



**Universidad Autónoma Metropolitana  
Iztapalapa**

**División de Ciencias Básicas e Ingeniería  
Departamento de Física**



Casa abierta al tiempo

**Productos estrella en el formalismo  
de cuantización por deformación**

Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ciencias (Física) presenta:

**I.Q. José Andrés Tornero Saldaña**

Asesor:

Dr. Marco Antonio Maceda Santamaría

Sinodales:

Dr. Eckehard W. Mielke

Dr. Marco Antonio Maceda santamaría

Dr. Francisco Javier Turrubiates Saldivar

Ciudad de México 12/04/18

A handwritten signature in blue ink, which appears to read 'Mielke', is written over a printed name that is partially obscured by the signature.

**Universidad Autónoma Metropolitana  
Iztapalapa**

**División de Ciencias Básicas e Ingeniería  
Departamento de Física**



**Casa abierta al tiempo**

# **Productos estrella en el formalismo de cuantización por deformación**

Tesis que para obtener el grado de Maestro en Ciencias (Física) presenta:

**I.Q. José Andrés Tornero Saldaña**

Asesor:

Dr. Marco Antonio Maceda Santamaría

Sinodales:

Dr. Eckehard W. Mielke

Dr. Marco Antonio Maceda santamaría

Dr. Francisco Javier Turrubiates Saldivar

Ciudad de México 12/04/18



# Agradecimientos

Dedico esta tesis a Rufián y Liev, que con su compañía, sus travesuras y su cariño me ayudaron a transitar por este sendero.

Agradezco a mi asesor el Dr. Marco Maceda, por sus enseñanzas, paciencia y valiosos consejos que me permitieron concluir este trabajo. También a mis sinodales, el Dr. Eckehard Mielke y el Dr. Francisco Turrubiates, que con sus comentarios se pulió este trabajo.

Al CONACYT, por el apoyo económico para realizar mis estudios de maestría.

A Angélica Mejía por su apoyo incondicional, durante este grato camino.



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Tipos de cuantización</b>	<b>3</b>
2.1. Cuantización canónica (Schrödinger)	3
2.1.1. Partícula libre	4
2.1.2. Pozo de potencial cuadrado infinito	5
2.1.3. Oscilador armónico simple unidimensional	6
2.2. Cuantización por deformación (Weyl-Wigner-Moyal)	9
2.2.1. Partícula libre	10
2.2.2. Pozo de potencial cuadrado infinito	12
2.2.3. Oscilador armónico simple unidimensional	14
2.3. Dependencia temporal	15
<b>3. Producto estrella</b>	<b>19</b>
3.1. Producto estrella general	19
3.2. Producto estrella normal	21
3.3. Producto estrella de Moyal	22
3.4. Relación de equivalencia	24
3.5. Sistemas fermiónicos	26
<b>4. Producto estrella de Fedosov</b>	<b>31</b>
4.1. Construcción del producto	31
4.1.1. El Algoritmo	32
4.2. Evaluación del producto	33
4.2.1. La conexión del espacio fase	34
4.2.2. El haz de Weyl-Heisenberg	36
4.2.3. Construcción de la derivación global	38
4.2.4. La base para el álgebra de los observables	39
4.2.5. Los conmutadores	40
4.2.6. Espacio de Finsler	41
4.3. Caso de aplicación: curvatura constante explícito	41
4.3.1. El soporte geométrico	41
4.3.2. Conexión del espacio fase	42
4.3.3. Haz de Weyl-Heisenberg	43
4.3.4. Construcción de la derivada global	43

4.3.5. La base para el álgebra de los observables . . . . .	43
4.3.6. Los conmutadores . . . . .	44
4.4. Resultados para los espacio-tiempos de Sitter y Anti de Sitter . . . . .	45
<b>5. Conclusiones y perspectivas</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>48</b>



# Resumen

La mecánica cuántica es la teoría mediante la cual se estudia el mundo atómico y subatómico. El formalismo más conocido para abordar problemas en este contexto es el de la ecuación de Schrödinger, en el cual se tiene que resolver una ecuación diferencial parcial de segundo orden. En este trabajo se presenta el formalismo de la cuantización por deformación como una herramienta alternativa para el estudio de sistemas cuánticos. Para ello se realiza una deformación al álgebra del espacio fase para obtener la no conmutatividad, (una característica de la mecánica cuántica); esta deformación se realiza mediante un producto que se le conoce como producto estrella ( $\star$ ).

También en el formalismo presentado aquí se trabaja con las variables tradicionales en vez de con operadores y el espacio es el espacio fase, no el espacio de Hilbert. Se muestran los sistemas más conocidos en ambos formalismos, para que se observe que la cuantización por deformación llega a los mismos resultados que la mecánica cuántica estandar.

Por último se construye y evalúa el producto estrella de Fedosov, el más general definido en un espacio fase curvo con estructura simpléctica.



# Capítulo 1

## Introducción

A finales del siglo XIX, los físicos pensaban que ya toda la física estaba hecha, que solamente había que hacer instrumentos más finos para obtener mediciones más precisas, sin embargo, había algunos fenómenos físicos que con la teoría física de ese momento, no se obtenían los resultados que daba el experimento o tenían algunas complicaciones, uno de ellos era la radiación de cuerpo negro.

En este caso la teoría y el experimento tenían una discrepancia, la teoría indicaba que la densidad de energía aumentaba conforme la frecuencia aumentaba, haciendo que la densidad de energía contenida en el cuerpo negro tendiera a infinito. El experimento por otro lado, mostraba que a partir de un cierto punto la densidad de energía tendía a cero si la frecuencia seguía aumentando. A este comportamiento, se le conoció como catástrofe ultravioleta.

En 1900, Max Planck presentó un trabajo a la sociedad física de Alemania [1]. En este mostraba los resultados al estudiar la radiación de cuerpo negro y como se subsanaba la catástrofe ultravioleta. Se veía que la energía asociada a un fotón necesitaba considerarse como una variable discreta, y el intercambio energético en la radiación de cuerpo negro con el medio, se da en múltiplos de ésta; esto lo llevó a introducir el concepto de cuanto. Al principio Planck no creía en los cuantos como entes físicos reales, sino que, pensaba que era una propiedad del cuerpo calentado.

Años más tarde, en 1905, Albert Einstein publicó un trabajo sobre el efecto fotoeléctrico [2]. Este fenómeno físico debió de haber desconcertado a los físicos en su momento. El efecto fotoeléctrico no se presenta siempre, es necesario que el haz luminoso que irradia el material tenga la energía suficiente para que se de el fenómeno físico, de lo contrario no se produce. Este fenómeno ayudó al establecimiento de la idea de cuanto. Unos años después, en 1909, Albert Einstein demostró que los cuantos son entidades físicas reales y que estos conforman la propiedad discreta del campo de radiación [3].

Los físicos comenzaron a trabajar con ésta idea y se pudieron explicar otros fenómenos en la naturaleza. Se llegó así a un modelo matemático que se conoció como mecánica matricial, desarrollada por Heisenberg, Born y Jordan en 1925 [4]. En 1926 Erwin Schrödinger publicó un trabajo que se conoció como mecánica ondulatoria [5]; éste modelo se ocupó con mayor frecuencia sobre la mecánica matricial. Con el tiempo se le conoció como la ecuación de Schrödinger y se convirtió en el principio fundamental de la mecánica cuántica. Una dificultad con la que se enfrentaban los físicos era, en qué variable hacer los cálculos, ya que se puede tener la ecuación de Schrödinger tanto en espacio coordinado como en espacio de momentos, son representaciones equivalentes.

En 1932 Eugene Wigner [6], presentó un método mediante el cual se podía obtener la proba-

bilidad en las variables de posición y momento de manera simultánea. Éste método sirvió para buscar otro camino mediante el cual se pudiera realizar la cuantización de los sistemas físicos. En 1946 Hilbrand J. Groenewold [7] y posteriormente en 1949 José Enrique Moyal [8], basándose en el trabajo de Wigner, desarrollaron un método alternativo para obtener los resultados de la mecánica cuántica. Este formalismo conocido como cuantización por deformación, es independiente del espacio-tiempo utilizado [9].

La cuantización por deformación es un método mediante el cual se lleva el álgebra conmutativa de la mecánica clásica a un álgebra no conmutativa de la mecánica cuántica; es mediante una deformación de la estructura algebraica que se obtiene la no conmutatividad en espacio fase [10, 11]. Esta deformación se realiza mediante un producto estrella ( $\star$ ), habiendo varios tipos y pueden ser equivalentes entre ellos desde la parte formal matemática; algunos resultados pueden variar por una constante aditiva, que tiene una interpretación física en el caso de la energía.

Esto puede provocar cierta incertidumbre al momento de tener que decidir que producto estrella ocupar, sin embargo, la estructura de cada producto estrella nos da una idea del resultado que obtendremos, con lo que esto nos ayuda para determinar que producto estrella utilizar.

El producto estrella tiene ciertas ventajas sobre la ecuación de Schrödinger, una de ellas es la posibilidad de obtener resultados mixtos, esto es, poder ver la posición y el momento de forma simultánea. Esto no quiere decir que se viole el principio de incertidumbre de Heisenberg (siendo más correcto llamarlo principio de desigualdad), sino que con la misma función, se puede calcular la posición y el momento sin necesidad de modificar ésta.

El producto estrella no simplifica todo sistema físico, en algunos casos resulta más fácil para la realización de los cálculos, por lo que se tiene que discernir en qué momento ocuparlo y cuando no. Por ello la teoría clásica no debe ser ajena a la teoría cuántica, debe ser una parte de esta; la forma de recuperar la teoría clásica de cualquier teoría cuántica, es tomando el límite del parámetro  $\hbar$  que caracteriza la cuantización dentro de una teoría física, cuando tiende a cero. De esta forma se puede hablar de que la teoría cuántica que se tiene es válida y los resultados serán equivalentes a cualquier otra teoría cuántica.

En el capítulo 2 se presentan, de forma sintetizada la cuantización canónica junto con los sistemas físicos que se han resuelto mediante ésta; y la cuantización por deformación con los mismos sistemas físicos que en la anterior. También se expone la forma en la que se obtiene la ecuación dependiente del tiempo en la cuantización por deformación. En el capítulo 3 se presentan los distintos productos estrella que se ocupan en la cuantización por deformación, comenzando por la forma general de éste y mostrando los que son más comunes, así como la forma de pasar de un producto estrella a otro. Se mencionan de forma breve los sistemas fermiónicos para mostrar que en éstos también se puede ocupar el producto estrella.

En el capítulo 4 se muestra la construcción del producto estrella más general en variedades simplécticas: el producto estrella de Fedosov. Se da un ejemplo de la aplicación del algoritmo de Fedosov. Finalmente en el capítulo 5 se dan las conclusiones a las que se llega y las perspectivas de posibles trabajos futuros.

## Capítulo 2

# Tipos de cuantización

La teoría cuántica explica el mundo microscópico y ha sido muy exitosa en predecir y obtener resultados de distintos sistemas físicos; algunos de estos sistemas son: la partícula libre, distintos pozos de potencial, el oscilador armónico, y otros más. El modelo matemático más usado es la ecuación de Schrödinger, sin embargo, existen otros modelos matemáticos útiles para hacer mecánica cuántica, como son: cuantización por deformación e integrales de trayectoria. Por mencionar algunos.

### 2.1. Cuantización canónica (Schrödinger)

En 1926 el físico vienés Erwin Schrödinger publicó lo que se convertiría en la ecuación fundamental de la mecánica cuántica, la cual posteriormente se le conoció como ecuación de Schrödinger [5]. Esta ecuación es la base de partida para resolver cualquier problema en el que se quiera o necesite considerar los efectos cuánticos. Para construir esta ecuación se parte de una ecuación de onda general [12]

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0. \quad (2.1)$$

Para simplificar los cálculos, se busca una forma de separar las variables espaciales de la temporal, de manera que se pueda resolver la parte estacionaria y luego incluir la temporal. Para poder realizar tal separación de variables, se considera una onda monocromática de frecuencia angular  $\omega$ , de la forma

$$\psi(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} \varphi(\mathbf{r}). \quad (2.2)$$

Sustituimos esta expresión en (2.1) y derivando dos veces con respecto al tiempo y factorizando obtenemos la ecuación de onda estacionaria

$$\nabla^2\varphi + \frac{\omega^2}{v^2}\varphi = 0. \quad (2.3)$$

Para que esta expresión esté en correspondencia con la teoría cuántica, se recurre al postulado que Louis de Broglie formuló en 1924 [13], en el cual a cada corpúsculo se le asocia una longitud de onda dada por

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p}, \quad (2.4)$$

donde  $p$  es la magnitud del momento de la partícula.

Luego se introduce la relación  $v = \lambda\nu = \lambda\omega/2\pi$ , donde sustituimos  $\lambda$  mediante (2.4), y posteriormente sustituyendo en (2.3) obtenemos

$$\nabla^2\varphi + \frac{p^2}{\hbar^2}\varphi = 0. \quad (2.5)$$

Con esta ecuación e interpretando a  $\psi$  como una amplitud de probabilidad, de forma que

$$\rho = \psi^*\psi = \varphi^*\varphi, \quad (2.6)$$

sea una densidad de probabilidad asociada, se tiene la descripción cuántica para problemas estacionarios. Al suponer que la onda es monocromática, el ensemble está caracterizado por una sola energía  $E$ , de forma que la ecuación (2.5) la podemos expresar en términos de la energía  $E$  característica del ensemble, escribiendo  $E = p^2/2m + V(\mathbf{r})$ . Al utilizar esta relación obtenemos la ecuación estacionaria de Schrödinger.

$$\nabla^2\varphi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\varphi = 0. \quad (2.7)$$

Algunos sistemas físicos que se han resuelto mediante la ecuación estacionaria de Schrödinger son:

1. Partícula libre.
2. Pozo de potencial rectangular infinito.
3. Oscilador armónico unidimensional.
4. Átomo de hidrógeno.

Las soluciones de la ecuación de Schrödinger deben ser físicamente admisibles por lo que debe cumplir con ciertas características que son las siguientes:

1.  $\varphi$  y sus derivadas espaciales deben ser funciones continuas.
2.  $\varphi$  debe ser univaluada en todo punto.
3.  $\varphi$  debe ser finita en todo punto y de cuadrado integrable.
4.  $\varphi$  debe satisfacer las condiciones a la frontera propias del problema.

Bajo estas consideraciones se resuelven los distintos sistemas físicos que se describen a continuación.

### 2.1.1. Partícula libre

Consideraremos la partícula libre como primer ejemplo, ya que esta no tiene energía potencial asociada y la ecuación de Schrödinger se simplifica tomando la forma

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\varphi = 0, \quad (2.8)$$

donde el segundo término se asocia a una constante definida por

$$k^2 := \frac{p^2}{\hbar^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}. \quad (2.9)$$

Al sustituir en la ecuación de Schrödinger tenemos

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + k^2\varphi = 0. \quad (2.10)$$

La solución general de esta ecuación es

$$\varphi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, \quad (2.11)$$

siendo  $k$  la raíz cuadrada de la ecuación (2.9). Las constantes  $A$  y  $B$  pueden depender de  $k$ , esta dependencia es con respecto a los valores iniciales que se ocupen para la solución particular; aparte de éstas, es necesario conocer las condiciones del problema en cuestión. Con ayuda de la ecuación (2.2) obtenemos la solución completa, incluida la parte temporal

$$\psi(x, t) = Ae^{-i(\omega t - kx)} + Be^{-i(\omega t + kx)}. \quad (2.12)$$

El primer término del miembro derecho representa una onda plana que se propaga hacia la derecha con velocidad de fase  $v_f = \omega/k$ ; la onda del segundo término se propaga hacia la izquierda con la misma velocidad de fase. Seleccionando las partículas que se mueven hacia la derecha, la constante  $B$  debe ser nula, obteniendo la función de onda

$$\psi(x, t) = Ae^{-i\omega t + ikx}. \quad (2.13)$$

### 2.1.2. Pozo de potencial cuadrado infinito

El potencial de pozo cuadrado infinito es otro ejemplo que se resuelve con esta teoría. Para este caso, supondremos que tenemos una energía potencial infinita, lo que confina a la partícula a una región del espacio. Este potencial se escribe como

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x < 0 \quad \text{ó} \quad x > a, \\ 0 & 0 < x < a. \end{cases} \quad (2.14)$$

La ecuación de Schrödinger queda entonces como

$$\varphi'' + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V)\varphi = 0. \quad (2.15)$$

Ya que el potencial  $V$  que estamos considerando tiene dos valores, y en el caso infinito la partícula no tendría movimiento, se considera primero únicamente la región acotada por este, donde el potencial es cero. De la discusión de partícula libre sabemos que la solución general es

$$\varphi = A \operatorname{sen}(kx) + B \operatorname{cos}(kx) \quad 0 \leq x \leq a. \quad (2.16)$$

Es necesario que la función sea continua en todo el espacio, por este motivo, se busca que en la frontera el valor de la solución dentro y fuera del intervalo sea el mismo; evaluando en cada límite y pidiendo que el valor de la solución sea cero, tenemos

$$\varphi(0) = B = 0 \quad , \quad \varphi(a) = A \operatorname{sen}(ka) = 0. \quad (2.17)$$

De la última ecuación sabemos que  $A$  no puede ser cero, de lo contrario la función se anularía en todos lados y por lo tanto no habría partícula. Se necesita entonces que  $\text{sen}(ka) = 0$ , con esto se llega a que los valores de  $k$  deben ser de la forma

$$k = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.18)$$

El valor cero para  $n$  se excluye ya que al sustituirlo en la función seno ésta se hace cero lo que indicaría que no hay partícula. Al sustituir el resultado para  $k$  en la ecuación (2.9) obtenemos los eigenvalores para la energía

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} n^2. \quad (2.19)$$

Las eigenfunciones quedan como

$$\varphi_n = A_n \text{sen} \frac{\pi n}{a} x. \quad (2.20)$$

Ahora se busca el valor de la constante de normalización para tener la función completa mediante la condición de normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n|^2 dx = 1. \quad (2.21)$$

Sustituyendo la función (2.20) y poniendo los límites que nos interesan obtenemos

$$|A_n|^2 \int_0^a \text{sen}^2 \frac{n\pi}{a} x dx = \frac{1}{2} a |A_n|^2 = 1. \quad (2.22)$$

Despejando  $A_n$  tenemos

$$|A_n| = \sqrt{\frac{2}{a}}. \quad (2.23)$$

De esta forma la función para el estado  $n$  dentro del pozo está dada por

$$\varphi_n = \sqrt{\frac{2}{a}} \text{sen} \frac{n\pi}{a} x, \quad \text{con } A_n \in \mathbb{R}. \quad (2.24)$$

### 2.1.3. Oscilador armónico simple unidimensional

Otro ejemplo es el potencial de oscilador armónico simple unidimensional, en este el potencial  $V$  que tenemos es

$$V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2, \quad (2.25)$$

obteniendo la siguiente ecuación

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \psi = E\psi. \quad (2.26)$$

