DOCTORADO EN CIENCIAS
(MATEMÁTICAS)

Problemas de Optimización con Minimizadores Monótonos y sus Aplicaciones a Procesos de Control de Markov

M. en C. Rosa María Flores Hernández
Asesor: Dr. Raúl Montes de Oca Machorro

TESIS
Para obtener el grado de

Doctora en Ciencias (Matemáticas)

21 de diciembre de 2007

Índice general

Índice de Tablas

Agradecimientos

Gracias a todas las personas que han estado conmigo en este trayecto, principalmente a mi familia integrada por mis papás (Mely y Rafael), mis hermanas (Geno, Oli, Anita y Guille) y mis sobrinos (Oscar y Angel), a cada uno de ellos les agradezco su ayuda incondicional, su paciencia, su comprensión y tolerancia.

También, estoy en deuda con la familia Pluma-García (ahora dividida en familias Pluma-Garduño, Pluma-Jiménez y Pluma-Domínguez), quienes han compartido conmigo su hogar, sus alegrías y hasta esos momentos difíciles por los que han pasado; gracias por aguantarme y ayudarme todo este tiempo.

Como yo les llamó, mis compañeros de cubículo, han sido también una parte fundamental en el recorrido de este camino, unos llegan y otros se van, pero estoy segura que se quedan en mi lista de recuerdos. Gracias por soportarme, escucharme, compartir su tiempo y espacio conmigo y ayudarme en los momentos en que lo he requerido; especialmente a Silvia Gavito, Ismael, Hugo, Luis, Victor, Janeth, Soledad, Leopoldo, Alex, Oziel, Perla, Tere, José Luis y Henry.

Profesionalmente, quisiera manifestar mi agradecimiento al Dr. Raúl Montes de Oca por sus enseñanzas, consejos, paciencia y guía en el desarrollo de este trabajo. Esta labor ha sido parcialmente apoyada por el Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), mediante el convenio 51222.

Gracias también al Dr. Gordienko, al Dr. Juan González, al Dr. Rolando Cavazos y al Dr. Julio César García Corte, por la revisión y las críticas constructivas que hicieron a mi investigación.

Gracias por el apoyo incondicional del personal administrativo del Departamento de Matemáticas.

También quisiera agradecer a mis compañeros de trabajo, especialmente a los maestros Saúl Cano, Sara Mejía y Antonio Durante, quienes han apoyado este proyecto y han sido pacientes en mi reincorporación a la Institución.

De manera también muy especial agradezco al Programa de Mejoramiento del profesorado (PROMEP), la beca que me otorgó para la realización de estos estudios mediante el convenio UATLAX-152 con la Universidad Autónoma de Tlaxcala.

Introducción

Esta tesis está dividida en cuatro partes. El trabajo está esencialmente basado en el artículo de Flores-Hernández y Montes-de-Oca [7].

Primero, sean $X \subset \mathbb{R}^n$ y $A \subset \mathbb{R}^m$ (donde n y m son enteros positivos), subconjuntos de Borel no vacíos. Para cada $x \in X$, sea $A(x)$ un subconjunto medible no vacío de A. Sea $G : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ una función acotada inferiormente, donde $\mathbb{K} := \{(x, a) : x \in X, a \in A(x)\}$.

Considérese el siguiente problema de optimización:

$$\min_{a \in A(x)} G(x, a), \quad x \in X. \tag{1}$$

Se supondrá que, para toda $x \in X$, se alcanza el mínimo en (1). Además, para cada $x \in X$, $f(x)$ y $f'(x)$ denotan los valores máximos y mínimos en $A(x)$, respectivamente, en los cuales se alcanza el valor mínimo de (1) (suponiendo que $f(x) = \max\big\{a' \in \arg\min_{a \in A(x)} G(x, a)\big\}$ y $f'(x) = \min\big\{a' \in \arg\min_{a \in A(x)} G(x, a)\big\}$ están bien definidos).

En el trabajo, se presentan condiciones que implican que f y f' son funciones monótonas. Básicamente, las condiciones que se proporcionan requieren la superaditividad (o subaditividad) de G (véase [27], págs. 103-104 o [34], Cap. 10). (Algunos autores dicen que G tiene diferencias isótonas o crecientes en lugar de decir que G es superaditiva, véanse [12], [34], [35], y [36]). Una de las principales **contribuciones** de esta tesis radica en que ni la compacidad de $A(x)$, $x \in X$, ni el acotamiento superior de G son necesarios en las condiciones proporcionadas. Este hecho permite considerar problemas de optimización no acotados.

Topkis [35] es un antecedente de esta parte del trabajo en el caso de minimizadores crecientes. En [35] se supone que los conjuntos de restricciones $A(x)$, $x \in X$, son conjuntos compactos. Además, se supone que G es subaditiva y submodular; es importante mencionar que en [35], X y A son conjuntos más generales, i.e. incluyen subconjuntos de espacios Euclidianos.

Sundaram [34] y Topkis [36] estudian un problema de maximización, similar al problema (1) (i.e. substituyen "min" por "max" en (1)) y obtienen maximizadores crecientes. En [34], se requiere que A sea un conjunto compacto en $\mathbb{R}^m$ y que G sea superaditiva y supermodular. Topkis [36] presenta un resultado en el cual se supone que los conjuntos de restricciones $A(x)$, $x \in X$, son finitos o bien son subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^m$ y, G es supermodular.

Segundo, la primera parte del trabajo se aplica a procesos de control de Markov (PCMs) con horizonte infinito en $\mathbb{R}$, con función de costo posiblemente no acotada superiormente, y con conjuntos de controles posiblemente no compactos; considerando el costo descontado y el costo promedio como criterios de optimalidad (véase [11]).

Para tal clase de PCMs, se establecen diferentes condiciones que garantizan la existencia de políticas óptimas monótonas. Así, otras de las **contribuciones** de la tesis son las siguientes: las condiciones consideradas se imponen en los elementos del modelo de control de Markov (véase [11]), es decir, en el espacio de estados X, el conjunto de controles A, los conjuntos de restricciones $A(x)$, $x \in X$, la probabilidad de transición Q, y la función de costo c. Además, estas condiciones implican que los espacios de estados y de controles X y A son subconjuntos no numerables en $\mathbb{R}$; de hecho, son intervalos. También, se proporcionan varios ejemplos de PCMs que incluyen, en particular, dos sistemas de producción de inventario y el problema del regulador lineal.

Tercero, la primera parte del trabajo también será aplicada a PCMs descontados con horizonte infinito en $\mathbb{R}^n, n > 1$. Se incluyen los casos donde la función de costo posiblemente no está acotada superiormente y los conjuntos de controles no necesariamente son compactos. Se ilustrará esta teoría con un caso particular del problema del regulador lineal. Para esta clase de PCMs se establece una condición que asegura la existencia de una política óptima creciente. A diferencia de lo que se hace para PCMs en $\mathbb{R}$, no todas las componentes de tal condición están dadas en términos de los elementos del modelo de control de Markov correspondiente, ya que se considera una propiedad de convexidad en las funciones de iteración de valores, correspondientes al proceso considerado. Esta propiedad es válida en $\mathbb{R}$.

En [18] y [31] se mencionan condiciones para la obtención de políticas óptimas monótonas en PCMs. En tales trabajos, se supone directamente la superaditividad (o la subaditividad) del operador de programación dinámica (expresión que se minimiza en la ecuación de programación dinámica), i.e., las condiciones no están dadas en términos de los elementos del modelo de control de Markov.

En Hinderer [14], Porteus [26] y Topkis [36] se presentan condiciones que garantizan la existencia de políticas óptimas monótonas en PCMs descontados, con horizonte finito.

La monotonicidad de las políticas óptimas de PCMs es una característica ampliamente conocida y estudiada, que es de interés para la gente que hace aplicaciones de PCMs a problemas de consumo-inversión, sistemas de control de inventarios, teoría de juegos, administración de recursos y sistemas de colas (véanse [1], [9], [10], [12], [13], [15], [16], [17], [19], [20], [21], [22], [23], [24], [25], [26], [27], [29], [30] y [32]). La razón principal de este interés es el hecho de que la monotonicidad de la política óptima refleja propiedades cualitativas de los modelos estudiados.

Por otro lado, en Puterman [27], para PCMs en espacios finitos, la existencia de una política óptima que es estrictamente creciente se usa de la siguiente forma. Su aproximación, vía el algoritmo de iteración de políticas, es mejorada en dos formas: *i*) al tomar una política creciente como la política inicial y *ii*) se acelera la convergencia de este algoritmo (véase [27], págs. 259–260; 428).

En una cuarta parte del trabajo, se presenta una versión del algoritmo de iteración de políticas, para PCMs descontados, la cual simplifica el algoritmo de Hernández-Lerma y Lasserre [11]. Ahora se considera como condición inicial una política creciente y tanto las políticas como las funciones objetivo obtenidas en cada iteración son crecientes. Por otro lado, a diferencia del algoritmo que aparece en Puterman [27], en donde se consideran espacios finitos, en ésta nueva versión los espacios considerados son subconjuntos, no necesariamente finitos, de $\mathbb{R}$.

El trabajo está organizado como sigue. En el Capítulo 1 se proporcionan conceptos y resultados básicos de retículas y de PCMs. En el Capítulo 2, aparece el planteamiento de problemas, se mencionan sus antecedentes y se comenta la importancia de su estudio. En el Capítulo 3, se establecen condiciones bajo las cuales el problema (1) tiene minimizadores monótonos, en espacios Euclidianos. En los Capítulos 4 y 5, se aplican los resultados obtenidos en el Capítulo 3 y se formulan condiciones suficientes para la existencia de políticas óptimas monótonas en $\mathbb{R}$ y en $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, respectivamente. Además, en ambos capítulos se presentan varios ejemplos que satisfacen las condiciones establecidas. Por completez del trabajo, en el Capítulo 6 se presenta una versión modificada del algoritmo de iteración de políticas que aparece en [11], para PCMs descontados en $\mathbb{R}$. En el Capítulo 7, se enuncian las conclusiones obtenidas y se formulan algunos problemas abiertos. Finalmente, para facilitar la lectura del trabajo, se incluye un apéndice en el cual se proporciona un resumen de condiciones para la obtención de políticas óptimas monótonas (tomadas de los Capítulos 4, 5 y 6).

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo se enuncian conceptos básicos de teoría de retículas y de procesos de control de Markov, necesarios para la comprensión del resto de la tesis.

1.1. Terminología y resultados de teoría de retículas

Esta sección contiene conceptos y resultados de teoría de retículas tomados de Topkis [35], Topkis [36] y Sundaram [34].

Definición 1.1. *$\hat{E}$ es un* ***conjunto parcialmente ordenado (CPO)*** *si existe una relación binaria $\preceq$ tal que para toda $x, y, z \in \hat{E}$ es*

Reflexiva: $x \preceq x$,

Antisimétrica: $x \preceq y$ *y* $y \preceq x \Rightarrow x = y$ *y,*

Transitiva: $x \preceq y$ *e* $y \preceq z \Rightarrow x \preceq z$.

Como es usual, $\mathbb{N}$ denota el conjunto de números naturales $1, 2, \ldots$.

Ejemplos 1.1. *No es difícil verificar lo siguiente:*

i) La recta real $\mathbb{R}$ es un CPO con la relación de orden usual $\leq$ en los números reales.

ii) $\mathbb{R}^n = \{\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_n) | x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$, con $n > 1$, es un CPO donde $\boldsymbol{x} \preceq \boldsymbol{y}$ en $\mathbb{R}^n$ significa que $x_i \leq y_i$ en $\mathbb{R}$, para $i = 1, \ldots, n$.

iii) *El conjunto potencia $\mathcal{P}(\Gamma)$, de un conjunto Γ, es un CPO con la relación de orden de inclusión de conjuntos $\subseteq$.*

Se dice que $x, y \in \hat{E}$ están **ordenados** si $x \preceq y$ ó $y \preceq x$. Un CPO es una **cadena** si todas sus parejas de elementos están ordenados.

Definición 1.2. *Un CPO Γ es una* ***retícula*** *(en inglés: lattice) si $x \wedge y$, $x \vee y \in \Gamma$, para toda $x, y \in \Gamma$, donde $x \wedge y := inf\ \{x, y\}$ y $x \vee y := \sup\{x, y\}$.*

Ejemplos 1.2. *Se puede observar lo siguiente:*

i) *La recta real $\mathbb{R}$ es una retícula con $x \vee y = max\{x, y\}$ y $x \wedge y = min\{x, y\}$.*

ii) *Cualquier cadena es una retícula.*

iii) *$\mathbb{R}^n$, $n > 1$, es una retícula con $\boldsymbol{x} \vee \boldsymbol{y} = (x_1 \vee y_1, ..., x_n \vee y_n)$ y $\boldsymbol{x} \wedge \boldsymbol{y} = (x_1 \wedge y_1, ..., x_n \wedge y_n)$, para $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$.*

iv) *Para cualquier conjunto Σ, $\mathcal{P}(\Sigma)$ con la relación de orden de inclusión de conjuntos $\subseteq$ es una retícula con $\Theta \vee \Upsilon = \Theta \cup \Upsilon$ y $\Theta \wedge \Upsilon = \Theta \cap \Upsilon$, para Θ y Υ en $\mathcal{P}(\Sigma)$.*

Definición 1.3. *Sea Γ una retícula y $\Theta \subset \Gamma$. Θ es una* ***sub-retícula*** *de Γ si $\theta_1 \wedge \theta_2, \theta_1 \vee \theta_2$ (tomados con respecto a Γ) pertenecen a Θ, para toda $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$.*

Ejemplos 1.3. *De la definición de sub-retícula, es directo mostrar lo siguiente:*

i) *Si $\Gamma = \mathbb{R}$, entonces cualquier subconjunto de Γ es una sub-retícula de Γ.*

ii) *El cuadrado unitario $\mathcal{I} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ y el hiperplano $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$ son sub-retículas de $\mathbb{R}^2$.*

iii) *Si Γ es una cadena, entonces cualquier subconjunto de Γ es una sub-retícula de Γ.*

iv) *Si Γ es una retícula, entonces $[x', \infty) = \{x : x \in \Gamma, x' \preceq x\}$, $(-\infty, x''] = \{x : x \in \Gamma, x \preceq x''\}$ y $[x', x''] = \{x : x \in \Gamma, x' \preceq x, x \preceq x''\}$, son sub-retículas de Γ, para toda $x', x'' \in \Gamma$. Estos son los intervalos cerrados en Γ.*

iv) *El hiperplano $\mathcal{H}' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$ no es una sub-retícula de $\mathbb{R}^2$ porque $(1, 0)$ y $(0, 1) \in \mathcal{H}'$ pero, $(1, 0) \wedge (0, 1) = (0, 0)$ y $(1, 0) \vee (0, 1) = (1, 1) \notin \mathcal{H}'$.*

Para una retícula Γ, $\pounds(\Gamma)$ denota el conjunto de todas las sub-retículas no vacías de Γ.

Definición 1.4. *Se dice que una retícula es* ***completa*** *si cada uno de sus subconjuntos no vacíos tiene un supremo y un ínfimo.*

Definición 1.5. *Sea Γ una retícula y sea Θ una sub-retícula de Γ. Θ es una sub-retícula* ***subcompleta*** *de Γ si para cada subconjunto no vacío Ψ de Θ, el inf Ψ y el* $\sup \Psi$ *existen y están contenidos en Θ.*

Lema 1.1. *(Teorema 2.3.1, [35]) Una sub-retícula de $\mathbb{R}^n$ es subcompleta si y sólo si es compacta.*

Definición 1.6. *Sea Γ una retícula. Sean $\Theta, \Upsilon \subset \Gamma$. Θ es* ***inferior*** *a Υ, denotado por $\Theta \sqsubseteq \Upsilon$ si $\theta \wedge \upsilon \in \Theta$ y $\theta \vee \upsilon \in \Upsilon$, para cada $\theta \in \Theta$ y $\upsilon \in \Upsilon$.*

Lema 1.2. *(Teorema 2.4.1, [36]).*
Si Γ es una retícula con la relación de orden $\preceq$, entonces $\pounds(\Gamma)$ es un CPO con la relación de orden $\sqsubseteq$.

Definición 1.7. *Sean Z un CPO, Γ una retícula y $\Gamma(x)$ una sub-retícula no vacía de Γ, para $x \in Z$. La multifunción $x \to \Gamma(x)$ es* ***ascendente*** *si ésta es creciente con respecto a la relación $\sqsubseteq$, i.e., $\Gamma(x) \sqsubseteq \Gamma(y)$ para $x \preceq y$ en Z. $x \to \Gamma(x)$ es* ***descendente*** *si ésta es decreciente con respecto a la relación $\sqsubseteq$.*

Lema 1.3. *(Lema 2.4.2, [35]) Sea Γ una retícula y sean $\Theta, \Upsilon \subset \Gamma$, no vacíos, con $\Theta \sqsubseteq \Upsilon$.*
a) Si sup Θ y sup Υ existen, entonces sup $\Theta \preceq$ sup Υ.
b) Si inf Θ y inf Υ existen, entonces inf $\Theta \preceq$ inf Υ.

Sean X y A subconjuntos de Borel no vacíos y fijos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, respectivamente. Para cada $x \in X$, sea $A(x)$ un subconjunto (medible) no vacío de A (i.e. $x \to A(x)$ es una multifunción de X a A). Supóngase que $\mathbb{K} := \{(x, a) : x \in X, a \in A(x)\}$ es un subconjunto medible de $X \times A$.

Definición 1.8. *Una función $W : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ es* ***superaditiva*** *en $\mathbb{K}$ si*

$$W(y, a) + W(x, b) \leq W(y, b) + W(x, a).$$

para toda $x \preceq y$ en X y $a \preceq b$ en A, con $a, b \in A(x) \cap A(y)$. W se denomina función ***subaditiva*** *si $-W$ es superaditiva.*

Lema 1.4. *(Hinderer [13]). Sean w_1 y w_2 funciones real-valuadas definidas en X y A, respectivamente.*

i) La función $W(x, a) = w_1(x) \cdot w_2(a)$, $(x, a) \in \mathbb{K}$, es subaditiva en $\mathbb{K}$ si w_1 es una función monótona creciente y w_2 es decreciente, o viceversa.

ii) La función $W(x,a) = w_1(x) \cdot w_2(a)$, $(x,a) \in \mathbb{K}$, es superaditiva en $\mathbb{K}$ si w_1 y w_2 son ambas funciones monótonas crecientes o bien, las dos son funciones decrecientes.

