

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
MAESTRÍA EN CIENCIAS (FÍSICA)

**Fuerza Casimir escalar en una dimensión espacial:
del formalismo canónico a la integral de trayectoria.**

Tesis que presenta:

Fís. Jairo Villafuerte Lara.

Para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Física)



Asesor:

Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl.

Jurado calificador:

Presidente: Dr. Héctor Hugo García Compeán.

Secretario: Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl.

Vocal: Dr. José David Vergara Oliver.

Ciudad de México, Julio de 2016

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
1. Introducción	1
2. Técnicas de uso frecuente para el cálculo de la fuerza Casimir	5
2.1. Cuantización canónica	6
2.2. Fórmula de Abel-Plana	14
2.3. Función Zeta de Riemann	16
2.4. Función de Green	17
3. Integral de trayectoria en mecánica cuántica	23
3.1. Fórmula de Feynman para la amplitud de transición	24
3.2. Funciones de n puntos en mecánica cuántica	31
4. Integral de trayectoria y fuerza Casimir para el campo escalar real	38
4.1. Función de Green libre	39
4.2. Incorporación de dos placas puntuales	43
5. Conclusiones, discusión y perspectivas	52
Apéndice	56

A. Integrales gaussianas	57
Bibliografía	60

Agradecimientos

Quiero agradecer profundamente a mi familia a mis padres Patricio y Porfiria a mi hermano Irving, por su apoyo incondicional y sus valiosos consejos que siempre me motivaron a seguir adelante, y más que eso, su constante cariño.

Agradezco también al grupo polimérico de la UAM, Ernesto, Juan Carlos, Daniel, Melina, Nacho, William, Asihe y Saeed, por sus fructíferas discusiones y su apoyo en los momentos difíciles de la maestría. En especial quiero agradecer a Alejandro alias “El Chung”, por sus valiosas discusiones, consejos y su apoyo total para la realización de la última parte de esta tesis.

También quiero agradecer a mi asesor el Dr. Hugo Aurelio Morales Técotl por sus enseñanzas, paciencia y su valioso apoyo en la realización de este proyecto, agradezco al Dr. Marco Antonio Maceda Santamaría por su ayuda al inicio de esta maestría.

Quiero agradecer de igual manera a mis amigos del posgrado, Gaby, Janeth, Martín, Yosua, Daniel, Julio, Juan Carlos (Chino), Nacho, Sergio, David, Hugo y Alex, quienes me acompañaron en esta etapa de mi vida.

Esta tesis fue realizada con apoyo económico otorgado por CONACyT (CVU/No. Becario **563242/302677**). Así como también con el apoyo del proyecto CONACyT: “Implicaciones físicas de la estructura del espacio tiempo No. 237351”. Y para concluir la tesis recibimos el apoyo como ayudante de investigación, convenio No. 12997, del Sistema Nacional de Investigadores.

Resumen

Una de las ideas físicas más intuitivas que surge en la teoría de los campos cuánticos libres en un espacio tiempo de Minkowski es que éstos pueden describirse como torres de osciladores armónicos¹. Un estado del campo incluye el estado de cada oscilador ó modo. La energía y el ímpetu lineal del campo en un estado dado están determinados por la suma de las energías y del ímpetu lineal de cada modo, respectivamente.

Con frecuencia se asevera que la energía infinita del estado de vacío en la teoría cuántica de campos, a la que contribuyen la torre infinita de osciladores, no es observable, y por esta razón debería definirse usando el ordenamiento normal de operadores para sustraer automáticamente esta contribución. Que esta conclusión es incorrecta fue la observación crucial de Hendrik Brugt Gerhard Casimir en 1948 cuando mostró que las fluctuaciones de vacío de los campos electromagnéticos daban lugar a una fuerza atractiva entre placas paralelas perfectamente conductoras. Su resultado, a temperatura cero, para la fuerza por unidad de área entre placas paralelas separadas por una distancia a es

$$\mathcal{F}_{em} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4}.$$

Por argumentos puramente dimensionales, y considerando la combinación de las constantes \hbar, c y la separación a , sabemos que esta es la dependencia esperada para el valor de esta fuerza. En particular su carácter cuántico es esencial pues esta fuerza se anula en el límite $\hbar \rightarrow 0$. Aun más, es importante observar la ausencia de una dependencia en la carga del electrón, es decir, este efecto

¹Esta descripción de los campos resulta ser inadecuada en espaciotiempos curvos, ver por ejemplo [1], sin embargo es suficiente para nuestro escenario de Minkowski plano.

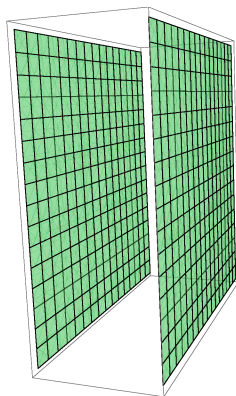


Figura 1: Fuerza Casimir entre placas paralelas conductoras perfectas. En tres dimensiones espaciales las placas consideradas son bidimensionales y resultan atraerse por efectos del vacío cuántico del campo electromagnético cuyo valor de expectación es cero pero no así sus fluctuaciones.

es independiente de la carga y existe para las placas neutras. Notablemente, los experimentos han confirmado la existencia de esta *fuerza Casimir*. A nivel teórico este efecto ha sido considerado en diferentes contextos que van desde la física de altas energías en relación con el confinamiento de quarks hasta el problema de la constante cosmológica. También en escenarios que incluyen un espacio tiempo de más de cuatro dimensiones se han estudiado las modificaciones que surgen a la fuerza Casimir como consecuencia de las dimensiones adicionales [2]. Es interesante subrayar que la consistencia con determinaciones experimentales de la fuerza Casimir impone restricciones sobre estos escenarios.

En esta tesis discutimos diferentes técnicas del cálculo de la fuerza Casimir para el caso de un campo escalar real en un espacio tiempo bidimensional, a saber, cuantización canónica, función zeta de Riemann, fórmula de Abel-Plana, función de Green e integral de trayectoria. Nuestras motivaciones son las siguientes. Por un lado el campo escalar, a diferencia del campo electromagnético, es un modelo suficientemente simple que permite incorporar las características esenciales del efecto Casimir y por otro el espacio tiempo de dos dimensiones nos permite simplificar el análisis correspondiente. Nuestro objetivo principal es investigar la aplicación de la técnica de la integral de trayectoria para calcular la fuerza de vacío entre dos placas puntuales fijas. Como es bien sabido el formalismo de integral de trayectoria es prácticamente indispensable en el estudio de la física de al-

tas energías debido a su carácter manifiestamente covariante de Lorentz, a diferencia del formalismo hamiltoniano. Recientemente, esta técnica se ha empleado para estudiar la cuantización polimérica de sistemas gravitacionales, cuyo interés radica en que se implementa un carácter discreto intrínseco que resulta útil para describir la ausencia de singularidades sea en modelos cósmicos como en agujeros negros. Dejamos como trabajo futuro incorporar la cuantización polimérica con la integral de trayectoria para el cálculo de la fuerza Casimir escalar en dos dimensiones espacio temporales.

Capítulo 1

Introducción

La teoría cuántica de campos combina tres temas principales de la física moderna: mecánica cuántica, el concepto de campo y la relatividad especial [3]. Esta teoría es la base de la física de partículas elementales moderna, y provee de herramientas esenciales a otras teorías tales como la física nuclear, física atómica, física de materia condensada y astrofísica. Adicionalmente la teoría cuántica de campos ha llevado a nuevos puentes entre la física y las matemáticas.

Dependiendo del contexto puede convenir más adoptar uno de los diferentes formalismos de la teoría cuántica de campos. Por ejemplo, la cuantización canónica aplicada a campos libres permite identificar de manera sencilla conceptos físicos básicos como la energía y el momento lineal. Por otro lado el uso de la integral de trayectoria es más conveniente en el estudio de procesos de interacción entre partículas elementales.

En el caso de la cuantización canónica de los campos libres se usa una descomposición en modos de Fourier, cada uno de los cuales está sujeto a una dinámica de oscilador armónico y en consecuencia es susceptible de cuantizarse como un modelo mecánico, en contraste con los infinitos grados de libertad de un campo. Cantidades físicas como la energía y el momento lineal del campo se conforman, respectivamente, por la contribución de los infinitos modos. El estado del campo queda descrito por el conjunto de estados correspondientes a estos modos. En particular, el estado base del campo está asociado con todos y cada uno de los estados base de estos, mismos que contribuyen con

su energía mínima a la del campo. El análisis de las interacciones, sin embargo, es difícil de realizar adecuadamente con este formalismo resultando más conveniente el de integral de trayectoria.

La base del formalismo de integral de trayectoria en su forma más simple es el concepto de amplitud de probabilidad para pasar de una posición inicial de una partícula a otra final habiendo transcurrido un cierto tiempo entre estas dos situaciones [4]. El operador de evolución requerido en la construcción de esta amplitud se sujeta a una partición temporal expresándola de esta manera en una composición de amplitudes en pequeños lapsos. El resultado final es la celebrada fórmula de Feynman que expresa la amplitud como una integral sobre todas las posibles trayectorias que llevan del estado inicial al final con un factor de peso dado por la exponencial imaginaria de la acción clásica del sistema dividida por la constante de Planck; evidentemente este es el propagador de la partícula cuántica. La extensión de este formalismo a la teoría de campo [3] nos lleva a que el propagador correspondiente, dado por el valor de expectación en el vacío del producto ordenado temporal del campo consigo mismo, puede obtenerse a partir de la amplitud vacío-vacío en presencia de una fuente externa y que se expresa usando la integral de trayectoria para los campos. Esta integral contiene la exponencial de la acción lagrangiana del campo, que es manifiestamente covariante en contraste con el formalismo hamiltoniano. La incorporación de interacciones puede implementarse en el cálculo de la amplitud de transición en un esquema perturbativo dado en términos de los diagramas de Feynman[3].

Evidentemente el estado de vacío del campo juega un papel preponderante en la descripción de la teoría. En particular las propiedades físicas de este estado en presencia de fronteras que dan lugar a la fuerza entre dos placas conductoras neutras, predicha por H.B.G. Casimir [5], ha sido uno de los descubrimientos más sorprendentes en la teoría de campos. Curiosamente este resultado surgió como consecuencia del estudio de la interacción entre átomos o moléculas formando coloides. Buscando compatibilidad con los datos experimentales, Casimir y Polder [6] propusieron incorporar correcciones de electrodinámica cuántica a esta interacción de modo que efectivamente a suficientemente grandes separaciones, R , se obtenía un factor adicional $1/R$ con respecto a la forma usual $1/R^6$ asociada con las fuerzas de London-Van der Waals de origen dipolar y que es adecuada para pequeñas separaciones. En este análisis se utilizó la interacción entre paredes y átomos que aparen-

temente sugirió a Casimir considerar la energía de vacío del campo electromagnético en presencia de dos placas conductoras perfectas y neutras. El resultado es una cantidad finita equivalente a una fuerza por unidad de área entre las placas que es atractiva y proporcional a la cuarta potencia inversa de la separación entre ellas [5]. Numéricamente se tiene

$$\mathcal{F}_{em} = -\frac{\pi^2 \hbar c}{240a^4} = -1,30 \times 10^{-27} Nm^2 a^{-4},$$

dando como resultado una fuerza de aproximadamente $13N/cm^2$ para una separación del orden de μm . Este efecto fue medido para el caso de conductores dentro de un error del 5% por Lamoreaux [7] y quizás dentro del 1% por Mohideen y Roy [8, 9, 10], entre otros [11, 12].

Genéricamente podemos pensar al efecto Casimir como una presión sobre superficies frontera ocasionada por el confinamiento de un campo cuántico en una región finita del espacio. Las fronteras pueden ser medios materiales, con propiedades electromagnéticas tales como funciones dieléctricas, en cuyo caso habrá campos en ambos lados de la frontera material. Las fronteras pueden también representar la interfase entre dos fases diferentes del vacío del campo como en la cromodinámica cuántica; en este caso los campos de color pueden existir únicamente en la región interior. Por otro lado, las fronteras pueden representar la topología del espacio, como en teorías multidimensionales (Kaluza-Klein ó mundos brana) donde las dimensiones extras están restringidas a una geometría finita como una circunferencia, una esfera u otros espacios más complicados. En cualquier caso las fronteras restringen los modos de los campos cuánticos y dan lugar a fuerzas que pueden calcularse generalmente bajo ciertas aproximaciones. Sus implicaciones incluyen la física a diferentes escalas comprendiendo desde el caso de los quarks hasta posiblemente la constante cosmológica. Para un recuento de todas estas aplicaciones y la universalidad del efecto Casimir puede consultarse la monografía de Milton [13].

Si bien existen varias técnicas para el cálculo de la fuerza Casimir que incluyen desde el formalismo canónico hasta la función de Green, nuestro objetivo en esta tesis es analizar la aplicación de la integral de trayectoria a este efecto. Hay al menos tres motivaciones para completar esta tarea. Primero, las ventajas del uso de la integral de trayectoria sugieren su estudio en el caso de la fuer-

za Casimir y contrastarlo con los otros métodos conocidos. Segundo, como es bien sabido existen correcciones cuánticas basadas en desarrollos perturbativos que pueden contribuir a modificar este efecto y esto es adecuadamente implementado en la integral de trayectoria [13]. Por último, trabajo reciente en relación con la cuantización por lazos de la gravitación aplicada a modelos cosmológicos y agujeros negros ha mostrado una eliminación de sus singularidades [14, 15]. En particular la versión con integral de trayectoria ha permitido la construcción de acciones efectivas que incorporan cierta discretez y evitan las singularidades mencionadas [16]. Es de interés estudiar posibles efectos de este formalismo sobre la fuerza Casimir. Esencialmente limitaremos nuestro análisis para atender la primera de estas motivaciones. Nuestra presentación seguirá de cerca el trabajo de Golestanian y Kardar [17] así como la monografía de Bordag, et al [18]. Nosotros, adicionalmente, incluimos elementos previos como el propagador del campo escalar libre así como detalles pertinentes del cálculo para facilitar su seguimiento al lector.

La estructura de la tesis es como sigue. En el capítulo II estudiamos las técnicas de uso más frecuente para el cálculo de la fuerza o la energía Casimir incluyendo: el formalismo canónico, la fórmula de Abel-Plana, la función Zeta de Riemann y la función de Green. Con el fin de aportar elementos previos a la discusión de la integral de trayectoria para el campo escalar, en el capítulo III recordamos las bases del cálculo de la amplitud de transición de un sistema mecánico usando la integral de trayectoria. En particular introducimos la función de n -puntos que es el predecesor del propagador en el caso de campos. El contenido del capítulo IV consiste de la aplicación de la integral de trayectoria al cálculo del propagador del campo escalar libre primero, y, después, se implementan las condiciones de frontera correspondientes a la presencia de las placas. Esto se logra mediante términos de acoplamiento del campo a potenciales delta centrados en las posiciones de las placas. Finalmente el límite de acoplamiento infinito permite obtener la fuerza Casimir. Para terminar, en el capítulo V, damos nuestras conclusiones, discutimos el análisis realizado y planteamos las perspectivas del trabajo a futuro.

Capítulo 2

Técnicas de uso frecuente para el cálculo de la fuerza Casimir

Antes de implementar la integral de trayectoria para campos en el cálculo de la fuerza Casimir es importante conocer otros esquemas que permiten determinar esta fuerza. Cada uno aporta diferentes aspectos físicos a la descripción del fenómeno y ello justifica su presentación conjunta en el presente capítulo.