Para poder resolver la ecuación de forma más sencilla, se lleva a una forma canónica, esto se hace al adimensionalizar la ecuación; al tener una ecuación homogénea, no es necesario introducir una función de onda adimensional. Escribimos lo siguiente

$$x := \alpha_0 \xi \quad (2.27)$$



siendo  $\alpha_0$  una constante por fijar con dimensión de longitud y  $\xi$  es una variable adimensional. Sustituyendo en (2.26) y multiplicando toda la ecuación por  $2m\alpha_0^2/\hbar^2$ , obtenemos

$$-\frac{d^2\psi}{d\xi^2} + \frac{m^2\alpha_0^4\omega^2}{\hbar^2}\xi^2\psi = \frac{2m}{\hbar^2}\alpha_0^2 E\psi. \quad (2.28)$$

Para simplificar más la expresión y no estar arrastrando constantes, imponemos que el coeficiente de  $\xi^2\psi$  sea igual a 1, con esto el valor de  $\alpha_0$  es tal que

$$\alpha_0^2 = \frac{\hbar}{m\omega}. \quad (2.29)$$

Por último, tomamos como variable adimensional energética a

$$\epsilon := \frac{2m}{\hbar^2}\alpha_0^2 E = \frac{2E}{\hbar\omega} \quad (2.30)$$

Al sustituir estas nuevas variables en la ecuación (2.26) obtenemos la siguiente ecuación de eigenvalores

$$-\psi'' + \xi^2\psi = \epsilon\psi. \quad (2.31)$$

Para resolver la ecuación (2.31) estudiamos primero el comportamiento de la solución en el infinito. Cuando  $\xi \rightarrow \infty$ , podemos aproximar esta ecuación con

$$\psi''_\infty - \xi^2\psi_\infty = 0, \quad (2.32)$$

en donde  $\psi_\infty$  representa la solución asintótica en el infinito. La solución de esta ecuación la proponemos de la forma

$$\psi_\infty = e^{a\xi^2}, \quad (2.33)$$

y puesto que

$$\psi''_\infty = 2a\psi_\infty + 4a^2\xi^2\psi_\infty \approx 4a^2\xi^2\psi_\infty \quad (\xi \rightarrow \infty), \quad (2.34)$$

si ponemos  $4a^2 = 1$  podemos satisfacer la ecuación asintótica; en consecuencia  $a = \pm\frac{1}{2}$  y tendremos como solución asintótica general

$$\psi_\infty = Ae^{\xi^2/2} + Be^{-\xi^2/2}. \quad (2.35)$$

Imponemos ahora la condición  $\psi \rightarrow 0$  cuando  $|\xi| \rightarrow \infty$ ; esto demanda tomar  $A = 0$  en la expresión anterior. La solución físicamente aceptable de (2.31) podemos escribirla en la forma

$$\psi = e^{-\xi^2/2}u(\xi), \quad (2.36)$$

en donde  $u(\xi)$  debe ser un polinomio en  $\xi$ , puesto que el comportamiento asintótico de  $\psi$  está correctamente dado por el factor exponencial. Al sustituir (2.36) en (2.31) y simplificar, se obtiene la ecuación diferencial que determina la función  $u(\xi)$

$$u'' - 2\xi u' + (\epsilon - 1)u = 0. \quad (2.37)$$

Se encuentra que existen soluciones polinomiales (y, por lo tanto, regulares) si y sólo si el parámetro  $\epsilon - 1$  es un número entero par

$$\epsilon - 1 = 2n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.38)$$

En este caso la ecuación se reduce a la llamada ecuación de Hermite

$$H_n'' - 2\xi H_n' + 2nH_n = 0, \quad (2.39)$$

cuyas soluciones son los polinomios de Hermite

$$u = H_n(\xi). \quad (2.40)$$

Por lo tanto, las eigenfunciones del oscilador armónico simple unidimensional son

$$\psi_n = C_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad (2.41)$$

en donde  $H_n$  es el polinomio de Hermite de orden  $n$  y  $C_n$  es la constante de normalización, que determinaremos más adelante. Los eigenvalores de la energía los obtenemos despejando  $\epsilon$  de la ecuación (2.38) y usando (2.30); queda entonces

$$E = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (2.42)$$

Determinaremos ahora la constante de normalización. El cálculo se puede simplificar considerablemente haciendo uso efectivo de las propiedades de los polinomios de Hermite; para el presente cálculo será especialmente útil la fórmula de Rodrigues

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n}. \quad (2.43)$$

La condición de normalización se escribe, usando la ecuación (2.41), como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^* \psi_n dx = 1 = \alpha_0 \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(\xi) \psi_n(\xi) d\xi = \alpha_0 |C_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} H_n^2(\xi) d\xi. \quad (2.44)$$

Introducimos en esta expresión la ecuación (2.43) para eliminar un factor  $H_n$ , de modo que

$$\alpha_0 |C_n|^2 (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_n(\xi) \frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n} d\xi = 1. \quad (2.45)$$

Al integrar por partes  $n$  veces sucesivas, y notando que todos los términos integrados son nulos en las fronteras  $|\xi| = \infty$ , se obtiene

$$\alpha_0 |C_n|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} \frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n} d\xi = 1. \quad (2.46)$$

Para calcular el lado izquierdo de esta condición, hacemos primero las derivadas indicadas en la ecuación (2.43). Esto nos lleva a la siguiente expresión explícita para los polinomios de Hermite

$$H_n(\xi) = (2\xi)^n - \frac{n(n-1)}{1!} (2\xi)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!} (2\xi)^{n-4} - \dots, \quad (2.47)$$

de la cual se sigue inmediatamente que

$$\frac{d^n H_n(\xi)}{d\xi^n} = 2^n n!. \quad (2.48)$$

Si ahora sustituimos en la condición de normalización y calculamos la integral que queda, que es inmediata, obtenemos

$$\alpha_0 |C_n|^2 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = \alpha_0 |C_n|^2 2^n n! \sqrt{\pi} = 1. \quad (2.49)$$

Luego, si  $C_n$  se toma como real y positiva, su valor es

$$C_n = (\sqrt{\pi} \alpha_0 2^n n!)^{-1/2}. \quad (2.50)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (2.41), obtenemos finalmente

$$\psi_n(\xi) = (\sqrt{\pi} \alpha_0 2^n n!)^{-1/2} e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad (2.51)$$

quedando determinadas completamente las funciones de onda del oscilador armónico unidimensional.

## 2.2. Cuantización por deformación (Weyl-Wigner-Moyal)

En la mecánica cuántica estandar, la función de densidad probabilística  $\rho(x)$  es dada por el cuadrado de la función de onda  $\rho(x) = |\psi(x)|^2$ . Esta cantidad se encuentra en función de la posición  $x$  o bien del momento  $p$ , no puede ser función de las dos variables simultáneamente. Sin embargo, la cuantización por deformación es un formalismo que se desarrolló al tratar de obtener correcciones cuánticas en la mecánica estadística clásica, trabajo que realizó Wigner en 1932 [6].

La función introducida por Wigner en dicho trabajo ( $W(x, p)$ ), tiene la cualidad de poder representar la distribución probabilística en función de las dos variables  $(x, p)$  de forma simultánea. En la mecánica estadística se tiene un factor, que se conoce como factor de Boltzmann, que contiene la energía expresada en función de  $x$  y  $p$ , por lo que no es de extrañar que la función de Wigner tenga esta propiedad. Esta función tiene un detalle particular, no es positiva en todo el espacio fase por lo que no se puede hablar de una probabilidad tal cual, en vez de esto, se le llama una cuasi-probabilidad.

Por el principio de incertidumbre de Heisenberg se tienen ciertas constricciones en la teoría cuántica, mismas que se tienen en la cuantización por deformación. La mecánica cuántica estandar trabaja en un espacio de operadores, por lo que se tiene que ir y venir de éste espacio al espacio fase. La cuantización por deformación no tiene este ir y venir, los cálculos se realizan en el espacio fase directamente, lo que puede simplificar la interpretación de los resultados. El espacio fase de la cuantización por deformación es el mismo que el de la mecánica clásica, esto es por el hecho de estar ocupando las variables de posición  $x$  y momento  $p$  clásicas, en lugar de operadores.

La función de Wigner se define como [14]

$$W(x, p) := \frac{1}{h} \int e^{-ipy/\hbar} \psi(x + y/2) \psi^*(x - y/2) dy, \quad (2.52)$$

y su evolución está dada por

$$i\hbar \frac{\partial W}{\partial t} = [H, W]_{\star}. \quad (2.53)$$

Donde

$$[H, W]_{\star} := H \star W - W \star H.$$

La estrella  $\star$ , hace referencia al producto estrella, que más adelante se explicará en detalle su aplicación.

En el caso del estado estacionario

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0 \rightarrow [H, W]_{\star} = 0. \quad (2.54)$$

Para que  $W$  describa una energía de un eigenestado con eigenvalor  $E$  se debe cumplir

$$H \star W = W \star H = EW. \quad (2.55)$$

Esta ecuación dinámica simple nos permite resolver para la función de Wigner, y determinar así los estados estacionarios del sistema. Resolviendo la ecuación anterior, podemos obtener un resultado más general que solo uno de interés físico, esto es, el resolver la ecuación anterior implica encontrar la función de Wigner, y como ésta no es positiva en todo el espacio fase, es por lo que se obtiene un resultado más general. Imponemos adicionalmente la condición

$$W \star W = \frac{W}{h}, \quad W^* = W. \quad (2.56)$$

Ésta es importante para encontrar las soluciones correctas. La primera condición indica que  $W$  es una proyección en la forma usual del operador de densidad. Más generamente, el requisito es

$$W_i \star W_j = \frac{\delta_{ij}}{h} W_j, \quad (2.57)$$

en el caso de una variable discreta, y

$$W_{\alpha} \star W_{\beta} = \frac{1}{h} \delta(\alpha - \beta) W_{\beta}, \quad (2.58)$$

para una variable continua. La normalización de la función de Wigner  $W$  es sobre todo el espacio fase y por lo tanto debe ser igual a 1

$$\int W(x, p) dp dx = 1. \quad (2.59)$$

Ya que la normalización no puede ser diferente de uno, si se considera todo el espacio fase, esto nos lleva a

$$W^* = W, \quad (2.60)$$

que es la segunda condición que imponemos. A continuación discutiremos la aplicación de estas ideas para los sistemas físicos mencionados anteriormente.

### 2.2.1. Partícula libre

En esta sección discutimos una partícula libre [14], con  $2m = 1$  por lo que el Hamiltoniano queda como  $H = p^2$ . La ecuación (2.55) es la ecuación general de  $\star$ -eigenvalor, con el hamiltoniano dado se tiene

$$p^2 \star_M W = EW,$$

realizamos una aproximación ocupando la fórmula de Taylor y obtenemos

$$\left(p - \frac{i\hbar}{2}\partial_x\right)^2 W = EW. \quad (2.61)$$

Tomamos  $\hbar = 1$ , de modo que la parte imaginaria de la ecuación es

$$p\partial_x W = 0, \quad (2.62)$$

mientras que la parte real es

$$\left(p^2 - \frac{1}{4}\partial_x^2\right) W = EW. \quad (2.63)$$

El factor  $p$  en (2.62) es muy importante, podemos concluir que si  $p \neq 0$ ,  $\partial_x W = 0$ , pero no se puede afirmar lo mismo si  $p = 0$ . Proponemos el siguiente ansatz

$$W(x, p) = f(p) + \delta(p)g(x). \quad (2.64)$$

Sustituyendo en (2.63) encontramos

$$(p^2 - E)f(p) - \delta(p)\left(E + \frac{1}{4}\partial_x^2\right)g(x) = 0. \quad (2.65)$$

Considerando  $p = 0$  obtenemos

$$g(x) = b \exp(2i\sqrt{E}x) + b^* \exp(-2i\sqrt{E}x), \quad (2.66)$$

cuando pedimos que  $W = W^*$ . Entonces (2.65) se reduce a  $(p^2 - E)f(p) = 0$ , resolviéndose con

$$f(p) = a_+ \delta(p - \sqrt{E}) + a_- \delta(p + \sqrt{E}), \quad (2.67)$$

con  $a_{\pm}$  constantes reales arbitrarias. Los términos en (2.67) corresponden a ondas planas de momento  $\pm\sqrt{E}$ , como se puede verificar al resolver

$$p \star W = W \star p = \sqrt{E}W. \quad (2.68)$$

La expresión

$$W = a_+ \delta(p - \sqrt{E}) + a_- \delta(p + \sqrt{E}), \quad (2.69)$$

es la función de Wigner para los estados mezclados de dos estados propios de momento. Los términos de (2.66) son necesarios para una coherente superposición de los dos estados propios de momento, y representan interferencia entre ellos. Estos son necesarios para que la función de Wigner pueda considerarse como una función de oscilador armónico simple dentro de un límite de periodo muy largo, o un límite muy ancho de una partícula en un pozo de potencial infinito. El resultado general es

$$W = \delta(p)\left(b \exp(2i\sqrt{E}x) + b^* \exp(-2i\sqrt{E}x)\right) + a_+ \delta(p - \sqrt{E}) + a_- \delta(p + \sqrt{E}). \quad (2.70)$$

Para restringir la función de Wigner a un estado puro, se impone la condición

$$W \star W \propto \delta(0)W, \quad (2.71)$$

válida para la función de Wigner correspondiente con el estado puro no normalizable. Encontramos así

$$W \star W = \delta(0) \left( (a_+^2 + |b|^2)\delta(p - \sqrt{E}) + (a_-^2 + |b|^2)\delta(p + \sqrt{E}) \right. \\ \left. + (a_+ + a_-)\delta(p)[b \exp(2i\sqrt{E}x) + b^* \exp(-2i\sqrt{E}x)] \right). \quad (2.72)$$

El cálculo es sencillo, excepto cuando tenemos que interpretar  $\delta(p + \sqrt{E})\delta(p + \sqrt{E})$  como  $\delta(0)\delta(p + \sqrt{E})$  e.g. cuando se tienen resultados de distribuciones equivalentes (i.e. alguna integración). Similarmente, si asumimos  $E > 0$ , ponemos  $\delta(p + \sqrt{E})\delta(p - \sqrt{E})$  igual a cero. En (2.71), este resultado lleva a las constricciones

$$|b|^2 = a_+ a_- \Rightarrow b = \sqrt{a_+ a_-} e^{i\phi}, \phi \in \mathfrak{R}, \quad (2.73)$$

donde  $\phi$  es una fase sin especificar.

La solución general de estado puro para la ecuación de  $\star$ -genvalores propio de la partícula libre (2.61) es entonces

$$W = a_+ \delta(p - \sqrt{E}) + a_- \delta(p + \sqrt{E}) + 2\sqrt{a_+ a_-} \delta(p) \cos(2\sqrt{E}x + \phi) \quad (2.74)$$

Por otro lado, calculando

$$W[\psi] := \frac{1}{2\pi} \int dy e^{-ipy} \psi^* \left( x - \frac{y}{2} \right) \psi \left( x + \frac{y}{2} \right) \quad (2.75)$$

donde  $\hbar = 1$ , con la función de onda del estado puro

$$\psi(x) = \alpha_+ e^{i\sqrt{E}x} + \alpha_- e^{-i\sqrt{E}x} \quad (2.76)$$

obtenemos

$$W[\psi] = |\alpha_+|^2 \delta(p - \sqrt{E}) + |\alpha_-|^2 \delta(p + \sqrt{E}) + \delta(p) \left( \alpha_+^* \alpha_- e^{-2i\sqrt{E}x} + \alpha_+ \alpha_-^* e^{2i\sqrt{E}x} \right). \quad (2.77)$$

Comparando (2.77) con (2.74) se llega a una correspondencia uno a uno, dada por las relaciones

$$\alpha_{\pm} = \sqrt{a_{\pm}} e^{i\phi_{\pm}}, \quad \phi - \phi_+ + \phi_- = 0. \quad (2.78)$$

Como se esperaba, solamente la fase relativa  $\phi_+ - \phi_-$  de (2.76) es relevante para la función de Wigner.

### 2.2.2. Pozo de potencial cuadrado infinito

Otro ejemplo es cuando se toma un potencial, en este caso el más sencillo es el de pozo cuadrado infinito [14, 15]. Para ello se considera  $V = e^{-2\alpha(x+1)} + e^{2\alpha(x-1)}$ , donde  $\alpha$  es una constante arbitraria y la región considerada es  $x \in [-1, 1]$ ; en el límite  $\alpha \rightarrow \infty$  se obtiene el pozo de potencial cuadrado infinito. El Hamiltoniano queda

$$H_{\alpha} = p^2 + e^{-2\alpha(x+1)} + e^{2\alpha(x-1)}. \quad (2.79)$$

La ecuación de  $\star$ -eigenvalor se escribe como

$$H_{\alpha} \star W(x, p) = \left[ \left( p - \frac{i}{2} \partial_x \right)^2 + 2e^{-2\alpha} \cosh[2\alpha(x + \frac{i}{2} \partial_p)] \right] W(x, p) = EW(x, p). \quad (2.80)$$

Aquí ocupamos la fórmula de Taylor en la forma  $\exp(a\partial_x)h(x) = h(x+a)$ , y el potencial se reacomoda obteniendo la función  $\cosh(x)$ .

