



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

***“RADIACIÓN HAWKING EN ESPACIOS-TIEMPOS
NO CONMUTATIVOS”***

Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias (Física)

Presenta: Fís. José Alberto Maya Pérez

Asesor: Dr. Marco Antonio Maceda Santamaría

RESUMEN

En esta tesis se abordará el problema de la radiación de agujeros negros, conocida como *Radiación Hawking*. Clásicamente los agujeros negros absorben toda la materia que atraviesa el horizonte de eventos y nada puede escapar. No obstante, Hawking demostró mediante un análisis cuántico que esto no sucede, existe una producción de partículas que emerge del horizonte de eventos y por lo tanto es posible asociar una temperatura dada por $T = \frac{\kappa}{2\pi}$ donde κ representa la gravedad de superficie. Hawking realizó este hallazgo usando la solución de Schwarzschild, pero es posible generalizarlo a otro tipo de soluciones a las ecuaciones de Einstein [1] .

En este trabajo se calculará la temperatura de Hawking utilizando la relación existente con la temperatura de Unruh para lo cual será necesario calcular los coeficientes de Bogoliubov para poder obtener el número de partículas producidas. Posteriormente, se realizará el cálculo de T mediante otros caminos: Usando el efecto túnel como justificación y después escribiendo la temperatura en función de un periodo; esta relación se muestra en la condición KMS [2] y la integral de Feynman [3] .Cualitativamente resulta interesante que para relacionar temperatura y periodo es necesario utilizar tiempo imaginario a través de la rotación de Wick [4] como un artilugio matemático que facilita muchos cálculos.

Finalmente, se estudiará la producción de partículas para soluciones en espacios-tiempos clásicos y no conmutativos. A partir del espectro de emisión y la temperatura de Hawking será posible analizar y etiquetar un agujero negro no conmutativo respecto a uno clásico.

AGRADECIMIENTOS

Quiero manifestar mi agradecimiento a las personas que han hecho posible este trabajo. A mi asesor el Dr. Marco Maceda, a quien le tengo un profundo aprecio y una gran admiración por su labor como profesor, investigador y ser humano, pues su guía fue fundamental en mi formación como físico; a mi mamá Isabel Pérez, quien es un ejemplo de superación y siempre vio por mí desde que era pequeño, además de que es y seguirá siendo mi principal inspiración para seguir adelante a pesar de las adversidades; a mi padre y hermanos por su apoyo incondicional; a mis amigos del Posgrado en Física por haber hecho tan amena mi estancia como estudiante; a mis Profesores del Departamento de Física de la UAM por sus enseñanzas y al CONACYT por la beca que me permitió financiar mis estudios.

Finalmente, puedo decir que fui muy afortunado de haber tenido la oportunidad de rodearme con personas tan valiosas, sin las cuales no podría haber llegado hasta aquí.

Índice

1. INTRODUCCIÓN	5
2. RELATIVIDAD GENERAL	8
2.1. Principio de equivalencia	8
2.2. Ecuaciones de Einstein	11
2.3. Solución de Schwarzschild	15
2.4. Solución de Reissner-Nordström	19
2.5. Coordenadas de Kruskal-Szekeres	25
2.6. Gravedad de superficie	28
2.7. Diagramas de Penrose-Carter	30
2.8. Vectores de Killing	34
3. TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS	37
3.1. Teoría Cuántica de Campos en espacio minkowskiano	37
3.1.1. Campo escalar de Klein-Gordon	37
3.1.2. Cuantización	38
3.1.3. Energía-momento	40
3.2. Teoría Cuántica de Campos en espacio curvo	43
3.2.1. Generalización a espacio curvo	43
3.2.2. Transformaciones de Bogoliubov	45
3.3. Rotación de Wick	47
3.4. Integral de Feynman y función de partición	48
3.5. Condición de Kubo-Martin-Schwinger	50
4. GEOMETRÍA NO CONMUTATIVA	52
4.1. Espacios-tiempos no conmutativos	52
4.2. Agujeros negros no conmutativos	54
4.2.1. Solución de Schwarzschild no conmutativa	54
4.2.2. Solución de Reissner-Nordström no conmutativa	59
5. RADIACIÓN HAWKING	62
5.1. Antecedentes	62
5.2. Efecto Unruh	63
5.3. Efecto túnel	67
5.4. Formulación euclidiana	70
6. RADIACIÓN HAWKING NO CONMUTATIVA	74
6.1. Modelo de espejo en movimiento	74
6.2. Espectro de partículas clásico	77
6.3. Espectro de partículas no conmutativo	83
7. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS	92

1. INTRODUCCIÓN

La física actualmente tiene diversos problemas abiertos, a nivel teórico existe una incompatibilidad entre la Mecánica Cuántica y la gravedad, cuya teoría mejor aceptada es la Relatividad General. Sin embargo, existen avances al introducir aspectos cuánticos a la gravitación y uno de los resultados mejor conocidos es la radiación de Hawking, la cual predice que un agujero negro es capaz de emitir partículas, que es un fenómeno clásicamente prohibido [5] .

En este trabajo se estudiará el fenómeno de la radiación de Hawking comenzando por repasar conceptos de Relatividad General, que es la teoría encargada del estudio de los agujeros negros. Posteriormente se hará una revisión a conceptos de la Teoría Cuántica de Campos, la cual permite analizar la emisión de partículas asociada a un agujero negro desde el punto de vista de la física moderna; luego se presentarán las ideas principales de la Geometría No Conmutativa y por último se hablará de radiación de agujeros negros, abordando las formas más representativas de mostrar el fenómeno de la radiación Hawking en soluciones tipo Einstein-Maxwell. En ese orden, se tendrán listos los ingredientes para el propósito final de esta tesis, estudiar la radiación Hawking para espacios-tiempos no conmutativos.

Los objetos de análisis son los llamados *agujeros negros* [6] ,los cuales consisten en cuerpos que concentran una gran cantidad de energía en una región del espacio relativamente pequeña. Estos surgen como resultado del colapso gravitacional de estrellas y sus principales características son poseer al menos un horizonte de eventos y un campo gravitacional lo suficientemente intenso para que nada escape de ellos; sin embargo, justo la radiación de Hawking es una excepción a esta última afirmación. Los agujeros negros eran hasta hace pocos años una predicción teórica no confirmada, hoy se sabe que existen gracias a observaciones astronómicas, mismas que revelan que es común encontrarlos en el centro de la mayoría de galaxias [7] y que la Vía Láctea no es la excepción [8] . Una forma de estudiarlos es mediante la Relatividad General, puesto que las ecuaciones de Einstein predijeron su existencia aproximadamente 100 años antes de ser descubiertos [6] . Una vez que se obtiene una solución de agujero negro es posible conocer sus propiedades a partir de la métrica asociada, en particular aquellas asociadas con su termodinámica.

En 1972 se demostró que los agujeros negros poseen una entropía proporcional al área del horizonte de eventos y de esta forma estos objetos deberían emitir radiación [9] . Hawking dilucidó este problema en 1975 mediante el estudio de la radiación de un agujero negro tipo Schwarzschild haciendo uso de la teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo [5] . A grandes rasgos, Hawking introdujo el campo sin masa asociado a la ecuación de Klein Gordon expandido como combinación lineal de operadores de creación y aniquilación junto con las soluciones ortonormales de la ecuación de onda para cada región del agujero negro. Adicionalmente, definió un vacío para las distintas regiones pues en general el vacío no es el mismo para todos los observadores. Posteriormente, para hallar la producción de partículas en la región del futuro infinito de curvas tipo luz $\mathcal{J}^+$, obtuvo los coeficientes de Bogoliubov para dicha región; estos coeficientes se escribieron en términos de los

modos asociados a la ecuación de Klein-Gordon, los cuales se denotan por p . Aquí, el trabajo consistió en desarrollar los coeficientes de Bogoliubov como función de p y para ello realizó el análisis de óptica geométrica en el diagrama de Penrose, de este modo, p fue reescrito y los coeficientes de Bogoliubov quedaron determinados. Finalmente, con ayuda de los coeficientes de Bogoliubov calculó el valor de expectación del operador número, cuyo resultado indicó una distribución con temperatura no nula e igual a $T = \frac{\hbar}{2\pi}$. Es común hallar este resultado en la forma $T = \frac{1}{8\pi M}$ ya que son equivalentes entre sí si consideramos la gravedad de superficie de la solución de Schwarzschild. Nótese que para que T sea perceptible, M debe ser suficientemente pequeña, lo que a su vez implica que T es detectable sólo en agujeros negros con tiempo de vida efímero, pues $t_{vida} \sim M^3$; esto explica en buena medida por qué no se ha podido detectar radiación Hawking [10].

Se mostrará que hay más formas de llegar al resultado que Hawking encontró. La manera natural es mediante el efecto Unruh, ya que resulta intuitivo el hecho de trabajar en espacio plano (minkowskiano) ya que es relativamente simple hacer cálculos en ausencia de gravedad, ni siquiera se debe hacer alusión a los principios matemáticos de la Relatividad General y por lo tanto tampoco hace falta hablar de agujeros negros, ¿cómo es esto posible? Como se verá, calcular propiedades no triviales de los agujeros negros sin siquiera mencionarlos y desde luego, sin considerar espacios-tiempos curvos es posible con ayuda del principio de equivalencia y algo de teoría cuántica de campos; otra manera será con ayuda de un fenómeno bien conocido en mecánica cuántica, el efecto tunel. El razonamiento es realizar una analogía entre una barrera de potencial y el horizonte de eventos para luego examinar la dinámica de la partícula emitida con ayuda de la acción y la tasa de emisión. Una manera más será con la periodicidad de sistemas euclidianos; la idea detrás es que asumiendo que los agujeros negros son objetos térmicos, estos deben tener periodicidad en un tiempo euclidiano, lo cual permite calcular la temperatura de Hawking de forma mucho más simple, sin embargo, el precio a pagar es hacer una rotación de Wick para introducir tiempo imaginario, cuestión que conceptualmente aún está en debate si tiene significado físico [11] [12]. Utilizando la rotación de Wick, sólo será necesario analizar una región en la vecindad del radio del horizonte para verificar que si se desea evitar singularidades cónicas, se deberá tener un sistema periódico y a partir de esta idea se encontrará la temperatura de Hawking de forma matemáticamente sencilla pues involucrará muy pocos cálculos. Por supuesto, en los últimos años han surgido más caminos para calcular la temperatura de Hawking [13]; más aún, algunas de estas ideas pueden aplicarse a soluciones gravitacionales más complicadas que incluyen otros parámetros como carga eléctrica y momento angular además de la masa [1]. De hecho el *teorema de no pelo* [14] permite describir un agujero negro únicamente por estos tres parámetros.

La solución de Schwarzschild será el punto de partida en este trabajo, ya que es el modelo más simple para describir el campo gravitacional de cuerpos masivos tales como los agujeros negros, pero, si se desean estudiar objetos más realistas, será necesario introducir más parámetros. En este caso, el parámetro adicional estará asociado a una contribución de la no conmutatividad, la cual consiste en una visión más actual de la física que postula que el espacio-tiempo satisface un principio de incertidumbre; esto hace una conexión directa con la Mecánica Cuántica e intenta dar una descripción más robusta del espacio-tiempo, en particular de los agujeros negros. Resulta interesante que bajo estas ideas de no conmutatividad es posible

eliminar las singularidades existentes en la teoría clásica. No obstante aún queda mucho camino por estudiar, no hay que olvidar que una de las grandes deudas de la física moderna es lograr una teoría cuántica de la gravedad [15] .

En este trabajo se analizará la radiación Hawking o radiación de agujeros negros, primero para los casos clásicos y después se abordarán los casos no conmutativos, mismos que satisfacen una nueva forma matemática para las funciones métricas debido a la implementación de la no conmutatividad. Finalmente se estudiará cómo influyen los parámetros asociados a carga eléctrica y no conmutatividad en la producción de partículas asociada a la radiación en cada caso usando el llamado modelo de espejo en movimiento. Esto podría permitir entender más a fondo la naturaleza de los agujeros negros, los cuales históricamente han sido uno de los objetos que más interés despierta en la comunidad científica, pero que además han desnudado muchas de las limitaciones de la física; su estudio bajo nuevos esquemas es sin duda una tarea fascinante y prometedora.

2. RELATIVIDAD GENERAL

2.1. Principio de equivalencia

En la época de Aristóteles se pensaba que los objetos más pesados caen antes que los menos pesados, lo cual fue desmentido por Galileo. Él dejó caer objetos de diferentes masas desde lo alto de la torre de Pisa, observando que sin importar el material de cada objeto estos cayeron al mismo tiempo. Años después, Newton midió el periodo de un péndulo utilizando diferentes masas, sin encontrar diferencia alguna. Se debe tener en cuenta que en aquellos tiempos (siglo XVII) las limitaciones en los instrumentos de medición requerían compensarse con ingenio.

Una descripción matemática de que los objetos caen al mismo tiempo independientemente de su masa fue proporcionada por Newton, mediante sus leyes de movimiento. Si se considera la ecuación de movimiento de un cuerpo con masa constante en caída libre, de la *2a ley de Newton* se tiene $m_i \vec{a} = m_g \vec{g} \Rightarrow a = \frac{m_g}{m_i} g$, donde a es la aceleración que sufre el cuerpo, g la aceleración de la gravedad, m_i la masa inercial (define cómo la masa se resiste a ser acelerada), y finalmente m_g es la masa gravitacional (encargada de la atracción gravitacional entre cuerpos masivos, es el análogo de la carga eléctrica, responsable de las interacciones eléctricas). Para que se cumpliera lo observado por Galileo y Newton se debía satisfacer que $\frac{m_g}{m_i} = 1$, de no cumplirse esto, la aceleración de la gravedad no sería la misma para todo tipo de materia.

En el siglo XIX, Eötvös diseñó un experimento para medir las diferencias entre masa inercial y gravitacional, el cual consistía en una balanza de torsión inspirada en la *balanza de Cavendish*.

La torca hallada para este sistema fue de $T = l_A g'_s m_{gA} (\frac{m_{iA}}{m_{gA}} - \frac{m_{iB}}{m_{gB}})$. De haber existido diferencia entre las masas inerciales y gravitacionales de cada cuerpo, entonces $T \neq 0$ y por lo tanto el cable se habría torcido. No se detectó giro alguno. La precisión de este experimento permitió concluir que las diferencias entre masa inercial y gravitacional fueron menores al orden de 10^{-9} , lo cual para fines prácticos es despreciable. En tiempos más recientes se han hecho nuevos experimentos para medir diferencias entre masa inercial y gravitacional con mayor precisión [17].

Por lo tanto, se puede afirmar que la masa inercial es igual a la masa gravitacional, lo cual es conocido como el *principio de equivalencia débil* [18]. De cumplirse esto, entonces para el cuerpo en caída libre, la 2a ley de Newton queda como $a = -g$. ¿Esto es siempre cierto?

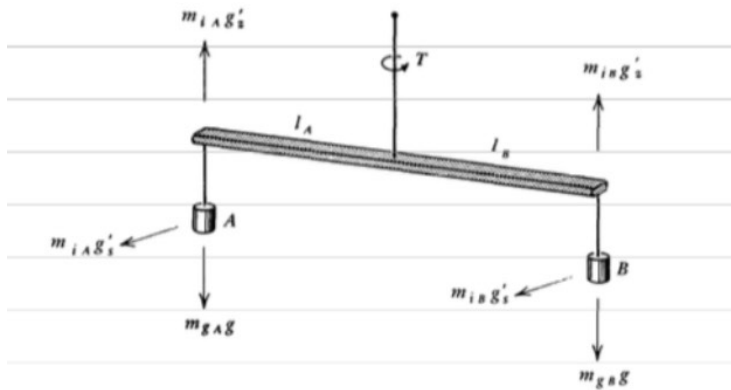


Figura 1: La imagen ilustra la balanza de Cavendish [16] . Aquí g'_z y g'_s son las componentes vertical y horizontal de la aceleración centrípeta debida a la rotación de la tierra, respectivamente.

Dado que $a = -g$, la aceleración que experimenta el cuerpo es igual a la aceleración debida al campo gravitacional pero en sentido opuesto, esto se puede abordar en los siguientes dos casos:

I.-Sea un observador situado en el interior de un cohete, sujeto a un campo gravitacional constante de magnitud $g = a$ y dirigido hacia abajo.

II.-Sea otro observador que también está situado en el interior de un cohete, pero que posee aceleración constante, de magnitud a y dirigida hacia arriba en sentido opuesto a g (aquí no hay campo gravitacional).

¿Los observadores verían alguna diferencia entre sí? La respuesta es no. En general es imposible distinguir entre el marco I y II mediante cualquier experimento físico dentro de la nave que no involucre mirar al exterior. Por lo tanto, lo que ambos observadores perciben es como si estuvieran en un campo gravitacional común, desde luego, esto es válido localmente.

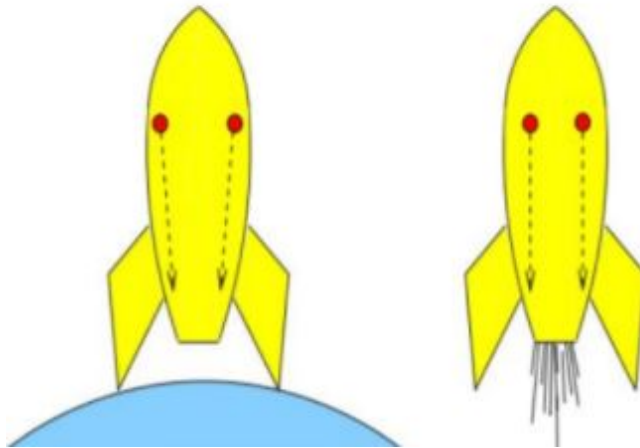


Figura 2: La imagen de la derecha ilustra lo que ocurriría con dos cuerpos según el caso II), mientras que la imagen de la izquierda ilustra lo que ocurriría según el caso I) pero si ahora se considerara una región grande (no local) y se dejaran caer los cuerpos. Lo que pasaría al eliminar la localidad en el caso I) es que estos cuerpos no seguirían un movimiento rectilíneo hasta tocar el suelo (a diferencia de cuando se consideraba una región local), ya que serían atraídos hacia el centro de la fuente de campo gravitacional (puede ser el planeta Tierra) y las líneas de campo convergen allí. Dicho de otra forma, la gravedad no hace que los objetos caigan hacia abajo, sino que caen hacia el centro de masa de la fuente de campo gravitacional y esto es apreciable considerando regiones grandes.

Las ideas presentadas permiten enunciar el llamado *principio de equivalencia fuerte*, el cual dice que no existe distinción observable entre los efectos locales de la gravedad y la aceleración. Einstein basó su teoría de la Relatividad General en esta idea.

De acuerdo al principio de equivalencia, un sistema de referencia inercial siempre puede imitarse con otro sistema en caída libre con campo gravitacional constante. Esto es posible ya que en el marco de referencia de un observador que sufre caída libre en un campo gravitacional constante, al dejar caer un objeto este se ve en reposo; es decir, en caída libre se anulan los efectos de la gravedad, lo que equivale a tener un observador con $a = 0$ (inercial). Si se desea una teoría de gravedad que sea compatible con Relatividad Especial entonces la compatibilidad debería recuperar localmente el espacio-tiempo minkowskiano. Por lo tanto, dado un observador, siempre puede construirse un sistema de coordenadas en el que este sea localmente minkowskiano. Esta propiedad del espacio-tiempo es algo que en geometría diferencial se conoce como *variedad Lorentziana*; así, la condición de localidad al hacerse compatible con Relatividad Especial exige una naturaleza geométrica de la gravedad ya que implica tener localmente espacios-tiempos minkowskianos [19] .

2.2. Ecuaciones de Einstein

El objetivo es construir unas ecuaciones que describan la interacción gravitacional a partir de la curvatura del espacio-tiempo, esto se puede hacer considerando un principio variacional y una acción apropiada. En Relatividad General dicha acción gravitacional viene dada por la *acción de Einstein-Hilbert* [20] :

$$S_{EH} = \frac{1}{2k} \int R \sqrt{-g} d^4x \quad (2.1)$$

Donde R es el escalar de curvatura y g el determinante del tensor métrico. Aco-
plada con gravedad, la acción se escribe como:

$$S_{EH} = \int \left(\frac{1}{2k} R + L_M \right) \sqrt{-g} d^4x \quad (2.2)$$

Los términos del integrando son la densidad lagrangiana de Einstein y de mate-
ria, respectivamente, siendo k una constante.

Lo que se hará para calcular las ecuaciones de Einstein será usar el principio de mínima acción, efectuando una variación sobre la acción (2.2) respecto al ten-
sor métrico, pues se desean ecuaciones dependientes de este parámetro que logren describir el campo gravitacional. Esto será una analogía de lo hecho en mecánica clásica para obtener las *ecuaciones de Euler-Lagrange* [21] . El *principio de mínima acción* establece: $\delta S = 0$

Aplicándolo en (2.2):

$$\delta S_{RG} = \int \left(\frac{1}{2k} \delta(R \sqrt{-g}) + \delta(L_M \sqrt{-g}) \right) d^4x = 0 \quad (2.3)$$

Multiplcando y dividiendo (2.3) por $\sqrt{-g} \delta g^{ab}$:

$$\int \left(\frac{1}{2k} \left(\frac{\delta R}{\delta g^{ab}} + \frac{R \delta \sqrt{-g}}{\sqrt{-g} \delta g^{ab}} \right) + \frac{\delta(L_M \sqrt{-g})}{\sqrt{-g} \delta g^{ab}} \right) \sqrt{-g} \delta g^{ab} d^4x = 0 \quad (2.4)$$

Para que (2.4) se cumpla el término entre corchetes debe ser nulo, así:

$$\frac{\delta R}{\delta g^{ab}} + \frac{R \delta \sqrt{-g}}{\sqrt{-g} \delta g^{ab}} = -2k \frac{\delta(L_M \sqrt{-g})}{\sqrt{-g} \delta g^{ab}} \quad (2.5)$$

Vemos que el lado derecho de (2.5) es k veces un tensor covariante de rango 2, el cual podemos definir como T_{ab} :

$$kT_{ab} := k \left(-2 \frac{\delta(L_M \sqrt{-g})}{\sqrt{-g} \delta g^{ab}} \right) \quad (2.6)$$

Haciendo la variación por *regla de Leibniz* y usando que $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} (g_{ab} \delta g^{ab})$, se escribe T_{ab} , el cual es conocido como *tensor de energía momento* [22] :

$$T_{ab} = L_M g_{ab} - 2 \frac{\delta L_M}{\delta g^{ab}} \quad (2.7)$$

Ya se analizó el lado derecho de (2.5), ¿qué ocurre con el lado izquierdo?

Para ello se debe calcular la variación del *escalar de curvatura* [23] δR . Hay que tomar en cuenta que R es una contracción del *tensor de Ricci* [23] con la métrica y el tensor de Ricci a su vez es una contracción del *tensor de Riemann* [23] . Por lo tanto, para calcular la variación del escalar de curvatura primero hay que hallar la variación del tensor de Riemann y de Ricci.

El tensor de Riemann es:

$$R^c_{dab} := \partial_a \Gamma^c_{bd} - \partial_b \Gamma^c_{ad} + \Gamma^c_{ae} \Gamma^e_{bd} - \Gamma^c_{be} \Gamma^e_{ad} \quad (2.8)$$

$$\Rightarrow \delta R^c_{dab} = (\delta \Gamma^c_{bd})_{,a} - (\delta \Gamma^c_{ad})_{,b} + \Gamma^c_{ae} \delta \Gamma^e_{bd} + \Gamma^e_{bd} \delta \Gamma^c_{ae} - \Gamma^c_{be} \delta \Gamma^e_{ad} - \Gamma^e_{ad} \delta \Gamma^c_{be}, \quad (2.9)$$

con:

$$\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} := \frac{1}{2} g^{\sigma\mu} (g_{\beta\mu,\alpha} + g_{\mu\alpha,\beta} - g_{\alpha\beta,\mu}) \quad (2.10)$$

Estos coeficientes de la forma $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ que aparecen en (2.9) se conocen como *símbolos de Christoffel* [22] . Puede mostrarse que dichos símbolos no son un tensor, dado que no se transforman como tal, sin embargo, resulta que la variación de un símbolo de Christoffel sí es tensor, de manera que, la derivada covariante asociada a los primeros dos términos de (2.9) es:

$$(\delta \Gamma^c_{bd})_{;a} = (\delta \Gamma^c_{bd})_{,a} + \Gamma^c_{ea} \delta \Gamma^e_{bd} - \Gamma^e_{ba} \delta \Gamma^c_{ed} - \Gamma^e_{da} \delta \Gamma^c_{be} \quad (2.11)$$

$$(\delta\Gamma_{ad}^c)_{;b} = (\delta\Gamma_{ad}^c)_{,b} + \Gamma_{eb}^c \delta\Gamma_{ad}^e - \Gamma_{ab}^e \delta\Gamma_{ed}^c - \Gamma_{db}^e \delta\Gamma_{ae}^c \quad (2.12)$$

Sustituyendo (2.11) y (2.12) en (2.9) y usando la simetría de los símbolos de Christoffel se llega a:

$$\delta R_{dab}^c = (\delta\Gamma_{bd}^c)_{;a} - (\delta\Gamma_{ad}^c)_{;b} \quad (2.13)$$

La expresión (2.13) es la variación del tensor de Riemann. Haciendo la contracción $c = a$ se obtiene la variación del tensor de Ricci:

$$\delta R_{dcb}^c = \delta R_{db} = (\delta\Gamma_{bd}^c)_{;c} - (\delta\Gamma_{cd}^c)_{;b} \quad (2.14)$$

Por último, el escalar de curvatura $R := g^{db} R_{db}$:

$$\Rightarrow \delta R = \delta(g^{db} R_{db}) = (g^{ab} \delta\Gamma_{ba}^d - g^{ad} \delta\Gamma_{ca}^c)_{;d} + R_{ab} \delta g^{ab} \quad (2.15)$$

El término entre paréntesis de (2.15) es la derivada covariante de cierto tensor contravariante de rango 1 (vector) $V^d := (g^{ab} \delta\Gamma_{ba}^d - g^{ad} \delta\Gamma_{ca}^c)_{;d}$ de modo que:

$$\Rightarrow \delta R = (V^d)_{;d} + R_{ab} \delta g^{ab} \quad (2.16)$$

Sustituyendo (2.16) en (2.4):

$$\int \left[\frac{1}{2k} \left(\frac{(V^d)_{;d} + R_{ab} \delta g^{ab}}{\delta g^{ab}} + \frac{R \delta \sqrt{-g}}{\sqrt{-g} \delta g^{ab}} \right) + \frac{\delta(L_M \sqrt{-g})}{\sqrt{-g} \delta g^{ab}} \right] \sqrt{-g} \delta g^{ab} d^4 x = 0 \quad (2.17)$$

que conduce a:

$$\frac{1}{2k} \left(\int (\sqrt{-g} V^d)_{;d} d^4 x + \int \sqrt{-g} R_{ab} \delta g^{ab} d^4 x + \int R \delta \sqrt{-g} d^4 x \right) + \int \frac{\delta(L_M \sqrt{-g})}{\sqrt{-g} \delta g^{ab}} \sqrt{-g} \delta g^{ab} d^4 x = 0 \quad (2.18)$$

De (2.6) y la identidad $\delta \sqrt{-g} = -\frac{1}{2} \sqrt{-g} (g_{ab} \delta g^{ab})$, (2.18) se reescribe como:

$$\frac{1}{2k} \left(\int (\sqrt{-g} V^d)_{;d} d^4 x \right) + \int \sqrt{-g} \delta g^{ab} d^4 x \left(\frac{R_{ab}}{2k} - \frac{R g_{ab}}{4k} - \frac{T_{ab}}{2} \right) = 0 \quad (2.19)$$

La primera integral de (2.19) es nula dado que al aplicar el *teorema de Gauss generalizado* [24] $\int_u (X^d)_{;d} dv = \int_{\partial u} (X^a) d\sigma_a$, $X := \sqrt{-g} V^d$, la frontera ∂u no está delimitada a alguna hipersuperficie de modo que esto implica evaluar en el infinito y allí el infinito temporal no posee campo mientras que el infinito espacial tiene campo nulo a medida que $r \rightarrow \infty$.

