

MAESTRÍA EN CIENCIAS MATEMÁTICAS APLICADAS E INDUSTRIALES

# **ESTABILIDAD ESPECTRAL DE FLUJO ISENTRÓPICO**

TESIS  
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE

## **MAESTRO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS**

PRESENTA:  
RICARDO LÓPEZ DEL ROSARIO

ASESOR DE TESIS:  
DRA. PATRICIA SAAVEDRA BARRERA

FECHA: 16 DE JUNIO DEL 2020

## Agradecimientos

Primero quiero agradecer infinitamente a mis padres quienes supieron educarme y guiarme por un camino recto y honrado. Ese pasado tan humilde y todo el esfuerzo que realizaron, sabiendo que la educación es lo más importante, están en mi mente a cada momento difícil que la vida me presenta.

Agradezco a mis abuelos y tíos quienes me enseñaron que la vida se trabaja día con día. A mi hermana, que me muestra la fuerza con la que se debe vivir ante las adversidades.

Agradezco a mis sinodales, el Dr. Joaquín Delgado Fernández y al Dr. Víctor Francisco Breña Medina, por tomarse el tiempo para enriquecer este trabajo.

Agradezco a Lisset Yasmin Lagunas Jiménez quien, a mi lado, vivió todos los momentos difíciles y logros, dándome esas fuerzas para seguir, con su maravillosa forma de ser. A Eleazar, Yareli y Minerva, amigos de la maestría que hicieron mi estancia más ligera y que vivieron junto a mí, momentos de esfuerzo y desvelo.

Agradecimiento especial a tres personas, ellos hicieron que mi amor por las matemáticas creciera.

- Profesor Eduardo, ese profesor de mi infancia. El sembró en mí el gusto por esta ciencia.
- Doctora Patricia Saavedra Barrera, ella me hizo disfrutar cada reto que me presentó este trabajo y a quien agradezco me compartiera su tiempo y conocimiento para llevar esto a cabo. También, gracias por haberme brindado las oportunidades para mejorar profesionalmente.
- José Fernando, mi hermano, con quien paso largas noches frente al pizarrón tratando de resolver esos problemas. Con suerte algún día, obtendremos la solución. Gracias por tus ideas.

Finalmente, agradezco a la comisión de la MCMAI por brindarme la oportunidad de vivir esta experiencia y a CONACyT por el apoyo económico.

# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>XI</b>
1.1. Objetivo general . . . . .	XII
1.2. Objetivos específicos . . . . .	XII
1.3. Preliminares . . . . .	XIII
<b>2. Estabilidad espectral por estimaciones de energía</b>	<b>1</b>
2.1. Ecuación de Burgers . . . . .	1
2.1.1. Existencia de soluciones tipo onda viajera . . . . .	2
2.1.2. Estabilidad espectral . . . . .	3
2.2. Flujo Isentrópico . . . . .	9
2.2.1. Existencia de solución tipo onda viajera . . . . .	10
2.2.2. Linealización sobre el perfil $(\hat{v}, \hat{u})$ . . . . .	14
2.2.3. Estabilidad espectral para choques de pequeña amplitud . . . . .	16
<b>3. Función de Evans analítica</b>	<b>22</b>
3.1. Base teórica . . . . .	22
3.1.1. Dicotomías exponenciales . . . . .	23
3.2. Formulación de la función de Evans . . . . .	25
3.3. Ecuación de Burgers . . . . .	26
3.3.1. Construcción de la función de Evans . . . . .	26
3.3.2. Cálculo de los vectores propios izquierdo y derecho de $A_-$ y $A_+$ . . . . .	28
3.3.3. Cálculo del operador conmutador para $A_-$ y $A_+$ . . . . .	29
3.3.4. Función de Evans . . . . .	30
<b>4. Cálculo numérico de la función de Evans</b>	<b>32</b>
4.1. Flujo isentrópico . . . . .	32
4.1.1. Acotando la región . . . . .	34
4.1.2. Evaluación de la función de Evans para un $\lambda_0$ . . . . .	35
4.1.3. Método de la matriz aumentada . . . . .	38

4.1.4.	Método de coordenadas polares . . . . .	41
4.1.5.	Cálculo de $D(\lambda)$ para distintos valores de $\lambda$ . . . . .	43
4.1.6.	Principio del argumento . . . . .	43
4.1.7.	Forma discreta del método de Kato . . . . .	45
4.2.	Ejemplos numéricos . . . . .	47
4.2.1.	Ejemplo $\gamma = 1, v_+ = 0.00001$ . . . . .	47
4.2.2.	Ejemplo $\gamma = 3, v_+ = 0.00001$ . . . . .	51
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>53</b>
	<b>Appendices</b>	<b>54</b>
<b>A.</b>	<b>Anexo 1</b>	<b>54</b>
<b>B.</b>	<b>Anexo 2</b>	<b>62</b>

# Resumen

Este trabajo es sobre el estudio teórico y numérico de la estabilidad espectral de soluciones tipo onda viajera en EDP's de tipo conservativo. Para probar la estabilidad espectral, se presentan dos métodos, uno a partir de estimaciones de energía y otro usando la función de Evans. En la mayoría de los casos, la función de Evans no puede calcularse analíticamente, por lo que se presenta un procedimiento para su cálculo numérico. Se ilustran estos métodos en el estudio de la estabilidad espectral de soluciones tipo onda viajera para la ecuación de Burgers y flujo isentrópico para todo tipo de amplitudes en la onda viajera.

## Introducción

Uno de los aspectos importantes en el estudio de las ecuaciones diferenciales parciales lineales y no lineales es la propagación de una onda. Una onda, es una señal reconocible que se transfiere de una parte del medio a otra con una velocidad de propagación reconocible. La energía a menudo se transfiere cuando la onda se propaga, aunque la materia no lo haga. Algunas áreas donde la propagación de las ondas es de importancia fundamental son:

- Mecánica de fluidos (ondas de agua, aerodinámica).
- Acústica (ondas sonoras en aire y líquidos).
- Elasticidad (ondas de estrés, terremotos).
- Teoría electromagnética (óptica, ondas electromagnéticas).
- Biología (ondas epizooticas).
- Química (ondas de combustión y detonación).

La forma más simple de una onda matemática es una función de la forma.

$$u(x, t) = \xi(x - st).$$

En este trabajo nos interesa encontrar, para la ecuación de Burgers y flujo isentrópico, soluciones tipo onda viajera. Cabe señalar que en el estudio de las EDP's y en general, para un problema en matemáticas, es importante demostrar existencia y unicidad de la solución. Otro aspecto importante es la estabilidad de la solución.

La estabilidad significa que la forma de la onda se mantiene a medida que se propaga hacia adelante en el tiempo, y que pequeñas perturbaciones en la onda se desvanecen sin provocar problemas para la solución. Más precisamente, la estabilidad en este contexto significa que la onda perturbada converge a la onda original no perturbada, o a una traslación de ella.

”La ausencia de estabilidad, se manifiesta cuando pequeñas perturbaciones alteran el estado del sistema, lo que implica comportamiento irregular o una transición a otro estado. Así, la estabilidad es un buen indicador para saber si la solución tipo onda viajera que se obtenga es físicamente viable” [5].

Aquí, nos enfocamos en el estudio de la estabilidad espectral de las soluciones tipo onda viajera. Este tipo de estabilidad significa que al linealizar alrededor de nuestra solución, tanto el espectro esencial como el espectro continuo, se encuentran del lado izquierdo del plano complejo. Aunque el espectro continuo puede ser acotado, el espectro puntual requiere demostrar que los valores propios, del operador obtenido después de linealizar, satisfacen que su parte real es negativa.

## 1.1. Objetivo general

Estudiar la estabilidad espectral de EDP de tipo conservativo que admiten soluciones en forma de onda viajera.

## 1.2. Objetivos específicos

Los objetivos particulares de este trabajo son:

- Familiarizarse con los problemas que aceptan solución tipo onda viajera.
- Entender las técnicas utilizadas para demostrar la existencia de soluciones tipo onda viajera para EDP's de tipo conservativo.
- Aprender la parte teórica de los métodos ocupados en el paquete StabLab de Matlab.
- Conocer y aplicar las técnicas para demostrar la estabilidad espectral para los problemas que aceptan solución tipo onda viajera.
- Resolver ejemplos de manera analítica y numérica.

En este trabajo de tesis, se desarrollan las herramientas para determinar cuándo la solución tipo onda viajera, que denotaremos por  $\hat{v}$ , es espectralmente estable. La tesis se encuentra organizada de la siguiente manera:

- En el capítulo 1, se trabaja con la ecuación de Burgers, donde se estudia bajo qué condiciones se tiene existencia de una solución tipo onda viajera.

Posteriormente, a partir de un método de estimaciones de energía, se demuestra la estabilidad espectral. También se demuestra la estabilidad espectral usando la función de Evans después de construirla analíticamente.

- En el capítulo 2 consideramos las ecuaciones compresibles isentrópicas de Navier-Stokes en una dimensión espacial, en coordenadas lagrangianas,

$$\begin{aligned}u_t - u_x &= 0, \\u_t + p(v)_x &= \left(\frac{u_x}{v}\right)_x,\end{aligned}$$

con  $v$ :=volumen específico,  $u$ :=velocidad y  $p(v)$ :=ley de presión que satisface  $p(v) = a_0 v^{-\gamma}$ ,  $a_0 > 0$  y  $\gamma \geq 1$ . Demostramos la existencia de soluciones tipo onda viajera y utilizando un método de estimaciones de energía demostramos la estabilidad espectral cuando la amplitud es pequeña.

- En el capítulo 3 aplicamos la función de Evans numérica para determinar la estabilidad espectral del flujo isentrópico. En particular presentamos en detalle los métodos numéricos que se ocupan en el paquete Stablab explicando cual es el motivo de aplicar dichos métodos y la complicación al querer aplicar métodos tradicionales.
- En el capítulo 4, se presentan dos ejemplos para flujo isentrópico con amplitud grande. Se muestran los resultados obtenido mediante el paquete StabLab.

### 1.3. Preliminares

Basados en [1] y [2] definimos la teoría para la estabilidad espectral que vamos a utilizar a lo largo del trabajo.

#### Resultados para determinar la estabilidad espectral de un operador

**Definición 1.3.1.** Una aplicación  $L$  entre dos espacios normados  $(E, \|\cdot\|_E)$  y  $(F, \|\cdot\|_F)$  sobre el mismo campo escalar  $K$  se denomina operador.

**Definición 1.3.2.** Un operador  $L$  es lineal si  $L(\lambda x + \mu y) = \lambda Lx + \mu Ly$  para cualesquiera escalares  $\lambda, \mu \in K$  y vectores  $x, y \in E$

- i) El dominio  $D(L)$  de  $L$  es un espacio vectorial y el rango  $R(L) \subset W$  un espacio vectorial. Por ejemplo

$$D(L) = H^1, \quad W = L^2.$$



ii) Para todo  $x, y \in D(L)$  y escalares  $\alpha$  y  $\beta$ ,

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y).$$

**Definición 1.3.3.** El resolvente de un operador  $L$  se define como:

$$Res(L) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (L - \lambda I) \text{ es invertible y acotado}\}.$$

**Definición 1.3.4.** El espectro de un operador  $L$  se define como:

$$\sigma(L) := \mathbb{C} - Res(L).$$

**Definición 1.3.5.** El espectro puntual de un operador  $L$  se define como:

$$\sigma_p(L) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda \text{ es un valor propio aislado de } L \text{ con multiplicidad finita}\}.$$

**Definición 1.3.6.** El espectro esencial o continuo de un operador  $L$  se define como:

$$\sigma_{ess}(L) := \sigma(L) - \sigma_p(L).$$

**Observación 1.** Podemos notar directamente que:

$$\sigma(L) = \sigma_p(L) \cup \sigma_{ess}(L).$$

**Definición 1.3.7.** Decimos que un operador  $L$  es espectralmente estable si, para todo  $\lambda \in \sigma(L) - \{0\}$  se tiene que  $Re(\lambda) < 0$ .

Basándonos en [5]

**Teorema 1.3.8.** (Teorema de Henry)

Supongamos que  $M(x), N(x)$  son funciones de matriz real, acotadas y  $M(x), N(x) \rightarrow M_{\pm}, N_{\pm}$  cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , y supongamos que  $D$  es constante simétrica y positiva. En cualquiera de los espacios  $L_p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p < \infty$  o  $C_0(\mathbb{R})$  o  $C_{unif}(\mathbb{R})$  (para las funciones de vector columna de  $u(x)$ ), definimos:

$$Au(x) = -Du_{xx} + M(x)u_x + N(x)u, \quad -\infty < x < \infty.$$

Considérese  $A$  como un operador lineal cerrado densamente definido. Sea

$$S_{\pm} = \{\lambda \mid \det(\tau^2 D + i\tau M_{\pm} - \lambda I) = 0\},$$

con  $-\infty < \tau < \infty$ . Luego,  $S_{\pm}$  son simétricos respecto al eje real y son asintóticamente parábolas,  $\lambda = \tau^2 \delta + O(\tau)$  si  $\tau \rightarrow \pm\infty$ , donde  $\delta$  es un valor propio de  $D$ . Si  $P$  es la unión de las regiones dentro o en las curvas  $S_+, S_-$ , entonces el espectro esencial de  $L$  está contenido en  $P$  y en particular incluye a  $S_+ \cup S_-$ .

**Demostración** Ver [9]

**Teorema 1.3.9.** (*Teorema de Kato*)

Sea  $P(\lambda)$  una proyección analítica en un dominio simplemente conexo  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$ , entonces el sistema de EDO,

$$r'_j = P' r_j, \quad r_j(\lambda_0) = r_j^0,$$

define una base analítica  $\{r_j(\lambda)\}$  del subconjunto invariante asociado  $R(P(\lambda))$ . En particular, si

$$R(\lambda) = [r_1(\lambda), \dots, r_k(\lambda)],$$

entonces satisface el sistema de EDO anterior, donde  $R_0$  es de rango completo y  $P_0 R_0 = R_0$ , así  $\text{rango}(R) = \text{rango}(R_0)$ , además  $PR = R$ ,  $PR' = 0$ .

**Formula de Abel**

Considerando el sistema de EDO

$$\alpha'(x) = M(x) \alpha(x),$$

si denotamos  $\gamma(x) = \det(\alpha(x))$  entonces:

$$\gamma'(x) = \text{tr}(M(x)) \cdot \gamma(x).$$

**Desigualdad de Young**

Sean  $p, q > 1$  tales que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , y sean  $a, b \geq 0$ . Entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Descomposición de Schur**

Si  $A$  es una matriz cuadrada sobre números complejos, entonces  $A$  puede descomponerse como:

$$A = QUQ^*,$$

donde  $Q$  es una matriz unitaria,  $Q^*$  es la transpuesta conjugada de  $Q$  y  $U$  es una matriz triangular cuyas entradas diagonales son exactamente los valores propios de  $A$ .

**Definición 1.3.10.** Una función  $f$  se dice meromorfa en  $\Omega$  si es el cociente de dos funciones analíticas, esto es:

$$f = \frac{p}{q} \quad q \neq 0$$



## Estabilidad espectral por estimaciones de energía

### 2.1. Ecuación de Burgers

La construcción de este capítulo se basó esencialmente en [3]. La ecuación de Burgers con condiciones iniciales y de frontera, sirve como un primer modelo para tráfico vehicular, fluidos, etc. Esta tiene la forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

con:

$$U(x, t) : (-\infty, \infty) \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R},$$

y condición inicial:

$$U(x, 0) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si bien este modelo sencillo sirve para entender la dinámica de un fluido, queda lejos de lo que ocurre con su dinámica real. Este es un modelo hiperbólico, de primer orden, no lineal que puede dar lugar a ondas de choque. Ahora la ecuación de Burgers con viscosidad o también llamada Burgers con difusión, tiene la forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

con:

$$U(x, t) : (-\infty, \infty) \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$U(x, 0) = f(x) \quad x \in \mathbb{R}.$$

Consideremos el siguiente problema con condiciones de frontera:

$$U(x, t) : (-\infty, \infty) \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

$$U(-\infty, t) = U_-, \quad U(\infty, t) = U_+, \quad U'(\pm\infty, t) = 0, \quad (2.1)$$

con  $U_- > U_+$ .

### 2.1.1. Existencia de soluciones tipo onda viajera

Nos interesa encontrar soluciones tipo onda viajera de (2.1), pero antes de encontrarlas, es natural preguntarse si admite una soluciones de este tipo.

Para ver si este problema admite solución tipo onda viajera, se realiza el siguiente cambio de variable  $\xi(x, t) = x - st$ , y con esto, estamos cambiando nuestro marco de referencia estático a un marco de referencia inercial, ganando que ahora, solo debemos buscar una solución estacionaria. Así, si:

$$\xi(x, t) = x - st,$$

entonces,

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t} &= \frac{dU}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t} = -sU', \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{dU}{d\xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} = U', \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} &= U''.\end{aligned}$$

Y así debemos resolver:

$$-sU' + UU' = \nu U''.$$

Para resolver, integramos en el intervalo  $(-\infty, \xi)$

$$\int_{-\infty}^{\xi} -sU'(r) + U(r)U'(r)dr = \int_{-\infty}^{\xi} \nu U''(r)dr.$$

Como  $\frac{1}{2} [U^2(r)]' = U(r)U'(r)$ , entonces:

$$\int_{-\infty}^{\xi} -sU'(r) + \frac{1}{2} [U^2(r)]' dr = \int_{-\infty}^{\xi} \nu U''(r)dr = \nu \cdot U'(\xi),$$

integrando y usando que  $u(-\infty) = u_-$  se tiene

$$-sU(\xi) + \frac{1}{2}U^2(\xi) + sU_- - \frac{U_-^2}{2} = \nu \cdot U'(\xi). \quad (2.2)$$

Por las condiciones de frontera, si  $x \rightarrow \infty$  también  $\xi \rightarrow \infty$ , entonces al usar que  $U(\infty) = U_+$  y  $U'(\infty) = 0$ , se obtiene

$$s(U_- - U_+) = \frac{U_-^2 - U_+^2}{2},$$

al despejar "s", tenemos la condición de salto o también llamada condición de Rankine-Hugonot:

$$s = \frac{U_- + U_+}{2}.$$

Si sustituimos esta condición en (2.2), tenemos:

$$U'(\xi) = \frac{(U(\xi) - U_-)(U(\xi) - U_+)}{2\nu}.$$

Integrando, obtenemos el perfil de onda viajera:

$$\widehat{U}(\xi) = s - a \arctan\left(\frac{a}{2\nu}(\xi + \delta)\right), \quad (2.3)$$

donde

$$a = \frac{U_- - U_+}{2}.$$

Así, hemos demostrado que nuestro problema (2.1) admite solución tipo onda viajera.

## 2.1.2. Estabilidad espectral

### Linealización del problema alrededor de una onda viajera

Recordemos la ecuación de Burgers con difusión

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

y apliquemos el siguiente cambio de variable:

$$\xi = \frac{x - st}{\nu},$$

$$T = \frac{t}{\nu},$$

se obtiene que:

$$\frac{\partial U}{\partial T} + (U - s) \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}.$$

## CAPÍTULO 2. ESTABILIDAD ESPECTRAL POR ESTIMACIONES DE ENERGÍA

Para simplificar la notación, escribamos  $T$  como  $t$ .

$$\frac{\partial U}{\partial t} + (U - s) \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2},$$

donde  $U$  es dependiente de  $\xi$  y  $t$ . De esta manera, como toda solución estacionaria  $U$  satisface:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0,$$

entonces si  $U^*$  es solución estacionaria de (2.1), se debe cumplir:

$$(U^* - s) \frac{dU^*}{d\xi} = \frac{d^2 U^*}{d\xi^2}.$$

En particular, para nuestra solución estacionaria (2.3)

$$(\widehat{U} - s) \frac{d\widehat{U}}{d\xi} = \frac{d^2 \widehat{U}}{d\xi^2}. \quad (2.4)$$

Ahora, con objeto de obtener la linealización alrededor de la solución estacionaria  $\widehat{U}$ , sustituimos  $U(\xi, t) = \widehat{U}(\xi) + \delta U(\xi, t)$  en (2.1), con lo cual se obtiene:

$$\frac{\partial \delta U(\xi, t)}{\partial t} + [\widehat{U}(\xi) + \delta U(\xi, t) - s] \left[ \frac{\partial \widehat{U}(\xi)}{\partial \xi} + \frac{\partial \delta U}{\partial \xi} \right] = \frac{\partial^2 \widehat{U}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \delta U}{\partial \xi^2},$$

donde  $U$  depende de  $\xi$  y  $t$ , y  $\widehat{U}$  depende únicamente de  $\xi$ . Entonces escribimos por un momento  $U, \widehat{U}$  en lugar de  $U(\xi, t)$  y  $\widehat{U}(\xi)$  para simplificar un poco la notación.

Ahora, por (2.4):

$$\frac{\partial \delta U}{\partial t} + \widehat{U} \frac{\partial \delta U}{\partial \xi} + \delta U \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \xi} + \delta U \frac{\partial \delta U}{\partial \xi} - s \frac{\partial \delta U}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \delta U}{\partial \xi^2}.$$

Eliminamos el término no lineal  $\delta U \frac{\partial \delta U}{\partial \xi}$  para obtener:

$$(\widehat{U} - s) \frac{\partial \delta U}{\partial \xi} + \frac{\partial \delta U}{\partial t} + \delta U \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \delta U}{\partial \xi^2}.$$

Para simplificar la notación, hagamos  $U = \delta U$ ,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial \widehat{U}}{\partial \xi} + (\widehat{U} - s) \frac{\partial U}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2},$$

siendo este nuestro problema linealizado.

Ahora proponemos una solución de la forma:

$$U(\xi, t) = q(\xi)e^{\lambda t}, \quad (2.5)$$

para alguna función  $q(\xi)$ . De este modo, nuestro problema toma la forma

$$q''(\xi) - q(\xi)\widehat{U}' + (s - \widehat{U})q'(\xi) = \lambda q(\xi). \quad (2.6)$$

Si definimos a  $L$  como el operador

$$L(q) = q''(\xi) - q(\xi)\widehat{U}' + (s - \widehat{U})q'(\xi), \quad (2.7)$$

entonces (2.7) se reduce a un problema de valores propios:

$$L(q) = \lambda q. \quad (2.8)$$

Ahora, nos interesa probar que el operador  $L$  es espectralmente estable, pues, de este modo probamos que no acepta valores propios con parte real positiva y la perturbación en (2.5) no crece a medida que  $t$  tiende a  $\infty$ . Según la definición 1.3.7, debemos probar que al tomar cualquier  $\lambda \in \sigma(L) - \{0\}$  su parte real es negativa. Así, sea  $\lambda \in \sigma(L) - \{0\}$ , por la observación 1 :

$$\sigma(L) = \sigma_{ess}(L) \cup \sigma_p(L).$$

Así:

1) Sea  $\lambda \in \sigma_{ess}$ .

Partiendo de (2.7),

$$L(q) = q''(\xi) + (s - \widehat{U})q'(\xi) - q(\xi)\widehat{U}',$$

sea  $D = -1$ ,  $M = s - \widehat{U}$ ,  $N = -\widehat{U}'$ , entonces

$$L(q) = -Dq''(\xi) + Mq'(\xi) + Nq(\xi).$$

Partiendo del teorema (1.3.8)

- $S_+ = \{\mu | \tau^2(-1) + i\tau M_+ - \mu = 0\}$ , para  $-\infty < \tau < \infty$ , donde  $M_+ := \lim_{\xi \rightarrow \infty} s - \widehat{U}(\xi) = s - s + a = a$ , entonces:

$$\begin{aligned} S_+ &= \{\mu | -\tau^2 + i\tau a - \mu = 0\}, \\ \Rightarrow S_+ &= \{\mu = -\tau^2 + i\tau a\}. \end{aligned}$$



Este conjunto define una parábola en el plano complejo, que pasa por el origen y que abre hacia la izquierda.

