Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

Teorías Multidimensionales de Unificación y Aplicaciones de la Integral de Trayectoria Restringida a la Relatividad General

Tesis que presenta:

M. en C. Abel Camacho Quintana

para obtener el grado de Doctor en Ciencias

Departamento de Física,

Universidad Autónoma Metropolitana-Iztapalapa,

México

Enero 30, 1998

Agradecimientos

Esta tesis es el fruto de mis estudios de doctorado en dos lugares muy especiales, el Departamento de Física de la UAM-I y el grupo de Relatividad General del Prof. Heinz Dehnen en la Facultad de Física de la Universidad de Konstanz en Alemania.

En especial quiero agradecer a mi asesor el Dr. Alfredo Macías tanto por las fructíferas discusiones tenidas durante mis estudios doctorales, como por su paciencia y ayuda. Igualmente quisiera agradecer al Prof. Heinz Dehnen el apoyo y la hospitalidad que me brindó durante mi estancia de estudios en su grupo en la Universidad de Konstanz, así como también agradecer al Prof. Michael Mensky por la paciencia y tiempo brindados en las largas discusiones que tuvimos en Kostanz. Aqui en México quiero agradecer a mi amigo y colega Remigio Cabrera por su ayuda con el equipo de cómputo. Debo también agradecer a los sinodales: Dr. Alberto García del CINVESTAV–IPN; Dr. Eckehard Mielke, de UAM–I; Dr. Darío Nuñez, del ICN-UNAM y Dr. Luis Urrutia, del ICN-UNAM; su paciencia en la lectura de mi tesis y sobre todo por sus comentarios acerca de mi trabajo.

Agradezco a CONACYT la beca otorgada durante la parte de mis estudios doctorales llevados a cabo en México y al DAAD (Deutscher Akademischer Austauschdienst) el apoyo económico, el cual me permitió poder unirme al grupo de trabajo del Prof. H. Dehnen.

Muchas gracias a todos ellos!.

Introducción

Una premisa fundamental es que la gravitación está íntimamente interconectada con la geometría del espacio-tiempo. A nivel clásico, la Relatividad General captura de manera muy elegante esta idea. La identificación del campo gravitacional con la curvatura del espacio–tiempo nos ha permitido hacer importantes predicciones, tales como la existencia de hoyos negros y del *big bang*. Esto nos conduce a la siguiente conclusión, una de las metas fundamentales de cualquier teoría cuántica debería de tomar en cuenta la estructura cuántica del espacio–tiempo.

En esta dirección existen dos posibles programas de investigación, los cuales han permitido obtener enormes progresos en la busqueda de una teoría cuántica de la gravedad en los últimos 13 años, a saber, uno perturbativo, *las supercuerdas cuánticas* y otro no-perturbativo, la *cuantización canónica á la Dirac*, llevada a cabo a través de las ideas de Ashtekar sobre la Relatividad General de Einstein y la representación de *loops* de la mecánica cuántica.

A primera vista, podría parecer que ambas ideas son incompatibles, una con la otra. La idea de Ashtekar considera gravedad pura, sin tomar en cuenta elementos adicionales, en tanto que una teoría de supercuerdas es una *teoría de todo* y, debido a la unitariedad involucra a todas las interacciones en su desarrollo perturbativo. Estas diferencias aparecerían únicamente a energías de Planck, y es solo alrededor a dichas energías que se podría decidir entre la teoría de cuerdas y la gravedad canónica.

Por otra parte, el estudio de las interacciones gravitacionales acopladas a campos de Yang–Mills y campos dilatónicos escalares ha sido tema de recientes investigaciones. Los campos dilatónicos aparecen de manera natural en el límite de bajas energías de la teoría de cuerdas, en el contexto de teorías de haz fibrado principal, entre las cuales tenemos a los modelos tipo Kaluza-Klein. Debemos de recalcar que los espectros energéticos de las teorías tipo Kaluza–Klein están contenidos en el espectro energético de las teorías de supercuerdas. Dicho con mayor precisión, los estados de las teorías tipo Kaluza–Klein forman parte del espectro de energías medias de las teorías de supercuerdas. Esto viene a garantizar un comportamiento adecuado a altas energías, lo cual reduce este tipo de modelos a ser teorías efectivas de energía media.

Por otro lado, actualmente, uno de los problemas más importantes que existen, en conexión con una posible teoría cuántica de la gravedad es el denominado problema del tiempo. Este problema consiste en el hecho de que la ecuación que gobierna la dinámica cuántica del universo, según la cosmología cuántica estándar, la llamada ecuación de Wheeler–DeWitt, es una ecuación que carece del parámetro tiempo, es una ecuación "atemporal". Recientemente, Penrose propuso una idea interesante, que permitiría conectar al problema del tiempo con otro problema conceptualmente fundamental de la Física moderna, a saber, el problema de medición de efctos cuánticos, también conocido como el colapso de la función de onda. Una de las ideas que permitiría atacar de manera simultáneamente ambos problemas, siguiendo dicha idea propuesta por Penrose, de incorporar el llamado modelo de decoherencia, el cual pretende explicar el surgimiento de un mundo clásico a partir de una teoría cuántica, por ejemplo, consiste en usar el método de cuantización de integral de trayectoria de Halliwell para el campo gravitacional. Sin embargo, el interés actual en Relatividad General no se restringe únicamente al ámbito de su posible cuantización. Una de las más importantes predicciones de dicha teoría es la existencia de las llamadas ondas gravitacionales. Los esfuerzos que en la actualidad se hacen con la finalidad de diseñar dispositivos experimentales que permitan detectar dichas ondas son muy importantes. Entre ellos tenemos, por ejemplo, el proyecto italiano llamado *VIRGO*, el estadounidense conocido como *LIGO* y el proyecto conjunto germano–britanico, con sede en la ciudad de Potsdam. La dificultad que enfrentarán todos estos proyectos radica en la debilidad de los efectos involucrados que se pretenden medir. En la solución de los problemas tecnológicos que la mencionada dificultad plantea está involucrada la más avanzada tecnología. Los resultados que puedan ser obtenidos de estos dispositivos experimentales permitirán confrontar con el experimento predicciones, respecto a fluctuaciones tensoriales en el fondo cósmico de microondas consecuencia de ondas gravitacionales, que se obtienen de la teoría de escenarios inflacionarios, asimismo proporcionará datos importantes respecto a las épocas tempranas del universo. Es innecesario mencionar que la cantidad de dinero que involucra cada uno de estos proyectos asciende a decenas, y en algunas situaciones como es el caso de *LIGO*, a cientos de millones de dólares.

Los tópicos abordados en esta tesis doctoral se enmarcan dentro del contexto de las teorías multidimensionales de unificación y de la mecánica cuántica aplicada a la gravitación. Consta de dos partes, la primera de ellas la constituyen los capítulos 1 y 2 en tanto que los restantes tres conforman la segunda parte.

En la primera parte se analiza una teoría gravitacional 8-dimensional, la cual presenta una estructura de haz fibrado cuya topología del estado base es $M_4 \times S^1 \times S^3$, donde S^1 es la variedad asociada al grupo Abeliano $U(1)$ y S^3 la correspondiente variedad del grupo no-Abeliano $SU(2)$. La idea detrás de este tipo de modelos es la geometrización de las interacciones de norma de la Física de la partículas elementales, todo dentro del contexto propuesto por Einstein en su teoría de la relatividad general. En particular, el modelo estudiado en esta tesis pretende geometrizar la teoría electrodébil de Weinberg-Salam-Glashow.

La teoría efectiva 4-dimensional obtenida predice las masas correctas de los bosones de norma involucrados, ésto mediante la introducción de campos escalares en la métrica. En lo que concierne al sector fermiónico, el término de Yukawa, a partir del cual mediante el llamado mecanismo GIM se obtienen las masas fermiónicas, se introduce ad hoc, de manera similar a lo que sucede en la teoría electrodébil. Las masas correctas de las dos primera familias, tanto leptónicas como fermiónicas, son asimismo obtenidas.

Debemos de recalcar que este modelo resulta ser una teoría efectiva de unificación semiclásica, importante a escalas de energía media. Pero no debemos olvidar un hecho que le otorga a este tipo de propuestas una particular importancia, y es que este tipo de modelos se encuentra contenido en la región de energía media de las teorías de supercuerdas.

La escasez de soluciones exactas a la ecuación de Dirac existente en la literatura hace interesante el estudio de la misma en fondos gravitacionales que presentan un alto grado de simetría. Es por ello que se ha analizado en esta tesis la ecuación de Dirac sin masa, la llamada ecuación de Weyl, que es la que gobierna la dinámica de los neutrinos, teniendo como fondo gravitacional espacios-tiempos tipo Gödel. En este contexto, se obtuvieron soluciones exactas a la ecuación correspondiente, las cuales pueden ser expresadas en términos de funciones especiales de Whittaker.

La segunda parte comprende la aplicación del modelo de decoherencia en cosmología cuántica. El objetivo principal fue investigar el problema del tiempo asociado a la ecuación de Wheeler-DeWitt, la cual gobierna la dinámica del universo cuántico. Un tiempo físico invariante de norma aparece como propuesta en este tipo de modelos. Este hecho es consecuencia de la interacción existente entre los diferentes grados de libertad asociados con el modelo del universo. La manera de introducir matemáticamente el modelo de decoherencia en este tipo de teorías es mediante el llamado formalismo de integral de trayectoria restringida.

Se estudia también en esta segunda parte la detección de ondas gravitacionales y éllo nuevamente mediante el formalismo de integral de trayectoria restringida. La manera de plantear el problema permite calcular la densidad de probabilidad asociada con el proceso de medición de una cierta configuración del campo gravitacional. También se desprende del cálculo que existen tres regiones de medición, y que en los dispositivos experimentales actuales la dispersión de los posibles resultados es muy grande. También es posible analizar la factibilidad de introducir algún tipo de modificación en las propuestas experimentales existentes, la cual pudiese tener como consecuencia una reducción en la dispersión de los resultados experimentales.

Contenido

Capítulo 1

Teorías Gravitacionales Multidimensionales.

1.1 Teorías Gravitacionales Multidimensionales.

La busqueda de una teoría que unifique a la gravedad con las restantes interacciones fundamentales de la Naturaleza es ya bastante antigua [1]. En el modelo propuesto por Kaluza y Klein se demostró como una extensión 5-dimensional de la teoría de la Relatividad General de Einstein puede unificar a la gravedad y al electromagnetismo. Significando esto la geometrización de ambas interacciones.

Expliquemos esto mejor. El elemento de línea tiene en esta propuesta la siguiente forma

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu - (dy + \kappa A_\mu(x)dx^\mu)^2, \tag{1.1}$$

siendo y la coordenada espacialoide extra. Además es periódica, es decir $0 \leq y \leq L$. Esto nos permite interpretar a la variedad 5-dimensional de la forma $M_4 \times S^1$, esto por lo menos localmente. Nótese que la métrica $g_{\mu\nu}$ del espacio físico y 4-dimensional M_4 no depende de la coordenada extra y. A_μ es un campo vectorial y tampoco depende de y. La constante κ tiene unidades de $(longitud)^{-1}$.

Pasemos ahora a considerar el conjunto de transformaciones de coordenadas bajo las cuales el elemento de línea (1.1) no se modifica. Siendo A_μ un campo vectorial, es evidente que (1.1) permanece invariante ante transformaciones de coordenadas que involucren a las coordenadas de M_4, es decir ante transformaciones de la forma $x^\mu \to \tilde{x}^\mu(x^\nu)$.

Consideremos ahora las transformaciones de la quinta coordenada $y \to y' = h(y, x^\mu)$.

De aqui se obtiene que

$$dy \to dy' = \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial x^\mu} dx^\mu. \tag{1.2}$$

Observando el elemento de línea dado en (1.1) es claro que éste conserva su forma si se cumple que $\frac{\partial h}{\partial y} = 1$. Esto nos permite escribir

$$dy + \kappa = y + H(x^\mu). \tag{1.3}$$

Pero bajo (1.3) $A_\mu(x)$ cambiará a $\tilde{A}_\mu(x)$, lo cual nos conduce a

$$dy + \kappa A_\mu(x) dx^\mu \to dy + \kappa[\tilde{A}_\mu(x) + \kappa^{-1} \frac{\partial H}{\partial x^\mu}] dx^\mu. \tag{1.4}$$

Lo cual nos lleva a lo siguiente: el elemento de línea (1.1) preserva su forma ante transformaciones como la dada por la expresión (1.3) si el campo vectorial $A_\mu(x)$ se transforma de la manera siguiente

$$A_\mu(x) \to \tilde{A}_\mu(x) = A_\mu(x) - \kappa \frac{\partial H}{\partial x^\mu}. \tag{1.5}$$

Es claro que esta es una transformación de norma para el campo vectorial en cuestión. Es decir, en la teoría de Kaluza-Klein el campo de norma es un remanente del grupo original de invariancia en 5 dimensiones, el cual ha sido roto de manera espontánea en la simetrías del grupo de transformación de coordenadas 4-dimensional y el grupo local de norma $U(1)$.

De (1.1) podemos ver que el tensor métrico tiene en el sistema coordenado que estamos empleando la forma

$$(g)_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} - \kappa^2 A_\mu A_\nu, & -\kappa A_\mu \\ -\kappa A_\nu & , -1 \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

los subíndices griegos de la forma $\hat{\mu}$ corren de 1 hasta 5.

Para poder simplificar lo cálculos pasaremos a otra base, denominada *Horizontal Lift Basis* (HLF) y en la cual las 1-formas base quedan definidas por:

$$\tilde{\omega}^{\bar{\mu}} = \tilde{d}x^{\mu}, \tag{1.7}$$

$$\tilde{\omega}^{\bar{5}} = dy + \kappa A_{\mu}\tilde{d}x^{\mu}. \tag{1.8}$$

La transformación Λ, que nos lleva del sistema sin barra al sistema con barra, queda determinada por la siguiente expresión

$$\Lambda^{\bar{\mu}}{}_{\hat{\nu}}) = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ +\kappa A_1, & +\kappa A_2, & +\kappa_3, & +\kappa A_4, & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

La inversa de esta matriz es

$$(\Lambda^{\hat{\nu}}{}_{\bar{\mu}}) = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0 \\ -\kappa A_1, & -\kappa A_2, & -\kappa_3, & -\kappa A_4, & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.10}$$

Los vectores base $\vec{e}_{\bar{\mu}}$, duales a $\tilde{\omega}^{\bar{\mu}}$, están dados por

$$\vec{e}_{\bar{\mu}} = \Lambda^{\hat{\nu}}{}_{\bar{\mu}}\vec{e}_{\hat{\nu}}. \tag{1.11}$$

De donde se concluye que

$$\vec{e}_{\bar{\mu}} = \partial_{\mu} - \kappa A_{\mu}\partial_5, \tag{1.12}$$

$$\vec{e}_{\bar{5}} = \partial_5. \tag{1.13}$$

Calculando el conmutador de estos vectores obtenemos

$$[\vec{e}_{\bar{\mu}}, \vec{e}_{\bar{\nu}}] = \kappa[(\partial_\nu A_\mu) - (\partial_\mu A_\nu)](\partial_5) = -\kappa F_{\mu\nu}\partial_5, \qquad (1.14)$$

$$[\vec{e}_{\bar{\mu}}, \vec{e}_{\bar{5}}] = 0, \qquad (1.15)$$

de donde se desprende que la HLF es una base anholonómica [2].

Las constantes de estructura están definidas como

$[\vec{e}_\mu, \vec{e}_\nu] = c_{\mu\nu}{}^{\lambda}\vec{e}_\lambda$,

y de (1.13) se obtiene que las constantes de estructura no nulas son

$$c_{\bar{\mu}\bar{\nu}}{}^{\bar{5}} = -\kappa F_{\mu\nu}, \qquad (1.16)$$

$$c_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{5}} = \kappa F_{\mu\nu}. \qquad (1.17)$$

Con el fin de calcular el escalar de curvatura es necesario definir los coeficientes de conexión, los cuales se definen como

$$\nabla_{\vec{e}_\mu}\vec{e}_\nu = \Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda}\vec{e}_\lambda, \qquad (1.18)$$

donde se impone que la métrica sea covariantemente constante, es decir

$$\nabla_{\vec{e}_\mu}(g)_{\nu\lambda} = 0. \qquad (1.19)$$

Empleando (1.18) y (1.19) se obtiene

$$\Gamma_{\mu\nu\lambda} = \frac{1}{2}[g_{\mu\nu,\lambda} + g_{\mu\lambda,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} + c_{\mu\nu\lambda} + c_{\mu\lambda\nu} + c_{\lambda\nu\mu}]. \qquad (1.20)$$

Usando (1.20) para nuestro caso se desprende que los coeficientes de conexión no nulos son

$$\Gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{\lambda}} =^4 \Gamma_{\mu\nu\lambda}, \qquad (1.21)$$

siendo ${}^4\Gamma_{\mu\nu\lambda}$ los coeficientes de conexión asociados a M_4.

$$\Gamma_{\bar{\mu}\bar{\nu}\bar{5}} = \frac{1}{2}\kappa F_{\mu\nu}, \qquad (1.22)$$

$$\Gamma_{\bar{5}\bar{\mu}\bar{\nu}} = -\frac{1}{2}\kappa F_{\mu\nu}. \tag{1.23}$$

Las componentes del tensor de Riemann en una base anholonómica están dadas por

$$R^{\alpha}_{\mu\nu\lambda} = \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\lambda} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\lambda,\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\tau\lambda}\Gamma^{\tau}_{\mu\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\tau\nu}\Gamma^{\tau}_{\mu\lambda} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\tau}c^{\tau}_{\nu\lambda}. \tag{1.24}$$

Empleando las expresiones (1.16), (1.17), (1.21)-(1.23) obtenemos

$$R^{\lambda}_{\sigma\mu\nu} =^4 R^{\lambda}_{\sigma\mu\nu} + \frac{1}{4}\kappa^2 F^{\lambda}_{\nu} F_{\sigma\mu} - \frac{1}{4}\kappa^2 F^{\lambda}_{\mu} F_{\sigma\nu} - \frac{1}{2}\kappa^2 F^{\lambda}_{\sigma} F_{\mu\nu}, \tag{1.25}$$

$$R^{\lambda}_{5\mu5} = \frac{1}{4}\kappa^2 F^{\lambda}_{\tau} F^{\tau}_{\mu}. \tag{1.26}$$

Por consiguiente, el escalar de curvatura 5-dimensional toma la forma

$$R =^4 R - \frac{1}{4}\kappa^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \tag{1.27}$$

Formulando la teoría de Kaluza-Klein en términos de la acción 5-dimensional de Einstein-Hilbert

$$S = \frac{1}{16\pi GL}\int \sqrt{g} R d^5x. \tag{1.28}$$

Recordando la hipótesis de cilindricidad es fácil constatar que el integrando de la última expresión no depende de la coordenada espacial extra y en consecuencia la integración sobre esta variable es fácil de calcular, obteniéndose

$$I = \frac{1}{16\pi G}\int [{}^4R - \frac{1}{4}\kappa^2 F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}]\sqrt{-{}^4g}\, d^4x. \tag{1.29}$$

Comparando (1.29) con la acción de la teoría Einstein-Maxwell, en donde observamos que la parte de la acción responsable de la interacción electromagnética tiene la forma $S_E = -\frac{1}{4}\int \sqrt{-{}^4g} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x$ [3], se puede ver que se recupera en la teoría de Kaluza-Klein la acción de Einstein-Maxwell si se efectúa la identificación siguiente

$$\kappa^2 = 16\pi G. \tag{1.30}$$

Resumiendo, la acción de Einstein-Maxwell 4-dimensional surge de considerar dos condiciones: (1) una acción de Einstein-Hilbert 5-dimensional y (2) la hipótesis de cilindricidad. Es importante mencionar que esta teoría contiene inicialmente dos parámetros indeterminados κ y L. La identificación (1.30) permite fijar κ únicamente quedando L libre, la cual no puede ser fijada en este modelo. Sin embargo, el campo de Maxwell surge como consecuencia de la reducción dimensional y por lo tanto uno esperaría que existiese una relación entre la carga eléctrica, la constante gravitacional de Newton y el radio de la quinta dimensión. Para obtener la relación entre los parámetros antes mencionados, lo cual además permitirá una estimación del orden de magnitud de L, consideremos la densidad Lagrangiana de un campo de Dirac en una región en la cual existen un campo gravitacional y uno electromagnético.

$$L = \sqrt{-g}\bar{\psi} i\gamma^{\mu}[\nabla_{\mu} + ieA_{\mu}]\psi. \tag{1.31}$$

Evidentemente, el acoplamiento entre el fermión y el potencial eléctrico está dado por

$$ieA_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi. \tag{1.32}$$

El campo de Dirac depende de las 5 dimensiones, sin embargo la hipótesis de cilindricidad nos permite separar la dependencia del campo de Dirac como sigue

$$\psi(x^{\mu}, x^5) = \psi(x^{\mu})e^{ix^5/L}. \tag{1.33}$$

Llevando a cabo la reducción dimensional sobre la quinta dimensión y notando que $\partial_5 \sim \frac{1}{L}$ obtenemos que

$$\frac{\kappa}{L}A_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi. \tag{1.34}$$

Comparando coeficientes se obtiene que

$$e \sim \frac{\kappa}{L}. \tag{1.35}$$

Pero introduciendo la condición sobre κ que nos proporciona (1.30) obtenemos

$$e \sim \frac{\sqrt{16\pi G}}{L} \Rightarrow L \sim \frac{\sqrt{16\pi G}}{e}. \tag{1.36}$$

La constante de estructura fina es $\alpha \sim \frac{1}{137}$ y en consecuencia concluimos $\alpha = \frac{4G}{L^2} \Rightarrow L \sim \sqrt{\frac{4G}{\alpha}} \sim 10^2 l_p$, siendo l_p la longitud de Planck cuyo orden de magnitud es $\sim 10^{-33} cm$. Es decir, es muy pequeña para ser detectada.

La generalización del método de Kaluza-Klein para grupos no-abelianos fue por primera vez publicada en 1963 [4]. En esta generalización tenemos un espacio $(4+N)$-dimensional, el cual es descompuesto como el producto del espacio-tiempo físico M_4 y otra variedad N-dimensional, la cual llamaremos G.

Definiremos al tensor métrico en el espacio $(4+N)$ por $\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}}$, donde $\hat{\mu}$, $\hat{\nu} = 1, 2, ...N+4$. El tensor métrico de M_4 se denotará por $g_{\mu\nu}$, $\mu, \nu = 1, 2, 3, 4$ y la métrica de G será γ_{mn} con $m, n = 5, 6, ...N+4$. Los espacios M_4 y G estarán parametrizados por x y y, respectivamente.

Para aislar el campo de Yang-Mills reparametrizemos el tensor métrico. Existen muchas maneras de hacerlo, pero una elección conveniente consiste en introducir un nuevo campo B_ν^n el cual es un tensor mixto. Haremos entonces la siguiente elección

$$\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \gamma_{mn} B_\mu^m B_\nu^n, \gamma_{mn} B_\mu^n \\ \gamma_{mn} B_\nu^m \quad , \gamma_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.37}$$

siendo como ya antes $g_{\mu\nu}$ función solo de x, y γ_{mn} únicamente de y.

Calculando el tensor de curvatura del espacio $(4+N)$-dimensional obtenemos que

$$R =^4 R(x) +^N R(y) + \frac{1}{4}\gamma_{mn}(y) \tilde{F}_{\mu\nu}^m \tilde{F}_{\lambda\rho}^n g^{\mu\lambda} g^{\nu\rho} + ..., \tag{1.38}$$

siendo ${}^4R(x)$ y ${}^NR(y)$ las curvaturas escalares de M_4 y G, respectivamente. Sin embargo, $\tilde{F}_{\mu\nu}^m$ no es el tensor usual del campo de Yang-Mills [5].

Aquí tenemos que

$$\tilde{F}_{\mu\nu}^m = \partial_\mu B_\nu^m - B_\nu^n \partial_n B_\mu^m - \partial_\nu B_\mu^m + B_\mu^n \partial_n B_\nu^m. \tag{1.39}$$

Esto nos conduce a concluir que B_μ^m no puede ser el campo de Yang-Mills. En este punto vale la pena mencionar que en (1.36) no aparecen las constantes de estructura del grupo de norma en cuestión.

Introduciremos una suposición adicional, la variedad tiene una simetría asociada con ella, es decir la variedad tiene una isometría.

Sabemos que de variedades con isometría podemos extraer un vector de Killing, ζ^{μ}, el cual puede matemáticamente expresar el efecto de esta isometría [6].

Luego, si tenemos una variedad G la cual posee un conjunto de isometrías, entonces éstas en general dan origen a un álgebra de Lie asociada con estas simetrías. Supóngase que los generadores de esta simetría están descritos por

$$L_a = \zeta_a^m \partial_m, \tag{1.40}$$

y por definición generan un álgebra de Lie.

$$[L_a, L_b] = f^c{}_{ab} L_c, \tag{1.41}$$

donde $f^c{}_{ab}$ son las constantes de estructura del álgebra de Lie correspondiente.

Con este vector de Killing podemos ahora definir

$$B_\mu^m = \zeta_a^m A_\mu^a. \tag{1.42}$$

Esta es la redefinición que estabamos buscando, aqui A_μ^a es el verdadero vector de Yang-Mills. Antes de pasar a mostrar que la acción original en $(4+N)$-dimensiones puede ser dividida en dos partes, la teoría de Einstein 4-dimensional y la teoría estándar de Yang-Mills, mencionaremos algunas preguntas y sus respectivas respuestas, en relación a este modelo .

De inmediato surgen las siguientes preguntas:

1) ¿Puede el grupo de norma del modelo estándar ser incluido en este esquema?

2) ¿Es la teoría cuantizable?

3) Si en todos los experimentos hasta ahora diseñados la presencia de dimensiones extras no se ha manisfestado, entonces este hecho da origen a la siguiente pregunta: ¿Cuál es el mecanismo que origina que las dimensiones extras sean suficientemente pequeñas para no ser detectadas experimentalmente?

Para contestar a la primera pregunta, usaremos el hecho de que la teoría de Yang-Mills está generada por las isometrías de la variedad del espacio-tiempo. En consecuencia nuestro problema se reduce a encontrar la variedad que tiene al grupo del modelo estándar como su grupo de simetría [7].

Respecto a la segunda pregunta es imprescindible mencionar que el problema más serio con la Relatividad General cuántica y la teoría cuántica de Kaluza-Klein es que no son renormalizables [8]. Concerniente a la tercera duda vale la pena mencionar que en estos momentos existen varios modelos que tratan de explicar este mecanismo de compactificación. Por ejemplo, Varonov y Kogan [9] proponen un mecanismo para la compactificación espontánea en modelos de Kaluza-Klein el cual es consecuencia del valor de expectación del vacío cuántico del tensor de energía-momento de los campos de materia y del valor de expectación de la constante cosmológica existentes en el espacio-tiempo $(4 + N)$-dimensional. En otras propuestas [10], el rompimiento de simetría necesario para obtener a partir de una teoría de norma unificada de quarks y leptones las enormes masas de los bosones y de los fermiones es la responsable del mecanismo de compactificación espontánea.

En esta busqueda Chodos y Detweiler [11] han mostrado que esta reducción dimensional puede emerger como una consecuencia de la evolución dinámica del universo. Sin embargo, Maeda [12] demostró que este mecanismo no ocurre si se incluye un campo de materia cuantizado.

La relación entre un escenario inflacionario (en la variedad M_4), generado por un tensor de energía-momento asociado a una mezcla de dos gases fuera de equilibrio termodinámico y este mecanismo de compactificación también ha sido ya analizado [13]. En resúmen, esta pregunta queda todavía sin contestar.

Pasemos ahora a la generalización no-abeliana del modelo de Kaluza-Klein, y notemos que para incorporar un grupo de norma realista G solo necesitamos tomar a las dimensiones extras como la variedad de dicho grupo [7].

Generalizemos ahora la métrica dada en (1.1). Denotando por γ_{ij} a la métrica del grupo no-abeliano en cuestión [14] y empleando, ya que los cálculos matemáticos se simplifican, nuevamente HLB, obtenemos la siguiente generalización

$$(g)_{\hat{\mu}\hat{\nu}}(x,y) = \left(\begin{array}{c} g_{\mu\nu}, 0 \\ 0, -\gamma_{ij} \end{array} \right). \tag{1.43}$$

Las 1-formas son ahora

$$\tilde{\omega}^{\mu} = \tilde{d}x^{\mu}, \tag{1.44}$$

ya que (1.7) no contiene información alguna respecto al espacio-tiempo interno.

La generalización de (1.8) es un poco más elaborada, ello consecuencia del siguiente hecho: G es el grupo de simetría en cuestión y para tener una unificación con alguna o algunas interacciones fundamentales este grupo será el grupo de norma de Yang-Mills en cuestión. Esto implica que el campo de norma debe también tener un índice de grupo, este índice debe ser contraido con algun objeto matemático y entonces obtener una relación de la forma $B^i_\mu(x,y)$. Es evidente que solo existe un objeto geométrico con el cual realizar la contracción, el denominado vector de Killing $K^i_\alpha(y)$. Esto es, $B^i_\mu(x,y) \sim A^\alpha_\mu(x)K^i_\alpha(y)$, donde α son aquí índices de grupo.

Resumiendo, (1.8) se generaliza como

$$\tilde{\omega}^i = \tilde{d}y^i + \frac{\kappa}{L}K^i_\alpha(y)A^\alpha_\mu(x)\tilde{d}x^\mu. \tag{1.45}$$

El elemento de línea generalizado es [15]

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - \gamma_{ij}(y)[dy^i + \frac{\kappa}{L}K^i_\alpha(y)A^\alpha_\mu(x)\tilde{d}x^\mu][dy^j + \frac{\kappa}{L}K^j_\beta(y)A^\beta_\nu(x)\tilde{d}x^\nu]. \tag{1.46}$$

La base dual a (1.44) y (1.45) es

$$\hat{e}_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - \frac{\kappa}{L}K^i_\alpha(y)A^\alpha_\mu(x)\frac{\partial}{\partial y^i}, \tag{1.47}$$

$$\hat{e}_i = \frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{1.48}$$

Nuevamente estamos en una base anholonómica, para convencerse de esto basta calcular los conmutadores entre los elementos mencionados en (1.47) y (1.48).

$$[\hat{e}_i, \hat{e}_j] = 0, \tag{1.49}$$

$$[\hat{e}_\mu, \hat{e}_i] = \frac{\kappa}{L}A^\alpha_\mu(x)\partial_i K^j_\alpha(y)\frac{\partial}{\partial y^j}, \tag{1.50}$$

$$[\hat{e}_\mu, \hat{e}_\nu] = -\frac{\kappa}{L}F^\alpha_{\mu\nu}(x)K^i_\alpha(y)\frac{\partial}{\partial y^i}. \tag{1.51}$$

Donde $F^\alpha_{\mu\nu}(x)$ son las llamadas intensidades de campo asociadas a los campos de norma no-abelianos [5] las cuales se definen como:

$$F^{\alpha}_{\mu\nu}(x) = A^{\alpha}_{\nu,\mu} - A^{\alpha}_{\mu,\nu} + \frac{\kappa}{L} f^{\alpha}_{\beta\gamma} A^{\beta}_{\mu} A^{\gamma}_{\nu}, \tag{1.52}$$

siendo $f^{\alpha}_{\beta\gamma}$ las constantes de estructura.

Si ahora ponemos en marcha la maquinaria de la geometría diferencial llegaremos a que el escalar de curvatura del espacio multidimensional puede escribirse como [16].

$$R =^4 R + R_G - \frac{1}{4}(\frac{\kappa}{L})^2 \gamma_{ij}(y) K^i_{\alpha}(y) K^j_{\beta}(y) F^{\alpha\mu\nu} F^{\beta}_{\mu\nu}, \tag{1.53}$$

siendo ${}^4R$ el escalar de curvatura asociado al espacio-tiempo 4-dimensional físico y R_G el escalar de curvatura de G, el cual hemos definido como: $R_G = -\gamma_{ij} R^k_{ikj}$. El signo menos es para obtener un escalar de curvatura positivo para el caso de una esfera.

En este punto vale la pena mencionar una diferencia existente entre el modelo 5-dimensional de Kaluza-Klein y la generalización de éste recién esbozado.

Hemos visto como las ecuaciones de campo 5-dimensionales aceptan como solución el caso de un espacio de Minkowski junto con una quinta dimension compactificada. Esto no puede ser generalizado al caso en el cuál el número de dimensiones extras es mayor a 1. La razón de ello es que las teorías de Yang-Mills están asociadas a variedades cuya curvatura además de ser constante no puede ser nula. Es decir, el producto directo del espacio de Minkowski y un espacio compacto interno de curvatura constante no nula no constituye una solución de las ecuaciones de Einstein que se desprenden de una generalización del modelo de Kaluza-Klein.

1.2 Teoría de Weinberg-Salam.

Actualmente está demostrado que todas las interacciones fundamentales están descritas por alguna forma de teoría de norma [5]. Es por ello que brevemente mencionaremos la simetría local abeliana, $U(1)$, las teorías de norma no-abelianas, llamadas teorías de Yang-Mills [17] y el mecanismo de rompimiento espontáneo de simetría en teorías de norma.

Consideremos la Lagrangiana para un campo de Dirac libre [18].

$$L_0 = \bar{\psi}(x)[i\gamma^\mu \partial_\mu - m]\psi(x). \tag{1.54}$$

Si realizamos una transformación de simetría global (α constante)

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{-i\alpha}\psi(x), \tag{1.55}$$

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha}\bar{\psi}(x), \tag{1.56}$$

e introduciendo los campos $\psi'(x)$ y $\bar{\psi}'(x)$ en (1.54) se llega a $L_0' = L_0$, es decir la Lagrangiana permanece invariante.

Consideremos ahora el reemplazo de $\alpha \to \alpha(x)$. Es decir, la simetría global la transformamos en simetría local. La idea aquí es construir una teoría invariante ante transformaciones locales

$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{-i\alpha(x)}\psi(x), \tag{1.57}$$

$$\bar{\psi}(x) \to \bar{\psi}'(x) = e^{i\alpha(x)}\bar{\psi}(x). \tag{1.58}$$

Sustituyendo en (1.54) se obtiene

$$L_0 \to L_0' = L_0 - i\bar{\psi}(x)\psi(x)\partial_\mu\alpha(x). \tag{1.59}$$

Es decir, se pierde la invariancia. Observemos que se recuperaría esta invariancia si pudiéramos definir una derivada covariante de norma D_μ, tal que

$$D_\mu\psi(x) \to [D_\mu\psi(x)]' = e^{-i\alpha(x)}D_\mu\psi(x). \tag{1.60}$$

Para ello introduzcamos una constante de acoplamiento e y un nuevo campo $A_\mu(x)$, el llamado campo de norma, y definamos ahora la derivada de la siguiente manera

$$D_\mu\psi(x) = \partial_\mu\psi(x) + ieA_\mu\psi(x). \tag{1.61}$$

Haciendo la sustitución $\partial_\mu \to D_\mu$ y exigiendo la invariancia del Lagrangiano ante transformaciones de norma, es decir, pidiendo $L'_0 = L_0$, podemos generalizar (1.54) como sigue

$$L_0 = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu[\partial_\mu + ieA_\mu]\psi(x) + c.c.. \tag{1.62}$$

Con (1.60) y (1.61) se obtiene la propiedad de transformación del campo de norma $A_\mu(x)$

$$A_\mu(x) \to A'_\mu(x) = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu(\alpha(x)). \tag{1.63}$$

Es decir, pidiendo la invariancia del Lagrangiano ante transformaciones de norma locales hemos obtenido una interacción, ya que la Lagrangiana resultante no corresponde a la Lagrangiana de un campo de Dirac libre.

Notemos que el fotón no presenta masa, esto es consecuencia de lo siguiente: para tener (1.60) es necesario que se cumpla (1.63) y esta expresión implica que A_μ se transforma de manera covariante, y un término de la forma $A^\mu A_\mu$ no puede ser invariante de norma. Esto es, la inclusión de un término de masa para el fotón rompería la invariancia de norma del Lagrangiano (1.62).

Para poder cerrar el modelo debemos ahora agregar un término adicional, el cual considere la dinámica del campo de norma A_μ. Evidentemente, este nuevo término no debe romper la invariancia. El término más simple es entonces

$$L_A = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \tag{1.64}$$

donde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{1.65}$$

La relación entre la intensidad de campo $F_{\mu\nu}$ y las derivadas covariantes es la usual

Estas últimas tres relaciones nos permiten interpretar a la Lagrangiana de la expresión (1.62) como la Lagrangiana de un campo de Dirac colocado en una región en la cual existe un campo electromagnético [18]. Esto implica que e representa la carga eléctrica.

Aquí tenemos además la siguiente relación

$$(D_\mu D_\nu - D_\nu D_\mu)\psi(x) = ieF_{\mu\nu}\psi(x). \tag{1.66}$$

Sumando (1.62) y (1.64) obtenemos el Lagrangiano de la electrodinámica cuántica

$$L = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu[\partial_\mu + ieA_\mu]\psi(x) + c.c. - m\bar{\psi}(x)\psi(x) - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \tag{1.67}$$

Pasemos ahora a generalizar el principio de norma para el caso de grupos no-abelianos. Para ello iniciaremos con el caso más simple, el isospin $SU(2)$ y posteriormente generalizaremos los resultados obtenidos.

Consideremos un campo fermiónico representado por un doblete de isospin

$$\psi(x)_{\mu a} = \begin{pmatrix} \psi_{\mu 1}(x) \\ \psi_{\mu 2}(x) \end{pmatrix}.$$

Si $\vec{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$ son las matrices usuales de Pauli, las cuales satisfacen la relaciones usuales de conmutación y anticonmutación

$$[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2}] = i\epsilon_{ij}^k\frac{\tau_k}{2}, \quad \{\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2}\} = 2\delta ij\mathbf{1}, \quad i,j,k = 1,2,3, \tag{1.68}$$

donde $\mathbf{1}$ es la matriz unidad y $\vec{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ son los parámetros de transformación del grupo $SU(2)$, entonces bajo una transformación de este grupo se tiene que el campo fermiónico se transforma de la siguiente manera

$$\psi(x) \to \psi'(x) = exp(-\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\theta})\psi(x). \tag{1.69}$$

El Lagrangiano de nuestro fermión es ahora

$$L_0 = \bar{\psi}(x)[i\gamma^\mu\partial_\mu - m]\psi(x) + c.c., \tag{1.70}$$

y bajo (1.60) permanece invariante, donde $\vec{\theta}$ es un vector constante.

Hagamos ahora $\vec{\theta}$ una función del espacio-tiempo, entonces

$$\psi(x) \to \psi'(x) = U(\theta(x))\psi(x), \tag{1.71}$$

siendo $U(\theta(x)) = exp(-\frac{i}{2}\vec{\tau}\cdot\vec{\theta}(x))$.

De manera análoga a lo sucedido en el caso abeliano, el Lagrangiano libre ya no es invariante ante transformaciones locales

$$\bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) \to \bar{\psi}'(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi'(x) = \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu\partial_\mu\psi(x) + \bar{\psi}(x)i\gamma^\mu U^{-1}(\theta)\partial_\mu(U(\theta))\psi(x). \tag{1.72}$$

En forma similar al caso abeliano construiremos una Lagrangiana invariante de norma y para ello introduciremos 3 campos vectoriales de norma A^i_μ (uno para cada generador del grupo).

Por consiguiente, la derivada covariante es en este caso

$$D_\mu\psi(x) = (\partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu}{2})\psi(x), \tag{1.73}$$

donde g es la constante de acoplamiento.

La condición a cumplir por esta definición es

$$D_\mu\psi(x) \to [D_\mu\psi(x)]' = U(\theta(x))D_\mu\psi(x). \tag{1.74}$$

Esto define las propiedades de transformación de los campos de norma

$$\vec{\tau}\cdot\vec{A}'_\mu = U(\theta(x))\vec{\tau}\cdot\vec{A}_\mu U^{-1}(\theta(x)) - \frac{2i}{g}(\partial_\mu U(\theta(x)))U^{-1}(\theta(x)), \tag{1.75}$$

$$A'^l_\mu = A^l_\mu + \epsilon^{njl}A^j_\mu\theta^n - \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^l. \tag{1.76}$$

La intensidad de campo es

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x) = ig\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{F}_{\mu\nu}\psi(x). \tag{1.77}$$

De donde se desprende

$$F^l_{\mu\nu} = \partial_\mu A^l_\nu - \partial_\nu A^l_\mu + g\epsilon^{lij}A^i_\mu A^j_\nu. \tag{1.78}$$

Aquí vale la pena mencionar dos cosas: (i) de (1.76) sabemos que A^l_μ no es invariante de norma y si observamos la expresión (1.78) podemos notar que el último término nos indica que, a diferencia del caso abeliano, en esta nueva situación las intensidades de campo no son invariantes de norma; (ii) este último término nos indica también que en la ecuación de movimiento para los campos aparecerán términos que incluirán productos entre éstos, lo cual muestra que los campos de norma transportan carga y en consecuencia se presenta auto-interacción, recordemos que este fenómeno no se da en el caso abeliano [5].

Pasemos a encontrar la forma en que las intensidades de campo se transforman, y para ello consideremos la expresión: $\vec{\tau} \cdot \vec{F}'_{\mu\nu} U(\theta)\psi = U(\theta)\vec{\tau} \cdot \vec{F}_{\mu\nu}\psi \Rightarrow \vec{\tau} \cdot \vec{F}'_{\mu\nu} = U(\theta)\vec{\tau} \cdot \vec{F}_{\mu\nu} U^{-1}$, siendo además $U(\theta) \sim 1 - \frac{ig}{2}\vec{\tau} \cdot \vec{\theta}$, lo que conlleva la condición $|\vec{\theta}(x)| << 1$. Lo anterior nos conduce a

$$F'^{l}_{\mu\nu} = F^{l}_{\mu\nu} + g\theta^{j} F^{k}_{\mu\nu} \epsilon^{ljk}. \tag{1.79}$$

Esta última expresión prueba que efectivamente las intensidades de campo en el caso de grupos no-abelianos no son invariantes de norma.

