Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

Ideales cerrados de ciertas álgebras de Banach de funciones holomorfas

Tesis que presenta
HÉCTOR MERINO CRUZ

para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

Asesor:
Dr. Antoni Wawrzyńczyk Wilkiewic

Jurado

Presidente:	Dr. Antoni Wawrzynczyk Wilkiewic
Secretario:	Dra. Ma. de Lourdes Palacios Fabila
Vocal:	Dr. Hugo Arizmendi Peimbert
Vocal:	Dr. Lino Feliciano Resendis Ocampo
Vocal:	Dr. Slavisa V. Djordjevic

Ciudad de México, abril de 2016.

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

Ideales cerrados de ciertas álgebras de Banach de funciones holomorfas

Tesis que presenta
HÉCTOR MERINO CRUZ

para obtener el grado de
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

Asesor:
Dr. Antoni Wawrzyńczyk Wilkiewic

Jurado

Presidente:	Dr. Antoni Wawrzynczyk Wilkiewic
Secretario:	Dra. Ma. de Lourdes Palacios Fabila
Vocal:	Dr. Hugo Arizmendi Peimbert
Vocal:	Dr. Lino Feliciano Resendis Ocampo
Vocal:	Dr. Slavisa V. Djordjevic

Ciudad de México, abril de 2016.

Ideales cerrados de ciertas álgebras de Banach de funciones holomorfas

Héctor Merino Cruz

Asesor:

Dr. Antoni Wawrzyńczyk Wilkiewicz

Dedicado a
Héctor David

Agradecimientos

Han sido muchas personas que han confiado en este proyecto académico que sería imposible mencionar a cada uno; a todos ellos mis más sinceros agradecimientos.

De manera especial, agradezco profundamente a la persona que guió mis pasos en este andar, el profesor Antoni Wawrzyńczyk. Gracias a su paciencia, su basta experiencia, su compromiso y sus muestras de afecto, he logrado concluir satisfactoriamente este trabajo.

Agradezco también a los revisores, la doctora Lourdes Palacios (UAM-I) y los doctores Lino Resendis (UAM-A), Hugo Arizmendi (UNAM) y Slavisa Djordjevic (BUAP), por el tiempo que dedicaron en la lectura de este trabajo para poder emitir sus valiosas observaciones para la mejora del presente.

A mi esposa, Silvia Vargas, le agradezco que siempre estuviera conmigo. A mis amigos y maestros, Edgardo Locia y Efrén Marmolejo, les agradezco la confianza y el apoyo. A la Universidad Autónoma de Guerrero también le agradezco el apoyo por la beca de titulación.

No menos importante es mi agradecimiento al pueblo de México por su financiamiento a través del CONACyT con la beca 179846.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Un tópico algebraico interesante es la teoría de ideales, ya sea de anillos o de álgebras. A un álgebra le asociamos una topología compatible con las operaciones algebraicas y con esta combinación obtenemos una estructura más rica llamada álgebra topológica. Las álgebras de Banach son una de las álgebras topológicas más importantes y se conoce bastante sobre ellas; sin embargo, aún entre estas álgebras se presentan dificultades para determinar la estructura de los ideales. Muchos espacios de funciones holomorfas son álgebras de Banach o topológicas. En estos espacios se han encontrado resultados muy importantes sobre sus ideales y han motivado nuevas investigaciones.

En la teoría de ideales de un álgebra topológica son importantes los ideales máximos, ideales principales e ideales primitivos, en particular, el caso en que los ideales son cerrados o densos. Un antecedente histórico primario, en los espacios de funciones holomorfas, de este tipo de problemas es la descripción de los ideales cerrados para el *álgebra del disco* $\mathcal{A}$ que consiste de el álgebra de las funciones holomorfas en el disco abierto unitario $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ y continuas en el disco unitario cerrado, con operaciones puntuales y norma *uniforme*:

$$\|f\|_\infty = \max_{|z|\leq 1} |f(z)|, \quad \text{si} \quad f \in \mathcal{A}.$$

Tal descripción fue encontrada por Arne Beurling en un trabajo no publicado [19]; posteriormente, en 1957, Walter Rudin encuentra independientemente este resultado [33]. Beurling y Rudin probaron el siguiente teorema:

Teorema 1.1 (El teorema de Beurling–Rudin)**.** *Dado un ideal cerrado I de $\mathcal{A}$,* *existen un subconjunto cerrado E_I de $\mathbb{T}$ y una función interior U_I tales que*

$$I = I(U_I, E_I) := \{f \in \mathcal{A} \,:\, U_I \textit{ divide a } f \textit{ y } f \textit{ se anula en } E_I\}. \tag{1.1}$$

Aquí $\mathbb{T}$ denota la frontera de $\mathbb{D}$. De hecho, E_I es el *coespectro* del ideal I, es decir,

$$E_I = \{\xi \in \mathbb{T} : f(\xi) = 0, \forall f \in I\},$$

y U_I es el *máximo común divisor interior* de I. Además, dados un conjunto cerrado E de $\mathbb{T}$ y una función interior U asociada a E, el conjunto

$$I(U, E) := \{f \in \mathcal{A} \,:\, U \text{ divide a } f \text{ y } f \text{ se anula en } E\},$$

es un ideal cerrado de $\mathcal{A}$.

Este resultado motivó la búsqueda de caracterizaciones de ideales para otras álgebras de funciones holomorfas. Entre los trabajos más destacados se hallan los de Boris Korenblyum [17], Taylor–Williams [30] y Bennet–Gilbert [6].

Para un entero no negativo n, se define la subálgebra del álgebra disco $\mathcal{A}$ por

$$\mathcal{A}^n := \{f \in \mathcal{A} : f^{(j)} \in \mathcal{A}, j = 1, \ldots, n\}.$$

El álgebra $\mathcal{A}^n$ es de Banach con la norma dada por

$$\|f\|_n := \sum_{j=0}^{n} \|f^{(j)}\|_\infty.$$

Si $f \in \mathcal{A}^n$, $j = 0, 1, \ldots, n$ e I es un ideal de $\mathcal{A}^n$, sean

$$E_j(f) := \{z \in \mathbb{T} : f(z) = f'(z) = \cdots = f^{(j)}(z) = 0\}$$

y

$$E_j(I) := \bigcap_{f \in I} E_j(f).$$

Para una colección $\mathcal{E} := \{E_0, E_1, \ldots, E_n\}$ de subconjuntos cerrados de $\mathbb{T}$ tales que $E_{j+1} \subset E_j$ para $j = 0, 1, \ldots, n-1$, y una función interior Q, definimos el conjunto $J(Q; \mathcal{E})$ de la siguiente forma:

$$J(Q; \mathcal{E}) = \{f \in \mathcal{A}^n : Q|f_i \text{ y } E_j \subset E_j(f) \text{ para } j = 0, \ldots, n \text{ y } f \in I\},$$

donde f_i denota el factor interior de f. Korenblyum prueba en [17] el siguiente teorema

Teorema 1.2 (Korenblyum, 1972)**.** *Si I es un ideal cerrado no nulo de $\mathcal{A}^n$, entonces existe una función interior Q_I tal que $I = J(Q_I; \mathcal{E}_I)$, donde*

$$\mathcal{E}_I = \{E_0(I), E_1(I), \ldots, E_n(I)\}.$$

La función Q_I en el teorema anterior es el *máximo común divisor interior* de I. Observemos que Korenblyum generaliza el Teorema de Beurling–Rudin.

Analogamente, Taylor y Williams, en [30] determinan los ideales del álgebra de Fréchet[1] $\mathcal{A}^\infty$, definido por

$$\mathcal{A}^\infty := \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{A}^m.$$

Ellos demuestran que los ideales en $\mathcal{A}^\infty$ se describen como en el caso de $\mathcal{A}^n$ dado en el teorema 1.2, sólo que con una colección de conjuntos infinita $\mathcal{E}_I = \{E_0(I), E_1(I), \ldots\}$. En [6], Bennet y Gilbert describen los ideales cerrados con coespectro numerable para el álgebra A^+ de las funciones en $\mathcal{A}$ que poseen series de Taylor absolutamente convergentes en $\mathbb{D}$. Estas descripciones también son semejantes a las que se da para los ideales cerrados en el Teorema de Beurling–Rudin.

Decimos que los ideales de estas álgebras ($\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^n$, $\mathcal{A}^\infty$ y A^+) son *estándar* debido a que se describen completamente en términos del máximo común divisor interior del ideal y una sucesión (finita o infinita) decreciente de subconjuntos cerrados de $\mathbb{T}$, asociados a los ceros de las funciones o sus derivadas. En [5] pueden leerse ejemplos de otras álgebras de funciones holomorfas que poseen ideales estándar.

La pregunta natural asociada a las subálgebras de $\mathcal{A}$ (o más general aún, del álgebra de Hardy H^∞)[2] es si sus ideales cerrados son estándar. Existen varios trabajos al respecto, entre ellos [5] y [23].

En [22], Galé *et al.* introducen la siguiente álgebra de Banach. Para un entero no negativo n, el álgebra $\mathcal{A}^{(n)}_{\pm 1}$ consiste de las funciones $f \in \mathcal{A}$ tales que $f(1) = 0$,

[1]Un álgebra A es de *Fréchet* si es metrizable, localmente convexa y completa; su topología se puede definir por una sucesión de seminormas (p_n) creciente y submultiplicativas.

[2]Denotamos por H^∞ al álgebra de las funciones holomorfas y acotadas en $\mathbb{D}$, con operaciones puntuales y norma

$$\|f\|_{H^\infty} := \sup\{|f(z)| \,:\, z \in \mathbb{D}\}.$$

$(\alpha^2-1)^j f^{(j)} \in \mathcal{A}$ para $j = 1, 2, \ldots, n$ y

$$\lim_{z\to\pm 1} (z^2-1)^j f^{(j)}(z) = 0, \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, n,$$

con norma

$$\|f\| := \|f\| + \sum_{j=1}^{n} \|(\alpha^2-1)^j f^{(j)}\|,$$

donde α denota el mapeo identidad $z \mapsto z$. Galé y Wawrzyńczyk, en [23], demuestran que los ideales cerrados de $\mathcal{A}_{\pm 1}^{(n)}$ son estándar.

Sin embargo, no todas las álgebras tienen la propiedad de que sus ideales sean estándar. El ejemplo más sobresaliente corresponde al álgebra de Wiener. Kahane [12] y Bennet-Gilbert [6] caracterizan a los ideales cerrados del álgebra A de las series absolutamente convergentes en $\mathbb{D}$ para el caso en que el coespectro es finito o infinito numerable, y demuestran que los ideales son estándar en estos casos. En este trabajo, Bennet–Gilbert conjeturan que los ideales de $\mathcal{A}$ son estándar aunque el coespectro no sea numerable. Para muchos casos la conjetura resultó positiva, sin embargo, Esterle probó que no era cierta la conjetura mostrando un contraejemplo en [10].

El trabajo de Kahane y Bennet–Gilbert, el de Guararii [26] que caracterizá los ideales cerrados de $L^1(\mathbb{R}^+)$ para el caso en que el coespectro es numerable, el de Agrafeuil-Zarrabi [5] y el de Sołtysiak–Wawrzyńczyk [32], muestran que una aproximación conveniente y significativa al estudio de la estructura de los ideales cerrados consiste en considerar ideales con coespectro *pequeño*, que puede ser finito (vacío incluso), numerable o algún conjunto de medida de Lebesgue cero, y preguntarse si dichos ideales son estándar en un sentido apropiado de el álgebra en cuestión.

En la primera parte de este trabajo de tesis hemos optado por esta aproximación. Tomamos como antecedente el álgebra $\mathcal{A}_{\pm 1}^{(n)}$, introducida en [22], para definir un álgebra de Banach más general. El álgebra en cuestión, que denotamos por $\mathcal{A}_G^n$, está asociada a una función G, en el álgebra disco $\mathcal{A}$, que no tienes ceros dentro del disco $\mathbb{D}$. Consideremos primeramente el álgebra de funciones $f \in \mathcal{A}_G^n$ que satisfacen $G^j f^{(j)} \in \mathcal{A}$ para $j = 0, 1, \ldots, n$, y en este espacio definimos una norma dada por

$$\|f\|_{G,n} := \sum_{j=0}^{n} \|G^j f^{(j)}\|_\infty.$$

Hecho ésto, definimos el álgebra de Banach $\mathcal{A}_G^n$ como la completación del espacio de polinomiales respecto a la norma $\|\cdot\|_{G,n}$. Un aspecto interesante es que esta álgebra la relacionamos con $\mathcal{A}^n$ y podemos usar la descripción de los ideales de $\mathcal{A}^n$ para estudiar los ideales en $\mathcal{A}^n_G$ aunque, a diferencia de $\mathcal{A}^n$, ésta no sea un álgebra invariable bajo rotaciones. Demostramos en [27, 2014] (teorema 3.2) algunas de las propiedades de $\mathcal{A}^n_G$ y que los ideales cerrados con coespectro numerable de $\mathcal{A}^n_G$ son estándar:

Teorema 1.3. *Si G es una función en $\mathcal{A}^1$ sin ceros en $\mathbb{D}$, entonces los ideales cerrados de $\mathcal{A}^n_G$ con coespectro numerable son estándar.*

Consideramos también a los ideales que tienen coespectro suficientemente grande, concretamentemente aquellos que contienen a los ceros de G en la frontera $\mathbb{T}$. Denotamos por $h_0(G)$ al conjunto de ceros de G y por I_G al ideal de $\mathcal{A}^n_G$ generado por G. Una sucesión (ϕ_m) en $\mathcal{A}^n_G$ es una aproximación a la unidad en $\bar{I}_G$ si para cada $f \in \bar{I}_G$, se tiene que $(\phi_m f)$ converge a f en la norma de $\mathcal{A}^n_G$. Un hecho interesante es el siguiente:

Teorema 1.4. *Sea G es una función exterior, $G \in \mathcal{A}^n$ y $h_0(G)$ es numerable. Si $\bar{I}_G$ tiene una aproximación a la unidad, entonces cada ideal cerrado I de $\mathcal{A}^n_G$ contenido $\bar{I}_G$, el $\mathcal{A}^n$-ideal $J(U_I;\mathcal{E})$, donde U_I es el m.c.d. interior y $\mathcal{E} = \{h_0(I), h_1(I) \cup h_0(G), \ldots, h_n(I) \cup h_0(G)\}$, es denso en I.*

Si consideremos la sucesión $(G^{1/m})$, demostramos que bajo ciertas condiciones adicionales sobre G, ésta es una aproximación de la unidad. Este hecho nos permitió obtener un resultado importante sobre la descripción de ciertos ideales, que hemos tomado como teorema principal en [28, 2015]:

Teorema 1.5. *Sea G una función exterior tal que $h_0(G)$ es numerable. Supongamos que G satisface alguna de las siguientes condiciones:*

1. *Existe δ, con $0 < \delta < 1$ tal que*

$$\sup\left\{\frac{|G(z)|}{|G(tz)|} \,:\, z \in \mathbb{D}, \delta \leq t < 1\right\} < \infty;$$

2. *$G \in \mathcal{A}^\infty$ y todos los ceros de G son de multiplicidad infinita.*

Entonces, cada ideal cerrado de $\mathcal{A}^n_G$ contenido en el ideal cerrado generado por G es un ideal estándar.

La estructura de esta tesis es como sigue. En **Capítulo 2** escribimos un resumen de los resultados más importantes sobre las álgebras conmutativas, principalmente sobre el espacio de ideales máximos, la transformada de Gelfand y las álgebras semisimples; en **Capítulo 3** hacemos un recuento de los trabajos más destacados asociados a nuestro problema. Los trabajos de Beurling y Rudin, el trabajo de Taylor–Williams y el trabajo de Koremblyum se mencionan a detalle aquí. También consideramos muy importante los trabajos de Kahane y Bennet–Gilbert por lo que se mencionan en esta parte. Introducimos la noción de conjuntos de Carleson y mostramos cómo se construye una función exterior en $\mathcal{A}^n$ tal que ésta y sus derivadas de orden menor o igual a n se anulan en un conjunto de Carleson dado; En **Capítulo 4** definimos el álgebra de Banach $\mathcal{A}_G^n$ y demostramos algunas de sus propiedades básicas. También incluimos aquí un resumen de su origen.

El núcleo del trabajo se halla en los dos últimos capítulos donde los resultados que se enuncian son originales y han sido publicados. El primero de nuestros resultados principales corresponde a los ideales de $\mathcal{A}_G^n$ con coespectro numerable y se encuentra en **Capítulo 5**. Básicamente se trata de demostrar que $\mathcal{A}_G^n$ satisface las condiciones dadas en los trabajos de [5] y [32], entre ellas una condición de Ditkin. Este resultado se encuentra en [27]; en **Capítulo 6** se describen algunos resultados para los ideales de $\mathcal{A}_G^n$ que tienen coespectro suficientemente grande de manera que contenga a todos los ceros de la función G. En este caso pedimos que G sea una función exterior y con cierto grado de suavidad para así construir una aproximación a la unidad a partir de G. Los resultados de este capítulo corresponden a la publicación [28].

Capítulo 2

Álgebras de Banach conmutativas

Introducimos algunos contenidos que usamos en este trabajo. Tratamos principalmente con el caso de las álgebras complejas conmutativas debido a que en este trabajo estudiamos álgebras de funciones holomorfas con multiplicación puntual y éstas son conmutativas. Omitimos algunas demostraciones pero éstas pueden leerse en libros como [4, 37, 14, 15, 29].

2.1. Definición y ejemplos

Definición 2.1. *Un álgebra es un espacio vectorial* A*, donde está definida una multiplicación asociativa, distributiva por ambos lados y se cumple*

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y),$$

para cada $\alpha \in \mathbb{C}$ *y* $x, y \in \mathsf{A}$*. Si además se satisface* $xy = yx$*, para* $x, y \in \mathsf{A}$*, decimos que* A *es un* álgebra conmutativa*. El álgebra tiene unidad si existe un elemento* $1 \in \mathsf{A}$ *tal que* $a1 = 1a = a$*, para cada* $a \in \mathsf{A}$*.*

El elemento unidad es único y lo denotaremos por e, 1_{A} o simplemente 1 si no hay riesgo de confusión.

Definición 2.2. *Decimos que* A *es un* álgebra topológica *si* A *es un álgebra, sobre el campo* $\mathbb{R}$ *o el campo* $\mathbb{C}$*, y es un espacio topológico para el cual la multiplicación por escalar, la suma y la multiplicación, son operaciones continuas respecto a ambas variables (tomando las topologías usuales sobre* $\mathbb{R}$ *o* $\mathbb{C}$*).*

Definición 2.3. *Un* álgebra de Banach *es un álgebra topológica* A *tal que la topología es equivalente a la que está determinada por alguna norma* $\|\cdot\|$ *sobre* A *con la cual es completa, es decir, es un espacio de Banach.*

Debido a que no todas las álgebras poseen unidad, existe un procedimiento canónico para encajar continuamente las álgebras de Banach sin unidad en un álgebra de Banach con unidad.

Lema 2.1. *Si* A *es un álgebra de Banach compleja sin unidad, existe un álgebra de Banach con unidad* B *tal que* A *está encajado (continuamente) en* B*.*

Demostración. Sea

$$\mathsf{B} := \mathsf{A} \oplus \mathbb{C} = \{(x, \lambda) : x \in \mathsf{A}, \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Definimos en B el producto por escalar, la suma, la multiplicación y una norma por

$$\begin{aligned}
\lambda(x, \lambda_1) &:= (\lambda x, \lambda\lambda_1) \\
(x_1, \lambda_1) + (x_2, \lambda_2) &:= (x_1 + x_2, \lambda_1 + \lambda_2) \\
(x_1, \lambda_1)(x_2, \lambda_2) &:= (x_1x_2 + \lambda_2 x_1 + \lambda_1 x_2, \lambda_1\lambda_2) \\
\|(a, \lambda)\|_{\mathsf{B}} &:= \|a\|_{\mathsf{A}} + |\lambda|.
\end{aligned}$$

Con estas operaciones y esta norma, B es un álgebra de Banach con unidad $(0, 1)$. Si tomamos $A := \{(x, 0) : x \in \mathsf{A}\}$, tenemos que A es una subálgebra cerrada de B y A es isomorfo e isométrico a A. $\square$

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach complejo. Sea $\mathcal{B}(X)$ el espacio de los operadores lineales acotados (continuos) con la *norma de operadores*:

$$\|T\| := \sup_{\|x\|\leq 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \quad T \in \mathcal{B}(X).$$

Con las operaciones usuales entre operadores, $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach con unidad I, el operador identidad $I : X \to X$. Esta álgebra no es conmutativa si $\dim X > 1$.

