

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

Solitones en el modelo Skyme bebé no conmutativo

Tesis que presenta:
Fís. Blanca Angélica González Morales.
Para obtener el grado de
Maestra en Ciencias (Física)



Casa abierta al tiempo

Asesor:

Dr. Román Linares Romero.

Jurado Calificador:

Presidente: Dr. José David Vergara Oliver UNAM
Secretario: Dr. Román Linares Romero UAM-I
Vocal: Dr. Marco Antonio Maceda Santa María UAM-I

México, Distrito Federal, 17 de julio de 2013.

Miembros del jurado



Presidente

Dr. José David Vergara Oliver
Instituto de Ciencias Nucleares, UNAM.

Román Linares Romero

Secretario

Dr. Román Linares Romero
Departamento de Física, UAM-I.



Vocal

Dr. Marco Antonio Maceda Santa María
Departamento de Física, UAM-I.

*Dedicado especialmente a la persona más importante en mi vida:
mi hija Samantha González González*

*A mis padres:
José Javier González Monjaras
y
Graciela Morales Jacobo*

*A mis hermanos y a mi pareja:
Juan, Karina, Lidia, Miguel y Julio*

Agradecimientos

Agradezco muy especialmente a mi asesor el **Dr. Román Linares Romero** por todo su empeño, trabajo y paciencia que dedicó a lo largo de mis estudios de maestría y para concluir este trabajo.

Al **Dr. Marco A. Maceda Santamaría** por su colaboración y apoyo durante todo el proceso.

Al **Dr. José David Vergara Oliver** por las observaciones que ayudaron a mejorar la tesis.

También agradezco a toda mi familia que siempre me acompañan incondicionalmente en todo momento y me alientan a superarme día a día.

A todos mis amigos y compañeros Alberto, Daniel, Gastón, Jaime, Luis, Rubén, Tadeo, Ernesto entre muchos otros quienes en todo momento me ayudaron.

Al Departamento de Física de la Universidad Autónoma Metropolitana unidad Iztapalapa por su apoyo y disposición que me brindo para realizar mi examen de grado.

Al CONACyT por el apoyo económico brindado a lo largo de mis estudios de maestría.

Índice general

Introducción	1
1. Torceduras en (1+1)-dimensiones	5
1.1. Ecuación de onda lineal	6
1.2. Ondas solitarias y solitones	7
1.2.1. Término dispersivo: ecuación de Klein-Gordon	7
1.2.2. Término no-lineal	8
1.2.3. Definición de onda solitaria	8
1.2.4. Definición de solitón	10
1.3. Cotas de Energía o Fronteras de Bogomolny	11
1.4. Modelo ϕ^4	14
1.4.1. Kinks y antikinks	17
1.5. Estabilidad de ondas solitarias	19
1.5.1. Estabilidad de Liapunov	19
1.5.2. Estabilidad de torceduras	20
1.5.3. Estabilidad del kink en la teoría ϕ^4	21
1.6. Interacción kink-antikink	22
2. Solitones en (1+1)-dimensiones	25
2.1. Modelo de Seno-Gordon	25
2.1.1. Soluciones Kink	27
2.1.2. Estabilidad del kink	28
2.2. Soluciones multi-solitónicas	28
2.2.1. Interacción kink-kink	32

2.2.2.	Interacción kink-antikink	33
2.3.	Modelo de seno-Gordon sobre S^1	34
2.3.1.	Clases de homotopía entre esferas	35
3.	Bultos en (2+1)-dimensiones	39
3.1.	Teorema de Hobart-Derrick	40
3.1.1.	Condición de inestabilidad de escala	40
3.1.2.	Transformación de escala de la energía	41
3.2.	Modelo sigma no lineal $O(3)$	43
3.2.1.	Ondas solitarias y el grupo de homotopía	44
3.2.2.	Carga topológica	46
3.2.3.	Ecuación tipo Bogomolny	47
3.3.	Modelo $\mathbb{C}P^1$	48
3.3.1.	Modelos $\mathbb{C}P^N$	48
3.3.2.	Modelo $\mathbb{C}P^1$	50
3.4.	Evadiendo el teorema de Derrick	52
3.4.1.	Q-bultos en el modelo $\mathbb{C}P^1$	52
3.4.2.	Incluyendo un término tipo cuártico en las derivadas	54
3.5.	Modelo Skyrme bebé	55
4.	No-conmutatividad	59
4.1.	Ejemplos de la física no-conmutativa	60
4.1.1.	Mecánica Cuántica	60
4.1.2.	Dinámica de una partícula cargada	61
4.1.3.	Momento angular	63
4.2.	Mapeo Weyl-Wigner-Moyal	64
4.2.1.	Aplicación de Weyl generalizada	65
4.2.2.	Ejemplo: Física cuántica y brackets Moyal	70
4.3.	Deformación Moyal o producto Estrella	71
4.4.	Formalismo auxiliar del espacio de Fock	75
5.	Modelo Skyrme bebé no conmutativo	81

5.1. Soluciones BPS	81
5.2. Skyrme bebé no conmutativo	83
5.3. Estabilidad de los Skyrmiones bebé no conmutativos	85
5.3.1. Primera variación $\delta E = 0$ con un proyector de rango 1	87
5.3.2. Segunda variación $\delta^2 E = 0$	88
Conclusiones	95
A. Modelo Skyrme	97

Introducción

En esta tesis se discuten algunos de los criterios para estudiar la estabilidad de soluciones tipo *onda solitaria*, con el objetivo de hacer un análisis de la estabilidad de este tipo de soluciones en el modelo Skyrme bebé no-conmutativo, definido en $(2 + 1)$ -dimensiones. El modelo fue propuesto en analogía con el modelo Skyrme $(3 + 1)$ -dimensional, el cual describe bariones nucleares (piones), cuyo comportamiento se asocia al de los solitones del modelo. Las ondas solitarias se observaron por primera vez en 1834 y en 1895 se obtuvieron como soluciones a la ecuación hidrodinámica no-lineal de Korteweg-de Vries. Estas soluciones están caracterizadas por una carga topológica Q y tienen una densidad de energía localizada en una región del espacio en cualquier instante de tiempo, básicamente nos interesan las ondas solitarias que al interactuar, sus perfiles de la densidad de energía son restituidos, manteniendo su velocidad y forma originales, es decir, que se comportan como partículas en el sentido de choques elásticos. Si la onda solitaria tiene esta propiedad adicional la llamaremos *solitón*.

Las ondas solitarias aparecen como soluciones a las ecuaciones de onda no lineal en teoría de campos, por lo que nos restringimos a lagrangianos de este estilo (que sus ecuaciones de movimiento sean ecuaciones de onda no lineal) y que involucren únicamente campos escalares. Consideraremos potenciales de la forma $U(\phi) \geq 0$, por lo que las configuraciones de energía total mínima: $E = 0$, relacionadas a la solución trivial $\phi = 0$, las llamaremos configuraciones de vacío. Como veremos, para que exista la posibilidad de tener soluciones de onda solitaria, es necesario que nuestra teoría tenga al menos dos configuraciones de vacío, ya que las ondas solitarias son soluciones que interpolan entre vacíos. La estrategia para obtener estas soluciones es concentrarse en configuraciones estáticas, ya que las ondas solitarias se desplazan a velocidad constante y por tanto es posible analizar el fenómeno en el marco de referencia donde la onda está en reposo. Aunque uno no conozca la forma explícita de las soluciones, es posible obtener cotas para el valor de su energía en términos de una cantidad topológica (carga topológica), dada por el valor asintótico de las configuraciones de campo, a estas cotas se les conoce como *fronteras de Bogomolny* y se saturan (se cumple la igualdad) cuando se tiene una configuración de campo, estática. Para obtener la forma explícita de las soluciones, uno resuelve una ecuación diferencial de primer orden, conocida como la ecuación de Bogomolny, cuyas soluciones resuelven también las ecuaciones de movimiento.

Mediante el procedimiento descrito, se obtiene las soluciones kink o antikink, las

cuales reciben este nombre debido a la forma (torcedura) que toman al graficarlas. En este trabajo mostramos dos ejemplos muy conocidos en $(1+1)$ -dimensiones, que admiten soluciones de onda solitaria, sin embargo veremos que en uno de los modelos, las soluciones además cumplen las propiedades de *solitón*. El potencial ϕ^4 tiene dos mínimos y entonces dos vacíos, por lo que se obtiene una solución kink ($Q = 1$) y una solución antikink ($Q = -1$), luego analizamos la estabilidad de éstos así como su interacción. El otro modelo es el *seno-Gordon*, el cual posee una infinidad de vacíos y cada intervalo de igual tamaño presenta un kink o un antikink, un intervalo de mayor rango con soluciones de vacío contiene varios kinks o antikinks, dado que se conoce el comportamiento de estos en un intervalo con un kink es posible general al resto con la ayuda de las *transformaciones de Bäcklund*, que son transformaciones algebraicas que se obtienen de ecuaciones diferenciales de primer orden, que generalizan a las ecuaciones de Bogomolny. También estudiamos la estabilidad de estas soluciones así como sus interacciones e interpretación física.

Una pregunta pertinente es: ¿Existen modelos de dos campos que admitan soluciones de onda solitaria? un ejemplo de este tipo de modelos lo constituye la reformulación del modelo de seno-Gordon con dos campos escalares, por lo que se considera que el campo de la teoría es un vector de dos componentes de campo escalar real y para el cual, el comportamiento asintótico (condición de frontera) siempre tiene el mismo valor de vacío, pero para un solitón deben existir al menos dos de éstos, por lo que existe una degeneración ya que todas las soluciones tienen la misma condición de frontera. Esta condición de frontera implica la necesidad de compactificar el espacio (la coordenada espacial) a un círculo y además en el modelo el espacio de los campos está restringido también a un círculo de radio unitario, por lo que el vector campo representa una clase de mapeo de un círculo S^1 (espacio coordinado) a otro S^1 (espacio de campos) y este mapeo o enrollamiento está asociado al grupo de homotopía $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ (resultado topológico) que a su vez etiqueta al kink al asociarlo a la carga topológica Q . En este trabajo solamente trabajamos con modelos donde el grupo de homotopía relevante es $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ o $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$, donde este último se relaciona con mapeos de la 2-esfera a la 2-esfera, las cuales definimos en el capítulo 2. Otra pregunta que surge es ¿Existen ondas solitarias en un espacio de dimensión mayor a uno? la respuesta es sí, el modelo sigma $O(3)$ en $(2+1)$ -dimensiones admite soluciones tipo ondas solitarias pero su generalización, los modelos $O(N)$, no admiten estas soluciones. Sin embargo sucede que existe otro tipo de modelos que representan una generalización más apropiada del modelo $O(3)$, estos son los llamados modelos sigma $\mathbb{C}P^N$. En particular el modelo $O(3)$ está íntimamente relacionado al $\mathbb{C}P^1$, ya que básicamente son modelos equivalentes. En el modelo $O(3)$ el vector de campo tiene en cada componente un campo escalar real con dos dimensiones espaciales al igual que en el seno-Gordon, el comportamiento asintótico (condición de frontera) tiene un sólo valor, por lo que se debe realizar una compactificación del espacio a la 2-esfera y los campos están nuevamente constreñidos a la 2-esfera de radio unitario, la clase de mapeo implicada es $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$. El teorema de Hobart-Derrick esencialmente establece que para dimensiones espaciales mayores a uno y para un modelo de campos escalares con una densidad lagrangiana que es la suma de un término cinético más un

potencial $U(\phi) \geq 0$, no existen soluciones tipo onda solitaria estables, con excepción de las configuraciones de vacío. Para evadir el teorema se añaden términos al lagrangiano para estabilizar las soluciones, un modelo que emplea esta estrategia es el modelo Skyrme.

El modelo *Skyrme bebé* es un modelo análogo al Skyrme ya que es una reducción dimensional de éste, donde los skyrmiones bebé (las soluciones) son asociadas a partículas y su comportamiento queda descrito por solitones, en principio, por el teorema de Hobart-Derrick estos son inestables por lo que se reestructura la lagrangiana que describe la dinámica para hacer estable a las soluciones, esto se hace con el término de potencial e inclusive puede contener términos masivos. En esta tesis se estudia una reformulación del skyrme bebé sin término de potencial que en principio es compensado al trabajarlo en un plano no conmutativo, el proceso es hacer un mapeo de Moyal del skyrme bebé conmutativo, para ello representamos las soluciones en un espacio de estados que contenga una representación variable de partículas elementales, este es el *espacio de Fock*, lo que permite emplear operadores de creación y aniquilación. Dado que las soluciones BPS (solitones) también son soluciones a la ecuación de movimiento del modelo *Skyrme bebé no conmutativo*, en principio deben ser soluciones estables, para ello analizamos su estabilidad al tomar la primera y segunda variación en la energía estática de los skyrmiones bebé. Finalmente discutimos los resultados.

1

Torceduras en $(1+1)$ -dimensiones

Una *onda solitaria* se define como una solución a un sistema de *ecuaciones diferenciales no lineales* cuya energía es finita y localizada en cualquier instante de tiempo y que viaja a velocidad constante. Si adicionalmente esta solución se comporta como en un choque elástico, en el sentido que no pierde su propiedad de tener una energía localizada después de interactuar con otra onda solitaria, se dice que la solución es un solitón. En general un solitón es una onda solitaria, aunque la afirmación inversa no es necesariamente cierta, esto es, no toda onda solitaria es un solitón. Las soluciones solitónicas son interesantes porque permiten describir el comportamiento físico de objetos (partículas) con energía localizada.

Las ondas solitarias surgen como soluciones en un conjunto amplio de sistemas físicos que están descritos por ecuaciones diferenciales parciales no lineales. Históricamente el primer registro que se tiene del fenómeno fue realizado por el ingeniero escocés John Scott Russell, quien observó en agosto de 1834 una onda solitaria en el canal Unión en Escocia. Posteriormente Scott reprodujo el fenómeno en un tanque de ondas y lo llamó “la onda de traslación”. Después de esta observación experimental, Lord Rayleigh y Joseph Boussinesq alrededor de 1870 realizaron un estudio teórico del problema, finalmente Diederik Korteweg y Gustav de Vries alrededor de 1895 obtuvieron soluciones tipo onda solitaria a la ecuación hidrodinámica no-lineal (llamada ecuación de Korteweg-de-Vries, aunque escrita primero por Boussinesq) que describe ondas propagándose en un canal de aguas poco profundas, unidimensionales y de pequeña amplitud. Desde entonces los solitones han sido estudiados en diversas ramas de la física, incluyendo la Teoría de Campos donde aparecen como soluciones clásicas cuyas configuraciones de campo tienen energía finita y están localizadas en alguna región del espacio-tiempo.

En este capítulo introducimos los conceptos de ondas solitarias topológicas y de solitón. Ejemplificaremos las ondas solitarias topológicas con un modelo de campo escalar conocido como el modelo ϕ^4 en (1+1)-dimensiones. Veremos que estas soluciones están caracterizadas por una carga topológica Q (un número entero) que etiqueta a un sector topológico, tal que el sector vacío tiene $Q = 0$, un sector que contiene una onda solitaria conocida como *kink*¹ tiene $Q = 1$ y un sector con un anti-kink tiene $Q = -1$. En general las soluciones tipo onda solitaria en una dimensión espacial se llaman *kinks*, en 2 dimensiones espaciales *lumps*, en 3 dimensiones *vórtices* y *Skyrmiones* y por último en 4 dimensiones *instantones*.

1.1. Ecuación de onda lineal

El nombre *ondas solitarias* y *solitones* se refiere a *ciertas soluciones especiales de ecuaciones de onda no-lineales*. Antes de analizar ejemplos de estas soluciones y con el objetivo de apreciar sus propiedades completamente, recordemos algunas propiedades de la ecuación de onda relativista más simple

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi(t, x) = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(t, x) = 0, \quad (1.1)$$

donde $\phi(t, x)$ es un campo escalar real en (1+1)-dimensiones y c es la velocidad de la luz. Las propiedades de esta ecuación son bien conocidas:

- Es lineal.
- Sin dispersión².

Como consecuencia de estas dos propiedades, sus soluciones tienen 2 características relevantes para nuestra discusión.

- Cualquier función real bien comportada de la forma $f(x \pm ct)$ es una solución de la ecuación (1.1). En particular si elegimos una función localizada f , podemos construir un paquete de ondas localizado que se desplaza a velocidad uniforme $\pm c$, y cuya *forma no se distorsiona*. Estas características están relacionadas al hecho de que las ondas planas $\sin(kx \pm \omega t)$ y $\cos(kx \pm \omega t)$ con $\omega = kc$, forman un conjunto completo de soluciones de la ecuación (1.1). Cualquier función bien localizada, por ejemplo, $f(x - ct)$, se puede escribir como

$$f(x - ct) = \int dk [a(k) \cos(kx - \omega t) + b(k) \sin(kx - \omega t)]. \quad (1.2)$$

¹De aquí viene el título del capítulo: *kink* = torcedura. Como veremos el nombre *kink* hace alusión a la gráfica de la función $\phi(x)$ vs. x , para la solución de onda solitaria en el modelo ϕ^4 .

²En matemáticas, una ecuación diferencial dispersiva es una ecuación diferencial parcial que es dispersiva. En este contexto, dispersión significa que las ondas de longitud de onda diferente se propagan a velocidades de fase diferentes.

El hecho de que el paquete de onda $f(x - ct)$ viaje a velocidad c , sin distorsión de forma, está relacionado al hecho de que todas sus componentes de onda plana tienen la misma velocidad de onda $c = \omega/k$.

- Dado que la ecuación de onda es lineal, dadas dos soluciones de paquete de onda localizadas $f_1(x - ct)$ y $f_2(x + ct)$, su suma: $f(t, x) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)$ también es solución de la ecuación. A tiempos muy negativos ($t \rightarrow -\infty$), $f(t, x)$ consiste de dos paquetes separados por una distancia muy grande y aproximándose el uno al otro esencialmente sin distorsionarse, a un tiempo finito t estos paquetes colisionan y después de la colisión, asintóticamente ($t \rightarrow +\infty$) la solución se separa en los mismos dos paquetes manteniendo sus formas originales y velocidades. Para el sistema descrito por la ecuación (1.1) esta propiedad sigue siendo válida para más de dos paquetes.

Estas **dos propiedades**:

1. Un paquete de ondas mantiene su forma y velocidad.
2. Varios paquetes mantienen asintóticamente su forma y velocidad después de colisionar.

Valen para (1.1) porque el sistema es *lineal* y *sin dispersión*.

Sin embargo, las ecuaciones de onda típicas en muchas ramas de la física son mucho más complicadas, éstas pueden contener, términos no-lineales, términos no dispersivos y varios tipos de campos, en diferente número de dimensiones espaciales: 1, 2 y 3. El objetivo de esta tesis es revisar los elementos básicos que se conocen como respuesta a la pregunta siguiente:

¿Es posible que sistemas cuyas ecuaciones de onda no-lineales y dispersivas, a pesar de su complejidad comparada con la ecuación (1.1), admitan algunas soluciones que posean la propiedad 1 y tal vez incluso la propiedad 2?

1.2. Ondas solitarias y solitones

Antes de definir lo que entenderemos por una onda solitaria y por un solitón a lo largo de este trabajo, ejemplifiquemos la diferencia entre las propiedades dispersivas y no lineales en una ecuación de onda.

1.2.1. Término dispersivo: ecuación de Klein-Gordon

Es interesante notar que aún la inclusión del tipo más sencillo de términos a la ecuación (1.1), hace que las propiedades interesantes que discutimos se destruyan, aún

en (1+1)-dimensiones. Consideremos por ejemplo la ecuación de Klein-Gordon en 2-dimensiones

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2 c^2) \phi(t, x) = \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} + m^2 c^2 \right) \phi(t, x) = 0. \quad (1.3)$$

Esta ecuación continúa siendo *lineal* y las ondas planas $\sin(kx \pm \omega t)$ y $\cos(kx \pm \omega t)$ continúan formando un conjunto completo de soluciones. Sin embargo ahora $\omega^2 = k^2 c^2 + m^2 c^4$. Esto implica que soluciones de longitud de onda diferente, viajen a velocidades diferentes $\omega(k)/k$, y por tanto la ecuación es *dispersiva*. Como consecuencia, si tenemos un paquete de ondas localizado que a $t = 0$ tenga la forma

$$f(x) = \int dk [a(k) \cos(kx) + b(x) \sin(kx)], \quad (1.4)$$

se esparcirá al evolucionar en el tiempo. Así la **propiedad 1** se pierde y por tanto también la **propiedad 2**, ya que si un sólo paquete no puede mantener su forma, pierde sentido preguntarse si lo harán varios paquetes después de una colisión.

1.2.2. Término no-lineal

De manera similar podemos añadir el término no-lineal más simple a (1.1), esto es

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi(t, x) + \phi^3(t, x) = 0. \quad (1.5)$$

Hasta donde sabemos, no todas las soluciones a esta ecuación se conocen, sin embargo uno se puede auto-persuadir a través de cálculos numéricos o aproximados, que un paquete de ondas en este sistema se esparcirá al evolucionar en el tiempo, llevandonos a la conclusión de que este sistema no posee ninguna de las dos características que tienen las soluciones de la ecuación (1.1).

1.2.3. Definición de onda solitaria

Sorprendentemente se ha encontrado a lo largo de los años que en ciertas ecuaciones de onda donde están presentes tanto términos dispersivos como no-lineales, sus efectos se balancean entre sí de manera tal que poseen soluciones especiales que en esencia disfrutan de la **propiedad 1**. Desafortunadamente en la literatura sobre el tema, no existe una definición de onda solitaria y solitón aceptada de manera universal. Las definiciones utilizadas por autores diferentes sufren de pequeñas variaciones, e incluso utilizan nombres diferentes. Para los propósitos de este trabajo, utilizaremos la definición del libro de Rajaraman [6], en el cual se define una onda solitaria como una onda que mantiene su forma y velocidad, es decir que satisface la **propiedad 1** discutida en la sección anterior.

Sin embargo debemos enfatizar que esta definición está basada en términos de densidades de energía más que en los campos de onda mismos (como se definió en el caso de la ecuación de onda lineal), ya que esta cantidad tiene más significado en los sistemas de nuestro interés. Esto significa que nos restringiremos a aquellas ecuaciones de campo (para cualquier conjunto de campos acoplados $(\phi_1(t, \vec{x}), \phi_2(t, \vec{x}), \dots)$ que tiene una densidad de energía $\varepsilon(t, \vec{x})$ la cual es alguna función de los campos $\phi_i(t, \vec{x})$. Su integral espacial es la funcional de energía total $E[\phi_i]$, la cual a su vez se conserva. Un conjunto grande de ecuaciones, incluyendo las ecuaciones de campo en física de partículas, satisfacen esta propiedad. Dado que los sistemas físicos tienen una energía acotada por abajo también podemos, sin pérdida de generalidad, fijar el valor mínimo alcanzado por E igual a cero. Dada esta estructura, utilizaremos el adjetivo *localizado* para aquellas soluciones a las ecuaciones de campo cuya densidad de energía $\varepsilon(t, \vec{x})$ a un tiempo finito t es localizada en el espacio, esto es, es finita en alguna región finita del espacio y tiende a 0 en el infinito espacial suficientemente rápido para ser integrable. Note que para aquellos sistemas donde $E[\phi_i] = 0$ si y sólo si $\phi_i(t, x) = 0$, una solución localizada como la hemos definido, también tiene localizado a los campos mismos en el espacio. Por ejemplo, la ecuación (1.5) tiene una energía conservada asociada dada por

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \phi^4 \right], \quad (1.6)$$

la cual es minimizada por $\phi(t, x) = 0$. Si existen soluciones localizadas para este sistema, deberían tender asintóticamente a cero, esto es: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(t, x) = 0$, a cualquier tiempo t . Las derivadas $\partial\phi/\partial t$ y $\partial\phi/\partial x$ también se deben anular en este límite.

En contraste, la ecuación

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi(t, x)}{\partial x^2} - \phi(t, x) + \phi^3(t, x) = 0, \quad (1.7)$$

tiene una energía asociada

$$E[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2c} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} (\phi^2 - 1)^2 \right]. \quad (1.8)$$

En este caso la funcional de energía es minimizada por $\phi(t, x) = \pm 1$. Este es el ejemplo más simple de *rompimiento espontáneo de simetría* en la versión cuantizada de las teorías de campo. Ahora, una solución localizada debe comportarse asintóticamente en la forma $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(t, x) = \pm 1$, en cualquier instante de tiempo t . Dada la localización en este sentido de densidad de energía, definimos una onda solitaria como:

- **Onda solitaria:** Llamaremos onda solitaria a una solución no-singular localizada de cualquier ecuación de campo no-lineal (o ecuaciones acopladas cuando estén involucrados varios campos), cuya densidad de energía, además de estar localizada, tiene una dependencia espacial de la forma

$$\varepsilon(t, \vec{x}) = \varepsilon(\vec{x} - \vec{v}t), \quad (1.9)$$

donde \vec{v} es un vector de velocidad.

En otras palabras, la densidad de energía debe moverse a velocidad constante sin distorsionarse³.

Note que la ecuación (1.9) define a las ondas solitarias en una o más dimensiones espaciales. Más aún, cualquier solución estática localizada es automáticamente una onda solitaria con velocidad $\vec{v} = 0$. Varias de las ondas solitarias que discutiremos en este trabajo se obtendrán como soluciones estáticas. Sin embargo, para sistemas con invariancia relativista, una vez que se conoce una solución estática, las soluciones en movimiento se obtienen de manera trivial al transformarnos a un sistema de coordenadas en movimiento.

1.2.4. Definición de solitón

Los solitones son ondas solitarias que satisfacen una propiedad adicional, la cual puede establecerse como una versión generalizada de la **propiedad 2** de las soluciones de la ecuación de onda lineal. Para establecer esta propiedad consideremos un sistemas de ecuaciones no lineales (probablemente acopladas) y supongamos que estas ecuaciones admiten una solución de onda solitaria cuya densidad de energía es alguna función localizada $\varepsilon_0(\vec{x} - \vec{v}t)$. Consideremos ahora alguna otra solución de este sistema la cual en el pasado lejano consiste de N de tales ondas solitarias, con posiciones y velocidades arbitrarias. Entonces la densidad de energía $\varepsilon(t, \vec{x})$ de esta solución tendrá la forma

$$\varepsilon(t, \vec{x}) \rightarrow \sum_{i=1}^N \varepsilon_0(\vec{x} - \vec{a}_i - \vec{v}_i t), \quad \text{cuando } t \rightarrow -\infty. \quad (1.10)$$

Claramente la evolución temporal de esta configuración será gobernada por el sistema de ecuaciones de onda no-lineales. Definimos entonces a un solitón como:

- **Solitón:** Llamamos solitón a una onda solitaria cuya densidad de energía es $\varepsilon_0(\vec{x} - \vec{v}t)$, si la solución de N ondas solitarias (1.10), evoluciona en el tiempo tal que

$$\varepsilon(t, \vec{x}) \rightarrow \sum_{i=1}^N \varepsilon_0(\vec{x} - \vec{a}_i - \vec{v}_i t + \vec{\delta}_i), \quad \text{cuando } t \rightarrow +\infty, \quad (1.11)$$

donde los vectores $\vec{\delta}_i$ son constantes.

En otras palabras, los solitones son aquellas ondas solitarias cuyos perfiles de la densidad de energía son asintóticamente ($t \rightarrow +\infty$) restituidos a sus velocidades y formas

³Entre los textos clásicos de solitones, el de Scott [1] considera una definición más restrictiva al pedir que sean los campos mismos y no la densidad de energía quienes tengan la dependencia espacio-temporal de onda viajera. En contraste Coleman [2] utiliza una definición menos restrictiva al llamar *bultos* a las soluciones no-singulares de energía finita localizada, independientemente de la condición (1.9).

originales. Los vectores $\vec{\delta}_i$ representan la posibilidad de que los solitones puedan sufrir un desplazamiento en sus trayectorias respecto a las mismas antes de la colisión. Estos desplazamientos deberían ser los únicos efectos residuales de la colisión si ellos son solitones.

Note que mientras todos los solitones son ondas solitarias, no todas las ondas solitarias son solitones. En consecuencia, las soluciones solitónicas existen para un menor número de ecuaciones respecto a las soluciones de onda solitaria y por tanto son más difíciles de encontrar. Para poder encontrar una solución tipo onda solitaria a una ecuación no-lineal dada, sólo debemos concentrarnos en una solución localizada que satisfaga (1.9). Esto es a veces suficientemente complicado de hacer, pero se conocen actualmente muchas ecuaciones que admiten soluciones de onda solitaria. En contraste, para asegurarse que una solución es un solitón, no basta con encontrar la solución de onda solitaria, sino debemos encontrar una infinidad de soluciones dependientes del tiempo que consista de un número arbitrario de solitones, y checar que las condiciones (1.10) y (1.11) se satisfacen.

1.3. Cotas de Energía o Fronteras de Bogomolny

Los solitones topológicos más sencillos surgen en una dimensión espacial e involucran un sólo campo escalar. Por lo tanto en este capítulo y en el siguiente consideraremos una densidad lagrangiana de la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi), \quad (1.12)$$

donde el índice: $\mu = 0, 1$, la métrica es plana y de signatura: $\text{diag}(1, -1)$. El potencial $U(\phi)$ es una función real no-negativa que depende de ϕ .

Como sabemos del cálculo variacional, las ecuaciones de movimiento o ecuaciones de Euler-Lagrange se obtienen de pedir que la variación de la acción sea nula $\delta S = 0$, obteniéndose explícitamente que

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (1.13)$$

Así, para la densidad lagrangiana (1.12) la ecuación de movimiento es:

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{dU(\phi)}{d\phi} = 0, \quad (1.14)$$

la cual en general es una *ecuación de onda no-lineal*. Supongamos que el potencial $U(\phi)$ es no-negativo y tiene un mínimo global: $U_{min}(\phi)$. Podemos entonces sumar una constante a la densidad lagrangiana (1.12), la cual desde luego no afecta las ecuaciones de movimiento, de forma tal que el valor del mínimo sea $U_{min}(\phi) = 0$, en lo que sigue asumiremos que este es el caso.

La energía total para una configuración de campo es una suma de las energías potencial y cinética. La primera está dada en términos de la función potencial y las derivadas del campo respecto a la coordenada espacial: $\phi' \equiv \frac{\partial \phi}{\partial x}$

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + U(\phi) \right) dx, \quad (1.15)$$

mientras que la energía cinética sólo depende de la derivada temporal del campo: $\dot{\phi} \equiv \frac{\partial \phi}{\partial t}$

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\phi}^2 dx. \quad (1.16)$$

Llamaremos campo vacío o solución trivial ϕ_0 , a configuraciones del campo donde la energía total de la configuración sea $E(\phi) = 0$. Es claro que este es el caso si imponemos las condiciones $\frac{\partial \phi_0}{\partial t} = \frac{\partial \phi_0}{\partial x} = 0$ ⁴ y estamos en el mínimo del potencial $\frac{dU(\phi_0)}{d\phi} = 0$. Denotamos al conjunto de campos o configuraciones de vacío como:

$$\mathcal{V} = \{ \phi_0 \mid \phi'_0 = \dot{\phi}_0 = 0, \text{ y } U(\phi_0) = U_{min} \}. \quad (1.17)$$

El número de elementos en el conjunto \mathcal{V} de una teoría dada, determina la posible existencia de soluciones tipo onda solitaria, necesiándose más de uno para que esto suceda. Tomemos como ejemplo el caso cuando tengamos una configuración de campo con energía finita clasificado topológicamente por el par de vacíos (ϕ_-, ϕ_+) , donde $\phi_{\pm} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x)$. Cuando los dos vacíos son diferentes ($\phi_+ \neq \phi_-$) las soluciones $\phi(x)$ no pueden deformarse continuamente (sujetas a manter el valor de su energía) a una solución de vacío (con energía nula), ya que cualquier campo para el cual $\phi(\pm\infty) \notin \mathcal{V}$ tiene una energía infinita, a este tipo de solución se le llama *kink* o torcedura, debido a la forma que presentan al graficarse como función de x . Por el contrario, para soluciones interpoladas entre dos vacíos iguales ($\phi_+ = \phi_-$) existe una deformación continua donde el campo puede mapearse a una solución de vacío, cuya energía es nula.

Queda claro que para que un campo no pertenezca al conjunto de vacíos \mathcal{V} , debe suceder que:

- $\dot{\phi} = 0$ y $\phi' \neq 0$, (configuraciones estáticas).
- $\dot{\phi} \neq 0$ y $\phi' \neq 0$.

De estas dos posibilidades nos concentraremos en las configuraciones estáticas y calcularemos su energía. En este caso claramente la energía cinética es nula y toda la contribución a la energía viene de la energía potencial

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \phi'^2 + U(\phi) \right) dx. \quad (1.18)$$

⁴En lo que sigue utilizamos un sistema coordenado en el cual la velocidad de la luz $c = 1$.

En general es posible acotar el valor de la energía, esto es posible notando que

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\phi' \pm \sqrt{U(\phi)}\right)^2 \geq 0, \quad (1.19)$$

y desarrollando explícitamente el binomio tenemos

$$\frac{1}{2}\phi'^2 \pm \phi'\sqrt{2U(\phi)} + U(\phi) \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\phi'^2 + U(\phi) \geq \mp\sqrt{2U(\phi)}\phi'. \quad (1.20)$$

Integrando esta desigualdad en todo el espacio obtenemos

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\phi'^2 + U(\phi)\right) dx \geq \pm \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2U(\phi)}\phi' dx. \quad (1.21)$$

Como la energía es positiva, obtenemos finalmente

$$E \geq \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{2U(\phi)}\phi' dx \right| = \left| \int_{\phi_-}^{\phi_+} \sqrt{2U(\phi)}d\phi \right|, \quad (1.22)$$

donde en la última igualdad hemos utilizado el hecho de que $\phi' dx = \frac{d\phi}{dx} dx = d\phi$ y que los límites de la integral son: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = \phi_-$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = \phi_+$. Note que esta cota también es válida para campos dependientes del tiempo, dado que el término cinético es positivo y eso hace que la energía total sea mayor.

Se dice que un potencial $U(\phi) \geq 0$, para un sistema dinámico, es pre-supersimétrico si este potencial clásico puede expresarse en términos de un superpotencial de la forma $U(\phi) = \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{d\phi}\right)^2$. Como todo sistema clásico con un grado de libertad es pre-supersimétrico, podemos acotar la energía en términos del superpotencial evaluado en los vacíos ϕ_+ y ϕ_- , explícitamente en este caso

$$\int_{\phi_-}^{\phi_+} \sqrt{2U(\phi)}d\phi = \int_{\phi_-}^{\phi_+} dW(\phi) \Rightarrow E \geq |W(\phi_+) - W(\phi_-)|. \quad (1.23)$$

A este tipo de fronteras de la energía que depende de configuraciones de campo topológicas se les llama, *fronteras de Bogomolny*. La igualdad en la cota de Bogomolny (se satura la energía) cuando el campo ϕ es estático ($\dot{\phi} = 0$) y además es solución de una de las ecuaciones de primer orden de Bogomolny

$$\phi' = \pm\sqrt{2U(\phi)}. \quad (1.24)$$

Cuando el campo es solución de la ecuación $\phi' = +\sqrt{2U(\phi)}$ se dice que se tiene una solución *kink*, si el campo es solución a la ecuación $\phi' = -\sqrt{2U(\phi)}$ se tiene una solución

anti-kink. Derivando respecto a la coordenada espacial las ecuaciones de Bogomolny (1.24), obtenemos

$$\phi'' = \pm \frac{1}{\sqrt{2U(\phi)}} \frac{dU(\phi)}{d\phi} \phi' = \pm \frac{1}{\sqrt{2U(\phi)}} \frac{dU(\phi)}{d\phi} \left(\pm \sqrt{2U(\phi)} \right) = \frac{dU(\phi)}{d\phi}, \quad (1.25)$$

pero esta no es otra cosa que la ecuación de movimiento (1.14) para campos estáticos.

