



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Departamento de Matemáticas División de Ciencias Básicas e Ingeniería Unidad Iztapalapa

Análisis y Diseño de Control en Modelos Matemáticos de Población

TESIS QUE PRESENTA
Mat. Alexandra Guzmán Velázquez
PARA OBTENER EL GRADO DE
Maestra en Ciencias Matemáticas Aplicadas e Industriales

Asesores:

DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNÁNDEZ
DR. FAUSTINO SÁNCHEZ GARDUÑO

Jurado Calificador:

Presidente:	DRA. MARÍA DE LOURDES ESTEVA PERALTA	UNAM
Secretario:	DR. HÉCTOR MORALES BÁRCENAS	UAM-I
Vocal:	DR. BALTAZAR AGUIRRE HERNÁNDEZ	UAM-I
Vocal:	DR. FAUSTINO SÁNCHEZ GARDUÑO	UNAM

L. Carlos C. L.
[Signature]
[Signature]
[Signature]

Ciudad de México, Marzo 2016

Índice general

Índice general	3
Resumen	5
Introducción	7
1 Modelos matemáticos de población sometida a cosecha	19
1.1 Modelo de pesquería para una especie	19
1.1.1 Rendimiento proporcional al esfuerzo	20
1.1.2 Captura por unidad de esfuerzo proporcional al nivel de <i>stock</i>	24
1.2 Modelos del tipo presa-depredador	31
1.2.1 Modelo clásico Lotka-Volterra	31
1.2.2 Modelo Lotka-Volterra de competencia intraespecífica	37
1.2.3 Respuestas funcionales de Holling	42
1.2.4 Modelo de Kolmogorov	46
1.2.5 Modelo pesquería para dos especies	53
2 Teoría de control óptimo	61
2.1 El problema de control óptimo a tiempo continuo	61
2.1.1 Control admisible y funcional objetivo	62
2.1.2 Diferentes formas del funcional objetivo	63
2.1.3 El principio del máximo de Pontryagin	66
2.2 Modelos pesquería y control óptimo	71
2.2.1 Primer modelo	71
2.2.2 Primer modelo con descuento	73
2.2.3 Primer modelo con función de ingresos no-lineal	75
2.2.4 Modelo de pesquerías para dos especies	78

3	Modelos de presa-depredador en pesquerías con respuesta funcional	81
3.1	Modelo con respuesta funcional Holling tipo II	82
3.1.1	Análisis local	84
3.1.2	Análisis global	87
3.1.3	Equilibrio bioeconómico	91
3.1.4	Política óptima de cosecha	94
3.1.5	Simulaciones numéricas	97
3.2	Modelo respuesta funcional Holling tipo IV	100
3.2.1	Análisis local	103
3.2.2	Análisis global	109
3.2.3	Equilibrio bioeconómico	111
3.2.4	Política óptima de cosecha	113
3.2.5	Simulaciones numéricas	116
3.3	Modelo respuesta tipo IV y competencia intraespecífica en los depredadores	124
3.3.1	Análisis local	125
3.3.2	Análisis global	133
3.3.3	Equilibrio bioeconómico	135
3.3.4	Política óptima de cosecha	137
3.3.5	Simulaciones numéricas	140
	Conclusiones y perspectivas	161
	Glosario	171
A	Estabilidad sistemas dinámicos y desigualdades diferenciales	173
A.1	Teorema de Hartman-Grobman	173
A.2	Criterio de estabilidad en el sentido de Lyapunov	174
A.3	Estabilidad Estructural	178
A.4	Sistema Hamiltoniano	178
A.5	Teoría de las desigualdades diferenciales	179
A.6	Ciclos límite en sistemas presa-depredador del tipo Gause	180
A.7	Persistencia via funciones de Lyapunov promedio	183
	Bibliografía	185

Resumen

En este trabajo apliqué las técnicas de Teoría de Control y de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales a modelos matemáticos con cosecha que describen la interacción de dos poblaciones: una presa y un depredador. Un ingrediente importante que incluí son las llamadas respuestas funcionales de Holling, tipo II y IV, las cuales tienen como origen modificar la dependencia funcional de la razón de encuentros entre individuos presa-depredador, por unidad de depredador. Desde el punto de vista ecológico, esto significa que los individuos de la población de presas desarrollan una suerte de estrategia de “defensa” ante los depredadores. Desde el punto de vista de la modelación matemática, los resultados del análisis cualitativo de las dos EDOs resultantes y la búsqueda del rendimiento máximo sostenible son relevantes para la investigación de las condiciones que hagan compatible el que las poblaciones coexistan y se optimice la ganancia económica resultante de la explotación.

Introducción

La *Ecología de poblaciones* es el estudio de la abundancia y la distribución de los organismos. Para los estudiosos de esta área, una variable fundamental es la densidad (o tamaño) poblacional espacio-temporal de aquéllos, la cual —dependiendo de la población particular de que se trate— puede ser cuantificada a través de diferentes magnitudes. Una posibilidad es hacerlo a través del número de individuos contenidos en un área o en un volumen determinados; también lo puede ser la *biomasa*¹ de organismos contenida en tales espacios físicos.

Una de las expresiones demográficas de la interacción entre los individuos, es que la densidad poblacional de éstas, cambia al transcurrir el tiempo. Sin embargo, la densidad poblacional también puede cambiar debido a factores ambientales como la distribución de alimento, la temperatura, el clima, etc. En este marco, uno de los objetivos de la *dinámica de poblaciones*, es dar cuenta del cambio en el tamaño poblacional de las especies, dilucidando los factores que lo originan y estableciendo no sólo una relación causa-efecto entre aquél y éstos sino —preferentemente también— expresarla en forma de leyes dinámicas.

Quizás el primer modelo matemático planteado a propósito de dar cuenta del número de individuos (conejos) como función del tiempo, se deba a Leonardo de Pisa, mejor conocido como Fibonacci quien, en su *Liber Abaci* publicado en 1240, introdujo las ahora muy populares *sucesiones de Fibonacci* para cuantificar el número de parejas de conejos cuya población se desarrollaba bajo condiciones muy particulares. Con el transcurrir del tiempo, tanto los enfoques como las herramientas matemáticas para estudiar diversos aspectos de la dinámica poblacional, se incrementaron y diversificaron. Los actores han sido lo mismo demógrafos que biólogos, matemáticos o físicos. Una muestra de este abanico, son los siguientes nombres: Robert Malthus, Pierre Verhulst, Vito Volterra, Alfred James Lotka,

¹La definición de este término, así como la de muchos otros conceptos de pesca se pueden revisar en el Glosario, al final de este trabajo.

Georgii. F. Gause, Alexander Kolmogorov, Lawrence B. Slobodkin, Robert Mac Arthur, Stephen Smale, Robert May y un largo etcétera. Todos ellos han hecho —en algunos casos, desde puntos de vista diferentes— importantes contribuciones a la *ecología matemática*.

En 1798, el demógrafo y economista inglés Robert Malthus publicó anónimamente la primera edición de *Ensayo sobre el principio de la población*, con el objetivo de plantear una ley de población universalmente válida. Las hipótesis en las que Malthus se basó para construir el modelo son:

1. Que la población sea homogénea,
2. Que esté aislada y se encuentre distribuída uniformemente en su hábitat,
3. Que los recursos naturales sean inagotables y homogéneamente distribuidos.

Sin embargo, este modelo no representa lo que ocurre en la realidad cuando el tiempo es mayor, pues su crecimiento es exponencial, lo cual, para tiempos grandes, implicaría recursos infinitos. Para ello, se modifica el modelo anterior de tal forma que los recursos sean finitos, esto lo propuso el matemático y demógrafo belga, Pierre Francois Verlhust, en 1838.

Suponiendo una población cerrada, El modelo de Verlhust o modelo Logístico describe la evolución de una población cuyo crecimiento es exponencial al principio (como en el caso del modelo de Malthus), pero que al cabo de un tiempo aparece la competencia entre los miembros de la población por los recursos existentes, frenando el crecimiento y alcanzando un valor denominado *capacidad de carga*².

Es relevante comentar que a pesar de sus restricciones evidentes, los modelos de Malthus y logístico (para intervalos de tiempo cortos) se ajustan muy razonablemente a los datos disponibles para algunas poblaciones, incluso a veces más allá de lo que pudieramos esperar (por ejemplo en el análisis de poblaciones humanas sujetas a migraciones y que aún así se ajustan a una curva tipo logística).

En este trabajo, estamos particularmente interesados en modelos matemáticos de pesquerías, conocidos como de población con cosecha y es importante hacer notar que el objetivo de estos tipos de modelos es encontrar la *captura* o *rendimiento máximo sostenible* (*RMS*), es decir, la producción excedente de una población que puede ser teóricamente extraída, en un periodo de tiempo definido y en condiciones medioambientales constantes,

²La definición de este término, así como la de muchos otros conceptos de pesca se pueden revisar en el Glosario, al final de este trabajo.

sin afectar los niveles del *stock* — las especies biológicas cosechadas con características ecológicas similares —. El *stock* acumulado total a su vez constituye la *biomasa*, en unidades de peso (toneladas). En los modelos matemáticos de población aquí estudiados, el *stock* de peces será definido específicamente como la población que puede ser capturada sin poner en peligro la regeneración futura de la población pesquera.

Una vez obtenido el RMS, se encuentra el rendimiento económico máximo (*REM*), que tiene como objetivo potenciar al máximo los beneficios económicos a largo plazo de la pesquería. Para esto, es necesario explicar dos conceptos: el *esfuerzo pesquero*, que es la cantidad de trabajo medido a través de parámetros operativos y económicos que puede desarrollar una *unidad de pesca* o el conjunto de mano de obra y equipo, en un periodo determinado. El otro concepto es la *capturabilidad*, que es la fracción del *stock* capturada por una unidad de esfuerzo, dejando claro que la captura de peces debe incluir todos los peces muertos por la acción de la pesca, no sólo aquéllos que desembarcan.

Cabe mencionar que, la *pesca* se entiende como el acto de extraer, cultivar o capturar, por cualquier procedimiento, especies marinas. La *pesquería*, a diferencia de la pesca, se define como la actividad económica sustentada en el aprovechamiento de un recurso natural, en el cual intervienen medios de producción particulares y diferenciados que se conciben de manera integral (extracción, procesamiento y comercialización).

Tanto los conceptos aquí definidos como otros relevantes se pueden consultar en el Glosario, al final de esta tesis.

Destacamos entonces que el estudio de los modelos en pesquerías, necesita desarrollarse en un contexto multidisciplinario, que incluye:

- El conocimiento de la biología de la especie (fecundidad, metabolismo, alimentación) y la dinámica poblacional de este recurso.
- La forma en cómo se obtiene (pesca) y cómo se procesa este recurso.
- Las relaciones de oferta-demanda y el costo de precio-ganancia del recurso.

El estudio de las pesquerías y los modelos con ellas asociados, tienen una historia muy amplia. García, [12], la clasifica en cinco periodos marcados por eventos internacionales específicos y nosotros, con base en el artículo de Terrance, [29], narramos al mismo tiempo la evolución de la modelación bioeconómica de la pesca. Aquéllos son:

- 1945-1958. "Construcción y 1ra. Expansión de las Pesquerías"
- 1959-1972. "Desarrollo de la Investigación y 2da. Expansión de las Pesquerías"

- 1973-1982. “Nuevo orden económico y variabilidad del *stock*”
- 1983-1992. “Hacia una nueva tendencia mundial”
- 1993-2000. “Reto de sostenibilidad”

Esta organización se puede observar en la figura 1. Comenzamos por definir cada una de ellas.

En los últimos años ha aumentado la preocupación por la conservación de los recursos naturales, esto debido a la percepción generalizada de la escasez relativa de flora y fauna y a la degradación de la naturaleza y del medio ambiente. En el siglo XIX, varios investigadores tenían la creencia de que, dada la inmensidad de este tipo de recursos renovables, la acción de la actividad pesquera apenas causaba efectos relevantes sobre la abundancia y cuantía de los mismos. Esto se puede percibir en la siguiente cita del biólogo T.H. Huxley,

“La pesca del bacalao, . . . y probablemente, todas las grandes pescas marítimas son inagotables”

T.H. Huxley
Exposición Internacional de Pesca, 1883

La cita de Huxley contrasta con las perspectivas pesimistas de los malthusianos, quienes habían concluido que a menos que se tomaran las medidas necesarias, los alimentos no alcanzarían para todos.

Después de la Segunda Guerra Mundial, la intensidad de la pesca comercial se incrementó dramáticamente. En 1948 se reportaron capturas marinas globales de alrededor de 18 millones de toneladas, de esta forma se plantearon nuevos interrogantes sobre la explotación y gestión de los recursos naturales. La etapa de “*Construcción y Ira. Expansión de las Pesquerías*” comienza con el establecimiento de la Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura (FAO), fundada en 1945, para ayudar en el restablecimiento de las economías europeas, incluido el sector de la pesca. Termina en 1958, con la primera Conferencia sobre el Derecho del Mar en Ginebra (UNCLOS I) y la adopción de un convenio de pesca y conservación de los recursos marinos vivos, en el cual se discutieron los principales problemas que enfrentaba la pesca. Éstos comprendían la sobrecapacidad, la sobrepesca y el agotamiento de los recursos, destacando la falta de datos para el manejo de los recursos en alta mar.

En el contexto internacional, la población mundial era de 2000 millones de personas, las industrias europeas estaban devastadas por la guerra y desde finales de la Primera

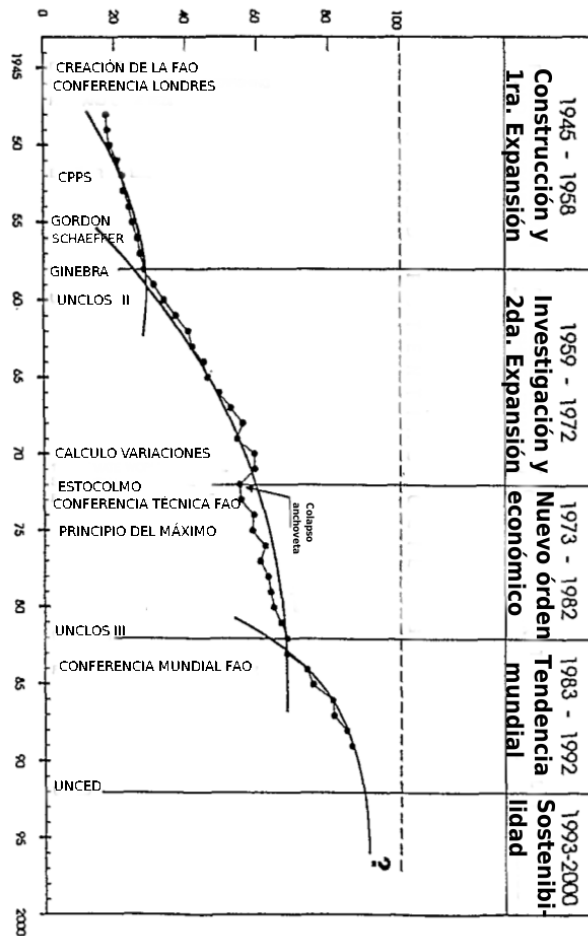


Figura 1: Capturas marinas mundiales reportadas y acuicultura ($\times 10^6$ toneladas) y eventos internacionales seleccionados. Tomada de [12].

Guerra Mundial hasta este momento, el hemisferio norte no tenía suficientes recursos pesqueros para satisfacer las necesidades básicas de este producto. Por lo que, en 1946, en la Conferencia Internacional de Londres se discutió sobre la necesidad de reglamentar la pesca de forma urgente. Como resultado de esta reunión, se crearon administraciones locales, se buscó mejorar el desarrollo tecnológico y se expandió la pesca a otros territorios. Debido a esta expansión de los países industrializados, países como Chile, Ecuador y Perú decidieron limitar su jurisdicción de pesca en 1952, creando la Comisión Permanente del Pacífico Sur (CPPS).

En esta misma etapa, se desarrollaron varios modelos matemáticos que introdujeron no sólo los aspectos biológicos de las poblaciones de peces, sino también los económicos para poder dar solución a varios problemas a los que se enfrentaban las administraciones de las pesquerías. Entre aquéllos destacan los de H.S. Gordon y A.D. Scott (1955), M.B. Schaeffer (1957), Beverton y Holt (1957). Dichos modelos se pueden clasificar en dos grandes grupos: los conocidos como modelos analíticos (“*Dynamic Pool*”) y los modelos logísticos. En los primeros se debe conocer la composición por edades de las capturas. Si hay muy pocos peces viejos, el *stock* está sobreexplotado y se debe reducir la presión de pesca. Si hay demasiados peces viejos, el *stock* está subexplotado y se debe capturar una mayor cantidad de peces para obtener la captura máxima. En este grupo, el más representativo es el modelo de Beverton y Holt. Los modelos logísticos son los que se basan en el modelo de Verhulst, son pieza central de la modelación matemática de recursos sometidos a cosecha, el modelo de Schaeffer es uno de los más característicos de este grupo, puesto que su modelo de producción definió el *Rendimiento Máximo Sostenible* (RMS), la herramienta conceptual más importante que trata con la dinámica de la población natural explotada o con cosecha. En el primer capítulo se hará una exposición detallada de este último modelo.

Durante el periodo que comprende de 1959 a 1972, denominado de “*Desarrollo de la Investigación y 2da. Expansión de las pesquerías*”, la población mundial ascendía a 3,000 millones de personas, lo cual incrementó mucho la demanda de comida. La crisis energética reforzó la preocupación de los gobiernos por el estudio científico de los recursos naturales, dedicándose muchos esfuerzos al análisis de su explotación. Incluso se tenía el interés de explotar y poseer de forma exclusiva los recursos del subsuelo marino cercano a sus costas, lo cual dió lugar a leyes internacionales del mar como las 200 millas de Zona Económica Exclusiva (ZEE), en la que el estado costero tenía la jurisdicción ilimitada sobre los recursos naturales que ahí se encontraban. Los países, como propietarios, tuvieron la posibilidad de regular la actividad pesquera de forma eficiente. A partir de entonces, proliferaron los acuerdos internacionales de pesca entre los

países y la intervención de los gobiernos sobre la actividad extractiva de sus respectivos sectores pesqueros. Sin embargo, los países desarrollados siguieron expandiendo su territorio, llegando a límites territoriales que no habían sido explotados, usando las nuevas tecnologías y medios de pesca disponibles, acabando con los recursos pesqueros en varios espacios marítimos.

Este periodo comienza con la Convención de Pesca y Conservación de los recursos marinos (UNCLOS II) y termina con la Conferencia Mundial sobre el Medio Ambiente Humano en Estocolmo en 1972, en donde se definieron las cuestiones centrales del manejo de la pesca: recursos limitados, la degradación del medio ambiente, la demografía, la planificación y administración, las instituciones, la ciencia y la tecnología, la educación, la investigación, la responsabilidad internacional, la cooperación internacional y la equidad.

Al final de esta etapa se propusieron otro tipo de modelos matemáticos con cosecha, utilizando el cálculo de variaciones, pero sus resultados no fueron muy satisfactorios pues ofrecían soluciones de interpretación muy difícil, como el trabajo de Colin Clark, *La economía de la sobreexplotación* en la revista *Science* (1972) y su intento de mostrar cómo la economía es fundamental para tratar temas como la sobreexplotación de los recursos naturales. Más adelante, su trabajo será fundamental puesto que Clark definió de manera precisa el término de *equilibrio bioeconómico*, el cual ya había sido propuesto por Gordon (1955). El equilibrio bioeconómico se define como el punto en el cual desde el punto de vista biológico, la razón de cambio en el *stock* es cero y la condición económica de equilibrio significa que no hay ningún cambio en el esfuerzo pesquero. En una pesquería de acceso abierto, el equilibrio bioeconómico se administra a un nivel de esfuerzo donde el beneficio es cero y el costo total es igual al total de los ingresos de la pesca. Este término lo obtendremos en dos modelos que se exponen en el Capítulo 3. Para mayor información, puede consultarse la referencia [29]. Para este tiempo, se hizo popular el concepto de *rendimiento sostenible*, en respuesta a las preocupaciones de que los esfuerzos para maximizar la captura en la pesca recreativa. Sin embargo, la falta de evidencia científica y el poco entendimiento del concepto mencionado, hizo imposible dar un sustento fiable para la administración de las pesquerías.

La etapa de “*El nuevo orden económico y variabilidad del stock*”, inicia con la Conferencia técnica de la FAO sobre administración y desarrollo de la pesca y con el comienzo de una nueva década de negociaciones que concluirán en la UNCLOS III. La producción pesquera se incrementó de 60 a 68 millones de toneladas aproximadamente y los *stocks* de poblaciones marinas de algunas especies disminuyeron de forma alarmante, como las poblaciones de *anchoveta* peruana. Además ocurrieron muchos cambios ecológicos en los sistemas de pesquerías mundiales a raíz del remplazo de varias especies en el Golfo de

Tailandia, en el mar del Norte y en el oeste de África. A pesar de este escenario, en ese momento existían regiones donde existía la pesca sin restricciones, ubicadas en el oeste del Sahara, Namibia y el Suroeste del Atlántico. En 1982, en la UNCLOSS III, se abolieron las pesquerías libres, se reconocieron las deficiencias económicas y biológicas del concepto del Rendimiento Sostenible Máximo.

Con la introducción de la *teoría de control óptimo*, basada en el *Principio del Máximo de Pontryagin*³, en el análisis pesquero, se obtuvieron las herramientas matemáticas necesarias para el estudio de los modelos bioeconómicos. Entre los economistas pesqueros se respiraba un clima de optimismo casi generalizado, dado el desarrollo de la modelización bioeconómica y sus posibilidades analíticas, parecía que cualquier problema pesquero podría tener una pronta solución. Sin embargo, en muchos casos, esto no sucedió así, puesto que los investigadores incurrían en un exceso de simplificación que dejaba fuera del estudio variables relevantes de la realidad pesquera que se pretendía analizar.

No debemos olvidar que en la explotación de los recursos pesqueros intervienen condicionantes bioecológicos, institucionales y técnicos que se pretenden recoger de alguna forma en la modelización bioeconómica, pero las pesquerías también pueden estar influenciadas por otra gran variedad de factores difíciles de plasmar o sintetizar en estos esquemas formales.

Durante el periodo de transición "*Hacia una nueva tendencia mundial*", las capturas marinas se incrementaron de 68 a 85 millones de toneladas, esta etapa se caracterizó por un crecimiento en la preocupación por la conservación del medio ambiente y la sostenibilidad de los recursos pesqueros. El establecimiento de la ZEE y las 200 millas de jurisdicción no resolvió los problemas de sobrepesca pues no hubo una mejoría notable en el estado general de los recursos marinos del mundo.

Surgieron movimientos para prohibir la pesca con redes a gran escala, dirigidos por grupos ambientalistas, y que, gracias a los medios de comunicación, hicieron partícipe al público en general, que antes no se habían dado cuenta del peligro de extinción que corrían muchas especies del mar. Surgieron además otros movimientos para prohibir las importaciones

³Lev Semyonovich Pontryagin (1908-1988). Fue un matemático ruso que dedicó gran parte de su vida académica al área de la topología, pero más adelante, debido a presiones del director de la Universidad y del partido comunista del instituto donde residía, tuvo que cambiarse al área de matemáticas aplicadas. En 1955, Pontryagin llegó a trabajar a la fuerza aérea, donde al intentar optimizar procesos de sistemas lineales para control automático, se dió cuenta que el método de uno de sus colegas debía ser generalizado para poder resolver los problemas planteados por los militares. Esta generalización es lo que nosotros conocemos como el Principio del Máximo. Fue muy reconocido por su trabajo, fue electo miembro de la Academia de Ciencias en 1939 y fue miembro hasta 1959. En 1941, fue uno de los primeros beneficiarios del premio Stalin y en 1970 fue elegido vicepresidente de la Unión Matemática Internacional.

de atún y de camarón que derivaron en la aparición de la Ecocertificación o etiquetado ecológico, que sirvió para controlar las prácticas de pesca que no son sostenibles. En 1992, se creó la Conferencia de la ONU sobre el Medio Ambiente y el Desarrollo (CNUMAD). En ella se propusieron políticas pesqueras profundas que incluían el cuidado de los ecosistemas y la recomendación de la participación de todos los ciudadanos interesados en temas del medio ambiente, entre otros.

Terrance, [29], define como la Etapa de Oro de la modelación matemática con cosecha al periodo comprendido entre 1980 y 2000, debido a la gran cantidad de artículos, libros y revistas científicas publicadas en los que se abordaba este tema, que integraron áreas como las matemáticas, la computación, la biología y la economía en un sólo artículo con el objetivo principal de proveer las bases científicas necesarias para entender, formalizar y estandarizar los conceptos básicos para manejar los recursos naturales. Estos modelos eran cada vez más realistas y describían situaciones más complejas. Muchos de ellos basados completamente en la Teoría del Control Óptimo que surgió a raíz del Principio Máximo de Pontryagin. Igualmente, hubo modelos estadísticos, estocásticos, en diferencias, con retardo, estadísticos bayesianos, por mencionar algunos. El reto de todos ellos fue la claridad en su planteamiento y en sus resultados, lo cual fue y ha sido muy difícil en la evolución de los modelos matemáticos, sobre todo en su interpretación biológica y económica.

En el periodo *Reto de sostenibilidad*, varias iniciativas mundiales comenzaron a digerir las lecciones que habían aprendido en la negociación de nuevos acuerdos y leyes internacionales. El Código de Conducta para la Pesca Responsable fue desarrollado por la FAO en octubre de 1995 que, aunado al Acuerdo sobre la aplicación del Disposiciones de la Convención de las Naciones Unidas sobre el Derecho del Mar, establecen disposiciones para garantizar la conservación a largo plazo y el uso sostenible de las poblaciones de peces transzonales y migratorias.

En el siglo XXI, la comunidad internacional está muy consciente de la crisis que enfrentan los recursos pesqueros y la pesca, y han ido adoptando una serie de pasos muy importantes hacia un sistema de administración global. Esto ha incluido tanto la producción de beneficios sostenibles de los recursos biológicos renovables utilizando las herramientas tecnológicas innovadoras, la protección de especies en peligro de extinción y del medio ambiente donde se desarrolla la pesca para evitar colapsos, entre otros. Pero principalmente, el desarrollo de la actividad de *cosecha* de especies, que tiene un fuerte impacto en la evolución dinámica de una población sometida a la misma, es decir, la pesca en un ambiente regulado.

A la par del avance de la investigación científica que incluye todo tipo de *modelos matemáticos de población* integrales, que incluyan los conceptos biológicos y económicos, que den resultados cada vez más certeros sobre el cuidado de la especie que será extraída, manteniendo un equilibrio ecológico y económico y utilizando las políticas de control óptimo para obtener tanto el equilibrio buscado como los esfuerzos pesqueros óptimos. Destacando la introducción de la *respuesta funcional* a los modelos matemáticos de población del tipo presa-depredador, como resultado de la investigación del comportamiento colectivo en varias poblaciones, donde ocurre que la presa se “defiende” o se “camufla” del depredador, cuando su densidad es muy grande. Ejemplos de estas poblaciones son: la interacción entre la población de bueyes o toros almizcleros (*Ovibos moschatus*) y los lobos, en la que cuando hay pequeños rebaños de toros (2 a 6 individuos), éstos son atacados exitosamente por los lobos, pero si los toros están en manadas grandes entonces no se observan ataques victoriosos. Un segundo ejemplo es el de algunas poblaciones de peces en las que cuando se encuentran en cardumen, no son atacadas por su depredador, pero si los peces están solos sí. Para más información seguir la referencia [30].

Una vez presentado un panorama histórico de las pesquerías así como los modelos matemáticos que se han planteado, podemos describir el contenido de este trabajo. En el Capítulo 1 comenzaremos por definir los modelos matemáticos con cosecha para una especie, ambos basados en el modelo logístico de Schaeffer, en el primero el rendimiento es proporcional al esfuerzo y en el segundo, es proporcional al nivel de *stock*. Haremos el análisis cualitativo que conduce a la dinámica resultante y obtendremos el rendimiento máximo sostenible (RMS), así como el esfuerzo pesquero en cada uno de los modelos.

Revisaremos también los modelos matemáticos de población tipo presa-depredador: desde el modelo clásico Lotka-Volterra y el Lotka-Volterra para competencia, como el de Kolmogorov, con la finalidad de terminar este capítulo con un modelo matemático con cosecha para dos especies, que utilizaremos en el capítulo siguiente para aplicar la teoría de control óptimo y así encontrar el RMS. Es importante mencionar que en este modelo la acción de los pescadores puede ser interpretada desde el punto de vista demográfico como si se tratara de un “depredador” y, en tal caso el modelo matemático resultante es uno de tipo presa-depredador. Igualmente obtendremos la dinámica de cada uno de ellos. Cabe mencionar que en este trabajo usamos un enfoque determinista, en el que los modelos matemáticos que se estudian son de tipo EDO.

Además de exponer estos modelos, explicaremos el significado de *respuesta funcional de Holling* y definiremos los distintos tipos de ésta. La importancia de esta función tiene que ver con la forma en como interactúan las presas y los depredadores, nuestro interés se

enfoca en los tipos II y IV, ya que en la fenomenología de algunas poblaciones ocurre una “suerte” de defensa de la especie presa al ataque del depredador, cuando su densidad es mayor. En el caso del tipo II, la tasa de consumo o el ataque del depredador tiende a una tasa máxima; mientras que en el tipo IV, la tasa de consumo tiene dos fases: una monótona creciente y otra monótona decreciente.

En el segundo capítulo explicaremos la base teórica asociada con el Principio de Máximo de Pontryagin y presentaremos varios ejemplos donde se utiliza la Teoría de Control Óptimo para encontrar el RMS correspondiente. Iniciamos con un modelo básico para definir el problema de control, después —en el siguiente modelo— añadimos un elemento económico denominado “*factor Whimpy*” que implica que los ingresos reales (que existen en el presente) valen más que los ingresos futuros, puesto que los ingresos reales se pueden invertir con alguna tasa específica. Siguiendo con un modelo en donde el problema de control se refiere a una función de ingresos no lineal junto con la tasa de descuento. Cerramos este capítulo con el modelo de pesquerías para dos especies visto al final del Capítulo 1, donde $N(t)$, el *stock* de peces, representa la variable de estado y E , el esfuerzo pesquero, representa la variable de control.

En el tercer capítulo, una vez definidas las respuestas funcionales de Holling en el Capítulo 1, se estudian dos modelos matemáticos que describen la dinámica de la interacción presa-depredador cuando en ellos se incorpora el término de cosecha tanto en la población de presas, como en la de los depredadores utilizando la expresión $q_i E_i x_i$, que representa la captura de cada especie. En este caso, el efecto demográfico de los pescadores sobre la población de peces que se captura ya no es visto como los depredadores, como en el modelo de pesquería visto en los capítulos anteriores. En ambos modelos realizamos un análisis cualitativo local y global detallado del sistema no lineal de ecuaciones diferenciales ordinarias, encontrando los esfuerzos pesqueros óptimos de cada una de las especies consistentes con la política de máximo rendimiento sostenible y también describimos el equilibrio bioeconómico, así como las soluciones numéricas correspondientes. El primer modelo es un modelo que contiene la respuesta funcional tipo II y el segundo modelo incorpora la respuesta funcional de Holling tipo IV. Este último es nuestra contribución a los modelos matemáticos continuos que tratan sobre la explotación de recursos pesqueros.

En las conclusiones comparamos los resultados obtenidos con los modelos del Capítulo 3, para saber lo que ocurre con la evolución de las densidades de ambas especies y con los correspondientes esfuerzos de pesca óptimos.

A fin de hacer la lectura más ágil decidimos incluir un Glosario con los términos técnico-

científicos relacionados con la actividad pesquera, usados en este trabajo. Para un mayor conocimiento de estos conceptos, véase la referencia [17].

Para consultar los detalles de las ideas expuestas en esta introducción, pueden consultarse las referencias: [4], [7], [9], [12], [19], [29] y [33].

Capítulo 1

Modelos matemáticos de población sometida a cosecha

Los modelos de población sometida a cosecha tienen como objetivo optimizar el *rendimiento máximo sostenible* o RMS (capturas) que en teoría puede extraerse de una población durante un periodo, en condiciones medioambientales constantes. Hay que destacar que para que la pesca pueda ser viable y próspera, el tamaño de la población de peces debe encontrarse por encima de los niveles en los que éstas pueden producir el RMS.

A lo largo de este capítulo determinaremos el RMS como resultado de la dinámica subyacente de cada modelo. Sin embargo, la optimización de este valor le corresponde a la Teoría de Control y el resultado obtenido será el mayor rendimiento económico de un recurso renovable, en un periodo de tiempo largo, garantizando que el recurso no se agote. Lo cual desarrollaremos en el siguiente capítulo.

A continuación introduciremos los modelos de pesquería para una especie. Para ello empezamos con la representación más general del esfuerzo pesquero y del rendimiento máximo de pesca. Para la redacción de la primera sección, seguimos las referencias: [5], [6], [14], [24] y [25].

1.1 Modelo de pesquería para una especie

El modelo del biólogo M.B. Schaeffer (1954) adapta el modelo logístico de Verhulst introduciendo el esfuerzo pesquero, $E(t)$ y el rendimiento por unidad de esfuerzo, $Y(t)$, como variable dependiente. Así, es posible estimar el rendimiento máximo para un nivel

óptimo de esfuerzo y conservar el nivel de *stock* constante, es decir, que la fracción de la población susceptible a ser capturada persista. En este caso, $N(t)$ no denota el tamaño de la población sino el tamaño del *stock*.

Entonces, se puede generalizar a la razón de captura de peces a través de la expresión,

$$Y(t) = H(E(t), N(t)),$$

donde, H es una función continua que satisfaga las condiciones biológicas y económicas impuestas. Luego, dada una función g , diferenciable, la cual mide la razón instantánea de cambio (que depende del recurso), la ecuación diferencial que describe la pesquería, dada una especie, es

$$\dot{N}(t) = g(N(t)) - Y(t),$$

donde el punto sobre N denota la derivada de N . Comenzaremos con el caso más simple, a saber, cuando el rendimiento es proporcional al esfuerzo.

1.1.1 Rendimiento proporcional al esfuerzo

Suponiendo que el rendimiento es proporcional al esfuerzo pesquero se tiene $Y(t) = cE$ para $c > 0$, que es el coeficiente de capturabilidad y que mide la eficiencia de la pesca. En estas condiciones y suponiendo que en ausencia de captura el modelo es el siguiente.

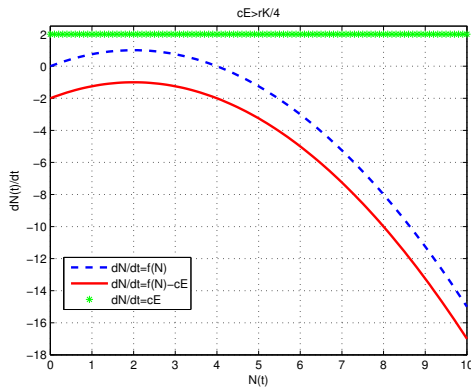
$$\dot{N}(t) = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - cE, \quad (1.1)$$

donde, N es el nivel de existencia o *stock*, E es el nivel de esfuerzo pesquero, r es la tasa de crecimiento intrínseca del *stock*, K es la capacidad de carga del medio y c es la capturabilidad. El producto cE mide la mortalidad de los peces.

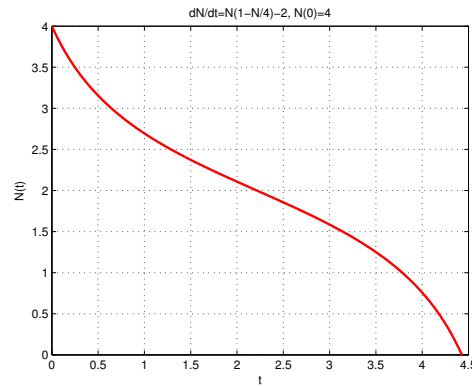
Para $f(N) = rN \left(1 - \frac{N}{K}\right)$, el análisis de la dinámica de la ecuación (1.1) consta de tres casos, que resultan de comparar el valor máximo de $f(N)$ con cE .

Caso 1. $cE > \frac{r}{4}K$. Si la razón de pesca es mayor que la razón de crecimiento de la población y sin la explotación de los recursos, es fácil ver que $\dot{N}(t) < 0$, para toda N .

La gráfica de \dot{N} vs N se puede observar en la figura 1.1 (a) (línea continua), comparada con la gráfica de la función cuadrática $f(N)$ (línea punteada). Mientras que en la figura 1.1 (b) se muestra una solución de la ecuación diferencial (1.1), correspondiente a la condición inicial dada $N(0) = N_0$. Esta gráfica nos indica que existe un valor finito de t para el cual, el recurso se agota.



(a) Gráficas de: $f(N)$, $f(N) - cE$ y cE .



(b) Gráfica de $N(t)$, dada $N(0) = N_0$, para $dN/dt = f(N) - cE$.

Figura 1.1: Gráficas de: dN/dt vs $N(t)$ y de $N(t)$ vs t , para el caso $cE > rK/4$.

Caso 2. $cE = \frac{r}{4}K$. Aquí las gráficas de $f(N)$, $f(N) - cE$ y cE , en el plano $\dot{N}N$, pueden observarse en la figura 1.2 (a). La ecuación diferencial en este caso tiene un sólo punto de equilibrio inestable.

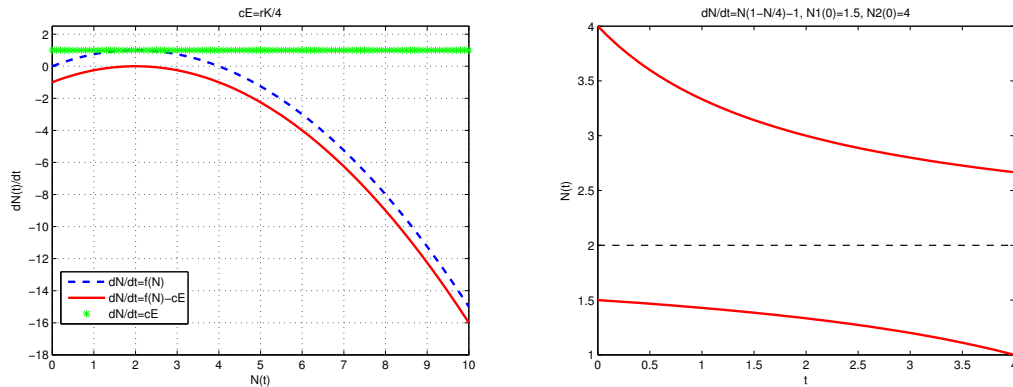
Sabiendo que $N(t)$ es decreciente para toda t , encontramos dos tipos de soluciones, correspondientes a distinto tipo de condición inicial N_0 . Ambas se pueden observar en la figura 1.2 (b).

- (a) Si $N_0 < \frac{K}{2}$, la razón de pesca cE , dada en este caso, agota los recursos en un tiempo finito.
- (b) Si $N_0 > \frac{K}{2}$, la solución $N(t)$ tiende al punto de equilibrio.

Caso 3. $0 < cE < \frac{r}{4}K$. En este caso, la gráfica de la EDO (1.1), en el plano $\dot{N}N$, nuevamente es una parábola que abre hacia abajo, como se puede ver en la figura 1.3 (a) (trazo continuo), que toca al eje $N(t)$ en los puntos N_1 y N_2 , dados por:

$$N_1 = \frac{K - \sqrt{K^2 - 4\left(\frac{K}{r}cE\right)}}{2} \quad \text{y} \quad N_2 = \frac{K + \sqrt{K^2 - 4\left(\frac{K}{r}cE\right)}}{2},$$

respectivamente. Entonces, ya que N_1 y N_2 son puntos de equilibrio reales y distintos, el comportamiento cualitativo de las soluciones correspondientes a distintas condiciones iniciales será diferente. Esto se puede observar en la figura 1.3 (b). N_1 es inestable y N_2 es asintóticamente estable.



(a) Gráficas de: $f(N)$, $f(N) - cE$ y cE .

(b) Gráfica de $N(t)$, dada $N(0) = N_0$, para $dN/dt = f(N) - cE$.

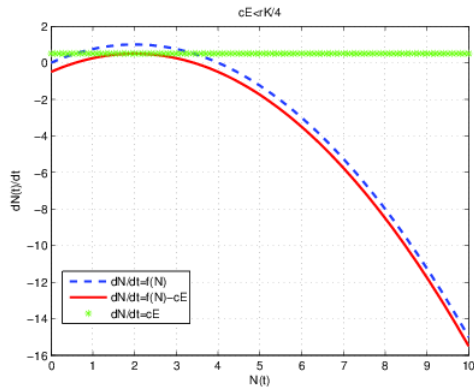
Figura 1.2: Gráficas de: dN/dt vs $N(t)$ y de $N(t)$ vs t , para el caso $cE = rK/4$.

- (a) Si $0 < N_0 < N_1$, $\dot{N} < 0$ para toda t , de esta forma la explotación hace que el recurso se agote. Si no se pretende extinguir el recurso rápidamente, no se deberá extraer peces cuando las densidades de *stock* se encuentren en este intervalo.
- (b) Si $N_1 < N_0 < N_2$, $\dot{N} > 0$ para toda t , el recurso disponible aumenta y toda solución con condición inicial en este intervalo, tiende hacia N_2 .
- (c) Si $N_0 > N_2$, $\dot{N} < 0$ para toda t , el recurso pesquero disminuye, pero tiende a estabilizarse al punto de equilibrio N_2 .

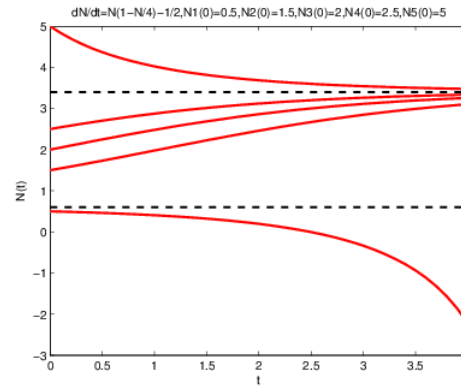
Una vez vistos los tres casos, en $cE = \frac{rK}{4}$ hay un punto de bifurcación pues existen un cambio cualitativo en la dinámica de la ecuación diferencial (1.1), de dos puntos de equilibrio para $cE < \frac{rK}{4}$ a un punto de equilibrio inestable para $cE = \frac{rK}{4}$. La gráfica del diagrama de bifurcación *fold* o de “doblamiento” se puede observar en la figura 1.4. La rama estable es la curva continua y la inestable la punteada.

El análisis anterior puede resumirse así:

- No se debe llevar a cabo la pesca si la razón de pesca es mayor al valor de *stock* máximo.



(a) Gráficas de: $f(N)$, $f(N) - cE$ y cE .



(b) Gráfica de $N(t)$, dada $N(0) = N_0$, para $dN/dt = f(N) - cE$.

Figura 1.3: Gráficas de: dN/dt vs $N(t)$ y de $N(t)$ vs t , para el caso $cE < rK/4$.

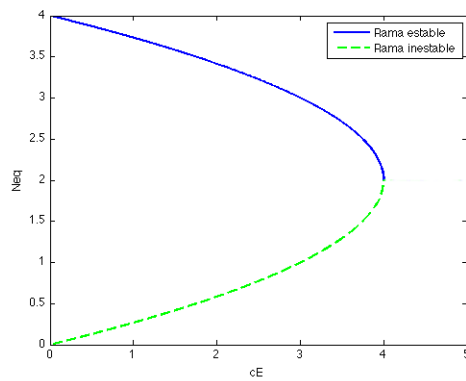


Figura 1.4: Diagrama de bifurcación *fold*, donde se observa la dinámica del sistema (1.1). La rama estable es la curva continua y la inestable la punteada.

- Si la razón de pesca es igual al valor de *stock* máximo y la población inicial es mayor que $\frac{K}{2}$, entonces se cumplen las características del rendimiento máximo sostenible (RMS), es decir, para que la pesca sea viable y próspera el tamaño de la población debe ser mayor a la medida del RMS. Como el RMS correspondiente a $\frac{K}{2}$ es $Y_{RMS} = \frac{r}{4}K$, entonces el esfuerzo pesquero, E , acorde a Y_{RMS} es: $E_{RMS} = \frac{r}{4c}K$
- Finalmente, si la razón de pesca es menor al valor de *stock* máximo, el mejor momento para realizar la pesca es cuando la población se encuentra entre N_1 y N_2 , ya que habrá crecimiento de ésta pero también ganancia para el pescador.

En la siguiente sección veremos una modificación del caso anterior. Para éste, el rendimiento será proporcional al nivel de *stock*, es decir, la función Y es $H(E, N) = cEN$.

1.1.2 Captura por unidad de esfuerzo proporcional al nivel de *stock*

Dada una población de peces que crece logísticamente, en la que se practica la pesca, la captura de peces por unidad de esfuerzo es proporcional al nivel de existencia de peces (*stock*). La ecuación diferencial que describe la tasa de cambio del *stock* por unidad de tiempo es:

$$\dot{N}(t) = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - cEN, \quad (1.2)$$

Para este caso, la tasa de pesca, es el resultado del producto de tres términos: el esfuerzo E , la capacidad de captura c y el *stock* N .

El producto de la capacidad de captura y el esfuerzo, cE , que mide la mortalidad de los peces tiene la misma dimensión de r y juega un papel muy importante en el modelo.

Si nombramos a $f_2(N) = f(N) - cEN$, donde $f(N)$ es la misma función cuadrática que la subsección anterior, entonces $N_1 = 0$ y $N_2 = K \left(1 - \frac{cE}{r} \right)$ son sus raíces y $\left(\frac{(r-cE)K}{2r}, \frac{(r-cE)^2K}{4r} \right)$ es su punto máximo, véase la curva continua de la figura 1.5, que se puede contrastar con la función $f(N)$, curva punteada.

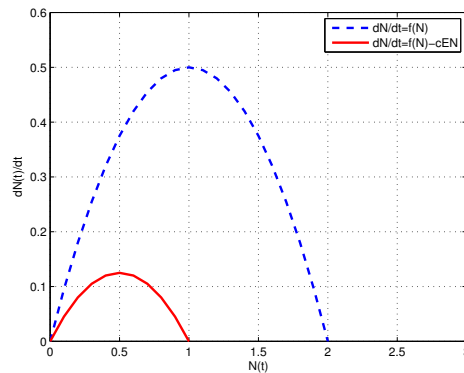


Figura 1.5: Ejemplo de una gráfica de la ecuación $\dot{N} = f_2(N)$ (curva continua), comparada con la gráfica de la ecuación $\dot{N} = f(N)$ (curva punteada).

Aquí los casos posibles, dependen de la comparación de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función $f(N)$ en el origen, r , y la pendiente, cE , de la recta cEN .

Caso 1. $r > cE$. Dada una condición inicial N_0 , si $N_0 > N_2$ entonces $\dot{N} < 0$. Si $0 = N_1 < N_0 < N_2$, $\dot{N} > 0$ y para valores pequeños de la mortalidad (cE), el punto N_2 es asintóticamente estable. Esto se puede observar en la figura 1.6.

Como podemos observar en las figuras 1.6 y 1.7, si tomamos una condición inicial a la derecha del punto de equilibrio N_2 , la tasa de pesca es mayor que la tasa de crecimiento y el nivel de existencia de peces *stock* decrece.

Mientras que si tomamos una condición inicial a la izquierda de N_2 , la tasa de crecimiento excede a la tasa de pesca y así la población de peces crece, pero regresa siempre al punto de equilibrio N_2 . Al contrario de N_2 , el punto de equilibrio N_1 es inestable. A este caso se le denomina pesca de baja mortalidad.

Caso 2. $r = cE$. En este caso, $\dot{N} < 0$ para toda N y el punto de equilibrio N_2 desaparece, sólo queda $N_1 = 0$ y éste es estable. De esta forma, ya que la tasa de pesca siempre es mayor que la tasa de crecimiento, para una t suficientemente grande, la población se extinguirá. Esto representa una pesca de alta mortalidad. Véanse las figuras 1.8 y 1.9.

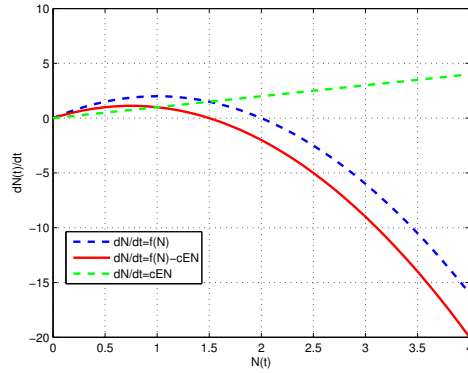


Figura 1.6: Gráfica de $\dot{N} = f_2(N)$ (trazo continuo) que representa la pesca con baja mortalidad, comparada con la gráfica de $\dot{N} = f(N)$ (trazo punteado) y la recta $\dot{N} = cEN$.

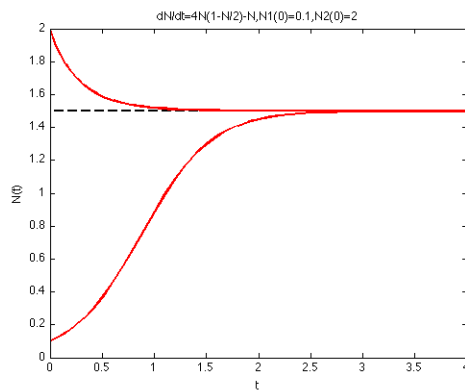


Figura 1.7: Gráfica de las soluciones de la ecuación diferencial $dN/dt = f_2(N)$, para distintas condiciones iniciales, caso $r > cE$.

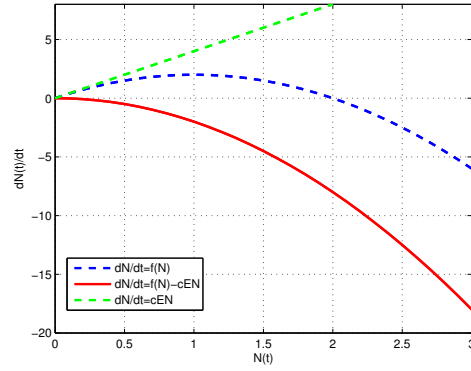


Figura 1.8: Gráfica de $\dot{N} = f_2(N)$ (trazo continuo) que representa la pesca con alta mortalidad, comparada con la gráfica de $\dot{N} = f(N)$ (trazo punteado) y la recta $\dot{N} = cEN$.

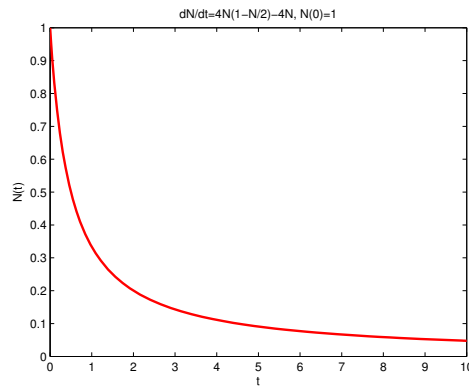


Figura 1.9: Gráfica de la solución de la ecuación diferencial $dN/dt = f_2(N)$, para la condición inicial $N(0) = N_0$, caso $r = cE$.