Por lo tanto (2.19) queda como:

$$\int_u \sqrt{-g} \delta g^{ab} d^4 x \left(\frac{R_{ab}}{2k} - \frac{R g_{ab}}{4k} - \frac{1}{2} T_{ab} \right) = 0 \quad (2.20)$$

lo cual se cumple si el integrando es nulo, de este modo se escriben las *ecuaciones de Einstein*:

$$R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = k T_{ab} \quad (2.21)$$

también conocidas como ecuaciones de campo, (2.21) se trata de un conjunto de ecuaciones diferenciales parciales no lineales que son las ecuaciones más importantes en Relatividad General puesto que describen la interacción de la gravedad debido a la presencia de materia. Desde luego, en el límite de campos débiles (2.21) se reduce a la *ecuación de Poisson* dada por la teoría newtoniana.

Nótese que el lado izquierdo de (2.21) contiene únicamente información geométrica (llamado *tensor de Einstein*), mientras que en el lado derecho el tensor de energía-momento posee información asociada a la materia. Esto indica que la presencia de energía puede curvar el espacio-tiempo. Más aún, esto es consistente con el *principio de Mach*, el cual establece que la distribución de materia determina la geometría [16].

Debido a que el lado izquierdo de (2.21) depende de R_{ab} y R y que estos pueden escribirse en términos del tensor métrico g_{ab} , hallar soluciones a (2.21) es encontrar la métrica $ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b$ que satisface las ecuaciones de Einstein para un T_{ab} dado.

2.3. Solución de Schwarzschild

Se trata de la primera solución a (2.21) en espacio-tiempo curvo, la cual fue hallada por Schwarzschild (1916). Describe el espacio-tiempo asociado a una fuente masiva de campo gravitacional, estática e invariante bajo inversión temporal, en vacío y con simetría esférica [25]. Las primeras dos condiciones implican que $g_{ab,0} = 0$, $T_{ab} = 0 = \Lambda$ (Λ es la constante cosmológica), respectivamente, mientras que la última condición implica considerar coordenadas esféricas. Con esta última condición en mente, conviene partir considerando la *métrica de Minkowski* [26], que viene dada por:

$$ds^2 = dt^2 - dR^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \quad (2.22)$$

En coordenadas esféricas se tiene:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

Las diferenciales son:

$$dx = \sin \phi \cos \theta d\rho + \rho \cos \phi \cos \theta d\phi - \rho \cos \phi \sin \theta d\theta$$

$$dy = \sin \phi \sin \theta d\rho + \rho \cos \phi \sin \theta d\phi + \rho \cos \phi \cos \theta d\theta$$

$$dz = \cos \phi d\rho - \rho \sin \phi d\phi$$

$$\Rightarrow ds^2 = dt^2 - d\rho^2 - \rho^2 d\Omega^2 \quad (2.23)$$

$$\text{donde } d\Omega^2 = \sin^2 \phi d\theta^2 + d\phi^2$$

La métrica (2.23) es minkowskiana. Para introducir un espacio-tiempo curvo se debe aceptar que los coeficientes de la métrica en general son funciones arbitrarias dependientes de todas las coordenadas y que a diferencia de (2.23) el tensor de Riemann asociado es no nulo, de modo que existe curvatura. Particularmente, dadas las condiciones de simetría esférica, las funciones que aparecen como coeficientes métricos no pueden tener dependencia angular y ya que se considera una fuente estática, no debe haber dependencia temporal; de este modo las funciones sólo pueden tener dependencia radial. Así, se reescribe (2.23) para este caso:

$$ds^2 = X(\rho)dt^2 - Y(\rho)d\rho^2 - Z(\rho)\rho^2 d\Omega^2 \quad (2.24)$$

Haciendo los siguientes cambios de variable:

$$r := \rho \sqrt{Z(\rho)} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{r}{\rho}\right)^2 = Z(\rho) \quad (2.25)$$

Si se define:

$$\alpha(r) := X(\rho(r)) \quad (2.26)$$

Se obtienen las siguientes relaciones:

$$\beta(r) := \frac{Y(\rho(r))}{\left(\frac{dr}{d\rho}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad Y(\rho(r)) = \left(\frac{dr}{d\rho}\right)^2 \beta(r) \quad (2.27)$$

Tomando en cuenta que $d\rho^2 = \left(\frac{d\rho}{dr}\right)^2 dr^2$ y sustituyendo (2.25)-(2.27) en (2.24), la métrica (2.24) se reescribe como:

$$ds^2 = \alpha(r)dt^2 - \beta(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.28)$$

Usando el siguiente Ansatz:

$$\alpha(r) = e^{A(r)}$$

$$\beta(r) = e^{B(r)}$$

La métrica queda escrita como:

$$ds^2 = e^{A(r)} dt^2 - e^{B(r)} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.29)$$

En este punto el problema se reduce a encontrar las funciones $A(r)$ y $B(r)$.

Se calculan las componentes no nulas del tensor de Ricci asociado a (2.29). Para ello se debe usar una contracción del tensor de Riemann (2.8) (como se hizo en (2.14)), además de la definición de los símbolos de Christoffel (2.10), haciendo esto

resulta que las componentes no nulas del tensor de Ricci son:

$$\begin{aligned}
 R_{tt} &= -e^{(A-B)} \left(\frac{1}{2} A'' + \frac{1}{4} (A')^2 - \frac{1}{4} A' B' + \frac{A'}{r} \right) \\
 R_{rr} &= \frac{1}{2} A'' + \frac{1}{4} (A')^2 - \frac{1}{4} A' B' - \frac{B'}{r} \\
 R_{\theta\theta} &= e^{-B} \left(1 + \frac{1}{2} r (A' - B') \right) - 1 \\
 R_{\phi\phi} &= \sin^2 \theta R_{\theta\theta}
 \end{aligned}
 \tag{2.30}$$

Dado que otra de las condiciones era vacío $T_{ab} = 0$, el tensor de Einstein debe ser nulo $G_{ab} := R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 0$ y al obtener la traza de este: $Tr G_{ab} = 0 \Rightarrow R - \frac{1}{2} R(4) = 0$ cuya condición se cumple sí y sólo sí $R = 0$; esto se sustituye en $G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2} R g_{ab} = 0$ de modo que $R_{ab} = 0$, se dice entonces que se tiene una solución Ricci plana; esto exige que las componentes del tensor de Ricci sean nulas en el caso de considerar vacío.

Se tienen entonces las condiciones:

$$\Rightarrow R_{tt} = R_{rr} = R_{\theta\theta} = R_{\phi\phi} = 0$$

Así, es posible escribir la igualdad $e^{-(A-B)} R_{tt} + R_{rr} = 0$, luego, al reemplazar los coeficientes de (2.30) queda que $-\frac{1}{r} (A' + B') = 0$. Aquí, el término entre paréntesis debe ser nulo, al integrar esta última ecuación, resulta $B(r) = -A(r) + C$ y finalmente haciendo un reescalamiento conveniente para el tiempo $t \rightarrow e^{-C/2} t$, resulta:

$$C = 0 \Rightarrow B = -A \tag{2.31}$$

Sustituyendo (2.31) en $R_{\theta\theta}$ de (2.30) se llega a:

$$\frac{d}{dr} (r e^A) = 1 \Rightarrow e^A = 1 + \frac{C_0}{r} \tag{2.32}$$

Sustituyendo en (2.29):

$$ds^2 = \left(1 + \frac{C_0}{r}\right) dt^2 - \left(1 + \frac{C_0}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \tag{2.33}$$

Para hallar la constante C_0 se debe tener en cuenta el límite newtoniano (campos débiles) [27] :

$$g_{00} = 1 + 2\Phi \quad (2.34)$$

Considerando que el potencial gravitacional en unidades naturales es $\Phi = \frac{-M}{r}$. Al comparar (2.33) y (2.34), se obtiene la constante:

$$C_0 = -2M \quad (2.35)$$

Reemplazando (2.35) en (2.33), se llega al resultado final, conocido como *métrica de Schwarzschild* [23] .

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.36)$$

Al observar (2.36) puede notarse que hay dos valores de r para los cuales hay una singularidad. Más adelante se verá que $r = 0$ es la única singularidad y que $r = 2M$ no lo es, sino que aparenta serlo debido a las coordenadas utilizadas. Más aún, $r = 2M$ es un punto de no retorno (horizonte de eventos), debido a que al pasar de un $r_{ext} > 2M$ a otro $r_{int} < 2M$, los coeficientes de la métrica de Schwarzschild (2.36) cambian de signo, lo que implica que $t \rightarrow r$. Estrictamente un horizonte de eventos, se define como una hipersuperficie en la que un vector Killing (2.111) tipo tiempo se vuelve nulo [28] .

Por lo tanto, cualquier tipo de materia que atravesase $r = 2M$ clásicamente no podrá escapar y se acercará cada vez más hacia la singularidad física $r = 0$ conforme transcurre el tiempo t para un observador externo. Cabe mencionar que dicho observador externo vería a la materia tardar un tiempo infinito en llegar a la singularidad, mientras que un observador que viaje junto con la materia mediría un tiempo finito para llegar a la singularidad.

Un cuerpo con horizonte de eventos define lo que es un agujero negro, el cual es la región del espacio-tiempo delimitada por al menos un horizonte (de acuerdo con la hipótesis de censura cósmica) [29] . Cualitativamente un agujero negro se trata de un objeto con gran cantidad de materia concentrada en una región relativamente pequeña, por lo que produce un campo gravitacional intenso. En el siglo XVIII la existencia de agujeros negros fue sugerida por Laplace, quien los llamó “cuerpos oscuros”, sin embargo, hasta 2019 se pudo confirmar su existencia [30] .

La solución de Schwarzschild (2.36) describe el modelo más sencillo de agujero negro pero también resulta útil como aproximación del campo gravitacional generado por cuerpos esféricos tales como planetas y estrellas.

2.4. Solución de Reissner-Nordström

Ya que se analizó la solución de Schwarzschild, es conveniente revisar qué sucede cuando además de las propiedades mencionadas para (2.36) se introduce carga eléctrica [31]. La solución a las ecuaciones de Einstein (2.21) que cumple estas características es la de Reissner-Nordström, la cual tiene la novedad de añadir campo electromagnético, además de ser asintóticamente plana y recuperar (2.36) cuando $Q \rightarrow 0$.

En analogía a (2.28) el problema consiste en encontrar las funciones que aparecen en el elemento de línea dado por:

$$ds^2 = A(r)dt^2 - B(r)dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.37)$$

Es visible que el tensor métrico asociado posee los elementos no nulos: $g_{00} = A(r)$, $g_{11} = -B(r)$, $g_{22} = -r^2$ y $g_{33} = -r^2 \sin^2 \theta$. Se puede proponer un Ansatz para las funciones A y B tal y como se hizo en el caso anterior, sin embargo también es posible trabajar sin proponer una forma específica de las funciones; eso sí, al heredar las propiedades de la solución de Schwarzschild se asume que estas funciones sólo tienen dependencia en r .

De las ecuaciones de Einstein (2.21) se obtiene la traza:

$$R - \frac{1}{2}R(4) = 8\pi T \Rightarrow R = -8\pi T \quad (2.38)$$

donde T es la traza del tensor energía-momento, en este caso el *tensor electromagnético*, dado por:

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - g_{\beta\nu} F_{\alpha\mu} F^{\nu\mu} \right) \quad (2.39)$$

En la expresión anterior aparece F_{ab} , que es el *tensor de Faraday* [32]. El tensor (2.39) cumple que $T = g^{ab} T_{ab} = 0$ y debido a (2.38) esto implica $R = 0$, por lo tanto, para este caso las ecuaciones de Einstein (2.21) se reescriben como:

$$R_{\alpha\beta} = 8\pi T_{\alpha\beta} \quad (2.40)$$

Si se quiere expresar el lado izquierdo de (2.40) hay que hallar el tensor de Ricci; usando (2.8) con la contracción índices que se hizo en (2.14), el tensor de Ricci queda escrito como:

$$R_{\alpha\beta} = \partial_\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\mu - \partial_\beta \Gamma_{\alpha\mu}^\mu + \Gamma_{\nu\mu}^\mu \Gamma_{\alpha\beta}^\nu - \Gamma_{\nu\beta}^\mu \Gamma_{\alpha\mu}^\nu \quad (2.41)$$

Nuevamente hay que hallar e introducir los símbolos de Christoffel no nulos dados por (2.10); efectuando esto, se calculan las componentes no nulas de (2.41):

$$R_{00} = R_{tt} = \frac{A''}{2B} - \frac{A'}{4B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{A'}{Br} \quad (2.42)$$

$$R_{11} = R_{rr} = -\frac{A''}{2A} + \frac{A'}{4A} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) + \frac{B'}{Br} \quad (2.43)$$

$$R_{22} = R_{\theta\theta} = 1 - \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{B} \quad (2.44)$$

$$R_{33} = R_{\phi\phi} = R_{22} \sin^2 \theta \quad (2.45)$$

En general el tensor de Faraday que aparece en (2.39) es un tensor antisimétrico conformado por las componentes de campo eléctrico E y magnético B . Este se define como:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

De aquí es fácil ver que la traza es cero (al igual que en (2.39)). Otro detalle que se debe mencionar es que como en el caso abordado se tiene carga eléctrica y simetría esférica, los coeficientes no nulos de (2.46) sólo son los términos asociados a la componente radial del campo eléctrico, además de no poseer dependencia angular, entonces:

$$F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_r(r, t) & 0 & 0 \\ -E_r(r, t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Teniendo presente (2.47), ahora es posible expresar el lado derecho de (2.40), lo cual consiste en hallar el tensor electromagnético (2.39) de forma explícita. Pero de acuerdo con (2.47) únicamente $F_{01} = -F_{10}$ son no nulos, por lo que la suma en (2.39) sólo corre de 0 a 1, haciendo este desarrollo resulta:

$$T_{\alpha\mu} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2} g_{\alpha\beta} F_{01} F^{01} - g_{\beta 1} F_{\alpha 0} F^{10} - g_{\beta 0} F_{\alpha 1} F^{01} \right) \quad (2.48)$$

Calculando sus elementos no nulos se obtienen las siguientes expresiones:

$$T_{00} = -\frac{A}{8\pi} F_{01} F^{01} \quad (2.49)$$

$$T_{11} = \frac{B}{8\pi} F_{01} F^{01} \quad (2.50)$$

$$T_{22} = -\frac{1}{8\pi} r^2 F_{01} F^{01} \quad (2.51)$$

$$T_{33} = T_{22} \sin^2 \theta \quad (2.52)$$

De (2.49) y (2.50) junto con (2.40):

$$\frac{T_{00}}{A} + \frac{T_{11}}{B} = 0 \Rightarrow \frac{1}{8\pi} \left(\frac{R_{00}}{A} + \frac{R_{11}}{B} \right) = \frac{1}{8\pi r B} \left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} \right) = 0$$

lo cual implica:

$$\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} = 0 \quad (2.53)$$

La última relación puede reescribirse como:

$$\partial_r \ln(AB) = 0 \quad (2.54)$$

por lo que el producto AB es una constante.

Debido a que $A = A(r)$ y $B = B(r)$, se puede afirmar que:

$$AB = f; \quad f = cte \quad (2.55)$$

Como siguiente paso conviene escribir las ecuaciones de Maxwell en forma covariante, en particular la ecuación que se asocia a Ley de Gauss. Las *ecuaciones de Maxwell covariantes* son [32] :

$$\nabla_\beta F^{\alpha\beta} = 0 \quad (2.56)$$

$$\nabla_{[\gamma} F_{\alpha\beta]} = 0 \quad (2.57)$$

La expresión (2.57) se expresa como: $F_{\alpha\beta;\gamma} + F_{\beta\gamma;\alpha} + F_{\gamma\alpha;\beta} = 0$ y proporciona el campo magnético B de una carga magnética, pero eso aquí no brinda información adicional ya que no existen los monopolos magnéticos [33] .

Por otro lado, usando (2.56) es posible hallar el campo eléctrico E asociado. Desarrollando (2.56) como la divergencia de un tensor contravariante de rango dos:

$$\partial_\beta F^{\alpha\beta} + \Gamma_\mu^\alpha F^{\mu\beta} + \Gamma_\mu^\beta F^{\alpha\mu} = 0 \quad (2.58)$$

Recordar que debido a (2.47) el tensor de Faraday sólo es no nulo en F_{01} y F_{10} , por tal razón se puede elegir $\alpha = 0, 1$ en (2.58).

Con $\alpha = 1$:

$$\partial_0 F^{10} + \Gamma_\mu^1 F^{\mu\beta} + \Gamma_\mu^\beta F^{1\mu} = 0 \quad (2.59)$$

El segundo término de (2.59) es nulo ya que al desarrollar la suma se aplica que $\Gamma_{bc}^a = \Gamma_{cb}^a$ y $F^{ab} = -F^{ba}$, mientras que el tercer término también es nulo pues según

(2.10) todos los símbolos de Christoffel involucrados son cero. Así, (2.59) se reduce a:

$$\partial_0 F^{10} = 0 \quad (2.60)$$

De (2.47) se sabe que $F_{10} = -E_r(r, t)$ y por otra parte usando (2.55), $F^{10} = g^{11}g^{00}F_{10} = \frac{1}{-BA}F_{10} = \frac{-1}{f}F_{10} = \frac{E_r(r, t)}{f}$, por lo que (2.60) se reescribe como:

$$\partial_t E_r(r, t) = 0 \Rightarrow E_r \neq E_r(t) \Rightarrow E_r = E_r(r) \quad (2.61)$$

Con $\alpha = 0$:

$$\partial_1 F^{01} + \Gamma_{\mu\beta}^0 F^{\mu\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^\beta F^{0\mu} = 0 \quad (2.62)$$

De nueva cuenta el segundo término desaparece por las propiedades de simetría y antisimetría de los símbolos de Christoffel y el tensor de Faraday, respectivamente. Sin embargo, el tercer término ya no se anula pues la suma completa es $\Gamma_{\mu\beta}^\beta F^{0\mu} = F^{01}(\Gamma_{10}^0 + \Gamma_{11}^1 + \Gamma_{12}^2 + \Gamma_{13}^3)$, lo cual de acuerdo a (2.10) implica que $\Gamma_{\mu\beta}^\beta F^{0\mu} = F^{01}(\frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{2}{r})$ y según lo hallado en (2.53) esto sería $\Gamma_{\mu\beta}^\beta F^{0\mu} = F^{01}\frac{2}{r}$. Lo anterior permite reescribir (2.62) como la siguiente ecuación diferencial:

$$\partial_1 F^{01} + \frac{2F^{01}}{r} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 F^{01}) = 0 \quad (2.63)$$

y como $F^{01} = g^{00}g^{11}F_{01} = -\frac{F_{01}}{f}$, (2.63) se puede reescribir en la forma:

$$\frac{1}{fr^2} \partial_r (r^2 F_{01}) = 0 \Rightarrow \partial_r (r^2 F_{01}) = 0 \quad (2.64)$$

Resolviendo:

$$F_{01} = \frac{k}{r^2}, \quad k = cte \quad (2.65)$$

De (2.47) y (2.61) $\Rightarrow F_{01} = E_r(r)$, mientras que debido a la *ley de Gauss*, la constante $k = Q$. Sustituyendo esto en (2.65) se llega a:

$$F_{01} = E_r(r) = \frac{Q}{r^2} \quad (2.66)$$

Una vez obtenida la forma del campo eléctrico, ya es posible determinar las funciones de (2.37) y entonces resolver el problema. Para ello se toman juiciosamente las componentes R_{22} en (2.40):

$$R_{22} = 8\pi T_{22} \quad (2.67)$$

De (2.44) y (2.51) se obtiene la forma explícita de esta ecuación:

$$1 - \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{B} = 8\pi \left(-\frac{1}{8\pi} r^2 F_{01} F^{01} \right) \quad (2.68)$$

Con ayuda de (2.55) se encuentra que $B = \frac{f}{A} \rightarrow B' = -\frac{fA'}{A^2}$, lo cual implica que $1 - \frac{r}{2B} \left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} \right) - \frac{1}{B} = 1 - \frac{1}{f} \partial_r(rA)$ y se sustituye en el lado izquierdo de (2.68). Mientras que para el lado derecho de (2.68), la ecuación (2.55), produce $F_{01} F^{01} = F_{01} (g^{00} g^{11} F_{01}) = \frac{-Q^2}{f r^4}$. Estos dos resultados permiten una reescritura simple de la ecuación de Einstein:

$$1 - \frac{1}{f} \partial_r(rA) = \frac{Q^2}{f r^2} \quad (2.69)$$

Integrando y despejando A , se encuentra:

$$A(r) = f + \frac{C_0}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad C_0 = cte \quad (2.70)$$

Como en $Q \rightarrow 0$ esto se debe reducir al caso de Schwarzschild (2.36), se observa que $f = 1$ y $C_0 = -2M$.

$$\Rightarrow A(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2} \quad (2.71)$$

Además, se infiere que $f = 1$ implica $A = \frac{1}{B}$; esto es consistente con el hecho de que el límite asintótico de la solución a grandes distancias debe corresponder a espaciotiempo minkowskiano. Con esto presente, al sustituir (2.71) en (2.37) se llega a

la forma final de la *métrica de Reissner-Nordström* [23] :

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 - \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\Omega^2 \quad (2.72)$$

2.5. Coordenadas de Kruskal-Szekeres

En la solución de Schwarzschild se puede ver que si $r = 2M$ se tiene una singularidad, esto se debe a las coordenadas. Se mostrará que esta no es una singularidad física y que puede removerse utilizando unas coordenadas adecuadas, de este modo se puede estudiar el comportamiento de objetos cerca de $r = 2M$ (radio de Schwarzschild).

Considerando geodésicas nulas con $d\theta = d\phi = 0$, el lagrangiano asociado a ds^2 es:

$$L = \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 \right) = 0 \quad (2.73)$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \Rightarrow dt = \pm \frac{r dr}{r - 2M} \quad (2.74)$$

Integrando:

$$t = t_0 \pm \left(r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right) \right) = t_0 \pm r^* \quad (2.75)$$

con $r^* := r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right)$ la *coordenada de tortoise*, la cual cumple la condición $\frac{dr^*}{dr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$

Considerando *coordenadas nulas* (también conocidas como coordenadas de cono de luz) [34] :

$$u := t - r^*, \quad v := t + r^* \quad (2.76)$$

se obtiene:

$$\Rightarrow du = dt - dr^* = dt - \frac{rdr}{r-2M}, \quad dv = dt + dr^* = dt + \frac{rdr}{r+2M} \quad (2.77)$$

Multiplicando ambas expresiones:

$$dudv = dt^2 - \frac{dr^2}{(1 - \frac{2M}{r})^2} \quad (2.78)$$

De la métrica de Schwarzschild se considera el caso $d\theta = d\phi = 0$ por simplicidad en los cálculos, de modo que se omite la información asociada a la 2-esfera:

$$ds^2 = (1 - \frac{2M}{r})dt^2 - (1 - \frac{2M}{r})^{-1}dr^2 = (1 - \frac{2M}{r})(dt^2 - \frac{dr^2}{(1 - \frac{2M}{r})^2}) \quad (2.79)$$

Sustituyendo (2.78) en (2.79):

$$ds^2 = (1 - \frac{2M}{r})dudv \quad (2.80)$$

El elemento de línea (2.80) es conocido como métrica en la forma de *Eddington-Finkelstein*.

