

074917

ALGUNAS APLICACIONES DE METODOS  
NUMERICOS A PROBLEMAS DE FLUJO  
EN MEDIOS POROSOS

TESIS QUE PRESENTA  
ABEL CAMACHO GALVAN  
PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE  
MAESTRIA EN MATEMATICAS

Abril de 1987

074917

AGRADECIMIENTO

Por este conducto me es grato hacer patente mi más amplio agradecimiento tanto a cada uno de los profesores que con dedicación impartieron sus clases, como a los coordinadores y jefes del Departamento de Matemáticas. Sin excepción, de cada uno de ellos puede afirmarse que usando como portadora la excelencia académica nos dieron a conocer su elevada calidad moral.

Para el profesor Hans Fetter Nathasky, quien con talento, conocimiento y profundo interés dirigió esta tesis, mi más extenso reconocimiento.

## INDICE

|                                                                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| PROLOGO                                                                                                         | 1  |
| CAPITULO I FLUJO DE FILTRACION                                                                                  | 4  |
| 1.1 Introducción                                                                                                | 5  |
| 1.2 Coeficiente de porosidad                                                                                    | 5  |
| 1.3 Velocidad de filtración y gasto                                                                             | 7  |
| 1.4 Fórmula de Darcy                                                                                            | 9  |
| 1.5 Límites de aplicabilidad de la fórmula de Darcy                                                             | 12 |
| 1.6 Coeficiente de permeabilidad                                                                                | 13 |
| 1.7 Ecuaciones generales de la hidrodinámica                                                                    | 15 |
| 1.8 Flujo bidimensional                                                                                         | 23 |
| 1.9 Líneas de corriente y líneas equipotenciales                                                                | 25 |
| 1.10 Condiciones de frontera                                                                                    | 28 |
| 1.11 Anisotropía                                                                                                | 31 |
| 1.12 Filtración en pozos                                                                                        | 42 |
| CAPITULO II EL METODO DEL ELEMENTO FINITO                                                                       | 45 |
| 2.1 Consideraciones generales                                                                                   | 46 |
| 2.2 Formulación débil de los problemas con valores en la frontera                                               | 47 |
| 2.3 Ecuación diferencial parcial de segundo orden con coeficientes constantes (Formulación débil)               | 52 |
| 2.4 Aproximación de la solución de la ecuacion diferencial parcial de segundo orden con coeficientes constantes | 55 |
| 2.5 Funciones de interpolación para elementos triangulares                                                      | 57 |
| 2.6 Funciones de interpolación para elementos rectangulares                                                     | 60 |
| 2.7 Evaluación de las matrices de rigidez de los elementos                                                      | 63 |
| 2.8 Armado de las matrices                                                                                      | 68 |
| 2.9 Flujo de un fluido alrededor de un cilindro                                                                 | 70 |
| 2.10 Evaluación de la matriz K                                                                                  | 72 |
| 2.11 Evaluación de las incógnitas $U_i$                                                                         | 80 |
| CAPITULO III PROGRAMA PARA RESOLVER PROBLEMAS DE FLUJO DE FILTRACION ESTACIONARIO                               | 85 |
| 3.1 Introducción                                                                                                | 86 |
| 3.2 Descripción general del programa                                                                            | 88 |
| 3.3 Datos iniciales                                                                                             | 89 |
| 3.4 Descripción detallada de los datos                                                                          | 92 |
| 3.5 Construcción de la red e impresión de resultados                                                            | 99 |

|                                                                                   |                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|-----|
| 3.6                                                                               | Ejemplo de aplicación del Programa FOBOS                  | 101 |
| CAPITULO IV DETERMINACION DE LA FRONTERA LIBRE EN UNA PRESA DE TERRACERIA         |                                                           | 111 |
| 4.1                                                                               | Introducción                                              | 112 |
| 4.2                                                                               | Solución del problema de frontera libre                   | 118 |
| 4.3                                                                               | Determinación de la frontera libre en presa de terracería | 121 |
| CAPITULO V DETERMINACION DE LA FRONTERA LIBRE EN UNA PRESA CON PAREDES VERTICALES |                                                           | 145 |
| 5.1                                                                               | Introducción                                              | 146 |
| 5.2                                                                               | Otra formulación diferencial del problema                 | 148 |
| 5.3                                                                               | Formulación débil del problema                            | 150 |
| 5.4                                                                               | La transformación de Baiocchi                             | 153 |
| 5.5                                                                               | Formulación variacional del problema                      | 159 |
| 5.6                                                                               | Discretización del modelo                                 | 164 |
| 5.7                                                                               | Resolución del problema discreto                          | 171 |
| 5.8                                                                               | Descripción del programa computacional                    | 180 |
| 5.9                                                                               | Ejemplo de aplicación                                     | 182 |
| REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS                                                        |                                                           | 184 |
| APENDICE A                                                                        |                                                           | A-1 |
| APENDICE B                                                                        |                                                           | B-1 |
| APENDICE C                                                                        |                                                           | C-1 |
| APENDICE E                                                                        |                                                           | E-1 |
| APENDICE F                                                                        |                                                           | F-1 |
| APENDICE G                                                                        |                                                           | G-1 |
| APENDICE H                                                                        |                                                           | H-1 |
| APENDICE I                                                                        |                                                           | I-1 |
| APENDICE J                                                                        |                                                           | J-1 |

## P R O L O G O

En el presente trabajo se exponen las principales regularidades que rigen el flujo subterráneo del agua y para su mejor comprensión este fenómeno es contemplado en el contexto de diversos ejemplos. En general dicho proceso se aborda considerando los siguientes tópicos: La exposición de las leyes que regulan el flujo del agua en medios porosos; la presentación de modelos físicos que describen casos concretos de aplicación; el desarrollo de técnicas que facilitan el manejo matemático de los conceptos involucrados y por último su instrumentación computacional a efecto de evaluar numéricamente las soluciones de los problemas así planteados.

A tal efecto, en el Capítulo I se presenta la ecuación de Darcy, expresión que caracteriza el flujo freático laminar, se consideran los límites de su aplicabilidad, se examinan aquellos aspectos relevantes que se dan en las fronteras de los embalses y por último se muestra como mediante una simple modificación de las coordenadas espaciales un flujo en un medio anisotrópico puede ser considerado como un flujo en una región isotrópica. Esencialmente el flujo de filtración es estimado mediante la función potencial  $\phi$  y su armónica conjugada  $\psi$  que determina las líneas de flujo.

Dado que tanto la función  $\phi$  como la función  $\psi$  satisfacen a la ecuación de Laplace, o en su caso a la ecuación de Poisson, se presenta la necesidad de resolver ecuaciones en derivadas parciales. Así pues se propone resolver numéricamente dichas ecuaciones mediante el Método del Elemento Finito, procedimiento que se adapta fácilmente a regiones de configuración geométrica prácticamente arbitraria. Esta técnica se expone en el Capítulo II, ahí se muestra

la forma de presentar bajo la llamada "formulación débil" a problemas con valores en la frontera, se presentan las funciones de interpolación para elementos triangulares y rectangulares, se indica el modo de evaluar las matrices de rigidez y la forma de armarlas. Con el objeto de ilustrar estos procedimientos se evalúa el flujo de un fluido alrededor de un cilindro.

En el Capítulo III se ofrece un programa computacional para resolver ecuaciones diferenciales mediante el Método del Elemento Finito. El programa se encuentra especialmente adaptado para considerar flujos de filtración estacionarios. También con el propósito de esclarecer su manejo se evalúan los potenciales en un acuífero sujeto a la acción de un río y de dos pozos.

En el Capítulo IV se procede a determinar la frontera libre para el caso de flujo de filtración de una presa de terracería con dren en su parte posterior. El problema se aborda aplicando reiteradamente el Método del Elemento Finito. Aquí se encara la necesidad de modificar en cada iteración el dominio de integración y en consecuencia en cada paso iterativo se modifica también la malla construida sobre dicha región. Esto naturalmente conduce a un penoso y arduo manejo de un sinnúmero de datos y por añadidura, en un extremo de la frontera libre se presenta una singularidad.

En el Capítulo V se localiza la frontera libre para el caso de flujo de filtración en una presa de terracería de paredes verticales. Pero en esta ocasión el problema se ataca mediante la transformación de Baiocchi, misma que desemboca en desigualdades variacionales. Este enfoque del problema permite trabajar en un dominio de integración fijo, y en consecuencia cuando se compara con el Método del Elemento Finito se hace evidente la disminución

notable en el volumen de los datos iniciales que alimentan el programa computacional que al respecto se ha instrumentado. Aún más, la transformación de Baiocchi permite demostrar la unicidad de la solución del problema planteado, es decir se garantiza matemáticamente la configuración única de la frontera libre para las condiciones fronterizas estipuladas.

Los programas computacionales así como los respectivos archivos de datos y listados de resultados se presentan en los diversos apéndices ubicados en las páginas finales del presente trabajo.

Por último nos resta comentar que el material correspondiente a la descripción del flujo freático, a la estructuración del Método del Elemento Finito y a la instrumentación del programa computacional citado, material que se presenta, respectivamente, en los capítulos I, II y III corresponde a técnicas de uso general. Escencialmente los fundamentos de éstas fueron tomadas de las referencias [11], [12] y [15] y éstos principios sirvieron de base para la determinación de la frontera libre para el caso del flujo de filtración de la presas presentadas en los capítulos IV y V.

CAPITULO I

FLUJO DE FILTRACION

## 1.1 INTRODUCCION

En este capítulo se presentan algunos de los métodos empleados para estudiar el flujo del agua en el subsuelo. El análisis del problema se aborda atendiendo a la necesidad de predecir tanto el gasto del flujo de filtración como el dominio donde el fenómeno se presenta. Aún cuando los principios que gobiernan al flujo de filtración fueron establecidos hace casi 100 años, no ha sido sino hasta tiempos relativamente recientes cuando este tema ha sido abordado bajo un enfoque científico, por esta razón no causa sorpresa encontrar la literatura al respecto plagada de relaciones empíricas respecto a las cuales soluciones exactas pueden ser y han sido teóricamente cimentadas.

Actualmente se pueden considerar no tan sólo relaciones entre los parámetros que aparecen en las fórmulas, sino que además se cuenta con la posibilidad de acotar la incertidumbre en las evaluaciones de dichas magnitudes.

## 1.2 COEFICIENTE DE POROSIDAD

El agua que se encuentra en los poros del suelo se llama freática y generalmente se halla en movimiento, a este movimiento del agua al través de los poros se le llama infiltración. Los estratos se consideran medios continuos por cuyos huecos, interconectados entre si, circula el agua freática.

A efecto de simplificar la teoría los suelos se dividen en dos grandes grupos: arenosos y arcillosos. Los suelos arenosos se encuentran constituidos esencialmente por partículas macroscópicas que drenan rápidamente y cuando esto sucede no exhiben disminución sensible en su volumen, además su potencial capilar es prácticamente insignificante. En cambio los suelos arcillosos ofrecen notable resistencia a la infiltración, presentan potenciales capilares significativos y al ser drenados exhiben disminución sensible en su volumen. Así pues, los suelos arenosos asemejan medios porosos ideales y la teoría a desarrollar considerará este tipo de material. Y si bien es cierto que este enfoque limita la citada teoría, por otra parte no es menos cierto que la baja permeabilidad - característica de los suelos arcillosos nos permite dar de lado a este tipo de suelos sin padecer notable menoscabo en las aplicaciones.

Evidentemente los granos de arena tienen las más variadas formas: angulares, redondeadas, etc., pero dado que en la infiltración no se presenta el flujo del agua a través de una cierta trayectoria particular, sino más bien se considera el flujo a través de una sección recta donde el fenómeno de infiltración se da simultáneamente en un gran número de poros, entonces bajo esta consideración se asume que los granos de arena son de forma esférica y de dimensiones iguales. A efecto de estimar numéricamente las propiedades del suelo se dan los dos siguientes parámetros:

Porosidad es la relación de vacíos  $V_v$  al volumen total en cuestión:

$$n = \frac{V_v}{V} \quad (1.2.1)$$

y la razón de vacíos es

$$e = \frac{V_v}{V - V_v} \quad (1.2.2)$$

cuando los granos de arena presentan un arreglo cúbico la porosidad es

$$n = 1 - \frac{\pi}{6} = 0.476$$

Seguidamente se dan algunos valores de la porosidad - correspondientes a distintos suelos.

T A B L A 1.2.1

| DESCRIPCION      | POROSIDAD |
|------------------|-----------|
| Arena            | 46        |
| Arena Compacta   | 34        |
| Arcilla          | 55-37     |
| Arcilla Orgánica | 75        |
| Bentonita        | 84        |

### 1.3 VELOCIDAD DE FILTRACION Y GASTO

En los cálculos prácticos de flujo de filtración figuran esencialmente dos magnitudes, a saber: la velocidad de filtración  $\bar{v}$  y el gasto  $Q$ .

Dado que el flujo ocurre en los suelos saturados a través de múltiples poros interconectados, no queda mas remedio que considerar a la velocidad bajo promedios obtenidos de la siguiente manera:

Sea  $A$  el área de la sección recta a través de la cual se estima la velocidad y sea  $A_p$  el área ocupada en la misma sección recta por los poros, se define a la razón

$$m = \frac{A_p}{A}$$

y al gasto

$$Q = m A \bar{v}$$

la magnitud  $\bar{v}$  es llamada velocidad de filtración.

A efecto de analizar las particularidades de la razón  $m$  considérese un cilindro circular recto de altura  $h$  y base  $A$  el cual en la altura  $z$  tiene una sección recta cuya -- área de poros es  $A_p(z)$ , así pues

$$m(z) = \frac{A_p}{A} \quad (1.3.1)$$

y tomando el promedio sobre el cilindro de altura  $h$

$$m = \frac{1}{h} \int_0^h m(z) dz \quad (1.3.2)$$

y de aquí

$$m = \frac{1}{Ah} \int_0^h A_p(z) dz = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{A_p(z)}{A} dz \quad (1.3.3)$$

y como V es el volumen total del cilindro y la integral evalúa el volumen de vacíos, se deduce que el promedio m es el valor de la porosidad n.

#### 1.4 FORMULA DE DARCY

La fórmula de Bernoulli establecida para el estudio del flujo estacionario de fluidos incomprensibles no viscosos establece que

$$\frac{p}{\gamma_w} + z + \frac{\bar{v}^2}{2g} = h \quad (h \text{ es constante}) \quad (1.4.1)$$

donde

p = presión (fuerza/área)

$\gamma_w$  = peso específico del fluido (fuerza/volumen)

$\bar{v}$  = velocidad del flujo de filtración (longitud/tiempo)

g = aceleración debida a la gravedad (longitud/tiempo<sup>2</sup>)

h = carga total (longitud)

El primer término de la ecuación  $\frac{p}{\gamma_w}$  se conoce como la altura piezométrica en la sección dada, el segundo término z como la altura geométrica de posición de la sección sobre el plano de comparación y por último  $\frac{\bar{v}^2}{2g}$  se llama al altura debida a la velocidad o carga debida a la velocidad. Así pues la ecuación de Bernoulli establece que la suma de las alturas geométrica, piezométrica y la carga debida a la velocidad es una magnitud constante llamada carga total.

Para el flujo de filtración y en virtud de las -  
pérdidas de energía ocasionadas por la resistencia al movimiento  
a través de los poros del suelo, la ecuación de Bernoulli  
toma la forma

$$\frac{p_A}{\gamma_w} + z_A + \frac{\bar{v}_A^2}{2g} = \frac{p_B}{\gamma_w} + z_B + \frac{\bar{v}_B^2}{2g} + \Delta h \quad (1.4.2)$$

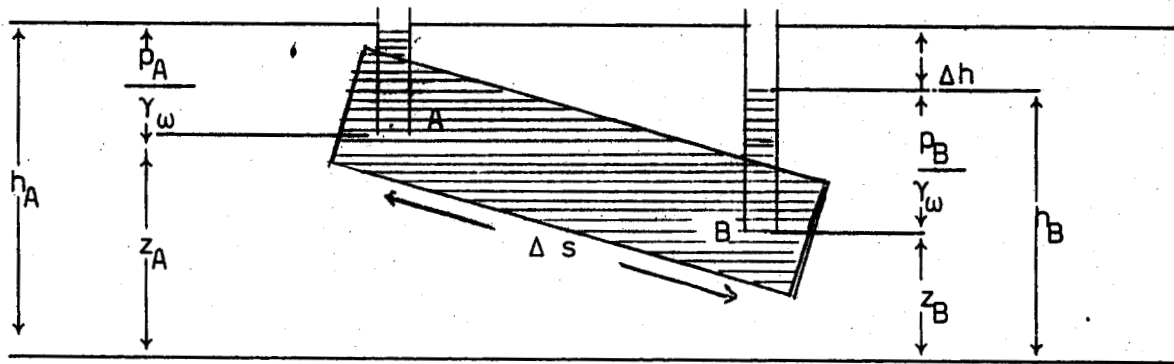


Fig. 1.4.1

$\Delta h$  representa la pérdida de carga del fluido en cuestión al  
recorrer éste la distancia  $\Delta s$

La razón

$$i = -\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta s} = - \frac{dh}{ds} \quad (1.4.3)$$

se llama gradiente hidráulico e indica la razón de pérdida de  
energía por unidad de peso del fluido en la unidad de longitud  
medida según la dirección de la velocidad.

Como la carga de velocidad en el fenómeno de fil

tracción es, obviamente, pequeña será omitida, así pues la fórmula (1.4.2) toma la forma

$$\frac{p_A}{\gamma_w} + z_A = \frac{p_B}{\gamma_w} + z_B + \Delta h \quad (1.4.4)$$

En el año de 1856 Henry Darcy demostró experimentalmente que la velocidad de un flujo de filtración es proporcional al gradiente hidráulico

$$v = ki = -k \frac{dh}{ds} \quad (1.4.5)$$

El análisis de esta fórmula caracteriza al coeficiente  $k$ , llamado coeficiente de filtración, como la velocidad del flujo de filtración en una pendiente igual a la unidad, así pues  $k$  tiene las dimensiones de la velocidad.

En este punto es pertinente aclarar que la fórmula de Darcy es la expresión macroscópica estadísticamente equivalente a las ecuaciones de Navier-Stokes para el flujo viscoso en suelos. Es precisamente esta equivalencia la que hace posible el desarrollo subsecuente de la teoría dentro del marco del potencial del flujo. En otras palabras, al quedar cuantificados, en la fórmula de Darcy, los efectos debidos a la viscosidad, el flujo puede ser considerado como no viscoso.

### 1.5 LIMITES DE APLICABILIDAD DE LA FORMULA DE DARCY

El movimiento de un flujo subterráneo se produce por lo general en las condiciones de corriente laminar. Las fórmulas (1.4.4) y (1.4.5) son aplicables en esas condiciones. No obstante puede haber casos cuando el flujo de filtración tenga una velocidad considerable y el movimiento será turbulento y casos cuando la velocidad de filtración sea tan insignificante que las fuerzas decisivas serán no las fuerzas de gravedad, sino las fuerzas debidas a la interacción molecular de las partículas del líquido con las del suelo.

El número de Reynolds establece un criterio para determinar el rango de las velocidades del flujo de filtración bajo el cual se obtiene un flujo laminar, este número se define por

$$R = \frac{vD\rho}{\mu} \quad (1.5.1)$$

donde

$v$  = Velocidad del flujo de filtración (cms/seg)

$D$  = Diámetro promedio de las partículas del suelo (cms)

$\rho$  = Densidad del fluido (gr/cms<sup>3</sup>)

$\mu$  = Coeficiente de viscosidad (gr-seg/cms<sup>2</sup>)

Mediante experimentación se ha encontrado que el valor crítico del número de Reynolds al cual el flujo en suelos pasa de laminar a turbulento es el número 1. Así pues se trabajará con la fórmula de Darcy considerando

$$\frac{vD}{\mu} \leq 1 \quad (1.5.2)$$

Al sustituir en (1.5.2) los valores correspondientes a los parámetros  $\rho$  y  $\mu$  del agua y considerando conservadamente el valor  $v = \frac{1}{4}$  cms/seg, se encuentra que  $D = 0.4$  mm, lo que corresponde a la dimensión promedio del diámetro promedio de los granos de la arena gruesa. Así pues, al tomarse dicho límite superior para el número de Reynolds, el manejo de la fórmula de Darcy corresponderá adecuadamente a situaciones reales del flujo del agua en suelos arenosos.

#### 1.6 COEFICIENTE DE PERMEABILIDAD

Siendo, como se dijo, la fórmula de Darcy

$$v = -k \frac{dh}{ds} \quad (1.6.1)$$

donde  $k$  es el coeficiente de permeabilidad, fácilmente se entiende que dicho coeficiente varia dependiendo de la influencia con la cual se manifiestan tanto la densidad como la viscosidad del fluido en los poros del suelo. Así pues en un intento de aislar por un lado la parte de  $k$  que depende de las propiedades del suelo y por otro la parte que depende de las propiedades del fluido se introduce el parámetro  $k_0$ , llamado permeabilidad física, así se tiene que

$$k = k_0 \frac{\gamma_w}{\mu} \quad (1.6.2)$$

donde  $\gamma_w$  es el peso unitario del fluido y  $\mu$  es el coeficiente de viscosidad. Sustituyendo (1.6.2) en (1.6.1) se llega a

$$v = -k \frac{\gamma_w}{\mu} \frac{dh}{ds} \quad (1.6.3)$$

donde se muestra que la velocidad es inversamente proporcional a la viscosidad. Esta última expresión permite manejar la fórmula de Darcy cuando se presentan cambios de temperatura o se tiene más de un tipo de fluido, sin embargo estando en una gran parte los problemas de aplicación dirigidos al estudio de flujos de fluidos de un sólo tipo y sujetos a insignificantes variaciones de temperatura, se concretará a evaluar la Ley de Darcy mediante el parámetro  $k$ . Seguidamente se da una tabla de valores del coeficiente de permeabilidad correspondiente a diferentes tipos de suelos.

TABLA 1.6.1

| TIPO DE SUELO       | COEF. DE PERMEABILIDAD $k$ (cms/seg) |
|---------------------|--------------------------------------|
| Grava limpia        | 1.0 (o mayor)                        |
| Arena gruesa limpia | 1.0 a 0.01                           |
| Arena               | 0.01 a 0.005                         |
| Arena fina          | 0.05 a 0.001                         |
| Arena y sedimentos  | 0.002 a 0.0001                       |
| Sedimentos          | 0.0005 a 0.00001                     |
| Arcilla             | 0.000001 (o menor)                   |

## 1.7 ECUACIONES GENERALES DE LA HIDRODINAMICA

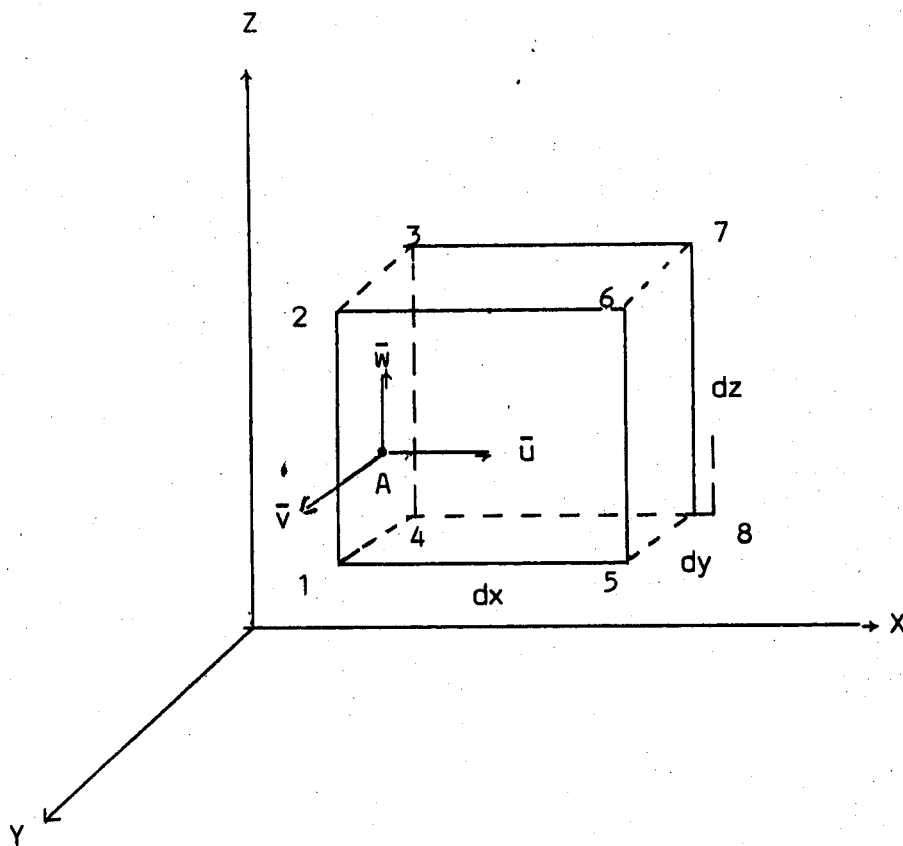


Fig. 1.7.1

Sean  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{w}$  las componentes de la velocidad de filtración de un fluido en el punto  $A(x,y,z)$  en el instante  $t$ . Así pues, durante el intervalo  $\delta t$  el punto  $A$  se habrá trasladado a la posición  $(x+\bar{u}\delta t, y+\bar{v}\delta t, z+\bar{w}\delta t)$ . La razón de cambio respecto al tiempo de la componente de la velocidad  $\bar{u}$  es  $\delta\bar{u}/\delta t$ , o sea

$$\frac{\delta\bar{u}}{\delta t} = \frac{\partial\bar{u}}{\partial t} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}$$

si  $\delta t$  se hace tender a cero, entonces

$$\bar{u} = \frac{dx}{dt}, \quad \bar{v} = \frac{dy}{dt}, \quad \bar{w} = \frac{dz}{dt}$$

y la aceleración en la dirección del eje X es

$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \quad (1.7.1)$$

Análogamente se obtienen las aceleraciones en las direcciones Y y Z.

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \quad (1.7.2)$$

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \quad (1.7.3)$$

Sean  $p$  la presión y  $\rho$  la densidad del fluido en el punto  $A(x,y,z)$  en el instante  $t$  y sean, además  $X, Y$  y  $Z$  las fuerzas por unidad de masa en las direcciones respectivas de los ejes.

Como en el flujo subterráneo la única fuerza actuante es la debida a la gravedad, la fuerza presente en el lado 1-2-3-4 de la figura 1.7.1 es

$$(p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz$$

y en la cara opuesta es

$$(p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx) dy dz$$

y de aquí según la segunda ley de Newton

$$\rho dx dy dz \frac{d\bar{u}}{dt} = (p - \frac{1}{2} \frac{\rho}{x} dx) dy dz - (p + \frac{1}{2} \frac{\rho}{x} dx) dy dz + \rho x dx dy dz$$

mediante (1.7.1) de obtiene

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.7.4)$$

Análogamente se obtienen

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1.7.5)$$

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1.7.6)$$

Estas tres últimas ecuaciones son las ecuaciones de Euler para el caso del flujo no viscoso. Ahora bien, si el flujo es laminar, entonces tanto las componentes de la velocidad como sus derivadas espaciales son pequeñas y de aquí que su producto - pueda ser omitido

$$\frac{1}{n} \frac{\partial u}{\partial t} = x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.7.7)$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial v}{\partial t} = y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (1.7.8)$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial w}{\partial t} = z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1.7.9)$$

Obsérvese que las componentes de la velocidad sin barra indican la velocidad de gasto. Para  $n$  y  $g$  tomaremos conservadoramente los valores  $n = \frac{1}{2}$  y  $g = 1000 \text{ cms/seg}^2$ .

Si el flujo es independiente del tiempo, entonces se tiene

$$x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.7.10)$$

y al sustituir  $p$  por  $h = \frac{p}{\gamma_w} + z_0$  se obtiene

$$x = g \frac{\partial h}{\partial x} = -gi \quad (1.7.11)$$

donde  $i$  es el gradiente hidráulico. Si aplicamos ahora la fórmula de Darcy

$$x = -\frac{qu}{k} \quad (1.7.12)$$

análogamente

$$y = -\frac{qv}{k} \quad (1.7.13)$$

$$z = -\frac{qw}{k} \quad (1.7.14)$$

Sustituyendo estas tres últimas fórmulas en (1.7.7), (1.7.8) y (1.7.9) respectivamente se tiene que

$$\frac{1}{n} \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{qu}{k} \quad (1.7.15)$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{qv}{k} \quad (1.7.16)$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{qw}{k} \quad (1.7.17)$$

Para el caso del flujo estacionario, estas fórmulas se reducen, de acuerdo a la expresión vectorial de la ley de Darcy

$$\vec{v} = - k \cdot \text{grad } h \quad (1.7.18)$$

Seguidamente se pasa a justificar la simplificación de las expresiones (1.7.15)-(1.7.17).

Estas tres igualdades presentan la siguiente forma - común

$$\frac{1}{n} \frac{\partial v}{\partial t} = gi - \frac{qv}{h}$$

y de aquí, mediante el siguiente cambio de variable

$$v = v_* + ki \quad (1.7.19)$$

se obtiene

$$\frac{1}{n} \frac{\partial v_*}{\partial t} = - \frac{k}{n} \frac{\partial i}{\partial t} - \frac{qv_*}{h}$$

Con el propósito de cuantificar los coeficientes de esta expresión se toma  $k = 0.1$  cms/seg, valor de permeabilidad bastante conservador ya que corresponde a suelos constituidos con arena gruesa

$$\frac{\partial v_*}{\partial t} = -1 \cdot 10^{-1} \frac{\partial i}{\partial t} - \frac{1}{2} \cdot 10^4 v_* \quad (1.7.20)$$

comparando los órdenes de las magnitudes se ve que a menos de presentarse una variación excesiva de la razón del gradiente hidráulico respecto al tiempo, el término correspondiente a  $\frac{\partial i}{\partial t}$  puede ser omitido sin pérdida sensible en la exactitud de los cálculos. Aún más, el número de Reynolds el cual limita la validez de la ley de Darcy garantiza que siendo baja la velocidad del flujo el cambio en el momentum es pequeño cuando se compara con las resistencias al flujo ocasionadas por la viscosidad. Así pues, (1.7.20) queda reducido así

$$\frac{dv_*}{dt} = \frac{1}{2} \cdot 10^4 v_*$$

e integrando

$$v_* = v_{*0} \exp(-\frac{1}{2} \cdot 10^4 t)$$

término que tiende rápidamente a cero, así pues al tomarse  $v_{*0}=0$  se obtiene (1.7.18).

La ecuación (1.7.18) muestra cuatro incógnitas, a

saber:  $u, v, w$  y  $h$ , luego a efecto de determinarlas se ha menester otra ecuación, esta se puede obtener a partir de considerar al fluido continuo en el espacio y en el tiempo.

La cantidad de fluido que pasa a través de la cara -- 1-2-3-4 del elemento mostrado en la figura 1.7.1 es

$$n\bar{u}dydz$$

y en la cara opuesta 5-6-7-8 es

$$\left[ n\bar{u} + \frac{\partial}{\partial x}(n\bar{u})dx \right] dydz$$

y el incremento del fluido por unidad de tiempo en la dirección -- del eje X es

$$\frac{\partial}{\partial x}(n\bar{u})dx dydz$$

análogamente se obtienen las siguientes ecuaciones según las direcciones de los ejes Y y Z respectivamente

$$\frac{\partial}{\partial y}(n\bar{v})dx dydz$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(n\bar{w})dx dydz$$

Si el fluido es incomprensible, entonces

$$\frac{\partial}{\partial x}(n\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(n\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial z}(n\bar{w}) = 0 \quad (1.7.21)$$

o sea

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.7.22)$$

Esta expresión se conoce como ecuación de continuidad.

Como es bien sabido, en el estudio de campos vectoriales ciertas dificultades se pueden soslayar cuando aquellos se presentan en términos de potenciales, de aquí que se defina el potencial de velocidad  $\varphi$  por

$$\varphi(x,y,z) = -k\left(\frac{p}{\gamma} + z\right) + c = -kh + c \quad (1.7.23)$$

donde  $c$  es una constante arbitraria.

En otros términos

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ w &= \frac{\partial \varphi}{\partial z} \end{aligned} \right\} \quad (1.7.24)$$

Las ecuaciones (1.7.23) y (1.7.24) generalizan la fórmula de Darcy dentro del esquema dinámico necesario para el estudio del flujo en el subsuelo.

Mediante simple sustitución se obtiene a partir de -

(1.7.23) y (1.7.24) la ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1.7.25)$$

la que al ser resuelta bajo condiciones de frontera específicas determina el flujo estacionario y laminar de filtración.

## 1.8 FLUJO BIDIMENSIONAL

En muchas ocasiones el flujo de un fluido es sustancialmente el mismo en ciertos planos paralelos y por esta razón el flujo se puede considerar bidimensional, simplificándose así notablemente el trabajo necesario en esta clase de estudios.

Las ecuaciones básicas del flujo bidimensional en el plano X-Y son

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\partial \phi}{\partial x} = -k \frac{\partial h}{\partial x} \\ v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = -k \frac{\partial h}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1.8.1)$$

y si se conviene en tomar el eje Y dirigido verticalmente hacia arriba mientras que el eje X permanece horizontal se tiene que

$$h = \frac{p}{\gamma_w} + y \quad (1.8.2)$$

$$\phi = -k \left( \frac{p}{\gamma_w} + y \right) + c \quad (1.8.3)$$

siendo así que la correspondiente ecuación de Lapla

ce es

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.8.4)$$

y la ecuación de continuidad adquiere la siguiente forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.8.5)$$

Como es sabido, la ecuación de Laplace es satisfecha por funciones armónicas conjugadas  $\varphi(x,y)$  y  $\psi(x,y)$  tales que las trayectorias  $\varphi(x,y) = \text{cte}$  y  $\psi(x,y) = \text{cte}$  son ortogonales.

La función  $\psi(x,y)$  es llamada función de corriente y se define por

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.8.6)$$

cuando se sustituyen estas ecuaciones en la ecuación de continuidad se obtiene

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} = 0$$

igualando los potenciales y las funciones de corriente se llega a

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1.8.7)$$

En otras palabras, la función  $\psi(x,y)$  satisface tanto a la ecuación de continuidad como a las condiciones de Cauchy-Riemann, luego también satisface a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (1.8.8)$$

### 1.9 LINEAS DE CORRIENTE Y LINEAS EQUIPOTENCIALES.

Consideremos una partícula de fluido la cual en el punto  $P(x,y)$  tiene una velocidad tangencial  $v=(u,v)$ , luego

$$\frac{v}{u} = \frac{dy}{dx} = \tan \phi$$

donde  $\phi$  es el ángulo que forma la tangente a la trayectoria en el punto  $P$  y el eje  $X$ , luego

$$vdx - udy = 0 \quad (1.9.1)$$

al sustituir las ecuaciones (1.8.6) en esta ecuación se obtiene

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$$

siendo la diferencial total  $d\psi = 0$ , y de aquí

$$\psi = \text{constante} \quad (1.9.2)$$

o sea, al tomar las curvas  $\psi(x,y) = \text{cte}$  se obtienen las llamadas líneas de flujo.

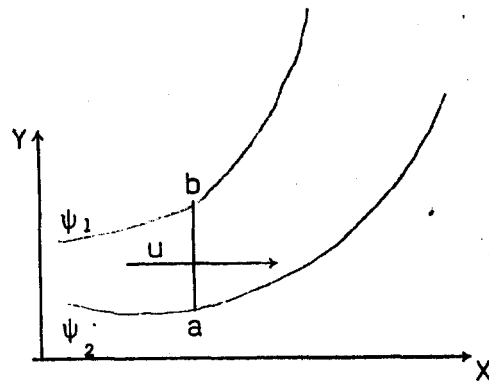


Fig. 1.9.1

Considérese ahora el flujo entre las líneas de corriente  $\psi_1$  y  $\psi_2$  como se muestra en la figura.1.9.1. Sea  $q$  el gasto por unidad de longitud a través de la recta  $ab$ , así

$$q = \int_{\psi_2}^{\psi_1} u dy = \int_{\psi_2}^{\psi_1} d\psi = \psi_1 - \psi_2 \quad (1.9.3)$$

este valor se llama flujo de canal y es constante. Por otra parte la interpretación física de la magnitud  $\phi$  puede ser obtenida partiendo de consideraciones de tipo matemáticas, así pues la diferencial total de  $\phi(x,y) = \text{cte}$  está dada por

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy = 0$$

y de aquí se deduce mediante (1.8.1)

$$u dx + v dy = 0$$

o sea

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{u}{v} \quad (1.9.4)$$

Las líneas  $\varphi(x,y) = \text{cte}$  son llamadas líneas equipotenciales las que, por supuesto, son ortogonales a las líneas de flujo. Al dibujarse estos dos tipos de líneas se obtiene la malla de flujo.

Si ahora se atiende a la diferencial total

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$$

se ve que en virtud de las ecuaciones de Cauchy-Riemann se obtienen las siguientes expresiones

$$\psi = \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx - \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right) \quad (1.9.5)$$

y

$$\varphi = \int \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy \right) \quad (1.9.6)$$

El llamado potencial complejo se define por

$$w = \varphi + i\psi \quad (1.9.7)$$

siendo de particular interés la expresión

$$\nabla^2 w = \nabla^2 \varphi + i \nabla^2 \psi = 0$$

la que verifica a las ecuaciones (1.8.6)

#### 1.10 CONDICIONES DE FRONTERA

Para el flujo estacionario subterráneo en suelos homogéneos se consideran cuatro tipos diferentes de frontera:

##### I FRONTERA IMPERMEABLE

Dado que el fluido no puede pasar a través de una frontera impermeable, la componente normal de la velocidad a la frontera en cualquier punto se anula; y por otra parte, dado que el fluido se considera no sujeto a esfuerzos de fricción, no se consideran, en consecuencia, restricciones según las componentes tangenciales. Si  $\bar{n}$  y  $\bar{t}$  denotan respectivamente las direcciones normales y tangenciales en un cierto punto de la frontera, de -- (1.8.7) se deduce

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad \psi = \text{constante}$$

de aquí que una frontera impermeable pueda ser considerada como el lugar geométrico de una línea de corriente. Generalmente se consideran dos tipos de fronteras impermeables: la primera es la parte superior del manto impermeable donde el coeficiente de permeabilidad es insignificante cuando se compara con el coeficiente del

del suelo ubicado arriba de él, es en esta frontera donde se presenta la línea de corriente inferior; y el segundo tipo de frontera es aquel donde se da la línea de corriente superior, correspondiendo generalmente a la parte inferior de una estructura impermeable tal como una presa de concreto, etc.

## II FRONTERAS EN DEPOSITOS

A lo largo de la frontera de los embalses la distribución de presiones puede considerarse constante, sea por ejemplo - el punto M sobre la frontera AD presentada en la figura 1.10.1, la presión hidrostática es

$$p = \gamma_w (h_1 - y) \quad (1.10.1)$$

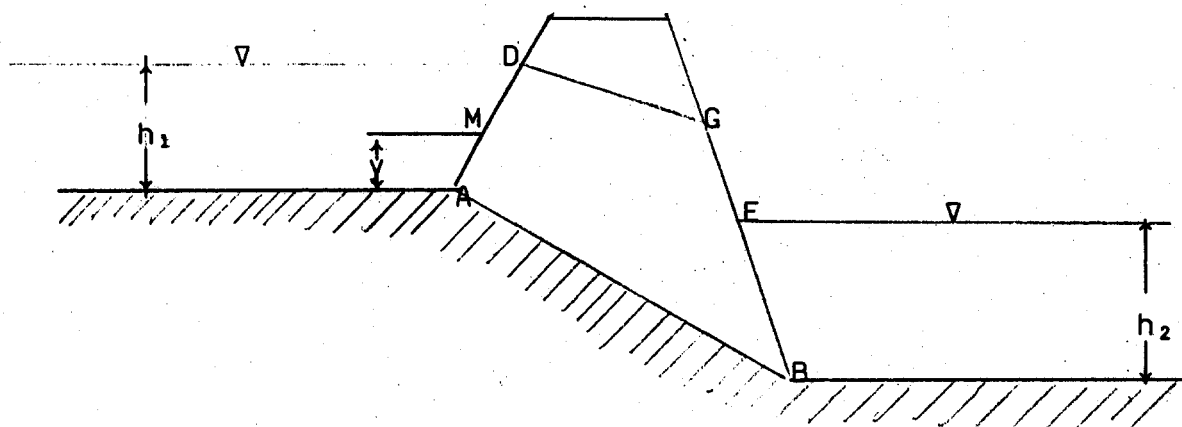


Fig. 1.10.1

y de aquí y de (1.8.3) se obtiene

$$\varphi = -kh_1 + c \quad (1.10.2)$$

donde  $k$ ,  $h$  y  $c$  son constantes, luego

$$\phi = \text{constante} \quad (1.10.3)$$

o sea que en la frontera del depósito tanto AD como EB son líneas equipotenciales.

### III SUPERFICIE DE FILTRACION

La superficie de filtración, en la figura 1.10.1 la línea GE, es aquella donde el flujo de filtración desemboca en una región libre tanto del material del suelo como del líquido, siendo la presión sobre esta frontera constante e igual a la presión atmosférica y como esta superficie no es ni una línea equipotencial ni una línea de corriente, se tiene

$$\phi = -\frac{kp}{\gamma_w} - ky + c$$

y de aquí

$$\phi + ky = \text{constante} \quad (1.10.4)$$

### IV LINEAS DE FILTRACION ( SUPERFICIE LIBRE )

La línea de filtración es la línea de corriente que aparece un un dominio del flujo como línea superior, ésta línea separa la región del suelo saturada de aquella en la cual no ocurre el flujo. En la figura 1.10.1 esta línea esta representada por la curva DG. La determinación de esta línea suele ser una de las principales metas del estudio de las corrientes subterráneas. Obviamente, como en el caso de cualquier otra línea de filtración,

el valor de  $\psi$  debe ser constante, pero ahora, además, se sabe que la presión en cualesquiera de sus puntos es constante e igual a la presión atmosférica, o sea que a lo largo de esta línea se tiene

$$\varphi + ky = \text{constante} \quad (1.10.5)$$

y de aquí que el potencial de la velocidad evaluado sobre dicha curva varíe linealmente con la carga.

### 1.11 ANISOTROPÍA

Cuando el coeficiente de permeabilidad es independiente de la dirección de la velocidad del flujo de filtración se dice que el flujo ocurre en un medio isotrópico. Además, si el suelo tiene el mismo coeficiente de permeabilidad en todos los puntos, se dice que el medio es homogéneo e isotrópico. Pero si el coeficiente de permeabilidad depende de la dirección de la velocidad del flujo se dice que el medio es anisotrópico. En un suelo homogéneo y anisotrópico el coeficiente de permeabilidad depende de la dirección de la velocidad pero es independiente de las coordenadas espaciales.

En algún grado todos los suelos son anisotrópicos. Generalmente en los depósitos naturales el coeficiente de permeabilidad en la dirección horizontal es mayor que el coeficiente en la dirección vertical, pero también existen excepciones donde el coeficiente de permeabilidad según la dirección vertical es mayor que el horizontal. A efecto de generalizar la Ley de Darcy de

acuerdo a lo expuesto en este párrafo, ahora se toma

$$\bar{v}_n = -k_n \text{grad}_n h \quad (1.11.1)$$

donde  $k_n$  es el coeficiente de permeabilidad en la dirección  $n$ , mientras que  $\bar{v}_n$  y  $\text{grad}_n h$  son las componentes, respectivamente, de velocidad y del gradiente hidráulico en dicha dirección. Para el flujo bidimensional en el plano X-Y se tienen

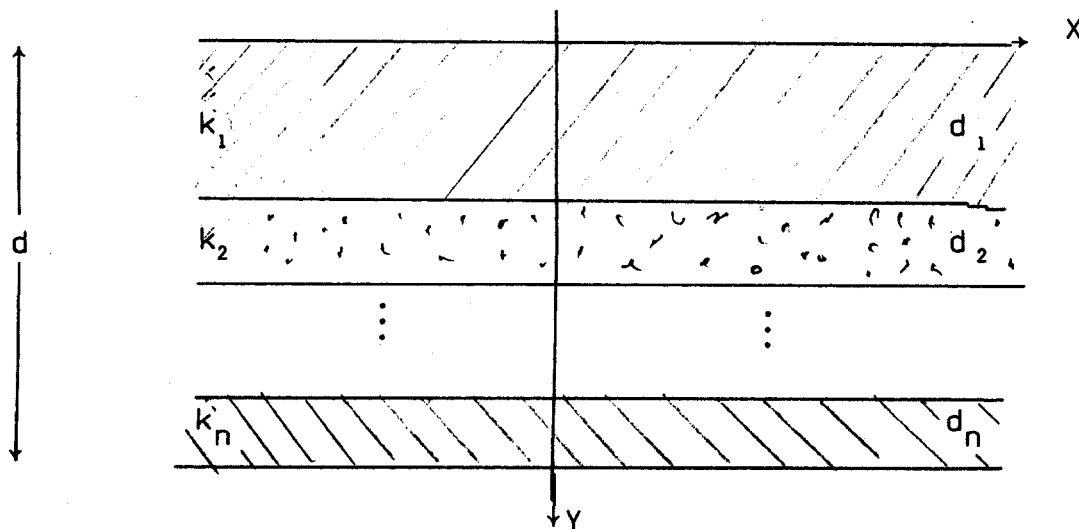
$$u = -k_x \text{grad}_x h = -k_x \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.11.2)$$

$$v = -k_y \text{grad}_y h = -k_y \frac{\partial h}{\partial y} \quad (1.11.3)$$

Seguidamente se hacen cuatro consideraciones generales a efecto de simplificar los cálculos.

I.- Un suelo constituido por distintos estratos delgados, cada uno de ellos homogéneo e isotrópico, puede ser transformado en un suelo equivalente e isotrópico.

Fig. 1.11.1



En la figura 1.11.1 se presenta una sección vertical de un suelo compuesto por  $n$  capas delgadas, de alturas respectivas  $d_1, \dots, d_n$  siendo, correspondientemente, sus coeficientes de permeabilidad  $k_1, \dots, k_n$ . Evidentemente el flujo total en dirección horizontal es igual a la suma del gasto que aportan cada una de las capas en cuestión, así pues

$$q = \sum_{m=1}^n k_m d_m \frac{h_1 - h_2}{L}$$

donde  $h_1 - h_2$  es la pérdida de carga en la distancia  $L$ . Consecuentemente la velocidad del flujo en la dirección  $X$  es

$$u = \sum_{m=1}^n \frac{k_m d_m}{d} \frac{h_1 - h_2}{L}$$

y de aquí se obtiene un coeficiente de permeabilidad en la dirección  $X$

$$k_x = \sum_{m=1}^n \frac{k_m d_m}{d} \quad (1.11.4)$$

Considerando ahora el flujo en dirección vertical, la ecuación de continuidad  $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$  muestra que la velocidad del flujo en dicha dirección es la misma para todos los estratos, o sea

$$v = k_y i = k_1 i_1 = k_2 i_2 = \dots = k_n i_n \quad (1.11.5)$$

aquí se considera a  $i$  como el gradiente hidráulico evaluado al

través de las  $n$  capas. Además la pérdida total de carga es igual a la suma de las pérdidas de carga en cada uno de los estratos

$$id = i_1 d_1 + i_2 d_2 + \dots + i_n d_n$$

y de aquí se obtiene

$$k_y = \frac{d}{\sum_{m=1}^n \frac{d_m}{k_m}} \quad (1.11.6)$$

De las ecuaciones (1.11.4) y (1.11.5) se deduce que  $k_x > k_y$ . En obvio de dificultades se hace la demostración para  $n=2$ . Sean  $\frac{d_1}{d_2} > \delta$  y  $k_x > k_y$ , luego esta última desigualdad toma la forma

$$\frac{k_1 \delta + k_2}{1 + \delta} > \frac{(\delta + 1)k_1 k_2}{\delta k_2 + k_1} \quad (1.11.7)$$

la que se reduce a

$$\delta(k_1 - k_2)^2 > 0 \quad (1.11.8)$$

siendo esta última desigualdad siempre verdadera.

