



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

EL MÉTODO DE EXPANSIÓN DE BERNSTEIN
PARA DETERMINAR LA ESTABILIDAD
DE FAMILIAS DE POLINOMIOS

TESIS QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

M A E S T R O E N C I E N C I A S

PRESENTA
EL LICENCIADO EN MATEMATICAS

CARLOS ARTURO LOREDO VILLALOBOS

DIRECTOR DE TESIS
DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNÁNDEZ

Iztapalapa, D.F. Septiembre de 2007

*Dedicado a las personas que me rodean:
a mis padres y hermanas;
a mis grandes amigos;
a smlb.*

*Cada ser humano,
pensado como un microcosmos,
debe ser capaz de reaccionar favorablemente
contra aquellas fuerzas que afecten su estabilidad.*

Carlos Loredo

Agradecimientos

Quiero agradecer primeramente a la Universidad Autónoma Metropolitana por el apoyo económico que me otorgó durante mis estudios de maestría, mediante la beca de posgrados de reciente creación.

Agradezco a los sinodales por sus comentarios y observaciones. Un agradecimiento especial al Dr. Baltazar Aguirre por su apoyo a lo largo de todos estos años.

Índice general

Introducción	I
1. Criterios clásicos de estabilidad	1
1.1. Criterio de Routh-Hurwitz	1
1.2. Teorema de Hermite-Biehler	2
1.3. Criterio de Routh	4
2. Familias de polinomios	7
2.1. Incertidumbre paramétrica	7
2.2. Polinomios intervalo	9
2.3. Teorema de Kharitonov	11
2.4. Teorema de intersección de la frontera	14
3. Polinomios de Bernstein	17
3.1. Propiedades de los polinomios de Bernstein	17
3.2. Aproximación de funciones mediante polinomios de Bernstein	26
3.2.1. Aproximación de funciones poligonales	31
3.3. Algunos aspectos numéricos	33
4. Estabilidad de polinomios	35
4.1. Cotas para la expansión de Bernstein	35
4.1.1. Polinomios bivariados	35
4.1.2. Polinomios multivariados	44
4.2. Verificando estabilidad tipo Hurwitz	48
4.2.1. Prueba de positividad del determinante de la matriz de Hurwitz	49
4.3. Ejemplos	49
Conclusiones	57
Apéndice	59
Bibliografía	61

Introducción

Al analizar un sistema es importante realizar un modelo matemático que describa su comportamiento lo más cercano a la realidad. Dicho modelo puede ser utilizado para hacer predicciones sobre el futuro desarrollo del sistema o para diseñar controles para asegurar que el sistema se comporte de una forma deseable. Sin embargo, no debe perderse de vista que un modelo es una aproximación, así lo que pronostique y lo que ocurra en el sistema real puede llegar a ser muy distinto, cuando pasa un periodo de tiempo largo o cuando los parámetros y variables involucradas sufren un cambio (en [16] pueden consultarse varios ejemplos al respecto).

En muchos casos se desea que el modelo se comporte de manera estable. La estabilidad de sistemas lineales invariantes $\dot{x}(t) = Ax(t)$ ha sido estudiada ampliamente. Una forma de determinar su estabilidad es mediante el estudio de las raíces de su polinomio característico. Existen varios criterios y resultados para determinar cuando un polinomio es estable.

Al modelar un sistema a veces hacemos idealizaciones para simplificar su estudio, pero también muchas de la veces desconocemos las propiedades de la totalidad de variables que involucra y la diferencia en el comportamiento entre el modelo y el sistema real puede llegar a ser mayor. Los orígenes y las causas de esta posible discordancia son muchos:

- El modelo puede depender de parámetros físicos que no se conocen exactamente.
- Puede ser que existan efectos no lineales o variantes en el tiempo que no se conocen con precisión.
- A veces la interacción dinámica del sistema con su entorno no es clara en los límites del sistema.
- Al simular computacionalmente y utilizar métodos discretos pueden aparecer errores de redondeo que lleven a perturbaciones desconocidas del modelo.

A estos modelos se le conoce como modelos inciertos o con incertidumbre. En estos modelos la matriz A depende de un parámetro \mathbf{q} , y el sistema asociado es llamado sistema con incertidumbre paramétrica: $\dot{x}(t) = A(\mathbf{q})x(t)$. El parámetro \mathbf{q} puede ser un escalar o un vector real pero se desconocen sus valores exactos, en general $q \in V \subseteq \mathbb{R}^n$ y en casos particulares sólo se conocen sus límites máximos y mínimos.

Muchos de estos sistemas aparecen en sistemas con control $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$ que son realimentados, es decir, el control puede tener la forma $u(t) = c^T x$, donde $c \in \mathbb{R}^n$ es un vector de parámetros. Al sustituir se obtiene $\dot{x}(t) = (A + Bc)x(t)$ y entonces en la nueva matriz del sistema $A + Bc$ aparecen parámetros y por lo tanto también en el polinomio característico. Otras veces para utilizar un sólo parámetro se considera al control como $u(t) = kc^T x$, con $c \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{R}$, donde k es el parámetro, y entonces el sistema realimentado tiene la forma $\dot{x}(t) = (A + kBc)x(t)$. Es de interés entonces preguntarse ¿para qué valores de los parámetros del control el sistema es estable? o bien ¿qué tanto pueden ser cambiados los parámetros antes de que el sistema se vuelva inestable?

En el caso en que la matriz A dependa de parámetros una forma de determinar la estabilidad del sistema es mediante su polinomio característico

$$p(s, \mathbf{q}) = a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q})s + a_2(\mathbf{q})s^2 + \cdots + a_n(\mathbf{q})s^n$$

donde cada coeficiente depende del parámetro \mathbf{q} . A partir de que el parámetro \mathbf{q} no se conoce exactamente entonces se tiene una infinidad de posibles valores para los coeficientes. A los polinomios de la forma $p(s, \mathbf{q})$ se les conoce como familia de polinomios o polinomios con incertidumbre paramétrica. La clasificación de estos polinomios está en función de la estructura de los coeficientes $a_i(\mathbf{q})$. Para las familias de polinomios de tipo intervalo el Teorema de Kharitonov ofrece condiciones necesarias y suficientes para determinar estabilidad. En varios trabajos el problema de estabilidad de un polinomio con incertidumbre paramétrica ha sido trasladado principalmente a dos problemas con distinto enfoque: determinar la positividad de la matriz de Hurwitz del polinomio característico del sistema o buscar su llamado conjunto de valor. En este caso los criterios clásicos de estabilidad no resuelven de forma inmediata el problema debido a la presencia de parámetros.

Un método relativamente reciente y con un enfoque computacional está basado en la expansión de Bernstein para un polinomio real, en el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz y en el teorema de intersección de la frontera. La idea general de éste método consiste en que dada una familia de polinomios $p(s, \mathbf{q})$, la expansión de Bernstein produce cotas ajustadas sobre el rango de la familia. La estabilidad se verifica probando la positividad del determinante de la matriz de Hurwitz asociada a la expansión de Bernstein de la familia $p(s, \mathbf{q})$. En este trabajo presentamos y justificamos con detalle el uso de éste método.

En el presente trabajo hacemos una revisión del problema de estabilidad, estudiamos con detalle los polinomios de Bernstein y aplicamos estos polinomios para dar una aproximación al problema de estabilidad de familias de polinomios. El trabajo está organizado del siguiente modo: En el Capítulo 1 se enuncian los criterios de estabilidad más importantes y que son clásicos en la literatura de la Teoría de Control. Además se muestran ejemplos donde dichos criterios no permiten decidir inmediatamente la estabilidad de una familia de polinomios. En el Capítulo 2 se presenta una breve introducción a las familias de polinomios y un par de resultados relativos al estudio de su estabilidad: el Teorema de Kharitonov y el Teorema de intersección de la frontera. En el Capítulo 3 se aborda el estudio de los Polinomios de Bernstein y presentamos sus principales propiedades. Algunas de esas propiedades son utilizadas para justificar varios resultados obtenidos en el subsecuente capítulo. En el último capítulo estudiamos la estabilidad de familias mediante el método de expansión de Bernstein.

CAPÍTULO 1

Criterios clásicos de estabilidad

En este capítulo enunciaremos los principales criterios clásicos para verificar la estabilidad de polinomios y por tanto de sistemas (estabilidad global para sistemas lineales o estabilidad local para sistemas no lineales). El problema de determinar la estabilidad en un sistema puede abordarse a partir del estudio de las raíces del polinomio característico de la matriz del sistema:

$$p(\lambda) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

Los criterios clásicos enuncian condiciones necesarias y suficientes para las cuales todas las raíces se localicen en la mitad derecha del plano. Presentamos también algunos ejemplos de polinomios con parámetros en los coeficientes para ilustrar algunas desventajas de dichos criterios cuando los coeficientes tienen una estructura más compleja. Un desarrollo detallado de estos criterios y ejemplos para polinomios con coeficientes constantes pueden consultarse en [24].

1.1. Criterio de Routh-Hurwitz

Las ideas de A. Hurwitz y E. Routh que llevaron al criterio que lleva su nombre, eran las de elaborar un algoritmo que contara el número de raíces con parte real positiva o negativa de un polinomio real. De forma independiente, Hurwitz construyó su algoritmo en base a los trabajos de Hermite, mientras que Routh se basó en el Teorema de Sturm y los índices de Cauchy.

Definición 1.1.1. Decimos que un polinomio de coeficientes reales es Hurwitz si todas sus raíces tienen parte real negativa.

Definición 1.1.2 (Matriz de Hurwitz). *Dado el polinomio*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$$

denotamos por $H(f)$ a la matriz de Hurwitz de f , que se define como

$$H(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Teorema 1.1.3 (Criterio de Routh-Hurwitz). *Sea*

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

con $a_0 > 0$, $f(x)$ es Hurwitz si y sólo si $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, \dots , $\Delta_n > 0$, donde $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ son los menores principales diagonales de $H(f)$, es decir

$$\Delta_1 = \det(a_1), \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix}, \Delta_3 = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix}, \dots$$

Ejemplo 1.1.4. Consideremos el polinomio

$$p(t) = t^3 + (\alpha_1 + 3)t^2 + (\alpha_2 + 5)t + (\alpha_3 + 4) \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

formamos con sus coeficientes la matriz de Hurwitz

$$H(p) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3 & \alpha_3 + 4 & 0 \\ 1 & \alpha_2 + 5 & 0 \\ 0 & \alpha_1 + 3 & \alpha_3 + 4 \end{pmatrix}$$

los menores principales de $H(p)$ son

$$\Delta_1 = \alpha_1 + 3, \quad \Delta_2 = (\alpha_1 + 3)(\alpha_2 + 5) - (\alpha_3 + 4), \quad \Delta_3 = (\alpha_3 + 4)\Delta_2$$

El polinomio será estable, a partir del criterio de Routh-Hurwitz, si y sólo si $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3 > 0$.

Observación 1.1.5. En el ejemplo anterior nótese la dificultad de verificar la positividad de los menores principales a partir de que no tenemos información acerca de los valores de los parámetros α_i . En este caso habría adicionalmente que resolver un sistema simultáneo de tres desigualdades. Puede, por tanto, inferirse que la dificultad aumentará cuando el grado del polinomio sea mayor.

1.2. Teorema de Hermite-Biehler

La idea geométrica detrás del Teorema de Hermite-Biehler es pensar que un polinomio real $p(x)$, que es estable, al evaluarlo en $x = i\omega$, su gráfica se enrolla en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor del origen del plano complejo y el argumento de $p(i\omega)$ es una función creciente. Adicionalmente, si el polinomio $p(i\omega)$ es dividido en una parte real e imaginaria, ocurre que las raíces de cada parte se van alternando. Este razonamiento puede revertirse para verificar cuándo las raíces de un polinomio tienen parte real negativa a partir del estudio de las raíces de la parte real e imaginaria de $p(i\omega)$.

Definición 1.2.1. Considerar el polinomio real $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$. Podemos escribir a $p(t)$ de la siguiente forma

$$p(t) = (a_0 + a_2t^2 + a_4t^4 + \dots) + t(a_1 + a_3t^2 + a_5t^4 + \dots)$$

al evaluar en $i\omega$

$$p(i\omega) = (a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots) + i\omega(a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \dots)$$

Definimos

$$p^e(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 - \dots$$

$$p^o(\omega) = a_1 - a_3\omega^2 + a_5\omega^4 - \dots$$

$$p^{par}(t) = a_0 + a_2t^2 + a_4t^4 + \dots$$

$$p^{imp}(t) = a_1t + a_3t^3 + a_5t^5 + \dots$$

Definición 1.2.2. El polinomio $p(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$ satisface la propiedad de la alternancia si y sólo si

- los coeficientes principales de $p^{par}(t)$ y $p^{imp}(t)$ tienen el mismo signo;
- todas las raíces de $p^e(\omega)$ y $p^o(\omega)$ son reales y las raíces positivas de $p^e(\omega)$ y $p^o(\omega)$ se van alternando, es decir

$$0 < \omega_{e,1} < \omega_{o,1} < \omega_{e,2} < \omega_{o,2} < \dots$$

La figura 1.1 ilustra el inciso b) de la propiedad de la alternancia, obsérvese la forma en que se alternan las raíces de $p^e(\omega)$ y $p^o(\omega)$.

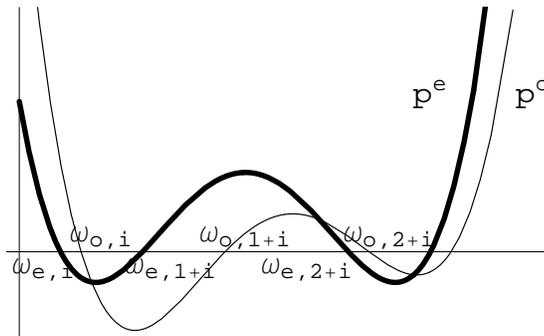


Figura 1.1: Ilustración de la propiedad de la alternancia

Teorema 1.2.3 (Hermite-Biehler). *Un polinomio real $P(t)$ es Hurwitz si y sólo si satisface la propiedad de la alternancia.*

Ejemplo 1.2.4. Considérese el polinomio

$$p(t) = t^3 + [2, 4]t^2 + [2, 5]t + [3, 7]$$

donde los coeficientes son intervalos reales cerrados. Evaluamos en $t = i\omega$ para obtener

$$p(i\omega) = -i\omega^3 - [2, 4]\omega^2 + [2, 5]i\omega + [3, 7] = [3, 7] - [2, 4]\omega^2 + i\omega([2, 5] - \omega^2)$$

Para verificar la estabilidad de este polinomio tendríamos que verificar que satisface la propiedad de la alternancia.

Observación 1.2.5. En el ejemplo anterior la dificultad de aplicar el Teorema de Hermite-Biehler radica en verificar que las raíces de los polinomios

$$p^e(\omega) = [3, 7] - [2, 4]\omega^2 \quad \text{y} \quad p^o(\omega) = [2, 5] - \omega^2$$

se alternan de acuerdo con el inciso b) de la propiedad de la alternancia. Al ser los coeficientes de estos polinomios intervalos reales se tiene un conjunto infinito de curvas en el plano.

1.3. Criterio de Routh

Considérese el polinomio

$$p(x) = a_0x^n + b_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + b_1x^{n-3} + \dots$$

a continuación evaluamos en $x = i\omega$ obteniendo

$$p(i\omega) = a_0(i\omega)^n + b_0(i\omega)^{n-1} + a_1(i\omega)^{n-2} + b_1(i\omega)^{n-3} + \dots$$

si n es par definimos

$$\begin{aligned} U(\omega) &= (-1)^{\frac{n}{2}}(a_0\omega^n - a_1\omega^{n-2} + a_2\omega^{n-4} - \dots) \\ V(\omega) &= (-1)^{\frac{n}{2}-1}(b_0\omega^{n-1} - b_1\omega^{n-3} + b_2\omega^{n-5} - \dots) \end{aligned}$$

y si n es impar definimos

$$\begin{aligned} U(\omega) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}}(b_0\omega^{n-1} - b_1\omega^{n-3} + b_2\omega^{n-5} - \dots) \\ V(\omega) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}-1}(a_0\omega^n - a_1\omega^{n-2} + a_2\omega^{n-4} - \dots) \end{aligned}$$

entonces escribimos

$$p(i\omega) = U(\omega) + iV(\omega)$$

El criterio de Routh está basado en el siguiente algoritmo (de Routh): con los coeficientes a_i, b_i construimos

$$\begin{aligned} c_0 &= a_1 - \frac{a_0}{b_0}b_1 = \frac{b_0a_1 - a_0b_1}{b_0}, \\ c_1 &= a_2 - \frac{a_0}{b_0}b_2 = \frac{b_0a_2 - a_0b_2}{b_0}, \\ c_2 &= a_3 - \frac{a_0}{b_0}b_3 = \frac{b_0a_3 - a_0b_3}{b_0}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.2}$$

análogamente con b_i, c_i construimos

$$\begin{aligned} d_0 &= b_1 - \frac{b_0}{c_0}c_1 = \frac{c_0b_1 - b_0c_1}{c_0}, \\ d_1 &= b_2 - \frac{b_0}{c_0}c_2 = \frac{c_0b_2 - b_0c_2}{c_0}, \\ d_2 &= b_3 - \frac{b_0}{c_0}c_3 = \frac{c_0b_3 - b_0c_3}{c_0}, \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.3}$$

y así sucesivamente. Con dichos coeficientes formamos el *esquema de Routh*:

$$\left. \begin{array}{cccc} a_0, & a_1, & a_3, & \dots \\ b_0, & b_1, & b_3, & \dots \\ c_0, & c_1, & c_3, & \dots \\ d_0, & d_1, & d_3, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{array} \right\} \quad (1.4)$$

Teorema 1.3.1 (Criterio de Routh). *Todas las raíces del polinomio real $p(x)$ tienen parte real negativa si y sólo si al realizar el algoritmo de Routh todos los elementos de la primera columna del esquema de Routh son diferentes de cero y del mismo signo.*

Ejemplo 1.3.2. Considérese el polinomio real con parámetros $p(\lambda_1, \lambda_2, s) = \lambda_1 s^3 + (\lambda_1 + \lambda_2)s^2 + (2\lambda_1 - \lambda_2)s + \lambda_2$ con $\lambda_1 \in [-0.5, 0.5]$ y $\lambda_2 \in [-0.1, 0.7]$. Con los coeficientes realizamos el algoritmo de Routh:

$$a_0 = \lambda_1, \quad b_0 = \lambda_1 + \lambda_2, \quad a_1 = 2\lambda_1 - \lambda_2, \quad b_1 = \lambda_2$$

$$c_0 = \frac{b_0 a_1 - a_0 b_1}{b_0} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)(2\lambda_1 - \lambda_2) - \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{2\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

El esquema de Routh queda

$$\begin{array}{cc} \lambda_1 & 2\lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_2 \\ \frac{2\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{\lambda_1 + \lambda_2} & 0 \end{array}$$

Se observa que puede ser complicado determinar para que valores de los parámetros λ_1 y λ_2 , en sus respectivos dominios, las entradas de la primera columna del esquema de Routh son distintas de cero y tienen el mismo signo.

CAPÍTULO 2

Familias de polinomios

En el capítulo 1 enunciamos los criterios clásicos de estabilidad. Estos criterios son prácticos cuando se analizan sistemas cuya matriz contiene entradas reales constantes (y por tanto el polinomio característico asociado al sistema tiene coeficientes constantes), pero se vuelve complicado su uso cuando se trabaja con sistemas que dependen de parámetros. Es por ello que se hizo necesario contar con otro tipo de criterios, basados obviamente en los criterios clásicos, que cubrieran las dificultades que aparecen en sistemas con parámetros. En este capítulo abordaremos una clasificación especial de polinomios cuyos coeficientes dependen de parámetros y algunos criterios elaborados para determinar la estabilidad de este tipo de polinomios. En [2] y [4] se pueden encontrar algunos resultados relacionados con familias de polinomios.

