"BREVE JUSTIFICACION PARA EL ESTUDIO DE TEORIAS TENSORIAL-ESCALARES DE LA GRAVITACION".

TESIS QUE PRESENTA

PABLO CHAUVET ALDUCIN

PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS

JUNIO DE 1988

ASESOR: NOWOTNI EKKEHARD L.

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA - IZTAPALAPA
DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

L EXAMEN DE GRADO SE LLEVO A CABO EL DIA DE
UNIO DE 1988 A LAS HRS. EN LA SALA
ICACALLI DE LA UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA-
TAPALAPA.

JURADO ESTUVO COMPUESTO POR LOS SIGUIENTES SINODALES:

DR. OCTAVIO OBREGON DIAZ	PRESIDENTE
DR. OCTAVIO PIMENTEL RICO	SECRETARIO
DR. ALBERTO GARCIA	VOCAL
DR. ALBERTO ALONSO Y CORIA	VOCAL
DR. LUIS F. URRUTIA	VOCAL

"Que el poderío, la riqueza y el prestigio de un país están en razón directa de sus trabajos de investigación en pro de la Ciencia pura, de esta Ciencia 'que no sirve para nada' ".

José Comas Solá, Barcelona.

AGRADEZCO AL DR. EKKEHARD NOWOTNY POR SU VALIOSA COLABORACION Y ORIENTACION EN ESTE TRABAJO.

INDICE

PROLOGO.

Aunque la fuerza gravitatoria es una de las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza conocidas y la primera en reconocerse, es en la actualidad una de las más difíciles de comprender. Varios han sido los intentos, después de haberse manifestado en la conciencia del hombre gracias a Newton, por sujetarla dentro de un marco teórico apropiado. La evolución de las ideas de la física ocasiona la modificación de estos marcos teóricos y por lo mismo el concepto que se tiene de la fuerza gravitatoria. Es así que Einstein a través de su Teoría General de la Relatividad le da a la gravitación un carácter geométrico. Luego, la idea de geometrizar también a las otras fuerzas fue y vuelve a ser motor de muchas investigaciones debido principalmente a que bajo esto está el deseo de unificación de las interacciones fundamentales, ahora muy perseguido.

La unificación también se ha buscado a través de la cuantización, de tal modo que se habla de cuantizar la gravitación por ejemplo.
Así es que ahora tenemos teorías de unificación como la de la supergravedad y la de supercuerdas que manejan a la vez cuantización y geometrización.

En estas teorías, del lado de la geometrización, aparece la necesidad de reducir el número original de dimensiones espacio-temporales lo cual da lugar, entre otras cosas, a la aparición de campos escalares que en el pasado y aún ahora, debido a lo que podríamos llamar prejuicios cuadridimensionales, se igualaban a cero mutilando o alterando estas teorías multidimensionales produciendo problemas de inconsistencia.

Al mantener un campo escalar el propósito de esta tesis es exhibirlo desde distintos puntos de vista buscando justificarlo, sobretodo en el contexto cosmológico. Esta tesis esta dividida en cinco capítulos.

La introducción expone en forma breve y un tanto superficial la teoría de Kaluza-Klein desde una prespectiva moderna por la importancia que tiene ahora. La correspondencia clásica y original desde el punto de vista grupal entre una teoría de gravitación en cinco dimensiones y una teoría unificada en cuatro dimensiones constituye el tema del segundo capítulo. En el tercer capítulo se muestran los aspectos matemáticos de la teoría original de Jordan y la relación que guarda con otras teorías escalar-tensoriales de otros autores, principalmente con la de Brans-Dicke.

Vistas desde un principio como teorías en cuatro dimensiones las teorías escalar-tensoriales pueden motivarse, en principio, con razones de tipo filosóficas como las expuestas por Dirac y otros.

El capítulo cuatro destaca el "principio de invarianza conforme" al considerar que aunque su difusión y su uso en la física ha sido muy limitado, puede ser particularmente -

útil para entender mejor la relación entre la teoría general de la relatividad de Einstein y las teorías escalar —tensoriales a través de concebir a la masa como una propiedad extrínseca, podría decirse, que adquieren las partículas por interacción con la materia en el resto del Universo.

Por último, en el capítulo cinco se presenta un método, de aplicación general en modelos cosmológicos de teorías escalar —tensoriales, para resolver las ecuaciones diferenciales que surgen en la teoría cosmológica de Jordan-Brans-Dicke exclusivamente, tanto en modelos isotrópicos como no-isotrópicos. Este método permitió obtener varias soluciones nuevas y en modelos anisotrópicos podría servir para el estudio de algunos problemas de la isotropización de modelos homogéneos.

CAPITULO I. INTRODUCCION.

MOTIVACION PARA ESTUDIAR LAS TEORIAS ESCALARES-TENSORIALES DE GRAVITACION.

La teoría de Kaluza-Klein.

Esta teoría (Kaluza, 1921) fue el primer intento serio para unificar a la gravitación con las interacciones de norma, concretamente con el electromagnetismo y el procedimiento general para lograrlo sigue vigente. Originalmente se obtiene el lagrangiano de Einstein-Maxwell en cuatro dimensiones a partir del lagrangiano de Einstein en cinco dimensiones:

$$\mathcal{L} = \int R\sqrt{-g}\, dx^5 \qquad (1.1)$$

donde g es el determinante del tensor métrico y R el escalar de curvatura en cinco dimensiones.

El problema que surge de inmediato es qué podemos hacer con la nueva dimensión, pues de existir no se puede percibir directamente aunque en forma indirecta puede manifestarse como un grado de libertad extra de cargas generalizadas. Es más, algunas teorías de campo tales como la supergravedad o los modelos duales: cuerdas y super-cuerdas necesitan de más de cinco dimensiones para tener sentido apropiado.

Kaluza y Klein (1926) suponen que los campos en su teoría son independientes de la coordenada extra (condición de cilindricidad), pero no dan una explicación del porqué de la cilindricidad lo cual es insatisfactorio aparte de que esta condición rompe con la invariancia de las transformaciones de coordenadas en cinco dimensiones. Einstein y Bergman (1938) sugirieron que si la quinta coordenada se cierra sobre sí misma formando una circunferencia pequeña, la propuesta de Kaluza-Klein es una aproximación a la verdadera teoría de gravitación en cinco dimensiones. Lo podemos ver de la siguiente manera: En cualquier teoría el primer paso es encontrar el vacío clásico y expandir alrededor de él y entonces ¿cuál es el vacío en cinco dimensiones? Por las razones expuestas anteriormente, éste no puede ser el espacio de Minkowski en cinco dimensiones M^5. En cambio, $M^4 \times S^1$ donde M^4 es el espacio de Minkowski en cuatro dimensiones y S^1 una circunferencia pequeña, quizá del orden de la longitud de Planck, es aceptable: Primero que todo, por satisfacer las ecuaciones clásicas de Einstein, lo mismo que M^5. Por otro lado, la noción de que el verdadero estado base, en casi cualquier teoría, es aquel estado de mínima energía no es directamente aplicable en relatividad general debido a que el concepto de energía depende de condiciones a la frontera; no hay modo de comparar la energía de M^5 con la de $M^4 \times S^1$, por ejemplo. Más aún, como no tenemos un criterio para decidir cuál es el estado base sólo nos queda aceptar alguno -

$(M^4 \times S^1)$ y estudiar las consequencias. Cremmer y Schwarz (1975) y Cremmer y Scherk (1976) sugirieron que la Teoría de Kaluza-Klein es una Teoría de "rotura espontánea de la simetría", específicamente de "compactificación espontánea" por lo siguiente. La simetría de M^5 es el grupo de Poincaré en cinco dimensiones P^5, mientras que la simetría de $M^4 \times S^1$ es $P^4 \times U(1)$, con P^4 el grupo de Poincaré en cuatro dimensiones o sea el grupo de simetría de M^4 y $U(1)$ el grupo de rotación de la circunferencia S^1. Al suponer que el estado base es $M^4 \times S^1$ y no M^5, el posible grupo de simetría P^5 se ha "roto espontaneamente" en el subgrupo $P^4 \times U(1)$.

Las simetrías de $M^4 \times S^1$ son simetrías geométricas, es decir, son transformaciones que preservan a la métrica sobre la variedad. También se les conoce como simetrías del espacio-tiempo. Además, como partimos de relavitidad general en cinco dimensiones, la covarianza de la teoría implica que todas las simetrías del espacio-tiempo son simetrías locales y, por lo tanto, las simetrías $P^4 \times U(1)$ son también locales y asociadas a éstas, deben existir partículas de "norma" sin masa, llamadas también bosones de norma: Los "gravitones" asociados a la simetría P^4 y los "fotones" que además son "abelianos" asociados a la simetría $U(1)$. Es por esta razón que la Teoría de Kaluza-Klein es una teoría unificada de la gravitación con el electromagnetismo. En la actualidad, las teorías de campo como la Supergravitación y también los llamados modelos duales (cuerdas y supercuerdas) necesitan de más de cinco dimensiones para tener sentido apropiado y por lo tanto, también, la compactificación espontánea o algo semejante.

Vamos a exponer ahora, con más detalle, algunas de estas ideas.

Kaluza, para manejar la coordenada extra supone que los campos en su teoría son independientes de la coordenada extra (condición de cilindricidad):

Sea $g_{MN}(x,\varphi)$ el tensor métrico en cinco dimensiones, con x representando a las coordenadas de Minkowski en cuatro dimensiones. La cilindricidad

$$\frac{\partial g_{MN}(x,\varphi)}{\partial \varphi} = 0 \qquad (1.2)$$

nos permite escribir

$$g_{MN}(x,\varphi) \equiv \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu}(x) & A_{\mu}(x) \\ \hline A_{\nu}(x) & \phi(x) \end{array}\right) . \qquad (1.3)$$

Kaluza supone, además, $\phi(x) = 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} R^{(5)} &= R^{(4)} - \tfrac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} , \\ F_{\mu\nu} &= A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} . \end{aligned} \qquad (1.4)$$

$R^{(5)}$ y $R^{(4)}$ son los escalares de curvatura en cinco y cuatro dimensiones, respectivamente. Todo lo que queda de la dimensión extra es un número mayor de campos. El resultado de que A(x) en (1.1) es el campo electromagnético, no es trivial.

Para aceptar la cilindricidad, podemos argumentar, rapidamente, del siguiente modo. Supongamos que tenemos una función f = f (x, y) con expansión de Taylor

$$f(x,y) = f(x,0) + y f_{,y}(x,0) + O(y^n), \quad n \geq 2 \qquad (1.5)$$

Si y es suficientemente pequeña, podemos despreciar todos los términos en (1.5), salvo el primero y entonces ¡obtenemos la condición de cilindricidad!.

El mismo argumento, pero en un contexto más definido va de la siguiente manera.

Nuestro supuesto estado base o vacio esta dado por

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + d\varphi^2 \qquad (1.6)$$

$\eta_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski y las x^ν son las coordenadas usuales de M^4: x^0, x^1, x^2, x^3; mientras que φ es una variable angular tal que $0 \leq \varphi \leq 2\pi R$. Una vez encontrado el estado base, el siguiente paso consiste en desarrollar alrededor de él y determinar el espectro de las excitaciones. Las excitaciones se estudian en la métrica de cinco dimensiones $g_{MN}(x^\nu, \varphi)$ con $M,N=0,\ldots,4$ Sin perder generalidad, podemos expandir la dependencia φ de la métrica en una serie de Fourier

$$g_{MN}(x^\nu,\varphi) = \sum_n g^{(n)}_{MN}(x^\nu) \exp(-i\varphi n/R) \qquad (1.7)$$

puesto que $\varphi \in [0, 2\pi R]$.

Resulta que los modos con $n \neq 0$ tienen masas del orden de n/R que provienen de la energía cinética en la dirección φ como vamos a mostrar.

Con una norma apropiada, cada componente de la fluctuación de la métrica satisface la ecuación de onda sin masa en cinco dimensiones

$$\overset{5}{\Box}\Psi = \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x^{i2}} - \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\Psi = \left(\overset{4}{\Box} - \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)\Psi \qquad (1.8)$$

con $\Box^4$ el d'Alembertiano en cuatro dimensiones, vemos que el término $\partial^2/\partial^2\varphi$ da lugar a una masa cuadrada n^2/R^2 al modo $g_{MN}^{(n)}$. Así que si R es del orden de la longitud de Planck $(10^{-33}cm)$, los modos con $n \neq 0$ tienen masas de alrededor de $10^{19}GeV$. Esto quiere decir que resulta muy difícil excitar estos modos. El modo cero corresponde a una partícula sin masa en cuatro dimensiones y a bajas energías y a longitudes de onda mucho mayores que el radio de la quinta dimensión, dominan los modos sin masa con $n = 0$; de aquí que la métrica se descompone así

$$g_{MN}(x^\alpha, \varphi) = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu}(x^\alpha) & A_\mu(x^\alpha) \\ \hline A_\nu(x^\alpha) & \phi(x^\alpha) \end{array}\right) , \qquad (1.9)$$

donde $g_{\mu\nu}$ representa al campo gravitatorio en cuatro dimensiones, A_ν a los fotones sin masa y ϕ a partículas escalares sin masa. Los campos de norma $g_{\mu\nu}$ y A_ν estan asociados a la simetría $P^4 \times U(1)$. El campo ϕ , en cambio, es algo así como un pseudo boson de Goldstone: una oscilación en ϕ corresponde a un cambio en el radio de la quinta dimensión como podemos ver del elemento de línea

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + --- + \phi d\varphi^2 \quad . \qquad (1.10)$$

El radio de la quinta dimensión es $2\pi R\sqrt{\phi}$ y las ecuaciones de Einstein clásicas no determinan este radio ya que $M^4 \times S^1$ es plano, independientemente de su valor. Por tanto ϕ no tiene masa. ϕ es el escalar de Brans-Dicke que históricamente da lugar a la Teoría de Jordan-Brans-Dicke. Por otro lado, debemos tener presente que es probable que correcciones cuánticas hagan de ϕ un campo masivo y de ser éste el caso, incluso una masa muy pequeña, ϕ no podría detectarse cosmológicamente.

Ya dijimos que la aproximación (1.2) no es compatible con el principio de la invarianza general de coordenadas en cinco dimensiones. La invarianza es ahora $(x,\varphi) \longrightarrow (x',\varphi') = (x + \xi(x), \varphi + \omega(x))$ donde $x \longrightarrow x + \xi(x)$ es una transformada general de coordenadas en cuatro dimensiones y $\varphi \longrightarrow \varphi + \omega(x)$ representa una transformación de norma.

La simetría del estado base es $P^4 \times U(1)$ y vamos a mostrar que las componentes no diagonales de la métrica, $A_\nu(x^\alpha)$, son campos de norma. A partir de la fórmula general

$$g_{MN}(z) \longrightarrow g'_{MN}(z') = \frac{\partial z^L}{\partial z'^M}\frac{\partial z^K}{\partial z'^N}\, g_{KL}(z) \qquad (1.11)$$

en la cual $z = (x^\alpha, \varphi) \longrightarrow z' = (x^\alpha, \varphi') = (x^\alpha, \varphi + \omega(x))$ implica que $g_{\nu 5} \longrightarrow g_{\nu 5} - \omega_{,\nu}$ es decir, $A_\nu(x) \longrightarrow A_\nu(x) + \omega_{,\nu}(x)$

La transformación de coordenadas $(x, \varphi) \longrightarrow (x, \varphi + \omega(x))$ se compensa con la transformación de norma $A_\nu \rightarrow A_\nu + \omega_{,\nu}$. Otra manera de ver lo anterior es partiendo del elemento de línea en cinco dimensiones para el cual resulta más conveniente la siguiente parametrización

$$g^{(o)}_{MN}(x) = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} - A_\mu A_\nu & -A_\mu(x) \\ \hline -A_\nu & -\phi \end{array}\right) \qquad (1.12)$$

o sea que ahora $\quad g_{\mu\nu} = g^{(o)}_{\mu\nu} + A_\mu A_\nu$

es la definición de $g_{\mu\nu}$. El elemento de línea en cinco dimensiones es

$$ds^2 = g_{MN} dz^M dz^N = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - (d\varphi + A_\nu dx^\nu)^2, \qquad (1.13)$$

en donde, para mayor claridad, estamos poniendo $\phi = -1$. Entonces, si $\varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + \omega(x)$, $d\varphi' = d\varphi + \omega_{,\nu} dx^\nu$; de modo que para tener invarianza en ds^2 , debemos pedir $A_\nu \rightarrow A_\nu - \omega_{,\nu}$.

Todavía se tiene otra forma más para motivar las ideas de Kaluza-Klein: Supongase el acoplamiento de gravitación en cinco dimensiones a un campo escalar $\Psi(x, \varphi)$. El lagrangiano libre en cinco dimensiones es $g^{MN}\Psi^{+}_{,M}\Psi_{,N}-m_o^2(\Psi^{+}_{x}\Psi)$, g^{MN} es el inverso de g_{MN}. Ahora se pide que el lagrangiano libre en cinco dimensiones de lugar al lagrangiano en cuatro dimensiones para un campo escalar acoplado al campo de Maxwell, $[(\partial_\nu + ie A_\nu)\Psi(x)]^2 - m_o^2\Psi^2(x)$. Así pues, si g^{MN} es la inversa de (1.12), entonces:

$$g^{MN} = \left(\begin{array}{c|c} g^{\mu\nu} & -f A^{\mu} \\ \hline -f A^{\nu} & f^2 A^{\nu} A_{\nu} - \phi \end{array}\right) \tag{1.14}$$

donde, ahora, al campo de norma está re-escalado $A_\nu \to f A_\nu$ y si $\Psi(x,\varphi) = \exp(im\varphi)\Psi(x)$, no se tiene el "modo cero" sino el "primer modo masivo" de la expansión harmónica. m es el inverso del radio R de S_1 y pedimos

$$m f = e \tag{1.15}$$

Para determinar f se calcula el escalar de curvatura en cinco dimensiones:

$$\overset{5}{R}(g^{(o)}_{MN}(x)) = \overset{4}{R}(g_{\mu\nu}) - \frac{f^2}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + --- \tag{1.16}$$

donde $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$. El signo menos en el lado derecho de (1.16) se debe a que se pide que la quinta dimensión sea espacialoide. Por lo tanto

$f^2 = K \sim 10^{-38}(GeV)^{-2}$, K es la constante de gravitación. Para un acoplamiento razonable $e \sim 1$, así que $m = e f^{-1} \sim 10^{19} GeV$. Es así como la masa de Planck queda incorporada a la Teoría de Kaluza-Klein. Dos cosas que podemos notar es que la masa para el campo escalar Ψ en cuatro dimensiones puede ser mayor que la masa de Planck que resulta un límite inferior y la otra es: La necesidad de introducir materia en cinco dimensiones para tener (1.15) ya que el radio de S_1 no queda determinado por las ecuaciones de campo.