Regresando a las coordenadas nulas (2.76) puede verse que:

$$\frac{1}{2}(v - u) = r^* := r + 2M \ln(\frac{r}{2M} - 1) \Rightarrow \frac{r}{2M} - 1 = e^{\frac{v-u}{4M}} e^{\frac{-r}{2M}} \quad (2.81)$$

Por otro lado, una reescritura inmediata de (2.80) es:

$$ds^2 = \frac{2M}{r}(\frac{r}{2M} - 1)dudv \quad (2.82)$$

Reemplazando (2.81) en (2.82):

$$ds^2 = \frac{2M}{r} e^{\frac{v-u}{4M}} e^{\frac{-r}{2M}} du dv \quad (2.83)$$

Definiendo:

$$U := -e^{\frac{-u}{4M}}, \quad V := e^{\frac{v}{4M}} \quad (2.84)$$

lo que implica:

$$\Rightarrow dU = \frac{e^{\frac{-u}{4M}}}{4M} du, \quad dV = \frac{e^{\frac{v}{4M}}}{4M} dv \quad (2.85)$$

De (2.85) se obtiene la siguiente relación:

$$(16M^2) dU dV = e^{\frac{v-u}{4M}} du dv \quad (2.86)$$

Al introducir (2.86) en (2.83) se llega a:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{\frac{-r}{2M}} dU dV \quad (2.87)$$

Con ayuda de las *coordenadas de Kruskal-Szekeres*:

$$T := \frac{U+V}{2}, \quad X := \frac{V-U}{2} \quad (2.88)$$

se obtienen las relaciones inversas:

$$\Rightarrow V = T + X, \quad U = T - X \quad (2.89)$$

por lo que se puede escribir:

$$\Rightarrow dUdV = dT^2 - dX^2 \quad (2.90)$$

Finalmente al sustituir (2.90) en (2.87), se llega a:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{\frac{-r}{2M}} (dT^2 - dX^2) \quad (2.91)$$

El elemento de línea (2.91) se conoce como la *métrica de Schwarzschild en coordenadas de Kruskal-Szekeres* [35] .

Es importante notar que se tiene una relación de la forma $ds_{Sch}^2 = \Omega^2 ds_{Mink}^2$, con $\Omega^2 = \sqrt{\frac{32M^3}{r}} e^{\frac{-r}{4M}}$ el *factor conforme*. Es decir, se llegó a una relación entre la métrica de Schwarzschild y la métrica de Minkowski mediante un factor conforme. En este sentido puede notarse que el factor conforme diverge en $r = 0$; como puede observarse, en este caso la singularidad física se encuentra en $r = 0$ y no en $r = 2M$. Adicionalmente puede utilizarse alguno de los invariantes geométricos tales como el *escalar de Kretschmann* [36] para verificar que el valor $r = 0$ corresponde a una singularidad esencial, mientras que $r = 2m$ representa una singularidad no esencial o coordenada.

2.6. Gravedad de superficie

Un parámetro importante en el estudio de la termodinámica de agujeros negros es la *gravedad de superficie* κ [6] . La idea es obtener la aceleración en la superficie de una fuente de campo gravitacional. En el caso de la Tierra esta viene dada por $\kappa = \frac{M_T}{r_T^2}$, donde M_T es la masa de la Tierra y r_T su radio. Ahora se calculará la gravedad de superficie para el caso más simple de agujero negro (2.36), que es el principal caso de interés para analizar radiación Hawking. La ecuación general que define a la gravedad de superficie se representa como una relación de vectores Killing.

Sea una hipersuperficie Σ nula, se dice que Σ es un *horizonte de Killing* de un campo vectorial de Killing ξ si en Σ , ξ es normal a Σ . Si ahora se considera un l^μ normal a Σ , tal que en Σ se cumple la condición $\xi^\mu = f l^\mu$; adicionalmente debido a la

parametrización afín, se cumple la condición $l^\mu D_\mu l^\nu = 0$. Implementando este par de condiciones es posible hallar la relación para la gravedad de superficie [37] :

$$\xi^\mu D_\mu \xi^\nu = (f l^\mu) D_\mu (f l^\nu) = f^2 (l^\mu D_\mu l^\nu) + l^\mu D_\mu f (f l^\nu) = \kappa \xi^\nu \quad (2.92)$$

Dicha expresión es válida en la hipersuperficie Σ , pues es allí donde ξ es normal a Σ .

Para el caso del agujero negro de Schwarzschild conviene utilizar *coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes* (IEF) [38] , de manera que (2.36) se escribe como:

$$ds^2 = -(1 - \frac{2M}{r}) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2 \quad (2.93)$$

con $v = t + r^*$. A partir de esta expresión se puede obtener el tensor métrico inverso:

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & (1 - \frac{2M}{r}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (2.94)$$

Tomando $l^\mu = f g^{\mu\nu} \partial_\nu S$ como el vector normal al horizonte, donde f es una función arbitraria de las coordenadas y ya que el horizonte viene dado por la superficie $S(r) = 2M$, entonces $l^\mu = f(g^{\nu r} \partial_r S, g^{rr} \partial_r S, 0, 0)$; al evaluar en el horizonte $r = 2M$, resulta:

$$l^\mu = f(1, 0, 0, 0) = f \partial_v \quad (2.95)$$

Se puede ver que la norma de l^μ es nula en el horizonte $r = 2M$, es decir:

$$l^2 = g_{\mu\nu} l^\mu l^\nu = g_{vv} (l^v)^2 = -(1 - \frac{2M}{r}) f^2 \quad (2.96)$$

de modo que en el valor particular $r = 2M$ para la coordenada radial, el vector l^μ es tipo nulo. Por lo tanto, l^μ es un vector de Killing tipo tiempo [39] y el horizonte $r = 2M$ es una hipersuperficie nula. Desde luego l^μ satisface la ecuación de Killing (2.115).

Se sabe que ∂_t es un vector de Killing para la solución de Schwarzschild [37] . Resulta que ∂_ν es exactamente el mismo vector, es decir:

$$\partial_t = \frac{\partial \nu}{\partial t} \partial_\nu + \frac{\partial \tilde{r}}{\partial t} \partial_{\tilde{r}} + \frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial t} \partial_{\tilde{\theta}} + \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial t} \partial_{\tilde{\phi}} = \partial_\nu \quad (2.97)$$

donde se utilizó las diferenciales provenientes del cambio de variables para coordenadas IEF (2.93): $d\nu = dt + (\frac{r}{r-2M})dr$, $d\tilde{r} = dr$, $d\tilde{\theta} = d\theta$ y $d\tilde{\phi} = d\phi$. De este modo se comprueba que ∂_ν es un vector de Killing temporal, utilizarlo facilitará mucho los cálculos.

La gravedad de superficie κ se calcula de forma simple usando las coordenadas IEF. Para ello hay que usar el lado izquierdo de (2.92) para la componente $\xi = \partial_\nu = (1, 0, 0, 0)$, se tiene que $\xi^\sigma D_\sigma \xi^\nu = \xi^\sigma (\xi^\nu_{,\sigma} + \Gamma^\nu_{\sigma\rho} \xi^\rho) = \xi^\sigma \Gamma^\nu_{\sigma\rho} \xi^\rho = \Gamma^\nu_{\nu\nu}$, donde el término entre paréntesis es la derivada covariante de ξ^ν . Calculando $\Gamma^\nu_{\nu\nu}$ de acuerdo a la definición de los símbolos de Christoffel $\Gamma^\nu_{\nu\nu} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} (g_{\nu\sigma,\nu} + g_{\sigma\nu,\nu} - g_{\nu\nu,\sigma}) = \frac{1}{2} g^{\nu r} (-g_{\nu\nu,r}) = \frac{M}{r^2}$ y evaluando en el horizonte $r = 2M$:

$$\Rightarrow \Gamma^\nu_{\nu\nu} = \frac{1}{4M} \quad (2.98)$$

Esto fue resultado de analizar el lado izquierdo de (2.92); comparando con el lado derecho de la misma, se puede ver que como $\xi = \partial_\nu = (1, 0, 0, 0)$, se llega a:

$$\kappa = \frac{1}{4M} \quad (2.99)$$

la cual es la gravedad de superficie para el agujero negro de Schwarzschild. Esta cantidad puede generalizarse para otras soluciones de agujero negro [40] y un camino para hallarla es lo que se verá en capítulos posteriores, donde se mostrará que la gravedad de superficie guarda una relación cercana con la temperatura.

2.7. Diagramas de Penrose-Carter

Los *diagramas de Penrose-Carter* son una representación pictórica en 2 dimensiones de un espacio-tiempo. En dicha representación se preservan las relaciones

causales y se pueden dibujar regiones infinitas en una región finita. La forma de preservar la estructura causal es introduciendo coordenadas de cono de luz y para mapear valores infinitos a cantidades finitas se debe hacer un cambio de variable adecuado.

Dado que se trabajará en el espacio-tiempo de Schwarzschild, conviene ver el diagrama de Penrose en este espacio-tiempo y analizar sus distintos componentes [27]. La métrica (2.91) puede escribirse con las coordenadas cono de luz U y V como (2.87), donde $UV = e^{\frac{r}{2M}}(1 - \frac{r}{2M})$. Se puede ver que $UV = 0$ si $r = 2M$, lo que representa al horizonte, mientras que $UV = 1$ si $r = 0$, que representa la singularidad esencial. Aquí, la transformación de coordenadas conveniente es:

$$\tilde{U} = \arctan(U), \quad \tilde{V} = \arctan(V) \quad (2.100)$$

$$-\frac{\pi}{2} < \tilde{U} < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} < \tilde{V} < \frac{\pi}{2}$$

Puede verse entonces que el intervalo de valores $(-\infty, \infty)$ es mapeado a un intervalo finito. Con este cambio de coordenadas se tiene que:

$$\Rightarrow \quad dU = \frac{1}{\cos^2 \tilde{U}} d\tilde{U}, \quad dV = \frac{1}{\cos^2 \tilde{V}} d\tilde{V}$$

La expresión (2.87) se reescribe con las coordenadas finitas $\tilde{U}$ y $\tilde{V}$:

$$ds^2 = \frac{32M^3}{r} e^{\frac{-r}{2M}} \frac{d\tilde{U} d\tilde{V}}{\cos^2 \tilde{U} \cos^2 \tilde{V}} \quad (2.101)$$

De este modo ya se tiene la métrica en coordenadas que preserven el cono de luz y toman valores en un dominio finito. Como último paso, puede considerarse el siguiente cambio de variable para (2.101):

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{U} + \tilde{V}}{2}, \quad \tilde{X} = \frac{\tilde{V} - \tilde{U}}{2}$$

lo que implica:

$$\tilde{U} = \tilde{T} - \tilde{X}, \quad \tilde{V} = \tilde{T} + \tilde{X} \quad \Rightarrow \quad d\tilde{U} d\tilde{V} = d\tilde{T}^2 - d\tilde{X}^2$$

y en consecuencia:

$$\Rightarrow ds^2 = \frac{32M^3}{r \cos^2(\tilde{T} - \tilde{X}) \cos^2(\tilde{T} + \tilde{X})} e^{\frac{-r}{2M}} (d\tilde{T}^2 - d\tilde{X}^2) \quad (2.102)$$

De este modo el diagrama para la solución de Schwarzschild es conforme al de Minkowski y puede dibujarse como:

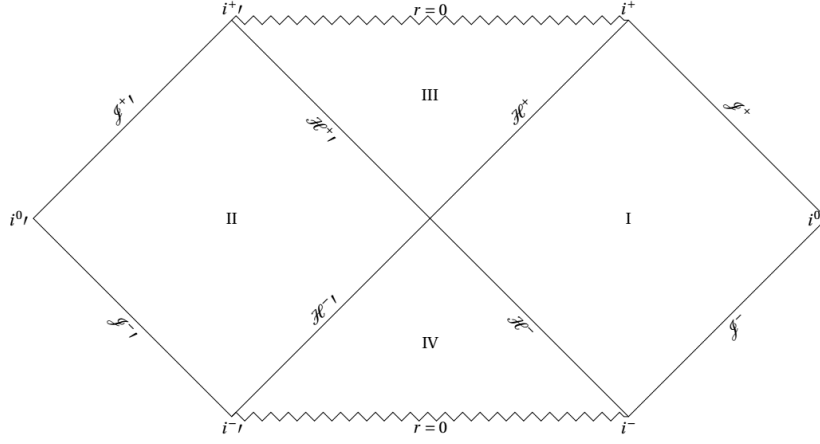


Figura 3: Diagrama de Penrose-Carter para el espacio-tiempo de Kruskal-Szekeres. Los cuadrantes de-drecho e izquierdo representan regiones externas asintóticamente planas para un agujero negro y blanco, respectivamente; mientras que los cuadrantes superior e inferior son la parte interna de estos objetos

Los elementos principales de un diagrama de Penrose-Carter son los siguientes:

$\mathcal{I}^+$: Futuro infinito de curvas tipo luz

$\mathcal{I}^-$: Pasado infinito de curvas tipo luz

i^+ : Futuro infinito de curvas tipo tiempo

i^- : Pasado infinito de curvas tipo tiempo

i^0 : Infinito de curvas tipo espacio

$\mathcal{H}^+$: Horizonte de eventos del agujero negro ($r = 2M$)

$\mathcal{H}^-$: Horizonte de eventos del agujero blanco

Las variables primadas corresponden a las zonas (II) y (IV) y son análogas a las no primadas. En general, la solución de Schwarzschild puede verse en dos distintas regiones, las cuales son la región exterior al agujero negro (I) y la interior (III), mismas que están divididas por un horizonte de eventos.

Las regiones (II) y (IV) se asocian al exterior e interior de un agujero blanco, respectivamente. Un agujero blanco emite toda la materia, por lo que es lo opuesto a un agujero negro; hasta ahora estos objetos nunca se han detectado [6]. Por lo tanto, es frecuente que sólo se aborden las regiones (I) y (III), las cuales corresponden a un agujero negro.

De acuerdo al diagrama de Penrose, un rayo de luz que parte de la región (I) y es dirigido al agujero negro, cruzará $\mathcal{H}^+$ y luego llegará a la singularidad física $r = 0$,

pero en caso contrario, si el rayo es dirigido en sentido opuesto a la ubicación del agujero negro, entonces cruzará $\mathcal{J}^+$. Del mismo modo, una partícula cuya curva asociada sea tipo tiempo, eventualmente llegará a i^+ , mientras que si la curva es tipo espacio llegará a i^0 . Hay que recordar que cuando se cruza a través de $\mathcal{H}^+$ ocurre que $t \rightarrow r$, lo que era tiempo se vuelve espacio y por lo tanto el cono de luz se invierte al atravesar $\mathcal{H}^+$. Otro aspecto a resaltar es que no es posible ir directamente de la región (I) $\rightarrow$ (II) sin pasar por la singularidad $r = 0$ pues ello exige curvas tipo espacio, lo que implicaría $v > c$! Esto sólo puede ocurrir teóricamente mediante *Puentes de Einstein-Rosen* [6] .

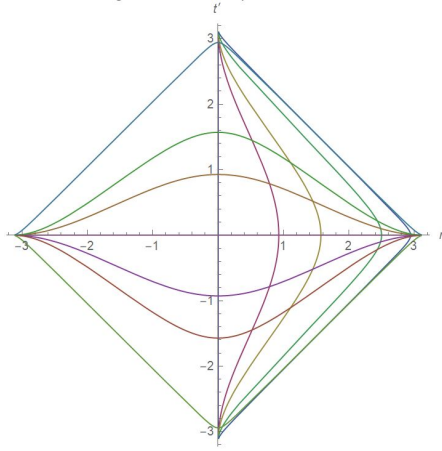


Figura 4: Simulación del diagrama de Penrose-Carter en espacio-tiempo de Kruskal-Szekeres. Aquí, las trayectorias verticales representan curvas temporales constantes y las trayectorias horizontales representan curvas espaciales constantes.

Las estrellas tienen un periodo de vida, al consumir su combustible colapsan bajo su propia atracción gravitacional al ya no haber fuerza alguna que se oponga; bajo ciertas condiciones en su masa estas pueden encogerse por debajo de $r = 2M$, colapsando como un agujero negro. Para agujeros negros que se forman mediante un colapso estelar, el diagrama de Penrose se ve de la siguiente forma:

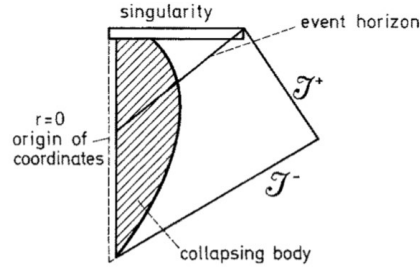


Figura 5: Diagrama de Penrose-Carter de una estrella con simetría esférica colapsando, la cual formará un agujero negro [5] . El diagrama no contiene la parte asociada a agujero blanco y la superficie de la estrella sigue una trayectoria tipo tiempo.

Los diagramas de Penrose pueden dibujarse para otras soluciones bajo la misma dinámica. Es de especial interés el caso de Schwarzschild puesto que Hawking utilizó un cuerpo colapsando para su análisis [5] .

2.8. Vectores de Killing

Es necesario recordar que las *transformaciones de Lorentz* [23] Λ son difeomorfismos de la métrica de Minkowski que la dejan invariante. Es decir Λ son isometrías de $g_{\mu\nu}$ o dicho de otro modo Λ es una simetría del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$. Una manera de caracterizar dichas simetrías del espacio-tiempo es mediante los *vectores de Killing* [41] .

Partiendo del difeomorfismo dado por:

$$x^{\mu'} = x^{\mu} + \epsilon k^{\mu}, \quad \epsilon \ll 1 \quad (2.103)$$

donde k es un vector asociado a la transformación.

de donde se sigue que:

$$\Rightarrow \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\alpha}} = \delta^{\mu}_{\alpha} + \epsilon k^{\mu}_{,\alpha} \quad (2.104)$$

Ya que (2.103) es infinitesimal, las componentes de la métrica en coordenadas transformadas x' se pueden escribir como una serie alrededor de las coordenadas no transformadas x :

$$g'_{\mu\nu}(x') \approx g_{\mu\nu}(x) + \epsilon k^\gamma g_{\mu\nu,\gamma}(x) \quad (2.105)$$

La regla de transformación de la métrica es acorde a la transformación de un tensor covariante de rango 2:

$$g_{\alpha\beta}(x) = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\beta} g'_{\mu\nu}(x') \quad (2.106)$$

Sustituyendo (2.104) y (2.105) en (2.106) se llega a:

$$g_{\alpha\beta}(x) = g'_{\alpha\beta} + \epsilon(g_{\beta\mu} k^\mu_{,\alpha} + g_{\alpha\mu} k^\mu_{,\beta} + k^\mu g_{\alpha\beta,\mu}) \quad (2.107)$$

Usando regla de Leibniz y agrupando se obtiene:

$$\Rightarrow g_{\alpha\beta}(x) = g'_{\alpha\beta} + \epsilon(k_{\beta,\alpha} + k_{\alpha,\beta} - k^\mu(g_{\beta\mu,\alpha} + g_{\alpha\mu,\beta} - g_{\alpha\beta,\mu})) \quad (2.108)$$

Dado que los símbolos de Christoffel se definen de acuerdo a (2.10) y el tensor métrico es simétrico, la ecuación anterior puede escribirse como:

$$\Rightarrow g_{\alpha\beta}(x) = g'_{\alpha\beta} + \epsilon(k_{\beta,\alpha} + k_{\alpha,\beta} - 2k^\mu g_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}) = g'_{\alpha\beta} + \epsilon((k_{\beta,\alpha} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} k_\lambda) + (k_{\alpha,\beta} - \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} k_\lambda)) \quad (2.109)$$

Los dos términos entre paréntesis son derivadas covariantes de un covector, entonces se puede escribir:

$$g_{\alpha\beta}(x) = g'_{\alpha\beta} + \epsilon(k_{\beta;\alpha} + k_{\alpha;\beta}) \quad (2.110)$$

Lo que implica que $g = g'$, entonces si (2.103) es isometría de la métrica, el término entre paréntesis de (2.110) debe ser nulo.

$$k_{\beta;\alpha} + k_{\alpha;\beta} = 0 \quad (2.111)$$

La ecuación (2.111) es conocida como *ecuación de Killing*. Esta ecuación permite una formulación más elegante como a continuación se muestra.

Para ello considere las componentes covariantes del vector de Killing. Ya que $k_{\beta} = g_{\beta\gamma} k^{\gamma}$ y $k_{\alpha} = g_{\alpha\gamma} k^{\gamma}$, se puede escribir:

$$\Rightarrow (g_{\beta\gamma} k^{\gamma})_{;\alpha} + (g_{\alpha\gamma} k^{\gamma})_{;\beta} = 0 \quad (2.112)$$

Aplicando la *conexión de Levi-Civita* ($g_{ab;c} = 0$) [41], es posible sacar al tensor métrico de la derivación covariante de modo que:

$$\Rightarrow g_{\beta\gamma}(k^{\gamma})_{;\alpha} + g_{\alpha\gamma}(k^{\gamma})_{;\beta} = 0 \quad (2.113)$$

La expresión (2.113) sigue siendo válida si se agrega un valor nulo conveniente, en este caso se tiene que:

$$g_{\beta\gamma}(k^{\gamma})_{;\alpha} + g_{\alpha\gamma}(k^{\gamma})_{;\beta} + k^{\gamma} g_{\alpha\beta;\gamma} = 0 \quad (2.114)$$

Se observa que (2.114) es la *derivada de Lie* [42] del tensor métrico $g_{\alpha\beta}$ en la dirección del campo de Killing κ , es decir:

$$\mathcal{L}_{\kappa} g_{\alpha\beta} = 0 \quad (2.115)$$

Dicha expresión es equivalente a (2.111) y define lo que es un vector de Killing.

3. TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS

3.1. Teoría Cuántica de Campos en espacio minkowskiano

3.1.1. Campo escalar de Klein-Gordon

En el régimen relativista la *ecuación de Schrödinger* [43] debe ser modificada, para ello se considera la relación de la energía relativista:

$$E = p^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (3.1)$$

Se busca un nuevo operador diferencial que actúe sobre una función de onda relativista ϕ [44] ; con esto en mente se sustituyen los operadores $E \rightarrow i\hbar\partial_t$ y $p \rightarrow -i\hbar\nabla$ en (3.1), reemplazándolos e igualando a cero resulta:

$$\partial_t^2 - \nabla^2 + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2 = 0 \quad (3.2)$$

Operando el lado izquierdo sobre ϕ y usando unidades naturales:

$$(\square + m^2)\phi = 0 \quad (3.3)$$

(3.3) es la *ecuación de Klein-Gordon* [44] de una partícula libre, donde $\square := \partial_t^2 - \nabla^2$ es el *D'Alembertiano*, ϕ el campo de Klein-Gordon en el espacio minkowskiano n -dimensional y m la masa del campo. Se considerará el caso en el que el campo tiene masa nula, ya que esto permite obtener la misma acción para observadores minkowskianos y de Rindler, en consecuencia se tendrán las mismas ecuaciones de movimiento, en este caso $m = 0$ proporcionará una ecuación de onda. En general, la ecuación de Klein-Gordon se trata de una versión relativista de la ecuación de Schrödinger.

Es posible llegar a (3.3) a partir de la densidad lagrangiana $\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\eta^{\alpha\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} - m^2\phi^2)$ mediante el principio de mínima acción $\delta S = 0$, donde $S = \int \mathcal{L}(x) d^n x$ [45]. Las soluciones de (3.3) resultan ser ondas planas, de modo que un conjunto de soluciones puede escribirse como los modos de frecuencia positiva:

$$u_k \propto e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.4)$$

Si se sustituye (3.4) en (3.3) se obtiene:

$$\omega := \sqrt{k^2 + m^2} \quad (3.5)$$

Dichas soluciones u_k son eigenfunciones del operador ∂_t , de modo que:

$$\frac{\partial}{\partial t} u_k(t, x) = -i\omega u_k(t, x), \quad \omega > 0 \quad (3.6)$$

y se puede definir un producto interno real inspirado en la densidad de probabilidad que aparece en la ecuación de continuidad $\nabla_\mu J^\mu = 0$; en este caso la densidad de probabilidad de Klein-Gordon viene dada por $J^0 = \phi^* \partial^0 \phi - \phi \partial^0 \phi^*$. Con esto en mente, es posible definir el producto escalar de Klein-Gordon como:

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = -i \int [(\phi_1(x) \partial_t \phi_2^*(x) - \partial_t(\phi_1(x)) \phi_2^*(x))] d^{n-1}x \quad (3.7)$$

donde la base de las soluciones ϕ_1 y ϕ_2 son ortonormales.

3.1.2. Cuantización

Con el fin de cuantizar a los campos, estos se deberán representar mediante operadores en el *espacio de Hilbert* $\mathcal{H}$ [43], es decir $\phi \rightarrow \hat{\phi}_\epsilon \mathcal{H}$, el proceso de cuantización permite echar mano de las relaciones clásicas entre los campos dadas por los corchetes de Poisson y de esta manera imponer las relaciones de conmutación que

deben cumplir [46] . Dichas relaciones son [45] :

$$[\phi(t, x), \phi(t, x')] = 0 \quad (3.8)$$

$$[\pi(t, x), \pi(t, x')] = 0 \quad (3.9)$$

$$[\phi(t, x), \pi(t, x')] = i\delta^{n-1}(x - x') \quad (3.10)$$

donde $\pi := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} = \partial_t \phi$ es el *momento canónico conjugado* [21] .

Nótese de (3.4) que las u_k y su complejo conjugado forman un conjunto completo. Esto es, forman una base ortonormal completa [47] y por lo tanto, al tomar $Re\phi$, el campo ϕ puede expandirse como:

$$\phi(t, x) = \sum_k [a_k u_k(t, x) + a_k^\dagger u_k^*(t, x)] \quad (3.11)$$

con $a_k^\dagger$ y a_k siendo los *operadores de creación y aniquilación* [43] , respectivamente, los cuales satisfacen las reglas de conmutación:

$$[a_k, a_{k'}] = 0 \quad (3.12)$$

$$[a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0 \quad (3.13)$$

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'} \quad (3.14)$$

Dentro del espacio de Hilbert, es conveniente utilizar la base asociada a la *representación de Fock* [48] . Los kets pueden definirse a partir del estado de vacío $|0\rangle$ y cómo actúan los operadores sobre este estado [45] .