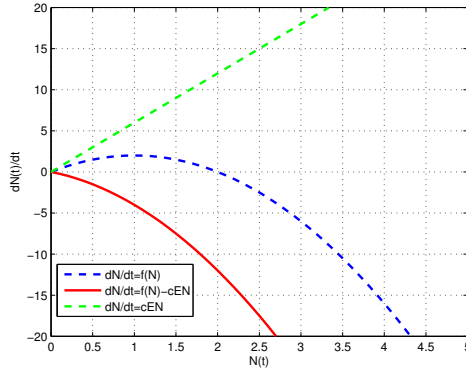


Figura 1.10: Gráfica de $\dot{N} = f_2(N)$ (trazo continuo) que representa la pesca excesiva, comparada con la gráfica de $\dot{N} = f(N)$ (trazo punteado) y la recta $\dot{N} = cEN$.

Caso 3. $r < cE$. En cuanto la mortalidad va creciendo cada vez más, encontraremos un punto donde la pesca excede a la tasa de crecimiento para todo nivel de existencia de peces, como se puede observar en las figuras 1.10 y 1.11. Aquí, el punto de equilibrio (el origen) es estable y garantiza la extinción de la población de los peces.

De acuerdo al análisis anterior, podemos ver que en $r = cE$ hay un punto de bifurcación, ya que hay un cambio cualitativo importante en la dinámica de la ecuación diferencial, de un punto de equilibrio estable para $r \leq cE$ (el origen) a dos puntos de equilibrio para $r > cE$, el origen ahora inestable y un nuevo punto N_2 estable.

Teniendo las ecuaciones $N_1 = 0$ y $N_2 = K \left(1 - \frac{cE}{r}\right)$, la gráfica de la figura 1.12 muestra la localización de los puntos de equilibrio como funciones de la mortalidad de los peces. Este diagrama muestra una bifurcación transcítica en $r = cE$, donde dos ramas se intersectan y representa como la dinámica del modelo cambia de estabilidad: la rama estable que se presenta como una línea recta horizontal punteada y la rama inestable con una línea recta diagonal continua.

Puesto que buscamos la pesca de baja mortalidad, el rendimiento sostenible está dado por $Y = cEN_2 = cEK \left(1 - \frac{cE}{r}\right)$ y su gráfica se puede observar en la figura 1.13. Para una capturabilidad fija, el rendimiento máximo sostenible RMS ocurre cuando

$$\frac{dY}{dE} = cK \left(1 - \frac{2cE}{r}\right) = 0$$

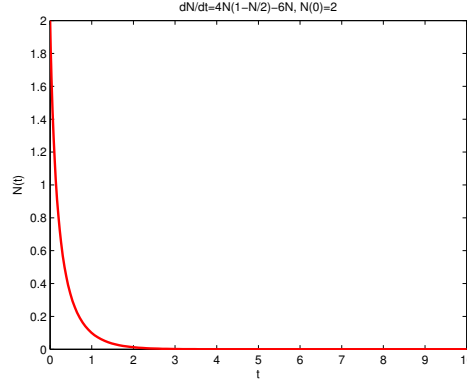


Figura 1.11: Gráfica de la solución de la ecuación diferencial $dN/dt = f_2(N)$, para la condición inicial $N(0) = N_0$, caso $r < cE$.

y $cE_{RMS} = \frac{r}{2}$, el cual produce el valor de $RMS = \frac{rK}{4}$.

El nivel de *stock* constante es $\frac{K}{2}$ y de acuerdo a la gráfica cuadrática, existen dos valores cE_1 y cE_2 ($0 < cE_1 < cE_2$) con los que se obtiene el mismo rendimiento. Si se extrae el recurso con esfuerzo E_1 y capturabilidad c , la población está *sub-explotada biológicamente*; mientras que cuando se hace con esfuerzo E_2 y la misma constante c , se dice que está *super-explotada biológicamente*.

Hasta este momento no hemos incluido una ecuación que represente las ganancias económicas que deja la pesca. Si quisiéramos incorporar este elemento presente en toda pesquería, entonces haríamos lo siguiente:

- Sea $G(t)$ la ganancia generada por la pesca al tiempo t . La función G deberá depender del rendimiento y del esfuerzo pesquero, es decir, $G = G(Y, E)$.
- Si el costo por unidad de esfuerzo, q , y el precio por unidad de biomasa, p , son constantes, entonces la ganancia estaría dada por:

$$G(t) = pY(t) - qE(t).$$

A grandes rasgos, lo que esto indicaría sería la venta total menos el costo total.

- Ya que el rendimiento lo hemos determinado a partir del esfuerzo y éste lo obtuvimos para el nivel de *stock* constante, en la última subsección, entonces

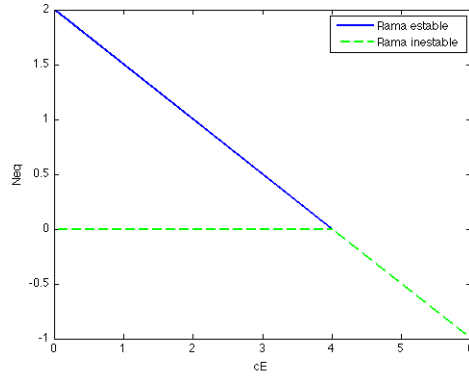


Figura 1.12: Diagrama de bifurcación transcritical donde se muestra el cambio en la dinámica del sistema en el punto $r = cE$

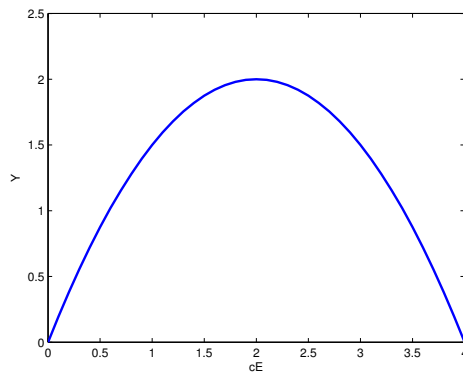


Figura 1.13: Curva de esfuerzo-rendimiento, con valor máximo $\frac{rK}{4}$.

la ganancia también dependerá de la función E . Esto es importante si queremos encontrar el esfuerzo pesquero necesario para producir la ganancia máxima, sin que el recurso se agote.

Una vez revisados los modelos anteriores, estudiaremos los modelos de pesca del tipo presa-depredador, donde la presa será el *stock* de peces y los depredadores son, para fines demográficos, los pescadores.

1.2 Modelos del tipo presa-depredador

1.2.1 Modelo clásico Lotka-Volterra

Para la redacción de esta subsección, seguimos las referencias: [14], [25] y [32].

Vito Volterra fue un matemático y físico italiano que en 1931, publicó la primera teoría de la dinámica de poblaciones. Esto mediante el análisis de los datos de las pesquerías del mar Adriático proporcionados por su yerno, el zoólogo Umberto D'Ancona. D'Ancona estaba interesado en comprender el siguiente fenómeno: si la pesca había disminuído en el Mediterráneo como consecuencia de la Primera Guerra Mundial, ¿porqué la proporción de peces depredadores capturados había aumentado? En sus resultados, Volterra se dio cuenta que las oscilaciones de las poblaciones de la presa y el depredador era una propiedad intrínseca del propio sistema e independiente de las condiciones externas.

En 1925 el químico y demógrafo norteamericano Alfred James Lotka publicó "*Elements of Physical Biology*". En dicho libro se proponía que la selección natural podía ser cuantificada como una ley física. Los seres vivos luchaban por el uso de la energía disponible. Los organismos que sobrevivían eran aquellos que capturaban y usaban la energía de una forma mucho más eficiente que sus competidores.

Además, Lotka ampliaba los usos de la ecuación logística que había utilizado para explicar el comportamiento de las reacciones químicas autocatalíticas. En 1930 Lotka encontró una reacción autocatalítica que exhibía las mismas oscilaciones temporales en las concentraciones al describir una interacción de tipo presa-depredador. Las ecuaciones que dan la cinética del mecanismo propuesto son las mismas que las introducidas por Volterra, las cuales se expondrán y estudiarán.

Las premisas del modelo clásico Lotka-Volterra para presa-depredador son las siguientes:

1. Si no hay depredadores, la población de presas crecerá a una razón instantánea proporcional a su propia población.

2. Si no hay presas, la población de depredadores disminuirá a un ritmo proporcional a la población de ellos mismos.
3. La presencia tanto de depredadores como de presas resulta beneficiosa para el crecimiento de la especie depredadora y perjudicial para el crecimiento de la especie presa.

Denotemos por $x(t)$ e $y(t)$, las presas y los depredadores, al tiempo t , respectivamente. El modelo que captura las premisas anteriores es:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy,\end{aligned}\tag{1.3}$$

donde todos los parámetros son positivos y tienen una interpretación ecológica importante: a representa la tasa de crecimiento de las presas sin depredadores (como lo dice el inciso 1) y $-c$ la tasa de decrecimiento de los depredadores si no existen presas (tal como lo indica el inciso 2). La razón de encuentros entre presas y depredadores es proporcional al producto de las dos poblaciones, de tal forma que, el coeficiente $-b$ de xy es una medida de la eficacia del depredador de capturar a la presa. En la segunda ecuación, el coeficiente d es un indicador de la eficiencia del depredador en términos del consumo de la presa.

La dinámica a la que da lugar el sistema no lineal (1.3) se hace en dos etapas: la local y la global. Analizamos la estabilidad local y global de los dos puntos de equilibrio encontrados: $P_0 = (0,0)$ y $P_{int} = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$, empezando por linealizar alrededor de cada uno de éstos con el cálculo de la matriz de Jacobi.

Como los valores propios de la matriz jacobiana evaluada en cero, son reales y de diferente signo ($\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = -c$), entonces el origen es un punto silla. Éste al ser punto hiperbólico, por Teorema de Hartman-Grobman (véase el Apéndice A) concluimos que P_0 es también un punto silla del sistema no lineal (1.3).

De la sustitución del segundo punto de equilibrio $P_{int} = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b}\right)$ en la matriz de Jacobi, obtenemos los valores propios $\lambda = \pm i\sqrt{ac}$, de lo cual podemos concluir que P_{int} es un centro para el sistema linealizado. Para saber lo que ocurre globalmente no podemos utilizar el Teorema de Hartman-Grobman, pues una de las condiciones que pide es que la matriz de Jacobi evaluada en el punto crítico tenga valores propios con parte real distinta de cero, es decir, que el punto sea hiperbólico. Por lo cual, es necesario utilizar

otras técnicas para determinar el comportamiento. Dentro de estas técnicas se encuentra el Método Directo de Lyapunov que aborda el problema de la estabilidad global (véase Apéndice A).

Teorema 1.2.1 *Toda trayectoria del sistema (1.3) que parta de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$ es cerrada, teniendo como centro al punto de equilibrio P_{int} .*

Demostración 1.2.1 *La demostración usa el Método Directo de Lyapunov. Para ello basta determinar una función de Lyapunov débil del sistema (1.3). Lo que a su vez significa determinar $V : \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+^2$ positiva definida y tal que para toda solución $(x(t), y(t))$ diferente del equilibrio positivo, $\nabla V(x(t), y(t)) \cdot (\dot{x}, \dot{y}) = 0$.*

Para construir la función de Lyapunov, empezamos por transformar el sistema (1.3) en uno que sea Hamiltoniano (véase el Apéndice A),

$$\begin{aligned}\dot{u} &= f(u, v) \\ \dot{v} &= g(u, v),\end{aligned}$$

Este mapeo puede realizarse al introducir las variables $u = \ln \frac{x(t)}{x_{int}}$ y $v = \ln \frac{y(t)}{y_{int}}$. Sea

$\mathbb{F}(x, y) = \left(\ln \frac{x}{x_{int}}, \ln \frac{y}{y_{int}} \right) = (u, v)$, la transformación $\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que manda el primer cuadrante del plano xy al plano uv de la figura 1.14.

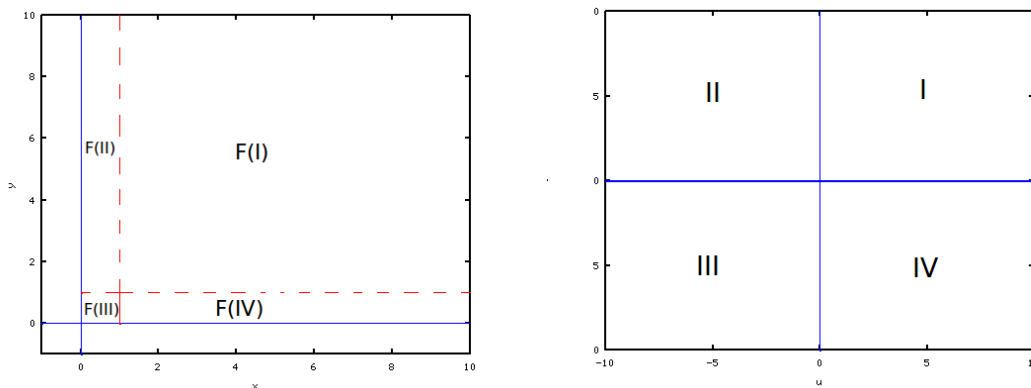


Figura 1.14: Mapeo de la función \mathbb{F} del primer cuadrante del plano xy a todo el plano uv .

En donde \mathbb{F} cumple lo siguiente:

1. Ya que la función \ln no está definida en los ejes, entonces \mathbb{F} tampoco,
2. $F(x_{int}, y_{int}) = (0, 0)$,
3. Si (x, y) es tal que $0 < x < x_{int}$, $0 < y < y_{int}$, entonces \mathbb{F} lo mapea en el tercer cuadrante del plano uv ,
4. Si (x, y) es tal que $x > x_{int}$, $0 < y < y_{int}$, el mapeo bajo \mathbb{F} es el cuarto cuadrante,
5. Si (x, y) donde $x > x_{int}$, $y > y_{int}$, la función \mathbb{F} transforma esta región en el primer cuadrante de uv ,
6. Para terminar, si (x, y) con $0 < x < x_{int}$ y $y > y_{int}$, la \mathbb{F} transforma la región en el segundo cuadrante del plano uv .

Dado que se tienen las expresiones:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_{int} e^{u(t)}, & y(t) &= y_{int} e^{v(t)}, \\ \dot{x}(t) &= x_{int} e^{u(t)} \dot{u}(t), & \dot{y}(t) &= y_{int} e^{v(t)} \dot{v}(t), \end{aligned}$$

las sustituimos junto con el punto de equilibrio $(x_{int}, y_{int}) = (\frac{c}{a}, \frac{a}{b})$, en el sistema (1.3), resultando el sistema nuevo:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= a - ae^{v(t)} \\ \dot{v}(t) &= -c + ce^{u(t)} \end{aligned}$$

Si $v(t) = v(u(t))$, $\dot{v}(t) = \frac{dv}{du} \dot{u}(t)$, entonces

$$\frac{dv}{du} = \frac{\dot{v}(t)}{\dot{u}(t)} = \frac{-c + ce^u}{a + ae^v},$$

con $\dot{u}(t) \neq 0$. Por separación de variables, el resultado de resolver la EDO es: $ce^u - cu + ae^v - av = A$, con A constante de integración.

Sea $H(t) = H(u(t), v(t)) = ce^{u(t)} - cu(t) + ae^{v(t)} - av(t)$, la función que satisface,

$$-\frac{\partial H}{\partial v} = -(ae^v - a) = \dot{u},$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = ce^u - c = \dot{v},$$

el sistema hamiltoniano buscado. Al derivar H por regla de la cadena y sustituir \dot{u} y \dot{v} , concluimos que $\dot{H}(t) = 0$, para todo t .

Ahora, sustituyendo u y v en H , obtenemos

$$\tilde{H}(x, y) = dx - c \ln \left(\frac{x}{x_{int}} \right) + by - a \ln \left(\frac{y}{y_{int}} \right),$$

en donde se cumple también que $\dot{\tilde{H}} = 0$.

Como \tilde{H} tiene un punto mínimo en P_{int} , puesto que el determinante de la matriz Hessiana de \tilde{H} evaluada en P_{int} es definida positiva,

$$V(x, y) = \tilde{H}(x, y) - \tilde{H}(x_{int}, y_{int}),$$

es la función de Lyapunov buscada en el primer cuadrante del sistema,

- Se anula en P_{int} .
- Es positiva para todo punto distinto a P_{int} y tiene un mínimo aislado en P_{int} , lo cual se puede comprobar al ver las características geométricas de la función V , que es un paraboloides elíptico que abre hacia arriba.
- $\nabla V(x, y) \cdot (\dot{x}, \dot{y}) = \left(d - \frac{c}{x}, b - \frac{a}{y} \right) \cdot (ax - bxy, -cy + dxy) = 0.$ ◆

En la figura 1.15, se muestran los óvalos cerrados de Volterra, que indican que si el estado inicial es (x_0, y_0) con $x_0 > 0$ y $y_0 > 0$ ($(x_0, y_0) \neq P_{int}$), entonces los estados posteriores de la interacción descrita por (1.3) caen en alguno de estos óvalos y se recorren en el sentido contrario a las manecillas del reloj.

A partir de este análisis global, podemos concluir que el punto de equilibrio es estable y que las soluciones del sistema coinciden con las curvas de nivel de V y de H una vez que éstas se parametrizan. Las soluciones del sistema Lotka-Volterra que empiezan en \mathbb{R}_+^2 son periódicas, esto es, en una interacción de tipo presa-depredador descrita por las ecuaciones (1.3), el tamaño de la especie presa y el de la especie depredadora, cambian periódicamente al aumentar el tiempo. En términos geométricos, es equivalente a lo que se observa en la figura 1.16.

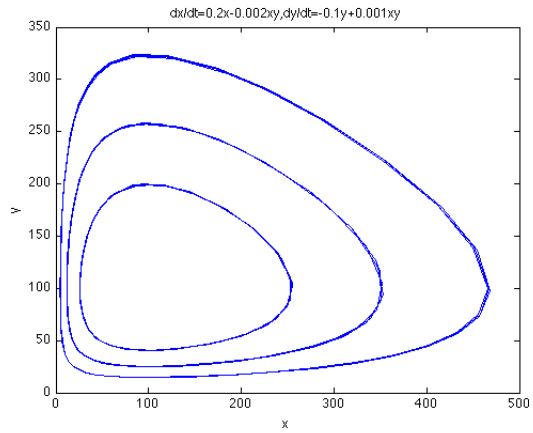


Figura 1.15: Gráfica de la población de presas $x(t)$ versus la población de depredadores $y(t)$ donde se muestran las soluciones periódicas. Cada órbita corresponde a una condición inicial (x_0, y_0) .

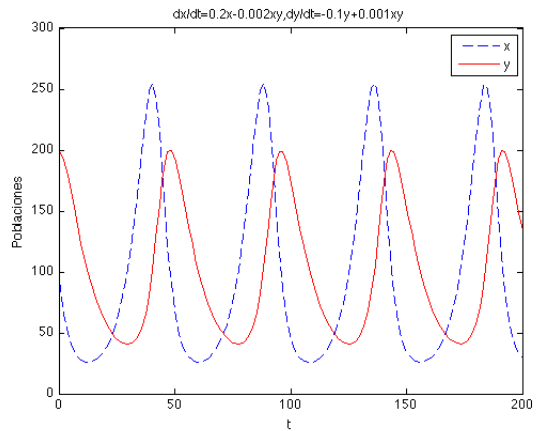


Figura 1.16: Gráficas de: la población de presas $x(t)$ versus tiempo y de la población de depredadores $y(t)$ versus tiempo. El comportamiento de las especies presa y depredadora son periódicos al aumentar el tiempo.

Ahora, qué pasaría si cambiamos un poco las ecuaciones diferenciales del sistema (1.3). En la siguiente subsección vamos a analizar lo que ocurre con las soluciones de un sistema del tipo Lotka-Volterra, en el cual incluimos una perturbación pequeña en cada una de las ecuaciones.

1.2.2 Modelo Lotka-Volterra de competencia intraespecífica

En este modelo incluimos un término cuadrático para cada especie, es decir, dada una perturbación $\varepsilon > 0$, obtenemos el sistema de EDO's siguiente,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy - \varepsilon x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy - \varepsilon y^2\end{aligned}\tag{1.4}$$

Desde el punto de vista de la modelación, lo que representan estos cambios en las ecuaciones son una evolución del tipo logístico para las presas en ausencia de depredadores y una razón de decrecimiento aun más rápido en ausencia de presas, en vez de un crecimiento exponencial, es decir, que se tomen en cuenta factores como: la competencia intraespecífica para cada población.

Comencemos con el análisis local de los puntos de equilibrio: $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = \left(\frac{a}{\varepsilon}, 0\right)$, $P_{int} = (x_{int}, y_{int})$, donde $x_{int} = \frac{a\varepsilon + bc}{bd + \varepsilon^2}$ y $y_{int} = \frac{ad - \varepsilon c}{bd + \varepsilon^2}$.

Linealizamos alrededor de cada uno de los puntos de equilibrio y evaluémos en la matriz de Jacobi $J(x, y)$, cada uno de éstos. Los resultados obtenidos son los siguientes:

- En el origen, P_0 es siempre un punto silla, para toda ε , pues los valores propios obtenidos son reales y de signo diferente, como en la subsección anterior: $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = -c$.
- En el caso del punto P_1 , los valores propios son $\lambda_1 = -a$ y $\lambda_2 = -c + \frac{ad}{\varepsilon}$, por lo cual encontramos otros dos subcasos.
 - ★ Si $\varepsilon < \frac{ad}{c}$, entonces $\left(\frac{a}{\varepsilon}, 0\right)$ es un punto silla. Véase la figura 1.17.
 - ★ Si $\varepsilon > \frac{ad}{c}$, entonces $\left(\frac{a}{\varepsilon}, 0\right)$ es estable. Véase la figura 1.18.

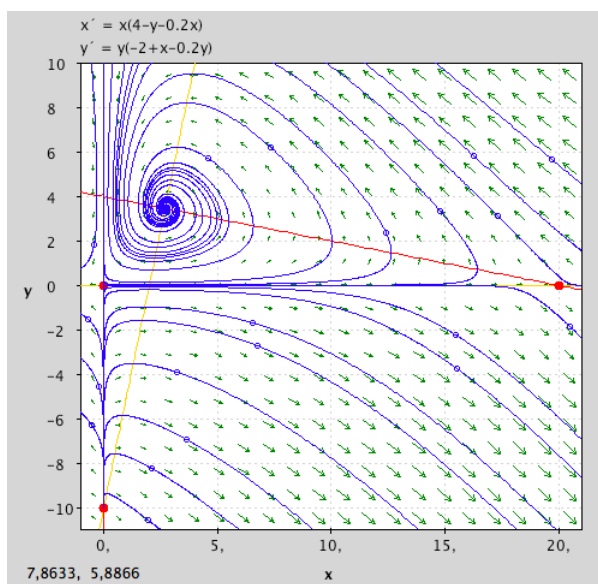


Figura 1.17: Retrato fase del sistema (1.4) para $\varepsilon < \frac{ad}{c}$.

- Para el punto P_{int} , ya que la traza y el determinante de $J(x_{int}, y_{int})$ son,

$$Tr(J) = -\varepsilon \frac{(a\varepsilon + bc) + (ad - c\varepsilon)}{bd + \varepsilon^2},$$

$$Det(J) = \frac{(a\varepsilon + bc)(ad - c\varepsilon)(\varepsilon^2 + bd)}{bd + \varepsilon^2},$$

- ★ Si $\varepsilon < \frac{ad}{c}$, entonces traza < 0 y determinante > 0 y por tanto P_{int} es un foco asintóticamente estable. Véase la figura 1.17.
- ★ Si $\varepsilon > \frac{ad}{c}$, entonces traza < 0 y determinante < 0 , por tanto P_{int} es un punto silla. Véase la figura 1.18.

Ya vista la dinámica local en cada uno de los puntos, es necesario dejar claro que sólo el punto $P_{int} = (x_{int}, y_{int})$ es relevante en términos de la coexistencia ecológica, para el cual los valores x_{int} y y_{int} deben ser positivos. Como $P_{int} = \left(\frac{a\varepsilon + bc}{bd + \varepsilon^2}, \frac{ad - \varepsilon c}{bd + \varepsilon^2} \right)$, si tomamos a $\varepsilon > \frac{ad}{c}$, $y_{int} < 0$, por ende, el único caso viable es si $\varepsilon < \frac{ad}{c}$ y así P_{int} es un punto estable.

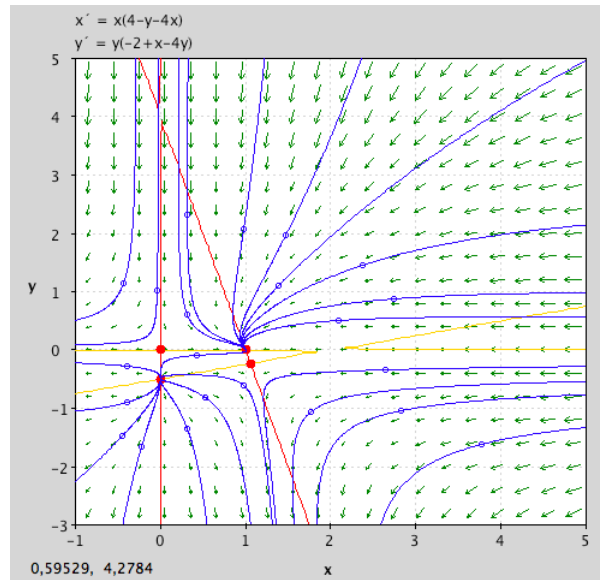


Figura 1.18: Retrato fase del sistema (1.4) para $\varepsilon > \frac{ad}{c}$.

Con la finalidad de obtener más información sobre la dinámica global alrededor del punto P_{int} en el primer cuadrante del plano cartesiano, utilizamos el Teorema de Poincaré-Bendixson (ver Apéndice A). Para ello construiremos una región positivamente invariante.

Teorema 1.2.2 *Toda trayectoria α que entre al rectángulo por lo lados γ_1 y γ_2 , termina en el punto P_{int} , con lo que concluimos la estabilidad global para P_{int} en la región de interés biológico ($x, y > 0$).*

Demostración 1.2.2 *Sea R el rectángulo con vértices los puntos $(0,0)$, $(x_{int},0)$, $(0,y_{int})$ e (x_{int},y_{int}) , con $x_{int} > \frac{a}{\varepsilon}$ y $y_{int} > \frac{a}{b}$, donde $x = \frac{a}{\varepsilon}$ e $y = \frac{a}{b}$ son puntos de la recta con ecuación $a - by - \varepsilon x = 0$.*

Graficamos las rectas $a - by - \varepsilon x = 0$ y $-c + dx - \varepsilon y = 0$, observamos que el punto de intersección P_{int} se encuentra al interior del rectángulo construido. Véase la figura 1.19.

Sea α una trayectoria del sistema (1.4) tal que para algún t_0 , el punto $(x(t_0), y(t_0))$ pertenece a la frontera de R (∂R). En este caso, nos interesa que tanto x_0 , como y_0 sean

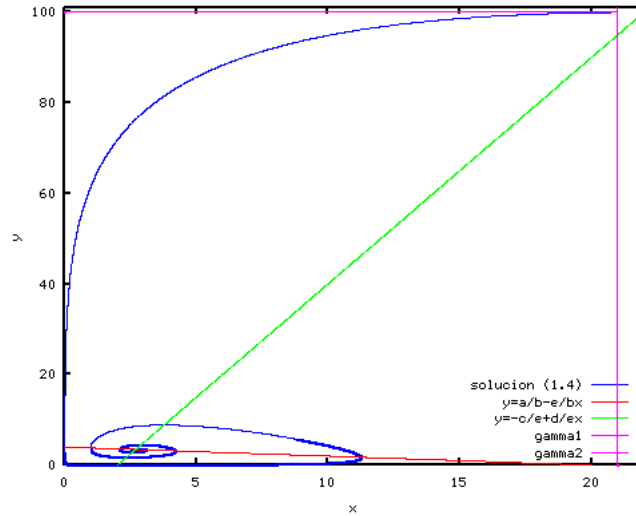


Figura 1.19: Región cerrada y acotada en donde aplicamos el Teorema de Poincaré-Bendixson, para decidir la estabilidad asintótica global del punto $P = (x_{int}, y_{int})$.

distintas de cero, para toda condición inicial que comience en ∂R .

Observando la figura 1.19, se puede ver que toda trayectoria que en t_0 comience en los lados γ_1 y γ_2 del rectángulo, se queda en R . Así, según el Teorema de Poincaré-Bendixson, se tienen varios casos: es una trayectoria cerrada, tiende a una trayectoria cerrada o termina en un punto de equilibrio.

Sea $\mathbb{F} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la transformación inversa vista en la subsección 1.2.1, tal que si $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, entonces,

$$\mathbb{F}(u, v) = (e^u, e^v) = (x, y).$$

La región de interés biológico, es decir, el primer cuadrante del plano xy es la imagen bajo \mathbb{F} de todo el plano uv . Esto es así porque $u = \ln\left(\frac{x}{x_{int}}\right)$ y $v = \ln\left(\frac{y}{y_{int}}\right)$, y al analizar los siguientes cuatro casos. Véase la figura 1.20.

1. Si $u = \ln\left(\frac{x}{x_{int}}\right) > 0$ e $v = \ln\left(\frac{y}{y_{int}}\right) > 0$, entonces el cuadrante I, del plano uv , se mapea en $[1, \infty) \times [1, \infty)$.

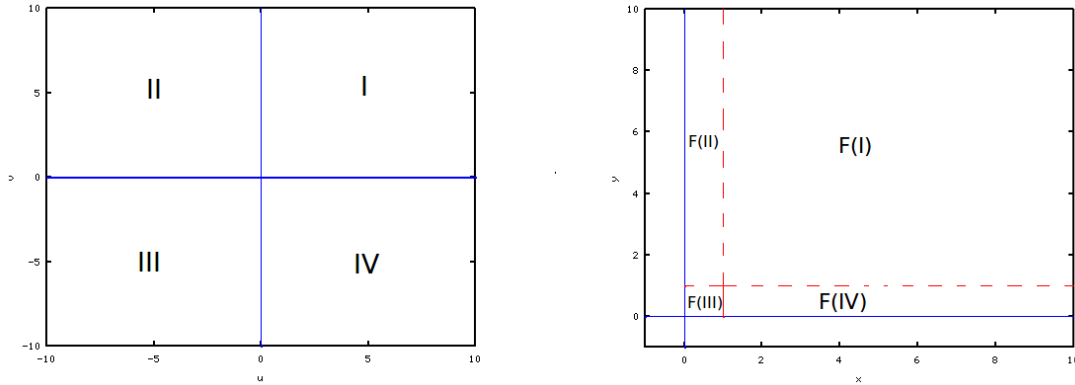


Figura 1.20: Mapeo de la función \mathbb{F} de todo el plano uv al primer cuadrante del plano xy .

2. Si $u = \ln\left(\frac{x}{x_{int}}\right) < 0$ e $v = \ln\left(\frac{y}{y_{int}}\right) > 0$, entonces el cuadrante II, del plano uv , se mapea en $(0, 1) \times [1, \infty)$.
3. Si $u = \ln\left(\frac{x}{x_{int}}\right) < 0$ e $v = \ln\left(\frac{y}{y_{int}}\right) < 0$, entonces el cuadrante III, del plano uv , se mapea en $(0, 1) \times (0, 1)$.
4. Si $u = \ln\left(\frac{x}{x_{int}}\right) > 0$ e $v = \ln\left(\frac{y}{y_{int}}\right) < 0$, entonces el cuadrante IV, del plano uv , se mapea en $[1, \infty) \times (0, 1)$.

El sistema (1.4) bajo la transformación T se escribe como:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= a - be^v - \varepsilon e^u = \hat{P}(u, v), \\ \dot{v} &= -c + de^u - \varepsilon e^v = \hat{Q}(u, v),\end{aligned}\tag{1.5}$$

en el cual aplicamos el Criterio Negativo de Bendixon (ver Apéndice A), que dice que en ninguna región simplemente conexa, contenida en el plano uv , existe trayectoria cerrada alguna si la divergencia del campo vectorial es negativa para todo (u, v) . Calculamos entonces la divergencia del campo vectorial que define al sistema (1.5),

$$\frac{\partial \hat{P}(u, v)}{\partial u} + \frac{\partial \hat{Q}(u, v)}{\partial v} = -\varepsilon(e^u + e^v).$$

Por lo tanto, no existe trayectoria cerrada para el sistema (1.5) y dado que la transformación \mathbb{F} manda trayectorias cerradas en trayectorias cerradas, concluimos que

el sistema (1.4) tampoco tiene trayectorias cerradas en el primer cuadrante.

Así, por el Teorema de Poincaré Bendixson, toda trayectoria que entra al rectángulo R por γ_1 o γ_2 , termina en el punto P_{int} , con lo que concluimos que P_{int} es estable globalmente en la región de interés biológico. ♦

De acuerdo al análisis de los sistemas (1.3) y (1.4), podemos ver que el modelo clásico de Lotka-Volterra, para presa-depredador es *estructuralmente inestable* (véase el Apéndice A), ya que con una pequeña perturbación en las ecuaciones del sistema (1.3), la dinámica obtenida es totalmente diferente. De órbitas cerradas en el sistema Lotka-Volterra original, se obtiene un punto de equilibrio asintóticamente estable en este último sistema.

Debido a la necesidad de representar los modelos de modo más realista, Crawford Stanley Holling propuso una serie de modificaciones del sistema Lotka-Volterra, las denominadas *respuestas funcionales y numéricas*, que sustituirán a la tasa a la cual la presa es tomada por los depredadores y a la tasa de la eficiencia del depredador en cuanto a la presa, respectivamente.

1.2.3 Respuestas funcionales de Holling

Para esta subsección seguimos de cerca las referencias [5], [21] y [31]. El sistema de EDO (1.3), es un caso particular del sistema siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= xf(x) - xy\phi(x), \\ \dot{y} &= -cy + eyx\phi(x),\end{aligned}$$

donde $xf(x)$ representa la tasa de crecimiento de las presas en ausencia de depredadores; el término $xy\phi(x)$ es llamado la *respuesta funcional del depredador*; $x\phi(x)$ es la razón de presas consumidas por depredador. La constante e es la eficiencia de conversión de la presa en comida para el depredador, y el término $eyx\phi(x)$ se denomina la *respuesta numérica del depredador*. La constante c es la tasa de mortalidad del depredador. Los modelos de esta forma son conocidos como *modelos de Rosenzweig-MacArthur*, propuesto por estos investigadores en 1963.

Las condiciones que debe cumplir $\phi(x)$, son las siguientes: $\phi(x) \geq 0$, $\phi'(x) \leq 0$, $[x\phi(x)]' \leq 0$, y que $x\phi(x)$ está acotada cuando $x \rightarrow \infty$.

Lo anterior expresa la idea de que, cuando la población de presas aumenta, la tasa de consumo de presas también aumenta, pero la fracción de la población total de presas

consumidas por depredador, disminuye.

Algunas formas explícitas para la respuesta funcional que se han reportado en la literatura son las siguientes:

$$x\phi(x) = \frac{\alpha x}{x+A}, \text{ de tipo Holling II (1965)}$$

$$x\phi(x) = a(1 - e^{-cx}), \text{ Ivlev (1961)}$$

$$x\phi(x) = ax^q, (q < 1), \text{ Rosenzweig (1971)}$$

En este trabajo utilizaremos las respuestas tipo Holling. De hecho, la respuesta de Holling II es una de las tres que introdujo este investigador. En el sistema (1.3) se supone que la capacidad de ataque del depredador aumenta conforme lo hace la población de presas. Sin embargo, intuitivamente podemos pensar que llegará un momento en que el depredador ya no querrá más presas.

La respuesta funcional se define como el cambio en la densidad de la especie presa atacada, por unidad de tiempo, por depredador; mientras que la respuesta numérica es el cambio en la densidad de la especie depredador como una función del cambio en la densidad presa. La depredación total puede expresarse como una combinación de respuesta funcional y numérica. Crawford Stanley Holling, basado en muchos experimentos, clasificó la respuesta funcional en tres tipos diferentes. A continuación describimos brevemente cada una de éstas:

1. Tipo I. Ésta expresa un aumento lineal de la tasa de ataque del depredador respecto a la densidad de la presa, hasta llegar un punto a partir del cual, la tasa de ataque permanece constante. La función que representa esta respuesta es lisa a tramos, conformada por una función lineal con pendiente positiva y una función constante. Véase la figura 1.21.
Si $x\phi(x)$ es la razón de consumo de presas por unidad de depredador y x es el número de presas disponibles, entonces

$$x\phi(x) = \begin{cases} kT_s x; & 0 \leq x < \tilde{x} \\ kT_s \tilde{x}; & x > \tilde{x}, \end{cases}$$

donde T_s es el tiempo disponible para la búsqueda (constante), k es la tasa instantánea de presa descubierta por un depredador. Se supone que las presas se reponen a medida que son ingeridas y así el valor de x no decrece durante el tiempo T_s .

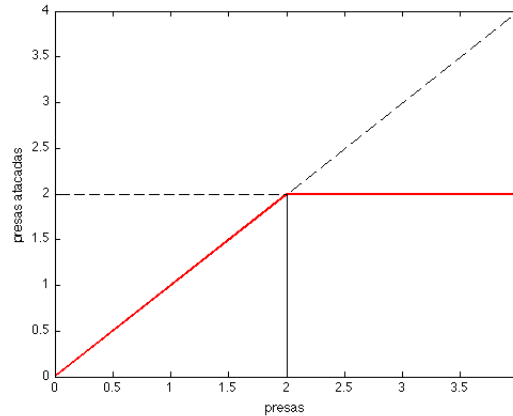


Figura 1.21: En una respuesta funcional de Holling tipo I, la tasa de consumo es lineal y creciente hasta alcanzar la tasa máxima de depredación.

2. Tipo II. Expresa un incremento desacelerado del consumo a medida que aumentan las presas consumidas, hasta acercarse asintóticamente a la tasa máxima de consumo de presas por depredador. Véase la figura 1.22.

En este caso, T_s no es constante, se maneja el *tiempo de manejo* como el periodo en el que se llevan a cabo las acciones de: capturar, matar, comer y digerir. $T_s = T - T_h x_a$, donde T es el tiempo total disponible, T_h es el *tiempo de manejo*.

$$x\phi(x) = \frac{kTx}{1 + kTx}$$

3. Tipo III. En ésta se tiene que a bajas densidades de población de presas, el efecto de la depredación es bajo, pero a medida que aumenta la densidad de presas, la depredación es más intensa. En este tipo de respuesta, el depredador busca otras alternativas de alimentación si el número de presas es bajo. Véase la figura 1.23. La función más usada para representar esta respuesta funcional es:

$$x\phi(x) = \frac{kTx^2}{1 + kTx^2}$$

En 1984, Taylor, propuso un cuarto tipo de respuesta funcional. Es usada para modelar comportamientos anti-depredatorios, como la formación de grupos de defensa y el fenómeno de agregación. La población de presas, a partir de una densidad crítica,

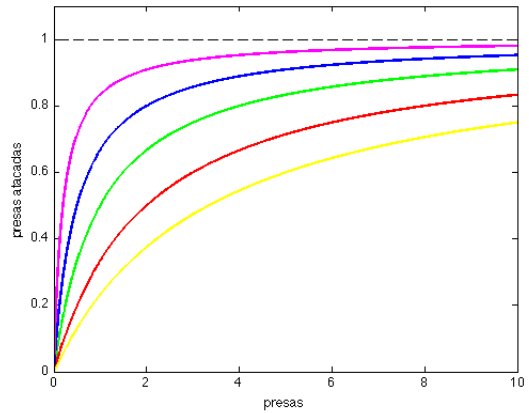


Figura 1.22: La respuesta funcional de Holling tipo II es monótonamente creciente. La tasa de consumo de los depredadores aumenta con la densidad de las presas. Notamos que si x es suficientemente grande, entonces la función $x\phi(x)$ tiende de forma asintótica al valor máximo de la tasa de depredación.

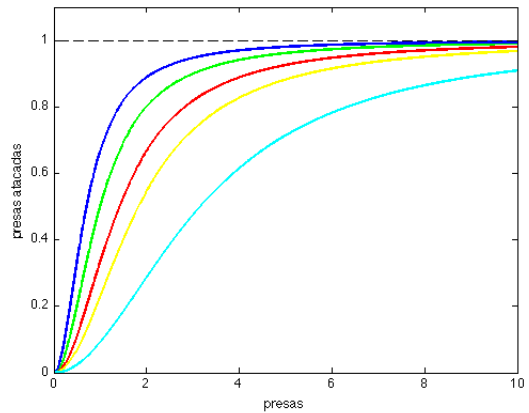


Figura 1.23: La función que representa la respuesta funcional de Holling tipo III es monótonamente creciente como las respuestas funcionales tipo Holling II, pero posee además un punto de inflexión, tiene forma sigmoide.

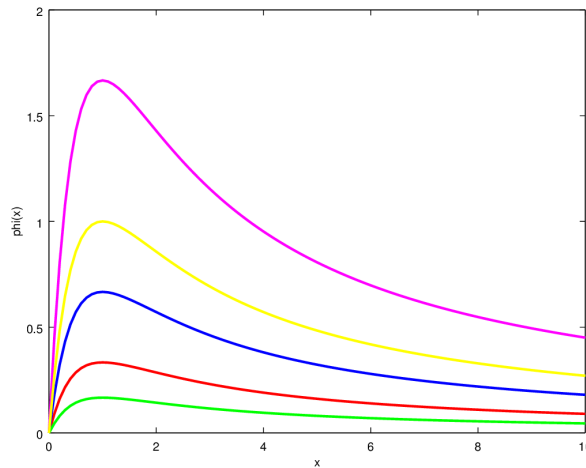


Figura 1.24: La función que representa la respuesta funcional de Holling tipo IV.

desarrolla una estrategia de defensa que redundará en una disminución de la razón de consumo. La función más usada para representar este tipo de respuesta funcional es:

$$x\phi(x) = \frac{kTx}{1 + kTx^2}.$$

Véase la figura 1.24.

Nuestro interés es hacer un análisis cualitativo de un sistema de dos ecuaciones diferenciales ordinarias que generalice el sistema de Lotka-Volterra. Esto con el objetivo de presentar los distintos modelos de pesquerías que podríamos estudiar con el uso de la Teoría de Control, esto es: el modelo de Kolmogorov. Sin embargo, como veremos más adelante, debemos advertir que el modelo de Lotka-Volterra (1.3) no es en sí un modelo de Kolmogorov, ya que no cumple con una de las condiciones que el mismo autor impone en su modelo. El modelo (1.4) sí cumple con esas condiciones, así como los modelos que incluyen las respuestas funcionales del tipo Holling.

1.2.4 Modelo de Kolmogorov

El modelo que presentamos en esta subsección fue propuesto por el matemático ruso Andréi Nikoláyevich Kolmogorov, quién en 1936, describió la dinámica general que resulta de la interacción presa-depredador. En esta subsección seguimos las referencias: [14] y [32]. Las premisas en las que se basa este modelo son las siguientes:

1. La población es homogénea: no se considera alguna estructura de edad o de sexo.
2. Hábitat homogéneo: las características físicas y biológicas son las mismas en el espacio donde habitan las especies.
3. Tiempo homogéneo: representa, por ejemplo, que los cambios estacionales no modifican la intensidad y el tipo de interacción, equivalentemente, que las tasas de crecimiento de cada especie sólo dependen explícitamente de la densidad poblacional y no del tiempo.
4. Crecimiento continuo: las poblaciones crecen en generaciones traslapadas.
5. Si el número de depredadores aumenta, las tasas de crecimiento de las dos poblaciones decrece.

Sean $u(t)$ y $v(t)$ la densidad poblacional de las presas y los depredadores, al tiempo t , respectivamente. El sistema autónomo de ecuaciones diferenciales que captura las hipótesis anteriores es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{u} &= uM(u, v) \\ \dot{v} &= vN(u, v),\end{aligned}\tag{1.6}$$

donde M y N son las *tasas instantáneas per cápita*. Las características cualitativas de M y N son tales que describen la interacción entre las dos especies. (u_0, v_0) son las condiciones iniciales de las presas y los depredadores, respectivamente. La última premisa de este modelo nos dice matemáticamente que,

$$\frac{\partial M}{\partial v} < 0, \text{ y } \frac{\partial N}{\partial v} < 0.$$

Si $M(u, v) = a - bv$ y $N(u, v) = -c + du$, como el sistema Lotka-Volterra clásico (1.3) que presentamos anteriormente, la condición $\frac{\partial N}{\partial v} < 0$ no se cumple, por lo cual no es un modelo tipo Kolmogorov. Pero el sistema que incorpora la competencia intraespecífica (1.4) sí lo es.

La ceroclina horizontal de (1.6) tiene dos ramas: $u = 0$ y $M(u, v) = 0$ y la vertical también tiene dos ramas: $v = 0$ y $N(u, v) = 0$. Kolmogorov propuso una forma cualitativa para las ramas principales, $M(u, v) = 0$ y $N(u, v) = 0$, de las ceroclinas, para describir la relación de tipo presa-depredador. Véase la figura 1.25.

Las ramas $M(u, v) = 0$ y $N(u, v) = 0$, dividen en cuatro partes al plano fase uv . En éste se pueden ver los puntos de equilibrio $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (u_1, 0)$ y $P_{int} = (u_{int}, v_{int})$. Este último corresponde a la intersección de las ramas principales.

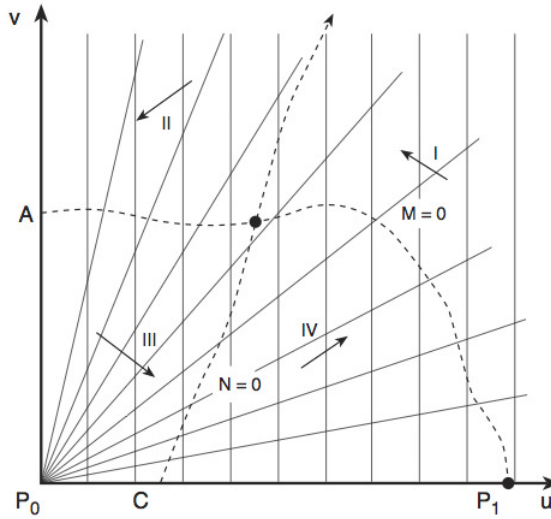


Figura 1.25: Modelo de Kolmogorov para la relación presa-depredador. Tomada de [32].

La dinámica a la que da lugar el sistema (1.6) se determina haciendo, en primer lugar, el análisis local alrededor de cada punto de equilibrio y, en segundo, el análisis global en el primer cuadrante positivo.

Del análisis local concluimos que: P_0 y P_1 son punto silla; mientras que el retrato fase alrededor de P_{int} depende de la forma en que se intersectan las ramas principales de las ceroclinas. Para ejemplificar este análisis, Kolmogorov considera los siguientes casos para P_{int} :

- Caso 1. La intersección P_{int} de las ceroclinas $M(u, v) = 0$ y $N(u, v) = 0$ se puede observar en la figura 1.26, éste es un foco localmente estable. Dada una condición inicial, de acuerdo a la dinámica generada por las ceroclinas, la trayectoria que comienza en ese punto tenderá a P_{int} en forma espiral alrededor de él. Además, podemos observar que toda trayectoria que comience con una condición inicial cualquiera en el plano fase (con $u, v > 0$) se comporta de la misma manera.

Puesto que las densidades poblacionales iniciales de ambas especies, u_0 y v_0 , son positivas, entonces los tamaños poblacionales $u = u(t)$ y $v = v(t)$ oscilarán amortiguadamente alrededor de u_{int} y v_{int} , respectivamente, al aumentar el tiempo, según lo muestra la figura 1.27.

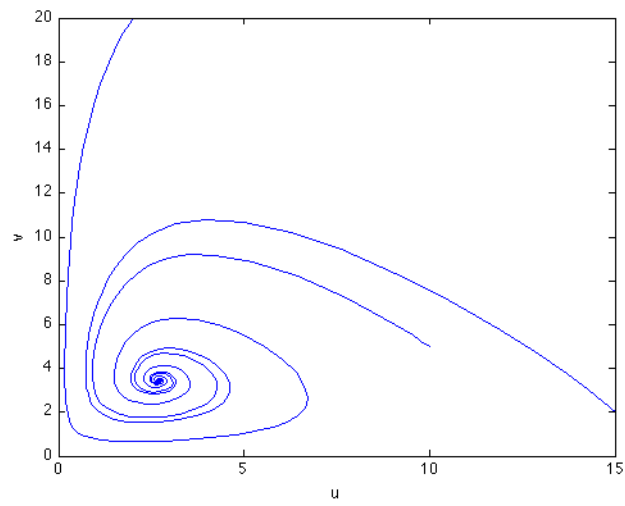


Figura 1.26: Dinámica del caso 1 considerado por Kolmogorov.

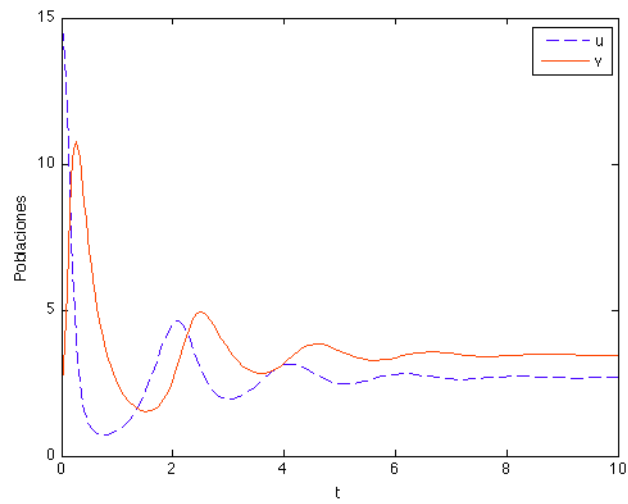


Figura 1.27: Así cambian las densidades poblacionales $u(t)$ y $v(t)$, al aumentar el tiempo t , para el Caso 1.

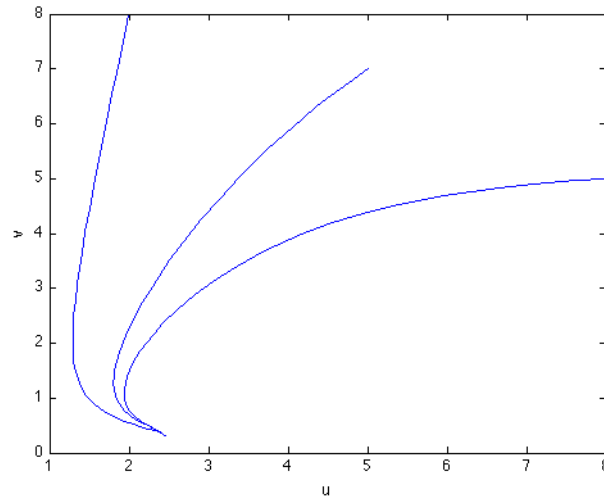


Figura 1.28: Retrato fase del Caso 2 considerado por Kolmogorov.