II.- En la figura 1.11.2, el vector  $\bar{s}$  indica la dirección de la normal a la líneas equipotencial. En un medio isotrópico las líneas de flujo y las equipotenciales forman una red

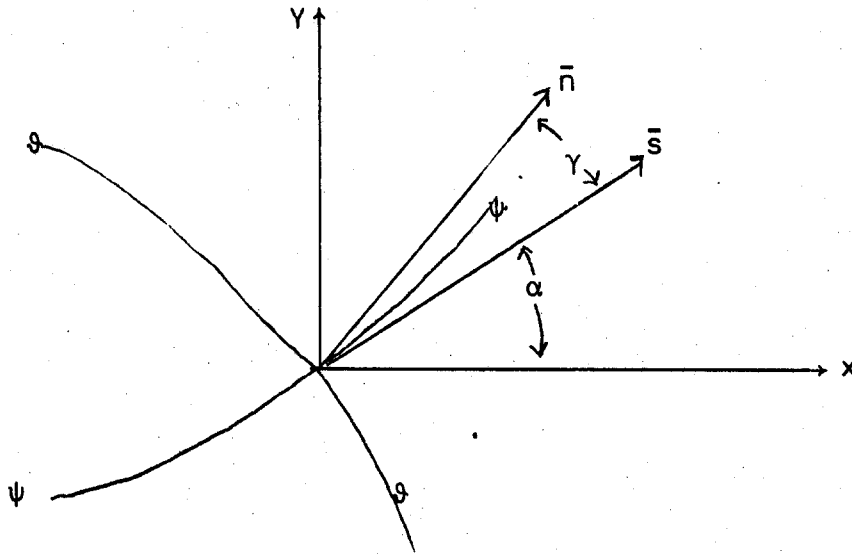


Fig. 1.11.2

ortogonal siendo así que los vectores  $\bar{s}$  y  $\bar{n}$  tienen la misma dirección, pero en un medio anisotrópico la dirección de las líneas de corriente no coinciden con la dirección de la normal a las líneas equipotenciales.

La componente de la velocidad a lo largo de la línea de corriente es

$$v_s = -k_s \frac{\partial h}{\partial s} \quad (1.11.9)$$

siendo así que las componentes en las direcciones X e Y son

$$u = -k_x \frac{\partial h}{\partial x} = v_s \cos \alpha \quad (1.11.10)$$

$$v = -k_y \frac{\partial h}{\partial y} = v_s \sin \alpha \quad (1.11.11)$$

pero como

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s}$$

de esta última ecuación y de las ecuaciones (1.11.9) y (1.11.11) se obtiene

$$\frac{1}{k_s} = \frac{\cos^2 \alpha}{k_x} + \frac{\sin^2 \alpha}{k_y} \quad (1.11.12)$$

o sea

$$k_s = \frac{k_x k_y}{k_x \sin^2 \alpha + k_y \cos^2 \alpha} \quad (1.11.13)$$

Sean ahora

$$x = r \cos \alpha$$

$$y = r \sin \alpha$$

luego (1.11.12) se transforma en

$$\frac{r^2}{k_s} = \frac{x^2}{k_x} + \frac{y^2}{k_y} \quad (1.11.14)$$

la cual es la ecuación de una elipse cuyos semiejes mayor y menor son  $k_k^{\frac{1}{2}}$  y  $k_y^{\frac{1}{2}}$ . Si se tiene que  $k_x = k_{\max}$  y  $k_y = k_{\min}$ , como en el caso de suelos estratificados cuyas capas están dirigidas según el

eje X, el coeficiente de permeabilidad en una dirección cualquiera se puede obtener gráficamente mediante la construcción llamada elipse de direcciones

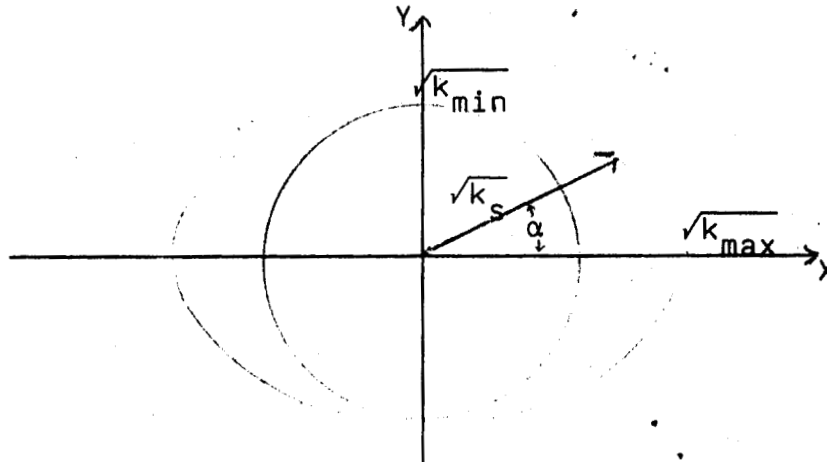


Fig. 1.11.3

Resulta conveniente hacer notar que aún cuando no se ha dado una demostración generalizada de la ley de Darcy para flujos en medios anisotrópicos, los resultados experimentales validan las fórmulas presentadas.

III.- Tanto la ecuación (1.11.14) como la figura 1.11.3 muestran como mediante la transformación  $X = x \left( \frac{k_y}{k_x} \right)^{\frac{1}{2}}$  la elipse de direcciones puede ser transformada en un círculo, este hecho será usado para resolver los problemas que al respecto presentan los estratos homogéneos anisotrópicos. Así pues considérese la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

al sustituir  $u$  y  $v$  de acuerdo a (1.11.10) y (1.11.11) se obtiene

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \left[ \left( \frac{k_y}{k_x} \right) x^2 \right]} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0$$

si se hace ahora  $X = x \left( \frac{k_y}{k_x} \right)^{\frac{1}{2}}$  se llega a

$$\frac{\partial^2 h}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (1.11.15)$$

obviamente, se puede obtener una transformación análoga para la variable  $y$ .

Estos resultados muestran como mediante una simple expansión o contracción de las coordenadas espaciales, un flujo en un medio homogéneo y anisotrópico puede ser considerado como un flujo en una región isotrópica, en la cual siendo válida la ecuación de Laplace, los resultados teóricos del estudio del potencial son aplicables también. Este último dominio se conoce como sección transformada. El coeficiente de permeabilidad para una sección homogénea y anisotrópica es

$$k = \sqrt{k_{\max} k_{\min}} \quad (1.11.16)$$

el porqué de esta fórmula se explica seguidamente.

En la figura 1.11.4 se presentan los cuadrados curvi

líneas acotados por las líneas equipotenciales  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  y las líneas de corriente  $\psi_1$  y  $\psi_2$  de una sección transformada. En la figura 1.11.5 se representa la misma sección a escala natural.

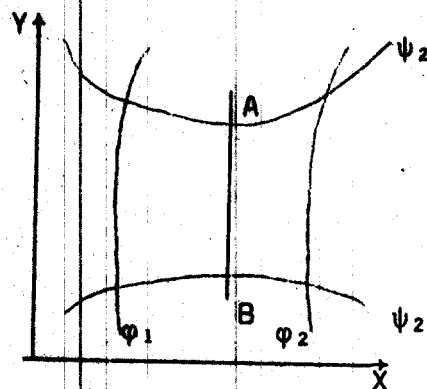


Fig. 1.11.4

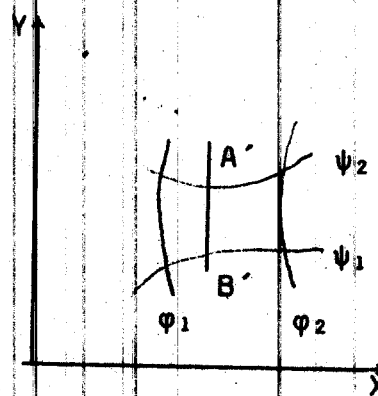


Fig. 1.11.5

La recta vertical AB, paralela al eje Y, en la sección transformada deviene en  $A'B' = AB \left( \frac{k_{\min}}{k_{\max}} \right)^{1/2}$  en la sección a escala natural, luego el flujo a través de la sección AB es igual al flujo a través de  $A'B'$ , así que en la sección transformada ocurre que

$$q = AB \cdot k \cdot \text{grad}(h)$$

y como a escala natural, el coeficiente de permeabilidad en la dirección X es  $k_{\max}$ , se tiene que

$$q = A'B' \cdot k_{\max} \cdot \text{grad}(h) = k_{\max} \sqrt{\frac{k_{\min}}{k_{\max}}} \cdot AB \cdot \text{grad}(h)$$

y de aquí es inmediata la fórmula (1.11.16).

Considérese ahora la naturaleza del flujo a través de la frontera AB que divide a dos tipos de suelos isotrópicos de per

meabilidades respectivas  $k_1$  y  $k_2$  tal y como se muestra en la figura 1.11.6.

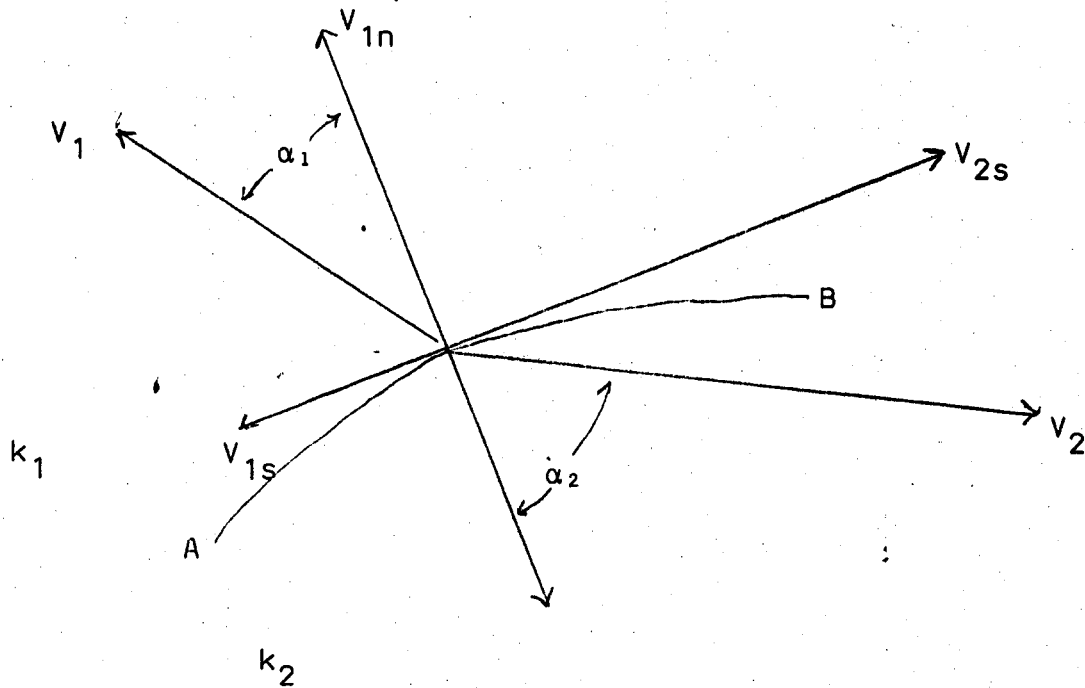


Fig. 1.11.6

Los potenciales de las respectivas zonas son

$$\varphi_1 = -k_1 \left( \frac{p}{\gamma_w} + y_1 \right)$$

$$\varphi_2 = -k_2 \left( \frac{p}{\gamma_w} + y_2 \right)$$

y en los puntos de la frontera obviamente ocurre que  $p_1 = p_2$  y  $y_1 = y_2$  esto es

$$\frac{\varphi_1}{k_1} = \frac{\varphi_2}{k_2}$$

(1.11.17)

y como según la ecuación de continuidad la componentes normales a la frontera AB deben ser iguales

$$v_{1n} = v_{2n} \quad (1.11.18)$$

Derivando ahora (1.11.18) respecto al parámetro  $s$ , la longitud del arco AB, y dividiendo entre (1.11.18) se llega a

$$\frac{v_{1s}}{v_{1n}k_1} = \frac{v_{2s}}{v_{2n}k_2}$$

y haciendo  $\frac{v_s}{v_n} = \tan \alpha$  se obtiene

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} \quad (1.11.19)$$

La semejanza entre esta última fórmula y la ley de incidencia y refracción de la óptica es obvia.

Analizando la ecuación (1.11.17) se observa que la separación relativa de la líneas equipotenciales en dos zonas adya--centes varia en razón directa a sus respectivas permeabilidades.

IV.- Por último, suele ocurrir que algunos suelos mues--tran una gran diferencia, por zonas, en lo que a su homogeneidad se refiere, de modo tal que la evaluación mediante transformaciones de los correspondientes coeficientes de permeabilidad se vuelve poco práctica. En tales casos queda el recurso de despreciar algunas de las variaciones locales con el propósito de soslayar dicha proble-

matica. Al respecto se establece el siguiente criterio, el que con las reservas del caso, suele usarse. Si la razón de las permeabilidades de dos tipos de suelos contiguos es mayor que 1:10, el suelo de menor permeabilidad puede ser considerado como impermeable y así las contribuciones al flujo de este estrato se consideran nulas.

También se pueden agrupar los distintos tipos de suelos en regiones mayores, las que se trabajan de conformidad a las transformaciones ya citadas. Desde luego, no pueden darse reglas precisas al respecto, y las simplificaciones del caso quedan sujetas al criterio del investigador.

#### 1.12 FILTRACION EN POZOS

Como ya se vió, la ecuación que gobierna el flujo estacionario bidimensional es

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

la que en coordenadas cilíndricas es

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} = 0 \quad (1.12.1)$$

donde

$$r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\phi = \arctang \frac{y}{x}$$

Si el flujo toma lugar en un plano horizontal variando únicamente en función de  $r$ , se tiene el llamado flujo radial bidimensional. En este supuesto, la variable  $z=x+iy=rexp(i\theta)$  no varía cuando  $\theta$  lo hace, y de aquí que (1.12.1) se reduce a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) = 0. \quad (1.12.2)$$

También se tiene

$$\phi = c_1 \ln r + c_2. \quad (1.12.3)$$

Considérese ahora el flujo de filtración en un pozo ubicado en un estrato permeable homogéneo de espesor igual a  $T$  y sean

$r_w$  = radio del pozo

$R$  = radio de influencia

$h$  = pérdida de carga

con

$r = r_w$  cuando  $\theta = 0$

$r = R$  cuando  $\phi = kh$ .

De (1.12.3) se deduce

$$\phi = \frac{kh}{\ln\left(\frac{R}{r_w}\right)} \ln \frac{r}{r_w} \quad (1.12.4)$$

siendo la velocidad radial

$$v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{kh}{r \ln\left(\frac{R}{r_\omega}\right)}$$

Evidentemente el gasto a la distancia  $r$  del centro del pozo es

$$Q = T \int_0^{2\pi} r v_r d\theta = \frac{2\pi T k h}{\ln\left(\frac{R}{r_\omega}\right)} \quad (1.12.5)$$

De (1.12.4) y (1.12.5) se obtiene ahora

$$\phi = \frac{Q}{2\pi T} \ln\left(\frac{r}{r_\omega}\right) \quad (1.12.6)$$

y la función de corriente asociada a este potencial es

$$\psi = \frac{Q}{2\pi T} \theta$$

o sea

$$\omega = \phi + i\psi = \frac{Q}{2\pi T} \ln z + c \quad (1.12.7)$$

aquí se dice que el flujo tiene una fuente cuando  $Q > 0$  y un sumidero cuando  $Q < 0$ . El término  $\frac{Q}{2\pi T}$  con  $T=1$  se llama potencia de la fuente (o sumidero).

## CAPITULO II

### EL METODO DEL ELEMENTO FINITO

## 2.1 CONSIDERACIONES GENERALES

Con el propósito de resolver problemas relativos al flujo de filtración, ya sean bidimensionales o simétricos respecto a un cierto eje, en medios anisotrópicos de configuración prácticamente arbitraria, se propone resolver numéricamente las ecuaciones básicas mediante el Método del Elemento Finito. La siguiente discusión pretende delinear dicho método.

Dadas las condiciones de frontera, específicas para el problema en consideración, la ecuación básica a resolver es, según se vió en la sección anterior, la ecuación (1.8.4) y si esta se aplica a un medio de espesor  $T$ , entonces toma la siguiente presentación

$$\frac{\partial}{\partial x}(k_x T \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_y T \frac{\partial \phi}{\partial y}) = W(x,y) \quad (2.1.1)$$

Ahora bien, si se tiene bajo consideración una sección recta con  $T = 1$ , entonces la ecuación anterior adquiere la siguiente presentación

$$\frac{\partial}{\partial x}(k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}) = W(x,y) \quad (2.1.2)$$

donde ahora  $W(x,y)$  da la potencia de la fuente o del sumidero por unidad de área.

Si el medio es isotrópico, entonces

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{W(x,y)}{k} \quad (2.1.3)$$

donde  $k$  es la constante de permeabilidad.

Como en la práctica frecuentemente se presentan problemas donde el flujo de filtración es simétrico respecto a un cierto eje, entonces resulta conveniente sustituir las coordenadas cartesianas  $(x,y)$  por coordenadas cilíndricas  $(r,z)$ , bajo este supuesto para el flujo solenoidal la ecuación a resolver es

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (k_r r \frac{\partial \phi}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (k_z \frac{\partial \phi}{\partial z}) = 0 \quad (2.1.4)$$

También se hace notar que la dirección de los ejes  $X$  e  $Y$  no necesariamente debe ser constante, sino que esta puede variar conforme varían las coordenadas espaciales, esta libertad permite el manejo adecuado y cómodo de medios anisotrópicos. La limitación en este caso consiste en tener dichos ejes siempre perpendiculares entre sí y, además en cada elemento las direcciones deben permanecer constantes.

## 2.2 FORMULACION DEBIL DE LOS PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA

Dado que por una parte, el planteamiento de problemas con valores en la frontera, cuando la solución se aproxima mediante el método de Ritz o el Método de Galerkin, tienen su fundamento en las proposiciones variacionales con que la física muy frecuentemente aborda sus problemas, y dado que por otra parte dicha formulación variacional presenta bajo una modalidad natural la clasificación de las condiciones de frontera en condiciones de fron-

tera naturales y condiciones de frontera esenciales, entonces por dicho motivos se considera la conveniencia de presentar en esta sección la construcción variacional de una ecuación diferencial parcial (de dos variables), así como la clasificación de las condiciones de frontera asociadas.

Sean  $\Omega$  un dominio arbitrario con frontera  $\Gamma$ ,  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \Gamma$ .

Sean además  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$  y  $n_x$  y  $n_y$  los cosenos directores del vector normal a la frontera. Las siguientes ecuaciones describen una variada gama de problemas de contorno de segundo orden cuando se considera  $F = F(x, y, u, u_x, u_y)$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.2.1.a)$$

sujeta a

$$\frac{\partial F}{\partial u_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} n_y = \bar{q} \quad \text{en } \Gamma_1 \quad (2.2.1.b)$$

$$u = \bar{u} \quad \text{en } \Gamma_2 \quad (2.2.1.c)$$

En (2.2.1.a) se reconoce a la ecuación de Euler, esta ecuación diferencial parcial de segundo orden debe ser satisfecha por la función  $u(x, y)$  de dos variables independientes.

Si, por ejemplo, se toma a

$$F = \frac{1}{2} \left[ k_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + k_y \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] + W(x, y)u$$

se obtiene que

$$\frac{\partial F}{\partial u} = W(x, y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_x} = k_x \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F}{\partial u_y} = k_y \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

y las ecuaciones (2.2.1) se transforman en

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = W(x, y)$$

sujeta a

$$\left( k_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) n_x + \left( k_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) n_y = \bar{q} \quad \text{en } \Gamma_1$$

$$\phi = \bar{\phi} \quad \text{en } \Gamma_2$$

La primera de estas tres últimas ecuaciones es (1.3.2),  $\bar{q}$  es el flujo de filtración a través de  $\Gamma_1$  y  $\bar{\phi}$  es el potencial de velocidad especificado en la porción  $\Gamma_2$  de la frontera.

La formulación variacional de las ecuaciones (2.2.1) es esbozada en los tres siguientes pasos:

I.- Primeramente se multiplica la ecuación (2.2.1.a) por una función de prueba  $v$ , (la variación de  $u$ , esto es,  $v = \delta u$ ) y el producto se integra sobre el dominio del problema.

$$0 = \int_{\Omega} v \left[ \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) \right] dx dy \quad (2.2.2)$$

II.- En el segundo paso se transfiere la diferencia-

ción de la variable dependiente  $u$  a la función de prueba  $v$  y se identifica además el tipo de condiciones de frontera que la forma variacional puede admitir. Como los términos  $\frac{\partial F}{\partial u_x}$  y  $\frac{\partial F}{\partial u_y}$  pueden contener a los términos  $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$  y  $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$  así como sus productos, entonces se procura transferir la derivación parcial de  $x$  o  $y$  respecto a  $v$ . Aplicando el Teorema de la Divergencia a los dos últimos sumandos del integrando de (2.2.2) se obtiene

$$0 = \int_{\Omega} \left[ v \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} \right] dx dy - \oint_{\Gamma} v \left[ \frac{\partial F}{\partial u_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} n_y \right] ds. \quad (2.2.3)$$

Aquí es donde al observar la integral sobre la frontera se obtienen las condiciones de frontera naturales, esto es

$$\frac{\partial F}{\partial u_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} n_y = \bar{q} \quad \text{en } \Gamma_1$$

es la condición de frontera natural del problema (2.2.1). Otras especificaciones sobre la variable dependiente constituyen las llamadas condiciones esenciales de frontera, esto es

$$u = \bar{u} \quad \text{en } \Gamma_2$$

es la condición esencial de frontera del problema (2.2.1).

Las variables que figuran en las condiciones esenciales de frontera se llaman variables primarias y las que figuran en las condiciones naturales de frontera se llaman variables secundarias. Como se verá más adelante las variables primarias deben ser continuas

mientras que la variables secundarias pueden ser discontinuas.

III.- En el último y tercer paso de la formulación variacional, mediante el auxilio de las condiciones de frontera se simplifica la integral sobre la frontera y, además de existir se identifica la forma cuadrática asociada a la funcional.

Al dividir  $\Gamma$  en  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$ , de (2.2.4) se obtiene

$$0 = \int_{\Omega} \left( v \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) dx dy - \int_{\Gamma_1} v \bar{q} ds - \int_{\Gamma_2} v \left( \frac{\partial F}{\partial u_x} n_x + \frac{\partial F}{\partial u_y} n_y \right) ds \quad (2.2.4)$$

obviamente, como  $v$  en  $\Gamma_2$  se anula, se deduce

$$0 = \int_{\Omega} \left( v \frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) dx dy - \int_{\Gamma_1} v \bar{q} ds \quad (2.2.5)$$

Suponemos que  $F$  es lineal, entonces  $\frac{\partial F}{\partial u} = f(x,y)$  y las formas lineales y bilineales asociadas, respectivamente, son

$$l(v) = - \int_{\Omega} v f(x,y) dx dy + \int_{\Gamma_1} v \bar{q} ds \quad (2.2.6.a)$$

$$B(v,u) = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial u_x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial u_y} \right) dx dy \quad (2.2.6.b)$$

De aquí que la funcional cuadrática asociada con la forma variacional (2.2.5) sea

$$I(u) = \frac{1}{2} B(u,u) - l(u) \quad (2.2.7)$$

### 2.3 ECUACION DIFERENCIAL PARCIAL DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES. (FORMULACION DEBIL)

Si bien es cierto que el planteamiento teórico aquí desarrollado permite evaluar el gasto para el flujo de filtración en medios isotrópicos y anisotrópicos, como se verá, esto se puede lograr bajo el simple artificio de considerar, en los elementos finitos, constantes a los parámetros que aparecen en (1.3.1), así pues, de acuerdo a esto es suficiente tomar a (1.3.1) como una ecuación diferencial parcial de segundo orden con coeficientes constantes.

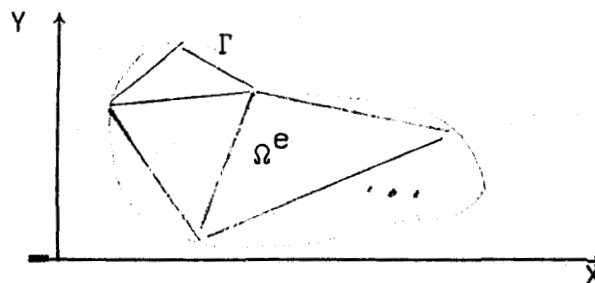
Con el propósito de examinar, por el momento, el caso general atiéndose la siguiente ecuación donde se busca a la solución  $u$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y}) - \frac{\partial}{\partial y}(a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y}) + a_{00} u - f = 0 \quad (2.3.1)$$

y son dadas las constantes  $a_{ij}$ ,  $i, j=0,1,2$ , la función  $f$  y las condiciones de frontera.

El método en cuestión está basado en sustituir la región  $\Omega$  por una malla de figuras planas, en nuestro caso, triángulos o rectángulos, que la aproximen tal y como se muestra en la figura 2.3.1

Fig.2.3.1



Tómese ahora  $\Omega^e$  un elemento arbitrario de la malla en cuestión (véase la figura 2.3.2)

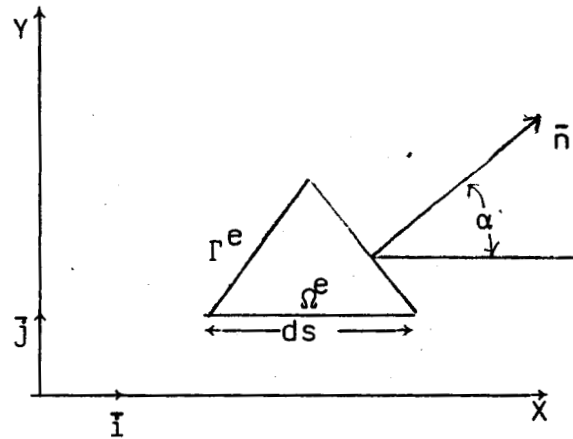


Fig. 2.3.2

Tomando ahora

$$F_1 = a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.3.2.a)$$

$$F_2 = a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.3.2.b)$$

entonces la forma variacional de (2.3.1) limitada al elemento  $\Omega^e$  es

$$0 = \int_{\Omega^e} v \left[ -\frac{\partial}{\partial x}(F_1) - \frac{\partial}{\partial y}(F_2) + a_{00} u - f \right] dx dy \quad (2.3.3)$$

atendiendo seguidamente a los dos primeros términos del integrando

$$-v \frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}(v F_1) + \frac{\partial v}{\partial x} F_1 \quad (2.3.4.a)$$

$$-v \frac{\partial F_2}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(vF_2) + \frac{\partial v}{\partial y} F_2 \quad (2.3.4.b)$$

Si ahora se toma

$$\bar{n} = n_x \bar{i} + n_y \bar{j} = \cos \alpha \bar{i} + \sin \alpha \bar{j} \quad (2.3.5)$$

entonces de acuerdo al Teorema de la Divergencia se tiene

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial x}(vF_1) dx dy = \int_{\Gamma^e} vF_1 n_x ds \quad (2.3.6.a)$$

$$\int_{\Omega^e} \frac{\partial}{\partial y}(vF_2) dx dy = \int_{\Gamma^e} vF_2 n_y ds \quad (2.3.6.b)$$

mediante (2.3.4) y (2.3.6) la fórmula (2.3.3) adquiere la siguiente presentación cuando se evalúa el elemento  $\Omega^e$

$$\begin{aligned} 0 = & \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} (a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial v}{\partial y} (a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y}) + a_{00} vu - vf \right] dx dy - \\ & - \int_{\Gamma^e} v \left[ n_x (a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y}) + n_y (a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y}) \right] ds \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

En ésta última ecuación, al observar el término correspondiente a la integral sobre la frontera, se infiere que la condición natural de frontera es

$$q_n = n_x \left( a_{11} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + n_y \left( a_{21} \frac{\partial u}{\partial y} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (2.3.8)$$

en otras palabras,  $u$  es la variable primaria y  $q$  es la variable secundaria.

así pues, la expresión variacional correspondiente a (2.3.1) es

$$0 = \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \left( a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left( a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial u}{\partial y} \right) + a_{00} vu - vf \right] dx dy - \int_{\Gamma^e} v q_n ds \quad (2.3.9)$$

#### 2.4 APROXIMACION DE LA SOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL PARCIAL DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES CONSTANTES.

A efecto de aproximar la variable  $u$ , la forma variacional (2.3.4) hace ver que por lo menos dicha variable  $u$  debe ser bilineal en  $x$  e  $y$ . Sea así

$$u = \sum_{j=1}^n u_j \psi_j \quad (2.4.1)$$

donde  $u_j$  da el valor de  $u$  en el punto  $(x_j, y_j)$  y  $\psi_j$  son funciones lineales de interpolación tales que

$$\psi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad (2.4.2)$$

La forma específica de  $\psi_j$  se presentará un poco más adelante, y en este trabajo se tomará exclusivamente en concordancia con elementos triangulares y rectangulares.

Si ahora se sustituye  $u$  por (2.4.1) y  $v$  por  $\psi_i$  en la presentación variacional (2.3.9) se obtiene

$$0 = \sum_{j=1}^n \left\{ \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} (a_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} (a_{21} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}) + a_{00} \psi_i \psi_j \right] dx dy - \int_{\Gamma^e} \psi_i q_n ds \right\} u_j - \int_{\Omega^e} f \psi_i dx dy \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4.3)$$

a fin de compactar la notación, sean

$$K_{ij}^{(e)} = \int_{\Omega^e} \left[ \frac{\partial \psi_i}{\partial x} (a_{11} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}) + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} (a_{21} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial \psi_j}{\partial y}) + a_{00} \psi_i \psi_j \right] dx dy \quad (2.4.4)$$

$$F_i^{(e)} = \int_{\Omega^e} f \psi_i dx dy + \int_{\Gamma^e} q_n \psi_i ds \quad (2.4.5)$$

así, mediante estas dos últimas ecuaciones (2.4.3) deviene

$$\sum_{j=1}^n K_{ij}^{(e)} u_j^{(e)} = F_i^{(e)} = F_1^{(e)} \quad i=1,2,\dots,n \quad (2.4.6)$$

se observa que cuando  $a_{12} = a_{21}$ ,  $K_{ij}^{(e)} = K_{ji}^{(e)}$ .

## 2.5 FUNCIONES DE INTERPOLACION PARA ELEMENTOS TRIANGULARES

Como se mencionó en el párrafo anterior, las funciones  $\psi_i$  deben ser al menos funciones bilineales en  $x$  e  $y$ , así pues se tomará al conjunto  $\{1, x, y\}$  como conjunto generador de las funciones  $u$ .

$$u(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 y \quad (2.5.1)$$

esta ecuación tiene tres términos linealmente independientes y es lineal tanto en  $x$  como en  $y$ . Para evaluar los a los parámetros se requiere un elemento con tres nodos, es decir un triángulo. En la figura 2.5.1 se muestra un elemento triangular arbitrario donde los nodos aparecen numerados en sentido arbitrario

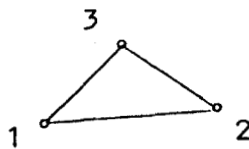


Fig. 2.5.1

seguidamente a la aproximación de  $u$  por (3.5.1) se le impone la con  
dición

$$u(x_i, y_i) = u_i \quad i=1,2,3 \quad (2.5.2)$$

donde la pareja  $(x_i, y_i)$  denota a las coordenadas globales de los res-  
pectivos vértices de los triángulos. Este artificio permite eva--  
luar a las constantes  $c_i$  de (3.5.1) en términos de  $u_i$ .

$$\begin{aligned} u_1 &= u(x_1, y_1) = c_1 + c_2 x_1 + c_3 y_1 \\ u_2 &= u(x_2, y_2) = c_1 + c_2 x_2 + c_3 y_2 \\ u_3 &= u(x_3, y_3) = c_1 + c_2 x_3 + c_3 y_3 \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

En forma matricial

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (2.5.4)$$

ahora se hace

$$2A_e = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$$

donde  $A_e$  es el área del triángulo, los valores  $c_i$  están dados por

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{1}{2A_e} [u_1(x_2y_3 - x_3y_2) + u_2(x_3y_1 - x_1y_3) + u_3(x_1y_2 - x_2y_1)] \\
c_2 &= \frac{1}{2A_e} [u_1(y_2 - y_3) + u_2(y_3 - y_1) + u_3(y_1 - y_2)] \\
c_3 &= \frac{1}{2A_e} [u_1(x_3 - x_2) + u_2(x_1 - x_3) + u_3(x_2 - x_1)]
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

si los nodos del triángulo se numeran siguiendo el sentido horario, el determinante invierte su signo.

Sustituyendo las ecuaciones (2.5.5) en (2.5.1) se obtiene

$$u(x, y) = u_1\psi_1(x, y) + u_2\psi_2(x, y) + u_3\psi_3(x, y) = \sum_{i=1}^n u_i \psi_i^{(e)} \tag{2.5.6}$$

donde las funciones  $\psi_i^{(e)}$  son las funciones de interpolación del elemento triangular

$$\psi_i^{(e)} = \frac{1}{2A_e} (\alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y) \quad i=1, 2, 3 \tag{2.5.6}$$

siendo  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  y  $\gamma_i$  constantes

$$\begin{aligned}
\alpha_i &= x_j y_k - x_k y_j \\
\beta_i &= y_j - y_k \\
\gamma_i &= x_k - x_j
\end{aligned} \tag{2.5.7}$$

con  $i \neq j \neq k$  y permutando  $i, j, k$  cíclicamente las funciones  $\psi_i$  pre-

sentan las dos siguientes propiedades

$$\psi_i(x_j, y_j) = \delta_{ij} \quad i, j=1, 2, 3 \quad (2.5.8.a)$$

$$\sum_{i=1}^3 \psi_i = 1 \quad (2.5.8.b)$$

En síntesis, la expresión (2.5.6) representa un plano el cual pasa por  $u_1$ ,  $u_2$ , y  $u_3$  de aquí que la aproximación de  $u$  mediante las funciones lineales de interpolación  $\psi_i$  del triángulo aproximen a la superficie  $u(x, y)$  mediante el plano

$$\sum_{i=1}^3 u_i \psi_i$$

## 2.6 FUNCIONES DE INTERPOLACION PARA ELEMENTOS RECTANGULARES

En este caso se aproxima a la función  $u$  por

$$u(x, y) = c_1 + c_2 x + c_3 xy \quad (2.6.1)$$

expresión que contiene cuatro términos linealmente independientes y que continua siendo lineal tanto en  $x$  como en  $y$ . Se decide usar un elemento rectangular tal y como se muestra en la figura 2.6.1. En obvio de dificultades se elige un sistema local de coordenadas

$(\xi, \eta)$  a efecto de deducir las funciones de interpolación.

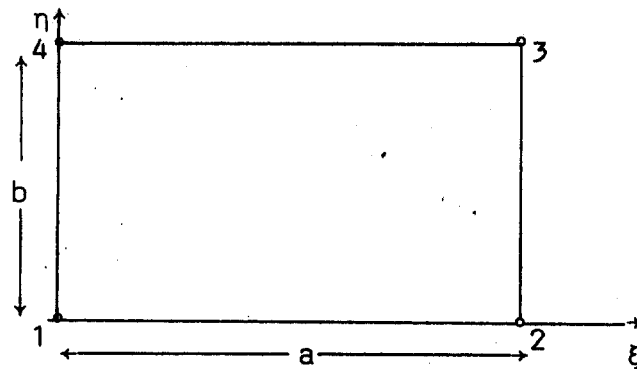


Fig. 2.6.1

Sea

$$u(\xi, \eta) = c_1 + c_2 \xi + c_3 \eta + c_4 \xi \eta \quad (2.6.1)$$

donde se requiere

$$\begin{aligned} u_1 &= u(0,0) = c_1 \\ u_2 &= u(a,0) = c_1 + c_2 a \\ u_3 &= u(a,b) = c_1 + c_2 a + c_3 b + c_4 ab \\ u_4 &= u(0,b) = c_1 + c_3 b \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Resolviendo las constantes  $c_i$  ( $i=1,2,3,4$ ) se obtiene

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{ab} \begin{bmatrix} ab & 0 & 0 & 0 \\ -b & b & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 & a \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}$$

sustituyendo (3.6.3) en (3.6.1) se obtiene

$$\begin{aligned}
 u(\xi, \eta) &= (1 \ \xi \ \eta \ \xi\eta) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} = (\psi_1 \ \psi_2 \ \psi_3 \ \psi_4) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \\
 &= \sum_{i=1}^4 u_i \psi_i(\xi, \eta) \quad (2.6.4)
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 \psi_1(\xi, \eta) &= (1 - \frac{\xi}{a})(1 - \frac{\eta}{b}) \\
 \psi_2(\xi, \eta) &= \frac{\xi}{a}(1 - \frac{\eta}{b}) \\
 \psi_3(\xi, \eta) &= \frac{\xi}{a} \frac{\eta}{b} \\
 \psi_4(\xi, \eta) &= (1 - \frac{\xi}{a}) \frac{\eta}{b}
 \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

aquí de nuevo las funciones de interpolación presentan las dos siguientes propiedades

$$\begin{aligned}
 \psi_i(\xi_j, \eta_j) &= \delta_{ij} \quad i, j=1, 2, 3, 4 \\
 \sum \psi_i &= 1
 \end{aligned} \quad (2.6.6)$$

## 2.7 EVALUACION DE LA MATRICES DE RIGIDEZ

La evaluación mediante integración de los elementos de las matrices  $[K^{(e)}]$  y  $[F^{(e)}]$  que figuran en las ecuaciones (2.4.6) generalmente no es cómoda de hacer, empero, dado el caso de ser  $a_{ij}$ ,  $a_{\infty}$  y  $f$  constantes, el problema se simplifica cuando se emplean elementos triangulares o elementos rectangulares.

A tal efecto se expresa  $[K^{(e)}]$  como la suma de cinco matrices: cuatro matrices básicas  $[S^{\alpha\beta}]$  ( $\alpha, \beta=1,2$ ) y la matriz  $[s]$ .

$$[K^{(e)}] = a_{11} [S^{11}] + a_{12} [S^{12}] + a_{21} [S^{12}]^T + a_{22} [S^{22}] + a_{\infty} [s] \quad (2.7.1)$$

donde

$$\begin{aligned} S_{ij}^{11} &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy \\ S_{ij}^{12} &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy \\ S_{ij}^{22} &= \int_{\Omega^e} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy \\ S_{ij} &= \int_{\Omega^e} \psi_i \psi_j dx dy \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

sea, además

$$\begin{aligned} f_i^{(e)} &= \int_{\Omega^e} f \psi_i dx dy \\ Q_i^{(e)} &= \oint_{\Gamma^e} q_n \psi_i ds \end{aligned} \quad (2.7.3)$$

# I.- Evaluación de las matrices mediante elementos triangulares.

Cuando se emplean elementos triangulares, mediante el siguiente artificio, se pueden determinar las integrales en cuestión, si se define

$$I_{mn} = \int_{\Delta} x^m y^n dx dy \quad (2.7.4)$$

entonces ocurre que

$$I_{00} = A \quad (\text{área del triángulo})$$

$$I_{10} = A \cdot \bar{x} \quad ; \quad \bar{x} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i$$

$$I_{01} = A \cdot \bar{y} \quad ; \quad \bar{y} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 y_i$$

(2.7.5)

$$I_{11} = \frac{A}{12} \left( \sum_{i=1}^3 x_i y_i + 9 \bar{x} \bar{y} \right)$$

$$I_{20} = \frac{A}{12} \left( \sum_{i=1}^3 x_i^2 + 9 \bar{x}^2 \right)$$

$$I_{02} = \frac{A}{12} \left( \sum_{i=1}^3 y_i^2 + 9 \bar{y}^2 \right)$$

Ahora bien, al emplear las funciones lineales de interpolación (2.5.6) en las ecuaciones (2.7.2) y (2.7.3) y observando que

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi_i}{\partial x} &= \frac{\beta_i}{2A} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial y} &= \frac{\gamma_i}{2A}\end{aligned}\tag{2.7.6}$$

se obtienen

$$\begin{aligned}S_{ij}^{11} &= \frac{1}{4A} \beta_i \beta_j \\ S_{ij}^{12} &= \frac{1}{4A} \beta_i \gamma_j \\ S_{ij}^{22} &= \frac{1}{4A} \gamma_i \gamma_j\end{aligned}\tag{2.7.7.a}$$

$$\begin{aligned}S_{ij} &= \frac{1}{4A} [\alpha_i \alpha_j + (\alpha_i \beta_j + \alpha_j \beta_i) \bar{x} + (\alpha_i \gamma_j + \alpha_j \gamma_i) \bar{y}] + \\ &+ \frac{1}{A} [I_{20} \beta_i \beta_j + I_{11} (\gamma_i \beta_j + \gamma_j \beta_i) + I_{02} \gamma_i \gamma_j]\end{aligned}$$

y teniendo en cuenta que  $\alpha_i + \beta_i \bar{x} + \gamma_i \bar{y} = \frac{2A}{3}$  se infiere que

$$f_i^{(e)} = \frac{f}{2} (\alpha_i + \beta_i \bar{x} + \gamma_i \bar{y}) = \frac{fA}{3}\tag{2.7.7.b}$$

o sea, una vez determinadas las coordenadas globales de los nodos,

mediante las ecuaciones (2.5.7) se determinan los valores de los parámetros  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$  y  $\gamma_i$ , mismos que al ser sustituidos en las fórmulas (2.7.7.a) y (2.7.7.b) permiten la obtención de las matrices  $[K^{(e)}]$  y  $[F^{(e)}]$ .

## II.- Evaluación de las matrices mediante elementos rectangulares.

Bajo el supuesto de ser  $a_{00}$ ,  $a_{ij}$  y  $f$  constantes y usando las funciones de interpolación (2.6.5) cuando las variables  $\xi$  y  $\eta$  han sido sustituidas, respectivamente, por  $x$  e  $y$  se tiene que

$$\begin{aligned}
 [S^{11}] &= \frac{b}{6A} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \\
 [S^{12}] &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \\
 [S^{22}] &= \frac{a}{6b} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{2.7.8}$$

$$[S] = \frac{ab}{36} \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.7.8)$$

### III.- Evaluación de las integrales en la frontera.

Las integrales en la frontera son de la forma

$$Q_i^{(e)} = \int_{\Gamma^e} q_n^{(e)} \psi_i^{(e)}(s) ds$$

donde  $q_n^{(e)}$  es una cierta función conocida de parámetro  $s$ , variando con la longitud de la frontera  $\Gamma^e$ . Obviamente no es necesario de terminar dichas integrales sobre aquellas porciones de  $\Gamma^e$  ubicadas en el interior del dominio en cuestión.

Como la frontera del elemento  $\Gamma^e$  es una línea, se emplearán al efecto funciones de interpolación lineales, esto es

$$\int_0^h q_n(s) \psi_i(s) ds = Q_i \quad (2.7.9)$$

determina la contribución de  $q_n$  sobre el nodo  $i$ . Aquí  $h$  denota la longitud del lado sujeto al término forzante  $q_n$  y las funciones  $\psi_i$

son las funciones lineales de interpolación dadas por

$$\psi_1 = 1 - \frac{s}{h}$$

$$\psi_2 = \frac{s}{h}$$

así

$$Q_i = \frac{q_n h}{2} \quad (2.7.10)$$

pues como se dijo,  $q_n$  se considera constante en  $r^e$ .

## 2.8 ARMADO DE LAS MATRICES

Sin pérdida de generalidad, el armado de las matrices será ilustrado mediante la consideración de la siguiente malla construida por un elemento triangular y un elemento rectangular (ver la figura 2.8.1)

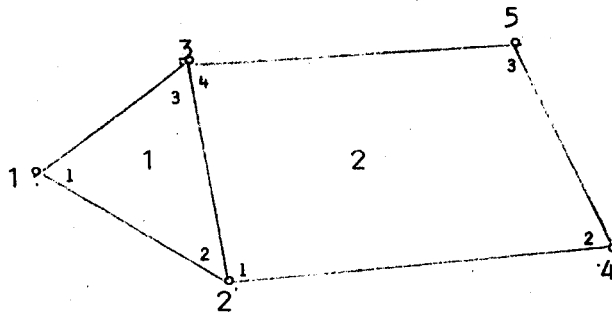


Fig. 2.8.1

Si  $k_{ij}^{(1)}$  ( $i, j=1, 2, 3$ ) denotan los términos de la matriz en cuestión correspondiente al elemento triangular y  $k_{ij}^{(2)}$  ( $i, j=1, 2, 3, 4$ ) denotan los términos correspondientes al cuadrilátero, entonces se observa la siguiente correspondencia entre los valores glo

baes y locales:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_1^{(1)} \\
 u_2 &= u_2^{(1)} = u_1^{(2)} \\
 u_3 &= u_3^{(1)} = u_4^{(2)} \\
 u_4 &= u_2^{(2)} \\
 u_5 &= u_3^{(2)}
 \end{aligned}
 \tag{2.8.1}$$

### TERMINOS

GLOBAL

$K_{11}$

$K_{12}$

$K_{22}$

$K_{14}$

$K_{15}$

$K_{23}$

LOCAL

$K_{11}^{(1)}$

$K_{12}^{(1)}$

$K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)}$

0

0

$K_{23}^{(1)} + K_{14}^{(2)}$

⋮

Así pues, las condiciones (2.8.1) permiten ensamblar la matriz como se muestra seguidamente

$$\begin{bmatrix}
 K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & 0 & 0 \\
 K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} + K_{11}^{(2)} & K_{23}^{(1)} + K_{14}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & K_{13}^{(2)} \\
 K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} + K_{41}^{(2)} & K_{33}^{(1)} + K_{44}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & K_{43}^{(2)} \\
 0 & K_{21}^{(2)} & K_{24}^{(2)} & K_{22}^{(2)} & K_{23}^{(2)} \\
 0 & K_{31}^{(2)} & K_{34}^{(2)} & K_{32}^{(2)} & K_{33}^{(2)}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 U_4 \\
 U_5
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F_1^{(1)} \\
 F_2^{(1)} + F_1^{(2)} \\
 F_3^{(1)} + F_4^{(2)} \\
 F_2^{(2)} \\
 F_3^{(2)}
 \end{bmatrix}
 \quad (2.8.2)$$

Se observa que la matriz obtenida en términos globales se deduce a partir de las matrices elementales, correspondientes al elemento triangular y al cuadrilátero, cuando los términos correspondientes a los nodos compartido por dichos elementos se suman.