Con el único objetivo de simplificar la presentación en la tesis nos enfocamos en el caso de un espacio tiempo de 1+1 dimensiones, salvo cuando especifiquemos lo contrario. Considerando que la cuantización canónica es el esquema más elemental y por tanto accesible para discutir el efecto Casimir y los otros se entienden mejor una vez conocido este, lo presentamos primero. Seguiremos de cerca la discusión en [19]. Después las siguientes secciones implementan la fórmula de Abel-Plana, la función Zeta de Riemann y concluyen con el método de función de Green [13]. La técnica de la integral de trayectoria se discutirá en el capítulo 3 para sistemas mecánicos, y para el cálculo de la fuerza Casimir del campo escalar en el capítulo 4.

2.1. Cuantización canónica

Consideremos un campo escalar real $\phi = \phi(x) = \phi(x^0, x^1)$ con $x^0 = ct$, en un espacio tiempo plano con métrica $ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2$. Es útil considerar una formulación lagrangiana como punto de partida para definir la cuantización canónica, y como veremos en el capítulo 4, la correspondiente integral de trayectoria. Para el campo escalar la acción y densidad lagrangiana son

$$S_0 = \int d^2x \mathcal{L}, \quad (2.1)$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^2 \quad (2.2)$$

El uso de las ecuaciones de Euler-Lagrange [20, 21],

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \quad (2.3)$$

nos lleva a la ecuación de Klein-Gordon

$$\left(\square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi = 0, \quad (2.4)$$

$$\square := \frac{1}{c^2} \partial_{tt}^2 - \partial_{11}^2.$$



Figura 2.1: Representación del efecto Casimir en una dimensión espacial. Los círculos indican las placas puntuales separadas por una distancia a .

Ahora, históricamente, en el efecto Casimir se consideró la presencia de placas conductoras perfectas y un campo electromagnético. Las condiciones de frontera pertinentes entonces corresponden a campo eléctrico nulo en las placas. Por esta razón en nuestro caso de campo escalar usaremos las condiciones de frontera tipo Dirichlet

$$\phi(t, x^1 = 0) = \phi(t, x^1 = a) = 0. \quad (2.5)$$

Para continuar con el análisis conviene tomar en cuenta el siguiente producto escalar, que es preservado bajo evolución temporal a la luz de la ecuación de Klein-Gordon¹ (2.4),

$$(\phi_1, \phi_2) := \frac{i}{\hbar c} \int_0^a dx^1 (\phi_1^* \partial_t \phi_2 - \phi_2 \partial_t \phi_1^*). \quad (2.6)$$

La ecuación (2.4) tiene como soluciones normalizadas respecto a (2.6)

$$u_n^{(\pm)}(x) = \left(\frac{\hbar c}{a \omega_n} \right)^{1/2} e^{\mp i \omega_n t} \text{sen}(k_n x^1), \quad (2.7)$$

$$\omega_n = \left[\frac{m^2 c^4}{\hbar^2} + c^2 k_n^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (2.8)$$

$$k_n = \frac{\pi n}{a}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

Mismas que cumplen

$$\begin{aligned} (u_n^{(+)}, u_m^{(+)}) &= \delta_{nm}, \\ (u_n^{(-)}, u_m^{(-)}) &= -\delta_{nm}, \\ (u_n^{(+)}, u_m^{(-)}) &= 0. \end{aligned}$$

La cuantización canónica para los campos puede introducirse a través de sus modos de Fourier.

¹Observemos que utilizamos campos complejos en esta definición. Esto se debe a que la descomposición en modos que usaremos requiere soluciones complejas que resultan en energías reales. El factor de i es necesario para asignar norma positiva a los modos de energía positiva mientras que el factor $\hbar c$ asegura el carácter adimensional del producto interno.

Con este fin proponemos la descomposición

$$\hat{\phi}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[u_n^{(-)} a_n^\dagger + u_n^{(+)} a_n \right], \quad (2.9)$$

donde a y a^\dagger son operadores de aniquilación y creación, respectivamente, y satisfacen relaciones de conmutación, consistentes con las del campo y su momento canónico

$$\left[\hat{\phi}(x^1), \hat{\pi}(x'^1) \right] = i\hbar\delta(x^1 - x'^1) \quad (2.10)$$

con

$$\hat{\pi}(x) = \frac{1}{c} \partial_t \hat{\phi}(x). \quad (2.11)$$

A partir de la expresión (2.9) y el producto interno (2.6) se pueden reescribir los operadores a y a^\dagger en términos del campo como sigue

$$a_n = -\frac{i}{\hbar c} \int_0^a dx^1 \left\{ \hat{\phi} \partial_t u_n^{(-)} - \partial_t \hat{\phi} u_n^{(-)} \right\}, \quad (2.12)$$

$$a_m^\dagger = \frac{i}{\hbar c} \int_0^a dx^1 \left\{ \hat{\phi} \partial_t u_m^{(+)} - \partial_t \hat{\phi} u_m^{(+)} \right\}. \quad (2.13)$$

Estos operadores satisfacen las siguientes relaciones de conmutación

$$[a_n, a_m^\dagger] = \delta_{nm}, \quad [a_n, a_m] = [a_n^\dagger, a_m^\dagger] = 0. \quad (2.14)$$

Dado que el efecto Casimir es un fenómeno asociado al estado de vacío procedemos ahora a describir este último como el estado de mínima energía. Con este fin recurrimos a la densidad hamiltoniana²

$$\frac{\mathcal{H}}{c} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} \partial_t \phi - \mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} (\partial_t \phi)^2 + (\partial_x \phi)^2 \right] + \frac{1}{2} \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi^2, \quad (2.15)$$

²Notemos el factor $1/c$. Este es consecuencia de la relación entre el momento del campo y el tensor de energía momento $P^\mu = \int d^3x \Theta^{\mu 0}$, $\Theta^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}$. Es decir, la componente $\mu = 0$ del momento cumple $P^0 = \frac{E}{c} = \int d^3x \Theta^{00} = \int d^3x \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} \partial_t \phi - \mathcal{L} \right) = \int d^3x \frac{\mathcal{H}}{c}$.

cuya integral espacial en el intervalo $[0, a]$ nos da la energía contenida en esa región

$$H = \int_0^a dx^1 \mathcal{H}. \quad (2.16)$$

Usando la descomposición en modos (2.9) así como (2.7) y (2.8), el operador hamiltoniano toma la forma

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} \hbar \omega_n \left(a_n^\dagger a_n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.17)$$

Evidentemente la combinación de operadores $a_n^\dagger a_n$ juega un papel preponderante por lo que se introduce el operador hermítico

$$N_n := a_n^\dagger a_n. \quad (2.18)$$

Este operador satisface las siguientes relaciones

$$[N_n, a_m] = -\delta_{n,m} a_n, \quad (2.19)$$

$$[N_n, a_m^\dagger] = \delta_{n,m} a_n^\dagger, \quad (2.20)$$

mismas que implican para los eigenestados

$$N_n |\lambda_n\rangle = \lambda_n |\lambda_n\rangle, \quad (2.21)$$

las respectivas relaciones

$$N_n (a_n |\lambda_n\rangle) = (\lambda_n - 1) (a_n |\lambda_n\rangle), \quad (2.22)$$

$$N_n (a_n^\dagger |\lambda_n\rangle) = (\lambda_n + 1) (a_n^\dagger |\lambda_n\rangle). \quad (2.23)$$

Evidentemente a_n y a_n^\dagger son operadores de escalera que bajan y suben, respectivamente, en una unidad el eigenvalor λ_n . El espectro de N_n , y por tanto de H , puede obtenerse a partir de la

siguiente observación: la norma de los estados debe ser no negativa. Concretamente

$$\|a_n |\lambda_n\rangle\| \geq 0. \quad (2.24)$$

Explícitamente tenemos que (2.24) implica que

$$\begin{aligned} \langle \lambda_n | a_n^\dagger a_n | \lambda_n \rangle &= \langle \lambda_n | N_n | \lambda_n \rangle \\ &= \lambda_n \langle \lambda_n | \lambda_n \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

pero $\langle \lambda_n | \lambda_n \rangle \geq 0$ por lo que $\lambda_n \geq 0$. Dado que los eigenvalores pueden disminuir en una unidad por la acción de a_n sobre $|\lambda_n\rangle$ su mínimo valor posible es cero y por tanto

$$\lambda_{n_j} = j_n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

Finalmente el espectro de energía viene dado por

$$E_{n_j} = \hbar\omega_{n_j} \left(j_n + \frac{1}{2} \right), \quad j_n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.26)$$

mientras que los eigenestados correspondientes son

$$|\lambda_{n_j}\rangle = |j_n\rangle, \quad j_n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

El estado de vacío, o de mínima energía, del campo se define de la siguiente manera

$$|0\rangle = \bigotimes_{n_j=1}^{\infty} |0_{n_j}\rangle, \quad (2.28)$$

$$a_{n_j} |0_{n_j}\rangle = 0, \quad n_j = 1, 2, \dots \quad (2.29)$$

Una vez caracterizado el estado de vacío del campo escalar masivo procedemos a estudiar el

valor de expectación de la energía en este estado. Tenemos que

$$E(a, m) := \langle 0 | H | 0 \rangle = \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n. \quad (2.30)$$

Es claro de (2.8) y (2.30) que la serie para la energía de vacío no converge independientemente de si el campo es masivo o no. Con el fin de extraer la información física requerida es indispensable entender el origen de esta divergencia. Existen varios esquemas para completar esta tarea. En esta sección adoptaremos la incorporación de un regulador que nos permite aislar la divergencia y calcular la energía física de vacío que es finita. De ahora en adelante consideraremos el caso de campo escalar no masivo. Concretamente agregamos una exponencial decreciente a los términos de la serie para obtener una modificada como sigue

$$\begin{aligned} E_\epsilon(a, 0) &:= \frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi n c}{a} e^{-\frac{\pi n c}{a} \epsilon} \\ &= -\frac{d}{d\epsilon} \left(\frac{\hbar}{2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi n c}{a} \epsilon} \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Esta serie puede sumarse como sigue. Consideremos la suma

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nz} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+1)z} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2nz} \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{cosech}(z) + \frac{1}{2} e^z \operatorname{cosech}(z) - 1 \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{cosech}(z) (e^z + 1) - 1, \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde en la segunda igualdad usamos la relación 3 de la sec. 1.23 de [22]. Insertando (2.32) en (2.31) y considerando las identidades $\operatorname{senh}(2z) = 2\operatorname{senh}(z)\operatorname{cosh}(z)$ y $\operatorname{cosh}^2(\frac{z}{2}) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{cosh}(z))$ obtenemos

$$E_\epsilon(a, 0) = \frac{\pi \hbar c}{8a} \frac{1}{\operatorname{senh}^2(\frac{c\pi\epsilon}{2a})}. \quad (2.33)$$

Con el fin de identificar la energía de vacío física y por tanto finita con $\epsilon \rightarrow 0$ tomamos como

referencia el desarrollo de Laurent siguiente

$$\frac{1}{\sinh(z)} = \operatorname{cosech}(z) = \frac{1}{z} - \frac{z}{6} + \frac{7z^3}{360} - \frac{31z^5}{15120} + \dots \quad (2.34)$$

Así que (2.33) toma la forma

$$E_\epsilon(a, 0) = \frac{\pi \hbar c}{8a} \left[\frac{4a^2}{\pi^2 c^2} \frac{1}{\epsilon^2} - \frac{1}{3} + O(\epsilon^2) \right], \quad (2.35)$$

y la energía entre placas se puede identificar con la expresión

$$E^{fis}(a, 0) = -\frac{\pi \hbar c}{24a}, \quad (2.36)$$

lo cual implica la siguiente definición

$$E^{fis}(a, 0) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} [E_\epsilon(a, 0) - E_\epsilon^M(a, 0)] \quad (2.37)$$

donde $E_\epsilon^M(a, 0) = \frac{\hbar a}{2\pi c} \frac{1}{\epsilon^2}$ es la contribución divergente a la energía y como veremos a continuación puede asociarse con la energía contenida en la misma región del espacio pero en ausencia de placas.

La energía de vacío en ausencia de placas contenida en la región espacial $[0, a]$ se calcula siguiendo un procedimiento similar al caso anterior. En ausencia de placas los modos solución de la ecuación de Klein-Gordon toman la forma

$$v_k^{(\pm)}(x) = \left(\frac{\hbar c}{2\pi 2\omega_k} \right)^{1/2} e^{\mp i\omega_k t} e^{ikx^1}, \quad x^1 \in (-\infty, +\infty), \quad (2.38)$$

$$\omega_k = |k|c, \quad k \in (-\infty, +\infty), \quad (2.39)$$

y en este caso los modos están normalizados a la delta de Dirac

$$\delta(k' - k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(k' - k)x^1} dx^1. \quad (2.40)$$

La descomposición del campo ahora toma la forma

$$\hat{\phi}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[v_k^{(-)} b_k^\dagger + v_k^{(+)} b_k \right]. \quad (2.41)$$

Ahora los operadores de escalera satisfacen las relaciones de conmutación

$$\left[b_k, b_{k'}^\dagger \right] = \delta(k - k'), \quad \left[b_k, b_{k'} \right] = \left[b_k^\dagger, b_{k'}^\dagger \right] = 0. \quad (2.42)$$

El estado de vacío en ausencia de placas se define como

$$|0\rangle = \bigotimes_{k_i} |0_{k_i}\rangle, \quad (2.43)$$

$$b_{k_i} |0_{k_i}\rangle = 0, \quad k_i \in (-\infty, +\infty). \quad (2.44)$$

De esta manera la densidad de energía del vacío para el campo escalar en ausencia de placas en la región $[0, a]$ resulta ser

$$\begin{aligned} \frac{E_0}{a} &= \langle 0 | \mathcal{H} | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar\omega}{2} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hbar |k| c}{2} dk \\ &= \frac{\hbar c}{2\pi} \int_0^{\infty} k dk \quad . \end{aligned} \quad (2.45)$$

Es claro que esta densidad de energía es divergente. Procediendo de nuevo con la inclusión de un regulador exponencial tenemos la siguiente relación para la energía de vacío

$$\begin{aligned}
E_0^\epsilon &= \frac{\hbar a}{2\pi} \int_0^\infty \omega e^{-\epsilon\omega} dk \\
&= \frac{\hbar a}{2\pi c} \int_0^\infty \omega e^{-\epsilon\omega} d\omega \\
&= \frac{\hbar a}{2\pi c} \frac{1}{\epsilon^2}.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Comparando (2.46) con (2.35) podemos realizar la siguiente identificación

$$E_0^\epsilon = E_\epsilon^M(a, 0). \tag{2.47}$$

La relación (2.47) provee la interpretación mencionada antes de que la energía de vacío del campo escalar en presencia de placas es finita cuando se regulariza restando la contribución de la energía de vacío en ausencia de placas, ecuación (2.37).

Una vez aclarada la interpretación de la energía física de vacío correspondiente al campo escalar en presencia de dos placas puntuales podemos determinar la fuerza que se ejercen tales placas. Es decir

$$\mathcal{F} = -\frac{dE^{fis}(a, 0)}{da} = -\frac{\pi\hbar c}{24a^2}. \tag{2.48}$$

Esta es la fuerza Casimir para campo escalar sin masa en una dimensión espacial análoga a la electromagnética obtenida por primera vez por H.B.G. Casimir en 1948 [5].