Demostración. i) Considérense $x, y \in X$ con $x \preceq y$ y $a, b \in A(x) \cap A(y)$ con $a \preceq b$. Entonces,

$$W(y,b)+W(x,a)-\Big[W(y,a)+W(x,b)\Big] = \Big[w_1(y)-w_1(x)\Big]\Big[w_2(b)-w_2(a)\Big] \leq 0,$$

cuando w_1 es creciente y w_2 es decreciente, o viceversa. Por lo tanto, W es subaditiva.

ii) Considérense $x, y \in X$ con $x \preceq y$ y $a, b \in A(x) \cap A(y)$ con $a \preceq b$. Entonces,

$$W(y,b)+W(x,a)-\Big[W(y,a)+W(x,b)\Big] = \Big[w_1(y)-w_1(x)\Big]\Big[w_2(b)-w_2(a)\Big] \geq 0,$$

cuando w_1 y w_2 son ambas crecientes o ambas son decrecientes. Por lo tanto, W es superaditiva. $\square$

Definición 1.9. *Sea $\mathbb{K}$ una retícula. Una función $w : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ es **supermodular** en $\mathbb{K}$ si*

$$w(k) + w(k') \leq w(k \vee k') + w(k \wedge k').$$

*para cada $k, k' \in \mathbb{K}$. w se denomina **submodular** si $-w$ es supermodular.*

Ejemplos 1.4. *Realizando cálculos elementales, se puede probar lo siguiente:*

i) Si Σ es una cadena, entonces cualquier función real-valuada en Σ es una valuación (es decir, una función que es supermodular y submodular). Por lo tanto, cualquier función real-valuada en un subconjunto de $\mathbb{R}$ es una valuación.

ii) La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ es supermodular en $\mathbb{R}^2$.

ii) La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(\bar{x}) = f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$, con $x_2 \neq 0$, es submodular en $\mathbb{R}^2$.

Lema 1.5. *Sean V, W y w funciones real-valuadas definidas en $\mathbb{K}$.*

a) Si V y W son funciones superaditivas (resp. subaditivas), entonces $V+W$ es superaditiva (resp. subaditiva).

b) Sea $\mathbb{K}$ una retícula. Si W es subaditiva en $\mathbb{K}$, entonces W es submodular en $\mathbb{K}$.

c) Sea $\mathbb{K}$ una retícula. Si $w(\cdot,\cdot)$ es submodular, entonces $w(x,\cdot)$ es submodular, para cada $x \in X$.

Demostración. a) Se sigue directamente de las propiedades del orden usual en $\mathbb{R}$.

b) Es una consecuencia directa del Teorema 10.12, en [34], porque el enunciado "si W es superaditiva en K, entonces W es supermodular en $\mathbb{K}$" es equivalente a "si -W es subaditiva en $\mathbb{K}$, entonces $-W$ es submodular en $\mathbb{K}$" (esto se sigue de las definiciones de funciones subaditiva y submodular).

c) Como $w(\cdot,\cdot)$ es submodular en $\mathbb{K}$, entonces para $x, y \in X$, $a \in A(x)$ y $b \in A(y)$, resulta que

$$\omega(x \wedge y, a \wedge b) + \omega(x \vee y, a \vee b) \leq \omega(x,a) + \omega(y,b). \tag{1.1}$$

Por lo tanto, la submodularidad de w en la segunda variable es una consecuencia de considerar $y = x$ en (1.1). □

1.2. Procesos de control de Markov (PCMs)

En esta sección se mencionan conceptos básicos y resultados de la teoría de procesos de control de Markov, tomados de [11], necesarios para la comprensión del resto de la tesis.

Un ***modelo de control de Markov estacionario a tiempo discreto*** es una quíntupla $\{X, A, \{A(x) : x \in X\}, Q, c\}$ (véase [11]), que consiste del espacio de estados X, el conjunto de controles, acciones o decisiones A, los conjuntos de controles admisibles $A(x)$, cuando el sistema se encuentra en el estado $x \in X$, la ley de transición Q y el costo por etapa c.

Los conjuntos X y A son espacios de Borel no vacíos, con $\sigma-$ álgebras de Borel $\mathcal{B}(X)$ y $\mathcal{B}(A)$, respectivamente. Para cada $x \in X$, $A(x) \subseteq A$ es un conjunto de Borel no vacío, con la propiedad de que $\mathbb{K} := \{(x,a) : x \in X,\ a \in A(x)\}$, el conjunto de parejas estado-controles admisibles, es un subconjunto medible de $X \times A$. La ley de transición $Q(B|x,a)$, $B \in \mathcal{B}(X)$ y $(x,a) \in \mathbb{K}$ es un kérnel estocástico en X dado $\mathbb{K}$, *i.e.*, $Q(\cdot|x,a)$ es una medida de probabilidad en X para cada $(x,a) \in \mathbb{K}$ fijo y $Q(B|\cdot,\cdot)$ es una función medible en $\mathbb{K}$, para cada

$B \in \mathcal{B}(X)$ fijo. Finalmente, $c : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ es una función medible.

Sea $\mathbb{F}$ el conjunto de funciones de decisión o selectores medibles, *i.e.*, el conjunto de todas las funciones medibles $f : X \to A$ tal que $f(x) \in A(x)$, para toda $x \in X$. Una sucesión $\pi = \{f_t\}$ de funciones en $\mathbb{F}$ se denomina ***política de Markov***; así, el control aplicado en el tiempo t es $a_t = f_t(x_t)$. Una ***política estacionaria*** es una política de Markov π tal que $f_t = f$, para toda $t = 0, 1, ...$ Uno se refiere a la política estacionaria $\{f, f, \cdots\}$ simplemente como la política estacionaria $f \in \mathbb{F}$; en otras palabras, se identifica a $\mathbb{F}$ con el conjunto de políticas estacionarias. De hecho, una política de Markov $\pi = \{f_t\}$ es una clase especial de una política de control general $\overline{\pi}$ definida como una regla (medible, posiblemente aleatoria) para seleccionar controles, y en cada tiempo $t = 0, 1, ...$, el control $\overline{\pi}$ puede depender del estado actual y de todos los estados y controles anteriores (véase [11]). Denotaremos el conjunto de todas las políticas por Π.

Dado el estado inicial $x_0 = x$ y cualquier política π existe una medida de probabilidad $\mathcal{P}_x^\pi$, inducida por la pareja (x, π), en el espacio $(X \times A)^\infty$ con $\mathcal{F}$ la σ-algebra producto, en una forma canónica (véase [11]). Se denotará el operador de esperanza correspondiente por E_x^π. El proceso estocástico $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}_x^\pi, \{x_t\})$ se denomina ***proceso de control de Markov*** (PCM).

En muchas aplicaciones, la evolución de un proceso está especificado por una ecuación a tiempo discreto de la forma

$$x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t), \tag{1.2}$$

para $t = 0, 1, ...$, donde $x_0 = x \in X$ es el estado inicial, $\{\xi_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias (v.a.), independientes e idénticamente distribuidas (*i.i.d.*) con valores en algún espacio de Borel S, con densidad Δ e independientes del estado inicial x_0. $F : X \times A \times S \to X$ es una función medible.

En este caso, la ley de transición Q está dada por

$$Q(B|x, a) = \int_S I_B \left[F(x, a, s)\right] \Delta(s) ds,$$

para $(x, a) \in \mathbb{K}$, $B \in \mathcal{B}(X)$, donde $I_B(\cdot)$ es la función indicadora del conjunto B.

En el trabajo, se considerarán las siguientes funciones objetivo, también conocidas como criterios o índices de funcionamiento.

El ***costo total descontado esperado*** está definido como

$$V_\alpha(\pi, x) := E_x^\pi \left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t c(x_t, a_t) \right], \tag{1.3}$$

cuando se usa la política π, dado el estado inicial $x_0 = x$ y el número $\alpha \in (0, 1)$ es el factor de descuento.

El ***costo promedio esperado*** está dado por:

$$J(\pi, x) := \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} E_x^\pi \left[\sum_{t=0}^{n} c(x_t, a_t) \right] \tag{1.4}$$

cuando el estado inicial es $x_0 = x$ y se usa la política π.

Al fijar una función objetivo $T(\pi, x)$ (p.ej. (1.3) o (1.4)), el problema de control óptimo consiste en minimizar la función $\pi \to T(\pi, x)$ sobre Π, para toda x. Una política π^* es llamada ***política óptima*** si

$$T(\pi^*, x) = \inf_{\pi \in \Pi} T(\pi, x), \text{ para toda } x \in X.$$

y el costo mínimo

$$T^*(x) := T(\pi^*, x), \; x \in X$$

se denomina ***función de valores óptimos***.

Observación 1.1. *En algunos casos, es conveniente considerar una función de recompensa por etapa $r : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$, en lugar de un costo por etapa c. Así, si el costo por etapa $c(x, a)$ es reemplazado por una función de recompensa $r(x, a)$, $(x, a) \in \mathbb{K}$, entonces el problema de control óptimo consiste en maximizar la función objetivo dada, sobre Π, para toda $x \in X$.*

Capítulo 2

Problemas: relevancia y antecedentes

En este capítulo se establecen los problemas de la tesis y se comenta la importancia de resolverlos, así como también los antecedentes que se tienen para su solución.

2.1. Planteamiento de problemas

Sean X y A subconjuntos de Borel no vacíos y fijos de $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, respectivamente. Para cada $x \in X$, sea $A(x)$ un subconjunto (medible) no vacío de A. Supóngase que $\mathbb{K} := \{(x, a) : x \in X,\ a \in A(x)\}$ es un subconjunto medible de $X \times A$.

Sea $G : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada por abajo (p. ej. no negativa) y considérese el siguiente problema de minimización:

$$\min_{a \in A(x)} G(x, a), \tag{2.1}$$

con $x \in X$. También, para cada $x \in X$, defínase $A^*(x)$ por

$$A^*(x) := \left\{ a \in A(x) : G(x, a) = \min_{a^* \in A(x)} G(x, a^*) \right\}. \tag{2.2}$$

Supóngase que, para toda $x \in X$, existe el mínimo en (2.1). Además, para cada $x \in X$, sean $f(x) := \sup A^*(x)$ y $f'(x) := \inf A^*(x)$, el valor máximo y el valor mínimo, respectivamente, en los cuales se alcanza el mínimo de (2.1) (suponiendo que f y f' están bien definidos). Entonces, los **problemas** a resolver en la tesis son los siguientes:

(1) Dar condiciones que impliquen que f y f' son funciones monótonas y que no requieran de la compacidad de los conjuntos $A(x)$, $x \in X$, ni que la función G esté acotada superiormente.

(2) Considerando a X y A intervalos en $\mathbb{R}$, aplicar los resultados obtenidos en (1) para proporcionar condiciones en los elementos del modelo de control de Markov, correspondiente a un PCM, que garanticen la monotonicidad de la política óptima.

(3) Considerando a X y A subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, aplicar los resultados obtenidos en (1) para proporcionar condiciones que garanticen la monotonicidad creciente de la política óptima en PCMs descontados.

(4) Dar una versión modificada del algoritmo de iteración de políticas presentado en [11], para PCMs descontados en $\mathbb{R}$, cuando de antemano se sabe que la política óptima es monótona creciente.

2.2. Relevancia de la problemática

La monotonicidad de los minimizadores óptimos es una característica ampliamente conocida y estudiada por la gente que hace aplicaciones, ya sea en problemas de optimización o en el contexto de PCMs, por ejemplo, en problemas de consumo-inversión, sistemas de control de inventarios, teoría de colas, teoría de juegos, administración de recursos y procesos de decisión binaria. La razón principal de este interés radica en que la monotonicidad de una solución óptima refleja propiedades cualitativas de los modelos estudiados.

En las Tablas 2.1 - 2.4 se describen algunas de estas aplicaciones. En la primera columna se indica el o los autores de la investigación correspondiente. En la segunda y tercera columna se describen brevemente la situación y el enunciado del problema de interés, respectivamente. En la última columna se mencionan los resultados obtenidos por los autores, en donde se muestra la existencia de una solución monótona.

Referencia	Descripción	Problema	Resultados
	Procesos de decisión binaria.		**Política de control límite**.
Heyman y Sobel [12], Puterman [27]	En un modelo de reemplazo de la pieza de un equipo, el estado x es la edad de la pieza y el control a es reemplazarla (1) o no reemplazarla (0).	¿A qué edad es apropiado deshacerse de la pieza y reemplazarla?.	Para cada tiempo t se determina x^* tal que si $x_t > x^*$, $a = 1$ y si $x_t \leq x^*$, $a = 0$.
Sennot [30]	En un sistema de colas el estado es el número de clientes en la cola y el control a es rechazar (1) o aceptar (0) la entrada de un cliente.	¿Cuál es el número de clientes adecuado para comenzar a rechazar clientes?	
Pittenger [25]	Un experimentador aplica a n personas una serie de pruebas idénticas. El estado es el número de individuos que no han registrado fallas y el control es el número de pruebas a aplicar, considerando que un individuo puede continuar tomando pruebas aún después de fallar una o más pruebas o puede dejar de tomar pruebas después de la primera falla.	Encontrar una política óptima que minimice el costo total esperado de aplicar las pruebas y determinar la cantidad de personas que no han registrado fallas.	La política óptima es creciente en el número de sobrevivientes.

Tabla 2.1: Minimizadores monótonos en procesos de decisión binaria.

Referencia	Descripción	Problema	Resultados
Bertsekas [3], Gallish [10] y Stidham y Weber [32]	En un modelo de colas el estado es el número de clientes en el sistema y el control es la elección de la tasa de servicio, después de la salida de un cliente.	Elegir la tasa de servicio (o de arribos) tal que el costo del servicio sea acorde con el costo de espera del cliente.	Cuando la longitud de la cola se incrementa es óptimo usar una tasa de servicio más rápida.
	En un sistema de colas, con un solo servidor, la tasa de servicio es fija y la tasa de arribos es controlada. El estado es el número de clientes en el sistema.		La tasa de arribos óptima tiende a disminuir cuando el sistema llega a estar más lleno.
Fu, Marcus y Wang [9]	En un sistema de colas con servidores múltiples, el estado es el número de clientes en el sistema y se controla el número de servidores.	Determinar la política óptima que minimice el costo esperado, con horizonte finito.	Es óptimo aumentar el número de servidores cuando el número de clientes aumenta.
Lu y Serfozo [20]; Hipp y Holzbaur [15]	En un sistema de colas, el estado es la longitud de la cola y las tasas de llegada y servicio actuales; el control es la selección de las tasas de llegada y servicio para uso hasta la siguiente llegada o partida.	Hallar una política óptima que minimice el costo total descontado o el costo promedio.	Las tasas de llegada y servicio óptimas son funciones decreciente y creciente, resp., de la longitud de la cola.

Tabla 2.2: Minimizadores monótonos en sistemas de espera.

Referencia	Descripción	Problema	Resultados
	Administración de recursos.		
Hinderer [13], Mendelssohn y Sobel [22]	Una riqueza x (estado) es colocado secuencialmente entre dos sectores económicos: reinversión a y consumo $x-a$.	Maximizar la recompensa esperada descontada en un modelo de n etapas.	Para cada n, $a_n^*(x)$, la decisión de reinversión óptima, es una función creciente de la riqueza.
Hinderer [13]	En un modelo de administración de depósito, el estado es el contenido de la presa antes de que se libere el líquido y el control a es la descarga. Así $x-a$ es la cantidad retenida.		Para cada n, $a_n^*(x)$, la decisión de descarga óptima es una función creciente del contenido de la presa.
Miller [23]	En un modelo de consumo óptimo no estacionario, con un ingreso estocástico, el estado s del sistema es la suma de la riqueza x y la deuda permitida en ese periodo y, el control es la cantidad a consumir entre 0 y s.	Maximizar la utilidad esperada descontada del consumo, en un horizonte infinito.	El consumo óptimo es una función creciente de la riqueza.

Tabla 2.3: Minimizadores monótonos en administración de recursos.

Referencia	Descripción	Problema	Resultados
Iglehart [16]	En un modelo de inventario de un sólo producto, se decide la cantidad de inventario a surtir, con base en el nivel x de inventario (estado).	Determinar la política de orden óptima que minimiza el costo total descontado esperado.	La política óptima es (s, S), $s < S$. Si $x < s$, ordenar $S - x$ y si $x \geq s$, no ordenar.
Puterman [27], Topkis [36]	Una firma pone en el mercado un sólo producto y determina su precio a, basado en el nivel de ventas x, del periodo anterior.	Elegir una regla para establecer el precio que maximice la recompensa total esperada.	El nivel de precio óptimo es una función creciente de las ventas.
Ross [29]	En un modelo de juegos, un jugador debe decidir, después de que la probabilidad de ganar cada juego (p) es anunciada, la cantidad a apostar a, de su fortuna x. El estado es (x, p).	Maximizar el valor esperado de una función de utilidad de su fortuna final, en n juegos.	La apuesta óptima es una función creciente de p, para n y x fijas.
Altman [1]	En el contexto de juegos de Markov de suma cero, el jugador 1 controla la llegada de clientes a un acumulador finito y el jugador 2 controla la tasa de servicio (desconocida por el jugador 1). El estado es el número de clientes en el sistema.	Diseñar una política que garantice el mejor funcionamiento en condiciones de servicio, en el peor caso.	Cuando el número de clientes aumenta, es óptimo que el flujo de entrada y la calidad de servicio disminuyan.

Tabla 2.4: Minimizadores monótonos en modelos de inventarios y teoría de juegos.

Cabe señalar que en tales aplicaciones se consideran sistemas dinámicos cuyos estados son observados periódicamente y en base a ello, se toma una decisión (o se aplica un control). El horizonte de planeación puede ser finito o infinito.

Por otro lado, en Puterman [27], para PCMs en espacios finitos, la existencia de una política óptima que es estrictamente monótona es útil por lo siguiente: Su aproximación, vía el algoritmo de iteración de políticas, es mejorada porque se toma como política inicial una política creciente y en cada iteración se reducen los conjuntos de controles admisibles. Esto hace que, desde nuestro punto de vista, se acelere la convergencia de este algoritmo (véase [27], págs. 259–260; 428).

2.3. Antecedentes

En la Tabla 2.5 se resumen los antecedentes que se conocen para la obtención de minimizadores monótonos en problemas de optimización, como el que se definió en (2.1).

En los trabajos de Topkis [35], Topkis [36] y Sundaram [34] se presentan condiciones que garantizan soluciones monótonas al problema de optimización (2.1), y en cada una de ellos, se requiere que los conjuntos $A(x)$, $x \in X$, sean compactos. s.c.i. quiere decir semicontinua inferior.

Topkis [35], es un antecedente de este trabajo, para el caso de minimizadores crecientes (en el caso de minimizadores decrecientes, no necesariamente existen).

Sundaram [34] y Topkis [36] estudian un problema de maximización, similar al problema (2.1) (i.e. sustituyendo “min” por “max” en (2.1)) y obtienen maximizadores crecientes. En Topkis [36], aparece la versión dual a la considerada en Topkis [35].

Autor	**X**	**A**	**A(x)**, $x \in X$	$G(x,a)$, $(x,a) \in \mathbb{K}$	**Resultado**
Topkis [35] (1978)	CPO	Retícula	Ascendente y compacto	subaditiva. $G(x,\cdot)$ s.c.i. y submodular, $\forall x \in X$.	Minimizador creciente
Sundaram [34] (1996)	sub-retícula de $\mathbb{R}^n$	sub-retícula de $\mathbb{R}^m$	sub-retícula compacta y ascendente	Superaditiva. $G(x,\cdot)$ continua y supermodular, $\forall x \in X$.	Maximizador creciente
Topkis [36] (1998)	CPO	Retícula	Ascendente. Finito o compacto en $\mathbb{R}^n$	Superaditiva y $G(x,\cdot)$ s.c.s. y supermodular, $\forall x \in X$.	Maximizador creciente
	Retícula	Retícula	finito o compacto en $\mathbb{R}^n$	Supermodular y s.c.s.. $\mathbb{K}$ sub-retícula.	Maximizador creciente

Tabla 2.5: Minimizadores monótonos en problemas de optimización.