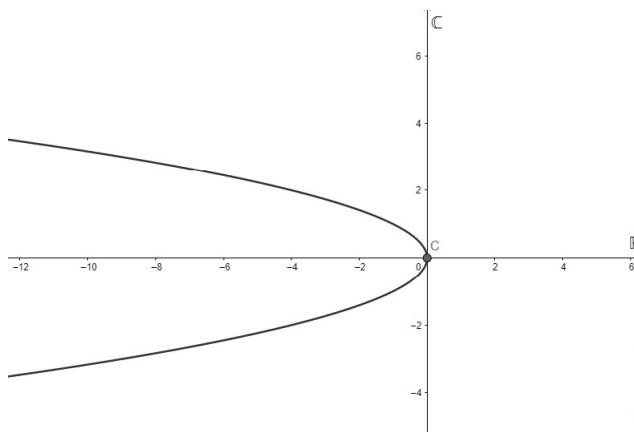


Figura 2.1: Curva de  $S_+$ .

- $S_- = \{\mu \mid \tau^2(-1) + i\tau M_- - \mu = 0\}$ , para  $-\infty < \tau < \infty$ , como  $M_- := \lim_{\xi \rightarrow -\infty} s - \widehat{U}(\xi) = s - s - a = -a$ , entonces:

$$\begin{aligned} S_- &= \{\mu \mid -\tau^2 - i\tau a - \mu = 0\}, \\ \Rightarrow S_- &= \{\mu = -\tau^2 - i\tau a\}. \end{aligned}$$

Este conjunto es exactamente el mismo que el definido por  $S_+$ , es decir

$$S_+ = S_-,$$

por lo que el teorema (1.3.8) nos permite concluir que el espectro esencial, se encuentra en la región delimitada por esta parábola.

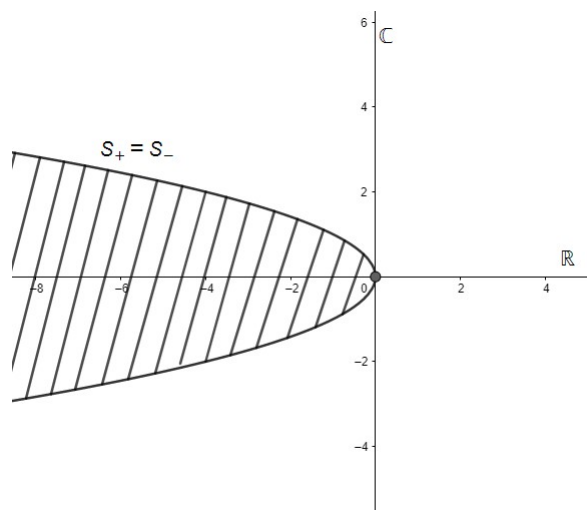


Figura 2.2: Región delimitada por  $S_+$  y  $S_-$ .

Y, como estamos tomando  $\lambda \neq 0$  podemos concluir que  $Re(\lambda) < 0$ .

2) Sea  $\lambda \in \sigma_p$ .

Ahora, para demostrar que  $Re(\lambda) < 0$  ocupamos los siguientes resultados:

### Operador integrado

Sea  $\tilde{v} = \int_{-\infty}^{\xi} v(z) dz$ ,

entonces:

$$\begin{aligned} \lambda \tilde{v} &= \int_{-\infty}^{\xi} \lambda v(z) dz, \\ &= \int_{-\infty}^{\xi} [sv'(z) - (\hat{u}v)' + v''(z)] dz, \\ &= \int_{-\infty}^{\xi} [s\tilde{v}''(z) - (\hat{u}\tilde{v}')' + \tilde{v}'''(z)] dz. \end{aligned}$$

Al integrar y utilizar que  $\tilde{v}(-\infty) = 0$ ,  $\tilde{v}' = v(\xi)$  obtenemos el operador integrado.

$$\lambda \tilde{v} = (s - \hat{u})\tilde{v}' + \tilde{v}'' = \tilde{L}(\tilde{v}). \quad (2.9)$$

Así,  $\tilde{v}$  satisface el problema de valores propios integrado (2.8).

Ahora, podemos escribir el siguiente lema:

**Lema 3.2.2** Los operadores  $L$  y  $\tilde{L}$  tienen el mismo espectro puntual a excepción de  $\lambda = 0$ .

**Demostración**

Probemos por doble contención:

- $\sigma_p(L) - \{0\} \subset \sigma_p(\tilde{L})$ .

**Prueba**

Sea  $\lambda \in \sigma_p(L) - \{0\}$  entonces,

$$Lv = \lambda v = v'' + (s - \hat{u})v' - \hat{u}'v,$$

como  $\tilde{v}(x) = \int_{-\infty}^x v(z)dz$ , entonces  $\tilde{v}'(x) = v(x)$ . Así,

$$\begin{aligned} L(\tilde{v}'(x)) &= \lambda \tilde{v}'(x) = \tilde{v}'''(x) + (s - \hat{u})\tilde{v}''(x) - \hat{u}'\tilde{v}'(x), \\ \lambda \tilde{v}(x) &= \tilde{v}''(x) + (s - \hat{u})\tilde{v}'(x) + \hat{u}'\tilde{v}(x). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Podemos notar que se cumplen las condiciones de frontera, pues  $\tilde{v}(x)$  y sus derivadas decaen a cero en  $\pm\infty$  pues,

$$\begin{aligned} \tilde{v}(-\infty) &= \int_{-\infty}^{-\infty} v(z) dz = 0, \\ \tilde{v}(\infty) &= \int_{-\infty}^{\infty} v(z) dz \Rightarrow \lambda \tilde{v}(\infty) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} v(z) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda v(z) dz, \end{aligned}$$

por (2.10)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} v''(z) + (s - \hat{u})v'(z) + \hat{u}'v(z) dz.$$

pero  $\lambda \neq 0$ , entonces  $\tilde{v}(\infty) = 0$ . El hecho de que sus derivadas decaigan a cero en  $\pm\infty$  se debe a que  $\tilde{v}'(x) = v(x)$ ,  $\tilde{v}''(x) = v'(x)$ .

- $\sigma_p(\tilde{L}) \subset \sigma_p(L)$ .

**Prueba**

Sea  $\lambda \in \sigma_p(\tilde{L})$  y  $\tilde{v}(x) = \int_{-\infty}^x v(z) dz$  tal que,

$$\begin{aligned} \tilde{L}\tilde{v} &= \lambda \tilde{v} = \tilde{v}'' + (s - \hat{u})\tilde{v}' + \hat{u}'\tilde{v}, \\ \Rightarrow \tilde{L}\tilde{v}' &= \tilde{v}''' + (s - \hat{u})\tilde{v}'' + \hat{u}'\tilde{v}', \end{aligned}$$

con  $\tilde{v}^{(n)}(\pm\infty) = 0$ ,  $n \geq 0$ .

Entonces

$$\begin{aligned} Lv &= v'' + (s - \hat{u})v' + \hat{u}'v, \\ \Rightarrow \lambda &\in \sigma_p(L), \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma_p(\tilde{L}) = \sigma_p(L).$$

Como  $L$  y  $\tilde{L}$  tienen el mismo espectro puntual, podemos facilitar los cálculos trabajando con el operador  $\tilde{L}$  en lugar de  $L$ , para demostrar que  $Re(\lambda) < 0$ .

Al realizar el producto escalar (en  $L^2(\mathbb{R})$ ) entre  $\lambda u$  y  $\tilde{u}$ :

$$\begin{aligned} \langle \lambda u, \tilde{u} \rangle &= \langle (s - \hat{u})u' + u'', \tilde{u} \rangle, \\ \Rightarrow \lambda \int_{\mathbb{R}} |u|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}} (s - \hat{u})u'\tilde{u}d\xi + \int_{\mathbb{R}} u''\tilde{u}d\xi. \end{aligned}$$

Así,

$$Re(\lambda) \int_{\mathbb{R}} |u|^2 d\xi = Re \left( \int_{\mathbb{R}} (s - \hat{u})u'\tilde{u}d\xi - \int_{\mathbb{R}} |u'|^2 d\xi \right),$$

Usando la igualdad  $Re \left( \int_{\mathbb{R}} (s - \hat{u})u'\tilde{u}d\xi \right) = \int |u'|^2 \hat{u}'d\xi$ , obtenemos:

$$Re(\lambda) \int |u|^2 d\xi = \frac{1}{2} \int |u'|^2 \hat{u}'d\xi - \int_{\mathbb{R}} |u'|^2 d\xi,$$

ahora, debido a que  $\hat{u}' < 0$  entonces  $Re(\lambda) < 0$ .

Esto demuestra la siguiente proposición.

**Proposición 2.1.1.** *El problema de Burgers es espectralmente estable.*

Ya hemos demostrado que nuestra solución  $\hat{u}$  es espectralmente estable, pero el método de estimaciones de energía que hemos ocupado aquí no siempre puede ser empleado. En la sección (3) mostramos una forma diferente de concluir que el espectro puntual es espectralmente estable, mediante la función de Evans.

## 2.2. Flujo Isentrópico

En esta sección, trabajamos esencialmente con el artículo [6], y así poder comprender la estabilidad para soluciones de choque viscoso de las ecuaciones de Navier-Stokes compresibles isentrópicas. Cabe mencionar que el artículo [6] está basado en el trabajo de Matsumura y Nishihara, y cuya aportación adicional es que se expande el régimen de parámetros conocidos para el cual los choques viscosos de pequeña amplitud son espectralmente estables.

Consideremos las ecuaciones de Navier-Stokes compresibles isentrópicas en una dimensión espacial expresada en coordenadas lagrangianas, también conocida como sistema  $p$  con viscosidad real:

$$\begin{aligned} u_t - u_x &= 0, \\ u_t + p(v)_x &= \left( \frac{u_x}{v} \right)_x, \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde físicamente:

$v$ :=volumen específico,

$u$ :=velocidad,

$p(v)$ :=ley de presión.

Suponiendo que  $p(v)$  es adiabático, es decir, el sistema no intercambia calor con su entorno entonces:

$$p(v) = a_0 v^{-\gamma}, \quad (2.12)$$

para algunas constantes  $a_0 > 0$  y  $\gamma \geq 1$ .

### 2.2.1. Existencia de solución tipo onda viajera

Al igual que en la ecuación de Burgers, nos preguntamos si el sistema (2.11) con condiciones de frontera

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (v, u)(x, t) = (v_{\pm}, u_{\pm}), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (v', u')(x, t) = 0,$$

acepta solución tipo onda viajera. Para ello, realizamos el siguiente cambio de variable:

$$x \rightarrow x - st = \xi(x, t),$$

obteniendo con esto un sistema de referencia inercial, y entonces, nuestro problema toma la forma:

$$\begin{aligned} -sv_{\xi} + v_t - u_{\xi} &= 0, \\ -su_{\xi} + u_t + p(v)_{\xi} &= \left(\frac{u_{\xi}}{v}\right)_{\xi}. \end{aligned}$$

Para simplificar la notación reescribimos  $\xi$  por  $x$  y usando (2.12)

$$\begin{aligned} v_t - sv_x - u_x &= 0, \\ u_t - su_x + (a_0 v^{-\gamma})_x &= \left(\frac{u_x}{v}\right)_x. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Al realizar el siguiente reescalamiento:

$$(x, t, v, u) \rightarrow \left( \underbrace{(-\varepsilon s) \cdot x}_{x^*}, \underbrace{(\varepsilon s^2) \cdot t}_{t^*}, \underbrace{\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \cdot v}_{v^*}, \underbrace{\left(-\frac{1}{\varepsilon s}\right) u}_{u^*} \right),$$

CAPÍTULO 2. ESTABILIDAD ESPECTRAL POR ESTIMACIONES DE ENERGÍA 11

donde  $\varepsilon > 0$  se elige para que

$$0 < v_+ < v_- = 1, \quad (2.14)$$

entonces:

$$v_{t^*}^* = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial v}{\partial t^*} = \frac{1}{\varepsilon^2 s^2} v_t,$$

así:

$$v_t = \varepsilon^2 s^2 v_{t^*}^*. \quad (2.15)$$

Análogamente

$$v_x = -\varepsilon^2 s v_{x^*}^*. \quad (2.16)$$

$$u_t = -\varepsilon^2 s^3 u_{t^*}^*. \quad (2.17)$$

$$u_x = \varepsilon^2 s^2 u_{x^*}^*. \quad (2.18)$$

Sustituyendo (2.15), (2.16), (2.17), (2.18) en (2.13) tenemos:

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 s^2 v_{t^*}^* + \varepsilon^2 s^2 v_{x^*}^* - \varepsilon^2 s^2 u_{x^*}^* &= 0, \\ -\varepsilon^2 s^3 u_{t^*}^* - \varepsilon^2 s^3 u_{x^*}^* + (a_0 (\varepsilon v^*)^{-\gamma})_x &= \left( \frac{\varepsilon s^2 u_{x^*}^*}{v^*} \right)_x. \end{aligned}$$

Equivalentemente:

$$\begin{aligned} v_{t^*}^* + v_{x^*}^* - u_{x^*}^* &= 0, \\ -\varepsilon^2 s^3 u_{t^*}^* - \varepsilon^2 s^3 u_{x^*}^* + (a_0 \varepsilon^{-\gamma}) (-\varepsilon s) v_{x^*}^{*-\gamma} &= (\varepsilon s^2) (-\varepsilon s) \left( \frac{u_{x^*}^*}{v^*} \right)_{x^*}. \end{aligned}$$

Tomando nuestro sistema la forma:

$$\begin{aligned} v_{t^*}^* + v_{x^*}^* - u_{x^*}^* &= 0, \\ -\varepsilon^2 s^3 u_{t^*}^* - \varepsilon^2 s^3 u_{x^*}^* - a_0 s \varepsilon^{-\gamma+1} v_{x^*}^{*-\gamma} &= -\varepsilon^2 s^3 \left( \frac{u_{x^*}^*}{v^*} \right)_{x^*}. \end{aligned}$$

Ahora, dividiendo nuestra segunda ecuación entre  $-\varepsilon s^3$ , haciendo

$$a = a_0 s^{-2} \varepsilon^{-\gamma-1} \quad (2.19)$$

y omitiendo el subíndice \* para simplificar la notación tenemos:

$$\begin{aligned} v_t + v_x - u_x &= 0, \\ u_t + u_x + av_x^{-\gamma} &= \left(\frac{u_x}{v}\right)_x. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Con este cambio de variable, una solución estacionaria  $(u(x), v(x))$  satisface

$$\begin{aligned} v_x - u_x &= 0, \\ u_x + av_x^{-\gamma} &= \left(\frac{u_x}{v}\right)_x, \end{aligned} \quad (2.21)$$

con condiciones de frontera

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (v, u)(x, t) = (v_{\pm}, u_{\pm}), \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (v', u')(x, t) = 0. \quad (2.22)$$

Sustituyendo la primera ecuación de nuestro sistema (2.21) en la segunda de ese mismo y considerando  $(\cdot)_x = (\cdot)'$  tenemos:

$$v' + (av^{-\gamma})' = \left(\frac{v'}{v}\right)'$$

Integrando de  $-\infty$  a  $x$  tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x v' dz + \int_{-\infty}^x (av^{-\gamma})' dz &= \int_{-\infty}^x \left(\frac{v'}{v}\right)' dz, \\ v(x) - v_- + av^{-\gamma}(x) - av_-^{-\gamma} &= \frac{v'(x)}{v(x)} - \frac{v'_-}{v_-}, \end{aligned}$$

al usar que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} u'(x, t) = 0$ , y  $v_- = 1$ ,

$$v(x) [v(x) - 1 + a(v^{-\gamma}(x) - 1)] = v'(x), \quad (2.23)$$

si evaluamos en  $x = \infty$ , y despejamos  $a$ , obtenemos la condición de Rankine-Hugoniot:

$$a = v_+^{\gamma} \frac{1 - v_+}{1 - v_+^{\gamma}}, \quad (2.24)$$

donde  $a := a_0 s^{-2} \varepsilon^{-\gamma-1}$  según (2.19).

Podemos observar que  $a \rightarrow \gamma^{-1}$ , siempre que  $v_+ \rightarrow 1$  (límite de choque débil), pues:

$$\lim_{v_+ \rightarrow 1} a = \lim_{v_+ \rightarrow 1} \frac{v_+^{\gamma} - v_+^{\gamma+1}}{1 - v_+^{\gamma}},$$

por L'Hospital

$$= \lim_{v_+ \rightarrow 1} \frac{\gamma v_+^{\gamma-1} - (\gamma + 1) v_+^\gamma}{-\gamma v_+^{\gamma-1}} = \gamma^{-1}.$$

También  $v_+^\gamma \rightarrow v_+$  cuando  $v_+ \rightarrow 0$ , entonces:

$$\frac{1 - v_+}{1 - v_+^\gamma} \rightarrow 1,$$

y así:

$$a = v_+^\gamma \frac{1 - v_+}{1 - v_+^\gamma} \rightarrow v_+^\gamma,$$

siempre que  $v_+ \rightarrow 0$ .

Entonces nuestro sistema (2.11) tiene solución tipo onda viajera si la siguiente ecuación tiene solución:

$$v'(x) = v(x) [v(x) - 1 + a(v^{-\gamma}(x) - 1)], \quad (2.25)$$

con  $a = v_+^\gamma \frac{1 - v_+}{1 - v_+^\gamma} \in \mathbb{R}$ .

**Proposición 2.2.1.** *Sea  $g(v) := v(x) [v(x) - 1 + a(v^{-\gamma}(x) - 1)]$ , entonces el problema:*

$$v' = g(v), \quad v(0) = v_0 > 0,$$

*con condiciones de frontera  $v(\pm\infty) = v_\pm$  tiene una única solución.*

### Prueba

Por el teorema de existencia y unicidad, existe  $\varepsilon > 0$  y una única solución  $v(x)$ , que satisface  $v'(x) = g(v)$ ,  $v(0) = v_0 > 0$ , que está definida en un entorno de  $x_0 = 0$ , digamos  $-\varepsilon < x < \varepsilon$ . Como  $g(v_0) < 0$ , entonces podemos suponer que  $v(x)$  es decreciente en ese intervalo. Sea  $J$  el intervalo maximal donde está definida tal solución. Por unicidad,  $v(x)$  no puede tomar el valor  $v_- = 1$  ni  $v_+$  ya que al ser ceros de  $g(v)$ ,  $v(x) \equiv v_+$  y  $v(x) \equiv 1$  son soluciones. Por lo tanto  $v_+ < v(x) < v_-$ , para toda  $x \in J$ . Así,  $|g(v)|$  está acotada para  $v_+ < v(x) < v_-$ , de donde se sigue que la solución está definida para toda  $x$  (véase [14], p. 171) es decir  $J = \mathbb{R}$ .

Tomando el límite cuando  $x$  tiende a  $+\infty$  tenemos, ya que  $v(x)$  es decreciente,  $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) \leq v_+$ . Suponiendo que el límite fuese  $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) < v_+$ , digamos  $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = v_{1+}$ , del hecho que  $v(x)$  es monótona, tendríamos que  $\lim_{x \rightarrow \infty} v'(x) = 0$ , con lo que el valor límite,  $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = v_{1+}$ , cumpliría que  $g(v_{1+}) = 0$ , lo cual sería una contradicción pues  $v_\pm$  son los únicos ceros de  $g(v)$ . Por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow \infty} v(x) = v_+$ . De la misma manera se prueba que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} v(x) = v_-$ . Y así se puede concluir que el sistema (2.11) acepta solución tipo onda viajera.



**Corolario 2.2.2.** Si  $v(x)$  es la solución de la proposición anterior, entonces  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v'(x) = 0$ .

### 2.2.2. Linealización sobre el perfil $(\widehat{v}, \widehat{u})$

Sea  $u = \widehat{u}(x) + \delta\widehat{u}(x, t)$ ,  $v = \widehat{v}(x) + \delta\widehat{v}(x, t)$ , sustituyendo en la primera ecuación de (2.20) tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\widehat{v}(x, t) + (\widehat{v}(x))' + \frac{\partial}{\partial x} \delta\widehat{v}(x, t) - (\widehat{u}(x))' - \frac{\partial}{\partial x} \delta\widehat{u}(x, t) = 0,$$

pero  $(\widehat{v}(x))' - (\widehat{u}(x))' = 0$ , por ser una solución estacionaria,

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \delta\widehat{v}(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \delta\widehat{v}(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} \delta\widehat{u}(x, t) = 0. \quad (2.26)$$

Ahora, sustituyendo en la segunda ecuación de (2.20) se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\widehat{u} + \widehat{u}' + \frac{\partial}{\partial x} \delta\widehat{u} + a \frac{\partial}{\partial x} (\widehat{v} + \delta\widehat{v})^{-\gamma} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\frac{\partial}{\partial x} (\widehat{u} + \delta\widehat{u})}{\widehat{v} + \delta\widehat{v}} \right]. \quad (2.27)$$

Como  $(\widehat{v}, \widehat{u})$  es una solución estacionaria, por la segunda ecuación de (2.20)

$$\widehat{u}' = \left( \frac{\widehat{u}'}{\widehat{v}} \right)' - (a\widehat{v}^{-\gamma})',$$

entonces (2.27) toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\widehat{u} + \frac{\partial}{\partial x} \delta\widehat{u} + a \underbrace{\left[ \frac{\partial}{\partial x} (\widehat{v} + \delta\widehat{v})^{-\gamma} - (\widehat{v}^{-\gamma})' \right]}_{(*)} = \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{\left[ \frac{\frac{\partial}{\partial x} (\widehat{u} + \delta\widehat{u})}{\widehat{v} + \delta\widehat{v}} \right]}_{(**)} - \left( \frac{\widehat{u}'}{\widehat{v}} \right)'. \quad (2.28)$$

Al trabajar (\*) y considerar  $p(v) = v^{-\gamma}$ , entonces por el teorema de Taylor:

$$p(\widehat{v} + \delta\widehat{v}) \approx p(\widehat{v}) + p'(\widehat{v})\delta\widehat{v},$$

$$\Rightarrow (\widehat{v} + \delta\widehat{v})^{-\gamma} - \widehat{v}^{-\gamma} \approx -\gamma\widehat{v}^{-(\gamma+1)}\delta\widehat{v},$$

$$\Rightarrow a \left[ \frac{\partial}{\partial x} [(\widehat{v} + \delta\widehat{v})^{-\gamma}] - (\widehat{v}^{-\gamma})' \right] \approx -a\gamma \frac{\partial}{\partial x} [\widehat{v}^{-(\gamma+1)} \delta\widehat{v}]. \quad (2.29)$$

Trabajando (\*\*\*) y considerando  $g(\widehat{u}', \widehat{v}) = \frac{\widehat{u}'}{\widehat{v}}$ , por el teorema de Taylor en dos variables,

$$g(\widehat{u}' + (\delta\widehat{u})_x, \widehat{v} + \delta\widehat{v}) \approx g(\widehat{u}', \widehat{v}) + \frac{\partial}{\partial \widehat{u}_x} g(\widehat{u}', \widehat{v}) \cdot (\delta\widehat{u})_x + \frac{\partial}{\partial \widehat{v}} g(\widehat{u}', \widehat{v}) \cdot \delta\widehat{v},$$

$$\frac{\widehat{u}' + (\delta\widehat{u})_x}{\widehat{v} + \delta\widehat{v}} - \frac{\widehat{u}'}{\widehat{v}} \approx \frac{1}{\widehat{v}} \cdot (\delta\widehat{u})_x - \frac{\widehat{u}'}{\widehat{v}^2} \delta\widehat{v},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\widehat{u}' + (\delta\widehat{u})_x}{\widehat{v} + \delta\widehat{v}} \right] - \left( \frac{\widehat{u}'}{\widehat{v}} \right)' \approx \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\widehat{v}} \cdot (\delta\widehat{u})_x - \frac{\widehat{u}'}{\widehat{v}^2} \delta\widehat{v} \right]. \quad (2.30)$$

Sustituyendo (2.29) y (2.30) en (2.28) tenemos:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\widehat{u} + \frac{\partial}{\partial x} \delta\widehat{u} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( a\gamma\widehat{v}^{-(\gamma+1)} - \frac{\widehat{u}'}{\widehat{v}^2} \right) \delta\widehat{v} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\widehat{v}} (\delta\widehat{v})_x \right].$$

Recordando que  $\widehat{u}' = \widehat{v}'$ , por la primera ecuación de (2.20),

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \delta\widehat{u} + \frac{\partial}{\partial x} \delta\widehat{u} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( a\gamma\widehat{v}^{-(\gamma+1)} - \frac{\widehat{v}'}{\widehat{v}^2} \right) \delta\widehat{v} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{1}{\widehat{v}} (\delta\widehat{v})_x \right], \quad (2.31)$$

pero debido a (2.25), se tiene que

$$\frac{\widehat{v}'}{\widehat{v}^2} = \frac{1}{\widehat{v}} [\widehat{v} - 1 + a(\widehat{v}^{-\gamma} - 1)],$$

$$a\gamma\widehat{v}^{-(\gamma+1)} - \frac{\widehat{v}'}{\widehat{v}^2} = \frac{-\widehat{v}^{\gamma+1} + a(\gamma - 1) + (a + 1)\widehat{v}^\gamma}{\widehat{v}^{\gamma+1}}.$$

Haciendo  $h(\widehat{v}) = -\widehat{v}^{\gamma+1} + a(\gamma - 1) + (a + 1)\widehat{v}^\gamma$ , (2.31) toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta\widehat{u} + \frac{\partial}{\partial x} \delta\widehat{u} - \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} \delta\widehat{v} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{(\delta\widehat{u})_x}{\widehat{v}} \right]. \quad (2.32)$$

Ahora si consideramos  $\delta\widehat{u} = q_1(x) e^{\lambda t}$ ,  $\delta\widehat{v} = q_2(x) e^{\lambda t}$  entonces (2.26) toma la forma:

$$\lambda q_2(x) e^{\lambda t} + q_2'(x) e^{\lambda t} - q_1'(x) e^{\lambda t} = 0,$$

$$\lambda q_2(x) + q_2'(x) - q_1'(x) = 0. \quad (2.33)$$

Análogamente sustituyendo la forma de  $\delta\widehat{v}$ ,  $\delta\widehat{u}$  en (2.32) tenemos:

$$\begin{aligned} \lambda q_1(x) e^{\lambda t} + q_1'(x) e^{\lambda t} - \left[ \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} q_2(x) \right]' e^{\lambda t} &= \left( \frac{\frac{\partial}{\partial x} q_1(x)}{\widehat{v}} \right)' e^{\lambda t}, \\ \Rightarrow \lambda q_1(x) + q_1'(x) - \left[ \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} q_2(x) \right]' &= \left( \frac{\frac{\partial}{\partial x} q_1(x)}{\widehat{v}} \right)', \end{aligned} \quad (2.34)$$

considerando el cambio de variable  $q_1(x) = u(x)$ ,  $q_2(x) = v(x)$  y al sustituir en (2.33) y (2.34) obtenemos el problema de valores propios:

$$\begin{aligned} \lambda v + v' - u' &= 0, \\ \lambda u + u' - \left( \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} v \right)' &= \left( \frac{u'}{\widehat{v}} \right)', \end{aligned} \quad (2.35)$$

donde  $h(\widehat{v}) = -\widehat{v}^{\gamma+1} + a(\gamma - 1) + (a + 1)\widehat{v}^\gamma$ .