Regresemos ahora a la acción en cinco dimensiones y expandimos en potencias de los campos. Si suponemos que las longitudes de onda son mucho mayores que el radio de la quinta dimensión podemos ignorar los modos masivos y obtenemos la teoría de Einstein-Maxwell-Jordan-Brans-Dicke, en el límite de bajas energías:

$$\mathcal{L}^{(5)} \rightarrow \mathcal{L}^{(4)} = \int d^4x \sqrt{-g^{(4)}} \left[R^{(4)} + F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + g^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}\right] + \cdots \qquad (1.17)$$

Las correcciones a esta teoría, los modos masivos, dan lugar a que bajo una transformación $U(1): \varphi \rightarrow \varphi + \omega$, el campo

$$g^{(n)}_{MN} \longrightarrow g^{(n)}_{MN} \exp\left\{-\frac{i\omega n}{R}\right\} \quad . \qquad (1.18)$$

Esto quiere decir que $g^{(n)}_{MN}$ tiene una carga eléctrica proporcional a n , o sea que la teoría de Kaluza-Klein uni--

fica a Einstein-Maxwell-Jordan-Brans-Dicke con un número infinito de campos masivos y cargados con spines cero, uno y dos, puesto que bajo transformaciones de Lorentz de g_{MN} así se transforman. Estos campos tienen masas del orden de 10^{19} GeV y no se pueden identificar con partículas conocidas. A pesar de ésta y otras dificultades la teoría de Kaluza-Klein muestra que en principio la unificación de la gravitación y el electromagnetismo con la materia es posible. Más aún, la Teoría de Kaluza-Klein es la única teoría de campo conocida que contiene campos masivos y cargados de spin igual a dos. Por último, solamente mencionaré que la generalización no-Abeliana de la teoría ya también está desarrollada, entre otros por E. Witten (1981 a,b).

CAPITULO II LA ESTRUCTURA DE LA TEORIA DE JORDAN-BRANS-DICKE.

A partir del siguiente principio variacional

$$\delta\int\left(G + \frac{K}{2c^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}\right)\sqrt{-g}\, dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = 0 \qquad (2.1)$$

obtenemos las ecuaciones de la Teoría de Einstein-Maxwell sin fuentes. Esta teoría contiene catorce variables $g_{\mu\nu}$, A_μ que aparecen en esas ecuaciones:

$$G_{\mu\nu} + \frac{K}{c^2}\left(F_{\mu\gamma} F^{\gamma}{}_{\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}\right) = 0 \qquad (2.2)$$

$$F^{\alpha\nu}{}_{;\nu} = 0 \qquad (2.3)$$

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu} \qquad (2.4)$$

La ecuación (2.4) se puede tomar como la definición del tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$, mientras que en (2.3) la derivada ordinaria está sustituida por la derivada covariante. Expuesta de esta forma, podemos decir que hemos obtenido una teoría unificada, de manera trivial, de la gravitación con electromagnetismo. La trivialidad de la unión de los dos campos se manifiesta en la asimetría obvia que hay entre las variables $g_{\mu\nu}$ y A_ν. Podemos formular la teoría de tal modo que ésta tenga una gran simetría, por lo menos, además de alguna novedad. Como ya se dijo, está teoría tiene su origen en las ideas de Kaluza-Klein y fue generalizada por Jordan (1948, 1951) y particularizada nuevamente por Brans-Dicke (1961).

Vamos a ver primero cómo es la teoría desde el punto de vista de la teoría de grupos: las ecuaciones (2.2), (2.3) y (2.4) son invariantes ante transformaciones de coordenadas y ante transformaciones de norma bajo las cuales las A_ν cambian así

$$A_\nu \rightarrow A'_\nu = A_\nu + A_{,\nu} \quad , \qquad (2.5)$$

es decir, a los potenciales A_ν se les añade el gradiente de una función A, mientras que las coordenadas x^α no cambian bajo estas transformaciones. Con el sistema de coordenadas fijo, las trasnformaciones de norma forman el grupo aditivo de las funciones arbitrarias de las x^ν. Denotemos a este grupo con la letra N y al grupo de las transformaciones de coordenadas, en cuatro dimensiones, con la letra P. Consecuentemente, la teoría de Einstein-Maxwell es invariante ante el grupo J generado por N y P. Entonces, los elementos de P son

$$x^{\bar{\alpha}} = f^{\alpha}(x) \quad , \quad \bar{A}_{\bar{\mu}} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\bar{\mu}}} A_\nu \qquad (2.6)$$

mientras que las transformaciones de norma son

$$A'_\nu = A_\nu + A(x)_{,\nu} \qquad (2.7)$$

donde $A = A(x)$ es función de las coordenadas x^{α}. El resultado de hacer primero, una transformación de coordenadas (2.6) y después una transformación de norma, da como resultado

$$(x^{\bar{\alpha}})' = f^{\alpha}(x) \;, \quad (\bar{A}_{\bar{\mu}})' = (x^{\nu}{}_{,\bar{\mu}} A_{\nu})' = x^{\nu}{}_{,\bar{\mu}} A'_{\nu} = $$
$$= x^{\nu}{}_{,\bar{\mu}} A_{\nu} + x^{\nu}{}_{,\bar{\mu}} A(x)_{,\nu} = $$
$$= x^{\nu}{}_{,\bar{\mu}} A_{\nu} + A(x)_{,\bar{\mu}} \,. \qquad (2.8)$$

$A(\bar{x})$ tiene la misma forma funcional que $A(x)$.
Si ahora realizamos la transformación inversa a (2.6) en (2.8), obtenemos

$$\overline{(x^{\bar{\alpha}})'} = \overline{f^{\bar{\alpha}}(x)} = x^{\alpha}$$
$$\overline{(\bar{A}_{\bar{\mu}})'} = \overline{(x^{\nu}{}_{,\bar{\mu}}(A_{\nu} + A(x)_{,\nu}))} = A_{\mu} + A(\bar{x})_{,\mu} \qquad (2.9)$$

Por lo tanto si $p \in P$ y a la transformación de norma dada por $A(x)$ la denotamos por $[A(x)]$, tenemos que

$$p^{-1}[A(x)]\,p = [A(\bar{x})] \;, \qquad (2.10)$$

o puesto de otra manera

$$P^{-1} N P = N \qquad (2.11)$$

es decir, N es un subgrupo normal de J, no así P. Todo elemento de J se puede expresar de manera única en la forma NP ya que $N \cap P$ es la identidad. Debemos repetir que J construído de esta manera tiene poca simetría y en consecuencia poco estético es.

Sin embargo, resulta que J es isomorfo al grupo H_5 compuesto por todas aquellas transformaciones de las cinco variables $X^0, \ldots, X^4$ para las que las nuevas variables $X^{\bar{n}}$ son funciones homogéneas del primer grado de las X^m. Usando la relación de homogeneidad de Euler escribimos

$$X^{\bar{m}}{}_{,n} X^n = X^{\bar{m}} \tag{2.12}$$

que proviene de derivar con respecto a λ la relación general $u(\lambda X^i) = \lambda u(X^i)$ y poner después $\lambda = 1$.

Los elementos generales de H_5 son transformaciones de la forma

$$X^{\bar{n}} = X^n F^n (X^1/X^0, X^2/X^0, X^3/X^0, X^4/X^0) \,. \tag{2.13}$$

Podemos poner en correspondencia, uno a uno, a aquellos elementos especiales de H_5 para los cuales $F^n = F$ con n cualquiera (entre 0 y 4), con los elementos de $N \subset J$ así:

$$[A(x)] = [A(x^1, \ldots, x^4)] \sim \pm F(X^1/X^0, \ldots) = e^{A(x^1, \ldots, x^4)} \tag{2.14}$$

que aparte del signo es única. Además, vemos que se hace la interpretación siguiente

$$X^\nu / X^0 = x^\nu \tag{2.15}$$

Mientras, a las transformaciones pertenecientes a P, dados por (2.6), les corresponden las transformaciones de H_5 dadas por

$$\begin{aligned} X^{\bar{0}} &= X^0 \,. \\ X^{\bar{\nu}}/X^{\bar{0}} &= \frac{X^\nu}{X^0} F^\nu\left(\frac{X^1}{X^0}, \ldots, \frac{X^4}{X^0}\right) = f^\nu\left(\frac{X^1}{X^0}, \frac{X^2}{X^0}, \ldots\right) \\ X^{\bar{\nu}} &= X^{\bar{0}} f^\nu\left(\frac{X^1}{X^0}, \ldots, \frac{X^4}{X^0}\right) = f^\nu(x^1, x^2, \ldots) X^{\bar{0}} \end{aligned} \tag{2.16}$$

En forma análoga a (2.10), para H_5 puede uno construir la siguiente relación: Partimos de (2.16) transformando la con $F^m = F$ y al resultado lo denotamos por $x^{\overline{m}'}$

$$x^{\bar{o}'} = x^{o} F(x^{\bar{1}}/x^{\bar{o}}, ---)$$
$$x^{\bar{\nu}'}/x^{\bar{o}'} = f^{\nu}(x^{1}/x^{o}, ---) \qquad (2.17)$$

La transformación inversa correspondiente a (2.16) aplicada a (2.17) da

$$x^{\bar{\bar{o}}'} = (x^{\bar{o}'})^{-1} = x^{o} F(x^{\bar{1}}/x^{\bar{o}}, ---)$$
$$x^{\bar{\bar{\nu}}'}/x^{\bar{\bar{o}}'} = (x^{\bar{\nu}'}/x^{\bar{o}'})^{-1} = x^{\nu}/x^{o} \qquad 2.18)$$

Hemos mostrado que las transformaciones de H_5 para los cuales $F^m = F$ forman el grupo normal de H_5 y que aparte de la transformación idéntica, no tiene elementos en común con el subgrupo formado por elementos arbitrarios F^m. Sobretodo, hemos establecido el homomorfismo entre el grupo de simetría $J = P_4 \otimes N$ de las ecuaciones de Einstein-Maxwell (N es el grupo de transformaciones de norma electromagnéticas) y el grupo H_5 , siempre y cuando uno identifique a las coordenadas espacio-temporales con las funciones homogéneas de grado cero de las coordenadas en cinco dimensiones. He aquí la razón del porqué de la unificación de la relatividad general con el electromagnetismo cuando se formula a partir de una teoría proyectiva de la relatividad cuyas características esenciales exponemos a continuación.

(i) La geometría Riemanniana es válida tanto en el espacio de cinco dimensiones como en el espacio-tiempo de cuatro dimensiones.

ii) El formalismo de proyección que conecta a la geometría del espacio de cinco dimensiones con la geometría del espacio-tiempo de cuatro dimensiones y a las que llamamos, en cinco dimensiones, ecuaciones proyectivas proyectadas a ecuaciones tensoriales en cuatro dimensiones, está basado en la restricción de aceptar sólo transformadas de coordenadas en cinco dimensiones que pertenezcan al grupo H_5 o sea a las transformaciones homogéneas de primer grado.

iii) Las coordenadas de los puntos del espacio-tiempo en cuatro dimensiones son funciones homogéneas de grado cero de las coordenadas del espacio de cinco dimensiones.

Debemos hacer notar que el formalismo de proyección puede manejarse de varias maneras (Jordan 1955, Bergmann 1948, Ludwing 1951 y Schmutzer 1968, entre otros). Vamos a presentar ahora este formalismo de proyección si-- guiendo a Jordan.

PROYECTORES.

Expresamos que las coordenadas espacio-temporales x^ν son cuatro funciones independientes y homogéneas de grado cero de las coordenadas en cinco dimensiones X^k por medio de la relación de Euler

$$x^\nu{}_{,k} X^k = 0 \qquad (2.19)$$

También con la relación de Euler, sólo son válidas las transformadas de coordenadas en cinco dimensiones tales que

$$X^{\bar{k}} = X^{\bar{k}}{}_{,a} X^{a} \tag{2.20}$$

La geometría de Riemann es válida en cinco y en cuatro dimensiones y las ecuaciones en cinco dimensiones deben tener su equivalente en cuatro por lo cual es necesario el concepto de proyector: Un proyector $P^{k_1---k_n}_{l_1---l_m}$ se transforma como un tensor y, además,

$$P^{k_1---k_n}_{l_1---l_m,s} X^{s} = (n-m) P^{k_1---k_n}_{l_1---l_m} \tag{2.21}$$

y es por tanto, función homogénea de grado (n-m) de las X^s. Nótese que las diferenciales dX^k no son proyectores y sin embargo, las X^k mismas sí lo son y se transforman como vectores. Las g^{kl}, g_{kl} y $g^k{}_l = \delta^k_l$, también son proyectores. Nótese, también, que supondremos siempre que el invariante

$$X_k X^k = g_{kl} X^k X^l = J \neq 0 \ . \tag{2.22}$$

Un proyector a^l se puede descomponer en una parte ortogonal ($a^{(l)}$) y otra paralela a X^l , de manera única:

$$a^l = a^{(l)} + X^l \frac{a^s X_s}{J} \ , \qquad a^{(l)} X_l = 0 \ . \tag{2.23}$$

En particular $X^{(l)}=0$ y todo gradiente $S_{,k} = S_{,(k)}$ y

$$a^{(l)} b_l = a^{(l)} b_{(l)} = a^l b_l - \frac{(a^k X_k)(b_n X^n)}{J} . \tag{2.24}$$

$$g^{(k)}_l = g^k_l - \frac{g^s_l X_s}{J} = g^k_l - \frac{X^k X_l}{J}$$
$$g^{(k)}_{(l)} = g^{(k)}_l - X_l \frac{g^{(k)}_s X^s}{J} = g^{(k)}_l . \tag{2.25}$$

La proyección de un vector a^k (en cinco dimensiones) está dada por el cuadrivector a^ν así:

$$a^\nu = x^\nu{}_{,k}\, a^k \tag{2.26}$$

y sus componentes son funciones homogéneas de grado cero de las X^k. La ecuación (2.19) se puede escribir, ahora,

$$X^\nu = 0 . \tag{2.27}$$

La proyección a^ν de a^k es igual a la proyección de la parte $a^{(k)}$ que es ortogonal a X^k:

$$a^\nu = a^{(\nu)} \tag{2.28}$$

y en general lo anterior es válido para cualquier tensor

$$T^{\nu_1 --- \nu_n} = T^{(\nu_1) --- (\nu_n)} . \tag{2.29}$$

Es decir, uno puede generalizar (2.26) para proyectar a un proyector con un número arbitrario de índices. Tenemos además, que

$$g^\nu{}_k = x^\nu{}_{,l}\, g^l{}_k = x^\nu{}_{,k} \tag{2.30}$$

y

$$g^{\mu\nu} = x^{\mu}{}_{,k}\, x^{\nu}{}_{,\ell}\, g^{k\ell} = g^{\mu}{}_{k}\, g^{\nu}{}_{\ell}\, g^{k\ell} \quad . \tag{2.31}$$

La matriz inversa de $g^{\mu\nu}$ es

$$(g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu})^{-1} \tag{2.32}$$

La independencia de las cuatro funciones $x^{\nu}(X)$ dan lugar a lo siguiente: Primero, si la reducción a^{ν} de a^{k} es nula eso implica que a^{k} es paralela a X^{k} :

$$a^{k} = sX^{k} \tag{2.33}$$

Ya que $\mathrm{Det}[\, g^{kl} \,] \neq 0$ se sigue que $\mathrm{Det}[\, g_{kl} \,] \neq 0$ y

$$a_{\nu} = g_{\mu\nu}\, a^{\mu} = g^{\mu}{}_{k}\, a^{k}\, g_{\mu\nu} \tag{2.34}$$

El símbolo $g^{k}{}_{\nu}$ significa lo siguiente.

$$g^{k}{}_{\nu} = g_{\mu\nu}\, g^{\mu k} = g_{\mu\nu} g^{\mu}{}_{l}\, g^{kl} \tag{2.35}$$

por lo cual podemos escribir (2.34) en la forma

$$a_{\nu} = g^{k}{}_{\nu}\, a_{k} \tag{2.36}$$

y en forma semejante:

$$a^{\nu} = g^{\nu}{}_{k}\, a^{k} \quad , \tag{2.37}$$

las cuales se pueden generalizar para reducir proyectores arbitrarios. La operación de reducción conmuta con la operación de intercambios de índi_ ces.