$|0\rangle \rightarrow$ estado vacío y $|1_k\rangle \rightarrow$ estado 1-partícula

De esta manera:

$$a_k|0\rangle = 0 \quad (3.15)$$

$$a_k^\dagger|0\rangle = |1_k\rangle \quad (3.16)$$

De forma similar se construyen estados de muchas partículas $|1_{k_1}, 1_{k_2}, \dots, 1_{k_j}\rangle = a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger \dots a_{k_j}^\dagger |0\rangle$ si cada k es distinto. En el caso donde algún $a_k^\dagger$ se repita entonces los estados se pueden escribir mediante la aplicación sucesiva del operador de creación, es decir: $|1_{n_{k_1}}, 2_{n_{k_2}}, \dots, j_{n_{k_j}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{1!n_{k_1}!2!n_{k_2}!\dots j!n_{k_j}!}} (a_{k_1}^\dagger)^{1_{n_{k_1}}} (a_{k_2}^\dagger)^{2_{n_{k_2}}} \dots (a_{k_j}^\dagger)^{j_{n_{k_j}}} |0\rangle$

Además es posible generalizar (3.15) y (3.16) al caso del n -ésimo estado de partícula.

$$a_k|n_k\rangle = \sqrt{n_k}(n_k-1)|n_k-1\rangle \quad (3.17)$$

$$a_k^\dagger|n_k\rangle = \sqrt{n_k+1}|n_k+1\rangle \quad (3.18)$$

Resulta de importancia conocer cómo actúan en general los operadores de creación y aniquilación sobre estados arbitrarios, ya que las relaciones (3.17) y (3.18) proporcionarán el camino para hallar lo que sucede en estados de vacío para un observador no inercial.

3.1.3. Energía-momento

Usando el lagrangiano asociado a la ecuación de Klein Gordon en (2.7), se encuentra el siguiente tensor de energía-momento del campo de Klein-Gordon [45] :

$$T_{\alpha\beta} = \phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\eta^{\lambda\delta}\phi_{,\lambda}\phi_{,\delta} + \frac{1}{2}m^2\phi^2\eta_{\alpha\beta} \quad (3.19)$$

Identificando las componentes del tensor de energía-momento, se escribe la densidad de energía T_{tt} y de flujo de momento T_{ti} , como:

$$T_{tt} = \frac{1}{2}[(\partial_t \phi)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (\partial_i \phi)^2 + m^2 \phi^2] \quad (3.20)$$

$$T_{ti} = \partial_t \phi \partial_i \phi \quad (3.21)$$

Obsérvese que integrando T_{tt} y T_{ti} se puede obtener el hamiltoniano y el momento. Al sustituir el campo expandido (3.11) en estas componentes y realizando la integración en $(n-1)$ -dimensiones se llega a:

$$H := \int T_{tt} d^{n-1}x = \frac{1}{2} \sum_k (a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger) \omega \quad (3.22)$$

$$P_i := \int T_{ti} d^{n-1}x = \sum_k a_k^\dagger a_k k_i \quad (3.23)$$

Si en (3.22) se aplica la regla de conmutación (3.14) se obtiene la forma estándar de H :

$$\Rightarrow H = \sum_k (a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}) \omega \quad (3.24)$$

Esto conduce de manera natural a definir el operador del número de partículas N del siguiente modo:

$$N := a_k^\dagger a_k \quad (3.25)$$

De (3.23) y (3.24) puede verse que el operador N conmuta con H y P , por lo tanto el operador hamiltoniano H y el operador de momento P comparten eigenestados.

$$[N, H] = [N, P_i] = 0 \quad (3.26)$$

El significado de N puede verse al calcular su valor de expectación con ayuda de (3.15) y (3.25). Este valor promedio proporciona el número de partículas detectadas

en un cierto nivel energético; en el caso del estado vacío se tiene.

$$\langle 0|N_k|0 \rangle = 0 \quad (3.27)$$

y en general:

$$\langle N \rangle = \sum_k n^i \quad (3.28)$$

donde n^i representa el número de partículas en el i-ésimo estado.

Por otro lado, de la propiedad de los operadores $a_k|0 \rangle = 0 \Rightarrow \langle 0|a_k^\dagger = 0$ y a su vez $\langle 0|a_k a_k^\dagger|0 \rangle = \delta_{kk'}$. Además, introduciendo las derivadas de los campos en (3.11) se tiene que $\langle 0|\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}|0 \rangle = \sum_k u_{k,\alpha} u_{k,\beta}^\dagger$. Teniendo esto en cuenta, es posible hallar el valor esperado del tensor energía-momento en la ecuación (3.19) como:

$$\langle 0|T_{\alpha\beta}|0 \rangle = \sum_k T_{\alpha\beta}[u_k, u_k^*] \quad (3.29)$$

La expresión anterior tiene diversas implicaciones de las cuales es importante mencionar aquellas en el contexto de la Relatividad General. La idea general de Hawking fue introducir el aspecto cuántico en las ecuaciones de Einstein (2.21). Considerando el caso vacío, claramente $T_{ab} = 0$, la cual es la visión clásica de las ecuaciones de campo sin materia. Sin embargo, para el caso cuántico debe tomarse $T_{\alpha\beta} = 0 + \langle 0|T_{\alpha\beta}|0 \rangle$, donde el término $\langle 0|T_{\alpha\beta}|0 \rangle$ es el valor de expectación del tensor energía-momento y está asociado a las fluctuaciones cuánticas del vacío. En el vacío cuántico no se tiene ausencia de partículas, sino que estas se generan como pares de partículas y antipartículas que pueden pasar de ser virtuales a ser reales [49] .

3.2. Teoría Cuántica de Campos en espacio curvo

3.2.1. Generalización a espacio curvo

En esta sección se hará una analogía con la subsección anterior, sin embargo surgirán algunos resultados importantes que están ausentes en espacio minkowskiano y que son intrínsecos al caso de un espacio-tiempo curvo. Debido a que se debe hacer el cambio de un espacio minkowskiano a un espacio-tiempo arbitrario, se tiene el reemplazo $\eta_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\alpha\beta}$, donde $g_{\alpha\beta}$ es un tensor métrico arbitrario (con curvatura). Esto implica que la densidad lagrangiana ahora es $\mathcal{L} = \frac{\sqrt{-g}}{2} (g^{\alpha\beta} \phi_{,\alpha} \phi_{,\beta} - m^2 \phi^2 - \xi R \phi^2)$, donde $g = \det g_{\alpha\beta}$, R es el escalar de curvatura y ξ una constante. El último término de la densidad lagrangiana viene del acoplamiento con el campo gravitacional.

Si se aplica el principio de mínima acción $\delta S = 0$ con $S = \int \mathcal{L} d^n x$, se obtiene:

$$(\square + m^2 + \xi R)\phi = 0 \quad (3.30)$$

donde $\square := \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha (\sqrt{-g} g^{\alpha\beta} \partial_\beta)$ y corresponde al D'Alambertiano en espacio-tiempo curvo.

Aquí, hay dos valores de ξ peculiares. $\xi = 0$ (mínimamente acoplado) ya que recupera la ecuación de Klein Gordon habitual (3.3), mientras que si $\xi = \frac{n-2}{4(n-1)}$ (conformalmente acoplado) junto con $m = 0$, implica que la acción será invariante ante transformaciones conformes $g_{\alpha\beta} \rightarrow \Omega^2 g_{\alpha\beta}$ [45].

Por otro lado, el producto (3.7) en este caso pasa a ser:

$$\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = i \int [\phi_1(x) \partial_\mu \phi_2^*(x) - (\partial_\mu \phi_1(x)) \phi_2^*(x)] \sqrt{-g_\Sigma(x)} d\Sigma^\mu \quad (3.31)$$

con $d\Sigma^\mu = n^\mu d\Sigma$, donde $d\Sigma$ es el elemento de volumen de una *hipersuperficie de Cauchy* Σ tipo espacio y n^μ el vector normal unitario tipo tiempo dirigido al futuro. Más aún, se puede mostrar que el producto (3.31) no depende de la elección de la hipersuperficie Σ [45].

A partir de la ecuación de Klein Gordon para espacio curvo (3.30) es posible hallar un conjunto completo de soluciones de frecuencia positiva $\{u_i\}$ y negativa $\{u_i^*\}$. Tales que satisfacen:

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} \quad (3.32)$$

$$\langle u_i^*, u_j^* \rangle = -\delta_{ij} \quad (3.33)$$

$$\langle u_i, u_j^* \rangle = 0 \quad (3.34)$$

similar al caso de la sección anterior, ya que $\{u_i, u_i^*\}$ forman un conjunto completo. El campo se expresa como en (3.11):

$$\phi(x) = \sum_i [a_i u_i(x) + a_i^\dagger u_i^*(x)] \quad (3.35)$$

Por lo tanto con las mismas relaciones de conmutación (3.12)-(3.14).

$$[a_i, a_j] = 0 \quad (3.36)$$

$$[a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0 \quad (3.37)$$

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij} \quad (3.38)$$

Al igual que los estados resultantes de aplicar los operadores de creación y aniquilación, estas relaciones de conmutación entre los operadores también serán necesarias para obtener lo que mide un observador en el estado vacío.

3.2.2. Transformaciones de Bogoliubov

De manera implícita se ha hecho referencia a un estado vacío $|0_a\rangle$ (sobre el cual operan a_i y $a_i^\dagger$), que desde luego cumple $a_i|0_a\rangle = 0, \forall i$. Sin embargo, al pasar a espacio-tiempo curvo no hay un conjunto de modos preferente debido a que los distintos observadores no pueden relacionarse mediante una simple transformación de Lorentz; esto produce que el vacío no sea invariante [50] y por lo tanto, no habrá una noción de vacío única. Entonces, es posible considerar otro conjunto completo de soluciones $\{v_i, v_i^*\}$ asociado a un nuevo observador, el cual determina una nueva expansión del campo ϕ en términos de los modos v_i y v_i^* en lugar de los modos u_i y u_i^* (como en (3.35)).

$$\Rightarrow \tilde{\phi} = \sum_i [b_i v_i(x) + b_i^\dagger v_i^*(x)] \quad (3.39)$$

Este desarrollo define ahora un nuevo estado de vacío $|0_b\rangle; |0_b\rangle \neq |0_a\rangle$, el cual también cumple $b_i|0_b\rangle = 0, \forall i$, y además define un nuevo espacio de Fock.

Dado que ambos conjuntos $\{u_i, u_i^*\}$ y $\{v_i, v_i^*\}$ forman conjuntos completos. Se pueden escribir ambos modos como combinación lineal de los otros modos, es decir:

$$v_i = \sum_j (\alpha_{ij} u_j + \beta_{ij} u_j^*) \quad (3.40)$$

y de manera inversa:

$$u_i = \sum_j (\alpha_{ij}^* v_j - \beta_{ij} v_j^*) \quad (3.41)$$

Las expresiones anteriores (3.40) y (3.41) se conocen como *transformaciones de Bogoliubov* [51] [52]. Los coeficientes de dichas transformaciones cumplen las propiedades:

$$\sum_k (\alpha_{ik} \alpha_{jk}^* - \beta_{ik} \beta_{jk}^*) = \delta_{ij} \quad (3.42)$$

$$\sum_k (\alpha_{ik} \beta_{jk} - \beta_{ik} \alpha_{jk}) = 0 \quad (3.43)$$

Las cantidades α_{ij} y β_{ij} son los *coeficientes de Bogoliubov*, mismos que pueden calcularse al usar las propiedades (3.32)-(3.34) para el producto interno en las transformaciones de Bogoliubov (3.40) y (3.41). Esto resulta en las siguientes expresiones:

$$\alpha_{ij} = \langle v_i, u_j \rangle \quad (3.44)$$

$$\beta_{ij} = -\langle v_i, u_j^* \rangle \quad (3.45)$$

Si ahora se igualan los campos expandidos por los diferentes observadores $\phi = \tilde{\phi}$ (lo cual se interpreta como el hecho de que el campo es único e independiente del observador), además de considerar las transformaciones (3.40) y (3.41), así como los productos (3.32)-(3.34); se obtienen las siguientes relaciones que definen los operadores de creación y aniquilación de un observador en términos de los operadores del otro observador:

$$a_i = \sum_j (\alpha_{ji} b_j + \beta_{ji}^* b_j^\dagger) \quad (3.46)$$

$$b_i = \sum_j (\alpha_{ij}^* a_j - \beta_{ij}^* a_j^\dagger) \quad (3.47)$$

Finalmente, es de llamar la atención que si se calcula el número de partículas que el nuevo observador detecta en el estado vacío $|0_a\rangle$ del primer observador, este valor es no nulo. Para este cálculo basta aplicar (3.17), (3.38) y (3.47), con lo cual se llega a:

$$\langle 0_a | N_b | 0_a \rangle = \langle 0_a | b_i^\dagger b_i | 0_a \rangle = \sum_j |\beta_{ij}|^2 \neq 0 \quad (3.48)$$

En espacio-tiempo curvo el vacío y el número de partículas depende de el observador. En este caso, lo que el primer observador ve como vacío sin partículas ($\langle 0_a | a_i^\dagger a_i | 0_a \rangle = 0$), otro observador no vería vacío y detectaría partículas ($\langle 0_a | b_i^\dagger b_i | 0_a \rangle \neq 0$). Este resultado implica que el vacío no se debe entender como la nada o la ausencia de partículas, pues estas pueden producirse y además dependerá de quién las observa; este hecho resulta determinante para el cálculo de la producción de partículas en el horizonte de eventos de un agujero negro.

3.3. Rotación de Wick

En la teoría cuántica de campos (QFT) es frecuente usar las rotaciones en el plano complejo como una herramienta útil. La principal motivación es el hecho de considerar un espacio minkowskiano $ds_M^2 := -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ y notar que si $t \rightarrow it$, $\Rightarrow -d(it)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds_E^2$ o bien $ds_M^2 \rightarrow ds_E^2$, donde ds_E^2 es la métrica euclidiana $4D$. Pasar de un espacio $N-dim$; $N \geq 1$ a otro de la misma dimensión pero distinta signatura es posible mediante una rotación en el plano complejo conocida como *rotación de Wick* [4], la cual transforma a la variable temporal real en imaginaria. Esto es matemáticamente válido y permite trabajar la solución de un problema en espacio minkowskiano buscando su problema análogo en espacio euclidiano, lo que muchas veces resulta más sencillo. Sin embargo, tomar un tiempo imaginario no es intuitivo ni posee una interpretación física clara [11].

Una justificación matemática de la rotación de Wick es que las integrales de trayectoria se pueden trabajar mejor en espacio euclidiano [4]. Como ejemplo, la ecuación de Klein Gordon $(-\partial^2 - m^2)G(x-y) = i\delta^N(x-y)$, tiene como solución a la función de Green:

$$G(x-y) = \int \frac{d^N p}{(2\pi)^N} e^{ip(x-y)} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (3.49)$$

Resulta que puede obtenerse la misma solución cambiando a espacio euclidiano (rotación de Wick) para el tiempo y para el momento [4]. Usando este argumento, la ecuación de Klein Gordon se reescribe como $(-\partial^2 + m^2)G(x-y) = i\delta^N(x-y)$, mientras que para el tiempo y el momento, se tiene $t = -ix_4$ y $p_0 = -ip_4$. Esto implica que $\int \frac{dp_0}{2\pi} = i \int \frac{dp_4}{2\pi}$ y por lo tanto la solución euclidiana sería:

$$\Rightarrow G(x-y) = \int \frac{d^N p}{(2\pi)^N} e^{ip(y-x)} \frac{1}{p^2 + m^2} \quad (3.50)$$

De esta manera, (3.49) y (3.50) representan la misma solución analítica en el tiempo.

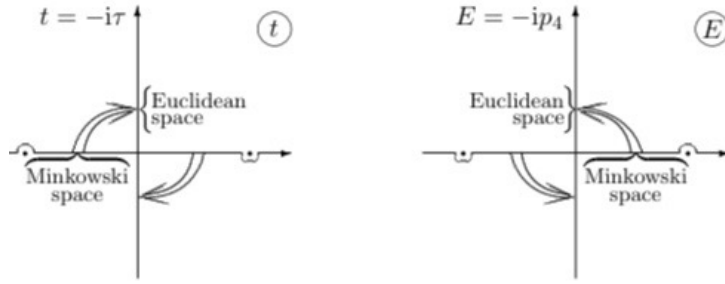


Figura 6: En la imagen de arriba se observan las rotaciones de Wick para el tiempo y la energía, cuyas rotaciones son $-\frac{\pi}{2}$ y $-\frac{\pi}{2}$, respectivamente. Por otro lado, las regiones redondeadas representan los polos de la función de Green para el espacio de coordenadas y momentos [4] .

3.4. Integral de Feynman y función de partición

Hawking mostró la relación de periodicidad entre un sistema cuántico con temperatura finita y un sistema euclidiano periódico en su artículo de 1977 [3] . Resulta que un sistema periódico en tiempo euclidiano (tiempo imaginario) con periodo β corresponde a un sistema térmico con temperatura β^{-1} y además es posible expresar la función de partición asociada al sistema en términos de una integral de caminos sobre campos periódicos de periodo β .

Para hacer dicha conexión, se partirá de analizar la amplitud de transición para el *propagador*, la cual se define como:

$$\langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle := \langle \phi_2, | u(t_2, t_1) | \phi_1 \rangle \quad (3.51)$$

con $u(t_2, t_1) := e^{-iH(t_2-t_1)}$ el *operador de evolución temporal* [53] . Al efectuar una rotación de Wick tal que $t_2 - t_1 = -i\tau$ y tomando $\phi_1 = \phi_2 = \phi$ se obtiene:

$$\langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle = \langle \phi | e^{-\tau H} | \phi \rangle \quad (3.52)$$

Aquí, es conveniente recordar la forma del propagador definido como una *integral de Feynman* (o integral de trayectoria), que se escribe del siguiente modo:

$$\langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle := \int_{\phi(t_1)=\phi_1, \phi(t_2)=\phi_2} d[\phi] e^{iS[\phi]} \quad (3.53)$$

donde $\int_{\phi_1}^{\phi_N} d[\phi] := \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \Delta t} \right)^{\frac{N-1}{2}} \int d\phi_{N-1} \int d\phi_{N-2} \dots \int d\phi_2$

Ahora, al igual que en (3.51), se aplica una rotación de Wick en (3.53), dando como resultado:

$$\langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle = \int \tilde{d}[\phi] e^{-S_E[\phi]} \quad (3.54)$$

donde $S_E = -iS$ es la acción euclidiana, resultado de efectuar la rotación en la acción $S := \int dt \left(\frac{m}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - V(\phi) \right)$, mientras que la $\tilde{d}[\phi]$ representa a $d[\phi]$ rotada.

Igualando (3.52) y (3.54):

$$\Rightarrow \langle \phi | e^{-\tau H} | \phi \rangle = \int \tilde{d}[\phi] e^{-S_E[\phi]} \quad (3.55)$$

e integrando sobre ϕ :

$$\Rightarrow \int d\phi \langle \phi | e^{-\tau H} | \phi \rangle = \int d\phi \int \tilde{d}[\phi] e^{-S_E[\phi]} \quad (3.56)$$

El lado izquierdo de (3.56) es igual a $\text{Tr} e^{-\tau H}$, la cual es la *función de partición* Z [54] de un *ensamble canónico* [54] siempre y cuando se cumpla que $\tau = \beta$ o dicho de otro modo, si se satisface la relación:

$$\tau = \frac{1}{T} \quad (3.57)$$

Tomando en cuenta estas consideraciones, la función de partición queda escrita como:

$$Z = \int d\phi \int_{\phi_1(0)=\phi_2(\beta)=\phi} \tilde{d}[\phi] e^{-S_E[\phi]} \quad (3.58)$$

Se ha hallado así un resultado importante y útil dentro de QFT. La conclusión de esto es que la rotación de Wick (que permite trabajar en variedades de signatura distinta) da lugar a un sistema euclidiano con cierto periodo, el cual se puede relacionar con la temperatura de un sistema cuántico. Aquí, puede verse que como el periodo es igual a β , geoméricamente este debe ser el valor que posee el radio del círculo del plano complejo donde se efectuó la rotación del eje temporal real al eje

temporal imaginario.

En el caso de considerar otros ensambles, habría términos adicionales en la exponencial, cuya interpretación estaría dada por ciertas cantidades asociadas a la termodinámica del sistema. Por ejemplo, un ensamble gran canónico $Z = \text{Tr} e^{-\beta(H - \sum_i \mu_i C_i)}$ para un sistema con carga Q y momento angular J tendría como correspondientes potenciales químicos μ_i a la velocidad angular Ω y al potencial eléctrico Φ [3] .

3.5. Condición de Kubo-Martin-Schwinger

Otro modo de visualizar la relación entre temperatura en un sistema con periodicidad es mediante la *condición KMS* [2] [55] . Se considera de nueva cuenta la función de partición Z que como se vio en la subsección anterior es definida como la traza de una *matriz densidad* [54] , es decir $Z := \text{Tr} e^{-\beta H}$. De esta manera el valor de expectación en el ensamble para un observable A (operador cuántico) viene dado por:

$$\langle A \rangle_\beta = Z^{-1} \text{Tr}(e^{-\beta H} A) = \frac{\text{Tr} e^{-\beta H} A}{\text{Tr} e^{-\beta H}} \quad (3.59)$$

y del mismo modo si se tienen los operadores AB :

$$\Rightarrow \langle AB \rangle_\beta = Z^{-1} \text{Tr}(e^{-\beta H} AB) \quad (3.60)$$

Esto permite considerar a la *función de Green térmica* G_β , definida como la correlación de dos operadores [56] [45] :

$$G_\beta(\tau, x) := \langle O(\tau, x) O(0, 0) \rangle_\beta \quad (3.61)$$

De acuerdo a (3.60) la relación puede escribirse como:

$$G_\beta(\tau, x) = Z^{-1} \text{Tr}(e^{-\beta H} O(\tau, x) O(0, 0)) \quad (3.62)$$

Con la matriz de densidad, se sabe que $e^{\beta H} e^{-\beta H} = I$, siendo I la *matriz identidad*. Aplicándolo en (3.62) se obtiene:

$$G_{\beta}(\tau, x) = Z^{-1} \text{Tr}(e^{-\beta H} O(\tau, x) e^{\beta H} e^{-\beta H} O(0, 0)) \quad (3.63)$$

Luego, sabiendo que $O(\tau, x) = e^{iH\tau} O(0, x) e^{-iH\tau}$, al aplicar la rotación de Wick $\tau \rightarrow -i\tau$ en el operador de evolución temporal, queda:

$$G_{\beta}(\tau, x) = Z^{-1} \text{Tr}(e^{-\beta H} e^{H\tau} O(0, x) e^{-H\tau} e^{\beta H} e^{-\beta H} O(0, 0)) \quad (3.64)$$

Factorizando los exponentes la expresión anterior se reescribe como:

$$\Rightarrow G_{\beta}(\tau, x) = Z^{-1} \text{Tr}(e^{H(\tau-\beta)} O(0, x) e^{-H(\tau-\beta)} e^{-\beta H} O(0, 0)) \quad (3.65)$$

Aplicando el nuevo operador temporal euclidiano $e^{H(\tau-\beta)} O(0, x) e^{-H(\tau-\beta)} = O(\tau - \beta, x)$, así se obtiene:

$$G_{\beta}(\tau, x) = Z^{-1} \text{Tr}(O(\tau - \beta, x) e^{-\beta H} O(0, 0)) \quad (3.66)$$

Debido a la ciclicidad de la traza $\text{Tr}(XYZ) = \text{Tr}(YZX)$, puede escribirse:

$$G_{\beta}(\tau, x) = Z^{-1} \text{Tr}(e^{-\beta H} O(0, 0) O(\tau - \beta, x)) \quad (3.67)$$

De (3.62) se sigue que:

$$G_{\beta}(\tau, x) = G_{\beta}(\tau - \beta, x) \quad (3.68)$$

Por lo tanto, la función de Green posee un periodo de $\tau = \beta$ de modo que puede escribirse:

$$\tau = \frac{1}{T} \quad (3.69)$$

(3.69) representa la misma periodicidad hallada en (3.57) para sistemas euclidianos. Una forma distinta de comprobar el mismo resultado, mismo que es de gran utilidad en el contexto de Teoría Cuántica de Campos (QFT).

4. GEOMETRÍA NO CONMUTATIVA

4.1. Espacios-tiempos no conmutativos

El primer antecedente es la idea de cuantizar el espacio-tiempo y se asocia a Snyder [57] ; él notó que es posible considerar un espacio-tiempo discreto sin violar invariancia de Lorentz. La idea es proponer una nueva geometría del espacio-tiempo donde se introducirá el hecho de que la gravedad a nivel cuántico posee un *principio de incertidumbre* y por lo tanto se cumple una regla de conmutación [43] [58] .

La no conmutatividad puede ser una propuesta adecuada para abordar la naturaleza del espacio-tiempo, ya que el enfoque clásico presenta problemas. Como ejemplo de esto, considérese una partícula a la cual se le calcula la posición; del principio de incertidumbre de Heisenberg se sabe que el momento no estaría determinado y entonces, lo mismo ocurriría con su energía, pero, si esto sucede, la energía sería divergente y esto daría lugar a una divergencia en la curvatura, lo que significa que no podría escapar información (si se asume que no hay singularidades desnudas) [29] . Por lo tanto, esto implica que no hubiera sido posible medir la posición, lo cual es una paradoja [59] . El tratamiento clásico del espaciotiempo parece tener inconsistencias. Una posible solución es dejar de lado la noción de punto, misma que permite tener perfectamente determinadas las coordenadas; entonces resulta natural pensar en trabajar con un principio de incertidumbre para las coordenadas del espacio-tiempo, más adelante se mostrará que esto elimina las divergencias.

