



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00086

Matrícula: 2172801608

Propagación de ondas en medios estratificados: formalismo analítico en una representación de amplitud y fase.

Con base en la Legislación de la Universidad Autónoma Metropolitana, en la Ciudad de México se presentaron a las 12:00 horas del día 8 del mes de junio del año 2020 POR VÍA REMOTA ELECTRÓNICA, los suscritos miembros del jurado designado por la Comisión del Posgrado:

DR. SABINO CHÁVEZ CERDA
DR. MANUEL FERNANDEZ GUASTI
DRA. RUTH DIAMANT ADLER



Casa abierta al tiempo

HECTOR ALEJANDRO JIMENEZ ROMERO

ALUMNO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretaria la última, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

DE: HECTOR ALEJANDRO JIMENEZ ROMERO

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. SABINO CHÁVEZ CERDA

VOCAL

DR. MANUEL FERNANDEZ GUASTI

SECRETARIA

DRA. RUTH DIAMANT ADLER



**Propagación de ondas en medios
estratificados: formalismo analítico en
una representación de amplitud y fase.**

Tesis que presenta

Héctor Alejandro Jiménez Romero

para obtener el grado de

Maestro en Ciencias (Física)

Asesor: Dr. Manuel Fernández Guasti

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Posgrado en Física

2020

Manuel Fernández

Asesor

Prof. Dr. Manuel Fernández Guasti

Comité sinodal

Prof. Dr. Ruth Diamant Adler

Prof. Dr. Sabino Chávez Cerda

Prof. Dr. Manuel Fernández Guasti

Fecha de graduación

08-jun-2020

A mis padres

Índice general

Resumen	1
1. Introducción	3
1.1. Ecuaciones de Maxwell	4
1.2. Ondas planas monocromáticas en medios estratificados	5
1.3. Interfase dieléctrica	7
1.4. Dos interfases dieléctricas: Reflexión de haces múltiples	9
1.5. Método matricial	12
1.6. Medios no homogéneos	14
1.7. Conclusiones	16
2. Representación en amplitud y fase	17
2.1. Introducción	17
2.2. Antecedentes	17
2.3. Par de Ermakov e invariante en medios estratificados	19
2.4. Ondas contrapropagantes	21
2.5. Condiciones de continuidad	23
2.6. Conclusiones	24
3. Propagación normal en un etalon	25
3.1. Introducción	25
3.2. Capa homogénea de espesor óptico λ/s	25
3.2.1. Primera interfase	26
3.2.2. Segunda interfase	28
3.3. Capa dieléctrica inmersa en un medio homogéneo	31
3.4. Reflectancia y transmitancia	33

4. Propagación en medios inhomogéneos	39
4.1. Introducción	39
4.2. Capa inhomogénea de espesor d	39
4.2.1. Primera interfase	42
4.2.2. Segunda interfase	44
4.3. Modelo de interfase continua	47
4.4. Conclusiones	51
5. Conclusiones y perspectivas	53
Agradecimientos	55
Bibliografía	57
A. Apéndice	61
A.1. Deducción de la ecuación cuadrática (3.11)	61
A.2. Sobre la raíz positiva de la ecuación $\mu^2 - \varepsilon\mu + 1 = 0$ cuando $\varepsilon \geq 2$.	64
A.3. Demostración de que $n_{31} + n_{31}^{-1} + 4\mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23}) \geq 2$	64
A.4. Reducción de la expresión (3.18) para la transmitancia \mathcal{T}	66
A.5. Deducción de la ecuación cuadrática (4.9)	68
A.6. Demostración de que $(k_{2i}^2 + k_1^2 + s_2/L_2^2) / (k_1 \sqrt{k_{2i}^2 - p^2}) \geq 2$	70
A.7. Artículo: «Fabry-Perot etalon solved by an amplitude and phase approach»	71
A.8. CAM 2019	79
A.8.1. Beca SMF	79
A.8.2. Resumen de la charla	80
A.8.3. Sesiones orales	81

Resumen

La intención del presente trabajo es mostrar la utilidad que posee el método de representación en amplitud y fase, en la resolución analítica de problemas de propagación de campo electromagnético en medios dieléctricos estratificados. La fortaleza de este tratamiento radica en que a partir del desacoplamiento del par de ecuaciones de Ermakov mediante el uso de cantidades invariantes cuya interpretación física es fácilmente identificable, el problema se reduce a dar solución a sistemas de ecuaciones algebraicas. Además de obtener cantidades tales como la reflectancia y la transmitancia, de un modo natural, es posible obtener una descripción detallada del campo electromagnético total en cada punto del espacio. Para ilustrar la aplicación del tratamiento propuesto, se resuelve un etalon dieléctrico de Fabry-Perot, homogéneo y de espesor arbitrario. Se comprueba de manera analítica que los resultados obtenidos son completamente equivalentes a aquellos reportados en la literatura clásica sobre el tema. Como paso siguiente, se sustituye el medio homogéneo central por uno cuyo perfil de índice de refracción cambia de manera continua y que depende de cuatro parámetros. Tal perfil admite soluciones que no involucran funciones especiales; propiedad que es aprovechada por el método descrito en este trabajo para obtener las respectivas reflectancias y transmitancias de forma analítica. Más aún, tal perfil inhomogéneo es suficientemente versátil para modelar una amplia variedad de sistemas que son objeto de interés por sus aplicaciones prácticas; esto, a su vez, representa una excelente oportunidad para promover la adopción de la metodología presentada.

1. Introducción

En este capítulo se presenta una breve revisión de los métodos más utilizados para atacar problemas de propagación de ondas electromagnéticas a través de medios estratificados. Tal denominación hace referencia a que el cambio en la permitividad o, equivalentemente, en el índice de refracción depende únicamente de una de las coordenadas. En la figura 1.1 se muestra la estructura general que presentan los problemas estudiados en este trabajo de tesis. Las etiquetas 1 y 3 corresponden a medios homogéneos. La capa central, etiquetada con 2, puede tratarse de un medio homogéneo o no homogéneo. Este último caso es de especial atención pues los métodos mostrados en este capítulo presentan claras limitaciones para su tratamiento. En este punto es donde, dependiendo del tipo de perfil de variación del índice de refracción del medio, la representación en amplitud y fase puede resultar ser un esquema más adecuado para estudiar tales estructuras.

En los sistemas que se estudiarán se considerará únicamente incidencia de campo electromagnético del medio 3 al medio 1, esto es, de derecha a izquierda. Dicho campo será una onda monocromática transversal, con polarización lineal e incidencia normal a la estratificación. En resumen, en la sección 1.1 se revisan los fundamentos de la teoría electromagnética que permiten describir el comportamiento de las ondas electromagnéticas propagándose a través de medios estratificados, con perfiles de índice de refracción homogéneos o inhomogéneos. En la sección 1.3 se analiza el caso particular de la interfase entre dos medios dieléctricos. En la sección 1.4 se verá el tratamiento de haces múltiples para dos interfases dieléctricas y en la sección 1.5 se revisa el método matricial para el caso multicapa. Finalmente, en la sección 1.6, se discute la aplicación de los métodos expuestos para el caso de capas conformadas por medios no homogéneos.

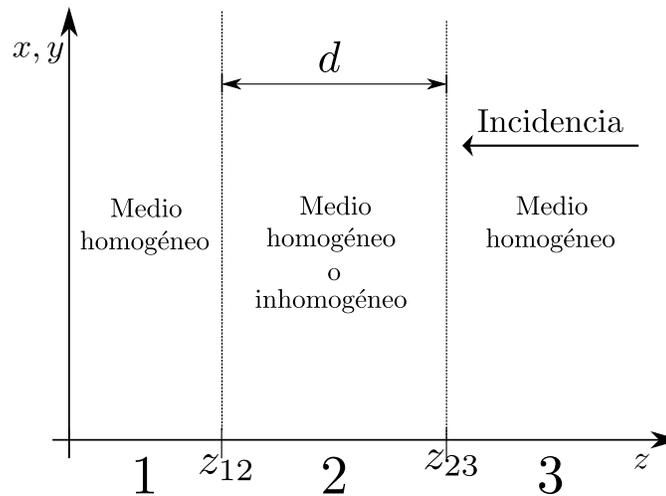


Figura 1.1.: Composición general del tipo de estratificaciones que se estudian en este trabajo.

1.1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell en medios materiales en unidades del sistema internacional son

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad (1.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.4)$$

donde \mathbf{H} es el campo magnético, \mathbf{J} la densidad de corriente, \mathbf{D} el desplazamiento eléctrico, \mathbf{E} el campo eléctrico, \mathbf{B} la inducción magnética y ρ la densidad de cargas eléctricas. Para obtener una ecuación de onda de campo eléctrico, se aplica el operador diferencial $\nabla \times$ sobre ambos lados de la ecuación (1.2)

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}),$$

en donde se ha empleado la la identidad vectorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$ y el hecho de que el orden de las derivadas temporal y espaciales puede intercambiarse.

Ahora, para medios lineales, isotrópicos y no ferromagnéticos, es posible tomar las relaciones $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ y $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, donde ε es la permitividad y μ la permeabilidad y ambas son funciones de la posición z . Dado lo anterior, se expresa la relación previamente obtenida como

$$\nabla(\mathbf{E} \cdot \varepsilon \nabla \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-1} \rho) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J} + \frac{\partial^2 \varepsilon \mathbf{E}}{\partial t^2} \right).$$

En el presente caso, se trabaja con materiales dieléctricos descargados. Por tanto, $\rho = 0$ y $\mathbf{J} = \mathbf{0}$. Nótese además que $\varepsilon \nabla \varepsilon^{-1} = -\varepsilon^{-1} \nabla \varepsilon = -\nabla \ln \varepsilon_r$, donde $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$ es la permitividad relativa. Por tanto, la ecuación que se gobierna el campo eléctrico en las condiciones mencionadas es

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\nabla(\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \varepsilon_r). \quad (1.5)$$

En la ecuación anterior, el miembro de la izquierda es una ecuación de onda y el término de la derecha su respectiva fuente.

1.2. Ondas planas monocromáticas en medios estratificados

Para medios estratificados se tiene que $\varepsilon = \varepsilon(z)$, en donde el eje z queda normal a las superficies con distinta permitividad. Se toma ahora el caso de ondas planas polarizadas linealmente, propagándose en el plano YZ y cuyo campo eléctrico se encuentra alineado con el eje X , esto es, $\mathbf{E} = E(y, z; t) \hat{e}_x$. Se hace la suposición de que el campo eléctrico se puede expresar como el producto de una función espacial $E_x(y, z)$ y una temporal $E_t(t)$, es decir, $E(y, z; t) = E_x(y, z) E_t(t)$. Se introduce esta separación en la ecuación (1.5) y se obtiene

$$\frac{1}{\mu \varepsilon E_x(y, z)} \left(\frac{\partial^2 E_x(y, z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(y, z)}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{E_t(t)} \frac{\partial^2 E_t(t)}{\partial t^2},$$

cada miembro de la ecuación anterior depende de variables independientes lo cual solo puede suceder cuando son iguales a una constante. Sea $-\omega^2$ dicha constante, así que para el caso monocromático, se propone que la parte temporal tenga la forma $E_t(t) = \exp(-i\omega t)$. Si ahora se supone que la parte espacial del campo eléctrico se puede expresar como una nueva separación como $E_x(y, z) = U(z)Y(y)u$, en donde u es una constante tal que incluye las unidades del campo eléctrico (V/m en el SI) que permite que las funciones $U(z)$ e $Y(y)$ sean adimensionales, la ecuación que gobierna la parte espacial queda en la forma

$$-n^2 k_0^2 - \frac{1}{U(z)} \frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2} = \frac{1}{Y(y)} \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2},$$

en donde $n^2 = \mu\epsilon c^2$, $k_0 = \omega/c$ y c la rapidez de la luz en el vacío. Se introduce la constante de separación $-k_0^2 \sigma^2$ y, por tanto, se puede expresar la función Y como $Y(y) = [cte] \exp(\pm k_0 \sigma y i)$. Así, el campo eléctrico queda expresado como

$$\mathbf{E} = U(z) e^{(\pm k_0 \sigma y - \omega t)i} u \hat{\mathbf{e}}_x \quad (1.6)$$

y la ecuación que satisface $U(z)$ es

$$\frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2} + k_0^2 (n^2(z) - \sigma^2) U(z) = 0. \quad (1.7)$$

Esta ecuación, cuando $n(z)$ es constante para el caso de un medio homogéneo, es la llamada ecuación de Helmholtz unidimensional. Las soluciones de (1.7), como se verá en los próximos capítulos, son el punto de partida para el método de representación en amplitud y fase.

Habiendo encontrado $U(z)$, es posible calcular la inducción magnética \mathbf{B} . Basta con calcular el rotacional de la ecuación (1.6) e integrar con respecto al tiempo. Queda

$$\mathbf{B} = -\frac{i}{\omega} e^{(\pm k_0 \sigma y - \omega t)i} \left(\frac{d}{dz} U(z) \hat{\mathbf{e}}_y \mp i k_0 \sigma U(z) \hat{\mathbf{e}}_z \right) u. \quad (1.8)$$

No se ha introducido constante alguna al integrar con respecto al tiempo pues esto implicaría la presencia de un campo magnético estático, situación que no

es de interés en el presente análisis. A partir de las ecuaciones (1.6) y (1.8) se calcula el vector de Poynting. Dado que los campos se encuentran en su representación compleja, se tiene que $\mathbf{S} = \frac{1}{4} (\mathbf{E} + \mathbf{E}^*) \times (\mathbf{H} + \mathbf{H}^*)$, o bien, de manera explícita

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \frac{i u^2}{4 \mu \omega} \left(-U(z) \frac{d}{dz} U(z) e^{2(\pm k_0 \sigma y - \omega t)i} - U^*(z) \frac{d}{dz} U(z) + \right. \\ & \left. U(z) \frac{d}{dz} U^*(z) + U^*(z) \frac{d}{dz} U^*(z) e^{-2(\pm k_0 \sigma y - \omega t)i} \right) \hat{\mathbf{e}}_z \\ & \pm \frac{u^2 k_0 \sigma}{4 \mu \omega} \left(U^2(z) e^{2(\pm k_0 \sigma y - \omega t)i} + 2U^*(z) U(z) + U^{*2}(z) e^{-2(\pm k_0 \sigma y - \omega t)i} \right) \hat{\mathbf{e}}_y. \end{aligned}$$

Donde se ha usado que $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$. La existencia de un flujo de energía en la componente en y se debe a que, hasta ahora, el tratamiento es general con incidencia oblicua. Esto viene descrito por la cantidad σ , dependiendo de su signo, la dirección de propagación iría sentido positivo o negativo del eje y . Sin embargo, tal como se describió al principio del capítulo los casos estudiados en este trabajo presentan incidencia normal a la estratificación del medio y así $\sigma = 0$. Por tanto, no se hará referencia un tipo particular de polarización (TE o TM) como suele hacerse para incidencia oblicua. Entonces, el vector de Poynting está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \frac{i u^2}{4 \mu \omega} \left(-U(z) \frac{d}{dz} U(z) e^{-2\omega t i} - U^*(z) \frac{d}{dz} U(z) \right. \\ & \left. + U(z) \frac{d}{dz} U^*(z) + U^*(z) \frac{d}{dz} U^*(z) e^{+2\omega t i} \right) \hat{\mathbf{e}}_z. \end{aligned}$$

1.3. Interfase dieléctrica

Se considera ahora la propagación de ondas electromagnéticas a través de la interfase entre dos medios dieléctricos homogéneos tal como se muestra en la figura 1.2. Aquí \mathbf{E}_i , \mathbf{E}_r y \mathbf{E}_t representan los campos incidente, reflejado y transmitido, respectivamente. En las condiciones planteadas, cada uno de ellos debe

ser una onda plana,

$$\mathbf{E}_i = E_i e^{(-k_0 n_2 z - \omega t)i} \hat{\mathbf{e}}_x,$$

$$\mathbf{E}_r = E_r e^{(+k_0 n_2 z - \omega t)i} \hat{\mathbf{e}}_x,$$

$$\mathbf{E}_t = E_t e^{(-k_0 n_1 z - \omega t)i} \hat{\mathbf{e}}_x.$$

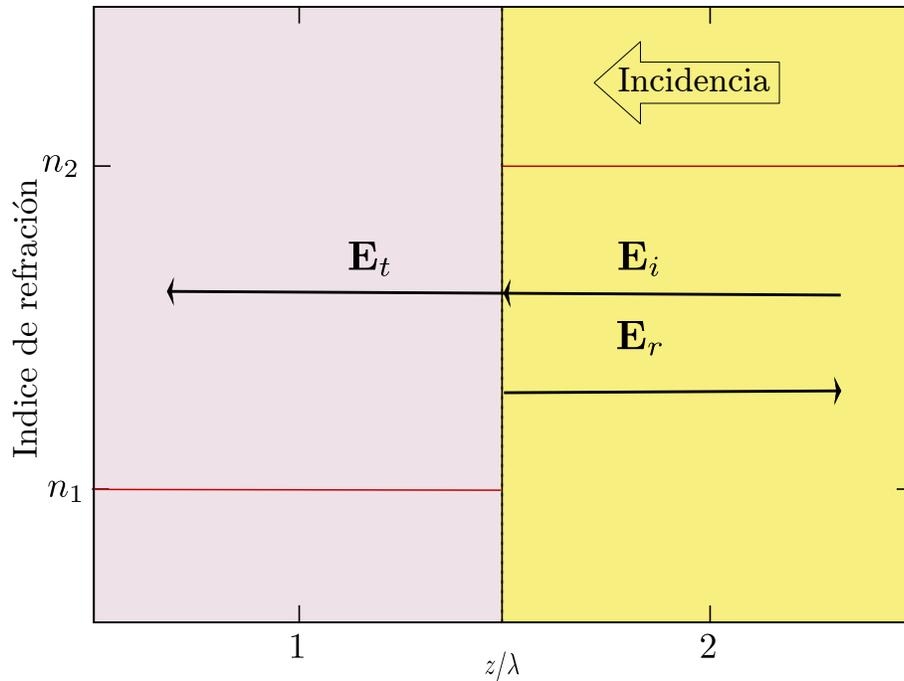


Figura 1.2.: interfase dieléctrica entre medios homogéneos.

Las amplitudes E_s con $s = r, t$, en general, son cantidades complejas. Por las condiciones de continuidad de los campos en la frontera, se encuentra la siguiente relación para sus amplitudes de[Hec01, Fow89, BW05]

$$E_i + E_r = E_t \tag{1.9}$$

y

$$H_i - H_r = H_t$$

La relación (1.8) permite expresar la ecuación anterior como

$$n_2(E_i - E_r) = n_1 E_t. \quad (1.10)$$

Se definen además los coeficientes de reflexión r y de transmisión t

$$r = \frac{E_r}{E_i}; \quad t = \frac{E_t}{E_i}. \quad (1.11)$$

A partir de las expresiones (1.9) y (1.10) es posible eliminar E_r y E_t de las expresiones dadas en (1.11). Queda entonces

$$r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}; \quad t = \frac{2n_2}{n_2 + n_1}. \quad (1.12)$$

Observe que r podría tomar valores positivos o negativos dependiendo de la relación entre los índices de refracción. En vista de su definición esto implica que la diferencia de fase δ_r entre las amplitudes E_i y E_r es

$$\delta_r = \begin{cases} 0 & \text{si } n_2 > n_1 \text{ (reflexión interna).} \\ \pi & \text{si } n_1 > n_2 \text{ (reflexión externa).} \end{cases}$$

Finalmente, dado que, en general $r, t \in \mathbb{C}$, las respectivas reflectancia y transmitancia son directamente $\mathcal{R} = rr^*$ y $\mathcal{T} = n_1 tt^*/n_2$. Note que, en virtud de (1.12), \mathcal{R} y \mathcal{T} dependen únicamente de la relación entre los índices de refracción. Una caracterización más detallada debe tomar en cuenta el cambio de los índices de refracción en función de la longitud de onda; fenómeno conocido como dispersión.

1.4. Dos interfases dieléctricas: Reflexión de haces múltiples

Cuando, en un sistema como el descrito al inicio del capítulo, la estratificación consta de capas homogéneas bien delimitadas se recurre al método de reflexión de haces múltiples [Fow89, Cap. 4]. Este método consiste en sumar las contri-

buciones que se tienen cada vez que la onda electromagnética se refleja y transmite por cada una de las interfaces. Para ilustrar este método se considera un sistema como el de la figura 1.3. Para simplificar nuestro análisis, las interfaces entre medios se consideran como espejos semi-reflectantes infinitamente delgados que encierran un medio homogéneo. Enseguida, un haz cuya amplitud de campo eléctrico es E_0 incide por la interfase derecha. Para proveer de claridad al tratamiento expuesto, se considera que el haz incidente esta contenido en un plano perpendicular al de las interfaces pero forma un ángulo θ con respecto a la horizontal. Parte de la luz se transmite al medio interno y otra parte se refleja, este mismo proceso se repite de manera sucesiva y, al menos clásicamente, ad infinitum, aunque con intensidades cada vez menores.

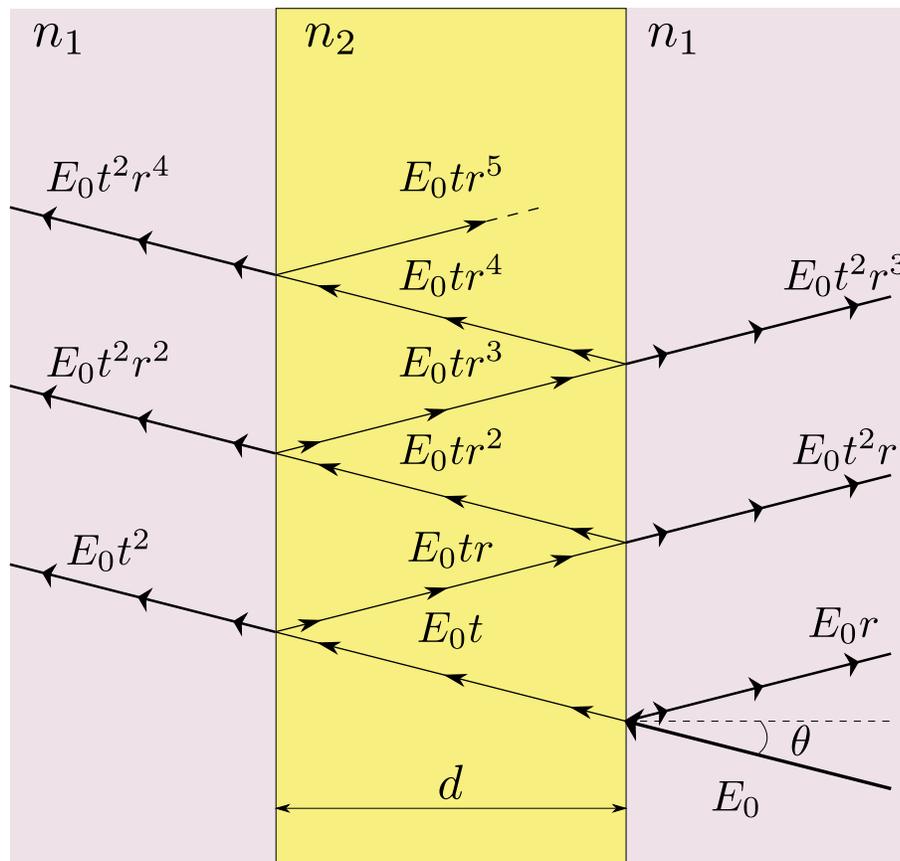


Figura 1.3.: Esquema para el tratamiento de reflexión de haces múltiples.