Por otra parte (véase la Tabla 2.6), en los trabajos de Serfozo [31] y Kalin [18] se presentan condiciones que implican la existencia de políticas óptimas monótonas en PCMs. En [31] y [18] se supone directamente la superaditividad del operador de programación dinámica (OPD) (véase 4.4, en Capítulo 4). En esta tabla, FO se utiliza para abreviar función objetivo y FD se usa para abreviar función de distribución.

En Hinderer [13], Porteus [26] y Topkis [36] se dan condiciones para obtener políticas óptimas monótonas en PCMs descontados a tiempo discreto y con horizonte finito. En [36], aunque no se supone directamente la superaditividad del OPD, se pide que la familia de funciones de distribución, asociadas a las probabilidades de transición del modelo, sean crecientes en los estados y supermodulares estocásticamente en $\mathbb{K}$. En [26], la dinámica del sistema está dada por una ecuación en diferencias ([11]) y el costo es aditivamente separable (i.e., se puede escribir como la suma de dos expresiones donde una de ellas sólo depende del estado y la otra sólo depende de los controles); además, se supone que las funciones de iteración de valores son dos veces diferenciables.

Autor	**X**	**A**	**A(x)**, $x \in X$,	$Q(B\|x,a)$	**c(x,a)** o **r(x,a)**	**Política óptima y FO**
Serfozo [31] (1976) y Kalin [18] (1978)	CPO	$\subseteq \mathbb{R}$ compacto	Creciente. $A \backslash A(x)$, $x \in X$, es creciente (véase [31])	OPD superaditivo		Creciente en PCMs descontados
Topkis [36] (1998)	$\subset \mathbb{R}^n$	$\subset \mathbb{R}^m$	Finito y creciente	$\mathbb{K}$ sub-retícula. La FD $F_{x,a}(y)$ es supermodular estocásticamente y $F_{\cdot,a}(y)$ es creciente estocásticamente (véase [36]).	$r(\cdot, a)$ creciente. r supermodular.	Creciente en PCMs descontados
Porteus [26] (2002)	$\subset \mathbb{R}$	$\subset \mathbb{R}$	$A(x) = A$, $x \in X$.	$x_{t+1} = F(x_x, a_t, \xi_t)$. $F(\cdot,\cdot,s)$ creciente y submodular. $F(\cdot, a, s)$ cóncava.	submodular. $c(\cdot, a)$ cóncavo, creciente y submodular.	creciente en PCMs descontados

Tabla 2.6: Políticas óptimas monótonas en PCMs.

Capítulo 3

Minimizadores monótonos en problemas de optimización

En esta parte de la tesis, se desarrolla con más detalle la Sección 3, del trabajo de Flores-Hernández y Montes-de-Oca [7].

En este capítulo se presentan condiciones bajo las cuales el problema de minimización (2.1), establecido en la Sección 2.1, tiene minimizadores monótonos, en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$.

Considérese nuevamente, como en la Sección 2.1, lo siguiente:

Sean X y A subconjuntos de Borel no vacíos y fijos de $\mathbb{R}^n$ and $\mathbb{R}^m$, $n, m \in \mathbb{N}$, respectivamente. Para cada $x \in X$, sea $A(x)$ un subconjunto (medible) no vacío de A. Supóngase que $\mathbb{K} := \{(x, a) : x \in X,\ a \in A(x)\}$ es un subconjunto medible de $X \times A$.

Sea $G : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada por abajo (p.ej. no negativa) y considérese el siguiente problema de minimización:

$$\min_{a \in A(x)} G(x, a), \tag{3.1}$$

con $x \in X$. También, para cada $x \in X$, defínase $A^*(x)$ por

$$A^*(x) := \left\{ a \in A(x) : G(x, a) = \min_{a^* \in A(x)} G(x, a^*) \right\}. \tag{3.2}$$

Suposición 3.1. *a) G es semicontinua inferior (s.c.i.) en $\mathbb{K}$.*
b) G es inf-compacta en $\mathbb{K}$, es decir, para cada $x \in X$ y $\bar{s} \in \mathbb{R}$, el conjunto $A_{\bar{s}}(x) := \{a \in A(x) : G(x, a) \leq \bar{s}\}$ es compacto.

Lema 3.1. *(Teorema 4.1, [28])*
La Suposición 3.1 implica que existe una función medible $g : X \to A$ *tal que* $g(x) \in A^*(x)$, $x \in X$, *i.e.* g *es un minimizador para (3.1). En particular, obsérvese que* $A^*(x) \neq \emptyset$, *para toda* $x \in X$.

Observación 3.1. *Es directo verificar que, para cada* $x \in X$, $A^*(x) \subset A_{G^*(x)}(x)$, *donde* $G^*(x) := \min\limits_{a^* \in A(x)} G(x, a^*)$.

Lema 3.2. *La Suposición 3.1 implica que* $A^*(x)$ *es un conjunto compacto, para cada* $x \in X$.

Demostración. Sea $x \in X$ fijo y supóngase que existe una sucesión $\{a_n\}$ en $A^*(x)$ tal que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a' \notin A^*(x)$. Obsérvese que $G(x, a') > \min\limits_{a^* \in A(x)} G(x, a^*)$, además, $G(x, a_n) = \min\limits_{a^* \in A(x)} G(x, a^*)$, para cada $n = 1, 2, \ldots$. De aquí, como G es s.c.i. en $\mathbb{K}$, entonces $\min\limits_{a^* \in A(x)} G(x, a^*) = \liminf\limits_{n \to +\infty} G(x, a_n) \geq G(x, a')$, pero esto es una contradicción a la suposición de arriba. Por lo tanto, $a' \in A^*(x)$, i.e., $A^*(x)$ es cerrado.

Ahora, la compacidad de $A^*(x)$ se sigue de la Observación 3.1 y la Suposición 3.1 b), con $\bar{s} = G^*(x)$. Dado que $x \in X$ es arbitrario, el Lema 3.2 se sigue. $\square$

Será de utilidad, en las siguientes dos secciones, el uso del siguiente lema.

Lema 3.3. *(Teorema 4.1, [35])*
Supóngase que para cada $x \in X$, $A(x)$ *es una retícula y* $G(x, \cdot)$ *es submodular. Entonces, para toda* $x \in X$, $A^*(x)$ *es una sub-retícula de* $A(x)$.

3.1. Minimizadores decrecientes de funciones superaditivas

En el siguiente teorema se dan condiciones para obtener minimizadores decrecientes. Luego, se menciona un ejemplo que satisface tales condiciones y la Suposición 3.1 y por lo tanto es posible concluir que tiene un minimizador decreciente.

Teorema 3.1. *Si A es una retícula,* $x \to A(x)$ *es descendente (en particular,* $A(x)$ *es una sub-retícula de A, para cada* $x \in X$*),* $A(y) \subset A(x)$*, para* $x \preceq y \in X$*, G es superaditiva,* $G(x, \cdot)$ *es submodular, para cada* $x \in X$*, y la Suposición 3.1 se cumple, entonces para* $f(x) := \sup A^*(x)$*,* $x \in X$*, se obtiene que* $f(y) \preceq f(x)$*, con* $x \preceq y$ *en X. Además,* $f(x) \in A^*(x)$*, para toda* $x \in X$*, i.e., f es un minimizador para (3.1).*

Demostración. Sean $x, y \in X$ con $x \preceq y$, $a \in A^*(x) \subset A(x)$ y $b \in A^*(y) \subset A(y) \subset A(x)$. Entonces

$$G(x, a \vee b) - G(x, a) \leq G(x, b) - G(x, a \wedge b) \leq G(y, b) - G(y, a \wedge b), \quad (3.3)$$

donde la primera desigualdad se tiene por la submodularidad de $G(x, \cdot)$ y la segunda es consecuencia de la superaditividad de G en $\mathbb{K}$; obsérvese además que $a \wedge b \in A(y)$, porque $A(y) \sqsubseteq A(x)$ y, $a \wedge b, a \vee b \in A(x)$ se debe a que $A(x)$ es una sub-retícula de A. Luego, de (3.3) y de la optimalidad de a y de b, resulta que

$$0 \leq G(x, a \vee b) - G(x, a) \leq G(y, b) - G(y, a \wedge b) \leq 0. \quad (3.4)$$

De aquí que la igualdad en (3.4) se sigue y, $a \wedge b \in A^*(y)$ y $a \vee b \in A^*(x)$, esto es, $A^*(y) \sqsubseteq A^*(x)$, para $x \preceq y$.

Ahora, dado que $G(x, \cdot)$ es submodular en la retícula $A(x)$, para cada $x \in X$, usando el Lema 3.3 se obtiene que $A^*(x)$ es una sub-retícula de $A(x)$. Por lo tanto, $x \to A^*(x)$ es descendente.

Además, de la Suposición 3.1 se sigue que, para cada $x \in X$, $A^*(x)$ es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^m$ (véase Lema 3.2). Entonces, del Lema 1.1 se sigue que, para cada $x \in X$, $A^*(x)$ contiene un supremo y un ínfimo. Definiendo $f(x) := \sup A^*(x)$, $x \in X$, y tomando $x, y \in X$, con $x \preceq y$, como $A^*(y) \sqsubseteq A^*(x)$, del Lema 1.3 *a*), resulta que $f(y) \preceq f(x)$. Con esto se concluye la prueba del Teorema 3.1. □

Observación 3.2. *En la prueba del Teorema 3.1 es posible considerar* $f'(x) := inf\, A^*(x)$*,* $x \in X$*, y también demostrar (usando el Lema 1.3 b)) que* f' *es un minimizador decreciente para (3.1).*

Ejemplo 3.1. *Sea X un subconjunto de Borel no vacío de* $\mathbb{R}^2$*. Considérese* $A = A(x) = \mathbb{R}$*,* $x \in X$*, y* $G(x, a) = \kappa(x) + \nu(a)$*,* $(x, a) \in \mathbb{K}$*, donde* κ *y* ν *son funciones real-valuadas definidas en X y A, respectivamente.*

Suposición 3.2. *a)* κ *y* ν *son funciones no-negativas y continuas.*
b) $\lim_{a \to +\infty} \nu(a) = \lim_{a \to -\infty} \nu(a) = +\infty$.

Lema 3.4. *Bajo la Suposición 3.2, el Ejemplo 3.1 satisface las hipótesis del Teorema 3.1. (Por lo tanto, $f(x) := \sup A^*(x)$, $x \in X$, es un minimizador decreciente).*

Demostración. Obsérvese que $A = \mathbb{R}$ es una retícula, $x \to A(x)$ es descendente y $A(y) \subset A(x)$, para $x \preceq y \in X$ (de hecho, $x \to A(x)$ es una multifunción constante, i.e., $A(x) = A$, para toda x), además, G es s.c.i. en $\mathbb{K}$ y no negativa, debido a la Suposición 3.2 a). Luego, si $x, y \in X$, y $a, b \in A(y) = \mathbb{R}$ con $x \preceq y$ y $a \leq b$, entonces $G(y,b) + G(x,a) - \Big[G(y,a) + G(x,b)\Big] = 0$. Por lo tanto, G es superaditiva. Nótese que, para cada $x \in X$, $G(x, \cdot)$ es submodular como consecuencia de que $A(x) = \mathbb{R}$.

Enseguida se verificará que G es inf-compacta (véase la Suposición 3.1 b)). Para ello, considérense $\bar{s} \in \mathbb{R}$ y $x \in X$, fijos. Obsérvese que si $\bar{s} - \kappa(x) < 0$, entonces $A_{\bar{s}}(x) = \emptyset$ (recuérdese que de la Suposición 3.2 a), ν es no-negativa). También obsérvese que si $\bar{s} - \kappa(x) \geq 0$, entonces $A_{\bar{s}}(x)$ es cerrado dado que G es continua. Además, $A_{\bar{s}}(x)$ debe ser acotado. Para probar esto, sea $\{a_n\}$ una sucesión en $A_{\bar{s}}(x)$ tal que $a_n \uparrow +\infty$. Nótese que

$$\kappa(x) + \nu(a_n) \leq \bar{s}, \tag{3.5}$$

para toda n. De aquí que, permitiendo que $n \to +\infty$ en (3.5), y usando la Suposición 3.2 b), resulta que $\bar{s} \geq +\infty$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, $A_{\bar{s}}(x)$ está acotado superiormente. De manera similar, es posible mostrar que $A_{\bar{s}}(x)$ está acotado inferiormente. Dado que $A_{\bar{s}}(x) \subset \mathbb{R}$, se sigue que $A_{\bar{s}}(x)$ es compacto. Como $\bar{s}$ y x son arbitrarios, se sigue que G es inf-compacta en $\mathbb{K}$. Por lo tanto, la Suposición 3.1 se cumple. □

3.2. Minimizadores crecientes de funciones subaditivas

A continuación, se enuncia un resultado que permite obtener minimizadores crecientes en problemas de optimización no acotados (véase Teorema 3.2). Este resultado extiende, en el contexto de espacios Euclidianos, un resultado previo, obtenido por Topkis [35] (véase el Teorema 6.2 en [35]).

Lema 3.5. *(Teorema 6.1, [35])*
Considérese que la Suposición 3.1 se cumple. Si A es una retícula, $x \to A(x)$ es ascendente, $A(y) \subset A(x)$ para $x \preceq y \in X$, $G(x, \cdot)$ es submodular, para cada $x \in X$, y G es subaditiva en $\mathbb{K}$, entonces $x \to A^*(x)$ es ascendente.

Teorema 3.2. *Supóngase que A y $\mathbb{K}$ son retículas. Si $x \to A(x)$ es ascendente (en particular, para cada $x \in X$, $A(x)$ es una sub-retícula de A), $A(y) \subset A(x)$ para $x \preceq y \in X$, G es subaditiva en $\mathbb{K}$ y la Suposición 3.1 se cumple entonces, para $f(x) := \sup A^*(x)$, $x \in X$, se obtiene que $f(x) \preceq f(y)$, para toda $x \preceq y$. Además, $f(x) \in A^*(x)$, para cada $x \in X$, i.e., f es un minimizador para (3.1).*

Demostración. Dado que $\mathbb{K}$ es una retícula y G es subaditiva, del Lema 1.5 b) y el Lema 1.5 c), se obtiene que $G(x, \cdot)$ es submodular en la retícula $A(x)$, para cada $x \in X$. Además, como A es una retícula, la Suposición 3.1 se cumple, $x \to A(x)$ es ascendente, $A(y) \subset A(x)$ para $x \preceq y \in X$ y G es subaditiva, al usar el Lema 3.5, resulta que $x \to A^*(x)$ es ascendente (en particular, para cada $x \in X$, $A^*(x)$ es una sub-retícula de $A(x)$). Por otro lado, del Lema 3.2 se obtiene que $A^*(x)$, $x \in X$, es un conjunto compacto en $\mathbb{R}^m$. Por lo tanto, del Lema 1.1, se sigue que $A^*(x)$, $x \in X$, contiene un supremo y un ínfimo. El resto de la prueba se sigue del Lema 1.3 a). □

Observación 3.3. *Para el Teorema 3.2, la función $f'(x) := inf A^*(x)$, $x \in X$, también funciona como un minimizador creciente para (3.1); en este caso se usa el Lema 1.3 b).*

Ejemplo 3.2. *Sea $X = A = \mathbb{Z}$ (donde $\mathbb{Z}$ denota el conjunto de números enteros). Considérense $A(x) = [x, \infty) \cap \mathbb{Z}$, $x \in X$ y $G(x, a) = e^{a-x}$, $(x, a) \in \mathbb{K}$.*

Lema 3.6. *El Ejemplo 3.2 satisface las hipótesis del Teorema 3.2. (Por lo tanto, $f(x) := \sup A^*(x)$, $x \in X$, es un minimizador creciente).*

Demostración. Obsérvese que A y $\mathbb{K}$ son retículas, trivialmente. Considérense $x, y \in X$, con $x \leq y$, $a \in A(x)$ y $b \in A(y)$. Para verificar que $x \to A(x)$ es ascendente, es suficiente considerar los siguientes casos: $a \in [x, y) \cap \mathbb{Z}$, $a \in [y, b) \cap \mathbb{Z}$ o $a \in [b, \infty) \cap \mathbb{Z}$, y, el hecho de que $A(x)$, $x \in X$, es una sub-retícula de A (recuérdese que para cada $x \in X$, $A(x)$ es un subconjunto de $\mathbb{Z}$). Si $a \in [y, b) \cap \mathbb{Z}$ o $a \in [b, \infty) \cap \mathbb{Z}$ entonces, $a \wedge b \in A(y) \subset A(x)$ y $a \vee b \in A(y)$; si $a \in [x, y) \cap \mathbb{Z}$, entonces $a \wedge b = a \in A(x)$ y $a \vee b = b \in A(y)$. Por lo tanto, $A(x) \sqsubseteq A(y)$.

Nótese también que G es una función subaditiva en $\mathbb{K}$ como consecuencia del Lema 1.4 i). Claramente, G también es una función positiva y continua.

Por otro lado, considérense $x \in X$ y $\bar{s} \in \mathbb{R}$ fijos. Si $\bar{s} \leq 0$, entonces $A_{\bar{s}}(x) = \emptyset$ es compacto. Ahora, sea $0 < \bar{s} < 1$. Al tomar $a \in A_{\bar{s}}(x)$ obsérvese que $e^{a-x} \leq \bar{s}$ implica que $a - x \leq \ln \bar{s} < 0$, i.e., $a < x$, pero esto es una contradicción, porque $a \in [x, \infty) \cap \mathbb{Z}$. Así, $A_{\bar{s}}(x) = \emptyset$ y, por lo tanto, éste también es compacto. Finalmente, sea $\bar{s} \geq 1$ y considérese $a \in A_{\bar{s}}(x)$. Obsérvese que $e^{a-x} \leq \bar{s}$ y $a \in [x, \infty) \cap \mathbb{Z}$ implican que $a \in [x, x + \ln \bar{s}] \cap \mathbb{Z}$. Así, la compacidad de $A_{\bar{s}}(x)$

se obtiene de que $A_{\bar{s}}(x)$ es un conjunto cerrado (recuérdese que G es continua), y de que $A_{\bar{s}}(x) \subset [x, x + \ln \bar{s}] \cap \mathbb{Z}$. Por lo tanto, dado que x y $\bar{s}$ son arbitrarios, se sigue que G es inf-compacta en $\mathbb{K}$. $\square$

Capítulo 4

Aplicaciones: PCMs en $\mathbb{R}$

En este apartado se desarrollan con más detalle las Secciones 4, 5, 6, y 7 del trabajo de Flores-Hernández y Montes-de-Oca [7].

En este capítulo se aplican los resultados obtenidos en el Capítulo 3, a PCMs con costo descontado y con costo promedio en $\mathbb{R}$, para obtener políticas óptimas monótonas.

4.1. Políticas óptimas monótonas de PCMs descontados

En esta sección, se aplicarán los Teoremas 3.1 y 3.2 del Capítulo 3 para garantizar la existencia de una política óptima monótona para PCMs con costo descontado, en $\mathbb{R}$.

Sea $\{X, A, \{A(x), x \in X\}, Q, c\}$ un modelo de control de Markov fijo. En esta sección, $\alpha \in (0,1)$ se considerará fijo.