2.2. Fórmula de Abel-Plana

La cuantización canónica del campo escalar y su regularización nos permitieron identificar la energía de Casimir finita a través de las ecs.(2.35, 2.37, 2.47). En esta fórmula aparece la diferencia entre una sumatoria asociada con los modos discretos del campo en presencia de placas y una integral para los modos continuos del campo en ausencia de las mismas. Notablemente existe un análisis que trata con este tipo de expresiones matemáticas que consiste en la llamada fórmula de Abel-Plana [19, 23]. Esta nos provee de una estrategia de cálculo y específicamente toma la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_{\epsilon}(n) - \int_0^{\infty} F_{\epsilon}(k) dk = \frac{1}{2} F_{\epsilon}(0) + i \int_0^{\infty} \frac{F_{\epsilon}(it) - F_{\epsilon}(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt, \quad (2.49)$$

donde $F_{\epsilon}(n) = (\frac{\hbar}{2})(\frac{\pi n c}{a})f(\frac{\pi n c}{a}\epsilon)$ con $f(\frac{\pi n c}{a}\epsilon)$ una función suave y F es una función analítica en el medio plano complejo z , $\text{Re}(z) > 0$, y la suma y la integral existen. En nuestro caso tenemos

$$\begin{aligned} F_{\epsilon}(n) &= \frac{\hbar}{2} \left(\frac{\pi n c}{a} \right) e^{-\frac{\pi n c}{a} \epsilon}, \\ F_{\epsilon}(k) &= \frac{\hbar k}{2} e^{-k \epsilon}, \end{aligned}$$

de modo que la ec. (2.37) toma la forma

$$\begin{aligned} E^{fis}(a, 0) &= \frac{1}{2}(0) + i \int_0^{\infty} \frac{\frac{\pi \hbar c}{2a}(it) - \frac{\pi \hbar c}{2a}(-it)}{e^{2\pi t} - 1} dt \\ &= -\frac{\pi \hbar c}{a} \int_0^{\infty} \frac{t}{e^{2\pi t} - 1} dt. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Haciendo el cambio de variable $u = 2\pi t$ en la integral que aparece en (2.50) y usando la relación

$$\frac{1}{e^u - 1} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-ku}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} E^{fis}(a, 0) &= -\frac{\pi \hbar c}{a} \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} u e^{-ku} du \\ &= -\frac{\pi \hbar c}{a} \frac{1}{(2\pi)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \\ &= -\frac{\pi \hbar c}{a} \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{\pi^2}{6} \\ &= -\frac{\pi \hbar c}{24a}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

donde en la segunda igualdad hemos utilizado $\int_0^\infty ue^{-ku} du = \frac{1}{k^2}$, y en la tercera igualdad usamos la función Zeta de Riemann $\zeta(d) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^d}$, con $d = 2$: $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. De esta manera reobtenemos a través de la fórmula de Abel-Plana la energía física de Casimir para el campo escalar sin masa en una dimensión espacial, ec. (2.36) .

2.3. Función Zeta de Riemann

Otro método de regularización en teoría cuántica de campos que permite tener control de sus divergencias se basa en las propiedades de la función Zeta de Riemann. Esencialmente su continuación analítica combinada con otras propiedades nos permite extraer cantidades físicas finitas y eliminar las divergencias. Para nuestro sistema de campo escalar sin masa en presencia de placas puntuales en una dimensión espacial hemos visto que la energía en el estado de vacío puede escribirse usando (2.30) como

$$E(a, 0) = \frac{\pi \hbar c}{2a} \sum_{n=1}^{\infty} n. \quad (2.52)$$

La función zeta de Riemann para z compleja con $\text{Re}(z) > 1$ se define como [24]

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}. \quad (2.53)$$

Comparando (2.52) con (2.53) vemos que la energía de vacío puede expresarse usando la función Zeta de Riemann como

$$E(a, 0) = \frac{\pi \hbar c}{2a} \zeta(-1).$$

Desafortunadamente $\zeta(-1)$ no está bien definida como puede verse de la ec. (2.53) pues la serie resultante no converge. Sin embargo es posible resolver esta situación usando la continuación analítica de la función, en particular su propiedad de reflexión que se expresa de la siguiente manera [24]

$$\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \pi^{-z/2} \zeta(z) = \Gamma\left(\frac{1-z}{2}\right) \pi^{\frac{z-1}{2}} \zeta(1-z), \quad (2.54)$$

donde Γ es la función Gamma. Usando (2.54) con $z = -1$ y $\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi}$, $\Gamma(1) = 1$, $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, obtenemos $\zeta(-1) = -1/12$. De esta manera obtenemos por el método de la función Zeta de Riemann la energía, ec. (2.36), y por tanto la fuerza de Casimir, ec. (2.48).

2.4. Función de Green

Entre los métodos de cálculo de la fuerza Casimir uno de los más intuitivos y elegantes es el que se basa en el uso de la función de Green del operador diferencial involucrado. La idea de su aplicación es como sigue. Recordemos que en las teorías de campos en 3+1 dimensiones espacio temporales el tensor de energía momento determina el flujo de momento lineal por unidad de área y por unidad de tiempo a través de un elemento de área. En el efecto Casimir usual las placas están conformadas naturalmente por estos elementos de área y la diferencia de los valores del tensor de energía momento a la derecha y a la izquierda de la placa efectivamente nos da la fuerza por unidad de área que sufre ésta. Ahora bien, en el estado de vacío, el valor de expectación del tensor de energía momento puede relacionarse con el límite de puntos coincidentes de derivadas de la función de Green del campo. De este modo la fuerza por unidad de área sobre la placa puede determinarse como la diferencia de las contribuciones de las funciones de Green a la derecha y a la izquierda de la misma.

Para nuestro sistema de campo escalar sin masa en un espacio tiempo de 1+1 dimensiones, las placas a considerar son puntuales y el tensor de energía momento correspondiente es un flujo de momento lineal por unidad de tiempo. Discutimos ahora el cálculo de la fuerza Casimir por el método de la función de Green para este caso.

El método de función de Green parte de la ecuación de campo con fuentes. La ecuación de Klein-Gordon para el campo escalar sin masa, ec. (2.4), toma la forma

$$\square\phi = J. \tag{2.55}$$

La función de Green del operador \square se define como

$$\square G(x, x') = \delta^2(x - x'), \quad x^0 = ct, \quad (2.56)$$

de modo que la solución de (2.55) puede expresarse como

$$\phi(x) = \int d^2x' G(x, x') J(x'). \quad (2.57)$$

Observemos que en nuestro caso de un espacio tiempo bidimensional las coordenadas espaciales x^1, x'^1 pueden encontrarse en una de las tres regiones definidas por la presencia de las placas puntuales ubicadas en $x^1 = 0, a$. Estas regiones son $(-\infty, 0]$, $[0, a]$ y $[a, \infty)$.

Calcularemos la fuerza sobre la placa ubicada en $x^1 = a$; para la otra placa el cálculo es similar. Necesitamos la contribución de la región entre placas, misma que calculamos primero, y la de la región a la derecha de esta placa subsecuentemente. Las condiciones de frontera tipo Dirichlet que se imponen sobre el campo escalar de modo que este se anule en las placas implica la siguiente condición sobre la función de Green, ec. (2.57),

$$G(ct, x^1 = 0; ct', x'^1) = G(ct, x^1 = a; ct', x'^1) = 0, \quad 0 \leq x^1, x'^1 \leq a. \quad (2.58)$$

Para proceder con la determinación de la función de Green conviene utilizar su transformada de Fourier temporal

$$G(x, x') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi c} e^{-i\omega(t-t')} g_\omega(x^1, x'^1). \quad (2.59)$$

En términos de $g_\omega(x^1, x'^1)$ la ecuación (2.56) y las condiciones de frontera (2.58) toman la forma

$$-\left(\partial_{11}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) g_\omega(x^1, x'^1) = \delta(x^1 - x'^1), \quad (2.60)$$

y

$$g_\omega(x^1 = 0, x'^1) = g_\omega(x^1 = a, x'^1) = 0. \quad (2.61)$$

Considerando la forma del operador diferencial $\hat{O} = -\left(\partial_{t_1}^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)$ en (2.60) esperamos que la solución se exprese en términos de funciones trigonométricas. En efecto, usando el carácter discontinuo de su primera derivada y la continuidad de la función $g_\omega(x^1, x'^1)$ en $0 \leq x^1 = x'^1 \leq a$ se obtiene que

$$g_\omega(x^1, x'^1) = -\frac{1}{\frac{\omega}{c} \sin(\frac{\omega}{c}a)} \sin(\frac{\omega}{c}(x^1_{>} - a)) \sin(\frac{\omega}{c}x^1_{<}), \quad (2.62)$$

donde $x^1_{>}$ ($x^1_{<}$) representa la mayor (menor) de las posiciones espaciales x^1, x'^1 .

Ahora estudiaremos la relación entre la función de Green y el tensor de energía momento. Para el campo escalar este tensor se define como

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi)} \partial_\nu \phi - \eta_{\mu\nu} \mathcal{L}, \quad \mu, \nu = 0, 1, \quad (2.63)$$

y considerando el lagrangiano (2.1) para el caso sin masa obtenemos

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \partial^\lambda \phi \partial_\lambda \phi. \quad (2.64)$$

Por otro lado de la teoría cuántica de campos tenemos la siguiente relación entre la función de Green y el valor de expectación del producto ordenado temporal de los campos, la cual estudiaremos en el capítulo 4 (ver también [20, 21, 25]),

$$\langle 0|T[\phi(x)\phi(x')]|0\rangle = \frac{\hbar}{i} G(x, x'), \quad (2.65)$$

donde T es un operador de ordenamiento temporal definido como

$$T[A(t_1)B(t_2)] = \left\{ \begin{array}{ll} A(t_1)B(t_2), & \text{si } t_1 > t_2, \\ B(t_2)A(t_1), & \text{si } t_2 > t_1. \end{array} \right\} \quad (2.66)$$

Notemos que para nuestro caso de una sola dimensión espacial la placa en $x^1 = a$ está sujeta a un flujo de momento por unidad de tiempo en la dirección x^1 determinado por T_{11} . Podemos ahora combinar (2.64) y (2.65) para obtener este flujo de momento

$$\begin{aligned}
\langle T_{11}(ct, x^1 = a) \rangle &= \lim_{x^1, x'^1 \rightarrow a, t' \rightarrow t} \left(\frac{1}{2} \partial_1 \partial_{1'} + \frac{1}{2c^2} \partial_t \partial_{t'} \right) \langle 0 | T[\phi(x)\phi(x')] | 0 \rangle \\
&= \lim_{x^1, x'^1 \rightarrow a, t' \rightarrow t} \left(\frac{1}{2} \partial_1 \partial_{1'} + \frac{1}{2c^2} \partial_t \partial_{t'} \right) \frac{\hbar}{i} G(x, x') \\
&= \lim_{x^1, x'^1 \rightarrow a, t' \rightarrow t} \left(\frac{1}{2} \partial_1 \partial_{1'} + \frac{1}{2c^2} \partial_t \partial_{t'} \right) \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi c} e^{-i\omega(t-t')} g_\omega(x^1, x'^1) \\
&= \lim_{x^1, x'^1 \rightarrow a, t' \rightarrow t} \frac{\hbar}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi c} e^{-i\omega(t-t')} \left(\partial_1 \partial_{1'} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) g_\omega(x^1, x'^1) \\
&= \lim_{x^1, x'^1 \rightarrow a} \frac{\hbar}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi c} \left(\partial_1 \partial_{1'} + \frac{\omega^2}{c^2} \right) g_\omega(x^1, x'^1) \\
&= -\frac{\hbar}{2i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi c} \frac{\omega}{c} \cot\left(\frac{\omega}{c}a\right). \tag{2.67}
\end{aligned}$$

Esta integral no existe como puede verse del comportamiento de la función $\cot x$, un resultado que no es sorprendente considerando los esquemas previos para el cálculo de la fuerza Casimir con los que vimos que debíamos regularizar las expresiones correspondientes. Con este fin realizamos como primer paso el siguiente cambio a frecuencias imaginarias $\frac{\omega}{c} \rightarrow i\kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$, que nos permite reemplazar (2.67) por

$$\langle T_{11}(ct, x^1 = a) \rangle = -\frac{\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \kappa \coth \kappa a, \tag{2.68}$$

cuyo comportamiento es relativamente mejor pero continua estando mal definida. Para arreglar esto y como segundo paso combinaremos (2.68) con la contribución del flujo de momento a la derecha de la placa.

Ahora bien la transformada de Fourier temporal de la función de Green a la derecha de la placa ubicada en $x = a$ satisface las siguientes condiciones de frontera

$$g_\omega^{der}(x^1 = a, x'^1) = 0, \quad g_\omega^{der}(x^1 \rightarrow \infty, x'^1) \sim e^{i\frac{\omega}{c}x^1}, \tag{2.69}$$

la segunda correspondiendo al carácter libre en la región lejos de la placa. Un análisis similar al caso entre placas da como resultado

$$g_{\omega}^{der}(x, x') = \frac{1}{\frac{\omega}{c}} \sin\left(\frac{\omega}{c}(x_{<}^1 - a)\right) e^{i\frac{\omega}{c}(x_{>}^1 - a)}. \quad (2.70)$$

El flujo de momento a la derecha de la placa ahora toma la forma

$$\langle T_{11}^{der}(ct, x^1 = a) \rangle = \frac{\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi c} \frac{\omega}{c}, \quad (2.71)$$

donde la integral del lado derecho será de utilidad en la regularización que buscamos. Para combinar este flujo con el interior primero efectuamos la rotación a frecuencias imaginarias de manera que (2.71) se reemplaza por

$$\langle T_{11}^{der}(ct, x^1 = a) \rangle = -\frac{\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \kappa. \quad (2.72)$$

A este punto estamos listos para calcular la fuerza sobre la placa ubicada en $x = a$ como la diferencia entre (2.68) y (2.72), es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= c \langle T_{11}(ct, x^1 = a) \rangle - c \langle T_{11}^{der}(ct, x^1 = a) \rangle \\ &= -\frac{\hbar c}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{2\pi} \kappa (\coth(\kappa a) - 1), \end{aligned} \quad (2.73)$$

donde hemos agregado un factor de c a los flujos relativistas de momento que tienen dimensiones de momento sobre longitud para convertirlos a dimensiones de momento entre tiempo. Enseguida analizamos la integral en (2.73), para lo cual explotamos la paridad del integrando y utilizamos la forma exponencial de la cotangente hiperbólica para reescribirla como

$$\mathcal{F} = -\frac{\hbar c}{\pi} \int_0^{\infty} d\kappa \frac{\kappa}{e^{2\kappa a} - 1}. \quad (2.74)$$

Finalmente usando la definición de la función zeta de Riemann en forma integral sobre el semieje

real, (véase en [26]),

$$\int_0^{\infty} dy \frac{y^{s-1}}{e^y - 1} = \Gamma(s)\zeta(s), \quad (2.75)$$

obtenemos que (2.74) toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= -\frac{\hbar c}{4\pi a^2} \Gamma(2)\zeta(2) \\ &= -\frac{\pi \hbar c}{24a^2}, \end{aligned} \quad (2.76)$$

donde usamos $\Gamma(2) = 1$ y $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, para obtener la fuerza entre las placas puntuales para el campo escalar sin masa en un espacio tiempo de 1+1 dimensiones, en concordancia con los análisis previos (2.48).