Separando las partes imaginaria y real de esta ecuación obtenemos

$$\partial_x W(x, p) = -\frac{ie^{-2\alpha}}{p} [W(x, p + i\alpha) - W(x, p - i\alpha)] \sinh(2\alpha x), \quad (2.81)$$

y

$$\left(p^2 - E - \frac{1}{4}\partial_x^2\right) W(x, p) + e^{-2\alpha} [W(x, p + i\alpha) + W(x, p - i\alpha)] \cosh(2\alpha x) = 0. \quad (2.82)$$

Las dos ecuaciones anteriores se combinan ahora para obtener una única ecuación; a la primera ecuación se le saca la segunda derivada con respecto a  $x$  y se sustituye en el primer término de la segunda ecuación, se realizan las simplificaciones que se puedan realizar, obteniendo al final

$$\begin{aligned} 0 = & (p^2 - E)W(x, p) + \frac{e^{-4\alpha}}{4p} \cosh^2(2\alpha x) \left[ \frac{W(x, p+2i\alpha) - W(x, p)}{p+i\alpha} - \frac{W(x, p) - W(x, p-2i\alpha)}{p-i\alpha} \right] \\ & - \frac{i\alpha e^{-2\alpha}}{2p} \cosh(2\alpha x) [W(x, p + i\alpha) - W(x, p - i\alpha)] - e^{-2\alpha} \cosh(2\alpha x) [W(x, p + i\alpha) + W(x, p - i\alpha)]. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Esta ecuación no involucra derivadas sólo las cantidades

$$W(x, p \pm i\alpha), \quad W(x, p \pm 2i\alpha), \quad (2.84)$$

así como  $W(x, p)$ . Deseamos eliminar estas en favor de las derivadas  $\partial_x^n W$ ,  $n = 1, 2, 3, 4$ . Para hacer esto, son necesarias las relaciones siguientes

$$\begin{aligned} \partial_x^3 W(x, p) = & 4(p^2 - E)\partial_x W(x, p) + 2\alpha e^{-2\alpha} \sinh(2\alpha x) [W(x, p + i\alpha) \\ & + W(x, p - i\alpha)] - 4ie^{-4\alpha} \cosh(2\alpha x) \sinh(2\alpha x) \\ & \times \left[ \frac{W(x, p + 2i\alpha) - W(x, p)}{p + i\alpha} + \frac{W(x, p) - W(x, p - 2i\alpha)}{p - i\alpha} \right], \end{aligned} \quad (2.85)$$

y

$$\begin{aligned} \partial_x^4 W(x, p) = & 4(p^2 - E)\partial_x^2 W(x, p) \\ & + 16\alpha^2 e^{-2\alpha} \cosh(2\alpha x) [W(x, p + i\alpha) + W(x, p - i\alpha)] \\ & + 16i\alpha e^{-4\alpha} \sinh^2(2\alpha x) \\ & \times \left[ \frac{W(x, p + 2i\alpha) - W(x, p)}{p + i\alpha} + \frac{W(x, p) - W(x, p - 2i\alpha)}{p - i\alpha} \right] \\ & + e^{-2\alpha} \cosh(2\alpha x) [4(p + i\alpha)^2 - E] W(x, p + i\alpha) \\ & - e^{-2\alpha} \cosh(2\alpha x) [W(x, p + 2i\alpha) + W(x, p)] \\ & + [4(p - i\alpha)^2 - E] W(x, p - i\alpha) \\ & - e^{-2\alpha} \cosh(2\alpha x) [W(x, p) + W(x, p - 2i\alpha)]. \end{aligned} \quad (2.86)$$

La ecuación resultante es bastante complicada, por lo que no se escribe, sin embargo, tenemos un límite bien definido cuando  $\alpha \rightarrow \infty$ , para  $x \in [-1, 1]$ , obteniendo en este caso

$$\frac{1}{16} \partial_x^4 W(x, p) + \frac{1}{2} (p^2 + E) \partial_x^2 W(x, p) + (p^4 - 2Ep + E^2) W(x, p) = 0. \quad (2.87)$$

Sí calculamos la función de Wigner con la ecuación de onda de Schrödinger siguiente

$$\psi(x) = \theta(-x+1)\theta(x+1)\cos(\sqrt{E}x), \quad (2.88)$$

donde

$$E = \frac{n^2\pi^2}{4}, \quad (2.89)$$

y  $\theta$  es la función escalón, obtenemos

$$W(\psi) = \theta(-x+1)\theta(x+1)\bar{W}, \quad (2.90)$$

con

$$\bar{W}(x, p) = \frac{\text{sen}[(2p+n\pi)(1-|x|)]}{2p+n\pi} + \frac{\text{sen}[(2p-n\pi)(1-|x|)]}{2p-n\pi} + \frac{\cos(n\pi x)\text{sen}[2p(1-|x|)]}{p}, \quad (2.91)$$

o su equivalente

$$\bar{W}(x, p) = \frac{\text{sen}[2(p+\sqrt{E})(1-|x|)]}{2(p+\sqrt{E})} + \frac{\text{sen}[2(p-\sqrt{E})(1-|x|)]}{2(p-\sqrt{E})} + \frac{\cos(\sqrt{E}x)\text{sen}[2p(1-|x|)]}{p}. \quad (2.92)$$

$\bar{W}$  satisface la nueva ecuación (2.87) como puede verificarse mediante un cálculo directo.

### 2.2.3. Oscilador armónico simple unidimensional

Ahora veremos el caso del oscilador armónico simple unidimensional [16]. En términos de operadores en un espacio de Hilbert, el Hamiltoniano es

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2. \quad (2.93)$$

La función de onda utilizada es la del estado base para el oscilador armónico [12]

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{a}}e^{-x^2/(2a^2)}, \quad (2.94)$$

donde  $a^2 := \hbar/(m\omega)$ . Empleando la ecuación (2.52) y la ecuación (2.94), obtenemos la correspondiente función de Wigner

$$\begin{aligned} W_0(x-b, p) &= \frac{1}{\hbar} \int e^{-ipy/\hbar} \psi_0(x-b+y/2) \psi_0^*(x-b-y/2) dy \\ &= \frac{1}{\hbar} \int e^{-ipy/\hbar} \frac{1}{\pi^{1/4}a^{1/2}} e^{-(x-b+y/2)^2/2a^2} \frac{1}{\pi^{1/4}a^{1/2}} e^{-(x-b-y/2)^2/2a^2} dy \\ &= \frac{e^{(-2x^2+4xb-2b^2)/2a^2}}{h\pi^{1/2}a} \int e^{-(ipy/\hbar+y^2/4a^2)} dy \\ &= \frac{e^{-(x-b)^2/a^2}}{h\pi^{1/2}a} \sqrt{4a^2\pi} e^{i^2p^2a^2/\hbar^2} = \frac{2}{\hbar} \exp\left(-\frac{a^2p^2}{\hbar^2} - \frac{(x-b)^2}{a^2}\right) \end{aligned} \quad (2.95)$$



tomamos a la constante  $b$  como nula con lo que obtenemos

$$W_0(x, p) = \frac{2}{h} \exp(-a^2 p^2 / \hbar^2 - x^2 / a^2). \quad (2.96)$$

El valor de expectación de  $\hat{H}$  para el estado base, lo obtenemos al realizar la siguiente integración de la función de Wigner con el Hamiltoniano  $H$  escrito en términos de las variables  $(x, p)$  del espacio fase, obteniendo

$$\langle H \rangle = \iint W_0(x, p) \left( \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} \right) dx dp = \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (2.97)$$

### 2.3. Dependencia temporal

Cuando el sistema considera al tiempo como otra variable de la cual depende, es posible deducir una ecuación diferencial que gobierna la evolución del sistema físico bajo estudio. Esta ecuación se obtiene al tomar la derivada con respecto al tiempo de la función de Wigner, obteniendo

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{h} \int e^{-ipy/\hbar} \left[ \frac{\partial \psi^*(x-y/2)}{\partial t} \psi(x+y/2) + \frac{\partial \psi(x+y/2)}{\partial t} \psi^*(x-y/2) \right] dy. \quad (2.98)$$

Las derivadas parciales del lado derecho en esta relación se pueden expresar mediante el uso de la ecuación de Schrödinger

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2im} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + \frac{1}{i\hbar} V(x) \psi(x, t). \quad (2.99)$$

Ocupamos entonces la ecuación (2.99) para reescribir (2.98), obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} &= \frac{1}{h} \int e^{-ipy/\hbar} \left[ \left( \frac{\hbar}{2im} \frac{\partial^2 \psi^*(x-y/2)}{\partial x^2} - \frac{1}{i\hbar} V(x-y/2) \psi^*(x-y/2) \right) \psi(x+y/2) \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{\hbar}{2im} \frac{\partial^2 \psi(x+y/2)}{\partial x^2} + \frac{1}{i\hbar} V(x+y/2) \psi(x+y/2) \right) \psi^*(x-y/2) \right] dy \\ &= \frac{1}{h} \int e^{-ipy/\hbar} \left[ \left( \frac{\hbar}{2im} \frac{\partial^2 \psi^*(x-y/2)}{\partial x^2} \psi(x+y/2) - \frac{\hbar}{2im} \frac{\partial^2 \psi(x+y/2)}{\partial x^2} \psi^*(x-y/2) \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{1}{i\hbar} V(x-y/2) \psi^*(x-y/2) \psi(x+y/2) + \frac{1}{i\hbar} V(x+y/2) \psi(x+y/2) \psi^*(x-y/2) \right) \right] dy \\ &= \frac{1}{h} \int e^{-ipy/\hbar} \left( \frac{h}{4i\pi m} \left[ \frac{\partial^2 \psi^*(x-y/2)}{\partial x^2} \psi(x+y/2) - \frac{\partial^2 \psi(x+y/2)}{\partial x^2} \psi^*(x-y/2) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\pi}{i\hbar} [V(x+y/2) - V(x-y/2)] \psi^*(x-y/2) \psi(x+y/2) \right) dy \end{aligned} \quad (2.100)$$

donde se ocupó  $\hbar = h/2\pi$ , llegando a

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W_T}{\partial t} + \frac{\partial W_V}{\partial t}, \quad (2.101)$$

donde

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_T}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi im} \int e^{-ipy/\hbar} \left[ \frac{\partial^2 \psi^*(x-y/2)}{\partial x^2} \psi(x+y/2) - \psi^*(x-y/2) \frac{\partial^2 \psi(x+y/2)}{\partial x^2} \right] dy, \\ \frac{\partial W_V}{\partial t} &= \frac{2\pi}{i\hbar^2} \int e^{-ipy/\hbar} [V(x+y/2) - V(x-y/2)] \psi^*(x-y/2) \psi(x+y/2) dy.\end{aligned}\quad (2.102)$$

El subíndice  $T$  indica la parte de la energía cinética y el subíndice  $V$ , la parte de la energía potencial. Se simplificarán estas ecuaciones para que su comprensión sea mejor. Comenzamos con la primera ecuación de las dos anteriores.

$$\int e^{-ipy/\hbar} \frac{\partial^2 \psi^*(x-y/2)}{\partial x^2} \psi(x+y/2) dy = -2 \int e^{-ipy/\hbar} \frac{\partial^2 \psi^*(x-y/2)}{\partial y \partial x} \psi(x+y/2) dy, \quad (2.103)$$

integrando por partes se obtiene

$$-\frac{2ip}{\hbar} \int e^{-ipy/\hbar} \frac{\partial \psi^*(x-y/2)}{\partial x} \psi(x+y/2) dy + \int e^{-ipy/\hbar} \frac{\partial \psi^*(x-y/2)}{\partial x} \frac{\partial \psi(x+y/2)}{\partial x} dy. \quad (2.104)$$

Haciendo lo análogo con el segundo término de la primera ecuación de (2.101) y sustituyendo, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_T}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi im} \left( \int -\frac{2ip}{\hbar} e^{-ipy/\hbar} \psi(x+y/2) \frac{\partial \psi^*(x-y/2)}{\partial x} dy + \int e^{-ipy/\hbar} \frac{\partial \psi(x+y/2)}{\partial x} \frac{\partial \psi^*(x-y/2)}{\partial x} dy \right. \\ &\quad \left. - \int \frac{2ip}{\hbar} e^{-ipy/\hbar} \psi^*(x-y/2) \frac{\partial \psi(x+y/2)}{\partial x} dy - \int e^{-ipy/\hbar} \frac{\partial \psi^*(x-y/2)}{\partial x} \frac{\partial \psi(x+y/2)}{\partial x} dy \right) \\ &= \frac{1}{4\pi im} \int -\frac{2ip}{\hbar} e^{-ipy/\hbar} \left[ \psi(x+y/2) \frac{\partial \psi^*(x-y/2)}{\partial x} + \psi^*(x-y/2) \frac{\partial \psi(x+y/2)}{\partial x} \right] dy \\ &= \frac{1}{4\pi im} \int -\frac{4\pi ip}{\hbar} e^{-ipy/\hbar} \frac{\partial}{\partial x} (\psi(x+y/2) \psi^*(x-y/2)) dy \\ &= -\frac{p}{m} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\hbar} \int e^{-ipy/\hbar} \psi(x+y/2) \psi^*(x-y/2) dy,\end{aligned}\quad (2.105)$$

llegando a

$$\frac{\partial W_T}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial W(x,p)}{\partial x}. \quad (2.106)$$

Ahora nos ocupamos de la segunda ecuación de (2.101). En esta, asumimos que el potencial  $V(x)$  se puede expandir en una serie de potencias en  $x$

$$\begin{aligned}V(x+y/2) - V(x-y/2) &= \sum_n \frac{1}{n!} \frac{\partial^n V(x)}{\partial x^n} \left[ \left(-\frac{1}{2}y\right)^2 - \left(\frac{1}{2}y\right)^2 \right] \\ &= \sum_{s=0} \frac{1}{(2s+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2s} \frac{\partial^{2s+1} V(x)}{\partial x^{2s+1}} y^{2s+1}.\end{aligned}\quad (2.107)$$

Sustituyendo en la segunda ecuación de (2.101)

$$\frac{\partial W_V}{\partial t} = \frac{2\pi}{i\hbar^2} \int e^{-ipy/\hbar} \sum_{s=0} \frac{1}{(2s+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2s} \frac{\partial^{2s+1} V(x)}{\partial x^{2s+1}} y^{2s+1} \psi^*(x-y/2) \psi(x+y/2) dy \quad (2.108)$$

llegamos a

$$\frac{\partial W_V}{\partial t} = \sum_{s=0} (-\hbar^2)^s \frac{1}{(2s+1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{2s} \frac{\partial^{2s+1} V(x)}{\partial x^{2s+1}} \times \left(\frac{\partial}{\partial p}\right)^{2s+1} W(x, p). \quad (2.109)$$

Estas ecuaciones son las relaciones básicas para estudiar la evolución temporal de un sistema en general.



# Capítulo 3

## Producto estrella

El producto estrella denotado por  $\star$ , es el que genera la deformación del álgebra de las variables  $(x, p)$  sobre el espacio fase conmutativa de la mecánica clásica, y la lleva a un álgebra de las variables  $(x, p)$  no conmutativa, propia de la mecánica cuántica [17]. Una forma de representar el producto estrella es mediante una función exponencial, cuyo argumento se compone de una constante y derivadas parciales, hay otras representaciones que no se tratarán en este trabajo. La constante se asocia con  $\hbar$ , que es la constante de Planck y la que caracteriza la cuantización del sistema bajo estudio. En general  $\hbar$  solo es un parámetro asociado a la cuantización del sistema; no necesariamente es pequeño. Las derivadas parciales contenidas en el argumento de la exponencial, actúan de forma direccional; es decir, actúan solamente en la función de la izquierda o de la derecha, pero no sobre las dos.

### 3.1. Producto estrella general

El producto estrella se obtiene al realizar el mapeo de Wigner  $W$  [18], y posteriormente, el mapeo inverso. Para empezar, se considera una variedad simpléctica con una función compleja suave. Este mapeo busca ir de un espacio de funciones con variables clásicas  $F = \{f(\vec{x}, \vec{p})\}$ , a un espacio de funciones con operadores  $\hat{F} = \{f(\hat{x}, \hat{p})\}$ ; la forma de realizarlo es la siguiente: se define primero

$$W_f(\hat{x}, \hat{p}) := \int \tilde{f}(k, q) e^{i(k\hat{x} + q\hat{p})} dk dq. \quad (3.1)$$

La función  $\tilde{f}$  es la transformada de Fourier de  $f$ . Esta operación, se aplica a dos funciones  $f$  y  $g$  de las variables clásicas  $(\vec{x}, \vec{p})$ , luego se realiza el producto de los mapeos  $W_f(\hat{x}, \hat{p})$  y  $W_g(\hat{x}, \hat{p})$  y se aplica el mapeo inverso. La operación final resultante se define como

$$f \star g := W^{-1}(W(f)W(g)). \quad (3.2)$$

Esta operación produce un producto asociativo no conmutativo de dos funciones  $f$  y  $g$  en el espacio fase para las coordenadas espaciales y de momento; en el caso más simple, producto estrella de Moyal, los conmutadores son por definición

$$[x^\mu, p_\nu]_\star = i\hbar\delta_\nu^\mu \quad , \quad [x^\mu, x_\nu]_\star = 0 = [p_\mu, p_\nu]_\star,$$

donde

$$f \star g = f \exp \left[ \frac{i\hbar}{2} \left( \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} - \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \right) \right] g.$$

En esta expresión  $\overleftarrow{\partial}$  actúa sobre la función a la izquierda y  $\overrightarrow{\partial}$  sobre la función a la derecha de la exponencial.

De manera general tenemos

$$f \star g = f \exp[\overleftarrow{P}]g, \quad \overleftarrow{P} := \overleftarrow{\partial}_A \frac{i\hbar}{2} \omega_{AB} \overrightarrow{\partial}_B \quad (3.3)$$

donde  $\overleftarrow{P}$  es el corchete de Poisson y  $\partial_A$  es la conexión (plana) del espacio fase libre de torsión ( $\partial \otimes \omega = 0$ ). El producto estrella debe cumplir ciertas condiciones [19]:

1.

$$f \star g = fg + (i\hbar)C_1(f, g) + O(\hbar^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (i\hbar)^n C_n(f, g),$$

2.

$$\sum_{j+k=n} C_j(C_k(f, g), h) = \sum_{j+k=n} C_j(f, C_k(g, h)),$$

3.

$$C_0(f, g) = fg,$$

4.

$$C_1(f, g) - C_1(g, f) = \{f, g\}i\hbar.$$

La primera condición dice que lo podemos representar como una serie infinita de potencias en el parámetro  $\hbar$ , la segunda condición, garantiza la asociatividad, la tercera, en el límite  $\hbar \rightarrow 0$ , recupera el producto conmutativo usual. La cuarta tiene dos aspectos asociados: el matemático y el físico. El matemático es el nuevo producto que da el corchete de Poisson, mientras que el físico, la conexión entre la dinámica clásica y cuántica.

Un ejemplo ilustrativo de producto estrella es el producto estándar.

$$f \star_S g = f \exp \left[ i\hbar \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \right] g. \quad (3.4)$$

Esta forma se debe a que el mapeo de cuantización de Weyl  $W$ , en un espaciotiempo plano ( $\overrightarrow{x} \rightarrow (x, y, z, ct)$ ), corresponde a un ordenamiento simétrico en la cuantización, y al cambiar el ordenamiento, cambia el resultado [?]. El ordenamiento se realiza mediante una forma cuadrática

$$\lambda(\xi, \eta) = \frac{\hbar}{4} (\alpha\eta^2 + \beta\xi^2 + 2i\gamma\xi\eta)$$

Tomando distintos valores de las constantes  $(\alpha, \beta, \gamma)$ , se obtienen distintos ordenamientos [19].

### 3.2. Producto estrella normal

Un producto estrella generalmente utilizado es el producto estrella normal que está definido como

$$f \star_N g = f e^{\hbar \overleftarrow{\partial}_a \overrightarrow{\partial}_{\bar{a}}} g. \quad (3.5)$$

donde las variables  $a$  y  $\bar{a}$  son holomórficas. Como ejemplo de la aplicación de este producto estrella, se resolverá el oscilador armónico simple unidimensional. El hamiltoniano en variables canónicas  $(q, p)$  es en este caso

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2. \quad (3.6)$$

Tomando las variables holomórficas como

$$a := \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left( q + i \frac{p}{m\omega} \right), \quad \bar{a} := \sqrt{\frac{m\omega}{2}} \left( q - i \frac{p}{m\omega} \right), \quad (3.7)$$

y sustituyendo en el hamiltoniano obtenemos

$$H = \omega a \bar{a}. \quad (3.8)$$

Una vez que se cuenta con el hamiltoniano así reescrito, el objetivo es calcular la función de evolución temporal. Primero calculamos:

$$\bar{a} \star_N a = a \bar{a} \quad , \quad a \star_N \bar{a} = a \bar{a} + \hbar. \quad (3.9)$$

Con estos dos resultados calculamos el conmutador de  $a$  con  $\bar{a}$

$$[a, \bar{a}]_{\star_N} = \hbar. \quad (3.10)$$

La ecuación para obtener la evolución temporal es

$$i\hbar \frac{d}{dt} \exp(Ht) = H \star \exp(Ht), \quad (3.11)$$

la ecuación se obtiene de la siguiente forma [12]: desde la descripción de Schrödinger tenemos

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hat{H}|\psi\rangle$$

cuya solución cuando  $\hat{H}$  no depende del tiempo es

$$|\psi\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |\psi_0\rangle \quad , \quad |\psi_0\rangle \equiv |\psi(t=0)\rangle$$

y para el caso que nos concierne, la ecuación queda como

$$i\hbar \frac{d}{dt} \exp_N(Ht) = (H + \hbar\omega \bar{a} \partial_{\bar{a}}) \exp(Ht). \quad (3.12)$$

La solución de ésta ecuación es

$$\exp_N(Ht) = e^{-a\bar{a}/\hbar} \exp(e^{-i\omega t} a\bar{a}/\hbar). \quad (3.13)$$

Desarrollando la exponencial central del factor derecho, obtenemos la expansión de Fourier-Dirichlet

$$\exp_N(Ht) = e^{-a\bar{a}/\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\hbar^n n!} \bar{a}^n a^n e^{-in\omega t}. \quad (3.14)$$

Para esta expansión, en el caso general tenemos

$$\exp(Ht) = \sum_E \pi_E e^{-iEt/\hbar}, \quad (3.15)$$

donde  $E$  denota la energía y el estado correspondiente a esta energía es denotado por  $\pi_E$ , también llamados proyectores de estado. Comparando esta expresión con (3.14), se obtienen los siguientes estados

$$\pi_0^{(N)} = e^{-a\bar{a}/\hbar}, \quad (3.16)$$

$$\pi_n^{(N)} = \frac{1}{\hbar^n n!} \pi_0 \bar{a}^n a^n = \frac{1}{\hbar^n n!} \bar{a}^n \star_N \pi_0^{(N)} \star_N a^n, \quad (3.17)$$

$$E_n = n\hbar\omega. \quad (3.18)$$

Con esto obtenemos la energía de cada estado del sistema denotado por  $n$ . Hay que notar que no se encuentra el valor de  $1/2$  sumado a la  $n$  en este resultado, como típicamente se obtiene en mecánica cuántica. Esto es por que en este caso la energía del vacío no se toma en cuenta debido a la forma del producto  $\star_N$ .