Tenemos que

$$g^{k}{}_{\mu}\, g^{\nu}{}_{k} = g^{\nu}{}_{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu} \quad , \tag{2.38}$$

de acuerdo con (2.35):

$$g^{k}_{\mu} g^{\nu}_{k} = g_{\mu\lambda} g^{\lambda}_{1} \; g^{kl} \; g^{\nu}_{k} = g_{\mu\lambda} g^{\lambda}_{1} \; g^{\nu}_{k} \; g^{kl} = g_{\mu\lambda} g^{\lambda\nu} \quad . \tag{2.39}$$

Puesto que $a^{(k)} - g^{k}_{\nu} a^{\nu}$ es ortogonal a X_k:

$$[\, a^{(k)} - g^{k}_{\nu} a^{\nu} \,]\, X_k = a^{(k)} X_{(k)} - X_{\nu} a^{\nu} = 0 \tag{2.40}$$

y además como su reducción es nula, resulta que

$$\begin{aligned} a^{(k)} &= g^{k}_{\nu} a^{\nu} \\ a_{(k)} &= g_{k}^{\nu} a_{\nu} \end{aligned} \tag{2.41}$$

$$a^{\nu} b_{\nu} = a^{(k)} b_{(k)} = a^{(k)} b_{k} \tag{2.42}$$

y en general

$$T^{\nu ---}_{\nu ---} = T^{(k) ---}_{(k) ---} = T^{k ---}_{(k) ---} = T^{(k) ---}_{k ---} \quad . \tag{2.43}$$

Así que

$$g^{\nu}_{k} \; g^{1}_{\nu} = g^{1}_{k} - \frac{X_k X^1}{J} \quad . \tag{2.44}$$

Aunque las diferenciales dX^k no son proyectores, de todos modos $dx^{\nu} = g^{\nu}_{k} dX^k$ y de acuerdo con (2.44),

$$g_{\mu\nu} dx^{\nu} dx^{\mu} = g_{kl} \; dX^k dX^l - \frac{(X_k dX^k)^2}{J} \tag{2.45}$$

El concepto de reducción nos permite trasladar las ecuaciones de proyecto_ res en cinco dimensiones a su equivalente en cuatro dimensiones; de modo que $a^k = 0$ equivale: $a^{\nu} = 0$ y $a^k X_k = 0$.
Nótese que si $A^{kl} = 0$ con A^{kl} simétrico, obtenemos

$$A^{\mu\nu} = 0; \quad A^{\nu k} X_k = 0; \quad A^{kl} X_k X^l = 0 \quad . \tag{2.46}$$

b) La derivada en cinco dimensiones.

La derivada covariante de un proyector es un proyector, sin embargo, las propiedades de homogeneidad de éstos dan lugar a ciertas pecularіedades.

La ecuación de Euler

$$-X^{l} b_{k,l} = b_k = X^{l}{}_{,k} b_l \quad , \tag{2.47}$$

implica que

$$X^k (b_{k,l} - b_{l,k}) = (X^k b_k)_{,l} \quad . \tag{2.48}$$

Pero podemos cambiar las derivadas ordinarias por covariantes para obtener

$$X^k b_{l;k} + X^k{}_{;l} b_k = 0 \quad . \tag{2.49}$$

La última fórmula se puede generalizar a proyectores arbitrarios, pero en especial:

$$X^l B_{km;l} + X^l{}_{;k} B_{lm} + X^l{}_{;m} B_{kl} = 0 \quad . \tag{2.50}$$

Ahora, si $B_{km} = g_{km}$ obtenemos la siguiente ecuación de Killing,

$$X_{m;k} + X_{k;m} = 0 \quad . \tag{2.51}$$

Usaremos la siguiente notación

$$X_{km} \equiv 2X_{m;k} = X_{m,k} - X_{k,m} \quad , \tag{2.52}$$

Con lo que (2.49) queda así:

$$X^k b_{n;k} = \frac{1}{2} X_{kn} b^k \quad . \tag{2.53}$$

También tenemos que

$$(X_{l;m;n})_{[lmn]} = 0 \quad . \tag{2.54}$$

Por otro lado, si $B_{km} = X_{km}$, (2.50) implica que

$$X^k X_{lm;k} = 0 \quad . \tag{2.55}$$

Hemos obtenido, de paso, las propiedades del proyector de curvatura en cinco dimensiones. Definimos a éste mediante la siguiente relación

$$a_{k;l;m} - a_{k;m;l} = -R^n{}_{klm} a_n \quad . \tag{2.56}$$

Si $a_n = X_n$ y tomamos en cuenta (2.54) obtenemos

$$R^n{}_{klm} X_n = \frac{1}{2} X_{ml;k} \tag{2.57}$$

Y si contraemos: $R^n{}_{knl} = R_{kl}$, entonces

$$R_{kl} X^k = \frac{1}{2} X^k{}_{l;k} \quad . \tag{2.58}$$

Cada ecuación con proyectores (en cinco dimensiones) da lugar a una serie de ecuaciones tensoriales en cuatro dimensiones y al procedimiento dado para obtener éstas a partir de aquéllas Jordan le llama "algebrización": Cada proyector P^{---}_{---} está construido a partir de las g_{kl} y las X^k utilizando un número finito de operaciones incluyendo derivadas en cinco dimensiones. En cuanto a la ecuación $P^{---}_{---} = 0$, ésta dá lugar a través de un número finito de pasos a un conjunto de ecuaciones tensoriales $T^{---}_{---} = 0$, $U^{---}_{---} = 0$, $V^{---}_{---} = 0$, $---$, en donde T^{---}_{---}, U^{---}_{---}, V^{---}_{---}, etc.; se construyen a través de un número finito de operaciones tensoriales, incluyendo a la derivada covariante en cuatro dimensiones, a partir de las $g_{\mu\nu}$, las $X_{\mu\nu}$ y el invariante J.

Vamos a decir que dos proyectores P^{---}_{---} y Q^{---}_{---} son congruentes si ambos tienen la misma reducción, es decir:

$$P^{m_1---m_k}_{n_1---n_l} \sim Q^{m_1---m_k}_{n_1---n_l} \tag{2.59}$$

significa

$$P^{(m_1)---(m_k)}_{(n_1)---(n_l)} = Q^{(m_1)---(m_k)}_{(n_1)---(n_l)} \quad . \tag{2.60}$$

Dada una congruencia podemos ejecutar las siguientes operaciones en ambos lados: suma, multiplicación e intercambio de índices. Sin embargo, la contracción de índices no puede llevarse a cabo en (2.59): Sólo es posible dicha contracción de índices entre paréntesis. Además, tampoco son válidas las derivadas en (2.59) ya que, por ejemplo, $P^{---}_{---} \sim 0$ no implica $P^{---}_{---;s} \sim 0$.

Esto último conduce a definir otra operación, similar a la derivada covariante. A ésta se le llama "derivada congruente" , tiene la siguiente propiedad y la denotaremos por dos barras verticales:

$$P^{k_1---k_m}_{l_1---l_n \| s} = \text{proyector} \quad . \tag{2.61}$$

La derivada congruente es semejante a la derivada covariante y se define, para vectores, por cualesquiera de las siguientes dos ecuaciones equivalentes

$$a_{k"l} = a_{k;l} + \frac{X_{kl}X^m - X^m{}_l X_k}{2J}\, a_m \quad ,$$

$$a^k{}_{"l} = a^k{}_{;l} + \frac{X^k{}_l X_m - X_{ml}X^k}{2J}\, a^m \quad , \tag{2.62}$$

mientras que

$$A^k{}_{k"l} = A^k{}_{k'l} \quad , \tag{2.63}$$

Se obtiene al contraer $A^m{}_{k"l}$, ya que

$$g_{lm"n} = 0 \quad . \tag{2.64}$$

Así, también

$$(Sa_k)_{"l} = S_{"l}a_k + Sa_{k"l} \quad . \tag{2.65}$$

A partir de la congruencia

$$a_{m"l} \sim a_{m;l} + X_{ml}\,\frac{X^n a_n}{2J} \tag{2.66}$$

y en vista de (2.52) se deduce que

$$X_{m"l} \sim 0 \tag{2.67}$$

y si $P^{---}_{---} \sim 0$ entonces $P^{---}_{---}{}_{"l} \sim 0$ también.

En general

$$P^{m_1 --- m_k}_{n_1 --- n_l}{}_{"s} \sim P^{(m_1) --- (m_k)}_{(n_1) --- (n_l)}{}_{;s} \quad , \tag{2.68}$$

en particular

$$a_{m"l} \sim a_{(m)"l} \sim a_{(m);l} \tag{2.69}$$

y

$$S_{,m"l} \sim S_{,m;l} \quad . \tag{2.70}$$

Más aún,

$$\left((X_{mn}/J)_{"l} \right)_{[mnl]} \sim 0 \tag{2.71}$$

por ser congruente a

$$0 = \left(-(X_{kl}/J^2)J_{,m} + X_{km}(X^n X_{nl}/2J^2) + X_{lm}(X^n X_{kn}/2J^2) \right)_{[klm]} \tag{2.72}$$

como se puede comprobar por medio de (2.52) y de (2.54) ya que claramente, de la definición de J:

$$X^n X_{mn} = J_{,m} \tag{2.73}$$

Mediante el procedimiento de algebrización se simplifica el modo de pasar derivadas en cinco dimensiones a derivadas en cuatro dimensiones:

Teorema Principal.

La reducción de una derivada congruente $P^{k_1 --- k_m}_{l_1 --- l_n}{}_{"s}$ es la derivada covariante $P^{\mu_1 --- \mu_m}_{\nu_1 --- \nu_n}{}_{;\sigma}$ de la reducción $P^{\mu_1 --- \mu_m}_{\nu_1 --- \nu_n}$ de $P^{k_1 --- k_m}_{l_1 --- l_n}$.

Demostración.

La reducción de $Q^{k_1 --- k_m}_{l_1 --- l_n\, s} = P^{k_1 --- k_m}_{l_1 --- l_n}{}_{"s}$:

$$Q^{\mu_1 --- \mu_m}_{\nu_1 --- \nu_n\, \sigma} \quad , \tag{2.74}$$

queda determinada por $P^{(k_1) --- (k_m)}_{(l_1) --- (l_n)}$ de acuerdo con (2.68) que a su vez se obtiene reduciendo $P^{k_1 --- k_m}_{l_1 --- l_n}$ por medio de la fórmula (2.41) y entonces, $Q^{\mu_1 --- \mu_m}_{\nu_1 --- \nu_n\, \sigma} = P^{\mu_1 --- \mu_m}_{\nu_1 --- \nu_n}{}_{;\sigma}$. Tenemos también, debido a (2.41), (2.69) y a que $g^{\nu}{}_{k'n} = g^{\nu}{}_{n'k}$, lo siguiente:

$$\begin{aligned} a_{k"n} - a_{n"k} &\sim a_{(k);n} - a_{(n);k} = a_{(k)'n} - a_{(n)'k} = \\ &= g^{\nu}{}_{k} a_{\nu'n} - g^{\mu}{}_{n} a_{\mu'k} = g^{\nu}{}_{k} g^{\mu}{}_{n} (a_{\nu'\mu} - a_{\mu'\nu}) \quad . \end{aligned} \tag{2.75}$$

Por otra parte, de (2.71):

$$(\ (X_{\mu\nu}/J)_{;\lambda}\ )_{[\mu\nu\lambda]} = 0 \quad , \tag{2.76}$$

con

$$X_{\mu\nu}/J = -X_{\nu\mu}/J \quad . \tag{2.77}$$

Definimos

$$a_{(k)''l''m} - a_{(k)''m''l} = -G^{(r)}{}_{klm}a_{(n)} \qquad (2.78)$$

y en vista de (2.70) tenemos que

$$\phi_{''k''l} \sim \phi_{''l''k} \quad , \qquad (2.79)$$

por lo tanto

$$a^{(n)}(a_{(n)''k''l} - a_{(n)''l''k}) = 0 \quad , \qquad (2.80)$$

o sea, (2.78) es lineal en $a_{(s)}$ y $a_{(s)''r}$ no aparece.

La reducción de (2.78) es

$$a_{\mu;\nu;\gamma} - a_{\mu;\gamma;\nu} = -G^{\alpha}{}_{\mu\nu\gamma}a_{\alpha} \quad , \qquad (2.81)$$

donde $G^{\alpha}{}_{\mu\nu\gamma}$ está definida como la reducción de $G^{(n)}{}_{klm}$ y es, además, el tensor de la curvatura en cuatro dimensiones. A partir de (2.69):

$$a_{(k)''l''m} \sim a_{(k);l;m} + \frac{1}{2J}[X_{km}X^{n}a_{(n);l} - X_{lm}X^{n}a_{(k);n}]; \qquad (2.82)$$

de que $\quad X^n a_{(n)} = 0 \quad$ y con la ayuda de (2.53); encontraremos

$$a_{(k)"l"m} \sim a_{(k);l;m} + \tfrac{1}{4}[X_{km}X^n{}_l + X_{lm}X^n{}_k]\, a_{(n)}/J \qquad , \qquad (2.83)$$

por lo tanto

$$G^{(n)}{}_{klm} \sim R^n{}_{klm} - \tfrac{1}{4}[\, X_{km}X^n{}_l - X_{kl}X^n{}_m + 2X_{lm}X^n{}_k\,]\ /J \qquad . \qquad (2.84)$$

Así tenemos que la reducción del proyector de curvatura lo obtenemos aho ra reemplazando en (2.84), los índices latinos por índices griegos.

Vamos a contraer (2.84) para obtener el proyector de Ricci R_{kl} .
La contracción para congruencias, recuerdese, sólo podemos hacerla con - índices entre paréntesis:

$$G^{(n)}{}_{k(n)m} \sim R^{(n)}{}_{k(n)m} - \frac{3}{4}X_{(n)m}X^{(n)}{}_k \qquad . \qquad (2.85)$$

Debido a (2.52), (2.57) y (2.73);

$$R_{nkml}X^nX^m = \tfrac{1}{2}\, J_{,k;l} + \tfrac{1}{4}\, X_{lm}X^m{}_k \qquad (2.86)$$

y también de (2.73),

$$X_{lm}\ X^m{}_k = X_{l(m)}X^{(m)}{}_k + J_{,l}J_{,k}\ /\ J^2 \quad , \qquad (2.87)$$

por lo tanto:

$$R^{(n)}{}_{k(n)l} \doteq R^{n}{}_{knl} - X^{n}X^{m} R_{nkml} \;/\; J$$

$$= R_{kl} - \tfrac{1}{2} J_{,k;l} /J - \tfrac{1}{4} X_{lm}X^{m}{}_{k} /J$$

$$= R_{kl} - \tfrac{1}{2} J_{,k;l} /J - \tfrac{1}{4} X_{l(m)}X^{(m)}{}_{k} /J + \tfrac{1}{4} J_{,l}\, J_{,k} /J^{2} \,. \qquad (2.88)$$

Con lo anterior y en vista de que $J_{,k;l} \sim J_{,k,l}$ finalmente obtenemos

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} X_{\mu\gamma}X_{\nu}{}^{\gamma} /J - \tfrac{1}{2} J_{,\mu;\nu} /J + \tfrac{1}{4} J_{,\mu,\nu} /J^{2} \qquad (2.89)$$

Regresamos a (2.87) y contraemos. El resultado es

$$R_{kl}\, X^{k}X^{l} = \tfrac{1}{2} J^{,k}{}_{;k} - \tfrac{1}{4} X^{kl}X_{kl} \qquad ; \qquad (2.90)$$

con $J^{,k} = J_{,n}g^{nk}$. Además,

$$J^{,k} J_{,k} = J^{,(k)}J_{,(k)} = J^{,\nu} J_{,\nu} \qquad (2.91)$$

y de (2.73):

$$J_{,k;l}\, X^{k}X^{l} = \tfrac{1}{2} J^{,k} J_{,k} \qquad . \qquad (2.92)$$

Así mismo, con la ayuda de (2.44),

$$J^{,k}{}_{;k} = J_{k;l}g^{(k)(l)} + J_{,k;l}\, X^{k}X^{l}/J = J_{,k,l}g^{(k)(l)} + \tfrac{1}{2} J^{,k}J_{,k} =$$

$$J'^{k}{}_{;k} = J'^{\varkappa}{}_{;\varkappa} + \tfrac{1}{2} J'^{\varkappa} J_{,\varkappa} \quad , \tag{2.93}$$

y, de nuevo, con (2.73):

$$\begin{aligned} X_{(n)m} &= X_{nm} + X_n J_{,m}/J \\ X_{(n)(l)} &= X_{nl} + (X_n J_{,l} - X_l J_{,n}) \end{aligned} \tag{2.94}$$

que junto con $a_{(l)}b^{(l}$ $a_{(l)}b^{l}$ ayudan a obtener

$$\begin{aligned} X_{(l)n}X^{(l)}{}_m &= X_{ln}X^{l}{}_m - J_{,n}J_{,m}/J \quad ; \\ X_{(l)(m)}X^{(l)(m)} &= X_{lm}X^{lm} - 2\, J_{,l}J'^{l}/J \end{aligned} \tag{2.95}$$

y con (2.91) y (2.89) conseguir, de (2.87), la relación

$$R_{kl}\, X^k X^l = \tfrac{1}{2} J'^{\nu}{}_{;\nu} - \tfrac{1}{4} J'^{\nu} J_{,\nu}/J - \tfrac{1}{4} X_{\mu\nu}X^{\mu\nu}/J. \tag{2.96}$$

Vamos a reducir (2.58) y para ello, por (2.55) y (2.25), tenemos que

$$R_{kl}X^l = \tfrac{1}{2} X_{mk;l}\, g^{ml} = \tfrac{1}{2} X_{mk;l}\, g^{(m)(l)} \; . \tag{2.97}$$

Después, con auxilio de (2.66) y (2.73)

$$R_{kl}X^l \sim \tfrac{1}{2} \left[\tfrac{1}{2}X_{mk''l} - \tfrac{1}{2}X_{kl}J_{,m}/J \right] g^{(m)(l)} \tag{2.98}$$

y entonces

$$R_{\nu k}X^k = \tfrac{1}{2} X^{\alpha}{}_{\nu;\alpha} + \tfrac{1}{4} X^{\alpha}{}_{\nu} J_{,\alpha}/J \quad . \tag{2.99}$$

por último, el escalar $R = R_{kl}g^{kl}$ expresado en términos de tensores de cuatro dimensiones, con ayuda de (2.25) y de (2.96), es

$$
\begin{aligned}
R &= R_{kl}g^{(k)(l)} + R_{kl}\, X^k X^l/J = \\
&= R_{\mu\nu}g^{\mu\nu} + \tfrac{1}{2}\, J^{,\nu}{}_{;\nu}/J - \tfrac{1}{4}\, J^{,\nu}J_{,\nu} + \\
&\quad - \tfrac{1}{4}\, X_{\mu\nu}X^{\mu\nu}/J \qquad ; \quad (2.100)
\end{aligned}
$$

y, por lo tanto, de (2.89):

$$
R = G + \tfrac{1}{4}\, X^{\mu\nu}X_{\mu\nu}/J + J^{,\nu}{}_{;\nu}/J + \tfrac{1}{2}\, J^{,\nu}J_{,\nu}/J^2 \quad . \qquad (2.101)
$$

CAPITULO III.