Capítulo 3

Integral de trayectoria en mecánica cuántica

En este capítulo describimos algunos aspectos introductorios del formalismo de Feynman de la mecánica cuántica de sistemas con un número finito grados de libertad. Estos nos servirán como referencia para que en el siguiente capítulo analicemos este formalismo aplicado a un campo escalar y al cálculo de la fuerza Casimir correspondiente.

Un cálculo común en la física de partículas es el de una sección eficaz para una colisión de algún proceso particular, por ejemplo el de electrón-electrón $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$. De acuerdo con Feynman en un primer orden de aproximación el proceso se representa con el “diagrama de Feynman” de la Fig.3.1, y la parte crucial de este diagrama es la “propagación” del fotón entre los dos electrones. Las “reglas de Feynman” permiten asociar un diagrama con cada una de las amplitudes de transición. Asimismo, la amplitud total (que puede incluir varios diagramas para cada proceso) permite determinar la sección eficaz. En este capítulo se mostrará como la mecánica cuántica puede ser formulada para que el proceso de dispersión pueda ser entendido directamente en estos términos. Primero estableceremos la integral de trayectoria de Feynman y su relación con el propagador en mecánica cuántica y después discutimos otras cantidades, las funciones de n puntos que son esenciales en la

teoría cuántica de campos. En este capítulo seguiremos de cerca [20].

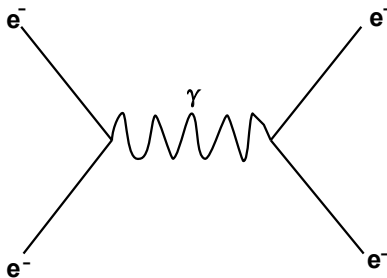


Figura 3.1: Ilustración del proceso de colisión $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ mediante un diagrama de Feynman. El intercambio de un fotón surge del formalismo de interacción electromagnética.

3.1. Fórmula de Feynman para la amplitud de transición

En la formulación usual de la mecánica cuántica, las cantidades q y p son reemplazadas por operadores los cuales obedecen las relaciones de conmutación de Heisenberg. La matemática que se invoca es que los operadores sobre los elementos de un espacio de Hilbert. La formulación de la integral de trayectoria de la mecánica cuántica, por otro lado, está basada directamente en la noción de un propagador $K(q_f t_f; q_i t_i)$. Dada una función de onda $\psi(q_i, t_i)$ al tiempo t_i , el propagador provee la correspondiente función de onda a un tiempo posterior t_f , $t_f > t_i$, como sigue,

$$\psi(q_f, t_f) = \int dq_i K(q_f t_f; q_i t_i) \psi(q_i t_i), \quad t_f > t_i. \quad (3.1)$$

Conforme a la interpretación usual de la mecánica cuántica, $\psi(q_f, t_f)$ es la amplitud de probabilidad de que la partícula se encuentre en el punto q_f al tiempo t_f , así que $K(q_f t_f; q_i t_i)$ es la amplitud de probabilidad de que ocurra la transición de q_i al tiempo t_i a q_f al tiempo t_f . La probabilidad correspondiente es

$$P(q_f t_f; q_i t_i) = |K(q_f t_f; q_i t_i)|^2.$$

Para proceder con el análisis dividamos el intervalo de tiempo entre t_i y t_f en dos, con t como el tiempo intermedio, y q el punto intermedio en el espacio, como se muestra en la Fig.3.2. Repitiendo la aplicación de (3.1) en esta partición tenemos

$$\psi(q_f, t_f) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} dq_i dq K(q_f t_f; qt) K(qt; q_i t_i) \psi(q_i, t_i),$$

a partir de lo cual se encuentra que

$$K(q_f t_f; q_i t_i) = \int_{\mathbb{R}} K(q_f t_f; qt) K(qt; q_i t_i) dq, \quad (3.2)$$

así que la transición de (q_i, t_i) a (q_f, t_f) puede ser considerada como el resultado de una transición

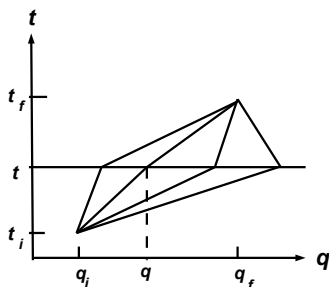


Figura 3.2: Composición de la amplitud de propagación usando una partición en dos intervalos temporales.

de (q_i, t_i) a todos los puntos intermedios disponibles q seguida de una transición de (q, t) a (q_f, t_f) .

Es ilustrativo considerar (3.2) a la luz del experimento de la doble rendija con electrones, mostrado en la Fig. 3.3. Denotamos por $K(2A; 1)$ la amplitud de probabilidad que el electrón pase por el agujero $2A$ desde la fuente 1, y por $K(3; 2A)$ la amplitud que este pase de el agujero $2A$ a los detectores 3. La ecuación (3.2) da

$$K(3; 1) = K(3; 2A)K(2A; 1) + K(3; 2B)K(2B; 1).$$

El patrón de intensidad de la “pantalla” 3 esta dado por la probabilidad

$$P(3;1) = |K(3;1)|^2,$$

que incluirá términos de interferencia, característicos de la teoría cuántica. Nótese que no podemos afirmar que “ el electrón viajó ya sea por el agujero A o por B ” . Esta noción de todas las posibles trayectorias es importante en el formalismo de la integral de trayectoria.

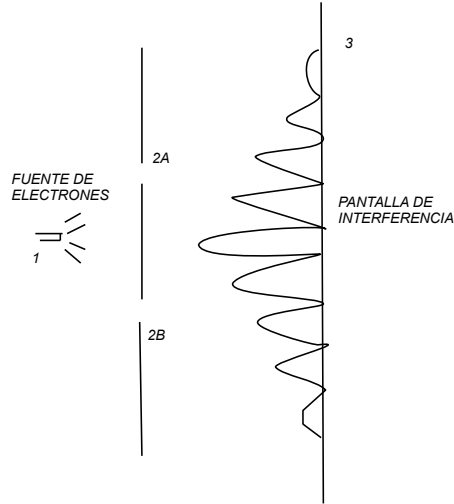


Figura 3.3: Experimento de la doble rendija que ilustra la composición de las amplitudes de propagación.

Notablemente K es realmente la amplitud $\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle$. Para ver esto, note que la función de onda $\psi(q, t)$ es

$$\psi(q, t) = \langle q_f | \psi(t) \rangle_S \quad (3.3)$$

donde el vector de estado $|\psi(t)\rangle_S$ en el esquema de Schrödinger está relacionado con el esquema de Heisenberg $|\psi\rangle_H$ por

$$|\psi(t)\rangle_S = e^{-iHt/\hbar} |\psi\rangle_H, \quad (3.4)$$

con H el hamiltoniano del sistema. Podemos definir el vector

$$|q, t\rangle = e^{iHt/\hbar} |q\rangle \quad (3.5)$$

al que llamaremos, por obvias razones, un “marco móvil”. Entonces tenemos, usando (3.3) y (3.5),

$$\psi(q, t) = \langle q, t | \psi \rangle_H. \quad (3.6)$$

La completez de los estados, $\int_{\mathbb{R}} dq_i |q_i\rangle \langle q_i| = 1$, nos permite escribir

$$\langle q, t | \psi \rangle = \int \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \langle q_i, t_i | \psi \rangle dq_i \quad (3.7)$$

el cual, con la ayuda de (3.6), es

$$\psi(q_f, t_f) = \int \langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle \psi(q_i, t_i) dq_i. \quad (3.8)$$

Comparando (3.8) con (3.1) vemos que

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = K(q_f t_f; q_i t_i). \quad (3.9)$$

El propagador K resume la mecánica cuántica del sistema. En la formulación usual de la mecánica cuántica, dando una función de onda inicial, se puede encontrar la función de onda a un tiempo posterior resolviendo la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo es decir, $i\hbar\partial_t\Psi(q, t) = \hat{H}\Psi(q, t)$ tiene solución $\Psi(q, t) = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} \psi_n(q)$ con $\Psi(q, t=0) = \sum_n c_n \psi_n(q)$ y $\hat{H}\psi_n(q) = E_n \psi_n(q)$. En la formulación de Feynman, sin embargo, el propagador da la solución directamente. La idea ahora es expresar $\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle$ como una integral de trayectoria.

Vamos a dividir el intervalo temporal entre t_i y t_f en $(n+1)$ subintervalos iguales de tamaño τ , es decir $\tau = t_j - t_{j-1}$, como en la Fig. 3.4. La ecuación (3.2) tomará la forma

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int \dots \int dq_1 dq_2 \dots dq_n \langle q_f, t_f | q_n, t_n \rangle \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q_i, t_i \rangle, \quad (3.10)$$

y las integrales incluyen las posibles “trayectorias”; estas no son trayectorias en el sentido usual clásico pues pueden no ser diferenciables¹.

Consideremos ahora un segmento pequeño en la integral de trayectoria. De la ecuación (3.5) tenemos

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} t_{j+1} | q_j t_j \rangle &= \langle q_{j+1} | e^{-iH\tau/\hbar} | q_j \rangle \\ &= \langle q_{j+1} | 1 - \frac{i}{\hbar} H\tau + O(\tau^2) | q_j \rangle \\ &= \delta(q_{j+1} - q_j) - \frac{i\tau}{\hbar} \langle q_{j+1} | H | q_j \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp \exp \left[\frac{i}{\hbar} p(q_{j+1} - q_j) \right] - \frac{i\tau}{\hbar} \langle q_{j+1} | H | q_j \rangle. \end{aligned} \quad (3.11)$$

En la segunda igualdad usamos el desarrollo de la exponencial considerando τ pequeño. La tercera igualdad hizo uso de ortogonalidad a la delta de la base $|q\rangle$ y su representación como transformada de Fourier se adoptó en la última igualdad.

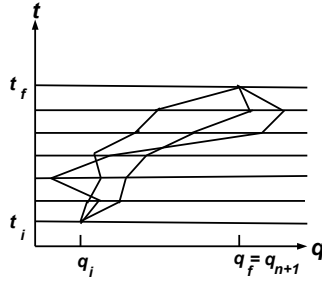


Figura 3.4:

¹Estas trayectorias pueden describirse usando un concepto estadístico denominado cadenas de Markov [Chaichain, Demichev [27]]. Nosotros no seguimos esta ruta.

El Hamiltoniano H es una función de los operadores p y q . En el caso especial donde H es de la forma

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(q) \quad (3.12)$$

el elemento de matriz en (3.11) puede tratarse como sigue. Primero

$$\langle q_{j+1} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | q_j \rangle = \int dp' dp \langle q_{j+1} | p' \rangle \langle p' | \frac{p^2}{2m} | p \rangle \langle p | q_j \rangle,$$

y ahora sustituimos $\langle q_{j+1} | p' \rangle = (2\pi\hbar)^{-1/2} \exp(ip'q_{j+1}/\hbar)$, para obtener

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | \frac{\hat{p}^2}{2m} | q_j \rangle &= \int \frac{dp' dp}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p'q_{j+1} - pq_j) \right] \frac{p^2}{2m} \delta(p - p') \\ &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} p(q_{j+1} - q_j) \right] \frac{p^2}{2m}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Nótese que aquí \hat{p}^2 del lado izquierdo de (3.13) es un operador, mientras que en el lado derecho es un número. De forma similar

$$\begin{aligned} \langle q_{j+1} | \hat{V}(q) | q_j \rangle &= V(q_j) \langle q_{j+1} | q_j \rangle \\ &= V(q_j) \delta(q_{j+1} - q_j) \\ &= \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} p(q_{j+1} - q_j) \right] V(q_j), \end{aligned} \quad (3.14)$$

y $\hat{V}(q)$ en el lado izquierdo es una expresión de operador, pero la integral de la derecha no contiene operadores. Poniendo (3.13) y (3.14) juntas, tenemos

$$\langle q_{j+1} | H | q_j \rangle = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \exp \left[\frac{i}{\hbar} p(q_{j+1} - q_j) \right] H(p, q_j),$$

y, de (3.11),

$$\langle q_{j+1}, t_{j+1} | q_j, t_j \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} \int dp_j \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} [p_j(q_{j+1} - q_j) - \tau H(p_j, q_j)] \right\}, \quad (3.15)$$

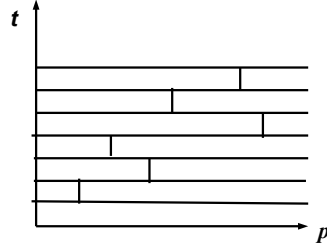


Figura 3.5:

en donde p_j es el momento entre t_j y t_{j+1} , ó , equivalentemente, q_j y q_{j+1} (ver Fig. 3.5). Esto da el propagador sobre un segmento de trayectoria.

El propagador completo se tiene por medio de la sustitución de (3.15) dentro de (3.10), dando, en el límite continuo (donde p_j es el momento a lo largo de la trayectoria entre q_j y q_{j+1}),

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^n dq_j \prod_{j=0}^n \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{j=0}^n [p_j(q_{j+1} - q_j) - \tau H(p_j, q_j)] \right\}, \quad (3.16)$$

con $q_0 = q_i$, $q_{n+1} = q_f$. La notación común de (3.16) es la siguiente

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \int \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}p}{(2\pi\hbar)^{n+1}} \exp \frac{i}{\hbar} \left[\int_{t_i}^{t_f} dt [p\dot{q} - H(p, q)] \right] \quad (3.17)$$

en la cual $\mathcal{D}q = \prod_{j=1}^n dq_j$ y $\mathcal{D}p = \prod_{j=0}^n dp_j$, con $q(t_i) = q_i$, $q(t_f) = q_f$. En el límite continuo q será una función de t , y la integral es una “integral funcional”, una integral sobre todas las posibles trayectorias entre (q_i, t_i) y (q_f, t_f) . Cada función $q(t)$ y $p(t)$ define una trayectoria en el espacio fase. Como fue mencionado arriba, el enfoque más usual para la mecánica cuántica es resolver la ecuación de Schrödinger $i\hbar(\partial|\psi\rangle/\partial t) = \hat{H}|\psi\rangle$ donde \hat{H} es un operador, sujeto a algunas condiciones de frontera. En la formulación de la integral de trayectoria contamos con una expresión explícita para la amplitud de transición, la cual es claramente adecuada para problemas de colisiones. Las cantidades p y q que están en la integral no son operadores (c -números, no q -números).

Hay otra forma para la amplitud de transición, válida cuando \hat{H} es de la forma (3.12), ya que en ese caso podemos realizar la integración en p . La ecuación (3.16) será

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_1^n dq_j \prod_0^n \frac{dp_j}{2\pi\hbar} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_0^n \left[p_j(q_{j+1} - q_j) - \frac{p_j^2}{2m} \tau - V(q_j) \tau \right] \right\}.$$

y utilizando la integral gaussiana $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2 + bx + c) dx = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{b^2}{4a} + c\right)$

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{i2\pi\hbar\tau}\right)^{(n+1)/2} \int \prod_1^n dq_j \exp \left\{ \frac{i\tau}{\hbar} \sum_0^n \left[\frac{m}{2} \left(\frac{q_{j+1} - q_j}{\tau}\right)^2 - V \right] \right\} \quad (3.18)$$

en el límite continuo

$$\langle q_f, t_f | q_i, t_i \rangle = N \int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_i}^{t_f} L(q, \dot{q}) dt \right] \quad (3.19)$$

donde $L = T - V$, es el lagrangiano clásico. En el límite $n \rightarrow \infty$, N puede diverger, sin embargo, con base a la normalización este factor resulta irrelevante.