Concluimos entonces que las soluciones estáticas tipo kink y anti-kink, que son soluciones de las ecuaciones de Bogomolny (ecuaciones diferenciales de primer orden), son también soluciones de las ecuaciones de movimiento (ecuaciones diferenciales de segundo orden).

Note que cuando un campo satisface las ecuaciones de Bogomolny, también satisface el teorema del virial, el cual establece que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \phi'^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} U(\phi) dx. \quad (1.26)$$

1.4. Modelo ϕ^4

El modelo ϕ^4 (1+1)-dimensional es la teoría de campo escalar más sencilla que admite soluciones tipo *kink* y *anti-kink*, su nombre se debe a que su potencial es un polinomio de cuarto orden $U(\mathcal{O}(\phi^4))$ y consecuentemente presenta sólo dos soluciones de vacío denotadas por $\pi_0(\mathcal{V}) = \mathbb{Z}_2$. La densidad lagrangiana que describe al modelo tiene la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + U(\mathcal{O}(\phi^4)), \quad (1.27)$$

donde el potencial $U(\mathcal{O}(\phi^4))$ se propone de la forma

$$U(\phi) = \mu + \nu \phi^2 + \lambda \phi^4, \quad (1.28)$$

con μ , ν y λ constantes reales y $\lambda > 0$ para que la energía esté acotada por abajo. Nos interesa escoger el valor de los parámetros de manera tal que la función potencial tenga al menos dos vacíos.

- Sí $\nu \geq 0$ entonces existe un mínimo global único en $\phi = 0$ y la teoría solamente tiene una solución de vacío, por lo que no existen soluciones tipo kink.
- Sí $\nu < 0$ y por conveniencia para nuestro fin tomamos específicamente $\nu = -2m^2\lambda$ donde m es una constante real positiva, es posible encontrar un mínimo del potencial si escribimos convenientemente a μ en términos de λ en la forma $\mu = \lambda m^4$. La expresión del potencial (1.28) se escribe ahora como

$$U(\phi) = \lambda m^4 - 2m^2\lambda\phi^2 + \lambda\phi^4 = \lambda(m^4 - 2m^2\phi^2 + \phi^4) = \lambda(m^2 - \phi^2)^2. \quad (1.29)$$

Este potencial tiene dos mínimos globales: $\phi = -m$ y $\phi = +m$ y por tanto dos vacíos que denotamos como $\mathcal{V}_- = -m$ y $\mathcal{V}_+ = +m$. En la figura 1.1 se muestra una gráfica de este potencial.

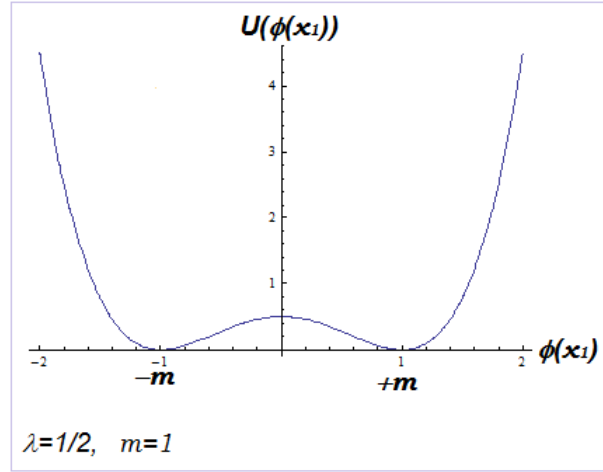


Figura 1.1: Se muestran los dos mínimos del potencial $U(\phi) = \lambda(m^2 - \phi^2)^2$, localizados en $\phi_- = -m$ y $\phi_+ = +m$, para los valores $\lambda = \frac{1}{2}$ y $m = 1$, en el intervalo $-2 < \phi < 2$.

Escribimos nuevamente la densidad lagrangiana para el modelo ϕ^4 con el potencial de cuarto orden (1.29) tal que

$$\mathcal{L}_{\phi^4} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \lambda(m^2 - \phi^2)^2. \quad (1.30)$$

Este modelo posee varias simetrías, de las cuales 2 son relevantes para nuestra discusión. Una es una simetría de paridad en el campo ϕ y la otra es la simetría de Lorentz del espacio tiempo

- Paridad en ϕ

$$t \rightarrow t, \quad x \rightarrow x, \quad \phi \rightarrow -\phi. \quad (1.31)$$

- Transformaciones de Lorentz

$$t \rightarrow \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad x \rightarrow \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad \phi \rightarrow \phi. \quad (1.32)$$

Como consecuencia de la simetría de paridad, podemos obtener una solución anti-kink si hacemos la transformación $\phi \rightarrow -\phi$ en la solución kink (y viceversa si se tiene la solución anti-kink). La ecuación de movimiento para este modelo está dada por

$$\partial_\mu\partial^\mu\phi - 4\lambda\phi(m^2 - \phi^2) = 0, \quad (1.33)$$

que es una ecuación no lineal. El contenido topológico de una configuración de campo dado, está codificada en la carga topológica Q definida como

$$Q = \frac{\phi_+ - \phi_-}{2m}, \quad (1.34)$$

donde ϕ_{\pm} son los valores del campo en $x = \pm\infty$. Esta toma los posibles valores $Q = \{-1, 0, 1\}$. A pesar de que es bastante trivial en este ejemplo, note que Q se puede definir en este caso como una integral sobre todo el espacio de una densidad de carga topológica

$$Q = \frac{1}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi' dx. \quad (1.35)$$

Adicionalmente el valor de la carga topológica indica que tipo de soluciones (kink o anti-kink) existen en la teoría. Para tener una idea más clara analizamos los tres casos posibles del valor de la carga topológica. En base a este valor y recordando que una interpolación entre vacíos define una solución kink o anti-kink decimos que:

- Sí $\phi_+ = \phi_- = m \Rightarrow Q = 0$, significa que hay un sólo vacío y entonces no existen soluciones kink o anti-kink.
- Sí $\phi_+ = m$ y $\phi_- = -m \Rightarrow Q = +1$ implica la existencia de una solución kink (hay una interpolación del vacío \mathcal{V}_- a \mathcal{V}_+ al incrementar x de $-\infty$ a $+\infty$).
- Sí $\phi_+ = -m$ y $\phi_- = m \Rightarrow Q = -1$, entonces hay una solución anti-kink (hay una interpolación del vacío \mathcal{V}_+ a \mathcal{V}_- al incrementar x de $-\infty$ a $+\infty$).

Note que no hay soluciones multi-kink con $Q > 1$, dado que los campos de este tipo no son compatibles con las condiciones de frontera de energía finita.

Nuestro objetivo ahora es cuantificar las cotas de energía de las configuraciones de campo en la teoría, para ello sabemos de la ecuación (1.18) que la energía para una configuración de campo estática está dada por la expresión

$$E[\phi] = \int dx \left(\frac{1}{2} \frac{d\phi}{dx} \frac{d\phi}{dx} + \lambda (m^2 - \phi^2)^2 \right), \quad (1.36)$$

y esta energía está acotada por la relación de Bogomolny, la cual para el modelo ϕ^4 es

$$E \geq \left| \int_{\phi_-}^{\phi_+} \sqrt{2U(\phi)} d\phi \right| = \left| \int_{\phi_-}^{\phi_+} \sqrt{2\lambda} (m^2 - \phi^2) d\phi \right| = \frac{4}{3} m^3 \sqrt{2\lambda} |Q|, \quad (1.37)$$

donde $|Q| = 1$ para el kink ($Q = +1$) y el anti-kink ($Q = -1$). La frontera de Bogomolny es la cota de energía $\frac{4}{3} m^3 \sqrt{2\lambda}$.

1.4.1. Kinks y antikinks

Resolvamos ahora la ecuación de Bogomolny (1.24), la cual como hemos mencionado es una ecuación diferencial de primer orden. Para el signo positivo tenemos

$$\phi' = \frac{d\phi}{dx} = \sqrt{2U(\phi)} = \sqrt{2\lambda}(m^2 - \phi^2), \quad (1.38)$$

e integrando $\int \frac{d\phi}{m^2 - \phi^2} = \int \sqrt{2\lambda} dx$ se tiene que

$$\frac{1}{m} \tanh^{-1} \left(\frac{\phi}{m} \right) = \sqrt{2\lambda}(x - a), \quad (1.39)$$

donde a es una constante de integración. Al despejar el campo ϕ obtenemos la expresión siguiente

$$\phi(x) = m \tanh(\sqrt{2\lambda}m(x - a)), \quad (1.40)$$

que es la solución kink para el modelo ϕ^4 (interpolación de ϕ_- a ϕ_+). Al hacer la transformación $\phi \rightarrow -\phi$ obtenemos la solución anti-kink del modelo ϕ^4 y es análogo a resolver la ecuación de Bogomolny de primer orden

$$\frac{d\phi}{dx} = -\sqrt{2U(\phi)} = -\sqrt{2\lambda}(m^2 - \phi^2), \quad (1.41)$$

que tiene la solución anti-kink

$$\phi(x) = -m \tanh(\sqrt{2\lambda}m(x - a)). \quad (1.42)$$

En la figura 1.2 se muestran las gráficas para el kink y el anti-kink.

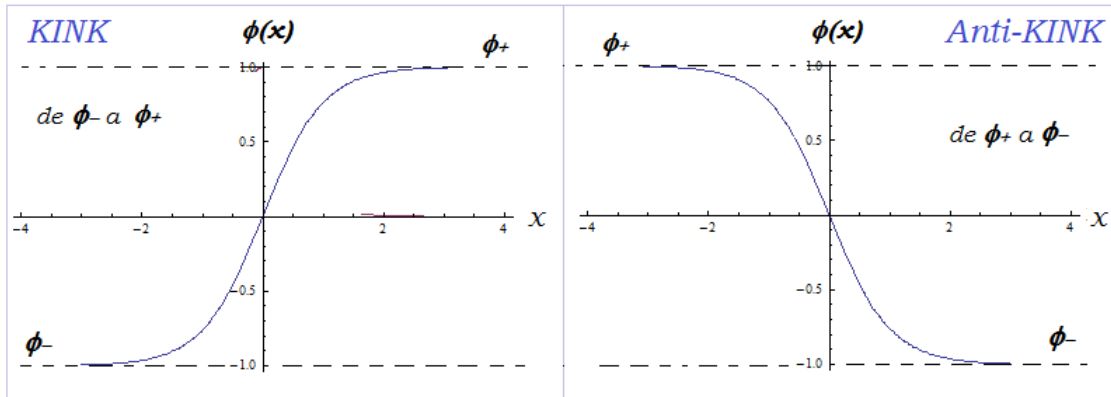


Figura 1.2: Intepolación. Kink (de ϕ_- a ϕ_+) y Anti-Kink (de ϕ_+ a ϕ_-).

La densidad de energía ε para un kink en la teoría ϕ^4 corresponde al integrando de la ecuación (1.36), al sustituir la solución (1.40)

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\phi'^2 + \lambda(m^2 - \phi^2)^2 = 2\lambda m^4 \operatorname{sech}^4(\sqrt{2\lambda}m(x - a)). \quad (1.43)$$

La energía del kink se obtiene al integrar sobre todo el espacio y se interpreta como la masa M_{rep} en reposo: $E_{rep} = M_{rep} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon dx = \frac{4}{3}m^3\sqrt{2\lambda}$, la figura 1.3 muestra la torcedura (de la interpolación) que está centrada en el máximo de la densidad de energía.

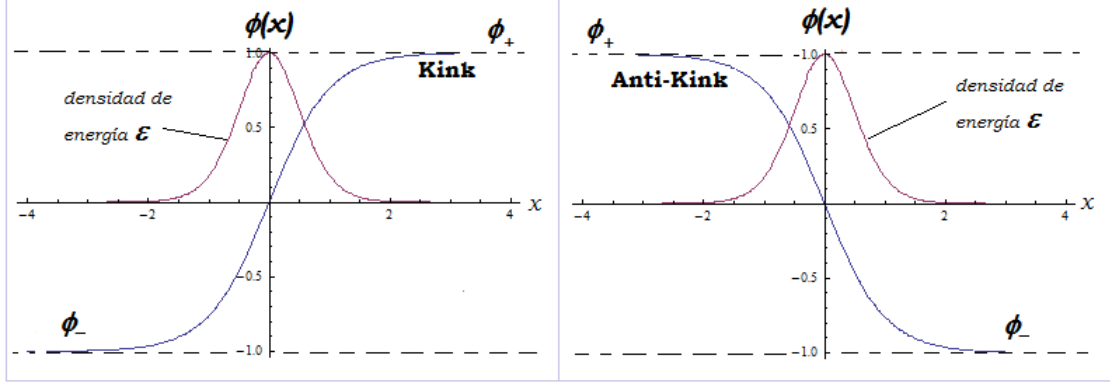


Figura 1.3: Las torceduras (en las interpolaciones) de las soluciones Kink y Anti-Kink coinciden con el máximo de la densidad de energía. En la gráfica hemos tomado los valores: $m = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, y $a = 0$.

Las soluciones kink (1.40) y anti-kink (1.42) son soluciones estáticas y para construir soluciones con dependencia temporal t , aplicamos un boost de Lorentz (1.32) a la solución estática (1.40), explícitamente hacemos la transformación $x - a \rightarrow \gamma(x - vt - a)$, con lo cual la solución para un kink que evoluciona en el tiempo queda expresada por la ecuación

$$\phi(t, x) = m \tanh(\sqrt{2\lambda}m\gamma(x - vt - a)). \quad (1.44)$$

Aquí v es la velocidad del kink y toma los valores en el intervalo $-1 < v < 1$ y $\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ es el factor de Lorentz.

La energía del kink dependiente del tiempo depende del factor γ en la forma $E = M = \frac{4}{3}\gamma m^3\sqrt{2\lambda} = \gamma M_{rep}$, en el límite no-relativista con $|v| \ll 1$ el movimiento del kink se simplifica a

$$\phi(x) = m \tanh(\sqrt{2\lambda}m(x - vt - a)). \quad (1.45)$$

Si derivamos la solución kink (1.44) respecto a la coordenada temporal

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = \dot{\phi} = -vm^2\sqrt{2\lambda} \operatorname{sech}^2(\sqrt{2\lambda}m(x - vt - a)) \quad (1.46)$$

y también respecto a la coordenada espacial x

$$\frac{\partial \phi(x, t)}{\partial x} = \phi' = m^2\sqrt{2\lambda} \operatorname{sech}^2(\sqrt{2\lambda}m(x - vt - a)), \quad (1.47)$$

concluimos que las derivadas están relacionadas en la forma $\dot{\phi} = -v\phi'$ donde la velocidad v funciona como un parámetro de transformación y entonces la energía cinética queda

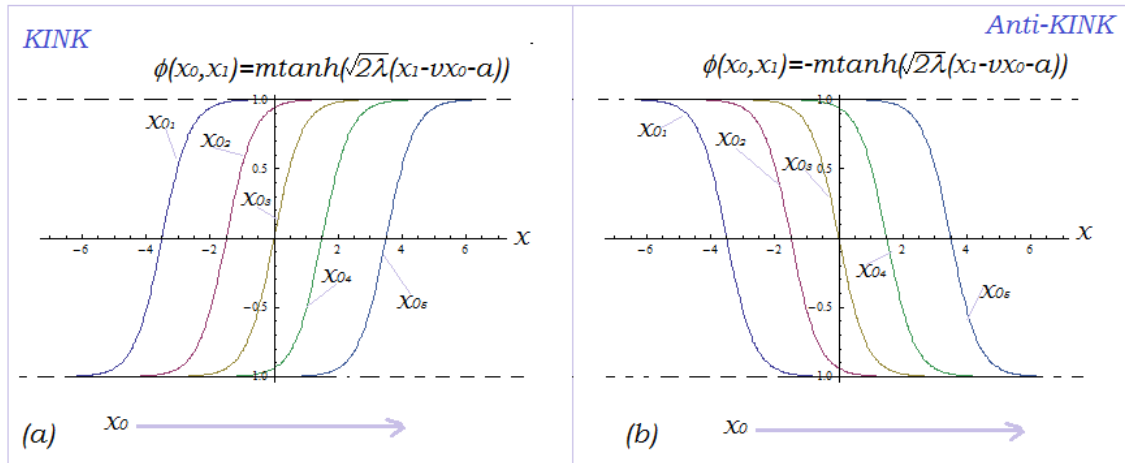


Figura 1.4: Evolución temporal a los tiempos: t_1 , t_2 , t_3 , t_4 y t_5 , de una solución kink (a) y de una solución anti-kink (b). Donde tomamos los valores $m = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, $a = 0$, $v = 0,5$ y $-5 < t < 5$.

expresada como

$$T = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{\phi}^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (v\phi')^2 dx = \frac{1}{2}v^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \phi'^2 dx \quad (1.48)$$

por el teorema del virial la energía cinética es igual a $\frac{1}{2}Mv^2$ la cual se interpreta como la energía cinética para la solución kink con masa M .

1.5. Estabilidad de ondas solitarias

1.5.1. Estabilidad de Liapunov

La noción de estabilidad tiene significados diferentes tanto en matemáticas como en física⁵. En el estudio de ondas solitarias uno usualmente utiliza la noción de estabilidad derivada de la noción de equilibrio estable en mecánica clásica. Un sistema mecánico está en un estado de equilibrio estable si la energía del sistema alcanza su mínimo (al menos localmente). Las oscilaciones pequeñas alrededor del estado de equilibrio estable se pueden descomponer en una superposición de modos de oscilación armónicos. El Hamiltoniano efectivo que describe estas oscilaciones, se obtiene al mantener sólo términos cuadráticos en el desarrollo del Hamiltoniano completo alrededor del punto de equilibrio estable. Por lo tanto, el punto de equilibrio estable está caracterizado por las dos condiciones

$$\delta E = 0 \quad \text{y} \quad \delta^2 E = 0. \quad (1.49)$$

⁵Para una discusión de diferentes definiciones de estabilidad ver por ejemplo [3].

Si estas dos condiciones se satisfacen decimos que las oscilaciones pequeñas alrededor del punto de equilibrio estable son *estables en el sentido de Liapunov*⁶. La estabilidad de Liapunov de una solución de una ecuación diferencial, o un conjunto de ecuaciones diferenciales, se puede definir si el problema de valores iniciales está bien colocado. Una solución $\phi_0(x)$ se llama estable si perturbaciones pequeñas de los datos iniciales a $x = 0$, lleva a cambios pequeños de la solución para todo $x > 0$.

1.5.2. Estabilidad de torceduras

Para las ecuaciones diferenciales que describen kinks, bultos, etc., se debe modificar la noción de estabilidad de Liapunov. En muchos caso de interés se tienen equilibrios que no son estables, sino neutrales respecto a algunas perturbaciones. Estas perturbaciones representan “movimientos libres” y están relacionadas con simetrías (traslaciones, rotaciones, dilataciones, etc.) del sistema. Sólo aquellas perturbaciones que no representan “movimientos libres” satisfacen la condición de estabilidad de Liapunov.

En teorías de campo escalar (1+1)-dimensionales como la que hemos tratado en este capítulo, la noción de estabilidad es la siguiente. Hemos visto que la ecuación de movimiento está dada por la ecuación (1.14). Consideremos una solución de la forma

$$\phi(t, x) = \phi_0(x) + \delta(t, x), \quad (1.50)$$

donde $\phi_0(x)$ es una solución independiente del tiempo y δ es una perturbación pequeña. Insertando esta expresión en la ecuación de movimiento, tenemos a primer orden en teoría de perturbación que

$$\partial_\mu \partial^\mu \delta(t, x) + \frac{d^2 U(\phi_0)}{d\phi_0^2} \delta(t, x) = 0. \quad (1.51)$$

Esta ecuación es invariante ante traslaciones temporales, de manera tal que podemos expresar una perturbación general pequeña como una superposición de modos normales. Es decir, la solución general es de la forma

$$\delta(t, x) = \text{Re} \sum_n a_n \psi_n(x) e^{i\omega_n t}, \quad (1.52)$$

donde los coeficientes a_n son constantes complejas arbitrarias y las ψ_n y las ω_n satisfacen la ecuación

$$-\frac{d^2 \psi_n}{dx^2} + \frac{d^2 U(\phi_0)}{d\phi_0^2} \psi_n = \omega_n^2 \psi_n. \quad (1.53)$$

Note que esta es una ecuación de Schrödinger con potencial $\frac{d^2 U(\phi_0)}{d\phi_0^2}$. Se dice que *una solución es estable si y sólo si, ningún valor propio de la energía en esta ecuación de Schrödinger es negativo*. Esto es así porque si existiera un $\omega_n^2 < 0$, la perturbación debida

⁶Alexander Liapunov, un matemático Ruso, introdujo la noción de estabilidad en la teoría de ecuaciones diferenciales.

al modo correspondiente crecería indefinidamente con el tiempo. Mostremos ahora que en (1+1)-dimensiones los kink son siempre estables.

La invariancia ante traslaciones espaciales nos dice que si $\phi_0(x)$ es solución de la ecuación de movimiento, también lo es $\phi_0(x + a)$. Concluimos entonces que una función propia de la ecuación de Schrödinger es

$$\psi_0(x) = \frac{d\phi_0}{dx}. \quad (1.54)$$

Vemos que el valor propio asociado a esta función propia es cero ($\omega_0 = 0$) y dado que $\phi_0(x)$ es una función monótona de x , $\psi_0(x)$ no tiene nodos. Así utilizando el teorema que nos dice que para una ecuación de Schrödinger unidimensional con un potencial arbitrario, la función propia sin nodos es la de mínima energía, concluimos por el teorema de Sturm-Liouville que las otras funciones propias de la ecuación de Schrödinger tendrán necesariamente valores propios positivos.

1.5.3. Estabilidad del kink en la teoría ϕ^4

La conclusión alcanzada en la subsección anterior es genérica para las teorías de campo escalar descritas por la ecuación de movimiento (1.14) y por lo tanto es aplicable al modelo ϕ^4 . Sin embargo en aras de la claridad en esta sección presentamos explícitamente el análisis de la estabilidad de los kinks para el modelo ϕ^4 .

Hemos visto que la ecuación (1.53) admite el valor propio $\omega_0 = 0$ y que la correspondiente función propia es $\psi_0 = \phi'_0(x)$. Físicamente este modo está asociado con la invariancia ante traslaciones espaciales de la solución kink estática. Esta afirmación queda de manifiesto al hacer una traslación infinitesimal en la solución (1.40)

$$\phi_0(x + \eta) \approx \phi_0 + \eta\phi'_0(x), \quad (1.55)$$

y notar que $\phi'(x)$ satisface la ecuación

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + U''(\phi_0) \right] \phi'(x) = 0. \quad (1.56)$$

en el caso del modelo ϕ^4 es posible calcular el espectro completo de la ecuación de Schrödinger (1.53), para ello debemos calcular $U''(\phi_0)$, obteniéndose

$$U''(\phi_0) = -4\lambda m^2 + 8\lambda\phi^2|_{\phi_0} = 4\lambda m^2 - \frac{8\lambda m^2}{\cosh(\sqrt{2\lambda m}x)}, \quad (1.57)$$

y la ecuación de Schrödinger que nos queda es una con potencial tipo Pöschl-Teller

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + 4\lambda m^2 - \frac{12\lambda m^2}{\cosh^2(\sqrt{2\lambda m}x)} \right] \psi_k(x) = \omega_k^2 \psi_k(x). \quad (1.58)$$

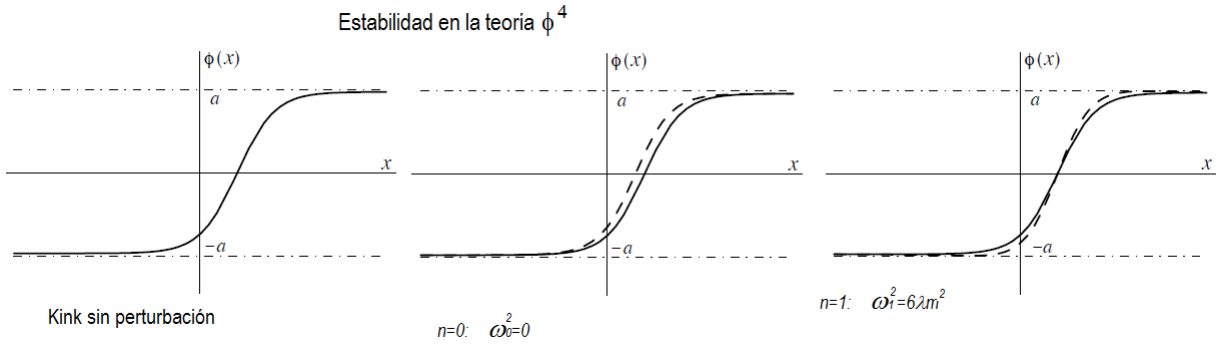


Figura 1.5: Las líneas punteadas representan las perturbaciones alrededor del kink.

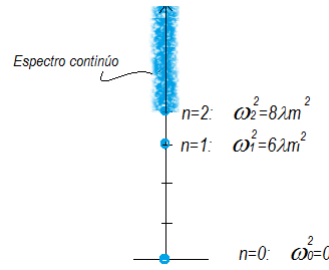


Figura 1.6: El espectro discreto para $n = 0, n = 1, n = 2$ y después se vuelve un continuo.

El espectro de esta ecuación es bien conocido y consiste de 3 modos discretos dados por la relación

$$\omega_n^2 = 8m^2\lambda - 2m^2\lambda(2-n)^2, \quad \text{con: } n = 0, 1, 2. \quad (1.59)$$

y un espectro continuo cuyas frecuencias son de la forma

$$\omega_k^2 = k^2 + 8m^2\lambda. \quad (1.60)$$

El valor del menor de los modos discretos corresponde al modo $\omega_0 = 0$. Para ilustrar los modos normales, en la figura mostramos la perturbación correspondiente a ψ_0 y ψ_1 .

1.6. Interacción kink-antikink

Para concluir esta sección estudiaremos la interacción entre un kink y un antikink, la estrategia consiste en definir una energía de interacción entre el kink y el antikink para de ahí poder calcular el momento P , este momento se calcula en un intervalo $(-\infty, b]$ donde b es un parámetro localizado lejos de la posición de las soluciones kink y anti-kink y una vez que tengamos este momento podemos calcular la fuerza de interacción utilizando la segunda ley de Newton. La energía cinética está relacionada con el momento a través de la ecuación $T = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Pv$, con lo cual $P = \frac{2}{v}T$, luego usamos la expresión (1.48) de

la energía cinética en términos de las derivadas temporal y espacial de ϕ como

$$P = \frac{2}{v} \left(\frac{1}{2} v^2 \int_{-\infty}^b \dot{\phi}^2 dx \right) = v \int_{-\infty}^b \phi' \dot{\phi} dx = v \int_{-\infty}^b \phi' \left(-\frac{1}{v} \dot{\phi} \right) dx, \quad (1.61)$$

es decir

$$P = - \int_{-\infty}^b \dot{\phi} \phi' dx. \quad (1.62)$$

de la segunda ley de Newton $F = \frac{dP}{dt} = \dot{P}$ obtenemos

$$F = \dot{P} = - \int_{-\infty}^b (\ddot{\phi} \phi' + \dot{\phi} \phi'') dx = \left[-\frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + \phi'^2) + U(\phi) \right]_{-\infty}^b, \quad (1.63)$$

donde hemos utilizado la ecuación de movimiento (1.14) para sustituir $\ddot{\phi} = \phi'' + \frac{dU}{d\phi}$ y hemos integrado la derivada total que se obtiene. Físicamente se interpreta que la fuerza sobre el intervalo se puede identificar con la diferencia de presión en los puntos extremos. Consideremos ahora un par kink-antikink que se encuentran muy lejos uno del otro, explícitamente consideremos que el kink está localizado en la posición a y el antikink en la posición $-a$, con $a \gg 1$. Una configuración de campo con estas características se puede obtener de la superposición

$$\phi(x) = \phi_1(x) + \phi_2(x) + 1, \quad (1.64)$$

donde ϕ_1 es el antikink $\phi_1(x) = -\tanh(x+a)$ y ϕ_2 el kink $\phi_2(x) = \tanh(x-a)$. Consideremos que el punto final b del intervalo, esté situado entre las posiciones del kink y el antikink, pero lejos de éstas, esto es, $-a \ll b \ll a$. Es claro que el valor de $\phi_2 + 1$ es cercano a cero en el intervalo $(-a, a)$ de tal manera que podemos linealizar la expresión del potencial en términos de esta configuración

$$U(\phi_1 + \phi_2 + 1) = U(\phi_1) + \frac{dU(\phi_1)}{d\phi} (\phi_2 + 1) + \dots \quad (1.65)$$

así la expresión de la fuerza de interacción al orden dominante (y en la configuración estática) es

$$F = \left[-\frac{1}{2} \phi_1'^2 + U(\phi_1) - \phi_1' \phi_2' + (1 + \phi_2) \frac{dU(\phi_1)}{d\phi} \right]_{-\infty}^b = [-\phi_1' \phi_2' + (1 + \phi_2) \phi_1'']_{-\infty}^b \quad (1.66)$$

donde se usó el hecho de que el anti-kink resuelve la ecuación de Bogomolny (1.24) para cancelar los primeros dos términos y la ecuación de movimiento para reescribir el último. Ahora bien, dado que la configuración de campo es tal que sus derivadas espaciales decaen exponencialmente, el resultado de la integral en el límite inferior no contribuye y la fuerza

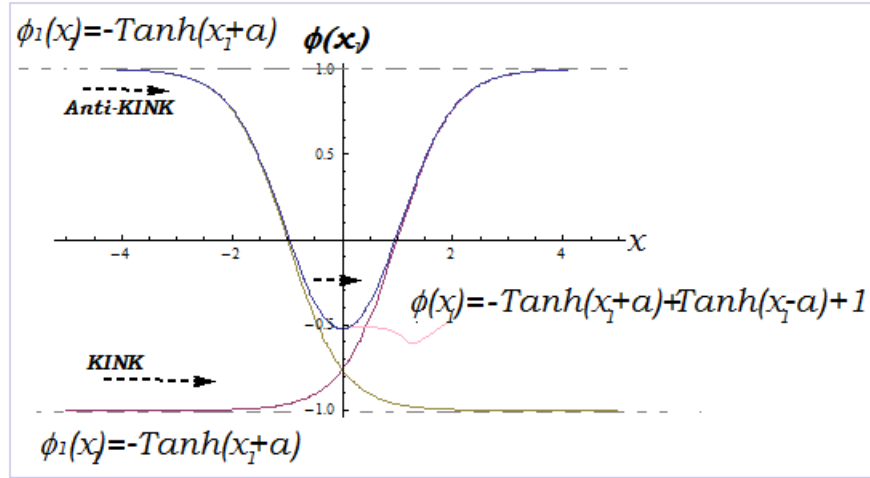


Figura 1.7: Configuración $\phi(x_1) = \phi_1(x_1) + \phi_2(x_1) + 1$, comparación entre una solución kink y antikink.

está dada únicamente por el valor de la integral en el límite superior. Como el parámetro b está lejos del kink y también del anti-kink, podemos utilizar las expresiones asintóticas de sus perfiles

$$\phi_1(x) \sim -1 + 2e^{-2(x+a)}, \quad \phi_2(x) \sim -1 + 2e^{2(x-a)}. \quad (1.67)$$

Sustituyendo estas expresiones en (1.66) obtenemos la fuerza

$$F = 32e^{-2R}, \quad (1.68)$$

donde $R \equiv 2a$, es la distancia entre el kink y el anti-kink. Note que la fuerza no depende del parámetro b , lo cual es correcto ya que es un parámetro que introducimos sólo para hacer el cálculo y no tiene significado físico. Interpretamos a F como la fuerza que siente el anti-kink debido al kink. Podemos llegar a la misma conclusión si calculamos la energía de interacción entre el kink y el antikink, la cual se obtiene al integrar la ecuación $\frac{dE_{int}}{dR} = F$

$$E_{int} = \int F dR = \int 32e^{-2R} dR = -16e^{-2R}. \quad (1.69)$$

Note que la E_{int} decrece al disminuir la separación a , lo que indica que existe una fuerza de atracción entre el kink y el anti-kink.

Simulaciones numéricas de la interacción kink y anti-kink muestran esta fuerza de atracción, y aun más, las simulaciones también muestran que después de la colisión el kink y el anti-kink no recobran su forma, ya que se convierten en radiación. Así podemos concluir que los kinks y anti-kinks en el modelo ϕ^4 son ondas solitarias, pero no son solitones.

2

Solitones en (1+1)-dimensiones

2.1. Modelo de Seno-Gordon

El modelo con soluciones tipo solitón más sencillo es el modelo de *seno-Gordon* (1 + 1)-dimensional ¹ el cual está descrito por el potencial $U = (1 - \cos \phi)$, y por tanto tiene una degeneración infinita de configuraciones de campo con energía mínima (vacíos) localizados en las posiciones: $2\pi n$ con $n \in \mathcal{Z}$. La densidad lagrangiana del modelo es

$$\mathcal{L}_{sG} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - (1 - \cos \phi), \quad (2.1)$$

y de acuerdo con (1.14), la ecuación de movimiento es

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \sin \phi = 0, \quad (2.2)$$

la cual resulta ser una ecuación diferencial hiperbólica no lineal con soluciones tipo solitón. El modelo es invariante ante la transformación de paridad en el campo (1.31), las transformaciones de Lorentz (1.32) y adicionalmente posee una simetría de traslación en ϕ , es decir

- Traslación del campo escalar

$$t \rightarrow t, \quad x \rightarrow x, \quad \phi \rightarrow \phi + 2\pi n, \quad \text{con } n \in \mathcal{Z}. \quad (2.3)$$

¹El modelo de *sine-Gordon* (1 + 1)-dimensional es un sistema integrable con ecuaciones autoduales que también se relaciona a la teoría de Yang Mills (2 + 2)-dimensional.

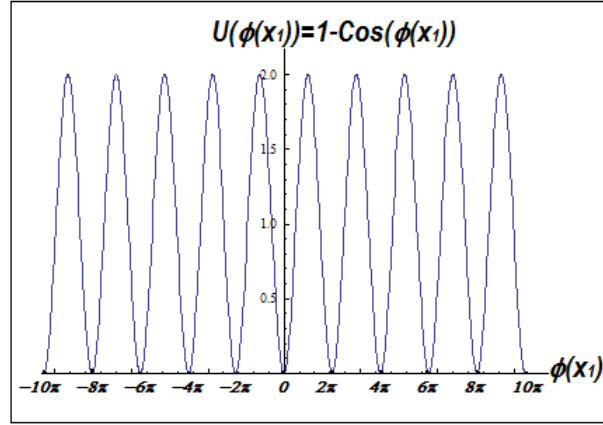


Figura 2.1: El potencial $U(\phi)$ en el modelo *Seno-Gordon* tiene una infinidad de soluciones de vacío (los mínimos del potencial) en $\phi = 2n\pi$ con $n \in \mathcal{Z}$.

En lo que sigue calculamos la carga topológica y las cotas de energía del modelo. Recordemos que la carga topológica Q se obtiene escribiéndola como la integral de una densidad de carga, además el sector topológico está dado en términos de Q que a su vez indica el número de ondas solitarias, así

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi' dx = \frac{\phi_+ - \phi_-}{2\pi} = \frac{2\pi N}{2\pi} = N, \quad \text{con } N \in \mathcal{Z}. \quad (2.4)$$

Por otro lado, de la ecuación (1.22) obtenemos las cotas de Bogomolny

$$E \geq \int_{\phi_-}^{\phi_+} 2 \left| \sin \frac{\phi}{2} \right| d\phi. \quad (2.5)$$

donde se observa que la carga y la cota de energía son definidas por integrales periódicas (el integrando es $|Q| = N$ veces la integral en el intervalo $[\phi_-, \phi_- + 2\pi]$, esto es el número de solitones existentes en el modelo). Ahora escribimos la integral usando la propiedad de traslación del campo escalar (2.3) donde cambiamos los límites de integración por el intervalo $[0, 2\pi]$

$$E \geq 2|Q| \int_0^{2\pi} \left| \sin \frac{\phi}{2} \right| d\phi = 4|Q| \left[-\cos \frac{\phi}{2} \right]_0^{2\pi} = 8|Q|. \quad (2.6)$$

La igualdad se tiene cuando se satura la energía² (la energía depende del número de ondas solitarias).

