

Universidad Autónoma Metropolitana – Iztapalapa
División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Departamento de Matemáticas

Dinámica Simbólica en la
Ecuación de Fitzhugh–Nagumo

Tesis que presenta
Mat. Leonsio Ruiz Moreno
para obtener el grado de
Maestro en Ciencias (Matemáticas)

Director de Tesis

Dr. Joaquín Delgado Fernández



Julio del 2001

Índice General

1	Dinámica simbólica	8
1.1	La herradura de Smale	8
1.1.1	Dinámica simbólica para un alfabeto finito	17
1.1.2	Dinámica simbólica sobre el conjunto invariante	25
1.1.3	Las condiciones de Conley-Moser	28
1.1.4	Sectores tangentes	35
1.2	El teorema de Silnikov	38
2	Ondas viajeras en la ecuación de Nagumo	46
2.1	Reducción de la ecuación de Fitzugh-Nagumo a una ecuación diferencial ordinaria	47
2.2	Estudio de la ecuación de Nagumo	47
3	Dinámica simbólica de ondas viajeras de la ecuación de FN	57
3.1	Existencia de una onda viajera homoclínica en las ecuaciones de Fitzugh-Nagumo	57
3.2	Análisis lineal	58
3.2.1	Definición de los conjuntos invariantes de escape	59
3.2.2	El teorema principal	60
3.3	Condiciones para la existencia de un shift de Bernoulli	79
3.4	Conclusiones y comentarios	87
4	Estado del arte	88

Índice de Figuras

1.1	Acción de f sobre D	8
1.2	Bandas horizontales y verticales.	9
1.3	Acción de f^{-1} sobre D	10
1.4	11
1.5	El conjunto $D \cap f(D)$	12
1.6	El conjunto $D \cap f(D) \cap f^2(D)$	12
1.7	El conjunto $D \cap f(D) \cap f^2(D) \cap f^3(D)$	13
1.8	El conjunto $D \cap f^{-1}(D)$	14
1.9	El conjunto $D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D)$	14
1.10	El conjunto $D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D) \cap f^{-3}(D)$	15
1.11	27
1.12	Curva horizontal y curva vertical.	28
1.13	Definición de bandas horizontales y verticales.	29
1.14	Continuidad de la aplicación ϕ	34
1.15	Definición de los dominios $H_{ij} = f^{-1}(V_{ji})$	36
1.16	Propiedad A3 de los sectores estables e inestables.	37
1.17	Estructura local alrededor del punto de equilibrio.	38
1.18	Mapeo de Poincaré cerca de la órbita homoclínica.	39
1.19	40
1.20	40
1.21	Imágenes de las fronteras del rectángulo R_k	42
1.22	La aplicación de Poincaré.	44
1.23	Dos posibilidades para $P(R_k) \cap R_k$	45
2.1	Gráficas de la función f y su integral F	48
2.2	Retrato fase $\theta = 0$, $\epsilon = 0$, $w = 0$	49
2.3	Ondas viajeras de la ecuación de Nagumo.	49
2.4	Retratos fase variando θ y la conexión heteroclínica para θ^*	50
2.5	Comportamiento de las ondas viajeras para las soluciones en (2.7).	51
2.6	La rama inestable en el cuadrante positivo.	52
2.7	55
2.8	55
3.1	62
3.2	64

3.3	68
3.4	68
3.5	69
3.6	69
3.7	70
3.8	71
3.9	71
3.10	72
3.11	72
3.12	73
3.13	74
3.14	75
3.15	77

Dedicatoria

Especialmente a:
Mi esposa Coyito.
Mi hija Grecia.

A mis Padres.

Francisco Ruiz Gómez
Herminia Moreno López.

Agradecimientos

Al CONACYT por su apoyo a través del otorgamiento de la beca que hizo posible mis estudios de maestría.

A mi asesor, Dr. Joaquín Delgado Fernández por haberme dado la oportunidad de trabajar con él, por su paciencia, por su valiosa ayuda y el tiempo que destinó al presente trabajo.

Al Lic. Alberto Flores Urbina y Directivos del Instituto Tecnológico Superior De Cajeme los cuales me brindaron su apoyo en la culminación de este proyecto.

Al Dr. Fernando Verduzco G. por el tiempo que destinó y la gran disposición que siempre mostró para el enriquecimiento del presente trabajo.

A mi esposa Socorro Del Rivero Jiménez(Coyito) por la gran ayuda que me brindó, así como la motivación que siempre he tenido de ella para mi superación.

Al Dr. Vicente Carrión Miranda y su familia por toda la colaboración brindada.
A la Dra. Martha Alvarez Ramirez por toda la colaboración brindada.

Introducción

Las ecuaciones de Hodgkin y Huxley modelan la transmisión de impulsos nerviosos en el axón de las células nerviosas (neuronas). Una simplificación de las ecuaciones obtenidas por Hodgkin y Huxley fueron obtenidas por Nagumo [25]. De manera simplificada, las ecuaciones que describen la transmisión de impulsos eléctricos dependen de ciertos potenciales iónicos (sodio, potasio, calcio, etc.) y el voltaje como función del tiempo de la posición a lo largo del axón satisface una ecuación de difusión, acoplada de manera no lineal con la corriente a través de una relación corriente voltaje no lineal (de manera similar a las ecuación de Van der Pol que describe a cierto tipo de diodos). La no linealidad de esta relación se ha modelado de distintas maneras: con funciones lineales a trozos, o a través de una cúbica. En la ecuación de Nagumo la transmisión se modela por una ecuación de reacción-difusión con una relación cúbica. La ecuación de Nagumo fue uno de los primeros éxitos de la dinámica no lineal para describir fenómenos típicos en la transmisión de impulsos nerviosos, como la existencia de potenciales de umbral, es decir se necesita un valor mínimo de los parámetros para desencadenar la transmisión, o la existencia de pulsos periódicos.

Las ecuaciones de Fitzhugh-Nagumo (FN) constituyen un modelo más completo, y se obtienen acoplando la ecuación de Nagumo linealmente con otra variable relacionada con la corriente del estímulo externo.

Experimentalmente (véase [30]) se observa un número finito de pulsos.

En el axón gigante del calamar, la extensión se puede suponer infinita (en comparación con el espesor de la membrana) y debido a que las soluciones de interés son pulsos que se propagan a lo largo del axón, las ecuaciones parciales se pueden reducir a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias donde interesa determinar las soluciones que sean acotadas. Una clase de este tipo de soluciones son las órbitas doblemente asintóticas a puntos críticos (órbitas heteroclínicas u homoclínicas), soluciones periódicas y en general soluciones acotadas.

Varios autores han aportado al estudio de las ecuaciones de Fitzhugh-Nagumo, particularmente Nagumo [op. cit]; Conley [5], existencia de órbitas homoclínicas y periódicas; Hastings [16], existencia de órbitas periódicas múltiples; McKean [23], Feroe [11], existencia y estabilidad de pulsos múltiples; Rauch y Smoller [26], análisis cualitativo de las ecuaciones de FN; Rinzel [27], modelación de las ecuaciones del axón; Flores [13], estabilidad lineal y cuencas de atracción, etc.

Este trabajo revisa uno de los resultados más relevantes en esta línea de investigación: La existencia de pulsos múltiples, y “caos”. La monografía es un trabajo autocontenido de los elementos necesarios para entender el resultado principal debido a Hastings.

Primeramente el concepto de “caos” se formaliza a través de la construcción del mapeo de la herradura de Smale, y su dinámica simbólica asociada. Se prueba que la herradura es conjugada a un shift de Bernoulli en un alfabeto doblemente infinito.

En la descripción de la dinámica de las ecuaciones de FN juega un papel muy importante el teorema de Silnikov, el cual garantiza la existencia de un conjunto invariante

topológicamente conjugado a una herradura, bajo ciertas condiciones en el espectro del sistema lineal que garantiza un estructura local de silla-foco, más la existencia de una órbita homoclínica.

El presente trabajo describe los resultados obtenidos por Hastings [16] donde se prueba que existen valores de los parámetros para los cuales se pueden satisfacer las dos condiciones que permiten aplicar el teorema de Silnikov: la existencia de una órbita homoclínica y los valores propios de la linealización en el único punto crítico con una estructura de silla-foco, dando como consecuencia particular la existencia de pulsos múltiples en la ecuación de FN.

Capítulo 1

Dinámica simbólica

En este capítulo se define el mapeo de la herradura de Smale sobre un rectángulo D en una combinación geométrica analítica. Además, se muestra que D contiene un conjunto invariante donde el mapeo es conjugado al Shift de Bernoulli en un alfabeto doblemente infinito binario, se dará la construcción de éste conjunto invariante en detalle ya que es de fundamental importancia para el presente trabajo.

1.1 La herradura de Smale

Considérese el cuadrado

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

y sean $0 < \lambda < 1/2$, $\mu > 2$.

Definamos el mapeo de la herradura de Smale $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$, de la siguiente manera: f contrae en la dirección de las x por un factor λ , expande en la dirección de las y por un factor μ y dobla D colocándolo de nuevo en sí mismo (ver Figura 1.1).

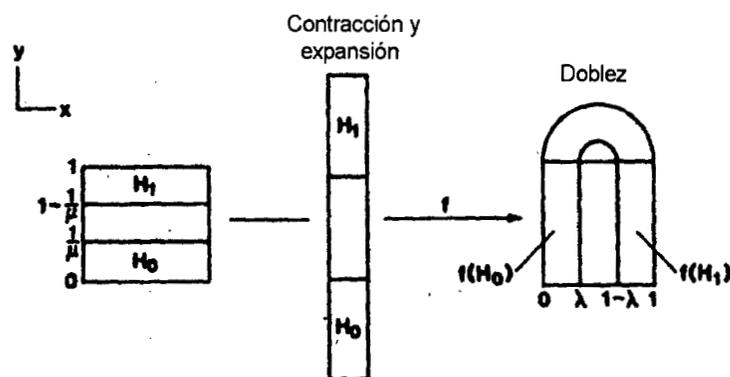


Figura 1.1: Acción de f sobre D .

Nótese que la porción del doblés queda fuera del cuadrado D , así que, restringido

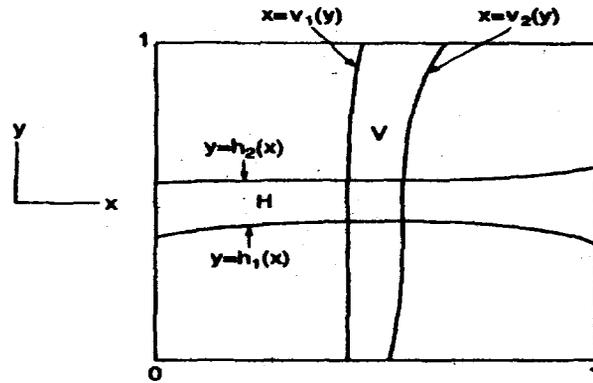


Figura 1.2: Bandas horizontales y verticales.

a $D \cap f^{-1}(D)$ al mapeo es lineal, pero es importante notar el carácter globalmente no lineal del mapeo f , reflejado únicamente através del doblés.

Definamos f directamente sobre los rectángulos horizontales

$$\begin{aligned} H_0 &= [0, 1] \times [0, 1/\mu] \\ H_1 &= [0, 1] \times [1 - 1/\mu, 1] \end{aligned}$$

como sigue

$$\begin{aligned} H_0 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ H_1 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De la definición de f se obtienen como imágenes bajo f de H_0 y H_1 , los siguientes rectángulos verticales

$$\begin{aligned} f(H_0) &= V_0 = [0, \lambda] \times [0, 1] \\ f(H_1) &= V_1 = [1 - \lambda, 1] \times [0, 1]. \end{aligned}$$

NOTA: Por un rectángulo “vertical”, entenderemos un rectángulo cuyos lados paralelos al eje y intersectan las fronteras horizontales de D ; similarmente un rectángulo se dice “horizontal”, si los lados paralelos al eje x , intersectan las fronteras verticales de D . Los conceptos de rectángulo “vertical” y “horizontal” pueden generalizarse a los de banda “vertical” y “horizontal”, respectivamente (ver sección 1.1.3) inclusive para dos o más dimensiones; los cuales tienen sentido aún para un mapeo f continuo. Se pide como hipótesis adicional que la aplicación f mande rectángulos horizontales en verticales respetando las fronteras (ver figura 1.2). Análogamente se define una “línea vertical” y una “línea horizontal”.

La aplicación f en H_0 consiste en una contracción por un factor λ en la dirección x , junto con una expansión en la dirección y por un factor μ . La aplicación f en H_1 se da

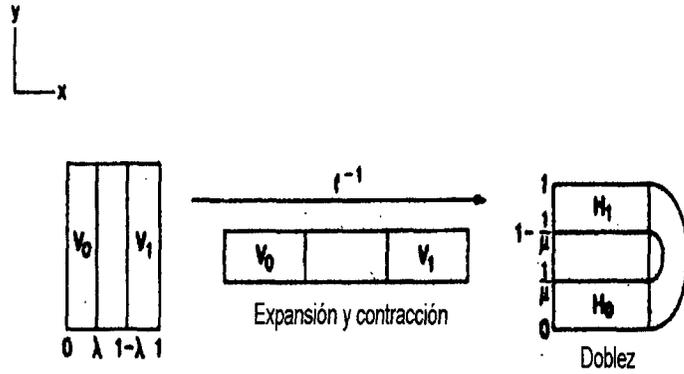


Figura 1.3: Acción de f^{-1} sobre D .

de la siguiente forma: una contracción por un factor λ en la dirección x , una expansión en la dirección y por un factor μ , seguido por una rotación de 180° y por último una traslación de una unidad en la dirección de las x y μ -unidades en la dirección de las y . Por otro lado f^{-1} actúa sobre D (ver figura 1.3) llevando los rectángulos verticales V_0 y V_1 a los rectángulos horizontales H_0 y H_1 respectivamente.

Obsérvese (por definición de f) que las fronteras horizontales y verticales de H_0 y H_1 son mapeadas en fronteras horizontales y verticales de V_0 y V_1 respectivamente. De ésta observación se puede enunciar el siguiente lema que será útil posteriormente.

Lema 1. (a) *Supóngase que V es un rectángulo vertical; entonces $f(V) \cap D$ consiste de dos rectángulos verticales uno contenido en V_0 y el otro en V_1 con el ancho de cada uno igual al factor λ -veces el ancho de V .*

(b) *Supóngase que H es un rectángulo horizontal; entonces $f^{-1}(H) \cap D$ consiste de dos rectángulos horizontales uno contenido en H_0 y el otro en H_1 con el ancho de cada uno igual al factor $1/\mu$ -veces el ancho de H .*

Demostración. Se probará solo (a). La prueba de (b) es análoga. Sea V un rectángulo vertical, entonces V intersecta las fronteras horizontales de H_0 y H_1 ; de aquí que $f(V) \cap D$ consiste de dos rectángulos verticales uno en V_0 y el otro en V_1 e intersecta las fronteras de D (ver figura 1.4). La contracción del ancho de cada uno de estos rectángulos se sigue del hecho de que en la dirección de las x es contraído uniformemente por un factor λ en H_0 y H_1 .

Construcción del conjunto invariante

Sea Λ el conjunto de todos los puntos que permanecen en D bajo todas las posibles iteraciones de f , esto es,

$$\Lambda = \{\dots \cap f^{-n}(D) \dots \cap f^{-1}(D) \cap D \cap f(D) \dots \cap f^n(D) \cap \dots\} = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(D)$$

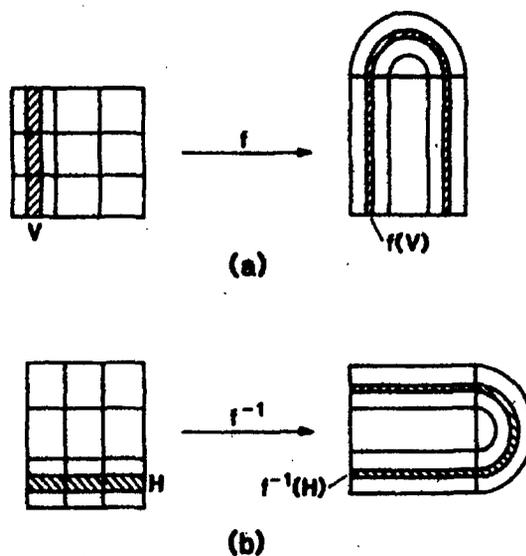


Figura 1.4:

Se dará una construcción (geométrica) detallada de Λ de una manera inductiva. Se construirán separadamente los conjuntos:

$$\Lambda_{\infty} = \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D) \quad \text{y} \quad \Lambda_{-\infty} = \bigcap_{n=-\infty}^0 f^n(D),$$

luego tomaremos su intersección para obtener Λ .

Construcción del conjunto Λ_{∞}

Para dar esta construcción es necesario llevar un orden en el proceso inductivo en cada paso, para lo cual se introducirá el siguiente conjunto de índices

$$s_i \in S = \{0, 1\} \quad \text{para } i \in \mathbb{Z}$$

Paso 1. $D \cap f(D)$: Este conjunto consiste de dos rectángulos verticales V_0 y V_1 los cuales denotaremos como:

$$D \cap f(D) = \bigcup_{s_{-1} \in S} V_{s_{-1}} = \{p \in D \mid p \in V_{s_{-1}}, s_{-1} \in S\} \quad (1.1)$$

Donde $V_{s_{-1}}$ es un rectángulo vertical de ancho igual a λ (ver figura 1.5).

Paso 2. $D \cap f(D) \cap f^2(D)$: Como f es inyectiva entonces $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$, luego $D \cap f(D) \cap f^2(D) = D \cap f(D \cap f(D))$. Así que por el Lema 1 se tiene que

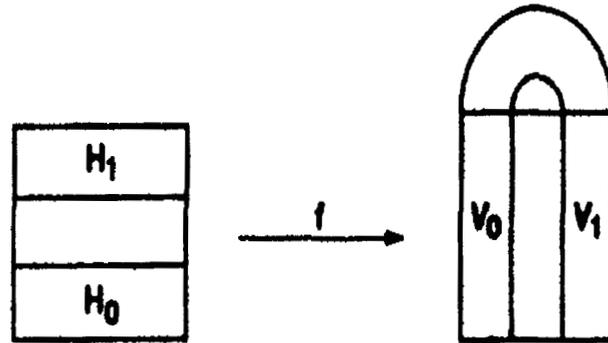


Figura 1.5: El conjunto $D \cap f(D)$.

$D \cap f(D) \cap f^2(D)$ consiste en cuatro rectángulos verticales, dos contenidos en V_0 y dos en V_1 cada uno de ancho igual a λ^2 (ver figura 1.6). Denotaremos a este conjunto como:

$$\begin{aligned} D \cap f(D) \cap f^2(D) &= \bigcup_{s_{-i} \in S} (f(V_{s_{-2}}) \cap V_{s_{-1}}) \equiv \bigcup_{s_{-i} \in S} V_{s_{-1}, s_{-2}} \\ &= \{p \in D \mid p \in V_{s_{-1}}, f^{-1}(p) \in V_{s_{-2}}, s_{-i} \in S, i = 1, 2\} \quad (1.2) \end{aligned}$$

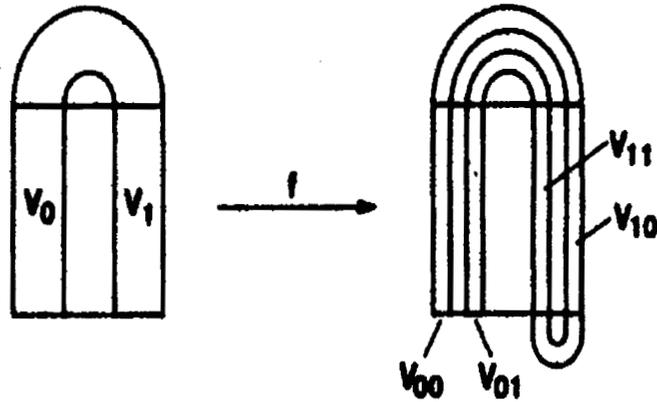


Figura 1.6: El conjunto $D \cap f(D) \cap f^2(D)$.

Paso 3. $D \cap f(D) \cap f^2(D) \cap f^3(D)$: Análogamente al paso 2, podemos ver que $D \cap f(D) \cap f^2(D) \cap f^3(D) = D \cap f(D \cap f(D) \cap f^2(D))$. Este conjunto consiste de ocho rectángulos verticales, cuatro contenidos en V_0 y cuatro en V_1 , cada uno de ancho igual

a λ^3 (ver Figura 1.7). A este conjunto lo denotaremos como:

$$\begin{aligned}
 & D \cap f(D) \cap f^2(D) \cap f^3(D) \\
 &= \bigcup_{s_{-i} \in S} (f(V_{s_{-2}s_{-3}}) \cap V_{s_{-1}}) \equiv \bigcup_{s_{-i} \in S} V_{s_{-1}s_{-2}s_{-3}} \\
 &= \{p \in D \mid p \in V_{s_{-1}}, f^{-1}(p) \in V_{s_{-2}}, f^{-2}(p) \in V_{s_{-3}}, s_{-i} \in S, i = 1, 2, 3\} \quad (1.3)
 \end{aligned}$$

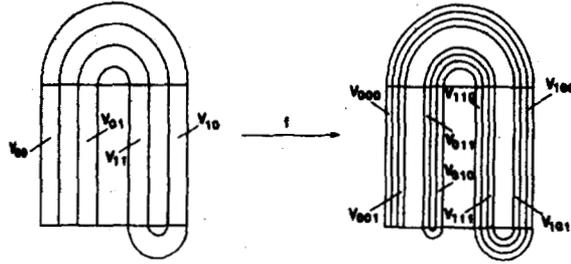


Figura 1.7: El conjunto $D \cap f(D) \cap f^2(D) \cap f^3(D)$.

Si siguiendo este esquema se puede ver que en el k -ésimo paso,

$$\begin{aligned}
 D \cap f(D) \cap \dots \cap f^k(D) &= \bigcup_{s_{-i} \in S} (f(V_{s_{-2}\dots s_{-k}}) \cap V_{s_{-1}}) \equiv \bigcup_{s_{-i} \in S} V_{s_{-1}s_{-2}\dots s_{-k}} \\
 &= \{p \in D \mid f^{-i+1}(p) \in V_{s_{-i}}, s_{-i} \in S, i = 1, 2, \dots, k\} \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

y este conjunto consiste de 2^k rectángulos verticales cada uno de ancho igual λ^k .

Por el teorema de Heine-Borel, la intersección $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D)$ es no vacía al ser intersección de conjuntos compactos anidados. Además como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda^k = 0 \quad (0 < \lambda < 1/2)$$

el ancho de los rectángulos tiende a cero, luego la intersección es una línea vertical. Por lo tanto, el conjunto

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{\infty} &= \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D) = \bigcup_{s_{-i} \in S} (f(V_{s_{-2}\dots s_{-k}\dots}) \cap V_{s_{-1}}) \equiv \bigcup_{s_{-i} \in S} V_{s_{-1}\dots s_{-k}\dots} \\
 &= \{p \in D \mid f^{-i+1}(p) \in V_{s_{-i}}, s_{-i} \in S, i = 1, 2, \dots, k, \dots\} \quad (1.5)
 \end{aligned}$$

Nótese que en el k -ésimo paso se obtienen 2^k rectángulos verticales cada uno de los cuales se puede etiquetar de manera única, como $V_{s_{-1}s_{-2}\dots}$; así que cada línea vertical del conjunto $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D)$ puede ser etiquetado de manera única por una sucesión infinita de 0's y 1's.

Construcción del conjunto $\Lambda_{-\infty}$

Paso 1. $D \cap f^{-1}(D)$. Este conjunto consiste de dos rectángulos horizontales H_0 y H_1 los cuales denotaremos como:

$$D \cap f^{-1}(D) = \bigcup_{s_0 \in S} H_{s_0} = \{p \in D \mid p \in H_{s_0}, s_0 \in S\} \quad (1.6)$$

donde, H_{s_0} es un rectángulo horizontal de ancho igual a $1/\mu$ (ver figura 1.8).

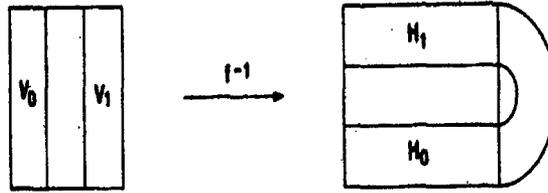


Figura 1.8: El conjunto $D \cap f^{-1}(D)$.

Paso 2. $D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D)$: No es difícil ver que $D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D) = D \cap f^{-1}(D \cap f^{-1}(D))$. Dado que H_0 y H_1 intersectan ambas fronteras verticales de V_0 y V_1 por el Lema 1 tenemos que este conjunto consiste de cuatro rectángulos horizontales dos contenidos en H_0 y dos en H_1 , cada uno de ancho igual a $1/\mu^2$ (ver figura 1.9). A este conjunto lo denotaremos como:

$$\begin{aligned} D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D) &= \bigcup_{s_i \in S} (f^{-1}(H_{s_1}) \cap H_{s_0}) \equiv \bigcup_{s_i \in S} H_{s_0 s_1} \\ &= \{p \in D \mid p \in H_{s_0}, f(p) \in H_{s_1}, s_i \in S, i = 0, 1\} \end{aligned} \quad (1.7)$$

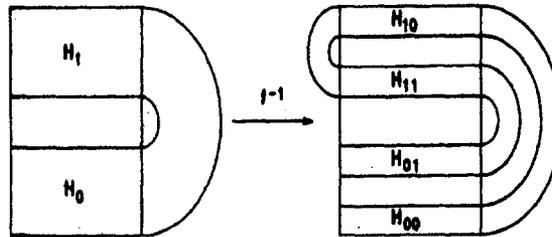


Figura 1.9: El conjunto $D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D)$.

Paso 3. $D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D) \cap f^{-3}(D)$: De igual forma que el paso 2 podemos ver que

$$D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D) \cap f^{-3}(D) = D \cap f^{-1}(D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D))$$

Este conjunto consiste de ocho rectángulos horizontales; cuatro contenidos en H_0 y cuatro en H_1 , cada uno de ancho igual a $1/\mu^3$ (ver figura 1.10). A este conjunto lo denotaremos como:

$$\begin{aligned} D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D) \cap f^{-3}(D) &= \bigcup_{i \in S} (f^{-1}(H_{s_1 s_2}) \cap H_{s_0}) \equiv \bigcup_{s_i \in S} H_{s_0 s_1 s_2} \\ &= \{p \in D \mid p \in H_{s_0}, f(p) \in H_{s_1}, f^2(p) \in H_{s_2}, s_i \in S, i = 0, 1, 2\} \end{aligned} \quad (1.8)$$

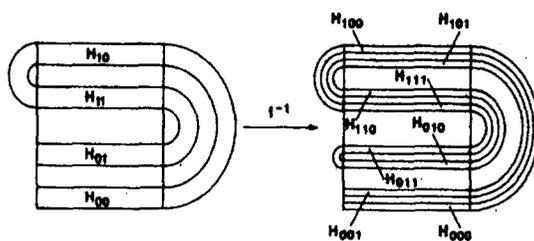


Figura 1.10: El conjunto $D \cap f^{-1}(D) \cap f^{-2}(D) \cap f^{-3}(D)$.

Siguiendo este esquema se puede ver que el k -ésimo paso

$$\begin{aligned} D \cap f^{-1}(D) \cdots \cap f^{-k}(D) &= \bigcup_{s_i \in S} (f^{-1}(H_{s_1 \dots s_{k-1}}) \cap H_{s_0}) \equiv \bigcup_{s_i \in S} H_{s_0 \dots s_{k-1}} \\ &= \{p \in D \mid f^i(p) \in H_{s_i}, s_i \in S, i = 0, 1, 2, \dots, k-1\} \end{aligned} \quad (1.9)$$

consiste de 2^k rectángulos horizontales cada uno de ancho igual a $1/\mu^k$. Si tomamos el caso límite cuando $k \rightarrow \infty$, por el Teorema de Heine-Borel obtenemos un número infinito de líneas horizontales ya que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (1/\mu^k) = 0, \quad \mu > 2.$$

Por tanto hemos demostrado que

$$\begin{aligned} \Lambda_{-\infty} &= \bigcap_{n=-\infty}^0 f^n(D) = \bigcup_{s_i \in S, i=1,2,\dots} (f^{-1}(H_{s_1 \dots s_k}) \cap H_{s_0}) \equiv \bigcup_{s_i \in S, i=1,2,\dots} H_{s_0 \dots s_k \dots} \\ &= \{p \in D \mid f^i(p) \in H_{s_i}, s_i \in S, i = 0, 1, 2, \dots\}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

De igual forma que el caso anterior cada línea “rectángulo horizontal” puede ser etiquetado de manera única por una sucesión infinita de 0’s y 1’s. De aquí que

$$\Lambda = \Lambda_{-\infty} \cap \Lambda_{\infty} = \Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(D) = \left(\bigcap_{n=-\infty}^0 f^n(D) \right) \cap \left(\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D) \right) \quad (1.11)$$

consiste de un número infinito de puntos obtenidos por intersección de líneas verticales y horizontales.

Con esto podemos definir un mapeo ϕ del conjunto Λ al conjunto de las sucesiones bi-infinitas de 0's y 1's de la siguiente manera: Sea $p \in \Lambda$, entonces p es necesariamente la intersección de una línea vertical $V_{s_{-1}\dots s_{-k}\dots}$ y una línea horizontal $H_{s_0\dots s_k\dots}$, luego

$$\phi(p) = \dots s_{-k} \dots s_{-1} \cdot s_0 \dots s_k \dots$$

Note que el punto decimal separa a las sucesiones asociadas a la línea vertical de las sucesiones asociadas a la línea horizontal.

Por otro lado, como $f(H_{s_i}) = V_{s_i}$, entonces

$$V_{s_{-1}\dots s_{-k}\dots} = \{p \in D \mid f^{-i+1}(p) \in V_{s_{-i}}, i = 1, 2, \dots\}$$

se puede reescribir como

$$V_{s_{-1}\dots s_{-k}\dots} = \{p \in D \mid f^{-i}(p) \in H_{s_{-i}}, i = 1, 2, \dots\}$$

y

$$H_{s_0\dots s_k\dots} = \{p \in D \mid f^i(p) \in H_{s_i}, i = 0, 1, 2, \dots\}$$

de donde

$$p \in V_{s_{-1}\dots s_{-k}\dots} \cap H_{s_0\dots s_k\dots} \quad \text{si y solo si} \quad f^i(p) \in H_{s_i}, i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Además, dado que el punto decimal separa las iteraciones pasadas de las futuras se cumple la siguiente relación: Si

$$\begin{aligned} \phi(p) &= (\dots s_{-k} \dots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \dots s_k \dots) \quad \text{entonces} \\ \phi(f(p)) &= (\dots s_{-k} \dots s_0 \cdot s_1 \dots s_k \dots) \end{aligned}$$

esto es, $f(p)$ se obtiene de la sucesión asociada con p corriendo el punto decimal un lugar a la derecha.

