UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Casa abierta al tiempo
Unidad Iztapalapa

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
POSGRADO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

"Algunos Resultados para Juegos Dinámicos en Teoría de Juegos Clásica y Epistémica"

TESIS

QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA

RUBÉN BECERRIL BORJA
Matrícula: 2123802873
ruben.becerril@gmail.com

DIRECTOR DE TESIS:
DR. JOSÉ RAÚL MONTES DE OCA MACHORRO

Jurado:
Presidente: DR. JOSÉ RAÚL MONTES DE OCA MACHORRO
Secretario: DR. HUGO ADÁN CRUZ SUÁREZ
Vocales: DR. ANDREY NOVIKOV
DR. EVGUENI ILICH GORDIENKO
DR. VÍCTOR HUGO VÁZQUEZ GUEVARA

IZTAPALAPA, CIUDAD DE MÉXICO
A 21 DE ABRIL DE 2023

Resumen

En los modelos de Teoría de Juegos la meta última es hallar una solución, conocida como un equilibrio, de dichos juegos, en la cual los jugadores están satisfechos con su decisión, y no desean cambiar la misma de forma unilateral. En este caso, nos enfocamos en los juegos dinámicos en los cuales existen varios momentos de decisión para los jugadores: en primera instancia proponemos un modelo base para estudiar juegos en los que la estructura de turnos no es conocida de antemano por los jugadores, y estudiamos algunas variaciones de este modelo para observar que es posible asegurar la existencia de equilibrios; en segunda instancia se trabajó en Teoría de Juegos epistémica y se propone un concepto de racionalidad en el cual los jugadores en cada turno deciden basados en la racionalidad futura y la "racionalidad" pasada de los oponentes, mediante el cual es posible obtener soluciones para estos juegos, además de proponer el algoritmo que las encuentra, y relacionar este concepto de racionalidad con racionalizabilidad propia, que es un concepto de racionalidad para juegos en forma normal.

Índice general

Agradecimientos

Esta tesis va dedicada a mis padres, Mónica y Rubén, que hasta la fecha me han apoyado de innumerables formas con lo que puedo concluir esta larga aventura. También va dedicada a mis hermanos, Eduardo y Marco, con quienes he aprendido a crecer de muchas formas, y de quienes sé que puedo aprender mucho más. Gracias a todos por su apoyo.

También agradezco a mi abuela Guadalupe, que me ha enseñado otras cosas, algunos de sus secretos culinarios, y que siempre ha velado por el bienestar de todos nosotros. Y a mis abuelo Manuel y a mi abuelita Matilde, que me están cuidando desde lejos y sé que siempre están conmigo. Los quiero mucho y pienso en ustedes.

A mis primos Carmen, Mónica y Manuel y a mi tía Carmen, que son mi segunda familia nuclear, y que aunque ahora estamos todos un poco más lejos, sabemos que contamos los unos con los otros.

A mis amigos, unos que ya he pasado tiempo sin verlos, otros que los he visto más recientemente, pero todos importantes: Juan Miguel, Reyes, Mariana, Juan Carlos, Norman, Gero, Rodolfo, Julián, Mauricio, Irving, Ana, Jessica, Diego, Viri, Diana, Diana, Ariadna, Francisco, Víctor, Edoardo, Yare, Irasema, Paty, Gil, Itxel, Lupita, Gabriel. Muchas gracias por todas las aventuras, las experiencias y el tiempo pasado juntos. Algo aprendí de cada uno y eso me ha llevado hasta aquí.

To all of my friends overseas, which I had the fortune of meeting serendipitously when I decided with little anticipation to buy a plane ticket to the Netherlands in 2016 to learn another approach to game theory: Andrés, Indra, Niels, Christian B., Christian N., Stephan. I'm very glad back then I said "why not" and took the plunge. And also to those that were added through another trip/long stay: Angelina, Shuige, Hanno, Etienne, Marta, George, Martin. You're all definitely a component of the second half of this thesis, and made my time far from my country and family be gezellig. What else can you ask for?

To all of my internet friends, who are responsible for me not going mad along this journey and during the pandemic. If not for you, I wouldn't have had anywhere to turn to in order to disconnect from reality for a little bit: Joy, Craig, Sabine, Gondaj, Julia, Jerome, Daniel, Danny, Dave, Dave, Betty, Paulina. Thanks for your time and the laughs, I know there's a lot more to come and happen with all of you. Hopefully we'll meet in person soon.

A mi asesor, Raúl, gracias por tenerme paciencia. Sé que te he sacado muchas canas de todos los colores, pero a pesar de eso, logramos llegar al final. Gracias por no dejar que me rindiera a mitad del camino aunque hubo muchos momentos en los que parecía ser la opción menos complicada.

A mis sinodales, gracias por su tiempo y atención al detalle. Este trabajo resultó mucho mejor y más completo que la versión que originalmente les presenté, dado que ya no podía verlo con ojos frescos.

No es sino hasta que uno piensa cuidadosamente en todas las personas que han formado parte de tu vida que comprendemos como han sido integrales para llegar a este punto. Y no hay palabras para expresar lo que siento al escribir esto. De verdad, gracias a todos por ser parte de mi vida.

Introducción

La presente tesis es la conclusión del trabajo de varios años en Teoría de Juegos, principalmente en la parte de juegos secuenciales o dinámicos. Aunque es posible hallar trabajo desarrollado al respecto, tiene sus complicaciones al estudiarse, principalmente porque el elemento temporal hace que algunas suposiciones se deban realizar respecto a la forma en la que debemos modificar las utilidades que reciben los jugadores.

En nuestro caso, la primera mitad es el trabajo realizado en Teoría de Juegos clásica, en donde se trabaja un modelo dinámico en el cual no se conoce de antemano cuál jugador decide en cada turno. Usualmente esta información es conocida por todos los jugadores, y en general se obvia. Existen formas de especificar a quién le corresponde el turno de manera formal, pero si observamos cómo se definen los modelos dinámicos, en muchas ocasiones no se especifica más allá de que esto es observable en la gráfica que representa al juego. Sin embargo, no hay flexibilidad en cuanto a que, una vez que se tiene el juego, el jugador que corresponde a cada turno se establece de antemano. La idea entonces, es permitir que los turnos no estén acordados desde antes de que se lleve a cabo el juego, y por ende, introducir otra variación en los modelos. Más aun, la idea es que durante el juego, las decisiones puedan influenciar el proceso mediante el que se selecciona el siguiente jugador que tomará una elección.

Por otra parte, en la segunda parte de este documento se tiene trabajo realizado en Teoría de Juegos epistémica. A grandes rasgos, la diferencia entre la teoría clásica y la teoría epistémica recae en las suposiciones que se realizan respecto a cómo razonan los jugadores acerca de sus oponentes, y cómo razonan los jugadores acerca de cómo razonan sus oponentes acerca de sus oponentes, y así ad nauseam. La teoría epistémica relaja las hipótesis respecto a este razonamiento, y esto nos permite considerar otras soluciones razonables para algunos juegos que no se consideran en la teoría clásica. Muchos de estos conceptos de razonamiento son análogos a los conocidos en la teoría clásica, pero se tienen conceptos de razonamiento completamente nuevos. De hecho, el concepto que desarrollamos es un concepto que no tiene como tal un análogo en teoría clásica, además de que se relaciona con un concepto para juegos simultáneos, de manera similar a como existen conceptos clásicos que se pueden aplicar a la forma normal de un juego dinámico para obtener soluciones.

En el capítulo 1 se da un resumen de los conceptos de la Teoría de Juegos clásica, principalmente de los conceptos de solución más conocidos, y la relación que guardan entre sí. En el capítulo 2 se introduce el modelo de juego con proceso de selección de turnos, en el que, como ya se mencionó, no se conoce de antemano a quién corresponde cada turno, y el cual se publicó en [12]. En el capítulo 3 se extiende el modelo introducido en el capítulo anterior para trabajar el caso de información incompleta, como se conoce en la teoría clásica y el caso de jugadores sensibles al riesgo, el cual fue publicado en [13]. En el capítulo 4 se da un resumen de los conceptos de la Teoría de Juegos epistémica, incluyendo algunos conceptos de razonamiento bajo este esquema. En el capítulo 5 se describe el concepto de creencia común en racionalidad futura y pasada restringida que es el concepto de razonamiento que se trabajó, y en el cual, se refina el concepto de creencia común en racionalidad futura en el cual no se considera como se llega al momento presente, solamente lo que puede pasar en el futuro, a pesar de que el pasado puede tener información importante que se está perdiendo al no tomarlo en cuenta, el cual está publicado como [14]. Por último, se discuten algunas conclusiones y trabajo futuro que se podría realizar para extender los modelos presentados en esta tesis.

Capítulo 1

Teoría de juegos clásica

1.1 Introducción

En la mayoría de las interacciones que realiza una persona diariamente se involucran a otras personas. En algunos casos la forma de interactuar está definida de manera estructurada, en otros casos, solamente se da un marco dentro del cual se pueden tomar diferentes decisiones. En este segundo caso, decidir de manera adecuada se complica, ya que la decisión de un individuo no solamente le afecta a dicho individuo, sino a otros que están involucrados, y de igual manera lo que los otros decidan le afecta.

Para poder estudiar estas situaciones, John von Neumann y Oskar Morgenstern publicaron en 1944 [89] el texto que comenzaría la rama de teoría de juegos. Antes de 1944 ya habían modelos que posteriormente se observaría se habían resuelto con ideas similares o equivalentes a lo obtenido utilizando teoría de juegos, tales como los modelos de Cournot en 1838 [25], Bertrand en 1883 [16] y Stackelberg en 1934 [79] que trabajaron competencia entre agentes, principalmente en duopolios, aunque estos se generalizaron a cualquier número de individuos. También Émile Borel entre 1921 y 1927 [19], [20], [21] propuso algunas ideas con juegos de suma cero en los que postuló una versión del teorema minimax que posteriormente von Neumann en 1928 [89] generalizaría, mostrando que todo juego finito de suma cero entre dos personas tiene una solución. Ernst Zermelo en 1913 [93] probaría que en juegos de dos personas con información perfecta y movimientos secuenciales entre los jugadores, debe haber una estrategia ganadora para alguno de los jugadores, salvo que un empate sea posible, es decir, si un jugador se encuentra en una situación ganadora (como sea que esto se determine) lo que haga el otro jugador no debe afectar siempre y cuando el primer jugador siga la estrategia que lo haga ganar; e incluso una serie de "paradojas" propuestas por Morgenstern en 1935 [52] en las que proponía situaciones en las que los jugadores no tenían forma de decidir con total certeza la manera de jugar, en este caso el problema se encontraba en que Morgenstern no asignó utilidades a los jugadores y faltaba lo que von Neumann había definido como estrategias mixtas.

En 1950 John Nash [54] propondría una solución, llamada un equilibrio, para todos los juegos finitos de n personas, y mostrando que dicho equilibrio existe para este conjunto de juegos, además de que era equivalente a las soluciones propuestas en otros casos, como en los juegos de suma cero de von Neumann, mientras que en 1951 [55] formalizaría lo que son los juegos no cooperativos de n jugadores, en contraposición a lo que von Neumann y Morgenstern propusieron como juegos cooperativos. A partir de entonces se obtendrían generalizaciones del teorema de Nash para otros modelos utilizando técnicas similares, y se tendrían varios refinamientos al concepto de equilibrio de Nash, como los propuestos por Selten en 1975 [74], Myerson en 1978 [53], Harsanyi en 1973 [40] y Okada en 1981 [62] entre otros (algunos conceptos de equilibrio menos conocidos se pueden encontrar en [39], [45], [90]), todos estos para juegos simultáneos; mientras que al mismo tiempo se analizarían los juegos dinámicos o secuenciales, para los que se tiene una variedad de conceptos de equilibrio como los propuestos por Selten en 1975 [74], Kreps y Wilson en 1982 [50], y van Damme entre 1984 y 1991 [84], [85], [86].

Por otro lado, se trabajó también lo que es la teoría de juegos cooperativos (la cual no incluimos en este capítulo, pero mencionamos por completez) en donde los jugadores actúan en coaliciones, y donde no todos los jugadores de una coalición tienen el mismo poder. Para el estudio de esta rama de la teoría de juegos, más allá de lo que anteriormente von Neumann y Morgenstern ya proponían, el trabajo de Shapley que empezó en 1951 [75], permitió analizar estos juegos.

En esta sección vamos a definir lo que es un juego y algunos de los conceptos de solución mencionados anteriormente. Además de las referencias ya mencionadas arriba, algunos libros que cubren gran parte de los temas en teoría de juegos clásica son [23], [32], [33], [35], [36], [46], [81].

1.2 ¿Qué es un juego?

Como hemos enunciado anteriormente, lo que se busca es modelar situaciones en las que hay varios individuos involucrados los cuáles toman decisiones que afectarán a todos. Esos son los elementos mínimos que tendrá un juego.

Definición 1.1. Un **juego en forma normal** consiste en una tripleta $(I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$ donde sus elementos son:

1. Un conjunto finito de **jugadores** $I = \{1, 2, \dots, n\}$ que son los individuos involucrados en el juego.

2. Para cada jugador $i \in I$ un conjunto finito S_i de **estrategias** (puras) que serán las elecciones posibles de cada jugador dentro del juego.

3. Para cada jugador $i \in I$ una **función de utilidad** $u_i \colon S \to \mathbb{R}$ donde $S = \times_{i\in I} S_i$ que serán los pagos de cada jugador dentro del juego, los cuales dependen de las elecciones de todos los jugadores.

Con base en esta definición se pueden añadir algunas características para obtener otros modelos más complejos que se adapten a otras situaciones, como puede ser el considerar la forma en que los jugadores van a tomar las decisiones, la forma en que razonan, o bien, lo que es conocido por cada jugador a lo largo del juego.

Para poder estudiar un modelo de un juego que tenga algún sentido y pueda predecir algo, requerimos que los jugadores sean **racionales**, es decir, que si un jugador se encuentra en posibilidad de elegir entre dos o más situaciones con utilidades diferentes, elegirá siempre aquella que le dé mayor utilidad; y también pedimos que los jugadores conozcan los elementos del juego, y no solamente eso, sino que sepan que los otros jugadores conocen los elementos del juego, y que sepan que los otros jugadores saben que los otros jugadores conocen los elementos del juego, y así hasta el infinito, lo cual se llama **conocimiento común**. Este último requerimiento es un tanto fuerte, pero nos permite asegurar que cada jugador puede pensar en lo que harán los demás y por lo tanto determinar qué elecciones podrían realizar los otros jugadores.

Por otra parte, la forma en la que los jugadores llevan a cabo sus elecciones influye en la forma de estudiar un juego. Las más comunes son considerar que todos los jugadores eligen de forma simultánea o que los jugadores eligen por turnos. En el primer caso no es necesario que los jugadores literalmente hagan las decisiones de forma simultánea, lo único que esto significa es que los jugadores no saben las decisiones de los otros jugadores para que esto influya sus propias decisiones, en este sentido es equivalente a que lo hicieran de forma simultántea. En el caso de que los jugadores elijan por turnos, existe la posibilidad de que se sepan los movimientos que han hecho otros jugadores anteriormente y a partir de esto, los jugadores que eligen después pueden ajustar su elección.

Definición 1.2. Un **perfil de estrategias** es un vector $s = (s_1, s_2, \dots, s_n) \in S$ de estrategias en el cual tenemos exactamente una estrategia $s_i \in S_i$ para cada jugador $i \in I$.

Como ya se mencionó, los pagos o utilidades que reciben los jugadores dentro del juego dependen de las elecciones de todos los jugadores involucrados, y cada jugador obtiene un pago de acuerdo a su función de utilidad. Sería deseable que se pudiera encontrar en todo juego un perfil de estrategias tal que se maximizara la utilidad de todos los jugadores. Sin embargo, veremos que esto será usualmente la excepción en vez de la regla. Por otra parte, debemos darnos cuenta de que cada jugador solamente puede decidir lo que hace él mismo, de forma tal que, aunque haya perfiles de estrategias que para un jugador sean óptimos, si no lo son para los demás, no hay forma de que fuerce que ocurran solamente modificando su elección de estrategia. Esto también se tiene que tomar en cuenta al decidir cómo definir una solución para un juego.

1.3 Solución de un juego

Una primera idea que se puede proponer para resolver un juego es buscar que en el perfil elegido como solución, todos los individuos estén en la mejor situación posible y por lo tanto, que la sociedad en conjunto coopere para llegar al mejor resultado sin afectar a ninguno de los individuos involucrados. Esto se conoce como un **óptimo de Pareto**.

Definición 1.3. Un perfil de estrategias $s' \in S$ es Pareto dominado por $s \in S$ (o bien, s Pareto domina a s') si $u_i(s) \geq u_i(s')$ para todo $i \in I$ y existe al menos un $i \in I$ tal que $u_i(s) > u_i(s')$. Decimos que un perfil de estrategias es un óptimo de Pareto si no es Pareto dominado por algún otro perfil de estrategias.

Esta definición, aunque deseable, es un tanto débil ya que podemos tener juegos en los que todos los escenarios son óptimos. Y tanto más, si cada jugador puede tomar su decisión aparte de los demás, uno consideraría que la idea es que cada jugador mejore su situación, por lo que la parte individual también debe formar parte del razonamiento de cada individuo.

Anteriormente se pidió que los individuos que se modelan en un juego sean individuos racionales, es decir, que tratan de maximizar su utilidad en lo posible mediante sus propias elecciones. Esto nos lleva a observar que si independientemente de las elecciones realizadas por los otros jugadores, un individuo tiene dos opciones una de las cuales siempre le da una mayor utilidad respecto a la otra, nunca elegirá la segunda opción.

Notación. Un perfil de estrategias $s \in S$ también se puede representar como $s = (s_i, s_{-i})$ en donde se pueden observar la estrategia $s_i \in S_i$ del jugador i y el perfil de estrategias $s_{-i} \in S_{-i}$ de los otros jugadores que no son i. Esto nos permitirá modificar la estrategia de un solo jugador y mantener lo que eligen los otros jugadores fijo.

Definición 1.4. Una estrategia $s'_i \in S_i$ es **estrictamente dominada** por otra estrategia $s_i \in S_i$ si para todo $s_{-i} \in S_{-i}$ se tiene que

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$$

Por otra parte, también podríamos tener una estrategia que siempre de una utilidad mayor que otras, independientemente de las elecciones que realicen los otros jugadores. En este caso un jugador siempre elegirá dicha estrategia.

Definición 1.5. Una estrategia s_i es **estrictamente dominante** si para toda estrategia $s'_i \in S_i$, $s'_i \neq s_i$ y todo $s_{-i} \in S_{-i}$ se tiene que

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$$

Si todos los jugadores tienen una estrategia estrictamente dominante en un juego, entonces dado que esta estrategia no depende de lo que hagan los otros jugadores, es lo que cada jugador va a elegir y por lo tanto, son las estrategias óptimas.

Definición 1.6. Un perfil de estrategias $s \in S$ es un **equilibrio estrictamente dominante** si s_i es una estrategia estrictamente dominante para todos los jugadores $i \in I$.

En caso de que exista un equilibrio estrictamente dominante, se puede observar que éste es único.

Proposición 1.1. Si un juego tiene un equilibrio estrictamente dominante, entonces éste es el único equilibrio estrictamente dominante.

Ejemplo 1.1 (Dilema del prisionero)**.** El dilema del prisionero es uno de los juegos clásicos que se estudian pues muestra cómo los equilibrios no cooperativos no coinciden con los que es mejor socialmente. Originalmente fue concebido por Merrill Flood y Melvin Dresher, mientras que Albert Tucker lo puso en el marco de una prisión. El dilema en una de sus múltiples versiones dice:

Dos individuos son arrestados al considerarse sospechosos de un crimen que cometieron juntos. Cada uno de ellos está separado del otro de forma que no pueden intercambiar mensajes o información entre sí. La policía admite que no tiene suficiente evidencia para condenarlos por el crimen, pero dado que se les halló con armas ilegales al momento del arresto la sentencia por esto último es de un año de cárcel. Sin embargo, se puede llegar a un arreglo. Dado que el crimen principal lleva una condena de 10 años de cárcel, si uno de ellos confiesa, mientras que su compañero no lo hace, el individuo que cooperó sale libre, mientras que el otro tendrá que pasar los 10 años en cárcel. Si ambos confiesan, la sentencia se divide entre los dos y por lo tanto ambos pasarán 5 años en la cárcel. Por último, si ambos deciden no confesar, entonces ambos pasarán 1 año en cárcel.

Para este problema, lo que se puede observar es que el único equilibrio de Nash es que ambos jugadores confiesen y por lo tanto pasen 5 años en la cárcel cada uno. Esto ocurre ya que la estrategia "confesar" es estrictamente dominante para ambos, y como hemos visto anteriormente, al ser un equilibrio estrictamente dominante, debe ser el único equilibrio de Nash. Se puede observar además que dicho equilibrio no coincide con el óptimo de Pareto, puesto que los individuos terminan pasando en conjunto 10 años en cárcel, mientras que de haber decidido quedarse callados, en conjunto habrían pasado 2 años.

Al no poderse asegurar siempre la existencia de un equilibrio estrictamente dominante, continuamos la búsqueda de un concepto de solución. Para esto, usaremos la definición de estrategias estrictamente dominadas, ya que si un jugador tiene una estrategia estrictamente dominada, podemos reducir el juego al eliminar (o dejar de tomar en cuenta) dichas estrategias y tener conjuntos reducidos de estrategias.

Observemos que al ponderar qué decisión tomar, un jugador debe considerar lo que harán los otros, y tomando en cuenta esto, decidir la mejor opción en cada caso. Si un jugador observa que otro tiene una estrategia estrictamente dominada, al considerar sus opciones, ya no es necesario que razone acerca de lo que pasaría si el otro elige dicha estrategia estrictamente dominada, pues eso no va a ocurrir. Lo último ocurre dado que los jugadores saben por conocimiento común que todos son racionales. Esto nos lleva a tener un procedimiento iterativo para eliminar estrategias estrictamente dominadas.

Definición 1.7. Denotamos por S_i^k a los conjuntos de estrategias de cada jugador i en el paso k, que formarán los conjuntos de estrategias del juego que se obtienen en el paso k, y adecuadamente se restringe el dominio de las funciones de utilidad a los perfiles que se pueden obtener a partir de los conjuntos de estrategias reducidos (este juego se llamará k-reducido). Definimos $S_i^0 = S_i$ para todo jugador i. El algoritmo de **eliminación iterada de estrategias estrictamente dominadas** consiste para $k \geq 1$

Paso k: eliminamos las estrategias estrictamente dominadas en el juego $k-1$-reducido para cada jugador i, y las estrategias que sobreviven forman el conjunto S_i^k. Formalmente

$$S_i^k = \{s_i \in S_i^{k-1} \mid s_i \text{ no es estrictamente dominada en el juego } k-1\text{-reducido}\}$$

El algoritmo termina cuando ninguno de los conjuntos de estrategias se puede reducir, es decir, termina en el paso K cuando $S_i^K = S_i^{K+1}$ para todo $i \in I$.

Las estrategias que se tienen en los conjuntos S_i^K son estrategias razonables para cada jugador i.

En este caso cada jugador considera todas los posibles perfiles de estrategias de los otros jugadores, lo cual restringe las posibles soluciones que pueden obtenerse. Lo que podría hacer un jugador es considerar un perfil para los otros jugadores y a partir de esto, obtener la mejor estrategia, la cual llamamos mejor respuesta al perfil de los otros jugadores.

Definición 1.8. Para un jugador $i \in I$ decimos que $s_i \in S_i$ es **mejor respuesta** al perfil de estrategias $s_{-i} \in S_{-i}$ de los otros jugadores si

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$$

para toda $s_i' \in S_i$.

Si el jugador hace esto para todos los posibles perfiles de los otros jugadores, entonces tiene las mejores respuestas para cualquier posible situación que ocurra. Esto lo podemos simplificar como una función multivaluada o correspondencia.

Definición 1.9. Para un jugador $i \in I$ definimos la **correspondencia de mejor respuesta** $BR_i \colon S_{-i} \to S_i$ como

$$BR_i(s_{-i}) = \{s_i \in S_i \mid u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}) \text{ para toda } s_i' \in S_i\}$$

A partir de esto, podemos obtener también estrategias que no son mejores respuestas para ningún perfil de los otros jugadores, y por lo tanto, definir un algoritmo similar al que se trabajó para estrategias estrictamente dominadas.

Definición 1.10. Una estrategia s_i nunca es mejor respuesta si para todo $s_{-i} \in S_{-i}$ se tiene que $s_i \notin BR_i(s_{-i})$

Definición 1.11. Denotemos por S_i^k a los conjuntos de estrategias obtenidos en el paso k para cada jugador i, que formarán parte de un juego k-reducido con estos conjuntos de estrategias y con una función de utilidad restringida adecuadamente; y $S_{-i}^k = \times_{j \in I_{j \neq i}} S_j^k$. Definimos $S_i^0 = S_i$, $BR_i^0 = BR_i$. El algoritmo de eliminación iterativa de estrategias que nunca son mejor respuesta consiste para $k \geq 1$ en

Paso k: eliminamos las estrategias que nunca son mejor respuesta en el juego $k-1$ reducido para cada jugador i, y las estrategias que sobreviven forman el conjunto S_i^k, es decir

$$S_i^k = \{s_i \in S_i^{k-1} \mid s_i \in BR_i^{k-1}(s_{-i}) \text{ para algún } s_{-i} \in S_{-i}^{k-1}\}$$

y definimos también para cada $s_{-i} \in S_{-i}^k$

$$BR_i^k(s_{-i}) = \{s_i \in S_i^k \mid u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i}) \text{ para todo } s_i' \in S_i^k\}$$

El algoritmo termina en el paso K cuando $S_i^K = S_i^{K+1}$ para todo $i \in I$.

Las estrategias que se obtienen en S_i^K son estrategias racionalizables para cada jugador $i \in I$.

Estos conceptos que hemos definido van dando una idea de algo que funcionaría como una solución deseable. Por una parte, las estrategias estrictamente dominantes piden demasiado al requerir que sean la mejor opción frente a lo que elijan los otros jugadores, y no siempre existen; por otra parte, las estrategias que sobreviven a los algoritmos de eliminación iterativa nos dan idea de algunas estrategias que son buenas para los jugadores en algunos casos.

Ahora tenemos que utilizar el hecho de que los jugadores son racionales, que esto es de conocimiento común, y además buscar perfiles de estrategias en los cuales las estrategias que se involucran sean mejores respuestas entre sí. La razón de esto, es que, si pensamos en un juego con dos jugadores, y relajamos la forma en que los jugadores eligen estrategias de forma que pueden cambiar de estrategia si lo que eligieron anteriormente no les parece (que equivale al proceso de razonamiento al infinito que realizarían los jugadores), si el primer jugador elige una estrategia, a la cual el segundo jugador propone su mejor respuesta, entonces el primer jugador cambiará de estrategia a su mejor respuesta, tras de lo cual el segundo jugador cambiará a la mejor respuesta de la nueva estrategia del jugador 1, y así, hasta que ambos jugadores decidan no cambiar de estrategia. Esto se puede ver que ocurre solamente si ambos jugadores eligen estrategias que son mejores respuestas a las mejores respuestas de los otros jugadores.

Esta idea de buscar mejores respuestas es precisamente lo que va a definir el concepto que ahora se conoce como un equilibrio de Nash.

Definición 1.12. Un perfil de estrategias $s^* \in S$ es un **equilibrio de Nash en estrategias puras** si se cumple que

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$$

para toda $s_i \in S_i$.

Observemos que esa definición esencialmente nos pide ir preguntando a cada jugador si desean cambiar de estrategia. Dado que la estrategia en el equilibrio de Nash es la que maximiza su utilidad, y no hay forma de que el jugador por si mismo puede mejorar su utilidad, no tiene sentido que cambie de estrategia ya que ha elegido su mejor respuesta al perfil presentado por los otros jugadores. Y esto ocurre para todos los jugadores, por lo que nadie desea modificar su estrategia y por ello se ha llegado a un equilibrio.

Sin embargo, tenemos juegos como el que se describe a continuación, donde veremos que no se puede encontrar un equlibrio como el que se pide arriba.

Ejemplo 1.2 (Piedra, papel o tijeras)**.** Dos individuos deciden jugar piedra, papel o tijeras. Para ello, solamente llevarán a cabo un juego, y en dicho juego apuestan 1 unidad monetaria. El jugador que pierda el juego le pagará al otro, y en caso de que el juego termine en empate, ninguno debe pagar.

En este juego se puede ver fácilmente que, sin importar lo que elijan ambos jugadores, siempre alguno de ellos tendrá un incentivo a cambiar de estrategia. Para observar esto, notemos que para cada posible movimiento del oponente, un jugador tiene exactamente una estrategia ganadora, una estrategia que empata y una estrategia perdedora, por lo que el análisis que se realiza a continuación no depende de las estrategias con que empezamos, ya que se puede adaptar a cualquiera de los casos posibles.

Si empezamos en el caso en que uno de los jugadores elige piedra, y el otro elige papel, entonces el jugador que eligió piedra tiene un incentivo a cambiar a tijeras. Pero ahora el jugador que eligió papel tiene un incentivo a cambiar a piedra. Y ahora el jugador que ya había cambiado a tijeras decide cambiar a papel. Podemos observar que los roles se intercambiaron, pero el ciclo seguiría de la misma manera, por lo que en ningún momento los jugadores llegan a un punto en el que ninguno decida cambiar.

Si en cambio, empezamos en el caso en que ambos jugadores eligen lo mismo, por ejemplo piedra, uno de ellos tendrá el incentivo de cambiar a papel, y llegaríamos a la situación descrita arriba, por lo que de nueva cuenta los jugadores nunca llegarán a un punto en el que ninguno decida cambiar su estrategia. Por ello, podemos concluir que en este juego, no se tiene un equlibrio como el descrito anteriormente.

Observemos que aun con este concepto de equilibrio, no podemos asegurar su existencia para cualquier juego, ni siquiera para juegos finitos con dos jugadores. Para ello, se requiere introducir la noción de estrategia mixta. La idea es que, en vez de pedir que los jugadores elijan con certeza una sola de sus estrategias, puedan elegir una mezcla de las estrategias que tienen disponibles. Dicha mezcla es una posible distribución de probabilidad entre las estrategias, de forma que podemos interpretar a una estrategia mixta de varias maneras: una interpretación es considerar que en el juego el jugador mediante algún proceso, de acuerdo a la distribución de probabilidad que se asignó en su estrategia mixta, elige una de las estrategias para ser la que va a elegir en el juego; otra interpretación es pensar en que se realizarán varias instancias del juego, y la distribución de probabilidad de la estrategia mixta asigna una distribución a dichas instancias del juego en las que se elige cada una de las estrategias.

Definición 1.13. A partir de un conjunto de estrategias puras S_i podemos definir el conjunto de estrategias mixtas M_i como $M_i = \Delta S_i$, es decir, M_i consiste en el conjunto de posibles distribuciones de probabilidad x_i con soporte S_i. De forma análoga a lo hecho con las estrategias puras, definimos $M = \times_{i \in I} M_i$ como el conjunto de perfiles de estrategias mixtas.

Para poder utilizar el concepto de estrategias mixtas, ya no es posible comparar utilizando la función de utilidad que tiene cada jugador, al menos no directamente, ya que no estamos eligiendo una estrategia en S_i. Para ello, se define la utilidad esperada para un jugador i, en la cual se ve como una estrategia mixta funciona como una distribución de probabilidad.

Definición 1.14. Para un jugador i definimos la **función de utilidad esperada** cuando ocurre el perfil de estrategias mixtas $x \in M$ como

$$E_i(x) = \sum_{s \in S} u_i(s)x(s)$$

Dicha función de utilidad esperada está definida en el espacio de probabilidad $(S, 2^S, x)$.

Además, podemos definir los análogos a los conceptos de solución que hemos trabajado. En particular, podemos extender el concepto de equilibrio de Nash

Definición 1.15. Un perfil de estrategias mixtas $x^* \in M$ es un **equilibrio de Nash** si se cumple que

$$E_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq E_i(x_i, x_{-i}^*)$$

para toda $x_i \in M_i$.

El resultado que puso en el mapa a John Nash fue demostrar que todo juego finito de n jugadores tiene un equilibrio de Nash.

Teorema 1.1. Todo juego finito de n-jugadores tiene al menos un equilibrio de Nash.

Ejemplo 1.3 (Piedra, papel o tijeras)**.** Dado que el resultado anterior garantiza la existencia de un equilibrio de Nash en estrategias mixtas para todo juego, entonces sabemos que este juego debe tener un equilibrio en estrategias mixtas. Mostraremos que dicho equilibrio es aquel en el que se mezcla uniformemente entre ambas estrategias para ambos jugadores.

Anteriormente hemos mostrado que no es posible que algún jugador elija una estrategia pura de forma óptima, ya que el otro jugador tiene incentivo a elegir la estrategia pura que contrarresta a lo elegido anteriormente por el primer jugador.

Ahora, supongamos que uno de los jugadores elige una estrategia mixta que da probabilidad positiva a exactamente dos de las posibles elecciones. Sin pérdida de generalidad, supongamos que el jugador 1 elige Piedra con probabilidad positiva α y Papel con probabilidad positiva β y $\alpha + \beta = 1$. Entonces observamos que el jugador 2 no puede asignar probabilidad positiva a Piedra, ya que, si el jugador 2 asignara probabilidades γ, δ y ε respectivamente a cada una de las opciones, la estrategia en la que asigna $\gamma + \delta$ a Papel y ε a Tijeras es siempre mejor. Sin embargo, dado que el jugador 2 no elige Piedra en ningún posible equilibrio, entonces el jugador 1 no tiene incentivo para asignar probabilidad positiva a Papel, ya que sería mejor asignar esa probabilidad a Tijeras. Pero este razonamiento se puede extender a cualesquiera dos elecciones que se deseé tener en la estrategia mixta y por ende, jamás llegamos a un equilibrio.

Por lo tanto, el equilibrio que buscamos debe encontrarse cuando mezclamos entre las tres estrategias. Aunque no lo hemos dicho, un resultado que se conoce en estrategias mixtas nos dice que, si se tiene un equilibrio de Nash x^*, y para el jugador i, se tiene que $x_i^*(s_i) > 0$ para alguna estrategia $s_i \in S_i$, entonces la utilidad esperada en el equilibrio debe ser la misma que la utilidad esperada si reemplazamos la estrategia mixta del jugador i por la estrategia pura s_i.

Sea el equilibrio que buscamos (x_1^*, x_2^*), con lo cual el jugador 1 asignaría las probabilidades $x_1^*(Pi)$, $x_1^*(Pa)$ y $x_1^*(T)$. Para cada utilidad esperada donde el jugador 2 juega una estrategia pura obtenemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} E_2(Pi, x_1^*) &= -x_1^*(Pa) + x_1^*(T) \\ E_2(Pa, x_1^*) &= x_1^*(Pi) - x_1^*(T) \\ E_2(Ti, x_1^*) &= -x_1^*(Pi) + x_1^*(Pa) \end{aligned}$$

además de que tenemos la igualdad $x_1^*(Pi) + x_1^*(Pa) + x_1^*(T) = 1$, y sabemos que $E_2(Pi, x_1^*) = E_2(Pa, x_1^*) = E_2(T, x_1^*)$. Resolviendo para las probabilidades del jugador 1 obtenemos que $x_1^*(Pi) = x_1^*(Pa) = x_1^*(T) = \frac{1}{3}$. Es decir, que el jugador 2 juega una estrategia mixta donde se incluyan las tres posibilidades solamente si el jugador 1 juega la estrategia mixta $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Y al poder hacer el mismo análisis cambiando los roles de los jugadores, observamos que el equilibrio es $x^* = \left(\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)\right)$.

1.4 Refinamientos al equilibrio de Nash

En algunos casos, cuando los juegos tienen utilidades no todas diferentes, aunque podemos encontrar equilibrios de Nash, incluso en estrategias puras, a veces no son estables, en el sentido de que, dado que hay utilidades iguales sin importar que se elija una u otra estrategia, podría pensarse que no importa cuál de éstas se elija. Sin embargo, recordemos que las decisiones de un jugador afectan las de los otros, y por lo tanto, puede que el cambio de estrategia permita que otro jugador modifique la suya y terminen en otro equilibrio completamente diferente.

Lo que ahora se buscan son perfiles de estrategias que sean estables. Claro está que estos perfiles serán equilibrios de Nash, pero ahora tenemos que categorizarlos, pidiendo algunas condiciones adicionales.

Definición 1.16. Un **temblor** en un juego es un vector $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ tal que, para cada i, $\eta_i \colon S_i \to \mathbb{R}$ que cumple

1. Para cada $s_i \in S_i$, $\eta_i(s_i) > 0$
2. $\sum_{s_i \in S_i} \eta_i(s_i) < 1$

Definición 1.17. Dado un juego y un temblor η, el juego η-perturbado es aquel con las siguientes características definidas a partir del juego original:

- El mismo conjunto de jugadores I.
- Los conjuntos de estrategias mixtas

  $$M_i(\eta_i) = \{x_i \in M_i \mid x_i(s_i) \geq \eta_i(s_i) \text{ para toda } s_i \in S_i\}$$

  Como antes, podemos definir el conjunto de perfiles de estrategias mixtas $M(\eta) = \times_{i \in I} M_i(\eta_i)$

- Las mismas funciones de utilidad u_i para cada jugador i.

La idea del equilibrio que vamos a definir es considerar qué pasaría si los jugadores realizan pequeños errores al elegir sus estrategias, si dichos errores al ser pequeños no alteran la forma de elegir estrategias, entonces tenemos estabilidad alrededor del equilibrio, pues a pesar del error, regresamos al equilibrio.

En el juego η-perturbado, al hacer que los jugadores elijan estrategias mixtas en las cuales a toda elección se le da una probabilidad positiva, permite introducir errores al menos de tamaño η y al reducir dicho valor, en el límite deberíamos llegar a un equilibrio con la estabilidad deseada.

Definición 1.18. Un perfil de estrategias mixtas $x^* \in M$ es un **equilibrio perfecto** del juego si existen una sucesión $\{\eta^k\}$ de temblores, con $\eta^k \to 0$ y una sucesión $\{x^k\}$ de perfiles de estrategias mixtas, con $x^k \to x^*$, tales que, para cada $k \in \mathbb{N}$, x^k es un equilibrio de Nash del juego η^k-perturbado.

Otra manera de definir un equilibrio perfecto consiste en pensar que las estrategias que no son mejores respuestas se van a jugar con muy poca probabilidad, de forma tal que ponemos una cota superior ε a dichas estrategias.

Definición 1.19. Una estrategia mixta $x_i \in M_i$ es **completamente mixta** si $x_i(s_i) > 0$ para toda $s_i \in S_i$. Un perfil de estrategias es **completamente mixto** si consiste de estrategias completamente mixtas para todo jugador i.

Definición 1.20. Dado $\varepsilon > 0$, un perfil de estrategias x^* es un **equilibrio ε-perfecto** del juego si x^* es completamente mixto y satisface que para cada i, y cualesquiera estrategias $s_i, s_i' \in S_i$, si $E_i(s_i, x_{-i}^*) < E_i(s_i', x_{-i})$ entonces $x_i(s_i) \leq \varepsilon$.

En otras palabras, si enfrentado al perfil x_{-i}, algunas estrategias de un jugador dan utilidades menores a otras estrategias, en x_i el jugador debe asignar probabilidad ε o menor de jugar dichas estrategias que no son óptimas. A partir de los equilibros ε-perfectos podemos definir un equilibrio perfecto.

Definición 1.21. Un perfil de estrategias mixtas x^* es un **equilibrio perfecto** del juego si existen una sucesión $\{\varepsilon^k\}$ con $\varepsilon^k > 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon^k \to 0$, y una sucesión $\{x^k\}$ de perfiles de estrategias mixtas, con $x^k \to x^*$ tales que, para cada $k \in \mathbb{N}$, x^k es un equilibrio ε^k-perfecto del juego.

Se puede demostrar que las dos definiciones de equilibrio perfecto son equivalentes.

Sucede que la definición de equilibrio perfecto no es necesariamente adecuada, ya que se pensaría que si tenemos un juego, y después a dicho juego se le añaden estrategias para algunos jugadores, las cuales son dominadas, no debería de alterar los posibles equilibrios. Sin embargo, es posible ver que esto no es así.

Para ello, se pide más de los equilibrios que buscamos. La idea detrás de esto es categorizar no solamente a las estrategias que son óptimas y las que no lo son, sino que, dentro de las estrategias que no son óptimas, también tenerlas ordenadas, de forma que la estrategia mixta que elija cada jugador sea tal que mientras menos utilidad deseada se obtenga de elegir una estrategia, menor probabilidad tendrá, incluso frente a otras estrategias que no son óptimas, pero que son mejores en comparación.

Definición 1.22. Dado $\varepsilon > 0$, un perfil de estrategias x^* es un **equilibrio ε-propio** del juego si x^* es completamente mixto y satisface que para cada i, y cualesquiera estrategias $s_i, s_i' \in S_i$, si $E_i(s_i, x_{-i}^*) < E_i(s_i', x_{-i}^*)$, entonces $x_i(s_i) \leq \varepsilon x_i(s_i')$

De forma similar al equilibrio perfecto, a partir de la definición anterior podemos definir lo que es un equilibrio propio.

Definición 1.23. Un perfil de estrategias mixtas x^* es un **equilibrio propio** del juego si existen una sucesión $\{\varepsilon^k\}$ con $\varepsilon^k > 0$ para toda $k \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon^k \to 0$, y una sucesión $\{x^k\}$ de perfiles de estrategias mixtas, con $x^k \to x^*$ tales que, para cada $k \in \mathbb{N}$, x^k es un equilibrio ε^k-propio del juego.

Otra forma de refinar los equilibrios que son mejores en un juego es pedir que la desigualdad en el equilibrio de Nash sea estricta, de forma que las estrategias del equilibrio ahora también son las únicas que dan la mayor utilidad frente a las estrategias de los demás.

Definición 1.24. Un perfil de estrategias x^* es un **equilibrio estricto** si, para todo i se cumple que
$$E_i(x_i^*, x_{-i}^*) > E_i(x_i, x_{-i}^*)$$
para toda $x_i \in M$ con $x_i \neq x_i^*$.

O bien, en vez de que exista alguna sucesión de temblores cada vez más pequeños y una sucesión de equilibrios bajo dichos temblores que tienda al equilibrio, podemos pedir que esto ocurra para cualesquiera temblores que eventualmente se hagan más pequeños.

Definición 1.25. Un perfil de estrategias x^* es un **equilibrio estrictamente perfecto** si para toda sucesión $\{\eta^k\}$ de temblores con $\eta^k \to 0$, existe una sucesión de perfiles de estrategias $\{x^k\}$ con $x^k \to x^*$ tal que, para todo $k \in \mathbb{N}$, x^k es un equilibrio de Nash del juego η^k-perturbado.

Entre todos estos refinamientos del equilibrio de Nash, se tienen relaciones, algunas se pueden observar directamente a partir de las definiciones.

Teorema 1.2. Si $x^* \in M$ es un equilibrio perfecto, entonces es un equilibrio de Nash.

Demostración. Sea x^* un equilibrio perfecto. Entonces existen $\{\eta^k\}$ y $\{s^k\}$ que cumplen la definición 1.21.

Sabemos que una estrategia pura es una mejor respuesta a un equilibrio de Nash si es que dicha estrategia pura es elegida con probabilidad positiva en la estrategia mixta. Esto implica que si una estrategia pura es elegida con probabilidad 0, entonces no es mejor respuesta a un equilibrio de Nash.

En el caso de un juego η^k-perturbado, al no poder asignar probabilidad 0 dado que tenemos la cota inferior provista por η^k, como
$$E_i(x^k) = \sum_{s_i \in S_i} u_i(s_i, x_{-i}^k) x_i^k(s_i)$$
entonces para minimizar el efecto de las estrategias puras que no son mejores respuesta al equilibrio de Nash, les asignamos la mínima probabilidad, es decir, $x_i^k(s_i) = \eta_i^k(s_i)$.

