

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA
DEPARTAMENTO DE FISICA

**PROPAGACION EFECTIVA DE UNA
PARTICULA ESCALAR CARGADA
EN EL UNIVERSO DE VISSER**

TESIS

QUE PRESENTA

Roberto Guzmán González

PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRIA EN CIENCIAS (FISICA)

Asesor

Dr. Hugo A. Morales Técotl
Gravitación y Astrofísica

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA
DEPARTAMENTO DE FISICA

**PROPAGACION EFECTIVA DE UNA
PARTICULA ESCALAR CARGADA
EN EL UNIVERSO DE VISSER**

TESIS
QUE PRESENTA
Roberto Guzmán González
PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRIA EN CIENCIAS (FISICA)



Asesor
Dr. Hugo A. Morales Técotl
Gravitación y Astrofísica

Agradezco al Dr. Hugo A. Morales Técotl, haber fungido como asesor de esta tesis.

Quisiera también agradecer a los sinodales Dr. Octavio Pimentel Rico y Dr. Rubén Cordero Elizalde por sus comentarios para optimizar esta tesis.

El presente trabajo ha sido apoyado por CONACyT a través del programa nacional de becas.

Índice general

1. Introducción	6
2. Espacio-tiempo con más de cuatro dimensiones	8
2.1. Escenarios más comunes	8
2.2. Algunos posibles efectos físicos de más de cuatro dimensiones . .	20
3. Partícula escalar neutra en el universo de Visser	23
3.1. Universo de Visser	23
3.2. Movimiento de una partícula clásica	26
3.3. Partícula escalar neutra	28
3.4. Relaciones de dispersión	30
4. Partícula escalar cargada en el universo de Visser	32
4.1. Partícula escalar cargada	32
4.2. Relaciones de dispersión con teoría de perturbaciones	33
4.2.1. Estado base	34
4.2.2. Primer estado excitado	36
4.2.3. Tercer estado excitado	37
4.3. Relaciones de dispersión exactas	39
4.4. Confinamiento	43
5. Conclusiones y perspectivas	46

A. Función Hipergeométrica	48
B. Partícula no relativista en el potencial de Rosen-Morse	49
C. Integrales $[\cosh(y)]^p$	52
D. Integrales $[\cosh(y)]^p[\sinh(y)]^q$	54

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es estudiar la propagación de una partícula escalar cargada a lo largo de una membrana cuatro dimensional que representa nuestro espacio tiempo habitual, encajada en un espacio tiempo de cinco dimensiones conocido como universo de Visser [1].

Para lograr esto hacemos una extensión al caso con carga eléctrica del análisis de Visser para a una partícula escalar neutra, propagándose en las condiciones que acabamos de describir. En particular se calculan las relaciones de dispersión que caracterizan la propagación de la partícula. Con este fin se utiliza tanto enfoque perturbativo como un análisis de solución exacta.

Se establece la diferencia entre tres casos en base al cálculo de la velocidad de propagación:

- i) Situación estándar de una partícula moviéndose uniformemente en cuatro dimensiones planas
- ii) Partícula escalar neutra en la membrana cuatro dimensional de Visser.
- iii) Partícula escalar cargada en la membrana cuatro dimensional del universo de Visser.

La estructura de esta tesis es como sigue. Después de una breve discusión de las ideas principales en la introducción pasamos a la descripción de los modelos hiperdimensionales y discutimos posibles efectos físicos consecuencia de la presencia de más de cuatro dimensiones en el capítulo 2. En el capítulo 3 revisamos el análisis de Visser para la propagación efectiva de la partícula escalar neutra mientras que en el capítulo 4 nos concentramos en el análisis del caso para la partícula cargada. Estos resultados se reportan en forma de artículo en la referencia [17]. Finalmente en el capítulo 5 se discuten los resultados y se incluyen posibles extensiones de los mismos.

En esta tesis, a menos que sea explícitamente establecido de otro modo, adoptamos unidades en las que $\hbar = 1$, $c = 1$.

Capítulo 1

Introducción

La posibilidad de que existan más de tres dimensiones espaciales ha sido tema de interés desde hace muchos años. Recientemente las dimensiones extra han tomado un nuevo impulso debido a que están consideradas en las teorías de cuerdas, actualmente relacionadas a través de la teoría M y que proponen una teoría cuántica de la gravedad [2]. Por otro lado, la posibilidad de detectar experimentalmente posibles consecuencias de la presencia de tales dimensiones extra es de gran interés.

En forma paralela al desarrollo de trabajos teóricos han surgido trabajos en la línea experimental orientados a la posibilidad de revelar como dimensiones extra podrían manifestarse, además de contribuir con información que pudiera resolver problemas como el problema de las jerarquías de las escalas de energías en física de partículas.

Un aspecto importante en las teorías multidimensionales es la forma en la que las dimensiones extra están ocultas de manera que el espacio tiempo efectivo es de cuatro dimensiones. Hasta hace poco en las teorías tipo Kaluza Klein las dimensiones extra se suponía que eran compactas, de tamaño microscópico del orden de la longitud de Planck, $l_p = 10^{-33}cm$, y correspondiendo a energías del orden de la energía de Planck, $E_p = 10^{19}GeV$.

Recientemente la representación del espacio tiempo usual de cuatro dimensiones se hace mediante membranas encajadas en un espacio de dimensión mayor, aquí la materia ordinaria, a bajas energías, (con la posible excepción de los gravitones) esta atrapada en una membrana de tres dimensiones, encajada en un espacio multidimensional. En los mundos membrana las dimensiones extra pueden ser de tamaño no microscópico o inclusive de tamaño infinito y pueden tener efectos que podrían detectarse experimentalmente.

A continuación describiremos algunos escenarios de mas de cuatro dimensiones que han sido considerados en la literatura.

Capítulo 2

Espacio-tiempo con más de cuatro dimensiones

Existe abundante literatura en donde se estudian modelos de más de cuatro dimensiones. En esta sección se discuten brevemente algunas ideas que han motivado el presente trabajo de los escenarios más comunmente aceptados [3].

2.1. Escenarios más comunes

Escenario de Kaluza-Klein [4]

Las primeras ideas sobre la posibilidad de dimensiones extra se deben a Theodor Kaluza y a Oskar Klein. Ellos propusieron una teoría para la gravedad en cinco dimensiones en el marco de la teoría general de la relatividad, de la cual la gravedad de Einstein y el electromagnetismo de Maxwell cuatro dimensionales podrían ser obtenidos.

Este escenario a bajas energías es efectivamente cuatro dimensional siempre y cuando la quinta dimensión espacial sea compacta; las tres dimensiones espaciales usuales son infinitas mientras que la quinta dimensión extra es un círculo de radio R . El tamaño de la dimensión extra sería $2\pi R$, coincidiendo los puntos $y = 0$ y $y = 2\pi R$.

La métrica cinco dimensional incluye un potencial para la parte electro-

magnética y tiene la siguiente forma

$$g_{AB} = \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} - \phi A_\mu A_\nu & \phi A_\mu \\ -\phi A_\nu & -\phi \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ son índices que se refieren al espacio-tiempo usual de cuatro dimensiones y $A, B = 0, 1, 2, 3, 5$, donde el índice 5 se refiere a la quinta dimensión extra; A_μ es el potencial electromagnético y ϕ es un campo escalar extra que aparece en este formalismo.

Es ilustrativo considerar una partícula escalar en un escenario cinco dimensional plano a la Kaluza-Klein: $g_{AB} = \eta_{AB}$,

Las soluciones para la ecuación de Klein-Gordon son de la forma

$$\Phi_{p,n} = \exp(ip_\mu x^\mu) \exp \frac{iny}{R} \quad (2.2)$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.3)$$

donde p_μ es el momento $(3+1)$ dimensional, y es la coordenada de la dimensión extra, n resulta de considerar la periodicidad en la dirección y . La ecuación de Klein-Gordon se reduce a la forma

$$p^\mu p_\mu - \frac{n^2}{R^2} = 0 \quad (2.4)$$

de aquí los modos inhomogéneos con $n \neq 0$ tienen una masa efectiva en cuatro dimensiones. Esta energía es del orden $\frac{1}{R}$ y no pueden ser excitados en procesos de baja energía. Abajo de energías del orden $\frac{1}{R}$, solamente los modos homogéneos con $n = 0$ son relevantes, y bajas energías representan un escenario efectivo cuatro-dimensional.

A energías del orden de $\frac{1}{R}$ se producirían partículas que evidenciarían la presencia de la dimensión extra. A la fecha estas partículas no han sido observadas en los aceleradores de partículas por lo que la escala de energía $\frac{1}{R}$ debe

ser al menos del orden de cientos de GeV, y el tamaño de las dimensiones extra en el modelo Kaluza-Klein satisface la cota: $R \leq 10^{-17} \text{cm}$.

Mundos Membrana

En estos escenarios la materia esta localizada en una membrana de cuatro dimensiones espacio temporales encajada en un espacio de dimensión al menos 5. El confinamiento de la materia implica que a bajas energías el universo efectivamente es cuatro dimensional. Para ver como la materia esta atrapada en la membrana a continuación se presentan ejemplos de modelos que exhiben esta propiedad.

Escenario de Arkami-Hamed-Dimopoulos-Dvali [6]

En este modelo se desprecia la tensión de la membrana (densidad de energía por unidad de volumen de la membrana) y se consideran dimensiones extra compactas, que a diferencia de los modelo Kaluza-Klein, no son necesariamente de tamaño microscópico. Su tamaño característico lo denotamos con R .

La dinámica de la materia en la membrana determina las distancias para las que las interacciones no gravitacionales dejan de ser cuatro dimensionales. Para distancias mucho menores que R , la gravedad se comporta como hiperdimensional y, al no estar confinada a la membrana, esto explicaría por qué la gravedad es mucho más débil que las otras fuerzas. Hasta este momento la ley de atracción gravitacional cuatro dimensional ha sido comprobada experimentalmente usando balanza de torsión hasta distancias del orden de 0.2 mm [7], por lo que el tamaño de las dimensiones extra debe ser menor.

Esto abre una nueva posibilidad para manejar el problema de las jerarquías: ¿Porqué la escala electrodébil ($M_{ew} \sim 1 \text{TeV}$) es tan diferente de la escala de Planck ($M_{pl} \sim 10^{16} \text{TeV}$)?. La escala fundamental en los modelos multidimen-

sionales no es la masa de Planck, la masa fundamental M en estos modelos esta incluida en la siguiente acción:

$$S = -\frac{1}{16\pi G_D} \int d^D X \sqrt{g^{(D)}} R^{(D)}, \quad (2.5)$$

donde

$$G_D = \frac{1}{M^{D-2}} \equiv \frac{1}{M^{d+2}} \quad (2.6)$$

es la constante fundamental D-dimensional de Newton, $d = D - 4$ es el número de dimensiones extra y $d^D X = d^4 x d^d y$.