Si definimos la aplicación σ como

$$\sigma(\dots s_{-k} \dots s_{-1} \cdot s_0 \dots s_k \dots) = (\dots s_{-k} \dots s_{-1} s_0 \cdot s_1 \dots s_k \dots) \quad (1.12)$$

es decir $\sigma(s)_k = s_{k+1}$, se tiene entonces la relación $\phi(f(p)) = \sigma(\phi(p))$ de donde se sigue que

$$\phi(f^k(p)) = \sigma^k(\phi(p)), \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

es decir, se tiene una relación directa entre las iteraciones de cualquier punto $p \in \Lambda$ bajo f y las iteraciones de las sucesiones de 0's y 1's asociada a p .

La aplicación definida en (1.12) se llama *el corrimiento de Bernoulli* en un alfabeto doblemente infinito de dos símbolos. Refiriéndose éste último término al alfabeto $S = \{0, 1\}$.

1.1.1 Dinámica simbólica para un alfabeto finito

La dinámica simbólica consiste en caracterizar la estructura de las órbitas de un sistema dinámico por medio de una sucesión de símbolos. En esta sección se desarrollará esta teoría en el caso en que el espacio de sucesiones de símbolos es $S = \{0, 1\}$. Para el caso $S = \{1, 2, \dots, N\}$ con $N \geq 2$ toda la teoría es válida y se desarrolla de una manera análoga al caso en que $S = \{0, 1\}$. Al final de la sección se describen algunas modificaciones para el caso general $S = \{1, 2, \dots, N\}$ y se analiza el caso $N = \infty$.

Sea $S = \{0, 1\}$ y Σ el espacio de sucesiones bi-infinitas de elementos de S , es decir, $s \in \Sigma$ si y sólo si se puede escribir en la forma:

$$\{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_n \cdots\} \quad \text{con } s_i \in S, \text{ para } i \in \mathbb{Z}. \quad (1.13)$$

Otra forma de describir a Σ es como el producto cartesiano bi-infinito de copias de S , esto es:

$$\Sigma = \dots S \times S \times S \times S \times \dots = \prod_{i=-\infty}^{\infty} S^i \quad \text{con } S^i = S \quad \forall i \in \mathbb{Z}. \quad (1.14)$$

Daremos a S una estructura de espacio métrico definiendo la métrica discreta en S , es decir

$$d(a, b) = |a - b| \quad \forall a, b \in S. \quad (1.15)$$

Proposición 1. *El conjunto S equipado con la métrica anterior es un espacio métrico compacto y totalmente desconexo.*

Demostración. Es claro que S es compacto. Es totalmente desconexo pues los únicos subconjuntos conexos $\{0\}$, $\{1\}$ consisten de un punto.

Definamos una métrica en Σ de la siguiente manera: Sean

$$\begin{aligned} s &= \{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_n \cdots\} \\ \bar{s} &= \{\cdots \bar{s}_{-n} \cdots \bar{s}_{-1} \cdot \bar{s}_0 \bar{s}_1 \cdots \bar{s}_n \cdots\} \end{aligned}$$

elementos de Σ . Definimos la distancia entre ellos como:

$$d(s, \bar{s}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|s_i - \bar{s}_i|}{2^{|i|}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\delta_i}{2^{|i|}}, \quad (1.16)$$

donde

$$\delta_i = \begin{cases} 1 & \text{cuando } s_i \neq \bar{s}_i, \\ 0 & \text{cuando } s_i = \bar{s}_i. \end{cases}$$

Verifiquemos que d es en efecto una métrica en Σ :

$$\begin{aligned}
 d(s, \bar{s}) &\geq 0 \quad \text{es obvio} \\
 d(s, \bar{s}) &= 0 \\
 &\iff |s_i - \bar{s}_i| = 0 \quad \forall i \\
 &\iff s = \bar{s} \\
 d(s, \bar{s}) &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|s_i - \bar{s}_i|}{2^{|i|}} \\
 &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|\bar{s}_i - s_i|}{2^{|i|}} \\
 &= d(\bar{s}, s)
 \end{aligned}$$

Finalmente, para ver la desigualdad del triángulo considere otra sucesión $\bar{\bar{s}}$ en Σ y aplique la desigualdad del triángulo en S ,

$$\begin{aligned}
 |s_i - \bar{\bar{s}}_i| &\leq |s_i - \bar{s}_i| + |\bar{s}_i - \bar{\bar{s}}_i| \quad \text{luego} \\
 \frac{|s_i - \bar{\bar{s}}_i|}{2^{|i|}} &\leq \frac{|s_i - \bar{s}_i|}{2^{|i|}} + \frac{|\bar{s}_i - \bar{\bar{s}}_i|}{2^{|i|}} \\
 \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|s_i - \bar{\bar{s}}_i|}{2^{|i|}} &\leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|s_i - \bar{s}_i|}{2^{|i|}} + \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|\bar{s}_i - \bar{\bar{s}}_i|}{2^{|i|}}
 \end{aligned}$$

por tanto $d(s, \bar{\bar{s}}) \leq d(s, \bar{s}) + d(\bar{s}, \bar{\bar{s}})$.

El siguiente resultado nos permite determinar cuando dos sucesiones de símbolos son “cercanas”.

Lema 2. Para $s, \bar{s} \in \Sigma$.

(a) Supóngase que $d(s, \bar{s}) < \frac{1}{2^M}$, entonces $s_i = \bar{s}_i \quad \forall |i| \leq M$. (b) Supóngase que $s_i = \bar{s}_i \quad \forall |i| \leq M$, entonces $d(s, \bar{s}) \leq \frac{1}{2^{M-1}}$

Demostración. (a) La prueba es por contradicción. Si $s_j \neq \bar{s}_j$ para algún $|j| \leq M$, entonces existe un término en la suma de $d(s, \bar{s})$ de la forma

$$\frac{|s_j - \bar{s}_j|}{2^{|j|}}$$

pero

$$|s_j - \bar{s}_j| = 1$$

y cada término en la suma es nonegativo, asíque

$$d(s, \bar{s}) \geq \frac{|s_j - \bar{s}_j|}{2^{|j|}} = \frac{1}{2^{|j|}} \geq \frac{1}{2^M}$$

lo cual contradice la hipótesis de (a).

(b) Si $s_i = \bar{s}_i \quad \forall |i| \leq M$, entonces

$$d(s, \bar{s}) = \sum_{i=-\infty}^{i=-M-1} \frac{|s_i - \bar{s}_i|}{2^{|i|}} + \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{|s_i - \bar{s}_i|}{2^{|i|}}$$

Pero $|s_i - \bar{s}_i| \leq 1 \quad \forall i$, luego

$$\begin{aligned} d(s, \bar{s}) &\leq \sum_{i=-\infty}^{i=-M-1} \frac{1}{2^{|i|}} + \sum_{i=M+1}^{\infty} \frac{1}{2^{|i|}} \\ &= \frac{1}{2^{M-1}}. \end{aligned}$$

Nótese que dos sucesiones de símbolos son “cercanas” si coinciden en un bloque central grande. \square

Definamos ahora el concepto de vecindad para puntos en Σ . Sea \bar{s} un elemento dado de Σ

$$\bar{s} = \{\cdots \bar{s}_{-n} \cdots \bar{s}_{-1} \bar{s}_0 \bar{s}_1 \cdots \bar{s}_n \cdots\}$$

y un número real positivo $\epsilon > 0$. Una “ ϵ -vecindad” de \bar{s} es el conjunto

$$\{s \in \Sigma \mid d(s, \bar{s}) < \epsilon\}$$

Por el lema 2, dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar un entero positivo $M = M(\epsilon)$ tal que $d(s, \bar{s}) < \epsilon$ implique $s_i = \bar{s}_i, \forall |i| \leq M$. Se denotará una ϵ -vecindad de un $\bar{s} \in \Sigma$ como sigue:

$$\mathcal{N}^{M(\epsilon)}(\bar{s}) = \{s \in \Sigma \mid s_i = \bar{s}_i \forall |i| \leq M\}. \quad (1.17)$$

Definición 1. Un conjunto P se dice perfecto si es cerrado y todo punto $p \in P$ es un punto límite de P .

Teorema 1. Todo conjunto perfecto en un espacio completo tiene al menos la cardinalidad del continuo.

Demostración. Ver [19]

Proposición 2. El espacio Σ equipado con la métrica (1.16) es:

- (a) Compacto
- (b) Totalmente desconexo
- (c) Perfecto.

Demostración. (a) Dado que S es compacto, por el teorema de Tychonov Σ es compacto

(b) Esto se sigue del hecho de que S es totalmente desconexo y de que el producto de espacios totalmente desconexos es totalmente desconexo.

(c) Como Σ es compacto, es cerrado. Ahora, sea $\bar{s} \in \Sigma$, debemos de probar que \bar{s} es un punto límite de Σ , esto es, toda vecindad de \bar{s} contiene un punto $s \neq \bar{s}$ con $s \in \Sigma$. Considérese una ϵ -vecindad de \bar{s}

$$\mathcal{N}^{M(\epsilon)}(\bar{s}) = \{s \in \Sigma \mid s_i = \bar{s}_i \quad \forall |i| \leq M\}$$

y sea

$$\hat{s} = \begin{cases} 1 & \text{cuando } \bar{s}_{M+1} = 0, \\ 0 & \text{cuando } \bar{s}_{M+1} = 1. \end{cases}$$

entonces la sucesión

$$\{\dots \bar{s}_{-M-2} \hat{s} \bar{s}_{-M} \dots \bar{s}_{-1} \bar{s}_0 \bar{s}_1 \dots \bar{s}_M \hat{s} \bar{s}_{M+2} \dots\}$$

está contenida en $\mathcal{N}^{M(\epsilon)}(\bar{s})$ y no es igual a \bar{s} por lo tanto Σ es perfecto.

Dado que la compacidad, conexidad y perfección son invariantes topológicos, es decir, son invariantes bajo homeomorfismos, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 3. *Sea Y un espacio topológico y supóngase que Σ y Y son homeomorfos, entonces Y es compacto, totalmente desconexo y perfecto.*

Notación: Las sucesiones bi-infinitas las cuales se repiten periódicamente después de alguna longitud fija se denotará por la sucesión de longitud finita con una barra encima, por ejemplo

$$\begin{aligned} \{\dots 101010.101010\dots\} & \text{ es denotado por } \{\overline{10.10}\} \\ \{\dots 010010.010010\dots\} & \text{ es denotado por } \{\overline{010.010}\}. \end{aligned}$$

La siguiente proposición concierne a algunas propiedades de σ .

Proposición 4. (a) $\sigma(\Sigma) = \Sigma$; (b) σ es continua.

Demostración. (a) Es obvio. (b) Sean $s, \bar{s} \in \Sigma$, se debe probar que dado $\epsilon > 0$ arbitrario, existe un $\delta > 0$ tal que $d(s, \bar{s}) < \delta$ implique $d(\sigma(s), \sigma(\bar{s})) < \epsilon$. Sea $\epsilon > 0$ dado y elijamos un entero M tal que $\frac{1}{2^{M-2}} < \epsilon$. Si tomamos $\delta = \frac{1}{2^M}$, por el lema 2 se tiene que $d(s, \bar{s}) < \frac{1}{2^M}$ implica $s_i = \bar{s}_i \quad \forall |i| \leq M$. De aquí que

$$\sigma(s)_i = \sigma(\bar{s})_i \quad \forall |i| \leq M - 1,$$

y por el mismo lema

$$d(\sigma(s), \sigma(\bar{s})) < \frac{1}{2^{M-2}} < \epsilon.$$

□

Obsérvese que el corrimiento de Bernoulli σ tiene precisamente dos puntos fijos, a saber, la sucesión cuyos elementos son todos ceros y la sucesión cuyos elementos son todos unos. Ahora consideremos la dinámica de σ en Σ . El término “dinámica de σ en Σ ” se refiere a las órbitas de puntos en Σ bajo iteración por σ . Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 2. *El corrimiento de Bernoulli σ tiene:*

- (a) *Una infinidad numerable de órbitas periódicas de todos los períodos.*
- (b) *Una infinidad no numerables de órbitas no periódicas.*
- (c) *Una órbita densa.*

Demostración. (a) Primero veamos que las órbitas de sucesiones las cuales se repiten periódicamente son periódicas bajo la iteración por σ , por ejemplo, para las sucesión $\{\overline{10.10}\}$ se tiene

$$\begin{aligned}\sigma\{\overline{10.10}\} &= \{\overline{01.01}\} \\ \sigma\{\overline{01.01}\} &= \{\overline{10.10}\} \\ \text{Así, } \sigma^2\{\overline{10.10}\} &= \{\overline{10.10}\}\end{aligned}$$

Por lo tanto la órbita $\{\overline{10.10}\}$ es una órbita de período 2 bajo σ . En general:

$$\begin{aligned}\text{si } s &= \{\overline{s_0s_1 \cdots s_{k-1}.s_0s_1 \cdots s_{k-1}}\} \\ \text{entonces } \sigma(s) &= \{\overline{s_1s_2 \cdots s_{k-1}s_0.s_1s_2 \cdots s_{k-1}s_0}\} \\ \sigma^2(s) &= \{\overline{s_2s_3 \cdots s_{k-1}s_0s_1.s_2 \cdots s_0s_1}\} \\ &\vdots \\ \sigma^k(s) &= \{\overline{s_0s_1 \cdots s_{k-1}.s_0s_1 \cdots s_{k-1}}\}.\end{aligned}$$

Por lo tanto la sucesión de órbitas de repetición periódicas de período k corresponden a órbitas de σ de período k . Además, dado cualquier k fijo el número de sucesiones que tienen bloques de longitud k que se repiten periódicamente es finito, así que, σ tiene una infinidad numerable de órbitas periódicas teniendo todos los períodos posibles, por ejemplo,

$$\begin{aligned}\text{Periodo 1} &: \{\overline{0.0}\} \quad \{\overline{1.1}\} \\ \text{Periodo 2} &: \{\overline{10.10}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{01.01}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{10.10}\} \\ &: \{\overline{01.01}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{10.10}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{01.01}\} \\ \text{Periodo 3} &: \{\overline{001.001}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{010.010}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{100.100}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{001.001}\} \\ &: \{\overline{010.010}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{100.100}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{001.001}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{010.010}\} \\ &: \{\overline{100.100}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{001.001}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{010.010}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{100.100}\} \\ &: \{\overline{011.011}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{110.110}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{101.101}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{011.011}\} \\ &: \{\overline{101.101}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{011.011}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{110.110}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{101.101}\} \\ &: \{\overline{110.110}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{101.101}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{011.011}\} \xrightarrow{\sigma} \{\overline{110.110}\} \\ \dots &: \dots\end{aligned}$$

En general existen $k!$ órbitas periódicas de período k que corresponden al número posible de permutaciones del bloque a la derecha del punto decimal, $.s_0s_1 \cdots s_{k-1}$.

(b) Dada una sucesión bi-infinita de 0's y 1's podemos asociarle una sucesión infinita de 0's y 1's por la siguiente regla:

$$\{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1}.s_0 \cdots s_n \cdots\} \longrightarrow \{.s_0s_1s_{-1}s_2s_{-2} \cdots\}$$

Además, todo número en el intervalo $[0, 1]$ se puede expresar en base 2 como una expansión binaria de 0's y 1's con los números irracionales correspondiendo a sucesiones no repetitivas, así tenemos una correspondencia uno-a-uno entre un conjunto no numerable de puntos y sucesiones no repetitivas de 0's y 1's. Las órbitas de estas sucesiones son las órbitas no periódicas bajo σ y hay un número no numerable de tales órbitas.

Otra manera de probar (b) es la siguiente: Dado que Σ es no numerable (ver teorema 1) si quitamos la infinidad numerable de sucesiones de símbolos periódicos, permanecerá un número no numerable de sucesiones de símbolos no periódicos y dado que las órbitas de sucesiones no periódicas nunca se repiten queda probado (b).

(c) Se debe probar que existe $s \in \Sigma$ cuya órbita es densa en Σ , es decir, para cualquier $s' \in \Sigma$ y $\epsilon > 0$ existe algún entero n tal que

$$d(s', \sigma^n(s)) < \epsilon$$

se dará la construcción de s directamente. Para esto construyamos primero todas las posibles sucesiones distintas de 0's y 1's de longitud k , por ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{Longitud 1} & : \{0\}, \{1\} \\ \text{Longitud 2} & : \{00\}, \{01\}, \{10\}, \{11\} \\ \text{Longitud 3} & : \{000\}, \{001\}, \{010\}, \{011\} \\ & : \{100\}, \{101\}, \{110\}, \{111\} \\ & \vdots \end{aligned}$$

En general existen 2^k sucesiones distintas de longitud k .

Ahora introduciremos un orden en la colección de sucesiones de 0's y 1's de la siguiente manera: Considérese dos sucesiones finitas de 0's y 1's

$$s = \{s_1 s_2 \cdots s_k\} \quad \text{y} \quad \bar{s} = \{\bar{s}_1 \bar{s}_2 \cdots \bar{s}_{k'}\}$$

diremos que $s < \bar{s}$, si $k < k'$ y en el caso que $k = k'$ diremos que $s < \bar{s}$ si $s_i < \bar{s}_i$ donde i es el primer entero tal que $s_i \neq \bar{s}_i$. Por ejemplo

$$\{0\} < \{1\}, \quad \{0\} < \{00\}, \quad \{01\} < \{11\}, \quad \text{etc.}$$

Este ordenamiento nos permite distinguir sucesiones diferentes que tienen la misma longitud. Así denotaremos las sucesiones de 0's y 1's de longitud k como sigue:

$$s_1^k < s_2^k < \cdots < s_{2^k}^k$$

donde el superíndice indica la longitud de la sucesión y el subíndice indica la sucesión en particular de longitud k , la cual está determinada de manera única por el orden anterior, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{Longitud 1} & : \{0\}_1^1 < \{1\}_2^1 \\ \text{Longitud 2} & : \{00\}_1^2 < \{01\}_2^2 < \{10\}_3^2 < \{11\}_4^2 \\ \text{Longitud 3} & : \{000\}_1^3 < \{001\}_2^3 < \{010\}_3^3 < \{011\}_4^3 < \\ & : \{100\}_5^3 < \{101\}_6^3 < \{110\}_7^3 < \{111\}_8^3 \\ & \vdots \end{aligned}$$

Esto nos da una manera de escribir nuestro candidato para una órbita densa, que es la siguiente:

$$s = \{\cdots s_8^3 s_6^3 s_4^3 s_2^3 s_4^2 s_2^2 s_2^1 s_1^1 s_1^2 s_3^3 s_3^3 s_5^3 s_7^3 \cdots\} \quad (1.18)$$

luego, s contiene todas las posibles sucesiones de 0's y 1's de cualquier longitud fija. Sólo nos resta probar que la órbita de s es densa en Σ . Sea s' un punto arbitrario de σ y considérese una ϵ -vecindad de s'

$$\mathcal{N}^{M(\epsilon)}(s') = \{s'' \in \Sigma \mid d(s', s'') < \epsilon\}$$

o lo que es lo mismo

$$\mathcal{N}^{M(\epsilon)}(s') = \{s'' \in \Sigma \mid s'_i = s''_i \quad \forall |i| \leq M\}.$$

Por construcción de s , la sucesión finita

$$\{s'_{-M} \cdots s'_{-1} s'_0 s'_1 \cdots s'_M\}$$

está contenida en alguna parte de s ; por tanto, debe existir algún entero \overline{M} tal que $d(\sigma^{\overline{M}}(s), s') < \epsilon$, por lo cual se puede concluir que la órbita s es densa en σ . \square

Acerca del caso en que $S = \{1, 2, \dots, N\}$

1. El espacio de sucesiones bi-infinitas se denotará como Σ^N .

$$\Sigma^N = \prod_{i=-\infty}^{\infty} S^i \text{ con } S^i = S \quad \forall i$$

2. Es conveniente definir la métrica en Σ^N como sigue. Si $s, \bar{s} \in \Sigma^N$, se define

$$d(s, \bar{s}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{|s_i - \bar{s}_i|}{2^{|i|}(1 + |s_i - \bar{s}_i|)} \quad (1.19)$$

3. El Lema 2 se modifica de la siguiente manera:

Lema 3. Para s, \bar{s} en Σ^N : (a) Supóngase que $d(s, \bar{s}) < \frac{1}{2^{M+1}}$, entonces $s_i = \bar{s}_i \quad \forall |i| \leq M$. (b) Supóngase que $s_i = \bar{s}_i, \quad \forall |i| \leq M$, entonces $d(s, \bar{s}) < \frac{1}{2^{M-1}}$.

4. Respecto a la estructura del corrimiento de Bernoulli actuando en Σ^N , permanecerán válidos la proposición 4 y el teorema 2.

Acerca del caso $N = \infty$

Considérese el caso en que el conjunto de elementos de S es infinito, esto es:

$$S = \{1, 2, \dots, N, \dots\}.$$

El espacio de sucesiones de símbolos de S se denotará por Σ^∞ . De la misma manera que el caso finito, Σ^∞ se puede escribir como el producto cartesiano de una infinidad de copias de S , es decir

$$\Sigma^\infty = \prod_{i=-\infty}^{\infty} S^i \text{ con } S^i = S \ \forall i. \quad (1.20)$$

El primer problema que encontramos es que Σ^∞ no es compacto, ya que S no lo es (S es no acotado). Este problema se puede salvar con la técnica usual de añadir a S un punto al infinito, así

$$\bar{S} = \{1, 2, \dots, N, \dots, \infty\} \quad (1.21)$$

donde ∞ es un punto tal que cualquier otro entero es menor que infinito. Luego

$$\bar{\Sigma}^\infty = \prod_{i=-\infty}^{\infty} \bar{S}^i \text{ con } \bar{S}^i = \bar{S} \ \forall i$$

es compacto (Teorema de Tychonov). Además, Σ^∞ está densamente contenido en $\bar{\Sigma}^\infty$. $\bar{\Sigma}^\infty$ se llama una compactificación de Σ^∞ .

Un segundo problema que se encuentra es que la métrica (1.19) no estará bien definida. Para salvar éste problema definamos

$$\begin{aligned} \frac{|N - \infty|}{1 + |N - \infty|} &= 1 \quad \text{si } N \in S, \\ \frac{|\infty - \infty|}{1 + |\infty - \infty|} &= 0. \end{aligned}$$

El concepto de ϵ -vecindad estará definido exactamente como en (1.17). Con estas ligeras modificaciones permanecerán válidas el lema 2 y la proposición 2.

Respecto a la estructura de las órbitas del corrimientode Bernoulli actuando en $\bar{\Sigma}^\infty$, la proposición 4 y el teorema 2 permanecerán válidos.

1.1.2 Dinámica simbólica sobre el conjunto invariante

En esta sección se define el concepto de conjugación topológica, y se ve la relación que existe entre la dinámica de σ en Σ , de la cual ya se tiene mucha información con la dinámica de la herradura de Smale f en su conjunto invariante Λ ; de ésta sólo conocemos su complicada estructura geométrica. En concreto se prueba que σ y f son topológicamente conjugadas.

Definición 2. Sean $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos difeomorfismos de clase C^r y sea $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un difeomorfismo de clase C^k . f y g son llamadas C^k conjugados ($k \leq r$) si existe un difeomorfismo $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^k tal que $g \circ h = h \circ f$. En el caso $k = 0$, f y g son llamadas topológicamente conjugadas.

La conjugación de dos difeomorfismos se puede representar por el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\ h \downarrow & & h \downarrow \\ \mathbb{R}^n & \xrightarrow{g} & \mathbb{R}^n \end{array}$$

Proposición 5. Si f y g son C^k conjugadas, entonces h mapea las órbitas de f en órbitas de g .

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces la órbita de x_0 bajo f es

$$\{\dots, f^{-n}(x_0), \dots, f^{-1}(x_0), x_0, f(x_0), \dots, f^n(x_0), \dots\}$$

y dado que $f = h^{-1} \circ g \circ h$, para una $n \geq 0$ dada se tiene

$$\begin{aligned} f^n(x_0) &= (h^{-1} \circ g \circ h) \circ (h^{-1} \circ g \circ h) \circ \dots \circ (h^{-1} \circ g \circ h)(x_0) \\ &= h^{-1} \circ g^n \circ h(x_0). \end{aligned}$$

$$\text{Luego } h \circ f^n(x_0) = g^n \circ h(x_0). \tag{1.22}$$

También se cumple que $f^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ h$, luego aplicando el mismo argumento se tiene que para una $n > 0$ dada

$$\begin{aligned} f^{-n}(x_0) &= (h^{-1} \circ g \circ h) \circ (h^{-1} \circ g \circ h) \circ \dots \circ (h^{-1} \circ g \circ h)(x_0) \\ &= h^{-1} \circ g^{-n} \circ h(x_0) \end{aligned}$$

$$\text{de donde } h \circ f^{-n}(x_0) = g^{-n} \circ h(x_0). \tag{1.23}$$

Por tanto de (1.22) y (1.23) se ve que h mapea la órbita de x_0 bajo f en la órbita de $h(x_0)$ bajo g .

En la última parte de la sección anterior se hace la observación de que la sucesión asociada a $f^k(p)$ se puede encontrar cambiando en la sucesión asociada con p el punto decimal k lugares a la derecha si $k > 0$ y k lugares a la izquierda si $k < 0$, esto es,

$$\sigma^k(\phi(p)) = \phi(f^k(p)). \tag{1.24}$$

Se probará que $\phi: \Lambda \rightarrow \Sigma$ es un homeomorfismo, entonces por definición se tendrá que f y σ son topológicamente conjugadas, lo que indica que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{f} & \Lambda \\ \phi \downarrow & & \phi \downarrow \\ \Sigma & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma \end{array}$$

lo cual nos permite hacer algunas conclusiones concernientes a la naturaleza de Λ .

Teorema 3. *El mapeo $\phi: \Lambda \rightarrow \Sigma$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Se necesita sólo probar que ϕ es inyectiva, suprayectiva y continua. Como Λ es compacta, se sigue que ϕ es un homeomorfismo.

ϕ es inyectiva. Debemos probar que si $p, p' \in \Lambda$, entonces $\phi(p) = \phi(p')$ implica $p = p'$. Sea

$$\phi(p) = \phi(p') = \{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_n \cdots\}.$$

Por construcción de Λ , p y p' están en la intersección de la línea vertical $V_{s_{-1} \cdots s_{-n} \cdots}$ y la línea horizontal $H_{s_{-n} \cdots s_n \cdots}$ y como la intersección de una línea vertical y una horizontal consiste de un único punto, tenemos que $p = p'$.

ϕ es suprayectiva. Dada $s = \{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_n \cdots\} \in \Sigma$, debemos probar que existen $p \in \Lambda$ tal que $\phi(p) = s$. Recordemos que dada $\{s_0 s_1 \cdots s_n \cdots\}$ existe una única línea vertical en $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D)$ correspondiente a esta sucesión y dada $\{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1}\}$ existe una única línea horizontal en $\bigcap_{n=-\infty}^0 f^n(D)$ correspondiente a esta sucesión. Por tanto dada una línea vertical y una horizontal se le puede asociar una única sucesión bi-infinita de 0's y 1's

$$\{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_n \cdots\}$$

y dado que cada línea horizontal y vertical se intersectan en un solo punto p , toda sucesión bi-infinita de 0's y 1's corresponde a un único punto $p \in \Lambda$.

ϕ es continua. Dado que $p \in \Lambda$ y $\epsilon > 0$ debemos probar que existe un $\delta(\epsilon, p)$ tal que

$$|p - p'| < \delta \quad \text{implica} \quad d(\phi(p), \phi(p')) < \epsilon$$

con $d(\cdot, \cdot)$ la métrica definida en Σ .

Sea $\epsilon > 0$ dado. Si $d(\phi(p), \phi(p')) < \epsilon$ entonces existe algún entero $N = N(\epsilon)$ tal que si

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_n \cdots\} \\ \phi(p') &= \{\cdots s'_{-n} \cdots s'_{-1} \cdot s'_0 s'_1 \cdots s'_n \cdots\} \end{aligned}$$

entonces, $s_i = s'_i \quad \forall |i| \leq N$. Así que por construcción de Λ , p y p' están en el rectángulo (ver figura 1.11) definido por

$$H_{s_0 \cdots s_N} \bigcap V_{s_{-1} \cdots s_{-N}} \tag{1.25}$$

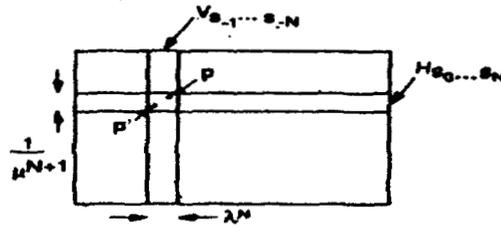


Figura 1.11:

y el ancho de estos rectángulos es λ^N y $\frac{1}{\mu^{N+1}}$ respectivamente, así que $|p - p'| \leq \lambda^N + 1/\mu^{N+1}$, por tanto si tomamos $\delta = \lambda^N + 1/\mu^{N+1}$ se tiene $d(\phi(p), \phi(p')) < \epsilon$. \square

Observación. Vía el homeomorfismo $\phi: \Lambda \rightarrow \Sigma$, Λ es un conjunto compacto, totalmente desconexo y perfecto.

Por último, dado que f y σ son topológicamente conjugadas la estructura de las órbitas de σ en Σ es idéntica a la estructura de las órbitas de f en Λ , por lo cual podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 4. *La herradura de Smale tiene:*

- (a) Una infinidad numerable de órbitas periódicas de período arbitrariamente grande.
- (b) Una infinidad no numerable de órbitas no periódicas.
- (c) Una órbita densa.

1.1.3 Las condiciones de Conley-Moser

En esta sección se extenderán los métodos anteriores y se darán condiciones suficientes para asegurar que un mapeo $f : D \mapsto \mathbb{R}^2$ tenga un conjunto invariante topológicamente conjugado al corrimiento de Bernoulli σ en Σ^N .

Empecemos por introducir los conceptos de curva vertical y curva horizontal de una forma más general. Sea

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

el cuadrado unitario.

Definición 3. Una μ_h -curva horizontal es la gráfica de una función $y = h(x)$ definida en $[0, 1]$ para la cual $0 \leq h(x) \leq 1$, y

$$|h(x_1) - h(x_2)| \leq \mu_h |x_1 - x_2| \quad \text{siempre que } 0 \leq x_1, x_2 \leq 1.$$

Similarmente una μ_v -curva vertical es la gráfica de una función $x = v(y)$ definida en $[0, 1]$ para la cual $0 \leq v(y) \leq 1$, y

$$|v(y_1) - v(y_2)| \leq \mu_v |y_1 - y_2| \quad \text{siempre que } 0 \leq y_1, y_2 \leq 1.$$

(Ver figura 1.12)

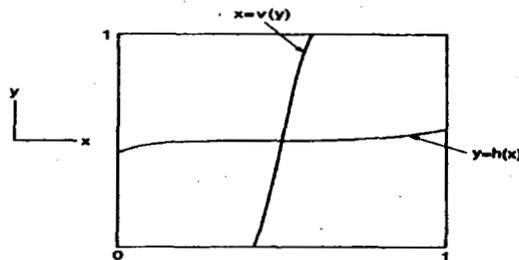


Figura 1.12: Curva horizontal y curva vertical.

Veamos algunas observaciones referentes a la definición anterior.

1. Las funciones $y = h(x)$ y $x = v(y)$ que cumplen la definición anterior son funciones de Lipschitz con constantes de Lipschitz μ_h y μ_v respectivamente.
2. La constante μ_h puede ser interpretada como una cota de la pendiente de la curva definida por la gráfica de $y = h(x)$. Una interpretación similar se cumple para μ_v y la gráfica de $x = v(y)$.
3. Para $\mu_v = 0$ la gráfica de $x = v(y)$ es una línea vertical y para $\mu_h = 0$ la gráfica de $y = h(x)$ es una línea horizontal.

Ahora vamos a ensanchar las curvas horizontales μ_h y verticales μ_v para obtener bandas horizontales y verticales respectivamente.

Definición 4. Dadas dos curvas μ_h -horizontales que no se intersectan, con $h_1(x) < h_2(x)$, se define una μ_h -banda horizontal como

$$H = \{(x, y) \mid x \in [0, 1]; y \in [h_1(x), h_2(x)]\}$$

y dadas dos curvas μ_v -verticales que no se intersectan, $v_1(y) < v_2(y)$, se define una μ_v -banda vertical

$$V = \{(x, y) \mid y \in [0, 1]; x \in [v_1(y), v_2(y)]\}.$$

La distancia o diámetro entre bandas horizontales y verticales se define como:

$$d(H) = \max_{x \in [0,1]} |h_2(x) - h_1(x)| \quad y \quad d(V) = \max_{x \in [0,1]} |v_2(y) - v_1(y)|.$$

(Ver figura 1.13)

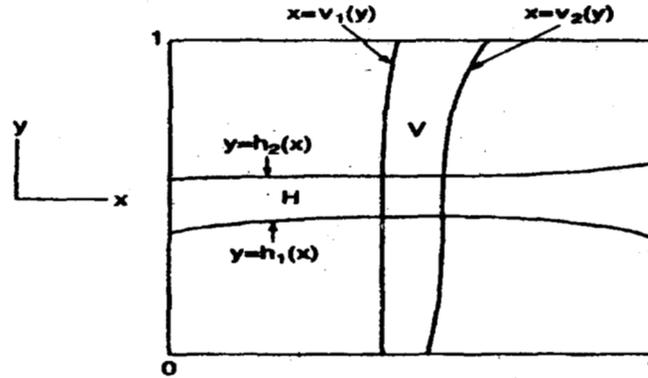


Figura 1.13: Definición de bandas horizontales y verticales.

Los lemas siguientes serán utilizados posteriormente en el proceso inductivo de la construcción del conjunto invariante para el mapeo f .

Lema 4. (a) Si $H^1 \supset H^2 \supset H^3 \supset \dots$ es una sucesión de μ_h -bandas horizontales anidadas y si $d(H^k) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ entonces, $\bigcap_{k=1}^{\infty} H^k \equiv H^\infty$ es una μ_h -curva horizontal. (b) Si $V^1 \supset V^2 \supset V^3 \supset \dots$ es una sucesión de μ_v -bandas horizontales anidadas y si $d(V^k) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$ entonces, $\bigcap_{k=1}^{\infty} V^k \equiv H^\infty$ es una μ_v -curva vertical.

Demostración. Se probará sólo el caso (a), el caso (b) es análogo.

Sea $C_{\mu_h}[0,1]$ el conjunto de funciones de Lipschitz con constantes de Lipschitz μ_h definidas sobre el intervalo $[0, 1]$. Entonces con la métrica definida por la norma máxima, $C_{\mu_h}[0, 1]$ es un espacio métrico completo pues la convergencia es uniforme (ver [1]). Sean $y = h_1^k(x)$ y $y = h_2^k(x)$ las fronteras horizontales de la μ_h -banda horizontal H^k . Ahora considérese la sucesión

$$\{h_1^1(x), h_2^1(x), h_1^2(x), h_2^2(x), \dots, h_1^k(x), h_2^k(x), \dots\}$$

por definición de H^k , la anterior sucesión de funciones es una sucesión de elementos de $C_{\mu_h}[0, 1]$ y dado que $d(H^k) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow \infty$, es una sucesión de Cauchy. Por lo tanto, dado que $C_{\mu_h}[0, 1]$ es un espacio métrico completo, la sucesión de Cauchy converge a una única curva horizontal μ_h .

Lema 5. *Suponga que $0 \leq \mu_v \mu_h < 1$. Entonces una curva horizontal $h_\mu(x)$ y una curva vertical $v_\mu(y)$ se intersectan en un único punto.*

Demostración. Obsérvese que un punto de intersección (x_0, y_0) es caracterizado como un cero de

$$x - v(h(x)), \quad \text{con } y = h(x).$$

Considérese la función $x - v(h(x))$ definida en el intervalo $[0, 1]$. Para $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$ se tiene

$$|v(h(x_1)) - v(h(x_2))| \leq \mu_v |h(x_1) - h(x_2)| \leq \mu_v \mu_h |x_1 - x_2| < |x_1 - x_2| = x_2 - x_1.$$

Luego,

$$|v(h(x_1)) - v(h(x_2))| < x_2 - x_1$$

implica

$$x_1 - x_2 < v(h(x_1)) - v(h(x_2)) < x_2 - x_1.$$

Así que $x_1 - v(h(x_1)) < x_2 - v(h(x_2))$. Por tanto, la función $x - v(h(x))$ es estrictamente monótona decreciente. Dado que para $x = 0$, $x - v(h(x)) \leq 0$ y para $x = 1$, $x - v(h(x)) \geq 0$, entonces la función $x - v(h(x))$ tiene precisamente un cero.

En resumen, a cada intersección de curvas horizontal y vertical le corresponde un único punto $x \in D$. \square

Ahora podemos establecer nuestras hipótesis en el mapeo $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$.

(A1). Los números μ_h, μ_v satisfacen $0 \leq \mu_h \mu_v < 1$. Sea $S = \{1, 2, \dots, N\}$; entonces existen H_i, V_i con $i \in S$ bandas horizontales disjuntas y bandas verticales disjuntas respectivamente tales que el mapeo f lleva H_i homeomórficamente en V_i , esto es $f(H_i) = V_i$. Además las fronteras horizontales y verticales de H_i son mapeadas en las fronteras horizontales y verticales de V_i respectivamente.

(A2). Suponga que H es una μ_h -banda horizontal contenida en $\bigcup_{i \in S} H_i$, entonces

$$f^{-1}(H) \cap H_i \equiv \tilde{H}_i$$

es una μ_h - banda horizontal para toda $i \in S$; además,

$$d(\tilde{H}_i) \leq \nu_h d(H) \quad \text{par algún } 0 < \nu_h < 1.$$

De manera similar, suponga que V es una μ_v -banda vertical contenida en $\bigcup_{i \in S} V_i$, entonces

$$f(V) \cap V_i \equiv \tilde{V}_i$$

es una μ_v -banda vertical para toda $i \in S$; además,

$$d(\tilde{V}_i) \leq \nu_v d(V) \quad \text{para algún } 0 < \nu_v < 1.$$

Ahora estamos en condiciones de enunciar el teorema principal de esta sección que es el siguiente:

Teorema 5. *Sea f un homeomorfismo de dos dimensiones satisfaciendo las hipótesis (A1) y (A2). Entonces f es topológicamente conjugado al corrimiento de Bernoulli σ en Σ^N , esto es, existe un homeomorfismo $\phi: \Lambda \rightarrow \Sigma^N$ tal que $\phi \circ f = \sigma \circ \phi$.*

Demostración. La prueba se da en cuatro etapas. Las cuales son idénticas a las correspondientes a la herradura de Smale. Es conveniente, sin embargo, repetir la construcción para hacer ver que la construcción no depende sino de las hipótesis enunciadas.

Etapas 1. Construcción del conjunto invariante Λ .

Etapas 2. Definición del mapeo $\phi: \Lambda \rightarrow \Sigma^N$.

Etapas 3. Probar que $\phi \circ f = \sigma \circ \phi$.

Etapas 4. Probar que ϕ es un homeomorfismo.

Etapas 1. Construcción del conjunto invariante Λ .

El conjunto invariante Λ consiste en aquellos puntos de D que permanecen en D bajo todas las posibles iteraciones de f , esto es,

$$\Lambda = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(D)$$

de igual forma que en la sección 1 se construirán separadamente los conjuntos $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D)$ y $\bigcap_{n=-\infty}^0 f^n(D)$ luego, tomamos su intersección para obtener Λ . En la construcción de cada uno de estos conjuntos utilizaremos las hipótesis (A1) y (A2) para determinar la naturaleza del conjunto obtenido en el límite cuando $n \rightarrow \infty$.

Construcción de $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(D)$

Por definición de f vemos que $D \cap f(D)$ consiste de N bandas verticales disjuntas V_1, V_2, \dots, V_n de diámetro $d(V_i) \leq 1$ que denotaremos por

$$D \cap f(D) = \bigcup_{s_{-1} \in S} V_{s_{-1}} = \{p \in D \mid p \in V_{s_{-1}}, s_{-1} \in S\}.$$

Por inducción, suponga que para $k \geq 2$ se han definido bandas verticales $V_{s_{-2} \dots s_{-k}} \subset V_{s_{-2}}$ de diámetro $d(V_{s_{-2} \dots s_{-k}}) \leq \nu_v^{k-2}$. De acuerdo a A1

$$f(V_{s_{-2} \dots s_{-k}}) \cap V_{s_{-1}}$$

consiste de N bandas verticales denotadas por

$$f(V_{s_{-2}\cdots s_{-k}}) \cap V_{s_{-1}} = \bigcup_{s_{-1} \in S} V_{s_{-1}\cdots s_{-k}}$$

tales que $V_{s_{-1}s_{-2}\cdots s_{-k}} \subset V_{s_{-1}}$. Por definición

$$\begin{aligned} V_{s_{-1}s_{-2}} &= \{p \in V_{s_{-1}} \mid f^{-1}(p) \in V_{s_{-2}}\}, \\ &= \{p \in D \mid f^{-1+i}(p) \in V_{s_{-i}}, i = 1, 2\}, \end{aligned}$$

y por inducción se sigue

$$V_{s_{-1}\cdots s_{-k}} = \{p \in D \mid f^{-1+i}(p) \in V_{s_{-i}}, i = 1, \dots, k\}.$$

Además, de acuerdo a (A2), se tiene

$$d(V_{s_{-1}\cdots s_{-k}}) \leq \nu_v d(V_{s_{-2}\cdots s_{-k}}) \leq \nu_v^{k-1}, \quad (1.26)$$

de donde el diámetro de las bandas horizontales tienden a cero cuando $k \rightarrow \infty$. Por el lema 4 el límite es una curva vertical que se denota por

$$V_{s_{-1}\cdots s_{-k}\cdots}$$

Nótese que ya que $f(H_i) = V_i$, entonces para cualquier k

$$\begin{aligned} V_{s_{-1}s_{-2}\cdots s_k} &= \{p \in D \mid f^{-i+1}(p) \in V_{s_{-i}}\} \\ &= \{p \in D \mid f^{-i}(p) \in H_{s_{-i}}\} \end{aligned}$$

De igual manera al caso interior, $f^{-1}(D) \cap D$ consiste de N bandas horizontales denotadas como

$$f^{-1}(D) \cap D = \bigcup_{s_0 \in S} H_{s_0} = \{p \in D \mid p \in H_{s_0}, s_0 \in S\}$$

de diámetro $d(H_{s_0}) \leq 1$.

Por inducción, supóngase que para $k \geq 1$ se han definido bandas horizontales $H_{s_1\cdots s_k} \subset H_{s_1}$ de diámetro $d(H_{s_1\cdots s_k}) \leq \nu_h^{k-1}$. Por (A1), el conjunto

$$f^{-1}(H_{s_1\cdots s_k}) \cap H_{s_0}$$

consta de N bandas horizontales que se denotan por

$$f^{-1}(H_{s_1\cdots s_k}) \cap H_{s_0} = \bigcup_{s_0 \in S} H_{s_0, s_1\cdots s_k}.$$

Por construcción se sigue que $H_{s_0\cdots s_k} \subset H_{s_0}$ y de su definición

$$\begin{aligned} H_{s_0 s_1} &= \{p \in H_{s_1} \mid f(p) \in H_{s_0}\} \\ &= \{p \in D \mid f^i(p) \in H_{s_i}, i = 0, 1\} \end{aligned}$$

y por inducción

$$H_{s_0 \cdots s_k} = \{p \in D \mid f^i(p) \in H_{s_i}, i = 0, \dots, k\}.$$

Por (A2),

$$d(H_{s_0 s_1 \cdots s_k}) \leq \nu_h d(H_{s_1 \cdots s_k}) \leq \nu_h^k. \quad (1.27)$$

de donde el diámetro de las bandas horizontales tiende a cero cuando $k \rightarrow \infty$. Del lema 4, el límite es una curva horizontal que denotamos por

$$H_{s_0 s_1 \cdots s_k \cdots}$$

Finalmente tomamos Λ como la intersección del conjunto de bandas verticales y horizontales, es decir $p \in \Lambda$ si y solo si existe una única sucesión bi-infinita

$$\{\cdots s_{-k} \cdots s_{-1} \cdot s_0 s_1 \cdots s_k \cdots\}$$

tal que

$$p \in V_{\cdots s_{-k} \cdots s_{-1}} \cap H_{s_0 s_1 \cdots s_k \cdots}$$

Al estar $p \in V_{\cdots s_{-k} \cdots s_{-1}}$ se sigue que $f^i(p) \in H_{s_i}$ para cualquier entero negativo i . Al estar $p \in H_{s_0 s_1 \cdots s_k \cdots}$ se sigue que $f^i(p) \in H_{s_i}$ para $i = 0, 1, \dots$, es decir $f^i(p) \in H_{s_i}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Etapa 2. Definición del mapeo $\phi: \Lambda \mapsto \Sigma^N$.

Para cualquier $p \in \Lambda$ se tiene $p = V_{s_{-1} \cdots s_{-n} \cdots} \cap H_{s_0 \cdots s_n \cdots}$, donde $V_{s_{-1} \cdots s_{-n} \cdots}$ es una curva vertical y $H_{s_0 \cdots s_n \cdots}$ es una curva horizontal. Se define el mapeo $\phi: \Lambda \rightarrow \Sigma^N$ como aquel que asocia a cada $p \in \Lambda$ la sucesión bi-infinita $\{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} \cdot s_0 \cdots s_n \cdots\}$. donde las sucesiones infinitas $\{s_0 \cdots s_n \cdots\}$ y $\{s_{-1} \cdots s_{-n} \cdots\}$ se obtienen de las curvas horizontales y verticales respectivamente cuya intersección es p ; este mapeo está bien definido dado que los H_i son disjuntos.

Obsérvese que si la i -ésima entrada de $s \in \Sigma^N$ es s_i , entonces $f^i(p) \in H_{s_i}$.

Etapa 3. Probar que $\phi \circ f = \sigma \circ \phi$.

Sea $p \in \Lambda$ con $\phi(p) = \{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} \cdot s_0 \cdots s_n \cdots\}$. Por la construcción de Λ , p es el único punto en D tal que $f^i(p) \in H_{s_i}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ y por tanto, $\phi \circ f(p) = \{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} s_0 \cdot s_1 \cdots s_n \cdots\}$.

Por otra parte, por definición del corrimiento de Bernoulli σ , se tiene que $\sigma \circ \phi(p) = \{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} s_0 \cdot s_1 \cdots s_n \cdots\}$, por lo tanto, $\phi \circ f(p) = \sigma \circ \phi(p)$

Etapa 4. Probar que ϕ es un homeomorfismo.

La prueba de que ϕ es inyectiva y suprayectiva es virtualmente la misma a la que se dió en la sección 1, excepto que las bandas no son más “rectángulos”.

Sea $\epsilon > 0$ dado, si $d(\phi(p), \phi(p')) < \epsilon$, entonces se tendría que existe $M = M(\epsilon)$ tal que si

$$\begin{aligned} \phi(p) &= \{\cdots s_{-n} \cdots s_{-1} \cdot s_0 \cdots s_n \cdots\} \\ \phi(p') &= \{\cdots s'_{-n} \cdots s'_{-1} \cdot s'_0 \cdots s'_n \cdots\} \end{aligned}$$

entonces $s_i = s'_i \forall i \leq M$. Luego por construcción de Λ , p y p' pertenecen a la intersección de la banda vertical $V_{s_{-1} \dots s_{-n}}$ y la banda horizontal $H_{s_0 \dots s_n}$ (ver figura 1.14). Sus anchos son, según (1.27,1.26)

$$d(V_{s_{-1} \dots s_{-n}}) \leq \nu_v^{n-1}, \quad (1.28)$$

$$d(H_{s_0 \dots s_n}) \leq \nu_h^n. \quad (1.29)$$

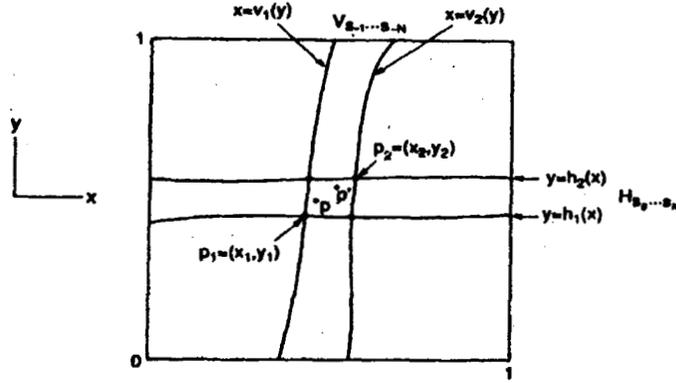


Figura 1.14: Continuidad de la aplicación ϕ .

Si (x_i, y_i) , $i = 1, 2$ son las coordenadas de p, p' respectivamente por la desigualdad del triángulo

$$|p - p'| \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|. \quad (1.30)$$

Considerando uno de los términos del lado derecho,

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| &\leq |v_1(y_1) - v_2(y_2)| \\ &\leq |v_1(y_1) - v_1(y_2)| + |v_1(y_2) - v_2(y_2)| \\ &\leq \mu_v |y_1 - y_2| + \|v_1 - v_2\| \end{aligned}$$

Análogamente, considerando el segundo término de la desigualdad se obtiene

$$|y_1 - y_2| \leq \mu_h |x_1 - x_2| + \|h_1 - h_2\|.$$

Sustituyendo la última desigualdad en la penúltima,

$$|x_1 - x_2| \leq \mu_v (\mu_h |x_1 - x_2| + \|h_1 - h_2\|) + \|v_1 - v_2\|$$

de donde

$$|x_1 - x_2| \leq \frac{1}{1 - \mu_h \mu_v} (\mu_v \|h_1 - h_2\| + \|v_1 - v_2\|). \quad (1.31)$$

De manera similar se prueba que

$$|y_1 - y_2| \leq \frac{1}{1 - \mu_v \mu_h} (||h_1 - h_2|| + \mu_h ||v_1 - v_2||). \quad (1.32)$$

Combinando las desigualdades (1.31,1.32) en (1.30) obtenemos

$$\begin{aligned} |p - p'| &\leq \frac{1}{1 - \mu_v \mu_h} ((1 + \mu_h) ||v_1 - v_2|| + (1 + \mu_v) ||h_1 - h_2||) \\ &\leq \frac{1}{1 - \mu_v \mu_h} ((1 + \mu_h) \nu_v^{n-1} + (1 + \mu_v) \nu_h^n) \end{aligned}$$

En la última desigualdad hemos usado el hecho de que

$$||v_1 - v_2|| \leq \nu_v^{n-1}, \quad ||h_1 - h_2|| \leq \nu_h^n,$$

debido a que v_i , $i = 1, 2$ son las fronteras verticales de $V_{s_{-1} \dots s_{-n}}$ y h_i , $i = 1, 2$ son las fronteras horizontales de $H_{s_0 \dots s_n}$, y sus anchuras satisfacen (1.28,1.29). Por tanto tomando $\delta = (1 - \mu_h \mu_v)^{-1}(\nu_v^{n-1} + \nu_h^n)$, el cual es positivo debido a la hipótesis (A1), queda probado que ϕ es continua. \square

1.1.4 Sectores tangentes

Un caso típico donde la condición (A1) se satisface es cuando una aplicación en el plano posee un punto homoclínico, o en el mapeo de Poincaré de un sistema dinámico en \mathbb{R}^3 con una órbita homoclínica. En ambos casos, la construcción del rectángulo D o con más precisión, de las bandas horizontales y verticales se puede conseguir bajo ciertas condiciones de transversalidad de las variedades estables e inestables. Sin embargo, la hipótesis (A2) no es fácil de verificar directamente. Así que veremos una condición suficiente, es decir que implica la condición (A2) y que se basa en las propiedades de la derivada de f . Por esto, asumiremos que f es al menos de clase C^1 .

Bajo la hipótesis (A1), sean

$$f(H_i) \cap H_j \equiv V_{ji}$$

y

$$H_i \cap f^{-1}(H_j) \equiv H_{ij}$$

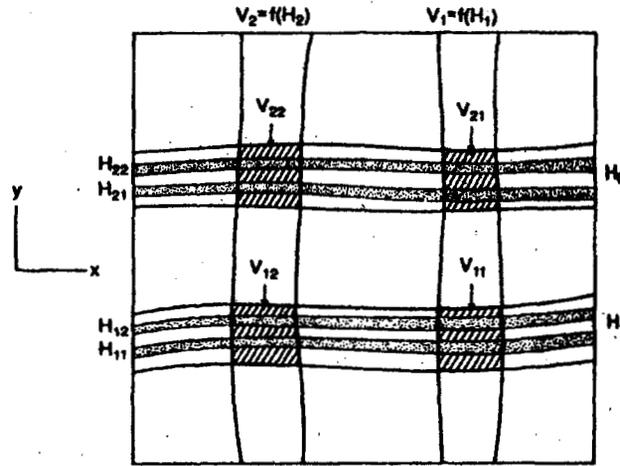
entonces es claro que $f^{-1}(V_{ji}) = H_{ij}$. (ver figura 1.15) Además definimos

$$\mathcal{H} = \bigcup_{i,j \in S} (H_{ij}), \quad \mathcal{V} = \bigcup_{i,j \in S} (V_{ji})$$

es claro que

$$f(\mathcal{H}) = \mathcal{V}$$

y supondremos explícitamente que f manda \mathcal{H} difeomórficamente en \mathcal{V} .


 Figura 1.15: Definición de los dominios $H_{ij} = f^{-1}(V_{ji})$.

Definimos los conos tangentes estable e inestable sobre un punto $z_0 = (x_0, y_0) \in \mathcal{H} \cup \mathcal{V}$ como

$$\begin{aligned} S_{z_0}^s &= \{(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \in \mathbb{R}^2 \mid |\eta_{z_0}| \leq \mu_h |\xi_{z_0}|\}, \\ S_{z_0}^u &= \{(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \in \mathbb{R}^2 \mid |\xi_{z_0}| \leq \mu_v |\eta_{z_0}|\} \end{aligned}$$

respectivamente. Ahora globalizamos los conos considerando los haces estables e inestables, definiendo

$$S_{\mathcal{H}, \mathcal{V}}^{s,u} = \bigcup_{z_0 \in \mathcal{H}, \mathcal{V}} S_{z_0}^{s,u}$$

que llamaremos el sector estable (inestable) sobre \mathcal{H} (\mathcal{V}).

Ahora podemos establecer la hipótesis alternativa a la hipótesis (A2).

$$(A3) \quad Df(S_{\mathcal{H}}^\mu) \subset S_{\mathcal{V}}^\mu \text{ y } Df^{-1}(S_{\mathcal{V}}^s) \subset S_{\mathcal{H}}^s.$$

Además, si $(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \in S_{z_0}^u$ y $Df(z_0)(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \equiv (\xi_{f(z_0)}, \eta_{f(z_0)}) \in S_{f(z_0)}^u$, entonces

$$|\eta_{f(z_0)}| \geq \mu^{-1} |\eta_{z_0}|.$$

Similarmente, si $(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \in S_{z_0}^s$ y $Df^{-1}(z_0)(\xi_{z_0}, \eta_{z_0}) \equiv (\xi_{f^{-1}(z_0)}, \eta_{f^{-1}(z_0)}) \in S_{f^{-1}(z_0)}^s$, entonces

$$|\xi_{f^{-1}(z_0)}| \geq \mu^{-1} |\xi_{z_0}|$$

donde $0 < \mu < 1 - \mu_v \mu_h$ (ver figura 1.16)

Ahora estableceremos el Teorema principal.

Teorema 6. Si las hipótesis (A1) y (A3) son verdaderas con $0 < \mu < 1 - \mu_v \mu_h$, entonces la hipótesis (A2) es verdadera con $\nu_h = \nu_v = \mu / (1 - \mu_v \mu_h)$.

Demostración. Véase [29].

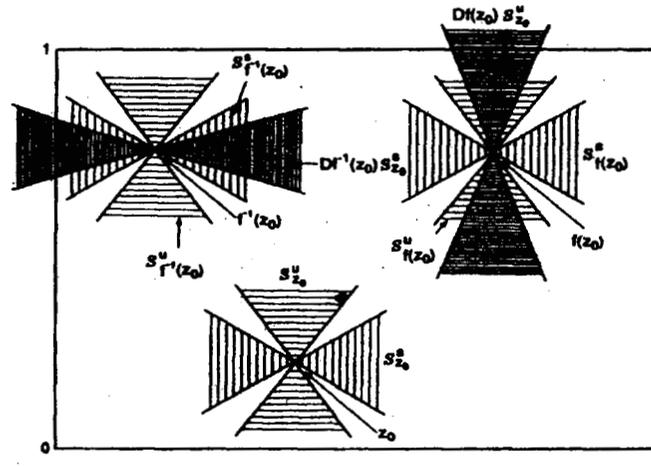


Figura 1.16: Propiedad A3 de los sectores estables e inestables.

1.2 El teorema de Silnikov

En esta sección se estudia la estructura de las órbitas cerca de una órbita homoclínica para un sistema autónomo en tres dimensiones. En concreto se estudia la dinámica cerca de una órbita homoclínica para un punto fijo del tipo foco-silla. Este fenómeno se conoce como el fenómeno de Silnikov dado que fué este el primero en estudiarlo.

Considérese el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \alpha x - \beta y + P(x, y, z) \\ \dot{y} &= \beta x + \alpha y + Q(x, y, z) \\ \dot{z} &= \lambda z + R(x, y, z)\end{aligned}\tag{1.33}$$

donde P , Q y R son de clase C^2 y $O(2)$ en el origen, es decir sus desarrollos de Taylor alrededor del origen comienzan con términos de grado 2.

El sistema tiene un punto de equilibrio en el origen. Linealizando alrededor del punto de equilibrio $(0, 0, 0)$ se obtienen los valores propios $\alpha \pm i\beta$ y λ .

sopongaos las siguientes dos condiciones

1. $\lambda > -\alpha > 0$.
2. El sistema posee una órbita homoclínica γ que conecta a $(0, 0, 0)$ consigo mismo (esto es $W^s(0) \cap W^u(0) \neq \emptyset$).

De la condición 1, el punto crítico $(0, 0, 0)$ posee una variedad inestable $W^u(0)$ de una dimensión y una variedad estable $W^s(0)$ de dimensión dos. Por el teorema de la variedad estable, se pueden introducir coordenadas tales que cerca del origen la variedad estable esté contenida en el plano xy y la variedad inestable esté contenida en el eje z (ver figura 1.17).

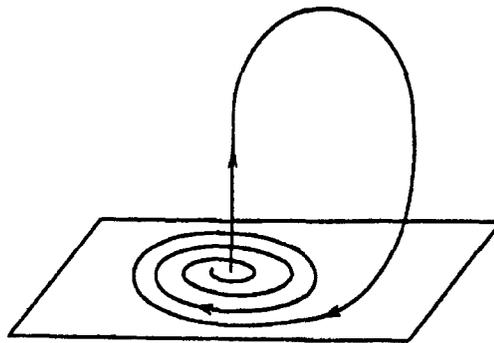


Figura 1.17: Estructura local alrededor del punto de equilibrio.

Para analizar el comportamiento del flujo cerca de la órbita homoclínica se construirá un mapeo de Poincaré definido sobre una sección Π_0 transversal al flujo generado por el campo vectorial. La construcción del mapeo se dará de la siguiente forma:

Se consideran dos secciones transversales Π_0 y Π_1 a la órbita homoclínica (las cuales se definen más adelante) localizadas en una vecindad suficientemente pequeña del origen (ver figura 1.18).

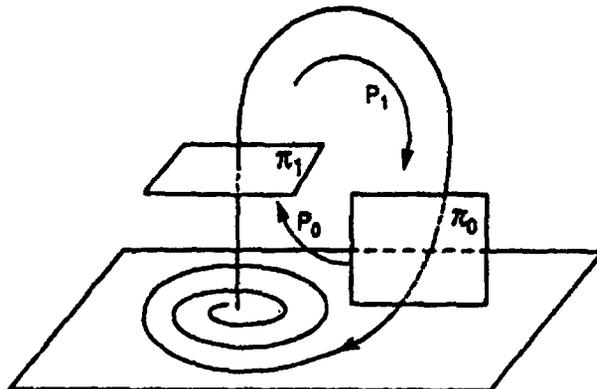


Figura 1.18: Mapeo de Poincaré cerca de la órbita homoclínica.

La aplicación $P_0: \Pi_0 \rightarrow \Pi_1$ se obtiene siguiendo las soluciones a través de una vecindad del origen. Para ello resolveremos explícitamente las ecuaciones en una vecindad del origen tomando coordenadas donde el flujo es lineal.

La aplicación $P_1: \Pi_1 \rightarrow \Pi_0$ siguiendo las soluciones en una vecindad tubular de la órbita homoclínica.

Finalmente construiremos la aplicación

$$P \equiv P_1 \circ P_0 : \Pi_0 \rightarrow \Pi_0 \quad (1.34)$$

y seleccionando adecuadamente la vecindad del origen, veremos que está bien definida.

Sea Π_0 un rectángulo en el plano xz ; éste se parametriza con las coordenadas (x, z) . Sea Π_1 un rectángulo paralelo al plano xy en $z = \epsilon$, el cual se puede parametrizar con las coordenadas (x', y') para distinguirlas del plano xy (ver figura 1.19). La solución del sistema (1.33) linealizado está dado por:

$$x(t) = e^{\alpha t}(x_0 \cos(\beta t) - y_0 \sin(\beta t)) \quad (1.35)$$

$$y(t) = e^{\alpha t}(x_0 \sin(\beta t) + y_0 \cos(\beta t)) \quad (1.36)$$

$$z(t) = z_0 e^{\lambda t} \quad (1.37)$$

donde $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$, $z(0) = z_0$.

El tiempo necesario para que una solución vaya de Π_0 a Π_1 se obtiene despejando t de la ecuación (1.37) con $z = \epsilon$,

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{\epsilon}{z_0} \right). \quad (1.38)$$

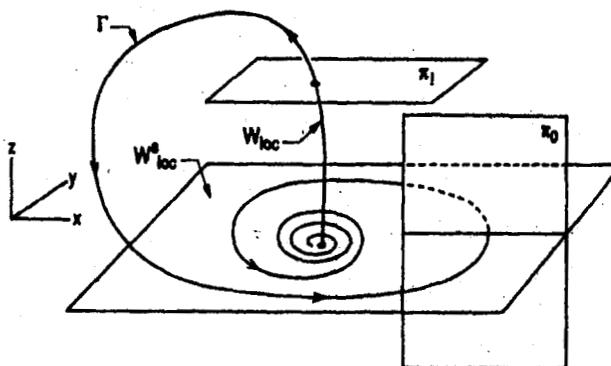


Figura 1.19:

Así que $P_0 : \Pi_0 \mapsto \Pi_1$ esta dado por

$$\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \xrightarrow{P_0} \begin{pmatrix} x \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^{\frac{\alpha}{\lambda}} \cos\left(\frac{\beta}{\lambda} \ln \frac{\epsilon}{z}\right) \\ x \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^{\frac{\alpha}{\lambda}} \sin\left(\frac{\beta}{\lambda} \ln \frac{\epsilon}{z}\right) \\ \epsilon \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

Debemos observar que si Π_0 se elige arbitrariamente entonces es posible que puntos en Π_0 al seguirlos por el flujo intersecaran a Π_0 muchas veces antes de llegar a Π_1 . En este caso P_0 no podrá mapear Π_0 difeomórficamente en $P_0(\Pi_0)$. Sea $(x_0, 0, z_0)$ un punto en el plano xz con $x_0 > 0$. Para un tiempo $t = \frac{2\pi}{\beta}$, la solución (1.35,1.36) da $x = x_0 e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}} > 0$, $y = y_0 e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}}$, es decir la solución vuelve al plano xz con $x > 0$. Sea $x = \epsilon$, $0 < z \leq \epsilon$ la frontera del lado derecho de Π_0 y $x = \epsilon e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}}$, $0 < z \leq \epsilon$ la frontera del lado izquierdo de π_0 (ver figura 1.20).

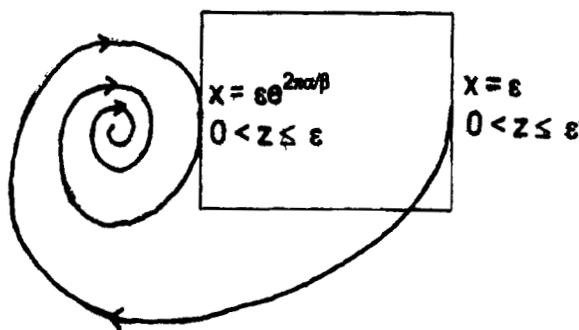


Figura 1.20:

Si tomamos $x(0) = x_0 < \epsilon$ en Π_0 , entonces para $t = \frac{2\pi}{\beta}$ se tiene que

$$x\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) = x_0 e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}} < \epsilon e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}}.$$

Luego ningún punto que empiece en el interior de Π_0 volverá a Π_0 antes de intersectar a Π_1 . Redefinimos entonces

$$\Pi_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, \epsilon e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}} \leq x \leq \epsilon, 0 < z \leq \epsilon\} \quad (1.40)$$

y Π_1 lo suficientemente grande tal que $P_0(\Pi_0)$ este contenido en su interior.

Paso 1. Construcción de P_0 .

Como mencionamos antes, la región Π_1 está parametrizada por x' e y' . De (1.39) se tiene para $(x', y') = P_0(x, z)$,

$$(x', y') = \left(x \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^{\frac{\alpha}{\lambda}} \cos\left(\frac{\beta}{\lambda} \ln \frac{\epsilon}{z}\right), x \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^{\frac{\alpha}{\lambda}} \sin\left(\frac{\beta}{\lambda} \ln \frac{\epsilon}{z}\right) \right). \quad (1.41)$$

Si introducimos coordenadas polares en el plano $x'y'$,

$$x' = r \cos \theta, \quad y' = r \sin \theta$$

la aplicación (1.41) se transforma en

$$(r, \theta) = \left(x \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^{\frac{\alpha}{\lambda}}, \frac{\beta}{\lambda} \ln \left(\frac{\epsilon}{z}\right) \right).$$

Observe que las fronteras verticales de Π_0 : $x = \epsilon, \epsilon e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}}, 0 < z \leq \epsilon$ son mapeadas en las curvas

$$(r, \theta) = \left(\epsilon \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^{\alpha/\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \ln \left(\frac{\epsilon}{z}\right) \right), \quad (r, \theta) = \left(\epsilon e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}} \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^{\alpha/\lambda}, \frac{\beta}{\lambda} \ln \left(\frac{\epsilon}{z}\right) \right),$$

es decir, después de eliminar z , en las espirales logarítmicas

$$r = \epsilon e^{\frac{\alpha}{\beta}\theta}, \quad \text{y} \quad r = \epsilon e^{\frac{\alpha}{\beta}(\theta+2\pi)}$$

y en ambos casos $r \rightarrow 0$ cuando $\theta \rightarrow \infty$.

En general, una línea vertical en Π_0 , $x = x_0$ es mapeada en la espiral logarítmica,

$$r = x_0 e^{\frac{\alpha}{\beta}\theta},$$

y una línea horizontal en Π_0 , $z = z_0$ será mapeada en un rayo

$$\theta = \frac{\beta}{\lambda} \ln \left(\frac{\epsilon}{z_0}\right), \quad \epsilon \left(\frac{\epsilon}{z_0}\right)^{\frac{\alpha}{\lambda}} \leq r \leq \epsilon e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}} \left(\frac{\epsilon}{z_0}\right)^{\frac{\alpha}{\lambda}}.$$

Consideremos ahora los siguientes rectángulos definidos en Π_0

$$R_k = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : |y| = 0, \epsilon e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}} \leq x \leq \epsilon, \epsilon e^{\frac{-2\pi(k+1)\alpha}{\beta}} \leq z \leq \epsilon e^{\frac{-2\pi k\alpha}{\beta}} \right\}$$

para $k = 0, 1, 2, \dots$. Entonces

$$\Pi_0 = \bigcup_{k=0}^{\infty} R_k.$$

Analicemos la geometría de la imagen de un rectángulo R_k determinando el comportamiento de sus fronteras horizontales y verticales bajo P_0 . Denotémoslas por

$$\begin{aligned} h^u &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, z = \epsilon e^{\frac{-2\pi k\alpha}{\beta}}, \epsilon e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}} \leq x < \epsilon \right\}, \\ h^l &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, z = \epsilon e^{\frac{-2\pi(k+1)\alpha}{\beta}}, \epsilon e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}} \leq x \leq \epsilon \right\}, \\ v^r &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, x = \epsilon, \epsilon e^{\frac{-2\pi(k+1)\alpha}{\beta}} \leq z \leq \epsilon e^{\frac{-2\pi k\alpha}{\beta}} \right\}, \\ v^l &= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0, x = \epsilon e^{\frac{2\pi\alpha}{\beta}}, \epsilon e^{\frac{-2\pi(k+1)\alpha}{\beta}} \leq z \leq \epsilon e^{\frac{-2\pi k\alpha}{\beta}} \right\}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Las imágenes de estas fronteras bajo la aplicación P_0 están dadas por:

$$\begin{aligned} P_0(h^u) &= \left\{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \epsilon, \theta = 2\pi k, \epsilon e^{\frac{2\pi(k+1)\alpha}{\beta}} \leq r \leq \epsilon e^{\frac{2\pi k\alpha}{\beta}} \right\} \\ P_0(h^l) &= \left\{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \epsilon, \theta = 2\pi(k+1), \epsilon e^{\frac{2\pi(k+2)\alpha}{\beta}} \leq r \leq \epsilon e^{\frac{2\pi(k+1)\alpha}{\beta}} \right\} \\ P_0(v^r) &= \left\{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \epsilon, 2\pi k \leq \theta \leq 2\pi(k+1), r(\theta) = \epsilon e^{\frac{\alpha\theta}{\beta}} \right\} \\ P_0(v^l) &= \left\{ (r, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = \epsilon, 2\pi k \leq \theta \leq 2\pi(k+1), r(\theta) = \epsilon e^{\frac{\alpha(2\pi+\theta)}{\beta}} \right\} \end{aligned} \quad (1.43)$$

Así $P_0(R_k)$ aparecerá como en la figura 1.21

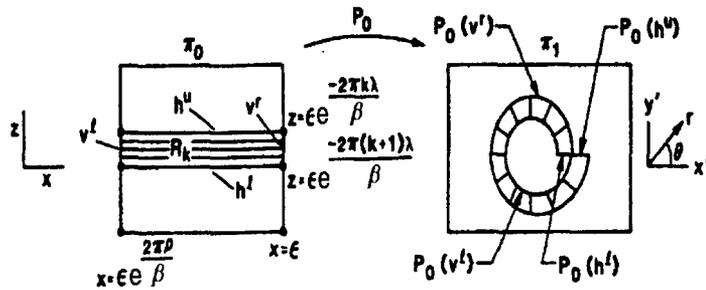


Figura 1.21: Imágenes de las fronteras del rectángulo R_k .

Paso 2. Construcción de P_1

La aplicación P_1 estará definida en $P_0(\Pi_0) \subset \Pi_1$. Sea $p_0 \equiv W^u(0) \cap \Pi_0$ y $p_1 \equiv W^u(0) \cap \Pi_1$. La expansión de Taylor de P_1 alrededor de p_1 es

$$P_1(h) = p_0 + DP_1(p_1)h + \mathcal{O}(|h|^2)$$

donde h representa coordenadas sobre Π_1 centradas en p_1 . Para Π_1 suficientemente pequeño el término $\mathcal{O}(|h|^2)$ puede hacerse arbitrariamente pequeño. Definimos

$$P_1(h) : \Pi_1 \rightarrow \Pi_0$$

como

$$P_1 = p_0 + DP_1(p_1)h,$$

obviamente esta aproximación de P_1 introduce un error. En [29] se demuestra que este error puede despreciarse.

Siendo más precisos, aproximamos

$$P_1 : \Pi_1 \rightarrow \Pi_0$$

por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ \epsilon \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ c & d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.44)$$

donde $(\bar{x}, 0, 0) \equiv W^u(0) \cap \Pi_0$. La estructura de la matriz del 2º renglón y 3ª columna de ceros viene del hecho de que las coordenadas de Π_1 son x e y con $z = \epsilon$ y las coordenadas de Π_0 son x y z con $y = 0$.

Paso 3. Definimos el mapeo de Poincaré como

$$P \equiv P_1 \circ P_0 : \Pi_0 \rightarrow \Pi_0$$

tomando coordenadas en Π_0 ,

$$\begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^{\frac{\alpha}{\lambda}} \left[a \cos\left(\frac{\beta}{\lambda} \ln \frac{\epsilon}{z}\right) + b \sin\left(\frac{\beta}{\lambda} \ln \frac{\epsilon}{z}\right) \right] + \bar{x} \\ x \left(\frac{\epsilon}{z}\right)^{\frac{\alpha}{\lambda}} \left[c \cos\left(\frac{\beta}{\lambda} \ln \frac{\epsilon}{z}\right) + d \sin\left(\frac{\beta}{\lambda} \ln \frac{\epsilon}{z}\right) \right] \end{pmatrix} \quad (1.45)$$

donde Π_0 es elegido suficientemente pequeño. Luego, $P(\Pi_0)$ aparecerá como en la figura 1.22

El objetivo es demostrar que P contiene un conjunto invariante de Cantor sobre el cual es topológicamente conjugado a un corrimiento de Bernoulli en al menos dos símbolos.

Lema 6. *Considere un rectángulo R_k (ver figura 1.23). Entonces para k suficientemente grande la frontera interior de $P(R_k)$ intersecta la frontera horizontal superior de R_i en (al menos) dos puntos para $i \geq \frac{k}{\rho}$ donde $1 \leq \rho < \frac{-\lambda}{\alpha}$. Además, las preimágenes de las fronteras verticales de $P(R_k) \cap R_i$ están contenidos en la frontera vertical de R_k .*

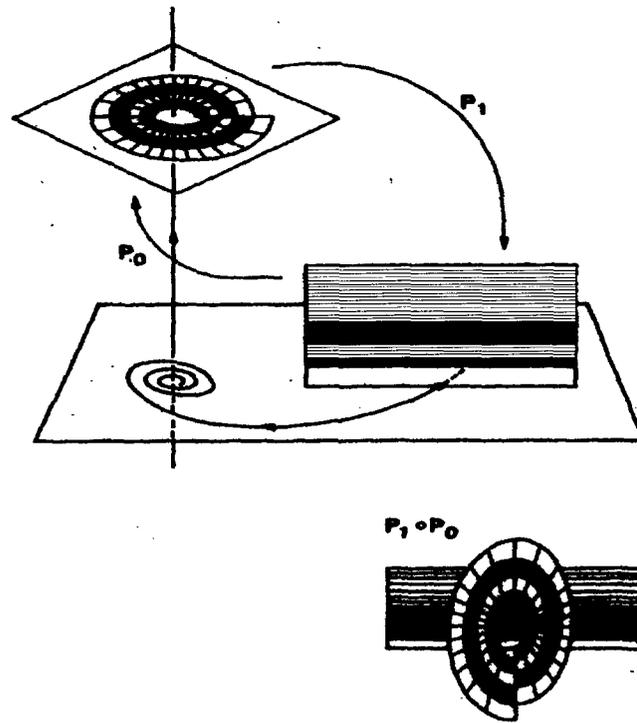


Figura 1.22: La aplicación de Poincaré.

Demostración. La coordenada z de la frontera horizontal superior de R_i esta dada por

$$\bar{z} = \epsilon e^{-\frac{2\pi i \lambda}{\beta}}$$

y el punto sobre la frontera interior de $P_0(R_k)$ más cercano a $(0,0,\epsilon)$ está dado por

$$r_{min} = \epsilon e^{\frac{4\pi\alpha}{\beta}} e^{\frac{2\pi k\alpha}{\beta}}.$$

Como P_1 es un mapeo afín, la cota sobre la frontera interior de $P(R_k) = P_1 \circ P_0(R_k)$ puede ser expresada como

$$r_{min} = K \epsilon e^{\frac{4\pi\alpha}{\beta}} e^{\frac{2\pi k\alpha}{\beta}} \quad (1.46)$$

para alguna $K > 0$.

La frontera interior de $P(R_k)$ intersecta la frontera horizontal superior de R_i en al menos dos puntos siempre que

$$\frac{\bar{r}_{min}}{\bar{z}} > 1 \quad (1.47)$$

De manera explícita

$$\frac{\bar{r}_{min}}{\bar{z}} = Ke^{\frac{4\pi\alpha}{\beta}} e^{\frac{2\pi}{\beta}(k\alpha+i\lambda)}$$

como $Ke^{\frac{4\pi\alpha}{\beta}}$ es una constante fija, el tamaño r_{min} depende sólo del término $e^{\frac{2\pi}{\beta}(k\alpha+i\lambda)}$. Luego, para que el término $\frac{\bar{r}_{min}}{\bar{z}}$ sea mayor que 1, es suficiente tomar $k\alpha + i\lambda$ suficientemente grande. Esto se puede lograr de la siguiente forma:

Dado que, $\lambda > -\alpha > 0$, para $i > \frac{k}{\rho}$ y $1 < \rho < \frac{-\lambda}{\alpha}$, se tiene que

$$k\alpha + i\lambda > k\alpha + \left(\frac{k}{\rho}\right)\lambda = \frac{k}{\alpha}(\alpha\rho + \lambda)$$

pero $\alpha\rho + \lambda > 0$, luego tomando k suficientemente grande $k\alpha + i\lambda$ será mayor o igual a 1.

Ahora describamos el comportamiento de las fronteras verticales de R_k . Bajo P_0 las fronteras verticales de R_k son mapeadas en fronteras interiores y exteriores de un objeto análogo a un anillo (ver Figura 1.23).

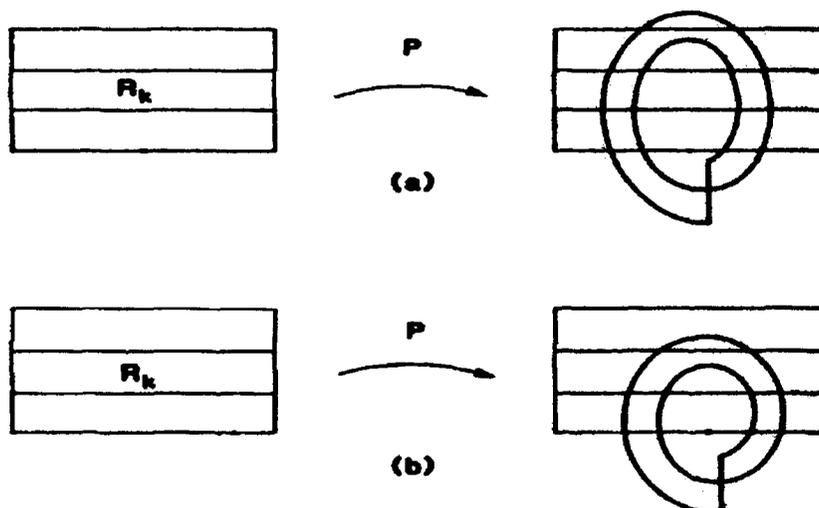


Figura 1.23: Dos posibilidades para $P(R_k) \cap R_k$.

Como P_1 es un mapeo afín invertible, las fronteras interiores y exteriores de $P_0(R_k)$ corresponden a las fronteras interiores y exteriores de $P(R_k) = P_1 \circ P_0(R_k)$, por tanto, la preimagen de la frontera vertical de $P(R_k) \cap R_i$ está contenido en la frontera vertical de R_k . \square

Por último el teorema principal de ésta sección se sigue aplicando directamente las condiciones de Conley-Moser.

Teorema 7. *Para k suficientemente grande, R_k contiene un conjunto de Cantor, Λ_k , sobre el cual el mapeo de Poincaré P es topologicamente conjugado a un shift total en dos símbolos.*

Capítulo 2

Ondas viajeras en la ecuación de Nagumo

El modelo de Hodgkin-Huxley para describir la conducción de impulsos eléctricos a lo largo de un eje nervioso (axón) pertenecen a la clase de ecuaciones diferenciales parciales de la forma:

$$\begin{pmatrix} v_t^0 \\ \vdots \\ v_t^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{xx}^0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f^0(v^0, v^1, \dots, v^n) \\ \vdots \\ f^n(v^0, v^1, \dots, v^n) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

donde f^0, f^1, \dots, f^n son de clase \mathcal{C}^2 . Una discusión matemática de la modelación de este tipo de sistemas más detallada del origen de estas ecuaciones se puede ver en [30], [15]

Una versión simplificada de este modelo lo forma el sistema de FitzHugh-Nagumo

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + f(v) - w \\ w_t &= \epsilon(v - \gamma w) \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde $f(v) = v(1-v)(v-a)$ y ϵ, γ y a son parámetros positivos con $0 < a < 1/2$. Otros modelos de la ecuación de Fitzhugh-Nagumo consideran en vez de la última ecuación,

$$w_t = \epsilon v.$$

La presencia de un parámetro extra en (2.2) simplifica el análisis ya de por sí difícil.

2.1 Reducción de la ecuación de Fitzugh-Nagumo a una ecuación diferencial ordinaria

Busquemos soluciones en forma de onda viajera $v(\xi), w(\xi)$ también llamados *frentes de onda*, con $\xi = x + \theta t$, donde la constante θ da la velocidad de la onda.

$$\begin{aligned}v_t &= v_\xi \cdot \xi_t = \theta v_\xi \\v_x &= v_\xi \cdot \xi_x = v_\xi \\w_t &= w_\xi \cdot \xi_t = \theta w_\xi\end{aligned}$$

luego el sistema (2.2) se transforma en

$$\begin{aligned}\theta v_\xi &= v_{\xi\xi} + f(v) - w \\ \theta w_\xi &= \epsilon(v - \gamma w)\end{aligned}$$

Si además, introducimos una nueva variable $u = v'$ donde $' = \frac{d}{d\xi}$. Se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned}v' &= u \\ u' &= \theta u - f(v) + w \\ w' &= \frac{\epsilon}{\theta}(v - \gamma w)\end{aligned}\tag{2.3}$$

Las soluciones de onda viajera de (2.2) corresponden a soluciones del sistema de ecuaciones diferenciales (2.3). Por razones del modelo, interesan sólo soluciones que sean acotadas, pues representan frentes de onda en la ecuación diferencial parcial con energía finita. Las soluciones de interés son, las órbitas periódicas y las órbitas homoclínicas entre otras, es decir soluciones que son doblemente asintóticas al origen del sistema (2.3) cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$. Estas últimas representan frentes de onda cuyo perfil decae exponencialmente a cero hacia adelante y hacia atrás.

2.2 Estudio de la ecuación de Nagumo

En esta sección se analizará la ecuación de Fitzugh-Nagumo para el caso restringido ($\epsilon = 0, w = 0$) que se conoce también como la ecuación de Nagumo. El estudio del caso restringido será de utilidad para mostrar la existencia de una onda viajera homoclínica en el caso completo.

Considérese el sistema de ecuaciones diferenciales (2.3)

$$\begin{aligned}v' &= u \\ u' &= \theta u + w - f(v) \\ w' &= \frac{\epsilon}{\theta}(v - \gamma w)\end{aligned}\tag{2.4}$$

Para $\epsilon = 0$, se obtiene el sistema de Nagumo

$$\begin{aligned} v' &= u \\ u' &= \theta u + w - f(v) \end{aligned} \tag{2.5}$$

con $w = cte$. Este sistema tiene puntos de equilibrio para $u = 0$, y $w = f(v)$. Ya que $f(v)$ es un polinomio cúbico, tiene un mínimo y un máximo locales f_{min} y f_{max} ; dependiendo del parámetro w , el sistema tiene entonces un punto de equilibrio, si $w < f_{min}$ o $w > f_{max}$; dos, si $w = f_{min}$ o $w = f_{max}$ o tres si $f_{min} < w < f_{max}$.

Nuestro estudio partirá del caso restringido con $\epsilon = 0$ y $w = 0$. Los puntos de equilibrio (v, u) son $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(1, 0)$ cuyo tipo de estabilidad puede determinarse a partir del análisis lineal de sus valores propios,

Punto crítico	Valores propios	Tipo lineal
$(0, 0)$	$\frac{1}{2}(\theta \pm \sqrt{\theta^2 + 4a})$	silla
$(a, 0)$	$\frac{1}{2}(\theta \pm \sqrt{\theta^2 - 4a(1-a)})$	repulsor
$(1, 0)$	$\frac{1}{2}(\theta \pm \sqrt{\theta^2 + 4(1-a)})$	silla

(2.6)

donde recordemos que $0 < a < \frac{1}{2}$.

Empezemos por analizar el caso conservativo $\theta = 0$, $w = 0$

$$\begin{aligned} v' &= u &= \frac{\partial H}{\partial u} \\ u' &= -f(v) &= -\frac{\partial H}{\partial v} \end{aligned}$$

donde $H(v, u) = \frac{1}{2}u^2 + F(v)$ y $F(v) = \int_0^v f(s)ds$.

La figura 2.1 muestra la gráfica de f y su integral F .

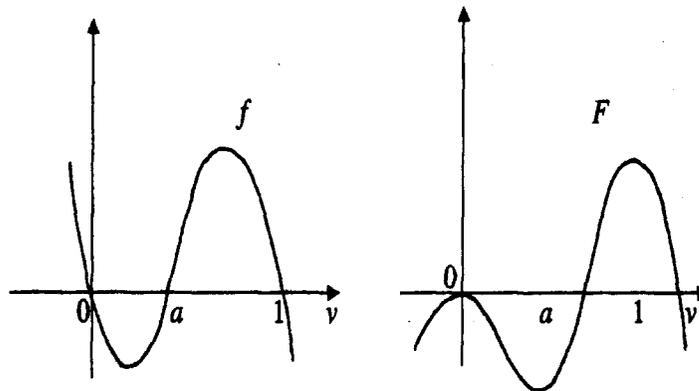


Figura 2.1: Gráficas de la función f y su integral F .

En la figura 2.2 se bosqueja el retrato fase para este caso. Obsérvese que existe una solución no constante $\gamma(v, u)$ tal que $\gamma(\pm\infty) = 0$ y todas las trayectorias permanecen en

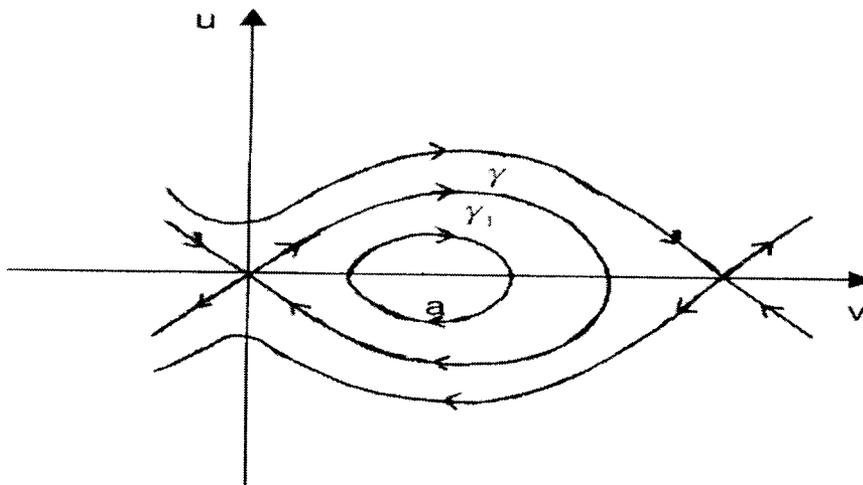
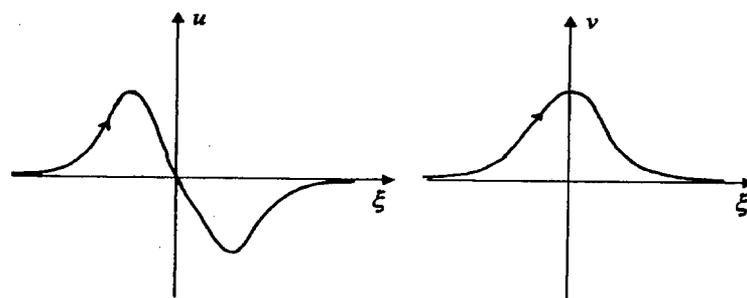
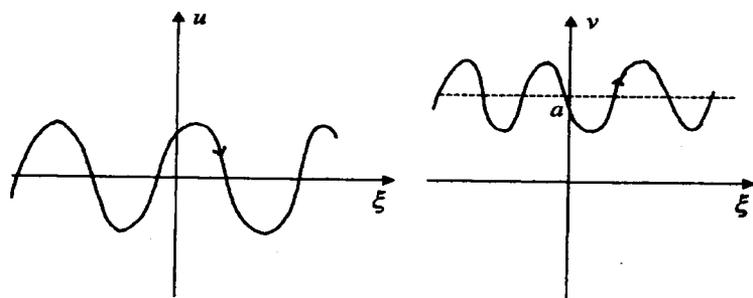


Figura 2.2: Retrato fase $\theta = 0, \epsilon = 0, w = 0$.



a) Ondas estacionarias de γ_1



b) Ondas estacionarias de γ_2

Figura 2.3: Ondas viajeras de la ecuación de Nagumo.

curvas de nivel $H(v, u) = \text{constante}$. En la figura 2.3 se describen las ondas estacionarias, correspondientes a una órbita homoclínica y una periódica respectivamente.

Considérese ahora el caso $\theta > 0$, $w = 0$, $\epsilon = 0$ del cual se obtiene el sistema no conservativo

$$\begin{aligned} v' &= u \\ u' &= \theta u - f(v) \end{aligned} \tag{2.7}$$

La función H del caso $\theta = 0$ sirve ahora como función de Liapunov para analizar el sistema con $\theta \neq 0$. Ya que $H' = H_v v' + H_u u' = \theta u^2$. Si $\theta > 0$ el Hamiltoniano crece a lo largo de las órbitas, excepto si $u = 0$, luego si empezamos a variar $\theta > 0$ continuamente se obtendrán los siguientes retratos fases (ver figura 2.4). Para un cierto valor de $\theta = \theta^*(a)$ se dará la conexión entre los puntos de equilibrio $(0, 0)$ y $(1, 0)$. Este valor se puede calcular explícitamente (véase la proposición 6)

$$\theta^*(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - 2a).$$

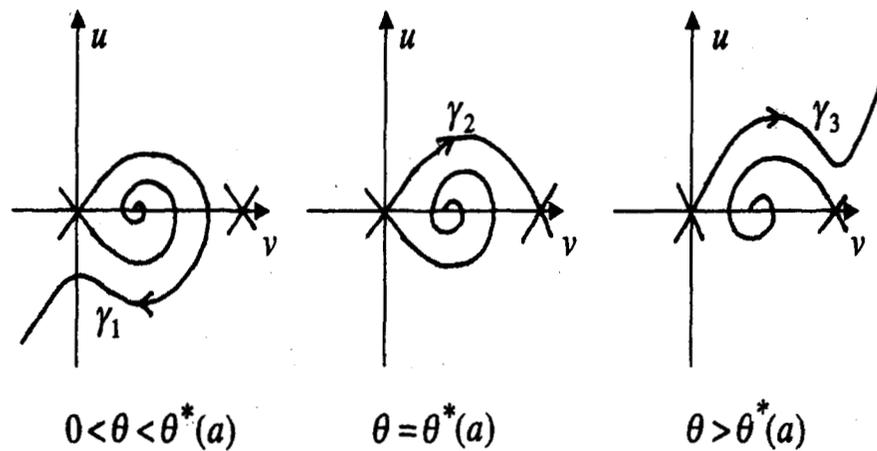


Figura 2.4: Retratos fase variando θ y la conexión heteroclínica para θ^* .

En la figura 2.5 se muestra el comportamiento de las ondas viajeras correspondientes. Véase [16],[17].

Para cualquier $\theta > 0$, sea \mathcal{U}_θ^+ la rama de la variedad inestable en $(0, 0)$ que apunta hacia la región $v > 0, u > 0$ y sea $q_\theta = (v_\theta, u_\theta)$ la solución del sistema 2.7 tal que $q_\theta(0) \in \mathcal{U}_\theta^+$, $u_\theta(\xi) > 0$, para $\xi \leq 0$ y $v_\theta(0) = a$.

Con más precisión, el vector propio $(1, \frac{1}{2}(\theta + \sqrt{\theta^2 + 4a}))$ en el origen (2.6) determina una componente de la rama inestable que intersecta el primer cuadrante en una vecindad del origen de coordenadas (v, u) el cual se denota por \mathcal{U}_θ^+ . Afirmamos que

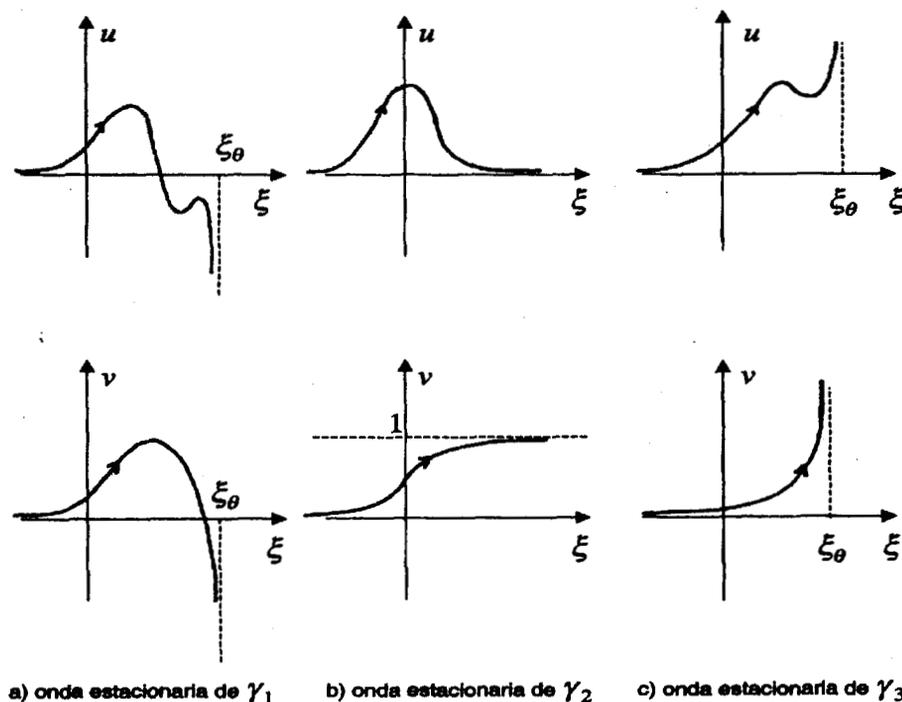


Figura 2.5: Comportamiento de las ondas viajeras para las soluciones en (2.7).

esta rama intersecta la recta $v = a$. Por el contrario, si no fuese así, sea $(v_\theta(\xi), u_\theta(\xi))$ la solución definida en un intervalo maximal $(-\infty, \xi^*)$ sobre la rama inestable \mathcal{U}_θ^+ . De la ecuación $v' = u$ vemos que si $u_\theta(\xi)$ es siempre positiva entonces $v_\theta(\xi)$ es siempre creciente y positiva; hay entonces dos posibilidades: (a) $v_\theta(\xi)$ permanece acotada. Entonces $v_\theta(\xi) \rightarrow v^*$ cuando $\xi \rightarrow \xi^*$ para algún valor v^* ; en tal caso $(v^*, 0)$ sería un punto crítico que sólo puede ser $(1, 0)$ y por lo tanto γ es una órbita heteroclínica contenida en el primer cuadrante que intersecta la recta $v = a$. (b) $v_\theta(\xi)$ tiende a infinito. Trivialmente intersecta $v = a$.

Sea ξ_1 el primer valor para el que $u_\theta(\xi_1) = 0$; y supongamos que $0 < v_\theta(\xi_1) < a$. De la ecuación (2.7) se sigue que $u'_\theta(\xi_1) = -f(v_\theta(\xi_1)) > 0$, pues $f(v) < 0$ para $0 < v < a$. Esto significa que $v'_\theta(\xi_1) = 0$ con $v''_\theta(\xi_1) > 0$, luego $v_\theta(\xi_1)$ es un mínimo local. Como $v_\theta(-\infty) = 0$ se sigue que debe existir $\xi_{-1} < \xi_1$ tal que $v'_\theta(\xi_{-1}) = 0$ lo cual contradice la definición de ξ_1 , por lo tanto $v_\theta(\xi_1) > a$ y la curva deberá intersecta la recta $v = a$.

En cualquier caso, por un corrimiento en el argumento ξ es posible tener una solución $q_\theta(\xi) = (v_\theta(\xi), u_\theta(\xi))$ definida sobre $(-\infty, 0]$ tal que $v_\theta(\xi) > 0$, $u_\theta(\xi) > 0$, $v_\theta(0) = a$ y $q_\theta(\xi) \rightarrow (0, 0)$ cuando $\xi \rightarrow -\infty$.

Como consecuencia se tiene que para $\xi \in (-\infty, 0]$, se cumple $v'_\theta(\xi) = u_\theta(\xi) > 0$, $u'_\theta(\xi) = \theta u_\theta(\xi) - f(v_\theta(\xi)) > 0$.

En resumen,

$$u_\theta(\xi), u'_\theta(\xi), v_\theta(\xi), v'_\theta(\xi)$$

son todas positivas en $-\infty < \xi \leq 0$ (ver figura 2.6).

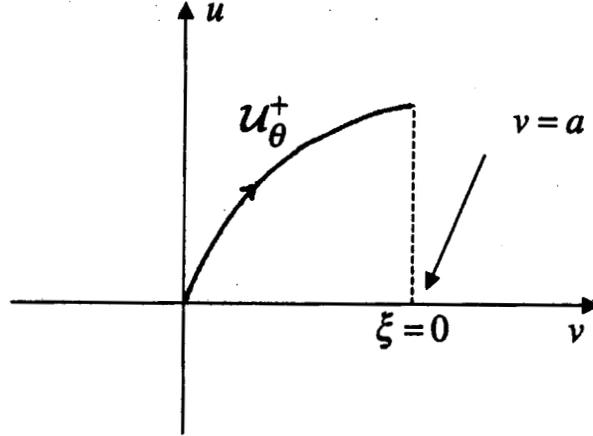


Figura 2.6: La rama inestable en el cuadrante positivo.

Proposición 6. *Considere la rama inestable U_θ^+ del sistema (2.7). Entonces*

1. Para $\theta = \theta^*(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 - 2a)$, $q_\theta(\xi)$ existe y es única en $(-\infty, \infty)$ y $q_\theta(\xi) \rightarrow (1, 0)$ cuando $\xi \rightarrow +\infty$;
2. Para $0 < \theta < \theta^*(a)$, $u_\theta(\xi) = 0$ exactamente una vez y la solución maximal existe sobre un intervalo $(-\infty, \xi_\theta)$ con $\xi_\theta < \infty$; la solución “escapa” por el tercer cuadrante del plano v - u : $(v_\theta(\xi), u_\theta(\xi)) \rightarrow (-\infty, -\infty)$ cuando $\xi \rightarrow \xi_\theta$.
3. Para $\theta > \theta^*(a)$, la solución maximal existe sobre un intervalo $(-\infty, \xi_\theta)$ con $\xi_\theta < \infty$; la solución “escapa” por el primer cuadrante del plano v - u : $(v_\theta(\xi), u_\theta(\xi)) \rightarrow (\infty, \infty)$ cuando $\xi \rightarrow \xi_\theta$.

(ver figura 2.4)

Demostración.

(1) El sistema (2.7) se puede reescribir como

$$u \frac{du}{dv} = \theta u - v(v-a)(1-v) \quad (2.8)$$

siempre que $u(\xi)$ se mantenga positivo. Se desea probar que existe una y solo una solución del sistema (2.7) que conecta a los puntos de equilibrio $(0, 0)$ y $(1, 0)$ para $\theta = \theta^*(a)$.

Proponemos una solución analítica de la forma

$$u(v) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v^n$$

luego,

$$\frac{du}{dv} = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n v^{n-1}$$

y

$$u \frac{du}{dv} = \sum_{n=1}^{\infty} d_n v^n$$

donde

$$d_n = \sum_{k+l=n+1} k c_k c_l, \quad \text{con } k, l \in \mathbb{N}.$$

Esta solución deberá satisfacer las condiciones de frontera

$$u(0) = 0, \quad u(1) = 0. \quad (2.9)$$

Expandiendo en serie el miembro derecho de la ecuación

$$u \frac{du}{dv} = \theta u - v(v-a)(1-v),$$

$$\begin{aligned} \theta u + av - (1+a)v^2 + v^3 &= \theta(c_1 v + c_2 v^2 + \dots) + av - (1+a)v^2 + v^3 \\ &= (\theta c_1 + a)v + (\theta c_2 - (1+a))v^2 + (\theta c_3 + 1)v^3 + \theta c_4 v^4 + \theta c_5 v^5 + \dots + \theta c_n v^n + \dots \end{aligned}$$

e igualando término a término se llega a

$$d_1 = c_1^2 = \theta c_1 + a \quad (2.10)$$

$$d_2 = c_1 c_2 + 2c_2 c_1 = \theta c_2 - (1+a) \quad (2.11)$$

$$d_3 = c_1 c_3 + 2c_2 c_2 + 3c_3 c_1 = \theta c_3 + 1 \quad (2.12)$$

$$d_4 = c_1 c_4 + 2c_2 c_3 + 3c_3 c_2 + 4c_4 c_1 = \theta c_4 \quad (2.13)$$

⋮

$$d_n = c_1 c_n + 2c_2 c_{n-1} + \dots + (n-1)c_{n-1} c_2 + n c_n c_1 = \theta c_n, \quad (n \geq 4)$$

Si hacemos $c_3 = 0$, se tiene de (2.12) $c_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Además, de (2.13) se debe tener la igualdad

$$5c_4 c_1 = \theta c_4$$

Si $c_4 \neq 0$, esto implicaría que $5c_1 = \theta$ lo cual no puede ser, luego $c_4 = 0$ y $c_3 = 0$ lo que implica que $c_4 = c_5 = 0$. Ya que

$$c_1 c_5 + 2c_2 c_4 + 3c_3 c_3 + 4c_4 c_2 + 5c_5 c_1 = \theta c_5 \quad \text{con } c_5 \neq 0$$

se seguiría que $6c_5 c_1 = \theta c_5$ lo cual no puede ser luego $c_5 = 0$ En general $c_3 = 0$ implica $c_4 = c_5 = c_6 = \dots = 0$. Así, tendríamos una solución analítica de la forma

$$u(v) = c_1 v + c_2 v^2$$

cuyos coeficientes deben satisfacer, de acuerdo a (2.9)

$$c_1 + c_2 = 0,$$

luego $c_1 = -c_2 = \pm 1/\sqrt{2}$. De (2.10,2.11) se tiene

$$c_1 = \frac{\theta \pm \sqrt{\theta^2 + 4a}}{2} \quad \text{y} \quad c_2 = \frac{1+a}{\theta - 3c_1}$$

de donde

$$\mp \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1+a}{\theta - 3\left(\frac{\theta \pm \sqrt{\theta^2 + 4a}}{2}\right)}.$$

Esta ecuación nos da una relación directa entre θ y a , despejando θ se tiene

$$\theta = \pm \frac{3}{\sqrt{2}} \mp \sqrt{2}(1+a).$$

Luego obtenemos dos valores de θ

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}(1+a) = \frac{1-2a}{\sqrt{2}} \\ \theta_2 &= -\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}(1+a) = \frac{-1+2a}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Como estamos interesados en valores de $\theta > 0$ y $0 < a < \frac{1}{2}$ tenemos que

$$\theta_1 = \theta^*(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-2a).$$

Por lo tanto, la solución analítica que conecta $(0,0)$ y $(1,0)$ esta dada por

$$u(v) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v - v^2) \quad \text{con} \quad \theta = \theta^*(a). \quad (2.14)$$

Para completar la prueba debemos verificar las siguientes dos afirmaciones:

- (a) No existe solución analítica que pase por $(0,0)$ y $(1,0)$ para $\theta \neq \theta^*(a)$
- (b) Para $\theta = \theta^*(a)$ existe una y sólo una solución.

Para demostrar (a), nótese que en cualquier punto (v,u) con $u \neq 0$

$$\frac{du}{dv} = \theta - \frac{v(1-v)(v-a)}{u}$$

es una función creciente de θ . Además las pendientes en $(0,0)$ y $(1,0)$ para trayectorias que entran o salen de estos puntos son también funciones crecientes de θ ya que

$$\left. \frac{du}{dv} \right|_{v=0,1} = \theta$$

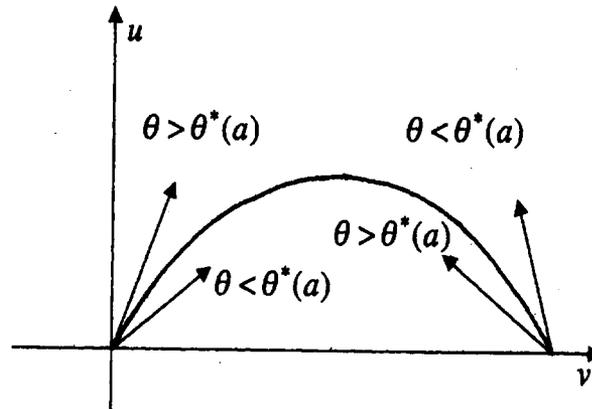


Figura 2.7:

(ver figura 2.7)

Sea u^* la solución correspondiente al valor $\theta^*(a)$ y sea u la solución correspondiente al valor $\theta > \theta^*(a)$; para que la trayectoria u pueda pasar por $(0,0)$ y $(1,0)$ deberá intersectar a u^* en algún punto (v_0, u_0) , luego

$$\frac{du}{dv}(v_0) > \frac{du^*}{dv}(v_0)$$

ya que $\theta > \theta^*(a)$, lo cual no puede ser cierto pues

$$\frac{du}{dv}(v_0) < \frac{du^*}{dv}(v_0).$$

(ver figura 2.8)

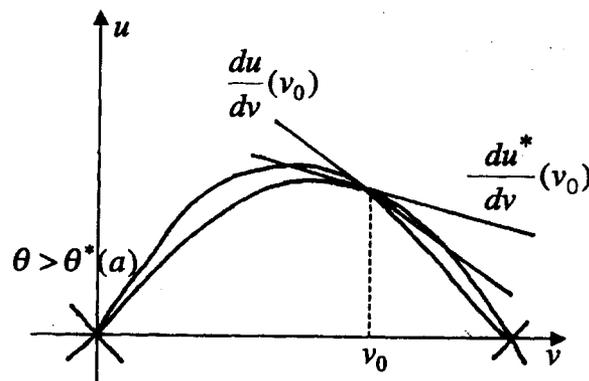


Figura 2.8:

De manera similar se prueba que para $\theta < \theta^*(a)$ se da una contradicción con lo cual se concluye la prueba de a).

Demostremos ahora la afirmación (b). En la demostración de la última proposición se construyó una solución analítica $u(v)$ que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$, (2.14).

Mostraremos explícitamente que

$$v(\xi) = \frac{\exp(\xi/\sqrt{2})}{\exp(\xi/\sqrt{2}) + 1}, \quad u(\xi) = v'(\xi) \quad (2.15)$$

es una solución que satisface las condiciones de frontera

$$v(-\infty) = 0, \quad v(\infty) = 1.$$

Para ello basta separar variables en la expresión

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{1}{\sqrt{2}}(v - v^2).$$

Un cálculo directo con las condiciones de frontera anteriores muestra que la solución es (2.15). De esta manera hemos probado (1). Aunque no es difícil demostrar (2) y (3), referimos al lector para los detalles a la bibliografía ([2], [3], [23]).

□

El teorema anterior se debe a Hastings [16], quien posteriormente probó la existencia de una órbita homoclínica en el sistema de Fitzhugh-Nagumo usando estimaciones delicadas. Otra prueba debida a Conley usa la noción de índice (posteriormente llamado el índice de Conley) que se basa esencialmente en la existencia de un ciclo singular formado por dos órbitas heteroclínicas: una para $w = 0$ que conecta los puntos $(0, 0)$ y $(1, 0)$, y otra que conecta $(1, 0)$ con $(0, 0)$ para cierto nivel $w = w^*$, y los puntos de equilibrio $w = f(v)$ que bifurcan de los puntos de equilibrio $(0, 0)$ y $(1, 0)$, vistos en el espacio fase extendido $v-u-w$. En el siguiente capítulo veremos una prueba de este hecho debida a Hastings [18], donde en base a estimaciones más finas consigue dar una prueba que permite además verificar las hipótesis del teorema de Silnikov.

Capítulo 3

Dinámica simbólica de ondas viajeras de la ecuación de FN

En este capítulo se demostrará que en la ecuación diferencial ordinaria que se obtiene para las soluciones en forma de ondas viajeras, existe un conjunto de Cantor donde el sistema dinámico es conjugado a un shift de Bernoulli en dos símbolos. Este resultado fué demostrado por Hastings [18] en un trabajo bastante denso; el haber cubierto los detalles de la demostración es el trabajo principal de esta tesis.

Como consecuencia de lo anterior se sigue la existencia de un número infinito de órbitas periódicas que se traducen en pulsos múltiplemente periódicos, pero más aún, ya que el conjunto de Cantor es compacto, se sigue que existe una infinidad no numerable de órbitas acotadas.

3.1 Existencia de una onda viajera homoclínica en las ecuaciones de Fitzhugh-Nagumo

En esta sección se verán las condiciones que deben satisfacer los parámetros γ , a , ϵ y θ en las ecuaciones de Fitzhugh-Nagumo para garantizar la existencia de una onda viajera homoclínica.

Considérese el sistema Fitzhugh-Nagumo

$$\begin{aligned}v' &= u \\u' &= \theta u - f(v) + w \\w' &= \frac{\epsilon}{\theta}(v - \gamma w).\end{aligned}\tag{3.1}$$

Sea $M = \max_{0 \leq v \leq 1} f(v)/v$. Un cálculo directo muestra que $M = \frac{(1-a)^2}{4} > 0$, donde $0 < a < 1/2$. En lo sucesivo se considerarán valores del parámetro γ tales que

$$\gamma < \frac{1}{M}.\tag{3.2}$$

Esta última desigualdad garantiza que el único punto crítico del sistema (3.1) es el origen. En efecto, si (v, u, w) es un punto crítico entonces $u = 0$, $w = f(v)$ y $v = \gamma w$. Una solución obvia es el origen. Si $(v, 0, w)$ es otro punto crítico con $v \neq 0$ entonces $v - \gamma f(v) = 0$. Por otro lado

$$v - \gamma f(v) = v \left(1 - \gamma \frac{f(v)}{v} \right)$$

pero $f(v)/v \leq M < 1/\gamma$, de donde $1 - \gamma \frac{f(v)}{v} > 0$ y por lo tanto $v = 0$ lo cual es una contradicción.

3.2 Análisis lineal

La matriz de la linealización del campo vectorial (3.1) en el origen es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & \theta & 1 \\ \frac{\epsilon}{\theta} & 0 & -\frac{\epsilon\gamma}{\theta} \end{pmatrix}$$

y el polinomio característico es

$$P(\lambda) = \lambda^3 + \left(\frac{\gamma\epsilon}{\theta} - \theta \right) \lambda^2 - (\gamma\epsilon + a)\lambda - \left(\frac{\epsilon}{\theta} + \frac{\gamma\epsilon a}{\theta} \right) = 0.$$

Si λ_i , $i = 1, 2, 3$ son las raíces, entonces $P(\lambda)$ se puede escribir como

$$P(\lambda) = \lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\lambda - \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

comparando los coeficientes se tiene

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= -\left(\frac{\gamma\epsilon}{\theta} - \theta \right) \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 &= -(\gamma\epsilon + a) \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 &= \left(\frac{\epsilon}{\theta} + \frac{\gamma\epsilon a}{\theta} \right) \end{aligned}$$

Proposición 7. *Si $a > 0$, $\gamma \geq 0$, $\theta > 0$ y $\epsilon > 0$ entonces el sistema lineal tiene una raíz real $\lambda_1 > 0$ y dos raíces con parte real negativa.*

Demostración. Sea λ_1 la raíz real. Si $\lambda_{2,3}$ son complejas, entonces $\lambda_2\lambda_3 = |\lambda_2|^2$, de la tercera identidad tenemos $\lambda_1|\lambda_2|^2 > 0$, luego λ_1 es positiva. De la segunda identidad se sigue

$$\lambda_1(\lambda_2 + \lambda_3) = -\lambda_2\lambda_3 - (\gamma\epsilon + a) < 0$$

de donde $2\operatorname{Re}(\lambda_2) = \lambda_2 + \lambda_3 < 0$. Si las raíces son todas reales entonces de la primera y tercera identidad se sigue que una es positiva y las dos negativas. \square

Considérese ahora el vector propio asociado al valor propio positivo λ_1 . La ecuación de valores propios es

$$\begin{aligned} \delta u &= \lambda_1 \delta v, \\ a\delta v + \theta\delta u + \delta w &= \lambda_1 \delta u, \\ \frac{\epsilon}{\theta}\delta v - \frac{\epsilon\gamma}{\theta}\delta w &= \lambda_1 \delta w, \end{aligned}$$

y tomando $\delta v = 1$ se obtiene el vector propio

$$\begin{pmatrix} \delta v \\ \delta u \\ \delta w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \\ \frac{\epsilon/\theta}{\lambda_1 + \epsilon\gamma/\theta} \end{pmatrix}$$

que tiene todas sus componentes positivas. Hemos demostrado la siguiente

Proposición 8. *Si $a > 0$, $\gamma \geq 0$, $\theta > 0$ y $\epsilon > 0$ entonces el sistema (3.1) tiene una variedad inestable de dimensión uno y una variedad estable de dimensión dos. Una rama de la variedad inestable intersecta el primer octante $v > 0$, $u > 0$, $w > 0$ en una vecindad del origen.*

3.2.1 Definición de los conjuntos invariantes de escape

Definamos los siguientes conjuntos

$$E^+ = \{(v, u, w) | v > 1, u > 0, \theta u + w - f(v) > 0, v - \gamma w > 0\} \quad (3.3)$$

$$E^- = \{(v, u, w) | v < 0, u < 0, \theta u + w - f(v) < 0, v - \gamma w < 0\}. \quad (3.4)$$

Nótese que por definición, para los puntos de E^+ , $v > 1$, $u > 0$ y $u' > 0$, $w' > 0$; análogamente para los puntos de E^- , $u < 0$, $v < 0$ y $u' < 0$, $w' < 0$.

Lema 7. *Los conjuntos E^+ y E^- son invariantes bajo el flujo de (3.1).*

Demostración. Haremos la demostración para E^+ el caso de E^- es similar. Aplicaremos el siguiente argumento general: Si en la ecuación $x' = f(x)$, la región D viene dada por la ecuación $g(x) \geq 0$, entonces si $\nabla g(x) \cdot x' = \nabla g(x) \cdot f(x) > 0$ siempre que $g(x) = 0$, entonces D es positivamente invariante.

Esta condición se verifica para cada parte de la frontera de E^+ que viene dada sustituyendo una desigualdad a la vez por la igualdad (los lados y esquinas del conjunto donde se dan dos o más igualdades pueden tratarse de manera similar).

1. Para $v = 1$, $v' = u > 0$.
2. Para $u = 0$, $u' = \theta u + w - f(v) > 0$.

3. Para $\theta u + w - f(v) = 0$,

$$\begin{aligned} (\theta u + w - f(v))' &= \theta u' + w' - f'(v)v' \\ &= \theta(\theta u + w - f(v)) + \frac{\epsilon}{\gamma}(v - \gamma w) - f'(v)u \\ &= \frac{\epsilon}{\gamma}(v - \gamma w) - f'(v)u \end{aligned}$$

El primer término es positivo, además

$$-f'(v)u = -[(1-v)v + (1-v)(-a+v) + v(a-v)]u$$

y tomando en cuenta que cada término del factor entre paréntesis es negativo, pues $v > 1 > a > 0$, y como $u > 0$, se sigue que $-f'(v)u > 0$ por lo tanto $(\theta u + w - f(v))' > 0$.

4. Para $v - \gamma w = 0$,

$$\begin{aligned} (v - \gamma w)' &= v' - \gamma w' \\ &= u - \frac{\epsilon}{\theta}(v - \gamma w) = u > 0. \end{aligned}$$

□

La siguiente proposición muestra por qué los conjuntos E^\pm son llamados conjuntos de escape.

Proposición 9. *Sea $q(\xi) = (v(\xi), u(\xi), w(\xi))$ una solución del sistema (3.1). Si $q(0) \in E^+$ [resp. E^-] entonces existe $\xi_q > 0$ tal que $(v(\xi), u(\xi)) \rightarrow (\infty, \infty)$ [resp. $(v(\xi), u(\xi)) \rightarrow (-\infty, -\infty)$] cuando $\xi \rightarrow \xi_q$ y viceversa, si $v(\xi) \rightarrow \infty$ [resp. $v(\xi) \rightarrow -\infty$] cuando $\xi \rightarrow \xi_q$ entonces existe $T < \xi_q$ tal que $q(T) \in E^+$ [resp. E^-].*

Omitiremos la demostración de este resultado para concentrarnos en el caso general (véanse también las referencias [2],[3], [23]).

3.2.2 El teorema principal

Mantendremos la misma notación que en el capítulo anterior con las modificaciones obvias: De acuerdo al análisis lineal existe una rama de la variedad inestable que intersecta el octante positivo $v, u, w > 0$ en una vecindad del origen la cual será denotado por $\mathcal{U}_{\theta, \epsilon}^+$. Para cada (θ, ϵ) sea $q_{\theta, \epsilon} = (v_{\theta, \epsilon}, u_{\theta, \epsilon}, w_{\theta, \epsilon})$ la solución de (3.1) tal que:

$$\begin{aligned} i) \quad & q_{\theta, \epsilon} \in \mathcal{U}_{\theta, \epsilon}^+; \\ ii) \quad & v_{\theta, \epsilon}(0) = a; \\ iii) \quad & u_{\theta, \epsilon}(\xi) > 0 \quad \text{para } -\infty < \xi \leq 0; \end{aligned} \tag{3.5}$$

La justificación de estas condiciones es similar al caso restringido.

Nuestro objetivo será describir la evolución de la rama inestable $\mathcal{U}_{\theta, \epsilon}^+$ en relación a los parámetros (θ, ϵ) .

Teorema 8. Sea $M = \max_{v \geq 0} \frac{f(v)}{v}$. Supóngase que $0 < \gamma < \frac{1}{M}$ y $0 < a < \frac{1}{2}$, entonces existe un $\epsilon_1 > 0$ tal que si $0 < \epsilon < \epsilon_1$, el sistema (3.1) posee una solución homoclínica para al menos dos valores diferentes de θ .

La prueba de este teorema es bastante laboriosa y requiere de algunos lemas.

Para a fijo y $\gamma > 0$ considérese la región

$$\Omega = \{(\theta, \epsilon) \mid \theta > 0, \epsilon \geq 0\} \quad (3.6)$$

el objetivo es estudiar el comportamiento de la variedad inestable $\mathcal{U}_{\theta, \epsilon}^+$ cuando (θ, ϵ) varian en Ω .

Veremos que existen tres posibilidades mutuamente exclusivas y exhaustivas; Con más precisión, sea $\Omega_i = \{(\theta, \epsilon) \in \Omega\}$ tal que P_i describe el comportamiento de $q_{\theta, \epsilon}$, esto es,

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \{(\theta, \epsilon) \in \Omega \mid q_{\theta, \epsilon} \text{ existe y es acotada en } (-\infty, +\infty)\}, \\ \Omega_2 &= \{(\theta, \epsilon) \in \Omega \mid \exists \xi_q \in \mathbb{R} \text{ t.q. } (v_{\theta, \epsilon}(\xi), u_{\theta, \epsilon}(\xi)) \rightarrow (+\infty, +\infty) \text{ cuando } \xi \rightarrow \xi_q\}, \\ \Omega_3 &= \{(\theta, \epsilon) \in \Omega \mid \exists \xi_q \in \mathbb{R} \text{ t.q. } (v_{\theta, \epsilon}(\xi), u_{\theta, \epsilon}(\xi)) \rightarrow (-\infty, -\infty) \text{ cuando } \xi \rightarrow \xi_q\}. \end{aligned}$$

Observación. Se demostrará que Ω_2 y Ω_3 son subconjuntos abiertos disjuntos de Ω . Del análisis del sistema restringido $\epsilon = 0$ en la sección anterior, se ve que Ω_2 y Ω_3 son no vacíos y como Ω es conexo se tiene que Ω_1 es no vacío.

Lema 8. Los conjuntos Ω_2 y Ω_3 son abiertos relativos a Ω .

Demostración. Se hará la prueba para Ω_2 . El caso Ω_3 es similar.

Dado $(\theta, \epsilon) \in \Omega_2$ debemos probar que existe una vecindad con centro en (θ, ϵ) totalmente contenida en Ω_2 . Por la proposición 9, existe $T > 0$ tal que $q_{\theta, \epsilon}(T) \in E^+$, luego por ser E^+ un conjunto abierto en \mathbb{R}^3 , existe una vecindad $W_R \subset E^+$ del punto $q_{\theta, \epsilon}(T)$. Por continuidad del flujo respecto a parámetros (θ, ϵ) , se tiene que toda trayectoria que intersecte a W_R deberá provenir de una vecindad $V_r(\theta, \epsilon)$ totalmente contenida en Ω_2 (ver figura 3.1). \square

Lema 9. Sea $f \in L_2(\mathbb{R})$ tal que f' es acotada, entonces $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} f(\xi) = 0$.

Demostración. Basta ver que pasa con el caso $\xi \rightarrow \infty$, el caso $\xi \rightarrow -\infty$ es similar.

Se hará por contradicción. Supongamos que $\lim_{\xi \rightarrow \infty} f(\xi) \neq 0$ y que f' es acotada entonces se probará que $f \notin L_2(\mathbb{R})$.

Si $\lim_{\xi \rightarrow \infty} f(\xi) \neq 0$, entonces existe $\epsilon_0 > 0$ y una sucesión $\xi_n \rightarrow \infty$ tal que $|f(\xi_n)|^2 > \epsilon_0$ cuando $\xi_n \rightarrow \infty$. Vamos a suponer de hecho que $|f(\xi_n)| > \epsilon_0$. Podemos suponer que $\xi_n < \xi_{n+1}$ y $\xi_{n+1} - \xi_n > 1$ para toda n . Sea $\delta_n > 0$ tal que:

a) $|f(\xi)| > \epsilon_0$ para $\xi_n \leq \xi \leq \xi_n + \delta_n$ y $\delta_n \geq \frac{1}{2}$ o bien

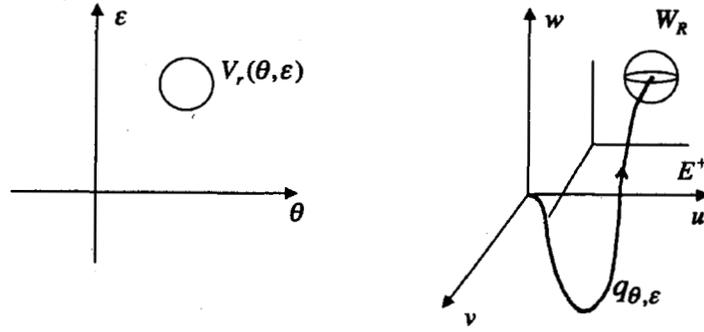


Figura 3.1:

b) $|f(\xi_n)| > \epsilon_0$ para $\xi_n \leq \xi \leq \xi_n + \delta_n$ y $|f(\xi_n + \delta_n)| = 0$.
 Puede suceder que a) ocurra una infinidad de veces o b) ocurra una infinidad de veces.
 En el caso a)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |f(\xi)|^2 d\xi &> \sum_{n=1}^\infty A_n, \quad \text{donde} \quad A_n = \int_{\xi_n}^{\xi_n + \delta_n} |f(\xi)|^2 d\xi. \\ &> \sum_{n=1}^\infty \delta_n^2 \epsilon_0 = \infty. \end{aligned}$$

lo cual implica que $f \notin L_2(\mathbb{R})$, lo cual es una contradicción. En el caso b) pueden suceder dos cosas: $\delta_n > \delta$ para alguna $\delta > 0$, o bien $\delta_n \rightarrow 0$. En el primer caso la demostración es la misma que en a), en el segundo caso si $\delta_n \rightarrow 0$ hemos supuesto que $|f(\xi_n)| > \epsilon_0 + K > 0$, esto es $f(\xi_n) - \epsilon_0 > K$, entonces por el teorema del valor medio existe η_n tal que

$$f'(\eta_n) = \frac{f(\xi_n) - \epsilon_0}{\delta_n} > \frac{\epsilon_0}{\delta_n} \rightarrow_{n \rightarrow \infty} \infty.$$

por lo tanto f' no está acotada. Otra vez una contradicción. \square

El lema siguiente nos da una región en Ω sobre los parámetros (θ, ϵ) para los cuales no puede existir una órbita acotada que no sea $q = (0, 0, 0)$.

Lema 10. Sea $M < \frac{\epsilon}{\theta^2} \leq \frac{1}{\gamma}$. Si una solución está definida para toda $\xi \in (-\infty, +\infty)$ entonces es la solución trivial $q(\xi) \equiv (0, 0, 0)$.

Demostración. Introduzcamos la función

$$G(v, u, w) = \theta^2 v^2 + u^2 + \frac{\theta}{\epsilon} \left(\theta - \frac{\epsilon\gamma}{\theta} \right) w^2 + 2F(v) - 2vw - 2\theta uv.$$

Derivando a lo largo de las soluciones se puede escribir

$$G'(\xi) = 2v^2\theta \left(\frac{f(v)}{v} - \frac{\epsilon}{\theta^2} \right) - 2\gamma^2\theta \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{\epsilon}{\theta^2} \right) w^2 \quad (3.7)$$

recordemos que $\frac{f(v)}{v} \leq M$, para $0 \leq v \leq 1$, luego

$$\frac{f(v)}{v} - \frac{\epsilon}{\theta^2} \leq M - \frac{\epsilon}{\theta^2}. \quad (3.8)$$

Por hipótesis

$$M - \frac{\epsilon}{\theta^2} < 0 \quad \text{y} \quad \frac{1}{\gamma} - \frac{\epsilon}{\theta^2} \geq 0$$

luego $G' < 0$, esto es, G es estrictamente decreciente a lo largo de soluciones no constantes. Si $q(\xi)$ es una solución acotada entonces está contenida en un rectángulo. Como G es continua entonces G está acotada en dicho rectángulo. En particular $G(\xi)$ es acotada para $\xi \in (-\infty, \infty)$, luego los límites $G(\pm\infty)$ existen y son distintos si la solución no es la trivial. Por otro lado, de (3.7) y (3.8) se tiene

$$G'(\xi) \leq 2v^2\theta \left(\frac{f(v)}{v} - \frac{\epsilon}{\theta^2} \right)$$

y nuevamente de (3.8)

$$\left(\frac{f(v)}{v} - \frac{\epsilon}{\theta^2} \right) \leq \left(M - \frac{\epsilon}{\theta^2} \right) < 0$$

luego

$$v^2 \leq \frac{G'(\xi)}{2\theta(M - \epsilon/\theta^2)}$$

de donde $v \in L^2(-\infty, \infty)$. Como $v' = u$ es acotada, por el lema 9 se sigue que $v(\xi)$ tiende a cero cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$. De manera similar se muestra que $u(\xi)$, $w(\xi)$ tienden a cero cuando $\xi \rightarrow \pm\infty$, pero entonces $G(\infty) = G(-\infty)$ luego la solución acotada es la solución trivial. \square

Lema 11. *Supóngase que $\frac{\epsilon}{\theta^2} \leq \frac{1}{\gamma}$. Si $q(\xi)$ es una solución acotada en $[0, \infty)$ tal que $v(\xi) \leq a$ para toda ξ grande, entonces $q(\xi) \rightarrow (0, 0, 0)$ cuando $\xi \rightarrow \infty$.*

Demostración. Para la solución acotada $q(\xi)$ en $[0, \infty)$ se tiene $v(\xi) \leq a$ para toda ξ grande. Al igual que en el lema anterior, se tiene

$$G'(\xi) = 2v^2\theta \left(\frac{f(v)}{v} - \frac{\epsilon}{\theta^2} \right) - 2\gamma^2\theta \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{\epsilon}{\theta^2} \right) w^2$$

donde

$$-2\gamma^2\theta \left(\frac{1}{\gamma} - \frac{\epsilon}{\theta^2} \right) w^2 < 0$$

pues

$$\frac{1}{\gamma} - \frac{\epsilon}{\theta^2} \geq 0$$

y para $v < a$, $\frac{f(v)}{v} = (1-v)(v-a) < 0$, luego $G'(\xi) < 0$ para toda ξ grande. Al igual que en la demostración del lema anterior, se sigue que $q(\xi) \rightarrow (0, 0, 0)$ cuando $\xi \rightarrow \infty$. \square

Lema 12. $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$.

Observación. Por definición, los conjuntos Ω_i son disjuntos, luego $\{\Omega_i\}$ es una partición de Ω .

Demostración. Construiremos un rectángulo Γ en el plano $v - w$ de la forma

$$v_L \leq v \leq v_R, \quad \frac{v_L}{\gamma} \leq w \leq \frac{v_R}{\gamma}$$

donde $v_L < 0$ y $v_R > 0$, de tal manera que si $(v_{\theta,\epsilon}, w_{\theta,\epsilon})$ abandona a Γ entonces $q_{\theta,\epsilon}$ deberá entrar a E^+ o a E^- , esto probaría el resultado ya que $u_{\theta,\epsilon}$ es acotada si lo son $v_{\theta,\epsilon}$ y $w_{\theta,\epsilon}$.

Elijamos a v_L tal que $f(v_L) = \frac{v_R}{\gamma}$. Note que entonces $v_L \rightarrow -\infty$ cuando $v_R \rightarrow +\infty$ (ver figura 3.2). Elijamos v_R tan grande que satisfaga

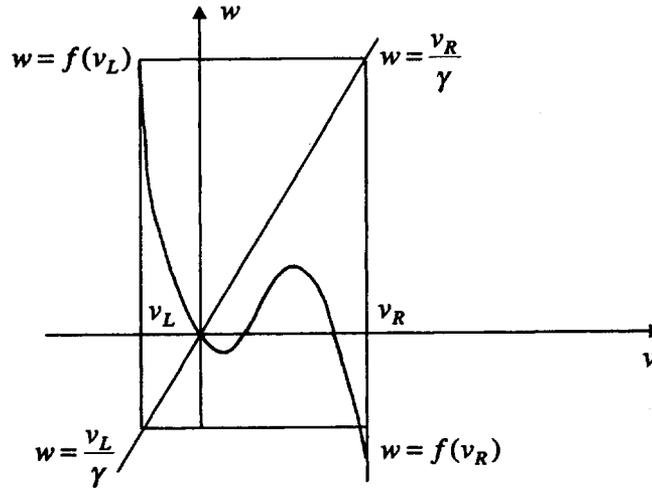


Figura 3.2:

$$f(v_R) < -\frac{v_R^3}{2} \quad \text{y} \quad f(v_L) > -\frac{v_L^3}{2}.$$

Supóngase también que $v_R \geq \sqrt{\frac{2}{\gamma}}$, entonces $f(v_R) < \frac{v_L}{\gamma}$. pues

$$\begin{aligned} f(v_R) = f(\gamma f(v_L)) &= \frac{f(\gamma f(v_L))}{\gamma f(v_L)} \gamma f(v_L) \\ &\leq M \gamma f(v_L) \\ &\leq f(v_L) = \frac{f(v_L)}{v_L} v_L \\ &\leq M v_L < \frac{v_L}{\gamma} \end{aligned}$$

El par $(v_{\theta,\epsilon}, w_{\theta,\epsilon})$ no puede abandonar Γ por la parte superior $w = v_R/\gamma$, $v_L < v < v_R$ ya que

$$w' = \frac{\epsilon}{\theta}(v - \gamma w) = \frac{\epsilon}{\theta}(v - v_R) < 0$$

tampoco puede abandonar Γ por la parte inferior $w = \frac{v_L}{\gamma}$, $v_L < v < v_R$ pues $w' = \frac{\epsilon}{\theta}(v - v_L) > 0$.

Si $(v_{\theta,\epsilon}, w_{\theta,\epsilon})$ abandona Γ por el lado derecho $v = v_R$, $v_L/\gamma \leq w \leq v_R/\gamma$ entonces $u = v' > 0$ sobre este segmento. Además, $v = v_R > 1$, luego sobre este segmento $w' = \frac{\epsilon}{\theta}(v_R - \gamma w) > 0$. Por definición de E^+ se sigue que el segmento esté contenido en E^+ .

De la misma manera si $(v_{\theta,\epsilon}, w_{\theta,\epsilon})$ abandona Γ por el lado izquierdo $v = v_L$, $v_L/\gamma \leq w \leq v_R/\gamma$ entonces sobre todo este segmento $u = v' < 0$, $v = v_L < 0$ y $w' = \frac{\epsilon}{\theta}(v_L - \gamma w) < 0$ de donde el segmento está contenido en E^- . \square

La idea de construir el rectángulo R es una idea de Rauch y Smoller [26].

La siguiente es una estimación necesaria para el lema que le sigue:

Lema 13. Sean $q_{\theta,\epsilon} = (v_{\theta,\epsilon}, u_{\theta,\epsilon}, w_{\theta,\epsilon})$ y

$$H(a) = \left(-\frac{1}{2} \int_0^a f(v) dv \right)^{\frac{1}{2}}$$

entonces $u_{\theta,\epsilon}(a) \geq H(a)$.

Demostración. Para cualquier $(\theta, \epsilon) \in \Omega$, $u_{\theta,\epsilon}(\xi)$ es positiva en $(-\infty, 0]$, luego podemos considerar a $u_{\theta,\epsilon}$ y $w_{\theta,\epsilon}$ como funciones de v , así omitiendo subíndices

$$\frac{1}{2} \frac{d(u^2)}{dv} = u \frac{u'}{v'} = u' = \theta u - f(v) + w.$$

Como $w(\xi) > 0$ en $(-\infty, 0]$ entonces

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{1}{2} \frac{d(u^2)}{dv} dv &= \int_0^a (\theta u - f(v) + w) dv \\ \frac{1}{2} u^2(a) &\geq \int_0^a -f(v) dv \\ \frac{1}{4} u^2(a) &\geq \int_0^a -\frac{1}{2} f(v) dv \\ u(a) &\geq \frac{1}{2} u(a) \geq \left(-\frac{1}{2} \int_0^a f(v) dv \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Por tanto $u(a) \geq H(a)$ para cualquier $\epsilon \geq 0$. \square

El siguiente lema muestra que w se mantiene positiva en tanto u se mantenga positiva más allá del intervalo $(-\infty, 0]$

Lema 14. Suponga que $u_{\theta,\epsilon}(\xi) > 0$ en $[0, \xi^*)$ entonces $w_{\theta,\epsilon}(\xi) > 0$ para toda $\xi \in [0, \xi^*)$.

Demostración. Para $\xi \in [0, \xi^*)$, $v' = u > 0$ entonces v es creciente, por lo tanto $v(\xi) \geq v(0) = a$ luego

$$w' \geq \frac{\epsilon}{\theta}(a - \gamma w)$$

o bien

$$w' + \frac{\epsilon\gamma w}{\theta} \geq \frac{\epsilon}{\theta}a.$$

Integrando se tiene

$$\begin{aligned} e^{\frac{\epsilon\gamma}{\theta}\xi} \left(w' + \frac{\epsilon\gamma}{\theta}w \right) &\geq \frac{\epsilon a}{\theta} e^{\frac{\epsilon\gamma}{\theta}\xi} = \frac{a}{\gamma} \frac{\epsilon\gamma}{\theta} e^{\frac{\epsilon\gamma}{\theta}\xi} \\ e^{\frac{\epsilon\gamma}{\theta}\xi} w(\xi) &\geq w(0) + \frac{a}{\gamma} \left[e^{\frac{\epsilon\gamma}{\theta}\xi} - 1 \right] \\ w(\xi) &\geq w(0) e^{-\frac{\epsilon\gamma}{\theta}\xi} + \frac{a}{\gamma} \left[1 - e^{-\frac{\epsilon\gamma}{\theta}\xi} \right] \end{aligned}$$

como $w(0) > 0$ entonces $w(\xi) > 0$. □

Lema 15. *Existen números $\theta_2 \geq \theta^*(a)$ y $\epsilon_2 > 0$, tales que si $\theta > \theta_2$ y $\epsilon \geq 0$ o bien $\epsilon > \epsilon_2$ y $\theta > 0$, entonces $(\theta, \epsilon) \in \Omega_2$ (ver figura 3.3).*

Demostración. Sea $f_{max} = \max_{0 \leq v \leq 1} f(v)$. Para $\epsilon > 0$ arbitrario elijamos θ_2 tal que $\theta_2 > f_{max}/H(a)$ y si fuese necesario aún más grande que $\theta^*(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-2a)$. Mostremos que con esta elección de θ_2 , si $\theta > \theta_2$

$$J = \{ \xi_1 > 0 \mid u|_{[0, \xi_1]} > 0, u'|_{[0, \xi_1]} > 0 \}$$

es abierto y cerrado en \mathbb{R}^+ . Que J es abierto se sigue por continuidad de u y u' . Veamos que es cerrado. Sea ξ_n una sucesión en J que converja a ξ^* . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\xi_n < \xi^*$ para toda n . Queremos ver que $u(\xi^*), u'(\xi^*) > 0$. Para cualquier n , $u > 0$ en $[0, \xi_n]$ de donde $v > a$, y también $u' > 0$ en $[0, \xi_n]$ de donde $u(\xi) > u(0)$, por lo tanto ya que $\theta \geq \theta_2$ y $w > 0$, de acuerdo al lema 14

$$u'(\xi) = \theta u(\xi) - f(v(\xi)) + w(\xi) \geq \theta_2 u(0) - f_{max} > k > 0,$$

donde $u(0) \geq u(a) \geq H(a)$, de acuerdo al lema 13, y donde k es cierta constante independiente de n ; luego $u'(\xi^*) \geq k > 0$. Afirmamos que también $u(\xi^*) > 0$, pues si $u(\xi^*) \leq 0$, como $u'(\xi) > 0$, entonces $u(\xi) < 0$ en una vecindad $(\xi^* - \delta, \xi^*]$, pero para n suficientemente grande ξ_n está en dicha vecindad y por definición de ξ_n , $u(\xi_n) > 0$, lo cual es una contradicción. Resumiendo, $u(\xi^*)$ y $u'(\xi^*) > 0$ y por lo tanto J es cerrado.

Por conexidad se sigue que $J = \mathbb{R}$, es decir u y u' se mantienen siempre positivos. En particular $v(\xi)$ es siempre creciente y es fácil ver que no puede ser acotada, por lo que eventualmente será $v > 1$. Por otro lado, si w' se hace cero, tomemos ξ_1 el primer valor en el que ésto ocurre, derivando una vez más la ecuación para w' tenemos

$$w''(\xi_1) = \frac{\epsilon}{\theta} u(\xi_1) > 0$$

de donde $w(\xi_1)$ debe ser un mínimo. Esto es una contradicción pues w es estrictamente creciente en $(-\infty, \xi_1]$, por lo tanto w' se mantiene positiva. Así, eventualmente la solución $q_{\theta, \epsilon}$ entra al conjunto invariante E^+ . En resumen, $(\theta, \epsilon) \in \Omega_2$, si $\theta > \theta_2$ para ϵ arbitrario.

Consideremos ahora el caso en que ϵ es grande y θ arbitrario. Mientras u se mantenga positivo, podemos usar a v como variable independiente, luego

$$\begin{aligned}\frac{du}{dv} &= \theta + \frac{w - f(v)}{u} \\ \frac{dw}{dv} &= \frac{\epsilon}{\theta} \left(\frac{v - \gamma w}{u} \right)\end{aligned}$$

Observe que $\frac{du}{dv} > 0$ si $u \geq \frac{f_{max}}{\theta}$ o si $w \geq f_{max}$. En efecto, si $u \geq \frac{f_{max}}{\theta} > 0$ entonces

$$\frac{du}{dv} \geq \frac{f_{max}}{u} + \frac{w - f(v)}{u} = \frac{f_{max} - f(v) + w}{u}$$

pero entonces u es positiva y por lo tanto w también, en tanto que al ser $v \geq a$, $f(v) \leq f_{max}$, por lo tanto $\frac{du}{dv} > 0$. Por otro lado, si $w \geq f_{max}$ entonces

$$\frac{du}{dv} \geq \theta + \frac{w - f_{max}}{u} > 0.$$

Supóngase que $u(a) \geq \frac{f_{max}}{\theta}$. Usaremos un argumento similar al caso anterior, para probar que u y $\frac{du}{dv}$ son positivas para toda $v \geq a$. Sea

$$J = \{v_1 \geq a \mid u > 0, \frac{du}{dv} > 0 \text{ en } [a, v_1]\} \quad (3.9)$$

el cual es un conjunto obviamente abierto. Veamos que es cerrado. Sea $v_n < v^*$ una sucesión con $v_n \rightarrow v^*$ como u es creciente en $[a, v_n]$ entonces $u(v) > u(a) \geq \frac{f_{max}}{\theta} > 0$ para toda $v \in [a, v_n]$ de donde $u(v_n) \geq \frac{f_{max}}{\theta} > 0$ y $\frac{du}{dv}(v_n) > 0$ para toda n . Por lo tanto $u(v^*) \geq \frac{f_{max}}{\theta} > 0$ pero entonces $\frac{du}{dv}(v^*) > 0$. Por lo tanto J es cerrado. Por conexidad u y $\frac{du}{dv}$ se mantienen positivas para toda $v \geq a$, si $u(a) \geq f_{max}/\theta$.

Supongamos ahora que $u(a) < \frac{f_{max}}{\theta}$.

Como u es creciente en $v \in [0, a)$ entonces $u(v) < \frac{f_{max}}{\theta}$ para $0 \leq v \leq a$

$$\frac{dw}{dv} > \frac{\epsilon}{f_{max}}(v - \gamma W)$$

de donde tenemos la estimación

$$\frac{dw}{dv} + \frac{\epsilon\gamma}{f_{max}}w > \frac{\epsilon}{f_{max}}v.$$

Integrando de $v = 0$ a $v = a$ tomando en cuenta las condición inicial $w(0) = 0$,

$$w(a) \geq \frac{1}{\gamma} \left(a - \frac{1}{\kappa}(1 - \exp(-\kappa a)) \right)$$

donde $\kappa = \frac{\epsilon\gamma}{f_{max}}$. Si denotamos por $g(a)$ la expresión entre paréntesis se puede verificar que

$$g(0) = 0, \quad g'(a) = 1 - \exp(-\kappa a) > 0, \quad g''(a) = \kappa \exp(-\kappa a) > 0$$

de donde, por convexidad de la gráfica de g , $g(a) \geq a$, luego

$$w(a) \geq \frac{a}{\gamma} > aM = a \max_{0 \leq v \leq 1} \frac{f(v)}{v} > \max_{0 \leq v \leq 1} f(v) = f_{max}$$

ya que $0 < v < a$.

Por la observación al inicio, se sigue que $\frac{du}{dv}(a) > 0$, y de manera similar a (3.9) se sigue que $u > 0$ y $\frac{du}{dv} > 0$ en $[a, \infty)$, es decir $(\theta, \epsilon) \in \Omega_2$ \square

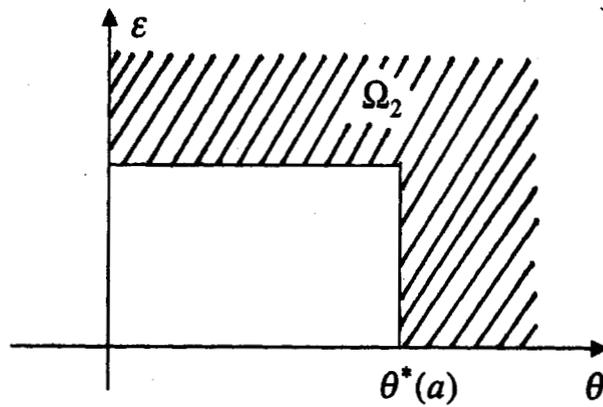


Figura 3.3:

Observación Los lemas 10 y 12 implican que la región $M < \frac{\epsilon}{\theta^2} < \frac{1}{\gamma}$ en el plano (θ, ϵ) está contenido en $\Omega_2 \cup \Omega_3$ (ver figura 3.4).

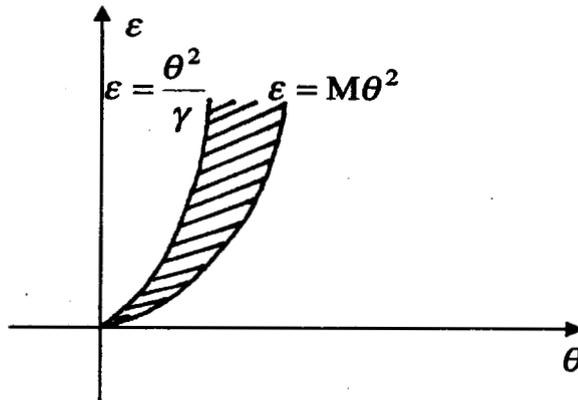


Figura 3.4:

Combinando este resultado con el lema 15 se obtiene el siguiente lema.

Lema 16. El conjunto $\{(\theta, \epsilon) \in \Omega \mid \theta > \theta^*(a) \text{ o } \epsilon > \epsilon_2 \text{ o } M < \frac{\epsilon}{\theta^2} < \frac{1}{\gamma}\}$ está contenido en Ω_2 .

Demostración. Este conjunto es conexo y está contenido en $\Omega_2 \cup \Omega_3$ y como intersecta a Ω_2 deberá estar enteramente contenido en Ω_2 (ver figura 3.5). \square

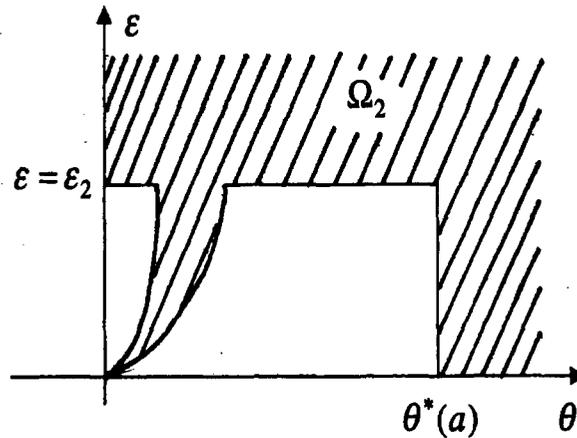


Figura 3.5:

Lema 17. Existe un conjunto relativamente abierto $\mathcal{O} \subset \Omega_3$ conteniendo al segmento

$$L_0 = \{(\theta, \epsilon) \mid \epsilon = 0, 0 < \theta < \theta^*(a)\} \quad (3.10)$$

Demostración. El segmento L_0 está contenido en Ω_3 ya que en el caso restringido $\epsilon = 0$, $\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} (v(\xi), u(\xi)) = (-\infty, -\infty)$. Además como Ω_3 es un conjunto abierto en Ω , debe contener a cierto conjunto abierto \mathcal{O} que contenga al segmento (3.10) (ver figura 3.6). \square

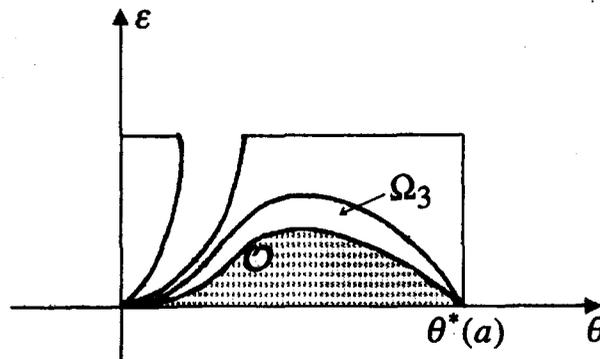


Figura 3.6:

Consideremos ahora la semirecta

$$L_{\epsilon_1} = \{(\theta, \epsilon) \mid \epsilon = \epsilon_1, \theta > 0\} \subset \Omega$$

por el lema anterior es claro que para cada $\epsilon_1 > 0$ suficientemente pequeña, L_{ϵ_1} interseca el interior de Ω_3 . También interseca a Ω_2 en los intervalos

$$\sqrt{\epsilon_1 \gamma} \leq \theta \leq \sqrt{\frac{\epsilon_1}{M}}, \quad \epsilon = \epsilon_1 \quad \text{y} \quad \theta \geq \theta^*(a), \quad \epsilon = \epsilon_1$$

luego, dado que Ω_2 y Ω_3 son abiertos disjuntos y $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, se tiene que existen al menos dos puntos en L_{ϵ_1} los cuales están en Ω_1 (ver figura 3.7). El objetivo es mostrar

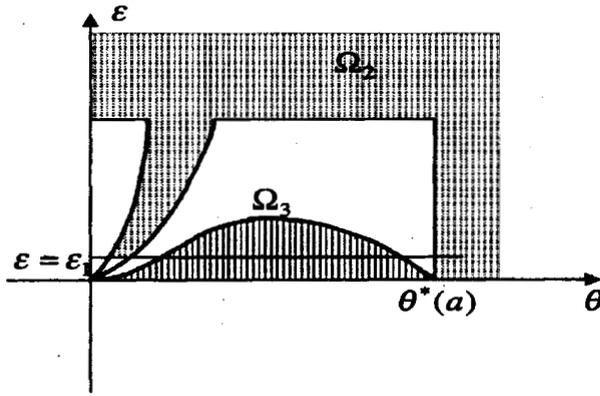


Figura 3.7:

que estos puntos pueden ser elegidos de tal manera que $v_{\theta, \epsilon}(\xi) \leq a$ para toda ξ grande y por el lema 11, obtendríamos una órbita homoclínica correspondiente a estos valores de (θ, ϵ) . De hecho se probará un resultado aún mas fuerte, esto es que $v_{\theta, \epsilon}(\xi) \leq v_{min}$ para toda ξ grande, donde v_{min} es el punto en el intervalo $(0, 1)$ donde $f(v)$ alcanza su mínimo.

Considérese la región:

$$\Sigma = \{(v, u, w) \mid (v \geq v_{min} \quad \text{y} \quad u = 0) \quad \text{o} \quad (v = v_{min} \quad \text{y} \quad u \leq 0)\} \quad (3.11)$$

(ver figura 3.8). También consideremos la región Λ en el plano (θ, ϵ) definida por la condición $(\theta, \epsilon) \in \Lambda$ si y solo si $(\theta, \epsilon) \in \Omega$ y la solución $q_{\theta, \epsilon}$ interseca a Σ exactamente dos veces y después de la segunda intersección no interseca otra vez la región $v \geq v_{min}$.

Lema 18. $\Omega_2 \cap \bar{\Lambda} = \emptyset$, donde $\bar{\Lambda}$ es la cerradura de Λ .

Demostración. Sea $(\theta, \epsilon) \in \Omega_2$ entonces, $v_{\theta, \epsilon} \rightarrow +\infty$, en particular $v(\xi) \geq v_{min}$ para ξ suficientemente grande, lo cual implica, por definición de Λ , que $(\theta, \epsilon) \notin \Lambda$, así que $\Omega_2 \cap \Lambda = \emptyset$. Por otra parte si $(\theta, \epsilon) \in \Omega_2$ que es abierto, existe una bola $B_r(\theta, \epsilon) \subseteq \Omega_2$. Por otro lado si $(\theta, \epsilon) \in \bar{\Lambda}$ es el limite de una sucesión $(\theta_n, \epsilon_n) \in \Lambda$, entonces para n grande se tendría $(\theta_n, \epsilon_n) \in B_r(\theta, \epsilon)$, lo cual es una contradicción. \square

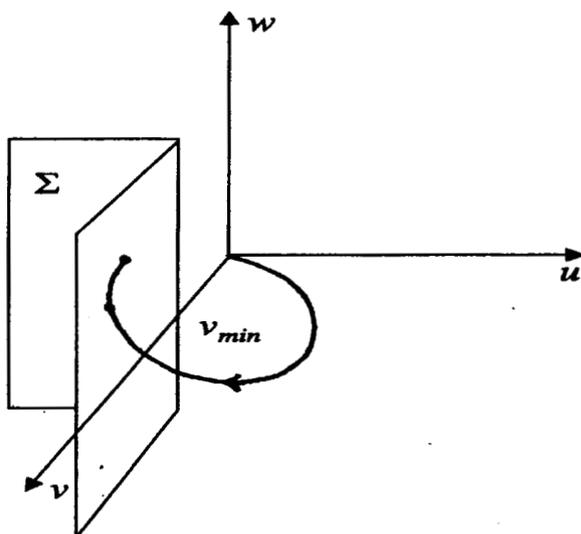


Figura 3.8:

Lema 19. Existe $\epsilon_2 > 0$ tal que si D_{ϵ_2} es la banda

$$D_{\epsilon_2} = \{(\theta, \epsilon) \in \Omega \mid \theta > 0, 0 < \epsilon < \epsilon_2\}$$

entonces $D_{\epsilon_2} \cap \Omega_3 \cap \partial\Lambda = \emptyset$ (ver figura 3.9).

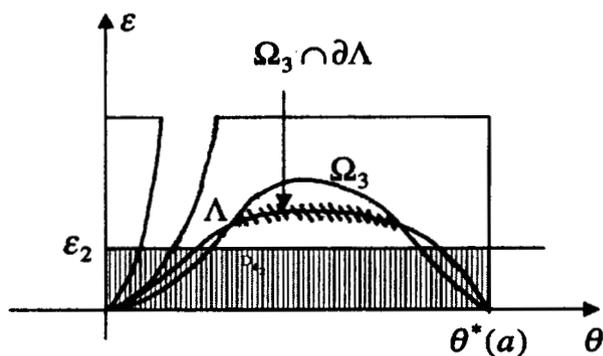


Figura 3.9:

Esto significa que si Ω_3 y $\partial\Lambda$ llegan a intersectarse será fuera de la banda D_{ϵ_2} .

Demostración. Supóngase que $(\theta, \epsilon) \in \Omega_3 \cap \partial\Lambda$ con $\theta > 0, \epsilon > 0$ y solución correspondiente $q_{\theta, \epsilon} = (v, u, w)$. Como $v \rightarrow -\infty$, existe un ξ_1 tal que $v(\xi) \leq 0$ si $\xi \geq \xi_1$.

Dado que $v(\xi) \rightarrow -\infty$ cuando ξ crece y $v(0) = a$ y $u(\xi) > 0$ en $-\infty < \xi \leq 0$, entonces $q_{\theta, \epsilon}$ debe cruzar a Σ al menos dos veces, una en la región $v > a, u = 0$ y otra en la región $v = v_{min}, u \leq 0$.

Supóngase que el primer cruce con la región $v = v_{min}, u \leq 0$ se da con $\xi = \xi^*$, entonces $q_{\theta, \epsilon}$ debe cruzar a Σ exactamente una vez en el intervalo $(-\infty < \xi < \xi^*)$ (ver figura 3.10), ya que si existiera otro cruce, éste deberá ser en la región $v > v_{min}$ y si existieran dos cruces entonces, $(\theta, \epsilon) \notin \partial\Lambda$, ya que por continuidad del flujo respecto a parámetros (θ, ϵ) las soluciones cercanas deberán cruzar a Σ dos veces en la región $v > v_{min}$ y por tanto deberán intersectar otra vez a Σ después de la segunda intersección.

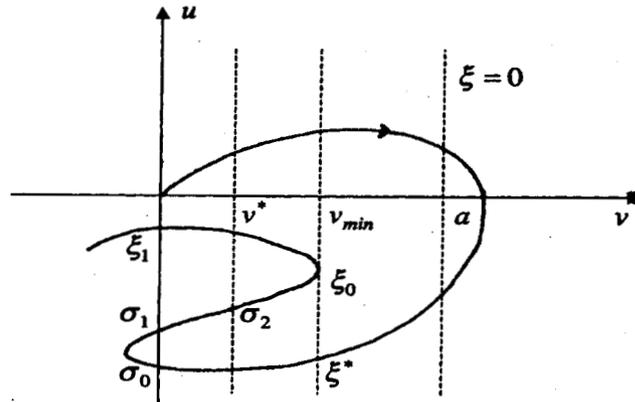


Figura 3.10:

Ahora $q_{\theta, \epsilon}$ no puede intersectar la región $v > v_{min}$ para $\xi > \xi^*$, ya que de lo contrario (θ, ϵ) deberá pertenecer a $(\Omega - \Lambda)^\circ$ contradiciendo el hecho de que $(\theta, \epsilon) \in \partial\Lambda$. Luego como $(\theta, \epsilon) \notin \Lambda^\circ$, $q_{\theta, \epsilon}$ deberá intersectar a Σ en algún ξ_0 con $\xi^* < \xi_0 < \xi_1$ y dado que $v(\xi) \leq v_{min}$ en $\xi \geq \xi^*$ entonces $v'(\xi_0) = u(\xi_0) = 0$ y $v''(\xi_0) = u'(\xi_0) \leq 0$ (ver figuras 3.10 y 3.11).

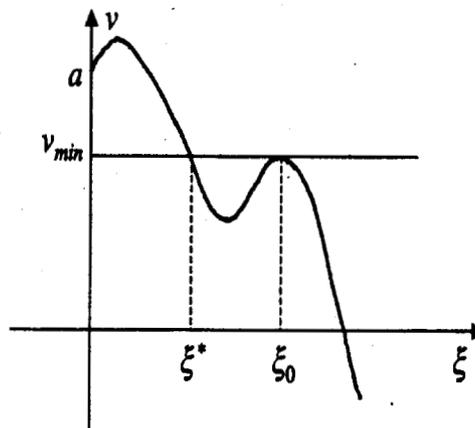


Figura 3.11:

El lema siguiente muestra que esto es imposible para ϵ_2 suficientemente pequeño.

Lema 20. Si ϵ es suficientemente pequeño, $0 \leq \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\frac{\epsilon}{\theta^2} \leq M$ entonces no existe solución $q_{\theta, \epsilon}(\xi) = (v(\xi), u(\xi), w(\xi))$ tal que para algún $\xi_0 > 0$, $w(0) > 0$, $v(\xi_0) = v_{min}$, $u(\xi_0) = 0$ y $u'(\xi_0) \leq 0$.

Demostración. Supóngase que existe una solución que satisface las hipótesis. Del sistema 3.1 vemos que

$$\theta u(\xi_0) + w(\xi_0) - f(v(\xi_0)) = u'(\xi_0) \leq 0$$

implicando que

$$w(\xi_0) \leq f(v(\xi_0)) \leq f(v_{min}) < 0$$

luego, dado que $w(0) > 0$ deberá existir un $\xi = \sigma_0$ con $0 < \sigma_0$ y $w(\sigma_0) = 0$. Además,

$$w'(\sigma_0) = \frac{\epsilon}{\theta} (v(\sigma_0) - \gamma w(\sigma_0)) = \frac{\epsilon}{\theta} v(\sigma_0)$$

y como $w'(\sigma_0) \leq 0$ entonces $v(\sigma_0) \leq 0$ (ver figura 3.12). Sea $\sigma_1 \geq \sigma_0$ el último punto anterior a ξ_0 , donde $v(\sigma_1) = 0$. Elijamos ahora $v^* \in (0, v_{min})$ y sea $\sigma_2 > \sigma_1$ el último punto anterior a ξ_0 donde $v = v^*$.

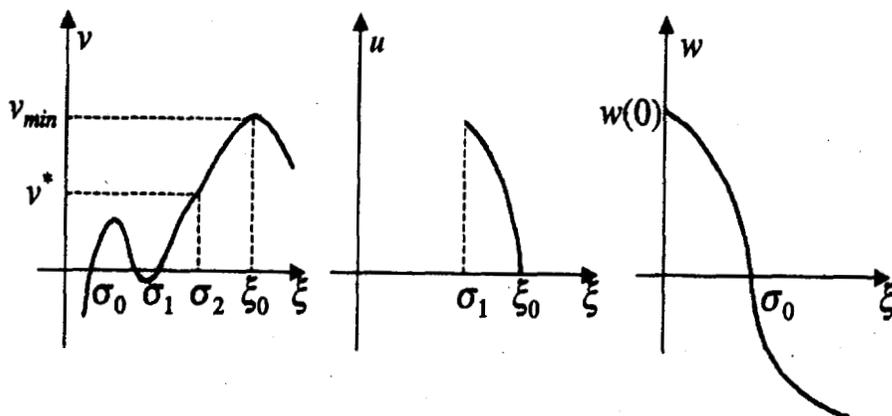


Figura 3.12:

En resumen tenemos que $\sigma_0 < \sigma_1 < \sigma_2 \leq \xi_0$ y

- $w(\sigma_0) = 0$ y $w(\xi) < 0$ en $\sigma_0 < \xi \leq \xi_0$.
- $w(\sigma_1) = 0$ y $w(\xi) > 0$ en $\sigma_1 < \xi \leq \xi_0$.
- $v(\sigma_2) = v^*$ y $v(\xi) > v^*$ en $\sigma_2 < \xi \leq \xi_0$.
- $w(\sigma_0) \leq f_{min} = f(v_{min})$.

Para terminar la prueba del Lema 20 necesitaremos probar tres lemas más.

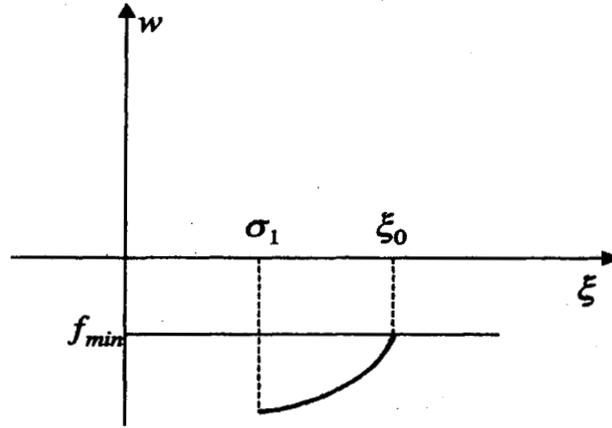


Figura 3.13:

Lema 21. $w(\xi) < f_{min}$ en $[\sigma_1, \xi_0]$.

Demostración. (ver figura 3.13). Del sistema (3.1) se tiene

$$w' = \frac{\epsilon}{\theta}(v - \gamma w).$$

Ya que (a) $w(\xi) < 0$ en $\sigma_0 < \sigma_1 < \xi \leq \xi_0$ y (b) $v(\xi) > 0$ en $\sigma_1 < \xi \leq \xi_0$, entonces $w' > 0$ en el intervalo (σ_1, ξ_0) . Solo falta checar cuando $\xi = \sigma_1$. Por (a) $w(\sigma_1) < 0$ y $v(\sigma_1)$, luego $w'(\sigma_1) > 0$. Por tanto, $w' > 0$ en $[\sigma_1, \xi_0]$ y dado que $w(\xi_0) \leq f_{min}$ se concluye que $w(\xi) < f_{min}$ en $[\sigma_1, \xi_0]$. \square

Lema 22. $u(\xi) > 0$ en $[\sigma_1, \xi_0]$.

Demostración. De (b) se tiene que $v'(\sigma_1) = u(\sigma_1) > 0$. Supóngase que existe un primer punto σ en $[\sigma_1, \xi_0]$ donde $u = 0$ entonces, por el Lema 11, se tiene que, $u'(\sigma) = w(\sigma) - f(v(\sigma)) < 0$ pues $w(\sigma) < f_{min} < f(v(\sigma))$. En cualquier punto subsecuente p' en $[\sigma_1, \xi_0]$ donde $u < 0$ vemos que $u'(p') = w(p') - f(v(p')) < 0$ pues $w'(p') < f_{min} < f(v(p'))$ de aquí que $v'(\xi_0) = u(\xi_0) < 0$ es una contradicción (ver figura 3.14). \square

Lema 23. $u' < 0$ en $[\sigma_1, \xi_0]$.

Demostración. Suponga que $u' \geq 0$ en algún punto $\sigma \in [\sigma_1, \xi_0]$. Si existe un punto subsecuente σ^* donde $u'(\sigma^*) = 0$ entonces, en $\xi = \sigma^*$

$$u'' = \frac{\epsilon}{\theta}(v - \gamma w) - f(v)u > 0$$

pues,

$$v(\sigma^*) > 0, w(\sigma^*) < 0, f(v(\sigma^*)) < 0, u(\sigma^*) > 0$$

lo cual es una contradicción ya que en ξ^* se debería obtener un máximo no un mínimo, de aquí que $u' \geq 0$ en $[\sigma, \xi_0]$ lo cual implicaría que $u(\xi_0) > 0$ por el (Lema 22) y esto contradice la hipótesis del Lema 20.

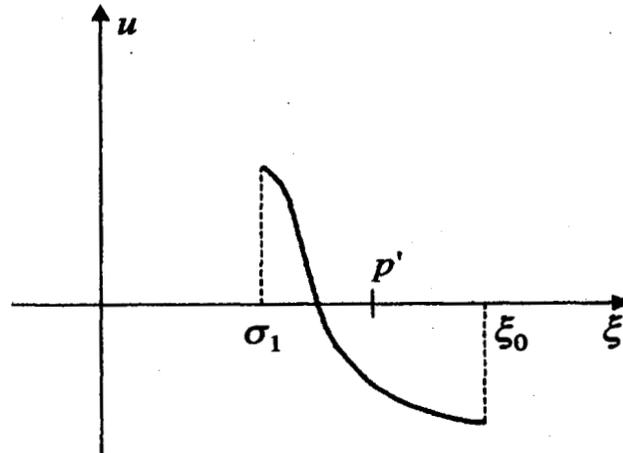


Figura 3.14:

Continuación de la prueba del lema 20

Observe que $f_{min} - f(v^*) < 0$. Elijamos $\alpha > 0$ pequeña tal que:

$$\left(\theta + \frac{f_{min} - f(v^*)}{\alpha} \right) < \alpha$$

Esto puede ser dado independientemente de θ , si $0 \leq \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Distinguiremos dos casos:

- i) $0 < u(\sigma_1) < \alpha$
- ii) $u(\sigma_1) \geq \alpha$.

Si i) es cierto entonces por el lema 23 se tiene que

$$0 < u(\xi) < \alpha \quad \text{en} \quad [\sigma_1, \sigma_2]$$

Mientras $u > 0$, u se puede expresar en función de v . De (3.1), se obtiene

$$\frac{du}{dv} = \theta + \frac{w - f(v)}{u}$$

y como $-f(v) < -f(v^*)$ y $w < f_{min}$ (lema 21) entonces

$$\frac{du}{dv} \leq \theta + \frac{w - f(v^*)}{\alpha}$$

Integrando desde 0 hasta v^* se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^{v^*} \frac{du}{dv} dv &\leq \int_0^{v^*} \left(\theta + \frac{w - f(v^*)}{\alpha} \right) dv \\ u(v^*) - u(0) &\leq \left(\theta + \frac{w - f(v^*)}{\alpha} \right) v^* \\ u(v^*) &\leq u(0) + \left(\theta + \frac{w - f(v^*)}{\alpha} \right) v^* \\ u(v^*) &\leq \alpha + \left(\theta + \frac{w - f(v^*)}{\alpha} \right) v^* < 0 \end{aligned}$$

lo que contradice el lema 22.

Ahora supongamos que ii) es cierto. Sabemos por el lema 23 que $u'(\sigma_1) < 0$. Para ξ negativo grande, $u'(\xi) > 0$. Sea σ_{-1} el valor mas grande de $\xi < \sigma_1$ donde $u' = 0$, entonces $u''(\sigma_{-1}) \leq 0$. Estimando $u''(\sigma_{-1})$ para ϵ pequeño, obtendremos otra vez una contradicción.

$$\begin{aligned} u''(\sigma_{-1}) &= \theta u'(\sigma_{-1}) + \frac{\epsilon}{\theta} (v(\sigma_{-1}) - \gamma w(\sigma_{-1})) - f'(v(\sigma_{-1}))u(\sigma_{-1}) \\ &= \frac{\epsilon}{\theta} (v(\sigma_{-1}) - \gamma w(\sigma_{-1})) - f'(v(\sigma_{-1}))u(\sigma_{-1}) \end{aligned}$$

Además

$$\begin{aligned} f(v) &= -v^3 + (a+1)v^2 - av, \\ f'(v) &= -3v^2 + 2(a+1)v - a; \end{aligned}$$

evaluando en $v(\sigma_{-1})$ se tiene

$$f'(v(\sigma_{-1})) = -3v(\sigma_{-1})^2 + 2(a+1)v(\sigma_{-1}) - a$$

de donde

$$f'(v(\sigma_{-1})) \leq -a \quad \text{pues} \quad v(\sigma_{-1}) \leq 0$$

esto junto con ii) implican que

$$u''(\sigma_{-1}) \geq \frac{\epsilon}{\theta} (v(\sigma_{-1}) - \gamma w(\sigma_{-1})) - f'(v(\sigma_{-1}))u(\sigma_{-1}) + a\alpha$$

Ahora del lema 12 tenemos que $v \geq v_L$ y $\gamma w \leq v_R$ donde v_L y v_R dependen solo de γ . Si tomamos

$$\frac{\epsilon}{\theta} < \frac{-a\alpha}{v_L - v_R}$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{\epsilon}{\theta} (v_L - v_R) > -a\alpha$$

se obtiene que

$$\begin{aligned} u''(\sigma_{-1}) &\geq \frac{\epsilon}{\theta}(v - \gamma w) + a\alpha \\ u''(\sigma_{-1}) &\geq \frac{\epsilon}{\theta}(v_L - \gamma w_R) + a\alpha \\ u''(\sigma_{-1}) &\geq -a\alpha + a\alpha \\ u''(\sigma_{-1}) &\geq 0 \end{aligned}$$

Obteniendo otra vez una contradicción. Esto completa la prueba del lema 20 y a su vez el lema 19. \square

EL siguiente lema se desprende del lema 19

Lema 24. Si $(\theta, \epsilon) \in \partial(\Omega_3 \cap \Lambda)$ y $0 < \epsilon < \epsilon_2$, entonces $(\theta, \epsilon) \in \Omega_1$ y $v_{\theta, \epsilon} < v_{min}$ para ξ grande (ver figura 3.15).

Demostración. Supongamos que $(\theta, \epsilon) \notin \Omega_1$, entonces $(\theta, \epsilon) \in \Omega_2$ o $(\theta, \epsilon) \in \Omega_3$, veamos que cualquiera de estos dos casos nos da una contradicción.

Primero si $(\theta, \epsilon) \in \Omega_2$, por ser Ω_2 abierto existe una vecindad $V_r(\theta, \epsilon)$ totalmente contenida en Ω_2 , contradiciendo la hipótesis de que $(\theta, \epsilon) \in \partial(\Omega_3 \cap \Lambda)$ ya que cualquier vecindad en este caso $V_r(\theta, \epsilon)$, deberá intersectar a $\Omega_3 \cap \Lambda$, lo cual no es posible ya que Ω_2 y Ω_3 son abiertos disjuntos.

Ahora si $(\theta, \epsilon) \in \Omega_3$, por ser Ω_3 abierto, existe una vecindad $V_{r'}(\theta, \epsilon)$ totalmente contenida en Ω_3 . Para $0 < \epsilon < \epsilon_2$ se tiene que $\Omega_3 \cap \partial\Lambda = \emptyset$ lo cual implicaría que $(\theta, \epsilon) \notin \partial(\Omega_3 \cap \Lambda)$ obteniendo otra vez una contradicción.

En conclusión, $(\theta, \epsilon) \in \Omega_1$ y por lo tanto $q_{\theta, \epsilon}$ es acotada. Como $\partial(\Omega_3 \cap \Lambda) = (\Omega_3 \cap \partial\Omega) \cup (\partial\Omega_3 \cap \Lambda)$, se sigue del lema anterior que $\partial(\Omega_3 \cap \Lambda) = \partial\Omega_3 \cap \Lambda$, en particular $(\theta, \epsilon) \in \Lambda$ y por definición de Λ que $v \leq v_{min}$. \square

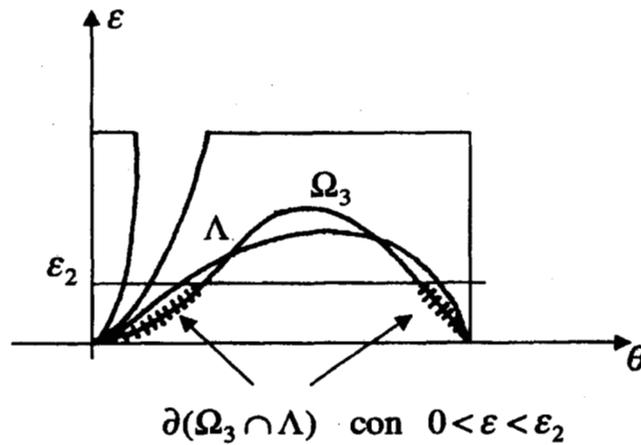


Figura 3.15:

Lema 25. *El conjunto $\Lambda \cap \Omega_3$ es abierto en Ω y contiene al segmento 3.10*

$$L_0 = \{(\theta, \epsilon) | \epsilon = 0, 0 < \theta < \theta_*(a)\}.$$

Demostración. Veamos primero que Λ contiene al segmento L_0 ; del lema 17 quedará probado que lo contiene $\Lambda \cap \Omega_3$.

Sea $(\theta, \epsilon) \in L_0$, esto es $0 < \theta < \theta^*(a)$ y $\epsilon = 0$, entonces por la proposición 6. $u_\theta(\xi) = 0$ exactamente una vez y $(v_\theta(\xi), u_\theta(\xi)) \rightarrow (-\infty, -\infty)$ con lo cual $(\theta, \epsilon) \in \Lambda$, pues $\mathcal{U}_{\theta, \epsilon}^+$ intersectará a σ exactamente dos veces y después de la segunda intersección no intersecta la región $v \geq v_{min}$. Como Ω_3 es abierto en Ω , se sigue que $\Lambda \cap \Omega_3$ es en efecto abierto en Λ . \square

Concluimos que para ϵ_1 suficientemente pequeño la mitad de la línea L_{ϵ_1} intersecta a $\partial(\Lambda \cap \Omega_3)$ en al menos dos puntos y con el lema 24 se concluye la prueba del teorema 8.

3.3 Condiciones para la existencia de un shift de Bernoulli

Reescribamos una vez más las ecuaciones de Fitzhugh-Nagumo

$$\begin{aligned} v' &= u \\ u' &= \theta u + w - f(v) \\ w' &= \frac{\epsilon}{\theta}(v - \gamma w). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Linealizando el sistema (3.12) alrededor del origen se tiene

$$X' = AX \quad \text{con} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a & \theta & 1 \\ \frac{\epsilon}{\theta} & 0 & -\frac{\epsilon\gamma}{\theta} \end{bmatrix}$$

Cuyo polinomio característico es

$$\lambda^3 + \left(\frac{\gamma\epsilon}{\theta} - \theta\right)\lambda^2 - (\gamma\epsilon + a)\lambda - \frac{\epsilon}{\theta} - \frac{\gamma\epsilon a}{\theta} = 0 \quad (3.13)$$

El objetivo es ver bajo que condiciones sobre los parámetros $(a, \epsilon, \gamma, \theta)$ se satisfacen las condiciones del Teorema de Silnikov. Que son:

1. Existencia de una órbita homoclínica.
2. Los valores propios de A son dos complejos: $\alpha \pm i\beta$, y uno real: λ , además $|\alpha| < \lambda$ con $\alpha \leq 0$.

Una condición necesaria para que exista una órbita homoclínica es que

$$\frac{\epsilon}{\theta^2} \leq M$$

y como $\gamma < \frac{1}{M}$ entonces

$$\frac{\gamma\epsilon}{\theta} \leq \gamma\theta M < \theta$$

o sea

$$\frac{\gamma\epsilon}{\theta} - \theta < 0$$

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ las raíces de la ecuación ccaracterística entonces

$$P(\lambda) = \lambda^3 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)\lambda^2 + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3)\lambda - \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 0$$

de aquí que

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 0$$

Por tanto si existe una onda de pulso simple y λ_2 es compleja, entonces

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lambda_1 + 2\Re\lambda_2 > 0$$

o sea

$$-\Re(\lambda_2) < -2\Re(\lambda_2) < \lambda_1$$

ya que la parte real del número complejo es negativa. Por lo tanto si existe una órbita homoclínica y se tienen raíces complejas entonces se cumplirán las dos condiciones de Silnikov a la vez.

Por otro lado para cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño sea $\theta_0(\epsilon)$ el valor de θ correspondiente a una solución homoclínica. Dado que

$$\frac{\epsilon}{\theta^2} \leq M \implies 0 < \frac{\epsilon}{\theta} \leq \sqrt{\epsilon M}$$

Si $\epsilon \rightarrow 0$ entonces $\frac{\epsilon}{\theta_0(\epsilon)} \rightarrow 0$.

En el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ el polinomio característico (3.13) se reduce a

$$\lambda(\lambda^2 - \theta\lambda - a) = 0 \tag{3.14}$$

con raíces

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{\theta + \sqrt{\theta^2 + 4a}}{2}, \lambda_3 = \frac{\theta - \sqrt{\theta^2 + 4a}}{2}$$

tenemos tres raíces reales distintas, esto implica que para a fijo y ϵ suficientemente pequeño no pueden existir raíces complejas.

Para mostrar que las condiciones del Teorema de Silnikov son satisfechas, se debe probar que el rango de ϵ para el cual existe una órbita homoclínica intersecta a la región donde las raíces λ_2 y λ_3 son complejas.

Para a, γ, ϵ iguales a cero se tiene el polinomio

$$\lambda^2(\lambda - \theta) = 0 \tag{3.15}$$

con raíces $\lambda = 0$ (raíz doble) y $\lambda = \theta$

Para a, γ, ϵ y λ pequeños y θ fijo el polinomio se puede reescribir como

$$-\theta\lambda^2 - a\lambda - \frac{\epsilon}{\theta} + \mathcal{O}(\lambda^2 + \gamma^2 + \epsilon^2 + a^2) = 0$$

La cuadrática

$$-\theta\lambda^2 - a\lambda - \frac{\epsilon}{\theta} = 0$$

tiene las raíces

$$\lambda = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4\epsilon}}{-2\theta}$$

las cuales son complejas solo si $a^2 < 4\epsilon$.

Como conclusión de este análisis preliminar se sigue que debemos considerar a y γ como parámetros pequeños y mejorar la estimación de ϵ .

Comenzamos por restringir el valor de θ lejos del cero por ejemplo: $\frac{1}{2} \leq \theta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Proposición 10. *Para cada $\theta \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ y cada a y γ positivos, sea*

$$\underline{\epsilon}(\theta, a, \gamma) = \inf\{\epsilon \mid \lambda_2 \text{ y } \lambda_3 \text{ son complejas}\}$$

entonces

$$\liminf_{a \rightarrow 0^+} \left[\liminf_{\gamma \rightarrow 0^+} \frac{\underline{\epsilon}(\theta, a, \gamma)}{a^2} \right] = \frac{1}{4}$$

Para probar entonces que las condiciones de Silnikov son satisfechas, se debe probar que para algunos valores positivos de a y γ , $\bar{\epsilon}(a, \gamma) > \underline{\epsilon}(\theta, a, \gamma)$, donde

$$\bar{\epsilon} = \sup\{\epsilon_0 \mid \text{si } 0 < \epsilon < \epsilon_0, \exists \theta \in \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \text{ para la cual existe una órbita homoclínica}\}$$

En concreto se probará que

$$\liminf_{a \rightarrow 0^+} \left[\liminf_{\gamma \rightarrow 0^+} \frac{\bar{\epsilon}(a, \gamma)}{a^2} \right] \geq \frac{1}{2}$$

Para evitar algunas dificultades técnicas consideraremos solo soluciones “rápidas” donde $\theta \sim \frac{1}{\sqrt{2}}$ para a y ϵ pequeños. Para esto impondremos una cota inferior positiva para θ . Tomaremos $\theta \geq \frac{1}{2}$.

Teorema 9. *Sea $\bar{\epsilon}(a, \gamma) = \sup\{\epsilon_1 \mid \text{si } 0 < \epsilon < \epsilon_1, \text{ entonces se tiene una solución homoclínica de pulso simple con rapidez } \theta \geq \frac{1}{2}\}$. Entonces*

$$\liminf_{a \rightarrow 0^+} \left[\liminf_{\gamma \rightarrow 0^+} \frac{\bar{\epsilon}(a, \gamma)}{a^2} \right] \geq \frac{1}{2}$$

Demostración. Primero se necesita analizar en la prueba del teorema principal donde se considero a ϵ pequeño. La primera consideración se utilizo en el lema 10. Vimos que

$$\frac{\epsilon}{\theta^2} < M$$

es necesario para la existencia de soluciones acotadas. Esto nos da una cota para ϵ , si consideramos soluciones donde θ es de orden 1, asumiremos que

$$\theta \geq \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad \epsilon \leq \frac{M}{4}$$

Hay dos lugares mas donde se requirió que ϵ fuera “suficientemente pequeño” estos son en el lema 19 y después del lema 25. Analizemos primero la parte después del lema 25.

Si $a = \epsilon = 0$ el polinomio característico toma la forma

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \theta\lambda^2$$

con raíces $\lambda = 0$ de multiplicidad 2 y $\lambda = \theta$ raíz real positiva.

Por otro lado la solución $q_{\theta,\epsilon}$ que empieza en la variedad inestable $\mathcal{U}_{\theta,\epsilon}^+$ también depende de a y γ y esta dependencia es continua aún en $a = 0$. Las conclusiones de la proposición 6 permanecen validas para $a = 0$ ($\epsilon > 0$). Los conjuntos Ω_3 y Λ también dependen de a y γ , se denotarán $\Omega_{3,a,\gamma}$ y $\Lambda_{a,\gamma}$. En particular si $a = \gamma = 0$, entonces

$$\theta^*(a) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Por lo que $\Omega_{3,0,0} \cap \Lambda_{0,0}$ contiene una vecindad abierta del segmento $\epsilon = 0$, $0 < \theta < \frac{1}{\sqrt{2}}$ y cuando $a \rightarrow 0^+$ entonces $\theta^*(a) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$; luego $\Omega_{3,a,\gamma} \cap \Lambda_{a,\gamma}$ dependen continuamente de a inclusive para $a = 0$.

Además dado que $q_{\theta,\epsilon}$ es continua en $a = 0$ y $\gamma = 0$, existen a_1 , γ_1 y ϵ_3 tales que si

$$0 \leq a \leq a_1, \quad 0 \leq \gamma \leq \gamma_1 \quad \text{y} \quad 0 \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_3$$

entonces L_{ϵ_1} intersectará a

$$\Omega_{3,a,\gamma} \cap \Lambda_{a,\gamma} \quad \text{en la región} \quad \theta \geq \frac{1}{2}.$$

Veamos ahora la parte del lema 19. La restricción sobre ϵ aparece en el lema 20. Recordemos como ϵ fue elegido

$v^* \in (0, v_{min})$ se especifica arbitrariamente, luego $\alpha > 0$ se elige tal que

$$\left(\theta + \frac{f_{min} - f(v^*)}{a} \right) < -\alpha$$

Luego ϵ se elije tal que si $u'(\sigma_{-1}) = 0$ y $v_L \leq v \leq 0$, $w \leq \frac{v_R}{\gamma}$ y $u \geq \alpha$, entonces

$$u''(\sigma_{-1}) = \frac{\epsilon}{\theta} (v(\sigma_{-1}) - \gamma w(\sigma_{-1}) - f'(v(\sigma_{-1}))u(\sigma_{-1})) > 0$$

esto se obtiene con

$$\frac{\epsilon}{\theta} < \frac{-a\alpha}{v_L - V_R}$$

Supóngase que $0 < r < \frac{1}{8}$ y sea $v^* = rv_{min}$. Mostraremos que si $a > 0$ es suficientemente pequeña entonces existe un γ_a tal que si $0 < \gamma < \gamma_a$, entonces

$$\frac{\bar{\epsilon}(a, \gamma)}{a^2} \geq \frac{1}{2} - 3r$$

esto probará el teorema pues r se puede hacer arbitrariamente pequeña.

Si $a \rightarrow 0^+$ tenemos los siguientes resultados

$$\begin{aligned}
 v_{min} &= \frac{a+1}{3} - \frac{\sqrt{a^2 - a + 1}}{3} \\
 v_{min} &= \frac{a}{3} + \frac{1}{3} - \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{6}(-a + a^2) + \mathcal{O}(a^3) \right] \\
 v_{min} &= \frac{a}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{a}{6} + \mathcal{O}(a^2) \\
 v_{min} &= \frac{a}{2} + \mathcal{O}(a^2)
 \end{aligned} \tag{3.16}$$

y

$$\begin{aligned}
 f_{min} &= f(v_{min}) = f\left(\frac{a}{2}\right) + \mathcal{O}(a^2) \\
 f_{min} &= \frac{a}{2} \left(1 - \frac{a}{2}\right) \left(\frac{a}{2} - a\right) + \mathcal{O}(a^2) \\
 f_{min} &= -\frac{a^2}{4} + \mathcal{O}(a^3)
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Además

$$\begin{aligned}
 f(v^*) &= -(v^*)^3 + (a+1)(v^*)^2 - av^* \\
 f(v^*) &= -\left(\frac{ra}{2} + \mathcal{O}(a^2)\right)^3 + (a+1)\left(\frac{ra}{2} + \mathcal{O}(a^2)\right)^2 - a\left(\frac{ra}{2} + \mathcal{O}(a^2)\right) \\
 f(v^*) &= -\frac{ra^2}{2} + \mathcal{O}(a^3)
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

A partir de esto se tiene que

$$f_{min} - f(v^*) \leq -\frac{a^2}{4} + \frac{r}{2}a^2 \tag{3.19}$$

Ahora sea

$$\alpha = \left(\frac{\frac{1}{4} - r}{\theta}\right) a^2 \tag{3.20}$$

entonces

$$\left(\theta + \frac{f_{min} - f(v^*)}{\alpha}\right) v^* < \left(\theta + \frac{-\frac{a^2}{4} + \frac{r}{2}a^2}{\left(\frac{\frac{1}{4} - r}{\theta}\right) a^2}\right) \left(\frac{ra}{2} + \mathcal{O}(a^2)\right) < \left(\frac{r - \frac{1}{4}}{\theta}\right) a^2 \tag{3.21}$$

La última desigualdad es cierta cuando $a \rightarrow 0$ uniformemente en $\theta \geq \frac{1}{2}$.

Ahora sean σ_0 y σ_{-1} como se elijieron en el lema 20. veremos entonces que para a pequeña la conclusión del teorema es valida ,a menos que $u''(\sigma_{-1}) \leq 0$.

Notar que $f'(v) \leq 2v \forall v \leq 0$ y asumiremos que $u(\sigma_{-1}) \geq \alpha$. Si $\epsilon \leq \left(\frac{1}{2} - 3r\right) a^2$, entonces

$$\begin{aligned}
 u''(\sigma_{-1}) &\geq \theta u'(\sigma_{-1}) + \frac{\epsilon}{\theta}(v(\sigma_{-1}) - \gamma w(\sigma_{-1})) - f'(v(\sigma_{-1}))u(\sigma_{-1}) \\
 &\geq \frac{\epsilon}{\theta}(v(\sigma_{-1}) - \gamma w(\sigma_{-1})) - f'(v(\sigma_{-1}))u(\sigma_{-1}) \\
 &\geq \theta u'(\sigma_{-1}) + \frac{\epsilon}{\theta}(v(\sigma_{-1}) - \gamma w(\sigma_{-1})) - 2v(\sigma_{-1})u(\sigma_{-1}) \\
 &\geq \left(\frac{\epsilon}{\theta} - 2u(\sigma_{-1})\right) v(\sigma_{-1}) - \frac{\epsilon\gamma}{\theta}w(\sigma_{-1}) \\
 &\geq \frac{1}{\theta} \left(\left(\frac{1}{2} - 3r\right) a^2 - 2\alpha\theta \right) v(\sigma_{-1}) - \frac{\epsilon\gamma}{\theta}w(\sigma_{-1}) \\
 &= \frac{1}{\theta} \left(\left(\frac{1}{2} - 3r\right) - 2 \left(\frac{\frac{1}{4} - r}{\theta}\right) a^2\theta \right) v(\sigma_{-1}) - \frac{\epsilon\gamma}{\theta}w(\sigma_{-1}) \\
 &= \frac{a^2}{\theta} \left(\left(\frac{1}{2} - 3r - \frac{1}{2} + 2r\right) \right) v(\sigma_{-1}) - \frac{\epsilon\gamma}{\theta}w(\sigma_{-1}) \\
 &= -\frac{a^2r}{\theta}v(\sigma_{-1}) - \frac{\epsilon\gamma}{\theta}w(\sigma_{-1})
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

y dado que $v(\sigma_{-1}) \leq 0$, $u''(\sigma_{-1})$ será mayor o igual a cero si el siguiente lema es válido.

Lema 26.

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \left| \frac{\gamma w(\sigma_{-1})}{v(\sigma_{-1})} \right| = 0$$

uniformemente para $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ y $\epsilon > 0$ pequeño.

Demostración. Expresando w como función de v en el intervalo $[\sigma_{-1}, \sigma_0]$, se tiene

$$\frac{dw}{dv} = \frac{\epsilon}{\theta u}(v - \gamma w)$$

como $v < 0$ y $w > 0$ en $[\sigma_{-1}, \sigma_0]$, si tomamos $\epsilon \leq \left(\frac{1}{2} - 3r\right) a^2$, entonces

$$\begin{aligned}
 \frac{dw}{dv} &\geq \frac{\epsilon}{\theta u}(v - \gamma w) \quad \text{pues} \quad u(\sigma_{-1}) > \alpha \\
 &\geq \frac{\left(\frac{1}{2} - 3r\right)}{\left(\frac{1}{4} - r\right)}(v - \gamma w) \\
 &\geq \delta(v - \gamma w) \quad \text{donde} \quad \theta = \frac{\frac{1}{2} - 3r}{\frac{1}{4} - r}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

Así que

$$\begin{aligned}
 \frac{dw}{dv} + \gamma\delta w &\geq \delta v \\
 \frac{dw}{dv} e^{\delta\gamma v} + \gamma\delta w e^{\delta\gamma v} &\geq \delta v e^{\delta\gamma v} \\
 d(e^{\delta\gamma v} w) &\geq \delta v e^{\delta\gamma v} dv
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

integrando de $v(\sigma_{-1})$ a $v(\sigma_0)$ obtenemos

$$e^{\delta\gamma v} w \Big|_{v(\sigma_{-1})}^{v(\sigma_0)} \geq \int_{v(\sigma_{-1})}^{v(\sigma_0)} \delta v e^{\delta\gamma v} dv$$

de donde

$$e^{\delta\gamma v(\sigma_0)} w(\sigma_0) - e^{\delta\gamma v(\sigma_{-1})} w(\sigma_{-1}) \geq \delta \left[\left[\frac{v}{\delta\gamma} e^{\delta\gamma v} \right]_{v(\sigma_{-1})}^{v(\sigma_0)} - \frac{1}{\delta\gamma} \int_{v(\sigma_{-1})}^{v(\sigma_0)} e^{\delta\gamma v} dv \right]$$

luego

$$-e^{\delta\gamma v(\sigma_{-1})} w(\sigma_{-1}) \geq \frac{1}{\delta} \left[v(\sigma_0) e^{\delta\gamma v(\sigma_0)} - v(\sigma_0) e^{\delta\gamma v(\sigma_{-1})} - \frac{1}{\delta\gamma} e^{\delta\gamma v(\sigma_0)} + \frac{1}{\delta\gamma} e^{\delta\gamma v(\sigma_{-1})} \right].$$

De aquí que

$$\begin{aligned} w(\sigma_{-1}) &\leq \left(-\frac{v(\sigma_0)}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^2 \delta} \right) e^{\gamma\delta[v(\sigma_0)-v(\sigma_{-1})]} + \frac{v\sigma_{-1}}{\gamma} - \frac{1}{\gamma^2 \delta} \\ w(\sigma_{-1}) &\leq -\frac{v(\sigma_0)}{\gamma} e^{\gamma\delta[(v(\sigma_0)-v(\sigma_{-1}))]} + \frac{1}{\gamma^2 \delta} (e^{\gamma\delta[v(\sigma_0)-v(\sigma_{-1})]} - 1) + v(\sigma_{-1}) \\ \gamma w(\sigma_{-1}) &\leq -v(\sigma_0) e^{\gamma\delta[(v(\sigma_0)-v(\sigma_{-1}))]} + \frac{1}{\gamma\delta} (\gamma\delta[v(\sigma_0) - v(\sigma_{-1})] + \mathcal{O}(2)) + v(\sigma_{-1}) \\ \gamma w(\sigma_{-1}) &\leq -v(\sigma_0) [1 + \gamma\delta[v(\sigma_0) - v(\sigma_{-1})] + \mathcal{O}(2)] + \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} &(v(\sigma_0) - v(\sigma_{-1})) \mathcal{O}(\delta\gamma[v(\sigma_0) - v(\sigma_{-1})])^2 \\ \gamma w(\sigma_{-1}) &\leq -v(\sigma_0) [\gamma\delta[v(\sigma_0) - v(\sigma_{-1})] + \mathcal{O}(2)] + \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{O}(\delta\gamma[v(\sigma_0) - v(\sigma_{-1})])^2 \\ \gamma w(\sigma_{-1}) &\leq -\gamma\delta v(\sigma_0)(-v(\sigma_{-1}) + \mathcal{O}(\delta\gamma v(\sigma_{-1})^2)). \end{aligned} \quad (3.27)$$

En resumen

$$\frac{\gamma w(\sigma_{-1})}{-v(\sigma_{-1})} \leq -\gamma\delta v(\sigma_0) + \mathcal{O}(2). \quad (3.28)$$

o lo que es lo mismo

$$\left| \frac{\gamma w(\sigma_{-1})}{-v(\sigma_{-1})} \right| \leq \gamma\delta |v(\sigma_0)| + \mathcal{O}(2). \quad (3.29)$$

Por otra parte

$$v_L \geq \gamma f(v_R) \quad \text{y} \quad f(v_R) \simeq -(v_R)^3 = -\left(\frac{8}{\gamma^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Así

$$\begin{aligned}
 \gamma f(v_R) &= -\gamma \left(\frac{8}{\gamma^3} \right)^{\frac{1}{2}} \leq v_L < 0 \\
 \gamma^2 f(v_R) &= -\gamma^2 \left(\frac{8}{\gamma^3} \right)^{\frac{1}{2}} \leq \gamma v_L < 0 \\
 \gamma^2 f(v_R) &= -\gamma^{\frac{1}{2}} 8^{\frac{1}{2}} \leq \gamma v_L < 0
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Ahora si $\gamma \rightarrow 0$, entonces $\gamma v_L \rightarrow 0$ y $v(\sigma_{-1})$ se puede elegir tal que $v(\sigma_{-1}) \geq v_L$ o $0 > \gamma v(\sigma_{-1}) \geq \gamma v_L$ lo cual implica que si $\gamma \rightarrow 0$, entonces $\gamma v(\sigma_{-1}) \rightarrow 0$ y como $v(\sigma_{-1}) \leq v(\sigma_0) \leq 0$ se tendrá que si $\gamma \rightarrow 0$, entonces $\gamma v(\sigma_0) \rightarrow 0$ con lo cual quedaría demostrado el teorema 9.

De este último teorema se desprende la siguiente proposición

Proposición 11. *Para cada $a > 0$ suficientemente pequeña, existen números $\epsilon_a > 0$ y $\gamma_a > 0$ tales que si $\epsilon = \epsilon_a$ y $0 < \gamma < \gamma_a$ entonces las condiciones del teorema de Silnikov se satisfacen.*

3.4 Conclusiones y comentarios

Hemos probado que si a es considerado como un parámetro pequeño, es posible encontrar un valor de ϵ tal que si γ es a su vez suficientemente pequeño entonces existe una órbita homoclínica y se satisfacen las condiciones del teorema de Silnikov. En consecuencia, existe un subconjunto de Cantor en el espacio fase $v - u - w$ que es invariante bajo el flujo, donde el sistema es topológicamente conjugado a un shift de Bernoulli en al menos dos símbolos. Este conjunto de Cantor puede visualizarse así: Tomando una sección transversal Π_0 a la órbita homoclínica en una vecindad del origen, el conjunto invariante es un producto cartesiano de dos conjuntos de Cantor en una dimensión. Al seguir este conjunto por el flujo obtenemos al conjunto invariante para la ecuación diferencial ordinaria. Ya que este conjunto es compacto, en particular las soluciones son acotadas, por lo que los pulsos que describen son acotados.

Una pregunta interesante viene a colación. De acuerdo a lo que comentamos en la introducción, experimentalmente se ha observado la existencia de un número finito de pulsos [30], y según el teorema principal existe una infinidad de órbitas periódicas de todos los periodos, donde ésto último significa que la solución cruza un número arbitrariamente grande de veces la sección Π_0 . Esta aparente inconsistencia se puede explicar por la estructura *hiperbólica del conjunto invariante* [28]. Eso es, localmente las soluciones divergen exponencialmente dando origen a sensibilidad respecto a condiciones iniciales, lo que es más, dada una solución acotada dentro de este conjunto invariante, es posible que existan arbitrariamente de éstas soluciones no acotadas haciendo con ello que experimentalmente este tipo de soluciones sean imposible de observar.

Lo que contribuye el resultado mencionado en esta tesis en dilucidar la complejidad de las soluciones más simples de la ecuación diferencial parcial que son los frentes de onda.

Capítulo 4

Estado del arte

En esta sección resumimos algunos resultados que han sido probados en esta dirección y algunos otros relacionados, más recientes, que dan una idea del estado del arte.

En 1974, Hastings[17] da una prueba de la existencia de órbitas periódicas para el sistema de ecuaciones FitzHugh-Nagumo.

$$\begin{aligned}u'' - cu' + f(u) &= w \\ w' &= (b/c)u\end{aligned}\tag{4.1}$$

y antes para las ecuaciones de Nagumo[16]. Cuando los valores b y c se restringen adecuadamente. El método involucra una investigación detallada de las trayectorias en el espacio fase.

En 1976, Hastings [18] da una prueba de la existencia de una órbita homoclínica y soluciones periódicas. La forma de la demostración es “elemental” usando propiedades básicas de conjuntos abiertos y conexidad, pero altamente no trivial. Los trabajos de Hastings constituye una excelente pieza de análisis. Este trabajo prueba un resultado obtenido por Conley [5] utilizando la idea de “bloques aislantes” una idea topológica basada en la estructura de las soluciones que entran y salen de una vecindad de un conjunto invariante.

En 1977, K. Hayashi[20] prueba la existencia de órbitas homoclínicas para el sistema Fitzhugh-Nagumo de la forma

$$\begin{aligned}x' &= y \\ y' &= cy - f(x) + z \\ z' &= \epsilon x\end{aligned}\tag{4.2}$$

demuestra que para $c = 0$ y $\epsilon > 0$ no existen órbitas homoclínicas y para c y ϵ suficientemente pequeñas existe al menos una órbita homoclínica.

En 1978, Rauch y Smoller [26] estudian el sistema de Fitzhugh-Nagumo e introducen la idea de construir un rectángulo R conteniendo el origen en el plano $v-u$ tal que toda solución cae eventualmente en una dilatación de éste, $(1 + \epsilon)R$. Se usa el método de la energía introducido por Conley. Una idea clave es la de rectángulos contractantes,

de la forma σR con R conteniendo el origen, entonces $V(v, u) = \inf_{\sigma} \{(\sigma v, \sigma u) \in R\}$ es una función de Liapunov.

En 1981, J. Feroe [10] estudia las ecuaciones tipo Hodgking-Huxley

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(v, w), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = g(v, w)$$

para cierto tipo especial de no-linealidades f : en forma de diente de sierra. Muestra la existencia de una infinidad de pulsos en una vecindad del punto de equilibrio de tipo silla-foco.

En 1982, Feroe [11] estudia la existencia y estabilidad de pulso múltiples de ecuaciones del tipo propuesto por McKean[23]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - v - w - H(v - a), \quad \frac{\partial w}{\partial t} = bv - dw,$$

donde H es la función de Heaviside. En tal caso las soluciones se pueden obtener explícitamente con ello muestra la existencia de pulsos múltiples. Este artículo apoya los resultados analíticos de Evans, Fenichel y Feroe [?]

En 1982, Evans, Fenichel y Feroe [34] encuentran soluciones en forma de pulsos dobles y dan condiciones suficientes para su existencia para sistemas de ecuaciones del tipo Silnikov. En las hipótesis es necesario incluir cierta condición de transversalidad. En este trabajo se menciona explícitamente los trabajos de Silnikov (anteriores y poco conocidos: [35],[36])

Evans [8] muestra que “estabilidad lineal” implica estabilidad no lineal, para ello introduce una función compleja que mide esencialmente el ángulo entre las variedades estable e inestables.

En 1984 Ch. Jones [22] da la primer prueba rigurosa de la estabilidad de la solución pulso solitaria del sistema Fitzhugh-Nagumo, estudia la función compleja introducida por Evans [Op. cit.]. Usan perturbaciones singulares para localizar las raíces de dicha función.

En 1985 E. Yanagida [31] estudia la estabilidad de la solución pulso rápido cuando $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño para el sistema Fitzhugh-Nagumo de la forma:

$$\begin{aligned} v_t &= v_{xx} + f(v) - w \\ w_t &= \epsilon(v - \gamma w) \end{aligned} \tag{4.3}$$

y demuestra por análisis de los valores propios que la solución pulso rápida es: (1) “Exponencialmente estable”, si $\gamma > 0$; (2) “Marginalmente estable”, si $\gamma = 0$.

En 1988 Barrow, D.L. da otras pruebas de la existencia de dos clases de soluciones de

$$\begin{aligned} -cu' &= u'' + f(u) - w \\ -cw' &= \epsilon(u - \gamma w) \end{aligned} \tag{4.4}$$

con c pequeño. Las clases de soluciones (u, c, w) son de los siguientes tipos:

Clase 1. $(u, \theta, w) \rightarrow (\bar{u}, 0, 0)$ cuando $\epsilon \rightarrow 0^+$, donde $\bar{u}'' + f(\bar{u}) = 0$.

Clase 2. Si γ es suficientemente grande, satisface $(u, c, w) \rightarrow (\bar{u}, 0, \bar{u}/\gamma)$ cuando $\epsilon \rightarrow 1/\gamma_2$, donde

$$\bar{u}'' + f(\bar{u}) - \bar{u}/\gamma = 0.$$

La demostración utiliza teoría de bifurcaciones.

En 1989, E. Yanagida[31] da una prueba de la existencia de una solución frente viajera para el sistema (4.3) si los parámetros $\epsilon > 0$ y $\gamma > 0$ son tomados adecuadamente. Haciendo un análisis de los valores propios estudia la estabilidad de esta solución y demuestra de manera analítica que el frente solución es “exponencialmente estable” si $\epsilon > 0$ es suficientemente pequeño.

B. P. Liu y Z. Bi demuestran la existencia de soluciones pulso periódicas múltiples usando métodos de ecuaciones integrales. Se encuentran una infinidad de ondas periódicas no constantes bajo condiciones bastante generales por medio del teorema de punto fijo de Browder-Potter.

En 1990, Chow, Deng y Terman [4] se dan condiciones suficientes para que una órbita homoclínica o una órbita periódica bifurque de un ciclo heterocínico, basado en ideas de Silnikov; estos resultados se aplican a ecuaciones del tipo de FN.

En 1991, G. Flores da una prueba geométrica a través de bloques aislantes de la existencia y estabilidad de un pulso viajero lento con velocidad $c(\epsilon) = O(\sqrt{\epsilon})$ para el sistema (4.3). También demuestra que para $\epsilon > 0$ pequeño el espectro continuo de la linealización de alrededor de la onda lenta permanece en una mitad del plano $\Re(\lambda) < -b_2$ y que existe exactamente un valor propio positivo.

En este mismo año B. Deng [6] Usando teoría de bifurcaciones y el método integral de Melnikov, demuestra la existencia de una infinidad de ondas viajeras hacia adelante y hacia atrás. Posteriormente [7] estudia sistemas de ecuaciones del tipo Silnikov: El sistema $\dot{z} = F(z)$ satisface que (a) Los valores propios principales inestables, aquellos que tienen la menor parte real positiva de $DF(0)$, son parejas de complejos conjugados $\mu \pm i\omega$ con $\omega \neq 0$, y si $\lambda < 0$ denota el parte real más grande de los valores estables, se supone que $0 < \mu < \lambda$. (b) Existe una órbita homoclínica al silla-foco en “posición general”, i.e $\dim(T_p W^s \cap T_p W^u) = 1$ para cada p en la órbita homoclínica; (c) Cuando $t \rightarrow -\infty$ la órbita homoclínica $z(t, p_0)$ es asintóticamente tangente al subespacio inestable principal, el generado por los vectores propios con valores propios $\mu \pm i\omega$. (c) Satisface cierta condición de inclinación fuerte.

Entonces si $1 < \rho < -\lambda/\mu$, existe un conjunto invariante Λ_ρ topológicamente conjugado al shift de Bernoulli.

En 1996, Y. H. Wu [32], estudia la solución del semiflujo $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ definido por las ecuaciones generalizadas de FitzHugh-Nagumo, usando la teoría de sistemas dinámicos de dimensión infinita. Se discute la existencia de un atractor global, la estimación de su Hausdorff y dimensiones fractales y la existencia de una variedad inercial.

En 1997, M. Hayashi[33] da una condición suficiente para que el sistema FitzHugh-Nagumo tenga un ciclo límite único no trivial.

En 1997, Muruganandam y Lakshmanan [24] estudian la estabilidad lineal de las

ecuaciones de FN cerca al origen, y muestran la existencia de varias bifurcaciones interesantes bajo simetría Z_2 o sin ella. Basados en una reducción a la variedad central y análisis de formas normales se deduce la forma normal de Hopf. Además, con resultados numéricos se verifica la aparición de ciclos límites.

El trabajo más reciente en esta dirección se debe a Kakiuchi y Tchizawa. En [21] introducen el término “soluciones pato” que se explican enseguida:

Considere un sistema de ecuaciones diferenciales dependientes de un parámetro que varía lentamente. Se supone que el sistema tiene un punto de equilibrio para cada valor fijo del parámetro. Supóngase que el parámetro pasa a través de un valor de bifurcación donde el equilibrio pierde la estabilidad; entonces los puntos fase atraídos al equilibrio antes del momento de la bifurcación permanecen cercanos al equilibrio inestable después del momento de la bifurcación, es decir, la pérdida de estabilidad es retardada. Este fenómeno fue observado por varios autores pero la teoría general debida A.I. Neishtadt apareció hasta 1985.

Este fenómeno está relacionado con las soluciones “canario” (o “pato”), es decir soluciones de un sistema lento-rápido que inicialmente están infinitamente cercanas a la parte atractora de la variedad lenta y luego infinitamente cerca de la parte repulsora. Las soluciones pato se han obtenido a través de la teoría de perturbaciones no estándar (singular).

Recientemente [14] se ha encontrado la ecuación del tipo de Nagumo relacionada con el fenómeno de biestabilidad de ciertas ecuaciones de reorientación en cristales líquidos, obtenidas por el método de promedios. Dicha ecuación toma la forma

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + F(\theta)$$

donde

$$F(\theta) = -\frac{1}{4}\pi^2\theta + a \sin 2\theta + b \sin 2(\theta + \phi)$$

y son de interés los casos extremos $a = 0$ y $b = 0$.

Bibliografía

- [1] V.I. Arnold; *Ordinary Differential Equations*; MIT Press, Cambridge, MA.
- [2] R. Casten, H. Cohen y P. Lagerstrom. "Perturbation analysis of an approximation to Hodgkin-Huxley theory". *Quart. J. Appl. Math.*, **32**, 355-367; 1977.
- [3] G. Carpenter. "A geometric approach to singular perturbation problems with applications to nerve impulse equations", *J. Differential Equations*, **23**, 152-173; 1977.
- [4] S.N. Chow, B. Deng y D. Terman; "The bifurcation of homoclinic and periodic orbits from two heteroclinic orbits"; *SIAM J. Math. Anal.* **21**, no.1, 179-204; 1990.
- [5] C. Conley; "On traveling wave solutions of nonlinear diffusion equations; Math. Research Center Technical Report1492, University of Wisconsin, Madison, 1975.
- [6] B. Deng; "The existence of infinitely many traveling front and back waves in the Fitzhugh-Nagumo equations"; *SIAM J. Math. Anal.* **22**, no. 6, 1631-1650; 1991.
- [7] B. Deng; "On Silnikov's homoclinic saddle-focus theorem"; *J. Differential Equations*, **102**, no. 2 305-329; 1993.
- [8] J.W. Evans; *Indiana Univ. Math. J.* 24, no. 2m 1169-1190; 1974-75.
- [9] J.W. Evans, N. Fenichel y J. Feroe. "Double impulse solutions in nerve axon equations". *SIAM J. Appl. Math.* **42**; 1982.
- [10] J.A. Feroe; "Travelling waves of infinitely many pulses in nerve axons"; *Math. Biosc.* **55**, no. 3-4, 189-203; 1981.
- [11] J.A. Feroe; "Existence and stability of multiple impulse solutions of a nerve axon equation"; *SIAM Appl. Math.* **42**, No. 2, 235-246; 1982.
- [12] P. Fife. "Dynamics of internal layers and diffusive interfaces. SIAM Regional Conf. Ser., SIAM, Philadelphia, PA. 1988.
- [13] G. Flores; "The stable manifold of the standing wave of the nagumo equation".
- [14] C. García Reimbert et al. "Active propagation and cut-off for low TM modes in a nonlinear nematic waveguide. To appear *Physica D*.

- [15] M. Golubitsky y D.G. Schaeffer. *Singularities and Groups in bifurcation Theory Vol. I*; 378-382; 1985.
- [16] S.P. Hastings; "The existence of periodic solutions to Nagumo's equation"; *Quart. J. Math. (Oxford)*, **25**, 369-378; 1974.
- [17] S.P. Hastings; "On the existence of periodic orbits for the Fitzhugh-Nagumo equations"; *Quart. J. Math. (Oxford)*, **27**, 123-134; 1976.
- [18] S.P. Hastings; "Single and multiple pulse waves for the Fitzhugh-Nagumo equations"; *SIAM Appl. Math.* **42**, No. 2, 247-260; 1982.
- [19] Hausdorff. *Set Theory*. Chelsea: New York.
- [20] K. Hayashi; "On the Nagumo equation"; *Keio Math. Sem. Rep.* No.2, 1-6; 1977.
- [21] N. Kakiuchi y K. Tchizawa; "On an explicit duck solution an delay in the Fitzhugh-Nagumo equation"; *J. Differential Equations*, **141**, 327-339; 1997.
- [22] Ch. Jones; "Stability of the travelling wave solution of the Fitzhugh-Nagumo system"; *Trans. Amer. Math. Soc.* No. 2, 431-469; 1984.
- [23] H.P. McKean; "Nagumo's equation"; *Adv. in Math.* **4**, 209-223; 1979.
- [24] P. Murugandandam y M. Lakshmanan; "Bifurcation analysis of the travelling waveform of Fitzhugh-Nagumo nerve conduction model equation."; *Chaos* **7**, no. 3, 476-487; 1997.
- [25] J. Nagumo, S. Arimoto y S. Yoshizawa; "An active pulse transmission line simulating nerve axon; *Proc. IRE*, **50**, 2061-2070; 1962.
- [26] J. Rauch y J. Smoller; "Qualitative theory of Fitzhugh-Nagumo equations; *Adv. in Math.* **27**, 1313-1317; 1973.
- [27] J. Rinzel y J. Keller; "Travelling wave solutions of a nerve conduction equation"; *Biophysical J.*, **13**, 1313-1317; 1978.
- [28] S. Wiggins; *Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*; *Texts in Appl. Math.* **2**; Springer-verlag; 1990.
- [29] S. Wiggins; *Global Bifurcations and Chaos: Analytic Methods*; *Appl. Math. Sc.* **73**. Springer-Verlag; 1998.
- [30] M. V. Volkenshtein; *Biofísica*; Editorial Mir, MOscú; 1981.
- [31] E. Yanagida; "Stability of the fast travelling pulse solution of the Fitzhugh-Nagumo equations"; *J. Math. Biol.* **22**, no. 1 81-104; 1985.

- [32] Y. H. Wu; “A global attractor of a system of generalized Fitzhugh-Nagumo equations and its inertial manifold” (en chino); *Acta. Math. Appl. Sinica* **19**, no. 2, 185-195; 1996.
- [33] M. Hayashi; “On the uniqueness of the closed orbit of the Fitzhugh-nagumo system”; *Math. Japon* **46**, no. 2, 331-336; 1997.
- [34] J. W. Evans, N. Fenichely J. Feroe; “Double impulse solutions in nerve axon equations”; *SIAM J. Math.* **42**, no. 2, 219-234; 1982.
- [35] L. P. Sil’nikov; “A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a saddle-focus type”; *Math. USSR Sbornik*, **10**, 91-102; 1970.
- [36] Ibid. “The existence of a denumerable set of periodic motions in four dimensional space in an extended neighborhood of a saddle-focus”; *Soviet Math. Dolk.*, **8**, 54-106; 1967.