### 3.3. Producto estrella de Moyal

El producto estrella de Moyal en variables holomorfas [19] es:

$$(f \star_M g) = \exp \left[ \frac{\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_a \overrightarrow{\partial}_{\bar{a}} - \overleftarrow{\partial}_{\bar{a}} \overrightarrow{\partial}_a) \right] g. \quad (3.19)$$

Aplicando este producto estrella al oscilador armónico simple unidimensional, en las variables holomórficas, tenemos primero que:

$$a \star_M \bar{a} = a\bar{a} + \frac{\hbar}{2}, \quad \bar{a} \star_M a = a\bar{a} - \frac{\hbar}{2}, \quad (3.20)$$

y con estos resultados, se calcula el conmutador

$$[a, \bar{a}]_{\star_M} = \hbar. \quad (3.21)$$

Aquí observamos que no importa el producto estrella que se ocupe para realizar el cálculo del conmutador entre las variables holomorfas; en la ecuación (3.10), tenemos el mismo resultado y se ocupa el producto estrella normal. Esto es consecuencia de la cuarta condición que pedimos al construir el producto estrella. La ecuación dependiente del tiempo se obtiene mediante el siguiente cálculo, primero encontramos:

$$\begin{aligned} H \star_M e^{Ht} &= \omega a \bar{a} \exp \left[ \frac{\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_a \overrightarrow{\partial}_{\bar{a}} - \overleftarrow{\partial}_{\bar{a}} \overrightarrow{\partial}_a) \right] e^{Ht} \\ &= \omega a \bar{a} (1 + \hbar/2 (\overleftarrow{\partial}_a \overrightarrow{\partial}_{\bar{a}} - \overleftarrow{\partial}_{\bar{a}} \overrightarrow{\partial}_a) + \hbar^2/8 (\overleftarrow{\partial}_a \overrightarrow{\partial}_{\bar{a}} - \overleftarrow{\partial}_{\bar{a}} \overrightarrow{\partial}_a)^2) \exp(Ht) \\ &= (\omega a \bar{a} + \hbar/2 \omega a \overrightarrow{\partial}_{\bar{a}} - \hbar/2 \omega a \overleftarrow{\partial}_a - \hbar^2/8 \omega \overrightarrow{\partial}_{\bar{a}} \overrightarrow{\partial}_a - \hbar^2/8 \omega \overleftarrow{\partial}_a \overleftarrow{\partial}_{\bar{a}}) \exp_M(Ht) \end{aligned} \quad (3.22)$$



En este caso, los términos cuadráticos del tercer término del desarrollo de la exponencial asociados a una misma variable, son iguales a cero, ya que la función  $H$  no es cuadrática en ninguna de sus variables. Para proseguir con el cálculo, ocupamos la regla de la cadena, ( $\vec{\partial}_{\bar{a}} = \frac{\partial}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial \bar{a}}$  y  $\vec{\partial}_a = \frac{\partial}{\partial H} \frac{\partial H}{\partial a}$ ) obteniendo:

$$H \star_M e^{Ht} = (\omega a \bar{a} + \hbar/2\omega^2 a \bar{a} \partial_H - \hbar/2\omega^2 a \bar{a} \partial_H - \hbar^2/8\omega^2 \partial_H - \hbar^2/8\omega^2 \partial_H - \hbar^2/8\omega^2 \omega a \bar{a} \partial_H^2 - \hbar^2/8\omega^2 \omega a \bar{a} \partial_H^2) \exp_M(Ht) \quad (3.23)$$

Haciendo las identificaciones pertinentes e igualando a la derivada con respecto al tiempo, obtenemos la ecuación dependiente del tiempo (3.11) para este caso:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \exp_M(Ht) = \left( H - \frac{(\hbar\omega)^2}{4} \partial_H - \frac{(\hbar\omega)^2}{4} H \partial_H^2 \right) \exp_M(Ht), \quad (3.24)$$

cuya solución es

$$\exp_M(Ht) = \frac{1}{\cos \omega t/2} \exp \left[ \left( \frac{2H}{i\hbar\omega} \right) \tan \frac{\omega t}{2} \right]. \quad (3.25)$$

Ahora bien, mediante la función generadora de los polinomios de Laguerre:

$$\frac{1}{1 + e^{-i\omega t}} \exp \left[ \frac{ze^{-i\omega t}}{1 + e^{-i\omega t}} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-i\omega t})^n (-1)^n L_n(z), \quad (3.26)$$

podemos obtener la expansión de Fourier-Dirichlet.

Tenemos que manipular la ecuación (3.26) para llevarla a una forma que podamos identificar con la función generadora de los polinomios de Laguerre. Lo primero es manipular el argumento de la exponencial del modo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{2H}{i\hbar\omega} \tan \frac{\omega t}{2} &= \frac{2H \operatorname{sen}(\omega t/2)}{i\hbar\omega \operatorname{cos}(\omega t/2)} = \frac{2H}{i^2\hbar\omega} \frac{e^{ix} - e^{-ix} + e^{-ix} - e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} \\ &= -\frac{2H}{\hbar\omega} \left[ 1 - \frac{2e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} \right] = -\frac{2H}{\hbar\omega} + \frac{4H}{\hbar\omega} \frac{e^{-ix}}{e^{ix} + e^{-ix}} \\ &= -\frac{2H}{\hbar\omega} + \frac{4H}{\hbar\omega} \frac{e^{-2ix}}{1 + e^{-2ix}}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

donde  $x = \omega t/2$ . Ahora procedemos a manipular el coeficiente de la exponencial

$$\frac{1}{\operatorname{cos}(\omega t/2)} = \frac{2}{2\operatorname{cos}(\omega t/2)} = \frac{2}{e^{ix} + e^{-ix}} = \frac{2e^{-ix}}{1 + e^{-2ix}}. \quad (3.28)$$

Con estas expresiones y la identificación:

$$z := \frac{4H}{\hbar\omega} \quad (3.29)$$

llegamos a que los proyectores son

$$\pi_n^{(M)} = 2(-1)^n e^{-2H/\hbar\omega} L_n \left( \frac{4H}{\hbar\omega} \right), \quad (3.30)$$

y la energía correspondiente es

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.31)$$

Así obtenemos la energía de cada estado del sistema denotado por  $n$ ; en este caso, recuperamos la expresión más conocida de los valores propios de la energía para el oscilador armónico simple.

El producto estrella ( $\star$ ) no es la única manera de hacer deformación. Otra forma de realizar la deformación es la llamada  $q$ -deformación [20, 21, 22]; en ésta se introduce un parámetro  $q$ , que es con el que se modifican las relaciones de conmutación y con ello se estudian sus consecuencias físicas. En el caso del oscilador armónico simple se ha aplicado este formalismo [20]. No siempre se resuelve el producto estrella para obtener los resultados, en ocasiones se puede utilizar  $f(p - \frac{i\hbar}{2}\partial_x)g$  para obtener la información que se requiere.

La relación entre  $f \star g$  y  $f(p - \frac{i\hbar}{2}\partial_x)g$  se da mediante la transformada de Weyl. Al integrando en la definición de la transformada de Weyl se le pueden realizar algunas modificaciones, para llevar la expresión a una forma que involucre una convolución. De esta manera se observa que se puede ocupar una forma integral o una diferencial para realizar el cálculo [19], con lo que se puede ocupar la forma que se ajuste mejor al problema físico que se encuentre bajo estudio.

### 3.4. Relación de equivalencia

Se puede tener una equivalencia cohomológica, desde el punto de vista matemático entre distintos productos estrella, la llamaremos  $c$ -equivalencia. Esto se obtiene mediante un operador de transición invertible  $T$  [19]. Este operador puede representarse de la siguiente forma:

$$T = 1 + \hbar T_1 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \hbar^n T_n, \quad (3.32)$$

donde  $T_n$  son operadores diferenciales que satisfacen

$$f \star' g = T^{-1}((Tf) \star (Tg)). \quad (3.33)$$

La forma del operador  $T$  depende de la  $c$ -equivalencia que se busque. En el caso de la equivalencia entre el producto estrella estándar  $f \star_S g = \exp(i\hbar \overrightarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p)g$  y el producto estrella Moyal, el operador  $T$  tiene la siguiente expresión

$$T = \exp\left(-\frac{i\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_q \overrightarrow{\partial}_p\right) \quad (3.34)$$

de modo que

$$T(f \star_S g) = (Tf) \star_M (Tg). \quad (3.35)$$

En el caso de que la  $c$ -equivalencia sea entre el producto estrella de Moyal y el normal en variables holomorfas, el operador  $T$ , tiene la siguiente expresión:

$$T = \exp\left(-\frac{\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_a \overrightarrow{\partial}_{\bar{a}}\right). \quad (3.36)$$

Con ayuda del operador  $T$  es posible obtener los proyectores del producto Moyal a partir de los operadores del producto normal; calculamos primero el proyector del estado basal, tenemos así que

$$T\pi_0^{(N)} = \exp\left(-\frac{\hbar}{2} \overrightarrow{\partial}_a \overrightarrow{\partial}_{\bar{a}}\right) \left( \exp\left(-\frac{a\bar{a}}{\hbar}\right) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{\hbar}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \overrightarrow{\partial}_a^n \overrightarrow{\partial}_{\bar{a}}^n \left( \exp\left(-\frac{a\bar{a}}{\hbar}\right) \right). \quad (3.37)$$

Ahora bien

$$\partial_a^n \left( \exp \left( -\frac{a\bar{a}}{\hbar} \right) \right) = \partial_a^{n-1} \partial_a \left( \exp \left( -\frac{a\bar{a}}{\hbar} \right) \right) = \partial_a^{n-1} \left( \exp \left( -\frac{a\bar{a}}{\hbar} \right) \left( -\frac{a}{\hbar} \right) \right) = \exp \left( -\frac{a\bar{a}}{\hbar} \right) \left( -\frac{a}{\hbar} \right)^n, \quad (3.38)$$

y si sustituimos en (3.37) esta expresión, obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{\hbar}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \partial_a^n \left[ \left( -\frac{a}{\hbar} \right)^n e^{-a\bar{a}/\hbar} \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \partial_a^n [a^n e^{-a\bar{a}/\hbar}]. \quad (3.39)$$

Aplicando la regla de Leibniz, tenemos

$$\begin{aligned} \partial_a^n [a^n e^{-a\bar{a}/\hbar}] &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \partial_a^k (e^{-a\bar{a}/\hbar}) \partial_a^{n-k} (a^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{-a\bar{a}/\hbar} \left( -\frac{\bar{a}}{\hbar} \right)^k n(n-1) \cdots (k+1) a^k \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{n!}{k!} e^{-a\bar{a}/\hbar} \left( -\frac{a\bar{a}}{\hbar} \right)^k. \end{aligned} \quad (3.40)$$

De esta forma tenemos que

$$\begin{aligned} T\pi_0^{(N)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!n!}{(n-k)!k!k!} e^{-a\bar{a}/\hbar} \left( -\frac{a\bar{a}}{\hbar} \right)^k \\ &= e^{-a\bar{a}/\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \right)^n \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!k!} \left( -\frac{a\bar{a}}{\hbar} \right)^k \\ &= e^{-a\bar{a}/\hbar} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(-a\bar{a}/\hbar)}{2^n} = 2e^{-2a\bar{a}/\hbar}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ahora resolvemos para los siguientes niveles

$$\begin{aligned}
T\pi_n^{(N)} &= \exp\left(-\frac{\hbar}{2}\overrightarrow{\partial_a}\overrightarrow{\partial_{\bar{a}}}\right)\frac{1}{\hbar^n n!}\bar{a}^n a^n e^{-a\bar{a}/\hbar} \\
&= \frac{1}{\hbar^n n!}\bar{a}^n a^n \exp\left(-\frac{\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial_a}\overleftarrow{\partial_{\bar{a}}} + \overleftarrow{\partial_a}\overrightarrow{\partial_{\bar{a}}} + \overleftarrow{\partial_{\bar{a}}}\overrightarrow{\partial_a} + \overrightarrow{\partial_{\bar{a}}}\overrightarrow{\partial_a})\right)e^{-a\bar{a}/\hbar} \\
&= \frac{2}{\hbar^n n!}\bar{a}^n a^n \exp\left(-\frac{\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial_a}\overleftarrow{\partial_{\bar{a}}} + \overleftarrow{\partial_a}\overrightarrow{\partial_{\bar{a}}} + \overleftarrow{\partial_{\bar{a}}}\overrightarrow{\partial_a})\right)e^{-2a\bar{a}/\hbar} \\
&= \frac{2}{\hbar^n n!}\bar{a}^n a^n \exp\left(-\frac{\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial_a}\overleftarrow{\partial_{\bar{a}}} + \overleftarrow{\partial_a}\overrightarrow{\partial_{\bar{a}}})\right)\exp\left(-\frac{\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial_{\bar{a}}}\overrightarrow{\partial_a})\right)e^{-2a\bar{a}/\hbar} \\
&= \frac{2}{\hbar^n n!}\bar{a}^n a^n \exp\left(-\frac{\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial_a}\overleftarrow{\partial_{\bar{a}}} + \overleftarrow{\partial_a}\overrightarrow{\partial_{\bar{a}}})\right)\exp(\overleftarrow{\partial_{\bar{a}}}\bar{a})e^{-2a\bar{a}/\hbar} \\
&= \frac{2}{\hbar^n n!}\bar{a}^n a^n \exp(\overleftarrow{\partial_{\bar{a}}}\bar{a})\exp\left(-\frac{\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial_a}\overleftarrow{\partial_{\bar{a}}} + \overleftarrow{\partial_a}\overrightarrow{\partial_{\bar{a}}})\right)e^{-2a\bar{a}/\hbar} \\
&= \frac{2}{\hbar^n n!}(\bar{a} + \bar{a})^n a^n \exp\left(-\frac{\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial_a}\overleftarrow{\partial_{\bar{a}}} + \overleftarrow{\partial_a}\overrightarrow{\partial_{\bar{a}}})\right)e^{-2a\bar{a}/\hbar} \\
&= \frac{2}{\hbar^n n!}2^n \bar{a}^n a^n \exp\left(-\frac{\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial_a}\overleftarrow{\partial_{\bar{a}}})\right)\exp(\overleftarrow{\partial_a}a)e^{-2a\bar{a}/\hbar} \\
&= \frac{2}{\hbar^n n!}2^n \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(-\frac{\hbar}{2}\right)^k (\partial_a^k a^n)(\partial_{\bar{a}}^k \bar{a}^n)\right)\exp(\overleftarrow{\partial_a}a)e^{-2a\bar{a}/\hbar} \\
&= 2\left(\sum_{k=0}^n\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{2}{\hbar}\right)^{n-k}\frac{n!}{(n-k)!(n-k)!}a^{n-k}\bar{a}^{n-k}\right)\exp(\overleftarrow{\partial_a}a)e^{-2a\bar{a}/\hbar} \\
&= (-1)^n 2L_n(2a\bar{a}/\hbar)\exp(\overleftarrow{\partial_a}a)e^{-2a\bar{a}/\hbar} \\
&= (-1)^n 2L_n(4a\bar{a}/\hbar)e^{-2a\bar{a}/\hbar}, \tag{3.42}
\end{aligned}$$

Si tomamos  $n = 0$ , obtenemos el nivel energético del estado base encontrado anteriormente, con lo que vemos que el procedimiento es correcto.

Los resultados del oscilador armónico simple, sirven para verificar los resultados del oscilador armónico amortiguado [23]. El caso del oscilador armónico amortiguado incluye un término que es el de amortiguamiento, donde el parámetro  $\gamma$  nos indica el grado de amortiguación. Al hacer tender el parámetro  $\gamma$  a cero, se recuperan los resultados aquí mostrados para el oscilador armónico simple, con lo que se verifica que los resultados del oscilador armónico amortiguado son correctos.

En éste caso, es necesario modificar el producto estrella para considerar el término de amortiguamiento [23], obteniendo otro producto estrella. Esto nos indica que el producto estrella se puede modificar de acuerdo al sistema físico en cuestión y a sus características particulares.

### 3.5. Sistemas fermiónicos

El sistema fermiónico más simple no trivial y no relativista es el oscilador armónico [24], involucra dos coordenadas de Grassmann  $\psi^1$  y  $\psi^2$  (éstas coordenadas no conmutan). La función lagrangiana

está dada por

$$L = \frac{i}{2}(\psi^1 \dot{\psi}^1 + \psi^2 \dot{\psi}^2) + i\omega\psi^1\psi^2, \quad (3.43)$$

donde  $\dot{\psi}^1 = \partial\psi/\partial t$ , y  $\omega$  es la frecuencia del oscilador. El momento canónico asociado a  $\psi^\alpha$  es

$$\pi_\alpha = -\frac{i}{2}\delta_{\alpha\beta}\psi^\beta, \quad (3.44)$$

y por tanto existe la constricción  $\chi_\alpha = \pi_\alpha + \frac{i}{2}\delta_{\alpha\beta}\psi^\beta$ . Usando la constricción, la función hamiltoniana es

$$\begin{aligned} H = \dot{\psi}^\alpha\pi_\alpha - L &= -\frac{i}{2}\dot{\psi}^\alpha\delta_{\alpha\beta}\psi^\beta - \frac{i}{2}(\psi^1\dot{\psi}^1 + \psi^2\dot{\psi}^2) + i\omega\psi^1\psi^2 \\ &= -i\omega\psi^1\psi^2. \end{aligned} \quad (3.45)$$

En este caso es necesario recurrir al super corchete de Poisson en coordenadas canónicas dado por

$$\{F, G\} = \left( \frac{\partial F}{\partial q^k} \frac{\partial G}{\partial p_k} - \frac{\partial F}{\partial p_k} \frac{\partial G}{\partial q^k} \right) + (-1)^{\epsilon(F)} \left( \frac{\partial^L F}{\partial \psi^\alpha} \frac{\partial^L G}{\partial \pi_\alpha} + \frac{\partial^L F}{\partial \pi_\alpha} \frac{\partial^L G}{\partial \psi^\alpha} \right), \quad (3.46)$$

donde la  $L$  indica que se derivará por la izquierda.