En el escenario ADD la gravedad cuatro dimensional esta dada por el modo cero del gravitón, cuya función de onda es homogénea en las dimensiones extra. De la ecuación (2.5) podemos obtener la acción cuatro dimensional efectiva para gravedad tomando la métrica independiente de las coordenadas extra y , la integración es directa y esta acción toma la siguiente forma

$$S_{ef} = -\frac{V_{(d)}}{16\pi G_D} \int d^4 x \sqrt{g^{(4)}} R^{(4)}, \quad (2.7)$$

donde $V_d \sim R^d$ es el volumen de las dimensiones extra. Se observa que la masa de Planck cuatro dimensional es, salvo un factor numérico de orden uno, igual a

$$M_{pl} \approx M(MR)^{d/2}. \quad (2.8)$$

Si el tamaño de las dimensiones extra es grande comparado con la longitud fundamental M^{-1} , la masa de Planck M_{pl} es mucho mayor que la escala gravitacional fundamental M .

Si proponemos que la escala fundamental de la gravedad sea del orden de la escala electrodébil, $M \sim 1TeV$, entonces el problema de las jerarquías entre M_{pl} y M_{ew} es debido al tamaño de las dimensiones extra. El problema de las

jerarquías se reduce ahora a explicar porque el tamaño de las dimensiones extra es grande.

Suponiendo que $M \sim 1TeV$, de la ecuación (2.8) obtenemos el valor de R ,

$$R \sim M^{-1} \left(\frac{M_{pl}}{M} \right)^{2/d} \sim 10^{32/d} \times 10^{-17} cm. \quad (2.9)$$

Para el caso de una sola dimensión extra se obtiene un valor inaceptablemente grande para R que sería inconsistente con el movimiento observado de los planetas de nuestro sistema solar. Un caso interesante es $d = 2$ para el cual $R \sim 1mm$. Esto ha motivado recientemente experimentos para buscar desviaciones de la ley de gravedad de Newton a distancias submilimétricas. Sin embargo, escalas del orden $M \sim 1TeV$ son de hecho excluidas en modelos astrofísicos y cosmológicos; valores más realistas serían del orden de $M \sim 30TeV$ que implicarían $R \sim 1 - 10\mu m$. Esto motiva buscar desviaciones de la ley de Newton en el rango de micro-metros, lo cual es difícil pero no imposible.

Para $d > 2$ en la ecuación (2.9) resultan cada vez valores más pequeños para R , por ejemplo, para $d = 3$ se obtiene $R \sim 10^{-6}cm$ a escalas del orden de $1TeV$, quedando prácticamente excluida ya la posibilidad de encontrar experimentalmente desviaciones de la ley de Newton en el método de balanza de torsión. Sin embargo, en la compactificación no todas las dimensiones extra tienen que ser del mismo tamaño, resultando que si algunas son mucho menores que otras, es posible que para casos $d > 2$ resulten desviaciones similares a la ley de Newton en el rango micro-métrico similares al caso $d = 2$.

Escenarios de Randall-Sundrum [8]

Cuando se toma en cuenta la densidad de energía de la membrana, por ejemplo, en el campo gravitacional que produce la membrana, resulta que se induce una geometría en el espacio multidimensional. Este escenario propuesto

por Randall y Sundrum describe una geometría no factorizable.

Cuando se consideran distancias mucho mayores que el espesor de la membrana, una función delta caracteriza la fuente de campo gravitacional debido a la membrana. En este caso la membrana que contribuye al campo gravitacional tiene asociado un solo parámetro: la densidad de energía por unidad de volumen tridimensional σ , que se conoce como tensión de la membrana. Si consideramos el caso de una dimensión extra, la acción gravitacional cinco-dimensional en presencia de la membrana es

$$S_g = -\frac{1}{16\pi G_{(5)}} \int d^4x dy \sqrt{g^{(5)}} R^{(5)} - \Lambda \int d^4x dy \sqrt{g^{(5)}} - \sigma \int d^4x \sqrt{g^{(4)}}, \quad (2.10)$$

donde Λ es la constante cosmológica cinco-dimensional, y la integral en el último término se evalúa en la región que ocupa la 3-membrana $g_{\mu\nu}^{(4)}$ es la métrica inducida.

Las ecuaciones de campo que resultan son las ecuaciones de Einstein cinco dimensionales con constante cosmológica Λ , y el último término en la ecuación (2.10) genera la condición de frontera de Israel [9]. Estas ecuaciones permiten soluciones que preservan la invariancia de Poncaré cuatro dimensional.

La existencia de una solución cuatro dimensional plana requiere una conexión entre σ y Λ ; la constante cosmológica cinco dimensional debe ser negativa e igual a:

$$\Lambda = -\frac{4\pi}{3} G_{(5)} \sigma^2. \quad (2.11)$$

y la solución es:

$$ds^2 = a^2(y) \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - dy^2, \quad (2.12)$$

donde $\eta_{\mu\eta}$ es la métrica de Minkowski cuatro dimensional y

$$a(y) = \exp(-k|y|), \quad k = \frac{4\pi}{3} G_{(5)} \sigma. \quad (2.13)$$

La membrana esta localizada en $y = 0$. Para comprobar que la métrica (2.12) es solución de las ecuaciones de Einstein, calculamos el tensor $G_{\mu\nu}$ correspondiente:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &\equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}^{(5)}R^{(5)} = g_{\mu\nu}^{(5)} \left[-3\frac{a''}{a} - 3\left(\frac{a'}{a}\right)^2 \right] \\ G_{y\nu} &= 0 \\ G_{yy} &= g_{yy}^{(5)} \left[-6\left(\frac{a''}{a}\right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde las primas indican derivadas respecto a y . La métrica (2.12) es solución de las ecuaciones de Einstein:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= 8\pi G_{(5)}\Lambda g_{\mu\nu}^{(5)} + 8\pi G_{(5)}\sigma g_{\mu\nu}^{(5)}\delta(y) \\ G_{y\nu} &= 0 \\ G_{yy} &= 8\pi G_{(5)}\Lambda g_{yy}^{(5)} \end{aligned} \quad (2.15)$$

siempre que se cumpla la ecuación (2.13) y

$$k^2 = -\frac{4\pi}{3}G_{(5)}\Lambda \quad (2.16)$$

que es equivalente a la ecuación (2.11). Notese que la ecuación (2.13) viene del requerimiento

$$-3\frac{[a']}{a}g_{\mu\nu}^{(5)} = 8\pi G_5\sigma g_{\mu\nu}^{(5)}, y = 0 \quad (2.17)$$

donde $[a']$ es el brinco de a' en $y = 0$. Este requerimiento es la condición de Israel para este caso.

La métrica (2.12) es no factorizable; a diferencia de las métricas en los escenarios Kaluza-Klein no corresponde a un producto de la métrica cuatro dimensional de Minkowski y las dimensiones extra compactas. Esta métrica corresponde a dos partes del espacio anti-de Sitter de radio $1/k$ unidas en $y = 0$, es decir, a lo largo de la membrana. La hipersuperficie cuatro dimensional $y = 0$ es plana y la métrica inducida en la membrana es la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$.

Como consecuencia de la invariancia ante transformaciones de Poincaré cuatro dimensionales de la métrica (2.12), los campos en este escenario pueden descomponerse en ondas planas cuatro dimensionales,

$$\phi \propto \exp(ip_\mu x^\mu) \phi_p(y). \quad (2.18)$$

El cuatro-momento p_μ , coincide con el momento físico sobre la membrana, pero para un observador en $y \neq 0$, el momento físico cuatrodimensional es mayor,

$$p_\mu^{fis}(y) = \frac{1}{a(y)} p_\mu = \exp(k|y|) p_\mu. \quad (2.19)$$

Existen diferentes modelos que usan la ecuación (2.12) como solución. Uno de ellos [8] hace que las dimensiones extra sean compactas introduciendo dos membranas (Modelo de Randall-Sundrum I ó RS1): una con tensión positiva σ en $y = 0$ y la otra con tensión negativa ($-\sigma$) localizada a una distancia y_c . La métrica (2.12) es solución de las ecuaciones de Einstein en presencia de las dos membranas, la dimensión extra es compacta, y toma valores en el intervalo $y = 0$ a $y = y_c$.

Considerese ahora pequeñas perturbaciones para la métrica (2.12),

$$g_{AB} = g_{AB}^{(Randall-Sundrum)} + h_{AB}, \quad (2.20)$$

eligiendo

$$g_{55} = -1, \quad g_{5\mu} = 0, \quad (2.21)$$

las perturbaciones de la métrica toman la forma

$$ds^2 = [a^2(y)\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x, y)] dx^\mu dx^\nu - dy^2. \quad (2.22)$$

Si la única fuente de campo gravitacional es la constante cosmológica y las dos membranas, se puede elegir el sistema coordenado (fijar la norma) de tal forma que $h_{\mu\nu}$ es transversal y sin traza

$$\partial_\nu h_\mu^\nu = 0, \quad h_\mu^\mu = 0. \quad (2.23)$$

Para toda perturbación en este marco de referencia las posiciones de las membranas permanecen en $y = 0$ y $y = y_c$, por lo que todas las componentes de $h_{\mu\nu}$ obedecen la misma ecuación (omitiendo subíndices)

$$h'' - 4k^2 h - \frac{m^2}{a^2(y)} h = 0, \quad (2.24)$$

donde

$$m^2 = \eta^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \quad (2.25)$$

es la masa cuatro dimensional de la perturbación. Las condiciones de unión entre las membranas son

$$h' + 2kh = 0 \text{ en } y = 0, y = y_c. \quad (2.26)$$

Las ecuaciones (2.24) y (2.26) determinan el espectro KK para la masa de los gravitones, donde la masa esta definida con respecto a la membrana de tensión positiva, ecuación (2.19). Existe un modo cero, $m^2 = 0$, cuya función de onda sin normalizar es

$$h_0(y) = \exp(-2ky). \quad (2.27)$$

Este modo describe la gravedad usual en cuatro dimensiones. A diferencia de las teorías tipo Kaluza-Klein con geometría factorizable, la función de onda correspondiente al modo cero depende de y de forma no trivial y decrece en la dirección $y = y_c$. Esto sugiere que el acoplamiento gravitacional en la membrana de tensión negativa es débil comparado con el de la membrana con tensión positiva.

Soluciones de la ecuación (2.24) sujetas a las condiciones de frontera (2.26) en $y = 0$ (sin considerar $y = y_c$) son, sin normalizar

$$\begin{aligned} h_m(y) = & N_1 \left(\frac{m}{k} \right) J_2 \left(\frac{m}{k} \exp(ky) \right) \\ & - J_1 \left(\frac{m}{k} \right) N_2 \left(\frac{m}{k} \exp(ky) \right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

donde N y J son las funciones de Bessel. El espectro de masas es determinado por las condiciones de frontera (2.26) en $y = y_c$, y el espaciamiento entre niveles

se comporta como:

$$\Delta m \sim k \exp(-ky_c) \quad (2.29)$$

La interpretación fenomenológica de este resultado depende de si las partículas del modelo estándar están ligadas a la membrana de tensión positiva o a la de tensión negativa.