UNA INTERPRETACION FISICA DE LA TEORIA.

Para obtener las ecuaciones de Einstein-Maxwell que contienena las catorce variables $g_{\mu\nu}$ y A_{λ} a partir de las quince , se impone la condición

$$J = g_{kl}\, X^k X^l = 1 \tag{3.1}$$

para reducir en uno el número de variables independientes. Esta condición implica la modificación de varias de las ecuaciones anteriormente expuestas, a saber:

$$(X_{kl;m})_{[klm]} = 0 \quad , \tag{3.2}$$

$$X^m X_{km} = 0 \quad , \tag{3.3}$$

$$(X_{\mu\nu;\lambda})_{[\mu\nu\lambda]} = 0 \tag{3.4}$$

y $X_{\mu\nu}$ representa una rotación. También,

$$R_{\mu\nu} = G_{\mu\nu} + \tfrac{1}{2} X_{\mu\lambda} X_{\nu}{}^{\lambda} \quad , \tag{3.5}$$

$$R_{\sigma k} X^k = \tfrac{1}{2} X^{k}{}_{\sigma k} \tag{3.6}$$

$$R_{km}\, X^k X^m = -\tfrac{1}{4} X_{\mu\nu} X^{\mu\nu} \tag{3.7}$$

$$R = G + \tfrac{1}{2} X_{\mu\nu} X^{\mu\nu} \qquad (3.8)$$

Se supone, ahora, que $X_{\mu\nu}$ es proporcional al tensor electromagnético $F_{\mu\nu}$:

$$X_{\mu\nu} = \frac{(2K)^{1/2}}{c} F_{\mu\nu} \quad . \qquad (3.9)$$

Por otro lado, las ecuaciones de campo provienen de una variación que contiene explícitamente la condición $J = 1$:

$$0 = \delta \int [R - \lambda(J - 1)] (-\overset{5}{g})^{1/2} dx^0 \cdots dx^4 \quad . \qquad (3.10)$$

λ es un multiplicador de Lagrange y $\overset{5}{g} = \mathrm{Det}[g_{kl}]$.

La signatura de la métrica $g_{\mu\nu}$ en cuatro dimensiones es $- + + +$. Ahora,

$$\delta \overset{5}{g} = \overset{5}{g}\, g^{kl} \delta g_{kl} \quad \text{y} \quad \delta[(J - 1)(-\overset{5}{g})^{1/2}] = (-\overset{5}{g})^{1/2} X^k X^l \delta g_{kl} \qquad (3.11)$$

implican que

$$R^{kl} - \tfrac{1}{2} g^{kl} R + \lambda X^k X^l = 0 \quad . \qquad (3.12)$$

Al pasar a cuatro dimensiones λ queda eliminada de modo que en este caso tenemos:

$$-\tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} R + R_{\mu\nu} = 0 \quad ; \qquad R_{1\lambda} X^{1} = 0 \quad ; \qquad (3.13)$$

estas dos ecuaciones corresponden a las ecuaciones de movimiento en cinco dimensiones proyectadas a cuatro. Usando las relaciones (3.5) a (3.8) que conectan objetos geométricos en cinco y en cuatro dimensiones, transformamos las ecuaciones (3.13) en

$$G_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2}\, g_{\mu\nu} G + \tfrac{1}{2}\left(X_{\mu\lambda} X_{\nu}{}^{\lambda} - \tfrac{1}{4}\, g_{\mu\nu} X_{\alpha\beta} X^{\alpha\beta} \right) = 0$$

Y $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (3.14)

$$X^{\mu\nu}{}_{;\mu} = 0$$

las cuales representan, una vez que se acepta a (3.9) y se pone $G = 0$, a las ecuaciones de Einstein-Maxwell.

Vemos así que las ecuaciones de Einstein-Maxwell que en cuatro dimensiones carecen de cierta simetría, provienen de una teoría que en cinco dimensiones si es simétrica ($J=1$). En resumen, cambiamos una asimetría por una constricción. Si por razones estéticas eliminamos esta constricción y aceptamos las consecuencias tenemos que una de éstas es que la constante de gravitación κ se convierte en un campo escalar. Claro, las razones estéticas no son suficientes. Por el momento, basta con decir que, por ejemplo Dirac-1937, de consideraciones distintas propone también la variabilidad de κ. Se puede decir, por lo tanto, que el trabajo de Jordan formaliza y puede justificar la propuesta de Dirac.

Aparte de estas consideraciones, debemos ante todo obtener las ecuaciones de campo fundamentales a partir de un principio variacional, por ejemplo de

$$\delta \int R \, (\overset{5}{-g}) \; dX^{0} --- dX^{4} = 0 \quad , \qquad (3.15)$$

se obtienen las quince ecuaciones de campo dadas por

$$R_{kl} = 0 \quad , \qquad (3.16)$$

las cuales, en cuatro dimensiones, se transforman en una ecuación tensorial, una ecuación vectorial y en una ecuación escalar:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad ; \quad R_{\mu k}X^{k} = 0 \quad ; \quad R_{kl}X^{k}X^{l} = 0 \; . \qquad (3.17)$$

Sin embargo, este principio variacional, debido a que ahora contamos con nuevas invariantes J y $J_{i}^{k}J_{,k} = J_{i}^{\nu}J_{,\nu}$, no es único. Volveremos a este punto más adelante.

A continuación exponemos la forma de relacionar la teoría proyectiva de Jordan con la de Kaluza-Klein.

i).- La relación entre las teorías proyectivas de Jordan y la de Kaluza-Klein.

Sean $x^1 - - - x^5$ las coordenadas en Kaluza-Klein, entonces

$$x^{\nu} = X^{\nu}/X^{0} \quad , \quad \nu = 1,---,4 \qquad (3.18)$$

o

$$X^{\nu} = x^{\nu}\, e^{x^5} \quad , \quad \nu = 1,---,4$$
$$X^{o} = e^{x^5} \quad . \tag{3.19}$$

Las x^{ν} con $\nu < 5$ son las coordenadas en cuatro dimensiones a las que simplemente se les agrega la x^5 .

Al hacer, en cuatro dimensiones, una transformación de coordenadas además de una transformación de norma obtenemos lo siguiente:

$$x'^5 = x^5 + A(x^1,---,x^4) \tag{3.20}$$

mientras que de (3.19) obtenemos

$$X^k = f^k(x^1,---,x^4)\, e^{x^5} \quad . \tag{3.21}$$

Las f^k son funciones arbitrarias.

Por otro lado, las condiciones de homogeneidad sobre las componentes tensoriales, funciones de las X^k , se expresan en Kaluza-Klein (x^1 , - - -, x^5) diciendo que sólo se permiten tensores que no dependen de x^5 :

$$T^{l_1---l_m}_{n_1---n_k}{}_{,5} = 0 \quad . \tag{3.22}$$

Por ejemplo, para el vector a^k o el b_1 , partiendo de (3.18) tenemos que

$$x^{\nu}{}_{,k} = g^{\nu}{}_{k} = \delta^{\nu}{}_{k} / X^{o} \quad , \quad k > 0$$

y

$$x^{\nu}{}_{,0} = g^{\nu}{}_{0} = -X^{\nu}/(X^{0})^{2} \quad . \qquad (3.23)$$

Debemos aclarar que las X^{ν} no representan aquí a las reducciones de los proyectores X^{k}, las cuales son nulas. Entonces, las componentes del vector a^{*l} en K-K en términos de las componentes a^{l} de la teoría de Jordan están dadas por

$$a^{*l} = a^{m}\frac{\partial x^{l}}{\partial X^{m}} \quad ; \quad \begin{matrix} l = 1,\text{—},5 \\ m = 0,\text{—},4 \end{matrix} \qquad (3.24)$$

o

$$\begin{aligned} a^{*l} &= a^{l}(X^{0})^{-1} - a^{0}X^{l}(X^{0})^{-2} \quad , \quad l = 1,\text{—},4 \\ a^{*5} &= a^{0}(X^{0})^{-1} \quad . \end{aligned} \qquad (3.25)$$

Las cinco componentes a^{*l} son funciones homogéneas de grado cero de las X^{m} e independientes de x^{5}.

Para obtener el tensor métrico g_{kl} en coordenadas de K-K partimos de (3.19):

$$\begin{aligned} X_{k}\, dX^{k} &= X_{k}\, e^{x^{5}} dx^{\nu} + X_{k}x^{\nu} e^{x^{5}} dx^{5} + X_{k}\, e^{x^{5}} dx^{5} \\ &= X_{k}\, e^{x^{5}} dx^{\nu} + X_{k}X^{k}\, dx^{5} \\ &= X_{k}X^{k}\, dx^{5} + X_{k}X^{0}\, dx^{\nu} = \end{aligned}$$

$$= \quad J\,dx^5 \quad + \quad X^0 X_\nu\, dx^\nu \quad ; \qquad (3.26)$$

Recordemos que aquí, las X_ν son las componentes de las X_k con $k = 0$.

El elemento de línea dS^2, en cinco dimensiones, expresado en coordenadas de K-K es

$$dS^2 = g_{kl}\, dx^k dx^l = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu + (X_k dx^k)^2 / J$$

$$= g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu + (J\, dx^5 + X^0 X_\nu\, dx^\nu)^2 / J. \qquad (3.27)$$

Vamos ahora a mostrar que la ecuación (3.18) implica que

$$X_{\mu\nu} / J = (X^0 X_{,\nu} / J)_{,\mu} - (X^0 X_{,\mu} / J)_{,\nu} \quad . \qquad (3.28)$$

Para esto necesitamos, primero, las componentes que satisfacen las siguientes veinticinco ecuaciones, o sea las $g^k{}_\nu$:

$$g^\lambda{}_m\, g^n{}_\lambda = g^n{}_m - \frac{X_m X^n}{J} = \delta^n{}_m - \frac{X_m X^n}{J} \quad .$$

De hecho, sólo necesitamos las veinte componentes para - las cuales $m = \nu > 0$:

$$g^{\nu}{}_{m}\, g^{n}{}_{\nu} = g^{n}{}_{\lambda} / X^{o} \quad , \; m = \lambda \; ; \qquad (3.29)$$

de acuerdo con (3.23) y por lo tanto

$$g^{n}{}_{\lambda} = X^{o} \left(\delta_{\lambda}^{n} - X_{\lambda} X^{n} / J \right). \qquad (3.30)$$

La reducción $X_{\kappa\lambda}$ del proyector X_{kl} es

$$\begin{aligned} X_{\kappa\lambda} &= \left(X_{l'k} - X_{k'l} \right) g^{k}{}_{\kappa}\, g^{l}{}_{\lambda} \\ &= X^{o^2} (\delta_{\kappa}^{k} - X_{\kappa} X^{k}/J)(\delta_{\lambda}^{l} - X_{\lambda} X^{l}/J) * \qquad (3.31) \\ &\qquad (X_{l,k} - X_{k'l}) \; . \end{aligned}$$

Debido a la homogeneidad de las X_m tenemos que

$$X_{l'k} \left(\delta_{\nu}^{k} - X_{\nu} X^{k}/J \right) = \frac{\partial X_l}{\partial X^{\nu}} - \frac{X_{\nu} X_l}{J} \qquad (3.32)$$

o sea,

$$\frac{X_{\mu\nu}}{J} = \frac{X^{o^2}}{J} \left[\left(\frac{\partial X_l}{\partial X^{\mu}} - \frac{X_{\mu} X_l}{J} \right) \left(\delta_{\nu}{}^{l} - \frac{X_{\nu} X^{l}}{J} \right) - \left(\frac{\partial X_k}{\partial X^{\nu}} - \frac{X_k X_{\nu}}{J} \right) * \right.$$

$$\left. \left(\delta_{\mu}^{k} - \frac{X_{\mu} X^{k}}{J} \right) \right] = \frac{(X^{o^2})}{J} \left[X_l \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \left(\frac{X_{\nu} X^{l}}{J} \right) - X_k \frac{\partial}{\partial X^{\nu}} \left(\frac{X_{\mu} X^{k}}{J} \right) \right]$$

$$= X^{o} \left[\frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \left(\frac{X^{o} X_{\nu}}{J} \right) - \frac{\partial}{\partial X^{\nu}} \left(\frac{X^{o} X_{\mu}}{J} \right) \right] = \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \left(\frac{X^{o} X_{\nu}}{J} \right) - \frac{\partial}{\partial X^{\nu}} \left(\frac{X^{o} X_{\mu}}{J} \right)$$

$$(3.33)$$

Nótese que las derivadas en (3.28) son con respecto a las coordenadas x de K-K.

A continuación, con la siguiente notación

$$X^o X_\nu / J = A_\nu \quad , \qquad (3.34)$$

escribimos el tensor métrico g'_{kl} de la teoría de K-K:

$$(g'_{kl}) = \left(\begin{array}{c|c} g_{\mu\nu} + J A_\mu A_\nu & J A_\mu \\ \hline J A_\nu & J \end{array}\right), \qquad (3.35)$$

Mientras que la matriz inversa es

$$(g'^{kl}) = \left(\begin{array}{c|c} g^{\mu\nu} & -A^\mu \\ \hline -A^\nu & A_\nu A^\nu + J^{-1} \end{array}\right). \qquad (3.36)$$

Para especializar a la Teoría de Einstein en la cual K = Cte. y que en la teoría proyectiva de Jordan implica hacer J = Cte.; en la teoría de K-K se expresa con la condición

$$g_{55} = \text{Cte.} \qquad (3.37)$$

Capítulo IV.

LAS TEORIAS ESCALARES-TENSORIALES EN CUATRO DIMENSIONES Y EL PRINCIPIO DE INVARIANZA CONFORME

En este capítulo proponemos otra manera, distinta a la que originalmente expusieron sus autores, de motivar el estudio de las Teorías escalares-tensoriales y particularmente la de Brans-Dicke. Las razones para ello son varias, pero la principal es el deseo de poner de relieve un principio que hasta ahora no parece tenerlo: el de invarianza conforme, sobre todo en el contexto de la cosmología por su posible consecuencia a nivel local. Establecemos su relevancia a través de una versión del principio de Mach, el que por carecer de expresión matemática parece inspirar distintas interpretaciones. Parece que la idea original de Mach (1883) es la de que las fuerzas inerciales son generadas, en su totalidad, por la aceleración relativa entre la materia. Algo más elaborada resulta la idea de que sólo tiene sentido el concepto de masa de un cuerpo cuando está éste en presencia de otros cuerpos. Antes de seguir por este camino, conviene mencionar otro principio relacionado, pero diferente, del de Mach: el principio de equivalencia, que también tiene ahora distintos grados pero que en su forma primitiva simplemente establece la equivalencia entre las fuerzas gravitatorias y las fuerzas inerciales. Son estos dos principios sobre los que descansan, si no sus cuerpos al menos sus espíritus, las teorías de gra vitación relativistas. La pertinencia de este último comentario resulta, dado que ni la teoría de la relatividad general de Einstein ni la de Brans-Dicke (que, irónicamente, fue propuesta en sustitución de la de Einstein por considerar que ésta no es explícita y totalmente Machiana) son, en el sentido tradicional, Machianas.

No estando preparados para hacer una discusión más amplia y profunda del principio de Mach simplemente proponemos, sin pretender que nuestro punto de vista resuelve o por lo menos aclara el problema, la versión de que en apariencia el principio de Mach implica que la masa no es una propiedad intrínseca (atómica) de las partículas sino el resultado de su interacción con el resto del Universo. Esto quiere decir que la "masa" viene a ser acaso la única manifestación local tanto en la física clásica como en la microfísica del Universo: manifestación de la presencia cosmológica a nivel local.

Los extremos en cierta forma se acercan, pues si por un lado en la microfísica toda observación, por pequeña que sea, altera al sistema observado y éste, a su vez, al observador (colapso de la onda); por el otro, a nivel cosmológico cualquier observación por vasta que sea, se piensa, no altera el Universo ¿es ésto último posible, acaso una parte del Universo y su resto forman sistemas aislados entre sí? No lo creemos. Queda entonces decir como se manifiesta esa interacción.

Del lado Microfísica→Cosmos ¿la gravitación cuántica, por ejemplo? Del otro, Cosmos→Microfísica ¿Principio de Mach tradicional o mejor, masas variables en el sentido conforme? Parte del conflicto con el Principio de

Mach surge al obtenerse soluciones de vacío en la forma de métrica espacialmente plana , o sea que, parece admitirse el concepto de espacio absoluto. Específicamente, en la teoría de Einstein la geometría no queda únicamente determinada por la distribución de la materia aun que es posible que existan condiciones a la frontera, - hasta ahora desconocidas, que sólo permitan soluciones machianas. Como este problema también lo tienen las teorías escalares-tensoriales podemos decir que ninguna de ellas es totalmente "machiana". Si bien la idea original de Mach se enfoca sobre el concepto de las fuerzas inerciales observadas localmente en un laboratorio acelerado, que pueden interpretarse como efectos gravitacionales originados por la materia lejana y acelerada respecto al laboratorio, Narlikar pone el acento sobre las masas al argumentar que la condición necesaria para tener movimiento relativo, es que el movimiento de un cuerpo en un espacio vacío quede indeterminado; lo cual sucederá si su masa inercial es nula puesto que aceleraciones arbitrarias son consistentes con una fuerza nula ($F=ma$).

Generalmente, en relatividad general se considera que la masa inercial es una propiedad atómica independiente e invariable. Sin embargo, el estudio de la invarianza conforme ha llevado a distintos autores, con distintos enfoques, a la conclusión de que bajo una transformación conforme las unidades de tiempo, distancia y el inverso de la masa deben cambiar localmente del mismo modo. Las transformaciones conformes (TC) representan cambios de unidades locales, es decir, dependientes del espacio-tiempo. A la propiedad de invarianza bajo estas transformaciones se le llama invarianza conforme (IC). Las TC fueron con sideradas inicialmente por Weyl (1952) y posteriormente discutidas por Dicke (1962); Hoyle y Narlikar (1974) y por Hoyle (1975) entre otros.