La analogía natural es considerar la cuantización del espacio fase en mecánica cuántica dada por $[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar\delta_{ij}$, lo cual implica que $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$. De igual modo en un espacio-tiempo no conmutativo se tiene un conmutador no nulo y se cumple una relación similar con los operadores hermitianos, sólo que ahora estos representan coordenadas del espacio-tiempo, es decir: $[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta^{ij} \Rightarrow \Delta x^i \Delta x^j \geq \frac{\theta^{ij}}{2}$. Bajo esta relación de conmutación no sería posible medir simultáneamente dos coordenadas espacio temporales, pero, geoméricamente para dar un punto es necesario proporcionar las coordenadas y como esto no podría darse, la noción de punto no es válida en esta propuesta; de hecho una distribución puntual de materia clásica será reemplazada por distribuciones gaussianas que físicamente permiten remover singularidades que se asociaban a comportamientos puntuales. Puede notarse que θ^{ij} juega el papel de la $\hbar$, esto es porque ambas son las unidades elementales que discretizan el espacio-tiempo y el espacio fase, respectivamente. La única diferencia entre ellas es que matemáticamente θ^{ij} es una matriz $D \times D$ ($D :=$ dimensión del espacio-tiempo), anti-simétrica y real. Por supuesto, θ posee unidades de área, por lo que en algunos enfoques se considera proporcional a una celda de Planck aunque no necesariamente debe ser el caso.

Una vez planteado lo anterior, se pretende introducir la nueva geometría de naturaleza no conmutativa e investigar cómo se podría implementar en la Relatividad General. Por lo tanto, se plantea la pregunta, ¿cómo se modifican las soluciones a las ecuaciones de Einstein (2.21) al introducir las ideas de la geometría no conmutativa? Responder esta pregunta es la esencia de este capítulo. En general, al implementar no conmutatividad en la gravedad se esperaría obtener soluciones de agujero negro diferentes y que proporcionen una descripción del espacio-tiempo más profunda y completa desde el punto de vista cuántico.

Resulta curioso que, como se verá, la no conmutatividad se codifica en la distribución de materia y no como tal en la geometría [60]. La idea de fondo es que la no conmutatividad es una propiedad intrínseca del espacio, por lo que afecta a la gravedad y como a su vez la densidad de energía-momento determina la curvatura, entonces es posible tomar los efectos de la no conmutatividad en el tensor de energía-momento (2.7).

4.2. Agujeros negros no conmutativos

4.2.1. Solución de Schwarzschild no conmutativa

Se desea conocer la forma de la solución de Schwarzschild (2.36) para el caso no conmutativo [61]. Una forma conveniente de incorporar la no conmutatividad es mediante el *producto de Voros* [60] para luego definir la densidad de masa del agujero negro. Se verá que dicha densidad incorporará la no conmutatividad y como consecuencia esta densidad quedará escrita como una *distribución gaussiana* en lugar de la *delta de Dirac* usual [62].

Para comenzar, se considera el plano no conmutativo en unidades naturales [63], por lo que se tienen las siguientes reglas de conmutación :

$$[\hat{x}^i, \hat{x}^j] = i\theta e^{ij}, \quad [\hat{x}^i, \hat{p}_j] = i\delta_j^i, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0 \quad (4.1)$$

Adicionalmente se definen los operadores Z y $Z^\dagger$ como:

$$Z := \frac{1}{\sqrt{2}}(X^1 + iX^2), \quad Z^\dagger := \frac{1}{\sqrt{2}}(X^1 - iX^2) \quad (4.2)$$

los cuales en analogía con mecánica cuántica, tomando que $\theta \rightarrow \hbar$, cumplen la regla de conmutación de los operadores de creación-aniquilación $[Z, Z^\dagger] = \theta$.

Una vez definidos estos operadores, se introducen los llamados *estados coherentes* $|Z\rangle$, tales que cumplen la ecuación de eigenvalores:

$$Z|Z\rangle = z|Z\rangle, \quad \langle Z|Z^\dagger = \langle Z|\bar{z} \quad (4.3)$$

cuyos eigenvalores son complejos y donde la forma explícita de los estados $|Z\rangle$ normalizados está dada por:

$$|Z\rangle = e^{\frac{-z\bar{z}}{2\theta}} e^{\frac{-z}{\theta}Z^\dagger} |0\rangle \quad (4.4)$$

donde $|0\rangle$ representa el estado de vacío que cumple $Z|0\rangle = 0$.

Los estados coherentes $|Z\rangle$ satisfacen la *relación de completez* [53] :

$$\frac{1}{\pi\theta} \int dz d\bar{z} |z\rangle\langle z| = 1 \quad (4.5)$$

Estos estados también permiten relacionar un operador de la forma $F(X^1, X^2)$ con una función $F(z)$ del siguiente modo:

$$F(z) = \langle z | F(X^1, X^2) | z \rangle \quad (4.6)$$

Usando la forma no conmutativa de la *transformada de Fourier* [47] :

$$F(z) = \int \frac{d^2 p}{2\pi} f(p) \langle z | e^{ip_j X^j} | z \rangle \quad (4.7)$$

Reescribiendo el valor de expectación considerando que $\langle z | X^1 | z \rangle = \sqrt{2} \text{Re}(z)$, $\langle z | X^2 | z \rangle = \sqrt{2} \text{Im}(z)$ y la *descomposición de Hausdorff* $P_{\pm} = p_1 \pm i p_2$, se obtiene:

$$\langle z | e^{ip_j X^j} | z \rangle = \langle z | e^{ip_+ Z^\dagger} e^{p_- Z} e^{\frac{p_- p_+}{2} [Z^\dagger, Z]} | z \rangle \quad (4.8)$$

y en consecuencia:

$$\langle z | e^{ip_j X^j} | z \rangle = e^{i \frac{p_1}{\sqrt{2}} (z + \bar{z}) + \frac{p_2}{\sqrt{2}} (z - \bar{z})} e^{-\frac{\theta}{4} (p_1^2 + p_2^2)} \quad (4.9)$$

Sustituyendo (4.9) en (4.7) se llega al resultado:

$$F(z) = \int \frac{d^2 p}{2\pi} f(p) e^{i \frac{p_1}{\sqrt{2}} (z + \bar{z}) + \frac{p_2}{\sqrt{2}} (z - \bar{z})} e^{-\frac{\theta}{4} (p_1^2 + p_2^2)} \quad (4.10)$$

Integrando esta transformada de Fourier y considerando el caso de propagación máxima del momento $f(p) = cte$, resulta:

$$F(z) = \frac{4\pi}{\theta} e^{-\frac{4}{\theta} z \bar{z}} \quad (4.11)$$

Por otro lado, cuando se mide la posición en un espacio-tiempo no conmutativo, lo mejor que se puede esperar son estados de mínima incertidumbre, por lo que resulta conveniente escribir (4.4) como [59] :

$$|Z\rangle = e^{\frac{-z\bar{z}}{2}} e^{-zZ^\dagger} |0\rangle \quad (4.12)$$

Por otra parte los operadores de posición en el espacio de funciones no conmutativas son definidos como:

$$|z, \bar{z}\rangle = \frac{1}{\sqrt{\theta}} |z\rangle \langle z| \quad (4.13)$$

y cumplen la relación de completez dada por:

$$\int \frac{\theta dz d\bar{z}}{2\pi} |z, \bar{z}\rangle \star (z, \bar{z}) = \mathbf{1}_Q \quad (4.14)$$

donde $\mathbf{1}_Q$ es el *operador identidad cuántico* [53]. Adicionalmente aparece el producto de Voros, el cual se define para un par de funciones como:

$$f(z, \bar{z}) \star g(z, \bar{z}) := f(z, \bar{z}) e^{\overleftarrow{\partial_{\bar{z}}} \overrightarrow{\partial_z}} g(z, \bar{z}) \quad (4.15)$$

Tomando la superposición de dos estados coherentes:

$$(\omega, \tilde{\omega}|\xi, \tilde{\xi}) = \int \frac{\theta dz d\bar{z}}{2\pi} (\omega, \tilde{\omega}|z, \bar{z}) \star (z, \bar{z}|\xi, \tilde{\xi}) \quad (4.16)$$

Se puede verificar por medio del producto de Voros que esta relación se cumple si se toma como solución:

$$(\omega, \tilde{\omega}|z, \bar{z}) = \frac{e^{-\frac{r^2}{2\theta}}}{\theta}, \quad r = \sqrt{2\theta}|\omega - z| \quad (4.17)$$

El producto de Voros reemplaza a la delta de Dirac con la distribución gaussiana, debido a:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{r^2}{2\theta}}}{\theta} = 2\pi\delta^2(r) \quad (4.18)$$

La discusión anterior por simplicidad fue únicamente para el caso del plano no conmutativo 2-dimensional; análogamente extendiendo estos argumentos, en 3 dimensiones se tendría:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{r^2}{4\theta}}}{(4\pi\theta)^{3/2}} = \delta^3(r) \quad (4.19)$$

Clásicamente se debe recordar que la densidad de materia se expresa como $\rho(r) = M\delta^3(r)$, pero tomando en cuenta la expresión anterior, la densidad en su versión no conmutativa toma la forma:

$$\rho(r) = \frac{M}{(4\pi\theta)^{3/2}} e^{-\frac{r^2}{4\theta}} \quad (4.20)$$

De esta manera el producto de Voros permite sustituir una distribución de masa puntual basada en la delta de Dirac por una gaussiana, lo que implica perder la estructura puntual de un cuerpo y regularizar las divergencias. En general la no conmutatividad sustituye las deltas de Dirac por distribuciones gaussianas de anchura mínima $\sqrt{\theta}$, además esta formulación elimina el problema de violación de unitariedad del producto de Voros y remueve las singularidades del origen [64] ; cabe mencionar que los efectos de la no conmutatividad se esperarían observar a escalas de $\sqrt{\theta} < 10^{-16} cm$ [61] .

Para finalizar, falta resolver las ecuaciones de Einstein (2.21) usando la nueva distribución de materia (4.20) [61] , la cual es consecuencia de la no conmutatividad.

Para ello se procede del siguiente modo: en primer lugar, de la ecuación de conservación $T^{\mu\nu}_{\theta;\nu} = 0$ se obtiene $\partial_r T_r^r = -\frac{1}{2}g^{00}\partial_r g_{00}(T_r^r - T_0^0) - g^{\theta\theta}\partial_r g_{\theta\theta}(T_r^r - T_\theta^\theta)$ y para que se cumpla que $g_{00} = -g_r^{-1}$ necesariamente $T_r^r = T_0^0 = -\rho_\theta(r)$; y en consecuencia $T_\theta^\theta = -\rho(r) - \frac{r}{2}\partial_r \rho(r)$. Por lo tanto, el tensor de energía-momento se escribe como:

$$T_{\theta\mu}^\nu = \begin{pmatrix} -\rho(\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p_\perp \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

con $p_r = -\rho(\theta)$ y $p_\perp = -\rho(r) - \frac{r}{2}\partial_r\rho(r)$. El nuevo tensor de energía-momento (4.21) rompe con la isotropía mostrada por el *tensor energía-momento de fluido perfecto* [27] , nuevamente como consecuencia de la no conmutatividad.

La solución requerida que corresponderá a la métrica de Schwarzschild no conmutativa debe cumplir que sea estática y con simetría esférica en analogía a (2.36), por tal razón se postula la misma estructura métrica:

$$ds^2 = -f_\theta(r)dt^2 + f_\theta^{-1}(r)dr^2 + r^2d\Omega^2 \quad (4.22)$$

Al introducir (4.21) en las ecuaciones de campo (2.21) se encuentra:

$$f_\theta(r) = 1 - \frac{2M}{r} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \right) \quad (4.23)$$

Entonces, la solución de Schwarzschild no conmutativa se escribe sustituyendo (4.23) en (4.22):

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \right) \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \right) \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (4.24)$$

donde $\gamma(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta})$ es la función gamma incompleta dada por $\gamma(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}) = \int_0^{\frac{r^2}{4\theta}} t^{\frac{3}{2}-1} e^{-t} dt$. Puede notarse que la solución de Schwarzschild conmutativa (2.36) se recupera en el límite de $\frac{r}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$, lo que implica recuperar el caso clásico a grandes distancias en r o para θ nulo. Además, si se efectúa el desarrollo en serie de la exponencial y se integra, puede obtenerse el desarrollo asintótico de la función gamma incompleta, el cual resulta ser potencias de r , es decir: $\gamma(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}) \approx \frac{r^3}{32\theta^{\frac{3}{2}}} - \frac{r^5}{80\theta^{\frac{5}{2}}} + \dots$. Esto permite verificar que $r = 0$ ya no es una singularidad para (4.24), a diferencia de (2.36) donde sí lo era. Por lo tanto, la no conmutatividad remueve las singularidades y ahora es posible tener horizontes que no necesariamente las contengan.

4.2.2. Solución de Reissner-Nordström no conmutativa

Como siguiente caso conviene analizar la solución de Reissner-Nordström (2.72) en la versión inspirada en no conmutatividad [59]. Como se vio en la sección (2.4) se trata de una solución con simetría esférica, estática y con carga eléctrica Q ; desde luego, se busca reproducir que en el caso $Q \rightarrow 0$ se recupere el caso de Schwarzschild. La tarea aquí consistirá en resolver las ecuaciones de Maxwell para una fuente de materia representada por una distribución gaussiana, que, como se mencionó, es la distribución que codifica la información de la no conmutatividad. De igual modo se utilizará una distribución gaussiana tomando en cuenta la discusión previa sobre fuentes puntuales y extendidas, esto para mostrar la fuente asociada al campo eléctrico

La densidad de carga en este caso es:

$$\rho_e = \frac{Q}{(4\pi\theta)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4\theta}} \quad (4.25)$$

mientras que la 4-densidad de corriente se escribe como:

$$J^\alpha = \rho_e \delta_0^\alpha \quad (4.26)$$

Puesto que se está analizando el caso estático cargado, sólo estará presente el campo eléctrico, por lo que el tensor de Faraday y la ecuación de Maxwell para fuentes en este caso serían:

$$F^{\alpha\beta} = \delta^{0[\alpha]}\delta^{r[\beta]} E(r) \quad (4.27)$$

y

$$J^\alpha = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\beta (\sqrt{-g} F^{\alpha\beta}) \quad (4.28)$$

respectivamente.

De (4.27) se obtienen los valores no nulos del tensor de Faraday:

$$F^{tr} = -F^{rt} = E(r) \quad (4.29)$$

Por otro lado, para trabajar con (4.28) hay que hallar g , el cual es el determinante del tensor métrico. Al ser un espacio-tiempo con simetría esférica, se tiene que $g = -r^4 \sin^2 \theta \Rightarrow \sqrt{-g} = r^2 \sin \theta$. Con este resultado en mente, al sustituir (4.25) y (4.26) en (4.28), queda:

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 E(r)) = \frac{Q}{(4\pi r^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4\theta}} \quad (4.30)$$

como la única ecuación no trivial. Resolviendo se encuentra el campo eléctrico E :

$$E(r) = \frac{Q}{2\pi r^2} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \quad (4.31)$$

Por otro lado, el tensor electromagnético se definió en (2.39) como:

$$T_{\alpha\beta} := \frac{1}{4\pi} (F_{\alpha\mu} F_{\beta}^{\mu} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) \quad (4.32)$$

Ya que se conocen las componentes no nulas del tensor de Faraday, se evalúan directamente las componentes del tensor de energía-momento, dando como resultado:

$$T_{\alpha\beta} := \frac{E^2(r)}{8\pi} g_{\alpha\beta} \quad (4.33)$$

En este punto es posible plantear la ecuación a resolver, la cual es (2.21) con un tensor de energía-momento dado por la suma del tensor de materia (4.21) más (4.32); este último se asocia con las contribuciones del campo electromagnético.

$$\Rightarrow G_{\nu}^{\mu} = R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} R = 8\pi (T_{\nu}^{\mu}{}_{(mat)} + T_{\nu}^{\mu}{}_{(ele)}) \quad (4.34)$$

y como se quiere conocer la forma de la función $f_{\theta}(r)$ (al igual que en Schwarzschild), conviene tomar las componentes temporales:

$$G_t^t = 8\pi (T_t^t{}_{(mat)} + T_t^t{}_{(ele)}) \quad (4.35)$$

De esta forma se obtiene la ecuación:

$$\frac{f_\theta + r(rE^2 + \partial_r f_\theta) - 1}{r^2} = 8\pi T_r^r(mat) \Rightarrow \partial_r(r(1 - f_\theta)) = E^2 - 8\pi r^2 T_r^r(mat) \quad (4.36)$$

Resolviendo para f_θ :

$$f_\theta = 1 + \frac{1}{r} \int (8\pi r^2 T_r^r(mat) - E^2) dr \quad (4.37)$$

donde la componente $T_r^r(mat)$ es justo $\rho(mat)$ (la cual ya se calculó en la ecuación (4.20)). Al sustituir (4.20) y (4.31) en (4.36), se encuentra que:

$$f_\theta(r) = 1 - \frac{2M}{r} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \right) + \frac{Q^2}{\pi r^2} \left(\gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) - \frac{r}{\sqrt{2\theta}} \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{2\theta}\right) \right),$$

donde M es la *masa desnuda*. Lo que se debe considerar es una masa total, la cual considera la contribución del campo gravitacional (masa desnuda) más la contribución del campo electromagnético. Dicha masa es la masa ADM y viene dada por $m = \oint_\Sigma d\sigma^\mu (T_\mu^0(mat) + T_\mu^0(ele))$ [65]. Aquí, Σ representa una superficie 3-d ($t = cte$) cerrada en infinito. En términos de la masa total m , se tiene:

$$f_\theta(r) = 1 - \frac{4m}{\sqrt{\pi}r} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{Q^2}{\pi} [\gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) - \frac{r}{\sqrt{2\theta}} \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{2\theta}\right) + r \sqrt{\frac{2}{\theta}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right)] \right) \quad (4.38)$$

Análogamente al caso anterior se cumple la misma estructura de la métrica, por lo que la solución final es:

$$ds^2 = -f_\theta(r) dt^2 + f_\theta^{-1}(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (4.39)$$

siendo $f_\theta(r)$ la función hallada en (4.38). Desde luego, la forma asintótica de (4.39) recupera el caso de Reissner-Nordström clásico (2.72) cuando $\frac{r}{\sqrt{\theta}} \rightarrow \infty$ y remueve las singularidades para $r = 0$.

5. RADIACIÓN HAWKING

5.1. Antecedentes

Dada la relación entre entropía y área hallada por Bekenstein en 1972 [9], se sugería el hecho de que también había una temperatura asociada al agujero negro. Un año después, Bardeen, Carter y Hawking publicaron el artículo *Four Laws of Black Hole Mechanics* [66], el cual discute la relación que guarda el área del horizonte de eventos A y la gravedad de superficie κ con la entropía y la temperatura, respectivamente; esto permitió establecer 4 leyes termodinámicas para los agujeros negros.

De la *ley de Bardeen* (1a ley de la termodinámica de agujeros negros) [66] para el caso donde sólo hay masa, se sabe que $dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA$ por lo que, si se define $\Theta := \frac{\kappa}{8\pi} \Rightarrow \Theta = \frac{\partial M}{\partial A}$. Mientras que la ley de la termodinámica usual va como $dU = T dS$ de modo que se obtiene $T = \frac{\partial U}{\partial S}$

Usando la *ley de Bekenstein* dada por:

$$S = \frac{A}{4} \quad (5.1)$$

se llega a $T = 4\Theta$, y reemplazando la expresión de la gravedad de superficie (2.99):

$$T = \frac{1}{8\pi M} \quad (5.2)$$

Es decir, el agujero negro posee una temperatura y debido a la *ley de Stefan-Boltzmann* [53] esto implica que emite radiación. Esto se verá posteriormente en el cálculo del valor de expectación del operador número, el cual dará el espectro de emisión y la temperatura asociada. Todo esto contradice lo sabido sobre agujeros negros desde el punto de vista clásico, pues la materia no puede escapar debido a que la velocidad de escape en el interior de todo agujero negro supera a la velocidad de la luz y como nada puede viajar más rápido que la luz, nada escapa. Entonces, ¿cómo es posible que un agujero negro emita materia? Responder esta pregunta implica dejar de abordar el problema desde la física clásica para analizarlo cuánticamente. Más adelante se estudiará el mecanismo mediante el cual se lleva a cabo el

proceso de emisión de partículas en el horizonte de eventos. Dado que el cálculo puramente termodinámico hecho hasta ahora no proporciona detalles sobre cómo se da el fenómeno de la temperatura no nula en un objeto que clásicamente no permite escapar nada, la aparente contradicción debe dilucidarse desde el punto de vista cuántico, en particular se debe usar teoría cuántica de campos (QFT), la cual fue la primer herramienta que Hawking usó para explicar el fenómeno que ahora es conocido como radiación Hawking [5] .

5.2. Efecto Unruh

Como un primer acercamiento a la radiación Hawking, es oportuno estudiar qué sucede con la radiación que detecta un observador no inercial [52] . Un análisis en este sentido pretende contestar la pregunta, ¿qué vacío cuántico detecta un observador acelerado?

Sea un observador O_R con aceleración constante " a " inmerso en el espacio-tiempo minkowskiano, que por simplicidad se toma como (1+1)-dim; a este observador se le conoce como *observador de Rindler*, el cual se considerará que inicialmente se encuentra en el vacío. Partiendo de la métrica de Minkowski:

$$ds_M^2 = -dt^2 + dx^2 \quad (5.3)$$

y usando las coordenadas de cono de luz (2.76) definidas mediante las relaciones $\tilde{u} := t - x$ y $\tilde{v} := t + x$ se escribe la métrica minkowskiana en la forma:

$$ds_M^2 = -d\tilde{u}d\tilde{v} \quad (5.4)$$

Con las transformaciones de coordenadas:

$$x := \frac{1}{a} e^{a\xi} \cosh a\eta \quad (5.5)$$

$$t := \frac{1}{a} e^{a\xi} \sinh a\eta \quad (5.6)$$

que permiten reescribir las coordenadas de cono de luz como:

$$\tilde{u} = -\frac{1}{a}e^{au} \quad (5.7)$$

$$\tilde{v} = \frac{1}{a}e^{av} \quad (5.8)$$

con $u := \eta - \xi$ y $v := \eta + \xi$

se reescribe la métrica (5.4):

$$ds^2 = -d\tilde{u}d\tilde{v} = -e^{a(v-u)}dudv = -e^{2a\xi}dudv = e^{2a\xi}(d\xi^2 - d\eta^2) \quad (5.9)$$

La métrica (5.9) se conoce como *métrica de Rindler* [23] y describe el espacio-tiempo asociado a un observador de Rindler. Nótese que (5.7) y (5.8) relacionan las coordenadas del observador minkowskiano con las del observador de Rindler. Además, se puede ver que (5.9) está relacionada con la métrica de Minkowski mediante una transformación conforme con el factor $\tilde{\Omega} = e^{a\xi}$, es decir, se puede escribir:

$$ds_R^2 = \tilde{\Omega}^2 ds_M^2 \quad (5.10)$$

En este punto, se plantea la siguiente pregunta, si un observador O inercial minkowskiano detecta un estado de vacío, ¿ O_R vería lo mismo?, como se sabe, O_R es un observador no inercial. Para responderlo, se calculará el número de partículas que O_R detecta. El camino usual para efectuar dicho cálculo es determinar los coeficientes de Bogoliubov (3.44) y (3.45) en las coordenadas de Rindler ξ y η dadas por (5.5) y (5.6). Para lograr hallar esto, se deberán considerar las soluciones de Klein-Gordon dadas por ondas de la forma (3.4), desde luego, se podría tomar una solución normalizada de (3.4), pero, para los fines de este cálculo y por simplicidad, será suficiente considerar (3.4) tal cual, ya que los términos de la normalización no contribuirán en las integraciones posteriores y por lo tanto no cambiará el espectro resultante.

Tomando (3.4) con masa nula ($m = 0$) para modos propagándose a la derecha ($k > 0$), es posible escribir (3.4) como $u_k = e^{-ik(t-x)}$. Sin embargo, falta escribirlo en las coordenadas de Rindler. Haciendo esto, resulta:

$$u_k = e^{\frac{ik}{a}} e^{a(\xi-\eta)} \quad (5.11)$$

mientras que para v_p se tiene:

$$v_p = e^{ip(\xi-\eta)} \quad (5.12)$$

Con estos dos modos u_k y v_p , y el producto interno (3.7) se tiene todo lo necesario para calcular los coeficientes de Bogoliubov. Es posible utilizar el mismo producto interno debido a que, como se vio en (5.10), las métricas son conformes.

Para el primer coeficiente de Bogoliubov dado por (3.44), se obtiene:

$$\alpha_{pk} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi (ke^{a\xi} + p) e^{i(p\xi - \frac{k}{a}e^{a\xi})} \quad (5.13)$$

Análogamente, se calcula el coeficiente β_{pk} (3.45) :

$$\beta_{pk} = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi (ke^{a\xi} - p) e^{i(p\xi + \frac{k}{a}e^{a\xi})} \quad (5.14)$$

Dado que, para saber el número de partículas (3.48) lo importante es hallar el módulo de β_{pk} (y no β_{pk} como tal), es importante notar que α_{pk} y β_{pk} pueden relacionarse (sin necesidad de calcular la integral). Si se considera que $\alpha_{pk} := f(p, k)$, se puede notar que $\beta_{pk} = f^*(-p, k)$. Una reescritura de la integral (5.13) permitirá relacionar los coeficientes de Bogoliubov en una igualdad.