Suposición 4.1. *(Suposiciones 4.2.1 y 4.2.2 en [11], p. 46)*

a) *El costo por etapa $c : \mathbb{K} \to \mathbb{R}$ es no-negativo, s.c.i. e inf-compacto en $\mathbb{K}$.*

b) *La ley de transición Q es fuertemente continua, es decir,*

$$u'(x,a) := \int u(z)Q(dz|x,a)$$

es continua y acotada para cada función $u : X \to \mathbb{R}$ medible y acotada.

c) *Existe una política π tal que $V_\alpha(\pi, x) < +\infty$, para cada $x \in X$.*

Lema 4.1. *(Teorema 4.2.3, [11]) Bajo la Suposición 4.1, la función de valores óptimos con costo descontado* V_α^**, satisface la* ***ecuación de optimalidad con costo descontado*** *(EOCD), i.e., para toda* $x \in X$*,*

$$V_\alpha^*(x) = \min_{a \in A(x)} \left[c(x,a) + \alpha \int V_\alpha^*(z) Q(dz|x,a) \right]. \tag{4.1}$$

También existe una función $g_d \in \mathbb{F}$*, tal que*

$$V_\alpha^*(x) = c(x, g_d(x)) + \alpha \int V_\alpha^*(z) Q(dz|x, g_d(x)), \tag{4.2}$$

para cada $x \in X$ *y* g_d *es óptima. Inversamente, si* g_d *es óptima estacionaria, entonces satisface (4.2).*

Una manera de aproximar a $V_\alpha^*(\cdot)$, es a través de las funciones de iteración de valores, que se definen a continuación.

Definición 4.1. *Las* ***funciones de iteración de valores*** *se definen como*

$$v_n(x) := \min_{a \in A(x)} \left[c(x,a) + \alpha \int v_{n-1}(z) Q(dz|x,a) \right], \tag{4.3}$$

para toda $x \in X$ *y* $n = 1, 2, \ldots,$ *con* $v_0(\cdot) \equiv 0$.

Lema 4.2. *(Lema 4.2.8, [11]) Considérese que la Suposición 4.1 se cumple. Entonces* $v_n \uparrow V_\alpha^*$.

En este contexto, la función G_1 definida como

$$G_1(x,a) := c(x,a) + \alpha \int V_\alpha^*(z) Q(dz|x,a), \tag{4.4}$$

$(x,a) \in \mathbb{K}$, corresponde a la función que es minimizada en (4.1). (4.4) será llamada el **operador de programación dinámica descontado** (OPDD), aplicado a $V_\alpha^*(\cdot)$ (véase [31]). (De hecho, (4.4) es la conexión con el problema de minimización presentado en (3.1)).

Observación 4.1. *El conjunto* $A^*(x)$, $x \in X$*, definido en (3.2), será denotado por* $A_d^*(x)$ *en el contexto de PCMs descontados, y está dado por*

$$A_d^*(x) := \left\{ a \in A(x) : G_1(x,a) = \min_{a^* \in A(x)} G_1(x, a^*) \right\}, \tag{4.5}$$

para $x \in X$*, con* G_1 *definida en (4.4). También, cabe señalar que del Lema 4.1 se sigue que para cada* $x \in X$*,* $A_d^*(x)$ *es no vacío y representa el conjunto de minimizadores de la EOCD, para el estado* x.

Luego, para poder aplicar los Teoremas 3.1 y 3.2, además de suponer que $x \to A(x)$ es descendente (resp. ascendente) y que se cumple la Suposición 3.1, para obtener que la política óptima (minimizador óptimo) es decreciente (resp. creciente), será necesario que $G_1(\cdot,\cdot)$ sea superaditiva (resp. subaditiva).

Una de las aportaciones principales de este trabajo consiste en dar condiciones suficientes para que $G_1(\cdot,\cdot)$ sea una función superaditiva (resp. subaditiva). Tales condiciones están dadas en los elementos del modelo de control de Markov y tienen en común la siguiente suposición:

Suposición 4.2. a) *X y A son intervalos en $\mathbb{R}$.*

b) *$(1-\lambda)a+\lambda a' \in A((1-\lambda)x+\lambda x')$, para toda $x, x' \in X$, $a \in A(x)$, $a' \in A(x')$ y $\lambda \in [0,1]$ (i.e., $x \to A(x)$ es convexa); $A(y) \subset A(x)$, para $x \leq y \in X$ y $A(x)$ es convexo, para cada $x \in X$.*

c) *c es convexo en $\mathbb{K}$.*

4.1.1. Condiciones para que el OPD sea superaditivo

Condición 1. *($C1$)*

a) *Q está dada por $x_{t+1} = \gamma x_t + \delta a_t + \xi_t$, $t = 0,1,\ldots$, $\gamma, \delta > 0$ y ξ_t es una sucesión de v.a. i.i.d. que toman valores en $S \subset \mathbb{R}$. (Obviamente, se supone que $\gamma x + \delta a + s \in X$, para toda $x \in X$, $a \in A(x)$ y $s \in S$).*

b) *$x \to A(x)$ es descendente.*

c) *c es superaditivo en $\mathbb{K}$.*

Condición 2. *($C2$)*

a) *$x \to A(x)$ es descendente.*

b) *Para $x \leq y$ en X, $c(x,a) \leq c(y,a)$, para cada $a \in A(y)$.*

c) *c es superaditivo en $\mathbb{K}$.*

Q está dada por $x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t)$, $t = 0,1,\ldots$, como en (1.2), con $S \subset \mathbb{R}$. Además,

d) *si $x \leq y$ en X, entonces $F(x,a,s) \leq F(y,a,s)$, para cada $a \in A(y)$ y $s \in S$.*

e) $F(x, \cdot, s)$ *es creciente, para cada* $x \in X$ *y* $s \in S$.

f) $F(\cdot, \cdot, s)$ *es convexa en* $\mathbb{K}$, *para cada* $s \in S$.

g) $F(\cdot, \cdot, s)$ *es superaditiva en* $\mathbb{K}$, *para cada* $s \in S$.

4.1.2. Condiciones para que el OPD sea subaditivo

Condición 3. *(C3)*

a) $\mathbb{K}$ *es una retícula.*

b) Q *está dada por* $x_{t+1} = \gamma x_t + \delta a_t + \xi_t$, $t = 0, 1, \ldots$, $\gamma > 0$, $\delta < 0$ *y* ξ_t *es una sucesión de v.a. i.i.d. que toman valores en* $S \subset \mathbb{R}$. *(Obviamente, se supone que* $\gamma x + \delta a + s \in X$, *para toda* $x \in X$, $a \in A(x)$ *y* $s \in S$*).*

c) $x \to A(x)$ *es ascendente.*

d) c *es subaditivo en* $\mathbb{K}$.

Condición 4. *(C4)*

a) $\mathbb{K}$ *es una retícula.*

b) $x \to A(x)$ *es ascendente.*

c) Para $x \leq y$ *en* X, $c(x, a) \leq c(y, a)$, *para cada* $a \in A(y)$.

d) c *es subaditivo en* $\mathbb{K}$.

Q *está dada por* $x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t)$, $t = 0, 1, \ldots$, *como en (1.2), con* $S \subset \mathbb{R}$. *Además,*

e) si $x \leq y$ *en* X, *entonces* $F(x, a, s) \leq F(y, a, s)$, *para cada* $a \in A(y)$ *y* $s \in S$.

f) $F(x, \cdot, s)$ *es decreciente, para cada* $x \in X$ *y* $s \in S$.

g) $F(\cdot, \cdot, s)$ *es convexa en* $\mathbb{K}$, *para cada* $s \in S$.

h) $F(\cdot, \cdot, s)$ *es subaditiva en* $\mathbb{K}$, *para cada* $s \in S$.

4.1.3. Resultados principales

A continuación se enuncia un par de teoremas, sin demostración. Las pruebas correspondientes aparecen en la siguiente sección.

Teorema 4.1. *Considérese que las Suposiciones 4.1 y 4.2 se cumplen. Entonces existe una política óptima estacionaria decreciente bajo cada Ci, $i = 1, 2$.*

Teorema 4.2. *Considérese que las Suposiciones 4.1 y 4.2 se cumplen. Entonces existe una política óptima estacionaria creciente bajo cada Ci, $i = 3, 4$.*

4.1.4. Ejemplos

En esta sección, se describen algunos ejemplos que satisfacen las hipótesis del Teorema 4.1 o del Teorema 4.2 y por lo tanto, tienen una política óptima decreciente o creciente, respectivamente. Será de utilidad el siguiente lema.

Lema 4.3. *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, $\mathcal{W} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa y $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$. Entonces $D : I \to \mathbb{R}$ definida por*

$$D(a) := \mathcal{W}(y + a) - \mathcal{W}(x + a),\ a \in I$$

es creciente.

Demostración. Esta se sigue directamente de aplicar el Lema 4.42 (i) de [33]. □

Ejemplos para $C1$ y $C2$

Ejemplo 4.1. *Primer ejemplo de un sistema de producción de inventario (véase Ejemplo 4.5 en [4] y Ejemplo 1.3.3 en [11]).*

Sea $X = \mathbb{R}$ y $A = A(x) = [0, +\infty)$, para toda $x \in X$. La dinámica de este sistema está dada por:

$$x_{t+1} = x_t + a_t - \xi_t,\ \ t = 0, 1, 2, ... \tag{4.6}$$

Aquí, $\xi_0, \xi_1, ...$ son v.a. i.i.d. que toman valores en $S = [0, +\infty)$ y con densidad Δ.

Suposición 4.3. *En el Ejemplo 4.1:*

a) Se cumple la Suposición 4.1.

b) c es convexo y superaditivo.

Lema 4.4. *Considérese que la Suposición 4.3 se cumple. Entonces el Ejemplo 4.1 tiene una política óptima estacionaria decreciente. (de hecho, se mostrará que el Ejemplo 4.1 satisface la Suposición 4.2 y $C1$).*

Demostración. Obsérvese que bajo la Suposición 4.3 b), este ejemplo cumple la Condición $C1$ y la Suposición 4.2. Por lo tanto, se tiene el resultado deseado. □

Observación 4.2. *Por ejemplo, si el costo está dado por:*

$$c(x,a) = \beta a + \hat{h}\, E\left[max\left(0, x+a-\xi\right)\right] + \hat{p}\, E\left[max\left(0, \xi - x - a\right)\right] \tag{4.7}$$

con $\hat{h}$, $\hat{p}$ y β constantes no-negativas, en el Lema 4.7 de [4] se muestra que el Ejemplo 4.1 cumple la Suposición 4.3 a), al suponer además que Δ es continua, $E[\xi] < \infty$ y $f(x) = 0$, para toda $x \in X$. También, en [4] se demuestra que c es no-negativo, convexo, s.c.i e inf-compacto en $\mathbb{K}$ y la prueba de que es superaditivo en $\mathbb{K}$, es la siguiente:

Utilizando el resultado de que para $l, l' \in \mathbb{R}$, max $(l, l') = \frac{l+l'+|l-l'|}{2}$, otra expresión para la función de costo dada en (4.7) es:

$$c(x,a) = \beta a + (\hat{h} - \hat{p})\frac{x+a}{2} - (\hat{h} - \hat{p})\frac{E(\xi)}{2} + (\hat{h} + \hat{p})\frac{E[|x+a-\xi|]}{2} \tag{4.8}$$

donde $(x, a) \in \mathbb{K}$ y la esperanza en (4.7) y (4.8) es con respecto a ξ.

Usando (4.8) se obtiene que

$$c(y,a) - c(x,a) = \frac{1}{2}(\hat{h} + \hat{p}) \int \Big[|y+a-s| - |x+a-s|\Big]\Delta(s)ds + \frac{1}{2}(\hat{h} - \hat{p})(y-x), \tag{4.9}$$

para $x, y \in X$ y $a \in A = A(x) \cap A(y)$. Obsérvese que de (4.9), para obtener que c es superaditiva es suficiente verificar que para $x, y \in \mathbb{R}$, con $x \leq y$ y $s \in [0, +\infty)$, $\Theta(a) = |y+a-s| - |x+a-s|$, $a \in A$, es creciente.

Considérense $x, y \in \mathbb{R}$ fijos, con $x < y$ y $s \in [0, +\infty)$. Tomando $a, b \in [0, +\infty)$, con $a < b$ obsérvese que existen tres casos: $y+a-s < x+b-s$, $y+a-s = x+b-s$ y $y+a-s > x+b-s$. Supóngase que el primer caso se cumple, i.e., $y+a-s < x+b-s$, esto produce que $x+a-s < y+a-s < x+b-s < y+b-s$. Dado que la función valor absoluto es convexa, usando dos veces la desigualdad (i) en el Lema 4.42 de [33] (primero, esta desigualdad será usada para

$x+a-s < y+a-s < x+b-s$ y enseguida, se aplicará a $y+a-s < x+b-s < y+b-s$), se obtiene que

$$\frac{|y+a-s|-|x+a-s|}{y-x} \leq \frac{|x+b-s|-|x+a-s|}{b-a} \leq \frac{|x+b-s|-|y+a-s|}{x+b-(y+a)}, \tag{4.10}$$

$$\frac{|x+b-s|-|y+a-s|}{x+b-(y+a)} \leq \frac{|y+b-s|-|y+a-s|}{b-a} \leq \frac{|y+b-s|-|x+b-s|}{y-x}. \tag{4.11}$$

Combinando (4.10) y (4.11) se sigue que $\Theta(a) \leq \Theta(b)$, $a < b$.

De manera similar, es posible probar que $\Theta(a) \leq \Theta(b)$ para los casos $y+a-s = x+b-s$ y $y+a-s > x+b-s$.

Dado que x y y son arbitrarios, se obtiene que c es superaditivo.

Ejemplo 4.2. *Segundo ejemplo de un sistema de producción de inventario (véanse los Ejemplos 4.1 en [5], 1.3.3 en [11] y el de la Sección 5 en [8]).*

Sea $\tilde{M}$ una constante positiva fija y consideremos $X = A = [0, \tilde{M}]$ y $A(x) = [0, \tilde{M} - x]$, para $x \in X$. La dinámica del sistema está dada por:

$$x_{t+1} = [x_t + a_t - \xi_t]^+, \tag{4.12}$$

para $t = 0, 1, \ldots$, donde $j^+ := max\{0, j\}$. Aquí, ξ_t, $t = 0, 1, \ldots$, son v.a. i.i.d. que toman valores en $S = [0, \infty)$ y tienen densidad Δ.

Suposición 4.4. *Para el ejemplo 4.2:*

a) Se cumple la Suposición 4.1.

b) c es convexo y superaditivo. Además, para $x \leq y$ en X, $c(x,a) \leq c(y,a)$, para cada $a \in A(y)$.

Lema 4.5. *Considérese que la Suposición 4.4 se cumple. Entonces el Ejemplo 4.2 tiene una política óptima estacionaria decreciente, debido a que satisface la Suposición 4.2 y $C2$.*

Demostración. c es una función convexa en $\mathbb{K}$ (Suposición 4.4 c)), y un cálculo elemental permite obtener que $(1-\lambda)a + \lambda a' \in A((1-\lambda)x + \lambda x') = [0, \tilde{M} - ((1-\lambda)x + \lambda x')]$, si $x, x' \in X$, $a \in A(x) = [0, \tilde{M} - x]$, $a' \in A(x') = [0, \tilde{M} - x']$,

$\lambda \in [0,1]$. También, obsérvese que para cada $x \in X$, $A(x)$ es convexo y $A(x) \supset A(y)$, para $x \leq y$ en X. Esto en combinación con el hecho de que X y A son intervalos en $\mathbb{R}$, permite concluir que la Suposición 4.2 se cumple.

Ahora, $C2$ será verificada. No es difícil mostrar que el Ejemplo 4.2 satisface que c es creciente en la primera variable.

Sean $x, y \in X$ con $x \leq y$, $a \in A(x)$ y $b \in A(y)$. Para probar que $A(y) \sqsubseteq A(x)$ es suficiente considerar los siguientes tres casos: $a \in [0, b]$, $a \in (b, \tilde{M} - y]$, o $a \in (\tilde{M} - y, \tilde{M} - x]$. Si $a \in [0, b]$ o $a \in (b, \tilde{M} - y]$, entonces $a \wedge b \in A(y)$ y $a \vee b \in A(y) \subset A(x)$; si $a \in (\tilde{M} - y, \tilde{M} - x]$, entonces $a \wedge b = b \in A(y)$ y $a \vee b = a \in A(x)$. Dado que $A(x)$, $x \in X$, es una sub-retícula, se sigue que $x \to A(x)$ es descendente.

Por otro lado, C2 $d)$ y C2 $e)$ se cumplen como una consecuencia de que $\eta(j) := j^+$, $j \in \mathbb{R}$, es no-decreciente y $\sigma(x, a, s) = x + a - s$ es una función creciente de x y de a, para toda $s \in [0, +\infty)$.

Ahora, la convexidad de $F(\cdot, \cdot, s)$ en $\mathbb{K}$, para cada $s \in [0, +\infty)$, se debe a que $F(x, a, s) = \eta(\sigma(x, a, s))$, para $(x, a) \in \mathbb{K}$ y $s \in [0, +\infty)$, con η convexa y creciente y $\sigma(\cdot, \cdot, s)$ convexa en $\mathbb{K}$, para cada $s \in [0, +\infty)$.

La prueba de que $F(\cdot, \cdot, s)$ es superaditiva en $\mathbb{K}$, para cada $s \in S$, es similar a la prueba de que c, dada en (4.7), es superaditiva (véase Observación 4.2; de hecho, ahora la función valor absoluto en (4.10) y (4.11) será substituida por la función parte positiva). $\square$

Observación 4.3. *Por ejemplo, si el costo está dado como en (4.7) con* $E\,[max\,(0, \xi - x - a)] = 0$, *i.e.,* $c(x, a) = \beta a + \hat{h}\, E\,[max\,(0, x + a - \xi)]$, $(x, a) \in \mathbb{K}$ *(obsérvese que dado que para cada* $t \geq 0$, $x_{t+1} \geq 0$,

$$\begin{aligned} c(x_t, a_t) &= \beta a_t + \hat{h}\, E\,[max\,(0, x_{t+1})] + \hat{p}\, E\,[max\,(0, -x_{t+1})] \\ &= \beta a_t + \hat{h}\, E\,[x_{t+1}] = \beta a_t + \hat{h}\, E\,[max\,(0, x_t + a_t - \xi_t)]), \end{aligned}$$

es posible probar que se satisface la Suposición 4.4 al considerar que Δ *es una función continua y acotada.*

Claramente, c es no-negativo y creciente en la primera variable. La inf-compacidad de c es una consecuencia directa de su continuidad (véase la prueba del Lema 4.7 a) en [4]) y de la compacidad de $A(x)$, $x \in X$. *Dado que c está acotada (recordemos que c es continua y que* $\mathbb{K}$ *es un conjunto compacto),* *se sigue que* $0 \leq V_\alpha(\pi, x) \leq \widehat{M}/(1-\alpha) < +\infty$, *para toda* $x \in X$ *y* $\pi \in \Pi$, *donde* $\widehat{M}$ *es una cota para* c *y* α *es el factor de descuento. En el Ejemplo 4.1 en [5], ya ha sido probado que la Suposición 4.1* b) *se cumple.*

También, en [4] se muestra que c *es una función convexa en* $\mathbb{K}$ *(Lema 4.7 a)). Finalmente, la prueba de la superaditividad de* c *es una consecuencia de la superaditividad de la función de costo (4.7) (véase Observación 4.2), considerando que* $max\,(0, \xi - x - a) = 0$, *para* $(x, a) \in \mathbb{K}$.