Para obtener el super corchete de Poisson para la constricción tenemos

$$\begin{aligned} \{\chi_\alpha, \chi_\beta\} &= (-1)^{\epsilon(\chi_\alpha)} \left( \frac{\partial^L \chi_\alpha}{\partial \psi^\alpha} \frac{\partial^L \chi_\beta}{\partial \pi_\alpha} + \frac{\partial^L \chi_\alpha}{\partial \pi_\alpha} \frac{\partial^L \chi_\beta}{\partial \psi^\alpha} \right) \\ &= (-1)^{\epsilon(1)} \left( \frac{\partial^L}{\partial \psi^\alpha} \left( \pi_\alpha + \frac{i}{2}\delta_{\alpha\beta}\psi^\beta \right) \frac{\partial^L}{\partial \pi_\alpha} \left( \pi_\beta + \frac{i}{2}\delta_{\alpha\beta}\psi^\alpha \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^L}{\partial \pi_\alpha} \left( \pi_\alpha + \frac{i}{2}\delta_{\alpha\beta}\psi^\beta \right) \frac{\partial^L}{\partial \psi^\alpha} \left( \pi_\beta + \frac{i}{2}\delta_{\alpha\beta}\psi^\alpha \right) \right) \\ &= -\frac{i}{2}\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial \psi^\beta}{\partial \psi^\alpha} \frac{\partial \pi_\beta}{\partial \pi_\alpha} - \frac{\partial \pi_\alpha}{\partial \pi_\alpha} \frac{i}{2}\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial \psi^\alpha} = -\frac{i}{2}(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}) \\ &= -\frac{i}{2}(\delta_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta}) = -i\delta_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Con esto vemos que las constricciones son de segunda clase. Para el producto estrella de Moyal ( $\star_M$ ) de funciones con variables de Grassmann tenemos

$$F \star_M G = \text{Exp} \left( \frac{\hbar}{2} \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial} \right) G. \quad (3.48)$$

En consecuencia para el anticonmutador estrella se tiene

$$\begin{aligned}
\{\psi^\alpha, \psi^\beta\}_{\star_M} &= \psi^\alpha \star_M \psi^\beta + \psi^\beta \star_M \psi^\alpha \\
&= \psi^\alpha \exp\left(\frac{\hbar}{2} \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial}\right) \psi^\beta + \psi^\beta \exp\left(\frac{\hbar}{2} \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial}\right) \psi^\alpha \\
&= \psi^\alpha \left(1 + \frac{\hbar}{2} \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial}\right) \psi^\beta + \psi^\beta \left(1 + \frac{\hbar}{2} \overleftarrow{\partial} \overrightarrow{\partial}\right) \psi^\alpha \\
&= \psi^\alpha \psi^\beta + \frac{\hbar}{2} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial \psi^\alpha} \frac{\partial \psi^\beta}{\partial \psi^\alpha} + \psi^\beta \psi^\alpha + \frac{\hbar}{2} \frac{\partial \psi^\beta}{\partial \psi^\alpha} \frac{\partial \psi^\alpha}{\partial \psi^\alpha} \\
&= \frac{\hbar}{2} \delta^{\alpha\beta} + \frac{\hbar}{2} \delta^{\alpha\beta} = \hbar \delta^{\alpha\beta}.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

Con el producto estrella fermiónico (3.48), podemos ahora calcular explícitamente la exponencial estrella y los proyectores de la función hamiltoniana del sistema físico bajo consideración (3.45). Tenemos así que

$$\begin{aligned}
\exp_M(Ht) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{-it}{\hbar}\right)^n (H \star_M)^n = \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) - \frac{2}{\hbar} \psi^1 \psi^2 \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) \\
&= \pi_{1/2}^{(M)} e^{-i\frac{\omega t}{2}} + \pi_{-1/2}^{(M)} e^{i\frac{\omega t}{2}},
\end{aligned} \tag{3.50}$$

representa la solución a la ecuación de evolución temporal del sistema.

Con

$$\pi_{1/2}^{(M)} = \frac{1}{2} - \frac{i}{\hbar} \psi^1 \psi^2, \quad \pi_{-1/2}^{(M)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{\hbar} \psi^1 \psi^2. \tag{3.51}$$

Las ecuaciones de  $\star$ -valores propios son calculadas directamente

$$H \star_M \pi_{1/2}^{(M)} = \frac{\hbar\omega}{2} \pi_{1/2}^{(M)}, \quad H \star_M \pi_{-1/2}^{(M)} = -\frac{\hbar\omega}{2} \pi_{-1/2}^{(M)}, \tag{3.52}$$

y por lo tanto los valores propios de la energía son

$$E_{\pm \frac{1}{2}} = \pm \frac{\hbar\omega}{2}. \tag{3.53}$$

En el caso fermiónico las variables holomorfas, quedan definidas como

$$f := \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^2 + i\psi^1), \quad \bar{f} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^2 - i\psi^1). \tag{3.54}$$

El producto estrella de Moyal en estas variables es

$$F \star_M G = F e^{\frac{\hbar}{2} (\overleftarrow{\partial}_f \overrightarrow{\partial}_{\bar{f}} + \overleftarrow{\partial}_{\bar{f}} \overrightarrow{\partial}_f)} G. \tag{3.55}$$

Obtenemos así las relaciones

$$f \star_M \bar{f} = f \bar{f} + \frac{\hbar}{2}, \quad \bar{f} \star_M f = \bar{f} f + \frac{\hbar}{2}, \tag{3.56}$$

y

$$\{\bar{f}, \bar{f}\}_{\star_M} = \{f, f\}_{\star_M} = 0 \quad , \quad \{\bar{f}, f\}_{\star_M} = \hbar. \quad (3.57)$$

La función hamiltoniana en variables holomórficas es simplemente

$$H = \omega \bar{f} f. \quad (3.58)$$

La solución a la ecuación de evolución temporal en estas variables es

$$\exp_M(Ht) = \cos\left(\frac{\omega t}{2}\right) - \frac{2i}{\hbar} \bar{f} f \sin\left(\frac{\omega t}{2}\right) = \pi_{-1/2}^{(M)} e^{i\omega t/2} + \pi_{1/2}^{(M)} e^{-i\omega t/2}, \quad (3.59)$$

con

$$\pi_{-1/2}^{(M)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\hbar} \bar{f} f \quad , \quad \pi_{1/2}^{(M)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\hbar} \bar{f} f. \quad (3.60)$$

Además se puede mostrar que  $f$  y  $\bar{f}$  actúan como funciones de creación y aniquilación

$$f \star_M \pi_{-1/2}^{(M)} = \bar{f} \star_M \pi_{1/2}^{(M)} = 0, \quad (3.61)$$

y

$$\bar{f} \star_M \pi_{-1/2}^{(M)} \star_M f = \hbar \pi_{1/2}^{(M)} \quad , \quad f \star_M \pi_{1/2}^{(M)} \star_M \bar{f} = \hbar \pi_{-1/2}^{(M)}. \quad (3.62)$$

Notemos que

$$\tau = \frac{1}{\hbar} (\bar{f} f - f \bar{f}) \quad \acute{o} \quad \tau = \frac{2}{\hbar} \bar{f} f \quad (3.63)$$

es tal que:  $\tau \star_M \tau = 1$  (involución). Éste tiene los dos valores propios  $\pm 1$  y los proyectores sobre los espacios propios par e impar son

$$\pi_{\pm 1/2}^{(M)} = \frac{1}{2} (1 \pm \tau), \quad (3.64)$$

en correspondencia con (3.60). En el enfoque convencional de operadores de la mecánica cuántica supersimétrica, las dos cantidades son representadas como matrices  $2 \times 2$ , y el producto estrella corresponde a una multiplicación tradicional de matrices.

Así como en el caso bosónico, también se tiene el producto estrella *normal* para las variables fermiónicas

$$F \star_N G = F e^{\hbar \overleftarrow{\partial}_f \overrightarrow{\partial}_{\bar{f}}} G. \quad (3.65)$$

Utilizando este producto tenemos

$$f \star_N \bar{f} = f \bar{f} + \hbar \quad , \quad \bar{f} \star_N f = f \bar{f}, \quad (3.66)$$

y

$$\{\bar{f}, \bar{f}\}_{\star_N} = \{f, f\}_{\star_N} = 0 \quad , \quad \{\bar{f}, f\}_{\star_N} = \hbar. \quad (3.67)$$

La solución a la ecuación de evolución temporal está dada por

$$\exp_N(Ht) = \pi_0^{(N)} + \pi_1^{(N)} e^{-i\omega t}, \quad (3.68)$$

con

$$\pi_0^{(N)} = 1 - \frac{1}{\hbar} \bar{f} f \quad , \quad \pi_1^{(N)} = \frac{1}{\hbar} \bar{f} f. \quad (3.69)$$

Los proyectores cumplen con las ecuaciones de valores propios estrella

$$H \star_N \pi_0^{(N)} = 0 \quad , \quad H \star_N \pi_1^{(N)} = \hbar \omega \pi_1^{(N)} , \quad (3.70)$$

y también satisfacen las relaciones

$$f \star_N \pi_0^{(N)} = \bar{f} \star_N \pi_1^{(N)} = 0, \quad (3.71)$$

$$\bar{f} \star_N \pi_0^{(N)} \star_N f = \hbar \pi_1^{(N)} \quad , \quad f \star_N \pi_1^{(N)} \star_N \bar{f} = \hbar \pi_0^{(N)}. \quad (3.72)$$



## Capítulo 4

# Producto estrella de Fedosov

El formalismo de cuantización por deformación requiere un álgebra no conmutativa, ya que ésta es la característica principal de la mecánica cuántica. Para esto se requiere en el caso más general deformar el álgebra conmutativa de las funciones suaves sobre una variedad  $M$ , y considerar una variedad simpléctica  $(M, \omega_0)$ , en la que se aplique el corchete de Poisson [10].

### 4.1. Construcción del producto

Como se mencionó anteriormente [25], para que una variedad  $M$  se considere una variedad de Poisson, es necesario que dadas dos funciones cualesquiera  $u, v \in C^\infty(M)$ , el corchete de Poisson sea definido por

$$\{u, v\} = t^{\alpha\beta} \frac{\partial u}{\partial x^\alpha} \frac{\partial v}{\partial x^\beta}, \quad (4.1)$$

donde  $t^{\alpha\beta}$  es una matriz de rango  $2n$ ; los índices  $\alpha, \beta = 1, 2, \dots, \dim M$ .

El corchete es una operación bilineal simétrica suave, y satisface la identidad de Jacobi

$$\{u, \{v, w\}\} + \{v, \{w, u\}\} + \{w, \{u, v\}\} = 0. \quad (4.2)$$

También satisface las siguientes propiedades [29]

$$\begin{aligned} \{u, v\} &= -\{v, u\}, \\ \{u + v, w\} &= \{u, w\} + \{v, w\}, \\ \{fu, gv\} &= f \cdot (ug)v + g \cdot (vf)u + f \cdot g\{u, v\}. \end{aligned}$$

Un caso particular importante en la construcción del producto estrella es cuando se tiene una variedad simpléctica, un caso particular de una variedad de Poisson. Éste es un espacio donde existe definido un campo tensorial cuyas componentes  $\omega_{\mu\nu}$  satisfacen las ecuaciones siguientes [26]

$$\begin{aligned} \omega_{\mu\nu} &= -\omega_{\nu\mu}, \\ \det(\omega_{\mu\nu}) &\neq 0, \\ \frac{\partial \omega_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial \omega_{\rho\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \omega_{\nu\rho}}{\partial x^\mu} &= 0, \end{aligned}$$

con  $\mu, \nu = 1, 2, \dots, \dim M$ .

Otras condiciones que debe cumplir son [27]

1. Ser un difeomorfismo covariante.
2. Se asume no dinámico (e.g. Hamiltoniano o Lagrangiano), simétrico, o incluso con métrica.
3. El límite  $\hbar \rightarrow 0$ , nos devuelve la mecánica clásica.
4. Es equivalente al formalismo de operadores por medio del mapeo de cuantización  $\sigma^{-1}$  de Weyl.

En este caso la matriz  $t^{ij}$  tiene un rango máximo  $2n$ , igual a la dimensión de la variedad. La matriz inversa  $\omega_{ij}$  define una 2-forma exterior  $\omega = \frac{1}{2}\omega_{ij}dx^i \wedge dx^j$ , siendo cerrada en virtud de la identidad de Jacobi. La otra forma de obtener una 2-forma cerrada es mediante la condición  $\omega^{AB}\omega_{BC} = \delta_C^A$ , [27] donde  $\omega^{AB}$  es la matriz inversa.

#### 4.1.1. El Algoritmo

En esta sección revisamos los pasos necesarios para la construcción del producto estrella de Fedosov [27, 28].

1. Comenzamos con una conexión en el espacio fase  $D$ :

$$Df = df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu + \frac{\partial f}{\partial p_\mu} dp_\mu, \quad (4.3)$$

$$D \otimes \Theta^A = \Gamma_B^A \otimes \Theta^B = \Gamma_{BC}^A \Theta^C \otimes \Theta^B, \quad (4.4)$$

donde  $\Theta^A$  es una base de las 1-formas en el haz cotangente de nuestro espacio fase. El símbolo  $\Gamma_{BC}^A$  es definido como el coeficiente de rotación. La conexión preserva la 2-forma simpléctica  $\omega = \omega_{AB}\Theta^A \wedge \Theta^B$ , esto es por  $D \otimes \omega = 0$ . En las coordenadas  $(x^\mu, p_\mu)$  tenemos que  $\omega = dp_\mu \wedge dx^\mu$  y el operador corchete de Poisson es  $\omega^{AB} \frac{\partial}{\partial q^A} \wedge \frac{\partial}{\partial q^B}$ .

2. A cada punto  $q = (x, p)$  en el espacio fase le asociamos un álgebra matricial llamada álgebra de Heisenberg-Weyl. La unión de éstas es llamada el lazo de Weyl-Heisenberg sobre el espacio fase. Definimos una base de elementos  $\hat{y}^A$  de una matriz dimensionalmente infinita.  $\hat{y}^A$  es definido por las siguientes propiedades:

$$[\hat{y}^A, \hat{y}^B] = \hat{y}^A \hat{y}^B - \hat{y}^B \hat{y}^A = i\hbar \omega^{AB} \hat{1}, \quad (4.5)$$

$$D\hat{y}^A = \Gamma_{BC}^A \Theta^C \hat{y}^B, \quad (4.6)$$

donde  $\hat{1}$  es la matriz identidad, y se asume que la 1-forma  $\Theta^A$  es tratada como un escalar con respecto a los índices  $\hat{y}'s$  de la matriz.

3. Definimos un operador de la matriz llamado  $\hat{D}$ , definido por un conmutador graduado, con la propiedad  $[\hat{Q}_A \Theta^A, \omega] = [\hat{Q}_A, \omega] \Theta^A = (\hat{Q}_A \omega - \omega \hat{Q}_A) \Theta^A$ , donde  $\omega$  es una  $l$ -forma arbitraria, con coeficientes  $\omega_{A_1 \dots A_l}$ , las cuales son funciones de valores complejos en las variables  $x, p$  y  $\hat{y}$  y  $\hat{Q}_A \in E$  y  $E$  es un haz vectorial. Con esto llegamos a la siguiente expresión

$$\hat{D} := [\hat{Q}, \cdot] / i\hbar = [\hat{Q}_A \Theta^A, \cdot] / i\hbar, \quad (4.7)$$

donde

$$\hat{Q}_A := \sum_l Q_{AA_1 \dots A_l} \hat{y}^{A_1} \dots \hat{y}^{A_l}, \quad (4.8)$$

y donde  $Q_{AA_1 \dots A_l}$  son funciones de valores complejos de  $x$  y  $p$  que necesitan ser determinados. Los coeficientes  $Q_{AA_1 \dots A_l}$  son parcialmente determinados por la condición

$$(D - \hat{D})^2 \hat{y}^A = 0, \quad (4.9)$$

esta condición se pone para garantizar que la solución sea uno-a-uno. Podemos fijar  $\hat{D}$  en la forma que queramos, sólo se tiene que cumplir la condición anterior. La manera en la que se debe interpretar a esta condición, es como una condición de integrabilidad, donde se construyen los observables del álgebra.

4. Usamos ahora  $\hat{D}$  para definir el álgebra de los observables: este es el grupo de todas las funciones  $\hat{f}$  de la forma:

$$\hat{f}(x, p, \hat{y}) = \sum_{j,l} f_{j,l,A_1 \dots A_l} \hbar^j \hat{y}^{A_1} \dots \hat{y}^{A_l}, \quad (4.10)$$

donde  $f_{j,l,A_1 \dots A_l}$  son funciones de valores complejos de  $x$  y  $p$  para cada conjunto de índices  $j, l, A_1, \dots, A_l$ , que necesitan ser determinados. Sin embargo con respecto a los índices  $(A_1 \dots A_l)$  se asume que los coeficientes son simétricos. Para toda función  $f(x, p)$  los coeficientes  $f_{j,l,A_1 \dots A_l}$  de la anterior serie son parcialmente determinados por las condiciones:

$$(D - \hat{D})\hat{f} = 0, \quad (4.11)$$

$$(\sigma(\hat{f}))_{0,0} = f_{0,0} = f(x, p), \quad (4.12)$$

donde  $\sigma$  es definido como:

$$\sigma(\hat{f}) := \sum_{\mu} f_{\mu,0} \hbar^{\mu}. \quad (4.13)$$

Podemos hacer cualquier elección para fijar los grados de libertad adicionales.

5. El producto estrella de Fedosov  $f \star g$ , es definido por

$$f \star g := \sigma(\sigma^{-1}(f)\sigma^{-1}(g)) = \sigma(\hat{f}\hat{g}) \quad (4.14)$$

**Nota:** El mapeo de cuantización inversa  $\sigma^{-1}$  es definido como la operación que altera el orden de los términos en la serie simetrizada de  $f$  en (4.10), i.e., el término que en si no tiene  $\hat{y}'s$ . Más específicamente para obtener el término de primer orden  $\sigma(\hat{f}\hat{g})$  se tienen que simetrizar todos los monomios en  $\hat{y}'s$  en el producto  $\hat{f}\hat{g}$ , luego se toma el siguiente término. Esto hace de la multiplicación  $f \star g$  altamente no trivial.

## 4.2. Evaluación del producto

Se tomará un caso específico para ilustrar la evaluación del producto estrella de Fedosov. Para esto se escoge una geometría no plana para poder realizar los cálculos. Consideraremos una variedad con curvatura constante de codimensión uno.