De la geometría del problema se puede demostrar que la diferencia de fase entre

dos haces transmitidos sucesivos, por haber recorrido trayectorias distintas, es

$$\delta = \frac{4\pi}{\lambda_0} n_2 d \cos \theta$$

Dado que el medio es el mismo en ambos lados de la capa homogénea, los coeficientes de transmisión y de reflexión para cada interfase son t y r o t' y r' , dependiendo de la relación de los índices de refracción. Entonces el campo eléctrico total transmitido es

$$E_T = E_0 t' (1 + |r|^2 e^{i\delta} + |r|^4 e^{2i\delta} + \dots) = E_0 \frac{tt'}{1 - |r|^2 e^{i\delta}}.$$

Como se vio en la sección 1.2, la fase de un haz reflejado puede cambiar dependiendo de la relación que guardan los índices de refracción de los medios que forman las interfases. Para el caso de materiales dieléctricos transparentes, puede existir un desfase de π , o bien, ser nulo. Para tomar en consideración este posible cambio de fase δ_r de modo general, se incluye tal desfase en el coeficiente de reflexión, a saber, $r = |r| e^{i\delta_r}$. En términos de la reflectancia $R = |r|^2$ y la transmitancia $T = n_1/n_3 |t|^2$ de una superficie, la relación entre la energía transmitida con respecto a la energía incidente se puede expresar como

$$I_T = I_i \frac{(tt')^2}{|1 - R e^{i\Delta}|^2},$$

en donde $\Delta = \delta + \delta_r$, es el cambio de fase total entre dos haces consecutivos. Después de un poco de manipulación, es posible escribir la expresión anterior en la siguiente forma

$$I_T = I_i \frac{1}{1 + \mathcal{F} \sin^2 \frac{\Delta}{2}}, \quad (1.13)$$

en donde, la cantidad $\mathcal{F} = \frac{4R}{(1-R)^2}$, es conocida como fineza («*finesse*») y mientras mayor sea su valor, el espectro de transmisión será cada vez más estrecho. Este tipo de sistema, conocido como resonador, etalon o interferómetro de Fabry-Perot [Hec01], es resuelto de un modo simple con este método pues se han considerado interfases que cambian de un modo abrupto de un medio a otro. Su aplicación

resulta eficiente para dos superficies semi-reflectantes pero, cuando el número de éstas crece, el número de reflexiones también lo hace y el estudio comienza a complicarse. En la siguiente sección se describe un método para cuando se tienen más de dos superficies (interfases) semi-reflectantes.

1.5. Método matricial

El método de reflexión de haces múltiples resulta impráctico cuando se tienen más de dos interfases semi-reflectantes. Se recurre a un método matricial propuesto inicialmente por F. Abelès [Abe50] para calcular la potencia reflejada y la transmitida debido a una pila de capas dieléctricas homogéneas con diferentes espesores e índices de refracción.

Para comenzar, refiérase a la figura 1.4, se trata una capa dieléctrica, homogénea, de ancho d e índice refracción n_1 , rodeada por medios infinitos y homogéneos de índices n_T y n_0 , siendo éste último el medio de incidencia.

Tanto el campo eléctrico como el magnético deben ser continuos en cada interfase. De este modo se tienen los sistemas de ecuaciones para la interfase en z_{12}

$$\begin{aligned} E_T &= E_1 e^{-ikd} + E'_1 e^{ikd} \\ n_T E_T &= n_1 E_1 e^{-ikd} - n_1 E'_1 e^{ikd} \end{aligned}$$

y para la interfase en z_{23}

$$\begin{aligned} E_1 + E'_1 &= E_0 + E'_0 \\ n_1 E_1 - n_1 E'_1 &= n_0 E_0 - n_0 E'_0 \end{aligned}$$

Al eliminar E_1 y E'_1 , obtenemos

$$\begin{aligned} 1 + \frac{E'_0}{E_0} &= \left(\cos kd - i \frac{n_T}{n_1} \sin kd \right) \frac{E_T}{E_0}, \\ n_0 - n_0 \frac{E'_0}{E_0} &= (-in_1 \sin kd + n_T \cos kd) \frac{E_T}{E_0}. \end{aligned}$$

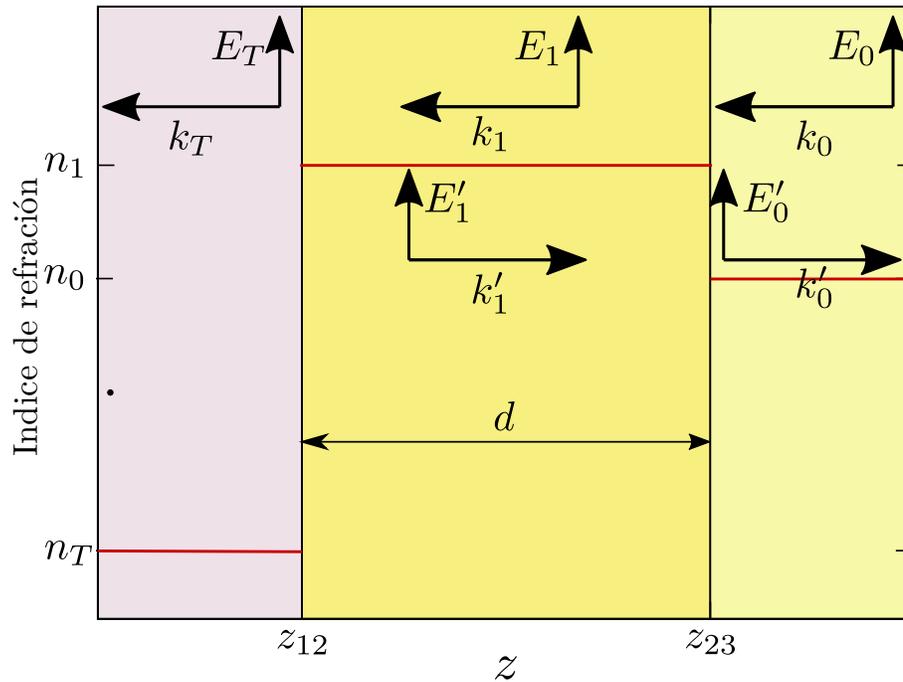


Figura 1.4.: Capa dieléctrica empleada para ilustrar el método matricial.

Esto se puede expresar en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} 1 \\ n_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -n_0 \end{bmatrix} r = M \begin{bmatrix} 1 \\ n_T \end{bmatrix} t,$$

en donde $r = E'_0/E_0$ y $t = E_T/E_0$ son los coeficientes de reflexión y transmisión previamente definidos y

$$M = \begin{bmatrix} \cos kd & -\frac{i}{n_1} \sin kd \\ -in_1 \sin kd & \cos kd \end{bmatrix}$$

es la llamada matriz de transferencia, aquí $k = 2\pi n_1/\lambda_0$.

Entonces, para un sistema de N capas con índices de refracción n_1, n_2, \dots, n_N y espesores d_1, d_2, \dots, d_N , respectivamente, se puede demostrar [BW05, Hec01]

que la correspondiente matriz de transferencia es

$$M = M_1 M_2 \cdots M_N = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.$$

Resolviendo para r y t en términos de los elementos de la matriz de transferencia, se obtiene

$$r = \frac{An_0 + Bn_T n_0 - C - Dn_T}{An_0 + Bn_T n_0 + C + Dn_T}$$

y

$$t = \frac{2n_0}{An_0 + Bn_T n_0 + C + Dn_T},$$

con reflectancia $R = |r|^2$ y transmitancia $T = n_T |t|^2 / n_0$.

Este método es ampliamente utilizado para calcular las transmitancias y reflectancias de sistemas multicapa con interfases abruptas. Sin embargo, este tipo de cambios no siempre describen adecuadamente las transiciones entre un medio y otro. Existen casos en los que es más adecuado modelar la transición de manera continua. Estos casos producen problemas pues ya no existen fronteras definidas entre un medio y otro. Así, el método matricial deja de arrojar resultados exactos para convertirse en un método de aproximación numérica.

1.6. Medios no homogéneos

Los cambios abruptos en el índice de refracción describen adecuadamente sistemas formados por capas de materiales distintos. No obstante, los mecanismos de fabricación actuales de este tipo de estructuras permiten generar medios cuyo perfil de variación resulta ser modelado más apropiadamente a través funciones de variación continua. Además de representar un modelo más realista para cierto tipo de transición de un medio a otro, hoy día se utilizan los medios con índice de refracción de variación continua para originar las denominadas barreras fotónicas y arreglos periódicos de las mismas para formar cristales fotónicos

[SM13]. También se encuentran los llamados filtros *rugate* [Bov93], ampliamente utilizados tanto en el análisis de señales ópticas, como en filtros pasa bandas e inclusive en espejos dieléctricos con alta reflectividad [DFG13a][Yeh05]. Más aún, los medios de variación continua son los responsables de la correcta formación de imágenes en el ojo humano [JNGCCC⁺20]. En general, en todos aquellos campos en donde se emplean películas transparentes los medios con variación continua resultan ser especialmente importantes [Ste05].

Ni el método de múltiples reflexiones ni el matricial resultan ser adecuados para describir de manera eficiente los perfiles de índice de refracción con variación continua para obtener soluciones analíticas ya que, hasta ahora, la teoría básica que se ha revisado considera medios estratificados con cambios abruptos en el índice de refracción. Por supuesto, para obtener resultados prácticos, siempre es posible modelar un perfil de esta naturaleza a través de sistemas con un número suficientemente de capas para emular cambios casi continuos en el índice de refracción lo cual, a su vez, converge en el empleo de métodos computacionales para obtener valores aproximados de las amplitudes de las ondas transmitidas y reflejadas, o bien, de los espectros de transmitancia \mathcal{T} y reflectancia \mathcal{R} [GTS87]. Lo anterior no ha mermado el interés por obtener soluciones exactas a las ecuaciones diferenciales de los campos desde los inicios de este tipo de estudios [Ray79]. Dentro del universo de soluciones halladas, es común encontrarse con la necesidad de emplear funciones especiales que a su vez están expresadas en términos de series [Eps30][BB80][MSM13]. Si bien sumamente útiles, las soluciones cerradas permiten una manipulación mucho más compacta y elegante. Así que, en la búsqueda de modelos suficientemente realistas pero de fácil manipulación, se han hallado perfiles con soluciones que no requieren el uso de funciones especiales y que son objeto de interés, pues la metodología aquí presentada, aplicada a dichos problemas, permite proveer soluciones exactas llevando a cabo únicamente manipulaciones algebraicas. Una revisión más detallada de los perfiles de variación continua y sus respectivas soluciones se detallan en la tesis doctoral de R. Diamant [Dia15] así como en las referencias citadas en el mismo trabajo.

1.7. Conclusiones

En este capítulo se han presentado los métodos más usados para resolver modelos unidimensionales de interfases abruptas o escalonadas. Desde una interfaz hasta un número considerable de superficies se pueden tratar con la base de los métodos expuestos. Estos, combinados con la potencia de las computadoras actuales, se pueden extrapolar a modelos de variación continua. Sin embargo, existen modelos de variación solubles de manera exacta y el método de representación en amplitud y fase, como se verá, provee un mecanismo de solución elegante para este tipo de sistemas.

2. Representación en amplitud y fase

2.1. Introducción

En el presente capítulo se detalla el fundamento teórico que se emplea en este trabajo para resolver problemas de propagación de ondas electromagnéticas en medios transparentes estratificados. Por consistencia con los cálculos desarrollados en otras partes de esta tesis, se utiliza z como parámetro independiente. Sin embargo, el estudio de las cantidades invariantes presentadas se hizo relevante en problemas físicos no conservativos, así que tal parámetro para esos casos es el tiempo. Entonces merece el esfuerzo aclarar que el tipo de problemas tratados en lo largo de este trabajo son conservativos pero las ecuaciones que rigen sus comportamientos son formalmente equivalentes a las de ciertos problemas no conservativos.

2.2. Antecedentes

La metodología a presentar tiene sus orígenes en el estudio de soluciones de ecuaciones diferenciales llevado a cabo por Ermakov en 1888 [Erm80]; se trata de un estudio de las condiciones de integrabilidad y forma de las soluciones generales de las ecuaciones de segundo grado y donde una de sus ecuaciones auxiliares resulta ser de la forma

$$\rho'' + p(z)\rho + c\rho^{-3} = 0; \tag{2.1}$$

razón por la cual nos referiremos a esta como ecuación de Ermakov (o, de manera más precisa, de Ermakov-Pinney). Pinney en 1950 [Pin50], hace notar la

conexión entre la solución general de la ecuación no lineal (2.1) con las soluciones de la ecuación lineal de segundo orden

$$u'' + p(z)u = 0; \quad (2.2)$$

las ecuaciones (2.1) y (2.2) forman lo que se denomina un par de Ermakov. En 1967 Lewis publica un artículo, resultado de su búsqueda de cantidades invariantes más allá de la energía, para hamiltonianos clásicos y cuánticos dependientes del tiempo [Lew67]. El método utilizado por Lewis se basa en la teoría de aproximación asintótica de Kruskal [Kru62], el cual involucra la expansión de la integral de acción $I = \int_{\text{anillo}} q' dq$ en una serie de potencias cuyo primer término resulta ser

$$I_0 = \frac{1}{2} \left[(\rho u' - \rho' u)^2 + \left(\frac{u}{\rho} \right)^2 \right]; \quad (2.3)$$

la integral en cuestión se lleva a cabo sobre un anillo a una posición z_0 constante, razón por la cual es de entrada 'invariante adiabático'. Sin embargo, yendo más allá, Lewis demostró que I_0 es de hecho un invariante exacto pues, al intentar calcular los demás términos de la mencionada expansión, cae en cuenta de que son nulos. Lewis además argumenta el valor práctico de trabajar con las soluciones de la ecuación (2.1) para expresar las soluciones generales de (2.2) pues, de acuerdo con él, cualquier solución particular de (2.1) puede ser usada en la fórmula (2.3) con todas las condiciones iniciales para la ecuación (2.2). Aunque en su derivación principal $p(z)$ se considera real, remarca el hecho de que aún tomando valores complejos, todos los resultados siguen siendo válidos. Esto, es de particular relevancia cuando se aterriza a problemas de propagación de ondas electromagnéticas en los cuales el índice de refracción puede ser complejo, admitiendo absorción. Lutzky en 1978 [Lut78], provee una conexión firme entre el teorema de Noether con el invariante de Ermakov-Lewis y en su discusión vislumbra la metodología que permite derivar los invariantes en términos de funciones linealmente independientes, tal como se hace en la siguiente sección.

La investigación de estos temas permaneció en relativa pausa hasta que Reid en 1980 publica un trabajo que generaliza los sistemas de ecuaciones del tipo de

Ermakov, enuncia un análogo no lineal del principio de superposición y provee soluciones a ecuaciones de movimiento no lineales [RR80]. A partir de entonces, creció enormemente el interés en esta línea de investigación y las aplicaciones comenzaron a ser más frecuentes en una variedad de áreas como la cosmología, ecuaciones diferenciales parciales de la física matemática, elasticidad, mecánica cuántica y sistemas no lineales en general; para más detalles de esto así como referencias históricas se invita al lector a revisar el trabajo de Leach [AL08], responsable también de la traducción al inglés del trabajo de Ermakov.

2.3. Par de Ermakov e invariante en medios estratificados

Partimos de la ecuación (1.7), relativa al campo eléctrico para el caso de incidencia normal ($\sigma = 0$) para medios estratificados:

$$\frac{\partial^2 U(z)}{\partial z^2} + \Omega^2(z) U(z) = 0, \quad (2.4)$$

en donde $\Omega(z) = k_0 n(z)$. Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden del mismo tipo que (2.2) y formalmente equivalente a la del oscilador armónico dependiente del tiempo en la cual no aparece la primer derivada de $U(z)$. Por tanto, dos soluciones linealmente independientes u_1 y u_2 de (2.4) satisfacen la siguiente relación [Arf70]:

$$W = u_1 u_2' - u_1' u_2 = cte \neq 0,$$

en donde W es el wronskiano de u_1 y u_2 . A partir de estas soluciones, se define la función ρ del siguiente modo

$$\rho^2 = u_1^2 + u_2^2,$$

la función u_2 se puede escribir en términos de ρ y $u := u_1$, $u_2 = \sqrt{\rho^2 - u^2}$. El

wronskiano W queda expresado como

$$W = \frac{u\rho' - u'\rho}{\sqrt{\rho^2 - u^2}}\rho; \quad (2.5)$$

se tiene la siguiente serie de igualdades

$$\begin{aligned} W^2 &= \left(\frac{u\rho' - u'\rho}{\sqrt{\rho^2 - u^2}}\rho \right)^2 \\ &= \frac{(u\rho' - u'\rho)^2}{\rho^2 - u^2} (u^2 + \rho^2 - u^2) \\ &= \frac{(u\rho' - u'\rho)^2}{\rho^2 - u^2} u^2 + (u\rho' - u'\rho)^2 \\ &= \frac{(u\rho' - u'\rho)^2}{\rho^2 - u^2} \rho^2 \frac{u^2}{\rho^2} + (u\rho' - u'\rho)^2 \\ &= W^2 \frac{u^2}{\rho^2} + (u\rho' - u'\rho)^2 \\ &= 2I. \end{aligned}$$

Donde I no es otra cosa que el invariante de Ermakov-Lewis cuando W es normalizado a 1 [FG09]. Derivando la relación anterior y utilizando la ecuación (2.4), se encuentra la relación

$$\rho'' + \Omega^2 \rho = \frac{W^2}{\rho^3}. \quad (2.6)$$

Esta ecuación es, de hecho, la ecuación de Ermakov-Pinney; junto con (2.4) se tiene un par de Ermakov. De la ecuación (2.5) se puede expresar u en términos de W y ρ :

$$u = \rho \cos \phi,$$

en donde se ha llevado a cabo la sustitución $\phi = \int W/\rho^2 dz$. De este modo ρ y ϕ se consideran las variables de amplitud y fase de u , respectivamente. De la definición de ϕ , el wronskiano queda expresado como

$$W = \rho^2 \dot{\phi};$$

es un invariante por sí mismo y su relación con el invariante I ha quedado claramente expresada. Más adelante se aprovechará esta propiedad para encontrar de manera explícita la solución general de la ecuación no lineal (2.6). Equivalentemente, a través de la expresión para el wronskiano, es posible expresar la función de fase en términos de la amplitud no lineal y sustituir en la ecuación (2.6) para obtener

$$\ddot{\omega}\omega - \frac{3}{2}\dot{\omega}^2 + 2(\omega^2 - \Omega^2)\omega^2 = 0, \quad (2.7)$$

en donde $\omega = \dot{\phi}$ es definida como la función de frecuencia. Si la variación temporal de la frecuencia es lenta, se pueden despreciar los primeros dos términos de la ecuación, de manera que $\omega^2 \approx \Omega^2$. Éste resultado es ampliamente utilizado en la aproximación adiabática [FGGV03].

2.4. Ondas contrapropagantes

En una dimensión, el campo que describe la propagación de luz monocromática puede ser expresado en términos de ondas contrapropagantes

$$ae^{i\alpha}, \quad be^{-i(\alpha-\delta)},$$

donde δ es una posible diferencia de fase entre las ondas contrapropagantes, a, b son las amplitudes reales, en general dependientes de la posición, y $\alpha = \int^z \Omega(z) dz$ es la fase que suponemos real a menos que se indique lo contrario y que no necesariamente tiene una dependencia lineal en la posición; claramente, tales ondas son soluciones linealmente independientes a la ecuación (2.4). La dependencia del tiempo de cada onda es $e^{-i\omega t}$ y se omite en lo que resta. La superposición de estas ondas puede expresarse en forma polar como

$$\rho_{\leftrightarrow} e^{i\phi_{\leftrightarrow}} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(2\alpha + \delta)} \times \exp \left(i \left(\arctan \left(\frac{a-b}{a+b} \tan \left(\alpha + \frac{\delta}{2} \right) \right) + \phi_{\leftrightarrow 0} \right) \right).$$

Donde $\phi_{\leftrightarrow 0}$ es una constante de fase que podemos fijar de manera arbitraria sin modificar de modo alguno el comportamiento del sistema. Definimos la variable

auxiliar

$$\mu = \frac{a+b}{a-b}. \quad (2.8)$$

Si a representa la amplitud del campo incidente, entonces $0 \leq b \leq a$ puesto que la amplitud de la onda reflejada no puede ser mayor a la onda incidente, de manera que $1 \leq \mu < +\infty$. Así, la superposición de ondas en términos de tal variable es

$$\rho_{\leftrightarrow} e^{i\phi_{\leftrightarrow}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\mu}} \sqrt{1 + (\mu^2 - 1) \cos^2(2\alpha + \delta)} \times \exp\left(i\left(\arctan\left(\frac{1}{\mu} \tan\left(\alpha + \frac{\delta}{2}\right)\right) + \phi_{\leftrightarrow 0}\right)\right). \quad (2.9)$$

Tal como se ha expresado en la sección anterior, la amplitud y la fase no lineales en (2.9) se encuentran relacionadas mediante el wronskiano. Fernández-Guasti ha propuesto una interpretación física del wronskiano en el ámbito de los fenómenos ondulatorios, como un invariante de intercambio de energía entre campos [FG04] y bajo esa interpretación se hará referencia a esta cantidad. Asimismo, en lo sucesivo se utilizará la variable Q en lugar de W para expresarla, la relación explícita entre la amplitud y la fase contrapropagantes queda expresada como

$$Q = \rho_{\leftrightarrow}^2 \dot{\phi}_{\leftrightarrow}. \quad (2.10)$$

En el caso de medios homogéneos, la fase de una onda propagándose en la dirección $\alpha(z) = kz + \alpha_0$; donde k el número de onda y α_0 una constante de fase. Entonces, introduciendo las amplitudes y fase definidas en (2.9) en esta cantidad invariante queda expresada como

$$Q = k(a^2 - b^2); \quad (2.11)$$

así, el invariante de intercambio de energía, de un medio homogéneo es proporcional a la diferencia de los cuadrados de las amplitudes y linealmente dependiente de la magnitud del vector de onda.

2.5. Condiciones de continuidad

Para satisfacer las ecuaciones (2.6) y (2.7), se impone la continuidad de la función de amplitud en cualquier interfase; digamos la interfase entre los medios 1 y 2

$$\rho_1(z_{12}) = \rho_2(z_{12}).$$

Por simplicidad, se omite el argumento z_{12} el cual define las interfaces en donde la amplitud definida en cada región deben coincidir $\rho_1 = \rho_2$. Tomando el inverso del cuadrado de esta expresión multiplicado por Q se tiene

$$\frac{Q}{\rho_1^2} = \frac{Q}{\rho_2^2}.$$

La expresión (2.10) para el invariante Q implica que

$$\left. \frac{d\phi_1}{dz} \right|_{z_{12}} = \left. \frac{d\phi_2}{dz} \right|_{z_{12}}.$$

Por tanto, la derivada de la función de fase debe ser continua si la amplitud es continua. En términos de la frecuencia espacial, $\omega_1 = \omega_2$. Por otro lado, requiriendo la continuidad de la derivada de la función de amplitud en la interfase z_{12}

$$\left. \frac{d\rho_1}{dz} \right|_{z_{12}} = \left. \frac{d\rho_2}{dz} \right|_{z_{12}}.$$

La derivada del invariante (2.10) arroja la relación

$$0 = 2\rho \frac{d\rho}{dz} \omega + \rho^2 \frac{d\omega}{dz}.$$

Entonces, la derivada de la frecuencia espacial (segunda derivada de la fase) es

$$\frac{d\omega}{dz} = -2 \frac{\omega}{\rho} \frac{d\rho}{dz}.$$

Así, considerando que ρ no es nula, la derivada de ω es continua puesto que el producto de funciones continuas también es continuo. Así pues, el punto de partida pudo haber sido la continuidad de ω y de su derivada. La continuidad de ρ y de su derivada se seguiría entonces. Se resumen estas propiedades en la siguiente proposición

Proposición 1. Tomando en cuenta que el invariante $Q = \rho^2\omega$ es distinto de cero, los siguientes pares de condiciones son equivalentes:

- i) La continuidad de ρ y $\frac{d\rho}{dz}$.*
- ii) La continuidad de ω y $\frac{d\omega}{dz}$.*

La ecuación (2.7) involucra solamente derivadas de la función de fase o, equivalentemente, la frecuencia espacial y sus derivadas de primer y segundo orden. Por tanto, siempre es posible añadir una constante arbitraria a la función de fase y aún así satisfacer la ecuación (2.7). Esta constante de fase se puede elegir de tal manera que la función de fase se mantenga continua tal como se ha llevado a cabo en un trabajo previo [FG15].