Una opción es que la materia convencional resida en la membrana de tensión positiva. Para este caso la constante de Newton cuatro dimensional efectiva es

$$G_{(4)} = G_{(5)} k \frac{1}{1 - \exp(-2ky_c)}. \quad (2.30)$$

Si no existe una diferencia importante entre el orden de magnitud de la escala fundamental de la gravedad y el inverso del radio de anti-de-Sitter k , la escala fundamental debe ser del orden de M_{pl} .

A grandes distancias la gravedad es cuatro dimensional como puede verse en la ecuación (2.30) considerando el límite $y_c \rightarrow \infty$, la constante de Newton cuatro dimensional tiende a un valor finito

$$G_{(4)} = G_{(5)} k. \quad (2.31)$$

Esto es equivalente a considerar que la membrana con tensión negativa ha sido removida; la gravedad sigue estando localizada aunque solamente existe una membrana con tensión positiva, y el tamaño de las dimensiones extra es infinito. En este modelo, llamado RS2, la materia reside en la membrana con tensión positiva y siente una ley de gravedad cuatro dimensional debido al intercambio de gravitones en el modo cero (2.27), el potencial gravitacional es

$$V(r) = -\frac{G_{(4)}}{r} \left(1 + \frac{const}{k^2 r^2} \right). \quad (2.32)$$

La corrección a la ley de Newton en la ecuación (2.32) es despreciable a distancias que excedan el radio de anti-de-Sitter k^{-1} .

En el modelo RS2, es posible que las partículas escapen a las dimensiones extra; para los gravitones, esto puede interpretarse como excitaciones de los modos KK cuando se dirigen hacia $y \rightarrow \infty$.

Otras partículas también pueden abandonar la membrana, por ejemplo, los fermiones pueden abandonar la membrana si tienen suficiente energía aún en el caso de localización vía otros mecanismos y en ausencia de gravedad.

Para ilustrar como las partículas masivas pueden escapar de la membrana en RS2 considérense las geodésicas que corresponden a este modelo [10]:

$$\ddot{x}^\mu - k \operatorname{sign}(y) \dot{x}^\mu \dot{y} = 0 \quad (2.33)$$

$$\ddot{y} - \frac{k}{2} \operatorname{sign}(y) e^{-k|y|} = 0 \quad (2.34)$$

la ecuación (2.34) puede reescribirse como

$$\ddot{y} = -\frac{d}{dy} V_{RS}(y) \quad (2.35)$$

con

$$V_{RS} = \frac{1}{2} e^{-k|y|} \quad (2.36)$$

observándose que las partículas no se mueven en forma estable en la membrana y pueden escapar a la dimensión extra.

Si la métrica es del tipo anti-de-Sitter este proceso de escape a dimensiones extra puede suceder a bajas energías. La razón es que energías que son bajas, medidas desde la membrana, resultan altas a mayores distancias z . Bajas energías en la membrana resultan en altas energías lejos de la membrana.

Para ilustrar el escape a dimensiones extra, considerense las funciones de onda para un campo escalar en presencia de la membrana, con la acción

$$S_\phi = \int d^4x dy \sqrt{g} \left[\frac{1}{2} g^{AB} \partial_A \phi \partial_B \phi - \frac{1}{2} V(y) \phi^2 \right], \quad (2.37)$$

donde $x^A = (x^\mu, y)$ son las coordenadas del espacio tiempo cinco-dimensional.

Los efectos de la membrana estan codificados en el potencial $V(y)$, que se supone tiende a una constante positiva (posiblemente diferente de cero) cuando $y \rightarrow \infty$.

Si apagamos la gravedad, el campo ϕ obedece la ecuación de Klein-Gordon

$$-\partial_\mu^2 \phi + \partial_y^2 \phi - V(y) = 0. \quad (2.38)$$

El espectro para la masa cuatro dimensional esta determinado por el potencial $V(y)$,

$$p_\mu p^\mu \equiv m^2 \phi = [-\partial_y^2 + V(y)]\phi. \quad (2.39)$$

Un caso interesante es cuando el operador del miembro derecho de esta ecuación tiene modos discretos los cuales corresponden a partículas atrapadas en la membrana. El espectro continuo empieza en $m^2 \mapsto V(\infty)$.

Cuando se incluye la gravedad la situación cambia. La acción que corresponde a la métrica (2.12) es

$$S_\phi = \int d^4x dy a^4 \left[\frac{1}{a^2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} (\partial_y \phi)^2 - \frac{1}{2} V(y) \phi^2 \right], \quad (2.40)$$

donde $a(y) = \exp(-k|y|)$. Como a^{-2} crece para y grandes, el primer término en la integral de la ecuación (2.40) domina sobre el término del potencial, y los modos KK continuos empiezan desde cero.

La ecuación de eigenvalores para la masa cuatro dimensional ahora es

$$\frac{1}{a^4} \partial_y (a^4 \partial_y \phi) - V(y) \phi + \frac{m^2}{a^2} \phi = 0 \quad (2.41)$$

Para valores grandes de y , el segundo término es despreciable comparado con el tercero. Esto significa que el potencial se modifica y tiende a cero cuando $|y| \rightarrow \infty$. Las funciones de onda para $y \rightarrow \infty$ son

$$\phi(y) = \text{const} \cdot \exp\left(\frac{3ky}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{m}{k} \exp(ky) + \phi_m\right) \quad (2.42)$$

El punto es que el espectro continuo comienza desde $m^2 = 0$, independientemente de la forma de $V(z)$. Como no hay estados ligados encajados en el

continuo, los estados ligados de la ecuación (2.39) se convierten en resonancias, estados cuasi-ligados con una función de onda que tiene un ancho finito de decaimiento, es decir, tienen probabilidad finita de escapar de la membrana hacia $y \rightarrow \infty$. Esta probabilidad depende del potencial $V(y)$ que mantiene a las partículas ligadas a la membrana.

Por otro lado, en los escenarios con dimensiones extra pueden existir violaciones a la invariancia de Lorentz y estas pueden tener consecuencias fenomenológicas, un ejemplo de las de los efectos que se tendrían debido a la violación de la invariancia de Lorentz, en energías relativamente bajas, es que las relaciones de dispersión se modifiquen, cambiando la relación usual $\omega^2 = m^2 + p^2$ (donde ω y p son la frecuencia y el momento de la partícula en la membrana).

Otros escenarios

En este trabajo adoptamos el escenario de Visser [1], considerado originalmente como una clase exótica del modelo de Kaluza-Klein en cinco dimensiones en el cual las dimensiones extra no son compactas ni de volumen finito. Las partículas están atrapadas en una membrana de cuatro dimensiones debido a la gravedad. Este escenario particular se obtiene resolviendo las ecuaciones de Einstein en cinco dimensiones que contienen una constante cosmológica y un campo eléctrico que apunta en la quinta dimensión. En el siguiente capítulo describiremos en detalle este escenario.

2.2. Algunos posibles efectos físicos de más de cuatro dimensiones

Los modelos teóricos multidimensionales que proponen una escala para la gravedad del orden de TeV, han motivado trabajo de investigación orientado a la posibilidad de detectar experimentalmente dimensiones extra. En seguida, mencionamos algunas de las situaciones más destacadas donde esto podría

ocurrir.

Rayos cósmicos [11]-[12]

Los aceleradores de partículas actuales y los que vendrán en un futuro próximo pondrán a prueba el tamaño de las dimensiones extra acotando por debajo la escala de la gravedad a energías del orden de 30TeV . También está la posibilidad de estudiar las interacciones de alta energía de los rayos cósmicos con protones en la atmósfera terrestre, siendo las interacciones más energéticas que se pueden estudiar hoy en día aquellas con energías del orden de 10^4TeV [11].

Por otro lado los rayos cósmicos de alta energía podrían probar la existencia de dimensiones extra y que la escala fundamental de Planck sea del orden de TeV . La idea aquí se basa en el estudio de la sección transversal de lluvias de rayos cósmicos [12].

En un modelo donde la escala fundamental es del orden de TeV , como se postula en modelos que consideran dimensiones extra y membranas cuatro-dimensionales, explora la posibilidad de que la naturaleza de los rayos cósmicos se debería principalmente a las interacciones gravitacionales entre neutrinos y nucleones de la atmósfera junto con la formación de micro hoyos negros que se producirían en estas colisiones. Los hoyos-negros se evaporarían rápidamente por emisión de partículas en la membrana.

Para las interacciones gravitacionales es fundamental que la energía característica medida en el centro de masas \sqrt{s} supere la escala fundamental, siendo el intercambio de gravitones la interacción dominante. Este es el caso para los nucleones de la atmósfera que colisionan con neutrinos con energías $E_\nu \sim 10^{11}\text{GeV}$ ($\sqrt{s} \sim 10^6\text{GeV}$) si la escala fundamental es de alrededor de 1TeV . Si el parámetro de impacto b es suficientemente pequeño comparado con el radio de compactificación, las dimensiones extra pueden ser tratadas como no

compactas. En este régimen se pueden probar las dimensiones extra simplemente midiendo las interacciones gravitacionales.

R. Emparan y R. Rattazzi [12] mencionan que ni las interacciones neutrino-nucleón reguladas por gravitones multidimensionales, ni la producción de micro hoyos negros en los modelos TeV , pueden explicar lluvias de rayos cósmicos observadas con energías hasta de $5 \times 10^{10} GeV$. Sin embargo, parece ser que lluvias horizontales dejan abierta esta posibilidad.

Micro Hoyos negros [13]

Si la gravedad está caracterizada por una escala de 1TeV entonces en un futuro cercano se podría explorar la gravedad cuántica en un acelerador de partículas como LHC (Large Hadron Collider). Si $M \sim (TeV)$ podrían crearse micro hoyos negros, en la medida que pudieran ser de gran tamaño podrían alcanzar la membrana que representa el universo en que vivimos y servir de herramienta para explorar aspectos de las dimensiones extra.

El escenario que estudiaremos en esta tesis no es realista sino un modelo sencillo donde poder analizar de manera más directa algunos efectos. Entonces los efectos físicos mencionados en esta sección no pueden ser considerados directamente en nuestro análisis.

En los capítulos siguientes, nos enfocamos en el escenario de Visser y la propagación de una partícula escalar en un subespacio o membrana.

Capítulo 3

Partícula escalar neutra en el universo de Visser

3.1. Universo de Visser

En este escenario se tiene un espacio de cinco dimensiones $M_4 \times \mathbb{R}$, donde M_4 es una membrana que representa el espacio-tiempo usual de cuatro dimensiones. Adicionalmente hay un campo eléctrico que apunta en la dirección de la dimensión extra.

El escenario de Visser es solución de las ecuaciones de campo de Einstein-

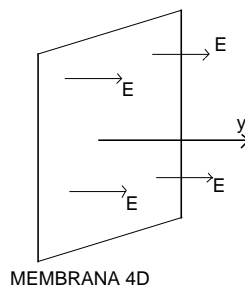


Figura 3.1: **Universo de Visser** . Consiste de una membrana cuatro dimensional que representa el espacio tiempo usual más una quinta dimensión y . Adicionalmente hay un campo eléctrico que apunta en la dirección y .