### 4.2.1. La conexión del espacio fase

Escogemos una conexión  $D$  libre de torsión para preservar la métrica, de esta forma evitamos tener que determinar la métrica en cada cálculo para garantizar que siga manteniéndose. Para construir  $D$ , comenzamos tomando la conexión de Levi-Civita  $\nabla$  en el espacio de configuración  $M$ , y subsecuentemente la curvatura de la métrica  $g$  en una variedad  $M$  general. Tenemos las relaciones

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma f(x) &= \frac{\partial f}{\partial x^\sigma}, \\ \nabla_\sigma dx^\mu &= -\Gamma_{\nu\sigma}^\mu dx^\nu, \\ \nabla_\sigma \left( \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) &= \Gamma_{\mu\sigma}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}, \\ \nabla_{[\sigma} \nabla_{\rho]}(dx^\mu) &= R_{\nu\sigma\rho}^\mu dx^\nu,\end{aligned}\tag{4.15}$$

donde  $R_{\nu\sigma\rho}^\mu$  es el tensor de Riemann. También tenemos las condiciones sobre  $\nabla$  para que preserve la métrica  $g$  y sea libre de torsión

$$\begin{aligned}\nabla_\sigma g_{\rho\mu} &= 0, \\ \nabla_{[\sigma} \nabla_{\rho]} f(x) &= 0,\end{aligned}$$

para todas las funciones  $f(x)$ . Juntas fijan de forma única  $\nabla$ , y dan la fórmula estándar para los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = -\frac{1}{2}g^{\rho\sigma}(\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}),\tag{4.16}$$

donde  $\partial_\mu$  son derivadas parciales en alguna base  $x^\mu$ . Definimos ahora la base de los covectores de formas  $\Theta^B \in T^*T^*M$  (el haz cotangente del espacio fase):

$$\Theta^B = (dx^\sigma, \alpha_\sigma),$$

donde las  $dx^i$ 's son los primeros  $n$   $\Theta^i$ 's, los  $\alpha^i$ 's son los últimos  $n$   $\Theta^i$ 's (recordemos que la dimensión de  $M$  es  $2n$ ), y estos son definidos por:

$$\alpha_\mu := dp_\mu - \Gamma_{\mu\rho}^\nu dx^\rho p_\nu.\tag{4.17}$$

Para definir  $D \otimes \sigma_\mu$  se requiere que  $D$  preserve la forma simpléctica  $\omega$ :

$$0 = D \otimes \omega = D \otimes (\alpha_\mu dx^\mu) \implies (D \otimes \alpha_\mu) \wedge dx^\mu = (\Gamma_{\mu\sigma}^\nu dx^\sigma \otimes \alpha_\nu) dx^\mu.$$

Asimismo se puede mostrar que

$$\omega = \alpha_\mu \wedge dx^\mu = dp_\mu dx^\mu,\tag{4.18}$$

que se puede probar por la condición libre de torsión que nos dice que  $\Gamma_{[\mu\rho]}^\nu = 0$ . Por lo tanto, proponemos el Ansatz

$$D \otimes \alpha_\mu := S_{\mu\rho\sigma} dx^\sigma \otimes dx^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu dx^\sigma \otimes \alpha_\nu,\tag{4.19}$$

donde  $S_{[\mu\rho]\sigma} = 0$ .

Podemos fijar  $S_{\mu\rho\sigma}$  requiriendo que la derivada direccional  $\mathcal{D}_v$  de un vector y covector en cualquier dirección  $v^a$  sobre la variedad, sea también un vector y covector, respectivamente:

$$w_u \text{ es un covector} \iff \mathcal{D}_v w_\mu := v^\rho(\partial_\rho w_\mu - \Gamma_{\mu\rho}^\nu w_\nu) \text{ es un covector,}$$

$w^\mu$  es un vector  $\iff \mathcal{D}_v w^\mu := v^\rho(\partial_\rho w^\mu + \Gamma_{\mu\rho}^\nu w^\nu)$  es un vector.

Esto implica que para cualquier  $p_\mu = w_\mu(x)$  (i.e. cualquier sección en el haz cotangente) la derivada direccional de un covector es un covector. Entonces la ecuación resultante es

$$\nabla_{[\sigma} \nabla_{\rho]} w_\nu = R_{\nu\sigma\rho}^\mu w_\mu,$$

para todo  $w_\mu$  por la definición del tensor de Riemann. Esta ecuación fija la parte suave de la ecuación (4.19) como

$$\begin{aligned} D\alpha_\mu &:= D \wedge \alpha_\mu = S_{\mu\rho\sigma} dx^\sigma dx^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu dx^\sigma \alpha_\nu = -R_{\mu\rho\sigma}^\nu p_\nu dx^\sigma dx^\rho + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu dx^\sigma \alpha_\nu \\ &\implies S_{\mu[\rho\sigma]} = -R_{\mu\rho\sigma}^\nu p_\nu \end{aligned}$$

Por lo tanto, necesitamos resolver para  $S_{\mu\rho\sigma}$  satisfaciendo las dos condiciones siguientes

$$S_{[\mu\rho]\sigma} = 0 \quad , \quad S_{\mu[\rho\sigma]} = -R_{\mu\rho\sigma}^\nu p_\nu.$$

Definamos  $S_{\mu\rho\sigma} := S_{\mu\rho\sigma}^\nu p_\nu$  y las condiciones quedan así

$$S_{[\mu\rho]\sigma}^\nu = 0 \quad , \quad S_{\mu[\rho\sigma]}^\nu = -R_{\mu\rho\sigma}^\nu. \quad (4.20)$$

Tenemos entonces que

$$S_{\mu\rho\sigma}^\nu = \alpha R_{\mu\rho\sigma}^\nu + \beta R_{\rho\mu\sigma}^\nu + \gamma R_{\rho\sigma\mu}^\nu + \delta R_{\sigma\rho\mu}^\nu + \epsilon R_{\sigma\mu\rho}^\nu + \kappa R_{\mu\sigma\rho}^\nu, \quad (4.21)$$

y

$$S_{\rho\mu\sigma}^\nu = \alpha R_{\rho\mu\sigma}^\nu + \beta R_{\mu\rho\sigma}^\nu + \gamma R_{\mu\sigma\rho}^\nu + \delta R_{\sigma\mu\rho}^\nu + \epsilon R_{\sigma\rho\mu}^\nu + \kappa R_{\rho\sigma\mu}^\nu. \quad (4.22)$$

Tomamos la primer condición de (4.20) y desarrollamos

$$\begin{aligned} 0 &= S_{\mu\rho\sigma}^\nu - S_{\rho\mu\sigma}^\nu = \alpha R_{\mu\rho\sigma}^\nu + \beta R_{\rho\mu\sigma}^\nu + \gamma R_{\rho\sigma\mu}^\nu + \delta R_{\sigma\rho\mu}^\nu + \epsilon R_{\sigma\mu\rho}^\nu + \kappa R_{\mu\sigma\rho}^\nu \\ &\quad - \alpha R_{\rho\mu\sigma}^\nu - \beta R_{\mu\rho\sigma}^\nu - \gamma R_{\mu\sigma\rho}^\nu - \delta R_{\sigma\mu\rho}^\nu - \epsilon R_{\sigma\rho\mu}^\nu - \kappa R_{\rho\sigma\mu}^\nu \\ &= (\alpha - \beta) R_{\mu\rho\sigma}^\nu + (\beta - \alpha) R_{\rho\mu\sigma}^\nu + (\gamma - \kappa) R_{\rho\sigma\mu}^\nu \\ &\quad + (\delta - \epsilon) R_{\sigma\rho\mu}^\nu + (\epsilon - \delta) R_{\sigma\mu\rho}^\nu + (\kappa - \gamma) R_{\mu\sigma\rho}^\nu \\ &= (\alpha - \beta)(R_{\mu\rho\sigma}^\nu - R_{\rho\mu\sigma}^\nu) + (\gamma - \kappa)(R_{\rho\sigma\mu}^\nu - R_{\mu\sigma\rho}^\nu) + (\delta - \epsilon)(R_{\sigma\rho\mu}^\nu - R_{\sigma\mu\rho}^\nu) \\ &= (\alpha - \beta + \gamma - \kappa)(R_{\mu\rho\sigma}^\nu + R_{\rho\sigma\mu}^\nu) + 2(\delta - \epsilon)R_{\sigma\rho\mu}^\nu. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Para que la igualdad anterior se cumpla, hay varias opciones, la que se escoge a continuación es la que facilita los cálculos en el presente caso. Hacemos las siguientes igualdades

$$\alpha = \beta \quad , \quad \gamma = \kappa = \delta = \epsilon = 0$$

obteniendo

$$S_{\mu\rho\sigma}^\nu = \alpha(R_{\mu\rho\sigma}^\nu + R_{\rho\mu\sigma}^\nu) \quad , \quad S_{\mu\sigma\rho}^\nu = \alpha(R_{\mu\sigma\rho}^\nu + R_{\sigma\mu\rho}^\nu).$$

de la relación anterior se encuentra

$$S_{\mu\rho\sigma}^\nu - S_{\mu\sigma\rho}^\nu = -2R_{\mu\rho\sigma}^\nu$$

que se escribe también como

$$\alpha(R_{\mu\rho\sigma}^\nu + R_{\rho\mu\sigma}^\nu - R_{\mu\sigma\rho}^\nu - R_{\sigma\mu\rho}^\nu) = -2R_{\mu\rho\sigma}^\nu.$$

Usando la primera identidad de Bianchi, tenemos

$$\alpha(R_{\mu\rho\sigma}^\nu - R_{\mu\sigma\rho}^\nu - R_{\sigma\rho\mu}^\nu - R_{\mu\sigma\rho}^\nu - R_{\sigma\mu\rho}^\nu) = -2R_{\mu\rho\sigma}^\nu,$$

y en consecuencia

$$\alpha(R_{\mu\rho\sigma}^\nu - 2R_{\mu\sigma\rho}^\nu) = -2R_{\mu\rho\sigma}^\nu \quad \rightarrow \quad 3\alpha R_{\mu\rho\sigma}^\nu = -2R_{\mu\rho\sigma}^\nu.$$

La expresión para  $S_{\mu\rho\sigma}^\nu$  es entonces

$$S_{\mu\rho\sigma}^\nu = -\frac{2}{3}(R_{\mu\rho\sigma}^\nu + R_{\rho\mu\sigma}^\nu) = -\frac{4}{3}\left(\frac{R_{\mu\rho\sigma}^\nu + R_{\rho\mu\sigma}^\nu}{2}\right) = -\frac{4}{3}R_{(\mu\rho)\sigma}^\nu, \quad (4.24)$$

por lo tanto

$$D \otimes \alpha_\mu := -\frac{4}{3}R_{(\mu\sigma)\beta}^\lambda p_\lambda dx^\beta \otimes dx^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu dx^\sigma \otimes \alpha_\nu. \quad (4.25)$$

La conexión del espacio fase es entonces

$$Dx^\mu := dx^\mu, \quad (4.26)$$

$$Dp_\mu := dp_\mu,$$

$$D \otimes dx^\mu = -\Gamma_{\sigma\nu}^\mu dx^\nu \otimes dx^\sigma,$$

$$D \otimes \alpha_\mu = \Theta^B \otimes D_B \alpha_\mu := -\frac{4}{3}R_{(\mu\sigma)\beta}^\lambda p_\lambda dx^\beta \otimes dx^\sigma + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu dx^\sigma \otimes \alpha_\nu,$$

$$\alpha_\mu := dp_\mu - \Gamma_{\mu\rho}^\nu dx^\rho p_\nu,$$

que es la conexión buscada, y la correspondiente curvatura es:

$$D^2 x^\mu = 0, \quad (4.27)$$

$$D^2 p_\mu = 0,$$

$$D^2 \otimes dx^\mu = dx^\sigma dx^\rho \otimes R_{\nu\sigma\rho}^\mu dx^\nu,$$

$$D^2 \otimes \alpha_\mu = \frac{4}{3}dx^\sigma \left( C_{\mu\beta\nu\sigma}^\lambda p_\lambda dx^\nu + R_{(\mu\beta)\sigma}^\nu \alpha_\nu \right) \otimes dx^\beta - R_{\mu\sigma\beta}^\nu dx^\sigma dx^\beta \otimes \alpha_\nu,$$

donde  $C_{\mu\beta\sigma\nu}^\lambda := \nabla_\nu R_{(\mu\beta)\sigma}^\lambda$ , y de acuerdo a (4.15), la ecuación para la curvatura es:

$$R_{\nu\sigma\rho}^\mu = -\partial_{[\sigma} \Gamma_{\rho]\nu}^\mu + \Gamma_{\nu[\sigma}^\kappa \Gamma_{\rho]\kappa}^\mu. \quad (4.28)$$

Podemos extender a tensores de mayor orden estos resultados usando la regla de Leibnitz y el hecho que  $D$  y  $\nabla$  conmutan con las contracciones.

### 4.2.2. El haz de Weyl-Heisenberg

En el segundo paso del algoritmo, se definió cierta maquinaria utilizando a los operadores  $\hat{y}'s$ , para calcular los observables sobre una variedad  $M$  general. Sin embargo, diferente a Fedosov quien define las  $\hat{y}'s$  como covectores equipados con un producto parecido al Moyal entre estos, es posible dejar a estos ser operadores valuados en una matriz dimensionalmente infinita, que actúan sobre un espacio de Hilbert. Las relaciones que definen los  $\hat{y}'s$ , (4.5) y (4.6), son idénticas en ambos casos.

### Correspondencia con las álgebras familiares de Heisenberg usando coordenadas de Darboux

La primera relación del segundo paso es  $[\hat{y}^A, \hat{y}^B] = i\hbar\omega^{AB}$ , la cual puede ser expresada en una forma más familiar por una elección adecuada de coordenadas. En la geometría simpléctica hay un famoso teorema, llamado teorema de Darboux, que estipula lo siguiente: en la vecindad de cada punto sobre una variedad simpléctica  $n$ -dimensional, existen ciertas coordenadas locales llamadas coordenadas de Darboux  $\tilde{q} = (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, \tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_n)$ , de tal modo que  $\omega$  toma la forma [29]:

$$\omega = d\tilde{p}_1 d\tilde{x}^1 + \dots + d\tilde{p}_n d\tilde{x}^n$$

En este sistema coordenado para  $\tilde{q}$ , las  $\hat{y}$ 's son expresadas como  $(\tilde{s}^1, \dots, \tilde{s}^n, \tilde{k}_1, \dots, \tilde{k}_n)$ , correspondientes a  $2n$  operadores, que satisfacen el álgebra de conmutadores  $[\tilde{s}^i, \tilde{s}^j] = [\tilde{k}_i, \tilde{k}_j] = 0, [\tilde{s}^i, \tilde{k}_j] = i\hbar\delta_j^i$ , donde  $i$  y  $j$  corren de 1 hasta  $2n$ . Las  $\hat{y}$ 's establecen un álgebra de Heisenberg estándar actuando sobre un espacio de Hilbert.

El conjunto de todas estas álgebras para todos los puntos crea un álgebra enorme; el objetivo del algoritmo de Fedosov es escoger una subálgebra apropiada en esta enorme álgebra que se pueda identificar con el álgebra de los observables, claro está, considerando situaciones físicas reales. Estas subálgebras son la imagen del mapeo  $\sigma^{-1}$  en el grupo de todas las funciones del espacio fase.

### Propiedades de los elementos $\hat{y}$

Los elementos  $\hat{y}$ 's están definidos por las relaciones

$$[\hat{y}^A, \hat{y}^B] = i\hbar\omega^{AB}$$

$$D\hat{y}^A = -\Gamma_B^A \hat{y}^B = -\Gamma_{BC}^A \Theta^C \hat{y}^B, \quad \Theta^B = (\theta^\sigma, \alpha_\sigma).$$

Los  $\hat{y}$ 's conmutan con el conjunto de las cantidades  $\{x, p, \Theta, g, \omega, \hbar, i\}$ , i.e. ellas se comportan como escalares en una matriz de índices donde  $i$  es la unidad imaginaria.

Notese que la acción de la conexión del espacio fase sobre  $\hat{y}$  es la misma que la que se aplica sobre  $\Theta$  ( $D \otimes \Theta^A = \Gamma_{BC}^A \Theta^C \otimes \Theta^B$ ); entonces estamos considerando una base de operadores o una matriz valuada de covectores. La acción de la conexión sobre las  $\hat{y}$ 's nos dice como es el transporte paralelo para el álgebra de Weyl-Heisenberg en un punto de ésta, siendo consistente para todos los demás puntos.

Por definición  $\hat{y}^A := (s^\mu, k_\mu)$ , donde las  $s$ 's son los primeros  $n$   $\hat{y}$ 's y las  $k$ 's son las últimas  $n$   $\hat{y}$ 's. La conexión  $D$  actuando sobre cada una de estas, se obtiene utilizando las relaciones (4.26) y (4.27) en la ecuación (4.6)

$$Ds^\mu = -\Gamma_{\sigma\nu}^\mu dx^\nu s^\sigma, \quad (4.29)$$

$$Dk_\mu := -\frac{4}{3}R_{(\mu\sigma)\beta}^\lambda dx^\beta s^\sigma p_\lambda + \Gamma_{\mu\sigma}^\nu dx^\sigma k_\nu,$$

$$D^2 s^\mu = dx^\lambda dx^\sigma R_{\nu\lambda\sigma}^\mu s^\nu, \quad (4.30)$$

$$D^2 k_\mu = \frac{4}{3}dx^\sigma \left( C_{\mu\beta\nu\sigma}^\lambda p_\lambda dx^\nu + R_{(\mu\beta)\sigma}^\nu \alpha_\nu \right) s^\beta - R_{\mu\sigma\beta}^\nu dx^\sigma dx^\beta k_\nu,$$

donde nuevamente  $C_{\mu\beta\nu\sigma}^\lambda := \nabla_\sigma R_{(\mu\beta)\nu}^\lambda$ .

En este caso, cuando hablemos de  $f$  como una función/forma, la estaremos definiendo como una serie de Taylor en variables complejas  $u$  y  $v$ . Explícitamente escribimos

$$f(u, \dots, v) = \sum_{l,j} f_{j_1 \dots j_l} u^{j_1} \dots v^{j_l}, \quad (\text{j's son potencias no índices})$$

donde  $u$  y  $v$  son arbitrarios.

Si  $f$  es una función/forma dependiente de las cantidades  $x, p, dx, dp, \omega, \hbar, i$ , entonces conmuta con las  $\hat{y}$ 's y podemos llamarla una función/forma evaluada en los complejos. Por el contrario, una función/forma de matriz valuada es una serie de Taylor compleja en  $\hat{y}$ .

Entonces, si escribimos

$$(\hat{y}^A \hat{y}^B)_{jk} = \sum_l \hat{y}_{jl}^A \hat{y}_{lk}^B,$$

tenemos que

$$([\hat{y}^A, f])_{jk} := \hat{y}_{jk}^A f - f \hat{y}_{jk}^A = 0$$

en el caso de una función/forma evaluada en los complejos.

Por el contrario, para una función/forma de matriz valuada, no pasa esto. A partir de ahora no escribiremos los índices de la matriz de forma explícita.