2.6. Conclusiones

En este capítulo se ha planteado el soporte teórico que envuelve el método de representación en amplitud y fase. Se expuso también la descomposición de la amplitud no lineal en términos de ondas contrapropagantes. Asimismo, se ha hecho una derivación económica de las condiciones de continuidad que deben satisfacer la amplitud y la fase no lineales así como sus derivadas. Esto es de particular importancia al momento de llevar a la práctica la aplicación del método aquí expuesto para lo cual está dedicado el siguiente capítulo.

3. Propagación normal en un etalon

3.1. Introducción

En el presente capítulo se emplea el método de representación en amplitud y fase, descrito previamente, para resolver analíticamente la propagación de ondas electromagnéticas a través de medios estratificados. Como primera ilustración, se consideran ondas con incidencia normal a las interfases de un etalon o interferómetro de Fabry-Perot, formado por las interfases entre medios homogéneos con distinto índice de refracción. Se demuestra que la aplicación del formalismo de representación en amplitud y fase reproduce los resultados obtenidos mediante el método de múltiples reflexiones revisado en la sección (1.4).

3.2. Capa homogénea de espesor óptico λ/s

Se comienza con el análisis describiendo la geometría involucrada en este sistema. Previamente se ha expuesto la aplicación del método de amplitud y fase a este tipo de sistemas cuando el espesor óptico de la capa central es $\lambda/4$ [FG15]. Ahora, se realiza el tratamiento considerando una capa de espesor óptico arbitrario λ/s , donde λ es la longitud de onda en el vacío de la onda incidente y $s > 0$. Refiérase a la figura 3.1, el medio etiquetado como 1 es un medio de índice de refracción n_1 , extendiéndose sobre el intervalo $-\infty < z < z_{12}$. En seguida, señalado como 2 se tiene una capa de índice de refracción n_2 sobre el intervalo $z_{12} \leq z < z_{23}$. Finalmente, con el número 3 se señala el medio con índice de refracción n_3 en el intervalo $z_{23} < z < +\infty$, en donde se encuentra la onda incidente de derecha a izquierda.

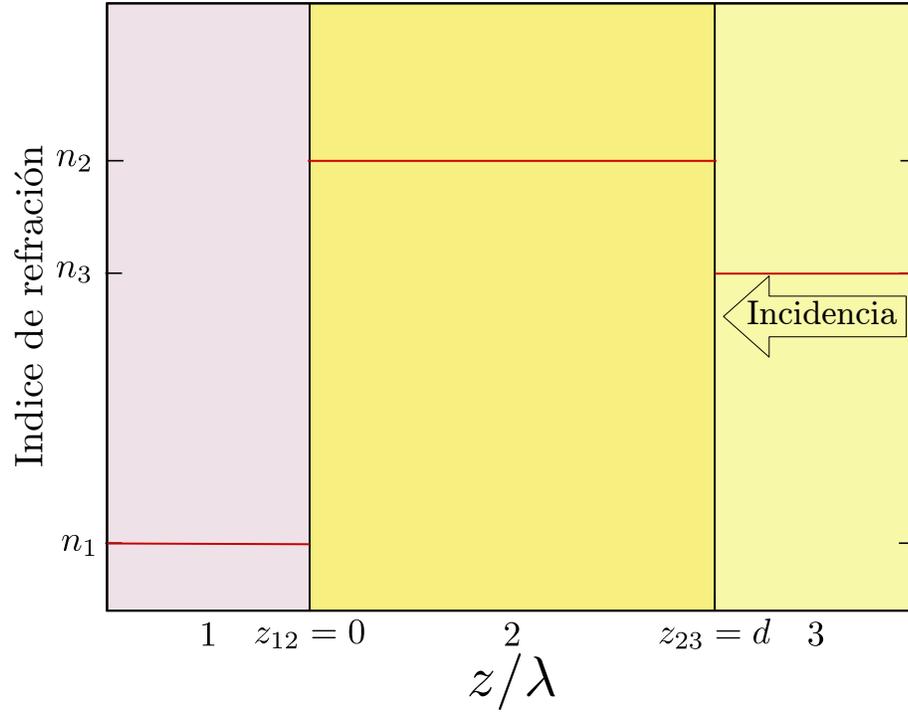


Figura 3.1.: Capa finita homogénea rodeada por medios semi-infinitos homogéneos. Los n_i , $i = 1, 2, 3$, representan el índice de refracción en cada región. z_{12} y z_{23} son las interfaces entre medios.

3.2.1. Primera interfase

Se analizan las soluciones de amplitud y de fase en cada lado de la interfase situada en z_{12} y son aplicadas las condiciones de continuidad apropiadas para encontrar los parámetros que las definen en cada región. Por simplicidad, se considera la primera interfase en $z_{12} = 0$.

Se parte de la solución de amplitud en la primera región la cual, puede ser expresada como una superposición de ondas contrapropagantes con amplitud constante, dada por (2.9). Por tanto,

$$\rho_{1\leftrightarrow}(z) = \sqrt{\frac{a_1^2 - b_1^2}{\mu_1}} \sqrt{1 + (\mu_1^2 - 1) \cos^2(\alpha_1(z))}, \quad -\infty < z < z_{12}, \quad (3.1)$$

donde a_1 es la amplitud de la onda transmitida y $b_1 = 0$ pues no hay onda refle-

jada. Entonces $\mu_1 = 1$ y la amplitud en esta región se simplifica a una constante

$$\rho_{1\leftrightarrow}(z) = a_1, \text{ for } -\infty < z < z_{12}.$$

La fase en esta región es

$$\phi_{1\leftrightarrow}(z) = \arctan\left(\frac{1}{\mu_1} \tan \alpha_1(z)\right), \quad (3.2)$$

puesto que $\mu_1 = 1$, se tiene una fase lineal $\phi_{1\leftrightarrow}(z) = \alpha_1(z) = k_1 z + \alpha_{01}$, $k_1 = n_1 k_0$, $k_0 = 2\pi/\lambda$ y α_{01} es una constante de fase. Dado que las diferencias de fase en ϕ_{\leftrightarrow} se acumularán conforme la onda incidente se propaga a través de la estructura, podemos fijar, sin pérdida de generalidad, el valor de la constante de fase a $\phi_{1\leftrightarrow}(z_{12} = 0) = \alpha_{01} = 0$.

Ahora bien, en la segunda región, la amplitud es

$$\rho_{2\leftrightarrow}(z) = \sqrt{\frac{a_2^2 - b_2^2}{\mu_2}} \sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2(z))}, \quad z_{12} \leq z \leq z_{23}, \quad (3.3)$$

donde $\alpha_2(z) = k_2 z + \alpha_{02}$ y $k_2 = n_2 k_0$. La respectiva fase contra-propagante es

$$\phi_{2\leftrightarrow}(z) = \arctan\left(\frac{1}{\mu_2} \tan(\alpha_2(z))\right) + \phi_{02}, \quad z_{12} \leq z < z_{23}.$$

Para determinar los parámetros en las Ecuaciones (3.1) a (3.3), se aplicaran las condiciones de frontera en la interfase $z_{12} = 0$. La continuidad de la función de amplitud $\rho_{1\leftrightarrow}(z_{12}) = \rho_{2\leftrightarrow}(z_{12})$ es

$$a_1 = \sqrt{\frac{a_2^2 - b_2^2}{\mu_2}} \sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2(z_{12}))}. \quad (3.4)$$

Dado que el invariante de intercambio de energía (2.10) es constante en todo punto, lo es también en la interfase z_{12} y, por tanto, $a_1^2 k_1 = (a_2^2 - b_2^2) k_2$. En términos del índice de refracción relativo $a_1^2 / (a_2^2 - b_2^2) = k_2 / k_1 = n_2 / n_1 = n_{21}$. La sustitución de esta expresión en (3.4), permite la obtención de una ecuación po-

linómica para μ_2 es

$$\cos^2(\alpha_{02}) \mu_2^2 - n_{21} \mu_2 + 1 - \cos^2(\alpha_{02}) = 0. \quad (3.5)$$

La continuidad de la derivada de la amplitud es $\dot{\rho}_{1\leftrightarrow}(z_{12}) = \dot{\rho}_{2\leftrightarrow}(z_{12})$

$$0 = \sqrt{\frac{a_2^2 - b_2^2}{\mu_2} \frac{(\mu_2^2 - 1) \cos(\alpha_{02}) \sin(\alpha_{02}) k_2}{\sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_{02})}}}.$$

Esta expresión se simplifica a $\sin(2\alpha_{02}) = 0$, entonces $\alpha_{02} = 0$ o $\alpha_{02} = \pm\pi/2$. De la expresión (3.5), si $\alpha_{02} = 0$ entonces $\mu_2^2 - n_{21}\mu_2 = 0$. La única solución física es $\mu_2 = n_{21}$ si $n_2 > n_1$ puesto que $\mu \geq 1$, esto es, la onda incidente debe ser igual o mayor que la onda reflejada. Por otro lado, si $\alpha_{02} = \pm\pi/2$ entonces $-n_{21}\mu_2 + 1 = 0$, luego $\mu_2 = 1/n_{21}$ si $n_1 > n_2$. Así,

$$\begin{aligned} \mu_2 &= n_{21} \text{ y } \alpha_{02} = 0 \text{ si } n_2 > n_1, \\ \mu_2 &= \frac{1}{n_{21}} \text{ y } \alpha_{02} = \pm\frac{\pi}{2} \text{ si } n_1 > n_2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Por tanto, el parámetro μ_2 es siempre igual al cociente del índice de refracción mayor entre el menor $\mu_2 = n_{\text{mayor}}/n_{\text{menor}}$.

3.2.2. Segunda interfase

Se prosigue con la solución en ambos lados de la interfase situada en $z_{23} = d$. Ya se ha descrito y encontrado los parámetros que definen la solución en la segunda región. Entonces, en la tercer región, la solución es de nuevo de la forma dada por (2.9). La función de amplitud es

$$\rho_{3\leftrightarrow}(z) = \sqrt{\frac{a_3^2 - b_3^2}{\mu_3}} \sqrt{1 + (\mu_3^2 - 1) \cos^2 \alpha_3(z)}, \quad z_{23} \leq z < +\infty \quad (3.7)$$

y la función de fase es

$$\phi_{3\leftrightarrow}(z) = \arctan\left(\frac{1}{\mu_3} \tan \alpha_3(z)\right) + \phi_{03}, \quad (3.8)$$

3.2 Capa homogénea de espesor óptico λ/s

donde $\alpha_3(z) = k_3 z + \alpha_{03}$, $k_3 = n_3 k_0$ y α_{03} es una constante de fase.

El espesor geométrico de la capa intermedia es $z_{23} - z_{12} = d$. En términos del espesor óptico, tenemos $n_2 d = \lambda/s$. Se consideran las condiciones de frontera en la interfase z_{23} para encontrar los parámetros desconocidos en (3.7) y (3.8). La condición de la función de amplitud $\rho_{2\leftrightarrow}(z_{23}) = \rho_{3\leftrightarrow}(z_{23})$ es

$$\sqrt{\frac{a_2^2 - b_2^2}{\mu_2}} \sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2 \alpha_2(z_{23})} = \sqrt{\frac{a_3^2 - b_3^2}{\mu_3}} \sqrt{1 + (\mu_3^2 - 1) \cos^2 \alpha_3(z_{23})},$$

donde μ_2 está dado por (3.6) y del invariante de intercambio de energía (2.10), se tiene que $(a_2^2 - b_2^2) / (a_3^2 - b_3^2) = 1/n_{23}$. Así, el cuadrado de la condición de continuidad de amplitud queda expresado como

$$\frac{\mu_3}{n_{23}\mu_2} [1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2 \alpha_2(z_{23})] = 1 + (\mu_3^2 - 1) \cos^2 \alpha_3(z_{23}). \quad (3.9)$$

La condición de continuidad de las derivadas de las amplitudes $\rho'_{2\leftrightarrow}(z_{23}) = \rho'_{3\leftrightarrow}(z_{23})$ implica

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_2 n_{23}}} \frac{(\mu_2^2 - 1) k_2 \sin(2\alpha_2(z_{23}))}{\sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2 \alpha_2(z_{23})}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_3}} \frac{(\mu_3^2 - 1) k_3 \sin(2\alpha_3(z_{23}))}{\sqrt{1 + (\mu_3^2 - 1) \cos^2 \alpha_3(z_{23})}}. \quad (3.10)$$

Elevando al cuadrado esta expresión, se elimina $\alpha_3(z_{23})$ utilizando (3.9) y obtenemos la siguiente ecuación cuadrática para μ_3 (para más detalles ver la sección A.1)

$$\mu_3^2 - [\mu_2 n_{23}^{-1} + \mu_2^{-1} n_{23} + (n_{23} - n_{23}^{-1}) (\mu_2 - \mu_2^{-1}) \sin^2 \alpha_2(z_{23})] \mu_3 + 1 = 0. \quad (3.11)$$

Resulta notable que, sin importar qué valor tome μ_2 según (3.6), el coeficiente del término lineal se simplifica como

$$n_{31} + n_{31}^{-1} + 4\mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23}),$$

donde

$$\mathcal{F} = (n_{23} - n_{23}^{-1}) (n_{21} - n_{21}^{-1}) / 4. \quad (3.12)$$

En estos términos, las dos posibles soluciones a la ecuación (3.11) son

$$\mu_{3\pm} = \frac{n_{31} + n_{31}^{-1} + 4\mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23})}{2} \pm \frac{\sqrt{(n_{31} - n_{31}^{-1})^2 + 8(n_{31} + n_{31}^{-1} + 2\mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23})) \mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23})}}{2}. \quad (3.13)$$

Sin embargo, la solución físicamente aceptable requiere que $\mu_3 \geq 1$ y es posible demostrar (ver la sección A.2) que esta condición únicamente se satisface tomando la solución con el signo positivo siempre y cuando la constante $n_{31} + n_{31}^{-1} + 4\mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23})$ sea mayor o igual que 2; afortunadamente este es el caso tal como se demuestra en la sección A.3. De la condición de continuidad de la amplitud se obtiene el valor de $\alpha_3(z_{23})$

$$\alpha_{03} = \cos^{-1} \left(\text{sgn}(\rho'_{2\leftrightarrow}(z_{23})) \sqrt{\frac{\mu_3 [n_{21} - (n_{21} - n_{21}^{-1}) \sin^2 k_2 z_{23}] - n_{23}}{n_{23} (\mu_3^2 - 1)}} \right) - k_3 z_{23} \quad (3.14)$$

La función $\text{sgn}(\rho'_{2\leftrightarrow}(z_{23}))$ que antecede la raíz cuadrada asegura la continuidad de la derivada de la función de amplitud en la segunda interfase debido a que la función coseno no es biunívoca en el intervalo $[-\pi, \pi]$, salvo para 0 y π .

Para llevar a cabo cálculos explícitos es conveniente expresar ρ_{\leftrightarrow} en términos de la amplitud transmitida lo cual se puede extraer de la relaciones provenientes del invariante de intercambio de energía Q . Entonces, se tiene que

$$a_3^2 - b_3^2 = \frac{a_1^2}{n_{31}}$$

y

$$a_2^2 - b_2^2 = \frac{a_1^2}{n_{21}}.$$

La variable μ , de (2.8), puede ser reescrita en términos del coeficiente de reflexión $r := a/b$ donde, como se ha planteado a y b representan las amplitudes de campo propagantes a la izquierda y a la derecha respectivamente en las figuras

3.1 y 3.3,

$$\mu = \frac{1+r}{1-r}. \quad (3.15)$$

Se puede invertir la relación anterior y obtener r en función de μ , $r = (1 - \mu) / (1 + \mu)$. En particular, $b_3 = a_3 r$ y tomando como amplitud incidente $a_3 = 1$, obtenemos la relación

$$a_1 = \sqrt{n_{31} (1 - r^2)},$$

donde $r = b_3/a_3 = (\mu_3 - 1) / (\mu_3 + 1)$, posee el rol de coeficiente de reflexión de toda la estructura.

Los resultados obtenidos para la solución de amplitud son

$$\rho_{\leftrightarrow}(z) = \begin{cases} a_1 & \text{para } -\infty < z \leq 0, \\ \frac{a_1}{\sqrt{n_{21}\mu_2}} \sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(k_2 z + \alpha_{02})} & \text{para } 0 < z \leq z_{23}, \\ \frac{a_1}{\sqrt{n_{31}\mu_3}} \sqrt{1 + (\mu_3^2 - 1) \cos^2(k_3 z + \alpha_{03})} & \text{para } z_{23} < z < \infty. \end{cases} \quad (3.16)$$

Mientras que, para la fase contrapropagante, se tiene

$$\phi_{\leftrightarrow}(z) = \begin{cases} k_1 z & \text{para } -\infty < z \leq 0, \\ \arctan\left(\frac{1}{\mu_2} \tan(k_2 z + \alpha_{02})\right) + \phi_{02} & \text{para } 0 < z \leq z_{23}, \\ \arctan\left(\frac{1}{\mu_3} \tan(k_3 z + \alpha_{03})\right) + \phi_{03} & \text{para } z_{23} < z < \infty. \end{cases} \quad (3.17)$$

Se han introducido las constantes de fase ϕ_{02} y ϕ_{03} , que permiten obtener continuidad de ϕ_{\leftrightarrow} en las interfases lo cual no altera el comportamiento de los resultados finales y permite una mejor apreciación de las correspondientes gráficas.

3.3. Capa dieléctrica inmersa en un medio homogéneo

Como aplicación inmediata de estos cálculos, se considera el caso de una capa dieléctrica de espesor finito dentro de un medio homogéneo, esto es, $n_3 = n_1$; este perfil de índice de refracción se muestra en la figura 3.2. En las figuras 3.3

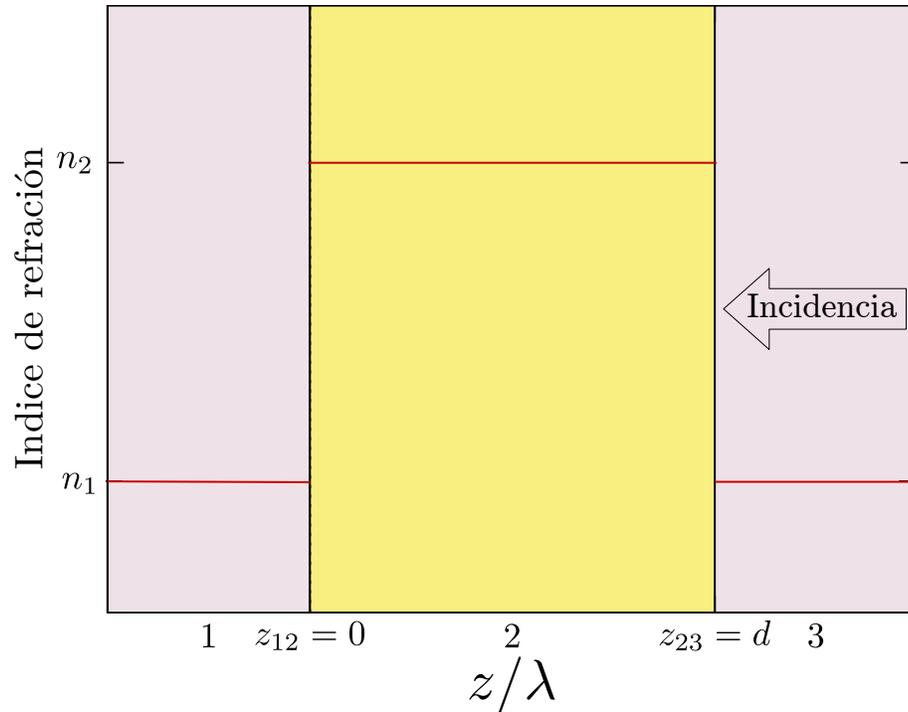


Figura 3.2.: Perfil de índice de refracción para una configuración de etalon dieléctrico de espesor arbitrario.

a 3.5, se pueden apreciar gráficas de las funciones de amplitud y de fase para distintos valores del parámetro s . La figura 3.3 corresponde a $s = 4$, esto es, una capa cuyo espesor óptico es un cuarto de la longitud onda de la onda incidente («quarter wave plate»); la gráfica de amplitud presenta oscilaciones en la región de incidencia, esto indica la presencia tanto de campo incidente como de campo reflejado; tal comportamiento es el esperado pues, pensando en términos de múltiples reflexiones, las dos primeras contribuciones de reflexión (aquellas reflejadas por la primera y segunda interfases) estarán en fase mientras que las demás contribuciones interferirán constructiva y destructivamente, de manera alternada. La figura 3.4 con $s = 8/11$, es una capa de espesor $3\lambda/8 \pmod{\lambda}$, se trata de un caso intermedio entre las capas de $\lambda/4$ y de $\lambda/2$; debido a la presencia de oscilaciones en la función de amplitud se infiere la existencia de campo reflejado pero con menor intensidad que en el caso anterior pues la amplitud de tales oscilaciones es menor. Finalmente, la figura 3.5 con $s = 2/5$, es una capa cuyo espesor óptico es $\lambda/2 \pmod{\lambda}$ («half wave plate»); muestra un caso representativo

de capa antireflejante pues ya no se tienen oscilaciones en la región de incidencia. Lo anterior indica la presencia de una sola onda viajera (la de incidencia) tal como sucede en la región de transmisión; este es el resultado esperado pues, la onda reflejada por la primera interfase quedará completamente fuera de fase con todas las contribuciones provenientes del interior de la capa. En todos los casos, la función de amplitud, de fase y sus respectivas derivadas son funciones continuas a pesar de que el medio presenta discontinuidades abruptas en las interfases. Notar que, en las regiones en donde la función de amplitud no es constante, la función de fase ya no es lineal en z según se puede apreciar en las gráficas de esta función. Sin embargo, de manera notable, el producto de la amplitud dependiente de z veces el coseno de la fase no lineal es igual a una función coseno con argumento lineal. Esta equivalencia es una indeterminación clásica que ha sido descrita en el problema del oscilador armónico dependiente del tiempo (TDHO, por sus siglas en inglés) [FG06]; así pues, el problema de la propagación de luz en medios inhomogéneos es matemáticamente equivalente al del TDHO.

3.4. Reflectancia y transmitancia

Sea $I_0 = a_3^2$ la intensidad del campo incidente (por la derecha); sea $I_t = a_1^2$ la intensidad transmitida. Del invariante de intercambio de energía (2.10) se sigue la relación $Q = a_1^2 k_1 = (a_3^2 - b_3^2) k_3$ la cual se puede expresar en términos de las intensidades como

$$Q = I_t k_1 = I_0(1 - \mathcal{R})k_3,$$

donde $\mathcal{R} = r_3^2 = b_3^3/a_3^3$ es la reflectancia de toda la capa. La transmitancia \mathcal{T} , por otro lado, en ausencia de absorción, es $1 - \mathcal{R}$. Entonces,

$$\mathcal{T} = 1 - \mathcal{R} = \frac{n_1}{n_3} \frac{I_t}{I_0}.$$

En términos de la variable μ_3 , el coeficiente de reflexión es $r_3 = (1 - \mu_3) / (1 + \mu_3)$; el valor de μ_3 , a su vez, está dado por la expresión (3.13) en términos de \mathcal{F} , de

los coeficientes de refracción y del espesor de la capa. Al realizar la sustitución de estas cantidades en la definición de la transmitancia se obtiene la expresión (ver sección (A.4))

$$\mathcal{T} = \frac{1}{(n_3 + n_1)^2 / (4n_1n_3) + \mathcal{F} \sin^2(k_2z_{23})}. \quad (3.18)$$

En términos de los coeficientes de reflexión y transmisión de las interfaces, a saber, $r_{32} = (n_3 - n_2) / (n_3 + n_2)$, $r_{21} = (n_2 - n_1) / (n_2 + n_1)$, $t_{32} = 2n_3 / (n_3 + n_2)$ y $t_{21} = 2n_2 / (n_2 + n_1)$, respectivamente; se puede escribir esta expresión como

$$\mathcal{T} = \frac{n_1}{n_3} \frac{t_{32}^2 t_{21}^2}{1 + r_{32}^2 r_{21}^2 + 2r_{32} r_{21} \cos(2k_2z_{23})}.$$

Esta última expresión coincide con la transmitancia dada en la literatura para el caso general de 3 medios homogéneos apilados, empleando métodos convencionales [BW05].