## 2.9 FLUJO DE UN FLUIDO ALREDEDOR DE UN CILINDRO

Como un ejemplo de aplicación del Método del Elemento Finito seguidamente se considera el caso correspondiente al flujo irrotacional de un fluido ideal, es decir no viscoso e incomprensible alrededor de un cilindro según se muestra en la figura 2.9.1

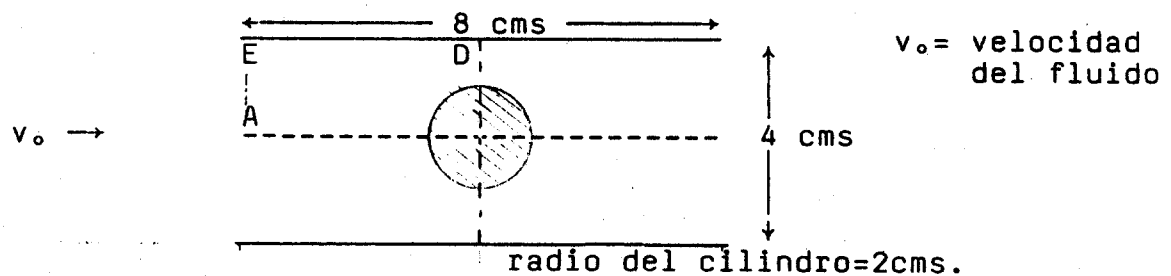


Fig. 2.9.1

Aun cuando se presenta un caso particular, este modelo tiene un espectro amplio de aplicaciones tales como la construcción de silos y chimeneas, de presas, de canales, etc.

I.- Planteamiento del problema según la ecuación de flujo.

La ecuación que describe este fenómeno es la ecuación de Laplace

$$-\nabla^2 u = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (2.9.1)$$

donde  $u = \psi$ , siendo  $\psi$  la función de flujo cuyas componentes son

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ u_2 &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.9.2)$$

Dada la simetría biaxial respecto a los ejes horizontal y vertical sólo se considera el dominio  $\Omega$  marcado en la figura (2.9.1) por los vértices A, B, C, D, y E. En la figura (2.9.2) se muestra dicho dominio en detalle.

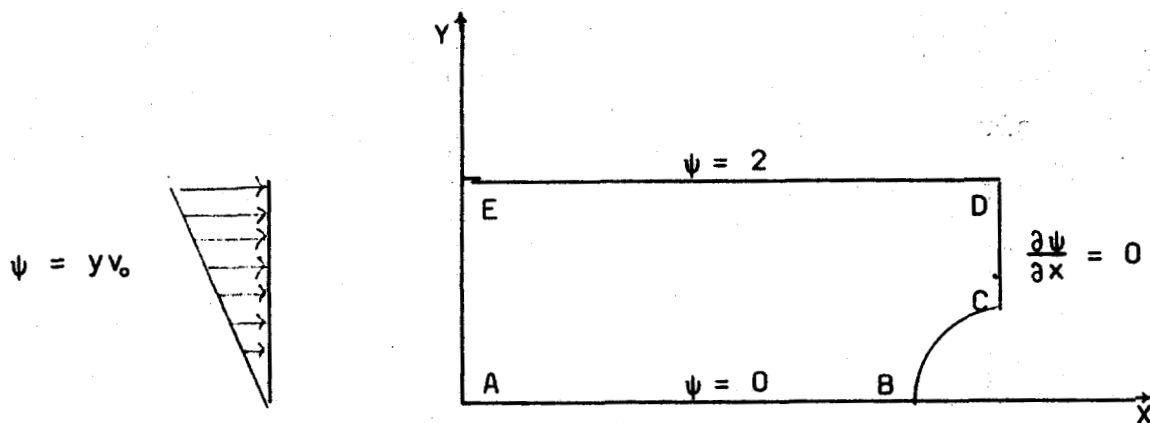


Fig. 2.9.2

Siendo las condiciones de Dirichlet  $\psi = 0$  en el lado AB y  $\psi = 2$  en el lado DE, nada mas natural que tomar una variación lineal de la función  $\psi$  en el lado AE. En cuanto al arco BC no existe por supuesto flujo alguno. La variación del flujo en el sentido horizontal se considera nula en el lado CD.

## 2.10 EVALUACION DE LA MATRIZ K

A efecto de proceder a la determinación de las componentes  $K^{(e)}$  de la matriz  $[K]$ , se presenta el dominio  $\Omega$  dividido en 15 elementos triangulares tal y como se ve en la figura (2.10.1)

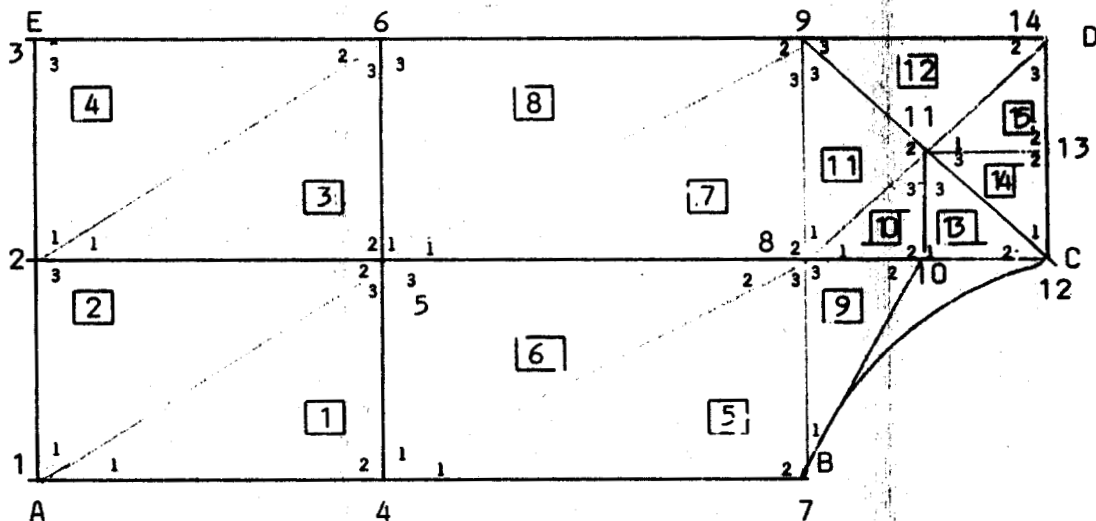


Fig. 2.10.1

Cabe señalar que todos los elementos son triángulos rectángulos y que sus nodos han sido numerados siguiendo el sentido antihorario.

Los valores  $K_{ij}^{(e)}$  se calculan mediante la fórmula

(2.7.1) en la cual, para este caso  $a_{12}$ ,  $a_{22}$  y  $a_{\infty}$ , toman el valor de 0. A efecto de facilitar los cálculos se toma la siguiente suma de matrices:

$$[K^{(e)}] = a_{11} [S^{11}] + a_{22} [S^{22}] \quad (2.10.1)$$

siendo

$$\begin{aligned} S_{ij}^{12} &= \int_{\Omega} e \frac{\partial \psi_i}{\partial x} \frac{\partial \psi_j}{\partial x} dx dy \\ S_{ij}^{22} &= \int_{\Omega} e \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} dx dy. \end{aligned} \quad (2.10.2)$$

Como se verá a continuación, los valores de la matriz  $[K^{(e)}]$ , para los triángulos rectángulos, dependen únicamente de las razones de sus lados. Así pues, bajo esta consideración, en la figura 1.5.1., se presentan únicamente tres tipos de triángulos los cuales tiene sus hipotenusas, respectivamente, entre los nodos 1 y 3, 1 y 2 y 2 y 3.

Son triángulos Tipo I los triángulos 1,5,3,7,11,14, 15. Son triángulos Tipo II los triángulos 2,4,6,8,9 13. Son triángulos Tipo III los triángulos 10,12.

De conformidad a las fórmulas (2.5.6) y (2.5.7) se tiene

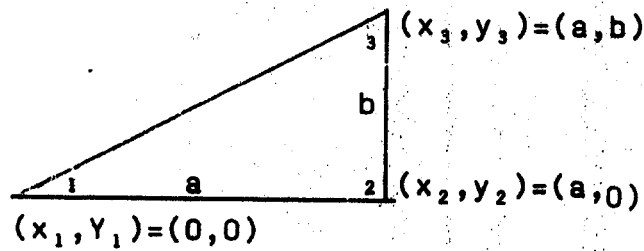
Triángulo Tipo I

$$\psi_1^{(e)} = 1 - \frac{x}{a} \quad (2.10.3)$$

$$\psi_2^{(e)} = \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$

(2.10.3)

$$\psi_3^{(e)} = \frac{y}{b}$$



y de aquí

$$[S^{11}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{b}{a} & -\frac{b}{a} & 0 \\ -\frac{b}{a} & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[S^{22}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{b} & -\frac{a}{b} \\ 0 & -\frac{a}{b} & \frac{a}{b} \end{bmatrix}$$

siendo

$$[K^{(e)}] = 1 \cdot [S^{11}] + 1 \cdot [S^{22}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{b}{a} & -\frac{b}{a} & 0 \\ -\frac{b}{a} & \frac{a}{b} + \frac{b}{a} & -\frac{a}{b} \\ 0 & -\frac{a}{b} & \frac{a}{b} \end{bmatrix} \quad (2.10.4)$$

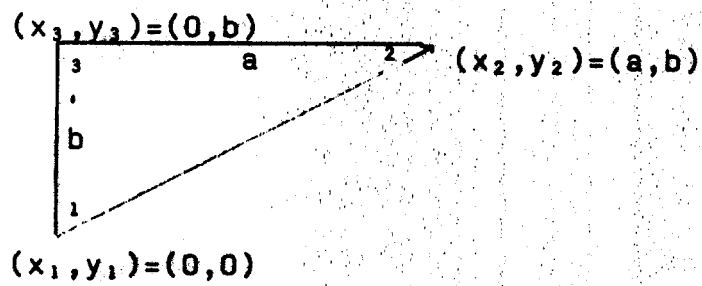
## Triángulo Tipo II

$$\psi_1 = 1 - \frac{y}{b}$$

$$\psi_2 = \frac{x}{a}$$

(2.10.5)

$$\psi_3 = -\frac{x}{a} + \frac{y}{b}$$



y de aqui

$$[S^{11}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{b}{a} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{b}{a} \end{bmatrix}$$

$$[S^{22}] = \begin{bmatrix} \frac{a}{b} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{a}{b} \end{bmatrix}$$

siendo

$$[K^{(e)}] = 1 \cdot [S^{11}] + 1 \cdot [S^{22}] = \begin{bmatrix} \frac{a}{b} & 0 & -\frac{a}{b} \\ 0 & \frac{b}{a} & -\frac{b}{a} \\ -\frac{a}{b} & -\frac{b}{a} & \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \end{bmatrix} \quad (2.10.6)$$

Triángulo Tipo III

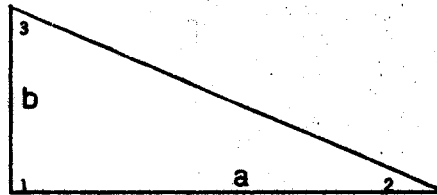
$$\psi_1^{(e)} = 1 - \frac{x}{a} - \frac{y}{b}$$

$$\psi_2^{(e)} = \frac{x}{a}$$

$$\psi_3^{(e)} = \frac{y}{b}$$

(2.10.7)

$$(x_3, y_3) = (0, b)$$



$$(x_1, y_1) = (0, 0)$$

$$(x_2, y_2) = (a, 0)$$

y de aquí

$$[S^{11}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{b}{a} & -\frac{b}{a} & 0 \\ -\frac{b}{a} & \frac{b}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[S^{22}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{a}{b} & 0 & -\frac{a}{b} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{a}{b} & 0 & \frac{a}{b} \end{bmatrix}$$

siendo

$$[K^{(e)}] = 1 \cdot [S^{11}] + 1 \cdot [S^{22}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} & \frac{b}{a} & -\frac{a}{b} \\ -\frac{b}{a} & \frac{b}{a} & 0 \\ -\frac{a}{b} & 0 & \frac{a}{b} \end{bmatrix} \quad (2.10.8)$$

En consecuencia, las matrices  $[K^{(e)}]$  son para los triángulos 1,3,5 y 7

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} 0.3333 & -0.3333 & 0.0000 \\ -0.3333 & 1.0833 & -0.7500 \\ 0.0000 & -0.7500 & 0.7500 \end{bmatrix} \quad (2.10.9)$$

para los triángulos 2,4,6 y 8

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} 0.7500 & 0.0000 & -0.7500 \\ 0.0000 & 0.3333 & -0.3333 \\ -0.7500 & -0.3333 & 1.0833 \end{bmatrix} \quad (2.10.10)$$

para el triángulo 9

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.00 & -0.25 \\ 0.00 & 1.00 & -1.00 \\ -0.25 & -1.00 & 1.25 \end{bmatrix} \quad (2.10.11)$$

para los triángulos 10,11,14 y 15 es

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.0 \\ -0.5 & 1.0 & -0.5 \\ 0.0 & -0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (2.10.12)$$

y finalmente para los triángulos 12 y 13

$$[K^{(e)}] = \begin{bmatrix} 1.0 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 0.5 & 0.0 \\ -0.5 & 0.0 & 0.5 \end{bmatrix} \quad (2.10.13)$$

La matriz ensamblada se obtiene directamente de la correlación establecida entre los nodos globales y los nodos elementales según la figura 2.10.1. Pero esta matriz se simplifica al observarse que

$$\begin{aligned}
 u_1 &= u_4 = u_7 = u_{10} = u_{12} = 0 \\
 u_3 &= u_6 = u_9 = u_{14} = 2 \\
 u_2 &= 1
 \end{aligned}
 \tag{2.10.14}$$

Así pues, siendo  $u_5$ ,  $u_8$ ,  $u_{11}$ , y  $u_{13}$  los únicos términos a evaluar la matriz  $[K]$  simplificada es

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{55} & K_{58} & K_{5(11)} & K_{5(13)} \\ & K_{88} & K_{8(11)} & K_{8(13)} \\ & & K_{11(11)} & K_{11(13)} \\ \text{simetrica} & & & K_{13(13)} \end{bmatrix}
 \tag{2.10.15}$$

donde

$$\begin{aligned}
 K_{55} &= K_{33}^6 + K_{11}^7 + K_{11}^8 + K_{22}^3 + K_{22}^2 + K_{33}^1 \\
 K_{58} &= K_{32}^6 + K_{12}^7 \\
 K_{5(13)} &= 0 \\
 K_{88} &= K_{33}^9 + K_{11}^{10} + K_{11}^{11} + K_{22}^7 + K_{22}^6 + K_{33}^5 \tag{2.10.16} \\
 K_{8(11)} &= K_{13}^{10} + K_{12}^{11} \\
 K_{11(11)} &= K_{11}^{15} + K_{11}^{12} + K_{22}^{11} + K_{33}^{10} + K_{33}^{13} + K_{33}^{14} \\
 K_{11(13)} &= K_{32}^{14} + K_{12}^{15}
 \end{aligned}$$

y usando las fórmulas (2.10.9) a (2.10.16) se obtiene

$$[K] = \begin{bmatrix} 4.3333 & -0.6666 & 0.0000 & 0.0000 \\ -0.6666 & 4.4166 & -0.5000 & 0.0000 \\ 0.0000 & -0.5000 & 4.0000 & -1.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & -1.0000 & 2.0000 \end{bmatrix} \quad (2.10.17)$$

## 2.11 EVALUACION DE LAS INCOGNITAS $u_i$

A efecto de evaluar los términos  $u_i$ ,  $i=1,2,\dots,14$  según la fórmula (3.4.6) se tiene necesidad de resolver el sistema

$$[K_{ij}][u_j] = [F_i] \quad i,j=1,2,\dots,14 \quad (2.11.1)$$

pero según las fórmulas (2.10.14), al desconocerse sólo los valores de los términos  $u_5$ ,  $u_8$ ,  $u_{11}$ , y  $u_{13}$ , el sistema en cuestión se simplifica bastante. Más aun, puesto que según la fórmula (2.4.5)  $F_5 = F_8 = F_{11} = F_{13} = 0$ , el sistema a resolver es

$$\begin{bmatrix} K_{52} & K_{53} & K_{55} & K_{56} & K_{58} & K_{59} & K_{5(11)} & K_{5(13)} & K_{5(14)} \\ K_{82} & K_{83} & K_{85} & K_{86} & K_{88} & K_{89} & K_{8(11)} & K_{8(13)} & K_{8(14)} \\ K_{(11)2} & K_{(11)3} & K_{(11)5} & K_{(11)6} & K_{(11)8} & K_{(11)9} & K_{(11)(11)} & K_{(11)(13)} & K_{(11)(14)} \\ K_{(13)2} & K_{(13)3} & K_{(13)5} & K_{(13)6} & K_{(13)8} & K_{(13)9} & K_{(13)(11)} & K_{(13)(13)} & K_{(13)(14)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_8 \\ u_9 \\ u_{11} \\ u_{13} \\ u_{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.11.2)$$

y de aquí mediante simple manipulación algebraica se obtiene

$$\begin{bmatrix}
 K_{55} & K_{58} & K_{5(11)} & K_{5(13)} \\
 & K_{88} & K_{8(11)} & K_{8(13)} \\
 & & K_{(11)(11)} & K_{(11)(13)} \\
 & & & K_{(13)(13)}
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_5 \\
 u_8 \\
 u_{11} \\
 u_{13}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F'_5 \\
 F'_8 \\
 F'_{11} \\
 F'_{13}
 \end{bmatrix}
 \quad (2.11.3)$$

simétrica

donde al ser  $u_2 = 1$ , y  $u_3 = u_6 = u_9 = u_{14} = 2$

$$\begin{aligned}
 F'_5 &= -K_{52} - 2(K_{53} + K_{56} + K_{59} + K_{5(14)}) \\
 F'_8 &= -K_{82} - 2(K_{83} + K_{86} + K_{89} + K_{8(14)}) \\
 F'_{10} &= -K_{(11)2} - 2(K_{(11)3} + K_{(11)6} + K_{(11)9} + K_{(11)(14)}) \\
 F'_{13} &= -K_{(13)2} - 2(K_{(13)3} + K_{(13)6} + K_{(13)9} + K_{(13)(14)})
 \end{aligned}
 \quad (2.11.4)$$

Mediante el empleo de las fórmulas (2.10.9) a (2.10.13), (1.6.3) y (1.6.4), se llega finalmente a

$$\begin{bmatrix}
 4.3333 & -0.6666 & 0.0000 & 0.0000 \\
 -0.6666 & 4.4166 & -0.5000 & 0.0000 \\
 0.0000 & -0.5000 & 4.0000 & -1.0000 \\
 0.0000 & 0.0000 & -1.0000 & 2.0000
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_5 \\
 u_8 \\
 u_{11} \\
 u_{13}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 3.6666 \\
 1.5000 \\
 3.0000 \\
 1.0000
 \end{bmatrix}
 \quad (2.11.5)$$

y de aquí

$$\begin{bmatrix}
 u_5 \\
 u_8 \\
 u_{11} \\
 u_{13}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0.2363 & 0.0363 & 0.0052 & 0.0026 \\
 0.0363 & 0.2357 & 0.0337 & 0.0168 \\
 0.0052 & 0.0337 & 0.2905 & 0.1453 \\
 0.0026 & 0.0168 & 0.1453 & 0.5726
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 3.6666 \\
 1.5000 \\
 3.0000 \\
 1.0000
 \end{bmatrix}
 \quad (2.11.6)$$

lo que equivale a

$$\begin{bmatrix} u_5 \\ u_8 \\ u_{11} \\ u_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9391 \\ 0.6045 \\ 1.0864 \\ 1.0387 \end{bmatrix} \quad (2.11.7)$$

Los valores obtenidos para los parámetros  $u_i$  son:

$$\begin{aligned} u_1 &= u_4 = u_7 = u_{10} = u_{12} = 0.0 \\ u_3 &= u_6 = u_9 = u_{14} = 2.0 \\ u_2 &= 2 \\ u_5 &= 0.9391 \\ u_8 &= 0.6041 \\ u_{11} &= 1.0864 \\ u_{13} &= 1.0387 \end{aligned} \quad (2.11.8)$$

Especial interés presenta la evaluación de las componentes del gradiente en el interior de cada elemento. Estas se evalúan mediante las fórmulas

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 u_i^{(e)} \beta_i^{(e)} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 u_i^{(e)} \gamma_i^{(e)} \end{aligned} \quad (2.11.8)$$

Por vía de ilustración se calcula  $\frac{\partial u}{\partial x}$  y  $\frac{\partial u}{\partial y}$  para el elemento triangular 2

$$\begin{array}{lll} u_1^{(2)} = 0.0000 & \beta_1 = 0.0000 & \gamma_1 = -1.0000 \\ u_2^{(2)} = 0.9391 & \beta_2 = 0.6666 & \gamma_2 = 0.0000 \\ u_3^{(2)} = 1.0000 & \beta_3 = -0.6666 & \gamma_3 = 1.0000 \end{array}$$

luego

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -0.0406$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 1.0000$$

TABLA DE GRADIENTES (cms/s)

| Elemento | $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ | $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ |
|----------|------------------------------------|------------------------------------|
| 1        | 0.0000                             | 0.9391                             |
| 2        | -0.0406                            | 1.0000                             |
| 3        | -0.0406                            | 1.0609                             |
| 4        | 0.0000                             | 1.0000                             |
| 5        | 0.0000                             | 0.6044                             |
| 6        | -0.2232                            | 0.9391                             |
| 7        | -0.2232                            | 1.3956                             |
| 8        | 0.0000                             | 1.0609                             |

| Elemento | $\frac{\partial \psi}{\partial x}$ | $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ |
|----------|------------------------------------|------------------------------------|
| 9        | -1.2089                            | 0.6044                             |
| 10       | -1.2089                            | 1.1727                             |
| 11       | -0.4317                            | 1.3956                             |
| 12       | 0.0000                             | 1.8273                             |
| 13       | 0.0000                             | 2.0863                             |
| 14       | -0.0863                            | 2.0863                             |
| 15       | -0.0863                            | 1.9137                             |

CAPITULO III

PROGRAMA PARA RESOLVER PROBLEMAS  
DE FLUJO DE FILTRACION ESTACIONARIO

### 3.1 INTRODUCCION

En este capítulo se presenta un programa de computadora elaborado con el propósito de resolver problemas de flujo bidimensional o problemas de flujo eje-simétrico estacionarios en un medio poroso, heterogéneo, anisotrópico y de configuración geométrica prácticamente arbitraria. Aun cuando, virtualmente, el programa se elaboró para el estudio del flujo de filtración, puede también ser usado para abordar problemas referentes al flujo potencial, tales como los que aparecen en los fenómenos relativos a la conducción del calor o en la distribución del potencial eléctrico.

Como se vió en el Capítulo I, la fórmula de Darcy describe el flujo de un fluido cuando este se desplaza a bajas velocidades de modo tal que, las fuerzas inerciales pueden ser omitidas, sin pérdida sensible en la exactitud de los cálculos. Como en el caso del flujo de filtración los potenciales se suelen dar en términos de cargas hidráulicas, entonces con el propósito de particularizar la notación se hará uso de la siguiente nomenclatura.

$z$  = Elevación sobre el nivel de referencia

$\gamma$  = Peso unitario del fluido

$h = \varphi = \frac{p}{\gamma} + z$  carga hidráulica

$\frac{\partial h}{\partial x}$  = Componente del gradiente hidráulico en la dirección del eje X

$\frac{\partial h}{\partial y}$  = Componente del gradiente hidráulico en la dirección del eje Y

$K_x$  = Componente principal de la elipse de direcciones dirigida según el eje X

$K_y$  = Componente principal de la elipse de direcciones dirigida según el eje Y

$v_x$  = Componente de la velocidad del flujo o gasto por unidad de área en la dirección X

$v_y$  = Componente de la velocidad del flujo o gasto por unidad de área en la dirección Y .

La ecuación a resolver, para ciertas condiciones de frontera dadas, es la ecuación (1.12.8)

$$\frac{\partial}{\partial x}(K_x T \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K_y T \frac{\partial h}{\partial y}) = W(x,y)$$

ahora bien, si el flujo toma lugar en el espacio tridimensional, se acostumbra tomar una sección recta tal que  $T=1$  y la ecuación anterior se transforma en

$$\frac{\partial}{\partial x}(K_x \frac{\partial h}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K_y \frac{\partial h}{\partial y}) = W(x,y) \quad (3.1.1)$$

donde  $W(x,y)$  es la potencia de la fuente o del sumidero en unidades de gasto por unidad de área por unidad de longitud (espesor).

Si, además, el medio es isotrópico, entonces

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{W(x,y)}{K} \quad (3.1.2)$$

donde K es la constante de permabilidad.

En el caso de trabajarse problemas que preservan la simetría respecto a un eje central conviene usar coordenadas cilíndricas (r,z) y la ecuación a trabajar será

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (K_r r \frac{\partial h}{\partial r}) + \frac{\partial}{\partial z} (K_z \frac{\partial h}{\partial z}) = 0 \quad (3.1.3)$$

Se hace notar que no se requiere mantener constante las direcciones de los eje X e Y en el dominio donde el flujo se presenta, lo que si se requiere es que dichas direcciones se mantengan constantes en cada uno de los elementos en los cuales se subdividió el dominio.

### 3.2 DESCRIPCION GENERAL DEL PROGRAMA

El programa instrumenta el Método del Elemento Finito a fin de resolver la ecuación (1.12.8) cuando ciertas condiciones de frontera se han dado. La región en estudio se divide en subáreas mediante cuadrilátero, se aclara que el programa trabaja en realidad en base a elementos triangulares. Se genera un nodo central para cada uno de los elementos rectangulares y cada rectángulo, a su vez, se subdivide en cuatro triángulos contruidos sobre los cuatro nodos del rectángulo y el nodo central generado.

El programa evalúa el potencial (carga hidráulica) en aquellos nodos donde éste es desconocido.

El programa esta constituido por un programa principal y dos subrutinas denominadas respectivamente GEES y RSOLVE. El pro

grama principal lee e imprime los datos del problema y determina la dimensión de la matriz a resolver. Seguidamente la subrutina GEES construye la ecuación matricial (3.4.6) misma que es resuelta por la subrutina RSOLVE.

El programa se instrumentó en la Computadora Burroughs 7700 de la U.N.A.M. y puede manejar hasta 400 elementos, 400 nodos, 40 zonas con distintos coeficientes de permeabilidad, 200 elementos con fuentes o sumideros, 200 nodos cuyo potencial es dado de antemano y 200 lados con flujo conocido.

### 3.3 DATOS INICIALES

La información requerida para describir un determinado problema es la siguiente:

- a) Opción de lectura de los datos
- b) Título del programa
- c) Determinación de las tareas a realizar
- d) Coordenadas de los nodos
- e) Características de los elementos
- f) Propiedades del medio
- g) Condiciones de frontera (potencial)
- h) Fuentes o sumideros
- i) Condiciones de frontera (flujo)
- j) Opción para modificar la matriz de carga

#### A.- Opción de lectura de los datos

Aún cuando el programa se opera inicialmente a través

de terminal remota, cuenta con la opción para leer el cuerpo masivo de los datos mediante un archivo en disco creado de antemano. En caso de ser numerosos los datos se sugiere emplear la segunda opción.

B.- Título del programa

Se proporcionan datos a fin de identificar el problema que se trabaja.

C.- Determinación de las tareas a realizar

La información correspondiente a este párrafo describe la dimesión del problema así como el uso de opciones elegidas de acuerdo a los siguientes datos:

- 1.- Número total de elementos
- 2.- Número total de nodos
- 3.- Número total de zonas en las cuales se subdividió el medio
- 4.- Número de nodos donde es conocida la función potencial
- 5.- Número de fuentes o sumideros
- 6.- Números de los ~~lados de los~~ elementos donde es conocida la magnitud del flujo, por unidad de longitud normal al lado en cuestión
- 7.- Elección del uso de coordenadas esféricas
- 8.- Elección de la impresión de las matrices generadas por la subrutina GEES
- 9.- Elección del cálculo e impresión de los valores de la carga hidráulica correspondiente a los nodos de la red

D.- Coordenadas de los nodos

En este rubro se proporcionan las coordenadas de todos los nodos.

#### E.- Características de los elementos

Esta información consiste en la numeración de cada uno de los nodos correspondientes a cada elemento de la red, se indican, además, el tipo de zona donde está ubicado el elemento y el ancho o espesor del mismo.

#### F.- Propiedades del medio

Las propiedades del medio caracterizan, en cada una de las distintas zonas, los coeficientes de filtración mayor y menos, el ángulo de rotación de los ejes de filtración respecto al sistema de coordenadas global y su espesor.

#### G.- Condiciones de frontera (potencial)

En este párrafo se asignan los valores nodales del potencial así como el flujo a través de los elementos ubicados en la frontera.

#### H.- Fuentes y sumideros

Las fuentes y sumideros se asignan a los elementos correspondientes y además se señala su potencia.

#### I.- Condiciones de frontera (flujo)

Se especifica el gasto normal a los lados de los elementos correspondientes.

#### J.- Opción para modificar la matriz de cargas

Puede suceder que en ocasiones se considere conveniente modificar la matriz de cargas denominada en el programa como la matriz B. En este caso, antes de resolverse el sistema de ecuaciones mediante la subrutina RSOLVE, se pueden modificar libremente

los valores de dicha matriz.

### 3.4 DESCRIPCION DETALLADA DE LOS DATOS

Como ya se mencionó, la computadora recibe la información requerida, ya sea mediante el sistema de tiempo compartido a través de terminal remota o a través de archivo creado en disco, Se aclara que todos los formatos de lectura son libres.

a.- Opción para leer ~~los datos~~ en terminal a control remoto o en archivo en disco.

Al inicio de los datos se requiere indicar, por medio de la terminal a control remoto, la opción elegida, para leer el cuerpo de los datos. Para usar la terminal remota se teclea el número 1, para usar el archivo en disco se teclea el número 2.

b.- Título del programa

En este párrafo se requieren tres campos de información, cada uno de 72 caracteres alfanuméricos correspondientes a la identificación del problema. Estos datos encabezan el listado de salida.

c.- Determinación de las tareas a realizar

La especificación de las tareas por realizar controla el número subsecuente de datos que han de ser leídos, esto de acuerdo a las distintas opciones con que cuenta el programa.

| CAMPO | VARIABLE | DESCRIPCION         |
|-------|----------|---------------------|
| 1     | NELS     | Número de elementos |
| 2     | NNDS     | Número de nodos     |

| CAMPO | VARIABLE | D E S C R I P C I O N                                                                                                                                      |
|-------|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 3     | NZNS     | Número de los distintos tipos de material que constituyen las zonas                                                                                        |
| 4     | NHDS     | Número de nodos donde la función potencial es conocida                                                                                                     |
| 5     | NWELS    | Número de elementos con fuentes o sumideros                                                                                                                |
| 6     | NQBND    | Número de lados con flujo no nulo conocido                                                                                                                 |
| 7     | IRADL    | El número 1 indica el uso de coordenadas cartesianas. El número 2 indica el uso de coordenadas polares                                                     |
| 8     | IPRGS    | El número 1 señala la impresión de los elementos de la matriz construida por la subrutina GEES. En caso contrario se usa el número 2                       |
| 9     | IPRES    | El número 1 señala la impresión de los valores de carga hidráulica correspondientes a los nodos interiores de la red. En caso contrario se usa el número 2 |

## d.- Coordenadas nodales

La elección del origen de coordenadas del sistema rectangular X-Y es arbitrario. Pero si el medio es anisotrópico las direcciones de los eje de coordenadas las darán los ejes de elipse de direcciones.

| CAMPO | VARIABLE | DESCRIPCION           |
|-------|----------|-----------------------|
| 1     | I        | Número del nodo       |
| 2     | XCORD    | Coordenada X del nodo |
| 3     | YCORD    | Cordenada Y del nodo  |

## e.- Características de los elementos

| CAMPO | VARIABLE | DESCRIPCION                                                                                                                                                                                                                                                   |
|-------|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | I        | Número del elemento                                                                                                                                                                                                                                           |
| 2     | NODO 1   | Las variables en los campos 2-4 corresponden a cada uno de los cuatro números nodales del elemto I. La elección del nodo 1 es arbitraria, pero los subsiguientes nodos deberán numerarse siguiendo un sentido antihorario alrededor del elemento en cuestión. |
|       | NODO 2   |                                                                                                                                                                                                                                                               |
|       | NODO 3   |                                                                                                                                                                                                                                                               |
|       | NODO 4   |                                                                                                                                                                                                                                                               |
| 6     | IZONE    | Se señala el número de la zona                                                                                                                                                                                                                                |

| CAMPO | VARIABLE | DESCRIPCION                                                                                                                                      |
|-------|----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|       |          | al cual corresponde el material que constituye al elemento I                                                                                     |
| 7     | THICK    | Indica el espesor del elemento<br>Si todos los elementos tienen el mismo espesor o si se usan coordenadas radiales, este dato puede ser omitido. |

## f.- Propiedades del medio

| CAMPO | VARIABLE | DESCRIPCION                                                                                         |
|-------|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | I        | Número de la zona. Las zonas se numeran secuencialmente comenzando la cuenta con el número 1        |
| 2     | XPERM    | Señala al mayor índice de filtración. Las unidades corresponden a la longitud por unidad de tiempo  |
| 3     | YPERM    | Señala al menor índice de filtración. Las unidades corresponden a la longitud por unidad de tiempo. |

| CAMPO | VARIABLE | DESCRIPCION                                                                                                                                                          |
|-------|----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4     | ALPHA    | Señala el ángulo formado por los ejes de la elipse de direcciones y los ejes de coordenadas globales. El ángulo se mide en radianes siguiendo un sentido antihorario |

g.- Condiciones de frontera

Esta información se refiere a los valores de la función potencial para aquellos nodos donde dichos valores es conocido de antemano.

| CAMPO | VARIABLE | DESCRIPCION                                                    |
|-------|----------|----------------------------------------------------------------|
| 1     | I        | Número del nodo                                                |
| 2     | HEAD     | Se da el valor del potencial (carga hidráulica) en dicho nodo. |

h.- Fuentes y sumideros

| CAMPO | VARIABLE | DESCRIPCION                   |
|-------|----------|-------------------------------|
| 1     | IWLEL    | Número del elemento donde fi- |

| CAMPO | VARIABLE | DESCRIPCION                                                                                                                                                                             |
|-------|----------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 2     | QWELL    | <p>gura la fuente o sumidero</p> <p>Magnitud del flujo en unidades de longitud al cubo por unidad de tiempo. Los sumideros se señalan afectando esta magnitud con un signo negativo</p> |

#### 1.- Condiciones de frontera (flujo)

Se muestra el valor, conocido de antemano, del flujo normal a través de la frontera.

| CAMPO | VARIABLE | DESCRIPCION                                                                                                                                                                                                            |
|-------|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | NDA      | <p>Estas variables corresponden al par de números nodales adyacente que identifican el lado del elemento donde el flujo es conocido. El orden de estos números es arbitrario</p>                                       |
| 2     | NDB      |                                                                                                                                                                                                                        |
| 3     | QBND     | <p>Magnitud del flujo por unidad de longitud normal al lado cuyos extremos tiene los números nodales NDA y NDB. Un signo positivo indica que el fluido entra en la región y un signo negativo indica que el fluido</p> |

| CAMPO | VARIABLE | DESCRIPCION                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|-------|----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|       |          | sale de la región. Las unidades de esta variable son gasto por unidad de espesor por <u>un</u> idad de longitud. Si el espesor es dado, las unidades son <u>gas</u> to por unidad de longitud. Cuando se emplean cooredenadas <u>ra</u> diales el valor de QBND debe corresponder a un lado <u>para</u> lelo al eje Z. |

j.- Opción para modificar la matriz de carga.

| CAMPO | VARIABLE | DESCRIPCION                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-------|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | ISI      | Quando esta variable toma el valor "N", no se modifica la matriz de carga B, terminandose así la lectura de los <u>da</u> tos. Pero si dicha variable <u>to</u> ma el valor "S", entonces se procede a la <u>lectura</u> de los siguientes <u>datos</u> correspondientes al renglón y nuevo valor respectivo del elemento de la |

| CAMPO | VARIABLE | DESCRIPCION                                     |
|-------|----------|-------------------------------------------------|
|       |          | matriz B                                        |
| 2     | NBS      | Número de elementos de la matriz B a modificar  |
| 3     | L        | Número del renglón de la matriz B por modificar |
| 4     | B        | Nuevo valor que toma dicho renglón              |

De esta forma termina la lectura de los datos.

Ahora bien, si se tiene un gran número de datos resulta más cómodo leerlos a través de un archivo creado de antemano en disco, el file de lectura correspondiente a la versión presente tiene el número 55. Como el programa ~~fué~~ elaborado para ejecutar varios problemas, uno después de otro, para suspender su ejecución basta darle a la variable NELS (número de lementos) el valor 0. Al respecto sólo nos resta comentar que cuando la lectura se hace a través de terminal remota, en la pantalla de la misma se despliegan paso a paso las instrucciones citadas.

En el Apéndice A se presenta el listado del programa, mismo que se ha denominado "FOBOS".

### 3.5 CONSTRUCCION DE LA RED E IMPRESION DE RESULTADOS

Como se ha visto, el uso de este programa requiere,

entre otros datos, de las coordenadas de los nodos de la red, así pués, la construcción de dicha malla es un requisito previo. Esta se forma en base a elementos rectangulares cuyos nodos se enumeran secuencialmente, comenzando con el número 1. Análogamente, a cada elemento se le asigna un número, empezando también con el número 1. Al respecto se estipula la observancia de las dos siguientes reglas:

REGLA A.- Los nodos para los cuales la función potencial es conocida, se enumeran en los últimos lugares.

REGLA B.- Los nodos se deben numerar de modo tal que, para cada uno de los elementos, la diferencia entre el mayor y menor número sea tan pequeña como resulte posible. Los nodos cuyo potencial es conocido de antemano no se sujetan a esta regla, es decir, la secuencia en la cual se enúmeran estos nodos es arbitraria.

Cuando en la frontera, o en una parte de la misma, se conoce el potencial en los nodos o el flujo a través de los lados, estos datos deben ser proporcionados a la computadora. En caso de ser omitidos, la frontera, en dicha porción se considera impermeable.

En el listado de los resultados, inmediatamente después de los renglones referentes a los datos iniciales del problema se imprime la magnitud de la variable MAXBW y el número del nodo respectivo. Esta variable señala el valor máximo del ancho de banda en la matriz de los coeficientes construida por la subrutina GEES y es función de la máxima diferencia encontrada entre los números nodales, para un determinado elemento. Esta

variable se evalúa así:

$$\text{MAXBW} = (\text{máxima diferencia}) \cdot 2 + 1 \quad (3.5.1)$$

el valor máximo aceptado por el programa es 50. Si en una determinada corrida del programa éste límite es excedido, se imprime un aviso al respecto y la ejecución del programa se suspende. A fin de superar esta dificultad es necesario, o bien aumentar el dimensionamiento de las matrices en el programa, o bien volver a enumerar los nodos de modo tal que esta magnitud sea reducida hasta un valor admisible.

Después de la impresión del valor de MAXBW y del número del nodo donde fué encontrada, de ser requerido, se imprimen las matrices generadas por la subrutina GEES. Generalmente se solicitan estos resultados cuando se considera conveniente comprobar la licitud de los mismos.

Por último, se imprimen los valores del potencial, tanto las magnitudes calculadas como las conocidas de antemano. Para el caso de estar trabajando regiones con superficie libre, se puede solicitar la impresión de los valores de la carga hidráulica.

### 3.6 EJEMPLO DE APLICACION DEL PROGRAMA FOBOS.

Como un ejemplo de aplicación del programa FOBOS se procede a determinar la carga piezométrica en un acuífero.

Considérese el acuífero presentado en la figura 3.6.1

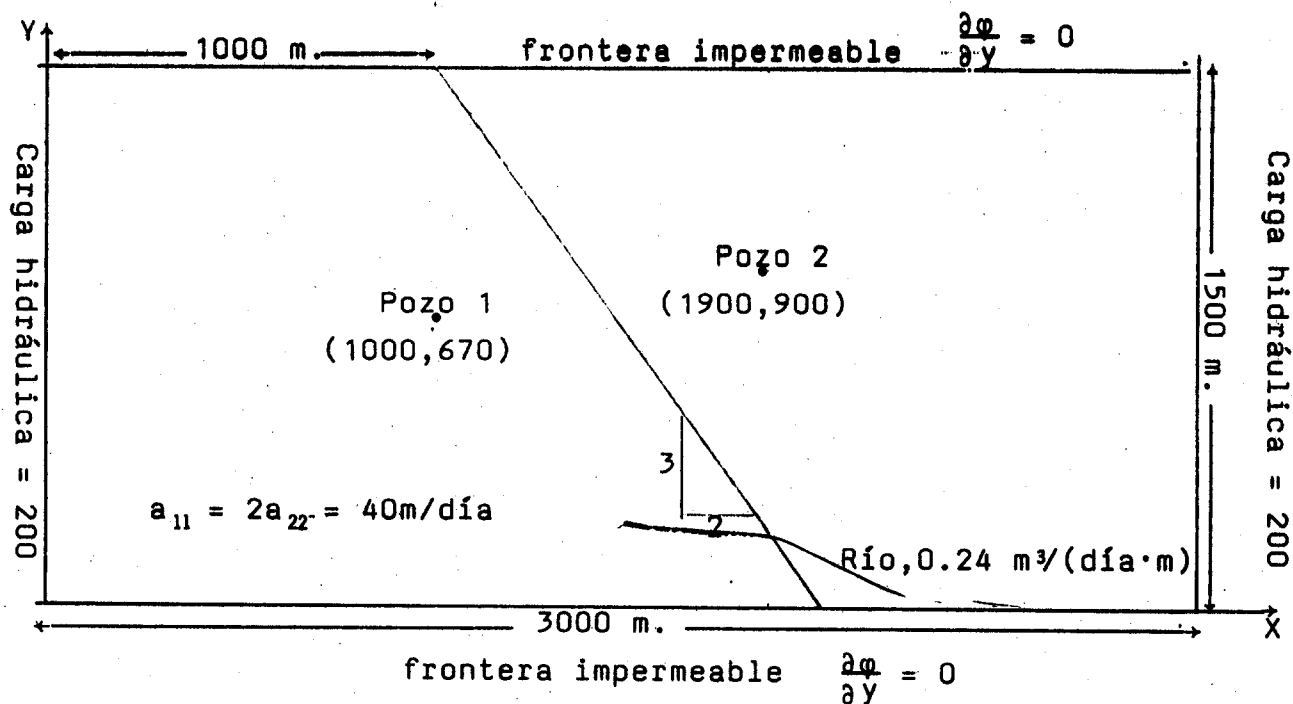


Fig. 3.6.1

el cual tiene forma rectangular y cuyos lados miden, respectivamente 3000 metros y 1500 metros. Los lados horizontales están formados por material impermeable, es decir  $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ , mientras que los lados verticales se encuentran sometidos a una carga piezométrica igual a 200 m., es decir  $\phi_0 = 200 \text{ m.}$  Un río cruza al acuífero cediendo agua a razón de  $0.24 \text{ m}^3/\text{día} \cdot \text{m}$ , y además el acuífero cuenta con dos pozos localizados en los puntos de coordenadas (1000, 670) y (1900, 900) siendo sus potencias respectivas de  $Q_1 = 1200 \text{ m}^3/\text{día}$  y  $Q_2 = 2400 \text{ m}^3/\text{día}$ . El coeficiente de permeabilidad en la dirección horizontal es de 40 m/día y en el sentido vertical es de 20 m/día.

La ecuación diferencial que describe al flujo en esta región es:

$$-(a_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}) + f = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (3.6.1)$$

donde  $a_{11}$  y  $a_{22}$  son los coeficientes de permeabilidad horizontal y vertical,  $\phi$  es la carga piezométrica dada en metros y  $f$  denota la potencia de las fuentes o sumideros.

El dominio  $\Omega$  se modela mediante una malla formada por 32 elementos rectangulares y 45 nodos, tal y como se muestra en la figura 3.6.2; aquí también se puede observar como el río queda comprendido entre los lados mutuos de los elementos 13 y 17, 14 y 18, 15 y 19, y 16 y 20.

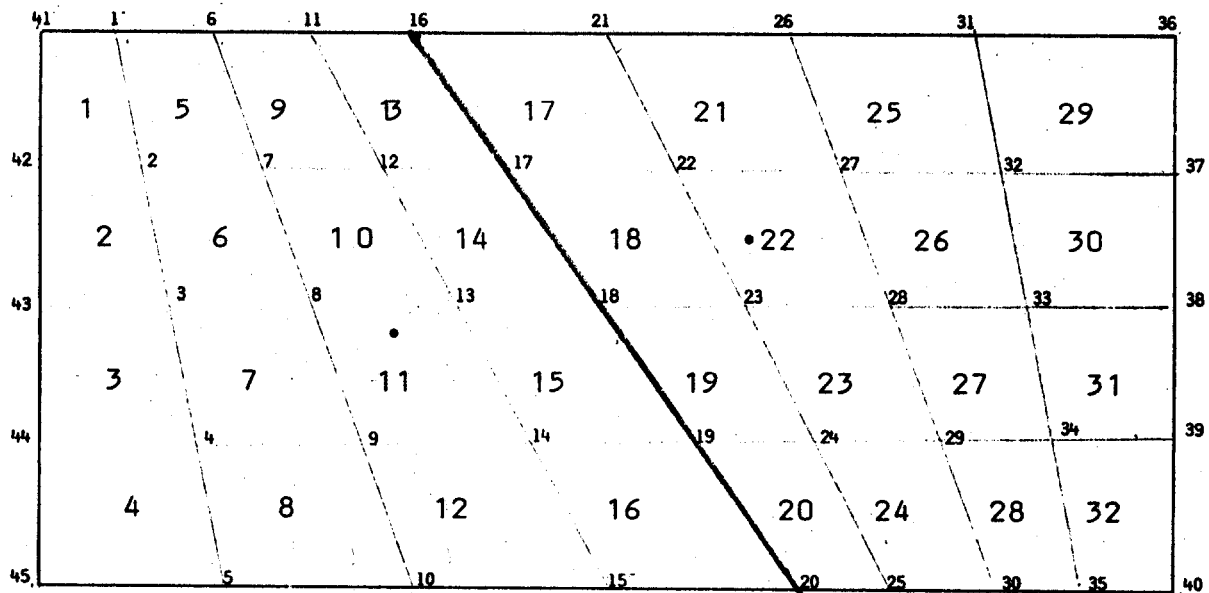


Fig. 3.6.2

A efecto de evaluar la influencia de los pozos so-

bre el acuífero se distribuye, por interpolación, la influencia de aquellos sobre los tres nodos más cercanos, tal y como se muestra en la figura 3.6.3.