El ejemplo anterior es importante debido a que cualquier álgebra de Banach es subálgebra de $\mathcal{B}(X)$ para algún X, como se prueba en el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *Sea* A *un álgebra de Banach. Existe un espacio de Banach* X *tal que* A *es isomorfo a una subálgebra cerrada de* $\mathcal{B}(X)$*.*

Demostración. Si A tiene unidad, tomamos $X := \mathsf{A}$; de lo contrario, tomamos $X = \mathsf{A} \oplus \mathbb{C}$. En cualquiera de los casos, X es un álgebra de Banach con unidad e y A es subálgebra cerrada de X. Definimos el mapeo $\varphi : \mathsf{A} \to \mathcal{B}(X)$ por $\varphi(a) := T_a$, donde $T_a : X \to X$ es el operador dado por $T_a(x) := ax$. Observemos que φ es un homomorfismo algebraico inyectivo. Probemos que φ es un homeomorfismo entre A y $A := \varphi(\mathsf{A})$. Definimos una norma $\|\cdot\|'$ en A por:

$$\|a\|' := \|T_a\|.$$

Probaremos que las normas $\|\cdot\|'$ y $\|\cdot\|$, son equivalentes en A. De

$$\|a\|' = \|T_a\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|ax\|,$$

tomando $x = e/\|e\|$, se tiene que

$$\frac{\|a\|}{\|e\|} = \frac{\|ae\|}{\|e\|} \leq \|a\|',$$

es decir, existe $c > 0$ tal que

$$\|a\| \leq c\|a\|', \forall a \in \mathsf{A}. \tag{2.1}$$

Luego, para probar la equivalencia de las normas, bastará probar que A es completo respecto a $\|\cdot\|'$ (ver [37], p. 7), o lo que es lo mismo, probar que $A = \varphi(\mathsf{A}) = \{T_a \in \mathcal{B}(X) : a \in \mathsf{A}\}$ es una subálgebra cerrada del álgebra de Banach $\mathcal{B}(X)$. Probamos esto último: tomamos una sucesión (T_n) en $\varphi(A)$ convergente en $\mathcal{B}(X)$ a T. Sea (a_n) la sucesión en A tal que $T_n = T_{a_n}$. Debemos demostrar que existe $a \in \mathsf{A}$ tal que $T = T_a$. Sean $x, y \in X$. Se tiene

$$T_{a_n}(xy) = a_n(xy) = (a_n x)y = T_{a_n}(x)y.$$

Luego, para todo $x, y \in X$,

$$T(xy) = \lim T_n(xy) = \lim T_{a_n}(x)y = T(x)y,$$

por la continuidad de la multiplicación. Tomando $x = e$, obtenemos $T(y) = T(e)y$,

$\forall y \in X$. Veamos que $T(e)$ es elemento de A:

$$T(e) = \lim T_{a_n} e = \lim a_n e = \lim a_n.$$

Si $a := \lim a_n$, entonces $a \in \mathsf{A}$ porque (a_n) converge a $T(e)$ en la norma $\|\cdot\|'$ y por la desigualdad (2.1). Por lo tanto, $T = T_a \in A$. $\square$

Corolario 2.1. *En cada álgebra de Banach* A *existe una norma* $\|\cdot\|'$ *equivalente a la norma original* $\|\cdot\|$ *en* A*, tal que* $\|\cdot\|'$ *es submultiplicativa:*

$$\|ab\|' \leq \|a\|'\|b\|', \quad \forall a, b \in \mathsf{A},$$

y si A *tiene unidad* 1_{A}*,*

$$\|1_{\mathsf{A}}\|' = 1.$$

Presentamos algunos de los **ejemplos más importantes de álgebras de Banach** (además de $\mathcal{B}(X)$ que ya mencionamos).

1. Sea K un espacio topológico compacto y Hausdorff. Sea $C(K)$ el conjunto de las funciones continuas $f : K \to \mathbb{C}$. Con las operaciones usuales (punto a punto) y con la norma del supremo

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \,:\, x \in K\} = \max\{|f(x)| \,:\, x \in K\},$$

   $C(K)$ es un álgebra de Banach con unidad (la función constante $x \mapsto 1$) y conmutativa.

2. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ y $n \in \mathbb{N}$. Sea $C^n[a,b]$ el espacio de las funciones $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ tales que $f^{(k)}$ existe y es continua en $[a,b]$ para $k = 0, \ldots, n$. Una norma en este espacio está dada por

$$\|f\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \|f^{(k)}\|_\infty.$$

Esta norma es submultiplicativa: si $f, g \in C^n[a,b]$,

$$
\begin{aligned}
\|fg\| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \|(fg)^{(k)}\|_\infty &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left\| \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} f^{(j)} g^{(k-j)} \right\|_\infty \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left\| \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!(k-j)!} f^{(j)} g^{(k-j)} \right\|_\infty \\
&\leq \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{j!} \|f^{(j)}\|_\infty \frac{1}{(k-j)!} \|g^{(k-j)}\|_\infty \\
&\leq \sum_{l=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} \|f^{(j)}\|_\infty \frac{1}{l!} \|g^{(l)}\|_\infty \\
&= \|f\| \|g\|.
\end{aligned}
$$

La demostración de la completez de este espacio puede leerse en [15], de manera que $C^n[a,b]$ es un álgebra de Banach con esta norma.

3. Sea $\mathbb{D}$ el disco unitario abierto en $\mathbb{C}$. Sea $\mathcal{A}$ el álgebra con unidad de las funciones holomorfas sobre $\mathbb{D}$ y continuas en $\overline{\mathbb{D}}$. Con la norma

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(z)| \,:\, z \in \overline{\mathbb{D}}\} = \max_{|z|=1} |f(z)|,$$

$\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach y subálgebra cerrada de $C(\overline{\mathbb{D}})$. A esta álgebra la conocemos como *álgebra del disco.*

Sea H^∞ el álgebra de las funciones holomorfas y acotadas en $\mathbb{D}$. Con la norma el supremo, H^∞ es un álgebra de Banach conmutativa con unidad y $\mathcal{A}$ es una subálgebra cerrada de H^∞.

4. Sea L^1 el conjunto de las funciones (Lesbesgue) integrables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Definimos la suma en L^1 punto a punto y la multiplicación como la convolución:

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(s) g(x-s)\, ds.$$

Con la norma dada por

$$\|f\| := \int_{\mathbb{R}} |f(s)| ds,$$

el espacio L^1 se convierte en un álgebra de Banach conmutativa pero sin unidad.

5. Sea l^1 el espacio de Banach de las sucesiones complejas absolutamente convergentes y con norma dada por

$$\|x_n\| := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n| < \infty.$$

Definimos la multiplicación en l^1 como la convolución dada por

$$(x * y)_n := \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_{n-k} y_k.$$

l^1 es un álgebra de Banach con unidad $e = (\delta_{0n})$, donde δ es la *delta de Kronecker*: $\delta_{ij} = 1$, si $i = j$; $\delta_{ij} = 0$, en otro caso.

Si $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \ldots, \mathsf{A}_n$ son álgebras de Banach sobre $\mathbb{C}$, definimos la *suma directa* de estas álgebras por

$$\mathsf{A} := \mathsf{A}_1 \oplus \mathsf{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathsf{A}_n := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_j \in \mathsf{A}\}.$$

Definiendo las operaciones de álgebra coordenada a coordenada y la norma por

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \max_{1 \leq j \leq n} \|x_j\|,$$

se obtiene que A es un álgebra de Banach.

2.2. Ideales y elementos invertibles

Definición 2.4. *Sea A un álgebra. Una subálgebra J de A se llama* ideal izquierdo *de A si*

$$AJ = \{ax : a \in \mathsf{A}, x \in J\} \subset J.$$

Análogamente se define ideal derecho. *Un ideal J se llama* ideal bilateral, *o simplemente* ideal, *si es ideal izquierdo y derecho a la vez.*

Un ideal J se llama *propio* si $\{0\} \neq J \neq \mathsf{A}$. Si A tiene unidad, un ideal J es propio si, y sólo si, $1_{\mathsf{A}} \notin J$. Un ideal propio J se llama *máximo* si no está contenido propiamente en ningún otro ideal propio de A. Usando el lema de Zorn se demuestra que en una álgebra de Banach conmutativa con unidad *todo ideal propio está contenido en un ideal máximo.*

Sea J un ideal (bilateral) propio de un álgebra A. Los subconjuntos de A de la forma $x + J$, con $x \in \mathsf{A}$, se llaman *clases módulo* J. El conjunto de todas las clases módulo J, denotado por A/J, forman un álgebra con las operaciones de clases usuales: $\alpha(x+J) := \alpha x+J$, $(x+J)+(y+J) := (x+y)+J$ y $(x+J)(y+J) := xy+J$. A esta álgebra A/J se le llama *álgebra cociente módulo* J. El mapeo

$$\pi : \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{A}/J, \quad \pi(x) = [x] := x + J,$$

se llama *homomorfismo natural* de A sobre A/J. Si J es un ideal máximo de un álgebra conmutativa con unidad sobre $\mathbb{C}$, A/J es isomorfo (algebraicamente) al álgebra $\mathbb{C}$.

Si A es un álgebra de Banach conmutativa y J es un ideal cerrado, la función

$$\|[x]\| = \|x + J\| := \inf\{\|x + y\| : y \in J\} = \inf\{\|x - y\| : y \in J\},$$

es una norma en A/J, que la convierte en un álgebra de Banach.

Definición 2.5. *Sea A un álgebra con unidad 1 y $x, y \in \mathsf{A}$. Diremos que y es una inversa izquierda de x si $yx = 1$. Análogamente se define la inversa derecha. Diremos que y es una inversa de x si es inversa izquierda e inversa derecha de x.*

Cuando un elemento x de A tiene una inversa izquierda y y una inversa derecha z, entonces $y = z$. En este caso diremos que x es invertible y su inversa (única) será denotada por x^{-1}. Por A^{-1} denotaremos al *conjunto de los elementos invertibles* de A.

Teorema 2.2. *Sea A un álgebra de Banach con unidad 1_{A}. El conjunto A^{-1} es abierto en A. De hecho, si $\|1_{\mathsf{A}} - x\| < 1$, entonces $x \in \mathsf{A}^{-1}$ y*

$$x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(1_{\mathsf{A}} - x)^n.$$

Demostración. Sea $U = B(1_{\mathsf{A}}; 1)$ la bola abierta en A centrada en 1_{A} y radio 1. Primeramente veamos que $U \subset \mathsf{A}^{-1}$. Sea $y = 1_{\mathsf{A}} - x$, con $x \in U$. Sea $r = \|y\| = \|1_{\mathsf{A}} - x\| < 1$. Entonces la serie $\sum y^n$ converge absolutamente, y por lo tanto, converge a un elemento de A que denotaremos por z, esto es, $z = \sum_{n=0}^{\infty} y^n$. Entonces

$$zx = z(1_{\mathsf{A}} - y) = \sum_{n=0}^{\infty} y^n - \sum_{n=0}^{\infty} y^{n+1} = 1_{\mathsf{A}}.$$

Análogamente se prueba que $xz = 1_{\mathsf{A}}$, por lo que $x \in \mathsf{A}^{-1}$ y

$$x^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} (1_{\mathsf{A}} - x)^n.$$

Por lo tanto, todos los elementos de la bola U son invertibles. Probemos ahora que A^{-1} es abierto. Sea $x \in \mathsf{A}^{-1}$. El mapeo $m_x : \mathsf{A} \longrightarrow \mathsf{A}$ dado por $m_x(y) = xy$, es un homeomorfismo con inversa $m_{x^{-1}}(y) = x^{-1}y$. Luego, m_x mapea conjuntos abiertos en conjuntos abiertos, por lo que xU es abierto en A. Además, $xU \subset \mathsf{A}^{-1}$ porque x y los elementos de U son invertibles. Dado que $1_{\mathsf{A}} \in U$, $x \in xU$. Por lo tanto, A^{-1} es abierto porque para cada $x \in \mathsf{A}^{-1}$ existe una vecindad abierta xU tal que $x \in xU \subset \mathsf{A}^{-1}$. □

Corolario 2.2. *Sea A un álgebra Banach conmutativa con unidad 1_{A}. Si $x \in \mathsf{A}^{-1}$ y $y \in \mathsf{A}$ es tal que*

$$\|y - x\| < \frac{1}{\|x^{-1}\|},$$

entonces $y \in \mathsf{A}^{-1}$ y

$$y^{-1} = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (1_{\mathsf{A}} - x^{-1}y)^n.$$

Demostración. De la igualdad $1_{\mathsf{A}} - x^{-1}y = x^{-1}(x - y)$, se sigue que

$$\|1_{\mathsf{A}} - x^{-1}y\| \leq \|x^{-1}\| \|x - y\|.$$

De esta manera, $\|1_{\mathsf{A}} - x^{-1}y\| < 1$ y, por el teorema anterior, $x^{-1}y$ es invertible. De esto se sigue que $y = x(x^{-1}y)$ es invertible y

$$y^{-1} = (x^{-1}y)^{-1}x^{-1} = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (1_{\mathsf{A}} - x^{-1}y)^n.$$

□

Corolario 2.3. *Sea* A *un álgebra de Banach con unidad. La clausura de un ideal propio de* A *es un ideal propio.*

Demostración. Sea J un ideal propio de A. La clausura $\overline{J}$ de J es un ideal que, si no es propio, sería todo A. Dado que J es propio, J no contiene ningún elemento invertible, es decir, $J \subset \mathsf{A} \setminus \mathsf{A}^{-1}$. Como A^{-1} es abierto, $\mathsf{A} \setminus \mathsf{A}^{-1}$ es cerrado, luego $\overline{J} \subset \mathsf{A} \setminus \mathsf{A}^{-1}$. Por lo tanto, $\overline{J}$ tampoco contiene algún elemento invertible, lo cual es equivalente a que sea propio. □

Debido a que los ideales máximos son propios, se sigue de inmediato el siguiente resultado.

Corolario 2.4. *Cada ideal máximo en un álgebra de Banach con unidad es cerrado.*

Teorema 2.3. *Sea* A *un álgebra de Banach con unidad. Entonces, el mapeo*

$$\mathrm{Inv} : \mathsf{A}^{-1} \longrightarrow \mathsf{A}, \quad \mathrm{Inv}(x) := x^{-1},$$

es continuo.

Demostración. Sea (a_n) una sucesión en A^{-1} convergente a $a \in \mathsf{A}^{-1}$. Consideremos primeramente el caso $a = 1_{\mathsf{A}}$. Sea N un número natural tal que $\|a_n - 1_{\mathsf{A}}\| < \frac{1}{2}$ si $n \geq N$. De la demostración del teorema 2.2, $a_n^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty}(1_{\mathsf{A}} - a_n)^k$. Luego, si $n \geq N$,

$$\|a_n^{-1}\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|1_{\mathsf{A}} - a_n\|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2.$$

De esta manera,

$$\|a_n^{-1} - 1_{\mathsf{A}}\| = \|a_n^{-1}(1_{\mathsf{A}} - a_n)\| \leq \|a_n^{-1}\|\|1_{\mathsf{A}} - a_n\|,$$

lo que demuestra que el teorema se cumple en este caso.

Veamos el caso general. Sea $a \in \mathsf{A}^{-1}$. Entonces, $a^{-1}a_n$ es invertible y por la continuidad de la multiplicación $\lim a^{-1}a_n = 1_{\mathsf{A}}$. Entonces,

$$\lim (a^{-1}a_n)^{-1} = \lim a_n^{-1}a = 1_{\mathsf{A}}.$$

Por lo tanto,

$$\lim a_n^{-1} = a^{-1}.$$

□

2.3. El teorema de Gelfand-Mazur

El *teorema de Gelfand–Mazur* es muy importante en esta teoría y generaliza el clásico teorema de Frobenius del álgebra lineal, que afirma que cada álgebra con división compleja y finito dimensional es isomorfa a $\mathbb{C}$.

Teorema 2.4 (Mazur–Gelfand). *Sea* A *un álgebra de Banach conmutativa sobre* $\mathbb{C}$ *con unidad* 1_{A} *tal que todos los elementos de* A *distintos de* 0_{A} *son invertibles. Entonces*

$$\mathsf{A} = \{\lambda 1_{\mathsf{A}} \,:\, \lambda \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C}1_{\mathsf{A}}.$$

Por lo tanto, A *es isomorfo e isométrico a* $\mathbb{C}$*.*

Demostración. Vamos a demostrar que para cada $x \in \mathsf{A}$ existe un único $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $x = \lambda 1_{\mathsf{A}}$. Supongamos que para algún x tal λ no existe, es decir, $x - \lambda 1_{\mathsf{A}} \neq 0$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$. Por hipótesis tendríamos que $(x - \lambda 1_{\mathsf{A}})^{-1}$ existe para cada λ. Sea $f : \mathsf{A} \to \mathbb{C}$ un funcional lineal continuo tal que $f(x^{-1}) \neq 0$. Definimos $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ por $\varphi(\lambda) := f((x - \lambda 1_{\mathsf{A}})^{-1})$. Veamos que φ es una función entera. Para $h \in \mathbb{C}^*$,

$$\frac{\varphi(\lambda + h) - \varphi(\lambda)}{h} = f((x - \lambda 1_{\mathsf{A}})^{-1}(x - (\lambda + h)1_{\mathsf{A}})^{-1}),$$

donde hemos usado el hecho de que en un álgebra conmutativa se cumple la identidad $a^{-1} - b^{-1} = (ab)^{-1}(b - a)$, para a y b en el álgebra. Debido a que el mapeo $a \mapsto a^{-1}$ es continuo, por la ecuación anterior se sigue que el límite existe cuando $h \to 0$ por lo que φ es entera. Si $\lambda \neq 0$,

$$\varphi(\lambda) = \frac{1}{\lambda} f\left(\left(\frac{x}{\lambda} - 1_{\mathsf{A}}\right)^{-1}\right),$$

de manera que

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \varphi(\lambda) = 0.$$

Por el teorema de Liouville, φ es la constante 0, lo que es una contradicción pues $\varphi(0) \neq 0$ por definición de φ y la elección de f. □

2.4. Teorema del mapeo espectral

Si $\lambda \in \mathbb{C}$, usamos recurrentemente la notación λ para denotar $\lambda 1_{\mathsf{A}}$, donde 1_{A} es la unidad del álgebra compleja A.