Ejemplos para $C3$ y $C4$

Ejemplo 4.3. *Considérense* $X = A = A(x) = \mathbb{R}$, *para cada* $x \in X$. *La ecuación que describe la dinámica de este sistema está dada por*

$$x_{t+1} = \gamma x_t + \delta a_t + \xi_t, \ \ t = 0, 1, \ldots,$$

con $\gamma > 0$ *y* $\delta < 0$ *(véase Observación 4.4). Las perturbaciones* ξ_t, $t = 0, 1, ...$, *son v.a i.i.d. con valores en* $S = \mathbb{R}$.

Suposición 4.5. *Para el ejemplo 4.3:*

a) *La Suposición 4.1 se cumple.*

b) c *es convexo y subaditivo en* $\mathbb{K}$.

Lema 4.6. *Considérese que la Suposición 4.5 se cumple. Entonces el Ejemplo 4.3 satisface las Suposición 4.2 y C3, i.e., éste tiene una política óptima estacionaria creciente.*

Demostración. No es difícil verificar que la Suposición 4.2 y $C4$ se cumplen. □

Observación 4.4. *a)* *De forma similar, a la demostración del Lema 4.6 es posible verificar que si* $\delta > 0$, *entonces el Ejemplo 4.3 tiene una política óptima estacionaria decreciente.*

b) *Si el costo está dado por* $c(x, a) = qx^2 + ra^2$, *para* $(x, a) \in \mathbb{R}$ *y* q *y* r *son constantes positivas, no es difícil verificar la Suposición 4.5 al suponer que* ξ *tiene densidad continua* Δ, $E[\xi] = 0$ *y* $0 < Var[\xi] = E[\xi^2] < +\infty$. *De hecho, en el Ejemplo 4.8 en [4] se muestra que el Ejemplo 4.3 satisface la Suposición 4.1. Por otra parte, obsérvese que* c *es una función subaditiva en* $\mathbb{K}$, *porque para* $x \leq y$ *en* X *y* $a \leq b$ *en* $A(x) \cap A(y) = \mathbb{R}$, *se obtiene que* $c(y, b) + c(x, a) = qy^2 + rb^2 + qx^2 + ra^2 = c(y, a) + c(x, b)$. *Además, no es difícil observar que* c *es una función convexa. Con esta expresión para el costo se tiene la formulación del* problema del regulador lineal *(Sección 4.7, [11]).*

Ejemplo 4.4. *Sea $X = \mathbb{R}$ y $A = A(x) = [0, \infty)$, para cada $x \in X$, y sea*

$$x_{t+1} = x_t + e^{-a_t} + \xi_t, \ \ t = 0, 1, \dots \tag{4.13}$$

con $\{\xi_t\}$ una sucesión de v.a. i.i.d. que toman valores en $S = \mathbb{R}$. La función de costo está dada por:

$$c(x, a) = e^x + \varphi(a)$$

donde $(x, a) \in \mathbb{K}$ y $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función definida como

$$\varphi(a) = \begin{cases} a^2 - 1, & a > 1 \\ 0, & a \in [0, 1] \end{cases}.$$

Suposición 4.6. ***(a)*** *ξ tiene densidad continua Δ.*
(b) *$k := \int e^s \, \Delta(s) \, ds$ es finita y también satisface $0 < \alpha k e < 1$, donde e es la base del logaritmo natural y α es el factor de descuento.*

Lema 4.7. *Considérese que la Suposición 4.6 se cumple. Entonces el Ejemplo 4.4 satisface las Suposiciones 4.1 y 4.2, y C4, i.e., tiene una política óptima estacionaria creciente.*

Demostración. Bajo la Suposición 4.6, este ejemplo satisface la Suposición 4.1 (y por lo tanto tiene el menos una política óptima), al realizar pequeños cambios en la prueba del Lema 4.2 en [4]. Además, no es difícil verificar que se cumple la Suposición 4.2 y $C4$. □

4.1.5. Demostración de los Teoremas 4.1 y 4.2

Lema 4.8. *La Suposición 4.1 implica que la Suposición 3.1 (para G_1) se cumple. Por lo tanto, $A_d^*(x)$ es un conjunto* ***compacto*** *no vacío, para toda $x \in X$ (véase la Observación 4.1).*

Demostración. Sean $(x, a) \in \mathbb{K}$ y $\{(x_l, a_l)\}_{l \geq 0}$ una sucesión en $\mathbb{K}$ tal que $(x_l, a_l) \to (x, a)$. Sea $\{u_n\}$ una sucesión de funciones medibles acotadas en X tal que $u_n \uparrow V_\alpha^*$ (obsérvese que $V_\alpha^*(\cdot) \geq 0$ como consecuencia del hecho de que la función de costo c es no-negativa; además, V_α^* es medible por la Suposición 4.1). Entonces, para cada $n = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} \liminf_{l \to +\infty} \int V_\alpha^*(z) Q(dz|x_l, a_l) &\geq \liminf_{l \to +\infty} \int u_n(z) Q(dz|x_l, a_l) \\ &= \int u_n(z) Q(dz|x, a). \end{aligned} \tag{4.14}$$

La igualdad en (4.14) es consecuencia de la continuidad fuerte de Q. Haciendo que n tienda a infinito en (4.14) se obtiene (por el Teorema de convergencia monótona) que

$$\liminf_{l\to+\infty} \int V_\alpha^*(z)Q(dz|x_l,a_l) \geq \int V_\alpha^*(z)Q(dz|x,a).$$

Por lo tanto, $\int V_\alpha^*(z)Q(dz|\cdot,\cdot)$ es s.c.i. Ahora, como $c(\cdot,\cdot)$ también es s.c.i. y, c y $\int V_\alpha^*(z)Q(dz|\cdot,\cdot)$ están acotadas por abajo, entonces de la Proposición A.3 (a) en [11], resulta que $G_1(\cdot,\cdot)$ es s.c.i. y acotada por abajo.

Ahora, para probar que G_1 es inf-compacta en $\mathbb{K}$, nótese que dado que $G_1(\cdot,\cdot)$ es s.c.i., se sigue que, para cada $x \in X$, $G_1(x,\cdot)$ es s.c.i.. Así, de la Proposición A.1 en [11] resulta que $A_{\bar{s}}(x) = \{a \in A(x) : G_1(x,a) \leq \bar{s}\}$ es cerrado, para cada $x \in X$ y $\bar{s} \in \mathbb{R}$. Luego, la compacidad de $A_{\bar{s}}(x)$, para cada $x \in X$ y $\bar{s} \in \mathbb{R}$, se sigue directamente de la compacidad de $\{a \in A(x) : c(x,a) \leq \bar{s}\}$, para cada $x \in X$ y $\bar{s} \in \mathbb{R}$ (véase la Suposición 4.1 *a*)), y el hecho de que $\{a \in A(x) : G_1(x,a) \leq \bar{s}\} \subseteq \{a \in A(x) : c(x,a) \leq \bar{s}\}$, para cada $x \in X$ y $\bar{s} \in \mathbb{R}$ (recuérdese que $V_\alpha^*(\cdot) \geq 0$).

Finalmente, aplicando el Lema 3.2 se obtiene que $A_d^*(x)$, $x \in X$, es un conjunto compacto no vacío. □

Los Lemas 4.9, 4.10 y 4.11 también serán usados en la demostración de los Teoremas 4.1 y 4.2.

Lema 4.9. *Considérese que la Suposición 4.1 se cumple. Cada una de las Condiciones C2 y C4 implican que V_α^* es **creciente**.*

Demostración. La prueba se realiza por inducción, utilizando que $c(x,a) \leq c(y,a)$ y el hecho de que $F(x,a,s) \leq F(y,a,s)$, para $x \leq y$ y $a \in A(y) \subset A(x)$. Para más detalles, véase [4]. □

Lema 4.10. *Considérese que la Suposición 4.2 se cumple. Cada Ci, $i = 1,\ldots,4$ implica que V_α^* es **convexa**.*

Demostración. La prueba se hace por inducción (véanse los detalles en [4]). De cada condición se usa el hecho de que $c(\cdot,\cdot)$ es convexa en $\mathbb{K}$ y el Lema 1 en Iglehart [17]. Además, de $C2$ y $C4$ se utiliza que $F(\cdot,\cdot,s)$ es convexa en $\mathbb{K}$, para cada $s \in S$ y el resultado de que V_α^* es creciente en X (Lema 4.9). □

Lema 4.11. *Sea $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función convexa. Sea $\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathbb{R}$, con $\hat{a} < \hat{c} < \hat{b}$. Entonces,*

$$H(\hat{a} + \hat{b} - \hat{c}) \leq H(\hat{a}) + H(\hat{b}) - H(\hat{c}). \tag{4.15}$$

Demostración. Obsérvese que es posible representar $\hat{c}$ como $\hat{c} = r\hat{a} + s\hat{b}$ con $r + s = 1$ porque $\hat{a} < \hat{c} < \hat{b}$. Entonces,

$$\begin{aligned} H(\hat{a} + \hat{b} - \hat{c}) &= H((1-r)\hat{a} + (1-s)\hat{b}) \leq (1-r)H(\hat{a}) + (1-s)H(\hat{b}) \\ &\leq H(\hat{a}) + H(\hat{b}) - H(r\hat{a} + s\hat{b}) = H(\hat{a}) + H(\hat{b}) - H(\hat{c}), \end{aligned}$$

donde ambas desigualdades son una consecuencia del hecho de que H es una función convexa. Esto completa la prueba del Lema 4.11. $\square$

Observación 4.5. *Del Lema 4.8 se sigue que para cada $x \in X$, $\sup A_d^*(x)$ y $inf\, A_d^*(x)$ estan bien definidos, i.e., $\sup A_d^*(x), inf\, A_d^*(x) \in A_d^*(x) \subset A \subset \mathbb{R}$, para toda $x \in X$. Así, es posible definir $f_d : X \to A$, el máximo minimizador que satisface la EOCD, de la siguiente forma:*

$$f_d(x) := \sup A_d^*(x), \tag{4.16}$$

$x \in X$. Además, $f_d' : X \to A$, el mínimo minimizador que satisface la EOCD, puede ser definido como sigue:

$$f_d'(x) := inf\, A_d^*(x), \tag{4.17}$$

$x \in X$.

Lema 4.12. *Considérese que las Suposiciones 4.1 y 4.2 se cumplen. Cada Ci, $i = 1, 2$ implica que $f_d(x)$ y $f_d'(x)$, $x \in X$, (definidas en (4.16) y (4.17), respectivamente), son decrecientes.*

Demostración. Se usará el Teorema 3.1 y la Observación 3.2 para mostrar que f_d y f_d' son decrecientes, respectivamente. Para ello, obsérvese que A es trivialmente una retícula, porque es un intervalo de $\mathbb{R}$; $x \to A(x)$ es descendente debido a Ci, $i = 1, 2$; $A(y) \subset A(x)$, para $x \leq y$ en X, por la Suposición 4.2 b); $G_1(x, \cdot)$ es submodular trivialmente como consecuencia de que $A(x) \subset \mathbb{R}$; la Suposición 4.1 implica que la Suposición 3.1 se cumple (véase el Lema 4.8), y sólo resta probar que cada Ci, $i = 1, 2$ implica que la función G_1, en (4.4), es superaditiva.

Supóngase que $C2$ se cumple.

Como $F(\cdot,\cdot,s)$ es superaditiva en $\mathbb{K}$, para cada $s \in S$, al usar que V_α^* es creciente (véase el Lema 4.9), se obtiene que

$$V_\alpha^*(F(x,b,s)) \leq V_\alpha^*(F(y,b,s)+F(x,a,s)-F(y,a,s)), \tag{4.18}$$

para $x \leq y$ en X, $a \leq b$ en $A(y)$ y $s \in S$. Ahora, de $C2$ $d)$, $C2$ $e)$, la convexidad de V_α^* (véase el Lema 4.10) y, por el Lema 4.11, se tiene que

$$\begin{aligned} V_\alpha^*(F(y,b,s)+&F(x,a,s)-F(y,a,s)) \\ &\leq V_\alpha^*(F(y,b,s))+V_\alpha^*(F(x,a,s))-V_\alpha^*(F(y,a,s)), \end{aligned} \tag{4.19}$$

dado que $F(x,a,s) \leq F(y,a,s) \leq F(y,b,s)$, con $x \leq y$, $a \leq b$ y $s \in S$.

Luego, combinando (4.18) y (4.19), resulta que

$$\begin{aligned} 0 \leq& V_\alpha^*(F(y,b,s)+F(x,a,s)-F(y,a,s))-V_\alpha^*(F(x,b,s))+V_\alpha^*(F(y,b,s)) \\ &+V_\alpha^*(F(x,a,s))-V_\alpha^*(F(y,a,s))-V_\alpha^*(F(y,b,s)+F(x,a,s)-F(y,a,s)) \end{aligned}$$

i.e.,

$$V_\alpha^*(F(y,a,s))+V_\alpha^*(F(x,b,s)) \leq V_\alpha^*(F(y,b,s))+V_\alpha^*(F(x,a,s)),$$

para toda $x \leq y$ en X, $a \leq b$ en $A(y)$ y $s \in S$. Esto significa que $V_\alpha^*(F(\cdot,\cdot,s))$ es superaditiva en $\mathbb{K}$.

Por otro lado, de la monotonicidad y la linealidad de la integral, se sigue que

$$\begin{aligned} &\alpha \int V_\alpha^*(F(y,a,s))\,\Delta(s)\,ds+\alpha \int V_\alpha^*(F(x,b,s))\,\Delta(s)\,ds \\ &\qquad\qquad \leq \alpha \int V_\alpha^*(F(y,b,s))\,\Delta(s)\,ds+\alpha \int V_\alpha^*(F(x,a,s))\,\Delta(s)\,ds, \end{aligned}$$

para $x \leq y$ en X y $a \leq b$ en $A(y)$. Por lo tanto, $\alpha \int V_\alpha^*(F(\cdot,\cdot,s))\,\triangle(s)\,ds$ es superaditiva en $\mathbb{K}$. Ahora, usando el hecho de que c es superaditiva y que la suma de dos funciones superaditivas también es superaditiva (véase el Lema 1.5 a)), se obtiene que G_1, dada por (4.4), es superaditiva.

Ahora supóngase que $C1$ se cumple.

Como en este caso la dinámica del sistema es lineal, se tiene igualdad en (4.18). No es difícil observar que el resto de la prueba es similar a lo que se hizo para $C2$, considerando que $F(x,a,s)=\gamma x+\delta a+s$, $(x,a) \in \mathbb{K}$, $s \in S$ y $\gamma, \delta > 0$. $\square$

Lema 4.13. *Considérese que las Suposiciones 4.1 y 4.2 se cumplen. Cada Ci, $i = 3, 4$ implica que $f_d(x)$ and $f'_d(x)$, $x \in X$, (definidas en (4.16) y (4.17), respectivamente), son crecientes.*

Demostración. Se usará el Teorema 3.2 y la Observación 3.3 para mostrar que f_d y f'_d son crecientes, respectivamente. Para ello, obsérvese que A es trivialmente una retícula, porque es un intervalo de $\mathbb{R}$, $x \to A(x)$ es ascendente debido a Ci, $i = 3, 4$ y $A(y) \subset A(x)$, para $x \leq y$ en X, por la Suposición 4.2 b); la Suposición 4.1 implica que la Suposición 3.1 se cumple (véase el Lema 4.8), y sólo resta probar que cada Ci y $i = 3, 4$ implica que la función G_1, en (4.4), es subaditiva.

Supóngase que $C4$ se cumple.

Como $F(\cdot, \cdot, s)$ es subaditiva en $\mathbb{K}$, para cada $s \in S$, al usar que V^*_α es creciente (véase el Lema 4.9), se obtiene que

$$V^*_\alpha(F(y, b, s)) \leq V^*_\alpha(F(y, a, s) + F(x, b, s) - F(x, a, s)), \tag{4.20}$$

para $x \leq y$ en X, $a \leq b$ en $A(y)$ y $s \in S$. Ahora, de $C4$ $e)$, $C4$ $f)$, la convexidad de V^*_α (véase el Lema 4.10) y, por el Lema 4.11, se tiene que

$$\begin{aligned} V^*_\alpha(F(y, a, s) + &F(x, b, s) - F(x, a, s)) \\ &\leq V^*_\alpha(F(y, a, s)) + V^*_\alpha(F(x, b, s)) - V^*_\alpha(F(x, a, s)), \end{aligned} \tag{4.21}$$

dado que $F(x, b, s) \leq F(x, a, s) \leq F(y, a, s)$, con $x \leq y$, $a \leq b$ y $s \in S$.

Luego, combinando (4.20) y (4.21), resulta que

$$\begin{aligned} V^*_\alpha(F(y, b, s)) - &V^*_\alpha(F(y, a, s) + F(x, b, s) - F(x, a, s)) \\ &+ V^*_\alpha(F(y, a, s) + F(x, b, s) - F(x, a, s)) \\ &- V^*_\alpha(F(y, a, s)) - V^*_\alpha(F(x, b, s)) + V^*_\alpha(F(x, a, s)) \leq 0 \end{aligned}$$

i.e.,

$$V^*_\alpha(F(y, b, s)) + V^*_\alpha(F(x, a, s)) \leq V^*_\alpha(F(y, a, s)) + V^*(F(x, b, s))$$

para toda $x \leq y$ en X, $a \leq b$ en $A(y)$ y $s \in S$. Esto significa que $V^*_\alpha(F(\cdot, \cdot, s))$ es subaditiva en $\mathbb{K}$.

Por otro lado, de la monotonicidad y la linealidad de la integral, se sigue que

$$\alpha \int V^*_\alpha(F(y, b, s))\, \Delta(s)\, ds + \alpha \int V^*_\alpha(F(x, a, s))\, \Delta(s)\, ds$$

$$\leq \alpha \int V_\alpha^*(F(y,a,s))\,\Delta(s)\,ds + \alpha \int V_\alpha^*(F(x,b,s))\,\Delta(s)\,ds,$$

para $x \leq y$ en X y $a \leq b$ en $A(y)$. Por lo tanto, $\alpha \int V_\alpha^*(F(\cdot,\cdot,s))\,\triangle(s)\,ds$ es subaditiva en $\mathbb{K}$. Ahora, usando el hecho de que c es subaditiva y que la suma de dos funciones subaditivas también es subaditiva (véase el Lema 1.5 a)), se obtiene que G_1, dada por (4.4), es subaditiva.

Ahora supongamos que $C3$ se cumple.

