 1$ del modelo de FRW es una característica general diferente a la de los modelos con supersimetría global. Los modelos cosmológicos con supersimetría local permiten tener rompimiento espontáneo de supersimetría cuando la densidad de energía del vacío es cero para el campo escalar. Para el caso en que $k = 1$ la supersimetría tambien se rompe cuando $V \sim m_{3/2}^2 M_p^2$. Estos modelos simples de Universo construidos en base a una supersimetría local "pequeña" exiben propiedades similares a los modelos de N=1 supergravedad acoplada a materia chiral en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones [62]. Con el objetivo de construir un mecanismo general de rompimiento espontáneo de la supersimetría en los campos de materia chiral y los campos de dilaton-axion en la cosmolgía, así como tambien establecer una ralación entre el potencial efectivo de éstos campos en las teorías de supergravedad y supercuerdas [63-65], se estudió el modelo de FRW interactuando con un conjunto de campos chirales de materia.

## Las perspectivas que se tienen con el formalismo propuesto son las siguientes;

1.- La extensión de éstos modelos a una $n = 4$ supersimetría local. Esto es de gran interés, en paticular, uno podría tratar de entender si la susy "pequeña" propuesta en los modelos cosmológicos es una remanente de la SUSY "grande" de la supergravedad o si uno debería proponer modelos que posean los dos tipos de supersimetrías locales con el objetivo de tener una teoría cuántica de la cosmología.

2.- Construir un esquema más general de interacción con supermultipletes escalares en la variedad de Kahler sobre los supercampos complejos. Este modelo nos permitirá un análisis más completo sobre el rompimiento espontáneo de la supersimetría en los casos $k = 0$ y $k = 1$ del modelo FRW.

3.- En el formalismo propuesto es tambien posible incluir un supermultiplete, el cual contenga campos de calibración (gauge fields). Esto parece ser de interés, debido a que para el modelo de Universo cerrado pudiera surgir una relación con la configuración exacta del vacío de la supergravedad.

4.- Establecer la relación entre el parámetro de rompimiento espontáneo de la supersimetría y la probabilidad de nacimiento del Universo.

5.- Hacer la reducción espacial de supergravedad $d = 4$ a los modelos cosmológicos $d = 1$ y analizar la constricción de Lorentz con el operador del número de fermiones.

# 10.- Referencias


1.- M. Green, J.H. Schwuarz and E. Witten, Superstring theory, 2 vols. Cambridge University Press (1987).

2.- P.A.M. Dirac, Can., J. Math. **3**, 1 (1951). "The Hamiltonian Form of Field Dynamics".

3.- P.A.M. Dirac, Lectures on Quantum Mechanics (Yeshiva Univ., New York, 1964)

4.- J.A. Wheeler, in Relativity, Groups, and Topology, eds. C. and B. DeWitt (Gordon and Breach, New York, 1964). "Geometrodynamics and the Issue of the Final State".

5.- B.S. DeWitt, Phys. Rev.**160**, 1113 (1967). "Quantum Theory of Gravity I".

6.- C.W. Misner, Phys. Rev. **186**, 1319 (1969). "Quantum Cosmology".

7.- M. Ryan, Hamiltonian Cosmology, Berlin:Springer (1972).

8.- J. Wess and J. Bagger, Supersymmetry and Supergravity, Princeton University Press, Princeton (1992); B. DeWitt, Supermanifold, Cambridge University Press, (1992).

9.- R.N. Mohapatra, Unification and Supersymmetry, Springer-Verlag (1992).

10.- S. Deser, J.H. Kay and K.S. Stelle, Phys. Rev. **16**, 2448, (1977).

11.- E.S. Fradkin and M.A. Vasiliev, Phys. Lett.B **72**,70, (977).

12.- M. Pilati, Nucl. Phys.B **132**,138, (1978).

13.- P.D. D'Eath, Phys. Rev. D **29**, 2199, (19984).

14.- A. Hanson, T. Regge and C. Teitolboim, Constrained Hamiltonian systems (Academia Nazionale dei Lincei Rome), (1976).

15.- A. Macias, O. Obregon and M.P. Ryan, class. Quantum Grav. **4**, 1477, (1987).

16.- A. Macias and O. Obregón, Astrophysics and Space Science **148**, 297, (1988). J. Socorro, O. Obregón, and A. Macías, Phys. Rev. D **45**, 2026, (1992).

17.- R. Graham, Phys. Rev.Lett,**67**, 1381, (1991).

18.- P.D. D'Eath, Supersymmetric Quantum Cosmology, Cambridge University Press - (1996).

19.- L. Brink, P.Divecchia, and F.S. Howe, Nucl. Phys. B **118**,76, (1977).

20.- V.D. Gershun and V.I. Tkach, JETP. Lett. 29,320, (1979).

21.- P. Howe, S. Nenati, M. Pernici, and P. Townsend, Phys. Lett.B **215**, 555, (1988).

22.- D.P. Sorokin, V.I. Tkach, and D.V. Volkov, Mod. Phys. Lett.A **4**,901, (1989).

23.- D.V. Volkov, D.P. Sorokin, and V.I. Tkach, Sov.J.Nucl.Phys. **49**,525,(1989); J. Kawalski-Glikman, J.W. Von Holten, S. Aoyama, and J. Lukierski, Phys. Lett. B **201**, 487, (1988).

24.- O. Obregon, J.J. Rosales, and V.I. Tkach, Phys. Rev.D **53**, R1750, (1996).

25.- J.J. Rosales, V.I. Tkach, and O. Obregon, Proceedings del **V Taller de Partículas y campos** y del **V taller latinoamericano de fenomenología de las interacciones fundamentales**, Puebla, Pue, del 30 de octubre al 3 de noviembre de 1995.