2.1. Incertidumbre paramétrica

Si un sistema lineal tiene la representación tradicional $\dot{x}(t) = Ax(t)$ podemos enfatizar la dependencia respecto a un parámetro \mathbf{q} escribiendo

$$\dot{x} = A(\mathbf{q})x(t) \tag{2.1}$$

La estabilidad de sistemas lineales e invariantes en el tiempo con incertidumbre en los parámetros ha sido estudiada ampliamente. Una forma de determinar dicha estabilidad es mediante su polinomio característico

$$p(s, \mathbf{q}) = a_0(\mathbf{q}) + a_1(\mathbf{q})s + a_2(\mathbf{q})s^2 + \cdots + a_n(\mathbf{q})s^n \tag{2.2}$$

cuyos coeficientes a_i dependen del vector de parámetros

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$

Los valores de cada parámetro q_i del sistema son constantes pero se desconocen sus valores exactos, solo se conocen sus límites mínimos y máximos: \underline{q}_i y \overline{q}_i , tales que $q_i \in [\underline{q}_i, \overline{q}_i]$. El conjunto

de todos los posibles vectores \mathbf{q} que puedan existir se le conoce como una caja de incertidumbre paramétrica

$$Q = \{\mathbf{q} = (q_1 \ q_2 \ \cdots \ q_l)^T \mid q_i \in [\underline{q}_i, \overline{q}_i], i = 1, 2, \dots, l\}$$

Por lo regular consideraremos que la caja de incertidumbre paramétrica está contenida en una bola con alguna norma apropiada. Las normas que frecuentemente utilizaremos serán ℓ^∞ y ℓ^2 . Bola y caja serán usadas en este trabajo como sinónimos.

Definición 2.1.1. Un polinomio con incertidumbre paramétrica junto con su conjunto acotado de parámetros Q es llamado una familia de polinomios $\mathcal{P}(s, Q)$, *i.e.*

$$\mathcal{P}(s, Q) = \{p(s, \mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in Q\}$$

Observación 2.1.2. Si $A(\mathbf{q})$ es una matriz con entradas que dependen de \mathbf{q} , podemos usar la notación $\mathcal{A} = \{A(\mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in Q\}$ para describir la familia de matrices resultante.

Ejemplo 2.1.3. Consideremos el sistema con variables de estado con incertidumbre descrito por

$$\dot{x}_1(t) = (1 + q_1)x_1(t) + (q_1 + q_2 + 4)x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = (3 + q_2)x_1(t) + (q_1 - q_2 + 3)x_2(t) + (2 + q_1)u(t)$$

con $|q_1| \leq 1$ y $|q_2| \leq 1$. Entonces la representación $\dot{x}(t) = A(\mathbf{q})x(t) + b(\mathbf{q})u(t)$ tiene la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + q_1 & q_1 + q_2 + 4 \\ 3 + q_2 & q_1 - q_2 + 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 + q_1 \end{pmatrix} u(t)$$

Definición 2.1.4 (estabilidad robusta). Una familia de polinomios $\mathcal{P} = \{p(\cdot, \mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in Q\}$ se dice que es robustamente estable si para todo $\mathbf{q} \in Q$ el polinomio $p(s, \mathbf{q})$ es estable.

Ejemplo 2.1.5. Consideremos la familia de primer orden $P(s, q) = \frac{1}{s-q}$ con $|q| \leq 2$. Cuando el sistema es compensado con una realimentación $C(s) = 1$, obtenemos el polinomio de lazo cerrado $p(s, q) = s + 1 - q$. La raíz de $p(s, q)$ es $s(q) = -1 + q$. Si $q \geq 1$ la familia de polinomios \mathcal{P} no es robustamente estable porque $s(q)$ cae en la mitad derecha del plano. Si $|q| \leq r$ puede verse que \mathcal{P} es robustamente estable si y sólo si $r < 1$.

Definición 2.1.6 (grado invariante). Una familia de polinomios

$$\mathcal{P} = \{p(\cdot, \mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in Q\}$$

se dice que tiene grado invariante si la siguiente condición se cumple: dados $\mathbf{q}, \mathbf{r} \in Q$ se sigue que

$$\text{grado } p(s, \mathbf{q}) = \text{grado } p(s, \mathbf{r})$$

Generalmente supondremos que $p(\cdot, \mathbf{q})$ tiene grado invariante.

Observación 2.1.7. Si para todo $\mathbf{q} \in Q$, $\text{grado } p(\cdot, \mathbf{q}) = n$ entonces decimos que \mathcal{P} es una familia de polinomios de n -ésimo grado. Si \mathcal{P} no tiene grado invariante decimos que ocurre un salto de grado.

Observación 2.1.8. Si consideramos un polinomio con incertidumbre paramétrica

$$p(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{q}) s^i$$

obsérvese que \mathcal{P} tendrá grado invariante si y sólo si $a_n(\mathbf{q}) \neq 0 \forall \mathbf{q} \in Q$.

Los polinomios con incertidumbre paramétrica se clasifican de acuerdo al tipo de estructura de los coeficientes $a_i(\mathbf{q})$ en Intervalo, Afín, Multilineal y Polinómico. Los polinomios Intervalo y Afín comparten la característica de que existe un subconjunto de prueba, esto es, que no tenemos que probar la estabilidad de toda la familia de polinomios $P(s, Q)$ sino únicamente de un subconjunto (a veces pequeño) de ella. Para el tipo Multilineal y Polinómico sólo nos limitaremos a decir que no tienen un subconjunto de prueba con el cual probar estabilidad y por ello se han buscado diferentes alternativas llevando por ejemplo dicho problema a uno de positividad de una función polinomial por medio de determinantes de Hurwitz.

2.2. Polinomios intervalo

Definición 2.2.1 (estructura de incertidumbre independiente). Un polinomio con incertidumbre paramétrica

$$p(s, \mathbf{q}) = \sum_{i=0}^n a_i(\mathbf{q}) s^i$$

se dice que tiene una estructura de incertidumbre independiente si cada componente q_i de \mathbf{q} aparece solo en un coeficiente.

Definición 2.2.2 (familia de polinomios intervalo). Una familia de polinomios $\mathcal{P} = \{p(\cdot, \mathbf{q}) \mid \mathbf{q} \in Q\}$ se dice que es una familia de polinomios intervalo si $p(s, \mathbf{q})$ tiene una estructura de incertidumbre independiente, cada coeficiente depende continuamente de \mathbf{q} y Q es una caja.

Ejemplos 2.2.3.

- 1) Una familia de polinomios \mathcal{P} aparece del polinomio con incertidumbre paramétrica descrito por

$$p(s, \mathbf{q}) = (5 + q_4)s^4 + (3 + q_3)s^3 + (2 + q_2)s^2 + (4 + q_1)s + (6 + q_0)$$

con parámetros acotados $|q_i| \leq 1$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4$.

- 2) Otra notación clásica para familias de polinomios intervalo es la siguiente

$$\mathcal{P} = \{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \mid a_4 \in [7, 8], a_3 \in [2, 6], \\ a_2 \in [1, 3], a_1 \in [0, 5], a_0 \in [4, 5]\}$$

que puede reescribirse como

$$\mathcal{P} = [7, 8]s^4 + [2, 6]s^3 + [1, 3]s^2 + [0, 5]s + [4, 5]$$

3) La representación de incertidumbre a veces involucra un cierto tipo de redundancia. Sea

$$p(s, \mathbf{q}) = s^3 + (5 + q_2 + 2q_3)s^2 + (6 + 2q_1 + 5q_4)s + (3 + q_0)$$

con parámetros $|q_i| \leq 0.5$ para $i = 0, 1, 2, 3, 4$, uno puede reacomodar la incertidumbre como sigue: definimos nuevos parámetros de incertidumbre

$$\tilde{q}_2 = 5 + q_2 + q_3, \quad \tilde{q}_1 = 6 + 2q_1 + 5q_4, \quad \tilde{q}_0 = 3 + q_0$$

y una nueva caja de incertidumbre \tilde{Q} con $2.5 \leq \tilde{q}_0 \leq 3.5$, $2.5 \leq \tilde{q}_1 \leq 9.5$, $3.5 \leq \tilde{q}_2 \leq 6.5$ y un nuevo polinomio

$$\tilde{p}(s, \tilde{q}) = s^3 + \tilde{q}_2 s^2 + \tilde{q}_1 s + \tilde{q}_0$$

Podemos llamar a $\tilde{\mathcal{P}} = \{\tilde{p}(\cdot, \tilde{q}) \mid \tilde{q} \in \tilde{Q}\}$ la versión *reacomodada* de la familia \mathcal{P} . No es difícil verificar que $\tilde{\mathcal{P}} = \mathcal{P}$.

En este trabajo centraremos nuestra atención en familias de polinomios intervalo aunque cabe mencionar la existencia de otro tipo de familias.

Ejemplos 2.2.4.

1) Considérese la familia

$$\mathcal{F} = \{a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \mid \|(a_3, a_2, a_1, a_0) - (1, 2, 5, 1)\|^2 < 4\}$$

que es llamada bola de polinomios.

2) Sea

$$p(s, \lambda) = (\lambda_1 + 5\lambda_2 + 7\lambda_3)s^4 + (2\lambda_1 + 3\lambda_3)s^3 + (5\lambda_1 + 2\lambda_3)s^2 + (3\lambda_2 + 5\lambda_3)s + (6\lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3)$$

con $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ en algún conjunto de \mathbb{R}^3 . Estas son llamadas familias con incertidumbre en los coeficientes de tipo lineal.

3) Sea

$$p(s, \lambda) = (\lambda_1 + \lambda_2 + 5)s^3 + (6\lambda_1 + 3\lambda_2 + 2)s^2 + (7\lambda_2 + 3)s + (5\lambda_1 + 6)$$

con (λ_1, λ_2) en algún conjunto de \mathbb{R}^2 . Estas son llamadas familias con incertidumbre de tipo afín.

4) Sea

$$p(s, \lambda) = (\lambda^2 + 5\lambda + 7)s^3 + (6\lambda^3 + 5\lambda + 2)s^2 + (6\lambda + 2)s + (4\lambda^2 + 7\lambda + 3)$$

con λ en algún conjunto de \mathbb{R} . Estas familias tienen incertidumbre en los coeficientes de tipo polinomial.

2.3. Teorema de Kharitonov

Los teoremas clásicos sobre estabilidad de polinomios fueron establecidos principalmente en el siglo XIX y el último resultado en aparecer fueron las condiciones de Liénard-Chipart en 1914. Desde entonces, no fue sino hasta 1978 que este tema alcanzó un nuevo impulso cuando V. Kharitonov resolvió el problema de encontrar condiciones necesarias y suficientes (sorprendentemente simples) para que una familia de polinomios intervalo sea estable. El artículo de Kharitonov ha sido citado en una gran cantidad de artículos y libros y propició que muchos investigadores dirigieran su atención a este tema.

Consideremos ahora el conjunto $\mathcal{P}(s, \delta)$ de polinomios reales de grado n de la forma

$$p(s, \delta) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \delta_3 s^3 + \cdots + \delta_n s^n$$

donde los coeficientes están en los rangos

$$\delta_0 \in [x_0, y_0], \delta_1 \in [x_1, y_1], \dots, \delta_n \in [x_n, y_n]$$

Supongamos que el grado de la familia permanece invariante, así que $0 \notin [x_n, y_n]$. En el siguiente lema $P^{par}(s)$, $P^{imp}(s)$, $P^o(\omega)$, $P^e(\omega)$ son como se definieron en la sección 1.2.

Lema 2.3.1. Sean $P_1(s)$ y $P_2(s)$ dos polinomios reales Hurwitz del mismo grado tales que

$$P_1(s) = P^{par}(s) + P_1^{imp}(s)$$

$$P_2(s) = P^{par}(s) + P_2^{imp}(s)$$

con la misma parte par $P^{par}(s)$ y con partes impares distintas $P_1^{imp}(s)$ y $P_2^{imp}(s)$ y además

$$P_1^o(\omega) \leq P_2^o(\omega) \quad \forall \omega \in [0, \infty)$$

Entonces el polinomio $P(s) = P^{par}(s) + P^{imp}(s)$ es Hurwitz y además satisface

$$P_1^o(\omega) \leq P^o(\omega) \leq P_2^o(\omega) \quad \forall \omega \in [0, \infty)$$

Demostración. Por ser $P_1(s)$ y $P_2(s)$ Hurwitz, $P_1^o(\omega)$ y $P_2^o(\omega)$ cumplen la propiedad de la alternancia de las raíces ($P_1^e(\omega)$ y $P_2^e(\omega)$ también tienen esta propiedad). Se tiene entonces que $\omega_{e,1} < \omega_{o,1}^1 < \omega_{o,1}^2 < \omega_{e,2}$

$$P^o(\omega_{o,1}^1) \geq P_1^o(\omega_{o,1}^1) = 0$$

$$P^o(\omega_{o,1}^2) \geq P_2^o(\omega_{o,1}^2) = 0$$

Por el teorema del valor intermedio existe $\omega_{o,1} \in [\omega_{o,1}^1, \omega_{o,1}^2]$ tal que $P^o(\omega_{o,1}) = 0$. Continuando con este razonamiento se tiene que $P^o(\omega)$ y $P^e(\omega)$ satisfacen la propiedad de la alternancia. Por lo tanto $P(s)$ es Hurwitz. ■

El dual del lema anterior es el siguiente:

Lema 2.3.2. Sean $P_1(s)$ y $P_2(s)$ dos polinomios reales Hurwitz del mismo grado tales que

$$P_1(s) = P_1^{par}(s) + P^{imp}(s)$$

$$P_2(s) = P_2^{par}(s) + P^{imp}(s)$$

con la misma parte impar $P^{imp}(s)$ y con partes pares distintas $P_1^{par}(s)$ y $P_2^{par}(s)$ y además

$$P_1^e(\omega) \leq P_2^e(\omega) \quad \forall \omega \in [0, \infty)$$

Entonces el polinomio $P(s) = P^{par}(s) + P^{imp}(s)$ es Hurwitz y además satisface

$$P_1^e(\omega) \leq P^e(\omega) \leq P_2^e(\omega) \quad \forall \omega \in [0, \infty)$$

Teorema 2.3.3 (Kharitonov). *La familia de polinomios*

$$P(s) = [x_0, y_0] + [x_1, y_1]s + \cdots + [x_n, y_n]s^n$$

consiste de polinomios Hurwitz si y sólo si son Hurwitz los siguientes polinomios

$$K^1(s) = x_0 + x_1s + y_2s^2 + y_3s^3 + x_4s^4 + x_5s^5 + y_6s^6 + \cdots$$

$$K^2(s) = x_0 + y_1s + y_2s^2 + x_3s^3 + x_4s^4 + y_5s^5 + y_6s^6 + \cdots$$

$$K^3(s) = y_0 + x_1s + x_2s^2 + y_3s^3 + y_4s^4 + x_5s^5 + x_6s^6 + \cdots$$

$$K^4(s) = y_0 + y_1s + x_2s^2 + x_3s^3 + y_4s^4 + y_5s^5 + x_6s^6 + \cdots$$

Nótese que sólo es necesario verificar la estabilidad de cuatro polinomios para garantizar la estabilidad de toda la familia.

Observación 2.3.4. El paralelepípedo $[x_0, y_0] \times [x_1, y_1] \times \cdots \times [x_n, y_n]$ se puede identificar con la familia intervalo y tiene 2^{n+1} vértices. Escribimos $\delta = [\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n]$ y sea Δ el hiper-rectángulo o caja de coeficientes (ver 2.3).

$$\Delta = \{\delta : \delta \in \mathbb{R}^{n+1}, x_i \leq \delta_i \leq y_i \ i = 0, 1, \dots, n\}$$

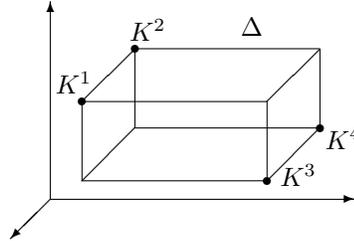


Figura 2.1: Paralelepípedo asociado a la familia intervalo.

Demostración. (Teorema)

\Rightarrow): Inmediata a partir de que todos los polinomios con coeficientes en Δ son estables y por tanto los polinomios de Kharitonov deben ser estables pues sus coeficientes están en Δ .

\Leftarrow): Supongamos que K^1, K^2, K^3, K^4 son Hurwitz. Definamos

$$K_{\text{máx}}^{par}(s) = y_0 + x_2s^2 + y_4s^4 + x_6s^6 + y_8s^8 + \cdots$$

$$K_{\text{mín}}^{par}(s) = x_0 + y_2s^2 + x_4s^4 + y_6s^6 + x_8s^8 + \cdots$$

y

$$\begin{aligned} K_{\text{máx}}^{\text{imp}}(s) &= y_1 s + x_3 s^3 + y_5 s^5 + x_7 s^7 + y_9 s^9 + \dots \\ K_{\text{mín}}^{\text{imp}}(s) &= x_1 s + y_3 s^3 + x_5 s^5 + y_7 s^7 + x_9 s^9 + \dots \end{aligned}$$

Los polinomios de Kharitonov pueden entonces escribirse como

$$\begin{aligned} K^1(s) &= K_{\text{mín}}^{\text{par}}(s) + K_{\text{mín}}^{\text{imp}}(s) \\ K^2(s) &= K_{\text{mín}}^{\text{par}}(s) + K_{\text{máx}}^{\text{imp}}(s) \\ K^3(s) &= K_{\text{máx}}^{\text{par}}(s) + K_{\text{mín}}^{\text{imp}}(s) \\ K^4(s) &= K_{\text{máx}}^{\text{par}}(s) + K_{\text{máx}}^{\text{imp}}(s) \end{aligned}$$

Sea $p(s) = p(s, \delta) = \delta_0 + \delta_1 s + \delta_2 s^2 + \dots + \delta_n s^n$ un polinomio arbitrario que pertenece a la familia, entonces

$$p(i\omega) = \delta_0 - \delta_2 \omega^2 + \delta_4 \omega^4 - \dots + i\omega(\delta_1 - \delta_3 \omega^2 + \delta_5 \omega^4 - \dots)$$

con $x_i \leq \delta_i \leq y_i$, ($i = 0, 1, \dots, n$). Luego

$$x_0 - y_2 \omega^2 + x_4 \omega^4 - \dots \leq \delta_0 - \delta_2 \omega^2 + \delta_4 \omega^4 - \delta_6 \omega^6 + \dots \leq y_0 - x_2 \omega^2 + y_4 \omega^4 - \delta_6 \omega^6$$

es decir

$$K^{2e}(\omega) = K^{1e}(\omega) \leq p^e(\omega) \leq K^{3e}(\omega) = K^{4e}(\omega)$$

Una desigualdad similar ocurre con $K^{i_o}(\omega)$ y $p^o(\omega)$.

Considerar el polinomio $g(s) = K_{\text{mín}}^{\text{par}}(s) + p^{\text{imp}}(s)$. Entonces $K^1(s)$, $K^2(s)$ y $g(s)$ tienen la misma parte par y por el lema $g(s)$ es Hurwitz. Similarmente si $h(s) = K_{\text{máx}}^{\text{par}}(s) + p^{\text{imp}}(s)$ entonces $K^3(s)$, $K^4(s)$ y $h(s)$ tienen la misma parte par. Por el lema 2.3.1 $h(s)$ es Hurwitz. Finalmente $g(s)$, $h(s)$ y $p(s)$ tienen la misma parte impar, entonces por el lema 2.3.2 $p(s)$ es Hurwitz.

■

Ejemplo 2.3.5. Considérese la siguiente familia de polinomios

$$p(t, \mathbf{q}) = q_0 + q_1 t + q_2 t^2 + q_3 t^3$$

con $q_0 \in [1, 2]$, $q_1 \in [5, 6]$, $q_2 \in [7, 9]$, $q_3 = 1$. Los polinomios de Kharitonov son

$$\begin{aligned} K^1(t) &= 1 + 5t + 9t^2 + t^3 \\ K^2(t) &= 1 + 6t + 9t^2 + t^3 \\ K^3(t) &= 2 + 5t + 7t^2 + t^3 \\ K^4(t) &= 2 + 6t + 7t^2 + t^3 \end{aligned}$$

Mediante cualquiera de los criterios expuestos en el capítulo 1 puede verificarse que todos los K^i son Hurwitz. Por lo tanto la familia es estable.

Observación 2.3.6. Dada la familia de polinomios \mathcal{P} puede ocurrir que no sea lineal en \mathbf{q} , sin embargo la imagen de $p(s, \mathbf{q})$ bajo cualquier caja \mathbf{q} es también una caja y \mathcal{P} es así un polinomio intervalo. Si la familia \mathcal{P} no es un polinomio intervalo, el teorema de Kharitonov puede, aún así, ser usado cubriendo \mathcal{P} con un polinomio intervalo $p(s, \mathbf{q})$. Si $p(s, \mathbf{q})$ es estable, entonces \mathcal{P} también es estable. Esta condición es sólo suficiente, pues la afirmación en sentido inverso no siempre es verdadera.