Para poder cerrar la teoría es necesario introducir en el Lagrangiano un término que contemple derivadas de los campos de norma, y con ello convertir a los campos de norma en verdaderas variables dinámicas. Evidentemente, este término debe ser invariante de norma. Consideremos el término $F^{l}_{\mu\nu} F^{l\mu\nu}$.

Empleando la expresión (1.79) se desprende que: $F^{l}_{\mu\nu} F^{l\mu\nu} \to F'^{l}_{\mu\nu} F'^{l\mu\nu} = (F^{l}_{\mu\nu} + g\theta^{j} F^{k}_{\mu\nu} \epsilon^{ljk})(F^{l\mu\nu} + g\theta^{m} F^{n\mu\nu} \epsilon^{lmn}) \approx F^{l}_{\mu\nu} F^{l\mu\nu} + 2g\theta^{j} F^{l}_{\mu\nu} F^{k\mu\nu} \epsilon^{ljk}$. Donde nos quedamos a primer orden en θ. Pero de la antisimetría de ϵ^{ljk} se desprende que $F^{l}_{\mu\nu} F^{k\mu\nu} \epsilon^{ljk} = -F^{l}_{\mu\nu} F^{k\mu\nu} \epsilon^{ljk}$.

Lo anterior nos permite definir

$$L_A = -\frac{1}{4} F^{l\mu\nu} F^{l}_{\mu\nu}. \tag{1.80}$$

El Lagrangiano completo es

$$L = -\frac{1}{4} F^{l\mu\nu} F^{l}_{\mu\nu} + \bar{\psi} i\gamma^{\mu} D_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi. \tag{1.81}$$

Existe otro punto en el cual las teorías abeliana y no-abeliana son diferentes, y este concierne a la unicidad de la constante de acoplamiento. Para poder probar este punto consideremos otro doblete de isospin $\phi(x)$ el cual se acopla a los campos de norma mediante la constante λg. Entonces, su derivada covariante toma la siguiente forma:

$D_\mu \phi(x) = (\partial_\mu - i\frac{\lambda}{2} g \vec{\tau} \cdot \vec{A}_\mu)\phi(x) = (\partial_\mu - ig\frac{\vec{\Gamma}}{2} \cdot \vec{A}_\mu)\phi(x)$, donde hemos definido $\vec{\Gamma} = \lambda \vec{\tau}$.

Pero esto implica que bajo una transformación del grupo en cuestión se cumple $\phi(x) \to \phi'(x) = exp[-\frac{i}{2}\vec{\Gamma} \cdot \vec{\theta}(x)]\phi(x)$, donde se deben cumplir las relaciones de conmutación $[\frac{\Gamma^i}{2}, \frac{\Gamma^j}{2}] = \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\Gamma^k = \lambda^2[\frac{\tau^i}{2}, \frac{\tau^j}{2}] = \lambda \frac{i}{2}\epsilon_{ijk}\tau^k \Rightarrow \lambda = 1$. Esta unicidad es una propiedad asociada a grupos no-abelianos.

Hemos visto que la imposición de simetría local conlleva la aparición de partículas vectoriales no-masivas, las partículas asociadas a A^i_μ. Para poder obtener bosones vectoriales masivos la simetría de norma se debe romper. Si agregásemos a la Lagrangiana (1.81) términos de la forma $m_i^2 A^i_\mu A^{i\mu}$, los cuales explícitamente romperían la simetría, obtendríamos que en el límite de altas energías la teoría no sería renormalizable [5].

Para conseguir este objetivo romperemos la simetría mediante el mecanismo llamado rompimiento espontáneo de simetría de Higgs [19]. Es aquí importante recalcar que las teorías de norma son renormalizables aún en el caso del rompimiento espontáneo de simetría [20].

Pasemos a explicar este mecanismo. Para ello supongamos que U es un elemento del grupo de simetría G ante el cual el operador Hamiltoniano H_0 permanece invariante.

$$U H_0 U^\dagger = H_0, \tag{1.82}$$

y que conecta estados que forman una representación irreducible del grupo

$$U|A> = |B> . \tag{1.83}$$

Empleando (1.82) y (1.83) podemos llegar a la conclusión de que la simetría del Hamiltoniano se manifestará en las degeneraciones de los eigenestados de energía de las representaciones irreducibles correspondientes del grupo de simetría, esto es $E_A = E_B$, siendo $E_n =< n|H_0|n >$.

Sin embargo, detrás de (1.83) yace la invariancia del estado base bajo la transformación de simetría. Para ver esto denotemos mediante ϕ_A y ϕ_B a los operadores de creación relacionados con los estados $|A>$ y $|B>$, respectivamente. Es decir, $|A>=\phi_A|0>$ y $|B>=\phi_B|0>$, con $U\phi_A U^\dagger=\phi_B$.

Pero la expresión (1.83) es válida solo si el estado base es invariante ante G, es decir solo si $U|0>=|0>$. Cuando esta última expresión no se satisface se dice que se tiene un rompimiento espontáneo de la simetría. Es importante mencionar que aun cuando la simetría ya no aparece en la degeneración de los niveles de energía, existen todavía relaciones de simetría, las cuales provienen del hecho de que el Hamiltoniano es todavía invariante ante las transformaciones del grupo G.

Sin embargo, el rompimiento espontáneo de una simetría continua implica la existencia de partículas sin spin y además no-masivas, las cuales reciben el nombre de bosones de Goldstone [21]. Es decir, volvemos a obtener partículas no-masivas. No obstante podemos evitar el teorema de Goldstone y la razón de éllo radica en el hecho de que el teorema impone como hipótesis la validez de todos los axiomas usuales de campo: covariancia de Lorentz manifiesta, positividad de la norma, etc. Sin embargo, no existe una condición de fijación de norma que pueda ser impuesta la cual satisfaga todos los axiomas antes mencionados. Por ejemplo, en normas covariantes existen estados de norma negativa (fotones longitudinales). Si consideramos a los bosones de norma no-masivos y a los bosones de Goldstone no-masivos como problemas de la teoría, resulta que cada uno es la cura del otro. Ambos desaparecen del espectro físico al combinarse para formar partículas vectoriales masivas, lo cual nos permite mantener intacto el buen comportamiento a altas energías de la teoría simétrica.

Para entender este proceso, el cual recibe el nombre de mecanismo de Higgs, tomemos el caso abeliano en donde el Lagrangiano es

$$L=\phi^2(\partial_\mu\rho)(\partial^\mu\rho)+(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi)+g^2\phi^2A_\mu A^\mu-2g\phi^2A_\mu\partial^\mu\rho-\mu^2\phi^2-\lambda\phi^4-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{1.84}$$

donde $\varphi(x)=\phi(x)e^{-i\rho(x)}$.

Si por un momento hacemos $\phi(x)=0$ entonces la ecuación de movimiento para A_μ es

$$\partial^\nu\partial_\nu A_\mu=0, \tag{1.85}$$

pero aquí hemos impuesto la norma de Lorentz [22].

$$A^{\mu}{}_{,\mu} = 0. \tag{1.86}$$

Si buscamos una solución en forma de ondas planas

$$A^{\mu} = \tilde{A}^{\mu} exp(ik_{\nu}x^{\nu}), \tag{1.87}$$

siendo $\tilde{A}^{\mu} = cte.$, entonces esta condición de norma implica

$$\tilde{A}^{\mu} k_{\mu} = 0, \tag{1.88}$$

esto significa que $\tilde{A}^{\mu}$ es ortogonal a k_{μ}, es decir la componente de A^{μ} paralela al vector 3-dimensional de propagación $\vec{k}$ es nula.

La fase de $\varphi(x)$ puede, por la invariancia del Lagrangiano ante transformaciones locales $U(1)$, ser escogida igual a la componente longitudinal de A^{μ}, es decir igual a cero. Esto permite obtener como Lagrangiano

$$L = (\partial_{\mu}\phi)(\partial^{\mu}\phi) + g^2\phi^2 A_{\mu}A^{\mu} - \mu^2\phi^2 - \lambda\phi^4 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \tag{1.89}$$

Escribiendo $\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[v + \eta(x)]$, $v = cte.$ se obtiene

$$L = L_0 + L_I, \tag{1.90}$$

donde

$$L_0 = \frac{1}{2}(\partial_{\mu}\eta)(\partial^{\mu}\eta) - \frac{1}{2}\mu^2\eta^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{1}{2}(gv)^2 A^{\mu}A_{\mu}, \tag{1.91}$$

$$L_I = \frac{1}{2}g^2(2v + \eta(x))A^{\mu}A_{\mu} - \lambda v^2\eta^3 - \frac{1}{4}\lambda\eta^4. \tag{1.92}$$

En las expresiones anteriores aparecen un bosón vectorial de masa gv y un mesón escalar de masa $\sqrt{2}\mu$.

Pasemos ahora a considerar la generalización de este mecanismo para el caso de teorías con simetría de norma no-abeliana. Tomemos el caso de una teoría de norma $SU(2)$ con un doblete de campos escalares complejos

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \end{pmatrix}$$

$$L = (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi) - \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{a\mu\nu}, \tag{1.93}$$

donde $D_\mu \phi = (\partial_\mu - ig\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}_\mu)\phi$, $F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g\epsilon^{abc} A^b_\mu A^c_\nu$, $V(\phi) = -\mu^2(\phi^\dagger \phi) + \lambda(\phi^\dagger\phi)^2$, $\mu^2 > 0$ y $\lambda > 0$.

El potencial tiene un mínimo si $\phi_1^*\phi_1 + \phi_2^*\phi_2 = 0$ y también si $\phi_1^*\phi_1 + \phi_2^*\phi_2 = \frac{v^2}{2}$ con $v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$. Puesto que una teoría basada en la superposición de dos posibles vacíos no tiene sentido, ello consecuencia del hecho de que los espacios de Fock construidos sobre los dos posibles vacíos son mutuamente ortogonales, entonces debemos de escoger cualesquiera de lo puntos en el círculo definido por $\phi_1^*\phi_1 + \phi_2^*\phi_2 = \frac{v^2}{2}$ como el vacío físico.

Por simplicidad hagamos

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \tag{1.94}$$

y definiremos el campo

$$\tilde{\phi} = \phi - \phi_0. \tag{1.95}$$

Con esta definición se tiene que

$$\begin{aligned}(D_\mu\phi)^\dagger(D^\mu\phi) = {} & (\partial_\mu\tilde{\phi})^\dagger(\partial^\mu\tilde{\phi}) + ig\tilde{\phi}^\dagger\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \partial^\mu \tilde{\phi} + (ig\tilde{\phi}^\dagger \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \partial^\mu \tilde{\phi})^\dagger + \\ & g^2 \tilde{\phi}^\dagger \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}^\mu \phi_0 + (g^2 \tilde{\phi}^\dagger \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}^\mu \phi_0)^\dagger + ig\phi_0^\dagger \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \partial^\mu \tilde{\phi} + \\ & (ig\phi_0^\dagger \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \partial^\mu \tilde{\phi})^\dagger + \\ & g^2 \tilde{\phi}^\dagger \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}^\mu \tilde{\phi} + g^2 \phi_0^\dagger \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}_\mu \frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{A}^\mu \phi_0. \end{aligned} \tag{1.96}$$

El último término de la expresión puede por lo tanto escribirse como $\frac{g^2}{4}\frac{v^2}{2}\vec{A}_\mu \cdot \vec{A}^\mu = \frac{1}{2}(\frac{gv}{2})^2 \vec{A}_\mu \cdot \vec{A}^\mu$, de donde se puede ver que al romper la simetría los bosones de norma adquieren masa de valor $\frac{gv}{2}$.

El potencial se transforma ahora en

$$V(\phi) = -\mu^2[\tilde{\phi}_1^*\tilde{\phi}_1+\tilde{\phi}_2^*\tilde{\phi}_2+\frac{v}{\sqrt{2}}\tilde{\phi}_2^*+\frac{v}{\sqrt{2}}\tilde{\phi}_2+\frac{v^2}{2}]+\lambda[\tilde{\phi}_1^*\tilde{\phi}_1+\tilde{\phi}_2^*\tilde{\phi}_2+\frac{v}{\sqrt{2}}\tilde{\phi}_2^*+\frac{v}{\sqrt{2}}\tilde{\phi}_2+\frac{v^2}{2}]^2. \tag{1.97}$$

De (1.97) se puede ver que solo la combinación $\frac{\tilde{\phi}_2+\tilde{\phi}_2^*}{\sqrt{2}}$ es una partícula masiva, en otras palabras, $\frac{\tilde{\phi}_1+\tilde{\phi}_1^*}{\sqrt{2}}$, $\frac{\tilde{\phi}_2-\tilde{\phi}_2^*}{\sqrt{2}}$ y $\frac{\tilde{\phi}_1-\tilde{\phi}_1^*}{\sqrt{2}}$ resultan ser bosones de Goldstone.

Para clarificar este punto parametricemos nuestro doblete escalar de la forma siguiente

$$\phi(x) = exp[i\frac{\vec{\tau}}{v}\cdot\vec{\varsigma}(x)]\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v+\eta(x)}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \tag{1.98}$$

donde $\varsigma(x)$ y $\eta(x)$ evaluados en el mínimo son cero.

Realizemos ahora la transformación de norma

$$\tilde{\phi}(x) = exp[-i\frac{\vec{\tau}}{v}\cdot\vec{\varsigma}(x)]\phi(x) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta(x) \end{pmatrix}. \tag{1.99}$$

Los nuevos campos de norma, que aquí denotaremos por B_μ, satisfacen la expresión

$$\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{B}_\mu = U(x)\frac{\vec{\tau}}{2}\cdot\vec{A}_\mu U^{-1}(x) - \frac{i}{g}(\partial_\mu U(x))U^{-1}(x). \tag{1.100}$$

El Lagrangiano adquiere la forma

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{1}{2}(\partial_\mu\eta)(\partial^\mu\eta) - \frac{i}{2\sqrt{2}}g(\partial_\mu\tilde{\phi}^\dagger)\vec{\tau}\cdot\vec{B}^\mu\tilde{\phi} + \frac{i}{2\sqrt{2}}g\tilde{\phi}^\dagger\vec{\tau}\cdot\vec{B}^\mu(\partial_\mu\tilde{\phi}) + \\ & \frac{1}{2}(\frac{gv}{2})^2\vec{B}^\mu\cdot\vec{B}_\mu + \frac{g^2}{8}\vec{B}_\mu\cdot\vec{B}^\mu(\eta^2+2v\eta) - \frac{1}{4}G^a_{\mu\nu}G^{a\mu\nu}. \end{aligned} \tag{1.101}$$

Obtenemos partículas vectoriales masivas de masa $\frac{gv}{2}$, nuestros tres bosones de norma adquieren masa.

Pasemos ahora a analizar la relación entre el rompimiento de simetría y la estructura de la teoría. Mostraremos que el número de bosones que adquieren masa es igual a la diferencia entre el número de generadores de la simetría original y el número de generadores de la simetría final.

Consideremos el siguiente Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}[\partial_\mu \phi_i + igT^a_{ij}A^a_\mu \phi_j][\partial^\mu \phi_i - igT^a_{ik}A^{a\mu}\phi_k] - V(\phi_i) - \frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{a\mu\nu}, \tag{1.102}$$

donde ϕ_i son campos escalares, los cuales se transforman de acuerdo con cierta representación del grupo de simetría G, el cual tiene n generadores.

$$\phi_i \to \tilde{\phi}_i = \phi_i + i\epsilon^a(x)T^a_{ij}\phi_j(x), \tag{1.103}$$

siendo $a = 1, 2, 3, ..., n$.

Si el potencial es invariante ante transformaciones del grupo en cuestión, entonces

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \phi_i}\delta\phi_i = i\frac{\partial V}{\partial \phi_i}\epsilon^a(x)T^a_{ij}\phi_j(x) = 0. \tag{1.104}$$

Esta expresión se cumple para cualquier conjunto de funciones $\{\epsilon^a(x)\}$, y en particular para el caso $\epsilon^a(x) = 1$, lo cual nos conduce a

$$\frac{\partial V}{\partial \phi_i}T^a_{ij}\phi_j(x) = 0. \tag{1.105}$$

Derivando y asumiendo que el potencial tiene un mínimo en $\phi_i = v_i$ se obtiene

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k}_{|\phi_l = v_l} T^a_{ij}\phi_j(x) = 0. \tag{1.106}$$

La segunda derivada del potencial constituye una matriz de masa, ya que al desarrollar en serie de Taylor en torno al mínimo se concluye

$$V(\phi) = V(v_i) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_j \partial \phi_k}_{|\phi_i = v_i}(\phi_j - v_j)(\phi_k - v_k) + ... \tag{1.107}$$

Es por ello que definiremos la matriz de masas M^2 de la siguiente manera

$$(M^2)_{ik} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_k}_{|\phi_j = v_j}. \tag{1.108}$$

Supóngase ahora que el grupo G tiene un subgrupo G' con $\tilde{n}$ generadores que dejan el vacío invariante.

$$T^b_{ij}v_j = 0, \tag{1.109}$$

con $b = 1, 2, 3, ..., \tilde{n}$.

$$T^c_{ij}v_j \neq 0, \tag{1.110}$$

con $c = \tilde{n}+1, \tilde{n}+2, ..., n$

Si escogemos los T^a como linealmente independientes, entonces la expresión

$$M^2 T^c = 0, \tag{1.111}$$

nos indica que la matriz de masa tiene $(n-\tilde{n})$ eigenvectores linealmente independientes entre sí y cuyo valor propio es cero. En otras palabras, el cero es un valor propio de multiplicidad $(n-\tilde{n})$ de la matriz de masas. Estos estados no masivos corresponden a bosones de Goldstone.

Parametricemos ahora

$$\phi_i = exp[i\frac{\varsigma^c(x)}{v}T^c_{ij}][\eta_j(x)n + v_j], \tag{1.112}$$

donde $c = \tilde{n}+1, \tilde{n}+2, ..., n$ y v es la magnitud de v_i, sus subíndices han sido omitidos en la exponencial para evitar confusiones, y además se incluyen únicamente en la suma los generadores de la simetría rota.

El Lagrangiano contendrá un término de la forma $g^2 A^c_\mu A^{d\mu}(T^cV, T^dV)$, $c, d = \tilde{n}+1, \tilde{n}+2, ..., n$. Es decir, todos los campos de norma asociados a los generadores de la simetría rota adquieren masa, la misma masa. Los campos de norma relacionados con los generadores que preservan el vacío permanecen no-masivos.

Pasemos ahora a mencionar brevemente la teoría de Weinberg-Salam.

Para describir las partículas e interacciones conocidas (en esta argumentación no consideramos a la gravitación) se necesitan tres simetrías internas; a saber, invariancia $U(1)$, invariancia relacionada al grupo $SU(2)$ y la tercera invariancia es bajo el conjunto de transformaciones que constituyen el grupo $SU(3)$. Ahora debemos distinguir entre carga $U(1)$, carga $SU(2)$ y carga $SU(3)$. En lo que sigue solo consideraremos los dos primeros grupos.

La forma en que los estados observados se transforman ante el grupo $SU(2)$ es una cuestión, hasta el momento, puramente experimental. Todos los leptones conocidos son singuletes o bien dobletes ante la acción de este grupo. Los electrones de quiralidad derecha son singuletes y los de quiralidad izquierda dobletes. El experimento muestra que los neutrinos de quiralidad derecha no existen en la naturaleza [23].

Ası tenemos que si P_R es el operador $\frac{1+\gamma^5}{2}$, $P_L = \frac{1+\gamma^5}{2}$ [18] y ψ_e y ψ_ν son los espinores electrónico y neutrónico, respectivamente, entonces $e_R = P_R\psi_e$ es un singulete de $SU(2)$, $P_R\psi_\nu = 0$ y las partes izquierdas constituyen un doblete de $SU(2)$,

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix},$$

$\nu_e = P_L\psi_\nu$ y $e_L = P_L\psi_e$.

Los quarks up y down se comportan de manera análoga. Definamos

$$Q_{L\alpha} = \begin{pmatrix} u_\alpha \\ u_\alpha \end{pmatrix}.$$

Esto es, ponemos a los quarks de quiralidad izquierda como $SU(2)$dobletes. Los quarks de quiralidad derecha son nuevamente singuletes ante la acción de transformaciones de este grupo.

Notemos que el hecho de poner a los fermiones de quiralidad derecha e izquierda en tipos diferentes de multipletes constituye una violación de paridad, puesto que la teoría no es invariante ante la inversión de la componente de spin en la dirección de movimiento. Esto es, la teoría de Weinberg-Salam incorpora la violación de paridad observada en la naturaleza, pero no la explica de manera fundamental. Hasta este punto hemos considerado una familia de fermiones (ν_e, e, u, d). Pero la teoría puede ser aplicada a las otras dos familias conocidas (ν_μ, μ, c, s) y (ν_τ, τ, t, b).

A este nivel, el Lagrangiano puede escribirse como

$$\begin{aligned} \tilde{L} = \bar{L}i\gamma^\mu D_\mu L + \bar{R}i\gamma^\mu D_\mu R = (\bar{\nu}_L, \bar{e}_L)i\gamma^\mu(\partial_\mu - ig_1\frac{Y_L}{2}B_\mu - \\ ig_2\frac{\tau_i}{2}W_\mu^i)\begin{pmatrix} \nu_L e_L \end{pmatrix} + \bar{e}_R i\gamma^\mu(\partial_\mu - ig_1\frac{Y_R}{2}B_\mu)e_R. \end{aligned} \quad (1.113)$$

Notemos que Y, el generador de las transformaciones $U(1)$, una constante, puede ser diferente para diferentes fermiones, es por ello que tenemos Y_L y Y_R.

Definamos los siguientes campos bosónicos

$$W_\mu^0 = W_\mu^3, \tag{1.114}$$

$$W_\mu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}[-W_\mu^1 + iW_\mu^2], \tag{1.115}$$

$$W_\mu^- = \frac{1}{\sqrt{2}}[-W_\mu^1 - iW_\mu^2]. \tag{1.116}$$

Estas definiciones permiten re-escribir la Lagrangiana (1.113) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\tilde{L} = {} & i\bar{\nu}_L\gamma^\mu\partial_\mu\nu_L + i\bar{e}_L\gamma^\mu\partial_\mu e_L + i\bar{e}_R\gamma^\mu\partial_\mu e_R - \frac{g_2}{\sqrt{2}}W_\mu^-\bar{e}_L\gamma^\mu\nu_L \\ & -\frac{g_2}{\sqrt{2}}W_\mu^+\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L + \frac{g_1}{2}B_\mu Y_R\bar{e}_R\gamma^\mu e_R + \bar{\nu}_L[\frac{g_1}{2}B_\mu Y_L + \\ & \frac{g_2}{2}W_\mu^0]\gamma^\mu\nu_L + \bar{e}_L[\frac{g_1}{2}B_\mu Y_L - \frac{g_2}{2}W_\mu^0]\gamma^\mu e_L.\end{aligned} \tag{1.117}$$

Experimentalmente sabemos que el neutrino no presenta interacción electromagnética. Tomemos el penúltimo término de la expresión (1.117)

$$[\frac{g_1}{2}B_\mu Y_L + \frac{g_2}{2}W_\mu^0]\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L\bar{\nu}_L. \tag{1.118}$$

Con el fin de evitar la condición $g_1 = g_2 = 0$, supondremos que el campo electromagnético A_μ es una combinación de B_μ y de W_μ^0 y que ésta es ortogonal a la que aparece en (1.118). Para ello definamos

$$A_\mu \sim g_2 B_\mu - g_1 Y_L W_\mu^0. \tag{1.119}$$

Si B_μ y W_μ^0 son ortogonales entre sí y además son campos normalizados, entonces el coeficiente de $\bar{\nu}_L\gamma^\mu\nu_L$, el cual denotaremos por Z_μ, se definirá como

$$Z_\mu \sim g_1 Y_L B_\mu + g_2 W_\mu^0. \tag{1.120}$$

Normalizando A_μ y Z_μ obtenemos

$$A_\mu = \frac{g_2 B_\mu - g_1 Y_L W_\mu^0}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2 Y_L^2}}, \tag{1.121}$$

$$Z_\mu = \frac{g_1 Y_L B_\mu + g_2 W_\mu^0}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2 Y_L^2}}. \tag{1.122}$$

Si retomamos la Lagrangiana dada por la expresión (1.117) y re-escribimos los términos para los electrones introduciendo los campos A_μ y Z_μ recién definidos llegamos a la expresión

$$\begin{aligned} A_\mu &\left[\frac{g_1 g_2 Y_R}{2\sqrt{g_2^2 + g_1^2 Y_L^2}} \bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \frac{g_1 g_2 Y_L}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2 Y_L^2}} \bar{e}_L \gamma^\mu e_L\right] + \\ Z_\mu &\left[\frac{g_1^2 Y_R Y_L}{2\sqrt{g_2^2 + g_1^2 Y_L^2}} \bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \frac{g_1^2 Y_L^2 - g_2^2}{2\sqrt{g_2^2 + g_1^2 Y_L^2}} \bar{e}_L \gamma^\mu e_L\right]. \end{aligned} \tag{1.123}$$

Por otro lado, sabemos que el término que proporciona la interacción electromagnética de una partícula de carga eléctrica q es de la forma $qA_\mu[\bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{e}_R \gamma^\mu e_R]$ [18]. En consecuencia podemos re-escribir el primer término de (1.123) de la siguiente manera

$$\frac{g_1 g_2 Y_L}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2 Y_L^2}} A_\mu \left[\bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \frac{Y_R}{2Y_L} \bar{e}_R \gamma^\mu e_R\right]. \tag{1.124}$$

Esto último nos permite establecer las siguientes identificaciones

$$-e = \frac{g_1 g_2 Y_L}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2 Y_L^2}}, \tag{1.125}$$

$$-e = \frac{g_1 g_2 Y_R}{2\sqrt{g_2^2 + g_1^2 Y_L^2}}. \tag{1.126}$$

De aquí se obtiene que $Y_R = 2Y_L$. Nótese también que solo se da la combinación $g_1 Y_L$, es decir Y_L no aparece por separado. Esto nos permite escoger $Y_L = -1$. En caso de una redefinición de Y_L ésta puede considerarse como un re-escalamiento de g_1. Si $\hat{Y}_L = \lambda Y_L$ entonces $g_1 \hat{Y}_L = g_1 \lambda Y_L = (g_1 \lambda) Y_L = \hat{g}_1 Y_L$. Finalmente, se llega a

$$e = \frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}. \tag{1.127}$$

Definamos el ángulo de Weinberg θ_w [24] de la siguiente manera

$$\sin(\theta_w) = \frac{g_1}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}, \tag{1.128}$$

$$cos(\theta_w) = \frac{g_2}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}. \tag{1.129}$$

Obsérvese que la tangente del ángulo de Weinberg es la razón entre las constantes de acoplamiento $tg(\theta_w) = \frac{g_1}{g_2}$. Regresando al término del Lagrangiano que contiene la interacción neutrino-boson Z_μ, tenemos que puede escribirse como

$$\frac{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}}{2} Z_\mu \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L = \frac{g_2}{2cos(\theta_w)} Z_\mu \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L. \tag{1.130}$$

Es decir, en todo lugar en donde encontremos un vértice $\nu_L - Z_\mu$, podremos asociar el factor de intensidad $\frac{g_2}{2cos(\theta_w)}$. Esto implica que este último término puede ser entendido como la carga electrodébil del neutrino. Analicemos ahora la interacción de electrones con el boson Z_μ, es decir tomemos el segundo término de la expresión (1.123) y observémos que $\sqrt{g_2^2 + g_1^2} = \frac{e}{cos(\theta_w)sin(\theta_w)}$, esta interacción $e_L - Z\mu$ y $e_R - Z\mu$ puede reformularse como sigue

$$\frac{e}{cos(\theta_w)sin(\theta_w)} Z_\mu \left[\left(-\frac{1}{2} + sin^2(\theta_w) \right) \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + sin^2(\theta_w) \bar{e}_R \gamma^\mu e_R \right]. \tag{1.131}$$

Es de (1.130) evidente que la interacción de e_L con Z_μ no es igual a la que se presenta entre e_R con Z_μ, pero esto no es de extrañar, ya que e_R es un singulete ante las transformaciones del grupo $SU(2)$, no así e_L. Notemos que las intensidades de acoplamiento que aparecen en (1.131) pueden también escribirse como sigue

$$\frac{e}{cos(\theta_w)sin(\theta_w)} [T_3^{(f)} - Q^{(f)} sin^2(\theta_w)]. \tag{1.132}$$

Aquí $T_3^{(f)}$ es el eigenvalor de T_3. Para singuletes de $SU(2)$ se tiene $T_3^{(f)} = 0$, mientras que $Q^{(f)}$ es la carga eléctrica (en unidades de e) del fermión: $Q_e^{(f)} = -1$, $Q_\nu^{(f)} = 0$. $Q_u^{(f)} = \frac{2}{3}$, $Q_d^{(f)} = -\frac{1}{3}$.

Vale la pena mencionar que de la teoría electrodébil hemos extraido (i) la interacción electromagnética ordinaria y (ii) una partícula adicional tipo fotón (sin masa hasta el momento), la cual interactúa con cualquier fermión que tenga carga eléctrica o isospin débil.

La parte que resta analizarse del Lagrangiano proporcionado en la expresión (1.117) corresponde a la parte no-diagonal, la cual conduce a transiciones del tipo $\nu_L \leftrightarrow e_L$

$$-\frac{g_2}{\sqrt{2}}\bar{e}_L\gamma^\mu\nu_L W_\mu^- - \frac{g_2}{\sqrt{2}}\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L W_\mu^+. \tag{1.133}$$

Puede verse que e_L realiza una transición a un neutrino absorbiendo un boson W_μ^+ o emitiendo un boson W_μ^-.

Obsérvese que hasta este punto no tenemos presentes términos de masa, los cuales no podemos agregar, ya que dichos términos romperían la invariancia de norma. Para dotar a las partículas de masa haremos uso del ya mencionado mecanismo de Higgs, es decir, introduciremos un campo de Higgs como un doblete de $SU(2)$.

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi^+(x) \\ \phi^0(x) \end{pmatrix}, \tag{1.134}$$

donde ϕ^+ y ϕ^0 son cada uno campos complejos, $\phi^+ = \frac{\phi_1+i\phi_2}{\sqrt{2}}$ y $\phi^0 = \frac{\phi_3+i\phi_4}{\sqrt{2}}$.

La Lagrangiana de este doblete está dada por la expresión

$$\tilde{L} = (D^\mu\phi^\dagger)(D_\mu\phi) - \mu^2\phi^\dagger\phi - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2, \tag{1.135}$$

donde $\lambda > 0$ y $\mu^2 < 0$. El mínimo del potencial es $\phi^\dagger\phi = \frac{v^2}{2} = -\frac{\mu^2}{2\lambda}$.

Escribiendo explícitamente los términos del Lagrangiano que proporcionan la interacción entre las componentes del doblete con el campo electromagnético tenemos las siguientes expresiones

$$e^2[\frac{Y_\phi^2}{4} + \frac{1}{4} + \frac{Y_\phi}{2}]A^\mu A_\mu\bar{\phi}^+\phi^+, \tag{1.136}$$

$$e^2[\frac{Y_\phi^2}{4}+\frac{1}{4}-\frac{Y_\phi}{2}]A^\mu A_\mu\bar{\phi}^0\phi^0, \tag{1.137}$$

donde Y_ϕ es la hipercarga del Higgs.

De aquí se puede ver que la carga eléctrica (en unidades de e) de la componente ϕ^+ es $(\frac{Y_\phi}{2}+\frac{1}{2})$ y de la compnente ϕ^0 es $(\frac{Y_\phi}{2}-\frac{1}{2})$

Si el valor de expectación del vacío posee carga eléctrica entonces se esperaría poderla detectar experimentalmente, por ejemplo, se esperaría que una carga eléctrica colocada en el vacío presentase una fuerza generada por la carga eléctrica asociada al valor de expectación del vacío. Esto implica que se debe escoger el valor de Y_ϕ de tal manera que el valor de expectación del vacío no tenga carga eléctrica. Tomemos $Y_\phi = 1$, lo cual nos conduce a elegir como vacío

$$\phi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \tag{1.138}$$

Escribiendo $\phi^+ = \phi_1 + i\phi_2$ y $\phi^0 = \phi_3 + i\phi_4$, entonces nuestra elección de vacío implica que en éste se tiene $\phi_1 = \phi_2 = \phi_4 = 0$.

Sabemos que los tres generadores de $SU(2)$ conmutan con el generador de $U(1)$, es decir con Y, por lo tanto los podemos diagonalizar a Y y T^3 de manera simultánea. Glashow propuso [25] la extensión de la relación de Gell-Mann-Nishijima para la carga eléctrica al caso de la interacción débil.

$$Q = T^3 + \frac{Y}{2}, \tag{1.139}$$

donde T^3 representa los eigenvalores del operador en cuestión.

Siendo la hipercarga débil del Higgs no nula, $Y_\phi = 1$, resulta evidente que la simetría $U(1)$ también se rompe, $e^{i\alpha(x)Y_\phi}\phi_0 \neq \phi_0$. Sin embargo, $e^{i\alpha(x)Q}\phi_0 = \phi_0$, el vacío es invariante ante este grupo $\tilde{U}(1)$, cuyo generador es una combinación lineal de los generadores de los grupos originales $SU(2)$ y $U(1)$. Es evidente que este grupo, $\tilde{U}(1)$, es el grupo $U(1)$ del electromagnetismo.

Escribiendo el campo de Higgs en la norma unitaria tenemos

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v+\eta(x) \end{pmatrix}. \tag{1.140}$$

Introduciendo (1.140) en (1.135) obtenemos las masas de los bosones W_μ^+, W_μ^- y Z_μ

$$M_W = \frac{vg_2}{2}, \tag{1.141}$$

$$M_Z = \frac{v}{2}\sqrt{g_1^2 + g_2^2}. \tag{1.142}$$

Es evidente que

$$\frac{M_W}{M_Z} = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} = cos(\theta_W). \tag{1.143}$$

Esto nos muestra que el estado neutral no esta degenerado en masa con los estados cargados, a menos que el ángulo de Weinberg sea nulo, pero en este caso $tg(\theta_W) = 0 \Rightarrow g_1 = 0$.

Teniendo ya al campo de Higgs como un $SU(2)$ doblete, es posible escribir una interacción entre fermiones y campo de Higgs invariante ante $SU(2)$.

$$\tilde{L}_{int} = g[(\bar{\nu}, \bar{e})_L \phi e_R + \phi^+ \bar{e}_R \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L]. \tag{1.144}$$

La constante g es arbitraria y no queda determinada por la teoría. Empleando la expresión (1.140) en (1.144) podemos re-escribir el Lagrangiano como sigue

$$\tilde{L}_{int} = \frac{gv}{\sqrt{2}}[\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L] + \frac{g}{\sqrt{2}}[\bar{e}_L e_R + \bar{e}_R e_L]\eta(x), \tag{1.145}$$

el cual finalmente puede formularse como

$$\tilde{L}_{int} = \frac{gv}{\sqrt{2}}\bar{e}e + \frac{g}{\sqrt{2}}\bar{e}e\eta(x). \tag{1.146}$$

Es decir, el electrón adquiere a través de este mecanismo una masa

$$m_e = \frac{gv}{\sqrt{2}}. \tag{1.147}$$

Capítulo 2

Teorías multidimensionales y rompimiento espontáneo de la simetría.

2.1 Introducción.

El interés en las teorías multidimensionales nunca ha desaparecido. Uno de los problemas más interesantes que en este contexto existen es la posible explicación de las masas de algunas partículas elementales a partir de este tipo de modelos [26-28]. En particular Macías analizó [27] un modelo 5-dimensional en el cual se tiene un campo escalar acoplado a la métrica y el cual además podría jugar el papel de un campo de Higgs. Posteriormente se estudió el sector fermiónico de una teoría multidimensional, este sector consistió de las primeras familias fundamentales, el espacio-tiempo está en este modelo dotado con una simetría interna que corresponde al grupo $U(1) \times SU(2)$. Es importante mencionar que en este trabajo están ausentes campos escalares. Un serio problema de los resultados de este modelo consiste en el hecho de que las masas obtenidas muestran serias discrepancias con el experimento. Por ejemplo, el neutrino resulta en este modelo ser una partícula masiva mientras que los bosones de norma asociados a la interacción débil son no masivas. En este punto se obtienen las propiedades invertidas, ya que esperamos tener a los neutrinos como no masivos y a los antes mencionados bosones como partículas masivas. Además la razón entre las masas leptónicas y hadrónicas es un tercio, resultado que tampoco concuerda con el experimento. Puesto que no tenemos en este modelo campo de Higgs es evidente que las masas de las partículas tendrán un origen puramente geométrico. Así podemos ver que en los términos de masa del sector fermiónico únicamente aparece el radio del círculo S^1 y que el factor de un tercio que surge en la razón entre las masas leptónica y hadrónica es consecuencia del hecho de tener un eigenvalor de hipercarga para el sector hadrónico que es un tercio del valor del eigenvalor respectivo del sector leptónico. Es interesante comentar que la S^3 esféra no tiene influencia alguna sobre estas masas.

El paso que tal vez parezca más lógico en la busqueda de un modelo que proporcione las masas correctas es agregar campos escalares acoplados a la métrica interna y ver si éllos nos permiten resolver el mencionado problema. Esto ya fue hecho [29]. Los resultados obtenidos incluyen una teoría efectiva 4-dimensional, la cual no es quiral, un término de potencial aparece también en la acción 4-dimensional, se tienen además todos los acoplamientos entre bosones de norma e isospines fermiónicos de la parte izquierda de una teoría de Weinberg-Salam en un espacio-tiempo curvo. Sin embargo, el problema de las masas no se resuelve con este modelo.

Por lo tanto, parece inevitable introducir campos dilatónicos y dotarlos de carácter de isospin y a su vez introducir un acoplamiento tipo Yukawa entre estos campos dilatónicos y el sector fermiónico para poder tener las masas correctas.

Con la finalidad de poder analizar simetrías no abelianas [7, 30] podríamos tomar la estructura del haz fibrado para todo el espacio-tiempo. En este caso no necesitamos asumir una dependencia espacial sobre las componentes de la métrica. Si deseamos introducir interacción electrodébil la estructura del haz fibrado principal deberá ser $G - P \to^{\pi} B^4$, donde B^4 es una variedad Riemanniana 4-dimensional y la fibra se considera como la variedad del grupo de un grupo no-abeliano compacto G, el cual para el caso particular que intente comprender a la interacción débil debe ser al menos 4-dimensional. Al combinar ésto con la parte 4-dimensional del espacio-tiempo, llegamos a una teoría gravitacional la cual es 8-dimensional.

El elemento de línea toma la forma [28, 31, 32]

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu - I_1(x)^2\left[dx^5 + \kappa L_1^{-1}B_\mu(x)dx^\mu\right]^2$$
$$-I(x)^\dagger I(x)\gamma_{ij}(y)\left[dy^i + \kappa L^{-1}\kappa_\alpha^i(y)A_\mu^\alpha(x)dx^\mu\right]^2, \tag{2.1}$$

donde γ_{ij} es la métrica en la variedad de grupo de G y las funciones $\kappa_\alpha^i(y)$ son vectores de Killing de G. Los campos $A_\mu^\alpha(x)$ son campos de norma de un grupo de norma arbitrario no-abeliano como componentes del campo gravitacional en $(4+n)$-dimensiones.

En la teoría 4-dimensional efectiva, las transformaciones de norma son un remanente del grupo de invariancia de coordenadas original, el cual ha sido roto espontáneamente, mediante reducción dimensional, a las simetrías del grupo de transformación de coordenadas 4-dimensional y al grupo local de norma; $I_1(x)$ y $I(x)$ son campos escalares lorentzianos, precisamente $I_1(x)$ puede ser identificado como un campo dilatónico mientras que $I(x)$ tiene estructura de isospin. Estos dos campos dependen solo de las coordenadas del espacio-tiempo. Como ya mencionamos antes tomar a estos campos como isoescalares no resuelve el problema de las masas [29].

En este capítulo construiremos un espacio-tiempo 8-dimensional, en el cual las nuevas coordenadas y^i pueden ser interpretadas como la parametrización de la variedad del grupo no-abeliano $SU(2)_L \times U(1)$. La variedad del grupo de $SU(2)$ es la S^3 esféra y de $U(1)$ es la S^1 es el círculo. Por lo tanto el espacio tiene la simetría deseada y es la variedad natural para este grupo [33]. Dentro de este marco investigamos una teoría gravitacional 8-dimensional con dos campos acoplados a la métrica, la cual posee la estructura de un haz fibrado principal, donde $I_1(x)$ es un singulete respecto a $SU(2)_L \times U(1)$; es decir, es un campo dilatónico con su usual comportamiento de vacío lineal, el cual tiende a una constante; ahora $I(x)$ está dotado de estructura de isospin. Un campo de Dirac está acoplado al campo métrico; este campo contiene a dos de las tres familias fundamentales fermiónicas, sin embargo la generalización del trabajo para comprender a las tres familias no presenta ningún problema.

$$\psi_{1a} = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \\ u \\ d \end{pmatrix} \quad , \quad \psi_{2a} = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \\ c \\ s \end{pmatrix} \quad , \quad a = 1, 2, 3, 4. \tag{2.2}$$

Un término de potencial asociado al campo $I(x)$ que contiene términos de autointeracción y de masa es también introducido. Se comporta como una constante cosmológica 4-dimensional efectiva; en otras palabras la constante cosmológica 4-dimensional puede ser identificada con este potencial [34, 35].

Introducimos *by hand* los términos de Yukawa, los cuales constan de dos contribuciones: a saber, una contribución preónica, la cual compensa la ya antes mencionada contribución preónica del radio de la quinta dimensión que nos conduce a resultados no físicos; y el acoplamiento usual de Yukawa, el cual genera a través del mecanismo GIM la verdaderas masas fermiónicas. Esto significa que la estructura de grupo de la parte derecha es $U(1)$. Mediante el rompimiento espontáneo de la simetría $U(1) \times SU(2)$ de nuestro Lagrangiano y empleando la descomposición de Weinberg conseguimos dotar de masa a los campos de norma relacionados con la interación débil, así como al electrón, al muón, y a los quarks s, c, d, y u, en tanto que el campo de norma relacionado con la interacción electromagnética permanece sin masa.