Ahora, en x^* si el jugador i tiene alguna estrategia pura $s_i \in S_i$ que no es mejor respuesta a x_{-i}^*, debemos probar que se le asigna probabilidad 0. Por continuidad de la función de utilidad esperada, para K suficientemente grande, tenemos que s_i no es mejor respuesta a x_{-i}^m para $m \geq K$, por lo cual se le asigna probabilidad $\eta_i^m(s_i)$. En la estrategia x^* que es el límite, se le asigna entonces probabilidad $x_i^*(s_i) = \lim_{k\to\infty} \eta_i^k(s_i) = 0$. Por lo tanto, x^* es equilibrio de Nash. ■

Teorema 1.3. Todo juego tiene al menos un equilibrio perfecto.

Demostración. Sea $\{\eta^k\}$ una sucesión de temblores tal que $\eta^k \to 0$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea x^k un equilibrio de Nash para cada uno de los juegos η^k-perturbados.

Por compacidad del conjunto M, la sucesión $\{s^k\}$ tiene una subsucesión convergente $\{x^{k_m}\}$ a algún $x^* \in M$. Tomando entonces la sucesión de temblores $\{\eta^{k_m}\}$ que sigue cumpliendo $\eta^{k_m} \to 0$ y $\{x^{k_m}\}$ la cual cumple que $x^{k_m} \to x^*$, tenemos que x^* es equilibrio perfecto del juego. ■

Teorema 1.4. Si $x^* \in M$ es un equilibrio propio, entonces es un equilibrio perfecto y también es un equilibrio de Nash.

Demostración. Si $x^* \in M$ es equilibrio propio, entonces existen $\{\varepsilon^k\}$ con $\varepsilon^k \to 0$ y $\{x^k\}$ con $x^k \to x^*$ tales que x^k es ε-equilibrio propio del juego. Es decir, para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumple que x^k es completamente mixto y dadas cualesquiera dos estrategias puras $s_i, s_i' \in S_i$, si $E_i(s_i, x_{-i}^k) < E_i(s_i', x_{-i}^k)$, entonces $x_i(s_i) \leq \varepsilon^k x_i(s_i')$. En particular, ya que $x_i(s_i') < 1$ para cualquier $s_i' \in S_i$ entonces tenemos que también se cumple $x_i(s_i) \leq \varepsilon$, es decir, x^k es equilibrio ε-perfecto del juego.

Tomando entonces las mismas sucesiones, tenemos que x^* es equilibrio perfecto del juego.

Finalmente, dado que es equilibrio perfecto, también es equilibrio de Nash. ■

Teorema 1.5. Todo juego tiene al menos un equilibrio propio.

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$, y definimos $m = \max_{i \in I} |S_i|$ y $\delta_k = \frac{1}{m}\frac{1}{k^m}$.

Denotamos por $M_i(\delta_k) = \{x_i \in M_i \mid x_i(s_i) \geq \delta_k \text{ para toda } s_i \in S_i\}$ que es un conjunto compacto y no vacío que consiste de estrategias completamente mixtas.

Sea $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \ldots, F_N(x))$, con $F_i \colon M(\delta_k) \to M(\delta_k)$ donde $M(\delta_k) = \times_{i=1}^N M_i(\delta_k)$ y para cada $x \in M_i(\delta_k)$ y cada $i \in I$:

$$F_i(x) = \left\{ \hat{x}_i \in M_i(\delta_k) \mid \text{si para } s_i, s_i',\, E_i(x_{-i}, s_i) < E_i(x_{-i}, s_i') \implies \hat{x}_i(s_i) \leq \frac{1}{k}\hat{x}_i(s_i') \right\}$$

Mostraremos que cada F_i cumple las condiciones del teorema de Kakutani, y por lo tanto, también las cumple F.

1. $F_i(x)$ es no vacío para todo $x \in M(\delta_k)$.

   Sea $x \in M(\delta_k)$, definimos $\tau(x, s_i) = |\{s_i' \in S_i \mid E_i(x_{-i}, s_i) < E_i(x_{-i}, s_i')\}|$, y

   $$\hat{x}_i(s_i) = \frac{\left(\dfrac{1}{k}\right)^{\tau(x,s_i)}}{\displaystyle\sum_{s_i' \in S_i} \left(\dfrac{1}{k}\right)^{\tau(x,s_i')}}$$

   Observamos que $\hat{x}_i(s_i) \geq \frac{1}{m}\frac{1}{k^m}$. Por lo tanto $\hat{x}_i \in M_i(\delta_k)$ y cumple que, de haber s_i, s_i' tales que $E_i(x_{-i}, s_i) < E_i(x_i, s_i')$, entonces $\hat{x}_i(s_i) \leq \frac{1}{k}\hat{x}_i(s_i')$. De esta forma $\hat{x}_i \in F_i(x)$.

2. $F_i(x)$ es convexo para toda $x \in M(\delta_k)$.

   Sean $\hat{x}_i, \tilde{x}_i \in F_i(x)$. Sea $\lambda\hat{x}_i + (1-\lambda)\tilde{x}_i$ una combinación convexa, entonces

$$\lambda\hat{x}_i + (1-\lambda)\tilde{x}_i \geq \lambda\delta_k + (1-\lambda)\delta_k = \delta_k$$

   por lo cual $\lambda\hat{x}_i + (1-\lambda)\tilde{x}_i \in M_i(\delta_k)$.

   Sean s_i, s_i' tales que $E_i(x_{-i}, s_i) < E_i(x_{-i}, s_i')$, entonces

$$\begin{aligned}\lambda\hat{x}_i(s_i) + (1-\lambda)\tilde{x}_i(s_i) &\leq \lambda\frac{1}{k}\hat{x}_i(s_i') + (1-\lambda)\frac{1}{k}\tilde{x}_i(s_i') \\ &= \frac{1}{k}(\lambda\hat{x}_i(s_i') + (1-\lambda)\tilde{x}_i(s_i'))\end{aligned}$$

   es decir, $F_i(x)$ es convexo.

3. F_i es de gráfica cerrada.

   Sea $(x^n)_{n=1}^{\infty}$ con $x^n \in M(\delta_k)$ tal que $x^n \to x \in M(\delta_k)$ y $(y_i^n)_{n=1}^{\infty}$ con $y_i^n \in F_i(x^n)$ tal que $y_i^n \to y_i$. Mostraremos que $y_i \in F_i(x)$.

   Sean $s_i, s_i' \in S_i$ tales que $E_i(x_{-i}, s_i) < E_i(x_{-i}, s_i')$. Por continuidad de la función de utilidad esperada, existe $Q(s_i, s_i') \in \mathbb{N}$ tal que $E_i(x_{-i}^{\ell}, s_i) < E_i(x_{-i}^{\ell}, s_i')$ para toda $\ell \geq Q(s_i, s_i')$. Sea

$$Q = \max_{\{(s_i, s_i') \mid E_i(x_{-i}, s_i) < E_i(x_{-i}, s_{-i})\}} Q(s_i, s_i')$$

   entonces para cualesquiera s_i, s_i' tales que $E_i(x_{-i}, s_i) < E_i(x_{-i}, s_i)$, tenemos que $E_i(x_{-i}^{\ell}, s_i) < E_i(x_{-i}^{\ell}, s_i')$ para toda $\ell \geq Q$, lo cual implica que $y_i^{\ell}(s_i) \leq \frac{1}{k}y_i^{\ell}(s_i')$ para toda $\ell \geq Q$, que quiere decir que $y_i(s_i) \leq \frac{1}{k}y_i(s_i')$, o bien, $y_i \in F_i(x)$.

De esta forma, F_i cumple las condiciones del teorema de Kakutani, y por lo tanto F también las cumple. Así, para cada $k \in \mathbb{N}$ encontramos el punto fijo de F, digamos x^k, el cual es equilibrio $\frac{1}{k}$-propio.

La sucesión de equilibrios $\frac{1}{k}$-propios $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ está contenida en M, que es un conjunto compacto al ser el producto de símplices. Por lo tanto, existe una subsucesión $(x^{k_j})_{j=1}^{\infty}$ convergente a algún $x^* \in M$. Dicho x^* es un equilibrio propio. ■

Con el siguiente ejemplo mostraremos que no todo equilibrio perfecto es equilibrio propio.

Ejemplo 1.4. Sea el juego dado por la siguiente matriz:

	I	C	D
A	$1, \ 1$	$0, \ 0$	$-9, -9$
E	$0, \ 0$	$0, \ 0$	$-7, -7$
B	$-9, -9$	$-7, -7$	$-7, -7$

Este juego tiene dos equilibrios de Nash: (A, I) y (E, C). Sin embargo, solamente nos enfocaremos en (E, C).

Primero mostramos que (E, C) es equilibrio perfecto. Sea $\varepsilon^k = \frac{1}{k+10}$ y $x_i^k = \left(\frac{1}{k+10}, 1 - \frac{2}{k+10}, \frac{1}{k+10}\right)$ para $i \in \{1, 2\}$. Observamos que $\varepsilon^k \to 0$, $x_i^k \to (E, C)$ puntualmente y tenemos las siguientes utilidades esperadas para el jugador 1:

$$
\begin{aligned}
E_1\left((1,0,0), \left(\frac{1}{k+10}, 1 - \frac{2}{k+10}, \frac{1}{k+10}\right)\right) &= \frac{1}{k+10} - 9\frac{1}{k+10} = -\frac{8}{k+10} \\
E_1\left((0,1,0), \left(\frac{1}{k+10}, 1 - \frac{2}{k+10}, \frac{1}{k+10}\right)\right) &= -7\frac{1}{k+10} = -\frac{7}{k+10} \\
E_1\left((0,0,1), \left(\frac{1}{k+10}, 1 - \frac{2}{k+10}, \frac{1}{k+10}\right)\right) &= -9\frac{1}{k+10} - 7\left(1 - \frac{1}{k+10}\right) \\
&= -\frac{16}{k+10} - 7
\end{aligned}
$$

por lo cual, vemos que si se cumple que $x_i(A) \leq \varepsilon^k$ y $x_i(B) \leq \varepsilon^k$. Podemos verificar lo mismo para el jugador 2, y por lo tanto, x^k es un equilibrio ε^k-perfecto. Por ello, (E, C) es un equilibrio perfecto.

Ahora mostramos que (E, C) no es equilibrio propio. Calculamos las utilidades esperadas para cada jugador dadas cualesquiera perfiles de estrategias mixtas $(p, q, r) \in M_1$ y $(s, t, u) \in M_2$:

$$
\begin{aligned}
E_{1,2}((p,q,r),(s,t,u)) &= ps + 0pt - 9pu + 0qs + 0qt - 7qu - 9rs - 7rt - 7ru \\
&= ps - 9(pu + rs) - 7(qu + rt + ru)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, si cada jugador elige una estrategia pura frente a una estrategia completamente mixta del oponente tenemos que:

$$
\begin{aligned}
E_1((1,0,0),(s,t,u)) &= s - 9u \\
E_1((0,1,0),(s,t,u)) &= -7u \\
E_1((0,0,1),(s,t,u)) &= -9s - 7(t+u) \\
E_2((p,q,r),(1,0,0)) &= p - 9r \\
E_2((p,q,r),(0,1,0)) &= -7r \\
E_2((p,q,r),(0,0,1)) &= -9p - 7(q+r)
\end{aligned}
$$

Observamos que, dado que (p, q, r) y (s, t, u) son completamente mixtas entonces

$$
\begin{aligned}
E_1((0,1,0),(s,t,u)) &> E_1((0,0,1),(s,t,u)) \\
E_2((p,q,r),(0,1,0)) &> E_2((p,q,r),(0,0,1))
\end{aligned}
$$

por lo cual, en la sucesión de equilibrios ε^k-propios tenemos que $r \leq \varepsilon^k q$ $u \leq \varepsilon^k t$.

Ahora, comparemos la primera y la tercera utilidades esperadas del jugador 1:

$$\begin{aligned} s - 9u &> -9s - 7t - 7u \\ 10s + 7t &> 2u \\ 10s + 7t &> 2(1 - s - t) \\ 12s + 9t &> 2 \end{aligned}$$

lo cual se cumple para $\varepsilon^k < \frac{2}{9}$, ya que

$$u \leq \varepsilon^k t < \varepsilon^k < \frac{2}{9}$$

y por lo tanto

$$s + t = 1 - u > 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$$

con lo que

$$3s + 9(s + t) > 3s + 9\left(\frac{7}{9}\right) = 3s + 7 > 2$$

Por lo cual, para ε^k lo suficientemente pequeña debemos tener que

$$u \leq \varepsilon^k s$$

Por último, comparamos la primera y la segunda utilidades esperadas del jugador 1. Supongamos que

$$\begin{aligned} s - 9u &> -7u \\ s &> 2u \end{aligned}$$

por lo que para tener un ε^k-equilibrio propio, tendríamos que

$$\varepsilon^k s \geq t$$

Sin embargo, tanto $\varepsilon^k \to 0$ como $s \to 0$, por lo que $t \to 0$ y por lo tanto la sucesión de equilibrios no convergería al equilibrio que deseamos. Por ende, tenemos que

$$\begin{aligned} s - 9u &\leq -7u \\ s &\leq 2u \\ s &\leq 2u < 2\varepsilon^k s \\ 1 &< 2\varepsilon^k \end{aligned}$$

para todo ε^k, lo cual observamos no se cumple para $\varepsilon^k < \frac{1}{2}$. Por lo tanto, no es posible encontrar la sucesión de estrategias completamente mixtas que se busca para (E, C). Es decir, (E, C) no es equilibrio propio.

Teorema 1.6. Si x^* es un equilibrio estricto, entonces es un equilibrio estrictamente perfecto.

Para demostrar esto, requerimos probar el siguiente enunciado.

Lema 1.1. Si x^* es un equilibrio estricto, entonces consiste solamente de estrategias puras.

Demostración. Ya hemos observado que si se tiene una estrategia mixta para uno de los jugadores, y en cambio, dicha estrategia mixta se intercambia por alguna de las estrategias puras que tienen probabilidad positiva asignada en dicha estrategia mixta, la utilidad esperada del jugador no cambia.

Sea x^* un equilibrio estricto. Supogamos que para algún $i \in I$, x_i^* es una estrategia mixta en la cual se le asigna probabilidad positiva al menos a dos estrategias puras, digamos s_i y s_i'. Entonces

$$E_i(x_i^*, x_{-i}^*) = E_i(s_i, x_{-i}^*) = E_i(s_i', x_{-i}^*)$$

Pero sabemos que al ser x^* un equilibrio estricto se cumple que

$$E_i(x_i^*, x_{-i}^*) > E_i(x_i', x_{-i}^*)$$

para toda $x_i' \neq x_i^*$. Sin embargo, hemos mostrado dos estrategias diferentes a x_i^* que dan exactamente la misma utilidad esperada, que son $x_i' = s_i$ y $x_i' = s_i'$. Por lo tanto, un equilibrio estricto puede asignar probabilidad positiva a lo más a una estrategia pura para cada jugador i. ■

Se demostrará ahora el teorema.

Demostración (Teorema 1.6)**.** Sea x^* equilibrio estricto. Por el lema 1.1, consiste solamente de estrategias puras. Sea $\{\eta^k\}$ una sucesión cualquiera de temblores tal que $\eta^k \to 0$. Definimos la sucesión $\{x^k\}$ de la siguiente forma para cada $i \in I$ y $k \in \mathbb{N}$.

Si $s_i \in S_i$ es tal que $x^*(s_i) = 0$, entonces $x_i^k(s_i) = \eta_i^k(s_i)$, es decir, para las estrategias puras a las que el equilibrio estricto asigna probabilidad 0, en la sucesión les asignamos la probabilidad mínima.

En este caso, observamos que $x^k(s_i) \to 0 = x^*(s_i)$.

Si $s_i \in S_i$ es tal que $x^*(s_i) = 1$, entonces $x_i^k(s_i) = 1 - \sum_{s_i' \in S_i \setminus \{s_i\}} \eta_i^k(s_i')$, es decir, a la estrategia pura a la que el equilibrio estricto asigna probabilidad 1, en la sucesión le asignamos la probabilidad máxima posible tomando en cuenta las otras estrategias.

Aquí tenemos que $x^k(s_i) \to 1 = x^*(s_i)$.

Por lo tanto $x^k \to x^*$. Por continuidad de la función esperada de cada jugador, para K suficientemente grande, como x^* es equilibrio de Nash, entonces si $m \geq K$ tenemos que x^m es equilibrio de Nash para el juego η^m-perturbado. Si sucediera que para los juegos η^k-perturbados con $k < K$ el perfil x^k no es equilibrio de Nash, simplemente se puede sustituir por un equilibrio de Nash del juego η^k-perturbado, y la nueva sucesión sigue cumpliendo lo necesario. ■

Sin embargo, un equilibrio estrictamente perfecto no necesariamente es un equilibrio estricto.

También tenemos que un juego no necesariamente tiene equilibrios estrictamente perfectos, y por ende, un equilibrio propio no implica equilibrio estrictamente perfecto.

Teorema 1.7. Si x^* es un equilibrio estricto, entonces es un equilibrio propio.

Demostración. Como x^* es un equilibrio estricto, por el lema 1.1 consiste solamente de estrategias puras, es decir $x_i^* = s_i^*$ para alguna $s_i^* \in S_i$ para cada i. Por otra parte, para cada jugador i, podemos ordenar las estrategias puras de acuerdo a la utilidad que otorgan frente al perfil s_{-i}^* de los otros jugadores, es decir, podemos asignar un orden lexicográfico con base en el perfil s_{-i}^*. Por el equilibrio estricto, s_i^* es la primera estrategia en el orden lexicográfico de cada jugador, y las otras estrategias dan estrictamente menor utilidad.

A partir de lo anterior, se considera una sucesión $\{\varepsilon^k\}$ tal que $\varepsilon^k \to 0$ y con $\varepsilon^k < \frac{1}{2}$. Entonces, definimos cada x^k de la siguiente forma para cada $i \in I$ y $k \in \mathbb{N}$.

Si $s_i \neq s_i^*$ entonces $x_i^k(s_i) = (\varepsilon^k)^p$ donde p es el lugar en el orden lexicográfico de s_i.

Para s_i^* asignamos $x_i^k(s_i^*) = 1 - \sum_{s_i \in S_i \setminus \{s_i^*\}} x_i^k(s_i)$.

Observemos que $x_i^k(s_i^*) > \frac{1}{2}$ ya que

$$\sum_{s_i \in S_i \setminus \{s_i^*\}} x_i^k(s_i) = \sum_{p=2}^{N} x_i^k(s_i)(\varepsilon^k)^p < \frac{1}{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

y además $x^k \to x^*$. Por continuidad de la función de utilidad esperada de cada jugador, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que para toda $m \geq K$, el orden lexicográfico de las estrategias puras frente a x_{-i}^m es el mismo que teníamos frente a $x_{-i}^* = s_{-i}^*$ para todos los jugadores i. Por otra parte, para toda $k \in \mathbb{N}$, tenemos por construcción que si s_i' es la segunda estrategia en el orden lexicográfico con el que empezamos, entonces

$$x_i^k(s_i') = (\varepsilon^k)^2 < \varepsilon^k \frac{1}{2} < \varepsilon^k x_i^k(s_i^*)$$

y de igual forma por construcción, si comparamos cualesquiera otras dos estrategias que no son s_i^*, digamos s_i' y s_i'' tales que $E_i(s_i', x_i^*) > E_i(s_i'', x_i^*)$, y a, b son los lugares de s_i' y s_i'' en el orden lexicográfico frente a x_{-i}^*, respectivamente, entonces $a < b$ y para toda $k \in \mathbb{N}$

$$x_i^k(s_i'') = (\varepsilon^k)^b = (\varepsilon^k)^{b-a}(\varepsilon^k)^a \leq \varepsilon^k(\varepsilon^k)^a = \varepsilon^k x_i^k(s_i')$$

Por último, reindizamos las sucesiones a partir de K con lo cual tenemos las sucesiones $\{\varepsilon^k\}_{k=K}^{\infty}$ y $\{x_k\}_{k=K}^{\infty}$ con las cuales tenemos que cada x_k es completamente mixto, es equilibrio ε^k-propio y $\varepsilon^k \to 0$ y $x^k \to x^*$. Por lo tanto, x^* es un equilibrio propio. ■

Ahora mostraremos que un equilibrio estrictamente perfecto no necesariamente es un equilibrio propio. Para ello, trabajamos los siguientes ejemplos que muestran por separado que no existe relación entre estos equilibrios.

Ejemplo 1.5 (Equilibrio propio $\not\Rightarrow$ Equilibrio estrictamente perfecto).

Consideremos el siguiente juego:

	I	C	D
A	$1,1$	$1,0$	$0,0$
B	$1,1$	$0,0$	$1,0$

Primero observemos, que de haber equilibrios estrictamente perfectos, deben estar en el conjunto de equilibrios de Nash. Así, para cualquier perfil de0 estrategias mixtas de la forma $x = ((p,q),(r,s,t))$ calculamos las utilidades esperadas de ambos jugadores:

$$\begin{aligned} E_1((p,q),(r,s,t)) &= pr + ps + qr + qt = pr + (1-p)r + ps + (1-p)t \\ &= r + t + ps - pt = r + t + p(s-t) \\ E_2((p,q),(r,s,t)) &= pr + qr = pr + (1-p)r = r \end{aligned}$$

De esta manera, podemos ver que $r = 1, s = 0, t = 0$, y por lo tanto, $p \in [0,1]$, $q = 1-p$ son los equilibrios de Nash, es decir:

$$\text{EN} = \{((p, 1-p),(1,0,0)) \mid p \in [0,1]\}$$

Mostraremos que $x^* = ((1,0),(1,0,0))$ no es equilibrio estrictamente perfecto.

Sea $(\eta^k)_{k=1}^{\infty}$ dada por

$$\begin{aligned} \eta_1^k(A) &= \frac{1}{k+2} \\ \eta_1^k(B) &= \frac{1}{k+2} \\ \eta_2^k(I) &= \frac{1}{k+4} \\ \eta_2^k(C) &= \frac{1}{k+4} \\ \eta_2^k(D) &= \frac{2}{k+4} \end{aligned}$$

Observamos que el perfil de estrategias mixtas:

$$x^k = ((\eta_1^k(A), 1-\eta_1^k(A)),(1-\eta_2^k(C)-\eta_2^k(D), \eta_2^k(C), \eta_2^k(D)))$$

es el único equilibrio de Nash en el juego perturbado por η^k, pues por las utilidades calculadas arriba, tenemos que $s = \eta_2^k(C)$ y $t = \eta_2^k(D)$, y para el jugador 1, como $s - t < 0$, entonces $p = \eta_1^k(A)$. Pero $x^k \not\to x^*$, por lo que x^* no es estrictamente perfecto.

Lo mismo podemos hacer para el equilibrio de la forma $x^{**} = ((0,1),(1,0,0))$, intercambiando los valores de $\eta_2^k(C)$ y $\eta_2^k(D)$.

Finalmente, notemos que cualquiera de las dos sucesiones de arriba, al converger a x^* o x^{**} no convergen a un equilibrio mixto, por lo que éstos también fallan en ser equilibrios estrictamente perfectos.

Para mostrar que no se cumple la otra implicación, primero demostramos el siguiente resultado.

Lema 1.2. Un perfil de estrategias x^* es equilibrio de Nash para el juego η-perturbado si para todo jugador i y toda estrategia pura $s_i \in S_i$ tal que s_i no es mejor respuesta a x^*_{-i} tenemos que $x^*_i(s_i) = \eta_i(s_i)$.

Demostración. Supongamos que x^* es un equilibrio de Nash tal que para el jugador i existe s_i que no es mejor respuesta para x^*_{-i}, con $x^*_i(s_i) > \eta_i(s_i)$.

Dado que s_i no es mejor respuesta a x^*_{-i} esto implica que existe $s''_i \in S_i$ tal que

$$\sum_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(s_i, s_{-i})x^*_{-i}(s_{-i}) < \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} u_i(s''_i, s_{-i})x^*_{-i}(s_{-i})$$

Multiplicando ambos lados por $x^*_i(s_i) - \eta_i(s_i)$, esto nos da la desigualdad en la siguiente cadena de expresiones.

$$\begin{aligned}
E_i(x^*) &= \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \left(\sum_{s'_i\in S_i\setminus\{s_i\}} u_i(s'_i, s_{-i})x^*_i(s'_i)x^*_{-i}(s_{-i}) + u_i(s_i, s_{-i})x^*_i(s_i)x^*_{-i}(s_{-i}) \right) \\
&= \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \Bigg(\sum_{s'_i\in S_i\setminus\{s_i, s''_i\}} u_i(s'_i, s_{-i})x^*_i(s'_i)x^*_{-i}(s_{-i}) \\
&\qquad + u_i(s_i, s_{-i})(x^*_i(s_i) - \eta_i(s_i) + \eta_i(s_i))x^*_{-i}(s_{-i}) + u_i(s_i, s_{-i})(x^*_i(s''_i)x^*_{-i}(s_{-i}) \Bigg) \\
&< \sum_{s_{-i}\in S_{-i}} \Bigg(\sum_{s'_i\in S_i\setminus\{s_i, s''_i\}} u_i(s'_i, s_{-i})x^*_i(s'_i)x^*_{-i}(s_{-i}) + u_i(s_i, s_{-i})\eta_i(s_i)x^*_{-i}(s_{-i}) \\
&\qquad + u_i(s''_i, s_{-i})((x_i(s''_i) + x_i(s_i) - \eta_i(s_i))x^*_{-i}(s_{-i}) \Bigg)
\end{aligned}$$

es decir, existe un perfil de estrategias mixtas que asigna $\eta_i(s_i)$ a la estrategia s_i y asigna $x^*_i(s''_i) + x^*_i(s_i) - \eta_i(s_i)$ a la estrategia s''_i el cual tiene mayor utilidad esperada. Por lo tanto x^*_i no es equilibrio de Nash, lo cual es una contradicción. Así, $x^*_i(s_i) = \eta_i(s_i)$. ■

Ahora trabajamos el ejemplo publicado en 1996 por Vermeulen y Jansen [87].

Ejemplo 1.6 (Equilibrio estrictamente perfecto $\not\Rightarrow$ Equilibrio propio)**.**

Tenemos el siguiente juego bipersonal

	a	b	c	d
A	$1,3$	$0,0$	$0,2$	$0,2$
B	$7,0$	$7,0$	$-3,0$	$0,0$
C	$0,0$	$1,3$	$0,2$	$0,2$

Mostraremos que $x^* = (B,d) = ((0,1,0),(0,0,0,1))$ es equilibrio estrictamente perfecto, pero no es equilibrio propio.

CASO 1: Si $\eta_1^k(A) \geq \eta_1^k(C)$, consideramos el siguiente perfil:

$$\begin{aligned} x_1^k &= (\eta_1^k(A), 1-3\eta_1^k(A), 2\eta_1^k(A)) \\ x_2^k &= (\eta_2^k(a), \tfrac{7}{6}\eta_2^k(a)+\eta_2^k(b)+\eta_2^k(c), \tfrac{14}{3}\eta_2^k(a)+2\eta_2^k(b)+2\eta_2^k(c), \\ &\quad\ 1-\tfrac{41}{6}\eta_2^k(a)-3\eta_2^k(b)-3\eta_2^k(c)) \end{aligned}$$

Observemos que si $\eta_i^k(s_i)$ es suficientemente pequeño para toda $s_i \in S_i$ y toda $i \in I$, entonces $x^k \in M(\eta^k)$. También notemos que $x^k \to x^*$ cuando $\eta^k \to 0$. Además

$$\begin{aligned} &E_1((0,1,0),x_{-1}^k) = E_1((0,0,1),x_{-1}^k) > E_1((1,0,0),x_{-1}^k) \\ &E_2(x_{-2}^k,(0,1,0,0)) = E_2(x_{-2}^k,(0,0,1,0)) = E_2(x_{-2}^k,(0,0,0,1)) > E_2(x_{-2}^k,(1,0,0,0)) \end{aligned}$$

Como x^k es tal que para las estrategias puras que no son mejor respuesta, la estrategia mixta respectiva es igual a la perturbación, por el lema 1.2, x^k es un equilibrio de Nash del juego perturbado por η^k.

CASO 2: Si $\eta_1^k(A) \leq \eta_1^k(C)$, consideramos el perfil

$$\begin{aligned} x_1^k &= (2\eta_1^k(C), 1-3\eta_k^1(C), \eta_1^k(C)) \\ x_2^k &= (\eta_2^k(a)+\tfrac{7}{6}\eta_2^k(b)+\eta_2^k(c), \eta_2^k(b), 2\eta_2^k(a)+\tfrac{14}{3}\eta_2^k(b)+2\eta_2^k(c), \\ &\quad\ 1-3\eta_2^k(a)-\tfrac{41}{6}\eta_2^k(b)-3\eta_2^k(c)) \end{aligned}$$

Observamos que $x^k \to x^*$ y que para η^k suficientemente pequeño, $x^k \in M(\eta^k)$. De una manera análoga al caso 1 podemos probar que x^k es equilibrio de Nash del juego perturbado por η^k.

Por lo tanto, x^* es equilibrio estrictamente perfecto. Ahora probaremos que x^* no es equilibrio propio.

Supongamos que el perfil de estrategias mixtas $x = ((p_1,p_2,p_3),(q_1,q_2,q_3,q_4))$ es un equilibrio η-propio de la sucesión que converge a x^* para η suficientemente pequeña, con la condición de que $\eta < 3/13$.

Supongamos que $E_2(x_{-2},(1,0,0,0)) > E_2(x_{-2},(0,0,0,1))$. Por ser x equilibrio η-propio, esto implica que $q_4 \leq \eta q_1$. Pero $q_4 \to 1$, que lleva a una contradicción.

Por lo tanto $E_2(x_{-2},(1,0,0,0)) \leq E_2(x_{-2},(0,0,0,1))$. Por un razonamiento similar, tenemos que $E_2(x_{-2},(0,1,0,0)) \leq E_2(x_{-2},(0,0,0,1))$.

Calculamos las utilidades esperadas:

$$\begin{aligned} E_2(x_{-2},(1,0,0,0)) &= 3p_1 \\ E_2(x_{-2},(0,1,0,0)) &= 3p_3 \\ E_2(x_{-2},(0,0,0,1)) &= 2p_1+2p_3 \end{aligned}$$

y sustituyendo en las desigualdades obtenidas anteriormente, tenemos que

$$3p_1 \leq 2p_1 + 2p_3 \Leftrightarrow p_1 \leq 2p_3$$

$$3p_3 \leq 2p_1 + 2p_3 \Leftrightarrow p_3 \leq 2p_1$$

Supongamos que $E_1((1,0,0), x_{-1}) < E_1((0,0,1), x_{-1})$, entonces por ser x un equilibrio η-propio, y por las desigualdades anteriores, implica que $p_1 \leq \eta p_3 \leq 2\eta p_1$, por lo cual $p_1 = 0$. Pero x es una estrategia que es completamente mixta, o no estaría en el conjunto de estrategias perturbado, lo que lleva a una contradicción.

Supongamos entonces que $E_1((1,0,0), x_{-1}) > E_1((0,0,1), x_{-1})$, entonces por ser x un equilibrio η-propio y las desigualdades de arriba, tenemos $p_3 \leq \eta p_1 \leq 2\eta p_3$, que implica que $p_3 = 0$. Igualmente, como x es completamente mixta, llegamos a una contradicción.

Por lo tanto $E_1((1,0,0), x_{-1}) = E_1((0,0,1), x_{-1})$. Calculando ambas utilidades esperadas, quiere decir que $q_1 = q_2$.

Ahora supongamos que $E_1((0,1,0), x_{-1}) < E_1((0,0,1), x_{-1})$, entonces por ser x equilibrio η-propio, $p_2 \leq \eta p_3$, lo cual no es posible, pues $p_2 \to 1$. Por lo tanto $E_1((0,1,0), x_{-1}) \geq E_1((0,0,1), x_{-1})$. Calculando ambas utilidades esperadas:

$$E_1((0,1,0), x_{-1}) = 7q_1 + 7q_2 - 3q_3$$
$$E_1((0,0,1), x_{-1}) = q_2$$

tenemos que

$$7q_1 + 7q_2 - 3q_3 \geq q_2 \Leftrightarrow 7q_1 + 6q_2 - 3q_3 \geq 0$$

Como ya probamos que $q_1 = q_2$, entonces $13q_2 \geq 3q_3$.

Supongamos que $E_2(x_{-2}, (0,1,0,0)) < E_2(x_{-2}, (0,0,1,0))$. Por ser x equilibrio η-propio, $q_2 \leq \eta q_3$, o bien, $13q_2 \leq 13\eta q_3$. Como $\eta < 3/13$ y por la desigualdad obtenida arriba

$$13q_2 \leq 13\eta q_3 < 3q_3 \leq 13q_2$$

que es una contradicción.

Por lo tanto $E_2(x_{-2}, (0,1,0,0)) \geq E_2(x_{-2}, (0,0,1,0))$. Finalmente, haciendo el cálculo directo, observamos que $E_2(x_{-2}, (0,0,1,0)) = E_2(x_{-2}, (0,0,0,1))$, por lo cual

$$E_2(x_{-2}, (0,1,0,0)) \geq E_2(x_{-2}, (0,0,1,0)) = E_2(x_{-2}, (0,0,0,1)) \geq E_2(x_{-2}, (0,1,0,0))$$

es decir, todas son igualdades.

Ahora, como x es equilibrio η-propio, y $q_1 = q_2$, entonces $q_1 > \eta q_2$ y $q_2 > \eta q_1$, lo que implica que $E_2(x_{-2}, (1,0,0,0)) \geq E_2(x_{-2}, (0,1,0,0))$ y $E_2(x_{-2}, (0,1,0,0)) \geq E_2(x_{-2}, (1,0,0,0))$, es decir $E_2(x_{-2}, (1,0,0,0)) = E_2(x_{-2}, (0,1,0,0))$.

Como

$$E_2(x_{-2}, (1,0,0,0)) = E_2(x_{-2}, (0,0,1,0))$$
$$E_2(x_{-2}, (0,1,0,0)) = E_2(x_{-2}, (0,0,1,0))$$

tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3p_1 = 2p_1 + 2p_3$$

$$3p_3 = 2p_1 + 2p_3$$

o bien

$$\begin{aligned} 2p_3 - p_1 &= 0 \\ 2p_1 - p_3 &= 0 \end{aligned}$$

cuya única solución es $p_1 = p_3 = 0$, pero esto es una contradicción, ya que $x_1 \in M_1(\eta)$, es decir, x_1 debe ser completamente mixta.

Por lo tanto x no puede ser un equilibrio η-propio, para toda $\eta < 3/13$, es decir, no existe sucesión $(\eta^k)_{k=1}^{\infty}$ de temblores con $\eta^k \to 0$ y una sucesión $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ de perfiles de estrategias mixtas con $x^k \to x^*$ tal que x^k sea equilibrio η^k-propio. Es decir, x^* no es equilibrio propio.

En los juegos en forma normal los jugadores toman sus decisiones simultáneamente, sin embargo, esto no es necesariamente adecuado para modelar algunas situaciones, en particular, cuando los jugadores ganan información a partir de las decisiones realizadas por los oponentes. Para ello, introducimos el concepto de juego dinámico.

Definición 1.26. Un juego dinámico es una tupla $G = (I, H, (S_i(h))_{i \in I, h \in H}, (u_i)_{i \in I})$ donde sus elementos son:

1. Un conjunto finito de **jugadores** $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ que son los individuos involucrados en el juego.

2. La colección H de **conjuntos de información**, que son aquellos puntos en el juego en los que los jugadores que realizan una elección en ese momento tienen la misma información del juego.

3. Para cada jugador $i \in I$ y cada $h \in H$ un conjunto finito $S_i(h)$ de **estrategias puras** que son las elecciones que el jugador i puede realizar en el conjunto de información h.

4. Para cada jugador $i \in I$ una **función de utilidad** $u_i \colon Z \to \mathbb{R}$ que serán los pagos de cada jugador dentro del juego. El conjunto Z son las historias terminales del juego las cuales son sucesiones de elecciones realizadas por los jugadores en los conjuntos de información.

Como tal, en esta definición de juego, se asume que hay un orden entre los conjuntos de información, y que al realizar una elección en uno de éstos, el juego avanza al siguiente conjunto de información (lo que esto signifique en el juego). Por lo tanto, el número de turnos está determinado por las elecciones que se realicen en el juego y la sucesión que ocurra en el mismo, y a su vez esto define las historias terminales del juego.

Para los juegos dinámicos tendremos también un equilibrio de Nash definido a partir de la forma normal de un juego. La forma normal de un juego se obtendrá al tomar como conjunto de estrategias para cada jugador aquel conjunto formado por los perfiles de elecciones con tantas elecciones como conjuntos de información en los que participa cada jugador, y cada una de estas elecciones es una de las disponibles para el jugador en el respectivo conjunto de información. Si realizamos esto, podemos pensar en un equilibrio de Nash como se ha trabajado anteriormente.

Definición 1.27. Dado un juego dinámico G, definimos un subjuego

$$G' = (I', H', (S_i)_{i\in I', h\in H'}, (u_i)_{i\in I'})$$

como un juego dinámico en el cual se cumple que $I' \subseteq I$, $H' \subseteq H$ y

- Si $h \in H'$ entonces todos los conjuntos de información que siguen a h también están en H'.
- Las funciones de utilidad se restringen de manera natural, considerando que las historias terminales solamente tienen las elecciones correspondientes a los conjuntos de información en H', pero no las anteriores.

Sin embargo, no es la única solución posible para un juego, y para ello tenemos lo que se conoce como un equilibrio de Nash perfecto en subjuegos. En este caso lo que se pide es que para cada subjuego el equilibrio sea un equilibrio de Nash para la forma normal del subjuego. Esto restringe las posibles soluciones, pero pide que consideremos no solamente lo que sucede en los conjuntos de información por los que pasa el juego al llevarse a cabo las elecciones que están en la solución, sino que también se considera lo que ocurre en los conjuntos de información fuera de la solución, y se tienen mejores respuestas en estos casos también; en otras palabras, si en algún punto del juego ocurriera un error y se eligiera algo fuera del equilibrio, en lo que sigue del juego se puede seguir lo que se tiene en el equilibrio perfecto en subjuegos y aun así llegar a la mejor situación dado el error ocurrido anteriormente.

Definición 1.28. Un perfil de estrategias x^* es un **equilibrio de Nash perfecto en subjuegos** del juego G si para cada subjuego G' de G se tiene que x^* restringida a G' es un equilibrio de Nash en la forma normal de G'.

Por último, para preparar lo que se trabajará en los siguientes dos capítulos, a diferencia de lo que se permitía en los juegos dinámicos anteriormente, se considerará que los juegos tienen una cantidad de turnos conocida de antemano, y por lo tanto, esto se puede pedir como un elemento del juego. Más aun, ya que no se sabrá de antemano a qué jugador corresponde cada uno de los diferentes conjuntos de información, para facilitar el estudio de los modelos, se utilizará la siguiente definición de un juego dinámico.

Definición 1.29. Un juego dinámico es una cuarteta $G = (I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}, T)$ donde sus elementos son:

1. Un conjunto finito de **jugadores** $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ que son los individuos involucrados en el juego.

2. Para cada jugador $i \in I$ y cada $h \in H$ un conjunto finito S_i de **estrategias** (puras) que serán las elecciones posibles de cada jugador dentro del juego.

3. Para cada jugador $i \in I$ una **función de utilidad** $u_i \colon Z \to \mathbb{R}$ que serán los pagos de cada jugador dentro del juego. El conjunto Z son las historias terminales del juego las cuales son sucesiones de elecciones realizadas por los jugadores en los conjuntos de información

4. El **horizonte** del juego $T \in \mathbb{N}$ que es el número de turnos que tendrá el juego.

Capítulo 2

Juegos con proceso de selección de turnos

Como se ha discutido previamente, para lidiar con aquellos juegos en los que hay elementos aleatorios se trabaja con juegos estocásticos los cuales permiten que eventos aleatorios ocurran a lo largo del juego. Mucho de lo que se ha trabajado es en un contexto de juegos simultáneos que se repiten a lo largo del tiempo y en los cuales hay varios estados a los cuales se mueve el juego, y donde la utilidad final es una suma de las utilidades descontadas.

En este capítulo se introducirá una familia de modelos para juegos secuenciales en los que la estructura del juego en lo que concierne al orden en el que se toman las decisiones no está fijo desde el inicio. Dicha selección se lleva a cabo mediante un proceso de selección que es aleatorio a los ojos de cada jugador (dicho proceso puede ser determinista desde un inicio, pero esto no es observable por ningún jugador), por lo que se utilizará una distribución de probabilidad para modelarlo, y la utilidad recibida en el juego es una utilidad final, que depende de las decisiones realizadas por todos los jugadores. Se mostrará la existencia de un equilibrio adecuado al modelo y se describirán otros modelos para los cuales otras características se modifican, con lo cual cubrimos varias situaciones.

2.1 Modelo de juego con proceso de selección de turnos

Consideremos un juego dinámico $G = (I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I}, T)$. Además, consideramos para cada jugador $i \in I$ una densidad de probabilidad $p_i \colon I \to [0,1]$ que describe la distribución utilizada para modelar el proceso de selección de turnos en el juego según el jugador i.

Observemos que los jugadores no saben en qué turnos del juego les corresponde llevar a cabo una acción, por lo que cada jugador requiere de un plan de estrategias que tiene una estrategia para cada posible periodo. Como todos los jugadores pueden observar las estrategias que se han elegido en periodos anteriores, la elección realizada en el periodo ℓ debe estar condicionada por un escenario $\mathsf{s}^\ell = (\mathsf{s}^{\ell-1}, \mathsf{s}^1)$, en el cual s^k es la elección realizada en k. De esta forma, cada jugador i tiene lo que denominaremos un plan de estrategias condicionadas, denotado por s_i en el cual hay una estrategia s_i^ℓ para cada periodo ℓ y para cada posible escenario s^ℓ que se pueda dar en el periodo ℓ. Dicho conjunto de planes de estrategias condicionadas se denotará por P_i si los planes consisten de estrategias puras, y se denotará por Q_i al conjunto de planes de estrategias condicionales que también considera estrategias mixtas.

Finalmente, tenemos vectores de planes que nos sirven para considerar las estrategias de todos los jugadores en todos los posibles escenarios. Dichos vectores serán denominados perfiles de estrategias condicionadas, y sus conjuntos se denotarán por P y Q de acuerdo a si consisten sólo de estrategias puras, o admiten estrategias mixtas.

2.1.1 Un turno por jugador

Primero empezamos con un par de situaciones básicas en las cuales podríamos encontrar juegos donde se desconoce el orden de turnos. Iniciamos con el caso en el que cada jugador tiene exactamente un turno en el juego. Esto podría ejemplificarse con una subasta en la que cada jugador se acerca en algún momento a una hoja en la que se escriben las pujas, y solamente puede realizarse una. Una vez que se ha decidido acercarse a la hoja, se debe ofertar por el objeto, y como se puede ver, se pueden observar las ofertas realizadas anteriormente, pues éstas se encuentran escritas.

Para evaluar algún perfil de estrategias condicionadas $x = (x_1, \ldots, x_N) \in Q$ definimos la utilidad esperada para cada jugador $i \in I$ como

$$\begin{aligned} E_i(x) = &\sum_{(n^1,\ldots,n^N)\in \mathsf{P}(I)} \sum_{s^1\in S_{n^1}} \cdots \sum_{s^N\in S_{n^N}} u_i(s^N, \ldots, s^1) \\ &\times x_{n^N}(s^N \mid s^{N-1}, \ldots, s^1) p_i(n^N) \cdots x_{n^1}(s^1) p_i(n^1) \end{aligned}$$

donde $\mathsf{P}(I)$ es el conjunto de permutaciones de I. Dicha utilidad esperada está definida en el espacio de probabilidad $((S \times N)^T, 2^{(S\times N)^T}, \mu)$ donde μ es aquella distribución de probabilidad tal que

$$\mu((s^1, n^1), \ldots, (s^T, n^T)) = x_{n^N}(s^N \mid s^{N-1}, \ldots, s^1) p_i(n^N) \cdots x_{n^1}(s^1) p_i(n^1)$$

cuando $s^k \in S_{n^k}$ para todo $k \in \{1, \ldots, T\}$, y es igual a 0 en otro caso. En este ejemplo, dado que solamente tenemos un turno por jugador, $T = N$.