Maxwell con constante cosmológica, es decir,

$$G_{AB} = \Lambda g_{AB} + T_{AB} \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_A (\sqrt{-g} F^{AB}) = 0, \quad (3.2)$$

donde Λ es la constante cosmológica y T_{AB} el tensor de energía momento del campo electromagnético

$$\begin{aligned} T_{AB} &= -2 \frac{\delta L}{\delta g^{AB}} + g_{AB} L \\ &= F_{AC} F_B{}^C - \frac{1}{4} g_{AB} (F_{CD} F^{CD}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$(3.4)$$

con

$$L = -\frac{1}{4} F_{AB} F^{AB} \quad (3.5)$$

$$F_{AB} = \partial_A A_B - \partial_B A_A. \quad (3.6)$$

A y F son es el potencial vectorial y el tensor de campo electromagnético, respectivamente.

Para obtener el escenario de Visser a partir de estas ecuaciones de campo se propone la métrica [1]

$$ds^2 = -e^{2\phi(y)} (dt)^2 + d\vec{x} \cdot d\vec{x} + (dy)^2, \quad (3.7)$$

que produce el tensor de Ricci

$$R_0{}^0 = R_5{}^5 = \phi'' - \phi' \phi' = -e^{-\phi} (e^\phi)'' , \quad (3.8)$$

con las demás componentes igual a cero. Para el tensor de Einstein se obtiene

$$G^{11} = G^{22} = G^{33} = +e^{-\phi} (e^\phi)'' \quad (3.9)$$

y las demás componentes son cero. Las ecuaciones de Einstein (3.1) se reducen a

$$(e^\phi)'' = (\Lambda + T_{11}) e^\phi \quad (3.10)$$

y también las siguientes componentes para el tensor de energía momento del campo electromagnético:

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -\Lambda = T_5^5 \\ T_{11} &= T_{22} = T_{33} \end{aligned} \quad (3.11)$$

con las otras componentes igual a cero.

Para determinar la configuración del campo electromagnético escogemos un potencial vectorial de la siguiente forma:

$$A_0 = a(y); \quad A_1 = A_2 = A_3 = A_5 = 0. \quad (3.12)$$

Esto implica un campo eléctrico en dirección de la dimensión extra: $F_{05} = -F_{50} = -a'$. Por otro lado:

$$F_{AB}F^{AB} = -2e^{-2\phi}(a')^2. \quad (3.13)$$

Definiendo

$$E = e^{-\phi} a', \quad (3.14)$$

se obtiene para el tensor de energía momento del campo electromagnético

$$\begin{aligned} T_0^0 &= T_5^5 = -\frac{1}{2}E^2 \\ T_1^1 &= T_2^2 = T_3^3 = \frac{1}{2}E^2 \end{aligned} \quad (3.15)$$

Es de hacer notar que la traza del tensor de energía momento del campo electromagnético no es cero a diferencia del caso en cuatro dimensiones. El campo electromagnético en cinco dimensiones no es el campo electromagnético usual. Es un hecho bien conocido [14] que mientras las ecuaciones de Maxwell en cuatro dimensiones son invariantes conformes esto no sucede en más dimensiones. Más importante es notar: $T^{AB}{}_{;B} = 0$ y por tanto no hay ningún conflicto con la conservación de energía momento.

Las ecuaciones de campo (3.10) se reducen a

$$\Lambda = \frac{1}{2}E^2, \quad (e^\phi)'' = E^2(e^\phi) \quad (3.16)$$

y su solución es

$$e^\phi = \cosh(Ey), \quad a = \sinh(Ey). \quad (3.17)$$

Observese en (3.16) que E resulta constante. Este resultado también puede obtenerse usando (3.17) en (3.2):

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_A(\sqrt{-g}F^{AB}) = 0 \rightarrow \partial_5(e^\phi[-e^{-\phi}a']) \rightarrow \partial_5(E) = 0, \quad (3.18)$$

3.2. Movimiento de una partícula clásica

Es posible entender el confinamiento clásico de una partícula debido a la gravedad en el modelo de Visser. En esta sección describimos este efecto.

Se observa que la métrica (3.7) no tiene dependencia en las coordenadas espaciales \vec{x} ni en el tiempo por lo que el cuadvivector de momento ($p^0 e^{2\phi}, \vec{p}$) es una constante de movimiento. Esto puede verse si escribimos la ecuación geodésica de la siguiente forma

$$p^\alpha p_{\beta;\alpha} = 0, \quad (3.19)$$

usando la identidad $p^\alpha \partial_\alpha = m \frac{d}{d\tau}$ podemos reescribir (3.19) como

$$m \frac{dp_\beta}{d\tau} = \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma p^\alpha p_\gamma. \quad (3.20)$$

Considerando que

$$\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma p^\alpha p_\gamma = \frac{1}{2} g_{\nu\alpha,\beta} p^\nu p^\alpha, \quad (3.21)$$

la ecuación geodésica puede entonces escribirse como

$$m \frac{dp_\beta}{d\tau} = \frac{1}{2} g_{\nu\alpha,\beta} p^\nu p^\alpha. \quad (3.22)$$

puede observarse que el momento p_β se conserva si la métrica no tiene dependencia en esa dirección.

El momento de una partícula masiva en cinco dimensiones satisface:

$$p_A p^A = -M_5^2 \quad (3.23)$$

usando la métrica (3.7) vemos que

$$p^5 = \sqrt{(p^0)^2 e^{-2\phi} - (M_5)^2 - \vec{p}^2} \quad (3.24)$$

Cualquier partícula clásica esta confinada en el espacio-tiempo por el potencial $\phi(y)$ si se cumple

$$p^0 < \sqrt{(M_5)^2 + \vec{p}^2} \sup(e^\phi) \quad (3.25)$$

La no observación experimental de una dimensión extra implica que e^ϕ crece rápidamente, posiblemente en una escala del orden de la masa de Planck.

Alternativamente, podemos describir el movimiento de la partícula escribiendo la geodésica de la siguiente forma

$$\ddot{X}^A + \Gamma_{BC}^A \dot{X}^C \dot{X}^D = 0. \quad (3.26)$$

En nuestro caso la ecuación geodésica conduce a,

$$\ddot{t} + 2\phi' \dot{y} \dot{t} = 0, \quad (3.27)$$

$$\ddot{x}^i = 0, \quad (3.28)$$

$$\ddot{y} + \phi' e^{2\phi} \dot{t}^2 = 0. \quad (3.29)$$

donde las derivadas son respecto a un parámetro afín λ . Las trayectorias en el espacio tiempo usual son líneas rectas como lo indica la ecuación (3.28). Si reescribimos la ecuación (3.29) cómo

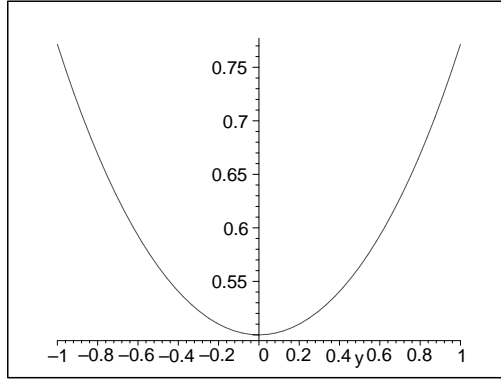


Figura 3.2: Potencial $V(y) = \frac{1}{2}\cosh(Ey)$. En $y = 0$, donde yace nuestra membrana 4D, se encuentra un mínimo estable. Se usan unidades con $E = 1$.

$$\ddot{y} = -\frac{d}{dy}V(y) \quad (3.30)$$

con $t = \lambda + \lambda_0$, considerando $e^{2\phi} = \cosh(Ey)$, entonces $V(y) = \frac{1}{2}\cosh(Ey)$. La gráfica del potencial $V(y)$ puede verse en la figura 3.2. La partícula está localizada en la membrana cuatro dimensional con $y = 0$.

3.3. Partícula escalar neutra

Desde el punto de vista de la mecánica cuántica, la partícula escalar neutra obedece la ecuación de Klein-Gordon

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_A(\sqrt{-g}g^{AB}\partial_B\Psi) = (M_5)^2\Psi. \quad (3.31)$$

Usando la métrica (3.7) para este escenario, (3.31) se reduce a

$$[-e^{-2\phi}\partial_{00} + \partial_{ii} + \partial_{55} + \phi'\partial_5]\Psi = (M_5)^2\Psi. \quad (3.32)$$

Proponiendo una solución en separación de variables de la forma

$$\Psi = \exp[-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})]e^{-\frac{\phi}{2}}\eta(y), \quad (3.33)$$

que puede interpretarse como una partícula que se mueve libremente en el espacio tiempo 4D, y sustituyendo en la ecuación (3.32) obtenemos una ecuación de eigenvalores

$$\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + V(\omega, y) \right] \eta(\omega, y) = \varepsilon(\omega) \eta(\omega, y). \quad (3.34)$$

Aquí

$$V(\omega, y) = \frac{1}{4} \phi'' + \frac{1}{8} \phi' \phi' - \frac{1}{2} \omega^2 e^{-2\phi}, \quad (3.35)$$

$$\varepsilon = -\frac{M^2 + \vec{k}^2}{2}. \quad (3.36)$$

En la ecuación (3.34) adoptamos una convención distinta a Visser [1] considerando ε negativo. Usando (3.17) la ecuación de eigenvalores toma la forma:

$$H\eta = \varepsilon\eta$$

$$H = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{8} E^2 - \left(\frac{1}{2} \omega^2 - \frac{1}{8} E^2 \right) \sec h^2(Ey) \quad (3.37)$$

Este potencial se conoce como potencial de Rosen-Morse. Haciendo los cambios

$$\frac{\hbar}{\mu} = 1, \quad V_0 \rightarrow \frac{1}{2} \omega^2 - \frac{1}{8} E^2, \quad b \rightarrow \frac{1}{E}, \quad (3.38)$$

podemos comparar con la ecuación (B.14) del apéndice B. Los eigenvalores son los siguientes

$$\varepsilon_n = -\frac{1}{2} \left\{ \left(\omega - \left[n + \frac{1}{2} \right] E \right)^2 - \left(\frac{E}{2} \right)^2 \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.39)$$

El número de niveles discretos de energía esta dado por el entero más grande N que satisface la siguiente desigualdad:

$$N < \frac{\omega}{E} - 1. \quad (3.40)$$



Figura 3.3: **a)** En el escenario usual de cuatro dimensiones la partícula escalar esta totalmente localizada en la membrana , **b)** En un escenario con una quinta dimensión adicional la partícula se mueve en dirección de la membrana pero su cuerpo abarca las cinco dimensiones, su función de onda tiene un máximo en la membrana y decae en dirección de la dimensión extra.

Vemos que el escenario de Visser da lugar a estados ligados para una partícula escalar neutra: la partícula esta localizada en la membrana 4D en $y = 0$, sobre la cual se mueve libremente.

3.4. Relaciones de dispersión

Con el objetivo de estudiar efectos de dimensiones extra en la propagación de una partícula cuántica nos enfocamos en las relaciones de dispersión. De este modo si existe algún efecto podría identificarse como una modificación de la velocidad de propagación de la partícula.