Definición 2.6. *Si x es un elemento del álgebra de Banach A con unidad, el resolvente de x se define por*

$$R(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda \in \mathsf{A}^{-1}\}.$$

Teorema 2.5. *Si x es elemento de un álgebra de Banach A con unidad, el conjunto resolvente de x es abierto y la función $F : R(x) \to \mathsf{A}$, dada por $F(\lambda) = (x-\lambda)^{-1}$, es holomorfa.*

Demostración. Sea $\lambda_0 \in R(x)$, entonces $x - \lambda_0$ es invertible por definición. Para $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\|(x-\lambda) - (x-\lambda_0)\| = \|\lambda - \lambda_0\|,$$

y como A^{-1} es abierto se cumple que $x-\lambda \in A^{-1}$ cuando λ es cercano a λ_0. Además, por el corolario 2.2,

$$\begin{aligned}(x-\lambda)^{-1} &= (x-\lambda_0)^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}[1-(x-\lambda_0)^{-1}((x-\lambda_0)+(\lambda_0-\lambda))]^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x-\lambda_0)^{-n-1}(\lambda_0-\lambda)^n,\end{aligned}$$

de manera que $F(\lambda)$ admite una representación en una serie de potencias convergente en $\lambda - \lambda_0$, con coeficientes en A. □

Corolario 2.5. *Si A es un álgebra de Banach con unidad, entonces el resolvente $R(x)$ es subconjunto propio de $\mathbb{C}$, para cada $x \in \mathsf{A}$.*

Demostración. Supongamos que $R(x) = \mathbb{C}$. Por el teorema anterior, $F(\lambda) = (x - \lambda)^{-1}$ es una función entera con valores en A. Si $|\lambda| \to \infty$,

$$\|F(\lambda)\| = \|(x-\lambda)^{-1}\| = \|(\lambda(x/\lambda - 1))^{-1}\| = |\lambda|^{-1}\|(x/\lambda-1)^{-1}\| \to 0.$$

Luego, por el teorema de Liouville, $(x-\lambda)^{-1}$ es la función constante 0, lo que es imposible. □

Definición 2.7. *Sea A un álgebra de Banach con unidad. El espectro de un elemento x de A es el complemento del conjunto resolvente $R(x)$:*

$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda \notin \mathsf{A}^{-1}\}.$$

Por el corolario anterior, si A es un álgebra de Banach con unidad, el espectro de x, $\sigma(x)$, no es vacío.

Ejemplo 1 (El espectro en $C(X)$ y $\mathcal{A}$)**.** *Sea X un espacio de Hausdorff compacto. Si $f \in C(X)$,*

$$\sigma(f) = f(X).$$

En efecto, si $\lambda \notin f(X)$, entonces $f(x) \neq \lambda$ para todo $x \in X$, de manera que la función $g(x) := f(x) - \lambda$ no tiene ceros en X. Luego, $1/g \in C(X)$, por lo que $\lambda \notin \sigma(f)$. Por otro lado, si $\lambda = f(x_0)$ para algún $x_0 \in X$, entonces $f - \lambda$ no es invertible en $C(X)$.

Observemos también que $g \in \mathcal{A}$ cuando $X = \overline{\mathbb{D}}$, luego en $\mathcal{A}$ tenemos también que $\sigma(f) = f(\overline{\mathbb{D}})$

Dado que el resolvente de un elemento a es abierto, $\sigma(a)$ es un conjunto cerrado de $\mathbb{C}$. De hecho, se tiene un resultado aún más fuerte.

Teorema 2.6. *Si A es un álgebra de Banach y $x \in \mathsf{A}$, entonces $\sigma(x)$ es un subconjunto compacto no vacío de $\mathbb{C}$.*

Definición 2.8. *El radio espectral $r(x)$ de un elemento $x \in \mathsf{A}$ se define por*

$$r(x) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Teorema 2.7 (Fórmula del radio espectral)**.** *Sea A un álgebra de Banach y $x \in \mathsf{A}$. Entonces*

$$r(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = \inf_n \|x^n\|^{1/n}.$$

Del teorema anterior se sigue que $r(x) \leq \|x\|$ y $r(\lambda x) = |\lambda| r(x)$, para $\lambda \in \mathbb{C}$.

Teorema 2.8 (Teorema del mapeo espectral)**.** *Sea A un álgebra de Banach con unidad e y p un polinomio. Si $x \in \mathsf{A}$,*

$$\sigma(p(x)) = p(\sigma(x)).$$

Demostración. Consideramos primeramente el caso en que p es un polinomio constante. Suponemos que $p(z) = \alpha$. En este caso, $p(x) = \alpha e$, de manera que $\sigma(p(x)) = \sigma(\alpha e) = \{\alpha\}$. Claramente, $p(\sigma(x)) = \{\alpha\}$ pues $p \equiv \alpha$.

Ahora suponemos que p no es constante. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ y sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ las raíces del polinomio $q(z) := \lambda - p(z)$. Entonces,

$$q(x) = \lambda e - p(x) = \alpha(\lambda_1 e - x)(\lambda_2 e - x) \cdots (\lambda_n e - x)$$

donde α es un escalar no nulo. Observemos que $\lambda e - p(x)$ es invertible si, y sólo si, para cada $k = 1, \ldots, n$, $\lambda_k e - x$ es invertible. Veamos que $\sigma(p(x)) \subset p(\sigma(x))$. Si $\lambda \in \sigma(p(x))$, $\lambda e - p(x)$ no es invertible, de manera que existe k tal que $\lambda_k e - x$ no es invertible, es decir, $\lambda_k \in \sigma(x)$, de manera que $\lambda = p(\lambda_k) \in p(\sigma(x))$. Probemos ahora la otra contención. Sea $\mu \in \sigma(x)$. Sea $\lambda = p(\mu)$. Entonces, $q(\mu) = 0$ de manera que existe k tal que $\mu = \lambda_k$. Entonces, $\lambda_k \in \sigma(x)$ de manera que $\lambda e - p(x)$ no es invertible, es decir, $\lambda \in \sigma(p(x))$. Por lo tanto, $p(\sigma(x)) \subset \sigma(p(x))$. □

2.5. El espacio de ideales máximos

Definición 2.9. *Sea* A *un álgebra de Banach. Un funcional lineal no nulo* $\varphi : \mathsf{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ *se llama* funcional multiplicativo *si*

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \quad \textit{para todo } x, y \in \mathsf{A}.$$

Denotamos por $\mathbf{M}_{\mathsf{A}}$ al espacio de los funcionales multiplicativos de A. Si $\varphi \in \mathbf{M}_{\mathsf{A}}$, entonces $\varphi(1_{\mathsf{A}}) = 1$ y $[\varphi(x)]^{-1} = \varphi(x^{-1})$.

Existe una relación muy estrecha entre los funcionales multiplicativos de A y los ideales máximos en A, que se explicita en el siguiente teorema.

Teorema 2.9. *Sea* A *un álgebra de Banach conmutativa con unidad* e.

1. *Si* $\varphi : \mathsf{A} \to \mathbb{C}$ *es un funcional lineal multiplicativo de* A*, entonces* $M_\varphi := \ker \varphi$ *es un ideal máximo.*

2. *Si* M *es un ideal máximo de* A*, entonces*

$$\mathsf{A} = \{x + \lambda e : x \in M, \lambda \in \mathbb{C}\},$$

y el mapeo $\varphi_M : \mathsf{A} \to \mathbb{C}$ *dado por*

$$\varphi(x + \lambda e) = \lambda,$$

es un funcional multiplicativo y $\ker \varphi_M = M$.

Demostración. 1. Sea $x \in A$ tal que $\varphi(x) \neq 0$. Si $y \in A$, entonces

$$y = \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} x + \left(y - \frac{\varphi(y)}{\varphi(x)} x \right).$$

Entonces, $y = \alpha x + m$, con $\alpha \in \mathbb{C}$ y $m \in M_\varphi$, es decir,

$$\mathsf{A} = \mathbb{C} \cdot a + M_\varphi.$$

2. Es claro que φ así definido es un funcional multiplicativo y $\ker \varphi_M = M$.

□

Del teorema anterior, notamos que existe una relación 1 a 1 entre el conjunto de los funcionales multiplicativos y el conjunto de los ideales máximos de A, por esta razón, $\mathbf{M}_{\mathsf{A}}$ se llama también el *espacio de los ideales máximos*. El siguiente teorema muestra la relación entre $\mathbf{M}_{\mathsf{A}}$ con A^{-1}.

Teorema 2.10. *Sea* A *un álgebra de Banach conmutativa con unidad.*

1. *Para* $\varphi \in \mathbf{M}_{\mathsf{A}}$ *y* $x \in \mathsf{A}$,
$$\varphi(x) \in \sigma(x).$$

2. *Para* $x \in \mathsf{A}$ *y* $\lambda \in \sigma(x)$, *existe* $\varphi \in \mathbf{M}_{\mathsf{A}}$ *tal que* $\varphi(x) = \lambda$.

3. *Un elemento* x *de* A *es invertible si, y sólo si,* $\varphi(x) \neq 0$ *para todo* $\varphi \in \mathbf{M}_{\mathsf{A}}$.

Demostración. 1. Sea φ un funcional multiplicativo. Observemos que $x - \varphi(x) \in \ker \varphi$. Debido a que $\ker \varphi$ es un ideal propio de A, $x - \varphi(x)$ no puede ser invertible. Por lo tanto, $\varphi(x) \in \sigma(x)$.

2. Sea $\lambda \in \sigma(x)$. Entonces, $x - \lambda e$ está contenido en un ideal propio por lo que existe un ideal máximo M tal que $x - \lambda e \in M$. Luego, existe un funcional multiplicativo φ_M tal que $\ker \varphi_M = M$. En particular, $\varphi(x - \lambda e) = 0$, de donde se sigue que $\varphi(x) = \lambda$.

3. Se sigue de los incisos 1 y 2.

□

Debido a que en un álgebra de Banach conmutativa se cumple que $\sigma(a) \neq \emptyset$, por el teorema anterior se sigue que en este caso $\mathbf{M}_\mathsf{A} \neq \emptyset$. Como corolario del teorema tenemos que $\mathbf{M}_\mathsf{A}$ es subconjunto de la bola cerrada de A^*, el espacio dual de A.

Corolario 2.6. *En un álgebra de Banach conmutativa con unidad, los funcionales multiplicativos son continuos y tienen norma* 1.

Demostración. Sea φ un funcional multiplicativo. Si $x \in \mathsf{A}$, $\varphi(x) \in \sigma(x)$. De esta manera,

$$\varphi(x) \leq r(x) \leq \|x\|.$$

Por lo tanto, $\|\varphi\| \leq 1$. De $\varphi(1) = 1$ se sigue que $\|\varphi\| = 1$. □

Definimos en $\mathbf{M}_\mathsf{A}$ una topología dando una base de vecindades en cada $\varphi \in \mathbf{M}_\mathsf{A}$, de la siguiente manera:

$$U(\varphi; x_1, \ldots, x_n; \epsilon) := \{\psi \in \mathbf{M}_\mathsf{A} : |\psi(x_j) - \varphi(x_j)| < \epsilon, \text{ para } j = 1, 2, \ldots, n\},$$

donde $x_1, \ldots, x_n$ son cualesquiera elementos fijos de A y $\epsilon > 0$.

Teorema 2.11. *El espacio de ideales máximos* $\mathbf{M}_\mathsf{A}$ *con la topología anterior, es un espacio de Hausdorff compacto no vacío.*

Demostración. Hemos probado antes que $\mathbf{M}_\mathsf{A} \neq \emptyset$. Sean $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{M}_\mathsf{A}$ tales que $\varphi_1 \neq \varphi_2$, luego existe $x \in \mathsf{A}$ tal que $\varepsilon := |\varphi_1(x) - \varphi_2(x)| > 0$. $U_1 = \{\psi : |\psi(x) - \varphi_1(x)| < \epsilon/2\}$ y $U_2 = \{\psi : |\psi(x) - \varphi_2(x)| < \epsilon/2\}$ son vecindades disjuntas de φ_1 y φ_2, respectivamente. Por lo tanto, $\mathbf{M}_\mathsf{A}$ es Hausdorff. Recordemos que, por el teorema de Banach-Alaoglu, la bola unitaria cerrada de A^* es compacta con la $w*$-topología. Como $\mathbf{M}_\mathsf{A}$ es un subconjunto w^*-cerrado de esta bola, entonces es compacto en la $w*$-topología. □

2.6. La transformada de Gelfand y álgebras semisimples

Sea $C(\mathbf{M}_\mathsf{A})$ el álgebra de Banach de las funciones complejas continuas sobre $\mathbf{M}_\mathsf{A}$ con norma del supremo.

Definición 2.10. *El mapeo* $G : \mathsf{A} \to C(\mathbf{M}_\mathsf{A})$ *definida por*

$$G(a)(\varphi) := \varphi(a),$$

donde $a \in \mathsf{A}$ *y* $\varphi \in \mathbf{M}_\mathsf{A}$*, se llama transformada de Gelfand.*

Por $\hat{a}$ denotaremos la función $G(a)$, es decir, $\hat{a} \in C(\mathbf{M}_\mathsf{A})$ y

$$\hat{a}(\varphi) = \varphi(a), \quad \varphi \in \mathbf{M}_\mathsf{A}.$$

Llamaremos a $\hat{a}$ la transformada de Gelfand del elemento $a \in \mathsf{A}$.

Las propiedades más importantes de la transformada de Gelfand son las siguientes:

Teorema 2.12. *Sea* A *un álgebra de Banach conmutativa. Entonces:*

1. *Para cada* $a \in \mathsf{A}$*, el rango de* $\hat{a}$ *coincide con el espectro de* a*:*

$$\hat{a}(\mathbf{M}_\mathsf{A}) = \sigma(a).$$

2. *Para cada* $a \in \mathsf{A}$*, la norma de* $\hat{a}$ *en el álgebra* $C(\mathbf{M}_\mathsf{A})$ *coincide con el radio espectral de* a*:*

$$\|\hat{a}\| = \max_{\|\varphi\|=1} |\varphi(a)| = r(a).$$

3. *La transformada de Gelfand* $G : \mathsf{A} \to C(\mathbf{M}_\mathsf{A})$ *es un homomorfismo continuo de álgebras de Banach y*

$$\|G\| := \sup_{\|a\|=1} \|G(a)\| = 1.$$

4. *La función* $\hat{a}$ *es la función constante* 0 *si, y sólo si,* $\sigma(a) = \{0\}$*.*

5. *Si* e *denota la identidad de* A*,* $\hat{e} \equiv 1$*.*

Demostración. 1. Por la definición de G y el teorema 2.10,

$$\hat{a}(\mathbf{M}_\mathsf{A}) = \{\varphi(a) : \varphi \in \mathbf{M}_\mathsf{A}\} = \sigma(a).$$

2. Por la definición de G y 1,

$$\begin{aligned}\|\hat{a}\| = \|G(a)\| &= \sup\{|G(a)(\varphi)| : \varphi \in \mathbf{M}_{\mathsf{A}}\} \\ &= \sup\{|\varphi(a)| : \varphi \in \mathbf{M}_{\mathsf{A}}\} \\ &= \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(a)\} \\ &= r(a).\end{aligned}$$

3. Por 2, $\|G(a)\| = r(a) \leq \|a\|$, entonces $\|G\| \leq 1$. De $\|G(e)\| = r(e) = 1$, se sigue que $\|G\| = 1$.

4. Se sigue de 1.

5. Directo de la definición.

□

Definición 2.11. *Sea* A *un álgebra de Banach. La intersección de todos los ideales máximos se llama* radical de A *y se denota por* $\operatorname{rad}\mathsf{A}$. *El álgebra se llama* semisimple *si* $\operatorname{rad}\mathsf{A} = \{0\}$.

De la definición se sigue que $\operatorname{rad}\mathsf{A}$ es un ideal cerrado de A, de manera que podemos considerar la álgebra cociente $\mathsf{A}/\operatorname{rad}\mathsf{A}$.

Teorema 2.13. *Sea* A *un álgebra de Banach. Entonces*

1. *El álgebra de Banach* $\mathsf{A}/\operatorname{rad}\mathsf{A}$ *es semisimple.*

2. *Un elemento* x *de* A *es invertible si, y sólo si,* $x + \operatorname{rad}\mathsf{A}$ *es invertible en* $\mathsf{A}/\operatorname{rad}\mathsf{A}$.

3. *Si* $x \in \operatorname{rad}\mathsf{A}$, *entonces* $\sigma(x) = \{0\}$.

Si X es un conjunto y $F(X)$ es un espacio de funciones complejas definidas en X, para $x \in X$, definimos el *mapeo evaluación* $\delta_x : F(X) \to \mathbb{C}$ por

$$\delta_x(f) := f(x), \quad (f \in F(X)).$$

Ejemplo 2. *Consideramos el álgebra de Banach* $C(K)$ *con* K *Hausdorff y compacto. Para* $x \in K$, *el mapeo evaluación* δ_x *es un funcional multiplicativo en* $C(K)$. *De hecho, como veremos en el siguiente lema, cualquier funcional multiplicativo en esta álgebra es de esta forma.*

Lema 2.2. *Si φ es un funcional multiplicativo de $C(K)$, existe $x \in K$ tal que φ es el mapeo evaluación δ_x.*

Demostración. Si tal x no existiera, entonces para cada $y \in K$ existiría $g_y \in C(K)$ tal que $\varphi(g_y) - g_y(y) \neq 0$. Sea $f_y := g_y - \varphi(g_y)$. Se tiene que f_y es un elemento de $C(K)$ tal que $f_y(y) \neq 0$ y $\varphi(f_y) = 0$. Luego, para una vecindad de y, $|f_y|^2 > 0$ y $\varphi(|f_y|^2) = \varphi(f_y)\varphi(\overline{f_y}) = 0$. Por la compacidad de K, existen $y_1, \ldots, y_n \in K$ tal que $g := |f_{y_1}|^2 + \cdots + |f_{y_n}|^2 > 0$ en K. Entonces, g es invertible en $C(K)$ pero $\varphi(g) = 0$, lo cual es una contradicción. $\square$

Esto muestra que K y $\mathbf{M}_{C(K)}$ son álgebras de Banach isomorfas. Con esta identificación, la transformada de Gelfand es la función identidad en $C(K)$, es decir, $\hat{f} = f$, y $C(K)$ es semisimple.

Ejemplo 3. *Veamos que en el álgebra disco $\mathcal{A}$, los funcionales multiplicativos son de evaluación por elementos de $\overline{\mathbb{D}}$. Sea $\alpha \in \mathcal{A}$ dado por $\alpha(z) = z$. Sea φ un funcional multiplicativo en $\mathcal{A}$. Si $\lambda := \varphi(\alpha)$, entonces $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$, de lo contrario, $\alpha - \lambda$ sería invertible en $\mathcal{A}$ y*

$$\varphi((\alpha - \lambda)^{-1}) = (\varphi(\alpha - \lambda))^{-1} = 0^{-1}.$$

Para cualquier polinomio $p(z)$ se tiene $\varphi(p) = p(\lambda)$. Por lo tanto, el funcional continuo φ es de evaluación δ_λ en el espacio de polinomiales P. Como P es denso en $\mathcal{A}$, se sigue que

$$\varphi(f) = f(\lambda), \forall f \in \mathcal{A}.$$

Si $f \in \operatorname{rad}\mathcal{A}$, por el teorema anterior se sigue que $\sigma(f) = \{0\}$. Recordemos que $\sigma(g) = g(\overline{\mathbb{D}})$, para todo $g \in \mathcal{A}$, luego $f \equiv 0$. Por lo tanto, $\operatorname{rad}\mathcal{A} = \{0\}$ y $\mathcal{A}$ es semisimple.

Ejemplo 4. *En el álgebra de Banach $L^1 := L^1(\mathbb{R})$, conmutativa y sin unidad, cada funcional multiplicativo φ es de evaluación [37, pg. 40] y está determinado por un único punto $p \in \mathbb{R}$ de la siguiente manera*

$$\varphi(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ipt}\,dt, \quad (f \in L^1).$$

De esta manera, podemos identificar $\mathbf{M}_{L^1}$ con $\mathbb{R}$ y la transformada de Gelfand de $f \in L^1$ es la transformada de Fourier de f:

$$\hat{f}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{ipt}\,dt.$$

Ejemplo 5 (El espacio de ideales máximos de H^∞)**.** *Consideremos el álgebra de Banach conmutativa con unidad $H^\infty := H^\infty(\mathbb{D})$. A cada $\lambda \in \mathbb{D}$, le corresponde un ideal máximo*

$$M_\lambda := \{f \in H^\infty : f(\lambda) = 0\}.$$

Si consideremos el espacio de ideales máximos $\mathcal{M}(H^\infty)$, una pregunta natural es si existen puntos que no pertenecen a la clausura de $\{M_\lambda : \lambda \in \mathbb{D}\}$. La respuesta es negativa (ver [8], [16] o [36] para más detalles).