Ejemplo 2.3.7. La familia de polinomios

$$\mathcal{P} = \{p_5 s^4 + (p_4 + \cos^2(p_3))s^3 + 2p_1 s^2 + p_2 \sqrt{p_4} s + p_1 : \\ p_1 \in [5, 7], p_2 \in [3, 4], p_3 \in [-\pi/4, \pi/4], p_4 \in [1, 2], p_5 \in [1, 2]\}$$

no es un polinomio intervalo, pero es un subconjunto del polinomio

$$p(s) = [1, 2]s^4 + [3/2, 3]s^3 + [10, 14]s^2 + [3, 4\sqrt{2}]s + [5, 7]$$

los polinomios de Kharitonov asociados a p son:

$$K^1(s) = s^4 + \frac{3}{2}s^3 + 14s^2 + 4\sqrt{2}s + 5$$

$$K^2(s) = 2s^4 + \frac{3}{2}s^3 + 10s^2 + 4\sqrt{2}s + 7$$

$$K^3(s) = 2s^4 + 3s^3 + 10s^2 + 3s + 7$$

$$K^4(s) = s^4 + 3s^3 + 14s^2 + 3s + 5$$

puede verificarse que cada uno de ellos es estable, por lo tanto $p(s)$ es estable y por lo tanto también lo es \mathcal{P} .

Observación 2.3.8. Los polinomios de Kharitonov pueden también ser escritos en términos de los coeficientes de orden superior:

$$\begin{aligned} \hat{K}^1(s) &= x_n s^n + y_{n-1} s^{n-1} + y_{n-2} s^{n-2} + x_{n-3} s^{n-3} + x_{n-4} s^{n-4} + \dots \\ \hat{K}^2(s) &= x_n s^n + x_{n-1} s^{n-1} + y_{n-2} s^{n-2} + y_{n-3} s^{n-3} + x_{n-4} s^{n-4} + \dots \\ \hat{K}^3(s) &= y_n s^n + x_{n-1} s^{n-1} + x_{n-2} s^{n-2} + y_{n-3} s^{n-3} + y_{n-4} s^{n-4} + \dots \\ \hat{K}^4(s) &= y_n s^n + y_{n-1} s^{n-1} + x_{n-2} s^{n-2} + x_{n-3} s^{n-3} + y_{n-4} s^{n-4} + \dots \end{aligned}$$

2.4. Teorema de intersección de la frontera

El teorema de intersección de la frontera juega un papel muy importante en muchos de los resultados de la teoría de la estabilidad. De forma general, la idea que hay detrás del teorema es la siguiente: dada una familia de polinomios parametrizada y cualquier camino continuo respecto al parámetro que lleva un polinomio estable a uno inestable, entonces el primer punto inestable que se encuentra a lo largo de este camino corresponde a un polinomio cuyas raíces inestables caen en la frontera (y no en el interior) de la región de inestabilidad del plano complejo.

Consideremos una familia de polinomios $P(\lambda, s)$ que satisfagan la siguiente condición:

Hipótesis 2.4.1. $P(\lambda, s)$ es una familia de polinomios

1. de grado fijo n .
2. continuos con respecto de la variable λ para $\lambda \in [a, b]$.

Teorema 2.4.2 (de la intersección de la frontera). Si $P(\lambda, t)$ satisface la Hipótesis 2.4.1 y $P(a, t)$ tiene todas sus raíces en \mathbb{C}^- (i.e. $P(a, t)$ es Hurwitz) y $P(b, t)$ tiene al menos una raíz en \mathbb{C}^+ , entonces existe un número $\rho \in (a, b]$ tal que

- a) $P(\rho, t)$ tiene todas sus raíces en $\mathbb{C}^- \cup i\mathbb{R}$.
- b) $P(\rho, t)$ tiene al menos una raíz en $i\mathbb{R}$.

Demostración. Para probar este resultado introducimos el conjunto E de números reales r tales que $r \in (a, b]$ y que satisfacen la siguiente propiedad:

$$\forall r' \in (a, r), P(r', t) \text{ es Hurwitz}$$

A partir de que el conjunto de polinomios Hurwitz de grado n es un conjunto abierto, el conjunto E es no vacío. Sea $\rho = \sup E$. Este supremo existe pues E está acotado superiormente por b . Por ser ρ cota superior de E entonces para todo $r < \rho$, $P(r, t)$ tiene raíces en \mathbb{C}^- . Tomando el límite cuando $r \rightarrow \rho$ se tiene que las raíces de $P(\rho, t)$ están en $\mathbb{C}^- \cup i\mathbb{R}$. Por lo tanto se cumple el inciso a).

Si $P(\rho, t)$ tuviera todas sus raíces en \mathbb{C}^- entonces se puede encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que si $\bar{r} \in [a, \rho + \varepsilon]$ entonces $P(\bar{r}, t)$ es Hurwitz. Por lo tanto ρ no sería el supremo. Por lo tanto $P(\rho, t)$ tiene al menos una raíz en $i\mathbb{R} = \partial\mathbb{C}^-$. Así queda probado b). ■

Observación 2.4.3. En la conclusión del Teorema de Intesercción de la Frontera la existencia de ρ en el intervalo semiabierto (o semicerrado) $(a, b]$ garantiza que $P(\rho, t)$ tenga al menos una raíz en $i\mathbb{R}$, a partir de que $P(a, t)$ es considerado Hurwitz.

Observación 2.4.4. El resultado es más general pues se puede tomar una partición de los complejos: $V \cup W \cup Z$, tal que V, Z son abiertos y $W = \partial V = \partial Z$, $V \cap Z = \emptyset$. Si $P(a, t)$ tiene todas sus raíces en V y $P(b, t)$ tiene al menos una raíz en Z entonces existe ρ tal que

- a) $P(\rho, t)$ tiene sus raíces en $V \cup W$.
- b) $P(\rho, t)$ tiene al menos una raíz en $W = \partial V$.

Considérese nuevamente la familia de polinomios (2.2) entonces la matriz de Hurwitz asociada a p es a partir de (1.1)

$$H(p(s, \mathbf{q})) = \begin{pmatrix} a_1(\mathbf{q}) & a_3(\mathbf{q}) & a_5(\mathbf{q}) & \cdots & 0 \\ a_0(\mathbf{q}) & a_2(\mathbf{q}) & a_4(\mathbf{q}) & \cdots & 0 \\ 0 & a_1(\mathbf{q}) & a_3(\mathbf{q}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n(\mathbf{q}) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

El siguiente resultado ¹ nos ofrece otro criterio de estabilidad.

¹algunos autores lo llaman también Teorema de intersección de la frontera.

Teorema 2.4.5. *La familia de polinomios (2.2) es estable para todo $\mathbf{q} \in Q$ si y sólo si*

1. *Existe un $q_0 \in Q$ para el cual $p(s, q_0)$ es estable.*
2. *$\det H(p(s, \mathbf{q})) > 0 \forall \mathbf{q} \in Q$.*

La condición 2) del teorema establece que debemos verificar la positividad de la matriz de Hurwitz.

CAPÍTULO 3

Polinomios de Bernstein

Básicamente los polinomios de Bernstein permiten aproximar una función continua f definida en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, así como ajustar curvas o superficies. También permiten aproximar un conjunto de datos (como por ejemplo funciones poligonales). En éste último caso, por aproximación entenderemos una función que aproxima a la función verdadera pero no necesariamente reproduce el conjunto de datos exactamente. Esto es, la gráfica de la función que aproxima no pasará a través de los datos sino cerca de ellos. Como herramienta de ajuste, estos polinomios tienen varias ventajas, principalmente en diseño asistido por computadora. Existen circunstancias o experimentos en los que conviene encontrar o quedarse con una buena aproximación más que buscar interpolar los datos.

Los polinomios de Bernstein son llamados así porque son la base primordial de la demostración que Bernstein realizó del *Teorema de aproximación de Weierstrass*. La esencia de esta prueba es la construcción de una sucesión de polinomios que, como veremos en este capítulo, convergen uniformemente a una función continua. La demostración que realizó Bernstein apareció en 1912 y es de las últimas pruebas que se dieron del teorema de Weierstrass. Dicha demostración ha tenido un profundo impacto en muchas áreas. Los polinomios de Bernstein están conectados con la teoría de Probabilidad, con problemas sobre momentos, con la teoría de sumas de series divergentes. Problemas interesantes en análisis complejo, algunos de los cuales no han sido aún completamente resueltos, se refieren al comportamiento de los polinomios de Bernstein de funciones analíticas.

3.1. Propiedades de los polinomios de Bernstein

Los polinomios son útiles herramientas matemáticas que además se definen de forma sencilla. Pueden calcularse rápidamente en sistemas computacionales y permiten representar una gran variedad de funciones. Pueden ser derivados e integrados fácilmente y pueden ser unidos para formar curvas que aproximen una función tanto como se desee.

Sabemos que un polinomio real de una variable de la forma

$$p(t) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

puede ser representado como una combinación lineal de elementos de la base canónica

$$\beta = \{1, x, \dots, x^n\}$$

del espacio de polinomios. Esta base es tan solo una de un número infinito de bases para el espacio de polinomios. En lo siguiente discutiremos otra de las bases recientemente usadas del espacio de polinomios: los polinomios de Bernstein y analizaremos algunas de sus propiedades.

Definición 3.1.1. El polinomio de Bernstein de grado n asociado con la función $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está definido por

$$B_n(f; x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} (x-a)^i (b-x)^{n-i} f(x_i) \quad (3.1)$$

donde

$$x_i = a + ih = a + \frac{i}{n}(b-a) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

Observación 3.1.2. En el caso especial donde el intervalo es el $[0, 1]$, la ecuación (3.1) se reduce a:

$$B_n(f; x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (3.2)$$

Definición 3.1.3. Los *polinomios básicos de Bernstein* se definen como

$$B_{n,i}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \quad (3.3)$$

con $i = 0, 1, \dots, n$; $n = 0, 1, \dots$

Observación 3.1.4. Por conveniencia diremos que $B_{n,i} = 0$ si $i < 0$ ó $i > n$.

Observación 3.1.5. Hay $n + 1$ polinomios básicos de Bernstein de grado n .

A lo largo de este trabajo nos enfocaremos en la aproximación de una función f sobre $[0, 1]$. La modificación para otros intervalos se realiza por una transformación directa del intervalo $[a, b]$ en el intervalo $[0, 1]$.

Para quienes estén familiarizados con la Teoría de Probabilidades, reconocerán a los polinomios básicos de Bernstein como las funciones de densidad para una distribución binomial. Específicamente, $B_{n,i}(x)$ es la probabilidad de lograr exactamente i éxitos en una sucesión de n pruebas o ensayos independientes, en el cual la probabilidad de éxito en cualquier prueba es x . Según ésta observación y como veremos más adelante:

$$\sum_{i=0}^n B_{n,i}(x) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} = (x + (1-x))^n = 1 \quad (3.4)$$

Ejemplo 3.1.6.

1) Polinomios básicos de Bernstein de grado 1

$$B_{1,0}(x) = 1 - x, \quad B_{1,1}(x) = x$$

con $0 \leq x \leq 1$.

2) Polinomios básicos de Bernstein de grado 2

$$B_{2,0}(x) = (1-x)^2, \quad B_{2,1} = 2x(1-x), \quad B_{2,2} = x^2$$

3) Polinomios básicos de Bernstein de grado 3

$$\begin{aligned} B_{3,0}(x) &= (1-x)^3 \\ B_{3,1}(x) &= 3x(1-x)^2 \\ B_{3,2}(x) &= 3x^2(1-x) \\ B_{3,3}(x) &= x^3 \end{aligned}$$

Mostraremos a continuación algunas propiedades de los polinomios básicos de Bernstein.

Proposición 3.1.7. Sean $B_{n-1,k}(x)$ y $B_{n-1,k-1}(x)$ dos polinomios básicos de Bernstein de grado $n-1$. Entonces

$$B_{n,k}(x) = (1-x)B_{n-1,k}(x) + xB_{n-1,k-1}(x) \quad (3.5)$$

para $i, n \geq 1$.

Demostración.

$$\begin{aligned} (1-x)B_{n-1,k}(x) + xB_{n-1,k-1}(x) &= (1-x) \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-1-k} \\ &\quad + x \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-1-(k-1)} \\ &= \binom{n-1}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\quad + \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \right] x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= B_{n,k}(x) \end{aligned}$$

■

Observación 3.1.8. La proposición anterior nos ofrece, por medio de la ecuación (3.5), una definición recursiva para calcular los polinomios básicos de Bernstein.

Proposición 3.1.9. Los polinomios básicos de Bernstein son todos no negativos sobre el intervalo $[0, 1]$.

Demostración.

- i) $n = 1$. En este caso es inmediato que los polinomios básicos de Bernstein $B_{1,0}(x) = (1-x)$ y $B_{1,1}(x) = x$ son no negativos si $0 \leq x \leq 1$.
- ii) Supongamos que todos los polinomios básicos de Bernstein de grado $m < n$ son no negativos. Luego, a partir de la definición recursiva (3.5) tomando $m = n$

$$B_{m,i}(x) = (1-x)B_{m-1,i}(x) + xB_{m-1,i-1}(x)$$

Entonces $B_{m,i}(x) \geq 0$ para $0 \leq x \leq 1$, ya que por hipótesis de inducción los elementos del lado derecho de esta igualdad son no negativos.

■

Definición 3.1.10. Un conjunto de funciones $f_i(x)$ se dice que es una partición de la unidad si la suma de ellos es igual a 1 para todos los valores de x .

Proposición 3.1.11. Para cada $k \in \mathbb{N}$, la suma de los $k+1$ polinomios básicos de Bernstein de grado k es igual a la suma de los k polinomios básicos de Bernstein de grado $k-1$. Es decir

$$\sum_{i=0}^k B_{k,i}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} B_{k-1,i}(x)$$

Demostración. A partir de (3.5) tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^k B_{k,i}(x) &= \sum_{i=0}^k [(1-x)B_{k-1,i}(x) + xB_{k-1,i-1}(x)] \\ &= (1-x) \left[\sum_{i=0}^{k-1} B_{k-1,i}(x) + B_{k-1,k}(x) \right] \\ &\quad + x \left[\sum_{i=1}^k B_{k-1,i-1}(x) + B_{k-1,-1}(x) \right] \\ &= (1-x) \sum_{i=0}^{k-1} B_{k-1,i}(x) + x \sum_{i=1}^k B_{k-1,i-1}(x) \\ &= (1-x) \sum_{i=0}^{k-1} B_{k-1,i}(x) + x \sum_{i=0}^{k-1} B_{k-1,i}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} B_{k-1,i}(x) \end{aligned}$$

y hemos utilizado que $B_{k-1,k}(x) = B_{k-1,-1}(x) = 0$. ■

Proposición 3.1.12. Los $k+1$ polinomios básicos de Bernstein de grado k forman una partición de la unidad en el que la suma de todos ellos es igual a 1

$$\sum_{i=0}^k B_{k,i}(x) = 1 \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (3.6)$$

Demostración. Se sigue a partir del Teorema binomial¹. ■

Proposición 3.1.13. Cualquier polinomio básico de Bernstein de grado $n-1$ puede ser expresado como combinación lineal de polinomios básicos de grado n .

¹También puede obtenerse a partir de la proposición anterior ya que

$$\sum_{i=0}^n B_{n,i}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} B_{n-1,i}(x) = \dots = \sum_{i=0}^1 B_{1,i}(x) = (1-x) + x = 1$$

Demostración. Observemos primeramente lo siguiente

$$\begin{aligned}
 xB_{n,i}(x) &= \binom{n}{i} x^{i+1} (1-x)^{n-i} \\
 &= \binom{n}{i} x^{i+1} (1-x)^{(n+1)-(i+1)} \\
 &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i+1}} B_{n+1,i+1}(x) \\
 &= \frac{i+1}{n+1} B_{n+1,i+1}(x)
 \end{aligned}$$

y también

$$\begin{aligned}
 (1-x)B_{n,i}(x) &= \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n+1-i} \\
 &= \frac{\binom{n}{i}}{\binom{n+1}{i}} B_{n+1,i}(x) \\
 &= \frac{n-i+1}{n+1} B_{n+1,i}(x)
 \end{aligned}$$

y finalmente

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\binom{n}{i}} B_{n,i}(x) + \frac{1}{\binom{n}{i+1}} B_{n,i+1}(x) &= x^i (1-x)^{n-i} + x^{i+1} (1-x)^{n-(i+1)} \\
 &= x^i (1-x)^{n-i-1} [(1-x) + x] \\
 &= x^i (1-x)^{n-i-1} \\
 &= \frac{1}{\binom{n-1}{i}} B_{n-1,i}(x)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
 B_{n-1,i}(x) &= \binom{n-1}{i} \left[\frac{1}{\binom{n}{i}} B_{n,i}(x) + \frac{1}{\binom{n}{i+1}} B_{n,i+1}(x) \right] \\
 &= \frac{n-i}{n} B_{n,i}(x) + \frac{i+1}{n} B_{n,i+1}(x)
 \end{aligned}$$

■

Observación 3.1.14. Puede extenderse éste resultado para mostrar que cualquier polinomio básico de Bernstein de grado k , ($k < n$), puede ser escrito como combinación lineal de polinomios básicos Bernstein de grado n .

Ejemplo 3.1.15. Sabemos que $B_{2,1}(x) = 2x(1-x)$. Ahora según la proposición anterior, ha-

ciendo $i = 1$ y $n = 3$:

$$\begin{aligned}
 B_{2,1}(x) &= \frac{3-1}{3} B_{3,1}(x) + \frac{1+1}{3} B_{3,2}(x) \\
 &= \frac{2}{3} \binom{3}{1} x(1-x)^2 + \frac{2}{3} \binom{3}{2} x^2(1-x) \\
 &= 2x(1-x)^2 + 2x^2(1-x) \\
 &= 2x(1-x)[(1-x) + x] \\
 &= 2x(1-x)
 \end{aligned}$$

Ya que $\beta = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ forman una base para el espacio de polinomios de grado menor o igual a n , entonces cualquier polinomio básico de grado n puede ser escrito en términos de β .

Proposición 3.1.16.

$$B_{n,k}(x) = \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{n}{i} \binom{i}{k} x^i$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
 B_{n,k}(x) &= \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \binom{n}{k} x^k \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n-k}{i} x^i \\
 &= \sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i \binom{n}{k} \binom{n-k}{i} x^{i+k} \\
 &= \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{n}{k} \binom{n-k}{i-k} x^i \\
 &= \sum_{i=k}^n (-1)^{i-k} \binom{n}{i} \binom{i}{k} x^i
 \end{aligned}$$

■

Proposición 3.1.17.

$$x^k = \sum_{i=k}^n \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} B_{n,i}(x) \quad (3.7)$$

Demostración. Por inducción sobre k .

1) $k = 0$.

$$\sum_{i=0}^n \frac{\binom{i}{0}}{\binom{n}{0}} B_{n,i}(x) = \sum_{i=0}^n B_{n,i}(x) = 1$$

- 2) Supongamos que la expresión (3.7) es válida para $k < n$. Probaremos que es válida para $k = n$. En efecto:

$$\begin{aligned}
 x^n &= x(x^{n-1}) \\
 &= x \sum_{i=k-1}^n \frac{\binom{i}{k-1}}{\binom{n}{k-1}} B_{i,n-1}(x) \\
 &= \sum_{i=k}^n \frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}} x B_{i-1,n-1}(x) \\
 &= \sum_{i=k}^n \frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n-1}{k-1}} \frac{i}{n} B_{i,n} \\
 &= \sum_{i=k}^n \frac{\binom{i}{k}}{\binom{n}{k}} B_{i,n}(x)
 \end{aligned}$$

■

Las dos proposiciones anteriores pueden reescribirse como sigue

$$\begin{aligned}
 x^k &= \sum_{i=0}^n T_{ki} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \\
 B_{n,k}(x) &= \sum_{i=0}^n T_{ki}^{-1} x^i
 \end{aligned}$$

para $k = 0, \dots, n$, donde

$$T_{ki} = \binom{i}{k} \binom{n}{k}^{-1} \quad (3.8)$$

$$T_{ki}^{-1} = (-1)^{i-k} \binom{n}{i} \binom{i}{k} \quad (3.9)$$

con $k \leq i$, mientras que $T_{ki} = T_{ki}^{-1} = 0$, si $k > i$.

Observación 3.1.18. Las matrices T y T^{-1} son triangulares.