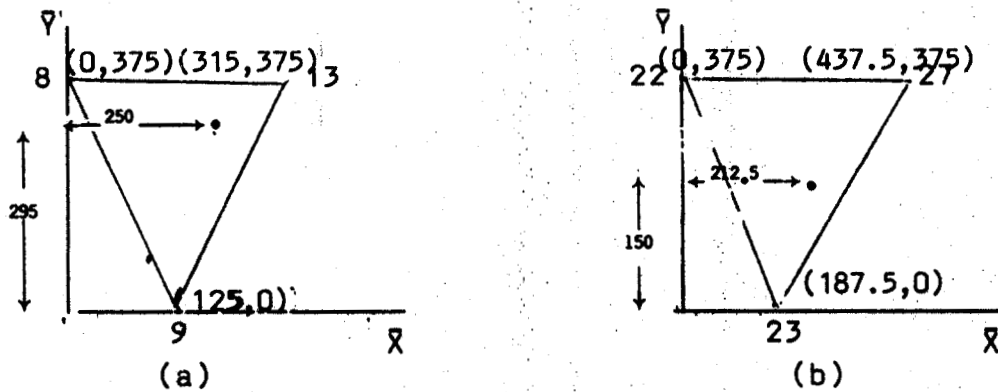


Fig. 3.6.3

#### POZO NUMERO 1

Como ya se mencionó, este pozo queda ubicado en el punto de coordenadas (1000,670), y dado que se extrae agua a razón de 1200 metros cúbicos por día, su potencia queda determinada por la siguiente expresión:

$$Q_1(x,y) = -1200\delta(x-1000)\delta(y-670) \quad (3.6.2)$$

donde  $\delta(\cdot)$  es la delta de Dirac.

Luego el término  $f_i^{(e)}$  de la fórmula (2.7.3) donde  $i=1,2,3$  y  $e=11$  se calcula mediante

$$f_i^{(e)} = \int_{\text{area}} Q_1(x,y) \psi_i dx dy = -1200 \psi_i^{(11)}(1000,670) \quad (3.6.3)$$

A efecto de facilitar los cálculos se hace la siguiente transformación:

$$\bar{x} = x - 750$$

$$\bar{y} = y - 375$$

luego, según la fórmula (2.5.6)

$$\psi_1(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2A}(\alpha_1 + \beta_1 \bar{x} + \gamma_1 \bar{y}) \quad (3.6.4)$$

y mediante las fórmulas (2.5.7) se obtiene que

$$\alpha_1 = (375)^2$$

$$\alpha_2 = -375 \cdot 125$$

$$\alpha_3 = 375 \cdot 125$$

$$\beta_1 = 0$$

$$\beta_2 = 375$$

$$\beta_3 = -375$$

$$\gamma_1 = -375$$

$$\gamma_2 = 125$$

$$\gamma_3 = 250$$

(3.6.5)

y dado que el área A del triángulo en cuestión es .

$$A = \frac{1}{2}(375)^2$$

se tiene que

$$\begin{aligned}
 \psi_1^{(11)}(250,295) &= 0.2133 \\
 \psi_2^{(11)}(250,295) &= 0.5955 \\
 \psi_3^{(11)}(250,295) &= 0.1911
 \end{aligned}
 \tag{3.6.6}$$

y de aquí mediante las ecuaciones (2.4.5), (3.6.3), (3.6.4), (3.6.5), y (3.6.6) se obtiene

$$\begin{aligned}
 F_8 &= -229.32 \\
 F_9 &= -255.96 \\
 F_{13} &= -714.60
 \end{aligned}
 \tag{3.6.7}$$

#### POZO NUMERO 2

El pozo número 2 queda ubicado en el punto de coordenadas (1900,900), y dado que se extrae agua a razón de 2400 metros cúbicos por día, su potencia se determina por

$$Q_2(x,y) = -2400\delta(x-1900)\delta(y-900) \tag{3.6.8}$$

Luego el término  $f_i^{(e)}$  de la fórmula (2.7.3) donde  $i=1,2,3$  y  $e=22$  se calcula mediante

$$f_i^{(e)} = \int_{\text{area}} Q_2(x,y)\psi_i dx dy = -2400\psi_i^{(22)}(1900,670) \tag{3.6.9}$$

A efecto de facilitar los cálculos se hace la siguiente transformación:

$$\bar{x} = x - 1687.5$$

$$\bar{y} = y - 750$$

luego, según la fórmula (2.5.6)

$$\psi_i(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{2A}(\alpha_i + \beta_i \bar{x} + \gamma_i \bar{y}) \quad (3.6.10)$$

y mediante las fórmulas (2.5.7) se obtiene que

$$\alpha_1 = 437.5 \cdot 375$$

$$\alpha_2 = -187.5 \cdot 375$$

$$\alpha_3 = 187.5 \cdot 375$$

$$\beta_1 = 0$$

$$\beta_2 = 375$$

$$\beta_3 = -375$$

$$\gamma_1 = -437.5$$

$$\gamma_2 = 187.5$$

$$\gamma_3 = 250$$

(3.6.11)

y dado que el área del triángulo en cuestión es

$$A = \frac{1}{2}(437.5 \cdot 375)$$

se tiene que

$$\psi_1^{(22)}(212.5, 150) = 0.60000$$

$$\psi_2^{(22)}(212.5, 150) = 0.2286$$

$$\psi_3^{(22)}(212.5, 150) = 0.1714$$

(3.6.12)

y de aquí mediante las ecuaciones (2.4.5), (3.5.3), (3.6.10), (3.6.11) y (3.6.12) se obtiene

$$\begin{aligned} F_{22} &= -411.36 \\ F_{23} &= -1440.00 \\ F_{27} &= -548.64 \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

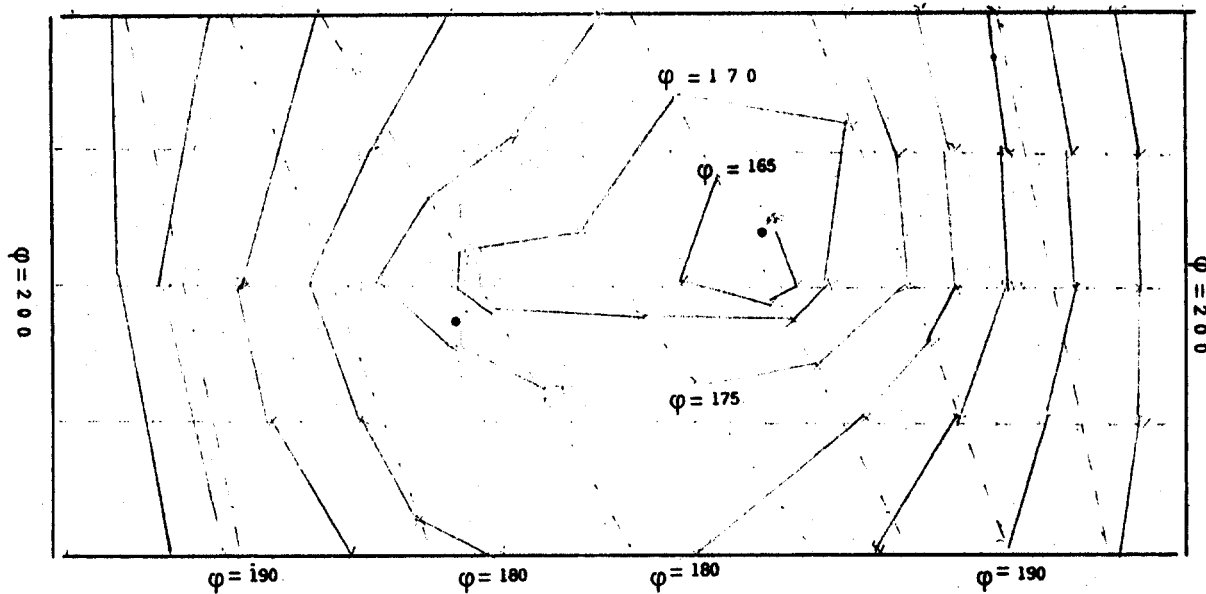
Los datos de este ejemplo fueron grabados en un archivo en disco denominado "FLUJO". El programa FOBOS se corrió usando la opción para leer los datos en disco y además también se usó la opción para modificar a la matriz de carga B generada por el programa; como ya se mencionó, esta opción se maneja desde la terminal remota, donde paso a paso se va guiando al usuario en el uso del programa.

El numero de renglones de la matriz de carga B modificados fueron seis, a saber:

$$\begin{aligned} B(8) &= -229.32 \\ B(9) &= -255.96 \\ B(13) &= -714.60 \\ B(22) &= -411.36 \\ B(23) &= -1440.00 \\ B(27) &= -548.64 \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

En el Apéndice B se muestran tanto una copia de los datos como el listado de resultados generado por el programa.

En la figura 3.5.4 se muestran las líneas equipotenciales encontradas para el acuífero.



Líneas Equipotenciales

Fig. 3.6.4

A continuación, y con el propósito de comprobar parcialmente los cálculos efectuados por el programa se procede a evaluar el efecto que la filtración del río ejerce sobre los nodos 16, 17, 18, 19 y 20.

Dado que el río filtra agua a razón de  $0.24 \text{ m}^3/(\text{día} \cdot \text{m})$ , se tiene de acuerdo a la fórmula (2.4.5)

$$\text{Nodo 16: } \int_0^h 0.24 \psi_1^{(1)} ds = 54.08$$

$$\text{Nodo 17: } \int_0^h 0.24 \psi_2^{(1)} ds + \int_0^h 0.24 \psi_1^{(2)} ds = 108.17 \quad (3.6.15)$$

$$\text{Nodo 18: } \int_0^h 0.24 \psi_2^{(2)} ds + \int_0^h 0.24 \psi_1^{(3)} ds = 108.17$$

$$\begin{aligned}
 \text{Nodo 19: } & \int_0^h 0.24\psi_2^{(3)} ds + \int_0^h 0.24\psi_1^{(4)} ds = 108.17 \\
 \text{Nodo 20: } & \int_0^h 0.24\psi_2^{(4)} ds = 54.08
 \end{aligned} \tag{3.6.15}$$

donde, para estos casos las funciones  $\psi$  se adaptaron a los elementos lineales conforme se muestra en la figura 3.6.5.

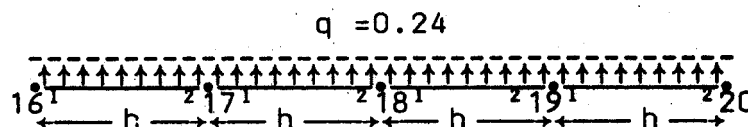


Fig. 3.6.5

así pues, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \psi_1(s) &= 1 - \frac{s}{h} \\
 \psi_2(s) &= \frac{s}{h}
 \end{aligned} \tag{3.6.16}$$

donde h se calculó mediante la siguiente expresión

$$h = [(1000)^2 + (1500)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{3.6.17}$$

Se observa que los valores dados por las fórmulas (3.6.15) para los nodos 16, 17, 18, 19 y 20 cotejan con los valores obtenidos por el programa, en los respectivos renglones, de la matriz de carga B.

CAPITULO IV

DETERMINACION DE LA FRONTERA LIBRE  
EN UNA PRESA DE TERRACERIA

## 4.1 INTRODUCCION

En este capítulo se propone la determinación del nivel del agua freática para el caso de una presa construida con material homogéneo y permeable cimentada sobre un estrato impermeable y con dren en su parte posterior, tal y como se muestra en la figura 4.1.1

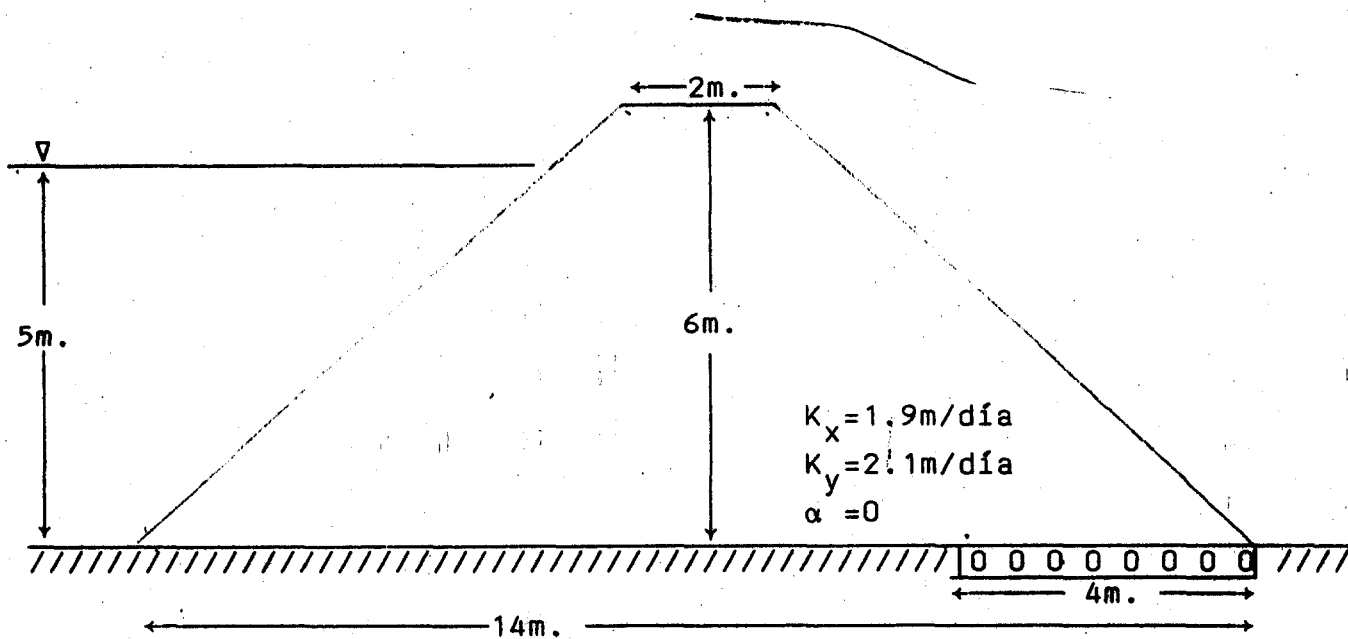


Fig. 4.1.1

Pero antes de abordar en detalle este problema se procede a establecer algunas consideraciones, las que si bien, dada su generalidad evidentemente rebasan el marco requerido por el problema propuesto, en cambio permiten orientar el desarrollo del tema en concordancia a una perspectiva que señala adecuadamente los alcances y limitaciones del método de solución empleado.

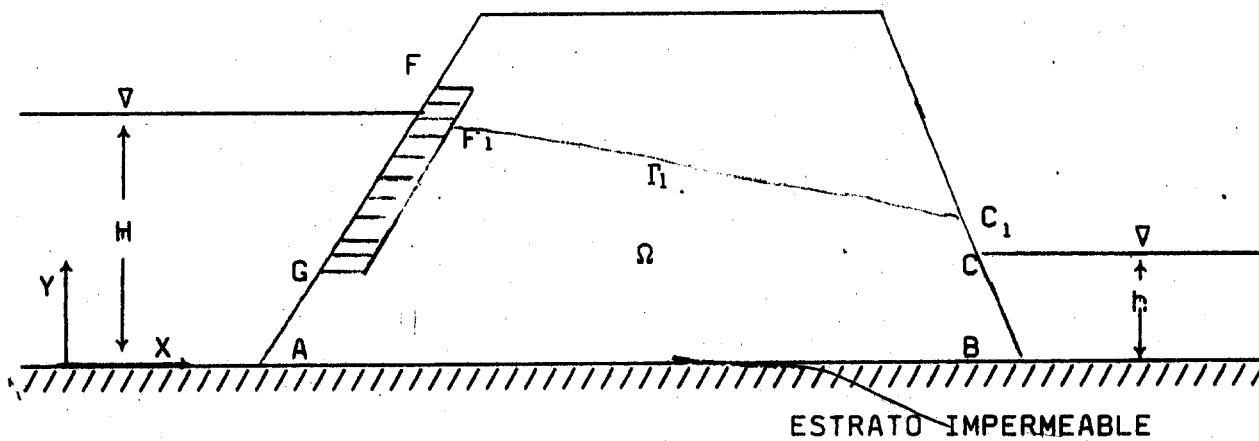


Fig. 4.1.2

En la figura 4.1.2 se ilustra el modelo propio al flujo entre dos embalses separados por una presa permeable, homogénea, cimentada sobre una base impermeable, una parte de la cara lateral también es impermeable. Esto es, los segmentos AB y GF señalan a aquella parte de la frontera de  $\Omega$  que se considera impermeable. La frontera  $F_1C_1$  se llama "Frontera Libre" y el problema que se aborda aquí es el de su determinación.

En la sección 1.8 se demostró que la ecuación que describe el flujo bidimensional en la región  $\Omega$  es

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

y de acuerdo a la Ley de Darcy se sabe que en  $\Omega$

$$\text{div} \vec{v} = \nabla^2 \varphi = 0 \quad (4.1.1)$$

Así mismo se recuerda que a la función  $\varphi$  le corresponde

una función armónica conjugada  $\psi$ . Las líneas  $\psi = \text{cte.}$  son las llamadas líneas de corriente y son tangentes al vector de velocidad  $\bar{v}$ .

De conformidad a la Sección 1.10, las condiciones de frontera asociadas a la ecuación (4.1.1) para el modelo presentado son:

I.- Dado que en los segmentos impermeables AB y FG, la componente de la velocidad del fluido a través de los mismos es nula, entonces dichos segmentos forman parte de una línea de corriente, siendo en consecuencia la condición de frontera en dichos puntos

$$\psi = \text{cte.} \quad (4.1.2)$$

El valor de dicha constante no es conocido de antemano. Obviamente, como condición de frontera alternativa en dichos puntos también se tiene

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0 \quad (4.1.3)$$

II.- En los segmentos AG y BC, donde el agua del embalse está en contacto directo con aquellos lados de la presa construidos con material de permeabilidad  $k$ , las condiciones de frontera son

$$\phi = \text{cte.} \quad (4.1.3)$$

Si ahora se conviene en asignarle a la presión atmosférica "p" el valor de cero, y dado que la velocidad del agua en el embalse es insignificante, entonces el valor de la constante en la ecuación (4.1.3) es igual al tirante del agua respecto a los segmentos AG y BC.

III.- Bajo consideraciones análogas a las del punto anterior se determina la condición de frontera en el segmento CC<sub>1</sub>, siendo esta

$$\varphi = y \quad (4.1.4)$$

IV.- Para la frontera libre  $\Gamma_1$ , dado que a la presión atmosférica se le asignó el valor de cero, la correspondiente condición de frontera deviene

$$\varphi = y \quad (4.1.5)$$

Pero  $\Gamma_1$  también es una línea de corriente y de aquí

$$\psi = \text{cte.} \quad (4.1.6)$$

el valor de esta constante se desconoce.

Obviamente, como condición de frontera alternativa en  $\Gamma_1$  también se tiene

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad (4.1.7)$$

Aún cuando la posición de los puntos  $F_1$  y  $C_1$  no es conocida de antemano, cuando el fenómeno se contempla desde un punto vista práctico, es de esperarse que la línea  $F_1C_1$  sea "suave" y decreciente.

En la fórmula (1.9.5) ~~se dedujo~~ considerando que el flujo a través de una línea que une a dos líneas de corriente es constante, de aquí que el flujo a través del segmento AG sea igual al flujo a través del segmento BC.

Una vez asentadas estas consideraciones se procede a formular el problema modelado en la figura 4.1.2. Se observa que al menos existen dos modos distintos para hacerlo.

#### PRIMERA FORMULACION

Se busca determinar a los siguientes parámetros

- a) La curva  $\Gamma_1$
- b) La región  $\Omega$
- c) La función potencial  $\varphi$
- d) La función de flujo  $\psi$
- e) Una constante K

tales que

I.- La curva  $\Gamma_1$  dada por  $y=f(x)$  sea una curva "suave" y decreciente donde el punto  $F_1$  se ubica entre los puntos G y F, quedando  $C_1$  sobre el punto C.

II.-  $\Omega$  es la región de la presa ubicada bajo la curva  $\Gamma_1$

III.- Las funciones  $\varphi$  y  $\psi$  son suaves en  $\Omega$  y satisfacen las condiciones de Cauchy, es decir

$$\nabla^2 \varphi = \nabla^2 \psi = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (4.1.8)$$

#### IV.- Las condiciones de frontera

$$\varphi = H \quad \text{en } AG$$

$$\varphi = h \quad \text{en } BC$$

$$\varphi = y \quad \text{en } \Gamma_1$$

$$\varphi = y \quad \text{en } C_1C$$

$$\psi = 0 \quad \text{en } \Gamma_1$$

$$\psi = K \quad \text{en } AB$$

se satisfacen cuando los valores  $H$  e  $h$  corresponden a las alturas de los depósitos de agua izquierdo y derecho respectivamente.

#### SEGUNDA FORMULACION

Se busca determinar a los siguientes parámetros

- a) La curva  $\Gamma_1$
  - b) La región  $\Omega$
  - c) La función potencial  $\varphi$
- tales que

I.- La curva  $\Gamma_1$  dada por  $y = f(x)$  sea una curva "suave" y decreciente donde el punto  $F_1$  se ubica entre los puntos  $G$  y  $F$ , quedando  $C_1$  sobre el punto  $C$ .

II.-  $\Omega$  es la región de la presa ubicada bajo la curva

III.-  $\varphi$  es una función suave en  $\Omega$  tal que  $\nabla^2 \varphi = 0$ .

#### IV.- Las condiciones de frontera

$$\varphi = H \quad \text{en } AG$$

$$\varphi = h \quad \text{en } BC$$

$$\varphi = y \text{ en } \Gamma_1$$

$$\varphi = y \text{ en } C_1C$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ en } \Gamma_1$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ en } AB$$

se satisfacen cuando los valores  $H$  e  $h$  corresponden a las alturas de los depósitos de agua izquierdo y derecho respectivamente.

#### 4.2 SOLUCION DEL PROBLEMA DE FRONTERA LIBRE

En la sección anterior, para un cierto modelo dado, se presentaron dos formulaciones distintas referentes a la determinación de la frontera libre en una presa. A continuación y con vías a plantear y resolver el problema de una determinada presa con frontera libre cimentada sobre un estrato impermeable y con dren en su parte posterior, se procede a simplificar el modelo citado.

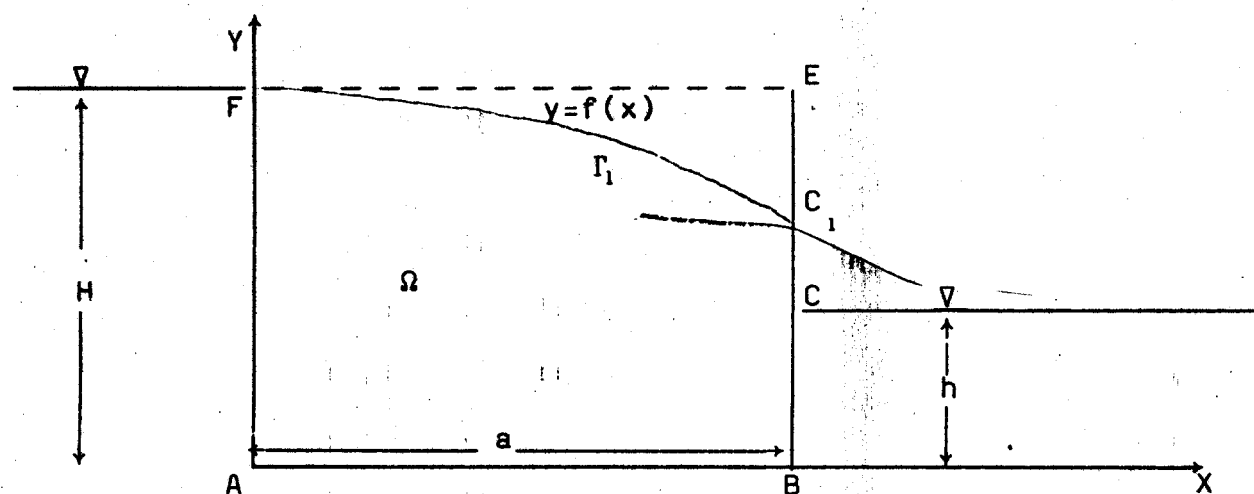


Fig. 4.2.1

En la figura 4.2.1 se presenta un caso parecido al de la figura 4.1.2, aquí se ha omitido la superficie impermeable FG y en consecuencia los puntos F y F<sub>1</sub> coinciden.

A efecto de resolver este último problema aprovechando el programa del Método del Elemento Finito presentado en el Capítulo III se procede como seguidamente se anota:

I.- Se elige una curva de prueba  $\Gamma_1: y = f_1(x)$  que aproxima la frontera libre  $\Gamma_1$ , luego la región  $\Omega$  se aproxima mediante  $\Omega'$ .

II.- Mediante el Método del Elemento Finito se evalúa una solución en  $\Omega'$  según la segunda formulación del problema dada en la Sección 4.1. Aquí se debe emplear una y sólo una de las siguientes condiciones

$$\varphi = y \quad \text{en } \Gamma_1 \quad (4.2.1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_1 \quad (4.2.2)$$

III.- Haciendo uso de la solución encontrada en el punto anterior se ajusta la posición de la curva  $\Gamma_1$ , a una nueva curva  $\Gamma_2: y = f_2(x)$  de modo tal que al menos una de las condiciones (4.2.1) o (4.2.2) se satisfaga aproximadamente en  $\Gamma_2$ .

IV.- Se comprueba si las curvas  $\Gamma_1'$  y  $\Gamma_2''$  se encuentran lo suficientemente próximas según un criterio prefijado. En caso afirmativo se hace  $\Gamma_1 = \Gamma_2''$ , en caso negativo se repite el algoritmo hasta alcanzar la aproximación deseada.

Si bien la aplicación de este algoritmo es relativamente sencilla, por otra parte puede presentar serios inconvenien

tes tales como que hasta el presente no resulta suficientemente claro cuando este problema tiene solución, cuando las aproximaciones de  $\Gamma_1$  dadas por  $y = f_1(x)$  convergen. Al respecto es oportuno comentar que se ha demostrado que la solución al problema dado en la figura 4.2.1 presenta en el punto  $C_1$  una singularidad de tipo logarítmico, pues cuando el origen de coordenadas se ubica en el punto  $C_1$ , la superficie libre esta dada por

$$y = \frac{x}{\pi} \ln(-x) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot x^k$$

para ciertas constantes  $B_k$ . (Para mayores detalles véase [9] pp 332-333)

Así pues, una vez apuntadas estas deficiencias, se considerará la convergencia numérica del algoritmo en cuestión como una demostración constructiva de la existencia de la solución del problema abordado.

Cuando se intenta detallar el algoritmo en cuestión surgen de inmediato las siguientes interrogantes:

- i).- ¿Cómo se elige la curva inicial  $\Gamma_1$ ?
- ii).- ¿Con que grado de aproximación se determina la curva  $\Gamma_1$ ?
- iii).- ¿Cuál de las ecuaciones  $\varphi = y$  o  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$  en  $\Gamma_1$  se ha de tomar,
- iv).- ¿Cómo se encuentra la nueva aproximación de  $\Gamma_1$  tomando en cuenta estas condiciones
- v).- ¿Se debe tomar en cuenta la singularidad en el punto  $C_1$  al evaluar la solución?

vi).- ¿La malla requerida por el Método del Elemento Finito deberá quedar fija en el curso de todas las iteraciones, o bien deberá modificarse?

#### 4.3 DETERMINACION DE LA FRONTERA LIBRE EN PRESA DE TERRACERIA

Una vez establecidas las anteriores consideraciones se procede a determinar la posición de la frontera libre para el flujo freático de la presa presentada en la figura 4.1.1. Para tal designio se sigue, paso a paso, el algoritmo planteado en la Sección 4.2

I.- Se elige una curva de prueba  $\Gamma_1: y = f_1(x)$  que aproxime a la frontera libre  $\Gamma_1$ , la región  $\Omega$  se aproxima mediante  $\Omega'$ .

Antes de proceder a la construcción de la curva  $\Gamma_1$  se debe dar debida respuesta a la interrogación i) asentada en la sección anterior

i).- ¿Cómo se elige la curva inicial  $\Gamma_1$ ?

hipótesis aceptables que permiten responder a esta pregunta son las siguientes:

- La curva  $\Gamma_1$  debe ser suave y decreciente
- Un extremo de dicha curva debe estar situado en el punto donde el talud de la presa entra en contacto directo con el fluido

- Como el agua que se filtra debe ser evacuada mediante el dren ubicado en la parte posterior de la presa, el extremo restante de la curva  $r'_1$  debe encontrarse en dicho drenaje.
- La curva  $r'_1$  se aproxima a una rama de una parábola de eje vertical y cuyo centro se encuentra en el punto donde el fluido entra en contacto directo con el talud de la presa

Dentro de toda razón cabe suponer la validez invariable de las dos primeras premisas. Por otra parte, en cuanto a las dos restantes, aún cuando no resulta suficientemente claro el porqué la curva  $r'_1$  debe semejar a una parábola, se confía en que, como una primera aproximación de la frontera libre, esta hipótesis permita iniciar el funcionamiento del algoritmo. Además es casi seguro que el extremo de la curva  $r'_1$  ubicado sobre el dren, en posteriores iteraciones, deba ser desplazado horizontalmente, pero manteniéndose siempre en contacto con dicho drenaje.

En la figura 4.3.1 se atiende a la exhibición de la curva  $r'_1$ , aproximación inicial de la frontera  $r_1$ , así mismo se muestra la región  $\Omega'$  determinada bajo estas condiciones. Este dominio se encuentra acotado por los segmentos AF y AC y por la curva  $r'_1$ . Las coordenadas que fijan la posición de la curva  $r'_1$  se dan un poco más adelante.

Continuando con el algoritmo, el punto siguiente del del mismo establece que



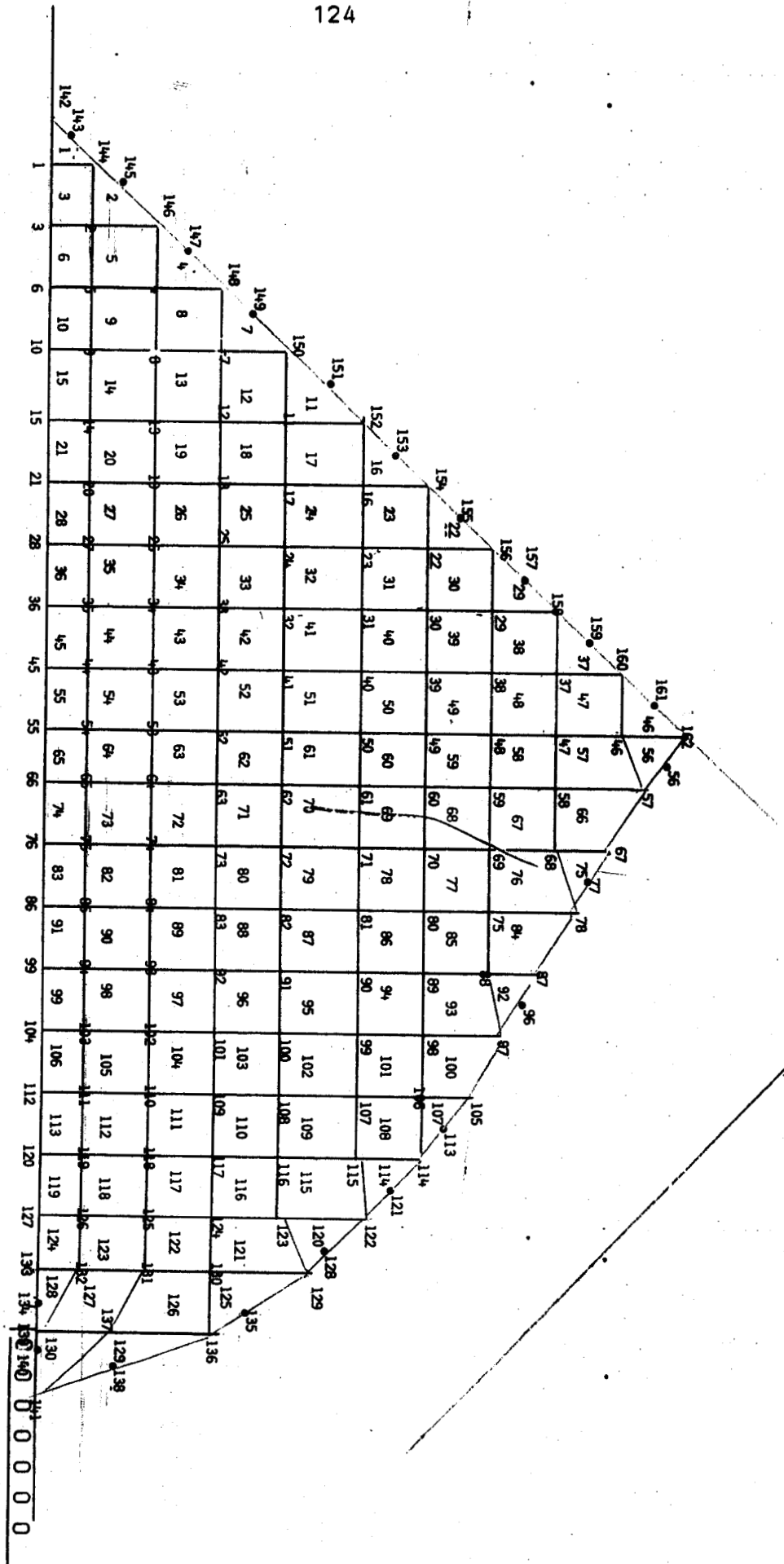


Fig. 4.3.2

b).- En la figura 4.3.1 se puede apreciar como la frontera de la región  $\Omega'$  se encuentra compuesta por los segmentos AF, HC, AH y la curva  $\Gamma'$ . Seguidamente se pasa a considerar a cada uno de estos elementos en detalle.

i).- De conformidad al punto IV de la segunda formulación del problema dada en la sección 4.1 ocurre que

$$\varphi = 5 \quad \text{en AF} \quad (4.3.1)$$

e interpretando este caso de acuerdo a la malla dada en la figura 4.3.2 se tiene que del nodo 142 al nodo 162, la función potencial toma el valor de 5 m.

ii).- En consonancia también al referido punto IV de la segunda formulación se sabe que

$$\varphi = 0 \quad \text{en HC} \quad (4.3.2)$$

en otras palabras, en los nodos 136, 140 y 141 la función potencial es nula.

iii).- Dado que la presa en estudio se encuentra cimentada sobre un estrato impermeable, se sabe que no ocurre flujo a través del segmento AH. Así pues, en relación a los segmentos acotados por los nodos 142 y 1, 1 y 3, 3 y 6, 6 y 10, 10 y 15, 15 y 21, 21 y 28, 28 y 36, 36 y 45, 45 y 55, 55 y 66, 66 y 76, 76 y 86, 86 y 99, 99 y 104, 104, y 112, 112 y 120, 120 y 127, 127 y 133, 133 y 134, y 134 y 139 se tiene que:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{en} \quad AH \quad (4.3.3)$$

iv).- En la segunda formulación del problema se puede apreciar que en la curva  $\Gamma_1'$  inciden dos condiciones de frontera, a saber:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_1'$$

y

$$\varphi = y \quad \text{en} \quad \Gamma_1'$$

en este punto debe darse respuesta a la ~~pregunta~~ planteada en el inciso iii) de la Sección 4.2, la que a la letra dice

¿Cuál de las ecuaciones  $\varphi = y$  o  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$  en  $\Gamma_1'$  se

ha de tomar?

Contemplando el problema desde un punto de vista inmediato resulta indiferente la elección de una o de otra condición de frontera, pero resulta pertinente observar que si se elige

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_1'$$

entonces los cálculos deben garantizar que

$$\varphi = y \quad \text{en} \quad \Gamma_1'$$

y recíprocamente, si se elige como condición de frontera

$$\varphi = y \quad \text{en } \Gamma_1$$

mediante la resolución del problema se debe llegar a que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_1$$

Así pues, dado que el problema puede ser resuelto tomándose una o la otra condición y además, de acuerdo a consideraciones que se detallan un poco más adelante, se conviene en elegir como condición de frontera la siguiente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_1 \quad (4.3.4)$$

en otros términos, a través de los segmentos acotados por los nodos 162 y 56, 56 y 57, 57 y 67, 67 y 77, 77 y 78, 78 y 87, 87 y 96, 96 y 97, 97 y 105, 105 y 113, 113 y 114, 114 y 121, 121 y 122, 122 y 128, 128 y 129, 129 y 135, 135 y 136, 136 y 138, y finalmente 138 y 141 el flujo es nulo.

Una vez establecidas todas las condiciones fronterizas se procede, mediante el Método del Elemento Finito, a evaluar el potencial en aquellos nodos de la malla donde éste es, por principio, desconocido. Por supuesto, los nodos donde se va a centrar la atención con especial cuidado son aquellos ubicados sobre la frontera móvil  $\Gamma_1$ .

Con el propósito de agilizar el manejo de los datos el programa computacional presentado en el Capítulo III se ha modifica-

do, esta nueva versión denominada FOBOS/ITERA se presenta en el Apéndice C.

En este segundo punto del algoritmo es oportuno señalar que la lectura de los datos iniciales, y dado que estos son hartos, se hace mediante dos archivos creados de antemano en disco. El primero de ellos se construye siguiendo fielmente los lineamientos dados en el Capítulo III para el manejo del programa FOBOS y describe, por supuesto, las características de la red así como las condiciones de frontera imperantes. Para el caso concreto de la presente aplicación este primer archivo se ha denominado ~~PRESA/A~~ y se presenta en el Apéndice D.

En cuanto al segundo archivo, en esta ocasión denominado FRONT/M1 se exhibe también en el Apéndice D.

Tocante a éste último grupo de datos es adecuado señalar que la lista de los datos iniciales asentada en la Sección 3.3 se extiende mediante los siguientes incisos:

- k) Número de nodos en la frontera libre
- l) Número del nodo de la frontera libre y cota mínima de desplazamiento vertical
- m) Números del antepenúltimo y penúltimo nodos de la frontera libre
- n) Número del último nodo de la frontera libre
- o) Cota mínima de desplazamiento horizontal del último nodo

K.- Número de nodos en la frontera libre

En este campo se anota la cantidad de nodos que figuran en la frontera libre susceptibles de ser desplazados verticalmente. En el ejemplo, según la malla presentada en la figura 4.3.2 son 18 nodos, a saber, los nodos 56, 57, 67, 77, 78, 87, 96, 97, 105, 113, 114, 121, 122, 128, 129, 135, 136 y 138. Se advierte que aún cuando el nodo 141 pertenece a la frontera libre, éste sólo puede ser desplazado horizontalmente y en consecuencia no se toma en cuenta para el cómputo aludido.

| CAMPO | VARIABLE | DESCRIPCION                                                                        |
|-------|----------|------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | IC       | Número de nodos de la frontera libre susceptibles de ser desplazados verticalmente |

L.- Número del nodo de la frontera libre y cota mínima de desplazamiento vertical

En este rubro se anota el número del nodo susceptible de ser desplazado verticalmente y la cota inferior de dicho movimiento. Esta cota queda delimitada por aquella porción de la red ubicada por debajo del nodo en cuestión, es decir, dicho nodo no podrá desplazarse ilimitadamente hacia abajo pues en este caso la malla quedaría destruida.

En la figura 4.3.2 se puede apreciar, por ejemplo, que el nodo 67 debe quedar siempre ubicado sobre el nodo 68, así pues, la cota mínima de desplazamiento vertical para el nodo 67 es igual a la ordenada del nodo 68.

En la misma figura 4.3.2 se observa que el nodo 56 debe

quedar situado por arriba del segmento que une los nodos 46 y 57, luego mediante una simple interpolación se encuentra la cota mínima de desplazamiento vertical correspondiente al nodo 56, ésta es la ordenada perteneciente al punto de intersección de la recta que pasa por los nodos 46 y 57 y la línea vertical que pasa por el nodo 56.

Como es de suponerse, la cota mínima para el nodo 138 es igual a 0.0, pues dicho nodo puede moverse libremente hacia arriba, pero cuando el movimiento es hacia abajo hay que cuidar que el nodo siempre quede ubicado por encima del dren.

De manera análoga se encuentran las cotas mínimas de desplazamiento vertical para los nodos restantes de la frontera libre, excepción hecha del último nodo. En este caso, como el nodo 141 sólo se puede desplazar horizontalmente, no hay necesidad de considerar a dicha restricción.

| CAMPO | VARIABLE | DESCRIPCION                                                                              |
|-------|----------|------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | LI       | Número del nodo ubicado en la frontera libre susceptible de ser desplazado verticalmente |
| 2     | CLI      | Cota mínima de desplazamiento vertical de dicho nodo                                     |

M.- Números del antepenúltimo y penúltimo nodos de la frontera libre

El nodo ubicado en la intersección de la frontera libre con el dren de la presa es considerado como el último nodo de la frontera libre. Luego los dos nodos inmediatamente anteriores a éste, situados también sobre la frontera libre, serán, respectivamente, el

antepenúltimo y penúltimo nodos. En la figura 4.3.2 se puede apreciar que estos son los nodos 136 y 138. Como se verá adelante, estos nodos se señalan con objeto de ayudar a dirigir el desplazamiento horizontal del último nodo en las iteraciones que se realizan.

| CAMPO | VARIABLE | DESCRIPCION                   |
|-------|----------|-------------------------------|
| 1     | IA       | Número del antepenúltimo nodo |
| 2     | IB       | Número del penúltimo nodo     |

#### N.- Número del último nodo de la frontera libre

Este nodo se ubica en la intersección de la frontera libre con el eje del drenaje de la presa, en el presente caso el último nodo tiene el número 141.

| CAMPO | VARIABLE | DESCRIPCION            |
|-------|----------|------------------------|
| 1     | IX       | Número del último nodo |

#### O.- Cota inferior de desplazamiento horizontal del último nodo

Dado que el último nodo sólo se puede desplazar horizontalmente, tanto hacia la izquierda como hacia la derecha, entonces hay necesidad de evitar la destrucción de la red limitando dicho margen de desplazamiento. Este límite lo da la abscisa del nodo ubicado inmediatamente a la izquierda del último nodo. En la figura 4.3.2 se puede apreciar que el nodo 141 se puede desplazar hacia la izquierda, pero sin llegar a tocar el nodo 140. Así pues, la abscisa del nodo 140 es la cota inferior de desplazamiento horizontal del nodo 141.

| CAMPO | VARIABLE | DESCRIPCION                                              |
|-------|----------|----------------------------------------------------------|
| 1     | CINF     | Cota mínima de desplazamiento horizontal del último nodo |

Toda vez que se ha construido la malla y que se han implantado las condiciones de frontera, se está en condiciones de evaluar la solución en  $\Omega'$ , del problema según su segunda formulación.

En efecto, aún cuando el programa FOBOS/ITERA, alimentado mediante los archivos de datos PRESA/A y ~~FRONT/M1~~ puede imprimir dichos resultados, se ha incorporado al programa una opción la cual permite generar una curva  $\Gamma_1''$ , nueva aproximación de la frontera libre. Es decir, aquí se puede elegir entre suspender la ejecución del programa e imprimir los resultados, o bien pasar al siguiente punto del algoritmo citado en la Sección 4.2

III.- Haciendo uso de la solución encontrada en el punto anterior se ajusta la curva  $\Gamma_1$  a una nueva curva  $\Gamma_1'$ :  $y = f_2(x)$  de modo tal que al menos una de las condiciones

$$\varphi = y \quad \text{en} \quad \Gamma_1'$$

$$\text{o}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{en} \quad \Gamma_1'$$

se satisfaga aproximadamente en  $\Gamma_1'$ .

Una vez situados en este tercer paso del algoritmo, y a efecto de proceder a su desarrollo, se debe dar cabal respuesta a las preguntas ii), iv), v) y vi) de la Sección 4.2. Comenzaremos

contestando la siguiente interrogación obtenida a partir de iv) una vez que ya se conoce la respuesta a la pregunta iii)

iv') ¿Cómo se encuentra la nueva ~~aproximación~~ de  $\Gamma_1$  tomando en cuenta la condición  $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0$  en  $\Gamma_1$ ?

Anteriormente se mencionó que si entre las condiciones de frontera figura la ecuación

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ en } \Gamma_1 \quad (4.3.5)$$

entonces los cálculos deben reportar que

$$\varphi = y \text{ en } \Gamma_1 \quad (4.3.6)$$

en otras palabras, el valor de la función potencial  $\varphi$  calculada en un punto de la curva  $\Gamma_1$  debe ser igual al valor de la ordenada respectiva. Otra forma de decir lo mismo es la siguiente

$$\varphi - y = 0 \text{ en } \Gamma_1 \quad (4.3.7)$$

Ahora bien, si el cálculo reporta que esta ecuación es justa para un cierto punto de la curva  $\Gamma_1$ , entonces la frontera pasa efectivamente por dicho punto.

Supongamos ahora que ~~en un punto~~ dado de la curva  $\Gamma_1$  se tiene que

$$\varphi - y < 0$$

(4.3.8)

esto nos indica que la frontera libre debe quedar situada por debajo de dicho punto.

Finalmente supongamos que en un cierto punto de  $\Gamma'_i$  se tiene

$$\varphi - y > 0$$

(4.3.9)

de aquí se concluye que la frontera libre debe ubicarse por arriba de este punto.

Es así como el programa FOBOS/ITERA encuentra la nueva aproximación de  $\Gamma'_i$ . En efecto, sea el nodo número  $i$  de coordenadas  $(x'_i, y'_i)$  y sea

$$\Delta_i = \varphi(x'_i, y'_i) - y'_i \quad (4.3.10)$$

luego la nueva ordenada del nodo número  $i$  se calcula por

$$y''_i = y'_i + \Delta_i \quad (4.3.11)$$

o sea

$$y''_i = \varphi(x'_i, y'_i) \quad (4.3.12)$$

Así el nodo número  $i$  se localiza ahora en el punto de coordenada  $(x'_i, y''_i)$ . Una vez hecha esta sustitución el programa ve-

rifica dos importantes casos

- I.- Que la red no haya quedado destruida debido a que el nodo número  $i$  se encuentre ahora situado por debajo de su cota mínima de desplazamiento vertical

En caso afirmativo la ejecución del programa se suspende y se imprime un aviso indicando el número de dicho nodo.