Teorema de la Corona. *Los ideales M_λ, con $\lambda \in \mathbb{D}$, son densos en el espacio de ideales máximos de H^∞.*

De este hecho también se deduce que $\operatorname{rad} H^\infty = \{0\}$, *de manera que H^∞ es semisimple.*

Capítulo 3

Ideales de álgebras de funciones holomorfas

Introducimos en este capítulo las definiciones y resultados más importantes que usaremos en el resto de la exposición. Además, incluimos aquí un resumen sobre los trabajos más destacados que sirven como antecedentes al actual trabajo. Las álgebras que mencionamos son subálgebras del álgebra del disco $\mathcal{A}$. Un resultado destacado en estos trabajos es el uso de la factorización de funciones en $\mathcal{A}$, en términos de funciones interiores y exteriores, y la existencia del máximo común divisor interior de una colección de funciones.

3.1. Preliminares

Para las nociones de medida e integral, siempre nos referiremos a la medida de Lebesgue sobre la álgebra de Borel, a menos que otra medida se especifique.

3.1.1. Teorema de Fejer

Sea $f \in C(\mathbb{T})$ o $f \in L^1(\mathbb{T})$. Si $n \in \mathbb{Z}$, el n-ésimo *coeficiente de Fourier* de f está definido por

$$F_n(f) = \hat{f}(n) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) e^{-int}\, dt.$$

Recordemos que si f, g son funciones integrables, la *convolución* de f y g es la función integrable $f * g$ dada por

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s)g(t-s)\, ds.$$

Los coeficientes de Fourier de una convolución pueden calcularse por la siguiente fórmula

$$F_n(f * g) = F_n(f)F_n(g) = \hat{f}(n)\hat{g}(n).$$

Un *polinomio trigonométrico* P es una suma finita de la forma

$$P(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{int}, \qquad (a_n = 0 \text{ si } |n| \geq N),$$

para cierto $N \in \mathbb{N}$.

Para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definimos los polinomios trigonométricos asociados a f como:

$$S_n(t) := \sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(n) e^{ikt},$$

y

$$\sigma_n := \frac{S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1}}{n}.$$

El teorema de Fejer afirma que los polinomios trigonométricos son densos en $C(\mathbb{T})$.

Teorema 3.1 (de Fejer)**.** *En* $C(\mathbb{T})$*,*

$$\lim_{n \to \infty} \sigma_n = f.$$

3.1.2. Funciones interiores y exteriores en H^1

Los resultados de esta sección no se demuestran pero la referencia principal es el clásico libro de Hoffman [19] o Rosenblum–Rovnyak [34].

Definición 3.1. *Se define el núcleo de Poisson* $\{P_r : 0 \leq r < 1\}$ *por la fórmula*

$$P_r(\theta) := \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos\theta}.$$

Las propiedades básicas de $\{P_r\}$ se obtienen directamente de la definición.

Teorema 3.2 (Propiedades del núcleo de Poisson)**.** *Para cada* $0 \leq r < 1$*,*

(a)

$$P_r(\theta) = \mathrm{Re}\left[\frac{1+re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}}\right] = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|}e^{in\theta}.$$

(b) La función P_r *es positiva.*

(c)

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)\,dt = 1.$$

Definición 3.2. *El espacio de Hardy* H^1 *consiste de las funciones* F *holomorfas en* $\mathbb{D}$ *tal que existe* $M \geq 0$ *para el cual*

$$\int_0^{2\pi} |F(re^{it})|\,dt \leq M, \quad \forall\, 0 \leq r < 1.$$

Definición 3.3. *Sea* $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ *y sea* $\omega \in \mathbb{T}$*. Decimos que el límite*

$$\lim_{z\to\omega} f(z) = A, \quad \text{no tangencialmente},$$

si para cada sector triangular abierto Δ *en* $\mathbb{D}$ *con vértice en* ω*,* $f(z) \to A$ *cuando* $z \to \omega$ *con* $z \in \Delta$*.*

Teorema 3.3. *Si* $f \in H^1$ *y* $f \neq 0$*, entonces* f *tiene una función frontera* f^* *definida, casi en todas partes de* $\mathbb{T}$*, por el límite no tangencial*

$$f^*(e^{i\theta}) := \lim_{z\to e^{i\theta}} f(z).$$

Además,

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f^*(e^{it})P_r(\theta - t)\,dt.$$

Observemos que si $f \in \mathcal{A}$, entonces $f^* = f|_{\mathbb{T}}$ está definida en todo $\mathbb{T}$.

La función frontera f^* así definida, garantiza que $\log|f^*|$ sea Lebesgue integrable en $\mathbb{T}$. Sea

$$F(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \log|f(e^{i\theta})|\, d\theta\right]. \tag{3.1}$$

Esta función tiene propiedades interesantes que resumimos a continuación.

1. La función F es holomorfa en $\mathbb{D}$.

2. La función F pertenece al espacio de Hardy H^1 y cumple que para cada $0 \leq r < 1$,
$$\int_0^{2\pi} |F(re^{it})|\, dt \leq \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|\, dt.$$

3. F no tienes ceros en $\mathbb{D}$ y
$$\log|F(re^{i\theta})| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(e^{it})| P_r(\theta - t)\, dt.$$

4. Si $z \in \mathbb{D}$, $|f(z)| \leq |F(z)|$.

5. Para casi todo θ, $|F(e^{i\theta})| = |f(e^{i\theta})|$.

La función F definida en (3.1) es un ejemplo de una función exterior, noción que se incluye en la siguiente definición.

Definición 3.4. *Una función f, holomorfa en $\mathbb{D}$, se llama interior si $f(e^{i\theta}) = 1$ para casi todo $\theta \in [0, 2\pi]$. Una función ϕ, definida en $\mathbb{D}$, se llama exterior si es de la forma*

$$\phi(z) = e^{i\theta_0} \cdot \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z} \psi(\theta)\, d\theta\right), \quad \forall z \in \mathbb{D}, \tag{3.2}$$

para una constante $\theta_0 \in \mathbb{R}$ y una función real e integrable ψ sobre $[0, 2\pi]$.

Si $\phi \in H^1$ y es una función exterior dada por (3.2), entonces

$$\psi(\theta) = \log|\phi(e^{i\theta})|, \quad \text{para casi todo } \theta \in [0, 2\pi].$$

El producto de dos funciones interiores es interior. El producto y cociente de funciones exteriores es exterior. Una función exterior es holomorfa en $\mathbb{D}$ y no posee ceros en $\mathbb{D}$. Una caracterización de las funciones interiores está dado en el siguiente teorema.

Teorema 3.4. *Sea $0 \neq \phi \in H^1$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) La función ϕ es exterior.

(ii) Si $f \in H^1$ y $|f| = |\phi|$ casi en todo el círculo $\mathbb{T}$, entonces

$$|f(z)| \leq |\phi(z)|, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

(iii)

$$\int_0^{2\pi} \log|\phi(e^{it})|\, dt = 2\pi \log|\phi(0)|.$$

El siguiente resultado es el teorema principal de la sección (para una demostración, ver [19], p. 63)

Teorema 3.5. *Toda función no nula de H^1 admite una factorización de la la forma $f = I_f \cdot E_f$, donde I_f es una función interior y E_f es una función exterior. Dicha representación es única salvo múltiplos constantes de módulo 1.*

El factor interior I_f aún puede descomponerse en una útil factorización. Para ello, antes introducimos algunas nociones.

3.1.3. Productos de Blaschke y funciones singulares

Veamos ejemplos importantes de función interior.

Dada una sucesión (a_n), con $0 < |a_n| < 1$, y un entero no negativo m, se llama *el producto de Blaschke* a una función de la forma

$$B(z) = z^m \prod_{k=1}^{\infty} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k} z} \cdot \frac{|a_k|}{a_k}, \quad z \in \mathbb{D}. \tag{3.3}$$

Teorema 3.6. *El producto de Blaschke (3.3) converge absolutamente en $\mathbb{D}$ si, y sólo si,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |a_k|) < \infty.$$

Cada producto de Blaschke es una función interior. Sin embargo, existen funciones interiores que no son productos de Blaschke, por ejemplo, la función

$$S(z) = \exp\left(-\lambda \frac{1+z}{1-z}\right),$$

con λ positivo. La función S es una función interior sin ceros en $\mathbb{D}$.

Una medida μ se llama *singular* si está concentrada en un conjunto de Lebesgue de medida cero.

Si f es una función interior, existe un producto Blaschke B_f y una medida singular no negativa μ_f tal que f tiene la factorización $f = B_f\, S_f$, con

$$S_f(z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\mu_f(\theta)\right), \quad z \in \mathbb{D}. \tag{3.4}$$

Una función interior se llama *singular* si no posee ceros en $\mathbb{D}$ y es positiva en el origen. Una función singular tiene la forma (3.4) para una única medida singular positiva sobre $\mathbb{T}$.

Una función interior f está *asociada* a un conjunto cerrado E de $\mathbb{T}$ si todos los puntos de acumulación de los ceros del factor de Blaschke de f, son puntos de E y, además, la medida singular μ está concentrada en E.

Teorema 3.7. *Sea f una función no nula de H^1. Entonces, existen un producto Blaschke B, una función singular S y una función exterior F en H^1 tal que*

$$f = BSF.$$

3.1.4. Máximo común divisor interior

Recordemos que H^∞ denota el álgebra de las funciones holomorfas y acotadas en $\mathbb{D}$.

Definición 3.5. *Si $f, g \in H^\infty$ y g es interior, decimos que g divide a f (o g* es divisor de *f) si la función cociente $f/g \in H^\infty$. Cuando g divide a f denotamos: $g|f$.*

Si $f \in \mathcal{A}$ y g divide a f, se sabe que $f/g \in \mathcal{A}$.

El siguiente teorema está probado en [19]. De hecho, dicha prueba es constructiva.

Teorema 3.8. *Para una familia no vacía $\mathcal{F}$ de funciones interiores, existe una única función interior $Q_{\mathcal{F}}$ que divide a cada función en $\mathcal{F}$ y es tal que cualquier función que sea divisor común de las funciones en $\mathcal{F}$, también divide a $Q_{\mathcal{F}}$.*

A la función $Q_{\mathcal{F}}$ del teorema anterior se le conoce como el *máximo común divisor (m.c.d.)* de $\mathcal{F}$.

Si $J \subset H^1$ e I_f denota el factor interior de $f \in J$, decimos que Q_J es el *máximo común divisor interior* de J si Q_J es el máximo común divisor de la colección de los factores interiores de las funciones $f \in J$, con $f \neq 0$, es decir, del conjunto de funciones interiores $\{I_f : f \in J, f \neq 0\}$.

3.2. Ideales cerrados del *álgebra del disco*

Recordemos que el *álgebra disco* $\mathcal{A}$ es el álgebra de Banach que consiste de las funciones holomorfas en el disco unitario $\mathbb{D}$ y continuas en el disco cerrado $\overline{\mathbb{D}}$, con las operaciones usuales y norma uniforme (o del supremo). En $\mathcal{A}$ la norma está dada por

$$\|f\|_\infty = \sup_{|z|\leq 1} |f(z)| = \sup_{|z|=1} |f(z)|, \quad (f \in \mathcal{A}).$$

Esencialmente, existen dos formas de ver a las funciones de $\mathcal{A}$: $f \in \mathcal{A}$ si

(i) es límite uniforme de funciones polinomiales en $\overline{\mathbb{D}}$.

(ii) $\hat{f}_{\mathbb{T}}(n) = 0$ para todo $n < 0$, donde $\hat{f}_{\mathbb{T}}(n)$ denota el n-ésimo coeficiente de Fourier de la función f restringida al círculo $\mathbb{T}$.

De hecho, el álgebra $\mathcal{A}$ es una subálgebra cerrada de H^∞. Identificando f con su función restricción $f|_{\mathbb{T}}$, se tiene el siguiente teorema (una demostración puede leerse en [19], p. 93.)

Teorema 3.9 (Wermer, 1953)**.** *El álgebra $\mathcal{A}$ es una subálgebra maximal cerrada de $C(\mathbb{T})$.*

Como mencionamos en la introducción, Arne Beurling y Walter Rudin encontraron una forma sencilla de caracterizar a los ideales cerrados de $\mathcal{A}$, de manera independiente, aunque el trabajo de Beurling no fue publicado. En Hoffman [19] pueden leerse los detalles del trabajo de Beurling sobre este resultado. Enunciamos a continuación el teorema de Beurling–Rudin [33][1].

[1]El interesante artículo de Rudin puede encontrarse en Internet en la siguiente dirección: *http://cms.math.ca/openaccess/cjm/v9/cjm1957v09.0426-0434.pdf*

Teorema 3.10 (Rudin, 1956)**.** *Sea E un subconjunto cerrado de $\mathbb{T}$ de medida de Lebesgue nula. Sea M una función interior asociada con E. El conjunto*

$$I_E = \{f \in \mathcal{A} : M|f, f|_E = 0\},$$

es un ideal cerrado de $\mathcal{A}$.

Además, todo ideal cerrado no nulo de $\mathcal{A}$ es de esta forma, con M el m.c.d. interior de I y $E = \{z \in \mathbb{T} \,:\, f(z) = 0, \forall f \in I\}$.

3.2.1. Aplicaciones del teorema de Beurling-Rudin

Problemas sobre los ideales principales, ideales máximos, ideales primarios, etc., de un álgebra de Banach pueden estudiarse con más facilidad cuando se conocen sus ideales cerrados. Veamos algunos ejemplos para $\mathcal{A}$ que se discuten en [33].

Un ideal cerrado J en un álgebra de Banach A se llama *principal* si es generado por un elemento $g \in \mathcal{A}$, es decir, si J es el ideal cerrado más pequeño que contiene a g.

Teorema 3.11. *Cada ideal cerrado de $\mathcal{A}$ es principal.*

Demostración. Esbozamos la demostración. Sea

$$J = I(E, M) := \{f \in \mathcal{A} : M|f, f|_E = 0\},$$

con M una función interior asociada al conjunto cerrado E de $\mathbb{T}$ con medida de Lebesgue nula. Existe una función negativa $u \in L(\mathbb{T})$ tal que u tiene derivada acotada sobre cada subarco cerrado de $\mathbb{T} \setminus E$ y tal que para cada $w_0 \in E$,

$$\lim_{w \to w_0} u(w) = -\infty.$$

Sea Q la función exterior asociada a u:

$$Q(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} \frac{w+z}{w-z} u(w) \frac{dw}{w}\right), \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Entonces, $Q \in \mathcal{A}$ y Q se anula sobre E. Sea $g = MQ$. Entonces, $g \in \mathcal{A}$ y se anula precisamente en E de manera que $I(M, E)$ es el ideal cerrado más pequeño que contiene a g. $\square$

Observación: En la demostración anterior se construye una función exterior $Q \in \mathcal{A}$ que se anula en un conjunto cerrado $E \subset \mathbb{T}$ con medida de Lebesgue nula.

Sabemos que el espacio de ideales máximos de $\mathcal{A}$ consiste de funcionales de evaluación en puntos de $\overline{\mathbb{D}}$: un punto $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$ determina un único ideal maximal $\{f \in \mathcal{A} : f(\lambda) = 0\}$. Dado que los ideales máximos son cerrados, éstos están asociados a una función interior M y a un conjunto cerrado $E \subset \mathbb{T}$ con medida de Lebesgue nula. Tres son los casos posibles

(i) $E = \emptyset$ y $M(z) = z$.

(ii) $E = \emptyset$ y
$$M(z) = \frac{|a|}{a} \cdot \frac{a - z}{1 - \overline{a}z} \quad \text{para algún } a \in \mathbb{D}, a \neq 0.$$

(iii) $E = \{w_0\}$, con $w_0 \in \mathbb{T}$, y $M(z) = 1$.

Otra pregunta importante en las álgebras de Banach es la siguiente: ¿Es cada ideal cerrado una intersección de ideales máximos? Para el caso de $\mathcal{A}$ se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.12. *$I(E, M)$ es una interseción de ideales máximos de $\mathcal{A}$ si y sólo si M es un producto de Blaschke con ceros simples.*

3.3. Ideales cerrados de $\mathcal{A}^n$

Sea $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. El álgebra de Korenblyum $\mathcal{A}^n$ es el álgebra de todas las funciones f holomorfas en $\mathbb{D}$ tales que sus funciones derivadas $f^{(j)}$ hasta de orden n, admiten una extensión continua al círculo unitario cerrado $\overline{\mathbb{D}}$, es decir,

$$f^{(j)} \in \mathcal{A}, \ \forall j \in \{0, 1, \ldots, n\}.$$

Tomamos la norma en $\mathcal{A}^n$ dada por

$$\|f\|_n := \sum_{j=0}^{n} \|f^{(j)}\|_\infty.$$

Observemos que $\mathcal{A}^0$ es el álgebra disco $\mathcal{A}$.

Para una función $f \in \mathcal{A}^n$, m un elemento de $\{0, 1, \ldots, n\}$ y un ideal I de $\mathcal{A}^n$, se definen los conjuntos

$$E_m(f) := \{z \in \mathbb{T} : f(z) = f'(z) = \cdots = f^{(m)}(z) = 0\}$$

y

$$E_m(I) := \bigcap_{f \in I} E_m(f).$$

Observemos que $E_{m+1}(I) \subset E_m(I)$ para $m = 0, \ldots, n-1$ y que cada $E_m(I)$ es un conjunto cerrado en $\mathbb{T}$.

Para una colección $\mathcal{E} := \{E_0, E_1, \ldots, E_n\}$ de subconjuntos cerrados de $\mathbb{T}$ tales que $E_{j+1} \subset E_j$ para $j = 0, 1, \ldots, n-1$, y una función interior Q, se define

$$J(Q; \mathcal{E}) = \{f \in \mathcal{A}^n : Q | I_f \text{ y } f^{(0)}(z) = \cdots = f^{(m)}(z) = 0, \text{ si } z \in E_m,\ m = 0, 1, \ldots, n\},$$

donde I_f denota el factor interior de f. Es fácil ver que $J(Q; \mathcal{E})$ es un ideal cerrado de $\mathcal{A}^n$, posiblemente trivial.

3.3.1. Teorema de Korenblyum

En 1972, B. Korenblyum demuestra en [17] que todos los ideales de $\mathcal{A}^n$ son de la forma $J(Q; \mathcal{E})$, es decir, son estándar.

Teorema 3.13. *Sea $I \neq \{0\}$ un ideal cerrado de $\mathcal{A}^n$. Si Q_I es el m.c.d. interior de I, entonces*

$$I = J(Q_I; E_0(I), E_1(I), \ldots, E_n(I)).$$

Korenblyum también determinó las condiciones para que $J(Q; \mathcal{E}) \neq \{0\}$, usando una condición de Carleson.

3.3.2. Conjuntos de Carleson

Sea X un espacio de funciones continuas sobre $\mathbb{T}$. Un conjunto cerrado E de $\mathbb{T}$ se llama *conjunto de unicidad* para X si la única función en X que se anula en E es $f \equiv 0$. Si E no es de unicidad, se llama de *multiplicidad*.

Denotemos por $d(w, E) = \inf_{z \in E} |w - z|$, la distancia del punto w al conjunto E.

Definición 3.6. *Un conjunto de Carleson E es un subconjunto cerrado de $\mathbb{T}$ tal que* $\log d(e^{it}, E)$ *es integrable, es decir,*

$$\int_0^{2\pi} \log d(e^{it}, E)\, dt > -\infty. \tag{3.5}$$

Diremos que un subconjunto cerrado E de $\mathbb{T}$ cumple la *condición de Carleson* si satisface (3.5). Si E es un conjunto de Carleson, E tiene medida de Lebesgue cero y $\mathbb{T} \setminus E$ es abierto, de manera que $\mathbb{T} \setminus E$ es una unión numerable disjunta de subarcos abiertos (I_n) tal que $\sum |I_n| \log |I_n| > -\infty$, donde $|I_n|$ denota la medida de Lebesgue de I_n. Veremos que los conjuntos de Carleson están asociados a los conjuntos de ceros en la frontera de ciertas funciones en $\mathcal{A}$.