Con base en la definición anterior, decimos que un equilibrio de Nash es un perfil de estrategias condicionadas $x^* \in Q$ tal que para todo jugador $i \in I$

$$E_i(x^*) \geq E_i(x^*_{-i}, x_i)$$

para todo $x_i \in Q_i$. Esta definición será utilizada a lo largo del capítulo, tan sólo realizando modificaciones en la forma en que se define la utilidad esperada en cada versión de juego.

2.1.2 Número fijo de turnos por jugador

Generalizamos el modelo anterior al permitir que cada jugador realice más de una elección, aunque de antemano fijamos el número de elecciones permitidas a cada jugador, el cual puede ser diferente para cada uno, pero mantenemos que cada jugador desconoce cuando realizará cada una de dichas acciones. Un ejemplo sería la subasta antes descrita, pero ahora cada jugador sabe cuántas veces le está permitido acercarse a ofertar por el artículo.

Para esto, si el vector que nos dice el número de turnos para cada jugador está dado por $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_I)$ la utilidad esperada del jugador i para el perfil $x \in Q$ es de la forma

$$\begin{aligned} E_i(x) = & \sum_{(n^1,\dots,n^T)\in \mathsf{P}_{\mathbf{m}}(I)} \sum_{s^1\in S_{n^1}} \cdots \sum_{s^T\in S_{n^T}} u_i(s^T,\dots,s^1) \\ & \times x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1},\dots s^1) p_i(n^T) \cdots x_{n^1}(s^1) p_i(n^1) \end{aligned}$$

donde $\mathsf{P}_{\mathbf{m}}(I)$ es el conjunto de permutaciones de I con m_k repeticiones de k, y $T = \sum_{i\in I} m_i$.

2.1.3 Número desconocido de turnos por jugador

En este caso no sabemos el número de decisiones que cada jugador realizará, en cambio, sabemos el total de decisiones que se realizan a lo largo del juego, T. Para este modelo tenemos una subasta en la que se permiten T ofertas y una vez que éstas se han realizado, el objeto se le asigna al jugador que paga más por éste, ya que no hemos requerido que los jugadores hagan ofertas más altas sucesivamente.

Así, la utilidad esperada del perfil $x \in Q$ para el jugador i es:

$$\begin{aligned} E_i(x) = & \sum_{n^1\in I} \sum_{s^1\in S_{n^1}} \cdots \sum_{n^T\in I} \sum_{s^T\in S_{n^T}} u_i(s^T,\dots,s^1) \\ & \times x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1},\dots s^1) p_i(n^T) \cdots x_1(s^1) p_i(n^1) \end{aligned}$$

2.1.4 Actualización de la distribución de turnos

En los modelos presentados anteriormente, se considera que cada jugador decide cómo modelar el proceso de selección de turnos antes de que el juego inicie. Sin embargo, dicha predicción puede no ser adecuada, y conforme el juego se desarrolla, esto puede dar más información acerca de cómo se comporta el proceso de selección. Por lo tanto, permitimos que cada jugador tenga diferentes distribuciones para cada periodo.

En vez de tener una densidad de probabilidad fija p_j, cada jugador tiene un vector de densidades $(p^1, p_j^2, \dots, p_j^T)$. De esta forma, la utilidad esperada para el perfil $x \in Q$ para el jugador i es:

$$E_i(x) = \sum_{n^1\in I} \sum_{s^1\in S_{n^1}} \cdots \sum_{n^T\in I} \sum_{s^T\in S_{n^T}} u_i(s^T,\dots,s^1)$$

$$\times\, x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1},\ldots,s^1)p_i^T(n^T)\cdots x_{n^1}(s^1)p_i^1(n^1)$$

2.1.5 Selección de turnos condicionada en las decisiones anteriores

Anteriormente, sólo las estrategias mixtas dependían de las decisiones que se llevan a cabo en turnos anteriores. Podemos permitir también que el proceso de selección de turnos cambie de acuerdo a las decisiones que han ocurrido anteriormente. Aquí también se incluyen los casos en los que el proceso sólo depende de la decisión inmediatamente anterior, y también el caso en el que el proceso sólo depende de su propio comportamiento, es decir, de los jugadores que han sido seleccionados en los turnos anteriores.

En este caso, la utilidad esperada del perfil $x \in Q$ para el jugador i es

$$\begin{aligned} E_i(x) = &\sum_{n^1\in I}\sum_{s^1\in S_{n^1}}\cdots\sum_{n^T\in I}\sum_{s^T\in S_{n^T}} u_i(s^T,\ldots,s^1) \\ &\times\, x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1},\ldots,s^1)p_i(n^T \mid s^{T-1},\ldots s^1)\cdots x_{n^1}(s^1)p_i(n^1)\end{aligned}$$

2.1.6 Conjuntos de estrategias cambiantes a lo largo del juego

Ahora permitiremos que cambien los conjuntos de estrategia de acuerdo al periodo del juego que se esté llevando a cabo. Esto también se puede modificar para tener un modelo en el que los conjuntos de estrategias cambien con base en las decisiones que se han tomado anteriormente. De esta forma, la utilidad esperada para el perfil $x \in Q$ para el jugador i es

$$\begin{aligned} E_i(x) = &\sum_{n^1\in I}\sum_{s^1\in S^1_{n^1}}\cdots\sum_{n^T\in I}\sum_{S^T\in S^T_{n^T}} u_i(s^T,\ldots,s^1) \\ &\times\, x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1},\ldots s^1)p_i(n^T)\cdots x_{n^1}(s^1)p_i(n^1)\end{aligned}$$

o en el caso en que los conjuntos de estrategias están condicionados a las decisiones previas

$$\begin{aligned} E_i(x) = &\sum_{n^1\in I}\sum_{s^1\in S_{n^1}}\cdots\sum_{n^T\in I}\sum_{s^T\in S_{n^T}(s^{T-1},\ldots,s^1)} u_i(s^T,\ldots,s^1) \\ &\times\, x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1},\ldots,s^1)p_i(n^T)\cdots x_{n^1}(s^1)p_i(n^1)\end{aligned}$$

2.1.7 Modelo bayesiano

En este modelo, tenemos un conjunto de tipos Θ_i para cada jugador i. La naturaleza elige un tipo $\theta_i \in \Theta_i$ para i. Cada jugador sabe su propio tipo, cada uno con una distribución a priori $b_i(\cdot \mid \theta_i)\colon \Theta_{-i} \to [0,1]$ para los tipos de los otros jugadores, para cada $\theta_i \in \Theta_i$. La única condición de b_i es que sus probabilidades se actualizan de forma bayesiana, es decir, para cualesquiera jugadores $i, j \in I$, si $\theta_i = a$ y $\theta_j = c$, entonces

$$b_i(\theta_j = c \mid \theta_i = a) = \frac{b_i([\theta_i = a] \cap [\theta_j = c])}{b_i(\theta_i = a)}$$

Además, la función de utilidad depende del tipo de cada jugador, por lo que tenemos funciones de utilidad de la forma $u_i(\cdot \mid \theta_i)\colon \Sigma \to \mathbb{R}$, lo que afecta las estrategias, pues cada tipo podría elegir diferentes estrategias.

Con lo anterior podemos definir la utilidad esperada del jugador i para el perfil de estrategias $x \in Q$ como

$$\begin{aligned} E_i(x) = &\sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} \sum_{n^1 \in I} \sum_{s^1 \in S_{n^1}} \cdots \sum_{n^T \in I} \sum_{s^T \in S_{n^T}} u_i(s^T(\theta_{n^T}), \ldots, s^1(\theta_{n^1}) \mid \theta_i) \\ &\times b_i(\theta_{-i} \mid \theta_i) x_{n^T}(s^T(\theta_{n^T}) \mid s^{T-1}(\theta_{n^{T-1}}), \ldots, s^1(\theta_{n^1})) p_i(n^T) \\ &\times \cdots x_{n^1}(s^1(\theta_{n^1})) p_i(n^1) \end{aligned}$$

2.2 Existencia de equilibrios de Nash

En esta sección presentaremos una serie de resultados que aseguran la existencia de equilibrios de Nash para el modelo presentado en la sección 2.1.3. Estos resultados se pueden adaptar para los otros modelos propuestos y mostrar también la existencia de equilibrios de Nash.

El procedimiento que seguimos es mostrar que se cumplen las condiciones del teorema de punto fijo de Kakutani para la correspondencia de mejor respuesta asociada con la función de utilidad esperada del modelo.

Para empezar, mostramos la continuidad de la función de utilidad esperada.

Teorema 2.1. La función de utilidad esperada es una función continua en el plan de estrategias condicionadas de cada jugador.

Ahora tenemos algunas propiedades del conjunto de perfiles de estrategias condicionadas.

Teorema 2.2. El conjunto Q es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de $\mathbb{R}^q$ con $q = \sum_{i \in I} |S_i| \cdot \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{j \in I} |S_j| \right)^{t-1}$.

Definimos para cada jugador i la correspondencia de mejor respuesta BR_i para el perfil parcial x_{-i} como:

$$BR_i(x_{-i}) = \{x_i' \in Q_i \mid E_i(x_{-i}, x_i') \geq E_i(x_{-i}, y_i) \text{ para todo } y_i \in Q_i\}$$

y mostramos algunas propiedades de dicha correspondencia.

Teorema 2.3. La correspondencia de mejor respuesta $BR\colon Q \to Q$ dada por

$$BR(x) = (BR_1(x_{-1}), BR_2(x_{-2}), \ldots, BR_N(x_{-N}))$$

es una correspondencia no vacía con gráfica cerrada.

Para demostrar la convexidad de la correspondencia de mejor respuesta se requieren más argumentos. Dado un plan de estrategias mixtas x_i, decimos que un plan de estrategias y_i para el escenario $\mathbf{s}^\ell = (\mathsf{s}^{\ell-1}, \ldots, \mathsf{s}^1)$ es similar a x_i si y_i es un plan en el que todas las estrategias mixtas son idénticas a las de x_i, excepto la que está condicionada por $\mathbf{s}^\ell$, la cual es reemplazada en y_i por una estrategia pura s_i^ℓ para la cual se cumple que $x_i(s_i^\ell \mid \mathbf{s}^\ell) > 0$. Es decir, la estrategia s_i^ℓ se elige con probabilidad positiva bajo x_j frente al escenario $\mathbf{s}^\ell$. El conjunto de planes similares a x_j para el escenario $\mathbf{s}^\ell$ se denota por $W_j(x_j \mid \mathbf{s}^\ell)$.

A continuación mostramos una serie de resultados que nos llevarán a demostrar la convexidad de la correspondencia de mejor respuesta.

Lema 2.1. Sea $x \in Q$ tal que para el jugador i, $x_i \in BR_i(x_{-i})$. Entonces para cualquier escenario $\mathbf{s}^\ell = (\mathsf{s}^{\ell-1}, \ldots, \mathsf{s}^1)$ y cualesquiera planes $y_i, z_i \in W_i(x_i \mid \mathbf{s}^\ell)$ se cumple que

$$E_i(x_{-i}, y_i) = E_i(x_{-i}, z_i)$$

Lema 2.2. Sea $x \in Q$ tal que para el jugador i, $x_i \in BR_i(x_{-i})$. Entonces para cualquier escenario $\mathbf{s}^\ell = (\mathsf{s}^{\ell-1}, \ldots, \mathsf{s}^1)$ y cualquier plan $y_i \in W_i(x_i \mid \mathbf{s}^\ell)$ tenemos que

$$E_i(x) = E_i(x_{-i}, y_i)$$

El siguiente corolario se sigue fácilmente al aplicar el resultado anterior a cada estrategia pura en el plan de estrategias mixtas y_i.

Corolario 2.1. Sea $x \in Q$ tal que para el jugador i, $x_i \in BR_i(x_{-i})$. Para cualquier escenario $\mathbf{s}^\ell = (\mathsf{s}^{\ell-1}, \ldots, \mathsf{s}^1)$, si el plan de estrategias mixtas condicionadas y_i para el escenario $\mathbf{s}^\ell$ es tal que $W_i(y_i \mid \mathbf{s}^\ell) \subseteq W_i(x_i \mid \mathbf{s}^\ell)$, entonces

$$E_i(x) = E_i(x_{-i}, y_i)$$

Y el siguiente corolario se sigue de aplicar el corolario anterior a los planes y_i y z_i.

Corolario 2.2. Sea $x \in Q$ tal que para el jugador i, $x_i \in BR_i(x_{-i})$. Para cualquier escenario $\mathbf{s}^\ell = (\mathsf{s}^{\ell-1}, \ldots, \mathsf{s}^1)$, si los planes de estrategias mixtas condicionadas y_i y z_i para el escenario $\mathbf{s}^\ell$ son tales que $W_i(y_i \mid \mathbf{s}^\ell) \subseteq W_i(x_i \mid \mathbf{s}^\ell)$ y $W_i(z_i \mid \mathbf{s}^\ell) \subseteq W_i(x_i \mid \mathbf{s}^\ell)$, entonces

$$E_i(x_{-i}, y_i) = E_i(x_{-i}, z_i)$$

Generalizamos los resultados anteriores en el siguiente teorema.

Teorema 2.4. Sea $x \in Q$ tal que para el jugador i, $x_i \in BR_i(x_{-i})$. Entonces para cualquier escenario $\mathbf{s}^\ell = (\mathsf{s}^{\ell-1}, \dots, \mathsf{s}^1)$ y cualesquiera dos planes de estrategias y_i, z_i, tales que $W_i(y_i \mid \mathbf{s}^\ell) \subseteq W_i(x_i \mid \mathbf{s}^\ell)$ y $W_i(z_i \mid \mathbf{s}^\ell) \subseteq W_i(x_i \mid \mathbf{s}^\ell)$, se cumple que

$$E_i(x_{-i}, y_i) = E_i(x_{-i}, z_i)$$

Notemos que si x_i y x'_i son mejores respuestas para x_{-i}, entonces $E_i(x_{-i}, x_i) = E_i(x_{-i}, x'_i)$ y por lo tanto el plan $x''_i = (x_i + x'_i)/2$ es una mejor respuesta a x_{-i}, y tenemos el siguiente resultado.

Teorema 2.5. Sea x_{-i} un perfil parcial de planes de estrategias. Si y_i, z_i son planes de estrategias tales que para el escenario $\mathbf{s}^\ell = (\mathsf{s}^{\ell-1}, \dots \mathsf{s}^1)$ existen $x_i, x'_i \in BR_i(x_{-i})$ para los que se cumple que $W_i(y_i \mid \mathbf{s}^\ell) \subseteq W_i(x_i \mid \mathbf{s}^\ell)$ y $W_i(z_i \mid \mathbf{s}^\ell) \subseteq W_i(x'_i \mid \mathbf{s}^\ell)$, entonces

$$E_i(x_{-i}, y_i) = E_i(x_{-i}, z_i)$$

Con lo anterior podemos demostrar la condición de convexidad para la correspondencia de mejor respuesta.

Teorema 2.6. La correspondencia de mejor respuesta BR es convexa.

Dados los resultados anteriores, tenemos que la correspondencia de mejor respuesta cumple las condiciones del teorema de punto fijo de Kakutani, que garantiza la existencia de al menos un punto fijo para BR. Fácilmente podemos ver que un punto fijo de BR corresponde a un equilibrio de Nash del modelo y viceversa. De esta forma, tenemos el resultado principal.

Teorema 2.7. Todo juego secuencial con horizonte finito y proceso de selección de turnos con conjuntos de estrategias finitos tiene al menos un equilibrio de Nash.

2.3 Ejemplos

2.3.1 Unos y ceros

Dos jugadores realizan el siguiente juego: en cada turno, una moneda es lanzada al aire para elegir un jugador, si cae águila se selecciona al jugador 1, si cae sol se selecciona al jugador 2. Tras este lanzamiento, el jugador seleccionado puede elegir entre añadir al contador del juego 0 ó 1. Lo anterior se repite T veces. El contador del juego empieza en cero, e indica lo que un jugador pagará al otro, de acuerdo a la paridad del contador después de los T turnos. Si el contador es impar, el jugador 1 gana esa cantidad del jugador 2, y si el contador es par, el jugador 2 gana esa cantidad del jugador 1.

Notemos que en el juego anterior, el jugador que es seleccionado al último es el que decide quién gana, pues con su elección puede cambiar la paridad del contador. Las elecciones realizadas anteriormente solamente afectan la cantidad que se intercambia al final del juego.

Para el caso de $T = 2$ periodos, podemos hallar fácilmente que:

$$\begin{array}{ll} x_1(0 \mid 0) = 0 & x_1(1 \mid 0) = 1 \\ x_1(0 \mid 1) = 1 & x_1(1 \mid 1) = 0 \\ x_2(0 \mid 0) = 1 & x_2(1 \mid 0) = 0 \\ x_2(0 \mid 1) = 0 & x_2(1 \mid 1) = 1 \end{array}$$

o en una forma más sintetizada, tenemos

$$x_1(s^2 \mid s^1) = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{s^1+s^2+1}}{2}$$
$$x_2(s^2 \mid s^1) = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{s^1+s^2}}{2}$$

En este juego, las funciones de utilidad están dadas por:

$$u_1(s^2, s^1) = (-1)^{s^1+s^2+1}(s^1 + s^2)$$
$$u_2(s^2, s^1) = (-1)^{s^1+s^2}(s^1 + s^2)$$

La utilidad esperada del jugador 1 está dada por:

$$\begin{aligned} E_1(x) &= \sum_{n^1\in\{1,2\}} \sum_{s^1\in\{0,1\}} \sum_{n^2\in\{1,2\}} \sum_{s^2\in\{0,1\}} (-1)^{s^1+s^2+1}(s^1 + s^2)x_{n^2}(s^2 \mid s^1)p_1(n^2)x_{n^1}(s^1)p_1(n^1) \\ &= p^2 - 2pqx_1(1) + pq - 2q^2x_2(1) \end{aligned}$$

donde $p_i(1) = p$ y $p_1(2) = q = 1 - p$ para cualquier jugador i. Fácilmente podemos ver que $E_1(x) = -E_2(x)$ ya que las ganancias de un jugador son las pérdidas del otro.

Por lo tanto, el jugador 1, para maximizar su utilidad esperada, debe elegir $x_1(1) = 0$, mientras que el jugador 2 debe elegir $x_2(1) = 1$. Es decir, si el jugador 1 es seleccionado en el primer turno, elige mantener el contador en 0, mientras que si el jugador 2 es seleccionado, elige incrementar el contador a 1.

Ahora estudiemos el caso en el que $T = 3$. de igual forma que antes, tenemos las estrategias para cada uno de los jugadores en forma sintetizada:

$$x_1(s^3 \mid s^2, s^1) = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{s^1+s^2+s^3+1}}{2}$$
$$x_2(s^3 \mid s^2, s^1) = \frac{1}{2} + \frac{(-1)^{s^1+s^2+s^3}}{2}$$

y las funciones de utilidad son:

$$u_1(s^3, s^2, s^1) = (-1)^{s^1+s^2+s^3+1}(s^1 + s^2 + s^3)$$
$$u_2(s^3, s^2, s^1) = (-1)^{s^1+s^2+s^3}(s^1 + s^2 + s^3)$$

La función de utilidad esperada para el jugador 1 se puede reducir hasta llegar a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
E_1(x) = (1 - x_1(1))p^2 &+ (1 - x_2(1))pq \\
&- 2(x_1(1 \mid 0)pq + x_2(1 \mid 0)q^2((1 - x_1(1))p + (1 - x_2(1))q) \\
&+ ((1 + 2x_1(1 \mid 1))p^2 + (1 + 2x_2(1 \mid 1))pq)(x_1(1)p + x_2(1)q) \\
&- 2x_1(1)pq - 2x_2(1)q^2
\end{aligned}$$

donde los términos que tienen $x_1(1 \mid 0)$ son no positivos, por lo que para maximizar la utilidad esperada, $x_1(1 \mid 0) = 0$. Como $E_2(x) = -E_1(x)$, los términos que tienen $x_2(1 \mid 0)$ son no negativos en $E_2(x)$, por lo que $x_2(1 \mid 0) = 1$ maximiza la utilidad esperada. De esta forma obtenemos

$$\begin{aligned}
E_1(x) = (1 - x_1(1))p^2 &+ (1 - x_2(1))pq - 2q^2((1 - x_1(1))p + (1 - x_2(1))q) \\
&+ ((1 - 2x_1(1 \mid 1))p^2 + (1 + 2x_2(1 \mid 1))pq)(x_1(1)p + x_2(1)q) \\
&- 2x_1(1)pq - 2x_2(1)q^2
\end{aligned}$$

y siguiendo un razonamiento similar a lo hecho anteriormente, observamos que $x_1(1 \mid 1) = 1$ y $x_2(1 \mid 1) = 0$ maximizan la utilidad esperada del jugador respectivo, así

$$\begin{aligned}
E_1(x) &= (1 - x_1(1))p^2 + (1 - x_2(1))pq - 2q^2((1 - x_1(1))p + (1 - x_2(1))q) \\
&\quad + (3p^2 + pq)(x_1(1)p + x_2(1)q) - 2x_1(1)pq - 2x_2(1)q^2 \\
&= p - 2q^2 + (2px_1(1) + 2qx_2(1))(p - q)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $x_1(1)$ y $x_2(1)$ se eligen de acuerdo a la relación entre p y q:

1. Si $p < q$, entonces $x_1(1) = 0$ y $x_2(1) = 1$.
2. Si $p > q$, entonces $x_1(1) = 1$ y $x_2(1) = 0$.
3. Si $p = q$, entonces x_1 y $x_2(1)$ pueden tomar cualesquiera valores en $[0, 1]$.

2.3.2 Selección de deportistas

Ahora tenemos un juego en el que combinamos dos de los modelos presentados anteriormente, pues las probabilidades del proceso de selección de turnos y los conjuntos de estrategias cambian en cada periodo de acuerdo a las decisiones hechas antes en el juego.

En una liga de deportes, cada año los dos equipos involucrados deben elegir entre algunos atletas para ser parte de su equipo. En este año deben decidir entre el atleta A y el atleta B. Ambos equipos saben que elegir a A les da una utilidad de 1, mientras que elegir a B les da una utilidad de 2. La utilidad final obtenida es la suma de las utilidades de los atletas elegidos para el equipo.

Sin embargo, el método por el cual elegirán es el siguiente: en cada uno de los dos turnos de elección, cada equipo tiene una probabilidad positiva de ser elegido para ser el que haga la decisión en ese turno. Como el equipo 1 fue el mejor el año anterior, tiene una probabilidad de ser elegido en el primer periodo de 1/3, mientras que el equipo 2 tiene una probabilidad de ser elegido en el primer periodo de 2/3.

Para la selección en el segundo periodo, las probabilidades cambian dependiendo de la elección realizada en el primer turno, y de cual fue el equipo que decidió. Si el equipo que decide en el primer turno toma al atleta A, entonces su probabilidad de ser elegido para el segundo turno se reduce a la mitad de lo que tenía anteriormente. Si el equipo que decide en el primer turno toma al atleta B, entonces su probabilidad de ser elegido para el segundo turno se reduce a la tercera parte de lo que tenía anteriormente.

Denotemos por $S_1 = \{A_1, B_1\}$ y $S_2 = \{A_2, B_2\}$, donde los subíndices de A y B solamente indican el jugador que tomó dicha decisión. Como ambos jugadores conocen las probabilidades del proceso de selección de turnos, tenemos que $p_1 = p_2$ y ambas las denotaremos simplemente por p.

$$
\begin{array}{ll}
p(1) = 1/3 & p(2) = 2/3 \\
p(1 \mid A_1) = 1/6 & p(2 \mid A_1) = 5/6 \\
p(1 \mid B_1) = 1/9 & p(2 \mid B_1) = 8/9 \\
p(1 \mid A_2) = 2/3 & p(2 \mid A_2) = 1/3 \\
p(1 \mid B_2) = 7/9 & p(2 \mid B_2) = 2/9
\end{array}
$$

Con esto podemos calcular la función de utilidad esperada para cada equipo. Notemos que, dado que la segunda elección es automática, $x_j(A_j \mid B_k) = x_j(B_j \mid A_k) = 1$ para todas $j, k \in \{1, 2\}$.

$$
\begin{aligned}
E_1(x) &= \frac{25}{27} + \frac{1}{27}x_1(A_1) + \frac{10}{27}x_2(A_2) \\
E_2(x) &= \frac{16}{9} + \frac{7}{27}x_1(A_1) - \frac{10}{27}x_2(A_2)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, para maximizar sus funciones de utilidad esperada, el equipo 1 debe seguir la estrategia $x_1(A_1) = 1$ y el equipo 2 debe seguir la estrategia $x_2(A_2) = 0$. Es decir, el equipo 1 debe elegir al atleta A si les corresponde elegir en el primer turno, mientras que el equipo 2 debe elegir al atleta B si les corresponde elegir en el primer turno.

2.4 Demostraciones

Demostración (Teorema 2.1)**.** Para un perfil dado de estrategias condicionadas $x = (x_1, \ldots, x_n)$, la utilidad esperada del i-ésimo jugador se puede escribir de la siguiente forma:

$$
E_j(x) = \sum_{s^1 \in S_i} \cdots \sum_{s^T \in S_i} u_i(s^T, \ldots, s^1) x_i(s^T \mid s^{T-1}, \ldots, s^1) p_i(i) \cdots x_i(s^1) p_i(i)
$$

$$
\begin{aligned}
+ \Bigg(& \sum_{n^1 \in I\setminus\{i\}} \sum_{s^1 \in S_{n^1}} \sum_{s^2 \in S_i} \cdots \sum_{s^T \in S_i} u_i(s^T, \ldots, s^1) x_i(s^T \mid s^{T-1}, \ldots, s^1) \\
& \times p_i(i) \cdots x_i(s^2 \mid s^1) p_i(i) x_{n^1}(s^1) p_i(n^1) + \cdots \\
& + \sum_{s^1 \in S_i} \cdots \sum_{s^{T-1} \in S_j} \sum_{n^T \in I\setminus\{i\}} \sum_{s^T \in S_{n^T}} u_i(s^T, \ldots, s^1) x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1}, \ldots, s^1) \\
& \times p_i(n^T) x_i(s^{T-1} \mid s^{T-2}, \ldots, s^1) p_i(i) \cdots x_i(s^1) p_i(i) \Bigg) + \cdots \\
+ & \sum_{n^1 \in I\setminus\{i\}} \sum_{s^1 \in S_{n^1}} \cdots \sum_{n^T \in I\setminus\{i\}} \sum_{s^T \in S_{n^T}} u_i(s^T, \ldots, s^1) x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1}, \ldots, s^1) \\
& \times p_i(n^T) \cdots x_{n^1}(s^1) p_i(n^1)
\end{aligned}
$$

donde el primer término es la suma de las funciones en T variables que dependen todas del jugador i, luego el siguiente término entre paréntesis es la suma de todas las funciones en $T-1$ variables que dependen del jugador i, y así sucesivamente hasta el último término que es una función constante para i. Por lo tanto, la función de utilidad esperada es una función continua sobre el plan de estrategias del jugador i. ■

Demostración (Teorema 2.2)**.** Para un escenario fijo $\mathsf{s}^\ell = (\mathsf{s}^{\ell-1}, \ldots, \mathsf{s}^1)$, la estrategia condicionada mixta del jugador i para el escenario s^ℓ se encuentra en un $(a_i^\ell - 1)$-símplex $\Delta_i(S_i(\mathsf{s}^\ell)) \subseteq \mathbb{R}^{|S_i|}$, donde $a_i^\ell = |S_i(\mathsf{s}^\ell)|$ y $S_i(\mathsf{s}^\ell)$ son las estrategias que puede elegir el jugador i dado el escenario s^ℓ.

Para cada periodo t, el escenario s^{t-1} depende de $t-1$ elecciones previas, por lo que el jugador debe tener una estrategia para cada posible escenario. En el peor de los casos, hay $\left(\sum_{j\in I} |S_j|\right)^{t-1}$ escenarios. Esto es para todos los periodos $t \in \{1, \ldots, T\}$ y para todos los jugadores $i \in I$. Por lo tanto, tenemos $q = \sum_{i\in I} |S_i| \cdot \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{j\in I} |S_j|\right)^{t-1}$. Además, $Q_i = \times_{\mathsf{s}} \Delta_i(S_i(\mathsf{s}))$, $Q = \times_{i\in I} Q_i$. Dado que Q es el producto cartesiano de símplices, Q es un subconjunto no vacío, compacto y convexo.

Demostración (Teorema 2.3)**.** Dado que la función de utilidad esperada es una función continua definida sobre un conjunto compacto, para cada jugador i y cada $x \in Q$ debe alcanzar su máximo en algún punto $\hat{x}_i \in Q_i$. Por lo tanto, BR_i es no vacía para cada jugador y para cada $x \in Q$, lo que implica que BR es una correspondencia no vacía para toda $x \in Q$.

Ahora, consideremos una sucesión de perfiles de estrategias $(x_{[h]})_{h=1}^{\infty}$, y la sucesión de mejores respuestas asociada $(x'_{[h]})_{h=1}^{\infty}$, es decir, $x_{[h]} \in BR(x_{[h]})$ para toda $h \in \mathbb{N}$. Supongamos que ambas sucesiones son convergentes y $x^* = \lim_{h\to\infty} x_{[h]}$ y $x'^* = \lim_{h\to\infty} x'_{[h]}$. Si fijamos al jugador i, tenemos que $x'_{[h]_i} \in BR(x_{[h]_{-i}})$, por lo que

$$E_i(x_{[h]_{-i}}, x'_{[h]_i}) \geq E_i(x_{[h]_{-i}}, y_i)$$

para cualquier $y_i \in Q_i$. Como la función de utilidad esperada es continua sobre el plan de estrategias de cada jugador, podemos tomar límites en ambos lados y preservar la desigualdad

$$\lim_{h\to\infty} E_i(x_{[h]_{-i}}, x'_{[h]_i}) \geq \lim_{h\to\infty} E_i(x_{[h]_{-i}}, y_i)$$

e intercambiando el orden de los límites y las sumas

$$E_i(x^*_{-i}, x'^*_i) \geq E_i(x^*_{-i}, y_i)$$

para toda $y_i \in Q$. Esto implica que $x'^*_i \in BR(x^*_{-i})$ para cada jugador i, y por lo tanto, $x'^* \in BR(x^*)$. ■

Demostración (Lema 2.1)**.** Fijamos el escenario $\mathsf{s}^\ell = (\mathsf{s}^{\ell-1}, \ldots, \mathsf{s}^1)$, con $\mathsf{s}^1 \in S_{\mathsf{n}^1}, \ldots, \mathsf{s}^{\ell-1} \in S_{\mathsf{n}^{\ell-1}}$ para los jugadores $\mathsf{n}^1, \ldots, \mathsf{n}^{\ell-1}$ seleccionados en los primeros $\ell - 1$ turnos. Supongamos que $E_i(x_{-i}, y_i) > E_i(x_{-i}, z_i)$ para algunas $y_i, z_i \in W_i(x_i \mid \mathsf{s}^\ell)$. Observemos que $E_i(x_{-i}, y_i)$ se puede reescribir en dos partes como

$$\begin{aligned}
E_i(x_{-i}, y_i) = &\sum_{s^\ell \in S_i} \sum_{n^{\ell+1}\in I} \sum_{s^{\ell+1}\in S_{n^{\ell+1}}} \cdots \sum_{n^T \in I} \sum_{s^T \in S_{n^T}} u_i(s^T, \ldots, s^\ell, \mathsf{s}^\ell) \\
&\times x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1}, \ldots, s^\ell, \mathsf{s}^{\ell-1}, \ldots, \mathsf{s}^1) p_i(n^T) \cdots \\
&\times x_{n^{\ell+1}}(s^{\ell+1} \mid s^\ell, \mathsf{s}^{\ell-1}, \ldots, \mathsf{s}^1) p_i(n^{\ell+1}) y_i(s^\ell \mid \mathsf{s}^{\ell-1}, \ldots, \mathsf{s}^1) p_i(i) \\
&\times x_{\mathsf{n}^{\ell-1}}(\mathsf{s}^{\ell-1} \mid \mathsf{s}^{\ell-2}, \ldots, \mathsf{s}^1) p_i(\mathsf{n}^{\ell-1}) \cdots x_{\mathsf{n}^1}(\mathsf{s}^1) p_i(\mathsf{n}^1) \\
+ &\sum_{n^1 \in I} \sum_{s^1 \in S_{n^1}} \cdots \sum_{n^T \in I} \sum_{s^T \in S_{n^T}} u_i(s^T, \ldots, s^1) x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1}, \ldots, s^1) \\
&\times p_i(n^T) \cdots x_{n^1}(s^1) p_i(n^1)
\end{aligned}$$

donde en la segunda parte se cumple que $(n^1, \ldots, n^{\ell-1}, n^\ell) \neq (\mathsf{n}^1, \ldots, \mathsf{n}^{\ell-1}, \mathsf{n}^\ell)$ o que $(s^1, \ldots, s^{\ell-1}) \neq (\mathsf{s}^1, \ldots, \mathsf{s}^{\ell-1})$. Una expresión análoga se puede encontrar para $E_i(x_{-i}, z_i)$. Podemos observar que y_i y z_i solamente se utilizan en la primera parte de la expresión anterior, por lo que

$$\begin{aligned}
&\sum_{s^\ell \in S_i} \sum_{n^{\ell+1}\in I} \sum_{s^{\ell+1}\in S_{n^{\ell+1}}} \cdots \sum_{n^T \in I} \sum_{s^T \in S_{n^T}} u_i(s^T, \ldots, s^\ell, \mathsf{s}^\ell) \\
&\quad \times x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1}, \ldots, s^\ell, \mathsf{s}^{\ell-1}, \ldots, \mathsf{s}^1) p_i(n^T) \cdots \\
&\quad \times x_{n^{\ell+1}}(s^{\ell+1} \mid s^\ell, \mathsf{s}^{\ell-1}, \ldots, \mathsf{s}^1) p_i(n^{\ell+1}) y_i(s^\ell \mid \mathsf{s}^{\ell-1}, \ldots, \mathsf{s}^1) p_i(i) \\
&\quad \times x_{\mathsf{n}^{\ell-1}}(\mathsf{s}^{\ell-1} \mid \mathsf{s}^{\ell-2}, \ldots, \mathsf{s}^1) p_i(\mathsf{n}^{\ell-1}) \cdots x_{\mathsf{n}^1}(\mathsf{s}^1) p_i(\mathsf{n}^1) \\
&> \sum_{s^\ell \in S_i} \sum_{n^{\ell+1}\in I} \sum_{s^{\ell+1}\in S_{n^{\ell+1}}} \cdots \sum_{n^T \in I} \sum_{s^T \in S_{n^T}} u_i(s^T, \ldots, s^\ell, \mathsf{s}^\ell) \\
&\quad \times x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1}, \ldots, s^\ell, \mathsf{s}^{\ell-1}, \ldots, \mathsf{s}^1) p_i(n^T) \cdots \\
&\quad \times x_{n^{\ell+1}}(s^{\ell+1} \mid s^\ell, \mathsf{s}^{\ell-1}, \ldots, \mathsf{s}^1) p_i(n^{\ell+1}) z_i(s^\ell \mid \mathsf{s}^{\ell-1}, \ldots, \mathsf{s}^1) p_i(i)
\end{aligned}$$

$$\times\, x_{\mathsf{n}^{\ell-1}}(\mathsf{s}^{\ell-1} \mid \mathsf{s}^{\ell-2},\ldots,\mathsf{s}^1)p_i(\mathsf{n}^{\ell-1})\cdots x_{\mathsf{n}^1}(\mathsf{s}^1)p_i(\mathsf{n}^1)$$

Esto implica que, si s_i^ℓ y t_i^ℓ son estrategias tales que $y_i(s_i^\ell \mid \mathbf{s}^\ell) = 1$ y $z_j(t_i^\ell \mid \mathbf{s}^\ell) = 1$ entonces es posible reemplazar la probabilidad de elegir s_i^ℓ en x_i dado el escenario $\mathbf{s}^\ell$ por $x_i(s_i^\ell \mid \mathbf{s}^\ell) + x_i(t_i^\ell \mid \mathbf{s}^\ell)$ y la probabilidad de elegir t_i^ℓ en x_i dado el escenario $\mathbf{s}^\ell$ por 0. De esta forma, encontramos una respuesta a x_{-i} que da una mayor utilidad esperada que x_i. Pero esto es una contradicción al hecho de que x_i era una mejor respuesta a x_{-i}. Por lo tanto, $E_i(x_{-i}, y_i) = E_i(x_{-i}, z_i)$ para todo $y_i, z_i \in W_i(x_i \mid \mathbf{s}^\ell)$. ■

Demostración (Lema 2.2)**.** De manera similar al lema anterior, $E_i(x)$ se puede escribir en dos partes

$$\begin{aligned}
E_i(x_{-i}, y_i) = \sum_{s^\ell\in S_i}\sum_{n^{\ell+1}\in I}\sum_{s^{\ell+1}\in S_{n^{\ell+1}}} \cdots \sum_{n^T\in I}\sum_{s^T\in S_{n^T}} & u_i(s^T,\ldots,s^\ell,\mathbf{s}^\ell) \\
& \times x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1},\ldots,s^\ell,\mathsf{s}^{\ell-1},\ldots,\mathsf{s}^1)p_i(n^T)\cdots \\
& \times x_{n^{\ell+1}}(s^{\ell+1} \mid s^\ell,\mathsf{s}^{\ell-1},\ldots,\mathsf{s}^1)p_i(n^{\ell+1})x_i(s^\ell \mid \mathsf{s}^{\ell-1},\ldots,\mathsf{s}^1)p_i(i) \\
& \times x_{\mathsf{n}^{\ell-1}}(\mathsf{s}^{\ell-1} \mid \mathsf{s}^{\ell-2},\ldots,\mathsf{s}^1)p_i(\mathsf{n}^{\ell-1})\cdots x_{\mathsf{n}^1}(\mathsf{s}^1)p_i(\mathsf{n}^1) \\
+ \sum_{n^1\in I}\sum_{s^1\in S_{n^1}}\cdots\sum_{n^T\in I}\sum_{s^T\in S_{n^T}} & u_i(s^T,\ldots,s^1)x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1},\ldots,s^1) \\
& \times p_i(n^T)\cdots x_{n^1}(s^1)p_i(n^1)
\end{aligned}$$

donde en la segunda parte se cumple que $(n^1,\ldots,n^{\ell-1},n^\ell) \neq (\mathsf{n}^1,\ldots,\mathsf{n}^{\ell-1},\mathsf{n}^\ell)$ o que $(s^1,\ldots,s^{\ell-1}) \neq (\mathsf{s}^1,\ldots\mathsf{s}^{\ell-1})$. La primera parte de la expresión anterior se puede reescribir como

$$\begin{aligned}
\sum_{z_i\in W_i(x_i\mid\mathbf{s}^\ell)}\sum_{s^\ell\in S_i}\sum_{n^{\ell+1}\in I}\sum_{s^{\ell+1}\in S_{n^{\ell+1}}}\cdots\sum_{n^T\in I}\sum_{s^T\in S_{n^T}} & u_i(s^T,\ldots s^\ell,\mathbf{s}^\ell) \\
\times\, x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1},\ldots,s^\ell,\mathsf{s}^{\ell-1},\ldots,\mathsf{s}^1)p_i(n^T)\cdots & \\
\times\, x_{n^{\ell+1}}(s^{\ell+1} \mid s^\ell,\mathsf{s}^{\ell-1},\ldots,\mathsf{s}^1)p_i(n^{\ell+1})x_i(s^\ell \mid \mathsf{s}^{\ell-1},\ldots,\mathsf{s}^1)z_i(\mathsf{s}^\ell \mid \mathbf{s}^\ell)p_i(i) & \\
\times\, x_{\mathsf{n}^{\ell-1}}(\mathsf{s}^{\ell-1} \mid \mathsf{s}^{\ell-2},\ldots,\mathsf{s}^1)p_i(\mathsf{n}^{\ell-1})\cdots x_{\mathsf{n}^1}(\mathsf{s}^1)p_i(\mathsf{n}^1) &
\end{aligned}$$

es decir, la primera parte de la expresión en el lema 2.1 se escribe como una suma ponderada donde para cada $z_i \in W_i(x_i \mid \mathbf{s}^\ell)$, ponderamos con $x_i(s_i \mid \mathbf{s}^\ell)$ y además tenemos que s_i se elige como la estrategia en el escenario $\mathbf{s}^\ell$ tal que $z_i(s_i \mid \mathbf{s}^\ell) = 1$ para cada z_i. De esta forma tenemos que la utilidad esperada del perfil x se escribe como la suma ponderada de las utilidades esperadas de todos los planes similares en $W_i(x_i \mid \mathbf{s}^\ell)$. En el lema 2.1 mostramos que todas las utilidades esperadas son iguales para todos los planes similares dentro de un mismo $W_i(x_i \mid \mathbf{s}^\ell)$ y por lo tanto tienen el mismo valor. Dado que los pesos con que se ponderó la suma cumplen que suman 1, se sigue la igualdad. ■

Demostración (Teorema 2.6)**.** Como se observó anteriormente, dadas x_i, x_i' mejores respuestas a un perfil parcial x_{-i}, tenemos que cualquier combinación convexa de x_i y x_{-i} también es una mejor respuesta, ya que $E_i(x_{-i}, x_i) = E_i(x_{-i}, x_i')$, por lo que para $x_i'' = \lambda x_i + (1-\lambda)x_i'$ con $\lambda \in [0,1]$ tenemos también que $E_i(x_{-i}, x_i'') = E_i(x_{-i}, x_i)$. ■

Capítulo 3

Juegos con proceso de selección de turnos con información incompleta y análisis de sensibilidad al riesgo

En este capítulo se discute el modelo que se abordó anteriormente y lo adaptamos para poder considerar, por una parte, la situación en la que los jugadores desconocen toda la información de sus oponentes, para lo cual procedemos de una forma análoga a lo hecho por Harsanyi [37], [38] al considerar tipos para cada uno de los jugadores, de forma que al menos los individuos conocen las posibles alternativas de oponentes que pueden tener y por ende, asignar una probabilidad a cada alternativa. Por otra parte, también consideramos el caso en el que los jugadores son sensibles al riesgo, es decir, ya no consideramos directamente su utilidad a lo largo del juego, sino que añadimos el elemento temporal a las utilidades, y esto lo hacemos siguiendo a Arrow [2] y a Pratt [69].

3.1 Modelos

3.1.1 Modelos neutrales al riesgo

Primero modificamos el modelo para considerar información incompleta, es decir, permitimos que los jugadores puedan tener diferentes tipos θ_i, que cambian el comportamiento de cada jugador al modificar sus funciones de utilidad. Cada jugador tiene un tipo determinado antes de que empiece el juego, y el tipo específico de cada jugador solamente es conocido por el jugador mismo, sin embargo, todos los jugadores conocen el conjunto de posibles tipos que puede tener cada jugador, y las funciones de utilidad asociadas a cada uno de los posibles tipos.

Por lo tanto, para cada jugador i tenemos un conjunto finito de tipos Θ_i. Antes de que empiece el juego, un tipo $\theta_i \in \Theta_i$ se elige para cada i. Para poder estudiar el juego, cada jugador tiene una distribución a priori de los tipos de todos los jugadores (incluido él mismo) $d_i \colon \Theta \to [0,1]$, donde $\Theta = \times_{i \in I} \Theta_i$; dicha distribución se puede refinar una vez que el jugador sabe cual es su tipo en el juego. Para esto, la distribución d_i debe ser bayesiana, es decir, para cada jugador i:

$$d_i(\theta_{-i} = c \mid \theta_i = a) = \frac{d_i([\theta_i = a] \cap [\theta_{-i} = c])}{d_i^m(\theta_i = a)}$$

para todo $a \in \Theta_i$ y todo $c \in \Theta_{-i} = \times_{j \neq i} \Theta_j$, en donde $d_i^m \colon \Theta_i \to [0,1]$ es la distribución marginal para el jugador i.

Para este caso, las funciones de utilidad, como se mencionaba anteriormente, también dependen del tipo de cada jugador, es decir, ahora se definirán como $u_i(\cdot \mid \theta_i) \colon Z \to \mathbb{R}$.