3.2. Funciones de n puntos en mecánica cuántica

La amplitud de transición (3.19) sujeta a las condiciones de frontera

$$q(t_f) = q_f, \quad q(t_i) = q_i, \quad (3.20)$$

no son apropiadas para el caso de la teoría cuántica de campos. En este último caso tendríamos, por ejemplo, $\psi(t_i) = \psi_i$, $\psi(t_f) = \psi_f$, siendo ψ estados genéricos. En la práctica podemos considerar que las partículas son creadas (por ejemplo, por colisión), éstas interactúan, y son destruidas por su detección. Por ejemplo, en la medición de la sección eficaz diferencial $d\sigma/d\Omega$ para la dispersión πN , pión-Nucleón, el pión es creado por una colisión NN , y destruido cuando es detectado.

La creación puede representarse como inducida por una fuente, y la destrucción similarmente. Las condiciones de frontera del problema pueden ser representadas como en la Figura 3.6; el vacío

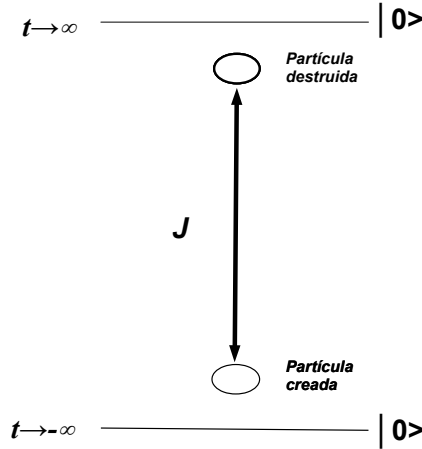


Figura 3.6: Representación de la transición vacío-vacío en presencia de una fuente.

a $t = -\infty$ evoluciona al vacío a $t \rightarrow \infty$, vía la creación, interacción y destrucción de una partícula, mediante la presencia de una fuente. En ese sentido queremos conocer la amplitud de transición vacío-vacío en presencia de una fuente. Esta formulación fue propuesta por Schwinger (1969). La fuente $J(t)$ se representa modificando la Lagrangiana

$$L \rightarrow L + \hbar J(t)q(t). \quad (3.21)$$

Si $|0, t\rangle^J$ es el estado base (vacío) en presencia de una fuente, es decir, para un sistema descrito por (3.21), entonces la amplitud de transición presenta la siguiente estructura

$$Z[J] \propto \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J \quad (3.22)$$

donde un factor de proporcionalidad ha sido omitido. La fuente $J(t)$ juega un papel análogo al de una corriente electromagnética, la cual actúa como “fuente” del campo electromagnético. Un campo cargado, en interacción con el campo electromagnético A^μ incluye un término en su Lagrangiana,

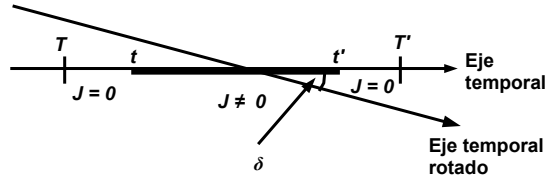


Figura 3.7: Se muestra la rotación del eje temporal para el cálculo de la transición vacío-vacío.

de la forma $J_\mu A^\mu$. La corriente J_μ actuó como una fuente del campo electromagnético, y esta idea fue generalizada por Schwinger.

Analizamos ahora la amplitud vacío-vacío. La situación es representada en la Fig. 3.7. La fuente $J(t)$ es no nula únicamente entre los tiempos t y t' ($t < t'$). T es un tiempo antes que t , y T' es un tiempo posterior a t' , así que la amplitud de transición es

$$\langle Q'T' | QT \rangle^J = N \int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_T^{T'} dt (L + \hbar Jq) \right]. \quad (3.23)$$

Por otro lado, usando relaciones de completitud tenemos

$$\langle Q'T' | QT \rangle^J = \int dq' dq \langle Q'T' | q't' \rangle \langle q't' | qt \rangle^J \langle qt | QT \rangle. \quad (3.24)$$

Usando (3.5) tenemos entonces

$$\begin{aligned} \langle Q'T' | q't' \rangle &= \langle Q' | \exp \left(-\frac{i}{\hbar} HT' \right) \exp \left(\frac{i}{\hbar} Ht' \right) | q' \rangle \\ &= \sum_m \phi_m(Q') \phi_m^*(q') \exp \left[\frac{i}{\hbar} E_m (t' - T') \right], \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde $\phi_m(q)$ son un conjunto completo de eigenestados de energía. Del mismo modo

$$\langle qt | QT \rangle = \sum_n \phi_n(q) \phi_n^*(Q) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_n (t - T) \right]. \quad (3.26)$$

Ahora sustituimos (3.25) y (3.26) en (3.24). Tomando el limite $T' \rightarrow \infty e^{-i\delta}$, $T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}$, con δ un angulo arbitrario $\leq \pi/2$ (ver Fig.3.7), vemos que la parte imaginaria de T es $i|T| \sin \delta$, el término $(i/\hbar)E_n T$ contiene una parte real $-(1/\hbar)|T| \sin \delta$ el cual da un factor de amortiguamiento $\exp\{-(1/\hbar)E_n |T| \sin \delta\}$. El término que sufre el menor amortiguamiento es el que tiene la menor energía, que es E_0 , el estado de energía más baja, o vacío. Por lo tanto en la suma la única contribución que sobrevive es la del estado base. Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{T' \rightarrow \infty e^{-i\delta} \\ T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}}} \langle Q'T' | QT \rangle^J &= \phi_0^*(Q) \phi_0(Q') \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_0 (T' - T) \right] \\ &\times \int dq' dq \phi_0^*(q', t') \langle q't' | qt \rangle^J \phi_0(q, t) \quad (3.27) \end{aligned}$$

ó, equivalentemente,

$$\begin{aligned} \int dq' dq \phi_0^*(q', t') \langle q't' | qt \rangle^J \phi_0(q, t) \\ = \lim_{T' \rightarrow \infty e^{-i\delta}, T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}} \frac{\langle Q'T' | QT \rangle^J}{\phi_0^*(Q) \phi_0(Q') \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_0 (T' - T) \right]} \quad (3.28) \end{aligned}$$

El lado izquierdo es el valor de expectación de la amplitud de transición en el estado base. Los tiempos t' y $-t$ son arbitrariamente grandes. Por tanto el lado izquierdo será $\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J$. El denominador del lado derecho es simplemente un factor numérico, por lo que

$$\langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J \propto \lim_{\substack{T' \rightarrow \infty e^{-i\delta} \\ T \rightarrow -\infty e^{-i\delta}}} \langle Q'T' | QT \rangle^J \quad (3.29)$$

con $\langle Q'T' | QT \rangle^J$ dada por (3.23).

Finalmente definimos la amplitud $Z[J]$ en (3.22) por

$$Z[J] = \int \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty e^{-i\delta}}^{\infty e^{-i\delta}} dt (L + \hbar Jq) \right] \propto \langle 0, \infty | 0, -\infty \rangle^J. \quad (3.30)$$

Esta expresión será la base para el caso de campos en el siguiente capítulo.

En las aplicaciones requerimos de evaluar valores de expectación de productos de operadores. Para comenzar, en lugar de $\langle q_f t_f | q_i t_i \rangle$, consideremos $\langle q_f t_f | \hat{q}(t_{n_1}) | q_i t_i \rangle$, en donde $t_f > t_{n_1} > t_i$. Considerando la partición temporal ec.(3.10), y eligiendo t_{n_1} como uno de los tiempos t_1, \dots, t_n , tenemos

$$\begin{aligned} \langle q_f t_f | q(t_{n_1}) | q_i t_i \rangle &= \int dq_1 \dots dq_n \langle q_f t_f | q_n t_n \rangle \langle q_n t_n | q_{n-1} t_{n-1} \rangle \\ &\dots \langle q_{n_1} t_{n_1} | q(t_{n_1}) | q_{n_1-1} t_{n_1-1} \rangle \dots \langle q_1 t_1 | q_i t_i \rangle. \end{aligned}$$

La expresión $\langle q_{n_1} t_{n_1} | q(t_{n_1}) | q_{n_1-1} t_{n_1-1} \rangle$ puede ser reemplazada por $q(t_{n_1}) \langle q_{n_1} t_{n_1} | q_{n_1-1} t_{n_1-1} \rangle$, donde esta vez $q(t_{n_1})$ es un número. De este modo obtenemos

$$\langle q_f t_f | q(t_1) | q_i t_i \rangle = \int \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}p}{(2\pi\hbar)^{n+1}} q(t_1) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_f} [p\dot{q} - H(p, q)] dt \right\}. \quad (3.31)$$

Consideremos ahora

$$\langle q_f t_f | \hat{q}(t_{n_1}) \hat{q}(t_{n_2}) | q_i t_i \rangle.$$

Si $t_{n_1} > t_{n_2}$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle q_f t_f | q(t_{n_1}) q(t_{n_2}) | q_i t_i \rangle &= \int dq_1 \dots dq_n \langle q_f t_f | q_n t_n \rangle \dots \langle q_{n_1} t_{n_1} | q(t_{n_1}) | q_{n_1-1} t_{n_1-1} \rangle \\ &\dots \langle q_{n_2} t_{n_2} | q(t_{n_2}) | q_{n_2-1} t_{n_2-1} \rangle \dots \langle q_1 t_1 | q_i t_i \rangle, \end{aligned}$$

dando, finalmente,

$$\langle q_f t_f | q(t_1) q(t_2) | q_i t_i \rangle = \int \frac{\mathcal{D}q \mathcal{D}p}{(2\pi\hbar)^{n+1}} q(t_1) q(t_2) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_f} (p\dot{q} - H) dt \right] \quad (3.32)$$

si $t_1 > t_2$. Si, por otra parte, $t_2 > t_1$, el lado derecho de (3.32) es igual a

$$\langle q_f t_f | q(t_2)q(t_1) | q_i t_i \rangle.$$

En general, el lado derecho de (3.32) es igual a

$$\langle q_f t_f | T [q(t_1)q(t_2)] | q_i t_i \rangle$$

donde T es el operador de ordenamiento temporal

$$T [A(t_1)B(t_2)] = \left\{ \begin{array}{ll} A(t_1)B(t_2) & \text{si } t_1 > t_2, \\ B(t_2)A(t_1) & \text{si } t_2 > t_1. \end{array} \right\} \quad (3.33)$$

T tiene el efecto de ordenar el tiempo adecuadamente. El resultado encontrado puede generalizarse como sigue

$$\begin{aligned} \langle q_f t_f | T [q(t_1)q(t_2)\dots q(t_n)] | q_i t_i \rangle &= \int \frac{\mathcal{D}q\mathcal{D}p}{(2\pi\hbar)^{n+1}} q(t_1)q(t_2)\dots q(t_n) \\ &\times \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_f} [p\dot{q} - H(p, q)] dt \right\}. \end{aligned}$$

En el caso donde H sea de la forma (3.12), esto será

$$\begin{aligned} \langle q_f t_f | T [q(t_1)q(t_2)\dots q(t_n)] | q_i t_i \rangle &= N \int \mathcal{D}q q(t_1)q(t_2)\dots q(t_n) \\ &\times \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_1}^{t_f} L dt \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

Sin embargo, de la definición original de la amplitud $Z [J]$ ec.(3.30), esta derivada funcional con respecto a J es

$$\frac{\delta Z [J]}{\delta J(t_1)} = i \int \mathcal{D}q q(t_1) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty e^{-i\delta}}^{\infty e^{-i\delta}} dt (L + \hbar J q) \right]$$

y por tanto

$$\frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} = i^n \int \mathcal{D}q q(t_1) \dots q(t_n) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty e^{-i\delta}}^{\infty e^{-i\delta}} dt (L + \hbar J q) \right] \quad (3.35)$$

lo cual da, poniendo $J = 0$,

$$\left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \right|_{J=0} = i^n \int \mathcal{D}q q(t_1) \dots q(t_n) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty e^{-i\delta}}^{\infty e^{-i\delta}} dt (L) \right]. \quad (3.36)$$

El valor de expectación en el vacío con ordenamiento temporal, para un producto de operadores, toma la forma

$$\left. \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \right|_{J=0} \propto i^n \langle 0, \infty | T [q(t_1) q(t_2) \dots q(t_n)] | 0, -\infty \rangle. \quad (3.37)$$

Capítulo 4

Integral de trayectoria y fuerza

Casimir para el campo escalar real

Hemos visto en capítulos anteriores la aplicación de algunos de los esquemas más frecuentemente usados en el cálculo de la fuerza Casimir, esto es, cuantización canónica, fórmula de Abel-Plana, regularización Zeta de Riemann y función de Green. Todos estos tienen en común el uso de la descomposición en modos, discretos y continuos, para el campo escalar. Si bien muy útil esta estructura de modos no es esencial para la descripción de los campos cuánticos en el esquema de integral de trayectoria, por ejemplo, y sin embargo esta herramienta resulta ser poderosa para calcular cantidades de gran interés físico en la teoría de campos y partículas elementales. Por esta razón es deseable incorporar el análisis del efecto Casimir del campo escalar con el formalismo de la integral de trayectoria.

En este capítulo consideramos la extensión del formalismo de la integral de trayectoria de la mecánica cuántica discutido en el capítulo 3 al caso del campo escalar en 1+1 dimensiones espacio temporales. Específicamente nos será útil establecer la relación entre el valor de expectación en el vacío del producto ordenado en el tiempo de operadores de campo con la función de Green respectiva (aquí seguimos de cerca [3, 20, 28]). De este modo damos sustento al argumento usado en

el capítulo 2 para el cálculo de la fuerza Casimir por el método de la función de Green. Además, este resultado se usará en el análisis de la integral de trayectoria en presencia de placas incorporadas como casos límite de potenciales delta, llevando finalmente al valor de la fuerza Casimir correspondiente. Nuestra descripción está basada en las referencias [17, 18, 29, 31].

El presente capítulo adopta unidades tales que $\hbar = c = 1$.

4.1. Función de Green libre

En esta sección establecemos la relación entre el valor de expectación del producto ordenado en el tiempo de dos operadores de campo y la función de Green del campo escalar sin interacción. Asimismo se expresa explícitamente la forma integral de esta última. Con este fin, similarmente al caso mecánico cuántico (ec.(3.37)), nuestro punto de partida será la amplitud en presencia de una fuente J pero ahora para el campo escalar sin masa ϕ en lugar de la posición de una partícula q , es decir,

$$Z_0[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{iS[J]}, \quad (4.1)$$

$$S[J] = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + J\phi \right), \quad x^0 = t, x^1, \quad (4.2)$$

donde \mathcal{N} es un factor de normalización.