Los bosones Z_μ, W_μ^+ y W_μ^- adquieren masa y sus masas están de acuerdo con las relaciones usuales de la teoría de Weinberg-Salam-Glashow; es decir, la razón entre la masa del bosón Z_μ y aquella del bosón W_μ^+ o la del bosón W_μ^- es $cos^{-2}\theta_W$, siendo θ_W el ángulo de Weinberg. Mediante el proceso de rompimiento espontáneo de la simetría el sector fermiónico adquiere masa. Sin embargo, aquí como en los trabajos ya antes mencionados [27, 28], el radio del círculo S^1 contribuye a la masa de nuestros neutrinos. Es decir, es un término de masa de origen puramente geométrico y que no tiene nada que ver con el proceso de rompimiento espontáneo de la simetría. Este término de masa debe de ser cancelado por los acoplamientos de Yukawa.

Como es usual en estos casos [27, 28], a consecuencia de la reducción dimensional, aparecen en la teoría efectiva 4-dimensional términos de Pauli. Ellos pueden ser entendidos como un momento débil anómalo y un momento electromagnético también anómalo. Con otras palabras, en esta teoría el neutrino no tiene carga eléctrica pero genera un campo elecgtromagnético y este hecho puede constatarse al observar las corrientes de polarización que emergen en las ecuaciones de Yang-Mills. Este trabajo puede extenderse, como ya se mencionó antes, sin ninguna dificultad para que incluya a la tercera familia fundamental

$$\psi_{3a} = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \\ t \\ b \end{pmatrix} . \tag{2.3}$$

2.2 Escalar de Curvatura.

El elemento de línea del haz fibrado principal para el espacio-tiempo producto $M_4 \times G$, con $M_4 \subset B^4$ es

$$\begin{aligned} ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu - I_1(x)^2 \left[dx^5 + \kappa L_1^{-1} B_\mu(x) dx^\mu\right]^2 \\ -I(x)^\dagger I(x) \gamma_{ij}(y) \left[dy^i + \kappa L^{-1} K^i_\alpha(y) A^\alpha_\mu(x) dx^\mu\right]^2 , \end{aligned} \tag{2.4}$$

siendo $\mu, \nu \ldots = 0, 1, 2, 3$; $i, j, \ldots = 5, 6, 7, 8$; $\alpha, \beta, \ldots =$ índices de grupo. Como es usual, identificamos a $g_{\mu\nu}$ con la métrica del espacio-tiempo 4-dimensional, $\gamma_{ij}(y)$ es la métrica de Killing en $S^1 \times S^3$, $\kappa^i_\alpha(y)$ son los vectores de Killing y $A^\alpha_\mu(x)$ son los campos de norma correspondientes, $I_1(x)$ es un campo dilatónico, mientras que $I(x)$ es un cuadruplete de isospin.

Tomaremos en este trabajo un análogo multidimensional de la acción de Einstein-Hilbert-Dirac

$$I_8 = \int d^4x \int d^4y \sqrt{\hat{g}} \left[\frac{1}{16\pi G V} \left(\hat{R} + V(I) + Y_u\right) + \mathcal{L}_D\right] . \tag{2.5}$$

Aquí $\hat{R}$ representa al escalar de curvatura 8-dimensional, $V(I)$ es un potencial de Higgs definido como sigue [34, 35]

$$V(I) = \frac{\mu^2}{2} I^\dagger I + \frac{\lambda}{4!}(I^\dagger I)^2, \tag{2.6}$$

y $\mathcal{L}_D$ es una generalización directa en 8-dimensiones de la ya conocida densidad Lagrangiana de Dirac 4-dimensional, en tanto que Y_u denota al término de Yukawa

$$Y_u = h(\bar{L} I R + \bar{R} I^\dagger L), \tag{2.7}$$

y V es el volumen del espacio interno.

Emplearemos la horizontal lift basis (HLB) [31, 36]

$$\hat{\theta}^\nu = dx^\nu, \tag{2.8}$$

la cual no contiene referencia alguna al espacio interno, y

$$\hat{\theta}^i = dy^i + \frac{\kappa}{L} K^i_\alpha(y) A^\alpha_\nu(x) dx^\nu, \tag{2.9}$$

como 1-formas base.

La base dual a (2.8) y (2.9) es

$$\hat{e}_\mu(x,y) = \partial_\mu - \frac{\kappa}{L} A^\alpha_\mu K^i_\alpha \partial_i, \tag{2.10}$$

$$\hat{e}_i(y) = \partial_i. \tag{2.11}$$

De argumentos dimensionales introducimos las escalas de longitud L^{-1} y L_1^{-1} para S^3 y S^1, respectivamente.

La métrica en esta base es simplemente

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu}(x) & 0 \\ 0 & -g_{ij}(y) \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

El escalar de curvatura 8-dimensional está dado por la expresión siguiente

$$\hat{R} = g^{\mu\rho} \hat{R}^\lambda_{\mu\lambda\rho} + g^{\mu\rho} \hat{R}^k{}_{\mu k\rho} - g^{ij} \hat{R}^\lambda{}_{i\lambda j} - g^{ij} \hat{R}^k{}_{ikj}, \tag{2.13}$$

o de manera explícita por

$$\hat{R} = R + \frac{1}{I^{\dagger}I}R_{s^3} + 2(\partial_\nu lnI_1)(\partial^\nu lnI_1) + \frac{3}{I^{\dagger}I}(D_\nu I^{\dagger})(D^\nu I) - \frac{1}{4}\kappa^2(I_1^2 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + I^{\dagger}IF^{\alpha\mu\nu}F_{\alpha\mu\nu}), \tag{2.14}$$

donde R es el escalar de curvatura de M_4 y R_{s^3} es el escalar de curvatura asociado a $S^1 \times S^3$, el cual está definido por

$$R_{s^3} = -\gamma^{ij}R^k{}_{ikj}, \tag{2.15}$$

de tal manera que para la esféra $R_{s^3} > 0$. Además también tenemos lo siguiente $g_{55} = I_1^2 L_1^2$ y $g_{ij} = I^2\gamma_{ij}$.

2.3 Densidad lagrangiana de Dirac 8-dimensional.

Con el fin de calcular explícitamente la densidad Lagrangiana de Dirac y el escalar de curvatura necesitamos los vectores de Killing asociados al espacio interno $S^1 \times S^3$, los cuales determinan la métrica γ_{ij}, a través de la expresión $\gamma^{ij} = K^i{}_\alpha K^{j\ \alpha}$.

Como base para la fibra tangente de S^1 [14, 37] usaremos el vector ∂_5, y para el haz tangente a S^3 los tres vectores de Killing, los cuales pueden ser escritos en función de los ángulos de Euler (θ, ρ, ψ).

$$\mathbf{K}_5 = L_1\partial_5, \tag{2.16}$$

$$\mathbf{K}_6 = L[cos\psi\partial_\theta - sin\psi(cot\theta\partial_\psi - csc\theta\partial_\rho)], \tag{2.17}$$

$$\mathbf{K}_7 = L[sin\psi\partial_\theta + cos\psi(cot\theta\partial_\psi - csc\theta\partial_\rho)], \tag{2.18}$$

$$\mathbf{K}_8 = L\partial_\rho. \tag{2.19}$$

(Nótese que $y^6 = \theta,\ y^7 = \rho,\ y^8 = \psi$). Así la métrica de Killing γ_{ij} para $S^1 \times S^3$ puede ser fácilmente evaluada.

$$\gamma_{ij} = \begin{pmatrix} L^2{}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L^2 & L^2\cos\theta \\ 0 & 0 & L^2\cos\theta & L^2 \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Podemos ahora calcular la *achtbein* necesaria para introducir espinores, en la HLB. La *achtbein* como la métrica es también diagonal a bloques

$$e^{\hat{A}}_{\ \hat{\mu}} = \begin{pmatrix} e^A_{\ \mu} & 0 \\ 0 & e^{(k)}_{\ j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^A_{\ \mu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{I}L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{I}L & -\tilde{I}L\cos\theta \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{I}L\cos\theta & \tilde{I}L\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Donde $e^{\hat{A}}_{\hat{\mu}}$ satisface $(\hat{A},\ldots,\ \hat{\mu},\ldots = 0,1,2,\ldots,8)$ la relación usual.

$$\hat{g}_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = e^{\hat{A}}_{\ \hat{\mu}} e^{\hat{B}}_{\ \hat{\nu}} \eta_{\hat{A}\hat{B}}, \tag{2.22}$$

con $\eta_{\hat{A}\hat{B}} = \text{diag}\,(+1,-1,\ldots,-1)$ y $e^A_{\ \mu}, e^{(k)}_{\ j}$ son las *vierbeins*, las cuales satisfacen el álgebra usual

$$g_{\mu\nu} = e^A_\mu e^B_\nu \eta_{AB}, \tag{2.23}$$

$$\gamma_{ij} = e^{(k)}_i e^{(l)}_j \delta_{kl}. \tag{2.24}$$

La derivada covariante de spin está entonces definida como

$$\hat{\nabla}_{\hat{\mu}} \psi_{jR,L} = (\hat{e}_{\hat{\mu}} + \hat{\Gamma}_{\hat{\mu}}) \psi_{jR,L}. \tag{2.25}$$

Aquí $\hat{\Gamma}_{\hat{\mu}}$ son las conexiones de spin

$$\hat{\Gamma}_{\hat{\mu}} = \frac{1}{2}\, e_{\hat{A}}^{\ \hat{\nu}}\, e_{\hat{B}\hat{\nu};\hat{\mu}}\, \sigma^{\hat{A}\hat{B}}, \tag{2.26}$$

con

$$\sigma^{\hat{A}\hat{B}} = \frac{1}{4}[\Gamma^{\hat{A}}, \Gamma^{\hat{B}}]. \tag{2.27}$$

El tamaño de los espinores 8-dimensionales es 16. Sean γ^A y γ^k las matrices de Dirac en M_4 y $S^1 \times S^3$, respectivamente. Entonces tomaremos las matrices de Dirac en $M_4 \times S^1 \times S^3$ como dadas por los siguientes productos tensoriales

$$\begin{aligned} \Gamma^A &= I \otimes \gamma^A & \qquad A &= 0,1,2,3 \\ \Gamma^k &= \gamma^k \otimes \hat{\gamma}^5 & \qquad k &= 5,6,7,8, \end{aligned} \tag{2.28}$$

siendo γ^5 la matriz usual en M_4. Las matrices de la expresión (2.28) satisfacen

$$\left\{\Gamma^{\hat{A}}, \Gamma^{\hat{B}}\right\} = 2\eta^{\hat{A}\hat{B}}. \tag{2.29}$$

Aquí γ^A son las matrices 4-dimensionales usuales de Dirac y γ^k están dadas por

$$\gamma^5 = \begin{pmatrix} i\mathbf{1} & 0 \\ 0 & -i\mathbf{1} \end{pmatrix}, \gamma^l = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^l \\ -\sigma^l & 0 \end{pmatrix}, l = 6,7,8. \tag{2.30}$$

Lo anterior nos permite definir la densidad lagrangiana de Dirac como sigue

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_D &= \sum_{j=1}^{2} \frac{i}{2}(\overline{\Psi}^{jL}\Gamma^{\hat{A}} \ e_{\hat{A}}^{\ \hat{\mu}} \ \hat{\nabla}_{\hat{\mu}}\Psi_{jL} - e_{\hat{A}}^{\ \hat{\mu}} \ \hat{\nabla}_{\hat{\mu}}\overline{\Psi}^{jL}\Gamma^{\hat{A}}\Psi_{jL}) \\ &+ \sum_{j=1}^{2} \frac{i}{2}(\overline{\Psi}^{jR}\Gamma^{\hat{A}} \ e_{\hat{A}}^{\ \hat{\mu}} \ \hat{\nabla}_{\hat{\mu}}\Psi_{jR} - e_{\hat{A}}^{\ \hat{\mu}} \ \hat{\nabla}_{\hat{\mu}}\overline{\Psi}^{jR}\Gamma^{\hat{A}}\Psi_{jR}), \end{aligned} \tag{2.31}$$

Donde Ψ_{jL} es la parte izquierda y Ψ_{jR} es la parte derecha de nuestras dos familias fundamentales y las derivadas covariantes para Ψ_{jR} and Ψ_{jL} están dadas por

$$\nabla_\nu \Psi_{jR} = [\partial_\nu - \frac{\kappa}{L_1} B_\nu \partial_5 + \Gamma_\nu]\Psi_{jR}, \tag{2.32}$$

$$\nabla_\nu \Psi_{jL} = [\partial_\nu - \frac{\kappa}{L_1} B_\nu \partial_5 - \frac{\kappa}{L} A_\nu^\alpha K_\alpha^i \partial_i + \Gamma_\nu]\Psi_{jL}. \tag{2.33}$$

Elegimos la siguiente dependencia en x^i para la parte izquierda de nuestro espinor de Dirac en función de los ángulos de Euler en S^3

$$\Psi_{jL}(x^\mu, y^i) = V^{-1/2} e^{iy^5 Y_L/2} e^{i\rho\tau^3/2} e^{i\theta\tau^1/2} e^{i\psi\tau^3/2} \psi_{jL}(x^\mu), \quad j = 1, 2, \tag{2.34}$$

donde tenemos

$$\psi_{1a}(x^\mu) = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \\ u \\ d \end{pmatrix}, \quad \psi_{2a}(x^\mu) = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \\ c \\ s \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

La parte derecha de nuestros espinores de Dirac son un singulete ante las transformaciones del grupo $SU(2)$. Como consecuencia de ello podemos escoger la siguiente dependencia para la parte derecha:

$$\Psi_{jR}(x^\mu, y^i) = V^{-1/2} e^{iy^5 Y_R/2} \tilde{\psi}_{jR}(x^\mu), \quad j = 1, 2, \tag{2.36}$$

donde $\tilde{\psi}_{jR} = e_R, \mu_R, u_R, c_R, d_R, s_R$ son los singuletes derechos.

Aquí Y_L es la matriz de hipercarga de los fermiones izquierdos y Y_R son los valores correspondientes derechos, y τ^i son los generadores del grupo $SU(2)$, los cuales están dados por

$$Y_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}, \tag{2.37}$$

$$\tau^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.38}$$

con $Y_R = -2$ para los leptones derechos e_R, μ_R, $Y_R = \frac{4}{3}$ para los quarks derechos u_R, c_R y $Y_R = -\frac{2}{3}$ para d_R, s_R.

$$\tau^2 = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.39}$$

$$\tau^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.40}$$

donde τ^i satisface el álgebra usual del grupo $SU(2)$.

$$[\tau^i \, , \, \tau^j] = 2\delta^{ij}\mathbf{1} \quad ; \quad [\tau^i \, , \, \tau^j] = 2i\epsilon^{ijk}\tau_k. \tag{2.41}$$

La forma de la matriz de hipercarga, Y_ψ, es escogida de tal manera que proporcione los valores correctos para la carga eléctrica, mediante el empleo de la expresión de Gellman-Nishijima [38].

$$Q = T_3 + \frac{Y}{2}, \tag{2.42}$$

siendo Q la carga eléctrica.

2.4 Acoplamientos de Yukawa, mecanismo GIM y rompimiento de simetría.

El potencial efectivo 4-dimensional está dado por

$$V(I) = \frac{\mu^2}{2}(I^\dagger I) + \frac{\lambda}{4!}(I^\dagger I)^2, \tag{2.43}$$

donde el cuadruplete de isospin está dado por

$$I_a = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix}. \tag{2.44}$$

Los términos de acoplamiento de Yukawa para los leptones pueden ser escritos como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Yl} = \tilde{G}_1[(\bar{\nu}_e, \bar{e}, 0, 0)_L I e_R + \bar{e}_R I^\dagger(\nu_e, e, 0, 0)^t_L] + \tilde{G}_2[(\bar{\nu}_e, \bar{e}, 0, 0)_L I \mu_R + \\ \bar{\mu}_R I^\dagger(\nu_e, e, 0, 0)^t_L] + \tilde{G}_3[(\bar{\nu}_\mu, \bar{\mu}, 0, 0)_L I e_R + \bar{e}_R I^\dagger(\nu_\mu, \mu, 0, 0)^t_L] + \\ \tilde{G}_4[(\bar{\nu}_\mu, \bar{\mu}, 0, 0)_L I \mu_R + \bar{\mu}_R I^\dagger(\nu_\mu, \mu, 0, 0)^t_L]. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Considerémos la matriz C definida mediante la expresión

$$C = i\tau_2, \tag{2.46}$$

se puede fácilmente ver que si definimos $\tilde{I}$ como

$$\tilde{I} = C\ {}^t I^\dagger, \tag{2.47}$$

entonces $\tilde{I}$ es un cuadruplete de isospin, pero tiene como matriz de hipercarga el negativo de la hipercarga asociada a I.

Para la parte hadrónica, usando el ángulo de Cabbibo, θ_c, podemos introducir la ya conocida mezcla de Cabbibo

$$d_c = d\ cos(\theta_c) + s\ sin(\theta_c), \tag{2.48}$$

$$s_c = s\ cos(\theta_c) - d\ sin(\theta_c). \tag{2.49}$$

Procedamos ahora a realizar la mezcla GIM [41, 42], de la manera usual

$$
\begin{aligned}
\tilde{\Psi}_{1L} &= \Psi_{1L}cos(\alpha) - \Psi_{2L}sin(\alpha) \\
\tilde{\Psi}_{2L} &= \Psi_{2L}cos(\alpha) + \Psi_{1L}sin(\alpha) \\
\tilde{u}_R &= u_R cos(\beta) - c_R sin(\beta) \\
\tilde{u}_R &= c_R cos(\beta) + u_R sin(\beta) \\
\tilde{d}_R &= d_R cos(\gamma) - s_R sin(\gamma) \\
\tilde{s}_R &= s_R cos(\gamma) + d_R sin(\gamma).
\end{aligned} \tag{2.50}
$$

Las últimas definiciones nos permiten escribir los acoplamientos de Yukawa para la parte hadrónica como sigue

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_{Yh} = {} & \tilde{G}_5[(0,0,\bar{u},\bar{d}_c)_L I d_R + \bar{d}_R I^\dagger (0,0,u,d_c)^t_L] + \\
& \tilde{G}_6[(0,0,\bar{u},\bar{d}_c)_L I s_R + \bar{s}_R I^\dagger (0,0,u,d_c)^t_L)] + \\
& \tilde{G}_7[(0,0,\bar{c},\bar{s}_c)_L I d_R + \bar{d}_R I^\dagger (0,0,c,s_c)^t_L] + \\
& \tilde{G}_8[(0,0,\bar{c},\bar{s}_c)_L I s_R + \bar{s}_R I^\dagger (0,0,c,s_c)^t_L] + \\
& \tilde{G}_9[(0,0,\bar{u},\bar{d}_c)_L \tilde{I} u_R + \bar{u}_R \tilde{I}^\dagger (0,0,u,d_c)^t_L] + \\
& \tilde{G}_{10}[(0,0,\bar{u},\bar{d}_c)_L \tilde{I} c_R + \bar{c}_R \tilde{I}^\dagger (0,0,u,d_c)^t_L] + \\
& \tilde{G}_{11}[(0,0,\bar{c},\bar{s}_c)_L \tilde{I} u_R + \bar{u}_R \tilde{I}^\dagger (0,0,c,s_c)^t_L] + \\
& \tilde{G}_{12}[(0,0,\bar{c},\bar{s}_c)_L \tilde{I} c_R + \bar{c}_R \tilde{I}^\dagger (0,0,c,s_c)^t_L].
\end{aligned} \tag{2.51}
$$

Sabemos que existe un conjunto de puntos los cuales dan un mínimo para nuestro potencial, estos puntos cumplen la condición

$$
I^{0\dagger} I^0 = \sum_{j=1}^{4} \mid \phi_j^0 \mid = a^2 = -\frac{6\mu^2}{\lambda}. \tag{2.52}
$$

Ahora realizaremos el rompimiento de simetría [19, 39, 40]. Como es usual, tenemos dos bosones de Goldstone, es decir, ϕ_1 and ϕ_3.

Así, tenemos la siguiente matriz de hipercarga para I:

$$Y_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.53}$$

Consecuentemente, la matriz de hipercarga para $\tilde{I}$ es

$$Y_{\tilde{I}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.54}$$

El estado base para nuestro campo de Higgs es escogido como

$$I^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ am \\ 0 \\ an \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{I}^0 = \begin{pmatrix} am \\ 0 \\ an \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.55}$$

siendo $n^2 + m^2 = 1$, sin ningúna pérdida de generalidad podemos suponer que $m > 0$ y $n > 0$.

La derivada covariante para el campo I es

$$D_\nu I = [\partial_\nu - \frac{i}{2} g_1 B_\nu Y_I - \frac{i}{2} g_2 A_\nu^\alpha \tau_\alpha] I. \tag{2.56}$$

Empleando (2.44) y (2.54) en la expresión (2.45), encontramos que el término de Yukawa, después del rompimiento de simetría, para los leptones está dado como sigue

$$\mathcal{L}_{Yl} = G_1 am(\bar{e}_L\, e_R + \bar{e}_R\, e_L) + G_2 am(\bar{\mu}_R\, \mu_L + \bar{\mu}_L\, \mu_R), \tag{2.57}$$

donde G_1 y G_2 son combinaciones lineales de $\tilde{G}_j$, siendo $j = 1, 2, 3, 4$.

El mecanismo de GIM [41, 42] nos permite escoger los ángulos α, β y γ de tal manera que $G_5 = G_9$, $G_6 = G_{10}$ y $G_{11} = G_{12} = 0$, siendo G_5 a G_{12} combinaciones lineales de $\tilde{G}_j$, $\quad j = 5, ..., 12$.

Por lo tanto, podemos re-escribir la expresión (2.51) como

$$\mathcal{L}_{Yh} = G_5 an(\bar{d}_L\ d_R + \bar{d}_R\ d_L) + G_6 an(\bar{s}_L\ s_R + \bar{s}_R\ s_L)$$
$$+G_7 an(\bar{u}_L\ u_R + \bar{u}_R\ u_L) + G_8 an(\bar{c}_L\ c_R + \bar{c}_R\ c_L). \tag{2.58}$$

Con el fin de conseguir el modelo de Weinberg-Salam-Glashow en el límite de bajas energías debemos agregar a los términos de Yukawa una contribución preónica para compensar la influencia de la contribución preónica de la quinta dimensión sobre las masas fermiónicas, las cuales nos conducen a resultados que no concuerdan con el experimento [28].

2.5 Reducción dimensional, ecuaciones de campo.

Llevaremos ahora a cabo una transformación conforme en la métrica interna. La idea es aislar Relatividad General de los campos I_1 y I. Esto implica que el determinate de la métrica interna debe de ser tomado como un factor conforme. De esta manera el determinante de la métrica transformada se vuelve 1. Este hecho nos conduce a que podamos escribir

$$\hat{g}_{ij} = (I_1^2 I^6 \sin^2\theta)^{-\frac{1}{4}} g_{ij}. \tag{2.59}$$

La nueva métrica interna queda entonces escrita como

$$\hat{g}_{ij} = (I_1^2 I^6 \sin^2\theta)^{-\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} I_1^2 L^2{}_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I^2 L^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I^2 L^2 & I^2 L^2 \cos\theta \\ 0 & 0 & I^2 L^2 \cos\theta & I^2 L^2 \end{pmatrix}. \tag{2.60}$$

Esto pudo haberse hecho de manera diferente [43, 44], realizando dos transformaciones conformes, una en el espacio externo y la otra en el espacio interno. La primera aisla Relatividad General de los campos escalares y la segunda aisla las intensidades de los campos de Yang-Mills de estos campos. En nuestro caso es suficiente llevar a cabo solo la transformación conforme en el espacio interno, ésto debido a que interpretamos la constante cosmológica efectiva 4-dimensional como el potencial de Higgs [34, 35].

La *achtbein* consiguiente es

$$e^{\hat{A}}_{\ \hat{\mu}} = \begin{pmatrix} e^{A}_{\ \mu} & 0 \\ 0 & e^{(k)}_{\ j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{A}_{\ \mu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_1L_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{I}L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{I}L\cos\frac{\theta}{2} & -\tilde{I}L\sin\frac{\theta}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{I}L\cos\frac{\theta}{2} & \cdot\ \tilde{I}L\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \tag{2.61}$$

El elemento de volumen dv_y en función de los ángulos de Euler para S^3 está dado por

$$dv_y = dy^5 L^3 \sin\theta \; d\theta \; d\rho \; d\psi. \tag{2.62}$$

donde $0 \leq y^5 \leq 2\pi L_1$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \rho \leq 2\pi$, $0 \leq \psi \leq 4\pi$ y $\sqrt{\tilde{g}} = \sqrt{-g}L_1L^3\sin\theta$.

Llevando a cabo la integración sobre S^1 y S^3 la acción (2.5) se reduce a

$$\begin{aligned} I_4 = \int d^4x\sqrt{-g}\Big\{ \frac{1}{16\pi G}\Big[& R + 2(\partial_\nu lnI_1)(\partial^\nu lnI_1) + \frac{3}{I^\dagger I}[(D_\nu I^\dagger)(D^\nu I) + \\ & I^\dagger IV(I)] - \frac{1}{4}\kappa^2(I_1^2F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + I^\dagger IF^{\alpha\mu\nu}F_{\alpha\mu\nu}) + \mathcal{L}_{Yl} + \mathcal{L}_{Yh}\Big] + \\ & \sum_{j=1}^{2}\frac{i}{2}\bar{\Psi}_{jL}e^\nu_A\Gamma^A[\partial_\nu - \frac{i}{2}g_1B_\nu Y_\psi - \frac{i}{2}g_2A^\alpha_\nu\tau_\alpha + \Gamma_\nu]\Psi_{jL} + \\ & \sum_{j=1}^{2}\frac{i}{2}\bar{\Psi}_{jR}e^\nu_A\Gamma^A[\partial_\nu - \\ & \frac{i}{2}g_1B_\nu Y_\psi + \Gamma_\nu]\Psi_{jR} - \sum_{j=1}^{2}[\frac{i}{2}e^\nu_A[\partial_\nu\bar{\Psi}_{jL}\frac{i}{2}g_1B_\nu\bar{\Psi}_{jL}Y_\psi - \\ & \frac{i}{2}g_2A^\alpha_\nu\bar{\Psi}_{jL}\tau_\alpha + \Gamma_\nu\bar{\Psi}_{jL}]\Gamma^A\Psi_{jL} + \\ & \frac{1}{2I_1L_1}\bar{\Psi}_{jL}\Gamma^5\Psi_{jL} - \frac{i}{2}\kappa I_1e^\mu_Ae^\nu_BF_{\nu\mu}\bar{\Psi}_{jL}\sigma^{AB}\Gamma^5\Psi_{jL}] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\sum_{j=1}^{2}[\frac{i}{2}e_A^{\nu}[\partial_\nu\bar{\Psi}_{jR} - \\
& \frac{i}{2}g_1 B_\nu \bar{\Psi}_{jR}Y_\psi + \bar{\Psi}_{jR}\Gamma_\nu]\Gamma^A\Psi_{jR} + \\
& \frac{1}{2I_1L_1}\bar{\Psi}_{jR}\Gamma^5\Psi_{jR}\frac{i}{2}\kappa I_1 e_A^{\mu}e_B^{\nu}F_{\nu\mu}\bar{\Psi}_{jR}\sigma^{AB}\Gamma^5\Psi_{jR}]\Big\}.
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

Donde $\mathcal{L}_{Yl}$ y $\mathcal{L}_{Yh}$ están dados por las expresiones (2.45) y (2.51), respectivamente. Nótese que hemos introducido la sustitución

$$
g_1 = \frac{\kappa}{L_1} \qquad y \qquad g_2 = \frac{\kappa}{L}. \tag{2.64}
$$

donde g_1, g_2 son las constantes de acoplamiento de $U(1)$ y $SU(2)$, respectivamente.

Hacemos ahora la identificación usual

$$
\kappa^2 = 16\pi G. \tag{2.65}
$$

Nótese que es posible extraer, de esta acción 4-dimensional: (i) la acción de Einstein-Yang-Mills; (ii) tenemos también la acción fermiónica completa del modelo de Weinberg-Salam-Glashow en un espacio-tiempo curvo; (iii) tenemos términos de Pauli y términos de masa.

Realizando la variación con respecto a los campos de norma obtenemos las ecuaciones de Yang-Mills, las cuales resultan ser

$$
\begin{aligned}
(I_1^2F^{\mu\nu})_{;\nu} + \frac{3ig_1}{16\pi G}[I^\dagger Y_I D^\mu I - (D^\mu I)^\dagger Y_I I] = \frac{g_1}{2}e_A^{\mu}\sum_{j=1}^{2}[\bar{\Psi}_{jL}\Gamma^A Y_\psi \Psi_{jL}] \\
+\frac{g_1}{2}e_A^{\mu}\sum_{j=1}^{2}[\bar{\Psi}_{jR}\Gamma^A Y_\psi\Psi_{jR}] + \sum_{j=1}^{2}(\kappa I_1 e_A^{\mu}e_B^{\nu}[\bar{\Psi}_{jL}\sigma^{AB}\Gamma^5\Psi_{jL} \\
+\bar{\Psi}_{jR}\sigma^{AB}\Gamma^5\Psi_{jR}])_{;\nu},
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

$$
\begin{aligned}
(I^\dagger I F^{\alpha\mu\nu})_{;\nu} + g_2 I^\dagger I F_{\gamma}^{\nu\mu}A_{\beta\nu}f^{\alpha\gamma\beta} + \frac{3ig_2}{16\pi G}I^\dagger I[I^\dagger\tau^\alpha D^\mu I - (D^\mu I)^\dagger\tau^\alpha I] = \\
\frac{g_2}{2}e_A^{\mu}\sum_{j=1}^{2}[\bar{\Psi}_{jL}\Gamma^A\sigma^\alpha\Psi_{jL}].
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

Variando ahora respecto a las partes izquierda y derecha de Ψ_1 and Ψ_2 obtenemos las ecuaciones de Dirac

$$ie^\nu_A\Gamma^A[\partial_\nu - \frac{i}{2}g_1 B_\nu Y_\psi - \frac{i}{2}g_2 A^\alpha_\nu \tau_\alpha + \Gamma_\nu]\Psi_{1L} - \frac{1}{2I_1L_1}\Gamma^5 Y_\psi \Psi_{1L} - \frac{i}{2}I_1\kappa e^\mu_A e^\nu_B F_{\nu\mu}\sigma^{AB}\Gamma^5\Psi_{1L} + Y_{1L} = 0, \tag{2.68}$$

$$ie^\nu_A\Gamma^A[\partial_\nu - \frac{i}{2}g_1 B_\nu Y_\psi - \frac{i}{2}g_2 A^\alpha_\nu \tau_\alpha + \Gamma_\nu]\Psi_{2L} - \frac{1}{2I_1L_1}\Gamma^5 Y_\psi \Psi_{2L} - \frac{i}{2}I_1\kappa e^\mu_A e^\nu_B F_{\nu\mu}\sigma^{AB}\Gamma^5\Psi_{2L} + Y_{2L} = 0, \tag{2.69}$$

$$ie^\nu_A\Gamma^A[\partial_\nu - \frac{i}{2}g_1 B_\nu Y_\psi + \Gamma_\nu]\Psi_{1R} - \frac{1}{2I_1L_1}\Gamma^5 Y_\psi \Psi_{1R} - \frac{i}{2}I_1\kappa e^\mu_A e^\nu_B F_{\nu\mu}\sigma^{AB}\Gamma^5\Psi_{1R} + Y_{1R} = 0, \tag{2.70}$$

$$ie^\nu_A\Gamma^A[\partial_\nu - \frac{i}{2}g_1 B_\nu Y_\psi + \Gamma_\nu]\Psi_{2R} - \frac{1}{2I_1L_1}\Gamma^5 Y_\psi \Psi_{2R} - \frac{i}{2}I_1\kappa e^\mu_A e^\nu_B F_{\nu\mu}\sigma^{AB}\Gamma^5\Psi_{2R} + Y_{2R} = 0, \tag{2.71}$$

donde los acoplamientos de Yukawa están dados, después del rompimiento de simetría, por las expresiones siguientes

$$Y_{1L} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2L_1I_1}\nu_e \\ -\frac{1}{2L_1I_1}e_L + G_1 ame_R \\ -\frac{1}{6L_1I_1}u_L + G_2 amu_R \\ -\frac{1}{6L_1I_1}d_L + G_3 amd_R \end{pmatrix}, \quad Y_{2L} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2L_1I_1}\nu_\mu \\ -\frac{1}{2L_1I_1}\mu_L + G_4 am\mu_R \\ -\frac{1}{6L_1I_1}c_L + G_5 amc_R \\ -\frac{1}{6L_1I_1}s_L + G_6 ams_R \end{pmatrix}, \tag{2.72}$$

$$Y_{1R} = \begin{pmatrix} Y_{e_R} = -\frac{1}{2L_1I_1}e_R + G_1 ame_L \\ Y_{u_R} = -\frac{1}{6L_1I_1}u_R + G_2 amu_L \\ Y_{d_R} = -\frac{1}{6L_1I_1}d_R + G_3 amd_L \end{pmatrix}, \quad Y_{2R} = \begin{pmatrix} Y_{\mu_R} = -\frac{1}{2L_1I_1}\mu_R + G_4 am\mu_L \\ Y_{c_R} = -\frac{1}{6L_1I_1}c_R + G_5 amc_L \\ Y_{s_R} = -\frac{1}{6L_1I_1}s_R + G_6 ams_L \end{pmatrix}. \tag{2.73}$$

Las ecuaciones de Einstein son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + g_{\mu\nu}V(I) = 8\pi\Bigg\{-\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{2}[\bar{\Psi}_{jL}\Gamma_{\mu}\nabla_{\nu}\Psi_{jL} - \nabla_{\nu}\bar{\Psi}_{jL}\Gamma_{\mu}\Psi_{jL}]$$
$$-\frac{i}{2}\sum_{j=1}^{2}[\bar{\Psi}_{jR}\Gamma_{\mu}\nabla_{\nu}\Psi_{jR} - \nabla_{\nu}\bar{\Psi}_{jR}\Gamma_{\mu}\Psi_{jR}] - i\kappa I_1\sum_{j=1}^{2} e_{A\nu}e_B^{\rho}F_{\mu\rho}[\bar{\Psi}jL\Gamma^5\Psi_{jL}$$
$$+\bar{\Psi}jR\Gamma^5\Psi_{jR}] + I_1^2[F_{\mu}^{\lambda}F_{\nu\rho} - \frac{1}{4}g_{\nu\mu}F^{\lambda\rho}F_{\lambda\rho}] + I^{\dagger}I[F_{\mu}^{\alpha\lambda}F_{\alpha\nu\rho} - \frac{1}{4}g_{\nu\mu}F^{\alpha\lambda\rho}F_{\alpha\lambda\rho}]$$
$$\frac{2}{I_1^2}[(\partial_{\mu}I_1)(\partial_{\nu}I_1) - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\partial^{\lambda}I_1)(\partial_{\lambda}I_1)] + \frac{6}{(I^{\dagger}I)^2}[(\nabla_{\mu}I^{\dagger})(\nabla_{\nu}I)$$
$$-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}(\nabla^{\lambda}I^{\dagger})(\nabla_{\lambda}I)]\Bigg\}. \quad (2.74)$$

La ecuación de movimiento para el campo dilatónico es

$$\frac{4}{I_1^2}D^{\lambda}D_{\lambda}I_1 + \kappa^2 I_1 F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{I_1^2 L_1}\sum_{j=1}^{2}[\bar{\Psi}_{jL}\Gamma^5\Psi_{jL} + \bar{\Psi}_{jR}\Gamma^5\Psi_{jR}]$$
$$-\frac{i}{2}\kappa e_A^{\mu}e_B^{\nu}F_{\nu\mu}\bar{\Psi}_{jL}\sigma^{AB}\Gamma^5\Psi_{jL} - \frac{i}{2}\kappa e_A^{\mu}e_B^{\nu}F_{\nu\mu}\bar{\Psi}_{jR}\sigma^{AB}\Gamma^5\Psi_{jR} = 0. \quad (2.75)$$

La ecuación de movimiento para el campo de Higgs es

$$[D^{\nu}D_{\nu}I + \mu^2 I + \frac{\lambda}{6}(I^{\dagger}I)I)] - \frac{1}{4}IF^{\alpha\nu\mu}F_{\alpha\nu\mu} - 2[\tilde{G}_1\bar{e}_R(\nu_e, e, 0, 0)_L^t +$$
$$\tilde{G}_2\bar{\mu}_R(\nu_e, e, 0, 0)_L^t + \tilde{G}_3\bar{e}_R(\nu_{\mu}, \mu, 0, 0)_L^t + \tilde{G}_4\bar{\mu}_R(\nu_{\mu}, \mu, 0, 0)_L^t$$
$$+\tilde{G}_5\bar{d}_R(0, 0, u, d_c)_L^t + \tilde{G}_6\bar{s}_R(0, 0, u, d_c)_L^t + \tilde{G}_7\bar{d}_R(0, 0, c, s_c)_L^t +$$
$$\tilde{G}_8\bar{s}_R(0, 0, c, s_c)_L^t + \tilde{G}_9\bar{u}_R C^t(0, 0, u, d_c)_L^t + \tilde{G}_{10}\bar{c}_R C^t(0, 0, u, d_c)_L^t +$$
$$\tilde{G}_{11}\bar{u}_R C^t(0, 0, u, s_c)_L^t + \tilde{G}_{12}\bar{c}_R C^t(0, 0, u, s_c)_L^t] = 0. \quad (2.76)$$

Tenemos ya todas las ecuaciones de campo y empleando el rompimiento de simetría de la sección IV, procedemos ahora a llevar a cabo la descomposición de Weinberg, éllo con el fin de obtener las ecuaciones finales e interpretar los resultados. Esto se llevará a cabo en la siguiente sección.

2.6 Descomposición de Weinberg.

Procedamos ahora a llevar a cabo la descomposición de las ecuaciones de campo, para hacerlo emplearemos la descomposición de Weinberg [45]

$$Z_\mu = A^3_\mu c_W + B_\mu s_W, \tag{2.77}$$

$$A_\mu = -A^3_\mu s_W + B_\mu c_W, \tag{2.78}$$

$$W^\pm_\mu = A^1_\mu \mp i A^2_\mu, \tag{2.79}$$

siendo $C_W = cos(\theta_W)$ y $s_W = sin(\theta_W)$ y θ_W es el ángulo de Weinberg. A_μ es el campo de norma asociado al campo electromagnético y Z_μ el bosón neutral.