26.- V.I. Tkach, J.J. Rosales, and O. Obregón, Class. and Quantum Grav. **13**, 2349, (1996).

27.- V.I. Tkach, O. Obregón , and J.J. Rosales, Class. Quantum Grav. **14**, 339, (1997).

28.- V.I. Tkach, and J.J. Rosales, submited en Phys. Rev. Lett.(1996).

29.- M.A. Schifman, Supersimetría para Principiantes (notas en Ruso)

30.- E. Witten, Nucl. Phys. B**188**, 513, (1981).

31.- E. Witten, Nucl. Phys. B**202**, 253, (1982).

32.- P. Salomonson, J.W. van Holten, Nucl. Phys. B 196, 509, (1982); M. Clandson, M.P Halpern, Nucl. Phys. B**250**, 689, (1985).

33.- A. Salam, J. Strathdee, Nucl. Phys. B**76**, 477,(1974).

34.- J.D. Bjorken, S.D Drell, Relativistic Quantum Fields, Mc Graw-Hill, (1965).

35.- J. Kowalski-Glikman, Phys. Lett. B**180**, 359, (1986); J. Kowalski-Glikman and J.W. van Holten, Nucl. Phys. B**283**, 305, (1987); R. Brooks, F. Muhammed and S.J. Gates, Nucl. Phys. B**268**, 199, (1986).

36.- W. Siegel, Phys. Lett. B**128**, 397, (1983); Class. and Quantum Grav. **2**, L95, (1985).

37.- L. Brink, J.H. Schwarz, Phys. Lett. B**100**, 310, (1981).

38.- L. Brink, et al, Phys. Lett. B**64**, 435, (1976).

39.- V. A. Soroka, D.P. Sorokin, V.I. Tkach and D.V. Volkov, Int. J. Mod. Phys. A**7**, 5887, (1992).

40.- A. Yu. Nurmagambetov, V.I. Tkach and J.J. Rosales, JETP Lett., **60**, 145, (1994).

41.- S.J. Gates et al, Superspace or one Thousand and one Lesson in supersymmetry (Benjamin-cumm 1983).

42.- D.V. Volkov and Zheltukhin, Nucl. Phys. B**335**, 723, (1990).

43.- R. Penrose and W. Rindler, Spinors and Space-Time, 2 vols. Cambridge University

Press (1984).

44.- J. Socorro, O. Obregón and A. Macías, Phys. Rev. D**45**, 2026, (1992).

45.- A. Macías, O. Obregón and J. Socorro, Int. J. of Mod. Phys. A**8**, 4291, (1993).

46.- P.D. D'Eath and D.I. Hughes, Phys. Lett. B**214**, 488, (1988).

47.- P.D. D'Eath, S.W. Hawking and O. Obregón, Phys. Lett. B**300**, 44, (1993).

48.- M. Asano, M. Tanimoto and N. Yoshino, Phys. Lett. B**314**, 303, (1993).

49.- P.D. D'Eath and D.I. Hughes, Nucl. Phys. B**378**, 381, (1992); L.J. Alty, P.D. D'Eath and H.F. Dowker, Phys. Rev. D**46**, 4402, (1992).

50.- A.D.Y. Cheng, P.D. D'Eath and P.R.L.V. Moniz, Phys. Rev. D**49**, 5246, (1994); A.D.Y. Cheng and P.R.L.V. Moniz, Int. J. Mod. Phys. A**4**, 189, (1995); A.D.Y. Cheng, P.D. D'Eath and P.R.L.V. moniz, Class. Quantum Grav. **12**, 1343, (1995); P.R.L.V. Moniz, Int. J. Mod. Phys. A **11**, (1996).

51.- R. Capovilla and J. Guven, Class. Quantum Grav. **11**, 1961, (1994).

52.- R. capovilla and O. Obregón, Phys. Rev. D**49**, 6562, (1994).

53.- T. Jacobson, Class. Quantum Grav. **5**, 923, (1988).

54.- J.A. Nieto, J. Socorro and O. Obregón, Phys. Rev. Lett. **6**, 3482, (1996).

55.- A. Csórdas and R. Graham "Recent Devolopments in Gravitation and mathematical Physics" (World Scientific Publishing, Co. ) **156** (1996) A. Csórdas and R. Graham, Phys. Rev. Lett. **74**, 4129, (1995).

56.- J. Bene and R. Graham, Phys. Rev. D**47**, 799, (1994).

57.- O. Obregón, J. Pullin and M.P. Ryan, Phys. Rev. D**48**, 5642, (1993).

58.- J.E. Lidsey, Phys. Rev. D**52**, R5407, (1995).

59.- M.A.H. Mac Callum and A.H. Taub, Commun. Math. Phys. **25**, 173, (1972); G.F.R. Ellis and M.A.H. Mac Callum, ibid. **12**, 108, (1996).

60.- M.P.Jr. Ryan L.C. Shepley, Homogeneous Relativistic Cosmologies (Princeton, N.J: Princeton University Press 1975).

61.- C.W. Misner, Magic without Magic (San Francisco, CA: Klauder) (1972).

62.- E. Cremmer, S. Ferrara, L. Girardello and A. van Proyen, Phys. Lett. B**116**, 231, (1982); E. Cremmer, et al. Nucl. Phys. B**147**, 105, (1979).

63.- S. Ferrara, C. Counnos, M. Porroti and F. Zirner, Nucl. Phys. B**318**, 75, (1989); D. Lust, T.R. Taylor Phys. Lett. B**253**, 335, (1991).

64.- A. Brignole, I. Ibanez and Munoz, Nucl. Phys. **B422**, 194, (1994).

65.- V. Halyo, E. Halyo, Phys. Lett. **B382**, 89, (1996).

66.- E. Witten, J. Diff. Geom. **17**, 661, (1982).