Para una función interior f con factorización $f = BS$, donde B es un producto de Blaschke y S el factor singular, sea Z el conjunto de ceros de B y μ la medida singular no negativa asociada a S. En [17] también se demuestra el siguiente teorema

Teorema 3.14. *El ideal $J(Q; \mathcal{E})$ es no trivial si, y sólo si, $E_0 \setminus E_n$ es un conjunto de puntos aislados,* $\operatorname{supp}(\mu) \cup (\overline{Z} \cap \mathbb{T})$ *es subconjunto de E_n y*

$$\int_0^{2\pi} \log d(e^{i\theta}, E_0 \cup Z)\, d\theta > -\infty.$$

3.4. Ideales cerrados en $\mathcal{A}^\infty$

El álgebra $\mathcal{A}^\infty$ se define como el espacio de las funciones $f \in \mathcal{A}$ tal que $f^{(j)} \in \mathcal{A}$ para cada $j \in \mathbb{N}$. A esta álgebra (no normada) se le asocia la topología inducida por $C^\infty(\mathbb{T})$.

Si I es un ideal cerrado de $\mathcal{A}^\infty$, para cada entero no negativo j, se define

$$Z^j(I) := \bigcap_{f \in I} \{z \in \overline{\mathbb{D}} : f^{(k)}(z) = 0, k = 0, 1, \ldots, j\}. \tag{3.6}$$

De (3.6) se observa que $Z(I) := \{Z^0(I), Z^1(I), Z^2(I), \ldots\}$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados de $\overline{\mathbb{D}}$. Se define el conjunto $I(Z(I))$ por

$$I(Z(I)) := \{f \in \mathcal{A}^\infty : f^{(n)}(z) = 0, \forall z \in Z^n, n = 0, 1, \ldots\}. \tag{3.7}$$

Definición 3.7. *Si* $Z = \{Z_1, Z_2, \ldots\}$ *es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados de* $\overline{\mathbb{D}}$*, se define*

$$I(Z) := \{f \in \mathcal{A}^\infty : f^{(j)}(z) = 0, z \in Z_j\}.$$

En [30], se demuestra la caracterización de los ideales cerrados de $\mathcal{A}^\infty$.

Teorema 3.15 (Taylor-Williams, 1970)**.** *Sea* I *un ideal cerrado de* $\mathcal{A}^\infty$*. Si* U *es el máximo común divisor interior de* I*, entonces*

$$I = U \cdot I(Z(I)) = \{f \in I(Z(I)) : U|f\}.$$

Para demostrar este resultado, Taylor y Williams construyen explícitamente funciones exteriores en $\mathcal{A}^\infty$ que se anulan en un conjunto de Carleson dado. Este resultado es importante en nuestro trabajo para justificar que las álgebras que construimos no son triviales.

3.4.1. Funciones exteriores en $\mathcal{A}^\infty$ que se anulan en un conjunto de Carleson

El siguiente resultado se establece en [30] y su demostración es constructiva.

Teorema 3.16. *Sea* $E \subset \mathbb{T}$ *un conjunto de Carleson. Existe una función exterior* $F \in \mathcal{A}^\infty$ *tal que para cada* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*, la derivada de orden* n *de* F*,* $F^{(n)}$*, se anula en* E*.*

La función F del teorema anterior se toma como

$$F = \exp(-G),$$

donde G está dada por

$$G(z) = G(z, \varphi) := \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \varphi(e^{i\theta})\, d\theta, \quad z \in \mathbb{D},$$

para una función φ, la cual se construye en [30], que satisface las siguientes condiciones:

C.1 Existe $M > 0$ tal que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} |\varphi(e^{i\theta})|\, d\theta \leq M; \tag{3.8}$$

C.2 La función φ es de clase C^∞ en $\mathbb{T} \setminus E$ y

$$\left| \frac{d^n}{d\theta^n} \varphi(e^{i\theta}) \right| \leq \frac{C_n}{(\rho(e^{i\theta}))^{p_n}}, \tag{3.9}$$

para ciertas constantes $C_n, p_n \geq 0$, donde $\rho(e^{i\theta})$ la distancia de $e^{i\theta}$ a E;

C.3 $\varphi \geq 0$ y para cada $C > 0$,

$$\varphi(e^{i\theta}) + C \log \rho(e^{i\theta}) \to +\infty \text{ si } \rho(e^{i\theta}) \to 0. \tag{3.10}$$

Ya antes, Carleson prueba en [7] que dado un conjunto cerrado E del intervalo $(0, 2\pi)$ con cierta propiedad, es posible construir una función no nula f, suficientemente regular, que se anula sobre E. Describimos este resultado.

Partimos de un conjunto cerrado E, subconjunto del intervalo $(0, 2\pi)$. Para $t > 0$, definimos el conjunto E_t de la siguiente manera:

$$E_t := \{s \in (0, 2\pi) : d(s, E) \leq t\}.$$

Se define la función φ_E por

$$\varphi_E(t) := |E_t|,$$

donde $|E_t|$ denota la medida de Lebesgue de E_t. Consideremos la integral

$$\int_0^1 t^{-1} \varphi_E(t) dt. \tag{3.11}$$

Debido a que E es cerrado, el complemento de E es abierto y puede representarse como una unión numerable de intervalos abiertos (I_n). Carleson prueba en [7] que la integral en (3.11) converge si, y sólo si, la medida de Lebesgue de E es cero y

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \log \frac{1}{|I_n|} < \infty.$$

En este trabajo, Carleson prueba también el siguiente teorema.

Teorema 3.17 (Carleson, 1952). *Si la integral (3.11) converge, entonces existe una función exterior f tal que*

$$f(e^{i\theta}) = 0, \quad \forall \theta \in E.$$

Demostración. Sean (I_n), con $I_n = (a_n, b_n)$, la colección de los intervalos complementarios de E, donde $a_1 = 0$ y $b_2 = 2\pi$. Definimos la función real

$$h(t) = K\left(\log\frac{1}{b_n - t} + \log\frac{1}{t - a_n}\right), \text{ para } t \in I_n, \tag{3.12}$$

donde K es un número real mayor que 1. Observemos que esta definición de h es casi en todo el intervalo $(0, 2\pi)$ debido a que la medida de E es cero. Del hecho de que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| \log\frac{1}{|I_n|} < \infty,$$

se sigue que

$$\int_0^{2\pi} |h(\theta)|\, d\theta < \infty,$$

de manera que podemos definir la siguiente función f por:

$$f(z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} h(\theta)\, d\theta\right). \tag{3.13}$$

Esta función f es analítica y acotada en $\mathbb{D}$. Veamos que si $\theta \in E$, entonces $f(e^{i\theta}) = 0$. Para el caso en que $\theta = a_n$ o $\theta = b_n$, para algún n, se tiene que $f(e^{i\theta}) =$ porque $h(\theta) \to \infty$. Ahora, sea $\theta \in E$ arbitario y sea I_δ el intervalo abierto $(\theta - \delta, \theta + \delta)$, con $\delta > 0$. Debido a que la medida de E es cero, I_δ intercepta a algunos intervalos complementarios. Observemos que

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{1}{2\delta}\int_{I_\delta} h(\theta)\, d\theta \geq \lim_{\delta\to 0} \frac{K}{2\delta}\log\frac{1}{2\delta} \cdot 2\delta = \infty.$$

Luego, $f(e^{i\theta}) = 0$ pues $h(\theta) = \infty$.

$\square$

3.5. Ideales cerrados con coespectro numerable

3.5.1. Conjetura de Bennet–Gilbert

Sea $A(\mathbb{T})$ el *álgebra de Wiener* definida por

$$A(\mathbb{T}) := \left\{ f \in C(\mathbb{T}) \, : \, \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)| < +\infty \right\},$$

donde $\hat{f}(n)$ es el n-ésimo coeficiente de Fourier de f. Dotamos a $A(\mathbb{T})$ con la norma

$$\|f\|_1 := \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\hat{f}(n)|.$$

Sea A^+ el álgebra de las series de Taylor absolutamente convergentes en $\mathbb{D}$, esto es, de las funciones holomorfas $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ tal que si

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(k)}(0)\, z^n, \quad \forall z \in \mathbb{D}$$

se cumple

$$\|f\|_1 := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |f^{(n)}(0)| < +\infty. \tag{3.14}$$

En este caso, la función $\|\cdot\|_1$ definida en (3.14) es una norma para A^+. Observemos que $A^+ \subset \mathcal{A}$ y, si identificamos la función $f \in A^+$ con su función frontera $f|_{\mathbb{T}}$, se tiene que

$$A^+ = \{f \in A(\mathbb{T}) : \hat{f}(n) = 0, \forall n < 0\}.$$

El estudio del álgebra A^+ fue iniciada por Lennart Carleson ([7], 1959) para tratar el problema de los conjuntos de unicidad (ver la sección 3.1).

Sea $I \neq \{0\}$ un ideal cerrado de A^+ y Q_I el m.c.d. interior de I. También, sean

$$h(I) := \{z \in \overline{\mathbb{D}} \, : \, f(z) = 0, \forall f \in I\}, \quad h_0(I) := \mathbb{T} \cap h(I)$$

e I^A el ideal cerrado generado por I en $A(\mathbb{T})$. Para un conjunto $E \subset \mathbb{T}$ cerrado,

$$I^+(E) := \{f \in A^+ \, : \, f(z) = 0, \forall z \in E\}.$$

Concretamente, Carleson probó en [7] que $I^+(E) = \{0\}$ si E es un conjunto de Carleson.

Kahane [12] caracteriza a los ideales cerrados I de A^+ tal que $h_0(I)$ es finito. Bennett y Gilbert [6] generalizan este resultado y publican la descripción completa de los ideales cerrados I de A^+ para el caso en que $h_0(I)$ es numerable.

Teorema 3.18 (Bennet-Gilbert)**.** *Si I es un ideal cerrado de A^+ y $h_0(I)$ es numerable, entonces*

$$I = I^+(h_0(I)) \cap Q_I H^\infty(\mathbb{D}) = \{f \in A^+ : Q_I | f, f|_{h_0(I)} \equiv 0\},$$

donde Q_I es el m.c.d. interior de I.

Con base en el resultado de Beurling-Rudin y sus propios trabajos, ellos conjeturan que todos los ideales de A^+ tienen esta forma

> **Conjetura de Bennet-Gilbert (1972).** Todo ideal I de A^+ puede escribirse como
> $$I = I^A \cap Q_I \cdot H^\infty.$$

La conjetura de Bennett-Gilbert provocó un intenso estudio tanto del álgebra A^+ como de otras álgebras de funciones holomorfas en el disco unitario. Se hallaron varios casos relacionados con subconjuntos del círculo $\mathbb{T}$ en donde la conjetura resultaba positiva [9, 10, 11, 12, 35, 30]. Sin embargo, J. Esterle ([10], 1994) construyó un ideal cerrado I de A^+ tal que

$$I \neq I^A \cap U_I \cdot H^\infty.$$

Teorema 3.19 (Esterle, 1994)**.** *Existe un conjunto E y un ideal cerrado I de A^+ tal que $Q_I = 1$, $h_0(I) = E$ y no satisface la conjetura de Bennet-Gilbert.*

3.5.2. Condiciones de Ditkin

En [5], Agrafeuil y Zarrabi caracterizan a los ideales cerrados con coespectro numerable de ciertas álgebras A que están encajadas continuamente en el álgebra del disco $\mathcal{A}$ y que satisfacen ciertas condiciones. Para ser más precisos, A es cualquier álgebra de Banach conmutativa con unidad y semisimple, donde sus elementos son funciones holomorfas en $\mathbb{D}$ y continuas en $\overline{\mathbb{D}}$, con operaciones puntuales y encajada continuamente en el álgebra de Banach $\mathcal{A}$. Además, se supone que A satisface las siguientes condiciones:

(H1) El espacio de las funciones polinomiales es denso en A, es decir, para cada $f \in \mathsf{A}$ y $\epsilon > 0$, existe un polinomio p tal que

$$\|f - p\|_{\mathsf{A}} < \epsilon.$$

(H2) El radio espectral de la función polinomial $\alpha(z) = z$ es 1, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \|\alpha^n\|_{\mathsf{A}}^{1/n} = 1.$$

(H3) Existe $k \geq 0$ y $C > 0$ tales que para $f \in \mathsf{A}$ y $|\lambda| < 2$,

$$|1 - |\lambda||^k \cdot \|f\|_{\mathsf{A}} \leq C\, \|(\alpha - \lambda)f\|_{\mathsf{A}}.$$

Sea $N_{\mathsf{A}} := \text{máx}\{n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \,:\, \mathsf{A} \subset \mathcal{A}^n\}$. Agrafeuil y Zarrabi demuestran que la condición (H3) implica la existencia de este máximo.

Condición analítica de Ditkin. Diremos que el álgebra A satisface la *condición analítica de Ditkin* si para cada $\omega \in \mathbb{T}$ y cada $f \in \mathsf{A}$ tal que $f^{(j)}(\omega) = 0$ para $j = 0, \ldots, N_{\mathsf{A}}$, existe una sucesión $\delta(\omega; f) := (\delta_n)$ en A que satisface las siguientes dos propiedades:

(A1) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $\delta_n(\omega) = 0$.

(A2) La sucesión $(\delta_n f)$ converge a f en A, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \|(1 - \delta_n)f\|_{\mathsf{A}} = 0.$$

Diremos que A satisface la *condición analítica fuerte de Ditkin* si la sucesión (δ_n) puede elegirse sin que dependa de f.

Diremos que un ideal cerrado I de A es *estándar* si

$$\begin{aligned} I &= I(U_I; h_0(I), \ldots, h_{N_{\mathsf{A}}}(I)) \\ &:= \{f \in \mathsf{A} \,:\, U_I | f, f^{(j)} \text{ se anula en } h_j(I), j = 0, 1, \ldots, N_{\mathsf{A}}\}, \end{aligned} \tag{3.15}$$

donde U_I denota el máximo común divisor interior de I y

$$h_j(I) := \{z \in \mathbb{T} \,:\, f(z) = f'(z) = \cdots = f^{(j)}(z) = 0, f \in I\}.$$

El siguiente teorema es el resultado principal de [5] y caracteriza a los ideales cerrados I de ciertas álgebras de funciones holomorfas A cuando I tiene coespectro numerable y A cumple las condiciones arriba mencionadas.

Teorema 3.20 (Agrafeuil-Zarrabi)**.** *Los ideales cerrados con coespectro numerable de un álgebra de Banach $\mathsf{A} \subset \mathcal{A}$ que satisface las condiciones (H1), (H2), (H3) y la condición de Ditkin, son estándar.*

En [32] se debilitan las hipótesis del teorema anterior; se introduce la siguiente condición:

> Decimos que el álgebra de funciones holomorfas A satisface la condición (**D**) si
>
> > Para cada $\omega \in \mathbb{T}$ existe un entero no negativo N_ω tal que los funcionales
> >
> > $$\mathsf{A} \ni f \mapsto f^{(j)}(\omega), \quad (j = 0, 1, \ldots, N_\omega)$$
> >
> > están bien definidos y son continuos y existe una sucesión (σ_n) en A tal que $\sigma_n(\omega) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, y
> >
> > $$\lim_{n\to\infty} \|(\alpha - \omega)^{N_\omega+1}\sigma_n - (\alpha - \omega)^{N_\omega+1}\|_{\mathsf{A}} = 0.$$

Teorema 3.21 (Sołtysiak–Wawrzyńczyk)**.** *Sea A un álgebra de Banach con unidad, subálgebra de la álgebra del disco $\mathcal{A}$. Supongamos además que A satisface las condiciones (H1), (H2), (H3) y (D). Si I es un ideal cerrado de A y $h_0(I)$ es numerable, entonces I es estándar.*

Capítulo 4

El álgebra $\mathcal{A}_G^n$

4.1. Introducción

Sea $\mathbb{N}_0$ el conjunto de los enteros no negativos. Para $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{T}_+^{(n)}(t^n)$ denotará la completación del espacio $C_0^\infty([0,\infty))$, el espacio de funciones de prueba sobre $[0,\infty)$, con la norma

$$\|f\| := \int_0^\infty |f^{(n)}(t)|\, t^n\, dt \quad (f \in C_0^\infty([0,\infty)).$$

Para $f, g \in C_0^\infty([0,\infty))$, la *convolución* de f con g, definida por

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(s) g(t-s)\, ds, \quad t \geq 0,$$

es cerrada, y

$$(f * g)^{(n)}(t) = (f^{(n)} * g)(t) + \sum_{j=0}^{n-1} f^{(n-1-j)}(0)\, g^{(j)}(t), \quad t \geq 0,$$

para $n \in \mathbb{N}$.

El espacio $\mathcal{T}_+^{(n)}(t^n)$ es un álgebra de Banach respecto a la convolución sobre el conjunto $(0,\infty)$. Además, es semisimple, conmutativa y sin unidad, y es una subálgebra de $L^1(\mathbb{R}^+) \equiv \mathcal{T}_+^{(0)}(t^0)$.

Arendt y Kellerman introducen en [3] el álgebra $\mathcal{T}_+^{(n)}(t^n)$ al relacionarla con el problema de Cauchy en la teoría de los semigrupos de distribuciones. En trabajos recientes (ver [20], [21] y [22]) se desarrolla una teoría del cálculo fraccionario donde se aplican.

Consideremos el espacio $\mathcal{A}^{(n)}(\mathbb{C}^+)$ que consiste de todas las funciones F, holomorfas sobre el dominio $\mathbb{C}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ y tales que las funciones $\zeta^j F^{(j)}$ se extienden continuamente a $\overline{\mathbb{C}^+}$, donde $\zeta(z) := z$ es la función identidad en $\mathbb{C}$ y $j = 0, 1, \ldots, n$, y satisfacen en 0 e ∞

$$\lim_{z \to 0} z^j F^{(j)}(z) = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, n);$$

y

$$\lim_{z \to \infty} z^j F^{(j)}(z) = 0 \ (j = 0, 1, \ldots, n).$$

Dotamos al espacio $\mathcal{A}^{(n)}(\mathbb{C}^+)$ con la siguiente norma:

$$\|F\| := \sum_{j=0}^{n} \max_{\operatorname{Re} z \geq 0} |z|^j |F^{(j)}(z)|, \quad (F \in \mathcal{A}^{(n)}(\mathbb{C}^+)).$$

Con la multiplicación puntual, $\mathcal{A}^{(n)}(\mathbb{C}^+)$ es un álgebra de Banach (ver [21]) y está relacionada con $\mathcal{T}_+^{(n)}(t^n)$ de la siguiente manera: el espacio de ideales máximos de $\mathcal{T}_+^{(n)}(t^n)$ puede ser identificado con $\overline{\mathbb{C}^+}$ y sus transformadas de Gelfand resultan ser sus transformadas de Laplace $\mathcal{L}$,

$$\mathcal{L}f(z) = \int_0^\infty f(t) e^{-zt} \, dt.$$

La imagen de $\mathcal{T}_+^{(n)}(t^n)$ bajo la acción de $\mathcal{L}$ es subconjunto de $\mathcal{A}^{(n)}(\mathbb{C}^+)$, y la transformada de Laplace

$$\mathcal{L} : \mathcal{T}_+^{(n)}(t^n) \to \mathcal{A}^{(n)}(\mathbb{C}^+)$$

es un homomorfismo de álgebras de Banach acotado. Además, $\mathcal{L}$ tiene rango denso (ver [22]).

Una caracterización de tipo Nyman de los ideales densos de $\mathcal{T}_+^{(n)}(t^n)$ fue dada en [21]: sean $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$, y $J \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^+)$; definimos:

$$\gamma(f) := \begin{cases} \inf \operatorname{supp}(f), & \text{si } f \neq 0; \\ \infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y

$$\gamma(J) := \inf\{\gamma(f) : f \in J\}.$$

Para un ideal I de $\mathcal{T}_+^{(n)}(t^n)$, el coespectro de I está definido por

$$h(I) := \{z \in \overline{\mathbb{C}^+} \,:\, \mathcal{L}f(z) = 0,\ \forall f \in I\}.$$

Galé, Miana y Royo demuestran en [21] el siguiente teorema.