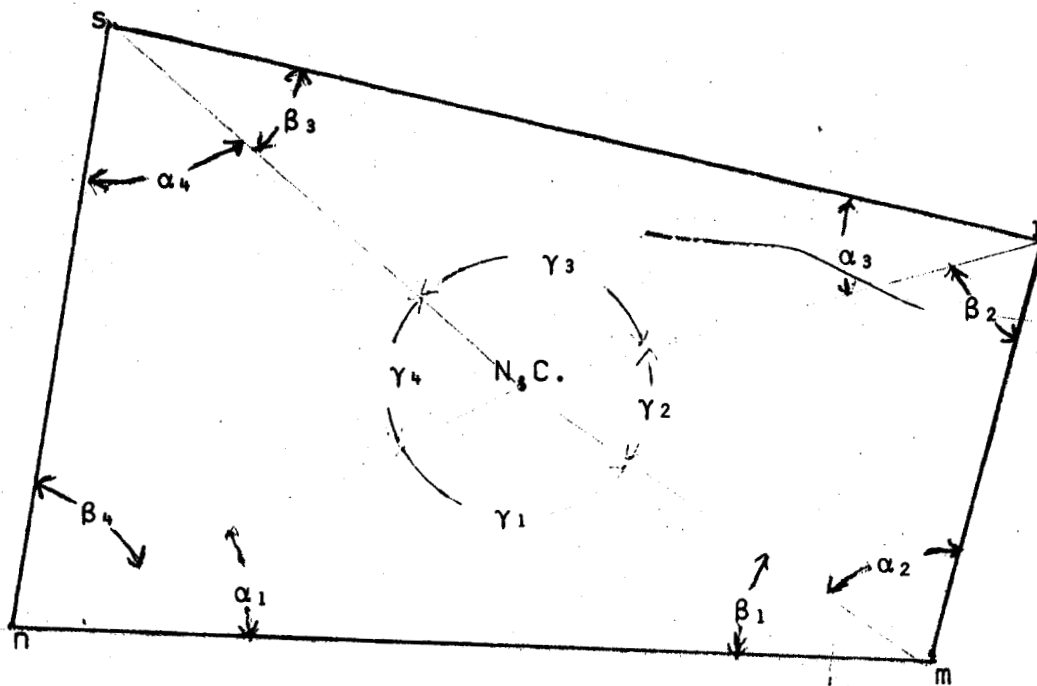
- II.- Que los ángulos formados entre dos cualesquiera de los lados de los elementos triangulares no sean menores a los  $10^\circ$

Si bien es cierto que el programa FOBOS/ITERA opera inicialmente con elementos rectangulares, como se puede ver en la malla presentada en la figura 4.3.2, el programa, en su funcionamiento interno, genera un nuevo nodo adicional llamado nodo central, que se ubica en el interior del elemento rectangular tal y como se presenta en la figura 4.3.3. Mediante este nuevo nodo el elemento rectangular se descompone en cuatro elementos triangulares, y es en base a estos últimos elementos con los cuales opera el programa.

Por otra parte se sabe que el efecto de los aspectos geométricos sobre el grado de exactitud del método queda acotado por la constante  $C$  donde

$$C \leq \frac{\text{constante}}{(\text{sen } \xi)^S} \quad (4.3.13)$$

(para mayores detalles véase [16] pp 138)



N.C. = nodo central

Fig. 4.3.3

para  $s$  un entero positivo y siendo  $\xi$  el menor de los ángulos  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$  que figura en la malla.

De aquí es claro que si  $\xi$  es pequeño el valor de la expresión

$$\frac{\text{constante}}{(\text{sen } \xi)^s}$$

puede ser bastante grande.

El programa FOBOS/ITERA evalúa cada uno de los ángulos  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ ,  $i=1,2,3,4$ . En caso de que alguno de ellos sea menor a los  $10^\circ$ , se imprime un aviso al respecto señalándose el número del elemento rectangular correspondiente así como los

números de los nodos que conforman al elemento triangular en cuestión. Dado que, como se verá, por lo general existe necesidad de construir varias mallas para resolver este problema de búsqueda de la frontera libre, no se consideró conveniente, en caso de encontrarse ángulos pequeños, suspender la ejecución del programa.

A medida que se van localizando las posiciones de los IC nodos susceptibles de ser desplazados verticalmente, el programa también evalúa los siguientes valores

$$h_i = |y_i'' - y_i'| \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, IC \quad (4.3.14)$$

y de aquí se obtiene la máxima diferencia entre los desplazamientos verticales de dichos nodos.

$$\Delta_m = \max \{ h_i : i=1, 2, \dots, IC \} \quad (4.3.15)$$

Como se mencionó, el programa FOBOS/ITERA es inicialmente manejado desde una terminal remota y el proceso se inicia con la instrucción de leer los archivos de datos PRESA/A y FRONT/M1. El primero describe la malla y las condiciones de frontera y el segundo detalla las características de la curva  $\Gamma_1'$ .

Una vez leído estos datos, en la pantalla de la terminal se despliega el siguiente requerimiento .

DAME EL VALOR DE LA TOLERANCIA

este valor es asignado al parámetro "TOL".

Y es en este punto donde hay que empezar a abordar la pregunta ii) de la Sección 4.2 que a la letra dice

ii) ¿Con que grado de aproximación se determina la curva  $\Gamma_1$ ?

por el momento apuntamos que en ~~esta~~ primera etapa se tomó

$$TOL = 0.01mts$$

Si el programa en sus cálculos obtiene

$$\Delta_m < TOL$$

se imprime el listado de resultados y la ejecución del programa se suspende.

Pero si se obtiene

$$\Delta_m \geq TOL$$

entonces las coordenadas  $(x'_i, y'_i)$  de cada uno de los nodos susceptibles de ser desplazados verticalmente pasan a ser ahora  $(x'_i, y''_i)$  y seguidamente se despliega en pantalla el siguiente aviso

ERROR PERMITIDO EN LA FRONTERA LIBRE = TOL

ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION =  $\Delta_m$

¿SE DESEA OTRA ITERACION?

Si se teclea la letra "N" se imprime el listado de resultados y la ejecución del programa se suspende.

Pero si se teclea la letra "S", entonces aparecen en pantalla las presiones calculadas en el antepenúltimo y penúltimo nodos así como los datos auxiliares para facilitar el movimiento horizontal del último nodo. En el presente caso fué así

| NODO | PRESION |
|------|---------|
| 136  | 0.35806 |
| 138  | 0.33120 |

NODO SUJETO A DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL

NODO NUM. 141

DAME LA NUEVA ABSCISA DEL NODO 141

ESTE VALOR DEBE SER MAYOR A 10.10

Las presiones obtenidas en los nodos 136 y 138 ayudan a determinar la dirección del movimiento del nodo 141. Es decir, si aquellas presiones son positivas, entonces los nodos están por debajo de la posición correcta y en este caso hay que desplazar el nodo 141 hacia la derecha. Y recíprocamente, si las presiones obtenidas en los nodos 136 y 138 son negativas, entonces el nodo 141 debe desplazarse hacia la izquierda. Se hace notar la conveniencia de mover el último nodo poco a poco y esto después de que se han efectuado unas cinco o seis iteraciones.

Una vez que se ha dado la nueva abscisa del último nodo, en este ejemplo la abscisa del nodo 141, el programa FOBOS/ITERA resuelve de nuevo el problema, pero ahora considerando las nuevas posiciones de los nodos que fueron desplazados vertical y horizontalmente.

Es así como se ha instrumentado el último paso del algoritmo presentado en la Sección 4.2, el cual dice

IV.- Se comprueba si las curvas  $\Gamma_1'$  y  $\Gamma_1''$  se encuentran lo suficientemente próximas según un criterio prefijado. En caso afirmativo se hace  $\Gamma_1 = \Gamma_1''$ . En caso negativo se repite el algoritmo hasta alcanzar la aproximación deseada.

En esta primera etapa del problema se utilizaron los archivos de datos PRESA/A y FRONT/M1. Y en el Apéndice E se puede ver que no fué sino al cabo de diez iteraciones que se logró obtener  $\Delta_m < 0.01\text{mts}$ . Sin embargo en el elemento número 129 se obtuvieron, entre los lados de los elementos triangulares generados, ángulos menores a los  $10^\circ$ .

Y es aquí donde se tiene que abordar de lleno a la pregunta ii) de la Sección 2.4 la que inquiere acerca del grado de aproximación con la que se determina la curva .

Este problema se resolvió en cinco etapas y se tomaron en consideración los siguientes criterios

- 1.- Los nodos sujetos a movimiento, tanto horizontal como vertical, se localizan con una precisión que no excede al milímetro
- 2.- Ninguno de los elementos triangulares, en los cuales se subdividen los elementos rectangulares, presenta un ángulo menor a los  $10^\circ$

Y es así como se llega a abordar la pregunta vi) de la Sección 4.2

- vi).- ¿La malla requerida por el Método del Elemento Finito deberá quedar fija en el curso de todas las iteraciones, o bien deberá modificarse?

La respuesta que se da a esta pregunta, naturalmente dentro del algoritmo instrumentado computacionalmente, es la siguiente

Mediante el programa FOBOS/ITERA se ajusta automáticamente la frontera libre tantas veces cuantas sea necesario hasta que la ejecución del mismo se suspende debido a una de las dos siguientes particularidades

- a).- La red se destruyó por efecto del excesivo deslizamiento de uno de los nodos
- b).- En el proceso iterativo se obtuvo  $\Delta_m < \text{TOL}$

En caso de ocurrir a) se recomienda repetir de nuevo

el proceso deteniéndolo una iteración antes de que la red se destruya y aprovechando los resultados así obtenidos se procede a diseñar una nueva red.

Para el caso b) conviene apuntar que aún cuando la frontera libre se va a localizar tomando el desplazamiento vertical máximo de los nodos menor a 1mm, éste valor es demasiado pequeño para ser usado al principio, por esta razón en las primeras etapas se ha tomado el valor del parámetro TOL igual a 1cm. Así pues si la corrida del programa se suspende debido a que se alcanzó la condición  $\Delta_m < 1\text{cm}$ , como ocurrió en la primera etapa, entonces con los resultados generados por el programa se diseña una segunda red, pasándose así a la segunda etapa del proceso iterativo. Es pertinente asentar que una vez que el último nodo se ha localizado con una precisión cercana al milímetro, es hasta entonces cuando se recomienda construir la última red asignándosele al parámetro TOL el valor de 1mm.

Para resolver este problema hubo necesidad de diseñar cinco redes, es decir se considerarán cinco etapas. Otros autores han expresado la necesidad de emplear hasta 16 mallas distintas[9]. Es pues evidente el ahorro de trabajo humano que se logra usando el programa FOBOS/ITERA.

En cuanto a la pregunta v) de 4.2 que dice así

v).- ¿Se debe tomar en cuenta la singularidad en el  $C_1$  al evaluar la solución?

al respecto cabe mencionar que la singularidad presente en el punto de contacto de la frontera libre con el dren, por sí misma hizo

patente su presencia, habida cuenta de las dificultades que se abordaron para lograr determinar su posición. Y fué precisamente esta la razón por la cual se localizó dicho punto singular con una aproximación cercana al milímetro.

En aras de la brevedad se omiten los dibujos de las cuatro redes restantes, sin embargo en el Apéndice F se presentan los archivos de datos respectivos. En la segunda etapa se utilizaron los archivos PRESA/B y FRONT/M2, en la tercera los archivos PRESA/C y FRONT/M3, en la cuarta los archivos PRESA/D y FRONT/M4 y finalmente en la quinta etapa los archivos PRESA/5 y FRONT/5.

En el Apéndice G se presenta el listado de resultados obtenidos en la segunda etapa y en la Apéndice H los resultados finales obtenidos en base a los archivos PRESA/5 y FRONT/5.

En la figura 4.3.4 se exhibe la gráfica de la curva  $\Gamma_1$ , es decir se muestra la ubicación de la frontera libre.



CAPITULO V

DETERMINACION DE LA FRONTERA LIBRE EN  
UNA PRESA CON PAREDES VERTICALES

## 5.1 INTRODUCCION

En este capítulo se propone determinar el nivel del agua freática para el caso de una presa construida con material homogéneo y permeable de paredes verticales cimentada sobre un estrato impermeable tal y como se muestra en la figura 5.1.1

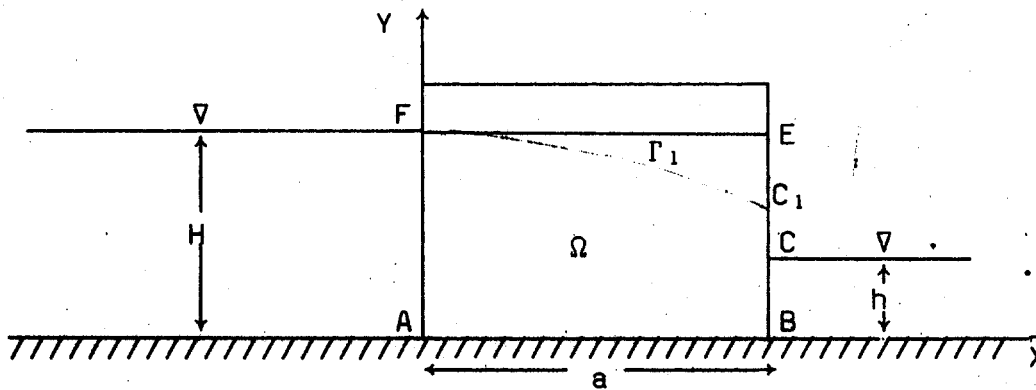


Fig. 5.1.1

La zona donde ocurre el flujo de filtración se encuentra acotada en las caras laterales de la presa por los segmentos AF y BC, en la base de la misma por el segmento AB y por último por la frontera libre  $\Gamma_1$  cuya forma y posición se van a determinar. Los extremos de la curva  $\Gamma_1$  se encuentran en los puntos F y  $C_1$ . Al segmento  $CC_1$  se le conoce como superficie de escurrimiento.

En la Sección 4.1 se demostró que a este modelo le corresponde la siguiente formulación diferencial

### SEGUNDA FORMULACION

Se busca determinar a los siguientes parámetros

- a) La curva  $\Gamma_1$
- b) La región  $\Omega$
- c) La función potencial  $\phi$

tales que

- I.- La curva  $\Gamma_1$  dada por  $y = f(x)$  sea una curva "suave" y decreciente donde el punto  $C_1$  se ubica sobre el punto C.
- II.-  $\Omega$  es la región de la presa ubicada bajo la curva  $\Gamma_1$ .
- III.-  $\varphi$  es una función suave en  $\Omega$  tal que  $\nabla^2 \varphi = 0$ .
- IV.- Las condiciones de frontera

$$\varphi = H \quad \text{en AF} \quad (5.1.1)$$

$$\varphi = h \quad \text{en BC} \quad (5.1.2)$$

$$\varphi = y \quad \text{en } \Gamma_1 \quad (5.1.3)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{en } \Gamma_1 \quad (5.1.4)$$

$$\varphi = y \quad \text{en } CC_1 \quad (5.1.5)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{en AB} \quad (5.1.6)$$

se satisfacen cuando los valores de  $H$  e  $h$  corresponden a las alturas de los depósitos de agua izquierdo y derecho respectivamente

A estas restricciones se le puede añadir la siguiente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \leq 0 \quad \text{en } CC_1 \quad (5.1.7)$$

La cual estipula que el agua puede filtrarse a través de la superficie de escurrimiento.

La determinación completa de la frontera libre

$y = f(x)$  también incluye las siguientes cláusulas

$$f(0) = H \quad (5.1.8)$$

$$f(a) \geq h \quad (5.1.9)$$

$$\frac{d}{dx} f(0) = 0 \quad (5.1.10)$$

$$\frac{d}{dx} f(a) = \infty \quad (5.1.11)$$

## 5.2 OTRA FORMULACION DIFERENCIAL DEL PROBLEMA

En la Sección 1.8 se demostró que las componentes del vector de velocidad para el flujo de filtración, en el caso bidimensional, son

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (5.2.1)$$

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (5.2.2)$$

y como por otra parte se sabe que a la función  $\phi$  le corresponde una función armónica  $\psi$  llamada función de corriente la cuales satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, esto es

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (5.2.3)$$

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (5.2.4)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.2.5)$$

A esto cabe añadir que como tanto la base impermeable de la presa como la frontera libre son líneas de corriente, el flujo a través de cualquier sección recta que las intersecte es constante. En particular, el flujo a través de una sección vertical arbitraria viene dada por

$$-\int_0^{f(x)} \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, y) dy = \text{constante} = q \quad (5.2.6)$$

Es conveniente hacer notar que este gasto  $q$  puede ser determinado a partir de la configuración de la presa y de los niveles del agua en los envases. De hecho Charni(1951) demostró que

$$q = \frac{H^2 - h^2}{2a} \quad (5.2.7)$$

y bajo estas consideraciones el problema modelado en la figura 5.1.1 se puede reformular bajo la siguiente presentación

### TERCERA FORMULACION

Se busca determinar a los siguientes parámetros

- a) La curva  $\Gamma_1$
- b) La región  $\Omega$
- c) La función potencial  $\varphi$
- d) La función de corriente  $\psi$

tales que

I.- La curva  $\Gamma_1$  dada por  $y=f(x)$  sea una curva "suave" y decreciente, donde el punto  $C_1$  se ubica sobre el punto  $C$

II.-  $\Omega$  es la región de la presa ubicada bajo la curva  $\Gamma_1$ .

III.-  $\varphi$  es una función suave en  $\Omega$  tal que  $\nabla^2 \varphi = 0$ .

IV.-  $\psi$  es una función suave en  $\Omega$  tal que  $\nabla^2 \psi = 0$ .

V.- Las condiciones de frontera

$$\varphi = H \quad \text{en } AF \quad (5.2.8)$$

$$\varphi = h \quad \text{en } BC \quad (5.2.9)$$

$$\varphi = y \quad \text{en } \Gamma_1 \quad (5.2.10)$$

$$\psi = 0 \quad \text{en } \Gamma_1 \quad (5.2.11)$$

$$\varphi = y \quad \text{en } CC_1 \quad (5.2.12)$$

$$\psi = q \quad \text{en } AB \quad (5.2.13)$$

### 5.3 FORMULACION DEBIL DEL PROBLEMA

Seguidamente se procede, partiendo de la formulación diferencial del problema dada en la sección 5.1, a deducir la formulación débil respectiva.

Sea  $v(x,y)$  una función de prueba continua y con primeras derivadas continuas en el dominio  $\Omega$  de la figura 5.1.1.

Al multiplicar la ecuación de Laplace  $\nabla^2 \phi = 0$  por dicha función de prueba e integrando sobre el dominio  $\Omega$  se obtiene

$$0 = \int_{\Omega} v \left[ -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (5.3.1)$$

y de aquí

$$0 = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] dx dy - \int_{\Gamma} v \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right] ds \quad (5.3.2)$$

donde  $\Gamma$  es la frontera de  $\Omega$  y  $n_x$  y  $n_y$  son los cosenos directores del vector unitario normal a la frontera.

Se divide a la frontera  $\Gamma$  en los siguientes segmentos

$$\Gamma_a = AF, \quad \Gamma_b = BC, \quad \Gamma_c = AB \quad \text{y} \quad \Gamma_d = \Gamma_1.$$

Como la variación de la función de prueba en vecindades de los segmentos  $\Gamma_a$  y  $\Gamma_b$  es nula, la ecuación (5.3.2) se transforma en

$$0 = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] dx dy - \int_{\Gamma_c} v \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right] ds - \int_{\Gamma_d} v \left[ \frac{\partial \phi}{\partial x} n_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} n_y \right] ds \quad (5.3.3)$$

y de aquí de acuerdo a las condiciones (5.1.4) y (5.1.6) se obtiene finalmente

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] dx dy = 0 \quad (5.3.4)$$

Así pues, se busca determinar a los siguientes parámetros

La curva  $\Gamma_1$

La región  $\Omega$

La función  $\phi$

tales que

I.- La curva  $\Gamma_1$  dada por  $y = f(x)$  sea una curva "suave" y decreciente donde  $f(a) \geq h$

II.-  $\Omega$  es la región de la presa ubicada bajo la curva  $\Gamma_1$

III.-  $\phi$  es una función continua en  $\bar{\Omega}$ , donde ella misma y sus primeras derivadas son cuadrado sumables en  $\bar{\Omega}$  (en este sentido se satisfacen las condiciones (5.1.1), (5.1.2), (5.1.3) y (5.1.5))

IV.- Donde

$$\int_{\Omega} \left[ \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right] dx dy = 0$$

para toda función de prueba  $v(x,y)$  con primeras derivadas continuas en  $\bar{\Omega}$  y la cual se anula en  $\Gamma_a$  y en  $\Gamma_b$

Ahora se procede a extender el dominio  $\Omega$  de la variable dependiente  $\phi$  a la región ABEF de la figura 5.1.1 tal y como se indi-

ca.

Sea el rectángulo

$$D = \{(x,y): 0 < x < a, 0 < y < H\} \quad (5.3.5)$$

luego se define

$$\Omega_e = D - (\Omega + \Gamma_1) \quad (5.3.6)$$

o sea

$$D = \Omega + \Omega_e + \Gamma_1 \quad (5.3.7)$$

Ahora se conviene en extender continuamente a las variables  $\varphi$  y  $\psi$  como seguidamente se indica

$$\bar{\varphi}(x,y) = \begin{cases} \varphi(x,y) & \text{en } \bar{\Omega} \\ y & \text{en } \bar{D} - \bar{\Omega} \end{cases} \quad (5.3.8)$$

$$\bar{\psi}(x,y) = \begin{cases} \psi(x,y) & \text{en } \bar{\Omega} \\ 0 & \text{en } \bar{D} - \bar{\Omega} \end{cases} \quad (5.3.9)$$

y de aquí se observa que

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} = 0 \quad \text{en } D \quad (5.3.10)$$

$$\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} = \chi_{D-\Omega} \quad \text{en } D \quad (5.3.11)$$

donde  $\chi_I$  es la función de elección para el conjunto  $I$ .

## 5.4 LA TRANSFORMACION DE BAIOCCHI

Mediante la transformación de Baiocchi, la cual permite definir una nueva variable dependiente  $w(x,y)$ , es posible encontrar nuevas formulaciones al problema planteado en este capítulo. Y en este punto resulta conveniente recordar que como potencial de la velocidad se toma al valor expresado en la fórmula (1.8.2), es decir

$$\varphi = y + \frac{p}{\gamma_w} \quad (5.4.1)$$

Por otra parte de la fórmula (5.3.10) se sabe que la expresión  $-\bar{\psi}dx + (y - \bar{\varphi})dy$  es una diferencial exacta en  $D$ . Y de aquí que se defina a la función

$$w(P) = \int_F^P -\bar{\psi}dx + (y - \bar{\varphi})dy \quad \text{para } P \in D \quad (5.4.2.a)$$

donde la integral se evalúa a lo largo de cualquier curva regular que una los puntos  $F$  y  $P$ .

En particular se tiene para todo punto  $(x,y)$  en  $\bar{D}$

$$w(x,y) = \int_y^H [\bar{\varphi}(x,t) - y]dt \quad (5.4.2.b)$$

y esta es la transformación de Baiocchi.

Antes de proceder a establecer el problema abordado en términos de la transformación de Baiocchi resulta conveniente fundamentar algunas de sus propiedades

I.- Se afirma que la variable  $w(x,y)$  es continua en  $\bar{D}$

En efecto, es fácil comprobar que

$$w(x,y) = \begin{cases} \int_y^{f(x)} [\bar{\varphi}(x,t)-t]dt & \text{en } \Omega \\ 0 & \text{en } \bar{D} - \bar{\Omega} \\ 0 & \text{en } \Gamma_1 \end{cases} \quad (5.4.3)$$

II.- Se afirma que la función  $w(x,y)$  es positiva en  $\Omega$ .

En efecto, en virtud de la fórmula (5.4.1), (5.4.2)

deviene en

$$w(x,y) = \int_y^{f(x)} \frac{p(x,t)}{\gamma_w} dt \quad (5.4.4)$$

pues tanto  $p(x,y)$  como  $\gamma_m$  son positivas en  $\Omega$ .

En otros términos, se tiene que

$$w(x,y) > 0 \quad \text{en } \Omega \quad (5.4.5)$$

III.- Se afirma que  $w(x,y)$  posee primeras derivadas continuas.

Mediante simple derivación de (5.4.2) se obtiene que

$$w_x = f_x(x) [\bar{\varphi}(x, f(x)) - f(x)] + \int_y^{f(x)} \bar{\varphi}_x(x,t) dt$$

y como en la frontera libre  $\Gamma_1$   $\bar{\varphi}(x, f(x)) = f(x)$

$$w_x = \begin{cases} \int_y^{f(x)} \bar{\varphi}_x(x,t) dt & \text{en } \bar{\Omega} \\ 0 & \text{en } \bar{D} - \bar{\Omega} \end{cases} \quad (5.4.6.a)$$

$$(5.4.6.b)$$

De la ecuación (5.4.2.a) se obtiene también

$$w_x(P) = -\bar{\psi}(x,y) \quad (5.4.6)$$

De modo análogo se deduce

$$w_y(x,y) = \begin{cases} -[\bar{\varphi}(x,y) - y] & \text{en } \bar{\Omega} \\ 0 & \text{en } \bar{D} - \bar{\Omega} \end{cases} \quad (5.4.7.a)$$

$$(5.4.7b)$$

Seguidamente se procede a obtener la formulación diferencial del problema en términos de la función  $w(x,y)$ .

Por el teorema de Green y en virtud de las condiciones de frontera estipuladas para las expresiones  $\frac{\partial w}{\partial n}$  y  $v$  se deduce

$$\iint_D \nabla v \nabla w dx dy = \int_{\partial D} v \frac{\partial w}{\partial n} ds - \iint_D v \nabla^2 w dx dy = - \iint_D v \nabla^2 w dx dy \quad (5.4.8)$$

Se define ahora a la función

$$\Phi = \int_0^y v(x,t) dt \quad (5.4.9)$$

y de aquí se sabe que

$$v(x,y) = \Phi_y(x,y) \quad (5.4.10)$$

Sea pues

$$\begin{aligned}
\iint_D \nabla v \nabla w \, dx \, dy &= \iint_D [v_x w_x + v_y w_y] \, dx \, dy \\
&= \iint_D [w_x \phi_{xy} + w_y \phi_{yy}] \, dx \, dy \\
&= \iint_{\Omega} [w_y \phi_{xx} + w_y \phi_{yy}] \, dx \, dy \quad (5.4.11)
\end{aligned}$$

fórmula que se obtiene mediante integración por partes, se observa que la función  $\phi$  se anula en los segmentos AF, AB y BC y que también  $w$  se anula en  $\Gamma_1$ .

Sustituyendo (5.4.7.a), (5.3.8) y (5.4.10) en (5.4.11) se obtiene

$$\begin{aligned}
\iint_D \nabla v \nabla w \, dx \, dy &= - \iint_{\Omega} [(\phi - y) \phi_{xx} + (\phi - y) \phi_{yy}] \, dx \, dy \\
&= - \iint_{\Omega} \phi \nabla^2 \phi \, dx \, dy + \iint_{\Omega} y \nabla^2 \phi \, dx \, dy \quad (5.4.12)
\end{aligned}$$

y mediante el teorema de Green, observando que  $\nabla^2 \phi = 0$  en  $\Omega$  se deduce

$$\begin{aligned}
\iint_D \nabla v \nabla w \, dx \, dy &= \iint_{\Omega} (\phi_x \phi_x + \phi_y \phi_y - \phi_y) \, dx \, dy \\
&= \iint_{\Omega} -v \, dx \, dy \\
&= \iint_D -v \chi_{\Omega} \, dx \, dy \quad (5.4.13)
\end{aligned}$$

donde

$$\chi_{\Omega} = \begin{cases} 1 & \text{en } \Omega \\ 0 & \text{en } D - \Omega \end{cases}$$

Así pues de las ecuaciones (5.4.8) y (5.4.13) se obtiene que

$$\nabla^2 w = \begin{cases} 1 & \text{en } \Omega \quad (w > 0) \\ 0 & \text{en } D - \Omega \quad (w = 0) \end{cases} \quad (5.4.14)$$

Se procede ahora a establecer las condiciones que la función  $w(x,y)$  debe satisfacer en la frontera de la región  $D$ .

$$\text{en AF, } \bar{\phi}(0,y) = H, \quad w(0,y) = \int_y^H (H-t)dt = \frac{1}{2}(H-y)^2 \quad (5.4.15.a)$$

$$\text{en BC, } \bar{\phi}(a,y) = h, \quad w(a,y) = \int_y^h (h-t)dt = \frac{1}{2}(h-y)^2 \quad (5.4.15.a)$$

$$\text{en CC}_1, \bar{\phi}(a,y) = y, \quad w(a,y) = 0 \quad (5.4.15.c)$$

$$\text{en C}_1\text{E, } \bar{\phi}(a,y) = y, \quad w(a,y) = 0 \quad (5.4.15.d)$$

$$\text{en FE, } \bar{\phi}(x,H) = y, \quad w(x,h) = 0 \quad (5.4.15.e)$$

Y puesto que AB es una línea de corriente se tiene que

$$w_x(x,0) = \int_0^H \bar{\phi}_x(x,t) dt = -q$$

Usando las ecuaciones (5.4.14.a) y (5.4.15.b) donde se toma  $y=0$  se obtiene

$$w_x = -\frac{1}{2}(H^2 - h^2)/a$$

y de aquí integrando respecto a  $x$ , se recuerda que para  $x=0$ ,  $w(0,0) = \frac{1}{2}H^2$ , se obtiene que

$$\text{en AB, } \phi_y(x,0)=0, \quad w(x,0) = \frac{1}{2}H^2 - \frac{1}{2}(H^2 - h^2) \cdot x/a$$

$$= \frac{1}{2}H^2 - (H^2 - h^2) \cdot x/(2a) \quad (5.4.16)$$

Otra forma de expresar en el dominio  $D$  a las ecuaciones (5.4.14) es la siguiente

$$w(1 - \nabla^2 w) = 0 \quad (5.4.17.a)$$

$$1 - \nabla^2 w(x,y) \geq 0, \quad w(x,y) \geq 0 \quad (5.4.17.b)$$

Así pues el problema ha quedado planteado ahora en términos de una ecuación y una desigualdad diferencial. Una vez resuelto este sistema, la región húmeda  $\Omega$  es aquella donde  $w(x,y) > 0$ , es decir

$$\Omega = \{(x,y): (x,y) \in D, w(x,y) > 0\} \quad (5.4.18)$$

y la frontera libre  $y = f(x)$  es dada por

$$f(x) = \sup\{y: (x,y) \in \Omega, 0 < x < a.\} \quad (5.4.19)$$

donde

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

y

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

## 5.5 FORMULACIÓN VARIACIONAL DEL PROBLEMA

Sea  $\bar{p}(x,y)$  las condiciones de Dirichlet dadas por las ecuaciones (5.4.15) y sea el conjunto convexo cerrado  $K \subset H^1(D)$ , donde se define al conjunto  $K$  por  $K = \{v: v \in H^1(D), v|_{\partial D} = \bar{p}, v \geq 0 \text{ c.d. en } D\}$

Luego se afirma que si  $w \in K$  satisface a las ecuaciones (5.4.14), (5.4.15) y (5.4.17), entonces ~~también~~ satisface la siguiente desigualdad variacional

$$a(w, v-w) \geq (v-w), \text{ para toda } v \in K \quad (5.5.1)$$

donde

$$\begin{aligned} a(w, v-w) &= \iint_D \nabla w \cdot \nabla (v-w) dx dy \\ &= \iint_D \{w_x (v_x - w_x) + w_y (v_y - w_y)\} dx dy \end{aligned} \quad (5.5.2)$$

y

y

$$(v-w) = - \iint_D (v-w) dx dy \quad (5.5.3)$$

En efecto, sea  $\beta = v-w$ , donde  $\beta \in H_0^1(D)$ , luego

$$\begin{aligned} & \iint_D \{\nabla \beta \cdot \nabla w\} dx dy + \iint_D \beta dx dy = \\ & = \iint_D \{\nabla \beta \cdot \nabla w\} dx dy + \iint_D \beta \chi_\Omega dx dy + \iint_{D-\Omega} v dx dy \end{aligned} \quad (5.5.4)$$

puesto que  $w=0$  en  $\bar{D} - \bar{\Omega}$ .

Se define ahora

$$\phi(x, y) = \int_0^y \beta(x, t) dt$$

luego

$$\beta(x, y) = \phi_y(x, y)$$

y como tanto  $\phi$  como sus derivadas se anulan en FA, AB y BC y  $w$  lo hace en FE, procediendo como en el caso de la ecuación (5.4.11) se obtiene

$$\iint_D \{\nabla \beta \cdot \nabla w\} dx dy = \iint_D \{w_y \phi_{xx} + w_y \phi_{yy}\} dx dy \quad (5.5.5)$$

y de aquí, mediante el empleo de las fórmulas (5.3.8) y (5.4.7), re-

pitando el desarrollo dado para la deducción de las fórmulas (5.4.12) y (5.4.13) se llega a

$$\iint_D \{\nabla \beta \cdot \nabla w\} dx dy = - \iint_D \beta \chi_\Omega dx dy \quad (5.5.6)$$

y como  $v \geq 0$  en  $\bar{D} - \bar{\Omega}$ ,

$$\iint_{\bar{D} - \bar{\Omega}} v dx dy \geq 0 \quad (5.5.7)$$

entonces al sustituir (5.5.6) y (5.5.7) en la ecuación (5.5.4) se obtiene

$$a(w, v-w) \geq (v-w)$$

Recíprocamente, sea  $w \in K$  tal que satisface la desigualdad variacional (5.5.1), luego mediante el ~~teorema~~ de Green se sabe que

$$- \iint_D (v-w) \nabla^2 w dx dy \geq - \iint_D (v-w) dx dy \quad (5.5.8)$$

y de aquí

$$\iint_D [\nabla^2 w - 1](v-w) dx dy \leq 0 \quad (5.5.9)$$

Si se hace  $v=w+\beta$  donde  $\beta \in C_0^\infty(0)$ ,  $\beta \geq 0$ , la ecuación

(5.5.9) se transforma en

$$\iint_D [\nabla^2 w - 1] \, dx dy < 0 \quad (5.5.10.a)$$

y de aquí se sabe que

$$\nabla^2 w \leq 1 \quad (5.5.10.b)$$

o sea

$$\iint_D \nabla^2 w (-\beta) \, dx dy \leq 0 \quad (5.5.10.c)$$

y finalmente se tiene que

$$\nabla^2 w \geq 0 \quad (5.5.11)$$

Por otra parte se observa que la determinación de la variable  $w \in K$  según la fórmula (5.5.1) equivale a resolver el siguiente problema relativo a minimización

$$J(w) \leq J(v) \quad (5.5.12)$$

donde

$$J(v) = \frac{1}{2} \iint_D [v_x^2 + v_y^2] \, dx dy + \iint_D v \, dx dy \quad (5.5.13)$$

En efecto, expresando a la desigualdad (5.5.1) en la siguiente forma

$$- \iint_D \{w_x^2 + w_y^2\} dx dy - \iint_D w dx dy \geq - \iint_D \{w_x v_x + w_y v_y\} dx dy - \iint_D v dx dy \quad (5.5.14)$$

y usando la conocida expresión

$$2ab \leq a^2 + b^2 \quad (5.5.15)$$

deducida a partir de  $(a-b)^2 \geq 0$ . Si ahora se toma  $a=w_x$  y  $b=v_x$  se obtiene

$$2w_x v_x \leq w_x^2 + v_x^2 \quad (5.5.16)$$

y si se toma  $a=w_y$  y  $b=v_y$  se llega a

$$2w_y v_y \leq w_y^2 + v_y^2 \quad (5.5.17)$$

así pues, usando las desigualdades (5.5.16) y (5.5.17) en (5.5.14) se obtiene (5.5.12).

Por último, se afirma que la desigualdad variacional (5.5.1) tiene cuando más una solución.

Supóngase que tanto  $w_1$  como  $w_2$  son soluciones de (5.5.1), luego para toda  $v \in K$

$$a(w_1, v - w_1) \geq (v - w_1) \quad (5.5.18)$$

y

$$a(w_2, v-w_2) \geq (v-w_2) \quad (5.5.19)$$

si ahora se hace  $v=w_2$  en (5.5.18) y  $v=w_1$  en (5.5.19) y se suman ambas desigualdades, se obtiene

$$a(w_1, w_2-w_1) + a(w_2, w_1-w_2) \geq 0 \quad (5.5.20)$$

es decir

$$- \iint_D \nabla(w_2 - w_1) \cdot \nabla(w_2 - w_1) dx dy \geq 0 \quad (5.5.21)$$

o sea

$$- \iint_D \{ [(w_2 - w_1)_x]^2 + [(w_2 - w_1)_y]^2 \} dx dy \geq 0 \quad (5.5.22)$$

y como el integrando es positivo, el valor de la integral también es positivo. De aquí que  $w_2 - w_1 = \text{constante}$  en  $D$ . El valor de esta constante es cero pues el término  $w_2 - w_1$  se anula en alguna parte de la frontera de  $D$ . Luego  $w_1 = w_2$ .

## 5.6 DISCRETIZACION DEL MODELO

En las secciones 5.4 y 5.5 se demostró que la frontera libre para el flujo de filtración correspondiente a la presa de paredes verticales mostrada en la figura 5.1.1 se puede encontrar mediante la solu-

ción del siguiente

# PROBLEMA I

Se busca determinar a la función  $w(x,y) \in K$ , tal que para toda  $v \in K$  se tiene que

$$\iint_D \nabla w \cdot \nabla (v-w) dx dy \geq - \iint_D (v-w) dx dy \quad (5.6.1)$$

donde

$$D = \{(x,y): 0 < x < a, 0 < y < H\} \quad (5.6.2)$$

y

$$K = \{v: v \in H^1(D), v|_{\partial D} = \bar{p}, v \geq 0 \text{ c.d. en } D\} \quad (5.6.3)$$

Si se define a

$$\Omega = \{(x,y) \in D: w(x,y) > 0\} \quad (5.6.4)$$

entonces la curva  $\Gamma_1$  esta dada por

$$f(x) = \sup \{(x,y) \in \Omega, 0 < x < a\} \quad (5.6.5.a)$$

donde

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad (5.6.5.b)$$

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \quad (5.6.5.c)$$

En este punto es conveniente recordar que  $H^1(D)$  es el espacio de Sobolev dado por el conjunto de las funciones  $u$  tales que  $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(D)$  quedando el producto interior definido por

$$\langle u, v \rangle = \iint_D u v dx dy + \iint_D \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy + \iint_D \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} dx dy \quad (5.6.6)$$

Con el propósito de facilitar la discretización del problema se procede a definir la siguiente función que coincide con la función  $w(x,y)$  en sus valores en la frontera de la región  $D$ .

$$\psi(x,y) = \frac{x}{2a} (h^2 - H^2 - 2(h-H)y) + \frac{(H-y)^2}{2} \text{ si } 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq h \quad (5.6.7.a)$$

$$\psi(x,y) = \frac{(H-y)^2}{2} (1 - \frac{x}{a}) \text{ si } 0 \leq x \leq a, h \leq y \leq H \quad (5.6.7.b)$$

y en consecuencia el conjunto  $K$  queda transformado en

$$K^* = \{v: v \in H_0^1(D), v \geq -\psi(x,y) \text{ c.d. en } D\} \quad (5.6.8)$$

y el problema I en el

#### PROBLEMA II

Se busca determinar a la función  $\beta(x,y) \in K^*$  tal que para toda  $v \in K^*$  se tiene que

$$\iint_D \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) + \frac{\partial \beta}{\partial y} \left( \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial y} \right) \right\} dx dy \geq \iint_D -(1 - \Delta \psi(x, y))(v - \beta) dx dy \quad (5.6.9)$$

donde

$$\beta(x, y) = w(x, y) - \psi(x, y) \quad (5.6.10)$$

Si ahora se introduce la siguiente funcional

$$J(v) = \frac{1}{2} \iint_D (\text{grad } v)^2 dx dy + \iint_D (1 - \Delta \psi) v dx dy \quad (5.6.11)$$

el problema II se puede expresar equivalentemente del siguiente modo:

#### PROBLEMA III

Se busca determinar a la función  $\beta(x, y) \in K^*$  tal que

$$J(\beta) = \inf_{v \in K^*} J(v) \quad (5.6.12)$$

Con el propósito de no extender aún más la presente disertación se omite la correspondiente demostración. (El lector interesado puede consultar el texto de Baiocchi y Capelo [4], pp16).

Sean ahora los números

$$h_1 = \frac{a}{N_1}, \quad h_2 = \frac{H}{N_2} \quad (5.6.13)$$

donde el intervalo  $[0, a]$  se divide en  $N_1$  subintervalos y el intervalo  $[0, H]$  en  $N_2$  subintervalos. A esta partición se le asocia el

vector

$$h = (h_1, h_2) \quad (5.6.14)$$

Considérese ahora el conjunto de puntos en  $R^2$  tales que

$$M = (m_1 h_1, m_2 h_2) \quad (5.6.15)$$

donde  $m_1$  y  $m_2$  son números naturales.

Seguidamente a cada punto en  $M$  se le asocia las siguientes áreas:

$$\sigma_h(M) = [m_1 - \frac{h_1}{2}, m_1 + \frac{h_1}{2}) \times [m_2 - \frac{h_2}{2}, m_2 + \frac{h_2}{2}) \quad (5.6.16)$$

y

$$\rho_h(M) = \sigma_h(M - \frac{1}{2}h_1) \cup \sigma_h(M - \frac{1}{2}h_2) \quad (5.6.17)$$

La región  $D$  queda discretizada del siguiente modo

$$D_h = \{M: \rho_h(M) \subset D\} \quad (5.6.18)$$

y el espacio de las funciones de prueba en  $H_0^1(D)$  se aproxima mediante el conjunto de las funciones escalonadas dadas por

$$V_h = \{v_h: v_h = \sum_{M \in D_h} v_h(M) \chi_{h,M}(x,y), v_h(M) \text{ es cte y real}\} \quad (5.6.19)$$

donde  $\chi_{h,M}$  es la función característica para el área  $\sigma_h(M)$ .

Cuando  $z = (x, y)$ ,  $e_1 = (1, 0)$  y  $e_2 = (0, 1)$ , el operador de diferenciación se da mediante

$$\delta_1 \varphi(z) = \frac{1}{h_1} [\varphi(z + \frac{h_1}{2} e_1) - \varphi(z - \frac{h_1}{2} e_1)] \quad (5.6.20)$$

y

$$\Delta_h = \delta_1 \delta_1 \varphi + \delta_2 \delta_2 \varphi \quad (5.6.21)$$

Mediante la aplicación reiterada de la expresión (5.6.20) se obtiene

$$\delta_1 \delta_1 \varphi(z) = \frac{1}{h_1^2} [\varphi(x+h_1, y) - 2\varphi(x, y) + \varphi(x-h_1, y)] \quad (5.6.22.a)$$

y

$$\delta_2 \delta_2 \varphi(z) = \frac{1}{h_2^2} [\varphi(x, y+h_2) - 2\varphi(x, y) + \varphi(x, y-h_2)] \quad (5.6.22.b)$$

El conjunto  $K^*$  adquiere ahora la siguiente presentación dada por la aplicación  $r_h: V \rightarrow V_h$  y se denota por  $K_h$ .

$$r_h v = \sum_{M \in D_h} \left\{ \frac{1}{h_1 h_2} \right\} \left\| \int_D v x_{h,M} dx dy \right\| x_{h,M} \quad (5.6.23)$$

$$K_h = \{v_h: v_h \in V_h, v_h \geq -r_h \psi \text{ en } D\} \quad (5.6.24)$$

Con el propósito de ilustrar el sentido de la transformación (5.6.23) se desarrolla el siguiente ejemplo.

Sea  $(\bar{x}, \bar{y}) \in \sigma_h(M_j)$ , luego

$$r_h v(\bar{x}, \bar{y}) = \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{\sigma(M_j)} v dx dy \quad (5.6.25)$$

Para el caso cuando  $h \rightarrow 0$ , Comincioli et al [7] han demostrado que  $r_h v$ ,  $\delta_1 r_h v$ ,  $w_h$ ,  $\delta_1 \beta_h$  convergen respectivamente a las funciones  $v$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x_1}$ ,  $w$ ,  $\frac{\partial \beta}{\partial x_1}$ , en  $L^2(R)$ .

Una vez hechas estas digresiones, el problema II queda planteado en los siguientes términos

#### PROBLEMA IV

Sea  $\psi_h = r_h \psi$ , se busca precisar a la función  $\beta_h \in K_h$

tal que

$$\begin{aligned} & \iint_D \delta_1 \beta_h (\delta_1 v_h - \delta_1 \beta_h) + \delta_2 \beta_h (\delta_2 v_h - \delta_2 \beta_h) dx dy \geq \\ & \geq \iint_D -(1 - \Delta_h \psi_h)(v_h - \beta_h) dx dy \end{aligned} \quad (5.6.26)$$

para toda  $v_h \in K_h$ .

lo cual interpretado en términos del problema III se traduce, equivalentemente en el

#### PROBLEMA V

Se busca determinar a la función  $\beta_h \in K_h$  tal que

$$J_h(\beta_h) = \inf_{v_h \in K_h} J_h(v_h) \quad (5.6.28)$$

donde

$$J_h(v_h) = \frac{1}{2} \iint_D \{ (\delta_1 v_h)^2 + (\delta_2 v_h)^2 \} dx dy + \iint_D (1 - \Delta_h \psi_h) v_h dx dy \quad (5.6.29)$$

#### 5.7 RESOLUCION DEL PROBLEMA DISCRETO

Con el propósito de obtener fórmulas explícitas que faciliten la determinación de la solución numérica del problema V se procede a describir la ecuación (5.6.27) en detalle, por supuesto de acuerdo con los conceptos expresados en la sección anterior. A tal efecto, mediante la integración por partes, y una vez que se observa que la función  $v_h$  se anula en la frontera de la región D, la funcional  $J_h(v_h)$  dada en (5.6.28) adquiere la siguiente presentación

$$J_h(v_h) = -\frac{1}{2} \iint_D \Delta_h v_h \cdot v_h dx dy + \iint_D (1 - \Delta_h \psi_h) v_h dx dy \quad (5.7.1)$$

y de aquí, teniendo presente la definición (5.6.19) se obtiene

$$\begin{aligned}
J_h(v_h) = & -\frac{1}{2} \iint_D \left( \sum_{M \in D_h} \Delta_h x_{h,M}(x,y) v_h(M) \right) \left( \sum_{N \in D_h} x_{h,M}(x,y) v_h(N) \right) dx dy + \\
& + \iint_D (1 - \Delta_h \psi_h) \left( \sum_{P \in D_h} x_{h,P}(x,y) v_h(P) \right) dx dy \quad (5.7.2)
\end{aligned}$$

Ahora bien, como

$$\begin{aligned}
\Delta_h v_h \cdot v_h &= \Delta_h \left( \sum_{M \in D_h} x_{h,M}(x,y) v_h(M) \right) \cdot \left( \sum_{N \in D_h} x_{h,N}(x,y) v_h(N) \right) = \\
&= \Delta_h [x_{h,M}(x,y) v_h(M) + \dots + x_{h,M_h}(x,y) v_h(M_{N_h})] \cdot \left( \sum_{N \in D_h} x_{h,N}(x,y) v_h(N) \right) + \\
&= [v_h(M) \Delta_h x_{h,M}(x,y) + \dots + v_h(M_{N_h}) \Delta_h x_{h,M_{N_h}}(x,y)] \cdot \left( \sum_{N \in D_h} x_{h,N}(x,y) v_h(N) \right) = \\
&= \left( \sum_{M \in D_h} v_h(M) \Delta_h x_{h,M}(x,y) \right) \cdot \left( \sum_{N \in D_h} x_{h,N}(x,y) v_h(N) \right) = \\
&= \sum_{M \in D_h} \sum_{N \in D_h} (\Delta_h x_{h,M}(x,y) x_{h,N}(x,y) v_h(M) \cdot v_h(N)) \quad (5.7.3)
\end{aligned}$$

usando este resultado en (5.7.2) la funcional  $J_h(v_h)$  queda expresada por

$$J_h(v_h) = -\frac{1}{2} \sum_{M \in D_h} \sum_{N \in D_h} \left\{ \iint_D (\Delta_h x_{h,M}) x_{h,N} dx dy \right\} \cdot v_h(M) \cdot v_h(N) +$$

$$+ \sum_{P \in D_h} \left\{ \iint_D (1 - \Delta_h \psi_h) x_{h,P} dx dy \right\} \cdot v_h(P) \quad (5.7.4)$$

Así pues, la funcional (5.7.2) se puede compactar de la siguiente manera

$$J_h(v_h) = \frac{1}{2} (Ax, x) - (b, x) \quad (5.7.5)$$

donde  $x$  es un vector del conjunto  $\{v_h(M) : M \in D_h\}$  y donde el símbolo  $(\cdot, \cdot)$  indica el producto interior. Aquí por supuesto los elementos de la matriz  $A$  están dados por

$$a_{M,N} = - \iint_D \Delta_h x_{h,M} \cdot x_{h,N} dx dy \quad (5.7.6)$$

mientras que el vector  $b$  está definido por la relación

$$b_P = - \iint_D (1 - \Delta_h \psi_h) \cdot x_{h,P} dx dy \quad (5.7.7)$$

Seguidamente se procede a evaluar los valores  $a_{M,N}$ . Se consideran seis casos distintos, correspondientes a distintas posiciones que pueden guardar entre si los puntos M y N.