Ejemplo 3.1.19. El elemento x de la base β se expresaría como combinación de polinomios básicos de Bernstein de grado 2 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 x &= \sum_{i=1}^2 \frac{\binom{i}{1}}{\binom{2}{1}} B_{2,i}(x) = \frac{1}{2} B_{2,1}(x) + B_{2,2}(x) = \frac{1}{2} \binom{2}{1} x(1-x) + \binom{2}{2} x^2 \\
 &= x(1-x) + x^2
 \end{aligned}$$

Proposición 3.1.20. La derivada de un polinomio básico de Bernstein es

$$\frac{d}{dx} B_{n,k}(x) = n(B_{k-1,n-1}(x) - B_{n-1,k}(x))$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} B_{n,k}(x) &= \frac{d}{dx} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&= \frac{kn!}{k!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} + \frac{(n-k)n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} + \frac{n(n-1)!}{k!(n-k-1)!} x^k (1-x)^{n-k-1} \\
&= n \left[\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} x^k (1-x)^{n-k-1} \right] \\
&= n(B_{n-1,k-1}(x) - B_{n-1,k}(x))
\end{aligned}$$

■

Los polinomios básicos de Bernstein forman una base ya que:

1. Cualquier polinomio de grado menor o igual a n puede escribirse como combinación lineal de polinomios básicos de Bernstein. Puesto que la base $\beta = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$ genera el espacio de polinomios y cualquier miembro de β puede escribirse como combinación lineal de polinomios básicos de Bernstein.
2. Son linealmente independientes pues para todo x

$$\begin{aligned}
0 &= c_0 B_{n,0}(x) + c_1 B_{n,1}(x) + \dots + c_n B_{n,n}(x) \\
&= c_0 \sum_{i=0}^n (-1)^i \binom{n}{i} \binom{i}{0} x^i + c_1 \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \binom{i}{1} x^i + \dots \\
&\quad + c_n \sum_{i=n}^n (-1)^{i-n} \binom{n}{i} \binom{i}{n} x^i \\
&= c_0 + \left[\sum_{i=0}^1 c_1 \binom{n}{1} \binom{1}{1} \right] x + \dots + \left[\sum_{i=0}^n c_i \binom{n}{n} \binom{n}{n} \right] x^n
\end{aligned}$$

A partir de que β es base se tiene que

$$\begin{aligned}
c_0 &= 0 \\
\sum_{i=0}^1 c_i \binom{n}{1} \binom{1}{1} &= 0 \\
&\vdots \\
\sum_{i=0}^n c_i \binom{n}{n} \binom{n}{n} &= 0
\end{aligned}$$

lo cual implica que $c_0 = c_1 = \dots = c_n = 0$.

Según los resultados anteriores tenemos que, dado un polinomio de grado n podemos escribirlo como combinación lineal de polinomios básicos de Bernstein de grado n :

$$p(x) = c_0 B_{n,0}(x) + c_1 B_{n,1}(x) + \cdots + c_n B_{n,n}(x)$$

$$\Rightarrow p(x) = (B_{n,0}(x) \quad B_{n,1}(x) \quad \cdots \quad B_{n,n}(x)) \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p(x) = (1 \quad x \quad x^2 \quad \cdots \quad x^n) \begin{pmatrix} b_{0,0} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_{1,0} & b_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{2,0} & b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,0} & b_{n,1} & b_{n,2} & \cdots & b_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

donde los $b_{i,j}$ son los coeficientes de la base β que son usados para determinar el polinomio básico de Bernstein respectivo. Obsérvese que la matriz es triangular inferior.

Ejemplo 3.1.21. En el caso cuadrático ($n = 2$) la representación matricial es

$$p(x) = (1 \quad x \quad x^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3.1.22. En el caso cúbico

$$p(x) = (1 \quad x \quad x^2 \quad x^3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

El polinomio de Bernstein $B_n(f; x)$ visto como operador resulta ser un operador lineal.

Proposición 3.1.23. Si f y g son dos funciones sobre $[0, 1]$ entonces

$$B_n(\alpha f + \beta g; x) = \alpha B_n(f; x) + \beta B_n(g; x)$$

donde α y β son constantes.

Demostración. A partir de la expresión (3.2) tenemos:

$$\begin{aligned} B_n(\alpha f + \beta g; x) &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \left[\alpha f\left(\frac{i}{n}\right) + \beta g\left(\frac{i}{n}\right) \right] \\ &= \alpha \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} f\left(\frac{i}{n}\right) + \beta \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} g\left(\frac{i}{n}\right) \\ &= \alpha B_n(f; x) + \beta B_n(g; x) \end{aligned}$$

■

3.2. Aproximación de funciones mediante polinomios de Bernstein

A continuación estudiaremos el comportamiento de los polinomios de Bernstein cuando aproximamos funciones con ellos.

A partir de la expresión (3.6) podemos deducir que el polinomio de Bernstein para la función $f(x) = 1$ es la misma función. Es decir, esta función es reproducida exactamente por un polinomio de Bernstein. Diferenciando la expresión (3.6) obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{i-1} (1-x)^{n-i-1} [i(1-x) - (n-i)x] &= 0 \\ \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{i-1} (1-x)^{n-i-1} (i-nx) &= 0 \end{aligned}$$

y multiplicando por $x(1-x)$ tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i-1} (i-nx) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} &= n \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} x \\ \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \frac{i}{n} &= \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} x \\ \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \frac{i}{n} &= x \end{aligned} \tag{3.10}$$

Esto es, el polinomio de Bernstein para la función $f(x) = x$ reproduce también ésta función exactamente.

Continuando de esta forma: derivando la expresión (3.10) tenemos:

$$\sum_{i=0}^n \frac{i}{n} \binom{n}{i} x^{i-1} (1-x)^{n-i-1} (i-nx) = 1$$

y ahora multiplicando por $\frac{x(1-x)}{n}$ se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n \frac{i}{n} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \left(\frac{i}{n} - x \right) &= \frac{x(1-x)}{n} \\ \Leftrightarrow \sum_{i=0}^n \frac{i^2}{n^2} \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} - x^2 &= \frac{x(1-x)}{n} \end{aligned}$$

o bien

$$B_n(x^2; x) = x^2 + \frac{x(1-x)}{n}$$

Puede verificarse que

$$\max_{0 \leq x \leq 1} x(1-x) = \frac{1}{4}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \|x^2 - B_n(x^2; x)\|_\infty &= \max_{0 \leq x \leq 1} |x^2 - B_n(x^2; x)| \\ &= \max_{0 \leq x \leq 1} \left| -\frac{x(1-x)}{n} \right| \\ &= \frac{1}{n} \max_{0 \leq x \leq 1} x(1-x) \\ &= \frac{1}{4n} \end{aligned}$$

Luego, si $n \rightarrow \infty$

$$\|x^2 - B_n(x^2; x)\|_\infty \leq \frac{1}{4n} \rightarrow 0$$

Las buenas propiedades de los polinomios de Bernstein nos da esperanzas de que $B(f; x)$ podría ser una buena aproximación para $f(x)$ sobre $[0, 1]$. Y en efecto, esto es el corazón de la prueba que dió Bernstein al Teorema de aproximación de Weierstrass. Para la demostración requerimos un lema en el que utilizaremos la siguiente definición.

Definición 3.2.1. Sea $(f_n)_n$ una sucesión de funciones (real valuadas) definidas sobre un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}$. La sucesión $(f_n)_n$ converge uniformemente en S a una función f definida sobre S si para cada $\epsilon > 0$ existe un número natural N tal que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ para toda $x \in S$ y toda $n > N$.

Lema 3.2.2. Para $x \in \mathbb{R}$ y $n \geq 0$ se tiene que

$$\sum_{k=0}^n (nx - k)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x) \leq \frac{n}{4}$$

Demostración. A partir de que

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}, \quad k \geq 1$$

tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= nx \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} \\ &= nx \end{aligned} \tag{3.11}$$

Ahora, a partir de que

$$k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2}, \quad k \geq 2$$

tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= n(n-1)x^2 \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} x^j (1-x)^{n-2-j} \\ &= n(n-1)x^2 \end{aligned}$$

Sumando estos dos resultados, encontramos que

$$\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + nx = n^2x^2 + nx(1-x)$$

Ya que

$$(nx - k)^2 = n^2x^2 - 2nzk + k^2$$

y usando el teorema binomial junto con (3.11) obtenemos

$$\sum_{k=0}^n (nx - k)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n^2x^2 - 2nx(nx) + [n^2x^2 + nx(1-x)] = nx(1-x)$$

Lo cual establece la igualdad. Para obtener la desigualdad, tenemos que

$$x(1-x) \leq \frac{1}{4}$$

■

Teorema 3.2.3 (de Aproximación de Weierstrass). *Si $f(x)$ es continua en un intervalo $[a, b]$ entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe un $n \in \mathbb{N}$ y un polinomio $p_n(x)$ de grado n tal que*

$$|f(x) - p_n(x)| < \epsilon$$

para todo $x \in [a, b]$.

A continuación probamos la versión de Bernstein del Teorema de Aproximación de Weierstrass.

Teorema 3.2.4. *Si f es continua en $[0, 1]$, entonces $B_n(f; \cdot)$ converge uniformemente a f en $[0, 1]$.*

Demostración. Supongamos que f no es idénticamente cero y sea $M = \sup\{|f(x)| : x \in [0, 1]\}$. Consideremos $\epsilon > 0$. A partir de que f es continua en un intervalo cerrado se sigue que f es uniformemente continua en $[0, 1]$, es decir, existe $\delta > 0$ tal que si $x, y \in [0, 1]$ y $|x - y| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} \tag{3.12}$$

Sea $N = M/(\epsilon\delta^2)^2$. Debemos mostrar que

$$|B_n(f; x) - f(x)| < \epsilon \quad \forall x \in [0, 1] \quad \text{y} \quad \forall n > N$$

²queremos enfatizar que la elección de ésta N no depende de x .

Fijemos una $x \in [0, 1]$ y tomemos $n > N$. Según el lema 3.2.2 tenemos

$$f(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

y además

$$|B_n(f; x) - f(x)| \leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

Para estimar esta suma, dividimos el conjunto $\{0, 1, 2, \dots, n\}$ en dos conjuntos A y B

$$\begin{aligned} k \in A, & \quad \text{si} \quad \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta \\ k \in B, & \quad \text{si} \quad \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta \end{aligned}$$

Para $k \in A$ tenemos que

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

según (3.12) y

$$\sum_{k \in A} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \sum_{k \in A} \frac{\epsilon}{2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

usando (3.6). Para $k \in B$, tenemos

$$\left| \frac{k - nx}{n} \right| \geq \delta \quad \Rightarrow \quad (k - nx)^2 \geq n^2 \delta^2$$

y además

$$\begin{aligned} \sum_{k \in B} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &\leq 2M \sum_{k \in B} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{2M}{n^2 \delta^2} \sum_{k \in B} (k - nx)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \end{aligned}$$

Por el lema 3.2.2

$$\frac{2M}{n^2 \delta^2} \binom{n}{4} = \frac{M}{2n \delta^2} < \frac{M}{2N \delta^2} = \frac{\epsilon}{2}$$

se sigue entonces que

$$|B_n(f; x) - f(x)| < \epsilon$$

Esta prueba del Teorema de aproximación de Weierstrass demuestra que usando $B_n(f; x)$ se produce una base para obtener buenas aproximaciones para funciones. ■

Observación 3.2.5. En su prueba original, Bernstein da una estimación del error. En investigaciones posteriores se determinó que tan buena es la aproximación; éste resultado es debido a Voronovskaja³. Pueden consultarse [22], [27] y [8] para detalles de dicha aproximación.

³que por cierto fue alumna de Weierstrass

Teorema 3.2.6 (Fórmula asintótica). *Sea $f(x)$ acotada en $[0, 1]$ y suponga que la segunda derivada $f''(x)$ existe en un cierto punto x de $[0, 1]$ entonces*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n[f(x) - B_n(f; x)] = -\frac{x(1-x)}{2} f''(x)$$

Observación 3.2.7. En particular si $f''(x) \leq 0$, la diferencia $f(x) - B_n(f; x)$ es exactamente de orden n^{-1} .

A partir de la definición recursiva (3.5) para un polinomio básico Bernstein podemos implementar un algoritmo computacional eficiente para calcular estos polinomios básicos.

Algoritmo 3.2.8. Evaluación de los polinomios básicos de Bernstein.

Entrada: n, x

Inicializar: $B_0 = 1$

Calcular:

para $i = 1$ hasta n hacer

$$B_i := x * B_{i-1}$$

para $j = i - 1$ hasta 1

$$B_j := (1 - x) * B_j + x * B_{j-1}$$

$$B_0 := (1 - x) * B_0$$

Salida:

para $i = 0$ hasta n

$$B_{n,i}(x) := B_i$$

Ejemplo 3.2.9. Construir el polinomio de Bernstein que aproxima a $f(x) = \sin 2x$ con $x \in [0, 1]$.

Solución. Para una aproximación de primer grado tenemos:

$$B_{1,0}(x) = 1 - x, \quad B_{1,1}(x) = x$$

Evaluando en los extremos del intervalo:

$$\sin 0 = 0 \quad \text{y} \quad \sin 2 = 0.9093$$

Tenemos entonces

$$B(\sin 2x; x) = \sum_{i=0}^1 f\left(\frac{i}{1}\right) B_{1,i}(x) = (\sin 2 \cdot 0)(1 - x) + (\sin 2 \cdot 1)x = 0.9093x$$

que es una recta que interpola a la función $\sin 2x$ en los puntos 0 y 0.9093. Para una aproximación de segundo grado usamos los polinomios básicos

$$B_{2,0}(x) = (1 - x)^2, \quad B_{2,1}(x) = 2x(1 - x), \quad B_{2,2}(x) = x^2$$

y los valores son

$$\sin 2 \cdot 0 = 0, \quad \sin 2(1/2) = 0.8415, \quad \sin 2 \cdot 1 = 0.9093$$

Así la aproximación será

$$\begin{aligned} B(\text{sen } 2x; x) &= \sum_{i=0}^2 f\left(\frac{i}{2}\right) B_{2,i}(x) \\ &= \text{sen } 2 \cdot 0(1-x)^2 + (\text{sen } 1)2x(1-x) + (\text{sen } 2)x^2 \\ &= 1.6830x(1-x) + 0.9093x^2 \end{aligned}$$

que nuevamente interpola a la función original en los dos puntos finales. ■

3.2.1. Aproximación de funciones poligonales

Consideremos ahora el problema de obtener una buena aproximación suave a una función poligonal o lineal por trozos. Consideremos entonces un conjunto de vértices para la curva poligonal de la forma (x_i, f_i) para $i = 0, \dots, N$ donde por simplicidad asumiremos que

$$0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1$$

Estos puntos definen una interpolación lineal por trozos ⁴ dado por

$$f(x) = \frac{f(x_i)(x_{i+1} - x) + f(x_{i+1})(x - x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

con $x \in [x_i, x_{i+1}]$, y ésta función puede entonces aproximarse por polinomios de Bernstein. Nuevamente, el polinomio de Bernstein solo coincide en los puntos x_0 y x_N y no interpola a ningún otro punto. Lo anterior es congruente con el teorema de aproximación en el sentido de que el polinomio de Bernstein provee una buena aproximación uniforme. Puede verse también, que si la función poligonal es concava entonces todos los polinomios de Bernstein asociados a ella están por debajo de la función y se aproximan de forma monótona, como se ilustra en la figura 3.1. Esto es consecuencia del siguiente hecho.

Proposición 3.2.10. *Si f y g son dos funciones sobre $[0, 1]$ tales que $f(x) \leq g(x) \forall x \in [0, 1]$ entonces $B_n(f; x) \leq B_n(g; x)$.*

Demostración. A partir de que $B_{n,i}(x) \geq 0$ para $0 \leq x \leq 1$ y de que $\sum_{i=0}^n B_{n,i}(x) = 1$ se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n B_{n,i}(x)[f(x) - g(x)] &\leq f(x) - g(x) \leq 0 \\ \Leftrightarrow B_n(f - g; x) &\leq 0 \\ \Leftrightarrow B_n(f; x) - B_n(g; x) &\leq 0 \end{aligned}$$

por linealidad. ■

Otro hecho importante es que si la curva poligonal no es concava los polinomios de Bernstein cruzarán la curva y puede suceder que algunos de estos polinomios sean concavos y otros no, como se ilustra en la figura 3.2. Estas observaciones fueron usadas – de manera independiente – por Bezier y Casteljaou para desarrollar una potente herramienta en gráficas computarizadas y

⁴conocida también en la literatura como un “spline” lineal.

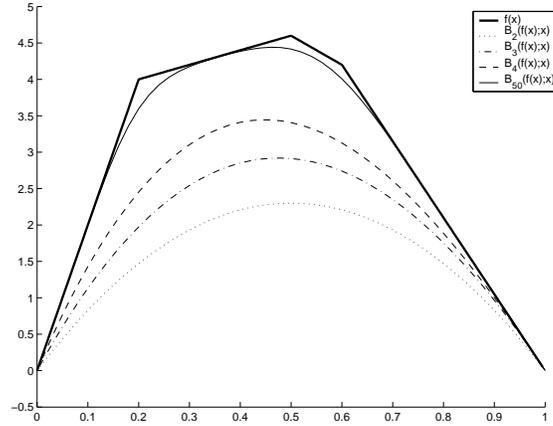


Figura 3.1: Aproximación por polinomios de Bernstein a una poligonal

diseño asistido por computadora. La idea básica es pensar en los puntos (x_i, f_i) no como datos sino como *puntos de control* que pueden ser movidos para dar como resultado un polinomio de Bernstein con la forma que se desee. Históricamente el primero en desarrollar esta herramienta fue Casteljau y su idea se considera hoy en día geométrica. Posteriormente fue Bezier quien desde otro enfoque dió una definición analítica.

Definición 3.2.11. Dados los puntos de control $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ podemos definir la *curva de Bezier* de grado n mediante

$$p(x) = \sum_{i=0}^n p_i B_{n,i}(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

donde $B_{n,i}(x)$ son los polinomios de Bernstein

Observación 3.2.12. La expresión anterior requiere $\frac{n(n+1)}{2}$ sumas y $n(n+1)$ multiplicaciones por coordenada.

Definición 3.2.13. Dados los puntos de control $\{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ podemos definir una curva de Bezier mediante el *Algoritmo de Casteljau*:

$$p(x) = p_i^{(j)}(x)$$

donde

$$p_i^{(j)}(x) = \begin{cases} (1-x)p_{i-1}^{(j-1)}(x) + xp_i^{(j-1)}(x) & \text{si } j > 0 \\ p_i(x) & \text{si } j = 0 \end{cases}$$

con $j = 1, \dots, n$; $i = 0, \dots, n-j$.

El Algoritmo de Casteljau nos permite inferir un par de propiedades importantes de las curvas de Bezier.

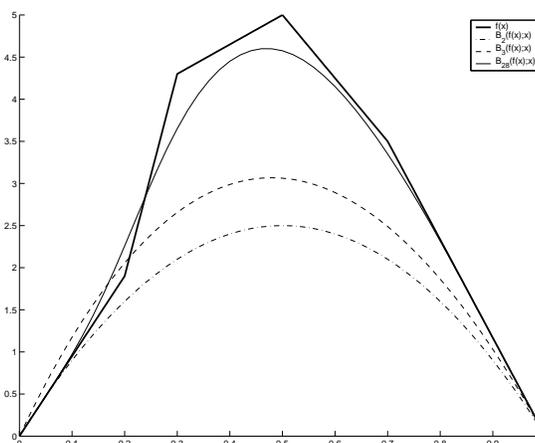


Figura 3.2: Aproximación por polinomios de Bernstein a una función no concava

1. Afinidad invariante.

Dado un número arbitrario de puntos p_0, p_1, \dots, p_n y si $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ son números reales tales que $\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$ entonces la combinación

$$\alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n$$

es una combinación afín.

El Algoritmo de Casteljau está compuesto de una sucesión de combinaciones afines que además son invariantes, pues el reposicionamiento o traslación del parámetro del intervalo $[0, 1]$ al intervalo $[a, b]$ no afecta la forma de la curva.

2. Propiedad del casco convexo.

Dado un conjunto de puntos p_0, p_1, \dots, p_n , si $p = \alpha_0 p_0 + \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_n p_n$ es una combinación afín y si cada α_i es tal que $0 \leq \alpha_i \leq 1$ entonces el punto p es una combinación convexa de p_0, p_1, \dots, p_n . Recordemos, que un conjunto es convexo si dados cualesquiera dos puntos del conjunto, la combinación convexa de estos puntos está nuevamente en el conjunto. El conjunto de todos los puntos p que pueden escribirse como combinación convexa de los puntos p_0, p_1, \dots, p_n es llamado casco convexo de p_0, p_1, \dots, p_n . Este casco convexo es el conjunto convexo más pequeño que contiene al conjunto de puntos p_0, p_1, \dots, p_n .