Si se realizan los cambios de variable $t := e^{a\xi}$ y posteriormente $x := \frac{ikt}{a}$, la integral $f(p, k)$ queda de la siguiente manera:

$$\alpha_{pk} = f(p, k) = \left(\frac{1}{ik}\right)^{\frac{ip}{a}} \int_0^{i\infty} dx \left(-i(ax)^{\frac{ip}{a}} + p(ax)^{\frac{ip}{a}-1}\right) e^x \quad (5.15)$$

Si se calcula el complejo conjugado de (5.15) y se cambia $p \rightarrow -p$, puede verificarse que $f^*(-p, k) = (-1)^{\frac{ip}{a}} f(p, k)$. Por lo tanto, se puede escribir la relación entre coeficientes:

$$\beta_{pk} = (-1)^{\frac{ip}{a}} \alpha_{pk} \quad (5.16)$$

Usando la *fórmula de Euler* [67] se obtiene $e^{i\pi} = -1$, lo que permite reescribir la relación como $\alpha_{pk} = (e)^{\frac{\pi p}{a}} \beta_{pk}$ y calcular el módulo de α :

$$\alpha_{pk} \alpha_{pk}^* = (e)^{\frac{2\pi p}{a}} \beta_{pk} \beta_{pk}^* \quad (5.17)$$

Con ayuda de (3.42) se puede evaluar el caso $i = j$ y renombrar $i \rightarrow p$. Esto produce $\sum_k (\alpha_{pk} \alpha_{pk}^* - \beta_{pk} \beta_{pk}^*) = 1$, si se sustituye (5.17), se encuentra:

$$\sum_k \left(\beta_{pk} \beta_{pk}^* (e^{\frac{2\pi p}{a}} - 1) \right) = 1 \quad (5.18)$$

De acuerdo con (3.48) el módulo cuadrado de beta que aparece en (5.18) representa el número de partículas que O_R ve. Como $m = 0$, (3.5) implica que $k = \omega t$ y $p = \omega$ y dado que estas frecuencias no son discretas, se suma mediante una integral sobre ωt ; donde ωt y ω es la frecuencia de las partículas entrantes y salientes, respectivamente. Por lo tanto:

$$\langle 0 | N_\omega | 0 \rangle = \int d\omega t |\beta_{\omega\omega t}|^2 = \frac{\delta(0)}{e^{\frac{2\pi\omega}{a}} - 1} \quad (5.19)$$

Generalmente el numerador que aparece en estas distribuciones está asociado con el *greybody factor* [68], el cual brinda información cuántica relacionada con la probabilidad de que la radiación Hawking alcance el infinito. Aquí, puede verse que (5.19) tiene la forma de la *distribución de Planck* [53] para radiación de un cuerpo negro, la cual va como $\sim \frac{1}{e^{\omega\beta} - 1}$ y cuya temperatura es:

$$T = \frac{a}{2\pi} \quad (5.20)$$

La expresión (5.19) permite contestar la pregunta planteada al inicio de esta sección. Un observador acelerado no detecta vacío sino que detecta partículas en lo que para un observador en reposo era vacío. Además, detecta la temperatura dada por (5.20), la cual es el baño térmico asociado al estado de un observador en movimiento. Dicha temperatura se conoce como *temperatura de Unruh* [69] [70].

Más aún, si se aplica el principio de equivalencia, la aceleración " a " puede ser sustituida por una aceleración gravitacional debida a la gravedad de superficie de un agujero negro; este procedimiento puede ser entonces utilizado para hallar la temperatura del agujero negro. Es decir, $a = \kappa$. Sustituyendo (2.99) en (5.20), se obtiene la Temperatura de Hawking:

$$T = \frac{1}{8\pi M} \quad (5.21)$$

Debido a esta relación entre una y otra temperatura frecuentemente se habla de una *Temperatura de Hawking-Unruh*. Una forma de distinguir ambas es mediante el siguiente dibujo:

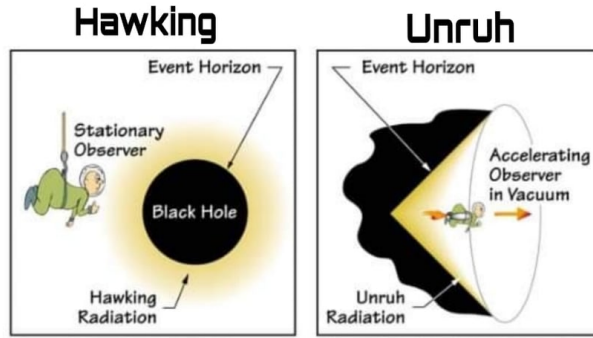


Figura 7: Del lado izquierdo puede verse a un observador estacionario en el exterior del horizonte de un agujero negro; él detectaría la temperatura de Hawking, mientras que el de la derecha es otro observador pero que viaja con aceleración constante en vacío y en espacio-tiempo minkowskiano (sin gravedad). Este segundo observador detectaría la temperatura de Unruh. Como se vio, la forma de relacionar ambas temperaturas es con el principio de equivalencia, empero esto sólo tiene sentido si se utiliza una aceleración apropiada (la de la gravedad de superficie) pues de otro modo se tomarían aceleraciones donde no hay emisión de partículas. Una analogía del efecto Unruh sería el considerar una carga eléctrica en reposo y a un observador acelerado; el observador detectaría radiación debido al marco en el que realiza la medición [32] .

5.3. Efecto túnel

Es sabido que en el vacío cuántico existen fluctuaciones, por lo que es de especial interés saber el comportamiento de las fluctuaciones cerca del horizonte de eventos de un agujero negro mediante el análisis del efecto túnel de mecánica cuántica [71] . Esto permitirá calcular la temperatura de Hawking.

De manera sucinta, el efecto túnel consiste en considerar una partícula y una barrera de potencial tal que a la partícula le es imposible de atravesar desde el punto de vista clásico. Sin embargo, en mecánica cuántica esto sí es posible. Por simplicidad se considera el caso más sencillo de una solución espacio-tiempo de agujero negro, la cual es la solución de Schwarzschild dada por (2.36). Para el análisis del efecto túnel se necesita un sistema coordenado sin singularidades en el horizonte de eventos, por lo que se propone usar el sistema coordenado de *Painlevé-Gullstrand* [72] [73], el cual define el tiempo de *Painlevé-Gullstrand* como:

$$t_p := t + X(r), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} X(r) = 0 \quad (5.22)$$

con t el tiempo de Schwarzschild y $X(r) := 2\sqrt{2mr} + 2M \ln \left(\frac{\sqrt{r} - \sqrt{2M}}{\sqrt{r} + \sqrt{2M}} \right)$

y sustituyendo (5.22) en (2.36) con la signatura temporal negativa se tiene la forma siguiente para la métrica de Schwarzschild:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + 2\sqrt{\frac{2M}{r}}dt dr + dr^2 + r^2 d\Omega^2 \quad (5.23)$$

siempre y cuando se cumpla la condición:

$$\frac{1}{f(r)} - f(r)\left(\frac{dX}{dr}\right)^2 = 1 \quad (5.24)$$

donde $f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$. La métrica (5.23) en $r = 2M$ tiene la ventaja de no poseer singularidad y mostrar un caracter estacionario.

Ahora es conveniente hacer uso de la conservación de la energía y el hecho que $\frac{dM}{dt} \ll M$ para tiempos cortos. Se considera una partícula con energía ω que cruza al horizonte de eventos $\mathcal{H}$ desde r_0 hasta r_f de tal manera que la masa del agujero negro disminuye de M a $M - \omega$ y por lo tanto también disminuye el radio del horizonte debido a la evaporación. Cabe señalar que en este caso la barrera de potencial se genera una vez que la partícula escapa y contrae al horizonte.

Tomando la ecuación de Hamilton [21] para la coordenada radial $P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$, la acción de la partícula puede expresarse como:

$$S = \int_{r_0}^{r_f} P_r dr = \int_{r_0}^{r_f} dr \int_0^{P_r} d\tilde{p}_r \quad (5.25)$$

Introduciendo la *ecuación de Hamilton* [21] $\frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{dr}{dt}$ se puede escribir:

$$S = \int_{r_0}^{r_f} dr \int_M^{M-\omega} \frac{dH}{\dot{r}} \quad (5.26)$$

Usando ahora la condición (5.24) es posible hallar las geodésicas nulas como las trayectorias determinadas por la ecuación:

$$\dot{r} = \pm 1 - \sqrt{1 - f(r)} \quad (5.27)$$

El signo define si la geodésica es para la partícula saliente (+) o entrante (-).

Reemplazando la geodésica saliente (5.27) junto con el cambio de variable $H = M - \omega$ en la acción (5.26) se llega a:

$$S = \int_0^\omega \int_{r_0}^{r_f} \frac{dr}{1 - \sqrt{1 - f(r)}} (-d\tilde{\omega}) \quad (5.28)$$

Ya que $r_0 > r_H > r_f$ y $f(r_h) = 0$, entonces la integral (5.28) es compleja, esto es $S \in \mathbb{C}$. La parte imaginaria de S puede asociarse al residuo del polo y la parte imaginaria de la integral (5.28) se evalúa usando el *teorema de Sokhotski-Plemelj* [74]. Tomando al agujero negro cuando se emite la partícula ($f = 1 - \frac{2(M-\omega)}{r}$), se calcula:

$$Im[S] = Im\left[\int_0^\omega \int_{r_0}^{r_f} \frac{dr}{1 - \sqrt{1 - f(r)}} (-d\tilde{\omega})\right] = \int_0^\omega \int_{r_f}^{r_0} \frac{dr}{1 - \sqrt{\frac{2(M-\tilde{\omega})}{r}}} (d\tilde{\omega}) \quad (5.29)$$

Con el cambio de variable $\sigma = r^2$ en (5.29):

$$\Rightarrow Im[S] = \int_0^\omega d\tilde{\omega} \int_{\sigma_f}^{\sigma_0} \frac{2\sigma^2 d\sigma}{\sigma - \sqrt{2(M-\tilde{\omega})} \pm i\epsilon} \quad (5.30)$$

de modo que integrando (5.30) se puede realizar la integral de manera cerrada con el resultado:

$$Im[S] = \int_0^\omega d\tilde{\omega} \int_0^\pi i d\theta 2(\sqrt{2(M-\tilde{\omega})} + \epsilon e^{i\theta})^2 = \int_0^\omega d\tilde{\omega} 4\pi(M - \tilde{\omega}) = 4\pi\omega(M - \frac{\omega}{2}) \quad (5.31)$$

Una vez hallada ImS , (5.31) se sustituye en la fórmula para la *tasa de emisión semiclásica* [75] dada por:

$$\Gamma = e^{-2ImS} \quad (5.32)$$

por lo que se obtiene:

$$\Gamma = e^{-8\pi(M\omega - \frac{\omega^2}{2})} \quad (5.33)$$

Considerando sólo primer orden en la energía de la partícula, se puede despreciar el término $\sim \omega^2$ ya que la masa del agujero negro es mucho mayor que la energía de la partícula escapando, además este término está relacionado con la autointeracción del campo gravitacional.

$$\Rightarrow \Gamma \sim e^{-\omega(8\pi M)} \quad (5.34)$$

Si se asume que la tasa de emisión es proporcional al factor de Boltzmann [54], la temperatura queda como la temperatura de Hawking:

$$T = \frac{1}{8\pi M} \quad (5.35)$$

5.4. Formulación euclidiana

Sea un espacio-tiempo de Schwarzschild (1+1)-dim en donde $\theta = \phi = const.$. Aquí, la métrica viene dada por la siguiente estructura:

$$dS^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 \quad (5.36)$$

con $f(r) := 1 - \frac{2M}{r}$. Si se aplica una rotación de Wick $t = i\tau$ en (5.36) se llega a:

$$dS^2 = f(r)d\tau^2 + f(r)^{-1}dr^2 \quad (5.37)$$

que corresponde a una métrica con signatura euclídea.

Ahora se estudia un punto r en las proximidades del horizonte r_H , de tal manera que $r \approx r_H + \rho$, con $\rho \ll 1$. Bajo esta aproximación se tiene que en la vecindad del horizonte:

$$f(r_H + \rho) \approx f(r_H) + \rho f'(r_H) = \rho f'(r_H)$$

Usando esta última aproximación de $f(r)$ en la métrica (5.37), se obtiene:

$$dS^2 \approx \frac{1}{\rho f'(r_H)} d\rho^2 + \rho f'(r_H) d\tau^2 \quad (5.38)$$

Definiendo los cambios de variables: $R := 2\sqrt{\frac{\rho}{f'(r_H)}}$ y $\theta := \frac{\tau f'(r_H)}{2}$, los cuales implican las relaciones: $dR^2 = \frac{d\rho^2}{\rho f'(r_H)} \Rightarrow R^2 d\theta^2 = \rho f'(r_H) d\tau^2$

Es posible escribir (5.38) en la bien conocida métrica euclidiana en coordenadas polares:

$$dS^2 = dR^2 + R^2 d\theta^2 \quad (5.39)$$

En este caso el dominio de θ es $[0, 2\pi]$. Y ya que $d\theta = \frac{f'(r_H)}{2} d\tau$

Integrando se tiene que:

$$\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{f'(r_H)}{2} \int_0^\tau d\tau$$

de modo que se obtiene la expresión:

$$\Rightarrow \tau = \frac{4\pi}{f'(r_H)} \quad (5.40)$$

Utilizando la forma explícita del coeficiente métrico $f(r)$ se tiene que $f'(r_H) = \frac{d}{dr}(1 - \frac{2M}{r})_{r=2M} = \frac{1}{2M}$, por lo que:

$$\Rightarrow \tau = 8\pi M \quad (5.41)$$

Finalmente usando la relación (3.57) $T = \frac{1}{\tau}$, la cual relaciona el periodo con el tiempo τ introducido a través de la rotación de Wick, se llega a:

$$T = \frac{1}{8\pi M} \quad (5.42)$$

Esta última ecuación es la temperatura de Hawking.

Adicionalmente, (3.57) junto con (5.40) proporciona una fórmula bastante general para hallar la temperatura de Hawking de una métrica estática con simetría esférica [76] :

$$T = \frac{1}{4\pi} \left. \frac{dg_{00}}{dr} \right|_{r=r_H} \quad (5.43)$$

(5.42) puede verse también de otro modo. Como en la subsección anterior, sea un observador de Rindler O_R con aceleración constante " a ". De Relatividad Especial se sabe que la línea de mundo que describe es una hipérbola y las ecuaciones vienen descritas por [77]:

$$x = \frac{1}{a} \cosh(a\tau) \quad (5.44)$$

$$t = \frac{1}{a} \sinh(a\tau) \quad (5.45)$$

Aplicando la rotación de Wick $\tau \rightarrow i\tau$ y $t \rightarrow it$ se tiene que:

$$x = \frac{1}{a} \cosh(i a \tau) \quad (5.46)$$

$$it = \frac{1}{a} \sinh(i a \tau) \quad (5.47)$$

Con las definiciones de las funciones hiperbólicas $\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ y $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, (5.46) y (5.47) se reescriben como:

$$x = \frac{e^{ia\tau} - e^{-ia\tau}}{2a} \quad (5.48)$$

$$it = \frac{e^{ia\tau} + e^{-ia\tau}}{2a} \quad (5.49)$$

Finalmente, usando la *fórmula de Euler* [67] , se obtiene:

$$x = \frac{\cos a\tau}{a} \quad (5.50)$$

$$t = \frac{\text{sen } a\tau}{a} \quad (5.51)$$

Es posible percatarse que bajo la rotación de Wick efectuada, las ecuaciones (5.50) y (5.51) representan una circunferencia de radio $= \frac{1}{a}$, cuyo periodo es $2\pi = a\tau$. Esto implica que $\tau = \frac{2\pi}{a}$.

Por lo tanto, nuevamente usando (3.57) $\tau = \frac{1}{T} \Rightarrow \frac{1}{T} = \frac{2\pi}{a}$ y se deduce que:

$$T = \frac{a}{2\pi} \quad (5.52)$$

(5.52) indica que un observador con aceleración constante en un estado de vacío, percibe una temperatura diferente de cero. Dicha temperatura es la bien conocida temperatura de Unruh. Repitiendo el argumento para llegar a (5.21), es posible hacer $a = \kappa$ de modo que la expresión para la temperatura adopta la forma:

$$T = \frac{1}{8\pi M} \quad (5.53)$$

Obteniendo así la temperatura de Hawking. Esta herramienta basada en el uso del tiempo imaginario mediante la rotación de Wick y la relación (3.57) ofrece una ruta más sencilla para el cálculo de la temperatura del agujero negro.

6. RADIACIÓN HAWKING NO CONMUTATIVA

6.1. Modelo de espejo en movimiento

Se trata de un modelo que emula las características y el comportamiento de un agujero negro bajo la imposición de condiciones de frontera adecuadas, de esta manera permite estudiar la radiación de agujeros negros por un camino alternativo. Como se vio anteriormente, la producción de partículas se asocia con observadores no inerciales o espacios curvados (por el principio de equivalencia). Entonces, se busca un mecanismo que permita que se dé este fenómeno sin necesidad de tratar con grandes curvaturas. Si se considera un espacio-tiempo minkowskiano (el cual es plano), bajo este modelo, dicho espacio podría modificarse considerando una barrera reflectora dada por condiciones de frontera en una superficie dinámica, que es lo que simula a un espejo [78] [79] .

El modelo de espejo en movimiento consiste en un campo escalar ϕ_ω , el cual está cuantizado, no tiene masa, está en un espacio plano y se le imponen condiciones de Dirichlet [80] [81] . Este campo debe cumplir la ecuación de Klein-Gordon (3.3) para masa nula. Considerando coordenadas nulas $u = t - x$ y $v = t + x$, (3.3) para $dim - (1 + 1)$ se puede escribir en la forma:

$$\partial_u \partial_v (\phi_\omega) = 0 \quad (6.1)$$

Una forma de representar la solución de (6.1) es $\phi_\omega = g(v) + h(u)$; con ayuda de (3.31) es posible normalizar los modos (3.4) y si además estos se escriben para frecuencias positivas en las coordenadas nulas, se obtiene:

$$\phi_{\omega u} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega u} \quad (6.2)$$

$$\phi_{\omega v} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} e^{-i\omega v} \quad (6.3)$$

Inspirado en (3.35), las relaciones anteriores permiten escribir la forma final del campo sobre ω continuo:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}} \int_0^\infty d\omega (a_{\omega u} e^{-i\omega u} + a_{\omega v} e^{-i\omega v} + a_{\omega u}^\dagger e^{i\omega u} + a_{\omega v}^\dagger e^{i\omega v}) \quad (6.4)$$

La condición de Dirichlet impuesta sobre el campo ϕ_ω ocasionan que este sea nulo en la ubicación del espejo (condición de reflejo), es decir:

$$\phi_\omega(z(t), t) = 0 \quad (6.5)$$

siendo $z = z(t)$ la trayectoria del espejo. Para analizar esto, se definen funciones $u_m(t)$ y $v_m(t)$ tipo coordenadas nulas, las cuales brindan la localización del espejo a todo tiempo.

$$u = u_m(t) = t - z(t) \quad (6.6)$$

$$v = v_m(t) = t + z(t) \quad (6.7)$$

Además, en presencia de un espejo es posible considerar que los modos poseen frecuencia positiva para el pasado infinito de curvas tipo luz $\mathcal{J}^-$, es decir:

$$\phi_{\omega'}^{in} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega'}} (e^{-i\omega'v} - e^{-i\omega'p(u)}) \quad (6.8)$$

Para que los modos se anulen en la ubicación del espejo, se debe tener $v = p(u)$ en la localización del espejo. Si además se invierte (6.6) y se usa (6.7), se llega a la forma que cumple la función $p(u)$:

$$p(u) = t_m(u) + z(t_m(u)) \quad (6.9)$$

En el caso de modos de frecuencia positiva en el futuro infinito de curvas tipo luz $\mathcal{J}^+$, existen un par de modos ϕ_ω^R y ϕ_ω^L . Esto aplica para espejos con horizonte en v_0 , por lo que:

$$\phi_{\omega}^{R,ext} = \frac{1}{\sqrt{4\pi\omega}}(e^{-i\omega f(v)} - e^{-i\omega u}), \quad v < v_0 \quad (6.10)$$

Similar al caso previo, para que los modos se anulen, se debe tener $u = f(v)$ en la localización del espejo. Si además se invierte (6.7) y se usa (6.6), se encuentra:

$$f(v) = \tilde{t}_m(v) - z(\tilde{t}_m(v)) \quad (6.11)$$

siendo $u = f(v)$ la inversa de $v = p(u)$; esto es, se tiene que $u = p^{-1}(v) = f(v)$. De esta manera se pueden hallar las diferentes trayectorias de espejo $f(v)$ a partir de una trayectoria $z = z(t)$ [81].

Finalmente, sabiendo que la trayectoria del espejo $f(v)$ puede proporcionar información sobre el comportamiento de la radiación Hawking, tendría sentido preguntarse cómo se puede calcular el coeficiente de Bogoliubov (3.45) en función de la trayectoria del espejo, ya que este coeficiente posee la información para calcular el espectro de emisión (3.48).

Dentro del análisis, sólo interesa conocer el comportamiento de las partículas que escapan del horizonte (aquellas que alcanzan $\mathcal{J}_R^+$). Esto orilla a enfocarse en el coeficiente $\beta_{\omega\omega'}$, el cual se calcula de acuerdo a (3.45). Usando (6.8), (6.10), así como una superficie de Cauchy $\mathcal{J}^-$ para el producto interno (3.31) (se evalúa $u = -\infty$ en (3.31)), se encuentra:

$$\beta_{\omega\omega'} = \frac{1}{4\pi\sqrt{\omega\omega'}} \int_{-\infty}^{v_0} dv e^{-i\omega'v - i\omega f(v)} \left(\omega' - \omega \frac{df(v)}{dv} \right) \quad (6.12)$$

La cual proporciona una forma de calcular el coeficiente de Bogoliubov, mismo que es necesario para estudiar la emisión de partículas y cuyo único requisito es conocer la forma de la trayectoria de espejo $f(v)$, un ejemplo de que es posible analizar la radiación Hawking a partir de este modelo.

6.2. Espectro de partículas clásico

A continuación, se resolverá el modelo de espejo en movimiento para el caso de un agujero negro con masa y carga eléctrica (Reissner-Nordström) [82]. Esto será útil para poder analizar el espectro de emisión asociado, pero además permitira mostrar el comportamiento que se sigue en una solución clásica, el cual será un caso límite al que se debe reducir una solución no conmutativa (que es el fin de esta tesis y se verá en la siguiente subsección).

De la solución (2.72) es posible calcular el radio del horizonte considerando la condición del horizonte, que consiste en que la norma de un vector Killing tipo tiempo sea nula, es decir $g_{00}k^0k^0 = 0$, lo cual implica que el radio se encuentra al aplicar la condición:

$$g_{00}(r_H) = 0 \quad (6.13)$$

Aplicando esta condición en (2.72) y resolviendo para r_H , se obtiene:

$$r_H = M \pm \sqrt{M^2 - Q^2} \quad (6.14)$$

Este radio tiene dos soluciones y representa los horizontes interno y externo de (2.72). Es posible reescribirlo en términos del radio de Schwarzschild $r_S = 2M$ y considerar sólo el radio externo (que es el que interesa al estudiar radiación), esto resulta en la siguiente expresión:

$$r_{H+} = \frac{1}{2} \left(r_S + \sqrt{r_S^2 - 4Q^2} \right) \quad (6.15)$$

Con esto ya es posible calcular la temperatura de Hawking usando (5.43). En este caso da:

$$T_+ = \frac{r_{H+} - M}{2\pi r_{H+}^2} \quad (6.16)$$

Esta temperatura se puede reescribir tomando la temperatura de Hawking para la solución de Schwarzschild T_S (5.42) y $\tilde{T}_+ := \frac{1}{4\pi r_{H+}}$, con esto se llega a:

$$T_+ = T_S - T_S \left(\frac{\tilde{T}_+}{T_S} - 1 \right)^2 \quad (6.17)$$

Una vez encontrada la temperatura de Hawking, conviene analizar la métrica (2.72) en coordenadas nulas que faciliten definir una coordenada análoga a (2.75), la cual permitirá escribir la trayectoria del origen del agujero negro $u(U)$, que a su vez conducirá a obtener la trayectoria del espejo $f(v)$.

La métrica (2.72) también puede escribirse como:

$$ds^2 = -f_q dt + f_q^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega \quad (6.18)$$

donde $f_q = 1 - \frac{r_s}{r} + \frac{r_q^2}{r^2}$; $r_q := Q$. Usando (6.14), f_q puede ser reescrita como:

$$f_q = \frac{(r - r_+)(r - r_-)}{r^2} \quad (6.19)$$

donde $r_+ = M + \sqrt{M^2 - Q^2}$, $r_- = M - \sqrt{M^2 - Q^2}$. Al igual que en (2.75) se puede definir una coordenada de tortoise r^* a partir de la relación:

$$\frac{dr^*}{dr} = f_q^{-1} \quad (6.20)$$

Al integrar esta relación para r^* y considerando $r^*(r = 0) = 0$, se obtiene:

$$r^* = r + \frac{1}{2\kappa_+} \ln \left| \frac{r - r_+}{r_+} \right| + \frac{1}{2\kappa_-} \ln \left| \frac{r - r_-}{r_-} \right| \quad (6.21)$$

donde $\kappa_{\pm} := \frac{r_{\pm} - r_{\mp}}{2r_{\pm}^2}$ es la gravedad de superficie [39]. Puede verse que cumple la misma estructura que la coordenada hallada en (2.75), la cual puede escribirse como $r^* := r + \frac{1}{2\kappa} \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)$, siendo κ la expresión (2.99).

Al introducir las coordenadas nulas (2.76) junto con (6.20) en (6.18), se llega a:

$$ds^2 = -f_q du dv + r^2 d\Omega^2 \quad (6.22)$$

donde $d\Omega^2$ está dado al igual que en (2.23). Para estudiar la conexión entre (6.22) y un sistema en colapso, se considera un cascarón masivo con simetría esférica colapsando, resulta que, como consecuencia del Teorema de Birkhoff [23], es posible

escribir la métrica en dos regiones. Entonces será conveniente introducir coordenadas cono de luz para la región interna y externa [83]. Es decir para la región interna se eligen las coordenadas $U = \tau - r$, $V = \tau + r$ y para la región externa $u = t - r^*$, $v = t + r^*$; con la relación entre la coordenada tortoise y la función métrica dada por: $\frac{dr^*}{dr} = \frac{1}{\lambda^2}$. Por lo que la métrica puede escribirse como:

$$ds^2 = \begin{cases} dUdV - r^2 d\Omega^2 & \text{si } V \leq V_S \\ \lambda^2 dudv - r^2 d\Omega^2 & \text{si } v \geq v_S \end{cases} \quad (6.23)$$

De aquí se puede ver que la región externa de (6.23) tiene la forma de lo obtenido en la métrica (6.22), por lo que esta se considera una métrica para la geometría del colapso exterior.

La idea ahora es hallar un sistema global de coordenadas, por lo que se busca hacer que este nuevo sistema coincida con (6.23) para las coordenadas internas y externas. De acuerdo a esta idea, es viable usar coordenadas $u - v$ para ambas regiones y buscar alguna transformación de coordenadas $U(u)$ y $V(v)$ apropiada.

En el pasado infinito se tiene que $V(v) = v$, ya que el espacio-tiempo es plano y no hay diferencia entre estas coordenadas, mientras que $U(u)$ se encuentra imponiendo que a lo largo de la línea de mundo $v = v_S$ del cascarón, la coordenada r debe coincidir para ambos sistemas. Con esto en mente, se hallará la condición de pegado entre las distintas regiones, lo que conducirá a un sistema coordenado global.

Ya que $r = \frac{V-U}{2}$ y $r^* = \frac{v-u}{2}$. Utilizando lo antes mencionado ($V = v$ y $v = v_S$):

$$r^*(r) = \frac{v_S - u}{2} \quad (6.24)$$

$$r = \frac{v_S - U}{2} \quad (6.25)$$

Aplicando la función inversa r^{*-1} en (6.24) se obtiene un r que ahora es función de la coordenada externa u , si esto se iguala con (6.25), se tendrá una igualdad entre la coordenada tortoise evaluada en la coordenada cono de luz externa u y la coordenada interna U . Al obtener la inversa, esto se puede expresar como:

$$r^* \left(r = \frac{v_S - U}{2} \right) = \frac{v_S - u}{2} \quad (6.26)$$

(6.26) da la condición de pegado para las coordenadas globales. A partir de ella será sencillo encontrar la función $u(U)$, sólo basta aplicarla en (6.21); haciendo esto, resulta:

$$r^* \left(r = \frac{v_0 - U}{2} \right) = \frac{v_0 - U}{2} + \frac{1}{2\kappa_+} \ln \left| \frac{\frac{v_0 - U}{2} - r_+}{r_+} \right| + \frac{1}{2\kappa_-} \ln \left| \frac{\frac{v_0 - U}{2} - r_-}{r_-} \right| = \frac{v_0 - u}{2} \quad (6.27)$$

donde $v_S = v_0$. Despejando $u = u(U)$:

$$u(U) = U - \frac{1}{\kappa_+} \ln \left| \frac{v_0 - U - 2r_+}{2r_+} \right| - \frac{1}{\kappa_-} \ln \left| \frac{v_0 - U - 2r_-}{2r_-} \right| \quad (6.28)$$

Aquí $v_0 - v_H = 2r_+$, puesto que $u \rightarrow \infty$ en $U = v_H$. Si se elige el horizonte en cero $v_H = 0$, entonces $v_0 = 2r_+$. Por lo tanto:

$$u(U) = U - \frac{1}{\kappa_+} \ln \left| \frac{-U}{2r_+} \right| - \frac{1}{\kappa_-} \ln \left| \frac{r_+}{r_-} - 1 - \frac{U}{2r_-} \right| \quad (6.29)$$

La cual expresa la trayectoria del origen del agujero negro en las coordenadas cono de luz internas. Desde luego, el campo escalar cuantizado desaparece en $r = 0$, que es la condición de regularidad, la cual obliga a los modos del campo a comportarse como un espejo en movimiento, ya que no existe campo para $r < 0$ y este se refleja en $r = 0$.

Esto permite escribir la trayectoria del espejo asociado $f(v)$, ya que $u(U) \leftrightarrow f(v)$. En este caso, basado en la ecuación (6.29), la trayectoria del espejo puede escribirse como:

$$f(v) = v - \frac{1}{\kappa_+} \ln \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{v^2}{r_+^2}} \right) - \frac{1}{\kappa_-} \ln \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{(2r_- - 2r_+ + v)^2}{r_-^2}} \right) \quad (6.30)$$

Desde luego, si $Q \rightarrow 0$, (6.30) se comportaría como un espejo de Schwarzschild, ya que no habría horizonte interno; de esta forma con ayuda de (2.99), (6.30) se reduciría a:

$$f(v) = v - 4M \ln \left(\left| \frac{v_H - v}{4M} \right| \right) \quad (6.31)$$

De hecho, la física del problema se concentra en la denominada función truncada, ya que a tiempos tardíos las trayectorias coinciden [82]. Esto consiste en tomar

(6.30) sólo con la contribución del horizonte externo, pues es a partir de este donde emana la radiación que un observador externo analiza. Tal función truncada sería entonces:

$$f_{Trun}(v) = v - \frac{1}{\kappa_+} \ln \left(\left| \frac{v}{2r_+} \right| \right) \quad (6.32)$$

(6.31) y (6.32) no son la misma función pues (6.32) involucra carga eléctrica, además que de acuerdo a (2.99) y la expresión usada en (6.21) $\kappa \neq \kappa_+$. Si se sustituye (6.32) en (6.12) se llega a:

$$|\beta_{\omega\omega'}^{Trun}|^2 = \frac{\omega'}{2\pi\kappa_+\omega_p^2} \frac{1}{e^{\frac{\omega}{T_+}} - 1} \quad (6.33)$$

donde $\omega_p := \omega' + \omega$. (6.33) desde luego satisface que, si no hay carga, se recupera el caso de Schwarzschild en el $\lim_{Q \rightarrow 0} (|\beta_{\omega\omega'}^{Trun}|^2) = |\beta_{\omega\omega'}^{Sch}|^2$. Además, puede verse que si se toma el $\lim_{\omega' \gg \omega}$ en (6.33), se encuentra:

$$\lim_{\omega' \gg \omega} |\beta_{\omega\omega'}^{Trun}|^2 = \frac{1}{2\pi\kappa_+\omega'} \frac{1}{e^{\frac{\omega}{T_+}} - 1} \quad (6.34)$$

con la temperatura T_+ , que, como puede verse en (6.17) es menor que T_S o bien $T_+ = \frac{\kappa_+}{2\pi}$; $\kappa_+ < \kappa$. Esto sugiere que la carga ocasiona que exista una menor producción de partículas.

Se ha podido ver que la trayectoria truncada del espejo de Reissner-Nordström (6.32) bajo ciertos límites, proporciona el espectro de emisión de Schwarzschild, lo cual es algo esperado. Ahora convendría revisar, ¿qué sucede en el caso general? Es decir, cuando no se imponen límites. Se obtendría el espectro de emisión de Reissner-Nordström. Para calcularlo, hay que considerar la forma general de la trayectoria del espejo dada por (6.30), reemplazarla en (6.12) y hacer una integración por partes eligiendo $\nu_H = 0$, haciendo esto se encuentra el siguiente coeficiente de Bogoliubov:

$$\beta_{\omega\omega'} = \frac{\sqrt{\omega'}}{2\omega_p\sqrt{\omega}} \operatorname{csch} \left(\frac{\pi\omega}{\kappa} \right) \tilde{A} \quad (6.35)$$

donde $n_0 = \frac{1}{4\pi\sqrt{\omega\omega'}}$ es el factor de normalización y $\tilde{A} = x(A - bB) + y(C - cD)$ es una función dependiente de funciones hipergeométricas [84], en las cuales se asignó $x := -\frac{\Gamma(a)}{\Gamma(d)} \left(\frac{r_-}{r_+}\right)^d \left(\frac{r_+ - r_-}{r_+}\right)^b$ e $y := \left(\frac{r_-}{r_+}\right)^a \left(\frac{1}{-2ir - \omega_p}\right)^b$; las definiciones de las cantidades restantes en esta expresión son: $A := {}_1\tilde{F}_1(a; b; c)$, $B := {}_1\tilde{F}_1(a; 1 + b; c)$, $C := {}_1\tilde{F}_1(1 + d; -b; c)$, $D := {}_1\tilde{F}_1(1 + d; 1 - b; c)$; con $a := \frac{i\omega}{\kappa_+}$, $b := \frac{i\omega}{\kappa}$, $c := -2i(r_+ - r_-)\omega_p$,

$$d := -\frac{i\omega}{\kappa_-}.$$

Para obtener el espectro falta calcular el complejo conjugado en (6.35) e integrar justo como lo indica (5.19). La expresión que resulta es:

$$N_\omega = \int_0^\infty |\beta_{\omega\omega'}|^2 d\omega' \quad (6.36)$$

donde el integrando es el módulo cuadrado de (6.35). Tal expresión es extensa, por lo que un camino para analizar la integración es fijando valores. Por ejemplo, si se configura $M = 1$ y se grafica (6.36) vs ω para diferentes cargas puede verse cómo se comporta el espectro de emisión, que es lo que interesa estudiar.

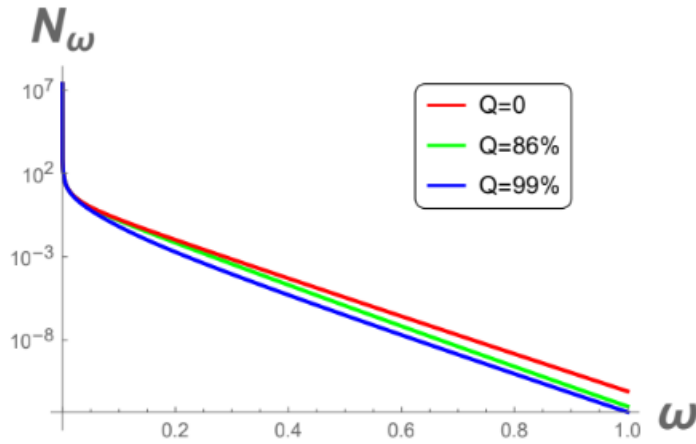


Figura 8: En la gráfica de N_ω vs ω [82], se puede ver que para agujeros negros con la misma masa, la emisión de partículas decrece conforme aumenta la carga eléctrica. Puede notarse que hay una divergencia en $\omega \rightarrow 0$ y que el caso de Schwarzschild viene dado por la línea roja ($Q = 0$).

En la siguiente sección se extendieron estos resultados al caso no conmutativo siguiendo el enfoque discutido previamente basado en distribuciones gaussianas de masa y carga.

6.3. Espectro de partículas no conmutativo

En esta subsección se estudiará el espectro de emisión asociado a un agujero negro no conmutativo. Una pregunta que surge naturalmente es, ¿se replicará el mismo comportamiento presentado en la solución clásica expuesta en la subsección anterior? Es cierto que para el estudio de la termodinámica de agujeros negros en soluciones no conmutativas, el parámetro no conmutativo se puede tratar como una variable termodinámica extensiva más [85] y esto haría suponer que tendría el mismo efecto que añadir carga eléctrica. Sin embargo, físicamente no representan lo mismo, por lo que no se puede asumir que se repita la misma dinámica. La única manera de averiguarlo es analizando el espectro de emisión en un camino similar al ya expuesto en el caso clásico.

Como punto de partida, conviene considerar la solución de Reissner-Nordström no conmutativa (4.39). Si se aplica la condición (6.13), se encuentra el radio del horizonte [86]. Dicho radio viene dado por:

$$r_H = \frac{2m}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\theta}\right) + \frac{Q^2}{2\pi\sqrt{2\theta}} \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r_H^2}{2\theta}\right) - \sqrt{\frac{1}{2\theta}} \frac{Q^2}{\pi} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\theta}\right) \pm \frac{1}{2} F(r_H, \theta) \quad (6.37)$$

$$\text{donde } F(r, \theta) := \left[\left(\sqrt{\frac{2}{\theta}} \frac{Q^2}{\pi} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) - \frac{Q^2}{\pi\sqrt{2\theta}} \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{2\theta}\right) - \frac{4m}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \right)^2 - \frac{4Q^2}{\pi} \gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Puede notarse que (6.37) es una relación recursiva, en el caso no conmutativo el radio del horizonte no puede expresarse como en el caso conmutativo debido a la presencia de las funciones gamma incompletas.

La ecuación anterior puede reescribirse de manera alternativa, aplicando la condición (6.13), se puede expresar la masa en términos del radio del horizonte.

$$m = \frac{\sqrt{\pi}}{4\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\theta}\right)} \left(\frac{G(r_H, \theta)}{r_H} + r_H \right) \quad (6.38)$$

$$\text{donde } G(r, \theta) := \frac{Q^2}{\pi} \left(\gamma^2\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) - \frac{r}{\sqrt{2\theta}} \gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{2\theta}\right) + \sqrt{\frac{2}{\theta}} r \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}\right) \right)$$

La temperatura de Hawking se encuentra usando (5.43) y considerando la derivada de las funciones gamma incompletas como $\frac{d}{dx} \gamma\left(\frac{m}{2}, x^2\right) = 2x^{m-1} e^{-x^2}$. En este caso se obtiene:

$$T_H = \frac{1}{4\pi} H(r_H, \theta) \quad (6.39)$$

donde $H(r, \theta) := \frac{4m}{\sqrt{\pi}r^2} \gamma(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta}) - \frac{me^{-\frac{r^2}{4\theta}}}{\sqrt{\pi}\theta^{\frac{3}{2}}} r + Q^2 I(r, \theta)$

siendo $I(r, \theta) := \frac{2\gamma(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{4\theta})e^{-\frac{r^2}{4\theta}}}{\sqrt{\theta}\pi r^2} - \frac{2(\gamma(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{4\theta}))^2}{\pi r^3} + \frac{\gamma(\frac{1}{2}, \frac{r^2}{2\theta})}{\pi\sqrt{2\theta}r^2} - \frac{e^{-\frac{r^2}{2\theta}}}{\pi\theta r} - \sqrt{\frac{2}{\theta}} \frac{\gamma(\frac{3}{2}, \frac{r^2}{4\theta})}{\pi r^2} + \frac{re^{-\frac{r^2}{4\theta}}}{\sqrt{8\pi}\theta^2}$

Desde luego, aquí r_H representa la solución asociada al horizonte externo en (6.37). Se puede ver que en el límite $\frac{r_H}{\sqrt{\theta}} \gg 1$ se recupera (6.16). Además, en el límite $Q \rightarrow 0$ y $\theta \rightarrow 0$, la función $H(r_H, \theta) \rightarrow (2M)^{-1}$, por lo que se recupera el caso clásico (5.2).

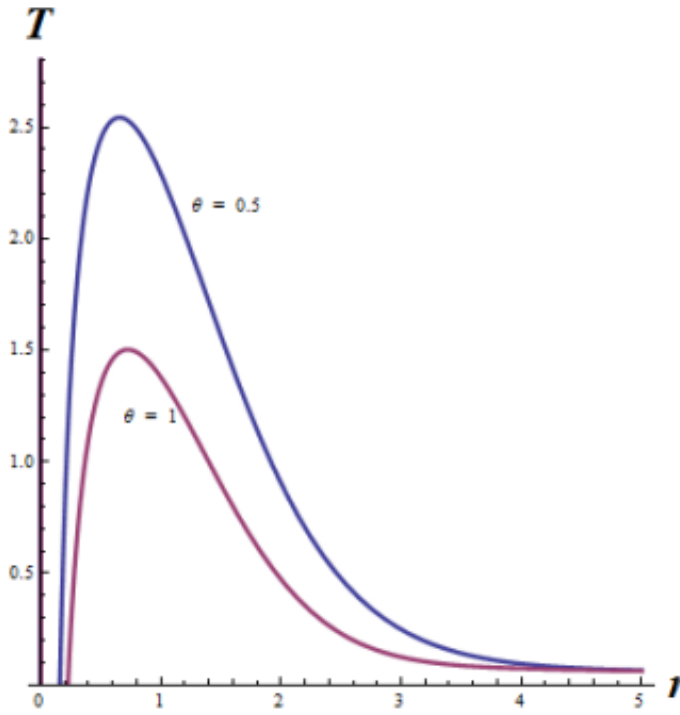


Figura 9: En la gráfica puede verse la temperatura de Hawking (6.39) del agujero negro de Reissner-Nordström no conmutativo. La carga eléctrica ha sido fijada como $Q = 1$ y puede notarse que los agujeros negros más fríos son aquellos que poseen un parámetro θ mayor. La no conmutatividad parece hacer que disminuya la temperatura a distancias cortas [87].

En el caso del efecto Unruh se obtenía la temperatura de Hawking a partir de conocer la gravedad de superficie y aplicar el principio de equivalencia. Aquí, se tiene lo opuesto, se conoce la temperatura de Hawking pero no la gravedad de superficie. Sin embargo, es posible aplicar el mismo argumento que se usó en (5.21). Por lo que, la gravedad de superficie del horizonte externo sería:

$$\kappa_+ = \frac{H(r_H, \theta)}{2} \quad (6.40)$$

Para continuar en el camino presentado en el caso clásico, se tendría que hallar la coordenada de tortoise, posteriormente la trayectoria del espejo mediante la relación (6.26) y finalmente el coeficiente de Bogoliubov que dará la información del espectro. El problema aquí es justo hallar la coordenada de tortoise, dado que ya no es tan sencillo en el sentido de que no es posible hacer una factorización como en (6.19) e integrar de acuerdo a (6.20), puesto que la función del integrando sería (4.38) y en esta aparecen funciones gamma incompletas. Para resolver esto, conviene hacer una reescritura general de la función que aparece en la métrica, para que sea aplicable a cualquier función asociada a una métrica estática con simetría esférica, es decir, de alguna métrica cuya estructura sea la de (4.39); desde luego esto sería válido para f_θ (4.38). La idea para lograr esto es hacer una separación en una contribución singular y una no singular, para ello se define la siguiente función:

$$h(r) := \frac{f(r)}{r - r_+} \quad (6.41)$$

Con esta definición, es posible escribir lo siguiente:

$$\frac{1}{f(r)} = 1 + \frac{1}{h_+(r - r_+)} + \frac{\frac{1}{h} - \frac{1}{h_+} - r + r_+}{r - r_+} \quad (6.42)$$

donde la función h evaluada en el radio exterior define a: $h_+ = h(r = r_+) = \lim_{r \rightarrow r_+} h(r)$, lo cual de acuerdo a la definición (6.41) y la *regla de L'Hôpital*, resulta:

$$h_+ = \left. \frac{df(r)}{dr} \right|_{r=r_+} \quad (6.43)$$

Por otro lado, la reescritura $h^{-1} = h_+^{-1} \left(\frac{1}{1 - \frac{h_+ - h}{h_+}} \right)$ permite un desarrollo en serie de potencias como $h^{-1} = h_+^{-1} \left(1 + \frac{h_+ - h}{h_+} + \left(\frac{h_+ - h}{h_+} \right)^2 + \dots \right)$. Por lo que:

$$h^{-1} - h_+^{-1} = h_+^{-1} \left(\frac{h_+ - h}{h_+} + \left(\frac{h_+ - h}{h_+} \right)^2 + \dots \right) \quad (6.44)$$

Sustituyendo (6.44) en (6.42), se obtiene:

$$\frac{1}{f} = 1 + \frac{1}{h_+(r - r_+)} + \frac{1}{r - r_+} \left(\frac{h_+ - h}{h_+^2} + \frac{(h_+ - h)^2}{h_+^3} + \dots - r + r_+ \right) \quad (6.45)$$

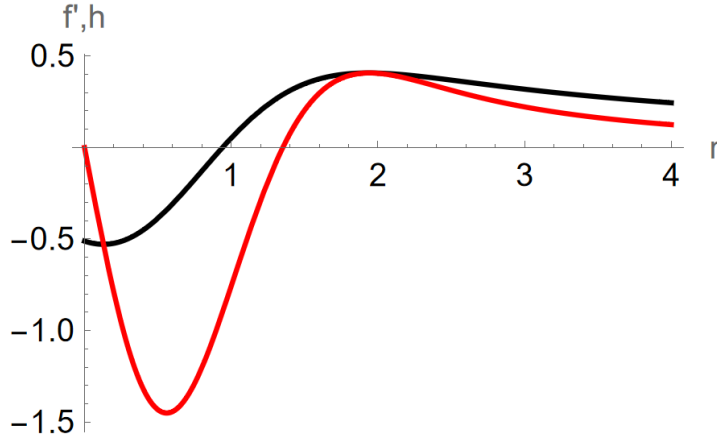


Figura 10: En la figura de arriba puede observarse la gráfica de la función $h(r)$ vs r (color negro) y $f'(r)$ vs r (color rojo). Ya que el análisis es válido para cualquier función métrica que cumpla las propiedades anteriormente mencionadas, es conveniente elegir la función métrica de un agujero negro tipo Schwarzschild no conmutativo (4.23) para visualizar. Puede observarse que los valores coinciden en el horizonte externo, lo cual ilustra la relación (6.43).

o bien, aplicando la serie de Taylor alrededor del horizonte r_+ :

$$\frac{1}{f} = 1 + \frac{1}{h_+(r-r_+)} + \frac{1}{h_+(r-r_+)} \left(\sum_{k=1} a_k(r-r_+)^k - h_+(r-r_+) \right) \quad (6.46)$$

Aquí, se ha logrado obtener lo deseado, una expresión general con una contribución singular en el horizonte y otra que no lo es. Con esto en mente, es posible aplicar (6.20) y hallar la coordenada tortoise, aplicando esta expresión e integrando, se obtiene una fórmula para esta coordenada dada una función $f(r)$ arbitraria:

$$r^* = r + \frac{1}{2\kappa_+} \ln \left| \frac{r-r_+}{r_+} \right| + A(r) \quad (6.47)$$

siendo $A(r) := \frac{1}{h_+} \int \frac{dr}{r-r_+} (\sum_{k=1} a_k(r-r_+)^k - h_+(r-r_+))$ una función analítica, la cual representa la contribución que no posee singularidades en r_+ . Además, puede notarse de (5.20) y (5.43) que $h_+ = 2\kappa_+$.

Siguiendo la misma idea del caso clásico, se introduce (6.26) y se despeja $u(U)$ con $\nu_0 = 2r_+$, lo que origina:

$$u(U) = U - \frac{1}{\kappa_+} \ln \left| \frac{-U}{2r_+} \right| - 2A \left(r = r_+ - \frac{U}{2} \right) \quad (6.48)$$

En consecuencia, la trayectoria de espejo quedaría como:

$$f(v) = f_{Trun} + B(v) \quad (6.49)$$

donde $f_{Trun} = v - \frac{1}{\kappa_+} \ln \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{v^2}{r_+^2}} \right)$ es la expresión dada en (6.32), mientras que $B(v) := -2A(r = r_+ - \frac{U}{2})$. La función $B(v)$ hereda las propiedades de la función $A(v)$, por lo que tampoco tendrá singularidades a diferencia de f_{Trun} que sí es singular en $v = 0$.

Una vez hecho esto, ya es posible calcular el coeficiente de Bogoliubov (6.12); para ello dicha expresión se integra por partes ignorando términos de frontera y eligiendo $v_0 = 0$, lo cual resulta:

$$\beta = \frac{\omega I}{2\pi\sqrt{\omega\omega'}} \int_{-\infty}^0 e^{-i\omega'v - i\omega f} dv \quad (6.50)$$

Sustituyendo (6.49) en (6.50) y desarrollando, se obtiene:

$$\beta = \frac{\omega I}{2\pi\sqrt{\omega\omega'}} \int_{-\infty}^0 e^{-i\omega'v} e^{-i\omega f_{Trun}} e^{\frac{i\omega}{2\kappa_+} \int dv (h_+ + \sum_{m=0} (-1)^{m+1} a_{m+1} (\frac{v}{2})^m)} dv \quad (6.51)$$

El último término de (6.51) es una función que oscila demasiado conforme la variable v toma valores más grandes, por lo que se considera la región donde v es cercana a cero; en consecuencia dicha exponencial puede ser reemplazada por el valor 1. Esta es la razón por la cual se separó $f(v)$ en las contribuciones singular y no singular de (6.49), puesto que lo único que va a contribuir a tiempos tardíos $t \rightarrow \infty$ será la parte singular dada por f_{Trun} . Esto explica porque es válido analizar la física asociada al espectro a partir de f_{Trun} y nada más. De este modo se considera la siguiente expresión:

$$\beta_{\omega\omega'}^{Trun} = \frac{\omega I}{2\pi\sqrt{\omega\omega'}} \int_{-\infty}^0 e^{-i\omega'v} e^{-i\omega f_{Trun}} dv \quad (6.52)$$

Al integrar (6.52) y calcular su módulo cuadrado, se replica la estructura obtenida en (6.33):

$$|\beta_{\omega\omega'}^{Trun}|^2 = \frac{\omega I e^{\frac{\pi\omega}{\kappa_+}}}{2\pi\kappa_+ \omega_p^2} \frac{1}{e^{\frac{\omega}{T_H}} - 1} \quad (6.53)$$

donde se utilizó la relación $|\Gamma(1 + bi)|^2 = \frac{\pi b}{\sinh \pi b}$, además de definir $b := \frac{\omega}{\kappa_+}$. Hay que tomar en cuenta que a pesar de que (6.52) replica la estructura de (6.33), esta no es igual a (6.33), ya que aquí la temperatura y la gravedad de superficie vienen dadas por (6.39) y (6.40), respectivamente.

Como último paso, se integra (6.53) de acuerdo a (6.36), lo cual dará el número de partículas emitido, haciendo esto resulta:

$$N_\omega = a_0(\omega, \theta) \left[\lim_{b_0 \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{b_0}{\omega}\right) - 1 \right] \quad (6.54)$$

siendo $a_0(\omega, \theta) := \frac{e^{\frac{\pi\omega}{\kappa_+}}}{2\pi\kappa_+} \frac{1}{e^{\frac{2\pi\omega}{\kappa_+}} - 1}$ una función que no afecta en la integración, la cual en general depende de κ_+ (6.40) y en consecuencia de m, Q, θ . Pero, en este análisis, sólo será tomada en cuenta como función de θ , ya que las demás variables se fijarán. Nótese que en general (6.54) representa una integral divergente; a pesar de eso, es posible analizar el comportamiento para valores finitos de b_0 .