²La igualdad en la frontera de Bogomolny se da cuando el campo es estático ($\dot{\phi} = 0$) y por tanto se satisface una de las ecuaciones de Bogomolny de primer orden.

2.1.1. Soluciones Kink

Para calcular la expresión de un kink o un antikink se debe resolver la ecuación de Bogomolny de primer orden (1.24), la cual en este caso es

$$\phi' = \pm 2 \sin \frac{\phi}{2}, \quad (2.7)$$

y la cual se integra directamente. Tenemos así que la solución para un kink es

$$\phi(x) = 4 \arctan e^{x-a}, \quad (2.8)$$

donde a es una constante de integración relacionado con la posición del kink. Para visualizar esta conclusión consideremos la solución que interpola los vacíos: $\phi_- = 0$ y $\phi_+ = 2\pi$. Note que si evaluamos el valor del kink en el punto $x = a$, obtenemos

$$\phi(a) = 4 \arctan(e^{a-a}) = 4 \arctan(1) = \pi. \quad (2.9)$$

Como π es el valor medio entre los valores de vacío 0 y 2π , interpretamos a $x = a$ como la posición del kink. Podemos confirmar esta interpretación, examinando la densidad de energía del kink

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + (1 - \cos \phi), \quad (2.10)$$

la cual al sustituir la solución (2.8), queda expresada como

$$\varepsilon = 4 \operatorname{sech}^2(x - a). \quad (2.11)$$

Note que el máximo de la densidad ocurre precisamente en $x = a$. La energía total del kink se obtiene integrando la ecuación (2.11) en todo el espacio

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon(x_1) dx_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} 4 \operatorname{sech}^2(x_1 - a) dx_1 = 8. \quad (2.12)$$

Dado que la solución general de la ecuación de Bogomolny es un kink de carga topológica $Q = 1$, no existen soluciones multi-kink a la ecuación de Bogomolny. De este hecho podemos concluir que la fuerza de interacción entre dos kinks es repulsiva, esto sucede porque cualquier configuración con $N = 2$ debe obedecer la cota (estricta) de Bogomolny $E > 16$, pero en el límite en el que los dos kinks están separados una distancia infinita el uno del otro, la energía de la configuración se aproxima al valor $E = 16$, que corresponde a la suma de las energías de los dos kinks originales. Así, la energía potencial de los dos kinks decrece cuando ellos se separan y por lo tanto existe una fuerza repulsiva entre ellos.

Realizando un cálculo similar al que hicimos en el capítulo anterior para el modelo ϕ^4 , la energía de interacción asintótica de los dos kinks de seno-Gordon es

$$E = 32e^{-R}, \quad (2.13)$$

donde R es la separación entre los kinks. Este resultado fue obtenido originalmente por Perring y Skyrme [5].

Figura 2.2: El espectro discreto para $n = 0$, $n = 1$ $n = 2$ y después se vuelve un continuo.

2.1.2. Estabilidad del kink

Es directo estudiar ahora la estabilidad de las soluciones kink en el modelo de *seno-Gordon*. El potencial es:

$$U(\phi) = 1 - \cos(\phi) \quad (2.14)$$

donde $\phi'(x)$ satisface la ecuación

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + U''(\phi_0) \right] \phi'(x) = 0. \quad (2.15)$$

para calcular el espectro completo de la ecuación de Schödinger (1.53) se calcula $U''(\phi_0)$

$$U''(\phi_0) = 1 - \frac{1}{4 \cosh^2(\phi)} \quad (2.16)$$

y la ecuación de Schödinger que nos queda es una con potencial tipo Pöschl-Teller

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + 1 - \frac{1}{4 \cosh^2(\phi)} \right] \psi_k(x) = \omega_k^2 \psi_k(x). \quad (2.17)$$

El espectro de esta ecuación es bien conocido y consiste de 3 modos discretos y un espectro continuo cuyas frecuencias son de la forma $\omega_n^2 = 1 - (1/4)(2 - n)^2$. El valor del menor de los modos discretos corresponde al modo $\omega_0 = 0$ con $n = 0$, para $n = 1$ $\omega_1^2 = (3/4)$ y para para $n = 2$ $\omega_2^2 = 1$. El espectro continuo tiene frecuencias de la forma

$$\omega_k^2 = k^2 + 1. \quad (2.18)$$

El modelo de seno-Gordon presenta soluciones tipo solitón estables.

2.2. Soluciones multi-solitónicas

A pesar de que no existen soluciones multi-solitónicas estáticas en el modelo de sine-Gordon, existen soluciones dependientes del tiempo que describen la dispersión de dos o más kinks. Esta propiedad ocurre porque el modelo de sine-Gordon es un modelo integrable. En esta sección ocuparemos las transformaciones de Bäcklund para construir soluciones multi-solitón. *Las transformaciones de Bäcklund* son un mapeo entre soluciones de la ecuación de sine-Gordon que permite generar nuevas soluciones a partir de las ya conocidas.

Las transformaciones de Bäcklund se realizan en las llamadas coordenadas del cono de luz, definidas como

$$x_{\pm} \equiv \frac{1}{2}(x_1 \pm x_0), \quad \text{con lo cual,} \quad \partial_{\pm} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{\pm}}. \quad (2.19)$$

En estas coordenadas la ecuación de movimiento del modelo de sine-Gordon se escribe como

$$\partial_+ \partial_- \phi = \sin \phi. \quad (2.20)$$

y las transformaciones de Bäcklund son las siguientes

$$\partial_+ \psi = \partial_+ \phi - 2\beta \sin \left(\frac{\phi + \psi}{2} \right), \quad (2.21)$$

$$\partial_- \psi = -\partial_- \phi + \frac{2}{\beta} \sin \left(\frac{\phi - \psi}{2} \right), \quad (2.22)$$

donde $\beta \neq 0$ es un parámetro real. Estas transformaciones tienen una propiedad muy interesante. Si calculamos $\partial_- \partial_+ \psi$ de la transformación (2.21), $\partial_+ \partial_- \psi$ de la transformación (2.22) y exigimos que se satisfaga la regla de Leibnitz $\partial_- \partial_+ \psi = \partial_+ \partial_- \psi$ obtenemos

$$\partial_- \partial_+ \phi - \beta \cos \left(\frac{\phi + \psi}{2} \right) \partial_- (\phi + \psi) = -\partial_+ \partial_- \phi + \frac{1}{\beta} \cos \left(\frac{\phi - \psi}{2} \right) \partial_+ (\phi - \psi). \quad (2.23)$$

Si ahora usamos las transformaciones (2.21) y (2.22) en esta ecuación para eliminar los términos en primera derivada, obtenemos la ecuación de sine-Gordon (2.20) para el campo ϕ . Si utilizamos el mismo procedimiento, pero ahora exigimos que $\partial_- \partial_+ \phi = \partial_+ \partial_- \phi$, obtenemos la ecuación de sine-Gordon pero esta vez para el campo ψ . La conclusión de este hecho es que las transformaciones de Bäcklund constituyen un mapeo entre soluciones de la ecuación de sine-Gordon y este mapeo se puede utilizar para construir soluciones nuevas a partir de soluciones conocidas. Como un ejemplo de la utilidad de las transformaciones de Bäcklund construyamos una solución de la ecuación de sine-Gordon a partir de la solución de vacío $\phi = 0$. En este caso las transformaciones (2.21) y (2.22) se simplifican a la forma

$$\partial_+ \psi = -2\beta \sin \left(\frac{\psi}{2} \right) \quad \text{y} \quad \partial_- \psi = -\frac{2}{\beta} \sin \left(\frac{\psi}{2} \right). \quad (2.24)$$

Integrando ambas ecuaciones obtenemos la solución $\psi(x_+, x_-)$

$$\psi(x_+, x_-) = 4 \arctan \left(e^{-\beta x_+ - \frac{x_-}{\beta} + \alpha} \right), \quad (2.25)$$

donde α es una constante de integración y $\beta < 0$. Reescribiendo esta solución en coordenadas (t, x) obtenemos

$$\psi(t, x) = 4 \arctan \left(e^{\gamma(x-vt-a)} \right), \quad (2.26)$$

donde los parámetros a , v y λ están dados en términos del parámetro β en la forma

$$v = \frac{1 - \beta^2}{1 + \beta^2}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = -\frac{1 + \beta^2}{2\beta}, \quad a = \frac{2\beta\alpha}{1 + \beta^2}. \quad (2.27)$$

Esta ecuación la podemos reconocer como la versión dependiente del tiempo de la solución estática (2.8) y por tanto corresponde a la evolución temporal de un kink. Note que para

obtener esta solución kink hemos tenido que integrar una vez, dos ecuaciones diferentes. Esta es la única solución para la cual necesitamos integrar, ya que como hemos mencionado, el poder de las transformaciones de Bäcklund radica en poder construir soluciones multi-soliton a través de un método puramente algebraico.

La construcción de las soluciones multi-solitónicas está basada en una idea muy sencilla. Consideremos dos soluciones ψ_1 y ψ_2 de la ecuación de sine-Gordon (2.20) que están relacionadas a una solución conocida ψ_0 (conocida como solución semilla) de la ecuación de sine-Gordon, a través de las transformaciones de Bäcklund (2.21) y (2.22), con parámetro β_1 y β_2 respectivamente, esto es:

$$\partial_+(\psi_i - \psi_0) = -2\beta_i \sin\left(\frac{\psi_0 + \psi_i}{2}\right) \quad \text{y} \quad \partial_-(\psi_i + \psi_0) = \frac{2}{\beta_i} \sin\left(\frac{\psi_0 - \psi_i}{2}\right), \quad (2.28)$$

con $i = 1, 2$. Es claro que para obtener ψ_1 o ψ_2 tendríamos que integrar las transformaciones de Bäcklund³. Sin embargo, para evitarnos realizar la integración y aún así obtener una solución, hagamos la siguiente construcción. Supongamos que conocemos ya a ψ_1 y ψ_2 . Construyamos la solución ψ_{12} de la ecuación de sine-Gordon a través de la transformación de Bäcklund con parámetro β_2 que toma como solución semilla a ψ_1 . De manera análoga construyamos la solución ψ_{21} de la ecuación de sine-Gordon a través de la transformación de Bäcklund con parámetro β_1 que toma como solución semilla a ψ_2 . Explícitamente tenemos las transformaciones de Bäcklund para ψ_{12}

$$\partial_+(\psi_{12} - \psi_1) = -2\beta_2 \sin\left(\frac{\psi_1 + \psi_{12}}{2}\right) \quad \text{y} \quad \partial_-(\psi_{12} + \psi_1) = \frac{2}{\beta_2} \sin\left(\frac{\psi_1 - \psi_{12}}{2}\right), \quad (2.29)$$

mientras que para ψ_{21} tenemos

$$\partial_+(\psi_{21} - \psi_2) = -2\beta_1 \sin\left(\frac{\psi_2 + \psi_{21}}{2}\right) \quad \text{y} \quad \partial_-(\psi_{21} + \psi_2) = \frac{2}{\beta_1} \sin\left(\frac{\psi_2 - \psi_{21}}{2}\right). \quad (2.30)$$

En estas ecuaciones podemos utilizar las transformaciones de Bäcklund (2.28) para sustituir las derivadas de ψ_1 y ψ_2 en términos de las derivadas de ψ_0 . Realizando esta sustitución y restando la primer ecuación de (2.29) con la primer ecuación de (2.30) y la segunda ecuación de (2.29) con la segunda ecuación de (2.30) obtenemos el par de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_+(\psi_{12} - \psi_{21}) &= -\beta_1 \sin\left(\frac{\psi_0 + \psi_1}{2}\right) + \beta_1 \sin\left(\frac{\psi_2 + \psi_{21}}{2}\right) + \beta_2 \sin\left(\frac{\psi_0 + \psi_2}{2}\right) + \beta_2 \sin\left(\frac{\psi_1 + \psi_{12}}{2}\right) \\ \frac{1}{2}\partial_-(\psi_{12} - \psi_{21}) &= -\frac{1}{\beta_1} \sin\left(\frac{\psi_0 - \psi_1}{2}\right) - \frac{1}{\beta_1} \sin\left(\frac{\psi_2 - \psi_{21}}{2}\right) + \frac{1}{\beta_2} \sin\left(\frac{\psi_0 - \psi_2}{2}\right) + \frac{1}{\beta_2} \sin\left(\frac{\psi_1 - \psi_{12}}{2}\right) \end{aligned}$$

Nuevamente estas ecuaciones son ecuaciones diferenciales de primer orden en las coordenadas x_{\pm} . Sin embargo si a este punto introducimos la condición de consistencia: $\psi_{12} = \psi_{21}$, el lado izquierdo de estas ecuaciones se anula y por tanto pasan de ser

³En general ψ_1 es diferente de ψ_2 , ya que aunque estas soluciones se obtienen a partir de la misma solución ψ_0 , las transformaciones de Bäcklund correspondientes involucran diferentes parámetros β , los cuales contienen la información de la velocidad de movimiento de la solución [12].

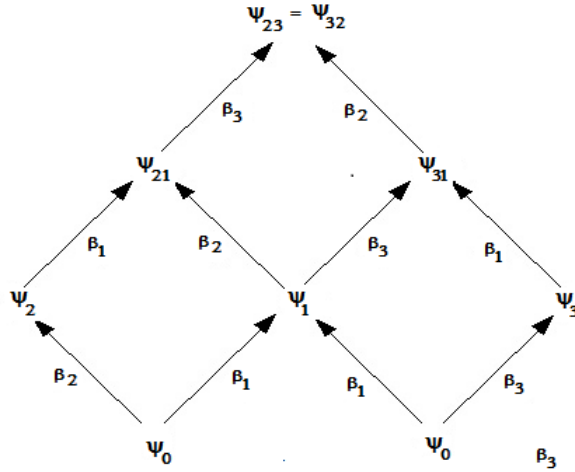


Figura 2.3: Diagrama del teorema de la adición para las transformaciones de Bäcklund.

ecuaciones diferenciales a ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned}
 0 &= -\beta_1 \sin\left(\frac{\psi_0 + \psi_1}{2}\right) + \beta_1 \sin\left(\frac{\psi_2 + \psi_{12}}{2}\right) + \beta_2 \sin\left(\frac{\psi_0 + \psi_2}{2}\right) + \beta_2 \sin\left(\frac{\psi_1 + \psi_{12}}{2}\right) \\
 0 &= -\frac{1}{\beta_1} \sin\left(\frac{\psi_0 - \psi_1}{2}\right) - \frac{1}{\beta_1} \sin\left(\frac{\psi_2 - \psi_{12}}{2}\right) + \frac{1}{\beta_2} \sin\left(\frac{\psi_0 - \psi_2}{2}\right) + \frac{1}{\beta_2} \sin\left(\frac{\psi_1 - \psi_{12}}{2}\right)
 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se pueden simplificar utilizando la identidad trigonométrica

$$\sin A + \sin B = 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \quad (2.31)$$

obteniéndose

$$\beta_1 \sin\left(\frac{\psi_0 - \psi_2 + \psi_1 - \psi_{12}}{4}\right) = \beta_2 \sin\left(\frac{\psi_0 + \psi_2 - \psi_1 - \psi_{12}}{4}\right). \quad (2.32)$$

Ahora bien, la idea es poder obtener la solución ψ_{12} , una vez conocida la solución ψ_0 , para ello debemos agrupar como argumento a la diferencia $\psi_0 - \psi_{12}$. Utilizando la identidad

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A, \quad (2.33)$$

con $A = \psi_0 - \psi_{12}$ y $B = \psi_1 - \psi_2$, obtenemos

$$\tan\left(\frac{\psi_0 - \psi_{12}}{4}\right) = \left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2 - \beta_1}\right) \tan\left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{4}\right), \quad (2.34)$$

o equivalentemente

$$\psi_{12} = 4 \arctan\left[\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2 - \beta_1}\right) \tan\left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{4}\right)\right] - \psi_0. \quad (2.35)$$

Esta ecuación nos da una nueva solución si conocemos 3 soluciones ψ_0 , ψ_1 y ψ_2 , donde ψ_1 y ψ_2 se pueden obtener si conocemos sólo ψ_0 . Como un ejemplo obtengamos la solución ψ_{12} a partir de la solución trivial $\psi_0 = 0$, en este caso las soluciones ψ_1 y ψ_2 son la forma (2.25)

$$\psi_i = 4 \arctan \left(e^{-\beta_i x + \frac{x}{\beta_i} + \alpha_i} \right) \Rightarrow \tan \left(\frac{\psi_i}{4} \right) = e^{\theta_i}. \quad (2.36)$$

Utilizando esta expresión para la función tangente de las soluciones ψ_1 y ψ_2 , junto con la identidad

$$\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}, \quad (2.37)$$

obtenemos

$$\psi_{12} = 4 \arctan \left[\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \right) \left(\frac{e^{\theta_1} - e^{\theta_2}}{1 + e^{\theta_1 + \theta_2}} \right) \right] = 4 \arctan \left[\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \right) \frac{\sinh \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right)}{\cosh \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)} \right]. \quad (2.38)$$

Como veremos la elección de los parámetros β_1 y β_2 nos permite interpretar a ψ_{12} como la interacción entre dos solitones del modelo de sine-Gordon, es posible tener interacción *kink-kink* y *kink-antikink*.

2.2.1. Interacción kink-kink

En la interacción *kink-kink* escogemos los parámetros $\beta_1 = -\frac{1}{\beta_2} \equiv \beta$, $\beta_2 > 0$ y $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ y los sustituimos en la ecuación (2.38), en las coordenadas (t, x) la solución es

$$\psi(t, x) = 4 \arctan \left[\frac{v \sinh(\gamma x)}{\cosh(\gamma vt)} \right], \quad (2.39)$$

donde los parámetros v y γ están relacionados al parámetro β en la misma forma (2.27) que para la solución kink. Esta solución representa una interpolación entre los vacíos -2π y 2π cuando la coordenada espacial x se incrementa de $-\infty$ a $+\infty$, concluimos que la solución tiene carga topológica $Q = 2$ y describe la interacción entre dos kinks. Como hemos mencionado no existen soluciones estáticas de 2-kink y este hecho es consistente con la propiedad de que en el límite $v \rightarrow 0$, la solución (2.39) se degenera. Para poder interpretar físicamente la solución es conveniente describir la solución en la forma

$$\tan \frac{\psi}{4} = e^{\gamma(x-a)} - e^{-\gamma(x+a)}, \quad (2.40)$$

donde $a > 0$ es una función que depende de t , el valor $x = a$ en la ecuación (2.40) tiene una interpretación física en donde un solitón se desplaza con velocidad v y despejando $a(x_0)$ se tiene que

$$a(t) = \frac{1}{\gamma} \log \left(\frac{2}{v} \cosh(\gamma vt) \right), \quad (2.41)$$

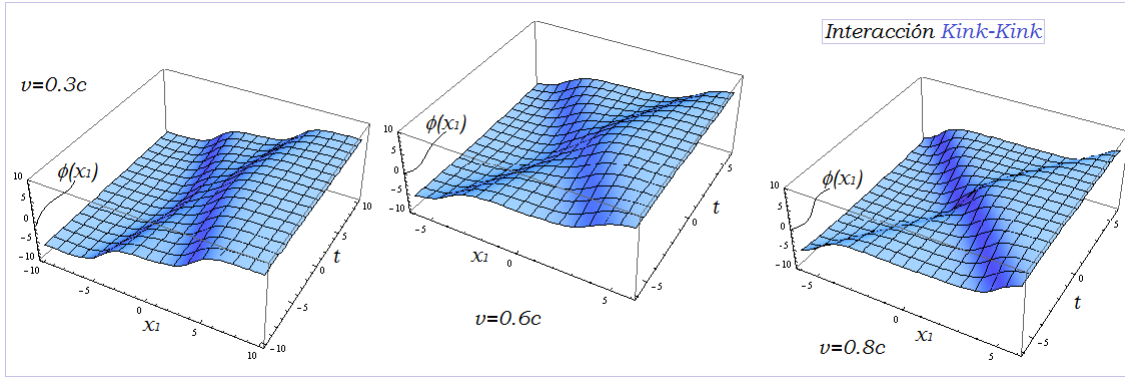


Figura 2.4: Evolución de la *interacción kink-kink* en el modelo sine-Gordon.

para $|vt| \gg 1$, se tiene la aproximación $a \sim |vt| - \frac{(\log v)}{\gamma}$, lo que implica que hay un solitón (kink) localizado en $x = a \sim |vt| + \delta$, en $x = -a$ la solución describe un kink en la posición $x = -a \sim -(|vt| + \delta)$ desplazándose con velocidad v , así la solución completa describe dos kinks que se desplazan con velocidad v que se aproximan al origen y por tanto sienten una *fuerza de repulsión kink-kink*, además a es la mitad de la separación entre los dos kinks individuales que es válido sólo para a grande. Esta es una solución de *dispersión entre dos kinks* donde el acercamiento y alejamiento son igualmente válidos en esta interpretación.

2.2.2. Interacción kink-antikink

Al igual que en la interacción kink-kink vamos a tomar la solución de interacción (2.38) para describir la interacción *kink-antikink*

$$\psi_j = 4 \arctan \left[\left(\frac{\beta_1 + \beta_2}{\beta_2 - \beta_1} \right) \frac{\sinh \left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \right)}{\cosh \left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \right)} \right], \quad (2.42)$$

para bajas velocidades. Físicamente durante la interacción kink-antikink estos pueden aniquilarse emitiendo radiación, pero antes y después del choque se interpreta como un choque elástico y es válido para una dispersión normal o dispersión inversa, los parámetros $\beta_1 = \frac{1}{\beta_2}$, $\beta_2 < 0$ y $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ son convenientes para la interacción kink-antikink, la solución de dispersión (interacción kink-antikink) que se obtiene está expresada por la ecuación

$$\psi_{12} = 4 \arctan \left[\frac{\sinh \frac{vt}{\sqrt{1-v^2}}}{v \cosh \left(\frac{x}{\sqrt{1-v^2}} \right)} \right] \quad (2.43)$$

donde la velocidad es $v = \frac{1-\beta_2^2}{1+\beta_2^2}$. Las gráficas muestran la interacción kink-antikink, se interpreta como una dispersión del kink y el anti-kink.

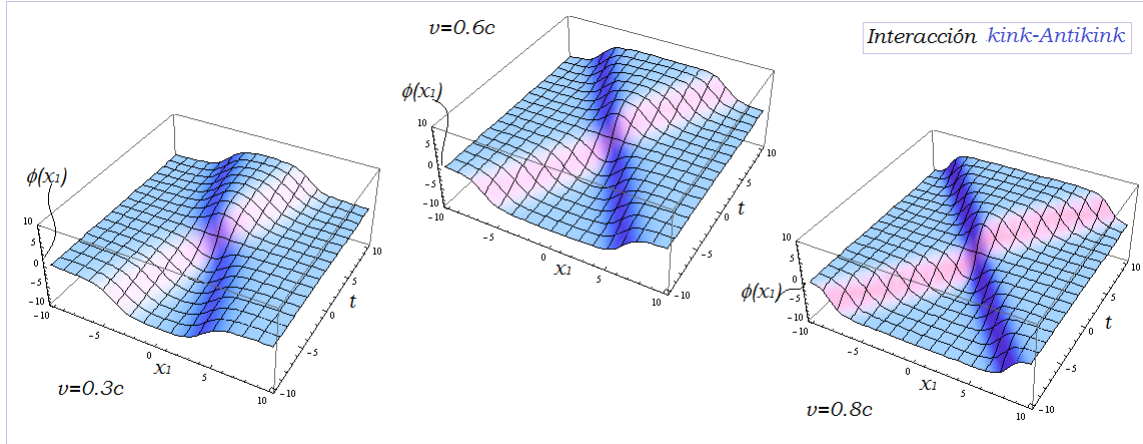


Figura 2.5: Interacción kink-Antikink en el modelo sine-Gordon.

2.3. Modelo de seno-Gordon sobre S^1

La densidad lagrangiana del modelo de sine-Gordon (2.1) se puede describir como una teoría de dos campos reales sujetos a una restricción para que exista sólo un campo independiente, en un espacio-tiempo (1+1)-dimensional donde la coordenada espacial tiene la topología de S^1 . Este modelo sigue admitiendo soluciones tipo solitón y su relevancia radica en el parecido que tiene con los modelos sigma que estudiaremos en el capítulo siguiente. La reformulación consiste en introducir un vector compuesto por dos campos escalares: $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2) = (\sin \phi, \cos \phi)$ sujeto a la restricción: $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = \phi_1^2 + \phi_2^2 = 1$. Note que el modelo continua teniendo la simetría $\phi \rightarrow -\phi$. La densidad lagrangiana queda ahora expresada como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - (1 - \phi_2) + \nu (1 - \vec{\phi} \cdot \vec{\phi}), \quad (2.44)$$

donde ν es un multiplicador de Lagrange que introduce la constricción del campo $\vec{\phi}$. Escrito en esta forma el potencial: $U(\phi_1, \phi_2) = 1 - \phi_2$, sólo tiene un valor de vacío dado por la configuración: $\vec{\phi}_0 = (0, 1)$. Este único vacío corresponde en la formulación previa al número infinito de vacíos dados por un valor del campo: $\phi = 2\pi n$ con $n \in \mathbb{Z}$.

Ahora para que una solución pueda tener energía finita, debe suceder que el campo $\vec{\phi}$ tome el valor del único vacío en el infinito espacial. Es decir, $\vec{\phi}(x \rightarrow -\infty) \rightarrow \vec{\phi}_0$ y $\vec{\phi}(x \rightarrow +\infty) \rightarrow \vec{\phi}_0$. Esto sólo puede suceder si identificamos los límites espaciales: $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$, o matemáticamente, si compactificamos la coordenada espacial: $x \in \mathbb{R}$, al círculo: $x \in S^1$. A cualquier tiempo fijo t , se tiene el mapeo $\vec{\phi}: S^1 \rightarrow S^1$, que tiene como dominio la coordenada espacial x compactificada y como imagen el círculo unitario definido por la condición $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$. Las soluciones solitónicas son mapeos que en el espacio imagen, necesariamente comienzan y terminan en $\vec{\phi}_0$.

Este mapeo tiene número winding (de enrollamiento) asociado, dado por el grupo de homotopía: $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. En términos de los campos el número winding N está dado

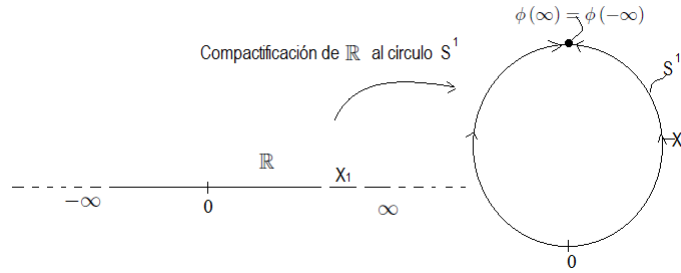


Figura 2.6: Compactificación del espacio \mathbb{R} al círculo S^1 .

por la ecuación

$$N = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_{ij} \phi'_i \phi_j dx, \tag{2.45}$$

donde ε_{ij} es el tensor antisimétrico en dos dimensiones. Esta ecuación no es más que la carga topológica Q (eq. (2.4)) en el modelo sine-Gordon (1+1)-dimensional.

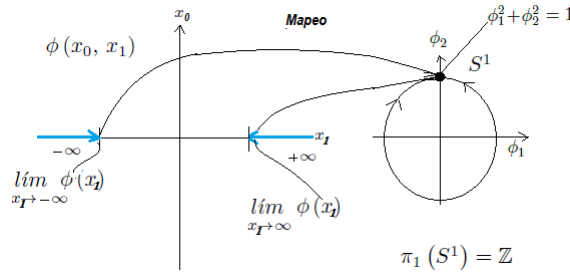


Figura 2.7: Mapeo de \mathbb{R} al círculo S^1 de radio unitario.

2.3.1. Clases de homotopía entre esferas

Los solitones están caracterizados por condiciones de frontera. El valor del campo $\phi(x_1)$ en la frontera $\phi^\infty(\theta)$ es una función definida en un círculo S^1 , la variable θ se mueve de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$, con estos dos puntos identificados la función $\phi^\infty(\theta) = e^{-ik\theta}$ toma valores en el grupo espacial $U(1)$, luego en el intervalo $[0, 2\pi]$ en el plano con $e^{i\theta}$ se tiene el círculo unitario S^1 . El grupo espacio $U(1)$ se identifica con un círculo S^1 ya que este elemento se escribe como $e^{if(\theta)}$ entonces el campo $\phi^\infty(\theta)$ define un mapeo continuo de S^1 (el círculo de radio unitario en el plano) a otra S^1 (el espacio campo), entonces se tiene el mapeo

$$\phi^\infty(\theta) : S^1 \rightarrow S^1$$

el mapeo está dado por la función $f(\theta)$ tal que la única condición de frontera ahora es $\phi^\infty(\theta) = \lim_{\vec{x} \rightarrow \infty} \phi(\vec{x}) = e^{if(\theta)}$. Todas las configuraciones de campo están agrupadas en

un sector topológico etiquetados por un número entero, estos sectores se llaman “clases de homotopía”, comúnmente el teorema de homotopía se aplica en la teoría de norma $U(1)$ en la geometría plana, dado que existe una fase entonces todos los mapeos continuos de un círculo S^1 en otro S^1 se agrupan en clases de homotopía.

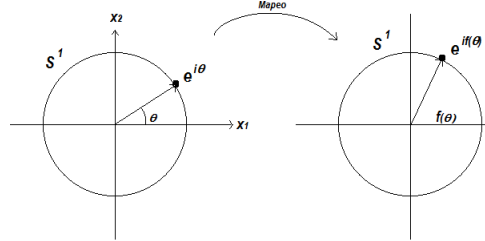


Figura 2.8: La función $\phi^\infty(\theta)$ define un mapeo de S^1 (en el plano (x_1, x_2)) a otro S^1 (el espacio de campos). Un punto en el plano se parametriza por $e^{i\theta}$ y se mapea a $e^{if(\theta)}$ en el espacio de campos. La imagen del mapeo es un círculo cuando $f(\theta) = \theta$, lo que implica que $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Los mapeos de una clase se deforman continuamente uno al otro, pero no es posible hacer esto cuando se tienen dos clases diferentes. Matemáticamente, el número total de clases se expresa como

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \quad (2.46)$$

este es la clase de homotopía asociado a los mapeos $\phi : S^1 \rightarrow S^1$. Luego el mapeo de un círculo S^1 a una esfera S^2 donde la imagen del mapeo siempre se comprime continuamente a un punto, entonces el mapeo es trivial, así mismo todos los mapeos continuos de la esfera S^2 a otra esfera S^2 también se agrupan en clases de homotopía. El número de clases de son etiquetados por el conjunto de enteros, matemáticamente se escribe:

$$\pi_2(S^2) = \mathbb{Z} \quad (2.47)$$

donde los $\pi_2(S^2)$ es frecuentemente usado para el grupo de homotopía asociado con mapeos de una S^2 a otra esfera S^2 . Físicamente este grupo de homotopía caracteriza excitaciones de skyrmiones en el modelo sigma no-lineal definido en la geometría plana. En general, todos los mapeos continuos de una m-esfera a una n-esfera ($S^m \rightarrow S^n$) están agrupados en clases de homotopía que definen el grupo de homotopía $\pi_m(S^n)$. Los grupos de homotopía son:

$$\begin{aligned} \pi_n(S^n) &= \mathbb{Z} \\ \pi_n(S^m) &= 0 \quad n < m \\ \pi_n(S^l) &= 0 \quad n > 1. \end{aligned}$$

Los grupos de homotopía $\pi_n(S^m)$ no son triviales para $m = n$.

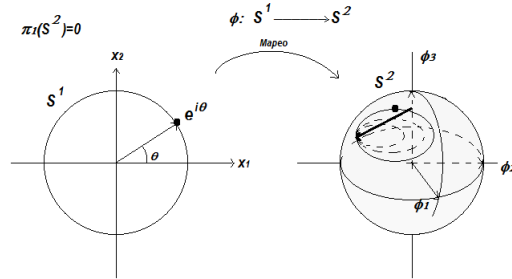


Figura 2.9: Mapeo de $S^1 \rightarrow S^2$, la imagen del mapeo es un círculo sobre la esfera que contrae a un punto, lo que implica que $\pi_1(S^2) = 0$.

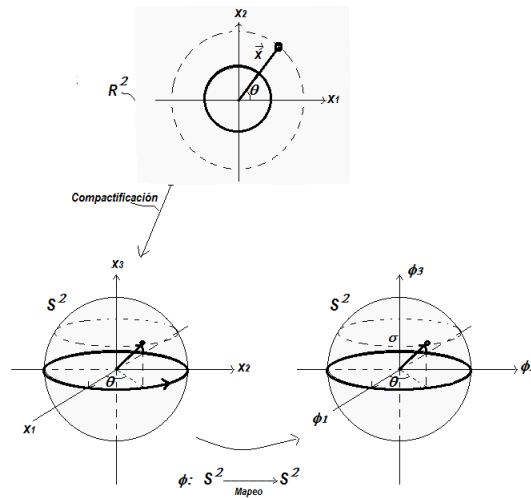


Figura 2.10: La compactificación de \mathbb{R}^2 a la 2-esfera S^2 donde están identificados todos los puntos al infinito (el polo norte $\phi^\infty = (0, 0, 1)$). El campo sigma $\phi(\vec{x})$ define un mapeo constante de S^2 (el plano compactificado) a otra S^2 (el espacio compacto).

3

Bultos en $(2+1)$ -dimensiones

Las ondas solitarias de teorías de campo escalar en dimensiones espaciales $D > 1$, en general son inestables y esto queda establecido por el teorema de Hobart-Derrick. Por ejemplo, el modelo sigma no-lineal $O(3)$ definido en $(2+1)$ -dimensiones, admite soluciones de onda solitaria pero no de solitón, debido a una inestabilidad de escala conforme en el modelo. El 3 significa que el modelo involucra 3 campos escalares reales y $O(3)$ es la simetría interna de las configuraciones de campo. Cuando se generaliza el modelo al incorporar $N > 3$ campos escalares, resulta que el modelo $O(N)$ no admite soluciones tipo onda solitaria. La situación no mejora si ahora formulamos estos modelos $O(N)$ en un espacio con un número mayor de dimensiones espaciales. Sin embargo, es posible generalizar el modelo $O(3)$ de otra manera, ya que como veremos, el modelo se puede expresar como un modelo $\mathbb{C}P^1$ (el cual contiene 2 campos escalares complejos) y al ser equivalentes, este modelo también admite soluciones tipo onda solitaria. El modelo $\mathbb{C}P^1$ puede generalizarse añadiendo más campos escalares, al construir los llamados modelos $\mathbb{C}P^N$ (modelos de $N + 1$ campos escalares complejos). Esta generalización a diferencia de las $O(N)$, si admiten soluciones tipo onda solitaria. En este capítulo discutiremos las propiedades de las ondas solitarias para el modelo sigma no lineal $O(3)$.

3.1. Teorema de Hobart-Derrick

3.1.1. Condición de inestabilidad de escala

Los argumentos de inestabilidad de escala para las ondas solitarias multi-dimensionales fueron formuladas por Hobart (1963) y Derrick (1964) y nos dan las *condiciones necesarias* del tipo virial sobre la funcional de energía para que esta pueda poseer soluciones estables. La condición se obtiene como sigue.