3.3. Algunos aspectos numéricos

La condición numérica de un problema es una medición de la sensibilidad de su solución frente a perturbaciones de sus parámetros de entrada. Está caracterizada por un valor escalar llamado *número de condición* y uno de los principales propósitos del análisis numérico es identificar y evitar problemas con número de condición grande. De forma general decimos que un problema matemático es *bien condicionado* si una pequeña perturbación en los datos de entrada producen una pequeña perturbación en el resultado; se dice *mal condicionado* si ocurre lo contrario. Tradicionalmente el número de condición es denotado por κ . Numéricamente, decimos que un

problema es bien condicionado si κ tiene un valor alrededor de 10^2 y mal condicionada si tiene un valor mayor de 10^6 .

Consideremos un vector columna arbitrario $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ de n elementos reales. La p -norma del vector v se define como

$$\|v\|_p = \left[\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right]^{1/p}$$

Para cualquier matriz M de dimensión $n \times n$, la norma matricial inducida por la norma (ver [30]) se define como:

$$\|M\|_p = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Mv\|_p}{\|v\|_p}$$

Definición 3.3.1. El número de condición de una matriz no singular M con norma inducida p se define como

$$\kappa_p(M) = \|M\|_p \|M^{-1}\|_p$$

A partir de que podemos realizar la conversión de un polinomio en la base canónica a base Bernstein y viceversa podemos hacernos la pregunta de qué tan bien condicionado es este problema.

Los resultados obtenidos en [6] muestran que si $\kappa_p(T)$ ⁵ denota el número de condición de la matriz T en la norma p , entonces se tiene que: $\kappa_p(T) = \kappa_p(T^{-1})$, donde T y T^{-1} son las matrices de cambio de base dadas en las ecuaciones (3.8) y (3.9). Además en las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ se tiene que

$$\kappa(T) \approx \frac{3^{n+1} \sqrt{n+1}}{2\sqrt{\pi}}$$

El crecimiento de $\kappa(t)$ con n sugiere una potencial pérdida de exactitud durante la conversión de polinomios de alto grado, *i.e.* las matrices T y T^{-1} son mal condicionadas. Para polinomios de grado $n > 12$ se tiene que $\kappa(t) > 1 \times 10^6$. Se reportan valores similares (ver [5]) para $\kappa(t)$ usando $\|\cdot\|_2$. Sin embargo como veremos en el último capítulo esta situación no representa una desventaja para aplicar la expansión de Bernstein a familias de polinomios.

Otro concepto importante en el análisis numérico es el de estabilidad, que se refiere al comportamiento de un algoritmo computacional bajo perturbaciones en los datos. Como la transformación de cualquier polinomio a base Bernstein puede realizarse también computacionalmente, usando aritmética de punto flotante, resulta que dicha transformación es estable numéricamente bajo la influencia de aritmética computacional imprecisa o por datos de entrada perturbados (ver [7]). Esto se debe a que en la transformación sólo se utilizan operaciones elementales (suma, multiplicación y división⁶ con aritmética de punto flotante) y éstas operaciones son estables.

⁵ κ mide la amplificación más grande posible de error en los coeficientes en la conversión de bases.

⁶en el caso de la división ésta no presenta problemas, por ejemplo de división por cero, a partir de que los cocientes son entre coeficientes binomiales.

CAPÍTULO 4

Estabilidad de polinomios

La conversión del problema general de estabilidad de un polinomio con incertidumbre paramétrica a un problema de positividad de un polinomio multivariable abre la posibilidad de aplicar la expansión de Bernstein. Como se estudió en el capítulo anterior los polinomios de Bernstein ofrecen una muy buena aproximación de una función continua. Desde otro enfoque podemos decir que dicha expansión produce cotas ajustadas sobre el rango del polinomio. Entonces es mediante las cotas de la expansión de Bernstein asociada al polinomio con incertidumbre que se determina la estabilidad. En particular el criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz es aplicado junto con el Teorema de Intersección de la Frontera. La estabilidad se verifica probando la positividad de un polinomio real usando un algoritmo de subdivisión sobre la expansión de Bernstein.

4.1. Cotas para la expansión de Bernstein

4.1.1. Polinomios bivariados

Para estimar los valores de las cotas para el rango haremos por simplicidad el análisis para el caso de un polinomio bivariado y posteriormente haremos la generalización para un polinomio multivariado.

Brevemente recordaremos la expansión de Bernstein para un polinomio univariado y posteriormente generalizaremos la expansión para el caso multivariado. Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales dado por

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

Supóngase que queremos conocer el rango de p sobre un intervalo dado $[a, b]$, *i.e.*

$$p([a, b]) = \{p(x) \mid x \in [a, b]\}$$

Como antes, supongamos que el intervalo $[a, b]$ es el intervalo unitario $U = [0, 1]$. Ahora, representemos p como combinación lineal de polinomios básicos Bernstein del mismo grado

$$B_{n,i}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i} \quad (i = 0, \dots, n)$$

obteniendo

$$p(x) = \sum_{i=0}^n b_i B_{n,i}(x)$$

donde los coeficientes b_i de ésta expansión – llamados *coeficientes Bernstein* – son sumas pesadas de los coeficientes de p , *i.e.*

$$b_i = \sum_{j=0}^i \frac{\binom{i}{j}}{\binom{n}{j}} a_j \quad (i = 0, \dots, n)$$

A partir de los coeficientes Bernstein pueden obtenerse cotas para el rango de p sobre U :

$$p(U) \subseteq [\text{mín } b_i, \text{máx } b_i] \quad (i = 0, \dots, l) \quad (4.1)$$

que se conoce como la propiedad del *rango cercado*. Podemos similarmente formular esta propiedad si introducimos los siguientes puntos de control

$$(i/l, b_i) \quad (i = 0, \dots, l)$$

como la propiedad del casco convexo:

$$\{(x, p(x)) \mid x \in U\} \subseteq \text{conv}\{(i/l, b_i) \mid i = 0, \dots, l\}$$

donde $\text{conv } A$ denota el casco convexo del conjunto A , *i.e.* el conjunto convexo más pequeño que contiene al conjunto A .

Estas cotas pueden ser mejoradas si bisectamos U en dos intervalos, digamos $[0, 1/2]$ y $[1/2, 1]$, y aplicamos el procedimiento sobre los dos intervalos. Entonces $p(U)$ está contenido en la unión de los cascos convexos de los puntos de control de ambos subintervalos. Más adelante veremos que los coeficientes Bernstein de p sobre $[0, 1/2]$ pueden ser calculados de aquellos que están en U formando recursivamente una media aritmética (similar al Algoritmo de Casteljaou). Como resultados intermedios de este cálculo obtendremos los coeficientes de Bernstein en el subintervalo vecino $[1/2, 1]$, sin necesidad de cálculos adicionales. Si continuamos este procedimiento, entonces obtendremos a partir de (4.1) sucesiones de cotas inferiores y superiores que convergen cuadráticamente a $\text{mín } p(U)$ y $\text{máx } p(U)$, respectivamente.

Considérese ahora

$$p(x, y) = \sum_{\mu, \nu}^n a_{\mu\nu} x^\mu y^\nu \quad (4.2)$$

un polinomio en dos variables de grado n con coeficientes reales a_{ij} y sea Q un rectángulo tal que

$$Q = X \times Y \quad \text{con} \quad X = [\underline{x}, \bar{x}], \quad Y = [\underline{y}, \bar{y}] \quad (4.3)$$

El objetivo es hallar el rango de p sobre Q , *i.e.*

$$P(Q) = \{p(x, y) \mid (x, y) \in Q\} = [\underline{m}, \bar{m}]$$

donde

$$\underline{m} = \text{mín}_{(x,y) \in Q} p(x, y) \quad \text{y} \quad \bar{m} = \text{máx}_{(x,y) \in Q} p(x, y)$$

Una forma para estimar esos valores es hallar cotas convergentes superiores e inferiores $\bar{m}_k, \underline{m}_k$ para el rango de $P(Q)$, *i.e.*

$$\bar{m}_k \geq \bar{m} \quad \text{y} \quad \underline{m}_k \leq \underline{m}$$

con $\bar{m}_k \rightarrow \bar{m}$ y $\underline{m}_k \rightarrow \underline{m}$ cuando $k \rightarrow \infty$.

Sin pérdida de generalidad supondremos que $Q = U = [0, 1] \times [0, 1]$. Discutiremos a continuación cómo estimar las cotas mediante la expansión de Bernstein. Sea $k \geq n$ y $K = \{(i, j) \mid i, j = 0, 1, \dots, k\}$. Para $(i, j) \in K$ el polinomio básico de Bernstein de grado k para un polinomio bivariado se define como

$$B_{ij}^{(k)}(x, y) = \binom{k}{i} \binom{k}{j} x^i (1-x)^{k-i} y^j (1-y)^{k-j} \quad (4.4)$$

con $x, y \in U$. Como una extensión a dos variables de la expresión (3.7) tenemos que

$$x^\mu y^\nu = \sum_{s=\mu, t=\nu}^k \frac{\binom{s}{\mu} \binom{t}{\nu}}{\binom{k}{\mu} \binom{k}{\nu}} B_{ij}^{(k)}(x, y) \quad (4.5)$$

La transformación de (4.2) en expansión de Bernstein se escribe como

$$p(x, y) = \sum_{(i,j) \in K} b_{ij}^{(k)} B_{ij}^{(k)}(x, y) \quad (4.6)$$

donde

$$b_{ij}^{(k)} = \sum_{s=0}^i \sum_{t=0}^j \frac{\binom{i}{s} \binom{j}{t}}{\binom{k}{s} \binom{k}{t}} a_{st} \quad (4.7)$$

son los coeficientes de Bernstein y convenimos que $a_{st} = 0$ para $s > n$ ó $t > n$.

Teorema 4.1.1. *Sea $p(x, y)$ como en (4.2), entonces tenemos que*

$$\max_{(i,j) \in K} b_{ij}^{(k)} \geq \bar{m} \quad (4.8)$$

$$\min_{(i,j) \in K} b_{ij}^{(k)} \leq \underline{m} \quad (4.9)$$

para cada $k \geq n$. La igualdad se cumple en la desigualdad izquierda (derecha) si y sólo si $\min_{(i,j) \in K} b_{ij}^{(k)}$ ($\max_{(i,j) \in K} b_{ij}^{(k)}$) es alguno de los vértices $b_{00}^{(k)}, b_{k0}^{(k)}, b_{0k}^{(k)}, b_{kk}^{(k)}$.

Demostración. Cómo una extensión de la proposición 1.1.2 se tiene que

$$0 \leq B_{ij}^{(k)}(x, y) \quad \forall (x, y) \in U, (i, j) \in K$$

además

$$\begin{aligned} \sum_{(i,j) \in K} B_{ij}^{(k)}(x, y) &= 1 \quad (x, y) \in U \\ \bar{m} &= \max_{(x,y) \in Q} p(x, y) \\ &= \max_{(x,y) \in Q} \sum_{(i,j) \in K} b_{ij}^{(k)} B_{ij}^{(k)}(x, y) \\ &\leq \max_{(i,j) \in K} b_{ij}^{(k)} \left[\max_{(x,y) \in Q} \sum_{(i,j) \in K} B_{ij}^{(k)}(x, y) \right] \\ &= \max_{(i,j) \in K} b_{ij}^{(k)} \end{aligned}$$

La otra desigualdad se obtiene de manera análoga.

Si $\max_{(i,j) \in K} b_{ij}^{(k)}$ es alguno de los coeficientes $b_{00}^{(k)}, b_{k0}^{(k)}, b_{0k}^{(k)}, b_{kk}^{(k)}$ entonces a partir de que

$$\begin{aligned} b_{00}^{(k)} &= a_{00} = p(0, 0) \\ b_{0k}^{(k)} &= \sum_{t=0}^k a_{0t} = p(0, 1) \\ b_{k0}^{(k)} &= \sum_{s=0}^k a_{s0} = p(1, 0) \\ b_{kk}^{(k)} &= \sum_{(s,t) \in K} a_{st} = p(1, 1) \end{aligned}$$

se tiene que $\max_{(i,j) \in K} b_{ij}^{(k)} = \bar{m}$.

Sea $\bar{m} = p(\hat{x}, \hat{y})$ con $(\hat{x}, \hat{y}) \in U$ y supongamos que $\max_{(i,j) \in K} b_{ij}^{(k)} = \bar{m}$ y que

$$\max_{(i,j) \in K} b_{ij}^{(k)} > b_{00}^{(k)}, b_{0k}^{(k)}, b_{k0}^{(k)}, b_{kk}^{(k)}$$

entonces si $(\hat{x}, \hat{y}) \in (0, 1)$

$$p(\hat{x}, \hat{y}) < \max_{(i,j)} b_{ij}^{(k)} \sum_{(ij)} B_{ij}(\hat{x}, \hat{y}) = \max_{(i,j)} b_{ij}^{(k)}$$

lo cual es una contradicción. ■

El siguiente teorema muestra que las cotas dadas en (4.8) y (4.9) convergen a \bar{m} y \underline{m} .

Teorema 4.1.2. *Si $k \geq 2$, entonces*

$$\max_{(i,j) \in K} b_{ij}^{(k)} - \bar{m} \leq \frac{\gamma(k-1)}{k^2} \quad (4.10)$$

$$\underline{m} - \min_{(i,j) \in K} b_{ij}^{(k)} \leq \frac{\gamma(k-1)}{k^2} \quad (4.11)$$

donde

$$\gamma = \sum_{\mu, \nu=0}^n \left\{ [\max(0, \mu-1)]^2 + [\max(0, \nu-1)]^2 \right\} |a_{\mu\nu}| \quad (4.12)$$

Demostración. Como una extensión en dos variables de la expresión (3.2) para una función f definida en U tenemos

$$B_k(f; x, y) = \sum_{(i,j) \in K} f\left(\frac{i}{k}, \frac{j}{k}\right) B_{ij}^{(k)}(x, y)$$

Para $s, t \leq n$, denotemos por $\delta_{ij}(s, t)$ con $(i, j) \in K$ los coeficientes de Bernstein del polinomio

$$B_k(x^s y^t; x, y) - x^s y^t$$

$$\begin{aligned}
B_k(x^s y^t; x, y) - x^s y^t &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k \binom{i}{k}^s \binom{j}{k}^t B_{ij}^{(k)}(x, y) \\
&\quad - \sum_{\sigma=s}^k \sum_{\tau=t}^k \frac{\binom{\sigma}{k} \binom{\tau}{k}}{\binom{\sigma}{s} \binom{\tau}{t}} B_{\sigma\tau}^{(k)}(x, y) \\
&= \sum_{i=0}^{s-1} \sum_{j=0}^{t-1} \binom{i}{k}^s \binom{j}{k}^t B_{ij}^{(k)}(x, y) \\
&\quad + \sum_{i=s}^k \sum_{j=t}^k \left[\binom{i}{k}^s \binom{j}{k}^t - \frac{\binom{i}{k} \binom{j}{k}}{\binom{i}{s} \binom{j}{t}} \right] B_{ij}^{(k)}(x, y)
\end{aligned}$$

Como se mostró en la sección 3.2 la expansión de Bernstein reproduce exactamente a la función constante $f(x) = 1$ y a la función $f(x) = x$. Entonces, en el caso bivariado, se tiene que

$$B_k(x^s y^t; x, y) = x^s y^t$$

para $s, t \leq 1$. Entonces $\delta_{ij}(s, t) = 0$ para $(i, j) \in K$ y $s, t \leq 1$. Por lo tanto, supongamos que $s \geq 2$ ó $t \geq 2$.

Si $0 \leq i < s$, obsérvese lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{i}{s} \binom{j}{t}}{\binom{k}{s} \binom{k}{t}} &= \frac{i! j! (k-s)! (k-t)!}{(i-s)! (j-t)! k! k!} \\
&= \frac{i(i-1)(i-2) \cdots (i-[s-1]) j(j-1)(j-2) \cdots (j-[t-1])}{k(k-1)(k-2) \cdots (k-[s-1]) k(k-1)(k-2) \cdots (k-[t-1])} \\
&= \underbrace{\left(\frac{i}{k} \right) \left(\frac{i-1}{k-1} \right) \cdots \left(\frac{i-[s-1]}{k-[s-1]} \right)}_{s \text{ factores}} \underbrace{\left(\frac{j}{k} \right) \left(\frac{j-1}{k-1} \right) \cdots \left(\frac{j-[t-1]}{k-[t-1]} \right)}_{t \text{ factores}}
\end{aligned}$$

Sea $l = 1, 2, \dots, s-1$, sabemos que $i \leq k$ entonces

$$l(i-k) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad ki - kl \leq ki - li \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{i-l}{k-l} \right) \leq \frac{i}{k}$$

análogamente si $m = 1, 2, \dots, t-1$

$$\left(\frac{j-m}{k-m} \right) \leq \frac{j}{k}$$

Por lo que tenemos

$$\frac{\binom{i}{s} \binom{j}{t}}{\binom{k}{s} \binom{k}{t}} \leq \left(\frac{i}{k} \right)^s \left(\frac{j}{k} \right)^t \quad (4.13)$$

también se satisfacen las siguientes desigualdades

$$\left(\frac{i}{k} \right)^s \left(\frac{j}{k} \right)^t \leq \left(\frac{i}{k} \right)^s \leq \left(\frac{s-1}{k} \right)^s \quad (4.14)$$

Por otra parte como $k \geq s - 1$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^s} &\leq \frac{1}{(s-1)^s} \\ \Rightarrow \frac{(s-1)^s}{k^s} &\leq \frac{(s-1)^2}{k^2} \leq \frac{(s-1)^2}{k^2} (k-1) = \frac{(s-1)^2}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Por lo tanto a partir de (4.13)–(4.15) se tiene que

$$\delta_{ij}(s, t) \leq \frac{(s-1)^2}{k} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \quad (4.16)$$

Si $2 \leq s \leq i$ y $2 \leq t \leq j$

$$\begin{aligned} \delta_{ij}(s, t) &= \left(\frac{i}{k}\right)^s \left(\frac{j}{k}\right)^t - \frac{\binom{i}{s} \binom{j}{t}}{\binom{k}{s} \binom{k}{t}} \\ &\leq \left(\frac{i}{k}\right)^s \left(\frac{j}{k}\right)^t \left[1 - \left(\frac{s-1}{i}\right)^{s-1} \left(\frac{t-1}{j}\right)^{t-1}\right] \\ &\leq \left(\frac{i}{k}\right)^s \left(\frac{j}{k}\right)^t \left[1 - \left(1 - \frac{s-1}{i}\right)^{s-1} \left(1 - \frac{t-1}{j}\right)^{t-1}\right] \end{aligned}$$

Aplicando la desigualdad de Bernoulli

$$\begin{aligned} \delta_{ij}(s, t) &\leq \left(\frac{i}{k}\right)^s \left(\frac{j}{k}\right)^t \left[\frac{(s-1)^2}{i} + \frac{(t-1)^2}{j}\right] \\ &= \left(\frac{i}{k}\right)^{s-1} \left(\frac{j}{k}\right)^t \frac{(s-1)^2}{k} + \left(\frac{i}{k}\right)^s \left(\frac{j}{k}\right)^{t-1} \frac{(t-1)^2}{k} \end{aligned}$$

Se tiene entonces

$$\delta_{ij}(s, t) \leq \frac{k-1}{k^2} [(s-1)^2 + (t-1)^2]$$

es decir

$$\begin{aligned} \left| \sum_{s,t=0}^n \left(\frac{i}{k}\right)^s \left(\frac{j}{k}\right)^t - \sum_{s=0}^i \sum_{t=0}^j \frac{\binom{i}{s} \binom{j}{t}}{\binom{k}{s} \binom{k}{t}} \right| |a_{st}| &\leq \\ &\frac{k-1}{k^2} \sum_{s,t=0}^n \{[\max(0, s-1)]^2 + [\max(0, t-1)]^2\} |a_{st}| \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\left| p\left(\frac{i}{k}, \frac{j}{k}\right) - b_{ij}^{(k)} \right| \leq \gamma \frac{k-1}{k^2}$$

■

A partir del teorema anterior uno espera que cuando se incrementa k las cotas lleguen a ser mejores. Y así es, en efecto, pues de la siguiente relación de recurrencia:

$$b_{ij}^{(k)} = \frac{ijb_{i-1,j-1}^{(k-1)} + j(k-i)b_{i,j-1}^{(k-1)} + i(k-j)b_{i-1,j}^{(k-1)} + (k-i)(k-j)b_{ij}^{(k-1)}}{k^2} \quad (4.17)$$

con $i, j = 0, 1, \dots, k$ y $b_{-1,-1}^{(k-1)} = b_{-1,j}^{(k-1)} = b_{i,-1}^{(k-1)} = b_{i,k}^{(k-1)} = b_{k,j}^{(k-1)} = 0$, se tiene que los coeficientes de Bernstein de orden k son una combinación lineal convexa de coeficientes de Bernstein de orden $k-1$ y por lo tanto se concluye que la convergencia de las cotas es monótona:

$$\begin{aligned} \max b_{ij}^{(k-1)} &\geq \max b_{ij}^{(k)} \\ \min b_{ij}^{(k-1)} &\leq \min b_{ij}^{(k)} \end{aligned}$$

Subdivisión

Como puede observarse, si deseamos mejorar las cotas podemos elevar el grado k de los polinomios de Bernstein. Sin embargo resulta que la convergencia de la sucesión $\{\max b_{ij}^{(k)}\}$ ($\{\min b_{ij}^{(k)}\}$) es muy lenta. Una mejor forma de obtener cotas más ajustadas es aplicando una subdivisión del dominio.