Del mismo modo como en Burgers, podemos notar que (2.35) tiene la forma:

$$L(\vec{v}) = \lambda \vec{v}. \quad (2.36)$$

### 2.2.3. Estabilidad espectral para choques de pequeña amplitud

Sabemos de la definición (1.3.7) que el operador  $L$  del sistema linealizado (2.35) es espectralmente estable, si no tiene valores propios  $\lambda$  en el conjunto:

$$P = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0 \} - \{0\}.$$

Suponiendo que  $(\bar{v}, \bar{u})$  es una función propia de (2.35) con valor propio  $\lambda \neq 0$ , entonces:

$$\begin{aligned} \lambda \bar{v} + \bar{v}' - \bar{u}' &= 0, \\ \lambda \bar{u} + \bar{u}' - \left( \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} \bar{v} \right)' &= \left( \frac{\bar{u}'}{\widehat{v}} \right)'. \end{aligned}$$

Integrando:

$$\int_{-\infty}^x \lambda \bar{v}(z) + \bar{v}'(z) - \bar{u}'(z) dz = 0,$$

$$\int_{-\infty}^x \lambda \bar{u}(z) + \bar{u}'(z) - \frac{h(\widehat{v}(z))}{\widehat{v}^{\gamma+1}(z)} \bar{v}'(z) dz = \int_{-\infty}^x \left( \frac{\bar{u}'(z)}{\widehat{v}(z)} \right)' dz = \frac{\bar{u}'(x)}{\widehat{v}(x)},$$

entonces:

$$\lambda \int_{-\infty}^x \bar{v}(z) dz + \int_{-\infty}^x \bar{v}'(z) dz - \int_{-\infty}^x \bar{u}'(z) dz = 0,$$

$$\lambda \int_{-\infty}^x \bar{u}(z) dz + \int_{-\infty}^x \bar{u}'(z) dz - \int_{-\infty}^x \frac{h(\widehat{v}(z))}{\widehat{v}^{\gamma+1}(z)} \bar{v}'(z) dz = \frac{\bar{u}'(x)}{\widehat{v}(x)}.$$

Si  $\tilde{u}(x) = \int_{-\infty}^x \bar{u}(z) dz$ ,  $\tilde{v}(x) = \int_{-\infty}^x \bar{v}(z) dz$ , entonces:

$$\lambda \tilde{v} + \tilde{v}' - \tilde{u}' = 0,$$

$$\lambda \tilde{u} + \tilde{u}' - \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} \tilde{v}' = \frac{\tilde{u}''}{\widehat{v}}.$$

Suprimiendo la tilde tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} \lambda v + v' - u' &= 0, \\ \lambda u + u' - \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} v' &= \frac{u''}{\widehat{v}}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Así, probar estabilidad espectral de (2.35) es equivalente a probar estabilidad espectral de (2.37) debido a que estos dos sistemas solo difieren para  $\lambda = 0$ .

### ■ Espectro esencial

Viendo (2.37) como una ecuación diferencial,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda \widehat{v} & \lambda \widehat{v} & f(\widehat{v}) - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} f(\widehat{v}) &= \widehat{v} - \widehat{v}^{-\gamma} h(\widehat{v}) = \widehat{v} - \widehat{v}^{-\gamma} (-\widehat{v}^{\gamma+1} + a(\gamma - 1) + (a + 1)\widehat{v}^{\gamma}), \\ &= 2\widehat{v} - a(\gamma - 1)\widehat{v}^{-\gamma} - (a + 1). \end{aligned}$$

Si consideramos a  $A(x) + \lambda B(x) := \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda \widehat{v} & \lambda \widehat{v} & f(\widehat{v}) - \lambda \end{pmatrix}$ . Definimos

$$A_{\pm} + \lambda B_{\pm} := \lim_{x \rightarrow \pm\infty} A(x) + \lambda B(x).$$

Sean,  $L_{\pm}$  los operadores obtenidos al linealizar alrededor de las soluciones constantes  $\widehat{v} = v_{\pm}$ , respectivamente.

Basándonos en [2],  $\lambda \in \sigma_{ess}(L_{\pm}) \Leftrightarrow \lambda \in \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \forall k \in \mathbb{R}, \det(A_{\pm} + \lambda B_{\pm} - ikI) = 0\}$ , de este modo, procedemos a calcular el determinante para conocer la naturaleza de  $\lambda$ .

**Espectro esencial de  $L_+$**

$$\begin{aligned} \det(A_+ + \lambda B_+ - ikI) &= \begin{vmatrix} -ik & \lambda & 1 \\ 0 & -ik & 1 \\ \lambda v_+ & \lambda v_+ & f(v_+) - \lambda - ik \end{vmatrix}, \\ &= \lambda^2 v_+ + \lambda(k^2 + 2v_+ ik) + k^2(ik - f(v_+)) = 0, \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{-(k^2 + 2v_+ ik) \pm \sqrt{k^4 - 4v_+^2 k^2 + 4v_+ k^2 f(v_+)}}{2v_+},$$

sea  $\Delta = k^4 - 4v_+^2 k^2 + 4v_+ k^2 f(v_+)$ , entonces:

- $\lambda_1 = \frac{-(k^2 + 2v_+ ik + \sqrt{\Delta})}{2v_+}$ .
  - Si  $\Delta \leq 0$ , entonces,  $Re(\lambda_1) = \frac{-k^2}{2v_+} \leq 0, \forall k \in \mathbb{R}$ .
  - Si  $\Delta > 0$ , entonces  $Re(\lambda_1) = \frac{-k^2 - \sqrt{\Delta}}{2v_+} \leq 0, \forall k \in \mathbb{R}$ .
- $\lambda_2 = \frac{-(k^2 + 2v_+ ik - \sqrt{\Delta})}{2v_+}$ .
  - Si  $\Delta \leq 0$ , entonces  $Re(\lambda_2) = \frac{-k^2}{2v_+} \leq 0, \forall k \in \mathbb{R}$ .
  - Si  $\Delta > 0$ , afirmo que  $Re(\lambda_2) \leq 0$ ,

**Prueba**

Como  $0 \leq v_+ \leq 1 \Rightarrow 4v_+^2 - 4v_+ \leq 0$ . También, dado que  $-4v_+ a \leq 0$

$$\begin{aligned}
 & y - 4a(\gamma - 1)v_+^{-\gamma} \leq 0, \quad \forall \gamma \in [1, 3], \\
 & \Rightarrow 4v_+^2 - 4v_+ - 4a(\gamma - 1)v_+^{-\gamma} - 4v_+a \leq 0, \\
 & \Rightarrow -4v_+^2 + 4v_+(2v_+^2 - a(\gamma - 1)v_+^{-\gamma} - (a + 1)) \leq 0, \\
 & \Rightarrow -4v_+^2 + 4v_+f(v_+) \leq 0, \\
 & \Rightarrow k^4 - 4v_+^2 + 4v_+f(v_+) \leq k^4, \\
 & \Rightarrow \sqrt{k^4 - 4v_+^2 + 4v_+f(v_+)} \leq k^2, \\
 & \Rightarrow \frac{-k^2 + \sqrt{k^4 - 4v_+^2 + 4v_+f(v_+)}}{2v_+} = \operatorname{Re}(\lambda_2) \leq 0, \quad \forall k \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Con esto, acabamos de probar que  $\sigma_{ess}(L_+)$  necesariamente está del lado izquierdo del plano complejo.

### Espectro esencial de $L_-$

$$\begin{aligned}
 \det(A_- + \lambda B_- - ikI) &= \begin{vmatrix} -ik & \lambda & 1 \\ 0 & -ik & 1 \\ \lambda & \lambda & f(1) - \lambda - ik \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda(2ik) + k^2(a\gamma + ik - 1) = 0, \\
 \Rightarrow \lambda_{1,2} &= \frac{-(k^2 + 2ik) \pm \sqrt{k^4 - 4k^2a\gamma}}{2}.
 \end{aligned}$$

Sea  $\Delta' = k^4 - 4k^2a\gamma$  entonces:

$$\lambda_1 = \frac{-(k^2 + 2ik) - \sqrt{\Delta'}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{-(k^2 + 2ik) + \sqrt{\Delta'}}{2},$$

análogo a  $\sigma_{ess}(L_+)$ , el único caso no trivial para concluir que  $\operatorname{Re}(\lambda_{1,2}) \leq 0$  es para  $\lambda_2 = \frac{-(k^2 + 2ik) + \sqrt{\Delta'}}{2}$  cuando  $\Delta' > 0$ .

Pero como  $k^4 - 4k^2a\gamma \leq k^4$ ,

$$\Rightarrow \sqrt{k^4 - 4k^2a\gamma} \leq k^2 \Rightarrow \frac{-k^2 + \sqrt{k^4 - 4k^2a\gamma}}{2} \leq 0 \quad \forall k \in \mathbb{R}.$$

De este modo, podemos concluir que  $\sigma_{ess}(L_-)$  se encuentra del lado izquierdo del plano complejo.

Ahora, debido al teorema 44, sabemos que el espectro esencial de  $L$  en está acotado a la derecha de  $\sigma_{ess}(L_+) \cup \sigma_{ess}L_-$  donde  $L_{\pm}$  corresponde a los operadores obtenidos al linealizar alrededor de las soluciones constantes  $\hat{u} = u_{\pm}$  respectivamente. Ahora, podemos concluir el siguiente lema.

**Lema 2.2.3.** *El espectro esencial de  $L$  se encuentra a la izquierda del plano complejo.*

Ahora solo basta probar para el espectro puntual.

■ **Espectro puntual**

Para demostrar que para cualquier  $\lambda \in \sigma_p(L)$  se cumple que  $\Re(\lambda) < 0$ , por el método de estimaciones de energía, solo se puede hacer cuando la diferencia  $d_\lambda := v_- - v_+ = 1 - v_+$  es lo suficientemente pequeña. Es importante notar que dicha diferencia depende de cada valor de  $\gamma$ .

De este modo, la estabilidad de choques de pequeña amplitud se concluye del siguiente teorema cuya demostración se encuentra en el anexo 1.

**Teorema 2.2.4.** *Si  $\gamma \in [1, 3]$ ,  $0 < v_+ \leq \hat{v} < 1$ , choques viscosos de (2.11) son espectralmente estables cuando:*

$$\left(\frac{v_+^{\gamma+1}}{a\gamma}\right)^2 + 2(\gamma - 1)\left(\frac{v_+^{\gamma+1}}{a\gamma}\right) - (\gamma - 1) \geq 0. \quad (2.38)$$

*CAPÍTULO 2. ESTABILIDAD ESPECTRAL POR ESTIMACIONES DE ENERGÍA*<sup>21</sup>



## Función de Evans analítica

### 3.1. Base teórica

En esta sección damos la teoría requerida para construir la función de Evans. Esta nos va a permitir dar resultados sobre la estructura del espectro puntual de la linealización de una PDE no lineal sobre una onda viajera.

A menudo es ventajoso escribir el problema de valor propio asociado con la linealización (2.8) y (2.36) como una EDO de primer orden. Por lo tanto, consideramos la familia  $T$  de operadores lineales definidos por:

$$T(\lambda) : D \rightarrow H, \quad u \mapsto \frac{du}{d\xi} - A(\cdot; \lambda)u$$

con  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Nosotros tomamos

$$D = C_{unif}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n), \quad H = C_{unif}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$$

o

$$D = H^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n), \quad H = L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n).$$

Una condición importante es la siguiente hipótesis.

**Hipótesis** La matriz como función de valores  $A(\xi, \lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es de la forma:

$$A(\xi, \lambda) = \tilde{A}(\xi) + \lambda B(\xi)$$

donde  $\tilde{A}(\cdot)$  y  $B(\cdot)$  están en  $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n})$ .

Los operadores  $T(\lambda)$  son operadores cerrados, densamente definidos en  $H$  con dominio  $D$ . Como podemos notar de (1.3.4), estamos interesados en el conjunto de  $\lambda$ 's para el que  $T(\lambda)$  no es invertible.

### 3.1.1. Dicotomías exponenciales

Las propiedades espectrales de  $T$  pueden clasificarse mediante el uso de propiedades del problema de ODE asociado,

$$\frac{d}{d\xi}u = A(\xi, \lambda)u, \quad (3.1)$$

con  $u \in \mathbb{C}$ . Denotamos por  $\Phi(\xi, \zeta)$  el operador de evolución <sup>1</sup> asociado con (3.1). Aunque  $\Phi(\xi, \zeta)$  depende de  $\lambda$  suprimimos la dependencia para evitar notación mas complicada. Una noción particularmente útil asociada con EDO lineales como (3.1) es la dicotomía exponencial. Para comenzar, consideremos un caso mas sencillo. Supongamos que se tiene una ecuación lineal de coeficiente constantes

$$\frac{d}{d\xi}u = A(\lambda)u \quad (3.2)$$

es decir  $A(\lambda)$  no depende de  $\xi$ . Nos gustaría clasificar las soluciones de (3.2) de acuerdo con su comportamiento asintótico cuando  $|\xi| \rightarrow \infty$ .

Suponga que la matriz  $A(\lambda)$  es hiperbólica, de modo que el espectro espacial  $\text{spec}(A(\lambda))$  no tiene puntos en el eje imaginario. Así,

$$\mathbb{C}^n = E_0^s(\lambda) \oplus E_0^u(\lambda)$$

donde  $E_0^s(\lambda)$ ,  $E_0^u(\lambda)$  son los espacios propios generalizados estables e inestables de la matriz  $A(\lambda)$ , es decir, si los valores propios espaciales son mayores que cero, entonces los vectores propios asociados generan  $E_0^s(\lambda)$  y los vectores propios asociados con los valores propios negativos generan  $E_0^u(\lambda)$ . Denotamos por  $P_0^s(\lambda)$  la proyección espectral de  $A(\lambda)$ , de modo que

$$R(P_0^s(\lambda)) = E_0^s(\lambda), \quad N(P_0^s(\lambda)) = E_0^u(\lambda).$$

Estos subespacios son invariantes bajo la evolución  $\Phi(\xi, \zeta) = e^{A(\lambda)(\xi-\zeta)}$  de (3.2). Además, las soluciones  $u(\xi)$  con condiciones iniciales  $u(\zeta)$  en  $E_0^s(\lambda)$  decaen exponencialmente para  $\xi > \zeta$  mientras que las soluciones con condiciones iniciales  $u(\zeta)$  en  $E_0^u(\lambda)$  decaen exponencialmente para  $\xi < \zeta$ .

Ahora, a nosotros nos interesa tener una caracterización similar para nuestro problema mas general (3.1), por ello damos la siguiente definición.

---

<sup>1</sup>Es decir  $\Phi(\xi, \xi) = id$ ,  $\Phi(\xi, \tau)\Phi(\tau, \zeta) = \Phi(\xi, \zeta)$  para todo  $\xi, \tau, \zeta \in \mathbb{R}$  y  $u(\xi) = \Phi(\xi, \zeta)u_0$  satisface (3.1) para cada  $u_0 \in \mathbb{C}^n$

**Definición 3.1.1.** (Dicotomías exponenciales)

Sea  $I = \mathbb{R}^+$ ,  $\mathbb{R}^-$  o  $\mathbb{R}$ , y  $\lambda_* \in \mathbb{C}$ . Decimos que (3.2), con  $\lambda = \lambda_*$  fijo, tiene una dicotomía exponencial en  $I$  si existen constantes  $K > 0$  y  $k^s < 0 < k^u$ , así como una familia de proyecciones  $P(\xi)$ , definidas y continuas para  $\xi \in I$ , de modo que lo siguiente es cierto para  $\xi, \zeta \in I$ .

- Con  $\Phi^s(\xi, \zeta) := \Phi(\xi, \zeta) P(\zeta)$  tenemos:

$$|\Phi^s(\xi, \zeta)| \leq K e^{k^s(\xi - \zeta)}, \quad \xi \geq \zeta, \quad \xi, \zeta \in I$$

- Definimos  $\Phi^u(\xi, \zeta) := \Phi(\xi, \zeta) ((id - P(\zeta)))$ , entonces:

$$|\Phi^u(\xi, \zeta)| \leq K e^{k^u(\xi - \zeta)}, \quad \xi \leq \zeta, \quad \xi, \zeta \in I.$$

- Las proyecciones conmutan con la evolución,  $\Phi(\xi, \zeta) P(\zeta) = P(\zeta) \Phi(\xi, \zeta)$ , así que

$$\Phi^s(\xi, \zeta) u_0 \in R(P(\xi)), \quad \xi \geq \zeta, \quad \xi, \zeta \in I,$$

$$\Phi^u(\xi, \zeta) u_0 \in N(P(\xi)), \quad \xi \leq \zeta, \quad \xi, \zeta \in I.$$

La dimensión de  $N(P(\xi))$  se conoce como el índice de Morse de la dicotomía exponencial en  $I$ . Si (3.1) tiene dicotomías exponenciales en  $\mathbb{R}^+$  y en  $\mathbb{R}^-$ , los índices de Morse asociados se denotan por  $i_+(\lambda_*)$  y  $i_-(\lambda_*)$ , respectivamente.

Intuitivamente  $T$  tiene una dicotomía exponencial en un intervalo no acotado  $I$  si cada solución del problema en EDO decae exponencialmente cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

Ahora, podemos enunciar el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.2.** [2]

Las siguientes afirmaciones son verdaderas:

- $\lambda$  está en el resolvente del operador  $T$  si y solo si el sistema (3.2) admite dicotomías exponenciales en todo  $\mathbb{R}$ .
- $\lambda$  está en el espectro puntual de  $T$  si y solo si el sistema tiene dicotomías exponenciales en  $\mathbb{R}^+$  y  $\mathbb{R}^-$  con el mismo índice de Morse y la  $\dim(N(T(\lambda))) > 0$ . Si se denota por  $P_{\pm}(\xi; \lambda)$  las matrices de proyección de las dicotomías exponenciales en  $\mathbb{R}^+$  y  $\mathbb{R}^- \Rightarrow N(P_-(0, \lambda)) \cap R(P_+(0, \lambda))$  y  $N(T(\lambda))$  son isomórficos a través de  $u(O) \rightarrow u(\cdot)$ .
- $\lambda$  está en el espectro esencial si no tiene dicotomías exponenciales en  $\mathbb{R}^+$  o  $\mathbb{R}^-$  y si las tiene, los índices de Morse son diferentes.

**Dicotomías exponenciales del problema linealizado respecto a un frente**  
Si  $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} A(\xi; \lambda) = A_{\pm}(\lambda)$ , consideremos el problema

$$\frac{d\vec{u}}{d\xi}(\xi) = A(\xi; \lambda) \vec{u}(\xi).$$

que satisface las condiciones de frontera  $\lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} u(\xi) = u_{\pm}$  con  $u_{\pm}$  soluciones homogéneas de la EDP, entonces es válido el siguiente teorema.

**Teorema 3.1.3.** [2]

Sea  $\lambda \in \mathbb{C}$ , el sistema admite dicotomías exponenciales en  $\mathbb{R}^+$  y  $\mathbb{R}^-$  si y solo si  $A_{\pm}(\lambda)$  son hiperbólicas. Denotemos por  $i_{\pm}(\lambda) = \dim E^u(A_{\pm}(\lambda))$  el sistema tiene dicotomías exponenciales en  $\mathbb{R}$  si se cumple lo anterior y  $N(P_-(0, \lambda)) \oplus R(P_+(0, \lambda)) = \mathbb{C}^n \Rightarrow i_- = i_+$ .

## 3.2. Formulación de la función de Evans

Estamos interesados en probar que espectro puntual de nuestro operador en (2.36) no acepta valores propios en el semiplano derecho del plano complejo. Con esto en mente, sea  $\Omega = \mathbb{C} - \sigma_{ess}(T)$  una región conexa que contenga la parte derecha del plano complejo. Si consideramos el problema

$$\frac{d}{d\xi} \vec{u} = A(\xi; \lambda) \vec{u}, \quad \lim_{\xi \rightarrow \pm\infty} A(\xi; \lambda) = A_{\pm}(\lambda),$$

con  $A_{\pm}(\lambda)$  hiperbólicas. Entonces  $ind_+ = ind_-$ , así supongamos que  $ind_+ = k$  entonces existen bases ordenadas  $\{u_1, \dots, u_k\}$  en  $N(P_-(0; \lambda))$  y  $\{u_{k+1}, \dots, u_n\}$  en  $R(P_+(0; \lambda))$ . Entonces la función de Evans se define como:

$$D(\lambda) := \det [u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n]. \quad (3.3)$$

La cual tiene las siguientes propiedades:

- $D(\lambda) = 0$  si y solo si  $\lambda \in \sigma_{pt}(T)$ .
- $D(\lambda) \in \mathbb{R}$  siempre que  $\lambda \in \mathbb{R} \cap \Omega$ .
- El orden de  $\lambda$  como cero de la función de Evans es igual a la multiplicidad algebraica de  $\lambda$  como valor propio de  $T$ .
- $D(0) = 0$ .