- Caso 2. En éste, las trayectorias de (1.6) tienden a P_{int} en una dirección fija, P_{int} es atractor, como se puede observar en la figura 1.28. Esto corresponde a que los tamaños de la presa y del depredador, tienden a u_{int} y a v_{int} , cuando t tiende a infinito, respectivamente. Véase la figura 1.29. Tienden exponencialmente, si P_{int} es un nodo; mientras que lo hacen amortiguadamente (sin oscilar), si P_{int} es un nodo degenerado.
- Caso 3. En este último caso, el sistema (1.6) tiene un ciclo límite, C , que rodea al equilibrio P_{int} . Se encuentran distintos comportamientos cualitativos y esto depende de la condición inicial dada (u_0, v_0) :
- (a) Si (u_0, v_0) está fuera de la región encerrada por C (figura 1.30), entonces la trayectoria que comienza en ese punto tenderá a C siguiendo una espiral al aumentar t . Así, los tamaños poblacionales tienden hacia funciones del tipo periódico a medida que el tiempo avanza. Véase también la figura 1.31.
 - (b) Si (u_0, v_0) está sobre el ciclo límite C , entonces las trayectorias recorrerán una y otra vez a C , por lo tanto, las densidades poblacionales son funciones periódicas y del mismo periodo. Esto se puede observar en la figura 1.30. Los tamaños poblacionales en este caso son periódicos.
 - (c) Si (u_0, v_0) está dentro de la región cuya frontera es C , entonces según Kolmogorov, se necesitan hipótesis adicionales para determinar el

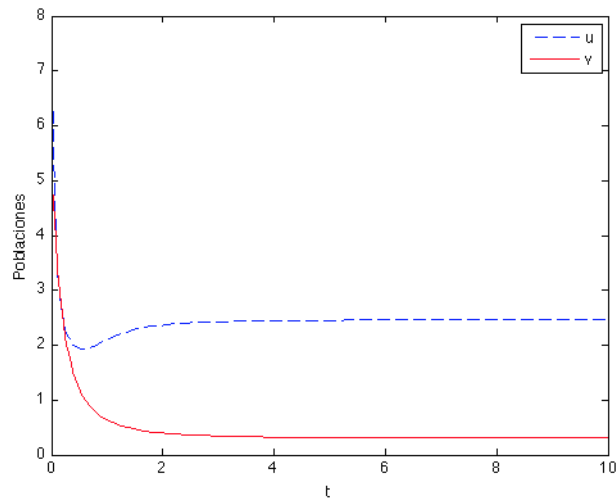


Figura 1.29: Así cambian las densidades poblacionales $u(t)$ y $v(t)$, al aumentar el tiempo t , para el Caso 2.

comportamiento cualitativo de la trayectoria: el punto de equilibrio P puede ser inestable y puede ser nodo o foco o puede ser que el sistema (1.6) tenga uno o más ciclos límite estables e inestables, teniendo como centro el punto P . Véanse las figuras 1.30 y 1.31.

Ya que esta parte del trabajo se centra en los modelos de tipo presa-depredador, una de las condiciones ecológicas que se pide en los resultados es que la interacción entre las especies sea tal que ninguna de ellas se extinga, a este fenómeno se le denomina *co-existencia*. Dado el sistema de EDO's (1.6), la co-existencia se puede modelar desde el punto de vista matemático a través de un atractor global o bien a través de soluciones periódicas aisladas (existencia de ciclos límite o centros) primordialmente. El modelo de Kolmogorov encuentra efectivamente la co-existencia de ambas especies.

El siguiente modelo es del tipo Lotka-Volterra y utiliza el crecimiento logístico para las presas, rescatando la ecuación diferencial ordinaria (1.2) para modelar la dinámica de la presa y plantea otra ecuación diferencial para el esfuerzo pesquero con decrecimiento malthusiano. Ésta última ecuación propone la dinámica de los depredadores como la de los pescadores.

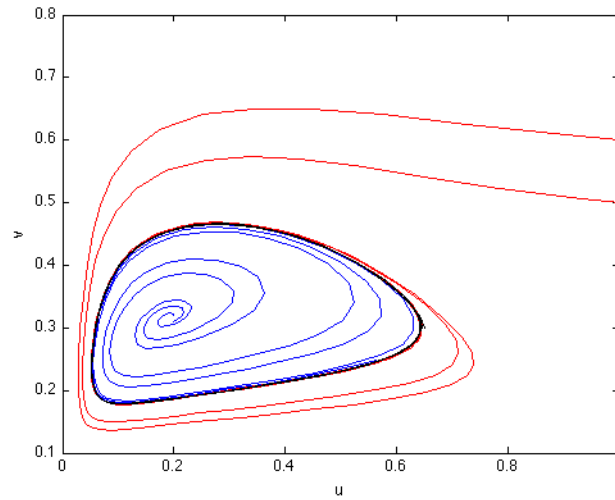


Figura 1.30: Retrato fase del Caso 3 considerado por Kolmogorov.

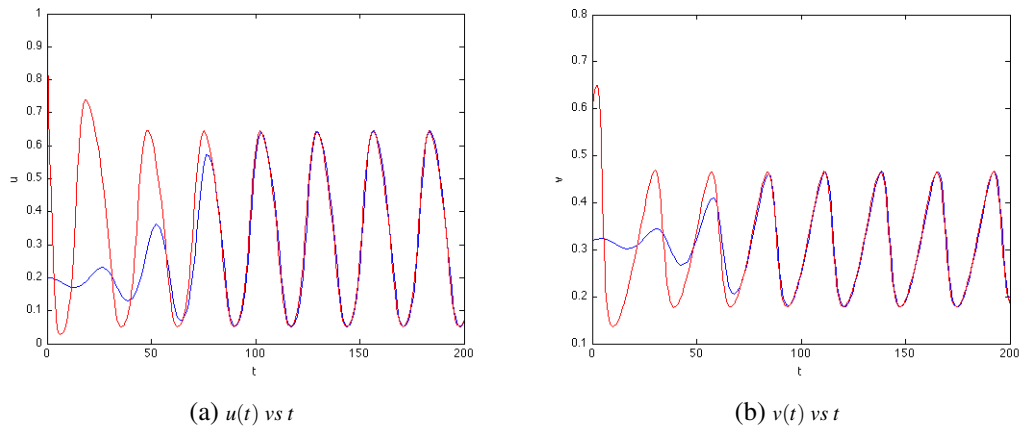


Figura 1.31: Gráfica de las funciones $u(t)$ y $v(t)$, para el Caso 3.

1.2.5 Modelo pesquería para dos especies

En este modelo presa-depredador expuesto, el efecto demográfico de los pescadores sobre la población de peces que se captura, puede ser visto como si fuesen los depredadores. Para la escritura de esta subsección nos basamos en las referencias [14] y [20]. Así, si N y E denotan el *stock* de peces y el esfuerzo pesquero, respectivamente, el modelo es:

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= rN \left(1 - \frac{N}{K}\right) - cEN, \\ \frac{dE}{dt} &= pcEN - qE,\end{aligned}\tag{1.7}$$

donde r es la tasa de crecimiento intrínseco de la población de peces, K la capacidad de carga, p es el precio por unidad de biomasa y q es el costo por unidad de esfuerzo.

La primera ecuación es idéntica a la que estudiamos en la subsección 1.1.2, la segunda representa la interpretación económica del modelo y nos dice que la razón de cambio del esfuerzo de pesca es proporcional a la diferencia de la razón de cambio de las ganancias y de los costos, a través de los términos $pcEN$ y qE , respectivamente.

Para $r > 0$, existen dos posibilidades:

1. La pesca no es viable, el esfuerzo de pesca decrece y el *stock* de peces regresa a su capacidad de carga.
2. Los peces y la pesca co-existen en un equilibrio en el plano fase NE . El nivel de *stock* en su equilibrio, $N_{int} = \frac{q}{pc}$, está determinado por el precio, el costo y la capturabilidad. El nivel de equilibrio es determinado primordialmente por un factor económico, más que por uno biológico.

Análisis local

Hagámos el análisis local detallado del sistema (1.7). Para ello, obtengamos las ceroclinas de (1.7). La ceroclina horizontal, $\frac{dN}{dt} = 0$, tiene dos ramas: $N = 0$ y $E = \frac{r}{c} \left(1 - \frac{N}{K}\right)$. Mientras que la ceroclina vertical, es decir, donde $\frac{dE}{dt} = 0$ tiene las siguientes: $E = 0$ y $N = \frac{q}{pc}$.

Las ceroclinas se intersectan de manera que el modelo modificado posee tres puntos de equilibrio: $P_0 = (0, 0)$, el que depende de la presa solamente $P_1 = (K, 0)$ y el interno, que puede estar fuera de los ejes coordenados, $P_{int} = \left(\frac{q}{pc}, \frac{r}{c} \left(1 - \frac{q}{pcK}\right)\right)$.

El análisis de (1.7) empieza por observar la dinámica del sistema alrededor de cada punto de equilibrio.

Para ello calculamos la matriz de Jacobi $J(N, E)$ del campo vectorial evaluándola en cada punto de equilibrio.

- En $P_0 = (0, 0)$, los valores propios de la matriz de Jacobi son $\lambda_{11} = r$ y $\lambda_{21} = -q$ y sus vectores propios correspondientes, los canónicos: $v_{11} = e_1$ y $v_{21} = e_2$.
El punto de equilibrio trivial es entonces un punto silla, para todo parámetro r y q positivos.
- La evaluación de $J(N, E)$ en $P_1 = (K, 0)$ y el posterior cálculo de los valores propios nos da, $\lambda_{12} = -r$ y $\lambda_{22} = pcK - q$.
 - ★ Si $K < K_c = \frac{q}{pc}$ (K_c la capacidad de carga de la presa), ambos valores propios son negativos y P_1 es un nodo estable.
 - ★ Si $K > K_c$, uno de los valores propios, λ_{22} , es real positivo y el otro valor propio es negativo, por lo que P_1 es punto silla.
- Ahora, para el punto de equilibrio interno $P_{int} = \left(\frac{q}{pc}, \frac{r}{c} \left(1 - \frac{q}{pcK} \right) \right)$, debemos revisar dos casos:
 - ★ Si $K < K_c = \frac{q}{pc}$, el estado estacionario interno no es relevante desde el punto de vista biológico, ya que si nos fijamos en la tasa de cambio del esfuerzo pesquero, la tasa de aumento de la población de depredadores adquiere un valor negativo.
 - ★ Si $K > K_c = \frac{q}{pc}$, el aumento en la población de depredadores es positivo y biológicamente relevante. Aquí, los valores propios son:

$$\lambda_{13,23} = \frac{1}{2} \left(\frac{-rq}{cpK} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{rq}{pcK} \right)^2 - 4rq \left(1 - \frac{q}{pcK} \right)}$$

Si δ es el subradical:

$$\delta = \left(\frac{rq}{pcK} \right)^2 - 4rq \left(1 - \frac{q}{pcK} \right) > 0,$$

distribuyendo el segundo paréntesis, dividiendo toda la expresión entre rq y reacomodando el primer término obtenemos la ecuación cuadrática: $\delta = \frac{r}{q}w^2 + 4w - 4 > 0$, donde $w = \frac{q}{pcK}$. Resolviendo esta ecuación, despejando K y multiplicando por el conjugado de la raíz:

$$K < K_s = \left(\frac{q}{pc}\right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{q} + 1}\right),$$

aquí K_s es el valor crítico de la capacidad de carga de la presa por debajo del cual δ es positiva.

Si $\delta > 0$, entonces λ_{13} y λ_{23} son valores reales negativos, ya que $K > K_c = \frac{q}{pc}$. Entonces,

- * Si $K < K_s$, el punto de equilibrio interno P_{int} es estable
- * Si $K > K_s$, δ es negativa y así los valores propios constituyen número complejos, donde su parte real es negativa. Por lo que, para $K > K_s$, el punto de equilibrio interno P_{int} es una espiral estable.

Las conclusiones de este primer análisis son las siguientes:

- Para $K < K_c$, el tamaño máximo de la población de presas es insuficiente para permitir que persistan los depredadores. El punto de equilibrio interno P_{int} adopta valores negativos y biológicamente irrelevantes. El punto de equilibrio P_1 es estable. Para $K = K_c$, el punto de equilibrio interno coincide con el punto P_1 , éste es estable, véase la figura 1.32.
- Para $K_c < K < K_s$, el punto de equilibrio interno P_{int} es factible desde el punto de vista biológico y es estable. El equilibrio P_1 es un punto silla. Véase la figura 1.33.
- Para $K > K_s$, el punto de equilibrio interno P_{int} es también biológicamente factible y es estable, pero puede ser una espiral estable. Por tanto, la aproximación de este punto es siempre oscilatorio. Véase la figura 1.34. Cuanto mayor sea el valor de K , menor es la parte real de los valores propios (complejos). Entonces, para valores grandes de K , P_{int} es un centro. Véase la figura 1.35

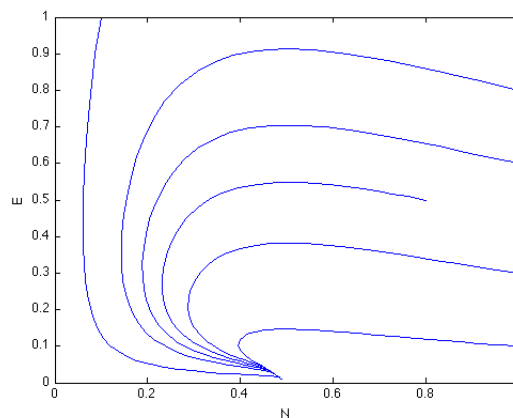


Figura 1.32: Retrato fase del modelo depredador-presa de Lotka-Volterra con un crecimiento logístico de las presas para $K = K_c$. $K = 0.5$, $P_{int} = P_1$, es estable, otros valores de los parámetros: $r = 0.5$, $p = 1.0$, $q = 0.5$ y $c = 1.0$.

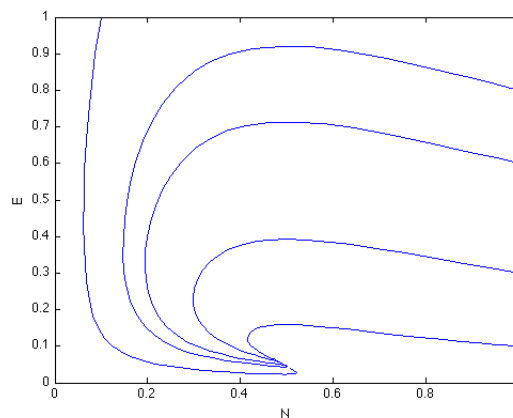


Figura 1.33: Retrato fase del modelo depredador-presa de Lotka-Volterra con un crecimiento logístico de las presas para $K > K_s$. $K = 0.55$, P_{int} es estable y P_1 es un punto silla, al igual que en el caso anterior. Otros valores de los parámetros: $r = 0.5$, $p = 1.0$, $q = 0.5$ y $c = 1.0$.

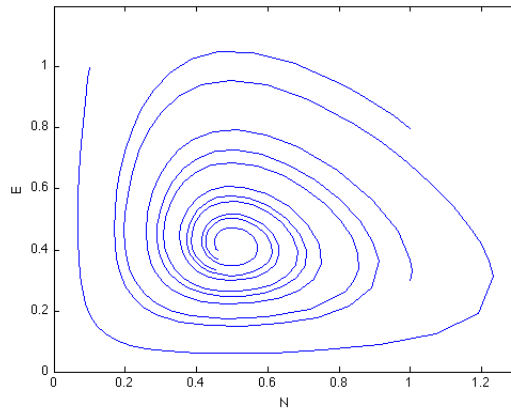


Figura 1.34: Retrato fase del modelo depredador-presa de Lotka-Volterra con un crecimiento logístico de las presas para $K > K_s$. $K = 3$, P_{int} es una espiral estable, otros valores de los parámetros: $r = 0.5$, $p = 1.0$, $q = 0.5$ y $c = 1.0$.

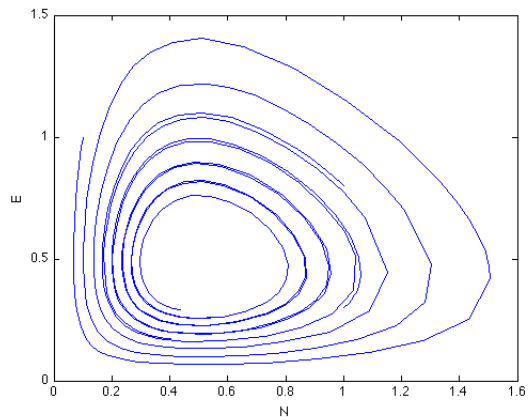


Figura 1.35: Retrato fase del modelo depredador-presa de Lotka-Volterra con un crecimiento logístico de las presas para $K > K_s$. $K = 10$, P_{int} es un centro y P_1 es un punto silla, como en el caso anterior. Otros valores de los parámetros: $r = 0.5$, $p = 1.0$, $q = 0.5$ y $c = 1$.

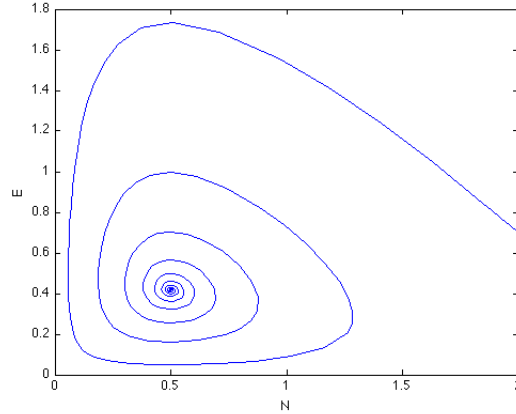


Figura 1.36: Dinámica dada por el sistema (1.5). El campo vectorial (1.6) sugiere que (N_{int}, E_{int}) es un atractor global de (1.5).

Análisis global

Para hacer un análisis global, construimos una función de Lyapunov tal como lo hicimos en la subsección 1.3.1, del sistema (1.3).

Teorema 1.2.3 *El punto $P_{int} = (N_{int}, E_{int})$ es un atractor global del sistema de ecuaciones (1.7).*

Demostración 1.2.3 *Vimos que el punto P_{int} es un atractor local si $K_c < K < K_s$ y si $K > K_s$ (Para K pequeña), para ver si es global construimos una función de Lyapunov de la forma $V(x, y) = H(x, y) - H(P_{xy})$, donde $H(x, y) = dx - c \ln(x) + by - a \ln(y)$ y $P_{xy} = (x_{int}, y_{int}) = (\frac{c}{d}, \frac{a}{b})$ era el punto de equilibrio no trivial. $V(x, y)$, se puede reescribir de la siguiente forma:*

$$\begin{aligned} V(x, y) &= dx - c \ln(x) + by - a \ln(y) - (dx_{int} - c \ln(x_{int}) + by_{int} - a \ln(y_{int})) \\ &= d \left(x - x_{int} - x_{int} \ln \frac{x}{x_{int}} \right) + b \left(y - y_{int} - y_{int} \ln \frac{y}{y_{int}} \right) \end{aligned}$$

donde los parámetros b y d corresponden a los términos de interacción de las presas y depredadores, de las ecuaciones \dot{x} y \dot{y} , respectivamente, del sistema (1.3).

En este caso, utilizando la misma idea, se propone:

$$V(N(t), E(t)) = pc \left[N(t) - N_{int} - N_{int} \ln \frac{N(t)}{N_{int}} \right] + c \left[E(t) - E_{int} - E_{int} \ln \frac{E(t)}{E_{int}} \right],$$

donde c y pc también corresponden a los términos de interacción de las presas y depredadores, de las ecuaciones \dot{N} y \dot{E} , respectivamente, del sistema (1.5) y donde el punto de equilibrio es $P_{int} = (N_{int}, E_{int}) = \left(\frac{q}{pc}, \frac{r}{c} \left(1 - \frac{q}{pcK} \right) \right)$.

Afirmamos que $V(t) = V(N(t), E(t))$ es decreciente al aumentar t . En efecto, derivando la función respecto a t y sustituyendo N_{int} , E_{int} , $\dot{N}(t)$ y $\dot{E}(t)$ en $\dot{V}(t)$, encontramos que:

$$\dot{V} = -\frac{pcr}{K} \left(N - \frac{q}{pc} \right)^2 < 0.$$

Con lo cual garantizamos que el punto (N_{int}, E_{int}) si es un atractor global del sistema (1.7), según el método directo de Lyapunov (véase Apéndice A). ♦

En la figura 1.36 se bosqueja la curva cuyos vectores tangentes son los definidos por el sistema (1.7).

A continuación, expondremos la teoría necesaria para explicar el Principio del Máximo de Pontryagin y describiremos algunos ejemplos que nos ayudarán a optimizar el Rendimiento Óptimo Sostenible (RMS) en los modelos de tipo Presa-Depredador del Capítulo 3.

Capítulo 2

Teoría de control óptimo

Como se expuso en el Capítulo 1, el comportamiento cualitativo de los modelos simples de una población sujeta a cosecha, como puede ser en una pesquería, muestran que dada la capacidad de carga del *stock*, se puede obtener el rendimiento máximo sostenible y el esfuerzo pesquero correspondiente.

En este capítulo se incorpora la teoría de control óptimo en la dinámica de los modelos vistos en el primer capítulo, con la finalidad de encontrar el valor óptimo del RMS, es decir, el mayor rendimiento económico que se obtiene de explotar un recurso renovable, durante un periodo largo y en el que la población no se extinga. Esta teoría echa mano del Principio del Máximo de Pontryagin. A fin de llegar al enunciado y a la demostración de este importante resultado, antes introducimos algunas definiciones y teoremas.

Una vez demostrado el teorema principal de este capítulo, enseguida analizaremos los modelos más simples expuestos en el Capítulo 1, a la luz del Principio del Máximo de Pontryagin, para después estudiar modelos de tipo presa-depredador en donde una de las poblaciones se cosecha.

Para la redacción de este capítulo, nos basamos en las referencias: [8], [15], [18] y [20].

2.1 El problema de control óptimo a tiempo continuo

Considérese un sistema dinámico continuo, con condición inicial $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, y que evoluciona en el tiempo.

Sea $u(t) \in \mathbb{R}^m$ el vector de variables de control en el instante t y $x(t) \in \mathbb{R}^n$, el vector de variables de estado tal que, para cada $t \in [t_0, t_1]$, $x(t)$ nos indica la situación del sistema al instante t .

Supondremos que el vector que contiene a las variables de estado satisface el siguiente

sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (2.1)$$

donde $f : D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y f es de clase C^1 en D .

2.1.1 Control admisible y funcional objetivo

Un *control admisible* es una trayectoria de control, $u(t)$, con $t \in [t_0, t_1]$, que es continua a trozos y que además, cumple la condición de que $u \in \Omega$ donde $\Omega = \{g : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m\}$, siendo $\Omega(t)$ el conjunto que representa las restricciones físicas al valor de las variables de control, en el tiempo t .

El *funcional objetivo* es una medida cuantitativa del comportamiento del sistema en el tiempo t . Se consideran funcionales objetivo del tipo:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} F[x(t), u(t), t] dt + S[x(t_1)], \quad (2.2)$$

donde, $F : D' \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $S : D'' \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, F es de clase C^1 en D' y S también es de clase C^1 en D'' .

El primer sumando del funcional, F , en (2.2) depende de los valores que van tomando $x(t)$ y $u(t)$ a lo largo del horizonte temporal y, por tanto, evalúa el comportamiento del sistema a través del tiempo. El segundo sumando, mide el estado en el que queda el sistema al final del intervalo de tiempo que constituye el horizonte temporal del problema.

En términos de los conceptos anteriores, el *control óptimo* se define como un control admisible que maximiza el funcional objetivo. En otras palabras, dado un sistema dinámico, que proviene de un sistema de EDO's, con condición inicial x_0 , y que evoluciona en el tiempo de acuerdo con la ecuación de estado $\dot{x} = f(x, u, t)$. La teoría de control óptimo tiene como problema central encontrar el vector de control que sea admisible y haga que el funcional objetivo alcance el valor máximo, es decir,

$$\max_{u(t)} J = \max_{u(t)} \left(\int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t) dt + S[x(t_1)] \right), \quad (2.3)$$

donde $\dot{x} = f(x, u, t)$, con: $x(t_0) = x_0$ y $u(t) \in \Omega(t)$.

La variable de control, $u^*(t)$, que resuelve el problema se llama *control óptimo* y el vector $x^*(t)$, determinado por la ecuación de estado a partir de $u^*(t)$, se llama *trayectoria de estado óptima* o *camino óptimo*.

2.1.2 Diferentes formas del funcional objetivo

El funcional del tipo considerado anteriormente es la forma más general del funcional. Se dice que está en la *forma de Bolza* si:

$$\max_{u(t)} \left(\int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t) dt + S[x(t_1)] \right), \quad (2.4)$$

sujeto a: $\dot{x} = f(x, u, t)$, con: $x(t_0) = x_0$, $u(t) \in \Omega(t)$.

Se tienen los siguientes casos especiales: si el funcional es $J = S[x(t_1)]$, es decir, si $\int_{t_0}^{t_1} F = 0$, entonces se dice que el problema de control óptimo está en la *forma de Mayer*; mientras que si $S = 0$, pero $F \neq 0$, se dice que el funcional está en la *forma de Lagrange*.

En el siguiente teorema se ve que cada una se puede enunciar de cualquiera de las otras dos formas. Dicho teorema establece tres equivalencias y se enuncia así:

Teorema 2.1.1 *Los tres problemas siguientes son equivalentes.*

- (1) *El problema de control óptimo, con funcional objetivo en la forma de Bolza.*
- (2) *El problema de control óptimo, pero con funcional objetivo en la forma de Lagrange.*
- (3) *El problema de control óptimo, pero con funcional objetivo en la forma de Mayer.*

Demostración 2.1.1

(2) \Rightarrow (3) *Lagrange* \Rightarrow *Mayer*.

De acuerdo a la forma general, dada por (2.4), el problema de control óptimo con funcional objetivo tipo Lagrange tiene la forma:

$$\max_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t) dt, \quad (2.5)$$

sujeto a: $\dot{x} = f(x, u, t)$, con: $x(t_0) = x_0$, $u(t) \in \Omega(t)$.

Para mostrar que éste se puede escribir como problema de Mayer, introducimos una nueva variable de estado: $x_{n+1}(t)$ y se considera que ésta satisface

$$\dot{x}_{n+1}(t) = F(x, u, t),$$

con $x_{n+1}(t_0) = 0$. Si sustituímos la derivada de esta nueva variable en (2.5), tenemos:

$$\max_{u(t)} \int_{t_0}^{t_1} \dot{x}_{n+1}(t) dt = [x_{n+1}(t)]_{t_0}^{t_1} = x_{n+1}(t_1), \quad (2.6)$$

Y, de acuerdo a la forma general (2.4), la ecuación (2.6) corresponde al problema de control óptimo con funcional objetivo en la forma de Mayer, donde $S[x(t_1)] = x_{n+1}(t_1)$.

(1) \Rightarrow (3) Bolza \Rightarrow Mayer.

Partiendo del problema (2.4), introducimos una nueva variable, $\dot{x}_{n+1}(t) = F(x, u, t)$ (como en el caso anterior). Llegamos a que el problema dado se puede expresar como:

$$\max_{u(t)} J = x_{n+1}(t_1) + S[x(t_1)],$$

Sea $S[x(t_1)] = x_{n+1}(t_1) + S[x(t_1)]$, de esta forma, la última expresión tiene la forma de Mayer, según la ecuación (2.4).

(1) \Rightarrow (2) Bolza \Rightarrow Lagrange.

Dado el problema más general,

$$\max_{u(t)} \left(\int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t) dt + S[x(t_1)] \right),$$

sujeto a: $\dot{x} = f(x, u, t)$, con: $x(t_0) = x_0$, $u(t) \in \Omega(t)$.

Se verifica que:

$$S[x(t_1)] - S[x(t_0)] = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} S[x(t)] dt = \int_{t_0}^{t_1} \nabla S(x) \cdot \dot{x}(t) dt$$

Para cada función admisible $x(t)$, $S[x(t_0)] = S[x_0]$.

Por lo que, $u^*(t)$ es la solución óptima del problema de Bolza si y sólo si $u^*(t)$ es solución óptima del siguiente problema:

$$\max_{u(t)} \left(\int_{t_0}^{t_1} [F(x, u, t) + \nabla S(x) \cdot f(x, u, t)] dt \right), \quad (2.7)$$

sujeto a: $\dot{x} = f(x, u, t)$, con: $x(t_0) = x_0$, $u(t) \in \Omega(t)$.

La integral (2.7) representa al problema de control óptimo, con funcional objetivo de Lagrange.

(3) \Rightarrow (2) Mayer \Rightarrow Lagrange.

Procediendo de forma similar al caso anterior, pero con $F = 0$, el problema se reduce a:

$$\max_{u(t)} J = \int_{t_0}^{t_1} \nabla S(x) \cdot f(x, u, t) dt,$$

sujeto a: $\dot{x} = f(x, u, t)$, con: $x(t_0) = x_0$, $u(t) \in \Omega(t)$. Obtenemos el problema de Lagrange.

(2) \Rightarrow (1) Lagrange \Rightarrow Bolza.

El problema en la forma de Lagrange, ya está en realidad con objetivo en la forma de Bolza, pero siendo $S = 0$.

(3) \Rightarrow (1) Mayer \Rightarrow Bolza.

El problema en la forma de Mayer, ya está en realidad con objetivo en la forma de Bolza, pero con $F = 0$. \blacklozenge

2.1.3 El principio del máximo de Pontryagin

El principio del máximo de Pontryagin da condiciones necesarias que debe cumplir el control óptimo del problema que estamos considerando. Se trata de resolver el problema general (2.4):

$$\max_{u(t)} \left(\int_{t_0}^{t_1} F(x, u, t) dt + S[x(t_1)] \right),$$

sujeto a: $\dot{x} = f(x, u, t)$, con $x(t_0) = x_0$ y $u(t) \in \Omega(t)$.

Se define el Hamiltoniano (ver Apéndice A) asociado al problema anterior, de la siguiente forma:

$$H(x, u, \lambda, t) = F(x, u, t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i(x, u, t) = F(x, u, t) + \lambda \cdot f(x, u, t), \quad (2.8)$$

donde, para cada $t \in [t_0, t_1]$, $\lambda(t) = (\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t))$ es un vector de variables adjuntas o variables de coestado. $H : D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Teorema 2.1.2 Sean $u^*(t)$ la trayectoria óptima de control, continua a trozos y $x^*(t)$ la trayectoria de estado óptima asociada, definidas en el intervalo $[t_0, t_1]$. Entonces, existe una función vectorial $\lambda^*(t) = (\lambda_1^*(t), \dots, \lambda_n^*(t))$ continua que posee primeras derivadas continuas a trozos, tal que para cada $t \in [t_0, t_1]$, se verifica la igualdad

$$(1) \quad \dot{\lambda}_i^*(t) = - \frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t)}{\partial x_i}, \quad (2.9)$$

para cada $i = 1, \dots, n$.

En todos los puntos de continuidad de $u^*(t)$,

$$\text{con } \lambda_1^*(t_1) = \frac{\partial S[x^*(t_1)]}{\partial x_1}, \dots, \lambda_n^*(t_1) = \frac{\partial S[x^*(t_1)]}{\partial x_n}.$$

$$(2) \quad H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \geq H(x^*(t), u(t), \lambda^*(t), t), \quad (2.10)$$

para todo $u(t) \in \Omega(t)$.

(3)

$$\dot{x}_i^*(t) = f_i(x^*(t), u^*(t), t), \quad (2.11)$$

para cada $i = 1, \dots, n$, en todos los puntos de continuidad de $u^*(t)$, con $x_1^*(t_0) = x_{10}, \dots, x_n^*(t_0) = x_{n0}$.

Demostración 2.1.2 Considerando el problema de control óptimo:

$$\max_{u(t)} \left(\int_{t_0}^{t_1} F(x(t), u(t), t) dt + S[x(t_1)] \right), \quad (2.12)$$

sujeto a: $\dot{x} = f(x(t), u(t), t)$, con: $x(t_0) = x_0$, $u(t) \in \Omega(t) = \mathbb{R}$.

En donde se considera que la variable de control u no está sujeta a restricciones.

El Hamiltoniano asociado al problema (2.12) es:

$$H(x, u, \lambda, t) = F(x, u, t) + \lambda(t)f(x, u, t).$$

Por verificarse que $\dot{x} = f(x, u, t)$, equivalentemente $f(x, u, t) - \dot{x} = 0$ para todo $t \in [t_0, t_1]$, de donde se deduce que, para cualquier $\lambda(t)$ continua con derivada continua a trozos en \mathbb{R} .

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)[f(x, u, t) - \dot{x}] dt = 0$$

Sumando el valor de esta integral al funcional objetivo, se obtiene que:

$$\begin{aligned} J &= \int_{t_0}^{t_1} [F(x, u, t) + \lambda(t)[f(x, u, t) - \dot{x}]] dt + S[x(t_1)] \\ &= \int_{t_0}^{t_1} H(x, u, \lambda, t) dt - \int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)\dot{x} dt + S[x(t_1)]. \end{aligned}$$

Calculando la integral por partes,

$$\int_{t_0}^{t_1} \lambda(t)\dot{x}(t) dt = \lambda(t)[x(t)]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} x\dot{\lambda}(t) dt = \lambda(t_1)x(t_1) - \lambda(t_0)x_0 - \int_{t_0}^{t_1} x\dot{\lambda}(t) dt.$$

Quedando:

$$J = \int_{t_0}^{t_1} [H(x, u, \lambda, t) + x\dot{\lambda}(t)] dt - \lambda(t_1)x(t_1) + \lambda(t_0)x_0 + S[x(t_1)]$$

Para cualquier trayectoria de control $u(t)$, con trayectoria de estado asociada $x(t)$, verificandose, por tanto, que $\dot{x} = f(x, u, t)$, con $x(t_0) = x_0$.

Sea $u^*(t)$ la trayectoria de control óptimo. Perturbamos dicha trayectoria con una función $\alpha(t)$ arbitraria, continua a trozos. Sea $u_\varepsilon(t) = u^*(t) + \varepsilon\alpha(t)$, para cada $t \in [t_0, t_1]$, $\alpha(t)$ fija y ε un parámetro, $u_0(t) = u^*(t)$ para cada $t \in [t_0, t_1]$.

Sea $x^*(t)$ la trayectoria de estado óptima asociada al control $u^*(t)$. Sea $x(t, \varepsilon)$, la trayectoria asociada al control $u_\varepsilon(t)$. Se supone que $x(t, \varepsilon)$ es una función continua, con derivada parcial con respecto a ε continua, $x(t, 0) = x^*(t)$ para cada $t \in [t_0, t_1]$.

Si se toman como dados $u^*(t)$ y $\alpha(t)$, entonces el valor del funcional objetivo asociado a $u_\varepsilon(t)$ y $x(t, \varepsilon)$ depende exclusivamente de ε y su valor es:

$$J(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} H(x(t, \varepsilon), u^*(t) + \varepsilon\alpha(t), \lambda(t), t) + x(t, \varepsilon)\dot{\lambda}(t) dt - \lambda(t_1)x(t_1, \varepsilon) + \lambda(t_0)x_0 + S[x(t_1, \varepsilon)].$$

Como $u^*(t)$ es el control óptimo y $x^*(t)$ es la trayectoria óptima de estado, $J(\varepsilon)$ alcanzará el máximo valor para $\varepsilon = 0$, por lo que se cumplirá la condición necesaria de optimalidad: $J'(0) = 0$.

Derivando $J(\varepsilon)$, con respecto a ε , se obtiene:

$$J'(\varepsilon) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial H}{\partial u} \alpha(t) + \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} \dot{\lambda} \right] dt - \lambda(t_1) \frac{\partial x(t_1, \varepsilon)}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial S[x(t_1, \varepsilon)]}{\partial \varepsilon}.$$

En donde $\frac{\partial H}{\partial x}$ y $\frac{\partial H}{\partial u}$ están definidos en $(x(t, \varepsilon), u^*(t) + \varepsilon\alpha(t), \lambda(t), t)$.

En particular, para $\varepsilon = 0$, e igualando a cero, nos queda:

$$J'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\left(\frac{\partial H^*}{\partial x} + \dot{\lambda} \right) \frac{\partial x}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial H^*}{\partial u} \alpha(t) \right] dt - \lambda(t_1) \frac{\partial x(t_1, 0)}{\partial \varepsilon} + S'[x(t_1)] \frac{\partial x(t_1, 0)}{\partial \varepsilon} = 0$$

En donde, $\frac{\partial H^*}{\partial x} = \frac{\partial H(x^*, u^*, \lambda, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial H^*}{\partial u} = \frac{\partial H(x^*, u^*, \lambda, t)}{\partial u}$.

Como el efecto exacto que produce en la variable de estado una modificación de la variable de control, es decir $\frac{\partial x}{\partial \varepsilon}$, es difícil determinar, entonces se selecciona $\lambda(t)$ de

manera que no haya necesidad de calcularlo, por lo que $\lambda^*(t)$ se toma de manera que verifique:

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H(x^*, u^*, \lambda^*, t)}{\partial x},$$

$$\lambda^*(t_1) = \frac{dS[x^*(t_1)]}{dx}$$

quedando

$$J'(0) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial H(x^*, u^*, \lambda^*, t)}{\partial u} \alpha(t) dt = 0$$

Que tiene que ser cierto para cualquier función $\alpha(t)$ continua a trozos. En particular, tomando:

$$\alpha(t) = \frac{\partial H(x^*, u^*, \lambda^*, t)}{\partial u},$$

Se tiene que cumplir la siguiente igualdad:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{\partial H(x^*, u^*, \lambda^*, t)}{\partial u} \right]^2 dt = 0$$

De donde, se deduce que:

$$\frac{\partial H(x^*, u^*, \lambda^*, t)}{\partial u} = 0$$

para toda $t \in [t_0, t_1]$.

Por tanto, hemos deducido que existe una función $\lambda^*(t)$ continua con derivada continua a trozos, tal que para cada $t \in [t_0, t_1]$, se verifica que:

$$(1) \dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t)}{\partial x}, \text{ en todos los puntos de continuidad de } u^*(t), \text{ con}$$

$$\lambda^*(t_1) = \frac{dS[x^*(t_1)]}{dx}.$$

$$(2) \frac{\partial H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t)}{\partial u} = 0, \text{ que es una condición necesaria para que}$$

$$H(x^*, u^*, \lambda^*, t) \geq H(x^*, u, \lambda^*, t), \text{ para todo } u \in \mathbb{R}.$$

$$(3) \dot{x}^*(t) = f(x^*(t), u^*(t), t), \text{ en todos los puntos de continuidad de } u^*(t), \text{ con } x^*(t_0) = x_0.$$

Por lo tanto, se han obtenido las condiciones que constituyen el principio del máximo de Pontryagin. ♦

Horizonte temporal infinito

En el caso de problemas en los que el instante final t_1 no es finito, es decir, considerando el problema siguiente,

$$\max_u \int_0^{\infty} F(x, u, t) dt,$$

sujeto a $\dot{x} = f(x, u, t)$, con $x(0) = x_0$ y $u(t) \in \Omega(t)$.

Es habitual considerar esta formulación en problemas de índole económico, esto debido a que muchas veces no se puede imponer una condición final para el *stock*, pues no se conoce. El estudio de problemas con horizonte temporal infinito permite la utilización de ciertos instrumentos matemáticos que no son válidos para el caso finito. Se presentan en general dos tipos de dificultades:

1. Convergencia de la integral.

Si para cada control admisible se verifica que $J = \int_0^{\infty} F(x, u, t) dt$, es un número real, se puede seguir utilizando la misma definición de óptimo que se considera para un horizonte finito, y no aparece ninguna dificultad adicional desde el punto de vista del funcional objetivo.

Un caso interesante sería si el integrando tiene la forma

$$F(x, u, t) = e^{-\delta t} G(x, u, t),$$

siendo $\delta \geq 0$, la tasa de descuento y $G(x, u, t)$ una función acotada, es decir, que existe $K \in \mathbb{R}$, tal que

$$|G(x, u, t)| \leq K,$$

para toda $u \in \Omega$, $t \in [0, \infty)$, x factible.

Con estas condiciones, dado que

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} G(x, u, t) dt \leq K \int_0^{\infty} e^{-\delta t} dt = \frac{K}{\delta},$$

la integral es convergente para cada control admisible.

Si no se verifica que para cada control admisible la integral del objetivo es convergente, el problema no tiene solución, con el criterio de optimalidad antes definido. Existen otros criterios de optimalidad más generales, pero en este caso no los consideramos.

2. Condiciones finales.

- ★ El estado del sistema tiende a un estado estacionario dado, es decir, $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_s$.
- ★ No se da ninguna condición final para el estado del sistema. Si el problema tiene descuento temporal en el objetivo, se aplica el principio del máximo, utilizando $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = 0$.
- ★ Se da la condición final $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq x_1$. Para $t \in [0, T]$ y $T \rightarrow \infty$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t)[x(t) - x_1] = 0$

Una vez expuesto los resultados necesarios, enseguida presentamos su uso en problemas de pesquerías. Empezamos con el caso más simple.

2.2 Modelos pesquería y control óptimo

2.2.1 Primer modelo

Para un único pescador se considera el problema de encontrar:

$$\max_{0 \leq E \leq E_{\max}} \int_0^T pcE(t)N(t)dt, \quad (2.13)$$

sujeto a

$$\frac{dN}{dt} = f(N) - cEN, \quad (2.14)$$

donde $N(0) = K$. La ecuación $\dot{N}(t)$ proviene del modelo de la sección 1.2.5, donde el nivel de *stock*, $N(t)$, es la variable de estado; mientras que el esfuerzo de pesca, $E(t)$, es la variable de control. La expresión $pcEN$, tomada también de la misma sección, representa la venta total del pescador y es la que queremos maximizar.

De acuerdo al teorema simplificado de Pontryagin, el primer paso para resolver este problema es formar el Hamiltoniano:

$$H = c(p - \lambda)EN + \lambda f(N)$$

La primera condición del Teorema 2.1.2 nos pide encontrar la ecuación diferencial del vector de variables adjuntas, ecuación (2.9),

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial N} = -c(p - \lambda)E - \lambda f'(N),$$

con condición terminal $\lambda(T) = 0$, ya que $\frac{dS[N(T)]}{dN} = 0$, por ser $S(N(T)) = 0$.

El siguiente paso es maximizar el Hamiltoniano, pero ya que éste es lineal en la variable de control E , se escoge a E como,

$$E(t) = \begin{cases} E_{\max}, & \lambda(t) < p, \\ 0, & \lambda(t) > p \end{cases}$$

Es posible que $\lambda(t) = p$, dentro de un intervalo y en este caso, $f'(N) = 0$, pues $0 = \frac{d\lambda}{dt} = -\lambda f'(N)$. Para el cual debemos mantener el *stock* a un nivel que maximice el rendimiento sostenible, $N(t) = N_{RMS}$. De esta forma, de (2.14), se debe escoger la variable de control que mantenga el *stock* en ese nivel:

$$E_{RMS}(t) = \frac{f(N_{RMS})}{cN_{RMS}}$$

La ecuación diferencial para la variable adjunta no tiene condición inicial, pero podemos determinar un rango de valores posibles de $\lambda(0)$.

- Si $\lambda(0) > p$, $E(t) = 0$ y por ende $\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda f'(N)$ y ya que $f'(K) < 0$, la variable adjunta crecerá. No habrá pesca y λ continuará creciendo para todo t , sin satisfacer la condición terminal. Así, esta desigualdad no es válida.
- Si $0 < \lambda(0) < p$, entonces $E(t) = E_{\max}$. El valor de $\lambda(0)$ dependerá de cuanto tiempo T se tenga. Ambos casos se pueden observar en la figura 2.1.
 - ★ Si la pesca se lleva a cabo en poco tiempo, entonces $\lambda(0)$ es cercana a cero, $\frac{d\lambda}{dt} = -cpE_{\max} < 0$ y así la variable adjunta tiende a cero. La estrategia es pescar tanto como se pueda durante ese tiempo T pequeño y dejar a los demás pescadores lo restante. La solución de la EDO (2.14), con $E = E_{\max}$, se puede observar en la figura 2.1.
 - ★ Si uno lleva a cabo la pesca en un tiempo mayor, se debe escoger $\lambda(0) = p$, en ese punto se aplica el control singular $E_{RMS}(t)$, el máximo rendimiento sostenible. Sin embargo, en algún momento antes de terminar la pesca, si el pescador es codicioso, se querrá aumentar la tasa de explotación (a E_{\max}) y la variable adjunta regresará hacia $\lambda(T) = 0$.

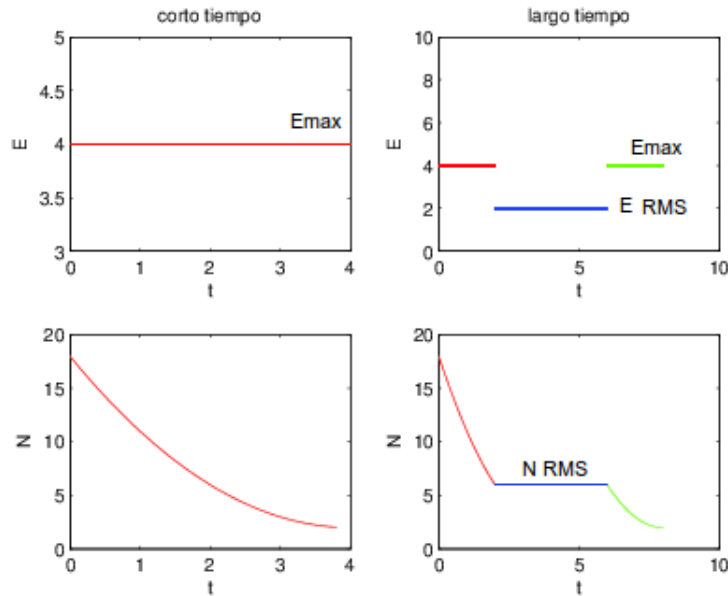


Figura 2.1: Escenarios de pesca óptima.

2.2.2 Primer modelo con descuento

Si ahora agregamos un término a la ecuación (2.13), $e^{-\delta t}$, que representa la tasa de descuento que reduce el valor de los ingresos futuros, en relación con los ingresos reales (en el presente). A esto se le conoce como un “*factor Whimpy*”, es decir, los ingresos reales son más valiosos que los ingresos futuros, aunque sea sólo porque los ingresos reales se pueden invertir con alguna tasa de ganancia. El problema de control es ahora,

$$\max_{0 \leq E \leq E_{\max}} \int_0^T e^{-\delta t} pcE(t)N(t)dt, \quad (2.15)$$

sujeto igualmente a la ecuación diferencial,

$$\frac{dN}{dt} = f(N) - cEN, \quad (2.16)$$

con condición inicial $N(0) = K$.

El Hamiltoniano toma la forma,

$$H = c(pe^{-\delta t} - \lambda)EN + \lambda f(N).$$

Sea $\sigma = pe^{-\delta t} - \lambda$, la *función de switching*, la cual juega un papel muy importante en el análisis.

La ecuación de la variable adjunta ahora es,

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta N} = -c(pe^{-\delta t} - \lambda)E - \lambda f'(N).$$

Para maximizar el Hamiltoniano con respecto a E , nos fijamos que la variable de control depende ahora de *función switching*,

$$E(t) = \begin{cases} E_{max}, & \lambda < pe^{-\delta t}, \\ 0, & \lambda > pe^{-\delta t}. \end{cases}$$

Pero podría pasar que la *función de switching* sea cero para todo el intervalo, por lo que $\lambda = pe^{-\delta t}$ y si derivamos la expresión con respecto a t ,

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\delta pe^{-\delta t} = -\delta\lambda.$$

Pero por otro lado, si sustituimos este valor de λ en la EDO de la variable adjunta,

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\lambda f'(N).$$

Así que, $f'(N) = \delta$.

Igual que en el primer modelo, el rendimiento máximo sostenido se alcanza cuando $f'(N) = 0$, ya que $f(N)$ es la ecuación logística (como se vió en la subsección 1.2.5), la pendiente de f es una función monótona decreciente, así la pendiente es positiva sólo si $N < N_{RMS}$. Cuanto mayor sea el valor de δ menor será el de N . Véase la figura 2.2.

El resultado anterior cumple con el principio fundamental de los recursos renovables: “A tasas de descuento mayores se tiene una conservación menor de los recursos biológicos”. En conclusión, si la tasa de descuento es mayor que la tasa intrínseca de crecimiento, es decir, $\delta > r$, se predice que el dueño (ignorando costos) llevará a la extinción al *stock*. Si la población crece muy lentamente, el propietario tomará ventaja del recurso para tener un buen resultado económico e invertirá el dinero en algo que tenga un tasa de rendimiento mayor.

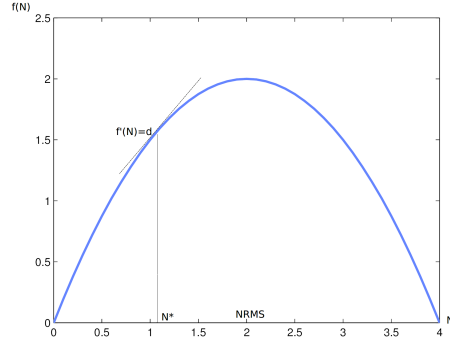


Figura 2.2: Sobre-pesca.

2.2.3 Primer modelo con función de ingresos no-lineal

Si la tasa de pesca depende del esfuerzo pesquero, $h = pcEN$, pero este ingreso es ahora no lineal, que aumenta, pero como una función de cosecha que cumple con las condiciones siguientes: $R'(h) > 0$, $R''(h) < 0$, véase la figura 2.3. Se considera que los ingresos aumentan con la captura, pero a una razón decreciente. Se puede inundar el mercado y reducir el precio por pescado.

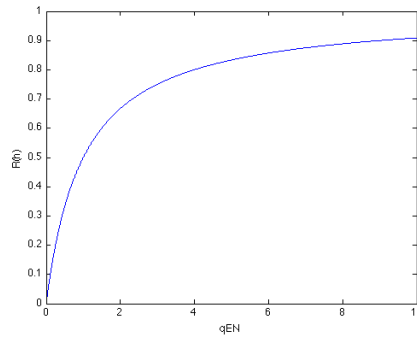


Figura 2.3: Rendimiento de ingresos decreciente.