El que nos ocupemos de las TC en este trabajo, es para contrastar desde otro punto de vista a la teoría de Einstein con la de Brans-Dicke en una forma un tanto distinta a la usual, así como mencionar que bajo este criterio es posible desechar algunas otras teorías, como la de Canuto et al, 1977, 1980.

Rápidamente, podemos decir que la diferencia entre RG y BD consiste en que para la primera todas las "constantes" universales y en particular, G, la constante de gravitación, son constantes auténticamente (principio de equivalencia superfuerte) mientras que para la segunda G es variable y sólo es válido el principio de equivalencia débil (todos los cuerpos, independiente de su composición caen con la misma aceleración, véase Reins, 1981).

Bekenstein Y Meisels (1980), mostraron que desde un punto de vista teórico la variabilidad o no de G depende de si la teoría de gravitación no es o si es IC de tal forma que no es posible tener una teoría de gravitación IC con G variable por lo cual teorías como la de Dirac (1938) y la de Canuto et al (1977, 1980) no son aceptables. Ante todo es necesario enfatizar que, independientemente de una teoría de gravitación particular, la variabilidad de la masa inercial en el sentido conforme queda establecido incluso a nivel de relatividad especial debido a que aquí una transformación conforme puede interpretarse como un cambio de un sistema de referencia acelerado a otro sistema de referencia con distinta aceleración aunque tam-- bién constante. Por el principio de equivalencia, las aceleraciones constantes equivalen a campos gravitato- - rios (aparentes) uniformes y consecuentemente, puesto - que masa y energía son similares, el cambio de un sistema de referencia acelerado a otro implica, vista la masa como energía potencial de las partículas, según Fulton, Rohrlich y Witten, 1962:

$$mc^2 \longrightarrow mc^2\left(1+\frac{gh}{c^2}\right) .$$

Al admitir la variabilidad de la masa ésta se convierte en un campo más en el espacio-tiempo y que según - - Bekenstein y Meisels (BM) es el mismo para todas las - partículas: $m_i = b_i \varphi$ con b_i = constante adimensional. Las dimensiones de φ son de longitud inversa. Para obtener las ecuaciones de campo de éste, las cuales deben formularse en espacio curvo debido a que una TC general vuelve al espacio-tiempo no plano, es tradición que éstas, se obtengan a partir de un principio variacional y BM, con postulados apropiados, construyen una acción IC para dicho campo:

$$S_\varphi \sim \int \left(\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha} + \frac{1}{6}R\varphi^2 + \ell\varphi^4 \right)\sqrt{-g}\, d^4x . \qquad (4.1)$$

S_φ se puede reinterpretar como la acción para gravitación ya que en unidades de Partículas en las que por de finición las masas de las partículas son constantes y en donde las unidades de longitud y de masa son $\hbar/m_p c$ y m_p , respectivamente, con m_p la masa del protón: la acción S_φ se reduce a la de relatividad general de Einstein:

$$S_\varphi \sim \int \sqrt{-g}\,(R + \Lambda)\, d^4x \qquad (4.2)$$

en donde Λ es la constante cosmológica.

Relacionado con lo anterior, debemos mencionar que la IC es también una característica de toda la microfísica: la electrodinámica, el campo de Dirac, el campo escalar, etc. (veáse BM, 1980). En cambio, si tanto la gravitación como el "campo de masa" rompen explicítamente la IC, $\gamma = Gm^2/c\hbar$ -que es la constante de acoplamiento de la gravitación adimensional y por lo tanto independiente de las unidades- es variable, de tal modo que en unidades de partículas donde las masas son por definición constantes G varía. Mientras que en unidades de Planck-Wheeler-en donde la unidad de longitud es $(\hbar G/c^3)^{1/2}$ y la de masa es $(c\hbar/G)^{1/2}$- la G es por definición constante y las masas variables y es en estas unidades en donde BM construyen, en analogía con (4.1), una acción explicítamente no IC:

$$S_\varphi \sim \int \left[\varphi^{x}_{,\alpha}\varphi^{x,\alpha} + q R \varphi^{x2}\right](-g)^{1/2} d^4x. \qquad (4.3)$$

$\varphi^x \equiv L^{s/2} \varphi^{\frac{s+2}{2}}$, con $L \equiv (\hbar G/c^3)^{1/2}$, s y q son constantes arbitrarias que controlan, se puede decir, el grado de la no IC de (4.3): nótese que si $s=0$ y $q=1/6$ obtenemos (4.1) (con $\ell = 0$). Para ver esta acción como la acción de gravitación, hacemos una TC con $\lambda = L\varphi$ para pasar a unidades de Partículas (m = Cte.): A partir de (4.3), con $g^{\alpha\beta} = \lambda^2 \bar{g}^{\alpha\beta}$, $\varphi = \lambda\bar{\varphi}$ y $L = \lambda^{1}\bar{L}$ encontramos que

$$(-g)^{1/2} = \lambda^{-4}(-g)^{1/2} \;;\; \bar{R} = \lambda^{-2}R - 6\lambda^3(-g)^{1/2}[(-g)^{1/2}g^{\alpha\beta}\lambda_{,\alpha}]_{,\beta} \tag{4.4}$$

Sustituyendo,

$$S_\varphi \sim \int \{[\bar{g}^{\alpha\beta}\lambda^2\varphi^x_{,\alpha}\varphi^x_{,\beta} + q\bar{R}\lambda^2\varphi^{x2} + 6q\lambda^{-1}(-g)^{-1/2}[(-g)^{1/2}g^{\alpha\beta}\lambda_{,\alpha}]_{,\beta}\}(-g)^{1/2}$$

$$= \int \{q\bar{R}\lambda^2\varphi^{x2} + \bar{g}^{\alpha\beta}\lambda^2\varphi^x_{,\alpha}\varphi^x_{,\beta} + 6q\lambda^3(-\bar{g})^{-1/2}[(-\bar{g})^{1/2}\lambda^{-2}\bar{g}^{\alpha\beta}\lambda_{,\alpha}]_{,\beta}\cdot \varphi^{x2}\}\lambda^{-4}(-\bar{g})^{1/2}d^4x$$

$$= \int \lambda^{-2}(-\bar{g})^{1/2}d^4x\,\{q\bar{R}\varphi^{x2} + \bar{g}^{\alpha\beta}\varphi^x_{,\alpha}\varphi^x_{,\beta} + 6q\varphi^{x2}\lambda[(-\bar{g})^{1/2}\bar{g}^{\alpha\beta}\lambda^{-2}\lambda_{,\alpha}]_{,\beta}(-\bar{g})^{-1/2}\}$$

$$\lambda = L\varphi = L(L^{-s/2}\varphi^x)^{2(s+2)^{-1}} = (L\varphi^x)^{2(s+2)^{-1}} \equiv f^{r/2} \;;\; \varphi^{x2} = fL^{-2}$$

$$= \int (-\bar{g})^{1/2}d^4x\{q\bar{R}L^{-2}f^{1-r} + 6qL^{-2}f^{1-(r/2)}(-\bar{g})^{-1/2}[(-\bar{g})^{1/2}\bar{g}^{\alpha\beta}f^{-r}\times f^{r/2}{}_{,\alpha}]_{,\beta} + \tfrac{1}{4}L^{-2}\bar{g}^{\alpha\beta}f^{-1-r}f_{,\alpha}f_{,\beta}\}$$

$$= \int L^{-2}(-\bar{g})^{1/2}d^4x\,\{q\bar{R}f^{1-r} + \tfrac{1}{4}[1+6qr(r-2)]\bar{g}^{\alpha\beta}f^{-1-r}f_{,\alpha}f_{,\beta}\} \tag{4.5}$$

ya que

$$[(-\bar{g})^{1/2}\bar{g}^{\alpha\beta}f^{-r}f^{r/2}{}_{,\alpha}]_{,\beta} = \frac{r}{2}[(-\bar{g})^{1/2}\bar{g}^{\alpha\beta}f^{-r}f_{,\alpha}]_{,\beta}f^{(r/2)-1}$$
$$\frac{r(r-2)}{4}(-\bar{g})^{1/2}\bar{g}^{\alpha\beta}f^{-2-r/2}f_{,\alpha}f_{,\beta}\,.$$

Llamando a $q\beta^{1-r} \equiv \phi$ y a $-\frac{[1+6qr(r-2)]}{4q(1-r)^2} \equiv \omega$ (4.5) que da como

$$\sim \int \left\{ \phi R - \omega \frac{\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}}{\phi} \right\} (-g)^{1/2} d^4x \; . \qquad (4.6)$$

Esta es la acción de JBD tradicional, es decir, con masas constantes y G variable. Hacemos notar que, vista como una teoría de gravitación que no es IC ésta es tal que el valor de la constante de acoplamiento ω no es en sí significativo puesto que está formada por los dos índices fundamentales q y s que controlan la IC: Para $q=1/6$ y $s=0\,(r=1)$ obtenemos (4.1) con $l=0$ y en cambio si $q=1/24$ y $s=0.2\,(r=0.9)$, $\omega=546$. Con respecto a otros trabajos que tienen que ver con cambios de unidades o con IC en relación a teorías escalares-tensoriales en particular, a relatividad general de Einstein y a otras teorías físicas en general, debemos mencionar los de H. Bateman, 1910; E. Cunningham, 1910; B. Hoffmann, 1953; H. Nariai y Y. Ueno, 1960; J.L. Anderson, 1971; R.E. Morganstern, 1970; J.L. Anderson, 1971; y J. O'Hanlon y B.O.J. Tupper, 1973; principalmente. Queda como resumen de este capítulo la idea de que si aceptamos el concepto de masa, no como propiedad aislada de los objetos si no, como la manifestación de la interacción cosmológica a nivel local cabe admitir la posibilidad de la variación de la masa y de aceptar o rechazar a alguna de varias teorías de gravitación como viables para la explicación del funcionamiento y constitución de nuestro Universo (Cosmología), en base a sus propiedades de invarianza conforme. Esto mismo eleva a dicho principio en importancia y, quizá eventualmente podría llegar a ser tan fructífero como el principio de la invarianza de norma lo es para la física actualmente.

CAPITULO V.

SOLUCIONES COSMOLOGICAS EN LA TEORIA DE JORDAN-BRANS-DICKE.

La acción original de Brans-Dicke, con G variable y masas constantes, a partir de la cual obtuvieron las ecuaciones de campo de su teoría es

$$\delta \int \left[\phi R - \omega \left(\phi_{|\alpha} \phi^{|\alpha} / \phi \right) + \frac{16\pi}{c^4} L \right] (-g)^{1/2} d^4 x = 0. \quad (5.1)$$

Nótese que en esta acción ya se incluye el término $\frac{16\pi}{c^4} L$ que corresponde a la densidad lagrangiana de la materia la cual es idéntica a la utilizada en la acción de -- Einstein.

Resulta interesante comparar (5.1) con la acción - de la teoría de Jordan:

$$\delta \int \left[R + \zeta \chi^{-2} \chi_{|\alpha} \chi^{|\alpha} + \frac{16\pi}{c^4} \chi L \right] \chi^{n} (-g)^{1/2} d^4 x = 0. \quad (5.2)$$

Vemos que si $n = -1$, llamamos $\phi \equiv \chi^{-1}$ y $\omega \equiv -\zeta$, la acción resultante es la de BD. En particular si

$L = 0$ (vacío), un renombramiento de las variables, semejante al anterior, hace a estas dos teorías idénticas. Sin embargo, con $L \neq 0$ y para $n \neq -1$, ni el principio de conservación ni la naturaleza geodésica de las trayectorias en la teoría de Jordan son válidas (Brill, 1962).

La variación de (5.1) con respecto a las componentes del tensor métrico da los siguientes términos:

a) $$\frac{\delta}{\delta g_{\alpha\beta}}\left[-\omega\phi^{,\alpha}\phi^{,\beta}g_{\alpha\beta}\phi^{-1}(-g)^{1/2}\right] = -\frac{\omega}{\phi}\left[\phi^{,\alpha}\phi^{,\beta}(-g)^{1/2} - \frac{1}{2}\phi^{,\nu}\phi_{,\nu}g^{\alpha\beta}(-g)^{1/2}\right]$$

b) $$\delta\left[\phi R(-g)^{1/2}\right] = (-g)^{1/2}\phi\left(R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}R\right)\delta g_{\alpha\beta} + (-g)^{1/2}\phi g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta}$$

con

$$(-g)^{1/2}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}\left[(-g)^{1/2}\left(g^{\alpha\beta}\delta\Gamma^{\gamma}{}_{\alpha\beta} - g^{\alpha\gamma}\delta\Gamma^{\tau}{}_{\alpha\tau}\right)\right]$$

y como

$$\delta\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\lambda\rho}\left[(\delta g_{\rho\mu})_{;\nu} + (\delta g_{\rho\nu})_{;\mu} - (\delta g_{\mu\nu})_{;\rho}\right]$$

se obtiene que

$$\phi(-g)^{1/2}g^{\alpha\beta}\delta R_{\alpha\beta} \simeq \delta g^{\alpha\beta}\left[g_{\alpha\beta}\Box\phi - \phi_{,\alpha;\beta}\right](-g)^{1/2}$$

en donde $\simeq$ significa que despreciamos todas las divergencias. En esta forma se encuentra que

$$\delta\left[\phi(-g)^{1/2}R\right] = (-g)^{1/2}\left[g_{\alpha\beta}\Box\phi - \phi_{,\alpha;\beta} + \phi\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R\right)\right]\delta g^{\alpha\beta}$$

Tenemos también que

$$2\frac{\delta\left[L(-g)^{1/2}\right]}{\delta g_{\alpha\beta}} = -(-g)^{1/2}T^{\alpha\beta} \qquad (5.3)$$

y por lo tanto

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{c^4\phi} T_{\mu\nu} + \frac{\omega}{\phi^2}\left(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu} + \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}\right) + \frac{1}{\phi}\left(\phi_{,\mu;\nu} - g_{\mu\nu}\Box\phi\right), \quad (5.4)$$

donde

$$\Box\phi \equiv \phi^{,\nu}{}_{;\nu} = (-g)^{1/2}\left[(-g)^{1/2}\phi^{,\nu}\right]_{;\nu} \quad (5.5)$$

es el d'Alembertiano covariante o divergencia covariante de $\phi^{,\nu}$.

La variación del lagrangiano con respecto a ϕ da

$$\left[R + \frac{\omega}{\phi^2}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha}\right](-g)^{1/2} = -2\omega\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[(-g)^{1/2}\frac{\phi^{,\alpha}}{\phi}\right]$$

o sea

$$\frac{2\omega}{\phi}\Box\phi - \frac{\omega}{\phi^2}\phi^{,\alpha}\phi_{,\alpha} + R = 0 \quad (5.6)$$

Puesto que L no depende de ϕ resulta que $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$. Por otro lado, contrayendo (5.4) encontramos que ($c = 1$)

$$-R = \frac{8\pi}{\phi} T - \frac{\omega}{\phi^2}\phi_{,\alpha}\phi^{,\alpha} - \frac{3}{\phi}\Box\phi \quad (5.7)$$

la cual, al ser sustituida en (5.6) da lugar a

$$\Box\phi = \frac{8\pi}{3+2\omega} T \quad , \quad (5.8)$$

donde T es el tensor de energía-momento contraído.

El propósito en este capítulo es mostrar, primero, un método para estudiar y obtener soluciones cosmológicas de la teoría escalar-tensorial de JBD y segundo, dar un panorama general de las soluciones cosmológicas de esta teoría obtenidas por otros autores.

Este es también un buen lugar para hacer notar que debido a una mayor dificultad aparente en resolver las ecuaciones (5.4) y (5.8) en comparación con las correspondientes ecuaciones de relatividad general de Einstein (RGE) es que se ha difundido la idea de que la teoría de JBD es por lo menos inferior (si no es que incorrecta) a la de RGE. Claro que la manera de decir lo anterior es, como debe ser en última instancia, dando argumentos basados en experimentos que invaliden a JBD ($|\omega| \gg 1$, por ejemplo). Sin embargo, en el caso de éstos siempre es posible hacer a la de JBD experimentalmente indistinguible de la RGE y por lo tanto ¿para qué ocuparse de la teoría difícil? En este contexto la anterioridad de RGE, además, la hace más conocida, mejor estudiada y familiar que la de JBD. Por otro lado, paradójicamente, las similitudes y hasta ciertas diferencias pueden utilizarse, en ciertos casos al menos, como auxiliares o aclaradores de aspectos en una teoría que pudieran ser más fáciles de tratar en otra teoría. Por ejemplo, en forma concreta tenemos el caso del problema de la "isotropización" del Universo sobre el cual hemos comenzado a trabajar y que parece ser más claro de plantearse y quizás de resolver en JBD que en RGE y que ayuda, si uno así lo desea, a entender el problema correspondiente en RGE.

Como sabemos, obtener soluciones cosmológicas significa que dada una métrica hay que obtener la forma funcional del factor de escala (R) y en el caso de las teorías escalares-tensoriales también la función escalar (ϕ) puesto que son éstas las dos funciones que caracterizan al Universo a gran escala, además de un tensor de energía-momento y una ecuación de estado apropiada.

Como veremos a continuación, en las teorías escalar-tensoriales la obtención de soluciones se facilita bastante si se hace un re-escalamiento de las funciones que aparecen en las ecuaciones a resolver.

Si comenzamos a partir de las suposiciones usuales, es decir, del Principio Cosmológico:

El Universo es homogéneo e isotrópico, lo cual se entiende en el sentido de que a escalas suficientemente grandes no hay en el Universo posición o dirección preferida alguna. El elemento de línea sólo puede ser el de Robertson-Walker (RW) (veánse Wienberg, 1971, Raychandhuri, 1979). Es necesario, además, suponer que ϕ es función del tiempo únicamente, pues por ejemplo McIntosh, 1973 pudo encontrar soluciones para el elemento de línea de Robertson-Walker (RW) en las que ϕ es función tanto de t como de la coordenada espacial r , lo mismo que la densidad de materia.