Para el caso de una capa homogénea inmersa en un medio también homogéneo, esto es $n_1 = n_3$, la expresión para \mathcal{F} (3.12) se puede escribir empleando únicamente el coeficiente de reflexión de una interfase $r_{21} = r$, quedando

$$\mathcal{F} = \frac{4r^2}{(1 - r^2)^2},$$

recordando que $\mu_2 = n$. Tal como el lector puede haber notado, la variable \mathcal{F} no es otra cosa más que la fineza del etalon (ver sección 1.4). La fase k_2z_{23} es frecuentemente expresada en términos de la fase de un ciclo completo $\delta = 2(k_2z_{23})$. De esta manera se recupera la forma convencional de la transmitancia

$$\mathcal{T} = \frac{1}{1 + \mathcal{F} \sin^2 \frac{\delta}{2}},$$

tal como se suele obtener mediante el formalismo de reflexión de haces múltiples revisada en la sección 1.4.

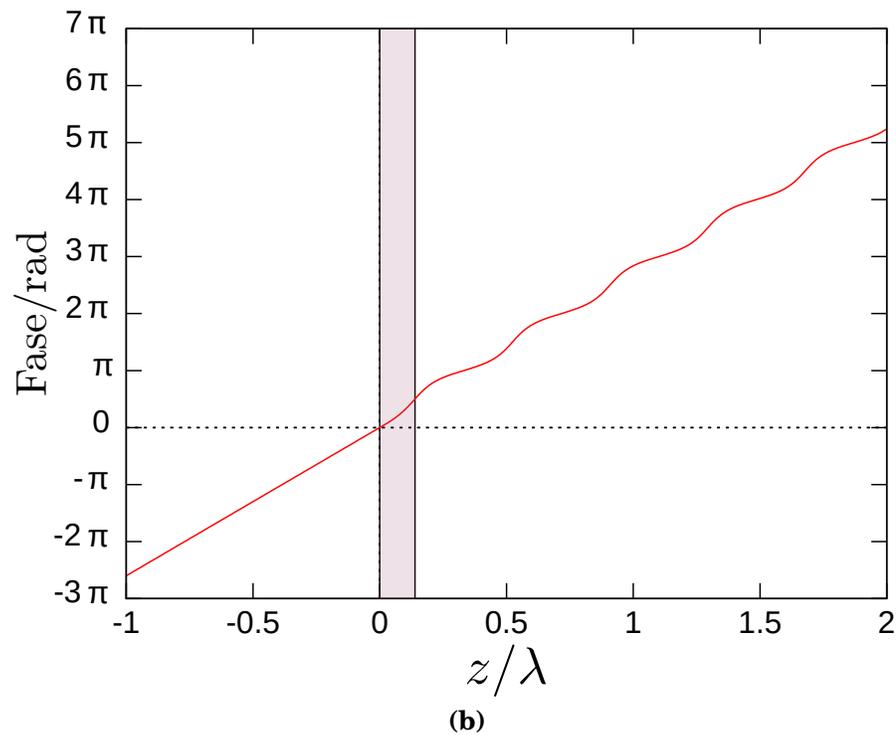
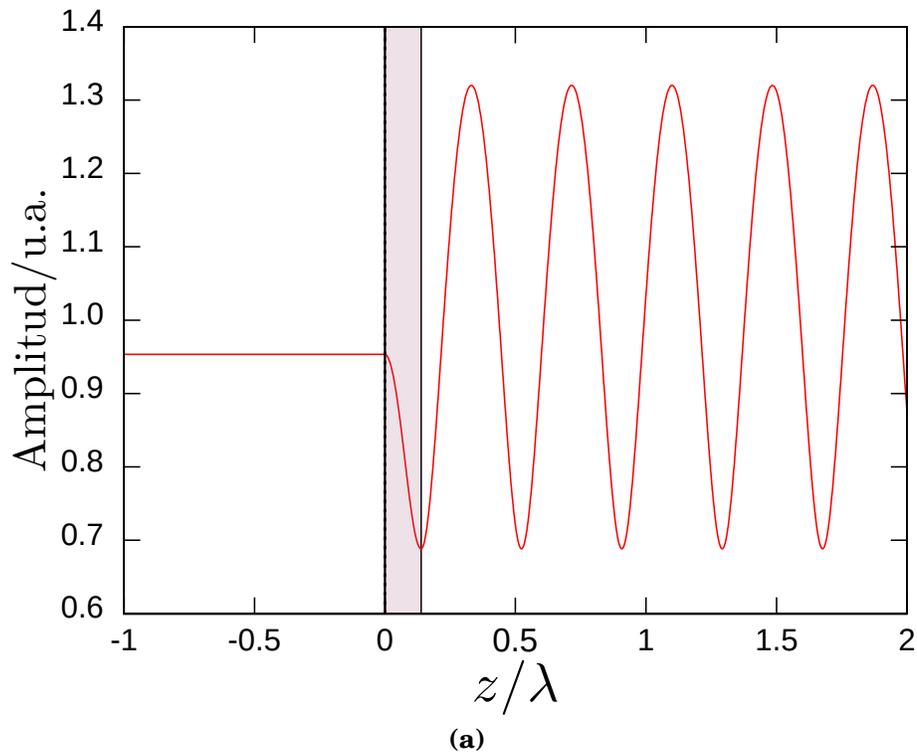


Figura 3.3.: Gráficas de las funciones de amplitud (3.3a) y de fase (3.3b) para una capa homogénea con espesor óptico de $\lambda/4$ ($s = 4$). El valor del índice de refracción relativo $n = n_2/n_1$ se mantiene constante, $n_1 = 1.3$ y $n_2 = 1.8$. Para este caso se obtuvo $\mu_2 = 1.3846$, $\mu_3 = 1.9172$, $\alpha_{02} = 0$, $\alpha_{03} = -1.1345$, $\phi_{02} = 0$, $\phi_{03} = -\pi$ y $a_1 = 0.9493$.

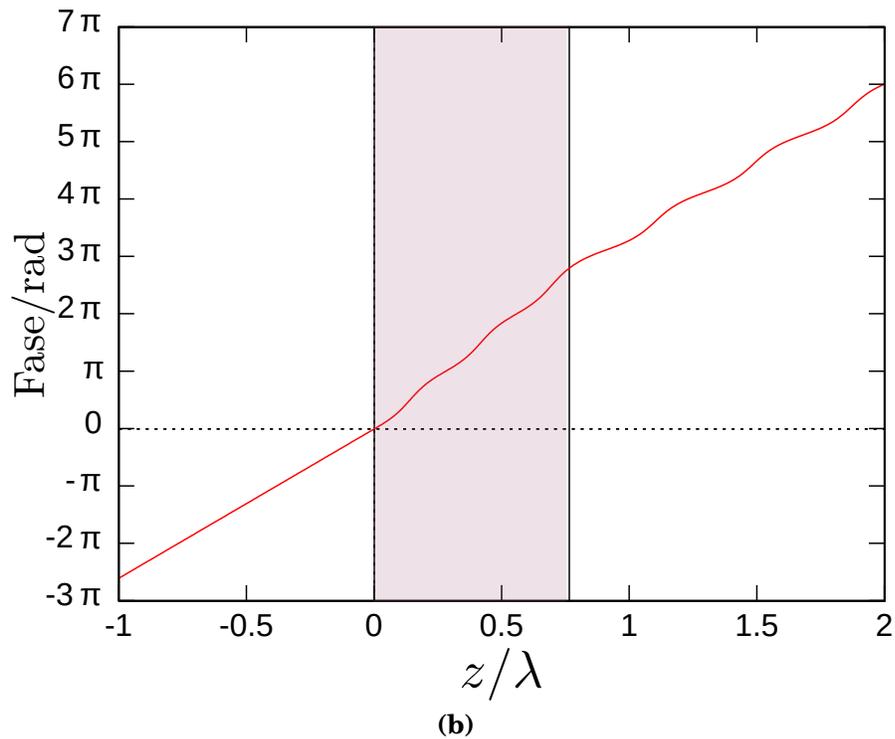
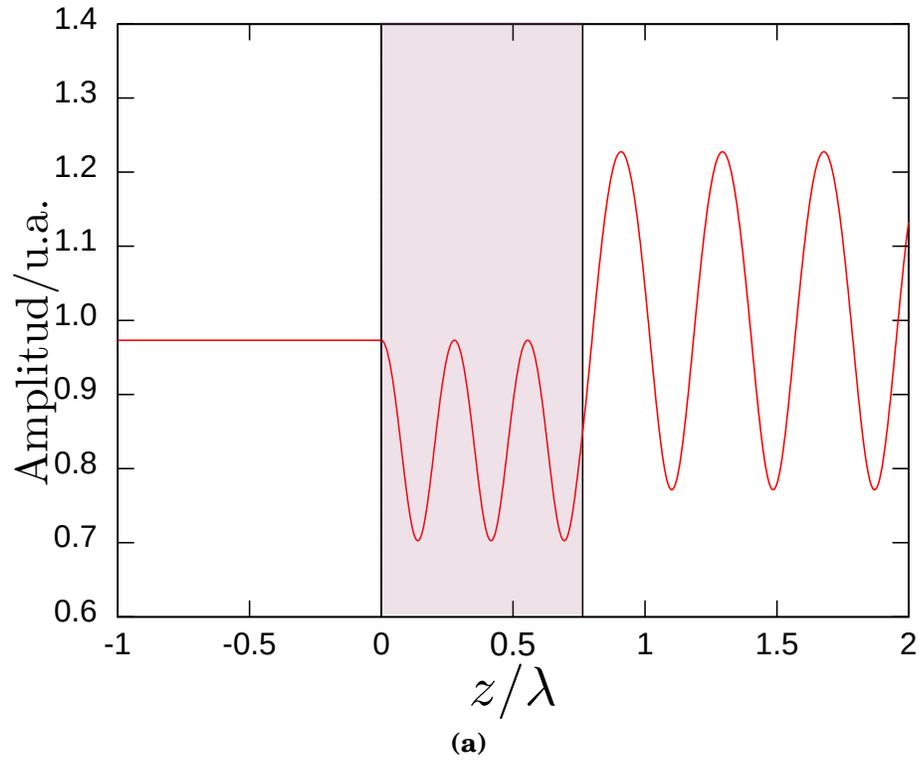


Figura 3.4.: Gráficas de las funciones de amplitud (3.4a) y de fase (3.4b) para una capa homogénea con espesor óptico de $11\lambda/8$ ($s = 8/11$). El valor del índice de refracción relativo $n = n_2/n_1$ se mantiene constante, $n_1 = 1.3$ y $n_2 = 1.8$. Para este caso se obtuvo $\mu_2 = 1.3846$, $\mu_3 = 1.5907$, $\alpha_{02} = 0$, $\alpha_{03} = 2.8055$, $\phi_{02} = 0$, $\phi_{03} = 0.3797$ y $a_1 = 0.9736$.

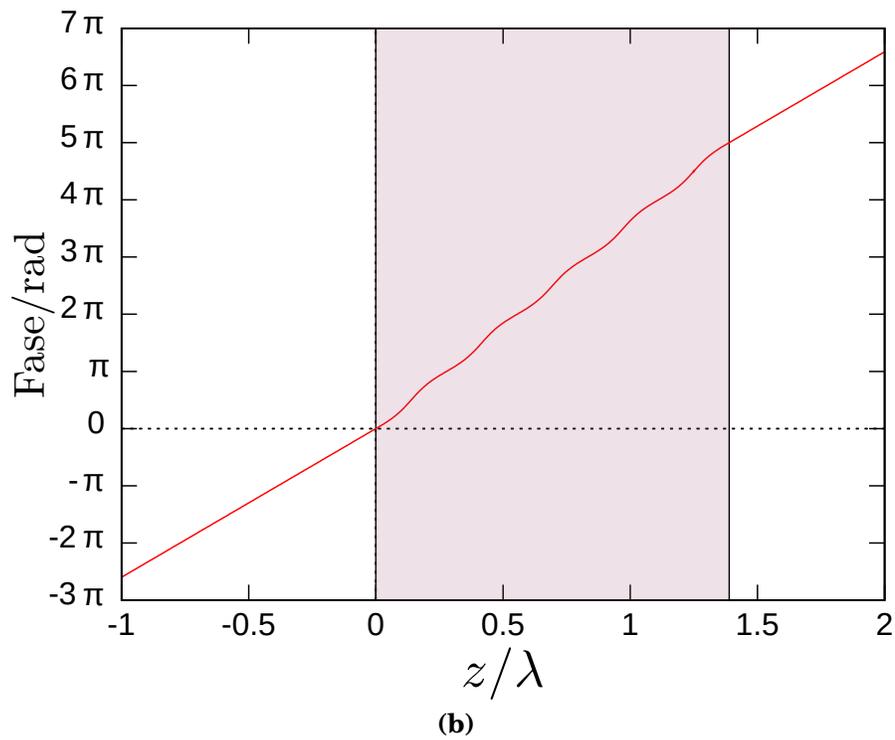
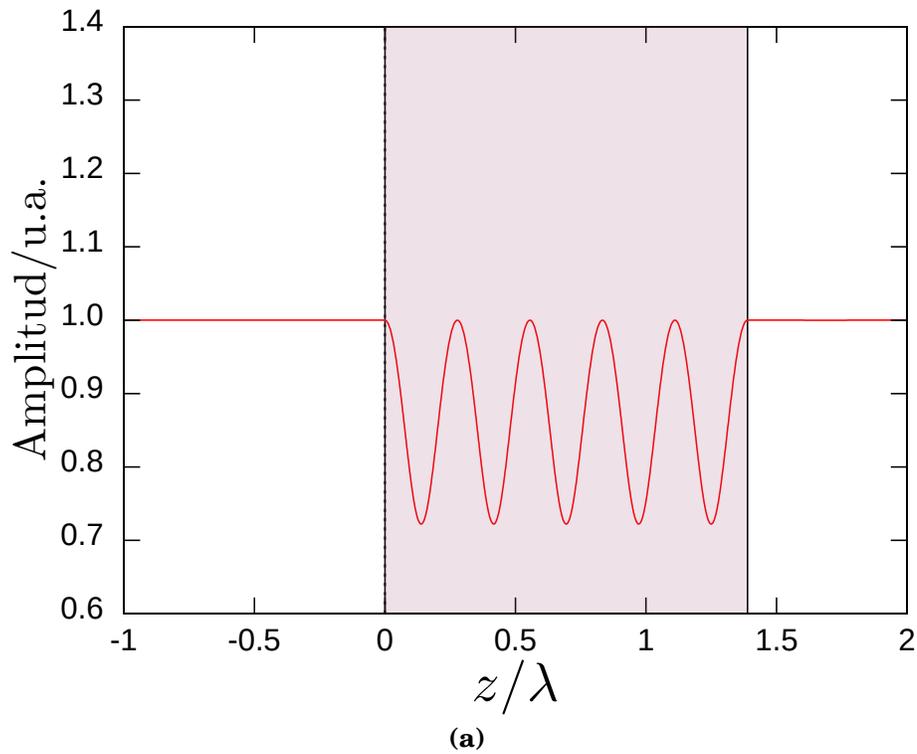


Figura 3.5.: Gráficas de las funciones de amplitud (3.5a) y de fase (3.5b) para una capa homogénea con espesor óptico de $5\lambda/2$ ($s=2/5$). El valor del índice de refracción relativo $n = n_2/n_1$ se mantiene constante, $n_1 = 1.3$ y $n_2 = 1.8$. Para este caso se obtuvo $\mu_2 = 1.3846$, $\mu_3 = 1.0$, $\alpha_{02} = 0$, $\alpha_{03} = 0.646$, $\phi_{02} = 0$, $\phi_{03} = 0.7437$ y $a_1 = 1$.

4. Propagación en medios inhomogéneos

4.1. Introducción

En este capítulo se emplea el método de representación en amplitud y fase para resolver la propagación de ondas electromagnéticas a través de medios con variación continua en su índice de refracción. El uso de perfiles de variación continua que no poseen soluciones simples conlleva a la eventual utilización de métodos de solución numérica, siendo uno de estos el matricial; a su vez este método requiere la multiplicación de una cantidad suficiente de matrices para garantizar la convergencia para obtener un error aceptable. Teniendo en cuenta esto, el perfil de variación empleado en este estudio posee soluciones que no incluyen funciones especiales. Esto representa una ventaja práctica al momento de calcular de manera análoga cantidades tales como la reflectancia o la transmitancia del sistema en estudio.

4.2. Capa inhomogénea de espesor d

En el capítulo 3, se trabajó con un etalon cuyo medio central era homogéneo. Ahora se trabaja con la misma geometría pero dicho medio se sustituye por uno de variación continua como el que se muestra en la figura 4.1. El perfil mostrado es una parametrización particular de la función cuadrática inversa

$$n(z) = n_{2i} \left(1 + \frac{s_1 z}{L_1} + \frac{s_2 z^2}{L_2^2} \right)^{-1}; \quad s_1 = 0, \pm 1; \quad s_2 = 0, \pm 1; \quad (4.1)$$

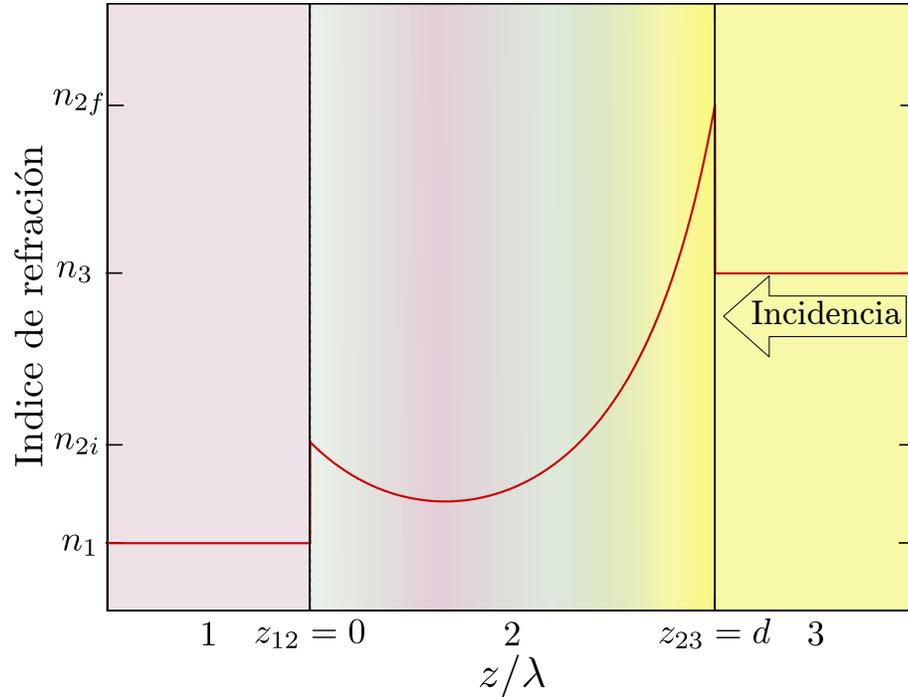


Figura 4.1.: Ejemplo de un medio inhomogéneo con variación continua de su índice de refracción; n_1 y n_3 son los índices de refracción de los medios homogéneos de transmisión y de incidencia, respectivamente; n_{2i} y n_{2f} son los índices de refracción del medio inhomogéneo en las interfaces de transmisión $z_{12} = 0$ y de reflexión $z_{23} = d$, respectivamente. En esta gráfica se utilizaron los parámetros $n_1 = 1.2$, $n_{2i} = 1.5$, $n_{2f} = 2.5$, $n_3 = 2.0$, $z_{23} = 0.0467$, $s_1 = 1$, $s_2 = -1$, $L_1 = 0.05842$ y $L_2 = 0.04266$.

que se extiende sobre el intervalo $z_{12} = 0 \leq z \leq z_{23} = d$ y en donde L_1 y L_2 son factores de escala arbitrarios y, junto con s_1 y s_2 , determinan la forma del perfil; finalmente, n_{2i} es el índice de refracción en $z = 0$. Este perfil fue propuesto por Shvartsburg, Petite y Hecquet en el año 2000 por ser analíticamente soluble y se ha estudiado mediante la resolución directa de las ecuaciones de Maxwell [SPH00, SP05]. Se han presentado generalizaciones de tal perfil las cuales, a pesar de ser exactamente solubles, no necesariamente se expresan en términos de funciones elementales [SM13]. Inclusive perfiles de apariencia más sencilla como el perfil $n(z) \sim (1 + z/L)^{1/2}$ requiere el empleo de funciones de Airy [Yeh05]. No obstante, la solución general para para la ecuación (2.4) con el perfil de índice

de refracción dado por (4.1) sí tiene una forma simple, a saber,

$$U_2(z) = \sqrt{\frac{n_{2i}}{n(z)}} \left[a_2 \exp \left(i \left(\sqrt{k_{2i}^2 - p^2} \Lambda(z) + \alpha_{02} \right) \right) + b_2 \exp \left(-i \left(\sqrt{k_{2i}^2 - p^2} \Lambda(z) + \alpha_{02} \right) \right) \right]; \quad z_{12} \leq z \leq d, \quad (4.2)$$

donde $\Lambda(z) = \int_0^z n(z) dz / n_{2i}$ es el camino óptico hasta un factor constante, $p^2 = (s_1/2L_1)^2 - s_2/L_2^2$, $k_{2i} = n_{2i}k_0$, a_2 y b_2 son amplitudes reales; α_{02} es una constante de fase. Así que, por su flexibilidad al depender de 4 parámetros y la simplicidad de sus soluciones, este perfil posee una ventaja a nivel computacional sobre otros modelos de variación continua.

Ahora bien, para que las exponenciales en (4.2) representen ondas viajeras se debe cumplir la condición $k_{2i}^2 - p^2 \geq 0$. Esto es siempre cierto si se permite que p sea imaginario puro y en consecuencia $p^2 < 0$, arrojando la condición $(s_1/2L_1)^2 < s_2/L_2^2$. La otra posibilidad establece una cota superior al valor de la frecuencia de la onda incidente, pues $\omega_{max} = c_0 \sqrt{(s_1/2L_1)^2 - s_2/L_2^2} / n_{2i}$. Cualquier valor superior a esta frecuencia prevendrá la existencia de ondas viajeras dentro de la película inhomogénea, dando lugar a ondas evanescentes descritas por exponenciales reales en (4.2). Estos efectos han atraído interés y se han discutido en [SP05, SM13]; por tanto, sería natural llevar a cabo un estudio análogo en el presente contexto. No obstante, en este primer ejemplo con medio cuyo índice de refracción es de variación continua, se toma hipótesis de trabajo que $k_{2i}^2 - p^2 \geq 0$ para garantizar únicamente la existencia de ondas viajeras.

Se expresa solución general (4.2) en su respectiva representación en amplitud y fase $U_2(z) = \rho_{2\leftrightarrow}(z) \exp(i\phi_{2\leftrightarrow}(z))$. La función de amplitud es

$$\rho_{2\leftrightarrow}(z) = \sqrt{\frac{n_{2i}(a_2^2 - b_2^2)}{n(z)\mu_2}} \sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2(z))}, \quad (4.3)$$

donde $\alpha_2(z) = \sqrt{k_{2i}^2 - p^2} \Lambda(z) + \alpha_{02}$. Y la función de fase es

$$\phi_{2\leftrightarrow}(z) = \arctan \left(\frac{1}{\mu_2} \tan(\alpha_2(z)) \right) + \phi_{02}, \quad (4.4)$$

como antes, $\mu_2 = (a_2 + b_2) / (a_2 - b_2)$.