Procediendo como es usual en la teoría de Weinberg-Salam encontramos los siguientes campos

$$Z_{\mu\nu} = Z_{\nu;\mu} - Z_{\mu;\nu}, \tag{2.80}$$

$$A_{\mu\nu} = A_{\nu;\mu} - A_{\mu;\nu}, \tag{2.81}$$

$$W^\pm_{\mu\nu} = W^\pm_{\nu;\mu} - W^\pm_{\mu;\nu}, \tag{2.82}$$

la carga electrónica está dada por

$$\hat{e} = g_1 c_w = g_2 s_w. \tag{2.83}$$

Las ecuaciones de campo descompuestas son las siguientes

Ecuaciones de Dirac:

para ν_e

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu + \Gamma_\mu)\nu_e + \frac{1}{2}g_2\gamma^\mu W_\mu^+ e_L + \frac{1}{2}(g_2 c_w + g_1 s_w)\gamma^\mu Z_\mu \nu_e + \\ + \frac{i}{2}I_1 e_A{}^\mu e_B{}^\nu \sqrt{16\pi G}(s_w Z_{\mu\nu} + c_w A_{\mu\nu})\sigma^{AB}\nu_e = 0, \qquad (2.84)$$

para e_L

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu - i\hat{e}A_\mu + \Gamma_\mu)e_L + \frac{1}{2}g_2\gamma^\mu W_\mu^- \nu_e - \frac{1}{2}(g_2 c_w - g_1 s_w)\gamma^\mu Z_\mu e_L + \\ + \frac{i}{2}I_1 e_A^\mu e_B^\nu \sqrt{16\pi G}(s_w Z_{\mu\nu} + c_w A_{\mu\nu})\sigma^{AB} e_L + G_1 a m e_R = 0, \qquad (2.85)$$

para u_L

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{2}{3}i\hat{e}A_\mu + \Gamma_\mu)u_L + \frac{1}{2}g_2\gamma^\mu W_\mu^+ d_L + \frac{1}{2}(g_2 c_w - \frac{1}{3}g_1 s_w)\gamma^\mu Z_\mu u_L + \\ - \frac{i}{2}I_1 e_A^\mu e_B^\nu \sqrt{16\pi G}(s_w Z_{\mu\nu} + c_w A_{\mu\nu})\sigma^{AB} u_L + G_2 a n u_R = 0, \qquad (2.86)$$

para d_L

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu - \frac{1}{3}i\hat{e}A_\mu + \Gamma_\mu)d_L + \frac{1}{2}g_2\gamma^\mu W_\mu^- u_L - \frac{1}{2}(g_2 c_w + \frac{1}{3}g_1 s_w)\gamma^\mu Z_\mu d_L + \\ - \frac{i}{2}I_1 e_A^\mu e_B^\nu \sqrt{16\pi G}(s_w Z_{\mu\nu} + c_w A_{\mu\nu})\sigma^{AB} d_L + G_3 a n d_R = 0, \qquad (2.87)$$

para ν_μ

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu + \Gamma_\mu)\nu_\mu + \frac{1}{2}g_2\gamma^\mu W_\mu^+ \mu_L + \frac{1}{2}(g_2 c_w + g_1 s_w)\gamma^\mu Z_\mu \nu_\mu + \\ + \frac{i}{2}I_1 e_A{}^\mu e_B{}^\nu \sqrt{16\pi G}(s_w Z_{\mu\nu} + c_w A_{\mu\nu})\sigma^{AB}\nu_\mu = 0, \qquad (2.88)$$

para μ_L

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu - i\hat{e}A_\mu + \Gamma_\mu)\mu_L + \frac{1}{2}g_2\gamma^\mu W_\mu^- \nu_\mu - \frac{1}{2}(g_2 c_w - g_1 s_w)\gamma^\mu Z_\mu \mu_L + \\ + \frac{i}{2} I_1 e_A^\mu e_B^\nu \sqrt{16\pi G}(s_w Z_{\mu\nu} + c_w A_{\mu\nu})\sigma^{AB}\mu_L + G_4 am\mu_R = 0, \tag{2.89}$$

para c_L

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{2}{3}i\hat{e}A_\mu + \Gamma_\mu)c_L + \frac{1}{2}g_2\gamma^\mu W_\mu^+ s_L + \frac{1}{2}(g_2 c_w - \frac{1}{3}g_1 s_w)\gamma^\mu Z_\mu c_L + \\ - \frac{i}{2} I_1 e_A^\mu e_B^\nu \sqrt{16\pi G}(s_w Z_{\mu\nu} + c_w A_{\mu\nu})\sigma^{AB} c_L + G_5 anc_R = 0, \tag{2.90}$$

para s_L

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu - \frac{1}{3}i\hat{e}A_\mu \Gamma_\mu)s_L + \frac{1}{2}g_2\gamma^\mu W_\mu^- c_L - \frac{1}{2}(g_2 c_w + \frac{1}{3}g_1 s_w)\gamma^\mu Z_\mu s_L + \\ - \frac{i}{2} I_1 e_A^\mu e_B^\nu \sqrt{16\pi G}(s_w Z_{\mu\nu} + c_w A_{\mu\nu})\sigma^{AB} s_L + G_6 ans_R = 0, \tag{2.91}$$

para e_R

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu - i\hat{e}A_\mu + \Gamma_\mu)e_R + g_1 s_w \gamma^\mu Z_\mu e_R \\ - \frac{i}{2} I_1 e_A^\mu e_B^\nu \sqrt{16\pi G}(s_w Z_{\mu\nu} + c_w A_{\mu\nu})\sigma^{AB} e_R + G_1 ame_L = 0, \tag{2.92}$$

para u_R

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{2}{3}i\hat{e}A_\mu + \Gamma_\mu)u_R - \frac{1}{6}g_1 s_w \gamma^\mu Z_\mu u_R \\ - \frac{i}{2} I_1 e_A^\mu e_B^\nu \sqrt{16\pi G}(s_w Z_{\mu\nu} + c_w A_{\mu\nu})\sigma^{AB} u_R + G_2 anu_L = 0, \tag{2.93}$$

para d_R

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu - \frac{1}{3}i\hat{e}A_\mu\Gamma_\mu)d_R - \frac{1}{6}g_1 s_w \gamma^\mu Z_\mu d_R$$
$$-\frac{i}{2}I_1 e_A^{\ \mu} e_B^{\ \nu}\sqrt{16\pi G}(s_w Z_{\mu\nu} + c_w A_{\mu\nu})\sigma^{AB} d_R + G_3 an d_L = 0, \tag{2.94}$$

para c_R

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu + \frac{2}{3}i\hat{e}A_\mu + \Gamma_\mu)c_R - \frac{1}{6}g_1 s_w \gamma^\mu Z_\mu c_R$$
$$-\frac{i}{2}I_1 e_A^{\ \mu} e_B^{\ \nu}\sqrt{16\pi G}(s_w Z_{\mu\nu} + c_w A_{\mu\nu})\sigma^{AB} c_R + G_5 an c_L = 0, \tag{2.95}$$

para s_R

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu - \frac{1}{3}i\hat{e}A_\mu\Gamma_\mu)s_R - \frac{1}{6}g_1 s_w \gamma^\mu Z_\mu s_R$$
$$-\frac{i}{2}I_1 e_A^{\ \mu} e_B^{\ \nu}\sqrt{16\pi G}(s_w Z_{\mu\nu} + c_w A_{\mu\nu})\sigma^{AB} s_R + G_6 an s_L = 0. \tag{2.96}$$

Las ecuaciones de Yang-Mills en el límite de bajas energías (donde $I_1 = I_0$, véase abajo, expresión (2.103)) son las siguientes:
para el fotón:

$$A^{\mu\lambda}_{;\mu} + 2\hat{e}\{i(W^{[+(\mu})_{;\mu}W^{-]\lambda)} + \frac{i}{2}[W^{+\mu\lambda}W^-_\mu + W^{-\mu\lambda}W^+_\mu] - \frac{\hat{e}}{2}[(\frac{c_W}{s_W}Z^\mu -$$
$$A^\mu)[(W^{+\lambda} + W^{-\lambda})(W^+_\mu + W^-_\mu) + i(W^{+\lambda} - W^{-\lambda})(W^+_\mu - W^-_\mu)] - (\frac{c_W}{s_W}Z^\lambda -$$
$$A^\lambda)[(W^{+\mu} + W^{-\mu})^2 - i(W^{+\mu} - W^{-\mu})^2]]\} = \frac{\hat{e}}{I_1^2}\ [\bar{e}_L\gamma^\lambda e_L - \frac{2}{3}\bar{u}_L\gamma^\lambda u_L$$
$$+\frac{1}{3}\bar{d}_L\gamma^\lambda d_L + \bar{\mu}_L\gamma^\lambda\mu_L - \frac{2}{3}\bar{c}_L\gamma^\lambda c_L + \frac{1}{3}\bar{s}_L\gamma^\lambda s_L + \bar{e}_R\gamma^\lambda e_R - \frac{2}{3}\bar{u}_R\gamma^\lambda u_R +$$

$$\frac{1}{3}\bar{d}_R\gamma^\lambda d_R + \bar{\mu}_R\gamma^\lambda\mu_R - \frac{2}{3}\bar{c}_R\gamma^\lambda c_R + \frac{1}{3}\bar{s}_R\gamma^\lambda s_R] + \sqrt{16\pi G}\frac{c_W}{I_1}[(\bar{\nu}_e\sigma^{\mu\lambda}\nu_e + \bar{e}_L\sigma^{\mu\lambda}e_L - \bar{u}_L\sigma^{\mu\lambda}u_L - \bar{d}_L\sigma^{\mu\lambda}d_L + \bar{\nu}_\mu\sigma^{\mu\lambda}\nu_\mu + \bar{\mu}_L\sigma^{\mu\lambda}\mu_L - \bar{c}_L\sigma^{\mu\lambda}c_L - \bar{s}_L\sigma^{\mu\lambda}s_L)]_{;\mu}, \quad (2.97)$$

para el bosón Z_μ:

$$\begin{aligned}
Z^{\mu\lambda}_{;\mu} - 2g_2c_W\{i(W^{[+(\mu}&)_{;\mu}W^{-]\lambda)} + \\
&\frac{i}{2}[W^{+\mu\lambda}W^-_\mu + W^{-\mu\lambda}W^+_\mu] \\
-\frac{g_2c_W}{2}[(Z^\mu - \frac{s_W}{c_W}A^\mu)[(W^{+\lambda} + W^{-\lambda})(W^+_\mu + W^-_\mu) +& \\
&i(W^{+\lambda} - W^{-\lambda})(W^+_\mu - W^-_\mu)] \\
-(Z^\lambda - \frac{s_W}{c_W}A^\lambda)[(W^{+\mu} + W^{-\mu})^2 - i(W^{+\mu} - W^{-\mu})^2]]\} +& \\
\frac{3a^2}{16\pi G}[\frac{g_1^2}{I_1^2} + g_2^2]Z^\mu = \frac{1}{2I_1^2}[(g_1s_W + g_2c_W)(\bar{\nu}_e\gamma^\lambda\nu_e + \bar{\nu}_\mu\gamma^\lambda\nu_\mu) +& \\
&(g_1s_W - g_2c_W)(\bar{e}_L\gamma^\lambda e_L + \bar{\mu}_L\gamma^\lambda\mu_L) \\
&+(g_2c_W - \frac{1}{3}g_1s_W)(\bar{u}_L\gamma^\lambda u_L + \bar{c}_L\gamma^\lambda c_L) - \\
&(g_2c_W + \frac{1}{3}g_1s_W)(\bar{d}_L\gamma^\lambda d_L + \bar{s}_L\gamma^\lambda s_L)] \\
+g_1s_W(\bar{e}_R\gamma^\lambda e_R + \bar{\mu}_R\gamma^\lambda\mu_R) - \frac{1}{3}g_1s_W(\bar{u}_R\gamma^\lambda u_R + \bar{c}_R\gamma^\lambda c_R) - \frac{1}{3}g_1s_W(\bar{d}_R\gamma^\lambda d_R& \\
+\bar{s}_R\gamma^\lambda s_R)] + \frac{\sqrt{16\pi G}}{I_1}s_W[(\bar{\nu}_e\sigma^{\mu\lambda}\nu_e + \bar{e}_L\sigma^{\mu\lambda}e_L -& \\
&\bar{u}_L\sigma^{\mu\lambda}u_L - \bar{d}_L\sigma^{\mu\lambda}d_L + \bar{\nu}_\mu\sigma^{\mu\lambda}\nu_\mu + \\
&\bar{\mu}_L\sigma^{\mu\lambda}\mu_L - \bar{c}_L\sigma^{\mu\lambda}c_L - \\
&\bar{s}_L\sigma^{\mu\lambda}s)]_{;\mu}, \quad (2.98)
\end{aligned}$$

para el bosón W^+:

$$W^{+\mu\lambda}_{;\mu} - ig_2\{[2W^{-[\lambda}(c_W\ Z^{\mu]} - s_W\ A^{\mu]}]_{;\mu} -$$

$$
\begin{aligned}
& W^{+\mu\lambda}(c_W Z_\mu - s_W A^{\mu\lambda}) \\
+W_\mu^-(c_W Z^{\mu\lambda} - s_W A^{\mu\lambda}) + ig_2[W^{+\mu}(W_{\mu i}W_\lambda^i + W_{\mu 3}W^{\lambda 3}) + \\
& (W_i^\mu W_\mu^i + W_3^\mu W_\mu^3)W_\lambda^+]\} \\
+\frac{3a^2g_2^2}{16\pi G}W^{+\mu} = g_2[\bar{e}_L\gamma^\mu\nu_e + \bar{d}_L\gamma^\mu u_L + \bar{\mu_L}\gamma^\mu\nu_\mu + \bar{s}_L\gamma^\mu c_L],
\end{aligned}
\tag{2.99}
$$

para el bosón W^-:

$$
\begin{aligned}
& W_{;\mu}^{-\mu\lambda} - ig_2\{[2W^{+[\lambda}(c_W\ Z^{\mu]} - s_W\ A^{\mu]}]_{;\mu} + \\
& W^{-\mu\lambda}(c_W Z_\mu - s_W A^{\mu\lambda}) \\
+W_\mu^+(c_W Z^{\mu\lambda} - s_W A^{\mu\lambda}) + ig_2[W^{-\mu}(W_{\mu i}W^{\lambda\ i} + W_{\mu 3}W^{\lambda 3}) + \\
& (W_i^\mu W_\mu^i + W_3^\mu W_\mu^3)W_\lambda^-]\} + \frac{3a^2g_2^2}{16\pi G}W^{-\mu} = \\
& g_2[\bar{\nu}_e\gamma^\lambda e_L + \bar{u}_L\gamma^\lambda d_L + \bar{\nu}_\mu\gamma^\lambda\mu_L + \bar{c}_L\gamma^\lambda s_L].
\end{aligned}
\tag{2.100}
$$

Las ecuaciones (2.84)-(2.96) dan los términos de masa para el electrón, muón, y los quarks u, d, c, y s. Se observan dos contribuciones, un término preónico [28] proporcional a $\frac{1}{I_1L_1}$, el cual es consecuencia de la reducción dimensional y es cancelado por la contribución preónica de Yukawa y otro más que surge del rompimiento de simetría, G_jam o G_jan.

De las expresiones (2.97)-(2.100) encontramos que el fotón continua sin tener masa y que la masa cuadrada de los bosones Z y W son, respectivamente

$$
M_W^2 = \frac{3a^2g_2^2}{16\pi G},
\tag{2.101}
$$

$$
M_Z^2 = \frac{3a^2}{16\pi G}[\frac{g_1^2}{I_1^2} + g_2^2],
\tag{2.102}
$$

estos resultados nos permiten evaluar a y las constantes de Yukawa $\bar{G}_j$.

Con el fin de hacer que estas predicciones teóricas chequen con el experimento [42, 46], debemos de satisfacer la condición $\frac{M_W^2}{M_Z^2} = cos^2(\theta_W)$. Esto nos conduce a concluir que nuestro campo dilatónico I_1 está en su vacío lineal, es decir, debe tener un estado base, el cual es una constante, $I_0 \neq 0$, y $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}, F_{\mu\nu} = 0, F^{\alpha}_{\mu\nu} = 0$ y $T_{00} = 0$ es un mínimo [47-49]. Este es de hecho, el caso de acuerdo con nuestras ecuaciones de campo; el estado base es degenerado y existe para una constante arbitraria $I = I_0$, como puede verse en la expresión (2.75).

Empleando este punto de vista, uno puede escoger el valor apropiado de I_0 con la finalidad de obtener las verdaderas masas bosónicas; uno encuentra entonces que

$$I_1 = 1. \tag{2.103}$$

Además de los términos usuales de una teoría de Weinberg-Salam-Glashow en un espacio-tiempo curvo encontramos que como consecuencia de la reducción dimensional, existen dos momento anómalos, uno relacionado al campo de norma electromagnético A_ν y el otro asociado al campo de norma débil Z_ν [28]. En unidades gaussianas estos momentos tienen el valor

$$\frac{\hbar}{2c}\sqrt{16\pi G}c_w \approx 5.9 \times 10^{-32} e - cm. \tag{2.104}$$

para el momento electromagnético anómalo

$$\frac{\hbar}{2c}\sqrt{16\pi G}s_w \approx 3.2 \times 10^{-32} e - cm. \tag{2.105}$$

para el momento débil anómalo. La interacción de estos momentos con sus correspondientes campos de norma aparecen en las ecuaciones de Yang-Mills (2.97)-(2.100) y producen corrientes de polarización adicionales.

Este modelo puede fácilmente extenderse a la tercera familia fundamental

$$\Psi_3 = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \\ t \\ b \end{pmatrix}. \tag{2.106}$$

y todas las anteriores conclusiones se siguen manteniendo. Todo lo que se ha mencionado hasta este momento en este capítulo ha sido ya publicado [50].

2.7 Ecuación de Weyl en universos tipo Gödel.

Cambiémos ahora un poco el tema a discutir y analicémos la ecuación de Weyl (la ecuación de Dirac para una partícula no masiva) para el caso en el cual tenemos una familia de métricas tipo Gödel. Procederemos a obtener una solución analítica para la ecuación de campo en el caso de un elemento de esta familia de métricas.

Las ecuaciones de campo para el caso de partículas con diferentes espines han sido ya estudiadas, no solo en el contexto de universos de tipo Gödel [51-54], sino también en algunas de sus posibles extensiones [55-57]. En esta sección consideraremos la ecuación de un campo espinorial no masivo en una familia de espacios-tiempos homogéneos tipo Gödel [58, 59]. La métrica para esta clase de espacios-tiempos es del tipo estacionaria y posee además simetría cilíndrica.

El punto de inicio es una métrica que tiene la siguiente forma

$$ds^2 = -(dt + md\phi)^2 + dr^2 + dz^2 + (l - m^2)d\phi^2, \tag{2.107}$$

donde m y l son funciones solo de r, y satisfacen las siguientes condiciones

$$D = (l + m^2)^{\frac{1}{2}} = A_1 exp[ar] + A_2 exp[-ar], \quad \frac{1}{D}\frac{dm}{dr} = C. \tag{2.108}$$

Estas condiciones pueden ser re-escritas de la siguiente manera

$$D = Ar, \quad \frac{1}{D}\frac{dm}{dr} = C, \tag{2.109}$$

aquí A_i y C son constantes arbitrarias. El contenido de materia en el universo descrito por nuestra métrica rota de manera uniforme e intrínsicamente con velocidad angular igual a

$$\Omega^\mu = (0, 0, 0, \frac{-c}{\sqrt{-g}}\frac{dm}{dr}). \tag{2.110}$$

Con el fin de poder escribir la ecuación de campo para un campo sin masa y de espin $\frac{1}{2}$ introduciremos la tétrada, $e^\alpha_\mu(x)$, la cual está definida como

$$g_{\mu\nu} = e^\alpha_\mu(x) e^\beta_\nu(x) \eta_{\alpha\beta}. \tag{2.111}$$

Para el caso que nos ocupa, podemos escoger

$$e_0^0 = 1, \quad e_1^1 = 1, \quad e_2^0 = \frac{-m}{D}, \quad e_2^2 = \frac{1}{D}, \quad e_3^3 = 1. \tag{2.112}$$

Las matrices curvas de Dirac que satisfacen la condición

$$\gamma_\mu(x)\gamma_\nu(x) + \gamma_\nu(x)\gamma_\mu(x) = -2g_{\mu\nu}(x), \tag{2.113}$$

están dadas por las siguientes expresiones

$$\gamma^0(x) = \tilde{\gamma}^0 - \frac{m}{D}\tilde{\gamma}^2, \quad \gamma^1(x) = \tilde{\gamma}^1, \quad \gamma^2(x) = \frac{1}{D}\tilde{\gamma}^2, \quad \gamma^3(x) = \tilde{\gamma}^3, \tag{2.114}$$

siendo $\tilde{\gamma}^\alpha$ las matrices de Dirac en el caso de un espacio-tiempo Minkowskiano.

La ecuación de Weyl en un espacio-tiempo curvo es

$$\gamma^\mu \nabla_\mu \psi(x) = 0, \tag{2.115}$$

$$(1 + \gamma^5)\psi(x) = 0. \tag{2.116}$$

Aquí tenemos las siguientes relaciones

$$\nabla_\mu = \partial_\mu + \Gamma_\mu, \quad \Gamma_\mu = \frac{1}{8}[\tilde{\gamma}^\alpha, \tilde{\gamma}^\beta] e_\alpha^\nu e_{\beta\nu;\mu}, \tag{2.117}$$

$$\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3. \tag{2.118}$$

En el caso de la métrica que nos ocupa, las conexiones espinoriales son

$$\Gamma_0 = \frac{m'}{4D}\gamma^2\gamma^1, \quad \Gamma_1 = \frac{m'}{4D}\gamma^0\gamma^2, \quad \Gamma_2 = \frac{m'}{4}\gamma^0\gamma^1 + \frac{mm' + l'}{4D}\gamma^1\gamma^3, \quad \Gamma_3 = 0, \tag{2.119}$$

donde las primas representan derivación respecto a r. Empleando la representación estándar de las matrices gamma, la ecuación de Dirac se reduce a

$$\gamma^0\psi_{,0} + \gamma^1\psi_{,1} + \frac{1}{D}\gamma^2\psi_{,2} + \gamma^3\psi_{,3} - \frac{m}{D}\gamma^2\psi_{,0} - \frac{m'}{4D}\gamma^2\gamma^0\gamma^1\psi + \frac{2D'}{D}\gamma^1\psi = 0. \tag{2.120}$$

Podemos separar en esta ecuación variables, y para ello haremos uso de la siguiente expresión

$$\psi_k = exp[-i(k_0 t + k_2 \phi + k_3 z)] \begin{pmatrix} \xi_1(r) \\ \xi_2(r) \end{pmatrix}, \tag{2.121}$$

siendo $\xi_i(r)$ espinores de dos componentes, y k_i constantes. La condición de quiralidad (véase la expresión (2.116)) implica que

$$\xi_1(r) = \xi_2(r) = \begin{pmatrix} R_1(r) \\ R_2(r) \end{pmatrix}. \tag{2.122}$$

Por consiguiente, la expresión (2.115) se transforma ahora en

$$R_{2,1} + \frac{1}{D}(k_0 m - k_2)R_2 + i(\frac{m'}{4D} - k_0 - k_3)R_1 = 0, \tag{2.123}$$

$$R_{1,1} - \frac{1}{D}(k_0 m - k_2)R_1 + i(-\frac{m'}{4D} - k_0 + k_3)R_2 = 0. \tag{2.124}$$

Hasta este punto no hemos empleado una forma explícita para las funciones $l(r)$ y $m(r)$. Si eliminamos R_2 de las dos ecuaciones antes escritas, y hacemos uso explícito de la expresión $m = m_0 + \frac{CA}{2}r^2$ (véase la expresión (2.109)), se concluye que

$$R_1'' + \left[\frac{1}{Ar^2}(\tilde{k}_0 r^2 - \tilde{k}_2)\left(1 - \frac{1}{A}(\tilde{k}_0 r^2 - \tilde{k}_2)\right) + E\right]R_1 = 0, \tag{2.125}$$

donde hemos introducido las siguientes constantes

$$\tilde{k}_0 = \frac{k_0 AC}{2}, \quad \tilde{k}_2 = k_0 m_0 - k_2, \quad E = (k_3 - k_0 - \frac{C}{4})(\frac{C}{4} - k_0 - k_3) - \frac{2\tilde{k}_0}{A}. \tag{2.126}$$

La solución a la expresión (2.125) es la siguiente función

$$R_1(r) = (\sqrt{2}\tilde{A}r^2)^{-\frac{1}{4}}[A_1 M_{\kappa,\mu}(\sqrt{2}\tilde{A}r^2) + A_2 W_{\kappa,\mu}(\sqrt{2}\tilde{A}r^2)], \tag{2.127}$$

siendo

$$\tilde{A} = \frac{k_0}{A}, \tag{2.128}$$

y donde $M_{\kappa,\mu}$ y $W_{\kappa,\mu}$ son las funciones de Whittaker definidas en términos de las funciones hipergeométricas confluentes M y U

$$M_{\kappa,\mu}(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{2}+\mu} M(\frac{1}{2} + \mu - \kappa, 1 + 2\mu, x), \tag{2.129}$$

$$W_{\kappa,\mu}(x) = e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{1}{2}+\mu} U(\frac{1}{2} + \mu - \kappa, 1 + 2\mu, x), \tag{2.130}$$

y los parámetros κ y μ están en este caso dados por las expresiones siguientes

$$\kappa = \frac{E}{\sqrt{8\tilde{A}}}, \quad \mu = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\frac{1}{A}\tilde{k}_2(1 + \frac{1}{A}k_2)}. \tag{2.131}$$

Sobre esta solución impondremos la condición de que las funciones de Whittaker estén acotadas para todo valor de r.

Esta restricción se cumple si y solo si

$$\frac{1}{2} + \mu - \kappa = -n, \tag{2.132}$$

donde n debe ser un número natural.

De las definiciones arriba mencionadas, se tiene que esta última condición es equivalente a pedir que se cumpla la expresión siguiente

$$\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}\frac{1}{A}\tilde{k}_2(1 + \frac{1}{A}k_2)} - \frac{E}{\sqrt{8\tilde{A}}} = -n, \tag{2.133}$$

donde nuevamente n debe ser un número natural.

De esta manera hemos resuelto el caso de la ecuación de Weyl para una familia de espacios-tiempos tipo Gödel. Los resultados presentados en esta sección aparecen ya publicados [60].

2.8 Conclusiones.

Resumiendo, hemos en este capítulo mostrado como el modelo estándar puede obtenerse a partir de una teoría gravitacional 8-dimensional tomando la estructura de haz fibrado principal con un acoplamiento de Yukawa extendido e interpretando a la constante cosmológica como el potencial de Higgs. Las masas correctas de los bosones de norma así como las fermiónicas son dadas por la teoría. Esto parece implicar que para poder introducir a la interacción gravitacional en una teoría matemáticamente consistente, las dimensiones extras son necesarias.

Sin embargo, debemos mencionar que si consideramos a los neutrinos como partículas no masivas, entonces este modelo presenta serias dificultades ya que una parte del espacio interno, S^1, genera siempre un término en la masa en los neutrinos, la cual debe ser cancelada mediante un término adicional que hemos agregado en los acoplamientos de Yukawa, el cual es introducido en el modelo *by hand*.

En caso en el que el neutrino posea masa no nula, tema también actual de investigación, se podría entonces eliminar de este modelo la contribución preónica que se agregó en la expresión para el acoplamiento de Yukawa, y que tiene la forma $\frac{1}{2I_1L_1}$. Como ya vimos, para obtener las masa bosónicas correctas es necesario satisfacer la condición $I_1 = 1$ (véase la expresión (2.103)) y en consecuencia se concluye que la masa del neutrino tendrá, según este modelo, un orden de magnitud de $m \sim \frac{e}{c_W\sqrt{64\pi G}} \sim 10^{-7}$gramos lo que equivale a $\sim 5 \times 10^{25}$Mev, algo que no concuerda con lo esperado, ya que de tener masa el neutrino electrónico, ésta deberá de ser mucho menor que la masa del electrón, que es ~ 0.511Mev. Es decir, si se consigue medir una masa no nula para el neutrino electrónico (estos experimentos están ya funcionando aún cuando hasta hoy no se ha podido medir con certeza una masa no nula), entonces nuestro modelo no podría explicar la magnitud de dicha masa. Respecto al tema de las masas es fundamental mencionar que en conexión con este tópico se presenta un punto adicional, el cual vale la pena sea mencionado, supóngase que se tiene un espacio $(4+n)$–dimensional, de la forma $M_4 \times B$ donde B es un espacio homogéneo, y además el espacio total contiene un campo fermiónico no masivo. Si $B = G/H$, entonces la teoría 4–dimensional efectiva [61] contiene un espectro infinito de campos fermiónicos, cuyas masas están determinadas por los eigenvalores del operador interno de Dirac, pero como consecuencia de la reducción dimensional el cero no es un eigenvalor de dicho operador. Esto genera serios problemas y en conexión con ellos existen varias soluciones posibles, como por ejemplo, introducir términos de masa *by hand* o introducir explícitamente campos de norma no relacionados con la métrica.

Es además importante mencionar que este modelo, en el cual el campo de Higgs juega un papel fundamental, tiene todos problemas conceptuales que presentan las teorías que incluyan como parte fundamental de su estructura matemática al campo de Higgs, por ejemplo: (i) el problema de la constante cosmológica que aparece como consecuencia del hecho de que en este tipo de teorías el campo de Higgs debe de ser masivo; (ii) no se entiende el porqué el campo de Higgs debe de presentar un acoplamiento más intenso con ciertas partícuals que con otras; (iii) desde el punto de vista físico poco se gana proponiendo al campo de Higgs como el elemento en la teoría responsable de la aparición de la masa, ya que si bien se supone usualmente que la masa del bosón de Higgs está predominantemente dominada por una auto-interacción con el campo de Higgs, en cierto sentido la ignorancia acerca del origen de la masa de las partículas es reemplazado por la ignorancia acerca de los acoplamientos Higgs-partículas, y con éllo podría argumentarse que no se gana en realidad ningún conocimiento.

Por otro lado, los problemas que presenta la teoría de la Relatividad General de Einstein, en cuanto a su renormalización y regularización, se hacen tambén presentes en los modelos tipo Kaluza-Klein.

La pregunta concerniente al mecanismo que permite obtener la reducción dimensional continua sin tener respuesta, en nuestro modelo la reducción dimensional es un proceso que introducimos y para el cual no tenemos ninguna explicación. Aún cuando, como ya se mencionó en el capítulo 1, existen varias propuestas que intentan dar una explicación a este proceso [9-12], realmente hasta el momento este es un problema abierto dentro del contexto de teorías tipo Kaluza-Klein. Esta falta de explicación respecto al proceso que genera la reducción dimensional es un problema más de este tipo de modelos, problema que la propuesta presentada en este capítulo comparte, es un proceso que en el capítulo 2 es introducido *by hand* y por lo tanto su presencia carece de explicación física.

Con esta teoría hemos conseguido geometrizar la interacción electrodébil, en el espíritu de Kaluza-Klein. Es importante mencionar [62] que los estados de las teorías tipo Kaluza-Klein persisten como un subconjunto del espectro completo de la teoría de supercuerdas, es decir constituyen el límite de energías medias de la teoría de supercuerdas. Es por ello que el estudio de las teorías tipo Kaluza-Klein es importante.

Hemos también resuelto la ecuación de Weyl (la ecuación de Dirac para una partícula sin masa) en el caso de una familia de universos tipo Gödel. La ecuación de campo ha sido resulta en forma analítica para el caso de un miembro de esta familia, y hemos encontrado que la solución queda expresada en términos de la función de Whittaker.

Bibliografía

[1] Th. Kaluza, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, Math. Phys. **K 1**, 966 (1921); O. Klein, Z. Phys. **37**, 895 (1926).

[2] B. Schutz, "Geometrical Methods of Mathematical Physicss", Cambridge Press, Cambridge (1980).

[3] S. Weinberg, "Gravitation and Cosmology", Wiley and Sons, New York, (1972).

[4] S. DeWitt, in "Dynamical Theory of Groups and Fields", Les Houches Summer School (1963).

[5] T. Cheng y L. Li, "Gauge Theory of Elementary Particle Physics", Clarendon Press, Oxford (1994).

[6] M. Göckeler y T. Schücker, "Differential Geometry, Gauge Theories and Gravity", Cambridge University Press, Cambridge (1990).

[7] E. Witten, Nucl. Phys. **B186**, 412 (1981).

[8] M. Kaku, "Quantum Field Theory", Oxford University Press, Oxford (1993).

[9] V. Varonv y Y. Kogan, Zh. Ekps. Teor. Fiz. **38**, 262 (1983).

[10] Z. Horvath, L. Palla, E. Cremmer y J. Scherk, Nucl. Phys. **B127**, 57 (1977); J. Luciani, Nucl. Phys. **B135**, 111 (1978).

[11] A. Chodos y S. Detweiler, Phys. Rev. **D21**, 2167 (1980).

[12] K. Maeda, Phys. Lett. **138B**, 269 (1984).

[13] A. Camacho y O. Obregón, Astrophys. and Space Science, **197**, 225 (1992).

[14] C. Misner, K. Thorne y J. Wheeler, "Gravitation", Freeman, San Francisco (1973).

[15] R. Kerner, Ann. Inst. H. Poincaré, **9**, 143 (1968).

[16] Y. Cho y P. Freund, Phys. Rev. **D12**, 1711 (1975).

[17] C. Yang y R. Mills, Phys. Rev. **96**, 19 (1954).

[18] J. T. Bjorken y S. F. Drell, "Relativistische Quantenmechanik", BI–Wissenschaftsverlag, Mannheim (1990).

[19] P. Higgs, Phys. Rev. **145**, 1156 (1966).

[20] G. 't Hooft, Nucl. Phys. **B35**, 167 (1971).

[21] J. Goldstone, Nuovo Cimento **19**, 154 (1961).

[22] W. Panofsky y M. Phillps, "Classical Electricity and Magnetism", Addison-Wesley Co., Reading Mass. (1971).

[23] M. Goldhaber, L. Grodzius y A. Sunyar, Phys. Rev. **109**, 1015 (1958).

[24] J. Leite Lopes, "Gauge Field Theories: An Introduction", Pergamon Press, Oxford (1983).

[25] S. Glashow, Nucl. Phys., **22**, 579 (1961).

[26] A. Macías y H. Dehnen, Class Quant. Grav. **8**, 203 (1991),

[27] A. Macías y H. Dehnen, Int. J. of Mod. Phys. **A7**, 5105 (1992).

[28] A. Macías y H. Dehnen, Mod. Phys. Lett. **A7**, 103 (1992).

[29] A. Camacho y A. Macías, Fermionic Sector of the Eight-Dimensional Kaluza-Klein Theory with Dilatons in "Proceedings of the International Conference on Aspects of General Relativity and Mathemathical Physics", pp. 261-277, eds., N. Bretón, T. Matos y R. Capovilla (1993).

[30] A. Salam y J. Strathdee, Ann. Phys. (N.Y.) **141**, 316 (1982).

[31] Y. Cho, J. Math. Phys. **16**, 2029 (1975).

[32] T. Matos y J. Nieto, Rev. Mex. Fis. **39**, S81 (1993).

[33] Y. Choquet-Bruhat, C. DeWitt-Morette y M. Dillard-Bleick, "Analysis, Manifolds and Physics" North-Holland, Amsterdam, (1977).

[34] P. Peebles y B. Ratra, Astrophys. Journal **L17**, 325 (1988).

[35] B. Ratra y P. Peebles, Phys. Rev. **D37**, 3406 (1988).

[36] L. Pimentel y J. Socorro, Gen. Rel. Grav. **25**, 1159 (1993).

[37] M. Rosenbaum, M. Ryan jr., L. Urrutia y R. Matzner, Phys. Rev. **D36**, 1032 (1987).

[38] M. Gell-Mann, Phys. Lett. **8**, 214 (1964).

[39] P. Higgs, Phys. Lett. **12**, 132 (1964).

[40] P. Higgs, Phys. Lett. **13**, 508 (1964).

[41] S. Glashow, J. Iliopoulos y L. Maiani, Phys. Rev. **D2**, 1285 (1970).

[42] Chen, et al, Phy. Rev. Lett. **51**, 634 (1983).

[43] Y. Cho, Phys. Rev. Lett. **68**, 3133 (1992).

[44] Y. Cho, Phys. Rev. **D41**, 2462 (1990).

[45] S. Weinberg, Phys. Lett. **12**, 132 (1967).

[46] E. Elliot y E. Predazzi, "Gauge Theories and the New Physics", Cambridge University Press, N. Y. (1985).

[47] R. Becerril y T. Matos, Gen. Rel. Grav. **24**, 465 (1992).

[48] R. Becerril y T. Matos, Phys. Rev. **D46**, 1540 (1992).

[49] S. Chatterjee, Astron. Astrophys. **230**, 1 (1990).

[50] A. Macías, A. Camacho y T. Matos, Int. J. of Mod. Phys. **D4**, 617 (1995); A. Macías, A. Camacho E. Mielke y T. Matos, Effective Weinberg-Salam Model from Higher Dimensions, in "Recent Developments in Gravitation and Mathematical Physics", pp. 277-287, A. Macías, T. Matos, O. Obregón y H. Quevedo, eds., World Scientific, Singapore (1994); A. Macías, A. Camacho y H. Dehnen, Fermions in the Eigth Dimensional Kaluza-Klein Theory, in "Proceedings of the Fifth Canadian Conference on General Relativity and Astrophysics", pp. 342-348, R. Mann y R. Mc Lenaghan, eds., World SCientific, Singapore (1994).

[51] J. Cohen, C. Vishveshwara y S. Dhurandhar, J. Phys. **A13**, 933 (1980).

[52] W. Hiscock, Phys. Rev. **D17**, 1497 (1978).

[53] B. Mashoon, Phys. Rev. **D11**, 2679 (1975).

[54] L. Pimentel y A. Macías, Phys. Lett. **A117**, 325 (1986).

[55] Y. Abd-Eltwab, Il Nuovo Cimento, **B108**, 464 (1993).

[56] I. Soares, Phys. Rev. **D23**, 272 (1981).

[57] V. Villalba, Mod. Phys. Lett. **A8**, 3011 (1993).

[58] A. Raychaudhuri y S. Thakurta, Phys. Rev. **D22**, 802 (1980).

[59] S. Chakraborty y N. Bandyopadhyay, J. Math. Phys. **24**, 129 (1983).

[60] L. Pimentel, A. Camacho y A. Macías, Mod. Phys. Lett. **A9**, 3703 (1994); L. Pimentel, A. Camacho y A. Macías, Weyl equation in Gödel type universes, in "Proceedings of the Seventh Marcel Grossmann Meeting", pp. 741-743, R. Jantzen, G. MacKeiser y R. Ruffini, eds., World Scientific, Singapore (1996).

[61] A. Lichnerowicz, in "Proceedings of the 1963 Les Houches Summer School, Relativity, Groups and Topology", C. DeWitt and B, Dewitt, eds., Gordon Beach, New York, 1964; Y. Wu y A. Zee, J. Math. Phys. **25**, 2696 (1984).

[62] A. Macías y E. Mielke, Gravitation and Cosmology, **3**, 89 (1993); M. Duff, B. Nilsson y C. Pope, Phys. Lett. **B163**, 343 (1985).

Parte 2
Formalismo de Integral de Trayectoria Restringida y sus aplicaciones en Gravitación.

Capítulo 3

Formalismo de Integral de Trayectoria.

Antes de comenzar a analizar el concepto de medibilidad y su aplicación a ondas gravitacionales y las consecuencias de ello en el diseño de detectores de radiación gravitacional debemos primero mencionar el llamado formalismo de integral de trayectoria de Feynman y también el llamado formalismo de integral de trayectoria restringida (FITR).

Desde sus inicios el interés en mediciones cuánticas fue provocado por sus inusuales y paradójicas características, tales como la imposibilidad de medir la posición y el momento de una partícula elemental de manera simultánea y con precisión arbitraria.

Desde el punto de vista práctico, aún mediciones macroscópicas (tales como la medición de la posición de los elementos de una antena para la detección de ondas gravitacionales) se han vuelto muy precisas y requieren que los efectos cuánticos sean tomados en cuenta. Más aún, en ciertas circunstancias estos efectos son la principal limitación en mediciones de sensibilidad.

Los principios fundamentales de la mecánica cuántica son especialmente importantes puesto que su esféra de aplicación está sufriendo un muy rápido desarrollo. Particularmente interesantes son las preguntas en las áreas de gravedad cuántica y cosmología cuántica. Sin embargo, el desarrollo de una nueva tecnología también requiere de una profunda penetración en los fundamentos de la mecánica cuántica.

El tema a tratar son las mediciones cuánticas continuas, mediciones prolongadas en el tiempo. La técnica más adecuada para ello resulta ser la integral de trayectoria de Feynman [1]. En esta formulación se describe la evolución de un sistema cuántico como si siguiese una trayectoria, pasando de un punto a otro. Esto es igual que en un caso clásico, pero en este último cada trayectoria constituye una descripción completa de su evolución. Sin embargo, para un caso cuántico solamente la suma (integración) sobre todas las trayectorias posibles, de acuerdo con ciertas reglas, describe su evolución.

Pasemos a explicar esto con mayor detalle. El primer paso en la cuantización de un sistema *á la* Feynman consiste en re-escribirlo en forma lagrangiana. Consideremos el caso, por simplicidad, de una partícula cuyo movimiento es uni-dimensional. Supóngase que se mueve del punto $A = (x_1, t_1)$ del espacio-tiempo al punto $B = (x_2, t_2)$. En mecánica clásica, el movimiento de una partícula está descrito por la trayectoria $x = \bar{x}(t)$, la cual minimiza la acción funcional del sistema en cuestión.

Asignémos un número, S, a cada trayectoria entre A y B,

$$S[x(t); t_1, t_2] = \int_{t_1}^{t_2} dt L(x(t); \dot{x}(t); t). \tag{3.1}$$

Las trayectorias vecinas a la clásica estarán dadas por $x(t) = \bar{x}(t) + \epsilon y(t)$. La "perturbación" $y(t)$ en torno a la trayectoria clásica es arbitraria excepto respecto a las condiciones de frontera en los tiempos t_1 y t_2, $y(t_1) = y(t_2) = 0$. Además, el tiempo no es variado. Entonces, la acción considerada como una función de ϵ, es

$$S(\epsilon) = \int_{t_1}^{t_2} dt L(\bar{x}(t) + \epsilon y(t); \dot{\bar{x}}(t) + \epsilon \dot{y}(t)), \tag{3.2}$$

y tiene un extremo si $\epsilon = 0$.

La condición necesaria para que S sea estacionaria es entonces

$$[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} y(t)]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} dt [\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})]_{\epsilon=0} y(t) = 0. \tag{3.3}$$

Puesto que el término de superficie no contribuye y habiendo sido $y(t)$ escogido en forma arbitaria, se obtiene la ecuación de Euler-Lagrange para el movimiento clásico de la partícula a lo largo de la trayectoria $\bar{x}(t)$,

$$\frac{\partial L}{\partial x}_{|\epsilon=0} - \frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}})_{|\epsilon=0} = 0. \tag{3.4}$$

Cuantizémos la teoría. El movimiento de una partícula entre x_1 y x_2 está descrito en la formulación de Feynman por una amplitud de transición. Todas las posibles trayectorias entre los puntos x_1 y x_2 contribuyen a la amplitud de transición.

Una manera de entender el significado de la amplitud de transición la proporciona el bien conocido experimento de la doble rejilla.

Una doble rejilla es irradiada por un haz de electrones. Designémos al registro de un electrón en un punto x del detector (pantalla) como un evento. A cada evento le es asignada una amplitud de transición $\phi(x) =< x|\phi >$. La probabilidad $W(x)$ de que un electrón sea encontrado en el punto x está dada por la expresión $W(x) = |\phi|^2$. El electrón puede tomar la trayectoria (1) o (2) a través de la rendija (1) o (2). Así existen dos trayectorias alternativas que pueden llevar al evento x. Cada una de éllas está caracterizada por una amplitud de probabilidad $\phi_1(x) =< x|1 >$ y $\phi_2(x) =< x|2 >$. La amplitud total es entonces,

$$\phi(x) =< x|\phi >=< x|1 >< 1|\phi > + < x|2 >< 2|\phi >= a_1\phi_1(x) + a_2\phi_2(x), \tag{3.5}$$

donde $|a_i|^2$ es la probabilidad de que la partícula haya sido seleccionada por la rendija (i). Esta expresión no es otra cosa que el bien conocido principio de superposición de la mecánica cuántica.

Pasemos ahora a considerar la situación en la cual se colocan, de manera sucesiva, varias rendijas. Así obtenemos varias trayectorias que el electrón puede seguir para llegar a x. A cada una de ellas se le asigna una amplitud y entonces la amplitud total es

$$< x|\phi >=< x|1 >< 1|(\sum_n |n >< n|)|\phi > + < x|2 >< 2|(\sum_m |m >< |m)|\phi > +... \tag{3.6}$$

En este momento podemos ya pasar a considerar la descripción mecańico-cuántica de la propagación de una partícula.

Al instante de tiempo t_1 tenemos una amplitud de probabilidad $\psi(x_1, t_1)$ de encontrar a la partícula en el punto x_1. De manera similar, $\psi(x_2, t_2)$ es la amplitud de probabilidad de que al instante de tiempo t_2 la partícula se encuentre en x_2.

Con $K(x_2,t_2|x_1,t_1)$ deseamos denotar la amplitud de transición para que una partícula que sea emitida en x_1 al tiempo t_1 sea detectada en x_2 al tiempo t_2. De acuerdo con la expresión (3.6), la amplitud total es

$$\psi(x_2,t_2) \sim \int dx_1 K(x_2,t_2|x_1,t_1)\psi(x_1,t_1). \tag{3.7}$$

Aún cuando es una ecuación integral, se puede demostrar [2] que (3.7) es equivalente a la ecuación de Schrödinger. El problema consiste en encontrar K, el kernel de la ecuación integral, el cual también se conoce como propagador de Feynman.