Para facilitarnos el trabajar con diferentes situaciones de incertidumbre, ésta se trabajará por pasos, siguiendo las ideas presentadas en Shoham y Leyton-Brown [77] y adaptándolas a nuestros modelos.

Dado que ya dentro de los modelos tenemos las utilidades que dependen del tipo de los jugadores, además de que tenemos las distribuciones de probabilidad de los tipos, podemos definir la **utilidad esperada ex-ante** para el jugador i cuando el perfil $x \in Q$ se ha elegido como:

$$\begin{aligned} E_i(x) = \sum_{\theta \in \Theta} \sum_{n^1 \in I} \sum_{s^1 \in S_{n^1}} \cdots \sum_{n^T \in I} \sum_{s^T \in S_{n^T}} & d_i(\theta) u_i(s^T, \ldots, s^1 \mid \theta_i) \\ & \times x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1}, \ldots, s^1; \theta_{n^T}) p_i(n^T) \cdots x_{n^1}(s^1 \mid \theta_{n^1}) p_i(n^1) \end{aligned}$$

A partir de esta utilidad, podemos definir un **equilibrio de Bayes-Nash** para nuestro modelo, que será un perfil $x^* \in Q$ tal que

$$E_i(x^*) \geq E_i(x_i, x_{-i}^*)$$

para todo $x_i \in Q$ y todo jugador i.

Sin embargo, como se mencionaba en las definiciones para modelos clásicos, hay varias fuentes de incertidumbre en el juego, por lo que se trabaja en pasos mediante las definiciones intermedias de utilidades esperadas. Por ello, definimos también las versiones de éstas para nuestro modelo.

La **utilidad esperada ex-post** para el jugador i dado que se elige el perfil $x \in Q$ y el vector de tipos de los jugadores es θ y conocido, se define como:

$$\begin{aligned} E_i(x, \theta) = \sum_{n^1 \in I} \sum_{s^1 \in S_{n^1}} \cdots \sum_{n^T \in I} \sum_{s^T \in S_{n^T}} & u_i(s^T, \ldots, s^1 \mid \theta_i) \\ & \times x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1}, \ldots, s^1; \theta_{n^T}) p_i(n^T) \cdots x_{n^1}(s^1 \mid \theta_{n^1}) p_i(n^1) \end{aligned}$$

La **utilidad esperada ex-interim** para el jugador i dado que se elige el perfil $x \in Q$ y el jugador conoce su tipo θ_i, se define como:

$$E_i(x, \theta_i) = \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} \sum_{n^1 \in I} \sum_{s^1 \in S_{n^1}} \cdots \sum_{n^T \in I} \sum_{s^T \in S_{n^T}} d_i(\theta_i \mid \theta_{-i}) u_i(s^T, \ldots, s^1 \mid \theta_i)$$

$$\times\, x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1}, \ldots, s^1; \theta_{n^T}) p_i(n^T) \cdots x_{n^1}(s^1 \mid \theta_{n^1}) p_i(n^1)$$

Por lo tanto, tenemos que la utilidad esperada ex-interim se puede escribir en términos de la utilidad esperada ex-post como

$$E_i(x, \theta_i) = \sum_{\theta_{-i} \in \Theta_{-i}} d_i(\theta_i \mid \theta_{-i}) E_i(x, (\theta_i, \theta_{-i}))$$

y de manera similar, utilizando la definición anterior, tenemos que la utilidad esperada ex-ante se puede escribir en términos de la utilidad esperada ex-interim como

$$E_i(x) = \sum_{\theta_i \in \Theta_i} d_i^m(\theta_i) E_i(x, \theta_i)$$

o bien, en términos de la utilidad esperada ex-post como

$$E_i(x) = \sum_{\theta \in \Theta} d_i(\theta) E_i(x, \theta)$$

3.1.2 Modelos sensibles al riesgo

Modificamos nuestro modelo de juegos secuenciales sin orden de turnos para estudiar el comportamiento de jugadores propensos al riesgo y adversos al riesgo. Para esto, utilizamos una variable de sensibilidad al riesgo λ_i, con la cual podemos definir el coeficiente de aversión al riesgo [2], [69] como

$$r_i(z) = -\frac{U_i^{\lambda_i \prime\prime}(z)}{U_i^{\lambda_i \prime}(z)} \quad z \in (-\infty, \infty)$$

donde $U_i^{\lambda_i}$ es la función de utilidad modificada del jugador i. Cuando el coeficiente $r_i(z)$ es positivo, decimos que el jugador i es adverso al riesgo, mientras que si $r_i(z)$ es negativo, entonces i es propenso al riesgo.

El caso en el que $r_i(z) = 0$ corresponde a los jugadores que son neutrales al riesgo, ya que

$$\begin{aligned} r_i(z) = -\frac{d}{dz} \log(U_i^{\lambda_i \prime}(z)) &= 0 \\ \log(U_i^{\lambda_i \prime}(z)) + c &= k \\ e^c U_i^{\lambda_i \prime}(z) &= e^k \\ e^c U_i^{\lambda_i}(z) + d &= e^k z \end{aligned}$$

y por lo tanto, la función de utilidad es lineal, que corresponde al caso neutral al riesgo.

Para los propósitos de nuestros modelos, no vamos a tomar en cuenta el hecho de que la sensibilidad al riesgo depende de la riqueza de cada jugador, ya que dada una ganancia o pérdida fija, ésta es relativa al estado actual del jugador si queremos considerar un modelo completo de sensibilidad al riesgo. En este caso, se supondrá que esto no afecta, y por lo tanto $r_i(z) = \lambda_i$ constante.

Otra propiedad importante es lo que se conoce como la Δ-propiedad, que nos dice que si una recompensa se incrementa en Δ, entonces el equivalente cierto del jugador se debe incrementar exactamente en Δ sin importar si el jugador es adverso al riesgo, neutral al riesgo o propenso al riesgo. En otras palabras, que dicho equivalente cierto (que se define formalmente más adelante) no depende de variables externas (principalmente de lo que se puede definir como la riqueza del jugador).

A partir de estas características, se puede obtener que entonces la función de utilidad modificada que usaremos debe ser de la siguiente forma:

$$U_i^{\lambda_i}(z) = \begin{cases} -\exp(-\lambda_i z) & \text{if } \lambda_i > 0 \\ z & \text{if } \lambda_i = 0 \\ \exp(-\lambda_i z) & \text{if } \lambda_i < 0 \end{cases}$$

salvo transformaciones afines. Para el caso $z \neq 0$ podemos reescribir la función como

$$U_i^{\lambda_i}(z) = -(\operatorname{sgn} \lambda_i) \exp(-\lambda_i z)$$

cuya función inversa está dada por

$$U_i^{\lambda_i -1}(w) = -\frac{1}{\lambda_i} \log(-(\operatorname{sgn} \lambda_i) w)$$

El equivalente cierto para $\tilde{z}$ se define como aquel valor cuya utilidad es exactamente la utilidad esperada de elegir $\tilde{z}$. Es decir, es aquel valor con el cual somos indiferentes entre tomar el riesgo que conlleva $\tilde{z}$, o bien, la seguridad de recibir directamente $\tilde{z}$. Formalmente

$$U_i^{\lambda_i}(c(\tilde{z})) = E(U_i^{\lambda_i}(\tilde{z}))$$

entonces tenemos que el equivalente cierto es

$$\begin{aligned} c(\tilde{z}) &= U_i^{\lambda_i -1}(E(U_i^{\lambda_i}(\tilde{z}))) \\ &= -\frac{1}{\lambda_i} \log(-(\operatorname{sgn} \lambda_i) E(-(\operatorname{sgn} \lambda_i) \exp(-\lambda \tilde{z}))) \\ &= -\frac{1}{\lambda_i} \log(E(\exp(-\lambda_i \tilde{z}))) \end{aligned}$$

Ahora, para poder definir una utilidad esperada y un equilibrio para nuestro modelo con sensibilidad al riesgo, definimos un operador de utilidad esperada $E_i^{\lambda_i}$ tal que $E_i^{\lambda_i}(z) = E(\exp(-\lambda_i \tilde{z}))$.

La utilidad esperada para el jugador i con sensibilidad al riesgo λ_i dado que se elige el perfil $x \in Q$ se define como

$$E_i^{\lambda_i}(x) = \sum_{n^1 \in I} \sum_{s^1 \in S_{n^1}} \cdots \sum_{n^T \in I} \sum_{s^T \in S_{n^T}} e^{-\lambda_i u_i(s^T, \ldots, s^1)} x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1}, \ldots, s^1)$$

$$\times\, p_i(n^T)\cdots x_{n^1}(s^1)p_i(n^1)$$

y a partir de esta podemos definir un equilibrio de Nash como un perfil $x^* \in Q$ tal que

$$E_i^{\lambda_i}(x^*) \geq E_i^{\lambda_i}(x_i, x_{-i}^*)$$

para todo jugador i.

3.1.3 Modelo sensible al riesgo y con información incompleta

Los dos modelos que se presentaron en las dos secciones anteriores se pueden combinar en uno sólo para estudiar situaciones en las que el juego tiene información incompleta respecto a los tipos de los jugadores mismos que tienen sensibilidad al riesgo. Como se hizo antes, los tipos de los jugadores afectan solamente la función de utilidad, y en este caso, son independientes de la sensibilidad al riesgo de los jugadores.

En este caso, también tenemos que definir utilidades esperadas que dependen de la información que se tenga. Para empezar, la **utilidad esperada ex-post** del jugador i al elegirse el perfil $x \in Q$ cuando el vector de tipos para los jugadores es $\theta \in \Theta$ conocido, se define como

$$\begin{aligned} E_i^{\lambda_i}(x,\theta) = \sum_{n^1\in I}\sum_{s^1\in S_{n^1}}\cdots\sum_{n^T\in I}\sum_{s^T\in S_{n^T}} & e^{-\lambda_i u_i(s^T,\ldots,s^1|\theta_i)} \\ & \times x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1},\ldots,s^1;\theta_{n^T})p_i(n^T)\cdots x_{n^1}(s^1 \mid \theta_{n^1})p_i(n^1) \end{aligned}$$

A continuación, la **utilidad esperada ex-interim** para el jugador i al elegirse el perfil $x \in Q$ si i sabe que su tipo es $\theta_i \in \Theta_i$ se define como

$$\begin{aligned} E_i^{\lambda_i}(x,\theta_i) = \sum_{\theta_{-i}\in\Theta_{-i}}\sum_{n^1\in I}\sum_{s^1\in S_{n^1}}\cdots\sum_{n^T\in I}\sum_{s^T\in S_{n^T}} & d_i(\theta_{-i} \mid \theta_i)e^{-\lambda_i u_i(s^T,\ldots,s^1|\theta_i)} \\ & \times x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1},\ldots,s^1;\theta_{n^T})p_i(n^T)\cdots x_{n^1}(s^1 \mid \theta_{n^1})p_i(n^1) \end{aligned}$$

Y finalmente, la **utilidad esperada ex-ante** para el jugador i al elegirse el perfil $x \in Q$ se define como

$$\begin{aligned} E_i^{\lambda_i}(x) = \sum_{\theta\in\Theta}\sum_{n^1\in I}\sum_{s^1\in S_{n^1}}\cdots\sum_{n^T\in I}\sum_{s^T\in S_{n^T}} & d_i(\theta)e^{-\lambda_i u_i(s^T,\ldots,s^1|\theta_i)} \\ & \times x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1},\ldots,s^1;\theta_{n^T})p_i(n^T)\cdots x_{n^1}(s^1 \mid \theta_{n^1})p_i(n^1); \end{aligned}$$

De manera similar a como se realizó anteriormente, la utilidad esperada ex-interim se puede definir en términos de la utilidad esperada ex-post como

$$E_i^{\lambda_i}(x,\theta_i) = \sum_{\theta_{-i}\in\Theta_{-i}} d_i(\theta_i \mid \theta_{-i})E_i^{\lambda_i}(x,(\theta_i,\theta_{-i}))$$

y la utilidad esperada ex-ante se puede definir en términos de la utilidad esperada ex-interim como

$$E_i^{\lambda_i}(x) = \sum_{\theta_i \in \Theta_i} d_i^m(\theta_i) E_i^{\lambda_i}(x, \theta_i)$$

o bien, en términos de la utilidad esperada ex-post como

$$E_i^{\lambda_i}(x) = \sum_{\theta \in \Theta} d_i(\theta) E_i^{\lambda_i}(x, \theta)$$

Por último, podemos definir un equilibrio de Bayes-Nash como un perfil $x^* \in Q$ tal que

$$E_i^{\lambda_i}(x^*) \geq E_i^{\lambda_i}(x_i, x_{-i}^*)$$

para todo jugador i.

3.1.4 Correspondencias de mejor respuesta

Para estudiar la existencia de los equilibrios definidos anteriormente, definimos las correspondencias de mejor respuesta para cada uno de los casos en los que se tiene información incompleta, ya que el caso de información completa respecto al tipo de los jugadores es equivalente al caso en el que el conjunto de tipos es un singulete para todos los jugadores.

Para el caso de información completa con jugadores neutrales al riesgo (o sin considerar la aversión o propensión de los jugadores al riesgo), la correspondencia de mejor respuesta para el jugador i, dado que se enfrenta al perfil $x_{-i} \in Q_{-i}$ está dada como

$$BR_i(x_{-i}) = \{x_i \in Q_i \mid E_i(x_i, x_{-i}) \geq E_i(\tilde{x}_i, x_{-i}) \text{ para todo } \tilde{x}_i \in Q_i\}$$

Por otro lado, para el caso en que se considera la sensibilidad al riesgo de los jugadores, ésta es conocida por todos los jugadores involucrados, es decir, los valores λ_i son de conocimiento común. De esta forma, la correspondencia de mejor respuesta para el jugador i se define con base en el equivalente cierto y dependiendo de si el jugador en cuestión es propenso o adverso al riesgo. En el caso de ser propenso al riesgo (es decir, $\lambda_i < 0$) la correspondencia de mejor respuesta para i se define como

$$BR_i(x_{-i}) = \left\{ x_i \in Q_i \;\middle|\; -\frac{1}{\lambda_i} \log(E_i^{\lambda_i}(x_i, x_{-i})) \geq -\frac{1}{\lambda_i} \log(E_i^{\lambda_i}(\tilde{x}_i, x_{-i})) \text{ para todo } \tilde{x}_i \in Q_i \right\}$$

mientras que si el jugador es adverso al riesgo (es decir, $\lambda_i > 0$) la correspondencia de mejor respuesta para i se define como

$$BR_i(x_{-i}) = \left\{ x_i \in Q_i \;\middle|\; -\frac{1}{\lambda_i} \log(E_i^{\lambda_i}(x_i, x_{-i})) \leq -\frac{1}{\lambda_i} \log(E_i^{\lambda_i}(\tilde{x}_i, x_{-i})) \text{ para todo } \tilde{x}_i \in Q_i \right\}$$

3.2 Existencia de los equilibrios

Como se mencionó anteriormente, dado que el caso de información completa es un caso especial del caso de información incompleta, trabajaremos con el caso de información incompleta para las demostraciones.

El plan para demostrar en última instancia que el modelo propuesto tiene los equilibrios que se definen arriba es mostrar que las correspondencias de mejor respuesta satisfacen las hipótesis del teorema de punto fijo de Kakutani, de forma tal que obtenemos que las correspondencias de mejor respuesta tienen un punto fijo y finalmente, observando que un punto fijo de dichas correspondencias equivale a los equilibrios que buscamos, tenemos el resultado.

Además, podemos observar que las proposiciones que se van demostrando, aunque solamente se presentan para las utilidades esperadas ex-post, al tener las definiciones de la utilidad esperada ex-interim y, más importante, de la utilidad esperada ex-ante en términos de la utilidad esperada ex-post, tenemos que las proposiciones también se cumplen para estas utilidades esperadas.

Teorema 3.1. Para cada jugador i, la utilidad esperada ex-post es una función continua respecto al plan de estrategias condicionadas del jugador i

Corolario 3.1. Para el caso de sensibilidad al riesgo, también tenemos que la utilidad esperada ex-post es una función continua respecto al plan de estrategias condicionadas de i, para todo jugador i.

El siguiente resultado es muy similar a lo que se tiene en el Teorema 2.2 y se demuestra de forma análoga.

Teorema 3.2. El conjunto de perfiles de estrategias condicionadas Q es un subconjunto no vacío, compacto y convexo de $\mathbb{R}^q$ con $q = \sum_{i\in I} |S_i| \cdot \sum_{t=1}^{T} \left(\sum_{j\in I} |S_j|\right)^{t-1} \cdot \prod_{k\in I} |\Theta_k|$.

Ahora trabajamos con la correspondencia de mejor respuesta, en donde veremos que se encuentran las soluciones que buscamos.

Teorema 3.3. La correspondencia de mejor respuesta $BR \colon Q \to Q$ definida como

$$BR(x) = (BR_1(x_{-1}), \ldots, BR_N(x_{-N}))$$

es no vacía y tiene gráfica cerrada.

Además, necesitamos que la correspondencia de mejor respuesta sea convexa.

Teorema 3.4. La correspondencia de mejor respuesta BR es convexa.

En resumen, los resultados anteriores muestran que la correspondencia de mejor respuesta BR es no vacía, de gráfica cerrada y convexa definida en un subconjunto de $\mathbb{R}^q$. Por el teorema de Kakutani, existe al menos un punto fijo de dicha correspondencia. Dichos puntos fijos de la correspondencia de mejor respuesta son precisamente los equilibrios de Nash (o Bayes-Nash).

Teorema 3.5. Un perfil de estrategias condicionadas $x^* \in Q$ es un punto fijo de la correspondencia de mejor respuesta BR si y sólo si es equilibrio de Nash para el juego con sensibilidad al riesgo (o equilibrio de Bayes-Nash para el juego con información incompleta).

Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado para los juegos que se proponen en este capítulo:

Teorema 3.6. Todo juego modelado mediante juegos secuenciales sin orden de turnos, los cuales pueden tener información incompleta o sensibilidad al riesgo, tienen al menos un equilibrio de Nash (o de Bayes-Nash).

3.3 Ejemplos

Ejemplo 3.1. En el primer juego que proponemos se tienen dos jugadores, y dos turnos en los cuales no se sabe cuál jugador va a tomar una decisión. En el primer turno, los jugadores tienen la opción de elegir entre A y B, mientras que en el segundo turno pueden elegir entre C y D. Para cada uno de los turnos, ambos jugadores tienen las mismas probabilidades de ser elegidos. Por último, el jugador que elige en el segundo turno desconoce la elección del jugador en el primer turno a menos que él mismo haya tomado la primera decisión. En resumen, el juego se puede representar mediante la siguiente figura.

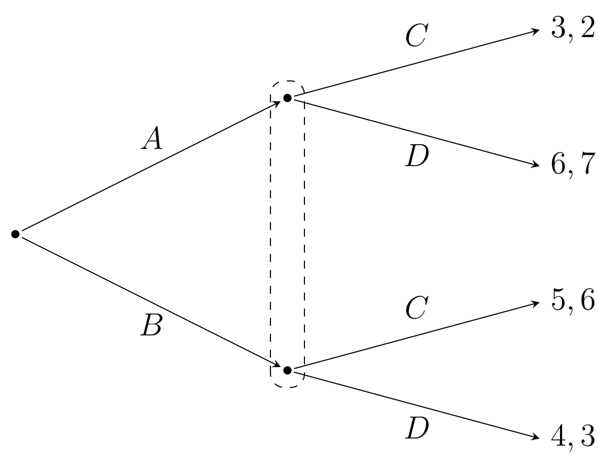

Figura 3.1: Un juego secuencial con dos periodos.

Podemos notar que en dicho juego no se tienen estrategias dominadas, ya que ambos jugadores pueden preferir C o D en el segundo turno dependiendo de lo que ocurrió en el primero, y de igual forma, ambos jugadores pueden preferir A o B en el primer turno dependiendo de lo que se vaya a elegir en el segundo.

Para estudiar este juego, se empieza con el segundo turno y viendo las diferentes posibilidades, principalmente en el caso en que diferentes jugadores eligen en cada turno.

Si tenemos que el jugador 2 elige en el primer turno, y el jugador 1 elige en el segundo turno, entonces la utilidad esperada del jugador 1 es

$$\begin{aligned}
E_1(x) &= \sum_{s^1\in\{A,B\}} \sum_{s^2\in\{C,D\}} u_1(s^2, s^1)p_1(1)x_1(s^2 \mid s^1)p_1(2)x_2(s^1) \\
&= 0.25(u_1(C,A)x_1(C \mid A)x_2(A) + u_1(C,B)x_1(C \mid B)x_2(B) \\
&\quad + u_1(D,A)x_1(D \mid A)x_2(A) + u_1(D,B)x_1(D \mid B)x_2(B)) \\
&= 0.25(u_1(C,A)x_1(C \mid A)x_2(A) + u_1(C,B)x_1(C \mid B)(1 - x_2(A)) \\
&\quad + u_1(D,A)x_1(D \mid A)x_2(A) + u_1(D,B)x_1(D \mid B)(1 - x_2(A))) \\
&= 0.25(u_1(C,A)x_1(C)x_2(A) + u_1(C,B)x_1(C)(1 - x_2(A)) \\
&\quad + u_1(D,A)x_1(D)x_2(A) + u_1(D,B)x_1(D)(1 - x_2(A))) \\
&= 0.25(5 - 2x_2(A))x_1(C) + (2x_2(A) + 4)(1 - x_1(C))) \\
&= 0.25((1 - 4x_2(A))x_1(C) + 2x_2(A) + 4),
\end{aligned}$$

donde las estrategias del jugador 1 se pueden escribir sin la condición de qué se eligió en el primer turno puesto que ese movimiento es desconocido para el jugador 1.

Por lo tanto, se tienen tres casos:

1. Si $x_2(A) > \frac{1}{4}$, entonces $x_1(C) = 0$ y $x_1(D) = 1$
2. Si $x_2(A) < \frac{1}{4}$, entonces $x_1(C) = 1$ y $x_1(D) = 0$
3. Si $x_2(A) = \frac{1}{4}$, entonces $x_1(C) \in [0, 1]$ y $x_1(D) = 1 - x_2(C)$

Ahora vemos la utilidad esperada del jugador 2 para el juego que está dada por

$$\begin{aligned}
E_2(x) &= \sum_{n^1\in\{1,2\}} \sum_{s^1\in\{A,B\}} \sum_{n^2\in\{1,2\}} \sum_{s^2\in\{C,D\}} u_2(s^2, s^1)p_2(n^2)x_{n^2}(s^2 \mid s^1)p_2(n^1)x_{n^1}(s^1) \\
&= 0.25\{[2u_2(C,B) + u_2(C,B)x_1(C \mid B_2) + u_2(C,B)x_2(C \mid B_1) \\
&\quad + u_2(C,B) + u_2(D,B)x_1(D \mid B_2) + u_2(D,B)x_2(D \mid B_1)] \\
&\quad + [-u_2(C,B) + u_2(C,A)x_2(C \mid A_1) - u_2(C,B)c_2(C \mid B_1) \\
&\qquad + u_2(D,A) + u_2(D,A)x_2(D \mid A_1) - u_2(D,B)x_2(D \mid B_1)]x_1(A) \\
&\quad + [u_2(C,A)x_1(C \mid A_2) - u_2(C,B)x_1(C \mid B_2) - u_2(C,B) \\
&\qquad + u_2(D,A)x_1(D \mid A_2) - u_2(D,B)x_1(D \mid B_2) + u_2(D,A)]x_2(A)\}
\end{aligned}$$

en la cual nos enfocamos en el factor que multiplica a $x_2(A)$, el cual es

$$2x_2(C) - 6x_1(C) - 6 + 7x_1(D) - 3x_1(D) + 7 = 5 - 8x_1(C)$$

de forma que obtenemos tres casos:

1. Si $x_1(C) < \frac{5}{8}$, entonces $x_2(A) = 1$ y $x_2(B) = 0$
2. Si $x_1(C) > \frac{5}{8}$, entonces $x_2(A) = 0$ y $x_1(B) = 1$
3. Si $x_1(C) = \frac{5}{8}$, entonces $x_2(A) \in [0,1]$ y $x_1(B) = 1 - x_2(A)$

Juntando lo que hemos obtenido al estudiar cada turno por separado obtenemos que los posibles equilibrios cuando el jugador 2 es elegido primero y el jugador 1 es elegido segundo son:

1. $x_2(A) = 1$, $x_2(B) = 0$, $x_1(C) = 0$ y $x_1(D) = 1$
2. $x_2(A) = 0$, $x_2(B) = 1$, $x_1(C) = 1$ y $x_1(D) = 0$
3. $x_2(A) = \frac{1}{4}$, $x_2(B) = \frac{3}{4}$, $x_1(C) = \frac{5}{8}$ y $x_1(D) = \frac{3}{8}$

Realizando un análisis similar para el caso en que el jugador 1 es elegido en el primer turno y el jugador 2 es elegido en el segundo turno obtenemos que los equilibrios para el juego son

1. $x_1(A) = 1$, $x_1(B) = 0$, $x_2(C) = 0$ y $x_2(D) = 1$
2. $x_1(A) = 0$, $x_1(B) = 1$, $x_2(C) = 1$ y $x_2(D) = 0$
3. $x_1(A) = \frac{3}{8}$, $x_1(B) = \frac{5}{8}$, $x_2(C) = \frac{3}{4}$ y $x_2(D) = \frac{1}{4}$

Ejemplo 3.2. Utilizando el mismo juego que se propuso en el ejemplo 3.1, ahora hacemos que el jugador 1 sea adverso o propenso al riesgo, mientras que el jugador 2 se mantiene neutral al riesgo. En este caso, la utilidad esperada del jugador 1 estará dada por

$$\begin{aligned}
E_1^\lambda(x) = &\sum_{n^1\in\{1,2\}} \sum_{s^1\in\{A,B\}} \sum_{n^2\in\{1,2\}} \sum_{s^2\in\{C,D\}} e^{-\lambda u_1(s^2,s^1)} x_{n^2}(s^2 \mid s^1) p_1(n^2) x_{n^1}(s^1) p_1(n^1) \\
= &\,0.25((e^{-\lambda u_1(C,B)}(2 + x_1(C \mid B_2) + x_2(C \mid B_1)) \\
&+ e^{-\lambda u_1(D,B)}(x_1(D \mid B_2) + x_2(D \mid B_1))) \\
&+ [-e^{-\lambda u_1(C,B)}(1 + x_1(C \mid B)) + e^{-\lambda u_1(C,A)} x_2(C \mid A_1) \\
&\quad + e^{-\lambda u_1(D,A)}(1 + x_2(D \mid A_1) - e^{-\lambda u_1(D,B)} x_2(D \mid B_1)] x_1(A) \\
&+ \{e^{-\lambda u_1(C,A)} x_1(C \mid A_2) - e^{-\lambda u_1(C,B)}(1 + x_1(C \mid B_2)) \\
&\quad + e^{-\lambda u_1(D,A)}(1 + x_1(D \mid A_2)) - e^{-\lambda u_1(D,B)} x_1(D \mid B_2)\} x_2(A))
\end{aligned}$$

y de manera similar a lo que se hizo en el ejemplo anterior, lo que nos interesa es estudiar el factor que se encuentra dentro de los corchetes para determinar como será $x_1(A)$. Sustituyendo en ese factor obtenemos

$$- e^{-5\lambda}(1 + x_1(C)) + e^{-3\lambda} x_2(C) + e^{-6\lambda}(1 + x_2(D)) - e^{-4\lambda} x_1(D)$$

$$= 2e^{-6\lambda} - e^{-5\lambda} - e^{-4\lambda} + (e^{-3\lambda} + e^{-4\lambda} - e^{-5\lambda} - e^{-6\lambda})x_2(C)$$

por lo cual el equilibrio no trivial se obtiene cuando

$$x_2(C) = \frac{e^{-4\lambda} + e^{-5\lambda} - 2e^{-6\lambda}}{e^{-3\lambda} + e^{-4\lambda} - e^{-5\lambda} - e^{-6\lambda}}$$

Cuando el jugador 1 es propenso al riesgo, es decir $\lambda < 0$, entonces $x_2(C) > \frac{3}{4}$, y pensando en que $x_2(C)$ representa lo que el jugador 1 cree acerca de lo que el jugador 2 va a hacer, entonces el jugador 1 escoge $x_1(A)$ incluso cuando cree que $x_2(C)$ se elige con mayor probabilidad que $\frac{3}{4}$. Por otra parte, si el jugador 1 es adverso al riesgo, es decir $\lambda > 0$, entonces $x_2(C) < \frac{3}{4}$ lo que quiere decir que el jugador 1 requiere que C sea elegida con menor probabilidad por el jugador 2 para que se arriesgue a elegir A.

Si al contrario de lo que se especificó al principio, al jugador 1 se le deja neutral al riesgo mientras que el jugador 2 ahora es propenso o adverso al riesgo, podemos estudiar lo que ocurre. Para ello, obtenemos la utilidad esperada para el jugador 2

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_2^{\lambda}(x) = 0.25(&(e^{-\lambda u_2(C,B)}(2 + x_1(C \mid B_2) + x_2(C \mid B_1)) \\
&+ e^{-\lambda u_2(D,B)}(x_1(D \mid B_2) + x_2(D \mid B_1))) \\
&+ [-e^{-\lambda u_2(C,B)}(1 + x_1(C \mid B)) + e^{-\lambda u_2(C,A)}x_2(C \mid A_1) \\
&+ e^{-\lambda u_2(D,A)}(1 + x_2(D \mid A_1) - e^{-\lambda u_2(D,B)}x_2(D \mid B_1)]x_1(A) \\
&+ \{e^{-\lambda u_2(C,A)}x_1(C \mid A_2) - e^{-\lambda u_2(C,B)}(1 + x_1(C \mid B_2)) \\
&+ e^{-\lambda u_2(D,A)}(1 + x_1(D \mid A_2)) - e^{-\lambda u_2(D,B)}x_1(D \mid B_2)\}x_2(A))
\end{aligned}$$

de donde el factor que nos interesa está entre llaves. Al sustituir los valores obtenemos

$$\begin{aligned}
&e^{-2\lambda}x_1(C) - e^{-6\lambda}(1 + x_1(C)) + e^{-7\lambda}(1 + x_1(D)) - e^{-3\lambda}x_1(D) \\
&= 2e^{-7\lambda} - e^{-6\lambda} - e^{-3\lambda} + (e^{-2\lambda} + e^{-3\lambda} - e^{-6\lambda} - e^{-7\lambda})x_1(C)
\end{aligned}$$

con lo que el equilibrio no trivial ocurre cuando

$$x_1(C) = \frac{e^{-3\lambda} + e^{-6\lambda} - 2e^{-7\lambda}}{e^{-2\lambda} + e^{-3\lambda} - e^{-6\lambda} - e^{-7\lambda}}$$

En este caso, cuando el jugador 2 es propenso al riesgo, tenemos que $x_1(C) > \frac{5}{8}$ por lo que el jugador 2 se arriesga a escoger A incluso cuando el jugador 1 escoge C con mayor probabilidad; mientras que cuando el jugador 2 es adverso al riesgo, entonces $x_1(C) < \frac{5}{8}$ así que el jugador 2 requiere que el jugador 1 elija C con menor probabilidad a comparación del caso neutral al riesgo.

Ejemplo 3.3. Por último, añadimos otra variación al juego. Ahora el jugador 2 tiene dos diferentes tipos, con lo cual sus utilidades van a cambiar. Para el tipo α, utilizaremos las utilidades del juego que se propuso en el ejemplo 3.1 mientras que para el tipo β el juego tendrá la estructura que se muestra en la figura 3.2

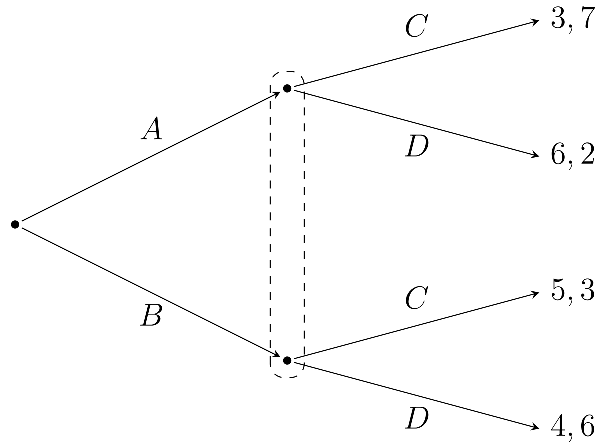

Figura 3.2: Variación del juego en la cual el jugador 2 es de tipo β.

Además de esto, se sabe por todos que el jugador 2 es tipo α con probabilidad 0.4 y es tipo β con probabilidad 0.6.

Estudiamos el caso en el que el jugador 1 es elegido en el primer turno y el jugador 2 en el segundo turno. El término que nos interesa en la utilidad esperada del jugador 1, con las sustituciones adecuadas, es:

$$(3 - 4(0.4x_2(C;\alpha) + 0.6x_2(C;\beta)))x_1(A)$$

mientras que el término que nos interesa en el caso del jugador 2, también con las sustituciones pertinentes, es

$$9 + x_2(C;\alpha)[-8x_1(A) + 3] + x_2(C;\beta)[8x_1(A) - 3]$$

Usando estas dos expresiones, podemos determinar los equilibrios que serían:

1. $x_1(A) = 1$, $x_1(B) = 0$, $x_2(C;\alpha) = 0$, $x_2(D;\alpha) = 1$, $x_2(C;\beta) = 1$, $x_2(D;\beta) = 0$
2. $x_1(A) = \frac{3}{8}$, $x_1(B) = \frac{5}{8}$ y para el jugador 2, cualesquiera estrategias mixtas tales que $0.4x_2(C;\alpha) + 0.6x_2(C;\beta) = \frac{3}{4}$

Por último, podemos ahora hacer que el jugador 1 sea sensible al riesgo, con lo cual el término que se estudia en la utilidad esperada es

$$[2e^{-6\lambda} - e^{-5\lambda} - e^{-4\lambda} + (e^{-3\lambda} + e^{-4\lambda} - e^{-5\lambda} - e^{-6\lambda})(0.4x_2(C;\alpha + 0.6x_2(C;\beta))]x_1(A)$$

de tal forma que el segundo equilibrio que habíamos encontrado antes cambiará a $x_1(A) = \frac{3}{8}$, $x_2(B) = \frac{5}{8}$ y para el jugador 2, cualesquiera estrategias mixtas tales que

$$0.4x_2(C;\alpha) + 0.6x_2(C;\beta) = \frac{e^{-4\lambda} + e^{-5\lambda} - 2e^{-6\lambda}}{e^{-3\lambda} + e^{-4\lambda} - e^{-5\lambda} - e^{-6\lambda}}$$

En este caso, si el jugador 1 es propenso al riesgo, está dispuesto a elegir A cuando el jugador 2 elige C con mayor probabilidad en al menos alguno de sus tipos respecto al caso neutral al riesgo. Y al contrario, si el jugador 1 es adverso al riesgo, está dispuesto a elegir A cuando el jugador 2 elige C con menor probabilidad en al menos alguno de sus tipos respecto a lo que ocurre cuando es neutral al riesgo.

3.4 Demostraciones

Demostración (Teorema 3.1)**.** Notemos que la utilidad esperada ex-post se puede escribir de la siguiente forma

$$
\begin{aligned}
E_i(x,\theta) = &\Bigg(\sum_{s^1\in S_i}\cdots\sum_{s^T\in S_i} u_i(s^T,\dots,s^1\mid\theta_i)x_i(s^T\mid s^{T-1},\dots,s^1;\theta_i)\\
&\quad\times p_i(i)\cdots x_i(s^1\mid\theta_i)p_i(i)\Bigg)\\
&+\Bigg(\sum_{n^1\in I\setminus\{i\}}\sum_{s^1\in S_{n^1}}\sum_{s^2\in S_i}\cdots\sum_{s^T\in S_i} u_i(s^T,\dots,s^1\mid\theta_i)x_i(s^T\mid s^{T-1},\dots,s^1;\theta_i)\\
&\quad\times p_i(i)\cdots x_i(s^2\mid s^1;\theta_i)p_i(i)x_{n^1}(s^1\mid\theta_{n^1})p_i(n^1)+\cdots\\
&\quad+\sum_{s^1\in S_i}\cdots\sum_{s^{T-1}\in S_i}\sum_{n^T\in I\setminus\{i\}}\sum_{s^T\in S_{n^T}} u_i(s^T,\dots,s^1\mid\theta_i)x_{n^T}(s^T\mid s^{T-1},\dots,s^1;\theta_{n^T})\\
&\quad\times p_i(n^T)x_i(s^{T-1}\mid s^{T-2},\dots,s^1;\theta_i)p_i(i)\cdots x_i(s^1\mid\theta_i)p_i(i)\Bigg)+\cdots\\
&+\Bigg(\sum_{n^1\in I\setminus\{i\}}\sum_{s^1\in S_{n^1}}\cdots\sum_{n^T\in I\setminus\{i\}}\sum_{s^T\in S_{n^T}} u_i(s^T,\dots,s^1\mid\theta_i)\\
&\quad\times x_{n^T}(s^T\mid s^{T-1},\dots,s^1;\theta_{n^T})p_i(n^T)\cdots x_{n^1}(s^1\mid\theta_{n^1})p_i(n^1)\Bigg)
\end{aligned}
$$

donde hemos agrupado en el primer paréntesis los términos en los que el jugador i hizo T elecciones; en el segundo paréntesis se agrupan los términos en los que el jugador i hizo $T-1$ elecciones; y así sucesivamente, hasta que en el último paréntesis tenemos los términos en los que el jugador i hizo 0 elecciones. Cada uno de estos paréntesis es continuo respecto al plan de estrategias del jugador i, por lo que la suma a su vez es continua respecto al plan de estrategias del jugador i. ■

Demostración (Corolario 3.1)**.** Usando los mismos argumentos que arriba, tenemos que la función de utilidad $u_i(s^T, \ldots, s^1 \mid \theta_i)$ se sustituye por $e^{-\lambda_i u_i(s^T,\ldots,s^1|\theta_i)}$, que es una transformación continua de la función de utilidad, por lo que la continuidad de la utilidad esperada ex-post se mantiene. ■

Demostración (Teorema 3.3)**.** Dado que las funciones de utilidad esperada ex-ante en ambos modelos son funciones continuas definidas en un conjunto compacto, para el modelo sin sensibilidad al riesgo, para cada jugador i y perfil de estrategias $x_{-i} \in Q_{-i}$ al que se enfrenta, debe existir x_i^* tal que la función de utilidad esperada ex-ante para i alcanza el máximo. Por otra parte, en el modelo sensible al riesgo, observamos que la función de utilidad esperada ex-ante para todo i está acotada por debajo por 0, de forma que $-\frac{1}{\lambda_i}\log(E_i^{\lambda_i}(x_i^*, x_{-i}))$ está bien definida y es continua. Si el jugador i es propenso al riesgo, esto quiere decir que existe x_i^* tal que el logaritmo de la utilidad esperada ex-ante alcanza un máximo; mientras que si el jugador i es adverso al riesgo, esto quiere decir que existe x_i^* tal que el logaritmo de la utilidad esperada ex-ante alcanza un mínimo.

Por lo tanto, para cada jugador i, BR_i es no vacía para todo $x_{-i} \in Q_{-i}$, por lo que BR es no-vacía para todo $x \in Q$.

Para probar que BR tiene gráfica vacía, sea $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de perfiles de estrategias y $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de mejores respuestas obtenida a partir de la sucesión (x_k), es decir, $y_k \in BR(x_k)$ para todo k. Supongamos que ambas sucesiones son convergentes a x^* y y^*, respectivamente. Por definición de la sucesión (y_k) se tiene que $y_{k,i} \in BR_i(x_{k,-i})$, es decir, que para todo $\tilde{x}_i \in Q_i$ y cada k fijo es cierto que

$$E_i(y_{k,i}, x_{k,-i}) \geq E_i(\tilde{x}_i, x_{k,-i})$$

en el caso neutral al riesgo, mientras que en los casos sensibles al riesgo se cumple que

$$-\frac{1}{\lambda_i}\log(E_i^{\lambda_i}(y_{k,i}, x_{k,-i})) \geq -\frac{1}{\lambda_i}\log(E_i^{\lambda_i}(\tilde{x}_i, x_{k,-i}))$$

para el caso en que el jugador i es propenso al riesgo, y

$$-\frac{1}{\lambda_i}\log(E_i^{\lambda_i}(y_{k,i}, x_{k,-i})) \leq -\frac{1}{\lambda_i}\log(E_i^{\lambda_i}(\tilde{x}_i, x_{k,-i}))$$

para el caso en que el jugador i es adverso al riesgo.