La acción (4.2) es equivalente, salvo un término de frontera que se anula cuando $\phi = 0$, a

$$S'[J] = \int d^2x \left(-\frac{1}{2} \phi \square_x \phi + J\phi \right), \quad (4.3)$$

con $\square_x = \partial_{tt}^2 - \partial_{11}^2$, $\partial_{11}^2 := \partial_{x^1 x^1}^2$. Elegiremos el factor de normalización \mathcal{N} tal que $Z[J = 0] = 1$ [20] y así nuestra amplitud toma la forma

$$Z_0[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int d^2x \left[-\frac{1}{2} \phi \square_x \phi + J\phi \right] \right)}{\int \mathcal{D}\phi \exp \left(i \int d^2x \left[-\frac{1}{2} \phi \square_x \phi \right] \right)}. \quad (4.4)$$

Para proceder con nuestro análisis y poder explotar propiedades de las integrales gaussianas utilizamos una rotación de Wick en el tiempo $t := i\tau$, de modo que $\tilde{x} = \tau, x^1$, $d^2x = id^2\tilde{x} = id\tau dx^1$, $\square_x = -(\partial_{\tau\tau}^2 + \partial_{11}^2) = -\square_{\tilde{x}}$, $f(x) \rightarrow \tilde{f}(\tilde{x})$, y la amplitud euclidiana resulta

$$\tilde{Z}_0[\tilde{J}] = \frac{\int \mathcal{D}\tilde{\phi} \exp\left(\int d^2\tilde{x} \left[-\frac{1}{2}\tilde{\phi}\square_{\tilde{x}}\tilde{\phi} + \tilde{J}\tilde{\phi}\right]\right)}{\int \mathcal{D}\tilde{\phi} \exp\left(\int d^2\tilde{x} \left[-\frac{1}{2}\tilde{\phi}\square_{\tilde{x}}\tilde{\phi}\right]\right)}. \quad (4.5)$$

Podemos completar esta etapa del análisis simetrizando esta amplitud euclidiana. Para ello introducimos el siguiente operador simétrico

$$\square_{\tilde{x},\tilde{x}'} = \square_{\tilde{x}}\delta^2(\tilde{x} - \tilde{x}'), \quad (4.6)$$

donde $\delta^2(\tilde{x} - \tilde{x}')$ está definida en \mathbb{R}^2 , dando lugar a la siguiente expresión para la amplitud euclidiana

$$(4.5) \quad \tilde{Z}_0[\tilde{J}] = \frac{\int \mathcal{D}\tilde{\phi} \exp\left(\int d^2\tilde{x} \int d^2\tilde{x}' \left[-\frac{1}{2}\tilde{\phi}(\tilde{x})\square_{\tilde{x},\tilde{x}'}\tilde{\phi}(\tilde{x}') + \tilde{J}(\tilde{x})\delta^2(\tilde{x} - \tilde{x}')\tilde{\phi}(\tilde{x}')\right]\right)}{\int \mathcal{D}\tilde{\phi} \exp\left(\int d^2\tilde{x} \int d^2\tilde{x}' \left[-\frac{1}{2}\tilde{\phi}(\tilde{x})\square_{\tilde{x},\tilde{x}'}\tilde{\phi}(\tilde{x}')\right]\right)}. \quad (4.7)$$

En este punto extrapolamos al caso continuo la forma de la integral gaussiana definida para un conjunto numerable de variables del apéndice A (A.11) para reescribir (4.7) como

$$\tilde{Z}_0[\tilde{J}] = \exp\left[\frac{1}{2} \int d^2\tilde{x} \int d^2\tilde{x}' J(\tilde{x})\square_{\tilde{x},\tilde{x}'}^{-1} J(\tilde{x}')\right], \quad (4.8)$$

donde $\square_{\tilde{x},\tilde{x}'}^{-1}$ es precisamente la función de Green del operador $\square_{\tilde{x},\tilde{x}'}$, es decir

$$\int \square_{\tilde{x},\tilde{x}'}\square_{\tilde{x}',\tilde{x}''}^{-1} d^2\tilde{x}' = \delta^2(\tilde{x}' - \tilde{x}''). \quad (4.9)$$

La versión Lorentziana de (4.8) toma la forma, equivalente a (4.4),

$$Z_0[J] = \exp\left[\frac{i}{2} \int d^2x \int d^2x' J(x)\square_{x,x'}^{-1} J(x')\right], \quad (4.10)$$

donde hemos utilizado la siguiente relación

$$\square_{\tilde{x}, \tilde{x}'}^{-1} = -i \square_{x, x'}^{-1}.$$

Enseguida analizaremos algunas consecuencias de las formas equivalentes de la amplitud (4.4) y (4.10). Derivando (4.4) sucesivamente con respecto a la fuente J y posteriormente apagando ésta obtenemos el análogo de la relación mecánica (3.37), es decir,

$$\frac{\delta^n Z_0[J]}{\delta J(x^{(n-1)}) \dots \delta J(x)} \Big|_{J=0} = (i^n) \langle 0 | T [\phi(x) \dots \phi(x^{(n-1)})] | 0 \rangle, \quad (4.11)$$

para los n puntos espacio temporales $x, x', \dots, x^{(n-1)}$. En el caso particular de la segunda derivada funcional tenemos

$$\frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x') \delta J(x)} \Big|_{J=0} = - \langle 0 | T [\phi(x) \phi(x')] | 0 \rangle. \quad (4.12)$$

Ahora bien, usando (4.10) el equivalente a (4.12) resulta ser

$$\begin{aligned} \frac{\delta^2 Z_0[J]}{\delta J(x') \delta J(x)} \Big|_{J=0} &= i \left(\int d^2 y \square_{x, y}^{-1} \delta^2(y - x') \right) \\ &= i \square_{x, x'}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Comparando (4.12) con (4.13) concluimos que

$$\langle 0 | T [\phi(x) \phi(x')] | 0 \rangle = -i \square_{x, x'}^{-1}. \quad (4.14)$$

Para dilucidar la interpretación del lado derecho de la ecuación anterior haremos referencia a la ecuación (4.9), esta última puede reescribirse usando (4.6) como

$$\begin{aligned} \int \square_x \delta^2(x - x') \square_{x', x''}^{-1} dx' &= \square_x \square_{x, x''}^{-1} \\ &= \delta^2(x - x''), \end{aligned} \quad (4.15)$$

donde en la primera igualdad realizamos la integral en x' . De ahora en adelante usaremos la siguiente notación

$$\square_{x,x''}^{-1} = G(x - x''), \quad (4.16)$$

es decir $\square_{x,x''}^{-1}$ es la función de Green $G(x - x'')$ del operador \square_x . De este modo nuestra relación (4.14) toma la forma

$$\langle 0 | T [\phi(x)\phi(x')] | 0 \rangle = \frac{1}{i} G(x - x'), \quad (4.17)$$

$$\square_x G(x - x') = \delta^2(x - x'). \quad (4.18)$$

Claramente (4.17) justifica el uso de (2.65) para el cálculo de la fuerza Casimir por el método de la función de Green en el capítulo 2. Notemos que (2.66) también puede expresarse como

$$T [\phi(x)\phi(x')] = \Theta(x - x') \phi(x)\phi(x') + \Theta(x' - x) \phi(x')\phi(x), \quad (4.19)$$

con Θ la función de Heaviside

$$\Theta(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } z > 0 \\ 0 & \text{si } z < 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Por completez y para su uso en la siguiente sección recordaremos la forma integral explícita de la función de Green libre correspondiente a (4.18). Usaremos las transformadas de Fourier siguientes

$$G(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int G(\omega, k) e^{-i\omega(t-t') + ik(x^1 - x'^1)} d\omega dk, \quad (4.21)$$

$$\delta^2(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int e^{-i\omega(t-t') + ik(x^1 - x'^1)} d\omega dk, \quad (4.22)$$

mismas que sustituidas en (4.18) nos llevan a la forma

$$G(x - x') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{1}{-\omega^2 + k^2 + i\epsilon} e^{-i\omega(t-t') + ik(x^1 - x'^1)} d\omega dk. \quad (4.23)$$

En esta última ecuación el parámetro $\epsilon > 0$ nos define el contorno de integración apropiado para determinar el propagador de Feynman. La evaluación de las integrales anteriores requieren de especificación de las condiciones de frontera para la función $G(x - x')$. En la siguiente sección extenderemos los métodos que acabamos de discutir para incluir el caso de la presencia de dos placas puntuales, las condiciones de frontera correspondientes y el cálculo de la fuerza Casimir.

4.2. Incorporación de dos placas puntuales

Pasamos ahora a incluir las condiciones de frontera correspondientes a la presencia de dos placas puntuales en el formalismo de la integral de trayectoria. Para implementarlas introducimos en la acción términos de acoplamiento del campo escalar con sendos potenciales delta de Dirac ubicados en las posiciones de las placas. Nuestro caso se obtendrá en el límite de constantes de acoplamiento infinitas, que emula las placas conductoras perfectas del caso electromagnético (ver [17, 18, 29, 31, 32, 33]). Similarmente al caso libre de la sección anterior usaremos integrales gaussianas euclidianas en el cálculo de la amplitud relevante. Esto se facilitará mediante la introducción de dos grados de libertad mecánicos auxiliares, uno por cada placa puntual. Finalmente usamos una relación conocida entre el logaritmo de la amplitud y la energía del sistema, obteniendo así el resultado conocido para la fuerza Casimir.

Iniciamos nuestro análisis en presencia de placas considerando la acción modificada para el campo escalar

$$S_{cf} = S_0 + S_1 + S_2, \quad (4.24)$$

$$S_1 = -\frac{\lambda_1}{2} \int d^2x \delta^1(x^1) \phi^2(x), \quad (4.25)$$

$$S_2 = -\frac{\lambda_2}{2} \int d^2x \delta^1(x^1 - a) \phi^2(x), \quad (4.26)$$

donde S_0 representa la acción del campo escalar libre, ec.(2.1), ahora sin masa, y $\lambda_{1,2}$ son las constantes de acoplamiento del campo a los potenciales delta ubicados en $x^1 = 0, a$. Observemos

que las deltas en $S_{1,2}$ son espaciales y la ecuación de campo resultante es la siguiente

$$\square_x \phi(x) + \lambda_1 \delta^1(x^1) \phi(x) + \lambda_2 \delta^1(x^1 - a) \phi(x) = 0. \quad (4.27)$$

Estamos interesados en el límite $\lambda_{1,2} \rightarrow \infty$ porque de esta manera implementamos las condiciones de frontera de campo nulo en las placas¹.

Nuestra amplitud normalizada, ahora incluyendo acoplamiento del campo escalar con los potenciales delta, queda expresada como

$$Z[\lambda_1, \lambda_2] = \frac{1}{Z_0} \int \mathcal{D}\phi e^{iS_{cf}[\phi]}. \quad (4.28)$$

Aquí Z_0 representa la amplitud con $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Enseguida descartamos el término de frontera en S_0 (2.1) y realizamos la rotación de Wick en el tiempo para obtener

$$\tilde{Z}[\lambda_1, \lambda_2] = \frac{1}{\tilde{Z}_0} \int \mathcal{D}\tilde{\phi} \exp \left[-\frac{1}{2} \int d^2\tilde{x} (\tilde{\phi} \square_{\tilde{x}} \tilde{\phi}) + \frac{\lambda_1}{2} \int d^2\tilde{x} \delta^1(x^1) \tilde{\phi}^2 + \frac{\lambda_2}{2} \int d^2\tilde{x} \delta^1(x^1 - a) \tilde{\phi}^2 \right]. \quad (4.29)$$

Ahora estudiaremos los términos de acoplamiento con los potenciales delta. Consideremos el término conteniendo λ_1 en la amplitud anterior. Su contribución a la exponencial puede expresarse como sigue [17, 29]

$$\begin{aligned} e^{\frac{\lambda_1}{2} \int d^2\tilde{x} \delta^1(x^1) \tilde{\phi}^2} &= e^{\frac{1}{2} \int \int d\tau d\tau' \phi(\tau, 0) \lambda_1 \delta(\tau - \tau') \phi(\tau', 0)} \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\xi_1(\tau) \exp \left(\int d\tau \int d\tau' \left[-\frac{1}{2} \xi_1(\tau) \left(\frac{\delta(\tau - \tau')}{\lambda_1} \right) \xi_1(\tau') \right] + \int d\tau \phi(\tau, 0) \xi_1(\tau) \right)}{\int \mathcal{D}\xi_1(\tau) \exp \left(\int d\tau \int d\tau' \left[-\frac{1}{2} \xi_1(\tau) \left(\frac{\delta(\tau - \tau')}{\lambda_1} \right) \xi_1(\tau') \right] \right)}, \end{aligned} \quad (4.30)$$

¹Una manera concreta de entender este límite consiste en considerar la colisión de una partícula cuántica no relativista con una barrera delta de intensidad infinita. A diferencia del caso de intensidad finita, en este límite solo se tiene incidencia y reflexión pero no transmisión: la función de onda se anula en la posición del potencial delta y en la región opuesta a la de incidencia.

donde en la primera igualdad introdujimos una integral sobre τ' simultáneamente con un factor $\delta(\tau - \tau')$ y evaluamos el campo en la posición de la primera placa $x^1 = 0$. En la segunda igualdad hicimos uso de la extrapolación al continuo de la integral gaussiana en variables numerables (A.11) ahora con variable de integración el grado de libertad mecánico $\xi_1(\tau)$, así como del hecho $(\lambda_1 \delta(\tau - \tau'))^{-1} = \frac{\delta(\tau - \tau')}{\lambda_1}$, que puede verificarse usando la integral: $\int d\tau' \lambda_1 \delta(\tau - \tau') (\lambda_1 \delta(\tau' - \tau''))^{-1} = \int d\tau' \lambda_1 \delta(\tau - \tau') \frac{\delta(\tau' - \tau'')}{\lambda_1} = \delta(\tau - \tau'')$. Evidentemente para la placa en $x^1 = a$ agregamos el grado de libertad mecánico $\xi_2(\tau)$ y tenemos ahora

$$e^{\frac{\lambda_2}{2} \int d^2 \tilde{x} \delta^1(x^1 - a) \tilde{\phi}^2} = \frac{\int \mathcal{D}\xi_2(\tau) \exp \left(\int d\tau \int d\tau' \left[-\frac{1}{2} \xi_2(\tau) \left(\frac{\delta(\tau - \tau')}{\lambda_2} \right) \xi_2(\tau') \right] + \int d\tau \phi(\tau, a) \xi_2(\tau) \right)}{\int \mathcal{D}\xi_2(\tau) \exp \left(\int d\tau \int d\tau' \left[-\frac{1}{2} \xi_2(\tau) \left(\frac{\delta(\tau - \tau')}{\lambda_2} \right) \xi_2(\tau') \right] \right)}. \quad (4.31)$$

Los términos de interacción que acabamos de obtener, (4.30) y (4.31), serán ahora incluidos en (4.29) de modo que esta última toma la forma

$$\begin{aligned} \tilde{Z}[\lambda_1, \lambda_2] &= \frac{1}{\tilde{Z}_0 \tilde{N}_1 \tilde{N}_2} \int \mathcal{D}\xi_1(\tau) \int \mathcal{D}\xi_2(\tau) \int \mathcal{D}\tilde{\phi} \exp \{A + B + C + D\}, \quad (4.32) \\ A &= \int d^2 \tilde{x} \int d^2 \tilde{x}' \left(-\frac{1}{2} \tilde{\phi}(\tilde{x}) \square_{\tilde{x}, \tilde{x}'} \phi(\tilde{x}') \right), \\ B &= \int d^2 \tilde{x} \left(\tilde{\phi}(\tilde{x}) \delta^1(x^1) \xi_1(\tau) \right) + \int d^2 \tilde{x} \left(\tilde{\phi}(\tilde{x}) \delta^1(x^1 - a) \xi_2(\tau) \right), \\ C &= \int d\tau \int d\tau' \left[-\frac{1}{2} \xi_1(\tau) \left(\frac{\delta^1(\tau - \tau')}{\lambda_1} \right) \xi_1(\tau') \right], \\ D &= \int d\tau \int d\tau' \left[-\frac{1}{2} \xi_2(\tau) \left(\frac{\delta^1(\tau - \tau')}{\lambda_2} \right) \xi_2(\tau') \right], \end{aligned}$$

aquí los factores de normalización están dados por

$$\tilde{N}_i = \int \mathcal{D}\xi_i(\tau) \exp \left(\int d\tau \int d\tau' \left[-\frac{1}{2} \xi_i(\tau) \left(\frac{\delta^1(\tau - \tau')}{\lambda_i} \right) \xi_i(\tau') \right] \right), \quad i = 1, 2.$$

Observemos que en la amplitud (4.32) los términos A y B en la exponencial son los únicos que dependen de $\tilde{\phi}$ y forman parte de una integral gaussiana, es decir,

$$\tilde{I}_{\tilde{\phi}} = \frac{1}{\tilde{Z}_0} \int \mathcal{D}\tilde{\phi} \exp \left\{ \int d^2\tilde{x} \int d^2\tilde{x}' \left(-\frac{1}{2} \tilde{\phi}(\tilde{x}) \square_{\tilde{x}, \tilde{x}'} \phi(\tilde{x}') \right) + \int d^2\tilde{x} \left(\delta^1(x^1) \xi_1(\tau) + \delta^1(x^1 - a) \xi_2(\tau) \right) \tilde{\phi} \right\}, \quad (4.33)$$

que puede realizarse nuevamente usando (A.11) para obtener

$$\tilde{I}_{\tilde{\phi}} = \exp \left[\frac{1}{2} \int d^2\tilde{x} \int d^2\tilde{x}' \tilde{J}_{\xi}(\tilde{x}) \tilde{G}(\tilde{x} - \tilde{x}') \tilde{J}_{\xi}(\tilde{x}') \right], \quad (4.34)$$

$$\tilde{J}_{\xi}(\tilde{x}) = \delta^1(x^1) \xi_1(\tau) + \delta^1(x^1 - a) \xi_2(\tau), \quad (4.35)$$

donde en la primera ecuación $\tilde{G}(\tilde{x} - \tilde{x}')$ es la función de Green del operador $\square_{\tilde{x}}$, es decir el análogo euclidiano de (4.16).

Ahora sustituiremos (4.34) y (4.35) en (4.32), en particular explotaremos el carácter de las deltas de Dirac, para darle a la amplitud la siguiente forma

$$\begin{aligned} \tilde{Z}[\lambda_1, \lambda_2] &= \frac{1}{\tilde{N}_1 \tilde{N}_2} \int \mathcal{D}\xi_1(\tau) \int \mathcal{D}\xi_2(\tau) \exp \left[-\frac{1}{2} \int d\tau \int d\tau' (\Xi_1 + \Xi_2 + \Xi_3 + \Xi_4) \right], \quad (4.36) \\ \Xi_1 &= \xi_1(\tau) \left(\frac{\delta^1(\tau - \tau')}{\lambda_1} - \tilde{G}(\tau - \tau', 0) \right) \xi_1(\tau'), \\ \Xi_2 &= -\xi_1(\tau) \tilde{G}(\tau - \tau', -a) \xi_2(\tau'), \\ \Xi_3 &= -\xi_2(\tau) \tilde{G}(\tau - \tau', a) \xi_1(\tau'), \\ \Xi_4 &= \xi_2(\tau) \left(\frac{\delta^1(\tau - \tau')}{\lambda_2} - \tilde{G}(\tau - \tau', 0) \right) \xi_2(\tau'). \end{aligned}$$

Evidentemente (4.36) presenta una forma cuadrática en $\xi_{1,2}$ que puede manejarse mejor en términos matriciales. Definiendo

$$\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2), \quad (4.37)$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\delta^1(\tau-\tau')}{\lambda_1} - \tilde{G}(\tau-\tau', 0) & -\tilde{G}(\tau-\tau', -a) \\ -\tilde{G}(\tau-\tau', a) & \frac{\delta^1(\tau-\tau')}{\lambda_2} - \tilde{G}(\tau-\tau', 0) \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

$$M_0 = \begin{pmatrix} \frac{\delta^1(\tau-\tau')}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{\delta^1(\tau-\tau')}{\lambda_2} \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

reescribimos la amplitud (4.36) de la siguiente manera (ver [17])

$$\tilde{Z}[\lambda_1, \lambda_2] = \frac{\int \mathcal{D}\vec{\xi} e^{-\frac{1}{2} \int d\tau \int d\tau' \vec{\xi}^t \cdot M \cdot \vec{\xi}}}{\int \mathcal{D}\vec{\xi} e^{-\frac{1}{2} \int d\tau \int d\tau' \vec{\xi}^t \cdot M_0 \cdot \vec{\xi}}}. \quad (4.40)$$

En este punto podemos nuevamente usar nuestra fórmula de integrales gaussianas (A.11) para reconocer que (4.40) tendrá la forma de determinantes de las matrices correspondientes, más precisamente,

$$\tilde{Z}[\lambda_1, \lambda_2] = \left(\frac{\det(M)}{\det(M_0)} \right)^{-1/2}, \quad (4.41)$$

donde los determinantes deben ser entendidos como la combinación del determinante como matriz 2×2 y el determinante continuo asociado a las integrales en τ y τ' . Es posible avanzar más en el cálculo de esta amplitud si utilizamos transformadas de Fourier para la dependencia en los tiempos. Explícitamente, definimos la doble transformada de Fourier de las matrices M, M_0 usando

$$\mathcal{M}(p, q) := \int \int d\tau d\tau' e^{ip\tau + iq\tau'} M(\tau, \tau'), \quad (4.42)$$

$$\mathcal{M}_0(p, q) := \int \int d\tau d\tau' e^{ip\tau + iq\tau'} M_0(\tau, \tau'). \quad (4.43)$$

Consideremos la componente M_{11} de la ecuación (4.38) y la forma integral de la función de

Green euclidiana correspondiente a (4.16), es decir

$$\tilde{G}(\tau - \tau', x^1 - x'^1) = \int \int \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^2} \frac{-1}{k_1^2 + k_2^2} e^{-ik_1(\tau - \tau') - ik_2(x^1 - x'^1)}. \quad (4.44)$$

Usando (4.44) y (4.42) en (4.38) tenemos

$$\mathcal{M}_{11}(p, q) = T_1 + T_2, \quad (4.45)$$

$$T_1 = \int \int d\tau d\tau' e^{ip\tau + iq\tau'} \frac{\delta^1(\tau - \tau')}{\lambda_1}, \quad (4.46)$$

$$T_2 = \int \int d\tau d\tau' e^{ip\tau + iq\tau'} \left(\int \int \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)^2} \frac{1}{k_1^2 + k_2^2} e^{-ik_1(\tau - \tau') - ik_2(0)} \right). \quad (4.47)$$

La integración de T_1 es directa y obtenemos

$$T_1 = \frac{2\pi}{\lambda_1} \delta(p + q),$$

mientras que para T_2 podemos calcularlo como sigue partiendo de (4.47)

$$\begin{aligned} T_2 &= \int \int \frac{dk_1 dk_2}{(2\pi)} \int d\tau e^{ip\tau - ik_1\tau} \frac{1}{k_1^2 + k_2^2} \delta(k_1 + q) \\ &= \int \frac{dk_2}{(2\pi)} \int d\tau e^{ip\tau + iq\tau} \frac{1}{q^2 + k_2^2} \\ &= \frac{\pi}{q} \delta(p + q). \end{aligned}$$

Donde en la primera igualdad integramos en τ' , en tanto que en la segunda se integró sobre k_1 y finalmente en la tercera igualdad usamos la integral en τ así como una continuación analítica para la integral en k_2 de modo que el contorno de integración considerado se formó con el eje real y una semicircunferencia abarcando el semiplano correspondiente a $\text{Im}k_2 > 0$. Combinando estos resultados expresamos a la componente $\mathcal{M}_{11}(p, q)$ como

$$\mathcal{M}_{11}(p, q) = 2\pi\delta(p + q) \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{2q} \right).$$

De manera análoga podemos calcular cada componente de las matrices de interés para obtener su transformada de Fourier explícita resultando en

$$\mathcal{M}(p, q) = 2\pi\delta(p+q) \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{2q} & \frac{e^{-qa}}{2q} \\ \frac{e^{-qa}}{2q} & \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{2q} \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

$$\mathcal{M}_0(p, q) = 2\pi\delta(p+q) \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix}. \quad (4.49)$$

Ahora nuestra amplitud de interés (4.41), usando (4.48) y (4.49) puede reescribirse de la siguiente manera

$$\tilde{Z}[\lambda_1, \lambda_2] = \left(\frac{\det \left(2\pi\delta(p+q) \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{2q} & \frac{e^{-q(a)}}{2q} \\ \frac{e^{-q(a)}}{2q} & \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{2q} \end{pmatrix} \right)}{\det \left(2\pi\delta(p+q) \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} \end{pmatrix} \right)} \right)^{-1/2}. \quad (4.50)$$

Para proceder con nuestro análisis conviene recordar la relación de la energía funcional $E[J]$ de una teoría de campo en presencia de una fuente externa J (ver [3, 18])

$$e^{-iE[J]T} := Z[J] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left[i \int d^2x (\mathcal{L}(\phi) + J\phi) \right]. \quad (4.51)$$

Esta corresponde a una representación funcional de la amplitud $\langle 0|e^{-iHT}|0\rangle$ donde T es el intervalo temporal en presencia de J , es decir, $E[J]$ es la energía de vacío como función de la fuente externa; es el análogo de la energía libre de Helmholtz de la mecánica estadística.

En nuestro caso, bajo la rotación de Wick temporal $T = i\tilde{T}$, la energía de vacío toma la forma

$$E = \frac{1}{\tilde{T}} \ln \tilde{Z}[\lambda_1, \lambda_2]. \quad (4.52)$$

Para manipular mejor esta expresión recurrimos a la fórmula aplicable a una matriz ú operador²

$$\ln(\det A) = \text{Tr} \ln A. \quad (4.53)$$

Usando la expresión anterior podemos reescribir (4.50) como sigue (ver [3, 17, 31])

$$\begin{aligned} \ln \tilde{Z}[\lambda_1, \lambda_2] &= -\frac{1}{2} \ln \det M + \frac{1}{2} \ln \det M_0 \\ &= -\frac{1}{2} \ln \det \mathcal{M} + \frac{1}{2} \ln \det \mathcal{M}_0 \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{M} + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathcal{M}_0 \\ &= -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[2\pi\delta(p+q) \left(\frac{1}{\lambda_1\lambda_2} + \frac{1}{2q\lambda_1} + \frac{1}{2q\lambda_2} + \frac{1}{4q^2} - \frac{e^{-2qa}}{4q^2} \right) \right] + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \left[2\pi\delta(p+q) \left(\frac{1}{\lambda_1\lambda_2} \right) \right] \\ &= -\frac{1}{2} L\tilde{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \ln \left[1 + \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2q} + \frac{\lambda_1\lambda_2}{4q^2} (1 - e^{-2qa}) \right], \end{aligned} \quad (4.54)$$

donde en la primera igualdad usamos la propiedad del logaritmo de un cociente, en la segunda usamos la invariancia del determinante bajo cambio de base y pasamos al espacio de Fourier, mientras que en la tercera igualdad usamos la identidad (4.53). En la cuarta igualdad usamos (4.50) calculando los determinantes 2×2 para finalizar con la expresión de la traza en el espacio de Fourier, que explica la remoción del factor delta, en la quinta igualdad. El factor de $L\tilde{T}$ está asociado con la integral funcional [3].

La densidad de energía $\mathcal{E} = E/L$ puede expresarse combinando (4.52) con (4.54), con $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$, como sigue

$$\mathcal{E}[\lambda] = \int_0^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \ln \left[1 + \frac{\lambda}{q} + \frac{\lambda^2}{4q^2} (1 - e^{-2qa}) \right]. \quad (4.55)$$

Evidentemente esta energía diverge en el límite $\lambda \rightarrow \infty$, una bien conocida divergencia logarítmica [31, 32], y una regularización es necesaria. Nosotros no desarrollamos este punto aquí. Notablemente la fuerza Casimir asociada con la energía (4.55) es finita como se ve de la siguiente manera

²Para una matriz A con eigenvalores a_i tenemos que $\det A = \prod_i a_i = \exp(\sum_i \ln a_i) = \exp \text{Tr}(\ln A)$ (ver [3, 30]).

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_c &= - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\partial \mathcal{E}[\lambda]}{\partial a} \\
&= - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{e^{-2qa}}{\frac{2q}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{2q}} (1 - e^{-2qa}) \\
&= - \int_0^{+\infty} \frac{dq}{2\pi} \frac{2q}{e^{2qa} - 1} \\
&= - \frac{\pi \hbar c}{24a^2}. \tag{4.56}
\end{aligned}$$

En la primera igualdad anterior usamos la relación entre la fuerza y el gradiente espacial de la energía, en la segunda igualdad derivamos el integrando de (4.55), mientras que en la tercera igualdad aplicamos el límite al integrando resultante. Finalmente, en la cuarta igualdad, hicimos uso de (2.75) para evaluar la integral y restauramos los factores de \hbar y c que nos dan el resultado conocido de la fuerza Casimir entre placas puntuales para un campo escalar en una dimensión espacial.

Capítulo 5

Conclusiones, discusión y perspectivas

Los conceptos de la mecánica cuántica, campos y relatividad especial se combinan para dar lugar a la teoría cuántica de campo. Esta nos ha permitido no solo describir los procesos de las partículas elementales sino también sus consecuencias en otras circunstancias como en la astrofísica y la cosmología, la física nuclear así como otras derivaciones en física matemática. Entre las ideas más intuitivas de un campo libre esta su descomposición en modos de Fourier que nos permite extraer información física, a nivel hamiltoniano, como la energía y el momento del campo en términos de las contribuciones de tales modos. Sin embargo para el caso de campos interactuantes la descripción más conveniente se basa en la integral de trayectoria de Feynman que determina amplitudes de transición con la interacción incorporada perturbativamente, típicamente en un esquema lagrangiano y por tanto manifiestamente covariante de Lorentz. En cualquier caso el estado de vacío del campo resulta jugar un papel preponderante. En el caso hamiltoniano se requiere de una regularización para obtener una energía física finita mientras que en la integral de Feynman una prescripción basada en una continuación analítica en el tiempo es necesaria para capturar la información de este estado.

Históricamente Casimir y Polder propusieron incluir las fluctuaciones de vacío para explicar la

interacción molecular en coloides [6]. Esto llevó a Casimir a analizar la energía física de vacío en presencia de un par de placas planas conductoras paralelas. Su conclusión fue que tales fluctuaciones daban lugar a una fuerza atractiva entre placas [5]. No es difícil convencerse que el origen de este efecto esta asociado con el confinamiento de los modos del campo bajo estudio a una región del espacio. Claramente entonces el efecto no es privativo del campo electromagnético sino que puede emerger para un campo escalar, fermiónico o un campo no abeliano.

Es natural plantearse el estudio del efecto Casimir a la luz de la integral de trayectoria por diferentes razones. Por ejemplo es deseable confirmar que en este formalismo reobtenemos los resultados obtenidos por otros métodos. También en el caso de interacciones éstas pueden ser consideradas perturbativamente en este formalismo. Asimismo otros desarrollos de la cuantización, como la polimérica adoptada en el caso de la gravedad, son susceptibles de ser incorporados en este esquema.

En esta tesis estudiamos el cálculo del efecto Casimir con diferentes esquemas para un campo escalar sin masa en una dimensión espacial. Por completez, en el capítulo II, discutimos algunos de los métodos más frecuentemente usados para este fin. Iniciamos con la cuantización canónica del campo escalar sujeto a condiciones de frontera tipo Dirichlet en la posición de dos placas puntuales ec.(2.5). En este caso la energía de vacío pudo describirse mediante un regulador como la combinación de una cantidad divergente con una cantidad finita ec.(2.35). Esencialmente la divergencia se puede entender como asociada a la misma región espacial pero en ausencia de placas. La energía física finita resulta de la diferencia entre la energía con placas y en ausencia de ellas ec.(2.36). En siguiente término adoptamos la fórmula de Abel-Plana que nos plantea la diferencia entre una sumatoria y una integral de una misma función con ciertas propiedades analíticas ec.(2.49). Evidentemente este esquema es un reminiscente de la regularización de la cuantización canónica mencionada antes y con la cual coincide en el resultado final. Después consideramos el enfoque de la función zeta de Riemann. En este caso la energía de los modos confinados entre las dos placas puntuales puede reescribirse como la función zeta de Riemann misma, a la cual le aplicamos la fórmula de reflexión ec.(2.54) dando como resultado el valor físico de la cuantización canónica. Al final de este capítulo utilizamos la función de Green del operador de Klein-Gordon ec.(2.56) sujeto a las condiciones de frontera asociadas con las placas para calcular el flujo de momento por unidad de

tiempo sobre una de ellas dando lugar así a la fuerza Casimir correspondiente ec.(2.73), nuevamente en coincidencia con los formalismos previos.

Para poder analizar convenientemente el enfoque de la integral de trayectoria para el cálculo de la fuerza Casimir en el capítulo III estudiamos la prescripción de Feynman para la amplitud de transición de un sistema mecánico partiendo del operador de evolución hamiltoniano ec.(3.11) . Después de implementar una partición temporal expresamos esta amplitud como la integral sobre todas las trayectorias correspondientes ec.(3.19). Asimismo planteamos el problema básico de los procesos de la física de partículas elementales como una amplitud de transición vacío-vacío en presencia de una fuente. De esta manera se obtuvieron también las funciones de n -puntos, es decir valores de expectación en vacío de productos de posiciones a diferentes tiempos ec.(3.37).

Con la preparación del capítulo anterior pudimos plantear en el capítulo IV el problema del efecto Casimir con el formalismo de la integral de trayectoria. Con este fin incorporamos en la amplitud vacío-vacío escrita en términos de la integral de trayectoria un acoplamiento con dos potenciales delta que implementan la presencia de las placas puntuales ec.(4.29). Nuestro caso resulta del límite infinito de este acoplamiento pues permite incorporar las condiciones de Dirichlet del problema. Naturalmente la presencia de los potenciales delta sugiere la introducción de dos grados de libertad mecánicos auxiliares en términos de los cuales el desarrollo técnico del problema basado en el uso recurrente de integrales gaussianas continuas es resuelto ecs.(4.30 y 4.31). La amplitud vacío-vacío puede relacionarse con la energía en presencia de una fuente mediante una fórmula general de la teoría de campo [17]. En el límite de fuente nula la energía resultante es logarítmicamente divergente indicando la necesidad de una regularización. Nosotros no seguimos esta ruta y simplemente notamos que la fórmula obtenida para la energía da lugar a una fuerza de Casimir finita ec.(4.56). Esencialmente el gradiente de la energía respecto de la separación entre placas descarta el término divergente.

Como conclusiones del presente trabajo tenemos las siguientes. Primera, la cuantización de los campos puede llevar a divergencias en cantidades físicas como la energía y una regularización suele ser necesaria. Segunda, el estado de vacío en la teoría cuántica de campos juega un papel preponderante y su caracterización adecuada es importante. Tercera, el efecto Casimir para un

campo escalar sin masa en una dimensión espacial puede tratarse con diferentes esquemas, todos ellos consistentes, ya sea enfatizando los modos como en el caso de la cuantización canónica, función zeta de Riemann, fórmula de Abel-Plana y función de Green, o no como en el caso de la integral de trayectoria. Cuarta, en este último formalismo obtuvimos una energía divergente que debe de regularizarse, sin embargo, la fuerza correspondiente siendo un gradiente de la energía elimina la divergencia y da lugar a una fuerza de Casimir finita.

El presente trabajo puede continuarse en diferentes direcciones. Una de ellas es considerar la renormalización de la energía Casimir en el formalismo de integral de trayectoria vía la renormalización para campos. Esto debería llevar al resultado conocido de la energía finita de Casimir. Otra posibilidad consiste de considerar un campo escalar con autointeracción y estudiar perturbativamente las correcciones a la energía y a la fuerza Casimir. También la cuantización polimérica análoga de aquella por lazos para la gravitación podría aplicarse a cada uno de los modos del campo escalar. Esto permitiría estudiar modificaciones a la fuerza Casimir introducidas por el parámetro que da un carácter discreto adicional a los modos del campo cuantizado poliméricamente. En particular el comportamiento divergente de la energía puede ser de gran interés.

Apéndice

Apéndice A

Integrales gaussianas

En este apéndice describimos el cálculo de integrales gaussianas conteniendo un conjunto numerable de variables para después, heurísticamente, sugerir su extensión a un conjunto continuo.

Consideremos la siguiente integral en n dimensiones

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\prod_{i=1}^n dx_i \right) \exp \left(- \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i \right) \\ &= \exp \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} b_i (A^{-1})_{ij} b_j \right) (2\pi)^{n/2} (\det A)^{-1/2}. \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Para resolver esta integral usaremos el caso unidimensional

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-px^2} = \sqrt{\frac{\pi}{p}}.$$

Primero reescribimos (A.1) en forma matricial

$$I = \int d\vec{x} \exp \left(-\frac{1}{2} \vec{x}^t \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b}^t \cdot \vec{x} \right). \quad (\text{A.2})$$

Como sabemos toda matriz simétrica con coeficientes reales es diagonalizable y sus valores

propios son reales, esto según el teorema espectral.

Sea A una matriz real $n \times n$, entonces es autoadjunta si y solo si A es ortogonalmente equivalente a una matriz real diagonal (ver en [34] T . 7 . 21)

$$P^{-1}AP = D \quad (\text{A.3})$$

$$A = PDP^{-1} \quad (\text{A.4})$$

en donde la matriz D es diagonal y contiene los eigenvalores de A , P es una matriz que debe de ser invertible y ortogonal. El teorema espectral garantiza que cualquier matriz cuadrada simétrica con coeficientes reales es ortogonalmente diagonalizable, y con ello se garantiza la ortogonalidad de la matriz P ,

$$A = PDP^{-1}. \quad (\text{A.5})$$

Usando que P es ortogonal, $P^{-1} = P^t$, podemos reescribir (A.1) como

$$I = \int d\vec{x} e^{-\frac{1}{2}\vec{x}^t \cdot A \cdot \vec{x} + \vec{b}^t \cdot \vec{x}} = \int d\vec{x} e^{-\frac{1}{2}\vec{x}^t \cdot PDP^{-1} \cdot \vec{x} + \vec{b}^t \cdot \vec{x}} = \int d\vec{x} e^{-\frac{1}{2}\vec{x}^t \cdot PDP^t \cdot \vec{x} + \vec{b}^t \cdot \vec{x}}. \quad (\text{A.6})$$

Para resolver esta integral se hace un cambio de variable $\vec{y} = P^t \cdot \vec{x}$, con el elemento de volumen $d\vec{y} = \det P^t \cdot d\vec{x}$. Además $\vec{c}^t = \vec{b}^t P$,

$$I = \int d\vec{y} e^{-\frac{1}{2}\vec{y}^t \cdot D \cdot \vec{y} + \vec{b}^t P \cdot \vec{y}} = \int d\vec{y} e^{-\frac{1}{2}\vec{y}^t \cdot D \cdot \vec{y} + \vec{c}^t \cdot \vec{y}}. \quad (\text{A.7})$$

En notación indicial tenemos que

$$I = \int \prod_{i=1}^n dy_i e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n y_i \lambda_i y_i + \sum_{i=1}^n c_i y_i} = \prod_{i=1}^n \int dy_i e^{-\frac{1}{2} \lambda_i y_i^2 + c_i y_i}. \quad (\text{A.8})$$

Como son integrales de un mismo tipo, esas integrales se resuelven completando el cuadrado, $(ay - c)^2 = a^2 y^2 - 2ac + c^2$, con ello reescribimos el argumento de la exponencial como sigue

$$-\frac{1}{2}\lambda_i y_i^2 + c_i y_i = -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\lambda_i} y_i - \frac{c_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{c_i^2}{\lambda_i}. \quad (\text{A.9})$$

Podemos darle la siguiente forma a nuestra integral

$$\begin{aligned} I &= \prod_{i=1}^n \int dy_i e^{-\frac{1}{2}\lambda_i y_i^2 + c_i y_i} = \prod_{i=1}^n e^{\frac{1}{2} \frac{c_i^2}{\lambda_i}} \int dy_i e^{-\frac{1}{2} \left(\sqrt{\lambda_i} y_i - \frac{c_i}{\sqrt{\lambda_i}} \right)^2} = \prod_{i=1}^n e^{\frac{1}{2} \frac{c_i^2}{\lambda_i}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \sqrt{2\pi} \\ &= (2\pi)^{n/2} \frac{1}{\det^{1/2} D} e^{\frac{1}{2} \vec{c}^t \cdot D^{-1} \cdot \vec{c}} = (2\pi)^{n/2} \frac{1}{\det^{1/2} A} e^{\frac{1}{2} \vec{b}^t \cdot A^{-1} \cdot \vec{b}} \\ &= (2\pi)^{n/2} (\det A)^{-1/2} \exp \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} b_i (A^{-1})_{ij} b_j \right). \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Finalmente obtenemos el resultado deseado

$$I = \int \left(\prod_{i=1}^n dx_i \right) \exp \left(- \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i \right) = \exp \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} b_i (A^{-1})_{ij} b_j \right) (2\pi)^{n/2} (\det A)^{-1/2}. \quad (\text{A.11})$$

Extrapolando a un conjunto continuo de variables tenemos

$$\begin{aligned} I &= \int \mathcal{D}\psi \exp \left(- \int \int \frac{1}{2} \psi(x) M(x, x') \psi(x') dx dx' + \int J(x) \psi(x) dx \right) \\ &= \exp \left(\iint \frac{1}{2} J(x) M^{-1}(x, x') J(x') dx dx' \right) (\det M(x, x'))^{-1/2}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Bibliografía

- [1] N.D. Birrell and P.C.W. Davies, *Quantum fields in curved space*, Cambridge monographs on mathematical physics,1984.
- [2] O.Pedraza-Ortega, *Sobre la fenomenología de mundos brana a bajas energías: efecto Casimir y corrimiento Lamb*, Tesis doctoral,UAM-I,2007.
- [3] M.E.Peskin and D.V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley,1995.
- [4] H. Kleinert, *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, 4ed, World Scientific, 2006.
- [5] H.B.G.Casimir, *On the attraction between two perfectly conducting plates*,reinprint from Proceedings, 51, 793-795, 1948.
- [6] H.B.G Casimir and D. Polder, *The Influence of Retardation on the London-van der Waals Forces*, Phys. Rev.73,360-372,1948.
- [7] S.K.Lamoreaux, *Demonstration of the Casimir Force in 0.6 to 6 μm Range*, Phys.Rev.Lett,78,1,1997.
- [8] U. Mohideen and A. Roy , *Precision measurement of the Casimir force from 0.1 to 0.9 micrometers*, Phys.Rev.Lett. ,81,4549-4552, 1998.

- [9] A. Roy, Y. Lin and U. Mohideen, *Improved precision measurement of the casimir force*, Phys.Rev. D, 60, 1999.
- [10] B.W. Harris, F. Chen and U. Mohideen, *Precision measurement of the Casimir force using gold surfaces*, Phys.Rev. A,62, 2000.
- [11] T. Ederth, *Template-stripped gold surfaces with 0.4-nm rms roughness suitable for force measurements: Application to the Casimir force in the 20–100-nm range*, Phys. Rev. A, 62, 062104, 2000.
- [12] H.B. Chan, V.A. Aksyuk, R.N. Kleiman, D.J. Bishop and F. Capasso, *Quantum Mechanical Actuation of Microelectromechanical System by the Casimir Force*, Science, 291, 1941-1944, 2001.
- [13] K.A.Milton, *The Casimir effect: Physical Manifestations of Zero-Point Energy*, World Scientific,2001.
- [14] M. Bojowald, *Absence of singularity in loop quantum cosmology*, Phys. Rev. Lett., 86, 5227-5230, 2001.
- [15] A. Ashtekar and M. Bojowald, *Quantum geometry and the Schwarzschild singularity*, Class. Quant. Grav.,23,391-411, 2006.
- [16] A. Ashtekar, M. Campiglia and A. Henderson, *Path Integrals and the WKB approximation in Loop Quantum Cosmology*, Phys. Rev. D, 82, 2010.
- [17] R.Golestanian and M.Kardar, *Path-integral approach to the dynamic Casimir effect with fluctuating boundaries*, Phys.Rev.A,58,3,1998.
- [18] M.Bordag, G.L.Klimchitskaya, U. Mohideen and V.M. Mostepanenko, *Advances in the Casimir Effect*, Oxford university prees, 2009.
- [19] M. Demetrian, *Casimir effect in four situations-including a noncommutative two-sphere*, FIZICA B, 11, 4,175-190, 2002.

- [20] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2ed. , Cambridge University Press, 1996.
- [21] A. Lahiri and P. B.Pal, *A First Book of quantum field theory*, 2ed,alpha science,2005.
- [22] I.S.Gradshiteyn and I.M.Ryzhik, *Tables of integrals,Sums,Series and Products*,7ed, Academic Press,2007.
- [23] A.A.Saharian, *The Generalized Abel-Plana formula applications to Bessel functions and Casimir effect*,[arXiv: hep-th/0002239v1],2000.
- [24] H.J. Arfken and G.B Weber, *Mathematical Methods for Physicists*,6ed,Elsevier,2005.
- [25] N.V. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the theory of quantized fields*, 3ed., John Wiley and Sons, 1980.
- [26] M.Abramowitz and I.A.Stegun, *Handbook of mathematical functions* ,Dover,1970.
- [27] M. Chaichian and A. Demichev, *Path Integrals in Physics: Volume I Stochastic Processes and Quantum Mechanics*, IoP Publishing Bristol and Philadelphia,2001.
- [28] W.Greiner and J.Reinhardt, *Field Quantization*, Springer,1996.
- [29] A.A. García-Chung, *Teorías de campos con singularidades móviles: Efecto Casimir Dinámico*,Tesis de maestría,Instituto Balseiro,2008.
- [30] M.Stone, *The Physics of Quantum Fields*, Springer,2000.
- [31] R.L.Jaffe, *Unnatural Acts: unphysical consequences of imposing boundary conditions on quantum fields*, [arXiv: hep-th/0307014v2], 2003.
- [32] N.Graham, R.L. Jaffe, et al, *Casimir energies in light of quantum field theory*, [arXiv: hep-th/027205v3],2003.
- [33] K.A.Milton, *The Casimir effect: recent controversies and progress*, J.Phys A: Math. Gen. 37, 2004.
- [34] S.Friedberg.et al, *Algebra Lineal*, 1ed,Publicaciones Cultural,1982.