Dividimos por simplicidad el cuadrado unitario U en cuatro subcuadrados de longitud $1/2$ y calculamos los coeficientes de Bernstein del polinomio (4.2) en cada subcuadrado, considerando k fija. Entenderemos por coeficientes de Bernstein $b_{ij}(Q)$ de p sobre un rectángulo Q , dado por (4.3), los coeficientes de Bernstein del polinomio desplazado:

$$p(x, y) = \sum_{\mu, \nu=0} c_{\mu\nu} \varepsilon^\mu \eta^\nu \quad (\varepsilon, \nu) \in U \quad (4.18)$$

con

$$c_{\mu\nu} = (\bar{x} - \underline{x})^\mu (\bar{y} - \underline{y})^\nu \sum_{s=\mu}^n \sum_{t=\nu}^n \binom{s}{\mu} \binom{t}{\nu} \underline{x}^{s-\mu} \underline{y}^{t-\nu} a_{st} \quad (4.19)$$

Este proceso puede continuarse subdividiendo cada uno de los cuatro subcuadrados en cuatro cuadrados y así sucesivamente. Entonces, el máximo (mínimo) de los coeficientes de Bernstein de p sobre todos los subcuadrados es una cota superior (inferior) para p sobre U .

Proposición 4.1.3. *Considérese el rectángulo dado en (4.3) y sea $\xi = (\underline{x} + \bar{x})/2$, $\eta = (\underline{y} + \bar{y})/2$. Entonces los coeficientes de Bernstein en los cuatro subrectángulos están dados por*

$$b_{ij}(Q^l) = \frac{1}{2^{i+j}} \sum_{s=0}^i \sum_{t=0}^j \binom{i}{s} \binom{j}{t} \beta_{st}^{(l)} \quad l = 1, 2, 3, 4, \quad (i, j) \in K$$

donde

$$\begin{aligned} \beta_{st}^{(1)} &= b_{st}(Q) & \text{sobre } Q^1 &= [\underline{x}, \xi] \times [\underline{y}, \eta], \\ \beta_{st}^{(2)} &= b_{k-s,t}(Q) & \text{sobre } Q^2 &= [\xi, \bar{x}] \times [\underline{y}, \eta], \\ \beta_{st}^{(3)} &= b_{s,k-t}(Q) & \text{sobre } Q^3 &= [\underline{x}, \xi] \times [\eta, \bar{y}], \\ \beta_{st}^{(4)} &= b_{k-s,k-t}(Q) & \text{sobre } Q^4 &= [\xi, \bar{x}] \times [\eta, \bar{y}] \end{aligned}$$

De esta proposición vemos que los $b_{ij}(Q^l)$ son combinaciones convexas de los $b_{ij}(Q)$. Por lo tanto las cotas calculadas de los coeficientes de Bernstein en los rectángulos pequeños son al menos tan buenas como aquellas obtenidas usando los coeficientes de Bernstein de p sobre Q y esas cotas son monótonas cuando aplicamos iterativamente la subdivisión.

Denotemos los subcuadrados con borde de longitud $1/2^m$ generados por subdivisión de U por $U^{m,l}$ con $l = 1, \dots, 4^m$.

Teorema 4.1.4. Si $k \geq 2$ la siguiente relación se cumple para todo $m = 3, 4, 5, \dots$

$$\left. \begin{array}{l} \max_{(i,j) \in K} b_{ij}(U^{m,l}) - \bar{m} \\ \underline{m} - \min_{(i,j) \in K} b_{ij}(U^{m,l}) \end{array} \right\} \leq \frac{\varepsilon(k-1)}{k^2 m^2} \quad (l = 1, \dots, 4^m)$$

donde

$$\varepsilon = \max_{\mu, \nu=0, \dots, n} \sum_{s=\mu}^n \sum_{s=\nu}^n \binom{s}{\nu} \binom{t}{\nu} |a_{st}|$$

Demostración. Haremos la prueba para la primera desigualdad (la otra es similar). Fijemos m y tomemos

$$\max_{\substack{(i,j) \in K \\ l=1, \dots, 4^m}} b_{ij}(U^{m,l}) = \max_{(i,j) \in K} b_{ij}(U^{m,l_0})$$

Por el teorema 4.1.2 tenemos

$$\max_{(i,j) \in K} b_{ij}(U^{m,l_0}) - \max_{(x,y) \in U^{m,l_0}} p(x,y) \leq \gamma(k-1)k^{-2}$$

donde

$$\begin{aligned} \gamma &= \sum_{\mu, \nu=0}^n \{ [\max(0, \mu-1)]^2 + [\max(0, \nu-1)]^2 \} |c_{\mu\nu}| \\ &= \sum_{\mu=1}^n \sum_{\nu=1}^n [(\mu-1)^2 + (\nu-1)^2] |c_{\mu\nu}| + \sum_{\nu=1}^n (\nu-1)^2 |c_{0,\nu}| + \sum_{\mu=1}^n (\mu-1)^2 |c_{\mu,0}| \\ &= \sum_{\mu=2}^n \sum_{\nu=1}^n [(\mu-1)^2 + (\nu-1)^2] |c_{\mu\nu}| + \sum_{\nu=1}^n (\nu-1)^2 |c_{1,\nu}| \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^n (\nu-1)^2 |c_{0,\nu}| + \sum_{\mu=1}^n (\mu-1)^2 |c_{\mu,0}| \\ &= \sum_{\mu=2}^n \sum_{\nu=2}^n [(\mu-1)^2 + (\nu-1)^2] |c_{\mu\nu}| + \sum_{\mu=1}^n (\mu-1)^2 |c_{\mu,1}| + \sum_{\nu=1}^n (\nu-1)^2 |c_{1,\nu}| \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^n (\mu-1)^2 |c_{\mu,0}| + \sum_{\nu=1}^n (\nu-1)^2 |c_{0,\nu}| \\ &= \sum_{\mu=1}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{n-1} [\mu^2 + \nu^2] |c_{\mu+1, \nu+1}| + \sum_{\mu=2}^n (\mu-1)^2 [|c_{\mu,0}| + |c_{0,\mu}| + |c_{\mu,1}| + |c_{1,\mu}|] \end{aligned}$$

y los $c_{\mu\nu}$ son los coeficientes del polinomio desplazado. A partir de que los subcuadrados son de longitud 2^{-m} tenemos

$$\bar{x} - \underline{x} = \bar{y} - \underline{y} = 2^{-m}$$

y por otro lado de la ecuación (4.19)

$$\begin{aligned}
|c_{\mu\nu}| &= |\bar{x} - \underline{x}|^\mu |\bar{y} - \underline{y}|^\nu \sum_{s=\mu}^n \sum_{t=\nu}^n \binom{s}{\mu} \binom{t}{\nu} |\underline{x}|^{s-\mu} |\underline{y}|^{t-\nu} |a_{st}| \\
&= 2^{-m(\mu+\nu)} \sum_{s=\mu}^n \sum_{t=\nu}^n \binom{s}{\mu} \binom{t}{\nu} |\underline{x}|^{s-\mu} |\underline{y}|^{t-\nu} |a_{st}| \\
&\leq 2^{-m(\mu+\nu)} \sum_{s=\mu}^n \sum_{t=\nu}^n \binom{s}{\mu} \binom{t}{\nu} |a_{st}| \\
&\leq 2^{-m(\mu+\nu)} \max_{\mu, \nu=0, \dots, n} \sum_{s=\mu}^n \sum_{t=\nu}^n \binom{s}{\mu} \binom{t}{\nu} |a_{st}| \\
&= \varepsilon 2^{-m(\mu+\nu)}
\end{aligned}$$

con $(\mu, \nu) \in K$. A partir de esta desigualdad tenemos

$$\begin{aligned}
|c_{\mu,0}| + |c_{0,\mu}| + |c_{\mu,1}| + |c_{1,\mu}| &\leq \varepsilon \left[2^{-m\mu} + 2^{-m\mu} + 2^{-m(\mu+1)} + 2^{-m(\mu+1)} \right] \\
&= \varepsilon \left[2^{-m\mu} + 2^{-m\mu} + 2^{-m\mu} 2^{-m} + 2^{-m\mu} 2^{-m} \right] \\
&= \varepsilon \left[2^{-m\mu} (2 + 2^{-m} + 2^{-m}) \right] \\
&= \varepsilon \left[2^{-m\mu} (2 + 2^{m-1}) \right] \\
&= \varepsilon \left[2^{m+1} (1 + 2^m) 2^{-m\mu} \right]
\end{aligned}$$

y también

$$|c_{\mu+1, \nu+1}| \leq \varepsilon 2^{-m(\mu+\nu+2)} = \varepsilon 2^{-2m} (2^{-m(\mu+\nu)})$$

Por lo tanto, suponiendo sin pérdida de generalidad que $p(x, y) \neq 0$

$$\gamma \varepsilon^{-1} \leq 2^{-2m} \sum_{\mu, \nu=1}^{n-1} (\mu^2 + \nu^2) 2^{-m(\mu+\nu)} + 2^{-m+1} (1 + 2^m) \sum_{\mu=1}^{n-1} \mu^2 2^{-m\mu}$$

Obsérvese que todos los sumandos del lado derecho son positivos, entonces podemos estimar las sumas por medio de la serie infinita

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \mu^2 x^\mu = x(1+x)(1-x)^{-3} \quad \text{para } |x| < 1$$

así obtenemos

$$\begin{aligned}
\gamma\varepsilon^{-1} &\leq 2^{-4m+1}(1+2^{-m})(1-2^{-m})^{-4} + 2^{-2m+1}(1+2^{-m})^2(1-2^{-m})^3 \\
&= 2^{-2m+1}[2^{-2m}(1+2^{-m})(1-2^{-m})^{-4} + (1+2^{-m})^2(1-2^{-m})^{-3}] \\
&= 2^{-2m+1}\{(1+2^{-m})(1-2^{-m})^{-4}[2^{-2m} + (1+2^{-m})(1-2^{-m})]\} \\
&= 2^{-2m+1}(1+2^{-m})(1-2^{-m})^{-4} \\
&= 2(2^{-2m}) \left[\left(\frac{2^m+1}{2^m} \right) \left(\frac{2^m-1}{2^m} \right)^{-4} \right] \\
&= 2(2^{-2m}) \left[\frac{2^{4m}(2^m+1)}{2^m(2^m-1)^4} \right] \\
&= 2^{m+1}(2^m+1)(2^m-1)^{-4}
\end{aligned}$$

El último término es menor que m^{-2} para $m \geq 3$ y el teorema queda probado. ■

4.1.2. Polinomios multivariados

A continuación generalizaremos la discusión anterior en el caso de un polinomio multivariado. Nuevamente consideraremos la caja unitaria $U = [0, 1]^l$, ya que el producto cartesiano de intervalos reales compactos no vacíos puede ser transformado de manera afín en la caja unitaria U la cual es un producto cartesiano del intervalo unidad $[0, 1]$.

Sea p un polinomio de grado r en las variables x_1, \dots, x_l

$$p(x) = \sum_{i_1, \dots, i_l}^r a_{i_1, \dots, i_l} \prod_{j=1}^l x_j^{i_j} \quad (4.20)$$

donde los coeficientes a_{i_1, \dots, i_l} son números reales y $x = (x_1, \dots, x_l) \in \mathbb{R}^l$. Expandiremos el polinomio multivariado en polinomios de Bernstein para obtener cotas para el rango de este polinomio sobre U . Queremos entonces conocer

$$\underline{m} = \min_{x \in U} p(x), \quad \overline{m} = \max_{x \in U} p(x)$$

Analizaremos el caso para el mínimo del rango pues los resultados para el máximo son análogos.

Definimos un multi-índice I como una l -tupla de enteros no negativos ¹

$$I = \{(i_1, \dots, i_l) \mid i_1, \dots, i_l = 0, 1, \dots, k; k \geq r\}$$

Los polinomios de Bernstein de grado k ($k \geq r$) están definidos por

$$B_i^{(k)}(x) = \prod_{j=1}^l \binom{k}{i_j} x_j^{i_j} (1-x_j)^{k-i_j} \quad i = (i_1 \dots i_l) \in I$$

¹Los multi-índices se utilizarán para abreviar productos de potencias, por ejemplo, para $x \in \mathbb{R}^l$ escribiremos $x^I = x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_l^{i_l}$.

donde hemos usado i en lugar de $i_1 i_2 \dots i_n$ para abreviar. La expansión de p en polinomios de Bernstein es

$$p(x) = \sum_{i \in I} b_i^{(k)} B_i^{(k)}(x), \quad x \in U \quad (4.21)$$

donde los coeficientes de Bernstein $b_i^{(k)}$ están dados por

$$b_i^{(k)} = b_{i_1 \dots i_l}^{(k)} = \sum_{\lambda_0=0}^{i_1} \dots \sum_{\lambda_l=0}^{i_l} \prod_{j=1}^l \frac{\binom{i_j}{\lambda_j}}{\binom{k}{\lambda_j}} a_{\lambda_1 \dots \lambda_l} \quad (4.22)$$

con $a_{\lambda_1 \dots \lambda_l} = 0$ si alguno de los λ_j es tal que $\lambda_j > r$.

Hagamos

$$\underline{\beta}^{(k)} = \min_{i \in I} b_i^{(k)}$$

Teorema 4.1.5. *Para cada $k \geq r$ tenemos*

(i) $\underline{\beta}^{(k)} \leq \underline{m} \leq \underline{\beta}^{(k)} + \gamma(k-1)k^{-2}$ donde

$$\gamma = \sum_{i_1, \dots, i_l=0}^r \sum_{\substack{j=1 \\ i_j \neq 0}}^l (i_j - 1)^2 |a_{i_1 \dots i_l}|;$$

(ii) $\underline{\beta}^{(k)} = \underline{m}$ si y sólo si $\underline{\beta}^{(k)} = b_{i_1 \dots i_l}^{(k)}$ con $i_j \in (0, k)$, $j = 1, 2, \dots, l$.

Además, sea $S = \{I \mid I \leq N\}$, donde $I \leq N$ si $N = (n_1, \dots, n_l)$ y si $0 \leq i_k \leq n_k$, $k = 1, \dots, l$. Entonces, un polinomio l -variado p puede ser escrito en la forma

$$p(x) = \sum_{I \in S} a_I x^I, \quad x \in \mathbb{R}^l \quad (4.23)$$

y nos referiremos a N como el grado de p . Definimos el grado total del polinomio (4.23) como

$$\hat{n} = \max\{n_i \mid i = 1, \dots, l\} \quad (4.24)$$

También definiremos

$$I/N = \left(\frac{i_1}{n_1}, \dots, \frac{i_l}{n_l} \right)$$

$$\binom{N}{I} = \binom{n_1}{i_1} \cdot \dots \cdot \binom{n_l}{i_l}$$

En el caso multivariado el I -ésimo polinomio de Bernstein de grado N se define como

$$B_{N,I}(x) = B_{n_1, i_1} B_{n_2, i_2} \dots B_{n_l, i_l} \quad (4.25)$$

donde para $i_j = 0, \dots, n_j$, ($j = 1, \dots, l$), $B_{n_j, i_j}(x_j)$ es un polinomio básico Bernstein según (3.3) en la variable x_j . Entonces la transformación de un polinomio de la forma (4.23) en su forma de Bernstein es

$$p(x) = \sum_{I \in S} b_I(U) B_{N,I}(x) \quad (4.26)$$

donde los coeficientes Bernstein $b_i(U)$ de p sobre U están dados por

$$b_I(U) = \sum_{J \leq I} \frac{\binom{I}{J}}{\binom{N}{J}} a_J, \quad I \in S \quad (4.27)$$

Los coeficientes Bernstein son almacenados en un arreglo $B(U)$, *i.e.* $B(U) = b_I(U)_{I \in S}$. A continuación listamos algunas propiedades que se cumplen para los coeficientes Bernstein.

Lema 4.1.6. *Sea p un polinomio de la forma (4.23) de grado N . Entonces las siguientes propiedades se cumplen para sus coeficientes Bernstein $b_I(U)$ dados en (4.27):*

- i) Si $S_0 = \{0, n_1\} \times \dots \times \{0, n_l\} \subset S$, (*i.e.* el conjunto de índices que corresponden a los índices de los vértices del arreglo $B(U)$) entonces $\forall I \in S_0$:*

$$b_I(U) = p(I/N) \quad (4.28)$$

- ii) Propiedad del casco convexo.*

$$\text{Conv}\{(x, p(x)) \mid x \in U\} \subseteq \text{Conv}\{(I/N, b_I(U)) \mid I \in S\}$$

- iii) Propiedad del rango cercado. $\forall x \in U$:*

$$\min_{I \in S} b_I(U) \leq p(x) \leq \max_{I \in S} b_I(U) \quad (4.29)$$

con igualdad en el lado izquierdo (derecho) si y sólo si $\min_{I \in S} b_I(U)$, ($\max_{I \in S} b_I(U)$), es alcanzado en un coeficiente Bernstein $b_I(U)$ con $I \in S_0$.

La figura 4.1 muestra las propiedades que satisfacen los coeficientes de Bernstein para un polinomio (que en este caso es representado por la curva): las líneas paralelas al eje x corresponden a los valores máximo y mínimo de los coeficientes de Bernstein; la poligonal que pasa por dichos puntos corresponde al casco convexo que a su vez contiene a otro conjunto convexo que encierra al polinomio.

Proceso de partición

Como se puso de manifiesto en el caso bivariado, las cotas obtenidas en las desigualdades (4.29) pueden ser mejoradas si la caja unitaria U es dividida en subcajas y la expansión de Bernstein es aplicada al polinomio p sobre esas subcajas, *i.e.*, para el polinomio que queda en cada subcaja.

El proceso es el siguiente: dividimos la caja unitaria U en 2^q subcajas con lados de longitud $1/2$ (por simplicidad) y calculamos los coeficientes de Bernstein de p en esas subcajas, *i.e.* los coeficientes de Bernstein de los 2^q polinomios obtenidos cuando p es desplazado de las subcajas hacia U . El proceso puede continuarse subdividiendo nuevamente cada una de las 2^q subcajas en 2^q subcajas con lados de longitud $1/4$ y calcular los coeficientes de Bernstein de todas las subcajas resultantes y así sucesivamente. Denotemos por $\underline{\beta}_{(s)}$ el mínimo de los coeficientes de Bernstein de p sobre todas las subcajas en un nivel de subdivisión fijo s , donde $s = 0$ se refiere a la caja U . En lo siguiente el grado k de los polinomios de Bernstein está fijo (normalmente uno toma $k = r$) y por lo tanto suprimiremos el superíndice (k) .

El siguiente teorema establece que la sucesión $\{\underline{\beta}_{(s)}\}$ converge cuadráticamente a \underline{m} con respecto a la longitud de los lados de las subcajas generadas por subdivisión.