Sea $\phi(\vec{x})$ una solución estática de las ecuaciones de movimiento, las cuales las podemos obtener, por ejemplo, a partir de un principio variacional

$$\delta H[\phi] = 0. \quad (3.1)$$

Consideremos perturbaciones del tipo *transformaciones de escala*, introducidas en la forma

$$\vec{x} \rightarrow \lambda \vec{x}, \quad \phi(\vec{x}) \rightarrow \phi_\lambda = \phi(\lambda \vec{x}), \quad (3.2)$$

donde λ es un parámetro real. Ante estas transformaciones el principio variacional (3.1) debe satisfacer

$$\delta H[\phi_\lambda] = \left. \frac{\partial H[\phi(\lambda \vec{x})]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} \cdot \delta \lambda = 0. \quad (3.3)$$

Tratando a la funcional $H[\phi(\lambda \vec{x})]$ como una función $\Phi(\lambda)$ y suponiendo que esta es una sum de funciones homogéneas¹ la cual podemos escribir como

$$H(\lambda) = \sum_{\nu=-n_1}^{n_2} H^{(\nu)}(\lambda), \quad (3.4)$$

donde $H^{(\nu)}(\lambda)$ es una función con grado de homogeneidad ν . Sustituyendo esta forma de la funcional en la ecuación (3.3) obtenemos la identidad del tipo virial

$$\left. \frac{dH(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=1} = \sum_{\nu=-n_1}^{n_2} \nu H^{(\nu)}(1) = 0, \quad (3.5)$$

la cual se conoce como la *condición necesaria de Hobart-Derrick* para la existencia de soluciones estáticas a la ecuación variacional (3.1). Si restringimos las perturbaciones admisibles de los campos a las deformaciones de escala (3.2), entonces es posible la condición de Hobart-Derrick (3.5) como una consecuencia de las ecuaciones de movimiento, que se obtienen de (3.1).

¹Se dice que una función $f(x)$ es homogénea de grado ν , si satisface que $f(\nu x) = \nu f(x)$.

3.1.2. Transformación de escala de la energía

Como estamos interesados en la posibilidad de obtener soluciones tipo onda solitaria, comencemos estudiando las consecuencias de la condición de Hobart-Derrick en la energía de posibles soluciones estáticas. Para ello comencemos analizando el grado de homogeneidad de las funcionales asociadas a la energía proveniente del término cinético y del potencial. Con el objetivo de ser lo más general posible consideremos una teoría de N campos escalares en un espacio-tiempo de D dimensiones espaciales y donde la geometría de la parte espacial está descrita por la métrica g_{ij} , la cual consideraremos que sólo depende de los campos escalares.

La energía proveniente de los gradientes es:

$$E_2[\phi] \equiv \frac{1}{2} \int d^D x g_{ij}(\phi) \frac{\partial \phi_a(\vec{x})}{\partial x^i} \frac{\partial \phi_a(\vec{x})}{\partial x^j} \quad (3.6)$$

Bajo la transformación de escala (3.2), esta energía cambia como

$$E_2[\phi_\lambda] = \frac{1}{2} \int \frac{d^D(\lambda x)}{\lambda^D} g_{ij}(\phi_\lambda) \lambda^2 \frac{\partial \phi_a(\lambda \vec{x})}{\partial(\lambda x^i)} \frac{\partial \phi_a(\lambda \vec{x})}{\partial(\lambda x^j)} = \lambda^{2-D} E_2[\phi], \quad (3.7)$$

lo cual significa que $E_2(\lambda)$ es una función homogénea de grado $\nu = 2 - D$. De este resultado concluimos:

- La funcional E_2 es invariante de escala sólo para $D = 2$ (dimensiones espaciales).
- Para $D \geq 3$ no existe un mínimo (tampoco un extremo), ya que siempre tenemos la posibilidad de disminuir el valor de E_2 mediante una deformación de escala. La energía mínima corresponde al límite $\lambda \rightarrow \infty$ cuando la partícula colapsa a radio cero.

La adición de una energía potencial

$$E_0[\phi] \equiv \int d^D x U(\phi(\vec{x})), \quad (3.8)$$

no mejora el resultado, ya que bajo la transformación de escala (3.2), esta energía transforma como

$$E_0[\phi] \rightarrow E_0[\phi_\lambda] = \lambda^{-D} \int d^D(\lambda x) U(\phi_\lambda) = \lambda^{-D} E_0[\phi], \quad (3.9)$$

lo cual significa que $E_2(\lambda)$ es una función homogénea de grado $\nu = -D$. Podemos así escribir la energía total como una función de λ

$$E(\lambda) = \lambda^{2-D} E_2 + \lambda^{-D} E_0, \quad (3.10)$$

en apoyo de la hipótesis (3.4). Utilizando la condición de Hobart-Derrick (3.5) obtenemos

$$\left. \frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = (2 - D)E_2 - DE_0 = 0. \quad (3.11)$$

Para la energía potencial este resultado significa

$$E_0 = \frac{(2-D)}{D} E_2, \quad (3.12)$$

con cuatro posibilidades evidentes:

- $D = 1$, lo cual implica que $E_2 = E_0$ (condición virial (1.26)).
- $D > 2$ y $E_2 = E_0 = 0$ (soluciones de vacío).
- Si $E_2 \neq 0$ y $D = 2$, entonces necesariamente $E_0 = 0$.
- Si $E_2 > 0$ y $E_0 > 0$, no existen soluciones estáticas regulares para $D \geq 3$ (esto es el caso para potenciales $U[\phi] \geq 0$, que son en los que estamos interesados²).

De este resultado se sigue lo que en la literatura se conoce como el teorema de Derrick, el cual nos dice que:

Teorema de Derrick: *Si $\vec{\phi} = (\phi_1, \dots, \phi_a, \dots, \phi_N)$ es un conjunto de campos escalares en un espacio tiempo de dimensión $(D + 1)$ y la dinámica de estos campos está descrita por la densidad lagrangiana*

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - U(\vec{\phi}), \quad (3.13)$$

y si $U(\vec{\phi})$ es una funcional no negativa e igual a cero para los estados base de la teoría. Entonces para $D \geq 2$, las únicas soluciones no singulares, independientes del tiempo, de energía finita son los estados base.

La condición de Hobart-Derrick nos llevo a este resultado directamente para los estados de vacío y para $D \geq 3$. En el caso $D = 2$, sólo nos dice que $E_0 = 0$. En este caso, podemos aplicar la condición de Hobart-Derrick pero ahora sólo a la funcional E_2 , lo cual nos conduce al resultado de que $E_2 = 0$ y por tanto a las soluciones de vacío.

La única forma de evadir el teorema de Derrick es en $D = 2$ con $U = 0$, esto es, en el caso en que la densidad lagrangiana no contenga un término de potencial. Como veremos en la próxima sección existen modelos de este tipo llamados modelos sigma no-lineales y en el caso de 3 campos escalares encontraremos la soluciones estáticas que permite el teorema de Derrick. Estas soluciones las llamaremos bultos (lumps) y antes de obtenerlas, ya conocemos una de sus propiedades. Su energía es invariante ante transformaciones de escala.

²Es posible mostrar que si uno permite que $U < 0$, entonces si existe una solución estática, esta no es estable [7].

3.2. Modelo sigma no lineal $O(3)$

En los años 60 los modelos sigma no-lineales $O(N)$, fueron propuestos como modificaciones de diversas teorías de campo, históricamente el primer modelo fue propuesto por M. Gell-Mann y M. Lévy, quienes lo construyeron con el objetivo de describir al fenómeno hadrónico, y lo bautizaron con el nombre σ debido a que en su modelo existe un mesón de spin 0 llamado así. En general, un modelo sigma es una teoría de campo no-lineal, con sus campos definidos sobre una variedad Riemanniana que por lo regular presenta una gran simetría en su estructura. De entre todos los modelos sigma posibles, en esta sección estamos interesados en el modelo sigma no lineal $O(3)$ definido en $(2+1)$ -dimensiones. Este modelo ha resultado ser muy importante en física por diversas razones, por ejemplo, en el espacio Euclidiano describe sistemas clásicos (anti)ferromagnéticos mientras que en el espacio de Minkowski admite soluciones tipo onda solitaria. El modelo es integrable en $(2+0)$ -dimensiones, pero no en $(2+1)$ -dimensiones donde es necesario emplear simulaciones numéricas con evolución temporal para obtener soluciones. Más aún, el interés de presentar este modelo por separado, radica en el hecho de que éste constituye un término del modelo que estudiaremos en el capítulo final de este trabajo, el modelo Skyrme bebé.

La densidad lagrangiana que describe al modelo sigma $O(3)$ es

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi}, \quad (3.14)$$

donde la métrica es $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1)$ y el campo $\vec{\phi}(t, \vec{x})$ se parametriza como un campo unitario de tres componentes (campos escalares reales) $\vec{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$. Que sea unitario significa que el campo satisface la condición: $\vec{\phi}(t, \vec{x}) \cdot \vec{\phi}(t, \vec{x}) = 1$, a todo tiempo t y en cualquier punto del espacio \vec{x} . Es claro que debido a este carácter unitario del campo, la densidad lagrangiana es invariante ante el grupo $O(3)$. Así el nombre del modelo se debe al grupo de simetría de la teoría en el espacio *interno* formado por los 3 campos ϕ_a . Es conveniente incluir explícitamente la restricción de los campos escalares, lo cual puede hacerse utilizando el formalismo de los multiplicadores de Lagrange

$$\mathcal{L}_{O(3)} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} + \gamma(t, \vec{x}) (\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} - 1), \quad (3.15)$$

donde γ es un multiplicador de Lagrange. Las ecuaciones de movimiento son

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{\phi} - 2\gamma \vec{\phi} = 0. \quad (3.16)$$

Podemos eliminar el multiplicador de Lagrange de esta ecuación, utilizando la restricción $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$, ya que

$$\gamma = \gamma \vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = \frac{1}{2} \partial_\mu \partial^\mu \vec{\phi} \cdot \vec{\phi}, \quad (3.17)$$

donde en la última igualdad hemos utilizado la ecuación de movimiento (3.16). Sustituyendo esta expresión para γ en la ecuación de movimiento, obtenemos las ecuaciones de

movimiento en términos únicamente del campo $\vec{\phi}$ y sus derivadas

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{\phi} - \left(\vec{\phi} \cdot \partial_\mu \partial^\mu \vec{\phi} \right) \vec{\phi} = 0. \quad (3.18)$$

En algunos textos es común encontrar una expresión equivalente de las ecuaciones de movimiento, la cual se obtiene al diferenciar la condición $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$

$$\vec{\phi} \cdot \partial_\mu \vec{\phi} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial^\mu \vec{\phi} \cdot \partial_\mu \vec{\phi} + \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \partial_\mu \vec{\phi} = 0, \quad (3.19)$$

con lo cual la ecuación de movimiento (3.18) se reescribe como

$$\partial_\mu \partial^\mu \vec{\phi} + \left(\partial^\mu \vec{\phi} \cdot \partial_\mu \vec{\phi} \right) \vec{\phi} = 0. \quad (3.20)$$

Note que el efecto de pedir que el campo sea unitario, produjo el segundo término en la ecuación de movimiento, convirtiéndola en una ecuación diferencial no lineal, y en donde el producto punto en $(\partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi})$ significa que estamos utilizando la métrica Euclidiana, la cual es la métrica estándar de la esfera S^2 , definida por la condición: $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$.

3.2.1. Ondas solitarias y el grupo de homotopía

La energía de una solución estática, que se obtiene de la lagrangiana (3.14) es

$$E = \frac{1}{2} \int \partial_i \vec{\phi} \cdot \partial_i \vec{\phi} d^2 x, \quad (3.21)$$

donde $i = 1, 2$. Consideremos primero las soluciones de vacío (energía cero). Claramente éstas deben satisfacer la condición: $\partial_i \vec{\phi} = 0$, para todo punto \vec{x} . Esto es, $\vec{\phi}(\vec{x}) = \vec{\phi}^{(0)}$, el cual corresponde a cualquier vector unitario independiente de \vec{x} , en el espacio interno. Esto quiere decir que aunque la norma del vector está fija por la condición de unitariedad, la dirección puede ser cualquiera en la S^2 esfera, que llamaremos la esfera interna S_{int}^2 . Tenemos así una familia degenerada y continua de soluciones $E = 0$ (vacíos) que corresponden a las diferentes direcciones en que apunta $\vec{\phi}^{(0)}$. Los vacíos están relacionados entre sí por rotaciones $M \in O(3)$ del espacio interno.

$$\vec{\phi}^{(0)} \rightarrow M \vec{\phi}^{(0)}. \quad (3.22)$$

Procedamos ahora a investigar si existen soluciones tipo onda solitaria en este modelo. De la forma de la energía (3.21), es claro que si existen ondas solitarias, éstas deben satisfacer, utilizando coordenadas polares (r, θ) en \mathcal{R}^2 , que

$$r |\text{grad} \vec{\phi}| \rightarrow 0, \quad \text{cuando } r \rightarrow \infty, \quad (3.23)$$

o equivalentemente

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{\phi}(\vec{x}) = \vec{\phi}^{(0)}, \quad (3.24)$$

donde $\vec{\phi}^{(0)}$ es nuevamente algún un vector unitario en el espacio interno. Note que cuando $r \rightarrow \infty$ en direcciones diferentes, $\vec{\phi}(\vec{x})$ debe aproximarse al mismo límite $\vec{\phi}^{(0)}$. Si este no fuera el caso, $\vec{\phi}(\vec{x})$ dependería del ángulo coordenado θ aún en $r = \infty$, y la componente angular del gradiente, $(1/r)(\partial\vec{\phi}/\partial\theta)$, no satisficaría la condición (3.23).

Dado que $\vec{\phi}(\vec{x})$ se aproxima al mismo valor $\vec{\phi}^{(0)}$ en todos los puntos al infinito, el plano coordenado espacial \mathcal{R}^2 se compactifica a una superficie esférica, la cual llamaremos S^2_{coord} . Sin pérdida de generalidad podemos considerar que el infinito espacial corresponde al polo norte de la esfera S^2_{coord} . Si adicionalmente, de todos los valores posibles que puede tomar el vacío sobre la S^2_{int} , se selecciona uno, que sin pérdida de generalidad puede corresponder al polo norte de la esfera $\vec{\phi}^{(0)}(r \rightarrow \infty) = (0, 0, 1)$, ocurriría un rompimiento espontáneo de la simetría $O(3)$ a $O(2)$, la cual rota los campos ϕ_1 y ϕ_2 . En conclusión,

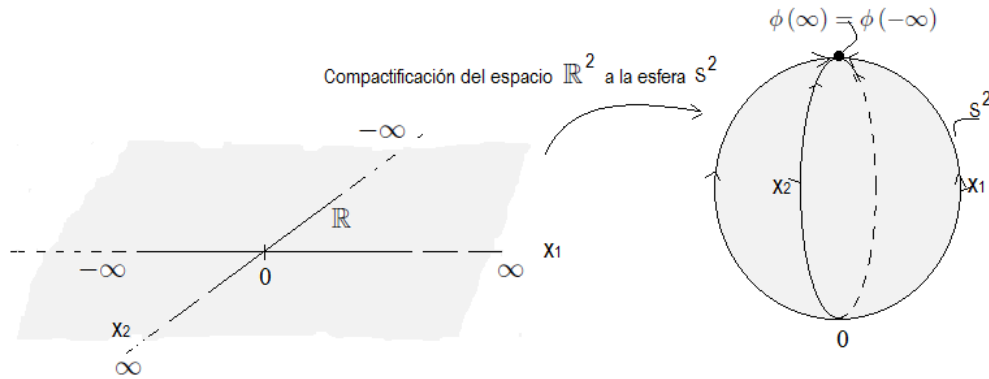


Figura 3.1: Compactificación del espacio \mathbb{R}^2 a la esfera S^2 de radio unitario.

cualquier configuración estática de energía finita corresponde a un mapeo de S^2_{coord} a S^2_{int} , los cuales están clasificados por el grupo de homotopía $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$.

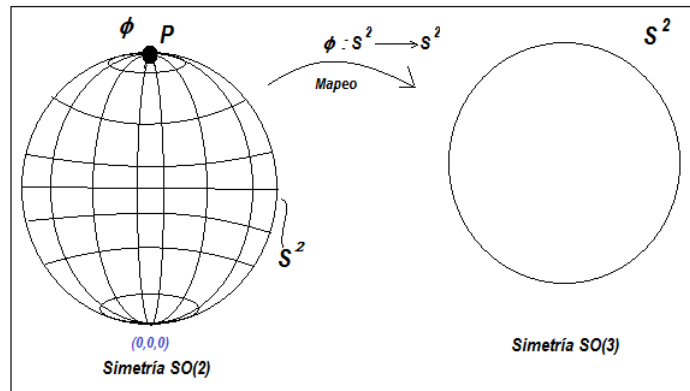


Figura 3.2: El mapeo $\phi : S^2 \rightarrow S^2$ rompe espontáneamente la simetría.

3.2.2. Carga topológica

Los sectores de homotopía están caracterizados por un número entero que denotaremos por Q . Note que en este modelo el papel de la condición de frontera (3.24) es compactificar el espacio coordenado a una superficie esférica, y no determina de manera única el valor de $\vec{\phi}^{(0)}$. Mientras $\vec{\phi}^{(0)}$ debe ser el mismo en todos los puntos en el infinito espacial, este puede apuntar en cualquier dirección en el espacio interno. Sin embargo, configuraciones de campo con direcciones diferentes de $\vec{\phi}^{(0)}$ se pueden obtener una de otra de manera continua través de rotaciones $O(3)$ en el espacio interno. Por lo tanto, elecciones diferentes de $\vec{\phi}^{(0)}$, en general no llevan a sectores de homotopía diferentes. Los diferentes sectores surgen, en realidad, del comportamiento de los campos a través del espacio, incluyendo el interior. Por esta razón es útil entonces escribir a Q como una integral sobre los campos $\vec{\phi}$, de manera análoga al caso del modelo seno-Gordon.

Existe una relación bien conocida que relaciona los elementos de área de una superficie, escritos en términos de coordenadas cartesianas

La carga topológica está definida por la expresión

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon_{ij} \vec{\phi} \cdot \left(\partial_i \vec{\phi} \times \partial_j \vec{\phi} \right) d^2x = \frac{1}{4\pi} \int \vec{\phi} \cdot \left(\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi} \right) d^2x, \quad (3.25)$$

donde $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$. Para confirmar que esta expresión nos provee del número de enrollamiento, llamado a menudo también el índice topológico, debemos hacer un cambio de variables para describir a la S_{int}^2 en términos de dos variables $\{\xi_1, \xi_2\}$ tales como los ángulos polares, en vez de las 3 variables cartesianas ϕ_a sujetas a la condición $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$.

$$dS_a^{int} = d^2\xi \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{rs} \varepsilon_{abc} \frac{\partial \phi_b}{\partial \xi_r} \frac{\partial \phi_c}{\partial \xi_s} \right). \quad (3.26)$$

En términos de coordenadas, la definición de la carga es

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon_{ij} \varepsilon_{abc} \phi_a \frac{\partial \phi_b}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_c}{\partial x_j} d^2x = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon_{ij} \varepsilon_{abc} \phi_a \frac{\partial \phi_b}{\partial \xi_r} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \frac{\partial \phi_c}{\partial \xi_s} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} d^2x, \quad (3.27)$$

en donde en la última ecuación sólo hemos utilizado la regla de la cadena. Dado que el jacobiano de la transformación del cambio de variables $\{x_1, x_2\}$ a $\{\xi_1, \xi_2\}$ está dado por

$$\varepsilon_{rs} d^2\xi = \varepsilon_{ij} \frac{\partial \xi_r}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_s}{\partial x_j} d^2x, \quad (3.28)$$

podemos reescribir a la carga en términos de las variables polares

$$Q = \frac{1}{8\pi} \int \varepsilon_{rs} \varepsilon_{abc} \phi_a \frac{\partial \phi_b}{\partial \xi_r} \frac{\partial \phi_c}{\partial \xi_s} d^2\xi = \frac{1}{4\pi} \int dS_a^{int} \cdot \phi_a = \frac{1}{4\pi} \int dS_{int}, \quad (3.29)$$

ya que ϕ_a es el vector normal a la superficie. Recordando que S_{int}^2 es la superficie de una esfera unitaria, con área 4π , obtenemos que Q es el número de veces “vueltas” que se

atraviesa la esfera interna a medida que se cubre el espacio coordenado \mathcal{R}^2 compactificado en S_{coord}^2 .

Esta clasificación homotópica es válida para cualquier configuración de campo estático para la cual la funcional de energía (3.21) es finita. Esta clasificación no requiere que los campos sean soluciones de las ecuaciones de movimiento (3.18). Desde luego las *soluciones de energía finita* son un subconjunto de las *configuraciones de energía finita* y la misma clasificación vale para ellas. Con el objetivo de encontrar realmente algunas soluciones en algún sector Q dado, utilizaremos un truco ingenioso, introducido por (Belavin and Polyakov).

3.2.3. Ecuación tipo Bogomolny

Nuestro objetivo es ahora obtener una ecuación diferencial de primer orden, análoga a (1.24). Para ello comencemos con la identidad

$$\int d^2x \left[\left(\partial_i \vec{\phi} \pm \varepsilon_{ij} \vec{\phi} \times \partial_j \vec{\phi} \right) \cdot \left(\partial_i \vec{\phi} \pm \varepsilon_{ik} \vec{\phi} \times \partial_k \vec{\phi} \right) \right] \geq 0. \quad (3.30)$$

donde el integrando es el producto escalar del vector, luego escribimos Esta identidad se satisface, dado que el integrando es sólo el producto escalar del vector entre paréntesis consigo mismo. Desarrollando este producto escalar obtenemos

$$\int d^2x \left[\left(\partial_i \vec{\phi} \right) \cdot \left(\partial_i \vec{\phi} \right) + \varepsilon_{ij} \left(\vec{\phi} \times \partial_j \vec{\phi} \right) \cdot \varepsilon_{ik} \left(\vec{\phi} \times \partial_k \vec{\phi} \right) \right] \geq \pm 2 \int d^2x \left[\varepsilon_{ij} \vec{\phi} \cdot \left(\partial_i \vec{\phi} \times \partial_j \vec{\phi} \right) \right].$$

Los dos términos de izquierda en esta ecuación son iguales, de tal manera que la ecuación se reduce a

$$2 \int d^2x \left(\partial_i \vec{\phi} \right) \cdot \left(\partial_i \vec{\phi} \right) \geq \pm 2 \int d^2x \varepsilon_{ij} \vec{\phi} \cdot \left(\partial_i \vec{\phi} \times \partial_j \vec{\phi} \right), \quad (3.31)$$

de donde observamos que el lado izquierdo no es más que la expresión de la energía y entonces la cota de Bogomolny es:

$$E \geq 4\pi |Q|. \quad (3.32)$$

Esta desigualdad fija una cota de energía mínima de cualquier configuración estática en un sector Q dado. Ahora, la ecuación de movimiento para un campo estático (3.18) son

$$\nabla^2 \vec{\phi} - (\vec{\phi} \cdot \nabla^2 \vec{\phi}) \vec{\phi} = 0, \quad (3.33)$$

se obtiene de exterminar la funcional de energía estática (3.21) sujeta a la restricción (3.17). Dado que mediante transformaciones continuas, no es posible mover una configuración de un sector a otro sector, podemos realizar la extremización en cada sector por separado. En cualquier sector Q dado, la energía se minimiza cuando la desigualdad (3.32) se satisface. Esto implica que la igualdad (3.30) se satisface, si y sólo si

$$\partial_i \vec{\phi} = \pm \varepsilon_{ij} \vec{\phi} \times \left(\partial_j \vec{\phi} \right). \quad (3.34)$$

Este es la ecuación tipo de Bogomolny que deseábamos obtener. Note que cualquier configuración de campo que satisfaga esta ecuación, así como la restricción $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$, minimizarán E en algún sector Q , y por tanto satisfecerán automáticamente las ecuaciones de movimiento (3.33), lo cual puede verificarse por cálculo directo.

$$\nabla^2 \vec{\phi} = \partial_i \partial_i \vec{\phi} = \pm \partial_i \left(\varepsilon_{ij} \vec{\phi} \times \partial_j \vec{\phi} \right) = \vec{\phi} \left(\vec{\phi} \cdot \nabla^2 \vec{\phi} \right).$$

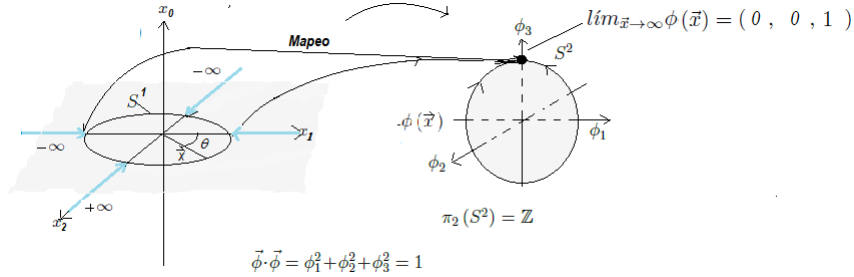


Figura 3.3: El mapeo del plano \mathbb{R}^2 a la esfera S^2 , después se hace el mapeo $\phi : S^2 \longrightarrow S^2$.

3.3. Modelo $\mathbb{C}P^1$

Una pregunta natural es la siguiente: ¿Existen soluciones a la ecuación (3.34)? la respuesta es afirmativa y las soluciones se obtienen de una manera más fácil si realizamos un cambio de variables. Recordemos que la superficie que define los vacíos de la teoría es la S^2_{int} . Si realizamos una proyección estereográfica de la superficie de esta esfera sobre un plano, representamos los puntos de la esfera (ϕ_a) mediante sus coordenadas cartesianas, e introducimos coordenadas complejas, las ecuaciones tipo Bogomolny se simplifican notablemente. Escrito en variables complejas, el modelo se conoce como el modelo $\mathbb{C}P^1$ y en esta sección definiremos brevemente las características básicas del modelo, enfatizando la relación de éste con el modelo sigma no-lineal $O(3)$. El modelo se puede generalizar al considerar los *espacios proyectivos complejos* $\mathbb{C}P^N$ y estos modelos tienen la característica de que son renormalizables en 2-dimensiones.

3.3.1. Modelos $\mathbb{C}P^N$

Los modelos $\mathbb{C}P^N$ involucran $N + 1$ campos escalares complejos que denotamos en forma colectiva como: $\vec{n}(\vec{x}) = \{n_a(\vec{x})\}$, con $a = 1, \dots, N + 1$. Los campos están sujetos a la restricción

$$(\vec{n}(\vec{x}))^* \cdot \vec{n}(\vec{x}) = \sum_{a=1}^{N+1} n_a^*(\vec{x}) n_a(\vec{x}) = 1, \quad (3.35)$$

que es la generalización de la restricción: $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$, del modelo sigma $O(3)$. La densidad lagrangiana del modelo es

$$\mathcal{L}(\vec{x}) = (\partial_\mu \vec{n})^* \cdot (\partial^\mu \vec{n}) + (\vec{n}^* \cdot \partial_\mu \vec{n}) (\vec{n}^* \cdot \partial^\mu \vec{n}). \quad (3.36)$$

Si derivamos la constricción (3.36) respecto a x^μ se obtiene

$$\vec{n}^* \cdot \partial_\mu \vec{n} + \partial_\mu \vec{n}^* \cdot \vec{n} = 2\text{Re}(\vec{n}^* \cdot \partial_\mu \vec{n}) = 0, \quad (3.37)$$

con lo cual se concluye que $\vec{n}^* \cdot \partial_\mu \vec{n}$ es puramente imaginario. Consideramos ahora el conjunto de transformaciones con dependencia espacial de la forma

$$n_a(\vec{x}) \rightarrow n_a e^{i\Lambda(\vec{x})}, \quad (3.38)$$

donde $\Lambda(\vec{x})$ es una fase independiente del índice a , es decir, todos los $N + 1$ campos están multiplicados por el mismo factor de fase. Bajo esta transformación se tiene que:

$$\partial_\mu \vec{n} \rightarrow (\partial_\mu \vec{n} + i\partial_\mu \Lambda \vec{n}) e^{i\Lambda}, \quad (3.39)$$

$$\vec{n} \cdot \partial_a \vec{n} \rightarrow \vec{n}^* \cdot \partial_a \vec{n} + i\partial_a \Lambda, \quad (3.40)$$

y el lagrangiano resulta invariante ante las transformaciones. De estas ecuaciones es claro que el sistema tiene una invariancia de norma local bajo las transformaciones $U(1)$ (3.38). La situación es similar a la de la electrodinámica Abeliada, en el sentido en que en ese sistema identificamos todos los campos que difieren uno del otro por una transformación de la forma (3.38), como equivalentes de norma. Así el conjunto de $N + 1$ números complejos, sujetos a esta identificación de equivalencia y también a la restricción (3.36), forman un espacio proyectivo complejo de N -dimensiones ($2N$ dimensiones reales). De ahí el nombre $\mathbb{C}P^N$. El espacio también puede definirse como el espacio de líneas complejas en \mathbb{C}^{m+1} .

Un enfoque alternativo para definir estos modelos consiste en introducir un proyector hermítico $(m + 1) \times (m + 1)$

$$P = \frac{\vec{n} \vec{n}^\dagger}{|\vec{n}|^2}, \quad (3.41)$$

el cual satisface $P^2 = P = P^\dagger$. Note que los vectores \vec{n} dentro de una clase de equivalencia producen el mismo proyector P , de manera tal que P está bien definido en $\mathbb{C}P^N$. En términos del proyector, la densidad lagrangiana del modelo es

$$\mathcal{L} = \text{Tr}(\partial_\mu P \partial^\mu P), \quad (3.42)$$

la cual lleva a las ecuaciones de movimiento

$$[\partial_\mu \partial^\mu P, P] = 0. \quad (3.43)$$

Como veremos, el modelo $\mathbb{C}P^1$ se obtiene a partir de esta formulación tomando $\vec{n} = (1, R)$.

Finalmente, mencionemos que el grupo de simetría de la variedad-grupo de los espacios proyectivos está dada por

$$\mathbb{C}P^N = \frac{U(N+1)}{U(1) \otimes U(N)}. \quad (3.44)$$

Existe una generalización de los modelos $\mathbb{C}P^N$, que son conocidos como los *modelos sigma grassmannianos*, para los cuales el grupo de simetría $\text{Gr}(N, k)$ de la variedad grupo formada por los campos escalares es

$$\text{Gr}(N, k) = \frac{U(N)}{U(k) \otimes U(N-k)}. \quad (3.45)$$

Note que la relación entre las variedades grupo para el caso de nuestro interés es: $\mathbb{C}P^1 \simeq \text{Gr}(2, 1)$. Los grassmannianos también tienen la propiedad homotópica: $\pi_2(G_{N,k}) = \mathbb{Z}$, lo cual implica la existencia de soluciones de onda solitaria en $(2+1)$ -dimensiones.

3.3.2. Modelo $\mathbb{C}P^1$

Cuando $N = 1$, el modelo $\mathbb{C}P^1$ consiste de dos campos complejos n_1 y n_2 que están sujetos a la restricción $|n_1|^2 + |n_2|^2 = 1$, y el modelo mismo está relacionado al modelo $O(3)$. Como queremos conocer explícitamente la relación entre ambas construcciones, es necesario relacionar los campos de ambos modelos, para ello se construyen tres campos ϕ_a , $a = 1, 2, 3$ de la forma:

$$\phi_a = n_p^* (\sigma_a)_{pq} n_q \quad (3.46)$$

donde las σ^a son las matrices de Pauli. Explícitamente

$$\phi_1 = 2\text{Re}(n_1^* n_2), \quad \phi_2 = 2\text{Im}(n_1^* n_2), \quad \text{y} \quad \phi_3 = |n_1|^2 - |n_2|^2. \quad (3.47)$$

Claramente los campos son reales ϕ_i y satisfacen la condición que define a la S_{int}^2

$$\sum_{i=1}^3 \phi_i \phi_i = (|n_1|^2 - |n_2|^2)^2 = 1. \quad (3.48)$$

Más aún, ante el cambio de variables (3.47), la densidad lagrangiana (3.36) se convierte en la densidad lagrangiana (3.14). Lo que significa que en esencia el modelo $\mathbb{C}P^1$ es igual al modelo sigma $O(3)$, cuando se escribe en términos de los campos escalares ϕ_a ³.

Una vez que hemos visto la equivalencia de modelos, avancemos en encontrar las soluciones a la ecuación (3.34). Para ello notemos que si realizamos la proyección esteoreográfica de la esfera unitaria S_{int}^2 sobre un plano paralelo al plano $\{\phi_1, \phi_2\}$ y el cual

³Para N mayores, los modelos $\mathbb{C}P^N$ son generalizaciones más apropiadas del modelo $O(3)$ que los modelos $O(N)$, dado que los modelos $\mathbb{C}P^N$ admiten soluciones tipo onda solitaria, mientras que los modelos $O(N)$ no admiten estas soluciones [6].

contiene al polo sur, y representamos los puntos de la esfera mediante las componentes cartesianas R_1 y R_2 de los puntos correspondientes en este plano, tenemos

$$R_1 = \frac{2\phi_1}{1 - \phi_3} \quad \text{y} \quad R_2 = \frac{2\phi_2}{1 - \phi_3}, \quad (3.49)$$

y definimos la cantidad compleja

$$R = 2 \left(\frac{\phi_1 + i\phi_2}{1 - \phi_3} \right) \equiv \frac{2\phi}{1 - \phi_3}, \quad (3.50)$$

donde $\phi \equiv \phi_1 + i\phi_2$. Luego, dado que

$$\partial_1 R_1 = \frac{\partial R_1}{\partial x_1} = \frac{2}{(1 - \phi_3)^2} (\partial_1 \phi - \phi_3 \partial_\phi + \phi \partial_1 \phi_3). \quad (3.51)$$

Pero la ecuación (3.34) nos dice que

$$\partial_1 \phi = \mp i(-\phi_3 \partial_2 \phi + \phi \partial_2 \phi_3) \quad \text{y} \quad \partial_2 \phi = \pm i(\phi \partial_1 \phi_3 - \phi_3 \partial_1 \phi). \quad (3.52)$$

Sustituyendo estas relaciones en la ecuación para $\partial_1 R_1$ obtenemos

$$\partial_1 R = \mp i \partial_2 R, \quad (3.53)$$

o en componentes

$$\frac{\partial R_1}{\partial x_1} = \pm \frac{\partial R_2}{\partial x_2} \quad \text{y} \quad \frac{\partial R_1}{\partial x_2} = \mp \frac{\partial R_2}{\partial x_1}. \quad (3.54)$$

Que son las condiciones de Cauchy-Riemann para que R sea función de \bar{z} (para los signos superiores) o de z (para los signos inferiores). Las coordenadas en la variedad son $z = x_1 + ix_2$ y $\bar{z} = x_1 - ix_2$, con: $z, \bar{z} \in \mathbb{C}$. Así, cualquier función analítica $R(z)$ o $R(\bar{z})$ son solución automáticamente de la ecuación (3.34), cuando las escribimos en términos de ϕ_a y x_1, x_2 . Más aún, mientras R debe ser analítica en z o en \bar{z} , ella no necesita ser una función completa. Mientras que cortes de la función están prohibidos debido a que $\phi_a(x)$ son funciones univaluadas, los polos aislado de R están permitidos. Así si R diverge en los polos, no nos debe preocupar, porque $R \rightarrow \infty$ corresponde al polo norte en S_{int}^2 , esto es, $\phi_3 = 1$.