Como en este caso la dinámica del sistema es lineal, se tiene igualdad en (4.20). No es difícil observar que el resto de la prueba es similar a lo que se hizo para $C4$, considerando que $F(x,a,s) = \gamma x + \delta a + s$, $(x,a) \in \mathbb{K}$, $s \in S$, $\gamma > 0$ y $\delta < 0$. □

Demostración de los Teoremas 4.1 y 4.2

Dado que f_d y f_d' son funciones monótonas (véanse los Lemas 4.12 y 4.13) y $X, A \subset \mathbb{R}$, se sigue del resultado bien conocido que f_d y f_d' son funciones continuas casi dondequiera (véanse el Teorema 4.3.1 en [2] y el párrafo al final de la prueba de este teorema), de aquí que éstas son medibles (véase la Observación 6.3.4 en [33]). Por lo tanto, f_d y f_d' son políticas estacionarias. Además, dado que $f_d(x), f_d'(x) \in A_d^*(x)$, para toda x, se obtiene que $V_\alpha^*(x) = V_\alpha^*(f_d(x),x) = V_\alpha^*(f_d'(x),x)$, para toda $x \in X$ (la prueba de esto es similar a la prueba del Teorema 4.2.3 (b), págs. 50-51 en [11]). □

4.2. Políticas óptimas monótonas de PCMs con costo promedio

En esta sección, se darán condiciones que aseguran la existencia de políticas óptimas monótonas para PCMs con costo promedio. La idea es usar la aproximación de descuento desvaneciente (véanse [6] y [11]). Esta aproximación está basada en PCMs descontados con un factor de descuento variante $\alpha \in (0,1)$, como en (1.3).

Lema 4.14. *(Teorema 5.5.4 en [11])*
Bajo ciertas suposiciones (véase la Observación 4.6 abajo), se obtiene que

i) existe una constante ρ^* y una función (continua) $h : X \to \mathbb{R}$ tal que la pareja (ρ^*, h) es una solución a la ***ecuación de optimalidad con***

costo promedio *(EOCP), i.e.,*

$$\rho^* + h(x) = \min_{a \in A(x)} \left[c(x,a) + \int h(z)Q(dz|x,a) \right], \tag{4.22}$$

$x \in X$. La función h puede representarse de la siguiente forma:

$$h(x) = \lim_{n \to +\infty} (V^*_{\alpha_n}(x) - V^*_{\alpha_n}(\overline{x})), \tag{4.23}$$

$x \in X$, donde $\overline{x}$ es un estado fijo y $\{\alpha_n\}$ es una sucesión de factores de descuento tales que $\alpha_n \uparrow 1$;

ii) existe $g_a \in \mathbb{F}$ tal que

$$\rho^* + h(x) = c(x, g_a(x)) + \int h(z)Q(dz|x, g_a(x)), \tag{4.24}$$

$x \in X$, y g_a es óptima promedio; de hecho, cualquier política estacionaria g_a que satisface (4.24) es óptima promedio;

iii) $J^*(x) = \rho^*$, para toda $x \in X$.

Observación 4.6. *Véanse las Suposiciones 4.2.1 y 5.5.1 en [11].*

Considérese un PCM para el cual el Lema 4.14 es válido.

Defínase la función G_2, para cada $(x,a) \in \mathbb{K}$, como

$$G_2(x,a) := c(x,a) + \int h(z)Q(dz|x,a), \tag{4.25}$$

que corresponde a la función que es minimizada en (4.22).

Para cada $x \in X$, defínanse $f_a(x) := \sup A^*_a(x)$ y $f'_a(x) := \inf A^*_a(x)$, donde

$$A^*_a(x) := \left\{ a \in A(x) : G_2(x,a) = \min_{a^* \in A(x)} G_2(x,a^*) \right\}.$$

Observación 4.7. *a) Cada Ci, $i = 1, \ldots, 4$, las Suposiciones 4.1 y 4.2, para cada α_n, $n = 1, 2, \ldots$, y (4.23) implican que h es una función convexa (véase el Lema 4.10).*

b) De forma similar al Teorema 4.1, bajo las Suposiciones 4.1 y 4.2, las hipótesis del Lema 4.14 y cada $C1$ y $C2$, es posible probar que f_a y f'_a son políticas óptimas estacionarias decrecientes.

c) De forma similar al Teorema 4.2, bajo las Suposiciones 4.1 y 4.2, las hipótesis del Lema 4.14 y cada C3 y C4, es posible probar que f_a y f'_a son políticas óptimas estacionarias crecientes.

d) El Ejemplo 4.3, con la observación 4.4 b), satisface las Suposiciones 4.1 y 4.2 (véase el Lema 4.6). Las Suposiciones para el Lema 4.14 ya han sido verificadas en el Ejemplo 5.4.2 y en la Observación 5.5.3 b) en [11]. Por lo tanto, el Ejemplo 4.3 tiene una política óptima promedio creciente si $\delta < 0$; en otro caso, el Ejemplo 4.3 tiene una política óptima promedio decreciente si $\delta > 0$.

4.3. Comentarios adicionales

A continuación se presenta un par de condiciones suficientes para la obtención de políticas óptimas monótonas. Estas condiciones, a diferencia de las Condiciones C2 y C4 presentadas en las Secciones 4.1.1 y 4.1.2, respectivamente, tienen las siguientes características:

a) Los conjuntos de controles admisibles $A(x)$, $x \in X$, son todos iguales y coinciden con el conjunto A.

b) Se requiere que la dinámica del sistema, $F(\cdot, \cdot, s)$, sea cóncava en $\mathbb{K}$, para cada $s \in S$.

Tales condiciones también requieren de la Suposición 4.2 y tienen la siguiente estructura.

Condición 5. *(C5)*

a) Para $x \leq y$ en X, $c(y, a) \leq c(x, a)$, para cada $a \in A$.

b) c es superaditivo en $\mathbb{K}$ (igual que C2 c)).

Q está dada por $x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t)$, $t = 0, 1, ...,$ como en (1.2), con $S \subset \mathbb{R}$. Además,

c) si $x \leq y$ en X, entonces $F(x, a, s) \leq F(y, a, s)$, para cada $a \in A$ y $s \in S$.

d) $F(x, \cdot, s)$ es creciente, para cada $x \in X$ y $s \in S$ (igual que C2 e).

e) $F(\cdot, \cdot, s)$ es cóncava en $\mathbb{K}$, para cada $s \in S$.

f) $F(\cdot, \cdot, s)$ es subaditiva en $\mathbb{K}$, para cada $s \in S$.

Condición 6. *(C6)*

a) $\mathbb{K}$ *es una retícula (lo mismo que en C4 a)).*

b) *Para* $x \leq y$ *en* X, $c(y, a) \leq c(x, a)$, *para cada* $a \in A$.

c) c *es subaditivo en* $\mathbb{K}$ *(igual que C4 d)).*

Q está dada por $x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t)$, $t = 0, 1, ...,$ *como en (1.2), con* $S \subset \mathbb{R}$. *Además,*

d) *si* $x \leq y$ *en* X, *entonces* $F(x, a, s) \leq F(y, a, s)$, *para cada* $a \in A$ *y* $s \in S$.

e) $F(x, \cdot, s)$ *es decreciente, para cada* $x \in X$ *y* $s \in S$ *(igual que C4 f)).*

f) $F(\cdot, \cdot, s)$ *es cóncava en* $\mathbb{K}$, *para cada* $s \in S$.

g) $F(\cdot, \cdot, s)$ *es superaditiva en* $\mathbb{K}$, *para cada* $s \in S$.

Resultados similares a los que se obtienen en los Lemas 4.9 y 4.10, se enuncian en los siguientes lemas, respectivamente.

Lema 4.15. *Considérese que la Condición 4.1 se cumple. Las Condiciones C5 y C6 implican que* V_α^* *es* ***decreciente***.

Demostración. La prueba se realiza por inducción, utilizando que $c(x, a) \geq c(y, a)$ y el hecho de que $F(x, a, s) \leq F(y, a, s)$, para $x \leq y$ y $a \in A$. Para más detalles, ver [4]. □

Lema 4.16. *Considérese que la Suposición 4.2 se cumple (con* $A(x) = A$, *para* $x \in X$*). Cada Ci,* $i = 5, 6$ *implica que* V_α^* *es* ***convexa***.

Demostración. La prueba se realiza por inducción (véanse detalles en [4]). De cada condición se utiliza que $c(\cdot, \cdot)$ es convexa en $\mathbb{K}$ y el Lema 1 en Iglehart [17]. Además, de C5 y C6 se usa que $F(\cdot, \cdot, s)$ es cóncava en $\mathbb{K}$, para cada $s \in S$ y el resultado de que V_α^* es decreciente en X (véase el Lema 4.15). □

Ahora, es posible establecer los siguientes resultados, análogos a los que se tienen en los Lemas 4.12 y 4.13.

Lema 4.17. *Considérese que las Suposiciones 4.1 y 4.2 se cumplen. C5 implica que* $f_d(x)$ *y* $f_d'(x)$, $x \in X$, *(definidas en (4.16) y (4.17), respectivamente), son decrecientes.*

Demostración. La prueba es análoga a la demostración del Lema 4.12, considerando los siguientes cambios: $F(\cdot, \cdot, s)$ es subaditiva en $\mathbb{K}$, para cada $s \in S$ y V_α^* es decreciente (véase el Lema 4.15). □

Lema 4.18. *Considérese que las Suposiciones 4.1 y 4.2 se cumplen.* $C6$ *implica que* $f_d(x)$ *and* $f'_d(x)$, $x \in X$, *(definidas en (4.16) y (4.17), respectivamente), son crecientes.*

Demostración. La prueba es análoga a la demostración del Lema 4.13, considerando los siguientes cambios: $F(\cdot, \cdot, s)$ es superaditiva en $\mathbb{K}$, para cada $s \in S$ y V^*_α es decreciente (véase el Lema 4.15). $\square$

Y, siguiendo las demostraciones de los Teoremas 4.1 y 4.2 se pueden establecer los siguientes teoremas.

Teorema 4.3. *Considérese que las Suposiciones 4.1 y 4.2 se cumplen. Entonces existe una política óptima estacionaria decreciente bajo* $C5$.

Teorema 4.4. *Considérese que las Suposiciones 4.1 y 4.2 se cumplen. Entonces existe una política óptima estacionaria creciente bajo* $C6$.

Capítulo 5

Una aplicación a PCMs descontados en $\mathbb{R}^n$, $n > 1$

En este capítulo se aplica la teoría del Capítulo 3 a PCMs descontados en $\mathbb{R}^n$, con $n > 1$, para la obtención de políticas óptimas crecientes.

Sea $\{X, A, \{A(x), x \in X\}, Q, c\}$ un modelo de control de Markov fijo, con $X \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$, para $n, m > 1$. Considérese además que $\alpha \in (0, 1)$, en la función de costo descontado, está fijo.

Obsérvese que la Suposición 4.1 y el Lema 4.1, de la Sección 4.1, siguen siendo válidos en este contexto (véase [11]).

Definiendo $G_1(x, a)$, $(x, a) \in \mathbb{K}$, y $A_d^*(x)$, $x \in X$, de forma análoga a (4.4) y (4.5), respectivamente, se darán condiciones para que el OPDD G_1, definido en (4.4), sea una función subaditiva. Para ello, considérese lo siguiente:

Suposición 5.1. *Sea $H : X \to \mathbb{R}$ convexa. Para cualesquiera $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in X$, con $\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{z} \prec \boldsymbol{y}$, $H(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} - \boldsymbol{z}) \leq H(\boldsymbol{x}) + H(\boldsymbol{y}) - H(\boldsymbol{z})$.*

A continuación se demostrará que la Suposición 5.1, la cual es válida para funciones convexas real-valuadas, definidas en $\mathbb{R}$ (véase el Lema 4.11), podría no ser cierta para funciones convexas real-valuadas, definidas en $\mathbb{R}^n$, para $n > 1$. Para ello, considérese el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.1. *La función $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\rho(\bar{x}) = \rho(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 + x_2 + 1,\ \bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,$$

es estrictamente convexa, pero no cumple la Suposición 5.1.

Demostración. La función ρ es estrictamente convexa porque es de clase $\mathcal{C}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y su Hessiano es definido positivo, es decir, la matriz Hessiana de ρ, denotada por $H\rho$, es simétrica, $|\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2}| = 2 > 0$ y,

$$|H\rho| = \left| \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \right| = 3 > 0$$

es decir, los determinantes de todos los menores principales de $H\rho$ son positivos.

Sin embargo, si consideramos $(x_1, x_2) \prec (x_1'', x_2'') \prec (x_1', x_2')$ en $\mathbb{R}^2$ de la siguiente forma: $(x_1, x_2) = (-3, -1)$, $(x_1'', x_2'') = (-2, 3.5)$ y $(x_1', x_2') = (1, 4)$, se obtiene por un lado que

$$\begin{aligned} \rho((x_1, x_2) + (x_1', x_2') - (x_1'', x_2'')) &= \rho((-3, -1) + (1, 4) - (-2, 3 \cdot 5)) \\ &= \rho(0, -0 \cdot 5) = -0 \cdot 25 \end{aligned}$$

y, por otra parte,

$$\rho(x_1, x_2) + \rho(x_1', x_2') - \rho(x_1'', x_2'') = \rho(-3, -1) + \rho(1, 4) - \rho(-2, 3 \cdot 5) = -3 \cdot 75.$$

Evidentemente, $-0.25 \not< -3.75$. Por lo tanto, ρ es una función convexa (estrictamente) que no satisface la desigualdad (4.15), del Lema 4.11. $\square$

Pero, existen funciones definidas en $\mathbb{R}^n$ con valores reales que cumplen la Suposición 5.1, como las que se muestran a continuación:

Ejemplo 5.2. *Las siguientes funciones cumplen la Suposición 5.1.*

a) $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *$n \in \mathbb{N}$, definida como* $H(\boldsymbol{x}) = H(x_1, x_2, \ldots, x_n) = h_1(x_1) + h_2(x_2) + \ldots + h_n(x_n)$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *para* $h_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, *funciones convexas.*

b) $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida por* $H(\boldsymbol{x}) = H(x_1, x_2) = e^{x_1} \cdot e^{x_2}$, $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

c) $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dada por* $H(\boldsymbol{x}) = H(x_1, x_2) = Exp(\frac{1}{x_1+1} + x_2^3)$, $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

Demostración. **a)** Sean $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$, $n > 1$, con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ y $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ tal que $x \prec z \prec y$. Entonces,

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{z}) =& H(x_1 + y_1 - z_1, x_2 + y_2 - z_2, \ldots, x_n + y_n - z_n) \\ =& h_1(x_1 + y_1 - z_1) + h_2(x_2 + y_2 - z_2) + \ldots + h_n(x_n + y_n - z_n) \\ \leq& h_1(x_1) + h_1(y_1) - h_1(z_1) + h_2(x_2) + h_2(y_2) - h_2(z_2) + \ldots \\ &+ h_n(x_n) + h_n(y_n) - h_n(z_n) \\ =& H(\mathbf{x}) + H(\mathbf{y}) - H(\mathbf{z}) \end{aligned}$$

La desigualdad se tiene por el Lema 4.11.

De forma similar al **a)** se muestra que las funciones del **b)** y del **c)** cumplen la Suposición 5.1. □

Enseguida se darán condiciones suficientes para que $G_1(\cdot,\cdot)$ sea una función subaditiva. Tales condiciones están dadas, principalmente, en los elementos del modelo de control de Markov y son muy parecidas a las presentadas en las Subsecciones 4.1.1 y 4.1.2, con ligeros cambios, como los que se indican a continuación:

Modificando la Suposición 4.2, específicamente en a), se tiene que

Suposición 5.2. **a)** *$X \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$, con $n, m > 1$, convexos.*

b) *$(1-\lambda)a + \lambda a' \in A((1-\lambda)x + \lambda x')$, para toda $x, x' \in X$, $a \in A(x)$, $a' \in A(x')$ y $\lambda \in [0,1]$; $A(y) \subset A(x)$, para $x \preceq y \in X$ y $A(x)$ es convexo, para cada $x \in X$.*

c) *c es convexo en $\mathbb{K}$.*

Respecto a la Condición $C3$, dada en la Subsección 4.1.2, es posible construir una nueva condición, de la siguiente forma:

Condición 7. *($C7$)*

a) A y $\mathbb{K}$ son retículas.

b) Q está dada por

$$x_{t+1} = \mathcal{A}x_t + \mathcal{B}a_t + \xi_t,\ t = 0, 1, \ldots,$$

donde ξ_t, $t = 0, 1, \ldots$, son vectores aleatorios i.i.d. que toman valores en $S \subset \mathbb{R}^n$, con densidad Δ; $\mathcal{A} \in \mathcal{M}_{n\times n}$, con todas sus entradas no negativas y $\mathcal{B} \in \mathcal{M}_{n\times m}$, con todas sus entradas no positivas.

c) $x \to A(x)$ es ascendente.

d) c es subaditivo en $\mathbb{K}$.

Similarmente, se puede construir una nueva condición a partir de la Condición $C4$.

Condición 8. *(C8)*

a) *A y $\mathbb{K}$ son retículas.*

b) *$x \to A(x)$ es ascendente.*

c) *Para $x \preceq y$ en X, $c(x,a) \leq c(y,a)$, para cada $a \in A(y)$.*

d) *c es subaditivo en $\mathbb{K}$.*

Q está dada por

$$x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t),\ t = 0, 1, \ldots,$$

donde $\{\xi_t\}$ es una sucesión de elementos aleatorios i.i.d. con valores en $S \subset \mathbb{R}^l$, $l > 1$ (aquí las dimensiones n, m y l son apropiadas, i.e., tal que $F(x,a,s) \in X$, para toda $x \in X$, $a \in A(x)$ y $s \in S$) y con densidad Δ. Además, $F : X \times A \times S \to X$ es una función medible.

e) *Si $x \preceq y$ en X, entonces $F(x,a,s) \leq F(y,a,s)$, para cada $a \in A(y)$ y $s \in S$.*

f) *$F(x,\cdot,s)$ es decreciente, para cada $x \in X$ y $s \in S$.*

g) *$F(\cdot,\cdot,s)$ es convexa y subaditiva en $\mathbb{K}$, para cada $s \in S$.*

También, es posible extender los resultados establecidos en los Lemas 4.9 y 4.10 para espacios Euclidianos, de la siguiente manera:

Lema 5.1. *Considérese que la Suposición 4.1 se cumple. La Condición C8 implica que v_n, $n \in \mathbb{N}$, y V_α^* son* ***crecientes****.*

Demostración. Es similar a la prueba del Lema 4.9. □

Lema 5.2. *Considérese que la Suposición 5.2 se cumple. Cada Ci, $i = 7, 8$ implica que v_n, $n \in \mathbb{N}$, y V_α^* son* ***convexas****.*

Demostración. Es similar a la prueba del Lema 4.10. □

Lema 5.3. *Considérese que las Suposiciones 4.1 y 5.2 se cumplen y que las funciones de iteración de valores v_n, $n \in \mathbb{N}$, definidas en (4.3), satisfacen la Suposición 5.1. Cada Ci, $i = 7, 8$ implica que $f_d(x)$ y $f'_d(x)$, $x \in X$, (definidas en (4.16) y (4.17), respectivamente), son crecientes.*

Demostración. Realizando una prueba similar a la prueba del Lema 4.13 para cada

$$\mathcal{G}_n(x,a) := c(x,a) + \alpha \int v_n(z) Q(dz|x,a) \tag{5.1}$$

con $n \in \mathbb{N}$, se obtiene que $\mathcal{G}_n(\cdot,\cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, es subaditiva. Es decir, se obtiene que la n-ésima expresión que se minimiza en el método de iteración de valores es subaditiva. Luego, como de la Suposición 4.1 se sigue que $v_n \uparrow V^*$ (véase el Lema 4.2) se obtiene de la linealidad y la monotonicidad de la integral y por el teorema de convergencia monótona que $G_1(\cdot,\cdot)$ es subaditiva. El resto de la prueba es similar a la del Lema 4.13. □

En el caso general, un minimizador monótono no determina una política, porque una política debe ser un minimizador medible (véase Kitaev [19]). Esto significa que el orden y las estructuras medibles de los espacios X y A deben ser, en algún sentido, consistentes. Tal problema no apareció en el Capítulo 4 porque los espacios del modelo de control considerado, son intervalos en $\mathbb{R}$, en cuyo caso cada minimizador monótono es automáticamente medible. Sin embargo, hasta donde se sabe no existe un resultado parecido cuando $X \subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$. Una forma de resolver este problema es a través de la siguiente suposición.

Suposición 5.3. *La Suposición 4.1 se cumple para el PCM considerado y la política óptima que existe (g_d), caracterizada por la EOCD, es única.*

Observación 5.1. *En el trabajo de Cruz-Suárez et. al. [4] se dan condiciones (C1 y C2) bajo las cuales la Suposición 5.3 se cumple. De hecho, si en C7 y C8 se pide que c sea estrictamente convexo en $\mathbb{K}$, entonces C7 y C8 implican C2 y C1 (de [4]), respectivamente.*

Teorema 5.1. *Considérese que las Suposiciones 4.1, 5.2 y 5.3 se cumplen y que las funciones de iteración de valores v_n, $n \in \mathbb{N}$ satisfacen la Suposición 5.1. Entonces existe una (única) política óptima estacionaria creciente bajo cada Ci, $i = 7, 8$.*

Demostración. Dado que f_d y f_d' son funciones crecientes (véase Lema 5.3), se sigue de la Suposición 5.3 que para cada $x \in X$, $g_d(x) = f_d(x) = f_d'(x)$ y dado que g_d es medible, se tiene que f_d y f_d' lo son. Por lo tanto, f_d y f_d' son políticas estacionarias. Nuevamente, como $f_d(x), f_d'(x) \in A_d^*(x)$, para toda x, se obtiene que $V_\alpha^*(x) = V_\alpha^*(f_d(x), x) = V_\alpha^*(f_d'(x), x)$, para toda $x \in X$ (la prueba de esto es similar a la prueba del Teorema 4.2.3 (b), págs. 50-51 en [11]). □

Un ejemplo

Ejemplo 5.3. *Problema lineal con costo cuadrático en $\mathbb{R}^2$ (Bertsekas [3]). Considérese una aplicación cuya dinámica tiene una forma lineal y cuyo costo, en cada tiempo de observación, se supondrá de una forma cuadrática básica. Sus elementos son:*

$$X = A = A(x) = \mathbb{R}^2, \quad \textit{para cada } x \in X.$$

La ecuación que describe la dinámica de este sistema es como sigue:

$$x_{t+1} = \mathcal{A}x_t + \mathcal{B}a_t + \xi_t, \;\; t = 0, 1, ..., \tag{5.2}$$

donde $\mathcal{A} = I_{2\times 2} = I$ y $\mathcal{B} = -I_{2\times 2} = -I$.

El costo en cada tiempo en que es observado el proceso está dado por la función:

$$c(x, a) = x^T Qx + a^T Ra, \quad \textit{para} \quad (x, a) \in \mathbb{K},$$

donde $Q = R = I_{2\times 2} = I$.

Suposición 5.4. *Las perturbaciones ξ_t, $t = 0, 1, ...$, se suponen vectores aleatorios i.i.d. en $S = \mathbb{R}^2$ y además independientes de x_0, con una densidad continua Δ. Además se supone que $E[\xi_0] = 0$ y $Var[\xi_0] = E[\xi_0^2] < +\infty$.*

Lema 5.4. *Considérese que la Suposición 5.4 se cumple. Entonces el Ejemplo 5.3 tiene una política óptima estacionaria creciente, debido a que satisface C7, las Suposiciones 4.1, 5.2 y 5.3 y, las funciones de iteración de valores v_n, $n \in \mathbb{N}$ satisfacen la Suposición 5.1.*

Demostración. Bajo la Suposición 5.4, es posible mostrar que este ejemplo satisface las Suposiciones 4.1 y 5.3 (y por lo tanto tiene una política óptima única), al realizar una prueba análoga a la del Lema 4.9 de Cruz-Suárez et. al. [4], en el cual se considera el caso unidimensional, y observar que se satisface trivialmente la Condición C2 de ese mismo trabajo.

No es difícil verificar que la Suposición 5.2 a), b) y C7 a)-c) se cumplen.

Luego, $c(x, a)$ es una función subaditiva porque si $y \succeq x$ en X y $b \succeq a$ en A entonces,

$$\begin{aligned} c(y, b) + c(x, a) =& y^T \; I \; y + b^T \; I \; b + x^T \; I \; x + a^T \; I \; a \\ =& y_1^2 + y_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + a_1^2 + a_2^2, \end{aligned}$$

donde x, y, a, b son vectores columna y y^T denota la transpuesta del vector y, y por otro lado,

$$\begin{aligned} c(y,a) + c(x,b) =& y^T \, I \, y + a^T \, I \, a + x^T \, I \, x + b^T \, I \, b \\ =& y_1^2 + y_2^2 + a_1^2 + a_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + b_1^2 + b_2^2. \end{aligned}$$

Para mostrar que el costo es convexo considérese que x y a son vectores columna, entonces para $i = 1, 2$ se tiene que

$$\frac{\partial c}{\partial x_i} = 2 \, x_i,$$

$$\frac{\partial c}{\partial a_i} = 2 \, a_i.$$

De ahí que para $i, j = 1, 2$ se sigue que

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 c}{\partial a_i^2} = 2,$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x_j \, \partial x_i} = \frac{\partial^2 c}{\partial a_j \, \partial a_i} = 0, \text{ para } i \neq j,$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial a_j \, \partial x_i} = \frac{\partial^2 c}{\partial x_j \, \partial a_i} = 0.$$

Por lo tanto, el Hessiano de c, $H(c)$, es de la forma:

$$H(c) = 2 \, I_{4 \times 4}$$

el cual es definido positivo porque es una matriz simétrica y cada uno de los determinantes de los menores principales de $H(c)$ son positivos. Además, como c es de clase $\mathcal{C}^2$, éste es convexo.

Resta mostrar que para el Ejemplo 5.3, las funciones de iteración de valores satisfacen la Suposición 5.1. En Bertsekas [3], se muestra que para $x \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} v_0(x) =& 0, \\ v_1(x) =& x^T \, I \, x = x \cdot x \\ v_2(x) =& x^T \, K_1 \, x + \alpha \, E_\xi \{\xi^T \, I \, \xi\} \\ &\vdots \\ v_{n+1}(x) =& x^T \, K_n \, x + \sum_{m=0}^{n-1} \alpha^{n-m} \, E_\xi \{\xi^T \, K_m \, \xi\} \end{aligned}$$

donde las matrices $K_0, K_1, \ldots$ están dadas recursivamente por

$$K_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} K_1 =& \alpha K_0 - \alpha^2 K_0 \left(\alpha K_0 + I\right)^{-1} K_0 + I \\ =& \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} - \alpha^2 \frac{1}{(\alpha+1)^2} \begin{pmatrix} \alpha+1 & 0 \\ 0 & \alpha+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} \frac{2\alpha+1}{\alpha+1} & 0 \\ 0 & \frac{2\alpha+1}{\alpha+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

al definir $k_1 := \frac{2\alpha+1}{\alpha+1}$. Obsérvese que $k_1 > 0$ porque $\alpha \in (0,1)$. Luego,

$$\begin{aligned} K_2 =& \alpha K_1 - \alpha^2 K_1 \left(\alpha K_1 + I\right)^{-1} K_1 + I \\ =& \begin{pmatrix} \alpha k_1 & 0 \\ 0 & \alpha k_1 \end{pmatrix} - \alpha^2 \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha k_1 + 1 & 0 \\ 0 & \alpha k_1 + 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} \frac{2\alpha k_1+1}{\alpha k_1+1} & 0 \\ 0 & \frac{2\alpha k_1+1}{\alpha k_1+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

al definir $k_2 := \frac{2\alpha k_1+1}{\alpha k_1+1}$. Nótese que también $k_2 > 0$ porque $k_1 > 0$. Por inducción se obtiene que

$$\begin{aligned} K_{n+1} =& \alpha K_n - \alpha^2 K_n \left(\alpha K_n + I\right)^{-1} K_n + I \\ =& \begin{pmatrix} \frac{2\alpha k_n+1}{\alpha k_n+1} & 0 \\ 0 & \frac{2\alpha k_n+1}{\alpha k_n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{n+1} & 0 \\ 0 & k_{n+1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

haciendo $k_{n+1} := \frac{2\alpha k_n+1}{\alpha k_n+1}$. Nuevamente $k_{n+1} > 0$ porque $k_n > 0$.

De lo anteriormente expuesto, se obtiene que

$$\begin{aligned} v_0(x) =& 0, \\ v_1(x) =& x \cdot x \\ v_2(x) =& = x^T \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix} x + E_\xi\{\xi \cdot \xi\} \\ =& k_1 x \cdot x + E_\xi\{\xi \cdot \xi\}, \\ & \vdots \\ v_{n+1}(x) =& k_n\, x \cdot x + \sum_{m=0}^{n-1} \alpha^{n-m}\, k_m\, E_\xi\{\xi \cdot \xi\}. \end{aligned}$$

Y considerando $x = (x_1, x_2)$, se sigue que

$$
\begin{aligned}
v_0(x_1, x_2) =& 0, \\
v_1(x_1, x_2) =& x_1^2 + x_2^2, \\
v_2(x_1, x_2) =& k_1(x_1^2 + x_2^2) + E_\xi\{\xi \cdot \xi\}, \\
& \vdots \\
v_{n+1}(x_1, x_2) =& k_n(x_1^2 + x_2^2) + \sum_{m=0}^{n-1} \alpha^{n-m}\, k_m\, E_\xi\{\xi \cdot \xi\},
\end{aligned}
$$

y de forma similar al Ejemplo 1, de las funciones que satisfacen la Suposición 5.1, se muestra que estas funciones de iteración de valores satisfacen tal suposición.

Así, las hipótesis del Lema 5.4 se cumplen y por lo tanto, el Ejemplo 5.3 tiene una política óptima creciente. $\square$

Capítulo 6

Algoritmo de iteración de políticas

En este apartado, se muestra una versión simplificada del algoritmo de iteración de políticas que aparece en [11], para el caso de políticas óptimas crecientes, en $\mathbb{R}$.

Para ello se presenta una condición, dada también en términos de los elementos del modelo de control de Markov, bajo la cual es posible asegurar la existencia de una política óptima creciente, previa suposición de la existencia de una política óptima. Esta condición extiende el resultado presentado en Puterman [27], Teorema 6.11.6, para problemas de control con recompensas descontadas. Ahora es posible considerar espacios de estados y controles a los más numerables y conjuntos de controles admisibles, no necesariamente compactos, en $\mathbb{R}$; en [27] tales espacios son finitos en $\mathbb{R}$. Cabe mencionar que, a diferencia de las condiciones presentadas en el Capítulo 4, la condición presentada a continuación no supone hipótesis de convexidad.

6.1. Una condición que no requiere convexidad

Será necesario considerar los siguientes conceptos y resultados.

Definición 6.1. *Sean P y P' medidas de probabilidad en* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. *Se dice que P'* ***domina a*** *P* ***estocásticamente*** *si $\int g dP \leq \int g dP'$, para toda función $g : X \to \mathbb{R}$ medible, acotada y creciente; se denota este hecho por $P \leq^{st} P'$.*

Lema 6.1. *(Lema 2.6, [4]). Sean P y P' medidas de probabilidad en* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, *tal que $P \leq^{st} P'$. Entonces, $\int g\, dP \leq \int g\, dP'$, para $g : X \to \mathbb{R}$ medible, no negativa, creciente y (posiblemente) no acotada.*

Considérese un PCM con MCM $\{X, A, \{A(x) : x \in X\}, Q, c\}$ fijo.

Condición 9. *(C9)*

a) *X y A son subconjuntos no vacíos de $\mathbb{R}$.*

b) *$\mathbb{K}$ es una retícula.*

c) *Para $x, y \in X$ con $x \leq y$, $A(y) \subset A(x)$.*

d) *$x \to A(x)$ es ascendente.*

e) *$Q(\cdot|x, a) \leq^{st} Q(\cdot|y, b)$, para $(x, a) \leq (y, b) \in \mathbb{K}$.*

f) *Para $x \leq y$ en X y $a \leq b$ en $A(x) \cap A(y)$ se tiene que $\int k(z)\, Q(dz|\cdot, \cdot)$ es subaditiva en $\mathbb{K}$, para toda función $k : X \to \mathbb{R}$ creciente.*

g) *$c(x, a) \leq c(y, b)$, para $(x, a) \leq (y, b) \in \mathbb{K}$.*

h) *c es subaditivo en $\mathbb{K}$.*

El siguiente ejemplo cumple la Condición C9.

Ejemplo 6.1. *Sea $X = A = \mathbb{R}$. Para cada $x \in X$, $A(x) = [x, \infty)$. La dinámica del sistema está dada por*

$$x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t) = F(a_t, \xi_t),$$

$t = 0, 1, \ldots$, como en (1.2), con $S \subset \mathbb{R}$ y densidad Δ. $F(\cdot, s)$ es creciente, para toda $s \in S$.

$c(\cdot, \cdot)$ es creciente y subaditivo en $\mathbb{K}$.

Lema 6.2. *El Ejemplo 6.1 satisface la Condición C9.*

Demostración. No es difícil verificar que C9 a)-d), C9 g) y C9 h) se cumplen. $Q(\cdot|x, a) \leq^{st} Q(\cdot|y, b)$, $(x, a) \leq (y, b) \in \mathbb{K}$, es consecuencia de que $F(x, a, s) = F(a, s)$ es una función creciente, para toda $s \in S$.

Luego, para mostrar que C9 f) se cumple, i.e., que $\int k(z)\, Q(dz|\cdot, \cdot)$ es subaditiva en $\mathbb{K}$, para toda $k : X \to \mathbb{R}$ creciente, es suficiente mostrar que $\int k(F(x, a, s))\, \Delta(s)\, ds = \int k(F(a, s))\, \Delta(s)\, ds$ es subaditiva, para toda $k : X \to \mathbb{R}$ creciente. Para ello, supóngase que $y \geq x$ en X y $b \geq a$ en $A(y)$ y obsérvese que

$$k(F(y, b, s)) + k(F(x, a, s)) \geq k(F(y, a, s)) + k(F(x, b, s))$$

se cumple trivialmente porque

$$k(F(b,s)) + k(F(a,s)) = k(F(a,s)) + k(F(b,s)).$$

Así, por la linealidad y la monotonicidad de la integral se sigue el resultado deseado. □

Observación 6.1.

- *El Ejemplo 6.1 satisface C9, pero no satisface ninguna de las Condiciones Ci, $i = 1, \ldots, 6$, cuando $F(x, a, s) = F(a, s)$ es creciente estrictamente, para cada $x \in X$ y $s \in S$.*
- *En Heyman y Sobel [12], en la Sección 8.3, se consideran varios ejemplos de administración de recursos en los cuales la dinámica del sistema es como la del Ejemplo 6.1.*

Teorema 6.1. *Considérese que la Suposición 4.1 se cumple. Si la Condición C9 se cumple, entonces existe una política óptima estacionaria creciente.*

Demostración. Se usará el Teorema 3.2 y la Observación 3.3, de la Sección 3.2, para demostrar este teorema. Como $A \subset \mathbb{R}$, A es una retícula. Además, por hipótesis se tiene que $\mathbb{K}$ es una retícula, $x \to A(x)$ es ascendente y $A(y) \subset A(x)$, para $x \leq y$ en X. La Suposición 4.1 implica la Suposición 3.1 (véase el Lema 4.8) y sólo resta probar que

$$G_1(x,a) = c(x,a) + \alpha \int V_\alpha^*(z)\, Q(dz|x,a)$$

es subaditiva en $(x,a) \in \mathbb{K}$. En Cruz-Suárez [4] se demuestra que C9 a), c), e), g) es suficiente para que $V^*(\cdot)$ sea una función medible, creciente y no negativa. Esto junto con C9 f) implican que $\int V_\alpha^*(z)\, Q(dz|\cdot,\cdot)$ es subaditiva en $\mathbb{K}$. Por lo tanto, $G_1(\cdot,\cdot)$ es subaditiva en $\mathbb{K}$ como consecuencia de que $c(\cdot,\cdot)$ lo es y el hecho de que la suma de funciones subaditivas es subaditiva (véase el Lema 1.5 a)). □

6.2. Algoritmo de iteración de políticas

En esta sección se presenta una versión modificada del algoritmo de iteración de políticas que aparece en [11]. En este algoritmo, a diferencia del algoritmo presentado en [11], la condición inicial es una política creciente y tanto las funciones objetivo como las políticas que se obtienen en cada iteración, resultan ser crecientes.

Sea $V(g,x)$ el costo total descontado esperado (definido en 1.3) cuando se usa la política g, dado el estado inicial $x_0 = x$.

Lema 6.3. *Considérese que la Condición C9 se cumple. Entonces, para cada $g \in \mathbb{F}$ creciente, se tiene que $V(g,\cdot)$ es creciente.*

Demostración. Obsérvese lo siguiente,

$$\begin{aligned} V(g,x) &= E_x^g\left[\sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t c(x_t,a_t)\right] \\ &= \sum_{t=0}^{\infty} \alpha^t\, E_x^g\left[c(x_t,a_t)\right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{t=0}^{n} \alpha^t\, E_x^g\left[c(x_t,a_t)\right]. \end{aligned}$$

Analizando el comportamiento de $E_x^g\left[c(x_t,a_t)\right]$, $t=0,1,\ldots$, se obtiene que para t=0,

$$E_x^g\left[c(x_0,a_0)\right] = E_x^g\left[c(x,g(x))\right] = c(x,g(x)),$$

la cual es una función creciente por C9 g) y porque $g(\cdot)$ es una función creciente.

Para $t=1$,

$$E_x^g\left[c(x_1,a_1)\right] = \int c(y,g(y))\, Q(dy|x,g(x)).$$

La monotonicidad de $E_x^g\left[c(x_1,a_1)\right]$ se sigue de que $c(y,g(y))$ es medible, creciente y no negativo (porque $g(\cdot)$ es creciente) y de C9 e).

Para $t=2$,

$$\begin{aligned} E_x^g\left[c(x_2,a_2)\right] &= \int c(y,g(y))\, Q^2(dy|x,g(x)) \\ &= \int \left(\int c(y,g(y))\, Q(dy|z,g(z))\right) Q(dz|x,g(x)). \end{aligned}$$

La segunda igualdad se tiene por el Teorema de Kolmogorov-Chapman. Se puede observar que nuevamente $E_x^g\left[c(x_2,a_2)\right]$ es creciente, al usar dos veces un argumento similar al que se dió para $t=1$; primero para la integral interior (la cual es una función creciente de z, no negativa y medible) y luego para la integral de afuera.