El dueño que desee maximizar los ingresos con descuento debe encontrar:

$$\max_{0 \leq h \leq h_{\max}} \int_0^T e^{-\delta t} R(h) dt, \quad (2.17)$$

sujeto a

$$\frac{dN}{dt} = f(N) - h, \quad (2.18)$$

y condición inicial $N(0) = K$. La tasa de pesca h es la variable de control.

El Hamiltoniano para este problema es $H = e^{-\delta t} R(h) + \lambda[f(N) - h]$. Ya que es una función no-lineal de la tasa de pesca, buscamos un máximo local (interior):

$$\frac{\delta H}{\delta h} = e^{-\delta t} R'(h) - \lambda = 0,$$

o $\lambda = e^{-\delta t} R'(h)$, de donde,

$$\frac{\delta^2 H}{\delta h^2} = e^{-\delta t} R''(h) < 0,$$

por lo cual tenemos un máximo local.

Además, derivando $\lambda = e^{-\delta t} R'(h)$,

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\delta e^{-\delta t} R'(h) + e^{-\delta t} R''(h) \frac{dh}{dt}.$$

Por otro lado,

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\delta H}{\delta N} = -\lambda f'(N) = -e^{-\delta t} R'(h) f'(N),$$

De donde, igualando ambas ecuaciones y despejando $\frac{dh}{dt}$, se tiene que,

$$\frac{dh}{dt} = [\delta - f'(N)] \frac{R'(h)}{R''(h)}.$$

Ya que se quiere conocer tanto el nivel de *stock*, como la tasa de pesca, se presenta el sistema autónomo de dos ecuaciones diferenciales ordinarias siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= f(N) - h, \\ \frac{dh}{dt} &= [\delta - f'(N)] \frac{R'(h)}{R''(h)}. \end{aligned}$$

El cual se puede analizar cualitativamente, encontrando las ceroclinas y un punto de equilibrio en la intersección de éstas. Véase la figura 2.4. La naturaleza del equilibrio

puede obtenerse analizando lo obtenido en la matriz de Jacobi para ese punto en cuestión. La ecuación característica es:

$$\lambda^2 - \delta\lambda - f''(N^*)[R'(h^*)/R''(h^*)] = 0.$$

Si se notan los cambios de signo en los coeficientes de la ecuación (+, -, -), por la regla de Descartes, tenemos que el punto de equilibrio es un punto silla. Véase la figura 2.5.

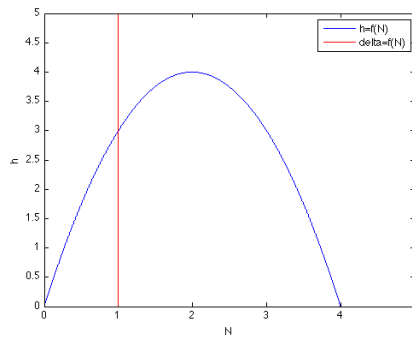


Figura 2.4: Plano fase (N, h) .

Se pueden determinar las direcciones de los vectores propios de la matriz Jacobiana. Si se dan las condiciones inicial y terminal de la variable de estado, podemos encontrar una órbita que se mueve entre estos valores, en un tiempo T específico. Si T crece, se escogen órbitas que se acerquen lo suficiente al punto singular (N^*, h^*) .

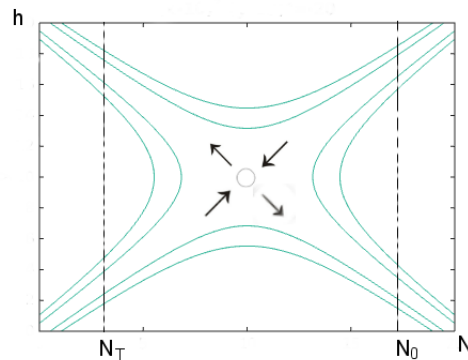


Figura 2.5: Punto silla de la pesquería.

2.2.4 Modelo de pesquerías para dos especies

Si consideramos además de las ventas, los costos que invierte la pesquería, qE , con el objetivo de obtener la ganancia total, el problema de control está dado por:

$$\max_{0 \leq E \leq E_{\max}} \int_0^T e^{-\delta t} [pcN(t) - q]E(t) dt, \quad (2.19)$$

sujeto a

$$\frac{dN}{dt} = f(N) - cEN, \quad (2.20)$$

y condición inicial $N(0) = K$. Donde N es la variable de estado, que representa al *stock* de peces y E representa la variable de control, mencionados desde el primer modelo.

El Hamiltoniano de este problema está dado por:

$$H = [e^{-\delta t}(pcN - q) - \lambda cN]E + \lambda f(N)$$

El coeficiente de E es $\sigma = [e^{-\delta t}(pcN - q) - \lambda cN]$, la *función switching*. Si ésta es igual a cero, tenemos,

$$\lambda = e^{-\delta t} \left(p - \frac{q}{cN} \right).$$

Calculando la derivada con respecto a t de λ y obteniendo $\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial N}$, de la igualdad de ambas expresiones se tiene que,

$$f'(N) = \delta - \frac{qf(N)}{N(pcN - q)}$$

Cualquier N^* que satisfaga esta ecuación es una solución singular del problema de control original. Si re-escribimos la última ecuación de la siguiente forma:

$$f'(N) = \delta - \frac{\frac{q}{cN^2}f(N)}{p - \frac{q}{cN}}.$$

Multiplicando la última expresión por el denominador $p - \frac{q}{cN}$ de ambos lados y rearreglando términos, obtenemos:

$$\left[\left(p - \frac{q}{cN} \right) f'(N) + \frac{q}{cN^2} f(N) \right] = \delta \left(p - \frac{q}{cN} \right),$$

o

$$\frac{dS}{dN} = \delta \left(p - \frac{q}{cN} \right),$$

donde

$$S = \left(p - \frac{q}{cN} \right) f(N),$$

es la renta sustentable.

Si $\delta = 0$, entonces $\frac{dS}{dN} = 0$, lo que implica escoger un nivel de *stock* que maximice la renta sustentable.

Para la ecuación logística, tenemos que:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left(1 - \frac{N}{K} \right) - cEN.$$

Si la pesca se mantiene en un nivel de equilibrio ($dN/dt = 0$), necesitamos que,

$$cE^* = r \left(1 - \frac{N^*}{K} \right).$$

Así, el nivel de *stock* de equilibrio es una función decreciente que corresponde al nivel de esfuerzo,

$$N^* = K \left(1 - \frac{cE^*}{r} \right).$$

Y el rendimiento de equilibrio es una función cuadrática del esfuerzo,

$$cE^*N^* = cKE^* \left(1 - \frac{cE^*}{r} \right).$$

La renta sustentable puede escribirse como: $S = pcE^*N^* - qE^*$. El primer término del lado derecho de la expresión es proporcional al rendimiento y es una función cuadrática del esfuerzo, véase la figura 2.6. El segundo término es el costo de pesca por unidad de tiempo y es una función lineal del esfuerzo.

La renta sustentable es simplemente la diferencia entre los ingresos y los costos para un determinado nivel de esfuerzo.

Para maximizar la renta, necesitamos maximizar esta diferencia, lo hacemos mediante la elección del nivel de esfuerzo para que la pendiente de la curva de los ingresos sea idéntica a la pendiente a lo largo de la función de costos. Típicamente, este esfuerzo será menor que lo necesario para el máximo rendimiento sostenible. Los costos conducen a reducir la pesca y hay mayor conservación de la población.

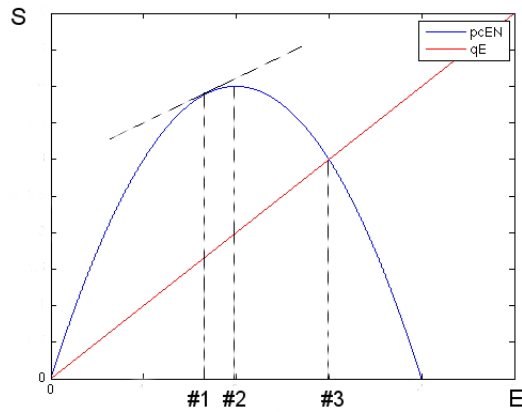


Figura 2.6: Renta sustentable máxima. #1 = Renta sustentable máxima. #2 = Rendimiento sustentable máximo. #3 = Equilibrio de acceso abierto.

Cuando $\delta = \infty$, tasa de descuento infinita, dS/dN es no acotada. Requerimos necesariamente que $pcN^* = q$, la renta sustentable esa cero. Si hay costos, aumenta en la tasa de descuento necesaria para la no extinción del *stock*. Mas bien, el pescador empieza a buscar más y más la pesca de libre acceso: toda la renta económica se mal gasta.

Una vez revisados estos ejemplos, podremos aplicar la teoría de control óptimo en los modelos de población con cosecha del siguiente capítulo.

Capítulo 3

Modelos de presa-depredador en pesquerías con respuesta funcional

A diferencia del estudio realizado en la subsección 1.2.5 en la que se incorporó el esfuerzo pesquero como una de las variables de estado del sistema de EDO, aquí interviene como un parámetro que pudiera depender del tiempo. Así, en este capítulo se consideran modelos de tipo presa-depredador en los que los términos de interacción son respuestas funcionales de Holling (véase la subsección 1.2.3) y supondremos que ambas poblaciones son sometidas a cosecha. Además de la dinámica asociada a este sistema, estamos interesados en obtener las condiciones que dan el rendimiento máximo sostenible. Para este fin, utilizaremos el Principio del Máximo de Pontryagin.

El contenido del capítulo que estamos empezando está organizado como sigue. En la sección 3.1 se estudia un modelo que describe la interacción de tipo presa-depredador en el que la interacción la da una respuesta funcional y numérica de Holling II y la razón de cosecha de las dos poblaciones es directamente proporcional a las respectivas densidades poblacionales. En la sección 3.2 se considera una respuesta funcional (y numérica) de Holling tipo IV; mientras que en la última, la sección 3.3, se incorpora no sólo la respuesta funcional tipo IV, sino la competencia intraespecífica en la especie depredador. En todos los casos los análisis se complementan con las correspondientes simulaciones numéricas que dan el retrato fase de cada sistema. Esto en el régimen de parámetros apropiado.

3.1 Modelo con respuesta funcional Holling tipo II

El modelo que aquí estudiamos incorpora la razón de cosecha en las dos especies. En ésta se incluyen los esfuerzos de pesca como controles para romper la conducta cíclica del sistema y conducirlo al estado requerido. La redacción de esta subsección está basada en la referencia [18]. Así, sean $x(t)$ y $y(t)$ la densidad de presas y depredadores al tiempo t , respectivamente. Luego, el modelo que consideramos es,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta xy}{1 + bx} - q_1 E_1 x \\ \frac{dy}{dt} &= -\gamma y + \frac{c\beta xy}{1 + bx} - q_2 E_2 y\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $\alpha > 0$ es la tasa de crecimiento intrínseco de la presa; mientras que K es la capacidad de carga de la presa, en ausencia de depredadores y de pesca; $c > 0$ es el número de depredadores que acaban de nacer; $\gamma > 0$ es la tasa de muerte del depredador; E_1 y E_2 son los esfuerzos de pesca; mientras que $q_1 E_1 x$ y $q_2 E_2 y$ representan la tasa de captura de las respectivas especies, donde q_1 y q_2 son los coeficientes de capturabilidad de presa y depredador, respectivamente.

El término $\beta x/(1 + bx)$ representa la respuesta funcional de Holling del tipo II del depredador.

Las componentes del campo vectorial que definen al sistema (3.1) son continuamente diferenciables en la región $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0\}$ y por lo tanto son de Lipschitz ahí. Entonces, para cualquier condición inicial $(x(0), y(0)) \in \mathbb{R}_+^2$, la solución del sistema (3.1) existe y es única. Además, todas las soluciones del sistema que comienzan con condiciones iniciales positivas, están acotadas uniformemente. Esto es lo que asegura el siguiente teorema. Antes de enunciarlo introduzcamos la siguiente definición.

Definición 3.1.1 *Sea $\{\varphi_\eta\}$ una familia de funciones definidas en un conjunto $E \in \mathbb{R}^n$ con valores en \mathbb{R}^n . Se dice que $\{\varphi_\eta\}_{\eta \in A}$ está acotada uniformemente en E si existe un número real $\mu > 0$ tal que para todo $x \in E$ y todo $\eta \in A$ se verifica que*

$$|\varphi_\eta(x)| \leq \mu$$

En este modelo, A representa el conjunto de parámetros positivos definidos anteriormente y $E = \mathbb{R}_+^2$.

Teorema 3.1.1 *Todas las soluciones del sistema (3.1) que empiezan en \mathbb{R}_+^2 , están acotadas uniformemente.*

Demostración 3.1.1 *Sea $w = x + \frac{1}{c}y$, derivando con respecto al tiempo en ambos lados y sustituyendo \dot{x} y \dot{y} como aparecen en (3.1), se obtiene,*

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} &= \frac{dx}{dt} + \frac{1}{c} \frac{dy}{dt} = \\ &\alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta xy}{1+bx} - q_1 E_1 x - \frac{\gamma}{c} y + \frac{\beta xy}{1+bx} - \frac{q_2 E_2}{c} y \end{aligned}$$

Para toda $v > 0$, formemos el término $\dot{w} + vw$, obteniéndose,

$$\frac{dw}{dt} + vw = -\frac{\alpha}{K} \left(x - \frac{K}{2\alpha} (\alpha + v - q_1 E_1) \right)^2 + \frac{K}{4\alpha} (\alpha + v - q_1 E_1)^2 - \frac{y}{c} (\gamma + q_2 E_2 - v).$$

Como el primer término es siempre menor o igual a cero, entonces se cumple la desigualdad,

$$\frac{dw}{dt} + vw \leq \frac{K}{4\alpha} (\alpha + v - q_1 E_1)^2 - \frac{y}{c} (\gamma + q_2 E_2 - v).$$

De donde al escoger v tal que $v > \gamma + q_2 E_2$, para todo $y > 0$, el lado derecho de la desigualdad anterior es siempre positivo. Si E_1 y E_2 están acotadas, entonces el lado derecho está acotado para toda $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. Denotemos por $\mu > 0$ a dicha cota.

Reescribimos la desigualdad como $\frac{dw}{dt} + vw < \mu$, con $\mu > 0$ y por la teoría de las desigualdades diferenciales (véase Apéndice A), $0 < w(x, y) < \frac{\mu}{v} (1 - e^{-vt}) + w(x_0, y_0) e^{-vt}$.

Si $t \rightarrow \infty$, $0 < w < \frac{\mu}{v}$, o bien recordando que $w = x + \frac{1}{c}y$ se tiene que todas las soluciones del sistema (3.1) que comienzan en \mathbb{R}_+^2 , permanecen en la región B .

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid w = \frac{\mu}{v} + \varepsilon, \varepsilon > 0\}. \quad \blacklozenge$$

Una vez demostrada la propiedad de acotamiento uniforme de las soluciones del sistema (3.1) que comienzan en el primer cuadrante positivo del plano fase, haremos el análisis que nos conducirá al retrato fase. Iniciamos entonces con el análisis local.

3.1.1 Análisis local

Empezamos por averiguar la existencia de los puntos de equilibrio del sistema. Éstos son: $P_0 = (0,0)$, $P_1 = ((k/\alpha)(\alpha - q_1E_1), 0)$ y el punto interior $P_{int} = (x_{int}, y_{int})$, donde,

$$x_{int} = \frac{\gamma + q_2E_2}{[c\beta - b(\gamma + q_2E_2)]},$$

$$y_{int} = \frac{\alpha c}{K} \left\{ \frac{K[c\beta - (\gamma + q_2E_2)b] - (\gamma + q_2E_2)}{[c\beta - (\gamma + q_2E_2)b]^2} \right\} - \frac{cq_1E_1}{[c\beta - (\gamma + q_2E_2)b]}$$

El punto de equilibrio interior, P_{int} , existe, es decir, $x_{int}, y_{int} > 0$, sólo si las tasas de pesca, E_1 y E_2 satisfacen las desigualdades:

$$c\beta - b(\gamma + q_2E_2) > 0,$$

$$\frac{\alpha c}{K} \{K[c\beta - (\gamma + q_2E_2)b] - (\gamma + q_2E_2)\} - (cq_1E_1)[c\beta - (\gamma + q_2E_2)b] > 0$$

De éstas se encuentran las cotas para los esfuerzos pesqueros E_1 y E_2 . A saber,

$$0 < E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{\gamma + q_2E_2}{Kb[c\beta - (\gamma + q_2E_2)]} \right)$$

y

$$0 < E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{Kc\beta}{1 + Kb} - \gamma \right).$$

Si E_2 aumenta, x_{int} también se incrementa; mientras que disminuye la población de depredadores y por tanto, mejora la tasa de sobrevivencia de la presa. El valor y_{int} disminuye cuando E_1 aumenta y esto se debe a la pérdida de alimentos para la población de depredadores.

Derivemos a y_{int} con respecto a E_2 e igualemos a cero la ecuación. Para E_1 fijo, y_{int} tiene un punto crítico en

$$E_2 = \frac{1}{q_2} \left\{ \frac{c\beta}{b} \frac{[Kb(\alpha - q_1E_1) - \alpha]}{[Kb(\alpha - q_1E_1) + \alpha]} - \gamma \right\}.$$

Derivamos nuevamente a y_{int} con respecto a E_2 , $\frac{dy_{int}^2}{dE_2^2} =$

$$\frac{-2bcq_2^2 \{K[\alpha b(b(\gamma + q_2E_2) - \beta c) - bq_1E_1(b(b(\gamma + q_2E_2) - \beta c))] + \alpha(2\beta c + b(\gamma + q_2E_2))\}}{K[b(\gamma + q_2E_2) - c\beta]^4}.$$

Sustituimos E_2 en $\frac{dy_{int}^2}{dE_2^2}$ y obtenemos:

$$-\frac{bq_2^2(\alpha + Kb(\alpha - q_1E_1))^4}{8K\alpha^3\beta^3c^2} < 0.$$

Por lo cual, el valor máximo de y_{int} , para un valor fijo E_1 perteneciente al intervalo $\left(0, \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{c\beta + b\gamma}{bK(c\beta - b\gamma)}\right)\right)$, está dado por:

$$y_{int} = \frac{[Kb(\alpha - q_1E_1) + \alpha]^2}{4\alpha\beta bK}.$$

Para el análisis de las propiedades de estabilidad local de los tres puntos de equilibrio, calculamos la matriz de jacobí, J , del campo vectorial que define al sistema (3.1) y sustituimos cada uno de los puntos.

1. Para el punto de equilibrio trivial, encontramos que los valores propios de J , son:

$$\lambda_{11} = \alpha - q_1E_1,$$

$$\lambda_{12} = -(\gamma + q_2E_2).$$

El segundo valor es siempre negativo, pero el primero puede ser positivo o negativo dependiendo de cómo sea E_1 comparado con α/q_1 . A la cantidad α/q_1 se le conoce como *productividad biotécnica de la presa (BTP)*. Luego, si $BTP > E_1$, el origen es un punto silla; mientras que si $BTP < E_1$, el origen es un nodo asintóticamente estable localmente.

2. Para el segundo punto de equilibrio, P_1 , la matriz de Jacobi tiene por valores propios a:

$$\lambda_{21} = -(\alpha - q_1E_1),$$

y

$$\lambda_{22} = -(\gamma + q_2E_2) + \frac{c\beta K(\alpha - q_1E_1)}{1 + bK(\alpha - q_1E_1)}.$$

Si se cumple que $E_2 \geq 0$ y además

$$\frac{1}{q_1} \left[\alpha - \frac{\gamma + q_2E_2}{K \{c\beta - (\gamma + q_2E_2)b\}} \right] < E_1 < \frac{\alpha}{q_1},$$

Entonces, ambos valores propios son negativos y en este caso, P_1 es asintóticamente estable localmente.

Pero si

$$E_1 < \frac{1}{q_1} \left[\alpha - \frac{\gamma + q_2 E_2}{K(c\beta - b(\gamma + q_2 E_2))} \right],$$

P_1 es un punto silla.

3. Para el punto de equilibrio interior, P_{int} , la matriz de Jacobi es:

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & 0 \end{pmatrix},$$

donde,

$$X = (\alpha - q_1 E_1) \left(\frac{b(\gamma + q_2 E_2)}{c\beta} \right) - \frac{\alpha}{K} \left(\frac{\gamma + q_2 E_2}{c\beta - b(\gamma + q_2 E_2)} \right) \left(\frac{b(\gamma + q_2 E_2)}{c\beta} + 1 \right)$$

$$Y = -\frac{\gamma + q_2 E_2}{c}$$

$$Z = \frac{1}{K\beta} \left\{ \alpha [K(c\beta - (\gamma + q_2 E_2)b) - (\gamma + q_2 E_2)] - Kq_1 E_1 [c\beta - (\gamma + q_2 E_2)b] \right\}$$

En este caso, todos los valores propios de la matriz de Jacobi serán negativos siempre que se cumpla la condición:

$$E_2 \notin \left(-\frac{\gamma}{q_2}, \frac{c\beta}{q_2 b} \left[\frac{Kb(\alpha - q_1 E_1) - \alpha}{Kb(\alpha - q_1 E_1) + \alpha} - \gamma \right] \right).$$

El extremo derecho del intervalo anterior será positivo si:

$$E_1 \in \left[0, \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{c\beta + b\gamma}{bK(c\beta - b\gamma)} \right) \right].$$

De esta forma, el punto de equilibrio $P_{int} = (x_{int}, y_{int})$ será asintóticamente estable localmente si,

$$E_1 \in \left[0, \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{c\beta + b\gamma}{bK(c\beta - b\gamma)} \right) \right],$$

$$E_2 > \frac{c\beta}{q_2 b} \left[\frac{Kb(\alpha - q_1 E_1) - \alpha}{Kb(\alpha - q_1 E_1) + \alpha} \right] - \frac{\gamma}{q_2}.$$

E inestable si: $E_1 \in \left[0, \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{c\beta + b\gamma}{bK(c\beta - b\gamma)}\right)\right]$,

$$E_2 < \frac{c\beta}{q_2 b} \left[\frac{Kb(\alpha - q_1 E_1) - \alpha}{Kb(\alpha - q_1 E_1) + \alpha} \right] - \frac{\gamma}{q_2}.$$

Si

$$E_1 > \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{c\beta + b\gamma}{bK(c\beta - b\gamma)}\right)$$

entonces el punto de equilibrio será asintóticamente estable para toda $E_2 \geq 0$.

Ahora empezamos el análisis global.

3.1.2 Análisis global

Para los sistemas presa-depredador, la existencia y la estabilidad de un ciclo límite está relacionado con la existencia y estabilidad de un punto de equilibrio positivo. Si no existen ciclos límite, el equilibrio es asintóticamente estable globalmente. Por otro lado, si existe un punto equilibrio inestable, debe existir al menos un ciclo límite, esto lo vimos en el modelo de Kolmogorov, sección 1.2.4. Para esta parte seguimos el artículo de Kuang y Freedman [21], en el cual se estudiaron la unicidad del ciclo límite en sistemas presa-depredador del tipo Gause, transformándolos en sistemas del tipo Lienard. Véase el Apéndice A.6.

Reescribamos el sistema (3.1) como:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= xg(x) - yp(x), & x(0) &> 0, \\ \frac{dy}{dt} &= y(-\gamma - q_2 E_2 + q(x)), & y(0) &> 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

donde

$$g(x) = \alpha \left(1 - \frac{x}{K}\right) - q_1 E_1, \quad p(x) = \frac{\beta x}{1 + bx}, \quad q(x) = \frac{c\beta x}{1 + bx}.$$

Siguiendo la definición A.6.1, el sistema (3.2) es del tipo Gause y debe cumplir las condiciones del Teorema A.6.3.

1. $g(0) = \alpha - q_1 E_1 > 0$, entonces existe $(K/\alpha)(\alpha - q_1 E_1) > 0$ tal que $g(x) > 0$ con $0 \leq x < (K/\alpha)(\alpha - q_1 E_1)$, $g((K/\alpha)(\alpha - q_1 E_1)) = 0$, $g(x) < 0$ para $x > (K/\alpha)(\alpha - q_1 E_1)$,

2. $\xi(y) = y$, por lo que $\xi(0) = 0$ y $\xi'(y) = 1 > 0$,

3. $p(0) = \frac{0}{1} = 0$, $p'(x) = \frac{\beta}{(1+bx)^2} > 0$

4. $\eta(y) = y$, $\eta(0) = 0$ y $\eta'(y) = 1 > 0$,

5. $q(0) = \frac{0}{1} = 0$, $q'(x) = \frac{c\beta}{(1+bx)^2} > 0$,

6. Existe $x_{int} = \frac{\gamma + q_2 E_2}{c\beta - b(\gamma + q_2 E_2)}$, $0 < x_{int} < K$ tal que

$$q(x_{int}) = \frac{c\beta \left(\frac{\gamma + q_2 E_2}{c\beta - b(\gamma + q_2 E_2)} \right)}{1 + b \left(\frac{\gamma + q_2 E_2}{c\beta - b(\gamma + q_2 E_2)} \right)} = \gamma + q_2 E_2,$$

7. $\lim_{y \rightarrow \infty} y = \infty > x_{int} g(x_{int}) / p(x_{int})$

$$\begin{aligned} x_{int} g(x_{int}) / p(x_{int}) &= \frac{\frac{\gamma + q_2 E_2}{c\beta - b(\gamma + q_2 E_2)} \left[\frac{\alpha}{K} \left(K - \frac{\gamma + q_2 E_2}{c\beta - b(\gamma + q_2 E_2)} \right) - q_1 E_1 \right]}{\frac{\beta \left(\frac{\gamma + q_2 E_2}{c\beta - b(\gamma + q_2 E_2)} \right)}{1 + b \left(\frac{\gamma + q_2 E_2}{c\beta - b(\gamma + q_2 E_2)} \right)}}, \\ &= \frac{c}{c\beta - b(\gamma + q_2 E_2)} \left[\frac{\alpha}{K} \left(K - \frac{\gamma + q_2 E_2}{c\beta - b(\gamma + q_2 E_2)} \right) - q_1 E_1 \right] < \infty, \end{aligned}$$

$$y_{int} = \xi^{-1}(x_{int} g(x_{int}) / p(x_{int}))$$

$$y_{int} = \frac{\alpha c}{K} \left\{ \frac{K[c\beta - b(\gamma + q_2 E_2)] - (\gamma + q_2 E_2)}{(c\beta - b(\gamma + q_2 E_2))^2} \right\} - \frac{c q_1 E_1}{c\beta - b(\gamma + q_2 E_2)},$$

8. De 6 y 7, $P_{int} = (x_{int}, y_{int})$ existe y es un punto de equilibrio positivo único,

9. P_0 es punto silla pues $\alpha - q_1 E_1 > 0$ (condición 1), P_1 es también un punto silla si

$$E_1 < \frac{1}{q_1} \left[\alpha - \frac{\gamma + q_2 E_2}{K(c\beta - b(\gamma + q_2 E_2))} \right] < \frac{\alpha}{q_1},$$

10. Dada la matriz de Jacobi definida en el análisis local, demostremos que efectivamente $H(x_{int})$ es igual a la primera entrada de la matriz, X :

$$\begin{aligned}
H(x_{int}) &= x_{int}g'(x_{int}) + g(x_{int}) - \frac{x_{int}g(x_{int})p'(x_{int})}{p(x_{int})} \\
H(x_{int}) &= \frac{\gamma + q_2E_2}{c\beta - b(\gamma + q_2E_2)} \left(-\frac{\alpha}{K}\right) + \left[\frac{\alpha}{K} \left(K - \frac{\gamma + q_2E_2}{c\beta - b(\gamma + q_2E_2)}\right) - q_1E_1\right] \\
&\quad - \frac{\frac{\gamma + q_2E_2}{c\beta - b(\gamma + q_2E_2)} \left[\frac{\alpha}{K} \left(K - \frac{\gamma + q_2E_2}{c\beta - b(\gamma + q_2E_2)}\right) - q_1E_1\right]}{\frac{\gamma + q_2E_2}{c}} \\
&\quad - \frac{\left[\frac{(c\beta - b(\gamma + q_2E_2))^2}{c^2\beta}\right]}{\frac{\gamma + q_2E_2}{c}} \\
&= \alpha - q_1E_1 - \frac{2\alpha}{K} \left[\frac{\gamma + q_2E_2}{c\beta - b(\gamma + q_2E_2)}\right] \\
&\quad - \frac{c\beta - b(\gamma + q_2E_2)}{c\beta} \left[\alpha - q_1E_1 - \frac{\alpha}{K} \left(\frac{\gamma + q_2E_2}{c\beta - b(\gamma + q_2E_2)}\right)\right] \\
&= (\alpha - q_1E_1) \left(\frac{b(\gamma + q_2E_2)}{c\beta}\right) - \frac{\alpha}{K} \left(\frac{\gamma + q_2E_2}{c\beta - b(\gamma + q_2E_2)}\right) \left(1 + \frac{b(\gamma + q_2E_2)}{c\beta}\right) \\
&= X.
\end{aligned}$$

Los valores propios de $J(P_{int})$ son reales positivos (o negativos) si $H(x_{int})$ es positivo (negativo), lo que implica la inestabilidad (o estabilidad asintótica) de P_{int} . Las restricciones a E_1 y E_2 que satisfacen esto, se expusieron en el análisis local.

11. Definiendo que P_{int} existe y es inestable para las condiciones

$$\begin{aligned}
E_1 &\in \left[0, \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{c\beta + b\gamma}{bK(c\beta - b\gamma)}\right)\right], \\
E_2 &< \frac{c\beta}{q_2b} \left[\frac{Kb(\alpha - q_1E_1) - \alpha}{Kb(\alpha - q_1E_1) + \alpha}\right] - \frac{\gamma}{q_2},
\end{aligned}$$

hay al menos un ciclo límite positivo alrededor de P_{int} si

$$\left. \frac{d}{dx} \left(\frac{xg(x)}{p(x)}\right) \right|_{x=x_{int}} > 0.$$

Esto efectivamente ocurre, pues

$$\left. \frac{d}{dx} \left(\frac{xg(x)}{p(x)} \right) \right|_{x=x_{int}} = \frac{(\alpha - q_1 E_1)Kb - 2\alpha b x_{int} - \alpha}{K(\beta x_{int})^2}$$

Entonces hay que checar que $(\alpha - q_1 E_1)Kb - 2\alpha b x_{int} - \alpha > 0$, es decir, que

$$\frac{(\alpha - q_1 E_1)Kb - \alpha}{2\alpha b} > \frac{\gamma + q_2 E_2}{c\beta - b(\gamma + q_2 E_2)},$$

Resolviendo la desigualdad, obtenemos efectivamente las desigualdades descritas.

Ya que mostramos que el sistema (3.2) satisface las condiciones de la definición dada en el Apéndice A.6, podemos utilizar entonces el teorema A.6.7 para definir si existe un ciclo límite único para P_{int} inestable.

Teorema 3.1.2 *Si se cumple que $\frac{d}{dx}(S) \leq 0$, donde*

$$S = \left(\frac{xg'(x) + g(x) - xg(x)(p'(x)/p(x))}{-\gamma - q_2 E_2 + q(x)} \right),$$

en los intervalos $0 \leq x < x_{int}$ y $x_{int} < x \leq K$. Entonces, el sistema (3.2) tiene un único ciclo límite, el cual es asintóticamente estable en el contexto global, con respecto al conjunto $\{(x, y) | x > 0, y > 0\} - \{P_{int} = (x_{int}, y_{int})\}$.

Demostración 3.1.2 *La expresión para S toma la forma*

$$S = \frac{\left(\alpha - \frac{2\alpha}{K}x - q_1 E_1 \right) bx - \frac{\alpha}{K}x}{-(\gamma + q_2 E_2)(1 + bx) + c\beta x},$$

cuya derivada respecto a x es,

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dx} = & \frac{-(\gamma + q_2 E_2) \left(\alpha - \frac{2\alpha}{K}x - q_1 E_1 \right) b - \frac{\alpha}{K} [2bc\beta x^2}{[-(\gamma + q_2 E_2)(1 + bx) + c\beta x]^2}, \\ & \frac{-(\gamma + q_2 E_2)(2bx(1 + bx))}{[-(\gamma + q_2 E_2)(1 + bx) + c\beta x]^2} \leq 0, \end{aligned}$$

Lo que cumple efectivamente la desigualdad buscada. ♦

De acuerdo al Teorema 3.1.2, podemos afirmar que cuando:

$$E_1 \in \left[0, \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{c\beta + b\gamma}{bK(c\beta - b\gamma)} \right) \right]$$

y,

$$E_2 < \frac{c\beta}{q_2 b} \left[\frac{Kb(\alpha - q_1 E_1) - \alpha}{Kb(\alpha - q_1 E_1) + \alpha} \right] - \frac{\gamma}{q_2},$$

el sistema (3.1) tiene un único ciclo límite estable globalmente. Así, vemos que cuando el punto de equilibrio positivo es inestable, existe un único ciclo límite estable global.

A continuación, calculamos el punto de equilibrio bionómico.

3.1.3 Equilibrio bioeconómico

En la Introducción y en el Glosario de esta tesis, se definió el equilibrio bioeconómico como el punto donde la razón de cambio en el *stock* de las poblaciones es idénticamente cero y en el cual la ganancia económica de la pesquería es nula. Los ingresos netos están dados por:

$$\Pi = (p_1 q_1 x - c_1) E_1 + (p_2 q_2 y - c_2) E_2 = \Pi_1 + \Pi_2,$$

donde Π_1 y Π_2 representan la tasa de ingreso proveniente de la especie presa y depredador, respectivamente.

Las constantes c_1 y c_2 denotan los costos de pesca por unidad de esfuerzo para las especies presa y depredador, respectivamente; p_1 y p_2 son los precios por unidad de biomasa de cada especie.

Por tanto, de acuerdo a la definición, el equilibrio bioeconómico, $[x_\infty, y_\infty, E_{1\infty}, E_{2\infty}]$, se obtiene resolviendo el sistema de ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} \alpha \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\beta y}{1 + bx} - q_1 E_1 &= 0, \\ -\gamma + \frac{c\beta x}{1 + bx} - q_2 E_2 &= 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\Pi = (p_1 q_1 x - c_1) E_1 + (p_2 q_2 y - c_2) E_2 = 0.$$

Para determinar el equilibrio bioeconómico, se consideran los casos siguientes:

1. Si $E_2 = 0$ (se queda operando solamente la pesca de la presa), entonces el sistema (3.3) se reduce a:

$$\begin{aligned}\alpha\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta y}{1 + bx} - q_1 E_1 &= 0, \\ -\gamma + \frac{c\beta x}{1 + bx} &= 0, \\ (p_1 q_1 x - c_1)E_1 &= 0.\end{aligned}$$

Tomando $x_\infty = \frac{c_1}{p_1 q_1}$ para cualquier E_1 finito, esta ecuación debiera resolver las otras dos ecuaciones. Pero de la segunda:

$$\begin{aligned}-\gamma(1 + bx) + c\beta x &= 0 \\ -\gamma + (c\beta - \gamma b)x &= 0 \Leftrightarrow x = \frac{\gamma}{c\beta - \gamma b},\end{aligned}$$

entonces una posibilidad es que $\gamma = c_1$ y $p_1 q_1 = (c\beta - \gamma b)$, lo que a su vez impone la condición $c\beta > \gamma b$. Por otro lado, a fin de que la primera ecuación se satisfaga para la x_∞ calculada, notemos que además $0 < x < K$, en particular $0 < c_1 < K p_1 q_1$, de donde $0 < \frac{c_1}{K p_1 q_1} < 1$. Por lo tanto, $(y_\infty, E_{1\infty})$ será un punto sobre la línea recta en el primer cuadrante del plano yE_1 :

$$\alpha\left(1 - \frac{c_1}{p_1 q_1 K}\right) = \frac{\beta y}{1 + b(c_1/p_1 q_1)} + q_1 E_1$$

2. Si $E_1 = 0$ (permanece la pesca sólo del depredador), el sistema queda como sigue:

$$\begin{aligned}\alpha\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta y}{1 + bx} &= 0, \\ -\gamma + \frac{c\beta x}{1 + bx} - q_2 E_2 &= 0, \\ (p_2 q_2 y - c_2)E_2 &= 0.\end{aligned}$$

En este caso se tiene $y_\infty = \frac{c_2}{p_2 q_2}$, para una E_2 finita. Sustituimos y_∞ en la primera ecuación, obteniendo la ecuación $Ax^2 + Bx + C = 0$, donde $A = (\alpha b/K) > 0$, $B =$

$\alpha/K - \alpha b, C = -[\alpha - (\beta c_2)/p_2 q_2]$. Así,

$$x^\pm = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

- (i) $C < 0$, entonces x^+ es únicamente la solución positiva
(ii) $B < 0, C > 0, B^2 > 4AC$, existen dos soluciones, sustituyendo x^\pm en la segunda ecuación, obtenemos:

$$E_{2\infty}^\pm = \frac{1}{q_2} \left[\frac{c\beta x_\infty^\pm}{1 + bx_\infty^\pm} - \gamma \right],$$

Donde, $E_{2\infty} > 0$ si $x_\infty^\pm > \gamma/(c\beta - b\gamma)$ y $c\beta > b\gamma$.

3. Si E_1 y E_2 son cero, las ecuaciones que quedan son:

$$\alpha \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\beta y}{1 + bx} = 0,$$

$$-\gamma + \frac{c\beta x}{1 + bx} = 0.$$

Despejo x de la segunda ecuación,

$$x_\infty = \frac{\gamma}{c\beta - b\gamma},$$

con $c\beta > b\gamma$. Sustituimos en la primer ecuación:

$$y_\infty = \alpha \left(1 - \frac{\gamma}{c\beta - b\gamma} \right) \left(\frac{c}{c\beta - b\gamma} \right),$$

donde se debe satisfacer la condición $\gamma < \frac{c\beta}{b+1}$.

4. Si $E_1, E_2 \neq 0$ (pesquería total está en operación), tomamos $x_\infty = \frac{c_1}{p_1 q_1}$ y $y_\infty = \frac{c_2}{p_2 q_2}$, para E_1 y E_2 fijos, respectivamente. El sistema de ecuaciones está completo:

$$\alpha \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\beta y}{1 + bx} - q_1 E_1 = 0,$$

$$-\gamma + \frac{c\beta x}{1 + bx} - q_2 E_2 = 0,$$

$$(p_1 q_1 x - c_1) E_1 + (p_2 q_2 y - c_2) E_2 = 0.$$

En este caso sustituimos ambas expresiones (x_∞ y y_∞) en las dos primeras ecuaciones, obteniendo:

$$E_{1\infty} = \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{c_1}{Kp_1q_1} \right) - \frac{\beta c_2 p_1}{p_2 q_2 [p_1 q_1 + bc_1]},$$

$$E_{2\infty} = -\frac{\gamma}{q_2} + \frac{c\beta c_1}{q_2 [p_1 q_1 + bc_1]}.$$

$$\text{Entonces, } E_{1\infty} > 0 \text{ si } \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{c_1}{Kp_1q_1} \right) > \frac{\beta c_2 p_1}{p_2 q_2 [p_1 q_1 + bc_1]},$$

$$E_{2\infty} > 0 \text{ si } \gamma < \frac{c\beta c_1}{[p_1 q_1 + bc_1]}.$$

El punto de equilibrio bioeconómico, no trivial, $[x_\infty, y_\infty, E_{1\infty}, E_{2\infty}]$, existe si y sólo si las condiciones anteriores se cumplen.

En esta sección se consideró un sistema depredador-presa con cosecha, en el que el término de interacción es una respuesta de tipo Holling II.

Se demostró que el sistema de EDO tiene un ciclo límite estable cuando el punto de equilibrio positivo es inestable. Se encontró también que es posible modificar la dinámica de el sistema, utilizando los esfuerzos E_1 y E_2 como controles.

También se dedujeron las condiciones bajo las cuales existen equilibrios bioeconómicos del sistema, es decir, biológicos y ecológicos.

Continuamos con el problema central de este trabajo, el cálculo de los esfuerzos de pesca óptimos por medio del Teorema de Pontryagin.

3.1.4 Política óptima de cosecha

Recordemos que el problema fundamental en la explotación comercial de los recursos renovables, es determinar el equilibrio óptimo entre las cosechas reales (en el presente) y futuras. Si lo resolvemos desde el punto de vista económico, usamos la técnica estándar de descuento temporal, la cual es una práctica normal en la administración de negocios. Como lo vimos en el Capítulo 2.

Retomamos la expresión para los ingresos netos, Π , que aparece en la subsección anterior y tiene por ecuación (3.3). Así, nuestro objetivo es maximizar el valor del funcional J considerando un tiempo continuo de descuento. La forma explícita de J para el modelo (3.1) es,

$$J = \int_0^\infty e^{-\delta t} [(p_1 q_1 x - c_1)E_1(t) + (p_1 q_2 y - c_2)E_2(t)] dt \quad (3.4)$$

donde δ denota la tasa instantánea anual de descuento.

Siguiendo el método usado en el Capítulo 2, vamos a maximizar J sujeta a las ecuaciones de estado (3.1). Para ello usamos el Principio de Pontryagin (Véase la subsección (2.1.3)). La variable de control $E_i(t)$, para $i = 1, 2$ debe satisfacer la desigualdad $0 \leq E_i(t) \leq (E_i)_{max}$.

Para el sistema (3.1), el Hamiltoniano, está dado por

$$H = e^{-wt} [(p_1 q_1 x - c_1) E_1 + (p_2 q_2 y - c_2) E_2] + \lambda_1 (F_1 - q_1 x E_1) + \lambda_2 (F_2 - q_2 y E_2),$$

donde $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$ son las variables adjuntas y

$$F_1 = \alpha x (1 - x/K) - \frac{\beta xy}{1 + bx},$$

$$F_2 = -\gamma y + \frac{c\beta xy}{1 + bx}.$$

Las variables de control E_1 y E_2 aparecen linealmente en la función hamiltoniana.

Suponemos que las soluciones óptimas no ocurren en $(E_i)_{min}$ ni en $(E_i)_{max}$. Sin embargo, éstas deben cumplir

$$\frac{\partial H}{\partial E_i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Calculando $\frac{\partial H}{\partial E_i}$ para $i = 1, 2$, igualando a cero cada expresión y despejando λ_i , se llega a:

$$\frac{\partial H}{\partial E_1} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = e^{-wt} \left(p_1 - \frac{c_1}{q_1 x} \right),$$

$$\frac{\partial H}{\partial E_2} = 0 \Rightarrow \lambda_2 = e^{-wt} \left(p_2 - \frac{c_2}{q_2 y} \right).$$

Ambas ecuaciones satisfacen la condición de transversalidad cuando t es muy grande, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i(t) = 0 \quad \forall i.$$

$$\text{Si } \frac{\partial H}{\partial E_1} = 0 \Rightarrow \lambda_1 q_1 x = \frac{\partial H_1}{\partial E_1} \text{ y } \frac{\partial H}{\partial E_2} = 0 \Rightarrow \lambda_2 q_2 x = \frac{\partial H_2}{\partial E_2}.$$

Obtenemos una solución de equilibrio óptimo del problema, x , y y E son tratadas como constantes a continuación.

Ahora, usando las expresiones para $\hat{\lambda}_1$ y $\hat{\lambda}_2$ dadas en (2.9), sustituyendo λ_1 y λ_2 , y simplificando tendremos que, para este caso

$$\hat{\lambda}_1 = - \frac{-(e^{-wt}) [Ax^3 + Bx^2 + Cx + D + Ey]}{K q_1 q_2 (bx + 1)^2},$$

donde los coeficientes son:

$$\begin{aligned}
 A &= -2\alpha b^2 p_1 q_1 q_2, \\
 B &= \alpha b^2 c_1 q_2 - 4\alpha b p_1 q_1 q_2 + K\alpha b^2 p_1 q_1 q_2 \\
 C &= 2\alpha b c_1 q_2 - 2\alpha p_1 q_1 q_2 + 2K\alpha b p_1 q_1 q_2 \\
 D &= \alpha c_1 q_2 - K\beta c c_2 q_1 + K\alpha p_1 q_1 q_2 \\
 E &= -Kb\beta c_1 q_2 - K\beta p_1 q_1 q_2 + K\beta c p_2 q_1 q_2.
 \end{aligned}$$

Mientras que para $\dot{\lambda}_2$, se tiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{\lambda}_2 = e^{-wt} & \left[\left(p_2 - \frac{c_2}{q_2 y} \right) \left(\gamma + q_2 E_2 - \frac{\beta c x}{1 + b x} \right) - p_2 q_2 E_2 + \frac{\beta x \left(p_1 - \frac{c_1}{q_1 x} \right)}{1 + b x} \right. \\
 & \left. + \frac{c_2 \left(\gamma y + q_2 E_2 y - \frac{\beta c x y}{1 + b x} \right)}{q_2 y^2} \right]
 \end{aligned}$$

De $\dot{\lambda}_2 = 0$,

$$x^* = \frac{\beta c_1 - \gamma p_2 q_1}{q_1 (\beta p_1 - \beta c p_2 + b \gamma p_2)}, \quad (3.5)$$

sustituimos (3.5) en $\dot{\lambda}_1$, de donde,

$$y^* = \frac{Ax^{*3} + Bx^{*2} + Cx^* + D}{K\beta q_2 (bc_1 + p_1 q_1 - c p_2 q_1)}, \quad (3.6)$$

con los mismos coeficientes A, B, C, D .

Una vez calculados los valores óptimos de $x = x^*$ y de $y = y^*$, se determinan los esfuerzos de pesca óptimo E_1^* y E_2^* .

$$\begin{aligned}
 E_1^* &= \frac{1}{q_1} \left\{ \alpha \left(1 - \frac{x^*}{k} \right) - \frac{\beta y^*}{1 + b x^*} \right\}, \\
 E_2^* &= \frac{1}{q_2} \left\{ -\gamma + \frac{c \beta x^*}{1 + b x^*} \right\},
 \end{aligned}$$

obteniendo el punto $P^* = (x^*, y^*, E_1^*, E_2^*)$, que satisface que $\frac{\partial^2 H}{\partial E_1^2}(P^*) < 0$ y que el determinante de la matriz Hessiana $Hess(P^*)$ es positivo,

$$\det(Hess(P^*)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial E_1^2}(P^*) & \frac{\partial^2 H}{\partial E_1 \partial E_2}(P^*) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial E_2 \partial E_1}(P^*) & \frac{\partial^2 H}{\partial E_2^2}(P^*) \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial E_1^2} = -q_1 x \frac{\partial H}{\partial x} \left(\frac{dE_1}{dx} \dot{x} + \frac{dE_1}{dy} \dot{y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial E_2^2} = -q_2 y \frac{\partial H}{\partial y} \left(\frac{dE_2}{dx} \dot{x} + \frac{dE_2}{dy} \dot{y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial E_1 \partial E_2} = -q_1 x \frac{\partial H}{\partial x} \left(\frac{dE_2}{dx} \dot{x} + \frac{dE_2}{dy} \dot{y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial E_2 \partial E_1} = -q_2 y \frac{\partial H}{\partial y} \left(\frac{dE_1}{dx} \dot{x} + \frac{dE_1}{dy} \dot{y} \right).$$

Ya que hemos dado argumentos que muestran la existencia del punto de equilibrio óptimo, enseguida realizamos un conjunto de simulaciones numéricas correspondientes a las desigualdades de los esfuerzos de pesca E_1 y E_2 vistos en la subsección 3.1.

3.1.5 Simulaciones numéricas

Sean $\alpha = 2$, $K = 600$, $\beta = 0.099$, $b = 0.00198$, $\gamma = 0.00046$, $c = 0.01$, $q_1 = 0.2$, $q_2 = 0.02$ los parámetros con los cuales resolvemos numéricamente el sistema (3.1), usando el software *Matlab* y rutina *ode45*, basada en la implementación de Dormand-Prince, formado por los métodos explícitos de Runge-Kutta de órdenes 4 y 5.

En la subsección 3.1.1, donde realizamos el análisis local del sistema (3.1) concluimos que el punto de equilibrio positivo interno, $P_{int} = (x_{int}, y_{int})$, existe si se satisfacen las cotas:

$$0 < E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{\gamma + q_2 E_2}{Kb[c\beta - (\gamma + q_2 E_2)]} \right)$$

y

$$0 < E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{Kc\beta}{1 + Kb} - \gamma \right).$$

Es decir, $0 < E_1 < 9.25$, $0 < E_2 < 13.55$. Mientras que, es estable si se cumplen las siguientes condiciones:

$$E_1 \in \left[0, \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{c\beta + b\gamma}{bK(c\beta - b\gamma)} \right) \right] = [0, 9.98],$$

$$E_2 > \frac{c\beta}{q_2 b} \left[\frac{Kb(\alpha - q_1 E_1) - \alpha}{Kb(\alpha - q_1 E_1) + \alpha} \right] - \frac{\gamma}{q_2} = 0.813.$$

Además, si $E_2 \geq 0$ y

$$E_1 > \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{c\beta + b\gamma}{bK(c\beta - b\gamma)} \right) = 0.813$$

entonces el punto de equilibrio será asintóticamente estable.

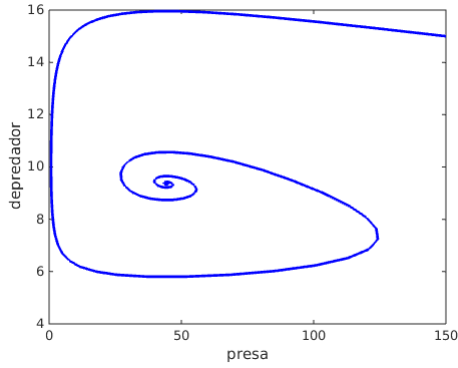
El punto P_{int} es inestable si E_1 y E_2 satisfacen:

$$E_1 \in \left[0, \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{c\beta + b\gamma}{bK(c\beta - b\gamma)} \right) \right] = [0, 9.98],$$

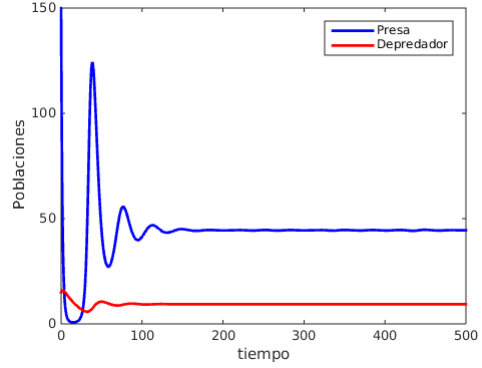
$$E_2 < \frac{c\beta}{q_2 b} \left[\frac{Kb(\alpha - q_1 E_1) - \alpha}{Kb(\alpha - q_1 E_1) + \alpha} \right] - \frac{\gamma}{q_2} = 0.813.$$

De esta forma, calculando los intervalos, si $E_1 \in (0, 9.25)$ y $0.813 < E_2 < 13.55$, entonces $P_{int} = (x_{int}, y_{int})$ existe y es estable. Si $0 < E_2 < 13.55$ y $E_1 > 0.813$, P_{int} es asintóticamente estable. Por otro lado, si $E_1 \in (0, 9.25)$ y $0 < E_2 < 0.813$, entonces existe un único ciclo límite estable global. Veamos esto con E_1 y E_2 fijos:

- Si $E_1 = 5$ y $E_2 = 2$, entonces el punto de equilibrio correspondiente $P_{int} = (44.47, 9.36)$ es estable. Esto se ilustra en la figura (3.1) en la que aparecen tanto el retrato fase como las soluciones del sistema (3.1), para la condición inicial $(x_0, y_0) = (150, 15)$.
- Si ahora tomamos $E_1 = 2$ y $E_2 = 1$, el punto de equilibrio es $P_{int} = (21.54, 16.09)$ es asintóticamente estable. El resultado de las simulaciones numéricas se muestra en la figura (3.2), para la condición inicial $(x_0, y_0) = (150, 15)$.
- Si $E_1 = 1$ y $E_2 = 0.5$, vemos que el punto de equilibrio $P_{int} = (10.79, 18.2)$ es inestable, como se puede observar en la figura (3.3), para la condición inicial $x_0 = (100, 18)$. El retrato fase ilustra el ciclo límite cuya existencia se predice.