Bajo este mapeo: $\mathcal{L}_{O(3)} \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}P^1}$, la densidad lagrangiana para el modelo $\mathbb{C}P^1$ es:

$$\mathcal{L}_{\mathbb{C}P^1} = \frac{\partial_\mu R \partial^\mu \bar{R}}{\left(1 + \frac{|R|^2}{4}\right)^2}, \quad (3.55)$$

con $\mu = (z, \bar{z})$, $\partial_z = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2)$ y $\partial_{\bar{z}} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2)$. $\bar{R} = 2 \left(\frac{\phi_1 - i\phi_2}{1 + \phi_3} \right)$ es el complejo conjugado de R . La energía estática y la carga topológica son en estas coordenadas:

$$E = \int d^2x \frac{|\partial_z R|^2 + |\partial_{\bar{z}} R|^2}{\left(1 + |R|^2/4\right)^2}. \quad (3.56)$$

y

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int d^2x \frac{|\partial_z R|^2 - |\partial_{\bar{z}} R|^2}{(1 + |R|^2/4)^2} \quad (3.57)$$

En el caso en que la función R es analítica, por ejemplo en z , $E = 4\pi Q$. En este caso, un prototipo de solución es

$$R(z) = \left[\frac{z - z_0}{\lambda} \right]^n, \quad (3.58)$$

donde n es cualquier número positivo, λ es cualquier número real y z_0 es cualquier número complejo. Dado que (3.58) es una función analítica, nuestro análisis nos asegura que es una solución estática exacta de las ecuaciones de campo cuando la reescribamos en términos de ϕ_a y x . Realizando una transformación de Lorentz de esta solución a un sistema en movimiento, obtendremos una solución exacta dependiente del tiempo, la cual se mueve sin distorsionar su forma.

Las constantes λ y z_0 (lo cual equivale a un par de coordenadas $(x_1)_0$ y $(x_2)_0$) se refieren al tamaño y posición de la solución. El hecho de que exista una solución para λ y z_0 y el hecho de que ni E ni Q dependen de estas constantes es un reflejo de la invariancia de escala y traslacional.

3.4. Evadiendo el teorema de Derrick

Una vez que hemos visto que los lumpos del modelo sigma no-lineal $O(3)$ son no estables, es natural preguntarse sobre la posibilidad de evadir el Teorema de Derrick. Sabíamos del análisis de este teorema, que los bultos, si existían, serían no estables. Sin embargo, como todo teorema que nos indica una imposibilidad, basta con salirse de las suposiciones con que fue construido, para poder tener posibilidades adicionales. El teorema de Derrick se basa en una forma muy específica de la acción, y en un contenido muy específico de campos: campos escalares. Así una posibilidad es añadir términos a la acción que sean de interés físico y que no satisfagan una de la hipótesis del Teorema, para poder evadirlo. De las varias construcciones de este tipo que existen en la literatura mencionemos 2:

3.4.1. Q-bultos en el modelo $\mathbb{C}P^1$

Una forma de evadir el teorema de Derrick es añadirle al modelo sigma una simetría que genere una carga de Noether. Los Q-lumps son soluciones a un modelo de este tipo, donde el término Q se refiere ahora a una carga conservada tipo Noetheriana. La construcción de estas soluciones es muy elegante y se debe a Leese [8]. La idea básica es introducir en la teoría un “espín” interno clásico, el cual impide que los bultos se colapsen

a un punto. En términos de la acción del modelo $\mathbb{C}P^1$ (3.55), la acción se escribe como

$$\mathcal{L} = \frac{\partial_\mu R \partial^\mu \bar{R} + \alpha^2 |R|^2}{(1 + |R|^2)^2}, \quad (3.59)$$

donde α es una constante positiva. Note que si tomamos $\alpha = 0$, recuperamos el modelo $\mathbb{C}P^1$. El término adicional respeta la simetría global $U(1)$: $R \rightarrow e^{ix}R$. Asociada a esta simetría existe una carga de Noether dada por

$$Q = i \int \frac{\bar{R} \partial_0 R - R \partial_0 \bar{R}}{(1 + |R|^2)^2} d^2 x, \quad (3.60)$$

adicional a la carga topológica (3.57) del modelo $\mathbb{C}P^1$. Es directo mostrar que en este caso la cota a la energía está dada por la relación

$$E \geq 2\pi|N| + |\alpha Q|, \quad (3.61)$$

en términos de la carga topológica y la carga de Noether. La igualdad se obtiene cuando

$$\partial_i R \pm i \varepsilon_{ij} \partial_j R = 0, \quad \text{y} \quad \partial_0 R \pm i \alpha R = 0. \quad (3.62)$$

La primera ecuación es la misma que la del modelo sigma y requiere que las soluciones sean una función holomorfa o anti-holomorfa de $z = x_1 + ix_2$. La segunda ecuación es nueva e indica que el campo R tiene un espín interno, una constante de movimiento en la dirección de la fase global $U(1)$ con frecuencia $\pm\alpha$. Si elegimos que Q y N sean positivos, se tiene la solución

$$R(t, z) = e^{-i\alpha t} R_0(z), \quad (3.63)$$

donde $R_0(z)$ es un mapeo racional de grado N en z , con $R_0(\infty) = 0$. Estas soluciones son los llamados Q -bultos. Note que a pesar de que las soluciones no son estáticas, su dependencia temporal reside sólo en el espacio interno, lo cual significa que todas las cantidades físicas, tales como la densidad de energía, son estáticas. Por lo tanto podemos decir que estas soluciones son estacionarias.

Los Q -bultos minimizan la energía para valores fijos de Q y N , por lo que no pueden ser modos inestables. Los modos cero asociados con la invariancia de escala de los bultos en el modelo sigma puro están ausentes para los Q -bultos, debido al hecho de que el espín interno suprime la degeneración entre bultos de radio diferente. Esto se ilustra con la familia de Q -bultos con simetría circular

$$R(t, z) = \frac{e^{-i\alpha t} \lambda^N}{z^N}, \quad (3.64)$$

donde $N \geq 2$, ya que para $N = 1$ la configuración no tienen energía finita. Utilizando la fórmula (3.60) encontramos que esta solución tiene una carga de Noether que depende de λ en la forma

$$Q = \frac{2\pi^2 \alpha \lambda^2}{N^2} \operatorname{cosec} \frac{\pi}{N}, \quad (3.65)$$

y la cota de energía (3.61) se realiza, con E dependiendo no trivialmente de λ . Por esta razón los Q -bultos son estables en contra del cambio en el radio, el cual está determinado por el valor de la carga de Noether Q , el cual a su vez, es un parámetro libre.

La dispersión de los Q -bultos se puede investigar utilizando la aproximación geodésica (para detalles ver por [9]). Finalmente mencionemos que los Q -bultos se pueden generalizar a una clase completa de modelos sigma Kähler con términos de potencial.

3.4.2. Incluyendo un término tipo cuártico en las derivadas

La tercer forma que discutiremos de evadir el teorema de Derrick y la más relevante para los objetivos de esta tesis, consiste en añadirle a la acción un término cuártico en las derivadas. El objetivo de esta estrategia es romper la invariancia conforme de la energía estática. La idea de introducir términos de potencias altas en las derivadas de los campos se debe a Hobart y fue utilizada en el modelo Skyrme (3+1)-dimensional (ver apéndice A), por lo que usualmente en la literatura se refieren a este término como el término Skyrme. El modelo análogo en (2 + 1)-dimensiones es conocido como el modelo Skyrme bebé, que es el modelo en que estamos interesados en este trabajo.

Antes de discutir las características principales del modelo Skyrme bebé, veamos mediante un análisis de transformación de escala, como el término Skyrme rompe con la invariancia conforme. Consideremos un término adicional en el lagrangiano de la forma

$$\left(\partial_\mu \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi} \right) \left(\partial^\mu \vec{\phi} \times \partial^\nu \vec{\phi} \right), \quad (3.66)$$

donde el subíndice (2) indica que estamos considerando términos cuadráticos en las derivadas, mientras que el subíndice (4) indica que estamos considerando términos cuárticos. Esquemáticamente el lagrangiano que estamos considerando es de la forma

$$L = \int d^3x (\mathcal{L}_{(2)} + \mathcal{L}_{(4)}). \quad (3.67)$$

Es directo convencerse dada la discusión de la sección (3.1), que la densidad de energía correspondiente, ante una transformación de escala se comporta como

$$\varepsilon(\lambda) = \lambda^{2-D} \varepsilon_{(2)} + \lambda^{4-D} \varepsilon_{(4)}. \quad (3.68)$$

Calculando la primera derivada

$$\left. \frac{\partial \varepsilon(\lambda)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = (2 - D)\varepsilon_{(2)} + (4 - D)\varepsilon_{(4)} = 0, \quad (3.69)$$

obtenemos la condición necesaria para tener un punto crítico

$$\varepsilon_{(4)} = \frac{D - 2}{4 - D} \varepsilon_{(2)}. \quad (3.70)$$

Para conocer la naturaleza del punto crítico, debemos calcular la segunda derivada

$$\left. \frac{\partial^2 \varepsilon(\lambda)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=1} = (2 - D)(1 - D)\varepsilon_{(2)} + (4 - D)(3 - D)\varepsilon_{(4)} = 0 \quad (3.71)$$

y evaluarla en el punto crítico, lo cual produce el resultado

$$\left. \frac{\partial^2 \varepsilon(\lambda)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=1} = 2(D - 2)\varepsilon_{(2)}, \quad (3.72)$$

el cual es positiva para $D \geq 3$ y por tanto estos modelos pueden admitir soluciones que sean estables ante transformaciones de escala. En el caso $D = 2$ la situación aún no es satisfactoria, para lograr estabilizar las soluciones, se introduce un término adicional de potencial. Sin embargo se carece de un criterio físico o matemático para introducir la forma específica del potencial. En la siguiente sección mostraremos las características básicas del modelo Skyrme bebé, el cual incluye un término específico de potencial y en el capítulo 5 presentamos un posible criterio de física-matemática, al no-conmutatividad, como un principio para prescindir del término arbitrario de potencial, pero que al mismo tiempo permita que el modelo tenga soluciones de onda solitaria estables.

3.5. Modelo Skyrme bebé

El modelo Skyrme bebé es un modelo no lineal en $(2 + 1)$ -dimensiones definido en el grupo $SU(2)$, el cual admite soluciones tipo solitón llamadas *skyrmiones bebé*. El modelo se puede obtener a través de una reducción dimensional del modelo Skyrme⁴, que es un modelo en $(3 + 1)$ -dimensiones, y por tanto es una deformación del modelo sigma $O(3)$. Físicamente el modelo Skyrme bebé es una teoría efectiva en la descripción de bariones, al igual que el Skyrme su estructura matemática está conformada por el modelo sigma no lineal y un término cuártico en las derivadas, en el límite de bajas energías el Skyrme bebé representa una teoría de Cromodinámica Cuántica en $(2+1)$ -dimensiones. En la física de materia condensada los Skyrmiones bebé describen muy bien los fenómenos físicos implicados en sistemas cuánticos tal como en el efecto Hall, donde se les asocia con los términos de interacción de Coulomb. Los skyrmiones bebé son inestables pero pueden estabilizarse bajo ciertas condiciones que se determinan con métodos numéricos y términos adicionales que contribuyen a la masa⁵. Las configuraciones de campo (soluciones estáticas) con energía finita, son mapeos de la forma $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \sim S^2 \rightarrow S^2$ caracterizados por el segundo grupo de homotopía $\pi^2(S^2) = \mathbb{Z}$.

Una característica importante del modelo, es que en la reducción dimensional del modelo *Skyrme* \rightarrow modelo *Skyrme bebé*, requiere ajustes en el término del potencial y consecuentemente éste es el responsable de la estabilidad de las soluciones, dejando un potencial arbitrario o lo que es lo mismo una gran variedad de modelos Skyrme bebé. El modelo

⁴Un resumen breve de las características principales del modelo Skyrme se presenta en el apéndice A.

⁵Las correcciones en los términos de masa se usan para estabilizar skyrmiones.

posee soluciones radialmente simétricas, cuyas configuraciones de energía mínima corresponden a las configuraciones donde la densidad de energía de todos los n -Skyrmiones bebé, tienen forma de anillos de radios más grandes.

La densidad lagrangiana del modelo Skyrme bebé que encontramos comúnmente en la literatura es la siguiente

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - \frac{\kappa^2}{4} \left(\partial_\mu \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi} \right) \cdot \left(\partial^\mu \vec{\phi} \times \partial^\nu \vec{\phi} \right) - V \left(\vec{\phi} \right). \quad (3.73)$$

El primer término en (3.73) corresponde al modelo sigma $O(3)$, que como hemos visto, admiten soluciones de estado meta-estables, las cuales al ser perturbadas, se extienden o se contraen como consecuencia de la invariancia conforme del modelo. El segundo término es el análogo del término Skyrme, y es un término de ordenes superiores en sus primeras derivadas que genera un rompimiento espontáneo de simetría. El tercer término es el potencial que puede contener contribuciones masivas para estabilizar a los Skyrmiones bebé (estabiliza su tamaño). El modelo está sujeto a la constricción $|\vec{\phi}|^2 = 1$ y κ es un parámetro con dimensiones de longitud.

Finitud de la energía, requiere que el campo se aproxime al cero del potencial (el n -ésimo vacío) al infinito espacial, lo que se traduce en una compactificación del espacio base \mathbb{R}^2 a S^2 y por tanto $\vec{\phi}$ es un mapeo $S^2 \rightarrow S^2$ en donde se tiene un invariante homotópico definido por la carga topológica

$$Q = \frac{1}{4\pi} \int dx_1 dx_2 \vec{\phi} \cdot \left(\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi} \right) \in \mathbb{Z}, \quad (3.74)$$

la cual nos indica el número de skyrmiones bebé. Las similitudes entre el Skyrme y el Skyrme bebé radica en que ambas tienen configuraciones de campo topológicas estáticas descritas por la carga topológica Q , ambos tienen un término cuártico que corresponde al término Skyrme y otro término no lineal que se encuentra en el modelo sigma $O(3)$ con un término de potencial (los mínimos del potencial están relacionados a la energía). Históricamente, el estudio del efecto Hall motivó la creación del modelo Skyrme bebé y las ecuaciones que lo describen son difíciles de resolver por lo que se emplearon métodos numéricos y analíticos para resolverlas que después fueron modificadas topológicamente.

El modelo sigma $O(3)$ puede modificarse para minimizar inestabilidades en las soluciones, esto se hace introduciendo un término extra por ejemplo un factor de dilatación espacial con potencias negativas y positivas. A continuación damos un ejemplo de un modelo Skyrme bebé donde el potencial contiene un término de masa, proponemos el lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4} \partial_\mu \vec{\phi} \cdot \partial^\mu \vec{\phi} - \frac{1}{8} \left(\partial_\mu \vec{\phi} \times \partial_\nu \vec{\phi} \right) \cdot \left(\partial^\mu \vec{\phi} \times \partial^\nu \vec{\phi} \right) - \frac{m^2}{2} (1 - \phi_3) \quad (3.75)$$

sujeto a la constricción $\vec{\phi} \cdot \vec{\phi} = 1$, el término masivo o término de masa (para los campos ϕ_1 y ϕ_2) pueden ser fluctuaciones pequeñas alrededor del vacío $\vec{\phi} = (0, 0, 1)$. El término

de masa es único y representa una analogía con el usado en el modelo Skyrme, existe un mínimo en el punto $\vec{\phi} = (0, 0, 1)$ que en otros casos tienen dos mínimos en los puntos $\vec{\phi} = (0, 0, \pm 1)$ o en el círculo con $\phi_3 = 0$. El término Skyrme depende sólo de ϕ_3 por lo que se mantiene la simetría del $O(2)$ entre ϕ_1 y ϕ_2 (el término de masa en el modelo Skyrme no es esencial), la parte estática permite calcular la energía

$$E = \int \left(\frac{1}{4} \partial_i \vec{\phi} \cdot \partial_i \vec{\phi} + \frac{1}{4} \left(\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi} \right) \cdot \left(\partial_1 \vec{\phi} \times \partial_2 \vec{\phi} \right) + \frac{m^2}{2} (1 - \phi_3) \right) d^2 x. \quad (3.76)$$

En el modelo Skyrme, cada solitón tiene una fase interna que corresponde a la libertad para rotar las componente ϕ_1, ϕ_2 mientras que la interacción entre dos solitones bien separados depende de su fase y de la elección de las fuerzas que pueden hacerse atractivas, estructuras muy similares en los Skyrmiones bebé son de gran importancia en la física de materia condensada y juegan un rol muy importante en los ferro-magnéticos Hall, entre otras aplicaciones. Los modelos Skyrme bebé y Skyrme son teorías de campo perturbativamente no-renormalizables donde la deformación no conmutativa introduce un parámetro en la teoría cuántica por lo que se recurre a la versión no conmutativa en donde se definen nuevas propiedades de este estilo que permiten una re-normalización a distancias cortas.

En esta tesis estudiamos la estabilidad de los skyrmiones bebé no conmutativos sin términos de potencial dado que la deformación de Moyal en el mapeo *Skyrme bebé* \rightarrow *Skyrme bebé no-conmutativo* introduce una nueva escala que estabiliza a los solitones y se construye con un grassmaniano en donde se tiene una clase de soluciones analíticas y exactas. La primera y segunda variación de la energía $\delta E = 0$ y $\delta^2 E = 0$ permiten estudiar la estabilidad de los skyrmiones bebé.

4

No-conmutatividad

La no conmutatividad en la mecánica cuántica se origina en el espacio fase donde las variables canónicas se transforman a operadores hermíticos con las reglas de conmutación de Heisenberg $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$ ¹ (principio de incertidumbre), el límite $\hbar \rightarrow 0$ en las variables anula la incertidumbre donde el espacio-tiempo clásico conmutativo es un caso particular de la física cuántica. En general, las relaciones de no conmutatividad se denotan como

$$[x_j, x_k] = i\theta_{jk} \quad (4.1)$$

donde θ_{jk} es un parámetro (tensor antisimétrico constante) llamado el “*tensor de Poisson*” o *parámetro no conmutativo*, x_j y x_k denotan operadores ($j, k = 1, 2, \dots$) e i es el número imaginario puro. Von Neumann fue uno de los primeros en describir rigurosamente estos espacios cuánticos y con ello el surgimiento de la geometría no conmutativa de manera formal. En los años 80, los matemáticos Connes, Woronowicz y Drinfel estudiaron una estructura diferencial y grupos cuánticos a partir de operadores algebraicos relacionados con teorías de Yang-Mills con diversos espacios no conmutativos. Avances en el entendimiento del espacio-tiempo no conmutativo fueron hechos por Connes, Douglas y Schwartz al observar que la geometría no conmutativa surge de manera natural en límites de bajas energías en teoría de cuerdas, adicionalmente Seiberg y Witten identificaron límites donde la dinámica en la teoría de cuerdas puede describirse en términos de una teoría de *Yang-Mills no-conmutativa*. En este capítulo nos restringiremos a presentar los elementos básicos de la no-conmutatividad.

¹ \hat{x} es el operador de posición y \hat{p} el operador de momento.

4.1. Ejemplos de la física no-conmutativa

4.1.1. Mecánica Cuántica

Un ejemplo muy familiar de un espacio no conmutativo es el espacio fase en la mecánica cuántica. Dirac fue uno de los primeros en deducir una regla de cuantización para una teoría clásica usando los paréntesis de Poisson. Para definir esta regla de cuantización, recordemos la definición de la derivada temporal para un operador denotado por \hat{F}

$$\frac{d\hat{F}}{dt} = \frac{\partial \hat{F}}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [\hat{F}, \hat{H}], \quad (4.2)$$

y comparemos con la derivada temporal de una función F de las variables canónicas y el tiempo en mecánica clásica: $F(q_i, p_i, t)$, escrita en términos de los paréntesis de Poisson

$$\sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) = \sum_{i=1}^f \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \equiv \{F, H\}, \quad (4.3)$$

y la cual tiene la forma

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}. \quad (4.4)$$

En estas ecuaciones, H es la función hamiltoniana clásica y \hat{H} es el operador hamiltoniano cuántico. Este ejemplo muestra una relación de equivalencia (una transformación) entre la física cuántica y la física clásica, que se obtiene al hacer la transformación de los paréntesis de Poisson $\{, \}$ al conmutador $(1/i\hbar) [,]$, y de las variables clásicas: q_i y p_i , a los operadores hermíticos cuánticos: \hat{x}_i y \hat{p}_i .

Por otra parte, en la física clásica usamos variables canónicas y decimos que una transformación de q_i, p_i , a Q_i, P_i es canónica si Q_i y P_i satisfacen las ecuaciones de Hamilton, al hacer la transición

$$H(p_i, q_i) \rightarrow \mathcal{H}[P_i, Q_i], \quad (4.5)$$

donde \mathcal{H} es una nueva función hamiltoniana que depende de las coordenadas P_i y Q_i . En los paréntesis de Poisson ocurre algo similar ya que $\{q_i, p_i\} = \delta_{ij}$, esto es

$$\sum_{\sigma=1}^f \left(\frac{\partial q_i}{\partial q_\sigma} \frac{\partial p_j}{\partial p_\sigma} - \frac{\partial q_i}{\partial p_\sigma} \frac{\partial p_j}{\partial q_\sigma} \right) = \delta_{ij} \quad (4.6)$$

donde $(\partial q_i / \partial p_\sigma) (\partial p_j / \partial q_\sigma)$ es nulo y $(\partial q_i / \partial q_\sigma) (\partial p_j / \partial p_\sigma)$ es la identidad cuando $i = j$ (δ_{ij}). Si transformamos a las variables Q_i, P_i , la transformación es canónica sólo si

$$\{Q_i, P_j\} = \delta_{ij}, \quad (4.7)$$

la cual es válida si satisface que: $\{Q_i, Q_j\} = 0$ y $\{P_i, P_j\} = 0$.

En la física cuántica ocurre algo similar, por ejemplo en el espacio de configuraciones la realización de los operadores de posición: $\hat{x}_i = x_i$ y de momento: $\hat{p}_j = -i\hbar\partial/\partial x_j$, están dadas para que el conmutador de las posiciones con los momentos sea el análogo del resultado clásico correspondiente

$$-\frac{i\hbar}{i\hbar} \left[x_i, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \delta_{ij}. \quad (4.8)$$

y también

$$[x_i, x_j] = 0 \quad y \quad \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0. \quad (4.9)$$

Decimos entonces que la transformación de la física clásica a la cuántica implica el uso de una transformación canónica especial con los conmutadores

$$[\hat{p}_i, \hat{x}_j] = i\hbar\delta_{ij} \quad , \quad [\hat{x}_i, \hat{x}_j] = 0 \quad , \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j]_- = 0. \quad (4.10)$$

Esto se interpreta como un mapeo de la mecánica clásica a la mecánica cuántica.

4.1.2. Dinámica de una partícula cargada

Otro ejemplo de un espacio no conmutativo se muestra en la dinámica de una partícula con carga q que interactúa con un campo magnético B transversal al plano. Primero definimos la longitud del campo magnético l que depende de B :

$$l = \sqrt{\frac{1}{qB}} \quad (4.11)$$

luego $l = 1$ se define como una longitud de campo unitaria. Ahora introducimos un potencial vectorial denotado por A y hacemos una construcción que lo relacione con l :

$$1 = \partial_{x_1} A_{x_2} - \partial_{x_2} A_{x_1} \quad (4.12)$$

convenientemente hacemos una transformación de norma al potencial vectorial tal que $A \rightarrow A + \nabla\lambda$,² así la acción que describe la dinámica de una partícula con carga unitaria $q = 1$ y masa m interactuando en un campo magnético $\vec{B} = B\hat{x}_3$ confinada a moverse en un plano es:

$$S = \int \left(\frac{m}{2} \dot{r}^2 - A \cdot \dot{r} \right) dx_0 \quad (4.13)$$

donde $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$ es el vector de posición de la partícula, luego el primer término describe la energía cinética de la partícula y el segundo término se relaciona con la energía potencial, ahora escribimos el hamiltoniano con la ayuda de las reglas canónicas por conveniencia de modo que se tiene

$$H_0 = \frac{1}{2m} (p + A)^2 = \frac{\pi^2}{2m} \quad (4.14)$$

² λ es un parámetro de rescalamiento.

aquí $p_i = m\partial_{x_i}/i - A_i$ es el momento conjugado a x_i y el momento dinámico π_k (con $k = x_1, x_2$) en sus componentes x_1 y x_2 se escribe como

$$\pi_{x_1} = p_{x_1} + A_{x_1}, \quad \pi_{x_2} = p_{x_2} + A_{x_2} \quad (4.15)$$

combinaciones de estos definen operadores de creación a^\dagger y aniquilación a , esto es

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}} (\pi_{x_1} + i\pi_{x_2}), \quad a^\dagger = \sqrt{\frac{1}{2}} (\pi_{x_1} - i\pi_{x_2}), \quad (4.16)$$

que satisfacen simultáneamente las relaciones de Heisenberg $[a, a^\dagger] = 1$ y entonces el Hamiltoniano se describe ahora como una función de a^\dagger y a :

$$H_0 = \frac{1}{2m} \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (4.17)$$

donde definimos el operador número $n = a^\dagger a$ para relacionar la estructura del hamiltoniano con el espectro de un oscilador armónico que tiene energía

$$E_n = \frac{1}{2m} \left(n + \frac{1}{2} \right) \quad (4.18)$$

con $n \geq 0$, a cada valor de n en la energía se le da el nombre de *nivel de Landau*. Por otro lado, componentes del potencial vectorial que tiene la simetría

$$A_{x_1} = -\frac{x_2}{2}, \quad A_{x_2} = \frac{x_1}{2} \quad (4.19)$$

definen nuevas transformaciones de norma de tal forma que a y a^\dagger ahora son

$$a = \frac{i}{\sqrt{2}} (\partial_{\bar{x}_3} + x_3), \quad a^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2}} (\partial_{x_3} - \bar{x}_3). \quad (4.20)$$

Para simplificar cálculos ahora definimos las nuevas coordenadas R_{x_1} y R_{x_2} como:

$$R_{x_1} = \frac{x_1}{2} - p_{x_2}, \quad R_{x_2} = \frac{x_2}{2} + p_{x_1} \quad (4.21)$$

con las relaciones de conmutación

$$[R_i, R_j] = i\epsilon_{ij} \quad (4.22)$$

que además también conmuten con el momento dinámico

$$[\pi_i, R_j] = 0, \quad (4.23)$$

a estas nuevas coordenadas se les llama *centros guías* y describen una combinación de dos osciladores con operadores b^+ y b^3 que son función de las nuevas coordenadas

$$b^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (R_{x_1} + iR_{x_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (x_3 - \partial_{\bar{x}_3}) \quad (4.24)$$

³Operadores de creación b^+ y aniquilación b en un espacio no conmutativo, en donde se hizo una re-normalización del espacio (con a^+ y a).

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} (R_{x_1} - iR_{x_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{x}_3 - \partial_{x_3}). \quad (4.25)$$

Las funciones de onda del nivel más bajo de Landau se obtienen aplicando $(b^+)^m$ en el estado base del Hamiltoniano H_0 , con esta norma el momento angular L es un número cuántico que permite tener el momento angular como $L = -m$ tal que su expresión es proporcional a la función de onda (x_3 en la función de onda y denota un número complejo)

$$\psi_m(z) = z^m \exp(-x_3 \bar{x}_3) \quad (4.26)$$

las cuales son interpretadas como celdas circulares de radio $\sqrt{\frac{m}{2}}$ alrededor del origen tal que para cuantizar un sistema en un disco de radio R finito debemos recobrar la degeneración esperada manteniendo confinadas las funciones de onda en el disco $m \leq m_0 = 2R^2$. Al conmutar las nuevas coordenadas R_{x_1} y R_{x_2} con H_0 el espectro es degenerado pero si no conmutan uno con el otro entonces no es posible fijarlas simultáneamente, en otras palabras existe un problema de estabilidad, lo que conduce a tener una incertidumbre cuántica en estas coordenadas de la forma $\Delta R_{x_1} \Delta R_{x_2} = 1$ para determinar la posición del centro de coordenadas. Debido al principio de incertidumbre, el plano físico se interpreta como un conjunto de celdas disjuntas de área 2π en las que se puede localizar su centro, así la degeneración por nivel de energía por unidad de área es $1/2\pi$ y el número de estados degenerados N_Ω por área Ω es

$$N_\Omega = \frac{\Omega}{2\pi} \quad (4.27)$$

los electrones se comportan como si adquirirían algún tamaño como consecuencia de los efectos del campo magnético B donde el área es inversamente proporcional a este. En el límite para un campo magnético fuerte, se proyecta la dinámica en el nivel más bajo nivel Landau $LLL_n = 0$, donde se impone una restricción $a | \text{estados} \rangle = 0$ y consecuentemente ahora toda la dinámica esta controlada por las nuevas coordenadas R_{x_1} y R_{x_2} . Al igual que los electrones, las soluciones tipo solitón se comportan como si adquirirían algún tamaño. Descrito en un plano no conmutativo.

4.1.3. Momento angular

El momento angular es otro ejemplo donde se hace una cuantización directa y puede ser pensado como un mapeo de la mecánica clásica a la mecánica cuántica en el sentido de que tomamos el momento angular clásico $L = r \times p$ donde r denota las coordenadas espaciales y p el momento, al hacer los mapeos $r \rightarrow \hat{r}$ y $p \rightarrow \hat{p}$ donde \hat{r} es el operador de coordenadas y \hat{p} el operador momento y por lo tanto $L \rightarrow \hat{L}$ se tiene

$$\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p} = -i\hbar (r \times \nabla) \quad (4.28)$$

donde $\nabla = \hat{x}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \hat{x}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \hat{x}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ es el operador nabla, \hat{L} es el operador momento angular en mecánica cuántica y las componentes del operador momento lineal son; $\hat{p}_{x_1} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_1}$,

$\hat{p}_{x_2} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_2}$ y $\hat{p}_{x_3} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_3}$, entonces las componentes de \hat{L} se escriben

$$\hat{L}_{x_1} = \hat{x}_3 \hat{p}_{x_2} - \hat{x}_2 \hat{p}_{x_3} = -i\hbar \left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial}{\partial x_2} \right), \quad (4.29)$$

$$\hat{L}_{x_2} = \hat{x}_1 \hat{p}_{x_3} - \hat{x}_3 \hat{p}_{x_1} = -i\hbar \left(x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_3} \right), \quad (4.30)$$

$$\hat{L}_{x_3} = \hat{x}_1 \hat{p}_{x_2} - \hat{x}_2 \hat{p}_{x_1} = -i\hbar \left(x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \quad (4.31)$$

con el factor $-i\hbar$ donde los productos son operadores Hermitianos conmutativos entonces \hat{L} también es hermitiano. Las relaciones de conmutación para el momento angular están dadas por las relaciones

$$\hat{L}_{x_1} \hat{L}_{x_2} - \hat{L}_{x_2} \hat{L}_{x_1} = i\hbar \hat{L}_{x_3}, \quad \hat{L}_{x_2} \hat{L}_{x_3} - \hat{L}_{x_3} \hat{L}_{x_2} = i\hbar \hat{L}_{x_1} \quad y \quad \hat{L}_{x_3} \hat{L}_{x_1} - \hat{L}_{x_1} \hat{L}_{x_3} = i\hbar \hat{L}_{x_2} \quad (4.32)$$

en general se denotan como

$$\hat{L} \times \hat{L} = i\hbar \hat{L}, \quad o \quad \left[\hat{L}_i, \hat{L}_j \right]_- = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k \quad (4.33)$$

donde

$$\varepsilon_{ijk} = \left\{ \begin{array}{lll} +1 & \text{si } i, j, k \text{ es permutación par de} & 1, 2, 3 \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ es permutación impar de} & 1, 2, 3 \\ 0 & \text{con dos o más índices iguales} & \end{array} \right\}.$$

Las propiedades del momento angular en sus coordenadas espaciales son las que se muestran a continuación

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_{x_1}^2 + \hat{L}_{x_2}^2 + \hat{L}_{x_3}^2, \quad \left[\hat{L}^2, \hat{L}_{x_1} \right]_- = \left[\hat{L}^2, \hat{L}_{x_2} \right]_- = \left[\hat{L}^2, \hat{L}_{x_3} \right]_- = 0$$

donde las coordenadas son x_1 , x_2 y x_3 , que es un momento angular no conmutativo.

4.2. Mapeo Weyl-Wigner-Moyal

Una deformación se asimila a pequeñas perturbaciones de una estructura matemática específica, por ejemplo la teoría de las deformaciones de variedades complejas, álgebras asociativas y de representaciones tal como la física relativista Galileana donde una “contracción” o “reducción” de la teoría de la relatividad especial en el límite $c \rightarrow \infty$ ⁴. Ejemplos de deformaciones son la deformación o “contracción inversa” de la teoría de la relatividad especial al grupo de Galileo (física Galileana) se debe encontrar el grupo de Poincaré para que la teoría de la relatividad sea una deformación física o relativista, otro ejemplo es la deformación de la física cuántica a la clásica donde el límite $\hbar \rightarrow 0$ es el

⁴ c es la velocidad de la luz y es un parámetro de “contracción”

parámetro de contracción, contrariamente una deformación de la mecánica cuántica puede ser remplazada por una deformación de la física clásica. En esta sección definimos el formalismo *Weyl-Wigner-Moyal* el cual representa una deformación entre la física cuántica y la clásica donde están implicados los brackets de la teoría cuántica, este describe la conexión entre las funciones del espacio fase y los objetos cuánticos, el espacio fase es Euclidiano y el formalismo Weyl-Wigner-Moyal es una deformación al espacio fase con topología no-Euclidiana, al trabajar el Weyl-Wigner-Moyal en un espacio fase curvado se derivan métodos naturales que permiten la cuantización en la relatividad general, en otro contexto se establece una correspondencia entre las observables clásicas y los operadores con el espacio de Hilbert en un espacio fase curvado. De esta manera, la mecánica cuántica con $2n$ generadores (n un número entero), \hat{q}_i (coordenadas espacio) y \hat{p}_i (coordenadas momento) satisfacen la relación no conmutativa

$$[\hat{q}_i, \hat{p}_j] = i\delta_{ij} \quad \text{con} \quad i, j = 1, \dots, n \quad (4.34)$$

donde δ_{ij} es la delta de kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{para } i = j \\ 0 & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

en unidades $\hbar = 1$. Es posible representar estas relaciones de conmutación en términos de operadores en un espacio de Hilbert denotado por $H = L^2(X)$ ⁵ donde la correspondencia entre las observables (representadas por los operadores en $H = L^2(X)$) y las funciones en un espacio fase $2n - \text{dimensional}$ se da por el mapeo Weyl, para este caso la definición de mapeo Weyl es:

- **Mapeo Weyl:** Se define como el mapeo

$$\hat{A} \mapsto A_W(q, p) \quad (4.35)$$

donde \hat{A} es un operador en el espacio de Hilbert H y A_W es una función en el espacio clásico de fase, es decir un mapeo de un operador (en el espacio de Hilbert) a una observable (en el espacio de fase).

En particular denotamos a un espacio fase en el plano complejo como $\Gamma_2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$.

4.2.1. Aplicación de Weyl generalizada

La idea es generalizar el espacio fase $\Gamma_2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ al espacio fase $\Gamma_{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a través del mapeo Weyl. Comenzamos por denotar a W_g como la *aplicación de Weyl generalizada* y a \mathcal{P} como el conjunto de todos los polinomios complejos en el espacio fase formado por $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$, p y q representan las coordenadas del espacio fase tal que existe

⁵ X es el espacio de coordenadas, $q - \text{espacio}$ i.e. un espacio vectorial $n - \text{dimensional}$

un mapeo lineal $W_g : \mathcal{P} \longrightarrow \hat{\mathcal{P}}$ que satisface las siguientes 3 propiedades, la primera propiedad es:

$$W_g(1) = \hat{1} \quad (4.36)$$

que es el operador idéntidad, al desarrollar la serie

$$W_g(p^m q^n) = \sum_{s=0}^{\min(m, n)} g(m, n, s) \hbar^s \hat{p}^{m-s} \hat{q}^{n-s}$$

donde $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n \neq 0$, $g(m, n, s) \in \mathbb{C}$, de modo que para $s = 0$ se tiene $g(m, n, 0) = 1$ y entonces se tiene el operador idéntidad.