En su desplazamiento de $A(x_1,t_1)$ a $B(x_2,t_2)$ la partícula debió de seguir alguna trayectoria C. Sea $\phi_{AB}[C]$ la amplitud para la trayectoria de la partícula al ir de A a B a lo largo de C. Entonces, se cumple que

$$K(B|A) = \int [dC]\phi_{AB}[C], \tag{3.8}$$

donde la integral debe calcularse sobre todas las trayectorias entre A y B y es denominada la integral de Feynman. Si permitimos todas las trayectorias en el plano $(x-t)$ entre los dos puntos en cuestión, la integral se puede re-escribir como

$$K(b|a) = \int_a^b [dx(t)]\phi_{ba}[x(t)], \tag{3.9}$$

donde la integral debe efectuarse sobre todas las posibles trayectorias entre a y b.

Hemos reducido nuestro problema a encontrar la amplitud $\phi_{ba}[x(t)]$. Sin embargo, no es posible determinarla a partir de un principio físico fundamental.

Siguiendo a Dirac [3], Feynman propuso la siguiente expresión

$$\phi_{BA}[C] = exp[\frac{i}{\hbar}S[C]], \tag{3.10}$$

estando $S[C]$ dada por la expresión (3.1).

Esto nos pemite escribir el propagador de Feynman como

$$K(x_2,t_2|x_1,t_1) = \int_{x(t_1)=x_1}^{x(t_2)=x_2} [dx(t)]exp[\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} dtL(x(t),\dot{x}(t);t)]. \tag{3.11}$$

De esta última expresión se puede ver que en el límite $S >> \hbar$ se obtiene la trayectoria clásica, ya que ésta es construida de tal manera que S no cambia a primer orden en la vecindad de la trayectoria clásica, es decir la fase $\frac{S}{\hbar}$ permanece estacionaria en una vecindad infinitesimal en torno a la trayectoria clásica $x_{cl}(t)$. Fuera de esta vecindad de $x_{cl}(t)$, la fase, en el caso $\frac{S}{\hbar} >> 1$, cambia muy rápido, de tal manera que las amplitudes correspondientes serán borradas como consecuencia de la interferencia destructiva.

Puesto que la contribución principal al propagador proviene de una franja infinitesimal en torno a la trayectoria clásica, se cumple como primera aproximación que en el límite clásico, $\hbar \to 0$

$$K(x_2, t_2|x_1, t_1) \sim exp[\frac{i}{\hbar}\int_{t_1}^{t_2} dtL(x_{cl}(t), \dot{x}_{cl}(t); t)]. \tag{3.12}$$

Para un problema clásico típico, la franja es muy "angosta", pero en un problema cuántico típico, la franja es muy ancha. Consecuentemente, la trayectoria clásica pierde su significado en un problema de esta índole.

Antes de considerar un ejemplo pasemos a mencionar una importante propiedad del propagador de Feynman.

Para ello mantengamos fijos x_1 y t_1 y consideremos a $K(x_2, t_2|x_1, t_1)$ como una función de $x_2 = x$ y $t_2 = t$, $K_{(x_1,t_1)}(x, t)$. Evidentemente $K_{(x_1,t_1)}(x, t) = K(x, t|x_1, t_1)$ es una función de onda y nos proporciona la probabilidad de encontrar a la partícula en (x, t). Pero para $t = t_1$ sabemos perfectamente donde se encuentra la partícula. De aquí se desprende que para $t = t_2 = t_1$

$$\psi(x, t_1) \sim \int dx_1 K(x, t_1|x_1, t_1)\psi(x_1, t_1), \tag{3.13}$$

lo cual implica que $K(x, t_1|x_1, t_1) = \delta(x - x_1)$.

Sin embargo, $K_{(x_1,t_1)}(x, t)$ es ahora una función de onda, y por consiguiente debe satisfacer la ecuación integral (3.7)

$$K(x_3, t_3|x_1, t_1) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_2 K(x_3, t_3|x_2, t_2)K(x_2, t_2|x_1, t_1). \tag{3.14}$$

Con ello hemos derivado la llamada propiedad de grupo de Feynman. En general

se puede escribir $(b = (x_b, t_b)$, $a = (x_a, t_a))$

$$K(b,a) = \int_{-\infty}^{\infty} dx_{N-1} ... \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 K(b, N-1) K(N-1, N-2)$$
$$K(N-2, N-3) ... K(3,2) K(2,1) K(1,a). \tag{3.15}$$

3.1 Formalismo de Integral de Trayectoria Restringida.

Se puede decir que el concepto más importante en mecánica cuántica es una amplitud de probabilidad (Dirac argumentó [4] que la distinción más importante de la teoría cuántica no radica en operadores sino en amplitudes), ya que élla expresa la diferencia principal entre la teoría clásica y la cuántica. La amplitud de probabilidad de un cierto evento es un número complejo A tal que, $P = |A|^2$ es la probabilidad asociada a este evento.

La mecánica cuántica difiere en que no son las probabilidades sino las amplitudes de probabilidad las que deben sumarse para un sistema cuántico, siempre que éste no se encuentre sujeto a un proceso de medición. Supóngase que cierto evento puede ocurrir a tráves de dos canales alternativos y que las amplitudes de probabilidad para estos canales son A_1 y A_2. Entonces la amplitud de probabilidad completa para el evento en cuestión es $A = A_1 + A_2$, y su probabilidad es

$$P = |A|^2 = |A_1 + A_2|^2. \tag{3.16}$$

Esta última expresión es válida si no existe manera de conocer cual de las dos alternativas ha sucedido. Si una observación (medición) se ha llevado a cabo de tal manera que se obtiene información acerca de cual ruta se ha seguido, entonces la regla de suma cambia y se deben sumar probabilidades, $P = P_1 + P_2 = |A_1|^2 + |A_2|^2$.

Como consecuencia de ello no se presenta un patrón de interferencia. Esta regla de amplitudes es válida para muchos canales alternativos,

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + ... \tag{3.17}$$

suponiendo que no se sabe que alternativa ha sido empleada. Si éste no es el caso, entonces la regla de suma de amplitudes debe ser corregida y el método de corrección depende de la información proporcionada por el proceso de medición. La información puede ser tan completa que el canal empleado sea conocido. Entonces, las probabilidades de los canales deben de ser sumadas

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + ... = |A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 + ... \tag{3.18}$$

Para otro tipo de medición la información puede ser parcial. Para ilustrar mejor este punto, supóngase que se tiene un número par de alternativas y que el proceso de medición le permite a uno saber si el número de canal seguido pertenece a uno de los siguientes pares $(1,2)$, $(3,4)$, $(5,6)$,...,$(k-1,k)$. Entonces, las probabilidades correspondientes a pares separados deben de ser sumadas, pero las amplitudes deben de ser sumadas por pares

$$P = P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_{\frac{k}{2}}, \tag{3.19}$$

donde $P_i = |A_{2i-1} + A_{2i}|^2$

El valor de P_i es la probabilidad de que el i-ésimo par emerga como resultado del proceso de medición.

La argumentación anterior puede ser aplicada a las trayectorias de Feynman, consideradas éstas como alternativas cuánticas. La amplitud $A(q'', q')$ para que una partícula se mueva de q' a q'' es llamada propagador. Ha sido ya mencionado brevemente y además hemos visto que este propagador puede ser contemplado como la suma (más bien la integral) de las amplitudes $A[q]$ correspondientes a las trayectorias $[q]$ que conectan los puntos q' y q''.

$$A(q'', q') = \int A[q]d[q]. \tag{3.20}$$

Esta expresión es análoga a la expresión (3.17) pero para trayectorias en el rol de alternativas cuánticas. Analogamente a lo antes mencionado, la última expresión es válida únicamente si la posibilidad de determinar la trayectoria a seguir no existe.

En muchas situaciones experimentales el resultado es cierta función continua del tiempo, de la cual uno puede entender el comportamiento en un cierto intervalo de tiempo de la cantidad medida. Este tipo de medición es llamada continua. Correspondientemente, mediciones que dan un conjunto discreto de números son llamados discretos [5].

Supóngase ahora que una medición continua es llevada a cabo en forma simultánea al desplazamiento de la partícula. Asúmase que el resultado del proceso de medición proporciona cierta información respecto a la trayectoria seguida por la partícula. Tal información puede ser expresada por un conjunto de trayectorias I_α. Si el proceso de medición proporciona el resultado α, entonces el desplazamiento sigue una de las trayectorias $[q]$ pertenecientes al conjunto I_α. Por consiguiente, en analogía a lo antes mencionado, la amplitud para el desplazamiento de q' a q'' puede ser expresada como una integral sobre trayectorias pertenecientes a I_α, es decir, solo se integra sobre aquellas trayectorias que pertenecen a I_α.

$$A_\alpha(q'', q') = \int_{I_\alpha} A[q]d[q]. \tag{3.21}$$

La idea de emplear de esta manera las integrales de trayectorias restringidas fue elaborada por Mensky [6].

Supongamos para concretar que el proceso de medición proporciona el valor $\alpha(t)$ para la coordenada $q(t)$ en cada instante t (de un cierto intervalo de tiempo), y con un error $\Delta\alpha$ determinado por la precisión del dispositivo experimental. Por lo tanto, cualquier trayectoria $[q]$ perteneciente al corredor I_α de ancho $2\Delta\alpha$ en torno a la trayectoria $[\alpha]$ es posible.

Si α se mantiene fijo, entonces la amplitud A_α puede ser considerada como el propagador de una partícula sujeta a una medición continua. Al mantener q' y q'' fijos, la misma amplitud puede ser pensada como la amplitud de probabilidad para que una medición continua proporcione el resultado α. Tomando el módulo cuadrado de la amplitud, es posible calcular la densidad de probabilidad asociada a los diferentes resultados experimentales de una medición continua.

La información asociada a una medición de este tipo puede también ser expresada mediante una funcional $w_\alpha[q]$ (positiva-definida)

$$0 \leq w_\alpha[q] \leq 1. \tag{3.22}$$

Esto significa que conocer el resultado α le permite a uno estimar como probables aquellas trayectorias para las cuales $w_\alpha[q]$ es cercana a 1. Las trayectorias para las cuales $w_\alpha[q]$ yace cerca de 0 deben ser consideradas como improbables. De hecho, el resultado de un proceso de medición continua puede ser caracterizado por completo especificando la funcional $w_\alpha[q]$.

La amplitud de probabilidad es ahora

$$A_\alpha(q'', q') = \int w_\alpha[q] A[q] d[q]. \tag{3.23}$$

La generalización de esta expresión al caso de la medición de la configuración de un campo cuántico es inmediata.

La funcional $w_\alpha[q]$ posee la información proveniente del resultado experimental. Por lo tanto, la elección de dicha funcional depende del tipo de proceso de medición a investigar. Estrictamente hablando, uno debe de analizar situaciones de medición reales y deducir a partir del análisis la forma de la funcional. Los resultados de los cálculos en el marco del formalismo de la integral de trayectoria restringida dependen de la forma elegida para la funcional.

Sin embargo, uno puede suponer que un pequeño cambio en la funcional no puede modificar radicalmente los resultados del cálculo. Al menos para las estimaciones hasta el órden de magnitud se puede esperar que los detalles en la definición de la funcional no sean importantes.

La experiencia muestra que este es el caso en realidad. En el primer trabajo sobre la medición de la coordenada de una partícula [6], el proceso de medición fue descrito empleando como funcional

$$w_\alpha[q] = \begin{cases} 1 & \text{si } |q(t) - \alpha(t)| \leq \Delta\alpha \\ 0 & \text{si no} \end{cases}. \tag{3.24}$$

En el siguiente trabajo [7], la funcional elegida fue una funcional gaussiana

$$w_\alpha[q] = exp[-\frac{2\rho^2|q-\alpha|}{\Delta\alpha^2}]. \tag{3.25}$$

Los resultados de los dos cálculos coinciden hasta el orden de magnitud, la precisión suficiente para el análisis de procesos de medición reales.

Evidentemente un ejemplo no demuestra nada y el problema de la elección de la funcional debe ser analizado con mayor detalle.

3.2 Ondas Gravitacionales y sus Detectores.

Nuestro objetivo es aplicar el formalismo de integral de trayectoria restringida al proceso de medición de ondas gravitacionales y por ello mencionaremos brevemente el caso límite de campos gravitacionales débiles y su conexión con las ondas gravitacionales, todo ello en el contexto de la teoría de la Relatividad General de Einstein.

El punto de partida lo constituyen las ecuaciones de Einstein [8]

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}. \tag{3.26}$$

Puesto que la ausencia de gravedad tiene como consecuencia a nivel geométrico un espacio-tiempo plano, un campo gravitacional débil es uno en el cual el espacio-tiempo es "casi" plano. Esto se define como una variedad diferencial en la cual existen coordenadas donde la métrica tiene componentes

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{3.27}$$

$$|h_{\mu\nu}| << 1. \tag{3.28}$$

Existen dos tipos de transformaciones de coordenadas que llevan un sistema coordenado casi Lorentziano a otro también casi Lorentziano: transformaciones de norma y transformaciones de fondo de Lorentz.

Para campos gravitacionales débiles definimos una transformación de fondo de Lorentz como aquella que tiene la forma

$$x^{\bar{\alpha}} = \Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta} x^{\beta}, \tag{3.29}$$

siendo $\Lambda^{\bar{\alpha}}_{\beta}$ los elementos de la representación matricial de una transformación de Lorentz.

La métrica (3.27) se transforma entonces

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \Lambda^{\mu}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}}g_{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = \Lambda^{\mu}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}}\eta_{\mu\nu} + \Lambda^{\mu}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}}h_{\mu\nu}. \tag{3.30}$$

Pero de Relatividad Especial sabemos que $\Lambda^{\mu}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}}\eta_{\mu\nu} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$, lo cual nos permite escribir

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \eta_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} + h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}, \tag{3.31}$$

siendo

$$h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \Lambda^{\mu}_{\bar{\alpha}}\Lambda^{\nu}_{\bar{\beta}}h_{\mu\nu}. \tag{3.32}$$

Esta última expresión nos muestra que, bajo una transformación de fondo de Lorentz, $h_{\mu\nu}$ se transforma como si fuése un tensor en Relatividad Especial. Esta propiedad de transformación nos permite llegar a la siguiente interpretación: todos los campos físicos, como el tensor de Riemann, el de Ricci, etc., estarán definidos en términos de $h_{\mu\nu}$ y éllos "se verán" como campos definidos sobre un espacio-tiempo de fondo plano.

Existe otro tipo de coordenadas bajo las cuales (3.27) y (3.28) permanecen invariantes: un cambio en las coordenadas de la forma

$$x^{\alpha'} = x^{\alpha} + \zeta^{\alpha}(x^{\beta}), \tag{3.33}$$

donde el cambio es generado por el vector ζ^{α}, el cual es pequeño, significando ésto que se satisface la condición $|\zeta^{\alpha}_{,\beta}| << 1$.

La matriz de transformación está dada por

$$\Lambda^{\alpha'}_{\beta} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}} = \delta^{\alpha}_{\beta} + \zeta^{\alpha}_{,\beta}. \tag{3.34}$$

Por consiguiente, el nuevo tensor métrico, hasta primer orden en cantidades pequeñas, es

$$g_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \zeta_{\alpha,\beta} - \zeta_{\beta,\alpha}. \tag{3.35}$$

Esto es, el efecto del cambio de coordenadas consiste en redefinir $h_{\alpha\beta}$.

$$h_{\alpha\beta} \rightarrow h_{\alpha\beta} - \zeta_{\alpha,\beta} - \zeta_{\beta,\alpha}. \tag{3.36}$$

Por la condición $|\zeta_{\alpha,\beta}| << 1$, el nuevo sistema coordenado continua siendo casi Lorentziano. Este tipo de cambio de coordenadas es llamado transformación de norma. La libertad de escoger al vector ζ^{α} nos permitirá simplificar las ecuaciones de campo.

Bajo estas condiciones las componentes del tensor de Riemann son

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\nu,\beta\mu} + h_{\beta\mu,\alpha\nu} - h_{\alpha\mu,\beta\nu} - h_{\beta\nu,\alpha\mu}\right), \tag{3.37}$$

y no dependen de la norma, es decir permanecen invariantes ante una transformación de coordenadas de la forma (3.33).

Las componentes del tensor linealizado de Einstein son

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(h_{\alpha\mu,\nu}{}^{\alpha} + h_{\alpha\nu,\mu}{}^{\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}[h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^{\beta}]\right). \tag{3.38}$$

Esta expresión puede ser simplificada, para éllo definamos

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h. \tag{3.39}$$

En términos de $\bar{h}_{\mu\nu}$, (3.38) se re-escribe como

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\left(\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} + \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - \bar{h}_{\alpha\nu,\mu}{}^{\alpha} - \bar{h}_{\alpha\mu,\nu}{}^{\alpha}\right). \tag{3.40}$$

Consideremos el vector ζ^{μ} solución de la ecuación de onda inhomogénea

$$\partial^{\lambda}\partial_{\lambda}\zeta^{\mu} = \bar{h}^{\mu\nu}{}_{,\nu}. \tag{3.41}$$

Al realizar la transformación de norma $x^{\alpha} \rightarrow x^{\alpha} + \zeta^{\alpha}(x^{\beta})$, la expresión (3.39) se transforma en

$$\bar{h}_{\mu\nu} \rightarrow \bar{h}^{(n)}_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \zeta_{\mu,\nu} - \zeta_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}\zeta^{\alpha}{}_{,\alpha}, \tag{3.42}$$

siendo $\bar{h}^{(n)}_{\mu\nu}{}^{,\nu} = 0$.

Estas cuatro condiciones conforman la llamada norma de Lorentz (también se usan los nombres de norma armónica o de de-Donder).

En esta norma el tensor de Einstein se reduce a

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\partial^{\lambda}\partial_{\lambda}\bar{h}^{(n)}_{\mu\nu}. \tag{3.43}$$

Nótese que la norma de Lorentz es realmente una clase de normas. Si ψ^{μ} es un vector que satisface la ecuación de onda homogénea, entonces la transformación de norma $x^{\alpha} \to x^{\alpha} + \zeta^{\alpha}(x^{\beta}) + \psi^{\alpha}$ conduce también a la expresión (3.43).

En la norma de Lorentz, las ecuaciones de Einstein son

$$\partial^{\lambda}\partial_{\lambda}\bar{h}^{(n)}_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}. \tag{3.44}$$

Se puede ver que esta última expresión representa 10 ecuaciones de onda. Resumiendo, el caso de un espacio-tiempo curvo en el cual el campo gravitacional es débil, lo podemos interpretar como un espacio-tiempo plano en el cual existe un campo tensorial $h_{\mu\nu}$ (que representa la desviación de la métrica original respecto al caso plano), el cual satisface la ecuación de onda, en donde la velocidad de propagación es la de la luz. El tensor de energía-momento actúa como fuente de este campo.

Pasemos ahora a estudiar brevemente el efecto de estas ondas gravitacionales sobre la materia. Para éllo consideremos las ecuaciones de Einstein para el caso de un campo débil, expresión (3.44), y bajo la condición de vacío

$$(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2)\bar{h}_{\mu\nu} = 0. \tag{3.45}$$

Una solución está dada por la expresión

$$\bar{h}_{\mu\nu} = A_{\mu\nu} exp[ik_{\alpha}x^{\alpha}], \tag{3.46}$$

donde $k_{\alpha}k^{\alpha} = 0$, es decir, k^{α} son las componentes de un 4-vector tangente a la línea de mundo de un fotón, implicando ésto que la onda se desplaza con una velocidad igual a la de la luz.

Debemos además cumplir con la condición de la norma de Lorentz. Esto implica que

$$A_{\mu\nu}k^{\nu} = 0, \tag{3.47}$$

es decir, k^{ν} es ortogonal a $A_{\mu\nu}$.

Para poder quedarnos con las componentes que poseen significado físico usaremos los restantes grados de norma que tenemos. Para éllo recordemos que podemos modificar la norma sin abandonar la clase de norma de Lorentz mediante la introducción de un vector de componentes ζ^{α}, que satisfagan la ecuación de onda homogénea

$$(-\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2)\zeta^{\alpha} = 0. \tag{3.48}$$

Proponiendo como solución

$$\zeta_{\mu} = B_{\mu} exp[ik_{\alpha}x^{\alpha}], \tag{3.49}$$

y recordando lo mencionado en la expresión (3.42) se desprende que

$$A^{(n)}_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - iB_{\alpha}k_{\beta} - iB_{\beta}k_{\alpha} + i\eta_{\alpha\beta}B_{\mu}k^{\mu}. \tag{3.50}$$

Tenemos 4 números, dados por B_{α}, a determinar. Es posible escogerlos imponiendo las siguientes condiciones

$$A^{(n)\alpha}{}_{\alpha} = 0, \tag{3.51}$$

$$A^{(n)}_{\alpha\beta}U^{\beta} = 0, \tag{3.52}$$

donde U^{β} es cualquier 4-velocidad constante. A las condiciones dadas en las expresiones (3.47), (3.51) y (3.52) se les conoce como condiciones de norma transversal y sin traza (tranverse-traceless gauge) [8].

La expresión (3.51) impone 1 condición y la (3.52) aparentemente 4 condiciones. Pero en realidad solo tres de las 4 ecuaciones lineales, para las incógnitas B_{μ}, son linealmente independientes, y éllo puede verse notando que

$$\begin{aligned}(A_{\alpha\beta} - iB_{\alpha}k_{\beta} - iB_{\beta}k_{\alpha} + i\eta_{\alpha\beta}B_{\mu}k^{\mu})U^{\beta}k^{\alpha} = A_{\alpha\beta}U^{\beta}k^{\alpha} - \\ iB_{\alpha}k_{\beta}U^{\beta}k^{\alpha} - iB_{\beta}k_{\alpha}U^{\beta}k^{\alpha} + iB^{\mu}k_{\mu}U_{\alpha}k^{\alpha},\end{aligned} \tag{3.53}$$

el primer término es cero como consecuencia de (3.47) y el tercero incluye el producto $k^\alpha k_\alpha$, y ya hemos mencionado que $\vec{k}$ es un 4-vector temporaloide, de norma nula, y en consecuencia

$$A^{(n)}_{\alpha\beta}U^\beta k^\alpha = -iB_\alpha k^\alpha k_\beta U^\beta + iB_\mu k^\mu k_\beta U^\beta = 0,$$

para todo B_μ y todo U^β.

Habiendo determinado los 4 números B_α mediante las 4 ecuaciones linealmente independientes contenidas en (3.51) y (3.52) hemos usado ya todos los grados de libertad de norma a nuestra disposición. Resumiendo, el tensor constante $A_{\mu\nu}$ es simétrico por lo cual tiene en principio 10 componentes independientes y hemos impuesto 8 condiciones en total, 4 provenientes de (3.51) y (3.52) y 4 más que provienen de (3.47), lo cual implica que solo 2 de las 10 componentes tienen significado físico.

Realicemos ahora una transformación de fondo de Lorentz que nos lleve a un marco de Lorentz en el cual el vector $\vec{U}$ que aparece en (3.52) tenga como componentes $U^\alpha = \delta^\alpha_0$ y orientemos además los ejes espaciales de tal forma que la onda se propague a lo largo del eje z, es decir, definiendo $k^0 = \omega$ (físicamente esta es la frecuencia de la onda) tenemos que $\vec{k} = (\omega, 0, 0, \omega)$.

En forma matricial podemos escribir

$$(A^{TT}_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0, & A_{xx} & A_{xy} & 0 \\ 0, & A_{xy} & -A_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.54)$$

Los resultados anteriores fueron hechos para el caso de una onda plana (expresión (3.46)). Sin embargo, sabemos que una onda cualquiera se puede escribir como una superposición de ondas plana. Por lo tanto, si una onda se desplaza a lo largo del eje z, entonces todas las ondas planas que la constituyen pueden ser puestas en la forma dada por la expresión (3.54), y ésto significa que nuestra onda posee solo dos componentes independientes, h^{TT}_{xx} y h^{TT}_{xy}.

Consideremos ahora una partícula situada en una región del espacio-tiempo en la cual no existe inicialmente ninguna onda gravitacional. La partícula está inicialmente en reposo, es decir, en este marco de referencia su 4-velocidad tiene las componentes $U^\alpha = \delta^\alpha_0$.

De acuerdo con el Principio de Equivalencia, el movimiento de la partícula está descrito por la ecuación geodésica [8]

$$\nabla_{\vec{U}}\vec{U} = 0, \tag{3.55}$$

la cual escrita en componentes es

$$\frac{dU^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0. \tag{3.56}$$

Puesto que la partícula inicialmente se encuentra en reposo, el valor de su aceleración inicial es

$$(\frac{dU^\alpha}{d\tau})_0 = -\Gamma^\alpha_{00} = -\frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}[h_{\beta 0,0} + h_{0\beta,0} - h_{00,\beta}]. \tag{3.57}$$

Al introducir (3.54) en la última expresión se concluye que la aceleración inicial es nula, lo cual nos conduce a que la velocidad de la partícula un instante después sigue siendo la inicial y en consecuencia en este nuevo instante de tiempo la aceleración es nuevamente nula. Resumiendo, la partícula permanece siempre en reposo sin importar la presencia de la onda!!

En este punto vale la pena mencionar que el concepto de coordenadas de un vector no tiene significado geométrico invariante. Para ver los efectos de la onda consideremos dos partículas, las cuales llamaremos A y B, en reposo inicialmente ambas y colocadas nuevamente en una región del espacio-tiempo en la cual no existen ondas gravitacionales.

Denotemos por ζ^α al vector separación existente entre las partículas A y B.

La ecuación de desviación geodésica es [8]

$$(\nabla_{\vec{V}}\nabla_{\vec{V}}\vec{\zeta})^\alpha = R^\alpha_{\mu\nu\beta}V^\mu V^\nu \zeta^\beta, \tag{3.58}$$

donde $\vec{V}$ es el vector tangente a la geodésica de A. Puesto que a lo largo de la línea de mundo de A los Christoffel se anulan, el marco de referencia de A es un marco de Lorentz local, y ésto nos permite re-escribir (3.58) como sigue

$$\frac{d^2\zeta^\alpha}{dt^2} = -R^\alpha_{0\beta 0}\zeta^\beta. \tag{3.59}$$

La solución a estas ecuaciones es (a primer orden en h)

$$\zeta^k(\tau) = \zeta^j_{(0)}[\delta_{jk} + \frac{1}{2}h^{TT}_{jk}]. \tag{3.60}$$

Pero por la forma como se ha planteado este caso, A se encuentra en el origen de su marco de referencia, es decir, ζ^k denota las coordenadas que tiene B, según A.

Nótese que al considerar (3.46) en esta última expresión se puede ver que desde el marco de referencia de A las coordenadas espaciales de B oscilan en forma armónica. Debe mencionarse también que únicamente aquellas separaciones que son perpendiculares (transversales) a la dirección de propagación de la onda se ven afectadas por ésta.

Podemos resumir lo anterior diciendo que una onda gravitacional crea un gradiente de aceleraciones en el plano normal a su dirección de propagación. Este efecto constituye la base sobre la cual funcionan los detectores de ondas gravitacionales. Se pueden colocar masas de prueba o cuerpos extendidos en el plano coincidente con el frente de onda y la onda podrá ser detectada observando el movimiento relativo entre las masas o midiendo la tensión mecánica en cuerpos extendidos.

Sin embargo, este tipo de experimentos requieren de equipo muy sensible. En el caso de dos partículas de prueba separadas por una distancia $l \sim 10^2 cm$, una onda de frecuencia $\omega = 3 \times 10^4 \frac{rad}{sec}$, la cual tiene un flujo de energía $I \sim 1 \frac{erg}{cm^2-sec}$ (que es una magnitud que se espera poseean las ondas gravitacionales generadas por posible fuentes [9]), produce una diferencia de aceleraciones la cual tiene un orden de magnitud de $\Delta a \sim 1 \times 10^{-12} \frac{cm}{sec^2}$.

Existen muchos modelos de detectores de ondas gravitacionales. Uno de los más importantes diseños experimentales lo constituye la antena gravitacional que emplea interferómetros-laser [10], los cuales usan un interferómetro Michelson de multitrayectorias como indicador de pequeñas vibraciones.

Imaginémos un laser y dos espejos colocados en dos cuerpos de masas M_1 y M_2. El haz es separado y enviado en trayectorias ortogonales entre sí a los dos espejos, los haces rebotan en los espejos y son enviados a un detector óptico.

Si una onda gravitacional incide en ángulo recto sobre el plano que forman los espejos, entonces se generarán vibraciones de las masas M_1 y M_2, las cuales darán origen a diferencias de fase entre los haces que rebotan en los espejos y por lo tanto éstas pueden ser medidas en el detector.

En los proyectos que en la actualidad en esta dirección existen, como el *Virgo* [11] o el proyecto del Max Planck Institute [12], la separación entre las masas es de $\sim 10^5 cm$.

En estrecha relación con el diseño de detectores de ondas gravitacionales está el obstáculo denominado por Braginshy [13] como límite cuántico. Podemos formular el tema del límite cuántico como sigue: se desea medir una fuerza clásica (onda gravitacional) permitiéndole, por ejemplo, actuar sobre un oscilador mecánico cuántico y monitorendo experimentalmente una o más observables de este oscilador. Pero el Principio de Incertidumbre de Heisenberg limita la precisión con la cual la amplitud de un oscilador puede ser observada. La pregunta que entonces aquí surje es la siguiente: ¿limitará este hecho la precisión con la cual se medirá la fuerza en cuestión?

La respuesta a esta última pregunta es si y sus consecuencias son potencialmente desastrosas [14]. La busqueda de una solución a este problema ha permitido desarrollar la llamada técnica cuántica de no-demolición [15].

Es importante mencionar que este problema surge al considerar las propiedades cuánticas del detector y no del sistema a ser medido.

En conexión con la detección de radiación gravitacional existe un punto adicional que debe ser considerado, el campo gravitacional también constituye un sistema cuántico y este hecho debe ser tomado en cuenta si se desea tener un modelo consistente de este proceso de medición.

Existen ya trabajos [16] que consideran restricciones sobre la medibilidad del campo gravitacional como consecuencia de sus propiedades cuánticas.

Sin embargo, no existe todavía un ánalisis detallado de las consecuencias que sobre el proceso de medición de radiación gravitacional tiene el hecho de tomar en cuenta las propiedades cuánticas de las ondas gravitacionales.

Resumiendo, el ánalisis del proceso de medición de ondas gravitacionales debe contemplar no solo las propiedades cuánticas del aparato de medición sino también el hecho de que la radiación gravitacional constituye en esencia un sistema cuántico. Esto último no ha sido todavía hecho.

3.3 Problema del tiempo en gravedad cuántica.

La invariancia coordenada general que yace detrás de la Teoría de la Relatividad General crea problemas básicos en el análisis de la dinámica del campo gravitacional. Usualmente, la especificación de la amplitud del campo y de su primera derivada temporal en un instante de tiempo dado bastan para determinar la evolución temporal de este campo visto como una entidad dinámica. Sin embargo, en el caso de la Relatividad General ésto no es así [17], ya que el campo métrico puede ser modificado en cualquier instante de tiempo simplemente realizando una transformación de coordenadas. Esta operación no involucra ningún cambio en las cantidades físicas medibles, ya que corresponde únicamente a una transformación bajo la cual la teoría es invariante. Por lo tanto es necesario que el campo métrico sea separado en aquellas partes que transportan la información dinámica verdadera y las que caracterizan al sistema coordenado. A este respecto, Relatividad General es análoga a la teoría electromagnética [18]. En particular, la invariancia coordenada juega un papel similar al de la invariancia de norma del campo electromagnético. En este último caso, la invariancia de norma produce dificultades al tratar de separar los modos dinámicos independientes, aún cuando aquí la linealidad de la teoría simplifica el análisis. En ambos casos, el efecto de las propiedades de invariancia es introducir variables redundantes en la formulación original de la teoría con la finalidad de garantizar que las propiedades de transformación correctas sean mantenidas. Es este choque con el número más pequeño de variables necesitadas para describir la dinámica lo que dificulta el análisis.

Una determinación precisa de los modos dinámicos independientes del campo gravitacional se obtiene cuando la teoría es formulada de manera canónica [19], y por consiguiente involucra el número mínimo de variables que especifican el estado del sistema. Dos aspectos son esenciales en este formalismo canónico: .(i) las ecuaciones de campo son de primer orden en las derivadas temporales y, (ii) el tiempo ha sido *privilegiado* de tal manera que la teoría está ahora expresada en una forma $3+1$ dimensional. El primer requisito puede ser conseguido en Relatividad General, puesto que su Lagrangiano puede ser escrito en una forma lineal en sus derivadas temporales (lo que se conoce como la forma de Palatini [8]). Por su covariancia ante transformaciones arbitrarias de coordenadas, Relatividad General es análoga a la forma parametrizada de la mecánica clásica en la cual el hamiltoniano y el tiempo son introducidos como un par de variables conjugadas asociadas a un nuevo grado de libertad [20].

La acción usual para Relatividad General es

$$I = \int d^4x L = \int d^4x \sqrt{-g} R. \tag{3.61}$$

De esta expresión se pueden obtener las ecuaciones de Einstein si se consideran variaciones respecto a la métrica. Pero estas son ecuaciones de segundo orden. El punto consiste en obtener ecuaciones las cuales posean dos propiedades: (i) sean ecuaciones de primer orden y, (ii) estén resueltas explícitamente para las derivadas temporales. Esto puede conseguirse y para éllo consideramos a los símbolos de Christoffel, $\Gamma^\alpha_{\beta\nu}$, como cantidades independientes en el principio variacional, entonces se puede re-escribir la acción como sigue

$$I = \int d^4x g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}(\Gamma), \tag{3.62}$$

donde $R_{\mu\nu}(\Gamma) = \Gamma^\alpha_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^\alpha_{\mu\alpha,\nu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\beta_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\Gamma^\beta_{\nu\alpha}$

Las cantidades apropiadas para el campo de Einstein son las siguientes [18]

$$g_{ij} = {}^4g_{ij}, \quad N = (-{}^4g^{00})^{-\frac{1}{2}}, \quad N_i = {}^4g_{0i}, \tag{3.63}$$

$$\pi^{ij} = \sqrt{-{}^4g_{ij}}({}^4\Gamma^0_{pq} - g_{pq}\ {}^4\Gamma^0_{rs} g^{rs}) g^{ip} g^{jq}. \tag{3.64}$$

Donde el superíndice 4 indica que la cantidad en cuestión es 4-dimensional.

La métrica completa, es decir, ${}^4g_{\mu\nu}$ y también ${}^4g^{\mu\nu}$, pueden ser escritas empleando las definiciones recién introducidas

$${}^4g_{00} = -(N^2 - N_i N^i), \tag{3.65}$$

$${}^4g^{0i} = \frac{N^i}{N^2}, \tag{3.66}$$

$$^4g^{00} = -\frac{1}{N^2}, \tag{3.67}$$

$$^4g^{ij} = g^{ij} - \frac{N^i N^j}{N^2}, \tag{3.68}$$

En función de estas cantidades la Lagrangiana de la Relatividad General puede re-escribirse como

$$L = \sqrt{-{}^4g}\ {}^4R = -g_{ij}\partial_t \pi^{ij} - N_i R^0 - N_i R^i - 2(\pi^{ij}N_j - \frac{1}{2}\pi N^i + N^{|i}\sqrt{g})_{,i}, \tag{3.69}$$

siendo $R^0 = -\sqrt{g}[\ {}^3R + g^{-1}(\frac{1}{2}\pi^2 - \pi^{ij}\pi_{ij})]$, $R^i = -2\pi^{ij}\ {}_{|j}$, $\pi = \pi^i\ {}_i$, y $_|$ indica la derivada covariante usando la métrica espacial g_{ij}.

El análisis geométrico muestra que π^{ij} y g^{ij} se transforman como tensores ante todas las transformaciones que dejan las superficies $t = cte.$ sin cambio. En tanto que, N y N^i describen como el sistema coordenado debe ser continuado fuera de la superficie $t = cte.$

Podemos ahora definir la densidad hamiltoniana asociada a la Relatividad General [18]

$$H_G = \sqrt{g}\left[N\left(-{}^3R - g^{-1}[\frac{1}{2}\pi^2 - \pi^{ij}\pi_{ij}]\right) - 2N_j\left(g^{-\frac{1}{2}}\pi^{ij}\right)_{|i} + 2\left(g^{-\frac{1}{2}}N_j\pi^{ij}\right)_{|i}\right]. \tag{3.70}$$

Al llevar a cabo la variación respecto a N y N_i obtenemos las siguientes ecuaciones

$$-{}^3R + g^{-1}\pi^{ij}\pi_{ij} - \frac{1}{2}g^{-1}\pi^2 = 0, \tag{3.71}$$

$$\left(g^{-\frac{1}{2}}\pi^{ij}\right)_{|i} = 0. \tag{3.72}$$

Las ecuaciones dinámicas son entonces

$$\dot{g}_{ij} = \frac{\delta H_G}{\delta \pi^{ij}} = 2g^{-\frac{1}{2}}N\left(\pi_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}\pi\right) + N_{i|j} + N_{j|i}, \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned}\dot{\pi}^{ij} = -\frac{\delta H_G}{\delta g_{ij}} = -Ng^{-\frac{1}{2}}({}^{(3)}R^{ij} - \frac{1}{2}\, {}^{(3)}Rg^{ij}) + \frac{1}{2}Ng^{-\frac{1}{2}}g^{ij}(\pi^{lm}\pi_{lm} - \frac{1}{2}\pi^2) \\ -2Ng^{-\frac{1}{2}}(\pi^{il}\pi_l^j - \frac{1}{2}\pi\pi^{ij}) + g^{\frac{1}{2}}(N^{|j|i} - g^{ij}N^{|l}_{|l}) + g^{\frac{1}{2}}(g^{-\frac{1}{2}}N^l\pi^{ij})_{|l} - \\ \pi^{li}N^j{}_{|l} - \pi^{lj}N^i{}_{|l}.\end{aligned} \quad (3.74)$$

Estas últimas 4 expresiones son equivalentes a las ecuaciones de Einstein en el vacío. Las expresiones (3.67) y (3.68) son constricciones y nos indican que no hemos "aislado" los verdaderos grados de libertad dinámicos en nuestra elección del espacio de configuración.

En el caso de las ecuaciones de Einstein, existe una arbitrariedad de norma en nuestra elección del campo g_{ij}. Esto sugiere que debemos tomar al espacio de configuración de la Relatividad General como el conjunto de clases de equivalencia, $\tilde{h}_{ij}$, de métricas Riemannianas, en donde dos métricas son consideradas equivalentes si pueden ser transformadas una en la otra mediante un difeomorfismo. Este espacio de configuración es conocido como superespacio [21]. Al usar el superespacio como el espacio de configuración eliminamos la constricción dada por la expresión (3.68). Sin embargo, la constricción (3.67) no desaparece y puede ser contemplada como una consecuencia de la arbitrariedad involucrada en la elección en la forma de "rebanar" el espacio-tiempo en espacio y tiempo. Es cuadrática en lo momentos y parece que no es posible encontrar una elección de espacio de configuración para la Relatividad General en la cual únicamente los verdaderos grados de libertad dinámicos estén presentes en el espacio fase. La presencia de la constricción dada por la expresión (3.67) parece ser una característica inevitable de la formulación hamiltoniana de la Relatividad General y genera serios obstáculos para la formulación de una teoría cuántica de la gravedad mediante el formalismo de la cuantización canónica [22].

Resumiendo, la invariancia clásica ante difeormorfismos de la Relatividad General implica la existencia de constricciones: el Hamiltoniano total debe ser nulo. En la teoría cuántica, las constricciones son implementadas *á la* Dirac como restricciones sobre las funciones de onda permitidas. La función de onda entonces obedece la ecuación de Wheeler-DeWitt [21, 23]

$$H\psi = 0. \quad (3.75)$$

donde H denota la constricción hamiltoniana. En Relatividad General clásica, los espacio-tiempos pueden ser parametrizados por coordenadas temporales arbitrarias. Sin embargo, como ya hicimos notar, a nivel de gravedad cuántica ya no existen los espacio-tiempos, y por lo tanto, no hay un parámetro temporal disponible para parametrizarlas, es decir, la ecuación de Wheeler-DeWitt es "atemporal", carece de un parámetro el cual pueda identificarse como el tiempo.

3.4 Modelo de Decoherencia.

Fue Dirac [24] quien postuló al Principio de Superposición como el principio fundamental de la teoría cuántica. Este principio define la propiedad más importante de sus "vectores-ket", los cuales el supuso que forman un marco cinemático general y completo para caracterizar a los estados físicos sin importar la base de la representación. A pesar de su éxito, pronto resultó claro que no todas las superposiciones concebibles existen en la naturaleza. Esto obligó a la gente a postular la existencia de reglas de superselección [25]. Existen también intentos por derivar algunas de estas reglas de superselección a partir de otros principios, los cuales son algunas veces postulados en teoría cuántica de campo [26].

Las reglas de superselección más fundamentales parecen excluir superposiciones de estados con diferente carga eléctrica o con spin entero y semi-entero. Por ejemplo, superposiciones de un protón y un neutrón nunca han sido encontradas en la naturaleza, aún cuando han probado ser muy útiles como representaciones del grupo de spin isotópico. La teoría de supersimetrías [27] requiere de la existencia de superposiciones de bosones y fermiones, aún cuando tampoco se espera que se les encuentre como objetos reales.

Otras restricciones del principio de superposición están definidas con menor claridad. Entre éllas está, primero que todo, la exclusión de superposiciones de estados clásicamente diferentes, tales como el caso del famoso gato de Schrödinger, o aún más, el caso de un estado compuesto de la superposición de un gato y un perro, como fue sugerido por E. Joos [28]. Esto con frecuencia es simplemente considerado como una consecuencia de la suposición de que la teoría cuántica no se aplica a objetos macroscópicos. Sin embargo, esta última afirmación no solo contrasta con la supuesta universalidad de la naturaleza de la teoría cuántica, sino que además no es compatible con la idea de que los cuerpos macroscópicos están compuestos por muchos átomos, y por ende deben de forman estados cuánticos de muchas partículas.