Teorema 4.1. *Sea I un ideal de $\mathcal{T}_+^{(n)}(t^n)$. Entonces I es denso si, y sólo si, I tiene coespectro vacío y $\gamma(I) = 0$.*

La transformación de Möbius

$$M(z) := \frac{1+z}{1-z},$$

transforma el disco unitario $\mathbb{D}$ sobre el semiplano derecho $\mathbb{C}^+$ y $\overline{\mathbb{D}}$ sobre $\overline{\mathbb{C}^+} \cup \{\infty\}$. Componiendo M con las funciones de $\mathcal{A}^{(n)}(\mathbb{C}^+)$ obtenemos el álgebra de Banach $\mathcal{A}_1^{(n)}(\mathbb{D})$.

El espacio $\mathcal{A}_1^{(n)}(\mathbb{D})$ consiste de todas las funciones $f \in \mathcal{A}$ tal que: (a) $f(1) = 0$; (b) $(1-\zeta^2)^j f^{(j)} \in \mathcal{A}$ y (c)

$$\lim_{z \to \pm 1} (1-z^2)^j f^{(j)}(z) = 0,$$

para $j \in \{1, \ldots, n\}$ y $\zeta(z) := z$, con norma

$$\|f\| = \sum_{j=0}^{n} \|(1-\zeta^2)^j f^{(j)}\|_\infty, \quad f \in \mathcal{A}_1^{(n)}(\mathbb{D}).$$

En [23], Galé y Wawrzyńczyk demuestran que los ideales cerrados de $\mathcal{A}_1^{(n)}(\mathbb{D})$ son estándar:

Teorema 4.2. *Si I es un ideal cerrado de $\mathcal{A}_1^{(n)}(\mathbb{D})$, existe una función interior Q_I y una colección decreciente $E_0, E_1, \ldots, E_n$ de subconjuntos de $\mathbb{T}$ tal que*

$$I = \{f \in \mathcal{A}_1^{(n)}(\mathbb{D}) \,:\, Q_I | f, f^{(j)}|_{E_j} = 0, (j = 0, \ldots, n)\}.$$

Este es un ejemplo de un subálgebra de $\mathcal{A}$ sin unidad en donde los ideales cerrados son estándar.

4.2. Definición del álgebra $\mathcal{A}_G^n$

Para el álgebra de Banach $\mathcal{A}_G^n$, hemos sustituido en $\mathcal{A}_1^{(n)}(\mathbb{D})$ la función ζ^2-1 por una función holomorfa G, libre de ceros en $\mathbb{D}$. Sea $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definiremos un álgebra asociada a una función $G \in \mathcal{A}$.

Sea G una función en $\mathcal{A}$ tal que $G(z) \neq 0$ si $z \in \mathbb{D}$. Sea

$$h_0(G) := \{z \in \mathbb{T} : G(z) = 0\},$$

con $h_0(G)$ de medida de Lebesgue 0.

Observemos que, debido a que $G \in \mathcal{A}$ y no tiene ceros en $\mathbb{D}$, $G = S_G E_E$, con

$$S_G(z) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, d\mu_G(\theta)\right)$$

para alguna medida singular positiva μ y

$$E_G(z) = e^{i\theta_0}\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\, \log|G(e^{i\theta})|\, d\theta\right).$$

Definición 4.1. *Sea $\mathcal{A}_G^n$ el conjunto de las funciones $f \in \mathcal{A}$ tales que*

$$Gf', G^2 f^{(2)}, \ldots, G^n f^{(n)} \in \mathcal{A}.$$

Observemos que $\mathcal{A}_G^n$ es un espacio vectorial complejo. De hecho, por la regla de Leibniz, si $f, g \in \mathcal{A}_G^n$ y $z \in \mathbb{D}$,

$$(G^j (fg)^{(j)})(z) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} G^k(z) f^{(k)}(z) G^{j-k}(z) f^{(j-k)}(z), \tag{4.1}$$

es fácil notar que $\mathcal{A}_G^n$ es un subálgebra conmutativa de $\mathcal{A}$. Como se puede observar, $\mathcal{A}_G^n$ es un álgebra tipo Korenblyum $\mathcal{A}^n$ con un peso G.

Observemos que si $n = 0$, $\mathcal{A}_G^n = \mathcal{A}$, y que

$$\mathcal{A}^n \subset \mathcal{A}_G^n \subset \mathcal{A}.$$

$\mathcal{A}_G^n = \mathcal{A}^n$ para ciertas elecciones de G (si $G = 1$ o $G(z) = \exp z$, por ejemplo). Veamos algunos ejemplos para observar que $\mathcal{A}_G^n$ no es trivial.

Ejemplo 6. *1. Si $G \in \mathcal{A}^n$ y $h_0(G) = \{z_0\}$, con z_0 un cero de multiplicidad n, entonces las funciones G^s, con $0 < s < 1$, son elementos de $\mathcal{A}^n_G$ (pero no de $\mathcal{A}^n$).*

2. Si $G(z) = z - z_0$, con $z_0 \in \mathbb{T}$, entonces $(z - z_0)\log^k(z - z_0) \in \mathcal{A}^n_G$.

Dotaremos de una topología al álgebra $\mathcal{A}^n_G$ a través de una norma. Para $f \in \mathcal{A}^n_G$, la siguiente función está bien definida

$$\|f\|_{G,n} := \sum_{j=0}^{n} \|G^j f^{(j)}\|_\infty, \tag{4.2}$$

donde $\|\cdot\|_\infty$ es la norma en $\mathcal{A}$.

La notación de la norma. Para simplificar la notación de (4.2), usaremos $\|f\|_G$ en lugar de $\|f\|_{G,n}$.

Si $f, g \in \mathcal{A}^n_G$, se tiene por (4.1),

$$\begin{aligned} \|fg\|_G &= \sum_{j=0}^{n} \left\| \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} G^k f^{(k)} G^{j-k} g^{(j-k)} \right\|_\infty \\ &\leq \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} \|G^k f^{(k)}\|_\infty \, \|G^{j-k} g^{(j-k)}\|_\infty \\ &\leq C \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{n} \|G^k f^{(k)}\|_\infty \, \|G^j g^{(j)}\|_\infty, \end{aligned}$$

para algún $C > 0$, de manera que

$$\|fg\|_G \leq C \, \|f\|_G \, \|g\|_G. \tag{4.3}$$

Esta desigualdad (4.3) garantiza que la multiplicación en $\mathcal{A}^n_G$ es separadamente continua.

Toda función polinomial p es elemento de $\mathcal{A}^n_G$ dado que $p^{(j)} \in \mathcal{A}$, $\forall j \in \mathbb{N}$.

Definición 4.2. *El álgebra de Banach $\mathcal{A}^n_G$ es la completación del espacio de polinomios $\mathcal{P}$ en $\mathcal{A}^n_G$ respecto a la norma $\|\cdot\|_G$.*

De la definición de $\mathcal{A}^n_G$ se sigue que $f \in \mathcal{A}^n_G$ si, y sólo si, existe una sucesión (p_m) de polinomios que converge a f respecto a la norma $\|\cdot\|_G$, equivalentemente, para

$j = 0, 1, \ldots, n,$

$$\sup_{|z|=1} |(G^j (p_m - f)^{(j)})(z)| \to 0, \quad \text{si } m \to \infty. \tag{4.4}$$

Siendo $\mathcal{A}_G^n$ un álgebra de Banach, por (4.3), existe una norma $\|\cdot\|'_G$, equivalente a $\|\cdot\|_G$, que satisface la desigualdad submultiplicativa:

$$\|fg\|'_G \leq \|f\|'_G \, \|g\|'_G \quad (f, g \in \mathcal{A}_G^n)$$

y

$$\|1\|'_G = 1.$$

De esta manera, no perdemos generalidad si suponemos que $C = 1$ en (4.3).

4.3. Propiedades básicas de $\mathcal{A}_G^n$

El comportamiento de las funciones en $\mathcal{A}_G^n$ es muy regular en $\overline{\mathbb{D}} \setminus h_0(G)$ como se muestra en el siguiente lema.

Lema 4.1. *Sea $f \in \mathcal{A}_G^n$. Entonces, f es de clase C^n en $\overline{\mathbb{D}} \setminus h_0(G)$.*

Demostración. Es claro que f es de clase C^n en $\mathbb{D}$. Ahora, si $w \in \mathbb{T}$ y $G(w) \neq 0$, existe una vecindad U_w de w tal que $G \neq 0$ en U_w. Para $j = 0, \ldots, n$,

$$g_j := G^j f^{(j)}$$

es continua en $\overline{\mathbb{D}}$, entonces

$$f^{(j)}(z) = \frac{g_j(z)}{G^j(z)}, \forall z \in U_w,$$

es continua en U_w. $\square$

Un lema importante que nos permite usar los resultados sobre el álgebra de Korenblyum es el siguiente.

Lema 4.2. *Si f es un elemento del álgebra de Korenblyum $\mathcal{A}^n$, entonces $f \in \mathcal{A}_G^n$ y*

$$\|f\|_G \leq K \|f\|_n, \tag{4.5}$$

para alguna constante positiva K.

Demostración. Si $f \in \mathcal{A}^n$, $z \in \overline{D}$ y $j = 0, 1, \ldots, n$, se tiene $|G^j f^{(j)}(z)| \leq K_j |f^{(j)}(z)|$, para algún $K_j > 0$. De esto se sigue la desigualdad. Podemos observar ahora que en $\mathcal{A}^n$ la topología asociada a $\|\cdot\|_n$ es más fuerte que la topología asociada a $\|f\|_G$. Por la densidad de los polinomios en $\mathcal{A}^n$, existe una sucesión de polinomios (p_m) que converge a f en $\mathcal{A}^n$. Por la relación entre las topologías, esta sucesión también converge a f en $\mathcal{A}^n_G$ de manera que $f \in \mathcal{A}^n_G$. $\square$

Si f es una función holomorfa en $\mathbb{D}$, $0 < t < 1$,

$$f_t(z) := f(tz).$$

Se cumple que

$$f_t^{(j)}(z) = t^j f^{(j)}(tz).$$

Proposición 4.1. *Si $f \in \mathcal{A}^n_G$, entonces*

$$\lim_{t \to 1^-} \|f_t - f\|_G = 0.$$

Demostración. Dado $f \in \mathcal{A}^n_G$, existe una sucesión de polinomios (p_m) tal que

$$\lim_{m \to \infty} \|p_m - f\|_G = 0.$$

Para t tal que $0 < t < 1$, tomamos el polinomio $p_{m,t}(z) := p_m(tz)$. Se cumple que

$$\lim_{t \to 1^-} \|p_{m,t} - f_t\|_G = 0.$$

También se cumple que

$$\lim_{t \to 1^-} \|p_{m,t} - p_m\|_n = 0.$$

Por un procedimiento estándar se sigue la conclusión. $\square$

Consideremos ahora un caso más específico considerando que G sea un elemento del álgebra de Korenblyum de orden n. En este caso, se tiene el siguiente resultado.

Lema 4.3. *Si $G \in \mathcal{A}^n$ y $f \in \mathcal{A}^n_G$, entonces $G^n f \in \mathcal{A}^n$.*

Demostración. Si $k = 0, 1, \ldots, n$, la derivada de orden k de G^n, $(G^n)^{(k)}$, puede expresarse como

$$(G^n)^{(k)} = G^{n-k} P(G, G', \ldots, G^{(k)}),$$

donde $P(G, G', \ldots, G^{(k)})$ denota una función que es un polinomio en G y sus derivadas hasta de orden k. Luego, puesto que $G \in \mathcal{A}^n$, $(G^n)^{(k)} \in \mathcal{A}$. Entonces,

$$\begin{aligned}(G^n f)^{(j)} &= \sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} f^{(m)} (G^n)^{(j-m)} \\ &= \sum_{m=0}^{j} \binom{j}{m} G^m f^{(m)} G^{n-j} P(G, G', \ldots, G^{(j-m)}),\end{aligned} \tag{4.6}$$

donde P es un polinomio. De esta identidad notamos que para $j = 0, 1, \ldots, n$, $(G^n f)^{(j)}$ admite una extensión continua a $\overline{\mathbb{D}}$. Por lo tanto, $G^n f \in \mathcal{A}^n$. $\square$

Proposición 4.2. *Sea $G \in \mathcal{A}^n$ y sea $\gamma : \mathcal{A}^n_G \to \mathcal{A}^n$ el operador multiplicación por G^n dado por*

$$\gamma(f) = G^n f.$$

Entonces γ es lineal, continuo e inyectivo.

Demostración. La linealidad y la inyectividad son obvias. De (4.6)

$$\sup_{z \in \mathbb{D}} |(G^n f)^{(j)}(z)| \leq C \sum_{m=0}^{n} \sup_{z \in \mathbb{D}} \left| G^m f^{(m)}(z) \right|,$$

donde C es una constante que depende sólo de G y j. De esta manera,

$$\|\gamma(f)\|_n \leq C \|f\|_G,$$

para alguna constante positiva C. $\square$

Capítulo 5

Ideales cerrados de $\mathcal{A}_G^n$ con coespectro numerable

5.1. Introducción

Dado un ideal I de $\mathcal{A}_G^n$, el conjunto

$$h_0(G) = \{z \in \mathbb{T} : f(z) = 0, \, \forall f \in I\},$$

se llama *coespectro* de I. Usando resultados y técnicas descritas en [5] y [32], en este capítulo describimos aquellos ideales cerrados I de $\mathcal{A}_G^n$ que poseen coespectro numerable. Para esto introducimos ciertas condiciones sobre un subálgebra de $\mathcal{A}$ que garantizan que sus ideales cerrados con coespectro numerable sean estándar (teorema 5.4). Las condiciones de tipo Ditkin desempeñan un rol central en esta caracterización.

5.2. Un lema básico

En un espacio topológico Hausdorff y compacto X, $C(X)$ denotará el álgebra de Banach de las funciones $f : X \to \mathbb{C}$ continuas, con la norma de la convergencia uniforme

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \, : \, x \in X\}.$$

Si F es un subconjunto de X, usamos la notación $f|_F = 0$ para afirmar que f se anula en F. Se tiene el siguiente resultado:

Proposición 5.1. *Sea X un espacio topológico compacto y Hausdorff. Sea $F \subset X$. Sea (ψ_m) una sucesión en $C(X)$ uniformemente acotada, con $\psi_m|_F = 0$, para cada m, que converge en X uniformemente sobre compactos de $X \setminus F$, a la función ψ definida por*

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & si\ x \in F; \\ 1, & si\ x \in X \setminus F. \end{cases}$$

Sean $f : X \to \mathbb{C}$ una función tal que $f|_F = 0$ y (f_m) una sucesión en $C(X)$ que converge uniformemente a f en X. Entonces, la sucesión producto $(\psi_m f_m)$ converge uniformemente a f en X.

Demostración. Sea $M > 1$ una cota uniforme de (ψ_m), esto es,

$$|\psi_m(x)| \leq M, \quad \forall x \in X, m \in \mathbb{N}.$$

Dado $\epsilon > 0$, por un procedimiento estándar se prueba que existe U de X y un entero positivo N_1, tales que

$$|f_m(x)| < \frac{\epsilon}{2M}, \quad (x \in U, m > N_1).$$

En particular, $|f(x)| < \frac{\epsilon}{2M}$ si $x \in U$, de manera que $F \subset U$. Entonces, para $x \in U$ y $m > N_1$,

$$|(\psi_m f_m)(x) - f(x)| \leq |\psi_m(x)||f_m(x)| + |f(x)| \leq M\frac{\epsilon}{2M} + \frac{\epsilon}{2M} < \epsilon.$$

Por otro lado, puesto que $X \setminus U$ es compacto, por hipótesis (ψ_m) converge uniformemente a ψ en $X \setminus U$. Luego, existe $N > N_1$ tal que si $m > N$ y $x \in X \setminus U$,

$$|\psi_m(x) - 1| < \frac{\epsilon}{2(\|f\|_\infty + 1)},$$

y

$$|f_m(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Por lo tanto, si $m > N$ y $x \in X \setminus U$ entonces

$$|(\psi_m f_m)(x) - f(x)| \leq |\psi_m(x)||f_m(x) - f(x)| + |f(x)||\psi_m(x) - 1| < \epsilon.$$

De hecho, si $x \in X$ y $m > N$,

$$|(\psi_m f_m)(x) - f(x)| < \epsilon.$$

$\square$

5.3. Propiedades de $\mathcal{A}_G^n$

Observemos que si

$$\|f\|_\partial := \sum_{j=0}^{n} \|f^{(j)} G^j\|_{\mathbb{T}}, \tag{5.1}$$

donde

$$\|g\|_{\mathbb{T}} := \sup\{|g(z)| \,:\, z \in \mathbb{T}\},$$

entonces, para $f \in \mathcal{A}_G^n$,

$$\|f\|_G = \|f\|_\partial.$$

Demostramos que $\mathcal{A}_G^n$ satisface ciertas condiciones, introducidas en [5], que resultan fundamentales para la caracterización de ideales que poseen coespectro numerable.

En este capítulo, ζ denotará la función identidad, $\zeta(z) := z$, en $\overline{\mathbb{D}}$.

Lema 5.1. *La función identidad ζ satisface:*

$$\lim_{m\to\infty} \|\zeta^m\|_G^{1/m} = 1.$$

Demostración. Recordemos que existe $C > 0$ tal que

$$1 \leq \|\zeta^m\|_G \leq C \ \ \|\zeta^m\|_n.$$

El resultado se sigue porque (ver [5])

$$\lim_{m\to\infty} \|\zeta^m\|_n^{\frac{1}{m}} = 1.$$

$\square$

Sea M un número real positivo tal que

$$|G(z)| \leq M, \forall z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

Lema 5.2. *Existen constantes $k \geq 0$ y $K > 0$ tales que*

$$|1 - |\lambda||^k \, \|f\|_G \leq K \, \|(\zeta - \lambda)f\|_G, \quad f \in \mathcal{A}_G^n, \; |\lambda| < 2.$$

Demostración. Este hecho es evidente si $|\lambda| = 1$. Ahora, sean $1 \neq |\lambda| < 2$ y $f \in \mathcal{A}_G^n$. Para $|z| = 1$, $|1 - |\lambda|| \leq |z - \lambda|$. De allí que se cumpla la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{\zeta - \lambda} \right\|_\partial &= \sum_{j=1}^{n+1} (j-1)! \sup_{|z|=1} |G^{j-1}(z)(z-\lambda)^{-j}| \\ &\leq \frac{(n+1)! M^{j-1}}{|1 - |\lambda||^{n+1}}. \end{aligned}$$

pues $|1 - |\lambda||^{n+1} \leq |1 - |\lambda||^j$, para $j = 1, \ldots, n+1$. Luego:

$$\|f\|_\partial \leq C \|(\zeta - \lambda)f\|_G \|(\zeta - \lambda)^{-1}\|_\partial \leq \frac{CM(n+1)!}{|1 - |\lambda||^{n+1}} \|(\zeta - \lambda)f\|_G.$$

La conclusión se obtiene de la última de estas desigualdades. □

Otra propiedad deseable es que los funcionales $f \mapsto f^{(j)}(w)$ sean continuos en cada punto $w \in \mathbb{T}$.

Lema 5.3. *Para $w \in \mathbb{T}$, existe el entero n_w definido por*

$$n_w = \max\{j \in \mathbb{N}_0 : \delta_j(f) := f^{(j)}(w) \textit{ esta bien definido y es continuo}\}.$$

Demostración. Para el caso que $w \in h_0(G)$, $n_w = 0$ pues f es continua en w si $f \in \mathcal{A}_G^n$ y $f'(w)$ no necesariamente existe (tomemos $f(z) = (z - w)^{1/2}$, donde $G(w) = 0$, por ejemplo). Consideremos el caso en que $w \in \mathbb{T} \setminus h_0(G)$. Por la continuidad de G en w, existe U_w, vecindad de w, tal que $G(z) \neq 0$, para cada $z \in U_w$. Luego, si una sucesión de funciones (f_m) converge a f respecto a la norma $\| \cdot \|_G$, para $j = 0, 1, \cdots, n$, $f^{(j)}(z)$ existe en U_w y el funcional $f \mapsto f^{(j)}(w)$, es continuo. Sin embargo, $f^{(n+1)}(w)$ no necesariamente existe. Por tanto, $n_w = n$ en este caso. □

En lo sucesivo, pedimos que la función G' admita extensión continua a $\overline{\mathbb{D}}$ por lo que pedimos que $G \in \mathcal{A}^1$.

Lema 5.4. *Supongamos $G \in \mathcal{A}^1$. Sea m un entero positivo y $w \in h_0(G)$. Entonces cada rama de la función $\varphi(z) = (z-w)^{1/m}$ es elemento de $\mathcal{A}^n_G$.*

Demostración. Para un entero positivo k, definimos $r_k = 1 - 1/k$, de manera que $r_k z - w \neq 0$ si $|z| \leq 1$. Consideramos la sucesión de funciones (φ_k) dada por

$$\varphi_k(z) := (r_k z - w)^{\frac{1}{m}}, \quad (|z| \leq 1),$$

definidas sobre un dominio apropiado que contiene a $\overline{\mathbb{D}}$.

Para cada k, φ_k es holomorfa en $\mathbb{D}$. Si

$$C_j := \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m} - 2\right)\cdots\left(\frac{1}{m} - j + 1\right),$$

las derivadas de φ_k están dadas por

$$\varphi_k^{(j)}(z) = (r_k)^j C_j \frac{(r_k z - w)^{1/m}}{(r_k z - w)^j}. \tag{5.2}$$

También,

$$\varphi^{(j)}(z) = C_j \frac{(z-w)^{1/m}}{(z-w)^j}. \tag{5.3}$$

Como $\mathcal{A}^n \subset \mathcal{A}^n_G$, probaremos que φ_k converge a φ en la norma de $\mathcal{A}^n$ probando que para $j = 0, 1, \ldots, n$,

$$\lim_{k\to\infty} \|G^j \varphi_k^{(j)} - G^j \varphi^{(j)}\|_\infty = 0. \tag{5.4}$$

Para $j = 0$. Partiendo de la convergencia uniforme en $\overline{\mathbb{D}}$ de $r_k z - w$ a $z - w$, se sigue que

$$(r_k z - w)^{1/m} \to (z-w)^{1/m}$$

uniformemente en $\overline{\mathbb{D}}$ si $k \to \infty$, de manera que

$$\lim_{k\to\infty} \|\varphi_k - \varphi\|_\infty = 0.$$

En el resto de la demostración es importante la siguiente observación. Dado que

G' tiene extensión continua en $\overline{\mathbb{D}}$ y $G(w) = 0$, el límite

$$\lim_{z \to w} \frac{G(z)}{z - w} = \lim_{z \to w} \frac{G(z) - G(w)}{z - w}$$

existe porque si

$$L = \lim_{z \to w, z \in \mathbb{D}} G'(z),$$

la continuidad de G' en $\overline{\mathbb{D}}$ y el hecho de que $G(w) = 0$ se sigue que

$$G(z) = \int_{[w,z]} G'(\lambda)\, d\lambda,$$

de manera que

$$\left| \frac{G(z)}{z - w} - L \right| \leq \max_{\lambda \in [w,z]} |G'(\lambda) - L| \to 0, \text{si } z \to w,$$

porque

$$\frac{G(z)}{z - w} - L = \frac{1}{w - z} \int_{[w,z]} (G'(\lambda) - L)\, d\lambda.$$

Por lo anterior y la continuidad de G en $\overline{\mathbb{D}}$, la función $G(z)/(z - w)$ es acotada en $\overline{\mathbb{D}}$. Aplicaremos la proposición 5.1 con $X = \overline{\mathbb{D}}$ y $F = \{w\}$.

Probemos que (5.4) se cumple para $j = 1, 2, \ldots, n$. Observemos que si $z \neq w$,

$$G^j(z)(\varphi_k)^{(j)}(z) = C_j (r_k)^j \left(\frac{G(z)}{z - w} \right)^j \left(\frac{z - w}{r_k z - w} \right)^j (r_k z - w)^{1/m}$$

y

$$G^j(z)\varphi^{(j)}(z) = C_j \left(\frac{G(z)}{z - w} \right)^j (z - w)^{1/m}.$$

Tomamos

$$\psi_k(z) = \left(\frac{z - w}{r_k z - w} \right)^j$$

y

$$f_k(z) = (r_k)^j (r_k z - w)^{1/m}$$

en la proposición 5.1 para obtener que

$$(r_k)^j \left(\frac{z - w}{r_k z - w} \right)^j (r_k z - w)^{1/m} \text{ converge uniformemente sobre } \overline{\mathbb{D}} \text{ a } (z - w)^{1/m}.$$

Entonces, del hecho de que $C_jG^j(z)/(z-w)^j$ es acotada se sigue que (5.4) se cumple. Ahora, la conclusión se sigue porque cada término de la sucesión (ψ_k) puede aproximarse por una función polinomial. $\square$

El lema 5.3 junto con la propiedad enunciada en la siguiente proposición, se denomina *condición modificada de Ditkin* en [32].

Teorema 5.1. *Sea $G \in \mathcal{A}^1$. Entonces, para cada $w \in \mathbb{T}$, existe una sucesión (ψ_m) en $\mathcal{A}_G^n$ tal que $\psi_m(w) = 0$, para cada $m \in \mathbb{N}$, y*

$$\lim_{m\to\infty} \|(z-w)^{n_w+1}\psi_m(z) - (z-w)^{n_w+1}\|_{G,n} = 0. \tag{5.5}$$

Demostración. Consideramos primeramente el caso en que $w \in h_0(G)$. Recordemos que en este caso $n_w = 0$. Tomamos una rama de

$$\psi_m(z) = (z-w)^{1/m}, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

sobre un dominio apropiado que depende de w. Por el lema 5.4, $\psi_m \in \mathcal{A}_G^n$, para cada m.

Para probar que (5.5) se satisface, definimos

$$\varphi_m(z) = (z-w)^{1/m+1} - (z-w).$$

Entonces

$$\begin{aligned}\|\varphi_m\|_G = {} & \|(\zeta-w)[(\zeta-w)^{1/m}-1]\|_\infty + \|((1+m^{-1})(\zeta-w)^{1/m}-1)G\|_\infty \\ & + (m^{-1}+m^{-2})\|(\zeta-w)^{m^{-1}-1}G^2\|_\infty \\ & + (m^{-1}+m^{-2})(m^{-1}-1)\|(\zeta-w)^{m^{-1}-2}G^3\|_\infty + \cdots \\ & + (m^{-1}+m^{-2})(m^{-1}-1)\cdots(m^{-1}-(n-2))\|(\zeta-w)^{m^{-1}-(n-1)}G^n\|_\infty.\end{aligned}$$

Para el primero y segundo términos, usamos la proposición 5.1 con $X = \overline{\mathbb{D}}$ y $F = \{w\}$.

Tomando $\psi_m(z) = (z-w)^{1/m}$ y $f_m(z) = z - w$,

$$\|(\zeta-w)(\zeta-w)^{1/m} - (\zeta-w)\|_\infty \to 0, \text{ si } m \to \infty.$$

Tomando $\psi_m(z) = (z-w)^{1/m}$ y $f_m(z) = G(z) + \frac{1}{m}G(z)$,

$$\|(1+m^{-1})(\zeta - w)^{1/m}G - G\|_\infty \to 0, \text{ si } \ m \to \infty.$$

Para los siguientes términos usamos el hecho de que

$$\lim_{z\to w} \frac{G(z)-G(w)}{z-w} = \lim_{z\to w} \frac{G(z)}{z-w}$$

existe. Entonces

$$\frac{G^k(z)}{(z-w)^k} G(z)(z-w)^{1/m}$$

es acotada en $\overline{\mathbb{D}}$. Entonces, por el factor $\frac{1}{m}$, cada uno de los términos que definen a $\|\varphi_m\|_{G,n}$, a partir del tercero, también tienden a 0 cuando m tiende a ∞. Por lo tanto, (5.5) se cumple para este caso.

Para el caso en que $w \notin h_0(G)$, recordemos que en una vecindad de w, las funciones en $\mathcal{A}_G^n$ se comportan como las funciones en el álgebra de Korenblyum, de manera que la sucesión (ψ_m) puede tomarse como

$$\psi_m(z) = \frac{z-w}{z-(1+\frac{1}{m})w}.$$

Es conocido que esta sucesión cumple (5.5) (ver [37] por ejemplo). □

Observación. En la demostración del resultado anterior podemos observar que la hipótesis de la diferenciabilidad de G no es necesaria para los casos $n=0$ y $n=1$.

5.4. Los ideales cerrados con coespectro numerable

En [5] y [32], se estudia la teoría de ideales de álgebras de Banach $\mathcal{B}$ semisimples y con unidad, con norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$, encajadas continuamente en el álgebra $\mathcal{A}$ y que satisfacen ciertas condiciones. Concretamente, en [32] se consideran las siguientes propiedades sobre $\mathcal{B}$:

$\mathbf{H_1}$ El espacio de las funciones polinomiales es un subconjunto denso de $\mathcal{B}$ (respecto a la norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$);

$\mathbf{H_2}$ La sucesión $\sqrt[n]{\|\zeta^n\|_{\mathcal{B}}}$ converge a 1 (aquí ζ es la función identidad $z \mapsto z$);

$\mathbf{H_3}$ Existen constantes $k \geq 0$ y $C > 0$ tales que

$$|1 - |\lambda||^k \, \|f\|_{\mathcal{B}} \leq C \, \|(\zeta - \lambda) f\|_{\mathcal{B}}, \quad f \in \mathcal{B}, \ |\lambda| < 2.$$

S Para cada $w \in \mathbb{T}$ existe n_w, el entero más grande entre los $j \in \mathbb{N}_0$ para los cuales los funcionales de la forma $f \mapsto f^{(j)}(w)$ están bien definidos y son continuos.

D Para cada $w \in \mathbb{T}$, existe una sucesión de funciones $\{\psi_n\}$ en el álgebra $\mathcal{B}$ tal que $\psi_n(w) = 0, \forall n$, y

$$\lim_{n \to \infty} \|(\zeta - w)^{n_w + 1} \psi_n - (\zeta - w)^{n_w + 1}\|_{\mathcal{B}} = 0.$$

Es inmediato notar que si dos normas son equivalentes en un álgebra de Banach, si las propiedades anteriores se cumplen para alguna de ellas, también se cumplen para la otra norma.

Una cuestión importante es que las condiciones $\mathbf{H_1}$ y $\mathbf{H_2}$ determinan $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}$, el espacio de ideales máximos de $\mathcal{B}$.

Teorema 5.2. *Si $\mathcal{B}$ es un álgebra de Banach con unidad, subálgebra de $\mathcal{A}$, que satisface $\mathbf{H_1}$ y $\mathbf{H_2}$ entonces $\mathbf{M}_{\mathcal{B}}$ se identifica con $\overline{\mathbb{D}}$.*

Demostración. Si $\lambda \in \overline{\mathbb{D}}$,

$$\varphi_\lambda(f) := f(\lambda), \quad (f \in \mathcal{B}), \tag{5.6}$$

define un funcional multiplicativo no nulo.

Veamos que todo funcional multiplicativo no nulo en $\mathcal{B}$ es de esta forma. Sea $\varphi \in \mathbf{M}_{\mathcal{B}}$ y sea $\lambda = \varphi(\zeta)$. Entonces, $|\lambda| \leq 1$ porque de lo contrario, por $\mathbf{H_2}$, $\lambda \notin \sigma(\zeta)$ y $\zeta - \lambda$ sería invertible, de manera que

$$\varphi((\zeta - \lambda)^{-1}) = (\varphi(\zeta - \lambda))^{-1} = (\varphi(\zeta) - \lambda)^{-1} = 0^{-1},$$

lo cual es imposible. Veamos ahora que $\varphi = \varphi_\lambda$. Sea P el espacio de polinomiales y sea $p \in P$. Entonces,

$$\varphi(p) = p(\lambda),$$

de manera que φ es un mapeo de valuación por λ en P:

$$\varphi|_P = \varphi_\lambda,$$

donde φ_λ está dado como en (5.6). Como φ es continua y, por $\mathbf{H_1}$, P es denso en $\mathcal{B}$, se sigue que $\varphi = \varphi_\lambda$ en todo $\mathcal{B}$. $\square$

En la sección anterior probamos que nuestra álgebra $\mathcal{B} = \mathcal{A}_G^n$ satisface las propiedades anteriores. Esto es importante porque, usando el resultado principal de [32], es posible asegurar que los ideales cerrados con coespectro numerable son estándar.

Precisemos la noción de ideal estándar.

Definición 5.1. *Un ideal cerrado I de $\mathcal{B}$ es estándar si existen una función interna Q y una sucesión $\{H_j : j = 0, 1, \dots, n\}$ de subconjuntos de $\mathbb{T}$, con $H_{j+1} \subset H_j$ para $j = 0, 1, \dots, n-1$, tales que*

$$I = \{f \in \mathcal{B} : Q|f \text{ y } f^{(j)}|_{H_j} = 0 \;\; \textit{para cada} \;\; j = 0, 1, \dots, n\}.$$

El resultado principal de [32] es el siguiente teorema.

Teorema 5.3. *Si $\mathcal{B}$ es un subálgebra de $\mathcal{A}$ que satisface las condiciones $\mathbf{H_1}$, $\mathbf{H_2}$, $\mathbf{H_3}$, $\mathbf{S}$ y $\mathbf{D}$, entonces cada ideal cerrado I de $\mathcal{B}$ con coespectro*

$$h(I) := \{z \in \overline{\mathbb{D}} : \; f(z) = 0 \, \textit{para cada} \; f \in I\},$$

a lo más numerable, es estándar.

Combinamos estos resultados para enunciar el teorema principal de este capítulo.

Teorema 5.4. *Sea G una función en $\mathcal{A}^1$ con*

$$h(G) := \{w \in \overline{\mathbb{D}} : G(w) = 0\} \subset \mathbb{T}.$$

Si I es un ideal cerrado del álgebra $\mathcal{A}_G^n$ con coespectro numerable, entonces existe una función interior U y una colección $E_0, E_1, \dots, E_n$ de subconjuntos de $\mathbb{T} \setminus h(G)$, con $E_{j+1} \subset E_j$, tales que

$$I = \{f \in \mathcal{A}_G^n : U|f \;\; y \;\; f^{(j)}|_{E_j} = 0, j = 0, 1, \dots, n\}.$$

Demostración. Las propiedades que se mencionan en las hipótesis del teorema 5.3 se satisfacen en $\mathcal{A}_G^n$ ($\mathbf{H_1}$ se cumple por la definición del álgebra, $\mathbf{H_2}$, $\mathbf{H_3}$, $\mathbf{S}$ y $\mathbf{D}$ se prueban en la sección anterior). Por la tanto, la conclusión se sigue directamente de este teorema, adaptando la noción de ideal estándar. $\square$

Capítulo 6

Ideales con coespectro suficientemente grande

6.1. Introducción

En este capítulo demostramos que hay otra clase de ideales cerrados de $\mathcal{A}_G^n$ las cuales también son estándar. Introducimos aquí condiciones adicionales para la función G, a saber, que G sea una función exterior en $C^n(\overline{\mathbb{D}})$ o que $G \in \mathcal{A}^\infty$ y tenga raíces de multiplicidad infinita. Bajo estas hipótesis, mostramos que los ideales cerrados que tienen coespectro que contiene a $h_0(G)$ son estándar cuando $h_0(G)$ es numerable. Esto se relaciona con la caracterización de los ideales cerrados contenidos en el ideal cerrado generado por G en $\mathcal{A}_G^n$.

6.2. Ideales de $\mathcal{A}_G^n$ generados por G

Sea F una función en $\mathcal{A}_G^n$. Sea $I_F = \{fF : f \in \mathcal{A}_G^n\}$ el ideal generado algebraicamente por F en $\mathcal{A}_G^n$ y $\overline{I}_F$ su clausura.

El resultado principal del capítulo anterior no permite describir a los ideales anteriores cuando G cumple condiciones adicionales.

Teorema 6.1. *Sea $G \in \mathcal{A}^n$ una función exterior tal que $h_0(G)$ es numerable. Entonces, para $k \in \mathbb{N}$,*

$$\overline{I}_{G^k} = J(1; h_0(G), \emptyset, \dots, \emptyset). \tag{6.1}$$

Además, si $k \geq n$, se tiene que el ideal $I_{G^k} \cap \mathcal{A}^n$ es denso en $\overline{I}_{G^k}$.

Demostración. Observemos que $h_0(I_{G^k}) = \{z \in \overline{\mathbb{D}} : (G^k f)(z) = 0, \forall f \in \mathcal{A}^n_G\} = h_0(G)$, de manera que es posible aplicar el teorema 5.4. La representación (6.1) se sigue de que para $j = 1, 2, \ldots, n$,

$$U_{I_{G^k}} = 1 \quad \text{y} \quad h_j(I^m_G) = \emptyset.$$

Si $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, como el espacio $\mathcal{A}^n$ es denso en $\mathcal{A}^n_G$, entonces $G^{m+n}\mathcal{A}^n$ es denso en el ideal $J := G^{n+m}\mathcal{A}^n_G$. Del lema 4.3 se sigue que $J \subset \mathcal{A}^n$ y es denso en $I_{G^{m+n}} = I_G$, de manera que $I_{G^k} \cap \mathcal{A}^n$ es denso en $\overline{I}_{G^k}$ si $k \geq n$. $\square$

Consideramos ahora a los ideales cerrados contenidos en $\bar{I}_G$. Para estos resultados suponemos que las derivadas hasta orden n de G, $G^{(j)}$, pueden extenderse continuamente a todo el disco cerrado y además que el conjunto de ceros de G, $h_0(G)$, es un conjunto numerable.

Introducimos la siguiente definición.

Definición 6.1. *Sea $\mathcal{B}$ un álgebra de Banach con norma $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$. Una sucesión (ϕ_m) de $\mathcal{B}$ se llama* aproximación a la unidad *en I si*

$$\|\phi_m f - f\|_{\mathcal{B}} \to 0, \quad \textit{para cada} \;\; f \in I.$$

Teorema 6.2. *Sea G una función en $\mathcal{A}^n$, exterior y con $h_0(G)$ numerable. Si existe en $\bar{I}_G$ una aproximación a la unidad entonces, para cada ideal cerrado I de $\mathcal{A}^n_G$ contenido en $\bar{I}_G$, el $\mathcal{A}^n$-ideal*

$$J(U_I; h_0(I), h_1(I) \cup h_0(G), \cdots, h_n(I) \cup h_0(G))$$

es denso en I, donde U_I es el m. c. d interior de I.

Demostración. Sea I un ideal cerrado de $\mathcal{A}^n_G$ tal que $I \subset \bar{I}_G = \{Gf : f \in \mathcal{A}^n_G\}$ y sea U_I el máximo común divisor interno de I. Por definición, el $\mathcal{A}^n$-ideal $J(U_I; h_0(I), h_1(I) \cup h_0(G), \cdots, h_n(I) \cup h_0(G))$ es el conjunto de las funciones $f \in \mathcal{A}^n$ tal que $U_I \mid f$ y

$$(z \in h_j(I) \;\text{ ó }\; G(z) = 0) \Rightarrow f^{(j)}(z) = 0,$$

para $j = 0, 1, \ldots, n$.

Observemos que la condición de que I esté contenido en $\overline{I}_G$ es equivalente a que $h_0(G) \subset h_0(I)$: Si $I \subset \overline{I}_G$, $G(z) = 0$ y $g = \lim G f_n$ con $f_n \in \mathcal{A}^n_G$ entonces, $g(z) = 0$;

recíprocamente, si $h_0(G) \subset h_0(I)$ y $g \in I$ entonces $g(z) = 0$ si $G(z) = 0$. Entonces, $g = \lim G f_n$ con $f_n \in \mathcal{A}^n_G$.

Para $1 \leq j \leq n$, los conjuntos $h_j(I)$ son cerrados en el espacio $\mathbb{T} \setminus h_0(G)$, luego $h_j(I) \cup h_0(G)$ son compactos y por lo tanto, cerrados en $\mathbb{T}$.

Por el teorema 6.1, se sigue que el ideal $I_{G^{2n}}$ es denso en $\overline{I}_G$. Si (φ_m) es una aproximación a la unidad en $\bar{I}_G$, para $m \in \mathbb{N}$, existe $h_m \in \mathcal{A}^n_G$ tal que $\|G^{2n}h_m - \varphi_m\| \leq \frac{1}{2m}$. A partir de que $\mathcal{A}^n$ es denso en $\mathcal{A}^n_G$, existe $f_m \in \mathcal{A}_G$ que aproxima a h_m de manera que para la función $\psi_m := G^{2n} f_m$ se cumple que

$$\|\varphi_m - \psi_m\|_G \leq \|\varphi_m - G^{2n}h_m\|_G + \|G^{2n}h_m - G^{2n}f_m\|_G \leq \frac{1}{m}.$$

Observemos que la sucesión (ψ_m) es una aproximación a la unidad en $\overline{I}_{G^{2n}}$:

$$\|\psi_m f - f\|_G \leq \|G^{2n} f_m f - \varphi_m f\|_G + \|\varphi_m f - f\|_G \to 0, \quad \forall f \in \overline{I}_G$$

En particular, para $f \in I$ se tiene que $G^{2n} f_m f \to f$. Para $f \in I$, las funciones $G^n f_m f \in I \cap \mathcal{A}^n$, pues I es cerrado, de manera que $G^{2n} f_m f \in I \cap \mathcal{A}^n$. Las funciones $G^{2n} f_m f$, junto con sus derivadas de orden $j \leq n$, se anulan sobre $h_0(G)$. Con esto se tiene que

$$\psi_m f \in J(U_I; h_0(I), h_1(I) \cup h_0(G), \cdots, h_n(I) \cup h_0(G)),$$

lo que completa la prueba del teorema. $\square$

Teorema 6.3. *Bajo las hipótesis del teorema 6.2 el ideal cerrado I es estándar.*

Demostración. Sea $\tilde{I} := J(U_I; h_0(I), \ldots, h_n(I))$. Es evidente que $\tilde{I}$ es un ideal de $\mathcal{A}^n_G$. Además,

$$I \subset \tilde{I} \subset \overline{I}_G.$$

Sea el $\mathcal{A}^n$- ideal $\tilde{J} := J(U_{\tilde{I}}; h_0(\tilde{I}), h_1(\tilde{I}) \cup h_0(G), \ldots, h_n(\tilde{I}) \cup h_0(G))$. Por el teorema 6.2, $\tilde{J}$ es denso en $\tilde{I}$. Se tiene además que $U_{\tilde{I}} = U_I$, $h_j(\tilde{I}) = h_j(I)$ para $j = 0, 1, \ldots, n$, por lo que se tiene que

$$\tilde{J} = J(U_I; h_0(I), h_1(I) \cup h_0(G), \cdots, h_n(I) \cup h_0(G)).$$

Así, del teorema anterior se sigue que $\tilde{J}$ es denso en I y se tiene que $I = \tilde{I}$ por que lo I es estándar. $\square$

6.3. Aproximación a la unidad en $\mathcal{A}_G^n$

Los dos teoremas previos son válidos si existe en el ideal $\overline{I}_G$ una aproximación a la unidad acotada, por tal motivo es importante encontrar condiciones que garanticen su existencia. Existe un candidato natural para una aproximación a la unidad, asociada a la función exterior G. Debido a que cada función exterior G es de la forma e^F para alguna función F homomorfa en $\mathbb{D}$, si definimos para $m \in \mathbb{N}$, $\varphi_m := G^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{1}{m}F}$, las funciones φ_m están bien definidos sobre $\overline{\mathbb{D}}$. En la norma $\|\cdot\|_G$, la sucesión (φ_m) es acotada. Además, para cada $f \in \overline{I}_G$ se cumple $\varphi_m f \to f$. Lo que haría falta para garantizar que esta sucesión es una aproximación a la unidad en $\overline{I}_G$ es garantizar que $\varphi_m \in \mathcal{A}_G^n$, lo cual no es obvio. En lo que sigue se dan condiciones suficientes para que esto se cumpla.

Definimos a continuación un espacio auxiliar.

Definición 6.2. *Sea $\mathfrak{A}_G^n$ el subespacio de las funciones g en $\mathcal{A}$ tales que $G^j g^{(j)} \in \mathcal{A}$ y $G^j g^{(j)} \equiv 0$ en $h_0(G)$, para $j = 1, \dots, n$.*

El siguiente teorema enuncia una condición para asegurar que $\mathcal{A}_G^n = \mathfrak{A}_G^n$.

Teorema 6.4. *Supongamos que para algún δ, con $0 < \delta < 1$, la función G satisface:*

$$\sup \left\{ \frac{|G(z)|}{|G(tz)|} \, : \, z \in \mathbb{D}, \delta \leq t < 1 \right\} < \infty \tag{6.2}$$

Entonces, $\mathcal{A}_G^n = \mathfrak{A}_G^n$.

Demostración. Hemos demostrado ya que si $f \in \mathcal{A}_G^n$ y $j = 1, 2, \dots, n$, las funciones $G^j f^{(j)} \in \mathcal{A}$ y se anulan en $h_0(G)$ de manera que $\mathcal{A}_G^n$ es un subespacio cerrado de $\mathfrak{A}_G^n$.

Mostremos ahora que $\mathfrak{A}_G^n \subset \mathcal{A}_G^n$. Para $f \in \mathfrak{A}_G^n$ y $0 < t \leq 1$. Debido a que $f \in \mathfrak{A}_G^n$, $f_t \in \mathcal{A}^n$. Luego, basta probar que f_t converge a f, si $t \to 1^-$, en la norma $\|\cdot\|_G$.

Observemos que para $j = 0, 1, \dots, n$,

$$(G^j f^{(j)})_t \to G^j f^{(j)}, \quad \text{cuando} \quad t \to 1^-,$$

uniformemente sobre $\overline{\mathbb{D}}$, como se mostrará a continuación.

Hemos mostrado que si $f \in \mathcal{A}_G^n$, entonces las funciones $G^j f^{(j)} \in \mathcal{A}$ y se anulan en $h_0(G)$, de manera que mediante cálculos explícitos se obtiene la siguiente relación:

$$G^j (f_t)^{(j)} = G^j t^j (f^{(j)})_t = t^j \left(\frac{G}{G_t}\right)^j (G^j f^{(j)})_t.$$

Tomamos una sucesión (t_m), con $0 < t_m < 1$, y hacemos que $t_m \to 1$. Entonces, cuando $m \to \infty$, las funciones

$$g_m := (G^j f^{(j)})_{t_m} \to g := G^j f^{(j)},$$

uniformemente sobre $\overline{\mathbb{D}}$ y g se anula en $h_0(G)$.

También, las funciones

$$\psi_m := \left(\frac{G}{G_{t_m}}\right)^j,$$

convergen a 1, uniformemente sobre compactos de $\mathbb{D} \setminus h_0(G)$. Luego, por la proposición (5.1) se completa la prueba. $\square$

Teorema 6.5. *Sea G una función exterior y sea $\phi_m := G^{1/m}$. Entonces la sucesión (ϕ_m) es acotada en $\mathfrak{A}_G^n$.*

Demostración. Calculando la derivada de orden j de ϕ_m, obtenemos que $G^j \phi_m^{(j)}$ es un polinomio en las variables $\phi_m, G, G', \ldots, G^{(j)}$. De ellos podemos observar que $G^j \phi_m^{(j)} \in \mathcal{A}$ y se anula en $h_0(G)$. $\square$

Hay una forma, apropiada para nuestros cálculos, para representar la derivada de orden j de la función G^p. Se sigue por inducción sobre j.

Lema 6.1. *Sean $p > 0$ y j un número natural. Entonces*

$$(G^p)^{(j)} = p\, G^{p-1} G^{(j)} + p(p-1) \sum_{\mathbf{r}=(r_1,\ldots,r_j)} a_{\mathbf{r}} G^{p-1+r_1} (G')^{r_2} \cdots (G^{(j-1)})^{r_j},$$

donde $r_1 \geq -j$, $r_k \in \{0, 1, \ldots, j-1\}$ para $k = 1, \ldots, j$ y los coeficientes $a_{\mathbf{r}}$ son polinomiales en p cuyos grados y coeficientes dependen solo de j.

Teorema 6.6. *Sea $G \in \mathcal{A}^n$ una función exterior con $\|G\|_\infty = 1$. Sea $\phi_m := G^{1/m}$. Entonces*

$$\phi_m G \to G$$

en el espacio $\mathfrak{A}_G^n$.

Demostración. Usamos el lema previo con $p = 1 + 1/m$. Se tiene

$$\begin{aligned} G^j(\phi_m G)^{(j)} &= (1 + 1/m)\phi_m G^j G^{(j)} \\ &\quad + (1 + 1/m)(1/m) \sum_{\mathbf{r}=(r_1,\ldots,r_j)} a_{\mathbf{r}} \phi_m G^{r_1+j}(G')^{r_2} \cdots (G^{(j-1)})^{r_j}, \end{aligned}$$

donde estamos usando la notación del lema anterior. Por la proposición (6.5) y la proposición (5.1), $(1 + 1/m)\phi_m G^j G^{(j)}$ converge uniformemente a $G^j G^{(j)}$. Los términos restantes del lado derecho corresponden a una suma finita que contiene potencias no negativas tanto de G como de las derivadas de orden menores a j, de manera que esta suma está acotada respecto a la norma $\|\cdot\|_\infty$ y converge uniformente a 0 por el factor $\frac{1}{m}$ que contiene. $\square$

Tenemos ahora la condición principal para que en $\mathcal{A}^n_G$ tengamos una aproximación a la unidad.

Teorema 6.7. *Sea $G \in \mathcal{A}^n$ una función exterior tal que $h_0(G)$ es numerable. Supongamos que G satisface alguna de las siguientes condiciones:*

1. *Existe δ, con $0 < \delta < 1$ tal que*

$$\sup \left\{ \frac{|G(z)|}{|G(tz)|} \,:\, z \in \mathbb{D}, \delta \leq t < 1 \right\} < \infty;$$

2. *$G \in \mathcal{A}^\infty$ y todos los ceros de G son de multiplicidad infinita.*

Entonces $\phi_m = G^{\frac{1}{m}}$ es una aproximación a la unidad en el ideal cerrado $\overline{I}_G$ generado en $\mathcal{A}^n_G$.

Demostración. Por el teorema 6.4, cuando la condición 1 se cumple, $\mathcal{A}^n_G = \mathfrak{A}^n_G$. Entonces $\phi_m \in \mathcal{A}^n_G$ y es acotada en este espacio. Además, cada ϕ_m se anula en $h_0(G)$, de manera que por la proposición 6.1, $\phi_m \in \overline{I}_G$. Luego, la convergencia $\phi_m G \to G$ implica la convergencia de $\phi_m f$ a f para $f \in \overline{I}_G$.

Si $G \in \mathcal{A}^\infty$ y para cada $w \in h_0(G)$ y cada $k \in \mathbb{N}$, $G^{(k)}(w) = 0$, entonces $G^{1/m} \in \mathcal{A}_n \subset \mathcal{A}^n_G$. De manera que en este caso (ϕ_m) es una unidad aproximativa en $\mathcal{A}^n_G$. $\square$

Como corolario del teorema anterior, que resume el resultado principal de este capítulo, se tiene el siguiente teorema.

Teorema 6.8. *Con las hipótesis del teorema anterior, cada ideal cerrado en* $\mathcal{A}_G^n$ *contenido en* $\overline{I}_G$ *es estándar.*

Capítulo 7

Conclusiones

El álgebra aquí propuesta es general en el sentido de que se tiene bastante libertad para elegir a la función G, es decir, existen suficientes funciones que cumplen las condiciones que hemos pedido para G. En [30] se describe un método para construir funciones de clase $\mathcal{A}^n$, con $n = 1, 2, \ldots, \infty$, tales que $f^{(j)}$ se anule en conjuntos cerrados de $\mathbb{T}$ dados, de manera que el álgebra obtenida no se reduce a alguna ya previamente estudiada. Si G es una función que no se anula en ningún punto de $\mathbb{T}$ entonces $\mathcal{A}_G^n$ es un álgebra de Korenblyum, de manera que existen casos en donde todos los ideales de $\mathcal{A}_G^n$ son estándar.

Existen muchos problemas abiertos relacionados con este trabajo. El objetivo más ambicioso es determinar todos los ideales del álgebra $\mathcal{A}_G^n$ cuando G es arbitrario o considerar en qué casos éste tiene ideales no estándar. Sin embargo, dada la dificultad que ello representa, hemos elegido considerar casos particulares. Concretamente, nuestra aproximación a este problema se motiva en los trabajos de Kahane y Bennett-Gilbert ([6, 12]) para el álgebra de las funciones que tienen series de Taylor absolutamente convergentes en $\mathbb{D}$, en el trabajo de Guararii [26] sobre el álgebra $L^1(\mathbb{R}^+)$ y los trabajos de Agrafeuil-Zarrabi [5] y Sołtysiak-Wawrzyńczyk [5]. En estos trabajos se restringe el estudio a ideales cerrados con coespectro finito o numerable.

Hemos mostrado aquí (teorema 6.7) dos condiciones (suficientes) para que $(G^{1/m})$ sea aproximación a la unidad en el álgebra $\mathcal{A}_G^n$. Dos preguntas que surgen inmediatamente son: (i) ¿existen otras condiciones que garanticen lo mismo?, (ii) ¿son algunas de estas condiciones necesarias?

Otro problema interesante corresponde al problema de interpolación: dado un conjunto cerrado de $\overline{\mathbb{D}}$, ¿existe $f \in \mathcal{A}_G^n$ tal que f se anule en este conjunto dado?

Tal vez la parte pendiente más importante sea la construción de ejemplos no triviales. De manera particular, es interesante encontrar ejemplos de funciones G donde no sea necesaria la condición:

Existe $\delta \in (0,1)$ *tal que*

$$\sup\left\{\frac{|G(z)|}{|G(tz)|} \,:\, z \in \mathbb{D}, \delta \leq t < 1\right\} < \infty.$$

Bibliografía

[1] C. Agrafeuil. *Idéaux fermés de certaines algèbres de Beurling et application aux opératours. Ensembles d'unicité.* Tesis doctoral, 2005.

[2] C. Agrafeuil. *A Beurling-Carleson set which is a uniqueness set for a given weighted of analytic functions.* Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), 3287 – 3294.

[3] W. Arendt y H. Kellerman, *Integration solutions of Volterra integro-differential equations and applications*, Integrodifferential Equations, Proc. Conf. Trento, 1987, G. Da Prato, M. Iannelli (Eds.), Pitman Res.Notes Math., **190**, Longman, Harlow 1987, 21-25.

[4] Graham R. Allam. *Introduction to Banach Spaces and Algebras*, Oxford University Press, 2011.

[5] C. Agrafeuil y M. Zarrabi, *Closed ideals with countable hull in algebras of analytic smooth up to the boundary*, Publ. Mat. **52** (2008), 19-56.

[6] C. Bennett y John E. Gilbert. *Homogeneous algebras on the circle: I.- Ideals of analytic functions,* Ann. Inst. Fourier, Grenoble **22** (3), (1972), 1-19.

[7] L. Carleson. *Sets of uniqueness for functions regular in the unit circle*. Acta Math. **87** (1952), 325-345.

[8] P. L. Duren. *Theory of H^p spaces*, Elsevier **38**, 1970.

[9] O. El Fallah, *Ideaux fermés of* $L^1(\mathbb{R}^+)$, Math. Scan. *72* (1991), 120-130.

[10] J. Esterle, *Distributions on Kronecker sets, strong forms of uniqueness and closed ideals de* A^+, J. Reine Angew. Math. **450** (1994), 43-82.

[11] J. Esterle, E. Strouse y F. Zouakia. *Closed ideals on the algebra of absolutely convergent Taylor series*, Bull. of the AMS. **31**, No. 1. 1994.

[12] J. P. Kahane. *Idéaux fermés dans certaines algébres de fonctions analytiques*, Actes Table Ronde Inst. C. N. R. S., Montpellier, Lect. Notes Math. 336, Springer-Verlag (1973), 5-14.

[13] J. P. Kahane. *Séries de Fourier absolument convergentes*, Erg. MAth. **50**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelger-New York, 1962.

[14] Y. Katznelson, *An Introduction to Harmonic Analysis*, John Wiley and Sons, 1968.

[15] E. Kaniuth, *A Course in Commutative Banach Algebras*, Springer, 2009.

[16] P. Koosis, *Introduction to H_p spaces*, Cambridge University Press, 1980.

[17] B. I. Korenblyum. *Closed ideals in the ring A^n*. Funktsional'nyi Analiz i Ego Prilozhenya, **6** (3), (1972), 38-52.

[18] A. S. Kechris y A. Louveau. *Descriptive Set Theory and the Structure of Sets Uniqueness*, Cambridge University Press, 1987.

[19] K. Hofftman, *Banach Spaces of Analytic Functions*, Prentice-Hall, 1962.

[20] J. E. Galé y J. Miana, *One-parameter groups of regular quasimultipliers*, J. Funct. Anal. **237** (2006), 1-53.

[21] J. E. Galé, J. Miana y J. J. Royo, *Nyman type theorem in convolution Sobolev algebras*, Rev. Mat. Complutense. doi: 10.1007/s13163-010-0051-6

[22] J. E. Galé, J. Miana y J. J. Royo, *Estimates of the Laplace transform on fractional Banach algebras*, J. Appr. Theo., doi:10.1016/j.jat.2011.09.011.

[23] J. E. Galé y A. Wawrzyńczyk. *Standard ideals in weighted algebras of Korenblyum and Wiener types*, Math. Scand. 108, No. 2, 291-319 (2011)

[24] J. E. Galé y A. Wawrzyńczyk. *Closed ideals in weighted algebras on the unit disc*. Aportaciones Matemáticas. Memorias **40** (2009) 61-74.

[25] J. E. Galé y A. Wawrzyńczyk. *Standard ideals in convolution Sobolev algebras on the half-line*, Colloq. Math. 124, No. 1, 23-34 (2011).

[26] V. P. Guararii. *Spectral synthesis of bounded functions on the half axis*, Func. Anal. i Prizolen 3 (4), 1969, 34-48.

[27] H. Merino-Cruz y A. Wawrzyńczyk. *Closed ideals in a new class of algebras of holomorphic functions on the disc*, Commentationes Mathematicae, Vol. 54, No. 1 (2014), 29-37.

[28] H. Merino-Cruz y A. Wawrzyńczyk. *On Closed Ideals in a Certain Class of Algebras of Holomorphic Functions*, Canadian Mathematical Bulletin. Vol. 58, No. 2 (2015), 350-355.

[29] V. Müller. *Spectral Theory of Linear Operators and Spectral Systems in Banach Algebras*, Birkhäuser, 2007.

[30] B. A. Taylor y D. L. Williams. *Ideals in rings of analytic functions with smooth boundary values*. Can. J. Math. **6**. 1266-1283 (1970).

[31] B. A. Taylor y D. L. Williams. *Zeros of Lipschitz functions analytic in the unit disc*, Michigan Math. J. **18** (1971), 127-139.

[32] A. Sołtysiak y A. Wawrzyńczyk. *Ditkin's condition and ideals with at most countable hulls in algebras of functions analytic in the unit disc*. Commentationes Mathematicae, Vol. 52, No. 1 (2012), 101 - 112.

[33] W. Rudin, *The closed ideals in an algebra of analytic functions*. Canad. J. Math. **9** (1957), 426-434.

[34] M. Rosenblum y J. Rovnyak, *Topics in Hardy Classes and Univalent Functions*, Birkhäuser, 1994.

[35] T. V. Pedersen, *Closed ideals and the Bennett-Gilbert conjecture in Banach algebras of analytic functions*, Arch. Math. (Basel) **70** (1998), 391-398.

[36] A. Wawrzyńczyk, *Tres visiones del disco unitario*, Aportaciones Matemáticas SMM, Serie Comunicaciones **20** (1996), 189-206.

[37] W. Żelazko, *Banach Algebras*, Elsevier Publishing Company, 1973.