Vale la pena mencionar que la idea para la introducción de las  $\hat{y}$ 's en el esquema de Fedosov tiene la finalidad de asociar cada  $f(x, p) \in C^\infty(T^*M)$  con un *único* observable  $\hat{f}(x, p, \hat{y})$ :

$$\hat{f}(x, p, \hat{y}) = \sum_{j,l} f_{j,l,A_1 \dots A_l} \hbar^j \hat{y}^{A_1} \dots \hat{y}^{A_l}.$$

### 4.2.3. Construcción de la derivación global

En el tercer paso del algoritmo, debemos determinar una derivación global como una matriz conmutador  $\hat{D} = [\hat{Q}, \cdot]$ , siendo esto el punto central de la construcción de los coeficientes  $f_{A_1 \dots A_l}$  en (4.11). Definimos primero la derivación  $\hat{D}$  por medio del conmutador graduado

$$\begin{aligned} \hat{D} &= [\hat{Q}, \cdot]/i\hbar = [\hat{Q}_A \Theta^A, \cdot]/i\hbar, \\ \hat{Q}_A &= \sum_l Q_{AA_1 \dots A_l} \hat{y}^{A_1} \dots \hat{y}^{A_l}, \end{aligned}$$

donde  $\Theta^A = (dx^\sigma, \alpha_\sigma)$ . En este paso tenemos una condición dada por (4.9) que parcialmente determina las funciones  $Q_{AA_1 \dots A_l}$ ; esta condición es

$$(D - \hat{D})^2 \hat{y}^A = \left[ \Omega - D\hat{Q} + \hat{Q}^2/i\hbar, \hat{y}^A \right] /i\hbar = 0, \quad (4.31)$$

donde  $\Omega$  es la curvatura del espacio fase como un conmutador de acuerdo a

$$\frac{1}{i\hbar} [\Omega, \hat{y}^A] := D^2 \hat{y}^A = R_B^A \hat{y}^B, \quad (4.32)$$

con la solución  $\Omega := -\frac{1}{2} \omega_{AC} R_{CEB}^A \Theta^C \wedge \Theta^E \hat{y}^B \hat{y}^C$ , donde  $R_{CEB}^A$  es la curvatura del espacio fase.

En lo que sigue se hace la elección

$$\Omega - D\hat{Q} + \hat{Q}^2/i\hbar = 0. \quad (4.33)$$



La solución para  $\hat{Q}$  constituye el punto más difícil en el cálculo del producto- $\star$  de Fedosov, porque se necesita dar el Ansatz correcto a una ecuación no lineal como (4.33). El modo de proceder para resolver esta ecuación, es utilizar distintos Ansatz para  $\hat{Q}$  de forma que lleguemos eventualmente al correcto. Este proceso conduce a [18]

$$\begin{aligned}\Omega &= -R^\nu_{\mu\sigma\beta} dx^\sigma dx^\beta k_\nu s^\mu + \frac{2}{3} D \left( R^\nu_{(\mu\beta)\sigma} p_\nu s^\beta s^\mu dx^\sigma \right) \\ &= -R^\nu_{\mu\sigma\beta} dx^\sigma dx^\beta k_\nu s^\mu + \frac{2}{3} dx^\sigma \left( C^\lambda_{\mu\beta\nu\sigma} p_\lambda dx^\nu + R^\nu_{(\mu\beta)\sigma} \alpha_\nu \right) s^\beta s^\nu,\end{aligned}\quad (4.34)$$

donde  $C^\lambda_{\mu\beta\nu\sigma} := \nabla_\sigma R^\lambda_{(\mu\beta)\nu}$ .

Con esta expresión obtenemos los siguientes conmutadores

$$\begin{aligned}\frac{1}{i\hbar} [\Omega, s^\mu] &= D^2 s^\mu = R^\mu_{\nu\lambda\epsilon} dx^\lambda dx^\epsilon s^\nu, \\ \frac{1}{i\hbar} [\Omega, k_\mu] &= D^2 k_\mu = \frac{4}{3} dx^\sigma \left( (C^\lambda_{\mu\beta\nu\sigma} p_\lambda dx^\nu + R^\nu_{(\mu\beta)\sigma} \alpha_\nu) s^\beta - R^\nu_{\mu\sigma\beta} dx^\sigma dx^\beta k_\nu \right).\end{aligned}$$

Se puede proponer entonces el Ansatz siguiente para resolver (4.33)

$$\begin{aligned}\hat{Q} &= (s^\mu \alpha_\mu - z_\mu dx^\mu) + j^\mu \alpha_\mu + z_\nu f^\nu_\mu dx^\mu \\ &+ p_\nu \left( \left( D + f^\sigma_\rho dx^\rho \hat{\partial}_\sigma - dx^\sigma \hat{\partial}_\sigma \right) j^\nu + \Gamma^\nu_{\rho\sigma} dx^\sigma j^\rho - \frac{2}{3} R^\nu_{(\mu\beta)\sigma} s^\beta s^\mu dx^\sigma \right)\end{aligned}\quad (4.35)$$

donde  $\hat{\partial}_\mu := \partial/\partial s^\mu$ . Si se sustituye esta expresión en (4.33) obtenemos la siguiente condición sobre  $f^\nu_\mu$

$$\left( \left( D + f^\mu_\rho dx^\rho \hat{\partial}_\mu - dx^\mu \hat{\partial}_\mu \right) f^\nu_\sigma + \Gamma^\nu_{\rho\mu} dx^\mu f^\rho_\sigma - \Gamma^\nu_{\sigma\mu} dx^\mu + R^\nu_{\mu\beta\sigma} s^\mu dx^\beta \right) dx^\sigma = 0. \quad (4.36)$$

Podemos ver que si  $j^\alpha$  y  $f^\nu_\mu$  son independientes de la elección de las coordenadas del espacio de configuración, entonces también lo es  $\hat{Q}$ .

La ecuación (4.36) es localmente integrable para  $f^\nu_\mu$  por el teorema de Cauchy-Kovalevskaya. Este hecho nos permite llegar a una solución iterativa, en el espíritu de las series del producto estrella de Fedosov.

Se tiene entonces el resultado que dado cualquier haz cotangente  $T^*M$ , la solución a (4.33) es (4.35) junto con la condición en (4.36), donde (4.36) es localmente integrable para  $f^\nu_\mu$  por el teorema de Cauchy-Kovalevskaya [27].

#### 4.2.4. La base para el álgebra de los observables

Con lo anterior, ahora se tienen todas las herramientas para asociar un observable  $\hat{f}$  para cada  $f \in C^\infty(T^*M)$ . En el paso cuarto del algoritmo se requiere que cada observable  $\hat{f}(x, p, \hat{y})$ , deba satisfacer la ecuación (4.11). La condición  $f_{j,l,(A_1 \dots A_l)} = f_{j,l,A_1 \dots A_l}$  es la condición de Weyl o cuantización simétrica. Este es el ordenamiento que ocupa originalmente Fedosov.

Una alternativa a este procedimiento es posible. Para ello se pide que cada término sea de la forma

$$\hat{f}(\hat{x}, \hat{p}) = \sum_{jlm} \tilde{f}_{j,l,m,\mu_1 \dots \mu_l}^{\nu_1 \dots \nu_m} \hbar^j \hat{x}^{\mu_1} \dots \hat{x}^{\mu_l} \hat{p}_{\nu_1} \dots \hat{p}_{\nu_m} \quad (4.37)$$

donde  $\tilde{f}_{j,l,m,\mu_1 \dots \mu_l}^{\nu_1 \dots \nu_m}$  es una función compleja de  $x$  y  $p$ , siendo además simétrica en todos los  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$ , i.e.

$$\hat{f}(\hat{x}, \hat{p}) = \sum_{jlm} \tilde{f}_{j,l,m,\mu_1 \dots \mu_l}^{\nu_1 \dots \nu_m} \hbar^j SYM(\hat{x}^{\mu_1} \dots \hat{x}^{\mu_l} \hat{p}_{\nu_1} \dots \hat{p}_{\nu_m}),$$

donde la operación  $SYM$  se define como

$$SYM(\hat{x}^{\mu_1} \dots \hat{x}^{\mu_l} \hat{p}_{\nu_1} \dots \hat{p}_{\nu_m}) := \hat{x}^{\mu_1} \dots \hat{x}^{\mu_l} \hat{p}_{\nu_1} \dots \hat{p}_{\nu_m} + \hat{x}^{\mu_1} \dots \hat{x}^{\mu_{l-1}} \hat{p}_{\nu_1} \dots \hat{p}_{\nu_m} + \dots$$

La definición de  $\hat{f}$  en (4.37) corresponde entonces a la función del espacio fase

$$\sigma(\hat{f}) = f(x, p) = \sum_{jlm} \tilde{f}_{j,l,m,\mu_1 \dots \mu_l}^{\nu_1 \dots \nu_m} \hbar^j \hat{x}^{\mu_1} \dots \hat{x}^{\mu_l} \hat{p}_{\nu_1} \dots \hat{p}_{\nu_m}.$$

Con la condición (4.37) se tiene que los coeficientes  $\tilde{f}_{j,l,m,\mu_1 \dots \mu_l}^{\nu_1 \dots \nu_m}$  son constantes. Esto es fácil verlo al actuar con  $(D - \hat{D})$  sobre la ecuación. Lo que resta ahora es encontrar una base  $(\hat{x}, \hat{y})$  que permita determinar un único  $\hat{f}$  para una función  $f$  dada en el espacio fase. Para ello se propone

$$\hat{x}^\mu = \sum_l b_{j,l,A_1 \dots A_l}^\mu \hbar^j \hat{y}^{A_1} \dots \hat{y}^{A_l}, \quad (4.38)$$

$$\hat{p}_\mu = \sum_l c_{j,l,\mu,A_1 \dots A_l} \hbar^j \hat{y}^{A_1} \dots \hat{y}^{A_l}, \quad (4.39)$$

donde  $b_{j,l,A_1 \dots A_l}^\mu$  y  $c_{j,l,\mu,A_1 \dots A_l}$  son funciones complejas de  $x$  y  $p$  que serán determinadas parcialmente por las ecuaciones:

$$(D - \hat{D})x^\mu = 0 \quad , \quad \sigma(x^\mu) = b_{0,0}^\mu = x^\mu, \quad (4.40)$$

$$(D - \hat{D})p_\mu = 0 \quad , \quad \sigma(p_\mu) = c_{0,0,\mu} = p_\mu. \quad (4.41)$$

Es necesario invertir las relaciones (4.40) y (4.41) para poder expresar  $\hat{y}$  en términos de  $x, p, \hat{x}$  y  $\hat{p}$  como una función de matriz valuada. Finalmente, al sustituir  $\hat{y}^A = \hat{y}^A(x, p, \hat{x}, \hat{p})$  en (4.10) se tiene que todos los observables puedan ser expresados en la forma (4.37).

#### 4.2.5. Los conmutadores

Una vez teniendo  $\hat{x}^\mu$  y  $\hat{p}_\mu$ , i.e., los coeficientes  $b_{j,l,A_1 \dots A_l}^\mu$  y  $c_{j,l,\mu,A_1 \dots A_l}$ , se calculan las relaciones de conmutación  $[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu]$ ,  $[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\nu]$  y  $[\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu]$  usando la solución para  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$ . Tenemos que

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{p}) := \left[ \hat{f}(\hat{x}, \hat{p}), \hat{g}(\hat{x}, \hat{p}) \right],$$

$$\implies [f_*(x, p), g_*(x, p)]_* = h_*(x, p) = i\hbar[f, g]_P + O(\hbar^2), \quad (4.42)$$

donde  $\hat{f}$ ,  $\hat{g}$ ,  $\hat{h}$  y  $f_*$ ,  $g_*$ ,  $h_*$  son funciones definidas por:

$$\hat{f}(\hat{x}, \hat{p}) = \sum_{jlm} \tilde{f}_{j,l,m,\mu_1 \dots \mu_l}^{\nu_1 \dots \nu_m} \hbar^j \hat{x}^{\mu_1} \dots \hat{x}^{\mu_l} \hat{p}_{\nu_1} \dots \hat{p}_{\nu_m},$$

$$f_*(x, p) = \sum_{jlm} \tilde{f}_{j,l,m,\mu_1 \dots \mu_l}^{\nu_1 \dots \nu_m} \hbar^j x^{\mu_1} * \dots * x^{\mu_l} * p_{\nu_1} * \dots * p_{\nu_m},$$

y donde  $\tilde{f}_{j,l,m,\mu_1 \dots \mu_l}^{\nu_1 \dots \nu_m}$  son constantes.

### 4.2.6. Espacio de Finsler

Hay una geometría en donde la estructura matemática es muy parecida a lo que se acaba de realizar [30], ésta se conoce como: *geometría de Finsler*. En ésta, los espacios tangente ( $TM_d$ ) y cotangente ( $T^*M_d$ ), se estudian por separado, la  $d$  hace referencia a la dimensión. La primer diferencia que se observa tiene que ver con los símbolos de Christoffel

$$\Gamma_{AB}^C = \frac{1}{2}g^{CD}(\hat{\partial}_A g_{BD} + \hat{\partial}_B g_{AD} - \hat{\partial}_D g_{AB}) + \frac{1}{2}g^{CD}(f_{ABD} - f_{BDA} - f_{ADB}), \quad (4.43)$$

donde  $f_{ABC} = g_{CD}f_{AB}^D$ . Aquí la diferencia radica en el segundo término del lado derecho, este término es incluido para considerar la parte noholonómica con la que también se trabaja. La otra diferencia es que en el caso presentado en este trabajo, tomamos el valor de la torsión igual a cero. En el espacio de Finsler la torsión es distinta de cero.

El tensor de curvatura es definido en el espacio de Finsler como sigue

$$R_{ABC}^D = \hat{\partial}_A \Gamma_{BC}^D - \hat{\partial}_B \Gamma_{AC}^D + \Gamma_{AE}^D \Gamma_{BC}^E - \Gamma_{BE}^D \Gamma_{AC}^E - f_{AB}^E \Gamma_{EC}^D. \quad (4.44)$$

En este caso también hay un término extra, asociado con la parte noholonómica. Otra diferencia es la geometría de los espacios tangente y cotangente, en el espacio de Finsler, se toman por separado. En el espacio tangente ( $TM_d$ ) se toman en cuenta sólo coordenadas, mientras que en el espacio cotangente ( $T^*M_d$ ) se toman en cuenta coordenadas y momentos. Por lo que los cálculos se realizan dependiendo del sistema a estudiar.

Hay otros espacios donde el producto estrella de Fedosov [31] se ocupa para realizar cálculos y que están en relación con el espacio de Finsler, son uniones entre un formalismo de mecánica y el espacio de Finsler u otras condiciones. Para ésto se tienen que considerar más elementos que den todo el soporte matemático necesario para que se cumplan las condiciones necesarias en dichos espacios.

## 4.3. Caso de aplicación: curvatura constante explícito

Para mostrar este caso nos apoyaremos en el espacio tiempo de de Sitter y anti de Sitter, con lo que los resultados no quedarán de forma abstracta. El sistema físico será el más simple: una partícula libre.

### 4.3.1. El soporte geométrico

Primero se determinará la geometría en la que se trabajará; al considerar dS/AdS, tenemos una geometría hiperbólica con curvatura constante. La partícula está confinada en el espacio fase de ésta variedad y con métrica  $(M_{C_{p,q}}, g)$ , que está incrustada en  $(\mathbb{R}^{n+1}, \eta)$  donde  $\dim M_{C_{p,q}} = p + q = n$  y  $\eta$  es una métrica seudoeuclídeana. La incrustación específica del hiperboloide es

$$x^\mu x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = 1/C$$

$\eta$  induce una métrica sobre  $M_{C_{p,q}}$  llamada  $g$ , explícitamente

$$g_{\mu\nu} := \eta_{\mu\nu} - C x_\mu x_\nu \quad (4.45)$$

Tomaremos la convención canónica para la signatura, donde la dirección positiva representa al “tiempo” y la negativa al “espacio”. Otra consideración es el valor de la constante  $C$ ; si tomamos  $C > 0$  la signatura queda de la siguiente forma

$$\eta = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p+1}, \underbrace{-1, \dots, -1}_q)$$

donde la parte temporal a adquirido una componente más, en caso de tomar  $C < 0$  la signatura queda con una componente más en la parte espacial. Las ecuaciones para la incrustación en este caso son

$$(x^0)^2 - (x^4)^2 - \underline{x} \cdot \underline{x} = 1/C \quad , \quad C < 0, \quad (4.46)$$

$$(x^0)^2 + (x^4)^2 - \underline{x} \cdot \underline{x} = 1/C \quad , \quad C > 0, \quad (4.47)$$

donde

$$\underline{x} = (x^1, x^2, x^3).$$

La ecuación (4.46) representa al espacio de Sitter (dS), y la ecuación (4.47) al espacio Anti-de Sitter (AdS). Diferenciando  $x^\mu x_\mu = 1/C$  obtenemos la condición sobre  $p_\mu$

$$2dx^\mu x_\mu = 0 \implies x^\mu p_\mu = 0.$$

Las ecuaciones para la incrustación son

$$x^\mu x_\mu = 1/C \quad , \quad x^\mu p_\mu = 0, \quad (4.48)$$

donde  $C$  es una constante real arbitraria.

### 4.3.2. Conexión del espacio fase

Teniendo una conexión del espacio de configuración  $\nabla$  es sencillo obtener la conexión para el espacio fase. En nuestro caso, por las condiciones en (4.48) y las condiciones subsecuentes

$$x^\mu dx_\mu = 0 \quad , \quad p_\mu dx^\mu + x^\mu dp_\mu = 0. \quad (4.49)$$

es más complicado. Tomamos una forma particular como

$$D \otimes dx^\mu = -\Gamma_{\sigma\nu}^\mu dx^\nu \otimes dx^\sigma,$$

esto es ambiguo por la primera condición de (4.49), para que la ecuación anterior sea invariante bajo cambios, tenemos

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho \rightarrow \Gamma_{\mu\nu}^\rho + x^\rho q_{\mu\nu} + x_{(\mu} f_{\nu)}^\rho,$$

donde  $q_{\mu\nu}$  y  $f_\nu^\rho$  son arbitrarios. Entonces necesitamos que las constricciones se preserven por la conexión

$$D(x^\mu x_\mu) = 0 \quad , \quad D(x^\mu p_\mu) = 0 \quad , \quad D^2(x^\mu x_\mu) = 0 \quad , \quad D^2(x^\mu p_\mu) = 0 \quad (4.50)$$

Las condiciones que  $\Gamma$  debe satisfacer son:

1. Libre de torsión

$$dx^\sigma \nabla_\sigma (dx^\mu) = -\Gamma_{\nu\sigma}^\mu dx^\sigma dx^\nu \implies \Gamma_{[\nu\sigma]}^\mu = 0$$

2. Preservación de la métrica

$$\nabla_\rho(g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu) = 0$$

3. La derivada direccional  $\mathcal{D}_v$  de un vector y covector en cualquier dirección  $v^a$  es un vector y covector, respectivamente.