¿Es posible entonces explicar todas las reglas de superselección como un efecto del entorno (en la literatura aparece la palabra "environment") ? Esta es precisamente la idea detrás del *programa de decoherencia* [30].

Otros experimentos con objetos cuánticos nos han enseñado que la interferencia desaparece si, por ejemplo, el paso de un electrón a través de rendijas o de un separador de haz tipo Stern-Gerlach es medido. Esto significa que se puede suponer que el resultado (aquí un cierto paso) se ha vuelto clásico tan pronto como la medición ha ocurrido irreversiblemente.

Pasemos a explicar un poco acerca de lo que se entiende por decoherencia. Un objeto macroscópico puede ser considerado formalmente como constituido por dos tipos diferentes de sistemas dinámicos [29], uno de éllos descrito por coordenadas colectivas y el otro por coordenadas microscópicas. De aquí en adelante los denotaremos por sistema colectivo y entorno, respectivamente. Si los dos sistemas están desacoplados entonces, el hamiltoniano total es la suma de dos términos, $H = H_e + H_c$, donde H_c depende únicamente de variables colectivas y su valor promedio nos proporciona la energía mecánica, mientras que el valor promedio de H_e nos da la energía interna, tal como es definida en termodinámica, y es una función exclusivamente de las variables microscópicas. La ausencia de acoplamiento entre estos dos sistemas implica que no existe intercambio de energía entre ellos. La disipación térmica es debida a la existencia de un acoplamiento entre los dos sistemas en el hamiltoniano real, el cual debe ahora de escribirse como $H = H_e + H_c + H_{int}$. Es obvio que este acoplamiento debe ser tomado en cuenta para describir la existencia de los efectos de fricción en mecánica clásica. Sin embargo, este término genera también un efecto dramático sobre la superposición de dos estados macroscópicamente diferentes, el cual recibe el nombre de decoherencia, y consiste en que destruye las superposiciones cuánticas que a nivel macroscópico se pudiesen presentar y se puede explicar a *grosso modo* de la manera siguiente: aún si las funciones de onda del entorno para dos estados macroscópicamente diferentes resultan ser coherentes para cierto instante de tiempo (aún si su fase relativa está bien definida como para permitir posibles interferencias), éstas se volverán rápidamente ortogonales como consecuencia de su acoplamiento con los diferentes valores de las observables macroscópicas colectivas.

Consideremos un ejemplo sencillo, y para éllo tomemos una bola metálica la cual cuelga de un hilo también metálico, es decir tomemos un péndulo [31]. El ángulo, θ, entre el péndulo y la vertical será la única variable colectiva, así como también su momento canónico conjugado. Todas las restantes variables serán consideradas como microscópicas.

El estado inicial de este péndulo será de velocidad nula y un ángulo inicial θ_0. Esto puede describirse en el formalismo cuántico de una manera sencilla usando una función de onda gaussiana en la variable θ, con valor promedio θ_0 y momento promedio nulo. Como estado inicial del entorno tomaremos el estado base. Es decir, el estado inicial de todo el objeto es

$$|\psi(0)>=|\phi_{\theta_0}>_c \otimes |0>_e, \tag{3.76}$$

donde el primer vector de estado representa la función de onda colectiva gaussiana y el segundo el estado base del entorno.

Comenzando de este estado, el péndulo empieza a oscilar. Las oscilaciones deforman el hilo, desde el punto de vista cuántico estas oscilaciones son excitaciones del entorno, es decir fonones, la materia que constituye el hilo empezará a calentarse. Pueden ser descritas mediante un hamiltoniano de acoplamiento entre el péndulo colectivo y el entorno interno. Desde el punto de vista clásico, esta disipación es debida a la fuerza de fricción, la cual es proporcional a la velocidad del péndulo y opuesta a élla.

La ecuación clásica de movimiento es

$$m\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}+\lambda\frac{d\theta}{dt}+\omega^2\theta\right)=0. \tag{3.77}$$

Consideremos ahora un instante de tiempo t, en el cual la disipación ya ha comenzado a tener cierto efecto y por lo tanto una pequeña parte de la energía del péndulo ha sido ya transferida al entorno. Este ya no se encontrará en su estado base sino en otro estado, el cual clásicamente tiene una bien definida energía promedio $W(t)$.

Si se expande la solución de la ecuación completa de Schrödinger para el péndulo en función de los eigenestados de energía del entorno, uno entonces espera obtener algo como [28]

$$|\psi(t)>=\sum_j c_j(t)|\phi_j>_c \otimes|w_j>_e, \tag{3.78}$$

donde $|\phi_j>_c$ representa una función de onda normalizada, la cual depende de la variable θ, con valores promedio $<\theta>$ y $<\dot{\theta}>$, cerca de los valores clásico $\theta(t)$ y $\dot{\theta}$; $|w_j>_E$ denota un eigenestado del hamiltoniano del entorno, con energía w_j, y c_j es una amplitud de probabilidad. Esta amplitud es diferente de cero solo cuando los valores de la energía interna, w_j, están cercanos a la energía $W(t)$ transferida clásicamente por fricción durante el intervalo de tiempo t.

El operador de densidad inicial está dado por

$$\rho(0)=|\psi(0)><\psi(0)|. \tag{3.79}$$

Aquí aparece una idea sencilla pero muy importante: al calcular las propiedades estadísticas de la medición de una observable colectiva A_c, o cuando se calcula la probabilidad de una propiedad involucrada con élla, uno calcula una cantidad de la forma

$$Tr(\rho A_c). \tag{3.80}$$

donde la observable A_c conmuta con las observables del entorno. Se puede calcular la traza dada en la expresión (3.76) en dos pasos: (i) se calcula el llamado operador de densidad colectivo (u operador de densidad reducido) realizando primero una traza parcial sobre los grados de libertad del entorno, esto es: $\rho_c = Tr_e\rho$, (ii) uno puede obtener el valor promedio deseado al llevar a cabo la traza final sobre el espacio de Hilbert colectivo para obtener $Tr_c\rho_c A_c = Tr(\rho A_c)$. El operador de densidad reducido jugará un papel fundamental en la teoría de decoherencia.

Tomando en cuenta la expresión (3.79) para el operador de densidad y la forma explícita dada por (3.76), se encuentra que al tiempo inicial el operador de densidad reducido está dado por

$$\rho_c(0) = |\phi_{\theta_0} >< \phi_{\theta_0}|, \tag{3.81}$$

claramente se puede ver que a nivel colectivo éste es un estado puro. Sin embargo, un instante de tiempo t después, la expresión (3.78) nos dice que el operador de densidad reducido describe ahora una mezcla

$$\rho_c = \sum_j |c_j(t)|^2 |\phi_j >_c < \phi_j|_c. \tag{3.82}$$

Pasemos ahora a considerar un caso más interesante, analizemos la situación en la cual el estado inicial es una combinación de dos estados del tipo recién estudiado, ambos con velocidad inicial nula y con posiciones iniciales θ_1 y θ_2. El entorno lo consideramos en ambos casos inicialmente en su estado base, de tal manera que el estado completo inicial está dado por

$$|\psi(0) >= a|\psi_1(0) > +b|\psi_2(0) >, \tag{3.83}$$

donde $|\psi_1(0) >= |\phi_{\theta_1} >_c |0 >_e$ y $|\psi_2(0) >= |\phi_{\theta_2} >_c |0 >_e$.

Un instante de tiempo después, se tiene

$$|\psi(t) >= a|\psi_1(t) > +b|\psi_2(t) >, \tag{3.84}$$

siendo, por ejemplo,

$$|\psi_1(t) >= \sum_j c_j^{(1)}(t)|\phi_j^{(1)}(t) >_c \otimes |w_j >_e .$$

Los estados colectivos, $|\phi_j^{(1)}(t) >_c$, dan los valores promedio para θ y $\dot{\theta}$, los cuales son prácticamente iguales a los predichos por la teoría clásica. En cuanto a las amplitudes $c_j^{(1)}(t)$ y $c_j^{(2)}(t)$, debemos mencionar que son significativamente diferentes de cero solo para aquellos valores de w_j que estén muy cerca de las energías promedio clásicamente disipadas, es decir de $W_1(t)$ y $W_2(t)$.

Calculando nuevamente el operador de densidad reducido al tiempo 0, (puesto que el entorno se encuentra en el estado base), la traza parcial sobre el entorno es trivial y en consecuencia el operador de densidad reducido es

$$\rho(0)_c = |a|^2|\phi_{\theta_1} >< \phi_{\theta_1}| + |b|^2|\phi_{\theta_2} >< \phi_{\theta_2}| + ab^*|\phi_{\theta_1} >< \phi_{\theta_2}| + a^*b|\phi_{\theta_2} >< \phi_{\theta_1}|. \tag{3.85}$$

Nótese que representa un estado puro. Calculemos el operador de densidad reducido un instante de tiempo después. La parte diagonal no presenta nada nuevo

$$\rho_{cd} = |a|^2 \sum_j |c_j^1|^2 |\phi_j^{(1)} >< \phi_j^{(1)}| + |b|^2 \sum_j |c_j^2|^2 |\phi_j^{(2)} >< \phi_j^{(2)}|. \tag{3.86}$$

Evidentemente, representa una distribución de probabilidad para la posición que está concentrada en torno a los dos posibles valores que uno esperaría de las dos ecuaciones clásicas de movimiento, con probabilidades respectivas $|a|^2$ y $|b|^2$.

La parte no diagonal resulta ser mucho más interesante. La expresión

$$|\psi_1(t) >= \sum_j c_j^{(1)}(t)|\phi_j^{(1)}(t) >_c \otimes |w_j >_e,$$

involucra eigenestados de energía del entorno únicamente con eigenvalores en la vecindad inmediata de $W_1(t)$, en forma análoga para $|\psi_2(t) >$. Cuando t es suficientemente grande, de tal manera que la diferencia $W_1(t) - W_2(t)$ es más grande que las fluctuaciones cuánticas en la energía del entorno, la traza parcial sobre el entorno suprime los términos no-diagonales. Esto puede verse al escoger a los eigenestados de energía del entorno como una base para calcular la traza parcial. Tomando, por ejemplo, la parte no diagonal de ρ_c proveniente de $|\psi_1(t) >< \psi_2(t)|$, uno encuentra una contribución al operador de densidad reducido dado por la expresión

$$ab^* \sum_j c_j^{(1)} c_j^{*(2)} |\phi_j^{(1)} >< \phi_j^{(2)}|. \tag{3.87}$$

Pero como ya hemos visto, los coeficientes $c_j^{(1)}$ son diferentes de 0 solamente cuando w_j está cercano a $W_1(t)$, en cuyo caso los coeficientes $c_j^{(2)}$, que los multiplican, serán cero. Es decir, los términos no diagonales se anulan.

La diagonalización dinámica espontánea del operador de densidad reducido es siempre la manifestación principal de la decoherencia, y aparece claramente como un producto de la disipación. Es a veces llamado la generación espontánea de una regla de superselección [32]. La existencia de este efecto no requiere que la disipación sea grande, puesto que todo lo que se necesita es que la diferencia $W_1(t)-W_2(t)$ sea grande comparada con la dispersión en la energía interna. Es claro que, desde el punto de vista matemático, la clave en el argumento es la alta densidad del espectro de energía, lo cual implica que las fluctuaciones en la energía son pequeñas comparadas con la energía interna promedio [28].

Los sistemas macroscópicos más obvios para los cuales la disipación es despreciable son superfluidos y superconductores. También son los sistemas para los cuales uno esperaría que la decoherencia no se presente.

Una consecuencia obvia de este tipo de modelo es la amplia validez de la decoherencia para objetos macroscópicos (y a menudo también para microscópicos, como es el caso de moléculas quirales [33]).

La aparición sistemática de la decoherencia ante la presencia de disipación apunta a un cierto tipo de universalidad y dominio de validez que excede con mucho lo que aquí sea ha presentado [28]. Decoherencia proporciona una respuesta a uno de los más difíciles problemas que han plagado a la teoría cuántica durante años, explica porque no se observan en la naturaleza situaciones físicas que correspondan a la superposición cuántica de estados macroscópicamente diferentes.

El formalismo que aquí ha sido bosquejado puede extenderse a sistemas con un número infinito de grados de libertad. En particular, es posible probar, por ejemplo, como la superposición entre intensidades del campo electomagnético, dentro del marco de QED, son suprimidas mediante la interacción con campos de materia cargados [34].

Notemos que la interpretación de Copenhagen de la mecánica cuántica requiere de una estructura dada para el espacio-tiempo, puesto que asume la existencia *a priori* de agentes de medición clásicos. Pero por otro lado, como ya antes mencionamos se cree que el espacio-tiempo debe ser descrito por la teoría cuántica a nivel fundamental. Puesto que la interacción gravitacional es, clásicamente una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo, entonces su cuantización debe conducir a una teoría cuántica del espacio y del tiempo. Sus propiedades clásicas, dentro del contexto del modelo recién esbozado, deben de emerger como consecuencia de la decoherencia (ésto no podrá ser una aparición en el tiempo ya que el mismo tiempo debe surgir en esta transición).

Hemos ya comentado también como el concepto de tiempo se pierde al intentar cuantizar al campo gravitacional mediante un formalismo canónico. La ecuación de onda que se satisface es la Wheeler-DeWitt, expresión (3.75). Una función de onda de este tipo estará extendida sobre todo el espacio de configuración, el superespacio, y no exhibirá ningún comportamiento clásico, no tendrá un pico alrededor de una cierta sucesión de 3-espacios, los cuales pudiesen dar pie a un espacio-tiempo clásico. La pregunta que entonces aquí surge es la siguiente: ¿como se puede entender la aparición de un espacio-tiempo clásico a partir de un modelo cuántico de la gravedad?

Nuevamente recurriremos al modelo de decoherencia. La idea básica es que la gravedad se acopla universalmente a toda forma de energía. La gravedad es "medida" y una superposición general de estados gravitacionales cuánticos será suprimida (*decohered*) y se producirá una localización de la función de onda en el espacio de configuración, después de que los grados de libertad de la materia (que aquí juegan el papel de entorno) sean integrados. Esta idea fue propuesta por Joos y Zeh [35], y puede ser esbozada como sigue.

Supóngase que un campo gravitacional homogéneo (todo dentro del marco Newtoniano de la gravedad) se encuentra en una superposición de diferentes intensidades de campo y localizado en el interior de una caja de lado L.

$$|\psi>= c_1|g> + c_2|g'>. \tag{3.88}$$

Una partícula de masa m, en un estado $|\zeta>$, la cual se mueve en el interior de este volumen, "mide" el valor de g, puesto que su trayectoria depende de la métrica .

$$|g>|\zeta^0>\to|g>|\zeta_g>. \tag{3.89}$$

Esta correlacción destruye la coherencia entre g y g', y la matriz de densidad reducida toma la forma siguiente (después de que muchas interacciones son tomadas en cuenta)

$$\rho(g,g',t)=\rho(g,g',0)exp(-\Gamma(g-g')^2t), \tag{3.90}$$

siendo $\Gamma = nL^4(\frac{\pi m}{2k_BT})^{\frac{3}{2}}$, para un gas con densidad de partículas n y temperatura T. Por ejemplo, para aire bajo condiciones ordinarias y $L = 1$cm, se obtiene que la coherencia remanente tiene un ancho igual a $\frac{\Delta g}{g} = 10^{-6}$. Este ejemplo muestra como este mecanismo dinámico nos conduce al comportamiento clásico del espacio-tiempo. Es evidente que un tratamiento correcto requiere el uso de la ecuación de Wheeler-DeWitt. Aquí el parámetro tiempo debe ser reemplazado por alguna variable intrínseca del universo. Resumiendo, la geometría del espacio-tiempo toma un carácter clásico debido a que el universo no es vacío.

El primer punto que en la aplicación del modelo de decoherencia al caso gravitacional debemos resolver es la siguiente: ¿cuales grados de libertad serán los relevantes y cuales no lo serán? Después de todo, la descomposición de un sistema en variables colectivas y su respectivo entorno es hasta cierto punto arbitraria. Sin embargo, parece ser que el factor de escala del universo es uno de los grados de libertad relevantes. Los grados de libertad irrelevantes pueden estar conformados por "multipolos de órden superior", los cuales pueden ser encontrados llevando a cabo una expansión de la métrica 3-dimensional en armónicos esféricos. Estos multipolos describen entonces perturbaciones en la densidad y ondas gravitacionales [36].

La cantidad de literatura que sobre decoherencia existe en cosmología cuántica es enorme. No obstante, debemos mencionar algunas de las áreas en las cuales este formalismo ha dado resultados relevantes.

Usando el método de influencia funcional Fukuyama y Morikawa [37] han estudiado las posibles consecuencias para la flecha del tiempo que el mecanismo de decoherencia podría tener, así como la relación entre decoherencia y correlaciones. Modelos de minisuperespacios de dimensionalidad superior han sido también ya estudiados [38]. El papel de la decoherencia en el marco del universo temprano y su influencia en la formación de estructuras ha sido también ya discutido [39].

Para finalizar quisiéramos resaltar la importancia que el papel de la decoherencia podría jugar para explicar el origen de la irreversibilidad en el universo [40]. Puesto que la entropía del universo actualmente (definida por sus grados de libertad relevantes) es todavía extremadamente pequeña comparada con su valor máximo posible (el cual se alcanzaría si toda la masa del universo se presentase en la forma de un hoyo negro), la evolución del universo debe de haberse iniciado a partir de un estado con entropía casi nula [41]. Una posible explicación de este hecho podría invocar a la teoría cuántica de la gravitación. Se ha argumentado que una simple condición de frontera en el límite $a \rightarrow 0$ (donde a es el factor de escala del universo) para la función de onda del universo bastaría para explicar la flecha del tiempo observada, y además podría conducir a efectos cuánticos macroscópicos cerca del punto de regreso de un universo clásico recolapsante. Tal condición de frontera fue ya propuesta [42] y podemos explicarla a *grosso modo* diciendo que élla afirma que la función de onda para valores pequeños de a depende exclusivamente de a. La función de onda es entonces independiente, en este límite, de los multipolos superiores antes mencionados.

Para un estado creciente del universo, el estado total se "enreda" con estos grados de libertad adicionales, y la decoherencia para el "subsistema relevante" puede ser identificada después de que la parte "irrelevante" es integrada. La entropía local conectada con el factor de escala y otras variables relevantes, tal cual es calculada a partir de la matriz de densidad reducida en forma estándar, $S = -k_B Tr(\rho ln \rho)$, se incrementa dando origen a la flecha del tiempo del universo observada.

Capítulo 4

Medibilidad de ondas gravitacionales.

4.1 Introducción.

La detección de ondas gravitacionales juega en estos momentos un papel muy importante en la física contemporánea y los dispositivos experimentales que para su detección se han diseñado muestran un gran adelanto técnico.

En años recientes el peso en el diseño de estos detectores se ha inclinado hacia el lado de los llamados interferómetros laser [10]. En algunos de estos experimentos [12, 43] el tiempo de observación aparece como una variable que puede ser movida a conveniencia del experimentador. En la propuesta de Balakin [43], esta característica es especialmente pronunciada, ya que en su experimento, para tener un efecto que permita detectar a las ondas gravitacionales éste se debe dejar correr por un lapso de un año, aún cuando éste podría durar menos tiempo, pero el efecto de las ondas gravitacionales sobre la fase del campo electromagnético sería díficil de medir. Todo lo anterior significa que el tiempo característico del experimento puede ser escogido tan grande o tan chico como se desee, sin que éllo tenga consecuencias sobre el experimento.

La aplicación del llamado formalismo de integral de trayectoria restringida (FITR) [44] al caso de un campo electromagnético [45] muestra características que permiten cuestionar el manejo que en los experimentos antes mencionados se hace del tiempo característico, es por ello que vale la pena que éstas sean mencionadas.

En los dos trabajos antes mencionados [45] se considera el caso en el cual un campo electromagnético es medido en cada punto de una cierta región del espacio-tiempo. El efecto del campo sobre el aparato de medición y su *back reaction* son tomados también en cuenta, y como parte de los resultados se obtuvo una estimación de la medibilidad del campo electromagnético por cualquier dispositivo experimental que no deforme el campo medido más allá del efecto que aparece como resultado del error experimental.

Los resultados obtenidos concuerdan con los de Landau y Peierls [46], y por lo tanto discrepan con los de Bohr y Rosenfeld [47]. Una parte muy importante de lo obtenido radica en el hecho de que el tiempo de medición (tiempo característico del experimento) y la longitud característica del dispositivo experimental son parámetros, que en lo que se refiere a la definición de la dispersión de los resultados experimentales, no son independientes uno del otro. Expliquémos esto con mayor detalle: la dispersión de los resultados experimentales tiene un mínimo, el cual es una función del tiempo característico y de la longitud característica del experimento. Es decir, para que en un experimento (en el cual el equipo experimental tiene una determinada resolución) se obtengan resultados que tengan la menor dispersión (varianza) posible se debe cumplir una relación entre la resolución del equipo experimental, el tiempo característico y longitud característica del experimento. Si ésto no se cumple, entonces los resultados experimentales presentarán una dispersión mayor que el mínimo posible.

Pasemos ahora al caso de ondas gravitacionales. Como hemos ya visto, podemos plantear entre el caso de ondas electromagnéticas propagándose en un espacio-tiempo plano en el vacío y el caso de un campo gravitacional débil también en el vacío varios puntos de coincidencia: (i) los dos campos pueden considerarse como definidos sobre un espacio-tiempo plano, y (ii) ambos satisfacen la ecuación de onda homogénea [8].

Si consideramos ahora lo obtenido en [45] para el caso electromagnético y recordamos también las analogías recién mencionadas entre ondas electromagnéticas y campo gravitacional débil, resulta claro que el tratamiento del tiempo característico de un proceso de medición asociado a un experimento diseñado para detectar radiación gravitacional como un parámetro movible sin ninguna consecuencia resulta un poco "sospechoso".

Otro aspecto que en relación con la detección de ondas gravitacionales es interesante mencionar concierne el problema de la cuantización del campo gravitacional. A este respecto se argumenta siempre que las ondas gravitacionales constituyen un sistema predominantemente clásico [48]. Sin embargo, podemos en este punto plantearnos la siguiente pregunta: ¿ es posible que en algunos experimentos de detección de radiación gravitacional el carácter cuántico del campo gravitacional pueda aparecer en escena? Esta pregunta puede reformularse de la siguiente manera: ¿cuál es la probabilidad de obtener en un experimento de medición de radiación gravitacional una configuración del campo que no constituya una solución a las ecuaciones linealizadas de Einstein? Otra pregunta que en este contexto podemos formular es la siguiente: ¿la onda gravitacional se manifestará siempre como un sistema clásico sin importar la resolución que el aparato experimental presente? Es decir: ¿ que condiciónes debe satisfacer la resolución del aparato experimental para que las características cuánticas de la onda gravitacional aparezcan en escena? Todas las preguntas anteriores permanecen hasta este momento sin contestar y en este capítulo les daremos respuesta.

La idea consiste en analizar la medibilidad de una onda gravitacional mediante FITR. Esta formulación nos permitirá obtener varios resultados:

(i) deduciremos la densidad de probabilidad asociada a la posibilidad de obtener como resultado de un proceso de medición de una onda gravitacional una cierta configuración del campo y concluiremos que la probabilidad máxima coincide con aquella configuración del campo gravitacional que es solución de las ecuaciones linealizadas de Einstein;

(ii) mostraremos que la dispersión de los resultados experimentales presenta un mínimo, el cual es una función del volumen 4-dimensional en el cual el experimento es llevado a cabo;

(iii) encontraremos como consecuencia del punto anterior que, el proceso de - medición se encuentra dividido en tres regiones, (a) una región clásica en la cual la dispersión en los resultados experimentales es primordialmente consecuencia de la resolución del aparato experimental, es decir mejorar la resolución del aparato experimental tiene como consecuencia una reducción en la dispersión, (b) una region cuántica en donde la dispersión aumenta si la resolución del aparato experimental se reduce y, (c) finalmente una región que yace entre las dos antes mencionadas y que fija la relación que nos proporciona la mínima dispersión;

(iv) podremos definir un parámetro el cual nos permitirá calcular la dispersión asociada a cualquier dispositivo experimental destinado a la detección de radiación gravitacional. Por ejemplo, lo podremos aplicar en los llamados interferómetros-laser pero también en los detectores tipo barra resonante [49, 50] y en el denominado *Doppler tracking of spacecraft* [51], y en consecuencia ésto nos permitirá comparar la dispersión entre los diferentes proyectos experimentales que en está dirección existen y conocer cual de ellos presentará la dispersión en sus resultados experimentales más pequeña;

(v) podremos también determinar si es posible introducir en este tipo de propuesta algúna modificación, es decir un cambio en los parámetros experimentales, la cual permita reducir la dispersión;

(vi) todo lo antes mencionado también nos permitirá entender porque el tiempo característico y la longitud característica del experimento no son, en cuanto a la determinación de la dispersión, parámetros independientes uno del otro.

4.2 Formulación del problema

El punto de partida será la función acción de un cierto campo h

$$S[h] = \int_{\Omega} d^4x L(h, \partial h). \tag{4.1}$$

La dinámica de este campo está dada por

$$A = \int d[h] exp(iS[h]). \tag{4.2}$$

en donde la integral debe calcularse sobre todas las configuraciones del campo [44]. Aquí es importante mencionar que por comodidad estamos empleando unidades Planckianas, es decir tenemos $G = 1$, $c = 1$, y $\hbar = 1$.

Como mencionamos anteriormente, la dinámica del campo está dada por esta última expresión solo en aquellos casos en los cuales no existe un proceso de medición. Claramente todas las configuraciones son equiprobables. La presencia de un aparato de medición y su interacción con el campo h implicaría que esta equiprobabilidad ya no es válida.

Sabemos que se puede considerar la influencia de un dispositivo de medición sobre la dinámica del campo restringiendo la integral de trayectoria dada por la expresión (4.2). Este punto constituye la idea fundamental detrás de FITR [44].

Consideremos ahora la introducción de un dispositivo experimental, y la influencia de éste se puede tomar en cuenta mediante una funcional de peso $\omega_a[h]$ [45]. Es decir, esta funcional toma en cuenta la condición de un proceso de medición continuo. La dinámica del campo será ahora

$$A_a = \int d[h]\omega_a[h]exp(iS[h]). \tag{4.3}$$

Aquí A_a es la amplitud de probabilidad asociada a un proceso de medición en el cual el resultado experimental está dado por a. En otras palabras, la probabilidad de obtener como resultado de la medición la configuración del campo dada por a es $P_a = |A_a|^2$.

Entre más probable sea la configuración $[h]$, de acuerdo con a, mayor será $\omega_a[h]$. Esto significa que el valor de $\omega_a[h]$ es aproximadamente 1 para aquellas configuraciones $[h]$ que concuerden con el resultado experimental a y será cero para aquellas que no lo sean. Evidentemente, toda la información concerniente al experimento está contenida en $\omega_a[h]$. Esto implica que si deseamos tener un análisis exacto de un proceso de medición necesitamos primero determinar la $\omega_a[h]$ asociada al dispositivo experimental a ser usado. Es decir, la funcional en cuestión depende del experimento que se desee llevar a cabo.

Esto nos permite calcular las probabilidades asociadas a diferentes resultados experimentales [6]. Solo necesitamos calcular la expresión (4.3) bajo las mismas condiciones de frontera y la misma región de integración pero tomando en cuenta diferentes resultados de medición a.

Pasemos ahora a definir lo que en el caso de ondas gravitacionales será el campo h. Puesto que el punto a analizar es la medibilidad de ondas gravitacionales, resulta claro entonces que estaremos en el caso de campos gravitacionales débiles y en consecuencia la métrica tendrá la forma siguiente $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, en donde se tiene la condición $|h_{\mu\nu}| << 1$. Todas nuestras cantidades las evaluaremos hasta segundo orden en h. Es decir, siempre permaneceremos en el ámbito de la teoría linealizada de Einstein.

El Lagrangiano será entonces $L[h] = \sqrt{-g}R$, donde R es el escalar de curvatura y g el determinante de la métrica [8].

El escalar de curvatura está dado, bajo las condiciones de la teoría lineal de Einstein, por

$$\begin{aligned} R \approx \partial^\mu\partial^\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial^\mu\partial_\mu h + \frac{1}{4}\partial^\mu\partial_\mu(h^{\tau\nu}h_{\tau\nu}) - \frac{1}{2}\partial^\mu\partial_\tau(h^{\tau\nu}h_{\nu\mu}) + \\ \frac{1}{2}\partial^\mu(h_{\mu\nu}\partial_\tau h^{\tau\nu})\frac{1}{2}h^{\tau\nu}\partial_\tau\partial_\nu h + \frac{1}{2}(\partial_\nu h^{\tau\nu})(\partial_\tau h) - \frac{1}{4}(\partial_\tau h)(\partial^\tau h) + \\ \frac{1}{2}(\partial_\tau h)(\partial_\nu h^{\tau\nu}) - (\partial^\mu h_{\mu\tau})(\partial_\nu h^{\tau\nu}) + \frac{1}{4}(\partial^\mu h_{\nu\tau})(\partial_\mu h^{\nu\tau}), \end{aligned} \tag{4.4}$$

donde hemos definido $h = h^\nu{}_\nu$.

Sabemos que en la teoría lineal de Einstein las componentes del tensor de Riemann, y por lo tanto también el escalar de curvatura, son invariantes ante una transformación de norma [8]. Utilizaremos esta libertad de norma para simplificar la expresión (4.4). Para éllo definamos el siguiente campo $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h$. Si ahora introducimos las cuatro condiciones de norma $\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} = 0$, las cuales son a veces denotadas como norma de Lorentz (aún cuando también reciben el nombre de norma de de Donder o norma armónica), entonces simplificamos la expresión del escalar de curvatura

$$R \approx -\frac{1}{2}(\partial^\mu\bar{h}_{\nu\tau})(\partial_\mu\bar{h}^{\nu\tau}). \tag{4.5}$$

Podemos ahora escribir la expresión para la acción

$$\int_\Omega L d^4x = -\frac{1}{32\pi}\int_\Omega d^4x(\partial^\mu\bar{h}_{\nu\tau})(\partial_\mu\bar{h}^{\nu\tau}). \tag{4.6}$$

La dinámica del campo es entonces

$$A = \int d[\bar{h}]\delta(\partial^\nu\bar{h}_{\lambda\nu})exp[-\frac{i}{32\pi}\int_\Omega d^4x(\partial^\mu\bar{h}_{\nu\tau})(\partial_\mu\bar{h}^{\nu\tau})]. \tag{4.7}$$

Con respecto a la última integral de trayectoria debemos mencionar varios puntos.

La integración debe realizarse sobre aquellas configuraciones del campo que satisfacen la norma de Lorentz. Esto es consecuencia del hecho de que a la hora de escribir la expresión para el escalar de curvatura hemos simplificado esta expresión mediante el uso de dicha norma. Por lo tanto, toda configuración que no la satisfaga debe ser descartada. El cumplimiento de esta condición en la integración se garantiza mediante la delta de Dirac que aparece en la expresión (4.7).

La integral debe calcularse sobre todo el 4-volumen en el cual existe onda gravitacional, esta region la hemos denotado por Ω.

Nótese que la expresión (4.7) incluye la integración sobre configuraciones que no serán solución a las ecuaciones linealizadas de Einstein. Es decir, estamos de alguna manera cuantizado el campo gravitacional y sabemos que hasta este momento no existe una teoría de gravedad cuántica consistente. Esto implica que el cálculo debe ser considerado como una aproximación, la cual queda justificada por el hecho de que en el caso de campos gravitacionales débiles podemos considerar a la perturbación de la métrica como si constituyése un tensor definido sobre un espacio-tiempo plano y por lo tanto el tratamiento que de él hacemos es similar al hecho para el caso de un campo electromagnético [45].

Consideremos ahora el campo vectorial definido mediante la expresión $\mathbf{E}^2_{\bar{h}} = -\frac{1}{8\pi}(\partial^\mu \bar{h}_{\nu\tau})(\partial_\mu \bar{h}^{\nu\tau})$.

En función de este campo la amplitud toma la forma

$$A = \int d[\bar{h}]\delta(\partial^\nu \bar{h}_{\lambda\nu})exp[\frac{i}{4}\int_\Omega \mathbf{E}^2_{\bar{h}} d^4x]. \tag{4.8}$$

La expresión (4.8) es válida solo cuando no se lleva a cabo ningún experimento en el 4-volumen Ω.

Supongamos ahora que medimos en forma continua el campo $\mathbf{E}_{\bar{h}}(x)$ y que este proceso de medición da como resultado el campo $\mathbf{E}(x)$.

La pregunta que debemos ahora considerar si queremos analizar el proceso de medición dentro del marco FITR es la siguiente; ¿ cual debe ser la integral funcional a emplear?

En este punto introducimos una hipótesis adicional, la funcional $\omega_a[\bar{h}]$ tiene la forma siguiente

$$\omega_{[\mathbf{E}]}[\bar{h}] = exp\{-\frac{1}{\tilde{\Omega}}\int_{\tilde{\Omega}} \frac{(\mathbf{E}_{\bar{h}} - \mathbf{E})^2}{\Delta E^2} d^4x\}. \tag{4.9}$$

siendo $\tilde{\Omega}$ el volumen de la región 4-dimensional en la cual el experimento es llevado

a cabo y no es el volumen de integración Ω que apareció anteriormente. La razón del cambio en este volumen de integración es la siguiente: la interacción entre onda y aparato de medición se restringe a aquel 4-volumen en el cual la medición tiene lugar, es decir $\tilde{\Omega}$ y no en toda la región en la cual existe la onda, es decir Ω. Por lo tanto, con la presencia de un proceso de medición la región de integración solo puede comprender aquel 4-volumen en el cual la interacción de medición tiene lugar [16]. La cantidad ΔE^2 puede ser interpretada como la resolución del aparato experimental, asociada a la medición del campo $\mathbf{E}$ [45].

Es evidente que la forma de la funcional $\omega_{[\mathbf{E}]}$ depende del dispositivo de medición [52] y cláramente no sabemos si las construcciones experimentales involucradas tengan asociada una funcional de la forma dada por la expresión (4.9). Estrictamente hablando, uno debe analizar situaciones de medición reales y deducir a partir del análisis la forma de la funcional. Los resultados de los cálculos en el marco del formalismo de la integral de trayectoria restringida dependen de la forma elegida para la funcional.

Nuestro propósito es doble, buscamos no solo una estimación de la medibilidad de una onda gravitacional sino también entender si el ya mencionado manejo de los parámetros del experimento, como variables independientes una de la otra, no impone ningún tipo de restricción. En una primera aproximación que analiza al menos cualitativamente este manejo de las características experimentales podemos considerar a la expresión (4.9) como una aproximación que nos proporcionará, por lo menos hasta el orden de magnitud de los efectos considerados, en forma correcta los resultados.

La experiencia muestra que esta aproximación es válida. En el primer trabajo sobre la medición de la coordenada de una partícula [6], el proceso de medición fue descrito empleando como funcional

$$w_\alpha[q] = \begin{cases} 1 & \text{si } |q(t) - \alpha(t)| \leq \Delta\alpha \\ 0 & \text{si no} \end{cases} . \tag{4.10}$$

En el siguiente trabajo [7], la funcional elegida fue una funcional gaussiana

$$w_a[q] = exp[-\frac{2\rho^2|q-a|}{\Delta a^2}]. \tag{4.11}$$

Los resultados de los dos cálculos coinciden hasta el orden de magnitud, la precisión suficiente para el análisis de procesos de medición reales.

Evidentemente que un ejemplo no demuestra nada y el problema de la elección de la funcional debe ser analizado con mayor detalle.

Otro punto que debe ser mencionado es que la forma dada por (4.9) nos permitirá obtener una integral de trayectoria la cual puede ser calculada sin tener que introducir ningún tipo de aproximación matemática.

La amplitud de probabilidad se transforma ahora en

$$A_{[\mathbf{E}]} = \int d[\bar{h}]\delta(\partial^\nu \bar{h}_{\lambda\nu})exp\{\frac{i}{4}\int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{E}_{\bar{h}}^2 d^4x - \frac{1}{\tilde{\Omega}}\int_{\tilde{\Omega}} \frac{(\mathbf{E}_{\bar{h}} - \mathbf{E})^2}{\Delta E^2} d^4x\}. \tag{4.12}$$

La expresión (4.12) nos proporciona la amplitud de probabilidad asociada a un proceso de medición en el cual se obtiene como resultado experimental la configuración del campo dada por $\mathbf{E}$. La integral de trayectoria se lleva a cabo integrando sobre $\mathbf{E}_{\bar{h}}$ y para fines de esta integral $\mathbf{E}$ es un campo constante.

Con el fin de calcular la densidad de probabilidad introduciremos las siguientes definiciones $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(c)} + f_{\mu\nu}$, donde $h_{\mu\nu}^{(c)}$ son los campos que resultan de minimizar la expresión (4.6). La motivación detrás de esta definición es poder escribir cualquier campo que aparezca como resultado del proceso de medición como la suma de dos términos: (i) el primer término es el campo clásico, y proviene como ya se mencionó de la minimización de (4.6); y (ii) un término extra que representa la desviación del campo resultado del proceso de medición con respecto al caso clásico.

En términos del campo $\mathbf{E}$, la definición introducida nos permitirá escribir $\mathbf{E}_{\bar{h}} = \mathbf{E}_c + \mathbf{E}_f$ y $\mathbf{E} = \mathbf{E}_c + \mathbf{e}$ siendo $\mathbf{E}_c$ el campo solución a las ecuaciones linealizadas de Einstein, mientras que las correspondientes desviaciones de los campos $\mathbf{E}_{\bar{h}}$ y $\mathbf{E}$ con respecto al campo clásico son $\mathbf{E}_f$ y $\mathbf{e}$, respectivamente.

Al tomar en cuenta estas definiciones la expresión (4.12) se puede re-escribir como sigue

$$A_{[\mathbf{e}]} = exp\{\frac{i}{4}S[\bar{h}^c]\}\int d[f]\delta(\partial^\nu f_{\mu\nu})exp\{\int_{\tilde{\Omega}}(\frac{i}{4}\mathbf{E}_f^2 - \frac{1}{\tilde{\Omega}}\frac{(\mathbf{E}_f - \mathbf{e})^2}{\Delta E^2})d^4x\}. \tag{4.13}$$

Introduzcamos ahora las siguientes dos definiciones; $\alpha = \frac{\tilde{\Omega}\Delta E^2}{4}$, $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_f + \frac{1}{1-i\alpha}\mathbf{e}$. Por consiguiente, (4.13) se transforma en

$$\begin{aligned} A_{[\mathbf{e}]} = exp\{\frac{i}{4}S[\bar{h}^c]\}exp\{\frac{i}{4}\int_{\tilde{\Omega}}(\frac{1}{1-i\alpha}\mathbf{e}^2 d^4x\} \times \\ \int d[f]\delta(\partial^\nu f_{\mu\nu})exp\{\frac{i}{4}\int_{\tilde{\Omega}}[(1+\frac{i}{\alpha})\mathbf{E}_t^2\}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

Cambiémos ahora la variable integración, de $f_{\mu\nu}$ a $t_{\mu\nu}$, donde ésta última es el potencial que corresponde al campo $\mathbf{E}_t$. Nótese que la integral funcional no depende del campo $\mathbf{e}$, y por lo tanto aparecerá solamente como una constante de normalización, la cual no nos interesa.

La probabilidad, hasta una constante de normalización,.asociada a la configuración $\mathbf{e}$ es

$$P_{[\mathbf{e}]} = |A_{[\mathbf{e}]}|^2 = exp\{-\frac{1}{2}\int_{\tilde{\Omega}}(\frac{1}{\alpha+\alpha^{-1}}\mathbf{e}^2 d^4x\}. \tag{4.15}$$

Esta última expresión puede reformularse como

$$P_{[\mathbf{E}]} = exp\{-\frac{2}{\tilde{\Omega}}\int_{\tilde{\Omega}}\frac{(\mathbf{E}_c - \mathbf{E})^2}{\frac{16}{\tilde{\Omega}^2\Delta E^2} + \Delta E^2}d^4x\}. \tag{4.16}$$

La expresión (4.16) nos dice que en una medición de $\mathbf{E}(x)$ la mayor probabilidad está asociada a aquella configuración que es solución de las ecuaciones linealizadas de Einstein. Esto es fácil de ver, ya que si tenemos el caso en el cual $\mathbf{E}_c = \mathbf{E}$, entonces la exponencial en (4.16) toma el valor 1.

Sin embargo, también podemos obtener como resultado experimental configuraciones que no sean solución de las ecuaciones clásicas de movimiento y las cuales además tendrán asociada una probabilidad no cercana a cero. Esto puede constatarse notando que una densidad de probabilidad permanecerá cercana a su máximo si se cumple la condición

$$\frac{1}{\tilde{\Omega}}\int_{\tilde{\Omega}}[(\mathbf{E}_c-\mathbf{E})^2]d^4x<\delta E^2, \tag{4.17}$$

donde hemos definido

$$\delta E^2=\frac{16}{\tilde{\Omega}^2\Delta E^2}+\Delta E^2. \tag{4.18}$$

En realidad las expresiones (4.17) y (4.18) definen la dispersión (varianza) de los resultados experimentales. Expliquémos ésto un poco más. Si pudiésemos realizar este tipo de experimento varias veces y graficar los valores de $\mathbf{E}^2$ en contra del número de veces que cada uno de estos valores fue medido, tendríamos entonces una gráfica que podría ser interpretada como una curva de probabilidad para $\mathbf{E}^2$, en ese caso la varianza de élla estaría dada por δE^2.

Por otro lado, lo contenido en las expresiones (4.17) y (4.18) nos permite definir tres regiones de medición:

(1) La primera corresponde al caso en donde se cumple $\Delta E^2>\frac{4}{\tilde{\Omega}}$, y por lo tanto, $\delta E\sim\Delta E$. La dispersión de los resultados experimentales está determinada primordialmente por la resolución del aparato experimental. Además puede verse que si la resolución del dispositivo experimental sufre una mejora, es decir, si ΔE^2 disminuye, entonces la dispersión también disminuye. Evidentemente estamos en la región clásica de medición, en la cual este efecto es el que aparece en escena.

(2) Otra región queda determinada por la condición $\Delta E^2<\frac{4}{\tilde{\Omega}}$, entonces, $\delta E\sim\frac{4}{\tilde{\Omega}\Delta E}$. Es fácil convencerse que al diminuir ΔE la dispersión de los resultados experimentales aumenta. Con otras palabras, al mejorar la resolución experimental la dispersión también crece y entonces estamos en la región cuántica de medición. En esta región de medición el dispositivo experimental comienza a perturbar en forma considerable a la onda de tal manera que al mejorar la resolución experimental la varianza crece, de tal forma que la información que recibimos contiene cada vez más influencia del aparato experimental. Este es un efecto inevitable e impone un máximo a la información que de la onda gravitacional puede ser extraída. Claramente el Principio de Incertidumbre de Heisenberg está detrás de este efecto.

(3) La tercera región de medición queda definida por la condición $\Delta E^2 = \frac{4}{\Omega}$. Es fácil ver que esta condición minimiza a la expresión (4.18) cuando consideramos a la dispersión como una función de la resolución experimental. En otras palabras, el mínimo de la varianza aparecerá cuando élla sea satisfecha. Es claro que además podemos ahora definir un parámetro el cual nos permitirá determinar la varianza que un experimento tendrá en función de sus parámetros, es decir, en función de su longitud y tiempo característicos.

Para ver esto mejor designemos el tiempo y longitud característicos del experimento por τ and l, respectivamente. Aquí tiempo característico es el lapso temporal que dura el experimento mientras que longitud característica denota la longitud de la región en la cual el aparato de medición interacciona con la onda gravitacional. En consecuencia, $\frac{4}{\Omega} = \frac{4}{l^3\tau}$, y el mínimo de la dispersión surge si se satisface que $\Delta E^2 = \frac{4}{l^3\tau}$. Tenemos un parámetro con el cual evaluar la varianza de los resultados experimentales, ya que como hemos visto la dispersión es mínima si se cumple $\Delta E^2 = \frac{4}{l^3\tau}$, lo cual implica que un experimento con una dispersión pequeña, es decir, cercana al mínimo posible, será aquel que satisfaga la condición $\frac{\Delta E^2 l^3\tau}{4} \sim 1$, mientras que $\frac{\Delta E^2 l^3\tau}{4} << 1$ estará asociado a un experimento con una dispersión grande y el cual es llevado a cabo en la región cuántica de medición. Por otro lado $\frac{\Delta E^2 l^3\tau}{4} >> 1$ corresponde a un experimento el cual cae en la región clásica de medición y que tiene asociada una dispersión grande.

La definición de este parámetro nos permite también comparar dos experimentos y conocer cual de ellos tendrá la menor dispersión. Por ejemplo, si tenemos dos experimentos, ambos en la región clásica de medición, los cuales satisfacen que $\frac{\Delta E_1^2 l_1^3\tau_1}{4} > \frac{\Delta E_2^2 l_2^3\tau_2}{4}$, entonces el experimento con subíndice 1 tiene una dispersión mayor que el de subíndice 2, puesto que en el experimento (1) la distancia entre el número 1 y el parámetro en cuestión es mayor que en el experimento (2).

Es además claro de lo anterior que los parámetros del experimento juegan un papel fundamental en la determinación de la dispersión de los resultados experimentales y que se puede jugar con éllos como si fuésen independientes uno del otro, pero el precio a pagar es una dispersión que no estará cerca del valor mínimo posible. En otras palabras, el jugar con estos parámetros tendrá como consecuencia un experimento con una dispersión grande.

Podemos entender mejor este punto con un ejemplo. Supóngase que en el projecto *Virgo* [11] realizamos dos conjuntos de experimentos. En el primer conjunto cada uno de los experimentos que lo conforman se deja correr un tiempo típico [12], $\tau = 100h \sim 10^5 s$, mientras que en el segundo conjunto los experimentos duran más tiempo, $\tau = 1000h \sim 10^6 s$. En ambos conjuntos de experimentos la resolución y la longitud característica son iguales, lo único que cambia es el tiempo de duración del experimento. Entonces nuestro resultado nos dice que en el primer conjunto la dispersión es mayor, ya que $\tau_1 < \tau_2$, lo cual implica que $\frac{\Delta E^2 l^3 \tau_1}{4} < \frac{\Delta E^2 l^3 \tau_2}{4}$, y en consecuencia el segundo conjunto tendrá una dispersión mayor ya que estamos en la región clásica (ésto se verá más adelante con mayor detalle). Resumiendo, el tiempo y longitud característicos del experimento son parámetros que no son separables uno del otro.

Apliquémos estos resultados al caso de un interferómetro-laser. Traduciendo la expresión que nos da el mínimo de la dispersión a unidades ordinarias tenemos que éste surge si se satisface que $\Delta E^2 = 4\frac{l_p^2}{l^3 c\tau}$, donde $l_p = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$ es la longitud de Planck.

Hemos escrito el escalar de curvatura como $R \approx \mathbf{E}^2(x)$. Por lo tanto, la cantidad ΔE^2 está relacionada con la resolución del aparato experimental con respecto al escalar de curvatura.

Consideremos ahora el escalar de curvatura promedio de una onda con frecuencia ν_g e intensidad I, aquí promedio significa que integramos sobre un período. Entonces tenemos $< R > \sim I\frac{\nu_g^2}{c^2}$ [8].

Si nuestro dispositivo experimental tiene una resolución en la frecuencia igual a $\Delta\nu_g$, entonces la resolución correspondiente para el escalar de curvatura es $\Delta\nu_g$.

De lo antes obtenido se desprende que el mínimo en la dispersión surge si estamos en el caso en el cual se cumple la relación $4\frac{l_p^2}{l^3 c\tau} \sim I\frac{\nu_g \Delta\nu_g}{c^2}$. Este último resultado nos indica como relacionar los parámetos experimentales para poder minimizar a la dispersión. En el caso de un interferómetro-laser la longitud característica y la resolución son variables determinadas por la construcción experimental y son parámetros fijos. Entonces, podemos jugar solo con la frecuencia a medir y con el tiempo de duración del experimento. Con otras palabras, la varianza será mínima si se cumple $\tau\nu_g \sim \frac{4cl_p^2}{l^3 I \Delta\nu_g}$.

Regresémos nuevamente al caso del proyecto *Virgo* [11], en donde se tiene que $\nu_g =$

100 Hz, $\Delta\nu_g = 10$ Hz y $l = 3$km, y además empleamos la intensidad estimada para el pulsar de Vega-Crab [53] $I = 10^{-25}$. De nuestro cálculo se desprende que este proyecto experimental cae dentro de la región de medición clásica. Efectivamente, si tomamos un tiempo típico [12], $\tau = 100\text{h} \sim 10^5$ s, entonces al tomar en cuenta todos los datos anteriores tendremos que $\Delta R = I\frac{\nu_g\Delta\nu_g}{c^2} \sim 10^{-43}(cm)^{-2} >>> 4\frac{l_p^2}{l^3 c\tau} \sim 10^{-97}(cm)^{-2}$, es decir, realmente nos encontramos en la región clásica de medición. Es claro que este resultado no es de ninguna manera nuevo, sin embargo nuestro formalismo nos permite, además de comprobar éste ya conocido resultado, calcular la dispersión de los resultados experimentales como función de los parámetros del experimento.

Este resultado nos dice que $\Delta R \sim 4\frac{l_p^2}{l^3 c\tau}10^{54}$ y recurriendo a algo ya obtenido, expresiones (4.17) y (4.18), vemos que una dispersión pequeña, es decir cerca del valor mínimo posible, tiene asociada la condición $\Delta R \sim 4\frac{l_p^2}{l^3 c\tau}$, y por lo tanto este experimento posee una varianza enorme.

Este formalismo nos permite además dar una respuesta a la siguiente pregunta: ¿ es posible introducir en este tipo de dispositivo experimental algún cambio en sus parámetros experimentales, realizable dentro de los límites de la tecnología actual, el cual nos permita reducir la dispersión?

Para responder esta pregunta consideremos una modificación en la longitud característica de este proyecto, la cual nos permita que se cumpla la condición asociada al mínimo de la varianza. Es decir, pidamos que se satisfaga $l^3 \sim \frac{4cl_p^2}{\nu_g\Delta\nu_g I\tau}$. Empleando $\tau = 100h \sim 10^5 s$, $\nu_g = 100$Hz, y $\Delta\nu_g = 10$Hz, encontramos que se cae cerca del mínimo posible si se cumple que $l \sim 10^{-12}$cm. Recordando que $a \sim 10^{-9}$ cm es el valor del radio de Bohr, llegamos a la conclusión de que modificando la longitud no será posible obtener un experimento que caiga cerca del mínimo posible.

Podemos además, de modificar la longitud característica de este proyecto, intentar introducir un cambio en el tiempo de medición. Procediendo en forma análoga, en donde tenemos $l \sim 10^5$ cm, concluimos que el mínimo emergerá si $\tau \sim 10^{-48}$ s $= \frac{t_p}{10^4}$, siendo t_p el tiempo de Planck. Este cambio también carece de factibilidad.

Los valores típicos $\tau \sim 10^5$ s y $l \sim 10^5$ cm proporcionarán una dispersión pequeña si la frecuencia de la onda gravitacional tiene el valor $\nu_g \sim 10^{-24}$ Hz.

Pasemos ahora al caso de detectores tipo barra resonante, los cuales tienen como parámetros típicos [54] $l \sim 10m$, $\tau \sim 1$s, entonces $4\frac{l_p^2}{l^3 c\tau} \sim 10^{-85}(\text{cm})^{-2}$. Siendo

$\nu_g \sim 1$Khz, obtenemos, usando otra vez $I = 10^{-25}$, que $\Delta R \sim 10^{-40}(\mathrm{cm})^{-2}$. Es decir, nuevamente caemos en la región clásica de medición $\Delta R >>> 4\frac{l_p^2}{l^3 c\tau}$.

Concerniente a este tipo de propuesta experimental vale la pena mencionar que existe otro modelo [55] en el cual la barra detectora es de safiro, y tiene asociada los siguientes parámetros experimentales; $l \sim 10cm$, y $\tau \sim 10^{-3}$s, entonces $4\frac{l_p^2}{l^3 c\tau} \sim 10^{-76}(\mathrm{cm})^{-2}$. En esta construcción experimental, la menor amplitud detectable en las oscilaciones de la barra tiene el valor $\Delta x \sim 10^{-19}$cm, y en consecuencia $\Delta R \sim 10^{-53}(\mathrm{cm})^{-2}$, lo cual nos permite concluir que $\Delta R \sim 4\frac{l_p^2}{l^3 c\tau}10^{23}$.

Si comparamos con el caso de un interferómetro-laser, podemos fácilmente ver que esta última propuesta tiene una dispersión que es 31 órdenes de magnitud menor que la del interferómetro-laser, $10^{23}/10^{54} = 10^{-31}$. Es decir, aún cuando la barra resonante tiene todavía una varianza muy grande, ésta es mucho menor que la asociada a un interferómetro-laser.

Otro experimento interesante que existe para la detección de radiación gravitacional es el llamado *Spacecraft Doppler Tracking* [56], en el cual un reloj áltamente estable colocado sobre la tierra es usado para controlar la frecuencia de una onda de radio monocromática, la cual es trasmitida de la tierra a un satélite. Esta onda es recibida por el satélite y retrasmitida a la tierra. Cuando la señal llega a la tierra, su frecuencia es comparada con el reloj, y de esta comparación se puede detectar un efecto Doppler.

Como parámetros típicos de esta propuesta experimental tenemos en este caso [52] $l \sim 25000$km, $\tau \sim 36000$s, y en consecuencia $4\frac{l_p^2}{l^3 c\tau} \sim 10^{-108}(\mathrm{cm})^{-2}$. La resolución aquí es [56] $\Delta R_d \sim 10^{-34}(\mathrm{cm})^{-2}$, lo cual implica que $\Delta R \sim 4\frac{l_p^2}{l^3 c\tau}10^{74}$, y es evidente que esta construcción experimental es la que presenta la mayor dispersión de las tres consideradas.

Sin embargo, si reducimos la distancia a la cual el satélite orbita, es decir en vez de $l \sim 25000$km tomamos $l \sim 100$km, obtendremos que $4\frac{l_p^2}{l^3 c\tau} \sim 10^{-101}(cm)^{-2}$, y por lo tanto la dispersión sufrirá una reducción de 7 órdenes de magnitud con respecto a la construcción inicial, $\Delta R \sim 4\frac{l_p^2}{l^3 c\tau}10^{67}$.

Resumiendo, de los tres proyectos que actualmente existen para la detección de radiación gravitacional la barra resonante hecha de safiro es el que presenta la menor dispersión, después le sigue el interferómetro-laser y al final el denominado *Spacecraft*

Doppler Tracking, pero en esta última propuesta una reducción de la distancia a la cual orbita el satélite usado (modificación factible de ser llevada a cabo) permite reducir la dispersión en 7 órdenes de magnitud.

4.3 Conclusiones .

Nuestro sistema ha sido una onda gravitacional y el Lagrangiano de ésta ha sido calculado empleando términos hasta de segundo orden en la perturbación de la métrica.

Mediante el llamado formalismo de integral de trayectoria restringida hemos calculado también, hasta una constante de normalización, la probabilidad de densidad asociada a obtener en una medición continua de la onda una cierta configuración de la perturbación de la métrica Minkowskiana. Hemos visto que el máximo coincide con aquella configuración que constituye una solución de las ecuaciones linealizadas de Einstein. Sin embargo, también probamos que es posible obtener como resultado del proceso de medición configuraciones que no constituyan solución a las ecuaciones linealizadas de Einstein, y cuya densidad de probabilidad estará cerca del máximo.

También hemos podido extraer un expresión para la dispersión de los resultados experimentales y hemos visto que existen tres regiones de medición:

(a) La región clásica, en la cual la dispersión de los resultados experimentales es consecuencia casi exclusivamente de la resolución del dispositivo experimental. Al reducir la resolución del experimento se genera una reducción de la varianza.

(b) La región cuántica, en donde al tener una mejor resolución experimental la dispersión de los resultados se incrementa. Esta región establece un límite a la información que de la onda gravitacional podemos extraer. Una mejora en la resolución tiene como resultado que el aparato experimental comienze a perturbar en forma considerable a la onda y por ende la dispersión crece.

(c) La tercera región yace entre las dos anteriores y determina el mínimo de la dispersión, el cual es una función del 4-volumen de la región en la cual la onda gravitacional es medida. Este hecho también nos prueba que la longitud característica y el tiempo característico del experimento no pueden ser considerados como parámetros independientes uno del otro, ya que al modificar uno de éllos se tiene como consecuencia un cambio en la dispersión de los resultados experimentales.

Los resultados del cálculo los hemos aplicado sobre tres propuestas. que existen actualmente para detectar radiación gravitacional; interferómetros-laser, barras resonantes y el denominado *Spacecraft Doppler Tracking*. Hemos visto que todas éllas caen dentro del régimen clásico de medición y que todas éllas también tienen asociada una dispersión muy grande, en donde la dispersión de la barra resonante hecha de safiro es la menor de todas (y es 23 órdenes de magnitud mayor que el valor mínimo posible), le sigue la del interferómetro-laser (que es 31 órdenes de magnitud mayor que la de la barra resonante) y finalmente la de *Spacecraft Doppler Tracking* (20 órdenes de magnitud mayor que la de un interferómetro-laser).

No obstante, esta desventaja del *Spacecraft Doppler Tracking* en lo que respecta a la varianza que en sus resultados experimentales presentará, hemos probado también que no es posible introducir un cambio en los parámetros de un interferómetro-laser que nos permita reducir su dispersión asociada, y en cambio, ésto si es posible para el *Spacecraft Doppler Tracking*.

Es claro que la principal crítica que se puede hacer a estos resultados radica en la forma que se escogió para la funcional de peso (expresión (4.9)), ya que dicha funcional contiene toda la información respecto al aparato de medición y aún cuando hemos argumentado que es posible esperar que la elección hecha nos proporcione resultados correctos por lo menos en el órden de magnitud de los efectos, es evidente también que un análisis más riguroso es necesario, y que éste debe estudiar con mayor detalle la relación entre un dispositivo experimental y su funcional de peso asociada.

Otro punto que aquí debemos mencionar es el siguiente, nuestro análisis trata el problema de la medibilidad de una onda gravitacional tomando en cuenta el comportamiento cuántico de la onda como un campo tensorial definido sobre un espacio-plano. Sin embargo, ésto es solo una aproximación, la cual hemos introducido ya que en estos momentos no existe una teoría cuántica de la gravedad.

Otra cuestión que es digna de ser comentada es que el análisis aquí hecho toma en cuenta (con las limitantes antes mencionadas) las propiedades cuánticas de la radiación gravitacional, sin embargo, el trabajo aquí presentado no ha considerado el comportamiento cuántico del dispositivo experimental. Un trabajo más riguroso debe tomar en cuenta este hecho también y estudiar con detenimiento si ésto podría permitir a alguna de las propuestas experimentales aquí estudiadas acercarse a la zona en donde la región cuántica de medición comienza a ser importante.

Capítulo 5

Aparición del concepto de tiempo por auto-medición en un universo cuántico anisotrópico.

5.1 Introducción.

Como ya ha sido mencionado antes, no existe en estos momentos una formulación para la gravitación en términos de la teoría cuántica. Existen varias formulaciones las cuales tratan de construir dicha teoría. Una de ellas es la formulación canónica y la base de esta idea consiste en intentar deducir ecuaciones para las funciones de onda en un espacio de configuración adecuado. Esto se consigue generando una foliación del espacio-tiempo clásico en hipersuperficies espaciales y escogiendo a la métrica espacial como la variable canónica [57].

En este intento el espacio-tiempo ya no es más un concepto fundamental, y su papel lo toma el espacio de todas las 3-geometrías, el cual recibe el nombre de superespacio, y que funge además como espacio de configuración para la teoría. La cantidad cinemática central ψ es una función de onda definida tanto sobre el superespacio como sobre los grados de libertad de la materia.

La invariancia clásica ante difeormorfismos de la Relatividad General genera la presencia de constricciones: el hamiltoniano total debe ser nulo, entonces la función de onda debe obedecer la ecuación de Wheeler-DeWitt, $H\psi = 0$. Puesto que debido a las relaciones de incertidumbre ya no existen espacio-tiempos a nivel de gravedad cuántica, entonces no hay un parámetro de tiempo disponible, con otras palabras, la ecuación de Wheeler-DeWitt es "atemporal", uno podría decir que en cosmología cuántica no hay tiempo.

Existen varios intentos por resolver este problema, entre ellos podemos encontrar una definición probabilística de tiempo [58].

Otro intento interesante en esta búsqueda está basado en el llamado Modelo de Decoherencia (DM) [29]. Este modelo como ya fue esbozado analiza la aparición de propiedades clásicas de un sistema proponiendo un nuevo término en el hamiltoniano que considere la interación entre los grados de libertad colectivos y microscópicos, éstos últimos llamados también entorno.

Este nuevo término destruye las interferencias cuánticas que a nivel macroscópico se podrían presentar y además afirma que la descripción de cualquier sistema cuántico no está completa si no comprende esta interacción. Con otras palabras, la explicación de la aparición de propiedades cuánticas es solo posible si se toma en cuenta esta interacción.

Es claro que en la aplicación de DM al caso cosmológico se presentará un diferencia esencial respecto a la aplicación del mismo en cualquier otro sistema cuántico, y es la siguiente: para el caso del universo no puede haber un aparato de medición el cual exista en forma externa al universo. Es decir, la única manera en la cual se podrá presentar un proceso de medición en el universo es que éste sea una auto-medición. Debemos hacer notar que una auto-medición es posible aún dentro del contexto de la mecánica cuántica ortodoxa, siempre y cuando el dispositivo de medición y el sistema que ha de medirse sean descritos por grados de libertad diferentes del mismo sistema. Partiendo de este punto de vista un ejemplo de auto-medición es el "experimento de Stern-Gerlach", en el cual la proyección del momento magnético del átomo queda determinada por la desviación del mismo átomo en un campo magnético, por lo que inferimos que la proyección del momento magnético constituye el sistema medido y el centro de masa el dispositivo de medición. Es decir, en un experimento tipo Stern-Gerlach se lleva a cabo un proceso de auto-medición en el átomo.

La idea de que el tiempo surja como consecuencia de un proceso de auto-medición de un universo cuántico ha sido ya planteada por Zeh [59]. El punto esencial en la aplicación del Modelo de Decoherencia (DM) al caso de cosmología cúantica consiste en que la gravedad se acopla a todas las formas de energía, es decir la gravedad es medida por la materia y por ende cualquier superposición general de estados cuánticos gravitacionales será destruida (*decohered*) [59].

En otras palabras, si consideramos el proceso de auto-medición continuo de un universo cuántico, entonces su dinámica se verá modificada de tal manera que el concepto de tiempo aparecerá. El papel de aparato de medición lo juegan los multipolos superiores de la materia, los cuales describen fluctuaciones de densidad y ondas gravitacionales presentes en el universo. Estos multipolos por lo tanto pueden ser considerados como entorno asociados a las variables del superespacio de este modelo, las cuales en esta propuesta juegan el papel de variables colectivas [28].

Dentro de este contexto el caso de un universo isotrópico ha sido analizado por Mensky [60]. En este trabajo la dinámica de un universo tipo Friedmann-Robertson-Walker bajo auto-medición es estudiada empleando el llamado formalismo de integral de trayectoria restringida [6]. El resultado del análisis es la aparición del concepto de tiempo, definido de manera geométrica. El propagador que se obtiene es además una generalización del propagador de Halliwell [61] el cual coincide con éste, solo para tiempos suficientemente pequeños, y es solo en este límite que el efecto del proceso de medición es despreciable y no presenta ninguna consecuencia sobre la dinámica del universo.

Sin embargo, el trabajo de Mensky [60] da pie a muchas interrogantes, como por ejemplo:

(1) ¿ Es la aparición del concepto de tiempo mediante un proceso de auto-medición consecuencia de la suposición de isotropía?

(2)¿ Cómo quedaría modificada la región de validez del propagador de Halliwell con la presencia de anisotropía?

(3) ¿ Si el concepto de tiempo surge aún en el caso anisotrópico, cuáles son los parámetros geométricos que lo definen?

En este trabajo daremos respuesta a estas interrogantes. Comenzaremos calculando el propagador de Halliwell para el caso de un universo tipo Mixmaster con anisotropía [8]. Posteriormente consideraremos en la dinámica de este universo un proceso de auto-medición continua y para éllo emplearemos el denominado formalismo de integral de trayectoria restringida [44]. Esto nos permitirá encontrar el operador modificado de Halliwell. Una de las ventajas de este formalismo consiste en que se puede tomar en cuenta la influencia del dispositivo de medición sin conocer el esquema de medición exacto [6]. Es claro, de esto último que nuestra manera de atacar el problema será fenomenológica, es decir deberemos de introducir algunos parámetros en el modelo, los cuales no quedarán determinados por éste. Para determinar los parámetros fenomenológicos que serán introducidos en este trabajo es necesario analizar, el hecho de como los ya antes mencionados multipolos superiores (que funcionan como entorno), actúan sobre los grados de libertad colectivos (que aquí serán los elementos de la métrica espacial). Más adelante analizaremos este hecho con mayor detalle.

Probaremos que el tiempo surge como una característica cualitativa de nuestro modelo, esto es, un tiempo físico invariante de norma surge como consecuencia del proceso de auto-medición del universo. Obtendremos también las condiciones que nos conducirán a la ecuación de Wheeler-DeWitt. Comparando con el caso isotrópico [60], veremos que aún una pequeña anisotropía impone condiciones sobre la región de validez del propagador de Halliwell, las cuales en la situación isotrópica no existen.

Este conjunto de condiciones genera una dependencia funcional entre las características del proceso de auto-medición y el tamaño de las vecindades en la 3-geometría en las cuales la ecuación de Wheeler-DeWitt es válida. Este resultado no debe de constituir una sorpresa, ya que de acuerdo con DM, debemos considerar a los elementos de la métrica espacial como variables colectivas, y la presencia de anisotropía implica que, con respecto al caso isotrópico, tenemos ahora más variables colectivas. En consecuencia, en el caso anisotrópico el término del hamiltoniano que considera la interacción entre entorno y grados de libertad colectivos podría jugar un papel más decisivo en la dinámica del sistema que en el caso isotrópico.

También deduciremos una expresión, en términos de los parámetros de este proceso de auto-medición, la cual proporciona un umbral en el tiempo, más allá del cual el concepto de factor de escala carece de significado físico.

5.2 Amplitudes de probabilidad.

Consideremos la métrica Mixmaster

$$ds^2 = -N^2 d^2\tau + e^{2\alpha}(e^{2\beta})_{ij}\sigma^i\sigma^j, \tag{5.1}$$

siendo β_{ij} los elementos de una matriz diagonal sin traza, N, α y β_{ij} son funciones únicamente de τ, con $\sigma^1 = cos\varphi d\theta + sin\varphi sin\theta d\phi$, $\sigma^2 = sin\varphi d\theta - cos\varphi sin\theta d\phi$, $\sigma^3 = d\varphi + cos\theta d\phi$ y $det(e^{2\beta}) = 1$. Aquí tenemos la geometría de una esfera homogénea pero no isotrópica [8].

El parámetro τ es arbitrario y está relacionado con la foliación del espacio-tiempo clásico en hipersuperficies espaciales, y si se realiza una transformación, es decir, si hacemos $d\tau \rightarrow d\zeta = f(\tau)d\tau$, entonces la invariancia de la teoría exige también la transformación de la función de lapso, ésto es, debemos de llevar a cabo la transformación $N(\tau) \rightarrow M(\zeta) = \frac{N(\tau)}{f(\tau)}$.

La descomposición $(3+1)$ de la métrica [8] es $g_{ij} = e^{2\alpha}e^{2\beta_{ij}}\delta_{ij}$, $N_i = 0$, $N^{\perp} = N^{-1}$ y $\pi^{ij} = \frac{e^{\alpha - 2\beta_{ij}}}{N}(\dot{\beta}_{ij} - 2\dot{\alpha})\delta_{ij}$.

La acción es

$$S = \int (\pi^{ij}\dot{g}_{ij} - N^{\mu}H_{\mu})d^4x, \tag{5.2}$$

donde tenemos las unidades en las cuales se cumple que $\hbar = 1$, $c = 1$ y $G = 1$.

Para este caso en particular

$$\begin{aligned}\pi^{ij}\dot{g}_{ij} - N^{\mu}H_{\mu} = \frac{2}{N}e^{3\alpha}\{(\dot{\beta}_{11} - 2\dot{\alpha})(2\dot{\beta}_{11} + \dot{\alpha}) + (\dot{\beta}_{22} - 2\dot{\alpha})(2\dot{\beta}_{22} + \\ \dot{\alpha}) + (\dot{\beta}_{33} - 2\dot{\alpha})(2\dot{\beta}_{33} + \dot{\alpha}) - \frac{1}{2}[3\dot{\beta}_{33}^2 + (\dot{\beta}_{11} - \dot{\beta}_{22})^2 - 12\dot{\alpha}^2]\} + \\ \frac{N}{2}e^{2\alpha}Tr(2e^{-2\beta} - e^{4\beta}).\end{aligned} \tag{5.3}$$

La evolución de un modelo cuántico está descrita *á la* Halliwell [61] por el siguiente propagador

$$U(q'', q') = (\tau'' - \tau')\int d[N^{\perp}]\delta(\dot{N}^{\perp})d[p_l]d[q^l]exp\{i\int d\tau[p_l\dot{q}^l - N^{\perp}H_{\perp}]\}, \tag{5.4}$$

donde $q'' = (\alpha'', \beta'', \tau'')$ y $q' = (\alpha', \beta', \tau')$.

De esta última expresión podemos calcular la probabilidad de transición $P = |U|^2$ para ir de la configuración inicial q' a la final q''.

Para el caso que nos ocupa el propagador es

$$\begin{aligned}
U(q'', q') = (\tau'' - \tau') \int dN d[p_+] d[p_-] d[p_\alpha] d[\alpha] d[\beta_+] d[\beta_-] \\
exp\Big[i \int_{\tau'}^{\tau''} \{p_+ \dot{\beta}_+ + p_- \dot{\beta}_- \\
-p_\alpha \dot{\alpha} - \frac{N}{3\pi} e^{-3\alpha}(p_+^2 + p_-^2 - p_\alpha^2) + \\
\frac{3\pi N}{2} e^{\alpha - 2\beta_+}(e^{-\sqrt{12}\beta_-} + e^{\sqrt{12}\beta_-} + e^{6\beta_+}) - \\
\frac{3\pi N}{4} e^{\alpha + 4\beta_+}(e^{-4\sqrt{3}\beta_-} + e^{4\sqrt{3}\beta_-} + e^{-12\beta_+})\} d\tau\Big],
\end{aligned} \tag{5.5}$$

siendo $\beta_- = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\beta_{11} - \beta_{22})$, $\beta_+ = \frac{1}{2}(\beta_{11} + \beta_{22})$ y $\beta_{33} = -2\beta_+$ [8].

Calculemos primero las primero las integrales respecto a los momentos, y en esta integración haremos uso del siguiente resultado:

$\int d[p] exp\{-\frac{1}{2}([p], A[p]) + ([q],[p])\} = exp\{\frac{1}{2}([q], A^{-1}[q])\}$ [44], donde tenemos la siguiente definición $([q],[p]) = \int_{\tau'}^{\tau''} q(\tau)p(\tau)d\tau$.

$$\begin{aligned}
\int d[p_+] d[p_-] d[p_\alpha] exp\Big[i \int_{\tau'}^{\tau''} d\tau \{p_+ \dot{\beta}_+ + p_- \dot{\beta}_- - p_\alpha \dot{\alpha} \\
+ \frac{N}{3\pi} e^{-3\alpha}(p_\alpha^2 - p_+^2 - p_-^2)\}\Big] = exp\Big[\frac{3i\pi}{4N} \int_{\tau'}^{\tau''} \{\dot{\beta}_+^2 + \dot{\beta}_-^2 - \dot{\alpha}^2\} e^{3\alpha} d\tau\Big].
\end{aligned} \tag{5.6}$$

El propagador se transforma en

$$\begin{aligned}
U(q'', q') = (\tau'' - \tau') \int dN d[\alpha] d[\beta_+] d[\beta_-] exp\Big[i \int_{\tau'}^{\tau''} \{\frac{3\pi N}{2} e^{\alpha - 2\beta_+} \\
\times(e^{-\sqrt{12}\beta_-} + e^{\sqrt{12}\beta_-} + e^{6\beta_+}) - \frac{3\pi N}{4} e^{\alpha + 4\beta_+}(e^{-4\sqrt{3}\beta_-} + e^{4\sqrt{3}\beta_-} + e^{-12\beta_+}) \\
+ \frac{3\pi}{4N} e^{3\alpha}(\dot{\beta}_+^2 + \dot{\beta}_-^2 - \dot{\alpha}^2)\}\Big] d\tau.
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Con el fin de obtener una expresión analítica para nuestro propagador consideremos un caso más simétrico, introduzcamos dos restricciones $\beta_- = 0$ y $0 < |\beta_+| \ll 1$.

Es decir tenemos una anisotropía pequeña, pero no nula. Bajo estas condiciones el hamiltoniano resultante se simplifica y adquiere una forma muy sencilla [62] y por ende el propagador se transforma en (de aquí en adelante omitiremos el subíndice de β_+).

$$U(q'', q') \cong (\tau'' - \tau') \int dN d[\alpha] d[\beta] exp\Big[i \int_{\tau'}^{\tau''} \{\frac{3\pi N}{4} e^{\alpha}(1 - 8\beta^2) + \frac{3\pi}{4N} e^{3\alpha}(\dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2)\} d\tau\Big]. \tag{5.8}$$

Tomaremos términos hasta de segundo orden en α, es decir, usaremos la siguiente aproximación $e^{\alpha} \cong 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2}$.

Analicemos las restricciones que lo anterior impone sobre el propagador

Claramente, las integrales de trayectoria de la expresión (5.8) pueden re-escribirse como

$$\int d[\alpha] d[\beta] exp\Big[i \int_{\tau'}^{\tau''} \{\frac{3\pi N}{4} e^{\alpha}(1 - 8\beta^2) + \frac{3\pi}{4N} e^{3\alpha}(\dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2)\} d\tau\Big] = \int d[\alpha] exp\Big[i \int_{\tau'}^{\tau''} (\frac{3\pi N}{4} e^{\alpha} - \frac{3\pi}{4N} e^{3\alpha}\dot{\alpha}^2) d\tau\Big] \int d[\beta] exp\Big[i \int_{\tau'}^{\tau''} (-6\pi N e^{\alpha}\beta^2 + \frac{3\pi}{4N} e^{3\alpha}\dot{\beta}^2) d\tau\Big]. \tag{5.9}$$

Analicemos la integral de trayectoria sobre $[\beta]$. Es fácil ver que

$$\int d[\beta] exp\Big[i \int_{\tau'}^{\tau''} (-6\pi N e^{\alpha}\beta^2 + \frac{3\pi}{4N} e^{3\alpha}\dot{\beta}^2) d\tau\Big] = exp[i \frac{3\pi}{4N} e^{3\alpha}\beta\dot{\beta}] \,|_{\tau'}^{\tau''} \times \int d[\beta] exp\Big[i \int_{\tau'}^{\tau''} [-6\pi N e^{\alpha}\beta^2 - \frac{3\pi}{4N}\beta \frac{d}{d\tau}(e^{3\alpha}\frac{d\beta}{d\tau})] d\tau\Big]. \tag{5.10}$$

Definiendo el operador $A = 12\pi i N e^{\alpha} + \frac{3\pi}{2N} i \frac{d}{d\tau}(e^{3\alpha}\frac{d}{d\tau})$, entonces podemos re-escribir la integral de trayectoria que aparece en el lado derecho de la expresión (5.10) como sigue

$$\int d[\beta] exp\Big[i \int_{\tau'}^{\tau''} [-6\pi N e^{\alpha}\beta^2 - \frac{3\pi}{4N}\beta \frac{d}{d\tau}(e^{3\alpha}\frac{d\beta}{d\tau})] d\tau\Big] = \int d[\beta] exp\Big[-\frac{1}{2}([\beta], A[\beta]) + ([c], [\beta])\Big], \tag{5.11}$$

donde tenemos que $c = 0$ y $([q],[\beta]) = \int_{\tau'}^{\tau''} q(\tau)\beta(\tau)d\tau$, (véase [44] página (45)).

Entonces podemos evaluar la expresión (5.11)

$$\int d[\beta]exp\Big[i\int_{\tau'}^{\tau''}[-6\pi Ne^{\alpha}\beta^2 - \frac{3\pi}{4N}\beta\frac{d}{d\tau}(e^{3\alpha}\frac{d\beta}{d\tau})]d\tau\Big] = exp\Big[\frac{1}{2}([c], A^{-1}[c])\Big] = 1. \tag{5.12}$$

Introduciendo (5.12) en (5.10) obtenemos

$$\int d[\beta]exp\Big[i\int_{\tau'}^{\tau''}(-6\pi Ne^{\alpha}\beta^2 + \frac{3\pi}{4N}e^{3\alpha}\dot{\beta}^2)d\tau\Big] = exp[i\frac{3\pi}{4N}e^{3\alpha}\beta\dot{\beta}]\,|_{\tau'}^{\tau''}. \tag{5.13}$$

Analicemos ahora la integral de trayectoria para $[\alpha]$ que aparece en el lado derecho de la expresión (5.9) y definamos el operador A, tal que si $f : \Re \to \Re$, entonces $A(f) = -\frac{3iN\pi}{2}[\frac{f^2}{2!} + \frac{f^3}{3!} + \frac{f^4}{4!} + ...] - \frac{3i\pi}{2N}\frac{d}{d\tau}(e^{3f}\frac{df}{d\tau})$. Calculando esta integral de manera análoga a como se hizo para el caso de $[\beta]$, concluimos que

$$\int d[\alpha]exp\Big[i\int_{\tau'}^{\tau''}(\frac{3\pi N}{4}e^{\alpha} - \frac{3\pi}{4N}e^{3\alpha}\dot{\alpha}^2)d\tau\Big] =$$
$$exp\Big[i\frac{3N\pi}{4}(\tau''-\tau') - i\frac{3\pi}{4N}(e^{3\alpha}\alpha\dot{\alpha})\,|_{\tau'}^{\tau''}\Big] \times exp\Big[\frac{1}{2}([c], A^{-1}[c])\Big], \tag{5.14}$$

donde tenemos $c = \frac{3i\pi}{4}N$.

Resumiendo,

$$\begin{aligned}\int d[\alpha]d[\beta]exp\Big[i\int_{\tau'}^{\tau''}\{\frac{3\pi N}{4}e^{\alpha}(1-8\beta^2) + \frac{3\pi}{4N}e^{3\alpha}(\dot{\beta}^2 - \dot{\alpha}^2)\}d\tau\Big] &= \\ exp\{i\frac{3\pi}{4N}\Big[e^{3\alpha''}(\beta''\dot{\beta}'' - \alpha''\dot{\alpha}'') + e^{3\alpha'}(\alpha'\dot{\alpha}' - \beta'\dot{\beta}')\Big]\} &\times \\ exp\{i\frac{3\pi N}{4}(\tau''-\tau') + \frac{3\pi iN}{8}\int_{\tau'}^{\tau''}A^{-1}(\frac{3\pi iN}{4})d\tau\}&.\end{aligned} \tag{5.15}$$

Este último resultado nos permite escribir al propagador como

$$U(q'',q') = (\tau''-\tau')\int dNexp\{i\frac{3\pi N}{4}(\tau''-\tau') +$$
$$i\frac{3\pi}{4N}\Big[e^{3\alpha''}(\beta''\dot{\beta}'' - \alpha''\dot{\alpha}'') + e^{3\alpha'}(\alpha'\dot{\alpha}' - \beta'\dot{\beta}')\Big] + \frac{3\pi iN}{8}\int_{\tau'}^{\tau''}A^{-1}(\frac{3\pi iN}{4})d\tau\}. \tag{5.16}$$

Con el fin de entender las consecuencias de la aproximación antes introducida, consideremos la siguiente integral $\int dNexp\{i\frac{3\pi}{4N}\left[e^{3\alpha''}(\beta''\dot{\beta}''-\alpha''\dot{\alpha}'')+e^{3\alpha'}(\alpha'\dot{\alpha}'-\beta'\dot{\beta}')\right]\}$ y definamos $a=e^{3\alpha''}(\beta''\dot{\beta}''-\alpha''\dot{\alpha}'')+e^{3\alpha'}(\alpha'\dot{\alpha}'-\beta'\dot{\beta}')$. Con otras palabras, despreciaremos en este punto la última integral en el lado derecho de la expresión (5.16). En consecuencia, obtenemos [63]

$$\int dNexp\{i\frac{3\pi}{4N}\left[e^{3\alpha''}(\beta''\dot{\beta}''-\alpha''\dot{\alpha}'')+e^{3\alpha'}(\alpha'\dot{\alpha}'-\beta'\dot{\beta}')\right]\}=Nexp[i\frac{3a\pi}{N}]-$$
$$i\frac{3a\pi}{N}[Ln(\frac{1}{N})+\frac{1}{1\cdot 1!}(\frac{a}{N})+\frac{1}{2\cdot 2!}(\frac{a}{N})^2+\frac{1}{3\cdot 3!}(\frac{a}{N})^3+...]. \quad (5.17)$$

La expresión (5.17) puede ser re-escrita como

$$\int dNexp\{i\frac{3a\pi}{4N}\}=N+i\frac{3\pi}{4}(1+LnN)a+i\frac{3\pi}{4N}(\frac{3i\pi}{8}-\frac{1}{1\cdot 1!})a^2+$$
$$i\frac{3\pi}{4N^2}(\frac{1}{3!}(\frac{3i\pi}{4})^2-\frac{1}{2\cdot 2!})a^3+.... \quad (5.18)$$

Empleando (5.18) y la definición de a podemos finalmente escribir

$$\int dNexp\{i\frac{3a\pi}{4N}\}=N+f_1\alpha'+f_2(\alpha')^2+f_3(\alpha')^3+...+$$
$$j_1\alpha''+j_2(\alpha'')^2+j_3(\alpha'')^3+...+k_1\alpha'\alpha''+k_2(\alpha'\alpha'')^2+k_3(\alpha'\alpha'')^3+..., \quad (5.19)$$

donde los coeficientes f_n, j_n y k_n son funciones de N, $\dot{\beta}''$, $\dot{\beta}'$, β'', β', $\dot{\alpha}''$ y $\dot{\alpha}'$.

La introducción de la aproximación $e^{\alpha}\approx 1+\alpha+\frac{(\alpha)^2}{2}$ implica que solo aquellas potencias de α hasta de segundo orden son relevantes. Con el fin de que el desarrollo de Taylor para e^{α} (hasta tercer término) sea consistente con la expresión (5.19), entonces solo nos quedaremos con aquellos términos que contengan potencias de α no mayores que 2. Por lo tanto, si los puntos α' y α'' satisfacen $e^{\alpha'}\approx 1+\alpha'+\frac{(\alpha')^2}{2}$ y $e^{\alpha''}\approx 1+\alpha''+\frac{(\alpha'')^2}{2}$, entonces tendremos un operador muy cercano al correcto. De otra manera, la aproximación introducida nos proporciona un propagador el cual coincide con el correcto solo hasta segundo orden.

Recordemos que la longitud de Planck está definida como $l_p=\sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}}$. En unidades Planckianas, las cuales aquí estamos usando, son G, $\hbar$ y c iguales a 1, ésto significa que $l_p=1$.

En el caso de la métrica que estamos usando, los factores de escala son $r_{ij} = e^{\alpha}(e^{\beta})_{ij} \sim e^{\alpha}$. Del argumento que sigue a la expresión (5.19) podemos ver que el propagador aproximado estará muy cercano al correcto solo si el factor de escala asociado a los puntos inicial y final tiene el mismo orden de magnitud que la longitud de Planck.