Para resolver este nuevo sistema, se aplica un esquema totalmente análogo al revisado en el capítulo 3; se considera incidencia por la derecha y se comienza a analizar la frontera de salida.

4.2.1. Primera interfase

La funciones de amplitud y fase para la región de transmisión poseen la misma forma que las dadas por las expresiones (3.1) y (3.2). Así, la función de amplitud en esta primer región queda

$$\rho_{1\leftrightarrow}(z) = a_1, \text{ para } -\infty < z < z_{12}.$$

Por otro lado, la solución de fase está dada por

$$\phi_{1\leftrightarrow}(z) = k_1 z + \alpha_{01}, \tag{4.5}$$

donde $k_1 = n_1 k_0$, $k_0 = 2\pi/\lambda$ y α_{01} es una constante de fase. Las funciones de amplitud y de fase para la región segunda región son (4.3) y (4.4), respectivamente. Nuevamente, para determinar las constantes desconocidas en las expresiones anteriores, se hace uso de las condiciones de continuidad enunciadas en la sección (2.5). Para la interfase $z_{12} = 0$ la continuidad de la función de amplitud $\rho_{1\leftrightarrow}(0) = \rho_{2\leftrightarrow}(0)$ se reduce a

$$a_1 = \sqrt{\frac{a_2^2 - b_2^2}{\mu_2}} \sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_{02})}.$$

Mientras que la condición de continuidad de la derivada $\dot{\rho}_{1\leftrightarrow}(0) = \dot{\rho}_{2\leftrightarrow}(0)$ es

$$0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_2^2 - b_2^2}{\mu_2}} \left[\frac{s_1}{L_1} \sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_{02})} - \frac{\sqrt{k_{2i}^2 - p^2}}{\sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_{02})}} (\mu_2^2 - 1) \sin(2\alpha_{02}) \right].$$

4.2 Capa inhomogénea de espesor d

El invariante de intercambio de energía $Q = \rho^2(z) \dot{\phi}(z)$ para el medio inhomogéneo con perfil (4.1) es

$$Q = (a_2^2 - b_2^2) \sqrt{k_{2i}^2 - p^2}. \quad (4.6)$$

Ahora, se emplea la invariancia de Q en la interfase $z_{12} = 0$; dando lugar a la relación $a_1^2 k_1 = (a_2^2 - b_2^2) \sqrt{k_{2i}^2 - p^2}$, o bien, $a_1^2 / (a_2^2 - b_2^2) = \sqrt{k_{2i}^2 - p^2} / k_1$. Con esta relación, la condición de amplitud es expresada como

$$\sqrt{\frac{\sqrt{k_{2i}^2 - p^2}}{k_1}} \mu_2 = \sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_{02})}; \quad (4.7)$$

a su vez, la condición de continuidad de la derivada de la amplitud se reduce a

$$\frac{s_1}{L_1} [1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_{02})] = \sqrt{k_{2i}^2 - p^2} (\mu_2^2 - 1) \sin(2\alpha_{02}). \quad (4.8)$$

Se eliminan los términos que involucran la fase α_{02} de (4.7) y (4.8); se obtiene una ecuación cuadrática del tipo revisado en A.2 (para ver los detalles de esta derivación ver la sección A.5)

$$\mu_2^2 - \frac{k_{2i}^2 + k_1^2 + \frac{s_2}{L_2^2}}{k_1 \sqrt{k_{2i}^2 - p^2}} \mu_2 + 1 = 0; \quad (4.9)$$

cuya solución físicamente aceptable ($\mu_2 \geq 1$) es

$$\mu_2 = \frac{k_{2i}^2 + k_1^2 + \frac{s_2}{L_2^2} + \sqrt{(k_{2i}^2 - k_1^2)^2 \left(1 + 2\frac{s_2}{L_2^2}\right) + 4k_1^2 \left(p^2 + \frac{s_2}{L_2^2}\right) + \left(\frac{s_2}{L_2^2}\right)^2}}{2k_1 \sqrt{k_{2i}^2 - p^2}} \quad (4.10)$$

pues $(k_{2i}^2 + k_1^2 + s_2/L_2^2) / (k_1 \sqrt{k_{2i}^2 - p^2}) \geq 2$ tal como se demuestra en la sección A.6. La constante de fase $\alpha_2(0) = \alpha_{02}$ puede ser expresada en términos de μ_2 mediante la ecuación (4.7)

$$\alpha_{02} = \cos^{-1} \left(\operatorname{sgn} \left(\frac{s_1}{L_1} \right) \sqrt{\frac{\mu_2 \sqrt{k_{2i}^2 - p^2} - k_1}{k_1 (\mu_2^2 - 1)}} \right); \quad (4.11)$$

Tal como se hizo en la sección 3.2.2, se introducen una función $\text{sgn}(s_1/L_1)$ para asegurar la continuidad de la derivada de la función de amplitud. Esta elección se puede deducir directamente de la condición (4.8), en donde el signo de la función $\sin(2\alpha_{02})$ que aparece en el lado derecho de la igualdad debe empatar con el signo del término s_1/L_1 .

4.2.2. Segunda interfase

La solución de amplitud y de fase en la región 3, poseen la misma forma que aquellas expresadas en (3.7) y (3.8); así pues, la función de amplitud es

$$\rho_{3\leftrightarrow}(z) = \sqrt{\frac{a_3^2 - b_3^2}{\mu_3}} \sqrt{1 + (\mu_3^2 - 1) \cos^2 \alpha_3(z)}, \quad d \leq z < +\infty \quad (4.12)$$

y la función de fase es

$$\phi_{3\leftrightarrow}(z) = \arctan\left(\frac{1}{\mu_3} \tan \alpha_3(z)\right) + \phi_{03}, \quad (4.13)$$

donde $\alpha_3(z) = k_3 z + \alpha_{03}$ y $k_3 = n_3 k_0$. El plano de la segunda interfase está en $z = z_{23}$. El espesor geométrico de la capa inhomogénea es $z_{23} - z_{12} = d$.

Considere las condiciones de frontera en la interfase $z = d$ para determinar las constantes desconocidas en (4.12) y (4.13), esto es μ_3 y α_{03} . La condición de continuidad de la función de amplitud $\rho_{\leftrightarrow 2}(d) = \rho_{\leftrightarrow 3}(d)$ es

$$\sqrt{\frac{n_{2i}(a_2^2 - b_2^2)}{n(d)\mu_2}} \sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2(d))} = \sqrt{\frac{a_3^2 - b_3^2}{\mu_3}} \sqrt{1 + (\mu_3^2 - 1) \cos^2(\alpha_3(d))},$$

donde μ_2 está dado por (3.6); el invariante de intercambio de energía (2.10) para la tercera región es $(a_3^2 - b_3^2) k_3$. Por la invariancia de Q se tiene $(a_3^2 - b_3^2) k_3 = (a_2^2 - b_2^2) \sqrt{k_{2i}^2 - p^2}$, o bien, $(a_2^2 - b_2^2) / (a_3^2 - b_3^2) = k_3 / \sqrt{k_{2i}^2 - p^2}$. Usando esto, se re-

4.2 Capa inhomogénea de espesor d

escribe la relación anterior como

$$\sqrt{\frac{\mu_3 k_3}{n_{2fi} \mu_2 \sqrt{k_{2i}^2 - p^2}}} \sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2(d))} = \sqrt{1 + (\mu_3^2 - 1) \cos^2(\alpha_3(d))}, \quad (4.14)$$

donde $n_{2fi} = n_{2f}/n_{2i}$. Ahora bien, la continuidad de la derivada de la amplitud $\rho'_2(d) = \rho'_3(d)$ implica

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n_{2fi} (a_2^2 - b_2^2)}{\mu_2}} \left[\left(\frac{s_1}{L_1} + \frac{2s_2 d}{L_2^2} \right) \sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2(d))} \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2(d))}} (\mu_2^2 - 1) \sin(2\alpha_2(d)) \sqrt{k_{2i}^2 - p^2} \right] = \\ - \sqrt{\frac{a_3^2 - b_3^2}{\mu_3}} \frac{(\mu_3^2 - 1) k_3 \sin(2\alpha_3(d))}{2\sqrt{1 + (\mu_3^2 - 1) \cos^2(\alpha_3(d))}}. \quad (4.15) \end{aligned}$$

Se eliminan las amplitudes a_3, b_3, a_2 y b_2 mediante la relación del invariante Q

$$\begin{aligned} \left(\frac{s_1}{L_1} + \frac{2s_2 d}{L_2^2} \right) \sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2(d))} \\ - \frac{\sqrt{k_{2i}^2 - p^2}}{\sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2(d))}} (\mu_2^2 - 1) \sin(2\alpha_2(d)) = \\ - \sqrt{\frac{\mu_2 k_3 \sqrt{k_{2i}^2 - p^2}}{\mu_3 n_{2fi}}} \frac{(\mu_3^2 - 1) \sin(2\alpha_3(d))}{\sqrt{1 + (\mu_3^2 - 1) \cos^2(\alpha_3(d))}}. \quad (4.16) \end{aligned}$$

Se elimina $\alpha_3(d)$ de (4.14) y (4.16), para obtener una ecuación cuadrática para μ_3 de la forma

$$\mu_3^2 - \varepsilon_3 \mu_3 + 1 = 0, \quad (4.17)$$

donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = \frac{n_{2fi}}{k_3} \left\{ \frac{\left[\left(\frac{s_1}{2L_1} + \frac{s_2 d}{L_2^2} \right)^2 + n_{2fi}^{-2} k_3^2 \right] [\mu_2 - (\mu_2 - \mu_2^{-1}) \sin^2(\alpha_2(d))]}{\sqrt{k_{2i}^2 - p^2}} \right. \\ + \frac{\sqrt{k_{2i}^2 - p^2} \left[1 + \frac{1}{2^2} (\mu_2 - \mu_2^{-1})^2 \sin^2(2\alpha_2(d)) \right]}{\mu_2 - (\mu_2 - \mu_2^{-1}) \sin^2(\alpha_2(d))} \\ \left. - \left(\frac{s_1}{2L_1} + \frac{s_2 d}{L_2^2} \right) (\mu_2 - \mu_2^{-1}) \sin(2\alpha_2(d)) \right\} \quad (4.18) \end{aligned}$$

Mostrando que $\varepsilon_3 \geq 2$ se tiene que la solución físicamente aceptable está dada por

$$\mu_3 = \frac{\varepsilon_3 + \sqrt{\varepsilon_3^2 - 4}}{2}, \quad (4.19)$$

La constante de fase α_{03} se obtiene a partir de (4.14)

$$\alpha_{03} = \cos^{-1} \left(\operatorname{sgn}(-\rho_{2\leftrightarrow}(d)) \sqrt{\frac{\mu_3 k_3 [\mu_2^{-1} + (\mu_2 - \mu_2^{-1}) \cos^2(\alpha_2(d))] - n_{2fi} \sqrt{k_{2i}^2 - p^2}}{(\mu_3^2 - 1) n_{2fi} \sqrt{k_{2i}^2 - p^2}}} \right) - k_3 z_3. \quad (4.20)$$

En este caso se ha incluido la función $\operatorname{sgn}(-\rho_{2\leftrightarrow}(d))$ tal como en las situaciones previas para asegurar que se satisfaga la condición de continuidad de la derivada de la amplitud en la interfase $z_{23} = d$. La elección de esta función se deduce directamente de (4.16).

Ya se han encontrado todas las constantes, previamente desconocidas, que definen por completo las funciones de amplitud y de fase. La función de amplitud en todo el espacio es

$$\rho_{\leftrightarrow}(z) = \begin{cases} a_1 & \text{para } -\infty < z < 0, \\ a_1 \sqrt{\frac{n_{2i} k_1}{n(z) \mu_2 \sqrt{k_{2i}^2 - p^2}}} \sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\sqrt{k_{2i}^2 - p^2} \Lambda(z) + \alpha_{02})} & \text{para } 0 \leq z \leq d, \\ \frac{a_1}{\sqrt{n_{31} \mu_3}} \sqrt{1 + (\mu_3^2 - 1) \cos^2(k_3 z + \alpha_{03})} & \text{para } d < z < \infty, \end{cases} \quad (4.21)$$

4.3 Modelo de interfase continua

en donde $n_{31} = n_3/n_1$. Y la función de fase es

$$\phi_{\leftrightarrow}(z) = \begin{cases} k_1 z & \text{para } -\infty < z < 0, \\ \arctan\left(\frac{1}{\mu_2} \tan\left(\sqrt{k_{2i}^2 - p^2} \Lambda(z) + \alpha_{02}\right)\right) + \phi_{02} & \text{para } 0 \leq z \leq d, \\ \arctan\left(\frac{1}{\mu_3} \tan(k_3 z + \alpha_{03})\right) + \phi_{03} & \text{para } d < z < \infty. \end{cases} \quad (4.22)$$

De nuevo, se han introducido las constantes de fase ϕ_{02} y ϕ_{03} que permiten a ϕ_{\leftrightarrow} ser continua en las interfases.

4.3. Modelo de interfase continua

A modo de ejemplo, en esta sección se modela la transición continua de un medio homogéneo a otro. Para esto, basta con hacer coincidir los índices de refracción de los extremos de la capa inhomogénea con los de los medios homogéneos que la encierran, esto es, $n_{2i} = n_1$ y $n_{2f} = n_3$. Así, la capa central toma el rol de medio de transición continua. Se busca modelar un perfil con variación aproximadamente uniforme con espesor óptico 1.0λ , donde λ es la longitud de onda del campo incidente en el vacío. Para esto, se tomará el parámetro $s_2 = 0$ en (4.1). El parámetro s_1 se fija en -1 , por ser una función creciente. Entonces, el perfil para la región inhomogénea queda en la forma

$$n(z) = n_1 \left(1 - \frac{z}{L_1}\right)^{-1} \quad 0 \leq z \leq z_{23}$$

el cual es un perfil hiperbólico [Jac66]. Para determinar el valor del factor de forma L_1 y del espesor geométrico de la película $z_{23} - z_{12} = d$, se emplean las restricciones

$$n_3 = n(d) ; \text{Continuidad con el medio de incidencia.} \quad (4.23)$$

$$\int_0^d n(z) dz = 1.0\lambda ; \text{Camino óptico.} \quad (4.24)$$

Al calcular la integral de camino óptico (4.24) se tiene $\int_0^d n(z) dz = n_1 L_1 \ln(n(d)/n_1) = n_1 L_1 \ln(n_{31}) = 1.0\lambda$, por tanto,

$$L_1 = \frac{\lambda}{n_1 \ln(n_{31})}. \quad (4.25)$$

Finalmente, al despejar el espesor geométrico d de (4.23) y sustituir (4.25) se obtiene

$$d = (1 - n_{31}^{-1}) \frac{\lambda}{n_1 \ln(n_{31})}. \quad (4.26)$$

En este ejemplo se usan los valores $n_1 = 1.3$, $n_3 = 1.8$ y se toma el valor unitario $\lambda = 1$. Sustituyendo estos valores en (4.25) y (4.26) se obtienen $L_1 = 2.36379$ y $d = 0.65661$, con este número de cifras significativas aseguramos continuidad en las interfaces. Así, el perfil índice de refracción para este ejemplo está dado por

$$n(z) = \begin{cases} 1.3 & -\infty < z < 0, \\ 1.3 \left(1 - \frac{z}{2.36379}\right)^{-1} & 0 \leq z \leq 0.65661, \\ 1.8 & 0.65661 < z < \infty; \end{cases}$$

con estos valores, la desviación del índice de refracción en la segunda interfase es $|n(d) - n_3| \approx 1.761 \times 10^{-6}$, garantizando suficiente continuidad para los cálculos numéricos. La gráfica de este perfil se muestra en la figura 4.2.

La función de amplitud para este perfil se muestra en la figura 4.3; se ha agregado el respectivo cálculo numérico de la función de amplitud¹. Se observa que ambas gráficas han quedado completamente traslapadas en el intervalo mostrado. Aunque este era el panorama esperado, tal concordancia refuerza la confianza en que tanto el método numérico como el analítico se han llevado a cabo correctamente.

Ahora bien, respecto al comportamiento particular de la función de amplitud, se tiene un caso de película antireflejante tal como lo evidencia la ausencia de

¹Estos cálculos fueron realizados por la Dra. Ruth Diamant Adler, profesora investigadora del departamento de física de la Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, quien posee amplia experiencia en el estudio de la propagación del campo electromagnético en medios estratificados así como en el método de representación en amplitud y fase.

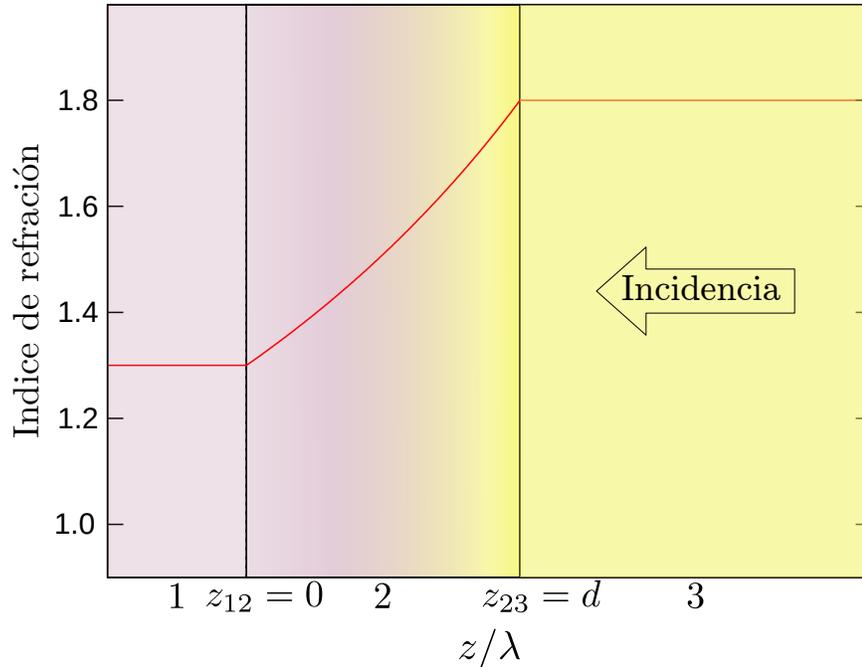


Figura 4.2.: Ejemplo de interfase continua. Se muestra el perfil $n(z)$ (4.1) con los parámetros $n_1 = n_{2i} = 1.3$, $n_2 = n_{2f} = 1.8$, $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $L_1 = 2.363791$ y $d = 0.65661$.

oscilaciones de dicha función en la región de incidencia. Este resultado demuestra la posibilidad de tener películas antirreflejantes además de las homogéneas de $\lambda/4$ y $\lambda/2$. Para este caso, los parámetros de diseño elegidos producen una capa inhomogénea cuyo espesor óptico $n_{2i}\Lambda(d)$ es 1.0λ ; dadas las condiciones de los medios homogéneos circundantes esta capa es similar a la versión homogénea de $\lambda/4$. Sin embargo, una capa homogénea de este espesor óptico, requeriría además de la condición de que su índice de refracción fuera la media geométrica de los medios laterales, esto es, $\sqrt{n_1 n_3}$ para garantizar reflectancia nula. Esto provee de versatilidad en el diseño de dispositivos ópticos y refrenda el interés en los perfiles inhomogéneos.

Para indagar más al respecto, en este punto, resulta interesante analizar la reflectancia de este sistema. Basta con tomar la expresión para \mathcal{R} estudiada en

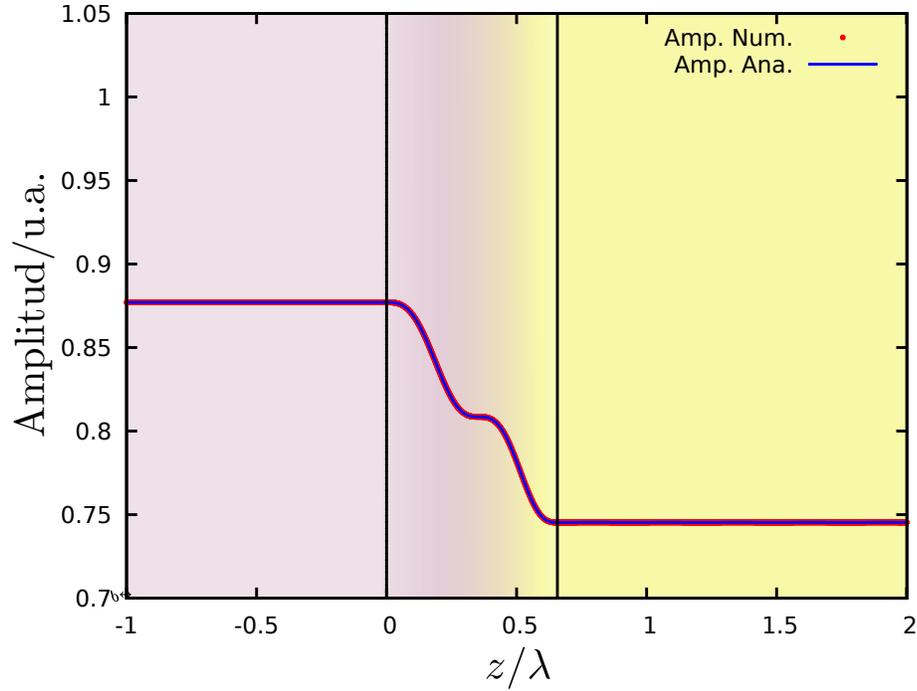


Figura 4.3.: Gráfica de amplitud correspondiente a una interfase continua con perfil $n(z)$ dado por (4.1) con los parámetros $n_1 = n_{2i} = 1.3$, $n_2 = n_{2f} = 1.8$, $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $L_1 = 2.363791$ y $d = 0.65661$. Se muestra el traslape de las gráficas realizadas con el cálculo analítico y mediante la resolución numérica de la ecuación de Ermakov (2.6). Para este caso se obtuvo $\mu_2 = 1.0262$, $\mu_3 = 1.811$, $\alpha_{02} = 2.3432$, $\alpha_{03} = 0.4269$, $\phi_{02} = 0$, $\phi_{03} = 0.7437$ y $a_1 = 0.8771$.

la sección 3.4

$$\mathcal{R} = \left(\frac{1 - \mu_3}{1 + \mu_3} \right)^2$$

y sustituir μ_3 para el medio inhomogéneo dada por (4.19) la cual, a su vez, depende del valor de ε_3 dado por 4.18. En la figura 4.4, se muestra la gráfica de \mathcal{R} en función del número de onda k calculada de manera analítica con los resultado obtenidos en este trabajo y comparada con su contraparte numérica. La figura 4.5 corresponde a la misma gráfica pero limitando el dominio para tener mejor detalle de los máximos y mínimos de reflectancia. De nuevo se presenta traslape en las gráficas comparadas. Se destaca la presencia de oscilaciones y de puntos de no reflexión, lo cual indica la interferencia totalmente destructiva del campo total reflejado para ciertos números de onda. Este tipo de oscilaciones

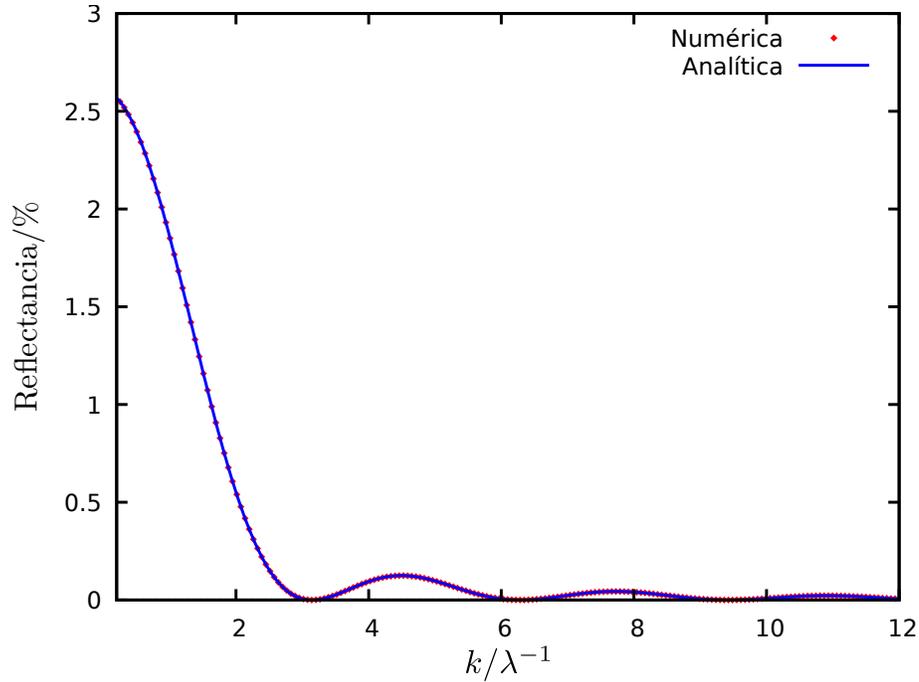


Figura 4.4.: Comparación de reflectancias numérica y analítica para el perfil $n(z)$ dado por (4.1) con los parámetros $n_1 = n_{2i} = 1.3$, $n_2 = n_{2f} = 1.8$, $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $L_1 = 2.363791$ y $d = 0.65661$. Se puede apreciar la concordancia entre el resultado numérico y el cálculo analítico.

son típicas en medios con interfases abruptas y suele asociarse exclusivamente a estas la presencia de tales discontinuidades en el índice de refracción. Sin embargo, se ha estudiado que las discontinuidades en la derivada del índice de refracción y, de sus derivadas de orden superior, tienen su propia contribución [DFG09, DFG13b, DFG14]; para el ejemplo analizado, se tienen tales discontinuidades en cada una de las interfases.