Las bases ordenadas implicadas en (3.3) se puede elegir para que  $D$  varíe analíticamente con respecto a  $\lambda$  ver [4], [10].

### 3.3. Ecuación de Burgers

#### 3.3.1. Construcción de la función de Evans

Consideremos el problema de valores propios integrado (2.9) que se puede expresar por:

$$q'' = (\widehat{u} - s)q' + \lambda q. \quad (3.4)$$

Sabemos de (2.3) que  $\widehat{u}(x) = s - a \tanh h \left( \frac{a(x-st+\delta)}{2\nu} \right)$ .

Entonces, nuestro problema de valores propios integrado toma la forma:

$$\left[ a \tanh \left( \frac{a(x-st+\delta)}{2\nu} \right) \right] q' + q'' - \lambda q = 0.$$

Esta ecuación tiene como solución:

$$q(x) = c_+ e^{-\frac{x}{2}\sqrt{4\lambda+a^2}} \operatorname{sech} \left( \frac{ax}{2} \right) + \frac{c_-}{\sqrt{4\lambda+a^2}} e^{\frac{x}{2}\sqrt{4\lambda+a^2}} \operatorname{sech} \left( \frac{ax}{2} \right). \quad (3.5)$$

#### Cálculo de las condiciones iniciales $c_+$ y $c_-$

Veamos a (3.4) como un sistema de ecuaciones. Sea

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

con  $u_1 = q$  y  $u_2 = q'$ , entonces:

$$u_2' = (\widehat{u} - s)u_2 + \lambda u_1,$$

que da lugar al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & \widehat{u} - s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},$$

o equivalentemente, mostrando la dependencia de  $\xi$ ,

$$\begin{pmatrix} u_1'(\xi) \\ u_2'(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & \widehat{u}(\xi) - s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1(\xi) \\ u_2(\xi) \end{pmatrix},$$

$$\vec{u}' = A(\xi, \lambda) \vec{u},$$

donde:

$$A(\xi, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & \widehat{u}(\xi) - s \end{pmatrix}, \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}.$$

Ahora obtengamos los valores propios espaciales de  $A(\xi, \lambda)$ ,

$$\det(A(\xi, \lambda) - \mu I_{2 \times 2}) = \begin{vmatrix} -\mu & 1 \\ \lambda & \widehat{u}(\xi) - s - \mu \end{vmatrix} = \mu^2 + \mu(s - \widehat{u}(\xi)) - \lambda = 0.$$

Al resolver para  $\mu$

$$\mu_{\pm} = \frac{\widehat{u}(\xi) - s \pm \sqrt{(s - \widehat{u}(\xi))^2 + 4\lambda}}{2}.$$

Así los valores propios espaciales para  $A(\xi, \lambda)$  son:

$$\mu_+ = \frac{\widehat{u}(\xi) - s + \sqrt{(s - \widehat{u}(\xi))^2 + 4\lambda}}{2}, \quad \mu_- = \frac{\widehat{u}(\xi) - s - \sqrt{(s - \widehat{u}(\xi))^2 + 4\lambda}}{2}.$$

Mas aún, nosotros requerimos valores propios para  $A_+$  y  $A_-$  donde:

$$A_+ = \lim_{\xi \rightarrow \infty} A(\xi, \lambda) ; \quad A_- = \lim_{\xi \rightarrow -\infty} A(\xi, \lambda).$$

- Cálculo de los valores propios para  $A_+$ .

Partiendo de (2.3)

$$A_+ = \lim_{\xi \rightarrow \infty} A(\xi, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & -a \end{pmatrix}.$$

Ahora:

$$\det(A_+ - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\mu & 1 \\ \lambda & -a - \mu \end{vmatrix} = \mu^2 + \mu a - \lambda = 0 \Rightarrow \mu_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4\lambda}}{2}.$$

Entonces,  $A_+$  tiene los siguientes valores propios espaciales :

$$\mu_1^+ = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4\lambda}}{2}, \quad \mu_2^+ = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4\lambda}}{2}.$$

- Cálculo de los valores propios para  $A_-$ .

Haciendo lo análogo,  $A_-$  tiene como valores propios espaciales:

$$\mu_1^- = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4\lambda}}{2}, \quad \mu_2^- = \frac{a - \sqrt{a^2 + 4\lambda}}{2}.$$

Tomando como  $\mu_- = \mu_1^- = \frac{a + \sqrt{a^2 + 4\lambda}}{2}$ ,  $\mu_+ = \mu_2^+ = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4\lambda}}{2}$ .

### 3.3.2. Cálculo de los vectores propios izquierdo y derecho de $A_-$ y $A_+$

Para  $A_-$ , consideramos el valor propio  $\mu_-$ , el cual nos genera el espacio estable. Así se calcula un vector propio derecho de  $A_-$ , asociado al valor propio  $\mu_-$ .

Sea

$$\begin{aligned} v &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow A_- v &= \mu_- v \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \mu_- \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \\ \Rightarrow v_2 &= \mu_- v_1. \end{aligned}$$

Si  $v_1 = t_- \in \mathbb{C}$ , entonces un vector propio derecho es:

$$r_- = t_- \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_- \end{pmatrix}.$$

Ahora calculamos un vector propio izquierdo de  $A_-$  asociado al valor propio  $\mu_-$ .

Sea  $u = (u_1, u_2)$ , entonces:

$$\begin{aligned} u A_- &= u \mu_- \Rightarrow (u_1, u_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda & a \end{pmatrix} = (u_1, u_2) \mu_-, \\ \Rightarrow \lambda u_2 &= u_1 \mu_- \Rightarrow u_2 = \frac{\mu_-}{\lambda} u_1. \end{aligned}$$

Si

$$u_1 = \frac{-\mu_2^-}{t_- \sqrt{a^2 + 4\lambda}} \Rightarrow u_2 = -\frac{\mu_-}{\lambda} \cdot \frac{\mu_2^-}{t_- \sqrt{a^2 + 4\lambda}} = \frac{1}{t_- \sqrt{a^2 + 4\lambda}}.$$

Así, un vector propio izquierdo de  $A_-$  asociado al valor propio  $\mu_-$  es:

$$l_- = \frac{-1}{t_- \sqrt{a^2 + 4\lambda}} (\mu_2^-, -1).$$

En resumen, un vector propio derecho e izquierdo de  $A_-$  son:

$$r_- = t_- \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_- \end{pmatrix}, \quad l_- = \frac{-1}{t_- \sqrt{a^2 + 4\lambda}} (\mu_2^-, -1). \quad (3.6)$$

Haciendo lo análogo, un vector propio derecho e izquierdo de  $A_+$  son:

$$r_+ = t_+ \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_+ \end{pmatrix}, \quad l_+ = \frac{1}{t_+ \sqrt{a^2 + 4\lambda}} (\mu_1^+, -1). \quad (3.7)$$

### 3.3.3. Cálculo del operador conmutador para $A_-$ y $A_+$

Los operadores  $P'_+P_+ - P_+P'_+$ ,  $P'_-P_- - P_-P'_-$ , son llamados operador conmutador de  $A_+$  y  $A_-$  respectivamente. Donde

$$P_{\pm} = r_{\pm}l_{\pm}.$$

Con  $r_{\pm}l_{\pm}$  definidos en (3.6) y (3.7),

$$P'_{\pm} = \frac{d}{d\lambda} (P'_{\pm}).$$

Así, si  $\Phi = a^2 + 4\lambda$ ,

$$P_+ = r_{\pm}l_{\pm} = \Phi^{\frac{-1}{2}} \begin{pmatrix} \mu_1^+ & -1 \\ \mu_+\mu_1^+ & -\mu_+ \end{pmatrix},$$

$$P'_+ = -2\Phi^{\frac{-3}{2}} \begin{pmatrix} \mu_1^+ & -1 \\ \mu_+\mu_1^+ & -\mu_+ \end{pmatrix} + \Phi^{\frac{-1}{2}} \begin{pmatrix} \Phi^{\frac{-1}{2}} & 0 \\ -1 & \Phi^{\frac{-1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$P'_+P_+ = -2\Phi^{-2} \begin{pmatrix} (\mu_1^+)^2 - \mu_1^+\mu_+ & -\mu_1^+ + \mu_+ \\ (\mu_1^+)^2\mu_+ - (\mu_1^+)^2\mu_1^+ & -\mu_+\mu_1^+ + (\mu_+)^2 \end{pmatrix} + \Phi^{-1} \begin{pmatrix} \Phi^{\frac{-1}{2}}\mu_1^+ & \Phi^{\frac{-1}{2}} \\ -\mu_1^+ + \Phi^{\frac{-1}{2}}\mu_+\mu_1^+ & 1 - \Phi^{\frac{-1}{2}}\mu_+ \end{pmatrix}.$$

$$P_+P'_+ = -2\Phi^{-2} \begin{pmatrix} (\mu_1^+)^2 - \mu_1^+\mu_+ & -\mu_1^+ + \mu_+ \\ (\mu_1^+)^2\mu_+ - (\mu_1^+)^2\mu_1^+ & -\mu_+\mu_1^+ + (\mu_+)^2 \end{pmatrix} + \Phi^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1^+\Phi^{\frac{-1}{2}} + 1 & -\Phi^{\frac{-1}{2}} \\ \mu_1^+ + \Phi^{\frac{-1}{2}}\mu_+\mu_1^+ & -\mu_+\Phi^{\frac{-1}{2}} \end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$P'_+P_+ - P_+P'_+ = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -\mu_1^+ - \mu_+ & 1 \end{pmatrix}.$$

Pero

$$-\mu_1^+ - \mu_+ = a,$$

así

$$P'_+P_+ - P_+P'_+ = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}.$$

Análogamente

$$P'_-P_- - P_-P'_- = \Phi^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -a & 1 \end{pmatrix}.$$



Así nuestra base analítica debe satisfacer:

$$\begin{pmatrix} s_1' \\ s_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Phi^{-1} & 0 \\ \pm a\Phi^{-1} & \Phi^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}.$$

Así el sistema de EDO's es:

$$\begin{aligned} (s_1^{\pm\infty})' &= \frac{-s_1}{a^2+4\lambda}, \\ (s_2^{\pm\infty})' &= \frac{\pm as_1}{a^2+4\lambda} + \frac{s_2}{a^2+4\lambda}. \end{aligned}$$

Sujeto a las condiciones iniciales:

$$v_{\pm} \begin{pmatrix} 1 \\ \mu_{\mp} \end{pmatrix}.$$

La solución de este sistema es:

$$\begin{aligned} (s_1^{\pm\infty})(\lambda) &= k_1^{\pm} (a^2 + 4\lambda)^{-\frac{1}{4}}, \\ (s_2^{\pm\infty})(\lambda) &= k_2^{\pm} (a^2 + 4\lambda)^{-\frac{1}{4}} \mp \frac{ak_1^{\pm}}{2} (a^2 + 4\lambda)^{-\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Sujeto a las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} k_1^{\pm} &= v_{\pm} (a^2 + 4\lambda_0)^{\frac{1}{4}}, \\ k_2^{\pm} &= \mp \frac{1}{2} k_1^{\pm}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

### 3.3.4. Función de Evans

Recordando (3.5),

$$q(x) = c_+ e^{-\frac{x}{2}\sqrt{4\lambda+a^2}} \operatorname{sech}\left(\frac{ax}{2}\right) + \frac{c_-}{\sqrt{4\lambda+a^2}} e^{\frac{x}{2}\sqrt{4\lambda+a^2}} \operatorname{sech}\left(\frac{ax}{2}\right),$$

como  $\operatorname{sech}\left(\frac{ax}{2}\right) = \frac{2}{e^{\frac{ax}{2}} + e^{-\frac{ax}{2}}}$ , entonces:

$$q(x) = c_+ e^{-\frac{x}{2}\sqrt{4\lambda+a^2}} \frac{2}{e^{\frac{ax}{2}} + e^{-\frac{ax}{2}}} + \frac{c_-}{\sqrt{4\lambda+a^2}} e^{\frac{x}{2}\sqrt{4\lambda+a^2}} \frac{2}{e^{\frac{ax}{2}} + e^{-\frac{ax}{2}}}.$$

Podemos notar que si  $x \gg 1$ , entonces  $e^{-\frac{ax}{2}} \approx 0$  debido a que  $a = \frac{u_- - u_+}{2} > 0$ , entonces

$$e^{\frac{ax}{2}} + e^{-\frac{ax}{2}} \approx e^{\frac{ax}{2}}.$$

Así

$$q(x) \approx 2c_+ e^{-\frac{x}{2}(\sqrt{4\lambda+a^2}+a)} + \frac{2c_-}{\sqrt{4\lambda+a^2}} e^{\frac{x}{2}(\sqrt{4\lambda+a^2}-a)}.$$

Como queremos soluciones acotadas, nos quedamos con el término:

$$q_+(x) \approx 2c_+ e^{-\frac{x}{2}(\sqrt{4\lambda+a^2}+a)}.$$

Y

$$q'_+(x) \approx 2c_+ \left(\frac{-1}{2}\right) (\sqrt{4\lambda+a^2}+a) e^{-\frac{x}{2}(\sqrt{4\lambda+a^2}+a)}.$$

Así:

$$q'_+(x) \approx 2c_+ \left(\frac{-1}{2}\right) (\sqrt{4\lambda+a^2}+a) e^{-\frac{x}{2}(\sqrt{4\lambda+a^2}+a)},$$

$$Q_+(x) \approx \left(\frac{q_+(x)}{q'_+(x)}\right) = 2c_+ \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{4\lambda+a^2}+a}\right)\right) e^{-\frac{x}{2}(\sqrt{4\lambda+a^2}+a)}.$$

Análogamente se obtiene,

$$Q_-(x) \approx \left(\frac{q_-(x)}{q'_-(x)}\right) = \frac{2c_-}{\sqrt{4\lambda+a^2}} \left(\frac{1}{\frac{\sqrt{4\lambda+a^2}-a}{2}}\right) e^{\frac{x}{2}(\sqrt{4\lambda+a^2}-a)}.$$

Así,

$$Q_+(0) = c_+ \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{4\lambda+a^2}}\right)\right),$$

$$Q_-(0) = \frac{c_-}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{4\lambda+a^2}}\right).$$

Entonces, nuestra función de Evans es:

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= |w_-(0) \quad w_+(0)| = \left| \begin{array}{cc} \frac{c_-}{\sqrt{4\lambda+a^2}} & c_+ \\ \frac{c_-}{2} & -\frac{c_+}{2} \sqrt{4\lambda+a^2} \end{array} \right|, \\ &= -(c_+) \left(\frac{c_-}{2}\right) + \left(-\frac{c_+}{2} \sqrt{4\lambda+a^2}\right) \left(\frac{c_-}{\sqrt{4\lambda+a^2}}\right), \\ &= -\frac{c_+c_-}{2} - \frac{c_+c_-}{2} = -c_+c_-. \end{aligned}$$

De (3.8)

$$\begin{aligned} c_+ &= \frac{1}{2} k_1^+ (a^2 + 4\lambda)^{\frac{-1}{4}}, \\ c_- &= \frac{1}{2} k_1^- (a^2 + 4\lambda)^{\frac{1}{4}}. \end{aligned}$$

Y entonces,

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= -c_+c_- = -\frac{1}{2} k_1^- (a^2 + 4\lambda)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{2} k_1^+ (a^2 + 4\lambda)^{\frac{-1}{4}}, \\ &= -\frac{1}{4} k_1^- k_1^+. \end{aligned}$$

Este valor es constante y distinto de 0 por (3.8). Así nuestra función de Evans no tiene ceros, es decir, no existe ningún  $\lambda$  en el espectro puntual de  $L$  con parte real positiva, así concluimos que,  $L$  es espectralmente estable.

## Cálculo numérico de la función de Evans

### 4.1. Flujo isentrópico

Como podemos observar en el capítulo anterior, la estabilidad espectral solo se pudo hacer para choques de pequeña amplitud, debido a las restricciones que se presentan en el parámetro  $v_+$  en el lema (A.0.1) y (2.2.4). Tampoco podemos construir la función de Evans analíticamente, así que tendremos que hacerlo numéricamente.

Recordando el problema linealizado (2.37),

$$\begin{aligned}\lambda v + v' - u' &= 0, \\ \lambda u + u' - \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} v' &= \frac{u''}{\widehat{v}}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Despejando  $u'$  de la primera ecuación

$$u' = \lambda v + v',\tag{4.2}$$

$$\Rightarrow u'' = \lambda v' + v'',\tag{4.3}$$

sustituyendo (4.2) y (4.3) en la segunda ecuación de (4.1)

$$\begin{aligned}\lambda u + \lambda v + v' - \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} v' &= \frac{\lambda v' + v''}{\widehat{v}}, \\ \Rightarrow v'' &= \lambda \widehat{v} u + \lambda \widehat{v} v + \widehat{v} v' - \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} v' - \lambda v', \\ &= \lambda \widehat{v} u + \lambda \widehat{v} v + \widehat{v} v' - \widehat{v}^{-\gamma} h(\widehat{v}) v' - \lambda v'.\end{aligned}\tag{4.4}$$

Ahora, de (4.1) y (4.4)

$$\begin{aligned}u' &= \lambda v' + v', \\ v'' &= \lambda \widehat{v} u + \lambda \widehat{v} v + \widehat{v} v' - \widehat{v}^{-\gamma} h(\widehat{v}) v' - \lambda v',\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda \widehat{v} & \lambda \widehat{v} & \widehat{v} - \widehat{v}^{-\gamma} h(\widehat{v}) - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

con  $v' = w$ . Si  $f(\hat{v}) = \hat{v} - \hat{v}^{-\gamma} h(\hat{v})$ , entonces:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda \hat{v} & \lambda \hat{v} & f(\hat{v}) - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Así, hemos escrito nuestro problema como un sistema de EDO de la forma

$$\begin{aligned} W' &= A(x, \lambda)W, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} W(x) &= 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

con  $W \in \mathbb{C}^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{C}$  y donde estas condiciones de frontera se deducen de (2.22).

Se sabe entonces, que una solución no trivial de (4.5) puede ser asociada a un valor propio de (4.1). De este modo, buscamos soluciones no triviales de 4.6. Sea  $\{r_j\}_{j=1}^k$  y  $\{r_j\}_{j=k+1}^n$  los vectores propios generalizados de  $A^-(\lambda) = \lim_{x \rightarrow -\infty} A(x, \lambda)$  y  $A^+(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \infty} A(x, \lambda)$  respectivamente, con los correspondientes valores propios  $\{\mu_j^-\}_{j=1}^k$  y  $\{\mu_j^+\}_{j=k+1}^n$ , donde  $Re(\mu_j^-) > 0$  y  $Re(\mu_j^+) < 0$ . Entonces, la variedad inestable  $U^-(x)$  en  $x = -\infty$  esta dada por:

$$U^-(x) = \text{gen} \{W_1^-(x), W_2^-(x), \dots, W_k^-(x)\},$$

donde  $W_j^-$  satisface:

$$\begin{aligned} W_j^{-\prime}(x) &= A(x, \lambda) W_j^-(x), \\ W_j^-(x) &\sim e^{\mu_j^- x} r_j^- \quad x \ll 0, \quad j = 1, \dots, k, \end{aligned}$$

y la variedad estable  $S^+(x)$  en  $x = \infty$  dada por

$$S^+(x) = \text{gen} \{W_{k+1}^+(x), W_{k+2}^+(x), \dots, W_n^+(x)\},$$

donde  $W_j^+$  satisface:

$$\begin{aligned} W_j^{+\prime}(x) &= A(x, \lambda) W_j^+(x), \\ W_j^+(x) &\sim e^{\mu_j^+ x} r_j^+ \quad x \gg 0, \quad j = k+1, \dots, n. \end{aligned}$$

Entonces, existe una solución no trivial cuando las variedades estable e inestable se intersectan no trivialmente, es decir cuando:

$$U^-(x) \cap S^+(x) \cong \det(W_1^- \ W_2^- \ \cdots \ W_K^- \ W_{k+1}^+ \ W_{k+2}^+ \ \cdots \ W_n^+) \neq \{0\}.$$

Si los vectores propios varían analíticamente en  $\lambda$ , entonces definimos la función de Evans como:

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= U^-(x, \lambda) \cap S^+(x, \lambda)|_{x=0}, \\ &= \det (W_1^-(\lambda, 0) \cdots W_k^-(\lambda, 0) W_{k+1}^+(\lambda, 0) \cdots W_n^+(\lambda, 0)). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Si  $D(\lambda) = 0$  para algún valor de  $\lambda$ , entonces el problema (2.35) tiene solución, y lo que nosotros queremos es que (2.35) tenga solución para

$$\lambda \in \{\mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\lambda) < 0\},$$

pues si se tuviese algún  $\lambda \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ , tendríamos inestabilidad espectral. Entonces, la idea es buscar en la parte derecha del plano complejo que haga que  $D(\lambda) = 0$  y mostrar así, inestabilidad espectral. Mas aún, si no encontráramos ningún  $\lambda$  que cumpliera esta condición, se demostraría la estabilidad espectral. Claramente, buscar en toda la parte derecha del plano complejo es imposible, por eso, procedemos a acotar la región donde vamos a buscar, garantizando que fuera de esa región no hay valores que anulen la función de Evans. Posteriormente se utiliza el teorema del argumento, que nos ayuda a garantizar la no existencia del parámetro  $\lambda$ , dentro de una curva cerrada que encierra la región antes acotada.

#### 4.1.1. Acotando la región

**Teorema 4.1.1.** *Cualquier valor propio  $\lambda$  de (4.1) con parte real no negativa, satisface:*

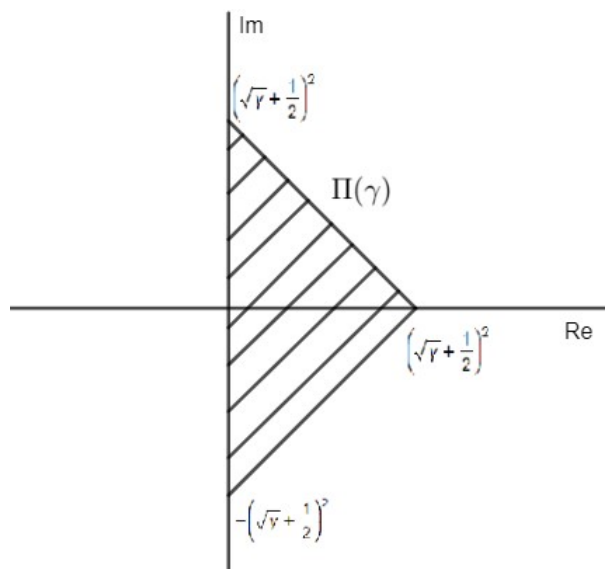
$$\operatorname{Re}(\lambda) + |\operatorname{Im}(\lambda)| \leq \left( \sqrt{\gamma} + \frac{1}{2} \right)^2.$$

**Demostración** Ver anexo 2.

Ahora, podemos considerar una región en el plano complejo

$$\Phi(\gamma) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\lambda) + |\operatorname{Im}(\lambda)| \leq \left( \sqrt{\gamma} + \frac{1}{2} \right)^2, \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0, \lambda \neq 0 \right\}, \quad (4.8)$$

y buscar dentro de esta región (ver figura 4.1).

Figura 4.1: Cota para la existencia de valores propios  $\lambda$ .

#### 4.1.2. Evaluación de la función de Evans para un $\lambda_0$ .

Ahora que ya conocemos donde buscar la existencia de valores  $\lambda$  que anulen la función de Evans (4.7), damos la metodología ocupada para dicho fin. Sea  $\gamma \geq 1$  fija, consideramos una región en forma de semicírculo que encierre la región

$$\Phi(\gamma) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(\lambda) + |\operatorname{Im}(\lambda)| \leq \left( \sqrt{\gamma} + \frac{1}{2} \right)^2, \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0, \lambda \neq 0 \right\},$$

digamos,

$$\Pi(\gamma) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}^2(\lambda) + \operatorname{Im}^2(\lambda) \leq \left( \sqrt{\gamma} + \frac{1}{2} \right)^4, \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0, \lambda \neq 0 \right\}, \quad (4.9)$$

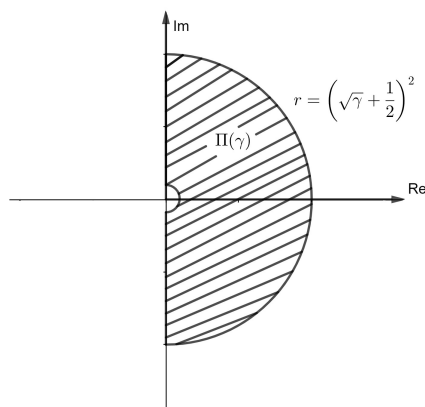


Figura 4.2: Cota para la existencia de valores propios  $\lambda$ .

Podemos comenzar seleccionando un  $\lambda_0$  sobre la frontera  $\partial\Pi$  y calcular la función de Evans. Sea  $\lambda_0 \in \partial\Pi$

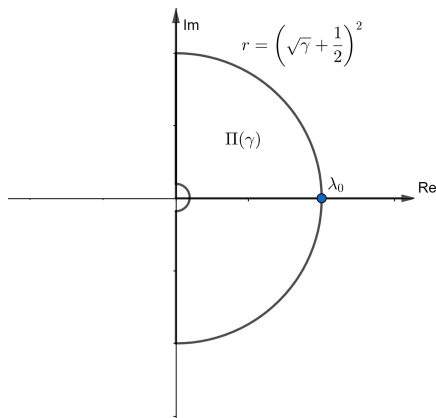


Figura 4.3: Selección de  $\lambda_0$ .

Para calcular la función de Evans (4.7), requerimos los vectores  $W_1^-(0), W_2^-(0), \dots, W_k^-(0), W_{k+1}^+(0), \dots, W_n^+(0)$ , estos los obtenemos al resolver la ecuación diferencial (4.6) numéricamente. Así, partimos nuestro problema (4.6) en dos, para resolverlo en el intervalo  $(-\infty, 0]$  y  $[0, \infty)$ . Necesariamente en cada intervalo se requieren las condiciones de frontera, que debemos aproximar suficientemente bien.

Comencemos trabajando en el intervalo  $(-\infty, 0]$ , donde para obtener cada  $W_i^-(0)$ , se integra numéricamente desde un  $x = -L$  hasta  $x = 0$  con  $L \in \mathbb{R}^+$  y  $L$  suficientemente grande (ver [6]). Se puede notar que se requiere un conjunto de

condiciones iniciales, llamado variedad inestable, que denotamos como  $U_-(-L, \lambda_0)$ , y que debe cumplir:

$$U_-(-L, \lambda_0) = \{W_0^- \in \mathbb{C}^n \mid W(x) \rightarrow 0, \text{ si } x \rightarrow -\infty, \text{ donde } W(-L) = W_0^-\},$$

cuya dimensión, digamos, es  $k$ . Estas condiciones iniciales  $W_0^-$  se ha demostrado en [11] y [13] que se pueden obtener de manera precisa (computacionalmente), por descomposición de Schur ordenada (dado en antecedentes) para la matriz  $A(-L, \lambda_0)$  de (4.6). Así  $A = QUQ^*$ , y se selecciona la base  $U_-(-L, \lambda_0)$  como:

$$U_-(-L, \lambda_0) = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_k\}, \quad (4.10)$$

donde cada  $Q_i$  son las columnas de  $Q$ , las cuales forman una base ortonormal del espacio inestable. Para simplificar la notación escribimos a  $U_-(-L, \lambda_0)$  como  $U_0^-$ .

Análogamente para el mismo  $\lambda_0$ , en el intervalo  $[0, \infty)$ , se tiene el conjunto de condiciones iniciales llamado variedad estable:

$$S_+(L, \lambda_0) = \{W_0^+ \in \mathbb{C}^n \mid W(x) \rightarrow 0 \text{ si } x \rightarrow \infty, \text{ donde } W(L) = W_0^+\},$$

para lo cual, aplicando de manera similar mediante el método de Schur a  $A(L, \lambda_0)$

$$A(L, \lambda_0) = QUQ^*,$$

seleccionando a  $S_+(L, \lambda_0)$  como:

$$S_+(L, \lambda_0) = \{Q_{k+1}, Q_{k+2}, \dots, Q_n\}, \quad (4.11)$$

con  $Q_i$ ,  $i = k + 1, \dots, n$  son las  $n - k$  columnas de  $Q$ , las cuales representan una base ortonormal del espacio estable. Para simplificar la notación escribimos  $S_+(L, \lambda_0)$  como  $S_0^+$ .

Ahora, teniendo las condiciones iniciales (4.11) y (4.10) para  $\lambda_0$ , procedemos a integrar numéricamente hacia adelante (en el intervalo  $[-L, 0]$ ) y hacia atrás (en el intervalo  $[0, L]$ ) por un método adecuado a nuestro problema.

Como se menciona en [5] numéricamente la función de Evans es difícil de calcular. Por ejemplo si suponemos  $n=4$  y  $k=2$  en (4.7). Tendremos cuatro parejas

$$(\mu_1^-, r_1^-), (\mu_2^-, r_2^-), (\mu_3^-, r_3^-), (\mu_4^-, r_4^-).$$

Supongamos  $Re(\mu_1^-) > Re(\mu_2^-) > 0$  y  $Re(\mu_3^-) < Re(\mu_4^-) < 0$ . El problema numérico surge porque para calcular las  $W_i$  en (4.7) necesitamos resolver (4.6), el cual presenta el problema de rigidez, pues cualquier error en el redondeo (o error



numérico) favorece al modo de crecimiento (decaimiento) más grande, y, así  $W_2^-(x)$  se convierte en  $aW_1^-(x) + bW_2^-(x)$ , provocando datos incorrectos o un cálculo lento.

Se ha demostrado en [12] que dos de los métodos que mejor funcionan, son el método de coordenadas polares y el de la matriz aumentada. A continuación se describen dichos métodos.

### 4.1.3. Método de la matriz aumentada

Para poder obtener (4.7) necesitamos  $k$  elementos del espacio estable y  $n - k$  elementos del espacio inestable, que deben obtenerse al resolver (4.6), pero, como ya se mencionó, los problemas de rigidez impiden que podamos ocupar métodos numéricos clásicos como ode45. En [16], se muestra que el método de la matriz aumentada o también conocido como la matriz compuesta, funciona cuando se tienen problemas de rigidez.

Al considerar el problema (4.6)

$$\begin{aligned} W' &= A(x, \lambda)W, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} W(x) &= 0, \end{aligned}$$

Donde  $A(x, \lambda)$  es una matriz de  $2m \times 2m$  ( $n = 2m$ ). Sean

$$\{W^{(1)}(x, \lambda), W^{(2)}(x, \lambda), \dots, W^{(m)}(x, \lambda)\},$$

y

$$\{W^{(m+1)}(x, \lambda), W^{(m+2)}(x, \lambda), \dots, W^{(2m)}(x, \lambda)\},$$

dos conjuntos de  $m$ -soluciones linealmente independientes de (4.6). El determinante de (4.7) tiene  $k = \binom{2m}{m}$  menores, y los denotamos como  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_k$ . Por ejemplo, si consideramos  $m = 2$  tenemos:

$$\phi_1 = \begin{vmatrix} W_1^{(1)} & W_1^{(2)} \\ W_2^{(1)} & W_2^{(2)} \end{vmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{vmatrix} W_1^{(1)} & W_1^{(2)} \\ W_3^{(1)} & W_3^{(2)} \end{vmatrix}, \quad \phi_3 = \begin{vmatrix} W_1^{(1)} & W_1^{(2)} \\ W_4^{(1)} & W_4^{(2)} \end{vmatrix},$$

$$\phi_4 = \begin{vmatrix} W_2^{(1)} & W_2^{(2)} \\ W_3^{(1)} & W_3^{(2)} \end{vmatrix}, \quad \phi_5 = \begin{vmatrix} W_2^{(1)} & W_2^{(2)} \\ W_4^{(1)} & W_4^{(2)} \end{vmatrix}, \quad \phi_6 = \begin{vmatrix} W_3^{(1)} & W_3^{(2)} \\ W_4^{(1)} & W_4^{(2)} \end{vmatrix}.$$

Ahora, calculamos por ejemplo  $\phi'_1$

$$\begin{aligned}
\phi'_1 &= \begin{vmatrix} W_1^{(1)} & W_1^{(2)} \\ W_2^{(1)} & W_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} W_1^{(1)} & W_1^{(2)} \\ W_2^{(1)} & W_2^{(2)} \end{vmatrix}, \\
&= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^4 A_{1i} W_i^{(1)} & \sum_{i=1}^4 A_{1i} W_i^{(2)} \\ W_2^{(1)} & W_2^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} W_1^{(1)} & W_1^{(2)} \\ \sum_{i=1}^4 A_{2i} W_i^{(1)} & \sum_{i=1}^4 A_{2i} W_i^{(2)} \end{vmatrix}, \\
&= \left( \sum_{i=1}^4 A_{1i} W_i^{(1)} \right) (W_2^{(2)}) - \left( \sum_{i=1}^4 A_{1i} W_i^{(2)} \right) (W_2^{(1)}) + \\
&\quad \left( W_1^{(1)} \right) \left( \sum_{i=1}^4 A_{2i} W_i^{(2)} \right) - \left( \sum_{i=1}^4 A_{2i} W_i^{(1)} \right) (W_1^{(2)}), \\
&= A_{11} W_1^{(1)} W_2^{(2)} + A_{12} W_2^{(1)} W_2^{(2)} + A_{13} W_3^{(1)} W_2^{(2)} + A_{14} W_4^{(1)} W_2^{(2)} \\
&\quad - A_{11} W_1^{(2)} W_2^{(1)} - A_{12} W_2^{(2)} W_2^{(1)} - A_{13} W_3^{(2)} W_2^{(1)} - A_{14} W_4^{(2)} W_2^{(1)} \\
&\quad + A_{21} W_1^{(2)} W_1^{(1)} + A_{22} W_2^{(2)} W_1^{(1)} + A_{23} W_3^{(2)} W_1^{(1)} + A_{24} W_4^{(2)} W_1^{(1)} \\
&\quad - A_{21} W_1^{(1)} W_1^{(2)} - A_{22} W_2^{(1)} W_1^{(2)} - A_{23} W_3^{(1)} W_1^{(2)} - A_{24} W_4^{(1)} W_1^{(2)}, \\
&= A_{11} (W_1^{(1)} W_2^{(2)} - W_1^{(2)} W_2^{(1)}) + A_{13} (W_3^{(1)} W_2^{(2)} - W_3^{(2)} W_2^{(1)}) + \\
&\quad A_{14} (W_4^{(1)} W_2^{(2)} - W_4^{(2)} W_2^{(1)}) + A_{22} (W_2^{(1)} W_1^{(1)} - W_2^{(1)} W_2^{(2)}) + \\
&\quad A_{23} (W_3^{(2)} W_1^{(1)} - W_3^{(1)} W_1^{(2)}) + A_{24} (W_4^{(2)} W_1^{(1)} - W_4^{(1)} W_1^{(2)}), \\
&= A_{11} \begin{vmatrix} W_1^{(1)} & W_1^{(2)} \\ W_2^{(1)} & W_2^{(2)} \end{vmatrix} - A_{13} \begin{vmatrix} W_2^{(1)} & W_2^{(2)} \\ W_3^{(1)} & W_3^{(2)} \end{vmatrix} - A_{14} \begin{vmatrix} W_2^{(1)} & W_4^{(2)} \\ W_4^{(1)} & W_4^{(2)} \end{vmatrix} + \\
&\quad A_{22} \begin{vmatrix} W_1^{(1)} & W_1^{(2)} \\ W_2^{(1)} & W_2^{(2)} \end{vmatrix} + A_{23} \begin{vmatrix} W_1^{(1)} & W_1^{(2)} \\ W_3^{(1)} & W_3^{(2)} \end{vmatrix} + A_{24} \begin{vmatrix} W_1^{(1)} & W_1^{(2)} \\ W_4^{(1)} & W_4^{(2)} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Con esto,

$$\phi'_1 = (A_{11} + A_{22}) \phi_1 + A_{23} \phi_2 + A_{24} \phi_3 - A_{13} \phi_4 - A_{14} \phi_5 + 0 \phi_6,$$

Análogamente se pueden obtener las derivadas de las demás  $\phi$ 's obteniendo:

$$\begin{aligned}\phi_2' &= A_{32}\phi_1 + (A_{11} + A_{33})\phi_2 + A_{34}\phi_3 + A_{12}\phi_4 + 0\phi_5 - A_{14}\phi_6, \\ \phi_3' &= A_{42}\phi_1 + A_{43}\phi_2 + (A_{11} + A_{44})\phi_3 + 0\phi_4 + A_{12}\phi_5 + A_{13}\phi_6, \\ \phi_4' &= -A_{31}\phi_1 + A_{21}\phi_2 + 0\phi_3 + (A_{22} + A_{33})\phi_4 + A_{34}\phi_5 - A_{24}\phi_6, \\ \phi_5' &= -A_{41}\phi_1 + 0\phi_2 + A_{21}\phi_3 + A_{43}\phi_4 + (A_{22} + A_{44})\phi_5 + A_{23}\phi_6, \\ \phi_6' &= 0\phi_1 - A_{41}\phi_2 + A_{31}\phi_3 - A_{42}\phi_4 + A_{32}\phi_5 + (A_{33} + A_{44})\phi_6.\end{aligned}$$

Viéndolo matricialmente tenemos:

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} A_{11} + A_{22} & A_{23} & A_{24} & -A_{13} & -A_{14} & 0 \\ A_{32} & A_{11} + A_{33} & A_{34} & A_{12} & 0 & -A_{14} \\ A_{42} & A_{43} & A_{11} + A_{44} & 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{31} & A_{21} & 0 & A_{22} + A_{33} & A_{34} & -A_{24} \\ -A_{41} & 0 & A_{21} & A_{43} & A_{22} + A_{44} & A_{23} \\ 0 & -A_{41} & A_{31} & -A_{42} & A_{32} & A_{33} + A_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \\ \phi_5 \\ \phi_6 \end{pmatrix}.$$

Y ahora tenemos el sistema de la forma  $\Phi' = A(x, \lambda)\Phi$ , el cual podemos resolver con algún método numérico conveniente como ode45, obteniendo así las  $\phi$ 's, es decir los menores de mi matriz  $W$  en (4.6). Podríamos intentar obtener la matriz  $W$ , pero para obtener la función de Evans solamente necesitamos su determinante, es así que ocupamos la expansión de Laplace, la cual es una generalización de la expansión habitual para un determinante por fila o columna. Para nuestro ejemplo tenemos:

$$\begin{aligned}
D(\lambda) &= |W^{(1)}(x, \lambda) \ W^{(2)}(x, \lambda) \ W^{(3)}(x, \lambda) \ W^{(4)}(x, \lambda)| = \\
& \begin{vmatrix} W_1^{(1)}(x, \lambda) & W_1^{(2)}(x, \lambda) & W_1^{(3)}(x, \lambda) & W_1^{(4)}(x, \lambda) \\ W_2^{(1)}(x, \lambda) & W_1^{(2)}(x, \lambda) & W_2^{(3)}(x, \lambda) & W_2^{(4)}(x, \lambda) \\ W_3^{(1)}(x, \lambda) & W_1^{(2)}(x, \lambda) & W_3^{(3)}(x, \lambda) & W_3^{(4)}(x, \lambda) \\ W_4^{(1)}(x, \lambda) & W_1^{(2)}(x, \lambda) & W_4^{(3)}(x, \lambda) & W_4^{(4)}(x, \lambda) \end{vmatrix} = \\
& \begin{vmatrix} W_1^{(1)}(x, \lambda) & W_1^{(2)}(x, \lambda) \\ W_2^{(1)}(x, \lambda) & W_2^{(2)}(x, \lambda) \end{vmatrix} (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} W_3^{(3)}(x, \lambda) & W_3^{(4)}(x, \lambda) \\ W_4^{(3)}(x, \lambda) & W_4^{(4)}(x, \lambda) \end{vmatrix} + \\
& \begin{vmatrix} W_1^{(1)}(x, \lambda) & W_1^{(2)}(x, \lambda) \\ W_3^{(1)}(x, \lambda) & W_3^{(2)}(x, \lambda) \end{vmatrix} (-1)^{1+2+1+3} \begin{vmatrix} W_2^{(3)}(x, \lambda) & W_2^{(4)}(x, \lambda) \\ W_4^{(3)}(x, \lambda) & W_4^{(4)}(x, \lambda) \end{vmatrix} + \\
& \begin{vmatrix} W_1^{(1)}(x, \lambda) & W_1^{(2)}(x, \lambda) \\ W_4^{(1)}(x, \lambda) & W_4^{(2)}(x, \lambda) \end{vmatrix} (-1)^{1+2+1+4} \begin{vmatrix} W_2^{(3)}(x, \lambda) & W_2^{(4)}(x, \lambda) \\ W_3^{(3)}(x, \lambda) & W_3^{(4)}(x, \lambda) \end{vmatrix} + \\
& \begin{vmatrix} W_2^{(1)}(x, \lambda) & W_2^{(2)}(x, \lambda) \\ W_3^{(1)}(x, \lambda) & W_3^{(2)}(x, \lambda) \end{vmatrix} (-1)^{1+2+2+3} \begin{vmatrix} W_1^{(3)}(x, \lambda) & W_1^{(4)}(x, \lambda) \\ W_4^{(3)}(x, \lambda) & W_4^{(4)}(x, \lambda) \end{vmatrix} + \\
& \begin{vmatrix} W_2^{(1)}(x, \lambda) & W_2^{(2)}(x, \lambda) \\ W_4^{(1)}(x, \lambda) & W_4^{(2)}(x, \lambda) \end{vmatrix} (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} W_3^{(3)}(x, \lambda) & W_3^{(4)}(x, \lambda) \\ W_4^{(3)}(x, \lambda) & W_4^{(4)}(x, \lambda) \end{vmatrix} + \\
& \begin{vmatrix} W_3^{(1)}(x, \lambda) & W_3^{(2)}(x, \lambda) \\ W_4^{(1)}(x, \lambda) & W_4^{(2)}(x, \lambda) \end{vmatrix} (-1)^{1+2+3+4} \begin{vmatrix} W_1^{(3)}(x, \lambda) & W_1^{(4)}(x, \lambda) \\ W_2^{(3)}(x, \lambda) & W_2^{(4)}(x, \lambda) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

O que es lo mismo:

$$D(\lambda) = \phi_1\phi_6 - \phi_2\phi_5 + \phi_3\phi_4 + \phi_4\phi_3 - \phi_5\phi_2 - \phi_6\phi_1. \quad (4.12)$$

#### 4.1.4. Método de coordenadas polares

El método de coordenadas polares es un método de ortogonalización continua, junto con una EDO que restaura la analiticidad.

Partiendo del problema (4.6) supongamos que cada  $W_i$  la podemos escribir de la forma:

$$W_-(x, \lambda) = \Omega_-(x, \lambda) \alpha_-(x, \lambda), \quad W_+(x, \lambda) = \Omega_+(x, \lambda) \alpha_+(x, \lambda),$$

donde  $\Omega_\pm^*(x, \lambda) \Omega_\pm(x, \lambda) = 1$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , con  $\Omega_\pm^*(x, \lambda)$  la matriz conjugada transpuesta de  $\Omega_\pm(x, \lambda)$ .

Entonces:

$$\Omega' \alpha + \Omega \alpha' = A \Omega \alpha, \Omega' \alpha = A \Omega \alpha - \Omega \alpha', \Omega' = A \Omega - \Omega \alpha' \alpha^{-1},$$

si  $g = \alpha' \alpha^{-1}$ ,

$$\Omega' = A \Omega - \Omega g.$$

Ocupando el método de Drury ( $g = \Omega^* A \Omega$ ) se tiene

$$\begin{aligned} \Omega' &= A \Omega - \Omega \Omega^* A \Omega, \\ \alpha' &= \Omega^* A \Omega \alpha, \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned} [W_-(x, \lambda) \ W_+(x, \lambda)] &= [\Omega_-(x, \lambda) \ \Omega_+(x, \lambda)] \begin{bmatrix} \alpha_-(x, \lambda) & 0 \\ 0 & \alpha_+(x, \lambda) \end{bmatrix}, \\ \Rightarrow \det(W_-(x, \lambda) \ W_+(x, \lambda))|_{x=0} &= \det \begin{bmatrix} \alpha_-(x, \lambda) & 0 \\ 0 & \alpha_+(x, \lambda) \end{bmatrix} \cdot \\ &\quad \det[\Omega_-(x, \lambda) \ \Omega_+(x, \lambda)], \\ &= \gamma_-(0, \lambda) \gamma_+(0, \lambda) \det[\Omega_-(x, \lambda) \ \Omega_+(x, \lambda)]|_{x=0}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

con  $\gamma_{\pm}(0, \lambda) = \det(\alpha_{\pm}(x, \lambda))|_{x=0}$ .

Ahora, ocupando la formula de Abel, dada en los preliminares, podemos obtener  $\gamma$  a partir de

$$\gamma' = \text{tr}(\Omega^* A \Omega) \gamma.$$

Con esto, podemos obtener la función de Evans ocupando (4.13) después de resolver:

$$\begin{aligned} \Omega' &= (I - \Omega \Omega^*) A \Omega, \\ \gamma' &= \text{tr}(\Omega^* A \Omega) \gamma. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Podemos notar que, para la segunda ecuación de (4.14), una solución es:

$$\gamma(x) = \exp(\mp \text{tr}(\Omega_{\pm}^* A_{\pm} \Omega_{\pm}) x) \tilde{\gamma}(x),$$

con  $\tilde{\gamma}' = tr(\Omega^* A \Omega - \Omega_{\pm}^* A_{\pm} \Omega_{\pm}) \tilde{\gamma}(x)$ , pues

$$\begin{aligned} \gamma'(x) &= \exp(\mp tr(\Omega_{\pm}^* A_{\pm} \Omega_{\pm}) x) \tilde{\gamma}'(x) + \\ &\tilde{\gamma}(x) (\mp tr(\Omega_{\pm}^* A_{\pm} \Omega_{\pm})) \exp(\mp tr(\Omega_{\pm}^* A_{\pm} \Omega_{\pm})), \\ &= \exp(\mp tr(\Omega_{\pm}^* A_{\pm} \Omega_{\pm}) x) (tr(\Omega^* A \Omega - \Omega_{\pm}^* A_{\pm} \Omega_{\pm})) + \\ &\tilde{\gamma}(x) (\mp tr(\Omega_{\pm}^* A_{\pm} \Omega_{\pm})) \exp(\mp tr(\Omega_{\pm}^* A_{\pm} \Omega_{\pm})), \\ &= \exp(\mp tr(\Omega_{\pm}^* A_{\pm} \Omega_{\pm}) x) tr(\Omega^* A \Omega) \tilde{\gamma}(x), \\ &= tr(\Omega^* A \Omega) \gamma(x). \end{aligned}$$

Entonces, para resolver (4.14) basta con resolver

$$\begin{aligned} \Omega' &= (I - \Omega \Omega^*) A \Omega, \\ \tilde{\gamma}' &= tr(\Omega^* A \Omega - \Omega_{\pm}^* A_{\pm} \Omega_{\pm}) \tilde{\gamma}. \end{aligned}$$

Con condiciones iniciales

$$\begin{aligned} v_{\pm}(\lambda) &= \Omega_{\pm}(\pm L, \lambda) \alpha(\pm L, \lambda), \\ \gamma(\pm L, \lambda) &= \det(\alpha(\pm L, \lambda)). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Notando aquí, que se requiere conocer  $\Omega_{\pm}(\pm L, \lambda)$  y  $\alpha(\pm L, \lambda)$ , o equivalentemente, para cada  $\lambda$  debemos conocer  $W_+(L, \lambda)$  y  $W_-(-L, \lambda)$ , que no es otra cosa, que resolver nuestro problema (4.6) en los extremos  $L$  y  $-L$  para cada  $\lambda$ .

#### 4.1.5. Cálculo de $D(\lambda)$ para distintos valores de $\lambda$

Ya sea por (4.13) o (4.12) hemos calculado la función de Evans evaluada en  $\lambda_0$ . Si el resultado al evaluar  $D(\lambda_0)$  es 0, estaríamos encontrando una solución de nuestro problema de valores propios y nuestro problema habría terminado, pues, de este modo, estamos encontrando un valor  $\lambda_0$ , que es solución del problema de valores propios que se encuentra del lado derecho del plano complejo, es decir con parte real positiva.

En caso de no anularse la función  $D(\lambda)$  para ese  $\lambda_0$ , podemos seguir probando para distintos valores de  $\lambda$  en la región  $\partial\Pi$ . Claramente es imposible probar con todos los valores dentro de  $\Pi$ , por eso utilizamos el siguiente principio.

#### 4.1.6. Principio del argumento

**Definición 4.1.2.** Sea  $\partial\Pi$  una curva cerrada, de clase  $C^1$  y  $z \in \mathbb{C}$ . Se llama índice de  $z$  con respecto a  $\partial\Pi$  al número

$$Ind_{\partial\Pi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Pi} \frac{1}{w - z} dw.$$

**Observación 2.**

- El índice indica el número de vueltas que da la curva  $\partial\Pi$  en torno a  $z$ , si  $z \in \text{Int}(\partial\Pi)$ .
- Si  $z \in \text{Ext}(\partial\Pi)$ , entonces  $\text{Ind}_{\partial\Pi}(z) = 0$ .
- Si  $\text{Ind}_{\partial\Pi}(z) \neq 0$ , entonces  $z \in \text{Int}(\partial\Pi)$ .

**Teorema 4.1.3.** (*Principio del Argumento*) Sea  $D$  meromorfa en el interior de  $\partial\Pi$ . Sea  $a_1, a_2, \dots, a_n$  los ceros de  $D$  y  $b_1, b_2, \dots, b_m$  los polos de  $D$ . Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Pi} F(z) \frac{D'(z)}{D(z)} dz = \sum_{i=1}^n F(a_i) - \sum_{i=1}^m F(b_i),$$

Para cada función analítica  $F(z)$ .

En particular, si  $F(z) = 1$  se tiene:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Pi} \frac{D'(z)}{D(z)} dz = n - m,$$

**Demostración** Ver [8]

**Observación 3.** Ya que

$$\text{Ind}_{\partial\Pi}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Pi} \frac{1}{w-z} dw.$$

Entonces

$$\text{Ind}_{\partial\Pi}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Pi} \frac{1}{w} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{D'(t)}{D(t)} dt,$$

así

$$\text{Ind}_{D \circ \partial\Pi}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{(D \circ \partial\Pi)'(t)}{(D \circ \partial\Pi)(t)} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{D'(\partial\Pi(t)) \partial\Pi'(t)}{D(\partial\Pi(t))} dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Pi} \frac{D'(z)}{D(z)} dz.$$

Por lo tanto, el Principio del Argumento dice que

$$\text{Ind}_{(D \circ \partial\Pi)}(0) = n - m.$$

En particular, si  $D$  es analítica,

$$\text{Ind}_{(D \circ \partial\Pi)}(0) = n.$$

Lo que quiere decir es que si  $D$  es analítica con respecto a  $\lambda$  entonces, el número de vueltas que da  $D \circ \partial\Pi$  alrededor del cero, nos da el número de ceros de  $D$  al interior de  $\partial\Pi$ .

Entonces, la idea es tomar un conjunto finito de puntos sobre la región (4.9) y posteriormente aplicar este principio. Con esto en mente, consideremos un nuevo  $\lambda \in \partial\Pi$  digamos  $\lambda_1$ .

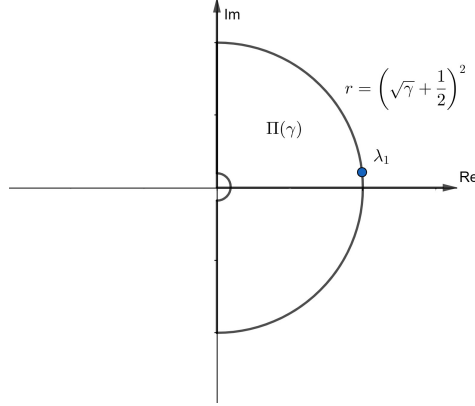


Figura 4.4: Selección de  $\lambda_1$ .

Lo que se quiere es obtener  $D(\lambda_1)$ , y aunque podemos obtener las  $W_i$  requeridas como lo hicimos para  $\lambda_0$  en la sección (4.2), esto no nos garantiza la variación analítica de  $D(\lambda)$  en el contorno  $\partial\Pi$  con respecto a  $\lambda$ . Por eso ocupamos el siguiente método que nos garantiza la analiticidad sobre  $D(\lambda)$ , mostrando la forma recursiva de obtenerse las bases de inicialización.

#### 4.1.7. Forma discreta del método de Kato

Sabemos que el método de Kato dado en los antecedentes, proporciona bases de inicialización analíticas para los subespacios estable e inestable asociados a nuestro problema (4.6), las cuales se deducen de:

$$S_j^{+'} = P_j^{+'} S_j^+, \quad S_0^+ = S^+(\lambda_0), \quad (4.16)$$

con  $P_j^+$  una matriz de proyección sobre el espacio estable de  $A(L, \lambda_0)$ . Análogamente:

$$U_j^{-'} = P_j^{-'} U_j^-, \quad U_0^- = U^-(\lambda_0), \quad (4.17)$$

con  $P^-$  una matriz de proyección sobre el espacio inestable de  $A(-L, \lambda_0)$ .



Donde las matrices de proyección se calculan a partir de la descomposición ordenada de Schur de la siguiente manera.

Supongamos que la descomposición de Schur de  $A(L, \lambda_0)$ ,  $A^*(L, \lambda_0)$ ,  $-A(L, \lambda_0)$  y  $-A^*(L, \lambda_0)$  ( $A^*$  :=conjugada transpuesta de  $A$ ) son:

$$\begin{aligned} A(L, \lambda_0) &= R_u U_1 R_u^*, \\ A^*(L, \lambda_0) &= L_u U_2 L_u^*, \\ -A(-L, \lambda_0) &= R_s U_1 R_s^*, \\ -A^*(-L, \lambda_0) &= L_s U_2 L_s^*. \end{aligned}$$

entonces las matrices de proyección  $P^+$  y  $P^-$  están dadas por:

$$\begin{aligned} P^+ &= R_s (L_s^* R_s)^{-1} L_s^*, \\ P^- &= R_u (L_u^* R_u)^{-1} L_u^*. \end{aligned}$$

Ahora, trabajando con (4.16), aproximando  $P_j^{+'} = P^{+'}(\lambda_j)$  y  $S_j^{+'} = S^{+'}(\lambda_j)$  por diferencias finitas de primer orden:

$$\begin{aligned} P^{+'}(\lambda_j) &= \frac{P^+(\lambda_{j+1}) - P^+(\lambda_j)}{\lambda_{j+1} - \lambda_j}, \\ S^{+'}(\lambda_j) &= \frac{S^+(\lambda_{j+1}) - S^+(\lambda_j)}{\lambda_{j+1} - \lambda_j}. \end{aligned}$$

Y al sustituir en (4.16) y despejar  $S^+(\lambda_{j+1})$  tenemos:

$$\begin{aligned} S^+(\lambda_{j+1}) &= S^+(\lambda_j) + (\lambda_{j+1} - \lambda_j) \frac{P^+(\lambda_{j+1}) - P^+(\lambda_j)}{\lambda_{j+1} - \lambda_j} S^+(\lambda_j), \\ \Rightarrow S^+(\lambda_{j+1}) &= S^+(\lambda_j) + (P^+(\lambda_{j+1}) - P^+(\lambda_j)) S^+(\lambda_j), \\ \Rightarrow S^+(\lambda_{j+1}) &= S^+(\lambda_j) + P^+(\lambda_{j+1}) S^+(\lambda_j) - P^+(\lambda_j) S^+(\lambda_j), \end{aligned}$$

ocupando la propiedad  $P^+(\lambda_j) S^+(\lambda_j) = S^+(\lambda_j)$ , mencionada en los antecedentes llegamos a:

$$S^+(\lambda_{j+1}) = P^+(\lambda_{j+1}) S^+(\lambda_j).$$

Si en (4.16) aproximamos  $P_j^{+'} = P^{+'}(\lambda_j)$  y  $S_j^{+'} = S^{+'}(\lambda_j)$  con un esquema de segundo orden llegamos a:

$$S^+(\lambda_{j+1}) = P^+(\lambda_{j+1}) \left[ I + \frac{1}{2} P^+(\lambda_j) (I - P^+(\lambda_{j+1})) \right] S^+(\lambda_j),$$

análogamente, para (4.17) obtenemos:

$$U^-(\lambda_{j+1}) = P^-(\lambda_{j+1}) \left[ I + \frac{1}{2} P^-(\lambda_j) (I - P^-(\lambda_{j+1})) \right] U^-(\lambda_j),$$

y en conjunto estos dos esquemas, muestran la forma de obtener la base de inicialización, en el paquete de StabLab, preservando la analiticidad.

De este modo, con estas bases de inicialización, se puede resolver con el método de coordenadas polares o el de la matriz aumentada, como en el caso de  $\lambda_0$  y así calcular  $D(\lambda_1)$ . Este método se puede ocupar recursivamente para calcular  $D(\lambda_i)$   $\forall \lambda_i \in \partial\Pi$  y posteriormente aplicar el principio del argumento, reportando el número de ceros en la región y entonces concluir estabilidad, cuando el resultado aportado sea cero, o inestabilidad en caso contrario.

## 4.2. Ejemplos numéricos

En esta sección trabajamos algunos ejemplos, ocupando el paquete StabLab discutido anteriormente con el objetivo de clarificar mas los procedimientos realizados para demostrar la estabilidad espectral.

### 4.2.1. Ejemplo $\gamma = 1, v_+ = 0.00001$

Con el análisis hecho en la sección (3), sabemos que nuestro problema (2.11) acepta solución tipo onda viajera si podemos encontrar solución para la siguiente EDO,

$$v' = v[v - 1 + a(v^{-\gamma} - 1)],$$

con

$$v(0) = \frac{1 - v_+}{2}, \quad a = v_+^\gamma \cdot \frac{1 - v_+}{1 - v_+^\gamma}.$$

Entonces si  $\gamma = 1$  tenemos:

$$\begin{aligned} v' &= v \left[ v - 1 + v_+ \left( \frac{1}{v} - 1 \right) \right], \\ &= v \left[ v - 1 + v_+ \left( \frac{1-v}{v} \right) \right], \\ &= \frac{v[(v-1)v - (v-1)v_+]}{v}, \\ \Rightarrow v' &= (v - 1)(v - v_+), \\ v' &= v^2 - v + v_+(1 - v). \end{aligned}$$

Si integramos por variables separables tenemos:

$$v(x) = \frac{1 - cv_+ e^{x(1-v_+)}}{1 - ce^{x(1-v_+)}}.$$

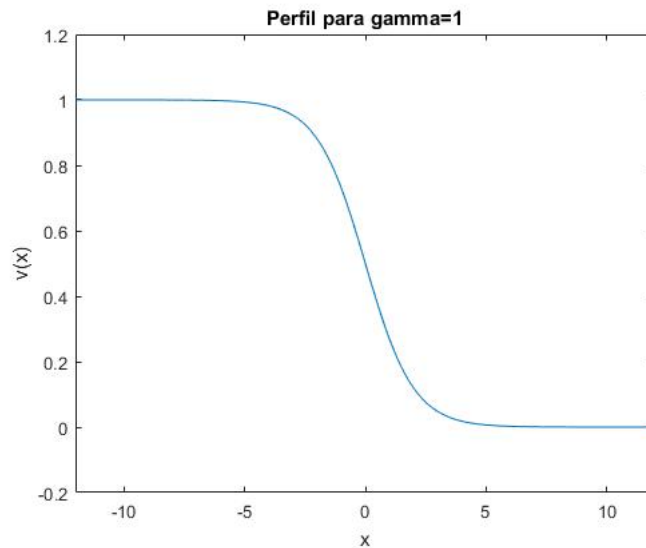
Al ocupar la condición de fase para el perfil en  $x = 0$ ,

$$\begin{aligned} v(0) = \frac{1-v_+}{2} &\Rightarrow \frac{1-v_+}{2} = \frac{1-cv_+}{1-c}, \\ &\Rightarrow c = \frac{1+v_+}{3v_+-1}, \end{aligned}$$

Y entonces, la solución es:

$$v(x) = \frac{1 - \left(\frac{1+v_+}{3v_+-1}\right) v_+ e^{x(1-v_+)}}{1 - \left(\frac{1+v_+}{3v_+-1}\right) e^{x(1-v_+)}} \tag{4.18}$$

eligiendo  $v_+ = 0.00001$  obtenemos el perfil



Con esto hemos demostrado que nuestro problema (2.11) acepta solución tipo onda viajera, ahora demostramos la estabilidad espectral para este caso.

Para demostrar la estabilidad espectral, en este caso, se puede hacer de dos formas. La primera de forma analítica y la segunda ocupando la función de Evans numéricamente.

Comenzamos con el caso analítico. Podemos observar que se cumplen las condiciones de desigualdad en el lema (A.0.1) y en el teorema (A.0.1) cuando  $\gamma = 1$  implicando así, con ayuda del teorema 2.2.4, la estabilidad espectral.

Ahora, lo demostramos de manera numérica. Para construir la función de Evans (4.7) numéricamente, al considerar la región obtenida en (4.9), para nuestro caso con  $\gamma = 1$ ,

$$\Pi(1) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}^2(\lambda) + \operatorname{Im}^2(\lambda) \leq \left(\frac{3}{2}\right)^4, \operatorname{Re}(\lambda) \geq 0, \lambda \neq 0 \right\},$$

:

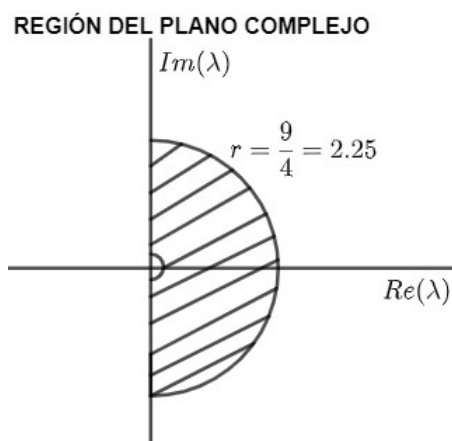
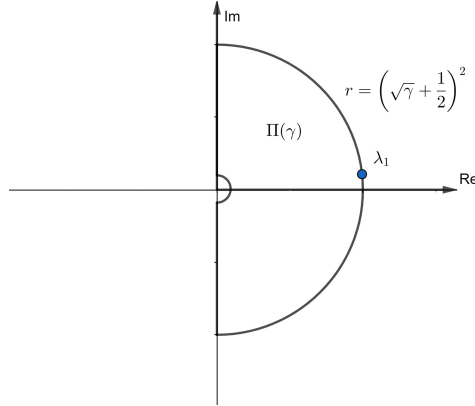


Figura 4.5: Región para  $\gamma = 1$

debemos encontrar para cada  $\lambda$  en el contorno de  $\Pi(\gamma)$  ( $\partial\Pi$ ) las  $W_i(\lambda, x = 0)$ ,  $i = 1, 2, 3$  las cuales satisfacen (4.6) cuando  $x \rightarrow \infty$  o  $x \rightarrow -\infty$  dependiendo de la dimensión del subespacio estable e inestable de  $A_+ = \lim_{x \rightarrow \infty} A(x, \lambda)$  y  $A_- = \lim_{x \rightarrow -\infty} A(x, \lambda)$ , respectivamente.

Considerando un  $\lambda_1 \in \partial\Pi$  fijo,


 Figura 4.6: Selección de  $\lambda_1$ .

en nuestro caso, el problema (4.6) toma la forma:

$$\begin{aligned} W' &= A(x, \lambda_1)W, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} W(x) &= 0, \end{aligned}$$

con  $A(x, \lambda_1) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda_1 \hat{v} & \lambda_1 \hat{v} & f(\hat{v}) - \lambda_1 \end{pmatrix}$  donde  $\hat{v}$  es como en (4.18), y donde  $f(\hat{v}) = \hat{v} - \hat{v}^{-1}h(\hat{v})$  con  $h(\hat{v}) = -\hat{v}^2 + (a+1)\hat{v}$ , es decir  $f(\hat{v}) = 2\hat{v} - v_+ - 1$ . Ahora, para el problema de flujo isentrópico  $\forall \gamma$  con  $1 \leq \gamma \leq 3$  las dimensiones del espacio estable de  $A_+$  y del espacio inestable de  $A_-$  son 2 y 1 respectivamente ver [1]. Entonces, debemos encontrar 2 soluciones de

$$\begin{aligned} W' &= A_+(\lambda_1)W, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} W(x) &= 0, \end{aligned} \tag{4.19}$$

y una solución de

$$\begin{aligned} W' &= A_-(\lambda_1)W, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} W(x) &= 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Ahora resolvemos el problema (4.19) (es análogo el problema (4.20)). Podemos integrarlo numéricamente, pero la condición de frontera en  $\infty$  es imposible de colocar numéricamente, así que debemos elegir un número suficientemente grande

y aproximar la condición de frontera, esto lo hacemos con la descomposición de Schur ordenada. Posteriormente, integramos numéricamente desde  $\infty$  hasta 0, el problema obtenido con estas condiciones de frontera ya sea con el método de la matriz aumentada (sección 4.3) o el de coordenadas polares (sección 4.4) para obtener  $W_1^+(\lambda_1, 0), W_2^+(\lambda_1, 0)$ . Análogamente obtenemos  $W_3^-(\lambda_1, 0)$ . De este modo, calculamos

$$D(\lambda_1) = \det(W_1^+(\lambda_1, 0)W_2^+(\lambda_1, 0)W_3^-(\lambda_1, 0)).$$

Seguido de esto se calcula nuevamente  $D(\lambda_2)$ , al igual que con  $\lambda_1$ , con la diferencia que las condiciones iniciales se calculan recursivamente con el método de Kato (sección 4.5.2) para garantizar la analiticidad de  $D(\lambda)$  con respecto a  $\lambda$ . Así para una discretización suficientemente fina en el contorno  $\partial\Pi$ , se calcula  $D(\lambda)$  y se ocupa el principio del argumento, para buscar el número de ceros dentro de la región  $\partial\Pi$ , lo cual nos ayuda a encontrar el número de soluciones de (4.7), si el programa encuentra al menos una solución se concluye inestabilidad espectral, pues se estaría encontrando un valor  $\lambda$  en el espectro puntual de  $L$  con parte real positiva. Para nuestro caso obtuvimos:

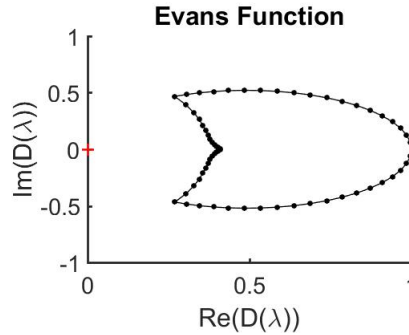


Figura 4.7: Resultado numérico de  $\gamma = 1$

Obteniendo:

$$\oint_{\partial\Pi} \frac{D'(z)}{D(z)} dz = 0$$

Implicando estabilidad espectral, como ya lo habíamos concluido de manera analítica.

#### 4.2.2. Ejemplo $\gamma = 3, v_+ = 0.00001$

Análogo al ejemplo anterior, la región a considerar fue:

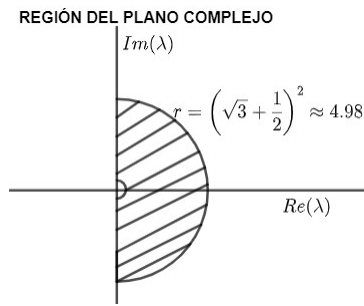


Figura 4.8: Región para  $\gamma = 3$

Obteniendo como imagen  $D(\lambda)$

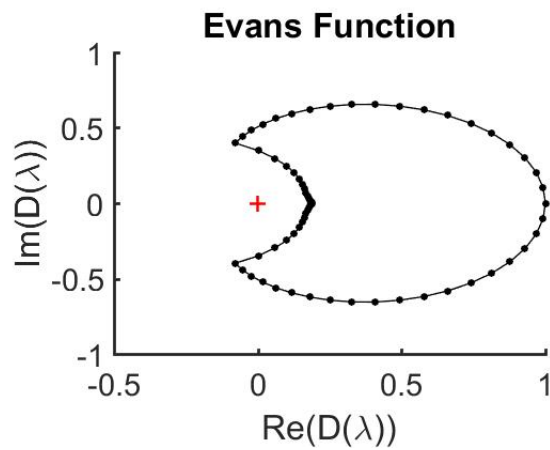


Figura 4.9: Resultado numérico de  $\gamma = 3$

y cuyo resultado fue:

$$\oint_{\partial\Pi} \frac{D'(z)}{D(z)} dz = 0$$

Implicando estabilidad espectral.

## Conclusiones

Este trabajo demuestra la existencia de una solución tipo onda viajera para la ecuación de Burgers y flujo isentrópico, bajo ciertas condiciones con respecto a la velocidad de onda. Para demostrar la estabilidad espectral de la solución tipo onda viajera se puede proceder de varias maneras dependiendo de cada problema. Para el caso de la ecuación de Burgers se pudo demostrar la estabilidad mediante la técnica de estimaciones de energía y ocupando la función de Evans después de construirla analíticamente. Sin embargo, para flujo isentrópico la técnica de estimaciones de energía solo se puede aplicar para soluciones tipo onda viajera de pequeña amplitud, por ello, se ocupó la función de Evans de manera numérica. Aquí lleva todo un proceso de construcción y estudio de distintas técnicas para ir resolviendo los problemas que se presentan en el camino. El paquete StabLab de Matlab ayudó con esta tarea, se pudieron correr algunos ejemplos cuya solución tipo onda viajera presenta amplitud grande, mostrando que se puede suponer estabilidad espectral.

Este trabajo muestra la dificultad para demostrar de manera analítica la estabilidad espectral para problemas como el de flujo isentrópico. Aunque el espectro continuo se puede acotar, no ocurre lo mismo para el espectro puntual, y en el caso en que se puede demostrar la estabilidad el trabajo es largo y no tan sencillo, debido a la gran cantidad de cálculos que se deben realizar. Con esto se muestra la gran herramienta que es StabLab para estos problemas.



## Anexo 1

**Lema A.0.1.** Si  $\gamma \in [1, 3]$  entonces, para cada  $1 \leq \gamma \leq 3$  siempre es posible encontrar un  $v_+$  con  $0 < v_+ \leq \widehat{v} < 1$ , tal que

$$\begin{aligned} & \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 2)\widehat{v}^\gamma v_+}{a\gamma} - \frac{(a + 1)(\gamma - 1)\widehat{v}^{\gamma-1}v_+}{a} \\ & \geq 2(\gamma - 1) \left( \frac{v_+^{\gamma+1}}{a\gamma} \right) - (\gamma - 1). \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

con  $a = v_+^\gamma \frac{1-v_+}{1-v_+^\gamma} \neq 0$

**Teorema A.0.2.** Choques viscosos de (2.11) son espectralmente estables cuando:

$$\left( \frac{v_+^{\gamma+1}}{a\gamma} \right)^2 + 2(\gamma - 1) \left( \frac{v_+^{\gamma+1}}{a\gamma} \right) - (\gamma - 1) \geq 0. \quad (\text{A.2})$$

**Prueba Sea**

$$h(\widehat{v}) = -\widehat{v}^{\gamma+1} + a(\gamma - 1) + (a + 1)\widehat{v}^\gamma > 0. \quad (\text{A.3})$$

Si multiplicamos la segunda ecuación del sistema (2.37) por  $\frac{\widehat{u}\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})}$  e integrando de  $-\infty$  a  $\infty$  con respecto a  $x$  tenemos

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda |u|^2 \widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u' \widehat{u} \widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} - \int_{-\infty}^{\infty} v' \bar{u} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u'' \widehat{u} \widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})}, \quad (\text{A.4})$$

al calcular la tercera integral por partes,

$$\int_{-\infty}^{\infty} v' \bar{u} = \bar{u} v \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} v \bar{u}' = - \int_{-\infty}^{\infty} v \bar{u}',$$

usando la primera ecuación en (2.37),

$$\int_{-\infty}^{\infty} v' \bar{u} = - \int_{-\infty}^{\infty} v \overline{(\lambda v + v')}.$$

Ahora, trabajamos la integral del lado derecho por partes, en (A.4),

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u''\widehat{u}\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} &= \left. \frac{u'\widehat{v}^\gamma\widehat{u}}{h(\widehat{v})} \right|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} u'\widehat{u} \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)' - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \widehat{u}u', \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} u'\widehat{u} \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)' - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \widehat{u}u'. \end{aligned}$$

Cambiando la notación en la integral, reescribimos  $\int_{\mathbb{R}}(\cdot)$  como  $\int_{-\infty}^{\infty}(\cdot)$ , y al ocupar el valor de estas integrales, (A.4) toma la forma:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda |u|^2 \widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} + \int_{\mathbb{R}} \frac{u'\widehat{u}\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} \int_{\mathbb{R}} v(\lambda v + v') + \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{v}^\gamma |u'|^2}{h(\widehat{v})} = \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)' u'\widehat{u}. \quad (\text{A.5})$$

Como :

$$\int_{\mathbb{R}} v(\lambda v + v') = \int_{\mathbb{R}} v\bar{\lambda}v + v\bar{v}' = \int_{\mathbb{R}} \bar{\lambda}|v|^2 + \int_{\mathbb{R}} v\bar{v}',$$

entonces (A.5) toma la forma:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda |u|^2 \widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} + \int_{\mathbb{R}} \frac{u'\widehat{u}\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} + \int_{\mathbb{R}} \bar{\lambda}|v|^2 + \int_{\mathbb{R}} v\bar{v}' + \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{v}^\gamma |u'|^2}{h(\widehat{v})} \\ + \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)' u'\widehat{u} = 0, \quad (\text{A.6}) \end{aligned}$$

equivalentemente:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda |u|^2 \widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} + \int_{\mathbb{R}} u'\widehat{u} \left[ \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} + \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)' \right] + \int_{\mathbb{R}} \bar{\lambda}|v|^2 + \int_{\mathbb{R}} v\bar{v}' + \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{v}^\gamma |u'|^2}{h(\widehat{v})} = 0 \quad (\text{A.7})$$

Al realizar la segunda integral de esta última igualdad por partes eligiendo a  $U$  y  $dV$  como:

$$\begin{aligned} U &= \widehat{u} \left[ \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} + \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)' \right] \\ dV &= u' \end{aligned}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}} u' \bar{u} \left[ \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} + \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)' \right] = \bar{u} u \left[ \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} + \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)' \right] \Big|_{-\infty}^{\infty} \\
 & - \left( \int_{\mathbb{R}} u \bar{u} \left[ \left( \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} \right)' + \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)'' \right] + \left[ \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} + \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)' \right] u \bar{u}' \right), \\
 & = \left[ \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} + \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)' \right] |u|^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \left[ \left( \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} \right)' + \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)'' \right] |u|^2 \\
 & - \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} + \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)' \right] u \bar{u}'.
 \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\mathbb{R}} u' \bar{u} \left[ \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} + \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)' \right] + \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} + \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)' \right] u \bar{u}' = \\
 & \left[ \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} + \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)' \right] |u|^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \left[ \left( \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} \right)' + \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)'' \right] |u|^2,
 \end{aligned}$$

si tomamos la parte real tenemos:

$$\begin{aligned}
 & 2\operatorname{Re} \left( \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} + \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)' \right] u \bar{u}' \right) = - \int_{\mathbb{R}} \left[ \left( \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} \right)' + \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)'' \right] |u|^2, \\
 & \Rightarrow \operatorname{Re} \left( \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} + \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)' \right] u \bar{u}' \right) = -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[ \left( \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} \right)' + \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)'' \right] |u|^2.
 \end{aligned}$$

Así, cuando consideramos la parte real de (A.7) tenemos

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Re}(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} |u|^2 + |v|^2 \right] - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[ \left( \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} \right)' + \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)'' \right] |u|^2 \\
 + \int_{\mathbb{R}} \frac{\widehat{v}^\gamma |u'|^2}{h(\widehat{v})} = 0.
 \end{aligned}$$

Sea

$$g(\widehat{v}) = -\frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})} \right)' + \left( \frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})} \right)'' \right]. \tag{A.8}$$

Para demostrar el teorema basta con demostrar que  $g(\widehat{v}) \geq 0$  en  $[v_+, 1]$ . Con esto en mente procedemos a calcular algunas relaciones que ocuparemos posteriormente. Si derivamos (A.3) con respecto a  $\widehat{v}(x)$  tenemos:

$$h'(\widehat{v}) = -(\gamma + 1)\widehat{v}^\gamma + \gamma(a + 1)\widehat{v}^{\gamma-1},$$

entonces:

$$\begin{aligned} \gamma h(\widehat{v}) - \widehat{v}h'(\widehat{v}) &= \gamma(-\widehat{v}^{\gamma+1} + a(\gamma - 1) + (a + 1)\widehat{v}^\gamma) - \\ &\quad \widehat{v}(-(\gamma + 1)\widehat{v}^\gamma + \gamma(a + 1)\widehat{v}^{\gamma-1}), \\ &= a\gamma(\gamma - 1) + \widehat{v}^{\gamma+1}, \end{aligned}$$

así :

$$\gamma h(\widehat{v}) - \widehat{v}h'(\widehat{v}) = a\gamma(\gamma - 1) + \widehat{v}^{\gamma+1}. \quad (\text{A.9})$$

También, recordemos de (2.23) que:

$$\widehat{v}_x = \widehat{v}(\widehat{v} - 1 + a(\widehat{v}^{-\gamma} - 1)),$$

entonces:

$$\begin{aligned} \widehat{v}^{\gamma-1}\widehat{v}_x &= \widehat{v}^{\gamma-1}[\widehat{v}(\widehat{v} - 1 + a(\widehat{v}^{-\gamma} - 1))], \\ &= \widehat{v}^{\gamma+1} - \widehat{v}^\gamma(a + 1) + a + a\gamma - a\gamma, \\ &= -(-\widehat{v}^{\gamma+1} + \widehat{v}^\gamma(a + 1) + a(\gamma - 1)) + a\gamma, \\ &= -h(\widehat{v}) + a\gamma. \end{aligned}$$

Y así:

$$\widehat{v}^{\gamma-1}\widehat{v}_x = -h(\widehat{v}) + a\gamma. \quad (\text{A.10})$$

También

$$\left(\frac{\widehat{v}^{\gamma+1}}{h(\widehat{v})}\right)' = \widehat{v}_x \left(\frac{(\gamma + 1)\widehat{v}^\gamma h(\widehat{v}) - \widehat{v}^{\gamma+1}h'(\widehat{v})}{h^2(\widehat{v})}\right). \quad (\text{A.11})$$

Ahora:

$$\left(\frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})}\right)'' = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})}\right)\right) = \frac{d}{d\widehat{v}} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})}\right)\right) \cdot \widehat{v}_x,$$

pero,

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\widehat{v}^\gamma}{h(\widehat{v})}\right) = \left(\frac{\gamma\widehat{v}^{\gamma-1}h(\widehat{v}) - \widehat{v}^\gamma h'(\widehat{v})}{h^2(\widehat{v})}\right)\widehat{v}_x.$$

Así:

$$\left(\frac{\widehat{v}}{h(\widehat{v})}\right)'' = \frac{d}{d\widehat{v}} \left( \frac{\gamma \widehat{v}^{\gamma-1} h(\widehat{v}) - \widehat{v}^\gamma h'(\widehat{v})}{h^2(\widehat{v})} \widehat{v}_x \right) \cdot \widehat{v}_x. \quad (\text{A.12})$$

Entonces ocupando (A.11), (A.12) en (A.8) tenemos:

$$g(\widehat{v}) = -\frac{\widehat{v}_x}{2} \left[ \frac{\widehat{v}^\gamma [(\gamma+1)h(\widehat{v}) - \widehat{v}^{\gamma+1}h'(\widehat{v})]}{h^2(\widehat{v})} + \frac{d}{d\widehat{v}} \left[ \widehat{v}_x \widehat{v}^{\gamma-1} \left( \frac{\gamma h(\widehat{v}) - \widehat{v} h'(\widehat{v})}{h^2(\widehat{v})} \right) \right] \right],$$

ocupando (A.9), (A.10) tenemos:

$$g(\widehat{v}) = -\frac{\widehat{v}_x}{2} \left[ \frac{\widehat{v}^\gamma [(\gamma+1)h(\widehat{v}) - \widehat{v} h'(\widehat{v})]}{h^2(\widehat{v})} + \frac{d}{d\widehat{v}} \left[ (a\gamma - h(\widehat{v})) \left( \frac{a\gamma(\gamma-1) + \widehat{v}^{\gamma+1}}{h^2(\widehat{v})} \right) \right] \right]. \quad (\text{A.13})$$

Trabajando la derivada implícita en esta última igualdad y escribiendo  $h$  en lugar de  $h(\widehat{v})$  para simplificar un poco la notación se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{d}{d\widehat{v}} \left[ (a\gamma - h(\widehat{v})) \left( \frac{a\gamma(\gamma-1) + \widehat{v}^{\gamma+1}}{h^2(\widehat{v})} \right) \right] \\ &= \frac{[[-h'] [a\gamma(\gamma-1) + \widehat{v}^{\gamma+1}] + [a\gamma - h] [(\gamma+1)\widehat{v}^\gamma]] h^2}{h^4} - \frac{[a\gamma - h] [a\gamma(\gamma-1) + \widehat{v}^{\gamma+1}] [2hh']}{h^4}, \\ &= \frac{-a\gamma(\gamma-1)h'h - h'h\widehat{v}^{\gamma+1} + a\gamma(\gamma+1)\widehat{v}^\gamma h}{h^3} - \\ & \quad \frac{h^2(\gamma+1)\widehat{v}^\gamma + 2a^2\gamma^2(\gamma-1)h' + 2a\gamma\widehat{v}^{\gamma+1}h'}{h^3} + \\ & \quad \frac{2hh'a\gamma(\gamma-1) + 2hh'\widehat{v}^{\gamma+1}}{h^3}, \\ &= \frac{a\gamma(\gamma-1)h'h + h'h\widehat{v}^{\gamma+1} + a\gamma(\gamma+1)\widehat{v}^\gamma h}{h^3} - \\ & \quad \frac{h^2(\gamma+1)\widehat{v}^\gamma + 2a^2\gamma^2(\gamma-1)h' + 2a\gamma\widehat{v}^{\gamma+1}h'}{h^3}. \end{aligned}$$

así podemos escribir (A.13) como:

$$g(\widehat{v}) = \frac{-\widehat{v}_x}{2h^3} \left[ \underbrace{h[a\gamma(\gamma+1)\widehat{v}^\gamma]}_i + \underbrace{a\gamma h'[-2a\gamma(\gamma-1) - 2\widehat{v}^{\gamma+1}]}_{ii} + \underbrace{hh'[a\gamma(\gamma-1)]}_{iii} \right]. \quad (\text{A.14})$$

Si trabajamos (i), (ii) y (iii) por separado y se utilizar la expresión de  $h$  en (A.3). Para (i) tenemos:

$$h[a\gamma(\gamma+1)\widehat{v}^\gamma] = [-\widehat{v}^{\gamma+1} + a(\gamma-1) + (a+1)\widehat{v}^\gamma][a\gamma(\gamma+1)\widehat{v}^\gamma],$$

entonces:

$$h[a\gamma(\gamma+1)\widehat{v}^\gamma] = -a\gamma(\gamma+1)\widehat{v}^{2\gamma+1} + a^2\gamma(\gamma-1)(\gamma+1)\widehat{v}^\gamma + a\gamma(\gamma+1)(a+1)\widehat{v}^{2\gamma}.$$

Para (ii)

$$\begin{aligned} a\gamma h'[-2a\gamma(\gamma-1) - 2\widehat{v}^{\gamma+1}] &= \\ & a\gamma[\gamma(a+1)\widehat{v}^{\gamma-1} - (\gamma+1)\widehat{v}^\gamma][ -2a\gamma(\gamma-1) - 2\widehat{v}^{\gamma+1}], \\ &= [-2a^2\gamma^3(\gamma-1)(a+1)]\widehat{v}^{\gamma-1} - [2a\gamma^2(a+1)]\widehat{v}^{2\gamma} + \\ & \quad [2a^2\gamma^2(\gamma-1)(\gamma+1)]\widehat{v}^\gamma + [2a\gamma(\gamma+1)]\widehat{v}^{2\gamma+1}. \end{aligned}$$

Para (iii):

$$\begin{aligned} hh'[a\gamma(\gamma-1)] &= [-\widehat{v}^{\gamma+1} + a(\gamma-1) + (a+1)\widehat{v}^\gamma][\gamma(a+1)\widehat{v}^{\gamma-1} - \\ &= [-\gamma(a+1)\widehat{v}^{2\gamma} + (\gamma+1)\widehat{v}^{2\gamma+1} + a\gamma(\gamma-1)(a+1)\widehat{v}^{\gamma-1} - \\ & a(\gamma-1)(\gamma+1)\widehat{v}^\gamma + \gamma(a+1)^2\widehat{v}^{2\gamma-1} - (a+1)(\gamma+1)\widehat{v}^{2\gamma}]. \\ & \quad [a\gamma(\gamma-1)], \\ &= [-a\gamma^2(\gamma-1)(a+1) - a(a+1)\gamma(\gamma+1)(\gamma-1)]\widehat{v}^{2\gamma} + \\ & \quad [(\gamma+1)a\gamma(\gamma-1)]\widehat{v}^{2\gamma+1} + [a^2\gamma^2(\gamma-1)^2(a+1)]\widehat{v}^{\gamma-1} - \\ & \quad [a^2\gamma(\gamma-1)^2(\gamma+1)]\widehat{v}^\gamma + [a\gamma^2(\gamma-1)(a+1)^2]\widehat{v}^{2\gamma-1}. \end{aligned}$$

Al ocupar estos desarrollos de (i), (ii) y (iii) en (A.14) y agrupando términos semejantes tenemos:

$$\begin{aligned}
 g(\widehat{v}) = \frac{-\widehat{v}_x}{2h^3} & \left[ \widehat{v}^{2\gamma+1} [-a\gamma(\gamma+1) + 2a\gamma(\gamma+1) + (\gamma+1)a\gamma \cdot \right. \\
 & (\gamma-1)] + \widehat{v}^\gamma [a^2\gamma(\gamma-1)(\gamma+1) + 2a^2\gamma^2(\gamma-1)(\gamma+1) - \\
 & a^2\gamma(\gamma-1)^2(\gamma+1)] + \widehat{v}^{2\gamma} [a\gamma(\gamma+1)(a+1) - 2a\gamma^2(a+1) - \\
 & a\gamma^2(\gamma-1)(a+1) - a(a+1)\gamma(\gamma+1)(\gamma-1)] + \\
 & \widehat{v}^{\gamma-1} [-2a^2\gamma^3(\gamma-1)(a+1) + a^2\gamma^2(\gamma-1)^2(a+1)] + \\
 & \left. \widehat{v}^{2\gamma-1} [a\gamma^2(\gamma-1)(a+1)^2] \right].
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 g(\widehat{v}) = \frac{-\widehat{v}_x}{2h^3} & \left[ \widehat{v}^{2\gamma+1} [-a\gamma(\gamma+1) + 2a\gamma(\gamma+1) + (\gamma+1)a\gamma(\gamma-1)] \right. \\
 & + \widehat{v}^\gamma [a^2\gamma(\gamma-1)(\gamma+1) + 2a^2\gamma^2(\gamma-1)(\gamma+1) - a^2\gamma(\gamma-1)^2 \cdot \\
 & (\gamma+1)] + \widehat{v}^{2\gamma} [a\gamma(\gamma+1)(a+1) - 2a\gamma^2(a+1) - a\gamma^2(\gamma-1)(a+1) \\
 & - a(a+1)\gamma(\gamma+1)(\gamma-1)] + \widehat{v}^{\gamma-1} [-2a^2\gamma^3(\gamma-1)(a+1) + \\
 & \left. a^2\gamma^2(\gamma-1)^2(a+1)] + \widehat{v}^{2\gamma-1} [a\gamma^2(\gamma-1)(a+1)^2] \right].
 \end{aligned}$$

Al simplificar los coeficientes de cada potencia de  $\widehat{v}$ :

$$-a\gamma(\gamma+1) + 2a\gamma(\gamma+1) + (\gamma+1)a\gamma(\gamma-1) = a\gamma^2(\gamma+1).$$

$$\begin{aligned}
 a^2\gamma(\gamma-1)(\gamma+1) + 2a^2\gamma^2(\gamma-1)(\gamma+1) - a^2\gamma(\gamma-1)^2(\gamma+1) \\
 = a^2\gamma(\gamma^2-1)(\gamma+2).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a\gamma(\gamma+1)(a+1) - 2a\gamma^2(a+1) - a\gamma^2(\gamma-1)(a+1) - a(a+1) \\
 \cdot \gamma(\gamma+1)(\gamma-1) = -2a\gamma(a+1)(\gamma^2-1).
 \end{aligned}$$

$$-2a^2\gamma^3(\gamma-1)(a+1) + a^2\gamma^2(\gamma-1)^2(a+1) = -a^2\gamma^2(a+1)(\gamma^2-1).$$

Así a partir de estas simplificaciones tenemos:

$$\begin{aligned}
 g(\widehat{v}) = \frac{-\widehat{v}_x}{2h^3} & \left[ \widehat{v}^{2\gamma+1} [a\gamma^2(\gamma+1)] + \widehat{v}^{2\gamma} [-2(a+1)a\gamma(\gamma^2-1)] \right. \\
 & + \widehat{v}^{2\gamma-1} [(a+1)^2 a\gamma^2(\gamma-1)] + \widehat{v}^\gamma [a^2\gamma(\gamma+2)(\gamma^2-1)] \\
 & \left. + \widehat{v}^{\gamma-1} [-a^2(a+1)\gamma^2(\gamma^2-1)] \right],
 \end{aligned}$$

$$= \frac{-a\widehat{v}_x\widehat{v}^{\gamma-1}}{2h^3} [\gamma^2 (\gamma + 1) \widehat{v}^{\gamma+2} - 2(a + 1) \gamma (\gamma^2 - 1) \widehat{v}^{\gamma+1} + (a + 1)^2 \cdot \gamma^2 (\gamma - 1) \widehat{v}^\gamma + a\gamma (\gamma + 2) (\gamma^2 - 1) \widehat{v} - a(a + 1) \gamma^2 (\gamma^2 - 1)].$$

Pero

$$\widehat{v}^{\gamma+2} \gamma^2 (\gamma + 1) = (\gamma + 1) \widehat{v}^{\gamma+2} + \widehat{v}^{\gamma+2} (\gamma - 1) (\gamma + 1)^2.$$

Así:

$$\begin{aligned} g(\widehat{v}) &= \frac{-a\widehat{v}_x\widehat{v}^{\gamma-1}}{2h^3} [(\gamma + 1) \widehat{v}^{\gamma+2} + \widehat{v}^{\gamma+2} (\gamma - 1) (\gamma + 1)^2 - 2(a + 1) \cdot \\ &\quad \gamma (\gamma^2 - 1) \widehat{v}^{\gamma+1} + (a + 1)^2 \gamma^2 (\gamma - 1) \widehat{v}^\gamma + a\gamma (\gamma + 2) \cdot \\ &\quad (\gamma^2 - 1) \widehat{v} - a(a + 1) \gamma^2 (\gamma^2 - 1)], \\ &= \frac{-a\widehat{v}_x\widehat{v}^{\gamma-1}}{2h^3} \cdot \widehat{v}^\gamma (\gamma - 1) [\widehat{v} (\gamma + 1) - (a + 1) \gamma]^2 - \frac{a\widehat{v}_x\widehat{v}^{\gamma-1}}{2h^3} \cdot \\ &\quad [(\gamma + 1) \widehat{v}^{\gamma+2} + a\gamma (\gamma + 2) (\gamma^2 - 1) \widehat{v} - a(a + 1) \gamma^2 (\gamma^2 - 1)]. \end{aligned}$$

Podemos observar que:

$$\frac{-a\widehat{v}_x\widehat{v}^{\gamma-1}}{2h^3} \cdot \widehat{v}^\gamma (\gamma - 1) [\widehat{v} (\gamma + 1) - (a + 1) \gamma]^2 \geq 0,$$

pues  $\gamma \geq 1$ ,  $a = \widehat{v}_+^\gamma \frac{1-v_+}{1-v_+^\gamma} \geq 0$  con  $0 < v_+ < 1$ ,  $h > 0$ ,  $\widehat{v}_x < 0$  y  $\widehat{v}^\gamma > 0$  por ser volumen específico. Entonces:

$$\begin{aligned} g(\widehat{v}) &\geq -\frac{a\widehat{v}_x\widehat{v}^{\gamma-1}}{2h^3} [(\gamma + 1) \widehat{v}^{\gamma+2} + a\gamma (\gamma + 2) (\gamma^2 - 1) \widehat{v} - a(a + 1) \cdot \\ &\quad \gamma^2 (\gamma^2 - 1)] \\ &= -\frac{a\widehat{v}_x\widehat{v}^{\gamma-1}}{2h^3} [(\gamma + 1) \widehat{v}^{\gamma+2} + a\gamma (\gamma + 2) (\gamma^2 - 1) \widehat{v} - a(a + 1) \cdot \\ &\quad \gamma^2 (\gamma^2 - 1)] \cdot \frac{a^2 \gamma^2 v_+}{a^2 \gamma^2 v_+}, \\ &= -\frac{a^3 \gamma^2 \widehat{v}_x (\gamma + 1)}{2h^3 v_+} \left[ \frac{\widehat{v}^{2\gamma+1} v_+}{a^2 \gamma^2} + \frac{(\gamma-1)(\gamma+2)}{a\gamma} \widehat{v}^\gamma v_+ - \frac{(a+1)(\gamma-1)}{a} \widehat{v}^{\gamma-1} v_+ \right]. \end{aligned}$$

Como  $0 < v_+ \leq \widehat{v} < 1 \Rightarrow \widehat{v}^{2\gamma+1} \geq v_+^{2\gamma+1}$ ,  $\widehat{v}^\gamma \geq v_+^\gamma$ ,  $\widehat{v}^{\gamma-1} \geq v_+^{\gamma-1}$  y así:

$$g(\widehat{v}) \geq \frac{-a^3 \gamma^2 \widehat{v}_x \widehat{v}^{\gamma-1} (\gamma + 1)}{2h^3 v_+} \left[ \left( \frac{v_+^{\gamma+1}}{a\gamma} \right)^2 + \frac{(\gamma-1)(\gamma+2)}{a\gamma} v_+^{\gamma+1} - \frac{(a+1)(\gamma-1)}{a} v_+^\gamma \right].$$

Ahora aplicando el lema (A.0.1) tenemos

$$g(\widehat{v}) \geq \frac{-a^3 \gamma^2 \widehat{v}_x \widehat{v}^{\gamma-1} (\gamma + 1)}{2h^3 v_+} \left[ \left( \frac{v_+^{\gamma+1}}{a\gamma} \right)^2 + 2(\gamma - 1) \left( \frac{v_+^{\gamma+1}}{a\gamma} \right) - (\gamma - 1) \right].$$

Pero por hipótesis

$$\left( \frac{v_+^{\gamma+1}}{a\gamma} \right)^2 + 2(\gamma - 1) \left( \frac{v_+^{\gamma+1}}{a\gamma} \right) - (\gamma - 1) \geq 0,$$

ahora, como  $\frac{a^3 \gamma^2 (\gamma + 1)}{2h^3 v_+} > 0$ ,  $\widehat{v}_x < 0$ , y entonces  $g(\widehat{v}) \geq 0$ .  $\boxtimes$



## Anexo 2

**Lema B.0.1.** *La siguiente desigualdad es cierta para  $Re(\lambda) \geq 0$ .*

$$[Re(\lambda) + |Im(\lambda)|] \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_x \|u\|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 \leq \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} \|v'\| \|\bar{u}\| dx + \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u'\| \|u\| dx. \quad (\text{B.1})$$

**Demostración.** Recordamos (2.37)

$$\lambda v + v' - u' = 0, \quad (\text{B.2})$$

$$\lambda u + u' - \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} v' = \frac{u''}{\widehat{v}}. \quad (\text{B.3})$$

Multiplicando (B.3) por  $\widehat{v}\bar{u}$  e integrando con respecto a  $x$  de  $-\infty$  a  $\infty$  tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda \widehat{v} \|u\|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} u' \bar{u} dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} v' \bar{u} dx = \int_{\mathbb{R}} u'' \bar{u} dx,$$

realizando la integral del lado derecho por partes, y notando que  $u'' \bar{u}|_{-\infty}^{\infty} = 0$ ,

$$\lambda \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \widehat{v} u' \bar{u} dx}_{(*)} + \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} v' \bar{u} dx, \quad (\text{B.4})$$

trabajamos (\*) por partes, eligiéndose como  $U = \widehat{v}\bar{u}$  y a  $dV = u'$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} u' \bar{u} dx &= \widehat{v}\bar{u}|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} u \bar{u} \widehat{v}_x dx - \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \bar{u}' u dx = - \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_x \|u\|^2 dx - \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \bar{u}' u dx, \\ \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} u' \bar{u} dx + \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \bar{u}' u dx &= - \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_x \|u\|^2 dx, \end{aligned}$$

tomando la parte real y notando que  $Re \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} u' \bar{u} dx \right) = Re \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \bar{u}' u dx \right)$ , tenemos

$$Re \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} u' \bar{u} dx \right) = -\frac{1}{2} Re \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_x \|u\|^2 dx \right). \quad (\text{B.5})$$

Regresando a (B.4), y tomando la parte real e imaginaria tenemos:

$$Re(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx + Re \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} u' \bar{u} dx \right) + \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 = Re \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} v' \bar{u} dx \right),$$

por (B.5):

$$Re(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx + -\frac{1}{2} Re \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_x \|u\|^2 dx \right) + \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 = Re \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} v' \bar{u} dx \right),$$

entonces,

$$\left| Re \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} v' \bar{u} dx \right) \right| = Re(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx - \frac{1}{2} Re \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_x \|u\|^2 dx \right) + \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2. \quad (\text{B.6})$$

Ahora tomando la parte imaginaria de (B.4) tenemos:

$$\begin{aligned} Im(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx + Im \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} u' \bar{u} dx \right) &= Im \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} v' \bar{u} dx \right), \\ \Rightarrow \left| Im(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx \right| &= \left| Im \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} v' \bar{u} dx \right) - Im \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} u' \bar{u} dx \right) \right|, \\ &\leq \left| Im \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} v' \bar{u} dx \right) \right| + \left| Im \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} u' \bar{u} dx \right) \right|, \end{aligned}$$

entonces,

$$\left| Im(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx \right| - \left| Im \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} u' \bar{u} dx \right) \right| \leq \left| Im \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} v' \bar{u} dx \right) \right|. \quad (\text{B.7})$$

Ahora, como

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u'\| \|\bar{u}\| dx &\geq \left\| \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} u' \bar{u} dx \right\| \geq \left| Im \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} u' \bar{u} dx \right) \right|, \\ \Rightarrow - \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u'\| \|\bar{u}\| dx &\leq - \left| Im \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} u' \bar{u} dx \right) \right|, \end{aligned}$$

así:

$$\left| \operatorname{Im}(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx \right| - \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u'\| \|\bar{u}\| dx \leq \left| \operatorname{Im}(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx \right| - \left| \operatorname{Im} \left( \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} u' \bar{u} dx \right) \right|. \quad (\text{B.8})$$

Ahora, por (B.7) y (B.8),

$$\left| \operatorname{Im}(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx \right| - \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u'\| \|\bar{u}\| dx \leq \left| \operatorname{Im} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} v' \bar{u} dx \right) \right|,$$

entonces,

$$|\operatorname{Im}(\lambda)| \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx \leq \left| \operatorname{Im} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} v' \bar{u} dx \right) \right| + \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u'\| \|\bar{u}\| dx, \quad (\text{B.9})$$

por (B.9) y (B.6) tenemos

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_x \|u\|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx + |\operatorname{Im}(\lambda)| \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx \\ \leq \left| \operatorname{Re} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} v' \bar{u} \right) \right| + \left| \operatorname{Im} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} v' \bar{u} dx \right) \right| + \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u'\| \|\bar{u}\| dx, \end{aligned}$$

usando que, para todo  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z = a + bi$  se cumple  $|a| + |b| \leq \sqrt{2} \|z\|$ , y agrupando términos,

$$\begin{aligned} [\operatorname{Re}(\lambda) + |\operatorname{Im}(\lambda)|] \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_x \|u\|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx \leq \\ \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} \|v'\| \|\bar{u}\| dx + \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u'\| \|\bar{u}\| dx, \end{aligned}$$

que es lo que queremos demostrar  $\square$ .

**Lema B.0.2.** *La siguiente igualdad es cierta para  $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$ :*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx = 2\operatorname{Re}(\lambda)^2 \int_{\mathbb{R}} \|v\|^2 dx + \operatorname{Re}(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \frac{\|v'\|^2}{\widehat{v}} dx + \\ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} + \frac{a\gamma}{\widehat{v}^{\gamma+1}} \right] \|v'\|^2 dx. \end{aligned}$$

**Demostración** Multiplicando (B.3) por  $\bar{v}'$  e integrando de  $-\infty$  a  $\infty$ :

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda u \bar{v}' dx + \int_{\mathbb{R}} u' \bar{v}' dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} \|v'\|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{u''}{\widehat{v}} \bar{v}' dx,$$

ocupando (B.2),

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \lambda u \bar{v}' dx + \int_{\mathbb{R}} u' \bar{v}' dx}_{(**)} - \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} \|v'\|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}} \frac{(\lambda v' + v'')}{\widehat{v}} \bar{v}' dx, \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\lambda \|v'\|^2}{\widehat{v}} dx + \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{v'' \bar{v}'}{\widehat{v}} dx}_{(***)}. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Trabajando (\*\*)

$$\lambda \int_{\mathbb{R}} u \bar{v}' dx + \int_{\mathbb{R}} u' \bar{v}' dx = \lambda \int_{\mathbb{R}} u \bar{v}' dx + \bar{\lambda} \int_{\mathbb{R}} u \bar{v}' - \bar{\lambda} \int_{\mathbb{R}} u \bar{v}' + \int_{\mathbb{R}} u' \bar{v}' dx,$$

pero  $\int_{\mathbb{R}} u' \bar{v}' dx = - \int_{\mathbb{R}} u \bar{v}'' dx$ ,

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\mathbb{R}} u \bar{v}' dx + \int_{\mathbb{R}} u' \bar{v}' dx &= \lambda \int_{\mathbb{R}} u \bar{v}' dx + \bar{\lambda} \int_{\mathbb{R}} u \bar{v}' - \bar{\lambda} \int_{\mathbb{R}} u \bar{v}' - \int_{\mathbb{R}} u \bar{v}'' dx, \\ &= (\lambda + \bar{\lambda}) \int_{\mathbb{R}} u \bar{v}' dx - \int_{\mathbb{R}} u (\bar{\lambda} \bar{v}' + \bar{v}'') dx, \\ &= 2Re(\lambda) \int_{\mathbb{R}} u \bar{v}' dx - \int_{\mathbb{R}} u \overline{(\lambda v' + v'')} dx. \end{aligned}$$

De (4.2),  $u'' = \lambda v' + v''$ , entonces  $\overline{u''} = \overline{\lambda v' + v''}$ , y como:

$$\int_{\mathbb{R}} u \bar{v}' dx = u \bar{v} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \bar{v} u' dx = - \int_{\mathbb{R}} \bar{v} u' dx,$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda u \bar{v}' dx + \int_{\mathbb{R}} u' \bar{v}' dx = -2Re(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \bar{v} u' dx - \int_{\mathbb{R}} u \bar{u}'' dx.$$

Nuevamente por (4.2)

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda u \bar{v}' dx + \int_{\mathbb{R}} u' \bar{v}' dx = -2Re(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \bar{v} (\lambda v + v') dx - \int_{\mathbb{R}} u \bar{u}'' dx,$$

pero

$$\int_{\mathbb{R}} u\bar{u}'' dx = u\bar{u}'|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} u'\bar{u}' dx = - \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx,$$

entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \lambda u\bar{v}' dx + \int_{\mathbb{R}} u'\bar{v}' dx &= -2\operatorname{Re}(\lambda) \int_{\mathbb{R}} (\lambda v + v') \bar{v} dx + \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx, \\ &= -2\operatorname{Re}(\lambda) \left[ \int_{\mathbb{R}} \lambda \|v\|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} v'\bar{v} dx \right] + \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx, \\ \Rightarrow \operatorname{Re} \left[ \int_{\mathbb{R}} \lambda u\bar{v}' dx + \int_{\mathbb{R}} u'\bar{v}' dx \right] &= \operatorname{Re} \left[ -2\operatorname{Re}(\lambda) \left[ \int_{\mathbb{R}} \lambda \|v\|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} v'\bar{v} dx \right] + \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx \right], \\ &= -2\operatorname{Re}(\lambda) \cdot \operatorname{Re} \left[ \int_{\mathbb{R}} \lambda \|v\|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} v'\bar{v} dx \right] + \operatorname{Re} \left[ \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx \right], \\ &= -2\operatorname{Re}(\lambda)^2 \int_{\mathbb{R}} \|v\|^2 dx - 2\operatorname{Re}(\lambda) \cdot \operatorname{Re} \left[ \int_{\mathbb{R}} v'\bar{v} dx \right] + \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx, \end{aligned}$$

pero  $\operatorname{Re} \left[ \int_{\mathbb{R}} v'\bar{v} dx \right] = 0$  pues:

$$\int_{\mathbb{R}} v'\bar{v} dx = \bar{v}v|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} v\bar{v}' dx, \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} v'\bar{v} dx + \int_{\mathbb{R}} v\bar{v}' dx = \|v\|^2|_{-\infty}^{\infty} = 0, \Rightarrow \operatorname{Re} \left[ \int_{\mathbb{R}} v'\bar{v} dx \right] = 0.$$

Así:

$$\operatorname{Re} \left[ \int_{\mathbb{R}} \lambda u\bar{v}' dx + \int_{\mathbb{R}} u'\bar{v}' dx \right] = -2\operatorname{Re}(\lambda)^2 \int_{\mathbb{R}} \|v\|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx. \quad (\text{B.11})$$

Ahora integrando (\*\*\*) por partes, haciendo  $U = \frac{\bar{v}'}{\hat{v}}$  y  $dV = v''$  tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{v''\bar{v}'}{\hat{v}} dx = \frac{\bar{v}'v'}{\hat{v}} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} \frac{v'\bar{v}''}{\hat{v}} dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{|v'|^2 \hat{v}_x}{\hat{v}^2} dx,$$

como  $\frac{\bar{v}'v'}{\hat{v}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 0$ ,

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{v''\bar{v}'}{\hat{v}} dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{v'\bar{v}''}{\hat{v}} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{|v'|^2 \hat{v}_x}{\hat{v}^2} dx,$$

y entonces

$$\operatorname{Re} \left( \int_{\mathbb{R}} \frac{v''\bar{v}'}{\hat{v}} dx \right) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{|v'|^2 \hat{v}_x}{\hat{v}^2} dx. \quad (\text{B.12})$$

Ahora, trabajamos una igualdad que utilizaremos mas adelante. Si dividimos (A.3) entre  $2\widehat{v}^{\gamma+1}$

$$\frac{1}{2} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} + \frac{\widehat{v}_x}{2\widehat{v}^2} = \frac{1}{2} \frac{a\gamma}{\widehat{v}^{\gamma+1}},$$

entonces

$$\frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} + \frac{\widehat{v}_x}{2\widehat{v}^2} = \frac{1}{2} \left[ \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} + \frac{a\gamma}{\widehat{v}^{\gamma+1}} \right]. \quad (\text{B.13})$$

Ahora, tomando la parte real de (B.10)

$$\text{Re} \left[ \int_{\mathbb{R}} \lambda u \bar{v}' dx + \int_{\mathbb{R}} u' \bar{v}' dx \right] - \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} \|v'\|^2 dx = \text{Re}(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \frac{\|v'\|^2}{\widehat{v}} dx + \text{Re} \left[ \int_{\mathbb{R}} \frac{v'' \bar{v}'}{\widehat{v}} dx \right],$$

ahora por (B.11) y (B.12) tenemos:

$$\begin{aligned} -2\text{Re}(\lambda)^2 \int_{\mathbb{R}} \|v\|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} \|v'\|^2 dx = \\ \text{Re}(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \frac{\|v'\|^2}{\widehat{v}} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\|v'\|^2 \widehat{v}_x}{\widehat{v}^2} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx = \\ 2\text{Re}(\lambda)^2 \int_{\mathbb{R}} \|v\|^2 dx + \text{Re}(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \frac{\|v'\|^2}{\widehat{v}} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{\|v'\|^2 \widehat{v}_x}{\widehat{v}^2} dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} \|v'\|^2 dx, \\ = 2\text{Re}(\lambda)^2 \int_{\mathbb{R}} \|v\|^2 dx + \text{Re}(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \frac{\|v'\|^2}{\widehat{v}} dx + \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} + \frac{\widehat{v}_x}{2\widehat{v}^2} \right] \|v'\|^2 dx, \end{aligned}$$

pero ocupando (B.13)

$$\int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx = 2\text{Re}(\lambda)^2 \int_{\mathbb{R}} \|v\|^2 dx + \text{Re}(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \frac{\|v'\|^2}{\widehat{v}} dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} + \frac{a\gamma}{\widehat{v}^{\gamma+1}} \right] \|v'\|^2 dx,$$

que es lo que queríamos demostrar  $\square$ .

**Lema B.0.3.** Sea  $h(\widehat{v})$  como en (A.3), entonces se cumple que

$$\sup_{\widehat{v} \in [v_+, 1]} \left| \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} \right| = \gamma \frac{1 - v_+}{1 - v_+^\gamma} \leq \gamma.$$

**Demostración** Sea  $H(\widehat{v}) = h(\widehat{v})\widehat{v}^{-\gamma}$ , como

$$h(\widehat{v}) = -\widehat{v}^{\gamma+1} + a(\gamma - 1) + (a + 1)\widehat{v}^\gamma,$$

entonces:

$$H(\widehat{v}) = -\widehat{v} + a(\gamma - 1)\widehat{v}^{-\gamma} + a + 1,$$

derivando con respecto a  $\widehat{v}$  tenemos,

$$H(\widehat{v})' = -1 - a\gamma(\gamma - 1)\widehat{v}^{-\gamma-1} < 0,$$

con  $0 < v_+ \leq \widehat{v} \leq v_- = 1$ , así  $H(\widehat{v})$  es decreciente en  $[v_+, 1]$  y alcanza su máximo en  $\widehat{v} = v_+$ . Entonces

$$\max_{\widehat{v} \in [v_+, 1]} H(\widehat{v}) = -v_+ + a(\gamma - 1)v_+^{-\gamma} + a + 1 = a((\gamma - 1)v_+^{-\gamma} + 1) + 1 - v_+,$$

como  $a = v_+^\gamma \frac{1 - v_+}{1 - v_+^\gamma}$ , entonces:

$$\begin{aligned} \max_{\widehat{v} \in [v_+, 1]} H(\widehat{v}) &= -v_+ + (\gamma - 1) \frac{1 - v_+}{1 - v_+^\gamma} + v_+^\gamma \frac{1 - v_+}{1 - v_+^\gamma} + 1, \\ &= -v_+ + \gamma \left( \frac{1 - v_+}{1 - v_+^\gamma} \right) + (v_+^\gamma - 1) \left( \frac{1 - v_+}{1 - v_+^\gamma} \right) + 1, \\ &= \gamma \left( \frac{1 - v_+}{1 - v_+^\gamma} \right) \leq \gamma \quad \square. \end{aligned}$$

**Teorema B.0.4.** Cualquier valor propio  $\lambda$  de (4.1) con parte real no negativa, satisface:

$$\operatorname{Re}(\lambda) + |\operatorname{Im}(\lambda)| \leq \left( \sqrt{\gamma} + \frac{1}{2} \right)^2.$$

**Demostración** Sabemos, por el lema (B.0.1) que

$$\begin{aligned} [ \operatorname{Re}(\lambda) + |\operatorname{Im}(\lambda)| ] \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_x \|u\|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 \leq \\ \sqrt{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} \|v'\| \|\bar{u}\| dx + \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u'\| \|u\| dx. \end{aligned}$$

Por la desigualdad de Young dada en antecedentes, tenemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} \frac{\sqrt{2\theta}}{\sqrt{2\theta}} \|v'\| \|\bar{u}\| \sqrt{2} dx &\leq \\ &\int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} \frac{(\sqrt{2\theta} \|v'\|)^2}{2} dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} \frac{\left(\frac{\sqrt{2}\|u\|}{\sqrt{2\theta}}\right)^2}{2} dx, \\ &\leq \theta \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} \|v'\|^2 dx + \frac{1}{2\theta} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} \|u\|^2 dx, \end{aligned}$$

análogamente

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u'\| \|u\| dx \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u'\|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx,$$

así,

$$\begin{aligned} [Re(\lambda) + |Im(\lambda)|] \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_x \|u\|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx &\leq \\ \theta \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} \|v'\|^2 dx + \frac{1}{2\theta} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} \|u\|^2 dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u'\|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx^2, \end{aligned}$$

ocupando el lema(B.0.3) y notando que:

$$\varepsilon \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u'\|^2 dx \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx,$$

pues  $0 < \widehat{v} \leq 1$ , entonces:

$$\begin{aligned} [Re(\lambda) + |Im(\lambda)|] \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_x \|u\|^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx &\leq \\ \theta \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} \|v'\|^2 dx + \frac{1}{2\theta} \int_{\mathbb{R}} \gamma \widehat{v} \|u\|^2 dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx, \\ \leq \theta \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} \|v'\|^2 dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx + \left[ \frac{\gamma}{2\theta} + \frac{1}{4\varepsilon} \right] \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx, \end{aligned}$$

así

$$\begin{aligned} [Re(\lambda) + |Im(\lambda)|] \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx + (1 - \varepsilon) \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx &\leq \\ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \widehat{v}_x \|u\|^2 dx + \theta \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} \|v'\|^2 dx + \left[ \frac{\gamma}{2\theta} + \frac{1}{4\varepsilon} \right] \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx, \\ \leq \theta \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} \|v'\|^2 dx + \left[ \frac{\gamma}{2\theta} + \frac{1}{4\varepsilon} \right] \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx. \end{aligned}$$



Si elegimos  $0 < \varepsilon < 1$ ,  $\theta = \frac{1-\varepsilon}{2}$  tenemos:

$$\begin{aligned} [Re(\lambda) + |Im(\lambda)|] \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx + (1-\varepsilon) \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx \leq \\ \frac{1-\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} \|v'\|^2 dx + \left[ \frac{\gamma}{1-\varepsilon} + \frac{1}{4\varepsilon} \right] \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Del lema (B.0.2) sabemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx &= 2Re(\lambda)^2 \int_{\mathbb{R}} \|v\|^2 dx + Re(\lambda) \int_{\mathbb{R}} \frac{\|v'\|^2}{\widehat{v}} dx + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} + \frac{a\gamma}{\widehat{v}^{\gamma+1}} \right] \|v'\|^2 dx, \\ \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[ \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} + \frac{a\gamma}{\widehat{v}^{\gamma+1}} \right] \|v'\|^2 dx \geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^{\gamma+1}} \|v'\|^2 dx, \\ &\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} \|v'\|^2 dx, \\ \Rightarrow (1-\varepsilon) \int_{\mathbb{R}} \|u'\|^2 dx &\geq \frac{1-\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{h(\widehat{v})}{\widehat{v}^\gamma} \|v'\|^2 dx. \end{aligned}$$

Entonces, necesariamente

$$\begin{aligned} [Re(\lambda) + |Im(\lambda)|] \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx &\leq \left[ \frac{\gamma}{1-\varepsilon} + \frac{1}{4\varepsilon} \right] \int_{\mathbb{R}} \widehat{v} \|u\|^2 dx, \\ \Rightarrow Re(\lambda) + |Im(\lambda)| &\leq \frac{\varepsilon(4\gamma-1) + 1}{(1-\varepsilon)4\varepsilon}, \end{aligned}$$

haciendo  $\varepsilon = \frac{1}{2\sqrt{\gamma+1}}$ ,

$$[Re(\lambda) + |Im(\lambda)|] \leq \frac{\frac{1}{2\sqrt{\gamma+1}}(4\gamma-1) + 1}{4 \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{\gamma+1}}\right) \left(\frac{1}{2\sqrt{\gamma+1}}\right)} = \left(\sqrt{\gamma} + \frac{1}{2}\right)^2.$$

Así

$$[Re(\lambda) + |Im(\lambda)|] \leq \left(\sqrt{\gamma} + \frac{1}{2}\right)^2,$$

que es lo que queríamos demostrar  $\square$ .

# Bibliografía

- [1] A. MAJDA y R.L. PEGO, *Stable Viscosity Matrices for Systems of Conservation Laws*, (1983).
- [2] A. MATSUMURA y K. NISHIHARA, *On the stability of travelling wave solutions of a one-dimensional model system for compressible viscous gas*, Japan J. Appl. (1985).
- [3] B.SANDSTEDTE, *Stability of Travelling waves. Handbook of Dynamical Systems. Vol. 2.* Elsevier. (2002)
- [4] B. SANDSTEDTE, VERZWEIGUNGSTHEORIE HOMOKLINER VERDOPPLUNGEN *Ph.D. thesis, University of Stuttgart.* (1993).
- [5] B. BARKER, *Evans Function Computation*, Brigham Young University - Provo.(2009).
- [6] B. BARKER, J. HUMPHERYS, K. RUDD y K. ZUMBRUN, *Stability of Viscous Shocks in Isentropic Gas Dynamics*, Springer-Verlag (2008).
- [7] B. BARKER, J. HUMPHERYS y K. ZUMBRUN *Stablab:A Matlab-based numerical library for Evans function computation Version 1.0.*
- [8] C. LIZAMA, *Apuntes de Variable Compleja.* (2008).
- [9] D.HENRY, *Geometric theory of semilinear parabolic equations.* Springer-Verlag, Berlin, (1981).
- [10] D. PETERHOF, B. SANDSTEDTE y A. SCHEEL, *Exponential dichotomies for solitary-wave solutions of semilinear elliptic equations on infinite cylinders J. Differential Equations.* (1997), 266-308.
- [11] GOLUB y C.F. VAN LOAN, *Matrix computations*, John Hopkins University Press Baltimore (1996).

- [12] J. HUMPHERYS y K. ZUMBRUN, *An efficient shooting algorithm for Evans function calculations in large systems*, Phys. D, (2006).
- [13] J. STOER y R. BULIRSCH, *Introduction to numerical analysis*, Springer-Verlag, New York (2002).
- [14] T. KAPITULA y K. PROMISLOW, *Spectral and Dynamical Stability of Non-linear Waves*. Springer. (2013).
- [15] W. RIRSCH y S. SMALE, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*.
- [16] Y. FUI, *Compound Matrix Method and Evans Function a quick introduction*, Keele University. Recuperado de <http://www.maths.gla.ac.uk/~xl/FYB-background.pdf>