La segunda propiedad es:

$$W_g(\{q, A\}_{\mathcal{P}}) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{q}, W_g(A)], \quad W_g(\{p, A\}_{\mathcal{P}}) = \frac{1}{i\hbar} [\hat{p}, W_g(A)], \quad \forall A \in \mathcal{P} \quad (4.37)$$

y la tercera propiedad establece que:

$$\text{Para cada polinomio real } A \in \mathcal{P} \text{ el operador } W_g(A) \text{ es auto-adjunto.} \quad (4.38)$$

Definición: Un mapeo lineal $W_g : \mathcal{P} \rightarrow \hat{\mathcal{P}}$ que satisface las propiedades 4.36, 4.37 y 4.38 se llama *aplicación generalizada de Weyl*.

Ahora queremos expresar la aplicación de Weyl generalizada W_g en forma integral para escribir la extensión de W_g sobre funciones polinomiales, para esto primero enunciamos el siguiente teorema

Teorema: Sea $W_g : \mathcal{P} \rightarrow \hat{\mathcal{P}}$ una aplicación generalizada de Weyl y sea $A \in \mathcal{P}$ un polinomio, entonces

$$W_g(A) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{A}(\lambda, \mu) f(\hbar\lambda\mu) e^{(i\lambda\hat{p})} e^{(i\mu\hat{q})} d\lambda d\mu \quad (4.39)$$

donde $\tilde{A} = \tilde{A}(\lambda, \mu)$ es la transformada de Fourier de $A = A(p, q)$ y se escribe como

$$\tilde{A} = \tilde{A}(\lambda, \mu) = \int_{\mathbb{R}^2} A(p, q) e^{[-i(\lambda p + \mu q)]} dp dq \quad (4.40)$$

además la función $f = f(\hbar\lambda\mu)$ denota una serie formal definida como

$$f = f(\hbar\lambda\mu) := \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s \frac{(\hbar\lambda\mu)^s}{(s!)^2} g(s, s, s). \quad (4.41)$$

Luego escribimos la ecuación 4.39 en forma equivalente

$$W_g(A) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{A}(\lambda, \mu) \alpha(\hbar\lambda\mu) e^{[i(\lambda\hat{p} + \mu\hat{q})]} d\lambda d\mu \quad (4.42)$$

donde

$$\alpha = \alpha(\hbar\lambda\mu) := f(\hbar\lambda\mu) e^{(\frac{i}{2}\hbar\lambda\mu)} \quad (4.43)$$

o equivalentemente

$$W_g(A) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{A}(\lambda, \mu) \beta(\hbar\lambda\mu) e^{(i\mu\hat{q})} e^{(i\lambda\hat{p})} d\lambda d\mu \quad (4.44)$$

donde

$$\beta = \beta(\hbar\lambda\mu) := f(\hbar\lambda\mu) e^{(i\hbar\lambda\mu)} \quad (4.45)$$

en ambas ecuaciones notamos que α y β son consideradas como series formales, debido a estas series a W_g se le da el nombre de *aplicación de Weyl generalizada*, en $\alpha = 1$ se tiene la aplicación de Weyl original.

Definición: Una aplicación de Weyl generalizada $W_g := \mathcal{P} \rightarrow \hat{\mathcal{P}}$ para $\alpha = 1$ es llamada la aplicación de Weyl y se denota por W .

El operador $W_g(A)$ es auto-adjunto para cada $A \in \mathcal{P}$ real si y sólo si la serie formal $\alpha = \alpha(\hbar\lambda\mu)$ es real, se sigue que $g(0, 0, 0) = 1$ si y sólo si $\alpha(0) = 1$.

Teorema: Sea la serie formal definida como

$$\alpha = \alpha(\hbar\lambda\mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \cdot (\hbar\lambda\mu)^k, \alpha_k \in \mathcal{R} \quad (4.46)$$

tal que

$$\alpha_0 = 1, \quad (4.47)$$

entonces un mapeo lineal $W_g : \mathcal{P} \rightarrow \hat{\mathcal{P}}$ está definido por

$$\mathcal{P} \ni A = A(p, q) \mapsto W_g(A) \in \hat{\mathcal{P}}, \quad (4.48)$$

donde la ecuación

$$W_g(A) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \tilde{A}(\lambda, \mu) \alpha(\hbar\lambda\mu) e^{[i(\lambda\hat{p} + \mu\hat{q})]} d\lambda d\mu, \quad (4.49)$$

es una aplicación de Weyl. Por último escribimos la relación que existe entre los coeficientes g y α :

$$g(s, s, s) = s! \sum_{k=0}^s (-1)^k \left(\frac{i}{2}\right)^{s-k} \binom{s}{k} k! \cdot \alpha_k. \quad (4.50)$$

en particular, para la aplicación de Weyl se tiene

$$g(s, s, s) = \left(\frac{i}{2}\right)^s s!, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (4.51)$$

En conclusión, la generalización del espacio de fase $\Gamma_2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ al $\Gamma_{2n} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ para algún $n \geq 1$ se genera a través de la aplicación generalizada del mapeo Weyl, este tipo de mapeos permiten generalizar soluciones solitón en un plano conmutativo.

Correspondencia y aplicación de Weyl

Para concluir esta sección damos una definición matemática de la aplicación Weyl como antecedente para describir la deformación moyal o producto estrella en la siguiente sección, para esto decimos que una correspondencia *uno - a - uno* entre operadores en el espacio de Hilbert y una familia de funciones M (o distribución en el espacio fase) que llamaremos la *correspondencia Weyl* y al mapeo de A_W a A es la *aplicación de Weyl* (W), entonces

- **Definición:** Una *aplicación de Weyl* es un mapeo de funciones f en el espacio fase a operadores \hat{f} en el espacio de Hilbert. Matemáticamente se representa

▪

$$W : f \mapsto \hat{f} = \int \tilde{f}(\vec{\xi}, \vec{\eta}) e^{i(\vec{\xi} \cdot \vec{P} + \vec{\eta} \cdot \vec{Q})/\hbar} d^3\xi d^3\eta \quad (4.52)$$

\tilde{f} representa la transformada de Fourier inversa de la función o distribución f , \vec{P} y \vec{Q} son los operadores de Shrödinger con las correspondencias \vec{p} y \vec{q} respectivamente.

El mapeo de Weyl así como la aplicación generalizada de Weyl son mapeos de N funciones (o elementos) en el espacio de fase a operadores en el espacio de Hilbert, así un *producto-estrella* o *producto estrella Moyal* asociativo M surge naturalmente al hacer el mapeo, es decir, sean las funciones $f, g \in M$ y \hat{f}, \hat{g} los operadores correspondientes tal que $f = \hat{f}_W$ con $\hat{f} = W(f)$ el producto estrella se denota como

$$f \star g = \left(\hat{f} \cdot \hat{g}\right)_W \in M \quad (4.53)$$

la *ley de composición* para estas funciones es $(f, g) \mapsto f \star g$, en la figura se muestra el diagrama de composición para el producto estrella. Del diagrama para el producto estrella de las funciones f y g , con $\lambda = i\hbar/2$ vemos que el producto $f \star g$ se escribe como

$$f \star g = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} P^n(f, g) = f e^{\lambda \overleftrightarrow{P}} g \quad (4.54)$$

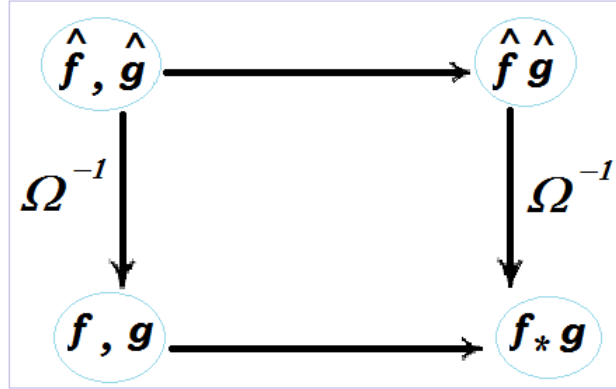


Figura 4.1: Diagrama del producto estrella. Composición de las funciones f y g .

donde P^n representa a la n –ésima potencia del bracket de Poisson (interpretado como un operador bi-diferencial actuando en un par (f, g) y \overleftrightarrow{P}), es decir

$$\{f, g\} \equiv f \overleftrightarrow{P} g = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} = P(f, g). \quad (4.55)$$

de tal forma que el bracket Moyal se define como

$$\{f, g\}_M \equiv [f \star g] \equiv (f \star g - g \star f) / i\hbar \quad (4.56)$$

que corresponde al conmutador cuántico: $\{f, g\}_M = (1/i\hbar) \left[\hat{f}, \hat{g} \right]_W$, donde la constante de planck \hbar es el parámetro de deformación. En otras reglas de asociación entre funciones y operadores, como por ejemplo $d\xi d\eta$, se debe multiplicar por una función de peso con estructura

$$W_1 = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \hbar^r T_r \omega_{2r} \quad (4.57)$$

donde W_{2r} es un polinomio homogéneo, con W_1 –leyes, en forma estándar $W_1 = \exp(\hbar\omega_2)$ con W_2 un polinomio cuadrático homogéneo y la transformada de Fourier se define ahora como

$$T_\hbar = I + \sum_{r=1}^{\infty} \hbar^r T_r \quad (4.58)$$

donde los T_r son operadores diferenciales. En conclusión, sí las funciones f y g dan los operadores \hat{f} y \hat{g} bajo la W_1 –ley y denotamos por $f \star g$ la W_1 –imagen inversa de $\hat{f} \hat{g}$, entonces $T_\hbar f = \hat{f}_W$ tal que $T_\hbar(f \star g) = T_\hbar f \star T_\hbar g$, así que T_\hbar realiza la c –equivalencia entre el bracket Moyal y el W_1 –bracket $[f \star g]$, por lo que equivalentemente existe una similitud entre las dos deformaciones con un algebra asociativa.

Comentario: Se debe introducir un algebra asociativa (álgebra estrella o del producto-estrella) que tiene una deformación del algebra de N funciones con el producto ordinario.

Para $f, g \in N = C^\infty(W, \mathbb{C})$ escribimos ahora la ley de composición deformada en N como $(f, g) \mapsto f \star g$. La correspondiente álgebra de Lie se define por $(f, g) \mapsto [f \star g] \equiv (f \star g - g \star f) / i\hbar$ que es una deformación del álgebra de Poisson-Lie, un caso particular de este tipo de deformación de la mecánica clásica es muy conocida como el producto Moyal y bracket asociado Moyal.

Los conceptos anteriores se resumen en lo siguiente:

Teorema: Una aplicación de Weyl generalizada $W_g : \mathcal{P} \rightarrow \hat{\mathcal{P}}$ satisface la condición si esta es la aplicación de Weyl.

Teorema: Para cada aplicación de Weyl generalizada $W_g : \mathcal{P} \rightarrow \hat{\mathcal{P}}$ existe el mapeo inverso $W_g^{-1} : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{P}$.

y por tanto escribimos

Definición: El mapeo $W_g^{-1} : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{P}$ inverso para la aplicación de Weyl generalizada $W_g : \mathcal{P} \rightarrow \hat{\mathcal{P}}$ es llamada la correspondencia de Weyl generalizada. Análogamente, la correspondencia de Weyl $W^{-1} : \hat{\mathcal{P}} \rightarrow \mathcal{P}$ es el mapeo inverso a la aplicación de Weyl $W : \mathcal{P} \rightarrow \hat{\mathcal{P}}$.

4.2.2. Ejemplo: Física cuántica y brackets Moyal

Para concluir esta sección discutimos un ejemplo que implica a la mecánica cuántica y los brackets de Moyal. Sea \hat{f} un operador sin dependencia temporal explícita, \hat{H} es el operador hamiltoniano, además f y H son las funciones que corresponden a las coordenadas del espacio fase. La ecuación de movimiento para \hat{f} es trasladada por la correspondencia Weyl, así las ecuaciones de Moyal para el movimiento en f son

$$\left(\frac{d}{dx_0} \right) f = [f \star H] = \frac{(f \star H - H \star f)}{i\hbar} \quad (4.59)$$

los brackets Moyal definen una derivación del álgebra del *producto estrella* con la propiedad

$$[f \star (g \star h)] = [f \star g] \star h + g \star [f \star h] \quad (4.60)$$

y la ecuación de movimiento ahora se escribe como

$$\frac{d}{dx_0} (f \star g) = \left(\frac{d}{dx_0} f \right) \star g + f \star \left(\frac{d}{dx_0} g \right) \quad (4.61)$$

para un polinomio f de orden ≤ 2 , por otra parte tenemos que g y h son funciones en el espacio fase con el producto ordinario (punto) $(g \cdot h)$ mapeado usando el bracket Moyal, esto es

$$[f \star (gh)] \neq [f \star g] h + g [f \star h] \quad (4.62)$$

al resolver las ecuaciones de movimiento de Moyal 4.61 para f , g , y $(f \cdot g)$ en general se tiene que

$$(f \cdot g)(x_0) \neq f(x_0) \cdot g(x_0). \quad (4.63)$$

donde se aprecia que la composición de estas funciones dependientes de x_0 no conmutan. Se ha hecho un mapeo Weyl del producto usual (la multiplicación usual en el plano conmutativo).

4.3. Deformación Moyal o producto Estrella

El *producto estrella o Moyal* tiene la particularidad de ser la única deformación asociativa que no viola el principio de correspondencia, es una implementación no conmutativa del producto de funciones que se aplican en algunos casos de la física. En principio es una forma de llevar la estructura de la mecánica cuántica al espacio de fases ya que se puede definir el paréntesis de Moyal como el análogo del conmutador definido con los operadores en un espacio de Hilbert, en otras palabras sirve para describir un espacio no conmutativo, además define una base para procesos de cuantización no estandar y también aparece en el estudio de geometrías no conmutativas, en cuerdas, en modelos matriciales, etc. Las deformaciones de espacios no conmutativos se hacen al sustituir los productos ordinarios por productos de funciones usando productos estrella que son no conmutativos y asociativos, en esencia una deformación se realiza tomando un álgebra de funciones continuas que actúan sobre una cierta variedad y donde el producto ordinario se sustituye por el producto estrella:

$$(f \star g)(x_1) = f(x_1) \cdot g(x_1) + \theta \frac{i}{2} \{f(x_1), g(x_1)\} + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (4.64)$$

los corchetes representan una estructura de Poisson definida sobre una variedad y θ es un parámetro de deformación, el límite $\theta \rightarrow 0$ es un caso particular (la forma conmutativa). El producto estrella $(f \star g)(x_1)$ es único para cada estructura de Poisson. Ahora definamos a A como un espacio lineal y tomamos el caso cuando A sea un álgebra conmutativa $\mathcal{F}(M)$ de funciones suaves en una variedad diferenciable M donde se tiene una estructura de Poisson como productos.

Definición: Un producto estrella es un mapeo bilineal de la forma

$$\mathcal{F}(M) \times \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)[[\nu]], \quad (f, g) \mapsto f \star g = \sum_{k \geq 0} \nu^k C_k(f, g) \quad (4.65)$$

donde k y r son números enteros, al extender el mapeo a $\mathcal{F}(M)[[\nu]] \times \mathcal{F}(M)[[\nu]]$, con ν una sub-variedad de M , es formalmente asociativo y satisface las propiedades

$$C_0(f, g) = fg, \quad C_1(f, g) - C_1(g, f) = \{f, g\}, \quad 1 \star f = f \star 1 = f \quad (4.66)$$

junto con algunos requerimientos diferenciables, entonces C_r es un operador bilineal.

El general, el *producto de Moyal* se denota por

$$\left(\hat{f} \star \hat{g}\right)(x) = e^{\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu}\partial_{\lambda\mu}\partial_{\eta\nu}} \hat{f}(x + \lambda) \cdot \hat{g}(x + \eta) \Big|_{\lambda=\eta=0} \quad (4.67)$$

con λ, η parámetros y el *paréntesis de Moyal* se define con el conmutador

$$\left[\hat{f}, \hat{g}\right] = \hat{f} \star \hat{g} - \hat{g} \star \hat{f} \quad (4.68)$$

usando las coordenadas funciones \hat{x}^μ sobre la variedad escribimos su conmutador de Moyal como

$$\left[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu\right] = i\theta^{\mu\nu} \quad (4.69)$$

donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \dots$, el corchete cuadrado denota el espacio no conmutativo y θ el parámetro en el modelo (parámetro de deformación), $\theta = 0$ implica el caso particular conmutativo. Sea \mathcal{M} una variedad d – *dimensional* (consideramos d objetos en \hat{x}^μ que se multiplican con un producto asociativo que cumple la regla de conmutación $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}$) estos objetos son deformaciones de las coordenadas x^μ en la variedad \mathcal{M} , sí θ es un parámetro físico entonces se pueden hacer deformaciones de un espacio que tiene el mismo tamaño y topología que da como resultado una deformación de un espacio como un álgebra con los mismos elementos y leyes de adición, por ejemplo este puede ser un espacio vectorial pero con una ley de producto adicional donde el parámetro tienda a cero, así la ley de multiplicación deformada se define como $f \star g$ donde la notación *estrella* se usa para hacer la distinción del producto punto. Ejemplificamos esto con las traslaciones globales que en general se escriben como:

$$f(x^i + \varepsilon^i) = e^{-i\theta_{ij}\varepsilon^i x^j} f(x) e^{i\theta_{ij}\varepsilon^i x^j} \quad (4.70)$$

x^i son las coordenadas ($i = 1, 2, 3, \dots$) y ε^i es una coordenada infinitesimal, para hacer una deformación de espacios a funciones es necesario definir el mapeo lineal S como un mapeo de un espacio deformado al espacio no deformado que se define en términos de un operador \hat{f} , así el operador símbolo se define como $\hat{f} \mapsto S[\hat{f}]$ y se espera que satisfaga la relación $\hat{f} \cdot \hat{g} = S^{-1} \left[S[\hat{f}] \star S[\hat{g}] \right]$ lo cual no ocurre, por esta razón se debe definir e introducir un mapeo lineal estándar para S^{-1} , este mapeo estándar se conoce en la literatura como los *simbolos de Weyl* que estudiamos en la sección anterior. El mapeo S se define como un mapeo que toma elementos de \mathbb{R}_θ^d (un álgebra de todas las combinaciones de productos de d variables \hat{x}^j que satisfacen $[x^j, x^k] = i\theta^{jk}$, \mathbb{R}_θ^d es una deformación de \mathbb{R}^d) a $\mathcal{A}(\mathbb{R}^d)$ (un álgebra asociativa que no necesariamente es conmutativa), los S son funciones en el espacio de momentos tal que

$$f(k) \equiv S[\hat{f}](k) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int Tr e^{-ik\hat{x}} \hat{f}(\hat{x}) \quad (4.71)$$

y su transformada inversa es

$$\hat{f}(\hat{x}) = S^{-1}[f] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int d^n k e^{ik\hat{x}} f(k) \quad (4.72)$$

que no son más que las transformadas de Fourier, en 4.71 la integral se hace sobre funciones en el espacio de momentos y en 4.72 se trata de una integral ordinaria en el espacio de momentos. El operador símbolo en la transformada es entonces

$$S[\hat{f}](x_1) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int d^n k \int Tr \left\{ e^{ik(x_1 - \hat{x})} \hat{f}(\hat{x}) \right\} \quad (4.73)$$

los paréntesis $\{\}$ no tienen ningún significado solamente agrupan la traza, por lo que el producto estrella en término del operador símbolo es

$$e^{ikx_1} \star e^{ik'x_1} = e^{-\frac{i}{2}\theta_{ij}k_i k'_j} e^{i(k+k') \cdot x_1}, \quad (4.74)$$

otro caso especial es el que se presenta con la doble integral del producto estrella, tal que

$$\int \int Tr f \star g = \int Tr f \cdot g. \quad (4.75)$$

El álgebra \mathbb{R}_θ^d de funciones en \mathbb{R}^d no conmutativa se considera como un espacio lineal que puede tener diferentes bases, las interacciones en una teoría no conmutativa obedecen el principio de incertidumbre de Heisenberg por lo que es posible usar funciones delta $\delta^{(d)}(x_1 - (x_1)_0)$ como una *base* para los símbolos de Weyl, que desde el punto de vista de la expresión cinética ($[x^j, x^k] = i\theta^{jk}$) es local, así por ejemplo podemos construir una configuración gaussiana con ancho arbitrariamente pequeño en la teoría no conmutativa y su límite es la función delta. En una *deformación Moyal* del espacio euclidiano R^2 con coordenadas (x_1, x_2) se tienen productos de funciones suaves relacionadas a la no-conmutatividad y por tanto asociado al producto estrella Moyal, una propiedad del producto Moyal de dos funciones es

$$(f \cdot g)(x_0, x_2) = f(x_0, x_2) \cdot g(x_0, x_2) \quad (4.76)$$

la deformación Moyal de $\mathbb{R}^{1,1}$ reemplaza el producto punto de funciones en la forma

$$(f \star g)(x_0, x_2) = f(x_0, x_2) \exp \left\{ \frac{i\theta}{2} \left(\overleftarrow{\partial}_{x_0} \overleftarrow{\partial}_{x_2} - \overleftarrow{\partial}_{x_2} \overleftarrow{\partial}_{x_0} \right) \right\} g(x_0, x_2) \quad (4.77)$$

$$= f \cdot g + \frac{i\theta}{2} (\partial_{x_0} f \cdot \partial_{x_2} g - \partial_{x_2} f \cdot \partial_{x_0} g) + \dots \quad (4.78)$$

con un parámetro constante $\theta \in \mathbb{R}_+$. En particular, este producto satisface la condición

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h) \quad y \quad \int dt dy f \star g = \int dt dy f \cdot g \quad (4.79)$$

y las funciones coordenadas satisfacen las relaciones de conmutación

$$x_0 \star x_2 - x_2 \star x_0 = i\theta \quad \implies \quad u \star v - v \star u = -\frac{i}{2}\theta \quad (4.80)$$

se tiene entonces que las coordenadas en $d = 2 + 1$ o $d = 2 + 2$ ($d = \text{dimensión}$) conmutan. Este tipo de deformaciones son las que nos serán de gran utilidad para describir el modelo Skyrme bebé no conmutativo donde se hace una deformación Moyal del \mathbb{R}^2 euclidiano con coordenadas (x_1, x_2) donde el producto punto ordinario de funciones suaves es remplazado por el producto estrella o Moyal (asociativo) caracterizado por el parámetro positivo real θ , para ello escribimos el producto Moyal entre las coordenadas x_1 y x_2 como

$$x_1 \star x_2 - x_2 \star x_1 = [x_1, x_2]_\star = i\theta \quad (4.81)$$

que a continuación escribimos como una combinación de coordenadas x_1 y x_2 en el plano complejo

$$x_3 = x_1 + ix_2 \quad \bar{x}_3 = x_1 - ix_2 \quad (4.82)$$

con x_3 una coordenada compleja que tendrá la ley de conmutación en el plano complejo

$$[x_3, \bar{x}_3]_\star = 2\theta \quad (4.83)$$

definimos los operadores de creación a^\dagger y aniquilación a en función de x_3 como se muestra a continuación

$$a = \frac{x_3}{\sqrt{2\theta}} \quad y \quad a^\dagger = \frac{\bar{x}_3}{\sqrt{2\theta}} \quad \implies \quad [a, a^\dagger]_\star = 1. \quad (4.84)$$

Otra definición del producto estrella en $(4 + 0) - \text{dimensional}$ está dada por la ecuación

$$(f \star g)(x) = f(x) \exp \left\{ \frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overleftarrow{\partial}_\nu \right\} g(x) \quad (4.85)$$

$$= f(x)g(x) + \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} (\partial_\mu f)(x) (\partial_\nu g)(x) + \dots \quad (4.86)$$

$\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ y $\theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu} = \text{constante}$ el parámetro de deformación, así las funciones coordenadas obedecen las reglas de conmutación (estrella) siguientes

$$x^\mu \star x^\nu - x^\nu \star x^\mu = i\theta^{\mu\nu} \quad (4.87)$$

por lo que podemos elegir una base ortonormal para una matriz $\theta^{\mu\nu}$ que puede presentar la siguiente estructura

$$(\theta^{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 & 0 \\ -\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \theta' \\ 0 & 0 & -\theta' & 0 \end{pmatrix} \quad (4.88)$$

que corresponde a una de las bases. El producto estrella Moyal en términos de variables complejas en $(4 + 0) - \text{dimensiones}$ se escribe ahora como

$$(f \star g)(x_3, \bar{x}_3) = f(x_3, \bar{x}_3) \exp \left\{ \theta \left(\overleftarrow{\partial}_{x_3} \overleftarrow{\partial}_{\bar{x}_3} - \overleftarrow{\partial}_{\bar{x}_3} \overleftarrow{\partial}_{x_3} \right) \right\} g(x_3, \bar{x}_3) \quad (4.89)$$

al desarrollar el término de la exponencial para hacer la aproximación infinitesimal obtenemos

$$(f \star g)(x_3, \bar{x}_3) = fg + \theta (\partial_{x_3} f \cdot \partial_{\bar{x}_3} g - \partial_{\bar{x}_3} f \cdot \partial_{x_3} g) + \dots \quad (4.90)$$

o lo que es lo mismo para dejar expresado claramente el término del producto punto ordinario escribimos 4.90 en el orden

$$(f \star g)(x_3, \bar{x}_3) = f \cdot g + \text{derivadas totales} \quad (4.91)$$

el parámetro es $\theta \in \mathbb{R}_+$, nótese que si las derivadas totales son nulas entonces tenemos un caso particular del producto punto definido en un espacio conmutativo.

Otras propiedades importantes del *producto estrella* o *Moyal* son

$$(f \star g) \star h = f \star (g \star h), \quad \int d^2x_3 f \star g = \int d^2x_3 f \cdot g, \quad [x_3, \bar{x}_3]_\star = 2\theta \quad (4.92)$$

está propiedad se emplea en casos donde se hace una deformación Moyal en configuraciones estáticas para un funcional de energía, como ejemplo en la expresión del funcional de energía

$$E_\theta = \int d^2a \left[|\partial_a \phi|_\star^2 + 2\theta U_\star(\phi) \right] \quad (4.93)$$

que depende del parámetro θ y que en el límite $\theta \rightarrow \infty$, es un caso particular (conmutativo) de la energía

$$2\theta \int d^2a U_\star(\phi) \quad (4.94)$$

algo similar se hace con el funcional de energía para el modelo skyrme bebé no conmutativo.

4.4. Formalismo auxiliar del espacio de Fock

El espacio de Fock es muy estudiado en la física de partículas como un espacio de estados para un sistema que presenta una cantidad variable de partículas elementales, estas partículas son los bosones y los fermiones. Los fermiones se representan con el álgebra de Clifford donde los generadores corresponden a la creación o aniquilación de una partícula en un estado de energía pura, lo mismo ocurre para los bosones pero están representados en un álgebra de Weyl. Un espacio de Fock es un espacio vectorial de dimensión infinita por ello es una herramienta natural en la teoría cuántica, matemáticamente se usa para construir los estados cuánticos de un sistema con múltiples partículas de un sistema de partículas individuales, los operadores de creación y aniquilación describen la introducción o la eliminación de las partículas, lo que permite describir un sistema con un número variable de partículas.

En esta sección describimos el Formalismo auxiliar del espacio de Fock, este formalismo es importante en el desarrollo de algunos procesos físicos que se pueden describir

en términos de operadores de creación (\hat{a}^\dagger) y aniquilación (\hat{a}), por ejemplo en sistemas mecánico cuántico (bosónicos) se usan los operadores \hat{q} (operador posición), \hat{p} (operador momento) que definen operadores de creación y aniquilación tal que

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{p} + i\hat{q}) \quad y \quad \hat{a}^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{p} - i\hat{q}) \quad (4.95)$$

al hacer una rotación del espacio-face cuántico, los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger satisfacen las siguientes relaciones no conmutativas

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \quad [\hat{n}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad [\hat{n}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger \quad (4.96)$$

donde se define a $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$ como el *operador número* y el conmutador $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ se escribe en términos de \hat{p} y \hat{q}

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = \frac{i}{2} (\hat{q}\hat{p} - \hat{p}\hat{q}) = \frac{i}{2} [\hat{q}, \hat{p}] = 1 \quad (4.97)$$

tal que representa el mapeo $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \rightarrow [\hat{q}, \hat{p}]$ y entonces la transformación $(q, p) \rightarrow (a^\dagger, a)$ es una rotación. También se usan los operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger para cuantizar campos en donde se introduce un espacio de Fock con el fin de describir partículas, las partículas que se asocian a la cuantización de un campo son idénticas.

Algunas propiedades del espacio de Fock

Para definir algunas propiedades matemáticas del espacio de Fock primero decimos que \mathbb{C} denota al plano complejo y si una función f es analítica en el plano complejo entero \mathbb{C} entonces decimos que f es una función entera. Propiedades: consideramos la medida gaussiana para un parámetro positivo α como

$$d\lambda_\alpha(z) = \frac{\alpha}{\pi} e^{-\alpha|z|^2} dA(z),$$

aquí dA es el área Euclidena medida en el plano complejo⁶, $z \in \mathbb{C}$ y $d\lambda_\alpha(z)$ es una medida de probabilidad.

El espacio de Fock denotado por F_α^2 consiste de todas las funciones enteras en $L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ tal que F_α^2 es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ y consecuentemente F_α^2 es un espacio de Hilbert con el producto interno inherente de $L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$:

$$\langle f, g \rangle_\alpha = \int_{\mathbb{C}} f(z) \overline{g(z)} d\lambda_\alpha(z). \quad (4.98)$$

Proposición: Sea n un entero no-negativo entonces

$$e_n(z) = \sqrt{\frac{\alpha^n}{n!}} z^n \quad (4.99)$$

⁶Un cálculo con coordenadas polares muestra que $d\lambda_\alpha$ es una medida de probabilidad.

donde el conjunto $\{e_n\}$ es una base ortonormal para F_α^2 . Una consecuencia de esta proposición es que la serie de Taylor de cada función f en F_α^2 converge a f con la norma topológica de F_α^2 . Para un $w \in \mathbb{C}$ fijo, el mapeo $f \mapsto f(w)$ es un funcional lineal de frontera en F_α^2 , esto se sigue fácilmente del teorema del valor medio. Por la representación del teorema de Riesz en análisis funcional, existe una función única K_w en F_α^2 tal que $f(w) = \langle f, K_w \rangle_\alpha$ para toda $f \in F_\alpha^2$. La función $K_\alpha(z, w) = K_w(z)$ se llama la reproducción del kernel de F_α^2 .

Proposición: La reproducción del kernel de F_α^2 está dada por

$$K_\alpha(z, w) = e^{\alpha z \bar{w}}, \quad z, w \in \mathbb{C}. \quad (4.100)$$

Recalcando que cada subespacio cerrado X de un espacio de Hilbert H únicamente determina una proyección ortogonal $P : H \rightarrow X$.

Corolario: La proyección ortogonal

$$P_\alpha : L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha) \rightarrow F_\alpha^2 \quad (4.101)$$

es un operador integral, específicamente:

$$P_\alpha f(z) = \int_{\mathbb{C}} K_\alpha(z, w) f(w) d\lambda_\alpha(w) \quad (4.102)$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$ y toda $z \in \mathbb{C}$. Esto prueba la representación integral para P_α . Para alguna $z \in \mathbb{C}$, tenemos

$$k_z(w) = \frac{K_\alpha(w, z)}{\sqrt{K_\alpha(z, z)}} = e^{\alpha \bar{z}w - \frac{\alpha}{2}|z|^2} \quad (4.103)$$

que denota al kernel normalizado en z . Todo k_z es un vector unitario en F_α^2 .

Corolario: Suponemos que $f \geq 0$ o $f \in L^1(\mathbb{C}, d\lambda_\alpha)$. Entonces para alguna $z \in \mathbb{C}$, tenemos

$$\int_{\mathbb{C}} f(z \pm w) d\lambda_\alpha(w) = \int_{\mathbb{C}} f(w) |k_z(w)|^2 d\lambda_\alpha(w), \quad (4.104)$$

y

$$\int_{\mathbb{C}} f[\pm(z - w)] |k_z(w)|^2 d\lambda_\alpha(w) = \int_{\mathbb{C}} f(w) d\lambda_\alpha(w). \quad (4.105)$$

Corolario: Suponemos que $\alpha > 0$ y β es real. Entonces

$$\int_{\mathbb{C}} |e^{\beta z \bar{a}}| d\lambda_\alpha(z) = e^{\beta^2 |a|^2 / 4\alpha} \quad (4.106)$$

para toda $a \in \mathbb{C}$. Estas son algunas de las propiedades matemáticas del espacio de Fock, en lo que sigue construimos a este con los operadores de creación y aniquilación que serán de gran utilidad en la última sección.

Espacio auxiliar de Fock

Usualmente las coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_f de un sistema con un espacio de vectores con f grados de libertad y sus momentos conjugados son p_1, \dots, p_f satisfacen las relaciones canónicas:

$$[q_\mu, p_\nu] = q_\mu p_\nu - p_\nu q_\mu = i\delta_{\mu\nu}, \quad [q_\mu, q_\nu] = [p_\mu, p_\nu] = 0 \quad (4.107)$$

con $\mu, \nu = 1, \dots, f$, esto ocurre por ejemplo en la mecánica cuántica no relativista. El espacio de vectores estado en donde las observables q y p se mapean a operadores auto-adjuntos pueden construirse tal que q y p forman operadores de creación a^\dagger y aniquilación a definidos por:

$$a_\nu = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_\nu + ip_\nu), \quad a_\nu^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_\nu - ip_\nu) \quad (4.108)$$

que satisfacen las relaciones de conmutación

$$[a_\mu, a_\nu] = [a_\mu^\dagger, a_\nu^\dagger] = 0, \quad [a_\mu, a_\nu^\dagger] = \delta_{\mu\nu} \quad (4.109)$$

donde $\mu, \nu = 1, \dots, f$ y una base ortogonal para este espacio se contruye por

$$\phi_\nu = \frac{(a_1^\dagger)^{\nu_1} \dots (a_f^\dagger)^{\nu_f}}{\sqrt{\nu_1! \dots \nu_f!}} \phi_0 \quad (4.110)$$

donde $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_f)$ es el conjunto de los enteros no negativos y ϕ_0 es por definición el único vector normalizado (una face) que satisface las condiciones

$$a_\nu \phi_0 = 0, \quad \nu = 1, \dots, f \quad (4.111)$$

de esta se tiene que

$$a_i^\dagger \phi_{\nu_1 \dots \nu_i \dots \nu_f} = \sqrt{\nu_i + 1} \phi_{\nu_1 \dots \nu_{i+1} \dots \nu_f} \quad (4.112)$$

$$a_i \phi_{\nu_1 \dots \nu_i \dots \nu_f} = \begin{cases} \sqrt{\nu_i} \phi_{\nu_1 \dots \nu_{i-1} \dots \nu_f} & \text{para } \nu_i > 0 \\ 0 & \text{para } \nu_i = 0 \end{cases} \quad (4.113)$$

luego, la condición $(\phi_0, \phi_0) = 1$ junto con las relaciones de conmutación 4.109 aseguran que los vectores ϕ_ν realmente forman un conjunto ortonormal:

$$(\phi_\mu, \phi_\nu) = \delta_{\mu_1 \nu_1} \dots \delta_{\mu_f \nu_f} \quad (4.114)$$

el espacio de Hilbert \mathcal{H} consiste de todos los vectores tal que

$$\phi = \sum_{\nu} c_\nu \phi_\nu \quad (4.115)$$

con $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_f)$, c_ν son números complejos tal que $\sum_\nu |c_\nu|^2 < \infty$. Las bases 4.110 se llaman las *bases de Fock* y el espacio \mathcal{H} en esta realización es llamado el *espacio de Fock*.