Universo plano de Minkowski-4D

En el universo plano de cuatro dimensiones de Minkowski una partícula escalar neutra obedece la ecuación de Klein-Gordon

$$(-\partial_{tt} + \partial_{ii})\Psi = M_4^2\Psi \quad (3.41)$$

con solución

$$\Psi = C e^{-i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{x})}, \quad C = cte. \quad (3.42)$$

Sustituyendo en la ecuación de Klein-Gordon obtenemos las relaciones de dis-

persión usuales

$$k(\omega) = \sqrt{\omega^2 - M_4^2}. \quad (3.43)$$

Las relaciones de dispersión expresan la magnitud del vector de onda $k = |\vec{k}|$, como función de ω . Esta dependencia se hereda en la velocidad de grupo

$$v_g = \frac{1}{\frac{dk(\omega)}{d\omega}} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\omega^2 - M_4^2} \quad (3.44)$$

Universo de Visser 5D

Para la partícula escalar neutra en el escenario de Visser tenemos que combinando las ecuaciones (3.39) y (3.36) encontramos las relaciones de dispersión correspondientes

$$k(\omega) = \sqrt{\left[\omega - \left(n + \frac{1}{2}\right) E\right]^2 - (M_4)^2}, \quad (3.45)$$

donde definimos la 4-masa como:

$$(M_4)^2 = (M_5)^2 + \left(\frac{E}{2}\right)^2. \quad (3.46)$$

Comparando con (3.43) se observa un corrimiento.

En el siguiente capítulo extenderemos el análisis de las relaciones de dispersión al caso en que la partícula tiene carga eléctrica. Veremos que se producirá un corrimiento adicional en las relaciones de dispersión debido a la carga eléctrica.

Capítulo 4

Partícula escalar cargada en el universo de Visser

En este capítulo se reemplaza a la partícula escalar neutra por una partícula escalar cargada, para posteriormente calcular las relaciones de dispersión que caracterizan su propagación.

4.1. Partícula escalar cargada

Para una partícula escalar cargada, usamos la generalización de la ecuación de Klein-Gordon para espacios curvos con acoplamiento electromagnético

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}(\partial_A - iqA_A) [\sqrt{-g}g^{AB}(\partial_B - iqA_B)\Psi] = (M_5)^2\Psi. \quad (4.1)$$

Sustituyendo (3.7) y (3.12) resulta

$$[-e^{-2\phi}(\partial_0 - iqA_0)^2 + \partial_{ii} + \partial_{55} + \phi'\partial_5]\Psi = (M_5)^2\Psi. \quad (4.2)$$

Es conveniente reescribir (4.2) en la forma

$$[-e^{-2\phi}\partial_{00} + \partial_{ii} + \partial_{55} + \phi'\partial_5 + K]\Psi = (M_5)^2\Psi \quad (4.3)$$

donde

$$K = -e^{-2\phi}(2iqa\partial_0 + q^2a^2). \quad (4.4)$$

Considerando nuevamente que la partícula se mueve libremente en la membrana 4D proponemos

$$\Phi = \exp[-i(\omega - \vec{k} \cdot \vec{x})]e^{-\frac{\phi}{2}}\chi(y) \quad (4.5)$$

como solución a la ecuación de Klein-Gordon (4.3). Obtenemos así una ecuación tipo Schrödinger

$$\begin{aligned} (H + H_1)\chi &= \varepsilon \chi, & \varepsilon &= -\frac{M^2 + \vec{k}^2}{2} \\ H_1 &= -e^{-2\phi}(qa\omega + \frac{q^2 a^2}{2}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Aquí H representa el hamiltoniano que corresponde al potencial de Rosen-Morse (3.37) que en el capítulo anterior se vió está asociado a la partícula neutra. Para la partícula escalar cargada se obtiene un término adicional H_1 debido a la presencia de la carga q .

A continuación calculamos las relaciones de dispersión utilizando tanto un enfoque perturbativo como un análisis de solución exacta. El enfoque perturbativo tiene restricciones para los valores que puede tener ω .

4.2. Relaciones de dispersión con teoría de perturbaciones

Utilizamos ahora teoría de perturbaciones, considerando H_1 como perturbación de H . Los eigenvalores de nuestro problema son de la forma

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n^{(neutra)} + \delta\varepsilon_n(q, E, \omega) \quad (4.7)$$

donde $\varepsilon_n^{(neutra)}$ son los eigenvalores para la partícula neutra (3.39), y a primer orden las correcciones tienen la forma

$$\delta\varepsilon_n(q, E, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \chi_n^* \widehat{H}_1 \chi_n. \quad (4.8)$$

Usando (3.17) reescribimos H_1 como

$$H_1 = -q\omega \sinh(Ey) [\cosh(Ey)]^{-2} - \frac{q^2}{2} [\sinh(Ey)]^2 [\cosh(Ey)]^{-2} \quad (4.9)$$

Calcularemos las relaciones de dispersión para la partícula escalar cargada correspondientes al estado base y a dos estados excitados.

4.2.1. Estado base

Para el estado base la función de onda correspondiente al potencial de Rosen-Morse es

$$\chi_0 = C_0 (\cosh Ey)^{-2\sigma} \quad (4.10)$$

donde de acuerdo con (3.38) y (B.3), σ es

$$\sigma = \frac{1}{2} \frac{\omega}{E} - \frac{1}{4}. \quad (4.11)$$

La constante de normalización C_0 es

$$\begin{aligned} (C_0)^{-2} &= \int_{-\infty}^{\infty} dy [\cosh(Ey)]^{-4\sigma} \\ &= \frac{1}{E} \frac{\Gamma(\frac{\omega}{E} - \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{\omega}{E})}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

donde se usó (C.2). Siguiendo la ecuación (4.8) obtenemos

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_0 &= -C_0^2 q\omega \int_{-\infty}^{\infty} dy [\cosh(Ey)]^{-4\sigma+2} \sinh(Ey) \\ &\quad - \frac{C_0^2 q^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} dy [\cosh(Ey)]^{-(2\sigma+4)} [\sinh(Ey)]^2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Consultando el apéndice D, la condición para la convergencia de las integrales (D.4) implica $\sigma > \frac{1}{2}$, y el resultado es

$$\delta\varepsilon_0 = -\frac{C_0^2 q^2 \sqrt{\pi} \Gamma(1+2\sigma)}{2 \sigma \Gamma(2\sigma + \frac{3}{2})}. \quad (4.14)$$

Usando (4.11) tenemos en función de ω

$$\delta\varepsilon_0 = -\frac{C_0^2 q^2 \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{\omega}{E} + \frac{1}{2})}{2 (2\frac{\omega}{E} - 1) \Gamma(\frac{\omega}{E} + 1)}, \quad (4.15)$$

y la condición de convergencia es $\omega > \frac{1}{2}$.

La relación de dispersión para la partícula cargada es

$$\frac{1}{2}(M_5^2 + \vec{k}_n^2) = \frac{1}{2} \left[\left(\omega - [n + \frac{1}{2}]E \right)^2 - \left(\frac{E}{2} \right)^2 \right] - \delta\varepsilon_n \quad (4.16)$$

resolviendo para k :

$$k_n = \sqrt{(k_n(\omega)^{neutra})^2 - 2\delta\varepsilon_n} \quad (4.17)$$

donde $k_n^{(neutra)}$ se refiere a la partícula no cargada (3.45). La velocidad de grupo para la partícula cargada es

$$v_n^g = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \sqrt{(k_n(\omega)^{neutra})^2 - 2\delta\varepsilon_n}} \quad (4.18)$$

que para el estado base toma tiene la siguiente forma

$$v_n^g = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega E - M^2 - 2\delta\varepsilon_n}} \quad (4.19)$$

Los resultados se muestran gráficamente en la figura 4.7 . Puede apreciarse un cambio en la forma de las relaciones de dispersión para la partícula escalar cargada en el estado base.

La gráfica 4.1 representa el cociente $\delta\varepsilon_0/\epsilon_0^{(neutra)}$ mostrando gráficamente el intervalo donde nuestros resultados perturbativos son confiables.

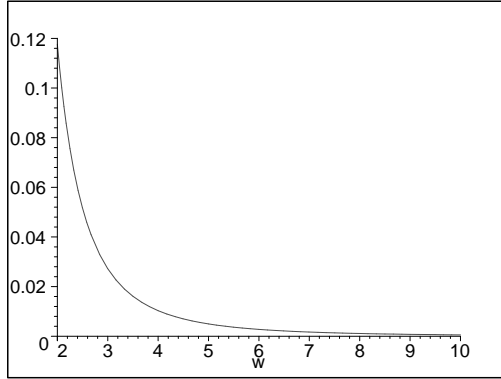


Figura 4.1: **Estado base.** La curva representa el cociente $\delta\epsilon_0/\epsilon_0^{(neutral)}$ para el estado base, mostrando que los resultados de nuestro metodo perturbativo son confiables. Consideramos $q = E = M_5 = 1$.

4.2.2. Primer estado excitado

En el caso del primer estado excitado se procede como en el caso anterior, la eigenfunción y la corrección al eigenvalor son

$$\eta_1 = iC_1 \sinh(Ey) (\cosh(Ey))^{-2\sigma} \quad (4.20)$$

$$(C_1)^{-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{E} \left(3 - 2\frac{\omega}{E}\right)^{-1} \frac{\Gamma(\frac{\omega}{E} - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{\omega}{E})} \quad (4.21)$$

de la misma manera que como en el caso del estado base, usamos la ecuación (4.8) y obtenemos para este caso

$$\delta\varepsilon_1 = -\frac{C_1^2 q^2}{16} \frac{3\sqrt{\pi}}{(1-2\sigma)\sigma} \frac{\Gamma(2\sigma+1)}{\Gamma(2\sigma+\frac{3}{2})}. \quad (4.22)$$

Las integrales involucradas (4.8) convergen para $\omega > \frac{3}{2}$. Usando (4.11) escribimos el resultado en función de ω

$$\delta\varepsilon_1(\omega) = -\frac{C_1^2 q^2}{2} \frac{3\sqrt{\pi}}{(2\frac{\omega}{E}+1)(2\frac{\omega}{E}-1)} \frac{\Gamma(\frac{\omega}{E} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{\omega}{E} + 1)}. \quad (4.23)$$

Las relaciones de dispersión correspondientes al primer estado excitado resultan

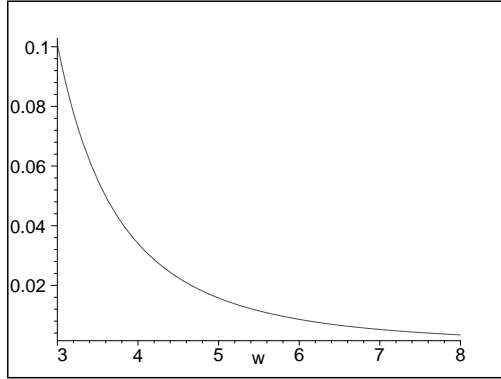


Figura 4.2: **Primer estado excitado.** La curva representa el cociente $\delta\epsilon_1/\epsilon_1^{(neutra)}$ para el primer estado excitado. Consideramos $q = E = M_5 = 1$.

$$k_1 = \sqrt{\omega^2 - 3\omega E + 2E^2 - M^2 - 2\delta\epsilon_1} \quad (4.24)$$

y la velocidad de grupo correspondiente es

$$v_1^g = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \sqrt{\omega^2 - 3\omega E + 2E^2 - M^2 - 2\delta\epsilon_1}}. \quad (4.25)$$

En la figura (4.8) se comparan la velocidad de grupo para los casos de la partícula neutra y la partícula cargada en este primer estado excitado. La figura (4.2) muestra que el metodo perturbativo es confiable.