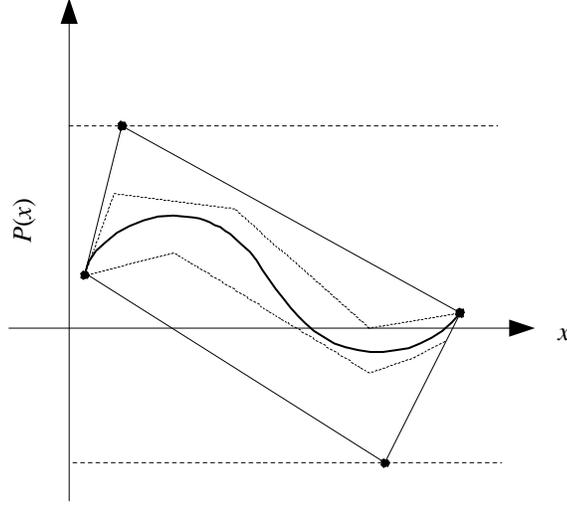


Figura 4.1: Propiedades de los coeficientes de Bernstein

Teorema 4.1.7.

$$\underline{\beta}_{(s)} \leq \underline{m} \leq \underline{\beta}_{(s)} + \varepsilon 2^{-2s} \quad (4.30)$$

Obsérvese la similitud con el teorema 4.1.4.

Una partición en la r -ésima dirección ($1 \leq r \leq l$) es una bisección perpendicular para esta dirección y es llevada a cabo por aplicación recursiva de una interpolación lineal similar al Algoritmo de Casteljaou bosquejado en el capítulo 3. Sea

$$D = [\underline{d}_1, \bar{d}_1] \times \dots \times [\underline{d}_l, \bar{d}_l]$$

cualquier subcaja de U generada por operaciones de partición (al inicio tenemos que $D = U$). Empezamos con $B^{(0)} = B(D)$, estableciendo para $k = 1, \dots, n_r$

$$b_{i_1, \dots, i_r, \dots, i_l}^{(k)}(D) = \begin{cases} b_{i_1, \dots, i_r, \dots, i_l}^{(k)}(D) & i_r = 0, \dots, k-1 \\ (1-\lambda)b_{i_1, \dots, i_r-1, \dots, i_l}^{(k-1)}(D) \\ + \lambda b_{i_1, \dots, i_r, \dots, i_l}^{(k-1)}(D) & i_r = k, \dots, n_r \end{cases} \quad (4.31)$$

Observación 4.1.8. Si $\lambda = 1/2$, formamos recursivamente la media aritmética de dos subarreglos vecinos de $B^{(k-1)}(D)$. Para obtener los nuevos coeficientes aplicamos nuevamente la fórmula (4.31) para $i_j = 0, \dots, n_j$, $j = 1, \dots, r-1, r+1, \dots, l$.

Entonces los coeficientes Bernstein sobre

$$D_0 = [\underline{d}_1, \bar{d}_1] \times \dots \times [\underline{d}_r, \underline{d}_r + \lambda(\bar{d}_r - \underline{d}_r)] \times \dots \times [\underline{d}_l, \bar{d}_l]$$

se obtienen haciendo $B(D_0) = B^{(n_r)}(D)$. Y sin costo extra se obtienen como valores intermedios los coeficientes Bernstein de $B(D_1)$ sobre la subcaja vecina D_1 .

$$D_1 = [\underline{d}_1, \bar{d}_1] \times \dots \times [\underline{d}_r + \lambda(\bar{d}_r - \underline{d}_r), \bar{d}_r] \times \dots \times [\underline{d}_l, \bar{d}_l]$$

a partir de que la siguiente relación se cumple

$$b_{i_1, \dots, n_r - k, \dots, i_l}(D_1) = b_{i_1, \dots, n_r, \dots, i_l}^{(k)}(D)$$

4.2. Verificando estabilidad tipo Hurwitz

En esta sección explicamos como es que se utiliza la expansión de Bernstein para verificar si una familia de polinomios es Hurwitz estable. Así como en los criterios clásicos, con éste método evitamos el cálculo directo de las raíces de la familia de polinomios y únicamente trabajamos con los coeficientes de Bernstein, de la expansión asociada, para determinar la estabilidad.

Considérese la familia de polinomios

$$p(s, \mathbf{q}) = a_0(\mathbf{q})s^m + \dots + a_{m-1}(\mathbf{q})s + a_m(\mathbf{q}) \quad (4.32)$$

donde los coeficientes dependen de los parámetros q_i , para $i = 1, \dots, l$, y $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l)$, es decir, para $k = 0, \dots, m$

$$a_k(\mathbf{q}) = \sum_{i_1, \dots, i_l=0}^d a_{i_1, \dots, i_l}^{(k)} q_1^{(i_1)} \cdot \dots \cdot q_l^{(i_l)} \quad (4.33)$$

Los parámetros indeterminados q_i se sabe que pertenecen a los intervalos dados

$$q_i \in [\underline{q}_i, \bar{q}_i], \quad (i = 1, \dots, l)$$

Hagamos $Q = [\underline{q}_1, \bar{q}_1] \times \dots \times [\underline{q}_l, \bar{q}_l]$. Supongamos sin perder generalidad que Q está en la caja unitaria U . Recordemos que un polinomio p con coeficientes reales o complejos es Hurwitz estable si todos los ceros de p están en la mitad izquierda del plano complejo. Para verificar la estabilidad de la familia de polinomios (4.32) mediante expansión de Bernstein se tienen dos enfoques:

- 1) Prueba de positividad del determinante de Hurwitz.
- 2) Inspección del conjunto de valor.

El primer enfoque está restringido a problemas con un moderado número de parámetros y para polinomios de grado pequeño, mientras que el segundo enfoque es capaz de resolver un mayor número de problemas de estabilidad. Sin embargo, para resolver problemas relativamente simples, es más eficiente la aproximación basada en el primer enfoque.

En la prueba de positividad aplicamos el Teorema de intersección de la frontera. En la inspección del conjunto de valor se utiliza el Teorema de exclusión del cero: dado un miembro estable $p(q^*)$ de la familia, tenemos que verificar si un cero de un miembro $p(q)$ cruza el eje imaginario para probar que toda la familia es estable. Por lo tanto tenemos que investigar el conjunto de valor:

$$\{p(j\omega, q) \mid \omega \in [0, \infty), q \in Q\} \quad (4.34)$$

de la familia de polinomios, partiendo el polinomio $p(j\omega, q)$ en su parte par e impar

$$p(j\omega, q) = p_e(\omega^2, q) + j\omega p_o(\omega^2, q)$$

formando parejas de los respectivos coeficientes de Bernstein de p_e y p_o , obtenemos un conjunto de puntos en el plano complejo y calculamos su casco convexo. Después se verifica si el origen está contenido en este casco convexo. Si el origen esta fuera, la familia (4.32) es estable. En otro caso se vuelve a particionar la caja Q ².

Nos abocaremos a explicar la prueba de positividad del determinante de Hurwitz, el otro enfoque puede ser consultado en [10, 11, 12].

4.2.1. Prueba de positividad del determinante de la matriz de Hurwitz

La prueba de positividad del determinante de la matriz de Hurwitz hace uso del Teorema de Intersección de la Frontera (Teorema 2.4.5). Primeramente, asumamos que los coeficientes $a_i(\mathbf{q})$ en (4.32) son reales y que $a_0(\mathbf{q}) > 0$ para todo $\mathbf{q} \in Q$. Con los coeficientes de la familia (4.32) construimos la matriz de Hurwitz y calculamos su determinante (*determinante de Hurwitz*). Obsérvese que el determinante de Hurwitz asociado es un polinomio n variado, que denotaremos por $p(\mathbf{q})$.

Después de haber transformado el conjunto dado de parámetros Q en la caja unitaria U , calculamos el mínimo de los coeficientes de Bernstein $b_I(Q)$ de \tilde{p} sobre U . Si este mínimo es positivo, entonces por (4.29) se tiene que $\tilde{p}(\mathbf{q})$ es estable para todo $\mathbf{q} \in Q$. Si existe un coeficiente de Bernstein $b_{I_0}(Q)$ no positivo, con $I_0 \in S_0 = \{0, n_1\} \times \cdots \times \{0, n_l\}$, entonces la familia de polinomios no es estable para toda $\mathbf{q} \in Q$ ya que por (4.28) $\tilde{p}(\mathbf{q})$ toma valores negativos. Si no ocurre alguno de estos dos casos, entonces particionamos Q y repetimos el procedimiento anterior. Después de haber particionado tenemos que elegir entre dos parches $B(D_0)$ y $B(D_1)$. A fin de encontrar un coeficiente de Bernstein en los vértices del casco convexo, según (4.29), tan pronto como sea posible, debemos continuar sobre la partición que tenga el coeficiente de Bernstein más pequeño.³

4.3. Ejemplos

En los siguientes ejemplos consideraremos el parámetro $\lambda \in [0, 1]$.

Ejemplo 4.3.1. Considérese la siguiente familia de polinomios

$$f(\lambda, t) = t^2 + (3 - \lambda)t + 3\lambda + 2$$

Hacemos $a_0 = 1$, $a_1 = 3 - \lambda$, $a_2 = 2 + 3\lambda$ y formamos la matriz de Hurwitz

$$H(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 0 \\ 1 & 2 + 3\lambda \end{pmatrix}$$

entonces

$$\det[H(f)] = p(\lambda) = (3 - \lambda)(2 + 3\lambda) = 6 + 9\lambda - 2\lambda - 3\lambda^2 = -3\lambda^2 + 7\lambda + 6$$

²la caja Q puede ser también transformada en la caja unitaria U .

³se conoce en la literatura como *depth first strategy*.

Calculamos a continuación los coeficientes de Bernstein

$$b_i = \sum_{j=0}^i \frac{\binom{i}{j}}{\binom{n}{j}} \alpha_j \quad (i = 0, \dots, n)$$

con $\alpha_0 = 6$, $\alpha_1 = 7$, $\alpha_2 = -3$ y $n = 2$

$i = 0$:

$$b_0 = \frac{\binom{0}{0}}{\binom{2}{0}} \alpha_0 = \alpha_0 = 6$$

$i = 1$:

$$b_1 = \sum_{j=0}^1 \frac{\binom{1}{j}}{\binom{2}{j}} \alpha_j = \frac{\binom{1}{0}}{\binom{2}{0}} \alpha_0 + \frac{\binom{1}{1}}{\binom{2}{1}} \alpha_1 = \alpha_0 + \frac{1}{2} \alpha_1 = 6 + \frac{7}{2} = \frac{19}{2}$$

$i = 2$:

$$\begin{aligned} b_2 &= \sum_{j=0}^2 \frac{\binom{2}{j}}{\binom{2}{j}} \alpha_j = \frac{\binom{2}{0}}{\binom{2}{0}} \alpha_0 + \frac{\binom{2}{1}}{\binom{2}{1}} \alpha_1 + \frac{\binom{2}{2}}{\binom{2}{2}} \alpha_2 \\ &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 6 + 7 - 3 = 10 \end{aligned}$$

Por lo tanto $B(U) = (6 \quad 19/2 \quad 10)$ y el casco convexo:

$$\text{Conv}\{(0, 6), (1/2, 19/2), (1, 10)\}$$

La expansión de Bernstein del polinomio $p(\lambda)$ es entonces:

$$\begin{aligned} q(\lambda) &= \sum_{i=0}^2 b_i B_{3,i}(\lambda) = 6(1-x)^2 + \left(\frac{19}{2}\right) 2 + \lambda(1-\lambda) + 10\lambda^2 \\ &= 6(1-x)^2 19\lambda(1-\lambda) + 10\lambda^2 \end{aligned}$$

Obsérvese que $\min b_i = 6$ y $\max b_i = 10$ y como $\min b_i > 0$ entonces $p(\lambda)$ es estable para toda $\lambda \in [0, 1] = U$.

Ejemplo 4.3.2. Considérese la familia de polinomios

$$f(\lambda, t) = (1 - \lambda)(t^2 + t + 2) + \lambda(t^2 - t + 1)$$

Vamos a determinar si es o no estable la familia.

Simplificando tenemos que

$$f(\lambda, t) = t^2 + (1 - 2\lambda)t + (2 - \lambda)$$

Hacemos $a_0 = 1$, $a_1 = 1 - 2\lambda$, $a_2 = 2 - \lambda$ y construimos la matriz de Hurwitz

$$H(f) = \begin{pmatrix} 1 - 2\lambda & 0 \\ 1 & 2\lambda \end{pmatrix}$$

entonces el polinomio característico es

$$p(\lambda) = \det[H(f)] = (1 - 2\lambda)(2 - \lambda) = 2\lambda^2 - 5\lambda + 2$$

Calculamos a continuación los coeficientes de Bernstein tomando $\alpha_0 = 2$, $\alpha_1 = -5$, $\alpha_2 = 2$

$i = 0$:

$$b_0 = \alpha_0 = 2$$

$i = 1$:

$$b_1 = \sum_{j=0}^1 \frac{\binom{1}{j}}{\binom{2}{j}} \alpha_j = \frac{\binom{1}{0}}{\binom{2}{0}} \alpha_0 + \frac{\binom{1}{1}}{\binom{2}{1}} \alpha_1 = \alpha_0 + \frac{1}{2} \alpha_1 = 2 + \frac{1}{2}(-5) = -\frac{1}{2}$$

$i = 2$:

$$b_2 = \frac{\binom{2}{j}}{\binom{2}{j}} \alpha_j = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 2 - 5 + 2 = -1$$

Obsérvese que $B(U) = (2 \quad -\frac{1}{2} \quad -1)$ y que $\min b_i(U) = b_2 = -1$ y $\max b_i(U) = b_0 = 2$. Sea $S_0 = \{0, n\} = \{0, 2\}$. Los coeficientes de Bernstein cuyo índice $i \in S_0$ son: b_0, b_2 . Como existe un b_i , con $i \in S_0$, no positivo, en este caso $b_2 = -1$ entonces la familia no es completamente estable ya que el determinante de la matriz de Hurwitz asociada a la familia supone valores no negativos $b_i(U) = p(i/n)$ para todo $i \in S_0$ en $U = [0, 1]$.

Ejemplo 4.3.3. Considérese la familia de polinomios

$$f(\lambda, t) = t^3 + (2 - 5\lambda)t^2 + t + (1 - 2\lambda)$$

Construimos la matriz de Hurwitz con $a_0 = 1$, $a_1 = 2 - 5\lambda$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1 - 2\lambda$:

$$H(f) = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 5\lambda & 1 - 2\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 - 5\lambda & 1 - 2\lambda \end{pmatrix}$$

entonces

$$p(\lambda) = \det[H(f)] = (2 - 5\lambda)(1 - 2\lambda) - (1 - 2\lambda)^2 = 6\lambda^2 - 5\lambda + 1$$

Ahora hacemos: $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = -5$, $\alpha_2 = 6$, $\alpha_3 = 0$. Calculamos a continuación los coeficientes de Bernstein

$$b_i = \sum_{j=0}^i \frac{\binom{i}{j}}{\binom{n}{j}} a_j \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

$$\begin{aligned}
b_0 &= \alpha_0 = 1 \\
b_1 &= \alpha_0 + \frac{1}{3}\alpha_1 = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3} \\
b_2 &= \alpha_0 + \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 = 1 - \frac{10}{3} + \frac{6}{3} = -\frac{1}{3} \\
b_3 &= \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1 - 5 + 6 + 0 = 2
\end{aligned}$$

La matriz de coeficientes de Bernstein es $B(U) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$. Obsérvese que $\min_{0 \leq i \leq 3} b_i = b_1 < 0$. Por lo tanto no podemos concluir que la familia sea estable. Sea $S_0 = \{0, 3\}$, si $i \in S_0$ tenemos que $b_0 > 0$ y $b_3 > 0$, por lo tanto tampoco podemos asegurar que la familia se inestable. Tomemos $D = [\underline{d}, \bar{d}] = [0, 1]$. Particionamos en dos este segmento obteniendo

$$D_0 = [\underline{d}, \underline{d} + \lambda(\bar{d} - \underline{d})], \quad D_1 = [\underline{d} + \lambda(\bar{d} - \underline{d}), \bar{d}]$$

Los coeficientes de Bernstein para las subcajas D_0 y D_1 se calculan mediante la expresión

$$b_i^{(k)} = \begin{cases} b_i^{(k)}(D), & i = 0, \dots, k-1 \\ (1-\lambda)b_{i-1}^{(k-1)}(D) + \lambda b_i^{(k-1)}(D) & i = k, \dots, n \end{cases}$$

para $k = 1, \dots, n$. Estos coeficientes son guardados en una matriz $B^{(k)}(D)$ (obsérvese que $B^{(0)}(D) = B(D)$). Los coeficientes sobre $B(D_0)$ se obtienen haciendo $B(D_0) = B^{(n)}(D)$ y sin costo extra se obtienen los de $B(D_1)$ a partir de que se cumple la siguiente relación

$$b_{n-k}(D_1) = b_n^{(k)}(D) \quad (k = 0, \dots, n)$$

Si tomamos $\lambda = \frac{1}{2}$ tenemos

$$D_0 = \left[0, \frac{1}{2}\right], \quad D_1 = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

y a continuación calculamos los coeficientes de Bernstein de estas subcajas. Como $B^{(0)}(D) = B(D)$ entonces

$$(b_0^{(0)} \quad b_1^{(0)} \quad b_2^{(0)} \quad b_3^{(0)}) = (b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3) = \left(1 \quad -\frac{2}{3} \quad -\frac{1}{3} \quad 2\right)$$

Luego para

$k = 1$:

$$\begin{aligned}
b_0^{(1)} &= b_0^{(0)} = 1 \\
b_1^{(1)} &= \frac{1}{2}b_0^{(0)} + \frac{1}{2}b_1^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \\
b_2^{(1)} &= \frac{1}{2}b_1^{(0)} + \frac{1}{2}b_2^{(0)} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{2} \\
b_3^{(1)} &= \frac{1}{2}b_2^{(0)} + \frac{1}{2}b_3^{(0)} = -\frac{1}{6} + 1 = \frac{5}{6} \\
\therefore B^{(1)}(D) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{2} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$k = 2$:

$$\begin{aligned} b_0^{(2)} &= b_0^{(1)} = 1 \\ b_1^{(2)} &= b_1^{(1)} = \frac{1}{6} \\ b_2^{(2)} &= \frac{1}{2} b_1^{(1)} + \frac{1}{2} b_2^{(1)} = -\frac{1}{12} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{6} \\ b_3^{(2)} &= \frac{1}{2} b_2^{(1)} + \frac{1}{2} b_3^{(1)} = -\frac{1}{4} + \frac{5}{12} = \frac{1}{6} \\ \therefore B^{(2)}(D) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$k = 3$:

$$\begin{aligned} b_0^{(3)} &= b_0^{(2)} = 1 \\ b_1^{(3)} &= b_1^{(2)} = \frac{1}{6} \\ b_2^{(3)} &= b_2^{(2)} = -\frac{1}{6} \\ b_3^{(3)} &= \frac{1}{2} b_2^{(2)} + \frac{1}{2} b_3^{(2)} = -\frac{1}{12} + \frac{1}{12} = 0 \\ \therefore B^{(3)}(D) &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Haciendo

$$B(D_0) = B^{(3)}(D) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$B(D_1) = \begin{pmatrix} b_3^{(3)} & b_3^{(2)} & b_3^{(1)} & b_3^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 2 \end{pmatrix}$$

Tenemos que en D_0 la familia no es estable, y lo mismo ocurre en D_1 . Por lo tanto la familia es inestable.