En efecto, de las expresiones (5.6.20) y (5.6.21) se sabe que

$$\Delta_h X_{h,M}(x,y) = \frac{1}{h_1^2} [X_{h,M}(x+h_1,y) - 2 \cdot X_{h,M}(x,y) + X_{h,M}(x-h_1,y)] + \frac{1}{h_2^2} [X_{h,M}(x,y+h_2) - 2 \cdot X_{h,M}(x,y) + X_{h,M}(x,y-h_2)] \quad (5.7.8)$$

así pues se tiene que

Caso I  $a_{M,N} = 0$  si el punto  $(x,y) \notin \sigma_h(N)$ , es decir se tiene que  $a_{M,N}$  se anula si los puntos M y N no coinciden o no son adyacentes.

Caso II Sean ahora los puntos  $M=(x-h_1,y)$  y  $N=(x,y)$ . Los conjuntos  $\sigma_h(M)$  y  $\sigma_h(N)$  se muestran en la figura 5.6.1

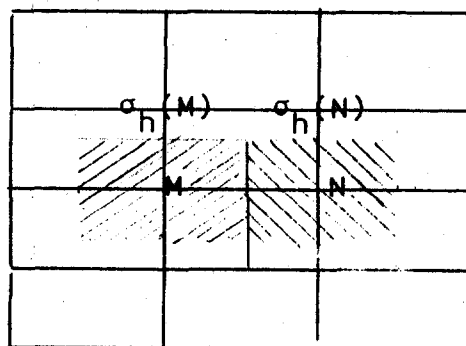


Fig. 5.6.1

y como de (5.7.8) se deduce que

$$\Delta_h X_{h,M}(x,y) = \frac{1}{h_1^2} [0 - 2 \cdot 0 + 1] + \frac{1}{h_2^2} [0 - 2 \cdot 0 + 0] = \frac{1}{h_1^2}$$

y de aquí que

$$a_{M,N} = \iint_D \Delta_h X_{h,M} \cdot X_{h,N} dx dy =$$

$$\int_{y-\frac{h_2}{2}}^{y+\frac{h_2}{2}} \int_{x-\frac{h_1}{2}}^{x+\frac{h_1}{2}} \frac{1}{h_1} dx dy = -\frac{h_2}{h_1}$$

Caso III

Sean  $M=(x+h_1, y)$  y  $N=(x, y)$ , luego

$$\Delta_h X_{h,N}(x,y) = \frac{1}{h_1^2} [1 - 2 \cdot 0 + 0] + \frac{1}{h_2^2} [0 - 2 \cdot 0 + 0] = \frac{1}{h_1^2}$$

y de aquí que

$$a_{M,N} = \iint_D \Delta_h X_{h,M} \cdot X_{h,N} dx dy =$$

$$= \int_{y-\frac{h_2}{2}}^{y+\frac{h_2}{2}} \int_{x-\frac{h_1}{2}}^{x+\frac{h_1}{2}} \frac{1}{h_1} dx dy = -\frac{h_2}{h_1}$$

Caso IV

Sean  $M=(x, y-h_2)$  y  $N=(x, y)$ , luego

$$\Delta_h X_{h,M}(x,y) = \frac{1}{h_1^2} [0 - 2 \cdot 0 + 0] + \frac{1}{h_2^2} [0 - 2 \cdot 0 + 1] = \frac{1}{h_2^2}$$

y de aquí que

$$a_{M,N} = \iint_D \Delta_h X_{h,M} \cdot X_{h,N} dx dy = -\frac{h_1}{h_2}$$

Caso V Sean  $M=(x, y+h_2)$  y  $N=(x, y)$ , de modo análogo se obtiene

$$a_{M,N} = -\frac{h_1}{h_2}$$

Caso VI Finalmente, sean  $M=N=(x, y)$ , luego

$$\begin{aligned} \Delta_h X_{h,M}(x, y) &= \frac{1}{h_1^2} [0 - 2 \cdot 1 + 0] + \frac{1}{h_2^2} [0 - 2 \cdot 1 + 0] = \\ &= -2 \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) \end{aligned}$$

luego

$$\begin{aligned} a_{M,N} &= \iint_D \Delta_h X_{h,M} \cdot X_{h,N} dx dy = \\ &= \int_{y-\frac{h_2}{2}}^{y+\frac{h_2}{2}} \int_{x-\frac{h_1}{2}}^{x+\frac{h_1}{2}} \left\{ -2 \left( \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{h_2^2} \right) \right\} dx dy = 2 \left( \frac{h_1^2 + h_2^2}{h_1 h_2} \right) \end{aligned}$$

Resumiendo se tiene que

$a_{M,N} = 0$  si los puntos  $M$  y  $N$  no coinciden o no son  
adyacentes (5.7.9.a)

$a_{M,N} = 2 \left( \frac{h_1^2 + h_2^2}{h_1 h_2} \right)$  si  $M=N$  (5.7.9.b)

$$a_{M \pm h_1, M} = -\frac{h_1}{h_2} \quad (5.7.9.c)$$

$$a_{M \pm h_2, M} = -\frac{h_2}{h_1} \quad (5.7.9.c)$$

Así pues, se han considerado los valores correspondientes al primer sumando del lado derecho de la igualdad (5.7.4). Se pasa ahora a considerar al segundo y último sumando.

El primer paso estriba en evaluar a la función  $\psi_h$  haciendo uso de las ecuaciones (5.6.7) y del operador (5.6.23). A tal efecto se consideran tres casos mismos que corresponden a los dominios de integración donde rige (5.6.7.a), donde rige (5.6.7.b) y a la coyuntura donde una mitad del dominio es afectado por la ecuación (5.6.7.a) mientras que la mitad restante es comprendida por la fórmula (5.6.7.b).

Caso I Sea  $M=(x_1, y_1)$  un punto tal que  $0 \leq x_1 \leq a$  y  $h \leq y_1 \leq H$ , luego según (5.6.25) se tiene

$$\begin{aligned} \psi_h = r_h \psi &= \frac{1}{h_1 h_2} \int_{y_1 - h_2/2}^{y_1 + h_2/2} \int_{x_1 - h_1/2}^{x_1 + h_1/2} \frac{(H-y)^2}{2} (1-x/a) dx dy = \\ &= \frac{1}{h_1 h_2} \left\{ H^2 \left[ (y_1 + h_2/2) - (y_1 - h_2/2) \right] - H \left[ (y_1 + h_2/2)^2 - (y_1 - h_2/2)^2 \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[ (y_1 + h_2/2)^3 - (y_1 - h_2/2)^3 \right] / 3 \right\} \cdot \left\{ [(x_1 + h_1/2) - (x_1 - h_1/2)] / 2 - \right. \\ &\quad \left. - [(x_1 + h_1/2) - (x_1 - h_1/2)] / (4a) \right\} \quad (5.7.10) \end{aligned}$$

Caso II Sea  $M=(x_1, y_1)$  un punto tal que  $0 \leq x_1 \leq a$  y  $0 \leq y_1 \leq h$ ,

luego se tiene que

$$\begin{aligned}
 \psi_h = r_h \psi &= \frac{1}{h_1 h_2} \int_{y_1 - h_2/2}^{y_1 + h_2/2} \int_{x_1 - h_1/2}^{x_1 + h_1/2} \{ x/(2a) \cdot (H^2 - H^2 2(h-H)y) + (H-y)/2 \} dx dy = \\
 &= \frac{1}{h_1 h_2} \{ 1/(4a) \cdot [(x_1 + h_1/2)^2 - (x_1 - h_1/2)^2] \cdot [(H^2 - H^2) \cdot (y_1 + h_2/2) - \\
 &\quad - (y_1 - h_2/2)] - (h-H) \cdot [(y_1 + h_2/2)^2 - (y_1 - h_2/2)^2] \} + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \{ (x_1 + h_1/2) - (x_1 - h_1/2) \cdot H^2 \cdot [(y_1 + h_2/2) - (y_1 - h_2/2)] - \\
 &\quad - H \cdot [(y_1 + h_2/2)^2 - (y_1 - h_2/2)^2] + [(y_1 + h_2/2)^3 - (y_1 - h_2/2)^3] / 3 \} \\
 &\quad (5.7.11)
 \end{aligned}$$

Caso III Sea  $M=(x_1, y_1)$  donde  $0 \leq x_1 \leq a$  y  $y_1 = h + H/N_2$  luego

$$\begin{aligned}
 \psi_h = r_h \psi &= \frac{1}{h_1 h_2} \int_{y_1}^{y_1 + h_2/2} \int_{x_1 - h_1/2}^{x_1 + h_1/2} (H-y)^2/2 \cdot (1-x/a) dx dy + \\
 &\quad + \frac{1}{h_1 h_2} \int_{y_1 - h_2/2}^{y_1} \int_{x_1 - h_1/2}^{x_1 + h_1/2} \{ x/(2a) \cdot (H^2 - H^2 2(y-h)y) + (H-y)^2/2 \} dx dy = \\
 &= \frac{1}{h_1 h_2} \{ H^2 [(y_1 + h_2/2) - y_1] - H [(y_1 + h_2/2)^2 - y_1^2] + \\
 &\quad + [(y_1 + h_2/2)^3 - y_1^3] / 3 \} \cdot [(x_1 + h_1/2) - (x_1 - h_1/2)] / 2 - \\
 &\quad - [(x_1 + h_1/2)^2 - (x_1 - h_1/2)^2] / (4a) \} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h_1 h_2} \{ 1/(4a) \cdot [(x_i + h_1/2)^2 - (x_i - h_1/2)^2] \cdot [(h^2 - H^2) \cdot (y_i - (y_i - h_2/2)) - \\
& - (h - H) \cdot [y_i - (y_i - h_2/2)]] + \frac{1}{2} \{ (x_i + h_1/2) - (x_i - h_1/2) \} \cdot \{ H^2 \cdot \\
& \cdot [y_i - (y_i - h_2/2)] - H \cdot [y_i - (y_i - h_2/2)^2] + [y_i^3 - (y_i - h_2/2)^3] / 3 \} \\
& \hspace{15em} (5.7.12)
\end{aligned}$$

Una vez que se han obtenido los términos que figuran en la expresión (5.7.5) se procede a minimizar dicha funcional. A tal efecto se utiliza una generalización del método de relajación para la resolución de sistemas lineales. El algoritmo que se da se debe a Cryer[10]. El proceso se inicia tomando un vector arbitrario  $x^0$  sujeto a  $x^0 \geq z$  donde  $z$  es un vector del conjunto  $\{-\psi_h(M) : M \in D_h\}$  y el paso de  $x^{(n)}$  a  $x^{(n+1)}$  es dado por

$$x_M^{(n+1/2)} = \frac{h_1 h_2}{2(h_1^2 + h_2^2)} \left[ \frac{h_1}{h_2} [x_{M-h_1}^{(n+1/2)} + x_{M+h_1}^{(n)}] + \frac{h_2}{h_1} [x_{M-h_2}^{(n+1/2)} + x_{M+h_2}^{(n)}] \right] - b_m \quad (5.7.13)$$

$$x_M^{(n+1)} = \max \{ z_M, x_M^{(n)} + \omega (x_M^{(n+1/2)} - x_M^{(n)}) \} \quad (5.7.14)$$

los puntos  $M$  varían sobre el conjunto  $D_h$  y el coeficiente de relajamiento  $\omega$  se toma así

$$0 < \omega < 2 \quad (5.7.15)$$

## 5.8 DESCRIPCION DEL PROGRAMA COMPUTACIONAL

En el apéndice I se presenta un programa computacional que se elaboró a fin de instrumentar computacionalmente el método descrito en el presente capítulo. Para tal efecto se empleó una microcomputadora Printaform PC 5207. El programa en cuestión permite determinar la frontera libre para el caso de la presa de terracería de paredes verticales mostrada en la figura 5.1.1.

### DATOS INICIALES

El programa para su funcionamiento requiere los siguientes datos iniciales:

- a.- Espesor de la presa
- b.- Altura del primer embalse
- c.- Altura del segundo embalse
- d.- Precisión del algoritmo
- e.- Número de intervalos horizontales
- f.- Número de intervalos verticales
- g.- Número máximo de iteraciones

La determinación de los parámetros correspondientes a los aspectos geométricos de la presa están referidos a la figura 5.1.1.

#### A.- Espesor de la presa

El espesor de la presa es la distancia horizontal que media entre los embalses. Esta longitud es igual al parámetro a.

B.- Altura del primer embalse

El primer embalse es aquél situado aguas arriba. En la figura se encuentra situado ~~a la izquierda~~ de la presa y tiene una altura igual a  $H$ .

C.- Altura del segundo embalse

El segundo embalse es aquél situado aguas abajo. En la figura se encuentra situado a la derecha de la presa y tiene una altura igual a  $h$ .

D.- Precisión del algoritmo

La precisión del algoritmo acota la máxima diferencia, tomada en su valor absoluto, para el valor de la variable  $w(x,y)$  calculado en todos los puntos de la red en dos iteraciones sucesivas.

E.- Número de intervalos horizontales

Este número  $N_1$  determina el número de intervalos en que se subdivide la base de la presa, de longitud  $a$ , para formar franjas verticales a efecto de construir la malla en la región D.

F.- Número de intervalos verticales

Este número  $N_2$  determina el número de intervalos en que se subdivide la altura  $H$  del primer embalse para formar franjas horizontales a efecto de construir la malla en la región D.

G.- Número máximo de iteraciones

Este número acota ~~superiormente~~ el número de iteraciones permitidas, es decir, la ejecución ~~del~~ programa se suspende ya sea porque se determinó a la variables  $w(x,y)$  con la precisión requerida, o ya sea porque el número de ite-

raciones alcanzó a esta cota.

Se aclara que el coeficiente de relajamiento quedó determinado dentro del programa tomándose su valor igual a 1.8.

| CAMPO | VARIABLE | DESCRIPCION                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------|----------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1     | XC       | Espesor de la presa                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| 2     | YA       | Altura del primer embalse                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 3     | YD       | Altura del segundo embalse                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 4     | NX       | Número de intervalos horizontales                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
| 5     | NY       | Número de intervalos verticales                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
| 6     | EPSI     | Presición del algoritmo                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
| 7     | NMAX1    | Número máximo de iteraciones                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| 8     | V(I,J)   | Es la varivable $w(I,J)$ . El programa inicia el proceso asignandole el el valor dado por (5.6.7) para aquellos punto ubicados en la frontera de la región D, mientras que el valor de esta variable en el interior de la región se determina mediante las ecuaciones (5.7.10), <del>(5.7.11)</del> y (5.7.12). El valor final se evalúa mediante (5.6.10). |

## 5.9 EJEMPLO DE APLICACION

Con el propósito de ilustrar el funcionamiento del algoritmo y del programa se procede a determinar la frontera libre para la presa mostrada en la figura 5.1.1 cuando se consideran las

siguientes características:

Espesor de la presa = 1.62 mts

Altura del primer embalse = 3.22 mts

Altura del segundo embalse = 0.84 mts

Precisión del algoritmo = 0.00001

Número de intervalos horizontales = 20

Número de intervalos verticales = 30

Número máximo de iteraciones = 40

En el apéndice J se presenta el listado de resultados.

En la figura 5.9.1 se muestra la región húmeda  $\Omega$  y la frontera libre  $\Gamma_1$  calculadas. Como se recordará, la región húmeda se determina mediante la ecuación (5.6.4) y corresponde a aquellos puntos de la región D para los cuales  $w(x,y) > 0$ , mientras que la frontera libre se localiza mediante la ecuación (5.6.5).

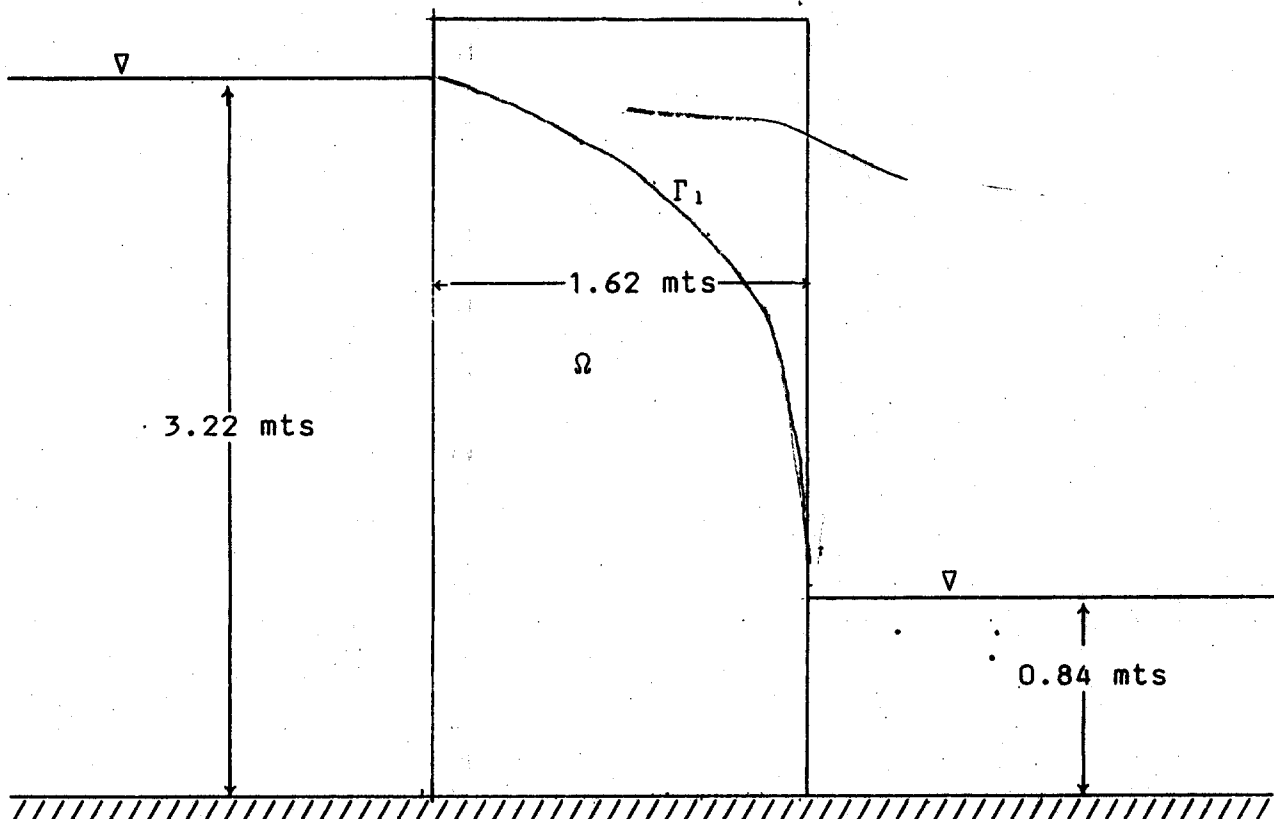


Fig. 5.9.1

## REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- 1.- BAIOCCHI,C. "Su un problema di frontiera libera connesso a questioni di idraulica". Ann. di Mat. pura e Appl.(IV) Vol. XCII, (1972) pp 107-127.
- 2.- BAIOCCHI,C.-COMINCIOLI,V.-MAGENES,E.-POZZI,G.A. "Free boundary problems in the theory of fluid flow through porous media. Existence and uniqueness theorems". Ann. di Mat. pura e Appl. (IV) Vol. XCVII, (1973) pp 1-82.
- 3.- BAIOCCHI,C.-COMINCIOLI,V.-MAGENES,E.-POZZI,G.A. "Fluid flow through porous media; a new theoretical and numerical approach". Publ n.69.-Laboratorio di Analisi Numerica C.N.R. Pavia (1974).
- 4.- BAIOCCHI,C.-CAPELO,A. "Variational and quasivariational inequalities". John Wiley and Sons.(1984).
- 5.- BECKER,E.B.-CAREY,G.F.-ODEN,J.T. "Finite elements. An introduction". Vol I. Prentice-Hall, Inc. (1981).
- 6.- BRUCH,J.C. "A survey of free boundary value problems in the theory of fluid flow through porous media: Variational inequality approach". Advances in Water Resources. Vol 3, pp 65-80.(1980).
- 7.- Charni, I.A. Dokl. Akad. Nauk SSSR 79,937-940.(1951).
- 8.- COMINCIOLI,V.-GUERRI,L.-VOLPI,G. "Analisi numerica di un problema di frontiera libera connesso con moto di un fluido attraverso un mezzo poroso". Publ n. 17 Laboratorio di Analisi Numerica C.N.R. Pavia.(1971).
- 9.- CRANK,J. "Free and moving bounday problems". Claredon Press. Oxford. (1984).
- 10.- CRYER,C.W. "The solution of a quadratic programming using systematic overrelaxation". SIAM J. Control. Vol. 9 No. 3 pp 385-392. (1972).
- 11.- HARR,M.E. "Groundwater and seepage". McGraw\_Hill Book Company (1962).
- 12.- HYDROLOGIC ENGINEERING CENTER. "Finite element solution of steady potencial flow problems" , 723-440. Nov. 1970

- 13.- ODEN, J.T. "Applied functional analysis". Prentice-Hall, Inc. (1979).
- 14.- ODEN, J.T.-KIKUCHI, N. "Recent advances. Theory of variational inequalities with applications to problems of flow through porous media". Int. J. Engng. Sci. Vol. 18, pp 1173-1284. (1980).
- 15.- REDDY, J.N. "An introduction to the finite element method". McGraw-Hill Book Company. (1984).
- 16.- STRAN, G.-FIX, G.J. "An analysis of the finite element method". Prentice-Hall, Inc. (1973)

A-1

A P E N D I C E   A

A-2

```

$RESET FREE
FILE 55=LEER,UNIT=DISK,RECORD=14,BLOCKING=30,AREA=1260
FILE 56=PRINT,UNIT=REMOTE,RECORD=14
FILE 66=DISPLAY,UNIT=PRINTER,RECORD=22
FILE 2=DISCO,UNIT=DISK,RECORD=14,BLOCKING=30,AREA=1260
FILE 3=DISCO,UNIT=DISK,RECORD=14,BLOCKING=30,AREA=1260

```

## PROBLEMA

```

1 DIMENSION TITLE(10),XCORD(400),YCORD(400),NODE(400,4),IZONE(400)
2,XPERM(20),YPERM(20),ALPHA(20),NDHD(100),HEAD(100),G(400,50)
3,THICK(400),FECHA(5)
4,FORMAT(1H,14,5X,F10.3)
5,FORMAT(1H,17,9F8.0)
6,FORMAT(1X,17,2(3X,F10.2))
7,FORMAT(1X,14,2(3X,F10.2))
8,FORMAT(1X,17,9F8.0)
9,FORMAT(1X,17,9F8.0)
10,FORMAT(1X,17,9F8.0)
11,FORMAT(1X,17,9F8.0)
12,FORMAT(1X,17,9F8.0)
13,FORMAT(1X,17,9F8.0)
14,FORMAT(1X,17,9F8.0)
15,FORMAT(1X,17,9F8.0)
16,FORMAT(1X,17,9F8.0)
17,FORMAT(1X,17,9F8.0)
18,FORMAT(1X,17,9F8.0)
19,FORMAT(1X,17,9F8.0)
20,FORMAT(1X,17,9F8.0)
21,FORMAT(1X,17,9F8.0)
22,FORMAT(1X,17,9F8.0)
23,FORMAT(1X,17,9F8.0)
24,FORMAT(1X,17,9F8.0)
25,FORMAT(1X,17,9F8.0)
26,FORMAT(1X,17,9F8.0)
27,FORMAT(1X,17,9F8.0)
28,FORMAT(1X,17,9F8.0)
29,FORMAT(1X,17,9F8.0)
30,FORMAT(1X,17,9F8.0)

```

```

00000100
00000200
00000300
00000400
00000500
00000600
00000700
00000800
00000900
00001000
00001100
00001200
00001300
00001400
00001500
00001600
00001700
00001800
00001900
00002000
00002100
00002200
00002300
00002400
00002500
00002600
00002700
00002800
00002900
00003000
00003100
00003200
00003300
00003400
00003500
00003600
00003700
00003800
00003900
00004000
00004100
00004200
00004300
00004400
00004500
00004600
00004700
00004800
00004900
00005000
00005100
00005200
00005300
00005400
00005500
00005600
00005700
00005800
00005900
00006000

```

```

31  FORMAT(" **COORDENADAS RADIALES, SIMETRICAS**")
33  FORMAT(1X,I4,5X,2(F11.4,2X),F8.2)
34  FORMAT(//)
35  FORMAT(" MATRIZ CON ANCHO DE BANDA (MAXBW) DE "
36  1,I4,/, " CORRESPONDIENTE AL NODO ",I4,/)
381  FORMAT(5A6)
380  WRITE(6,380) DAME LA FECHA"/
380  READ(5,381) FECHA
540  FORMAT(" *****")
540  WRITE(6,381) FECHA DE EJECUCION DEL PROGRAMA : ",5A6,/)
334  1" WRITE(6,334)
334  1" FORMAT(" LECTURA DE DATOS POR "/
334  1" (1) TERMINAL REMOTA"/" (2) ARCHIVO EN DISCO"/)
333  1" READ(5,/) LD
333  1" IF( LD.EQ.1) IREAD=5
333  1" IF( LD.EQ.2) IREAD=55
333  1" WRITE(6,333) DESEA SU SALIDA DE RESULTADOS POR"/
333  1" FORMAT(" (1) TERMINAL REMOTA"/" (2) IMPRESORA"/)
37  1" READ(5,/) IPR=6
37  1" IF( IPR.EQ.1) IPR=66
37  1" IF( IPR.EQ.2) IPR=6
37  1" WRITE(2,34) GO TO 922
37  1" IF( IREAD.EQ.55) GO TO 922
37  1" WRITE(IPRT,91) FECHA
37  1" WRITE(IPRT,91)
37  1" FORMAT(" TECLEE EL NOMBRE DEL TITULO "/)
37  1" CONTINUE
37  1" READ(3) TITLE
37  1" WRITE(2,38) TITLE
37  1" IF( IREAD.EQ.55) GO TO 921
37  1" IF( IREAD.EQ.92)
37  1" FORMAT(" TECLEE LOS VALORES DE "/
37  1" 1, " NNDLS ( NUMERO DE ELEMENTOS )"/
37  1" 2, " NNDLS ( NUMERO DE NODOS )"/
37  1" 3, " NNDLS ( NUMERO DE ZONAS )"/)
37  1" CONTINUE
37  1" READ(3) NNDLS,NNDLS,NZNS
37  1" IF( NNDLS.EQ.0) GO TO 320
37  1" IF( NNDLS.EQ.55) GO TO 923
37  1" IF( IREAD.EQ.93)
37  1" FORMAT(" TECLEE LOS VALORES DE:"/
37  1" 1, " NNDLS ( NUMERO DE NODOS DE POTENCIAL DADO )"/
37  1" 2, " NNDLS ( NUMERO DE ELEMENTOS CON FUENTES )"/
37  1" 3, " NNDLS ( NUMERO DE LADOS CON FLUJO DADO )"/)
37  1" CONTINUE
37  1" READ(3) NNDLS,NNDLS,NABND
37  1" IF( IREAD.EQ.55) GO TO 924
37  1" IF( IREAD.EQ.94)
37  1" FORMAT(" TECLEE LOS VALORES DE:"/
37  1" 1, " IPRADL ( OPCION PARA COORDENADAS CILINDRICAS )"/
37  1" 2, " IPRGS ( OPCION PARA IMPRIMIR LA MATRIZ G )"/
37  1" 3, " IPRGS ( OPCION PARA IMPRIMIR LA CARGA HIDR. )"/
37  1" 4, " SI=1 ( SI=0 )"/)
37  1" CONTINUE
37  1" READ(3) IPRADL,IPRGS,IPRES
37  1" WRITE(IPRT,6)

```

```

0000061000
0000062000
0000063000
0000064000
0000065000
0000066000
0000067000
0000068000
0000069000
0000070000
0000071000
0000072000
0000073000
0000074000
0000075000
0000076000
0000077000
0000078000
0000079000
0000080000
0000081000
0000082000

```





```

200 CONTINUE
    KEYND=I
    MAXBW=MAXBW*2+1
    IF (MAXBW.LE.50.AND:MAXBW.LE.NRED)GO TO 205
    WRITE(2,16)MAXBW,KEYND
    WRITE(IPRT,16)MAXBW,KEYND
    GO TO 37

```

```

205 WRITE(2,8)
    WRITE(2,9)
    WRITE(IPRT,35)MAXBW,KEYND
    SE LLAMA GEES PARA CONSTRUIR MATRIZ
    CALL GEES(B,G,NRED,NELS,NHDS,NHDS,XCORD,YCORD,NODE,IZONE,
    1 XPERM,TYPEPRM,ALPHA,HEAD,NDHD,MAXBW,QWELL,IWLEL,QBND,NDA,
    2 NDB,THICK,NWELS,NQ8ND,IRADL,LR)
    IF(IPRG5.LE.0)GO TO 265
    WRITE(2,10)
    WRITE(IPRT,10)
    DO 250 I=1,NRED
    DO 250 J=1,MAXBW
        NROW=I
        NCOL=J-LR+I
        IF(G(I,J).EQ.0)GO TO 210
        WRITE(2,11)NROW,NCOL,G(I,J)
        WRITE(IPRT,11)NROW,NCOL,G(I,J)

```

```

210 CONTINUE
    WRITE(2,12)
    WRITE(IPRT,12)
    DO 260 I=1,NRED
    WRITE(2,13)I,B(I)
    WRITE(IPRT,13)I,B(I)
    CONTINUE

```

```

260 CONTINUE

```

```

265 CONTINUE DE LA ECUACION MATRICIAL
    WRITE(6,335)
    FORMAT(6)DESEA MODIFICAR LA MATRIZ B ? ( S/N )"/)
    READ(5,338)SI
    IF(SI.EQ."N")GO TO 267
    IF(SI.EQ."S")GO TO 265

```

```

165 WRITE(66,336)
    FORMAT(1X,"B(",I3,")=",F12.2)
    339 FORMAT(1X,"MODIFICACIONES A LA MATRIZ B "/)
    336 FORMAT(1X,"CUANTOS VALORES DE LA MATRIZ B DESEA MODIFICAR?"/)
    WRITE(2,339)
    READ(5,339)NBS
    WRITE(IPRT,339)
    DO 266 K=1,NBS
    WRITE(66,337)
    FORMAT(66,"RENGLON L, VALOR DE B(L) "/)
    337 READ(5,337)L,B(L)
    WRITE(IPRT,340)L,B(L)
    WRITE(2,340)L,B(L)

```

```

266 CONTINUE
    267 CALL BSOLVE(G,B,NRED,MAXBW)

```

```

000177100
000173000
000174000
000175000
000176000
000177000
000178000
000179000
000180000
000181000
000182000
000183000
000184000
000185000
000186000
000187000
000188000
000189000
000190000
000191000
000192000
000193000
000194000
000195000
000196000
000197000
000198000
000199000
000200000
000201000
000202000
000203000
000204000
000205000
000206000
000207000
000208000
000209000
000210000
000211000
000212000
000213000
000214000
000215000
000216000
000217000
000218000
000219000
000220000
000221000
000222000
000223000
000224000
000225000
000226000
000227000
000228000
000229000
000230000
000231000
000232000
000233000
000234000
000235000
000236000
000237000
000238000
000239000
000240000
000241000
000242000
000243000
000244000
000245000
000246000
000247000
000248000
000249000
000250000

```

```

C PRINT HYDRAULIC HEADS OR HYDRAULIC HEADS AND PRESSURE HEADS
C
C IF(IPRES.GT.0)GO TO 290
C WRITE(2,14)
C DO 270 I=1,NRED
C WRITE(2,13)I,B(I)
C PRINT 13,I,B(I)
C CONTINUE
270 IF(NHDS.LE.0)GO TO 37
C WRITE(2,15)
C PRINT 15
C DO 280 I=1,NHDS
C WRITE(2,13)NDHD(I),HEAD(I)
C CONTINUE
280 GO TO 37
290 WRITE(2,18)
C DO 300 I=1,NRED
C PRESS=B(I)-YCORD(I)
C WRITE(2,13)I,B(I),PRESS
C PRINT 13,I,B(I),PRESS
C CONTINUE
300 IF(NHDS.LE.0)GO TO 37
C WRITE(2,29)
C PRINT 29
C DO 310 I=1,NHDS
C J=NDHD(I)
C PRESS=HEAD(I)-YCORD(J)
C WRITE(2,13)NDHD(I),HEAD(I),PRESS
C PRINT 13,NDHD(I),HEAD(I),PRESS
C CONTINUE
310 GO TO 37
320 LOCK 2
C CALL EXIT
C
C SUBROUTINE GEES(B,G,NRED,NELS,NHDS,NHDS,XCORD,YCORD,NODE,
C IZONE,XPERM,YPERM,ALPHA,HEAD,NDHD,MAXBW,AWELL,IWELL,
C 1 DBND,NDA,ND9,THICK,NWELS,NGBND,IRADL,LR)
C 2 CALCULA LOS ELEMENTOS DE LA MATRIZ
C 1 DIMENSION TITLE(10),XCORD(400),NODE(400,4),IZONE(400)
C 1 XPERM(20),YPERM(20),ALPHA(20),NDHD(100),HEAD(100),G(400,50)
C 2,B(400),AWELL(200),IWELL(200),GBND(200),NDA(200),ND9(200)
C 3,THICK(400)
C DIMENSION XX(5),YY(5),HD(5),GT(5),ND(5),ATRI(4)
C LR=(MAXBW+1)/2
C DO 2 I=1,NHDS
C B(I)=0.0
C DO 2 J=1,MAXBW
C G(I,J)=0.0
C CONTINUE
C SE DAN DESCARGAS FRONTERIZAS AL VECTOR B
C IF(NGBND.LE.0)GO TO 4
C DO 3 I=1,NGBND
C K=NDA(I)
C L=ND9(I)
C DIST=((XCORD(K)-XCORD(L))*2+(YCORD(K)-YCORD(L))*2)
C ATEMP=GBND(I)*DIST/2.

```

```

3      B(K)=B(L)+QTEMP
4      CONTINUE
5      KOUNT=0
6      INICIA LOOP ELEMENTOS CUADRANGULARES
7      DO 200 I=1,NELS
8          GC=0.0
9          BCN=0.0
10         FORMATO AUXILIAR VERIFICADOR DE DATOS
11         WRITE(66,667)I
12         FORMAT('I=',I3)
13         DO 5 K=1,5
14             GT(K)=0.0
15             CONTINUE
16             J=IZONE(I)
17             ANGLE=ALPHA(J)
18             XK=XPERM(J)
19             ESTABLECESE HD
20             DO 9 JJ=1,4
21                 ITEMP=NODE(I,JJ)
22                 IF(ITEMP.LE.NRED)GO TO 9
23                 DO 8 KK=1,NHDS
24                     JTEMP=NDHD(KK)
25                     IF(JTEMP.NE.JTEMP)GO TO 8
26                     HD(JJ)=HEAD(KK)
27                     GO TO 9
28             CONTINUE
29             HD(5)=HD(1)
30             CONTINUE
31             DETERMINACION DE COORDENADAS LOCALES
32             DO 10 II=1,4
33                 KA=NODE(I,II)
34                 ND(II)=KA
35                 XX(II)=XCORD(KA)
36                 YY(II)=YCORD(KA)
37             CONTINUE
38             ANG=ABS(ANGLE)
39             IF(ANG.LE.0.0)GO TO 12
40             SNALP=SIN(ANGLE)
41             CSALP=COS(ANGLE)
42             DO 11 II=1,4
43                 TEMP=XX(II)
44                 TMP=YY(II)
45                 XX(II)=TEMP+CSALP+TMP*SNALP
46                 YY(II)=-TEMP*SNALP+TMP*CSALP
47             CONTINUE
48             XX(5)=XX(1)
49             YY(5)=YY(1)
50             ND(5)=ND(1)
51             XCEN=(XX(1)+XX(2)+XX(3)+XX(4))/4.
52             YCN=(YY(1)+YY(2)+YY(3)+YY(4))/4.
53             INICIA LOOP TRIANGULAR
54             DO 100 IT=1,4
55                 NA=ND(II)
56                 NB=ND(II+1)
57                 XNA=XX(II)
58                 YNA=YY(II)
59                 XNB=XX(II+1)

```

```

00025700
00025800
00025900
00026000
00026100
00026200
00026300
00026400
00026500
00026600
00026700
00026800
00026900
00027000
00027100
00027200
00027300
00027400
00027500
00027600
00027700
00027800
00027900
00028000
00028100
00028200
00028300
00028400
00028500
00028600
00028700
00028800
00028900
00029000
00029100
00029200
00029300
00029400
00029500
00029600
00029700
00029800
00029900
00030000
00030100
00030200
00030300
00030400
00030500
00030600
00030700
00030800
00030900
00031000
00031100
00031200

```

```

YNB=YY(II+1)
XKT=XK
YKT=YK
DETERMINACION DE TERMINOS DE TRANSITIVIDAD
C
19 IF(THICK(1).LE.0.0)GO TO 23
20 TMP=THICK(I)
YKT=XKT*TMP
YKT=YKT*TMP
23 BJ=YNB-YNB
BK=YCN-YNB
BL=YNA-YNB
CJ=XCN-YNB
CK=XNA-XCN
CL=XNB-XNA
TEMP=2.+(XNA*BJ+XNB*BK+XCN*BL)
ATRI(II)=TEMP
XKT=XKT/TEMP
YKT=YKT/TEMP
TPXL=XKT*BL
TPYL=XKT*CL
TPXJ=XKT*BJ
TPYJ=XKT*CJ
GC=GC+TPXL*BL+TPYL*CL
IF(NAL.E.NRED)GO TO 35
9CN=BN-(TPXL*BJ+TPYL*CJ)*HD(II)
IF(NB.LE.NRED)GO TO 32
BCN=BN-(TPXL*BK+TPYL*CK)*HD(II+1)
GO TO 100
31 B(NB)=B(NB)-(TPXJ*BK+TPYJ*CK)*HD(II)
32 G(II+1)=GT(II+1)+TPXL*BJ+TPYL*CK
33 G(NB,LR)=G(NB,LR)+XKT*BK+YKT*CK*CK
GO TO 100
35 GT(II)=GT(II)+TPXJ*BL+TPYJ*CL
G(NA,LR)=G(NA,LR)+TPXJ*BJ+TPYJ*CJ
IF(NB.LE.NRED)GO TO 36
B(NB)=B(NB)-(TPXJ*BK+TPYJ*CK)*HD(II+1)
GO TO 31
36 NAT=NA-NB+LR
NBT=NB-NA+LR
G(NA,NBT)=G(NA,NBT)+TPXJ*BK+TPYJ*CK
G(NB,NAT)=G(NB,NAT)
GO TO 33
100 CONTINUE
GT(1)=GT(1)+GT(5)
C
C
SUMA DE FUENTES Y SUMIDROS AL VECTOR B
IF(NWELS.LE.0.0)OR.KOUNT.GE.NWELS)GO TO 50
DO 45 JJ=1,NWELS
IF(IWEL(JJ).NE.I)GO TO 45
KOUNT=KOUNT+1
TEMP=QWEL(JJ)/((ATRI(1)+ATRI(2)+ATRI(3)+ATRI(4))*3.)
DO 40 KK=1,4
KA=MD(KK)
KB=MD(KK+1)
TMP=ATRI(KK)*TEMP
00031300
00031400
00031500
00031600
00031700
00031800
00031900
00032000
00032100
00032200
00032300
00032400
00032500
00032600
00032700
00032800
00032900
00033000
00033100
00033200
00033300
00033400
00033500
00033600
00033700
00033800
00033900
00034000
00034100
00034200
00034300
00034400
00034500
00034600
00034700
00034800
00034900
00035000
00035100
00035200
00035300
00035400
00035500
00035600
00035700
00035800
00035900
00036000
00036100
00036200
00036300
00036400
00036500
00036600
00036700
00036800
00036900
00037000
00037100
00037200
00037300
00037400
00037500
00037600
00037700
00037800
00037900
00038000
00038100
00038200
00038300
00038400
00038500
00038600
00038700
00038800
00038900
00039000
00039100
00039200
00039300
00039400
00039500
00039600
00039700
00039800
00039900
00040000

```

```

      B(KA)=B(KA)+TMP
      B(KB)=B(KB)+TMP
      B(CN)=B(CN)+TMP
      GO TO 50
45  CONTINUE
C
C
C
      ELEMENTO DEL PUNTO DEL NODO CENTRAL DE CADA
      CUADRILATERO
50  DO 61 JJ=1,4
      KA=ND(JJ)
      IF(KA.GT.NRED)GO TO 61
      GTEMP=GT(JJ)/GC
      B(KA)=B(KA)-B(CN)*GTEMP
      DO 60 KK=1,4
      KB=ND(KK)
      IF(KB.GT.NRED)GO TO 60
      KC=KB-KA+LR
      G(KA,KC)=G(KA,KC)-GT(KK)*GTEMP
      CONTINUE
      CONTINUE
      RETURN
      END
      SUBROUTINE BSOLVE(C,V,N,M)
      SOL. ECUACION MATRICIAL POR ELIM.GAUSSIANA
      DIMENSION C(400,50),V(400)
      LR=(M-1)/2
      DO 20 L=1,LR
      IM=LR-L+1
      DO 20 I=1,IM
      DO 10 J=2,M
      C(L,J-1)=C(L,J)
      CONTINUE
      KN=N-L
      KM=N-I
      C(L,M)=0.0
      C(KM+1,KM+1)=0.0
      CONTINUE
      LR=LR+1
      IM=IM-1
      DO 30 I=1,IM
      NPIV=I
      LS=I+1
      DO 30 L=LS,LR
      IF(ABS(C(L,1)).GT.ABS(C(NPIV,1)))NPIV=L
      CONTINUE
      IF(NPIV.LE.I)GO TO 50
      DO 40 J=1,M
      TEMP=C(I,J)
      C(I,J)=C(NPIV,J)
      C(NPIV,J)=TEMP
      CONTINUE
      TEMP=C(I)
      V(I)=V(NPIV)
      V(NPIV)=TEMP
      V(I)=V(I)/C(I,1)
      DO 60 J=2,M
      C(I,J)=C(I,J)/C(I,1)
      CONTINUE
60  CONTINUE

```

```

000373300
000374000
000375000
000376000
000377000
000378000
000379000
000380000
000381000
000382000
000383000
000384000
000385000
000386000
000387000
000388000
000389000
000390000
000391000
000392000
000393000
000394000
000395000
000396000
000397000
000398000
000399000
000400000
000401000
000402000
000403000
000404000
000405000
000406000
000407000
000408000
000409000
000410000
000411000
000412000
000413000
000414000
000415000
000416000
000417000
000418000
000419000
000420000
000421000
000422000
000423000
000424000
000425000
000426000
000427000
000428000
000429000
000430000
000431000
000432000
000433000
000434000
000435000
000436000
000437000
000438000
000439000
000440000
000441000
000442000
000443000
000444000
000445000
000446000
000447000
000448000
000449000
000450000
000451000
000452000
000453000
000454000
000455000
000456000
000457000
000458000
000459000
000460000
000461000
000462000
000463000
000464000
000465000
000466000
000467000
000468000
000469000
000470000
000471000
000472000
000473000
000474000
000475000
000476000
000477000
000478000
000479000
000480000
000481000
000482000
000483000
000484000
000485000
000486000
000487000
000488000
000489000
000490000
000491000
000492000
000493000
000494000
000495000
000496000
000497000
000498000
000499000
000500000

```



PROGRAMA FOBOS INSTUMENTADO EN COMPUTADORA

HEWLETT-PACKARD 3000

A-13

```
0001000 SCONTROL FILE=02,FILE=03
0002000 C LEE EN FILE 3, IMPRIME EN FILE=2
0003000 C *****
0004000 C * PARA IMPRMR RESULTADOS EN DISCO: *
0005000 C * :BUILD NOMBRE1,REC=72 *
0006000 C * :FILE FTN02=NOMBRE1,OLD *
0007000 C * :FILE FTN03=DATOS,OLD *
0008000 C * :FORTGO FOBOS *
0009000 C * SE CREA ARCHIVO EN DISCO LLAMADO "NOMBRE1" *
0010000 C * SE LEE DEL ARCHIVO EN DISCO "DATOS" *
0011000 C *****
0012000 C
0013000 C
0014000 C
0015000 PROGRAM CUADRILATERO
0016000 CALL CUADRI
0017000 STOP
0018000 END
```