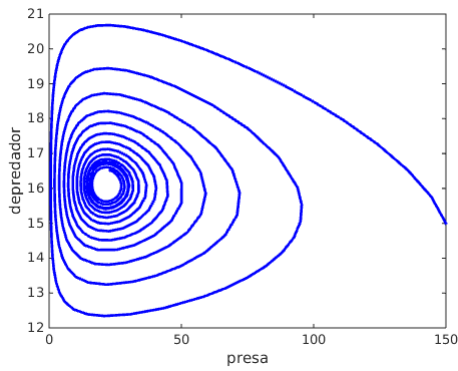


(a) Depredador vs Presa

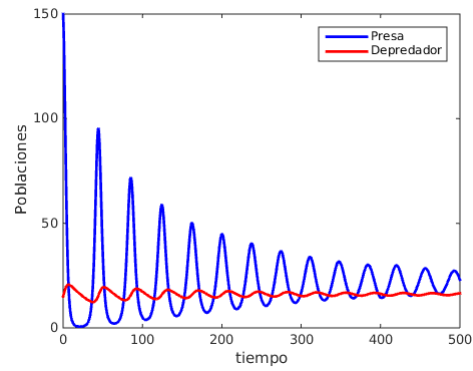


(b) Población vs tiempo

Figura 3.1: (a) Retrato fase del sistema (3.1). (b) Comportamiento de $x(t)$ y $y(t)$ para los valores $E_1 = 5$ y $E_2 = 2$.



(a) Depredador vs Presa



(b) Población vs tiempo

Figura 3.2: (a) Retrato fase del sistema (3.1). (b) Comportamiento de $x(t)$ y $y(t)$ para los valores de $E_1 = 1$ y $E_2 = 0.813$.

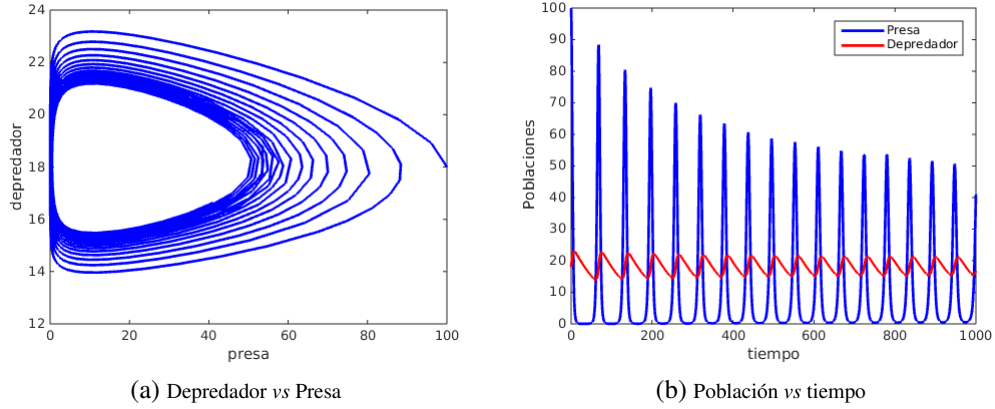


Figura 3.3: (a) Retrato fase del sistema (3.1). (b) Comportamiento de $x(t)$ y $y(t)$ para $E_1 = 1$ y $E_2 = 0.5$.

Variando los parámetros E_1 y E_2 es posible modificar la dinámica del sistema presa-depredador (3.1) y evitar así el comportamiento cíclico del sistema.

Dados los valores numéricos de los parámetros, con los siguientes: $c_1 = 5$, $c_2 = 6$, $p_1 = 1$, $p_2 = 6$, $w = 0.005$, el punto de equilibrio óptimo obtenido es

$$P^* = P(x^*, y^*, E_1^*, E_2^*) = (26.5645, 18.5283, 0.8441, 1.2262),$$

para el cual

$$\frac{\partial^2 H}{\partial E_1^2}(P^*) = -1.1396 \times 10^{-10} e^{-0.005t}$$

y

$$\det(Hess(P^*)) = 1.7671 \times 10^{-23} e^{-0.005t}.$$

Lo cual nos indica que el Hamiltoniano alcanza un valor máximo en P^* .

Enseguida estudiamos el problema de control óptimo considerando que el término de interacción es una respuesta funcional de Holling tipo IV.

3.2 Modelo respuesta funcional Holling tipo IV

Proponemos un modelo en el cual cambiamos la respuesta funcional monótona creciente del tipo II, por una que es monótona creciente y monótona decreciente del tipo IV. La

redacción de esta sección se basó en los artículos [18] y [30]. Así, aquí consideramos el modelo

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x \left(\alpha \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\beta y}{1 + bx + ax^2} - q_1 E_1 \right) \\ \frac{dy}{dt} &= y \left(-\gamma + \frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - q_2 E_2 \right),\end{aligned}\tag{3.7}$$

donde α es la tasa de crecimiento intrínseco de la pesca; K es la capacidad de carga de la presa en ausencia de depredadores y de pesca; β es la tasa máxima de ataque del depredador; $b/2a$ es la medida de la inmunidad que la presa tiene del depredador ($b/2a$ es el punto en x donde el polinomio $ax^2 + bx + 1$ alcanza su valor máximo); γ es la tasa de muerte del depredador; c es el factor de conversión que denota el número de depredadores que acaban de nacer por cada presa capturada; E_1 y E_2 son los esfuerzos de pesca; $q_1 E_1 x$ e $q_2 E_2 y$ representan la razón de la captura de las respectivas especies, donde q_1 y q_2 son los coeficientes de capturabilidad de presa y depredador, respectivamente. Todos los valores de los parámetros son positivos.

Empezamos el análisis del sistema (3.7) determinando sus puntos de equilibrio. El origen es siempre punto de equilibrio para todo valor de los parámetros. Pero si $x \neq 0$ y $y = 0$, el punto es entonces $P_1 = \left(\frac{K}{\alpha}(\alpha - q_1 E_1), 0 \right)$.

De la ceroclina vertical no trivial se obtiene,

$$x_{int} = \frac{c\beta - b\lambda \pm \sqrt{(c\beta - b\lambda)^2 - 4a\lambda^2}}{2a\lambda},$$

donde $\lambda = \gamma + q_2 E_2$. Las condiciones para las cuales $x_{int} > 0$ son:

$$E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{c\beta}{2\sqrt{a} + b} - \gamma \right), \text{ donde } \gamma < \frac{c\beta}{2\sqrt{a} + b}.$$

Para esta x_{int} , una vez que se sustituye en la rama no trivial de la cerocina horizontal se obtiene la ordenada del punto de equilibrio,

$$y_{int} = \frac{1}{8a^2\beta K\lambda^3} [4a\lambda^2 + 2b\lambda\xi + \xi^2] [2a\lambda(\alpha - q_1 E_1) - \alpha\xi],$$

donde $\xi = c\beta - b\lambda \pm \sqrt{(c\beta - b\lambda)^2 - 4a\lambda^2}$, el cual es positivo si:

$$E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{\xi}{2a\lambda K} \right)$$

y E_2 satisface la desigualdad

$$\xi < 2a\lambda K.$$

Una vez vistas las condiciones de existencia del equilibrio positivo, debemos mostrar si todas las soluciones del sistema están acotadas en el primer cuadrante del plano cartesiano. El siguiente teorema da las condiciones.

Teorema 3.2.1 *Todas las soluciones del sistema (3.7) que comienzan en $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$, están acotadas uniformemente.*

Demostración 3.2.1 *Sea $(x(t), y(t))$ solución del sistema (3.7) con condición inicial $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_+^2$. De acuerdo a la primera ecuación del sistema, tenemos que,*

$$\frac{dx}{dt} \leq x \left(\alpha - q_1 E_1 - \frac{\alpha}{K} x \right).$$

Resolviendo esta desigualdad diferencial, obtenemos,

$$x(t) \leq \frac{K(\alpha - q_1 E_1)x_0}{K(\alpha - q_1 E_1)e^{-(\alpha - q_1 E_1)t} + \alpha x_0 - \alpha x_0 e^{-(\alpha - q_1 E_1)t}},$$

con $\alpha - q_1 E_1 > 0$, puesto que $0 < E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{x_{int}}{K}\right) < \frac{\alpha}{q_1}$ y $x_{int} < K$.

Para mayor información sobre la Teoría de las desigualdades diferenciales, ver el Apéndice A.5.

Así, $\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) \leq M$, donde $M = \max \left\{ \frac{K(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha}, x_0 \right\}$.

Auxiliar en la demostración es la función que definimos enseguida. Así, para $e > 0$, sea $W(t) = x(t) + \frac{1}{e}y(t)$. Calculemos la derivada $\dot{W}(t)$,

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{1}{e} \frac{dy}{dt},$$

de donde, al usar el sistema (3.7) y la cota para $x(t)$,

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt} &\leq (\alpha - q_1 E_1)x + \frac{y}{e}(-(\gamma + q_2 E_2)) + (\gamma + q_2 E_2)x - (\gamma + q_2 E_2)x \\ \frac{dW}{dt} &\leq ((\alpha - q_1 E_1) + (\gamma + q_2 E_2))x - (\gamma + q_2 E_2) \left(x + \frac{1}{e}y\right), \end{aligned}$$

de donde,

$$\frac{dW}{dt} + (\gamma + q_2 E_2)W \leq ((\alpha - q_1 E_1) + (\gamma + q_2 E_2))M.$$

Resolviendo la desigualdad diferencial,

$$W(t) \leq \left(\frac{(\alpha - q_1 E_1) + (\gamma + q_2 E_2)}{\gamma + q_2 E_2} \right) M + W_0 e^{-(\gamma + q_2 E_2)t} \\ - \left(\frac{(\alpha - q_1 E_1) + (\gamma + q_2 E_2)}{\gamma + q_2 E_2} \right) M e^{-(\gamma + q_2 E_2)t}.$$

Si $t \rightarrow \infty$,

$$0 \leq W(t) \leq \left(\frac{(\alpha - q_1 E_1) + (\gamma + q_2 E_2)}{\gamma + q_2 E_2} \right) M$$

Por lo tanto, al recordar la definición de W , toda solución del sistema (3.7) entra en la región:

$$\Omega = \left\{ (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x(t) + \frac{1}{e} y(t) \leq \left(\frac{(\alpha - q_1 E_1) + (\gamma + q_2 E_2)}{\gamma + q_2 E_2} \right) M + \varepsilon \right\},$$

con ε un número real positivo muy pequeño. \blacklozenge

Ya que vimos que todas las soluciones están acotadas en el primer cuadrante del plano cartesiano, comencemos con el análisis local de los puntos de equilibrio.

3.2.1 Análisis local

Este análisis empieza calculando la matriz jacobiana J del campo vectorial que define al sistema (3.7) para después evaluarla en cada uno de estos puntos. El resultado es el siguiente:

1. Para el punto trivial $P_0 = (0, 0)$, $J(P_0)$ tiene los valores propios $\lambda_1 = \alpha - q_1 E_1$ y $\lambda_2 = -(\gamma + q_2 E_2)$, de donde el origen es un punto silla, puesto que $\alpha - q_1 E_1 > 0$.
2. Para el punto de equilibrio $P_1 = \left(\frac{K}{\alpha} (\alpha - q_1 E_1), 0 \right)$, $J(P_1)$ tiene los valores propios siguientes:

$$\lambda_1 = -(\alpha - q_1 E_1) \\ \lambda_2 = -(\gamma + q_2 E_2) + \frac{\alpha \beta c K (\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha b K (\alpha - q_1 E_1) + a K^2 (\alpha - q_1 E_1)^2}$$

P_1 es punto silla si se cumplen las siguientes condiciones:

- $E_1 < \frac{\alpha}{q_1}$,
- $E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{\alpha\beta cK(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha bK(\alpha - q_1 E_1) + aK^2(\alpha - q_1 E_1)^2} - \gamma \right)$,

$$\gamma < \frac{\alpha\beta cK(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha bK(\alpha - q_1 E_1) + aK^2(\alpha - q_1 E_1)^2}.$$

P_1 es un punto de equilibrio asintóticamente estable localmente si se cumple que,

- $E_1 < \frac{\alpha}{q_1}$,
 - $E_2 > \frac{1}{q_2} \left(\frac{\alpha\beta cK(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha bK(\alpha - q_1 E_1) + aK^2(\alpha - q_1 E_1)^2} - \gamma \right)$,
- $$\gamma < \frac{\alpha\beta cK(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha bK(\alpha - q_1 E_1) + aK^2(\alpha - q_1 E_1)^2}.$$

3. Para el punto $P_{int_1} = (x_{int_1}, y_{int_1})$, donde,

$$x_{int_1} = \frac{c\beta - b\lambda + \sqrt{(c\beta - b\lambda)^2 - 4a\lambda^2}}{2a\lambda},$$

$$y_{int_1} = \frac{1}{8a^2\beta K\lambda^3} [4a\lambda^2 + 2b\lambda\xi + \xi^2] [2a\lambda(\alpha - q_1 E_1) - \alpha\xi],$$

donde

$$\xi = c\beta - b\lambda + \sqrt{(c\beta - b\lambda)^2 - 4a\lambda^2},$$

$\det(J_{int_1}) < 0$, dada la condición de existencia $E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{\xi}{2a\lambda K} \right)$, con $\xi < 2a\lambda K$.

Por lo cual, P_{int_1} , es siempre un punto silla.

4. En el caso de P_{int_2} , donde,

$$x_{int_2} = \frac{c\beta - b\lambda - \sqrt{(c\beta - b\lambda)^2 - 4a\lambda^2}}{2a\lambda},$$

$$y_{int_2} = \frac{1}{8a^2\beta K\lambda^3} [4a\lambda^2 + 2b\lambda\xi + \xi^2] [2a\lambda(\alpha - q_1 E_1) - \alpha\xi],$$

donde

$$\xi = c\beta - b\lambda - \sqrt{(c\beta - b\lambda)^2 - 4a\lambda^2},$$

P_{int_2} es un punto asintóticamente estable localmente si se cumple la desigualdad,

$$\frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{R_{int_2}}{K(2ax_{int_2} + b)} - \frac{x_{int_2}}{K} \right) < E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{x_{int_2}}{K} \right),$$

donde $R_{int_2} = 1 + bx_{int_2} + ax_{int_2}^2$ y E_2 es tal que se satisfacen,

$$(-3a)x_{int_2}^2 + (2aK - 2b)x_{int_2} + (bK - 1) > 0, \quad x_{int_2} < \frac{1}{a}.$$

El punto P_{int_2} es inestable si,

$$E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{R_{int_2}}{K(2ax_{int_2} + b)} - \frac{x_{int_2}}{K} \right)$$

y

$$E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{x_{int_2}}{K} \right),$$

E_2 es tal que se satisface,

$$(-3a)x_{int_2}^2 + (2aK - 2b)x_{int_2} + (bK - 1) > 0, \quad x_{int_2} < \frac{1}{a}.$$

A continuación mostraremos la persistencia uniforme del sistema (3.7), desde el punto de vista biológico, un sistema es persistente uniforme si cada una de las especies, presa y depredador, sobreviven, al transcurrir el tiempo. Matemáticamente, lo que indica la persistencia uniforme es que cualquier solución del sistema (3.7), con condición inicial (x_0, y_0) y $x_0, y_0 > 0$, está siempre por arriba de una cota positiva m cuando $t \rightarrow \infty$. La definición formal se puede ver en el Apéndice A.7 y se encuentra en la referencia [36]. Existen dos herramientas matemáticas distintas que se utilizan para determinar la persistencia de un sistema:

1. Analizar el flujo sobre la frontera
2. Usar funciones de Lyapunov

La que usaremos en este trabajo es la segunda. Esta técnica consiste en definir una función diferenciable en la región (\mathbb{R}_+^2) , que cumpla las condiciones de ser Lyapunov promedio, las cuales se enuncian en la Definición A.7.2. Una vez probadas estas condiciones, entonces se utiliza el Teorema A.7.1 (demostrado en[11]), que indica que si todas las soluciones del sistema (3.7) están acotadas uniformemente (lo cual ya probamos en el Teorema 3.2.1) y encontramos una función de Lyapunov promedio en \mathbb{R}_+^2 , entonces el sistema es persistente uniformemente.

En el siguiente teorema, usaremos la técnica descrita para probar que el sistema (3.7) es efectivamente persistente uniformemente.

Teorema 3.2.2 *El sistema (3.7) es persistente uniformemente si se satisfacen las desigualdades*

$$E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{\alpha\beta cK(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha bK(\alpha - q_1 E_1) + aK^2(\alpha - q_1 E_1)^2} - \gamma \right),$$

y

$$\gamma < \frac{\alpha\beta cK(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha bK(\alpha - q_1 E_1) + aK^2(\alpha - q_1 E_1)^2}.$$

Demostración 3.2.2 *Sea $\sigma(x, y) = x^{h_1} y^{h_2}$, con $h_i, i = 1, 2$ constantes positivas, una función continua positiva de clase C^1 , definida en \mathbb{R}_+^2 .*

Comenzamos probando las condiciones para las cuales $\sigma(x, y)$ es una función de Lyapunov promedio, éstas son:

1. $\sigma(x, y) = x^{h_1} y^{h_2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ o $y = 0$, esto es, $x, y \in \partial(\mathbb{R}_+^2)$,
2. $\sigma(x, y) = x^{h_1} y^{h_2} > 0 \Rightarrow x^{h_1} > 0$ y $y^{h_2} > 0$, como $\sigma(x, y)$ está definida en \mathbb{R}_+^2 , entonces $x, y \in \text{int}(\mathbb{R}_+^2)$,
3. Sea

$$\Psi(x, y) = \frac{\sigma'(x, y)}{\sigma(x, y)} = \frac{y^{h_2} h_1 x^{h_1-1} \dot{x} + x^{h_1} h_2 y^{h_2-1} \dot{y}}{x^{h_1} y^{h_2}} = h_1 \frac{x'}{x} + h_2 \frac{y'}{y},$$

Luego, al sustituir \dot{x} y \dot{y} , se obtiene

$$\Psi(x, y) = h_1 \left[\alpha \left(1 - \frac{x}{K} \right) - q_1 E_1 - \frac{\beta y}{1 + bx + ax^2} \right] + h_2 \left[-(\gamma + q_2 E_2) + \frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} \right].$$

Así, Ψ es una función continua sobre \mathbb{R}_+^2 , para $(x, y) \in \text{int}(\mathbb{R}_+^2)$

4. Ya que los únicos puntos que se encuentran sobre la frontera de \mathbb{R}_+^2 , son P_0 y P_1 , sustituímos éstos en $\Psi(x,y)$.

$$\begin{aligned} \int_0^T \Psi(0,0) dt &= \int_0^T h_1[\alpha - q_1 E_1] - h_2[\gamma + q_2 E_2] dt, \quad p.a. T > 0 \\ &= (h_1[\alpha - q_1 E_1] - h_2[\gamma + q_2 E_2]) T \end{aligned}$$

lo cual para un $h_1 > 0$ suficientemente grande y T cualquiera, es positivo.

Mientras que si

$$\begin{aligned} \int_0^T \Psi\left(\frac{K}{\alpha}(\alpha - q_1 E_1), 0\right) dt &= \\ \left(h_2 \left[-(\gamma + q_2 E_2) + \frac{\alpha \beta c K (\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha b K (\alpha - q_1 E_1) + a K^2 (\alpha - q_1 E_1)^2} \right] \right) T &> 0 \end{aligned}$$

si se cumple la desigualdad

$$E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{\alpha \beta c K (\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha b K (\alpha - q_1 E_1) + a K^2 (\alpha - q_1 E_1)^2} - \gamma \right),$$

y

$$\gamma < \frac{\alpha \beta c K (\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha b K (\alpha - q_1 E_1) + a K^2 (\alpha - q_1 E_1)^2},$$

para todo valor de h_2 y T .

Por lo cual, $\sigma(x,y)$ representa la función de Lyapunov promedio y todas las soluciones de (3.7) son uniformemente acotadas en \mathbb{R}_+^2 , por ende, el sistema es persistente uniformemente. ♦

Cabe mencionar que para esta desigualdad, el punto P_1 es punto silla, es decir, si P_1 es un punto de equilibrio asintóticamente estable localmente, entonces la población depredador se extingue si t es muy grande.

Una vez demostrado que el sistema (3.7) es persistente uniformemente, mostramos la existencia de una bifurcación de Hopf próxima al punto de equilibrio interior. El teorema de la bifurcación de Hopf se puede revisar en la subsección A.2.5 del Apéndice.

Teorema 3.2.3 Dadas las desigualdades para las cuales $\det(J(P_{int_2})) > 0$, el sistema (3.7) tiene una bifurcación de Hopf cerca del punto de equilibrio positivo interno P_{int_2} en el parámetro:

$$\bar{\beta} = -\frac{\lambda(abK^2\mu^2 + (2\alpha b^2 - 4a\alpha + b\eta)K\mu + \alpha^2 b + 2a\eta)}{3\alpha c(\alpha - bK\mu)},$$

donde $\eta = \sqrt{a^2K^2\mu^2 + a\alpha bK\mu - 3a\alpha^2 + \alpha^2b^2}$, $\mu = \alpha - q_1E_1$ y $\lambda = \gamma + q_2E_2$.

Demostración 3.2.3 *Los eigenvalores de la matriz de Jacobi $J(P_{int_2})$ tienen la forma,*

$$\lambda_{int_2} = \frac{Tr}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{Tr^2 - 4Det},$$

donde Tr es la traza y Det el determinante de la matriz de Jacobi $J(P_{int_2})$.

El determinante es positivo si se cumplen las condiciones,

$$E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(\alpha \left(1 - \frac{x_{int_2}}{K} \right) \right), \quad x_{int_2} < K, \quad x_{int_2} < \frac{1}{a}.$$

Ya que $Tr = 0$ en $\beta = \bar{\beta}$, entonces,

$$\lambda_{int_2} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{-4Det} = \pm i\sqrt{Det},$$

por lo que $\bar{\beta}$ es el parámetro de bifurcación. Además, se cumple la condición de transversalidad,

$$\left. \frac{\partial Re(\lambda_{int_2})}{\partial \beta} \right|_{\beta=\bar{\beta}} = \left. \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{T}{2} \right) \right|_{\beta=\bar{\beta}} = A_3\bar{\beta}^3 + A_2\bar{\beta}^2 + A_1\bar{\beta} + A_0 > 0,$$

donde los coeficientes son:

- $A_3 = -3\alpha c^3$
- $A_2 = 3\alpha c^2(\eta + b\lambda)$
- $A_1 = bc\lambda^2(\alpha b + 2aK\mu)$
- $A_0 = 4a\alpha\lambda^2\mu - \alpha b^3\lambda^3 + 4a\alpha b\lambda^3 + 8a^2K\lambda^3\mu - \alpha b^2\lambda^2\eta - 2aKb^2\lambda^3\mu$

Por tanto, de acuerdo al teorema de bifurcación de Hopf, se concluye que $\beta = \bar{\beta}$ es un punto de bifurcación del sistema (3.7). Además, el punto P_{int_2} es inestable para toda $\beta > \bar{\beta}$, rodeado por un ciclo límite estable. ♦

A continuación realizamos el análisis global que nos conduce a determinar el retrato fase.

3.2.2 Análisis global

Teorema 3.2.4 *El punto de equilibrio $P_1 = (\hat{x}, 0)$ es asintóticamente estable globalmente, donde $\hat{x} = K/\alpha(\alpha - q_1 E_1)$.*

Demostración 3.2.4 *El punto P_1 es asintóticamente estable localmente para*

$$E_1 < \frac{\alpha}{q_1},$$

$$E_2 > \frac{1}{q_2} \left(\frac{\alpha\beta c K(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha b K(\alpha - q_1 E_1) + a K^2(\alpha - q_1 E_1)^2} - \gamma \right).$$

Para mostrar que P_1 es globalmente nos basamos en el método directo de Lyapunov. Véase el Apéndice A.2.

Sea $V(x, y) = c_1(x - \hat{x} - \hat{x} \ln(x/\hat{x})) + c_2 y$, donde $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y diferenciable. Probaremos que existen c_1 y $c_2 \in \mathbb{R}$ positivas para las que V es función de Lyapunov fuerte o estricta para el sistema (3.7) y para $(\hat{x}, 0)$. $V(\hat{x}, 0) = 0$ con $V(x, y) > 0$ para toda $(x, y) \neq (\hat{x}, 0)$.

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= c_1 \left(\frac{x - \hat{x}}{x} \right) \frac{dx}{dt} + c_2 \frac{dy}{dt} \\ &= -\frac{\alpha}{K} c_1 (x - \hat{x})^2 - \frac{\beta xy}{1 + bx + ax^2} (c_1 - c_2 c) \\ &\quad - y \left(c_2 \gamma + c_2 q_2 E_2 + \frac{c_1 \hat{x} \beta}{1 + bx + ax^2} \right) \end{aligned}$$

Si $c_1 = 1$ y $c_2 = 1/c$, entonces,

$$\frac{dV}{dt} \leq -\frac{\alpha}{K} (x - \hat{x})^2 - y \left(\frac{\gamma + q_2 E_2}{c} + \frac{\hat{x} \beta}{1 + bx + ax^2} \right) < 0$$

Ya que $\frac{dV}{dt} < 0$, entonces V es una función de Lyapunov y P_1 es un punto asintóticamente estable globalmente. ♦

Veamos ahora si la estabilidad asintótica local del punto de equilibrio interno P_{int_2} , es global. Véase la subsección del Apéndice A.2.4.

Teorema 3.2.5 *El punto de equilibrio interno positivo del sistema (3.7), P_{int_2} es asintóticamente estable globalmente para cualquier punto inicial perteneciente a la región*

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, y < \frac{\alpha(1 + bx + ax^2)^2}{K\beta(2ax + b)} \right\}$$

Demostración 3.2.5 *Dado que el punto P_{int_2} es asintóticamente estable localmente siempre que se cumplen las desigualdades:*

$$\frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{R_{int_2}}{K(2ax_{int_2} + b)} - \frac{x_{int_2}}{K} \right) < E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{x_{int_2}}{K} \right),$$

donde $R_{int_2} = 1 + bx_{int_2} + ax_{int_2}^2$ y E_2 es tal que se satisfacen,

$$(-3a)x_{int_2}^2 + (2aK - 2b)x_{int_2} + (bK - 1) > 0, \quad x_{int_2} < \frac{1}{a}.$$

Usando la prueba o criterio de Dulac, sea $H : \text{int}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , $H(x, y) = \frac{1}{xy}$,

$H(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in \text{Int}(\mathbb{R}_+^2)$. Sean $h_1 = H(x, y)f(x, y)$ y $h_2 = H(x, y)g(x, y)$, donde

$$f(x, y) = x \left(\alpha \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\beta y}{1 + bx + ax^2} - q_1 E_1 \right)$$

$$g(x, y) = y \left(-\gamma + \frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - q_2 E_2 \right)$$

$$\begin{aligned} \Delta(x, y) = \nabla \cdot (h_1(x, y), h_2(x, y)) &= \frac{\partial(h_1)}{\partial x} + \frac{\partial(h_2)}{\partial y} \\ &= -\frac{\alpha}{yK} + \frac{\beta(2ax + b)}{(1 + bx + ax^2)^2} < 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y < \frac{\alpha(1 + bx + ax^2)^2}{K\beta(2ax + b)}.$$

Si $\Delta(x, y)$ es distinta de cero y no cambia de signo en B , de acuerdo al Criterio de Dulac, no hay dinámica periódica.

Por lo cual P_{int_2} es un punto de equilibrio único y positivo del sistema (3.7) dentro de $\text{int}(\mathbb{R}_+^2)$ y todas las soluciones que inician en \mathbb{R}_+^2 están uniformemente acotadas. De acuerdo con el Teorema de Poincaré-Bendixson, P_{int_2} es asintóticamente estable globalmente, es decir, atrae a toda solución de (3.7) que empiece en \mathbb{R}^2 . ♦

A continuación obtenemos el equilibrio bioeconómico del sistema (3.7).

3.2.3 Equilibrio bioeconómico

Recordando la definición de equilibrio bioeconómico, enunciada en la Introducción y en el Glosario de este trabajo, tenemos que $[x_\infty, y_\infty, E_{1\infty}, E_{2\infty}]$, debe satisfacer el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\Pi &= (p_1q_1x - c_1)E_1 + (p_2q_2y - c_2)E_2 = 0 \\ \alpha \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta y}{1 + bx + ax^2} - q_1E_1 &= 0 \\ -\gamma + \frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - q_2E_2 &= 0\end{aligned}\tag{3.8}$$

Igual que en el modelo anterior, consideramos cuatro casos distintos:

1. Si $E_2 = 0$, el sistema (3.8) queda como sigue:

$$\begin{aligned}(p_1q_1x - c_1)E_1 &= 0 \\ \alpha \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta y}{1 + bx + ax^2} - q_1E_1 &= 0 \\ -\gamma + \frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} &= 0\end{aligned}$$

De la primera ecuación, $x_\infty = \frac{c_1}{p_1q_1}$, para un E_1 fijo y finito. Dado que x_∞ debe satisfacer las otras dos ecuaciones, entonces, sustituimos esta ecuación en la tercera y obtenemos que se debe cumplir que:

$$\gamma = \frac{c\beta c_1 p_1 q_1}{p_1^2 q_1^2 + b c_1 p_1 q_1 + a c_1^2}.$$

Además, de la sustitución de x_∞ en la segunda ecuación algebraica,

$$y = -\frac{q_1(1 + bx_\infty + ax_\infty^2)}{\beta}E_1 + \frac{(1 + bx_\infty + ax_\infty^2)}{\beta} \left[\alpha \left(1 - \frac{x_\infty}{K}\right) \right],$$

$(y_\infty, E_{1\infty})$ será un punto sobre la recta en el primer cuadrante del plano yE_1 si $0 < \frac{c_1}{Kp_1q_1} < 1$.

2. Si $E_1 = 0$, el sistema de ecuaciones (3.8) queda como sigue:

$$(p_2q_2y - c_2)E_2 = 0$$

$$\alpha \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta y}{1 + bx + ax^2} = 0$$

$$-\gamma + \frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - q_2E_2 = 0$$

Despejando y de la primera ecuación, $y_\infty = \frac{c_2}{p_2q_2}$, para E_2 finito. Sustituyendo ésta en la segunda ecuación del sistema:

$$\alpha ax^3 + \alpha(b - aK)x^2 + \alpha(1 - bK)x - \alpha K + \frac{\beta c_2}{p_2q_2}K = 0.$$

Para $b < aK$, $bK > 1$ y $\frac{c_2}{p_2q_2} < \frac{\alpha}{\beta}$, existe al menos una solución positiva x_∞ . Para este valor de x_∞ , de la tercera ecuación algebraica:

$$E_{2\infty} = \frac{1}{q_2} \left(-\gamma + \frac{c\beta x_\infty}{1 + bx_\infty + ax_\infty^2} \right)$$

y

$$\gamma < \frac{c\beta x_\infty}{1 + bx_\infty + ax_\infty^2}.$$

3. Si E_1 y E_2 son cero, entonces no hay pesca y el sistema (3.8) se simplifica a un sistema de dos ecuaciones algebraicas:

$$\alpha \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta y}{1 + bx + ax^2} = 0$$

$$-\gamma + \frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} = 0$$

De donde obtenemos las soluciones,

$$x_\infty = \frac{c\beta - b\gamma \pm \sqrt{(c\beta - b\gamma)^2 - 4a\gamma^2}}{2a\gamma},$$

$$y_\infty = \left[\alpha \left(1 - \frac{x_\infty}{K}\right) \right] \left[\frac{1 + bx_\infty + ax_\infty^2}{\beta} \right]$$

4. Si $E_1, E_2 \neq 0$, la pesquería total está en operación.

De la primera ecuación del sistema (3.8), $x_\infty = \frac{c_1}{p_1 q_1}$ y $y_\infty = \frac{c_2}{p_2 q_2}$.

Sustituyendo x_∞ y y_∞ en la segunda ecuación algebraica y despejando E_1 , obtenemos:

$$E_{1\infty} = \frac{1}{q_1} \left[\alpha \left(1 - \frac{c_1}{p_1 q_1 K} \right) - \frac{\beta c_2 p_1^2 q_1^2}{p_2 q_2 (p_1^2 q_1^2 + b c_1 p_1 q_1 + a c_1^2)} \right],$$

si se cumple que,

$$\alpha \left(1 - \frac{c_1}{p_1 q_1 K} \right) > \frac{\beta c_2 p_1^2 q_1^2}{p_2 q_2 (p_1^2 q_1^2 + b c_1 p_1 q_1 + a c_1^2)},$$

si $0 < \frac{c_1}{K p_1 q_1} < 1$.

Despejando E_2 de la tercera ecuación y reemplazando x_∞ por x ,

$$E_{2\infty} = \frac{1}{q_2} \left(-\gamma + \frac{c \beta c_1 p_1 q_1}{p_1^2 q_1^2 + b c_1 p_1 q_1 + a c_1^2} \right),$$

dado que

$$\gamma < \frac{c \beta c_1 p_1 q_1}{p_1^2 q_1^2 + b c_1 p_1 q_1 + a c_1^2}.$$

Así, $[x_\infty, y_\infty, E_{1\infty}, E_{2\infty}]$ es un punto de equilibrio bioeconómico si y sólo si las condiciones anteriores se cumplen.

Enseguida abordamos el problema de control de este trabajo considerando el nuevo sistema (3.7).

3.2.4 Política óptima de cosecha

Dado el sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\frac{dx}{dt} = x \left(\alpha \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\beta y}{1 + b x + a x^2} - q_1 E_1 \right)$$

$$\frac{dy}{dt} = y \left(-\gamma + \frac{c \beta x}{1 + b x + a x^2} - q_2 E_2 \right),$$

con condición inicial (x_0, y_0) , nuestro interés es maximizar el funcional,

$$J = \int_0^{\infty} e^{-wt} [(p_1 q_1 x - c_1)E_1 + (p_2 q_2 y - c_2)E_2] dt,$$

donde x e y son las variables de estado; mientras que E_1 y E_2 son las variables de control. Siguiendo el Teorema 2.1.2 que establece el Principio Máximo de Pontryagin, lo primero que se debe hacer es formar el Hamiltoniano de este problema,

$$H = e^{-wt} [(p_1 q_1 x - c_1)E_1 + (p_2 q_2 y - c_2)E_2] + \lambda_1(F_1 - q_1 E_1 x) + \lambda_2(F_2 - q_2 E_2 y),$$

donde,

$$F_1 = \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta xy}{1 + bx + ax^2},$$

$$F_2 = -\gamma y + \frac{c\beta xy}{1 + bx + ax^2},$$

Igual que en el modelo anterior, las variables de control E_1 y E_2 aparecen linealmente en la función hamiltoniana. Proponemos que las soluciones óptimas no ocurran en $(E_i)_{min}$ ni en $(E_i)_{max}$, éstas deben cumplir

$$\frac{\partial H}{\partial E_i} = 0, \quad i = 1, 2.$$

De donde,

$$\lambda_1 = e^{-wt} \left(p_1 - \frac{c_1}{q_1 x}\right),$$

$$\lambda_2 = e^{-wt} \left(p_2 - \frac{c_2}{q_2 y}\right),$$

las cuales satisfacen la condición de transversalidad, es decir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda_i(t) = 0 \quad \forall i.$$

Entonces, $\lambda_1(t)$ y $\lambda_2(t)$, variables adjuntas, satisfacen las ecuaciones canónicas:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_1} = \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta xy}{1 + bx + ax^2} - q_1 E_1 x, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_2} = -\gamma y + \frac{c\beta xy}{1 + bx + ax^2} - q_2 E_2 y, \\ \frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x} \\ &= -\left[e^{-wt} p_1 q_1 E_1 + \lambda_1 \left(\alpha \left(1 - \frac{x}{K}\right) - q_1 E_1 + \frac{\beta y(ax^2 - 1)}{(1 + bx + ax^2)^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_2 \left(\frac{c\beta y(1 - ax^2)}{(1 + bx + ax^2)^2} \right) \right], \\ \frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial y} \\ &= -\left[e^{-wt} p_2 q_2 E_2 + \lambda_2 \left(-\gamma - q_2 E_2 + \frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \lambda_1 \left(-\frac{\beta x}{1 + bx + ax^2} \right) \right].\end{aligned}$$

Sustituyendo λ_1 y λ_2 en $\dot{\lambda}_1$ y $\dot{\lambda}_2$ y simplificando, se obtiene el punto (x^*, y^*) que es solución del problema de control óptimo asociado al sistema (3.7).

$$\begin{aligned}x^* &= \frac{-\sqrt{b^2\gamma^2 p_2^2 q_1^2 - 2b\beta c\gamma p_2^2 q_1^2 + 2b\beta\gamma p_1 p_2 q_1^2 + \beta^2 c^2 p_2^2 q_1^2 - 2\beta^2 c p_1 p_2 q_1^2 + \beta^2 p_1^2 q_1^2}}{2\alpha\gamma p_2 q_1} \\ &\quad \frac{\sqrt{+4ac_1\beta\gamma p_2 q_1 - 4a\gamma^2 p_2^2 q_1^2 + \beta p_1 q_1 - \beta c p_2 q_1 + b\gamma p_2 q_1}}{2\alpha\gamma p_2 q_1} \\ y^* &= \frac{\alpha c_1 q_2 + a^2 \alpha c_1 q_2 x^{*4} + \alpha b^2 c_1 q_2 x^{*2} - K\beta c c_2 q_1 + K\alpha p_1 q_1 q_2 + 2\alpha b c_1 q_2 x^*}{K\beta q_2 (bc_1 + p_1 q_1 + 2ac_1 x^* - cp_2 q_1 - ap_1 q_1 x^{*2} + acp_2 q_1 x^{*2})} \\ &\quad \frac{-2\alpha p_1 q_1 q_2 x^* + 2a\alpha c_1 q_2 x^{*2} + 2a\alpha b c_1 q_2 x^{*3} - 4a\alpha p_1 q_1 q_2 x^{*3} - 4\alpha b p_1 q_1 q_2 x^{*2}}{K\beta q_2 (bc_1 + p_1 q_1 + 2ac_1 x^* - cp_2 q_1 - ap_1 q_1 x^{*2} + acp_2 q_1 x^{*2})} \\ &\quad \frac{-2a^2 \alpha p_1 q_1 q_2 x^{*5} - 2\alpha b^2 p_1 q_1 q_2 x^{*3} + 2K\alpha b p_1 q_1 q_1 x^* + K\alpha \beta c c_2 q_1 x^{*2}}{K\beta q_2 (bc_1 + p_1 q_1 + 2ac_1 x^* - cp_2 q_1 - ap_1 q_1 x^{*2} + acp_2 q_1 x^{*2})} \\ &\quad \frac{+2K\alpha \alpha p_1 q_1 q_2 x^{*2} - 4\alpha \alpha b p_1 q_1 q_2 x^{*4} + K\alpha^2 \alpha p_1 q_1 q_2 x^{*4} + K\alpha b^2 p_1 q_1 q_2}{K\beta q_2 (bc_1 + p_1 q_1 + 2ac_1 x^* - cp_2 q_1 - ap_1 q_1 x^{*2} + acp_2 q_1 x^{*2})} \\ &\quad \frac{+2K\alpha \alpha b p_1 q_1 q_2 x^{*3}}{K\beta q_2 (bc_1 + p_1 q_1 + 2ac_1 x^* - cp_2 q_1 - ap_1 q_1 x^{*2} + acp_2 q_1 x^{*2})}\end{aligned}$$

Una vez calculados los valores de x^* y de y^* , también se pueden determinar los esfuerzos de pesca óptimos. Sólo basta sustituir el punto óptimo en las ecuaciones,

$$\begin{aligned} E_1^* &= \frac{1}{q_1} \left\{ \alpha \left(1 - \frac{x^*}{K} \right) - \frac{\beta y^*}{1 + bx^* + ax^{*2}} \right\}, \\ E_2^* &= \frac{1}{q_2} \left\{ -\gamma + \frac{c\beta x^*}{1 + bx^* + ax^{*2}} \right\}. \end{aligned}$$

obteniendo el punto $P^* = (x^*, y^*, E_1^*, E_2^*)$, que satisface que $\frac{\partial^2 H}{\partial E_1^2}(P^*) < 0$ y que el determinante de la matriz Hessiana $Hess(P^*)$ es positivo,

$$\det(Hess(P^*)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial E_1^2}(P^*) & \frac{\partial^2 H}{\partial E_1 \partial E_2}(P^*) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial E_2 \partial E_1}(P^*) & \frac{\partial^2 H}{\partial E_2^2}(P^*) \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial E_1^2} = -q_1 x \frac{\partial H}{\partial x} \left(\frac{dE_1}{dx} \dot{x} + \frac{dE_1}{dy} \dot{y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial E_2^2} = -q_2 y \frac{\partial H}{\partial y} \left(\frac{dE_2}{dx} \dot{x} + \frac{dE_2}{dy} \dot{y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial E_1 \partial E_2} = -q_1 x \frac{\partial H}{\partial x} \left(\frac{dE_2}{dx} \dot{x} + \frac{dE_2}{dy} \dot{y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial E_2 \partial E_1} = -q_2 y \frac{\partial H}{\partial y} \left(\frac{dE_1}{dx} \dot{x} + \frac{dE_1}{dy} \dot{y} \right).$$

Seguimos ahora con las simulaciones numéricas del sistema (3.7).

3.2.5 Simulaciones numéricas

A fin de obtener las soluciones numéricas del sistema (3.7), consideramos los mismos parámetros del modelo anterior $\alpha = 2$, $\beta = 0.099$, $\gamma = 0.00046$, $K = 600$, $b = 0.00198$, $c = 0.01$, $q_1 = 0.2$, $q_2 = 0.02$ y añadiendo el parámetro $a = 0.000198$, resolvemos el sistema (3.7) utilizando el software *Matlab* y rutina *ode45*.

Para empezar, calculemos las condiciones de existencia del punto de equilibrio positivo P_{int_2} ,

$$x_{int_2} > 0 \Leftrightarrow E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{c\beta}{2\sqrt{a}+b} - \gamma \right) \Leftrightarrow E_2 < 1.62,$$

$$y_{int_2} > 0 \Leftrightarrow E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{x_{int_2}}{K} \right),$$

Ya que el punto de equilibrio interno P_{int_1} es un punto silla, para todo E_i , $i = 1, 2$. Veamos los intervalos donde los puntos P_1 y P_{int_2} son estables e inestables:

1. El punto de equilibrio P_1 es asintóticamente estable localmente si,

$$E_1 < \frac{\alpha}{q_1} = 10, \quad E_2 > \frac{1}{q_2} \left(\frac{\alpha\beta cK(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha bK(\alpha - q_1 E_1) + aK^2(\alpha - q_1 E_1)^2} - \gamma \right).$$

Si $E_1 \in [0, 9]$, $E_2 \in [0.4, 1.6]$ y si $E_1 \in (9, 10]$, $E_2 \in [0, 1.6]$, esto se puede observar en la figura 3.4.

2. P_1 es punto silla si,

$$E_1 < \frac{\alpha}{q_1} = 10, \quad E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{\alpha\beta cK(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha bK(\alpha - q_1 E_1) + aK^2(\alpha - q_1 E_1)^2} - \gamma \right).$$

Si $E_1 \in [0, 10]$, E_2 toma los valores que están por debajo de la gráfica de la figura 3.4.

3. P_{int_2} es un punto asintóticamente estable localmente si,

$$\frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{R_{int_2}}{K(2ax_{int_2} + b)} - \frac{x_{int_2}}{K} \right) < E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{x_{int_2}}{K} \right),$$

donde $R_{int_2} = 1 + bx_{int_2} + ax_{int_2}^2$ y E_2 es tal que se satisfacen,

$$(-3a)x_{int_2}^2 + (2aK - 2b)x_{int_2} + (bK - 1) > 0, \quad x_{int_2} < \frac{1}{a},$$

donde $x_{int_2} = \frac{c\beta - b\lambda - \sqrt{(c\beta - b\lambda)^2 - 4a\lambda^2}}{2a\lambda}$, es decir,

$$E_2 > \frac{1}{q_2} \left(\frac{(394.069)c\beta}{1 + (394.069)^2 a + (394.069)b} - \gamma \right) = 0.6,$$

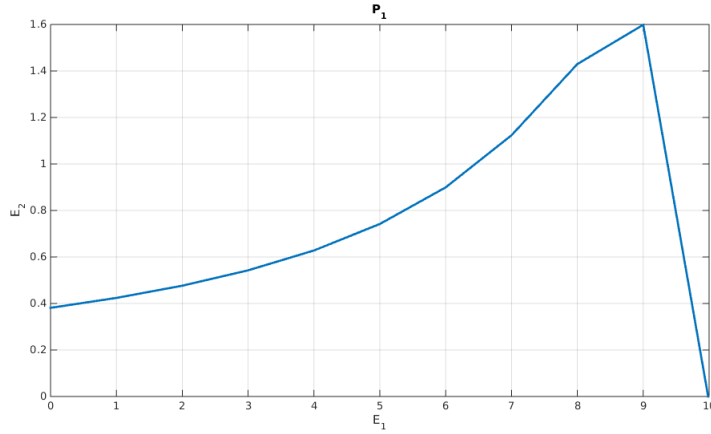


Figura 3.4: Gráfica de E_2 vs E_1 que determina la estabilidad e inestabilidad del punto de equilibrio P_1 .

$E_2 \in (0.6, 1.62)$, mientras que E_1 se encuentra entre las gráficas de la figura 3.5 (a), región sombreada (E), para la región comprendida entre $0 < x_{int} < 394.069$, que satisface que el polinomio $(-3a)x_{int}^2 + (2aK - 2b)x_{int} + (bK - 1)$ sea positivo, véase la figura 3.5 (b).

4. El punto P_{int_2} es inestable si,

$$E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{R_{int_2}}{K(2ax_{int_2} + b)} - \frac{x_{int_2}}{K} \right)$$

y

$$E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{x_{int_2}}{K} \right),$$

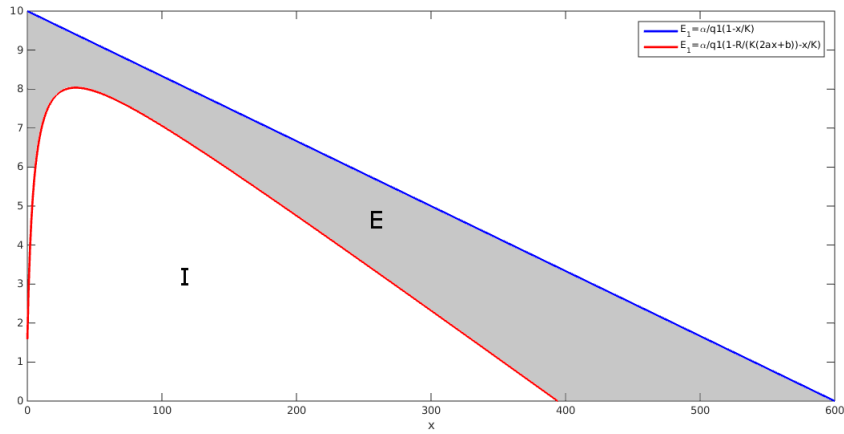
E_2 es tal que se satisface,

$$(-3a)x_{int_2}^2 + (2aK - 2b)x_{int_2} + (bK - 1) > 0, \quad x_{int_2} < \frac{1}{a},$$

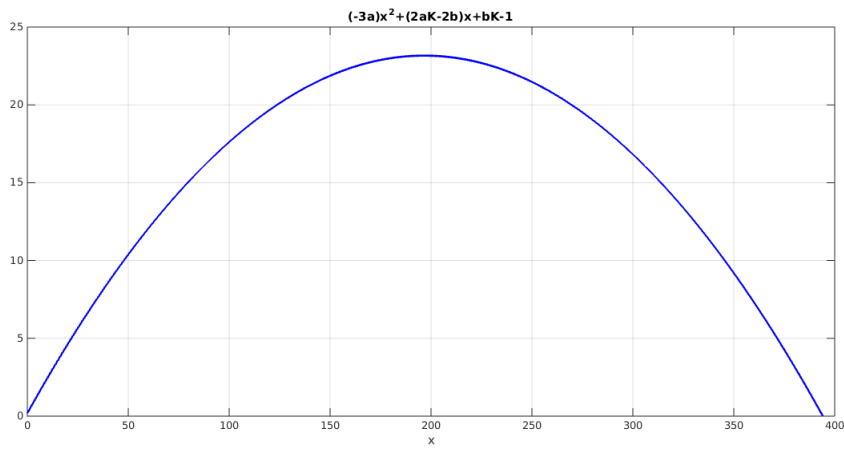
$$\text{donde } x_{int_2} = \frac{c\beta - b\lambda - \sqrt{(c\beta - b\lambda)^2 - 4a\lambda^2}}{2a\lambda}.$$

$E_2 \in (0, 0.6)$ y E_1 está por debajo de las gráficas de la figura 3.5 (a), área I .

De los incisos anteriores, podemos ver que



(a)



(b)

Figura 3.5: (a) Gráfica de las desigualdades de E_1 que satisfacen la estabilidad o inestabilidad del punto P_{int_2} . (b) Gráfica del polinomio $(-3a)x_{int_2}^2 + (2aK - 2b)x_{int_2} + (bK - 1)$.