Ejemplo 4.3.4. Considérese la familia de polinomios

$$P(\mathbf{q}, s) = s^3 + (q_1 + q_2 + 1)s^2 + (q_1 + q_2 + 3)s + 6q_1 + 6q_2 + 2q_1q_2 + 1.25$$

donde $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ con $\mathbf{q} \in [0, 1] \times [0, 1]$. Construimos la matriz de Hurwitz:

$$H(p) = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 + q_2 + 1 & 6q_1 + 6q_2 + 2q_1q_2 + 1.25 & 0 \\ 1 & q_1 + q_2 + 3 & 0 \\ 0 & q_1 + q_2 + 1 & 6q_1 + 6q_2 + 2q_1q_2 + 1.25 \end{pmatrix}$$

y con ella el polinomio característico $p(\mathbf{q}) = p(q_1, q_2) = \det[H(P)]$:

$$\begin{aligned} p(q_1, q_2) &= (6q_1 + 6q_2 + 2q_1q_2 + 1.25)[(q_1 + q_2 + 1)(q_1 + q_2 + 3) - (6q_1 + 6q_2 + 2q_1q_2 + 1.25)] \\ &= (6q_1 + 6q_2 + 2q_1q_2 + 1.25)(q_1^2 + q_2^2 - 2q_1 - 2q_2 + 1.75) \\ &= 6q_1^3 + 6q_2^3 + 2q_1^2q_2 + 2q_1q_2^2 + 2q_1^3q_2 + 2q_1q_2^3 - 10.75q_1^2 - 10.75q_2^2 - 20.5q_1q_2 \\ &\quad + 8q_1 + 8q_2 + 2.1875 \end{aligned}$$

Con los coeficientes formamos el siguiente arreglo

$$\begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} & \alpha_{02} & \alpha_{03} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{20} & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{30} & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1875 & 8 & -10.75 & 6 \\ 8 & -20.5 & 2 & 2 \\ -10.75 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde el subíndice del coeficiente indica el grado de la i -ésima variable en cada término del polinomio característico. A continuación calculamos los coeficientes de Bernstein mediante la expresión (4.22) tomando $k = 3$, $l = 2$, $i_m = \lambda_m = 0, 1, 2, 3$, $m = 1, 2$:

$$b_{i_1, i_2}^{(3)} = \sum_{\lambda_1=0}^{i_1} \sum_{\lambda_2=0}^{i_2} \prod_{j=1}^2 \frac{\binom{i_j}{\lambda_j}}{\binom{3}{\lambda_j}} \alpha_{\lambda_1, \lambda_2}$$

$$b_{00} = \alpha_{00}^2 = 4.7852$$

$$\begin{aligned} b_{10} &= \sum_{\lambda_1=0}^1 \prod_{j=1}^2 \frac{\binom{i_j}{\lambda_j}}{\binom{3}{\lambda_j}} = \begin{bmatrix} \binom{1}{0} \\ \binom{0}{3} \end{bmatrix} \alpha_{00} + \begin{bmatrix} \binom{1}{1} \\ \binom{0}{3} \end{bmatrix} \alpha_{10} \\ &= \alpha_{00}^2 + \frac{1}{3} \alpha_{10}^2 = 26.1185 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{20} &= \sum_{\lambda_1=0}^2 \prod_{j=1}^2 \frac{\binom{i_j}{\lambda_j}}{\binom{3}{\lambda_j}} = \begin{bmatrix} \binom{2}{0} \\ \binom{0}{3} \end{bmatrix} \alpha_{00} + \begin{bmatrix} \binom{2}{1} \\ \binom{0}{3} \end{bmatrix} \alpha_{10} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \binom{2}{2} \\ \binom{0}{3} \end{bmatrix} \alpha_{20} \\ &= \alpha_{00}^2 + \frac{2}{3} \alpha_{10}^2 + \frac{1}{3} \alpha_{20}^2 = 85.9727 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{30} &= \sum_{\lambda_1=0}^3 \prod_{j=1}^2 \frac{\binom{i_j}{\lambda_j}}{\binom{3}{\lambda_j}} = \begin{bmatrix} \binom{3}{0} \\ \binom{0}{3} \end{bmatrix} \alpha_{00} + \begin{bmatrix} \binom{3}{1} \\ \binom{0}{3} \end{bmatrix} \alpha_{10} \\ &\quad + \begin{bmatrix} \binom{3}{2} \\ \binom{0}{3} \end{bmatrix} \alpha_{20} + \begin{bmatrix} \binom{3}{3} \\ \binom{0}{3} \end{bmatrix} \alpha_{30} \\ &= \alpha_{00}^2 + \alpha_{10}^2 + \alpha_{20}^2 + \alpha_{30}^2 = 220.3477 \end{aligned}$$

Análogamente se tiene que:

$$\begin{aligned} b_{01} &= \alpha_{00}^2 + \frac{1}{3}\alpha_{01}^2 = 26.1185 \\ b_{02} &= \alpha_{00}^2 + \frac{2}{3}\alpha_{01}^2 + \frac{1}{3}\alpha_{02}^2 = 284.2018 \\ b_{03} &= \alpha_{00}^2 + \alpha_{01}^2 + \alpha_{02}^2 + \alpha_{03}^2 = 215.0352 \end{aligned}$$

Para el resto de los coeficientes las cuentas son más largas:

$$\begin{aligned} b_{11} &= \sum_{\lambda_1=0}^1 \sum_{\lambda_2=0}^1 \prod_{j=1}^2 \frac{\binom{i_j}{\lambda_j}}{\binom{3}{\lambda_j}} = \sum_{\lambda_1=0}^1 \left[\frac{\binom{1}{\lambda_1}}{\binom{3}{\lambda_1}} \alpha_{\lambda_1 0} \right] \left[\frac{\binom{1}{0}}{\binom{3}{0}} \alpha_{\lambda_1 0} \right] + \left[\frac{\binom{1}{\lambda_1}}{\binom{3}{\lambda_1}} \alpha_{\lambda_1 1} \right] \left[\frac{\binom{0}{0}}{\binom{3}{0}} \alpha_{\lambda_1 1} \right] \\ &= \alpha_{00}^2 + \frac{1}{3}\alpha_{01}^2 + \frac{1}{3}\alpha_{10}^2 + \frac{1}{9}\alpha_{11}^2 = 94.1463 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{12} &= \sum_{\lambda_1=0}^1 \sum_{\lambda_2=0}^2 \prod_{j=1}^2 \frac{\binom{i_j}{\lambda_j}}{\binom{3}{\lambda_j}} = \sum_{\lambda_1=0}^1 \left[\frac{\binom{1}{\lambda_1}}{\binom{3}{\lambda_1}} \alpha_{\lambda_1 0} \right] \left[\frac{\binom{2}{0}}{\binom{3}{0}} \alpha_{\lambda_1 0} \right] + \left[\frac{\binom{1}{\lambda_1}}{\binom{3}{\lambda_1}} \alpha_{\lambda_1 1} \right] \left[\frac{\binom{2}{1}}{\binom{3}{1}} \alpha_{\lambda_1 1} \right] \\ &\quad + \left[\frac{\binom{1}{\lambda_1}}{\binom{3}{\lambda_1}} \alpha_{\lambda_1 2} \right] \left[\frac{\binom{2}{2}}{\binom{3}{2}} \alpha_{\lambda_1 2} \right] \\ &= \alpha_{00}^2 + \frac{2}{3}\alpha_{01}^2 + \frac{1}{3}\alpha_{02}^2 + \frac{1}{3}\alpha_{10}^2 + \frac{2}{9}\alpha_{11}^2 + \frac{1}{9}\alpha_{12}^2 = 199.3685 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{13} &= \sum_{\lambda_1=0}^1 \sum_{\lambda_2=0}^3 \prod_{j=1}^2 \frac{\binom{i_j}{\lambda_j}}{\binom{3}{\lambda_j}} = \sum_{\lambda_1=0}^1 \left[\frac{\binom{1}{\lambda_1}}{\binom{3}{\lambda_1}} \alpha_{\lambda_1 0} \right] \left[\frac{\binom{3}{0}}{\binom{3}{0}} \alpha_{\lambda_1 0} \right] + \left[\frac{\binom{1}{\lambda_1}}{\binom{3}{\lambda_1}} \alpha_{\lambda_1 1} \right] \left[\frac{\binom{3}{1}}{\binom{3}{1}} \alpha_{\lambda_1 1} \right] \\ &\quad + \left[\frac{\binom{1}{\lambda_1}}{\binom{3}{\lambda_1}} \alpha_{\lambda_1 2} \right] \left[\frac{\binom{3}{2}}{\binom{3}{2}} \alpha_{\lambda_1 2} \right] + \left[\frac{\binom{1}{\lambda_1}}{\binom{3}{\lambda_1}} \alpha_{\lambda_1 3} \right] \left[\frac{\binom{3}{3}}{\binom{3}{3}} \alpha_{\lambda_1 3} \right] \\ &= \alpha_{00}^2 + \alpha_{01}^2 + \alpha_{02}^2 + \alpha_{03}^2 + \frac{1}{3}(\alpha_{10}^2 + \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 + \alpha_{13}^2) = 379.1185 \end{aligned}$$

Procediendo pues de forma similar, podemos resumir los resultados en el siguiente arreglo:

$$\begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} & b_{03} \\ b_{10} & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{20} & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{30} & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.7852 & 26.1185 & 84.2018 & 215.0352 \\ 26.1185 & 94.1463 & 199.3685 & 379.1185 \\ 85.9727 & 201.1393 & 353.9449 & 583.0560 \\ 220.3477 & 384.4310 & 586.5977 & 866.8477 \end{pmatrix}$$

Obsérvese que $\min_{i=(i_1, i_2)} b_i = 4.7852 > 0$, por lo tanto se sigue que la familia es estable para toda $\mathbf{q} \in [0, 1] \times [0, 1]$.

Este último ejemplo evidencia la necesidad del uso de una computadora para realizar el cálculo de los coeficientes de Bernstein, principalmente cuando se tiene un número considerable de parámetros.

Cómo otra aplicación de lo expuesto hasta aquí, el método de expansión de Bernstein puede también ser usado para calcular el *margen de estabilidad* de los parámetros de un polinomio estable (véase por ejemplo [9]).

Conclusiones

Al trabajar con modelos matemáticos pueden surgir sistemas en los que no conocemos con precisión el comportamiento de las variables involucradas. En particular, en sistemas de ecuaciones diferenciales puede ocurrir que los valores de la matriz del sistema no sean precisos, sea debido a que los valores de los parámetros involucrados son experimentales, sea porque la dinámica es compleja. Sólo sabemos que sus valores se encuentra en algún subconjunto de \mathbb{R}^n . En este caso la matriz del sistema va a depender de parámetros y analizar su comportamiento, en particular su estabilidad, resulta difícil. Como el comportamiento está determinado por las raíces del polinomio característico asociado al sistema, en este caso se obtiene una familia de polinomios. Ahora, calcular las raíces de una familia de polinomios no es una tarea fácil. Es entonces que se hacen necesarios criterios que permitan verificar cuál es el signo de la parte real de las raíces sin calcularlas explícitamente. Como mostramos en este trabajo esos criterios se basan en ciertas propiedades que se derivan de los coeficientes de la familia de polinomios.

La estabilidad de un sistema cobra importancia en la Teoría de Control cuando se desea que dicho sistema tenga un comportamiento preestablecido: Control Robusto. Generalmente ese comportamiento se consigue agregando un control al sistema. Muchas de la veces ese control, que puede ser un escalar o un vector, se encuentra acotado por límites, esto es no conocemos con precisión el valor del control. Entonces deseamos saber para qué valores de los parámetros con incertidumbre del control el sistema resulta estable.

En el presente trabajo abordamos el problema de estabilidad de familias de polinomios desde el enfoque con expansiones de Bernstein. Como se pudo constatar, mediante esta expansión es posible determinar la estabilidad operando únicamente con los coeficientes de la familia de polinomios. La idea de fondo es acotar el rango de los valores del polinomio característico. Estas cotas como vimos poseen propiedades interesantes, en especial que el mínimo (o máximo) de los coeficientes de Bernstein converge al mínimo (o máximo) del polinomio. Posteriormente, el conocimiento de esas cotas permite hacer uso del teorema de Intersección de la frontera el cual da condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad. De manera particular se usa un criterio de positividad de la matriz de Hurwitz, aunque vale la pena aclarar que existen otros enfoques que utilizan la expansión de Bernstein como base: inspección de conjunto de valor, esquema de Routh modificado, cotas sobre triángulos. La ventaja en todos ellos es la posibilidad de verificar la estabilidad con ayuda de una computadora a partir de que la construcción de los coeficientes

de Bernstein es algorítmica. En muchos de los casos existen algoritmos para realizar la verificación, pero un problema interesante es ver cuál de ellos es más eficiente o más exacto. También en este sentido es importante resaltar las propiedades numéricas de la expansión de Bernstein. Como se mencionó, la transformación de un polinomio en expansión de Bernstein resulta una transformación estable en un sentido numérico, que se traduce en estabilidad bajo la influencia de valores perturbados. Esto es importante porque recordemos que los valores de los parámetros no se conocen con precisión *a priori* y no deseamos agregar mayor incertidumbre al momento de verificar la estabilidad.

El método de expansión de Bernstein es aplicado principalmente a familias de polinomios con coeficientes de tipo polinomial y con parámetros que pertenecen a un intervalo. La razón es porque precisamente los polinomios de Bernstein están definidos en un intervalo cerrado. Este método puede adaptarse para hallar un margen de estabilidad en los parámetros cuando el polinomio se sabe estable para parámetros iniciales. Esto de alguna manera sugiere que quizá el método puede aplicarse a polinomios donde los parámetros pertenecen a una bola del plano real. Para otro tipo de familias como segmentos, rayos, conos u otras familias se utilizan otras técnicas, ver por ejemplo [2, 4, 1, 17]. Es un problema por investigar si se puede aplicar una modificación del método de expansión de Bernstein para estudiar algunas de estas familias

Apéndice Biográfico



Karl Weierstrass (1815-1897).

Estudió derecho en Bonn y matemáticas en Münster desde 1838. En 1856 fué profesor en el Instituto Industrial de Berlín y en 1864 de la Universidad de la misma ciudad. Sus obras pertenecen fundamentalmente al terreno de la teoría de funciones, construida con un rigor nunca antes realizado. Estudió las funciones enteras y las funciones definidas por los productos infinitos. A él se debe la ecuación de convergencia uniforme. También contribuyó a la teoría de las formas bilineales y cuadráticas. Se deben a Weierstrass una nueva teoría de las funciones elípticas, el teorema de la aproximación uniforme de una función cualquiera por polinomios, y la importante teoría de las Funciones analíticas de variable compleja, con los conceptos de prolongación analítica, trascendentes enteras, factores primarios, etc. Colaboró en diversas publicaciones y sus "Obras completas" han sido editadas en cuatro volúmenes por la Academia de Ciencias de Berlín.



Adolf Hurwitz (1859-1919).

Nació en Hildesheim, Hanover. Se graduó en la Universidad de Berlín. En 1884 acepta la invitación de Lindemann para ocupar una plaza en Königsberg donde permanece 8 años. Ahí dio clases a Hilbert y Minkowski. En 1892 ocupa el lugar que dejó Frobenius en Eidgenössische Polytechnikum Zürich (Suiza). Hurwitz permaneció el resto de su vida en Zurich. Estudió la superficie de Riemann y la teoría de funciones complejas.

**Sergei N. Bernstein (1880-1968).**

Recibió su doctorado por la Sorbona en 1904. Su disertación doctoral fue una fina pieza en donde resuelve el décimonoveno problema de Hilbert (sobre soluciones analíticas de ecuaciones diferenciales). A su regreso a Rusia tuvo que comenzar de nuevo su posgrado. En 1908 le fue otorgado el grado de maestro y en 1913 recibió su segundo doctorado, esta vez de manos de Kharkov, con un trabajo en el que resolvió el vigésimo problema de Hilbert (sobre la solución analítica del Problema de Dirichlet para una amplia clase de ecuaciones elípticas no lineales). Trabajó en el Instituto de Matemáticas de la Academia de Ciencias de la URSS y en la Universidad de Moscú. Bernstein trabajó en la teoría de aproximación de funciones, en procesos estocásticos y resolviendo problemas en teoría de interpolación, métodos de integración mecánica. Parte de su trabajo más importante está en la Teoría de Probabilidad pues en 1917 intentó dar una axiomatización para esta teoría.

**Pierre Bezier (1910-1999).**

Estudió Ing. Mecánica en la Escuela de Artes y Profesionales e Ing. Eléctrica en la Escuela Sup. de Electricidad. En 1977 obtuvo su doctorado en matemáticas en la Universidad de París. Trabajó en la compañía Renault en la división de herramientas de diseño. Realizó investigaciones en Diseño Asistido por Computadora: control computarizado y diseño interactivo de curvas y superficies de forma libre. Fue profesor de Ingeniería de Producción en el Conservatorio Nacional de Artes y Profesionales.

Bibliografía

- [1] Aguirre, B., C. Ibarra, R. Suárez. Sufficient algebraic conditions for stability of cones of polynomials. *Systems & Control Letters* **46** pp. 255-263. 2002.
- [2] Bhattacharyya, S. P., H. Chapellat and L. H. Keel. *Robust Control: The Parametric Approach*. Prentice-Hall. 1995.
- [3] Buchanan, James. *Numerical Methods and Analysis*. McGraw-Hill. 1992.
- [4] Barmish, B. R. *New Tools for Robustness of Linear Systems*. Macmillan. 1994.
- [5] Daniel, M & Duabisse, J.C. The numerical problem of using Bézier curves and surfaces in the power basis. *Computer Aided Geometric Design* **6** (1989), pp. 121-128.
- [6] Farouki, R.T. On the stability of transformations between power and Bernstein polynomial forms. *Computer Aided Geometric Design* **8** (1991), pp.29-36
- [7] Farouki, R.T. & Rajan, V.T On the numerical condition of polynomials in Bernstein form. *Computer Aided Geometric Design* **4** (1987), pp. 191-216.
- [8] Feinerman, Robert D. & Donald J. Newman. *Polynomial Aproximation*. The Williams & Wilkins Company. 1974.
- [9] Garloff, J. The Bernstein algorithm. *Interval Computations* **2**, 1993, pp. 154-168.
- [10] Garloff, J. Convergent Bounds for the range of multivariate polynomials. Interval Mathematics (1985). *Lecture Notes in Computer Science* **212**, Springer, 1986. pp. 37-56.
- [11] Garloff, Jürgen. The Bernstein Expansion and its Applications. *Journal of the American Romanian Academy (ARA J.)*, 2000-2003, No. 25-27, 80-85, 2003.
- [12] Garloff, Jürgen. Application of Bernstein Expansion to the Solution of Control Problems. *Proceedings of MISC'99 - Workshop on Applications of Interval Analysis to Systems and Control*, J. Vehi and M. A. Sainz, Eds., University of Girona, Girona (Spain), pp. 421-430, 1999.

- [13] Garloff, J., Graf, B., and Zettler, M. Speeding up an algorithm for Checking Robust Stability of Polynomials. *Proc. 2nd. IFAC Symp. Robust Control Design*, Bányász, Cs., Ed. Elsevier Sci., Oxford, 183-188, 1998.
- [14] Garloff, J. Convergent bounds for the range of multivariate polynomials. *Interval Mathematics 1985*. Nickel, K., Ed., Lect. Notes in Comp. Sci. **212**, Springer, Berlin, Heidelberg, 37-56, 1986.
- [15] Graziano, R. y C. Elizondo. Herramientas para el análisis de estabilidad robusta de sistemas LTI con incertidumbre paramétrica. *Congreso anual de la AMCA*, 2004. pp. 122-126.
- [16] Hinrichsen, Diederich & Pritchard, Anthony J. *Mathematical Systems Theory I. Modelling, State Space Analysis, Stability and Robustness*. Springer. Texts in Applied Mathematics, vol. 48. 2005.
- [17] Hinrichsen, D. & V. L. Kharitonov. Stability of polynomials with conic uncertainty. *Math. Control Signal Systems* **8**. pp. 97-117. 1995.
- [18] Jaulin, Luc *et al.* *Applied Interval Analysis*. Springer-Verlag. 2001.
- [19] Kaesbauer, D. On robust stability of polynomials with polynomial parameter Dependency: two/three parameter cases. *Automatica* **29** num. 1. 1993 pp. 215-217.
- [20] Kharitonov, V. L. Stability of an equilibrium position of a family of systems of linear differential equations. *Differential Uravnen*, vol. **14**. 1978, pp. 2086-2088. Translations in *Differential Equations*, vol. **14**, 1979, pp. 1483-1485.
- [21] Lancaster, P. and Miron Tismenetsky. *The Theory of Matrices with applications*. Academic Press. 1985.
- [22] Lorentz, G. G. *Bernstein Polynomials*. Univ. Toronto Press. 1953.
- [23] Leonov, Gennady A. *Mathematical problems of control theory. An introduction*. World Scientific. Series on stability, vibration and control systems. Vol. 4. 2001.
- [24] Loredó, Carlos. *Criterios para determinar si un polinomio es polinomio Hurwitz*. Reporte de los seminarios de Investigación I y II. Universidad Autónoma Metropolitana. 2005.
- [25] Piegl, Les & Wayne Tiller. *The NURBS book*. Springer-Verlag. Monographs in visual communications. 1995.
- [26] Ralston, Anthony and P. Rabinowitz. *A first course in numerical analysis*. McGraw-Hill. 1978.
- [27] Rivlin, Theodore J. *An introduction to the approximation of functions*. Dover. 1981.
- [28] Ross, Kenneth A. *Elementary Analysis: the theory of calculus*. Springer-Verlag. 1980.
- [29] Šiljak, D. and D. Stipanović. Robust D-Stability via positivity. *Automatica* **35**, 1999. pp. 1477-1484.
- [30] Skiba, Yuri. *Métodos y esquemas numéricos. Un análisis computacional*. UNAM. 2005.
- [31] Zettler, M., and Garloff, J. Robustness analysis of polynomials with polynomial parameter dependency using Bernstein expansion. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, **43**, 425-431, 1998.