PROGRAM UNIT CUADRILATERO COMPILED

```

019000 C
020000 C
021000 C *****
022000 C * PARA LISTAR RESULTADOS: *
023000 C * :FILE FTN03=DATOS,OLD *
024000 C * :FILE FTN02;DEV=LP *
025000 C * :FILE LP;DEV=LP *
026000 C * :FORTGO FOBOS,*LP *
027000 C * SE LEE DEL ARCHIVO EN DISCO,"DATOS" *
028000 C *****
029000 C
030000 C
031000 C
032000 SUBROUTINE CUADRI
033000 C SOLUCION POR ELEMENTO FINITO DE POTENCIALES PARA
034000 C PROBLEMAS DE FLUJO ESTACIONARIO
035000 DIMENSION XCORD(200),YCORD(200),NODE(200,4)
036000 1,IZONE(100),XPERM(20),YPERM(20),ALPHA(20),NDHD(200)
037000 2,HEAD(200),G(200,50),B(200),QWELL(100),IWLEL(100)
038000 3,QBND(100),NDA(100),NDB(100),THICK(200)
039000 COMMON B,G,NRED,NELS,NNDS,NHDS,XCORD,YCORD,NODE,IZONE
040000 1,XPERM,YPERM,ALPHA,HEAD,NDHD,MAXBW,QWELL,IWLEL,QBND
041000 2,NDA,NDB,THICK,NWELS,NQBND,IRADL,LR
042000 CHARACTER*72 TITULO
043000 1 FORMAT(1H ,I4,5X,F10.3)
044000 3 FORMAT(S)
045000 4 FORMAT(1X,I7,9F8.0)
046000 6 FORMAT(1H "D A T O S D E L P R O B L E M A",///)
047000 7 FORMAT(1H ,I4,2(3X,F10.2))
048000 8 FORMAT(/)
049000 9 FORMAT(" I M P R E S I O N D E R E S U L T A D O S")
050000 10 FORMAT(1H ,4X,"REGLON",5X,"COLUMNA",15X,1HG)
051000 11 FORMAT(1H ,5X,I3,9X,I3,13X,E10.3)
052000 12 FORMAT(1H ,3X,"REGLON",14X,1HG)
053000 13 FORMAT(1H ,5X,I3,2(11X,E11.4))
054000 14 FORMAT(" VALORES CALCULADOS DE CARGA HIDRAULICA"/
055000 16X,"NODO",14X,"CARGA"/)
056000 15 FORMAT(" VALORES DE CARGA HIDRAULICA EN LAS FRONTERAS"/
057000 11H ,5X,4HNODO,14X,"CARGA"/)
058000 16 FORMAT(10X," MAXIMO ANCHO DE BANDA=",I3,/
059000 14X,"CORRESPONDIENTE AL NODO NUM=",I3,/
060000 24X,"(ERROR TIPO 1 O TIPO 2)",/))
061000 17 FORMAT(32X,"NO. DE ELEMENTOS (NELS) =",I3/
062000 136X,"NO. DE NODOS (NNDS) =",I3/
063000 235X,"NO. DE ZONAS (NZNS) =",I3/
064000 39X,"NO. DE CARGAS DE FRONTERA ESPECIFICADAS (NHDS) =",I3/
065000 421X,"NO. DE FUENTES O SUMIDEROS (NWELS) =",I3/
066000 517X,"NUMERO DE ARISTAS CON GASTO DADO(NQBD) =",I3,///)
067000 18 FORMAT(///" CARGA HIDRAULICA Y PRESION DEL FLUIDO CALCULADOS"/
068000 16X,"NODO",18X,"CARGA",13X,"PRESION"/)
069000 19 FORMAT(5H NODO,8X,5HXCORD,8X,5HXCORD)
070000 20 FORMAT(10H ELEMENTO,2X,6HNODO 1,2X,6HNODO 2,2X
071000 1,6HNODO 3,2X,6HNODO 4,4X,4HZONA,4X,7HESPESUR)
072000 21 FORMAT(5H ZONA,8X,5HXPORM,8X,5HYPERM,8X,5HALPHA)
073000 22 FORMAT(1X,"POTENCIALES DADOS EN NODOS",/)
074000 36 FORMAT(1X,"NODO",8X,"POTENCIAL")
075000 23 FORMAT(1X,I7,5I8,4F8.0)

```

```

0076000 24 FORMAT(2X,I6,S18,4X,F10.2)
0077000 25 FORMAT(1X,"ELEMENTOS CON FUENTES O SUMIDEROS",/ )
0078000 26 FORMAT(1X,"ARISTAS CON FLUJO DADO"/
0079000 118X,"EXTREMOS DE LA ARISTA",/
0080000 21H,"      DESCARGA      NODO A      NODO B")
0081000 27 FORMAT(1X,I7,I8,8F8.0)
0082000 28 FORMAT(1H ,3X,F10.3,4X,I4,6X,I4)
0083000 29 FORMAT(/," VALORES ESPECIFICADOS DE CARGA HIDRAULICA"/
0084000 1," Y DE PRESION EN LA FRONTERA"/6X,"NODO",13X,"CARGA",
0085000 217X,"PRESION"/)
0086000 31 FORMAT(1H,"***COORDENADAS RADIALES***")
0087000 32 FORMAT(14X,"ELEMENTO",4X,"POTENCIA DE LA FUENTE")
0088000 33 FORMAT(1H ,I4,5X,2(F11.4,2X),F8.2)
0089000 34 FORMAT(/)
0090000 35 FORMAT(10X,"MAXIMO ANCHO DE BANDA=",I3,/
0091000 14X,"CORRESPONDIENTE AL NODO NUM=",I3/)
0092000 46 FORMAT(5X,2(3X,F10.2))
0093000 38 FORMAT(5X,"R E S U L T A D O S",///)
0094000 160 FORMAT(16)
0095000 DISPLAY "(1) PARA LEER DATOS EN PANTALLA TECLEE 1 "
0096000 DISPLAY "(2) PARA LEER DATOS EN DISCO TECLEE 2 "
0097000 ACCEPT IKKK
0098000 IK=3
0099000 IF(IKKK.EQ.1)IK=5
0100000 37 WRITE(2,34)
0101000 DISPLAY "DAME TRES RENGLONES DATOS TITULO"
0102000 WRITE(6,8)
0103000 DO 40 I=1,3
0104000 READ(IK,3)TITULO
0105000 WRITE(2,3)TITULO
0106000 WRITE(6,3)TITULO
0107000 40 CONTINUE
0108000 DISPLAY "DAME EL NUMERO DE ELEMENTOS EN LA RED(NELS)"
0109000 DISPLAY "(PARA SUSPENDER LAS CORRIDA TECLEE 0)"
0110000 READ(IK,*)NELS
0111000 IF(NELS.EQ.0) STOP
0112000 DISPLAY "DAME EL NUMERO DE NODOS EN LA RED(NNDS)"
0113000 READ(IK,*)NNDS
0114000 DISPLAY "DAME EL NUMERO DE ZONAS(NZNS)"
0115000 READ(IK,*)NZNS
0116000 DISPLAY "DAME NUM. DE NODOS CON POTENCIAL CONOCIDO(NHS)"
0117000 READ(IK,*)NHDS
0118000 DISPLAY "DAME NUMERO DE ELEMENTOS CON"
0119000 DISPLAY "FUENTES O SUMIDEROS(NWELS)"
0120000 READ(IK,*)NWELS
0121000 DISPLAY "DAME NUMERO DE LADOS CON FLUJO DADO(NQBND)"
0122000 READ(IK,*)NQBND
0123000 DISPLAY "(1) PARA USAR COORDENADAS CARTESIANAS TECLEE 1"
0124000 DISPLAY "(2) PARA USAR COORDENADAS RADIALES TECLEE 2"
0125000 IRADL=0
0126000 READ(IK,*)IIRRD
0127000 IF(IIRRD.EQ.2)IRADL=1
0128000 DISPLAY "(1) PARA IMPRIMIR MATRIZ DE RIGIDEZ TECLEE 1"
0129000 DISPLAY "(2) PARA NO IMPRIMIR MATRIZ DE RIGIDEZ TECLEE 2"
0130000 READ(IK,*)IIPRR
0131000 IPRGS=1
0132000 IF(IIPRR.EQ.2)IPRGS=0

```

```
133000      DISPLAY "(1) PARA IMPRIMIR CARGAS HIDRAULICAS TECLEE 1"
134000      DISPLAY "(2) PARA NO IMPRIMIR CARGAS HIDRAULICAS TECLEE 2"
135000      IPRES=0
136000      WRITE(2,8)
137000      WRITE(6,8)
138000      READ(IK,*)IIPGSS
139000      IF(IIPGSS.EQ.1)IPRES=1
140000      WRITE(2,6)
141000      WRITE(6,6)
142000      WRITE(2,17)NELS,NNDS,NZNS,NHDS,NWELS,NQBND
143000      WRITE(6,17)NELS,NNDS,NZNS,NHDS,NWELS,NQBND
144000  C      LECTURA DE COORDENADAS NODALES
145000      WRITE(2,19)
146000      DISPLAY "SE RECUERDA QUE EL NUMERO DE NODOS ES=",NNDS
147000      WRITE(6,8)
148000      DO 41 J=1,NNDS
149000      DISPLAY "PARA COORDENADAS NODALES"
150000      WRITE(6,8)
151000      DISPLAY "(1) DAME PRIMERO EL NUMERO DEL NODO"
152000      WRITE(6,8)
153000      DISPLAY "DESPUES DE TECLEAR ESTE DATO"
154000      WRITE(6,8)
155000      DISPLAY "(2) DAME LA COORDENADA HORIZONTAL"
156000      DISPLAY "(3) DAME LA COORDENADA VERTICAL"
157000      READ(IK,*)I
158000      READ(IK,*)XCORD(I),YCORD(I)
159000      WRITE(6,19)
160000      WRITE(2,7)I,XCORD(I),YCORD(I)
161000      WRITE(6,7)I,XCORD(I),YCORD(I)
162000  41 CONTINUE
163000  C      LECTURA DATOS DE LOS ELEMENTOS
164000      WRITE(2,8)
165000      WRITE(6,8)
166000      WRITE(2,20)
167000      DO 45 K=1,NELS
168000      WRITE(6,8)
169000      DISPLAY "PARA DETERMINAR NODOS LOCALES "
170000      WRITE(6,8)
171000      DISPLAY "(1) DAME EL NUMERO DEL NODO EN CUESTION"
172000      READ(IK,*)I
173000      DISPLAY "SIGUIENDO UN SENTIDO ANTIHORARIO"
174000      DISPLAY "(1) DAME EL NUMERO GLOBAL DEL PRIMER NODO"
175000      DISPLAY "(2) DAME EL NUMERO GLOBAL DEL SEGUNDO NODO"
176000      DISPLAY "(3) DAME EL NUMERO GLOBAL DEL TERCER NODO"
177000      DISPLAY "(4) DAME EL NUMERO GLOBAL DEL CUARTO NODO"
178000      DISPLAY "(5) DAME EL NUMERO DE LA ZONA(IZONE)"
179000      DISPLAY "(6) DAME EL ESPESOR DEL ELEMENTO"
180000      READ(IK,*)(NODE(I,ISI),ISI=1,4),IZONE(I),THICK(I)
181000      WRITE(6,20)
182000      WRITE(2,23)I,NODE(I,1),NODE(I,2),NODE(I,3),NODE(I,4)
183000      1,IZONE(I),THICK(I)
184000      WRITE(6,23)I,(NODE(I,J),J=1,4),IZONE(I),THICK(I)
185000  45 CONTINUE
186000      WRITE(2,8)
187000      WRITE(6,8)
188000      WRITE(2,21)
189000      DO 50 J=1,NZNS
```

```
00190000 WRITE(6,8)
00191000 DISPLAY "PARA LA ZONA NUM. ",J
00192000 WRITE(6,8)
00193000 DISPLAY "(1) DAME PERMEABILIDAD HORIZONTAL(XPERM)"
00194000 DISPLAY "(2) DAME PERMEABILIDAD VERTICAL(YPERM)"
00195000 DISPLAY "(3) DAME ANGULO DE GIRO EN RADIANES(ALPHA)"
00196000 READ(IK,*)XPERM(J),YPERM(J),ALPHA(J)
00197000 WRITE(6,21)
00198000 WRITE(2,33)J,XPERM(J),YPERM(J),ALPHA(J)
00199000 WRITE(6,33)J,XPERM(J),YPERM(J),ALPHA(J)
00200000 50 CONTINUE
00201000 C LECTURA DE CONDICIONES DE FRONTERA
00202000 IF(NHDS.LE.0) GO TO 65
00203000 WRITE(2,8)
00204000 WRITE(6,8)
00205000 WRITE(2,22)
00206000 WRITE(2,36)
00207000 DO 60 I=1,NHDS
00208000 WRITE(6,8)
00209000 DISPLAY "PARA DATO NODAL NUMERO ",I
00210000 DISPLAY "(1) DAME NUMERO DEL NODO CON POTENCIAL DADO(NDHD)"
00211000 DISPLAY "(2) DAME EL VALOR DEL POTENCIAL(HEAD)"
00212000 READ(IK,*)NDHD(I),HEAD(I)
00213000 WRITE(6,22)
00214000 WRITE(6,36)
00215000 WRITE(2,7)NDHD(I),HEAD(I)
00216000 WRITE(6,7)NDHD(I),HEAD(I)
00217000 60 CONTINUE
00218000 65 IF(NWELS.LE.0) GO TO 75
00219000 WRITE(2,8)
00220000 WRITE(6,8)
00221000 WRITE(2,25)
00222000 WRITE(6,25)
00223000 WRITE(2,32)
00224000 DO 70 I=1,NWELS
00225000 DISPLAY " PARA DATO NUMERO ",I
00226000 DISPLAY " (1) DAME NUMERO DE FUENTES O SUMIDEROS(IWLEL)"
00227000 DISPLAY " (2) DAME LA POTENCIA CORRESPONDIENTE "
00228000 DISPLAY " (LAS FUENTES SE SENALAN CON EL SIGNO +) "
00229000 DISPLAY " (LOS SUMIDEROS SE SENALAN CON EL SIGNO -) "
00230000 READ(IK,*)IWLEL(I),QWELL(I)
00231000 WRITE(6,25)
00232000 WRITE(6,32)
00233000 WRITE(6,46)IWLEL(I),QWELL(I)
00234000 WRITE(2,46)IWLEL(I),QWELL(I)
00235000 WRITE(6,8)
00236000 70 CONTINUE
00237000 75 IF(NQBND.LE.0) GO TO 81
00238000 WRITE(2,8)
00239000 WRITE(6,8)
00240000 WRITE(2,26)
00241000 DO 80 I=1,NQBND
00242000 DISPLAY "PARA ARISTA CON FLUJO DADO NUM.",I
00243000 WRITE(6,8)
00244000 DISPLAY "(1) DAME NUMERO DEL PRIMER NODO(NDA) "
00245000 DISPLAY "(2) DAME NUMERO DEL SEGUNDO NODO(NDB) "
00246000 DISPLAY "(3) DAME EL VALOR DEL FLUJO CORRESPONDIENTE(QBND)"
```

```
00247000      READ(IK,*)NDA(I),NDB(I),QBND(I)
00248000      WRITE(6,8)
00249000      WRITE(6,26)
00250000      WRITE(6,28)QBND(I),NDA(I),NDB(I)
00251000      WRITE(2,28)QBND(I),NDA(I),NDB(I)
00252000      WRITE(6,8)
00253000      80 CONTINUE
00254000      C      QBND PARA SIMETRIA RADIAL
00255000      81 IF(IRADL.LE.0.OR.NQBND.LE.0) GO TO 85
00256000      DO 83 I=1,NQBND
00257000      QBND(I)=QBND(I)/6.2831853
00258000      83 CONTINUE
00259000      85 CONTINUE
00260000      C      DETERMINACION MAXIMO ANCHO DE BANDA(MAXBW)
00261000      NRED=NNDS-NHDS
00262000      MAXBW=0
00263000      DO 200 I=1,NRED
00264000      MINND=NRED
00265000      MAXND=0
00266000      DO 180 J=1,NELS
00267000      DO 110 K=1,4
00268000      IF(NODE(J,K).EQ.I) GO TO 120
00269000      110 CONTINUE
00270000      GO TO 180
00271000      120 DO 150 K=1,4
00272000      NUDE=NODE(J,K)
00273000      IF(NUDE.GT.NRED) GO TO 150
00274000      IF(NUDE.GT.MAXND) MAXND=NUDE
00275000      IF(NUDE.LT.MINND) MINND=NUDE
00276000      150 CONTINUE
00277000      180 CONTINUE
00278000      NTEMP=I-MINND
00279000      IF((MAXND-I).GT.NTEMP) NTEMP=MAXND-I
00280000      IF(NTEMP.LE.MAXBW) GO TO 200
00281000      MAXBW=NTEMP
00282000      KEYND=I
00283000      200 CONTINUE
00284000      WRITE(2,8)
00285000      WRITE(6,8)
00286000      WRITE(2,38)
00287000      WRITE(6,38)
00288000      MAXBW=MAXBW*2+1
00289000      IF(MAXBW.LE.50.AND.MAXBW.LE.NRED) GO TO 205
00290000      WRITE(2,16)MAXBW,KEYND
00291000      WRITE(6,16)MAXBW,KEYND
00292000      GO TO 37
00293000      205 WRITE(2,8)
00294000      WRITE(2,9)
00295000      WRITE(6,9)
00296000      WRITE(2,35) MAXBW,KEYND
00297000      WRITE(6,35) MAXBW,KEYND
00298000      C      SE LLAMA SUBROUTINA GEES PARA CONSTRUIR LA MATRIZ
00299000      CALL GEES
00300000      IF(IPRGS.LE.0) GO TO 265
00301000      WRITE(2,10)
00302000      WRITE(6,10)
00303000      DO 250 I=1,NRED
```

```
00304000      DO 210 J=1,MAXBW
00305000      NROW=I
00306000      NCOL=J-LR+I
00307000      IF(G(I,J).EQ.0.) GO TO 210
00308000      WRITE(2,11)NROW,NCOL,G(I,J)
00309000      WRITE(6,11)NROW,NCOL,G(I,J)
00310000      210 CONTINUE
00311000      250 CONTINUE
00312000      WRITE(2,12)
00313000      WRITE(6,12)
00314000      DO 260 I=1,NRED
00315000      WRITE(2,13)I,B(I)
00316000      WRITE(6,13)I,B(I)
00317000      260 CONTINUE
00318000      C      SE RESUELVE LA ECUACION MATRICIAL
00319000      265 CONTINUE
00320000      DISPLAY "(1) PARA MODIFICAR LA MATRIZ B TECLEE 1"
00321000      DISPLAY "(2) PARA NO MODIFICAR LA MATRIZ B TECLEE 2"
00322000      ACCEPT MODB
00323000      IF(MODB.EQ.2) GO TO 267
00324000      DISPLAY "MODIFICACIONES A LA MATRIZ B"
00325000      DISPLAY "CUANTOS VALORES DE LA MATRIZ B SE DESEAN MODIFICAR"
00326000      ACCEPT NBS
00327000      WRITE(2,390)
00328000      WRITE(2,392)
00329000      DO 266 K=1,NBS
00330000      DISPLAY "DAME EL RENGLON DE LA MATRIZ B POR MODIFICAR"
00331000      ACCEPT L
00332000      DISPLAY "DAME EL NUEVO VALOR DE B"
00333000      ACCEPT B(L)
00334000      390 FORMAT(/"MODIFICACIONES A LA MATRIZ B"/)
00335000      391 FORMAT(1X,"B(",I3,")=",G12.4)
00336000      392 FORMAT("RENGLON NUEVO VALOR DE B"/)
00337000      WRITE(6,390)
00338000      WRITE(6,392)
00339000      WRITE(2,391) L,B(L)
00340000      WRITE(6,391) L,B(L)
00341000      266 CONTINUE
00342000      267 CONTINUE
00343000      CALL RSOLVE(G,B,NRED,MAXBW)
00344000      C      SE IMPRIMEN CARGAS HIDRAULICAS O BIEN
00345000      C      CARGAS HIDRAULICAS Y DE PRESION
00346000      IF(IPRES.GT.0) GO TO 290
00347000      WRITE(2,14)
00348000      WRITE(6,14)
00349000      DO 270 I=1,NRED
00350000      WRITE(2,13)I,B(I)
00351000      WRITE(6,13)I,B(I)
00352000      270 CONTINUE
00353000      IF(NHDS.LE.0) GO TO 37
00354000      WRITE(2,15)
00355000      WRITE(6,15)
00356000      DO 280 I=1,NHDS
00357000      WRITE(2,13)NDHD(I),HEAD(I)
00358000      WRITE(6,13)NDHD(I),HEAD(I)
00359000      280 CONTINUE
00360000      GO TO 37
```

```
00361000      290 WRITE(2,18)
00362000          WRITE(6,18)
00363000          DO 300 I=1,NRED
00364000          PRESS=B(I)-YCORD(I)
00365000          WRITE(2,13)I,B(I),PRESS
00366000          WRITE(6,13)I,B(I),PRESS
00367000      300 CONTINUE
00368000          IF(NHDS.LE.0) GO TO 37
00369000          WRITE(2,29)
00370000          WRITE(6,29)
00371000          DO 310 I=1,NHDS
00372000          J=NDHD(I)
00373000          PRESS=HEAD(I)-YCORD(J)
00374000          WRITE(2,13)NDHD(I),HEAD(I),PRESS
00375000          WRITE(6,13)NDHD(I),HEAD(I),PRESS
00376000      310 CONTINUE
00377000          GO TO 37
00378000          END
```

PROGRAM UNIT CUADRI COMPILED

```

00379000 C
00380000 C
00381000 C
00382000 SUBROUTINE GEES
00383000 C CALCULA LOS ELEMENTOS DE LA MATIRZ
00384000 DIMENSION XCORD(200),YCORD(200),NODE(200,4)
00385000 1, IZONE(100),XPERM(20),YPERM(20),ALPHA(20),NDHD(200)
00386000 2, HEAD(200),G(200,50),B(200),QWELL(100),IWLEL(100)
00387000 3, QBND(100),NDA(100),NDB(100),THICK(200)
00388000 DIMENSION XX(5),YY(5),HD(5),GT(5),ND(5),ATRI(4)
00389000 COMMON B,G,NRED,NELS,NNDS,NHDS,XCORD,YCORD,NODE,IZONE
00390000 1,XPERM,YPERM,ALPHA,HEAD,NDHD,MAXBW,QWELL,IWLEL,QBND
00391000 2,NDA,NDB,THICK,NWELS,NQBND,IRADL,LR
00392000 LR=(MAXBW+1)/2
00393000 DO 2 I=1,NNDS
00394000 B(I)=0.
00395000 DO 2 J=1,MAXBW
00396000 G(I,J)=0.
00397000 2 CONTINUE
00398000 C SE DAN CARGAS FRONTERIZAS AL VECTOR B
00399000 IF(NQBND.LE.0) GO TO 4
00400000 DO 3 I=1,NQBND
00401000 K=NDA(I)
00402000 L=NDB(I)
00403000 DIST=((XCORD(K)-XCORD(L))**2+(YCORD(K)-YCORD(L))**2)**.5
00404000 QTEMP=QBND(I)*DIST/2.
00405000 B(K)=B(K)+QTEMP
00406000 B(L)=B(L)+QTEMP
00407000 3 CONTINUE
00408000 4 KOUNT=0
00409000 C INICIA LOOP ELEMENTOS CUADRANGULARES
00410000 DO 200 I=1,NELS
00411000 GC=0.
00412000 BCN=0.
00413000 DO 5 K=1,5
00414000 5 GT(K)=0.
00415000 J=IZONE(I)
00416000 ANGLE=ALPHA(J)
00417000 XK=XPERM(J)
00418000 YK=YPERM(J)
00419000 C ESTABLECESE HD
00420000 DO 9 JJ=1,4
00421000 ITEMP=NODE(I,JJ)
00422000 IF(ITEMP.LE.NRED) GO TO 9
00423000 DO 8 KK=1,NHDS
00424000 JTEMP=NDHD(KK)
00425000 IF(ITEMP.NE.JTEMP) GO TO 8
00426000 HD(JJ)=HEAD(KK)
00427000 GO TO 9
00428000 8 CONTINUE
00429000 9 CONTINUE
00430000 HD(5)=HD(1)
00431000 C DETERMINACION DE COORDENADAS LOCALES
00432000 DO 10 II=1,4
00433000 KA=NODE(I,II)
00434000 ND(II)=KA
00435000 XX(II)=XCORD(KA)

```

```
0436000 YY(II)=YCORD(KA)
0437000 10 CONTINUE
0438000 ANG=ABS(ANGLE)
0439000 IF(ANG.LE.0.) GO TO 12
0440000 SNALP=SIN(ANGLE)
0441000 CSALP=COS(ANGLE)
0442000 DO 11 II=1,4
0443000 TEMP=XX(II)
0444000 TMP=YY(II)
0445000 XX(II)=TEMP*CSALP+TMP*SNALP
0446000 YY(II)=-TEMP*SNALP+TMP*CSALP
0447000 11 CONTINUE
0448000 12 XX(5)=XX(1)
0449000 YY(5)=YY(1)
0450000 ND(5)=ND(1)
0451000 XCN=(XX(1)+XX(2)+XX(3)+XX(4))/4.
0452000 YCN=(YY(1)+YY(2)+YY(3)+YY(4))/4.
0453000 C LOS DOS SIGUIENTES RENGLONES SIRVEN
0454000 C COMO AUXILIARES PARA DETECTAR ERRORES
0455000 C EN LA LECTURA DE LOS DATOS
0456000 C WRITE(2,145),I,XCN,YCN,TEMP
0457000 C WRITE(6,145),I,XCN,YCN,TEMP
0458000 C INICIA LOOP TRIANGULAR
0459000 DO 100 II=1,4
0460000 NA=ND(II)
0461000 NB=ND(II+1)
0462000 XNA=XX(II)
0463000 YNA=YY(II)
0464000 XNB=XX(II+1)
0465000 YNB=YY(II+1)
0466000 XKT=XK
0467000 YKT=YK
0468000 C DETERMINACION DE LO TERMINOS DE TRANSITIVIDAD
0469000 IF(IRADL.LE.0)GO TO 19
0470000 TMP=(XNA+XNB+XCN)/3.
0471000 GO TO 20
0472000 19 IF(THICK(1).LE.0.) GO TO 23
0473000 TMP=THICK(1)
0474000 20 XKT=XKT*TMP
0475000 YKT=YKT*TMP
0476000 C
0477000 C
0478000 C
0479000 23 BJ=YNB-YCN
0480000 BK=YCN-YNA
0481000 BL=YNA-YNB
0482000 CJ=XCN-XNB
0483000 CK=XNA-XCN
0484000 CL=XNB-XNA
0485000 TEMP=2.*(XNA*BJ+XNB*BK+XCN*BL)
0486000 ATRI(II)=TEMP
0487000 C WRITE(2,144)I,II,TEMP
0488000 C WRITE(6,144)I,II,TEMP
0489000 XKT=XKT/TEMP
0490000 YKT=YKT/TEMP
0491000 TPXL=XKT*BL
0492000 TPYL=YKT*CL
```

```
00493000      TPXJ=XKT*BJ
00494000      TPYJ=YKT*CJ
00495000      GC=GC+TPXL*BL+TPYL*CL
00496000      IF(NA.LE.NRED) GO TO 35
00497000      BCN=BCN-(TPXL*BJ+TPYL*CJ)*HD(II)
00498000      IF(NB.LE.NRED) GO TO 32
00499000      31 BCN=BCN-(TPXL*BK+TPYL*CK)*HD(II+1)
00500000      GO TO 100
00501000      32 B(NB)=B(NB)-(TPXJ*BK+TPYJ*CK)*HD(II)
00502000      33 GT(II+1)=GT(II+1)+TPXL*BK+TPYL*CK
00503000      G(NB,LR)=G(NB,LR)+XKT*BK*BK+YKT*CK*CK
00504000      GO TO 100
00505000      35 GT(II)=GT(II)+TPXJ*BL+TPYJ*CL
00506000      G(NA,LR)=G(NA,LR)+TPXJ*BJ+TPYJ*CJ
00507000      IF(NB.LE.NRED) GO TO 36
00508000      B(NA)=B(NA)-(TPXJ*BK+TPYJ*CK)*HD(II+1)
00509000      GO TO 31
00510000      36 NAT=NA-NB+LR
00511000      NBT=NB-NA+LR
00512000      G(NA,NBT)=G(NA,NBT)+TPXJ*BK+TPYJ*CK
00513000      G(NB,NAT)=G(NA,NBT)
00514000      GO TO 33
00515000      100 CONTINUE
00516000      GT(1)=GT(1)+GT(5)
00517000      C SE ANADEN FUENTES O SUMIDEROS AL VECTOR B
00518000      IF(NWELS.LE.0.OR.KOUNT.GE.NWELS) GO TO 50
00519000      DO 45 JJ=1,NWELS
00520000      IF(IWLEL(JJ).NE.I) GO TO 45
00521000      KOUNT=KOUNT+1
00522000      TEMP=QWELL(JJ)/((ATRI(1)+ATRI(2)+ATRI(3)+ATRI(4))*3.)
00523000      DO 40 KK=1,4
00524000      KA=ND(KK)
00525000      KB=ND(KK+1)
00526000      TMP=ATRI(KK)*TEMP
00527000      B(KA)=B(KA)+TMP
00528000      B(KB)=B(KB)+TMP
00529000      40 BCN=BCN+TMP
00530000      GO TO 50
00531000      45 CONTINUE
00532000      C SE ELIMINA PUNTO NODO CENTRAL PARA CADA ELEMENTO
00533000      C CUADRANGULAR EN LA ECUACION DE LA MATRIZ
00534000      50 DO 61 JJ=1,4
00535000      KA=ND(JJ)
00536000      IF(KA.GT.NRED) GO TO 61
00537000      GTEMP=GT(JJ)/GC
00538000      B(KA)=B(KA)-BCN*GTEMP
00539000      DO 60 KK=1,4
00540000      KB=ND(KK)
00541000      IF(KB.GT.NRED) GO TO 60
00542000      KC=KB-KA+LR
00543000      G(KA,KC)=G(KA,KC)-GT(KK)*GTEMP
00544000      60 CONTINUE
00545000      61 CONTINUE
00546000      200 CONTINUE
00547000      RETURN
00548000      END
```

AGE 0012 GEES

A-24

ROGRAM UNIT GEES COMPILED

A-25

```

00549000 C
00550000 C
00551000 C
00552000 C SUBROUTINA RSOLVE
00553000 C SE RESULEVE LA MATRIZ MEDIANTE ELIMINACION GAUSSIANA
00554000 C
00555000 C
00556000 C
00557000 SUBROUTINE RSOLVE(C,V,N,M)
00558000 DIMENSION C(200,50),V(200)
00559000 LR=(M-1)/2
00560000 DO 20 L=1,LR
00561000 IM=LR-L+1
00562000 DO 20 I=1,IM
00563000 DO 10 J=2,M
00564000 10 C(L,J-1)=C(L,J)
00565000 KN=N-L
00566000 KM=M-I
00567000 C(L,M)=0.
00568000 20 C(KN+1,KM+1)=0.
00569000 LR=LR+1
00570000 IM=N-1
00571000 DO 90 I=1,IM
00572000 NPIV=I
00573000 LS=I+1
00574000 DO 30 L=LS,LR
00575000 IF(ABS(C(L,1)).GT.ABS(C(NPIV,1))) NPIV=L
00576000 30 CONTINUE
00577000 IF(NPIV.LE.I) GO TO 50
00578000 DO 40 J=1,M
00579000 TEMP=C(I,J)
00580000 C(I,J)=C(NPIV,J)
00581000 40 C(NPIV,J)=TEMP
00582000 TEMP=V(I)
00583000 V(I)=V(NPIV)
00584000 V(NPIV)=TEMP
00585000 50 V(I)=V(I)/C(I,1)
00586000 DO 60 J=2,M
00587000 60 C(I,J)=C(I,J)/C(I,1)
00588000 DO 80 L=LS,LR
00589000 TEMP=C(L,1)
00590000 V(L)=V(L)-TEMP*V(I)
00591000 DO 70 J=2,M
00592000 70 C(L,J-1)=C(L,J)-TEMP*C(I,J)
00593000 80 C(L,M)=0.
00594000 IF(LR.LT.N) LR=LR+1
00595000 90 CONTINUE
00596000 V(N)=V(N)/C(N,1)
00597000 JM=2
00598000 DO 110 I=1,IM
00599000 L=N-1
00600000 DO 100 J=2,JM
00601000 KM=L+J
00602000 100 V(L)=V(L)-C(L,J)*V(KM-1)
00603000 IF(JM.LT.M) JM=JM+1
00604000 110 CONTINUE
00605000 RETURN

```

PAGE 0014 RSOLVE

A-26

00606000

END

PROGRAM UNIT RSOLVE COMPILED

\*\*\*\* GLOBAL STATISTICS \*\*\*\*

\*\*\*\* NO ERRORS, NO WARNINGS \*\*\*\*

TOTAL COMPILATION TIME 0:00:12

TOTAL ELAPSED TIME 0:00:21

TOTAL SYMBOL TABLE USED % 19

A P E N D I C E   B

FLUJO EN ACUIFERO  
 SUJETO A LA ACCION DE UN RIO Y DOS POZOS  
 METODO DE CALCULO: ELEMENTO FINITO

## DATOS DEL PROBLEMA

NO. DE ELEMENTOS (NELS) = 32  
 NO. DE NODOS (NNDS) = 45  
 NO. DE ZONAS (NZNS) = 1  
 NO. DE CARGAS DE FRONTERA ESPECIFICADAS (NHDS) = 10  
 NO. DE FUENTES O SUMIDROS (NWELS) = 0  
 NUMERO DE ARISTAS CON GASTO DADO (NQBD) = 20

| NODO | XCORD   | XCORD   |
|------|---------|---------|
| 1    | 250.00  | 1500.00 |
| 2    | 312.50  | 1125.00 |
| 3    | 375.00  | 750.00  |
| 4    | 437.50  | 375.00  |
| 5    | 500.00  | .00     |
| 6    | 500.00  | 1500.00 |
| 7    | 625.00  | 1125.00 |
| 8    | 750.00  | 750.00  |
| 9    | 875.00  | 375.00  |
| 10   | 1000.00 | .00     |
| 11   | 750.00  | 1500.00 |
| 12   | 937.50  | 1125.00 |
| 13   | 1125.00 | 750.00  |
| 14   | 1312.50 | 375.00  |
| 15   | 1500.00 | .00     |
| 16   | 1000.00 | 1500.00 |
| 17   | 1250.00 | 1125.00 |
| 18   | 1500.00 | 750.00  |
| 19   | 1750.00 | 375.00  |
| 20   | 2000.00 | .00     |
| 21   | 1500.00 | 1500.00 |
| 22   | 1687.50 | 1125.00 |
| 23   | 1875.00 | 750.00  |
| 24   | 2062.50 | 375.00  |
| 25   | 2250.00 | .00     |
| 26   | 2000.00 | 1500.00 |
| 27   | 2125.00 | 1125.00 |
| 28   | 2250.00 | 750.00  |
| 29   | 2375.00 | 375.00  |
| 30   | 2500.00 | .00     |
| 31   | 2500.00 | 1500.00 |
| 32   | 2562.50 | 1125.00 |
| 33   | 2625.00 | 750.00  |
| 34   | 2687.50 | 375.00  |
| 35   | 2750.00 | .00     |
| 36   | 3000.00 | 1500.00 |
| 37   | 3000.00 | 1125.00 |

B-3

|    |         |         |
|----|---------|---------|
| 38 | 3000.00 | 750.00  |
| 39 | 3000.00 | 375.00  |
| 40 | 3000.00 | .00     |
| 41 | .00     | 1500.00 |
| 42 | .00     | 1125.00 |
| 43 | .00     | 750.00  |
| 44 | .00     | 375.00  |
| 45 | .00     | .00     |

| ELEMENTO | NODO 1 | NODO 2 | NODO 3 | NODO 4 | ZONA | ESPESOR |
|----------|--------|--------|--------|--------|------|---------|
| 1        | 42     | 2      | 1      | 41     | 1    | 1.      |
| 2        | 43     | 3      | 2      | 42     | 1    | 1.      |
| 3        | 44     | 4      | 3      | 43     | 1    | 1.      |
| 4        | 45     | 5      | 4      | 44     | 1    | 1.      |
| 5        | 2      | 7      | 6      | 1      | 1    | 1.      |
| 6        | 3      | 8      | 7      | 2      | 1    | 1.      |
| 7        | 4      | 9      | 8      | 3      | 1    | 1.      |
| 8        | 5      | 10     | 9      | 4      | 1    | 1.      |
| 9        | 7      | 12     | 11     | 6      | 1    | 1.      |
| 10       | 8      | 13     | 12     | 7      | 1    | 1.      |
| 11       | 9      | 14     | 13     | 8      | 1    | 1.      |
| 12       | 10     | 15     | 14     | 9      | 1    | 1.      |
| 13       | 12     | 17     | 16     | 11     | 1    | 1.      |
| 14       | 13     | 18     | 17     | 12     | 1    | 1.      |
| 15       | 14     | 19     | 18     | 13     | 1    | 1.      |
| 16       | 15     | 20     | 19     | 14     | 1    | 1.      |
| 17       | 17     | 22     | 21     | 16     | 1    | 1.      |
| 18       | 18     | 23     | 22     | 17     | 1    | 1.      |
| 19       | 19     | 24     | 23     | 18     | 1    | 1.      |
| 20       | 20     | 25     | 24     | 19     | 1    | 1.      |
| 21       | 22     | 27     | 26     | 21     | 1    | 1.      |
| 22       | 23     | 28     | 27     | 22     | 1    | 1.      |
| 23       | 24     | 29     | 28     | 23     | 1    | 1.      |
| 24       | 25     | 30     | 29     | 24     | 1    | 1.      |
| 25       | 27     | 32     | 31     | 26     | 1    | 1.      |
| 26       | 28     | 33     | 32     | 27     | 1    | 1.      |
| 27       | 29     | 34     | 33     | 28     | 1    | 1.      |
| 28       | 30     | 35     | 34     | 29     | 1    | 1.      |
| 29       | 32     | 37     | 36     | 31     | 1    | 1.      |
| 30       | 33     | 38     | 37     | 32     | 1    | 1.      |
| 31       | 34     | 39     | 38     | 33     | 1    | 1.      |
| 32       | 35     | 40     | 39     | 34     | 1    | 1.      |

|     |         |         |       |
|-----|---------|---------|-------|
| ONA | XPERM   | YPERM   | ALPHA |
| 1   | 40.0000 | 20.0000 | .00   |

OTENCIALES DADOS EN NODOS

| ODD | POTENCIAL |
|-----|-----------|
| 36  | 200.00    |
| 37  | 200.00    |
| 38  | 200.00    |
| 39  | 200.00    |
| 40  | 200.00    |
| 41  | 200.00    |
| 42  | 200.00    |
| 43  | 200.00    |

44 200.00  
45 200.00

B-4

# ARISTAS CON FLUJO DADO

| DESCARGA | EXTREMOS DE LA ARISTA |        |
|----------|-----------------------|--------|
|          | NODO A                | NODO B |
| .240     | 16                    | 17     |
| .240     | 17                    | 18     |
| .240     | 18                    | 19     |
| .240     | 19                    | 20     |
| .000     | 41                    | 1      |
| .000     | 1                     | 6      |
| .000     | 6                     | 11     |
| .000     | 11                    | 16     |
| .000     | 16                    | 21     |
| .000     | 21                    | 26     |
| .000     | 26                    | 31     |
| .000     | 31                    | 36     |
| .000     | 45                    | 5      |
| .000     | 5                     | 10     |
| .000     | 10                    | 15     |
| .000     | 15                    | 20     |
| .000     | 20                    | 25     |
| .000     | 25                    | 30     |
| .000     | 30                    | 35     |
| .000     | 35                    | 40     |

## R E S U L T A D O S

### IMPRESION DE RESULTADOS

MAXIMO ANCHO DE BANDA= 13,  
CORRESPONDIENTE AL NODO NUM= 1

| RENGLON | COLUMNA | G         |
|---------|---------|-----------|
| 1       | 1       | .543E+02  |
| 1       | 2       | .256E+01  |
| 1       | 6       | -.207E+02 |
| 1       | 7       | -.645E+01 |
| 2       | 1       | .256E+01  |
| 2       | 2       | .982E+02  |
| 2       | 3       | -.240E+01 |
| 2       | 6       | -.144E+02 |
| 2       | 7       | -.328E+02 |
| 2       | 8       | -.563E+01 |
| 3       | 2       | -.240E+01 |
| 3       | 3       | .908E+02  |
| 3       | 4       | -.660E+01 |
| 3       | 7       | -.106E+02 |
| 3       | 8       | -.256E+02 |
| 3       | 9       | -.519E+01 |
| 4       | 3       | -.660E+01 |
| 4       | 4       | .870E+02  |
| 4       | 5       | -.103E+02 |
| 4       | 8       | -.102E+02 |



|    |    |           |
|----|----|-----------|
| 13 | 7  | B-6       |
| 13 | 8  | -.459E+01 |
| 13 | 9  | -.266E+02 |
| 13 | 12 | -.129E+02 |
| 13 | 13 | .914E-01  |
| 13 | 14 | -.948E+02 |
| 13 | 17 | -.420E+01 |
| 13 | 18 | -.155E+02 |
| 13 | 19 | -.282E+02 |
| 14 | 8  | -.333E+01 |
| 14 | 9  | -.413E+01 |
| 14 | 10 | -.211E+02 |
| 14 | 13 | -.122E+02 |
| 14 | 14 | -.420E+01 |
| 14 | 15 | .899E+02  |
| 14 | 18 | -.803E+01 |
| 14 | 19 | -.150E+02 |
| 14 | 20 | -.222E+02 |
| 15 | 9  | -.307E+01 |
| 15 | 10 | -.390E+01 |
| 15 | 14 | -.847E+01 |
| 15 | 15 | -.803E+01 |
| 15 | 19 | .441E+02  |
| 15 | 20 | -.147E+02 |
| 16 | 11 | -.898E+01 |
| 16 | 12 | -.228E+02 |
| 16 | 16 | -.164E+02 |
| 16 | 17 | .518E+02  |
| 16 | 21 | -.532E+00 |
| 16 | 22 | -.896E+01 |
| 17 | 11 | -.307E+01 |
| 17 | 12 | -.473E+01 |
| 17 | 13 | -.363E+02 |
| 17 | 16 | -.155E+02 |
| 17 | 17 | -.532E+00 |
| 17 | 18 | .985E+02  |
| 17 | 21 | -.117E+01 |
| 17 | 22 | -.147E+02 |
| 17 | 23 | -.222E+02 |
| 18 | 12 | -.333E+01 |
| 18 | 13 | -.383E+01 |
| 18 | 14 | -.282E+02 |
| 18 | 17 | -.150E+02 |
| 18 | 18 | -.117E+01 |
| 18 | 19 | .964E+02  |
| 18 | 22 | -.117E+01 |
| 18 | 23 | -.150E+02 |
| 18 | 24 | -.282E+02 |
| 19 | 13 | -.383E+01 |
| 19 | 14 | -.333E+01 |
| 19 | 15 | -.222E+02 |
| 19 | 18 | -.147E+02 |
| 19 | 19 | -.117E+01 |
| 19 | 20 | .985E+02  |
| 19 | 23 | -.532E+00 |
| 19 | 24 | -.155E+02 |
| 19 | 25 | -.363E+02 |
| 20 | 14 | -.473E+01 |
| 20 | 15 | -.307E+01 |
| 20 | 19 | -.898E+01 |
| 20 | 19 | -.532E+00 |

|    |    |                     |
|----|----|---------------------|
| 20 | 20 | B-7                 |
| 20 | 24 | .518E+02            |
| 20 | 25 | -.164E+02           |
| 21 | 16 | -.228E+02           |
| 21 | 17 | -.898E+01           |
| 21 | 21 | -.147E+02           |
| 21 | 22 | .441E+02            |
| 21 | 26 | -.803E+01           |
| 21 | 27 | -.847E+01           |
| 22 | 16 | -.390E+01           |
| 22 | 17 | -.307E+01           |
| 22 | 18 | -.222E+02           |
| 22 | 21 | -.150E+02           |
| 22 | 22 | -.803E+01           |
| 22 | 23 | .899E+02            |
| 22 | 26 | -.420E+01           |
| 22 | 27 | -.122E+02           |
| 22 | 28 | -.211E+02           |
| 23 | 17 | -.413E+01           |
| 23 | 18 | -.333E+01           |
| 23 | 19 | -.282E+02           |
| 23 | 22 | -.155E+02           |
| 23 | 23 | -.420E+01           |
| 23 | 24 | <del>.948E+02</del> |
| 23 | 27 | .914E-01            |
| 23 | 28 | -.125E+02           |
| 23 | 29 | -.266E+02           |
| 24 | 18 | -.459E+01           |
| 24 | 19 | -.383E+01           |
| 24 | 20 | -.363E+02           |
| 24 | 23 | -.164E+02           |
| 24 | 24 | .914E-01            |
| 24 | 25 | .104E+03            |
| 24 | 26 | .518E+01            |
| 24 | 28 | -.129E+02           |
| 24 | 29 | -.341E+02           |
| 24 | 30 | -.545E+01           |
| 25 | 19 | -.473E+01           |
| 25 | 20 | -.228E+02           |
| 25 | 24 | .518E+01            |
| 25 | 25 | .577E+02            |
| 25 | 29 | -.138E+02           |
| 25 | 30 | -.215E+02           |
| 26 | 21 | -.847E+01           |
| 26 | 22 | -.122E+02           |
| 26 | 26 | .433E+02            |
| 26 | 27 | -.946E+01           |
| 26 | 31 | -.314E+01           |
| 26 | 32 | -.498E+01           |
| 27 | 21 | -.390E+01           |
| 27 | 22 | -.211E+02           |
| 27 | 23 | -.125E+02           |
| 27 | 26 | -.946E+01           |
| 27 | 27 | .881E+02            |
| 27 | 28 | -.568E+01           |
| 27 | 31 | -.998E+01           |
| 27 | 32 | -.203E+02           |
| 27 | 33 | -.519E+01           |
| 28 | 22 | -.413E+01           |
| 28 | 23 | -.266E+02           |
| 28 | 24 | -.129E+02           |

|    |    |           |
|----|----|-----------|
| 28 | 27 | B-8       |
| 28 | 28 | -.568E+01 |
| 28 | 29 | .923E+02  |
| 28 | 32 | -.144E+01 |
| 28 | 33 | -.102E+02 |
| 28 | 34 | -.256E+02 |
| 29 | 23 | -.563E+01 |
| 29 | 24 | -.459E+01 |
| 29 | 25 | -.341E+02 |
| 29 | 28 | -.138E+02 |
| 29 | 29 | -.144E+01 |
| 29 | 30 | .100E+03  |
| 29 | 30 | .356E+01  |
| 29 | 33 | -.106E+02 |
| 29 | 34 | -.328E+02 |
| 29 | 35 | -.645E+01 |
| 30 | 24 | -.545E+01 |
| 30 | 25 | -.215E+02 |
| 30 | 29 | .356E+01  |
| 30 | 30 | .555E+02  |
| 30 | 34 | -.114E+02 |
| 30 | 35 | -.207E+02 |
| 31 | 26 | -.814E+01 |
| 31 | 27 | -.998E+01 |
| 31 | 31 | .428E+02  |
| 31 | 32 | -.103E+02 |
| 32 | 26 | -.498E+01 |
| 32 | 27 | -.203E+02 |
| 32 | 28 | -.102E+02 |
| 32 | 31 | -.103E+02 |
| 32 | 32 | .870E+02  |
| 32 | 33 | -.660E+01 |
| 33 | 27 | -.519E+01 |
| 33 | 28 | -.256E+02 |
| 33 | 29 | -.106E+02 |
| 33 | 32 | -.660E+01 |
| 33 | 33 | .908E+02  |
| 33 | 34 | -.240E+01 |
| 34 | 28 | -.563E+01 |
| 34 | 29 | -.328E+02 |
| 34 | 30 | -.114E+02 |
| 34 | 33 | -.240E+01 |
| 34 | 34 | .982E+02  |
| 34 | 35 | .256E+01  |
| 35 | 29 | -.645E+01 |
| 35 | 30 | -.207E+02 |
| 35 | 34 | .256E+01  |
| 35 | 35 | .543E+02  |