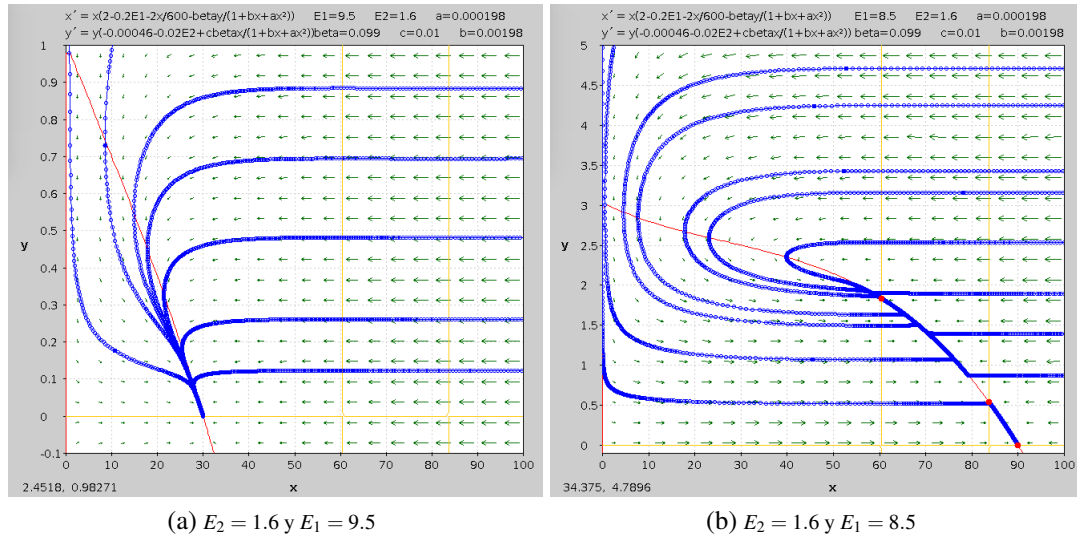


Figura 3.6: Retratos fase para distintos valores de E_1 y E_2 , con $Pplane$.

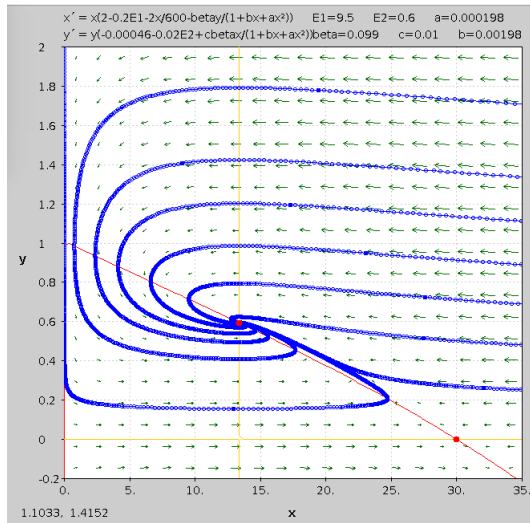
- Si $0 < E_2 < 0.6$ y acotamos a E_1 de tal forma que $3.5 < E_1 < 8$, P_{int_2} es inestable y P_1 es punto silla, se garantiza que el punto interno positivo inestable y el punto P_1 estable nunca ocurren simultáneamente.

Para observar la dinámica descrita, fijemos los valores de E_1 y E_2 en los distintos intervalos.

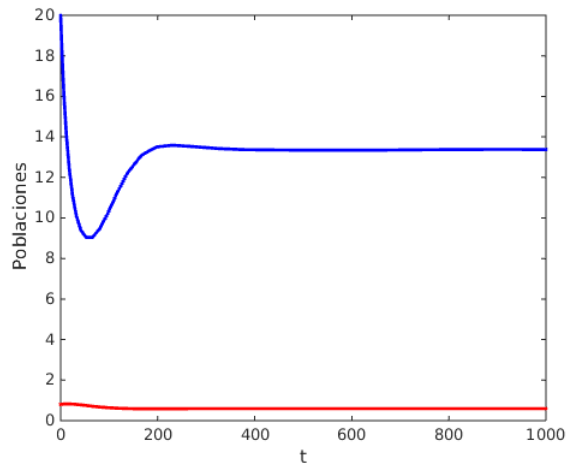
Si $E_2 = 1.6$ y $E_1 = 9.5$, el punto $P_1 = (30, 0)$ es estable y P_{int_2} no es positivo. Véase la figura 3.6 (a). Pero si $E_2 = 1.6$ y $E_1 = 8.5$, $P_1 = (90, 0)$ y $P_{int_2} = (60.353, 1.8374)$ son estables, además aquí se muestra el punto silla P_{int_1} . Esto último se puede apreciar en la figura 3.6 (b).

Para $E_1 = 9.5$ y $E_2 = 0.6$, el punto de equilibrio $P_{int_2} = (13.364, 0.59477)$ es estable y $P_1 = (30, 0)$ es un punto silla. La figura 3.7 ilustra la dinámica del sistema (3.7), con distintas condiciones iniciales.

Si $E_1 = 8$ y $E_2 = 0.6$, el punto de equilibrio $P_{int_2} = (13.364, 3.8124)$ es asintóticamente estable y $P_1 = (120, 0)$ es un punto silla, como se puede observar en la figura 3.8 y condición inicial $(x_0, y_0) = (20, 0.8)$.

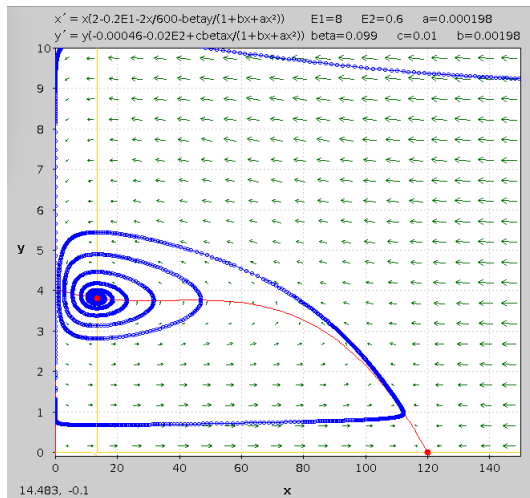


(a)

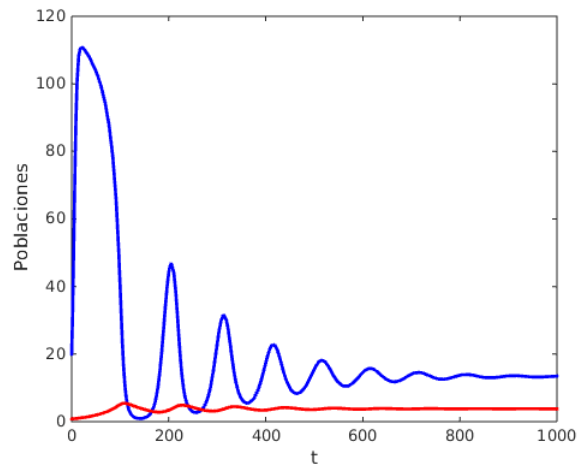


(b)

Figura 3.7: (a) Retrato fase del sistema (3.7), para $E_1 = 9.5$ y $E_2 = 0.6$. (b) Solución del sistema correspondiente a la condición inicial $(x_0, y_0) = (20, 0.8)$.



(a)



(b)

Figura 3.8: (a) Retrato fase del sistema (3.7), para $E_1 = 8$ y $E_2 = 0.6$. (b) Solución del sistema correspondiente a la condición inicial $(x_0, y_0) = (20, 0.8)$.

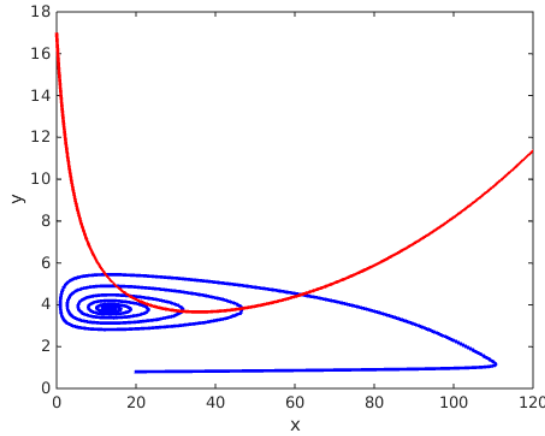


Figura 3.9: Región B , donde P_{int_2} es asintóticamente estable globalmente.

Para estos mismos valores, $E_1 = 8$ y $E_2 = 0.6$, graficamos el retrato fase y la región

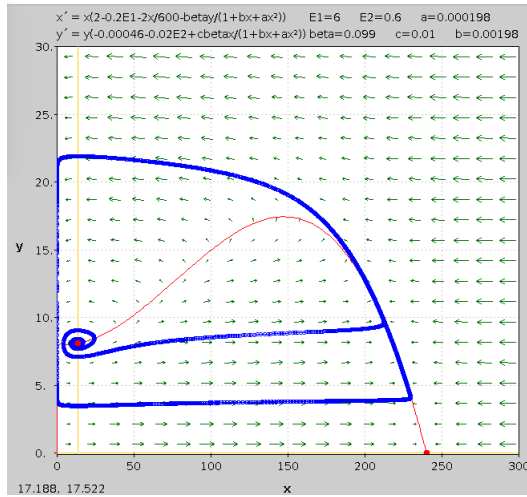
$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \mid x > 0, y > 0, y < \frac{\alpha(1 + bx + ax^2)^2}{K\beta(b + 2ax)} \right\},$$

donde se garantiza que el punto de equilibrio P_{int_2} es asintóticamente estable globalmente, véase la figura 3.9. Obsérvese en las figuras 3.8 y 3.9, que la región B está por encima de la recta $y = 4$ cuando $x < 20$ y por ende, el punto de equilibrio P_{int_2} se encuentra dentro de B . Así, cualquier condición inicial (x_0, y_0) del sistema (3.7), para los parámetros establecidos, tiende hacia el punto de equilibrio P_{int_2} .

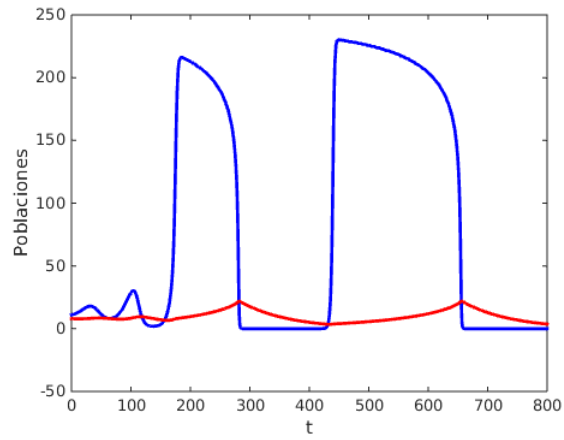
Si $E_1 = 6$ y $E_2 = 0.5$, el punto $P_{int_2} = (13.364, 8.1026)$ es inestable y $P_1 = (240, 0)$ es un punto silla. La figura 3.10 muestra la dinámica del sistema (3.7) y condición inicial $(x_0, y_0) = (11, 8)$.

El valor específico del parámetro $\bar{\beta}$ que rompe la solución periódica del sistema (3.7) es de 0.0415. Según el análisis hecho antes, vemos que si $E_1 = 6$, $E_2 = 0.5$ y $\beta = 0.099$, para la condición $(x_0, y_0) = (11, 8)$, el punto P_{int_2} es inestable y aparece un ciclo límite atractor. Véase la figura 3.11 (a). Pero si $\bar{\beta} = 0.0415$, entonces en el sistema ya no existe el ciclo límite. Véase la figura 3.11 (b).

Si $c_1 = 5$, $c_2 = 6$, $p_2 = 6$, $w = 0.005$, los valores numéricos vistos en las simulaciones numéricas del modelo (3.1) y cambiamos el valor de la presa a $p_1 = 10$, encontramos el valor máximo del Hamiltoniano. La razón de esto, es a diferencia del primer modelo,



(a)



(b)

Figura 3.10: (a) Retrato fase del sistema (3.7), para $E_1 = 6$ y $E_2 = 0.5$. (b) Solución del sistema correspondiente a la condición inicial $(x_0, y_0) = (11, 8)$.

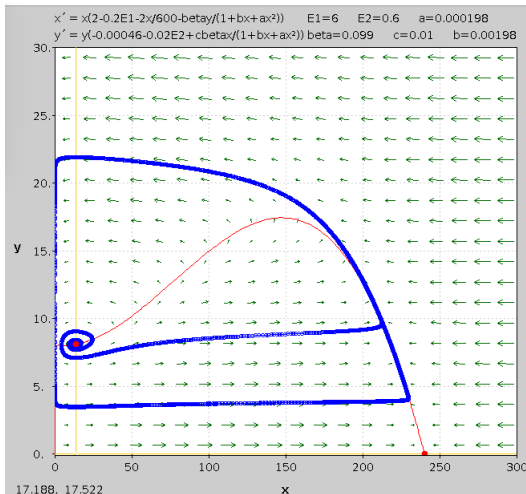
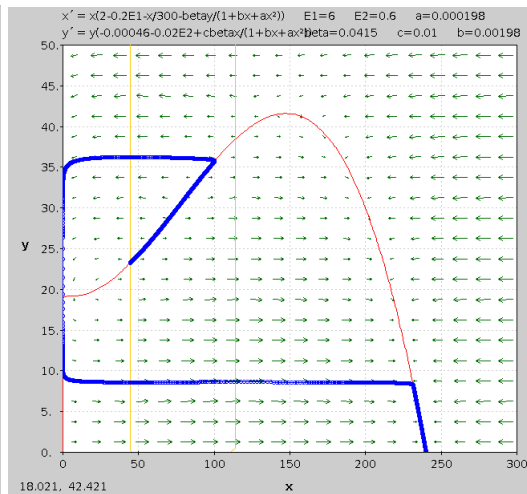
(a) $\beta = 0.099$ (b) $\beta = 0.0415$

Figura 3.11: Gráficas del retrato fase, para $E_1 = 6$ y $E_2 = 0.6$, con *Pplane*.

el uso de la respuesta funcional tipo IV significa que las presas en conjunto empiezan a formar grupos de defensa en contra del ataque tanto del depredador como del pescador. Así, desde el punto de vista económico, el costo de la unidad presa se incrementa. El punto de equilibrio óptimo obtenido es

$$P(x^*, y^*, E_1^*, E_2^*) = (2.5123, 20.0647, 0.0875, 0.1006),$$

que satisface que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial E_1^2}(P^*) = -1.1778 \times 10^{-32} e^{-0.005t}$$

y que

$$\det(Hess(P^*)) = 9.0185 \times 10^{-61} e^{-0.005t}.$$

Por lo tanto H alcanza su valor máximo en este punto.

3.3 Modelo respuesta tipo IV y competencia intraespecífica en los depredadores

En esta sección presentamos y estudiamos la dinámica de un modelo del tipo presa-depredador en el que el término de interacción lo respresenta la respuesta funcional Holling tipo IV e introducimos la competencia intraespecífica entre los individuos de la población de depredadores. Para el planteamiento de este modelo nos basamos en los modelos anteriores y en los trabajos de [1], [26], [28] y [30]. El modelo que nos proponemos estudiar en esta sección es:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x \left(\alpha \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\beta y}{1 + bx + ax^2} - q_1 E_1 \right) \\ \frac{dy}{dt} &= y \left(-\gamma + \frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - q_2 E_2 - \delta y \right), \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde los parámetros representan lo mismo que en el modelo anterior y δ representa el valor de la fuerza de la competencia intraespecífica entre los depredadores. Todos los parámetros son positivos también. Se muestra igualmente que ya que las funciones definidas del lado derecho del sistema (3.9) son continuamente diferenciables sobre la región $\mathbb{R}_+^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0\}$, las soluciones del sistema que comienzan con condiciones iniciales positivas, están acotadas uniformemente. La demostración para este caso sigue la línea de razonamiento que la hecha en la sección anterior, razón por la cual no la introducimos aquí.

3.3.1 Análisis local

El sistema (3.9) tiene por lo menos tres puntos de equilibrio en el primer cuadrante del plano cartesiano: $P_0 = (0,0)$, $P_1 = (\frac{K}{\alpha}(\alpha - q_1E_1), 0)$ y $P_{int} = (x_{int}, y_{int})$.

Para encontrar P_{int} , despejamos y de ambas ecuaciones del sistema, obteniéndose las ceroclinas.

$$y = \left(\alpha \left(1 - \frac{x}{K} \right) - q_1 E_1 \right) \left(\frac{1 + bx + ax^2}{\beta} \right) \quad (3.10)$$

$$y = \frac{-(\gamma + q_2 E_2)(1 + bx + ax^2) + c\beta x}{\delta(1 + bx + ax^2)} \quad (3.11)$$

De acuerdo a (3.10) y (3.11), las condiciones para las cuales y es positivo son:

- $E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{x}{K} \right)$, para $x < K$.
- $E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - \gamma \right)$, para $\gamma < \frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2}$.

Las x que satisfacen (3.10) y (3.11) son tales que

$$A_5 x^5 + A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0,$$

donde los coeficientes son:

$$A_5 = a^2 \alpha \delta > 0$$

$$A_4 = -a^2 \delta K (\alpha - q_1 E_1) + 2a \alpha b \delta$$

$$A_3 = -2ab\delta K (\alpha - q_1 E_1) + \alpha \delta (2a + b^2)$$

$$A_2 = -K (\delta (2a + b^2) (\alpha - q_1 E_1) + a\beta (\gamma + E_2 q_2)) + 2\alpha b \delta$$

$$A_1 = -bK (2\delta (\alpha - q_1 E_1) + \beta (\gamma + E_2 q_2)) + c\beta^2 K + \alpha \delta$$

$$A_0 = -K (\delta (\alpha - q_1 E_1) + \beta (\gamma + q_2 E_2)) < 0.$$

Para garantizar la existencia de un sólo punto de equilibrio interno positivo, según la Regla de Descartes, el número de raíces positivas es la cantidad de cambios de signo que se presenten. De esta forma, si $A_5 > 0$ y $A_0 < 0$, existen configuraciones diferentes de los signos de los coeficientes que lo hacen posible. En particular, proponemos el conjunto siguiente de condiciones para los coeficientes A_4 , A_3 , A_2 y A_1 :

- $A_4 < 0$. $E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{2b}{aK}\right)$ y $aK > 2b$.
- $A_3 < 0$. $E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{2a+b^2}{2abK}\right)$ y $2abK > 2a+b^2$.
- La desigualdad $A_2 < 0$ es válida si se satisfacen,

$$E_1 < \frac{1}{q_1} \left[\alpha - \frac{2\alpha b\delta - Ka\beta(\gamma + q_2 E_2)}{K\delta(2a+b^2)} \right],$$

para $E_2 > 0$.

- Si $A_1 < 0$, $E_2 > 0$, para E_1 que satisface las condiciones anteriores. Es importante destacar que para obtener esta desigualdad, calculamos primero el valor del parámetro δ , con ayuda de los valores de $\alpha, \beta, \gamma, b, c, K, q_1, q_2$, utilizados en el modelo anterior y E_1, E_2 que satisfacen las desigualdades mencionadas anteriormente. De donde, δ satisface la desigualdad siguiente:

$$\delta > \frac{-c\beta^2 K + b\beta K(\gamma + q_2 E_2)}{-2bK(\alpha - q_1 E_1) + \alpha}.$$

Como consecuencia de estos cambios, las simulaciones numéricas obtenidas nos permiten ver que efectivamente existe un único punto de equilibrio interno positivo y es estable (nunca inestable) en una región muy pequeña del plano, $575 < x_{int} < 600$, $0 < y_{int} < 0.2$. Pero el punto de equilibrio óptimo encontrado con el Teorema de Pontryagin queda totalmente fuera del área definida y el valor obtenido de E_2 es negativo, lo cual no tiene una interpretación ecológica válida. Después de varias conformaciones, la siguiente satisface tanto la búsqueda de un punto de equilibrio interno estable e inestable, como de los esfuerzos de pesca óptimos:

- $A_4 < 0$. $E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{2b}{aK}\right)$ y $aK > 2b$.
- $A_3 > 0$. $E_1 > \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{2a+b^2}{2abK}\right)$ y $2abK > 2a+b^2$.
- La desigualdad $A_2 < 0$ es válida si se satisfacen,

$$E_1 < \frac{1}{q_1} \left[\alpha - \frac{2\alpha b\delta - Ka\beta(\gamma + q_2 E_2)}{K\delta(2a+b^2)} \right],$$

para $E_2 > 0$.

- Si $A_1 > 0$, $E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{\delta(-2bK\mu + \alpha)}{b\beta K} - \gamma \right)$,

para $E_1 > \frac{1}{q_1} \left(\alpha - \frac{\gamma b\beta K - c\beta^2 K - \delta\alpha}{-2bK\delta} \right)$.

En este caso,

$$\delta < \frac{-c\beta^2 K + b\beta K(\gamma + q_2 E_2)}{-2bK(\alpha - q_1 E_1) + \alpha}.$$

Por lo cual, dadas la condiciones anteriores, la existencia de este punto de equilibrio en el primer cuadrante del plano cartesiano se confirma si:

$$E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{2b}{aK} \right), \quad E_1 > \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{2a + b^2}{2abK} \right),$$

$$E_1 < \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{x}{K} \right), \quad E_1 < \frac{1}{q_1} \left[\alpha - \frac{2\alpha b\delta - Ka\beta(\gamma + q_2 E_2)}{K\delta(2a + b.^2)} \right],$$

y

$$E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - \gamma \right).$$

Para estudiar la dinámica local del sistema (3.9) alrededor de los puntos de equilibrio del sistema, calculamos la matriz jacobiana del campo vectorial que define al sistema (3.9) y la evaluamos en cada uno de ellos.

1. Para el punto trivial, $J(P_0)$ tiene como valores propios $\lambda_1 = \alpha - q_1 E_1$ y $\lambda_2 = -(\gamma + q_2 E_2)$. Entonces, P_0 es un punto silla, ya que $\alpha - q_1 E_1 > 0$.
2. Para el punto $P_1 = \left(\frac{K}{\alpha}(\alpha - q_1 E_1), 0 \right)$, $J(P_1)$ tiene los valores propios siguientes:

$$\lambda_1 = -(\alpha - q_1 E_1),$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha\beta cK(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha bK(\alpha - q_1 E_1) + aK^2(\alpha - q_1 E_1)^2} - (\gamma + q_2 E_2).$$

P_1 es punto silla si se cumplen las siguientes condiciones:

- $E_1 < \frac{\alpha}{q_1}$,
- $E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{\alpha\beta cK(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha bK(\alpha - q_1 E_1) + aK^2(\alpha - q_1 E_1)^2} - \gamma \right)$.

P_1 es punto de equilibrio asintóticamente estable si se cumplen las siguientes condiciones:

- $E_1 < \frac{\alpha}{q_1}$,
- $E_2 > \frac{1}{q_2} \left(\frac{\alpha\beta cK(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha bK(\alpha - q_1 E_1) + aK^2(\alpha - q_1 E_1)^2} - \gamma \right)$.

3. Para que el punto de equilibrio interno $P_{int} = (x_{int}, y_{int})$ sea asintóticamente estable localmente, se requieren las siguientes condiciones:

★ Si y satisface la ecuación (3.10),

Traza < 0,

$$E_1(y_1) < \frac{1}{q_1} \left[\alpha - \frac{\alpha x_{int}}{K} - \frac{\beta}{K} \left(\frac{\gamma KR - c\beta x_{int}^2 + \alpha x_{int} R}{b\beta x_{int} + 2a\beta x_{int}^2 - 2\delta R^2} \right) \right],$$

$$E_2(y_1) > \frac{1}{q_2} \left(\left(\mu - \frac{\alpha x_{int}}{K} \right) \left(\frac{b\beta x_{int} + 2a\beta x_{int}^2 - 2\delta R^2}{R\beta} \right) + x_{int} \left(\frac{c\beta K - \alpha R}{RK} \right) - \gamma \right)$$

y

$$\begin{aligned} b\beta x_{int} + 2a\beta x_{int}^2 - 2\delta R^2 &= (-2a^2\delta)x_{int}^4 + (-4ab\delta)x_{int}^3 \\ &+ (-4a\delta - 2b^2\delta + 2a\beta)x_{int}^2 + (b\beta + 4b\delta)x_{int} - 2\delta > 0 \quad \forall x_{int}. \end{aligned}$$

Determinante > 0,

$$E_{22}(y_1) > \frac{1}{q_2} \left[\frac{AK^2 - BK + C}{K(E - DK)} - \gamma \right],$$

$$A = 4\delta a^2 \mu^2 x_{int}^3 + 6\delta ab \mu^2 x_{int}^2 + (4a\delta \mu^2 + 2\delta b^2 \mu^2)x_{int} + 2\delta b \mu^2 - c\beta^2 \mu,$$

$$\begin{aligned} B &= 10\alpha\delta\mu a^2 x_{int}^4 + 16\alpha\delta\mu ab x_{int}^3 + (12\alpha\delta\mu a + 6\alpha\delta\mu b^2)x_{int}^2 \\ &+ (8\alpha\delta\mu b - 2\alpha c\beta^2)x_{int} + 2\alpha\delta\mu, \end{aligned}$$

$$C = 6\delta a^2 \alpha^2 x_{int}^5 + 10\delta a \alpha^2 b x_{int}^4 + (8\delta a \alpha^2 + 4\delta \alpha^2 b^2)x_{int}^3 + 6\delta \alpha^2 b x_{int}^2 + 2\delta \alpha^2 x_{int},$$

$$D = 2a\beta\mu x_{int} + b\beta\mu,$$

$$E = 3\alpha a \beta x_{int}^2 + 2\alpha b \beta x_{int} + \alpha \beta$$

y

$$E - DK = 3a\alpha x^2 + (2\alpha b - 2a\mu K)x + \alpha - b\mu K > 0,$$

donde $R = 1 + bx_{int} + ax_{int}^2$, $\mu = \alpha - q_1 E_1$.

★ Si y satisface la ecuación (3.11),

Traza < 0,

$$E_1(y_2) > \frac{1}{q_1} \left(\alpha + \frac{\tilde{A}R^3 + \tilde{B}R^2 + \tilde{C}R + \tilde{D}}{K\delta R^3} \right),$$

$$\tilde{A} = \gamma K \delta - 2\alpha \delta x_{int},$$

$$\tilde{B} = K\beta\gamma - c\beta K\delta x_{int},$$

$$\tilde{C} = -K\beta\gamma x_{int}(b + 2ax_{int}) - c\beta^2 K x_{int},$$

$$\tilde{D} = c\beta^2 K x_{int}^2 (b + 2ax_{int})$$

$$E_2(y_2) < \frac{1}{q_2} \left(\frac{(-\mu K \delta + 2\alpha \delta x_{int})R^3 + c\beta K \delta x_{int}R^2 + c\beta^2 K x_{int}R - c\beta^2 K x_{int}^2 (b + 2ax_{int})}{KR(\delta R^2 + \beta R - \beta x_{int}(b + 2ax_{int}))} - \gamma \right).$$

Determinante > 0,

$$E_{22}(y_2) < \frac{1}{q_2} \left(\frac{(2\alpha x_{int} - K\mu)\delta R^3 - \bar{A}K}{K\bar{B}} - \gamma \right),$$

$$\bar{A} = 2a\beta^2 c x_{int}^3 - 2c\beta^2 x_{int},$$

$$\bar{B} = -a^2\beta x_{int}^4 - ab\beta x_{int}^3 + b\beta x_{int} + \beta,$$

donde $R = 1 + bx_{int} + ax_{int}^2$, $\mu = \alpha - q_1 E_1$.

Ahora, P_{int} es un punto de equilibrio inestable para las mismas condiciones del determinante, pero para la traza se deben satisfacer:

$$E_2(y_1) < \frac{1}{q_2} \left[\left(\mu - \frac{\alpha x_{int}}{K} \right) \left(\frac{b\beta x_{int} + 2a\beta x_{int}^2 - 2\delta R^2}{\beta R} \right) + x_{int} \left(\frac{c\beta K - \alpha R}{RK} \right) - \gamma \right]$$

y

$$E_2(y_2) > \frac{1}{q_2} \left(\frac{(-\mu K \delta + 2\alpha \delta x_{int})R^3 + c\beta K \delta x_{int}R^2 + c\beta^2 K x_{int}R - c\beta^2 K x_{int}^2 (b + 2ax_{int})}{KR(\delta R^2 + \beta R - \beta x_{int}(b + 2ax_{int}))} - \gamma \right).$$

En el modelo anterior, probamos formalmente la persistencia uniforme del sistema (3.7), su interpretación biológica es que las especies presa y depredador sobrevivan, aún cuando el tiempo t sea demasiado grande. La demostración consistía primeramente en probar que toda solución que inicia en \mathbb{R}_+^2 está acotada uniformemente y en proponer una función de Lyapunov promedio $\sigma(x, y)$ que cumpliera ciertas condiciones, como la sustitución de los puntos de la frontera, P_0 y P_1 en $\sigma(x, y)$, de tal forma que la función construída $\Psi = \frac{\sigma'(x, y)}{\sigma(x, y)}$, sea continua en \mathbb{R}_+^2 y sea siempre positiva para $\Psi(P_0)$ y $\Psi(P_1)$. A continuación, demostraremos la persistencia uniforme de (3.9).

Teorema 3.3.1 *El sistema (3.9) es persistente uniformemente si se satisface la desigualdad*

$$E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{\alpha\beta cK(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha bK(\alpha - q_1 E_1) + aK^2(\alpha - q_1 E_1)^2} - \gamma \right),$$

y

$$\gamma < \frac{\alpha\beta cK(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha bK(\alpha - q_1 E_1) + aK^2(\alpha - q_1 E_1)^2}.$$

Demostración 3.3.1 *Sea $\sigma(x, y) = x^{h_1} y^{h_2}$, con $h_i, i = 1, 2$ constantes positivas, una función continua positiva de clase C^1 , definida en \mathbb{R}_+^2 .*

Así como en el sistema (3.7), veamos las condiciones para las cuales $\sigma(x, y)$ es una función de Lyapunov promedio,

1. $\sigma(x, y) = x^{h_1} y^{h_2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$ o $y = 0$, esto es, $x, y \in \partial(\mathbb{R}_+^2)$,
2. $\sigma(x, y) = x^{h_1} y^{h_2} > 0 \Rightarrow x^{h_1} > 0$ y $y^{h_2} > 0$, como $\sigma(x, y)$ está definida en \mathbb{R}_+^2 , entonces $x, y \in \text{int}(\mathbb{R}_+^2)$,
3. *Sea*

$$\Psi(x, y) = \frac{\sigma'(x, y)}{\sigma(x, y)} = \frac{y^{h_2} h_1 x^{h_1-1} \dot{x} + x^{h_1} h_2 y^{h_2-1} \dot{y}}{x^{h_1} y^{h_2}} = h_1 \frac{x'}{x} + h_2 \frac{y'}{y},$$

Luego, al sustituir \dot{x} y \dot{y} , se obtiene

$$\Psi(x, y) = h_1 \left[\alpha \left(1 - \frac{x}{K} \right) - q_1 E_1 - \frac{\beta y}{1 + bx + ax^2} \right] + h_2 \left[-(\gamma + q_2 E_2) + \frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - \delta y \right].$$

Así, Ψ es una función continua sobre \mathbb{R}_+^2 , para $(x, y) \in \text{int}(\mathbb{R}_+^2)$

4. Ya que los únicos puntos que se encuentran sobre la frontera de \mathbb{R}_+^2 , son P_0 y P_1 , sustituímos éstos en $\Psi(x, y)$.

$$\begin{aligned} \int_0^T \Psi(0, 0) dt &= \int_0^T h_1[\alpha - q_1 E_1] - h_2[\gamma + q_2 E_2] dt, \quad p.a. T > 0 \\ &= (h_1[\alpha - q_1 E_1] - h_2[\gamma + q_2 E_2]) T \end{aligned}$$

lo cual para un $h_1 > 0$ suficientemente grande y T cualquiera, es positivo.

Mientras que si

$$\begin{aligned} \int_0^T \Psi\left(\frac{K}{\alpha}(\alpha - q_1 E_1), 0\right) dt &= \\ \left(h_2 \left[-(\gamma + q_2 E_2) + \frac{\alpha \beta c K (\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha b K (\alpha - q_1 E_1) + a K^2 (\alpha - q_1 E_1)^2} \right] \right) T &> 0 \end{aligned}$$

si se cumple la desigualdad

$$E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{\alpha \beta c K (\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha b K (\alpha - q_1 E_1) + a K^2 (\alpha - q_1 E_1)^2} - \gamma \right),$$

y

$$\gamma < \frac{\alpha \beta c K (\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha b K (\alpha - q_1 E_1) + a K^2 (\alpha - q_1 E_1)^2},$$

para todo valor de h_2 y T .

Por lo tanto, $\sigma(x, y)$ representa la función de Lyapunov promedio y todas las soluciones de (3.9) son también uniformemente acotadas en \mathbb{R}_+^2 , por ende, el sistema es persistente uniformemente. ♦

Ahora mostramos la existencia de una bifurcación de Hopf próxima al punto de equilibrio interior, igual que en el modelo anterior.

Teorema 3.3.2 Una vez que se satisfacen las desigualdades para las cuales $\det(J(P_{int})) > 0$, el sistema (3.9) tiene una bifurcación de Hopf cerca del punto de equilibrio positivo interno en el parámetro $\bar{\beta}$ que satisface las ecuaciones:

$$\bar{\beta}(y_1) = \frac{-\eta R \pm R \sqrt{\eta^2 + 8cx\delta \left(\mu - \frac{\alpha x}{K} \right)}}{2cx}, \quad \bar{\beta}(y_2) = \frac{-\xi_2 \pm \sqrt{\xi_2^2 - 2\xi_1 \xi_3}}{2\xi_1}$$

con

$$\eta = x \left(\frac{\alpha}{K} - \frac{\left(\mu - \frac{\alpha x}{K}\right)(b + 2ax)}{R} \right) - \lambda,$$

y

$$\begin{aligned}\xi_1 &= cx^2(b + 2ax) - cxR, \\ \xi_2 &= \lambda R^2 - cx\delta R^2 - x\lambda R(b + 2ax), \\ \xi_3 &= -\delta R^3 \left(\frac{2ax}{K} - \mu - \lambda \right),\end{aligned}$$

donde $\mu = \alpha - q_1 E_1$ y $\lambda = \gamma + q_2 E_2$.

Demostración 3.3.2 Los valores propios de la matriz de Jacobi $J(P_{int})$ tienen la forma,

$$\lambda_{int} = \frac{Tr}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{Tr^2 - 4Det},$$

donde Tr es la traza y Det el determinante de la matriz de Jacobi $J(P_{int})$.

El determinante es positivo si se cumplen las condiciones para E_2 ,

$$\begin{aligned}E_{22}(y_1) &> \frac{1}{q_2} \left[\frac{AK^2 - BK + C}{K(E - DK)} - \gamma \right], \\ E_{22}(y_2) &< \frac{1}{q_2} \left(\frac{(2\alpha x_{int} - K\mu)\delta R^3 - \bar{A}K}{K\bar{B}} - \gamma \right),\end{aligned}$$

donde $R = 1 + bx_{int} + ax_{int}^2$, $\mu = \alpha - q_1 E_1$, A , B , C , D , E , \bar{A} y \bar{B} , fueron definidos anteriormente.

Ya que $Tr = 0$ en $\beta = \bar{\beta}$, entonces,

$$\lambda_{int} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{-4Det} = \pm i \sqrt{Det},$$

por lo que $\bar{\beta}$ es el parámetro de bifurcación. Además, se cumple la condición de transversalidad,

$$\frac{\partial Re(\lambda_{int})}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\bar{\beta}(y_1)} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{T}{2} \right) \Big|_{\beta=\bar{\beta}(y_1)} = \frac{cx}{2R} + \frac{2\delta R \left(\mu - \frac{\alpha x}{K} \right)}{2\bar{\beta}^2(y_1)} > 0,$$

siempre que $E_1 < \alpha \left(1 - \frac{x}{K}\right)$.

$$\frac{\partial \operatorname{Re}(\lambda_{int})}{\partial \beta} \Big|_{\beta=\bar{\beta}(y_2)} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{T}{2} \right) \Big|_{\beta=\bar{\beta}(y_2)} = B_2 R^2 + B_1 R + B_0 > 0,$$

con los coeficientes:

- $B_2 = \lambda - cx\delta$,
- $B_1 = -2\bar{\beta}(y_2)cx - x\lambda(b + 2ax)$,
- $B_0 = 2\bar{\beta}(y_2)cx^2(b + 2ax)$,

para valores de E_2 que satisfacen las desigualdades $E_{22}(y_1)$ y $E_{22}(y_2)$.

Por tanto, de acuerdo al teorema de bifurcación de Hopf, se concluye que $\beta = \bar{\beta}$ es un punto de bifurcación del sistema (3.7). Además, el punto P_{int_2} es inestable para toda $\beta > \bar{\beta}$, rodeado por un ciclo límite estable. ♦

3.3.2 Análisis global

La prueba de que el punto de equilibrio $P_1 = (K/\alpha(\alpha - q_1 E_1), 0)$ es asintóticamente estable globalmente es prácticamente a la misma que la del modelo anterior.

Teorema 3.3.3 *El punto de equilibrio $P_1 = (\hat{x}, 0)$ es asintóticamente estable globalmente, donde $\hat{x} = K/\alpha(\alpha - q_1 E_1)$.*

Demostración 3.3.3 *El punto P_1 es asintóticamente estable localmente para*

$$E_1 < \frac{\alpha}{q_1},$$

$$E_2 > \frac{1}{q_2} \left(\frac{\alpha\beta cK(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha bK(\alpha - q_1 E_1) + aK^2(\alpha - q_1 E_1)^2} - \gamma \right).$$

Para mostrar que P_1 es globalmente nos basamos en el método directo de Lyapunov. Véase el Apéndice A.2.

Sea $V(x, y) = c_1(x - \hat{x} - \hat{x} \ln(x/\hat{x})) + c_2 y$, donde $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y diferenciable. Probaremos que existen c_1 y $c_2 \in \mathbb{R}$ positivas para las que V es función de Lyapunov fuerte o estricta para el sistema (3.7) y para $(\hat{x}, 0)$. $V(\hat{x}, 0) = 0$ con $V(x, y) > 0$

para toda $(x, y) \neq (\hat{x}, 0)$.

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= c_1 \left(\frac{x - \hat{x}}{x} \right) \frac{dx}{dt} + c_2 \frac{dy}{dt} \\ &= -\frac{\alpha}{K} c_1 (x - \hat{x})^2 - \frac{\beta xy}{1 + bx + ax^2} (c_1 - c_2 c) \\ &\quad - y \left(c_2 \gamma + c_2 q_2 E_2 + \frac{c_1 \hat{x} \beta}{1 + bx + ax^2} + c_2 \delta y \right)\end{aligned}$$

Si $c_1 = 1$ y $c_2 = 1/c$, entonces,

$$\frac{dV}{dt} \leq -\frac{\alpha}{K} (x - \hat{x})^2 - y \left(\frac{\gamma + q_2 E_2}{c} + \frac{\hat{x} \beta}{1 + bx + ax^2} + \frac{\delta y}{c} \right) < 0$$

Ya que $\frac{dV}{dt} < 0$, entonces V es una función de Lyapunov y P_1 es un punto asintóticamente estable globalmente. ♦

A continuación probaremos que el punto P_{int} es asintóticamente estable globalmente, utilizando el Criterio de Dulac y el Teorema de Poincaré-Bendixson, como en el modelo pasado.

Teorema 3.3.4 *Dado que existe por lo menos un punto de equilibrio interno positivo del sistema (3.9), entonces es asintóticamente estable globalmente para cualquier punto inicial de la región*

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, y < \frac{\alpha x R^2}{K(x\beta(2ax + b) - \delta R^2)} \right\}, R = 1 + bx + ax^2.$$

Demostración 3.3.4 *El punto de equilibrio P_{int} es asintóticamente estable localmente si se cumplen las condiciones vistas anteriormente.*

Sea $H(x, y)$ una función $H : \text{int}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , $H(x, y) = \frac{1}{xy}$, $H(x, y) > 0$ para todo $(x, y) \in \text{Int}(R_+^2)$. Definimos $h_1 = H(x, y)f(x, y)$ y $h_2 = H(x, y)g(x, y)$, para

$$\begin{aligned}f(x, y) &= x \left(\alpha \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\beta y}{1 + bx + ax^2} - q_1 E_1 \right) \\ g(x, y) &= y \left(-\gamma + \frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - q_2 E_2 - \delta y \right)\end{aligned}$$

Así, calculamos:

$$\begin{aligned}
 \Delta(x,y) = \nabla \cdot (h_1(x,y), h_2(x,y)) &= \frac{\partial h_1}{\partial x} + \frac{\partial h_2}{\partial y} \\
 &= -\frac{\alpha}{yK} + \frac{\beta(2ax+b)}{(1+bx+ax^2)^2} - \frac{\delta}{x} \\
 &= -\frac{1}{xy} \left(\frac{\alpha x}{K} + \delta y \right) + \frac{\beta(2ax+b)}{(1+bx+ax^2)^2} \neq 0
 \end{aligned}$$

$\Delta(x,y)$ no cambia de signo y es distinta de cero en B , de acuerdo al Criterio de Dulac, no hay dinámica periódica.

Por lo cual P_{int} es un punto de equilibrio único y positivo del sistema (3.7) dentro de $Int\mathbb{R}_+^2$ y todas las soluciones que inician en \mathbb{R}^2 están uniformemente acotadas.

Luego, de acuerdo con el Teorema de Poincaré-Bendixson, P_{int} es asintóticamente estable globalmente en la región B . ♦

3.3.3 Equilibrio bioeconómico

Recordemos que un punto $[x_\infty, y_\infty, E_{1\infty}, E_{2\infty}]$ se dice que es bioeconómico si satisface el sistema algebraico:

$$\begin{aligned}
 \Pi &= (p_1q_1x - c_1)E_1 + (p_2q_2y - c_2)E_2 = 0 \\
 \alpha \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta y}{1+bx+ax^2} - q_1E_1 &= 0 \\
 -\gamma + \frac{c\beta x}{1+bx+ax^2} - \delta y - q_2E_2 &= 0
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

1. Si $E_2 = 0$, despejamos x de la primera ecuación del sistema (3.12).

Sea $x_\infty = \frac{c_1}{p_1q_1}$ para un E_1 fijo. Ya que $c_1 < p_1q_1x < p_1q_1K$, sustituimos x_∞ en la tercera ecuación:

$$y_\infty = \frac{1}{\delta} \left(-\gamma + \frac{c\beta c_1 p_1 q_1}{p_1^2 q_1^2 + b c_1 p_1 q_1 + a c_1^2} \right).$$

Ya que obtuvimos x_∞ y y_∞ , sustituimos ambas en la segunda ecuación y despejamos

E_1 :

$$E_{1\infty} = \frac{1}{q_1} \left\{ \alpha \left(1 - \frac{c_1}{p_1 q_1 K} \right) - \frac{\beta p_1^2 q_1^2}{\delta (p_1^2 q_1^2 + b c_1 p_1 q_1 + a c_1^2)^2} (-\gamma p_1^2 q_1^2 - \gamma b c_1 p_1 q_1 - \gamma a c_1^2 + c \beta c_1 p_1 q_1) \right\}$$

2. Ahora $E_1 = 0$ y $y_\infty = \frac{c_2}{p_2 q_2}$, para E_2 finito, obtenido de despejar la ecuación 1 del sistema (3.12). Sustituyendo y_∞ en la segunda ecuación, obtenemos,

$$\alpha a x^3 + \alpha(b - aK)x^2 + \alpha(1 - bK)x - \alpha K + \frac{\beta c_2}{p_2 q_2} K = 0.$$

Para $b < aK$, $bK > 1$ y $\frac{c_2}{p_2 q_2} < \frac{\alpha}{\beta}$, existe al menos una solución positiva x_∞ . Para este valor de x_∞ ,

$$E_{2\infty} = \frac{1}{q_2} \left(-\gamma - \frac{\delta c_2}{p_2 q_2} + \frac{c \beta x_\infty}{1 + b x_\infty + a x_\infty^2} \right)$$

y

$$\gamma + \frac{\delta c_2}{p_2 q_2} < \frac{c \beta x_\infty}{1 + b x_\infty + a x_\infty^2}.$$

3. Si $E_1 = 0$ y $E_2 = 0$, entonces el sistema (3.12) se convierte en uno de dos ecuaciones:

$$\alpha \left(1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{\beta y}{1 + b x + a x^2} = 0$$

$$-\gamma + \frac{c \beta x}{1 + b x + a x^2} - \delta y = 0$$

Despejamos así, la variable y de la segunda ecuación,

$$y_\infty = \frac{1}{\delta} \left(-\gamma + \frac{c \beta x}{1 + b x + a x^2} \right).$$

Así, la sustituimos en la primera, obteniendo el polinomio $A_5 x^5 + A_4 x^4 + A_3 x^3 + A_2 x^2 + A_1 x + A_0 = 0$, donde los coeficientes son:

- $A_5 = -a^2\alpha\delta < 0$,
- $A_4 = a\alpha\delta(aK - 2b)$,
- $A_3 = \alpha\delta(2abK - 2a - b^2)$,
- $A_2 = 2a\alpha\delta K + \alpha b^2\delta K - 2\alpha b\delta + a\beta K\gamma$,
- $A_1 = 2\alpha b\delta K - \alpha\delta + b\beta K\gamma - c\beta^2 K$,
- $A_0 = K(\alpha\delta + \beta\gamma) > 0$.

Dado que A_5 es negativo y A_0 positivo, entonces escogemos la siguiente configuración para la existencia de un punto positivo x_∞ : $A_4, A_3, A_2, A_1 > 0$.

4. Si $E_1 \neq 0$ y $E_2 \neq 0$, es decir, si la pesquería total está en operación, de la primera ecuación del sistema (3.12) se encuentra, $x_\infty = \frac{c_1}{p_1 q_1}$, $y_\infty = \frac{c_2}{p_2 q_2}$. Sustituimos estos valores en las ecuaciones dos y tres del sistema, despejando de éstas E_1 y E_2 , respectivamente.

$$E_{1\infty} = \frac{1}{q_1} \left(\alpha \left(1 - \frac{c_1}{p_1 q_1 K} \right) - \frac{\beta c_2 p_1^2 q_1^2}{p_2 q_2 (p_1^2 q_1^2 + b c_1 p_1 q_1 + a c_1^2)} \right),$$

si se cumple que, $\alpha \left(1 - \frac{c_1}{p_1 q_1 K} \right) > \frac{\beta c_2 p_1^2 q_1^2}{p_2 q_2 (p_1^2 q_1^2 + b c_1 p_1 q_1 + a c_1^2)}$,

$$E_{2\infty} = \frac{1}{q_2} \left(-\gamma - \frac{\delta c_2}{p_2 q_2} - \frac{c \beta c_1 p_1 q_1}{p_1^2 q_1^2 + b c_1 p_1 q_1 + a c_1^2} \right),$$

si se cumple que, $\gamma + \frac{\delta c_2}{p_2 q_2} < \frac{c \beta c_1 p_1 q_1}{p_1^2 q_1^2 + b c_1 p_1 q_1 + a c_1^2}$.

Así, $(x_\infty, y_\infty, E_{1\infty}, E_{2\infty})$ es un punto de equilibrio bioeconómico si y sólo si las condiciones anteriores se cumplen.