4.2.3. Tercer estado excitado

Es de interés estudiar el tercer estado excitado ya que en este caso, a diferencia de los anteriores, el primer término que contiene a ω en (4.6) contribuye a la corrección de ϵ .

Para el tercer estado excitado se procede como los casos anteriores. La función de onda correspondiente es

$$\eta_3 = ic_3 \sinh(Ey) [\cosh(Ey)]^{-2\sigma}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{ic_3}{2}(2\kappa - 1)[\text{senh}(Ey)]^2[\cosh(Ey)]^{-2\sigma - 2\kappa - 3} \\
(C_3)^{-2} &= \frac{\sqrt{\pi}}{(3 - 2\omega)E} \frac{\Gamma(\omega - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} - \frac{3}{32} \frac{(2\kappa - 1)^2}{(2\kappa + 1)(\kappa + 1)} \frac{\Gamma(2\kappa + 3)}{2\kappa + \frac{7}{2}} \\
\kappa &= \frac{1}{2} \sqrt{\left(\omega - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Con la restricción $\omega > 4$ para las integrales en la ecuación (4.8) la corrección al eigenvalor tiene la forma

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_3 &= -\frac{3C_3^2 q^2}{8} \frac{\sqrt{\pi}}{(2 - 4\sigma)\sigma} \frac{\Gamma(2\sigma + 1)}{\Gamma(2\sigma + \frac{3}{2})} \\
& - \frac{15C_3^2 q^2}{8} (2\kappa - 1)^2 \frac{\sqrt{\pi}}{(4\kappa + 2)(4\kappa + 4)(4\kappa + 6)} \frac{\Gamma(2\kappa + 4)}{\Gamma(2\kappa + \frac{9}{2})} \\
& + 3C_3^2 \sqrt{\pi} q \omega \frac{(2\kappa - 1)}{(2\sigma + 2\kappa + 1)(2\sigma + 2\kappa + 3)} \frac{\Gamma(\sigma + \kappa + \frac{5}{2})}{\Gamma(\sigma + \kappa + 3)}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Reescribiendo (4.27) en términos de ω queda

$$\begin{aligned}
\delta\varepsilon_3(\omega) &= -\frac{3C_3^2 q^2}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{(3 - 2\omega)(2\omega - 1)} \frac{\Gamma(\omega + \frac{1}{2})}{\Gamma(\omega + 1)} \\
& - \frac{15C_3^2 q^2}{8} (2\kappa - 1)^2 \frac{\sqrt{\pi}}{(4\kappa + 2)(4\kappa + 4)(4\kappa + 6)} \frac{\Gamma(2\kappa + 4)}{\Gamma(2\kappa + \frac{9}{2})} \\
& + 3C_3^2 \sqrt{\pi} q \omega \frac{(2\kappa - 1)}{(\omega + 2\kappa + \frac{1}{2})(\omega + 2\kappa + \frac{5}{2})} \frac{\Gamma(\frac{\omega}{2} + \kappa + \frac{9}{4})}{\Gamma(\omega + \kappa + 11)}.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Las relaciones de dispersión correspondientes resultan en

$$k_3 = \sqrt{\omega^2 - 7\omega E + 12E^2 - M^2 - 2\delta\varepsilon_3} \tag{4.29}$$

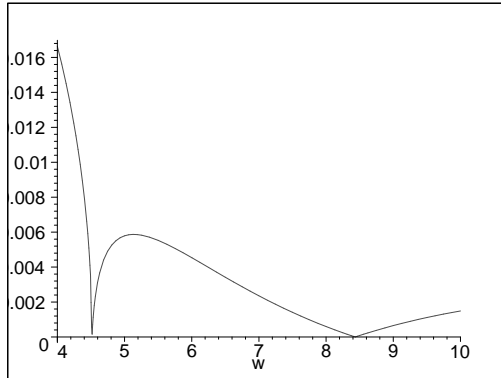


Figura 4.3: **Tercer estado excitado.** La curva representa el cociente $\delta\epsilon_3/\epsilon_3^{(neutra)}$. Consideramos $q = E = M_5 = 1$.

y la velocidad de grupo

$$v_3^g = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \sqrt{\omega^2 - 7\omega E + 12E^2 - M^2 - 2\delta\epsilon_3}} \quad (4.30)$$

Los resultados para este tercer estado excitado se muestran gráficamente en la figura 4.9. La gráfica 4.3 representa el cociente $\delta\epsilon_3/\epsilon_3^{(neutra)}$ para este caso.

4.3. Relaciones de dispersión exactas

En esta sección calculamos las relaciones de dispersión exactas para el problema de la partícula cargada.

El potencial correspondiente a la partícula cargada será el potencial de la partícula neutra más un término adicional debido a la presencia de la carga:

$$V = V_{neutra} + V_q \quad (4.31)$$

de la ecuación (3.37) vemos que la forma del potencial para la partícula neutra es:

$$V_{neutra} = \frac{1}{8}E^2 - \left(\frac{1}{2}\omega^2 - \frac{1}{8}E^2\right) \sec h^2(Ey) \quad (4.32)$$

reescribiendo (4.9) como:

$$V_q = -q\omega \tanh(Ey) \operatorname{sech}(Ey) + \frac{q^2}{2} \operatorname{sech}^2(Ey) - \frac{q^2}{2} \quad (4.33)$$

resulta el siguiente potencial para la partícula cargada:

$$V = \frac{1}{8}E^2 - \frac{q^2}{2} + \left(\frac{q^2}{2} - \frac{\omega^2}{2} + \frac{E^2}{8} \right) \operatorname{sech}^2(Ey) - q\omega \operatorname{sech}(Ey) \tanh(Ey). \quad (4.34)$$

Este potencial se conoce como potencial de Morse y se encuentra en la referencia [15] escrito de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} V^- = & A^2 + \left(B^2 - A^2 - \frac{A\alpha\hbar}{\sqrt{2m}} \right) \operatorname{sech}^2(\alpha y) \\ & + B \left(2A + \frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2m}} \right) \operatorname{sech}(\alpha y) \tanh(\alpha y). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Los eigenvalores de energía correspondientes son:

$$E_n = A^2 - \left(A - \frac{n\alpha\hbar}{\sqrt{2m}} \right)^2 \quad (4.36)$$

El potencial (4.35) está definido en modo tal que la energía del estado base es cero. Identificamos (4.35) con (4.34) como sigue

$$\begin{aligned} A^2 + C &= \frac{1}{8}E^2 - \frac{q^2}{2}, \\ B^2 - A^2 - \frac{AE}{\sqrt{2}} &= \frac{q^2}{2} - \frac{\omega^2}{2} + \frac{E^2}{8}, \\ B \left(2A + \frac{E}{\sqrt{2}} \right) &= -q\omega, \end{aligned} \quad (4.37)$$

con $\hbar = m = 1$. En (4.37) se incluye C considerando que la energía del estado base para la partícula cargada no es cero, sino que para el caso neutro $q = 0$, debe reproducir el resultado de Visser (3.39). Resolviendo (4.37) para A, B y C se obtienen los siguientes resultados:

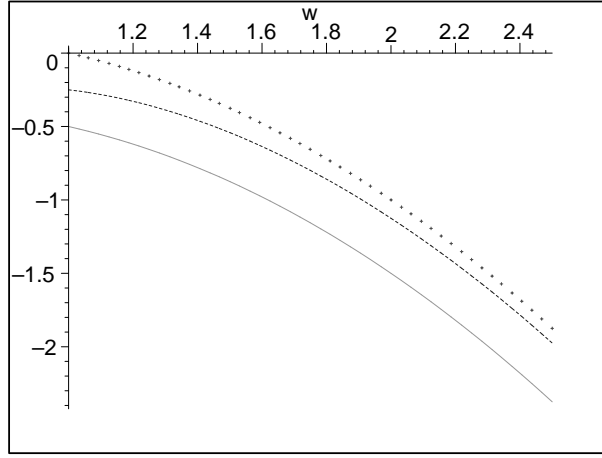


Figura 4.4: **Eigenvalores para el estado base.** La curva superior atrazos corresponde a la partícula neutra, la de en medio corresponde al caso perturbado y la curva inferior corresponde a la solución exacta. Consideramos $q = E = M_5 = 1$.

$$\begin{aligned}
 A &= -\frac{\sqrt{2}}{4}E + \frac{\sqrt{2}}{2}\omega \\
 B &= -\frac{\sqrt{2}}{2}q \\
 C &= -\frac{q^2}{2} - \frac{\omega^2}{2} + \frac{1}{2}E\omega.
 \end{aligned} \tag{4.38}$$

Adicionando C a la ecuación (4.36) obtenemos el espectro asociado al potencial (4.34) :

$$\varepsilon_n = \varepsilon_n^{(neutra)} - \frac{q^2}{2} \tag{4.39}$$

donde $\varepsilon_n^{(neutra)}$ son los eigenvalores de la energía para el caso neutro dados por la ecuación (3.39). En las figuras 4.4, 4.5 y 4.6 se muestran los eigenvalores para el estado base, el primer y el tercer estado excitado respectivamente.

Las relaciones de dispersión son las siguientes:

$$k_n = \sqrt{(k_n(\omega)^{neutra})^2 + \frac{q^2}{2}} \tag{4.40}$$

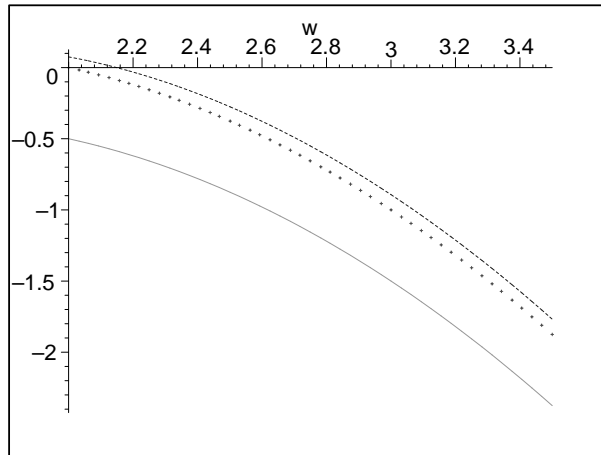


Figura 4.5: **Eigenvalores para el primer estado excitado.** La superior corresponde al caso neutro, la curva de en medio al caso perturbado y la curva inferior a la solución exacta. Consideramos $q = E = M_5 = 1$.