El elemento de línea de RW,

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t)\left[(1-kr^2)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2\right] , \qquad (5.9)$$

con k = + 1, 0, - 1 para el espacio de curvatura positiva, nula o negativa, respectivamente, sustituido en (5.4) y (5.8) da lugar a las ecuaciones siguientes:

$$3\frac{\ddot{R}}{R} + \omega\frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} + \frac{\ddot{\phi}}{\phi} = -\frac{8\pi}{(3+2\omega)\phi}\left[(2+\omega)\rho + 3(1+\omega)p\right], \qquad (5.10)$$

$$3\frac{\ddot{R}}{R} + 6\frac{\dot{R}^2}{R^2} + 3\frac{\dot{\phi}\dot{R}}{\phi R} = \frac{24\pi}{(3+2\omega)\phi}\left[(1+\omega)\rho - \omega p\right] \qquad (5.11)$$

$$\left[\dot{\phi}R^3\right]^{\cdot} = \frac{8\pi}{3+2\omega}(\rho - 3p)R^3 \qquad (5.12)$$

para un fluido perfecto cuyo tensor de energía-momento es

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)u_\mu u_\nu - p\, g_{\mu\nu} \quad , \tag{5.13}$$

en donde ρ es la densidad de energía en el Universo, p es la presión isotrópica del fluido y u_α su cuadri-velocidad.

Los puntos sobre las variables significan derivadas con respecto al tiempo cósmico t.

Las ecuaciones anteriores se complementan con la ecuación de conservación

$$\dot{\rho} = -3\frac{\dot{R}}{R}(\rho + p) \quad . \tag{5.14}$$

Tradicionalmente han sido las ecuaciones (5.10), (5.11) y (5.12), para ecuaciones de estado particulares, a las que la mayoría les han buscado soluciones. Ciertamente la no-linealidad de esas ecuaciones hace que las posibles soluciones sean difíciles de encontrar. Es por eso que damos un método para simplificar esas ecuaciones, que además de haber permitido obtener nuevas soluciones generaliza otras ya antes encontradas y también las clasifica, se puede decir, en "grupos" o "categorías", lo cual no había sido posible hacer antes.

Comenzemos por sumar (5.11) con (5.12) para obtener

$$3\frac{\ddot{R}}{R}+6\frac{\dot{R}^2}{R^2}+6\frac{\dot{R}\dot{\phi}}{R\phi}+\frac{\ddot{\phi}}{\phi}=\frac{\alpha}{\phi}\Big[(4+3\omega)\rho-3(1+\omega)p\Big]-6\frac{k}{R^2} \tag{5.15}$$

Reescalamos ahora el campo ϕ: $\phi\rightarrow\phi R^3$ y a éste denominemosle $\Psi\equiv\phi R^3$. Fácilmente podemos ver que

$$\frac{\dot{\Psi}}{\Psi}=3\frac{\dot{R}}{R}+\frac{\dot{\phi}}{\phi}\;,$$

(5.16a, b)

$$\frac{\ddot{\Psi}}{\Psi}=3\frac{\ddot{R}}{R}+6\frac{\dot{R}^2}{R^2}+6\frac{\dot{R}\dot{\phi}}{R\phi}+\frac{\ddot{\phi}}{\phi}\;;$$

con lo cual (5.15) se escribe así:

$$\frac{\ddot{\Psi}}{\Psi}=\frac{\alpha}{\phi}\Big[(4+3\omega)\rho-3(1+\omega)p\Big]-6\frac{k}{R^2}\;,\quad \alpha\equiv\frac{8\pi}{3+2\omega}\;,$$

mientras (5.10) se puede escribir en la forma

$$\frac{\ddot{\Psi}}{\Psi}=-\frac{\alpha}{\phi}\Big[(2+\omega)\rho+3(1+\omega)p\Big]-3(4+3\omega)\frac{\dot{R}^2}{R^2}+6(1+\omega)\frac{\dot{R}\dot{\Psi}}{R\Psi}-\omega\frac{\dot{\Psi}^2}{\Psi^2}\,.$$

Para poder seguir con el reescalamiento de ρ y p conviene antes suponer una ecuación de estado. La común son las llamadas ecuaciones de estado "barotrópicas" en las que la presión es proporcional a la densidad:

$$P = \beta \rho \quad , \quad |\beta| \leq 1 \tag{5.17}$$

Reescalamos ahora la presión y la densidad: $P \longrightarrow PR^3 \equiv P$ y $\rho \longrightarrow \rho R^3 \equiv \varepsilon$. Con esto la ecuación de conservación (5.14) se escribe, en general,

$$\dot{\varepsilon} = -3P \frac{\dot{R}}{R} \tag{5.18}$$

y en particular, para la ecuación barotrópica como

$$\dot{\varepsilon} = -3\beta \varepsilon \frac{\dot{R}}{R} \quad , \tag{5.19}$$

cuya integral es

$$\varepsilon = F R^{-3\beta} \quad , \quad F = Cte. \tag{5.20}$$

Con las anteriores suposiciones obtenemos la versión final de las ecuaciones a resolver. Por ejemplo, (5.12) y (5.15) son ahora

$$\left[\dot{\Psi} - 3\Psi \frac{\dot{R}}{R}\right] = \alpha(\varepsilon - 3P) = \alpha(1-3\beta)\varepsilon \tag{5.21}$$

y

$$\frac{\ddot{\Psi}}{\Psi} = \alpha\left[(4+3\omega) - 3(1+\omega)\beta\right]\varepsilon\Psi^{-1} - 6\frac{k}{R^2} \quad , \tag{5.22}$$

mientras que (5.10) queda así

$$\frac{\ddot{\Psi}}{\Psi} = -\frac{\alpha}{\Psi}\left[(2+\omega)+3(1+\omega)\beta\right]\varepsilon - 3(4+3\omega)\frac{\dot{R}^2}{R^2} + + 6(1+\omega)\frac{\dot{R}\dot{\Psi}}{R\Psi} - \omega\frac{\dot{\Psi}^2}{\Psi^2} \quad . \tag{5.23}$$

Inmediatamente notamos que, para el espacio plano y vacío ($\varepsilon = P = 0$) la ecuación (5.22) se integra inmediatamente con el resultado

$$\Psi = at + b \; ; \quad a, b = \text{Const.} \tag{5.24}$$

que sustituido en (5.21) nos permite obtener

$$R = \Psi^{(1-c/a)} \; , \quad c = \text{Const.} \tag{5.25}$$

Estas soluciones generales de vacío y para el espacio plano fueron encontradas inicialmente por O'Hanlon y Tupper, 1972 (véase también Chauvet, 1983).

El siguiente escalón, podríamos decir, consta de las soluciones de vacío para el espacio no plano. Estas se encuentran al resolver el siguiente conjunto de ecuaciones correspondientes a (5.21, 22 y 23) respectivamente:

$$\frac{\dot{\Psi}}{\Psi} = 3\frac{\dot{R}}{R} + \frac{\lambda}{\Psi} \quad , \tag{5.26a}$$

$$\frac{\ddot{\Psi}}{\Psi} = -6\frac{k}{R^2} \quad , \tag{5.26b}$$

$$\frac{\ddot{\Psi}}{\Psi} = \frac{2}{3}\frac{\dot{\Psi}^2}{\Psi^2} + \frac{2}{3}\lambda\frac{\dot{\Psi}}{\Psi^2} - \frac{(4+3\omega)}{3}\frac{\lambda^2}{\Psi^2} \quad . \tag{5.26c}$$

A pesar de que (5.26c) es no lineal, ésta puede integrarse escribiendo $\ddot{\Psi} = \dot{\Psi}(d\dot{\Psi}/d\Psi)$ de modo que con $3\Psi\ddot{\Psi} = 2\dot{\Psi}^2 + 2\lambda\dot{\Psi} - (4+3\omega)\lambda^2 \equiv Z$, encontramos

$$\Psi_0^{*}\Psi^{4/3} = \begin{cases} |Z| \exp\left(\frac{2}{Q_+} \operatorname{arctanh} \frac{2\dot{\Psi}+\lambda}{\lambda Q_+}\right), & Q_+ \equiv \sqrt{3(3+2\omega)} \\ |Z| \exp\left(-\frac{2}{Q_-} \arctan \frac{2\dot{\Psi}+\lambda}{\lambda Q_-}\right), & Q_- \equiv \sqrt{-3(3+2\omega)} \end{cases}$$

y que para simplificar la notación escribimos como

$$\Psi = \Psi(\dot{\Psi}) = \Psi_0 |Z|^{3/4} \exp\left(\pm \frac{3}{4} f_\pm\right) \qquad (5.27)$$

con

$$\Psi_0 \equiv \Psi_0^{*-\frac{3}{4}}, \quad f_+ \equiv \operatorname{ath} \frac{2\dot{\Psi}+\lambda}{\lambda Q_+}, \quad f_- \equiv \operatorname{atn} \frac{2\dot{\Psi}+\lambda}{\lambda Q_-}$$

No es posible invertir $\Psi(\dot{\Psi})$, sin embargo de (5.26c), también, vemos que

$$t = 3\int Z^{-1}\Psi \, d\dot{\Psi} \qquad (5.28)$$

de tal modo que para el espacio cerrado con $x \equiv \operatorname{ath}\frac{2\dot{\Psi}+\lambda}{\lambda Q_+}$ encontramos que

$$t = -\frac{3}{\lambda Q_+}\int \Psi(x)\, dx \quad , \qquad (5.29)$$

con

$$\Psi = 2^{-3/4}\Psi_0 (\lambda Q_+)^{3/2} \left[\frac{\exp(x/Q_+)}{\cosh x}\right]^{3/2} \qquad (5.30)$$

y de (5.26b) obtenemos

$$R = 3(2\lambda Q_+)^{1/2}\Psi_0\left[\frac{\exp(3x/Q_+)}{\cosh x}\right]^{1/2} \qquad (5.31)$$

Análogamente, para el espacio abierto con $y \equiv \operatorname{atn}\frac{2\dot{\Psi}+\lambda}{\lambda Q_-}$, tenemos que

$$t = \frac{3}{\lambda Q_-}\int \Psi(y)\,dy \quad , \qquad (5.32)$$

con

$$\Psi = 2^{-3/4}\Psi_0(\lambda Q_-)^{3/2}\left[\frac{\exp(y/Q_-)}{\cos y}\right]^{3/2} \qquad (5.33)$$

y

$$R = 3(2\lambda Q_-)^{1/2}\Psi_0\left[\frac{\exp(-3y/Q_-)}{\cos y}\right]^{1/2}. \qquad (5.34)$$

b) Soluciones para espacio plano y ecuaciones de estado barotrópicas.

Las ecuaciones a resolver son (5.21), (5.22) con $k=0$ y (5.23).

Sea $\varepsilon dt \equiv d\eta$ (podríamos interpretarlo como un reescalamiento del tiempo). (5.21) y (5.22) se pueden integrar ahora con el resultado:

$$\varepsilon\Psi' - 3\Psi\varepsilon\frac{R'}{R} = \alpha(1-3\beta)(\eta+\eta_0) \equiv (1-3\beta)\eta \qquad (5.35)$$

y

$$\varepsilon\Psi' = \left[(4+3\omega) - 3(1+\omega)\beta\right](\eta + \eta_1) \quad . \tag{5.36}$$

Podemos tomar $\eta_0 = \eta_1$ sin perder generalidad y sustituir (5.19) ($-3\beta R'/R = \varepsilon'/\varepsilon$) y (5.35) en (5.35):

$$\varepsilon\Psi' + \beta\Psi\varepsilon' = (1-3\beta)\eta = \left[(4+3\omega) - 3(1+\omega)\beta\right]\eta + \beta\Psi\varepsilon',$$

$$\beta\Psi\varepsilon' = 3\left[\omega\beta - (1+\omega)\right]\eta \tag{5.37}$$

de manera que sumando (5.36) y (5.37) obtenemos

$$(\varepsilon\Psi)' = -\left[\frac{3(1+\omega) - (4+3\omega)\beta + 3\omega\beta^2}{\beta}\right]\eta \equiv a\eta$$

cuya integral es

$$\varepsilon\Psi = a\eta^2 + b\eta + c \quad , \quad a, b, c = \text{Const.} \tag{5.38}$$

Este resultado permite encontrar las funciones $\varepsilon(\eta)$ y $\Psi(\eta)$ al sustituir (5.38) en (5.37) y en (5.36), respectivamente:

$$\varepsilon = \int \exp\left\{\frac{3(\omega\beta - 1 - \omega)\beta^{-1}}{a\eta^2 + b\eta + c}\eta\right\} d\eta \tag{5.39}$$

y

$$\Psi = \int \exp\left\{\frac{\left[(4+3\omega) - 3(1+\omega)\beta\right]\eta}{a\eta^2 + b\eta + c}\right\} d\eta \quad . \tag{5.40}$$

El siguiente paso es sustituir estos resultados en (5.23) para poder determinar el valor de algunas constantes, sin embargo, no vamos a hacerlo en estos momentos. La razón es que estas soluciones generales ya fueron encontradas, usando otro método, inicialmente por Gurevich et al, 1973. Creemos que resulta más interesante ahora hacer notar dos cosas. Primero, que cuando $\beta = 0$, o sea $p = 0$, $\varepsilon = Cte$. y debemos trabajar las ecuaciones anteriores directamente con R en lugar de ε . Asimismo, el caso de radiación o de materia ultrarelativista, con $\beta = 1/3$, también debe ser tratado aparte. Segunda cosa, pero más significativa resulta el hecho de que el procedimiento anterior no puede emplearse cuando el espacio es no plano puesto que el término $6k/R^2$ impide la integración de (5.22). Sin embargo, haciendo la suposición de que la "solución" $\varepsilon\Psi = A\eta^2 + B\eta + C$ para el espacio plano se vale también para estos otros espacios uno encuentra soluciones correspondientes.

Caso concreto, para "polvo" ($p = 0$). Parte de la "solución" con $k = 0$ esta dada por

$$\Psi = at^2 + bt + c \quad \left(a = \frac{4+3\omega}{2}\alpha F\right)$$

y para el espacio cerrado ($k = 1$) ésta se convierte en

$$\Psi = -\alpha F t^2 \qquad (5.41)$$

y

$$R = \sqrt{\frac{-2}{2+\omega}}\; t \qquad (5.42)$$

con $\omega<-2$, necesariamente.

Esta solución la encontraron inicialmente, por otro método, Dehnen y Obregón, 1971. La correspondiente para radiación la obtuvieron Obregón y Chauvet, 1978 y para β arbitraria Chauvet y Obregón, 1979.

En cambio, para el espacio abierto ($k=-1$) tenemos que

$$\dot{\Psi}=-\alpha F t^{2} \qquad (5.43)$$

y

$$R=\sqrt{\frac{2}{2+\omega}}\; t \qquad (5.44)$$

con $\omega>2$.

Nótese que $\omega>2 \Rightarrow \alpha>0$ y puesto que $F>0, \dot{\Psi}<0$; lo que podría interpretarse como "antigravedad".

c) Soluciones para el espacio plano con ecuaciones de estado politrópicas o para dos fluídos barotrópicos que no interaccionan.

Una manera en la cual se puede introducir una presión que no sea linealmente proporcional a la densidad es por medio de las llamadas ecuaciones de estado politrópicas las cuales son de la forma (veáse Mc Vittie, 1965 y Stabell, 1968):

$$p=\beta\rho^{1+\frac{1}{n}} \quad , \ \beta, n = \text{Ctes.} \qquad (5.45)$$

n es el índice politrópico.

También se obtiene un modelo cosmológico con presión en el caso de tener "polvo" y "radiación" sin interacción, por ejemplo. Los dos modelos anteriores y también el modelo de dos fluídos barotrópicos sin interacción se pueden tratar el manera unificada con nuestro método (Chauvet, 1984 y Chauvet y Klapp, 1986), como lo mostramos a continuación:

Sean $\Psi \equiv \phi R^3$, $\varepsilon \equiv \rho R^3$, $P \equiv p R^3$ y definamos

$$\varepsilon \equiv \alpha^{-1}\dot{y}\,,\quad P \equiv \alpha^{-1}\dot{x} \quad \text{con } (\;)^{\bullet} \equiv d/dt \tag{5.46}$$

con $\alpha = 8\pi(3+2\omega)^{-1} = 8\pi B^{-1}$ y $y = Y + Y_0$, $x = X + X_0$

con $X_0, Y_0 = \text{Ctes}$.

Podemos ver que

$$\rho/p = \varepsilon/P = dy/dx \equiv y_x \tag{5.47}$$

Las definiciones anteriores sustituidas en (5.21), (5.22) y (5.23) permiten una primera integración, como ya vimos en casos anteriores. El resultado es una ecuación que relaciona a ε, Ψ, x e y :

$$2\alpha\varepsilon\Psi = 2\dot{y}\Psi = 3\omega x^2 - 6(1+\omega)xy + (4+3\omega)y^2 \tag{5.48}$$

Derivandola y eliminando a $\dot{\Psi}$ y a Ψ obtenemos

$$\ddot{y} = 6 \frac{\omega x - (1+\omega) y}{3\omega x^2 - 6(1+\omega)xy + (4+3\omega)y^2} \qquad (5.49)$$

Por otro lado, la ecuación de conservación nos da la relación

$$\ddot{y} = -3\dot{x}(\ln R)^{\cdot} \qquad (5.50)$$

la cual se puede integrar una vez que adoptamos una ecuación de estado específica $P = P(\varepsilon)$.

Para un fluído politrópico

$$P = a\,\varepsilon^{1+\frac{1}{n}} - \varepsilon \quad , \quad a = Cte. \qquad (5.51)$$

y

$$\dot{R} = \left[\frac{\beta}{a}(y_x + 1)\right]^{n/3} \qquad (5.52)$$

Derivando (5.53) encontramos

$$\frac{d(\ln R)}{dx} \equiv (\ln R)_x \equiv \frac{n}{3}\,\frac{y_{xx}}{y_x + 1} \qquad (5.53)$$

y sustituyendo este resultado en (5.49) obtenemos la ecuación diferencial no lineal

$$y_{xx} = \frac{6}{n}\,\frac{[(1+\omega)y - \omega x]\,(y_x^2 + y_x)}{(4+3\omega)y^2 - 6(1+\omega)xy + 3\omega x^2} \qquad (5.54)$$

Permítaseme hacer en este punto un paréntesis para señalar que si en lugar de una politropa tenemos dos fluídos barotrópicos que no interaccionan con ecuaciones de estado dadas por

$$P_\gamma = \gamma \rho_\gamma \quad y \quad P_\lambda = \lambda \rho_\lambda \quad , \quad |\gamma|, |\lambda| \leq 1$$

y

$$\rho \equiv \rho_\gamma + \rho_\lambda \quad , \quad P \equiv P_\gamma + P_\lambda \, .$$

La ecuación de conservación implica que

$$\rho_\gamma = F_\gamma R^{-3(\gamma+1)} \quad y \quad \rho_\lambda = F_\lambda R^{-3(\lambda+1)} \quad , \; F_\gamma , F_\lambda = \text{Ctes.}$$

y si ahora definimos

$$\varepsilon_\gamma \equiv \rho_\gamma R^3 \equiv \alpha^{-1} \dot{y} \quad y \quad \varepsilon_\lambda \equiv \rho_\lambda R^3 \equiv \alpha^{-1} \dot{x}$$

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_\gamma + \varepsilon_\lambda \, .$$

Encontramos, como para la politropa, que

$$2 \alpha \varepsilon \Psi = a y^2 + b x^2 + 2 c x y \tag{5.55}$$

en donde

$$a = (4+3\omega)(1-2\gamma) + (2+3\omega\gamma)\gamma$$
$$b = (4+3\omega)(1-2\lambda) + (2+3\omega\gamma)\lambda$$
$$c = 4 - 3\omega + 3\omega\gamma\lambda - 3(1+\omega)(\gamma+\lambda) \quad .$$

Asimismo,

$$y_{xx} = 6(\lambda-\gamma)\frac{(my+nx)\gamma y_x + (ny+mx)\lambda}{ay^2+bx^2+2cyx}\left(\frac{y_x^2+y_x}{\gamma y_x+\lambda}\right) \quad (5.56)$$

con $m \equiv 1+\omega-\omega\gamma$ y $n \equiv 1+\omega-\omega\lambda$.

Como siempre, el caso más interesante lo constituye el modelo de "radiación" y "polvo" para los cuales $\gamma = 1/3$ y $\lambda = 0$:

$$y_{xx} = -2\frac{By+3(1+\omega)x}{2By^2+6Bxy+3(4+3\omega)x^2}(y_x^2+y_x) \quad (5.57)$$

Esta ecuación es semejante a la politropa (5.54) y en este sentido podemos hablar de que tenemos una ecuación diferencial reducida de la forma

$$y_{xx} = g(x,y)(y_x^2+y_x) \; . \quad (5.58)$$

La homogeneidad de la función $g(x,y)$ nos permite transformar (5.58) a un tipo de ecuación diferencial no lineal ya conocido, aunque poco estudiado, la ecuación de Abel:

Sea $y = xz \Rightarrow y_x = z + x(x_z)^{-1}, \; (y_x)_z = 2 - xx_z^{-2}x_{zz}$

Definamos:

$$x_z x^{-1} \equiv v(z) \quad \text{con} \quad g(x,y) = h(z)y^{-1}$$

con lo que (5.58) se convierte en

$$v_z + (z^2+z)hv^3 + [(2z+1)h-1]v^2 + hv = 0 \; . \quad (5.59)$$

A ésta, llamada ecuación de Abel de primera clase, le hemos podido encontrar tres soluciones particulares, válidas para h arbitrarias:

Reescribase (5.59) en la forma:

$$v^2 - v_z = hv(vz+1)(vz+1+v) \quad . \qquad (5.60)$$

Soluciones de esta ecuación la constituyen sus raíces, a saber

$$\begin{aligned} v &= 0 \\ v &= -z^{-1} \end{aligned} \qquad (5.61)$$

y

$$v = -(z+1)^{-1} \quad .$$

Las soluciones anteriores, válidas para h arbitraria, no resultan de interés cosmológico. Actualmente se está trabajando para obtener lo que parece ser una solución general, pero para h particulares.

d) Soluciones para Universos homogéneos.

Varias son las razones por las cuales se ha tenido interés por estudiar modelos espacialmente homogéneos: principalmente porque la aproximación de caracterizar al Universo real por medio de un modelo homogéneo se presta para tratar problemas complejos que a su vez, debido a las grandes simetrías de estos modelos, son factibles de darle solución.

En un modelo espacialmente homogéneo concebimos al espacio-tiempo como un conjunto de hipersuperficies invariantes $S(t)$. La homogeneidad espacial significa que la métrica en cada $S(t)$ queda especificada por medio de constantes de tal modo que ésta solamente puede ser función del parámetro t: $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(t)$

Actualmente se conocen ya bastantes soluciones exactas para modelos espacialmente homogéneos en la teoría RGE Estos son los llamados modelos de Bianchi tipo I al IX y también el de Kantowski-Sachs (Kramer et al. 1980). Los modelos isotrópicos de Friedmann-Robertson-Walker (FRW) están contenidos, como casos particulares, dentro de los de Bianchi:

$k = 0$ en Bianchis I y VII_0 , $k = -1$ en Bianchis V y VII_h y $k = -1$ en el Bianchi IX.

Por otro lado, son relativamente pocas las soluciones tipo Bianchi en la teoría de JBD. Por ejemplo, para vacío en Bianchi tipo I Ruban y Finkelstein, 1972 y Belinski y Khalatnikov, 1972 son los primeros en obtener las soluciones generales. Varias otras soluciones, para vacío, materia rígida ($p = \rho$) y otros fluídos perfectos con ecuaciones de estado barotrópicos ($p = \beta\rho$, $|\beta| \leq 1$) fueron obtenidas por Lorentz-Petzold, 1983, 1984a,b para distintos tipos de Bianchi de manera sistemática aplicando un método parecido al nuestro. Este autor cita también una extensa lista de referencias sobre estas y otras soluciones tanto en JBD como en RGE. Sin embargo, debemos mencionar que no siempre es objetivo en algunos de los comentarios que hace.

En general, estos modelos pueden ser bastante complicados y nosotros nos limitamos a trabajar con versiones simples de ellos:

Las métricas de estos modelos se pueden escribir en forma general como

$$ds^2 = -dt^2 + g_{ab} E^a E^b \quad , \tag{5.62}$$

en donde los E_a son tales que

$$[E_a , E_b] = - C^d{}_{ab} E_d \quad , \tag{5.63}$$

con $C^d{}_{ab}$ las constantes de estructura que caracterizan a los distintos tipos de Bianchi (véase, por ejemplo, Mac Callum, 1979). Los casos más sencillos se obtienen cuando la métrica es diagonal y son con los que nosotros trabajamos.

A continuación se presentan las ecuaciones cosmológicas a que dan lugar las distintas métricas de los tipos de Bianchi que hemos estudiado.

Bianchi I

$$\left(\frac{\dot{a}_i}{a_i}\right)^{\cdot} + \frac{(a_1 a_2 a_3)^{\cdot}}{a_1 a_2 a_3}\frac{\dot{a}_i}{a_i} + \frac{\dot{a}_i \dot{\phi}}{a_i \phi} = \frac{\alpha}{\phi}\left[\rho + \omega(\rho - p)\right], \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\frac{\dot{a}_1 \dot{a}_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot{a}_1 \dot{a}_3}{a_1 a_3} + \frac{\dot{a}_2 \dot{a}_3}{a_2 a_3} + \frac{(a_1 a_2 a_3)^{\cdot}}{a_1 a_2 a_3}\frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{\omega}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} = \frac{\rho}{\phi}$$

$$(R^3\dot{\phi})^{\cdot} = \alpha(\rho - 3p)R^3 , \quad (\ \ )^{\cdot} \equiv d/dt \ , \quad R^3 \equiv a_1 a_2 a_3$$

(5.64a$_{1,2,3}$;b, c)

En éstas y en las siguientes supondremos que $p = \beta\rho$, $-1 \leq \beta \leq 1$ (fluido politrópico), o bien, que $\rho = p = 0$. La ecuación de conservación para un fluido barotrópico da lugar, en todos los Bianchis, a

$$\rho R^{3(1+\beta)} = M \ , \quad M = \text{Const.} \qquad (5.65)$$

Bianchi II.

$$\left(\frac{\dot{a}_i}{a_i}\right)^{\cdot} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot{a}_i}{a_i} + \frac{\dot{a}_i\dot{\phi}}{a_i\phi} \pm \frac{1}{2}\frac{a_1^2}{a_2^2 a_3^2} \quad \left((+)\text{ si } i=1 \ , (-)\text{ si } i=2,3\right)$$

$$= \alpha\frac{\rho}{\phi}\left[1 + (1-\beta)\omega\right] , \ (i = 1, 2, 3) \qquad (5.66a_{1,2,3};b,\ c)$$

$$\frac{\dot{a}_1\dot{a}_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot{a}_1\dot{a}_3}{a_1 a_3} + \frac{\dot{a}_2\dot{a}_3}{a_2 a_3} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{\omega}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} - \frac{a_1^2}{4a_2^2 a_3^2} = \frac{\rho}{\phi}$$

$$(R^3\dot{\phi})^{\cdot} = \alpha(1 - 3\beta)\rho R^3$$

Bianchi VI$_0$

$$\left(\frac{\dot{a}_1}{a_1}\right)^{\cdot} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot{a}_1}{a_1} + \frac{\dot{a}_1\dot{\phi}}{a_1\phi} + \frac{1}{2}\frac{a_1^4 - a_2^4}{R^6} = \alpha\frac{\rho}{\phi}\left[1 + (1-\beta)\omega\right]$$

$$\left(\frac{\dot{a}_2}{a_2}\right)^{\cdot} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot{a}_2}{a_2} + \frac{\dot{a}_2\dot{\phi}}{a_2\phi} - \frac{1}{2}\frac{a_1^4 - a_2^4}{R^6} = \alpha\frac{\rho}{\phi}\left[1 + (1-\beta)\omega\right]$$

$$\left(\frac{\dot{a}_3}{a_3}\right)^{\cdot} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot{a}_3}{a_3} + \frac{\dot{a}_3\dot{\phi}}{a_3\phi} - \frac{1}{2}\frac{(a_1^2 + a_2^2)^2}{R^6} = \alpha\frac{\rho}{\phi}\left[1 + (1-\beta)\omega\right]$$

$$\frac{\dot{a}_1\dot{a}_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot{a}_1\dot{a}_3}{a_1 a_3} + \frac{\dot{a}_2\dot{a}_3}{a_2 a_3} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot{\phi}}{\phi} - \frac{\omega}{2}\frac{\dot{\phi}^2}{\phi^2} + \qquad (5.67a_{1,2,3};b,\ c)$$

$$+ \frac{1}{4}\frac{(a_1^2 - a_2^2)^2}{R^6} = \frac{\rho}{\phi}$$

$$(R^3\dot{\phi})^{\cdot} = \alpha(1 - 3\beta)\rho R^3 \ .$$

$$(R^3\dot{\phi})^{\cdot} = \alpha(\rho - 3p)R^3 , \quad (\ \ )^{\cdot} \equiv d/dt \ , \ R^3 \equiv a_1 a_2 a_3$$

(5.64a$_{1,2,3}$;b, c)

En éstas y en las siguientes supondremos que $p = \beta\rho$, $-1 \leq \beta \leq 1$ (fluido politrópico), o bien, que $\rho = p = 0$. La ecuación de conservación para un fluido barotrópico da lugar, en todos los Bianchis, a

$$\rho R^{3(1+\beta)} = M \ , \ M = \text{Const} . \qquad (5.65)$$

Bianchi II.

$$\left(\frac{\dot a_i}{a_i}\right)^{\cdot} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot a_i}{a_i} + \frac{\dot a_i \dot\phi}{a_i \phi} \pm \frac{1}{2}\frac{a_1^2}{a_2^2 a_3^2} \quad \left((+) \text{ si } i=1 \ , (-) \text{ si } i=2,3\right)$$

$$= \alpha\frac{\rho}{\phi}\left[1 + (1-\beta)\omega\right] , \quad (i = 1, 2, 3) \qquad (5.66a_{1,2,3};b, c)$$

$$\frac{\dot a_1 \dot a_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot a_1 \dot a_3}{a_1 a_3} + \frac{\dot a_2 \dot a_3}{a_2 a_3} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot\phi}{\phi} - \frac{\omega}{2}\frac{\dot\phi^2}{\phi^2} - \frac{a_1^2}{4a_2^2 a_3^2} = \frac{\rho}{\phi}$$

$$(R^3\dot\phi)^{\cdot} = \alpha(1-3\beta)\rho R^3$$

Bianchi VI.

$$\left(\frac{\dot a_1}{a_1}\right)^{\cdot} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot a_1}{a_1} + \frac{\dot a_1 \dot\phi}{a_1 \phi} + \frac{1}{2}\frac{a_1^4 - a_2^4}{R^6} = \alpha\frac{\rho}{\phi}\left[1 + (1-\beta)\omega\right]$$

$$\left(\frac{\dot a_2}{a_2}\right)^{\cdot} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot a_2}{a_2} + \frac{\dot a_2 \dot\phi}{a_2 \phi} - \frac{1}{2}\frac{a_1^4 - a_2^4}{R^6} = \alpha\frac{\rho}{\phi}\left[1 + (1-\beta)\omega\right]$$

$$\left(\frac{\dot a_3}{a_3}\right)^{\cdot} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot a_3}{a_3} + \frac{\dot a_3 \dot\phi}{a_3 \phi} - \frac{1}{2}\frac{(a_1^2 + a_2^2)^2}{R^6} = \alpha\frac{\rho}{\phi}\left[1 + (1-\beta)\omega\right]$$

$$\frac{\dot a_1 \dot a_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot a_1 \dot a_3}{a_1 a_3} + \frac{\dot a_2 \dot a_3}{a_2 a_3} + \frac{(R^3)^{\cdot}\dot\phi}{R^3\phi} - \frac{\omega}{2}\frac{\dot\phi^2}{\phi^2} + \qquad (5.67a_{1,2,3};b, c)$$

$$+ \frac{1}{4}\frac{(a_1^2 - a_2^2)^2}{R^6} = \frac{\rho}{\phi}$$

$$(R^3\dot\phi)^{\cdot} = \alpha(1-3\beta)\rho R^3 .$$

Bianchi VIII

$$\left(\frac{\dot a_1}{a_1}\right)^{\cdot} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot a_1}{a_1} + \frac{\dot a_1 \dot\phi}{a_1 \phi} + \frac{1}{2}\,\frac{a_1^4 - (a_2^2 + a_3^2)^2}{R^6} = \alpha\frac{[1+(1-\beta)\omega]}{\phi}\rho$$

$$\left(\frac{\dot a_2}{a_2}\right)^{\cdot} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot a_2}{a_2} + \frac{\dot a_2 \dot\phi}{a_2 \phi} + \frac{1}{2}\,\frac{a_2^4 - (a_3^2 + a_1^2)^2}{R^6} = \alpha\frac{[1+(1-\beta)\omega]}{\phi}\rho$$

$$\left(\frac{\dot a_3}{a_3}\right)^{\cdot} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot a_3}{a_3} + \frac{\dot a_3 \dot\phi}{a_3 \phi} + \frac{1}{2}\,\frac{a_3^4 - (a_1^2 - a_2^2)^2}{R^6} = \alpha\frac{[1+(1-\beta)\omega]}{\phi}\rho$$

$$\frac{\dot a_1 \dot a_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot a_1 \dot a_3}{a_1 a_3} + \frac{\dot a_2 \dot a_3}{a_2 a_3} + \frac{(R^3)^{\cdot}\dot\phi}{R^3\phi} = \frac{\omega}{2}\frac{\dot\phi^2}{\phi^2} - \frac{1}{4}\left[\frac{a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 - 2(a_1^2 a_2^2 - a_1^2 a_3^2 - a_2^2 a_3^2)}{R^6}\right] = \frac{\rho}{\phi} \qquad (5.68a_{1,2,3};b,\ c)$$

$$(R^3\dot\phi)^{\cdot} = \alpha(1-3\beta)\rho R^3 \quad .$$

Bianchi IX

$$\left(\frac{\dot a_1}{a_1}\right)^{\cdot} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot a_1}{a_1} + \frac{\dot\phi}{\phi}\frac{\dot a_1}{a_1} + \frac{1}{2}\,\frac{a_1^4 - (a_2^2 + a_3^2)^2}{R^6} = \alpha\frac{[1+(1-\beta)\omega]}{\phi}\rho$$

$$\left(\frac{\dot a_2}{a_2}\right)^{\cdot} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot a_2}{a_2} + \frac{\dot\phi}{\phi}\frac{\dot a_2}{a_2} + \frac{1}{2}\,\frac{a_2^4 - (a_3^2 + a_2^2)^2}{R^6} = \alpha\frac{[1+(1-\beta)\omega]}{\phi}\rho$$

$$\left(\frac{\dot a_3}{a_3}\right)^{\cdot} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot a_3}{a_3} + \frac{\dot\phi}{\phi}\frac{\dot a_3}{a_3} + \frac{1}{2}\,\frac{a_3^4 - (a_1^2 + a_2^2)^2}{R^6} = \alpha\frac{[1+(1-\beta)\omega]}{\phi}\rho$$

$$\frac{\dot a_1 \dot a_2}{a_1 a_2} + \frac{\dot a_1 \dot a_3}{a_1 a_3} + \frac{\dot a_2 \dot a_3}{a_2 a_3} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot\phi}{\phi} + \qquad (5.69a_{1,2,3};b,\ c)$$

$$-\frac{\omega}{2}\frac{\dot\phi^2}{\phi^2} - \frac{1}{4}\left[\frac{a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 - 2(a_1^2 a_2^2 + a_1^2 a_3^2 + a_2^2 a_3^2)}{R^6}\right] = \frac{\rho}{\phi}$$

$$(R^3\dot\phi)^{\cdot} = \alpha(1-3\beta)\rho R^3 \quad .$$

Bianchi III y Kantowski-Sachs

$$\left(\frac{\dot R}{R}\right)^{\cdot} + \frac{(R^2S)^{\cdot}}{R^2S}\frac{\dot R}{R} + \frac{\dot R\,\dot\phi}{R\,\phi} - \delta\left(\frac{2q}{R^2}\right)^2 = \alpha\,\frac{[1+(1-\beta)\omega]}{\phi}\,\rho$$

$$\left(\frac{\dot S}{S}\right)^{\cdot} + \frac{(R^2S)^{\cdot}}{R^2S}\frac{\dot S}{S} + \frac{\dot S\,\dot\phi}{S\,\phi} = \alpha\,\frac{[1+(1-\beta)\omega]}{\phi}\,\rho$$

$$a_1 = a_2 = R\ , \quad a_3 = S$$

$$\frac{\dot R^2}{R^2} + \frac{\dot R\dot S}{RS} + \frac{(R^2S)^{\cdot}}{R^2S}\frac{\dot\phi}{\phi} - \frac{\omega}{2}\frac{\dot\phi^2}{\phi^2} - \delta\left(\frac{2q}{R^2}\right)^2 = \frac{\rho}{\phi}$$

$$(R^2S\dot\phi)^{\cdot} = \alpha(1-3\beta)\rho R^2 S \quad . \qquad (5.70a_{1,2,3};b,\ c)$$

con $\delta = 1$ para Bianchi III y $\delta = -\frac{1}{4}q^2$ con $q = \frac{1}{2}$ para Kantowski-Sachs.

Bianchi V

$$\left(\frac{\dot a_i}{a_i}\right)^{\cdot} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot a_i}{a_i} + \frac{\dot a_i\,\dot\phi}{a_i\,\phi} - 2\frac{q^2}{a_i^2} = \alpha\,\frac{[1+(1-\beta)\omega]}{\phi}\,\rho\ , \ (i=1,2,3)$$

$$2\frac{\dot a_1}{a_1} = \frac{\dot a_2}{a_2} + \frac{\dot a_3}{a_3}$$

$$\frac{\dot a_1\dot a_2}{a_1a_2} + \frac{\dot a_1\dot a_3}{a_1a_3} + \frac{\dot a_2\dot a_3}{a_2a_3} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot\phi}{\phi} - \frac{\omega}{2}\frac{\dot\phi^2}{\phi^2} - 3\frac{q^2}{a_1^2} = \frac{\rho}{\phi}$$

$$(R^3\dot\phi)^{\cdot} = \alpha(1-3\beta)\rho R^3 \quad . \qquad (5.71a_{1,2,3};b,\ c,\ d)$$

Bianchi VI_h con $h \leq 0$.

$$\left(\frac{\dot a_1}{a_1}\right)^{\cdot} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot a_1}{a_1} + \frac{\dot\phi}{\phi}\frac{\dot a_1}{a_1} - 2q\frac{(1+k^2)}{a_1^2} = \alpha\frac{[1+(1-\beta)\omega]}{\phi}\rho$$

$$\left(\frac{\dot a_2}{a_2}\right)^{\cdot} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot a_2}{a_2} + \frac{\dot\phi}{\phi}\frac{\dot a_2}{a_2} - 2q\frac{(1+k)}{a_1^2} = \alpha\frac{[1+(1-\beta)\omega]}{\phi}\rho$$

$$\left(\frac{\dot a_3}{a_3}\right)^{\cdot} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot a_3}{a_3} + \frac{\dot\phi}{\phi}\frac{\dot a_3}{a_3} - 2q\frac{(1-k)}{a_1^2} = \alpha\frac{[1+(1-\beta)\omega]}{\phi}\rho$$

$$2\frac{\dot a_1}{a_1} = (1+k)\frac{\dot a_2}{a_2} + (1-k)\frac{\dot a_3}{a_3}$$

$$\frac{\dot a_1\dot a_2}{a_1a_2} + \frac{\dot a_1\dot a_3}{a_1a_3} + \frac{\dot a_2\dot a_3}{a_2a_3} + \frac{(R^3)^{\cdot}}{R^3}\frac{\dot\phi}{\phi} - \frac{\omega}{2}\frac{\dot\phi^2}{\phi^2} - q\frac{(3+k^2)}{a_1^2} = \frac{\rho}{\phi}$$

$$(R^3\dot\phi)^{\cdot} = \alpha(1-3\beta)\rho R^3$$

$$q = Cte., \quad k = (-h)^{1/2}$$

(5.72 $a_{1,2,3}$;b, c, d)

Estos son los únicos tipos de modelos anisotrópicos que consideramos.

En forma parecida a lo realizado anteriormente con las ecuaciones para los espacios isotrópicos definimos las siguientes variables $\Psi \equiv \phi R^3$, $\epsilon \equiv \rho R^3$, $\epsilon dt \equiv d\eta$.

Sólo mostramos explícitamente la manera de transformar las ecuaciones del tipo Bianchi I y posteriormente, presentamos únicamente los resultados para el resto de los modelos.

Con las definiciones usuales para Ψ, ε y $d\eta$, (5.64c) se escribe como

$$(\ln R^3)^{\cdot} = (\ln \Psi)^{\cdot} - \alpha(1-3\beta)\bar{\eta}\Psi^{-1}, \quad \bar{\eta} = \eta + \eta_0 . \tag{5.73}$$

η_0 es constante de integración. Derivando la anterior obtenemos

$$(\ln R^3)^{\cdot\cdot} = (\ln \Psi)^{\cdot\cdot} + \alpha(1-3\beta)\left[\bar{\eta}(\ln\Psi)^{\cdot} - \varepsilon\right]\Psi^{-1} \tag{5.74}$$

Por ótro lado, sumamos ($5.64a_{1,2,3}$) para obtener

$$(\ln R^3)^{\cdot\cdot} + (\ln\Psi)^{\cdot}(\ln R^3)^{\cdot} = 3\alpha\left[1+(1-\beta)\omega\right]\varepsilon\Psi^{-1}$$

Si ahora sustituimos $(\ln R^3)^{\cdot\cdot}$ y $(\ln R^3)^{\cdot}$ encontramos

$$(\ln\Psi)^{\cdot\cdot} + (\ln\Psi)^{\cdot 2} = \frac{\ddot{\Psi}}{\Psi} = \alpha\left[4-3\beta+3(1-\beta)\omega\right]\varepsilon\Psi^{-1} \tag{5.75}$$

Hacemos algo similar con (5.64b), sustituimos $(\ln R^3)^{\cdot}$ y $(\ln\phi)^{\cdot}$ y obtenemos

$$2\left[\frac{\dot{a}_1\dot{a}_2}{a_1a_2} + \frac{\dot{a}_1\dot{a}_3}{a_1a_3} + \frac{\dot{a}_2\dot{a}_3}{a_2a_3}\right] =$$

$$2\varepsilon\Psi^{-1} - \alpha(1-3\beta)\left[2\bar{\eta}\Psi(\ln\Psi)^{\cdot} - (2+\omega)\alpha(1-3\beta)\bar{\eta}^2\right]\Psi^{-2} \tag{5.76}$$

De (5.73), elevando al cuadrado vemos que

$$(\ln R^3)^{\cdot 2} = 2\left[\frac{\dot{a}_1\dot{a}_2}{a_1a_2} + \frac{\dot{a}_1\dot{a}_3}{a_1a_3} + \frac{\dot{a}_2\dot{a}_3}{a_2a_3}\right] + \left[\frac{\dot{a}_1^2}{a_1^2} + \frac{\dot{a}_2^2}{a_2^2} + \frac{\dot{a}_3^2}{a_3^2}\right] \tag{5.77}$$

$$= (\ln\Psi)^{\cdot 2} - 2\alpha(1-3\beta)\bar{\eta}\Psi^{-1}(\ln\Psi)^{\cdot} + \alpha^2(1-3\beta)^2\bar{\eta}^2\Psi^{-2}$$

o sea que

$$\frac{\dot{a}_1^2}{a_1^2}+\frac{\dot{a}_2^2}{a_2^2}+\frac{\dot{a}_3^2}{a_3^2}=(\ln\psi)^{\cdot 2}-\alpha^2(1-3\beta)^2\eta^2\psi^{-2}-2\varepsilon\psi^{-1} \qquad (5.78)$$

después de igualar (5.77) con (5.76). En seguida le restamos de la mitad de (5.76) la ecuación (5.78) y tomando en cuenta que de (5.75) podemos escribir

$$\frac{3}{2}\frac{\ddot{\psi}}{\psi}+\frac{3}{2}\Big[2-(4-3\beta)\alpha-3(1-\beta)\omega\alpha\Big]\frac{\varepsilon}{\psi}=3\,\frac{\varepsilon}{\psi}\ .$$

Obtenemos:

$$\left[\frac{\dot{a}_1\dot{a}_2}{a_1a_2}+\frac{\dot{a}_1\dot{a}_3}{a_1a_3}+\frac{\dot{a}_2\dot{a}_3}{a_2a_3}\right]-\left[\frac{\dot{a}_1^2}{a_1^2}+\frac{\dot{a}_2^2}{a_2^2}+\frac{\dot{a}_3^2}{a_3^2}\right]=\frac{3}{2}\frac{\ddot{\psi}}{\psi}+\frac{3}{2}\Big[$$

$$2-(4-3\beta)\alpha-3(1-\beta)\omega\alpha\Big]\frac{\varepsilon}{\psi}-\frac{\dot{\psi}^2}{\psi^2}-\alpha(1-3\beta)\eta\frac{\dot{\psi}}{\psi^2}+\frac{(4+3\omega)}{2}\frac{\alpha^2(1-3\beta)^2\eta^2}{\psi^2} \qquad (5.79)$$

La razón para escribir esta última ecuación es que resulta fundamental para el estudio de la posible isotropización de los universos homogéneos. Sin embargo, por el momento regresémonos e integremos (5.75), con el resultado de que,

$$\varepsilon\psi'=\alpha\Big[4-3\beta+3(1-\beta)\omega\Big]\eta\ ,\quad (\ )'\equiv\frac{d}{d\eta} \qquad (5.80)$$

También, en forma similar, integramos (5.73) pero ahora recordando que $(\ln R^3)' = -\beta^{-1}(\ln \varepsilon)'$ y sustituyendo en ella (5.80):

$$\frac{\Psi'}{\Psi} + \frac{1}{\beta}\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = \alpha(1-3\beta)\frac{\eta}{\varepsilon\Psi} \longrightarrow \Psi'\varepsilon + \beta^{-1}\varepsilon'\Psi = \alpha(1-3\beta)\eta \longrightarrow$$

$$\beta^{-1}\varepsilon'\Psi = \alpha(1-3\beta)\eta - \alpha[4-3\beta+3(1-\beta \text{[illegible]}]\eta = -3\alpha[1+(1-\beta)\omega]\eta$$

$$\Rightarrow \Psi\varepsilon' = -3\alpha\beta[1+(1-\beta)\omega]\eta \qquad (5.81)$$

Sumando (5.80) y (5.81) y después integrando obtenemos

$$\Psi\varepsilon = \alpha\left[(2-3\beta)+\tfrac{3}{2}(1-\beta)^2\omega\right]\eta^2 + b\eta + c$$

o sea

$$\Psi\varepsilon = a\eta^2 + b\eta + c \quad , \; a \equiv \left[(2-3\beta)+\tfrac{3}{2}(1-\beta)^2\right]\alpha, \quad b, c = Ctes. \qquad (5.82)$$

Este resultado sustituido en (5.80) y (5.81) nos permite encontrar $\Psi(\eta)$ y $\varepsilon(\eta)$ por separado, respectivamente y posteriormente de $(5.64a_{1,\ 2,\ 3})$: $a_i(\eta)$, $i = 1, 2, 3$. Los detalles pueden consultarse en Guzmán, 1985. Fueron Ruban y Finkelstein, 1975 los primeros autores en obtener estas soluciones.

No es posible aplicar este mismo procedimiento para integrar las ecuaciones equivalentes para el resto de los modelos debido a que los términos de curvatura correspondientes no lo permiten. Sin embargo, haciendo la suposición de que $\varepsilon\Psi = a\eta^2 + b\eta + c$ es también válida en el resto de los modelos hemos podido encontrar nuevas

Chauvet y Guzmán, 1986. Uno de los resultados más interesantes de esta solución: $\varepsilon\Psi = a\eta^2 + b\eta + c$ es que, salvo para Bianchi tipo IX, se obtienen soluciones anisotrópicas, es decir, $a_1 \neq a_2 \neq a_3$ y por lo tanto, forzosamente, este modelo es isotrópico.
Es hasta aquí a donde se ha podido llegar en nuestras investigaciones acerca de soluciones cosmológicas en la teoría de JBD.

REFERENCIAS

Anderson, J.L.: 1971, Phys. Rev. D 3, 1689.

Bateman, H.: 1910, Proc. Lond. Math. Soc. 8, 223.

Bekenstein, J.D.: 1975, Phys. Rev. D 11, 2072.

Bekenstein, J.D. and Meisels, A.: 1980, Phys. Rev. D 22, 1313.

Belinski, V.A. and Khalatnikov, I M.: 1969, Soviet Phys. JETP 29, 911.

Belinski, V.A. Khalatnikov, I.M. and Lifshitz, E.M.: 1972, Soviet Phys. JETP 35, 838.

Bergman, P.G.: 1948, Ann. of Math. 49, 255.

Bergman, P.G.: 1968, Int. Journ. Theor. Phys. 1, 25.

Brans, C.H. and Dicke, R.H.: 1961, Phys. Rev. 124, 925.

Brill, D.: 1972, Evidence for gravitational theories. Academic Press, London.

Canuto, V.M. and Narlikar, J.V.: 1980, Astrophys. J. 236, 6

Cremmer, E. and Scherk, J.: 1976, Nucl. Phys. B. 103, 399.

Cremmer, E. and Scherk, J.: 1976, Nucl. Phys. B. 108, 409.

Cremmer, E. Schwarz, J. and Scherk, J.: 1979, Phys. Lett. B. 84, 83.

Cunningham, E.: 1910, Proc. Lond. Math. Soc. 8, 77.

Chauvet, P. y Obregón O.: 1979, Astrophys. Space Sci. 66, 515.

Chauvet, P.: 1983, Astrophys. Space Sci. 90, 51.

Chauvet, P.: 1984, Astrophys. Space Sci. 106, 207.

Chauvet, P. and Klapp J.: 1986, Astrophys. Space Sci. 125, 305.

Chauvet, P. and Guzmán E.: 1986, Astrophys. Space Sci. 126, 133.

Dehnen, H. and Obregón, O.: 1971, Astrophys. Space Sci. 14, 454.

. . .

Dicke, R.H.: 1962, Phys. Rev. 125, 2163.

Dirac, P.A.M.: 1938, Proc. R. Soc. A 165, 199.

Dirac, P.A.M.: 1974, Proc. R. Soc. A 338, 439.

Einstein, A. and Bergman, P.G.: 1938, Ann. of Math. 39, 638.

Fulton, T. Rohrlich, F. and Witten, L.: 1962. Rev. Mod. Phys. 34, 442.

Gurevich, L.E., Finkelstein, A.M. and Ruban. V.A.: 1973. Astrophys. Space Sci. 22, 231.

Guzmán de la Selva, E.: 1985, Soluciones exactas de universos no-isotrópicos, Tesis de Maestría, Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa.

Hoffmann, B.: 1953, Phys. Rev. 89, 49.

Hoyle, F. and Narlikar, J.V.: 1974, Action-at-a-Dictance in Physics and Cosmology, Freeman, San Francisco.

Hoyle, F.: 1975, Astrophys. J. 196, 661.

Jordan, P.: 1948, Astr. Nach. 27b, 193.

Jordan, P.: 1975, Schwerkraft und Weltall, Braunschweig.

Kaluza, TH.: 1921, Sitzungber Preuss. Akad. Wiss. Phys. Math. Kl. 966.

Klein, O.: 1926, Z. Phys. 37, 895.

Kramer, D. Stephani, H. MacCallum, M.A.H. and Herlt, E.: 1980, Exact solutions of Einstein'sfild equations. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin and Cambridge University Press, Cambridge.

Lorenz-Petzold, D.: 1984, Astrophys Space Sci. 98, 101.

Lorenz-Petzold, D.: 1984, Astrophys Space Sci. 98, 281.

Lorenz-Petzold, D.: 1984, Prog. Theor. Phys. 71, No. 2, 406.

Ludwig, G.: 1951, Fortschritte der projectiven Relativitätstheorie. Vieweg und Sohn, Braunschweig.

Mach, E.: 1883, The Science of Mechanics. (reprinted by Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, 1902).

MacCallum, M.A.H.: 1979, Anisotropic and inomogeneous relativistic cosmologies. General Relativity.: an Einstein centenary survey, ed. Hawking, S.W. and Israel, W. Cambridge University Press, Cambridge.

McIntosh, C.B.: 1973, Phys. Lett. A 43, 33.

Mc Vittie, G.C.: 1965, General Relativity and Cosmology. Chapman and Hall, London.

Morganstern, R.E.: 1970, Phys. Rev. D 1, 2969.

Nariai, H. and Ueno, Y.: 1960, Progr. Theor. Phys. 24, 593.

Obregón, O. and Chauvet, P.: 1978, Astrophys. Space Sci. 56, 335.

O'Hanlon, J. and Tupper, B.O.J.: 1972, Nuovo Cim. B 7, 305.

O'Hanlon, J. and Tupper, B.O.J.: 1973, Nuovo Cim. B 14, No. 2, 190.

Raychaudhuri, A.K.: 1979, Theoretical Cosmology. Clarendon Press, Oxford.

Raine, D.J.: 1981, Rep. Prog. Phys. 44, 73.

Ruban, V.A. and Finkelstein, A.M.: 1975, Gen. Relativ. Grav. 6, 601.

Schmutzer, E.: 1968, Relativistische Physik, Teuber Verlagsgessell schaft, Leipzig.

Stabell, R.: 1968, Mon. Not. R. astr. Soc. 138, 313.

Weinberg, S.: 1972, Gravitation and Cosmology. Wiley and Sons, N.Y.

Weyl, H.: 1952, Space-Time-Matter. Dover, New York.

Witten, E.: 1981, Nucl. Phys. B 186, 412.

Witten, E.: 1981, Nucl. Phys. B 188, 58.