3.3.4 Política óptima de cosecha

Para el sistema que nos ocupa, el problema de control óptimo se enuncia como sigue:

Sea

$$J = \int_0^\infty e^{-wt} [(p_1 q_1 x - c_1) E_1 + (p_2 q_2 y - c_2) E_2] dt,$$

el funcional objetivo que está sujeto al sistema (3.9). El Hamiltoniano para este caso es,

$$H = e^{-wt} [(p_1 q_1 x - c_1)E_1 + (p_2 q_2 y - c_2)E_2] + \lambda_1 (F_1 - q_1 x E_1) + \lambda_2 (F_2 - q_2 y E_2),$$

donde

$$F_1 = \alpha x \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{\beta xy}{1 + bx + ax^2}$$

y

$$F_2 = -\gamma y + \frac{c\beta xy}{1 + bx + ax^2} - \delta y^2.$$

La dependencia de H respecto a E_1 y E_2 es lineal, lo cual facilita el siguiente cálculo:

$$\frac{\partial H}{\partial E_1} = e^{-wt} (p_1 q_1 x - c_1) - \lambda_1 q_1 x = 0, \Rightarrow \lambda_1 = e^{-wt} \left(p_1 - \frac{c_1}{q_1 x} \right),$$

$$\frac{\partial H}{\partial E_2} = e^{-wt} (p_2 q_2 y - c_2) - \lambda_2 q_2 y = 0 \Rightarrow \lambda_2 = e^{-wt} \left(p_2 - \frac{c_2}{q_2 y} \right),$$

Ahora, calculamos $\dot{\lambda}_1$ y $\dot{\lambda}_2$ y sustituímos λ_1 y λ_2 , obteniéndose

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1 = & - \left[e^{-wt} p_1 q_1 E_1 + \lambda_1 \left(\alpha \left(1 - \frac{x}{K}\right) - q_1 E_1 + \frac{\beta y (ax^2 - 1)}{(1 + bx + ax^2)^2} \right) \right. \\ & \left. + \lambda_2 \left(\frac{c\beta y (1 - ax^2)}{(1 + bx + ax^2)^2} \right) \right], \end{aligned}$$

de donde, al hacer $\dot{\lambda}_1 = 0$ se obtiene

$$y = (1 + bx + ax^2)^2 \left(\frac{\frac{2\alpha}{K} \left(p_1 - \frac{c_1}{q_1} \right) x^2 - c_1 E_1}{x(ax^2 - 1)\beta(p_1 - c_1 - c(p_2 - c_2))} \right),$$

Procediendo de forma análoga con $\dot{\lambda}_2$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_2 = & - \left[e^{-wt} p_2 q_2 E_2 + \lambda_2 \left(-\gamma - q_2 E_2 - 2\delta y + \frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} \right) \right. \\ & \left. + \lambda_1 \left(-\frac{\beta x}{1 + bx + ax^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Sustituyendo y en $\hat{\lambda}_2$, obtenemos que la x que satisface $\hat{\lambda}_2 = 0$ es la raíz del polinomio $A_7x^7 + A_6x^6 + A_5x^5 + A_4x^4 + A_3x^3 + A_2x^2 + A_1x + A_0$, donde los coeficientes son:

$$\begin{aligned}
A_7 &= 4a^3\alpha\delta p_1 p_2 q_1^2 q_2, \\
A_6 &= 2a^2\alpha\delta K p_2 q_1 q_2 (-aK p_1 q_1 + 6b p_1 q_1 - a c_1), \\
A_5 &= 6a\alpha\delta p_2 q_1 q_2 (-abK p_1 q_1 - abc_1 + 2b^2 p_1 q_1 + 2a p_1 q_1), \\
A_4 &= 2\alpha\delta p_2 q_1 q_2 (-3ab^2 K p_1 q_1 + 12a p_1 q_1 - 3ab^2 c_1 - 3a^2 K p_1 q_1 - 3a^2 c_1 + 2b^3 p_1 q_1) \\
&\quad + a^2\beta K q_1^2 (\gamma p_1 p_2 q_2 - c\gamma p_2^2 q_2 - cc_2\delta p_2 - c_2\delta p_1), \\
A_3 &= 2q_1 (-6a\alpha b\delta K p_1 p_2 q_1 q_2 - a^2\beta c_1\gamma K p_2 q_2 - 6a\alpha b c_1\delta p_2 q_2 - \alpha b^3\delta K p_1 p_2 q_1 q_2 \\
&\quad - a\beta^2 c K p_1 p_2 q_1 q_2 + 6\alpha b^2\delta p_1 p_2 q_1 q_2 + 6a\alpha\delta p_1 p_2 q_1 q_2 - \alpha b^3 c_1\delta p_2 q_2 + a^2\beta c_1 c_2\delta K) \\
&\quad + aK q_1^2 (b\beta\gamma p_1 p_2 q_2 - b\beta c\gamma p_2^2 q_2 - b\beta c c_2\delta p_2 - b\beta c_2\delta p_1 + \beta^2 c^2 p_2^2 q_2 + \beta^2 p_1 q_2), \\
A_2 &= 3q_1 (-ab\beta c_1\gamma K p_2 q_2 - 2a\alpha\delta K p_1 p_2 q_1 q_2 + a\beta^2 c c_1 K p_2 q_2 + ab\beta c_1 c_2\delta K \\
&\quad - 2\alpha b^2\delta K p_1 p_2 q_1 q_2 - 2a\alpha c_1\delta p_2 q_2 + 4\alpha b\delta p_1 p_2 q_1 q_2 - a\beta^2 c_1 K p_1 q_2 - 2\alpha b^3 c_1\delta p_2 q_2), \\
A_1 &= \beta K q_1 (bc\gamma p_2^2 q_1 q_2 + b\beta c c_1 p_2 q_2 + b\beta c c_2\delta p_2 q_1 + bc_2\delta p_1 q_1 + b^2 c_1 c_2\delta K - b\gamma p_1 p_2 q_1 q_2 \\
&\quad - b^2 c_1\gamma p_2 q_2 - b\beta c_1 p_1 q_2 - \beta c^2 p_2^2 q_1 q_2) + 2(-3\alpha b\delta K p_1 p_2 q_1^2 q_2 - a\beta c_1\gamma K p_2 q_1 q_2 \\
&\quad - 3\alpha b c_1\delta p_2 q_1 q_2 + a\beta c_1 c_2\delta K q_1 + \beta^2 c K p_1 p_2 q_1^2 q_2 + 2\alpha\delta p_1 p_2 q_1^2 q_2 + a\beta^2 c_1^2 K q_2), \\
A_0 &= -2\alpha\delta p_2 q_2 (K p_1 q_1^2 + c_1 q_1) + \beta K (-bc_1\gamma p_1 q_1 q_2 + cc_2\delta p_2 p_1^2 + bc_1 c_2\delta q_1 + c\gamma p_2^2 q_1^2 q_2 \\
&\quad - \gamma p_1 p_2 q_1^2 q_2 - \beta c c_1 p_2 q_1 q_2 + \beta c_1 p_1 q_1 q_2 + c_2\delta p_1 q_1^2 + bc_1^2 q_2).
\end{aligned}$$

Resolviendo el polinomio encontramos el valor óptimo de x^* , con éste calculamos y^* y con ambos valores, los esfuerzos pesqueros óptimos, utilizando las ecuaciones:

$$E_1^* = \left(\frac{1}{q_1}\right) \left(\alpha \left(1 - \frac{x^*}{K}\right) - \frac{\beta y^*}{1 + bx^* + ax^{*2}}\right)$$

$$E_2^* = \left(\frac{1}{q_2}\right) \left(-\gamma - \delta y^* + \frac{c\beta x^*}{1 + bx^* + ax^{*2}}\right)$$

obteniendo el punto $P^* = (x^*, y^*, E_1^*, E_2^*)$, que satisface que $\frac{\partial^2 H}{\partial E_1^2}(P^*) < 0$ y que el determinante de la matriz Hessiana $Hess(P^*)$ es positivo,

$$det(Hess(P^*)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial E_1^2}(P^*) & \frac{\partial^2 H}{\partial E_1 \partial E_2}(P^*) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial E_2 \partial E_1}(P^*) & \frac{\partial^2 H}{\partial E_2^2}(P^*) \end{vmatrix}$$

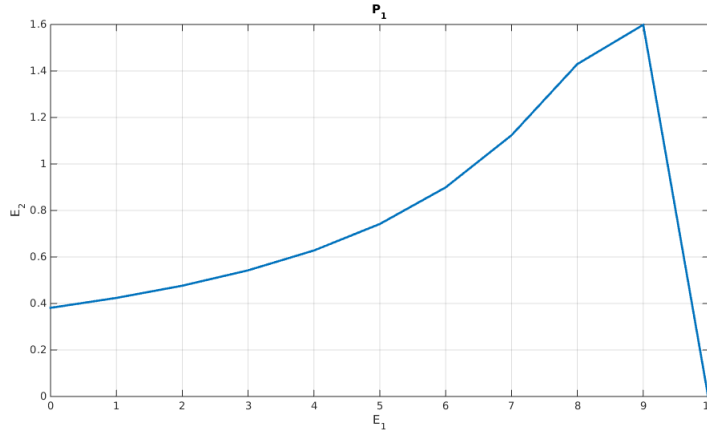


Figura 3.12: Gráfica de la desigualdad de E_2 que nos indica para que valores de éste, P_1 sea estable o punto silla, para $0 < E_1 < 10$.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial E_1^2} = -q_1 x \frac{\partial H}{\partial x} \left(\frac{dE_1}{dx} \dot{x} + \frac{dE_1}{dy} \dot{y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial E_2^2} = -q_2 y \frac{\partial H}{\partial y} \left(\frac{dE_2}{dx} \dot{x} + \frac{dE_2}{dy} \dot{y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial E_1 \partial E_2} = -q_1 x \frac{\partial H}{\partial x} \left(\frac{dE_2}{dx} \dot{x} + \frac{dE_2}{dy} \dot{y} \right),$$

$$\frac{\partial^2 H}{\partial E_2 \partial E_1} = -q_2 y \frac{\partial H}{\partial y} \left(\frac{dE_1}{dx} \dot{x} + \frac{dE_1}{dy} \dot{y} \right).$$

Más adelante, en las simulaciones numéricas, conoceremos los resultados tanto del punto de equilibrio como de los parámetros E_i .

3.3.5 Simulaciones numéricas

A fin de obtener las soluciones numéricas, se usó el software *Matlab* y rutina *ode45*. Comenzamos a resolver el sistema con los valores de los siguientes parámetros: $\alpha = 2$, $\beta = 0.099$, $\gamma = 0.00045$, $K = 600$, $a = 0.000198$, $b = 0.00198$, $c = 0.01$, $q_1 = 0.2$, $q_2 = 0.02$.

Comenzamos con las condiciones sobre E_1 y E_2 para las cuales el punto $P_1 = \left(\frac{K}{\alpha}(\alpha - q_1 E_1), 0\right)$ es asintóticamente estable o un punto silla. Véase la figura 3.12.

P_1 es asintóticamente estable si se satisface,

$$E_2 > \frac{1}{q_2} \left(\frac{\alpha\beta cK(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha bK(\alpha - q_1 E_1) + aK^2(\alpha - q_1 E_1)^2} - \gamma \right),$$

mientras que es un punto silla si

$$E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{\alpha\beta cK(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha bK(\alpha - q_1 E_1) + aK^2(\alpha - q_1 E_1)^2} - \gamma \right).$$

Existencia y estabilidad punto de equilibrio interno positivo

Para la búsqueda de los parámetros E_1 y E_2 , de tal forma que el punto de equilibrio interno exista, las desigualdades que se deben satisfacer son las siguientes:

$$\begin{aligned} E_1 &< \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{2b}{aK}\right) = 9.6, & E_1 &> \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{2a + b^2}{2abK}\right) = 1.4992, \\ E_1 &< \frac{1}{q_1} \left[\alpha - \frac{2\alpha b\delta - Ka\beta(\gamma + q_2 E_2)}{K\delta(2a + b.^2)}\right] = 10, & 0 &< E_2 < 25. \end{aligned}$$

Es decir, $1.5 < E_1 < 9.6$ y $0 < E_2 < 25$. Si se satisfacen además las desigualdades para que $y_{int} > 0$, véase la figura 3.13,

$$\begin{aligned} E_1 &< \frac{\alpha}{q_1} \left(1 - \frac{x}{K}\right), \\ E_2 &< \frac{1}{q_2} \left(\frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - \gamma\right). \end{aligned}$$

Por lo anterior, $1.5 < E_1 < 9.6$ y $0 < E_2 < 1.6$.

Para encontrar los valores de E_1 y E_2 que nos garantizan que el punto interno es estable, calculamos las desigualdades de la traza y el determinante de $J(P_{y_1})$ y $J(P_{y_2})$, correspondientes a la sustitución de las ecuaciones (3.10) y (3.11) en la matriz jacobiana.

La traza es negativa al cumplirse dos desigualdades para E_1 :

$$E_1(y_1) < \frac{1}{q_1} \left[\alpha - \frac{\alpha x_{int}}{K} - \frac{\beta}{K} \left(\frac{\gamma KR - c\beta x_{int}^2 + \alpha x_{int} R}{b\beta x_{int} + 2a\beta x_{int}^2 - 2\delta R^2} \right) \right],$$

siempre que el polinomio $b\beta x_{int} + 2a\beta x_{int}^2 - 2\delta R^2$ sea positivo para toda x_{int} , como se muestra en la figura 3.14 y

$$E_1(y_2) > \frac{1}{q_1} \left(\alpha + \frac{\tilde{A}R^3 + \tilde{B}R^2 + \tilde{C}R + \tilde{D}}{K\delta R^3} \right),$$

donde,

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \gamma K \delta - 2\alpha \delta x_{int}, \\ \tilde{B} &= K\beta\gamma - c\beta K \delta x_{int}, \\ \tilde{C} &= -K\beta\gamma x_{int}(b + 2ax_{int}) - c\beta^2 K x_{int}, \\ \tilde{D} &= c\beta^2 K x_{int}^2 (b + 2ax_{int}), \end{aligned}$$

para los valores de $0 < x_{int} < 71$, donde el polinomio $\delta R^2 + \beta R - \beta x_{int}(b + 2ax_{int})$ es positivo. Véase la figura 3.15.

$$E_1(y_2) < \frac{1}{q_1} \left(\alpha + \frac{\tilde{A}R^3 + \tilde{B}R^2 + \tilde{C}R + \tilde{D}}{K\delta R^3} \right),$$

para $71 < x_{int} < 600$ si el polinomio $\delta R^2 + \beta R - \beta x_{int}(b + 2ax_{int})$ es negativo.

La gráfica de las desigualdades de E_1 se pueden observar en la figura 3.16. Como vemos, P_{int} es estable si E_1 se encuentra en el área sombreada A o B .

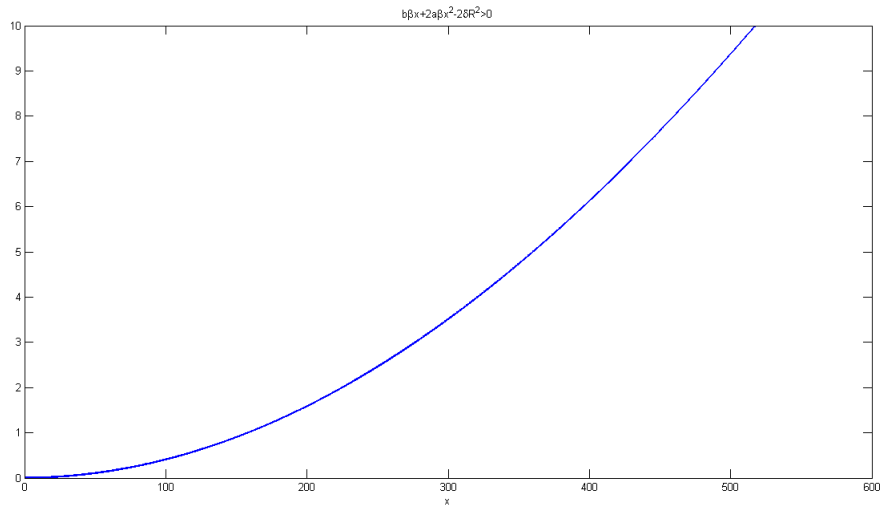


Figura 3.14: Gráfica del polinomio $b\beta x_{int} + 2a\beta x_{int}^2 - 2\delta R^2$, para $0 < x_{int} < 600$.

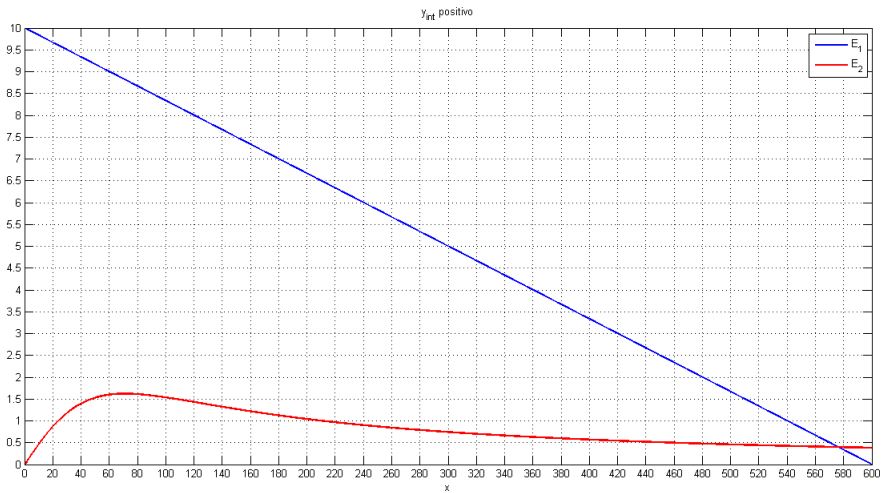


Figura 3.13: Gráfica de las funciones E_1 y E_2 , que definen si y_{int} es positiva, para $0 < x_{int} < 600$.

Ahora, para que la traza sea negativa, también deben analizarse las siguientes

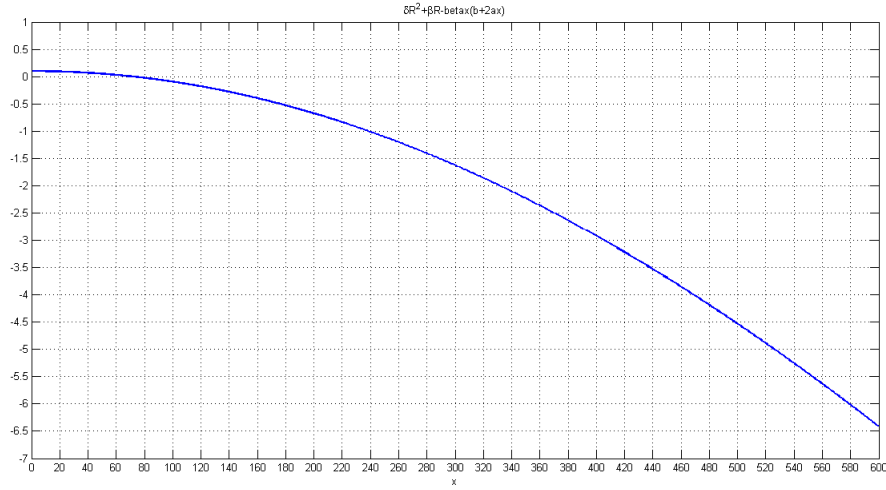


Figura 3.15: Gráfica del polinomio $\delta R^2 + \beta R - \beta x_{int}(b + 2ax_{int})$, para $0 < x_{int} < 600$.

desigualdades para E_2 :

$$E_2(y_1) > \frac{1}{q_2} \left(\left(\mu - \frac{\alpha x}{K} \right) \left(\frac{b\beta x + 2a\beta x^2 - 2\delta R^2}{R\beta} \right) + x \left(\frac{c\beta K - \alpha R}{RK} \right) - \gamma \right),$$

$$E_2(y_2) < \frac{1}{q_2} \left(\frac{(-\mu K \delta + 2\alpha \delta x_{int}) R^3 + c\beta K \delta x_{int} R^2 + c\beta^2 K x_{int} R - c\beta^2 K x_{int}^2 (b + 2ax_{int})}{KR(\delta R^2 + \beta R - \beta x_{int}(b + 2ax_{int}))} - \gamma \right).$$

donde $\delta R^2 + \beta R - \beta x_{int}(b + 2ax_{int})$ es positivo para $0 < x_{int} < 71$ y negativo si $71 < x_{int} < 300$.

Las desigualdades que deben satisfacer $E_{22}(y_1)$ y $E_{22}(y_2)$, para que el determinante de la matriz jacobiana, evaluada en el punto interno, sea positiva son:

$$E_{22}(y_1) > \frac{1}{q_2} \left[\frac{AK^2 - BK + C}{K(E - DK)} - \gamma \right],$$

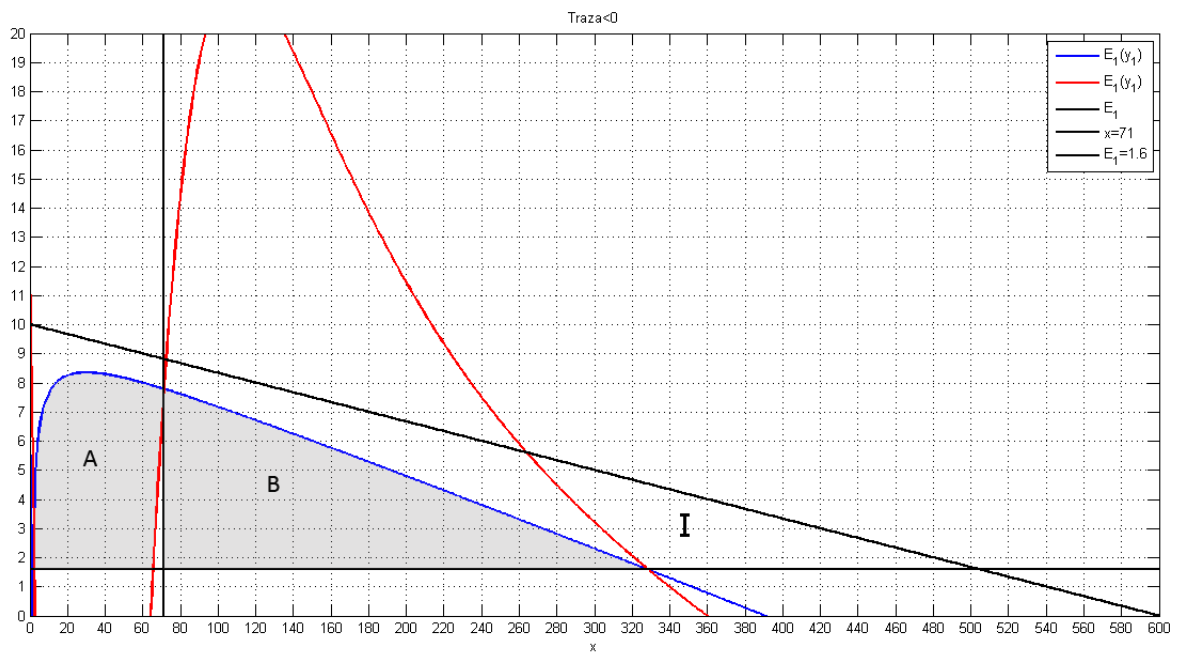


Figura 3.16: Gráfica de $E_1(y_1)$, $E_1(y_2)$, E_1 , $x = 71$ y $E_1 = 1.6$, para $0 < x_{int} < 600$. El área sombreada define los valores de E_1 para los que la traza de $J(P_{int})$ es negativa.

$$\begin{aligned}
A &= 4\delta a^2 \mu^2 x_{int}^3 + 6\delta ab \mu^2 x_{int}^2 + (4a\delta \mu^2 + 2\delta b^2 \mu^2) x_{int} + 2\delta b \mu^2 - c\beta^2 \mu, \\
B &= 10\alpha \delta \mu a^2 x_{int}^4 + 16\alpha \delta \mu ab x_{int}^3 + (12\alpha \delta \mu a + 6\alpha \delta \mu b^2) x_{int}^2 \\
&\quad + (8\alpha \delta \mu b - 2\alpha c \beta^2) x_{int} + 2\alpha \delta \mu, \\
C &= 6\delta a^2 \alpha^2 x_{int}^5 + 10\delta a \alpha^2 b x_{int}^4 + (8\delta a \alpha^2 + 4\delta \alpha^2 b^2) x_{int}^3 + 6\delta \alpha^2 b x_{int}^2 + 2\delta \alpha^2 x_{int}, \\
D &= 2a\beta \mu x_{int} + b\beta \mu, \\
E &= 3\alpha a \beta x_{int}^2 + 2\alpha b \beta x_{int} + \alpha \beta,
\end{aligned}$$

en la región donde el polinomio $E - DK = 3a\alpha x^2 + (2\alpha b - 2a\mu K)x + \alpha - b\mu K$, sea positivo,

$$E_{22}(y_1) < \frac{1}{q_2} \left[\frac{AK^2 - BK + C}{K(E - DK)} - \gamma \right],$$

donde el polinomio $E - DK = 3a\alpha x^2 + (2\alpha b - 2a\mu K)x + \alpha - b\mu K$, sea negativo y

$$E_{22}(y_2) < \frac{1}{q_2} \left(\frac{(2\alpha x_{int} - K\mu)\delta R^3 - \bar{A}K}{K\bar{B}} - \gamma \right),$$

$$\bar{A} = 2a\beta^2 c x_{int}^3 - 2c\beta^2 x_{int},$$

$$\bar{B} = -a^2 \beta x_{int}^4 - ab\beta x_{int}^3 + b\beta x_{int} + \beta.$$

Sea $E_1 = 8$ un valor fijo, que se encuentran dentro de la región de existencia y de estabilidad del punto interno positivo. De acuerdo a la región sombreada de las figuras 3.17 (a) y (b),

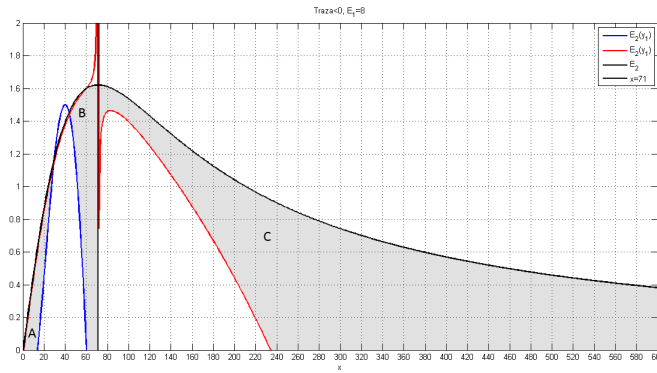
- Si $0 < x_{int} < 26$, región A de ambas gráficas,

$$E_2(y_1) < E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - \gamma \right),$$

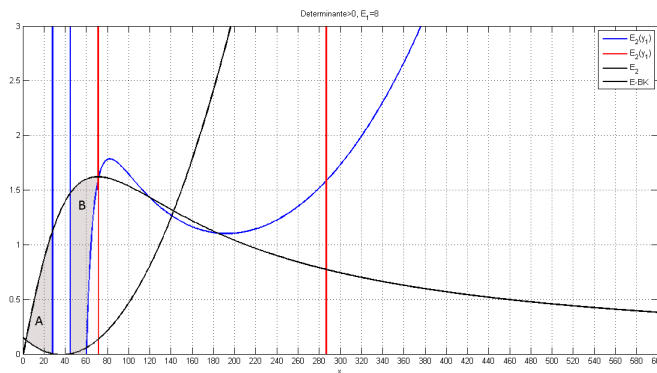
- Si $45 < x_{int} < 71$, región B de ambas gráficas,

$$E_2(y_1) < E_2 < \min \left(\frac{1}{q_2} \left(\frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - \gamma \right), E_{22}(y_1) \right).$$

- Para $x_{int} > 71$, región C de la figura 3.17 (a), no hay región de intersección en la figura 3.17 (b).

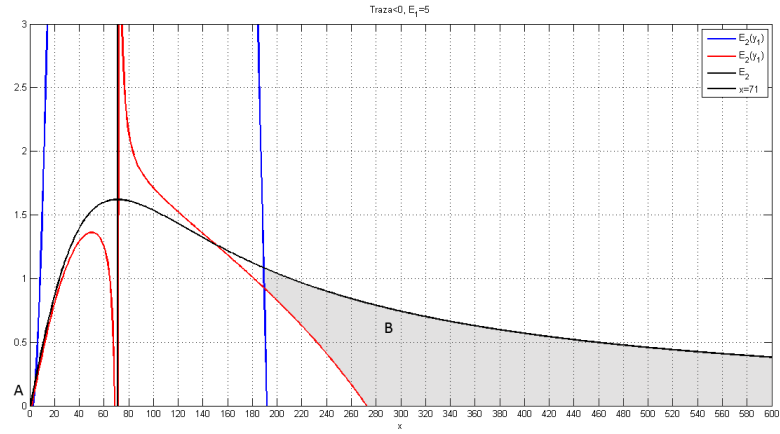


(a)

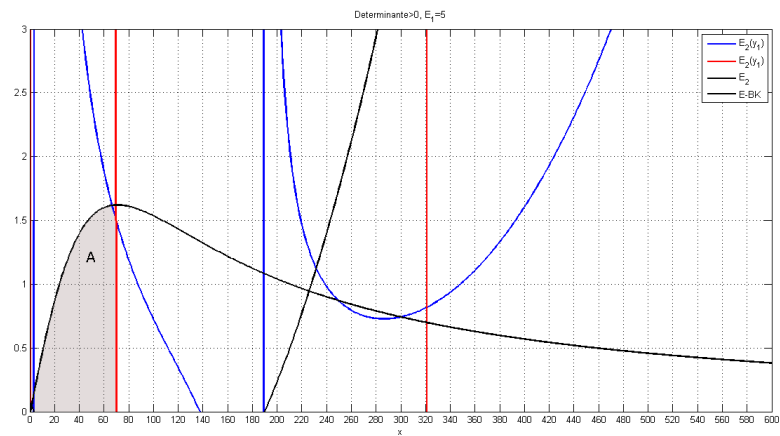


(b)

Figura 3.17: (a) Gráfica de $E_2(y_1)$, $E_2(y_2)$, E_2 y $x = 71$, para $E_1 = 8$, con $0 < x_{int} < 600$, en donde la región sombreada muestra los valores de E_2 para los cuales la traza de $J(P_{int})$ es negativa. (b) Gráfica de las desigualdades $E_{22}(y_1)$, $E_{22}(y_2)$, E_2 y del polinomio $E - DK$, para $0 < x_{int} < 600$ y $E_1 = 8$. El área sombreada nos define el rango de E_2 que satisface que el determinante de $J(P_{int})$ es positivo.



(a)



(b)

Figura 3.18: (a) Gráfica de $E_2(y_1)$, $E_2(y_2)$, E_2 , $x = 71$, para $E_1 = 5$ y $0 < x_{int} < 600$. El área sombreada nos define el rango de E_2 que satisface que la traza de $J(P_{int})$ es negativa. (b) Gráfica de las desigualdades $E_{22}(y_1)$, $E_{22}(y_2)$, E_2 y del polinomio $E - DK$, para $0 < x_{int} < 600$ y $E_1 = 5$. El área sombreada nos define el rango de E_2 que satisface que el determinante de $J(P_{int})$ es positivo.

Dado $E_1 = 5$, otro valor dentro del área de existencia y estabilidad de P_{int} , obtenemos la gráfica de las desigualdades tanto para la traza negativa, como para el determinante positivo, véase la figura 3.18.

- Si $x_{int} \in A$, de ambas gráficas, $0 < E_2 < 0.1$.
- Para $x_{int} \in B$, de la figura 3.18 (a), no existe región de intersección en la figura 3.18 (b).

Inestabilidad punto de equilibrio interno positivo

Si buscamos P_{int} sea un punto de equilibrio inestable, se satisfacen las mismas condiciones del determinante, pero para la traza positiva, cambian las desigualdades:

$$E_2(y_1) > \frac{1}{q_2} \left(\left(\mu - \frac{\alpha x}{K} \right) \left(\frac{b\beta x + 2a\beta x^2 - 2\delta R^2}{R\beta} \right) + x \left(\frac{c\beta K - \alpha R}{RK} \right) - \gamma \right),$$

$$E_2(y_2) < \frac{1}{q_2} \left(\frac{(-\mu K \delta + 2\alpha \delta x_{int}) R^3 + c\beta K \delta x_{int} R^2 + c\beta^2 K x_{int} R - c\beta^2 K x_{int}^2 (b + 2a x_{int})}{KR(\delta R^2 + \beta R - \beta x_{int}(b + 2a x_{int}))} - \gamma \right).$$

Según la gráfica 3.16, los valores de E_1 para los cuales la traza de $J(P_{int})$ es positiva, se encuentran en la región I : $262 < x_{int} < 500$ y $1.6 < E_1 < 5.6$. Por lo cual, si $E_1 = 8$, no hay región de E_2 para la que P_{int} sea inestable.

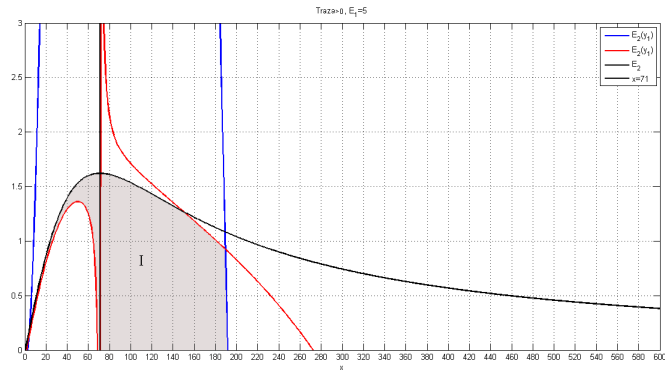
Cuando $E_1 = 5$ y comparamos las gráficas de la traza positiva, figura 3.19 (a), con la del determinante positivo, figura 3.19 (b), se define una sólo región comprendida entre $0 < x_{int} < 71$, el valor de E_2 se mueve entre

$$E_2(y_2) < E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - \gamma \right).$$

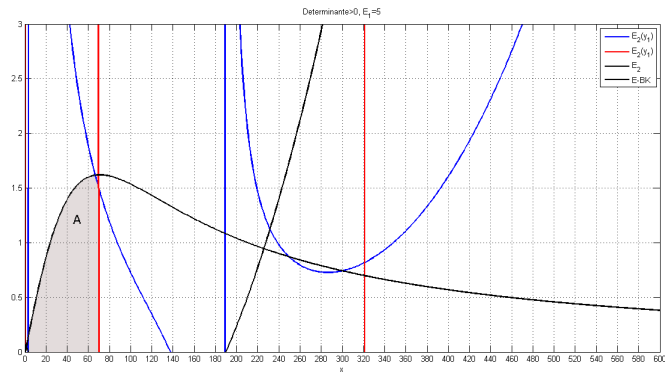
Pero para limitar la existencia simultánea del punto P_1 estable y P_{int_2} inestable, tomamos las desigualdades:

$$E_2(y_2) < E_2 < \min \left(\frac{1}{q_2} \left(\frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - \gamma \right), \frac{1}{q_2} \left(\frac{\alpha\beta c(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha b K(\alpha - q_1 E_1) + a K^2(\alpha - q_1 E_1)^2} - \gamma \right) \right).$$

Esto, para toda E_1 que satisface las condiciones de existencia y que cumple con la región I de la figura 3.16.



(a)



(b)

Figura 3.19: (a) Gráfica de $E_2(y_1)$, $E_2(y_2)$, E_2 , $x = 71$, para $E_1 = 5$ y $0 < x_{int} < 600$. El área sombreada nos define el rango de E_2 que satisface que la traza de $J(P_{int})$ es positiva. (b) Gráfica de las desigualdades $E_{22}(y_1)$, $E_{22}(y_2)$, E_2 y del polinomio $E - DK$, para $0 < x_{int} < 600$ y $E_1 = 5$. El área sombreada nos define el rango de E_2 que satisface que el determinante de $J(P_{int})$ es positivo.

Incluso, podemos ver el caso en el que exista un punto silla, es decir, cuando el determinante de $J(P_{int}) < 0$, para ello graficamos las desigualdades de la traza positiva o de la traza negativa para cada valor fijo E_1 , junto con las siguientes:

$$E_{22}(y_1) < \frac{1}{q_2} \left[\frac{AK^2 - BK + C}{K(E - DK)} - \gamma \right],$$

en la región donde el polinomio $E - DK = 3a\alpha x^2 + (2\alpha b - 2a\mu K)x + \alpha - b\mu K$, sea positivo,

$$E_{22}(y_1) > \frac{1}{q_2} \left[\frac{AK^2 - BK + C}{K(E - DK)} - \gamma \right],$$

donde el polinomio $E - DK = 3a\alpha x^2 + (2\alpha b - 2a\mu K)x + \alpha - b\mu K$, sea negativo y

$$E_{22}(y_2) > \frac{1}{q_2} \left(\frac{(2\alpha x_{int} - K\mu)\delta R^3 - \bar{A}K}{K\bar{B}} - \gamma \right).$$

Si $E_1 = 8$ y la traza de $J(P_{int}) < 0$, véase la figura 3.20. La intersección de ambas regiones es la siguiente: $71 < x_{int} < 285$,

$$E_2(y_2) < E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - \gamma \right).$$

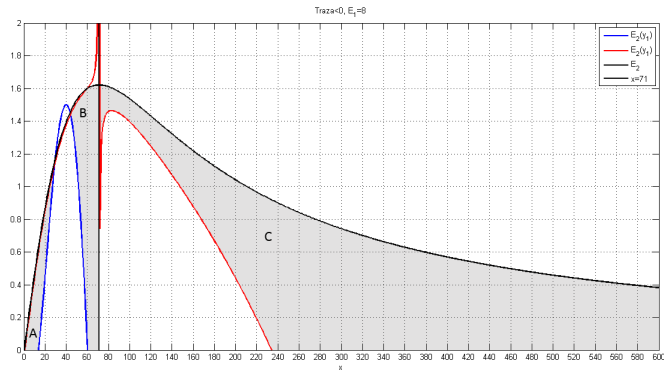
Si la traza es positiva, $E_1 \neq 8$, por tanto no hay área de intersección y por ende no hay valores para E_2 .

Para $E_1 = 5$, observamos la figura 3.21, en la que tenemos las gráficas de las desigualdades para la traza negativa y el determinante positivo. Si $170 < x_{int} < 320$,

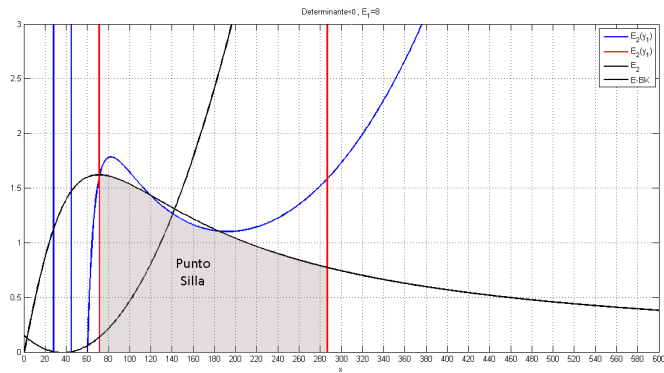
$$E_2(y_2) < E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - \gamma \right).$$

En el caso de que la traza sea positiva y el determinante negativo, figura 3.22, para este mismo valor de E_1 y $71 < x_{int} < 170$,

$$E_{22}(y_1) < E_2 < \min \left\{ \frac{1}{q_2} \left(\frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - \gamma \right), E_2(y_2) \right\}.$$

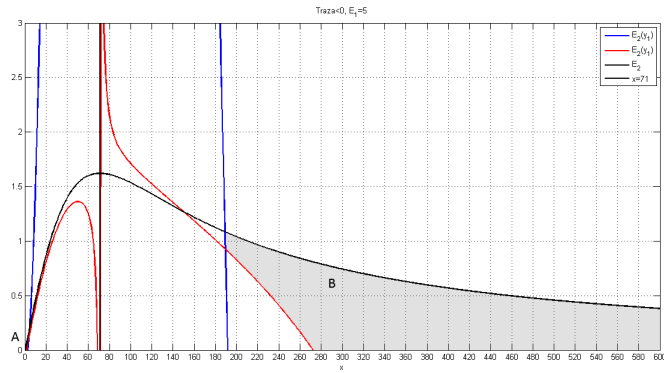


(a)

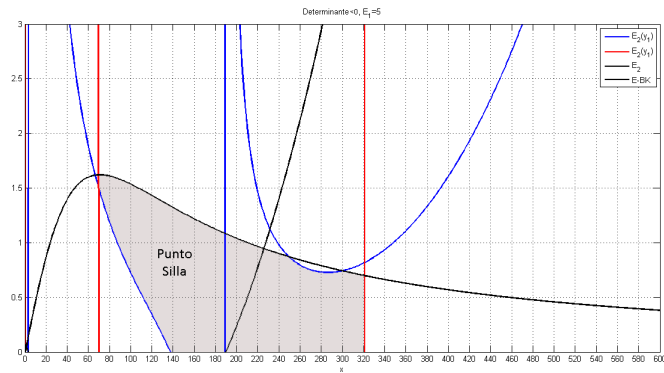


(b)

Figura 3.20: ((a) Gráfica de $E_2(y_1)$, $E_2(y_2)$, E_2 y $x = 71$, para $E_1 = 8$, con $0 < x_{int} < 600$, en donde la región sombreada muestra los valores de E_2 para los cuales la traza de $J(P_{int})$ es negativa. (b) Gráfica de las desigualdades $E_{22}(y_1)$, $E_{22}(y_2)$, E_2 y del polinomio $E - DK$, para $0 < x_{int} < 600$ y $E_1 = 8$. El área sombreada nos define el rango de E_2 que satisface que el determinante de $J(P_{int})$ es negativo.

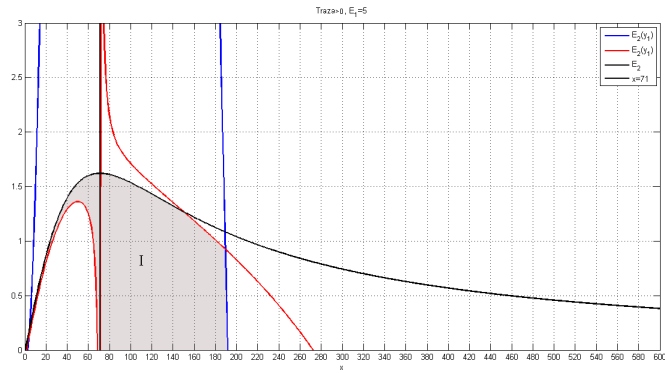


(a)

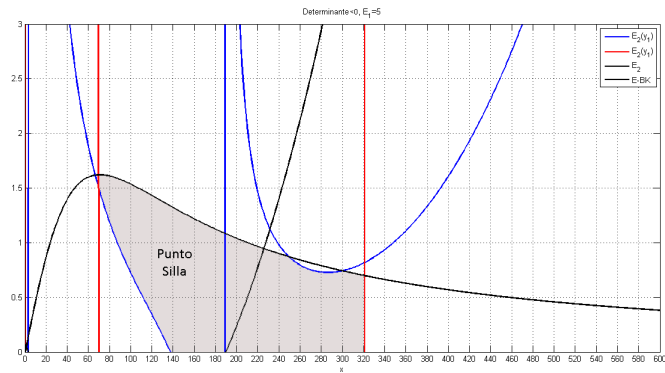


(b)

Figura 3.21: ((a) Gráfica de $E_2(y_1)$, $E_2(y_2)$, E_2 y $x = 71$, para $E_1 = 5$, con $0 < x_{int} < 600$, en donde la región sombreada muestra los valores de E_2 para los cuales la traza de $J(P_{int})$ es negativa. (b) Gráfica de las desigualdades $E_{22}(y_1)$, $E_{22}(y_2)$, E_2 y del polinomio $E - DK$, para $0 < x_{int} < 600$ y $E_1 = 5$. El área sombreada nos define el rango de E_2 que satisface que el determinante de $J(P_{int})$ es negativo.



(a)



(b)

Figura 3.22: ((a) Gráfica de $E_2(y_1)$, $E_2(y_2)$, E_2 y $x = 71$, para $E_1 = 5$, con $0 < x_{int} < 600$, en donde la región sombreada muestra los valores de E_2 para los cuales la traza de $J(P_{int})$ es positiva. (b) Gráfica de las desigualdades $E_{22}(y_1)$, $E_{22}(y_2)$, E_2 y del polinomio $E - DK$, para $0 < x_{int} < 600$ y $E_1 = 5$. El área sombreada nos define el rango de E_2 que satisface que el determinante de $J(P_{int})$ es negativo.

Análisis de los resultados

Entonces, de acuerdo a los resultados obtenidos,

- Si tomamos $E_1 = 8$ y queremos encontrar un punto de equilibrio interno positivo y su interacción con el punto P_1 , nos fijamos en el rango $0 < x_{int} < 26$. Sea $x_{int} = 25$, entonces $E_2(y_1) < E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - \gamma \right)$, es decir, $0.8357 < E_2 < 1.0318$. Por lo tanto, tomamos $E_2 = 1$ y obtenemos los puntos $P_{int} = (24.5902, 3.7535)$ y $P_1 = (120, 0)$, el primero es asintóticamente estable y el segundo un punto silla. Véase la figura 3.23 (a). Analizamos además la existencia de algún punto silla, es decir, para esa misma $x_{int} = 25$, necesita satisfacer las desigualdades

$$E_2(y_2) < E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - \gamma \right),$$

$1.0133 < E_2 < 1.0318$, lo cual no ocurre para $E_2 = 1$.

Para $E_1 = 8$ y $E_2 = 1$, P_{int} es asintóticamente estable globalmente para cualquier condición inicial de comience en la región

$$B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, y < \frac{\alpha x R^2}{K(x\beta(2ax + b) - \delta R^2)} \right\},$$

véase la figura 3.23 (b).

- Sean $E_1 = 8$ y $x_{int} = 49$, perteneciente al rango $45 < x_{int} < 71$, entonces E_2 debe satisfacer las desigualdades

$$E_2(y_1) < E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - \gamma \right),$$

esto es, $1.2007 < E_2 < 1.5195$. Tomamos así $E_1 = 1.5$, para el cual encontramos $P_{int_1} = (48.9303, 3.7591)$ asintóticamente estable y $P_1 = (119.99, 0)$ estable. Véase la figura 3.24 (b). En este caso, existe además un punto silla, esto porque $E_2 = 1.5$ satisface la desigualdad

$$E_2(y_2) < E_2 < \frac{1}{q_2} \left(\frac{c\beta x}{1 + bx + ax^2} - \gamma \right),$$

$1.0133 < E_2 < 1.0318$, $1.4999 < E_2 < 1.5195$.

- En el caso que $E_1 = 5$, si $x_{int} = 3.5$, E_2 cumple que

$$E_2 > E_2(y_2)$$

y

$$E_2 < \min \left(\frac{1}{q_2} \left(\frac{c\beta x}{1+bx+ax^2} - \gamma \right), \frac{1}{q_2} \left(\frac{\alpha\beta c(\alpha - q_1 E_1)}{\alpha^2 + \alpha b K(\alpha - q_1 E_1) + a K^2(\alpha - q_1 E_1)^2} - \gamma \right) \right),$$

$0.0998 < E_2 = 0.1501$. Así, $E_2 = 0.1$ y ocurre que $P_{int} = (3.5359, 10.0766)$ es inestable y $P_1 = (300, 0)$ es un punto silla. Véase la figura 3.25.

Para que exista la condición de transversalidad del parámetro de bifurcación $\bar{\beta}$, $B_2 R^2 + B_1 R + B_0 > 0$, donde

- $B_2 = \lambda - cx\delta$,
- $B_1 = -2\bar{\beta}(y_2)cx - x\lambda(b + 2ax)$,
- $B_0 = 2\bar{\beta}(y_2)cx^2(b + 2ax)$,

Si $E_1 = 5$ y $E_2 = 0.1$, es cierto que es positivo, véase la figura 3.26 (a). Entonces, si $\bar{\beta}$ cambia de 0.099 a 0.04, ya no existe solución periódica y el punto de equilibrio sigue siendo inestable, véanse las figuras 3.26 (b) y 3.26 (c).

Con respecto al punto de equilibrio y a los esfuerzos pesqueros óptimos, si tomamos los valores de los parámetros $c_1 = 5$, $c_2 = 15$, $p_1 = 10$, $p_2 = 10$, $w = 0.005$,

$$P(x^*, y^*, E_1^*, E_2^*) = (2.557, 19.6963, 0.2692, 0.0042).$$

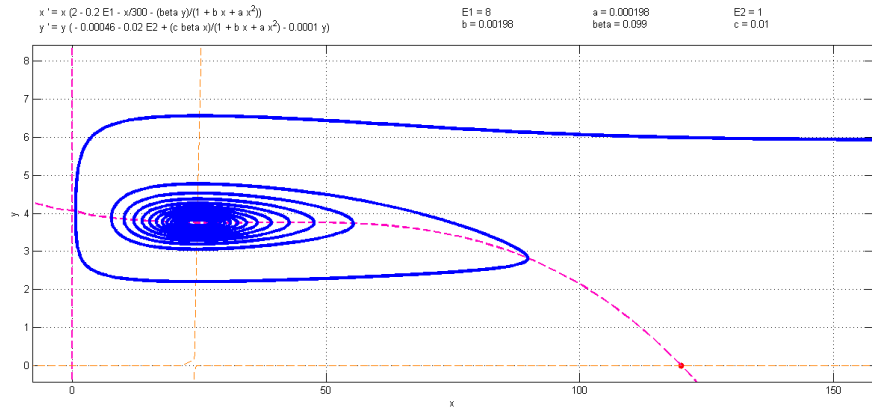
El cual satisface que

$$\frac{\partial^2 H}{\partial E_1^2}(P^*) = -2.0045 \times 10^{-33} e^{-0.005t}$$

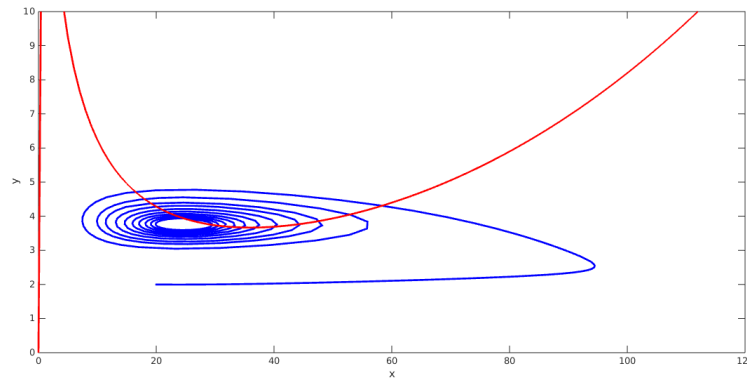
y que el determinante de la matriz Hessiana,

$$\det(Hess(P^*)) = 9.1364 \times 10^{-55} e^{-0.005t}$$

es positiva. Así, H encuentra su valor máximo en P^* . Destacamos que el uso de estos valores de los parámetros que satisfacen que el Hamiltoniano alcance un valor máximo, tiene una interpretación interesante puesto que así como en el modelo (3.7), en éste se conserva el aumento en el precio de la presa, pero también del depredador, puesto que ocurre una disminución en la población de ésta última por la misma competencia interna y además se incrementa también el costo de la pesca del depredador.



(a)



(b)

Figura 3.23: (a) Retrato fase del sistema (3.9) para $E_1 = 8$ y $E_2 = 1$. (b) Gráfica de la región de estabilidad asintótica global con condición inicial $x_0 = (20, 2)$.

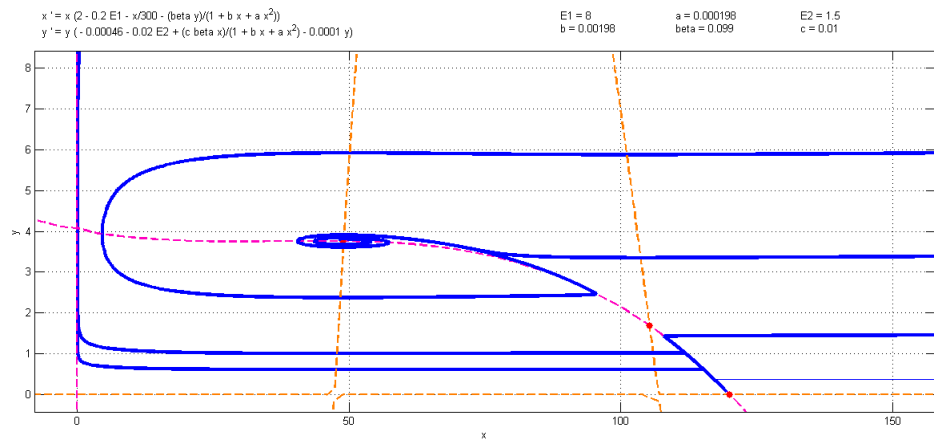


Figura 3.24: Retrato fase del sistema (3.9) para $E_1 = 8$ y $E_2 = 1.5$

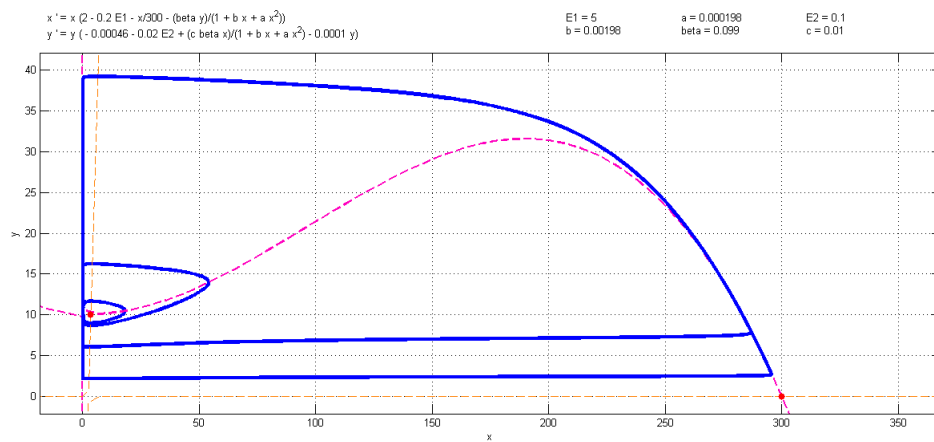
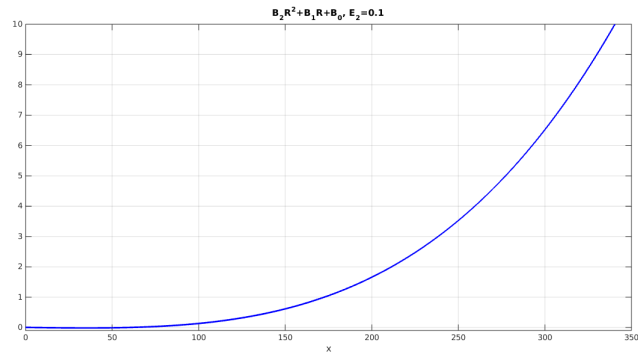
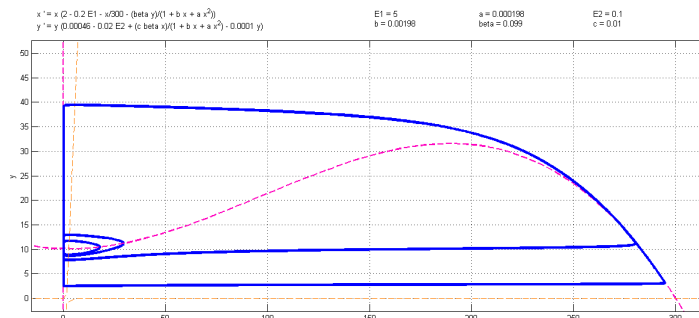


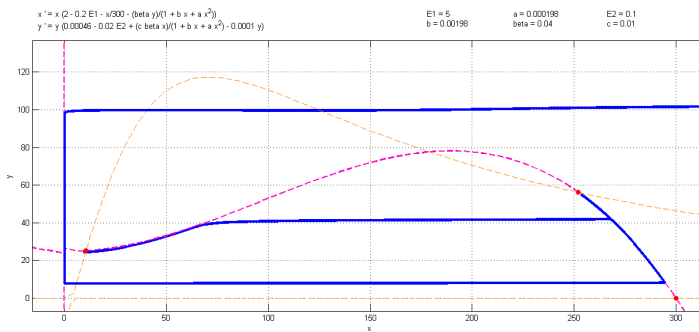
Figura 3.25: Retrato fase del sistema (3.9) para $E_1 = 5$ y $E_2 = 0.1$.