Considerando esta aproximación podemos re-escribir la expresión para el propagador como sigue

$$U(q'',q') = (\tau''-\tau')\int dN d[\alpha]d[\beta]exp\Big[\int_{\tau'}^{\tau''}\{\frac{3i\pi N}{4}(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2}) \\ -6\pi i N\beta^2 + \frac{3i\pi}{4N}(\dot{\beta}^2-\dot{\alpha}^2)\}d\tau\Big]. \qquad (5.20)$$

Consideremos la primera integral

$$\int d[\alpha]exp\Big[\int_{\tau'}^{\tau''}\{\frac{3i\pi N}{4}(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2})-\frac{3i\pi}{4N}\dot{\alpha}^2\}d\tau\Big] = exp\{\frac{3i\pi N}{4}(\tau''-\tau')\} \\ \times\int d[\alpha]exp\Big[i\int_{\tau'}^{\tau''}\{\frac{1}{2}(-\frac{3\pi}{2N})\dot{\alpha}^2-\frac{1}{2}(-\frac{3\pi}{2N})(\frac{N^2}{2})\alpha^2+\frac{3\pi N}{4}\alpha\}d\tau\Big]. \quad (5.21)$$

La integral funcional en el lado derecho de la expresión (5.21) puede ser entendida como el propagador de un oscilador armónico forzado, de masa $m = -\frac{3\pi}{2N}$, frecuencia $\omega = \frac{N}{\sqrt{2}}$ y donde la fuerza externa es $F(\tau) = \frac{3\pi N}{4}$.

La "acción clásica" es [64]

$$S_{\alpha} = \frac{-3\pi}{4\sqrt{2}sin\Big(\frac{N}{\sqrt{2}}(\tau''-\tau')\Big)}\Big[(\alpha''^2+\alpha'^2)cos\Big(\frac{N}{\sqrt{2}}(\tau''-\tau')\Big) \\ -2\alpha''\alpha' - 4(\alpha''+\alpha')sin^2\Big(\frac{N}{\sqrt{8}}(\tau''-\tau')\Big) - 4sin^2\Big(\frac{N}{\sqrt{8}}(\tau''-\tau')\Big) \\ +\frac{N}{\sqrt{2}}(\tau''-\tau')\Big]. \qquad (5.22)$$

Por lo tanto

$$\int d[\alpha]exp\Big[\int_{\tau'}^{\tau''}\{\frac{3i\pi N}{4}(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2})-\frac{3i\pi}{4N}\dot{\alpha}^2\}d\tau\Big] =$$

$$\sqrt{\frac{3i}{4\sqrt{2}sin\Big(\frac{N}{\sqrt{2}}(\tau''-\tau')\Big)}}exp\{\frac{3i\pi N}{4}(\tau''-\tau')+iS_\alpha\}. \qquad (5.23)$$

De manera similar tenemos que

$$\int d[\beta]exp\Big[\int_{\tau'}^{\tau''}\{-6\pi iN\beta^2+\frac{3i\pi}{4N}\dot{\beta}^2\}d\tau\Big]=\sqrt{\frac{3}{\sqrt{2}isin\Big(\sqrt{8}N(\tau''-\tau')\Big)}}exp\{iS_\beta\}, \qquad (5.24)$$

donde S_β es la acción clásica de un oscilador libre, de masa $m=\frac{3\pi}{2N}$ y frecuencia $\omega=\sqrt{8}N$.

$$S_\beta=\frac{3\pi}{\sqrt{2}sin\Big(\sqrt{8}N(\tau''-\tau')\Big)}\Big[(\beta''^2+\beta'^2)cos\Big(\sqrt{8}N(\tau''-\tau')\Big)-2\beta''\beta'\Big]. \qquad (5.25)$$

De las últimas integraciones obtenemos el propagador para un universo Mixmaster cuántico en el cual la anisotropía es pequeña, aquí la auto-medición del universo no se ha tomado todavía en cuenta

$$U(q'',q')=\sqrt{\frac{9}{8}}(\tau''-\tau')\int dN\frac{exp\Big[i(\frac{3\pi N(\tau''-\tau')}{4}+S_\alpha+S_\beta)\Big]}{\sqrt{sin\Big(\frac{N}{\sqrt{2}}(\tau''-\tau')\Big)sin\Big(\sqrt{8}N(\tau''-\tau')\Big)}}. \qquad (5.26)$$

Ahora procedemos a introducir auto-medición en nuestro universo. Esto se llevará a cabo empleando el denominado formalismo de integral de trayectoria restringida, el cual constituye un modelo fenomenológico. Este último hecho implica que introduciremos algunos parámetros los cuales no podrán ser explicados por el modelo, no obstante esta manera de atacar el problema tiene la ventaja de que podemos considerar la influencia del aparato de medición (a través de la información que el proceso de medición nos proporciona) y al mismo tiempo nos permite olvidarnos del esquema exacto de medición.

Si deseamos explicar los parámetros a introducir es necesario entonces considerar como el entorno, que en este caso lo formarán fluctuaciones en la densidad y ondas gravitacionales, actúa sobre los grados colectivos o sea las componentes de la métrica espacial. La forma particular que la decoherencia toma depende fuertemente de las características de los grados de libertad escogidos como entorno [65].

Claramente, no sabemos si los términos que a continuación introduciremos como expresiones para este proceso de auto-medición son la mejor elección posible. Pero para un análisis cualitativo de las consecuencias en la dinámica del universo de este proceso de auto-medición podremos en un primer "approach" olvidarnos de los detalles en la definición de las funcionales de peso involucradas.

Otra justificación para ésto consiste en que en una primera aproximación que analiza al menos cualitativamente este manejo de las características del proceso de auto-medición podemos considerar a las expresiones a ser introducidas como una aproximación que nos proporcionará, por lo menos hasta el orden de magnitud de los efectos considerados, en forma correcta los resultados.

La experiencia muestra que esta aproximación es válida. En el primer trabajo sobre la medición de la coordenada de una partícula [6] el proceso de medición fue descrito empleando como funcional

$$w_\alpha[q] = \begin{cases} 1 & \text{si } |q(t) - \alpha(t)| \leq \Delta\alpha \\ 0 & \text{si no} \end{cases} . \tag{5.27}$$

En el siguiente trabajo [7], la funcional elegida fue una funcional gaussiana

$$w_a[q] = exp[-\frac{2\rho^2|q-a|}{\Delta a^2}]. \tag{5.28}$$

Los resultados de los dos cálculos coinciden hasta el orden de magnitud, la precisión suficiente para el análisis de procesos de medición reales.

Evidentemente que un ejemplo no demuestra nada y el problema de la elección de la funcional debe ser analizado con mayor detalle. Sin embargo, nos permite esperar que los resultados cualitativos sean correctos, es decir, si el concepto de tiempo surge como consecuencia de la decoherencia con las funcionales de peso que usaremos, es de esperarse que también aparezca al modificarse los detalles de la funcional. Evidentemente habrán cambios cuantitativos en el cálculo, por ejemplo la región de validez de la ecuación de Wheeler-DeWitt se verá modificada, pero nuevamente esperamos obtener un tiempo físico invariante de norma.

Auto-medición implica que algunas funciones $[\kappa]$, $[\nu]$ y $[\gamma]$ serán encontradas como estimaciones de las funciones correspondientes $[N]$, $[\beta]$ y $[\alpha]$.

Invariancia bajo la reparametización $d\tau \to d\zeta = f(\tau)d\tau$ implica que las funcionales de peso a ser introducidas en la integral de trayectoria deben ser invariantes también bajo está reparametrización.

Esta condición de invariancia se satisface si consideramos las siguientes funcionales de peso

$$\omega_{[\kappa]} = exp\{-\int_{\tau'}^{\tau''} \frac{|N-\kappa|}{\sigma^2} d\tau\}, \tag{5.29}$$

$$\omega_{[\nu]} = exp\{-\int_{\tau'}^{\tau''} \frac{N(\nu-\beta)^2}{\rho^2} d\tau\}, \tag{5.30}$$

$$\omega_{[\gamma]} = exp\{-\int_{\tau'}^{\tau''} \frac{N(\gamma-\alpha)^2}{\Omega^2} d\tau\}. \tag{5.31}$$

Estos términos contienen implícitamente la interacción entre "environment" y las variables colectivas.

Esta elección de funcionales de peso nos permitirá obtener integrales de trayectoria restringidas tipo gaussiana las cuales pueden ser calculadas en forma analítica.

Como ya mencionamos antes, un análisis más preciso exige estudiar el papel que los multipolos superiores juegan en la definición del entorno asociado a las variables colectivas. De este análisis se debe entender como las constantes ρ^2, Ω^2 y σ^2 quedan determinadas por las fluctuaciones en la densidad y ondas gravitacionales presentes en el universo, ya que en el contexto de este "approach" fenomenológico no es posible explicarlas.

Con estas elecciones la expresión (5.20) se transforma en

$$\begin{aligned} U_{[\kappa,\nu,\gamma]}(q'',q') = (\tau''-\tau')\int dNd[\alpha]d[\beta]exp\Big[\int_{\tau'}^{\tau''}\{\frac{3i\pi N}{4}(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2}) \\ -6\pi iN\beta^2 + \frac{3i\pi}{4N}(\dot{\beta}^2-\dot{\alpha}^2) - \frac{|N-\kappa|}{\sigma^2} - \frac{N(\nu-\beta)^2}{\rho^2} - \frac{N(\gamma-\alpha)^2}{\Omega^2}\}d\tau\Big]. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Tomemos ahora la expresión

$$\int d[\beta]exp\Big[\int_{\tau'}^{\tau''}\{\frac{3i\pi}{4N}\dot{\beta}^2 - 6\pi i N\beta^2 - \frac{N(\nu-\beta)^2}{\rho^2}\}d\tau\Big]. \tag{5.33}$$

Esta última expresión puede ser vista como el propagador de un oscilador armónico con masa $m = \frac{3\pi}{2N}$ y frecuencia $\omega = \sqrt{8}N$ sujeto a una medición continua de su posición β, tal que la función $\nu(\tau)$ es obtenida como resultado de esta medición y el error hecho en la medición de su posición es $\Delta\nu = \sqrt{\frac{2}{|N(\tau''-\tau')|}}\rho$.

El propagador de este oscilador es [44, 64]

$$\int d[\beta]exp\Big[\int_{\tau'}^{\tau''}\{\frac{3i\pi}{4N}\dot{\beta}^2 - 6\pi i N\beta^2 - \frac{N(\nu-\beta)^2}{\rho^2}\}d\tau\Big] =$$
$$\sqrt{\frac{3\sqrt{1-\frac{i}{6\pi\rho^2}}}{\sqrt{2}isin\Big(\sqrt{8}N\sqrt{1-\frac{i}{6\pi\rho^2}}(\tau''-\tau')\Big)}}exp\Big[-\frac{|N(\tau''-\tau')|}{\rho^2} < \nu^2 > +iS_\beta\Big]. \tag{5.34}$$

Aquí

$$\begin{aligned} S_\beta \cong & \frac{3\pi\Gamma}{\sqrt{2}sin\Big(\sqrt{8}N\Gamma(\tau''-\tau')\Big)} \times \\ & \Big[(\beta''^2+\beta'^2)cos\Big(\sqrt{8}N\Gamma(\tau''-\tau')\Big) - \\ & 2\beta''\beta' - i\frac{\sqrt{8}N(\tau''-\tau')(\beta''+\beta')}{3\pi\rho^2\Gamma} \times \\ & \nu(\frac{\tau''+\tau'}{2})sin\Big(\sqrt{8}N\Gamma(\tau''-\tau')\Big) + \\ & \frac{2N^2(\tau''-\tau')^2}{9\pi^2\rho^4\Gamma^2}\nu(\frac{\tau''+\tau'}{2})\nu(\frac{\tau''+3\tau'}{4}) \times \\ & sin\Big(\sqrt{2}N\Gamma(\tau''-\tau')\Big)sin\Big(\frac{N}{\sqrt{2}}\Gamma(\tau''-\tau')\Big)\Big], \end{aligned} \tag{5.35}$$

$\Gamma = \sqrt{1-\frac{i}{6\pi\rho^2}}$, y $< \nu^2 >= \frac{1}{\tau''-\tau'}\int_{\tau'}^{\tau''}\nu(\tau)^2 d\tau$ y aquí podemos entender a S_β como la "acción clásica" de un oscilador armónico complejo forzado ficticio cuya masa y frecuencia son $m = \frac{3\pi}{2N}$, $v = \sqrt{8}N\Gamma$, respectivamente, y donde la fuerza externa es $F(\tau) = -i\frac{2N}{\rho^2}\nu(\tau)$.

En el caso de la integral $\int d[\alpha]exp\Big[\int_{\tau'}^{\tau''}\{\frac{3i\pi N}{4}(\alpha + \frac{\alpha^2}{2}) - \frac{3i\pi}{4N}\dot{\alpha}^2 - \frac{N(\gamma-\alpha)^2}{\Omega^2}\}d\tau\Big]$ la situación es análoga a la presentada en la expresión (5.33).

Para esta integral de trayectoria tenemos ahora un oscilador armónico con $m = -\frac{3\pi}{2N}$, frecuencia $\omega = \frac{N}{\sqrt{2}}$ y bajo la influencia de la fuerza $F(\tau) = \frac{3\pi N}{4}$. La posición de este oscilador, α, está siendo continuamente medida, donde $\gamma(\tau)$ y $\Delta\gamma = \sqrt{\frac{2}{|N(\tau''-\tau')|}}\Omega$ son los resultados y error involucrados en la medición, respectivamente.

El propagador para este oscilador armónico es fácilmente calculado

$$\int d[\alpha] exp\Big[\int_{\tau'}^{\tau''}\{\frac{3i\pi N}{4}(1+\alpha+\frac{\alpha^2}{2}) - \frac{3i\pi}{4N}\dot{\alpha}^2 - \frac{N(\gamma-\alpha)^2}{\Omega^2}\}d\tau\Big] \doteq \sqrt{\frac{3i\sqrt{1+\frac{i8}{3\pi\Omega^2}}}{4\sqrt{2}sin\Big(\frac{N}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\frac{i8}{3\pi\Omega^2}}(\tau''-\tau')\Big)}} exp\Big[\frac{3i\pi N}{4}(\tau''-\tau') - |N(\tau''-\tau')|\frac{<\gamma^2>}{\Omega^2} + iS_\alpha\Big]. \qquad (5.36)$$

Aquí tenemos

$$S_\alpha \cong \frac{-3\pi\tilde{\omega}}{4\sqrt{2}sin\Big(\frac{N}{\sqrt{2}}\tilde{\omega}(\tau''-\tau')\Big)}\Big[(\alpha''^2+\alpha'^2)cos\Big(\frac{N}{\sqrt{2}}\tilde{\omega}(\tau''-\tau')\Big) - 2\alpha''\alpha' - 4\frac{(\alpha''+\alpha')}{\tilde{\omega}^2}sin^2\Big(\frac{N}{\sqrt{8}}\tilde{\omega}(\tau''-\tau')\Big)$$
$$+i\frac{8\sqrt{2}N(\tau''-\tau')(\alpha''+\alpha')}{3\pi\Omega^2\tilde{\omega}}\gamma(\frac{\tau''+\tau'}{2})sin\Big(\frac{N}{\sqrt{8}}\tilde{\omega}(\tau''-\tau')\Big)$$
$$-4\tilde{\omega}^{-4}sin^2\Big(\frac{N}{\sqrt{2}}\tilde{\omega}(\tau''-\tau')\Big) + \frac{N}{\sqrt{2}}\frac{(\tau''-\tau')}{\tilde{\omega}^3}.$$
$$+i\frac{4N^2(\tau''-\tau')^2}{3\pi\Omega^2\tilde{\omega}^2}[\gamma(\frac{\tau''+\tau'}{2})+\gamma(\frac{\tau''+3\tau'}{4})] \times sin\Big(\frac{N}{\sqrt{8}}\tilde{\omega}(\tau''-\tau')\Big)sin\Big(\frac{N}{\sqrt{32}}\tilde{\omega}(\tau''-\tau')\Big)$$
$$+\frac{32N^2(\tau''-\tau')^2}{9\pi^2\Omega^4\tilde{\omega}^2}\gamma(\frac{\tau''+\tau'}{2})\gamma(\frac{\tau''+3\tau'}{4}) \times sin\Big(\frac{N}{\sqrt{8}}\tilde{\omega}(\tau''-\tau')\Big)sin\Big(\frac{N}{\sqrt{32}}\tilde{\omega}(\tau''-\tau')\Big)\Big], \qquad (5.37)$$

donde $\tilde{\omega} = \sqrt{1+\frac{i8}{3\pi\Omega^2}}$ y $<\gamma^2>= \frac{1}{\tau''-\tau'}\int_{\tau'}^{\tau''}\gamma(\tau)^2 d\tau$, aquí podemos entender a S_α como la "acción clásica" de un oscilador complejo forzado ficticio cuya masa y frecuencia son $m = -\frac{3\pi}{2N}$, $v = \frac{N}{\sqrt{2}}\tilde{\omega}$, respectivamente, y donde la fuerza externa involucrada es $F(\tau) = \frac{3\pi N}{4} - i\frac{2N}{\Omega^2}\gamma(\tau)$.

Por lo tanto, el propagador del universo con auto-medición es

$$U_{[\kappa,\nu,\gamma]}(q'', q') = \sqrt{\frac{9}{8}}\Big[(1 + \frac{i8}{3\pi\Omega^2})(1 - \frac{i}{6\pi\rho^2})\Big]^{\frac{1}{4}}(\tau'' - \tau')$$
$$\int dN \frac{exp\Big[iS + N(\tau'' - \tau')\frac{3i\pi}{4} - |N(\tau'' - \tau')|(\frac{<\nu^2>}{\rho^2} + \frac{<\gamma^2>}{\Omega^2}) - \int_{\tau'}^{\tau''}\frac{|N-\kappa|}{\sigma^2}d\tau\Big]}{\sqrt{sin\Big(\frac{N}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{i8}{3\pi\Omega^2}}(\tau'' - \tau')\Big)sin\Big(\sqrt{8}N\sqrt{1 - \frac{i}{6\pi\rho^2}}(\tau'' - \tau')\Big)}}, \quad (5.38)$$

siendo $S = S_\alpha + S_\beta$.

5.3 Discusión de los resultados.

Con el fin de obtener en la expresión(5.38) un propagador no nulo se deben cumplir varias condiciones, una de ellas es que $\kappa(\tau)$ sea casi una constante. De otra manera, el término $\int_{\tau'}^{\tau''}\frac{|N-\kappa|}{\sigma^2}d\tau$ generará una exponencial decreciente en el integrando de (5.38). De aquí en adelante consideraremos $\kappa(\tau) = \kappa = const$.

Definamos ahora $t = \kappa(\tau'' - \tau')$ y $T = N(\tau'' - \tau')$, entonces (5.38) se reduce a

$$U_{[t,\nu,\gamma]}(q'', q') = \sqrt{\frac{9}{8}}\Big[(1 + \frac{i8}{3\pi\Omega^2})(1 - \frac{i}{6\pi\rho^2})\Big]^{\frac{1}{4}}$$
$$\times \int \frac{exp\Big[iS + T\frac{3i\pi}{4} - |T|(\frac{<\nu^2>}{\rho^2} + \frac{<\gamma^2>}{\Omega^2}) - \frac{|T-t|}{\sigma^2}\Big]}{\sqrt{sin\Big(\frac{T}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{i8}{3\pi\Omega^2}}\Big)sin\Big(\sqrt{8}T\sqrt{1 - \frac{i}{6\pi\rho^2}}\Big)}}dT. \quad (5.39)$$

Claramente, κ es una estimación de la función de lapso N. Por lo tanto, un tiempo físico invariante de norma t surge como consecuencia de la medición de la función de lapso N por multipolos superiores de la materia, y de la forma de la métrica, expresión (5.1), podemos ver que $t = (\tau'' - \tau')\kappa$ es efectivamente una estimación del intervalo $[\tau', \tau'']$, mientras que el error cometido en su medición está dado por $\Delta t = \sigma^2$.

De la expresión (5.39) se desprende que el propagador tendrá un valor no nulo solo si varias condiciones son satisfechas. Una de éllas concierne a la distancia entre T y

t. Con otras palabras, si $T \notin [t-\sigma^2, t+\sigma^2]$, entonces el integrando de (5.39) decae exponencialmente. Si (5.26) va a ser una buena aproximación para (5.39), entonces, entre otras condiciones, se deberá cumplir que $t \ll \sigma^2$ y $\sigma^2 \gg 1$.

Clásicamente este modelo sugiere que el espacio vacío tiene propiedades análogas a las de un sólido elástico y que resiste esfuerzos cortantes [8].

Por otro lado, de (5.36) y (5.34) se concluye que la expresión (5.39) puede ser interpretada como la función de onda de un sistema que consiste de un número infinito de subsistemas, donde cada uno de éllos tiene una función de onda que es proporcional a la multiplicación de $exp(\frac{3i\pi T}{4})$ y el producto de las funciones de onda de dos osciladores armónicos amortiguados, el término de amortiguamiento en cada uno de estos osciladores es $exp[-\frac{|T-t|}{2\sigma^2}]$. Las frecuencias de estos dos osciladores son $\tilde{\omega}$ y $\tilde{\Gamma}$ y sus posiciones sufren la acción de un proceso continuo de medición.

La integración en (5.39) indica que el tiempo en el cual cada uno de estos subsistemas fue "prendido" no es el mismo. El término de amortiguamiento que está presente nos dice que si deseamos evaluar al tiempo t la función de onda de todo el sistema, entonces solo necesitamos considerar aquellos subsistemas que fueron "prendidos" a un tiempo T el cual difiere de t por $2\sigma^2$ o menos. Con otras palabras, aquellos subsistemas que fueron "prendidos" a un tiempo T tal que $|T-t| > 2\sigma^2$ tiene al tiempo t una contribución a la función de onda de todo el sistema casi nula.

Observando las expresiones (5.34), (5.35), (5.36) y (5.37) encontramos las condiciones adicionales que nos conducen de la expresión (5.39) a la expresión (5.26), las cuales son las siguientes: Ω^2, $\rho^2 \gg 1$, $\rho^2 \gg \sigma^2|(\beta''+\beta')|\tilde{\nu}$, $\rho^4 \gg (\sigma^2\tilde{\nu})^2$, $\Omega^2 \gg \sigma^2|(\alpha''+\alpha')|\tilde{\gamma}$, $\Omega^2 \gg \sigma^4\tilde{\gamma}$, $\Omega^4 \gg (\sigma^2\tilde{\gamma})^2$ y $\frac{<\gamma^2>}{\Omega^2} + \frac{<\nu^2>}{\rho^2} \ll \sigma^{-2}$.

Aquí tenemos $\tilde{\nu} = Sup\{|\nu(\tau)| : \tau \in [\tau', \tau'']\}$, $\tilde{\gamma} = Sup\{|\gamma(\tau)| : \tau \in [\tau', \tau'']\}$.

Por ende, las condiciones que reducen (5.39) a (5.26) son : $t \ll \Delta t$, $\Delta t \gg 1$, Ω^2, $\rho^2 \gg 1$, $\rho^2 \gg \Delta t|(\beta''+\beta')|\tilde{\nu}$, $\rho^4 \gg (\tilde{\nu}\Delta t)^2$, $\Omega^2 \gg \Delta t|(\alpha''+\alpha')|\tilde{\gamma}$, $\Omega^2 \gg \tilde{\gamma}\Delta t^2$, $\Omega^4 \gg (\tilde{\gamma}\Delta t)^2$, $\frac{<\gamma^2>}{\Omega^2} + \frac{<\nu^2>}{\rho^2} \ll \frac{1}{\Delta t}$.

Si alguna de estas condiciones no se cumple, entonces no podemos despreciar el proceso de medición y en consecuencia en vez del propagador de Halliwell debemos usar el propagador dado en la expresión (5.39).

La presencia de anisotropía pequeña, $\beta_- = 0$, impone condiciones geométricas sobre el límite analizado, las cuales no aparecen en el caso isotrópico [60]. En el universo isotrópico sin constante cosmológica, el límite de tiempos pequeños y un proceso de auto-medición no muy preciso no impone restricciones sobre el tamaño de las regiones de la 3-geometría en las cuales el propagador de Halliwell es válido.

En el caso anisotrópico encontramos que en el límite de tiempos pequeños y procesos de auto-medición no muy precisos existen combinaciones de punto inicial y punto final en el superespacio que yacen fuera del régimen de Halliwell. Este régimen exige, entre otras, que se cumpla la siguiente condición: $|(\beta'' + \beta')| \ll \frac{\rho^2}{\tilde{\nu}\Delta t}$. Claramente isotropía exige que β'' y β' sean cero, y por lo tanto esta condición siempre se satisfará en el caso isotrópico, pero en el anisotrópico podemos tener un proceso de auto-medición en cual se cumpla que $\frac{\rho^2}{\Delta t} \ll \tilde{\nu}$.

Con otras palabras, si consideramos a β' y $\tilde{\nu}$ como fijos y tomamos en cuenta dos procesos de auto-medición cuyos parámetros fenomenológicos satisfagan $(\frac{\rho_1}{\sigma_1})^2 \ll (\frac{\rho_2}{\sigma_2})^2$, entonces el tamaño de la vecindad en torno a β' en la cual el propagador de Halliwell es válido es en el proceso de auto-medición con subíndice 1 mucho más pequeña que en el otro caso.

Esto puede ser reformulado como sigue. Aún en el caso de tiempos pequeños y procesos de auto-medición no muy precisos la anisotropía genera una dependencia funcional entre el tamaño de las vecindades en la 3-geometría en la cual el propagador de Halliwell es válido y los parámetros del proceso de auto-medición.

Este último resultado no nos debe sorprender, ya que si recordamos, de acuerdo con DM β juega el papel en este modelo de una variable colectiva, y este tipo de variables interactúan con el entorno generando la decoherencia (aquí hemos ya en forma implícita tomado en cuenta esta interacción en las expresiones (5.29), (5.30), (5.31) y (5.32)). Por consiguiente debemos esperar que con la desaparición de β el papel jugado en la dinámica del universo por la interación entre entorno y variables colectivas se vuelva menos importante.

Retiremos de las últimas condiciones una de éllas, $\sigma^2 \gg 1$, pero manteniendo las restantes. Con otras palabras, imponemos todas las condiciones pero en vez de tener $\sigma^2 \gg 1$ consideramos ahora el límite $\sigma^2 \ll 1$. Sabemos que la secuencia de funciones $\delta_n(x) = \frac{n}{2}e^{-n|x|}$ tiene como límite cuando $n \rightarrow \infty$, a la delta de Dirac [66]. Por lo tanto, si bajo la condición $\sigma^2 \ll 1$ el integrando de (5.39) es casi constante en la vecindad $|T-t| \ll \sigma^2$, entonces podemos introducir en el propagador la aproximación

$exp(-\frac{|T-t|}{\sigma^2}) \approx 2\sigma^2\delta(T-t)$. Esta sustitución nos permite re-escribir el propagador del universo con auto-medición como sigue

$$U_t(q'',q') = \sqrt{\frac{9}{8}\sigma^2}\sqrt{\frac{1}{sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)sin\left(\sqrt{8}t\right)}}exp\Big\{\frac{3\pi i}{4}t$$
$$+i\frac{3\pi}{\sqrt{2}sin\left(\sqrt{8}t\right)}\left[(\beta''^2+\beta'^2)cos\left(\sqrt{8}t\right)-2\beta''\beta'\right]-$$
$$i\frac{3\pi}{4\sqrt{2}sin\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)}\left[(\alpha''^2+\alpha'^2)cos\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right.$$
$${}'-2\alpha''\alpha'-4(\alpha''+\alpha')sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{8}}\right)-$$
$$\left.4sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{8}}\right)+\frac{t}{\sqrt{2}}\right]\Big\}. \tag{5.40}$$

Claramente tenemos un propagador que puede ser entendido como sigue, es proporcional al producto de tres términos: i) $exp(\frac{3\pi i}{4}t)$, ii) un propagador de masa $m = \frac{3\pi}{2}$ y frecuencia $v = \sqrt{8}$, iii) el propagador de un oscilador armónico forzado cuya masa y frecuencia son $m = -\frac{3\pi}{2}$, $v = \frac{1}{\sqrt{2}}$, respectivamente, y donde la fuerza externa es $F(t) = \frac{3\pi}{4}$.

Los factores de escala son $r_{ij} = e^{\alpha}(e^{\beta})_{ij}$. Los errores en la medición de β_{ij} y α son, aproximadamente, $\frac{\rho}{\sqrt{t}}$ y $\frac{\Omega}{\sqrt{t}}$, respectivamente. Por ende, los errores en la medición de los factores de escala están dados por $\Delta r_{ij} \sim r_{ij}\frac{(\rho+\Omega)}{\sqrt{t}}$, por consiguiente $\frac{\Delta r_{ij}}{r_{ij}} \sim \frac{(\rho+\Omega)}{\sqrt{t}}$, lo que significa que para tiempos más pequeños que $(\rho+\Omega)^2$ el concepto de factor de escala carece de sentido. Un incremento en la imprecisión en la medición de α (o de β), lo cual es equivalente a un incremento de Ω (o de ρ), implica un incremento en el tamaño de la región en la cual el concepto de factor de escala carece de sentido.

5.4 Conclusiones.

Hemos construido el propagador de Halliwell para el caso de un universo Mixmaster con anisotropía pequeña, pero no nula. Posteriormente, en el contexto de DM hemos introducido en este sistema un proceso de auto-medición, en el cual multipolos superiores de la materia actúan como entorno y las variables del superespacio como variables colectivas.

Empleando el formalismo de integral restringida hemos calculado el propagador de Halliwell modificado, el cual aparece como consecuencia de este proceso de automedición. Este formalismo nos permite tomar en cuenta la influencia del dispositivo de medición sin conocerlo con detalle.

Hemos probado que un tiempo físico invariante de norma aparece como consecuencia de este proceso de auto-medición. Las restricciones que nos conducen al propagador de Halliwell también fueron encontradas.

La validez del propagador de Halliwell, y en consecuencia de la ecuación de Wheeler-DeWitt, está restringida por la presencia de anisotropía. Existe un conjunto de condiciones, las cuales no aparecen en el caso isotrópico, y que genera una dependencia funcional entre las características del proceso de automedición y el tamaño de las vecindades en la 3-geometría, en las cuales la ecuación de Wheeler-DeWitt es válida.

Este hecho no constituye una sorpresa, la presencia de más variables colectivas significa que el hamiltoniano de interacción entre entorno y grados de libertad colectivos juega un papel más decisivo en la dinámica del universo.

Obtuvimos también una expresión para el umbral en el tiempo más alla del cual los factores de escala de este modelo carecen de sentido físico, para tiempos más pequeños que $(\rho + \Omega)^2$ no podemos hablar de factores de escala.

El análisis del caso general (sin el uso de la aproximación $e^{\alpha} \sim 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2}$) debe todavía ser hecho. Pero como ya hemos visto, la aparición de un tiempo físico es una consecuencia directa de la interacción entre entorno y las variables colectivas, que en nuestro caso son los elementos de la métrica espacial. Hemos visto también que un incremento en el número de variables colectivas reduce el tamaño de la región de validez del propagador de Halliwell, esta última afirmación puede ser reformulada como sigue, si tenemos más variables colectivas entonces la interacción juega un papel más importante en la dinámica del universo,

Se puede ver que si no empleamos la aproximación antes mencionada, entonces uno de los elementos de la métrica espacial no tendrá un número finito de términos (debemos ahora considerar la serie completa para e^{α} y no solo los primeros tres términos) y por lo tanto debemos esperar que la interacción entre entorno y las variables colectivas juege un papel más importante en la dinámica del universo (ya que ahora tendremos más variables colectivas, la serie completa de e^{α}) que en el caso en el cual usamos dicha aproximación y en consecuencia también en este caso surgirá un tiempo físico. Podríamos esperar que como consecuencia de la presencia de más términos en la interacción, el número de condiciones que deberán ser satisfechas para caer nuevamente en el régimen de Halliwell sea ahora mayor, lo cual implica que la región de validez del propagador de Halliwell será menor que en nuestro caso.

Es importante recalcar que otra conclusión fundamental de este resultado consiste en que, al igual que para el caso de la Teoría Cuántica, el Modelo de Decoherencia afirma que toda teoría cuántica de la Relatividad General estará incompleta, y por lo tanto presentará problemas, si no son consideradas las interacciones entre variables colectivas y el entorno. Por ejemplo, supóngase que se consigue encontrar una Teoría Cuántica de la Relatividad General, digamos, de acuerdo con las ideas de Ashtekar. Si recordamos las ideas detrás de esta formulación [67], podremos comprender que aún en caso de conseguir una teoría cuántica de la Relatividad General se presentarán el mismo tipo de problemas conceptuales que afectan a la Teoría Cuantica usual. Por ejemplo, en una teoría de esta índole es posible tener un estado que sea la superposición de dos estados macroscópicamente diferentes, es decir, tendremos un equivalente del ya famoso gato de Schrödinger [28], solo que en vez de dos estados macroscópicamente diferentes del gato, gato vivo y gato muerto, tendremos ahora dos campos gravitacionales macroscópicamente diferentes. Siguiendo al Modelo de Decoherencia, parece que problemas como el recién mencionado se pueden resolver tomando en cuenta la auto-medición del universo, es decir, la interacción entre grados colectivos y entorno genera una solución a este tipo de problemas. Este tipo de ideas no tienen, hasta el momento, cabida en intentos de cuantizar el campo gravitacional, como en el de Ashtekar.

La conclusión del capítulo 5 podría formularse diciendo que todo intento que sea hecho para cuantizar el campo gravitacional debería de incluir también, de entrada, el esfuerzo por resolver el problema del surgimiento de las propiedades clásicas del universo, es decir, debería, tal vez, de incorporar el mecanismo del Modelo de Decoherencia, ya que uno de los problemas actuales que se presentan en la busqueda de una teoría cuántica de la Relatividad General es el problema del tiempo, la explicación del surgimiento del tiempo, que es una propiedad clásica.

Otro punto que resta por analizarse consiste en encontrar que tipo de fluctaciones en la densidad o que tipo de ondas gravitacionales podrían generar unas funcionales de peso como las mencionadas en las expresiónes (5.29), (5.30) y (5.31).

Existe ya una afirmación [40] que señala la posibilidad de que el proceso de decoherencia podría jugar un papel fundamental en la aparición de una flecha del tiempo. Por lo tanto, también se podría analizar si al incluir las funcionales de peso antes ya comentadas DM permite obtener una flecha del tiempo en un universo de este tipo.

Bibliografía

[1] R. Feynman, Rev. Mod. Phys., **20**, 367 (1948).

[2] R. Feynman y A. Hibbs, "Quantum Mechanics and Path Integrals", McGraw-Hill Co., New York (1965).

[3] P. Dirac, "The Principles of Quantum Mechanics", Clarendon Press, Oxford (1933).

[4] P. Dirac, Fields and Quanta **3**, 139 (1972).

[5] V. Braginsky y F. Khalili, "Quantum Measurements", Cambridge Press, Cambridge (1995).

[6] M. Mensky, Phys. Rev. **D20**, 384 (1979).

[7] M. Mensky, Sov. Phys. JETP **50**, 667 (1979).

[8] C. Misner, K. Thorne y J. Wheeler, "Gravitation", Freeman, San Francisco (1973).

[9] V. Braginsky y V. Rudenko, Phys. Rep. **46**, 165 (1978).

[10] A. Giazotto, Phys. Rep. **182**, 365 (1989).

[11] F. Cooperstock y V. Faraoni, Class. Quan. Grav. **10**, 1189 (1993).

[12] P. Astone, J. Lobo y B. Schutz, Class. Quan. Grav. **11**, 2093 (1994).

[13] V. Braginsky, The detection of gravitational waves and quantum nondisturbative measurements, in "Topics in Theoretical and Experimental Gravitational Physics", V. Sabbata y J. Weber eds., Plenum Press, London (1977).

[14] R. Gifford, Phys. Rev. **D14**, 2478 (1977).

[15] W. Unruh, Phys. Rev. **D19**, 2888 (1979); C. Caves, K. Thorne, R. Drever, V. Sandberg y M. Zimmermann, Rev. Mod. Phys. **52**, 341, (1980).

[16] M. Mensky, on Quantum theory of measurements of the gravitational field, Proc. 3^{rd} Seminar on Quantum Gravity, V. Berezin y V. Frolov eds., World Scientific, Singapore (1985)

[17] R. Arnowitt y S. Deser, Phys. Rev. **113**, 745 (1959); R. Arnowitt, S. Deser y C. Misner, Phys. Rev. **116**, 1322 (1959).

[18] 18. Arnowitt, S. Deser y C. Misner, The Dynamics of General Relativity, in "Gravitation: An Introduction to Current Research", E. Witten, ed., Wiley and Sons, New York (1962).

[19] Arnowitt, S. Deser y C. Misner, Phys. Rev. **117**, 1595 (1960); Arnowitt, S. Deser y C. Misner, Phys. Rev. **118**, 1100 (1960).

[20] C. Lanczos, "The Variational Principles of Mechanics", Toronto University Press, Toronto (1949).

[21] J. Wheeler, Superspace and the Nature of Quantum Geometrodynamics, in "Battelle Recontres"", C. DeWitt y J. Wheeler, eds., Benjamin, New York (1968).

[22] A. Ashtekar y R. Geroch, Rept. Prog. Phys., **37**, 1211 (1974); K. Kuchař, Canonical Methods of Quantization in, "Quantum Gravity", C. Isham, R. Penrose y D. Sciama eds., Clarendon Press, Oxford (1981).

[23] B. DeWitt, Phys. Rev. **160**, 1113 (1967).

[24] P. Dirac, "The Principles of Quantum Mechanics", Clarendon Press, Oxford (1947).

[25] C. Wick, A. Wightman y E. Wigner, Phys. Rev. **D1**, 3267 (1970).

[26] P. Divarakan, Rev. Math. Phys. **6**, 167 (1994).

[27] J. Wess y B. Zumino, Phys. Lett. **37B**, 95 (1971).

[28] R. Omnés, "The Interpretation of Quantum Mechanics", Princeton University Press, Princeton (1994).

[29] H. Zeh, Found. Phys. **3**, 109 (1973); W. Zurek, Physics Today, **44**, 36 (1991).

[30] H. Zeh, Found. Phys. **1**, 69 (1970).

[31] K. Hepp y E. Lieb, Helv. Phys. Acta **46**, 573 (1973).

[32] C. Wick, A. Wightman y E. Wigner, Phys. Rev. **88**, 101 (1952).

[33] G. Jona-Lasinio y P. Claverie, Prog. Theor. Phys., Suppl. **86**, 54 (1986).

[34] C. Kiefer, Phys. Rev. **D46**, 1658 (1992).

[35] E. Joos, Phys. Lett. **A116**, 6 (1986); H. Zeh, Phys. Lett. **A116**, 9 (1986).

[36] J. Halliwell y S. Hawking, Phys. Rev. **D31**, 1777 (1985).

[37] T. Fukuyama y M. Morikawa, Phys. Rev. **D39**, 462 (1989).

[38] A. Gangui, F. Mazzitelli y M. Castagnino, Phys. Rev. **D43**, 1853 (1991).

[39] M. Sakagami, Prog. Theor. Phys., **79**, 442 (1988); H. Feldman, A. Kamenshchik y A. Zelnikov, Class. Quantum Grav, **9**, L1 (1992).

[40] H. Zeh, "The Physical Basis of the Direction of Time", Springer, Heidelberg (1992).

[41] R. Penrose, Time asuymmetry and quantum gravity, in "Quantum Gravity" Vol. 2, C. Isham, R. Penrose y D. Sciama eds., Clarendon Press, Oxford (1981).

[42] H. Conradi y H. Zeh, Phys. Lett. **A154**, 321 (1991).

[43] A. Balakin, comunicación personal.

[44] M. Mensky, "Continuous Quantum Measurements and Path Integrals", IOP, Bristol and Philadelphia (1993).

[45] H. von Borzeszkowski y M. Mensky, Phys. Lett. A **188**, 249 (1994); M. Mensky, Ann. der Physik, **45**, 215 (1988).

[46] L. Landau y R. Peierls, Zs. Phys. **69**, 65 (1931).

[47] N. Bohr y L. Rosenfeld, Kgl. Danske Videnskab Selskab., Math. Fys. Medd. **12 N**, 3 (1933).

[48] L. Smarr, ed., "Sources of Gravitational Radiation", Cambridge University Press, Cambridge (1979).

[49] J. Weber, Phys. Rev. **22**, 1302 (1969).

[50] K. Thorne, Gravitational Radiation, in "300 years of Gravitation", S. Hawking y W. Israel, eds., Cambridge University Press, Cambridge (1989).

[51] V. Braginsky y M. Gertsenshtein, Soviet Physics-JETP Lett. **5**, 287 (1967); J. Anderson, J. Armstrong, F. Eastbrook, R. Hellings, E. Law y H. Wahlquist, Nature **308**, 158 (1984).

[52] M. Mensky, The Path Group: Measurements, Fields, Particles, Nauka, Moscow (1983).

[53] V. Pandharipande, D. Pines, y R. Smith, Astrophys. J. **208**, 550 (1976).

[54] D. Blair, "The Detection of Gravitational Waves", Cambridge University Press, Cambridge, (1991).

[55] V. Braginsky y V. Rudenko, Phys. Rep. **46**, 166 (1978).

[56] V. Braginsky y M. Gertsenshtein, Soviet Phys. JETP, Lett. **5**, 287 (1967).

[57] R. Wald, "General Relativity", The University of Chicago Press, Chicago and London (1984).

[58] M. Castagnino, The appearence of time in quantum gravity, in "Quantum Gravity", M. Markov, V. Berenzin y V. Frolov eds. World Scientific, Singapore (1988).

[59] H. Zeh, Phys. Lett. A **126**, 311 (1988); C. Kiefer, Class. Quantum Grav. **4**, 1369 (1987).

[60] M. Mensky, Class. Quantum Grav. **7**, 2317 (1990).

[61] J. Halliwell, Phys. Rev. D **38**, 2468 (1988).

[62] P. Amsterdamski, Phys. Rev. D **31**, 3073 (1985).

[63] I. Gradshteyn y I. Ryzhik, "Table of Integrals, Series and Products', (Academic Press, New York, 1980).

[64] W. Dittrich y M. Reuter, "Classical and Quantum Dynamics", (Springer, Berlin, 1996).

[65] C. Kiefer, Class. Quantum Grav. **7**, 561 (1989).

[66] G. Arfken, "Mathematical Methods for Physicists", (Academic Press, New York, 1970).

[67] A. Ashtekar, "Lectures on Non-Perturbative Canonical Gravity", (World Scientific, Singapore, 1991).