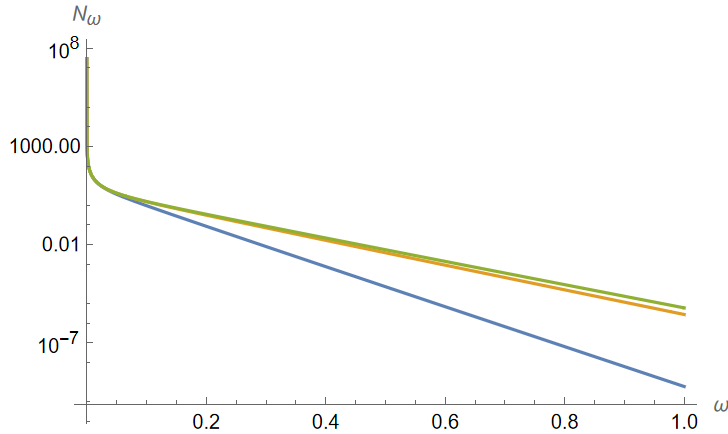


Figura 11: En esta gráfica se tiene el espectro de emisión de partículas de Reissner-Nordström no conmutativo para diferentes valores del parámetro no conmutativo θ . En otras palabras, se tiene la gráfica de (6.54), para la cual se usaron los valores: $m = 1$; $Q = 0.8$; $\theta = 0.15$ (azul), $\theta = 0.1$ (rojo) y $\theta = 0.01$ (verde). Puede verse que se repite el comportamiento visto en el caso clásico (figura 8), ya que conforme θ decrece, la emisión aumenta para frecuencias mayores que cero.

En principio se pueden fijar valores arbitrarios para la masa ADM m y la carga eléctrica Q , siempre y cuando sean tales que se obtengan dos horizontes. Para el análisis fue conveniente evitar el caso extremal (pues ahí la temperatura y la emisión son nulas); esto se da cuando los valores de masa y carga son iguales, así que a medida que m y Q sean cercanos, la función métrica se acerca al caso de un único horizonte y en consecuencia no es posible seleccionar un rango amplio de parámetros para θ en los cuales se evite el caso extremal. Esta es la razón por la cual se

eligieron los valores de los parámetros arriba mencionados.

Por otro lado, si la contribución de la no conmutatividad influye disminuyendo la emisión de partículas, es natural pensar que en consecuencia un agujero negro no conmutativo se evaporará en un tiempo mayor al de un agujero negro clásico. Sin embargo, no se puede afirmar esto debido a que la nueva masa m (o m_θ) no es la misma que la masa desnuda M , por lo que, en el caso no conmutativo no sólo la emisión es menor, también lo es la masa y por lo tanto, para saber qué tipo de agujero negro es más longevo debe realizarse el cálculo. Por simplicidad se considerará al agujero negro de Schwarzschild no conmutativo dado por (4.24), al cual se le puede calcular el radio con ayuda de (6.13); esto da:

$$r_H = \frac{4M}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\theta}\right) \quad (6.55)$$

Al integrar (4.20) en r , se puede reescribir r_H en términos de la masa m_θ :

$$r_H = 2m_\theta(r_H) \quad (6.56)$$

De aquí, se encuentra el área como $A = 4\pi r_H^2$:

$$A = 16\pi m_\theta^2(r_H) \quad (6.57)$$

La temperatura de Hawking se encuentra con ayuda de (5.43), en este caso es:

$$T = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{2m_\theta(r_H)} - \frac{m_\theta^2(r_H) e^{-\frac{m_\theta^2(r_H)}{\theta}}}{\theta^{\frac{3}{2}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{m_\theta^2(r_H)}{\theta}\right)} \right) \quad (6.58)$$

donde se utilizó el hecho de que $\frac{d}{dx} \gamma\left(\frac{m}{2}, x^2\right) = 2x^{m-1} e^{-x^2}$

Lo que sigue es usar la *ley de Stefan Boltzmann*, la cual establece que $E = \sigma T^4$, siendo E la potencia por unidad de área. En este caso la ecuación a resolver sería $\frac{1}{A} \frac{dm_\theta}{dt} = -\sigma T^4$; integrándola con ayuda de (6.57) y (6.58) se obtendrá el tiempo de vida del agujero negro (4.24), el cual resulta:

$$t_{vida-NC} = -C_0^{-1} \int_{m_\theta}^0 16m_\theta^2 \left(1 - \frac{2m_\theta^3 e^{-\frac{m_\theta^2}{\theta}}}{\theta^{\frac{3}{2}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{m_\theta^2}{\theta}\right)} \right)^{-4} dm_\theta \quad (6.59)$$

donde $C_0 := \frac{\sigma}{16\pi^3}$

Considerando el caso donde $\sqrt{\theta} \ll r_H$ es posible hallar las primeras contribuciones de la no conmutatividad. Haciendo un desarrollo en serie de Taylor a primer orden sobre (6.59) y considerando que en este régimen $\gamma(x) \rightarrow \Gamma(x)$, la integración de (6.59), resulta:

$$t_{vida-NC} \approx C_1 m_\theta^3 + C_2 \theta^{\frac{3}{2}} \quad (6.60)$$

con $C_1 := \frac{16}{3C_0}$ y $C_2 := \frac{2^{10}\pi^3\Gamma(3)}{\sigma\Gamma(\frac{3}{2})}$

Usando (6.56) en (6.60) se puede escribir el tiempo de vida en términos de la masa desnuda M , lo cual conduce a:

$$t_{vida-NC} = C_1 \left[\frac{2M}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\theta}\right) \right]^3 + C_2 \theta^{\frac{3}{2}} + \dots \quad (6.61)$$

Como el tiempo de vida clásico viene dado por $t_{vida-Clás} = C_1 M^3$ [88], es posible escribir el cociente entre los tiempos de evaporación no conmutativo y clásico; esto se escribe con ayuda de (6.55) como:

$$\frac{t_{vida-NC}}{t_{vida-Clás}} \approx \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\theta}\right) \right]^3 + 768 \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(\frac{3}{2})\pi^{3/2}} \frac{\theta^{3/2}}{r_H^3} \left[\gamma\left(\frac{3}{2}, \frac{r_H^2}{4\theta}\right) \right]^3 \quad (6.62)$$

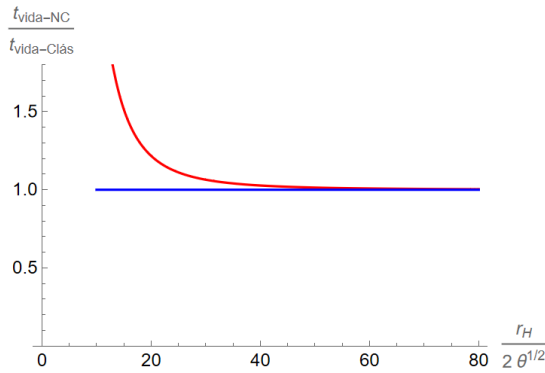


Figura 12: En la gráfica se observa cómo se ve geométricamente el cociente entre los tiempos de vida (6.62).

Puede notarse que $t_{vida-NC} \gg t_{vida-Clás}$, sin embargo este comportamiento estaría relacionado más con el hecho de que las aproximaciones realizadas anteriormente dejan de ser válidas que con el verdadero comportamiento del $t_{vida-NC}$. Para analizar el régimen $r_H \sim \sqrt{\theta}$ es necesario evaluar (6.59) numéricamente. Como era de esperarse, se recupera el tiempo de vida clásico bajo el límite en el cual el horizonte es mucho mayor que la raíz del parámetro no conmutativo, es decir $r_H \gg \sqrt{\theta}$.

7. CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

El tratamiento clásico de la Relatividad General es perfectible bajo ciertos límites en los cuales parece prudente hacer modificaciones. En particular, considerar los efectos asociados a la cuantización del espacio-tiempo fue de ayuda para escribir modelos con un comportamiento más consistente.

El estudio semi-clásico de la radiación de agujeros negros es un efecto bien conocido dentro de la física moderna. En este texto se abordaron algunas de las diferentes formas de demostrar que un agujero negro emite radiación y que posee temperatura no nula, esto resulta un hecho impresionante y en contra de la intuición clásica. Analizar el fenómeno de la radiación Hawking desde perspectivas no clásicas es un buen comienzo para profundizar en el entendimiento de los agujeros negros. Una de estas perspectivas es la geometría no conmutativa, la cual postula una cuantización del espacio-tiempo y que trae como consecuencia la eliminación de las singularidades presentes en los agujeros negros clásicos.

Como se discutió en el capítulo 6, al implementar efectos asociados a la no conmutatividad se obtuvieron resultados que permiten afirmar que existen cambios respecto al caso clásico; si bien en ambos casos se obtuvo una distribución tipo Planck para la emisión de partículas del horizonte externo y se hizo notar que la trayectoria truncada del espejo codifica la información esencial para analizar la naturaleza del espectro de emisión, pudo verse que dependiendo del valor del parámetro no conmutativo θ , se tenía una emisión de partículas menor a medida que este crece y desde luego, se cumplió el límite clásico cuando $\theta \rightarrow 0$. Lo anterior permitió observar un espectro de emisión mediante el cual se puede distinguir entre un agujero negro clásico y uno no conmutativo a partir de estudiar la cantidad de partículas emitidas por cada uno. Otras consecuencias de considerar la no conmutatividad fueron la eliminación de singularidades, así como el hecho de que los agujeros negros clásicos son más calientes y bajo ciertas condiciones se evaporan antes que los no conmutativos.

Bajo el análisis hecho, la carga eléctrica también se comporta como el parámetro no conmutativo, ya que al aumentar la carga, se obtuvo una emisión de partículas menor. Resulta curioso que dicho comportamiento también se replica para agujeros negros con rotación, en los cuales el parámetro $a := \frac{J}{M}$ asociado al momento angular J parece imitar el comportamiento de Q respecto a θ [89]. Entonces, si se quisiera generalizar este trabajo, por ejemplo para soluciones tipo Kerr-Newman no conmutativas, sería de esperarse que la dinámica de la emisión en función de los parámetros no sea muy diferente al caso ya abordado aquí, debido a que ya se conoce cómo se comporta cada parámetro por separado. Más aún, como el parámetro θ emula el comportamiento de las variables Q y J , las cuales junto con la masa determinan por completo toda la información de un agujero negro según el teorema de no pelo [14] y que además todas ellas son variables extensivas, esto sugiere que θ podría ser tratado como variable extensiva. Existen trabajos donde se ha utilizado como variable para escribir la ecuación fundamental termodinámica de un agujero negro de Schwarzschild no conmutativo [85], lo cual no parece descabellado si

se considera que θ tiene unidades de área y esta está relacionada con la entropía, pero, el correcto tratamiento de θ en la termodinámica de agujeros negros necesitaría una demostración matemática más rigurosa. Sin embargo, lo hallado aquí sugiere que podría ser consistente tratarla como una variable termodinámica extensiva más. Además, sería interesante encontrar si la relación hallada entre θ y la producción de partículas con espín permanece al considerar soluciones gravitacionales más complejas que las métricas tipo Einstein-Maxwell no conmutativas y una vez verificado eso, encontrar la forma de caracterizar e identificar los parámetros asociados a un agujero negro a partir del espectro, esto debido a que como presentan el mismo comportamiento, no es claro identificar qué variables están presentes.

Referencias

- [1] T. Adamo and E. T. Newman, “The Kerr-Newman metric: A Review,” *Scholarpedia* **9** (2014) 31791, arXiv:1410.6626 [gr-qc].
- [2] R. Kubo, “Statistical mechanical theory of irreversible processes. 1. General theory and simple applications in magnetic and conduction problems,” *J. Phys. Soc. Jap.* **12** (1957) 570–586.
- [3] G. W. Gibbons and S. W. Hawking, “Action Integrals and Partition Functions in Quantum Gravity,” *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2752–2756.
- [4] Y. Makeenko, *Methods of Contemporary Gauge Theory*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2002.
- [5] S. W. Hawking, “Particle creation by black holes,” *Communications in Mathematical Physics* **43** no. 3, (1975) 199 – 220. <https://doi.org/>.
- [6] D. Raine and E. Thomas, *Black Holes*. IMPERIAL COLLEGE PRESS, 2005. <https://www.worldscientific.com/doi/pdf/10.1142/p409>. <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/p409>.
- [7] J. Kormendy and D. Richstone, “Inward bound—the search for supermassive black holes in galactic nuclei,” *Annual Review of Astronomy and Astrophysics* **33** no. 1, (1995) 581–624, <https://doi.org/10.1146/annurev.aa.33.090195.003053>. <https://doi.org/10.1146/annurev.aa.33.090195.003053>.
- [8] **Event Horizon Telescope** Collaboration, K. Akiyama *et al.*, “First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way,” *Astrophys. J. Lett.* **930** no. 2, (2022) L12.
- [9] J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy,” *Phys. Rev. D* **7** (Apr, 1973) 2333–2346. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.7.2333>.
- [10] D. N. Page, “Particle Emission Rates from a Black Hole: Massless Particles from an Uncharged, Nonrotating Hole,” *Phys. Rev. D* **13** (1976) 198–206.
- [11] A. Zee, *Quantum field theory in a nutshell*. 2003.
- [12] S. Hawking, *The universe in a nutshell*. 2001.
- [13] T. Jacobson, “Introduction to quantum fields in curved space-time and the Hawking effect,” in *School on Quantum Gravity*, pp. 39–89. 8, 2003. arXiv:gr-qc/0308048.
- [14] N. Gürlebeck, “No-hair theorem for Black Holes in Astrophysical Environments,” *Phys. Rev. Lett.* **114** no. 15, (2015) 151102, arXiv:1503.03240 [gr-qc].
- [15] C. Rovelli, *Quantum Gravity*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2004.
- [16] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley, New York, NY, 1972. <https://cds.cern.ch/record/100595>.

- [17] C. C. Speake and C. M. Will, “Tests of the weak equivalence principle,” *Classical and Quantum Gravity* **29** no. 18, (Aug, 2012) 180301.
<https://doi.org/10.1088/0264-9381/29/18/180301>.
- [18] N. M. J. Woodhouse, *General relativity*. 2007.
- [19] B. Janssen, “La relatividad general y el problema de la acción a distancia newtoniana,”
- [20] R. P. Feynman, F. B. Morinigo, and W. G. Wagner, “Feynman lectures on gravitation,” *European Journal of Physics* **24** no. 3, (May, 2003) 330–330.
<https://doi.org/10.1088/0143-0807/24/3/702>.
- [21] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics (3rd Edition)*. 06, 2001.
- [22] R. M. Wald, *General relativity*. Chicago Univ. Press, Chicago, IL, 1984.
<https://cds.cern.ch/record/106274>.
- [23] S. Carroll, *Spacetime and geometry: an introduction to general relativity; International ed.* Pearson Education, Essex, Aug, 2013.
<https://cds.cern.ch/record/1602292>.
- [24] S. W. Hawking and G. F. R. Ellis, *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1973.
- [25] M. d. R. Egea, *La solución de Schwarzschild. Aplicación al GPS*. PhD thesis, 2017.
- [26] R. D’Inverno, *Introducing Einstein’s Relativity*. Clarendon Press, 1992.
- [27] S. M. Carroll, “Lecture notes on general relativity,” arXiv:gr-qc/9712019.
- [28] B. Toshmatov, Z. Stuchlík, and B. Ahmedov, “Generic rotating regular black holes in general relativity coupled to nonlinear electrodynamics,” *Phys. Rev. D* **95** no. 8, (2017) 084037, arXiv:1704.07300 [gr-qc].
- [29] R. Penrose, “Gravitational collapse: The role of general relativity,” *Riv. Nuovo Cim.* **1** (1969) 252–276.
- [30] **Event Horizon Telescope** Collaboration, K. Akiyama *et al.*, “First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole,” *Astrophys. J. Lett.* **875** (2019) L1, arXiv:1906.11238 [astro-ph.GA].
- [31] J. Nordebo, “The reissner nordstrom metric,” Mar, 2016.
- [32] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics; 2nd ed.* Wiley, New York, NY, 1975.
<https://cds.cern.ch/record/100964>.
- [33] M. Vargas, “Introducción a la Teoría de los Monopolos Magnéticos,” arXiv:0812.0386 [physics.class-ph].
- [34] B. Zwiebach, *A First Course in String Theory*. Cambridge University Press, 2004.
- [35] A. Papapetrou, *Lectures on general relativity / by A. Papapetrou*. Reidel Pub. Co Dordrecht ; Boston, 1974.

- [36] R. C. Henry, “Kretschmann scalar for a kerr-newman black hole,” *Astrophys. J.* **535** (2000) 350, arXiv:astro-ph/9912320.
- [37] F. Dowker, “Black holes.”
- [38] A. DeBenedictis, *Developments in Black Hole Research: Classical, Semi-classical, and Quantum*, p. 548. 12, 2007.
- [39] P. K. Townsend, “Black holes: Lecture notes,” arXiv:gr-qc/9707012.
- [40] O. Ruiz, U. Molina, and P. Vitoria, “Thermodynamic analysis of kerr-newman black holes,” *Journal of Physics: Conference Series* **1219** no. 1, (May, 2019) 012016. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1219/1/012016>.
- [41] S. Ramos, *Relatividad para futuros físicos*. 2018.
- [42] B. F. Schutz, *Geometrical Methods of Mathematical Physics*. Cambridge University Press, 1980.
- [43] D. J. Griffiths and D. F. Schroeter, *Introduction to Quantum Mechanics*. Cambridge University Press, 3 ed., 2018.
- [44] T. Lancaster and S. J. Blundell, *Quantum field theory for the gifted amateur*. Oxford University Press, Oxford, Apr, 2014. <https://cds.cern.ch/record/1629337>.
- [45] N. D. Birrell and P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 1982.
- [46] P. A. M. Dirac and R. H. Fowler, “The fundamental equations of quantum mechanics,” *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* **109** no. 752, (1925) 642–653, <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.1925.0150>. <https://royalsocietypublishing.org/doi/abs/10.1098/rspa.1925.0150>.
- [47] G. B. Folland, “Fourier analysis and its applications,” 1992.
- [48] H. Halvorson and M. Mueger, “Algebraic quantum field theory,” 2006.
- [49] J. Pinochet, “Stephen hawking y los agujeros negros cuánticos,” *Revista Mexicana de Física E* **65** no. 2 Jul-Dec, (Jul, 2019) 182–190. <http://dx.doi.org/10.31349/RevMexFisE.65.182>.
- [50] E. Frodden and N. Valdés, “UNRUH EFFECT: Introductory Notes to Quantum Effects for Accelerated Observers,” *Int. J. Mod. Phys. A* **33** no. 27, (2018) 1830026, arXiv:1806.11157 [gr-qc].
- [51] N. N. Bogolyubov, “On a New method in the theory of superconductivity,” *Nuovo Cim.* **7** (1958) 794–805.
- [52] F. Gray, “Black hole radiation, greybody factors, and generalised wick rotation,” 2016.
- [53] N. Zettili, *Quantum mechanics : concepts and applications / Nouredine Zettili*. John Wiley, Chichester, 2001.

- [54] R. K. Pathria, *Statistical mechanics*, by R. K. Pathria. Pergamon Press Oxford, New York, [1st ed.] ed., 1972.
- [55] M. Pauly, “The kms-condition,” 2017.
- [56] S. Fulling and S. Ruijsenaars, “Temperature, periodicity and horizons,” *Physics Reports* **152** no. 3, (1987) 135–176.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0370157387901360>.
- [57] H. S. Snyder, “Quantized space-time,” *Phys. Rev.* **71** (1947) 38–41.
- [58] P. NICOLINI, “Noncommutative black holes, the final appeal to quantum gravity: A review,” *International Journal of Modern Physics A* **24** no. 07, (Mar, 2009) 1229–1308. <http://dx.doi.org/10.1142/S0217751X09043353>.
- [59] J. Bowden, “On noncommutative dynamic spacetimes,” 2014.
- [60] R. Banerjee, S. Gangopadhyay, and S. K. Modak, “Voros product, noncommutative schwarzschild black hole and corrected area law,” *Physics Letters B* **686** no. 2–3, (Mar, 2010) 181–187.
<http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2010.02.034>.
- [61] P. Nicolini, A. Smailagic, and E. Spallucci, “Noncommutative geometry inspired schwarzschild black hole,” *Physics Letters B* **632** no. 4, (Jan, 2006) 547–551. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2005.11.004>.
- [62] R. N. Bracewell and R. N. Bracewell, *The Fourier transform and its applications*, vol. 31999. McGraw-Hill New York, 1986.
- [63] A. Smailagic and E. Spallucci, “Uv divergence-free qft on noncommutative plane,” *Journal of Physics A: Mathematical and General* **36** no. 39, (Sep, 2003) L517–L521. <http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/36/39/103>.
- [64] A. Smailagic and E. Spallucci, “Lorentz invariance and unitarity in uv finite ncqft,” 2004.
- [65] S. Ansoldi, P. Nicolini, A. Smailagic, and E. Spallucci, “Non-commutative geometry inspired charged black holes,” *Physics Letters B* **645** no. 2–3, (Feb, 2007) 261–266. <http://dx.doi.org/10.1016/j.physletb.2006.12.020>.
- [66] J. M. Bardeen, B. Carter, and S. W. Hawking, “The Four laws of black hole mechanics,” *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 161–170.
- [67] R. L. Goodstein, “Complex variables and applications. by r. v. churchill. 2nd ed. pp. 296. 52s. 6d. 1960 (mcgraw-hill),” *The Mathematical Gazette* **45** no. 353, (1961) 261–261.
- [68] P. Boonserm, T. Ngampitipan, and P. Wongjun, “Greybody factor for black holes in dRGT massive gravity,” *Eur. Phys. J. C* **78** no. 6, (2018) 492, [arXiv:1705.03278](https://arxiv.org/abs/1705.03278) [gr-qc].
- [69] W. G. Unruh, “Notes on black-hole evaporation,” *Phys. Rev. D* **14** (Aug, 1976) 870–892. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.14.870>.

- [70] S. A. Fulling, “Nonuniqueness of canonical field quantization in riemannian space-time,” *Phys. Rev. D* **7** (May, 1973) 2850–2862.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.7.2850>.
- [71] M. K. Parikh and F. Wilczek, “Hawking radiation as tunneling,” *Physical Review Letters* **85** no. 24, (Dec, 2000) 5042–5045.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.85.5042>.
- [72] P. Painlevé, “La mécanique classique et la théorie de la relativité,” *Comptes Rendus Academie des Sciences (serie non specifiée)* **173** (Jan., 1921) 677–680.
- [73] A. Gullstrand, “Allgemeine losung des statischen einkorperproblems in der einsteinschen gravitationstheorie,”.
- [74] A. Fabbri and J. Navarro, *Modeling Black Hole Evaporation*. 2005.
- [75] E. Keski-Vakkuri and P. Kraus, “Tunneling in a time-dependent setting,” *Physical Review D* **54** no. 12, (Dec, 1996) 7407–7420.
<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.54.7407>.
- [76] Y. Gobeil, “Periodicity in thermal physics,” Jun, 2017.
- [77] N. Woodhouse, *Special Relativity by N.M.J. Woodhouse*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer London : Imprint: Springer, London, 1st ed. 2003. ed., 2003.
- [78] P. C. W. Davies and S. A. Fulling, “Radiation from a moving mirror in two-dimensional space-time conformal anomaly,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **348** (1976) 393–414.
- [79] P. C. W. Davies and S. A. Fulling, “Radiation from Moving Mirrors and from Black Holes,” *Proc. Roy. Soc. Lond. A* **356** (1977) 237–257.
- [80] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, Inc., San Diego, third ed., 1985.
- [81] M. R. R. Good, P. R. Anderson, and C. R. Evans, “Time Dependence of Particle Creation from Accelerating Mirrors,” *Phys. Rev. D* **88** (2013) 025023, [arXiv:1303.6756](https://arxiv.org/abs/1303.6756) [gr-qc].
- [82] M. R. R. Good and Y. C. Ong, “Particle spectrum of the Reissner–Nordström black hole,” *Eur. Phys. J. C* **80** no. 12, (2020) 1169, [arXiv:2004.03916](https://arxiv.org/abs/2004.03916) [gr-qc].
- [83] F. Wilczek, “Quantum purity at a small price: Easing a black hole paradox,” in *International Symposium on Black holes, Membranes, Wormholes and Superstrings*. 2, 1993. [arXiv:hep-th/9302096](https://arxiv.org/abs/hep-th/9302096).
- [84] W. N. Mathews, M. A. Esrick, Z. Y. Teoh, and J. K. Freericks, “A physicist’s guide to the solution of Kummer’s equation and confluent hypergeometric functions,” [arXiv:2111.04852](https://arxiv.org/abs/2111.04852) [quant-ph].
- [85] A. Larranaga, N. Herrera, and J. Garcia, “Geometric Description of the Thermodynamics of the Noncommutative Schwarzschild Black Hole,” *Adv. High Energy Phys.* **2013** (2013) 641273.

- [86] S. A. Alavi, “Reissner-Nordstrom black hole in noncommutative spaces,” *Acta Phys. Polon. B* **40** (2009) 2679–2687, [arXiv:0909.1688 \[gr-qc\]](#).
- [87] B. A. González Morales, *Soluciones Gravitacionales Inspiradas por No-Conmutatividad*. PhD thesis, 2018.
- [88] I. Aref’eva and I. Volovich, “A Note on Islands in Schwarzschild Black Holes,” [arXiv:2110.04233 \[hep-th\]](#).
- [89] J. Foo and M. R. R. Good, “Hawking radiation particle spectrum of a Kerr-Newman black hole,” *JCAP* **01** (2021) 019, [arXiv:2006.09681 \[gr-qc\]](#).



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00124

Matricula: 2193803639

Radiación Hawking en
espacios-tiempos no
conmutativos.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 16:00 horas
del día 11 del mes de abril del año 2023 en la Unidad
Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los
suscritos miembros del jurado:

DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA
DRA. NORA EVA BRETON BAEZ
DR. JUAN MANUEL ROMERO SANPEDRO



JOSE ALBERTO MAYA PEREZ
ALUMNO

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de
Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen
de Grado cuya denominación aparece al margen, para la
obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

DE: JOSE ALBERTO MAYA PEREZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del
Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad
Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado
resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al
interesado el resultado de la evaluación y, en caso
aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

DR. MARCO ANTONIO MACEDA SANTAMARIA

VOCAL

DRA. NORA EVA BRETON BAEZ

SECRETARIO

DR. JUAN MANUEL ROMERO SANPEDRO