(a)



(b)



(c)

Figura 3.26: (a) Gráfica de la condición para la cual existe la transversalidad del parámetro de bifurcación β . (b) Retrato fase del sistema (3.9) para $\beta = 0.099$. (c) Retrato fase del sistema (3.9) para $\beta = 0.04$.

Conclusiones y perspectivas

Las conclusiones que aquí presentamos están organizadas de acuerdo al capítulo en el que se obtuvieron. Al final listamos unos problemas que consideramos podrían ser la continuación de este trabajo.

En el primer capítulo de este trabajo, revisamos los modelos matemáticos poblacionales elementales a través de los que se estudia la explotación de los recursos pesqueros en los que aun no se incorpora el problema de control óptimo. Aquéllos toman la forma de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales. Realizamos el análisis cualitativo detallado de dichos modelos en dos casos, a saber:

1. Cuando se trata de una población cuya razón instantánea de cambio la describe un modelo logístico, la cual es sometida a explotación. Ésta toma dos formas: razón constante y razón proporcional a la cantidad del recurso.
2. Cuando, desde el punto de vista demográfico, la acción de los pescadores puede ser interpretada como si se tratara de un “depredador” y, en tal caso, el modelo matemático resultante es uno del tipo presa-depredador.

Un ingrediente importante que se introduce en este capítulo, es la definición de la llamada respuesta funcional de Holling. Ésta es fundamental para los modelos que se proponen y estudian en el tercer y último capítulo de esta tesis. Las respuestas funcionales de Holling tienen como origen modificar la razón de encuentros entre individuos presa y depredador, por unidad de depredador, introducida en el modelo clásico de Lotka-Volterra en el que dicha razón es proporcional al producto de las densidades poblacionales.

En el segundo capítulo realizamos una revisión de los aspectos básicos de la teoría del control óptimo. Esto se hace con la finalidad de dar las condiciones de optimización del rendimiento sostenible del nivel de existencia del recurso natural y encontrar la ganancia económica que se obtiene con respecto a éste. El resultado más importante de este marco teórico es el Principio del Máximo de Pontryagin. Con ayuda de éste, realizamos el análisis

detallado del modelo matemático de tipo presa-depredador presentado al final del Capítulo 2, en el que la acción de los pescadores puede interpretarse como si se tratara de un depredador. Aquí se estudiaron los distintos casos en los que se obtiene el llamado máximo rendimiento sostenible para diversos funcionales de ingreso.

Como lo comentamos en la introducción histórica de este trabajo. En efecto, el progreso económico y el balance ecológico de las pesquerías siempre han tenido un conflicto de interés, el abastecimiento de nuestras necesidades y comodidades rompe invariablemente la estructura de cualquier comunidad ecológica. Si una actividad está generando graves daños al ecosistema en una región y si ésta es inevitable, entonces la autoridad gubernamental debe planear una política de regulación que minimice el daño del ecosistema. Una de esas actividades es la cosecha o extracción de algún recurso. Éste es el tema que abordan los modelos matemáticos del tipo presa-depredador estudiados en este trabajo, con dos ecuaciones diferenciales ordinarias que modelan la interacción entre dos especies. Incorporando el esfuerzo pesquero dependiente de la densidad poblacional de cada especie. Es decir, el efecto demográfico de los pescadores sobre la población de peces que se captura ya no es visto como los depredadores.

Se incluyen además las respuestas funcionales de Holling tipo II y tipo IV en un mismo modelo, utilizando los mismos parámetros en cada caso, de tal forma que podamos comparar lo que ocurre con la evolución de las densidades de ambas especies y con los correspondientes esfuerzos de pesca óptimos.

En el primer modelo que se estudia en el Capítulo 3, se considera un sistema de tipo presa-depredador bajo una razón constante de cosecha de ambas especies y la razón de encuentros entre las especies está dada por una respuesta de tipo Holling II, la función monótona creciente que se ve en la figura C.1. Se presenta el análisis del efecto de los esfuerzos de recolección en el sistema presa-depredador. Se demuestra que existe exactamente un ciclo límite estable y que se produce en el sistema cuando el punto de equilibrio es positivo es inestable. Además, cuando el ciclo límite no existe, el punto de equilibrio positivo es asintóticamente estable globalmente. Se encuentra que es posible utilizar los esfuerzos pesqueros E_1 y E_2 como controles para aproximar el sistema a un estado específico. En éste incorporamos el esfuerzo pesquero dependiente de la densidad poblacional de cada especie. De hecho, es proporcional a ésta. Es decir, en este caso, el efecto demográfico de los pescadores sobre la población de peces que se captura ya no es visto como los depredadores.

Luego se examinan las posibilidades de existencia del equilibrio bioeconómico del sistema y se discute la política óptima de cosecha usando el Principio del Máximo de Pontryagin.

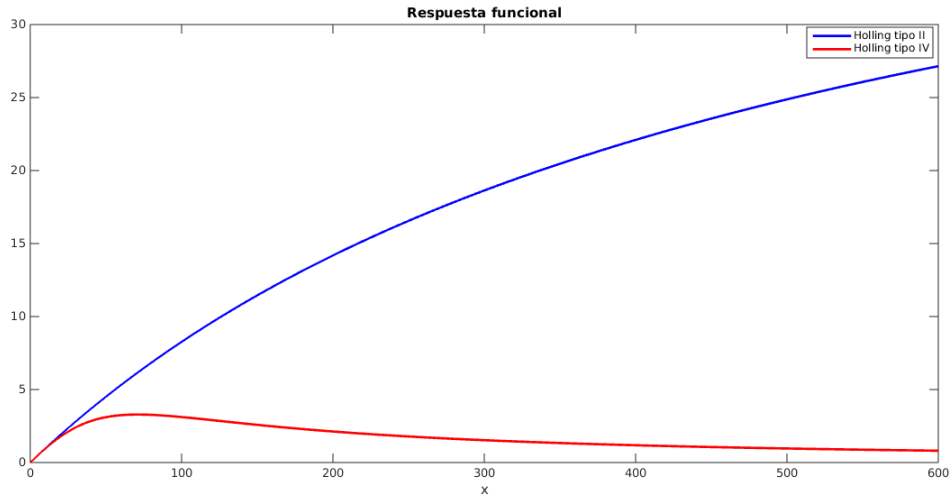


Figura C.1

Para finalizar se realizan las simulaciones numéricas con la rutina *ode45* del software *Matlab*, dados los parámetros propuestos en el modelo de Kar [18], encontrando no sólo la dinámica del sistema sino las coordenadas del punto de equilibrio óptimo (x^*, y^*, E_1^*, E_2^*) .

En la sección 3.2, proponemos un sistema presa-depredador en el que la razón de encuentros de presas por unidad de depredador la da la respuesta funcional de Holling tipo IV, de forma tal que a mayor número de presas, la razón de ataque o consumo del depredador disminuye; mientras que en la respuesta funcional tipo II, ésta alcanza su tasa máxima de ataque o consumo cuando la densidad de las presas es muy grande. Véase la figura C.1. La relevancia de cambiar el tipo de función de Holling es, representar el fenómeno de “grupos de defensa”, término introducido por [30] para describir que la depredación disminuye o se detiene, debido a un incremento en la habilidad de la presa para defenderse o “disfrazarse” cuando su densidad es lo suficientemente grande. Fenómeno que muchos investigadores han documentado con base experimental y el cual es usualmente obtenido no sólo en poblaciones pesqueras, sino en insectos [3], en zooplankton [10] o en mamíferos [35]. Ambas funciones se pueden observar en la figura

El sistema de EDO's (3.7) tiene la misma expresión de cosecha tanto en presa, como en depredador, por lo cual en este caso también estudiamos el efecto que tienen los esfuerzos pesqueros en la dinámica del modelo. Se demuestra que toda solución que inicia en \mathbb{R}_+^2 está acotada uniformemente y que es persistente uniformemente, lo que implica que las

poblaciones presa y depredador sobreviven después de mucho tiempo. Lo anterior se realiza con ayuda de la construcción de una función de Lyapunov promedio que cumple con ciertas condiciones sobre \mathbb{R}_+^2 .

Del análisis local, obtenemos cuatro puntos de equilibrio y de ellos, dos internos, el primero es siempre un punto silla, para todo parámetro positivo definido y el segundo puede ser estable e inestable, dependiendo de las condiciones dadas. Se demuestra la existencia de un ciclo límite que proviene de una bifurcación de Hopf. El ciclo límite rodea el punto de equilibrio positivo interno P_{int_2} , siendo $\bar{\beta} = 0.0415$ el parámetro de bifurcación y cuya interpretación es: la tasa máxima de ataque del depredador.

Mostramos también que los puntos de equilibrio P_1 (en ausencia de depredador) y P_{int_2} estables localmente, lo son globalmente, dadas ciertas restricciones y nos aseguramos que no ocurran simultáneamente para los esfuerzos pesqueros obtenidos. Para probar que P_1 es asintóticamente estable globalmente usamos el método directo de Lyapunov y la estabilidad global de P_{int_2} , en cierta región B , la realizamos con ayuda del Criterio de Dulac y el Teorema de Poincaré. Los métodos descritos se definen en el Apéndice A.

Igualmente, se encuentra el equilibrio bioeconómico y se trabaja con la teoría de control óptimo para encontrar el punto de equilibrio y los esfuerzos pesqueros óptimos buscados. En las simulaciones numéricas, se utilizan los mismos parámetros definidos en el modelo (3.1), excepto el valor del parámetro a , que no existe para el primer modelo. Ya que $b/2a$ se define como la inmunidad que la presa tiene del depredador y es además el punto para el cual la función $1 + bx + ax^2$ alcanza su punto máximo, si a es muy grande, la inmunidad disminuye y vimos en los resultados del modelo Holling tipo IV, que no es matemática ni biológicamente posible tomar el valor de a como 0.00198, puesto que el valor de esfuerzo pesquero óptimo es negativo y la densidad del depredador crece excesivamente. Así, restringimos que el valor de a , en el modelo (3.7), debe ser menor a 0.00198, elegimos $a = 0.000198$ para que el valor de la inmunidad sea de 5 unidades.

La diferencia entre el segundo y el tercer modelo es la competencia intraespecífica entre depredadores, representada por la expresión $-\delta y^2$, que se encuentra en la segunda ecuación diferencial del sistema (3.9) y que se define como la disminución en la población de depredadores, dado que existe una competencia por el alimento entre ellos. Analizamos igualmente la dinámica de (3.9), para dos valores distintos de δ , obtenidos de la configuración del polinomio con el que se obtiene el punto de equilibrio interno positivo. Si $\delta = 0.03$, se encuentra un sólo punto P_{int} y estable, pero el problema radica en la reducción drástica de la región de existencia a $575 < x_{int} < 600$ y $0 < y_{int} < 0$; mientras que los valores de equilibrio óptimo de x y de y no pertenecen a esta región y el esfuerzo

de pesca óptimo para el depredador resulta negativo, lo cual no tiene sentido biológico ni matemático. Así, después de revisar y estudiar las distintas conformaciones del polinomio, encontramos una que satisface la fenomenología y nos proporciona la información que necesitamos, ésta resulta con $\delta = 0.0001$.

Las metodologías para demostrar que toda solución está acotada uniformemente en \mathbb{R}_+^2 y que el sistema es persistente uniformemente se rescatan del modelo (3.7). Se demuestra la ocurrencia de una bifurcación de Hopf en $\bar{\beta} = 0.04$ y la estabilidad local y global del sistema (3.9). También se obtienen el equilibrio bioeconómico y la política óptima de cosecha. Se incluyen unas simulaciones numéricas que ilustran la dinámica.

Para poder hacer una comparación entre los modelos, fue necesario utilizar el mismo valor de los parámetros, los valores de a y de δ fueron calculados con base a los anteriores, como lo mencioné hace un momento. Lo primero que observamos de la dinámica de los tres modelos es el aumento de puntos de equilibrio, de tres del primer modelo a cuatro en el segundo y cinco en el último. El punto de equilibrio trivial es siempre punto silla, el punto P_1 es el mismo para todos los modelos, pero puede ser estable o punto silla, dependiendo de los esfuerzos de pesca encontrados. El punto interno positivo es analizado también para ver las condiciones sobre E_1 y E_2 para que éste exista y sea estable o inestable. En los modelos (3.7) y (3.8), existe además del punto interior otro punto que siempre es silla, pero que no se presenta todo el tiempo en la dinámica, sólo bajo ciertas condiciones. Es importante destacar que las restricciones sobre E_1 y E_2 , en los modelos de Holling tipo IV, toman en cuenta que no ocurran conjuntamente que el punto P_1 sea estable y el punto interior positivo inestable, ya que ésto generaría una ruptura en el ciclo límite estable que aparece alrededor de P_{int} , en ambos sistemas.

Con respecto a la dinámica global, la existencia de un ciclo límite único ocurre sólo en el primer modelo, puesto que ni el segundo ni el último son un sistema del tipo Gauss y por ende no cumplen con las condiciones dadas por Kuang y Freedman en [21] para la unicidad de este ciclo. Así, en el caso de los sistemas (3.7) y (3.9) se encuentra una bifurcación de Hopf en el parámetro $\bar{\beta}$, alrededor del punto interno, que rompe la estructura cíclica del sistema, los valores obtenidos son muy parecidos. Cabe mencionar que la estabilidad asintótica global del punto P_{int} , para (3.7) y (3.9), es dentro una región B , es decir, que cualquier condición (x_0, y_0) que inicie al interior de B se aproximará asintóticamente al punto de equilibrio.

El análisis de los puntos de equilibrio bioeconómico y la política óptima de cosecha sigue un mismo procedimiento, utilizando la ecuación que define la tasa neta de ingresos económicos, la tasa de descuento o *factor Whimpy*, el mismo funcional objetivo y el

Teorema del Principio Máximo de Pontryagin que nos ayuda a maximizarlo. Lo cual, quiere decir, que lo único que está cambiando es el sistema de ecuaciones, definido como las variables de estado de cada modelo, para las variables de control E_1 y E_2 .

Según Kar [18], la respuesta funcional de Holling tipo II, representa el siguiente fenómeno: cuando hay muchas presas juntas, éstas se refugian ante la presencia de los depredadores, pero no es un refugio físico, pareciera que “se esconden” ante el ataque, entonces en este caso el consumo de presas, por parte de los depredadores no aumenta, se mantiene constante. Lo cual tiene sentido, si analizamos la gráfica de la figura C.1., usada en el primer modelo, puesto que la función monótona creciente tiende asintóticamente hacia la tasa máxima de ataque (30 unidades), cuando x es grande. Es decir, si $x \approx 600$, la tasa de presas atacadas, por depredador, es de 26 y de ahí tiende hacia las 30 unidades, pero no desciende.

Si ahora pensamos en los “grupos de defensa” y vemos la segunda gráfica de la figura C.1., si $x \approx 50$, ya se alcanzó la tasa máxima de ataque o de consumo de presas (3 unidades), por depredador, y para cuando $x \approx 600$, la tasa de consumo ya es de 1 unidad. Si nuestro interés es netamente ecológico y éste es la cosecha de presas, en definitiva la dinámica obtenida con la respuesta funcional tipo IV es el mejor escenario. Pero desde el punto de vista económico, el beneficio máximo se alcanza si sube el costo de la presa, esto porque la pesca es difícil si la presas tienen ese comportamiento. Si agregamos la competencia intraespecífica entre depredadores, esto sin duda, subiría más el costo de pesca de ambas poblaciones y también de las unidades. Este análisis se obtuvo de los resultados de maximizar el funcional y obtener los valores de los parámetros de precios por unidad de presa y depredador, así como los costos de pesca.

Las respuestas funcional y numérica se comportan como una perturbación del sistema, si ésta es del tipo II, la perturbación es mayor y no cesa cuando x es muy grande, eso quiere decir que la razón de cambio de presas disminuye más rápidamente, al igual que se incrementa la razón de cambio de los depredadores. A diferencia de lo que ocurre con la respuesta funcional y numérica del tipo IV, puesto que la alteración del sistema sucede muy rápido y disminuye al transcurrir el tiempo. Así, la interacción entre presas y depredadores va disminuyendo y la tasa de consumo de presas, por depredador, es mínima; mientras que la razón de cambio de las presas desciende más gradualmente, al igual que aumenta la razón de cambio de los depredadores.

Además, en los tres modelos, encontramos favorablemente los valores de los esfuerzos pesqueros que cambian las densidades poblacionales de ambas especies, para tener

densidades que tiendan hacia un punto de equilibrio asintóticamente estable o a un ciclo límite estable, cuando el tiempo sea mayor, lo cual es importante para la co-existencia de las poblaciones de presas y depredadores, condición ecológica indispensable en el tipo de modelos que estamos trabajando. Destacando la dificultad de trabajar con el último modelo, que enriqueció por mucho la dinámica generada por el primer sistema, puesto que con más puntos de equilibrio nos brinda una mayor información cualitativa del modelo y sobre las variables de control.

Para terminar con este trabajo, nos gustaría platicar acerca de los retos y propuestas que se pueden hacer para mejorar y avanzar en el estudio de este tipo de modelos matemáticos de población con cosecha y respuesta funcional Holling tipo IV,

1. Utilizar esta tesis como plataforma para considerar un modelo ecológico en el que se calculen los valores de los parámetros, a partir de datos reales.
2. Considerar un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales no lineales, las primeras dos idénticas a los sistemas que estudiamos en el Capítulo 3; mientras que las otras dos ecuaciones pueden describir la razón de cambio de los esfuerzos pesqueros de la presa y el depredador, respectivamente. Tomando en cuenta el modelo de pesquería para dos especies visto en la sección 1.2.5.
3. Introducir características biológicas relevantes de la presa y del depredador en la dinámica del sistema, como el periodo de gestación, por ejemplo.

A continuación definimos un Glosario con los conceptos técnicos y científicos relacionados con la actividad pesquera, que se utilizaron durante este trabajo.

Glosario

B

biomasa

La biomasa se refiere a la abundancia del *stock* en unidades de peso. En ocasiones se refiere solo a una parte del *stock* (biomasa de reproducción, biomasa explotable), pero no siempre se hace la distinción.

C

capacidad de carga

La capacidad de carga de una especie biológica, en un ambiente, es el tamaño máximo de población que el ambiente puede soportar en un periodo determinado, teniendo en cuenta el alimento, agua, hábitat, y otros elementos necesarios disponibles en ese medio.

captura

Número total de peces capturados en las operaciones pesqueras (en ocasiones el término “captura” designa el peso de los peces capturados). La captura debe incluir todos los peces muertos por la acción de la pesca, no sólo aquellos que se desembarcan.

capturabilidad

Fracción del *stock* capturada por una unidad de esfuerzo estandarizada. Se emplea también como constante de proporcionalidad que relaciona el esfuerzo efectivo con la mortalidad por pesca, o como la constante de proporcionalidad que relaciona un índice de abundancia con el tamaño absoluto del *stock*.

E

equilibrio bioeconómico

El equilibrio bioeconómico se define como el punto en el cual desde el punto de vista biológico, la razón de cambio en el *stock* es cero y la condición económica de equilibrio significa que no hay ningún cambio en el esfuerzo pesquero. En una pesquería de acceso abierto, el equilibrio bioeconómico se administra a un nivel de esfuerzo donde el beneficio es cero y el costo total es igual al total de los ingresos de la pesca.

esfuerzo pesquero

Es la cantidad de trabajo, medido a través de parámetros operativos y económicos que puede desarrollar una unidad de pesca en un periodo determinado.

P

pesca

Para los fines de la Ley de Pesca, se entiende como el acto de extraer, cultivar o capturar, por cualquier procedimiento autorizado, especies biológicas cuyo medio de vida total, parcial o temporal sea el agua; así como los actos previos o posteriores relacionados con ella.

pesca comercial

Se considera pesca comercial la que se realiza con propósito de obtener beneficios económicos.

pesca recreativa

La pesca recreativa es una actividad pesquera que se realiza con propósitos deportivos, recreación, pasatiempo o competición sin fines de lucro.

pesquería

Es la actividad económica, sustentada en el aprovechamiento de un recurso natural, constituido por una o varias especies, en el cual intervienen medios, técnicas y procedimientos de producción particulares y diferenciados y mano de obra con calificación específica; presentan regularidades tecnológica y se conciben de manera integral (extracción, procesamiento y comercialización).

R

REM

Este concepto es similar al de Rendimiento Máximo Sostenible, pero su objetivo es potenciar al máximo los beneficios económicos a largo plazo.

RMS

El Rendimiento Máximo Sostenible (RMS) es la producción excedente de una población (una vez repuestas las pérdidas naturales de una biomasa) que puede ser teóricamente extraída en un periodo y en condiciones medioambientales constantes, sin afectar los niveles del *stock*.

S

sobrecapacidad

La sobrecapacidad es la existencia de un número mayor de barcos y medios de pesca en general, en relación a los recursos naturales disponibles.

sobrepesca

El término significa en general, que la mortalidad por pesca ejercida sobre el *stock* es demariado alta.

sostenibilidad

Se refiere a la capacidad de persistencia a largo plazo. Estilo de pesca que asegura que las futuras generaciones también podrán pescar.

stock

En general, un *stock* constituye una unidad biológica de una especie que forma un grupo de características ecológicas similares y, como unidad, es el sujeto de la evaluación y de la ordenación.

U

unidad de pesca

Unidad operacional ocupada en la pesca, es decir, es un complejo de mano de obra y equipo que puedan llevar a cabo las operaciones de pesca *per se*, sin ayuda.

Apéndice A

Estabilidad sistemas dinámicos y desigualdades diferenciales

A.1 Teorema de Hartman-Grobman

Para la redacción de las secciones A1-A5, seguimos las referencias [2], [22], [23], [27] y [34].

El teorema de Hartman-Grobman es un resultado muy importante para la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. Éste muestra que cerca de un punto de equilibrio x_0 hiperbólico, el sistema no-lineal

$$\dot{x} = f(x), \tag{A.1}$$

tiene la misma estructura cualitativa que el sistema lineal

$$\dot{x} = Ax, \tag{A.2}$$

con $A = Df(x_0)$. Si el punto de equilibrio es distinto del origen, se puede trasladar a él.

Definición A.1.1 *Los sistemas de EDO's autónomos (A.1) y (A.2) son topológicamente equivalentes en una vecindad del origen, si existe un homeomorfismo H que mapea un conjunto abierto U alrededor del origen, en un conjunto abierto V también alrededor del origen. De forma tal que ocurra lo siguiente:*

- Las trayectorias de (A.1) en U van a trayectorias de (A.2) en V .
- El mapeo preserva la orientación, si la trayectoria se dirige de x_1 a x_2 sobre U , entonces su imagen se dirige de $H(x_1)$ a $H(x_2)$ en V ,

Si el homeomorfismo H preserva la parametrización, los sistemas (A.1) y (A.2) se dice que son topológicamente conjugados, en una vecindad del origen.

Teorema A.1.1 (Hartman-Grobman)

Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, que contiene al origen y sea $f \in C^1(U)$. Dado que ϕ_t es el flujo del sistema no lineal (A.1), si suponemos que $f(0) = 0$ y que la matriz $A = Df(0)$ no tiene valores propios con parte real cero. Entonces existe un homeomorfismo H , de un conjunto abierto U que contiene al origen, a un conjunto abierto V que igualmente contiene al origen, tal que para cada $x_0 \in U$, existe un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ (que contiene al origen), tal que para todo $x_0 \in U$ y $t \in I_0$,

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0);$$

es decir, H mapea las trayectorias de (A.1) cercanas al origen, en trayectorias de (A.2) cercanas al origen y preserva la parametrización.

A.2 Criterio de estabilidad en el sentido de Lyapunov

Consideremos el sistema autónomo

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x,y), \end{aligned} \tag{A.3}$$

supongamos que tiene un punto crítico aislado, es decir, que en una vecindad alrededor de él no existen otros puntos críticos. Sea $(0,0)$ dicho punto crítico (los puntos (x_0, y_0) se pueden llevar al origen mediante la traslación de coordenadas $x = x - x_0$, $y = y - y_0$).

Sea $\Gamma(x(t), y(t))$ una trayectoria de (A.3) y consideremos la función $V(x, y)$ continua, con primeras derivadas continuas en una región que contiene a la trayectoria. Si un punto (x, y) se mueve a lo largo de las trayectorias de acuerdo a las ecuaciones $x = x(t)$ y $y = y(t)$, entonces $V(x, y) = V(x(t), y(t)) = V(t)$ es una función de t sobre Γ , su razón de cambio es,

$$V'(x, y) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} F + \frac{\partial V}{\partial y} G.$$

Esta fórmula es la idea principal de Lyapunov.

Definición A.2.1 Supongamos que $V(x,y)$ es continua y tiene primeras derivadas parciales continuas en una región que contiene al origen. Si $V(0,0) = 0$ y

- Si $V(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$, decimos que V es definida positiva.
- Si $V(x,y) < 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$, decimos que V es definida negativa.
- Si $V(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$, decimos que V es semidefinida positiva.
- Si $V(x,y) \leq 0$ para todo $(x,y) \neq (0,0)$, decimos que V es semidefinida negativa.

Definición A.2.2 Decimos que $V(x,y)$ es una función de Lyapunov para el sistema (A.3), si

- $V(x,y)$ es continua, con primeras derivadas parciales continuas en una región que contiene al origen.
- $V(x,y)$ es definida positiva.
- Existe la derivada de V a lo largo de las trayectorias u órbitas del sistema (A.3) y se cumple que,

$$\frac{dV}{dt}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G = V'(x(t),y(t)) \leq 0.$$

entonces, ésta es una función de Lyapunov **débil**.

- Cuando

$$\frac{dV}{dt}(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G = V'(x(t),y(t)) < 0,$$

decimos que $V(x,y)$ es una función de Lyapunov **estricta**.

Nota:

Si (A.3) fuera semidefinida negativa, implica que

$$V'(x,y) = \frac{dE}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x}F + \frac{\partial V}{\partial y}G,$$

lo cual nos dice que V es no creciente a lo largo de las trayectorias de (A.3) próximas al origen.

Por lo anterior, las funciones V generalizan el concepto de energía mecánica de un sistema físico.

Teorema A.2.1 (*Criterio de Lyapunov*)

- Si existe una función de Lyapunov débil para el sistema (A.3), entonces el punto de equilibrio $(0,0)$ es estable.
- Si existe una función de Lyapunov fuerte o estricta para el sistema (A.3), entonces el punto de equilibrio $(0,0)$ es asintóticamente estable.
- Si $V'(x,y)$ es definida positiva, entonces $(0,0)$ es un punto de equilibrio inestable.

Enseguida presentamos una versión del Teorema de Poincaré-Bendixson que da la dinámica de sistemas autónomos planos.

Teorema A.2.2 (*Poincaré-Bendixson*)

Sea R una región cerrada y acotada consistente de puntos no singulares de un sistema autónomo de 2×2 , tal que alguna trayectoria α del sistema, está completamente contenida en R . Entonces, o bien es ella misma una trayectoria cerrada, o tiende a una trayectoria cerrada o termina en un punto de equilibrio.

Definición A.2.3 Una región simplemente conexa es aquella en la que cualquier curva simple cerrada está completamente contenida en la región, encierra solamente puntos de ésta.

Teorema A.2.3 (*Criterio negativo de Bendixon*)

Sean $F, G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, dos funciones diferenciables y consideramos el sistema de ecuaciones (A.3). Sea D un subconjunto abierto de \mathbb{R}^2 , simplemente conexo. Si la expresión,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y},$$

no es idénticamente cero y no cambia de signo en D . Entonces el sistema dado no puede tener una órbita cerrada completamente contenida en D .

Teorema A.2.4 (*Criterio de Dulac*)

Consideremos en el plano el sistema (A.3) donde suponemos que F y G son funciones

diferenciables, y sea $B : D \rightarrow \mathbb{R}$, una función de clase C^1 , $D \subset \mathbb{R}^2$, abierto y simplemente conexo. Si la expresión,

$$\frac{\partial(BF)}{\partial x} + \frac{\partial(BG)}{\partial y} \neq 0, \quad (\text{A.4})$$

no es idénticamente cero y no cambia de signo en D , entonces el sistema dinámico no puede tener órbitas cerradas totalmente contenidas en D .

La ecuación (A.4) se asocia con el sistema dinámico,

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= B(x,y)F(x,y) \\ \frac{dy}{dt} &= B(x,y)G(x,y), \end{aligned}$$

al cual se le aplica el criterio negativo de Bendixon para dar el criterio de Bendixon-Dulac.

La bifurcación de Hopf, es un tipo de bifurcación que presentan algunos sistemas, de tal manera que al variar el valor del parámetro de bifurcación del sistema, este sufre un cambio en la estabilidad del punto crítico en estudio, dando origen o desapareciendo una órbita periódica, la cual tiene una determinada estabilidad.

Teorema A.2.5 (Bifurcación de Hopf)

Considérese el sistema de EDO

$$\dot{x} = f(x, \mu),$$

con $x \in \mathbb{R}^2$ y $\mu \in \mathbb{R}$, un parámetro tal que,

1. Tiene un punto fijo en el origen para toda $\mu \in \mathbb{R}$,
2. Los valores propios $\lambda_1(\mu)$, $\lambda_2(\mu)$ de $J(0, \mu)$ son imaginarios para $\mu = \bar{\mu}$,
3. La parte real de los valores propios $Re(\lambda_1(\mu)) = Re(\lambda_2(\mu))$, cumple que $\frac{d}{d\mu} Re(\lambda_1(\mu)) \Big|_{\mu=\bar{\mu}} > 0$, entonces,
 - (a) $\mu = \bar{\mu}$ es el punto de bifurcación del sistema,
 - (b) El origen es estable para toda $\mu \in (\mu_1; \bar{\mu})$,
 - (c) El origen es inestable para toda $\mu \in (\bar{\mu}; \mu_2)$, rodeado por un ciclo límite estable.

A.3 Estabilidad Estructural

El concepto de estabilidad estructural fue introducido y publicado por los matemáticos rusos Alexander Andronov y Lev Pontryagin en 1937. En términos generales, un plano fase es estructuralmente estable si al aplicarle una perturbación muy pequeña al campo vectorial, su topología no cambia. Así, si el sistema tiene una trayectoria que conecta a dos puntos de equilibrio de tipo silla, es estructuralmente estable.

Definición A.3.1 Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto, un campo vectorial $f \in C^1(U)$ se dice que es estructuralmente estable si existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $g \in C^1(U)$, con $\|f - g\|_1 < \varepsilon$, donde $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$.

f y g son topológicamente equivalentes U que, como vimos anteriormente, significa que existe un homeomorfismo H que mapea trayectorias de $\dot{x} = f(x)$ a trayectorias de $\dot{x} = g(x)$, y preserva la orientación.

En este caso, decimos que el sistema $\dot{x} = f(x)$ es estructuralmente estable.

Definición A.3.2 Sea f un campo vectorial C^1 , sobre una variedad compacta y diferenciable, n -dimensional M . Entonces $f \in C^1(M)$ es estructuralmente estable sobre M si existe una $\varepsilon > 0$, tal que para todo $g \in C^1(M)$, con $\|f - g\|_1 < \varepsilon$, g es topológicamente equivalente a f .

A.4 Sistema Hamiltoniano

Definición A.4.1 Sea U un subconjunto abierto de \mathbb{R}^{2n} y sea $H \in C^2(U)$, donde $H = H(x, y)$, con x e $y \in \mathbb{R}^n$, tal que,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x},\end{aligned}$$

donde,

$$\frac{\partial H}{\partial x} = \left(\frac{\partial H}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial x_n} \right)^T,$$

y

$$\frac{\partial H}{\partial y} = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial y_n} \right)^T,$$

entonces el sistema es llamado un sistema Hamiltoniano con $2n$ grados de libertad sobre U .

Todo sistema Hamiltoniano es conservativo, ya que la función hamiltoniana o la energía total $H(x,y)$ permanece constante a lo largo de las trayectorias del sistema.

A.5 Teoría de las desigualdades diferenciales

Definición A.5.1 (Condiciones de Carathéodory).

Sea $D \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, decimos que $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ cumple las condiciones de Carathéodory en D si $f(t,x)$ es medible en t para x fijo, continua en x para casi todo t fijo y para cada subconjunto compacto $K \subseteq D$ existe una función $m_K \in L^1(\mathbb{R})$ tal que, $\|f(t,x)\| \leq m_K(t)$, para todo $(t,x) \in K$.

Definición A.5.2 (Solución maximal)

Sea $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función, con $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $(t_0, x_0) \in D$. Una solución maximal de la ecuación

$$\begin{aligned} x' &= f(t,x) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

es una solución de la ecuación, definida en un intervalo maximal I , tal que si $y : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$ es otra solución de $x' = f(t,x)$, definida en t_0 con $y(t_0) \leq x_0$, entonces, $y(t) \leq x(t)$, para toda $t \in I \cap I_1$.

Teorema A.5.1 (Solución de una desigualdad diferencial).

Sea $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un conjunto abierto y $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función que cumple con las condiciones de Carathéodory. Sea x un solución maximal local de $x' = f(t,x)$ definida en $[t_0, b)$ para ciertos $t_0 < b \in \mathbb{R}$. Supongamos que $y : [t_0, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ es una función absolutamente continua tal que,

$$y'(t) \leq f(t,y(t)),$$

para $t \in [t_0, b)$, $y(t_0) \leq x(t_0)$. Entonces, $y(t) \leq x(t)$, para todo $t \in [t_0, b)$

A.6 Ciclos límite en sistemas presa-depredador del tipo Gause

Para la redacción de esta sección seguimos la referencia [21].

Teorema A.6.1 (Teorema de Cherkas y Zhilevich)

Si el sistema de Lienard generalizado

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -[\varphi(y) + F(x)], \\ \frac{dy}{dt} &= h(x),\end{aligned}\tag{A.5}$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. $xh(x) > 0$ cuando $x \neq 0$ y $y\varphi(y) > 0$, donde $y \neq 0$,
2. $\varphi(y)$ es monótona creciente, $F(0) = 0$ y $f(0) < 0 (> 0)$. donde $f(x) = F'(x)$,
3. Existen números reales λ y μ tal que la función $f_1(x) = f(x) + h(x)[\lambda + \mu F(x)]$ tiene ceros simples $x_1 < 0$ y $x_2 > 0$, $f_1(x) \leq 0 (\geq 0)$ en $x_1 < x < x_2$,
4. En $x_1 \leq x \leq x_2$, la función $f_1(x)/h(x)$ no decrece (o no crece),
5. Todos los ciclos límite contienen el intervalo $x_1 \leq x \leq x_2$ sobre el eje x .

Entonces, el sistema (A.5) tiene a lo más un ciclo límite, el cual, si este existe, es estable (o inestable).

Teorema A.6.2 (Teorema de Zhang modificado)

Considera el sistema (A.5), entonces se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $xh(x) > 0$ cuando $x \neq 0$, $y\varphi(y) > 0$ cuando $y \neq 0$,
2. $\varphi(y)$ es no decreciente y la curva $\varphi + F(x) = 0$ está definida para todo $x \in (-\infty, \infty)$,
3. $F(0) = 0$, $f(0) < 0$, donde $f(x) = F'(x)$,
4. Todos los ciclos límites están contenidos en el intervalo $a < x < b$, donde $a < 0 < b$ y $f(x)/h(x)$ es no decreciente cuando x se incrementa en $a < x < 0$ y $0 < x < b$.

Entonces el sistema (A.5) tiene a lo más un ciclo límite y si este existe, es asintóticamente estable.

Definición A.6.1 Los modelos presa-depredador del tipo Gause tienen la forma,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= xg(x) - \xi(y)p(x), \quad x(0) \geq 0, \\ \frac{dy}{dt} &= \eta(y)(-\gamma + q(x)), \quad y(0) \geq 0,\end{aligned}\tag{A.6}$$

donde g, ξ, η, p, q son funciones de clase C^n , $x(t)$ y $y(t)$ representan la densidad de presas y depredadores, respectivamente, para toda $t > 0$.

Teorema A.6.3 Dados los modelos presa-depredador del tipo Gause, para $x, y > 0$, se satisfacen las siguientes condiciones:

1. $g(0) > 0$, entonces existe $K > 0$, tal que $g(x) > 0$ con $0 \leq x < K$, $g(K) = 0$, $g(x) < 0$ en $x > K$,
2. $\xi(0) = 0$, $\xi'(y) > 0$,
3. $p(0) = 0$, $p'(x) > 0$,
4. $\eta(0) = 0$, $\eta'(y) > 0$,
5. $q(0) = 0$, $q'(x) > 0$,
6. Existe $0 < x_{int} < K$ tal que $q(x_{int}) = \gamma$,
7. $\lim_{y \rightarrow \infty} \xi(y) > x_{int}g(x_{int})/p(x_{int})$, $y_{int} = \xi^{-1}(g(x_{int})/p(x_{int}))$,
8. De 6 y 7, $P_{int} = (x_{int}, y_{int})$ existe y es un punto de equilibrio positivo único,
9. P_0 es un punto silla, estable en la dirección y e inestable en la dirección x ; por la condición 6, E_1 también es un punto silla, estable a lo largo del eje x .
10. Dada la matriz de Jacobi, evaluada en el punto de equilibrio interno,

$$J(P_{int}) = \begin{bmatrix} H(x_{int}) & -\xi'(y_{int})p(x_{int}) \\ \eta(y_{int})q'(x_{int}) & 0 \end{bmatrix},$$

donde $H(x_{int}) = x_{int}g'(x_{int}) + g(x_{int}) - \frac{x_{int}g(x_{int})p'(x_{int})}{p(x_{int})}$. Los valores propios de $J(P_{int})$ son reales positivos (o negativos) si $H(x_{int})$ es positivo (negativo), lo que implica la inestabilidad (o estabilidad asintótica) de P_{int} .

11. Definiendo que P_{int} existe y es inestable, hay al menos un ciclo límite positivo

$$\text{alrededor de } P_{int}, \text{ es decir, } \left. \frac{d}{dx} \left(\frac{xg(x)}{p(x)} \right) \right|_{x=x_{int}} > 0$$

Teorema A.6.4 (Transformación de el sistema del tipo Gause (A.6) en un sistema de Lienard (A.5))

Se realiza tomando primero $X = x - x_{int}$, $Y = y - y_{int}$ y sustituyendo éstas en el sistema (A.6) quedando

$$\begin{aligned} \dot{X} &= (X + x_{int})g(X + x_{int}) - \xi(Y + y_{int})p(X + x_{int}) \\ \dot{Y} &= \eta(Y + y_{int})[-\gamma + q(X + x_{int})] \end{aligned}$$

$$\text{Sean } u = \int_0^X \frac{ds}{p(s + x_{int})} = k(X) \text{ y } v = \int_0^Y \frac{ds}{\eta(s + y_{int})} = l(Y), \text{ de donde } X = k^{-1}(u) \text{ y}$$

$$Y = l^{-1}(v) \quad (dk/dt > 0, dl/dt > 0, dk^{-1}/dt > 0, dl^{-1}/dt > 0).$$

Así, el sistema se convierte en:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -[\varphi(v) + F(u)] \\ \dot{v} &= h(u), \end{aligned} \tag{A.7}$$

donde

$$\begin{aligned} h(u) &= -\gamma + q(k^{-1}(u) + x_{int}), \\ \varphi(v) &= \xi(l^{-1}(v) + y_{int}) - \xi(y_{int}), \\ F(u) &= \xi(y_{int}) - [k^{-1}(u) + x_{int}] \frac{g(k^{-1}(u) + x_{int})}{p(k^{-1}(u) + x_{int})}. \end{aligned}$$

El sistema (A.7) satisface las condiciones dadas en el teorema A.6.1.

Los modelos presa-depredador del tipo Gause (A.6), tienen un ciclo límite único si y sólo si el sistema (A.7) tiene un ciclo límite, los siguientes teoremas lo describen.

Teorema A.6.5 En el sistema (A.7), existen números reales λ y μ tales que

$$f_1(u) = f(u) + h(u)[\lambda + \beta F(u)],$$

tienen ceros simples en $u_1 < 0 < u_2$ y $f_1(u) \leq 0$ en $u_1 \leq u \leq u_2$. Sea $f_1(u)/h(u)$ una función no decreciente, definida en $(-\infty, u_1), (u_2, k(K))$. Además, suponemos que todos los ciclos límites contienen el intervalo $u_1 \leq u \leq u_2$ sobre el eje u . Entonces, el sistema (A.6) tiene exactamente un ciclo límite que es asintóticamente estable globalmente con respecto al conjunto $\{(x, y) | x > 0, y > 0\} - \{P_{int}\}$.

Teorema A.6.6 En el sistema (A.7), $f(u)/h(u)$ es no decreciente en $(-\infty, 0)$ y $(0, k(K))$. Entonces el sistema (A.6) tiene exactamente un ciclo límite el cual es asintóticamente estable globalmente con respecto al conjunto $\{(x, y) | x > 0, y > 0\} - \{P_{int}\}$.

Nota: $f(u)/h(u)$ es no decreciente si y sólo si

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{xg'(x) + g(x) - xg(x) \frac{p'(x)}{p(x)}}{-\gamma + q(x)} \right) \geq 0.$$

Se reescribe el teorema anterior para sistemas presa-depredador del tipo Gause (A.6).

Teorema A.6.7 Dado el sistema (A.6), si

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{xg'(x) + g(x) - xg(x) \frac{p'(x)}{p(x)}}{-\gamma + q(x)} \right) \leq 0,$$

en $0 \leq x < x_{int}$ y $x_{int} < x \leq K$. Entonces el sistema (A.6) tiene exactamente un ciclo límite el cual es asintóticamente estable globalmente, con respecto al conjunto $\{(x, y) | x > 0, y > 0\} - \{P_{int}\}$

A.7 Persistencia via funciones de Lyapunov promedio

En esta última sección, seguimos las referencias [11], [13], [16] y [36].

Definición A.7.1 (Persistencia uniforme)

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= g(x, y). \end{aligned} \tag{A.8}$$

Para cualquier condición inicial $(x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$, existe una constante positiva m , tal que $\liminf_{t \rightarrow \infty} x(t) \geq m$, $\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq m$.

Definición A.7.2 (Función de Lyapunov promedio)

Sean $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0\}$, $int(D)$ y ∂D , el interior y la frontera de D , respectivamente. $\sigma(x, y) \in C^1(D)$ es una función de Lyapunov promedio si se satisfacen las siguientes propiedades:

- $\sigma(x,y) = 0$, para $(x,y) \in \partial D$,
- $\sigma(x,y) > 0$ para $(x,y) \in \text{int}(D)$,
- Existe Ψ una función continua sobre D , tal que, $\Psi(x(t),y(t)) = \frac{\dot{\sigma}(x,y)}{\sigma(x,y)}$ para $(x,y) \in \text{int}(D)$,
- $\int_0^T \Psi(x(t),y(t))dt > 0$ para alguna $T > 0$ y $(x,y) \in \partial D$.

Teorema A.7.1 *Dado el sistema (A.8), suponemos que todas las soluciones que comienzan en D , deben estar acotadas uniformemente. Si $\sigma(x,y)$ es una función de Lyapunov promedio, entonces el sistema (A.8) es persistente uniformemente.*

Bibliografía

- [1] Agarwal, M., Pathak, R. (2012): Harvesting and Hopf Bifurcation in a prey-predator model with Holling Type IV Functional Response. *Int. J. Math. Soft Comput.* **2**(1), 83-92
- [2] Alberto, L., Chiang, H. (2015): *Stability Regions of Nonlinear Dynamical Systems. Theory, Estimation and Applications*. Cambridge University Press. Reino Unido
- [3] Bethel, W.M., Holmes, J.C. (1972): *Modification of intermediate host behavior by parasites*. *Zoolog. J. Linnean Soc.* **51**, 123-149
- [4] Bottemanne, C.J. (1980): *Economía de la pesca*. Fondo de Cultura Económica. México
- [5] Brauer, F., Castillo-Chávez, C. (2012): *Mathematical models in population biology and epidemiology*. Springer verlag. Nueva York
- [6] Britton, F.N. (2005): *Essential Mathematical Biology*. Springer. Nueva York
- [7] Caddy, J.F., Cochrane, K.L. (2001): A review of fisheries management past and present and some future perspectives for the third millennium. *Ocean and Coast Management* **44**(9-10), 653-682
- [8] Cerdá, E. (2012): *Optimización Dinámica*. Alfaomega. Madrid
- [9] Cushing, D.H. (1975): *Ecología Marina y Pesquerías*. Acribia. España
- [10] Davidowicz, P., Gliwicz, Z.M., Gulati, R.D. (1988): Can Daphnia prevent a blue-green algal bloom in hypertrophic lakes? *A laboratory test, Limnologica* **19**, 21-26
- [11] Freedman, H.I. (1995): Uniform persistence in functional differential equations. *J. Differential Equations*. **115**, 173-192

- [12] García, S.M. (1992): Ocean Fisheries Management. The FAO Programme. En: Fabbri, P. (Editor). *Ocean management and global change*. Elsevier Applied Science. Londres, 381-418
- [13] Gard T.C., Hallam, T.G. (1979): Persistence in food web. Lotka-Volterra food chains. *Bull. Math. Biol.* **41**, 877-891
- [14] Gutiérrez, J.L., Sánchez Garduño, F. (1998): *Matemáticas para las Ciencias Naturales*. Sociedad Matemática Mexicana (Aportaciones Matemáticas, Textos 11). México
- [15] Hoekstra, J., Van der Bergh, J. (2005). Harvesting and Conservation in a Predator-Prey System. *J. Econ. Dyn. Control.* **29**(6), 1097-1120
- [16] Hutson, V. (1984): A theorem on average Liapunov functions, *Monatshefte für Mathematik.* **149**, 267-275
- [17] Jiménez, S., López, R. (1994): *El régimen jurídico de la pesca en México*. Glosario de términos legales en materia pesquera Secretaria de pesca. Instituto de Investigaciones Jurídicas, UNAM. México
- [18] Kar, T.K. (2006): Modelling and analysis of a harvested prey-predator system incorporating a prey refuge. *J. Comput. Appl. Math.* **185**(1), 19-33
- [19] King, M. (1995): *Fisheries biology, Assessment and Management*. Fishing new books. Blackwell Science. Oxford
- [20] Kot, M. (2001): *Elements of Mathematical Ecology*. Cambridge University Press. Reino Unido
- [21] Kuang, Y., Freedman, H.I. (1988): Uniqueness of limit cycles in Gause-Type models of predator-prey systems. *Math Biosci.* **88**(1), 67-84
- [22] Lakshmikantham V., Leela, S. (1969): *Differential and Integral Inequalities; theory and applications*. Academic press. Nueva York
- [23] Marsden, J.E., McCracken, M. (1996) *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. Springer-Verlag, E.U.A.
- [24] Miramontes, P. (2004): La biología matemática. En: Bautista, R., Martínez, J.R., Miramontes, P. (Coordinadores). *Las matemáticas y su entorno*. Siglo XXI. México
- [25] Murray, J.D. (2002): *Mathematical Biology I: An Introduction*. Springer. E.U.A

- [26] Naji, R.K., Shalan, R.N., (2013): The Dynamics of Holling type IV prey-predator model with intra-specific competition. *Iraqi Journal of Science*. **54**, 386-396
- [27] Perko, L.M. (1991): *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag. Nueva York
- [28] Qin, L., Wang, W., Zhang, R. (2015): Optimal Harvesting Policy of Discrete-Time Predator-Prey Dynamic System with Holling Type-IV Functional Response and Its Simulation. *Appl. Comput. Math.* **4**, 20-29
- [29] Quinn, T.J. (2003): Ruminations on the development and future of population dynamics models in fisheries. *Nat. Res. Model.* **16**(4), 341-392
- [30] Ruan, S., Xiao D. (2001): Global analysis in a predator-prey system with nonmonotonic functional response. *SIAM J. Appl. Math.* **61**, 1445-1472
- [31] Sánchez Garduño, F. (1990): La respuesta funcional y la coexistencia en algunos modelos ecológicos. *Revista del seminario de enseñanza y titulación*. Vol.VI, Num.49, 1-40
- [32] Sánchez Garduño, F. (2002): Kolmogorov y la Biología Teórica. En: Gutiérrez, J.L., Miramontes, P., Sánchez Garduño, F. (Coordinadores). *Clásicos de la Biología Matemática*. Siglo XXI. Editores-UNAM. México, 110-134
- [33] Soberón, J. (1989): *Ecología de poblaciones*. F.C.E. México
- [34] Strogatz, S.H. (2000): *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Books. E.U.A
- [35] Tener, J.S. (1965): Muskoxen. *Queen's Printer*. Ottawa, Canada
- [36] Vance, J.A. (2007): Permanent Coexistence for a linear response omnivory model. *Proc. of the 18th IASTED International Conference Modelling and Simulation*.