En otras palabras, el *espacio de Fock* es un espacio de Hilbert \mathcal{H} construido como una suma directa de productos tensoriales (en \mathcal{H}) y es una base natural de $U(\mathcal{H})$ (el grupo de los operadores unitarios en el espacio de Hilbert), explícitamente denotamos el espacio de Fock en \mathcal{H} como

$$\mathcal{H}_{Fock} = \oplus \mathbb{C} |n_1, \dots, n_{Fock}\rangle \quad (4.116)$$

con los operadores a y a^\dagger

$$a_\alpha | \dots, n_\alpha, \dots \rangle = \sqrt{n_\alpha} | \dots, n_\alpha - 1, \dots \rangle, \quad (4.117)$$

$$a_\alpha^\dagger | \dots, n_\alpha, \dots \rangle = \sqrt{n_\alpha + 1} | \dots, n_\alpha + 1, \dots \rangle \quad (4.118)$$

en general las a_α representan al operador de aniquilación, a_α^\dagger al operador de creación y las n_α al operador número ($n_\alpha = a_\alpha^\dagger a_\alpha$) con $\alpha = 0, 1, 2, 3, \dots$, además se tiene que

$$a_\alpha = \frac{q_\alpha + ip_\alpha}{\sqrt{2\theta_\alpha}}, \quad a_\alpha^\dagger = \frac{q_\alpha - ip_\alpha}{\sqrt{2\theta_\alpha}}$$

$$x_{3\alpha} = \sqrt{2\theta_\alpha} a_\alpha, \quad \bar{x}_{3\alpha} = \sqrt{2\theta_\alpha} a_\alpha^\dagger$$

$$[a_\alpha, a_\alpha^\dagger] = \delta_{\alpha\beta} \quad (4.119)$$

con p (coordenadas momentos), q (coordenadas espaciales), las x_{2a} en el espacio de operadores actúan en el espacio de Fock \mathcal{H}_r de r operadores \hat{a} y \hat{a}^\dagger . Para escribir la base del espacio de Fock usaremos dos operadores elementales \vec{k} y \vec{l} tal que se tiene $|\vec{k}\rangle \langle \vec{l}|$ construidos con los a_α^\dagger y a_α de la siguiente manera

$$|\vec{k}\rangle \langle \vec{l}| = \sum_{\vec{n}} \prod_{\alpha} (-1)^{n_\alpha} \frac{a_\alpha^{\dagger k_\alpha + n_\alpha} a_\alpha^{l_\alpha + n_\alpha}}{n_\alpha! \sqrt{k_\alpha! l_\alpha!}} \quad (4.120)$$

usando la relación para derivaciones internas $\partial_j f = \left[-i(\theta^{-1})_{jk} x^k, f \right]$ escribimos las derivadas como conmutadores con los operadores a_α y a_α^\dagger , con esto es posible transformar integrales a la traza estándar en esta base, como se muestra a continuación

$$\int d^{2r} x Tr \longrightarrow \prod_{\alpha} (2\pi\theta_\alpha) Tr \quad (4.121)$$

las sumas y rotaciones unitarias de los operadores $|\vec{k}\rangle \langle \vec{l}|$ proveen un gran conjunto de proyecciones llamados operadores P y que tienen la propiedad $P^2 = P$.

5

Modelo Skyrme bebé no conmutativo

La equivalencia entre el $\mathbb{C}P^1$ y versiones del Skyrme radica en las condiciones de fronteras periódicas donde los solitones son mapeos armónicos tal que $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\} \approx S_2 \mapsto S_2$. El *modelo Skyrme bebé* y el $\mathbb{C}P^1$ tiene el punto variedad S^2 parametrizado por un isovector escalar $\vec{\phi}$ sujeto a la constricción $|\vec{\phi}|^2 = 1$.

5.1. Soluciones BPS

Las soluciones BPS (soluciones solitón) del modelo sigma no lineal también resuelven la ecuación de movimiento del modelo Skyrme bebé no conmutativo ya que estas extremizan la energía, en el modelo sigma $(2 + 1) - dimensional$ las matrices unitarias $U(n)$ de tamaño $n \times n$ tienen como entradas a operadores además el campo es $\vec{\phi} \in U(\mathbb{C}^n \times \mathcal{H}) = U(\mathcal{H}^{\oplus n})$ nuevamente sujeto a la constricción $\vec{\phi}\vec{\phi}^\dagger = 1_n \otimes 1_{\mathcal{H}} = \phi^\dagger\phi$, luego la acción en el espacio euclideo coincide con el funcional de energía estática definida en un espacio de Fock, esto es:

$$E(\phi) = 2\pi Tr \left([a, \phi]^\dagger [a, \phi] \right) = 2\pi |[a, \phi]|^2 \quad (5.1)$$

note que al extremizar la energía las ecuaciones de movimiento son:

$$0 = [a, \phi^\dagger [a^\dagger, \phi]] + [a^\dagger, \phi^\dagger [a, \phi]] = \phi^\dagger \Delta \phi - \Delta \phi^\dagger \phi. \quad (5.2)$$

donde a^\dagger es el operador de creación y a el de aniquilación, para caracterizar el espacio de soluciones escribimos los operadores en el espacio de configuraciones como $1_n \otimes a^\dagger$ y

$1_n \otimes a$ que tienen invariancia global en el espacio $U(1) \times SU(n) \times SU(n)$ y simetría

$$\phi \rightarrow (V \otimes 1_{\mathcal{H}}) \phi (W \otimes 1_{\mathcal{H}}) \quad (5.3)$$

donde $VV^\dagger = 1_n = WW^\dagger$, luego se proponen configuraciones hermíticas no necesariamente clásicas y que satisfacen las propiedades

$$\phi^\dagger = \phi \Rightarrow \phi^2 = 1_n \otimes 1_{\mathcal{H}} = 1 \quad (5.4)$$

con el campo definido por un proyector hermitiano P como

$$\phi = 1 - 2P = P^\perp - P = e^{i\pi P} \text{ con } P^2 = P \quad (5.5)$$

donde $P^\perp = 1 - P$ es el proyector complemento, en general en el modelo sigma no conmutativo $U(n)$ (con $n > 1$) las configuraciones de campo son

$$\phi = 1 - 2P, \text{ con } (1 - P)\bar{\partial}P = 0 \quad (5.6)$$

el proyector $P(x_1, x_2)$ es una función polinomial $n \times n$ de x_1 y x_2 , la dependencia temporal requiere un boost de Lorentz donde P y la energía con dependencia temporal son

$$P(x_1, x_2) \mapsto P\left(\frac{x_1 - v_{x_1}x_0}{\sqrt{1 - v^2}}, \frac{x_2 - v_{x_2}x_0}{\sqrt{1 - v^2}}\right) \quad y \quad E \mapsto \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}E \quad (5.7)$$

esto también es válido en la teoría de Moyal-deformado vía $x_1 \rightarrow V$ y $x_2 \rightarrow Y$ y la carga topológica queda

$$Q(\phi) = \frac{1}{4}\theta \text{Tr}(\phi \partial_{x_3} \phi \bar{\partial}_{\bar{x}_3} \phi - \phi \bar{\partial}_{\bar{x}_3} \phi \partial_{x_3} \phi) = \text{Tr}(Pa(1 - P)a^\dagger P - Pa^\dagger(1 - P)aP) \quad (5.8)$$

aquí θ es un parámetro de la deformación de Moyal, luego la energía es $\frac{1}{8\pi}E(\phi) = \frac{1}{2}\theta \text{Tr}(\partial_{x_3} \phi \bar{\partial}_{\bar{x}_3} \phi) = \text{Tr}(Pa(1 - P)a^\dagger P + Pa^\dagger(1 - P)aP)$, luego Q y E tienen las propiedades $Q(1 - P) = -Q(P)$ y $E(1 - P) = E(P)$ respectivamente, la última depende de la primera

$$\frac{1}{8\pi}E(P) = Q(P) + 2|[a, P]P|^2 = -Q(P) + 2|P[a, P]|^2 \quad (5.9)$$

en general se escribe $E(P) \geq 8\pi|Q(P)|$, también llamadas *fronteras BPS* para una configuración hermítica con las ecuaciones de movimiento $0 = [\Delta P, P] = [a^\dagger, (1 - P)aP] + [a, Pa^\dagger(1 - P)]$

$$= [a, (1 - P)a^\dagger P] + [a^\dagger, Pa(1 - P)] \quad (5.10)$$

donde el operador Δ actúa como $\Delta \mathcal{O} = [a, [a^\dagger, \mathcal{O}]] = [a^\dagger, [a, \mathcal{O}]]$. Ahora se puede caracterizar el espacio como soluciones *BPS* (solitón) y *Anti-BPS* (anti-solitón):

$$\text{Para : } 0 = [a, P]P = (1 - P)aP \quad \text{Solución BPS} \quad (5.11)$$

$$\text{Para : } 0 = [a^\dagger, P]P = (1 - P)a^\dagger P \quad \text{Solución Anti - BPS} \quad (5.12)$$

el conjunto las soluciones tiene energía

$$\frac{1}{8\pi}E(P) = Q(P) + 2|[a, P]|^2 = -Q(P) + 2|P[a, P]|^2 \quad (5.13)$$

de esta forma los solitones (frontera BPS) tienen energía

$$E(P) \geq 8\pi|Q(P)| \quad (5.14)$$

que al saturarse

$$E(P) = 8\pi Q(P) = 8\pi(Pa(1-P)a^\dagger P) = 8\pi \text{Tr}(Paa^\dagger P - aPa^\dagger). \quad (5.15)$$

En resumen, las soluciones se definen en dos sectores topológicos, un sector describe soluciones BPS y el otro anti-BPS y el conjunto de estas caracterizaran a todo el espacio de soluciones. La conjugación hermítica del proyector $P \leftrightarrow 1 - P$ permite construir todo el espacio de soluciones (simetría del campo $\phi \rightarrow -\phi$), el espacio de soluciones esta conformado por soluciones BPS y anti-BPS.

5.2. Skyrme bebé no conmutativo

El modelo Skyrme bebé es deformado con un mapeo de Moyal que sustituye al término de potencial y dado que las soluciones *BPS* del modelo sigma no lineal también resuelven la ecuación de movimiento del modelo Skyrme bebé, lo que produce una clase de skyrmiones bebé no-conmutativos analíticos y exactos con un límite conmutativo que en principio pueden ser estables.

La variedad del modelo Skyrme bebé no conmutativo

El modelo sigma $\mathbb{C}P^1$ definido en un grassmaniano g representa la variedad del modelo skyrme bebé, esto es:

$$\mathbb{C}P^1 \simeq S^2 \simeq \frac{SU(2)}{U(1)} \simeq \frac{U(2)}{U(1) \times U(1)} \simeq Gr(2, 1) \quad (5.16)$$

donde se ha usado la definición de grassmaniano

$$G(n, k) := \frac{U(n)}{U(k) \times U(n-k)} \simeq \frac{U(\mathbb{C}^n)}{U(\text{im}P) \times U(\text{ker}P)}. \quad (5.17)$$

además el proyector P de rango k está definido en el grassmaniano 5.17. En un grupo o modelo Skyrme bebé grassmaniano existen diversos campos, en particular en este trabajo usamos los siguientes

$$g := \mathbb{R}^{1,2} \longrightarrow U(n) \quad \text{o} \quad Gr(n, k) \quad \text{vía} \quad (x^\mu) \equiv (x^0, x^i) \equiv (x^0, x^1, x^2) \mapsto g(x^0, x^1, x^2). \quad (5.18)$$

Así, la acción del *modelo Skyrme bebé no conmutativo* definida en el grassmaniano 5.17 es:

$$S_{SBNC} = \int d^{1+2}x \left\{ \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu g^\dagger \partial_\nu g + \frac{\kappa^2}{4} [g^\dagger \partial_\mu g, g^\dagger \partial_\nu g] [g^\dagger \partial^\mu g, g^\dagger \partial^\nu g] \right\} \quad (5.19)$$

con $\mu, \nu = 0, 1, 2$, y κ una constante de acoplamiento con dimensiones de longitud, la métrica es $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag} (+1, -1, -1)$ tal que la densidad lagrangiana del Skyrme bebé no conmutativo se escribe:

$$\mathcal{L}_{SBNC} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu g^\dagger \partial_\nu g + \frac{\kappa^2}{4} [g^\dagger \partial_\mu g, g^\dagger \partial_\nu g] [g^\dagger \partial^\mu g, g^\dagger \partial^\nu g] \quad (5.20)$$

al extremizar la acción $\delta S_{SBNC} = 0$ se encuentra que las ecuaciones de movimiento son

$$\partial^\mu j_\mu = 0 \quad \text{para} \quad j_\mu = g^\dagger \partial_\mu g + \kappa^2 [g^\dagger \partial^\nu g, [g^\dagger \partial_\mu g, g^\dagger \partial_\nu g]] \quad (5.21)$$

donde j_μ es la corriente (de skyrmiones bebé). Soluciones a estas ecuaciones de movimiento extremizan la energía, como se ha venido haciendo a lo largo de la tesis nos enfocamos en las soluciones estáticas $\partial_0 g \equiv 0$ donde el funcional de energía estático se escribe

$$E_{SBNC} = \int d^2x \left\{ \frac{1}{2} \partial_i g^\dagger \partial_i g - \frac{\kappa^2}{4} [g^\dagger \partial_i g, g^\dagger \partial_j g] [g^\dagger \partial_i g, g^\dagger \partial_j g] \right\} \quad (5.22)$$

que se simplifica con el grassmaniano $Gr(n, k)$ embebido en $U(n)$ vía la constricción

$$g^2 = 1_n \iff g^\dagger = g \iff g = 1_n - 2P \quad \text{con} \quad P^\dagger = P = P^2 \quad (5.23)$$

así la energía establecida en el grassmaniano se escribe ahora como

$$E_{Gr} = \int d^2x \left\{ 2P_i P_i - 4\kappa^2 [P_i, P_j] [P_i, P_j] \right\} \quad (5.24)$$

donde se introdujo la notación estándar $\partial_i P = P_i$, $\partial_i \partial_j P = P_{ij}$, para $\kappa = 0$ se retoma el modelo sigma. Escribimos $g^\dagger \partial g = -2[\partial P, P]$ en donde $\partial_i (g^\dagger \partial_i g) = -2[P_{ii}, P]$ para expresar las ecuaciones de movimiento definidas en el grassmaniano

$$[P_{ii}, P] + 4\kappa^2 F[P] = 0 \quad (5.25)$$

donde se introdujo la función $F[P]$ para simplificar términos en la ecuación de movimiento, la función $F[P]$ es:

$$F[P] = 2P_{ij} [P_i, P] P_j - \partial_i (P_j P_j) [P_i, P] + P_j [P_{ii}, P] P_j - P_j P_j [P_{ii}, P] - h.c \quad (5.26)$$

soluciones a la ecuación de movimiento extremizan la energía 5.24 definida en el grassmaniano.

5.3. Estabilidad de los Skyrmiones bebé no conmutativos

En esta última parte de la tesis nos enfocamos en el análisis de la estabilidad de los skyrmiones bebé no conmutativos, si los Skyrmiones son estables entonces deben satisfacer $\delta E = 0$ y $\delta^2 E = 0$. El funcional de energía estático definido en el grassmaniano 5.23 es:

$$E = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \partial_i g^\dagger \partial_i g - \frac{\kappa^2}{4} [g^\dagger \partial_i g, g^\dagger \partial_j g] [g^\dagger \partial_i g, g^\dagger \partial_j g] \right) \quad (5.27)$$

con $i = 1, 2$, donde el grassmaniano g está encajado en $U(n)$ vía la restricción

$$g^2 = 1_n \Leftrightarrow g^\dagger = g \Leftrightarrow g = 1_n - 2P \quad \text{con} \quad P^\dagger = P = P^2 \quad (5.28)$$

g es función del proyector P . Para simplificar los cálculos definimos una nueva variable: $A_i \equiv g^{-1} \partial_i g$ para escribir la energía como

$$E = \int d^2x \left(-\frac{1}{2} A_i A_i - \frac{\kappa^2}{4} [A_i, A_j] [A_i, A_j] \right) \quad (5.29)$$

donde $i, j = x_1, x_2$ denotan coordenadas espaciales, lo que sigue es desarrollar las componentes de A donde notamos que $[A_{x_1}, A_{x_1}] = A_{x_1} A_{x_1} - A_{x_1} A_{x_1} = 0$, $[A_{x_2}, A_{x_2}] = 0$ y $[A_{x_1}, A_{x_2}] = -[A_{x_2}, A_{x_1}]$, y entonces la energía se reduce a

$$E = \int d^2x \left(-\frac{1}{2} ((A_{x_1} A_{x_1}) + A_{x_2} A_{x_2}) - \frac{1}{2} [A_{x_1}, A_{x_2}] [A_{x_1}, A_{x_2}] \right)$$

luego mapeamos las coordenadas x_1, x_2 al plano complejo tal que x_3 denota una coordenada compleja; $x_3 \in \mathbb{C}$ e introducimos la notación: $A \equiv A_{x_3} = \frac{1}{2} (A_{x_1} - i A_{x_2})$, $\bar{A} \equiv A_{\bar{x}_3} = \frac{1}{2} (A_{x_1} + i A_{x_2}) = -A^\dagger$ en donde $A_{x_1} = A + \bar{A}$ y $A_{x_2} = i(A - \bar{A})$, lo que se reduce a

$$E = \int d^2x \left(-A\bar{A} - \bar{A}A + 2\kappa^2 [A, \bar{A}]^2 \right). \quad (5.30)$$

Ahora las derivadas parciales se escriben como operadores de creación a^\dagger y aniquilación a en un espacio de Fock

$$\partial_{x_3} = -\frac{1}{\sqrt{2\theta}} [a^\dagger, \cdot], \quad \partial_{\bar{x}_3} = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} [\cdot, a] \quad (5.31)$$

luego hacemos un mapeo de Moyal en 5.30 tal que la integral queda definida como función del producto estrella y entonces como una traza de un operador definido en el espacio de Fock, esto es

$$\int d^2x F_\star(x) = 2\pi\theta \text{Tr}_{\mathcal{H}} f_{op} \quad (5.32)$$

donde θ es un parámetro de la deformación. La energía que resulta de aplicar el mapeo Moyal-Weyl es $E = 2\pi\theta Tr \left\{ -\bar{A}A - A\bar{A} + 2\kappa^2 [A, \bar{A}]^2 \right\}$ en donde usamos la propiedad de la traza $Tr \{ -\bar{A}A - A\bar{A} \} = 2Tr \{ -A\bar{A} \}$ y entonces simplificar 5.30 como:

$$E = 4\pi\theta Tr \left\{ -A\bar{A} + \kappa^2 [A, \bar{A}]^2 \right\} \quad (5.33)$$

que es una energía “deformada” del modelo Skyrme bebé. Las ecuaciones de A y \bar{A} definidas en el grassmaniano $Gr(n, k)$ se escriben específicamente en términos del proyector P tal que

$$\begin{aligned} A &= g\partial_z g = g \left(-\frac{1}{\sqrt{2\theta}} [a^\dagger, g] \right) = -\frac{1}{\sqrt{2\theta}} (1-2P) [a^\dagger, (1-2P)] \\ &= -\frac{(1-2P)}{\sqrt{2\theta}} \{ a^\dagger - 2a^\dagger P - a^\dagger + 2Pa^\dagger \} = -\frac{(1-2P)}{\sqrt{2\theta}} \{ 2[P, a^\dagger] \} \\ \therefore A &= \sqrt{\frac{2}{\theta}} (1-2P) [a^\dagger, P] = \sqrt{\frac{2}{\theta}} \{ (1-P)a^\dagger P + Pa^\dagger(1-P) \} \end{aligned} \quad (5.34)$$

en donde el cálculo $(1-P)Pa^\dagger = Pa^\dagger - P^2a^\dagger = Pa^\dagger - Pa^\dagger = 0$ reduce estas expresiones a

$$A = \sqrt{\frac{2}{\theta}} (1-2P) [a^\dagger, P] = \sqrt{\frac{2}{\theta}} \{ (1-2P)a^\dagger P + Pa^\dagger(1-P) \} \quad (5.35)$$

$$\bar{A} = \sqrt{\frac{2}{\theta}} [a, P] (1-2P) = -\sqrt{\frac{2}{\theta}} \{ (1-P)aP + Pa(1-P) \} \quad (5.36)$$

de modo que los conmutadores definidos por A y \bar{A} y usando propiedades de la traza, se tiene que

$$\begin{aligned} Tr [A, \bar{A}] [A, \bar{A}] &= Tr \left\{ \left(-\frac{2}{\theta} \right)^2 \left((\bar{P}a^\dagger P + Pa^\dagger \bar{P}) (\bar{P}aP + Pa\bar{P}) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (\bar{P}aP + Pa\bar{P}) (\bar{P}a^\dagger P + Pa^\dagger \bar{P}) \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.37)$$

además agrupamos y ordenamos los términos de la traza $Tr [A, \bar{A}]^2$ para llegar a

$$\begin{aligned} Tr [A, \bar{A}]^2 &= \left(\frac{4}{\theta^2} \right) Tr \{ 2(\bar{P}a^\dagger Pa\bar{P}a^\dagger Pa + \bar{P}aPa^\dagger \bar{P}aPa^\dagger - \bar{P}a^\dagger Pa\bar{P}aPa^\dagger - \bar{P}aPa\bar{P}a^\dagger Pa^\dagger) \\ &\quad + 2(Pa^\dagger \bar{P}a - Pa\bar{P}a^\dagger) (\bar{P}a^\dagger Pa - \bar{P}aPa^\dagger) \} + (Pa^\dagger \bar{P}a - Pa\bar{P}a^\dagger) \end{aligned}$$

de modo que el funcional de la energía 5.33 se expresa finalmente como:

$$\begin{aligned} E &= 8\pi Tr \{ (2N+1)P - 2Pa^\dagger Pa \} \\ &\quad + \frac{32\pi\kappa^2}{\theta} Tr \{ \bar{P}a^\dagger Pa\bar{P}a^\dagger Pa + \bar{P}aPa^\dagger \bar{P}aPa - \bar{P}a^\dagger Pa\bar{P}aPa^\dagger - \bar{P}aPa\bar{P}a^\dagger Pa^\dagger \} \end{aligned} \quad (5.38)$$

donde $N \equiv a^\dagger a$ representa el operador número definido en el espacio de Fock y $\bar{P} \equiv 1 - P$ es el proyector complemento definido en el grassmaniano g . En lo que sigue hacemos la variación en la energía $\delta E = 0$ y $\delta^2 E = 0$ en la expresión 5.38 para analizar la estabilidad de los solitones.

5.3.1. Primera variación $\delta E = 0$ con un proyector de rango 1

En esta parte calculamos la primera variación de la energía $\delta E = 0$ la cual es satisfecha por ondas solitarias, por conveniencia usamos un *proyector general de rango uno* definido por

$$P = |\psi\rangle\langle\psi|, \quad \langle\psi|\psi\rangle = 1 \quad (5.39)$$

luego, el término $8\pi Tr \{(2N - 1)P - 2Pa^\dagger Pa\} = 8\pi Tr \{2a^\dagger a P^2 - P - 2Pa^\dagger Pa\}$ que es función de P , en términos del proyector de rango uno 5.39 se escribe

$$\begin{aligned} 8\pi Tr \{(2N - 1)P - 2Pa^\dagger Pa\} &= 8\pi Tr \{2a^\dagger a |\psi\rangle\langle\psi| \\ &\quad - |\psi\rangle\langle\psi| - 2|\psi\rangle\langle\psi| a^\dagger |\psi\rangle\langle\psi| a\} \end{aligned} \quad (5.40)$$

específicamente tenemos que $|\psi\rangle\langle\psi| = |\psi\rangle\langle a^\dagger a|\psi\rangle - |\psi\rangle\langle aa^\dagger|\psi\rangle$ donde nuevamente aparecen los operadores a y a^\dagger luego empleamos las propiedades de la traza y se tiene que

$$\begin{aligned} 8\pi Tr \{(2N - 1)P - 2Pa^\dagger Pa\} &= 8\pi Tr \{|\psi\rangle(2\langle a^\dagger a\rangle - \langle a^\dagger a\rangle + \langle aa^\dagger\rangle - 2\langle a^\dagger\rangle\langle a\rangle)\langle\psi|\} \\ &= 8\pi (\langle a^\dagger a\rangle + \langle aa^\dagger\rangle - 2\langle a^\dagger\rangle\langle a\rangle) \end{aligned}$$

luego agrupamos términos y finalmente se obtiene

$$\begin{aligned} E &= 8\pi \{\langle aa^\dagger\rangle + \langle a^\dagger a\rangle - 2\langle a^\dagger\rangle\langle a\rangle\} + \frac{32\pi\kappa^2}{\theta} (\langle aa^\dagger\rangle^2 + \langle a^\dagger a\rangle^2 \\ &\quad - \langle aa^\dagger\rangle\langle a^\dagger a\rangle - 2\langle aa^\dagger\rangle\langle a\rangle\langle a^\dagger\rangle + \langle aa^\dagger\rangle\langle a^\dagger\rangle\langle a\rangle \\ &\quad - 2\langle a^\dagger a\rangle\langle a^\dagger\rangle\langle a\rangle + \langle a^\dagger a\rangle\langle a\rangle\langle a^\dagger\rangle + 2\langle a^\dagger\rangle\langle a\rangle\langle a^\dagger\rangle\langle a\rangle - 2\langle a\rangle^2\langle a^\dagger\rangle^2 \\ &\quad + \langle a\rangle^2\langle a^{\dagger 2}\rangle + \langle a^2\rangle\langle a^\dagger\rangle^2 - \langle a^2\rangle\langle a^{\dagger 2}\rangle), \end{aligned} \quad (5.41)$$

en donde se ha definido a $\langle\mathcal{O}\rangle \equiv \langle\psi|\psi\rangle$, en seguida introducimos un nuevo término $\langle UV\rangle_c \equiv \langle\psi|UV|\psi\rangle - \langle\psi|U|\psi\rangle\langle\psi|V|\psi\rangle$ para simplificar las expresiones del funcional de energía 5.41 y escribir este en forma más compacta con el término

$$\langle aa^\dagger\rangle + \langle a^\dagger a\rangle - 2\langle a^\dagger\rangle\langle a\rangle = \langle aa^\dagger\rangle + (\langle a^\dagger a\rangle_c + \langle a^\dagger\rangle\langle a\rangle) - 2\langle a^\dagger\rangle\langle a\rangle = 1 + 2\langle a^\dagger a\rangle_c$$

consecuentemente se sigue el mismo procedimiento para el segundo término en 5.41 tal que:

$$\frac{32\pi\kappa^2}{\theta} = \frac{32\pi\kappa^2}{\theta} \left\{ (\langle a^\dagger a\rangle_c - \langle aa^\dagger\rangle_c)^2 + \langle a^\dagger a\rangle_c \langle aa^\dagger\rangle_c - \langle a^{\dagger 2}\rangle_c \langle a^2\rangle_c \right\} \quad (5.42)$$

así el funcional de energía 5.41 se reduce a la expresión

$$E = 8\pi \{1 + 2\langle a^\dagger a\rangle_c\} + \frac{32\pi\kappa^2}{\theta} \left\{ (\langle a^\dagger a\rangle_c - \langle aa^\dagger\rangle_c)^2 + \langle a^\dagger a\rangle_c \langle aa^\dagger\rangle_c - \langle a^{\dagger 2}\rangle_c \langle a^2\rangle_c \right\}. \quad (5.43)$$

Podemos usar otras propiedades para describir el funcional de energía 5.43, en particular nosotros usamos la propiedad

$$\langle aa^\dagger \rangle \langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle = \langle aa^\dagger \rangle Tr(Pa^\dagger Pa) = \langle aa^\dagger \rangle Tr(PaPa^\dagger) = \langle aa^\dagger \rangle \langle a \rangle \langle a^\dagger \rangle \quad (5.44)$$

el término $2\langle a \rangle \langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle \langle a^\dagger \rangle - \langle a \rangle^2 \langle a^\dagger \rangle^2 = \langle a \rangle^2 \langle a^\dagger \rangle^2$ reduce la segunda expresión en el funcional de energía lo que conduce a la expresión

$$E = 8\pi \{ \langle aa^\dagger \rangle + \langle a^\dagger a \rangle - 2\langle a^\dagger \rangle \langle a \rangle \} + 32\pi \frac{\kappa^2}{\theta} (\langle aa^\dagger \rangle^2 + \langle a^\dagger a \rangle^2 - \langle aa^\dagger \rangle \langle a^\dagger a \rangle - \langle a^2 \rangle \langle a^{\dagger 2} \rangle - \langle aa^\dagger \rangle \langle a \rangle \langle a^\dagger \rangle - \langle a^\dagger a \rangle \langle a \rangle \langle a^\dagger \rangle + \langle a^2 \rangle \langle a^\dagger \rangle^2 + \langle a \rangle^2 \langle a^{\dagger 2} \rangle) \quad (5.45)$$

que en forma compacta se escribe

$$E = 8\pi \{ 1 + 2\langle a^\dagger a \rangle_c \} + \frac{32\pi\kappa^2}{\theta} \{ (\langle a^\dagger a \rangle_c - \langle aa^\dagger \rangle_c)^2 + \langle a^\dagger a \rangle_c \langle aa^\dagger \rangle_c - \langle a^{\dagger 2} \rangle_c \langle a^2 \rangle_c \}$$

luego se introducen nuevas propiedades $\langle aa^\dagger \rangle_c - \langle a^\dagger a \rangle_c = \langle \psi | [a, a^\dagger] | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1$ y $\langle aa^\dagger \rangle_c = 1 + \langle a^\dagger a \rangle_c$ lo que finalmente lleva a la expresión del funcional de energía

$$E = 8\pi \{ 1 + 2\langle a^\dagger a \rangle_c \} + \frac{32\pi\kappa^2}{\theta} \{ 1 + \langle a^\dagger a \rangle_c + \langle a^\dagger a \rangle_c^2 - \langle a^{\dagger 2} \rangle_c \langle a^2 \rangle_c \}. \quad (5.46)$$

El primer término proviene de la parte conmutativa pero el resto depende del parámetro no conmutativo, la primera variación permite calcular las ecuaciones de energía ya que se ha hecho una extremización de esta, se puede decir que por el momento se han encontrado soluciones onda solitaria, pero aún no sabemos si la interacción de estas no altera sus propiedades durante colisiones de estas, para ello necesitamos calcular la segunda variación de la energía para estudiar la estabilidad de las ondas solitarias y si es el caso entonces se tienen solitones estables en el modelo.

5.3.2. Segunda variación $\delta^2 E = 0$

Para analizar la estabilidad de los skyrmiones bebé no conmutativos ahora hacemos una pequeña perturbación a la solución estática y después calculamos la segunda variación de la energía $\delta^2 E = 0$. La perturbación que nos interesa estudiar es a segundo orden e introducimos un proyector P^k de rango $-k$ que decae en $k - copias$ del P^1 y entonces la carga topológica en $Q = 1$ (un skyrmión bebé), el grassmaniano es $Gr(P^1)$.