En general, para cualquier valor de t,

$$E_x^g\left[c(x_t,a_t)\right] = \int c(y,g(y))\, Q^t(dy|x,g(x))$$

la cual se puede verificar por inducción que es creciente y, tanto $c(\cdot,\cdot)$ como cada una de las integrales involucradas son funciones medibles, crecientes y no negativas.

Finalmente, como la suma, el producto por escalar positivo y el límite de funciones crecientes es creciente, se obtiene que $V(g,\cdot)$ es una función creciente.

$\square$

6.2.1. Una versión modificada

Considérese que la Suposición 4.1 y C9 se cumplen.

Sea $\mathbb{M} = \{$políticas estacionarias deterministas y crecientes$\}$.

El algoritmo de iteración de políticas simplificado, a partir de la versión que aparece en [11], y cuya prueba es igual a la presentada en [11], es como sigue

1) Dada $g_0 \in \mathbb{M}$ calcular el correspondiente costo descontado $V(g_0,\cdot)$, que se denotará por $w_0(\cdot)$, al resolver la ecuación

$$w_0(x) = c(x, g_0) + \alpha \int w_0(y)\, Q(dy|x, g_0),$$

para toda $x \in X$.

2) Determinar $g_1 \in \mathbb{M}$ tal que

$$c(x, g_1) + \alpha \int w_0(y) Q(dy|x, g_1) = \min_{a\in A(x)} \left[c(x, a) + \alpha \int w_0(y)\, Q(dy|x, a) \right]$$

y calcular $w_1(\cdot)$.

Si $w_1(x) = w_0(x)$, para toda $x \in X$, hacer $w = w_0$ y parar; g_0 será la política óptima creciente. En otro caso, sustituir g_0 por g_1 y repetir el paso 1.

En general,

3) Dada $g_n \in \mathbb{M}$, calcular el correspondiente costo descontado $V(g_n,\cdot) =: w_n(\cdot)$, al resolver la ecuación

$$w_n(x) = c(x, g_n) + \alpha \int w_n(y)\, Q(dy|x, g_n), \text{ para toda } x \in X. \tag{6.1}$$

4) Determinar $g_{n+1} \in \mathbb{M}$ tal que, para toda $x \in X$

$$c(x, g_{n+1}) + \alpha \int w_n(y) Q(dy|x, g_{n+1}) = \min_{a \in A(x)} \left[c(x, a) + \alpha \int w_n(y) Q(dy|x, a) \right]$$

y calcular w_{n+1}.

Si $w_{n+1}(x) = w_n(x)$, para toda $x \in X$, hacer $w = w_n$ y parar. Bajo ciertas condiciones (véase Teorema 4.4.1 b), [11]), g_n será la política óptima monótona. En otro caso, sustituir g_n por g_{n+1} y regresar al paso 3.

Observación 6.2. *La política $g_n(\cdot)$, $n \in \mathbb{N}$, es creciente porque*

$$\mathbf{G}_n(x, a) := c(x, a) + \alpha \int w_n(y) Q(dy|x, a),\ n = 0, \ldots$$

es subaditiva. Esto se tiene por C9 f) y porque $w_n(\cdot)$ es creciente, por el Lema 6.3, por lo que $\int w_n(y) Q(dy|\cdot, \cdot)$ es subaditiva en $\mathbb{K}$. Luego, el producto por escalar positivo de una función subaditiva y la suma de funciones subaditivas ($c(\cdot, \cdot)$ es subaditiva en $\mathbb{K}$), implica que $\mathbf{G}_n(\cdot, \cdot)$ es subaditiva en $\mathbb{K}$.

Capítulo 7

Conclusiones y problemas abiertos

Siguiendo las definiciones y terminología establecida en la Sección 1.2, del Capítulo 1, a continuación se presentan las conclusiones de la tesis y se enumeran los problemas abiertos que surgen del trabajo realizado.

7.1. Conclusiones

En este trabajo se consideran problemas de minimización con las siguientes características: X y A son espacios Euclidianos, la función objetivo G está acotada inferiormente y los conjuntos de parámetros admisibles $A(x) \subset A, x \in X$, no necesariamente son compactos. Además se considera que para tales problemas existe al menos un minimizador.

En el Capítulo 3, se dan condiciones suficientes para garantizar que tales problemas de optimización tienen un minimizador monótono (creciente o decreciente).

Básicamente, para la obtención de minimizadores decrecientes se requiere que A sea una retícula, $x \to A(x)$, $x \in X$, sea descendente, la función G sea superaditiva en $\mathbb{K}$ y $G(\cdot, a)$ sea submodular. Con esto se demuestra que $x \to A^*(x)$, con $A^*(x)$ el conjunto de todos los minimizadores óptimos, es descendente y de ahí se sigue que el $\sup A^*(x)$ y el $\inf A^*(x)$, $x \in X$, están bien definidos y son decrecientes.

Por otro lado, para la obtención de minimizadores crecientes se requiere que A y $\mathbb{K}$ sean retículas, $x \to A(x)$, $x \in X$, sea ascendente y la función G sea subaditiva en $\mathbb{K}$ (no se requiere la submodularidad de G en los controles, porque en $\mathbb{R}^n$, ésta se sigue de la subaditividad de G). Con esto se demuestra que $x \to A^*(x)$, con $A^*(x)$ el conjunto de todos los minimizadores óptimos, es ascendente y de ahí se sigue que el $\sup A^*(x)$ y el $\inf A^*(x)$, $x \in X$, están bien definidos y son crecientes.

También, en la tesis se consideran PCMs con costo descontado (en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$) y con costo promedio (en $\mathbb{R}$), con las siguientes características: a) son de horizonte infinito, b) tienen función de costo no negativa y (posiblemente) no acotada, c) tienen al menos una política estacionaria óptima caracterizada por la ecuación de programación dinámica e d) la función de valores óptimos está caracterizada mediante el algoritmo de iteración de valores.

En el Capítulo 4, se aplica la teoría del Capítulo 3 a este tipo de PCMs, al establecer condiciones suficientes para la obtención de políticas óptimas monótonas.

Esencialmente, tales condiciones son usadas para demostrar que el operador de programación dinámica $G_1(x,a) = c(x,a) + \alpha \int V_\alpha^*(z)Q(dz|x,a)$, $(x,a) \in \mathbb{K}$, es superaditivo (resp. subaditivo).

Para obtener que $G_1(\cdot,\cdot)$ es superaditivo (resp. subaditivo), es suficiente probar que $\int V_\alpha^*(z)Q(dz|\cdot,\cdot)$ lo es, porque la suma de funciones superaditivas (resp. subaditivas) es superaditiva (resp. subaditiva) y, de antemano se requiere que el costo c sea superaditivo (resp. subaditivo).

La prueba de que la $\int V_\alpha^*(z)Q(dz|\cdot,\cdot)$ es superaditiva (resp. subaditiva) se construye, por ejemplo, combinando principalmente propiedades de convexidad, monotonicidad y superaditividad (resp. subaditividad) en el costo y en la función F, involucrada en la ecuación a tiempo discreto que define a la ley de transición entre los estados; la función de valores óptimos V_α^* hereda la propiedades de convexidad y monotonicidad de F y c, a través de la técnica de iteración de valores.

Además, es importante mencionar que las condiciones proporcionadas en este capítulo son estructurales, es decir, las restricciones son impuestas en los elementos del modelo de control de Markov. Esto facilita el tratamiento de ejemplos.

Por otro lado, condiciones similares presentadas en este capítulo han sido usadas para garantizar la unicidad de políticas óptimas (véase [4]).

En el Capítulo 5, se aplican los resultados obtenidos en el Capítulo 3 a PCMs descontados en $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, para la obtención de políticas óptimas crecientes, con casi las mismas características que los PCMs considerados en el Capítulo 4. La teoría desarrollada es parecida a la del Capítulo 4 suponiendo además una propiedad en las funciones de iteración de valores convexas, la cual es válida para funciones convexas en $\mathbb{R}$ pero no siempre lo es para funciones convexas en $\mathbb{R}^n$, $n > 1$; y la unicidad de la política óptima. Esto último es necesario porque en $\mathbb{R}^n$, hasta donde se sabe, no existe algún resultado que relacione monotonidad con medibilidad, como ocurre en $\mathbb{R}$.

Finalmente, en el Capítulo 6 se presenta un algoritmo de iteración de políticas modificado, para PCMs descontados en $\mathbb{R}$, para la obtención de políticas óptimas crecientes. A diferencia del algoritmo presentado en [11], la condición inicial del algoritmo es una política creciente y tanto las funciones objetivo como las políticas óptimas que se obtienen en cada iteración, son crecientes.

Además, este algoritmo extiende el algoritmo de iteración de políticas presentado en [27], ya que no sólo es válido para espacios finitos sino que también se incluyen subconjuntos no numerables de $\mathbb{R}$ y los conjuntos de controles no necesariamente son compactos.

7.2. Problemas abiertos

A continuación se enuncian algunos problemas abiertos que quedarían por resolverse y que surgen de manera natural de lo realizado en esta tesis.

- Dar condiciones suficientes para que $q(y|x,a) = \sum_{j=y}^{\infty} P(j|x,a)$ sea superaditiva (resp. subaditiva) en $\mathbb{K}$, para toda $y \in X$ (véase Puterman [27]), cuando X y A son espacios discretos.

- Dar condiciones suficientes para obtener políticas óptimas decrecientes en $\mathbb{R}^n$, $n > 1$.

- Para PCMs con costo descontado y con costo promedio, que cuentan con políticas óptimas monótonas, establecer condiciones generales que simplifiquen el algoritmo de iteración de políticas.

Apéndice A

Resumen de condiciones

En las tablas A.1, A.2 y A.3 se resumen las condiciones presentadas en los Capítulos 4, 5 y 6, para la obtención de políticas óptimas monótonas, para facilitar la lectura de la tesis.

Se supondrá que el problema de control óptimo, con MCM $\{X, A, \{A(x) : x \in X\}, Q, c\}$ fijo, tiene una política óptima, es decir se considerará que la Suposición 4.1 se cumple.

Cond.	**X**	**A**	**A(x)**, $x \in X$	$Q(B\|x,a)$	**c(x,a)**	**Política óptima**
C1-C4	Intervalo en $\mathbb{R}$	intervalo en $\mathbb{R}$	Decreciente y convexo. $x \rightarrow A(x)$ convexa.	Para $t = 0, 1, \ldots$ y $S \subset \mathbb{R}$.	convexo en $\mathbb{K}$.	
C1			$x \rightarrow A(x)$ descendente.	$x_{t+1} = \gamma x_t + \delta a_t + \xi_t$, $\gamma, \delta > 0$.	superaditivo en $\mathbb{K}$.	Creciente
C2			$x \rightarrow A(x)$ descendente.	$x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t)$, $F(\cdot, \cdot, s)$ creciente, convexa y superaditiva.	superaditivo en $\mathbb{K}$. $c(\cdot, a)$ creciente.	Creciente
C3	$\mathbb{K}$ retícula		$x \rightarrow A(x)$ ascendente.	$x_{t+1} = \gamma x_t + \delta a_t + \xi_t$, $\gamma > 0$, $\delta < 0$.	subaditivo en $\mathbb{K}$.	decreciente
C4	$\mathbb{K}$ retícula		$x \rightarrow A(x)$ ascendente.	$x_{t+1} = F(x_t, a_t, \xi_t)$, $F(\cdot, \cdot, s)$ convexa y subaditiva. $F(x, a, s)$ creciente en x y decreciente en a, $\forall s \in S$.	subaditivo en $\mathbb{K}$. $c(\cdot, a)$ creciente.	decreciente

Tabla A.1: PCMS descontados y con costo promedio en $\mathbb{R}$.

Cond.	**X**	**A**	**A(x)**, $x \in X$	$Q(B\|x,a)$	**c(x,a)**	**Política óptima**
C7-C8	$\subset \mathbb{R}^n$, $n > 1$, convexo. $\mathbb{K}$ retícula.	$\subset \mathbb{R}^m$, $m > 1$, convexo. Retícula.	Decreciente y convexo. $x \to A(x)$ convexa y ascendente.	Para $t = 0, 1, \ldots$	convexo en $\mathbb{K}$.	
C7				$x_{t+1} = \mathcal{A}x_t + \mathcal{B}a_t + \xi_t$, $\mathcal{A} \in M^+_{n\times n}$, $\mathcal{B} \in M^-_{n\times m}$. $S \subset \mathbb{R}^n$.	subaditivo en $\mathbb{K}$.	creciente
C8				$F(\cdot,\cdot,s)$ convexa y subaditiva. $F(x,a,s)$ creciente en x y decreciente en a, $\forall s \in S$.	subaditivo en $\mathbb{K}$. $c(\cdot,a)$ creciente.	creciente

Tabla A.2: PCMS descontados en $\mathbb{R}^n$, $n > 1$.

Cond.	**X**	**A**	**A(x)**, $x \in X$	$Q(B\|x,a)$	**c(x,a)**	**Política óptima**
C9	$\subset \mathbb{R}$	$\subset \mathbb{R}$. $\mathbb{K}$ retícula.	Decreciente y $x \to A(x)$ ascendente.	$Q(\cdot\|x,a) \leq^{st} Q(\cdot\|y,b)$, $(x,a) \leq (y,b) \in \mathbb{K}$. $\int k(z)Q(dz\|\cdot,\cdot)$ es subaditiva en $\mathbb{K}$, $\forall k : X \to \mathbb{R}$ creciente.	creciente y subaditivo en $\mathbb{K}$.	creciente

Tabla A.3: PCMS descontados en $\mathbb{R}$, sin convexidad.

Referencias

[1] E. Altman: Monotonicity of optimal policies in a zero sum game: A flow control model. In: Advances in Dynamic Games and Applications (T. Bazar and A. Haurie, editors), Birkhäuser Boston, 1994 pp. 269-286.

[2] R. B. Ash: Real Variables with Basic Metric Space Topology. IEEE Press, New York 1993.

[3] D. P. Bertsekas: Dynamic Programming: Deterministic and Stochastic Models. Prentice Hall, New Jersey 1987.

[4] D. Cruz-Suárez, R. Montes-de-Oca, and F. Salem-Silva: Conditions for the uniqueness of optimal policies of discounted Markov decision processes. Mathematical Methods of Operations Research **60** (2006), 415-436.

[5] D. Cruz-Suárez, R. Montes-de-Oca, and F. Salem-Silva: Pointwise approximations of discounted Markov decision processes to optimal policies. International Journal of Pure and Applied Mathematics **28** (2006), 265-281.

[6] R. Flores-Hernández: Políticas óptimas monótonas de procesos de control de Markov con costo promedio. Memorias, Vol. III de la 3ra. Conferencia Iberoamericana en Sistemas, Cibernética e Informática. Orlando, Fl. 2004.

[7] R. M. Flores-Hernández, and R. Montes-de-Oca: Monotonicity of minimizers in optimization problems with applications to Markov control processes. Kybernetika (Prague) **43** (2007), 347-368.

[8] E. Gordienko, and O. Hernández-Lerma: Average cost Markov control processes with weighted norms: Value iteration. Applicationes Mathematicae **23,2** (1995), 219-237.

[9] M. C. Fu, S. I. Marcus and I-J Wang: Monotone optimal policies for a transient queueing staffing problem. Operations Research **48** (2000), 327–331.

[10] E. Gallish: On monotone optimal policies in a queueing model of M/G/1 type with controllable service time distribution. Advances in Applied Probability **11** (1979), 870–887.

[11] O. Hernández-Lerma, and J. B. Lasserre: Discrete-Time Markov Control Processes. Springer-Verlag, New York 1996.

[12] D. P. Heyman and M. J. Sobel: Stochastic Models in Operations Research, Vol. II. Stochastic Optimization. McGraw-Hill, Inc., New York 1984.

[13] K. Hinderer: Increasing Lipschitz continuous maximizers of some dynamic programs. Annals of Operations Research **29** (1991), 565-586.

[14] K. Hinderer and M. Stieglitz: Increasing and Lipschitz continuous minimizers in one-dimensional linear-convex systems without constraints: The continuous and the discrete case. Mathematical Methods of Operations Research **44** (1996), 189–204.

[15] S. K. Hipp, and U. D. Holzbaur: Decision processes with monotone hysteretic policies. Operations Research **36** (1988), 585-588.

[16] D. L. Iglehart: Optimality of (s, S) policies in the infinite horizon dynamic inventory problem. Management Science **9** (1963), 259-267.

[17] D. L. Iglehart: Capital accumulation and production for the firm: Optimal dynamic policies. Management Science **12** (1965), 193-205.

[18] D. Kalin: A note on 'monotone optimal policies for Markov decision processes'. Mathematical Programming **15** (1978), 220–222.

[19] M. Y. Kitaev, and V. V. Rikov: Controlled Queueing Systems. CRC Press. Boca Raton, Fl. 1995.

[20] F. V. Lu, and R. F. Serfozo: $M|M|1$ queueing decision processes with monotone hysteretic optimal policies. Operations Research **32** (1984), 1116-1152.

[21] M. Martínez-Morales. Adaptive Premium Control in an Insurance Risk Process. Ph. D. Thesis. Texas Tech University 1991.

[22] R. Mendelssohn and M. Sobel: Capital accumulation and the optimization of renewable resource models. Journal of Economic Theory **23** (1980), 243–260.

[23] B. L. Miller: Optimal consumption with a stochastic income stream. Econometrica **42** (1974), 253-266.

[24] C. Norstrom: Optimal capital adjustment under uncertainty. Journal of Economic Theory **8** (1974), 139-148.

[25] A. O. Pittenger: Monotonicity in a Markov decision process. Mathematical Methods of Operations Research **13** (1988), 65–73.

[26] E. L. Porteus: Foundations of Stochastic Inventory Theory. Stanford University Press, Stanford, Cal. 2002.

[27] M. L. Puterman: Markov Decision Processes: Discrete Stochastic Dynamic Programming. John Wiley & Sons, New York 1994.

[28] U. Rieder: Measurable selection theorems for optimization problems. Manuscripta Mathematica **24** (1978), 115–131.

[29] S. M. Ross: Introduction to Stochastic Dynamic Programming. Academic Press Inc., San Diego, Cal. 1983.

[30] L. I. Sennot: Stochastic Dynamic Programming and the Control of Queueing Systems. John Wiley and Sons, New York 1999.

[31] R. F. Serfozo: Monotone optimal policies for Markov decision processes. Mathematical Programming Study **6** (1976), 202–215.

[32] Sh. Stidham and R. R. Weber: Monotonic and insensitive optimal policies for control of queues with undiscounted costs. Operations Research **37** (1989), 611–625.

[33] K. R. Stromberg: An Introduction to Classical Real Analysis. Wadsworth International Group, Belmont, Cal. 1981.

[34] R. K. Sundaram: A First Course in Optimization Theory. Cambridge University Press, UK 1996.

[35] D. M. Topkis: Minimizing a submodular function on a lattice. Operations Research **26** (1978), 305–321.

[36] D. M. Topkis: Supermodularity and Complementarity. Princeton University Press, Princeton, N. J. 1998.