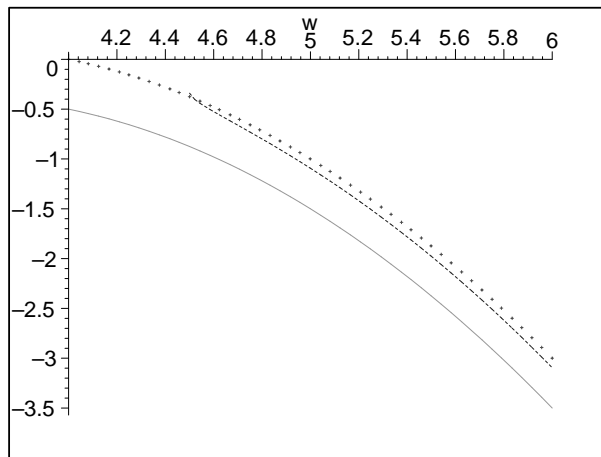


Figura 4.6: **Eigenvalores para el tercer estado excitado.** La curva inferior corresponde a la solución exacta, las otras dos curvas, prácticamente indistinguibles, corresponden al caso neutro y al caso perturbado. Consideramos $q = E = M_5 = 1$.

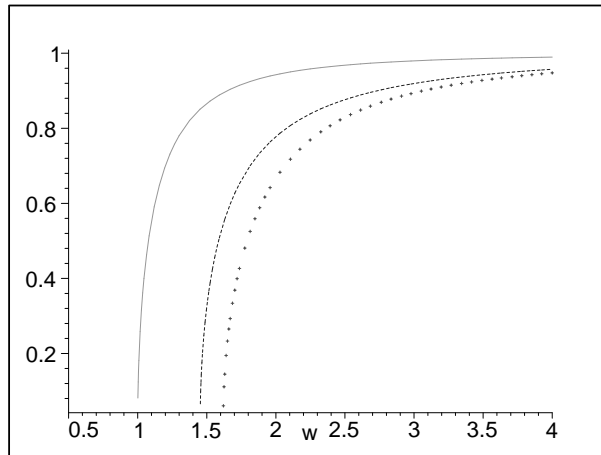


Figura 4.7: **Velocidad de grupo para el estado base.** La curva superior corresponde a velocidad de grupo obtenida considerando la solución exacta, la de en medio corresponde al análisis perturbativo y la curva inferior a trazos es la correspondiente al caso neutro. Consideramos $q = E = M_5 = 1$. Obsérvese que las curvas tienden asintóticamente al valor $c = 1$.

donde $k_n^{(neutra)}$ corresponde a la partícula no cargada (3.45). La velocidad de grupo correspondiente es

$$v_n^g = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \sqrt{(k_n(\omega)^{neutra})^2 + \frac{q^2}{2}}} \quad (4.41)$$

En las figuras: 4.7, 4.8 y 4.9 se muestran las gráficas de las velocidades de grupo para el estado base, el primer y el tercer estado excitado respectivamente. Puede observarse claramente un corrimiento en las velocidades debido a la presencia de la carga q .

4.4. Confinamiento

Como se mencionó en la discusión de escenarios con dimensiones extra, es posible que en algunos de ellos la materia pueda escapar de la membrana. Es de interés observar que para valores típicos de los parámetros $q = 1$, $E = 1$, $M = 1$ este efecto no ocurre para la partícula escalar moviéndose en un subespacio membrana en el escenario de Visser considerado en nuestro trabajo.

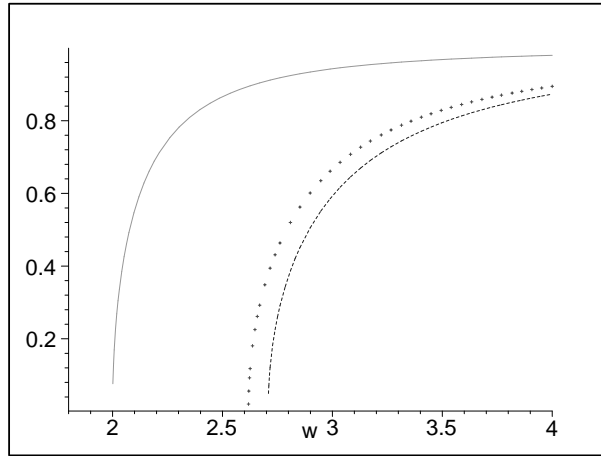


Figura 4.8: **Velocidad de grupo para el primer estado excitado.** La curva superior corresponde a velocidad de grupo obtenida considerando la solución exacta, la curva a trazos de en medio es el caso neutro, y la curva inferior corresponde al análisis perturbativo. Consideramos $q = E = M_5 = 1$. Las curvas tienden asintóticamente al valor $c = 1$.

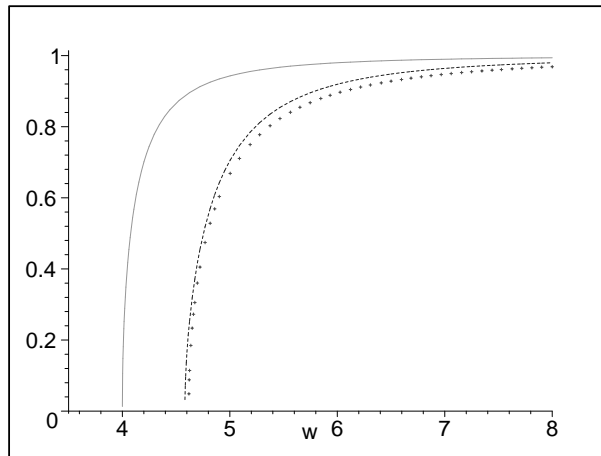


Figura 4.9: **Velocidad de grupo para el tercer estado excitado.** La curva superior corresponde a velocidad de grupo de la solución exacta, las otras dos curvas, prácticamente indistinguibles, corresponden una al caso perturbativo, y por debajo de esta curva, el caso neutro (curva a trazos). Consideramos $q = E = M_5 = 1$. Como en los casos anteriores las curvas tienden asintóticamente al valor $c = 1$.

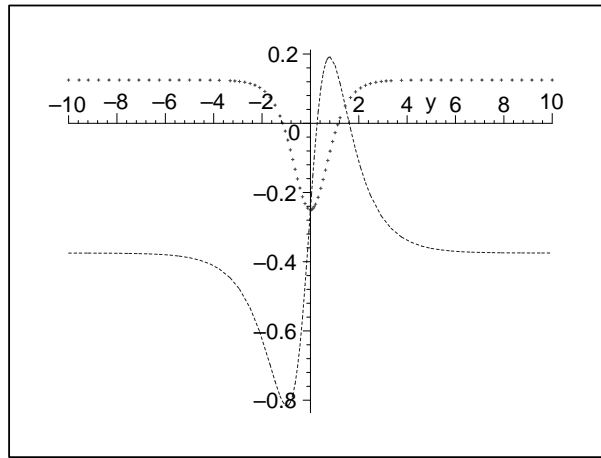


Figura 4.10: Comparación del potencial para la partícula neutra (línea a trazos) y el potencial para la partícula cargada (línea continua). En este último, el valor del potencial para $+\infty$ y $-\infty$ tiende al mismo valor. La forma del potencial sugiere que no existen en este escenario estados metaestables. Se usa $E = 1$, $M_5 = 1$.

Considerando la gráfica del potencial para la partícula cargada, figura 4.10, es interesante observar que aunque en este modelo la partícula está localizada gravitacionalmente en cuatro dimensiones bajo la influencia de un campo eléctrico, no hay posibilidad de estados metaestables, es decir, la partícula no escapa a la dimensión extra.

Esta situación contrasta con lo que sucede, por ejemplo, en la ionización del átomo de hidrógeno en el efecto Stark; el campo eléctrico en el escenario de Visser juega un papel dinámico, de tal forma que en el acoplamiento de las ecuaciones Einstein-Maxwell siempre resulta un confinamiento para la partícula en la membrana.

Capítulo 5

Conclusiones y perspectivas

En este trabajo hemos descrito brevemente algunos de los escenarios con dimensiones extra considerados en la actualidad en el entendimiento de problemas abiertos como el de jerarquías o el de la constante cosmológica, entre otros. A saber, el escenario de Arkani-Hamed-Dimopoulos-Dvali (ADD), el de Randall y Sundrum (RS) y su predecesor el modelo de Visser.

Después de mostrar que el escenario de Visser da lugar a confinamiento gravitacional de una partícula clásica ecuaciones (3.25) y (3.30), hemos revisado que en el caso cuántico de una partícula escalar neutra un resultado análogo se cumple. La partícula escalar neutra esta localizada en una membrana 4D y su velocidad de propagación es distinta a la usual del caso de espacio tiempo plano 4D.

Finalmente hemos extendido el análisis de la partícula escalar neutra al de una partícula escalar cargada que se propaga en el escenario multidimensional de Visser. De nuevo, la partícula se mueve en una membrana 4D. Esta partícula esta acoplada no solo al campo gravitacional sino también al campo eléctrico presente. Se calcularon las relaciones de dispersión y la velocidad de grupo para el estado base: ecuaciones (4.18), (4.19), y figura 4.7, para el primer estado excitado ecuaciones (4.24) , (4.25), y figura 4.8, y para el tercer estado excitado

ecuaciones (4.29) , (4.30), y figura 4.9. Para esto se redujo la ecuación de Klein-Gordon a una ecuación de Schrödinger equivalente. Se encuentra un corrimiento adicional de las relaciones de dispersión y de la velocidad de grupo con respecto al caso neutro y al caso usual 4D plano.

Nuestra interpretación es que aunque el campo eléctrico apunta en la dimensión extra, afecta a la partícula cargada aún cuando está restringida a moverse en el espacio de cuatro dimensiones. Entonces, la partícula cargada que observamos en cuatro dimensiones contendrá información de la dimensión extra.

Por otro lado, aunque la partícula esta localizada gravitacionalmente en cuatro dimensiones bajo la influencia de un campo eléctrico, no existen en este escenario estados metaestables, es decir, no hay posibilidad de que la partícula escape a la dimensión extra, como sucede en la ionización del átomo de hidrógeno en el efecto Stark [16].

Sería interesante extender nuestro análisis a partículas cargadas con espín, con el fin de avanzar en el entendimiento de la localización de la materia en la membrana.

Por otro lado el escenario de Visser que hemos considerado no es necesariamente realista, otros escenarios deberán considerarse en un estudio exhaustivo de los resultados encontrados en este trabajo para poder considerar comparaciones con posibles observaciones o experimentos.

Apéndice A

Función Hipergeométrica

Las funciones hipergeométricas tienen la forma

$$F(\alpha, \beta, \gamma : z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{z^n}{n!} \quad (\text{A.1})$$

donde

$$(\alpha)_n = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \cdots (\alpha + n - 1) \quad (\text{A.2})$$

$$(\alpha)_0 = 1 \quad (\text{A.3})$$

La función (A.1) se reduce a un polinomio para ciertos valores de sus argumentos. Para $n = 1 - \alpha$ (A.2) es cero, por lo que el valor máximo de n es $n = -\alpha$. Dicho de otra forma $-\alpha$ debe ser un entero positivo (0,1,2...). De forma semejante a (A.2) se definen β y γ .