Perturbaciones impares dentro del Grassmaniano

Para hacer la segunda variación en el funcional de energía 5.38 introducimos perturbaciones impares dentro del grassmaniano 5.23, para esto primero parametrizamos los elementos del grupo multiplicativo (en el grassmaniano) como sigue

$$\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}\gamma, \quad \text{con} \quad \gamma = e^\phi \quad (5.47)$$

aquí γ es una “pequeña” perturbación del grupo, con la propiedad $g^\dagger = g^{-1}$ de modo que se tiene $\phi^\dagger = -\phi$ tal que los productos $A_i = g^{-1}\partial_i g$ y el P transforman como

$$A_i \longrightarrow A_i + D_i\phi + \frac{1}{2} [D_i\phi, \phi] + \mathcal{O}(\phi^3) \quad (5.48)$$

$$P \longrightarrow P + \frac{1}{2} [P, \phi] + \frac{1}{8} [[P, \phi], \phi] + \dots \quad (5.49)$$

donde $D_i\phi \equiv \partial_i\phi + [A_i, \phi]$, después hacemos un cambio de variable $B_i \equiv D_i\phi$ tal que A_i tiene la forma

$$\begin{aligned} A_i &\longrightarrow A_i + D_i\phi + \frac{1}{2} [D_i\phi, \phi] + \mathcal{O}(\phi^3) \\ &= A_i + B_i + \frac{1}{2} [B_i, \phi] \end{aligned}$$

con $i = x_1, x_2, x_3$ (x_3 complejo), se desprecian los términos de orden superior $n \geq 3$ en ϕ^n dado que nos interesa estudiar la variación a segundo orden, por lo que la transformación se escribe como: $A \longrightarrow A + B + \frac{1}{2} [B, \phi]$ y lo mismo ocurre para $\bar{A} \longrightarrow \bar{A} + \bar{B} + \frac{1}{2} [\bar{B}, \phi]$, ahora los productos de A con \bar{A} se describen como

$$A\bar{A} \longrightarrow A\bar{A} + A\bar{B} + B\bar{A} + B\bar{B} + \frac{A}{2} [\bar{B}, \phi] + \frac{1}{2} [B, \phi] \bar{A} \quad (5.50)$$

$$\bar{A}A \longrightarrow \bar{A}A + \bar{A}B + \bar{B}A + \bar{B}B + \frac{\bar{A}}{2} [B, \phi] + \frac{1}{2} [\bar{B}, \phi] A \quad (5.51)$$

donde nuevamente se despreciaron los términos que contienen polinomios mayores de ϕ^2 , por lo tanto la energía 5.38 perturbada se expresa como

$$\begin{aligned} E[g\gamma] &= 4\pi\theta Tr \left\{ -A\bar{A} - (A\bar{B} + B\bar{A}) - \frac{A}{2} [\bar{B}, \phi] - \frac{1}{2} [B, \phi] \bar{A} + \kappa^2 ([A, \bar{A}] + [A, \bar{B}] \right. \\ &\quad \left. [B, \bar{A}] + [B, \bar{B}] + \frac{1}{2} [[B, \phi], \bar{A}] + \frac{1}{2} [A, [\bar{B}, \phi]])^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.52)$$

donde identificamos a $(A\bar{B} + B\bar{A}) = 0$ como la ecuación de movimiento para los Skyrmiones, después usamos la propiedad de la traza $Tr\{AB\} = Tr\{BA\}$ y agrupamos términos en la ecuación anterior y obtenemos la expresión

$$\begin{aligned} E[g\gamma] &\approx 4\pi\theta Tr \left\{ -A\bar{A} + \kappa^2 [A, \bar{A}]^2 \right\} + 4\pi\theta Tr \left\{ -B\bar{B} - A\bar{B} - B\bar{A} - \frac{1}{2} A [\bar{B}, \phi] - \frac{1}{2} [B, \phi] \bar{A} \right. \\ &\quad \left. + \kappa^2 \{ (2 [A, \bar{A}] [B, \bar{A}] + [A, \bar{A}] [[B, \phi], \bar{A}] + [A, \bar{A}] [A, [\bar{B}, \phi]]) + [A, \bar{A}] [A, \bar{B}] + \right. \\ &\quad \left. [A, \bar{A}] [B, \bar{B}] + [A, \bar{B}] [A, \bar{A}] + [A, \bar{B}] [A, \bar{B}] + [A, \bar{B}] [B, \bar{A}] + [B, \bar{A}] [A, \bar{B}] \right. \\ &\quad \left. [B, \bar{A}] [B, \bar{A}] + [B, \bar{B}] [A, \bar{A}] \} \right\} \end{aligned} \quad (5.53)$$

reducimos términos e introducimos la notación $\bar{C} \equiv \bar{A} + 2\kappa^2 [\bar{A}, [\bar{A}, A]]$ y $C \equiv A + 2\kappa^2 [A, [A, \bar{A}]]$, luego el funcional de la energía perturbada ahora se escribe

$$E[g\gamma] \approx E[g] + 4\pi\theta Tr \left\{ -B\bar{B} + \frac{[\bar{C}, \phi] B}{2} + \frac{[C, \phi] \bar{B}}{2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& +4\pi\theta\kappa^2 Tr \{ 2 [A, \bar{A}] [A, \bar{B}] + 2 [A, \bar{A}] [B, \bar{B}] + 2 [A, \bar{B}] [B, \bar{A}] \\
& \quad + [A, \bar{B}] [A, \bar{B}] + [B, \bar{A}] [B, \bar{A}] \} \tag{5.54}
\end{aligned}$$

finalmente la expresión de la energía que resulta es:

$$\begin{aligned}
E[g\gamma] = E[g] + 2\pi\theta Tr \{ -2B\bar{B} + [C, \phi] \bar{B} + [\bar{C}, \phi] B \} + 8\pi\theta\kappa^2 Tr \{ 2B\bar{A}\bar{A}\bar{B} + 2\bar{B}A\bar{A}B \\
- B\bar{A}\bar{A}B - \bar{B}A\bar{A}B - B\bar{A}\bar{B} - \bar{B}\bar{A}A\bar{B} + B\bar{A}B\bar{A} + \bar{B}A\bar{B}A - B\bar{A}\bar{B}A - B\bar{A}\bar{B}\bar{A} \}. \tag{5.55}
\end{aligned}$$

ahora calculamos la segunda variación de la energía perturbada para analizar la estabilidad de los skyrmiones bebé no conmutativos. Como ya hemos visto, podemos caracterizar al espacio de soluciones por soluciones BPS (solitones) y anti-BPS (anti-solitones) dado que si se conoce una de ellas la otra se obtiene a partir de esta, específicamente introducimos las soluciones BPS dentro del grassmaniano 5.47 con $Gr(1) : P = |0\rangle\langle 0|$ donde la perturbación más general en los campos ϕ es como sigue

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \{ \phi_n |0\rangle\langle n| - \phi_n^* |n\rangle\langle 0| \} \tag{5.56}$$

luego escribimos $A = g\partial_{x_3}^{-1}g = g\partial_{x_3}g$ con $g = 1 - 2P$ tal que

$$\begin{aligned}
A &= (1 - 2P) \partial_{x_3} (1 - 2P) = -2(1 - 2P) \partial_{x_3} P = -2(1 - 2P) \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2\theta}} [a^\dagger, P] \right\} \\
&= \sqrt{\frac{2}{\theta}} \{ (1 - P) a^\dagger P + P a^\dagger (1 - P) \}
\end{aligned}$$

y sustituyendo el proyector $P = |0\rangle\langle 0|$ en la ecuación anterior encontramos que $A = \sqrt{\frac{2}{\theta}} |1\rangle\langle 0|$, luego para \bar{A} se tiene que

$$\bar{A} = -A^\dagger = - (g^{-1} \partial_{x_3} g)^\dagger = - (g \partial_{x_3} g)^\dagger = - (\partial_{x_3} g)^\dagger g^\dagger = - (\partial_{x_3} g) g \quad \text{con} \quad g = 1 - 2P$$

$$\begin{aligned}
\bar{A} &= - \{ \partial_{x_3} (1 - 2P) \} (1 - 2P) = +2 (\partial_{x_3} P) (1 - 2P) = 2 \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\theta}} [a, P] \right\} \\
&= -\sqrt{\frac{2}{\theta}} \{ (1 - P) a P + P a (1 - P) \}
\end{aligned}$$

nuevamente sustituimos $P = |0\rangle\langle 0|$ en A tal que resulta $A = -\sqrt{\frac{2}{\theta}} |0\rangle\langle 1|$, así las cantidades más relevantes son:

$$A = \sqrt{\frac{2}{\theta}} |1\rangle\langle 0|, \quad \bar{A} = -\sqrt{\frac{2}{\theta}} |0\rangle\langle 1|, \quad C = \left(1 + \frac{8\kappa^2}{\theta} \right) A, \quad \bar{C} = \left(1 + \frac{8\kappa^2}{\theta} \right) \bar{A} \tag{5.57}$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \phi_n | 1 \rangle \langle n | + \sqrt{n} \phi_n | 0 \rangle \langle n-1 | - 2\delta_{n,1} \phi_1 | 0 \rangle \langle 0 | + \sqrt{n+1} \phi_n^* | n+1 \rangle \langle 0 | \right\} \quad (5.58)$$

$$[C, \phi] = \sqrt{\frac{2}{\theta}} \left(1 + \frac{8\kappa^2}{\theta} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \{ \phi_n | 1 \rangle \langle n | - \delta_{n,1} \phi_1 | 0 \rangle \langle 0 | \} \quad (5.59)$$

ahora introducimos las relaciones adicionales: $\bar{B} = -B^\dagger$ y $[\bar{C}, \phi] = -[C, \phi]^\dagger$ con

$$B^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(| n \rangle \langle 1 | \phi_n^\dagger + \sqrt{n} | n-1 \rangle \langle 0 | \phi_n^\dagger - 2 | 0 \rangle \langle 0 | \delta_{1,n} \phi_1^\dagger + \sqrt{n+1} | 0 \rangle \langle n+1 | (\phi_n^*)^\dagger \right) \quad (5.60)$$

además

$$[\bar{C}, \phi] = -[C, \phi]^\dagger = - \left(\sqrt{\frac{2}{\theta}} \left(1 + \frac{8\kappa^2}{\theta} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \{ \phi_n | 1 \rangle \langle n | - \delta_{n,1} \phi_1 | 0 \rangle \langle 0 | \} \right)^\dagger$$

$$[\bar{C}, \phi] = -\sqrt{\frac{2}{\theta}} \left(1 + \frac{8\kappa^2}{\theta} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ | n \rangle \langle 1 | \phi_n^\dagger - | 0 \rangle \langle 0 | \phi_1^\dagger \delta_{1,n} \right\} \quad (5.61)$$

para la energía perturbada sustituimos las expresiones 5.57, 5.58 y 5.57 además de desarrollar los productos $B\bar{B} = -BB^\dagger$ tal que se tiene el término

$$2\pi\theta Tr \left\{ -2B\bar{B} + [C, \phi] \bar{B} + [\bar{C}, \phi] B \right\} = 4\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} n |\phi_n|^2 - |\phi_1|^2 \right) - \frac{32\pi\kappa^2}{\theta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n|^2 + |\phi_1|^2 \right)$$

donde los productos $\bar{A}A = -\frac{2}{\theta} |0\rangle\langle 0|$, $A\bar{A} = -\frac{2}{\theta} |1\rangle\langle 1|$ y $AA = \bar{A}\bar{A} = 0$ reducen al conmutador como

$$[A, \bar{A}]^2 = \frac{4}{\theta^2} (|1\rangle\langle 1| - |0\rangle\langle 0|) \quad (5.62)$$

y consecuentemente el funcional de energía (5.33) con el proyector definido (5.39), queda determinado por

$$E[g] = 4\pi\theta Tr \left\{ \frac{2}{\theta} |1\rangle\langle 1| + \frac{4\kappa^2}{\theta^2} |1\rangle\langle 1| + \frac{4\kappa^2}{\theta^2} |0\rangle\langle 0| \right\}$$

$$\therefore E[g] = 8\pi \left(1 + \frac{4\kappa^2}{\theta} \right) \quad (5.63)$$

que es la energía definida en el grassmaniano no perturbado, ahora solamente falta calcular el resto de los elementos en la segunda varicación. Los elementos que definen el funcional de energía 5.55 se reducen a las siguientes expresiones:

$$8\pi\kappa^2 Tr \left\{ -B\bar{A}\bar{A}B \right\} = 0 \quad (5.64)$$

$$8\pi\kappa^2 Tr \{-\bar{B}A\bar{A}\bar{B}\} = 0 \quad (5.65)$$

$$8\pi\kappa^2 Tr \{2B\bar{A}\bar{A}\bar{B}\} = \frac{16\pi\kappa^2}{\theta^2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) |\phi_n|^2 + |\phi_1|^2 \right) \quad (5.66)$$

$$8\pi\kappa^2 Tr \{2\bar{B}A\bar{A}B\} = \frac{16\pi\kappa^2}{\theta^2} \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n|^2 \quad (5.67)$$

$$8\pi\kappa^2 Tr \{-BA\bar{A}\bar{B}\} = -\frac{8\pi\kappa^2}{\theta^2} \{|\phi_1|^2 + 2|\phi_2|^2\} \quad (5.68)$$

$$8\pi\kappa^2 Tr \{-\bar{B}\bar{A}AB\} = -\frac{8\pi\kappa^2}{\theta^2} \sum_{n=1}^{\infty} n |\phi_n|^2 \quad (5.69)$$

$$8\pi\kappa^2 Tr \{B\bar{A}B\bar{A}\} = 0 \quad (5.70)$$

$$8\pi\kappa^2 Tr \{\bar{B}A\bar{B}A\} = 0 \quad (5.71)$$

$$8\pi\kappa^2 Tr \{-B\bar{A}\bar{B}A\} = \frac{8\pi\kappa^2}{\theta^2} |\phi_1|^2 \quad (5.72)$$

$$8\pi\kappa^2 Tr \{-BA\bar{B}\bar{A}\} = \frac{8\pi\kappa^2}{\theta^2} |\phi_1|^2 \quad (5.73)$$

al sustituir todos estos términos en la expresión de la energía (5.55) y ordenar términos, se tiene entonces que

$$\begin{aligned} &= 4\pi \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \{n |\phi_n|^2 - |\phi_1|^2\} - 32\pi \frac{\kappa^2}{\theta} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n|^2 + |\phi_1|^2 \right\} \right\} \\ &\quad + 8\pi \frac{\kappa^2}{\theta^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (n+4) |\phi_n|^2 + 3|\phi_1|^2 - 2|\phi_2|^2 \right\} \end{aligned}$$

así la energía perturbada es la siguiente:

$$\begin{aligned} E[g\gamma] &\approx 8\pi \left(1 + \frac{4\kappa^2}{\theta} \right) + 4\pi \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \{n |\phi_n|^2 - |\phi_1|^2\} - 32\pi \frac{\kappa^2}{\theta} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\phi_n|^2 + |\phi_1|^2 \right\} \right\} \\ &\quad + 8\pi \frac{\kappa^2}{\theta^2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (n+4) |\phi_n|^2 + 3|\phi_1|^2 - 2|\phi_2|^2 \right\} \quad (5.74) \end{aligned}$$

que se reduce a la expresión:

$$E[[g\gamma]] = 8\pi \left(1 + \frac{4\kappa^2}{\theta} \right) + 8\pi |\phi_2|^2 + 4\pi \left(1 + \frac{2\kappa^2}{\theta} \right) \sum_{n=3}^{\infty} n |\phi_n|^2 \quad (5.75)$$

donde se observa que el primer término es la energía definida en el grassmaniano g (sin perturbar). La segunda variación del funcional de energía indica que se tienen soluciones

tipo solitón que son estables a segundo orden en la perturbación, luego los términos que no contienen al parámetro θ son los elementos de la energía conmutativa (se tienen solitones no estables) y los que sí dependen provienen de la no conmutatividad (estabilizan a las solitones). Al construir estas soluciones se puede interpretar como una dispersión donde los solitones preservan sus propiedades antes y después de choque, entonces se asimila a un choque elástico la cual es una propiedades de los solitones estables.

Conclusiones

En teoría de campos, modelos $(1 + 1)$ -dimensionales con estructuras lagrangianas que tienen como ecuación de movimiento una ecuación de onda no lineal, admiten soluciones *onda solitaria* de energía finita localizada, y etiquetada por una carga topológica Q , que en esencia está dada por la diferencia de valores de vacío. Estas soluciones en algunos modelos tienen la propiedad adicional de que preservan su perfil de densidad de energía después de interactuar unas con otras, en este sentido son estables y se llaman *solitones*. La teoría ϕ^4 tiene soluciones onda solitaria que al interactuar no preservan su perfil de densidad de energía y pueden incluso emitir radiación, por lo que son soluciones inestables y entonces no son solitones, el modelo tiene sólo dos soluciones de vacío. Un modelo que sí tiene soluciones tipo solitón es el *seno-Gordon*, con un potencial que contiene un número infinito de vacíos y por tanto admite soluciones multisolitónicas, las cuales se pueden considerar como formadas por N solitones básicos. La densidad de energía de estos solitones básicos se mantiene en perfil y valor, después de que interactúan (evolución temporal de la solución multisolitónica) ya que las soluciones son estables. La interacción se puede interpretar físicamente como una dispersión normal o inversa, es decir, se asemeja a los choques elásticos de partículas. La posición donde la densidad de energía es máxima coincide con el punto donde ocurre la torcedura en la interpolación entre vacíos, que es la posición del kink o antikink. Como discutimos, es posible reformular el modelo seno-Gordon en términos de dos campos escalares reales constreñidos al círculo S^1 . Las soluciones solitónicas están ahora etiquetados con la primera clase de homotopía de S^1 , como consecuencia de compactificar el espacio al círculo S^1 . La compactificación es motivada por el comportamiento asintótico del vector campo $\phi(\infty) = \phi(-\infty)$. El mapeo está dado por el vector campo del círculo S^1 a otro círculo S^1 y la primera clase de homotopía es $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, que en esencia se identifica con Q .

El modelo sigma no-lineal $O(3)$ en $(2 + 1)$ -dimensiones admite ondas solitarias, pero estas son inestables y por tanto no son solitones, ya que no preservan sus perfiles de energía antes y después de interactuar unas con otras. La existencia de soluciones ondas solitarias se puede entender, porque la parte espacial del espacio-tiempo se compactifica a la S^2 esfera, mientras que los 3 campos del modelo parametrizan también una S^2 esfera, así los campos ϕ son mapeos de S^2 en S^2 cuyo resultado está descrito por el grupo de homotopía $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$. Mostramos también que el modelo $O(3)$ es equivalente al modelo sigma no lineal $\mathbb{C}P^1$ y por lo tanto este modelo también admite soluciones tipo onda solitaria. Mediante el teorema de Derrick mostramos que estas ondas solitarias son

invariantes ante transformaciones de escala, lo cual nos lleva a la conclusión de que las ondas solitarias de estos modelos, no son estables.

El modelo Skyrme $(3 + 1)$ -dimensional está compuesto por el modelo sigma $O(4)$ y otros términos que estabilizan a las soluciones. Realizando una reducción dimensional en una dimensión espacial se obtiene un modelo análogo conocido como el modelo *Skyrme bebé* en $(2 + 1)$ -dimensiones. Este modelo admite soluciones tipo onda solitaria pero estas son inestables, por lo que normalmente se le agregan términos de potencial (a mano) al modelo para estabilizarlas. El modelo *Skyrme bebé no conmutativo* fue propuesto como un modelo sin términos de potencial con la idea de que la deformación inducida por el mapeo de Moyal, represente una alternativa para estabilizar a los skyrmiones bebé, ya que las soluciones BPS (solitones) satisfacen las ecuaciones de movimiento en el skyrme bebé conmutativo así como el no conmutativo y se puede generar el espectro de soluciones al escribirlas en términos de operadores de creación y aniquilación en un espacio de Fock. Para discernir sobre esta idea, en este trabajo hicimos la primera (δE) y segunda $(\delta^2 E)$ variación de la energía estática (energía de las ondas solitarias), para corroborar si éstas son estables en el sentido de que preservan sus perfiles en la densidad de energía ante perturbaciones pequeñas. Dado que para un proyector de rango- k la solución P^k decae en k -copias de P^1 y a su vez la solución con $k = 1$ tiene una carga topológica $Q = 1$ (un skyrmión bebé), nos concentramos en estudiar la estabilidad de las soluciones con $k = 1$. El resultado obtenido es que estas soluciones son estables y queda como tarea pendiente, estudiar la estabilidad de soluciones con $k > 1$. En conclusión, la no conmutatividad plantea una nueva forma de estabilizar a los skyrmiones bebé, como alternativa a la forma usual de introducir un término de potencial para romper la invariancia de escala.



Modelo Skyrme

Física de partículas

En 1961 el físico inglés Tony Hilton Royle Skyrme (1922-1987) propuso el *modelo Skyrme* $(3 + 1)$ -dimensional el cual admite soluciones tipo solitón llamadas *Skyrmiones*, para describir un modelo de bariones que permitiera describir la interacción entre nucleones y donde el número bariónico es asociado a la carga topológica Q de los skyrmiones. El modelo se puede considerar como el posible límite de bajas energías de la Cromodinámica Cuántica. Hagamos un recuento breve de los problema que llevaron a proponer este modelo. En la figura [5.1] se muestra la clasificación de las partículas, las cuales están divididas en tres grupos: hadrones, leptones y partículas de fuerza. Los hadrones están constituidos por quarks y son de dos tipos:

1. **Bariones:** Compuestos por 3 quarks. Los más representativos por formar el núcleo atómico son los neutrones y los protones, pero existe un gran número de bariones, aunque todos inestables. Estas partículas tienen carga bariónica $B = \pm 1$ y se comportan como fermiones.
2. **Mesones:** Compuestos por un quark y un antiquark. Tienen número bariónico $B = 0$ y se comportan como bosones. Los piones son ejemplos de estas partículas.

Los leptones son partículas que carecen de sub-estructura, como es el caso del electrón. Las partículas portadoras de fuerza son las encargadas de la interacción, ejemplos de estas partículas son los gluones y el fotón. Los gluones actúan sobre los quarks. Los quarks son partículas fundamentales que a su vez forman otras partículas como los protones y neutrones e interactúan a través de los gluones, existen 6 tipos de quarks:

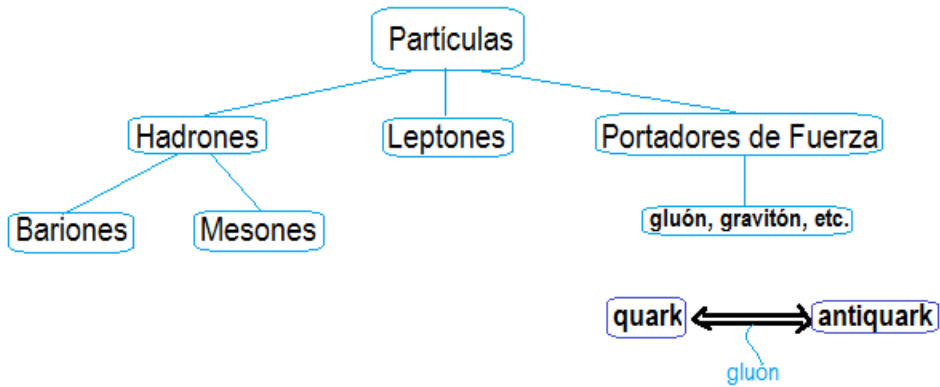


Figura A.1: Clasificación de partículas. En la interacción quark-antiquark el portador de fuerza es el gluón

tres de espín $\frac{1}{2}$, llamados: *up*, *charm* y *top*, y tres con espín $-\frac{1}{2}$ llamados: *down*, *strange* y *bottom*. Relevante para nuestra discusión está mencionar que se conocen tres tipos de decaimientos débiles: los *leptónicos* donde solamente hay interacción entre leptones, *semileptónicos* en el que interactúan leptones y hadrones y *hadrónicos* en donde solamente hay interacción entre hadrones.

	I	II	III		
QUARKS	u <i>up</i>	c <i>charm</i>	t <i>top</i>	γ fotón	Fuerza electromagnética
	d <i>down</i>	s <i>strange</i>	b <i>bottom</i>	g gluón	Fuerza nuclear fuerte
LEPTONES	ν_e neutrino electrón	ν_μ neutrino muón	ν_τ neutrino tau	Z^0 bosón Z	Fuerza nuclear débil
	e electrón	μ mu	τ tau	W^\pm bosón W	Fuerza nuclear débil

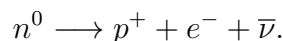
Bosones

Figura A.2: Clasificación de partículas.

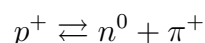
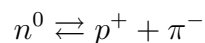
Núcleo atómico

La estabilidad de los núcleos atómicos depende del número de protones y neutrones que contiene, se ha observado que los núcleos que contienen un número pequeño de

protones y neutrones son estables pero ello no ocurre conforme aumenta este número, por otro lado, la fuerza fuerte es la que mantiene unidos a los protones y neutrones aquí el pión juega un papel muy importante para que el núcleo sea estable, por esta razón ha sido muy estudiado. Un protón aislado no decae, mientras que un neutrón aislado se desintegra y presenta una interacción débil, esto es:



Sin embargo cuando estas partículas están dentro ambas pueden decaer y estos decaimientos son de la forma:



los cuales ocurren con mucha frecuencia dentro del núcleo, y se dan en un lapso de tiempo muy pequeño.

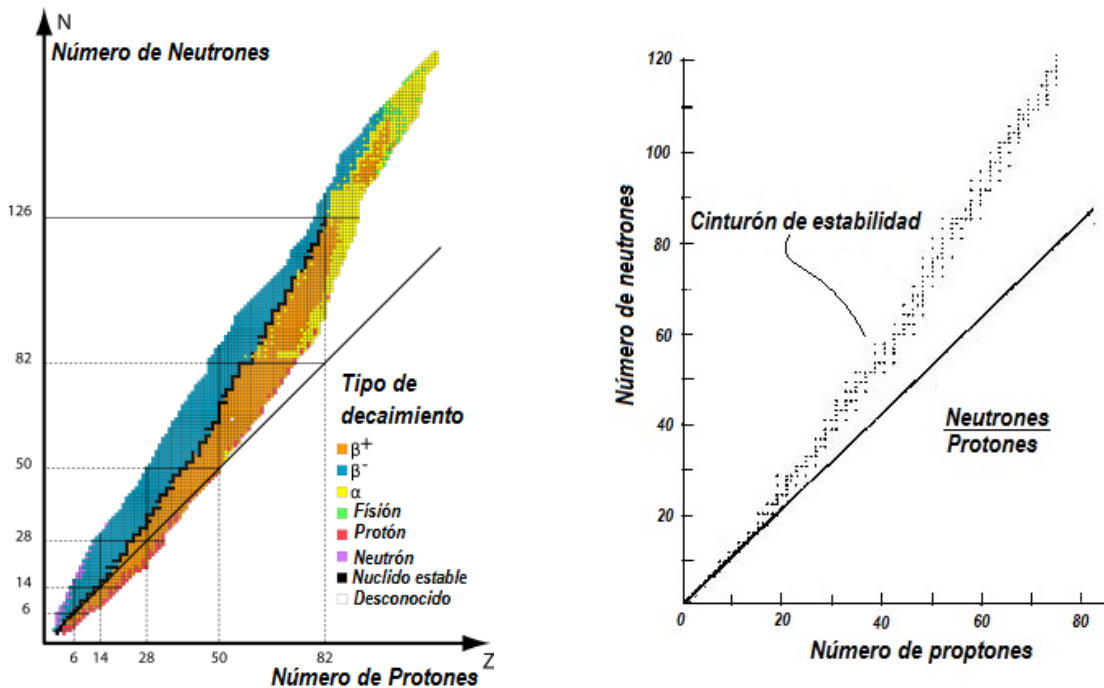


Figura A.3: Decaimientos (primera gráfica) y la estabilidad en el núcleo (segunda gráfica).

Modelo Skyrme

El *modelo Skyrme* es una teoría de campo no lineal con soluciones solitónicas llamadas *Skyrmiones*, es una teoría efectiva de bajas energías de la Cromodinámica Cuántica que describe bariones en una fase débilmente acoplada, la cuantización semi-clásica del modelo es muy exitosa en la descripción de las propiedades fenomenológicas de bariones

en la región de baja energía. Originalmente el modelo Skyrme $SU(2)$ se construyó con un campo unitario: $U(t, x_i)$ con $i = 1, 2, 3$ (el campo Skyrme), en una representación fundamental del grupo $SU(2)$, con una condición de frontera natural: $U \rightarrow 1$ en $|x_i| \rightarrow \infty$. El campo unitario U representa un mapeo topológico $S^3 \rightarrow S^3$ con un número de enrollamiento entero Q , que clasifica los sectores solitónicos del modelo (el número bariónico B se identifica con la carga topológica Q). El modelo se puede generalizar a los grupos $SU(N)$, las versiones del modelo Skyrme $SU(2)$ y $SU(3)$ se pueden cuantizar canónicamente, donde se tienen nuevos términos en el lagrangiano, relacionados con las correcciones cuánticas para la masa de los skyrmiones que restauran la estabilidad de los solitones que se pierde durante la aproximación semi-clásica, llevandonos a la conclusión de que en cierta forma los Skyrmiones son estables (en un rango de tamaño del solitón).

Modelo Skyrme SU(2)

Para el modelo Skyrme con dos sabores (dos quarks) se introduce el modelo sigma no lineal tal que los campos son identificados con los mesones ligeros o piones $\vec{\pi}(\vec{x})$. En términos del campo unitario (que pertenece a $SU(2)$) se tiene que

$$U(\vec{x}) = \exp\left(\frac{i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}(\vec{x})}{f_\pi}\right),$$

donde $\vec{\tau}$ es un isovector cuyas componente son las matrices de Pauli¹ y f_π es la constante de decaimiento del pión ($\pi \rightarrow \mu + \nu$), entonces la densidad lagrangiana (modelo sigma σ) de este modelo es:

$$\mathcal{L}_\sigma = -\frac{f_\pi^2}{16} \text{Tr} \left[\partial_\mu U (\partial^\mu U)^\dagger \right], \quad (\text{A.1})$$

la cual describe propiedades de los piones, pero sus soluciones tipo onda solitaria son inestables. Para remediar esta característica Skyrme propuso agregar un término de cuarto orden en sus derivadas espaciales y cuadrático en las temporales, a este término se le conoce como el término Skyrme:

$$\mathcal{L}_{Sk} = \frac{1}{32e^2} \text{Tr} \left([U^\dagger \partial_\mu U, U^\dagger \partial_\nu U]^2 \right), \quad (\text{A.2})$$

donde e es una constante de acoplamiento adimensional. El modelo con soluciones estables ahora está descrito por la densidad lagrangiana de bariones $\mathcal{L} = \mathcal{L}_\sigma + \mathcal{L}_{Sk}$, esto es:

$$S_{Barion} = \int d^3x \left\{ -\frac{f_\pi^2}{16} \text{Tr} (\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) + \frac{1}{32e^2} \text{Tr} [U^\dagger \partial_\mu U, U^\dagger \partial_\nu U]^2 \right\}. \quad (\text{A.3})$$

La simetría de lagrangiano Skyrme es $(SU(2) \times SU(2)) / \mathbb{Z}_2 \cong SO(4)$ que corresponde a las transformaciones $U \mapsto \mathcal{O}_1 U \mathcal{O}_2$ donde \mathcal{O}_1 y \mathcal{O}_2 representan elementos constantes de

¹Las matrices de Pauli son: $\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ y $\tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$SU(2)$, la otra condición de frontera es $U(\infty) = 1_2$ y al evaluar el campo Skyrme en esta se tiene un rompimiento espontáneamente en la simetría del lagrangiano Skyrme a una simetría iso-espín $SO(3)$. Como resultado de la conjugación

$$U \mapsto \mathcal{O}U\mathcal{O}^\dagger, \quad \mathcal{O} \in SU(2), \quad (\text{A.4})$$

la teoría del pión no lineal ahora tiene el campo Skyrme

$$U = \sigma + \frac{i}{f_\pi^2} \vec{\pi} \cdot \vec{\tau}, \quad (\text{A.5})$$

donde $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ (tripleto para los campos del pión) y σ es un campo adicional determinado por los campos del pión sujeto a la restricción $\sigma^2 + \vec{\pi} \cdot \vec{\pi} = 1$. Como consecuencia de $U \in SU(2)$, el signo de σ se determina para establecer la continuidad del campo y establecer las nuevas condiciones de frontera $\pi(\infty) = 0$, $\sigma(\infty) = 1$.

A menudo se escribe la acción del modelo Skyrme en términos de una corriente $R_\mu = (\partial_\mu U) U^\dagger$, de $SU(2)$, con la cual el lagrangiano queda como

$$S_{\text{Skyrme}} = \int \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} (R_\mu R^\mu) + \frac{1}{16} \text{Tr} ([R_\mu, R_\nu] [R^\mu, R^\nu]) \right\} d^3 x_i. \quad (\text{A.6})$$

Es claro que en esta acción se han fijado los valores de las constantes de acoplamiento. Las ecuaciones de movimiento que se obtienen para el modelo son

$$\partial_\mu \left(R^\mu + \frac{1}{4} [R^\nu, [R_\nu, R^\mu]] \right) = 0, \quad (\text{A.7})$$

la cual es una *ecuación de onda no lineal* y representa una ecuación análoga a la de conservación de corriente si se escribe en la forma $\partial_\mu \tilde{R}^\mu = 0$, donde $\tilde{R}^\mu = R^\mu + \frac{1}{4} [R^\nu, [R_\nu, R^\mu]]$. La parte estática de las soluciones en el modelo skyrme $U(x_i)$, conducen al funcional de energía como función de R

$$E = \frac{1}{12\pi^2} \int \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} (R_i R_i) - \frac{1}{16} \text{Tr} ([R_i, R_j] [R_i, R_j]) \right\} d^3 x_i \quad (\text{A.8})$$

Las soluciones estáticas son puntos críticos que corresponden a mínimos de la energía y el campo Skyrme estático es un mapeo en principio de \mathbb{R}^3 a S^3 ($SU(2)$), pero las condiciones de frontera nos permiten compactificar el espacio a $S^3 \sim \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$. En general, se hace una extensión del mapeo racional para construir campos Skyrme en $SU(N)$ de la esfera Riemanniana en el modelo $\mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$, al introducir un proyector (en $SU(2)$) tal que U se escribe como una función de P , así

$$U = \exp \left(i f \left(2P - \frac{2}{N} 1_N \right) \right)$$

donde f es una función, el vector con N componentes $\vec{v} = \vec{v}(x_3) : S^2 \mapsto \mathbb{C}\mathbb{P}^{N-1}$ es un mapeo racional de la esfera Riemanniana a los \mathbb{C}^N , P es un proyector de tamaño $N \times N$ que se construye de un vector \vec{v} con N componentes, es decir

$$P = \frac{\vec{v} \otimes \vec{v}^\dagger}{|\vec{v}|^2}$$

con estos proyectores P el modelo Skyrme se puede generalizar a una teoría de dimensión mayor. El modelo Skyrme $SU(N)$ involucra campos en $SU(N)$ que describen funciones de $x_i = \vec{x}_i$ y x_0 que toman valores en $SU(N)$ y sus soluciones estáticas corresponden a configuraciones de campo que describen soluciones multi-skyrmiones (que son puntos estacionarios, puntos máximos o silla) del funcional de energía estática

$$E_{Skyrme} = \frac{1}{12\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ -\frac{1}{2} \text{Tr} (\partial_i U U^{-1})^2 - \frac{1}{16} \text{Tr} [\partial_i U U^{-1}, \partial_j U U^{-1}]^2 \right\} d^3x \quad (\text{A.9})$$

con el campo skyrme $U(\vec{x}_i) \in SU(N)$, los multi-solitones son soluciones de la ecuación de movimiento

$$\partial_i \left(\partial_i U U^{-1} - \frac{1}{4} [\partial_j U U^{-1}, [\partial_j U U^{-1}, \partial_i U U^{-1}]] \right) = 0 \quad (\text{A.10})$$

que son ecuaciones de movimiento para campos sin masa.

Bibliografía

- [1] A. C. Scott, F. Y. F. Chiu and D. W. Mclaughlin, Proc. IEEE **61** (1973) 1443.
- [2] *Aspects of symmetry* , Sidney Coleman ,University Press Cambridge (1985).
- [3] I. Bialynicki-Birula, *On the Stability of Solitons* (1978).
- [4] *Quantum meaning of classical field theory*, R. Jackiw, Reviews of Modern Physics Vol. 49 No. 3 (July 1977).
- [5] *Topological Solitons*, Nicholas Manton. Cambridge University Press (2004).
- [6] *Solitons and instantons, an introduction to Solitons and instantons in Quantum Field Theory*, R. Rajaraman , Editorial-Holland (1989).
- [7] *The Skyrme Model, Fundamentals methods applications*, V. G. Makhankov, Y. P. Rybakov, V. I. Sanyuk , Springer-Verlag (1993).
- [8] R. A. Leese, *Q-lumps and their interactions*, Nucl. Phys. **B366**, 283 (1991).
- [9] R. A. Leese, M. Peyrad and W. J. Zakrzewski, *Soliton scatterings in some relativistic models in (2+1) dimensions*, Nonlinearity **3**, 773 (1990).
- [10] *Noncommutative Baby Skyrmions*, T. Ioannidou and O. Lechtenfeld. arXiv:0905.4077v2 (29 Jun 2009).
- [11] *Sigma-Model Solitons in the Noncommutative Plane: Construction and Stability Analysis*, O. Lechtenfeld and Stefan Peterson. arXiv:hep-th/0412001 v2 (18 Mar 2005).
- [12] *Bäcklund Transformations and Their Applications*, Rogers and Shadwick, University of Waterloo Waterloo, Ontario, Canada 1982 ACADEMIC PRESS A Subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, (1982).
- [13] *Noncommutative Instantons and Solitons*, O. Lechtenfeld and Popov, arXiv:hep th 0401158v1 (Aug 2003).
- [14] *Scattering of Noncommutative Solitons in 2+1 Dimensions*, Olaf Lechtenfeld and Alexander D. Popov, arXiv:hep th/0108118v3 (20 May 2002).

- [15] *Noncommutative Solitons, in: noncommutative geometry and physics*, O. Lechtenfeld. World Scientific 2007, arXiv:hep-th/0605034v1. (2007).
- [16] *Moduli-Space Dynamics of Noncommutative Abelian Sigma-Model Solitons*, M. Klauwunn, O. Lechtenfeld and S. Petersen , arXiv:hep-th/0604219v2. (7 Jun 2006).
- [17] *An effective lagrangian for the pure N=1 supersymmetric Yang-Mills Theory*, G. Veneziano and S. Yankielowicz , CERN-Geneva. Ref. TH. 3250 (21 February 1982).
- [18] *Noncommutative Solitons, 150 minutes of lectures 01-04 November 2005 at the International Workshop on Noncommutative Geometry and Physics in Sendai, Japan*, Olaf Lechtnefel, Institut für Theoretische Physik, Universetät Hannover, Hannover, Germany. (2005).
- [19] *Noncommutative Multi-Solitons in 2+1 Dimensions*, Olaf Lechtenfeld and Alexander D. Popov , arXiv:hep-th/0106213v3 (4 August 2003).
- [20] *Noncommutative Instantons and Solitons*, Olaf Lechtenfeld , arxiv:hep-th/0401158v1 (22 Jan 2004).
- [21] *Noncommutative Sine-Gordon Model*, Olaf Lechtenfeld, arxiv:hep th/0409108v1 (9 Sep 2004).
- [22] *Sigma-Model Solitons in the Noncommutative Plane: Construction and Stability Analysis*, Andrei V. Domrin, Olaf Lechtenfeld and Stefan Peterson , arxiv:hep-th/0412001v2 (18 Mar 2005).
- [23] *Moyal star product of holomorphic j-differentials*, M. Kachkachi , Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 2008.05:363-373. (2008).
- [24] *Noncommutative Field Theory*, Michael R. Douglas¹ and Nikita A. Nekrasov, arXiv:hep-th/0106048v4 (18 Oct 2001).
- [25] *Séminaire Poincaré X (2007), Séminaire Poincaré Quantum Hall Effect and Noncommutative Geometry*, Vincent Pasquier , Service de Physique Théorique C.E.A/Saclay 91191 Gif-sur-Yvette, France (2007).
- [26] *Theoretical optics an introduction*, Hartmann Romer, University of Freiburg Institute of Physics (2005).
- [27] *Some non-perturbative semi-classical methods in quantum field theory (a pedagogical review)*, R. Rajaraman, Physics reports 21 no. 5 North-Holland publishing company (1975).
- [28] *Multi-dimentionals integrable systems*, R. S. Ward, Durham, DHI 3LE, U.K.
- [29] *Introduction to the Yang-Mills quantum theory*, R. Jackiw, Reviews of Modern physics Vol. 52, No. 4, (1980).

- [30] *Moyal-Weyl Star product and quasiconformal mapping relationship*, M. Kachkachi, Département de Mathématiques Informatique Faculté des Sciences Techniques, Université Hassan 1^{er}, *Phys.Conf.Ser*,128012008, *Journal of Physics, Conference Series*128(2008).