4. Las constricciones en (4.48), (4.49) y

$$\nabla_\nu(x^\mu dx_\mu) = 0 \quad , \quad \nabla_\nu(p_\mu dx^\mu + x^\mu dp_\mu) = 0 \quad (4.51)$$

$$\Gamma_{\nu\sigma}^\mu = Cx^\mu g_{\nu\sigma} - 2Cx_{[\nu}(\delta_{\sigma]}^\mu - Cx_{\sigma]}x^\mu),$$

$$R_{\nu\sigma\rho}^\mu = -C(\delta_{[\sigma}^\mu - Cx_{\sigma]}x^\mu)g_{\rho]\nu}$$

$$\omega = (\delta_\nu^\mu - Cx^\mu x_\nu)\alpha_\mu dx^\nu$$

### 4.3.3. Haz de Weyl-Heisenberg

Específicamente para  $T^*M_{C_{p,q}}$  tenemos la forma simpléctica inducida  $\omega$  de  $T^*\mathbb{R}^{n+1}$  sobre  $T^*M_{C_{p,q}}$ , siendo

$$\omega = \alpha_\mu dx^\mu = (\delta_\nu^\mu - Cx^\mu x_\nu)\alpha_\mu dx^\nu,$$

las relaciones de conmutación quedan

$$[s^\mu, s^\nu] = 0 = [k_\mu, k_\nu] \quad , \quad [s^\mu, k_\nu] = i\hbar(\delta_\nu^\mu - Cx^\mu x_\nu).$$

Como  $dx^\mu$  y  $\alpha_\mu$  son perpendiculares a  $x$  la matriz de contrapartes  $s^\mu$  y  $k_\mu$  queda

$$\eta_{\mu\nu}x^\mu s^\nu = x^\mu k_\mu = 0 \quad (4.52)$$

### 4.3.4. Construcción de la derivada global

$$\hat{Q} = (s^\mu \alpha_\mu - z_\mu dx^\mu) - C(z_\nu s^\nu)(s_\mu dx^\mu) + \frac{C}{3}((p_\nu s^\nu)(s_\mu dx^\mu) - (p_\nu dx^\nu)u), \quad (4.53)$$

donde  $z_\mu := k_\mu + p_\mu$ ,  $u = \eta_{\mu\nu}s^\mu s^\nu$  y  $p_\mu x^\mu = \eta_{\mu\nu}s^\mu x^\nu = k_\mu x^\mu = \alpha_\mu x^\mu = \eta_{\mu\nu}dx^\mu x^\nu = 0$ .

### 4.3.5. La base para el álgebra de los observables

Específicamente para el caso  $T^*M_{C_{p,q}}$  hacemos el ansatz para los dos operadores  $\hat{x}$ ,  $\hat{p}$

$$\hat{x}^\mu = f(u)x^\mu + h(u)x^\mu$$

$$\hat{p}_\mu = z_\nu s^\nu x_\nu g(u) + z_\mu j(u)$$

donde  $u := \eta_{\mu\nu}s^\mu s^\nu$  y  $z_\mu := k_\mu + p_\mu$

Requerimos que ambos operadores satisfagan las condiciones (4.40) y (4.41), resolviendo las ecuaciones diferenciales obtenemos

$$\hat{x}^\mu = (x^\mu + s^\mu)\frac{1}{\sqrt{Cu + 1}}, \quad (4.54)$$

$$\hat{p}_\mu = (-Cz_\nu s^\nu x_\mu + z_\mu)\sqrt{Cu+1} - iC\hbar n \hat{x}_\mu, \quad (4.55)$$

donde  $u = s_\mu s^\mu$ , y con las condiciones calculadas

$$\begin{aligned} \sigma(\hat{x}^\mu) &= b_{0,0}^\mu = x^\mu \quad , \quad \sigma(\hat{p}_\mu) = c_{0,0,\mu} = p_\mu \\ \hat{x} \cdot \hat{x} &= 1/C \quad , \quad \hat{x} \cdot \hat{p} = \hat{p} \cdot \hat{x} - ni\hbar = 0. \end{aligned} \quad (4.56)$$

Ahora usamos estos resultados para escribir la solución para  $\hat{x}$  y  $\hat{p}$  para la incrustación

$$x^\mu x_\mu = 1/C \quad , \quad x^\mu \tilde{p}_\mu = A,$$

ya que esto es una transformación canónica

$$\tilde{p}_\mu = p_\mu + CAx_\mu \quad , \quad \tilde{x}_\mu = x_\mu,$$

y preserva todas las constricciones excepto  $x^\mu p_\mu = A$ , podemos escribir la solución como

$$\widehat{p}_\mu = \hat{p}_\mu + CA\hat{x}_\mu \quad , \quad \widehat{x}^\mu = \hat{x}^\mu$$

de esta manera

$$\widehat{x}^\mu = \hat{x}^\mu = (x^\mu + s^\mu) \frac{1}{\sqrt{Cu+1}}, \quad (4.57)$$

$$\widehat{p}_\mu = \hat{p}_\mu = (-Cz_\nu s^\nu x_\mu + z_\mu)\sqrt{Cu+1} + C(A - i\hbar n)\hat{x}_\mu, \quad (4.58)$$

con condiciones calculadas

$$\hat{x} \cdot \hat{x} = 1/C \quad , \quad \hat{x} \cdot \hat{p} = \hat{p} \cdot \hat{x} - ni\hbar = A \quad (4.59)$$

En la terminología de teoría de grupos, las dos condiciones arriba mencionadas representan los invariantes Casimir del álgebra de observables.

### 4.3.6. Los conmutadores

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = 0, \quad (4.60)$$

$$[\hat{x}^\mu, \hat{p}_\mu] = i\hbar(\delta_\nu^\mu - C\hat{x}^\mu \hat{x}_\nu),$$

$$[\hat{p}_\mu, \hat{p}_\nu] = 2i\hbar C \hat{x}_{[\nu} \hat{p}_{\mu]},$$

junto con las condiciones calculadas

$$\hat{x}^\mu \hat{x}_\mu = 1/C \quad , \quad \hat{p}_\mu \hat{x}^\mu + ni\hbar = A.$$

Ahora definimos

$$\hat{M}_{\mu\nu} = \hat{x}_{[\mu} \hat{p}_{\nu]} = \hat{p}_{[\nu} \hat{x}_{\mu]} = (-Cz_\rho s^\rho x_{[\nu} + z_{[\nu})(x_{\mu]} + s_{\mu]}).$$

Con el resultado de (4.57) y con

$$\hat{M}_{\mu\nu} = \hat{x}_{[\mu} \hat{p}_{\nu]} = \hat{p}_{[\nu} \hat{x}_{\mu]} = -Cz_\rho s^\rho x_{[\nu} s_{\mu]} + z_{[\nu} x_{\mu]} + z_{[\nu} s_{\mu]}, \quad (4.61)$$

y las relaciones de conmutación calculadas

$$\begin{aligned} [\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] &= 0, \\ [\hat{x}_\mu, \hat{M}_{\nu\rho}] &= i\hbar \hat{x}_{[\nu} \eta_{\rho]\mu}, \\ [\hat{M}_{\mu\nu}, \hat{M}_{\rho\sigma}] &= i\hbar \left( \hat{M}_{\sigma[\mu} \eta_{\nu]\rho} - \hat{M}_{\rho[\mu} \eta_{\nu]\sigma} \right), \end{aligned} \quad (4.62)$$

sujeta a las condiciones

$$\hat{x}^\mu \hat{x}_\mu = 1/C \quad , \quad \hat{M}_{\mu\nu} = -\hat{M}_{\nu\mu} \quad , \quad 2\hat{x}^\mu \hat{M}_{\mu\nu} = \hat{p}_\nu/C - A\hat{x}_\nu \quad (4.63)$$

El álgebra envolvente de estos operadores da el álgebra de los observables sobre  $T^*M_{C_{p,q}}$ , siendo un elemento general

$$\hat{f}(\hat{x}, \hat{M}) = \sum_{lm} \tilde{f}_{j,l,m,\mu_1 \dots \mu_l}^{\nu_1 \dots \nu_{2m}} SYM \left( \hat{x}^{\mu_1} \dots \hat{x}^{\mu_l} \hat{M}_{\nu_1 \nu_2} \dots \hat{M}_{\nu_{(2m-1)} \nu_{2m}} \right),$$

donde los coeficientes  $\tilde{f}_{\mu_1 \dots \mu_l}^{\nu_1 \dots \nu_{2m}}$  son constantes.

## 4.4. Resultados para los espacio-tiempos de Sitter y Anti de Sitter

Primero se incrusta dS/AdS en un espacio plano cinco dimensional mediante las ecuaciones de incrustamiento:

$$\eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = 1/C \quad \text{y} \quad x^\mu p_\mu = A$$

donde  $C$  y  $A$  son algunas constantes reales arbitrarias, y  $\eta$  es la métrica plana del incrustamiento. Para dS  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1, -1)$ ,  $C < 0$  y AdS  $\eta = \text{diag}(1, 1, -1, -1, -1)$   $C > 0$ .

Obtenemos los resultados exactos por los conmutadores estrella de Fedosov:

$$[x^\mu, x^\nu]_* = 0 \quad [x_\mu, M_{\nu\rho}]_* = i\hbar x_{[\nu} \eta_{\rho]\mu} \quad (4.64)$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}]_* = i\hbar (M_{\rho[\mu} \eta_{\nu]\sigma} - M_{\sigma[\mu} \eta_{\nu]\rho})$$

los índices van de 0 a 4,  $M_{\mu\nu} = x_{[\mu} * p_{\nu]}$ ,  $x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu$ .

Las condiciones para la incrustación  $x^\mu x_\mu$ ,  $x^\mu p_\mu$ , se convierten en los invariantes de Casimir del álgebra en un lenguaje de teoría de grupos. Las siguientes observaciones son importantes:

1. Las  $M$ 's generan  $\mathbb{SO}(1, 4)$  y  $\mathbb{SO}(2, 3)$  para dS y AdS respectivamente.
2. Las  $M$ 's y las  $x$ 's generan  $\mathbb{SO}(2, 4)$  para *ambos* dS y AdS.

Éstos subgrupos son los grupos de simetría para todas las variedades de dS y AdS respectivamente. En el caso de partículas de spin 0 el operador  $\hat{M}^2$  se convierte en el operador Laplace-Beltrami  $\nabla_\mu \nabla^\mu$  y  $\hat{x}^\mu \hat{p}_\mu \rightarrow -i\hbar x^\mu \nabla_\mu$  por lo tanto  $\phi(x) := \langle x | \phi \rangle$ , entonces:

$$(2i\hbar C \nabla_\mu \nabla^\mu - \chi C - m^2) \phi(x) = 0$$

donde  $-i\hbar x^\mu \nabla_\mu \phi = A\phi$ . Ésta ecuación, es la ecuación de onda libre en AdS. Con esto vemos que se tiene el equivalente a uno de los sistemas más utilizados en la mecánica cuántica tradicional.





## Capítulo 5

# Conclusiones y perspectivas

La mecánica cuántica se desarrolló para enfrentar las incongruencias que había entre la teoría clásica y algunos experimentos. Una formulación de ella se basa en una ecuación diferencial de segundo orden la cual se le conoce como ecuación de Schrödinger, pero poco antes de este formalismo, se había trabajado en otro basado en matrices.

Con este formalismo matemático (ecuación de Schrödinger), comienza a conocerse el mundo microscópico, se descubre una nueva física, con lo cual comienzan a entenderse fenómenos que hasta ese momento no se entendían. Los fundamentos de ésta nueva teoría no se comprenden del todo.

Esta situación es la que lleva a algunos físicos a desarrollar otros formalismos matemáticos que resulten más naturales en su paso de la teoría clásica a la cuántica, con lo que, la comprensión de ésta nueva teoría sea mejor. De esta forma llegamos a la cuantización por deformación, un formalismo que realiza el paso de la mecánica clásica a la cuántica mediante una deformación del álgebra.

La mecánica cuántica trabaja con operadores. Éstos no conmutan, por lo que el álgebra de la teoría cuántica es no conmutativa. La deformación del álgebra se realiza mediante el producto estrella, con este se logra la no conmutatividad que es requisito para tener una teoría cuántica, cuando se toma el límite de  $\hbar \rightarrow 0$  (ya que éste es el parámetro de la cuantización), recuperamos la mecánica clásica. El formalismo de cuantización por deformación hace uso extenso del producto estrella.

Hay distintos productos estrella los cuales son  $c$ -equivalentes mediante un operador diferencial. Entre estos los productos más conocidos son: el normal, estándar, Moyal y de Fedosov.

En este trabajo se han revisado los sistemas físicos más estudiados por ambos formalismos: partícula libre, pozo de potencial cuadrado infinito y oscilador armónico simple. En todos los casos el formalismo por deformación, recuperó los resultados ya conocidos y obtenidos mediante la ecuación de Schrödinger.

En el caso de la partícula libre, el formalismo de Schrödinger es más sencillo que el de la deformación y en el caso del oscilador, los distintos resultados son más sencillos de obtener en el caso del formalismo de la deformación.

Una diferencia entre la cuantización canónica y la cuantización por deformación en el oscilador armónico es que en la primera, para obtener la energía de punto cero y las energías de los distintos niveles, se resuelve una ecuación diferencial (dos veces), con distintas condiciones iniciales, en el caso de la segunda, al obtener la energía del punto cero, se aplica un operador diferencial con el

que se obtienen las energías para los distintos niveles.

Los sistemas anteriormente descritos tienen asociada un álgebra deformada en el formalismo de cuantización por deformación, esto por el producto estrella.

El producto estrella de Fedosov es el más general en el caso simpléctico, esto provoca que no haya una forma establecida para el mismo. Este producto permite analizar situaciones donde el espacio-fase no es necesariamente  $\mathbb{R}^{2n}$ , sino una variedad simpléctica en general.

En particular es posible analizar espacios-tiempo con curvatura constante, como de Sitter y anti-de Sitter mediante este formalismo, como en el caso de aplicación. En este enfoque, la información sobre la curvatura del espacio-tiempo queda incorporada al realizar la cuantización del sistema.

El formalismo de la cuantización por deformación puede ser la alternativa para obtener resultados en menor tiempo y que se sabe, serán resultados correctos, en concoordancia con la situación física que generó la curiosidad y por ende, el estudio de éste.

En términos generales, el formalismo de la cuantización por deformación no sólo puede ocuparse en problemas conocidos donde se conozca o analice un sistema físico mediante la cuantización canónica, si no, que se ocupe en problemas donde, por la ecuación diferencial que se obtenga, sea muy complicado obtener un resultado o sea muy tardado, en caso de recurrir a los métodos numéricos o de simulación.

Un tema que puede ser desarrollado en este sentido concierne al análisis del péndulo cuántico. Se espera obtener en primera instancia los resultados conocidos por la cuantización canónica y también obtener otros resultados de relevancia física que no se conozcan o sean muy complejos los cálculos mediante otro formalismo.

Hay otros espacios donde también el producto estrella es de utilidad. En estos se requiere tomar en cuenta condiciones noholonómicas para tener resultados correctos, ya que hay distintas situaciones o escenarios donde se tienen que cumplir con un cierto número de restricciones. Además del producto estrella para realizar deformaciones, hay otra forma conocida como  $q$ -deformación basada en grupos cuánticos deformados. Esto nos indica que es posible encontrar distintas formas de realizar la deformación y que el producto estrella no es la única forma. La deformación nos permite trabajar con las variables  $x$  y  $p$  de manera simultánea; ya sea considerándolas variables canónicas (producto  $\star$ ) u operadores ( $q$ -deformación), con lo que los cálculos se simplifican.

# Bibliografía

- [1] Planck M., *Ann. Phys.*, **4**, 553 (1901).
- [2] Einstein A., *Ann. Phys.*, volume 322, issue 8 (1905).
- [3] Einstein A., “Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems”, *Physikalische Zeitschrift*, 10, p. 185-93, (1909a).
- [4] Heisenberg W., *Z. Phys.*, 33 879893 (1925).
- [5] Schrödinger E., “Quantisierung als Eigenwertproblem”, *Ann. Phys.*, 384 (1926): 361376. doi:10.1002/andp.19263840404
- [6] Wigner E., “On the quantum correction for thermodynamic equilibrium”, *Phys. Rev.*, **40**, 749-759 (1932).
- [7] Groenewold H.J., *Physica*, **12** 405 (1946).
- [8] Moyal J.E., *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **45** 99 (1949).
- [9] Zachos C., arXiv:hep-th/0110114v3 9 Jan 2002.
- [10] Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A., Sternheimer D., *Letters in Mathematical Physics*, **1** 521-530 (1977).
- [11] Bayen F., Flato M., Fronsdal C., Lichnerowicz A., Sternheimer D., *Annals of Physics*, **111**,61-110 (1978).
- [12] Peña L., *Introducción a la mecánica cuántica*, 3<sup>a</sup> ed. México, FCE, UNAM, 2006.
- [13] Broglie L., “Recherches sur la théorie des Quanta”, tesis, Paris, 1924.
- [14] Kryukov S., Walton M.A., *Ann. Phys.*, 317 474-491 (2005).
- [15] Kryukov S., Walton M.A., *Can. J. Phys.*, 84 557-563 (2006).
- [16] Case W.B., *Am. J. Phys.*, **76** (10), October 2008.
- [17] Zachos C. K., Fairlie D. B., Curtright T. L., *Quantum mechanics in phase space*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2005.
- [18] Tillman P., *J. Phys. A: Math. Theor.*, **40** 7017-7023 (2007).

- [19] Hirshfeld A., Henselder P., *Am. J. Phys.*, **70** 537 (2002).
- [20] Lorek A., Ruffing A., Wess J., *Z. Phys. C*, **74** 369-377 (1997).
- [21] Khosropour B., Eghbali M., Ghorbanali S., *Gen Relativ Gravit*, **50:25** (2018).
- [22] Chung W. S., *J. Korean Phys. Society*, **70-6** 557-560 (2017).
- [23] Dito G., Turrubiates F., *Phys. Lett.*, **A352**, 309-316 (2006)
- [24] Hirshfeld A., Henselder P., *Annals of Physics*, **302**, 59-77 (2002)
- [25] Fedosov B.V., *J. Differential Geometry*, **40** 213-238 (1994).
- [26] Torres del Castillo G.F., *Revista Mexicana de Física*, **35** No. 2 301-318 (1989).
- [27] Tillman P.C., Sparling G.A.J., arXiv:gr-qc/0603017v2 (2007)
- [28] Fedosov B., *Deformation quantization and index theory* 1 ed. Berlin, Akad., Verl., 1996 (Mathematical topics, Vol. 9)
- [29] Chern S.S., Chen W.H., Lam K.S., *Lectures on Differential Geometry*, World Scientific 1998.
- [30] Castro C., “Gravity in curved phase-spaces, Finsler geometry and two-times physics”, *Int. J. Mod. Phys. A*, **27**, 12 (2012).
- [31] Anastasiei M., Vacaru S. I., *J. Math. Phys.*, **50** (2009).



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00061  
Matricula: 2142800308

PRODUCTOS ESTRELLA EN EL FORMALISMO DE LA CUANTIZACIÓN POR DEFORMACIÓN

En la Ciudad de México, se presentaron a las 17:00 horas del día 12 del mes de abril del año 2018 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. ECHEHARD ERWIN WILLI MIELKE  
DR. FRANCISCO JAVIER TURRUBIATES SALDIVAR  
DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA



Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)  
DE: JOSE ANDRES TORNERO SALDAÑA

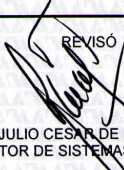
y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.





JOSE ANDRES TORNERO SALDAÑA  
ALUMNO




REVISÓ  
LIC. JULIO CESAR DE LARA SASSI  
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI



DR. JOSE GILBERTO CORDOBA HERRERA

PRESIDENTE



DR. ECHEHARD ERWIN WILLI MIELKE

VOCAL



DR. FRANCISCO JAVIER TURRUBIATES SALDIVAR

SECRETARIO



DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA