

CORRESPONDENCIA ADS/CFT NO CONMUTATIVA

PATIÑO LÓPEZ SERGIO



Para obtener el grado de Maestro en Ciencias (Física)

Universidad Autónoma Metropolitana

Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Asesor: Dr. Marco Antonio Maceda Santamaría

Sinodales:

Dr. Eduardo Piña Garza

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'E. Piña Garza', written over a horizontal line.

Dr. Alberto Güijosa Hidalgo

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'A. Güijosa Hidalgo', written over a horizontal line.

Dr. Marco Antonio Maceda Santamaría

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'M. A. Maceda Santamaría', written over a horizontal line.

Ciudad de México, 09 de julio de 2018

[27 de junio de 2018 at 22:32 - classicthesis]

[20 de julio de 2018 at 9:29 - classicthesis]



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00065

Matricula: 2153805748

Correspondencia AdS/CFT no
conmutativa

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 9 del mes de julio del año 2018 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. EDUARDO PIÑA GARZA
DR. ALBERTO GÚIJOSA HIDALGO
DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA

2
9
5
3



SERGIO PATIÑO LOPEZ
ALUMNO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)
DE: SERGIO PATIÑO LOPEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. EDUARDO PIÑA GARZA

VOCAL

DR. ALBERTO GÚIJOSA HIDALGO

SECRETARIO

DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA

CORRESPONDENCIA ADS/CFT NO CONMUTATIVA

PATIÑO LÓPEZ SERGIO



Para obtener el grado de Maestro en Ciencias (Física)

Universidad Autónoma Metropolitana

Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Asesor: Dr. Marco Antonio Maceda Santamaría

Sinodales:

Dr. Eduardo Piña Garza

Dr. Alberto Güijosa Hidalgo

Dr. Marco Antonio Maceda Santamaría

Ciudad de México, 09 de julio de 2018

Eppur si muove.
Y sin embargo se mueve.
— Galileo Galilei

RESUMEN

La conmutatividad no es una propiedad adquirida en el mundo real. Por ejemplo, cuando nos levantamos por la mañana, no es demasiado importante el orden en el que nos ponemos el reloj o los zapatos. Pero, ¡más vale no cambiar la disposición de la ducha y el vestido! La descripción matemática de un sistema físico se realiza por medio de ciertas observaciones del sistema, lo que uno intenta es obtener un formalismo matemático en términos de estas observaciones.

En este trabajo realizamos el estudio de la Correspondencia AdS/CFT y una extensión no conmutativa. Primero discutimos los componentes que dan origen a dicha correspondencia, esto es, estudiamos la Teoría de Campos Conforme. Posteriormente discutimos el espacio-tiempo Anti-de Sitter en diferentes sistemas coordenados. Por último, revisamos la correspondencia AdS/CFT no conmutativa en un ejemplo donde se aplica para calcular propiedades termodinámicas de un agujero negro específico, encontrando similitudes con un superconductor holográfico.

*I was not always the best student
with the highest grades,
but my teachers saw something
in me and tried to encourage me.*

— May-Britt Moser

AGRADECIMIENTOS

Cada paso que damos está acompañado de mucho más que la inercia que tenemos para movernos.

En la vida intuitivamente las personas tenemos un camino por recorrer, un sendero por escalar. El compartir una meta con mis seres queridos es muy importante para mí ya que las ganas de seguir adelante se alimentan de la fe, apoyo y confianza que mi gente me brinda.

Este trabajo es resultado de un largo tiempo de esfuerzos, tropiezos, tardes de discusión y hasta desmotivaciones en su momento; de los cuales siempre he aprendido algo nuevo.

Quiero agradecer enormemente a mi asesor el Dr. Marco Maceda quien sin dudar aceptó ser parte importante en mi vida académica. Las pláticas que hemos tenido, las clases que me ha impartido, las experiencias que me ha contado han dado hincapié a estudiar, leer, aprender y disfrutar día a día mi trabajo.

Me siento honrado de ser amigo de las personas que tanto aprecio, de pertenecer a la familia que me brinda su ayuda incondicional, todos tienen grandes palabras cuando es necesario oírlos. El apoyo moral es muy importante para mí el cual siempre me orienta a ser una persona de bien.

Por último quiero agradecer a los profesores que nos comparten todos sus conocimientos de una manera enriquecedora. A CONACyT quien me brindó un gran apoyo para conseguir llegar a este punto.

ÍNDICE GENERAL

Introducción	1
1 INTRODUCCIÓN	3
1.1 Motivación	3
1.2 Breve historia de la dualidad AdS/CFT	4
Correspondencia AdS/CFT no Conmutativa	7
2 TEORÍA CONFORME DE CAMPOS	9
2.1 Teoría Conforme de Campos	9
2.1.1 Transformaciones conformes en $d \geq 3$	10
2.1.2 Transformaciones Conformes infinitesimales	12
2.1.3 Grupo conforme	16
3 ESPACIOTIEMPO TIPO ANTI-DE SITTER	33
3.1 Espacios vs espaciotiempos	33
3.1.1 Espacios con curvatura constante	33
3.1.2 Espaciotiempos con curvatura constante	35
3.2 Brana negra extremal	36
4 CORRESPONDENCIA ADS/CFT EN UN FONDO NO CONMUTATIVO	45
4.1 Superconductividad y holografía	45
4.1.1 Dual gravitacional	45
4.1.2 Condensado	46
4.2 Estados coherentes y distribuciones de materia no conmutativa	47
4.2.1 Estados coherentes	48
4.2.2 Funciones de onda	49
4.2.3 Distribuciones Gaussianas no conmutativas	50
4.3 Correspondencia AdS/CFT no conmutativa	55
4.3.1 Propiedades termodinámicas del agujero negro AdS no conmutativo (AdS NC)	55
4.3.2 Formas asintóticas del campo de norma y el campo escalar	63
4.3.3 Condensación en un fondo no conmutativo	67
5 AGUJERO NEGRO DE EINSTEIN-BORN-INFELD	77
5.1 Geometría del agujero negro de Einstein-Born-Infeld en 4 dimensiones	77
5.2 Correspondencia AdS/CFT no conmutativa para el hoyo negro de Einstein-Born-Infeld	82
5.3 Condición extremal en el agujero negro de Einstein-Born-Infeld	88
5.3.1 Radio de horizonte del agujero EBI no conmutativo	89

5.4	Condensación en un fondo no conmutativo	93
6	CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS	101
6.1	Conclusiones y Perspectivas	101
	Apéndice	103
A	APÉNDICE	105
A.1	Superconductividad	105
A.1.1	Superconductores holográficos	106
A.2	Radio del horizonte del agujero negro clásico de EBI .	107
	BIBLIOGRAFÍA	113

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1	Ejemplo de visualización de la correspondencia AdS/CFT, las cuerdas viven en un espacio más grande que donde viven las partículas.	4
Figura 2	Equivalencia entre las dos teorías mencionadas en el sistema propuesto por Maldacena.	5
Figura 3	Ejemplo de conservación de ángulos después de un reescalamiento.	9
Figura 4	Espacios y espaciotiempos	34
Figura 5	La incorporación de AdS_2 en $R^{2,1}$, la dirección tipo tiempo t es periódica.	35
Figura 6	La envoltura de dS_2 es similar a AdS_2 pero la signatura del espaciotiempo es diferente.	36
Figura 7	Graficamos la acción contra la coordenada radial, para esta gráfica se ha elegido $L = 10$ y $r_0 = 1$. El argumento de la exponencial (corrección NC) $r_0^2/4\theta$ es igual a 1,5, 5 y 10.	63
Figura 8	Resistividad como función de la temperatura de un metal y de un superconductor.	105

ÍNDICE DE CUADROS

Cuadro 1	Diferentes campos y la relación entre masa y dimensión del campo.	66
----------	--	----

ACRÓNIMOS

RG	Renormalization Group
NC	Noncommutative/No conmutativo
E-L	Euler-Lagrange
dS	de Sitter
AdS	Anti-de Sitter
CFT	Conformal Field Theory
QFT	Quantum Field Theory
BCH	Baker-Campbell-Hausdorff
QCD	Quantum Chromodynamics
ADM	descomposición Arnowitt-Deser-Misner
MSYM	Maximalmente Supersimétrico Yang-Mills

INTRODUCCIÓN

Divido en dos secciones este trabajo, en la primera se menciona la motivación que nos arrojó a estudiar todos los temas siguientes, es decir, revisamos la idea que se sigue en la dualidad propuesta por Maldacena, estudiando la relación entre una Teoría Conforme de Campos y el espaciotiempo de AdS. En la segunda sección encontramos una extensión no conmutativa de la correspondencia AdS/CFT estudiando dos diferentes hoyos negros los cuales son el agujero negro de Einstein-Maxwell y el agujero negro de Einstein-Born-Infeld, respectivamente.

INTRODUCCIÓN

1.1 MOTIVACIÓN

Este trabajo surgió como una simple pregunta, la cual se intenta responder en las páginas siguientes. ¿Qué pasa si hacemos una extensión no conmutativa de la correspondencia AdS/CFT? Hoy en día se han desarrollado diferentes trabajos considerando una extensión no conmutativa en holografía, los primeros trabajos en esta dirección son [24, 29].

La también llamada dualidad holográfica [28], ha sido un tema de mucho interés en las últimas dos décadas en la física teórica, esto debido a su gran éxito en un número verdaderamente grande de trabajos en varias áreas de la física, por ejemplo, teoría de cuerdas, materia condensada, etc. La correspondencia AdS/CFT no describe teorías del mundo tal y como lo conocemos hoy en día, pero sí bastantes modelos de juguete (como la gente les llama) que se asemejan en cierta medida a la realidad, tales como MSYM (máximamente supersimétrico Yang-Mills, por sus siglas en inglés) que es una prima de QCD (cromodinámica cuántica, por sus siglas en inglés), la cual es una teoría que describe la interacción fuerte de las partículas elementales en la más famosa teoría cuántica de campos conocida, *el modelo estándar*.

Por otro lado, la geometría no conmutativa nace como un intento distinto a las teorías más conocidas para describir una teoría cuántica de la gravedad, las cuales son teoría de cuerdas y gravedad cuántica de lazos. Hoy en día existen diferentes vertientes de este interesante tema de estudio: cuantización por deformación, geometría no conmutativa de Connes, etc.

Una de las ramas de la física donde ha sido de gran interés la correspondencia AdS/CFT es la materia condensada. Hoy en día se tiene bastante control en muchos ejemplos como en [10, 21-23], donde se estudian agujeros negros los cuales tienen del lado de la teoría de campos una descripción sorprendente de superconductores, el cual es un estudio de interés actual.

Actualmente dos de las teorías más estudiadas teóricamente son muy diferentes debido a que una estudia el mundo macroscópico y la otra el mundo microscópico; estas teorías son la Relatividad General y la Teoría Cuántica de Campos, tomando en cuenta que el universo está

compuesto de campos y las partículas son pequeñas excitaciones en dichos campos. A la hora de describir una Teoría Cuántica de Campos uno puede estudiarla gráficamente con los diagramas de Feynman y para ciertos regímenes de energía, estos diagramas son muy buenas herramientas cuando la teoría es débilmente acoplada como en el caso de la electrodinámica cuántica, pero cuando queremos estudiar teorías fuertemente acopladas estas reglas ya no nos ayudan, como en el caso de la cromodinámica cuántica.

1.2 BREVE HISTORIA DE LA DUALIDAD ADS/CFT

La también llamada dualidad de Maldacena [2, 18, 28, 40] surge como una herramienta la cual nos permite entender ciertos sistemas desde dos puntos de vista totalmente diferentes, esto es, por un lado se tiene una teoría cuántica de campos la cual vive en un espaciotiempo plano y por el otro una teoría de cuerdas que vive en un espaciotiempo curvo, esto quiere decir que la teoría de cuerdas contiene a la gravedad y la QFT no. Esta equivalencia ha sido el primero de un número bastante amplio de trabajos exitosos utilizando la correspondencia AdS/CFT. En la fig. (1) encontramos la equivalencia entre una

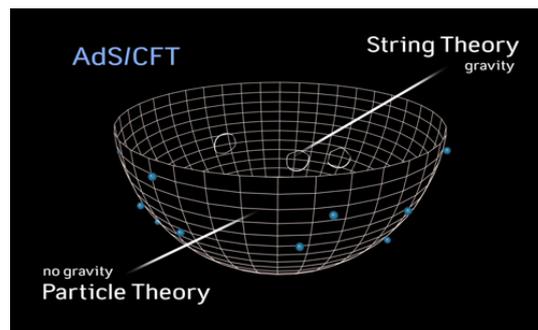


Figura 1: Ejemplo de visualización de la correspondencia AdS/CFT, las cuerdas viven en un espacio más grande que donde viven las partículas.

teoría de campos prima lejana de QCD (también llamadas modelos de juguete) y una teoría específica de cuerdas en un espaciotiempo curvo particular.

El diccionario de la correspondencia es extenso y en la literatura podemos encontrar artículos completos enlistando el diccionario. Como ejemplo más conocido de la correspondencia tenemos la equivalencia entre una teoría de cuerdas tipo IIB viviendo en un espaciotiempo con curvatura negativa en $4 + 1$ dimensiones multiplicado por una esfera en 5 dimensiones y una teoría cuántica de campos prima lejana de QCD conocida como MSYM, dicha teoría contiene gluones y otros tipos de partículas que no se encuentran en QCD, y vive en $3 + 1$ dimensiones.

Al estudiar D-branas del lado de la teoría de cuerdas encontramos que estas 2 teorías son equivalentes, es decir, cualquiera de las dos teorías nos sirven para describir un mismo sistema físico; aunque es importante mencionar que ambas teorías no describen la realidad que vivimos, sí describen un excelente sistema teórico. Este ejemplo es el que proporcionó por primera vez Maldacena [28], en el cual uno puede leer una parte del ahora muy amplio diccionario que hoy en día sirve para entender muchos sistemas de un lado de la correspondencia a otro.

MSYM $SU(N)$	=	Cuerdas IIB en fondo $AdS_5 \times S^5$
Partículas	vs.	Cuerdas
Sin gravedad	vs.	Con gravedad
Con color	vs.	Sin color
Espaciotiempo plano	vs.	Espaciotiempo curvo
3 + 1 dim	vs.	9 + 1 dim

Figura 2: Equivalencia entre las dos teorías mencionadas en el sistema propuesto por Maldacena.

CORRESPONDENCIA ADS/CFT NO CONMUTATIVA

En esta parte de la tesis muestro las partes que conforman a la dualidad norma/gravedad. Primero estudiamos las Teorías Conformes de campos (CFT). Posteriormente estudiamos la geometría del espacio de Anti-de Sitter y por último escribimos el trabajo específico en el cual utilizamos la correspondencia AdS/CFT para entender un superconductor holográfico por medio de los agujeros negros de Einstein-Maxwell y Einstein-Born-Infeld.

TEORÍA CONFORME DE CAMPOS

2.1 TEORÍA CONFORME DE CAMPOS

Para comenzar con nuestro estudio, primero nos cuestionamos qué es una teoría conforme de campos (sin gravedad), la cual Maldacena se dio cuenta que es equivalente a una teoría de cuerdas (con gravedad). Para ello veamos algunos aspectos de la teoría conforme [34].

Una teoría conforme de campos, es por definición, una *Teoría Cuántica de Campos* que es invariante bajo el grupo conforme.

Las transformaciones de Poincaré son aquellas que dejan a la métrica del espacio plano invariante, $\eta_{\mu\nu} := \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$; otra manera de decir esto es que las transformaciones de Poincaré son isometrías del espaciotiempo plano. Estas transformaciones son de la forma

$$x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (2.1)$$

y son una combinación de transformaciones de Lorentz parametrizadas por Λ y traslaciones parametrizadas por a .

El grupo conforme es el conjunto de transformaciones del espaciotiempo que preserva ángulos, estas transformaciones incluyen las

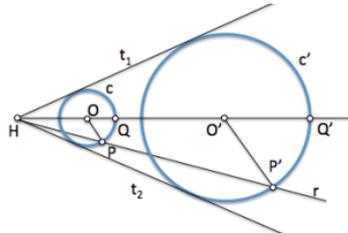


Figura 3: Ejemplo de conservación de ángulos después de un reescalamiento.

transformaciones de Poincaré.

Comenzamos con las transformaciones de escala, las cuales actúan como reescalamientos dentro y fuera de alguna región en el espaciotiempo. Las transformaciones de escala se representan como

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \lambda x, \\ t &\rightarrow \lambda^z t, \end{aligned} \quad (2.2)$$

Los exponentes críticos describen el comportamiento de magnitudes físicas en las proximidades de las transiciones de fase. Para sistemas de dimensión mayor o igual a cuatro, se pueden obtener teóricamente mediante la teoría de campo medio, estas, sustituyendo la interacción de las partículas por un campo externo apropiadamente escogido. Para sistemas de menos dimensiones, el estudio teórico requiere del grupo de renormalización (RG) [34, 38].

donde z es conocido como *exponente dinámico crítico*, el cual es importante en física de materia condensada. Para $z = 1$, tenemos las transformaciones

$$x^\mu \rightarrow \lambda x^\mu, \quad (2.3)$$

y en representación de momentos

$$p^\mu \rightarrow \lambda^{-1} p^\mu.$$

Las transformaciones de escala no forman parte del grupo de Poincaré, ya que bajo una transformación de escala, la métrica del espacio-tiempo plano queda

$$\eta_{\mu\nu} = \lambda^{-2} \eta_{\mu\nu}.$$

Así, mientras las longitudes son reescaladas, los ángulos son preservados. Entonces, una transformación conforme es una generalización de una transformación de escala tal que bajo una transformación de coordenadas

$$x \rightarrow \tilde{x}(x),$$

la métrica del espaciotiempo transforma como

$$\eta \rightarrow f(x) \eta. \quad (2.4)$$

En general, una transformación conforme es una transformación de coordenadas que es un reescalamiento local de la métrica.

2.1.1 Transformaciones conformes en $d \geq 3$

Consideramos el espacio d -dimensional $\mathbb{R}^{p,q}$ (con $p + q = d$), con métrica plana $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$, de signatura (p, q) y elemento de línea $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Se define un mapeo diferenciable ϕ como una transformación conforme si $\phi : g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x)$; bajo una transformación de coordenadas $x \rightarrow x'$, el tensor métrico transforma como

$$g_{\rho\sigma}(x) \rightarrow g'_{\rho\sigma}(x') = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} g_{\mu\nu}(x),$$

de modo que las transformaciones conformes de la métrica plana son definidas por la relación

$$\eta_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\nu} = \Lambda(x) \eta_{\mu\nu}.$$

La función $\Lambda(x)$ es llamada *factor de escala*. El caso $\Lambda(x) = 1$, corresponde al grupo de Poincaré el cual consta de traslaciones y rotaciones de Lorentz; el caso donde $\Lambda(x)$ es una constante corresponde a transformaciones de escala globales.

Consideremos transformaciones infinitesimales de coordenadas a primer orden en $\epsilon(x) \ll 1$:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon^{\mu}(x) + \vartheta(\epsilon^2). \quad (2.5)$$

Entonces, la métrica obtiene una expresión particular

$$\eta_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = \eta_{\rho\sigma} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (x^{\rho} + \epsilon^{\rho}(x) + \vartheta(\epsilon^2)) \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} (x^{\sigma} + \epsilon^{\sigma}(x) + \vartheta(\epsilon^2)) \right\},$$

de modo que si realizamos las derivadas

$$\begin{aligned} \eta_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} &= \eta_{\rho\sigma} \left[\left(\delta_{\mu}^{\rho} + \frac{\partial \epsilon^{\rho}}{\partial x^{\mu}} + \vartheta(\epsilon^2) \right) \left(\delta_{\nu}^{\sigma} + \frac{\partial \epsilon^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \vartheta(\epsilon^2) \right) \right] \\ &= \eta_{\rho\sigma} \left(\delta_{\mu}^{\rho} \delta_{\nu}^{\sigma} + \delta_{\mu}^{\rho} \frac{\partial \epsilon^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} + \delta_{\nu}^{\sigma} \frac{\partial \epsilon^{\rho}}{\partial x^{\mu}} + \vartheta(\epsilon^2) \right), \end{aligned}$$

y contrayendo índices, obtenemos

$$\eta_{\rho\sigma} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} = \eta_{\mu\nu} + \frac{\partial \epsilon_{\mu}}{\partial x^{\nu}} + \frac{\partial \epsilon_{\nu}}{\partial x^{\mu}} + \vartheta(\epsilon^2).$$

Así, para que una transformación infinitesimal a primer orden en ϵ sea conforme, debemos tener

$$\partial_{\mu} \epsilon_{\nu} + \partial_{\nu} \epsilon_{\mu} = f(x) \eta_{\mu\nu}, \quad (2.6)$$

donde $f(x)$ es alguna función y $\partial_{\mu} := \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}$. Realizamos ahora una contracción en la ec. (2.6) con $\eta^{\mu\nu}$ y obtenemos

$$f(x) = \frac{2}{d} \partial_{\mu} \epsilon^{\mu},$$

por lo tanto

$$\partial_{\mu} \epsilon_{\nu} + \partial_{\nu} \epsilon_{\mu} = \frac{2}{d} \partial_{\rho} \epsilon^{\rho} \eta_{\mu\nu}. \quad (2.7)$$

La ec. (2.7) es la *Ecuación de Killing Conforme*.

El factor de escala nos queda como

$$\Lambda(x) = 1 + \frac{2}{d} \partial_{\mu} \epsilon^{\mu} + \vartheta(\epsilon^2).$$

Si actuamos sobre la ec. (2.7) con ∂^{ν} y definimos

$$\partial \cdot \epsilon \equiv \partial_{\mu} \epsilon^{\mu}, \quad \square \equiv \partial_{\mu} \partial^{\mu},$$

la ecuación de Killing conduce a

$$\partial_{\mu} (\partial \cdot \epsilon) + \square \epsilon_{\mu} = \frac{2}{d} \partial_{\mu} (\partial \cdot \epsilon).$$

Ahora, la expresión anterior la actuamos con ∂_ν

$$\partial_\mu \partial_\nu (\partial \cdot \epsilon) + \square \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} \partial_\mu \partial_\nu (\partial \cdot \epsilon). \quad (2.8)$$

Cambiando los índices en la expresión anterior y sumando con la ec. (2.7), encontramos entonces

$$(\eta_{\mu\nu} \square + (d-2) \partial_\mu \partial_\nu) (\partial \cdot \epsilon) = 0.$$

Ahora, actuamos con $\eta^{\mu\nu}$ tenemos

$$(d-1) \square (\partial \cdot \epsilon) = 0. \quad (2.9)$$

Por otra parte, si en la ec. (2.7) actuamos con ∂_ρ obtenemos

$$\partial_\rho \partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\rho \partial_\nu \epsilon_\mu = \frac{2}{d} \eta_{\mu\nu} \partial_\rho (\partial \cdot \epsilon).$$

Tomando las permutaciones cíclicas de esta expresión encontramos dos expresiones más; sumamos dos y restamos la primera para obtener

$$2\partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho = \frac{2}{d} (-\eta_{\mu\nu} \partial_\rho + \eta_{\rho\mu} \partial_\nu + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu) (\partial \cdot \epsilon). \quad (2.10)$$

Estas ecuaciones serán utilizadas en lo sucesivo.

2.1.2 Transformaciones Conformes infinitesimales

Escribimos ϵ_μ como una forma cuadrática de las coordenadas

$$\epsilon_\mu \rightarrow a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho, \quad (2.11)$$

donde los coeficientes $a_\mu, b_{\mu\nu}, c_{\mu\nu\rho} \ll 1$ y son constantes. ϵ_μ puede ser a lo más cuadrática ya que $\partial_\mu \epsilon^\mu$ es lineal a lo más de acuerdo a la ec. (2.9). El coeficiente $c_{\mu\nu\rho}$ es simétrico en los últimos dos índices.

Estudiemos estos términos de manera independiente, comenzando con a_μ , el cual corresponde a una traslación infinitesimal; el generador de esta transformación es el momento

$$P_\mu = -i\partial_\mu.$$

Para $b_{\mu\nu}$ usamos

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = \frac{2}{d} (\eta^{\rho\sigma} b_{\rho\sigma}) \eta_{\mu\nu}.$$

En esta ecuación podemos asociar la parte simétrica de b con la métrica, por lo tanto la escribimos como

$$b_{\mu\nu} = \alpha \eta_{\mu\nu} + m_{\mu\nu},$$

donde m es antisimétrico en los índices μ, ν y α es un parámetro. El término $m_{\mu\nu}$ corresponde a las rotaciones infinitesimales de Lorentz $x'^{\mu} = (\delta_{\nu}^{\mu} + m_{\nu}^{\mu}) x^{\nu}$, las cuales tienen como generador el momento angular

$$L_{\mu\nu} = i(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu}).$$

La parte simétrica de esta expresión corresponde a las transformaciones infinitesimales de escala $x'^{\mu} = (1 + \alpha)x^{\mu}$, su generador es

$$D = -ix^{\mu}\partial_{\mu}.$$

Consideremos una transformación infinitesimal de escala genérica, la cual puede ser escrita de la siguiente manera

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \epsilon_{\alpha} \frac{\delta x^{\mu}}{\delta \epsilon_{\alpha}},$$

$$\phi'(x') = \phi(x) + \epsilon_{\alpha} \frac{\delta F}{\delta \epsilon_{\alpha}}(x),$$

donde F es una función asociada al nuevo campo ϕ' , evaluada en el viejo campo ϕ ,

$$\phi'(x') = F(\phi(x)).$$

El nuevo campo ϕ' depende de la nueva posición (coordenada transformada) y el viejo campo depende de x .

En lo que sigue tomamos la convención de que el generador G de una transformación de este tipo es de la forma

$$\phi'(x) - \phi(x) \equiv -i\epsilon_{\alpha} G_{\alpha} \phi(x).$$

Para encontrar su forma explícita, reescribimos la relación entre el campo nuevo y el viejo

$$\phi'(x') - \phi(x) = \epsilon_{\alpha} \frac{\delta F}{\delta \epsilon_{\alpha}},$$

sustituimos la variación de x

$$\phi'\left(x^{\mu} + \epsilon_{\alpha} \frac{\delta x^{\mu}}{\delta \epsilon_{\alpha}}\right) - \phi(x) = \epsilon_{\alpha} \frac{\delta F}{\delta \epsilon_{\alpha}},$$

y desarrollamos en serie de Taylor

$$\phi'(x^{\mu}) + \epsilon_{\alpha} \frac{\partial \phi'}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\delta x^{\mu}}{\delta \epsilon_{\alpha}} \right) - \phi(x) = \epsilon_{\alpha} \frac{\delta F}{\delta \epsilon_{\alpha}}.$$

Por lo tanto el generador de la transformación tiene la forma

$$-i\epsilon_{\alpha} G_{\alpha} \phi = \epsilon_{\alpha} \frac{\delta F}{\delta \epsilon_{\alpha}} - \epsilon_{\alpha} \frac{\partial \phi'}{\partial x^{\mu}} \left(\frac{\delta x^{\mu}}{\delta \epsilon_{\alpha}} \right).$$

Si suponemos que los campos no cambian con la transformación, de modo que $F(\phi) = \phi$, el último término de la expresión anterior desaparece. Bajo transformaciones de escala infinitesimales con generador D , $x \rightarrow e^\epsilon x \approx (1 + \epsilon)x$, así que

$$\begin{aligned} iD\phi &= \frac{\delta x^\mu}{\delta \epsilon} \partial_\mu \phi, \\ \Rightarrow D\phi &= -ix^\mu \partial_\mu \phi, \end{aligned}$$

(recuperamos la acción del generador D). Hasta ahora, hemos analizado el grupo de Poincaré junto con transformaciones de escala.

Ahora checamos el término cuadrático: comenzamos con la ec. (2.10)

$$2\partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho = \frac{2}{d} (-\eta_{\mu\nu} \partial_\rho + \eta_{\rho\mu} \partial_\nu + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu) (\partial \cdot \epsilon),$$

sustituimos el valor de ϵ_μ considerando únicamente el término cuadrático ya que tenemos segundas derivadas en esta expresión

$$2\partial_\mu \partial_\nu (c_{\rho\alpha\beta} x^\alpha x^\beta) = \frac{2}{d} (-\eta_{\mu\nu} \partial_\rho + \eta_{\rho\mu} \partial_\nu + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu) (\partial^\sigma c_{\sigma\alpha\beta} x^\alpha x^\beta).$$

Desarrollando las derivadas parciales en las coordenadas obtenemos

$$2c_{\rho\alpha\beta} \delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta = \frac{2}{d} (-\eta_{\mu\nu} \partial_\rho + \eta_{\rho\mu} \partial_\nu + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu) (\eta^{\sigma\gamma} \partial_\gamma c_{\sigma\alpha\beta} x^\alpha x^\beta),$$

y desarrollamos también los paréntesis del lado derecho

$$2c_{\rho\mu\nu} = \frac{2}{d} (-\eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\gamma} c_{\sigma\alpha\beta} \delta_\rho^\alpha \delta_\gamma^\beta + \eta_{\rho\mu} \eta^{\sigma\gamma} c_{\sigma\alpha\beta} \delta_\nu^\alpha \delta_\gamma^\beta + \eta_{\nu\rho} \eta^{\sigma\gamma} c_{\sigma\alpha\beta} \delta_\mu^\alpha \delta_\gamma^\beta).$$

Utilizando las deltas de Kronecker encontramos que

$$\begin{aligned} 2c_{\rho\mu\nu} &= \frac{2}{d} (-\eta_{\mu\nu} \eta^{\sigma\gamma} c_{\sigma\rho\gamma} + \eta_{\rho\mu} \eta^{\sigma\gamma} c_{\sigma\nu\gamma} + \eta_{\nu\rho} \eta^{\sigma\gamma} c_{\sigma\mu\gamma}) \\ &= \frac{2}{d} (-\eta_{\mu\nu} c_{\sigma\rho}^\sigma + \eta_{\rho\mu} c_{\sigma\nu}^\sigma + \eta_{\nu\rho} c_{\sigma\mu}^\sigma). \end{aligned}$$

Definimos $b_\mu \equiv \frac{1}{d} c_{\sigma\mu}^\sigma$, entonces el coeficiente $c_{\mu\nu\rho}$ se escribe como

$$c_{\mu\nu\rho} = -\eta_{\nu\rho} b_\mu + \eta_{\mu\nu} b_\rho + \eta_{\rho\mu} b_\nu.$$

Estas transformaciones son llamadas *transformaciones especiales conformes*. Para escribir la forma infinitesimal de esta transformación desarrollamos

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon_a \frac{\delta x^\mu}{\delta \epsilon_a},$$

donde la variación es la que corresponde a $c_{\mu\nu\rho}$

$$\begin{aligned}
 x'^{\mu} &= x^{\mu} + \epsilon_a \frac{\delta x^{\mu}}{\delta \epsilon_a} \\
 &= x^{\mu} + c_{\mu\nu\rho} x^{\nu} x^{\rho} \\
 &= x^{\mu} + (-\eta_{\nu\rho} b_{\mu} + \eta_{\mu\nu} b_{\rho} + \eta_{\rho\mu} b_{\nu}) x^{\nu} x^{\rho} \\
 &= x^{\mu} - b^{\mu} x_{\rho} x^{\rho} + x^{\mu} (b \cdot x) + (b \cdot x) x^{\mu} \\
 &= x^{\mu} + 2(b \cdot x) x^{\mu} - b^{\mu} x^2.
 \end{aligned}$$

Así, encontramos todos los generadores del grupo conforme

$$P_{\mu} = -i\partial_{\mu}, \quad (2.12)$$

$$L_{\mu\nu} = i(x_{\mu}\partial_{\nu} - x_{\nu}\partial_{\mu}), \quad (2.13)$$

$$D = -ix^{\mu}\partial_{\mu}, \quad (2.14)$$

$$K_{\mu} = -i(2x_{\mu}x^{\nu}\partial_{\nu} - x^2\partial_{\mu}). \quad (2.15)$$

Las transformaciones conformes finitas que corresponden a las transformaciones infinitesimales conformes más comunes son: *el momento lineal* que genera las traslaciones, *el momento angular* que genera las rotaciones de Lorentz, *el operador de dilatación* que genera las transformaciones de escala (escalamientos), pero, ¿qué es una transformación especial conforme?

La forma explícita que tiene la transformación finita asociada al generador especial conforme es:

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - (x \cdot x) b^{\mu}}{1 - 2(b \cdot x) + (b \cdot b)(x \cdot x)}.$$

El factor de escala para una transformación especial conforme es de la forma

$$\Lambda(x) = (1 - 2(b \cdot x) + (b \cdot b)(x \cdot x))^2,$$

el cual es estudiado ampliamente en mecánica cuántica conforme [34].

Una transformación especial conforme puede generarse considerando inversiones, las cuales son transformaciones discretas, pero en este estudio tenemos en cuenta solo transformaciones continuas para el grupo conforme. Así, dicha transformación puede ser considerada como una inversión de x seguida por una traslación en b , seguida por otra inversión

$$\frac{x'^{\mu}}{x' \cdot x'} = \frac{x^{\mu}}{x \cdot x} - b^{\mu}.$$

Las transformaciones especiales conformes no están globalmente definidas. En la definición de *transformación especial conforme* (expresión para x'^{μ}) vemos que en el punto $x^{\mu} = \frac{1}{b^2} b^{\mu}$ el denominador se anula al igual que el numerador, así, $\Lambda(x)$ se anula en ese punto, por tanto x'^{μ} tiende a infinito.

Sin entrar en gran detalle, para poder definir las transformaciones conformes finitas globalmente se deben considerar compactificaciones conformes, las cuales se estudian en teoría conforme de campos en $d = 2$.

2.1.3 Grupo conforme

Álgebra conforme

Ya que encontramos los generadores del grupo conforme, presentamos el álgebra asociada usando las formas infinitesimales explícitas:

$$[D, P_\mu] = iP_\mu, \quad (2.16)$$

$$[D, K_\mu] = -iK_\mu, \quad (2.17)$$

$$[K_\mu, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu}D - L_{\mu\nu}), \quad (2.18)$$

$$[K_\rho, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu), \quad (2.19)$$

$$[P_\rho, L_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu}P_\nu - \eta_{\rho\nu}P_\mu), \quad (2.20)$$

$$[L_{\mu\nu}, L_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}L_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}L_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}L_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}L_{\mu\rho}). \quad (2.21)$$

Verificamos algunos de estos conmutadores, primero el conmutador entre D y P

$$\begin{aligned} [D, P_\mu]\psi &= (DP_\mu - P_\mu D)\psi \\ &= (-ix^\mu\partial_\mu(-i\partial_\mu\psi) + i\partial_\mu(-ix^\mu\partial_\mu\psi)) \\ &= -x^\mu\partial_\mu^2\psi + \partial_\mu\psi + x^\mu\partial_\mu^2\psi \\ &= \partial_\mu\psi \\ &= iP_\mu. \end{aligned}$$

Ahora calculamos el conmutador entre el operador P y K

$$\begin{aligned} [K_\mu, P_\rho]\psi &= (K_\mu P_\rho - P_\rho K_\mu)\psi \\ &= (-2ix_\mu x^\nu\partial_\nu + ix^2\partial_\mu)(-i\partial_\rho\psi) - (-i\partial_\rho)(-2ix_\mu x^\nu\partial_\nu\psi + ix^2\partial_\mu\psi) \\ &= -2x_\mu x^\nu\partial_\nu\partial_\rho\psi + x^2\partial_\mu\partial_\rho\psi + 2\eta_{\rho\mu}x^\nu\partial_\nu\psi + 2x_\mu\delta_\rho^\nu\partial_\nu\psi + 2x_\mu x^\nu\partial_\rho\partial_\nu\psi \\ &\quad - \delta_\rho^\alpha x_\alpha x_\mu\psi - x^\alpha\eta_{\rho\alpha}\partial_\mu\psi - x^2\partial_\rho\partial_\mu\psi \\ &= 2\eta_{\rho\mu}x^\nu\partial_\nu\psi + 2x_\mu\partial_\rho\psi - 2x_\rho\partial_\mu\psi \\ &= 2i\eta_{\rho\mu}D - 2iL_{\mu\rho} = 2i(\eta_{\rho\mu}D - L_{\mu\rho}). \end{aligned}$$

También calculamos el conmutador entre K y L

$$\begin{aligned} [K_\rho, L_{\mu\nu}]\psi &= (K_\rho L_{\mu\nu} - L_{\mu\nu}K_\rho)\psi \\ &= (-2ix_\rho x^\alpha\partial_\alpha + ix^2\partial_\rho)(ix_\mu\partial_\nu\psi - ix_\nu\partial_\mu\psi) \\ &\quad - (ix_\mu\partial_\nu - ix_\nu\partial_\mu)(-2ix_\rho x^\alpha\partial_\alpha\psi + ix^2\partial_\rho\psi) \\ &= 2x_\rho x^\alpha\eta_{\alpha\mu}\partial_\nu\psi + 2x_\rho x^\alpha x_\mu\partial_\alpha\partial_\nu\psi - 2x_\rho x^\alpha\eta_{\nu\alpha}\partial_\mu\psi - 2x_\rho x^\alpha x_\nu\partial_\alpha\partial_\mu\psi \\ &\quad - x^2\eta_{\rho\mu}\partial_\nu\psi - x^2x_\mu\partial_\rho\partial_\nu\psi + x^2\eta_{\rho\nu}\partial_\mu\psi + x^2x_\nu\partial_\rho\partial_\mu\psi \\ &\quad - 2x_\mu\eta_{\nu\rho}x^\alpha\partial_\alpha\psi - 2x_\mu x_\rho\delta_\nu^\alpha\partial_\alpha\psi - 2x_\mu x_\rho x^\alpha\partial_\nu\partial_\alpha\psi \\ &\quad + x_\mu\delta_\nu^\beta x_\beta\partial_\rho\psi + x_\mu x^\beta\eta_{\nu\beta}\partial_\rho\psi + x_\mu x^2\partial_\nu\partial_\rho\psi \\ &\quad + 2x_\nu\eta_{\mu\rho}x^\alpha\partial_\alpha\psi + 2x_\nu x_\rho\delta_\mu^\alpha\partial_\alpha\psi + 2x_\nu x_\rho x^\alpha\partial_\mu\partial_\alpha\psi \\ &\quad - x_\nu\delta_\mu^\beta x_\beta\partial_\rho\psi - x_\nu x^\beta\eta_{\mu\beta}\partial_\rho\psi - x_\nu x^2\partial_\mu\partial_\rho\psi \\ &= \eta_{\rho\nu}(x^2\partial_\mu\psi - 2x_\mu x^\alpha\partial_\alpha\psi) + \eta_{\mu\rho}(-x^2\partial_\nu\psi + 2x_\nu x^\alpha\partial_\alpha\psi) \\ &= i(\eta_{\mu\rho}K_\nu - \eta_{\rho\nu}K_\mu). \end{aligned}$$

Una vez que se calcularon las componentes del álgebra conforme explícitamente, ahora estudiamos el álgebra del grupo conforme.

Representación del grupo conforme

El álgebra asociada al grupo conforme en $d \geq 3$ es una álgebra de Lie, con esto en mente, surge la pregunta ¿cuántos generadores contiene esta álgebra?

Los generadores son:

1 dilatación +d traslaciones +d transformaciones especiales conformes + $\frac{d(d-1)}{2}$ rotaciones = $\frac{(d+2)(d+1)}{2}$ generadores.

Este número de generadores corresponde a los del álgebra $SO(d+2)$. Anteriormente se había supuesto que los generadores infinitesimales conformes no afectan a los campos, ahora, consideramos como los campos clásicos son afectados por generadores conformes. En general, la invarianza conforme a nivel cuántico no se sigue de la invarianza a nivel clásico. (Recetas de regularización introducen una escala a la teoría la cual rompe la simetría conforme excepto en puntos RG fijos). Buscamos una representación de la matriz T_a tal que bajo una transformación infinitesimal conforme parametrizada por ϵ_a un campo $\phi(x)$ transforma como

$$\phi'(x') = (1 - i\epsilon_a T_a) \phi(x). \tag{2.22}$$

Para encontrar las formas permitidas de estos generadores, usamos un truco del álgebra de Poincaré, comenzamos así estudiando el grupo de Lorentz, el cual es un subgrupo de Poincaré que deja invariante el punto $x = 0$.

Definimos la acción de una transformación de Lorentz infinitesimal en el campo $\phi(0)$, mediante la introducción de la representación matricial $S_{\mu\nu}$,

$$L_{\mu\nu} \phi(0) = S_{\mu\nu} \phi(0),$$

S es el operador de espín asociado con el campo ϕ . Usando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (BCH)

$$e^{-A} B e^A = B + [B, A] + \frac{1}{2!} [[B, A], A] + \frac{1}{3!} [[[B, A], A], A] + \dots,$$

podemos extender el generador $L_{\mu\nu}$ a valores de x fuera del origen de la siguiente manera

$$\left(e^{ix^\lambda P_\lambda} L_{\mu\nu} e^{-ix^\lambda P_\lambda} \right) \phi(x) = (L_{\mu\nu} - x_\mu P_\nu + x_\nu P_\mu) \phi(x).$$

Reagrupamos ahora los términos

$$e^{ix^\lambda P_\lambda} L_{\mu\nu} \underbrace{e^{-ix^\lambda P_\lambda} \phi(x)}_{\text{Traslación}} = (L_{\mu\nu} - x_\mu P_\nu + x_\nu P_\mu) \phi(x),$$

y haciendo un desarrollo en serie de Taylor de la parte identificada con una traslación

$$e^{ix^\lambda P_\lambda} L_{\mu\nu} \phi(0) = (L_{\mu\nu} - x_\mu P_\nu + x_\nu P_\mu) \phi(x),$$

sustituimos el operador de espín

$$e^{ix^\lambda P_\lambda} S_{\mu\nu} \phi(0) = (L_{\mu\nu} - x_\mu P_\nu + x_\nu P_\mu) \phi(x).$$

Ahora podemos conmutar el operador de espín con la exponencial

$$S_{\mu\nu} \underbrace{e^{ix^\lambda P_\lambda} \phi(0)}_{\text{Traslación}} = L_{\mu\nu} \phi(x) + ix_\mu \partial_\nu \phi(x) - ix_\nu \partial_\mu \phi(x),$$

por lo tanto, tenemos

$$L_{\mu\nu} \phi(x) = S_{\mu\nu} \phi(x) - ix_\mu \partial_\nu \phi(x) + ix_\nu \partial_\mu \phi(x). \quad (2.23)$$

Lo anterior puede extenderse al grupo conforme completo. La derivación es muy similar: consideramos el subgrupo que deja al origen $x = 0$ invariante generado por las rotaciones, dilataciones y las transformaciones especiales conformes. Si denotamos los valores de los generadores $L_{\mu\nu}$, D , y K_μ en $x = 0$ por $S_{\mu\nu}$, $\tilde{\Delta}$ y κ_μ , estos valores deben formar una representación matricial del álgebra reducida:

$$[\tilde{\Delta}, S_{\mu\nu}] = 0, \quad (2.24)$$

$$[\tilde{\Delta}, \kappa_\mu] = 0, \quad (2.25)$$

$$[\kappa_\mu, \kappa_\nu] = 0, \quad (2.26)$$

$$[\kappa_\rho, S_{\mu\nu}] = i(\eta_{\rho\mu} \kappa_\nu - \eta_{\rho\nu} \kappa_\mu), \quad (2.27)$$

$$[S_{\mu\nu}, S_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho} S_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} S_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho} S_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} S_{\mu\rho}). \quad (2.28)$$

Comprobamos explícitamente el primero de estos conmutadores

$$\begin{aligned} [\tilde{\Delta}, S_{\mu\nu}] &= (\tilde{\Delta} S_{\mu\nu} - S_{\mu\nu} \tilde{\Delta}) \phi \\ &= (-ix^\rho \partial_\rho) (ix_\mu \partial_\nu \phi - ix_\nu \partial_\mu \phi) + (ix_\mu \partial_\nu - ix_\nu \partial_\mu) (ix^\rho \partial_\rho \phi) \\ &= x^\rho \eta_{\rho\mu} \partial_\nu \phi + x^\rho x_\mu \partial_\rho \partial_\nu \phi - x^\rho \eta_{\rho\nu} \partial_\mu \phi - x^\rho x_\nu \partial_\rho \partial_\mu \phi \\ &\quad - x_\mu \delta_\nu^\rho \partial_\rho \phi - x_\mu x^\rho \partial_\nu \partial_\rho \phi + x_\nu \delta_\mu^\rho \partial_\rho \phi + x_\nu x^\rho \partial_\mu \partial_\rho \phi \\ &= 0. \end{aligned}$$

De manera similar obtenemos los demás conmutadores.

Actuemos con los elementos del álgebra anterior sobre un campo $\phi(x)$

$$\begin{aligned} e^{ix^\lambda P_\lambda} D e^{-ix^\lambda P_\lambda} \phi(x) &= D \phi(x) + x^\nu P_\nu \phi(x) \\ e^{ix^\lambda P_\lambda} \tilde{\Delta} \phi(0) &= D \phi(x) - ix^\nu \partial_\nu \phi(x) \\ \tilde{\Delta} e^{ix^\lambda P_\lambda} \phi(0) &= D \phi(x) - ix^\nu \partial_\nu \phi(x) \\ \tilde{\Delta} \phi(0) &= D \phi(x) - ix^\nu \partial_\nu \phi(x) \\ \Rightarrow D \phi(x) &= (\tilde{\Delta} + ix^\nu \partial_\nu) \phi(x). \end{aligned}$$

Realizando un desarrollo parecido al caso anterior encontramos la forma en que actúa el operador K_μ

$$K_\mu \phi(x) = \left(\kappa_\mu - 2x_\mu \tilde{\Delta} + 2x^\nu S_{\mu\nu} + 2ix_\mu x^\nu \partial_\nu - ix^2 \partial_\mu \right) \phi(x).$$

Aquí, se considera un campo $\phi(x)$ que pertenece a una representación irreducible del grupo de Lorentz. De acuerdo con el lema de Schur, cualquier matriz que conmuta con sus generadores $S_{\mu\nu}$ debe ser múltiplo de la identidad y en consecuencia $\tilde{\Delta}$ es un número. La representación del grupo de dilatación en campos clásicos no es unitaria ya que la norma cambia digamos por un factor λ . Por lo tanto, el generador $\tilde{\Delta}$ es no Hermitiano, con esto, el número $\tilde{\Delta} = -i\Delta$, donde Δ es la dimensión de escala del campo ϕ . La dimensión de escala Δ de un campo está definido por la acción de una transformación de escala en el campo ϕ de acuerdo a

$$\phi(\lambda x) = \lambda^{-\Delta} \phi(x). \tag{2.29}$$

Por ejemplo, consideramos la acción de un campo escalar libre sin masa en espacio plano

$$s = \int d^d x \partial_\mu \phi(x) \partial^\mu \phi(x),$$

para que la acción se mantenga adimensional, la dimensión de escala del campo debe ser

$$\Delta = \frac{d}{2} - 1.$$

Ya que $\tilde{\Delta}$ es proporcional a la matriz identidad, esto también significa que las matrices κ_μ desaparecen. Obtenemos así las reglas de transformación del campo $\phi(x)$

$$P_\mu \phi(x) = -\partial_\mu \phi(x), \tag{2.30}$$

$$L_{\mu\nu} \phi(x) = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu) \phi(x) + S_{\mu\nu} \phi(x), \tag{2.31}$$

$$D \phi(x) = -i(x^\mu \partial_\mu + \Delta) \phi(x), \tag{2.32}$$

$$K_\mu \phi(x) = (-2i\Delta x_\mu - x^\nu S_{\mu\nu} - 2ix_\mu x^\nu \partial_\nu + ix^2 \partial_\mu) \phi(x) \tag{2.33}$$

Usando esas expresiones podemos derivar el cambio en ϕ bajo una transformación finita conforme. Estas expresiones no contienen espín ya que los campos ϕ son sin espín. Para el factor de escala $\Lambda(x)$, el jacobiano de la transformación conforme $x \rightarrow x'$ está dado por

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \frac{1}{\sqrt{\det g'_{\mu\nu}}} = \Lambda^{-\frac{d}{2}}(x),$$

así que el campo ϕ sin espín transforma como

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\frac{\Delta}{d}} \phi(x). \tag{2.34}$$

Esta transformación es la misma que encontramos en mecánica cuántica conforme. Los campos que se transforman de acuerdo a esta expresión se llaman campos primarios.

En la literatura, diferentes autores llaman a los campos que respetan estas condiciones campos quasi-primarios como en [34], o campos primarios [13]

Constricciones de la invarianza conforme

Hasta ahora, hemos visto como las transformaciones conformes actúan en campos primarios. Ahora estudiamos las constricciones impuestas por la invarianza conforme. Comenzamos considerando las características observables de nuestra teoría. Las cantidades de interés en teoría conforme de campos son funciones de correlación de N puntos. Por campo, nos referimos a aquellas cantidades con dependencia en las coordenadas como es el caso de ϕ , el tensor de energía-momento, etc.

Como ejemplo, consideramos la función de 2 puntos

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \frac{1}{z} \int D\Phi_i \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) e^{-S[\Phi_i]}, \quad (2.35)$$

Φ_i es el conjunto de todos los campos en la teoría, S es la acción invariante conforme y ϕ_1 al igual que ϕ_2 son campos primarios. Suponiendo invarianza conforme de la acción en la integración, se puede mostrar que la función de correlación transforma como

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_1}^{\frac{\Delta_1}{d}} \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_2}^{\frac{\Delta_2}{d}} \langle \phi_1(x'_1) \phi_2(x'_2) \rangle. \quad (2.36)$$

Por otra parte el campo $\phi(x)$ transforma

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\frac{\Delta}{d}} \phi(x).$$

Sustituyendo en la función de 2 puntos tenemos

$$\begin{aligned} \langle \phi'_1(x'_1) \phi'_2(x'_2) \rangle &= \frac{1}{z} \int D\Phi_i \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\frac{\Delta_1}{d}} \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\frac{\Delta_2}{d}} \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) e^{-S[\Phi_i]} \\ &= \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\frac{\Delta_1}{d}} \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|^{-\frac{\Delta_2}{d}} \langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle, \end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_1}^{\frac{\Delta_1}{d}} \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_2}^{\frac{\Delta_2}{d}} \langle \phi'_1(x'_1) \phi'_2(x'_2) \rangle. \quad (2.37)$$

Para el caso de dilataciones $x \rightarrow \lambda x = x'$ vemos que

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} \langle \phi_1(\lambda x_1) \phi_2(\lambda x_2) \rangle,$$

además de que

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_1} = \lambda^{\frac{\Delta_1}{d}}, \quad \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right|_{x=x_2} = \lambda^{\frac{\Delta_2}{d}}.$$

Con esto tenemos

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \lambda^{\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{d}} \langle \phi_1(\lambda x_1) \phi_2(\lambda x_2) \rangle.$$

También es sencillo mostrar que la invarianza de Poincaré implica

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = f(|x_1 - x_2|).$$

Ya que consideramos una traslación y como solo nos importa la distancia, no cuánto se traslada, consideramos esa forma.

De aquí se tiene que

$$f(x) = \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} f(\Delta x).$$

Las simetrías de la teoría de campos conforme tiene integradas por lo tanto, las funciones de dos puntos que son de la forma

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \frac{d_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}},$$

la cual es obtenida proponiendo $f(x) = x^n$; entonces obtenemos

$$x^n = \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} \lambda^n x^n,$$

y por lo tanto

$$1 = \lambda^{\Delta_1 + \Delta_2} \lambda^n,$$

de esta condición encontramos

$$n = -(\Delta_1 + \Delta_2),$$

así, finalmente

$$f(x) = x^{-(\Delta_1 + \Delta_2)}.$$

De la expresión para la función de dos puntos tenemos que d_{12} es una constante de normalización que depende de los campos ϕ_1 y ϕ_2 . Dicha expresión es la única que posee las propiedades de transformación adecuadas.

También debemos examinar las consecuencias de invarianza bajo transformaciones especiales conformes. Para estas transformaciones tenemos

$$\left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| = \frac{1}{(1 - 2b \cdot x + b^2 x^2)^{d'}},$$

la distancia entre dos puntos trasforma como

$$|x'_i - x'_j| = \frac{|x_i - x_j|}{(1 - 2b \cdot x_i + b^2 x_i^2)^{\frac{1}{2}} (1 - 2b \cdot x_j + b^2 x_j^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Utilizando la expresión para la función de dos puntos que ya sabemos obtenemos

$$\frac{d_{12}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}} = \frac{d_{12}(\gamma_1 \gamma_2)^{\frac{\Delta_1 + \Delta_2}{2}}}{\gamma_1^{\Delta_1} \gamma_2^{\Delta_2} |x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2}},$$

donde $\gamma_i := (1 - 2b \cdot x_i + b^2 x_i^2)$.

Con esta restricción tenemos invarianza conforme si y solo si el producto de las funciones γ las cuales dependen únicamente de la posición se anula, así $\Delta_1 = \Delta_2$, por lo tanto

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \rangle = \begin{cases} \frac{d_{12}}{|x_1 - x_2|^{2\Delta_1}}, & \text{si } \Delta_1 = \Delta_2 \\ 0, & \text{si } \Delta_1 \neq \Delta_2. \end{cases} \quad (2.38)$$

Redefiniendo los campos, la constante d_{12} (d_{ij}) se puede elegir en una base de operadores tales que $d_{ij} = \delta_{ij}$.

Podemos tratar de una manera similar las funciones de tres puntos, considerando invarianza bajo rotaciones, traslaciones y dilataciones; la función de 3 puntos tiene la forma

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_3(x_3) \rangle = \frac{\lambda_{123}^{(abc)}}{x_{12}^a x_{23}^b x_{13}^c},$$

donde $x_{ij} := |x_i - x_j|$, también

$$a + b + c = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3.$$

Como hicimos para el caso de la función de dos puntos, podemos restringir la función de tres puntos aún más pidiendo invarianza bajo transformaciones especiales conformes, con lo cual tenemos

$$a = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3 = \Delta - 2\Delta_3,$$

$$b = \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1 = \Delta - 2\Delta_1,$$

$$c = \Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2 = \Delta - 2\Delta_2,$$

donde $\Delta \equiv \sum_i \Delta_i$. Tenemos que

$$x_{12} = |x_1 - x_2|, \quad x_{23} = |x_2 - x_3|, \quad x_{13} = |x_1 - x_3|,$$

y por analogía con la función de dos puntos

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_3(x_3) \rangle = \frac{\lambda_{123}}{|x_1 - x_2|^{\Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3} |x_2 - x_3|^{\Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1} |x_3 - x_1|^{\Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2}}.$$

Por lo tanto, el correlador de la función de tres puntos es

$$\langle \phi_1(x_1) \phi_2(x_2) \phi_3(x_3) \rangle = \frac{\lambda_{123}}{x_{12}^{\Delta - 2\Delta_3} x_{23}^{\Delta - 2\Delta_1} x_{13}^{\Delta - 2\Delta_2}}. \quad (2.39)$$

A diferencia de las constantes d_{ij} , las constantes de la función de tres puntos no pueden ser normalizadas ya que no son determinadas por invarianza conforme y son necesarias para definir una teoría de campos conforme particular.

Se puede extender el análisis para encontrar funciones de n puntos pero cada vez es más complicado y de 4 puntos en adelante ya no están completamente determinados, por este motivo no los calculamos para más puntos.

Corrientes conservadas y el tensor de Energía-Momento

Sabemos que el teorema de Noether nos dice que para toda simetría continua hay una corriente conservada; usando la misma terminología de la transformación infinitesimal, la corriente conservada es

$$j_a^\mu = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \right] \frac{\delta x^\nu}{\delta \epsilon_a} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \frac{\delta F}{\delta \epsilon_a}, \quad (2.40)$$

donde F es una función que depende de las coordenadas y \mathcal{L} es la densidad lagrangiana.

Una corriente conservada cumple

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0,$$

la carga asociada a la corriente conservada es

$$Q_a = \int d^{d-1} x j_a^0,$$

donde la integral es en todo el espacio. Es sencillo ver que agregando la divergencia de un tensor antisimétrico no se afecta j_a^μ

$$j_a^\mu \rightarrow j_a^\mu + \partial_\nu B_a^{\nu\mu}, \quad B_a^{\nu\mu} = -B_a^{\mu\nu},$$

así, tenemos cierta libertad en la definición de nuestras corrientes conservadas; si calculamos la divergencia vemos que

$$\partial_\mu j_a^\mu + \underbrace{\partial_\mu \partial_\nu B_a^{\nu\mu}}_{\text{sim./antisim.}} = 0,$$

y recuperamos la corriente conservada ya que el segundo término es una contracción entre cantidades simétricas y antisimétricas, el cual por definición es idénticamente cero.

Nos preguntamos cómo son las corrientes conservadas para las teorías conformes de campos; teniendo en mente esto, consideramos una traslación infinitesimal $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu$, donde

$$\frac{\delta x^\mu}{\delta \epsilon^\nu} = \delta_\nu^\mu, \quad \frac{\delta F}{\delta \epsilon^\nu} = 0.$$

La corriente conservada correspondiente es el tensor de energía-momento

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \partial^\nu \phi - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L}. \quad (2.41)$$

En general, esta cantidad no es simétrica, por lo tanto debemos considerar un término extra el cual nos ayude con la simetrización del tensor de energía-momento; por tanto, consideramos la corriente de espín añadiendo un tensor $B^{\rho\mu\nu}$, el cual es antisimétrico en sus primeros dos índices. El tensor resultante se llama tensor de energía-momento

de Belifante $T_B^{\mu\nu}$, el cual es simétrico; debemos encontrar así el $T_B^{\mu\nu}$ adecuado.

Una forma es considerar transformaciones de Lorentz infinitesimales, cuyas variaciones asociadas son

$$\begin{aligned}\frac{\delta x^\rho}{\delta \epsilon_{\mu\nu}} &= \frac{1}{2} (\eta^{\rho\mu} \chi^\nu - \eta^{\rho\nu} \chi^\mu), \\ \frac{\delta F}{\delta \epsilon_{\mu\nu}} &= -\frac{i}{2} S^{\mu\nu} \phi.\end{aligned}$$

La corriente conservada asociada la obtenemos de

$$j^{\mu\nu\rho} = \underbrace{\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \phi)} \partial_\sigma \phi - \delta_\sigma^\rho \mathcal{L} \right]}_{T_\sigma^\rho} \frac{\delta x^\sigma}{\delta \epsilon_{\mu\nu}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \phi)} \frac{\delta F}{\delta \epsilon_{\mu\nu}}.$$

Sustituyendo las variaciones obtenemos

$$j^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} T^{\rho\beta} \eta_{\beta\sigma} (\eta^{\sigma\mu} \chi^\nu - \eta^{\sigma\nu} \chi^\mu) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \phi)} \left(-\frac{i}{2} S^{\mu\nu} \phi \right),$$

ya que el producto de las métricas son deltas de Kronecker. Finalmente tenemos

$$j^{\mu\nu\rho} = \frac{1}{2} \left[T^{\mu\nu} \chi^\rho - T^{\mu\rho} \chi^\nu + i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} S^{\nu\rho} \phi \right]. \quad (2.42)$$

Elegimos un tensor $T_B^{\mu\nu}$ adecuado para escribir la corriente como

$$j^{\mu\nu\rho} = T_B^{\mu\nu} \chi^\rho - T_B^{\mu\rho} \chi^\nu.$$

La forma explícita de dicho tensor es

$$B^{\mu\rho\nu} = \frac{i}{2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} S^{\nu\rho} \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\rho \phi)} S^{\mu\nu} \phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu \phi)} S^{\mu\rho} \phi \right],$$

donde $B^{\mu\rho\nu}$ es el tensor de energía-momento de Belifante. Esta definición del tensor de energía-momento es manifiestamente simétrico, esto quiere decir que el tensor se mantiene invariante bajo el cambio de índices (μ, ν) . En el teorema de Noether se muestra que la variación de la acción bajo una transformación infinitesimal va como

$$\delta S = - \int d^d x j_a{}^\mu \partial_\mu \epsilon_a.$$

Bajo una traslación infinitesimal que depende de las coordenadas $x^\mu \rightarrow x^\mu + \epsilon^\mu(x)$ con el tensor de energía-momento como corriente conservada, la variación de la acción es

$$\delta S = -\frac{1}{2} \int d^d x T^{\mu\nu} (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu).$$

De la traslación que estamos considerando tenemos

$$x'^\mu - x^\mu = \epsilon^\mu = \delta x^\mu,$$

y recordando que $\frac{\delta x^\mu}{\delta \epsilon^\nu} = \delta_\nu^\mu$

$$\Rightarrow j^\mu = T_\nu^\mu \delta_\mu^\nu = T_\mu^\mu = g_{\mu\nu} T^{\mu\nu}.$$

Podemos ver que este difeomorfismo también induce una variación en la métrica. El tensor métrico varía bajo esta transformación de acuerdo a

$$\delta g_{\mu\nu} = -(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu).$$

Por lo tanto, la variación completa de la acción es

$$\delta S = -\frac{1}{2} \int d^d x \left(T^{\mu\nu} + 2 \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} \right) (\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu). \quad (2.43)$$

De la expresión anterior podemos saber cuál es la forma explícita del tensor de energía-momento utilizando el principio de mínima acción $\delta S = 0$ ya que las derivadas de la variación no se anulan porque dependen de las coordenadas. Para que la acción sea invariante bajo esta transformación se debe cumplir

$$T^{\mu\nu} = -2 \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}}.$$

Esta expresión es manifiestamente simétrica; este es el tensor de energía-momento que aparece en relatividad general. Ahora nos preguntamos cómo es la corriente conservada asociada a la invarianza de escala; recordamos que una dilatación infinitesimal actúa como

$$x'^\mu = (1 + \alpha) x^\mu, \quad F(\phi) = (1 - \alpha \Delta) \phi,$$

de modo que por el teorema de Noether, la corriente conservada la obtenemos derivando respecto de α para encontrar

$$j^\mu = T^\mu{}_\nu x^\nu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \Delta \phi.$$

Una vez más, tenemos una contribución adicional que arruina lo que sería una buena corriente. Antes se podía redefinir el tensor de energía-momento, buscamos entonces deshacernos de la segunda contribución, de tal manera que la conservación de j^μ corresponda a $T_{\mu\nu}$.

Aunque no es obvio, se puede agregar otro término que puede hacer lo anterior. Específicamente, tenemos la libertad de agregar un término de la forma $\frac{1}{2} \partial_\lambda \partial_\rho x^{\lambda\rho\mu\nu}$ a nuestro T_B que no estropee su ley de conservación o su simetría. Este término es definido tal que su traza está dada por

$$\partial_\lambda \partial_\rho x_\mu^{\lambda\rho\mu} = \partial_\mu V^\mu,$$

donde el virial V está definido como

$$V^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\rho \phi)} (\eta^{\mu\rho} \Delta + i S^{\mu\rho}) \phi.$$

De estas definiciones se tiene que $T = T_B + (\text{nuevotérmino})$ satisface

$$T_{\mu}{}^{\mu} = \partial_{\mu} j^{\mu}.$$

Entonces

$$j^{\mu} = T_{\nu}{}^{\mu} x^{\nu}.$$

La conservación de esta corriente es equivalente a la traza del tensor de energía-momento pero nos preguntamos que pasa con la corriente conservada de la invarianza especial conforme; de acuerdo a nuestra suposición que la invarianza conforme es igual a la invarianza de escala, lo que hemos hecho debe ser suficiente para garantizar alguna corriente conservada.

Bajo un cambio arbitrario de coordenadas $x^{\mu} \rightarrow x^{\mu} + \epsilon^{\mu}$, la variación de la acción es

$$\delta S = -\frac{1}{2} \int d^d x T^{\mu\nu} (\partial_{\mu} \epsilon_{\nu} + \partial_{\nu} \epsilon_{\mu}).$$

Si esta transformación infinitesimal es conforme, sustituimos en la expresión para la variación de la acción

$$(\partial_{\mu} \epsilon_{\nu} + \partial_{\nu} \epsilon_{\mu}) = \frac{2}{d} (\partial_{\rho} \epsilon^{\rho}) \eta_{\mu\nu},$$

y finalmente tenemos

$$\delta S = -\frac{1}{d} \int d^d x T_{\mu}{}^{\mu} \partial_{\rho} \epsilon^{\rho}. \quad (2.44)$$

La traza nula del tensor de energía-momento, la cual corresponde a invarianza de escala, implica invarianza conforme.

Cuantización radial y correspondencia estado-operador

Antes de seguir con las constricciones de la invarianza conforme, se discuten las foliaciones del espaciotiempo en QFT. Por «foliación» nos referimos a cómo dividimos el espaciotiempo d -dimensional en regiones $d-1$ dimensional. Por ejemplo, para teorías con invarianza de Poincaré, normalmente elegimos la foliación de nuestro espacio como superficies de igual tiempo. Cada superficie tiene su propio espacio de Hilbert y cuando estas superficies están relacionadas por una transformación de simetría entonces el espacio de Hilbert en cada superficie es el mismo. Para teorías con invarianza de Poincaré, los estados que existen en esas superficies son especificados por su 4-momento.

Definimos estados $|in\rangle$, en el pasado de una superficie dada y estados $|out\rangle$, para operadores en el futuro.

La superposición de los estados «in» y «out» en la misma superficie

está dada por la función de correlación de sus respectivos operadores

$$\langle \text{out} | \text{in} \rangle. \quad (2.45)$$

Cuando los operadores de «entrada» y «salida» viven en superficies diferentes con otros estados, existe algún operador unitario U conectando los 2 estados. La función de correlación asociada es

$$\langle \text{out} | U | \text{in} \rangle = \langle s | U | e \rangle. \quad (2.46)$$

Para nuestro ejemplo de Poincaré, el Hamiltoniano nos mueve entre superficies ya que el operador unitario de evolución está dado por

$$U = e^{iH\Delta t}. \quad (2.47)$$

Estas observaciones son generales, se usará ahora una foliación más conveniente para las CFT. Usando el álgebra conforme, preferimos alguna foliación asociada con las dilataciones. Usamos esferas S^{d-1} , de varios radios diferentes centrados en el origen que tienen la métrica

$$ds^2 = dr^2 + r^2 dn^2.$$

En lugar de usar el Hamiltoniano, usamos el operador D para ir de una foliación a otra. Los estados en estas esferas se clasifican por su dimensión de escala, no por su 4-momento (como en Poincaré).

$$D|\Delta\rangle = i\Delta|\Delta\rangle,$$

y su $SO(D)$ espín l

$$M_{\mu\nu}|\Delta, l\rangle = \Xi_{\mu\nu}|\Delta, l\rangle.$$

Para expresar el operador de evolución definimos $\tau = \log r$, por lo tanto, sustituyendo en la métrica

$$r = e^\tau, \quad dr = d(e^\tau) = e^\tau d\tau,$$

vemos que la métrica es

$$ds^2 = e^{2\tau} (d\tau^2 + dn^2).$$

Esta métrica es conformemente equivalente a un cilindro. Estas coordenadas transforman de \mathbb{R}^d a $\mathbb{R} \times S^{d-1}$. Las S^{d-1} son las esferas antes mencionadas y τ es la coordenada natural del tiempo para la evolución. Entonces, el operador de evolución es

$$U = e^{iD\tau}. \quad (2.48)$$

Si actuamos en un eigenestado $|\Delta\rangle$ con este operador tenemos

$$U|\Delta\rangle = e^{-\Delta\tau}|\Delta\rangle = r^{-\Delta}|\Delta\rangle,$$

$$e^{iD\tau} |\Delta\rangle = e^{-\Delta\tau} |\Delta\rangle.$$

Esta elección de la foliación se conoce como *cuantización radial*.

Esta correspondencia entre coordenadas esféricas en el espacio euclideo y un cilindro con tiempo τ corriendo a lo largo de su longitud es muy ilustrativa. Vemos que moverse hacia el origen $r \rightarrow 0$ en la cuantización radial es equivalente a acercarse al pasado infinito $\tau \rightarrow -\infty$ y moviéndose al infinito espacial $r \rightarrow \infty$ es equivalente a acercarse al futuro infinito $\tau \rightarrow \infty$. Esto significa que para crear un estado en un radio determinado, pondríamos un objeto dentro de la esfera (en el pasado). Consideremos algunos ejemplos.

Si no hacemos inserciones, el sistema debe corresponder al estado vacío $|0\rangle$. Por estado vacío se entiende que tenemos un único estado base que debe ser invariante bajo todas las transformaciones conformes globales. Por lo tanto, es 0 porque el valor propio del operador de dilatación es cero para ese estado.

Nos preguntamos qué pasa si consideramos el operador $\vartheta_\Delta(x=0)$ en el origen; de acuerdo con las acciones del álgebra generadora, esto crea un estado $|\Delta\rangle = \vartheta_\Delta(0)|0\rangle$ con la dimensión de escalamiento Δ .

Ahora, consideramos el operador $\vartheta_\Delta(x)$ en cualquier otro punto diferente del origen y apoyados del álgebra conforme, definimos

$$|\chi\rangle \equiv \vartheta_\Delta(x)|0\rangle,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \vartheta_\Delta(x)|0\rangle &= e^{ipx}\vartheta_\Delta(0)e^{-ipx}|0\rangle \\ &= e^{ipx}\vartheta_\Delta(0)(1-ipx)|0\rangle \\ &= e^{ipx}[\vartheta_\Delta(0)|0\rangle - i\vartheta_\Delta(0)px|0\rangle]. \end{aligned}$$

Si expandimos esta función exponencial tenemos una superposición de estados con valores propios diferentes. Si $|\chi\rangle = e^{ip_\mu x^\mu} |\Delta\rangle$, tenemos

$$\begin{aligned} e^{ip_\mu x^\mu} |\Delta\rangle &= (1 + ip_\mu x^\mu + \dots) |\Delta\rangle \\ &= |\Delta\rangle + ip_\mu x^\mu |\Delta\rangle \\ &= |\Delta\rangle + \partial_\mu(x^\mu |\Delta\rangle) \\ &= |\Delta\rangle + d|\Delta\rangle + x^\mu \partial_\mu |\Delta\rangle. \end{aligned}$$

Un operador que es aniquilado por el operador de bajada K es llamado un operador primario [34]. Los estados que se obtienen al actuar con el operador de ascenso P son llamados descendientes [34]. Si suponemos que la dimensión de escalamiento está limitada desde abajo, entonces para algunos estados genéricos siempre podríamos actuar con K hasta que llegemos a cero, encontrando así, un operador primario. Un operador primario y todos sus descendientes forman lo

que se conoce como *familia conforme*.

Así, al insertar un operador primario en el origen, obtenemos un estado con dimensión de escala Δ que es aniquilado por K . Este procedimiento también puede ir en la otra dirección: dado algún estado con dimensión de escalamiento Δ que es aniquilado por K , podemos construir un operador primario asociado local. Esta es la correspondencia estado-operador, los operadores corresponden uno a uno con operadores locales. Para construir un operador, definimos sus correladores con otros operadores, hacemos esta definición de acuerdo con la ecuación

$$\langle \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots \vartheta_{\Delta}(0) \rangle = \langle 0 | \phi(x_1) \phi(x_2) \cdots | \Delta \rangle. \quad (2.49)$$

Esta definición satisface las propiedades de transformación habituales de la invarianza conforme.

Límites de unitaridad

En esta última sección vemos que la unitaridad limita las dimensiones de escala de nuestra teoría conforme de campos. Cualquier teoría con operadores que violen los límites de unitaridad sería no unitaria en la signatura de Lorentz (y signatura euclidiana no positiva). Consideramos nuevamente la cuantización radial en términos del cilindro

$$ds^2 = d\tau^2 + d\mathbf{n}^2 = r^{-2} (dr^2 + r^2 d\mathbf{n}^2),$$

para investigar campos en la cuantización radial, utilizamos el hecho de que bajo una transformación conforme, los escalares cambian como

$$\langle \phi(x) \cdots \rangle_{e^{2\sigma(x)} dx^2} = e^{-\sigma(x)\Delta} \langle \phi(x) \cdots \rangle_{dx^2}.$$

En este caso la relación entre campos en espacio euclidiano y campos en el cilindro es

$$\phi(\tau, \mathbf{n})_{\text{cil}} = r^{\Delta} \phi(x)_{\mathbb{R}^d}. \quad (2.50)$$

El campo cilíndrico es el mismo campo que en el espacio plano, sólo se miden sus correladores en geometrías diferentes. Veamos cómo luce la conjugación hermitiana en el cilindro, la cual es esencial para encontrar la norma de un estado.

Realizando la rotación de Wick estándar para conseguir la signatura euclídea, es sencillo ver que para un campo hermitiano ϕ

$$\begin{aligned} \phi^{\dagger}(\tau)_{\text{cil}} &= (e^{\tau H_{\text{cil}}} \phi(0) e^{-\tau H_{\text{cil}}})^{\dagger} \\ &= e^{-\tau H_{\text{cil}}} \phi(0) e^{\tau H_{\text{cil}}}, \end{aligned}$$

y por lo tanto tenemos

$$\phi^{\dagger}(\tau)_{\text{cil}} = \phi(-\tau)_{\text{cil}}.$$

La rotación de Wick es un método utilizado para encontrar una solución analítica de un problema en un espacio de Minkowski pero ahora estudiado en el espacio euclidiano, introduciendo una variable imaginaria.

La positividad de la reflexión en la teoría euclidiana corresponde a la unitariedad en la teoría de Minkowski

$$\langle \phi(-\tau) \phi(\tau) \rangle_{\text{cil}} = \langle \phi^\dagger(\tau) \phi(\tau) \rangle_{\text{cil}} \geq 0. \quad (2.51)$$

Usando $\tau = \log r$, esta transformación de inversión temporal se convierte en una inversión de coordenadas $R : x \rightarrow x/x^2$ en \mathbb{R}^d . Similarmente, la conjugación hermitiana se extiende a los generadores del álgebra conforme donde corresponde a actuar con el operador de inversión R . Esto nos permite calcular el siguiente resultado en la cuantización radial.

$$P_\mu^\dagger = RP_\mu R^{-1} = RP_\mu R = K_\mu.$$

Dado que sabemos que en el espacio plano tanto K como P son hermitianos, es fácil comprobar este resultado, podemos considerar los operadores diferenciales expresados en términos de variables cilíndricas.

$$P_\mu = -i\partial_\mu \rightarrow -ie^{-\tau} \left[\mathbf{n}_\mu \partial_\tau + (\delta_{\mu\nu} - \mathbf{n}_\mu \mathbf{n}_\nu) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\nu} \right], \quad (2.52a)$$

$$K_\mu = -i[x^2 \partial_\mu - 2x_\mu (x \cdot \partial)] \rightarrow ie^\tau \left[\mathbf{n}_\mu \partial_\tau - (\delta_{\mu\nu} - \mathbf{n}_\mu \mathbf{n}_\nu) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_\nu} \right] \quad (2.52b)$$

A partir de estas expresiones explícitas, podemos ver que estos operadores están conjugados entre sí bajo inversión temporal.

Para el caso de P , comenzamos con

$$x_\mu = rn_\mu = e^\tau n_\mu,$$

tenemos así

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial (rn_\mu)},$$

y por lo tanto

$$d(rn_\mu) = drn_\mu + rdn_\mu.$$

Recordamos que $r = e^\tau$ con esto $dr = e^\tau d\tau$, de aquí obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{\partial}{\partial rn_\mu} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial n_\mu},$$

y finalmente

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} = e^{-\tau} \left[\frac{1}{rn_\mu} \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial n_\mu} \right]. \quad (2.53)$$

Podemos utilizar este hecho para extraer límites de unitaridad de una manera directa. Tomemos un ejemplo simple: consideramos un estado primario sin espín $|\Delta\rangle$ y la cantidad

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta | K_\mu P_\nu | \Delta \rangle &= \langle \Delta | [K_\mu, P_\nu] + P_\nu K_\mu | \Delta \rangle \\
 &= \langle \Delta | 2i (D\delta_{\mu\nu} - M_{\mu\nu}) | \Delta \rangle \\
 &= \Delta \delta_{\mu\nu} \langle \Delta | \Delta \rangle = \Delta \delta_{\mu\nu} \\
 &= \langle \Delta | 2i \delta_{\mu\nu} D | \Delta \rangle - 2i \underbrace{\langle \Delta | M_{\mu\nu} | \Delta \rangle}_{\text{espín}} \\
 &= -2\Delta \delta_{\mu\nu}.
 \end{aligned} \tag{2.54}$$

Aquí hemos usado el hecho que $|\Delta\rangle$ es primario y sin espín. Con $\mu = \nu$ y ya que las normas son definidas positivas, tenemos nuestro primer límite de unitaridad

$$\Delta \geq 0. \tag{2.55}$$

Considerando escalares sin espín en el nivel 2, donde se impone

$$\langle \Delta | K_\lambda K_\mu P_\nu P_\lambda | \Delta \rangle \geq 0,$$

se puede derivar el límite de unitaridad

$$\Delta \geq \frac{d}{2} - 1. \tag{2.56}$$

Finalmente considerando P y K para límites mayores, obtenemos

$$\Delta \geq \frac{d-1}{2}, \tag{2.57}$$

para estados con espín $s = \frac{1}{2}$. Para estados con espín $s \geq 1$

$$\Delta \geq d + s - 2. \tag{2.58}$$

Los resultados anteriores se lograron utilizando el mapeo entre el espacio euclideo y el cilindro, la cual es una manera conveniente de ver la relación entre P y K en la cuantización radial.

ESPACIOTIEMPO TIPO ANTI-DE SITTER

3.1 ESPACIOS VS ESPACIOTIEMPOS

3.1.1 Espacios con curvatura constante

El espaciotiempo de Anti-de Sitter es un espaciotiempo con curvatura constante negativa. Para familiarizarnos con AdS, primero discutimos espacios (sin considerar a t como una coordenada, esto es, espacio euclidiano) con curvatura constante, por ejemplo la esfera S^2 y posteriormente discutimos espaciotiempos con curvatura constante [30].

Consideremos el espacio euclidiano en 3 dimensiones con métrica

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2.$$

La esfera está definida por la superficie que satisface la condición

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = L^2.$$

Esta condición se puede resolver con las coordenadas esféricas usuales

$$X = L \sin \theta \cos \varphi, \quad Y = L \sin \theta \sin \varphi, \quad Z = L \cos \theta.$$

En estas coordenadas la métrica es

$$ds^2 = L^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.1)$$

La esfera S^2 tiene invarianza $SO(3)$. Bajo una transformación de este tipo cualquier punto en S^2 puede ser mapeado a cualquier otro punto dentro de la esfera, esto es, S^2 es homogénea. La esfera tiene una curvatura constante positiva; dicha curvatura está dada por

$$R = \frac{2}{L^2}.$$

El espacio con curvatura constante negativa es conocido como espacio hiperbólico H^2 . Este espacio es más difícil de visualizar, en parte porque el hiperboloide no puede ser incrustado en el espacio euclidiano en 3 dimensiones como la esfera, pero el espacio hiperbólico sí puede estar contenido en el espaciotiempo de Minkowski 3-dimensional. El espacio hiperbólico está definido por

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dZ^2 + dX^2 + dY^2, \\ -Z^2 + X^2 + Y^2 &= -L^2. \end{aligned}$$

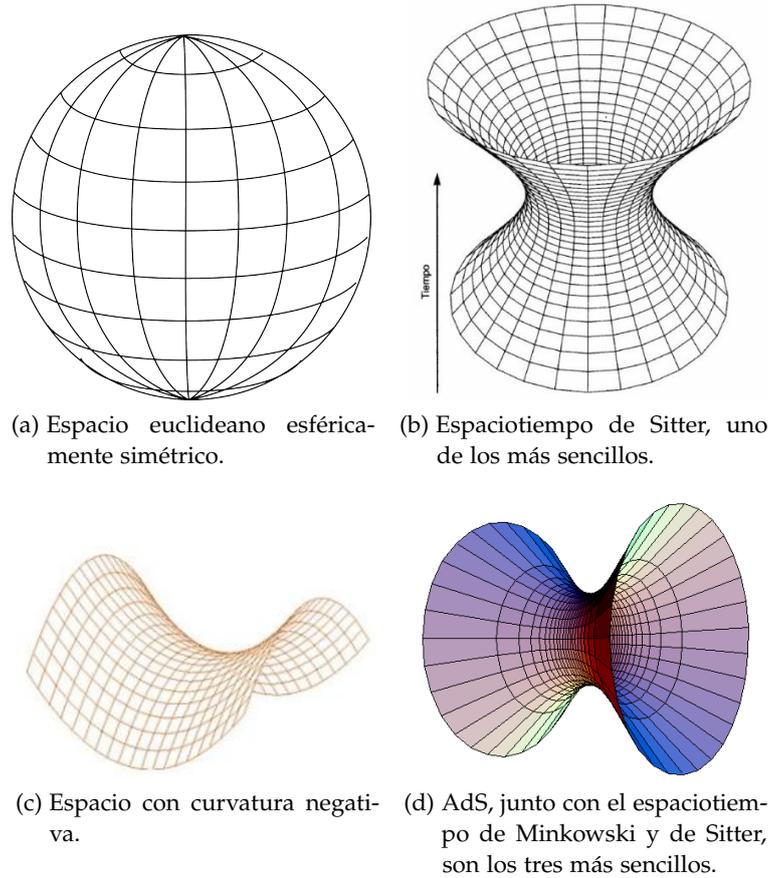


Figura 4: Se muestran los espacios y espaciotiempos con curvatura constante más simples.

El espacio hiperbólico es homogéneo ya que respeta la invarianza bajo $SO(1,2)$ del espaciotiempo de Minkowski, es decir, cualquier punto en la superficie puede ser mapeado a otros puntos por una transformación de Lorentz $SO(1,2)$. Notamos que el espacio hiperbólico no es el hiperboloide usual en el espacio euclideo 3-dimensional

$$ds^2 = dZ^2 + dX^2 + dY^2,$$

$$-Z^2 + X^2 + Y^2 = -L^2.$$

El hiperboloide es medido en el espacio euclideo en 3 dimensiones, por esta razón, el hiperboloide no respeta la invarianza bajo $SO(3)$ del espacio euclídeo, esto es, no es homogéneo.

Para resolver la condición del hiperboloide, consideramos un sistema coordenado el cual es ligeramente diferente de la esfera

$$X = L \sinh \rho \cos \varphi, \quad Y = L \sinh \rho \sin \varphi, \quad Z = L \cosh \rho.$$

Entonces, la métrica del espacio hiperbólico está dada por

$$ds^2 = L^2 \left(d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\varphi^2 \right). \tag{3.2}$$

Como podemos ver el espacio hiperbólico en sí no tiene una dirección tipo tiempo, aunque lo metamos en el espaciotiempo de Minkowski en 3 dimensiones, su curvatura es constante y negativa

$$R = -\frac{2}{L^2}.$$

3.1.2 *Espaciotiempos con curvatura constante*

Ahora, discutimos espaciotiempos con curvatura constante. El espaciotiempo AdS_2 puede ser puesto en un espaciotiempo plano con dos direcciones tipo tiempo

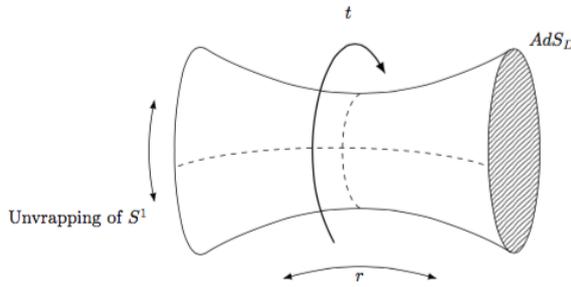


Figure 1: The topological structure of anti de- Sitter.

Figura 5: La incorporación de AdS_2 en $R^{2,1}$, la dirección tipo tiempo t es periódica.

$$ds^2 = -dZ^2 - dX^2 + dY^2,$$

con la condición

$$-Z^2 - X^2 + Y^2 = -L^2.$$

El parámetro L es llamado el radio de AdS. El espaciotiempo AdS_2 tiene invarianza $SO(2,1)$. Al igual que S^2 y H^2 posee un sistema coordenado

$$Z = L \cosh \rho \cos \tilde{t}, \quad X = L \cosh \rho \sin \tilde{t}, \quad Y = L \sinh \rho.$$

Entonces, la métrica queda

$$ds^2 = L^2 \left(-\cosh^2 \rho d\tilde{t}^2 + d\rho^2 \right).$$

Este sistema coordenado (\tilde{t}, ρ) es llamado "coordenadas globales". Aunque incorporamos el espaciotiempo AdS en un espaciotiempo plano con dos direcciones temporales, el espaciotiempo AdS tiene una sola dirección temporal. Vemos que la coordenada \tilde{t} tiene periodicidad 2π , así que la dirección tipo temporal es periódica; esto es un

problema de causalidad (uno puede tener curvas tipo tiempo cerradas, donde las curvas causales son cerradas), por lo que normalmente se desdobra la dirección del tiempo y se considera la superficie espacial del espaciotiempo AdS_2 , donde $-\infty < \tilde{t} < \infty$.

EL espaciotiempo AdS en la correspondencia AdS/CFT es esta envoltura (superficie) del espacio; el AdS_2 tiene una curvatura constante negativa

$$R = -\frac{2}{L^2}.$$

El espaciotiempo de Sitter es otro espaciotiempo con curvatura constante, pero dicha curvatura es constante y positiva. Este espaciotiempo no aparece frecuentemente en AdS/CFT, pero ha sido estudiado ampliamente en relación con la energía oscura en cosmología [27]. Este espaciotiempo en dos dimensiones (dS_2) está definido por

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dZ^2 + dX^2 + dY^2, \\ -Z^2 + X^2 + Y^2 &= L^2, \end{aligned}$$

El espaciotiempo (dS_2) tiene invarianza $SO(1,2)$, en las coordenadas

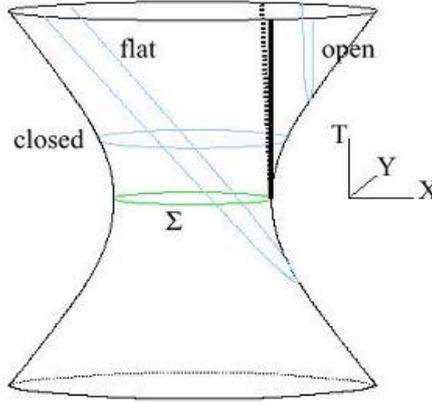


Figura 6: La envoltura de dS_2 es similar a AdS_2 pero la signatura del espaciotiempo es diferente.

$$X = L \cosh \tilde{t} \cos \theta, \quad Y = L \cosh \tilde{t} \sin \theta, \quad Z = L \sinh \tilde{t},$$

la métrica es

$$ds^2 = L^2 \left(-d\tilde{t}^2 + \cosh^2 \tilde{t} d\theta^2 \right).$$

Su curvatura es constante positiva $R = \frac{2}{L^2}$; en cosmología se utiliza el espaciotiempo dS_4 [11].

3.2 BRANA NEGRA EXTREMAL

Comenzamos con el estudio de una métrica la cual nos describe la teoría de cuerdas IIB en (9+1)-dimensiones [35].

$$ds^2 = -\frac{f_+(\rho)}{\sqrt{f_-(\rho)}} dt^2 + \sqrt{f_-(\rho)} \sum_{i=1}^p dx^i dx^i + \frac{f_-(\rho)^{-\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}}}{f_+(\rho)} d\rho^2 + r^2 f_-(\rho)^{-\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}} d\Omega_{8-p}^2,$$

(3.3)

donde

$$f_{\pm}(\rho) = 1 - \left(\frac{r_{\pm}}{\rho}\right)^{7-p}.$$

Se sabe que para la brana negra extremal se cumple $r_+ = r_-$; este es el caso que consideraremos en lo que sigue. Explícitamente tenemos en la métrica anterior

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{1 - \left(\frac{r_+}{\rho}\right)^{7-p}}{\sqrt{1 - \left(\frac{r_-}{\rho}\right)^{7-p}}} dt^2 + \sqrt{1 - \left(\frac{r_-}{\rho}\right)^{7-p}} \sum_{i=1}^p dx^i dx^i + \\ & + \frac{\left[1 - \left(\frac{r_-}{\rho}\right)^{7-p}\right]^{-\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}}}{1 - \left(\frac{r_+}{\rho}\right)^{7-p}} d\rho^2 + r^2 \left[1 - \left(\frac{r_-}{\rho}\right)^{7-p}\right]^{-\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}} d\Omega_{8-p}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Analizamos los primeros 2 términos

$$-\frac{\frac{\rho^{7-p} - r_+^{7-p}}{\rho^{7-p}}}{\left[\frac{\rho^{7-p} - r_+^{7-p}}{\rho^{7-p}}\right]^{\frac{1}{2}}} dt^2 + \left[\frac{\rho^{7-p} - r_+^{7-p}}{\rho^{7-p}}\right]^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^p dx^i dx^i,$$

obtenemos

$$-\frac{\frac{r^{7-p}}{r^{7-p} + r_+^{7-p}}}{\left[\frac{r^{7-p}}{r^{7-p} + r_+^{7-p}}\right]^{\frac{1}{2}}} dt^2 + \left[\frac{r^{7-p}}{r^{7-p} + r_+^{7-p}}\right]^{\frac{1}{2}} \sum_{i=1}^p dx^i dx^i.$$

Por lo tanto

$$\left(\frac{r^{7-p}}{r^{7-p} + r_+^{7-p}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(-dt^2 + \sum_{i=1}^p dx^i dx^i\right). \quad (3.5)$$

Definimos

$$H(r) := \frac{1}{f_+(\rho)} = \frac{r^{7-p} + r_+^{7-p}}{r^{7-p}},$$

así, escribimos la ec. (3.5) como

$$\left[\frac{1}{H(r)}\right]^{\frac{1}{2}} \left(-dt^2 + \sum_{i=1}^p dx^i dx^i\right). \quad (3.6)$$

Ahora para la parte angular, tenemos que

$$\left[\frac{\rho^{7-p} - r_+^{7-p}}{\rho^{7-p}}\right]^{-\frac{3}{2} - \frac{5-p}{7-p}} d\rho^2 + r^2 \left(\frac{\rho^{7-p} - r_+^{7-p}}{\rho^{7-p}}\right)^{\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}} d\Omega_{8-p}^2.$$

Usando la relación

$$\begin{aligned} \rho^{7-p} &= r^{7-p} + r_+^{7-p}, \\ \rho &= \left[r^{7-p} + r_+^{7-p}\right]^{\frac{1}{7-p}}, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\rho^2 = \left[r^{7-p} + r_+^{7-p} \right]^{\frac{2}{7-p}},$$

llegamos a

$$\left[\frac{r^{7-p}}{r^{7-p} + r_+^{7-p}} \right]^{-\frac{3}{2} - \frac{5-p}{7-p}} d\rho^2 + r^2 \left(\frac{r^{7-p}}{r^{7-p} + r_+^{7-p}} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}} d\Omega_{8-p}^2. \quad (3.7)$$

Calculamos ahora la diferencial de ρ

$$d\rho = \frac{1}{7-p} \left[r^{7-p} + r_+^{7-p} \right]^{\frac{1}{7-p} - 1} (7-p) r^{6-p} dr = \left[r^{7-p} + r_+^{7-p} \right]^{\frac{p-6}{7-p}} r^{6-p} dr,$$

por lo que

$$d\rho^2 = \left[r^{7-p} + r_+^{7-p} \right]^{\frac{2p-12}{7-p}} r^{12-2p} dr^2.$$

La parte angular se escribe entonces como

$$\begin{aligned} & \left[\frac{r^{7-p}}{H(r) r^{7-p}} \right]^{-\frac{3}{2} - \frac{5-p}{7-p}} \left(\left[H(r) r^{7-p} \right]^{\frac{2p-12}{7-p}} r^{12-2p} dr^2 \right) + r^2 \left(\frac{r^{7-p}}{H(r) r^{7-p}} \right)^{\frac{1}{2} - \frac{5-p}{7-p}} d\Omega_{8-p}^2 \\ &= H(r)^{\frac{3}{2} + \frac{5-p}{7-p}} H(r)^{\frac{2p-12}{7-p}} dr^2 + r^2 H(r)^{\frac{5-p}{7-p} - \frac{1}{2}} d\Omega_{8-p}^2 \\ &= [H(r)]^{\frac{1}{2}} (dr^2 + r^2 d\Omega_{8-p}^2). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Definimos ahora las coordenadas $r^a := r\theta^a$, donde $a = 1, \dots, 9-p$ y

$$\sum_a (\theta^a)^2 = 1.$$

Calculamos la diferencial para estas nuevas coordenadas

$$dr^a = d(r\theta^a),$$

de modo que

$$dr^a = (dr)\theta^a + r d\theta^a,$$

lo que implica

$$\begin{aligned} dr^a dr^a &= dr dr \theta^a \theta^a + r^2 d\theta^a d\theta^a + r\theta^a dr d\theta^a \\ &= dr^2 + r^2 d\theta^a d\theta^a + r\theta^a dr d\theta^a. \end{aligned}$$

De la condición $\sum_a (\theta^a)^2 = 1$ obtenemos $\theta^a d\theta^a = 0$, por lo tanto

$$\sum_{a=1}^{9-p} dr^a dr^a = \sum_{a=1}^{9-p} dr^2 + r^2 d\theta^a d\theta^a.$$

La parte angular de la métrica es entonces

$$\sqrt{H(r)} \left(\sum_{a=1}^{9-p} dr^a dr^a \right). \quad (3.9)$$

La métrica que tenemos finalmente tiene la forma

$$ds^2 = \frac{1}{\sqrt{H(r)}} \left(-dt^2 + \sum_{i=1}^p dx^i dx^i \right) + \sqrt{H(r)} \left(\sum_{a=1}^{9-p} dr^a dr^a \right). \quad (3.10)$$

Esta métrica define la brana negra extremal. Consideremos el caso particular para $p = 3$. La función $H(r)$ es

$$H(r) = 1 + \frac{L^4}{r^4}$$

y en el límite $r \ll L$, $H(r)$ toma la forma

$$H(r) \approx \frac{L^4}{r^4}.$$

Entonces la métrica queda en este límite como

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + L^2 \left(\frac{dr^2}{r^2} + d\Omega_5^2 \right), \quad (3.11)$$

es decir, la geometría generada por la D3-brana es $AdS_5 \times S^5$. Anti de Sitter es un espaciotiempo máximamente simétrico con curvatura negativa. Pero nos vamos a cerciorar de que es un espaciotiempo AdS, calculando el tensor de Einstein.

Consideremos entonces el elemento de línea

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} (-dt^2 + dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) + \frac{L^2}{r^2} dr^2. \quad (3.12)$$

Sabemos que la ecuación geodésica en general está dada por

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\lambda} \frac{dx^\sigma}{d\lambda} = 0.$$

Esta ecuación podemos obtenerla a partir del principio variacional

$$\delta(ds^2) = 2ds\delta(ds).$$

Para ello definimos el Lagrangiano siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\dot{t}, \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3, \dot{r}) &:= \frac{r^2}{L^2} \left[-\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dx_1}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{d\lambda}\right)^2 \right] \\ &\quad + \frac{L^2}{r^2} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \\ &= \frac{r^2}{L^2} [-\dot{t}^2 + \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2] + \frac{L^2}{r^2} \dot{r}^2. \end{aligned}$$

Utilizamos ahora las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t}; \quad \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_1} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1}; \quad \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_2} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2};$$

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_3} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_3}; \quad \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}.$$

Primero obtenemos los *símbolos de Christoffel* asociados a cada coordenada. Para la coordenada temporal tenemos que

$$\frac{d}{d\lambda} \left(-2 \frac{r^2}{L^2} \dot{t} \right) = -\frac{4r}{L^2} \dot{r} \dot{t} - 2 \frac{r^2}{L^2} \ddot{t} = 0,$$

$$\ddot{t} + 2 \frac{\dot{r}}{r} \dot{t} = 0,$$

por lo tanto

$$\Gamma_{rt}^t = \frac{1}{r}.$$

De igual modo procedemos para obtener las expresiones de

$$\Gamma_{rx_1}^{x_1}, \quad \Gamma_{rx_2}^{x_2}, \quad \Gamma_{rx_3}^{x_3}$$

obteniendo

$$\Gamma_{rx_1}^{x_1} = \Gamma_{rx_2}^{x_2} = \Gamma_{rx_3}^{x_3} = \frac{1}{r}.$$

Hacemos finalmente el cálculo para $\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r}$:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(2 \frac{L^2}{r^2} \dot{r} \right) = -4 \frac{L^2}{r^3} \dot{r} \dot{r} + 2 \frac{L^2}{r^2} \ddot{r} =$$

$$= -2 \frac{r}{L^2} \dot{t}^2 + 2 \frac{r}{L^2} \dot{x}_1^2 + 2 \frac{r}{L^2} \dot{x}_2^2 + 2 \frac{r}{L^2} \dot{x}_3^2 - 2 \frac{L^2}{r^3} \dot{r}^2,$$

resolvemos el álgebra

$$-4 \frac{L^2}{r^3} \dot{r}^2 + 2 \frac{L^2}{r^2} \ddot{r} + 2 \frac{r}{L^2} \dot{t}^2 - 2 \frac{r}{L^2} \dot{x}_1^2 - 2 \frac{r}{L^2} \dot{x}_2^2 - 2 \frac{r}{L^2} \dot{x}_3^2 + 2 \frac{L^2}{r^3} \dot{r}^2 = 0,$$

y factorizamos $\frac{r^2}{2L^2}$

$$\frac{r^2}{2L^2} \left[2 \frac{L^2}{r^2} \ddot{r} - 2 \frac{L^2}{r^3} \dot{r}^2 + 2 \frac{r}{L^2} \dot{t}^2 - 2 \frac{r}{L^2} \dot{x}_1^2 - 2 \frac{r}{L^2} \dot{x}_2^2 - 2 \frac{r}{L^2} \dot{x}_3^2 \right] = 0.$$

Finalmente llegamos a

$$\ddot{r} - \frac{1}{r} \dot{r}^2 + \frac{r^3}{L^4} \dot{t}^2 - \frac{r^3}{L^4} \dot{x}_1^2 - \frac{r^3}{L^4} \dot{x}_2^2 - \frac{r^3}{L^4} \dot{x}_3^2 = 0.$$

De aquí obtenemos las siguientes expresiones para la conexión afín

$$\Gamma_{rr}^r = -\frac{1}{r}, \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{r^3}{L^4}, \quad \Gamma_{x_i x_i}^r = -\frac{r^3}{L^4},$$

donde $i = 1, 2, 3$.

Teniendo estos resultados ahora queremos calcular el tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R. \quad (3.13)$$

Vamos a obtenerlo contrayendo el tensor de Riemann con la métrica $g_{\mu\nu}$; comenzamos escribiendo el Riemann:

$$R^\sigma{}_{\mu\nu\rho} = -\partial_\mu\Gamma_{\nu\rho}^\sigma + \partial_\nu\Gamma_{\mu\rho}^\sigma + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda\Gamma_{\nu\lambda}^\sigma - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda\Gamma_{\mu\lambda}^\sigma.$$

Sabemos que

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\sigma\lambda}R^\lambda{}_{\mu\nu\rho}.$$

Para nuestro tensor tenemos, por ejemplo

$$R_{t\text{tr}t\text{r}} = g_{r\lambda}R^\lambda{}_{t\text{tr}t} = g_{rr}R^r{}_{t\text{tr}t},$$

ya que nuestra métrica es diagonal.

De la definición del tensor de Riemann obtenemos

$$\begin{aligned} R_{t\text{tr}t\text{r}} &= \frac{L^2}{r^2} [-\partial_t\Gamma_{rt}^r + \partial_r\Gamma_{tt}^r + \Gamma_{tt}^r\Gamma_{rr}^r - \Gamma_{tr}^t\Gamma_{tt}^r] \\ &= \frac{L^2}{r^2} \left[\partial_r \left(\frac{r^3}{L^4} \right) + \left(\frac{r^3}{L^4} \right) \left(-\frac{1}{r} \right) - \left(-\frac{2}{r} \right) \left(\frac{r^3}{L^4} \right) \right] \\ &= \frac{L^2}{r^2} \left[\frac{3r^2}{L^4} - \frac{r^2}{L^4} + \frac{2r^2}{L^4} \right], \end{aligned}$$

por lo que

$$R_{t\text{tr}t\text{r}} = \frac{4}{L^2}. \quad (3.14)$$

A partir de este tensor de Riemann, podemos encontrar 2 tensores de Ricci

$$R_{tt} = R^r{}_{t\text{tr}t}, \quad R_{rr} = R^t{}_{r\text{tr}r}.$$

Contraemos con la métrica para obtener los tensores de Ricci

$$R_{tt} = g^{\rho\lambda}R_{t\rho t\lambda}, \quad (3.15)$$

lo que implica

$$R_{tt} = g^{rr}R_{t\text{tr}t\text{r}}. \quad (3.16)$$

Hacemos un tratamiento similar con los tensores que implican a las coordenadas x_i , donde $i = 1, 2, 3$:

$$R_{x_i r x_i r} = g_{r\lambda}R^\lambda{}_{x_i r x_i} = g_{rr}R^r{}_{x_i r x_i}, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned}
R_{x_i r x_i r} &= \frac{L^2}{r^2} \left[-\partial_{x_i} \Gamma_{r x_i}^r + \partial_r \Gamma_{x_i x_i}^r + \Gamma_{x_i x_i}^r \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{x_i r}^{x_i} \Gamma_{x_i x_i}^r \right] \\
&= \frac{L^2}{r^2} \left[\partial_r \left(-\frac{r^3}{L^4} \right) + \left(-\frac{r^3}{L^4} \right) \left(-\frac{1}{r} \right) - \left(-\frac{2}{r} \right) \left(-\frac{r^3}{L^4} \right) \right] \\
&= \frac{L^2}{r^2} \left[\frac{-3r^2}{L^4} + \frac{r^2}{L^4} - \frac{2r^2}{L^4} \right].
\end{aligned}$$

Entonces el tensor de Riemann nos queda

$$R_{x_i r x_i r} = -\frac{4}{L^2}. \quad (3.18)$$

Por lo tanto, podemos encontrar los tensores de Ricci correspondientes

$$R_{x_i x_i} = g^{\rho\lambda} R_{x_i \rho x_i \lambda} = g^{rr} R_{x_i r x_i r}. \quad (3.19)$$

Nos falta calcular el tensor R_{rr} ; tenemos que

$$R_{rr} = g^{\rho\lambda} R_{r \rho r \lambda} = g^{tt} R_{r t r t}. \quad (3.20)$$

Para saber la forma explícita de los tensores de Ricci, escribimos la métrica y la métrica inversa

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{r^2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r^2}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{r^2}{L^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r^2}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{r^2}{L^2} \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\frac{L^2}{r^2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{L^2}{r^2} \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Finalmente, tenemos

$$R_{tt} = g^{rr} R_{t r t r} = \frac{r^2}{L^2} \frac{4}{L^2} = \frac{4r^2}{L^4}, \quad (3.23)$$

$$R_{rr} = g^{tt} R_{r t r t} = -\frac{L^2}{r^2} \frac{4}{L^2} = -\frac{4}{r^2}, \quad (3.24)$$

$$R_{x_i x_i} = g^{rr} R_{x_i r x_i r} = \frac{r^2}{L^2} \left(-\frac{4}{L^2} \right) = -\frac{4r^2}{L^4}. \quad (3.25)$$

Podemos conocer así la curvatura de nuestro espaciotiempo

$$R = g^{tt}R_{tt} + g^{rr}R_{rr} + g^{x_i x_i}R_{x_i x_i}, \quad (3.26)$$

la cual nos da como resultado

$$R = -\frac{20}{L^2}. \quad (3.27)$$

Por último escribimos las distintas componentes del tensor de Einstein dado por la ec. (3.13)

$$G_{rr} = R_{rr} - \frac{1}{2}g_{rr}R = \frac{6}{r^2}, \quad (3.28)$$

$$G_{tt} = R_{tt} - \frac{1}{2}g_{tt}R = -\frac{6r^2}{L^4}, \quad (3.29)$$

$$G_{x_i x_i} = R_{x_i x_i} - \frac{1}{2}g_{x_i x_i}R = \frac{6r^2}{L^4}, \quad (3.30)$$

donde $i = 1, 2, 3$. Toda la discusión anteriormente mostrada nos ha servido para saber si nuestro espaciotiempo es un espacio de anti-de Sitter, y demostramos que así es, tenemos curvatura negativa; la ec. (3.27) nos dice esta información.

CORRESPONDENCIA ADS/CFT EN UN FONDO NO CONMUTATIVO

4.1 SUPERCONDUCTIVIDAD Y HOLOGRAFÍA

Motivados por la idea de trabajar un sistema no conmutativo en el marco de la correspondencia AdS/CFT, estudiamos un superconductor holográfico a continuación. Primero discutimos las propiedades de dicho superconductor en el régimen de límite de prueba y usando la correspondencia AdS/CFT reproducimos esas propiedades. Posteriormente mostramos los elementos que nos permiten hacer la extensión no conmutativa (basada en estados coherentes) y finalmente trabajamos con los agujeros negros de Einstein-Maxwell (sección 4.3) y el de Einstein-Born-Infeld (capítulo 5).

4.1.1 *Dual gravitacional*

En la correspondencia AdS/CFT un superconductor necesita condensar, esto es tener un estado denominado condensado, el cual es descrito por ciertos campos acoplados a la gravedad en la teoría en el bulto de AdS [25]. Un condensado no nulo corresponde a un campo estático diferente de cero fuera del agujero negro, el cual se conoce como *pelo* del agujero negro. Vamos a trabajar un agujero negro asintóticamente anti de Sitter, el cual desarrolla pelo a bajas temperaturas. Dicho agujero negro puede ser de tipo Schwarzschild-AdS o Reissner-Nordstrom-AdS, los cuales pueden formar pelo a bajas temperaturas [19].

Es importante mencionar que las condiciones de frontera son relevantes para desarrollar pelo en estos agujeros negros, es por eso que en agujeros negros asintóticamente planos no se había encontrado esta propiedad [9]. Para entender la creación de pelo consideramos que el agujero negro tiene una carga inicial Q_i ; si acoplamos un campo escalar cargado con carga q tendremos una carga qQ_i la cual si es muy grande creará pares de partículas cargadas. Las partículas que poseen carga de signo opuesto a la del agujero negro caen dentro del horizonte reduciendo la carga Q_i mientras que las partículas con el mismo signo de carga son repelidas. En un espaciotiempo asintóticamente plano esas cargas se van al infinito espacial lo que implica que la carga del agujero negro después de este proceso es $Q_f < Q_i$. En AdS estas cargas no escapan ya que la constante cosmológica actúa como una caja de confinamiento y quedan fuera del horizonte y este

gas de partículas cargadas es el pelo del agujero negro.

El diccionario de la correspondencia nos dice que la teoría gravitacional 4 dimensional es dual a una teoría $2 + 1$ dimensional en la frontera. De igual manera, simetrías de norma en la teoría del bulto corresponden a simetrías globales en la teoría de campos dual, es decir, el pelo escalar rompe una simetría $U(1)$ local en el bulto mientras que la descripción dual corresponde a un condensado que rompe una simetría $U(1)$ global.

Las propiedades de un superconductor holográfico pueden ser estudiadas en diferentes regímenes, por ejemplo, considerando los efectos de retroacción de los campos, agregando campos magnéticos o considerando el límite de prueba [9], en el cual nosotros nos enfocamos. Si se reescalan los campos de materia $A_\mu = \tilde{A}_\mu/q$ y $\psi = \tilde{\psi}/q$ que acoplamos al agujero negro la acción de gravedad que consideramos tiene un factor $\frac{1}{q^2}$ así que los efectos de retroacción de los campos de materia se suprimen cuando q es muy grande. El límite de $q \rightarrow \infty$ cuando A_μ y ψ son fijos se llama el *límite de prueba*. Este límite simplifica los cálculos pero mantiene la física de interés de nuestro problema ya que las interacciones no lineales entre el campo escalar y el campo de Maxwell se preservan.

4.1.2 Condensado

Para entender el proceso de condensación mediante la correspondencia AdS/CFT se asume el ansatz

$$\psi = \psi(r), \quad A_t = \phi(r), \quad (4.1)$$

en el que se encuentran las ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes

$$\psi'' + \left(\frac{f'}{f} + \frac{2}{r} \right) \psi' + \frac{\phi^2}{f^2} \psi - \frac{m^2}{f} \psi = 0, \quad (4.2)$$

y también

$$\phi'' + \frac{2}{r} \phi' - \frac{2\psi^2}{f} \phi = 0. \quad (4.3)$$

Dichas ecuaciones están acopladas y son no lineales. En estas ecuaciones encontramos el pelo escalar a bajas temperaturas ya que el término $\frac{\phi^2}{f^2} \psi$ en la ec. (4.2) lo causa al ser de signo opuesto al signo de la masa en la misma ecuación. Consideramos el caso en que $m^2 = -2/L^2$ y también las condiciones de frontera asintóticamente en infinito

$$\psi = \frac{\psi^{(1)}}{r} + \frac{\psi^{(2)}}{r^2} + \dots, \quad (4.4)$$

y

$$\phi = \mu - \frac{\rho}{r} + \dots \quad (4.5)$$

Podemos considerar soluciones con $\psi^{(1)} = 0$ o con $\psi^{(2)} = 0$; nosotros consideramos $\psi^{(1)} = 0$ que es la condición más común [17].

Usando el diccionario de la correspondencia AdS/CFT se sabe que: la teoría dual en $2 + 1$ dimensiones es una teoría conforme de campos a temperatura T dada por la temperatura de Hawking

$$T = \frac{3r_0}{4\pi L^2},$$

para el caso del agujero negro de Schwarzschild-anti de Sitter. La simetría de norma local en el bulto corresponde a una simetría $U(1)$ global en la teoría conforme de campos; el comportamiento asintótico de las soluciones del bulto equivale a ciertas propiedades en la teoría de campos como el potencial químico. El agujero negro en el bulto debe tener carga ya que si no la tiene no puede desarrollar pelo escalar y la teoría dual es invariante bajo escalamientos y no puede tener una transición de fase. Recordemos que cualquier teoría conforme de campos es invariante bajo escalamientos, en el bulto esto se ve reflejado como [9]

$$r \rightarrow ar, \quad r_0 \rightarrow ar_0, \quad (t, x, y) \rightarrow (t, x, y)/a,$$

lo cual deja invariante la métrica del agujero negro con $f \rightarrow a^2 f$.

La teoría de campos dual tiene un operador cargado dual a ψ . Si se utiliza la condición de frontera usual (mencionada anteriormente) este operador dual a ψ tiene dimensión dos. El modo $\psi^{(1)}$ diferente de cero corresponde a una fuente para este operador en la teoría de campos y $\psi^{(2)}$ diferente de cero corresponde a un valor de expectativa del condensado

$$\langle O_2 \rangle \equiv \psi^{(2)}. \quad (4.6)$$

Es de interés saber cómo se comporta el condensado O_2 como función de la temperatura. La manera de estudiarlo es con cantidades adimensionales utilizando el potencial químico μ , así se encuentra que el condensado es diferente de cero solo cuando la temperatura es pequeña, la temperatura donde el condensado se prende es la temperatura crítica T_c . Un condensado diferente de cero significa por tanto que el agujero negro en el bulto tiene pelo escalar.

4.2 ESTADOS COHERENTES Y DISTRIBUCIONES DE MATERIA NO CONMUTATIVA

Para poder describir un agujero negro en el contexto de la geometría no conmutativa debemos saber como incorporar esta idea en las

ecuaciones de campo de la gravedad. Este formalismo ha sido ampliamente estudiado en años recientes de una manera no perturbativa, considerando una deformación no conmutativa en los términos de materia [31]. Existen diferentes escenarios para motivar este tipo de deformaciones no conmutativas, por ejemplo en una teoría cuántica de campos [39] o directamente en un agujero negro [5], pero estos enfoques convergen a una idea, la cual es motivada a partir del estudio de estados coherentes propuestos por Glauber en mecánica cuántica [14].

4.2.1 Estados coherentes

Los estados coherentes son aquellos eigenestados donde se satura el principio de incertidumbre de Heisenberg, es decir, son estados de incertidumbre mínima

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}.$$

Primero vamos a recordar el desarrollo de un oscilador armónico clásico (mecánica cuántica) en términos de sus estados coherentes. Para encontrar los estados coherentes $|\alpha\rangle$ del oscilador, usamos el operador de aniquilación y calculamos sus estados propios (estados coherentes)

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (4.7)$$

Los estados excitados del oscilador como eigenestados del operador de creación son

$$\{|n\rangle\} = \left\{ \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle \right\},$$

los cuales viven en el espacio de Fock y satisfacen el álgebra usual

$$\begin{aligned} a^\dagger |n\rangle &= (n+1)^{1/2} |n+1\rangle, \\ a |n\rangle &= n^{1/2} |n-1\rangle, \\ a^\dagger a |n\rangle &= n |n\rangle. \end{aligned}$$

La proyección del estado coherente en los estados propios del oscilador está dada por

$$\langle n|\alpha\rangle = \left\langle 0 \left| \frac{a^n}{\sqrt{n!}} \right| \alpha \right\rangle = \frac{a^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\alpha\rangle,$$

por lo que utilizando la relación de completez de los estados $|n\rangle$ podemos escribir $|\alpha\rangle$ como

$$|\alpha\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n|\alpha\rangle = \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0|\alpha\rangle |n\rangle.$$

Para encontrar el braket $\langle 0|\alpha\rangle$ proyectamos el estado $|\alpha\rangle$ consigo mismo, y utilizando la condición de normalización $\langle \alpha|\alpha\rangle = 1$ encontramos

$$|\langle 0|\alpha\rangle| = e^{-|\alpha|^2/2},$$

por lo tanto el estado coherente puede ser escrito como

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (4.8)$$

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_n \frac{\alpha^n}{n!} (a^\dagger)^n |0\rangle. \quad (4.9)$$

Notamos que podemos reescribir la ec. (4.9) como

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle.$$

Utilizando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff vemos que

$$\begin{aligned} e^{\alpha a^\dagger} e^{\lambda a} &= e^{\alpha a^\dagger + \lambda a + \frac{1}{2}[\alpha a^\dagger, \lambda a]} \\ &= e^{\alpha a^\dagger + \lambda a + \frac{\alpha\lambda}{2}[a^\dagger, a]} \\ &= e^{\alpha a^\dagger + \lambda a - \frac{\alpha\lambda}{2}}, \end{aligned}$$

donde $\lambda \in \mathbb{C}$. Si $\lambda = -\bar{\alpha}$ tenemos que

$$e^{\alpha a^\dagger} e^{-\bar{\alpha} a} = e^{\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a - \frac{1}{2}|\alpha|^2},$$

por lo que el estado coherente toma la forma

$$|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger - \bar{\alpha} a} |0\rangle = D(\alpha) |0\rangle.$$

Así encontramos el operador de desplazamiento el cual nos sirve para ver a los estados coherentes como estados desplazados del estado base del oscilador. Ahora estudiamos los estados coherentes en el espacio de momentos y configuraciones.

4.2.2 Funciones de onda

Comenzamos escribiendo el operador de posición y de momento en términos de los estados coherentes, esto lo hacemos escribiendo los operadores q y p en términos de los operadores de creación y aniquilación y notamos que

$$\begin{aligned} \langle \alpha | q | \alpha \rangle &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \langle \alpha | a^\dagger + a | \alpha \rangle \\ &= \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} 2\text{Re}(\alpha), \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned} \langle \alpha | p | \alpha \rangle &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} \langle \alpha | a^\dagger - a | \alpha \rangle \\ &= i\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2}} 2\text{Im}(\alpha). \end{aligned}$$

Escribimos ahora el operador de aniquilación en términos de los operadores de posición y de momento, de modo que la ec. (4.7) es

$$\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}} (\omega q + ip) |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle.$$

Para encontrar la función de onda proyectamos el estado coherente en el espacio de configuraciones, recordando que la acción de p en este espacio es $\langle q'|p = -i\hbar \frac{d}{dq'} \langle q'|$, por lo que

$$\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}} \left[\omega q' \langle q'|\alpha\rangle + \hbar \frac{d}{dq'} \langle q'|\alpha\rangle \right] = \alpha \langle q'|\alpha\rangle.$$

A partir de esta ecuación diferencial, encontramos la solución

$$\langle q'|\alpha\rangle = \left(\frac{\omega}{\pi\hbar} \right)^{1/4} e^{-[\sqrt{\frac{\omega}{2\hbar}} q' - \alpha]^2}. \quad (4.10)$$

De manera análoga tenemos

$$\langle p'|\alpha\rangle = \left(\frac{1}{\pi\hbar\omega} \right)^{1/4} e^{-[\sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega}} p' + i\alpha]^2}. \quad (4.11)$$

La propiedad de ortogonalidad de los estados coherentes la analizamos considerando dos estados coherentes

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} \sum_n \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \\ |\beta\rangle &= e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} \sum_m \frac{\beta^m}{\sqrt{m!}} |m\rangle, \end{aligned}$$

con $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$. Por lo tanto obtenemos

$$\langle \beta|\alpha\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|^2} e^{-\frac{1}{2}|\beta|^2} e^{+\bar{\beta}\alpha},$$

y de aquí, encontramos el complejo conjugado $\langle \alpha|\beta\rangle$ y la magnitud de $\langle \beta|\alpha\rangle$ nos queda como

$$\begin{aligned} |\langle \beta|\alpha\rangle|^2 &= e^{-|\alpha|^2} e^{-|\beta|^2} e^{+\bar{\beta}\alpha} e^{+\beta\bar{\alpha}} \\ &= e^{-|\alpha-\beta|^2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Notamos que esta cantidad es cercana a cero cuando $|\alpha - \beta|$ es muy grande.

4.2.3 Distribuciones Gaussianas no conmutativas

Un modo de trabajar gravedad en un formalismo de geometría no conmutativa es mediante distribuciones de materia no conmutativas [6], las cuales son inspiradas en los estados coherentes estudiados en óptica cuántica. Dicho análisis del oscilador armónico en mecánica

cuántica nos sirve para promover el estudio de estados coherentes en un plano no conmutativo, es decir, donde tenemos relaciones de conmutación

$$[\hat{x}, \hat{y}] = i\theta, \quad (4.13)$$

donde θ es el parámetro no conmutativo, el cual tiene unidades de longitud al cuadrado y es del orden de la longitud de Planck $\sim 10^{-35}$ m. Definimos los operadores [5, 16]

$$b \equiv \frac{1}{\sqrt{2\theta}} (\hat{x} + i\hat{y}), \quad b^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2\theta}} (\hat{x} - i\hat{y}), \quad (4.14)$$

los cuales satisfacen

$$\begin{aligned} [b, b^\dagger] &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\theta}} \right)^2 [\hat{x} + i\hat{y}, \hat{x} - i\hat{y}] \\ &= \frac{1}{2\theta} \{[\hat{x}, -i\hat{y}] + [i\hat{y}, \hat{x}]\} \\ &= \frac{1}{2\theta} (2\theta) = 1, \end{aligned}$$

que es el álgebra de los operadores de creación y aniquilación estándar. El conjunto $\{b, b^\dagger\}$ actúa en el espacio de Fock bosónico H_c , o espacio de configuraciones, y naturalmente podemos escribir

$$H_c \equiv \left\{ \frac{(b^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = |n\rangle \right\},$$

de manera similar que en el caso de los estados coherentes de Glauber. Ahora, definimos el espacio de Hilbert-Schmidt, como el espacio

$$H_q \equiv \left\{ \psi(\hat{x}, \hat{y}) : \psi(\hat{x}, \hat{y}) \in B(H_c), \text{tr}_c [\psi^\dagger \psi] < \infty \right\},$$

donde $B(H_c)$ son los operadores acotados que actúan en H_c , y $\text{tr}_c(\psi^\dagger \psi)$ es la traza de los operadores de H_q que actúan en H_c , es decir

$$\begin{aligned} \text{tr}_c(\psi^\dagger \psi) &= \text{tr} \sum_n |n\rangle \langle n| \psi^\dagger \psi \\ &= \langle n | \psi^\dagger \psi | n \rangle \\ &= \int \langle z | \psi^\dagger \psi | z \rangle dz d\bar{z}, \end{aligned}$$

donde $|z\rangle$ es el estado coherente asociado a b y b^\dagger de forma análoga a la presentada en la sección anterior. Al espacio H_q se le denomina espacio cuántico. Vistos como estados de H_q , los elementos $\psi(\hat{x}, \hat{y})$ pueden ser actuados por operadores de posición y momento de acuerdo a

$$\begin{aligned} X\psi(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}\psi(\hat{x}, \hat{y}), \\ Y\psi(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{y}\psi(\hat{x}, \hat{y}), \\ P_x\psi(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{\hbar}{\theta} [\hat{y}, \psi(\hat{x}, \hat{y})], \\ P_y\psi(\hat{x}, \hat{y}) &= -\frac{\hbar}{\theta} [\hat{x}, \psi(\hat{x}, \hat{y})]. \end{aligned}$$

Tenemos así la propiedad

$$b|z\rangle = z|z\rangle, \quad (4.15)$$

donde $z \equiv \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(\hat{x} + i\hat{y})$ y podemos escribir

$$|z\rangle = e^{-\frac{|z|^2}{2}} e^{zb^\dagger} |0\rangle.$$

A partir de los estados coherentes $|z\rangle$ podemos construir estados $|z\rangle$ que pertenecen a H_q ,

$$|z\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{\theta}} |z\rangle \langle z|, \quad (4.16)$$

por lo que

$$\begin{aligned} B|z\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\theta}} (X + iY) |z\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\theta}} (\hat{x} + i\hat{y}) |z\rangle \\ &= b|z\rangle = \frac{b}{\sqrt{\theta}} |z\rangle \langle z| \\ &= z|z\rangle. \end{aligned}$$

Por otra parte los estados propios en espacio de momentos son tales que

$$P_i |p\rangle = p_i |p\rangle \Rightarrow \frac{\hbar}{\theta} [y, |p\rangle] = p_x |p\rangle, \quad \frac{\hbar}{\theta} [x, |p\rangle] = p_y |p\rangle.$$

De estos conmutadores, nos queda

$$\frac{\partial |p\rangle}{\partial x} = \frac{i}{\hbar} p_x |p\rangle, \quad \frac{\partial |p\rangle}{\partial y} = \frac{i}{\hbar} p_y |p\rangle,$$

y por lo tanto encontramos la solución

$$|p\rangle = c_0 \exp \left[\frac{i}{\hbar} p_x x + \frac{i}{\hbar} p_y y \right].$$

Utilizamos ahora las relaciones

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{\theta}{2}} (b + b^\dagger), \\ y &= i\sqrt{\frac{\theta}{2}} (b^\dagger - b), \end{aligned}$$

y el estado propio queda escrito como

$$|p\rangle = c_0 \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\theta}{2}} (\bar{p}b + pb^\dagger) \right]. \quad (4.17)$$

Para fijar la constante c_0 utilizamos la ec. (4.17) y también la relación $(p'|p) = \delta(p' - p)$; nos queda entonces que

$$c_0 = \sqrt{\frac{\theta}{2\pi\hbar^2}}.$$

Con esta información podemos escribir la función de onda en este espacio de momentos

$$\psi_p = (p|z),$$

donde [6]

$$(z|p) \equiv \text{tr} \left[\frac{|z\rangle \langle z|}{\sqrt{\theta}} |p\rangle \right].$$

Para calcular esta cantidad reescribimos la ec. (4.17) utilizando

$$\exp \left[\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\theta}{2}} p b^\dagger \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\theta}{2}} \bar{p} b \right] = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\theta}{2}} (p b^\dagger + \bar{p} b) \right] \exp \left[\frac{\theta}{4\hbar^2} p \bar{p} \right].$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} (z|p) &= \frac{1}{\sqrt{\theta}} \left\langle z | c_0 \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\theta}{2}} (p b^\dagger + \bar{p} b) \right] | z \right\rangle \\ &= \frac{c_0}{\sqrt{\theta}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} p \bar{p}} \left\langle z | \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\theta}{2}} p b^\dagger \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\theta}{2}} \bar{p} b \right] | z \right\rangle \\ &= \frac{c_0}{\sqrt{\theta}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} p \bar{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\theta}{2}} (p \bar{z} + \bar{p} z)} \underbrace{\langle z | z \rangle}_{=1}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Los estados $|z\rangle$ satisfacen la siguiente relación de completéz [5]

$$\int \frac{\theta dz d\bar{z}}{2\pi} |z\rangle *_{\text{Voros}} \langle z| = \mathbb{1}, \quad (4.19)$$

donde el producto de Voros entre funciones está definido como

$$f(z, \bar{z}) *_{\text{V}} g(z, \bar{z}) \equiv f(z, \bar{z}) e^{\overleftarrow{\partial}_{\bar{z}} \overrightarrow{\partial}_z} g(z, \bar{z}).$$

Para verificar esto calculamos $(p'|p)$ por medio de la ec. (4.19). Tenemos que

$$\begin{aligned} (p'|p) &= \int \frac{\theta dz d\bar{z}}{2\pi} (p'|z) *_{\text{V}} (z|p) \\ &= \int \frac{\theta dz d\bar{z}}{2\pi} \frac{|c_0|^2}{\theta} e^{-\frac{\theta p' \bar{p}'}{4\hbar^2}} e^{-\frac{\theta p \bar{p}}{4\hbar^2}} e^{-\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\theta}{2}} (p' \bar{z} + \bar{p}' z)} e^{\overleftarrow{\partial}_{\bar{z}} \overrightarrow{\partial}_z} e^{\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\theta}{2}} (p \bar{z} + \bar{p} z)} \\ &= \int \frac{\theta dz d\bar{z}}{2\pi} \frac{|c_0|^2}{\theta} e^{-\frac{\theta p' \bar{p}'}{4\hbar^2}} e^{-\frac{\theta p \bar{p}}{4\hbar^2}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\theta}{2}} (\bar{p} - \bar{p}') z + \frac{i}{\hbar} \sqrt{\frac{\theta}{2}} (p - p') \bar{z} \right]. \end{aligned}$$

Utilizamos el cambio de variable $u = \frac{1}{\hbar} \sqrt{\frac{\theta}{2}} z$, por lo que

$$(p'|p) = e^{-\frac{\theta p' \bar{p}'}{4\hbar^2}} e^{-\frac{\theta p \bar{p}}{4\hbar^2}} e^{\frac{\theta}{2\hbar^2} p \bar{p}} \underbrace{\int \frac{du d\bar{u}}{2\pi^2} e^{i(\bar{p} - \bar{p}')u - i(p - p')\bar{u}}}_{\delta(p' - p)} = \delta(p' - p).$$

(4.20)

Consideramos dos estados $|\zeta\rangle$ y $|\omega\rangle$ en H_q

$$\begin{aligned} |\zeta\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\theta}} |\zeta\rangle \langle \zeta|, \\ |\omega\rangle &= \frac{1}{\sqrt{\theta}} |\omega\rangle \langle \omega|. \end{aligned}$$

Los estados $|\zeta\rangle$ y $|\omega\rangle$ tienen asociados los estados $|\zeta\rangle$ y $|\omega\rangle$, que a su vez están asociados con los valores

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{\sqrt{2\theta}} (\zeta_x + i\zeta_y), \\ \omega &= \frac{1}{\sqrt{2\theta}} (\omega_x + i\omega_y), \end{aligned}$$

correspondientes a coordenadas (ζ_x, ζ_y) y (ω_x, ω_y) en el plano no conmutativo.

Tenemos así [6]

$$(\omega|\zeta) \equiv \text{tr} \left[\frac{1}{\theta} |\omega\rangle \langle \omega|\zeta\rangle \langle \zeta| \right] = \frac{1}{\theta} \langle \omega|\zeta\rangle \langle \zeta|\omega\rangle = \frac{1}{\theta} |\langle \zeta|\omega\rangle|^2.$$

Por lo tanto, de acuerdo a la ec. (4.12) obtenemos

$$|\langle \omega|\zeta\rangle|^2 = e^{-|\omega-\zeta|^2},$$

ya que

$$|\zeta - \omega| = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \underbrace{\sqrt{(\zeta_x - \omega_x)^2 + (\zeta_y - \omega_y)^2}}_{\equiv r}, \quad (4.21)$$

finalmente tenemos

$$(\omega|\zeta) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{r^2}{2\theta}}. \quad (4.22)$$

Vemos que la no conmutatividad inicialmente presente en la relación de conmutación dada en la ec. (4.13) se traduce en una distribución gaussiana no conmutativa.

En 2 dimensiones tenemos que $(\omega|z) \rightarrow 2\pi\delta^{(2)}(r)$ cuando $\theta \rightarrow 0$. Este análisis se extiende a d dimensiones en general; el caso de $d = 3$ dimensiones espaciales conduce a [5]

$$\frac{1}{(4\pi\theta)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4\theta}} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} \delta^{(3)}(r).$$

Estos resultados indican que el comportamiento puntual (delta de Dirac) es reemplazado por distribuciones gaussianas no conmutativas, lo cual ha sido usado en la construcción de soluciones tipo agujero negro no conmutativos.

4.3 CORRESPONDENCIA ADS/CFT NO CONMUTATIVA

En esta sección analizamos un sistema utilizando una extensión no conmutativa de la correspondencia AdS/CFT. Dicho sistema es el agujero negro de Einstein-Maxwell [32, 33], el cual es identificado mediante la correspondencia con un superconductor holográfico.

Nota: la notación que usaremos para denotar una derivada respecto a la coordenada r es un apóstrofe (prima).

4.3.1 Propiedades termodinámicas del agujero negro AdS no conmutativo (AdS NC)

Ahora nos concentramos en el agujero negro AdS NC el cual es la generalización del agujero negro Reissner-Nordstrom AdS en un espacio no conmutativo, es decir, en un espacio donde las coordenadas espaciales satisfacen relaciones de conmutación no triviales $[x, y] = i\theta$. Consideramos la acción de AdS

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} \left(R + \frac{6}{L^2} \right) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] + I_M, \quad (4.23)$$

donde L es el radio de AdS, I_M es la acción de materia y $F_{\mu\nu}$ es el tensor de Maxwell. Todo el desarrollo es en el sistema de unidades naturales. Se propone el ansatz $A_\mu = (A_t, 0, 0, 0)$ para el 4-potencial y también se considera que la densidad de carga y la de masa son distribuciones Gaussianas dependientes del parámetro de no conmutatividad. La métrica asociada es

$$ds^2 = -f_1(r) dt^2 + \frac{dr^2}{f_1(r)} + r^2 d\Omega^2,$$

con

$$f_1(r) = \kappa - \frac{4MG}{r\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) + \frac{r^2}{L^2} + \frac{GQ^2}{\pi r^2} \left[\gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) - \frac{r}{\sqrt{2\theta}} \left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) + \sqrt{\frac{2}{\theta}} r \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \right],$$

donde γ es la función gamma incompleta, κ es una constante que puede tomar los valores $-1, 0, 1$ dependiendo si se considera un espaciotiempo hiperbólico, plano o esférico, respectivamente. En este análisis se trabaja con el agujero negro de Reissner-Nordstrom AdS plano, esto es, $\kappa = 0$.

El interés que tenemos es estudiar la correspondencia AdS/CFT, por lo tanto la acción original se ve modificada por un término escalar

cargado (escalar de Higgs) y términos de frontera para estudiar propiedades termodinámicas. La acción completa es [33]

$$I = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{16\pi G} \left(R + \frac{6}{L^2} \right) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - |\partial_\mu \psi - iq A_\mu \psi|^2 - m^2 |\psi|^2 \right] \\ + \frac{1}{8\pi G} \oint_{\partial M} d^3x \sqrt{-\gamma} K - \frac{1}{8\pi G} \oint_{\partial M} d^3x L_{ct}(\gamma_{\mu\nu}) + I_m, \quad (4.24)$$

donde la integral K es la traza del tensor de curvatura extrínseco con respecto a la métrica inducida $\gamma_{\mu\nu}$ y la integral de L_{ct} es el lagrangiano de la superficie de AdS.

Consideramos que el horizonte del agujero negro es suficientemente grande comparado con la longitud no conmutativa $r_+^2 \gg 4\theta$, los términos que se agregaron a la acción ec. (4.23) sirven para corregir divergencias que aparecen en la variación de dicha acción, pero trabajamos con la aproximación en la cual la variación de los campos ψ no afectan la geometría que tenemos. Por lo tanto, debemos considerar el comportamiento asintótico [7] de las funciones gamma que aparecen en la $f_1(r)$,

$$\Gamma(1 + \alpha, x) = \frac{e^{-x} x^{\alpha+1}}{x - \alpha} + \dots$$

Considerando términos a primer orden en el desarrollo de la función tenemos

$$f_1(r) = -\frac{4MG}{r\sqrt{\pi}} \left[\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{e^{-r^2/4\theta} \left(\frac{r^2}{4\theta}\right)^{3/2}}{\frac{r^2}{4\theta} - \frac{3}{2}} \right] \\ + \frac{GQ^2}{\pi r^2} \left[\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{e^{-r^2/4\theta} \left(\frac{r^2}{4\theta}\right)^{1/2}}{\frac{r^2}{4\theta} - \frac{1}{2}} \right)^2 \right. \\ \left. - \frac{r}{\sqrt{2\theta}} \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{e^{-r^2/2\theta} \left(\frac{r^2}{2\theta}\right)^{1/2}}{\frac{r^2}{2\theta} - \frac{1}{2}} \right) \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{2}{\theta}} r \left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{e^{-r^2/4\theta} \left(\frac{r^2}{4\theta}\right)^{3/2}}{\frac{r^2}{4\theta} - \frac{3}{2}} \right) \right] + \frac{r^2}{L^2}. \quad (4.25)$$

Ya que $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ y $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, sustituimos en la expresión anterior y desarrollamos los productos correspondientes

$$\begin{aligned}
 f_1(r) = & -\frac{2MG}{r} + \frac{4MG}{r\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{r^2}{4\theta}} e^{-r^2/4\theta} \\
 & + \frac{GQ^2}{\pi r^2} \left[\pi - \frac{4\sqrt{\pi\theta}}{r} e^{-r^2/4\theta} + \frac{4\theta}{r^2} e^{-r^2/2\theta} - \frac{r\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\theta}} + \left(\frac{2\theta}{r^2}\right)^{1/2} e^{-r^2/2\theta} \right. \\
 & \left. + \sqrt{\frac{2\pi}{\theta}} \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4\theta}} e^{-r^2/4\theta} \right] + \frac{r^2}{L^2}. \quad (4.26)
 \end{aligned}$$

Reduciendo términos obtenemos

$$\begin{aligned}
 f_1(r) = & -\frac{2MG}{r} + \frac{2MG}{\sqrt{\pi\theta}} e^{-r^2/4\theta} + \frac{r^2}{L^2} \\
 & + \frac{GQ^2}{r^2} - \frac{4GQ^2\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}r^3} e^{-r^2/4\theta} + \frac{4\theta GQ^2}{\pi r^4} e^{-r^2/2\theta} - \frac{GQ^2}{\sqrt{\pi}r} \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \\
 & + \frac{GQ^2\sqrt{2\theta}}{\pi r^3} e^{-r^2/2\theta} + \frac{GQ^2}{\sqrt{2\theta}\pi r} - \frac{GQ^2\sqrt{2}}{2\pi\theta} e^{-r^2/4\theta}. \quad (4.27)
 \end{aligned}$$

Notamos que algunos términos se anulan entre sí. Por otro lado, tenemos dos diferentes órdenes de magnitud en las exponenciales, por lo tanto, consideramos los términos dominantes que dependen del parámetro no conmutativo

$$f_1(r) = -\frac{2MG}{r} + \frac{r^2}{L^2} + \frac{2MG}{\sqrt{\pi\theta}} e^{-r^2/4\theta} + \frac{GQ^2}{r^2} \left[1 - \left(\frac{4\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}r} + \frac{r^2}{\sqrt{2\pi\theta}} \right) e^{-r^2/4\theta} \right]. \quad (4.28)$$

Ahora, buscamos el radio del horizonte el cual se obtiene de $f_1(r_+) = 0$,

$$0 = -\frac{2MG}{r} + \frac{r^2}{L^2} + \frac{2MG}{\sqrt{\pi\theta}} e^{-r^2/4\theta} + \frac{GQ^2}{r^2} \left[1 - \left(\frac{4\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}r} + \frac{r^2}{\sqrt{2\pi\theta}} \right) e^{-r^2/4\theta} \right].$$

Multiplicamos esta expresión por r^2

$$-2MGr + \frac{r^4}{L^2} + \frac{2MG}{\sqrt{\pi\theta}} r^2 e^{-r^2/4\theta} + GQ^2 \left[1 - \left(\frac{4\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}r} + \frac{r^2}{\sqrt{2\pi\theta}} \right) e^{-r^2/4\theta} \right] = 0,$$

y por lo tanto encontramos una ecuación para el horizonte

$$r_+^4 = 2MGL^2 r_+ - \frac{2MGL^2 r_+^2}{\sqrt{\pi\theta}} e^{-r_+^2/4\theta} - GQ^2 L^2 \left[1 - \left(\frac{4\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}r_+} + \frac{r_+^2}{\sqrt{2\pi\theta}} \right) e^{-r_+^2/4\theta} \right]. \quad (4.29)$$

Primero analizamos los términos independientes del parámetro no conmutativo. La configuración extremal clásica de este agujero negro

nos dice que la primer derivada de la función $f_1(r)$ en $r = r_0$ también es igual a 0, tenemos así

$$4r_0^3 = 2MGL^2,$$

y esto implica

$$\Rightarrow r_0 = \left(\frac{MGL^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Sustituimos esta información en la expresión para r_+ considerando únicamente los términos clásicos

$$\begin{aligned} \left(\frac{MGL^2}{2} \right)^{\frac{4}{3}} &= 2MGL^2 \left(\frac{MGL^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} - GQ^2L^2 \\ &= 4 \left(\frac{MGL^2}{2} \right)^{\frac{3}{3}} \left(\frac{MGL^2}{2} \right)^{\frac{1}{3}} - GQ^2L^2. \end{aligned}$$

Finalmente encontramos la condición

$$GQ^2L^2 = 3 \left(\frac{MGL^2}{2} \right)^{\frac{4}{3}}. \quad (4.30)$$

La solución que buscamos para r_+ dada en la ec. (4.29), la escribimos como

$$r_+ = r_0 + \alpha, \quad (4.31)$$

donde α tiene codificada la información del parámetro θ no conmutativo, también escribimos las constantes MGL^2 y GQ^2L^2 en términos de r_0 , donde nos sirve definir

$$a_0 \equiv MGL^2, \quad a_1 \equiv GQ^2L^2.$$

Ayudados de la condición extremal encontramos

$$a_0 = 2r_0^3, \quad a_1 = 3r_0^4,$$

por lo tanto la expresión para r_+ es

$$\begin{aligned} (r_0 + \alpha)^4 &= 4r_0^3(r_0 + \alpha) - 3r_0^4 - \left[\frac{4r_0^3}{\sqrt{\pi\theta}}(r_0 + \alpha)^2 \right. \\ &\quad \left. - 3r_0^4 \left(4\sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \frac{1}{r_0 + \alpha} + \frac{(r_0 + \alpha)^2}{\sqrt{2\pi\theta}} \right) \right] e^{-(r_0 + \alpha)^2/4\theta}. \end{aligned}$$

En este desarrollo consideramos hasta términos de orden α^2 ya que $\vartheta(\alpha^2) \ll \theta$,

$$\begin{aligned}
 r_0^4 + 4r_0^3\alpha + 6r_0^2\alpha^2 + 4r_0\alpha^3 + \alpha^4 &= 4r_0^4 + 4r_0^3\alpha - 3r_0^4 - \left[\frac{4r_0^5}{\sqrt{\pi\theta}} + \frac{8r_0^4\alpha}{\sqrt{\pi\theta}} \right. \\
 &\quad + \frac{8r_0^3\alpha^2}{\sqrt{\pi\theta}} - \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \frac{12r_0^4}{r_0 + \alpha} \\
 &\quad \left. - \frac{3r_0^6 + 6r_0^5\alpha + 3r_0^4\alpha^2}{\sqrt{2\pi\theta}} \right] e^{-\frac{r_0^2 + 2r_0\alpha + \alpha^2}{4\theta}}.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en esta expresión se reducen y cancelan algunos términos entre ellos. Por lo pronto, uno de ellos contiene a α en el denominador, así que tomamos su desarrollo en serie (ya que α representa una perturbación),

$$\begin{aligned}
 -\sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \frac{12r_0^4}{r_0 + \alpha} &= -12r_0^3 \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \frac{1}{\left(\frac{\alpha}{r_0} + 1\right)} \\
 &= -12r_0^3 \sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \left(1 - \frac{\alpha}{r_0} + \frac{\alpha^2}{r_0^2} + \dots\right). \quad (4.32)
 \end{aligned}$$

También desarrollamos en serie la exponencial, entonces la expresión para α nos queda como

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 &= \left[-\frac{2}{3} \frac{r_0^3}{\sqrt{\pi\theta}} - \frac{4}{3} \frac{r_0^2}{\sqrt{\pi\theta}} \alpha - \frac{2}{3} \frac{r_0}{\sqrt{\pi\theta}} \alpha^2 + 2\sqrt{\frac{\theta}{\pi}} r_0 - 2\sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \alpha + 2\sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \frac{1}{r_0} \alpha^2 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \frac{r_0^4}{\sqrt{2\pi\theta}} + \frac{r_0^3}{\sqrt{2\pi\theta}} \alpha + \frac{1}{2} \frac{r_0^2}{\sqrt{2\pi\theta}} \alpha^2 \right] \left(1 - \frac{1}{2} \frac{r_0}{\theta} \alpha\right) e^{-r_0^2/4\theta}.
 \end{aligned}$$

El lado derecho de la expresión anterior lo separamos en potencias de α

$$\begin{aligned}
 \alpha^2 &= \underbrace{\left(-\frac{2}{3} \frac{r_0^3}{\sqrt{\pi\theta}} + 2\sqrt{\frac{\theta}{\pi}} r_0 + \frac{r_0^4}{2\sqrt{2\pi\theta}} \right)}_{b_0} e^{-r_0^2/4\theta} \\
 &\quad + \underbrace{\left(\frac{1}{3} \frac{r_0^4}{\sqrt{\pi\theta^{3/2}}} - \frac{7}{3} \frac{r_0^2}{\sqrt{\pi\theta}} - 2\sqrt{\frac{\theta}{\pi}} - \frac{1}{4} \frac{r_0^5}{\sqrt{2\pi\theta^2}} + \frac{r_0^3}{\sqrt{2\pi\theta}} \right)}_{b_1} \alpha e^{-r_0^2/4\theta} \\
 &\quad + \underbrace{\left(-\frac{1}{3} \frac{r_0}{\sqrt{\pi\theta}} + 2\sqrt{\frac{\theta}{\pi}} \frac{1}{r_0} + \frac{1}{2} \frac{r_0^2}{\sqrt{2\pi\theta}} + \frac{2}{3} \frac{r_0^3}{\sqrt{\pi\theta^{3/2}}} - \frac{r_0^4}{2\sqrt{2\pi\theta^2}} \right)}_{b_2} \alpha^2 e^{-r_0^2/4\theta}.
 \end{aligned}$$

Teniendo esta última expresión, vemos que tenemos una ecuación algebraica de segundo orden en α de la forma

$$\alpha^2 = f(r_0, \theta, \alpha) e^{-r_0^2/4\theta} = (b_0 + b_1\alpha + b_2\alpha^2) e^{-r_0^2/4\theta}.$$

Por lo tanto, buscamos las raíces usando la fórmula general para una ecuación de segundo orden

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{-b_1 \pm \left[b_1^2 - 4b_0 \left(b_2 - e^{r_0^2/4\theta} \right) \right]^{1/2}}{2 \left(b_2 - e^{r_0^2/4\theta} \right)} \\
&= \frac{-b_1 \pm \left[b_1^2 e^{-r_0^2/4\theta} - 4b_0 \left(b_2 e^{-r_0^2/4\theta} - 1 \right) \right]^{1/2} e^{r_0^2/8\theta}}{2 \left(b_2 e^{-r_0^2/4\theta} - 1 \right) e^{r_0^2/4\theta}} \\
&= \frac{-b_1 \pm [4b_0]^{1/2} e^{r_0^2/8\theta}}{-2e^{r_0^2/4\theta}} \\
&= \frac{b_1}{2} e^{-r_0^2/4\theta} \pm \sqrt{b_0} e^{-r_0^2/8\theta}.
\end{aligned}$$

Así finalmente tenemos una ecuación para el horizonte

$$r_{\pm} = r_0 \pm \sqrt{k(r_0)} e^{-r_0^2/8\theta} - h(r_0) e^{-r_0^2/4\theta}, \quad (4.33)$$

donde $k(r_0) \equiv b_0$ y $h(r_0) \equiv \frac{b_1}{2}$. Una vez que conocemos el horizonte r_+ , calculamos la temperatura de Hawking T_H del agujero negro. Consideramos la distancia radial justo fuera del horizonte de la siguiente manera $r = r_+ + \rho^2$, donde ρ^2 es una cantidad muy pequeña, sustituimos esta forma de r en la ec. (4.28) para la función $f_1(r)$ obteniendo

$$\begin{aligned}
f_1(r_+ + \rho^2) &= -\frac{2MG}{r_+ + \rho^2} + \frac{(r_+ + \rho^2)^2}{L^2} + \frac{2MG}{\sqrt{\pi\theta}} e^{-\frac{(r_+ + \rho^2)^2}{4\theta}} \\
&\quad + \frac{GQ^2}{(r_+ + \rho^2)^2} \left[1 - \left(\frac{4\sqrt{\theta}}{\sqrt{\pi}(r_+ + \rho^2)} + \frac{(r_+ + \rho^2)^2}{\sqrt{2}\pi\theta} \right) e^{-\frac{(r_+ + \rho^2)^2}{4\theta}} \right].
\end{aligned}$$

Ya que ρ^2 es una cantidad muy pequeña vamos a considerar términos en potencias hasta ρ^2 , descartando potencias mayores y la contribución de la exponencial. En el denominador, como hicimos en la ec. (4.32) para α , tomamos el desarrollo en serie de Taylor, por lo tanto

$$f_1(r_+ + \rho^2) = -\frac{2MG}{r_+} \left(1 - \frac{\rho^2}{r_+} \right) + \frac{r_+^2}{L^2} + 2\frac{r_+}{L^2} \rho^2 + \frac{GQ^2}{r_+^2} \left(1 - \frac{2\rho^2}{r_+} \right),$$

y agrupando términos

$$f_1(r_+ + \rho^2) = -\frac{2MG}{r_+} + \frac{r_+^2}{L^2} + \frac{GQ^2}{r_+^2} + \left(\frac{2MGL^2 r_+ + 2r_+^4 - 2GQ^2 L^2}{L^2 r_+^3} \right) \rho^2.$$

En el horizonte del agujero negro los primeros tres términos de esta expresión se anulan entre sí, por lo tanto

$$f_1(r_+ + \rho^2) = \left(\frac{2r_+^4 + 2MGL^2 r_+ - 2GQ^2 L^2}{L^2 r_+^3} \right) \rho^2. \quad (4.34)$$

Ahora, sustituimos la función f que acabamos de encontrar en la métrica (en los primeros dos términos, donde aparece la función f) e introducimos el tiempo propio $\tau = it$ y $r = r_+ + \rho^2$; con estas sustituciones tenemos

$$d\tau = idt, \quad d\tau^2 = -dt^2, \quad dr = 2\rho d\rho, \quad dr^2 = 4\rho^2 d\rho^2.$$

En la métrica tenemos que

$$ds^2 = \left(\frac{2r_+^4 + 2MGL^2r_+ - 2GQ^2L^2}{L^2r_+^3} \right) \rho^2 d\tau^2 + \frac{4\rho^2L^2r_+^3 d\rho^2}{\rho^2 (2r_+^4 + 2MGL^2r_+ - 2GQ^2L^2)},$$

y podemos reescribir esta expresión como

$$ds^2 = \frac{4L^2r_+^3}{2r_+^4 + 2MGL^2r_+ - 2GQ^2L^2} \left[\left(\frac{2r_+^4 + 2MGL^2r_+ - 2GQ^2L^2}{2L^2r_+^3} \right)^2 \rho^2 d\tau^2 + d\rho^2 \right] + r_+^2 d\Omega^2.$$

Pasamos ahora a escribir esta métrica en coordenadas polares de la forma

$$ds^2 = \rho^2 d\chi^2 + d\rho^2,$$

para la parte dependiente en $d\tau$ y $d\rho$.

Por lo tanto definimos

$$d\chi^2 \equiv \left(\frac{2r_+^4 + 2MGL^2r_+ - 2GQ^2L^2}{2L^2r_+^3} d\tau \right)^2, \quad (4.35)$$

χ es una nueva coordenada de ángulo, la cual tiene asociada el periodo

$$\beta_* \equiv \frac{2\pi}{\chi} = \frac{4\pi L^2 r_+^3}{2r_+^4 + 2MGL^2r_+ - 2GQ^2L^2},$$

pero por definición $\beta_*(r_0) \equiv T_H^{-1}(r_0)$ [41]. Encontramos así la temperatura de Hawking

$$T_H^{-1}(r_0) = \frac{4\pi L^2 r_+^3}{2r_+^4 + 2MGL^2r_+ - 2GQ^2L^2}. \quad (4.36)$$

La temperatura a cualquier distancia r es definida de la siguiente manera

$$T^{-1}(r, r_0) = \beta(r, r_0) = \int_0^{\beta_*} \sqrt{g_{tt}} dt = \beta_*(r_0) \times \sqrt{f_1(r)}. \quad (4.37)$$

En la definición de la temperatura, sustituimos $r_+ = r_0 + \alpha$

$$\begin{aligned} T_H^{-1} &= \frac{4\pi L^2 (r_0 + \alpha) (r_0^2 + 2r_0\alpha + \alpha^2)}{2(r_0 + \alpha)^2 (r_0 + \alpha)^2 + (2MGL^2) (r_0 + \alpha) - 2GQ^2L^2} \\ &= \frac{4\pi L^2 [r_0^3 + 3r_0^2\alpha]}{2(r_0^2 + 2r_0\alpha) (r_0^2 + 2r_0\alpha) + 2MGL^2r_0 + 2MGL^2\alpha - 2GQ^2L^2} \\ &= \frac{4\pi L^2 [r_0^3 + 3r_0^2\alpha]}{2r_0^4 + 8r_0^3\alpha + \underbrace{2MGL^2r_0}_{4r_0^4} + \underbrace{2MGL^2\alpha}_{4r_0^3\alpha} - \underbrace{2GQ^2L^2}_{6r_0^4}} \end{aligned}$$

finalmente encontramos

$$\frac{4\pi L^2 [r_0^3 + 3r_0^2\alpha]}{12r_0^3\alpha} = \frac{1}{3}\pi L^2 \left[\frac{1}{\alpha} + \frac{3}{r_0} \right] = \frac{\pi L^2}{3\alpha} + \frac{\pi L^2}{r_0}.$$

Si consideramos el caso $\theta \rightarrow 0$ la temperatura es cero, sólo consideramos el primer término de la derecha de la última igualdad ya que es el dominante, por lo tanto en este límite la temperatura es cero igual que en el caso clásico de un agujero negro extremal.

Para obtener la curvatura extrínseca de la métrica a cualquier distancia radial r , escribimos la métrica como $ds^2 = \frac{dr^2}{f_1(r)} + \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, donde $\gamma_{\mu\nu}$ es la métrica extrínseca [30] en 3 dimensiones, dada por

$$\gamma_{\tau\tau} = f_1(r), \quad \gamma_{\theta\theta} = \frac{r^2}{L^2}, \quad \gamma_{\phi\phi} = \frac{r^2 \sin^2 \theta}{L^2}.$$

El tensor de curvatura extrínseco está definido como

$$K^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} (\nabla^\mu n^\nu + \nabla^\nu n^\mu), \quad (4.38)$$

donde n^μ es el vector unitario normal a lo largo de $r =$ superficie constante. El vector normal unitario a la superficie $r = \text{cte}$ está dado por

$$n^r = -\frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}.$$

Esto viene de la descomposición ADM [30], entonces tenemos que

$$n^r = -\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{f_1(r)}}} = -\sqrt{f_1(r)},$$

por lo tanto

$$n^\mu = (0, -\sqrt{f_1(r)}, 0, 0). \quad (4.39)$$

Para la traza del tensor de curvatura extrínseca

$$K = \gamma^{\mu\nu} K_{\mu\nu}, \quad (4.40)$$

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2} n^r \partial_r \gamma_{\mu\nu}. \quad (4.41)$$

Sustituyendo la expresión particular de n^r , la traza K es

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{f_1(r)}} \frac{\partial f_1(r)}{\partial r} - \frac{2}{r} \sqrt{f_1(r)}.$$

La acción correspondiente al tensor de curvatura extrínseca queda como

$$\frac{1}{8\pi G} \oint_{\partial M} d^3x \sqrt{\gamma} K = -\frac{\beta_*}{2GL^2} \left[2rf_1(r) + \frac{r^2}{2} \frac{\partial f_1(r)}{\partial r} \right]. \quad (4.42)$$

La curvatura extrínseca de un espaciotiempo depende de cómo es embebido en un espaciotiempo de mayor dimensión.

Para encontrar el contratérmino en la frontera AdS, aproximamos la función $f_1(r) \approx \frac{r^2}{L^2}$, por lo tanto la métrica va como

$$ds^2 = \frac{L^2 dr^2}{r^2} + \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu,$$

donde $\gamma_{\mu\nu}$ es diagonal $\gamma_{\tau\tau} = \frac{r^2}{L^2}$, $\gamma_{\theta\theta} = \frac{r^2}{L^2}$, $\gamma_{\phi\phi} = \frac{r^2 \sin^2 \theta}{L^2}$. Con esto, la traza del tensor de curvatura extrínseca es $K = -\frac{3}{L}$, y la integral correspondiente es

$$\frac{1}{8\pi G} \oint_{\partial M} d^3 x L_{ct}(\gamma_{\mu\nu}) = -\frac{3r^3 \beta}{2GL^4}. \quad (4.43)$$

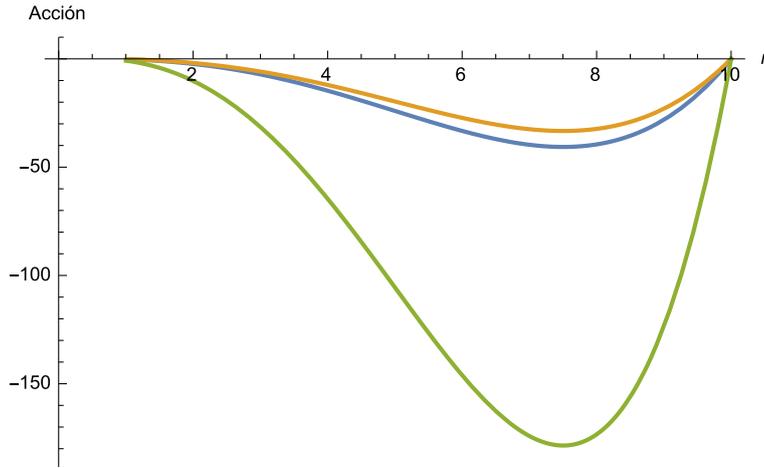


Figura 7: Graficamos la acción contra la coordenada radial, para esta gráfica se ha elegido $L = 10$ y $r_0 = 1$. El argumento de la exponencial (corrección NC) $r_0^2/4\theta$ es igual a 1,5, 5 y 10.

4.3.2 Formas asintóticas del campo de norma y el campo escalar

Para el desarrollo de los campos de materia no consideramos términos en Q^2 , trabajamos en la aproximación en la que no hay retroacción, por lo tanto la función f_1 toma la forma

$$f_1(r) = \kappa - \frac{2MG}{r} + \frac{r^2}{L^2} + \frac{2MG}{\sqrt{\pi\theta}} e^{-r^2/4\theta}. \quad (4.44)$$

La parte correspondiente a materia y carga en nuestra acción dada en la ec. (4.23) es

$$\mathcal{L}_M = -\frac{1}{4} r^2 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - r^2 |\partial_\mu \psi - iq A_\mu \psi|^2 - r^2 m^2 |\psi|^2.$$

Lo que hacemos ahora es calcular las ecuaciones de Euler-Lagrange E-L, que son las ecuaciones de movimiento

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right), \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} = \partial_\nu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A^\mu)} \right). \quad (4.46)$$

Comenzamos con el campo de materia ψ

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} = -2r^2 q^2 A_\mu A^\mu \psi - 2r^2 m^2 \psi.$$

Por otro lado

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = -r^2 (\delta_\rho^\mu \partial^\rho \psi + g^{\rho\mu} \partial_\rho \psi) = -2r^2 \partial^\mu \psi.$$

Por lo tanto de esta expresión tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right) &= \partial_\mu (-2r^2 \partial^\mu \psi) \\ &= -4r \frac{\partial r}{\partial x^\mu} \partial^\mu \psi - 2r^2 \partial_\mu \partial^\mu \psi. \end{aligned}$$

Obtenemos así la primera ecuación de E-L

$$\partial_\mu \partial^\mu \psi + \frac{2}{r} \frac{\partial r}{\partial x^\mu} \partial^\mu \psi - q^2 A_\mu A^\mu \psi - m^2 \psi = 0.$$

Recordemos que los campos únicamente dependen de la variable radial r y al bajar el índice de la derivada utilizamos la métrica, la cual nos arroja un término $r^2 f_1$, por ende

$$2r^2 f_1(r) \partial_r \partial_r \psi + 2r^2 f_1'(r) \partial_r \psi + 4r f_1(r) \partial_r \psi + 2r^2 q^2 \frac{\phi^2(r)}{f_1(r)} \psi - 2r^2 m^2 \psi = 0.$$

Finalmente despejando la segunda derivada de ψ

$$\partial_r \partial_r \psi + \frac{f_1'(r)}{f_1(r)} \partial_r \psi + \frac{2}{r} \partial_r \psi + \frac{q^2 \phi^2(r)}{f_1^2(r)} \psi - \frac{m^2}{f_1(r)} \psi = 0. \quad (4.47)$$

Realizamos un procedimiento similar para el campo A^μ . Tenemos que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} = \frac{\partial}{\partial A^\mu} (-r^2 q^2 A_\mu A^\mu \psi^2) = -2r^2 q^2 A_\mu \psi^2.$$

Para la parte de la derivada del campo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha A^\beta)} &= -\frac{r^2}{2} [\partial^\alpha A_\beta + \partial^\alpha A_\beta - \partial_\beta A^\alpha - \partial_\beta A^\alpha] \\ &= r^2 [\partial_\beta A^\alpha - \partial^\alpha A_\beta]. \end{aligned}$$

Renombramos índices $\alpha \rightarrow \nu$ y $\beta \rightarrow \mu$ para calcular la derivada de la última expresión, teniendo en cuenta que $A_t = \phi(r)$ y las demás componentes son igual a 0 del campo de norma,

$$\begin{aligned} \partial_\nu (r^2 \partial_\mu A^\nu - r^2 \partial^\nu A_\mu) &= 2r \frac{\partial r}{\partial x^\nu} \partial_\mu A^\nu + r^2 \partial_\nu \partial_\mu A^\nu \\ &\quad - 2r \frac{\partial r}{\partial x^\nu} \partial^\nu A_\mu - r^2 \partial_\nu \partial^\nu A_\mu \\ &= -2r \partial^r \phi(r) - r^2 g^{rr} \partial_r \partial_r \phi(r) \\ &= -2r g^{rr} \partial_r \phi(r) - r^2 g^{rr} \partial_r \partial_r \phi(r). \end{aligned}$$

Con lo anterior nos da

$$-2r^2 q^2 \phi(r) \psi^2 = -2r f_1(r) \partial_r \phi(r) - r^2 f_1(r) \partial_r \partial_r \phi(r).$$

Finalmente, despejando la segunda derivada del campo escalar tenemos

$$\phi''(r) + \frac{2}{r} \phi'(r) - \frac{2q^2 \psi^2}{f_1(r)} \phi(r) = 0. \tag{4.48}$$

Vamos a considerar el comportamiento asintótico como $r \rightarrow \infty$; con esto f_1 puede ser aproximado a $\frac{1}{f_1(r)} \approx \frac{L^2}{r^2}$ porque es el término dominante. Por lo tanto

$$\psi'' + \left(\frac{f_1'(r)}{f_1(r)} + \frac{2}{r} \right) \psi' - \frac{m^2}{f_1(r)} \psi + \frac{\phi^2}{f_1^2(r)} \psi = 0. \tag{4.49}$$

Escribimos esta expresión considerando la forma asintótica de $f_1(r)$, esto es

$$f_1(r) = \frac{r^2}{L^2} \Rightarrow f_1'(r) = \frac{2r}{L^2},$$

por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned} \psi'' + \left(\frac{\frac{2r}{L^2}}{\frac{r^2}{L^2}} + \frac{2}{r} \right) \psi' - \frac{m^2}{\frac{r^2}{L^2}} \psi + \frac{\phi^2}{\frac{r^4}{L^4}} \psi &= 0 \\ \psi'' + \left(\frac{2r}{r^2} + \frac{2}{r} \right) \psi' - \frac{m^2 L^2}{r^2} \psi + \frac{\phi^2 L^4}{r^4} \psi &= 0. \end{aligned}$$

Consideramos términos hasta r^{-2}

$$\Rightarrow \psi'' + \frac{4}{r} \psi' - \frac{m^2 L^2}{r^2} \psi = 0,$$

y si multiplicamos ambos lados de la igualdad por r^2

$$r^2 \psi'' + 4r \psi' - m^2 L^2 r^2 \psi = 0.$$

Resolvemos esta ecuación diferencial ordinaria proponiendo una solución general para ψ

$$\psi = a_n r^n, \tag{4.50}$$

donde su primera y segunda derivada son

$$\psi' = a_n n r^{n-1}, \quad (4.51)$$

$$\psi'' = a_n n (n-1) r^{n-2}, \quad (4.52)$$

respectivamente. Sustituimos en la expresión para ψ

$$\begin{aligned} r^2 a_n n (n-1) r^{n-2} + 4r a_n n r^{n-1} - m^2 L^2 a_n r^n &= 0 \\ a_n n (n-1) r^n + 4a_n n r^n - m^2 L^2 a_n r^n &= 0 \\ a_n (n(n-1) + 4n - m^2 L^2) r^n &= 0. \end{aligned} \quad (4.53)$$

El valor de $m^2 L^2$ se toma como -2 [36]. Esto conduce a

$$\begin{cases} n = -1 \\ n = -2, \end{cases} \quad (4.54)$$

puede encontrarse en [3] una relación entre los tipos de campos con los cuales trabajamos, la masa y la dimensión de dichos campos (ver cuadro 1); vemos que coincide con las soluciones que encontramos en la ec. (4.54).

Por lo tanto llegamos a

Tipo de campo	Relación entre masa y dimensión del campo
Escalares, campos masivos de espín 2	$m^2 L^2 = \Delta (\Delta - d)$
Campos no masivos de espín 2	$m^2 L^2 = 0, \Delta = d$
Campos de p-formas	$m^2 L^2 = (\Delta - p) (\Delta + p - d)$
Espín $\frac{1}{2}$, Espín $\frac{3}{2}$	$ m L = \Delta - \frac{d}{2}$
Tensor simétrico sin traza de rango s	$m^2 L^2 = (\Delta + s - 2) (\Delta - s + 2 - d)$

Cuadro 1: Diferentes campos y la relación entre masa y dimensión del campo.

$$\psi = \frac{\psi^-}{r} + \frac{\psi^+}{r^2}. \quad (4.55)$$

Para el campo $\phi(r)$, hacemos la misma aproximación $\frac{1}{f_1(r)} \approx \frac{L^2}{r^2}$, por lo que tenemos

$$\phi''(r) + \frac{2}{r} \phi'(r) - \frac{2\psi^2 L^2}{r^2} \phi(r) = 0.$$

Proponemos de manera similar al caso del campo ψ , la solución

$$\phi(r) = b_n r^n. \quad (4.56)$$

Estamos considerando términos hasta $\frac{1}{r^2}$, ya que es el desarrollo asintótico cuando $r \rightarrow \infty$; así, nos queda

$$\phi''(r) + \frac{2}{r}\phi'(r) = 0, \quad (4.57)$$

calculamos la primera y segunda derivada y sustituimos en la expresión para $\phi(r)$, dada en la ec. (4.57)

$$\begin{aligned} r b_n n (n-1) r^{n-2} + 2 b_n n r^{n-1} &= 0 \\ b_n (n(n-1) + 2n) r^{n-1} &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, encontramos que $\phi(r)$ queda

$$\phi(r) = \mu - \frac{\rho}{r}, \quad (4.58)$$

donde μ y ρ son constantes.

4.3.3 Condensación en un fondo no conmutativo

Comenzamos haciendo un cambio de variable en las ecuaciones de los campos ψ y ϕ respectivamente; la propuesta del cambio es la siguiente $z = r_+/r$. Para la solución de ψ primero calculamos la primera y segunda derivada

$$\psi'(r) = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{z^2}{r_+},$$

y también

$$\psi''(r) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \frac{z^4}{r_+^2} + \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{2z^3}{r_+^2}.$$

Sustituimos en la ec. (4.49) y encontramos

$$\psi''(z) + \frac{f'(z)}{f(z)}\psi'(z) - \frac{r_+^2}{z^4} \frac{m^2}{f(z)}\psi(z) + \frac{r_+^2}{z^4} \frac{\phi^2}{f^2(z)}\psi(z) = 0. \quad (4.59)$$

Para la expresión de ϕ seguimos el mismo procedimiento, utilizando los resultados encontrados para ψ . Obtenemos así

$$\phi''(z) - \frac{2r_+^2 \psi^2}{z^4 f(z)}\phi = 0. \quad (4.60)$$

Condiciones de frontera

Para regularizar el horizonte del agujero negro necesitamos las condiciones siguientes en $z = 1$

$$\phi(1) = 0, \quad \psi'(1) = \frac{m^2 r_+^2}{f'(1)}\psi(1). \quad (4.61)$$

Ahora, queremos encontrar una expresión analítica para la temperatura crítica y el valor del operador de condensación en este fondo no conmutativo; ya que los campos $\psi(z)$, $\phi(z)$ y $f(z)$ son regulares en el horizonte podemos desarrollarlos en serie de Taylor cerca del valor $z = 1$

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \phi(1) - \phi'(1)(1-z) + \frac{1}{2}\phi''(1)(1-z)^2 + \dots, \\ \psi(z) &= \psi(1) - \psi'(1)(1-z) + \frac{1}{2}\psi''(1)(1-z)^2 + \dots, \\ f(z) &= f(1) - f'(1)(1-z) + \frac{1}{2}f''(1)(1-z)^2 + \dots.\end{aligned}\quad (4.62)$$

Sin pérdida de generalidad se escoge $\phi'(1) < 0$ y $\psi'(1) > 0$ [36]. Para la ecuación del campo ϕ vamos a considerar la ec. (4.60). Por lo tanto nos preguntamos por la forma explícita de $\frac{2r_+^2}{f'(1)}$; primero escribimos

$$f(r) = -\frac{2mg}{r} + \frac{r^2}{L^2} + \frac{2mg}{\sqrt{\theta\pi}}e^{-r^2/4\theta},$$

y hacemos el cambio de variable $z = r_+/r$

$$f(z) = -\frac{2mgz}{r_+} + \frac{r_+^2}{L^2} \frac{1}{z^2} + \frac{2mg}{\sqrt{\theta\pi}}e^{-r_+^2/z^2 4\theta}.$$

Evaluamos en $z = 1$

$$f(z=1) = -\frac{2mg}{r_+} + \frac{r_+^2}{L^2} + \frac{2mg}{\sqrt{\theta\pi}}e^{-r_+^2/4\theta} = 0,$$

y calculamos la primer derivada y evaluamos en $z = 1$

$$f'(1) = -\frac{2mg}{r_+} - \frac{2r_+^2}{L^2} + \frac{2mg}{\sqrt{\theta\pi}}e^{-r_+^2/4\theta} \frac{2r_+^2}{4\theta}.$$

Finalmente podemos escribir $f'(1)$ usando el resultado de $f(1) = 0$,

$$f'(1) = -\frac{3r_+^2}{L^2} - \frac{2mg}{\sqrt{\theta\pi}}e^{-r_+^2/4\theta} + \frac{2mg}{\sqrt{\theta\pi}} \frac{2r_+^2}{4\theta} e^{-r_+^2/4\theta}. \quad (4.63)$$

Podemos reescribir la ec. (4.63) de la manera siguiente

$$f'(1) = -\frac{3r_+^2}{L^2} \left[1 + \frac{2mg}{\sqrt{\theta\pi}} \frac{L^2}{3r_+^2} e^{-r_+^2/4\theta} - \frac{2mg}{\sqrt{\theta\pi}} \frac{2r_+^2}{4\theta} \frac{L^2}{3r_+^2} e^{-r_+^2/4\theta} \right]. \quad (4.64)$$

Podemos escribir la expresión anterior en términos de la función f^θ donde tenemos codificada la información clásica de la métrica y la información no conmutativa

$$f(r) = f^c + f^\theta = f^c(r) + g(r) e^{-r^2/4\theta},$$

siguiendo un procedimiento similar al anterior encontramos

$$f(z) = -2mg \frac{z}{r_+} + \frac{r_+^2}{L^2} \frac{1}{z^2} + g\left(\frac{r_+}{z}\right) e^{-r_+^2/4\theta z^2},$$

la primer derivada es

$$f'(z) = -\frac{2mg}{r_+} - \frac{r_+^2}{L^2} \frac{1}{z^3} - g'\left(\frac{r_+}{z}\right) \frac{r_+}{z^2} e^{-r_+^2/4\theta z^2} + g\left(\frac{r_+}{z}\right) \frac{2r_+^2}{4\theta z^3} e^{-r_+^2/4\theta z^2},$$

nos fijamos en el punto $z = 1$, así, la primer derivada es

$$f'(1) = -\frac{3r_+^2}{L^2} \left[1 + \frac{L^2}{3r_+^2} g(r_+) e^{-r_+^2/4\theta} + \frac{L^2}{3r_+^2} g'(r_+) r_+ e^{-r_+^2/4\theta} - \frac{L^2}{4\theta} g(r_+) e^{-r_+^2/4\theta} \right], \quad (4.65)$$

calculamos fácilmente la función inversa de $f'(1)$ para escribir la ec. (4.60)

$$\frac{1}{f'(1)} = -\frac{3r_+^2}{L^2} \left[1 - \frac{L^2}{3r_+^2} g(r_+) e^{-r_+^2/4\theta} - \frac{L^2}{3r_+^2} g'(r_+) r_+ e^{-r_+^2/4\theta} + \frac{L^2}{4\theta} g(r_+) e^{-r_+^2/4\theta} \right], \quad (4.66)$$

finalmente la expresión general para el campo escalar ϕ es

$$\phi''(1) = -\frac{2}{3} L^2 \psi(1)^2 \phi'(1) \left[1 - \left(\frac{L^2}{3r_+^2} g(r_+) + \frac{L^2}{3r_+^2} g'(r_+) r_+ - \frac{L^2}{4\theta} g(r_+) \right) e^{-r_+^2/4\theta} \right]. \quad (4.67)$$

Consideramos la función $g^\theta(r)$ únicamente deformando la masa de la siguiente manera

$$g^\theta(r) = \frac{2mg}{\sqrt{\pi\theta}},$$

y así el campo escalar ϕ queda

$$\phi''(1) = -\frac{2}{3} L^2 \psi(1)^2 \phi'(1) \left[1 - \left(\frac{L^2}{3r_+^2} \frac{2mg}{\sqrt{\pi\theta}} - \frac{L^2}{4\theta^{3/2}} \frac{2mg}{\sqrt{\pi}} g(r_+) \right) e^{-r_+^2/4\theta} \right].$$

De la ec. (4.64) encontramos el inverso de la función $f'(1)$; en [33] encontramos la condición $\omega = 2mgL^2$, pero nosotros haciendo este análisis vemos que la condición se ve modificada por un factor 2 de la siguiente manera $mgL^2 = 2r_0^3 = 2\omega$. Finalmente, la expresión para el campo escalar queda dada por

$$\begin{aligned} \phi(z) = & -\phi'(1)(1-z) \\ & - \frac{L^2 \psi^2(1) \phi'(1)}{3} \left(1 - \frac{4\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi\theta}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} + \frac{2\omega}{3\sqrt{\pi\theta}^{3/2}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right) (1-z)^2, \end{aligned} \quad (4.68)$$

donde $mgL^2 = 2r_0^3 = 2\omega$ lo cual implica que $r_0 = \omega^{1/3}$, por lo tanto podemos escribir $r_+ = r_0 + \dots = \omega^{1/3}$, así $r_+^2/4\theta = \omega^{2/3}/4\theta$. Los factores numéricos en la expresión anterior son los únicos que varían de la expresión encontrada en [33].

Para el campo de materia ψ hacemos un procedimiento similar. Partimos de la ec. (4.59), utilizamos la condición de frontera propuesta

$$\psi'(1) = \frac{m^2 r_+^2}{f'(1)} \psi(1),$$

y escribimos la ec. (4.59) considerando el desarrollo dado en la ec. (4.62) en el punto $z = 1$

$$\begin{aligned} \psi''(1) = & -\frac{f'(1) + f''(1)(1-z)}{f'(1)(1-z)} \psi'(1) + \frac{m^2 r_+^2}{f'(1)(1-z)} [\psi(1) + \psi'(1)(1-z)] \\ & - \frac{r_+^2 \phi'(1)^2 (1-z)^2}{f'(1)^2 (1-z)^2} \psi(1) + \psi''(1)(1-z). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Llegamos a

$$\begin{aligned} \psi''(1) = & \underbrace{-\frac{\psi'(1)}{(1-z)} + \frac{m^2 r_+^2 \psi(1)}{f'(1)(1-z)}}_{=0} + \frac{m^2 r_+^2}{f'(1)} \frac{m^2 r_+^2}{f'(1)} \psi(1) \\ & - \psi(1) \phi'(1)^2 \frac{r_+^2}{f'(1)^2} - \frac{f''(1)}{f'(1)} \psi'(1) - \psi''(1). \end{aligned} \quad (4.70)$$

Finalmente escribimos la segunda derivada de ψ como

$$\begin{aligned} 2\psi''(1) = & -\psi(1) \phi'(1)^2 \frac{L^4 r_+^2}{9r_+^4} \left(1 - \frac{4\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi\theta}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} + \frac{2\omega}{3\sqrt{\pi\theta}^{3/2}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right)^2 \\ & + \frac{m^4 r_+^4}{f'(1)^2} \psi(1) - \frac{f''(1)}{f'(1)^2} m^2 r_+^2 \psi(1). \end{aligned} \quad (4.71)$$

Reescribimos la expresión para $\psi''(1)$, para ello buscamos la forma explícita de la segunda derivada de f . Tenemos que

$$f''(z) = \frac{6r_+^2}{L^2 z^4} + mgr_+^4 \frac{e^{-r_+^2/4\theta z^2}}{2\sqrt{\pi\theta}^{5/2} z^6} - 3mgr_+^2 \frac{e^{-r_+^2/4\theta z^2}}{2\sqrt{\pi\theta}^{3/2} z^4},$$

y en el punto $z = 1$

$$f''(1) = \frac{6r_+^2}{L^2} + mgr_+^4 \frac{e^{-r_+^2/4\theta}}{2\sqrt{\pi\theta}^{5/2}} - 3mgr_+^2 \frac{e^{-r_+^2/4\theta}}{2\sqrt{\pi\theta}^{3/2}}.$$

Nos fijamos en el factor $\frac{m^4 r_+^4}{f'(1)^2}$ que reescribimos como

$$\frac{m^4 r_+^4}{f'(1)^2} = 16r_+^4 \frac{L^4}{9r_+^4} \left[1 - \frac{2mg}{\sqrt{\pi\theta}} \frac{L^2}{3r_+^2} e^{-r_+^2/4\theta} + \frac{2mg}{\sqrt{\pi\theta}} \frac{2L^2}{3} \frac{1}{4\theta} e^{-r_+^2/4\theta} \right]^2.$$

De igual manera que en el caso del campo escalar ϕ , escogemos $mgL^2 = 2\omega$ y también $r_+ = r_0 = \omega^{1/3}$, así

$$\frac{m^4 r_+^4}{f'(1)^2} = \frac{16L^4}{9} \left[1 - \frac{8\omega}{3\sqrt{\pi\theta}\omega^{2/3}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} + \frac{4\omega}{3\sqrt{\pi\theta}^{3/2}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right]. \quad (4.72)$$

Ahora nos fijamos en la contribución de $f''(1)$; considerando que $m^2 L^2 = 4$

$$\frac{f''(1)L^2}{r_+^2} = 6 + \frac{mgL^2 r_+^2}{2\sqrt{\pi\theta}^{5/2}} e^{-r_+^2/4\theta} - \frac{3mgL^2 r_+^2}{\sqrt{\pi\theta}^{5/2}} e^{-r_+^2/4\theta}.$$

Reescribiendo esta última expresión tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f''(1)L^2}{4r_+^2} &= \frac{3}{2} + \frac{\omega^{5/3}}{4\sqrt{\pi\theta}^{5/2}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} - \frac{\omega}{\sqrt{\pi\theta}^{5/2}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta}, \\ &= \frac{3}{2} \left(1 + \frac{\omega^{5/3}}{6\sqrt{\pi\theta}^{5/2}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} - \frac{2\omega}{3\sqrt{\pi\theta}^{5/2}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right). \end{aligned}$$

Restándole a 1 esta expresión podemos escribir

$$1 - \frac{f''(1)L^2}{m^2 L^2 r_+^2} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega^{5/3}}{2\sqrt{\pi\theta}^{5/2}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} - \frac{3\omega}{\sqrt{\pi\theta}^{3/2}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right). \quad (4.73)$$

Ya que la ec. (4.71) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} 2\psi''(1) &= -\psi(1) \phi'(1)^2 \frac{L^4}{9r_+^2} \left(1 - \frac{8\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi\theta}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} + \frac{4\omega}{3\sqrt{\pi\theta}^{3/2}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right) \\ &\quad + \frac{m^4 r_+^4 L^4}{L^4 f'(1)^2} \psi(1) \left[1 - \frac{f''(1)L^2}{m^2 L^2 r_+^2} \right], \end{aligned} \quad (4.74)$$

tenemos de la ec. (4.72) y la ec. (4.73)

$$\begin{aligned} 2\psi''(1) &= -\frac{8L^4}{9} \psi(1) \left[1 + \left(\frac{\omega^{5/3}}{2\sqrt{\pi\theta}^{5/2}} - \frac{\omega}{3\sqrt{\pi\theta}^{3/2}} - \frac{8\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi\theta}} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right] \\ &\quad - \psi(1) \phi'(1)^2 \frac{L^4}{9r_+^2} \left(1 - \left(\frac{8\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi\theta}} - \frac{4\omega}{3\sqrt{\pi\theta}^{3/2}} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right). \end{aligned} \quad (4.75)$$

Notamos que las contribuciones no conmutativas varían en comparación con las encontradas en [33], al igual que en el cálculo del campo escalar ϕ .

Para seguir con la discusión vamos a considerar los desarrollos de los campos encontrados en [32, 33], en los cuales tenemos el campo escalar y el campo de materia respectivamente

$$\phi(z) = -\frac{L^2\psi(1)^2\phi'(1)}{3} \left[1 - \left(\frac{\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi\theta^{5/2}}} + \frac{\omega}{6\sqrt{\pi\theta^{5/2}}} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right] (1-z_0)^2 - \phi'(1)(1-z), \quad (4.76)$$

$$\begin{aligned} \psi(z) = & \left[\frac{4}{9} \left(1 + \left(\frac{\omega^{5/3}}{32\sqrt{\pi\theta^{5/2}}} + \frac{7\omega}{48\sqrt{\pi\theta^{3/2}}} - \frac{2\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi\theta}} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right) \right. \\ & \left. - \frac{L^4\phi'(1)^2}{36r_+^2} \left(1 - \left(\frac{2\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi\theta}} - \frac{\omega}{3\sqrt{\pi\theta^{3/2}}} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right) \right] \psi(1)(1-z)^2 \\ & + \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi\theta}} - \frac{\omega}{6\sqrt{\pi\theta^{3/2}}} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right) \psi(1)z \\ & + \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{2\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi\theta}} - \frac{\omega}{3\sqrt{\pi\theta^{3/2}}} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right) \psi(1). \end{aligned} \quad (4.77)$$

Las soluciones obtenidas para $\psi(z)$ y $\phi(z)$ dadas en las ecs. (4.76) y (4.77) deben ser unidas con las soluciones asintóticas de los campos encontradas en las ecs. (4.58) y (4.55) en un punto intermedio $z = z_0$; comenzamos con el campo $\phi(z)$,

$$\mu - \frac{\rho z_0}{r_+} = -\frac{L^2\psi(1)^2\phi'(1)}{3} \left(1 - \left(\frac{\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi\theta^{5/2}}} + \frac{\omega}{6\sqrt{\pi\theta^{5/2}}} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right) (1-z_0)^2 - \phi'(1)(1-z_0), \quad (4.78)$$

y su primer derivada

$$-\frac{\rho}{r_+} = \frac{2L^2\psi(1)^2\phi'(1)}{3} \left(1 - \left(\frac{\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi\theta^{5/2}}} - \frac{\omega}{6\sqrt{\pi\theta^{5/2}}} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right) (1-z_0) + \phi'(1), \quad (4.79)$$

Para el campo $\psi(z)$ se produce de manera similar.

La constante $J^+ := \psi^+$ puede ser interpretada como el valor de expectación del operador ϑ dual del campo escalar, es decir $J^+ := \langle \vartheta \rangle$ de acuerdo a la correspondencia AdS/CFT. Tenemos la condición

$$\begin{aligned}
 J^+ z_0^2 &= \left[\frac{4}{9} \left(1 + \left(\frac{\omega^{5/3}}{32\sqrt{\pi}\theta^{5/2}} + \frac{7\omega}{48\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} - \frac{2\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi}\theta} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{L^4 \phi'(1)^2}{36r_+^2} \left(1 - \left(\frac{2\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi}\theta} - \frac{\omega}{3\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right) \right] \psi(1) (1-z_0)^2 \\
 &\quad + \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi}\theta} - \frac{\omega}{6\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right) \psi(1) z_0 \\
 &\quad + \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{2\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi}\theta} - \frac{\omega}{3\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right) \psi(1), \tag{4.80}
 \end{aligned}$$

y para la primer derivada

$$\begin{aligned}
 J^+ z_0 &= - \left[\frac{4}{9} \left(1 + \left(\frac{\omega^{5/3}}{32\sqrt{\pi}\theta^{5/2}} + \frac{7\omega}{48\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} - \frac{2\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi}\theta} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{L^4 \phi'(1)^2}{36r_+^2} \left(1 - \left(\frac{2\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi}\theta} - \frac{\omega}{3\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right) \right] \psi(1) (1-z_0) \\
 &\quad + \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{2\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi}\theta} - \frac{\omega}{3\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right) \psi(1). \tag{4.81}
 \end{aligned}$$

De la ec. (4.79) encontramos una forma para $\psi(1)^2$

$$\psi(1)^2 = -\frac{3}{2L^2(1-z_0)} \left(1 + \frac{\rho}{r_+ \phi'(1)} \right) \left(1 + \left(\frac{\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi}\theta} - \frac{\omega}{6\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right). \tag{4.82}$$

La temperatura de Hawking en este escenario no conmutativo está relacionada con el radio del horizonte r_+ por medio de la relación

$$T_H = \frac{\chi}{2\pi},$$

donde $\chi := \frac{1}{2} f'(r)|_{r_+}$. En términos de la variable z

$$T_H = \frac{1}{2} \frac{f'(r)}{2\pi} \Big|_{r_+} = \frac{1}{2} \frac{f'(z) \frac{\partial z}{\partial r}}{2\pi} \Big|_{z=1} = -\frac{1}{2} \frac{f'(z)}{2\pi r_+} \Big|_{z=1},$$

y por lo tanto, la temperatura de Hawking es

$$T_H = \frac{3r_+}{4\pi L^2} \left(1 + \frac{\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi}\theta} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} - \frac{\omega}{6\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right). \tag{4.83}$$

Podemos reescribir entonces la expresión para $\psi(1)^2$ como

$$\psi(1)^2 = \frac{3}{2L^2(1-z_0)} \left(1 + \frac{\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi}\theta} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} - \frac{\omega}{6\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right) \left(\frac{T_c}{T_H} \right)^2 \left(1 - \frac{T_H^2}{T_c^2} \right),$$

$$(4.84)$$

donde T_c está definida por

$$T_c \equiv \frac{3\sqrt{\rho r_+}}{4\pi L^2 \sqrt{-\phi'(1)}} \left(1 + \frac{\omega^{1/3}}{3\sqrt{\pi\theta}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} - \frac{\omega}{6\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right). \quad (4.85)$$

Por lo tanto, para T_H muy cerca de la temperatura crítica T_c obtenemos para $\psi(1)$

$$\psi(1) = \sqrt{\frac{3}{L^2(1-z_0)}} \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \left(1 + \frac{\omega^{1/3}}{6\sqrt{\pi\theta}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} - \frac{\omega}{12\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right). \quad (4.86)$$

Para encontrar la expresión de J^+ , a la ec. (4.80) le sumamos la ec. (4.81) multiplicada por $(1-z_0)$

$$J^+ = \frac{(2+z_0)\psi(1)}{3z_0} \left(1 + \frac{(1+z_0)\omega^{1/3}}{3(2+z_0)\sqrt{\pi\theta}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} - \frac{(1+z_0)\omega}{6(2+z_0)\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right). \quad (4.87)$$

Definimos $\beta \equiv \frac{(-\phi'(1))}{r_+}$ y sustituimos J^+ en la ec. (4.81), así encontramos la forma explícita de β

$$\beta = \sqrt{1 + \left(\frac{4+3z_0}{7-z_0} \frac{\omega^{1/3}}{\sqrt{\pi\theta}} - \frac{11-9z_0}{4(7-z_0)} \frac{\omega}{\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} + \frac{1-z_0}{8(7-z_0)} \frac{\omega^{5/3}}{\sqrt{\pi}\theta^{5/2}} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta}} \times \frac{2}{L^2} \sqrt{\frac{7-z_0}{1-z_0}}. \quad (4.88)$$

Ahora, calculamos el valor de expectación del operador de condensación, el cual está definido como [33, 36]

$$\langle \vartheta_2 \rangle := \sqrt{2} J^+ r_+^2. \quad (4.89)$$

Usando la forma que encontramos para J^+ , tenemos

$$\langle \vartheta_2 \rangle = \sqrt{2} \frac{2+z_0}{3-z_0} \sqrt{\frac{3}{L^2(1-z_0)}} \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \times \left(1 + \left(\frac{4-z_0}{12+6z_0} \frac{\omega^{1/3}}{\sqrt{\pi\theta}} - \frac{1}{2} \frac{4-z_0}{12+6z_0} \frac{\omega}{\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right) r_+^2. \quad (4.90)$$

Por lo tanto encontramos la forma para r_+^2 partiendo de la expresión reportada en [33]

$$r_+^2 = \frac{16}{9} T_c^2 L^4 \left(1 - \left(\frac{2(4-z_0)}{12+6z_0} \frac{\omega^{1/3}}{\sqrt{\pi\theta}} - \frac{3(4-z_0)}{2(12+6z_0)} \frac{\omega}{\sqrt{\pi\theta^{3/2}}} \right) e^{-\omega^{2/3}/4\theta} \right). \quad (4.91)$$

En el límite clásico (conmutativo) r_+ se reduce a r_0 .

AGUJERO NEGRO DE EINSTEIN-BORN-INFELD

5.1 GEOMETRÍA DEL AGUJERO NEGRO DE EINSTEIN-BORN-INFELD EN 4 DIMENSIONES

Ahora calculamos ciertos aspectos de la gravedad de un agujero negro de Einstein-Born-Infeld en un espaciotiempo esféricamente simétrico en 4 dimensiones.

La métrica general de este sistema en 4 dimensiones es [15]

$$ds^2 = -e^{2\mu(r)} dt^2 + e^{2\nu(r)} dr^2 + r^2 (d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\phi^2). \quad (5.1)$$

Primero calculamos el tensor de Ricci de este elemento de línea, mediante análisis variacional. Por lo tanto el lagrangiano asociado es

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\dot{t}, \dot{r}, \dot{\vartheta}, \dot{\phi}) &= -e^{2\mu(r)} \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + e^{2\nu(r)} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\vartheta}{d\lambda} \right)^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \left(\frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 \\ &= -e^{2\mu(r)} \dot{t}^2 + e^{2\nu(r)} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\vartheta}^2 + r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\phi}^2. \end{aligned}$$

Calculamos las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu},$$

donde $\mu = t, r, \vartheta, \phi$. Para la primer ecuación de E-L tenemos

$$\frac{d}{d\lambda} (-2e^{2\mu} \dot{t}) = 0 \Rightarrow -2(2\mu' e^{2\mu} \dot{r} \dot{t} + e^{2\mu} \ddot{t}) = 0,$$

por lo tanto

$$\ddot{t} + 2\mu' \dot{r} \dot{t} = 0.$$

Así, escribimos el primer símbolo de Christoffel

$$\Gamma_{rt}^t = \mu'. \quad (5.2)$$

Para la segunda ecuación tenemos

$$\frac{d}{d\lambda} (2e^{2\nu} \dot{r}) = 2r\dot{\vartheta}^2 + 2r \sin^2 \vartheta \dot{\phi}^2 + 2\nu' e^{2\nu} \dot{r}^2 - 2\mu' e^{2\mu} \dot{t}^2,$$

y ponemos todos los términos de un solo lado de la ecuación

$$4\nu' e^{2\nu} \dot{r}^2 + 2e^{2\nu} \ddot{r} - 2r\dot{\vartheta}^2 - 2r \sin^2 \vartheta \dot{\phi}^2 - 2\nu' e^{2\nu} \dot{r}^2 + 2\mu' e^{2\mu} \dot{t}^2 = 0.$$

Despejamos la segunda derivada de r

$$\ddot{r} + \nu' \dot{r}^2 - r e^{-2\nu} \dot{\vartheta}^2 - r e^{-2\nu} \sin^2 \vartheta \dot{\phi}^2 + \mu' e^{2\mu-2\nu} \dot{t}^2 = 0,$$

y escribimos los símbolos de Christoffel correspondientes

$$\Gamma_{rr}^r = \nu', \quad \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r = -re^{-2\nu}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^r = -re^{-2\nu} \sin^2 \vartheta, \quad \Gamma_{tt}^r = \mu' e^{2\mu-2\nu}. \quad (5.3)$$

De igual manera calculamos para la coordenada ϑ

$$\frac{d}{d\lambda} (2r^2 \dot{\vartheta}) = 2r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\phi}^2.$$

La ecuación queda

$$\ddot{\vartheta} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\vartheta} - \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\phi}^2 = 0,$$

y por lo tanto tenemos

$$\Gamma_{r\vartheta}^{\vartheta} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\phi\phi}^{\vartheta} = -\sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (5.4)$$

Por último para la coordenada ϕ

$$\frac{d}{d\lambda} (2r^2 \sin^2 \vartheta \dot{\phi}) = 0,$$

y por tanto

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r} \dot{\phi} + 2 \frac{\cos \vartheta}{\sin \vartheta} \dot{\vartheta} \dot{\phi} = 0.$$

Las conexiones correspondientes son

$$\Gamma_{r\phi}^{\phi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma_{\vartheta\phi}^{\phi} = \cot \vartheta. \quad (5.5)$$

Ahora, calculamos el tensor de Riemann

$$R^{\sigma}_{\mu\nu\rho} = -\partial_{\mu} \Gamma_{\nu\rho}^{\sigma} + \partial_{\nu} \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} + \Gamma_{\mu\rho}^{\sigma} \Gamma_{\nu\lambda}^{\sigma} - \Gamma_{\nu\rho}^{\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^{\sigma}, \quad (5.6)$$

recordando que

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\sigma\lambda} R^{\lambda}_{\mu\nu\rho}.$$

Calculamos la componente $rtrt$ de la ec. (5.6)

$$\begin{aligned} R^r_{trt} &= -\partial_t \Gamma_{rt}^r + \partial_r \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{tt}^r \Gamma_{rr}^r - \Gamma_{rt}^r \Gamma_{tr}^r + \Gamma_{tt}^t \Gamma_{rt}^r \\ &\quad - \Gamma_{rt}^t \Gamma_{tt}^r + \Gamma_{tt}^{\vartheta} \Gamma_{r\vartheta}^r - \Gamma_{rt}^{\vartheta} \Gamma_{t\vartheta}^r + \Gamma_{tt}^{\phi} \Gamma_{r\phi}^r - \Gamma_{rt}^{\phi} \Gamma_{t\phi}^r. \end{aligned}$$

Varios de estos términos se anulan, escribimos los que sobreviven

$$R^r_{trt} = \partial_r (\mu' e^{2\mu-2\nu}) + \mu' \nu' e^{2\mu-2\nu} - \mu'^2 e^{2\mu-2\nu}.$$

Finalmente encontramos la expresión para R^r_{trt}

$$R^r_{trt} = e^{2\mu-2\nu} (\mu'' - \mu' \nu' - \mu'^2). \quad (5.7)$$

De manera similar calculamos las componentes restantes del tensor de Riemann. Tenemos

$$\begin{aligned} R^r{}_{\vartheta r\vartheta} &= -\partial_{\vartheta}\Gamma_{r\vartheta}^r + \partial_r\Gamma_{\vartheta\vartheta}^r + \Gamma_{\vartheta\vartheta}^t\Gamma_{rt}^r - \Gamma_{r\vartheta}^t\Gamma_{\vartheta t}^r + \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r\Gamma_{rr}^r \\ &\quad - \Gamma_{r\vartheta}^r\Gamma_{\vartheta r}^r + \Gamma_{\vartheta\vartheta}^{\vartheta}\Gamma_{r\vartheta}^r - \Gamma_{r\vartheta}^{\vartheta}\Gamma_{\vartheta\vartheta}^r + \Gamma_{\vartheta\vartheta}^{\phi}\Gamma_{r\phi}^r - \Gamma_{r\vartheta}^{\phi}\Gamma_{\vartheta\phi}^r, \end{aligned}$$

e identificando adecuadamente los términos no nulos tenemos

$$R^r{}_{\vartheta r\vartheta} = -rv'e^{-2\nu}. \quad (5.8)$$

Para las siguientes componentes, solamente escribo la expresión a la que llegamos después de derivar e identificar los símbolos de Christoffel que no se anulan

$$R^t{}_{rtt} = -\mu'' - \mu'^2 + \nu'\mu', \quad (5.9)$$

$$R^{\vartheta}{}_{r\vartheta r} = \frac{\nu'}{r}, \quad (5.10)$$

$$R^t{}_{\vartheta t\vartheta} = -\mu're^{-2\nu}, \quad (5.11)$$

$$R^{\vartheta}{}_{t\vartheta t} = \frac{\mu'e^{2\mu-2\nu}}{r}, \quad (5.12)$$

$$R^t{}_{\phi t\phi} = -\mu'r\sin^2\vartheta e^{-2\nu}, \quad (5.13)$$

$$R^{\phi}{}_{t\phi t} = \frac{\mu'e^{2\mu-2\nu}}{r}, \quad (5.14)$$

$$R^r{}_{\phi r\phi} = rv'\sin^2\vartheta e^{-2\nu}, \quad (5.15)$$

$$R^{\phi}{}_{r\phi r} = \frac{\nu'}{r}, \quad (5.16)$$

$$R^{\vartheta}{}_{\phi\vartheta\phi} = \sin^2\vartheta(1 - e^{-2\nu}), \quad (5.17)$$

$$R^{\phi}{}_{\vartheta\phi\vartheta} = 1 - e^{-2\nu}. \quad (5.18)$$

Ya que conocemos el tensor de Riemann, escribimos las componentes del tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$; por la manera en la que escribimos el tensor de Riemann es sencillo encontrar el tensor de Ricci: sumamos los términos que tengan la variable t en el segundo y cuarto índice para encontrar R_{tt} , para R_{rr} sumamos los Riemann con r en el segundo y cuarto índice. Siguiendo la misma metodología tenemos

$$R_{tt} = \frac{e^{2\mu-2\nu} \left(r\mu'' + \mu'(2 - rv') - r\mu'^2 \right)}{r}, \quad (5.19)$$

$$R_{rr} = -\mu'' - \mu'^2 + \nu' \left(\mu' + \frac{2}{r} \right), \quad (5.20)$$

$$R_{\vartheta\vartheta} = e^{-2\nu} (e^{2\nu} - 1 - \mu'r + rv'), \quad (5.21)$$

$$R_{\phi\phi} = e^{-2\nu} \sin^2\vartheta (e^{2\nu} - 1 - \mu'r + rv'). \quad (5.22)$$

Una vez obtenidos estos cálculos, procedemos a encontrar la forma explícita de la función ν que depende únicamente de la variable r en 4 dimensiones, dicha función es la que aparece en nuestra métrica ec. (5.1). Obtenemos

$$\frac{1}{r^2} - \frac{(re^{-2\nu})_{,r}}{r^2} = \Lambda - \frac{2}{r^2}b \left(br^2 - \sqrt{Q^2 + b^2r^4} \right) + \frac{8\pi M}{(2\pi\theta)^{3/2}} e^{-r^2/4\theta},$$

(5.23)

donde θ es el parámetro no conmutativo, Λ es la constante cosmológica, b es el parámetro de Born-Infeld que aparece en la electrodinámica de Born-Infeld, Q y M son la carga y la masa respectivamente del agujero negro. Despejamos el término asociado a la función v

$$(re^{-2v})_{,r} = 1 - \Lambda r^2 + 2b \left(br^2 - \sqrt{Q^2 + b^2 r^4} \right) - \frac{8\pi M r^2}{(2\pi\theta)^{3/2}} e^{-r^2/4\theta}.$$

Integramos ambos lados de la expresión anterior

$$\int (re^{-2v})_{,r} = \int dr - \int \Lambda r^2 dr + \int 2b \left(br^2 - \sqrt{Q^2 + b^2 r^4} \right) dr - \int \frac{8\pi M r^2}{(2\pi\theta)^{3/2}} e^{-r^2/4\theta} dr.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} re^{-2v} &= r - \frac{\Lambda r^3}{3} + \int 2b^2 r^2 dr - \int dr b^2 \sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{b^2}} - \int_r^\infty dr \frac{8\pi M}{(2\pi\theta)^{3/2}} r^2 e^{-r^2/4\theta} \\ &= r - \frac{\Lambda r^3}{3} + \frac{2}{3} b^2 r^3 - \int dr b^2 \sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{b^2}} - \int_r^\infty dr \frac{8\pi M}{(2\pi\theta)^{3/2}} r^2 e^{-r^2/4\theta}, \end{aligned}$$

calculamos la primer integral ya que no es obvio cómo calcular las 2 integrales restantes, reescribimos esta integral de la manera siguiente

$$\underbrace{\int_r^\infty dr \sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{b^2}}}_{\equiv I} = \int_r^\infty dr \frac{Q^2/b^2}{\sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{b^2}}} + \int_r^\infty dr \frac{r^4}{\sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{b^2}}},$$

y calculamos la segunda integral en la expresión anterior

$$\int_r^\infty dr \frac{r^4}{\sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{b^2}}} = \frac{1}{2} \int_r^\infty dr r \frac{d}{dr} \left(\sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{b^2}} \right).$$

Utilizamos el método de integración por partes

$$uv - \int v du = \int u dv,$$

así, podemos escribir I como

$$\int_r^\infty dr \sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{b^2}} = \int_r^\infty dr \frac{Q^2/b^2}{\sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{b^2}}} + \frac{r}{2} \sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{b^2}} \Big|_r^\infty - \frac{1}{2} \int_r^\infty dr \sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{b^2}}.$$

Notamos que tenemos un término igual de ambos lados de la expresión, por lo tanto lo sumamos

$$\frac{3}{2} \int_r^\infty dr \sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{b^2}} = \int_r^\infty dr \frac{Q^2/b^2}{\sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{b^2}}} + \frac{r}{2} \sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{b^2}} \Big|_r^\infty.$$

La integral que aparece en el lado derecho de esta expresión es una función hipergeométrica [8]

$$\int_r^\infty \frac{dr}{\sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{b^2}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{Q}} F\left(\arccos \left\{ \frac{br^2/Q - 1}{br^2/Q + 1} \right\}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad (5.24)$$

$$= \frac{1}{r^2} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; -\frac{Q^2}{b^2 r^4}\right). \quad (5.25)$$

Por lo tanto la función ν es

$$\begin{aligned} re^{-2\nu} &= r - \frac{1}{3} \Lambda r^3 + \frac{2}{3} b^2 r^3 - \frac{2}{3} Q^2 \frac{1}{r^2} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; -\frac{Q^2}{b^2 r^4}\right) \\ &\quad - \frac{b^2 r}{3} \sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{b^2}} - \int_r^\infty \frac{8\pi M}{(4\pi\theta)^{3/2}} r^2 e^{-r^2/4\theta}. \end{aligned}$$

Ahora bien, la última integral en esta expresión es una función gamma, la cual podemos encontrar en [7]; la función gamma se puede separar en

$$\gamma(a, x) = \Gamma(a) - \Gamma(a, x),$$

donde el lado izquierdo de la expresión anterior es la función gamma incompleta por abajo de 0 hasta cierto valor finito x y los dos términos de la derecha son la función gamma completa y la función gamma incompleta por arriba, respectivamente. La función gamma incompleta está definida [7]

$$\gamma(n, z) = \int_0^z dt t^{n-1} e^{-t}. \quad (5.26)$$

Para calcular la integral

$$\frac{8\pi M}{(4\pi\theta)^{3/2}} \int_0^s r^2 e^{-r^2/4\theta} dr,$$

realizamos un cambio de variable $s = r^2/4\theta$, por lo tanto $ds = 2rdr/4\theta$, y aplicamos nuestro cambio de variable en la integral

$$\frac{8\pi M}{(4\pi\theta)^{3/2}} \int_0^{\frac{r^2}{4\theta}} 4\theta s e^{-s} \frac{4\theta}{2r} ds.$$

Sustituimos nuevamente el valor de r

$$\frac{8\pi M}{(4\pi\theta)^{3/2}} \int_0^{\frac{r^2}{4\theta}} 4\theta s e^{-s} \frac{4\theta}{2\sqrt{4\theta s}} ds,$$

simplicamos esta expresión y encontramos la siguiente forma

$$\frac{4M}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{r^2}{4\theta}} s^{1/2} e^{-s} ds.$$

Utilizando la definición de la función gamma incompleta identificamos que $n = 3/2$ y $z = \frac{r^2}{4\theta}$. Finalmente, escribimos la expresión para función ν de la manera siguiente

$$\begin{aligned} re^{-2\nu} &= r - \frac{1}{3}\Lambda r^3 + \frac{2}{3}b^2 r^3 - \frac{2}{3}Q^2 \frac{1}{r^2} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; -\frac{Q^2}{b^2 r^4}\right) \\ &= -\frac{b^2 r}{3} \sqrt{r^4 + \frac{Q^2}{b^2}} + \frac{4M}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) - c, \end{aligned} \quad (5.27)$$

donde c es el término de la función gamma completa, el cual es constante.

5.2 CORRESPONDENCIA ADS/CFT NO CONMUTATIVA PARA EL HOYO NEGRO DE EINSTEIN-BORN-INFELD

Las ecuaciones de campo son

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} &= \frac{\partial L(F)}{\partial g^{\mu\nu}} + \frac{1}{2}g_{\mu\nu} \left(-L(F) + \frac{\partial L(F)}{\partial g^{\rho\sigma}} g^{\rho\sigma}\right) \\ &\quad + 8\pi \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} T^\lambda{}_\lambda\right), \end{aligned} \quad (5.28)$$

donde

$$T^\mu{}_\nu := \text{diag}(h_1, h_1, h_3, h_3), \quad h_3 := (r^2 h_1)_{,r} / 2r, \quad (5.29)$$

es el tensor de energía-momento no conmutativo ya que la densidad de energía se ve reemplazada por la función h_1 , la cual es

$$h_1(r) := -\rho_m(r) = -\frac{m}{(4\pi\theta)^{3/2}} e^{-r^2/4\theta}, \quad (5.30)$$

puede ser usada para definir una solución de agujero negro no conmutativo en 3 dimensiones. En este caso, el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$ codifica la no conmutatividad a través del uso de una distribución de masa dependiente del parámetro no conmutativo θ . La normalización de esta distribución es

$$\int d^3x \rho_m(r) = m,$$

donde m es la masa desnuda de la fuente cargada.

El lagrangiano del campo electromagnético será el lagrangiano de Born-Infeld (BI)

$$L(F) = 4b^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}}{2b^2}}\right), \quad (5.31)$$

donde b es el parámetro de BI; para valores grandes de b recuperamos la electrodinámica de Maxwell. Tenemos que

$$\frac{\partial L(F)}{\partial g^{\mu\nu}} = -\frac{2F_{\sigma\nu}F^{\sigma}_{\mu}}{\sqrt{1 + F^2/2b^2}},$$

y de aquí, tenemos la propiedad

$$\frac{\partial L(F)}{\partial g^{00}} = -\frac{\partial L(F)}{\partial g^{11}}, \quad \frac{\partial L(F)}{\partial g^{22}} = \frac{\partial L(F)}{\partial g^{33}} = 0, \quad (5.32)$$

para un campo eléctrico puramente estático.

De la ley de conservación

$$\nabla_{\mu} \left(\frac{F^{\mu\nu}}{\sqrt{1 + F^2/2b^2}} \right) = 0, \quad (5.33)$$

tenemos

$$L(F) = 4b^2 \left(1 - \sqrt{1 - E(r)^2/b^2} \right), \quad (5.34)$$

donde

$$E(r) = \frac{q}{\sqrt{r^4 + q^2/b^2}}, \quad (5.35)$$

es el campo eléctrico debido a una carga puntual q colocada en el origen.

Consideremos un espaciotiempo esféricamente simétrico en $3 + 1$ dimensiones dado por la métrica

$$ds^2 = -e^{2\mu(r)} dt^2 + e^{2\nu(r)} dr^2 + r^2 d\Omega_{(2)}. \quad (5.36)$$

Los coeficientes métricos son tales que $\mu + \nu = 0$ y en consecuencia

$$\begin{aligned} e^{-2\nu} &= \kappa + \frac{b_0}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2 + \frac{2}{3}b^2 r^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2 r^4}} \right) \\ &\quad + \frac{4}{3} \frac{q^2}{r} \int_r^{\infty} \frac{ds}{\sqrt{s^4 + q^2/b^2}} \\ &\quad - \frac{4m}{\pi^{1/2}} \frac{1}{r} \gamma \left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta} \right), \end{aligned} \quad (5.37)$$

donde κ corresponde a la curvatura, b_0 es una constante y $\gamma(n, z)$ es la función gamma incompleta por abajo

$$\gamma(n, z) := \int_0^z dt t^{n-1} e^{-t}. \quad (5.38)$$

Usando la identidad [20]

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, c; c+1; -z\right) = c \int_0^1 \frac{t^{c-1} dt}{(1+zt)^{1/2}}, \quad (5.39)$$

donde c es una constante, la ec. (5.37) queda

$$\begin{aligned} e^{-2\nu} = & \kappa + \frac{b_0}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2 + \frac{2b^2 r^2}{3} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2 r^4}}\right) \\ & + \frac{4}{3} \frac{q^2}{r^2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{q^2}{b^2 r^4}\right) \\ & - \frac{4m}{\pi^{1/2}} \frac{1}{r} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right), \end{aligned} \quad (5.40)$$

para la solución obtenida; de aquí en adelante hacemos $\Lambda = -3/L^2$. Sabemos que la solución de Schwarzschild-anti de Sitter corresponde a $\kappa = 1, b_0 = 0$ mientras que la solución plana corresponde a $\kappa = 0, b_0 = 0$; este último caso es el que consideramos.

Nos vamos a concentrar en el límite $4\theta \ll r^2$, el cual corresponde a perturbaciones no conmutativas pequeñas. Para la función gamma incompleta en la métrica usamos la expresión asintótica [1]

$$\gamma(n, z) = \Gamma(n) - e^{-z} z^{n-1} \left(1 + \frac{a-1}{z} + \dots\right), \quad (5.41)$$

donde $\Gamma(z)$ es la función gamma; por lo tanto, tenemos

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{1}{f(r)}dr^2 + r^2 d\Omega_{(2)}, \quad (5.42)$$

donde

$$\begin{aligned} f(r) = & -\frac{2m}{r} + \frac{r^2}{L^2} + \frac{2m}{\sqrt{\pi\theta}} e^{-r^2/4\theta} \\ & + \frac{2b^2 r^2}{3} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2 r^4}}\right) \\ & + \frac{4}{3} \frac{q^2}{r^2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{q^2}{b^2 r^4}\right). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Esta función $f(r)$ puede ser expresada como

$$f(r) = f^c(r) + f^\theta(r), \quad (5.44)$$

escribimos explícitamente esta suma

$$\begin{aligned} f^c(r) = & \frac{2}{3} b^2 r^4 \left(1 - \sqrt{\frac{q^2}{b^2 r^4} + 1}\right) - 2mr - \frac{\lambda r^4}{3} \\ & + \frac{4}{3} q^2 {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; -\frac{q^2}{b^2 r^4}\right), \end{aligned} \quad (5.45)$$

y también tenemos

$$\begin{aligned}
 f^\theta(r) = & \left[r^2 \left(\frac{2m}{\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}} - \frac{16b^2\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)^2 \left(\frac{q}{b}\right)^{3/2}}{3\pi\sqrt{\theta}} \right) \right. \\
 & - \frac{2\sqrt{\pi}q^2r^3}{3\theta^{3/2}\sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r^4}} + \frac{2q^2r^3}{3\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}\sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r^4}} \\
 & \left. - \frac{16\sqrt{\theta}q^2r}{3\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r^4}} + \frac{8\sqrt{\theta}q^4r}{3\sqrt{\pi}b^2 \left(\frac{q^2}{b^2} + r^4\right)^{3/2}} \right] e^{-r^2/4\theta}, \quad (5.46)
 \end{aligned}$$

donde $f^c(r)$ dada en la ec. (5.45) corresponde a los términos independientes del parámetro de no conmutatividad θ y $f^\theta(r)$ involucra a los términos dependientes de θ .

Debido a los términos dependientes de θ , el radio del horizonte clásico del agujero de EBI es modificado. Siguiendo [33], consideramos el radio del horizonte r_0 del agujero negro extremal definido por las condiciones

$$f^c(r_0) = 0, \quad f_{,r}^c(r_0) = 0. \quad (5.47)$$

Para determinar el radio del horizonte modificado analizamos la condición $f(r_+) = 0$. Escribimos así $r_+ := r_0 + \alpha$, donde las correcciones no conmutativas están contenidas en α . Entonces, a orden más bajo tenemos

$$\begin{aligned}
 0 = & f^c(r_0) + f_{,r}^c(r_0)\alpha + \frac{1}{2}f_{,rr}^c(r_0)\alpha^2 \\
 & + f^\theta(r_0) + f_{,r}^\theta(r_0)\alpha + \frac{1}{2}f_{,rr}^\theta(r_0)\alpha^2. \quad (5.48)
 \end{aligned}$$

Los primeros dos términos en esta expresión desaparecen debido a las condiciones dadas en la ec. (5.47). Por lo tanto

$$\frac{1}{2}f_{,rr}^c(r_0)\alpha^2 = -f^\theta(r_0) - f_{,r}^\theta(r_0)\alpha - \frac{1}{2}f_{,rr}^\theta(r_0)\alpha^2. \quad (5.49)$$

Notamos que podemos escribir $f^\theta(r) = g^\theta(r)e^{-r^2/4\theta}$, cuya relación es válida en general para las perturbaciones no conmutativas debido al desarrollo asintótico en la ec. (5.41). Con esto podemos escribir

$$\begin{aligned}
 f_{,r}^\theta &= \left(g_{,r}^\theta - \frac{1}{2\theta}rg^\theta \right) e^{-r^2/4\theta} =: G_1^\theta e^{-r^2/4\theta}, \\
 f_{,rr}^\theta &= \left(g_{,rr}^\theta - \frac{1}{\theta}rg_{,r}^\theta - \frac{1}{2\theta}g^\theta + \frac{1}{4\theta^2}r^2g^\theta \right) e^{-r^2/4\theta} \\
 &=: G_2^\theta e^{-r^2/4\theta}. \quad (5.50)
 \end{aligned}$$

Usando estas relaciones encontramos

$$\frac{1}{2}f_{,rr}^c(r_0)\alpha^2 = -[g^\theta(r_0) + G_1^\theta(r_0)\alpha + \frac{1}{2}G_2^\theta(r_0)\alpha^2]e^{-r_0^2/4\theta}, \quad (5.51)$$

o equivalentemente

$$e^{r_0^2/4\theta}\alpha^2 = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2, \quad (5.52)$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 &= -2g^\theta(r_0)/f_{,rr}^c(r_0), \\ a_1 &= -2G_1^\theta(r_0)/f_{,rr}^c(r_0), \\ a_2 &= -2G_2^\theta(r_0)/f_{,rr}^c(r_0). \end{aligned} \quad (5.53)$$

La ec. (5.52) es una ecuación cuadrática en las perturbaciones α ; las soluciones están dadas por la siguiente expresión

$$\alpha = \pm\sqrt{a_0}e^{-r_0^2/8\theta} + \frac{1}{2}a_1e^{-r_0^2/4\theta}, \quad (5.54)$$

donde hemos usado el hecho que $4\theta \ll r^2$ para simplificar esta expresión. Notamos que para que esta expresión tenga sentido, esto es, que α sea un número real, necesitamos $a_0 \geq 0$.

Si consideramos únicamente la deformación no conmutativa en la masa, tenemos

$$\begin{aligned} g^\theta &= \frac{2m}{\sqrt{\pi\theta}}, & G_1^\theta &= -\frac{mr}{\sqrt{\pi\theta^3}}, \\ G_2^\theta &= -\frac{m}{\sqrt{\pi\theta^3}} + \frac{mr^2}{2\sqrt{\pi\theta^5}}. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Ahora, usando la solución de la ecuación de campo clásica (conmutativa) tenemos

$$(rf^c)_{,r} = 3\frac{r^2}{L^2} + 2b(br^2 - \sqrt{q^2 + b^2r^4}). \quad (5.56)$$

Notamos que para el agujero negro extremal obtenemos

$$0 = 3\frac{r_0^2}{L^2} + 2b^2r_0^2 - 2b\sqrt{q^2 + b^2r_0^4}. \quad (5.57)$$

Para que se cumpla esta condición tenemos que $b > 0$; a pesar de que el lagrangiano de BI es invariante bajo el cambio $b \rightarrow -b$, el caso

extremal distingue entre valores positivos y negativos de b .

De la ec. (5.56) también tenemos

$$2f_{,r}^c + rf_{,rr}^c = 6\frac{r}{L^2} + 4b^2r \left(1 - \frac{br^2}{\sqrt{q^2 + b^2r^4}} \right). \quad (5.58)$$

Usando ahora el hecho de que $f_{,r}^c = -f^c/r + (rf^c)_{,r}/r$, las ecs. (5.56) y (5.58) nos dicen que

$$f_{,rr}^c = \frac{2}{r^2}f^c + \frac{4bq^2}{r^2\sqrt{q^2 + b^2r^4}}. \quad (5.59)$$

Así, en el horizonte del hoyo negro extremal tenemos

$$f_{,rr}^c(r_0) = \frac{4bq^2}{r_0^2\sqrt{q^2 + b^2r_0^4}}. \quad (5.60)$$

Por lo tanto, de las ecs. (5.55) y (5.59) obtenemos

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= -\frac{mr_0^2}{\sqrt{\pi\theta}} \frac{\sqrt{q^2 + b^2r_0^4}}{bq^2}, \\ \alpha_1 &= \frac{mr_0^3}{\sqrt{\pi\theta^3}} \frac{\sqrt{q^2 + b^2r_0^4}}{2bq^2}, \end{aligned} \quad (5.61)$$

donde

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{2m}{r_0} + \frac{r_0^2}{L^2} + \frac{2b^2r_0^2}{3} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2r_0^4}} \right) \\ &\quad + \frac{4}{3} \frac{q^2}{r_0^2} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{q^2}{b^2r_0^4} \right). \end{aligned} \quad (5.62)$$

De estos resultados notamos que $\alpha_0 < 0$ ya que $b > 0$ como dijimos antes; en consecuencia, no hay correcciones no conmutativas pequeñas en el radio del horizonte del agujero negro extremal en este caso. En este punto vale la pena comparar este resultado con el modelo discutido en [33], en particular con la ec. (4.33). En ese caso, el valor de α_0 tiene 3 contribuciones: dos positivas y una negativa. Los términos positivos surgen de la deformación del campo electromagnético a parte de la deformación de la masa, la cual es responsable del término negativo en el valor de α_0 como vemos en nuestro modelo.

5.3 CONDICIÓN EXTREMAL EN EL AGUJERO NEGRO DE EINSTEIN-BORN-INFELD

En esta sección, revisamos brevemente la configuración extremal del agujero negro de BI en el caso conmutativo. Consideramos los términos independientes del parámetro no conmutativo e igualamos a cero

$$-\frac{6m}{\Lambda}r_+ - r_+^4 + \frac{2b^2}{\Lambda}r_+^4 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2r_+^4}}\right) + \frac{4}{\Lambda}q^2 {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{q^2}{b^2r_+^4}\right) = 0. \quad (5.63)$$

Para la condición extremal debemos igualar a cero también la primer derivada de la ec. (5.63), nos apoyamos de [20] donde encontramos una manera de escribir la derivada de la función hipergeométrica de la siguiente manera

$$\frac{d}{dz} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -z\right) = \frac{1}{2z} \left[\frac{1}{\sqrt{1+z}} - {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -z\right) \right]. \quad (5.64)$$

Ya que tenemos esta relación, queremos derivar una función $F(z)$ respecto de r , por lo tanto usamos regla de la cadena

$$\frac{d}{dr} F(z) = \frac{dF(z)}{dz} \frac{dz}{dr},$$

por lo tanto tenemos que

$$\frac{d}{dr} {}_2F_1(z) = -\frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sqrt{1+z}} - {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -z\right) \right],$$

donde $z = \frac{q^2}{b^2r^4}$.

Finalmente la primer derivada de la ec. (5.63) está dada por

$$0 = -\frac{6m}{\Lambda} - 4r^3 + \frac{8b^2}{\Lambda}r^3 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2r^4}}\right) + \frac{4q^2}{\Lambda} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{q^2}{b^2r^4}\right)^{-1/2} + \frac{4}{\Lambda}q^2 \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2r^4}}} - {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{q^2}{b^2r^4}\right) \right]. \quad (5.65)$$

Al sumar la ec. (5.63) y la ec. (5.65) encontramos una expresión para r la cual es reportada en [37]. Por lo tanto, el agujero negro de EBI en $3+1$ dimensiones tiene como solución para el horizonte extremal

$$r_0^2 = \frac{L^2}{6} \left(\frac{1 + \frac{3}{2b^2L^2}}{1 + \frac{1}{2b^2L^2}} \right) \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{12 \left(1 + \frac{3}{4b^2L^2}\right)}{b^2L^2 \left(1 + \frac{3}{4b^2L^2}\right)^2} \left(b^2q^2 - \frac{1}{4}\right)} \right]. \quad (5.66)$$

5.3.1 Radio de horizonte del agujero EBI no conmutativo

Ahora, se calcula el radio del horizonte considerando los términos no conmutativos tanto en la masa como en la carga; dichos cálculos son realizados con ayuda del software Mathematica. Partimos de la ec. (5.44) donde $f(r)$ tiene la forma

$$\begin{aligned}
f(r) = & \kappa - \frac{4m}{r} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) - \frac{1}{3} \Lambda r^2 + \frac{2}{3} b^2 r^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{H^2(r)}{b^2 r^4}}\right) \\
& + \frac{2}{3} \frac{1}{r} \int_r^\infty ds \frac{-H(s) s^3 \rho_Q(s) + 2H^2(s)}{\sqrt{s^4 + H^2(s)/b^2}} \\
& + 2b^2 \left[1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)\right] \int_0^\infty ds \left(s^2 - \sqrt{s^4 + H^2(s)/b^2}\right).
\end{aligned} \tag{5.67}$$

De esta expresión identificamos a $f^c(r)$ y a $f^\theta(r)$. En lo que sigue hacemos $\kappa = 0$.

Ahora calculamos la primera y segunda derivada de f^c dada en la ec. (5.45), así obtenemos

$$\begin{aligned}
f_{,r}^c(r) = & -\frac{4q^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{q^2}{b^2 r^4} + 1}} - {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; -\frac{q^2}{b^2 r^4}\right) \right)}{3r} - 2m - \frac{4\Lambda r^3}{3} \\
& + \frac{4q^2}{3r \sqrt{\frac{q^2}{b^2 r^4} + 1}} + \frac{8}{3} b^2 r^3 \left(1 - \sqrt{\frac{q^2}{b^2 r^4} + 1}\right), \tag{5.68}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{,rr}^c(r) = & -\frac{4q^2 \left(\frac{\frac{1}{\sqrt{\frac{q^2}{b^2 r^4} + 1}} - {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; -\frac{q^2}{b^2 r^4}\right)}{r} + \frac{2q^2}{b^2 r^5 \left(\frac{q^2}{b^2 r^4} + 1\right)^{3/2}} \right)}{3r} - 4\Lambda r^2 \\
& + \frac{4q^2 \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{q^2}{b^2 r^4} + 1}} - {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; -\frac{q^2}{b^2 r^4}\right) \right)}{3r^2} + \frac{4q^2}{r^2 \sqrt{\frac{q^2}{b^2 r^4} + 1}} \\
& + 8b^2 r^2 \left(1 - \sqrt{\frac{q^2}{b^2 r^4} + 1}\right) + \frac{8q^4}{3b^2 r^6 \left(\frac{q^2}{b^2 r^4} + 1\right)^{3/2}}. \tag{5.69}
\end{aligned}$$

Los términos de deformación a primer orden perturbativo están contenidos en

$$\begin{aligned}
g^\theta(r) = & -\frac{16\sqrt{\theta}q^2r}{3\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{q^2}{b^2}+r^4}} - \frac{2\sqrt{\pi}q^2r^3}{3\theta^{3/2}\sqrt{\frac{q^2}{b^2}+r^4}} + \frac{2q^2r^3}{3\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}\sqrt{\frac{q^2}{b^2}+r^4}} \\
& + \frac{8\sqrt{\theta}q^4r}{3\sqrt{\pi}b^2\left(\frac{q^2}{b^2}+r^4\right)^{3/2}} + \frac{2mr^2}{\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}} - \frac{16}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)^2}{\sqrt{\pi}}\left|\frac{q}{b}\right|^{3/2}\frac{b^2r^2}{\sqrt{\pi\theta}},
\end{aligned} \tag{5.70}$$

donde definimos la masa efectiva de la siguiente manera

$$\tilde{m} := 2m - \frac{16}{3}\frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)^2}{\sqrt{\pi}}\left|\frac{q}{b}\right|^{3/2}b^2.$$

Con la finalidad de escribir la contribución NC del radio del horizonte como en la ec. (5.54) calculamos la primera y segunda derivada de la función $g^\theta(r)$

$$\begin{aligned}
g_{,r}^\theta(r) = & \frac{32\sqrt{\theta}q^2r^4}{3\sqrt{\pi}\left(\frac{q^2}{b^2}+r^4\right)^{3/2}} - \frac{16\sqrt{\theta}q^2}{3\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{q^2}{b^2}+r^4}} + \frac{4\sqrt{\pi}q^2r^6}{3\theta^{3/2}\left(\frac{q^2}{b^2}+r^4\right)^{3/2}} + \frac{2\tilde{m}r}{\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}} \\
& - \frac{4q^2r^6}{3\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}\left(\frac{q^2}{b^2}+r^4\right)^{3/2}} - \frac{2\sqrt{\pi}q^2r^2}{\theta^{3/2}\sqrt{\frac{q^2}{b^2}+r^4}} + \frac{2q^2r^2}{\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}\sqrt{\frac{q^2}{b^2}+r^4}} \\
& - \frac{16\sqrt{\theta}q^4r^4}{\sqrt{\pi}b^2\left(\frac{q^2}{b^2}+r^4\right)^{5/2}} + \frac{8\sqrt{\theta}q^4}{3\sqrt{\pi}b^2\left(\frac{q^2}{b^2}+r^4\right)^{3/2}},
\end{aligned} \tag{5.71}$$

mientras que la segunda derivada es

$$\begin{aligned}
g_{,rr}^\theta(r) = & -\frac{4\sqrt{\pi}q^2r}{\theta^{3/2}\sqrt{\frac{q^2}{b^2}+r^4}} + \frac{4q^2r}{\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}\sqrt{\frac{q^2}{b^2}+r^4}} - \frac{8\sqrt{\pi}q^2r^9}{\theta^{3/2}\left(\frac{q^2}{b^2}+r^4\right)^{5/2}} \\
& + \frac{8q^2r^9}{\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}\left(\frac{q^2}{b^2}+r^4\right)^{5/2}} - \frac{64\sqrt{\theta}q^2r^7}{\sqrt{\pi}\left(\frac{q^2}{b^2}+r^4\right)^{5/2}} + \frac{12\sqrt{\pi}q^2r^5}{\theta^{3/2}\left(\frac{q^2}{b^2}+r^4\right)^{3/2}} \\
& - \frac{12q^2r^5}{\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}\left(\frac{q^2}{b^2}+r^4\right)^{3/2}} + \frac{160\sqrt{\theta}q^2r^3}{3\sqrt{\pi}\left(\frac{q^2}{b^2}+r^4\right)^{3/2}} + \frac{160\sqrt{\theta}q^4r^7}{\sqrt{\pi}b^2\left(\frac{q^2}{b^2}+r^4\right)^{7/2}} \\
& - \frac{80\sqrt{\theta}q^4r^3}{\sqrt{\pi}b^2\left(\frac{q^2}{b^2}+r^4\right)^{5/2}} + \frac{2\tilde{m}}{\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}}.
\end{aligned} \tag{5.72}$$

Ahora, utilizamos las definiciones dadas en la ec. (5.50) y sustituimos las expresiones encontradas en las ecs. (5.70)-(5.72) obteniendo

$$\begin{aligned}
e^{r^2/4\theta} f_{,r}^\theta(r) = & -\frac{r \left(-\frac{16\sqrt{\theta}q^2r}{3\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{q^2}{b^2}+r^4}} - \frac{2\sqrt{\pi}q^2r^3}{3\theta^{3/2}\sqrt{\frac{q^2}{b^2}+r^4}} + \frac{2q^2r^3}{3\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}\sqrt{\frac{q^2}{b^2}+r^4}} \right)}{2\theta} \\
& -\frac{r \left(\frac{8\sqrt{\theta}q^4r}{3\sqrt{\pi}b^2 \left(\frac{q^2}{b^2}+r^4 \right)^{3/2}} + \frac{2\tilde{m}r^2}{\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}} \right)}{2\theta} + \frac{4\tilde{m}r}{\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}} \\
& + \frac{32\sqrt{\theta}q^2r^4}{3\sqrt{\pi} \left(\frac{q^2}{b^2}+r^4 \right)^{3/2}} - \frac{16\sqrt{\theta}q^2}{3\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{q^2}{b^2}+r^4}} + \frac{4\sqrt{\pi}q^2r^6}{3\theta^{3/2} \left(\frac{q^2}{b^2}+r^4 \right)^{3/2}} \\
& - \frac{4q^2r^6}{3\sqrt{\pi}\sqrt{\theta} \left(\frac{q^2}{b^2}+r^4 \right)^{3/2}} - \frac{2\sqrt{\pi}q^2r^2}{\theta^{3/2}\sqrt{\frac{q^2}{b^2}+r^4}} + \frac{2q^2r^2}{\sqrt{\pi}\sqrt{\theta}\sqrt{\frac{q^2}{b^2}+r^4}} \\
& - \frac{16\sqrt{\theta}q^4r^4}{\sqrt{\pi}b^2 \left(\frac{q^2}{b^2}+r^4 \right)^{5/2}} + \frac{8\sqrt{\theta}q^4}{3\sqrt{\pi}b^2 \left(\frac{q^2}{b^2}+r^4 \right)^{3/2}}, \quad (5.73)
\end{aligned}$$

y para la función $f_{,rr}^\theta(r)$ tenemos

$$\begin{aligned}
e^{r^2/4\theta} f_{,rr}^\theta(r) = & \frac{\left(3\theta\tilde{m} (8\theta^2 + r^4 - 10\theta r^2) \sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r^4} + b^2\theta r^3 (-160\theta^3 + 3r^6 - 50\theta r^4 + 128\theta^2 r^2) \right)}{6q^{-6}\sqrt{\pi}\theta^{7/2}\sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r^4} (b^2r^4 + q^2)^3} \\
& + \frac{\left(9\tilde{m} (8\theta^2 + r^4 - 10\theta r^2) \sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r^4} + b^2 (3r^9 - 46\theta r^7 + 64\theta^2 r^5 + 736\theta^3 r^3) \right)}{6b^{-2}q^{-4}r^{-4}\sqrt{\pi}\theta^{5/2}\sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r^4} (b^2r^4 + q^2)^3} \\
& + \frac{3b^6\tilde{m}r^{12} (8\theta^2 + r^4 - 10\theta r^2) \sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r^4} + \theta q^8 r (48\theta^2 + r^4 - 18\theta r^2)}{6\sqrt{\pi}\theta^{5/2}\sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r^4} (b^2r^4 + q^2)^3} \\
& + \frac{\left(9\tilde{m} (8\theta^2 + r^4 - 10\theta r^2) \sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r^4} + b^2 (r^9 - 14\theta r^7 - 16\theta^2 r^5 - 64\theta^3 r^3) \right)}{6b^{-4}q^{-2}r^{-8}\sqrt{\pi}\theta^{5/2}\sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r^4} (b^2r^4 + q^2)^3} \\
& - \frac{(b^4r^{10} (r^2 - 6\theta) + 2b^2q^2r^4 (-12\theta^2 + r^4 - 10\theta r^2) + q^4 (24\theta^2 + r^4 - 14\theta r^2))}{(\pi q^2 r (b^2 r^4 + q^2))^{-1} 6\sqrt{\pi}\theta^{7/2}\sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r^4} (b^2 r^4 + q^2)^3}. \quad (5.74)
\end{aligned}$$

Ahora escribimos los coeficientes dados en la ec. (5.54), los cuales están definidos en la ec. (5.53) y son evaluados en $r = r_0$, donde r_0 está dado en la ec. (5.66) en el caso extremal clásico. En el caso general véase la ec. (A.9). Escribimos las correcciones no conmutativas como el cociente de dos funciones dependientes de r_0 y b . Para el caso de a_0 tenemos

$$a_0 = \frac{\tilde{p}(r_0, b)}{\tilde{q}(r_0, b)}.$$

Así encontramos la parte correspondiente a las correcciones NC del radio del horizonte clásico

$$\begin{aligned}\tilde{p}(r_0, b) = & -\sqrt{\pi}r_0\theta q^2 \left(3mr_0\sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r_0^4 + b^2} (r_0^6 - 8\theta r_0^4) \right) \\ & -3\sqrt{\pi}\theta b^2 m r_0^6 \sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r_0^4 + q^4} (r_0^2 - 4\theta) \\ & +8b\theta q r_0^2 \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)^2 \sqrt{\frac{q}{b}} \sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r_0^4} (b^2 r_0^4 + q^2) \\ & +\pi^{3/2} q^2 r_0^3 (b^2 r_0^4 + q^2),\end{aligned}$$

y

$$\tilde{q}(r_0, b) = 3\pi\theta^{3/2} (b^2 r_0^4 + q^2) \left(r_0^4 \left(\lambda \sqrt{\frac{q^2}{b^2 r_0^4} + 1} - 2b^2 \left(\sqrt{\frac{q^2}{b^2 r_0^4} + 1} - 1 \right) \right) + q^2 \right),$$

estas dos expresiones corresponden a la primer contribución debida a la presencia de la no conmutatividad en el radio del horizonte.

El segundo coeficiente α_1 lo escribimos como

$$\alpha_1 = \frac{p(r_0, b)}{q(r_0, b)}, \quad (5.75)$$

donde

$$\begin{aligned}p(r_0, b) = & \pi^{3/2} q^2 r_0^2 (b^2 r_0^4 + q^2) (b^2 r_0^4 (r_0^2 - 2\theta) + q^2 (r_0^2 - 6\theta)) \\ & +8b\theta q r_0 \Gamma\left(\frac{5}{4}\right)^2 \sqrt{\frac{q}{b}} (r_0^2 - 4\theta) \sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r_0^4} (b^2 r_0^4 + q^2)^2 \\ & +\sqrt{\pi}b^4 \theta q^2 r_0^5 (-r_0^7 + 10\theta r_0^5 + 16\theta^2 r_0^3) - 6m (r_0^2 - 4\theta) \sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r_0^4} \\ & +\sqrt{\pi}q^6 b^2 \theta r_0^5 \left(-3\theta m r_0 (r_0^2 - 4\theta) \sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r_0^4} - 2b^2 \theta r_0^4 (2\theta^2 + r_0^4 - 10\theta r_0^2) \right) \\ & -\sqrt{\pi}3b^6 q^2 \theta^2 m r_0^{14} (r_0^2 - 4\theta) \sqrt{\frac{q^2}{b^2} + r_0^4} - \theta q^6 (8\theta^2 + r_0^4 - 10\theta r_0^2),\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}q(r_0, b) = & \left(r_0^4 \left(\lambda \sqrt{\frac{q^2}{b^2 r_0^4} + 1} - 2b^2 \left(\sqrt{\frac{q^2}{b^2 r_0^4} + 1} - 1 \right) \right) + q^2 \right) \\ & \times 6\pi\theta^{5/2} (b^2 r_0^4 + q^2)^2.\end{aligned}$$

Finalmente tenemos tanto la parte clásica como la parte no conmutativa del radio del horizonte como en la ec. (4.31). En las expresiones anteriores (para α_0 y α_1) se ha usado la forma explícita de \tilde{m} en términos de m y q .

5.4 CONDENSACIÓN EN UN FONDO NO CONMUTATIVO

Para conocer el comportamiento asintótico del campo de norma y el campo escalar, se sigue el procedimiento como en [19, 33], el cual es discutido en mayor medida en el capítulo anterior. Deseamos encontrar las expresiones generales que se encuentran para los comportamientos de los campos involucrados en nuestro trabajo. Escribimos el lagrangiano de materia y carga

$$\mathcal{L}_M = 4r^2b^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{2b^2}} \right) - r^2 |\partial_\mu \psi - iqA_\mu \psi|^2 - r^2 m^2 |\psi|^2, \quad (5.76)$$

sabemos que $A_\mu = (A_t, 0, 0, 0)$, donde $A_t = \phi(r)$ y $\psi = \psi(r)$, también

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2\phi_{,r}^2,$$

por lo tanto podemos escribir

$$\mathcal{L}_M = 4r^2b^2 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{\phi'^2}{2b^2}} \right) - r^2 \left(f(r) \psi'^2 + q^2 \frac{\phi^2}{f(r)} \psi^2 \right) - r^2 m^2 |\psi|^2,$$

calculamos las ecuaciones de Euler-Lagrange para los campos ϕ y ψ , para el campo ψ es la misma que encontramos para el agujero negro de Einstein-Maxwell dada en la ec. (4.49), para el campo ϕ tenemos

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\frac{2r^2 q^2 \psi^2}{f} \phi,$$

y

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi'} = \frac{4r^2 \phi'}{\sqrt{1 - \frac{\phi'^2}{b^2}}},$$

así la ecuación de ϕ es

$$\frac{4}{\sqrt{1 - \frac{\phi'^2}{b^2}}} \left(2r\phi' + r^2\phi'' + \frac{r^2\phi'^2\phi''}{b^2 - \phi'^2} \right) = -\frac{2r^2 q^2 \psi^2}{f} \phi,$$

finalmente tenemos

$$\phi'' + \frac{2}{r}\phi' \left(1 - \frac{\phi'^2}{b^2} \right) + \frac{q^2\psi^2}{2f}\phi \left(1 - \frac{\phi'^2}{b^2} \right)^{3/2} = 0. \quad (5.77)$$

Vamos a considerar las condiciones necesarias para tener condensación en un fondo no conmutativo. La expansión en serie de Taylor de los campos $\phi(r)$, $\psi(r)$ y $f(r)$ es

$$\begin{aligned}\phi(z) &= \phi(1) - \phi'(1)(1-z) + \frac{1}{2}\phi''(1)(1-z)^2 + \dots, \\ \psi(z) &= \psi(1) - \psi'(1)(1-z) + \frac{1}{2}\psi''(1)(1-z)^2 + \dots, \\ f(z) &= f(1) - f'(1)(1-z) + \frac{1}{2}f''(1)(1-z)^2 + \dots, \quad (5.78)\end{aligned}$$

tomando en cuenta también las condiciones de frontera

$$\phi(1) = 0, \quad (5.79a)$$

$$\psi'(1) = \frac{m^2 r_+^2}{f'(1)} \psi(1). \quad (5.79b)$$

Partimos de la ecuación diferencial para $\phi(z)$ dada en la ec. (5.77) con $z = r_+/r$; en el punto $z = 1$ tenemos

$$\phi''(1) = \frac{2r_+^2 \psi(1)^2 \phi'(1)}{f'(1)} \left[1 - \frac{\phi'(1)^2}{b^2 r_+^2} \right]^{3/2} - \frac{2\phi'(1)^3}{b^2 r_+^2},$$

y por lo tanto usando la ec. (5.78) finalmente tenemos

$$\phi(z) = -\phi'(1)(1-z) + \left\{ \frac{r_+^2 \psi(1)^2 \phi'(1)}{f'(1)} \left[1 - \frac{\phi'(1)^2}{b^2 r_+^2} \right]^{3/2} - \frac{\phi'(1)^3}{b^2 r_+^2} \right\} (1-z)^2. \quad (5.80)$$

Para el campo ψ hacemos un procedimiento similar: tenemos

$$\psi''(z) + \frac{f'(z)}{f(z)} \psi'(z) - \frac{m^2 r_+^2}{z^4 f(z)} \psi(z) + \frac{r_+^2 \phi^2(z)}{z^4 f^2(z)} \psi(z) = 0.$$

Si sustituimos los desarrollos dados en la ec. (5.78)

$$\begin{aligned}0 &= \psi''(1) - \frac{\psi'(1)}{(1-z)} + \psi''(1) + \frac{f''(1)}{f'(1)} \psi'(1) + \frac{m^2 r_+^2}{z^4 f'(1)(1-z)} \psi(1) \\ &\quad - \frac{m^2 r_+^2}{z^4 f'(1)} \psi'(1) + \frac{r_+^2 \phi'(z)^2}{z^4 f'(1)^2} \psi(1) - \frac{r_+^2 \phi'(1)^2}{z^4 f'(1)^2} \psi'(1)(1-z),\end{aligned}$$

y en $z = 1$

$$2\psi''(1) + \frac{f''(1)}{f'(1)} \psi'(1) - \frac{m^2 r_+^2}{f'(1)} \psi'(1) + r_+^2 \left(\frac{\phi'(1)}{f'(1)} \right)^2 \psi(1) = 0.$$

Así la expresión para $\psi(z)$ es

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \psi(1) - \frac{m^2 r_+^2}{f'(1)} (1-z) \psi(1) + \frac{1}{2} \left[\frac{m^4 r_+^4}{2f'(1)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2 r_+^2 f''(1)}{2f'(1)^2} - \frac{r_+^2 \phi'(1)^2}{2f'(1)^2} \right] (1-z)^2 \psi(1). \quad (5.81)\end{aligned}$$

Siguiendo a [33], igualamos el comportamiento asintótico de los campos $\phi(z)$ y $\psi(z)$ respectivamente en un punto intermedio $z = z_0$, es decir, pegamos las soluciones encontradas analíticamente para los campos con el desarrollo en serie de Taylor de dichos campos, ya que son regulares en el horizonte. Así encontramos dos condiciones, otras dos condiciones las obtenemos haciendo el pegado de la primer derivada respecto de z para cada campo

$$\mu - \frac{\rho z_0}{r_+} = -\phi'(1)(1-z_0) + \left\{ \frac{r_+^2 \psi(1)^2 \phi'(1)}{f'(1)} \left[1 - \frac{\phi'(1)^2}{b^2 r_+^2} \right]^{3/2} - \frac{\phi'(1)^3}{b^2 r_+^2} \right\} (1-z_0)^2, \quad (5.82)$$

la primer derivada queda de la siguiente manera

$$-\frac{\rho}{r_+} = \phi'(1) - 2 \left\{ \frac{r_+^2 \psi(1)^2 \phi'(1)}{f'(1)} \left[1 - \frac{\phi'(1)^2}{b^2 r_+^2} \right]^{3/2} - \frac{\phi'(1)^3}{b^2 r_+^2} \right\} (1-z_0), \quad (5.83)$$

para el campo $\psi(z)$ encontramos las otras dos condiciones

$$J^+ z_0^2 = \psi(1) - \frac{m^2 r_+^2}{f'(1)} (1-z_0) \psi(1) + \frac{1}{2} \left[\frac{m^4 r_+^4}{2f'(1)^2} - \frac{m^2 r_+^2 f''(1)}{2f'(1)^2} - \frac{r_+^2 \phi'(1)^2}{2f'(1)^2} \right] (1-z_0)^2 \psi(1), \quad (5.84)$$

$$J^+ z_0 = \psi(1) - \frac{m^2 r_+^2}{f'(1)} (1-z_0) \psi(1) - \frac{1}{2} \left[\frac{m^4 r_+^4}{2f'(1)^2} - \frac{m^2 r_+^2 f''(1)}{2f'(1)^2} - \frac{r_+^2 \phi'(1)^2}{2f'(1)^2} \right] (1-z_0) \psi(1). \quad (5.85)$$

De la ec. (5.82) a la ec. (5.85) tenemos 4 condiciones en los campos de norma las cuales son útiles para identificar la temperatura crítica y el operador de condensación.

A partir de la ec. (5.83) despejamos a $\psi(1)^2$

$$\frac{r_+^2 \psi(1)^2}{f'(1)} \left(1 - \frac{\phi'(1)^2}{b^2 r_+^2} \right)^{3/2} = \frac{\phi'(1)^2}{b^2 r_+^2} + \frac{1}{2(1-z_0)} \left[1 + \frac{\rho}{r_+ \phi'(1)} \right].$$

Encontramos entonces

$$\psi(1)^2 = \frac{f'(1)}{r_+^2} \frac{\left(1 - \phi'(1)^2/b^2 r_+^2\right)^{-3/2}}{2(1-z_0)} \left(1 + \frac{\rho + 2\phi'(1)^3(1-z_0)/b^2 r_+}{r_+ \phi'(1)}\right),$$

definimos $\tilde{\rho}$ para tener una estructura similar al caso del agujero negro de EM

$$\tilde{\rho} := \rho + \frac{2\phi'(1)^3(1-z_0)}{b^2 r_+}.$$

Reescribimos la expresión para $\psi(1)^2$ de la siguiente manera

$$\psi(1)^2 = -\frac{f'(1)}{2r_+^2(1-z_0)} \frac{\left(1 - \phi'(1)^2/b^2 r_+^2\right)^{-3/2}}{\left(-1 + \frac{\tilde{\rho} r_+^4 f'(1)^2}{r_+^5 (-\phi'(1)) f'(1)^2}\right)}. \quad (5.86)$$

Escribimos $\psi(1)^2$ de esta manera para poder definir la temperatura y la temperatura crítica de acuerdo con [33], por lo tanto definimos

$$T_c \equiv \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\tilde{\rho} f'(1)^2 r_+}{r_+^4 (-\phi'(1))'}} \quad (5.87)$$

y también

$$T \equiv \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{f'(1)^2 r_+^2}{r_+^4}}, \quad (5.88)$$

donde $f'(1) = \alpha r_+^2 \{\text{CorreccionesNC}\}$; la constante α es arbitraria. En el caso del agujero negro de Einstein-Maxwell se tiene que

$$|\alpha| = \frac{3}{L^2}.$$

Con las definiciones anteriores $\psi(1)^2$ queda de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \psi(1)^2 &= -\frac{f'(1)}{2r_+^2(1-z_0)} \frac{\left(1 - \phi'^2/b^2 r_+^2\right)^{-3/2}}{\left(-1 + \left(\frac{T_c}{T}\right)^2\right)} \\ &= -\frac{f'(1)}{2r_+^2(1-z_0)} \frac{\left(1 - \phi'^2/b^2 r_+^2\right)^{-3/2}}{\left(\frac{T_c}{T}\right)^2} \left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Cuando $T \sim T_c$ podemos escribir

$$\psi(1) = \sqrt{-\frac{f'(1)}{r_+^2(1-z_0)} \frac{\left(1 - \phi'^2/b^2 r_+^2\right)^{-3/2}}{\left(1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right)}} \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}. \quad (5.89)$$

Debemos tener en mente que $f'(1)$ contiene correcciones pequeñas no conmutativas.

Ahora, si a la ec. (5.84) le sumamos la ec. (5.85) multiplicada por $(1 - z_0)$ obtenemos

$$\begin{aligned} J^+ z_0^2 + J^+ z_0 (1 - z_0) &= \psi(1) - \frac{m^2 r_+^2}{f'(1)} (1 - z_0) \psi(1) + \frac{1}{2} \left[\frac{m^4 r_+^4}{2f'(1)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2 r_+^2 f''(1)}{2f'(1)^2} - \frac{r_+^2 \phi'(1)^2}{2f'(1)^2} \right] (1 - z_0)^2 \psi(1) \\ &\quad + \frac{m^2 r_+^2}{2f'(1)} \psi(1) (1 - z_0) - \frac{1}{2} \left[\frac{m^4 r_+^4}{2f'(1)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2 r_+^2 f''(1)}{2f'(1)^2} - \frac{r_+^2 \phi'(1)^2}{2f'(1)^2} \right] (1 - z_0)^2 \psi(1). \end{aligned}$$

Por lo tanto encontramos la expresión general para J^+

$$J^+ = \frac{\psi(1)}{z_0} \left(1 - \frac{m^2 r_+^2}{f'(1)} (1 - z_0) \right). \quad (5.90)$$

Para encontrar β , la cual está definida como $\beta \equiv \frac{(-\phi'(1))}{r_+}$, sustituimos el valor de J^+ en la expresión anterior

$$\begin{aligned} \psi(1) \left(1 - \frac{m^2 r_+^2}{f'(1)} (1 - z_0) \right) &= \frac{m^2 r_+^2}{2f'(1)} \psi(1) - \frac{1}{2} \frac{m^2 r_+^4}{2f'(1)} \psi(1) (1 - z_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{m^2 r_+^2 f''(1)}{2f'(1)^2} \psi(1) (1 - z_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{r_+^4}{2f'(1)^2} \psi(1) (1 - z_0) \left(\frac{-\phi'(1)}{r_+} \right)^2. \end{aligned}$$

Finalmente tenemos

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{1 - z_0} \left[\frac{4f'(1)^2}{r_+^4} - \frac{6m^2 f'(1)}{r_+^2} + \frac{4m^2 f'(1) z_0}{r_+^2} + m^2 (1 - z_0) \left(1 - \frac{f''(1)}{r_+^2} \right) \right]}^{1/2}. \quad (5.91)$$

Escribimos ahora el valor esperado del operador de condensación definido en [33] el cual es

$$\langle O_2 \rangle = \sqrt{2} J^+ r_+^2. \quad (5.92)$$

Ya que tenemos una expresión para J^+ (ec. (5.90)) y puesto que podemos escribir r_+^2 en términos de la temperatura, la cual la consideramos cercana a la temperatura crítica T_c , obtenemos

$$\begin{aligned} \langle O_2 \rangle &= \frac{\sqrt{2}(2\pi)^2}{z_0} \frac{r_+^4}{f'(1)^2} \sqrt{\frac{1}{1-z_0}} \sqrt{\frac{f'(1)(1-\phi'^2/b^2r_+^2)^{-3/2}}{r_+^2}} \\ &\times \left(1 - \frac{m^2r_+^2}{f'(1)}(1-z_0)\right) T_c^2 \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}. \end{aligned} \quad (5.93)$$

Finalmente, escribimos el operador de condensación de tal manera que tengamos una parte clásica y una parte de correcciones NC. Para ello recordamos que

$$f'(1) = -\frac{3r_+^2}{L^2} \left[1 - \left(\underbrace{\frac{L^2}{3r_+^2} g^\theta(r_+)}_a - \underbrace{\frac{L^2}{3r_+} g'^\theta(r_+)}_b + \underbrace{\frac{2L^2}{3} \frac{1}{4\theta} g^\theta(r_+)}_c \right) e^{-r_+^2/4\theta} \right], \quad (5.94)$$

y por lo tanto, sustituimos este resultado en la expresión de $\langle O_2 \rangle$ considerando términos hasta $e^{-r_+^2/4\theta}$

$$\langle O_2 \rangle = A \frac{r_+^4}{f'(1)^2} \sqrt{-\frac{f'(1)}{r_+^2}} \left(1 - \frac{m^2r_+^2}{f'(1)}(1-z_0)\right),$$

donde

$$A \equiv \frac{\sqrt{2}(2\pi)^2}{z_0} \sqrt{\frac{(1-\phi'^2/b^2r_+^2)^{-3/2}}{1-z_0}} T_c^2 \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}.$$

Reescribimos la expresión para $\langle O_2 \rangle$ definiendo las cantidades

$$\alpha = a e^{-r_+^2/4\theta}, \quad \beta = b e^{-r_+^2/4\theta}, \quad \gamma = c e^{-r_+^2/4\theta}.$$

Vemos que

$$\begin{aligned} \langle O_2 \rangle &= A \frac{r_+^4 L^4}{9r_+^4} [1 + \alpha - \beta + \gamma]^2 \frac{3r_+}{Lr_+} [1 - \alpha + \beta - \gamma]^{1/2} \\ &\times \left(1 + \frac{m^2r_+^2 L^2}{3r_+^2} (1 + \alpha - \beta + \gamma) (1 - z_0)\right). \end{aligned} \quad (5.95)$$

Acomodamos los términos similares en esta expresión recordando que solo consideramos hasta términos proporcionales a $e^{-r_+^2/4\theta}$, ya

que son correcciones no conmutativas perturbativas. El operador de condensación queda finalmente como

$$\frac{\langle O_2 \rangle}{T_c^2} = \frac{\sqrt{2} (2\pi)^2 L^3}{6z_0} \sqrt{\frac{(1 - \phi'^2/b^2 r_+^2)^{-3/2}}{1 - z_0}} \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \left[1 + \frac{m^2 l^2}{3} (1 - z_0) - \frac{3}{2} (\alpha - \beta - \gamma) - \frac{5m^2 l^2}{6} (1 - z_0) \left(\alpha - \beta - \frac{\gamma}{5} \right) \right]. \quad (5.96)$$

La forma que encontramos para el operador de condensación es muy similar a la reportada en [33]. La dependencia del operador de condensación en términos de la temperatura tiene una forma genérica, dada por la ec. (5.96), y ejemplificada también en [26]. Sabiendo que g^θ y g'^θ están dadas por las ecs. (5.70) y (5.71) respectivamente, se pueden evaluar los valores de a , b y c y por ende α , β y γ para determinar un valor del coeficiente que multiplica la raíz cuadrada en la expresión del operador de condensación.

CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

6.1 CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Para estudiar una deformación no conmutativa de la correspondencia AdS/CFT, primero nos preocupamos por entender tanto una Teoría Conforme de Campos como el espaciotiempo de AdS. Con este fin revisamos la esencia de las teorías conformes lo cual nos sirvió para entender que la dimensión de los campos es una propiedad importante para el diccionario de la correspondencia holográfica. Esto nos ayudó también para visualizar la geometría del espaciotiempo de AdS familiarizándonos con cálculos de gravedad para entender su curvatura.

En este trabajo se discutió una aplicación directa de la correspondencia AdS/CFT en un marco no conmutativo, analizando diferentes agujeros negros, ya que consideramos diferentes electrodinámicas (electrodinámica de Maxwell y de Born-Infeld). Discutimos un agujero negro con masa y carga en un espaciotiempo de Anti de Sitter, realizando diferentes deformaciones en los parámetros del agujero negro, es decir, hicimos el ejemplo del agujero negro de EM sin deformar la carga solo la masa y posteriormente deformando ambas. Primero verificamos las propiedades termodinámicas del hoyo negro de EM como lo es la temperatura y graficamos la acción correspondiente contra la coordenada radial r . Posteriormente analizando los campos escalar y de norma que aparecen en la acción del agujero negro y ayudados con la correspondencia AdS/CFT encontramos una equivalencia con el operador de condensación y la temperatura crítica de un superconductor. En [3] encontramos detalladamente la manera de identificar un campo (escalar, vectorial, etc.) con su operador dual.

Calculamos propiedades para el agujero negro de Reissner-Nordström siguiendo [33], considerando una electrodinámica no lineal, la bien estudiada electrodinámica de Born-Infeld. Para encontrar la temperatura de estos agujeros negros es importante tener en mente la condición extremal donde se hace que la métrica y la primer derivada de la métrica sean igual a cero ya que en estos agujeros negros es posible tener más de un horizonte. En el caso del agujero negro de EBI sin condición extremal se calculó el radio del horizonte clásico analíticamente haciendo una aproximación en términos del parámetro b de Born-Infeld. El radio del horizonte deformado lo calculamos perturbativamente ya que las expresiones cada vez se vuelven más compli-

casas. Para el caso extremal el radio del horizonte del hoyo negro de EBI está dado por la ec. (5.66), la cual al momento de evaluar debe ser usada en las expresiones del operador de condensación del capítulo 5

Finalmente mediante la correspondencia AdS/CFT, obtuvimos las ecuaciones de campo y calculamos los comportamientos asintóticos tanto de un campo escalar como de un campo de norma asociados a un superconductor holográfico. A partir de esas ecuaciones de campo se analizó la relación entre la temperatura crítica y la densidad de carga con lo que encontramos una expresión para el operador de condensación. La expresión encontrada presenta la misma dependencia en la temperatura crítica similar a los casos discutidos previamente en la literatura.

Cabe mencionar que la expresión para el operador de condensación encontrada en el capítulo 5 es muy general para espaciotiempos estáticos con simetría esférica ya que lo único que necesitamos es la forma de la métrica deformada (g^θ), una vez dada dicha métrica es cuestión de calcular su primer derivada y hacer cálculos que aunque son un tanto complicados, con un poco de paciencia están bajo control.

Para trabajos futuros nos interesa el estudio del agujero negro de EBI para calcular analíticamente sus propiedades termodinámicas considerando el efecto de retroacción, tomando en cuenta la deformación no conmutativa de la carga como se estudia por ejemplo en [12]. En este trabajo se reporta que dicho efecto permite observar correcciones no conmutativas en diferentes cantidades de interés, por ejemplo en la conductividad, debido al parámetro b de BI.

APÉNDICE

APÉNDICE

A.1 SUPERCONDUCTIVIDAD

Uno de los fenómenos más interesante en materia condensada es la superconductividad y en particular nosotros nos interesamos por el estudio de la superconductividad por medio de la holografía. En esta sección discutimos algunos aspectos fundamentales de la superconductividad para tener en mente qué es este fenómeno, esto con el fin de comprenderla desde un punto de vista holográfico. Así, primero nos familiarizamos con un superconductor y posteriormente con un superconductor holográfico.

La superconductividad se presenta en ciertos elementos de la tabla periódica a bajas temperaturas, no necesariamente en metales, por ejemplo en el oro no hay evidencia explícita que se observe superconductividad. También se ha descubierto que en algunos elementos se presenta a muy altas presiones e incluso a altas temperaturas como en el caso del oxígeno [4]. La principal propiedad que define a un superconductor es el efecto Meissner-Ochsenfeld el cual será discutido más adelante.

Una característica de un superconductor es que la resistividad ρ , eventualmente llega a ser cero y la conductividad σ tiende a infinito al acercarse a una temperatura crítica T_c , lo cual representa una transición de fase termodinámica de un estado a otro.

La temperatura crítica es diferente para cada sustancia, en superconductividad es la temperatura T_c a partir de la cual, si se sigue enfriando una muestra, el material se vuelve superconductor.

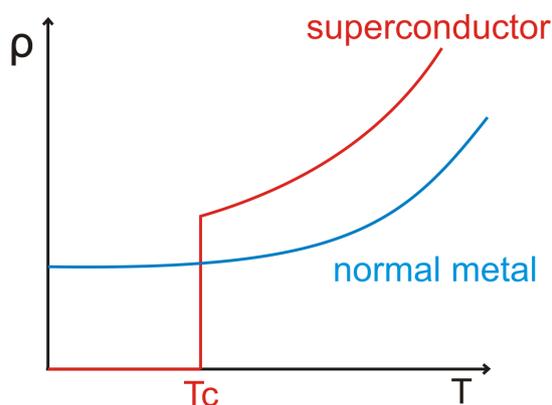


Figura 8: Resistividad como función de la temperatura de un metal y de un superconductor.

Estas dos fases se conocen como estado normal y estado superconductor. En el primero la resistividad es similar a un metal normal, mientras que en el estado superconductor muchas propiedades del material son diferentes.

En el caso de los superconductores con temperatura crítica alta se ha observado en la curva $\rho(T)$ vs T que la resistencia empieza a decrecer antes de hacerse idénticamente cero cerca de la temperatura crítica debido a fluctuaciones en la transición de fase.

La principal prueba de que un material sea superconductor es la presencia del efecto Meissner-Ochsenfeld, no que la resistividad sea cero. El efecto Meissner-Ochsenfeld consiste en que un superconductor inicialmente a una temperatura mayor a T_c y en presencia de un campo magnético exterior, presenta también un campo magnético en su interior. Al ser enfriado el superconductor a una temperatura menor a T_c , el efecto Meissner-Ochsenfeld se manifiesta como la ausencia del campo magnético dentro del superconductor. Al presentarse el efecto Meissner-Ochsenfeld el campo magnético dentro del superconductor es igual a cero.

A.1.1 Superconductores holográficos

En la naturaleza hay materiales categorizados como superconductores de alta temperatura (como vimos en la sección anterior) los cuales no son descritos por la teoría estándar de la superconductividad, la teoría Bardeen-Cooper-Schrieffer (BCS). Dichos superconductores son un ejemplo de un modelo holográfico de densidad de carga finita en el cual el estado base cambia a un nuevo estado base al llegar a la temperatura crítica y que posee menor energía; dicho estado base es dual a un condensado.

Esta teoría es la teoría que describe a la superconductividad desde un punto de vista microscópico.

La principal diferencia entre superconductores y superfluidos es que en los primeros hay un rompimiento espontáneo en la simetría de norma local, mientras que en los superfluidos hay un rompimiento espontáneo en la simetría global. Un modelo holográfico simple donde ocurre condensación es una métrica asintóticamente AdS con un campo de norma $U(1)$ y con un campo escalar el cual proporciona el parámetro de orden de un proceso de condensación. Este sistema es llamado superconductor holográfico onda s ; el parámetro de orden es el operador de condensación quien puede ser de dimensión dos o de dimensión uno. Si el valor esperado del operador de condensación

es distinto de cero, la simetría $U(1)$ es espontáneamente rota. Estos operadores dependen de la temperatura como

$$\langle O_1 \rangle, \quad \sqrt{\langle O_2 \rangle} \propto \left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{1/2}, \quad (\text{A.1})$$

cerca de la temperatura crítica, donde se exhibe una transición de fase de segundo orden. El rompimiento espontáneo de la simetría local $U(1)$ en la descripción de gravedad, corresponde a una simetría global rota en la teoría de campos.

A.2 RADIO DEL HORIZONTE DEL AGUJERO NEGRO CLÁSICO DE EBI

Estudiamos el radio del horizonte del agujero negro de EBI cuando no tenemos deformación no conmutativa, considerando un desarrollo en serie de potencias en b . La estructura es similar al cálculo realizado para el agujero negro de EBI solamente que sin la condición extremal, donde es igual a cero la métrica y su primer derivada.

La condición del horizonte $f(r_+) = 0$ está dada por

$$-\frac{6m}{\Lambda} r_+ - r_+^4 + \frac{2b^2}{\Lambda} r_+^4 \left(1 - \sqrt{1 + \frac{q^2}{b^2 r_+^4}}\right) + \frac{4}{\Lambda} q^2 {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{q^2}{b^2 r_+^4}\right) = 0. \quad (\text{A.2})$$

Para la función hipergeométrica vamos a considerar primero el comportamiento asintótico cuando $b \rightarrow 0$, ya que la variable $\frac{q^2}{b^2 r_+^4} \rightarrow \infty$ en ese caso. Tenemos que en general

$$\begin{aligned} F(a, b; c; z) &= \frac{\Gamma(c) \Gamma(b-a)}{\Gamma(b) \Gamma(c-a)} (-z)^{-a} F\left(a, 1-c+a; 1-b+a; \frac{1}{z}\right) \\ &+ \frac{\Gamma(c) \Gamma(a-b)}{\Gamma(a) \Gamma(c-b)} (-z)^{-b} F\left(b, 1-c+b; 1-a+b; \frac{1}{z}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Aquí $z \equiv -\frac{q^2}{b^2 r_+^4}$; este comportamiento es válido en el regimen ($|\arg(-z)| < \pi$) el cual nos es útil ya que en nuestro caso $|\arg(-z)|$ está en \mathbb{R}^+ , lo cual implica que está sobre el eje de las x positivas en el plano complejo. Entonces podemos escribir para la función hipergeométrica

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{q^2}{b^2 r_+^4}\right) &= \frac{\Gamma(\frac{5}{4}) \Gamma(-\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{4}) \Gamma(\frac{3}{4})} \left(\frac{q^2}{b^2 r_+^4}\right)^{-\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{b^2 r_+^4}{q^2}\right) \\ &+ \frac{\Gamma(\frac{5}{4}) \Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(1)} \left(\frac{q^2}{b^2 r_+^4}\right)^{-\frac{1}{4}} \underbrace{{}_2F_1\left(\frac{1}{4}, 0; \frac{3}{4}; -\frac{b^2 r_+^4}{q^2}\right)}_1. \end{aligned}$$

Para el producto de las funciones gamma utilizamos la propiedad

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad (\text{A.4})$$

y finalmente nos queda el comportamiento asintótico $b \rightarrow 0$

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{q^2}{b^2 r_+^4}\right) = -\left(\frac{q^2}{b^2 r_+^4}\right)^{-\frac{1}{2}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{b^2 r_+^4}{q^2}\right) + \frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{q^2}{b^2 r_+^4}\right)^{-\frac{1}{4}}. \quad (\text{A.5})$$

Para resolver la ec. (A.2) debemos tomar el desarrollo en serie de la función hipergeométrica y de la raíz cuadrada ya que haremos un desarrollo en potencias de b ; así

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{q^2}{b^2 r_+^4}\right) = \sum_{r=0}^n \frac{(\alpha)_r (\beta)_r}{(\gamma)_r} \frac{z^r}{r!}, \quad (\text{A.6})$$

donde $(\alpha)_r$ son los símbolos de Pochhammer. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{q^2}{b^2 r_+^4}\right) &= \sum_{r=0}^2 \frac{(\frac{1}{2})_r (\frac{1}{4})_r}{(\frac{5}{4})_r} \frac{z^r}{r!} \\ &= 1 + \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+1)\Gamma(\frac{1}{4}+1)\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{5}{4}+1)} z \\ &\quad + \frac{\Gamma(\frac{1}{2}+2)\Gamma(\frac{1}{4}+2)\Gamma(\frac{5}{4})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{4})\Gamma(\frac{5}{4}+2)} \frac{z^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

Usamos ahora la propiedad de la función gamma

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),$$

y por lo tanto nos queda

$$\begin{aligned} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{5}{4}; -\frac{q^2}{b^2 r_+^4}\right) &= 1 + \frac{\frac{1}{32}\Gamma(\frac{1}{4})}{\frac{5}{16}\Gamma(\frac{1}{4})} x + \frac{\frac{3}{2}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{5}{16}\Gamma(\frac{5}{4})}{\sqrt{\pi}\frac{45}{16}\Gamma(\frac{5}{4})} \frac{z^2}{2} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{10}x + \frac{1}{24}z^2 + \dots, \quad (\text{A.7}) \end{aligned}$$

donde $z := -\frac{q^2}{b^2 r_+^4}$. Por lo tanto, la ec. (A.2) queda como

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{6m}{\Lambda} r_+ - r_+^4 + \frac{2b^2}{\Lambda} r_+^4 \left(1 - \frac{q}{br_+^2} \left(1 - \frac{b^2 r_+^4}{q^2} + \frac{b^4 r_+^8}{q^4}\right)\right) \\ &\quad + \frac{4}{\Lambda} q^2 \left\{ \left(\frac{q^2}{b^2 r_+^4}\right)^{-\frac{1}{2}} \left[1 + \frac{1}{10} \left(-\frac{b^2 r_+^4}{q^2}\right) + \frac{1}{24} \frac{b^4 r_+^8}{q^4}\right] + \frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{4\sqrt{\pi}} \left(\frac{q^2}{b^2 r_+^4}\right)^{-\frac{1}{4}} \right\} + \dots \quad (\text{A.8}) \end{aligned}$$

Vamos a considerar el límite $b \rightarrow 0$ y utilizar inversión de series de potencias para encontrar la expresión de r_+ en la forma

$$r_+ = f_0 + f_{1/2}b^{1/2} + f_1b + f_{3/2}b^{3/2} + f_2b^2. \quad (\text{A.9})$$

La ec. (A.8) la reescribimos ya que vamos a considerar términos hasta b^2 , por lo tanto

$$-\frac{6m}{\Lambda}r_+ - r_+^4 + \frac{2}{\Lambda}(r_+^4b^2 - qbr_+^2) - \frac{4}{\Lambda}qbr_+^2 + \frac{4}{\Lambda} \frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{4\sqrt{\pi}} \sqrt{br_+}q^{3/2} = 0. \quad (\text{A.10})$$

Ahora encontramos las expresiones para las potencias de r_+ que aparecen en la ec. (A.10) en términos del ansatz dado en la ec. (A.9); escribimos r_+^2 y r_+^4 respectivamente

$$\begin{aligned} (r_+)^2 &= \left(f_0 + f_{1/2}b^{1/2}\right)^2 + \left(f_1b + f_{3/2}b^{3/2} + f_2b^2\right)^2 \\ &\quad + 2\left(f_0 + f_{1/2}b^{1/2}\right)\left(f_1b + f_{3/2}b^{3/2} + f_2b^2\right) \\ &= f_0^2 + 2f_0f_{1/2}b^{1/2} + f_{1/2}^2b + 2f_0f_1b + 2f_0f_{3/2}b^{3/2} \\ &\quad + 2f_0f_2b^2 + 2f_1f_{1/2}b^{3/2} + 2f_{1/2}f_{3/2}b^2 + f_1^2b^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (r_+^2)^2 &= \left(f_0^2 + 2f_0f_{1/2}b^{1/2}\right)^2 + \left(f_{1/2}^2b + 2f_0f_1b\right)^2 \\ &\quad + 2\left(f_0^2 + 2f_0f_{1/2}b^{1/2}\right)\left(f_{1/2}^2b + 2f_0f_1b\right) \\ &\quad + 4f_0^3f_{3/2}b^{3/2} + 4f_0^3f_2b^2 + 4f_0^2f_{1/2}f_1b^{3/2} \\ &\quad + 4f_0^2f_{1/2}f_{3/2}b^2 + 2f_0^2f_1^2b^2 \\ &= f_0^4 + 6f_0^2f_{1/2}^2b + 4f_0^3f_1b + 4f_0^3f_{1/2}b^{1/2} \\ &\quad + 12f_0^2f_1f_{1/2}b^{3/2} + f_{1/2}^4b^4 + 6f_0^2f_1^2b^2 \\ &\quad + 4f_{1/2}^2f_0f_1b^2 + 4f_0^2f_{1/2}f_{3/2}b^2 + 4f_0^3f_2b^2 \\ &\quad + 4f_0^3f_{3/2}b^{3/2} + 4f_0f_{1/2}^3b^{3/2}. \end{aligned}$$

En estos desarrollos anteriores sólo tenemos términos hasta b^2 .

Sustituyendo en la ec. (A.10) obtenemos

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{6m}{\Lambda} \left(f_0 + f_{1/2} b^{1/2} + f_1 b + f_{3/2} b^{3/2} + f_2 b^2 \right) - \left(f_0^4 + 6f_0^2 f_{1/2}^2 b \right. \\
& + 4f_0^3 f_1 b + 4f_0^3 f_{1/2} b^{1/2} + 12f_0^2 f_1 f_{1/2} b^{3/2} + f_{1/2}^4 b^2 + 6f_0^2 f_1^2 b^2 \\
& + 4f_{1/2}^2 f_0 f_1 b^2 + 4f_0^2 f_{1/2} f_{3/2} b^2 + 4f_0^3 f_2 b^2 + 4f_0^3 f_{3/2} b^{3/2} + 4f_0 f_{1/2}^3 b^{3/2} \left. \right) \\
& + \frac{2}{\Lambda} f_0^4 b^2 - \frac{6}{\Lambda} q b \left(f_0^2 + 2f_0 f_{1/2} b^{1/2} + f_{1/2}^2 b + 2f_0 f_1 b \right) \\
& + \frac{4}{\Lambda} \frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{4\sqrt{\pi}} q^{3/2} b^{1/2} \left(f_0 + f_{1/2} b^{1/2} + f_1 b + f_{3/2} b^{3/2} \right).
\end{aligned}$$

Para simplificar esta última expresión la escribimos factorizando las potencias de b , de modo que

$$\begin{aligned}
& \left(-\frac{6m}{\Lambda} f_0 - f_0^4 \right) + b^{1/2} \left(-\frac{6m}{\Lambda} f_{1/2} - 4f_0^3 f_{1/2} + \frac{4}{\Lambda} \frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{4\sqrt{\pi}} q^{3/2} f_0 \right) \\
& + b \left(-\frac{6m}{\Lambda} f_1 - 6f_0^2 f_{1/2}^2 - 4f_0^3 f_1 - \frac{6}{\Lambda} q f_0^2 + \frac{4}{\Lambda} \frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{4\sqrt{\pi}} q^{3/2} f_{1/2} \right) \\
& + b^{3/2} \left(-\frac{6m}{\Lambda} f_{3/2} - 12f_0^2 f_1 f_{1/2} - 4f_0^3 f_{3/2} - 4f_0 f_{1/2}^3 \right. \quad (\text{A.11}) \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{12}{\Lambda} q f_0 f_{1/2} + \frac{4}{\Lambda} \frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{4\sqrt{\pi}} q^{3/2} f_1 \right) \\
& + b^2 \left(-\frac{6m}{\Lambda} f_2 - f_{1/2}^4 - 6f_0^2 f_1^2 - 4f_{1/2}^2 f_0 f_1 - 4f_0^2 f_{1/2} f_{3/2} - 4f_0^3 f_2 + \frac{2}{\Lambda} f_0^4 \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. - \frac{6}{\Lambda} q f_{1/2}^2 - \frac{12}{\Lambda} q f_0 f_1 + \frac{4}{\Lambda} \frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{4\sqrt{\pi}} q^{3/2} f_{3/2} \right) = 0.
\end{aligned}$$

De la expresión anterior obtenemos los coeficientes de r_+

$$f_0 = \left(-\frac{6m}{\Lambda} \right)^{1/3}, \quad (\text{A.12})$$

$$f_{1/2} = -\frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{18m\sqrt{\pi}} q^{3/2} f_0, \quad (\text{A.13})$$

$$f_1 = \frac{\Lambda}{3m} f_0^2 f_{1/2}^2 + \frac{q}{3m} f_0^2 - \frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{18m\sqrt{\pi}} q^{3/2} f_{1/2}, \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned}
f_{3/2} = & \frac{\Lambda}{18m} \left[12f_0^2 f_{1/2} f_1 + 4f_0 f_{1/2}^3 \right. \\
& \left. + \frac{12}{\Lambda} q f_0 f_{1/2} - \frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{\Lambda\sqrt{\pi}} q^{3/2} f_1 \right], \quad (\text{A.15})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_2 = & \frac{\Lambda}{18m} \left[f_{1/2}^4 + 6f_0^2 f_1^2 + 4f_{1/2}^2 f_0 f_1 + 4f_0^2 f_{1/2} f_{3/2} - \frac{2}{\Lambda} f_0^4 \right. \\
& \left. + \frac{6}{\Lambda} q f_{1/2}^2 + \frac{12}{\Lambda} q f_0 f_1 - \frac{(\Gamma(\frac{1}{4}))^2}{\Lambda\sqrt{\pi}} q^{3/2} f_{3/2} \right]. \quad (\text{A.16})
\end{aligned}$$

Así, encontramos la expresión para el radio del horizonte propuesto en la ec. (A.9).

Este proceso puede generalizarse para encontrar los términos con potencias más altas de b .

BIBLIOGRAFÍA

- [1] M. Abramowitz e I. A. Stegun, eds. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications, New York, 1965.
- [2] Ofer Aharony, Steven S. Gubser, Juan Martin Maldacena, Hiroshi Ooguri y Yaron Oz. "Large N field theories, string theory and gravity". En: *Phys. Rept.* 323 (2000), págs. 183-386. DOI: [10.1016/S0370-1573\(99\)00083-6](https://doi.org/10.1016/S0370-1573(99)00083-6). arXiv: [hep-th/9905111](https://arxiv.org/abs/hep-th/9905111) [hep-th].
- [3] Martin Ammon y Johanna Erdmenger. *Gauge/Gravity Duality: Foundations and Applications*. 1st. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2015. ISBN: 1107010349, 9781107010345.
- [4] James F. Annett. *Superconductivity, superfluids, and condensates*. Oxford master series in condensed matter physics. Oxford University Press, 2004. ISBN: 9780198507550,0198507550,0198507569,9780198507567.
- [5] Rabin Banerjee, Sunandan Gangopadhyay y Sujoy Kumar Modak. "Voros product, Noncommutative Schwarzschild Black Hole and Corrected Area Law". En: *Phys. Lett. B* 686 (2010), págs. 181-187. DOI: [10.1016/j.physletb.2010.02.034](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2010.02.034). arXiv: [0911.2123](https://arxiv.org/abs/0911.2123) [hep-th].
- [6] Rabin Banerjee, Biswajit Chakraborty, Subir Ghosh, Pradip Mukherjee y Saurav Samanta. "Topics in Noncommutative Geometry Inspired Physics". En: *Found. Phys.* 39 (2009), págs. 1297-1345. DOI: [10.1007/s10701-009-9349-y](https://doi.org/10.1007/s10701-009-9349-y). arXiv: [0909.1000](https://arxiv.org/abs/0909.1000) [hep-th].
- [7] Harry Bateman. *Higher Transcendental Functions*. Vol. 2. McGRAW-HILL, 1953.
- [8] D. Martínez Carbajal. "Geodésicas en Agujeros Negros de Einstein-Born-Infeld". Tesis de maestría. UAM Iztapalapa, 2013.
- [9] Eleftherios Papantonopoulos (eds.) Christos Charmousis (auth.) *From Gravity to Thermal Gauge Theories: The AdS/CFT Correspondence: The AdS/CFT Correspondence*. 1.^a ed. Lecture Notes in Physics 828. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011. ISBN: 3642048633,9783642048630.
- [10] Thomas Faulkner, Nabil Iqbal, Hong Liu, John McGreevy y David Vegh. "From Black Holes to Strange Metals". En: (2010). arXiv: [1003.1728](https://arxiv.org/abs/1003.1728) [hep-th].
- [11] Arthur E. Fischer. "A simple all-time model for the birth, big bang, and death of the universe". En: *Int. J. Mod. Phys. D* 26.12 (2017), pág. 1743014. DOI: [10.1142/S0218271817430143](https://doi.org/10.1142/S0218271817430143).
- [12] Debabrata Ghorai y Sunandan Gangopadhyay. "Conductivity of holographic superconductors in Born-Infeld electrodynamics". En: (2017). arXiv: [1710.09630](https://arxiv.org/abs/1710.09630) [hep-th].

- [13] Paul H. Ginsparg. “Applied Conformal Field Theory”. En: *Les Houches Summer School in Theoretical Physics: Fields, Strings, Critical Phenomena Les Houches, France, June 28–August 5, 1988*. 1988, págs. 1-168. arXiv: [hep-th/9108028 \[hep-th\]](https://inspirehep.net/record/265020/files/arXiv:hep-th_9108028.pdf). URL: https://inspirehep.net/record/265020/files/arXiv:hep-th_9108028.pdf.
- [14] Roy J. Glauber. “Coherent and incoherent states of the radiation field”. En: *Phys. Rev.* 131 (1963), págs. 2766-2788. DOI: [10.1103/PhysRev.131.2766](https://doi.org/10.1103/PhysRev.131.2766).
- [15] Angélica González, Román Linares, Marco Maceda y Oscar Sánchez-Santos. “Thermodynamics of a higher dimensional noncommutative anti-de Sitter-Einstein-Born-infeld black hole”. En: (2015). arXiv: [1508.01284 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1508.01284).
- [16] Laure Gouba. “A comparative review of four formulations of noncommutative quantum mechanics”. En: *Int. J. Mod. Phys. A* 31.19 (2016), pág. 1630025. DOI: [10.1142/S0217751X16300258](https://doi.org/10.1142/S0217751X16300258). arXiv: [1603.07176 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1603.07176).
- [17] Ruth Gregory, Sugumi Kanno y Jiro Soda. “Holographic Superconductors with Higher Curvature Corrections”. En: *JHEP* 10 (2009), pág. 010. DOI: [10.1088/1126-6708/2009/10/010](https://doi.org/10.1088/1126-6708/2009/10/010). arXiv: [0907.3203 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/0907.3203).
- [18] S. S. Gubser, Igor R. Klebanov y Alexander M. Polyakov. “Gauge theory correlators from noncritical string theory”. En: *Phys. Lett. B* 428 (1998), págs. 105-114. DOI: [10.1016/S0370-2693\(98\)00377-3](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(98)00377-3). arXiv: [hep-th/9802109 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/hep-th/9802109).
- [19] Steven S. Gubser. “Breaking an Abelian gauge symmetry near a black hole horizon”. En: *Phys. Rev. D* 78 (2008), pág. 065034. DOI: [10.1103/PhysRevD.78.065034](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.78.065034). arXiv: [0801.2977 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/0801.2977).
- [20] Sharmila Gunasekaran, Robert B. Mann y David Kubiznak. “Extended phase space thermodynamics for charged and rotating black holes and Born-Infeld vacuum polarization”. En: *JHEP* 11 (2012), pág. 110. DOI: [10.1007/JHEP11\(2012\)110](https://doi.org/10.1007/JHEP11(2012)110). arXiv: [1208.6251 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1208.6251).
- [21] Sean A. Hartnoll. “Lectures on holographic methods for condensed matter physics”. En: *Class. Quant. Grav.* 26 (2009), pág. 224002. DOI: [10.1088/0264-9381/26/22/224002](https://doi.org/10.1088/0264-9381/26/22/224002). arXiv: [0903.3246 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/0903.3246).
- [22] Sean A. Hartnoll, Christopher P. Herzog y Gary T. Horowitz. “Building a Holographic Superconductor”. En: *Phys. Rev. Lett.* 101 (2008), pág. 031601. DOI: [10.1103/PhysRevLett.101.031601](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.101.031601). arXiv: [0803.3295 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/0803.3295).
- [23] Sean A. Hartnoll, Andrew Lucas y Subir Sachdev. “Holographic quantum matter”. En: (2016). arXiv: [1612.07324 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1612.07324).

- [24] Akikazu Hashimoto y N. Izhaki. “Noncommutative Yang-Mills and the AdS / CFT correspondence”. En: *Phys. Lett.* B465 (1999), págs. 142-147. DOI: [10.1016/S0370-2693\(99\)01037-0](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(99)01037-0). arXiv: [hep-th/9907166](https://arxiv.org/abs/hep-th/9907166) [hep-th].
- [25] Markus Heusler. “No hair theorems and black holes with hair”. En: *Helv. Phys. Acta* 69.4 (1996), págs. 501-528. arXiv: [gr-qc/9610019](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9610019) [gr-qc].
- [26] Jiliang Jing y Songbai Chen. “Holographic superconductors in the Born-Infeld electrodynamics”. En: *Phys. Lett.* B686 (2010), págs. 68-71. DOI: [10.1016/j.physletb.2010.02.022](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2010.02.022). arXiv: [1001.4227](https://arxiv.org/abs/1001.4227) [gr-qc].
- [27] Andrei D. Linde. “The Inflationary Universe”. En: *Rept. Prog. Phys.* 47 (1984), págs. 925-986. DOI: [10.1088/0034-4885/47/8/002](https://doi.org/10.1088/0034-4885/47/8/002).
- [28] Juan Martin Maldacena. “The Large N limit of superconformal field theories and supergravity”. En: *Int. J. Theor. Phys.* 38 (1999). [Adv. Theor. Math. Phys.2,231(1998)], págs. 1113-1133. DOI: [10.1023/A:1026654312961](https://doi.org/10.1023/A:1026654312961). arXiv: [hep-th/9711200](https://arxiv.org/abs/hep-th/9711200) [hep-th].
- [29] Juan Martin Maldacena y Jorge G. Russo. “Large N limit of noncommutative gauge theories”. En: *JHEP* 09 (1999), pág. 025. DOI: [10.1088/1126-6708/1999/09/025](https://doi.org/10.1088/1126-6708/1999/09/025). arXiv: [hep-th/9908134](https://arxiv.org/abs/hep-th/9908134) [hep-th].
- [30] Makoto Natsuume. “AdS/CFT Duality User Guide”. En: *Lect. Notes Phys.* 903 (2015), pp.1-294. DOI: [10.1007/978-4-431-55441-7](https://doi.org/10.1007/978-4-431-55441-7). arXiv: [1409.3575](https://arxiv.org/abs/1409.3575) [hep-th].
- [31] Piero Nicolini. “Noncommutative nonsingular black holes”. En: *Bled Workshops Phys.* 6.2 (2005), págs. 79-87. arXiv: [hep-th/0510203](https://arxiv.org/abs/hep-th/0510203) [hep-th].
- [32] Souvik Pramanik, Sudipta Das y Subir Ghosh. “Noncommutative extension of AdS/CFT and holographic superconductors”. En: *Phys. Lett.* B742 (2015), págs. 266-273. DOI: [10.1016/j.physletb.2015.01.044](https://doi.org/10.1016/j.physletb.2015.01.044). arXiv: [1401.7832](https://arxiv.org/abs/1401.7832) [hep-th].
- [33] Souvik Pramanik y Subir Ghosh. “AdS-CFT Correspondence in Noncommutative background, related thermodynamics and Holographic Superconductor in Magnetic Field”. En: (2015). arXiv: [1509.07825](https://arxiv.org/abs/1509.07825) [hep-th].
- [34] Joshua D. Qualls. “Lectures on Conformal Field Theory”. En: (2015). arXiv: [1511.04074](https://arxiv.org/abs/1511.04074) [hep-th].
- [35] M. P. Ortega Ramírez. “Producción de fotones en la presencia de un campo magnético en la dualidad AdS/CFT”. Tesis de maestría. UNAM, Fac. Cien., 2014.

- [36] Dibakar Roychowdhury. “Effect of external magnetic field on holographic superconductors in presence of nonlinear corrections”. En: *Phys. Rev. D* 86 (2012), pág. 106009. DOI: [10.1103/PhysRevD.86.106009](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.86.106009). arXiv: [1211.0904](https://arxiv.org/abs/1211.0904) [hep-th].
- [37] Dibakar Roychowdhury. “Phase transition in black holes”. Tesis doct. Bose Natl. Ctr., Kolkata, 2013. arXiv: [1403.4356](https://arxiv.org/abs/1403.4356) [gr-qc]. URL: <https://inspirehep.net/record/1286300/files/arXiv:1403.4356.pdf>.
- [38] Kostas Skenderis. “Lecture notes on holographic renormalization”. En: *Class. Quant. Grav.* 19 (2002), págs. 5849-5876. DOI: [10.1088/0264-9381/19/22/306](https://doi.org/10.1088/0264-9381/19/22/306). arXiv: [hep-th/0209067](https://arxiv.org/abs/hep-th/0209067) [hep-th].
- [39] Anais Smailagic y Euro Spallucci. “UV divergence-free QFT on noncommutative plane”. En: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 36.39 (2003), pág. L517. URL: <http://stacks.iop.org/0305-4470/36/i=39/a=103>.
- [40] Edward Witten. “Anti-de Sitter space and holography”. En: *Adv. Theor. Math. Phys.* 2 (1998), págs. 253-291. DOI: [10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2](https://doi.org/10.4310/ATMP.1998.v2.n2.a2). arXiv: [hep-th/9802150](https://arxiv.org/abs/hep-th/9802150) [hep-th].
- [41] James W. York Jr. “Black hole thermodynamics and the Euclidean Einstein action”. En: *Phys. Rev. D* 33 (1986), págs. 2092-2099. DOI: [10.1103/PhysRevD.33.2092](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.33.2092).