4.4. Conclusiones

En este capítulo final se han planteado de modo general las soluciones para un perfil cuadrático inverso que posee la característica de ser exactamente soluble y cuyas soluciones son funciones elementales. Esto ha permitido llevar a cabo un tratamiento puramente algebraico basado en la representación de amplitud y fase. A modo de ilustración se ha discutido el caso particular de una interfase

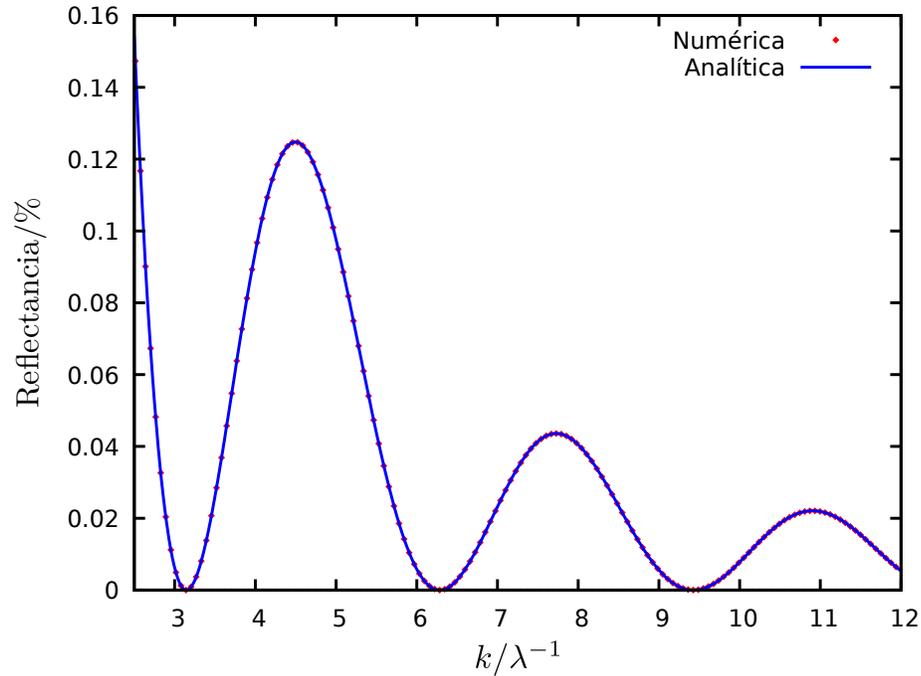


Figura 4.5.: Detalle de la figura (4.4). Comparación de reflectancias numérica y analítica para el perfil $n(z)$ dado por (4.1) con los parámetros $n_1 = n_{2i} = 1.3$, $n_2 = n_{2f} = 1.8$, $s_1 = -1$, $s_2 = 0$, $L_1 = 2.363791$ y $d = 0.65661$. Se puede apreciar la concordancia entre el resultado numérico y el cálculo analítico.

de variación continua. Los resultados obtenidos se han comparado con cálculos computacionales previamente desarrollados, reflejando una notable concordancia.

5. Conclusiones y perspectivas

El tratamiento de amplitud y fase proporciona un método poderoso para atacar problemas de propagación de luz en medios no homogéneos en una dimensión. El método aquí presentado involucra la descomposición del campo total como una suma de ondas contrapropagantes. Las funciones de amplitud y fase halladas satisfacen ecuaciones diferenciales no lineales y en cuyas soluciones queda implícito el fenómeno de interferencia. El invariante de Ermakov-Lewis juega un papel doble, ya que permite el desacoplamiento de las ecuaciones diferenciales de amplitud y fase y es por sí mismo una cantidad constante en la propagación de las ondas; se debe notar que se trata de un invariante exacto pues es constante aún en cambios abruptos de medios a través de las interfases.

En el primer ejemplo resuelto, se reprodujeron los resultados de un sistema formado por 3 medios distintos y que usualmente es resuelto mediante el método de múltiples reflexiones. Los resultados para el caso $n_1 = n_3$ fueron publicados en el artículo [JRFG19]; incluido en la sección A.7. Asimismo, se presentaron en una sesión oral en la reunión denominada «2019 Canada-America-Mexico Graduate Student Physics Conference» (CAM 2019 con sede en Sudbury, ON Canadá); con apoyo económico de la Sociedad Mexicana de Física (SMF) (ver sección A.8).

Posteriormente, con el perfil inhomogéneo empleado, se ha demostrado la aplicación eficiente del método para resolver de manera analítica sistemas más complejos con índice de refracción variable. En el ejemplo de la interfase con variación continua se demostró la concordancia del cálculo analítico realizado en este trabajo con estudios numéricos previos. Más aún, los resultados obtenidos admiten perfiles de índice de refracción con discontinuidades en las interfases así como variaciones más complejas en el medio inhomogéneo. Esto abre el camino para extender el estudio a sistemas multicapa periódicos con el formalismo

aquí empleado. A futuro se analizarán estos perfiles de índice de refracción con mayor detalle así como los efectos en películas inhomogéneas cuyo espesor es mucho menor que la longitud de onda del campo incidente.

Agradecimientos

Quiero agradecer profundamente al Dr. Manuel Fernández Guasti por su entusiasmo y motivación para llevar a cabo este trabajo de tesis y en general por su apoyo constante durante este tiempo.

A mis sinodales, la Dra. Ruth Diamant Adler y el Dr. Sabino Chávez Cerda, por las valiosas sugerencias que ayudaron a mejorar sensiblemente este trabajo; al Dr. Sabino también le agradezco por su apoyo y contribución a mi formación académica y profesional desde los tiempos de licenciatura.

A mis queridos padres, la Sra. Catalina Romero Morales y el Sr. Santos Jiménez Monter, por siempre confiar en mí, por su ejemplo de trabajo árduo y por impulsarme a alcanzar mis metas.

Son muchos los seres queridos y conocidos a los que les debo reconocimiento ya sea por su aportación material o moral; estoy seguro de que saben lo agradecido que estoy con todos ellos.

Bibliografía

- [Abe50] F. Abeles. Recherches sur la propagation des ondes electromagnetiques sinusoidales dans les milieux stratifie. *Ann. Physique*, 5: 706–784, 1950.
- [AL08] K. Andriopoulos and P. G. L. Leach. The ermakov equation: A commentary. *Applicable Analysis and Discrete Mathematics*, 2, 10 2008.
- [Arf70] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, NY, 1970.
- [BB80] L. M. Brekhovskikh and R. T. Beyer. *Waves in layered media*. Academic Press, 1980.
- [Bov93] B. G. Bovard. Rugate filter theory: an overview. *Appl. Opt.*, 32(28): 5427–5442, 1993.
- [BW05] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*. CUP, 7th edition edition, 2005.
- [DFG09] R. Diamant and M. Fernández-Guasti. Light propagation in 1D inhomogeneous deterministic media: the effect of discontinuities. *J. Opt. A: Pure Appl. Opt.*, 11: 045712 (8pp), 2009, <https://luz.izt.uam.mx/mfg/arti/06-10/inhom-discont-jopa09.pdf>.
- [DFG13a] R. Diamant and M. Fernández-Guasti. Novel method to compute high reflectivity of multilayered mirrors with rugate features. volume TC2 of *Optical Interference Coatings*. OSA, 2013, <https://luz.izt.uam.mx/mfg/arti/11-15/amph-meth-OIC-2013-TC.2.pdf>.

- [DFG13b] R. Diamant and M. Fernández-Guasti. Phase Change of Light Reflected by a Discontinuity in the Derivatives of the Refractive Index. *Optics Comm.*, 294: 64–72, 2013, <https://luz.izt.uam.mx/mfg/arti/11-15/phase-num-oc2013.pdf>.
- [DFG14] R. Diamant and M. Fernández-Guasti. Reflection coefficient due to a discontinuity in the n th order derivative of the refractive index. *Journal of Optics*, 16: 015707 (10pp), 2014, <https://luz.izt.uam.mx/mfg/arti/11-15/refl-disc-jo2014.pdf>.
- [Dia15] R. Diamant. Propagación de ondas electromagnéticas en medios con índice de refracción estratificado, la representación de amplitud y fase. Tesis doctoral, 9 2015.
- [Eps30] P. S. Epstein. Reflection of waves in an inhomogeneous absorbing medium. In *Proc. Nat. Acad. Sci.*, volume 16, page 627–637, 1930.
- [Erm80] V. Ermakov. Second order differential equations. Conditions of complete integrability. *Univ. Izvestia Kiev Ser. III*, 9, 1880.
- [FG04] M. Fernández-Guasti. Complementary fields conservation equation derived from the scalar wave equation. *J. Phys. A: Math. Gen.*, 37: 4107–4121, 2004, <https://luz.izt.uam.mx/mfg/arti/00-05/compfiswe-jpa04.pdf>.
- [FG06] M. Fernández-Guasti. Indeterminacy of amplitude and phase variables in classical dynamical systems: the harmonic oscillator. *Europhysics Letters*, 74(6): 1013–1019, 2006, <https://luz.izt.uam.mx/mfg/arti/06-10/ampind-epl06.pdf>.
- [FG09] M. Fernández-Guasti. The Wronskian and the Ermakov - Lewis invariant. *International Mathematical Forum*, 4(16): 795 – 804, 2009, <https://luz.izt.uam.mx/mfg/arti/06-10/wro-IMF09.pdf>.
- [FG15] M. Fernández-Guasti. Dielectric interfaces and mirrors in the amplitude and phase representation. *J. Mod. Optics*, 62(4): 265–271, 2015, <https://luz.izt.uam.mx/mfg/arti/11-15/diel-int-jmo-2015.pdf>.

- [FGGV03] M. Fernández-Guasti and A. Gil-Villegas. Orthogonal functions exact invariant and the adiabatic limit for time-dependent harmonic oscillators. In A. Macias, F. Uribe, and E. Diaz, editors, *Developments in mathematical and experimental physics*, volume C of *C: Hydrodynamics and dynamical systems*, page 159–166. Springer US, 2003, <https://luz.izt.uam.mx/mfg/arti/00-05/orthfun-klu03.pdf>.
- [Fow89] G. R. Fowles. *Introduction to Modern Optics (Dover Books on Physics)*. Dover Publications, 1989.
- [GTS87] A. Ghatak, K. Thyagarajan, and M. Shenoy. Numerical analysis of planar optical waveguides using matrix approach. *Journal of Lightwave Technology*, 5(5): 660–667, 1987, <https://doi.org/10.1109/jlt.1987.1075553>.
- [Hec01] E Hecht. *Optics*. Addison Weseley, 4th ed. edition, 2001.
- [Jac66] R. Jacobsson. *Light reflection from films of continuously varying refractive index*, volume V of *Progress in Optics*, chapter V. North Holland Publ., 1966.
- [JNGCCC⁺20] A. Jaimes-Nájera, J. Gomez-Correa, V. Coello Cardenas, B. Pierscionek, and S. Chavez-Cerda. Single function crystalline lens capable of mimicking ciliary body accommodation. *Biomedical Optics Express*, May 2020, <https://doi.org/10.1364/boe.386459>.
- [JRFG19] H. A. Jiménez-Romero and M. Fernández-Guasti. Fabry-perot etalon solved by an amplitude and phase approach. *Optik*, 2019, <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030402619304000>.
- [Kru62] M. Kruskal. Asymptotic theory of hamiltonian and other systems with all solutions nearly periodic. *Journal of Mathematical Physics*, 3(4): 806–828, July 1962, <https://doi.org/10.1063/1.1724285>.
- [Lew67] H. R. Lewis. Classical and quantum systems with time-dependent harmonic-oscillator-type Hamiltonians. *Phys. Rev. Lett.*, 18(13): 510–512, 1967.

- [Lut78] M. Lutzky. Noether's theorem and the time-dependent harmonic oscillator. *Phys. Lett. A*, 68(1): 3, 1978.
- [MSM13] G. V. Morozov, D. W. L. Sprung, and J. Martorell. One-dimensional photonic crystals with a sawtooth refractive index: Another exactly solvable potential. *New J. Phys.*, 15: 103009, 2013.
- [Pin50] E. Pinney. The Nonlinear Differential Equation $y'' + p(x)y + cy^{-3} = 0$. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1(5): 681, Oct. 1950.
- [Ray79] Lord Rayleigh. On Reflection of Vibrations at the Confines of two Media between which the Transition is Gradual. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s1-11(1): 51–56, 11 1879, <https://doi.org/10.1112/plms/s1-11.1.51>.
- [RR80] J. L. Reid and J. R. Ray. Ermakov systems, nonlinear superposition and solutions of nonlinear equations of motion. *J. Math. Phys*, 21(7): 1583–1587, 1980.
- [SM13] A. B. Shvartsburg and A. A. Maradudin. *Waves in Gradient Metamaterials*. World Scientific, 2013.
- [SP05] A. B. Shvartsburg and G. Petite. Concave and convex photonic barriers in gradient optics. *Eur. Phys. J. D*, 36(1): 111–118, 2005, <https://doi.org/10.1140/epjd/e2005-00202-x>.
- [SPH00] A. B. Shvartsburg, G. Petite, and P. Hecquet. Broadband antireflection properties of thin heterogeneous dielectric films. *J. Opt. Soc. Am. A*, 17(12): 2267–2271, Dec 2000, <http://josaa.osa.org/abstract.cfm?URI=josaa-17-12-2267>.
- [Ste05] O. Stenzel. *The Physics of Thin Film Optical Spectra*. Springer-Verlag, 2005.
- [Yeh05] Pochi Yeh. *Optical Waves in Layered Media*. Wiley Series in Pure and Applied Optics. 2nd edition, 2005.

A. Apéndice

A.1. Deducción de la ecuación cuadrática (3.11)

Se toma como base la expresión (3.10) y se omite la dependencia en z_{23} por razones de economía

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_2 n_{23}}} \frac{(\mu_2^2 - 1) k_2 \sin(2\alpha_2)}{\sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2)}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_3}} \frac{(\mu_3^2 - 1) k_3 \sin(2\alpha_3)}{\sqrt{1 + (\mu_3^2 - 1) \cos^2(\alpha_3)}};$$

se eleva al cuadrado la expresión anterior y simplificando se obtiene

$$\frac{n_{23}}{\mu_2} \frac{(\mu_2^2 - 1)^2 \sin^2(2\alpha_2)}{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2)} = \frac{1}{\mu_3} \frac{(\mu_3^2 - 1)^2 \sin^2(2\alpha_3)}{1 + (\mu_3^2 - 1) \cos^2(\alpha_3)}. \quad (\text{A.1})$$

Hay que tener en cuenta que al elevar al cuadrado la condición $\rho'_2(z_{23}) = \rho'_3(z_{23})$ se perderá cierta información sobre el signo de tales derivadas. Esto se compensa posteriormente al introducir la función $\text{sgn}(\rho'_{2\leftrightarrow}(z_{23}))$ en la ecuación (3.14) que define la constante de fase α_{03} . Por otro lado, la expresión reducida para la condición de continuidad (3.9) es

$$\frac{\mu_3}{n_{23}\mu_2} [1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2)] = 1 + (\mu_3^2 - 1) \cos^2(\alpha_3);$$

de esta expresión se despeja $\cos^2(\alpha_3)$

$$\cos^2(\alpha_3) = \frac{\mu_3 [1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2)] - n_{23}\mu_2}{n_{23}\mu_2 (\mu_3^2 - 1)};$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned}\sin^2(\alpha_3) &= 1 - \cos^2(\alpha_3) \\ &= \frac{n_{23}\mu_2\mu_3 - [1 + (\mu_2^2 - 1)\cos^2(\alpha_2)]}{n_{23}\mu_2(\mu_3^2 - 1)}\mu_3.\end{aligned}$$

El producto de estas funciones trigonométricas es

$$\begin{aligned}\sin^2(\alpha_3)\cos^2(\alpha_3) \\ &= \frac{\{\mu_3[1 + (\mu_2^2 - 1)\cos^2(\alpha_2)] - n_{23}\mu_2\} \{n_{23}\mu_2\mu_3 - [1 + (\mu_2^2 - 1)\cos^2(\alpha_2)]\}}{n_{23}^2\mu_2^2(\mu_3^2 - 1)^2}\mu_3.\end{aligned}$$

Estas expresiones se utilizan para eliminar las funciones dependientes de α_3 en la ecuación (A.1); queda la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\mu_3 n_{23}^2 (\mu_2^2 - 1)^2 \sin^2(\alpha_2) \cos^2(\alpha_2) = \\ \{\mu_3 [1 + (\mu_2^2 - 1)\cos^2(\alpha_2)] - n_{23}\mu_2\} \{n_{23}\mu_2\mu_3 - [1 + (\mu_2^2 - 1)\cos^2(\alpha_2)]\}.\end{aligned}$$

Se agrupa la ecuación anterior en términos de las potencias de μ_3 y se obtiene

$$\begin{aligned}\mu_3^2 \\ - \frac{[1 + (\mu_2^2 - 1)\cos^2(\alpha_2)]^2 + n_{23}^2 [\mu_2^2 + (\mu_2^2 - 1)^2 \sin^2(\alpha_2) \cos^2(\alpha_2)]}{n_{23}\mu_2 [1 + (\mu_2^2 - 1)\cos^2(\alpha_2)]}\mu_3 \\ + 1 = 0.\end{aligned}$$

Se trabaja ahora con el término $\mu_2^2 + (\mu_2^2 - 1)^2 \sin^2(\alpha_2) \cos^2(\alpha_2)$, que aparece en el numerador del coeficiente de μ_3 ; se detalla la manipulación llevada a cabo para factorizarlo

$$\begin{aligned}\mu_2^2 + (\mu_2^2 - 1)^2 \sin^2(\alpha_2) \cos^2(\alpha_2) = \\ \mu_2^2 + (\mu_2^2 - 1)^2 (1 - \cos^2(\alpha_2)) \cos^2(\alpha_2) =\end{aligned}$$

A.1 Deducción de la ecuación cuadrática (3.11)

$$\begin{aligned}
 \mu_2^2 + (\mu_2^2 - 1)^2 \cos^2(\alpha_2) - (\mu_2^2 - 1)^2 \cos^4 \alpha_2 = \\
 \mu_2^2 - 1 + (\mu_2^2 - 1)^2 \cos^2(\alpha_2) + 1 - (\mu_2^2 - 1)^2 \cos^4 \alpha_2 = \\
 (\mu_2^2 - 1) [1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2)] + \\
 [1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2)] [1 - (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2)] = \\
 [\mu_2^2 - (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2)] [1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2)].
 \end{aligned}$$

Al sustituir este término en la ecuación cuadrática se obtiene

$$\mu_3^2 - \frac{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2) + n_{23}^2 [\mu_2^2 - (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2)]}{n_{23} \mu_2} \mu_3 + 1 = 0.$$

Ahora, se detallan los pasos para llegar a la forma mostrada en la expresión (3.11)

$$\begin{aligned}
 1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2) + n_{23}^2 [\mu_2^2 - (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2)] = \\
 1 + n_{23}^2 \mu_2^2 + (1 - n_{23}^2) (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2) = \\
 1 + n_{23}^2 \mu_2^2 + (1 - n_{23}^2) (\mu_2^2 - 1) (1 - \sin^2(\alpha_2)) = \\
 1 + n_{23}^2 \mu_2^2 + (1 - n_{23}^2) (\mu_2^2 - 1) - (1 - n_{23}^2) (\mu_2^2 - 1) \sin^2(\alpha_2) = \\
 1 + n_{23}^2 \mu_2^2 + (\mu_2^2 - 1 - n_{23}^2 \mu_2^2 + n_{23}^2) - (1 - n_{23}^2) (\mu_2^2 - 1) \sin^2(\alpha_2) = \\
 \mu_2^2 + n_{23}^2 + (n_{23}^2 - 1) (\mu_2^2 - 1) \sin^2(\alpha_2).
 \end{aligned}$$

Finalmente, tras sustituir la última expresión en la ecuación cuadrática y eliminar el denominador $n_{23} \mu_2$, se tiene la forma buscada

$$\mu_3^2 - [\mu_2 n_{23}^{-1} + \mu_2^{-1} n_{23} + (n_{23} - n_{23}^{-1}) (\mu_2 - \mu_2^{-1}) \sin^2(\alpha_2)] \mu_3 + 1 = 0.$$

A.2. Sobre la raíz positiva de la ecuación $\mu^2 - \varepsilon\mu + 1 = 0$ cuando $\varepsilon \geq 2$

Proposición 2. En la ecuación cuadrática $\mu^2 - \varepsilon\mu + 1 = 0$ con soluciones

$$\mu_{\pm} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2}$$

si $\varepsilon \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon \geq 2$ entonces $\mu_+ \geq 1$.

Demostración. En efecto,

$$\mu_+ = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2} \geq \frac{2 + \sqrt{2^2 - 4}}{2} = 1,$$

entonces $\mu_+ \geq 1$ □

Observe que μ_- no satisface dicha condición excepto para el caso trivial $\varepsilon = 2$ entonces $\mu_+ = \mu_- = 1$. Se probará por reducción al absurdo. Suponga que se satisface la desigualdad estricta $\mu_- > 1$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2} &> 1 \\ \varepsilon - 2 &> \sqrt{\varepsilon^2 - 4} \\ (\varepsilon - 2)^2 &> \varepsilon^2 - 4 \\ \varepsilon^2 - 4\varepsilon + 4 &> \varepsilon^2 - 4 \\ 8 &> 4\varepsilon \\ 2 &> \varepsilon \Rightarrow \text{.} \end{aligned}$$

Se tiene una contradicción pues, por hipótesis, $\varepsilon \geq 2$.

A.3. Demostración de que $n_{31} + n_{31}^{-1} + 4\mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23}) \geq 2$

En la sección 3.2.2, se eligió el signo positivo de la solución dada en (3.13) y, de acuerdo con la sección A.2, esto requiere que $n_{31} + n_{31}^{-1} + 4\mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23}) \geq 2$. A

modo de proposición se tiene

Proposición 3. *Si $n_1, n_2, n_3 \in [1, +\infty)$ entonces $n_{31} + n_{31}^{-1} + 4\mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23}) \geq 2$.*

Demostración. Sea $\varepsilon = n_{31} + n_{31}^{-1} + 4\mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23})$. La suma de los primeros dos términos de ε es mayor o igual que dos, en efecto

$$\begin{aligned} n_{31} + n_{31}^{-1} &= \frac{n_3}{n_1} + \frac{n_1}{n_3} = \frac{n_1^2 + n_3^2}{n_1 n_3}, \\ &= \frac{n_1^2 - 2n_1 n_3 + n_3^2 + 2n_1 n_3}{n_1 n_3} = 2 + \frac{(n_1 - n_3)^2}{n_1 n_3} \geq 2; \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Ahora, analizando el tercer término de ε , se tiene que

$$4\mathcal{F} = (n_{23} - n_{23}^{-1})(n_{21} - n_{21}^{-1}) = \left(\frac{n_2}{n_3} - \frac{n_3}{n_2}\right) \left(\frac{n_2}{n_1} - \frac{n_1}{n_2}\right) = \frac{(n_2^2 - n_3^2)(n_2^2 - n_1^2)}{n_1 n_2^2 n_3}.$$

Entonces, se tienen varios casos para el signo de \mathcal{F}

$$\mathcal{F} \begin{cases} > 0 & \text{si } n_1 \ \& \ n_3 > n_2 \ \circ \ n_1 \ \& \ n_3 < n_2 \ \circ \ n_1 = n_3 \\ < 0 & \text{si } n_3 > n_2 > n_1 \ \circ \ n_1 > n_2 > n_3 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

En el primer caso de (A.3) y tomando en cuenta (A.2) se tiene que $\varepsilon > 2$. En tanto que, para el segundo caso en (A.3), es necesario analizar con mayor detalle. En esta última situación se tiene que $4\mathcal{F} < 0$ y el valor mínimo de ε se tiene cuando $\sin^2(k_2 z_{23}) = 1$. Entonces,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{min} &= n_{31} + n_{31}^{-1} + 4\mathcal{F} \\ &= n_{31} + n_{31}^{-1} + \frac{(n_2^2 - n_3^2)(n_2^2 - n_1^2)}{n_1 n_2^2 n_3} \\ &= \frac{n_1^2 + n_3^2}{n_1 n_3} + \frac{(n_2^2 - n_3^2)(n_2^2 - n_1^2)}{n_1 n_2^2 n_3} \\ &= \frac{(n_1^2 + n_3^2) n_2^2 + (n_2^2 - n_3^2)(n_2^2 - n_1^2)}{n_1 n_2^2 n_3} \\ &= \frac{(n_1^2 + n_3^2) n_2^2 - (n_1^2 + n_3^2) n_2^2 + n_2^4 + n_1^2 n_3^2}{n_1 n_2^2 n_3} \\ &= \frac{n_2^4 + n_1^2 n_3^2}{n_1 n_2^2 n_3} = \frac{n_2^2}{n_1 n_3} + \frac{n_1 n_3}{n_2^2}, \end{aligned}$$

en la última línea del desarrollo anterior se presenta un caso totalmente análogo al tratado en (A.2) y entonces $\varepsilon_{min} \geq 0$. Finalmente, una vez agotados los casos, es posible asegurar que

$$\varepsilon = n_{31} + n_{31}^{-1} + 4\mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23}) \geq 2, \quad \forall n_1, n_2, n_3 \in [1, +\infty]$$

□

A.4. Reducción de la expresión (3.18) para la transmitancia \mathcal{T}

Primeramente, se tiene

$$\mathcal{T} = 1 - r_3^2 = 1 - \frac{(1 - \mu_3)^2}{(1 + \mu_3)^2} = \frac{4\mu_3}{(1 + \mu_3)^2}.$$

Por otro lado, de acuerdo con (3.13), el valor de μ_3 es

$$\mu_3 = \frac{n_{31} + n_{31}^{-1} + 4\mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23})}{2} + \frac{\sqrt{(n_{31} - n_{31}^{-1})^2 + 8(n_{31} + n_{31}^{-1} + 2\mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23})) \mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23})}}{2}$$

Se definen las variables auxiliares $W = \mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23})$, $U = (n_{31} + n_{31}^{-1})/2$ y $V = (n_{31} - n_{31}^{-1})/2$, entonces

$$\mu_3 = U + 2W + \sqrt{V^2 + 4(U + W)W}$$

y, a su vez,

$$\mathcal{T} = \frac{4 \left[U + 2W + \sqrt{V^2 + 4(U + W)W} \right]}{\left[1 + U + 2W + \sqrt{V^2 + 4(U + W)W} \right]^2}.$$

En aras de simplificar esta expresión, se realiza el siguiente desarrollo del denominador

$$\begin{aligned}
 & \left[1 + U + 2W + \sqrt{V^2 + 4(U + W)W}\right]^2 = \\
 & (1 + U)^2 + 2(1 + U) \left[2W + \sqrt{V^2 + 4(U + W)W}\right] \\
 & \qquad \qquad \qquad + \left[2W + \sqrt{V^2 + 4(U + W)W}\right]^2 = \\
 & (1 + U)^2 + 2(1 + U) \left[2W + \sqrt{V^2 + 4(U + W)W}\right] \\
 & \qquad \qquad \qquad + 4W^2 + 4W\sqrt{V^2 + 4(U + W)W} + V^2 + 4(U + W)W = \\
 & (1 + U)^2 + V^2 + 2(1 + U) \left[2W + \sqrt{V^2 + 4(U + W)W}\right] \\
 & \qquad \qquad \qquad + 4W \left[2W + U + \sqrt{V^2 + 4(U + W)W}\right] = \\
 & (1 + U)^2 + V^2 - 2U(1 + U) + 2(1 + U) \left[2W + U + \sqrt{V^2 + 4(U + W)W}\right] \\
 & \qquad \qquad \qquad + 4W \left[2W + U + \sqrt{V^2 + 4(U + W)W}\right] = \\
 & 1 - U^2 + V^2 + 2(1 + U + 2W) \left[2W + U + \sqrt{V^2 + 4(U + W)W}\right].
 \end{aligned}$$

En este punto, se observa lo siguiente

$$\begin{aligned}
 1 - U^2 &= 1 - \left(\frac{n_{31} + n_{13}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{n_{31}^2 + 2 + n_{13}^2}{4} \\
 &= -\frac{n_{31}^2 - 2 + n_{13}^2}{4} = -\left(\frac{n_{31} - n_{13}}{2}\right)^2 \\
 &= -V^2.
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left[1 + U + 2W + \sqrt{V^2 + 4(U + W)W}\right]^2 = 2(1 + U + 2W) \left[U + 2W + \sqrt{V^2 + 4(U + W)W}\right].$$

Sustituyendo en la expresión para la transmitancia

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{2}{1 + U + 2W} \\ &= \frac{2}{1 + (n_{31} + n_{31}^{-1})/2 + 2\mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23})} \\ &= \frac{1}{(2 + n_{31} + n_{31}^{-1})/4 + \mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23})}. \end{aligned}$$

Finalmente, recordando que $n_{31} = n_3/n_1$, se obtiene la forma dada en (3.18)

$$\mathcal{T} = \frac{1}{(n_3 + n_1)^2 / (4n_1 n_3) + \mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23})}.$$

A.5. Deducción de la ecuación cuadrática (4.9)

En esta sección se detalla los pasos para obtener la ecuación cuadrática (4.9). Para empezar, se sustituye el segundo miembro de (4.7) en (4.8) (se omite la dependencia explícita $z = 0$)

$$\frac{s_1}{L_1} \frac{\sqrt{k_{2i}^2 - p^2}}{k_1} \mu_2 = \sqrt{k_{2i}^2 - p^2} (\mu_2^2 - 1) \sin(2\alpha_2),$$

entonces,

$$\sin(2\alpha_2) = \frac{s_1}{k_1 L_1} \frac{\mu_2}{\mu_2^2 - 1}.$$

A.5 Deducción de la ecuación cuadrática (4.9)

Se emplea esta expresión para eliminar como las funciones dependientes de α_2 :

$$\begin{aligned}\frac{s_1}{L_1} [1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2)] &= \sqrt{k_{2i}^2 - p^2} (\mu_2^2 - 1) \sin(2\alpha_2) \\ \frac{s_1}{L_1} \left[1 + \frac{1}{2} (\mu_2^2 - 1) \left(1 + \sqrt{1 - \sin^2(2\alpha_2)} \right) \right] &= \sqrt{k_{2i}^2 - p^2} (\mu_2^2 - 1) \sin(2\alpha_2) \\ \frac{s_1}{L_1} \left[1 + \frac{1}{2} (\mu_2^2 - 1) \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{s_1}{k_1 L_1} \frac{\mu_2}{\mu_2^2 - 1} \right)^2} \right) \right] &= \sqrt{k_{2i}^2 - p^2} (\mu_2^2 - 1) \frac{s_1}{k_1 L_1} \frac{\mu_2}{\mu_2^2 - 1}.\end{aligned}$$

Ahora, se tiene la siguiente secuencia de pasos algebraicos para simplificar la última expresión

$$\begin{aligned}1 + \frac{1}{2} (\mu_2^2 - 1) \left(1 + \sqrt{1 - \left(\frac{s_1}{k_1 L_1} \frac{\mu_2}{\mu_2^2 - 1} \right)^2} \right) &= \sqrt{k_{2i}^2 - p^2} \frac{\mu_2}{k_1} \\ \sqrt{(\mu_2^2 - 1)^2 - \left(\frac{s_1 \mu_2}{k_1 L_1} \right)^2} &= 2\sqrt{k_{2i}^2 - p^2} \frac{\mu_2}{k_1} - (\mu_2^2 + 1) \\ (\mu_2^2 - 1)^2 - \left(\frac{s_1 \mu_2}{k_1 L_1} \right)^2 &= 4(k_{2i}^2 - p^2) \left(\frac{\mu_2}{k_1} \right)^2 - 4\sqrt{k_{2i}^2 - p^2} \frac{\mu_2}{k_1} (\mu_2^2 + 1) + (\mu_2^2 + 1)^2 \\ (\mu_2^2 - 1)^2 - (\mu_2^2 + 1)^2 - \left(\frac{s_1 \mu_2}{k_1 L_1} \right)^2 &= 4(k_{2i}^2 - p^2) \left(\frac{\mu_2}{k_1} \right)^2 - 4\sqrt{k_{2i}^2 - p^2} \frac{\mu_2}{k_1} (\mu_2^2 + 1) \\ (\mu_2^2 - 1 + \mu_2^2 + 1) (\mu_2^2 - 1 - \mu_2^2 - 1) - \left(\frac{s_1 \mu_2}{k_1 L_1} \right)^2 &= 4(k_{2i}^2 - p^2) \left(\frac{\mu_2}{k_1} \right)^2 \\ - 4\sqrt{k_{2i}^2 - p^2} \frac{\mu_2}{k_1} (\mu_2^2 + 1) & \\ - 4\mu_2^2 - \left(\frac{s_1 \mu_2}{k_1 L_1} \right)^2 &= 4(k_{2i}^2 - p^2) \left(\frac{\mu_2}{k_1} \right)^2 - 4\sqrt{k_{2i}^2 - p^2} \frac{\mu_2}{k_1} (\mu_2^2 + 1) \\ - \mu_2 - \left(\frac{s_1}{2k_1 L_1} \right)^2 \mu_2 &= (k_{2i}^2 - p^2) \left(\frac{1}{k_1} \right)^2 \mu_2 - \sqrt{k_{2i}^2 - p^2} \frac{1}{k_1} (\mu_2^2 + 1).\end{aligned}$$

Reorganizando términos en potencias de μ_2 se obtiene

$$k_1 \sqrt{k_{2i}^2 - p^2} \mu_2^2 - \left[k_{2i}^2 - p^2 + k_1^2 + \left(\frac{s_1}{2L_1} \right)^2 \right] \mu_2 + k_1 \sqrt{k_{2i}^2 - p^2} = 0;$$

empleamos la definición $p^2 = (s_1/2L_1)^2 - s_2/L_2^2$ y

$$k_1\sqrt{k_{2i}^2 - p^2}\mu_2^2 - \left[k_{2i}^2 - \left(\frac{s_1}{2L_1}\right)^2 + \frac{s_2}{L_2^2} + k_1^2 + \left(\frac{s_1}{2L_1}\right)^2 \right] \mu_2 + k_1\sqrt{k_{2i}^2 - p^2} = 0$$

$$k_1\sqrt{k_{2i}^2 - p^2}\mu_2^2 - \left(k_{2i}^2 + \frac{s_2}{L_2^2} + k_1^2 \right) \mu_2 + k_1\sqrt{k_{2i}^2 - p^2} = 0.$$

Finalmente, se divide la última igual por $k_1\sqrt{k_{2i}^2 - p^2}$ y se obtiene la forma buscada

$$\mu_2^2 - \frac{k_{2i}^2 + k_1^2 + \frac{s_2}{L_2^2}}{k_1\sqrt{k_{2i}^2 - p^2}}\mu_2 + 1 = 0.$$

A.6. Demostración de que $(k_{2i}^2 + k_1^2 + s_2/L_2^2)/(k_1\sqrt{k_{2i}^2 - p^2}) \geq 2$

En la sección 4.2.1 se obtuvo una ecuación cuadrática en donde uno de sus coeficientes es el término

$$\frac{k_{2i}^2 + k_1^2 + \frac{s_2}{L_2^2}}{k_1\sqrt{k_{2i}^2 - p^2}},$$

donde $p^2 = (s_1/2L_1)^2 - s_2/L_2^2$. La siguiente serie de desigualdades muestra que este término es mayor o igual a 2

$$\begin{aligned} \frac{k_{2i}^2 + k_1^2 + (s_1/2L_1)^2 - p^2}{k_1\sqrt{k_{2i}^2 - p^2}} &= \frac{k_{2i}^2 - p^2 + k_1^2 + (s_1/2L_1)^2}{k_1\sqrt{k_{2i}^2 - p^2}} \\ &= \frac{\left[\sqrt{k_{2i}^2 - p^2} - k_1 \right]^2 + 2k_1\sqrt{k_{2i}^2 - p^2} + (s_1/2L_1)^2}{k_1\sqrt{k_{2i}^2 - p^2}} \\ &= 2 + \frac{\left[\sqrt{k_{2i}^2 - p^2} - k_1 \right]^2 + (s_1/2L_1)^2}{k_1\sqrt{k_{2i}^2 - p^2}} \\ &\geq 2. \end{aligned}$$

A.7. Artículo: «Fabry-Perot etalon solved by an amplitude and phase approach»

Optik - International Journal for Light and Electron Optics 185 (2019) 397–404



Contents lists available at ScienceDirect

Optik

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijleo



Original research article

Fabry–Perot etalon solved by an amplitude and phase approach

H.A. Jiménez Romero, M. Fernandez -Guasti*



Lab. de Óptica Cuántica, Depto. de Física, Universidad A. Metropolitana – Iztapalapa, Ap. postal. 55-534, 09340 México, D.F., Mexico

ARTICLE INFO

Keywords:
Electromagnetic wave propagation
Stratified media
Photonic crystals
Reflectivity
Optical coatings

ABSTRACT

The amplitude and phase method is successfully applied to analytically solve a dielectric Fabry–Perot etalon of arbitrary thickness. The transmittivity of the system as a function of wavelength obtained in this way is shown to be equivalent to the results given by the conventional matrix theory or the multiple beam interference method. An asset of the amplitude and phase formalism is that in addition to describing the overall behaviour of the system, the wave properties are displayed as the field propagates through the optical system.

1. Introduction

Stratified dielectric media have been studied for many decades because of their ever growing applications in optics and photonics such as frequency filters, high reflectance coatings and photonic structures [1,2]. The matrix approach is most effective in periodically disposed arrangements of homogeneous slabs but becomes increasingly difficult when the media are more complicated [3,4]. The amplitude and phase representation of fields [5] has been used to tackle the propagation of light through stratified media. This method has attracted theoretical and practical interest due to its clear physical insight combined with its simplicity. The existence of invariant quantities in the equations that constitute Ermakov pairs play a crucial role in this formal description of undulatory phenomena [6]. This approach has been successfully applied to numerically solve diverse refractive index profiles and to compute their optical properties [7,8]. This method has also been employed to analytically solve periodically binary arrays of $\lambda/4$ thickness layers [9].

In the present work we develop the analytic solution to a binary system applying the amplitude and phase formalism. To this end, we consider a dielectric Fabry–Perot etalon of arbitrary optical thickness. Adequate continuity conditions for the fields are imposed in order to find the appropriate solutions to the amplitude and phase functions. This requirement is essential because the validity of the solutions depends on the smoothness of the functions as well as their first and second order derivatives.

In Section 2, we recall the results of the amplitude and phase approach that will be required in later sections. Section 3 is dedicated to the statement and development of a slab with arbitrary optical thickness. In Section 4, we demonstrate the equivalence of the present approach with that obtained by means of the standard multiple beam interference theory. Conclusions are drawn in the last section.

2. Amplitude and phase approach

In one dimension, the field describing the propagation of monochromatic light can be expressed in terms of counter-propagating plane waves

* Corresponding author.

E-mail address: mfg@xanum.uam.mx (M. Fernandez -Guasti).

URL: <https://luz.izt.uam.mx> (M. Fernandez -Guasti).

<https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2019.03.099>

Received 1 February 2019; Accepted 19 March 2019

0030-4026/ © 2019 Elsevier GmbH. All rights reserved.

$$ae^{i\alpha}, be^{-i\alpha},$$

where a, b are the wave amplitudes and α is the phase. The time dependence of all waves is $e^{-i\omega t}$ and is omitted throughout. The superposition of these waves in polar form is

$$\rho_{\pm} e^{i\phi_{\pm}} = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos(2\alpha)} \exp \left[i \arctan \left(\frac{a-b}{a+b} \tan \alpha \right) \right].$$

The quotient of the sum and difference of the counter-propagating amplitudes is labeled by

$$\mu = \frac{a+b}{a-b}. \tag{1}$$

If a is the incident wave, $b \leq a$, then the codomain of the function is $1 \leq \mu < \infty$. The above expression in terms of μ is

$$\rho_{\pm} e^{i\phi_{\pm}} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\mu}} \sqrt{1 + (\mu^2 - 1) \cos^2(\alpha)} \exp \left[i \arctan \left(\frac{1}{\mu} \tan \alpha \right) \right]. \tag{2}$$

Counter-propagating plane waves are complex linearly independent solutions to the wave equation. The nonlinear amplitude and phase in (2) are related by the energy exchange invariant Q . For a scalar one dimensional field, the invariant Q is given by [5],

$$Q = \rho_{\pm}^2 \dot{\phi}_{\pm}, \tag{3}$$

where the overdot represents derivative with respect to z . This invariant permits the uncoupling of a nonlinear system of equations referred in the literature as an Ermakov pair [10,11]. Introducing the amplitude and phase functions (2) in Eq. (3) for a homogeneous region, it can be proved [6] that

$$Q = (a^2 - b^2)k, \tag{4}$$

where k is the wave number. The phase is $\alpha = kz + \alpha_0$ for a plane wave propagating in a homogeneous medium in the z direction, where α_0 is the initial phase. The amplitude must satisfy the nonlinear differential equation

$$\rho^2 \ddot{\rho} + \rho^4 \Omega^2 = Q^2, \tag{5}$$

and the spatial frequency $\kappa \equiv \dot{\phi}_{\pm}$, the nonlinear equation

$$\kappa \ddot{\kappa} - \frac{3}{2} \kappa^2 + 2(\kappa^2 - \Omega^2) \kappa^2 = 0, \tag{6}$$

where Ω^2 is a spatially dependent parameter that models the inhomogeneous medium.

2.1. Continuity conditions

In order to satisfy Eq. (5), the amplitude function must be continuous. In particular, at an interface, say between media 1 and 2,

$$\rho_1(z_{12}) = \rho_2(z_{12}).$$

For the sake of simplicity, whenever possible, we omit the argument z_{12} which defines the interface plane where the amplitudes are equal $\rho_1 = \rho_2$. The inverse square of this expression times Q is,

$$\frac{Q}{\rho_1^2} = \frac{Q}{\rho_2^2}.$$

Invoke the invariant expression (3) to obtain

$$\left. \frac{d\phi_1}{dz} \right|_{z_{12}} = \left. \frac{d\phi_2}{dz} \right|_{z_{12}}.$$

Therefore, the derivative of the phase function must be continuous if the amplitude function is continuous. In terms of the spatial frequency, $\kappa_1 = \kappa_2$. This is a necessary continuity condition for the spatial frequency in order to satisfy Eq. (6). To insure that $\ddot{\rho}$ remains finite in (5), the amplitude derivative should also be continuous. At the interface plane z_{12} ,

$$\left. \frac{d\rho_1}{dz} \right|_{z_{12}} = \left. \frac{d\rho_2}{dz} \right|_{z_{12}}.$$

The derivative of the invariant (3) gives

$$0 = 2\rho \frac{d\rho}{dz} \kappa + \rho^2 \frac{d\kappa}{dz}.$$

The spatial frequency derivative (second derivative of the phase) is then

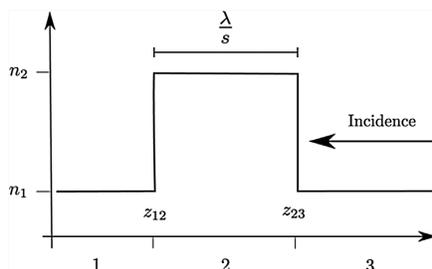


Fig. 1. Different homogeneous regions with abrupt changes in the refractive index at the interfaces in z_{12} and z_{23} .

$$\frac{d\kappa}{dz} = -2\frac{\kappa}{\rho} \frac{d\rho}{dz}$$

Thus, provided that ρ is not null, the derivative of κ is also continuous since the product of continuous functions is continuous. The starting point could have been the continuity of κ and its derivative. The continuity of ρ and its derivative then follow. Let us abridge this result in the following proposition:

Provided that the invariant $Q = \rho^2 \kappa$ is not zero, the following two conditions are equivalent:

- The continuity of ρ and $\frac{d\rho}{dz}$.
- The continuity of κ and $\frac{d\kappa}{dz}$.

Eq. (6) involves only derivatives of the phase function or, equivalently, the spatial frequency and its first and second order derivatives. It is then possible to add an arbitrary constant to the phase function and still satisfy Eq. (6). This constant can be chosen so that the phase is continuous at the interface plane as done in previous work [9].

3. Homogeneous layer of λ/s thickness

A Fabry-Perot (FP) etalon is described by a homogeneous layer of arbitrary thickness immersed into a different homogeneous medium. In order to construct the solution, it is convenient to tackle the conditions in each region separately. The procedure is to work backwards with respect to the wave propagation; That is, the transmitted region is considered first because the condition that there is no reflected wave can be readily imposed in this region. The region without incoming wave, labeled as 1 in Fig. 1, is a homogeneous medium with refractive index n_1 over the interval $-\infty < z < z_{12}$. Contiguous is a layer with refractive index n_2 that extends over the interval $z_{12} \leq z < z_{23}$. Thereafter, a medium where there is an incoming wave (from right to left in the figure) with refractive index n_1 extends to infinity, $z_{23} \leq z < +\infty$.

3.1. First interface

The solution in each region should be of the form given by (2). The amplitude function in the first region is then

$$\rho_1(z) = \sqrt{\frac{a_1^2 - b_1^2}{\mu_1}} \sqrt{1 + (\mu_1^2 - 1) \cos^2(\alpha_1(z))}, \quad -\infty < z < z_{12}, \quad (7)$$

where a_1 is the transmitted amplitude and $b_1 = 0$, since there is no reflected wave. Thus $\mu_1 = 1$, and the amplitude in this region simplifies to a constant

$$\rho_1(z) = a_1, \quad \text{for } -\infty < z < z_{12}.$$

The phase solution is given by

$$\phi_{1\leftarrow}(z) = \arctan\left(\frac{1}{\mu_1} \tan \alpha_1(z)\right), \quad (8)$$

since $\mu_1 = 1$, the phase is linear $\phi_{1\leftarrow}(z) = \alpha_1(z) = k_1 z + \alpha_{01}$ and $k_1 = n_1 k_0$. The plane z_{12} can be placed at the origin, $z_{12} = 0$. The phase constant α_{01} at $z = z_{12} = 0$, can be set to zero without loss of generality.

For the slab comprising the second region, the amplitude is

$$\rho_2(z) = \sqrt{\frac{a_2^2 - b_2^2}{\mu_2}} \sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2(z))} \quad z_{12} \leq z \leq z_{23}, \quad (9)$$

where $\alpha_2(z) = k_2 z + \alpha_{02}$ and $k_2 = n_2 k_0$. The counter-propagating phase in medium 2 is

$$\phi_{2\leftarrow}(z) = \arctan\left(\frac{1}{\mu_2} \tan(\alpha_2(z))\right), \quad z_{12} \leq z < z_{23}$$

In order to determine the parameters in Eqs. (8) and (9), enforce the boundary conditions at the first abrupt interface $z_{12} = 0$. The continuity of the amplitude function $\rho_1(z_{12}) = \rho_2(z_{12})$ is

$$a_1 = \sqrt{\frac{a_2^2 - b_2^2}{\mu_2}} \sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2(z_{12}))}. \quad (10)$$

Now, use the fact that the energy exchange invariant (4) is constant everywhere, in particular at the z_{12} interface, $a_1^2 k_1 = (a_2^2 - b_2^2) k_2$. In terms of the relative refractive index $a_1^2 / (a_2^2 - b_2^2) = k_2 / k_1 = n_2 / n_1 = n$. Substitution of this result in (10), rewriting the equation as a polynomial for μ_2 is

$$\cos^2(\alpha_2(z_{12})) \mu_2^2 - n \mu_2 + 1 - \cos^2(\alpha_2(z_{12})) = 0. \quad (11)$$

Whereas the continuity of the amplitude derivative is

$$0 = \sqrt{\frac{a_2^2 - b_2^2}{\mu_2}} \frac{(\mu_2^2 - 1) \cos(\alpha_2(z_{12})) \sin(\alpha_2(z_{12})) k_2}{\sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2(\alpha_2(z_{12}))}}.$$

This expression simplifies to $\sin(2\alpha_2(z_{12})) = 0$, then either $\alpha_2(z_{12}) = 0$ or $\alpha_2(z_{12}) = \pm \pi/2$. From expression (11), if $\alpha_2(z_{12}) = 0$ then $\mu_2^2 - n \mu_2 = 0$. The only physical solution is $\mu_2 = n$ if $n_2 > n_1$ since $\mu \geq 1$, the incident wave must be equal or larger than the reflected wave. On the other hand, if $\alpha_2(z_{12}) = \pm \pi/2$ then $-n \mu_2 + 1 = 0$, therefore $\mu_2 = 1/n$ for $n_1 > n_2$. Thus,

$$\begin{aligned} \mu_2 &= n \text{ and } \alpha_{02} = 0 \text{ if } n_2 > n_1, \\ \mu_2 &= \frac{1}{n} \text{ and } \alpha_{02} = \pm \frac{\pi}{2} \text{ if } n_1 > n_2. \end{aligned} \quad (12)$$

That is, the parameter μ_2 is always equal to the quotient of the higher over the lower refractive index $\mu_2 = n_{\text{high}}/n_{\text{low}}$.

3.2. Second interface

The solution in the third region has again the form of (2). The amplitude function is given by

$$\rho_3(z) = \sqrt{\frac{a_3^2 - b_3^2}{\mu_3}} \sqrt{1 + (\mu_3^2 - 1) \cos^2 \alpha_3(z)}, \quad z_{23} \leq z < +\infty \quad (13)$$

and phase function is

$$\phi_{3\leftarrow}(z) = \arctan\left(\frac{1}{\mu_3} \tan \alpha_3(z)\right), \quad (14)$$

where $\alpha_3(z) = k_3 z + \alpha_{03} = k_1 z + \alpha_{03}$ because the media in the third and first regions are equal. The second interface plane is located at z_{23} . The thickness of the intermediate layer is $z_{23} - z_{12}$. This distance can be written in terms of the optical path $n_2(z_{23} - z_{12}) = \lambda/s$, where λ is the wavelength in vacuo and $1/s$ is the thickness expressed as a fraction of the wavelength. The optical path can be varied either by changing the wavelength and keeping the layer's thickness constant or λ can be fixed and the thickness varied through the parameter s .

Consider the boundary conditions at the interface z_{23} in order to find the unknown parameters in (13) and (14). The amplitude function continuity $\rho_2(z_{23}) = \rho_3(z_{23})$ is

$$\sqrt{\frac{a_2^2 - b_2^2}{\mu_2}} \sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2 \alpha_2(z_{23})} = \sqrt{\frac{a_3^2 - b_3^2}{\mu_3}} \sqrt{1 + (\mu_3^2 - 1) \cos^2 \alpha_3(z_{23})},$$

where μ_2 is given by (12) and from the energy exchange invariant (4), $\frac{a_2^2 - b_2^2}{a_3^2 - b_3^2} = \frac{1}{n}$. Evaluate the square of the above expression to rewrite it as

$$\frac{\mu_3}{n \mu_2} [1 + (\mu_2^2 - 1) \cos^2 \alpha_2(z_{23})] = 1 + (\mu_3^2 - 1) \cos^2 \alpha_3(z_{23}). \quad (15)$$

The continuity of the amplitudes derivatives $\rho_2'(z_{23}) = \rho_3'(z_{23})$ implies

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_2 n}} \frac{(\mu_2^2 - 1)k_2 \sin(2\alpha_2(z_{23}))}{\sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1)\cos^2 \alpha_2(z_{23})}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_3}} \frac{(\mu_3^2 - 1)k_1 \sin(2\alpha_3(z_{23}))}{\sqrt{1 + (\mu_3^2 - 1)\cos^2 \alpha_3(z_{23})}}. \quad (16)$$

From the square of this expression, eliminate α_3 using (15), to obtain a quadratic equation for μ_3

$$\mu_3^2 - \frac{1}{n\mu_2} [(n^2 + \mu_2^2) + (n^2 - 1)(\mu_2^2 - 1)\sin^2 \alpha_2(z_{23})]\mu_3 + 1 = 0 \quad (17)$$

The solutions to this quadratic equation are

$$\mu_{3\pm} = \frac{(n^2 + \mu_2^2) + (n^2 - 1)(\mu_2^2 - 1)\sin^2 \alpha_2(z_{23})}{2n\mu_2} \pm \sqrt{\left(\frac{(n^2 + \mu_2^2) + (n^2 - 1)(\mu_2^2 - 1)\sin^2 \alpha_2(z_{23})}{2n\mu_2}\right)^2 - 1}. \quad (18)$$

It can be proven that regardless of whether n_1 is greater or smaller than n_2 , the solutions are always

$$\mu_{3\pm} = 1 + 2\mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23}) \pm 2\sqrt{\mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23})(\mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23}) + 1)}, \quad (19)$$

where

$$\mathcal{F} = \frac{(n - n^{-1})^2}{4}. \quad (20)$$

A physically plausible result $\mu_3 \geq 1$, is obtained with the positive sign of the root. For a $\lambda/4$ layer, $k_2 z_{23} = \pi/2$, and μ_3 reduces to

$$\mu_3(\pi/2) = \frac{\mu_2^4 + 1 + |n^4 - 1|}{2n^2}.$$

If $n_2 > n_1$, $\mu_3(\pi/2) = n^2$, this expression matches a previously reported result [9]. If $n_2 < n_1$, $\mu_3(\pi/2) = 1/n^2$, that is, for a quarter wave slab, μ_3 is always the squared quotient of the larger over the smaller refractive index.

For a complete description of the amplitude given by (13) it is necessary to find the phase constant α_{03} . It can be obtained from (15),

$$\alpha_{03} = \arccos \left[\operatorname{sgn}(\sin(2\alpha_2(z_{23}))) \sqrt{\frac{\mu_3 [1 + (\mu_2^2 - 1)\cos^2 \alpha_2(z_{23})] - n\mu_2}{n\mu_2(\mu_3^2 - 1)}} \right] - k_1 z_{23}.$$

The correct choice of the sign preceding the square root is required in order to insure a continuous derivative of the amplitude function. Eq. (16) establishes the relationship between sign and phase shift between $\alpha_3(z_{23})$ and $\alpha_2(z_{23})$.

Grouping up results in the three regions, the amplitude function is

$$\rho_{\rightarrow}(z) = \begin{cases} a_1 & \text{for } -\infty < z \leq 0, \\ \frac{a_1}{\sqrt{\mu_2}} \sqrt{1 + (\mu_2^2 - 1)\cos^2(k_2 z + \alpha_{02})} & \text{for } 0 < z \leq z_{23}, \\ \frac{a_1}{\sqrt{\mu_3}} \sqrt{1 + (\mu_3^2 - 1)\cos^2(k_1 z + \alpha_{03})} & \text{for } z_{23} < z < \infty. \end{cases} \quad (21)$$

And the phase function is given by

$$\phi_{\rightarrow}(z) = \begin{cases} k_1 z & \text{for } -\infty < z \leq 0, \\ \arctan\left(\frac{1}{n} \tan(k_2 z + \alpha_{02})\right) & \text{for } 0 < z \leq z_{23}, \\ \arctan\left(\frac{1}{\mu_3} \tan(k_1 z + \alpha_{03})\right) & \text{for } z_{23} < z < \infty. \end{cases} \quad (22)$$

In Fig. 2, typical amplitude and phase plots are depicted for different layer thicknesses by changing the value of the parameter s . The first column (Fig. 2a and d) corresponds to $s = 4$, that is a quarter wave layer; As expected, maximum reflectivity is attained since the phase difference between reflection planes is a multiple of 2π . The second column (Fig. 2b and e) with $s = 8/11$, represents an intermediate case, where there is partial transmission and reflection. This layer thickness of $3\lambda/8 \pmod{\lambda}$ lies in between the $\lambda/2$ and $\lambda/4$ layers. Finally, the third pair with $s = 2/5$ (Fig. 2c and f), shows a perfect anti-reflection layer. In all cases, the amplitude, phase and their derivatives are continuous although the medium exhibits sharp discontinuities. In regions where the amplitude is not constant, the phase is no longer linear in z . The undulations in the phase function where the amplitude is not constant are clearly seen in Fig. 2. Nonetheless, the product of the z dependent amplitude times the cosine of the nonlinear phase is equal to a constant amplitude times a cosine function with linear argument. This equivalence is a classical indeterminacy that has been described in the time dependent harmonic oscillator problem [12]. Recall that the propagation of light in inhomogeneous media is mathematically equivalent to the time dependent harmonic oscillator formalism. The amplitude ρ_{\rightarrow} and phase ϕ_{\rightarrow} are known as a function of position z , that is, as the wave propagates through the system. From these variables, the field or its intensity as a function of z are also readily obtained.

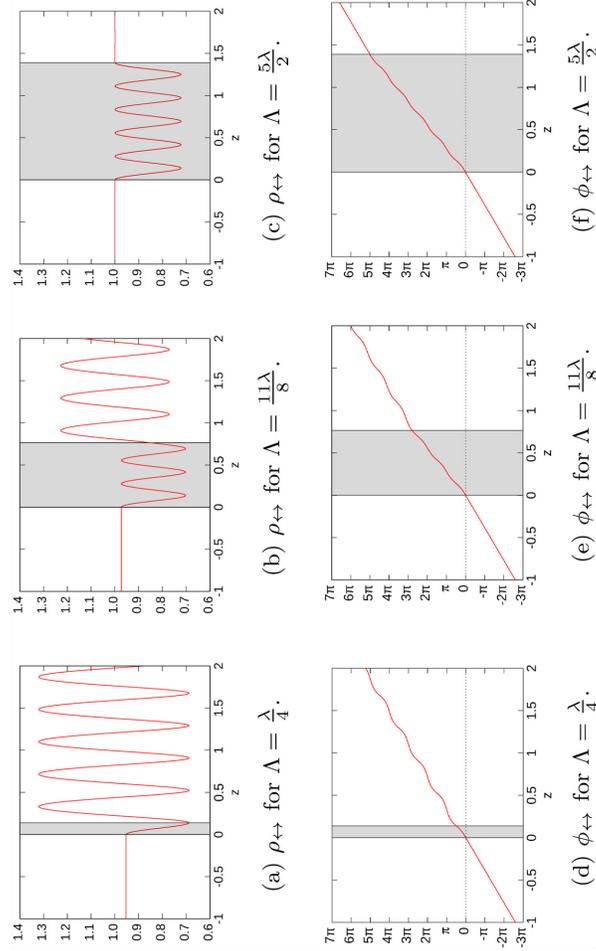


Fig. 2. Amplitude (upper row) and phase (lower row) plots for different optical paths Λ . The value of the relative refractive index $n = n_2/n_1$ is constant, $n_1 = 1.3$ and $n_2 = 1.8$. The amplitude and phase are monitored as the wave propagates through the system.

4. Reflectivity and transmittance

The variable μ , from (1), can be written in terms of the reflection coefficient $r = a/b$, where a and b represent the fields amplitudes propagating to the left and right directions respectively in Figs. 1 and 2,

$$\mu = \frac{1+r}{1-r}. \tag{23}$$

Conversely, the reflection coefficient r can be evaluated if μ is known,

$$r = \left(\frac{1-\mu}{1+\mu} \right). \tag{24}$$

Let the intensity of the incident field be $I_0 = a_1^2$, the transmitted intensity from the invariant expression (4), is $I_t = a_3^2 = a_1^2(1 - r_2^2)$. The reflectivity of the entire system is r_3^2 . The transmittance is then

$$\mathcal{T} = \frac{I_t}{I_0} = \frac{|a_3^2(1 - r_2^2)|}{|a_1^2|}.$$

Substitution of the reflection coefficient in terms of μ_3 is $r_3 = (1 - \mu_3)/(1 + \mu_3)$ and in turn, from (19) in terms of \mathcal{F} give

$$\mathcal{T} = \frac{1}{1 + \mathcal{F} \sin^2(k_2 z_{23})}, \tag{25}$$

where $(1 + \mu_3)^2$ has been rewritten as $4(1 + \mathcal{F} \sin^2 \alpha_2)\mu_3$, \mathcal{F} can also be written as a function of the reflection coefficient at a single interface $r_2 = r$ from (20) and (23),

$$\mathcal{F} = \frac{4r^2}{(1 - r^2)^2},$$

recalling that $\mu_2 = n$. As the reader has surely recognized, the variable \mathcal{F} is nothing else but the finesse factor. The phase $(k_2 z_{23})$ is often expressed in terms of the round trip phase difference $\delta = 2(k_2 z_{23})$. The familiar transmittivity function is thus obtained

$$\mathcal{T} = \frac{1}{1 + \mathcal{F} \sin^2 \frac{\delta}{2}},$$

where the well known Airy function is usually derived with the multiple beam reflection formalism [13].

5. Conclusions

The amplitude a phase approach provides a powerful method to tackle light propagation in inhomogeneous one dimensional media. This method allows for abrupt, intermediate or slowly spatially varying refractive indices. In this case, two abrupt interfaces typical of Fabry–Perot etalons were considered. The procedure involves the field decomposition as a superposition of two counter-propagating scalar waves. These fields satisfy the non-linear amplitude and phase differential equations, where the interference phenomenon is implicit in the differential equations solutions. The Ermakov–Lewis invariant plays a twofold role, it permits the decoupling of the amplitude and phase equations and provides a conserved quantity throughout the waves propagation. It should be stressed that it is an exact invariant, in the sense that it is valid for arbitrary changes of the refractive index as a function of the propagation variable. Numerical [8] as well as approximate analytical [14] solutions using this method have revealed new phenomena such as reflectivity enhancement at planes where the refractive index derivatives are discontinuous.

These results pave the way towards solving the problem of a Fabry–Perot etalon with an inhomogeneous medium between plates. Only a few non-autonomous second order differential equations can be solved analytically. The solutions can be divided in two sets, one that involves solutions in terms of rational polynomials and another set that requires special functions. With the appropriate choice, complex stratifications can be modeled to produce tailor made metamaterials [15]. For stratified media whose refractive index can be modeled with reasonably well behaved functions, the amplitude and phase formalism is very efficient. It provides a simpler method compared with the transfer matrix method because there is no need to introduce the limiting procedure of infinitely thin homogeneous slices to model stratification. Another advantage of this method is that the wave properties are known at each point as the wave propagates through the system. In this way, for example, hot spots in the design of high reflectivity mirrors can be readily observed [16].

References

[1] A. Madani, S.R. Entezar, Optical properties of one-dimensional photonic crystals containing graphene sheets, *Physica B: Condens. Matter* 431 (2013) 1–5.
 [2] A.S. Vioktalamo, R. Watanabe, T. Ishihara, Permeability enhancement of stratified metal dielectric metamaterial in optical regime, *Photonics Nanostruct. – Fundam. Appl.* 10 (2012) 325–328.
 [3] X.-Y. Wu, B.-J. Zhang, X.-J. Liu, S.-Q. Zhang, J. Wang, N. Ba, L. Xiao, H. Li, Light field distribution of general function photonic crystals, *Physica E: Low Dimens. Syst. Nanostruct.* 46 (2012) 133–138.
 [4] S. Caffrey, G.V. Morozov, D.W.L. Sprung, J. Martorell, Floquet–Bloch solutions in a sawtooth photonic crystal, *Opt. Quantum Electron.* 49 (2017) 112.
 [5] M. Fernández-Guasti, Complementary fields conservation equation derived from the scalar wave equation, *J. Phys. A: Math. Gen.* 37 (2004) 4107–4121.

- [6] M. Fernández-Guasti, The Nonlinear Amplitude Equation in Harmonic Phenomena, Nova Publishers, 2007, pp. 177–223.
- [7] R. Diamant, M. Fernández-Guasti, Novel Method to Compute High Reflectivity of Multilayered Mirrors with Rugate Features, vol. TC2 of Optical Interference Coatings, OSA, 2013.
- [8] R. Diamant, M. Fernández-Guasti, Phase change of light reflected by a discontinuity in the derivatives of the refractive index, *Opt. Commun.* 294 (2013) 64–72.
- [9] M. Fernández-Guasti, Dielectric interfaces and mirrors in the amplitude and phase representation, *J. Mod. Opt.* 62 (2015) 265–271.
- [10] J. Reid, J. Ray, Ermakov systems, nonlinear superposition and solutions of nonlinear equations of motion, *J. Math. Phys.* 21 (1980) 1583–1587.
- [11] K.E. Thylwe, The barrier transmission problem treated by the amplitude-phase method and expressed in terms of an invariant of the Ermakov–Lewis type, *J. Phys. A: Math. Gen.* 38 (2005) 235–243.
- [12] M. Fernández-Guasti, Indeterminacy of amplitude and phase variables in classical dynamical systems: the harmonic oscillator, *Europhys. Lett.* 74 (2006) 1013–1019.
- [13] M. Born, E. Wolf, A. Bhatia, D. Gabor, A. Stokes, A. Taylor, P. Wayman, W. Wilcock, *Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light*, Cambridge University Press, 2000.
- [14] R. Diamant, M. Fernández-Guasti, Reflection coefficient due to a discontinuity in the n th order derivative of the refractive index, *J. Opt.* 16 (2014) 015707 (10 pp.).
- [15] A.B. Shvartsburg, A.A. Maradudin, *Waves in Gradient Metamaterials*, World Scientific, 2013.
- [16] R. Diamant, M. Fernández-Guasti, Novel method to compute high reflectivity of multilayered mirrors with rugate features, *Optical Interference Coatings*, Optical Society of America, 2013 p. TC.2.

A.8. CAM 2019

A.8.1. Beca SMF

Edificio de Física, Facultad de Ciencias, UNAM, Piso 2 Universidad Nacional Autónoma de México C. U. C.P. 04510 Deleg. Coyoacán, D. F.

Ciudad de México a 17 de Mayo de 2019

Estimado Héctor Alejandro Jiménez Romero

Es un placer informarte que fuiste aceptado para formar parte de la delegación Mexicana que participará en la Canada-America-Mexico Graduate Student Physics Conference 2019.

Considerando tus méritos académicos, se te ha otorgado la "Beca de la Sociedad Mexicana de Física para asistir a la Canada-America-Mexico Graduate Student Physics Conference 2019" que consiste en el financiamiento de la transportación Ciudad de México - Sudbury, Canadá - Ciudad de México.

Uno de los factores determinantes para haber sido seleccionado es tu producción de publicaciones arbitradas. Confiamos en que la exposición de los resultados de tu trabajo de posgrado contribuya a la calidad de las presentaciones en la CAM y a tu crecimiento como científico.

Atentamente



Dra. Argelia Bernal Bautista
Secretaria de Vinculación
Sociedad Mexicana de Física



Dr. Tonatiuh Matos Chassin
Presidente
Sociedad Mexicana de Física



A.P. 70-348 Delegación Coyoacán
04511 México, D.F.
Tel/Fax: 5622-4840 - 5622-4993 - 5622-4946
<http://www.smf.mx>
smf@ciencias.unam.mx - smf@unam.mx

A.8.2. Resumen de la charla

Abstract

This talk is intended to show the utility of the amplitude and phase representation method in the analytical solving of electromagnetic wave propagation in stratified dielectric media. The strength of this treatment lies on the possibility of decoupling the Ermakov equations that arise in the study of this type of phenomena through the use of invariant quantities that possess a rich physical meaning. In addition to obtaining quantities such as reflectance and transmittance, a detailed description of the total electromagnetic field at each point of the space is also obtained.

To illustrate the application of the proposed treatment a dielectric and homogeneous etalon of arbitrary thickness is studied in this terms. Analytical and numerical results are verified to be completely equivalent to those reported in the classic literature on the subject. As a next step, the central homogeneous medium in the etalon is replaced by a non homogeneous one, dependent on four parameters and that allows the modeling of different systems as well as the phenomena associated with discontinuities in the refractive index and its derivatives. Each of these results are compared with previously performed numerical studies, finding perfect matches.

A.8.3. Sesiones orales

- 11:45 am **“An Environmental Test Stand for Large Area Testing of SiPMs for nEXO”**
Lucas Darroch, McGill University, Canada
- 12:00 pm **“Development of an in-Xe-gas Laser Ablation ion source for the Ba-tagging technique for nEXO. ”**
Melissa Medina Peregrina, McGill University, Canada
- 12:15 pm **“Radon Assay”**
Syed Muhammad Adil Hussain, Laurentian University, Canada

Room C-206: AMO and Quantum Physics

Chair: Alex Robillard, Laurentian University, Canada

- 11:00 am **“Hydrogen adsorption in MOF5: QLDFT calculations.”**
Joeluis Cerutti Torres, Havana University, Cuba
- 11:15 am **“Propagation of E-M waves in stratified media described by an amplitude and phase approach.”**
Hector Alejandro Jimenez Romero, Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, Mexico
- 11:30 am **“Dynamical tunneling in the quantum kicked top”**
Jack Davis, University of Waterloo, Canada
- 11:45 am **“Harnessing advanced classical computing techniques including distributed computing with tensor networks and machine learning for discovery in theoretical quantum physics”**
Marcus Edwards, University of Waterloo, Institute for Quantum Computing, Canada
- 12:00 pm **“Violation of an augmented set of Leggett-Garg inequalities using a non-invasive continuous in time velocity measurement”**
Shayan Majidy, Institute for Quantum Computing, Canada
- 12:15 pm **“KvN Mechanics for the time-dependent frequency harmonic oscillator”**
Alejandro Urzua, Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y Electrónica, Mexico