En los tres casos podemos tomar el límite en ambos lados de las desigualdades cuando k tiende a infinito

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} E_i(y_{k,i}, x_{k,-i}) &\geq \lim_{k\to\infty} E_i(\tilde{x}_i, x_{k,-i}) \\
\lim_{k\to\infty} -\frac{1}{\lambda_i}\log(E_i^{\lambda_i}(y_{k,i}, x_{k,-i})) &\geq \lim_{k\to\infty} -\frac{1}{\lambda_i}\log(E_i^{\lambda_i}(\tilde{x}_i, x_{k,-i})) \\
\lim_{k\to\infty} -\frac{1}{\lambda_i}\log(E_i^{\lambda_i}(y_{k,i}, x_{k,-i})) &\leq \lim_{k\to\infty} -\frac{1}{\lambda_i}\log(E_i^{\lambda_i}(\tilde{x}_i, x_{k,-i}))
\end{aligned}$$

y por continuidad del logaritmo, e intercambiando límites y sumas, se sigue que

$$\begin{aligned} E_i(y_i^*, x_{-i}^*) &\geq E_i(\tilde{x}_i, x_{-i}^*) \\ -\frac{1}{\lambda_i}\log(E_i^{\lambda_i}(y_i^*, x_{-i}^*)) &\geq -\frac{1}{\lambda_i}\log(E_i^{\lambda_i}(\tilde{x}_i, x_{-i}^*)) \\ -\frac{1}{\lambda_i}\log(E_i^{\lambda_i}(y_i^*, x_{-i}^*)) &\leq -\frac{1}{\lambda_i}\log(E_i^{\lambda_i}(\tilde{x}_i, x_{-i}^*)) \end{aligned}$$

se cumple para todo $\tilde{x}_i \in Q_i$. Por lo tanto, $y_i^* \in BR_i(x_i^*)$ para cada jugador i, lo cual implica que $y^* \in BR(x^*)$. ■

Demostración (Teorema 3.4)**.** Sean $x_i', x_i'' \in BR_i(x_{-i})$ para $x_{-i} \in Q_{-i}$, entonces en el caso neutral al riesgo, la utilidad esperada ex-post para la combinación convexa $\mu x_i' + (1-\mu)x_i''$ para $\mu \in [0,1]$ frente a x_{-i} está dada por

$$\begin{aligned} E_i((\mu x_i' + (1-\mu)x_i''), x_{-i}, \theta) = &\left(\sum_{s_i \in S_i} \cdots \sum_{s^T \in S_i} u_i(s^T, \ldots, s^1 \mid \theta_i) \right. \\ &\times (\mu x_i'(s^T \mid s^{T-1}, \ldots, s^1; \theta_i) + (1-\mu)x_i''(s^T \mid s^{T-1}, \ldots, s^1; \theta_i))p_i(i) \cdots \\ &\left. \times\ (\mu x_i'(s^1 \mid \theta_i) + (1-\mu)x_i''(s^1 \mid \theta_i))p_i(i) \right) \\ + &\left(\sum_{n^1 \in I \setminus \{i\}} \sum_{s^1 \in S_{n^1}} \sum_{s^2 \in S_i} \cdots \sum_{s^T \in S_i} u_i(s^T, \ldots, s^1 \mid \theta_i) \right. \\ &\times (\mu x_i'(s^T \mid s^{T-1}, \ldots, s^1; \theta_i) + (1-\mu)x_i''(s^T \mid s^{T-1}, \ldots, s^1; \theta_i))p_i(i) \cdots \\ &\times (\mu x_i'(s^2 \mid s^1; \theta_i) + (1-\mu)x_i''(s^2 \mid s^1; \theta_i))p_i(i) x_{n^1}(s^1 \mid \theta_{n^1}) p_i(n^1) + \cdots \\ + &\sum_{s^1 \in S_i} \cdots \sum_{s^{T-1} \in S_i} \sum_{n^T \in I \setminus \{i\}} \sum_{s^T \in S_{n^T}} u_i(s^T, \ldots, s^T \mid \theta_i) x_{n^T}(s^T \mid s^{T-1}, \ldots, s^1; \theta_{n^T}) p_i(n^T) \cdots \\ &\times (\mu x_i'(s^{T-1} \mid s^{T-2}, \ldots, s^1; \theta_i) + (1-\mu)x_i''(s^{T-1} \mid s^{T-2}, \ldots, s^1; \theta_i))p_i(i) \cdots \\ &\left. \times (\mu x_i'(s^1 \mid \theta_i) + (1-\mu)x_i''(s^1 \mid \theta_i))p_i(i) \right) + \cdots \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\Bigg(\sum_{n^1\in I\setminus\{i\}}\sum_{s^1\in S_{n^1}}\cdots\sum_{n^T\in I\setminus\{i\}}\sum_{s^T\in S_{n^T}} u_i(s^T,\ldots,s^1\mid\theta_i)\\
&\quad\times x_{n^T}(s^T\mid s^{T-1},\ldots,s^1;\theta_{n^T})p_i(n^T)\cdots x_{n^1}(s^1\mid x_{n^1})p_i(n^1)\Bigg)\\
=&\Bigg(\sum_{s_i\in S_i}\cdots\sum_{s^T\in S_i} u_i(s^T,\ldots,s^1\mid\theta_i)\\
&\quad\times(\mu x_i'(s^T\mid s^{T-1},\ldots,s^1;\theta_i)+(1-\mu)x_i''(s^T\mid s^{T-1},\ldots,s^1;\theta_i))p_i(i)\cdots\\
&\quad\times(\mu x_i'(s^1\mid\theta_i)+(1-\mu)x_i''(s^1\mid\theta_i))p_i(i)\Bigg)\\
&+\Bigg(\sum_{n^1\in I\setminus\{i\}}\sum_{s^1\in S_{n^1}}\sum_{s^2\in S_i}\cdots\sum_{s^T\in S_i} u_i(s^T,\ldots,s^1\mid\theta_i)\\
&\quad\times(\mu x_i'(s^T\mid s^{T-1},\ldots,s^1;\theta_i)+(1-\mu)x_i''(s^T\mid s^{T-1},\ldots,s^1;\theta_i))p_i(i)\cdots\\
&\quad\times(\mu x_i'(s^2\mid s^1;\theta_i)+(1-\mu)x_i''(s^2\mid s^1;\theta_i))p_i(i)\\
&\quad\times(\mu x_{n^1}(s^1\mid\theta_{n^1})+(1-\mu)x_{n^1}(s^1\mid\theta_{n^1}))p_i(n^1)+\cdots\\
&+\sum_{s^1\in S_i}\cdots\sum_{s^{T-1}\in S_i}\sum_{n^T\in I\setminus\{i\}}\sum_{s^T\in S_{n^T}} u_i(s^T,\ldots,s^T\mid\theta_i)\\
&\quad\times(\mu x_{n^T}(s^T\mid s^{T-1},\ldots,s^1;\theta_{n^T})+(1-\mu)x_{n^T}(s^T\mid s^{T-1},\ldots,s^1;\theta_{n^T}))p_i(n^T)\\
&\quad\times(\mu x_i'(s^{T-1}\mid s^{T-2},\ldots,s^1;\theta_i)+(1-\mu)x_i''(s^{T-1}\mid s^{T-2},\ldots,s^1;\theta_i))p_i(i)\cdots\\
&\quad\times(\mu x_i'(s^1\mid\theta_i)+(1-\mu)x_i''(s^1\mid\theta_i))p_i(i)\Bigg)+\cdots
\end{aligned}
$$

$$+\left(\sum_{n^1\in I\setminus\{i\}}\sum_{s^1\in S_{n^1}}\cdots\sum_{n^T\in I\setminus\{i\}}\sum_{s^T\in S_{n^T}} u_i(s^T,\ldots,s^1\mid\theta_i)\right.$$

$$\times\left(\mu x_{n^T}(s^T\mid s^{T-1},\ldots,s^1;\theta_{n^T})+(1-\mu)x_{n^T}(s^T\mid s^{T-1},\ldots,s^1;\theta_{n^T})\right)p_i(n^T)\cdots$$

$$\left.\times\left(\mu x_{n^1}(s^1\mid\theta_{n^1})+(1-\mu)x_{n^1}(s^1\mid\theta_{n^1})\right)p_i(n^1)\right)$$

$$=\mu E_i(x_i',x_{-i},\theta)+(1-\mu)E_i(x_i'',x_{-i},\theta)$$

Por otra parte, tenemos que $E_i(x_i',x_{-i})=E_i(x_i'',x_{-i})$. Esto ya que por definición, dado que x_i' es mejor respuesta a x_{-i} entonces $E_i(x_i',x_{-i})\geq E_i(\tilde{x}_i,x_{-i})$ para toda $\tilde{x}_i\in Q_i$, en particular, $E_i(x_i',x_{-i})\geq E_i(x_i'',x_{-i})$. La desigualdad opuesta se obtiene al invertir los papeles de x_i' y x_i''. Por lo tanto

$$\begin{aligned}E_i((\mu x_i'+(1-\mu)x_i''),x_{-i})&=\mu E_i(x_i',x_{-i})+(1-\mu)E_i(x_i'',x_{-i})\\&=\mu E_i(x_i',x_{-i})+(1-\mu)E_i(x_i',x_{-i})=E_i(x_i,x_{-i})\end{aligned}$$

es decir, $\mu x_i'+(1-\mu)x_i''$ es también mejor respuesta a x_{-i}. Por lo tanto, BR es una correspondencia convexa.

Demostración (Teorema 3.5)**.** Sea $x^*\in Q$ un perfil que es punto fijo de la correspondencia de mejor respuesta BR, esto quiere decir que satisface la condición de cada una de las correspondencias de mejor respuesta para cada jugador i, es decir

$$-\frac{1}{\lambda_i}\log(E_i^{\lambda_i}(x_i^*,x_{-i}^*))\geq-\frac{1}{\lambda_i}\log(E_i^{\lambda_i}(\tilde{x}_i,x_{-i}^*))$$

para todo $\tilde{x}_i\in Q_i$ si el jugador i es propenso al riesgo, o bien

$$-\frac{1}{\lambda_i}\log(E_i^{\lambda_i}(x_i^*,x_{-i}^*))\leq-\frac{1}{\lambda_i}\log(E_i^{\lambda_i}(\tilde{x}_i,x_{-i}^*))$$

para todo $\tilde{x}_i\in Q_i$ si el jugador i es adverso al riesgo.

En ambos casos, dicha condición se puede reescribir como

$$\eta_i\log(E_i^{\lambda_i}(x_i^*,x_{-i}^*))\geq\eta_i\log(E_i^{\lambda_i}(\tilde{x}_i,x_{-i}^*))$$

con $\eta_i>0$. Podemos entonces eliminar dicha η_i y dado que el logaritmo es creciente entonces obtenemos que

$$E_i^{\lambda_i}(x_i^*,x_{-i}^*)\geq E_i^{\lambda_i}(\tilde{x}_i,x_{-i}^*)$$

es decir, x_i^* es óptimo para el jugador i frente a x_{-i}^*. Y esto ocurre para todos los jugadores i, por lo tanto, x^* es un equilibrio de Nash (o un equilibrio de Bayes-Nash). El otro sentido de la demostración es análogo ya que todos los pasos se pueden seguir en orden inverso.

Capítulo 4

Teoría de juegos epistémica

La teoría de juegos epistémica nace del observar que, en la teoría de juegos clásica, las hipótesis que se tienen acerca de la forma de razonar de los jugadores piden demasiado, por lo que es posible relajar dichas hipótesis y permitir que los jugadores formen sus propias maneras de razonar acerca de los oponentes, aunque claro está, dicho razonamiento tiene algunos lineamientos que aseguran la racionalidad de los jugadores. Más adelante en la sección 4.6 se verán cuáles son las hipótesis adicionales que se realizan en el caso clásico.

Podremos ver que la teoría de juegos epistémica al relajar las hipótesis nos permitirá razonar de formas cuyos análogos no se pueden encontrar en la teoría clásica, y por lo tanto nos da una mayor riqueza de conceptos de razonamiento.

Por ello, en este capítulo describiremos los conceptos de razonamiento que se trabajan, puesto que, como se observará, todos están relacionados con el primero el cual nos sirve como base para poder refinar la forma en que los jugadores piensan acerca de sus oponentes.

Para empezar, trabajaremos con los conceptos que se emplean para juegos estáticos.

Definición 4.1. Un **juego estático** es una tupla $(I, (C_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I})$ que consiste de:

1. Un conjunto finito de **jugadores** $I = \{1, 2, \ldots, n\}$.

2. Para cada jugador $i \in I$, el conjunto C_i de **elecciones** del jugador i.

3. Para cada jugador $i \in I$, una **función de utilidad** $u_i \colon C \to \mathbb{R}$ que da los pagos de cada jugador, donde $C = \times_{i\in I} C_i$.

4.1 Creencia común en racionalidad

Antes que nada, en el caso epistémico los jugadores no eligen entre estrategias, con lo cual no se tendrá el concepto de estrategia mixta. Por lo tanto el concepto de solución que se trabajará no será el mismo que en el caso clásico. Pero si se tendrá que los jugadores piensan acerca del comportamiento de los otros jugadores, aunque en este caso, los jugadores no piensan directamente acerca del oponente, sino que, de alguna forma, consideran una versión del oponente en su mente, la cual puede tener creencias diferentes a las del oponente real, en otras palabras, el “oponente” sobre el cual razona un jugador, solamente existe en la mente de dicho jugador. Lo que sí se respeta son las funciones de utilidad y el conjunto de elecciones de los oponentes, ya que esto sigue siendo de conocimiento público. Para facilitar el estudio de estos modelos, se considera que se tiene un conjunto de “versiones” de cada jugador sobre las cuales razona un oponente, y que los jugadores mismos son una de estas “versiones” (aunque esto en general no es de conocimiento de los demás). Las “versiones” de cada jugador se llaman tipos, y cada conjunto finito de tipos de cada jugador se denotará por T_i.

Dado que cada tipo $t_i \in T_i$ funciona de alguna forma como un jugador diferente, las elecciones de cada t_i podrían ser diferentes. Para describir cómo razonan los jugadores acerca de los tipos de los oponentes, cada t_i tendrá una creencia acerca de las elecciones realizadas por cada uno de los tipos del oponente. En otras palabras, tenemos la siguiente definición.

Definición 4.2. Una **creencia** para el tipo $t_i \in T_i$ del jugador i es una distribución de probabilidad $b_i(t_i)$ sobre el conjunto

$$(C_1 \times T_1) \times (C_2 \times T_2) \times \cdots \times (C_{i-1} \times T_{i-1}) \times (C_{i+1} \times T_{i+1}) \times \cdots \times (C_n \times T_n)$$

o bien, sobre el conjunto $C_{-i} \times T_{-i}$. Es decir

$$b_i(t_i)((c_1, t_1), (c_2, t_2), \ldots, (c_{i-1}, t_{i-1}), (c_{i+1}, t_{i+1}), \ldots, (c_n, t_n))$$

nos da la probabilidad de que cada jugador $j \in \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$ sea del tipo t_j y elija c_j, según el razonamiento del jugador i cuando es del tipo t_i.

Con estos dos elementos, los conjuntos de tipos y las creencias de cada jugador, basta para tener el modelo que utilizaremos, y a partir del cual podemos derivar los diferentes niveles de creencia que tendrán los jugadores. Algo similar a lo que ocurría en el caso clásico donde los jugadores saben que los oponentes saben que sus oponentes saben que... y así sucesivamente.

Definición 4.3. Un modelo epistémico está compuesto por $(T_i, b_i)_{i \in I}$, es decir, un conjunto de tipos para cada jugador i y una creencia para cada tipo t_i de cada jugador i.

Por último, antes de empezar a describir los diferentes niveles de razonamiento, tenemos que definir lo que será una elección racional para un jugador.

Definición 4.4. Una elección $c_i^* \in C_i$ es óptima para el jugador i cuando es del tipo t_i si tiene la creencia $b_i(t_i)$ y

$$u_i(c_i^*, b_i(t_i)) \geq u_i(c_i, b_i(t_i))$$

para toda elección $c_i \in C_i$, donde

$$u_i(c_i, b_i(t_i)) = \sum_{(c_{-i},t_{-i})\in C_{-i}\times T_{-i}} b_i(t_i)(c_{-i}, t_{-i})u_i(c_1, \ldots, c_n)$$

Ahora sí podemos definir los niveles de creencia en racionalidad.

Definición 4.5. Sean un modelo epistémico $(T_i, b_i)_{i\in I}$ y un tipo $t_i \in T_i$. Decimos que el tipo t_i **cree en la racionalidad de los oponentes** si $b_i(t_i)$ asigna probabilidad positiva solamente a combinaciones de elecciones y tipos $(c_{-i}, t_{-i}) \in C_{-i} \times T_{-i}$ tales que c_j es óptima para t_j dado $b_j(t_j)$, para todo jugador $j \in \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$.

En otras palabras, tenemos otro nivel de racionalidad, ya que antes solamente pedíamos que las elecciones fueran óptimas para un jugador, sin importar como eran sus creencias, mientras que ahora el jugador al razonar sobre los otros jugadores, solamente debe considerar aquellas elecciones que son óptimas para los otros jugadores (o al menos para alguna versión de los otros jugadores).

Esta idea la podemos extender tantos niveles como sea necesario. En estos casos posteriores lo importante es cómo son los tipos de los otros jugadores, no tanto las elecciones que realizarían.

Definición 4.6. Sean un modelo epistémico $(T_i, b_i)_{i\in I}$ y un tipo $t_i \in T_i$.

1. El tipo t_i **expresa creencia de nivel 1 en racionalidad** si t_i cree en la racionalidad de los oponentes.

2. El tipo t_i **expresa creencia de nivel 2 en racionalidad** si $b_i(t_i)$ asigna probabilidad positiva solamente a combinaciones de elecciones y tipos $(c_{-i}, t_{-i}) \in C_{-i} \times T_{-i}$ tales que t_j expresa creencia de nivel 1 en racionalidad para todo $j \in \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$.

3. El tipo t_i **expresa creencia de nivel 3 en racionalidad** si $b_i(t_i)$ asigna probabilidad positiva solamente a combinaciones de elecciones y tipos $(c_{-i}, t_{-i}) \in C_{-i} \times T_{-i}$ tales que t_j expresa creencia de nivel 2 en racionalidad para todo $j \in \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$.

4. En general, el tipo t_i **expresa creencia de nivel k en racionalidad** si $b_i(t_i)$ asigna probabilidad positiva solamente a combinaciones de elecciones y tipos $(c_{-i}, t_{-i}) \in C_{-i} \times T_{-i}$ tales que t_j expresa creencia de nivel $k-1$ en racionalidad para todo $j \in \{1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n\}$.

Nótese que, aunque la definición de los diferentes niveles es recursiva, esto no quiere decir que si, por ejemplo, un tipo t_i expresa creencia de nivel 3 en racionalidad, esto implique que expresa creencia de niveles 1 y 2, ya que los otros niveles realmente se imponen sobre los oponentes, y no sobre el jugador. Por ello, en la siguiente definición se piden todos los niveles.

Definición 4.7. Dado un modelo epistémico $(T_i, b_i)_{i\in I}$ y un tipo $t_i \in T_i$ para el jugador i, decimos que t_i expresa **creencia común en racionalidad** si expresa creencia de nivel k en racionalidad para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ahora notemos que hasta el momento nuestras elecciones no han formado parte de la manera de definir estos niveles de creencia, tan solo las elecciones de los oponentes en el nivel 1. Esto es ya que ahora sí podemos definir lo que serán las elecciones que nos interesan como soluciones de nuestro modelo.

Definición 4.8. Una elección $c_i \in C_i$ se puede **realizar racionalmente bajo creencia común en racionalidad** si existe un modelo epistémico $(T_i, b_i)_{i\in I}$ y un tipo $t_i \in T_i$ tales que t_i expresa creencia común en racionalidad y c_i es óptima para t_i bajo la creencia $b_i(t_i)$

Por lo tanto, una solución a nuestro modelo será un perfil de elecciones tales que dado algún modelo epistémico, cada una de ellas se pueda realizar racionalmente bajo creencia común en racionalidad. Y aquí hablamos de “algún modelo epistémico” porque los diferentes conjuntos de tipos y de creencias pueden variar de muchas formas, sin embargo, basta con que se obtenga un modelo epistémico que funcione. Más aun, si hay varios perfiles de elecciones que pueden ser solución, podemos encontrar un modelo epistémico para cada uno de ellos, e incluso puede suceder que una de las soluciones funcione bajo un modelo, pero no bajo otro, lo cual es perfectamente válido.

Por otra parte, la condición de expresar creencia común en racionalidad no es fácil de checar, ya que requeriría revisar una infinidad de niveles. Sin embargo, dado que estamos trabajando con juegos finitos, es posible siempre encontrar un modelo epistémico en el cual exista una solución, es decir, en el cual se tenga un perfil de elecciones tales que éstas se puedan realizar racionalmente bajo creencia común en racionalidad.

Más aun, no es necesario encontrar el modelo epistémico para tener la solución, en general se trabaja al revés, es decir, encontramos aquellas elecciones que se pueden realizar bajo creencia común en racionalidad y posteriormente, se puede encontrar el modelo epistémico. Para realizar lo primero se sigue el algoritmo de eliminación iterada de elecciones estrictamente dominadas.

Algoritmo 1.

1. Partiendo del juego original, se eliminan todas las estrategias que están estrictamente dominadas.

2. A partir del juego reducido obtenido en el paso anterior, se eliminan todas las estrategias que están estrictamente dominadas.

3. En general, para cada iteración del algoritmo, a partir del juego reducido que se obtiene en el paso anterior, se eliminan todas las estrategias que están estrictamente dominadas.

El algoritmo termina cuando ya no se pueden eliminar estrategias. Las estrategias que sobreviven son aquellas que se pueden elegir bajo creencia común en racionalidad, y para las cuales existe un modelo epistémico en el cual se pueden elegir bajo creencia común en racionalidad.

Observemos que al final, deben de sobrevivir algunas estrategias, ya que al menos una estrategia debe dominar estrictamente, y por ende, no es eliminada en cada paso. Por otra parte, el algoritmo debe terminar ya que se tiene una cantidad finita de estrategias para cada jugador.

Este concepto de racionalización se puede remontar al trabajo realizado por Bernheim [15] y Pearce [63], aunque el concepto como tal en el contexto epistémico, además del algoritmo aparecen en el trabajo de Tan y Werlang [82].

4.2 Creencia total común en respeto de preferencias

Para el siguiente concepto de solución necesitamos una nueva definición de creencias. Esto ya que necesitamos considerar todas las opciones que tienen los oponentes, pues esto ayuda a identificar aquellas soluciones para un juego que son mejores en caso de que los oponentes realizaran elecciones subóptimas.

Definición 4.9. Dado un juego con dos jugadores y conjuntos T_i y T_j de tipos para los jugadores i y j, respectivamente, una **creencia lexicográfica** para el jugador i cuando es del tipo $t_i \in T_i$ acerca de las combinaciones elección-tipo del jugador j es un vector

$$b_i(t_i) = (b_i^1(t_i); b_i^2(t_i); \dots ; b_i^K(t_i))$$

de distribuciones de probabilidad, cada una sobre el conjunto $C_j \times T_j$. La creencia $b_i^k(t_i)$ se llama la creencia de nivel k.

Estos diferentes niveles de creencias cumplen la función de que, si dos combinaciones elección-tipo tienen probabilidad positiva en creencias de diferente nivel, entonces aquella con probabilidad positiva en la creencia de menor nivel es infinitamente más probable que la que tiene probabilidad positiva en la creencia de mayor nivel. Esto lo asentamos mejor en la siguiente definición.

Definición 4.10. Sean $b_i(t_i) = (b_i^1(t_i); b_i^2(t_i); \dots , b_i^K(t_i))$ una creencia lexicográfica del jugador i del tipo t_i acerca del jugador j, y $(c_j, t_j), (c_j', t_j')$ dos combinaciones elección-tipo del jugador j. Decimos que la creencia lexicográfica $b_i(t_i)$ considera que (c_j, t_j) es **infinitamente más probable** que (c_j', t_j') si existe un nivel k tal que:

1. Las creencias $b_i^m(t_i)$ asignan probabilidad 0 tanto a c_j como a c_j', para toda $m < k$.

2. La creencia b_i^k asigna probabilidad positiva a c_j, pero asigna probabilidad 0 a c_j'.

Por otra parte, hemos mencionado que queremos considerar las elecciones que tienen los oponentes, aunque si observamos, las creencias que habíamos definido en la sección anterior también funcionan como creencias lexicográficas, aunque solamente tienen un nivel, y no necesariamente consideran todas las elecciones. Por ello, nos aseguraremos de que toda posible elección de un oponente aparezca en una creencia lexicográfica.

Definición 4.11. Dada una creencia lexicográfica $b_i(t_i)$ del jugador i cuando es del tipo t_i acerca del jugador j, decimos que esta es **cautelosa** si para todo tipo t_j que se considera posible en $b_i(t_i)$, se tiene que para toda $c_j \in C_j$ existe $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ tal que $b_i^k(t_i)$ asigna probabilidad positiva a (c_j, t_j).

Ahora, como hemos modificado nuestra definición de creencia, tenemos que modificar la definición de utilidad esperada, para tener una forma de comparar elecciones. Para ello, definimos utilidades a cada nivel lexicográfico.

Definición 4.12. Sea $b_i(t_i) = (b_i^1(t_i); b_i^2(t_i); \dots; b_i^K(t_i))$ una creencia lexicográfica del jugador i cuando es del tipo t_i acerca del jugador j, y sea $c_i \in C_i$ una elección del jugador i. Para cada nivel $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ calculamos la **utilidad esperada de elegir c_i bajo la creencia $b_i^K(t_i)$** como:

$$u_i^k(c_i, b_i(t_i)) = \sum_{c_j \in C_j} b_i^k(t_i)(c_j) u_i(c_i, c_j)$$

con lo cual obtenemos un vector de utilidades esperadas

$$(u_i^1(c_i, b_i(t_i)); \dots; u_i^K(c_i, b_i(t_i)))$$

La relación de preferencia entre dos elecciones $c_i, c_i' \in C_i$ se define de la siguiente forma: c_i es preferida a c_i' bajo la creencia lexicográfica $b_i(t_i)$ si existe $k \in \{1, 2, \dots, K\}$ tal que

$$u_i^m(c_i, b_i(t_i)) = u_i^m(c_i', b_i(t_i))$$

para toda $m \in \{1, \dots, k-1\}$, y

$$u_i^k(c_i, b_i(t_i)) > u_i^k(c_i', b_i(t_i))$$

Con esto podemos hablar de una elección óptima en este contexto.

Definición 4.13. Sea $b_i(t_i) = (b_i^1(t_i); b_i^2(t_i); \dots; b_i^K(t_i))$ una creencia lexicográfica del jugador i cuando es del tipo t_i acerca del jugador j. Una elección c_i es **óptima para el jugador i bajo la creencia lexicográfica** b_i si no existe $c_i' \in C_i$ preferida a c_i bajo b_i.

Ahora sí podemos empezar a construir el concepto de solución, para lo cual vamos a requerir varios conceptos auxiliares.

Definición 4.14. Sea un modelo epistémico con creencias lexicográficas $(T_i, b_i)_{i\in I}$ y un tipo t_i del jugador i. Decimos que el tipo t_i **respeta las preferencias del oponente** si para todos los tipos t_j considerados posibles por t_i y cualesquiera dos elecciones c_j, c'_j tales que t_j prefiere c_j a c'_j, tenemos que t_i considera la combinación elección-tipo (c_j, t_j) infinitamente más probable que la combinación elección-tipo (c'_j, t_j).

Con esto tenemos la primera definición recursiva de esta sección.

Definición 4.15. Sean un modelo epistémico con creencias lexicográficas $(T_i, b_i)_{i\in I}$ y un tipo $t_i \in T_i$.

1. El tipo t_i **expresa creencia total de nivel 1 en respeto de preferencias** si t_i respeta las preferencias del oponente.

2. El tipo t_i **expresa creencia total de nivel 2 en respeto de preferencias** si t_i solamente considera posibles tipos del oponente j que expresan creencia total de nivel 1 en respeto de preferencias.

3. En general, el tipo t_i **expresa creencia total de nivel k en respeto de preferencias** si t_i solamente considera posibles tipos del oponente j que expresan creencia total de nivel $k-1$ en respeto de preferencias.

Por último, el tipo t_i **expresa creencia total común en respeto de preferencias** si t_i expresa creencia total de nivel k en respeto de preferencias para todo $k \in \mathbb{N}$.

De igual forma que con los conceptos de solución anteriores, cada uno de los niveles es independiente de los demás. Notemos también que este concepto no considera que los tipos sean cautelosos, lo cual es parte importante del concepto de solución, para lo cual tenemos la segunda definición recursiva.

Definición 4.16. Sean un modelo epistémico con creencias lexicográficas $(T_i, b_i)_{i\in I}$ y un tipo $t_i \in T_i$.

1. El tipo t_i **expresa creencia total de nivel 1 en cautela** si t_i solamente considera posibles tipos del oponente j que son cautelosos.

2. El tipo t_i **expresa creencia total de nivel 2 en cautela** si t_i solamente considera posibles tipos del oponente j que expresan creencia total de nivel 1 en cautela.

3. En general, el tipo t_i **expresa creencia total de nivel k en cautela** si t_i solamente considera posibles tipos del oponente j que expresan creencia total de nivel $k-1$ en cautela.

Por último, el tipo t_i **expresa creencia total común en cautela** si t_i expresa creencia total a nivel k en cautela para todo $k \in \mathbb{N}$.

Aquí notamos dos cosas: primero, que al igual que el concepto anterior, expresar creencia de nivel k en cautela no implica los niveles anteriores; y segundo, que no se pide que el tipo t_i en algún momento sea cauteloso, por lo cual se debe pedir esta propiedad para realmente tener el concepto de solución que deseamos. Ahora sí, podemos definir las soluciones que nos van a interesar.

Definición 4.17. Sea c_i una elección del jugador i. Decimos que i **puede elegir racionalmente c_i bajo creencia total común en cautela y respeto de preferencias** si existe un modelo epistémico con creencias lexicográficas $(T_i, b_i)_{i \in I}$ y algún tipo t_i en el modelo tal que:

1. t_i es cauteloso, t_i expresa creencia total común en cautela, y t_i expresa creencia total común en respeto de preferencias.

2. c_i es una elección racional para t_i.

Este concepto de racionalidad se remonta al trabajo mencionado en el capítulo 2 de Myerson [53] respecto al concepto de equilibrio propio, ya que las estrategias elegidas en un equilibrio propio son aquellas elecciones para las que se puede construir un tipo propiamente racionalizable (o bien, se puede definir un análogo a la condición límite asociada al equilibrio propio para el caso epistémico), como se muestra en Schuhmacher [73] y Asheim [3]. De hecho, es posible mostrar que el concepto de racionalizabilidad propia se relaciona con equilibrios propios utilizando las mismas condiciones adicionales que se plantean en el apéndice de este capítulo para relacionar creencia común en racionalidad con equilibrios de Nash.

Ejemplo 4.1. Consideramos el siguiente ejemplo:

	a	b	c
A	$0,3$	$1,2$	$1,1$
B	$1,3$	$0,2$	$1,1$
C	$1,3$	$1,2$	$0,1$

Bajo creencia común en racionalidad, podemos observar que para el jugador 2, las elecciones b y c están estrictamente dominadas por la elección a, por lo que se eliminan en el primer paso. Posteriormente, para el jugador 1 en el juego reducido, la elección A está estrictamente dominada tanto por B como por C, por lo que se elimina. En este punto, ya no hay más elecciones estrictamente dominadas, por lo que sobreviven (B, a) y (C, a).

Sin embargo, si ahora trabajamos con creencia total común en respeto de preferencias, podemos observar que el jugador 1 en su creencia lexicográfica debe considerar que a es infinitamente más probable de ser elegida a b o c, y a su vez, b es infinitamente más probable de ser elegida que c. Por ende, la creencia lexicográfica para el jugador 1 acerca del jugador 2 debe verse de la siguiente forma:

$$b_1(t_1) = ((a, t_2), (b, t_2), (c, t_2))$$

mientras que, dada esta creencia lexicográfica, podemos observar que para el jugador 1 es óptimo elegir C, dado que a y b son infinitamente más probables que c, y por lo tanto, C es infinitamente más probable que A y B. Posteriormente, B debe ser considerado infinitamente más probable que A dado que a es infinitamente más probable que b. Así, la creencia lexicográfica del jugador 2 acerca del jugador 1 será de la siguiente forma

$$b_2(t_2) = ((C, t_1), (B, t_1), (A, t_1))$$

y por lo tanto, la única pareja de elecciones que es óptima bajo creencia total común en respeto de preferencias es (C, a).

4.3 Presumir la racionalidad del oponente

En la sección anterior se propuso una condición que se puede imponer en las creencias lexicográficas de tal manera que se obtiene una solución en la cual se considera cuáles son las preferencias de cada jugador y con base en esto se define el orden.

Sin embargo, podemos pensar en que hay muchos modelos epistémicos, y en particular, muchas creencias lexicográficas que podríamos utilizar. Existen juegos en los cuales, sin importar las creencias lexicográficas que se propongan en el modelo, algunas elecciones nunca son óptimas, mientras que algunas elecciones son óptimas para creencias lexicográficas particulares. En este caso, podríamos considerar que las elecciones que nunca pueden ser óptimas deberían considerarse infinitamente menos probables que las elecciones que pueden ser óptimas en algunos casos. Más aun, dichas elecciones que nunca pueden ser óptimas pueden ser infinitamente más probables bajo el concepto definido en la sección anterior, por lo cual no son el mismo concepto de razonamiento. Esta nueva forma de razonar sobre un juego presume que el oponente es racional respecto a sus elecciones.

Definición 4.18. Sean un modelo epistémico con creencias lexicográficas $(T_i, b_i)_{i \in I}$ y un tipo cauteloso t_i. Decimos que t_i **presume la racionalidad del oponente** j si

1. Para todas las elecciones c_j del oponente que son óptimas para alguna creencia lexicográfica cautelosa, t_i considera posible algún tipo t_j del oponente para el cual c_j es óptima.

2. El tipo t_i considera todas las combinaciones elección-tipo (c_j, t_j), donde t_j es cauteloso y c_j es óptima para t_j, infinitamente más probables que las combinaciones elección-tipo (c'_j, t'_j) que no cumplen dicha propiedad.

Definición 4.19. Sean un modelo epistémico con creencias lexicográficas $M = (T_i, b_i)_{i \in I}$ y un tipo cauteloso $t_i \in T_i$.

1. El tipo t_i **expresa presunción de racionalidad de nivel 1** si t_i presume la racionalidad de j.

2. En general, el tipo t_i **expresa presunción de racionalidad de nivel** k si

   (a) Dada una elección c_j del oponente que es óptima para algún tipo cauteloso (el cual puede o no estar en el modelo M) que exprese presunción de racionalidad hasta el nivel $k-1$, el tipo t_i considera posible algún tipo cauteloso t_j del oponente que expresa presunción de racionalidad hasta el nivel $k-1$ para el cual c_j es óptimo.

   (b) El tipo t_i considera todas las combinaciones elección-tipo (c_j, t_j), donde t_j es cauteloso, t_j expresa presunción de racionalidad hasta el nivel $k-1$ y c_j es óptimo para t_j, infinitamente más probables que todas las combinaciones elección-tipo (c'_j, t'_j) que no tienen dicha propiedad.

   Por último, el tipo t_i **expresa presunción común de racionalidad** si t_i expresa presunción de racionalidad de nivel k para todo $k \in \mathbb{N}$.

Solamente haremos notar que durante la definición anterior, a diferencia de las otras definiciones recursivas, se pide que los tipos del oponente expresen presunción de racionalidad hasta el nivel $k-1$, es decir, que deben cumplir todos los niveles anteriores e incluyendo el $(k-1)$-ésimo.

A continuación presentamos el algoritmo correspondiente a presunción de la racionalidad del oponente.

Algoritmo 2.

1. Partiendo del juego original, se eliminan todas las estrategias que están débilmente dominadas.

2. A partir del juego reducido obtenido en el paso anterior, se eliminan todas las estrategias que están débilmente dominadas.

3. En general, para cada iteración del algoritmo, a partir del juego reducido que se obtiene en el paso anterior, se eliminan todas las estrategias que están estrictamente dominadas.

El algoritmo termina cuando ya no se pueden eliminar más estrategias. Las estrategias que sobreviven son aquellas que se pueden elegir bajo presunción de la racionalidad del oponente, y para las cuales existe un modelo epistémico con creencias lexicográficas en el cual se pueden elegir bajo presunción de la racionalidad del oponente.

Este concepto de racionalidad se propuso originalmente en el trabajo de Brandenburger, Friedenberg y Keisler [22], aunque en ese caso, el concepto requiere que un modelo epistémico sea completo, en el sentido de considerar todos los tipos posibles para un jugador, lo cual implica que dichos modelos deben tener una cantidad no contable de tipos para cada jugador.

Ejemplo 4.2. Trabajamos con la siguiente matriz de utilidades

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ A & 0,3 & 1,2 & 1,4 \\ B & 1,3 & 0,2 & 1,1 \\ C & 1,6 & 1,2 & 0,1 \end{array}$$

Bajo creencia total común en respeto de preferencias, el jugador 2 prefiere a a b, por lo que debemos considerar a infinitamente más probable que b. Esto lleva a que el jugador 1 prefiera B a A, es decir que tenemos que B se considera infinitamente más probable que A. En consecuencia, el jugador 2 prefiere b a c, por lo que consideramos b infinitamente más probable que c. Dado que a es infinitamente más probable que b y ésta es infinitamente más probable que c, el jugador 1 prefiere C a las otras opciones. Así, las creencias lexicográficas se verían de la siguiente forma:

$$b_1(t_1) = ((a, t_2), (b, t_2), (c, t_2))$$
$$b_2(t_2) = ((C, t_1), (B, t_1), (A, t_1))$$

lo que significa que las elecciones óptimas que se realizan bajo creencia total común en respeto de preferencias son (C, a).

Por otra parte, bajo presunción común de racionalidad, observamos que b está débilmente dominada por a, por lo que eliminamos b. En el juego reducido, tenemos que A y C están débilmente dominadas por B, por lo que se eliminan. Por último, en el juego reducido, c está débilmente dominada por a, por lo que las elecciones óptimas que se realizan bajo presunción común de racionalidad son (B, a).

4.4 Creencia común en racionalidad futura

Ahora trabajaremos con juegos dinámicos, es decir, juegos donde no todas las elecciones se realizan simultáneamente, sino que los jugadores pueden ir aprendiendo información de sus oponentes durante el transcurso del juego para tomar las decisiones posteriores con base en dicha información adquirida.

Definición 4.20. Un juego dinámico G es una tupla formada por

$$G = (I, (C_i)_{i\in I}, X, Z, (H_i)_{i\in I}, (C_i(h))_{i\in I, h\in H_i}, (u_i)_{i\in I})$$

donde

- I es el conjunto finito de jugadores.
- C_i es el conjunto finito de elecciones para cada jugador $i \in I$.

- X es el conjunto de historias no terminales, que son secuencias de perfiles de elecciones $x = (x_1, \ldots, x_k)$ donde cada $x_m = (c_i)_{i\in\hat{I}} \in \times_{i\in\hat{I}} C_i$ para algún $\hat{I} \subseteq I$, y tal que para todo $\ell < k$, $(x_1, \ldots, x_\ell) \in X$, es decir, también es una historia. Dado que $\hat{I}$ puede contener más de un jugador, cada perfil x_m puede contener más de una elección y por lo tanto, es posible tener elecciones simultáneas en algunos puntos temporales.

- Z es el conjunto de historias terminales del juego. Para estas historias se tiene que si $z = (x_1, \ldots, x_k) \in Z$, entonces para todo $\ell < k$, $(x_1, \ldots, x_\ell) \in X$.

- H_i es una colección finita de conjuntos de información del jugador i. Los conjuntos de información $h \in H_i$ son conjuntos no vacíos de historias no terminales. Si h contiene más de una historia, entonces el jugador i no sabe con certeza cuál de estas historias ocurrió para llegar a h. Las colecciones H_i no necesariamente son disjuntas, ya que se permiten elecciones simultáneas, lo cual permite que un conjunto de información pertenezca a la colección de todos los jugadores que deben realizar una elección en ese momento. La colección de todos los conjuntos de información en el juego se denota por H.

- $C_i(h) \subseteq C_i$ es el conjunto finito de elecciones disponibles para el jugador i en el conjunto de información $h \in H_i$. Diremos que $c \in C_i(h)$ si existe una historia $x \in X$ y $x_m = (c_j)_j \in \hat{I}$ tal que $x \in h$, $i \in \hat{I}$, $c_i = c$ y $(x, x_m) = x' \in X \cup Z$, es decir, si c es una elección en un perfil que incluye al jugador i y que con este lleva a una historia futura, terminal o no terminal.

- $u_i\colon Z \to \mathbb{R}$ es la función de utilidad del jugador i.

A continuación definimos un orden parcial para los conjuntos de información. Para ello, primero definimos el orden entre los conjuntos que se encuentran inmediatamente junto a otro, y posteriormente, generalizamos dicho orden.

Definición 4.21. Decimos que un conjunto de información h' **sigue inmediatamente** a otro conjunto de información h, o bien, que h **precede inmediatamente** a h' si existe un conjunto de jugadores no vacío $\hat{I} \subseteq I$, una elección $c_i \in C_i(h)$ para cada $i \in \hat{I}$ y $x \in h$ tal que $(x, (c_i)_{i\in\hat{I}}) \in h'$.

Ahora bien, decimos que un conjunto de información h' **sigue débilmente** a otro conjunto de información h, o bien que h **precede débilmente** a h' si $h = h'$ o bien, existe una sucesión $h_0, h_1, h_2, \ldots, h_\ell$ tal que $h_0 = h$, $h_\ell = h'$ y cada h_t sigue inmediatamente a h_{t-1} para $t \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$. En caso de que se cumpla lo segundo, pero $h \neq h'$, podemos decir que h' **sigue estrictamente** a h, o bien, que h **precede estrictamente** a h'.

En lo que sigue respecto a juegos dinámicos, consideramos que los jugadores no harán planes en los cuáles consideren realizar ciertas elecciones al principio del juego que impidan que realicen algunas otras más adelante. En este sentido, estos planes se llaman **estrategias** y solamente permiten elecciones a futuro que, tras realizar una elección pasada tienen posibilidad de elegirse posteriormente [71]. Para ejemplificar, utilizando el juego de la figura 1, las posibles estrategias para cada jugador serán $S_1 = \{(a,f),(a,g),(b),(c)\}$ y $S_2 = \{(d),(e)\}$. Una "estrategia" como (b,f) no la tomaremos en cuenta, ya que el jugador 1 al elegir b al principio, se impide a si mismo elegir algo en el conjunto de información h_2 y por ende, nunca elegiría f en un futuro.

Definición 4.22. Sean $h \in H$, $h' \in H_i$, donde h' precede estrictamente a h. Decimos que una elección $c_i \in C_i(h')$ **lleva** a h si existe $x \in h'$, $\hat{I} \subseteq I$ con $i \in \hat{I}$, y $c_j \in C_j(h')$ para todo $j \in \hat{I} \setminus \{i\}$ tal que $(x, (c_j)_{j\in\hat{I}})$ precede débilmente a h.

Definición 4.23. Un conjunto de información $h \in H$ es **alcanzable** a través de $s_i \colon \tilde{H}_i \to \cup_{h\in\tilde{H}_i} C_i(h)$, con $\tilde{H}_i \subseteq H_i$, si para todo conjunto de información $h' \in \tilde{H}_i$ que precede estrictamente a h, la elección $s_i(h')$ lleva a h. Decimos que s_i es una **estrategia** si $\tilde{H}_i$ contiene exactamente los conjuntos de información en H_i que son alcanzables a través de s_i. Una estrategia s_i **lleva** a $h \in H$ si h es alcanzable a través de s_i.

El conjunto de estrategias del jugador i se denota por S_i. El conjunto de combinaciones de estrategias para los oponentes de i se denota por $S_{-i} = \times_{j\neq i} S_j$. Una combinación de estrategias para todos los jugadores se escribirá como (s_i, s_{-i}) con $s_i \in S_i$ y $s_{-i} \in S_{-i}$.

El conjunto de estrategias para el jugador i que llevan a h se denota por $S_i(h)$, mientras que el conjunto de combinaciones de estrategias para los oponentes de i que llevan a h se denota por $S_{-i}(h)$.

La colección de conjuntos de información del jugador i a los que lleva la estrategia s_i se denota por $H_i(s_i)$. Por último, la colección de conjuntos de información h tales que $s_i \in S_i(h)$ y $s_{-i} \in S_{-i}(h)$ se denota por $H(s_i, s_{-i})$, es decir, son los conjuntos de información que son alcanzables a través de la combinación de estrategias (s_i, s_{-i}).

Una suposición razonable que podemos hacer es que los jugadores recuerden la información que van ganando a lo largo del juego para poder realizar inferencias acerca del comportamiento de los oponentes. Esto se formaliza a continuación.

Definición 4.24. Dado un juego dinámico, decimos que los jugadores tienen **memoria perfecta** si en todo conjunto de información h, cada jugador recuerda sus propias elecciones pasadas y recuerda la información que ha obtenido previamente acerca de las elecciones de sus oponentes. De manera formal, dado un conjunto de información $h \in H_i$ un jugador i **recuerda sus propias elecciones pasadas** si para todo $h' \in H_i$ tal que h' precede a h y cualesquiera dos historias $x, y \in h$ con $x = (x_1, \ldots, x_\ell) \neq y = (y_1, \ldots, y_\ell)$, tenemos que la elección $c_i \in C_i(h')$ que lleva a h cumple que $c_i = x_t = y_t$ para alguna $t \in \{1, \ldots, \ell\}$. Por otra parte, dado un conjunto de información $h \in H_i$ un jugador i **recuerda la información que ha obtenido previamente acerca de las elecciones de sus oponentes** si para todo $h' \in H_i$ tal que h' precede a h y cualesquiera dos historias $x, y \in h$ con $x = (x_1, \ldots, x_\ell) \neq y = (y_1, \ldots, y_\ell)$ tenemos que existe $t \in \{1, \ldots, \ell\}$ tal que $(x_1, \ldots, x_t), (y_1, \ldots, y_t) \in h'$.

En lo que sigue, respecto a juegos dinámicos, tanto en éste como en el siguiente capítulo, se supondrá que los jugadores tienen memoria perfecta.

De manera similar a como se trabaja para juegos simultáneos, el objeto en el que se concentrarán las jerarquías de decisión de los jugadores será un modelo epistémico.

Definición 4.25. Un **modelo epistémico para un juego dinámico** G está dado por $\hat{M} = (\hat{T}_i, \beta_i)_{i\in I}$ donde $\hat{T}_i$ es un conjunto finito de tipos $\hat{T}_i$ para cada jugador i, y para cada tipo $\hat{t}_i \in \hat{T}_i$ y cada conjunto de información $h \in H_i$ definimos una creencia condicional $\beta_i(\hat{t}_i, h)$ que es una distribución de probabilidad sobre $S_i(h) \times \hat{T}_{-i}$ que es el conjunto de combinaciones estrategia-tipo de los oponentes de i que llevan a h.

Una vez que tenemos un modelo epistémico para nuestro juego, necesitamos una forma de comparar diferentes estrategias para decidir si son adecuadas o no.

Definición 4.26. Dados $\hat{t}_i \in \hat{T}_i$ un tipo del jugador i, un conjunto de información $h \in H_i$ y una creencia condicional $\beta_i(\hat{t}_i, h)$, definimos la **utilidad esperada de elegir la estrategia** $s_i \in S_i(h)$ como

$$u_i(s_i, \beta_i(\hat{t}_i, h)) = \sum_{(s_{-i},\hat{t}_{-i})\in S_{-i}\times\hat{T}_{-i}} \beta_i(\hat{t}_i, h)(s_{-i}, t_{-i})u_i(z(s_i, s_{-i}))$$

donde $z(s_i, s_{-i})$ es la historia terminal alcanzada por (s_i, s_{-i}).

Decimos que la estrategia $s_i \in S_i(h)$ es **óptima** para $\hat{t}_i$ en h si para toda $s'_i \in S_i(h)$

$$u_i(s_i, \beta_i(\hat{t}_i, h)) \geq u_i(s'_i, \beta_i(\hat{t}_i, h))$$

Ahora sí, podemos pensar en un concepto de solución para estos juegos en el cual cada jugador, al encontrarse en un punto donde debe elegir una acción, para poder razonar acerca de sus oponentes considerará que, sin importar cómo se llegó al punto presente, de ahora en adelante los oponentes realizarán las elecciones futuras de forma racional.

En algunas de las definiciones y resultados que siguen se permite que los conjuntos de información sigan o precedan débilmente a otro, ya que es posible que en cada conjunto de información haya más de un jugador tomando una decisión en ese instante dada la definición de juego dinámico que estamos utilizando.

Definición 4.27. Dado un modelo epistémico $\hat{M} = (\hat{T}_i, \beta_i)_{i\in I}$, decimos que un tipo $\hat{t}_i$ **cree en la racionalidad futura de** j si para todo $h \in H_i$, tenemos que $\beta_i(\hat{t}_i, h)(s_j, \hat{t}_j) > 0$ sólo si para todo $h' \in H_j(s_j)$ que sigue débilmente a h:

$$u_j(s_j, \beta_j(\hat{t}_j, h')) \geq u_j(s'_j, \beta_j(\hat{t}_j, h'))$$

para toda $s'_j \in S_j(h')$.

Un tipo $\hat{t}_i$ **cree en la racionalidad futura de los oponentes** si $\hat{t}_i$ cree en la racionalidad futura de j para todo $j \in I \setminus \{i\}$.

Definición 4.28. Dado un modelo epistémico $\hat{M} = (\hat{T}_i, \beta_i)_{i \in I}$, sean $\hat{t}_i \in \hat{T}_i$ un tipo para el jugador i.

1. El tipo $\hat{t}_i$ **expresa creencia de orden 1 en racionalidad futura** si $\hat{t}_i$ cree en la racionalidad futura de los oponentes.
2. El tipo $\hat{t}_i$ **expresa creencia de orden 2 en racionalidad futura** si en cada conjunto de información $h \in H_i$, $\hat{t}_i$ solamente asigna probabilidad positiva a los tipos de los oponentes que expresan creencia de orden 1 en racionalidad futura.
3. En general, el tipo $\hat{t}_i$ expresa **creencia de orden k en racionalidad futura** si en cada conjunto de información $h \in H_i$, $\hat{t}_i$ solamente asigna probabilidad positiva a los tipos de los oponentes que expresan creencia de orden $k-1$ en racionalidad futura.

Por último, el tipo $\hat{t}_i$ expresa **creencia común en racionalidad futura** si $\hat{t}_i$ expresa creencia de orden k en racionalidad futura para todo $k \in \mathbb{N}$.

Para presentar el algoritmo que encuentra las elecciones que se pueden realizar bajo creencia común en racionalidad futura, necesitamos definir lo que son problemas de decisión completos y reducidos.

Definición 4.29. Sea $h \in H_i$ un conjunto de información para el jugador i. La pareja $\Gamma_i^0(h) = (S_i^0(h), S_{-i}^0(h))$ es el **problema de decisión completo** para i en h, donde $S_i^0(h) = S_i(h)$ y $S_{-i}^0(h) = S_{-i}(h)$. Una pareja $\Gamma_i^k(h) = (S_i^k(h), S_{-i}^k(h))$ es un **problema de decisión reducido** para el jugador i en h, si $S_i^k(h) \subseteq S_i^0(h)$ y $S_{-i}^k(h) \subseteq S_{-i}^0(h)$.

Definición 4.30. Sea $h \in H_i$ un conjunto de información para el jugador i, y $\Gamma_i^k(h) = (S_i^k(h), S_{-i}^k(h))$ un problema de decisión completo o reducido para i en h. Una estrategia $s_i \in S_i^k(h)$ **está estrictamente dominada en $S_{-i}^k(h)$ por una randomización en** $A_i \subseteq S_i(h)$ si existe $\rho_i \in \Delta(A_i)$ tal que

$$\sum_{s_i' \in A_i} \rho_i(s_i') u_i(z(s_i', s_{-i})) > u_i(z(s_i, s_{-i}))$$

para toda $s_{-i} \in S_{-i}^k(h)$.

Ahora podemos describir el algoritmo para esta sección, el procedimiento de dominancia hacia atrás.

Algoritmo 3. Sean $S_i^0(h) = S_i(h)$ y $S_{-i}^0(h) = S_{-i}(h)$ para todo $i \in I$ y todo $h \in H_i$. Para $k \geq 1$ y cada jugador i y conjunto de información $h \in H$ definimos los siguientes conjuntos del k-ésimo paso.

$$\begin{aligned} S_i^k(h) = \{s_i \in S_i^{k-1}(h) \mid \ & s_i \text{ no está estrictamente dominada en } S_{-i}^{k-1}(h') \\ & \text{por una randomización en } S_i(h') \text{ para todo} \end{aligned}$$

$$h' \in H_i(s_i) \text{ que sigue débilmente a } h\}$$

Además para todo jugador $i \in I$ y $h \in H$, definimos

$$S^k_{-i}(h) = \underset{j \in I \setminus \{i\}}{\times} S^k_j(h)$$

Este concepto de racionalidad aparece originalmente en el trabajo de Perea [65], refinando lo propuesto por Reny [70] al mostrar que no es posible considerar que los oponentes son racionales tanto en el pasado como en el futuro al mismo tiempo, salvo en juegos muy particulares. Además, es un intento de extender el concepto de creencia común en racionalidad para juegos dinámicos, aunque el mero hecho de que los oponentes no necesariamente son racionales en el pasado y en el futuro permite una variedad de formas de razonamiento, como se observa tanto en la siguiente sección como en el capítulo 6.

4.5 Creencia común fuerte en racionalidad

En la sección anterior se dio un concepto de racionalización en el cual, en cada conjunto de información se razona acerca de los oponentes pensando en que, a partir de ese momento, sin importar cómo llegamos al conjunto de información presente, los oponentes serán racionales. Pero podemos razonar de otra forma, considerando que para cada conjunto de información, si es posible que todos los oponentes sean racionales para llegar a ese conjunto de información, entonces debemos de considerar que lo son.

Definición 4.31. Dado un modelo epistémico $\hat{M} = (\hat{T}_i, \beta_i)_{i \in I}$, sean $\hat{t}_i \in \hat{T}_i$ un tipo y $h \in H_i$ un conjunto de información para el jugador i. Decimos que el tipo $\hat{t}_i$ **cree fuertemente en la racionalidad de los oponentes en** h si, al existir al menos una combinación de tipos para los oponentes (no necesariamente en $\hat{M}$) para los cuales existe una combinación de estrategias óptimas que llevan a h, entonces tenemos que:

1. El modelo epistémico $\hat{M}$ contiene al menos una combinación de tipos como la descrita anteriormente.

2. El tipo $\hat{t}_i$, en h, solamente asigna probabilidad positiva a combinaciones estrategia-tipo de los oponentes para las cuales la combinación de estrategia lleva a h y las estrategias son óptimas para los tipos.

Por último, decimos que $\hat{t}_i$ **cree fuertemente en la racionalidad de los oponentes** si cree fuertemente en la racionalidad de los oponentes en todo $h \in H_i$.

Definición 4.32. Dado un modelo epistémico $\hat{M} = (\hat{T}_i, \beta_i)_{i \in I}$, sean $\hat{t}_i \in \hat{T}_i$ un tipo y $h \in H_i$ un conjunto de información para el jugador i.

1. El tipo $\hat{t}_i$ **expresa creencia fuerte de orden 1 en racionalidad en** h si $\hat{t}_i$ cree fuertemente en la racionalidad de los oponentes en h. Además, el tipo $\hat{t}_i$ **expresa creencia fuerte de orden 1 en racionalidad** si $\hat{t}_i$ cree fuertemente en la racionalidad de los oponentes en todo $h \in H_i$.

2. El tipo $\hat{t}_i$ **expresa creencia fuerte de orden 2 en racionalidad en** h si, al existir al menos una combinación de tipos para los oponentes (no necesariamente en $\hat{M}$) los cuales expresan creencia fuerte de orden 1 en racionalidad, y para los cuales existe una combinación de estrategias óptimas que llevan a h, entonces tenemos que:

    - El modelo epistémico $\hat{M}$ contiene al menos una combinación de tipos como la descrita anteriormente.
    - El tipo $\hat{t}_i$, en h, solamente asigna probabilidad positiva a combinaciones estrategia-tipo de los oponentes para las cuales la combinación de estrategias lleva a h, los tipos expresan creencia fuerte de orden 1 en racionalidad y las estrategias son óptimas para los tipos.

    Decimos que $\hat{t}_i$ **expresa creencia fuerte de orden 2 en racionalidad** si expresa creencia fuerte de orden 2 en racionalidad en todo $h \in H_i$.

3. En general, el tipo $\hat{t}_i$ **expresa creencia fuerte de orden** k **en racionalidad en** h si, al existir al menos una combinación de tipos para los oponentes (no necesariamente en $\hat{M}$) que expresan creencia fuerte hasta el orden $k-1$ en racionalidad, y para los cuales existe una combinación de estrategias óptimas que llevan a h, entonces tenemos que:

    - El modelo epistémico $\hat{M}$ contiene al menos una combinación de tipos como la descrita anteriormente.
    - El tipo $\hat{t}_i$, en h, solamente asigna probabilidad positiva a combinaciones estrategia-tipo de los oponentes para las cuales la combinación de estrategias lleva a h, los tipos expresan creencia fuerte hasta el orden $k-1$ en racionalidad y las estrategias son óptimas para los tipos.

    Decimos que $\hat{t}_i$ expresa creencia fuerte de orden k en racionalidad si expresa creencia fuerte de orden k en racionalidad en todo $h \in H_i$.

Por último, decimos que $\hat{t}_i$ **expresa creencia fuerte común en racionalidad** si $\hat{t}_i$ expresa creencia fuerte de orden k en racionalidad para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definición 4.33. Decimos que el jugador i puede **elegir la estrategia** s_i **racionalmente bajo creencia fuerte común en racionalidad** si existe un modelo epistémico con creencias condicionales $\hat{M} = (\hat{T}_i, \beta_i)_{i \in I}$ y un tipo $\hat{t}_i \in \hat{T}_i$ tales que el tipo t_i expresa creencia fuerte común en racionalidad, y la estrategia s_i es óptima para el tipo $\hat{t}_i$ en todo $h \in H_i$ al que lleva s_i.

El algoritmo para encontrar las estrategias que se pueden elegir bajo creencia fuerte común en racionalidad es el procedimiento de dominancia condicional iterada.

Algoritmo 4. Sean $S_i^0(h) = S_i(h)$ y $S_{-i}^0(h) = S_{-i}(h)$ para todo $i \in I$ y todo $h \in H_i$. Para cada $k \geq 1$ y cada jugador $i \in I$ y conjunto de información $h \in H$ definimos los siguientes conjuntos auxiliares del k-ésimo paso.

$$\begin{aligned}\tilde{S}_i^h = \{s_i \in S_i^{k-1}(h) \mid\ & s_i \text{ no está estrictamente dominada en } S_{-i}^{k-1}(h') \\ & \text{por una randomización en } S_i(h') \text{ para todo} \\ & h' \in H_i(s_i)\}\end{aligned}$$

A partir de éstos, definimos los conjuntos que forman los problemas de decisión reducidos, primero definimos

$$S_i^k(h) = \begin{cases} \tilde{S}_i^k(h) & \text{si } \tilde{S}_i^k(h) \neq \varnothing \\ S_i^{k-1}(h) & \text{si } \tilde{S}_i^k(h) = \varnothing \end{cases}$$

y por último, para los conjuntos de información $h \in H_i$ definimos

$$S_{-i}^k(h) = \underset{j \in I \setminus \{i\}}{\times} S_j^k(h)$$

Este concepto de racionalidad fue propuesto por Pearce [63] bajo el nombre de racionalizabilidad en forma extensiva, junto con un algoritmo que identifica las elecciones posibles bajo este razonamiento. Posteriormente, Battigalli [10] propuso otro algoritmo que simplificaba lo propuesto por Pearce, mientras que Battigalli y Siniscalchi [11] mostraron la equivalencia entre racionalizabilidad en forma extensiva y creencia fuerte común en racionalidad, con lo que creencia fuerte común en racionalidad es el concepto epistémico correspondiente a la racionalizabilidad en forma extensiva.

El algoritmo se debe a Shimoji y Watson [76] quienes mostraron que se obtenían exactamente las estrategias que se pueden elegir bajo racionalizabilidad en forma extensiva, por lo que el mismo algoritmo obtiene las estrategias que se pueden elegir bajo creencia fuerte común en racionalidad.

Ejemplo 4.3. Consideramos el ejemplo descrito mediante la figura 4.1.

Bajo creencia común en racionalidad futura, tenemos los siguientes conjuntos de estrategias iniciales:

$$\begin{aligned}S_1^0(\varnothing) &= \{(x,a),(x,b),(x,c),(x,d),y\} \\ S_2^0(\varnothing) &= \{A,B,C,D\} \\ S_1^0(h_1) &= \{(x,a),(x,b),(x,c),(x,d)\} \\ S_2^0(h_1) &= \{A,B,C,D\}\end{aligned}$$

Primero, en $\varnothing$, las estrategias (x,a), (x,b) y (x,d) están estrictamente dominadas por y para el jugador 1. Así que las eliminamos en $S_2^1(\varnothing)$. Por otra parte, en h_1 las

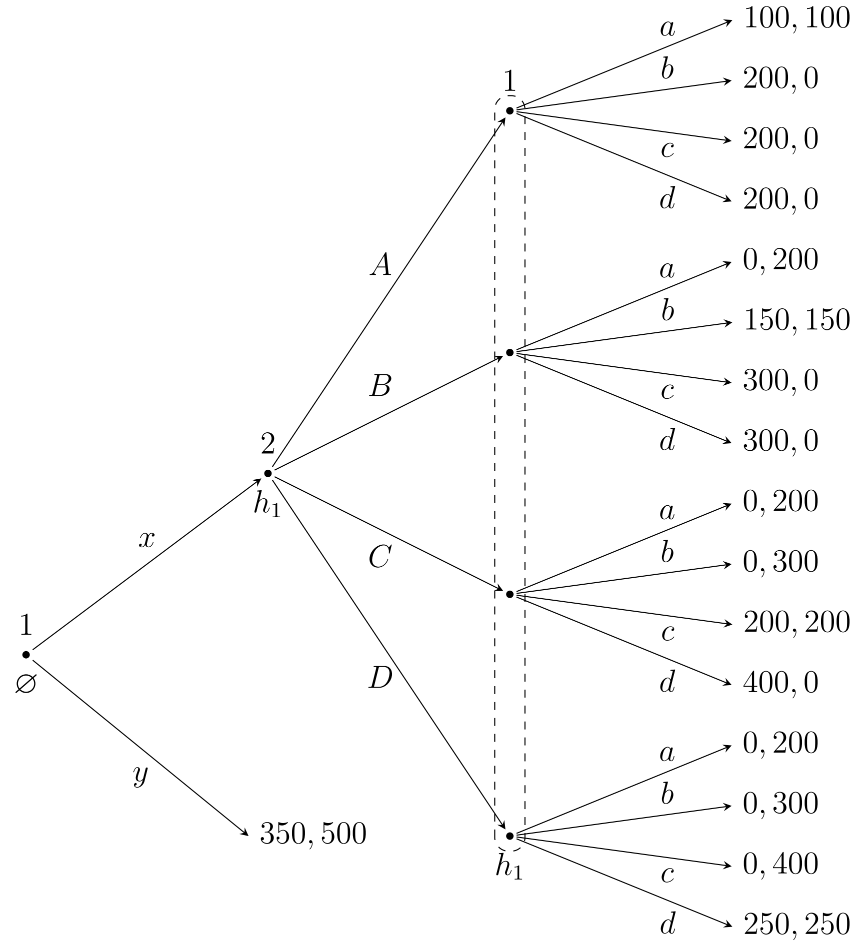

Figura 4.1: Un primer juego en forma extensiva

estrategias (x, d) y D están estrictamente dominadas, por lo que las eliminamos tanto en h_1 como en $\varnothing$. De esta forma obtenemos los siguientes conjuntos de estrategias reducidos:

$$\begin{aligned}
&S_1^1(\varnothing) = \{(x, c), y\}\\
&S_2^1(\varnothing) = \{A, B, C\}\\
&S_1^1(h_1) = \{(x, a), (x, b), (x, c)\}\\
&S_2^1(h_1) = \{A, B, C\}
\end{aligned}$$

Ahora, en $\varnothing$, la estrategia (x, c) está estrictamente dominada por y. En h_1, las estrategias (x, c) y C están estrictamente dominadas. Obtenemos los siguientes conjuntos de estrategias reducidos:

$$S_1^2(\varnothing) = \{y\}$$

$$
\begin{aligned}
S_2^2(\varnothing) &= \{A, B\}\\
S_1^2(h_1) &= \{(x,a),(x,b)\}\\
S_2^2(h_1) &= \{A, B\}
\end{aligned}
$$

Por último, en $\varnothing$ solamente tenemos una estrategia para el jugador 1, por lo que ya no podemos eliminar más estrategias. En h_1, las estrategias (x,b) y B están estrictamente dominadas. Por lo tanto los conjuntos de estrategias reducidos finales son:

$$
\begin{aligned}
S_1^3(\varnothing) &= \{y\}\\
S_2^3(\varnothing) &= \{A\}\\
S_1^3(h_1) &= \{(x,a)\}\\
S_2^3(h_1) &= \{A\}
\end{aligned}
$$

con lo cual, el jugador 1 elegirá la estrategia y, mientras que el jugador 2 elegirá la estrategia A bajo creencia común en racionalidad futura.

Ahora, bajo creencia común fuerte en racionalidad tenemos los siguientes conjuntos de estrategias iniciales:

$$
\begin{aligned}
S_1^0(\varnothing) &= \{(x,a),(x,b),(x,c),(x,d),y\}\\
S_2^0(\varnothing) &= \{A,B,C,D\}\\
S_1^0(h_1) &= \{(x,a),(x,b),(x,c),(x,d)\}\\
S_2^0(h_1) &= \{A,B,C,D\}
\end{aligned}
$$

En el primer paso, observamos que en $\varnothing$ las estrategias del jugador 1 (x,a), (x,b) y (x,d) están estrictamente dominadas por y. Por lo tanto las eliminamos tanto en $\varnothing$ como en h_1. Para el jugador 2, la estrategia D está estrictamente dominada, por lo que los conjuntos de estrategias reducidos son:

$$
\begin{aligned}
S_1^1(\varnothing) &= \{(x,c),y\}\\
S_2^1(\varnothing) &= \{A,B,C\}\\
S_1^1(h_1) &= \{(x,c)\}\\
S_2^1(h_1) &= \{A,B,C)\}
\end{aligned}
$$

Por último, tenemos que en $\varnothing$ la estrategia (x,c) está estrictamente dominada por y, por lo que la eliminamos en $\varnothing$, pero no en h_1 ya que el conjunto de estrategias en h_1 quedaría vacío. En h_1 las estrategias A y C están estrictamente dominadas por B. Así, los conjuntos de estrategias finales son:

$$
\begin{aligned}
S_1^2(\varnothing) &= \{y\}\\
S_2^2(\varnothing) &= \{B\}\\
S_1^2(h_1) &= \{(x,c)\}\\
S_2^2(h_1) &= \{B\}
\end{aligned}
$$

por lo que el jugador 1 elegirá la estrategia y, mientras que el jugador 2 elegirá la estrategia B bajo creencia común fuerte en racionalidad.

4.6 Apéndice: Creencia común en racionalidad vs. Equilibrio de Nash

Podríamos pensar que el equilibrio de Nash es uno de los conceptos de solución más naturales para un juego, y que por ende, en cierta forma resultaría ser el más simple en cuanto a condiciones que impone sobre la forma de razonar de los jugadores. Sin embargo, cuando se trabaja en el contexto epistémico, podemos darnos cuenta de que las condiciones que impone son bastante restrictivas. Para empezar, un equilibrio de Nash presupone que los jugadores creen en cada nivel lo mismo. Es decir, para cada nivel de creencia, si la creencia es sobre un mismo jugador, todos los jugadores deben de creer exactamente lo mismo. Esto claramente no es algo que deba de ocurrir, ni que mucho menos podamos asegurar, además de que implicaría que los jugadores piensan de exactamente la misma forma, y que además todos saben exactamente de qué forma piensan los oponentes. En el modelo epistémico, dicha condición se relaja y solamente se pide que los jugadores en cada nivel sean razonables en sus creencias.

Por otra parte, además para un mismo jugador, dentro de sus diferentes niveles de creencia, si en dos o más de ellos está razonando acerca de otro jugador, necesariamente la creencia en todos estos niveles debe de ser la misma. Esto como ya hemos visto en el caso epistémico no es necesario, y es posible que dentro de una misma jerarquía, un jugador razone de dos o más formas acerca de otro jugador en diferentes niveles de la jerarquía.

Estas condiciones adicionales que el equilibrio de Nash impone sobre las creencias de los jugadores se establecerán a continuación y se mencionan los resultados que muestran cómo esto lleva a un equlibrio de Nash. Para la demostración de dichos resultados se puede consultar el libro de Perea [65].

Definición 4.34. Decimos que el tipo t_i de un jugador i **cree que sus oponentes tienen creencias correctas** si cuando el tipo t_i asigna probabilidad p al perfil de combinaciones creencia-tipo $(c_j, t_j)_{j\in I\setminus\{i\}}$ de los oponentes, el tipo t_i cree que con probabilidad 1 todos los oponentes creen con probabilidad 1, que el jugador i asigna probabilidad p al perfil de combinaciones creencia-tipo $(c_j, t_j)_{j\in I\setminus\{i\}}$

Definición 4.35. Decimos que un jugador i **tiene creencias proyectivas** si dados cualesquiera otros jugadores $j, k \neq i$, la creencia del jugador i acerca del jugador k es la misma creencia del jugador j acerca del jugador k.

Definición 4.36. Decimos que un jugador i **tiene creencias independientes** si la creencia del jugador i acerca de la elección del jugador j es estocásticamente independiente de la creencia del jugador i acerca de la elección del jugador k para cualesquiera jugadores $j, k \neq i$ y para cualesquiera elecciones de los jugadores j y k.

Capítulo 5

Creencia común en racionalidad futura y pasada restringida

5.1 Introducción

Como se vio en el capítulo anterior, tenemos algunos modelos para juegos dinámicos en los cuáles se consideran dos tipos de racionalidad para poder dar soluciones. En particular, el concepto de creencia común en racionalidad futura es tal que considera que en cualquier punto del juego, el saber cómo se llegó hasta dicho punto es irrelevante y por ende, permite que se consideren cualesquiera elecciones anteriores, incluyendo elecciones que son irracionales, y por lo que nunca se llegaría al punto en el que nos encontramos.

La idea que se propone es considerar también el pasado para entender por qué llegamos a cada punto en el juego. En particular, que las elecciones posibles en el pasado, que nos llevan hasta el punto en que nos encontramos, se pueden considerar como las únicas posibles elecciones que se realizaron, y por ende, que dentro de este conjunto reducido de elecciones, se pueden hacer elecciones racionales. Esto implica que aunque en el juego en general hayan elecciones que se consideren irracionales, si reducimos el conjunto de posibles elecciones, algunas se vuelven racionales, considerando las otras posibilidades. De esta manera, permitimos que los jugadores también tengan que razonar hacia el pasado y puedan pensar acerca de cuáles elecciones pasadas son las mejores que además nos llevan hasta cierto punto.

Utilizando el ejemplo de la figura 5.1, observamos que en $\varnothing$ la elección óptima del jugador 1 es c. Sin embargo, si suponemos que el juego llega a h_1, entonces el jugador 2 bajo el concepto de creencia común en racionalidad futura, debe considerar que el jugador 1 llevó a cabo una elección subóptima, y por lo tanto, tanto a como b son elecciones perfectamente válidas, por lo que no aportan información acerca de la elección del jugador 1. Sin embargo, claramente se puede ver en el juego, que si restringimos al jugador 1 a las elecciones que llevan a h_1, éste debe elegir a y luego f. Por ello, el jugador 2 debería usar esta información y considerar que a eligió a en el

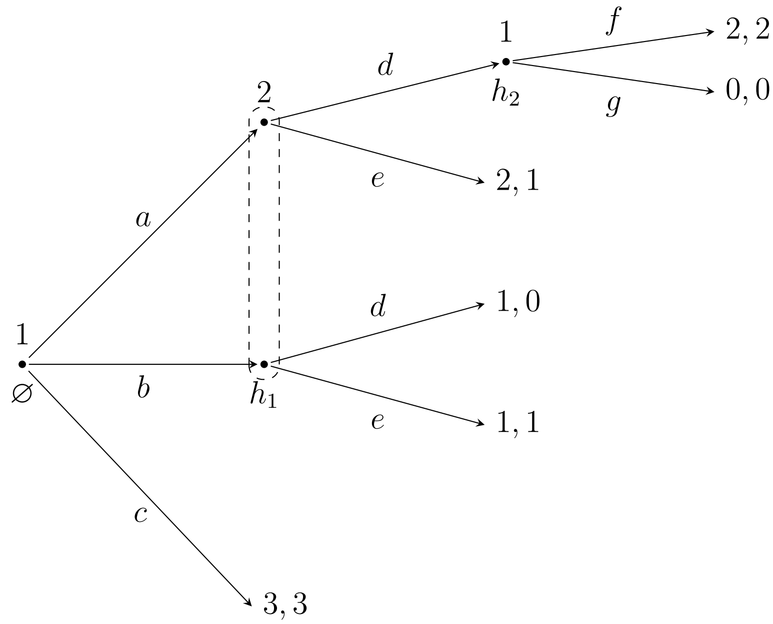

Figura 5.1: Juego base en forma extensiva

pasado. a es una elección que es subóptima en el juego completo, sin embargo, de las elecciones que nos llevan a h_1 es óptima.

El concepto de creencia común en racionalidad futura y pasada restringida es un refinamiento de creencia común en racionalidad futura, en el que si un jugador al revisar el comportamiento pasado de los otros jugadores se encuentra con que necesariamente hubo elecciones irracionales, es posible razonar sobre estas elecciones y elegir la "menos irracional". En el caso de que las elecciones pasadas sean todas racionales, no cambia en absoluto el estudio de un juego, con lo cual, este nuevo concepto nos permite estudiar lo que ocurre en el juego si es que en algún momento se realiza alguna elección irracional, cosa que no es posible con creencia común en racionalidad futura.

La utilidad de este concepto se observa en los juegos que tienen elecciones pasadas no observadas, dado que fácilmente se puede observar que de tener elecciones pasadas observadas, creencia común en racionalidad futura y creencia común en racionalidad futura y pasada restringida son equivalentes, dado que los conjuntos de elecciones pasadas para cada tiempo son singuletes y por ende, no se necesita razonar sobre varias elecciones posibles.

El concepto que se propone en este capítulo intenta extender un poco más lo que intentó en su momento Reny [70] al observar que no es posible considerar que los oponentes son racionales tanto en el pasado como en el futuro. Nosotros mostraremos que es posible tener una versión de racionalidad en el pasado que permite considerar cualquier juego en general, mientras que, en cierta forma es tan amplia como es posible a partir del conjunto de información en el cual estamos razonando. Además, como se observará, esto también refina el concepto propuesto por Perea [66] al añadir la racionalidad en el pasado. Además de esto, se mostrará que existe una relación entre el concepto de racionalizabilidad propia para juegos en forma normal y creencia común en racionalidad futura y pasada restringida.

5.2 Ejemplo base

A lo largo del capítulo trabajaremos con el siguiente ejemplo para precisar ideas y explicar algunos de los conceptos.

Ejemplo 5.1. Consideremos el juego descrito en la figura 5.1. Observamos que en dicho juego, se tienen los siguientes elementos:

- $I = \{1, 2\}$.
- $C_1 = \{a, b, c, f, g\}$, $C_2 = \{d, e\}$.
- $X = \{\varnothing, (a), (b), (a, d)\}$.
- $Z = \{(c), (a, e), (b, d), (b, e), (a, d, f), (a, d, g)\}$.
- $H_1 = \{\varnothing, h_2\}$, $H_2 = \{h_1\}$, $H = \{\varnothing, h_1, h_2$, donde $h_1 = \{(a), (b)\}$ y $h_2 = \{(a, d)\}$.
- $C_1(\varnothing) = \{a, b, c\}$, $C_1(h_2) = \{f, g\}$, $C_2(h_1) = \{d, e\}$.
- $u_1(z) = \begin{cases} 3 & \text{si } z = (c) \\ 2 & \text{si } z = (a, e) \text{ o } z = (a, d, f) \\ 1 & \text{si } z = (b, d) \text{ o } z = (b, e) \\ 0 & \text{si } z = (a, d, g) \end{cases}$

  $u_2(z) = \begin{cases} 3 & \text{si } z = (c) \\ 2 & \text{si } z = (a, d, f) \\ 1 & \text{si } z = (a, e) \text{ o } z = (b, e) \\ 0 & \text{si } z = (b, d) \text{ o } z = (a, d, g) \end{cases}$

Por otra parte, los conjuntos de estrategias que llevan a cada conjunto de información son $S_1(h_1) = \{(a, f), (a, g), (b)\}$, $S_1(h_2) = \{(a, f), (a, g)\}$, $S_2(h_2) = \{(d)\}$.

5.3 Creencia común en racionalidad futura y pasada restringida

En el capítulo anterior ya se definió lo que es un modelo epistémico para juegos dinámicos y la creencia en la racionalidad futura de los oponentes. Se usarán estas definiciones en lo que sigue, además de un nuevo concepto en el cual se introduce la racionalidad pasada restringida.

Definición 5.1. Decimos que un tipo $\hat{t}_i$ **cree en la racionalidad pasada restringida de** j si en cualquier $h \in H_i$, $\beta_i(\hat{t}_i, h)(s_j, \hat{t}_j) > 0$ solamente si para todo $h' \in H_j(s_j)$ tal que h' precede débilmente a h, se cumple que

$$u_j(s_j, \beta_j(\hat{t}_j, h')) \geq u_j(s'_j, \beta_j(\hat{t}_j, h'))$$

para todo $s'_j \in S_j(h) \cap S_j(h')$.

El tipo $\hat{t}_i$ **cree en la racionalidad pasada restringida de los oponentes** si $\hat{t}_i$ cree en la racionalidad pasada restringida de j para todo jugador $j \in I \setminus \{i\}$.

En otras palabras, el tipo $\hat{t}_i$ considera en h aquellas estrategias en h' que le dan mayor utilidad a su oponente j en h', siempre y cuando dichas estrategias puedan alcanzar a h.

Al igual que con conceptos anteriores, definimos la creencia de orden k y la creencia común para este concepto de racionalidad.

Definición 5.2. Dado un modelo epistémico $\hat{M} = (\hat{T}_i, \beta_i)_{i \in I}$, sea $\hat{t}_i \in \hat{T}_i$ un tipo para el jugador i.

1. El tipo $\hat{t}_i$ expresa **creencia de orden 1 en racionalidad pasada restringida** si $\hat{t}_i$ cree en la racionalidad pasada restringida de los oponentes.

2. El tipo $\hat{t}_i$ expresa **creencia de orden 2 en racionalidad pasada restringida** si en cada conjunto de información $h \in H_i$, $\hat{t}_i$ solamente asigna probabilidad positiva a los tipos de los oponentes que expresan creencia de orden 1 en racionalidad pasada restringida.

3. En general, el tipo $\hat{t}_i$ expresa **creencia de orden k en racionalidad pasada restringida** si en cada conjunto de información $h \in H_i$, $\hat{t}_i$ solamente asigna probabilidad positiva a los tipos de los oponentes que expresan creencia de orden $k-1$ en racionalidad pasada restringida.

Por último, el tipo $\hat{t}_i$ expresa **creencia común en racionalidad pasada restringida** si $\hat{t}_i$ expresa creencia de orden k en racionalidad pasada restringida para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definición 5.3. Una estrategia s_i para el jugador i se puede **elegir racionalmente bajo creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y creencia común en actualización bayesiana** si existe un modelo epistémico $\hat{M} = (\hat{T}_i, \beta_i)_{i \in I}$ y algún tipo $\hat{t}_i \in \hat{T}_i$ tal que $\hat{t}_i$ expresa creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y creencia común en actualización bayesiana, y la estrategia s_i es óptima para el tipo $\hat{t}_i$ en todo conjunto de información $h \in H_i(s_i)$.

Para el juego de la figura 5.1, consideremos el siguiente modelo epistémico:

$$\hat{T}_1 = \{\hat{t}_1\},\ \hat{T}_2 = \{\hat{t}_2\}$$
$$\beta_1(\hat{t}_1, \varnothing) = (d, \hat{t}_2)$$
$$\beta_1(\hat{t}_1, h_2) = (d, \hat{t}_2)$$
$$\beta_2(\hat{t}_2, h_1) = ((a, f), \hat{t}_1)$$

Explicamos por qué dicho modelo es tal que todos los tipos expresan creencia común en racionalidad pasada restringida y satisfacen actualización bayesiana.

En el conjunto $\varnothing \in H_1$, $\hat{t}_1$ cree que el jugador 2 elige d y es de tipo $\hat{t}_2$. El tipo $\hat{t}_2$ cree en h_1 el cual sigue débilmente a $\varnothing$ que el jugador 1 elige (a, f), de forma que la estrategia óptima para el jugador 2 de $S_2(h_1) = \{(d), (e)\}$ es elegir d. Por lo tanto, $\hat{t}_1$ cree en la racionalidad futura del oponente en $\varnothing$. Y dado que no hay conjuntos de información para el jugador 2 que precedan débilmente a $\varnothing$, entonces $\hat{t}_1$ cree en la racionalidad pasada restringida del oponente en $\varnothing$.

En el conjunto $h_2 \in H_1$ no hay conjuntos de información para el jugador 2 que sigan débilmente a h_2 por lo que $\hat{t}_1$ cree en la racionalidad futura del oponente en h_2. Por otra parte, el tipo $\hat{t}_1$ cree en h_2 que el jugador 2 elige d y es de tipo t_2. Sin embargo, tenemos que $S_2(h_1) \cap S_2(h_2) = \{(d)\}$ y por lo tanto, es la estrategia óptima de entre las que llegan a h_2. Por ello, $\hat{t}_1$ cree en la racionalidad pasada restringida del oponente en h_2.

Dado que en ambos conjuntos de información, a saber $\varnothing$ y h_2 se definió de igual forma la creencia del tipo $\hat{t}_1$, $\hat{t}_1$ satisface actualización bayesiana.

En el conjunto $h_1 \in H_2$, $\hat{t}_2$ cree que el jugador 1 elige (a, f) y es de tipo $\hat{t}_1$. El tipo $\hat{t}_1$ cree en h_2, el cual sigue débilmente a h_1 que el jugador 2 elige d en h_1, para lo cual la estrategia óptima para el jugador 1 de la que se tienen en $S_1(h_2) = \{(a, f), (a, g)\}$ es (a, f). Por lo tanto, $\hat{t}_2$ cree en la racionalidad futura del oponente. Por otra parte, el tipo $\hat{t}_1$ cree que en $\varnothing$, el cual precede débilmente a h_1 que el jugador 2 elige d en h_1, por lo que la estrategia óptima en $S_1(\varnothing) \cap S_1(h_1) = \{(a, f), (a, g), (b)\}$ para el jugador 1 es (a, f). Por lo tanto, $\hat{t}_2$ cree en la racionalidad pasada restringida del oponente.

Dado que solamente tenemos un conjunto de información, a saber h_1 para el jugador 2, $\hat{t}_2$ satisface actualización bayesiana.

Notemos que en el último caso la estrategia (a, f) no es una estrategia óptima para el jugador 1, ya que c da una mayor utilidad. Sin embargo, el jugador 2 puede razonar acerca de las estrategias que lo llevaron a estar en el conjunto de información h_1 y por ende, tomar la decisión de que el jugador 1 por alguna razón eligió a en $\varnothing$.

Dado que todos los tipos del modelo epistémico creen en la racionalidad futura y pasada restringida del oponente y satisfacen actualización bayesiana, entonces todos los tipos expresan creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y creencia común en actualización bayesiana. En conclusión, c es óptima para el jugador 1 en $\varnothing$ y d es óptima para el jugador 2 en h_1. Por lo tanto, c y d se pueden elegir racionalmente bajo creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y creencia común en actualización bayesiana.

El juego de la figura 5.1 se puede trabajar en su forma normal y por lo tanto se pueden aplicar los conceptos que se discutieron en el capítulo anterior para juegos normales. En particular, si consideramos el siguiente modelo epistémico:

$$T_1 = \{t_1\}, T_2 = \{t_2\}$$
$$b_1(t_1) = ((d, t_2); (e, t_2))$$
$$b_2(t_2) = ((c, t_1); ((a, f), t_1); (b, t_1); ((a, g), t_1))$$

en el cual cada nivel de las creencias lexicográficas es la medida de Dirac de cada pareja estrategia-tipo (es decir, se le asigna probabilidad 1 a dicha pareja en ese nivel). Mostraremos que los tipos de este modelo epistémico son propiamente racionalizables.

Para empezar, el tipo t_1 solamente considera posible al tipo t_2, y observamos que tanto (d, t_2) como (e, t_2) aparecen en algún nivel de $b_1(t_1)$ por lo que t_1 es cauteloso. De forma similar, t_2 solamente considera posible al tipo t_1, y las parejas estrategia-tipo $((a, f), t_1)$, $((a, g), t_1)$, (b, t_1) y (c, t_1) aparecen en algún nivel de $b_2(t_2)$ por lo que t_2 es cauteloso.

5.4 Conexión entre creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y racionalizabilidad propia

En esta sección tendremos uno de nuestros primeros teoremas principales del capítulo, en el cual observaremos que una estrategia propiamente racionalizable de la forma normal de un juego implica que la misma estrategia es óptima bajo creencia común en racionalidad futura y pasada restringida con actualización bayesiana en el juego dinámico. Para ello, se adaptarán las definiciones que se utilizaron para racionalizabilidad propia al contexto de la forma normal de un juego dinámico.

Definición 5.4. Sea G un juego dinámico. La **forma normal de** G es el juego $G' = (I, (S_i)_{i\in I}, (v_i)_{i\in I})$ en el cual todos los jugadores i eligen simultáneamente una estrategia $s_i \in S_i$, y cada jugador i recibe la utilidad $v_i(s_i, s_{-i}) = u_i(z(s_i, s_{-i}))$ donde $z(s_i, s_{-i})$ es la historia terminal alcanzada por (s_i, s_{-i}).

Definición 5.5. Un **modelo epistémico** $M = (T_i, b_i)_{i\in I}$ **para un juego en forma normal** $G' = (I, (S_i)_{i\in I}, (v_i)_{i\in I})$ consiste de un conjunto finito de tipos T_i para cada jugador i, y para cada tipo $t_i \in T_i$ definimos una creencia lexicográfica $b_i(t_i) = (b_i^1(t_i); \ldots; b_i^m(t_i))$ sobre $S_{-i} \times T_{-i} = \times_{k\neq i}(S_k \times T_k)$, éste último el conjunto de combinaciones de parejas estrategia-tipo de los oponentes de i. La creencia b_i^k se denomina el **nivel** k de la creencia lexicográfica.

Definición 5.6. Decimos que un tipo t_j **se considera posible para la creencia lexicográfica** $b_i(t_i) = (b_i^1(t_i); \ldots b_i^m(t_i))$ si existe una combinación de parejas estrategia-tipo $(s_{-i}, t_{-i}) \in (S_j \times \{t_j\}) \times \times_{k\neq i,j}(S_k \times T_k)$ tal que $b_k^\ell(t_i)(s_{-i}, t_{-i}) > 0$ para algún

$\ell \in \{1, \ldots, m\}$. El conjunto de tipos para el jugador j que se consideran posibles para $b_i(t_i)$ se denota por $T_j(t_i)$.

Definición 5.7. Sea $b_i(t_i) = (b_i^1(t_i); \ldots ; b_i^m(t_i))$ una creencia lexicográfica para el tipo t_i del jugador i. Decimos que t_i **considera una combinación de parejas estrategia-tipo** (s_{-i}, t_{-i}) **infinitamente más probable que** (s'_{-i}, t'_{-i}) si existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que para todo $\ell \leq k$, $b_i^\ell(s'_{-i}, t'_{-i}) = 0$ y $b_i^k(t_i)(s_{-i}, t_{-i}) > 0$.

Definición 5.8. Dado un modelo epistémico $M = (T_i, b_i)_{i \in I}$ y $b_i = (b_i^1(t_i); \ldots ; b_i^m(t_i))$ una creencia lexicográfica para el tipo t_i del jugador i. Decimos que t_i **es cauteloso** si para cada $(s_{-i}, t_{-i}) \in \times_{j \neq i}(S_j \times T_j(t_i))$ existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $b_i^k(t_i)(s_{-i}, t_{-i}) > 0$.

Definición 5.9. Dado un tipo t_i para el jugador i y una creencia lexicográfica $b_i(t_i) = (b_i^1; \ldots ; b_i^m(t_i)$ definimos la **utilidad esperada de elegir la estrategia** s_i **al nivel** k de la siguiente forma:

$$v_i^k(s_i, b_i(t_i)) = \sum_{(s_{-i}, t_{-i}) \in S_{-i}, T_{-i}} b_i^k(t_i)(s_{-i}, t_{-i}) v_i(s_i, s_{-i})$$

Un tipo t_i con una creencia lexicográfica $b_i(t_i)$ **prefiere la estrategia** s_i **a** s'_i si existe $k \in \{1, \ldots, m\}$ tal que para todo $\ell < k$, $v_i^\ell(s_i, b_i(t_i)) = v_i^\ell(s'_i, b_i(t_i))$ y $v_i^k(s_i, b_i(t_i)) > v_i^k(s'_i, b_i(t_i))$.

Una estrategia s_i **es óptima para** t_i si no existe otro $s'_i \in S_i$ tal que t_i prefiere s'_i a s_i.

Definición 5.10. Sean $M = (T_i, b_i)_{i \in I}$ un modelo epistémico y $b_i(t_i) = (b_i^1(t_i); \ldots ; b_i^m(t_i)$ una creencia lexicográfica para el tipo t_i del jugador i. Decimos que t_i **respeta las preferencias** de j si para todo tipo t_j del jugador j considerado posible por t_i, y cualesquiera estrategias $s_j, s'_j \in S_j$ tales que t_j prefiere s_j a s'_j, t_i considera al menos una combinación estrategia-tipo en $\{(s_j, t_j)\} \times \times_{k \neq i,j}(S_k \times T_k)$ infinitamente más probable que toda combinación de parejas estrategia-tipo en $\{(s'_j, t_j) \times \times_{k \neq i,j}(S_k \times T_k)$.

Decimos que t_i **respeta las preferencias de los oponentes** si t_i respeta las preferencias de j para todo jugador $j \in I \setminus \{i\}$.

Definición 5.11. Sea $M = (T_i, b_i)_{i \in I}$ un modelo epistémico.

1. El tipo t_i expresa **creencia total de orden 1 en cautela** si t_i solamente considera posibles aquellos tipos de los oponentes que son cautelosos.

2. Para todo $k > 1$, el tipo t_i expresa **creencia total de orden** k **en cautela** si t_i solamente considera posibles aquellos tipos de los oponentes que expresan creencia total de orden $k - 1$ en cautela.

3. El tipo t_i expresa **creencia total común en cautela** si t_i expresa creencia de orden k total en cautela para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definición 5.12. Sea $M = (T_i, b_i)_{i\in I}$ un modelo epistémico.

1. El tipo t_i expresa **creencia total de orden 1 en respeto de preferencias** si t_i solamente considera posibles aquellos tipos de los oponentes que respetan preferencias.

2. Para todo $k > 1$, el tipo t_i **expresa creencia total de orden k en respeto de preferencias** si t_i solamente considera posibles aquellos tipos de los oponentes que expresan creencia total de orden $k-1$ en respeto de preferencias.

3. El tipo t_i expresa **creencia total común en respeto de preferencias** si t_i expresa creencia de orden k total en respeto de preferencias para todo $k \in \mathbb{N}$.

Definición 5.13. El tipo t_i **es propiamente racionalizable** si t_i es cauteloso, respeta las preferencias de los oponentes y expresa creencia total común en cautela y creencia total común en respeto de preferencias.

Definición 5.14. Decimos que una estrategia s_i **es propiamente racionalizable** si existe un modelo epistémico $M = (T_i, b_i)_{i\in I}$ y un tipo $t_i \in T_i$ tal que t_i es propiamente racionalizable y la estrategia s_i es óptima para t_i.

Teorema 5.1. Sea G un juego dinámico. Si una estrategia s_i es propiamente racionalizable en la forma normal de G, entonces s_i se puede elegir racionalmente bajo creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y creencia común en actualización bayesiana en el juego dinámico G.

Para ello, primero definimos una transformación de un modelo epistémico de la forma normal en un modelo epistémico del juego dinámico.

Sea $M = (T_i, b_i)_{i\in I}$ un modelo epistémico de la forma normal del juego, para el cual todo tipo $t_i \in T_i$ es cauteloso para todo jugador $i \in I$. El modelo epistémico inducido para el juego dinámico se define de la siguiente forma: para cada jugador $i \in I$, renombramos cada tipo t_i a $\hat{t}_i$ mediante una biyección $f\colon T_i \to \hat{T}_i$ y la creencia condicional para el tipo $f_i(t_i)$ en el conjunto de información $h \in H_i$ se define como

$$\beta_i(f_i(t_i), h)(s_{-i}, f_{-i}(t_{-i})) = \frac{b_i^k(t_i)(s_{-i}, t_{-i})}{b_i^k(t_i)(S_{-i}(h) \times T_{-i})}$$

donde k es el mínimo número tal que $b_i^k(t_i)(S_{-i}(h) \times T_{-i}) > 0$, y

$$b_i^k(t_i(S_{-i}(h) \times T_{-i}) = \sum_{(s_{-i},t_{-i})\in S_{-i}(h)\times T_{-i}} b_i^k(s_{-i}, t_{-i})$$

En otras palabras, tomamos el primer nivel k de la creencia lexicográfica para t_i en el cual existe al menos una combinación de estrategias para los oponentes de i que alcanza h, y normalizamos las probabilidades. De esta forma, garantizamos que las creencias condicionales de los tipos son tales que los tipos satisfacen actualización bayesiana.

Ahora enunciaremos algunos resultados auxiliares que serán útiles para demostrar el teorema 5.1.

Lema 5.1. Sea M un modelo epistémico de la forma normal en el cual todos los tipos son cautelosos, $h \in H_i$, h' es un conjunto de información que sigue o precede débilmente a h y t_i es un tipo del jugador i en M. Si $s_i \in S_i(h) \cap S_i(h')$ no es óptima para $f_i(t_i)$ entre las estrategias de $S_i(h) \cap S_i(h')$ en $h \in H_i$, entonces existe $\hat{s}_i \in S_i(h) \cap S_i(h')$ tal que t_i prefiere $\hat{s}_i$ a s_i.

Lema 5.2. Si t_i respeta las preferencias del jugador j, entonces $f_i(t_i)$ cree en la racionalidad futura y pasada restriginda de j y $f_i(t_i)$ satisface actualización bayesiana.

Lema 5.3. Si t_i es propiamente racionalizable, entonces $f_i(t_i)$ expresa creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y creencia común en actualización bayesiana.

Corolario 5.1. Para todo juego dinámico G existe un modelo epistémico M y dentro de éste, para cada jugador i existe un tipo $\hat{t}_i$ que expresa creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y creencia común en actualización bayesiana.

Utilizando los lemas 5.1 y 5.3 obtenemos el teorema 5.1, es decir, un juego dinámico se puede escribir en forma normal y por lo tanto, encontrar tipos que expresen creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y creencia común en actualización bayesiana, además de que las estrategias que se pueden escoger bajo racionalizabilidad propia son las que se pueden escoger bajo creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y creencia común en actualización bayesiana.

5.5 Algoritmo

Para encontrar las estrategias que se pueden elegir bajo creencia común en racionalidad futura y pasada restringida (ya no escribimos la creencia común en actualización bayesiana, ya que ésta se tendrá automáticamente), proponemos el siguiente algoritmo, basado en el procedimiento de dominancia hacia atrás descrito en Perea [66], y mostramos que las estrategias que sobreviven a la aplicación del algoritmo son exactamente las estrategias que buscamos.

Definición 5.15 (Algoritmo)**.** Sean $S_i^0(h) = S_i(h)$ y $S_{-i}^0(h) = S_{-i}(h)$ para todo $i \in I$ y todo $h \in H_i$. Para $k \geq 1$ y cada jugador i y conjunto de información $h \in H_i$ definimos los conjuntos del k-ésimo paso de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
S_i^k(h) = \{s_i \in S_i^{k-1}(h) \mid\ & s_i \text{ no está estrictamente dominada en } S_{-i}^{k-1}(h) \\
& \text{por una randomización en } S_i(h)\} \\
S_{-i}^k(h) = \{(s_j)_{j\neq i} \in S_{-i}^{k-1}(h) \mid\ & \text{para todo } j \neq i,\ s_j \text{ no está estrictamente}
\end{aligned}
$$

dominada en $S_{-j}^{k-1}(h')$ por una randomización
en $S_j(h')$ para todo $h' \in H_j(s_j)$ que sigue
débilmente a h, y s_j no está estrictamente
dominada en $S_{-j}^{k-1}(h'')$ por una randomización
en $S_j(h) \cap S_j(h'')$ para todo $h'' \in H_j(s_j)$
que precede débilmente a $h\}$

El algoritmo termina en K pasos si $S_i^{K+1}(h) = S_i^K(h)$ y $S_{-i}^{K+1}(h) = S_{-i}^K(h)$ para todo $i \in I$ y para todo $h \in H_i$.

A partir de este algoritmo tenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.2. Para todo $k \geq 1$ las estrategias que se pueden elegir racionalmente por un tipo que expresa creencia de orden k en racionalidad futura y pasada restringida y creencia de orden k en actualización bayesiana son exactamente las estrategias s_i tales que $s_i \in S_i^{k+1}(h)$ para todo $h \in H_i(s_i)$ que sobreviven los primeros $k+1$ pasos del algoritmo.

Las estrategias que se pueden elegir racionalmente por un tipo que expresa creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y creencia común en actualización bayesiana son exactamente las estrategias que sobreviven todos los pasos del algoritmo, es decir, las estrategias $s_i \in S_i^k(h)$ para todo $k \geq 1$ y todo $h \in H_i(s_i)$.

5.6 Ejemplos

Tomemos el siguiente modelo epistémico que corresponde al juego del ejemplo 5.1:

$$T_1 = \{t_1\},\ T_2 = \{t_2\}$$
$$b_1(t_1) = ((d, t_2); (e, t_2))$$
$$b_2(t_2) = ((c, t_1); ((a, f), t_1)); (b, t_1); ((a, g), t_1))$$

El tipo t_1 solamente considera posible el tipo t_2, y observamos que (d, t_2) y (e, t_2) aparecen en algún nivel de $b_1(t_1)$ por lo que t_1 es cauteloso. De forma similar, t_2 solamente considera posible el tipo t_1 y tenemos que $((a, f), t_1)$, $((a, g), t_1)$, (b, t_1) y (c, t_1) aparecen en algún nivel de $b_2(t_2)$ por lo que t_2 es cauteloso. Por lo tanto, dado que todos los tipos son cautelosos, entonces expresan creencia total común en cautela.

Por otra parte, el tipo t_1 cree que el jugador 2 es de tipo t_2, el cual cree en el primer nivel de $b_2(t_2)$ que el jugador 1 elegirá c, y en un segundo nivel, que elegirá (a, f), con lo cual basta para ordenar las preferencias del jugador 2: primero elegiría d y luego e, con lo cual observamos que t_1 respeta las preferencias del oponente.

El tipo t_2 cree que el jugador 1 es de tipo t_1, el cual cree en el primer nivel de $b_1(t_1)$ que el jugador 2 elegirá d, con lo que basta para ordenar las preferencias del jugador 1: primero elegiría c, después elegiría (a, f), posteriormente elegiría b y por último (a, g), con lo cual observamos que t_2 respeta las preferencias del oponente. Por lo tanto, dado que todos los tipos expresan respeto de preferencias, entonces expresas creencia total en respeto de preferencias.

Dado que todos los tipos del modelo son cautelosos, respetan las preferencias de los oponentes, expresan creencia común en cautela y expresan creencia común en respeto de preferencias, entonces todos los tipos osn propiamente racionalizables. Observamos que para el jugador 1 c es la estrategia óptima para t_1 y d es la estrategia óptima para t_2. Por lo tanto, las estrategias c y d son propiamente racionalizables.

La transformación del modelo epistémico para el juego en forma normal a un modelo epistémico para el juego dinámico nos lleva al modelo de la "primera tabla", por lo que podemos observar con todo el análisis que hemos realizado que la estraategia c para el tipo t_1 y la estrategia d para el tipo 2 son óptimas y pueden ser elegidas bajo creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y creencia común en actualización bayesiana, como lo dice el teorema 1.

Podemos aplicar el algoritmo al ejemplo que hemos trabajado. Para ello, recordemos que $H_1 = \{\varnothing, h_2\}$ y $H_2 = \{h_1\}$ y tenemos los siguientes conjuntos de estrategias al inicio:

$$\begin{array}{ll} S_1^0(\varnothing) = \{(a,f),(a,g),b,c\} & S_{-1}^0(\varnothing) = \{d,e\} \\ S_2^0(h_1) = \{d,e\} & S_{-2}^0(h_1) = \{(a,f),(a,g),b\} \\ S_1^0(h_2) = \{(a,f),(a,g)\} & S_{-1}^0(h_2) = \{d\} \end{array}$$

Aplicando la primera iteración de algoritmo, tenemos los siguientes problemas de decisión reducidos:

$$\begin{array}{ll} S_1^1(\varnothing) = \{c\} & S_{-1}^1(\varnothing) = \{d,e\} \\ S_2^1(h_1) = \{d,e\} & S_{-2}^1(h_1) = \{(a,f)\} \\ S_1^1(h_2) = \{(a,f)\} & S_{-1}^1(h_2) = \{d\} \end{array}$$

$S_1^1(\varnothing) = \{c\}$ dado que para el oponente se tienen las estrategias $S_{-1}^0(\varnothing) = \{d,e\}$, por lo que la estrategia c domina estrictamente a las otras estrategias posibles para el jugador 1 que teníamos en $S_1^0(\varnothing)$.

$S_{-2}^1(h_1) = \{(a,f)\}$ ya que:

- En el conjunto de información h_2 que sigue débilmente a h_1 tenemos que $S_{-1}^0(h_2) = \{d\}$, y por lo tanto, (a,g) es dominada estrictamente por (a,f).
- En el conjunto de información $\varnothing$ que precede débilmente a h_1 tenemos que $S_1(h_1) \cap S_1(\varnothing) = \{(a,f),(a,g),b\}$ y $S_{-1}^0(\varnothing) = \{d,e\}$, y podemos ver que la estrategia b es dominada estrictamente por (a,f).

$S_1^1(h_2) = \{(a,f)\}$ puesto que $S_{-1}^0(h_2) = \{d\}$, por lo que (a,f) domina estrictamente a (a,g) dada la estrategia que tiene el oponente.

Aplicamos el algoritmo por segunda vez, y obtenemos los siguientes problemas de decisión reducidos:

$$
\begin{array}{ll}
S_1^2(\varnothing) = \{c\} & S_{-1}^2(\varnothing) = \{d\} \\
S_2^2(h_1) = \{d\} & S_{-2}^2(h_1) = \{(a, f)\} \\
S_1^2(h_2) = \{(a, f)\} & S_{-1}^2(h_2) = \{d\}
\end{array}
$$

$S_{-1}^2(\varnothing) = \{(d)\}$ ya que en el conjunto de información h_1 que sigue débilmente a $\varnothing$ tenemos que $S_{-2}^1(h_1) = \{(a, f)\}$, y por lo tanto, dada esa estrategia del jugador -2, tenemos que d domina estrictamente a e.

$S_2^2(h_1) = \{d\}$ dado que $S_{-2}^1(h_1) = \{(a, f)\}$ y dada esa estrategia del jugador -2, d domina estrictamente a e.

Podemos observar que en este punto ya no obtendríamos nada nuevo al aplicar de nueva cuenta el algoritmo puesto que todos los conjuntos son singuletes. Por lo tanto, las estrategias que sobreviven para cada jugador son c para el jugador 1, y d para el jugador 2, que precisamente son las que se había encontrado que se eligen bajo creencia común en racionalidad futura y pasada restringida.

5.7 Demostraciones

Demostración (Lema 5.1). Sea $s_i \in S_i(h) \cap S_i(h')$ una estrategia subóptima para $f_i(t_i)$ en h. Entonces existe $s_i' \in S_i(h) \cap S_i(h')$ tal que

$$u_i(s_i', \beta_i(f_i(t_i), h)) > u_i(s_i, \beta_i(f_i(t_i), h)) \tag{5.1}$$

Definimos $\hat{s}_i$ como

$$\hat{s}_i(h'') = s_i(h'') \text{ para todo } h'' \in H_i(s_i) \text{ si } h'' \text{ no sigue débilmente a } h \tag{5.2}$$

$$\hat{s}_i(h'') = s_i'(h'') \text{ para todo } h'' \in H_i(s_i') \text{ si } h'' \text{ sigue débilmente a } h \tag{5.3}$$

Mostramos primero que $\hat{s}_i \in Si(h) \cap S_i(h')$.

Como $s_i \in S_i(h)$, existe $s_{-i} \in S - -i(h)$ tal que (s_i, s_{-i}) alcanza a h. Entonces en todo $h'' \in H(s_i, s_{-i})$ tal que h sigue a h'', tenemos que $\hat{s}_i(h'') = s_i(h)$. Por lo tanto, $h \in H(\hat{s}_i, s_{-i})$ y $\hat{s} \in S_i(h)$.

Ahora mostramos que $\hat{s}_i \in S_i(h')$, para lo cual revisamos dos casos: cuando h' precede débilmente a h, o cuando h' sigue débilmente a h.

Si h' precede débilmente a h, como $\hat{s}_i \in S_i(h)$, entonces tenemos que $\hat{s}_i \in S_i(h')$.

Si h' sigue débilmente a h, como $s_i' \in S_i(h')$ entonces existe $s_{-i} \in S_{-i}(h')$ tal que (s_i', s_{-i}) alcanza h'. Dividimos los conjuntos de información en $H(s_{-i}', s_{-i})$ que preceden débilmente a h': aquellos h'' que preceden débilmente a h y aquellos que siguen débilmente a h.

En el primer caso, por definición tenemos que $\hat{s}_i(h'') = s_i(h'')$, y dado que los jugadores tienen memoria perfecta, existe una única elección $c_i^*(h'')$ en el conjunto de información h'' tal que h puede ser alcanzado. Como $s_i, s_i' \in S_i(h)$, ambas estrategias deben elegir $c_i^*(h'')$, por lo que $s_i(h'') = s_i'(h'')$ para h'' que sigue débilmente a h.

En el segundo caso, como h'' sigue débilmente a h, por definición $\hat{s}_i(h'') = s_i'(h'')$.

Por lo tanto, si $h'' \in H(s_i', s_{-i})$ precede débilmente a h' entonces $\hat{s}_i(h'') = s_i'(h'')$. Entonces tenemos que $(\hat{s}_i, s_{-i})$ alcanza a h', por lo que $\hat{s}_i \in S_i(h')$.

Combinando los dos resultados obtenidos hasta el momento, tenemos que $\hat{s}_i \in S_i(h) \cap S_i(h')$.

Ahora mostramos que t_i prefiere $\hat{s}_i$ a s_i. Sea $b_i(t_i) = (b_i^1(t_i); b_i^2(t_i); \ldots; b_i^m(t_i))$ la creencia lexicográfica para el tipo t_i. Sea k el número mínimo tal que $b_i^k(t_i)(S_{-i}(h) \times T_{-i}) > 0$. Por ende, si $\ell < k$, $b_i^\ell(t_i)(S_{-i}(h)) = 0$ y (5.2):

$$u_i^\ell(\hat{s}_i, b_i(t_i)) = u_i^\ell(s_i, b_i(t_i))$$

para toda $\ell < k$. Además:

$$\begin{aligned}
v_i^k(\hat{s}_i, b_i(t_i)) &= \sum_{(s_{-i},t_{-i}) \in S_{-i} \times T_{-i}} b_i^k(t_i)(s_{-i}, t_{-i}) v_i(\hat{s}_i, s_{-i}) \\
&= \sum_{(s_{-i},t_{-i}) \in S_{-i}(h) \times T_{-i}} b_i^k(t_i)(s_{-i}, t_{-i}) v_i(\hat{s}_i, s_{-i}) \\
&\quad + \sum_{(s_{-i},t_{-i}) \in (S_{-i} \setminus S_{-i}(h)) \times T_{-i}} b_i^k(t_i)(s_{-i}, t_{-i}) v_i(\hat{s}_i, s_{-i}) \\
&= \sum_{(s_{-i},t_{-i}) \in S_{-i}(h) \times T_{-i}} b_i^k(t_i)(s_{-i}, t_{-i}) v_i(s_i', s_{-i}) \\
&\quad + \sum_{(s_{-i},t_{-i}) \in (S_{-i} \setminus S_{-i}(h)) \times T_{-i}} b_i^k(t_i)(s_{-i}, t_{-i}) v_i(s_i, s_{-i}) \\
&= b_i^k(t_i)(S_{-i}(h) \times T_{-i}) \\
&\quad \times \sum_{(s_{-i},t_{-i}) \in S_{-i}(h) \times T_{-i}} \beta_i(f_i(t_i), h)(s_{-i}, f_{-i}(t_{-i})) u_i(z(s_i', s_{-i})) \\
&\qquad + \sum_{(s_{-i},t_{-i}) \in (S_{-i} \setminus S_{-i}(h)) \times T_{-i}} b_i^k(t_i)(s_{-i}, t_{-i}) v_i(s_i, s_{-i}) \\
&= b_i^k(t_i)(S_{-i}(h) \times T_{-i}) u_i(s_i', \beta_i(f_i(t_i), h)) \\
&\quad + \sum_{(s_{-i},t_{-i}) \in (S_{-i} \setminus S_{-i}(h)) \times T_{-i}} b_i^k(t_i)(s_{-i}, t_{-i}) v_i(s_i, s_{-i}) \\
&> b_i^k(t_i)(S_{-i}(h) \times T_{-i}) u_i(s_i, \beta_i(f_i(t_i), h)) \\
&\quad + \sum_{(s_{-i},t_{-i}) \in (S_{-i} \setminus S_{-i}(h)) \times T_{-i}} b_i^k(t_i)(s_{-i}, t_{-i}) v_i(s_i, s_{-i}) \\
&= \sum_{(s_{-i},t_{-i}) \in S_{-i}(h) \times T_{-i}} b_i^k(t_i)(s_{-i}, t_{-i}) v_i(s_i, s_{-i}) \\
&\quad + \sum_{(s_{-i},t_{-i}) \in (S_{-i} \setminus S_{-i}(h)) \times T_{-i}} b_i^k(t_i)(s_{-i}, t_{-i}) v_i(s_i, s_{-i})
\end{aligned}$$

$$= v_i^k(s_i, b_i(t_i)),$$

donde (5.2) y (5.3) se utilizaron en la tercera igualdad, y la desigualdad se obtiene de (5.1) y el hecho de que $b_i^k(t_i(S_{-i}(h) \times T_{-i}) > 0$, con lo que tenemos el resultado. ■

Demostración (Lema 5.2)**.** Primero demostramos que respeto de preferencias implica creencia en racionalidad futura.

Sea $h \in H_i$. Supongamos que $f_i(t_i)$ no cree en la racionalidad futura de j en h. Entonces

$$\beta_i(f_i(t_i), h)(s_j, f_j(t_j)) > 0$$

para alguna $s_j \in S_j(h')$ que es una estrategia subóptima para $f_j(t_j)$ en algún h' que sigue débilmente a h.

Por el lema 5.1 existe $\hat{s}_j \in S_j(h) \cap S_j(h')$ tal que t_j prefiere $\hat{s}_j$ a s_j. Por hipótesis, t_i respeta las preferencias de j, por lo que debe considerar $(\hat{s}_j, t_j)$ infinitamente más probable que (s_j, t_j). Por lo tanto, existe k tal que $b_i^k(t_i)(\hat{s}_j, t_j) > 0$ y $b_i^m(t_i)(s_j, t_j) = 0$ para toda $m \leq k$. Como $\hat{s}_j \in S_j(h)$, tenemos que

$$\beta_i(f_i(t_i), h)(s_j, f_j(t_j)) = 0$$

por construcción de la creencia condicional en h. Pero esto es una contradicción. Así, $f_i(t_i)$ cree en la racionalidad futura de j en h para todo $h \in H_i$.

De forma similar, demostraremos que respecto de preferencias implica creencia en racionalidad pasada restringida.

Sea $h \in H_i$. Supongamos que $f_i(t_i)$ no cree en la racionalidad pasada restringida de j en h. Entonces

$$\beta_i(f_i(t_i), h)(s_j, f_j(t_j)) > 0$$

para alguna $s_j \in S_j(h) \cap S_j(h'')$ que es una estrategia subóptima para $f_j(t_j)$ entre las estrategias en $S_j(h) \cap S_j(h'')$ en h'' que precede débilmente a h. Por el lema 5.1, existe $\hat{s}_j \in S_j(h) \cap S_j(h'')$ tal que t_j prefiere $\hat{s}_j$ a s_j. Por hipótesis, t_j respeta las preferencias de j, por lo que debe considerar $(\hat{s}_j, t_j)$ infinitamente más probable que (s_j, t_j). Como $\hat{s}_j \in S_j(h)$, entonces por construcción de la creencia condicional en h

$$\beta_i(f_i(t_i), h)(s_j, f_j(t_j)) = 0$$

que es una contradicción. Por lo tanto, $f_i(t_i)$ cree en la racionalidad pasada de j en h. Finalmente, por construcción tenemos que $f_i(t_i)$ satisface actualización bayesiana. ■

Demostración (Lema 5.3)**.** Dado un tipo $t_i \in T_i$ del juego normal, definimos el conjunto $T^*(t_i)$ como el conjunto de tipos en la jerarquía de creencias de t_i en la forma normal del juego. En otras palabras $T^*(t_i)$ es el conjunto más pequeño con la propiedad de que $t_i \in T^*(t_i)$, y que para todo $t_j \in T^*(t_i)$, si t_j considera t_k posible, entonces $t_k \in T^*(t_i)$.

De forma análoga, para un tipo $\hat{t}_i \in \hat{T}_i$ del juego dinámico, definimos el conjunto $\hat{T}^*(\hat{t}_i)$ como el conjunto de tipos en la jerarquía de creencias de $\hat{t}_i$ en la forma dinámica del juego. Es decir, $\hat{T}^*(\hat{t}_i)$ es el conjunto más pequeño tal que $\hat{t}_i \in \hat{T}^*(\hat{t}_i)$, y que para todo $\hat{t}_j \in \hat{T}^*(\hat{t}_i)$, si $\beta_j(\hat{t}_j, h)(s_k, \hat{t}_k) > 0$ para algún $h \in H_j$, entonces $\hat{t}_k \in \hat{T}^*(\hat{t}_i)$.

Sea $t_i \in T_i$ para el cual podemos construir el conjunto $T^*(t_i)$. Como t_i es propiamente racionalizable, todo tipo en $T^*(t_i)$ es cauteloso y respeta las preferencias del oponente.

Por construcción, todo tipo en $T^*(t_i)$ induce un tipo en $\hat{T}^*(f_i(t_i))$. Por el lema 5.2, todos los tipos en $\hat{T}^*(f_i(t_i))$ creen en la racionalidad futura y pasada restringida de los oponentes, y creenc que los oponentes satisfacen actualización bayesiana.

Entonces por definición, como todos los tipos en $\hat{T}^*(f_i(t_i))$ solamente se refieren a tipos en $\hat{T}^*(f_i(t_i))$, todos expresan creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y creencia común en actualización bayesiana.

En particular, dado que $f_i(t_i) \in \hat{T}^*(f_i(t_i))$, entonces $f_i(t_i)$ expresa creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y creencia común en actualización bayesiana. ■

Demostración (Teorema 5.1)**.** Como s_i es propiamente racionalizable, existe un tipo t_i que es propiamente racionalizable tal que s_i es óptima para t_i. Por el lema 5.3, $f_i(t_i)$ expresa creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y creencia común en actualización bayesiana.

Ahora mostramos que s_i también es óptima para el tipo $f_i(t_i)$ en todo conjunto de información $h \in H_i(s_i)$.

Supongamos que s_i es subóptima para $f_i(t_i)$ en el conjunto de información h. Por el lema 5.1, si elegimos $h' = h$, existe una estrategia $\hat{s}_i \in S_i(h)$ tal que t_i prefiere $\hat{s}_i$ a s_i. Entonces s_i no es óptima para t_i, lo cual es una contradicción. ■

Para la demostración del teorema 5.2 requerimos algunos resultados auxiliares, y la construcción de un modelo epistémico de acuerdo al algoritmo, y tal que tenga las propiedades que deseamos. Para empezar, enunciamos el siguiente resultado, que originalmente se demostró para 2 jugadores por Pearce [63], para el cual una prueba más general se puede encontrar en el libro de Perea [65].

Teorema 5.3 (Lema de Pearce)**.** Considere un problema de decisión reducido $\Gamma_i^k(h) = S_i^k(h), S_{-i}^k(h))$, $A_i \subseteq S_i^k(h)$ y $s_i \in A_i$. Entonces s_i es óptima entre las estrategias en A_i para alguna creencia $b_i \in \Delta(S_{-i}^k(h))$ si y sólo si s_i no está estrictamente dominada en $S_{-i}^k(h)$ por una randomización en A_i.

Para $i \in I$, $h \in H_i$ y $k \geq 1$ sea $B_{-i}^k(h)$ el conjunto de combinaciones de estrategias de los oponentes $s_{-i} = (s_j)_{j \neq i} \in S_{-i}(h)$ tales que existe un tipo t_i que expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden k el cual asigna probabilidad positiva a s_{-i} en h.

Lema 5.4. Para todo jugador $i \in I$, todo conjunto de información $h \in H_i$ y todo $k \geq 1$ tenemos que $B_{-i}^k(h) \subseteq S_{-i}^k(h)$.

Demostración. Demostramos la afirmación por inducción en k.

Sea $k = 1$. Consideremos un jugador $i \in I$, un conjunto de información $h \in H_i$ y sea $s_{-i} \in B^1_{-i}(h)$. Entonces existe un tipo t_i que expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden 1 el cual asigna probabilidad positiva a s_{-i} en h.

Ahora consideremos un oponente $j \neq i$. Como t_i cree en la racionalidad futura y pasada restringida de j, entonces para todo $h' \in H_j(s_j)$ que sigue débilmente a h podemos encontrar una creencia condicional $\beta_j(t_j, h')$ para la cual s_j es óptima entre las estrategias en $S_j(h')$, y para todo $h'' \in H_j(s_j)$ que precede débilmente a h podemos encontrar una creencia condicional $\beta_j(t_j, h'')$ para la cual s_j es óptima entre las estrategias en $S_j(h) \cap S_j(h'')$.

Por el lema de Pearce, para todo $h' \in H_j(s_j)$ que sigue débilmente a h, s_j no está estrictamente dominada en $S^0_{-j}(h')$ por una randomización en $S_j(h')$; y para todo $h'' \in H_j(s_j)$ que precede débilmente a h, s_j no está estrictamente dominada en $S^0_{-j}(h'')$ por una randomización en $S_j(h) \cap S_j(h'')$. Por lo tanto, $s_{-i} \in S^1_{-i}(h)$, es decir $B^1_{-i}(h) \subseteq S^1_{-i}(h)$, y esto es cierto para todos los jugadores $i \in I$ y todo conjunto de información $h \in H_i$.

Ahora revisamos el paso de inducción. Fijamos $k \geq 2$ y suponemos que para todo jugador $i \in I$ y todo conjunto de información $h \in H_i$, $B^{k-1}_{-i}(h) \subseteq S^{k-1}_{-i}(h)$.

Consideremos un jugador i, y sea $s_{-i} \in B^k_{-i}(h)$. Entonces existe un tipo t_i que expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden k el cual asigna probabilidad positiva a s_{-i} en h.

Sea $j \neq i$ un oponente. Entonces existe un tipo t_j que expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden $k-1$ tal que s_j es óptima para t_j en todo $h' \in H_j(s_j)$ que sigue débilmente a h entre las estrategias en $S_j(h')$, y en todo $h'' \in H_j(s_j)$ que precede débilmente a h entre las estrategias en $S_j(h) \cap S_j(h'')$.

Por inducción, como t_j asigna en todo $h' \in H_j$ probabilidad positiva solamente a estrategias de los oponentes en $B^{k-1}_{-j}(h')$, entonces t_j debe asignar, en todo $h' \in H_j$, probabilidad positiva solamente a estrategias de los oponentes en $S^{k-1}_{-j}(h')$. Entonces s_j es óptima en todo $h' \in H_j(s_j)$ que siga débilmente a h entre las estrategias en $S_j(h')$ para alguna creencia condicional $\beta_j(t_j, h')$ en $S^{k-1}_{-j}(h')$, y en toda $h'' \in H_j(s_j)$ que precede débilmente a h entre las estrategias en $S_j(h) \cap S_j(h'')$ para alguna creencia condicional $\beta_j(t_j, h'')$ en $S^{k-1}_{-j}(h'')$.

Por el lema de Pearce, en todo $h' \in H_j(s_j)$ que sigue débilmente a h, s_j no estéstrictamente dominada en $S^{k-1}_{-j}(h')$ por una randomización en $S_j(h')$, y en todo $h'' \in H_j(s_j)$ que precede débilmente a h, s_j no está estrictamente dominada en $S^{k-1}_{-j}(h')$ por una randomización en $S_j(h) \cap S_j(h'')$. Por lo tanto, $s_{-i} \in S^k_{-i}(h)$, y entonces $B^k_{-i}(h) \subseteq S^k_{-i}(h)$, y esto se cumple para todo $i \in I$ y todo $h \in H_i$. ■

Para $i \in I$ y $k \geq 1$ sea BR^k_i el conjunto de estrategias para el jugador i que son óptimas para algún tipo que expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden k y creencia común en actualización bayesiana. Además, definimos $S^k_i = \{s_i \in S_i \mid s_i \in S^k_i(h) \text{ para todo } h \in H_i(s_i)\}$.

Lema 5.5. Para todo jugador $i \in I$ y todo $k \geq 1$, $BR_i^k \subseteq S_i^{k+1}$.

Demostración. Sean $i \in I$ y $k \geq 1$. Sea $s_i \in BR_i^k$, entonces existe un tipo t_i que expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden k tal que s_i es óptima para t_i en todo $h \in H_i(s_i)$. Por definición, en todo $h \in H_i(s_i)$, t_i asigna probabilidad positiva a s_{-i} sólo si $s_{-i} \in B_{-i}^k(h)$. Por el lema 5.4, en todo $h \in H_i(s_i)$, t_i asigna probabilidad positiva a s_{-i} solamente si $s_{-i} \in S_{-i}^k(h)$. Por lo tanto, s_i es óptima en $h \in H_i(s_i)$ para alguna creencia condicional $\beta_i(t_i, h)$ en $S_{-i}^k(h)$. Por el lema de Pearce, s_i no está estrictamente dominada en $h \in H_i(s_i)$ en $S_{-i}^k(h)$ por una randomización en $S_i(h)$. Esto implica que s_i sobrevive el $(k+1)$-ésimo paso del algoritmo, es decir, $s_i \in S_{-i}^{k+1}$. Entonces tenemos que $BR_i^k \subseteq S_i^{k+1}$. ■

Lema 5.6. Sea $\beta_i = (\beta_i(h))_{h \in H_i}$ un vector de creencias condicionales, tal que $\beta_i(h) \in \Delta(S_{-i}(h))$ para todo $h \in H_i$. Sean $h', h'' \in H_i$ tales que h' precede a h'', $\beta_i(h')(S_{-i}(h'')) > 0$, y

$$\beta_i(h'')(s_{-i}) = \frac{\beta_i(h')(s_{-i})}{\beta_i(h')(S_{-i}(h''))}$$

para toda $s_{-i} \in S_{-i}(h'')$. Consideremos algún $h \in H$ y $s_i \in S_i(h) \cap S_i(h'')$, y supongamos que s_i es óptima para $\beta_i(h')$ entre las estrategias en $S_i(h) \cap S_i(h')$. Entonces s_i es óptima para $\beta_i(h'')$ entre las estrategias en $S_i(h) \cap S_i(h'')$.

Demostración. Supongamos que s_i es óptima para $\beta_i(h')$ entre las estrategias en $S_i(h) \cap S_i(h')$. Entonces

$$\begin{aligned}
u_i(s_i, \beta_i(h')) &= \sum_{s_{-i} \in S_{-i}(h')} \beta_i(h')(s_{-i}) u_i(z(s_i, s_{-i})) \\
&= \sum_{s_{-i} \in S_{-i}(h'')} \beta_i(h')(s_{-i}) u_i(z(s_i, s_{-i})) \\
&\quad + \sum_{s_{-i} \in S_{-i}(h') \setminus S_{-i}(h'')} \beta_i(h')(s_{-i}) u_i(z(s_i, s_{-i})) \\
&= \beta_i(h')(S_{-i}(h'')) \sum_{s_{-i} \in S_{-i}(h'')} \beta_i(h'')(s_{-i}) u_i(z(s_i, s_{-i})) \\
&\quad + \sum_{s_{-i} \in S_{-i}(h') \setminus S_{-i}(h'')} \beta_i(h')(s_{-i}) u_i(z(s_i, s_{-i})) \\
&= \beta_i(h')(S_{-i}(h'')) u_i(s_i, \beta_i(h'')) \\
&\quad + \sum_{s_{-i} \in S_{-i}(h') \setminus S_{-i}(h'')} \beta_i(h')(s_{-i}) u_i(z(s_i, s_{-i})).
\end{aligned}$$

La tercera igualdad se sigue de que

$$\beta_i(h'')(s_{-i}) = \frac{\beta_i(h')(s_{-i})}{\beta_i(h')(S_{-i}(h''))}$$

para toda $s_{-i} \in S_{-i}(h'')$.

Supongamos ahora, que s_i no es óptima para $\beta_i(h'')$ entre las estrategias en $S_i(h) \cap S_i(h'')$. Es decir, que existe una estrategia $s_i' \in S_i(h) \cap S_i(h'')$ para la cual

$$u_i(s_i, \beta_i(h'')) < u_i(s_i', \beta_i(h''))$$

Sea s_i'' la estrategia que coincide con s_i' en todos los conjuntos de información en H_i que siguen débilmente a h'', y que coincide con s_i en todos los otros conjuntos de información en H_i. Como $s_i, s_i' \in S_i(h) \cap S_i(h'')$ se sigue que $s_i'' \in S_i(h) \cap S_i(h'')$. Como h' precede a h'', entonces $s_i'' \in S_i(h) \cap S_i(h')$. Más aun, por la construcción de s_i''

$$\begin{aligned}
u_i(s_i'', \beta_i(h')) &= \beta_i(h')(S_{-i}(h''))u_i(s_i'', \beta_i(h'')) \\
&\quad + \sum_{s_{-i} \in S_{-i}(h') \setminus S_{-i}(h'')} \beta_i(h')(s_{-i})u_i(z(s_i'', s_{-i})) \\
&= \beta_i(h')(S_{-i}(h''))u_i(s_i', \beta_i(h'')) \\
&\quad + \sum_{s_{-i} \in S_{-i}(h') \setminus S_{-i}(h'')} \beta_i(h')(s_{-i})u_i(z(s_i, s_{-i})) \\
&> \beta_i(h')(S_{-i}(h''))u_i(s_i, \beta_i(h'')) \\
&\quad + \sum_{s_{-i} \in S_{-i}(h') \setminus S_{-i}(h'')} \beta_i(h')(s_{-i})u_i(z(s_i, s_{-i})) \\
&= u_i(s_i, \beta_i(h')).
\end{aligned}$$

donde la desigualdad viene de la suposición que $\beta_i(h')(S_{-i}(h'')) > 0$. Sin embargo, esto significa que $u_i(s_i'', \beta_i(h')) > u_i(s_i, \beta_i(h'))$. Como $s_i'' \in S_i(h) \cap S_i(h')$, esto contradice la suposición de que s_i era óptima para $\beta_i(h')$ entre las estrategias en $S_i(h) \cap S_i(h')$. Por lo tanto, s_i debe ser óptima para $\beta_i(h'')$ entre las estrategias en $S_i(h) \cap S_i(h'')$. ■

Lema 5.7. Sean $h, h' \in H_i$ tales que h' precede a h. Entonces si $s_{-i} \in S_{-i}^k(h') \cap S_{-i}(h)$ entonces tenemos que $s_{-i} \in S_{-i}^k(h)$.

Demostración. Sea $s_{-i} \in S - -i^k(h') \cap S_{-i}(h)$. Entonces para todo jugador $j \neq i$, tenemos que para todo conjunto de información $h'' \in H_j(s_j)$ que sigue débilmente a h' que s_j no está estrictamente dominada en S_{-j}^{k-1} por una randomización en $S_j(h'')$, y que para todo conjunto de información $h''' \in H_j(s_j)$ que precede débilmente a h' que s_j no está estrictamente dominada en $S_{-j}^{k-1}(h''')$ por una randomización en $S_j(h') \cap S_j(h''')$.

Tomemos un conjunto de información $h'' \in H_j(s_j)$ que sigue débilmente a h. Entonces h'' sigue débilmente a h', y en este caso ya sabemos que s_j no está estrictamente dominada en $S_{-j}^{k-1}(h'')$ por una randomización en $S_j(h'')$.

Ahora tomemos un conjunto de información $h''' \in H_j(s_j)$ que precede débilmente a h. Tenemos dos casos: ya sea que h''' sigue débilmente a h', o h''' precede débilmente a h'.

En el primer caso, como h''' sigue débilmente a h' entonces sabemos que s_j no está estrictamente dominada en $S_{-j}^{k-1}(h''')$ por una randomización en $S_j(h''')$, y como

$S_j(h) \cap S_j(h''') \subseteq S_j(h''')$, entonces s_j no está estrictamente dominada en $S_{-j}^{k-1}(h''')$ por una randomización en $S_j(h) \cap S_j(h''')$.

En el segundo caso, como h''' precede débilmente a h', entonces sabemos que s_j no está estrictamente dominada en $S_{-j}^{k-1}(h''')$ por una randomización en $S_j(h') \cap S_j(h''')$. Como $S_j(h) \subseteq S_j(h')$, concluimos que s_j no está estrictamente dominada en S_{-j}^{k-1} por una randomización en $S_j(h) \cap S_j(h''')$.

Juntando todos los resultados, tenemos que $s_{-i} \in S_{-i}^k(h)$.

Definimos para cada $i \in I$, $h \in H$ y $k \geq 1$ el conjunto $R_i^k(h)$ de estrategias $s_i \in S_i(h)$ tal que s_i no está estrictamente dominada en $S_{-i}^{k-1}(h')$ para todo $h' \in H_i(s_i)$ que sigue débilmente a h entre las estrategias en $S_i(h')$, y s_i no está estrictamente dominada en $S_{-i}^{k-1}(h'')$ para todo $h'' \in H_i(s_i)$ que precede débilmente a h entre las estrategias en $S_i(h) \cap S_i(h'')$. Observamos que $R_i^k(h) \subseteq S_i^k(h)$ para todo $i \in I$, $h \in H$ y $k \geq 1$.

Supongamos que el algoritmo termina después de K pasos, es decir $S_i^{K+1}(h) = S_i^K(h)$ y $S_{-i}^{K+1}(h) = S_{-i}^K(h)$ para todo jugador $i \in I$ y todo conjunto de información $h \in H_i$. Para demostrar que $S_i^{k+1} \subseteq BR_i^k$ construimos un modelo epistémico con las siguientes características:

1. Para todo conjunto de información h, todo jugador i y toda estrategia $s_i \in R_i^1(h)$ hay un tipo $t_i^{s_i,h}$ tal que s_i es óptima para $t_i^{s_i,h}$ en todo $h' \in H_i(s_i)$ que sigue débilmente a h entre las estrategias en $S_i(h')$, y en todo $h'' \in H_i(s_i)$ que precede débilmente a h entre las estrategias en $S_i(h) \cap S_i(h'')$.

2. Para $k \geq 2$, si $s_i \in R_i^k(h)$ entonces el tipo asociado $t_i^{s_i,h}$) expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden $k-1$.

3. Si $s_i \in R_i^K(h)$ entonces el tipo asociado $t_i^{s_i,h}$ expresa creencia común en racionalidad futura y pasada restringida.

4. Todos los tipos satisfacen actualización bayesiana.

5.7.1 Construcción del modelo epistémico

Empezamos construyendo las creencias del modelo. Para $i \in I$ y un conjunto de información $h \in H$, definimos el conjunto $D_i^k(h) = R_i^k(h) \setminus R_i^{k+1}(h)$ para toda $k \geq 1$.

Sea $k \in \{1, 2, \ldots, K-1\}$ y $s_i \in D_i^k(h)$. Por definición y el lema de Pearce, para cada $h' \in H_i(s_i)$ que sigue débilmente a h existe una creencia condicional $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h')$ sobre $S_{-i}^{k-1}(h')$ tal que s_i es óptima para $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h')$ entre las estrategias en $S_i(h')$, y para cada $h'' \in H_i(s_i)$ que precede débilmente a h existe una creencia condicional $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h'')$ sobre $S_{-i}^{k-1}(h'')$ tal que s_i es óptima para $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h'')$ entre las estrategias en $S_i(h) \cap S_i(h'')$. Para cualquier otro $h''' \in H_i$ definimos $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h''')$ sobre $S_{-i}^{k-1}(h''')$ de forma arbitraria.

Consideremos $s_i \in R_i^K(h)$. Entonces $s_i \in R_i^{K+1}(h)$ también. Por definición de $R_i^{K+1}(h)$, para todo $h' \in H_i(s_i)$ que sigue débilmente a h existe una creencia condicional $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h')$ sobre $S_{-i}^K(h')$ tal que s_i es óptima para $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h')$ entre las estrategias en $S_i(h')$, y para cada $h'' \in H_i(s_i)$ que precede débilmente a h existe una creencia condicional $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h'')$ sobre $S_{-i}^K(h'')$ tal que s_i es óptima para $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h'')$ entre las estrategias en $S_i(h) \cap S_i(h'')$. Para cualquier otro $h''' \in H_i$ definimos $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h''')$ sobre $S_{-i}^K(h''')$ de forma arbitraria.

Para cada $k \geq 1$ y todo $h' \in H_i$, definimos $R_{-i}^k(h') = \times_{j \neq i} R_j^k(h')$. Entonces, por construcción, $S_{-i}^k(h') = R_{-i}^k(h)$. Por lo tanto, para toda $s_i \in D_i^k(h)$ con $k \in \{1, 2, \ldots, K-1\}$, tenemos que $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h') \in \Delta(R_{-i}^{k-1}(h'))$ para todo $h' \in H_i$. Además, para toda $s_i \in R_i^K(h)$ tenemos que $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h') \in \Delta(R_{-i}^K(h'))$ para todo $h' \in H_i$.

Sea $s_i \in R_i^1(h)$. Transformamos el vector condicional $\hat{\beta}_i^{s_i,h} = (\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h'))_{h' \in H_i}$ en un vector condicional $\beta_i^{s_i,h}$ que satisface actualización bayesiana de la siguiente forma. Consideremos un conjunto de información $h' \in H_i$. Supongamos primero que existe algún $h'' \in H_i$ que precede a h' tal que $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h'')(S_{-i}(h')) > 0$. Entonces, tomemos a h'' como aquel único conjunto de información en H_i tal que h'' precede a h', $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h'')(S_{-i}(h')) > 0$, y el cual no tiene algún $h''' \in H_i$ que preceda a h'' con $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h''')(S_{-i}(h)) > 0$. En este caso, definimos

$$\beta_i^{s_i,h}(h')(s_{-i}) = \frac{\hat{\beta}_i^{s_i,h}(s'')(s_{-i})}{\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h'')(S_{-i}(h'))} \tag{5.4}$$

para toda $s_{-i} \in S_{-i}(h')$. Si, por otro lado, no existe $h'' \in H_i$ que preceda a h' tal que $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h'')(S_{-i}(h')) > 0$, entonces definimos

$$\beta_i^{s_i,h}(h')(s_{-i}) = \hat{\beta}_i^{s_i,h}(h')(s_{-i}) \tag{5.5}$$

para toda $s_{-i} \in S_{-i}(h')$.

Por construcción, el vector de creencias condicionales $\beta_i^{s_i,h}$ satisface actualización bayesiana. Ahora mostramos que, para todo $h' \in H_i(s_i)$ que precede o sigue débilmente a h, la estrategia s_i es óptima para $\beta_i^{s_i,h}(h')$ entre las estrategias en $S_i(h') \cap S_i(h)$. Consideremos algún $h' \in H_i(s_i)$ que precede o sigue débilmente a h. Si no existe $h'' \in H_i$ que preceda a h' con $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h'')(S_{-i}(h')) > 0$ entonces por (5.5), $\beta_i^{s_i,h}(h') = \hat{\beta}_i^{s_i,h}(h')$. Dado que, por construcción, s_i es óptima para $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h')$ entre las estrategias en $S_i(h) \cap S_i(h')$ se sigue que s_i es óptima para $\beta_i^{s_i,h}(h')$ entre las estrategias en $S_i(h) \cap S_i(h')$. Supongamos ahora que existe alguna $h'' \in H_i$ que precede a h' tal que $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h'')(S_{-i}(h')) > 0$. Entonces $\beta_i^{s_i,h}(h')$ se obtiene de $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h'')$ por (5.4), donde $h'' \in H_i$ precede a h', $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h'')(S_{-i}(h')) > 0$, y no existe $h''' \in H_i$ que preceda a h'' tal que $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h''')(S_{-i}(h')) > 0$. Por construcción, s_i es óptima para $\hat{\beta}_{-i}^{s_i,h}(h'')$ entre las estrategias en $S_i(h) \cap S_i(h'')$. Como $h'' \in H_i$ precede a $h' \in H_i$, por (5.5) y el lema 5.6 tenemos que s_i es óptima para $\beta_i^{s_i,h}(h')$ entre las estrategias en $S_i(h) \cap S_i(h')$. Por lo tanto, concluimos que para todo $h' \in H_i(s_i)$ que precede o sigue débilmente a h, la estrategia s_i es óptima para $\beta_i^{s_i,h}(h')$ entre las estrategias en $S_i(h) \cap S_i(h')$.

Supongamos que $s_i \in D_i^k(h)$ para alguna $k \in \{1, 2, \ldots, K-1\}$. Demostraremos que $\beta_i^{s_i,h}(h') \in \Delta(R_{-i}^{k-1}(h'))$ para toda $h' \in H_i$. Tomemos alguna $h' \in H_i$, y supongamos que no existe $h'' \in H_i$ que preceda a h' tal que $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h'')(S_{-i}(h')) > 0$. Entonces, por (5.5),

$\beta_i^{s_i,h}(h') = \hat{\beta}_i^{s_i,h}(h')$. Dado que $\hat{\beta} \in \Delta R_{-i}^{k-1}(h'))$, se sigue que $\beta_i^{s_i,h}(h') \in \Delta(R_{-i}^{k-1}(h'))$. Por otra parte, supongamos que existe $h'' \in H_i$ que precede a h' con $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h'')(S_{-i}(h')) > 0$. Entonces $\beta_i^{s_i,h}(h')$ se obtiene de $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h'')$ mediante (5.4), donde $h'' \in H_i$ precede a h', $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h'')(S_{-i}(h')) > 0$, y no existe $h''' \in H_i$ que preceda a h'' con $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h''')(S_{-i}(h')) > 0$. Tomemos alguna $s_{-i} \in S_{-i}(h')$ con $\beta_i^{s_i,h}(h')(s_{-i}) > 0$. Por (5.4) debemos tener que $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h'')(s_{-i}) > 0$. Por la primera parte, tenemos que $\hat{\beta}_i^{s_i,h}(h'') \in \Delta(R_{-i}^{k-1}(h''))$, lo que quiere decir que $s_{-i} \in T_{-i}^{k-1}(h'')$. Por lo tanto, $s_{-i} \in R_{-i}^{k-1}(h'') \cap S_{-i}(h')$. Como $R_{-i}^{k-1}(h'') = S_{-i}^{k-1}(h'')$, sabemos que $s_{-i} \in S_{-i}^{k-1}(h'') \cap S_{-i}(h')$. Como h'' precede a h', por el lema 5.7, $s_{-i} \in S_{-i}^{k-1}(h') = R_{-i}^{k-1}(h')$. Esto se cumple para toda $s_{-i} \in S_{-i}(h')$ con $\beta_i^{s_i,h}(h')(s_{-i}) > 0$, y podemos concluir que $\beta_i^{s_i,h}(h') \in \Delta(R_{-i}^{k-1}(h'))$. De forma análoga se puede demostrar que para toda $s_i \in R_i^K(h)$, tenemos que $\beta_i^{s_i,h}(h') \in \Delta(R_{-i}^K(h'))$ para todo $h' \in H_i$.

Ahora procedemos con la construcción de tupos para el modelo epistémico. Para el jugador $i \in I$ definimos el conjunto de tipos $T_i = \{t_i^{s_i,j} \mid h \in H \text{ y } s_i \in R_i^1(h)\}$. Para cada jugador $i \in I$, cada conjunto de información $h \in H$ y cada $k \in \{1, 2, \ldots, K\}$, sea $T_i^K(h) = \{t_i^{s_i,h} \mid s_i \in R_i^k(h)\}$. Dado que $R_i^K(h) \subseteq R_i^{K-1}(h =\subseteq \cdots \subseteq R_i^2(h) \subseteq R_i^1(h)$, entonces $T_i^K(h) \subseteq T_i^{K-1}(h) \subseteq \cdots \subseteq T_i^2(h) \subseteq T_i^1(h)$. para todo jugador $i \in I$ y todo conjunto de información $h \in H$.

Por el lema 5.7 sabemos que para todo jugador $i \in I$, toda $k \geq 1$ y cualesquiera dos conjuntos de información h, h' donde h precede a h' se cumple que $R_i^k(h) \cap S_i(h') \subseteq R_i^k(h')$. Por lo tanto, si $t_i^{s_i,h} \in T_i^k(h)$, con $s_i \in R_i^k(h) \cap S_i(h')$, entonces $s_i \in R_i^k(h')$. En tal caso, los tipos $t_i^{s_i,h}$ y $t_i^{s_i,h'}$ son idénticos, y formalmente tendremos que $t_i^{s_i,h} = t_i^{s_i,h'}$ cuando h precede a h' y $s_i \in S_i(h')$.

Para cada jugador $i \in I$ y cada conjunto de información $h \in H$ construimos las creencias para cada tipo en $T_i^1(h)$.

Consideremos $t_i^{s_i,h}$ tal que $s_i \in D_i^1(h)$, es decir, $t_i^{s_i,h} \in T_i^1(h) \setminus T_i^2(h)$. Definimos el vector de creencias condicionales $\beta_i(t_i^{s_i,h})$ de la siguiente forma: para cada $j \neq i$ tomamos un tipo arbitrario $\hat{t}_j$ y consideramos un conjunto de información $h' \in H_i$. Definimos

$$\beta_i(t_i^{s_i,h}, h')((s_j, t_j)_{j\neq i}) = \begin{cases} \beta_i^{s_i,h}(h')((s_j)_{j\neq i}) & \text{si } t_j = \hat{t}_j \text{ para todo } j \neq i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces en todo $h' \in H_i$, el tipo $t_i^{s_i,h}$ tiene la misma creencia acerca de las estrategias elegidas por los opoentes que $\beta_i^{s_i,h}$. Mas aun, $t_i^{s_i,h}$ satisface actualización bayesiana, ya que $\beta_i^{s_i,h}$ satisface actualización bayesiana. Por construcción de las creencias, s_i es óptima para $\beta_i^{s_i,h}(h')$ en todo $h' \in H_i(s_i)$ que sigue débilmente a h entre las estrategias en $S_i(h')$, y s_i es óptima para $\beta_i^{s_i,h}(h'')$ en todo $h'' \in H_i(s_i)$ que precede débilmente a h entre las estrategias en $S_i(h) \cap S_i(h'')$.

Por lo tanto, s_i es óptima para el tipo $t_i^{s_i,h}$ en todo $h' \in H_i(s_i)$ que sigue débilmente a h entre las estrategias en $S_i(h')$ y en todo $h'' \in H_i(s_i)$ que precede débilmente a h entre las estrategias en $S_i(h) \cap S_i(h'')$.

Ahora consideremos $t_i^{s_i,h}$ con $s_i \in D_i^k(h)$ para algún $k \in \{2, 3, \ldots, K-1\}$. Por lo tanto, $t_i^{s_i,h} \in T_i^k(h) \backslash T_i^{k+1}(h)$. Definimos el vector de creencias condicionales $\beta_i(t_i^{s_i,h})$ de la siguiente forma: para cada conjunto de información $h' \in H_i$, la creencia condicional en h' acerca de las combinaciones estrategia-tipo de los oponentes $\beta_i(t_i^{s_i,h}, h')$ está dada por:

$$\beta_i(t_i^{s_i,h}, h')((s_j, t_j)_{j\neq i}) = \begin{cases} \beta_i^{s_i,h}(h')((s_j)_{j\neq i}) & \text{si } t_j = t_j^{s_j,h'} \text{ para todo } j \neq i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{5.6}$$

Mostramos primero que el tipo $t_i^{s_i,h}$ satisface actualización bayesiana. Supongamos que $h', h'' \in H_i$ son tales que h' precede a h'' y $\beta_i(t_i^{s_i,h})(S_{-i}(h'') \times T_{-i}) > 0$. Entonces por (5.6), $\beta_i^{s_i,h}(S_{-i}(h'')) > 0$. Como $\beta_i^{s_i,h}$ satisface actualización bayesiana, entonces tenemos que

$$\beta_i^{s_i,h}(h'')((s_j)_{j\neq i}) = \frac{\beta_i^{s_i,h}(h')((s_j)_{j\neq i})}{\beta_i^{s_i,h}(h')(S_{-i}(h''))} \tag{5.7}$$

para toda $(s_j)_{j\neq i} \in S_{-i}(h'')$. Consideramos el caso en que $\beta_i(t_i^{s_i,h}, h'')((s_j, t_j)_{j\neq i}) > 0$. Entonces por (5.6), $t_j = t_j^{s_j,h''}$ para todo $j \neq i$. Como $s_j \in S_j(h'')$ y h' precede a h'' sabemos por construcción que $t_j^{s_j,h'} = t_j^{s_j,h''}$ para todo $j \neq i$. Esto implica que

$$\begin{aligned}
\beta_i(t_i^{s_i,h}, h'')((s_j, t_j)_{j\neq i}) &= \beta_i(t_i^{s_i,h}, h'')((s_j, t_j^{s_j,h''})_{j\neq i}) \\
&= \beta_i^{s_i,h}(h'')((s_j)_{j\neq i}) \\
&= \frac{\beta_i^{s_i,h}(h')((s_j)_{j\neq i})}{\beta_i^{s_i,h}(h')(S_{-i}(h''))} \\
&= \frac{\beta_i(t_i^{s_i,h}, h')((s_j, t_j^{s_j,h'})_{j\neq i})}{\beta_i(t_i^{s_i,h}, h')(S_{-i}(h'') \times T_{-i})} \\
&= \frac{\beta_i(t_i^{s_i,h}, h')((s_j, t_j^{s_j,h''})_{j\neq i})}{\beta_i(t_i^{s_i,h}, h')(S_{-i}(h'') \times T_{-i})} \\
&= \frac{\beta_i(t_i^{s_i,h}, h')((s_j, t_j)_{j\neq i})}{\beta_i(t_i^{s_i,h}, h')(S_{-i}(h'') \times T_{-i})}.
\end{aligned}$$

La primera y la última igualdad se siguen del hecho de que $t_j = t_j^{s_j,h''}$ para todo $j \neq i$, la segunda igualdad se sigue de (5.6) aplicado a h'', la tercera igualdad se sigue de (5.7), la cuarta iguialdad se sigue de (5.6) aplicado a h' y la quinta igualdad se sigue del hecho de que $t_j^{s_j,h'} = t_j^{s_j,h''}$ para todo $j \neq i$. Por lo tanto, podemos concluir que $t_i^{s_i,h}$ satisface actualización bayesiana.

Por construcción de las creencias, la estrategia s_i es óptima para $\beta_i^{s_i,h}(h')$ en todo $h' \in H_i(s_i)$ que sigue débilmente a h entre las estrategias en $S_i(h')$ y s_i es óptima para $\beta_i^{s_i,h}(h'')$ en todo $h'' \in H_i(s_i)$ que precede débilmente a h entre las estrategias en

$S_i(h) \cap S_i(h'')$. Por lo tanto, s_i es óptima para el tipo $t_i^{s_i,h}$ en todo $h' \in H_i(s_i)$ que sigue débilmente a h entre las estrategias en $S_i(h')$ y en todo $h'' \in H_i(s_i)$ que precede débilmente a h entre las estrategias en $S_i(h) \cap S_i(h'')$.

Recordemos que en todo $h' \in H_i(s_i)$ la creencia $\beta_i^{s_i,h} \in \Delta(R_{-i}^{k-1}(h'))$ asigna probabilidad positiva solamente a las estrategias de los oponentes en $R_j^{k-1}(h')$. Por lo tanto el tipo $t_i^{s_i,h}$ asigna en cada $h' \in H_i$ probabilidad positiva solamente a los tipos de los oponentes $t_j^{s_j,h'}$ donde $s_j \in R_j^{k-1}(h')$. Es decir, el tipo $t_i^{s_i,h}$ asigna en todo $h' \in H_i$ probabilidad positiva solamente a tipos de los oponentes que están en $T_j^{k-1}(h')$.

Por último, consideremos tipos $t_i^{s_i,h}$ con $s_i \in R_i^K(h)$, es decir, $t_i^{s_i,h} \in T_i^K(h)$. Definimos el vector de creencias condicionales $\beta_i(t_i^{s_i,h})$ como sigue: para todo $h' \in H_i$ sea $\beta_i(t_i^{s_i,h}, h')$ la creencia condicional en h' acerca de las combinaciones estrategia-tipo de los oponentes dada por:

$$\beta_i(t_i^{s_i,h}, h')((s_j,t_j)_{j\neq i}) = \begin{cases} \beta_i^{s_i,h}(h')((s_j)_{j\neq i}) & \text{si } t_j = t_j^{s_j,h'} \text{ para todo } j \neq i \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

De forma similar a lo que se trabajó anteriormente podemos concluir que $t_i^{s_i,h}$ satisface actualización bayesiana, que la estrategia s_i es óptima para el tipo $t_i^{s_i,h}$ en todo $h' \in H_i(s_i)$ que sigue débilmente a h entre las estrategias en $S_i(h')$ y en todo $h'' \in H_i(s_i)$ que precede débilmente a h entre las estrategias en $S_i(h) \cap S_i(h'')$, y que el tipo $t_i^{s_i,h}$ asigna en todo $h' \in H_i$ probabilidad positiva solamente a los tipos de los oponentes en $T_j^K(h')$.

Con esto concluimos la construcción del modelo epistémico y procedemos a demostrar algunas propiedades del mismo.

Lema 5.8. Para el modelo epistémico construido arriba, dado $k \geq 2$, todo tipo $t_i \in T_i^k(h)$ expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden $k-1$, y creencia común en actualización bayesiana.

Demostración. Como todos los tipos del modelo epistémico satisfacen actualización bayesiana, entonces todos los tipos expresan creencia común en actualización bayesiana. Ahora demostramos el resto del lema por inducción sobre k.

Sea $k = 2$ y consideremos un jugador $i \in I$ y un conjunto de información $h \in H$. Sea $t_i \in T_i^2(h)$, entonces $t_i = t_i^{s_i,h}$ para algún $s_i \in R_i^2(h)$. Por construcción, el tipo $t_i^{s_i,h}$ asigna en cada $h' \in H_i$ probabilidad positiva solamente a las combinaciones estrategia-tipo de los oponentes $(s_j, t_j^{s_j,h'})$ donde $s_j \in R_j^1(h')$ y $t_j^{s_j,h'} \in T_j^1(h')$.

Para cada una de dichas combinaciones estrategia-tipo $(s_j, t_j^{s_j,h'})$ la estrategia s_j es óptima para el tipo $t_j^{s_j,h'}$ en todo $h'' \in H_j(s_j)$ que sigue débilmente a h' entre las estrategias en $S_j(h'')$ y en todo $h''' \in H_j(s_j)$ que predece débilmente a h' entre las estrategias en $S_j(h') \cap S_j(h''')$. Por lo tanto, el tipo $t_i^{s_i,h}$ asigna en todo $h' \in H_i$ probabilidad positiva solamente a las combinaciones estrategia-tipo $(s_j, t_j^{s_j,h'})$ donde s_j es óptima para $t_j^{s_j,h'}$ en todo $h'' \in H_j(s_j)$ que sigue débilmente a h' entre las estrategias en $S_j(h'')$ y en todo $h''' \in H_j(s_j)$ que precede débilmente a h' entre las estrategias en $S_j(h') \cap S_j(h''')$. Es decir, $t_i^{s_i,h}$ cree en la racionalidad futura y pasada restringida del oponente, o en otras palabras, $t_i^{s_i,h}$ expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden 1.

Ahora realizamos el paso de inducción. Sea $k \geq 3$ fijo y supongamos que para todo jugador $i \in I$ y todo conjunto de información $h \in H$, se tiene que todo tipo $t_i \in T_i^{k-1}(h)$ expresa creencia en la racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden $k-2$.

Consideremos un jugador $i \in I$ y un conjunto de información $h \in H$. Sea $t_i \in T_i^k(h)$, es decir $t_i = t_i^{s_i,h}$ para alguna $s_i \in R_i^k(h)$. El tipo $t_i^{s_i,h}$ asigna en todo $h' \in H_i$ probabilidad positiva solamente a combinaciones estrategia-tipo de los oponentes $(s_j, t_j^{s_j,h'})$ donde $s_j \in R_j^{k-1}(h')$ y $t_j^{s_j,h'} \in T_j^{k-1}(h')$. Para cada una de dichas combinaciones estrategia-tipo, s_j es óptima para el tipo $t_j^{s_j,h'}$ en todo $h'' \in H_j(s_j)$ que sigue débilmente a h' entre las estrategias en $S_j(h'')$ y en todo $h''' \in H_j(s_j)$ que precede débilmente a h' entre las estrategias en $S_j(h') \cap S_j(h''')$.

Por la hipótesis de inducción, dado que $t_j^{s_j,h'} \in T_j^{k-1}(h')$ entonces $t_j^{s_j,h'}$ expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden $k-2$. Entonces tenemos que el tipo $t_i^{s_i,h}$ asigna en todo $h' \in H_i$ probabilidad positiva solamente a combinaciones estrategia-tipo $(s_j, t_j^{s_j,h'})$ donde s_j es óptima para el tipo $t_j^{s_j,h'}$ en todo $h'' \in H_j(s_j)$ que sigue débilmente a h' entre las estrategias en $S_j(h'')$ y en todo $h''' \in H_j(s_j)$ que precede débilmente a h' entre las estrategias en $S_j(h') \cap S_j(h''')$, y el tipo $t_j^{s_j,h'} \in T_j^{k-1}(h')$ expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden $k-2$. Por lo tanto, $t_i^{s_i,h}$ expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden $k-1$. Esto es cierto para todo jugador $i \in I$ y todo conjunto de información $h \in H$, por lo que todo tipo $t_i \in T_i^k(h)$ expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden $k-1$, para toda $k \geq 3$. ■

Lema 5.9. Dado el modelo epistémico construido arriba, para toda $k \geq K-1$, todo tipo $t_i \in T_i^K(h)$ expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden k y expresa creencia común en actualización bayesiana.

Demostración. Al igual que en el lema anterior, todos los tipos involucrados satisfacen actualización bayesiana y por lo tanto expresan creencia común en actualización bayesiana. El resto del lema se demuestra por inducción sobre k.

Sea $k = K-1$. Por el lema 5.8 sabemos que todo tipo $t_i \in T_i^K(h)$ expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden $K-1$, con lo que el resultado es cierto para $k = K-1$.

Ahora realizamos el paso de inducción. Sea $k \geq K$ fija y supongamos que para todo jugador $i \in I$ y todo conjunto de información $h \in H$, se tiene que todo tipo $t_i \in T_i^K(h)$ expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden $k-1$. Consideremos un jugador $i \in I$, un conjunto de información $h \in H$ y un tipo $t_i \in T_i^K(h)$, es decir $t_i = t_i^{s_i,h}$ para alguna $s_i \in R_i^K(h)$. Por construcción, $t_i^{s_i,h}$ asigna en todo $h' \in H_i$ probabilidad positiva solamente a combinaciones estrategia-tipo $(s_j, t_j^{s_j,h'})$ donde $s_j \in R_j^K(h')$ y $t_j^{s_j,h'} \in T_j^K(h')$. Para cada una de dichas combinaciones estrategia-tipo $(s_j, t_j^{s_j,h'})$ la estrategia s_j es óptima para el tipo $t_j^{s_j,h'}$ en todo $h'' \in H_j(s_j)$ que sigue débilmente a h' entre las estrategias en $S_j(h'')$ y en todo $h''' \in H_j(s_j)$ que precede débilmente a h' entre las estrategias en $S_j(h') \cap S_j(h''')$.

Por la hipótesis de inducción, todo tipo $t_j^{s_j,h'} \in T_j^K(h')$ expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden $k-1$. Por lo tanto el tipo $t_i^{s_i,h}$ asigna en todo $h' \in H_i$ probabilidad positiva solamente a combinaciones estrategia-tipo $(s_j, t_j^{s_j,h'})$ donde s_j es óptima para el tipo $t_j^{s_j,h'}$ en todo $h'' \in H_j(s_j)$ que sigue débilmente a h entre las estrategias en $S_j(h'')$ y en todo $h''' \in H_j(s_j)$ que precede débilmente a h' entre las estrategias en $S_j(h') \cap S_j(h''')$, y el tipo $t_j^{s_j,h'} \in T_j^K(h')$ expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden $k-1$. Entonces el tipo $t_i^{s_i,h}$ expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden k, y esto se cumple para todo jugador $i \in I$ y todo conjunto de información $h \in H$. Por lo tanto todo tipo $t_i \in T_i^K(h)$ expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden k, para toda $k \geq K-1$.

El siguiente resultado se sigue del lema 5.9 y la definición de creencia común en racionalidad futura y pasada restringida.

Corolario 5.2. Dado el modelo epistémico construido arriba, todo tipo $t_i \in T_i^K(h)$ expresa creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y expresa creencia común en actualización bayesiana.

Finalmente, podemos demostrar el teorema 5.2.

Demostración (Teorema 5.2)**.** La primera parte del teorema se puede reescribir como $BR_i^k = S_i^{k+1}$ para todo jugador $i \in I$ y toda $k \in \mathbb{N}$.

Primero demostramos que $S_i^{k+1} \subseteq BR_i^k$ para todo jugador $i \in I$ y toda $k \in \mathbb{N}$. Sean $i \in I$ y $k \geq 1$. Sea $s_i \in S_i^{k+1}$. Entonces $s_i \in S_i^{k+1}(h)$ para todo $h \in H_i(s_i)$. Esto implica que $s_i \in R_i^{k+1}(\varnothing)$ donde $\varnothing$ es el primer conjunto de información del juego. Por lo tanto, el tipo $t_i^{s_i,\varnothing}$ está en $T_i^{k+1}(\varnothing)$, y por el lema 5.8, $t_i^{s_i,\varnothing}$ expresa creencia en racionalidad futura y pasada restringida hasta el orden k y expresa creencia común en actualización bayesiana. Más aun, s_i es óptima para $t_i^{s_i,\varnothing}$ en todo $h \in H_i(s_i)$ que sigue débilmente a $\varnothing$ entre las estrategias en $S_i(h)$. Por lo tanto, $s_i \in BR_i^k$. Es decir, toda estrategia $s_i \in S_i^{k+1}$ también está en BR_i^k, por lo cual $S_i^{k+1} \subseteq BR_i^k$, y esto se cumple para todo $i \in I$ y $k \geq 1$.

Por el lema 5.5 ya sabemos que $BR_i^k \subseteq S_i^{k+1}$ de forma que $BR_i^k = S_i^{k+1}$.

Para la segunda parte del teorema, consideremos una estrategia s_i que puede ser elegida de forma racional por un tipo que expresa creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y que expresa creencia común en actualización bayesiana. Entonces $s_i \in BR_i^k = S_i^{k+1}$ para toda $k \in \mathbb{N}$, por lo que s_i sobrevive todos los pasos del algoritmo. Por lo tanto, toda estrategia s_i que puede ser elegida de forma racional por un tipo que expresa creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y que expresa creencia común en actualización bayesiana sobrevive todos los pasos del algoritmo.

Ahora, sea s_i una estrategia que sobrevive todos los pasos del algoritmo. Entonces $s_i \in S_i^K(h)$ para toda $h \in H_i(s_i)$. En particular $s_i \in R_i^K(\varnothing)$, y por el corolario 5.2 sabemos que el tipo $t_i^{s_i,\varnothing} \in T_i^K(\varnothing)$ expresa creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y expresa creencia común en actualización bayesiana. Más aun, por la construcción del modelo epistémico, la estrategia s_i es óptima para el tipo $t_i^{s_i,\varnothing}$ en todo $h \in H_i(s_i)$ que sigue débilmente a $\varnothing$ entre las estrategias en $S_i(h)$. Por lo tanto, s_i es óptima para un tipo que expresa creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y que expresa creencia común en actualización bayesiana. Por ende, toda estrategia s_i que sobrevive a todos los pasos del algoritmo es óptima para un tipo que expresa creencia común en racionalidad futura y pasada restringida y que expresa creencia común en actualización bayesiana. ■

Conclusiones

Los modelos presentados en el capítulo 2 permiten estudiar situaciones en las cuáles los jugadores desconocen el orden de decisión, ya sea solamente para ellos mismos o para todos los jugadores. Esto permite también construir situaciones en las que algunas reparticiones se puedan realizar de manera más justa al igualar hasta cierto grado a los jugadores de una forma externa. Además, como se puede observar, los modelos permiten flexibilidad al ser varios componentes los que pueden conocerse o desconocerse para adaptarse de mejor forma a lo que se está estudiando. Para cada uno de estos modelos se demostró la existencia de los equilibrios pertinentes.

Para permitir que los modelos se adaptaran mejor, se hacen los refinamientos del capítulo 3, y se pudo observar que bajo sensibilidad al riesgo, los jugadores se comportan de la forma esperada: al ser propensos al riesgo, toman elecciones que los acercan a las utilidades más grandes a pesar de una alta variabilidad, mientras que los jugadores adversos al riesgo van por opciones más seguras que no tienen tanta variabilidad.

El trabajo mostrado en estos capítulos es solamente un comienzo de lo que se puede estudiar bajo estos modelos. Como se puede observar, los ejemplos trabajados no son muy complejos ni consideran una gran cantidad de elecciones para cada jugador, ni una gran cantidad de periodos de elección. Esto es debido a que se complica rápidamente el procedimiento para encontrar los equilibrios conforme el problema crece en sus componentes. Por ello, un primer punto de trabajo futuro consiste en estudiar cómo aproximar los equilibrios dentro de estos modelos. Una segunda posibilidad de trabajo a futuro consiste en permitir que, para los modelos con sensibilidad al riesgo, el coeficiente que lo define dependa del nivel de riqueza de los jugadores, de tal manera que, al conocerse más información de la situación, ésta se pueda modelar de una manera más cercana, además de permitirnos observar cómo estas variables externas afectan en dichas situaciones para apegarnos más a la realidad.

En el capítulo 5 se introdujo un nuevo concepto de razonamiento para juegos dinámicos en el cual los jugadores suponen la racionalidad de los oponentes en el futuro, mientras que también razonan en el pasado de una forma restringida solamente a la parte pertinente del juego, que corresponde a aquella parte que permite que el juego llegue al punto en el que se encuentran los jugadores en el presente. Además, se mostró la relación de este concepto dinámico con racionalizabilidad propia de la forma normal, y se dio un algoritmo que permite encontrar las estrategias que se pueden elegir bajo este concepto de razonamiento.

Trabajo futuro en esta línea: primero, para este modelo no se ha revisado si las soluciones obtenidas son afectadas por las elecciones que no son esenciales en el juego; segundo, la aplicación de este modelo a otros juegos: juegos infinitos, estocásticos, repetidos, además de los algoritmos correspondientes a cada caso. Además, como se mencionó en el capítulo 4, muchos de los conceptos de razonamiento tienen análogos en la teoría clásica, por lo que se podría investigar cuál es dicho análogo, si es que existe, o si es un concepto de equilibrio que no se ha estudiado aún. Por último, no es clara la relación del concepto desarrollado con el concepto de creencia común fuerte en racionalidad, por lo que esto es otra posible línea de estudio.

Bibliografía

[1] C. D. Aliprantis, K. C. Border (2007). *Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide*. Springer.

[2] K. J. Arrow (1971). "Aspects of the theory of risk-bearing". *Essays in the Theory of Risk Bearing*, 90–109. Markham Publishing Company.

[3] G. B. Asheim (2002). "Proper rationalizability in lexicographic beliefs". *International Journal of Game Theory*, **30**(4), 453–478.

[4] G. B. Asheim, A. Perea (2005). "Sequential and quasi-perfect rationalizability in extensive games". *Games and Economic Behavior*, **53**(1), 15–42.

[5] J.-P. Aubin (2007). *Mathematical Methods of Game and Economic Theory*. Dover Books on Mathematics.

[6] Ł. Balbus, A. S. Nowak (2008). "Existence of perfect equilibria in a class of multigenerational stochastic games of capital accumulation". *Automatica*, **44**(6), 1471–1479.

[7] T. Basar, G. J. Olsder (1999). *Dynamic Noncooperative Game Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Classics in Applied Mathematics.

[8] A. Basu, M. K. Ghosh (2018). "Nonzero-sum risk-sensitive stochastic games on a countable state space". *Mathematics of Operations Research*, **43**(2), 516–532.

[9] N. Bäuerle, U. Rieder (2017). "Zero-sum risk sensitive stochastic games". *Stochastic Processes and their Applications*, **127**(2), 622–642.

[10] P. Battigalli (1997). "On rationalizability in extensive games". *Journal of Economic Theory*, **74**(1), 40–61.

[11] P. Battigalli, M. Siniscalchi (2002). "Strong belief and forward induction reasoning". *Journal of Economic Theory*, **106**(2), 356–391.

[12] R. Becerril-Borja, R. Montes-de-Oca (2017). "A family of models for finite sequential games without a predetermined order of turns". *Operations Research and Enterprise Systems*, 35–51. Eds: B. Vitoriano, G. H. Parlier. Springer.

[13] R. Becerril-Borja, R. Montes-de-Oca (2021). "Incomplete information and risk sensitive analysis of sequential games without a predetermined order of turns". *Kybernetika*, **57**(2), 312–331.

[14] R. Becerril-Borja, A. Perea (2020). "Common belief in future and restricted past rationality". *International Journal of Game Theory*, **49**(3), 711–747.

[15] B. D. Bernheim (1984). "Rationalizable strategic behavior". *Econometrica*, **52**(4), 1007–1028.

[16] J. L. F. Bertrand (1883). "Book review of Théorie Mathématique de la Richesse Sociale and of Recherches sur les Principles Mathématiques de la Théorie des Richesses". *Journal de Savants*, **67**, 499-–508.

[17] K. Binmore (1990). *Essays on the Foundations of Game Theory*. Blackwell.

[18] K. C. Border (1985). *Fixed Point Theorems with Applications to Economics and Game Theory*. Cambridge University Press.

[19] É. Borel (1921). "La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique". *Comptes Rendus Hebdomadaire des Séances de l'Académie des Sciences*, **173**, 1304–1308.

[20] É. Borel (1924). *Eléments de la Théorie des Probabilités*. Hermann.

[21] É. Borel (1927). "Sur les systèmes de formes linéaires à déterminant symétrique fauche et la théorie générale du jeu". *Comptes Rendus Hebdomadaire des Séances de l'Académie des Sciences*, **184**, 52–54.

[22] A. Brandenburger, A. Friedenberg, H. J. Keisler (2008). "Admissibility in games". *Econometrica*, **76**(2), 307–352.

[23] E. Cerda Tena, J. Pérez Navarro, J. L. Jimeno Pastor (2004). *Teoría de Juegos*. Pearson Prentice Hall.

[24] J. Chen, S. Micali (2013). "The order independence of iterated dominance in extensive games". *Theoretical Economics*, **8**(1), 125–163.

[25] A. A. Cournot (1838). *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesses*. L. Hachette.

[26] E. Dekel, D. Fudenberg, D. K. Levine (1999). "Payoff information and self-confirming equilibrium". *Journal of Economic Theory*, **89**(2), 165–185.

[27] E. Dekel, D. Fudenberg, D. K. Levine (2002). "Subjective uncertainty over behavior strategies: a correction". *Journal of Economic Theory*, **104**(2), 473–478.

[28] L. Eeckhoudt, C. Golllier, H. Schlesinger (2005). *Economic and Financial Decisions under Risk*. Princeton University Press.

[29] S. N. Ethier, T. G. Kurtz (1985). *Markov Processes: Characterization and Convergence*. John Wiley & Sons, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.

[30] W. H. Fleming, W. M. McEneaney (1992). "Risk sensitive optimal control and differential games". *Stochastic Theory and Adaptive Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 185–197. Eds.: T. E. Duncan, B. Pasik-Duncan. Springer.

[31] R. M. Flores-Hernández, R. Montes-de-Oca (2011). "Noncooperative games with noncompact joint strategies sets: increasing best responses and approximation to equilibrium points". *Kybernetika*, **47**(2), 207–221.

[32] D. Fudenberg, J. Tirole (1991). *Game Theory*. Massachusetts Institute of Technology Press.

[33] H. Gintis (2009). *Game Theory Evolving*. Princeton University Press.

[34] I. L. Glicksberg (1952). "A further generalization of the Kakutani fixed point theorem, with application to Nash equilibrium points". *Proceedings of the American Mathematical Society*, **3**(1), 170–174.

[35] J. González-Díaz, I. García-Jurado, M. G. Fiestras-Janeiro (2010). *An Introductory Course on Mathematical Game Theory*. American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, **115**.

[36] S. P. Hargreaves Heap, Y. Varoufakis (1995). *Game Theory, a Critical Introduction*. Routledge.

[37] J. C. Harsanyi (1968). "Games with incomplete information played by 'Bayesian' players, I-III. Part I. The basic model". *Management Science*, **14**(3), 159–182.

[38] J. C. Harsanyi (1968). "Games with incomplete information played by 'Bayesian' players, I-III. Part II. Bayesian equilibrium points". *Management Science*, **14**(5), 320–334.

[39] J. C. Harsanyi (1973). "Games with randomly disturbed payoffs: a new rationale for mixed strategy equilibrium points". *International Journal of Game Theory*, **2**(1), 1–23.

[40] J. C. Harsanyi (1973). "Oddness of the number of equilibrium points: a new proof". *International Journal of Game Theory*, **2**(1), 235–250.

[41] R. A. Howard, J. E. Matheson (1972). "Risk sensitive Markov decision processes". *Management Science*, **18**(7), 356–369.

[42] M. R. James, J. Baras, R. J. Elliott (1994). "Risk-sensitive control and dynamic games for partially observed discrete-time nonlinear systems". *IEEE Transactions on Automatic Control*, **39**(4), 780–792.

[43] A. Jaśkiewicz, A. S. Nowak (2011). "Discounted dynamic programming with unbounded returns: application to economic models". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **378**(2), 450–462.

[44] S. Kakutani (1942). "A generalization of Brouwer's fixed point theorem". *Duke Mathematical Journal*, **8**(3), 457–459.

[45] E. Kalai, D. Samet (1984). "Persistent equilibria in strategic games". *International Journal of Game Theory*, **13**(3), 129–144.

[46] A. R. Karlin, Y. Peres (2017). *Game Theory, Alive*. American Mathematical Society.

[47] M. Kitti (2011). "Conditionally stationary equilibria in discounted dynamic games". *Dynamic Games and Applications*, **1**(4), 514–533.

[48] M. B. Klompstra (2000). "Nash equilibria in risk-sensitive dynamic games". *IEEE Transactions on Automatic Control*, **45**(7), 1397–1401

[49] E. Kohlberg, J.- F. Mertens (1986). "On the strategic stability of equilibria". *Econometrica*, **54**(5), 1003–1038.

[50] D. M. Kreps, R. Wilson (1982). "Sequential equilibria". *Econometrica*, **50**(4), 863–894.

[51] J. Matkowski, A. S. Nowak (2011). "On discounted dynamic programming with unbounded returns". *Economic Theory*, **46**(3), 455–474.

[52] O. Morgenstern (1935). "Vollkommene Voraussicht und wirtschaftliches Gleichgewicht". *Zeitschrift für Nationalökonomie*, **6**, 337–357.

[53] R. B. Myerson (1978). "Refinements of the Nash equilibrium concept". *International Journal of Game Theory*, **7**(2), 73–80.

[54] J. F. Nash (1950). "Equilibrium points in n-person games". *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **36**(1), 48–49.

[55] J. F. Nash (1951). "Non-cooperative games". *Annals of Mathematics*, **54**(2), 286–295.

[56] A. Neyman, S. Sorin, eds. (2003). *Stochastic Games and Applications*. Springer.

[57] A. S. Nowak (1994). "Zero-sum average payoff stochastic games with general state space". *Games and Economic Behavior*, **7**(2), 221–232.

[58] A. S. Nowak (2005). "Notes on risk-sensitive Nash equilibria". *Advances in Dynamic Games: Applications to Economics, Finance, Optimization and Stochastic Control*, 95–109. Eds: A. S. Nowak, K. Szajowski. Birkhäuser.

[59] A. S. Nowak (2006). "On perfect equilibria in stochastic models of growth with intergenerational altruism". *Economic Theory*, **28**(1), 73–83.

[60] A. S. Nowak (2007). "On stochastic games in economics". *Mathematical Methods of Operations Research*, **66**(3), 513–530.

[61] A. S. Nowak (2010). "On a noncooperative stochastic game played by internally cooperating generations".*Journal of Optimization Theory and Applications*, **144**(1), 88–106.

[62] A. Okada (1981). "On stability of perfect equilibrium points". *International Journal of Game Theory*, **10**(2), 67–73.

[63] D. G. Pearce (1984). "Rationalizable strategic behavior and the problem of perfection". *Econometrica*, **52**(4), 1029–1050.

[64] A. Perea (2011). "An algorithm for proper rationalizability". *Games and Economic Behavior*, **72**(2), 510–525.

[65] A. Perea (2012). *Epistemic Game Theory*. Cambridge University Press.

[66] A. Perea (2014). "Belief in the opponents' future rationality". *Games and Economic Behavior*, **83**(1), 231–254.

[67] A. Perea (2018). "Order independence in dynamic games". Working paper, disponible en `https://www.epicenter.name/Perea/Papers/Order-ind-dynamic.pdf`

[68] A. Perea, A. Predtetchinski (2019). "An epistemic approach to stochastic games". *International Journal of Game Theory*, **48**(1), 181–203.

[69] J. W. Pratt (1964). "Risk aversion in the small and in the large". *Econometrica*, **32**(1), 122–136.

[70] P. J. Reny (1993). "Common belief and the theory of games with perfect information". *Journal of Economic Theory*, **59**(2), 257–274.

[71] A. Rubinstein (1991). "Comments on the interpretation of game theory". *Econometrica*, **59**(4), 909–924.

[72] M. Saez-Marti, J. W. Weibull (2005). "Discounting and altruism to future decision-makers". *Journal of Economic theory*, **122**(2), 254–266.

[73] F. Schuhmacher (1999). "Proper rationalizability and backward induction". *International Journal of Game Theory*, **28**(4), 599–615.

[74] R. Selten (1975). "Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games". *International Journal of Game Theory*, **4**(1), 25–55.

[75] L. S. Shapley (1951). "Notes on the n-person game – II: the value of an n-person game". Working Paper. The RAND Corporation.

[76] M. Shimoji, J. Watson (1998). "Conditional dominance, rationalizability, and game forms". *Journal of Economic Theory*, **83**(2), 161–195.

[77] Y. Shoham, K. Leyton-Brown (2008). *Multiagent Systems: Algorithmic, Game-Theoretic and Logical Foundations*. Cambridge University Press.

[78] K. Sladky (2018). "Risk sensitive average optimality in Markov decision processes". *Kybernetika*, **54**(6), 1218–1230.

[79] H. F. von Stackelberg (1934). *Marktform und Gleichgewicht*. J. Springer.

[80] R. K. Sundaram (1996). *A First Course in Optimization Theory*. Cambridge University Press.

[81] S. Tadelis (2013). *Game Theory*. Princeton University Press.

[82] T. C. Tan, S. R. C. Werlang (1988). "The Bayesian foundations of solution concepts of games". *Journal of Economic Theory*, **45**(2), 370–391.

[83] F. Thompson (1952). "Equivalence of games in extensive form". Working paper.

[84] E. van Damme (1984). "A relation between perfect equilibria in extensive form games and proper equilibria in normal form games". *International Journal of Game Theory*, **13**(1), 1–13.

[85] E. van Damme (1989). "Stable equilibria and forward induction". *Journal of Economic Theory*, **48**(2), 476–496.

[86] E. van Damme (1991). *Stability and Perfection of Nash Equilibria*. Springer-Verlag.

[87] A. J. Vermeulen, M. J. M. Jansen (1996). "Are strictly perfect equilibria proper? A counterexample". *Journal of Optimization Theory and Applications*, **90**(1), 225–230.

[88] J. von Neumann (1928) "Zur Theorie der Gesellschaftsspiele". *Mathematische Annalen*, **100**, 295–320.

[89] J. von Neumann, O. Morgenstern (1953). *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press.

[90] W. Wen-Tsun, J. Jia-He (1962). "Essential equilibrium points of n-person non-cooperative games", *Scientia Sinica*, **11**, 1307–1322.

[91] Ł. Woźny, J. Growiec (2012). "Intergenerational interactions in human capital accumulation". *The Berkeley Electronic Journal of Theoretical Economics*, **12**(1).

[92] E. Zeidler (1986). *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-Point Theorems*. Springer.

[93] E. Zermelo (1913). "Über eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels". *Proceedings of the Fifth International Congress of Mathematicians*, 501–504. Cambridge University Press.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00082
Matrícula: 2123802873

Algunos Resultados para Juegos Dinámicos en Teoría de Juegos Clásica y Epistémica.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 21 del mes de abril del año 2023 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. JOSE RAUL MONTES DE OCA MACHORRO
DR. ANDREY NOVIKOV
DR. EVGUENI ILICH GORDIENKO
DR. VICTOR HUGO VAZQUEZ GUEVARA
DR. HUGO ADAN CRUZ SUAREZ

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMATICAS)

DE: RUBEN BECERRIL BORJA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

RUBEN BECERRIL BORJA
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISION DE CBI

DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. JOSE RAUL MONTES DE OCA MACHORRO

VOCAL

DR. ANDREY NOVIKOV

VOCAL

DR. EVGUENI ILICH GORDIENKO

VOCAL

DR. VICTOR HUGO VAZQUEZ GUEVARA

SECRETARIO

DR. HUGO ADAN CRUZ SUAREZ