Apéndice B

Partícula no relativista en el potencial de Rosen-Morse

La ecuación de Schrödinger para una partícula relativista en el potencial de Rosen-Morse [18] tiene la forma

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \frac{d^2\Psi}{dy^2} - \left(\varepsilon + \frac{V_0}{\cosh^2 \frac{y}{b}} \right) \Psi = 0. \quad (\text{B.1})$$

Haciendo los cambios de variable

$$\Psi = \left(\cosh \frac{x}{b} \right)^{-2\sigma} u \quad (\text{B.2})$$

$$\sigma = \frac{1}{4} \left(\sqrt{8\mu V_0 b^2 \hbar^{-2} + 1} - 1 \right) \quad (\text{B.3})$$

obtenemos una ecuación para u

$$\frac{d^2 u}{dy^2} - \frac{4\sigma}{b} \tanh \frac{y}{b} \frac{du}{dx} + \frac{4}{b^2} (\sigma^2 - \kappa^2) u = 0 \quad (\text{B.4})$$

donde

$$\kappa = \sqrt{-\frac{\mu\varepsilon b^2}{2\hbar^2}}. \quad (\text{B.5})$$

Introduciendo la variable

$$z = -\text{sen} h^2 \left(\frac{y}{b} \right) \quad (\text{B.6})$$

transformamos la ecuación (B.4) en una ecuación hipergeométrica

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dy^2} + \left[\frac{1}{2} - (1-2\sigma)z\right]\frac{du}{dz} - (\sigma^2 - \kappa^2)u = 0 \quad (\text{B.7})$$

con soluciones

$$u_1 = F(-\sigma + \kappa, -\sigma - \kappa, \frac{1}{2}; z) \quad (\text{B.8})$$

que corresponden al caso de la función de onda Ψ par y

$$u_2 = F(-\sigma + \kappa + \frac{1}{2}, -\sigma - \kappa + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}; z) \quad (\text{B.9})$$

para el caso impar.

Para que la función de onda (B.2) tienda a cero cuando $y \rightarrow \infty$ las funciones hipergeométricas u (B.8) y (B.9) deben reducirse a un polinomio.

Para la función u_1 esto significa que $\sigma - \kappa$ o $\sigma + \kappa$ deben ser enteros positivos (apéndice A). La última condición debe descartarse ya que para $x \rightarrow \infty$ la función de onda se incrementa exponencialmente. De esta manera obtenemos $\sigma - \kappa = m$ ($m = 0, 1, 2, \dots$) las funciones de onda tienen la forma

$$\begin{aligned} \Psi_m = & [\cosh \frac{x}{b}]^{-2\sigma} + \\ & + \sum_{n=1}^m \frac{(n - (m+1))! (n - (2\kappa + m - 1))! (n - \frac{1}{2})!}{(-m-1)! (-2\kappa - m - 1)! (-\frac{1}{2})!} (-1)^n \left[\sinh \frac{x}{b} \right]^{2n} \left[\cosh \frac{x}{b} \right]^{-2\sigma} \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

y los niveles de energía correspondientes son

$$\varepsilon_m = -\frac{\hbar^2}{2\mu b^2} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\mu V_0 b^2}{\hbar^2} + 1} - 2m - \frac{1}{2} \right]^2 \quad (\text{B.11})$$

De forma similar, la condición que hace que la función de onda sea finita para las funciones u_2 cuando $x \rightarrow \infty$ es $\sigma - \kappa - \frac{1}{2} = l$ ($l = 0, 1, 2, \dots$), las funciones de onda son de la forma

$$\begin{aligned}
\Psi_l = & i \left[\operatorname{senh} \frac{x}{b} \right] \left[\cosh \frac{x}{b} \right]^{-2\sigma} + \\
& + i \sum_{n=1}^l \frac{(n - (l + 1))! (n - (2\kappa + l - 1))! (n - \frac{3}{2})!}{(-l - 1)! (-2\kappa - l - 1)! (-\frac{3}{2})!} (-1)^n \left[\operatorname{senh} \frac{x}{b} \right]^{n+1} \left[\cosh \frac{x}{b} \right]^{-2(l+\kappa+\frac{1}{2})}
\end{aligned} \tag{B.12}$$

y los correspondientes niveles de energía son

$$\varepsilon_l = -\frac{\hbar^2}{2\mu b^2} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\mu V_0 b^2}{\hbar^2} + 1} - (2l + 1) - \frac{1}{2} \right]^2 \tag{B.13}$$

combinando los resultados para la energía

$$\varepsilon_n = -\frac{\hbar^2}{2\mu b^2} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\mu V_0 b^2}{\hbar^2} + 1} - (n + \frac{1}{2}) \right]^2 \tag{B.14}$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots) \tag{B.15}$$

El numero máximo N de estados de energía satisface la desigualdad

$$N < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{8\mu V_0 b^2}{\hbar^2} + 1} - \frac{1}{2} . \tag{B.16}$$

Apéndice C

Integrales $[\cosh(y)]^p$

Integrales de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy [\cosh(y)]^p \quad (\text{C.1})$$

se pueden encontrar considerando que $\cosh(y)$ es una función par

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy [\cosh(y)]^p = 2 \int_0^{\infty} dy [\cosh(y)]^p$$

haciendo el cambio de variable

$$\cosh(y) = u, \quad 1 < u < \infty$$

la integral se convierte en

$$\int_1^{\infty} du \frac{u^p}{\sqrt{u^2-1}} = \frac{\Gamma(-\frac{p}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}-\frac{p}{2})} \quad (\text{C.2})$$

donde el resultado se encuentra usando Gradshteyn-Ryzhik Secc. 3.251 fórmula 3 [19]:

$$\int_1^{\infty} dx x^{\mu-1} (x^p-1)^{\nu-1} = \frac{1}{p} B\left(1-\nu-\frac{\mu}{p}, \nu\right),$$
$$[p > 0, \text{Re } \nu > 0, \text{Re } \mu < p - p \text{Re } \nu] \quad (\text{C.3})$$

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \quad (\text{C.4})$$

Aquí $B(a, b)$ y $\Gamma(z)$ son la función Beta y Gamma, respectivamente.

Apéndice D

Integrales $[\cosh(y)]^p [\sinh(y)]^q$

Para p cualquier número real y q par, usamos Gradshteyn-Ryzhik Secc. 2.413 fórmula 1 [19]:

$$\begin{aligned} \int dy [\cosh(Ey)]^p [\sinh(Ey)]^{2n} &= \frac{[\cosh(Ey)]^{p+1} [\sinh(Ey)]^{2n-1}}{2n+p} \\ &+ \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2k+1) [\sinh(Ey)]^{2n-2k-1}}{(2n+p-2)(2n+p-4)\dots(2n+p-2k)} \\ &+ (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n+p)(2n+p-2)\dots(p+2)} \int dy [\cosh(Ey)]^p \end{aligned} \quad (D.1)$$

Reescribiendo

$$[\cosh(Ey)]^{p+1} [\sinh(Ey)]^{2n-1} \quad (D.2)$$

en la forma

$$[\cosh(Ey)]^{p+2n} [\tanh(Ey)]^{(2n-1)} \quad (D.3)$$

al evaluar las integrales en los límites ∞ y $-\infty$, $\tanh(Ey) \rightarrow 1$, $[\cosh(Ey)]^{p+2n} \rightarrow 0$, siempre que se cumpla que

$$p + 2n < 0 \tag{D.4}$$

las integrales convergen siempre y cuando se cumpla (D.4)

Para p cualquier número real y q impar, la integral es cero si se realiza en un intervalo simétrico.

$$\int_{-L}^L dy [\cosh(y)]^p [\sinh(y)]^q = 0. \tag{D.5}$$

Bibliografía

- [1] M. Visser, *An exotic class of Kaluza-Klein models*, Phys. Lett. **B159**, 22-25(1985), [hep-th/9910093].
- [2] J. Polchinski, *String theory Vol. I: An introduction to the bosonic string*, Cambridge University Press (1998); *String Theory Vol. II: Superstring theory and beyond*, Cambridge University Press (1998).
- [3] V.A. Rubakov, *Large and infinite extra dimensions*, Physics Uspekhi **44** (9) 871-893 (2001).
- [4] T.Applequist, A.Chodos and P.G.O. Freund, *Modern Kaluza-Klein theories*, Addison-Wesley Publishing Company Inc. (1987).
- [5] P.Horava and E.Witten, *Eleven dimensional supergravity on a manifold with boundary*, Nucl.Phys. **B 475**, 94-111 (1996) [hep-th/9603142].
- [6] N.Arkani-Hamed, S.Dimopoulos and G. Dvali, *Phenomenology, Astrophysics and Cosmology of Theories with Sub-Milimeter Dimensions and TeV scale Quantum Gravity*, Phys.Rev. D59 (1999) 086004, [hep-ph/9807344].
- [7] C.D. Hoyle, U. Schmidt, B.R. Heckel, E.G. Adelberger, J.H. Gundlach, D.J. Kapner, H.E. Swanson, *Submillimeter Tests of the gravitational inverse square law: a search for 'large' extra dimensions*. (Washington U., Seattle),. Nov 2000. 4pp. Published in Phys.Rev.Lett.86:1418-1421,2001 e-Print Archive: hep-ph/0011014

- [8] L.Randall, R.Sundrum, *A large Mass Hierachy from a Small Extra Dimension*,Phys.Rev.Lett.83:4690-4693,1999, [hep-ph/9905221].
- [9] Israel W, *Singular Hysurfaces and thin shells in general relativity*, Published in Nuovo Cim.B44S10:1,1966, Erratum-ibid.B48:463,1967.
- [10] W. Mück, K.S. Viswanathan, and I. Volovich, *Geodesics and Newton's law in brane backgrounds*, Phys. Rev. D, Volume 62, 105019.
- [11] H. Ziaepour, *Testing Brane World Models with Ultra Highenergy Cosmic Rays* [hep-ph/0203165].
- [12] R. Emparan, R. Rattazzi, *Cosmics rays as probes of large extra dimensions and TeV gravity*, Phys. Rev. D Lett. **65** 064023 (2002).
- [13] S.B. Giddings, *Black holes in lab?*, Gen.Rel.Grav. **34** (2002) 1775-1779, [hep-th/0205205].
- [14] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, 1984.
- [15] R. Dutt, A. Khare, and P. Sukhatme, *Supersimetry, shape invariance, and exactly solvavle potenciales*, Am. J. Phys. **56**(2), February 1988.
- [16] N. Aquino, *Modelo unidimensional de un átomo en un campo eléctrico fuerte*, Revista Mexicana de Física, **36** (1990) 471-477.
- [17] R. Guzmán, H.A. Morales-Técotl, *Effective 4D propagation of a charged scalar particle in Visser brane world* [hep-ph/0402083].
- [18] I.I.Gol'dman and V.D.Krichenkov, *Problems in Quantum Mechanics*, Dover Publications, Inc., New York, 0-486-67527-0.
- [19] Gradshteyn, I. S., I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series and Products*, Academic Press Inc., Orlando, FL, 1980.