# REGLON

|    | B         |
|----|-----------|
| 1  | .5945E+04 |
| 2  | .9699E+04 |
| 3  | .8070E+04 |
| 4  | .6911E+04 |
| 5  | .2867E+04 |
| 6  | .0000E+00 |
| 7  | .0000E+00 |
| 8  | .0000E+00 |
| 9  | .0000E+00 |
| 10 | .0000E+00 |
| 11 | .0000E+00 |
| 12 | .0000E+00 |

|    |           |
|----|-----------|
| 13 | .0000E+00 |
| 14 | .0000E+00 |
| 15 | .0000E+00 |
| 16 | .5408E+02 |
| 17 | .1082E+03 |
| 18 | .1082E+03 |
| 19 | .1082E+03 |
| 20 | .5408E+02 |
| 21 | .0000E+00 |
| 22 | .0000E+00 |
| 23 | .0000E+00 |
| 24 | .0000E+00 |
| 25 | .0000E+00 |
| 26 | .0000E+00 |
| 27 | .0000E+00 |
| 28 | .0000E+00 |
| 29 | .0000E+00 |
| 30 | .0000E+00 |
| 31 | .2867E+04 |
| 32 | .6911E+04 |
| 33 | .3070E+04 |
| 34 | .9699E+04 |
| 35 | .5945E+04 |

## MODIFICACIONES A LA MATRIZ B

ENGLON NUEVO VALOR DE B

B( 8)= -299.2  
 B( 9)= -255.6  
 B( 13)= -714.7  
 B( 22)= -410.4  
 B( 23)= -1440.  
 B( 27)= -549.6

ALORES CALCULADOS DE CARGA HIDRAULICA  
 NODO CARGA

|    |           |
|----|-----------|
| 1  | .1946E+03 |
| 2  | .1924E+03 |
| 3  | .1894E+03 |
| 4  | .1887E+03 |
| 5  | .1882E+03 |
| 6  | .1894E+03 |
| 7  | .1854E+03 |
| 8  | .1768E+03 |
| 9  | .1774E+03 |
| 10 | .1804E+03 |
| 11 | .1847E+03 |
| 12 | .1792E+03 |
| 13 | .1664E+03 |
| 14 | .1755E+03 |
| 15 | .1783E+03 |
| 16 | .1809E+03 |
| 17 | .1739E+03 |
| 18 | .1675E+03 |
| 19 | .1760E+03 |
| 20 | .1831E+03 |
| 21 | .1734E+03 |
| 22 | .1665E+03 |
| 23 | .1572E+03 |

|    |           |
|----|-----------|
| 24 | .1401E+03 |
| 25 | .1659E+03 |
| 26 | .1737E+03 |
| 27 | .1683E+03 |
| 28 | .1759E+03 |
| 29 | .1553E+03 |
| 30 | .1900E+03 |
| 31 | .1841E+03 |
| 32 | .1855E+03 |
| 33 | .1884E+03 |
| 34 | .1924E+03 |
| 35 | .1948E+03 |

## ALORES DE CARGA HIDRAULICA EN LAS FRONTERAS

| NODO | CARGA     |
|------|-----------|
| 36   | .2000E+03 |
| 37   | .2000E+03 |
| 38   | .2000E+03 |
| 39   | .2000E+03 |
| 40   | .2000E+03 |
| 41   | .2000E+03 |
| 42   | .2000E+03 |
| 43   | .2000E+03 |
| 44   | .2000E+03 |
| 45   | .2000E+03 |

MBRE DEL PROGRAMA:  
UJO FREATICO.  
TODOO DEL ELEMENTO FINITO

ARCHIVO CORRESPONDIENTE DE DATOS

B-12

## FLUJO EN ACUIFERO

SUJETO A LA ACCION DE UN RIO Y DOS POZOS

METODO DE CALCULO: ELEMENTO FINITO

|    |             |
|----|-------------|
| 1  | 32          |
| 2  | 45          |
| 3  | 1           |
| 4  | 10          |
| 5  | 0           |
| 6  | 20          |
| 7  | 1           |
| 8  | 1           |
| 9  | 2           |
| 10 | 1           |
| 11 | 250,1500    |
| 12 | 2           |
| 13 | 312.5,1125  |
| 14 | 3           |
| 15 | 375,750     |
| 16 | 4           |
| 17 | 437.5,375   |
| 18 | 5           |
| 19 | 500,0       |
| 20 | 6           |
| 21 | 500,1500    |
| 22 | 7           |
| 23 | 625,1125    |
| 24 | 8           |
| 25 | 750,750     |
| 26 | 9           |
| 27 | 875,375     |
| 28 | 10          |
| 29 | 1000,0      |
| 30 | 11          |
| 31 | 750,1500    |
| 32 | 12          |
| 33 | 937.5,1125  |
| 34 | 13          |
| 35 | 1125,750    |
| 36 | 14          |
| 37 | 1312.5,375  |
| 38 | 15          |
| 39 | 1500,0      |
| 40 | 16          |
| 41 | 1000,1500   |
| 42 | 17          |
| 43 | 1250,1125   |
| 44 | 18          |
| 45 | 1500,750    |
| 46 | 19          |
| 47 | 1750,375    |
| 48 | 20          |
| 49 | 2000,0      |
| 50 | 21          |
| 51 | 1500,1500   |
| 52 | 22          |
| 53 | 1687.5,1125 |
| 54 | 23          |
| 55 |             |
| 56 |             |
| 57 |             |

|     |               |
|-----|---------------|
| 58  | 1875,750      |
| 59  | 24            |
| 60  | 2062.5,375    |
| 61  | 25            |
| 62  | 2250,0.       |
| 63  | 26            |
| 64  | 2000,1500     |
| 65  | 27            |
| 66  | 2125,1125     |
| 67  | 28            |
| 68  | 2250,750      |
| 69  | 29            |
| 70  | 2375,375      |
| 71  | 30            |
| 72  | 2500,0.       |
| 73  | 31            |
| 74  | 2500,1500     |
| 75  | 32            |
| 76  | 2562.5,1125   |
| 77  | 33            |
| 78  | 2625,750      |
| 79  | 34            |
| 80  | 2687.5,375    |
| 81  | 35            |
| 82  | 2750,0.       |
| 83  | 36            |
| 84  | 3000,1500     |
| 85  | 37            |
| 86  | 3000,1125     |
| 87  | 38            |
| 88  | 3000,750      |
| 89  | 39            |
| 90  | 3000,375      |
| 91  | 40            |
| 92  | 3000,0.       |
| 93  | 41            |
| 94  | 0.,1500       |
| 95  | 42            |
| 96  | 0.,1125       |
| 97  | 43            |
| 98  | 0.,750        |
| 99  | 44            |
| 100 | 0.,375        |
| 101 | 45            |
| 102 | 0.,0.         |
| 103 | 1             |
| 104 | 42,2,1,41,1,1 |
| 105 | 2             |
| 106 | 43,3,2,42,1,1 |
| 107 | 3             |
| 108 | 44,4,3,43,1,1 |
| 109 | 4             |
| 110 | 45,5,4,44,1,1 |
| 111 | 5             |
| 112 | 2,7,6,1,1,1   |
| 113 | 6             |
| 114 | 3,8,7,2,1,1   |

B-14

|       |                  |
|-------|------------------|
| 115   | 7                |
| 116   | 4,9,8,3,1,1      |
| 117   | 8                |
| 118   | 5,10,9,4,1,1     |
| 119   | 9                |
| 120   | 7,12,11,6,1,1    |
| 121   | 10               |
| 122   | 8,13,12,7,1,1    |
| 123   | 11               |
| 124   | 9,14,13,8,1,1    |
| 125   | 12               |
| 126   | 10,15,14,9,1,1   |
| 127   | 13               |
| 128   | 12,17,16,11,1,1  |
| 129   | 14               |
| 130   | 13,18,17,12,1,1  |
| 131   | 15               |
| 132   | 14,19,18,13,1,1  |
| 133   | 16               |
| 134   | 15,20,19,14,1,1  |
| 135   | 17               |
| 136   | 17,22,21,16,1,1  |
| 137   | 18               |
| 138   | 18,23,22,17,1,1  |
| 139   | 19               |
| 140   | 19,24,23,18,1,1  |
| 141   | 20               |
| 142   | 20,25,24,19,1,1  |
| 143   | 21               |
| 144   | 22,27,26,21,1,1  |
| 145   | 22               |
| 146   | 23,28,27,22,1,1  |
| 147   | 23               |
| 148   | 24,29,28,23,1,1  |
| 149   | 24               |
| 150   | 25,30,29,24,1,1  |
| 151   | 25               |
| 152   | 27,32,31,26,1,1  |
| 153   | 26               |
| 154   | 28,33,32,27,1,1  |
| 155   | 27               |
| 156   | 29,34,33,28,1,1  |
| 157   | 28               |
| 158   | 30,35,34,29,1,1  |
| 159   | 29               |
| 160   | 32,37,36,31,1,1  |
| 161   | 30               |
| 162.1 | 33,38,37,32,1,1. |
| 163   | 31               |
| 164   | 34,39,38,33,1,1  |
| 165   | 32               |
| 166   | 35,40,39,34,1,1  |
| 167   | 40,20,0          |
| 168   | 36,200.          |
| 169   | 37,200.          |
| 170   | 38,200.          |
| 171   | 39,200.          |

|     |            |
|-----|------------|
| 172 | 40,200.    |
| 173 | 41,200.    |
| 174 | 42,200.    |
| 175 | 43,200.    |
| 176 | 44,200.    |
| 177 | 45,200.    |
| 178 | 16,17,0.24 |
| 179 | 17,18,0.24 |
| 180 | 18,19,0.24 |
| 181 | 19,20,0.24 |
| 182 | 41,1,0.    |
| 183 | 1,6,0.     |
| 184 | 6,11,0.    |
| 185 | 11,16,0.   |
| 186 | 16,21,0.   |
| 187 | 21,26,0.   |
| 188 | 26,31,0.   |
| 189 | 31,36,0.   |
| 190 | 45,5,0.    |
| 191 | 5,10,0.    |
| 192 | 10,15,0.   |
| 193 | 15,20,0.   |
| 194 | 20,25,0.   |
| 195 | 25,30,0.   |
| 196 | 30,35,0.   |
| 197 | 35,40,0.   |

198 FLUJO EN ACUIFERO

199 SUJETO A LA ACCION DE UN RIO Y DOS POZOS

200 FIN DE LOS DATOS

201 0



C-1

A P E N D I C E C

```

$RESET, FREE
FILE 5=LEER, UNIT=DISK, RECORD=14, BLOCKING=30, AREA=1260
FILE 5=SELECT, UNIT=REMOTE, RECORD=14
FILE 6=PRINT, UNIT=PRINTER, RECORD=22
FILE 66=DISPLAY, UNIT=REMOTE, RECORD=22
FILE 2=DISCO, UNIT=DISK, RECORD=14, BLOCKING=30, AREA=1260
FILE 3=DISKO, UNIT=DISK, RECORD=14, BLOCKING=30, AREA=1260

```

PROBLEMA

```

COMMON ELIO, N1, N2, ANG
COMMON COIA2, IOL
INTEGER ELIO, CCC
REAL LTD

```

```

DIMENSION TITLE(10), XCORD(400), YCORD(400), NODE(400), IZONE(400)
1, XPERM(20), YPERM(20), ALPHA(20), NDHD(100), HEAD(100), G(400, 50)
2, B(400), QWEL(200), IMLEL(200), Q8ND(200), NDA(200), NDB(200)
3, THICK(400), VECHA(S), PRESION(400), LI(400), CLI(400)
822, FORMAT(1X), /NODO
1, 2X, 13, 5X, G11.5/)
823, FORMAT(1X), /XCORD(13, 5X, G11.5), /
11, ESTE VALOR LA NUEVA ABCISXA DEL NODO, NUM, 13, /
2, ESTE VALOR DEBE SER MAYOR QUE, G12.4/)
1, FORMAT(1H, 14, 5X, F10.3)
3, FORMAT(10A6)
4, FORMAT(1X, 14, 5X, F10.3)
5, FORMAT(1X, 14, 5X, F10.3)
6, FORMAT(1X, 14, 5X, F10.3)
7, FORMAT(1X, 14, 5X, F10.3)
8, FORMAT(1X, 14, 5X, F10.3)
9, FORMAT(1X, 14, 5X, F10.3)
10, FORMAT(1X, 14, 5X, F10.3)
11, FORMAT(1X, 14, 5X, F10.3)
12, FORMAT(1X, 14, 5X, F10.3)
13, FORMAT(1X, 14, 5X, F10.3)
14, FORMAT(1X, 14, 5X, F10.3)
15, FORMAT(1X, 14, 5X, F10.3)
16, FORMAT(1X, 14, 5X, F10.3)
17, FORMAT(1X, 14, 5X, F10.3)
18, FORMAT(1X, 14, 5X, F10.3)
19, FORMAT(1X, 14, 5X, F10.3)
20, FORMAT(1X, 14, 5X, F10.3)
21, FORMAT(1X, 14, 5X, F10.3)
22, FORMAT(1X, 14, 5X, F10.3)

```

```

00000100
00000200
00000300
00000400
00000500
00000600
00000700
00000800
00000900
00001000
00001100
00001200
00001300
00001400
00001500
00001600
00001700
00001800
00001900
00002000
00002100
00002200
00002300
00002400
00002500
00002600
00002700
00002800
00002900
00003000
00003100
00003200
00003300
00003400
00003500
00003600
00003700
00003800
00003900
00004000
00004100
00004200
00004300
00004400
00004500
00004600
00004700
00004800
00004900
00005000
00005100
00005200
00005300
00005400
00005500
00005600
00005700
00005800
00005900
00006000
00006100
00006200
00006300
00006400
00006500
00006600
00006700
00006800
00006900
00007000
00007100
00007200
00007300
00007400
00007500
00007600
00007700
00007800
00007900
00008000
00008100
00008200
00008300
00008400
00008500
00008600
00008700
00008800
00008900
00009000
00009100
00009200
00009300
00009400
00009500
00009600
00009700
00009800
00009900

```

```

1 " NODO (1X,17,518,4F8.0) CARGA"/)
23 FORMAT(1X,17,518,4X,F10.2)
24 FORMAT(2X,16,518,4X,F10.2)
26 " GASTO NODO A NODO B"/)
27 FORMAT(1X,17,18,8F8.0)
28 FORMAT(4X,F10.3,4X,14,6X,14)
29 " VALORES ESPECIFICADOS DE CARGA HIDRAULICA"/
1 " DE PRESION EN LA FRONTERA"/6X,"NODO"10X,"CARGA",
220X,"PRESION"/)
31 FORMAT(***COORDENADAS RADIALES SIMETRICAS***")
33 FORMAT(1X,14,5X,2(F11.4,2X),F8.2)
34 " ECHA DE EJECUCION DEL PROGRAMA : "5A6"/)
35 " MATRIZ CON ANCHO DE BANDA (MAXBW) DE "
1 " I4,/" CORRESPONDIENTE AL NODO "14/)
380 WRITE(6,380) DAME LA FECHA"/)
381 READ(5,381) FECHA
381 FORMAT(5A6)
334 " LECTURA DE DATOS POR "/
1 " (1) TERMINAL REMOTA"/) (2) ARCHIVO EN DISCO"/)
ICON=0
333 READ(5,/) LD
IF(LD.EQ.1) IREAD=5
IF(LD.EQ.2) IREAD=55
WRITE(6,333)
333 " (1) TERMINAL REMOTA"/) (2) IMPRESORA"/)
1 " (1) TERMINAL REMOTA"/) (2) IMPRESORA"/)
333 READ(5,/) IPRINT=66
IF(INS.EQ.2) IPRINT=6
37 WRITE(2,34) FECHA
IF(IREAD.EQ.55) GO TO 922
WRITE(IPRINT,34) FECHA
38 FORMAT(1X,10A6)
91 " TECLEE EL NOMBRE DEL TITULO "/)
91 CONTINUE
922 READ(IREAD,3) TITLE
WRITE(2,38) TITLE
IF(IREAD.EQ.55) GO TO 921
WRITE(IPRINT,92)
92 " TECLEE LOS VALORES DE "/
1 " ( NUMERO DE ELEMENTOS )"/
2 " ( NUMERO DE NODOS )"/
3 " ( NUMERO DE ZONAS )"/)
921 CONTINUE
406 WRITE(6,441)
406 " EN EL ELEMENTO "2X,13,3X,"LOS NODOS "2X,13,3X,13,1
1 " FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE "612.6,"GRADOS"/)
441 FORMAT(1X, DAME EL VALOR DE LA TOLERANCIA"/)
443 " DESPLAZAMIENTO VERTICAL"/)
444 " EL NODO NUMERO "13," REBASO SU COTA INFERIOR"/)
444 READ(5,/) TOL
WRITE(6,443)
444 READ(3,/) IC
WRITE(6,442)

```

[illegible]

```

3," NGBND ( NUMERO DE LADOS CON FLUJO DADO )"/)
923 CONTINUE
READ(I,READ,/,N)NDS,NWELS,NGBND
IF(I,READ,/,N)GO TO 924
WRITE(I,PR,94)
94 FORMAT(,TECLEE LOS VALORES DE :"/,CILINDRICAS )"/,
1" IRADL ( OPCION PARA COORDENADAS )"/,
2" IPRES ( OPCION PARA IMPRIMIR LA MATRIZ G )"/,
3" IPRES ( OPCION PARA IMPRIMIR LA CARGA HIDR. )"/,
4" ( SI=1 , NO=0 )"/)
924 CONTINUE
READ(I,READ,/,I)RADL,IPRES,IPRES
WRITE(I,PR,17)NDS,NWELS,NZNS,NHDS,NWELS,NGBND
LECTURA DE COORDENADAS NODALES
WRITE(I,PR,19)
DO 41 J=1,NHDS
IF(I,READ,/,N)GO TO 925
WRITE(I,PR,96)
96 FORMAT(,TECLEE NUM. DE NODO Y COORDENADAS NODALES"/,
1" I, XCORD(I), YCORD(I)"/)
925 CONTINUE
READ(I,READ,/,I,XCORD(I),YCORD(I))
WRITE(I,PR,17)I,XCORD(I),YCORD(I)
WRITE(I,PR,17)I,XCORD(I),YCORD(I)
41 CONTINUE
LECTURA DATO DE LOS ELEMENTOS
43 WRITE(I,PR,20)
DO 45 K=1,NWELS
IF(I,READ,/,N)GO TO 926
WRITE(I,PR,930)
930 FORMAT(,TECLEE LOS VALORES DEL :"/,
1" (1) ELEMENTO"/, (2) NODO 1"/, (3) NODO 2"/, (4) NODO 3"/,
2" (5) NODO 4"/, (6) ZONA"/, (7) ESPESOR"/)
926 CONTINUE
READ(I,READ,/,I,(NODE(I,J),J=1,4),IZONE(I),THICK(I))
WRITE(I,PR,24)I,(NODE(I,J),J=1,4),IZONE(I),THICK(I)
WRITE(I,PR,24)I,(NODE(I,J),J=1,4),IZONE(I),THICK(I)
45 CONTINUE
LECTURA DE LAS PROPIEDADES DEL MEDIO
WRITE(I,PR,21)
DO 50 J=1,NZNS
IF(I,READ,/,N)GO TO 927
WRITE(I,PR,98)
98 FORMAT(,TECLEE LOS VALORES DE :"/,
1" (1) YPERM(I)"/, (2) XPERM(I)"/,
2" (3) YPERM(I)"/, (4) ALPHA(I)"/)
927 CONTINUE
READ(I,READ,/,I,XPERM(I),YPERM(I),ALPHA(I))
WRITE(I,PR,33)I,XPERM(I),YPERM(I),ALPHA(I)
WRITE(I,PR,33)I,XPERM(I),YPERM(I),ALPHA(I)
50 CONTINUE
LECTURA DE CONDICIONES DE FRONTERA
IF(NHDS,/,N)GO TO 65
WRITE(I,PR,22)
DO 60 I=1,NHDS
IF(I,READ,/,N)GO TO 928
WRITE(I,PR,99)I
99 FORMAT(,TECLEE EL VALOR DE :"/,

```



```

000 294500
000 295000
000 296000
000 297000
000 298000
000 299000
000 300000
000 301000
000 302000
000 303000
000 304000
000 305000
000 306000
000 307000
000 308000
000 309000
000 310000
000 311000
000 312000
000 313000
000 314000
000 315000
000 316000
000 317000
000 318000
000 319000
000 320000
000 321000
000 322000
000 323000
000 324000
000 325000
000 326000
000 327000
000 328000
000 329000
000 330000
000 331000
000 332000
000 333000
000 334000
000 335000
000 336000
000 337000
000 338000
000 339000
000 340000
000 341000
000 342000
000 343000
000 344000
000 345000
000 346000
000 347000
000 348000
000 349000
000 350000
000 351000
000 352000
000 353000
000 354000
000 355000
000 356000
000 357000
000 358000
000 359000
000 360000
000 361000
000 362000
000 363000
000 364000
000 365000
000 366000
000 367000
000 368000
000 369000
000 370000
000 371000
000 372000
000 373000
000 374000
000 375000
000 376000
000 377000
000 378000
000 379000
000 380000
000 381000
000 382000
000 383000
000 384000
000 385000
000 386000
000 387000
000 388000
000 389000
000 390000
000 391000
000 392000
000 393000
000 394000
000 395000
000 396000
000 397000
000 398000
000 399000
000 400000

NUDE=NODE(J,K)
IF(NUDE.GT.NRED)GO TO 150
IF(NUDE.GT.MAXND) MAXND=NUDE
IF(NUDE.LT.MINND) MINND=NUDE
150 CONTINUE
NTEMP=1-MINND
IF((MAXND-I).GT.NTEMP) NTEMP=MAXND-I
IF(NTEMP.LE.MAXBW) GO TO 200
MAXBW=NTEMP
KEYND=I
CONTINUE
200 MAXBW=MAXBW*2+1
IF(MAXBW.LE.50.AND.MAXBW.LE.NRED)GO TO 205
WRITE(2,16)MAXBW,KEYND
WRITE(IPRT,16)MAXBW,KEYND
GO TO 37
205 WRITE(2,8)
WRITE(2,9)
WRITE(2,35)MAXBW,KEYND
WRITE(IPRT,35)MAXBW,KEYND
SE INICIA BUCLE ITERATIVO
208 CONTINUE
COTA1=-10**34
IF(CONT.EQ.0) GO TO 296
WRITE(2,822)IA,PRESON(IA),IB,PRESON(IB)
WRITE(66,322)IA,PRESON(IA),IB,PRESON(IB)
WRITE(66,323)IX,XCORD(IX),IX,CINF
READ(5,/)XCORD(IX)
CONTINUE
296 SE LLAMA GEES PARA CONSTRUIR MATRIZ
CALL GEES(B,G,NRED,NELS,NDS,NHDS,XCORD,YCORD,NODE,IZONE,
1 XPERM,YPERM,ALPHA,HEAD,NHD,MAXBW,AWELL,IMLEL,QSND,NDA,
2 NDS,THICK,NWELS,NGBND,IRADL,LR)
SOLUCION DE LA ECUACION MATRICIAL
CALL BSOLVE(G,B,NRED,MAXBW)
CONT=CONT+1
DO 391 I=1,NRED
PRESN=G(I)-YCORD(I)
PRESN(I)=PRESN
CONTINUE
391 DO 305 JJ=1,IC
WRITE(66,/)JJ,PRESN(JJ)
IF(COTA1.LE.ABS(PRESN(LI(JJ))))COTA1=ABS(PRESN(LI(JJ)))
WRITE(66,/)COTA1
YCORD(LI(JJ))=YCORD(LI(JJ))+PRESN(LI(JJ))
IF(YCORD(LI(JJ)).GT.CLI(JJ))GO TO 367
CCC=LI(JJ)
GO TO 295
CONTINUE
367 CONTINUE
WRITE(66,448)TOL,COTA1,CONT
WRITE(2,448)TOL,COTA1,CONT
IF(COTA1.LT.TOL)GO TO 298
WRITE(66,449)

```



```

DO 2 I=1,NDS
  BC(I)=0.0,MAXW
  DO 2 J=1,MAXW
    CONTINUE
  IF(NGBND.LE.0)GO TO 2
  DO 3 I=1,NGBND
    K=NDAC(I)
    L=NDAC(I)
    DIST=((XCORP(K)-XCORD(L))**2+(YCORD(K)-YCORD(L))**2)
    DIST=SQRT(DIST)
    GTEMP=GEND(I)*DIST/2.
    BC(K)=BC(K)+GTEMP
    BC(L)=BC(L)+GTEMP
  CONTINUE
  KCONTIN=0
  LCONTIN=0
  DO 4 I=1,NELS
    DO 4 J=1,NELS
      BCCN=0.0
      BCCN=0.0
      FCRN=0.0
      WRITE(6,667)I
      FORMAT(1,5)
      DO 5 K=1,5
        GT(K)=0.0
        CONTINUE
      J=IZONE(I)
      ANGLE=ALPHA(J)
      XK=XPERM(J)
      YK=YPERM(J)
      ESTABLECESE HD
      DO 9 J1=1,4
        IF(ITEMP.NE.LE.NRED)GO TO 9
        DO 8 KK=1,NHDS
          JTEMP=HD(KK)
          IF(JTEMP.NE.JTEMP)GO TO 8
          HD(JJ)=HEAD(KK)
          GO TO 9
        CONTINUE
      HD(S)=HD(1)
      DETERMINACION DE COORDENADAS LOCALES
      DO 10 II=1,4
        KA=NODE(I,II)
        MD(II)=KA
        XX(II)=XCORD(KA)
        YY(II)=YCORD(KA)
      CONTINUE
      ANG=ABS(ANGLE)
      IF(ANG.LE.0.0)GO TO 12
      SNALP=SEN(ANGLE)
      CSALP=COS(ANGLE)
      DO 11 II=1,4
        TEMP=XX(II)
        TEMP=YY(II)
        XX(II)=TEMP*CSALP+TMP*SNALP
        YY(II)=-TEMP*SNALP+TMP*CSALP
      CONTINUE
11 CONTINUE

```

```

0000413000
0000414000
0000415000
0000416000
0000417000
0000418000
0000419000
0000420000
0000421000
0000422000
0000423000
0000424000
0000425000
0000426000
0000427000
0000428000
0000429000
0000430000
0000431000
0000432000
0000433000
0000434000
0000435000
0000436000
0000437000
0000438000
0000439000
0000440000
0000441000
0000442000
0000443000
0000444000
0000445000
0000446000
0000447000
0000448000
0000449000
0000450000
0000451000
0000452000
0000453000
0000454000
0000455000
0000456000
0000457000
0000458000
0000459000
0000460000
0000461000
0000462000
0000463000
0000464000
0000465000
0000466000
0000467000
0000468000
0000469000
0000470000
0000471000

```

```

12 CONTINUE
   XX(5)=XX(1)
   YY(5)=YY(1)
   ND(5)=ND(1)
   XCN=(XX(1)+XX(2)+XX(3)+XX(4))/4.
   YCN=(YY(1)+YY(2)+YY(3)+YY(4))/4.
DO 25 IJ=1,4
  IKA(IJ)=NODE(I,IJ)
  XX1(IJ)=XCORR(IKA(IJ))
  YY1(IJ)=YCORD(IKA(IJ))
25 CONTINUE
   XX1(5)=XX1(1)
   YY1(5)=YY1(1)
DO 26 IJ=1,4
  DD1(IJ)=(XX1(IJ+1)-XX1(IJ))*2+(YY(IJ+1)-YY1(IJ))*2
  DD2(IJ)=(XCN-XX1(IJ))*2+(YCN-YY1(IJ))*2
  IMM(IJ)=MOD(IJ+1,4)
  IF(IMM(IJ).EQ.0)IMM(IJ)=4
26 CONTINUE
DO 27 IJ=1,4
  CSA(IJ)=(XX1(IJ)-XCN)/(XX1(IMM(IJ))-XCN)
  CSA(IJ)=CSA(IJ)+(YY1(IJ)-YCN)/(YY1(IMM(IJ))-YCN)
  CSA(IJ)=CSA(IJ)/(SQRT(DD2(IJ))*SQRT(DD2(IMM(IJ))))
  CA1=ARCOS(CSA(IJ))
  LTD(IJ)=ABS(CSA(IJ))
  CA1=CA1+57.29578
  IF(LTD(IJ).LT.0.9848077) GO TO 37
  WRITE(66,406)I, IKA(IJ), IKA(IMM(IJ)), CA1
  WRITE(6,406)I, IKA(IJ), IKA(IMM(IJ)), CA1
37 CONTINUE
406 FORMAT(EN EL ELEMENTO",2X,I3,3X,"LOS NODOS ",2X,I3,3X,I3,/,
1" FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE ",G12.4,"GRADOS",/)
27 CONTINUE
DO 28 IJ=1,4
  CSA(IJ)=(XX1(IMM(IJ))-XX1(IJ))*(XCN-XX1(IJ))
  CSA(IJ)=CSA(IJ)+(YY1(IMM(IJ))-YY1(IJ))*(YCN-YY1(IJ))
  CSA(IJ)=CSA(IJ)/(SQRT(DD1(IJ))*SQRT(DD2(IMM(IJ))))
  CA1=ARCOS(CSA(IJ))
  LTD(IJ)=ABS(CSA(IJ))
  CA1=CA1+57.29578
  IF(LTD(IJ).LT.0.9848077) GO TO 38
  WRITE(66,406)I, IKA(IJ), IKA(IMM(IJ)), CA1
  WRITE(6,406)I, IKA(IJ), IKA(IMM(IJ)), CA1
38 CONTINUE
DO 29 IJ=1,4
  CSA(IJ)=(XCN-XX1(IMM(IJ)))*(XX1(IJ)-XX1(IMM(IJ)))
  CSA(IJ)=CSA(IJ)+(YCN-YY1(IMM(IJ)))*(YY1(IJ)-YY1(IMM(IJ)))
  CSA(IJ)=CSA(IJ)/(SQRT(DD2(IMM(IJ))*SQRT(DD1(IJ))))
  CA1=ARCOS(CSA(IJ))
  LTD(IJ)=ABS(CSA(IJ))
  CA1=CA1+57.29578
  IF(LTD(IJ).LT.0.9848077) GO TO 39
  WRITE(66,406)I, IKA(IJ), IKA(IMM(IJ)), CA1
  WRITE(6,406)I, IKA(IJ), IKA(IMM(IJ)), CA1
39 CONTINUE
39 CONTINUE
  INICIA LOOP TRIANGULAR
DO 100 I=1,4
  NA=ND(I)

```

```

000477200
000477300
000477500
000477600
000477800
000477900
000478000
000478100
000478200
000478300
000478400
000478500
000478600
000478700
000478800
000478900
000479000
000479100
000479200
000479300
000479400
000479500
000479600
000479700
000479800
000479900
000500000
000500100
000500200
000500300
000500400
000500500
000500600
000500700
000500800
000500900
000501000
000501100
000501200
000501300
000501400
000501500
000501600
000501700
000501800
000501900
000502000
000502100
000502200
000502300
000502400
000502500
000502600
000502700
000502800
000502900
000503000

```



```

DO 40 KX=1,4
KA=ND(KX)
KB=ND(KX+1)
TMP=ATRI(KX)*TEMP
B(KA)=B(KA)+TMP
B(KB)=B(KB)+TMP
BCN=BCN+TMP
GO TO 50
CONTINUE

45
ELEMENTO CUADRILATERO

50
DO 61 JJ=1,4
KA=ND(JJ)
IF(KA.GT.NRED)GO TO 61
GTEMP=GT(JJ)/GC
B(KA)=B(KA)-BCN*GTEMP
DO 60 KK=1,4
KB=ND(KK)
IF(KB.GT.NRED)GO TO 60
KC=KB-KA+LR
G(KA,KC)=G(KA,KC)-GT(KK)*GTEMP
CONTINUE
CONTINUE
RETURN

60
SUBROUTINE BSOLVE(C,V,N,M)
DIMENSION C(400,50),V(400)
LR=(M-1)/2,LR
DO 20 L=1,LR
IM=LR-L+1
DO 20 I=1,IM
DO 10 J=2,M
C(L,J-1)=C(L,J)
CONTINUE
KN=M-L
KM=M-I
C(L,M)=0.0
C(KN+1,KM+1)=0.0
CONTINUE
LR=LR+1
IM=IM-1
DO 90 I=1,IM
NPIV=I
LS=I+1
DO 30 L=LS,LR
IF(ABS(C(L,1)).GT.ABS(C(NPIV,1)))NPIV=L
CONTINUE
IF(NPIV.L.E.I)GO TO 50
DO 40 J=1,M
TEMP=C(I,J)
C(I,J)=C(NPIV,J)
C(NPIV,J)=TEMP
CONTINUE
TEMP=V(I)
V(I)=V(NPIV)
V(NPIV)=TEMP

```

```

0000592000
0000593000
0000594000
0000595000
0000596000
0000597000
0000598000
0000599000
0000600000
0000601000
0000602000
0000603000
0000604000
0000605000
0000606000
0000607000
0000608000
0000609000
0000610000
0000611000
0000612000
0000613000
0000614000
0000615000
0000616000
0000617000
0000618000
0000619000
0000620000
0000621000
0000622000
0000623000
0000624000
0000625000
0000626000
0000627000
0000628000
0000629000
0000630000
0000631000
0000632000
0000633000
0000634000
0000635000
0000636000
0000637000
0000638000
0000639000
0000640000
0000641000
0000642000
0000643000
0000644000
0000645000
0000646000
0000647000
0000648000
0000649000
0000650000

```



D-1

A P E N D I C E D







[illegible]

[illegible][illegible]







E-1

A P E N D I C E E

10:08 AM MONDAY, SEP

## DATOS DEL PROBLEMA

NODOS QUE CONSTITUYEN LA FRONTERA LIBRE:  
NODO NUM. DESPLAZAMIENTO VERT. MAXIMO HASTA LA COTA

E-2

|      |       |       |
|------|-------|-------|
| NOBO | XCORO | YCORO |
| 1:00 | 1:00  | 0:00  |
| 1:00 | 1:00  | 0:00  |
| 1:00 | 1:00  | 0:00  |



[illegible]

A standard linear barcode consisting of vertical black bars of varying widths.

NNNN00→NNW000→NNNNW00→NNWW000→NNWWW00→NNNWWF00→NNWWWFF00→  
 0000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000  
 0→00000000→00000000000000000000000000000000000000000000000000000

| ELEMENTO | NODO 1 | NODO 2 | NODO 3 | NODO 4 | ZONA | ESPESOR |
|----------|--------|--------|--------|--------|------|---------|
| 1        | 1      | 1      | 1      | 1      | 1    | 1       |
| 2        | 2      | 2      | 2      | 2      | 2    | 2       |
| 3        | 3      | 3      | 3      | 3      | 3    | 3       |
| 4        | 4      | 4      | 4      | 4      | 4    | 4       |
| 5        | 5      | 5      | 5      | 5      | 5    | 5       |
| 6        | 6      | 6      | 6      | 6      | 6    | 6       |
| 7        | 7      | 7      | 7      | 7      | 7    | 7       |
| 8        | 8      | 8      | 8      | 8      | 8    | 8       |
| 9        | 9      | 9      | 9      | 9      | 9    | 9       |
| 10       | 10     | 10     | 10     | 10     | 10   | 10      |
| 11       | 11     | 11     | 11     | 11     | 11   | 11      |
| 12       | 12     | 12     | 12     | 12     | 12   | 12      |
| 13       | 13     | 13     | 13     | 13     | 13   | 13      |
| 14       | 14     | 14     | 14     | 14     | 14   | 14      |
| 15       | 15     | 15     | 15     | 15     | 15   | 15      |
| 16       | 16     | 16     | 16     | 16     | 16   | 16      |
| 17       | 17     | 17     | 17     | 17     | 17   | 17      |
| 18       | 18     | 18     | 18     | 18     | 18   | 18      |
| 19       | 19     | 19     | 19     | 19     | 19   | 19      |
| 20       | 20     | 20     | 20     | 20     | 20   | 20      |
| 21       | 21     | 21     | 21     | 21     | 21   | 21      |
| 22       | 22     | 22     | 22     | 22     | 22   | 22      |
| 23       | 23     | 23     | 23     | 23     | 23   | 23      |
| 24       | 24     | 24     | 24     | 24     | 24   | 24      |
| 25       | 25     | 25     | 25     | 25     | 25   | 25      |
| 26       | 26     | 26     | 26     | 26     | 26   | 26      |
| 27       | 27     | 27     | 27     | 27     | 27   | 27      |
| 28       | 28     | 28     | 28     | 28     | 28   | 28      |
| 29       | 29     | 29     | 29     | 29     | 29   | 29      |
| 30       | 30     | 30     | 30     | 30     | 30   | 30      |
| 31       | 31     | 31     | 31     | 31     | 31   | 31      |
| 32       | 32     | 32     | 32     | 32     | 32   | 32      |
| 33       | 33     | 33     | 33     | 33     | 33   | 33      |
| 34       | 34     | 34     | 34     | 34     | 34   | 34      |
| 35       | 35     | 35     | 35     | 35     | 35   | 35      |
| 36       | 36     | 36     | 36     | 36     | 36   | 36      |
| 37       | 37     | 37     | 37     | 37     | 37   | 37      |
| 38       | 38     | 38     | 38     | 38     | 38   | 38      |
| 39       | 39     | 39     | 39     | 39     | 39   | 39      |
| 40       | 40     | 40     | 40     | 40     | 40   | 40      |
| 41       | 41     | 41     | 41     | 41     | 41   | 41      |
| 42       | 42     | 42     | 42     | 42     | 42   | 42      |
| 43       | 43     | 43     | 43     | 43     | 43   | 43      |
| 44       | 44     | 44     | 44     | 44     | 44   | 44      |
| 45       | 45     | 45     | 45     | 45     | 45   | 45      |
| 46       | 46     | 46     | 46     | 46     | 46   | 46      |
| 47       | 47     | 47     | 47     | 47     | 47   | 47      |
| 48       | 48     | 48     | 48     | 48     | 48   | 48      |
| 49       | 49     | 49     | 49     | 49     | 49   | 49      |
| 50       | 50     | 50     | 50     | 50     | 50   | 50      |
| 51       | 51     | 51     | 51     | 51     | 51   | 51      |
| 52       | 52     | 52     | 52     | 52     | 52   | 52      |
| 53       | 53     | 53     | 53     | 53     | 53   | 53      |
| 54       | 54     | 54     | 54     | 54     | 54   | 54      |
| 55       | 55     | 55     | 55     | 55     | 55   | 55      |
| 56       | 56     | 56     | 56     | 56     | 56   | 56      |
| 57       | 57     | 57     | 57     | 57     | 57   | 57      |
| 58       | 58     | 58     | 58     | 58     | 58   | 58      |
| 59       | 59     | 59     | 59     | 59     | 59   | 59      |
| 60       | 60     | 60     | 60     | 60     | 60   | 60      |
| 61       | 61     | 61     | 61     | 61     | 61   | 61      |
| 62       | 62     | 62     | 62     | 62     | 62   | 62      |
| 63       | 63     | 63     | 63     | 63     | 63   | 63      |
| 64       | 64     | 64     | 64     | 64     | 64   | 64      |
| 65       | 65     | 65     | 65     | 65     |      |         |

[illegible][illegible][illegible][illegible][illegible]

.....

[illegible]

00.00  
AL044

[illegible]



|        |      |      |
|--------|------|------|
| 0:0000 | 114  | 122  |
| 0:0000 | 1122 | 1126 |
| 0:0000 | 1128 | 1129 |
| 0:0000 | 1129 | 1135 |
| 0:0000 | 1135 | 1136 |
| 0:0000 | 1136 | 1138 |
| 0:0000 | 1138 | 1141 |

# IMPRESION DE RESULTADOS

MATRIZ CON ANCHO DE BANDA (MAXBW) DE 25

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 141 DE 138 GRADOS  
 FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 6.116  
 ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-01  
 ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION NUM. 1

NODO PRESION  
 136 0:35806  
 138 0:353120

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 141 DE 138 GRADOS  
 FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 5.689  
 EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 136 DE 137 GRADOS  
 FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 9.942  
 ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-01  
 ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION NUM. 2

NODO PRESION  
 136 0:20362  
 138 0:20834

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 141 DE 138 GRADOS  
 FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 5.470  
 EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 136 DE 137 GRADOS  
 FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 9.914  
 ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-01  
 ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION NUM. 3

NODO PRESION  
 136 .51830E-01  
 138 .76621E-01

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 141 133  
 FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 5.464 GRADOS  
 EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 136 137  
 FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 8.737 GRADOS  
 ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= :1000E-01  
 ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= :6277E-01  
 ITERACION NUM. 4

NODO PRESION  
 136 - :11067E-01  
 138 :18278E-01

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 141 138  
 FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 5.542 GRADOS  
 EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 136 137  
 FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 8.852 GRADOS  
 ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= :1000E-01  
 ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= :3610E-01  
 ITERACION NUM. 5

NODO PRESION  
 136 - :21420E-01  
 138 :60246E-02

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 141 138  
 FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 5.629 GRADOS  
 EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 136 137  
 FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 9.013 GRADOS  
 ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= :1000E-01  
 ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= :1559E-01  
 ITERACION NUM. 6

NODO PRESION  
 136 - :13534E-01  
 138 :87169E-02

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 141 138  
 FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 5.702 GRADOS  
 EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 136 137  
 FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 9.145 GRADOS  
 ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= :1000E-01  
 ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= :1211E-01  
 ITERACION NUM. 7

NODO PRESION  
 136 - :94467E-02  
 138 :12110E-01

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 141 138  
 FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 5.759 GRADOS

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 136 DE 137 9.244 GRADOS  
 FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 137 9.244 GRADOS  
 ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-01  
 ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= .1281E-01  
 ITERACION NUM. 8

NODO PRESION  
 136 -.65837E-02  
 138 .12811E-01

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 141 DE 138 5.877 GRADOS  
 FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 138 5.877 GRADOS

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 136 DE 137 9.478 GRADOS  
 FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 137 9.478 GRADOS

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-01  
 ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= .1399E-01  
 ITERACION NUM. 9

NODO PRESION  
 136 -.13989E-01  
 138 .25315E-02

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 141 DE 138 5.931 GRADOS  
 FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 138 5.931 GRADOS

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 136 DE 137 9.592 GRADOS  
 FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 137 9.592 GRADOS

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-01  
 ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= .9961E-02  
 ITERACION NUM. 10

LA FRONTERA LIBRE SE LOCALIZO CON UNA  
 APROXIMACION MENOR O IGUAL A .99615E-02 UNIDADES  
 EN 10 ITERACIONES

FRONTERA LIBRE CALCULADA  
 NODO ORDENADA PRESION

|     |       |       |           |
|-----|-------|-------|-----------|
| 56  | 5.259 | 4.804 | .2098E-03 |
| 57  | 5.500 | 4.639 | .3319E-03 |
| 67  | 6.000 | 4.340 | .5218E-03 |
| 77  | 6.250 | 4.198 | .5946E-03 |
| 73  | 6.500 | 4.059 | .6502E-03 |
| 87  | 7.000 | 3.791 | .7104E-03 |
| 95  | 7.250 | 3.641 | .7146E-03 |
| 97  | 7.500 | 3.498 | .6693E-03 |
| 105 | 8.000 | 3.200 | .3400E-03 |

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272 273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288 289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304 305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320 321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336 337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368 369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400 401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416 417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432 433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448 449 450 451 452 453 454 455 456 457 458 459 460 461 462 463 464 465 466 467 468 469 470 471 472 473 474 475 476 477 478 479 480 481 482 483 484 485 486 487 488 489 490 491 492 493 494 495 496 497 498 499 500 501 502 503 504 505 506 507 508 509 510 511 512 513 514 515 516 517 518 519 520 521 522 523 524 525 526 527 528 529 530 531 532 533 534 535 536 537 538 539 540 541 542 543 544 545 546 547 548 549 550 551 552 553 554 555 556 557 558 559 560 561 562 563 564 565 566 567 568 569 570 571 572 573 574 575 576 577 578 579 580 581 582 583 584 585 586 587 588 589 590 591 592 593 594 595 596 597 598 599 600 601 602 603 604 605 606 607 608 609 610 611 612 613 614 615 616 617 618 619 620 621 622 623 624 625 626 627 628 629 630 631 632 633 634 635 636 637 638 639 640 641 642 643 644 645 646 647 648 649 650 651 652 653 654 655 656 657 658 659 660 661 662 663 664 665 666 667 668 669 670 671 672 673 674 675 676 677 678 679 680 681 682 683 684 685 686 687 688 689 690 691 692 693 694 695 696 697 698 699 700 701 702 703 704 705 706 707 708 709 710 711 712 713 714 715 716 717 718 719 720 721 722 723 724 725 726 727 728 729 730 731 732 733 734 735 736 737 738 739 740 741 742 743 744 745 746 747 748 749 750 751 752 753 754 755 756 757 758 759 760 761 762 763 764 765 766 767 768 769 770 771 772 773 774 775 776 777 778 779 780 781 782 783 784 785 786 787 788 789 790 791 792 793 794 795 796 797 798 799 800 801 802 803 804 805 806 807 808 809 810 811 812 813 814 815 816 817 818 819 820 821 822 823 824 825 826 827 828 829 830 831 832 833 834 835 836 837 838 839 840 841 842 843 844 845 846 847 848 849 850 851 852 853 854 855 856 857 858 859 860 861 862 863 864 865 866 867 868 869 870 871 872 873 874 875 876 877 878 879 880 881 882 883 884 885 886 887 888 889 890 891 892 893 894 895 896 897 898 899 900 901 902 903 904 905 906 907 908 909 910 911 912 913 914 915 916 917 918 919 920 921 922 923 924 925 926 927 928 929 930 931 932 933 934 935 936 937 938 939 940 941 942 943 944 945 946 947 948 949 950 951 952 953 954 955 956 957 958 959 960 961 962 963 964 965 966 967 968 969 970 971 972 973 974 975 976 977 978 979 980 981 982 983 984 985 986 987 988 989 990 991 992 993 994 995 996 997 998 999 1000 1001 1002 1003 1004 1005 1006 1007 1008 1009 1010 1011 1012 1013 1014 1015 1016 1017 1018 1019 1020 1021 1022 1023 1024 1025 1026 1027 1028 1029 1030 1031 1032 1033 1034 1035 1036 1037 1038 1039 104

၂၀၀၈-၂၀၀၉ ခုနှစ်အတွက် အစီအစဉ်အရ အောက်ဖော်ပြပါ အချက်အလက်များကို  
 အောက်ဖော်ပြပါ အချက်အလက်များကို အောက်ဖော်ပြပါ အချက်အလက်များကို  
 အောက်ဖော်ပြပါ အချက်အလက်များကို အောက်ဖော်ပြပါ အချက်အလက်များကို

|     |       |       |            |
|-----|-------|-------|------------|
| 113 | 8.250 | 3.045 | .7162E-04  |
| 114 | 8.500 | 2.380 | -.3441E-03 |
| 121 | 8.750 | 2.712 | -.8150E-03 |
| 122 | 9.000 | 2.533 | -.1016E-02 |
| 128 | 9.250 | 2.344 | -.8581E-03 |
| 129 | 9.500 | 2.172 | -.2519E-02 |
| 135 | 9.750 | 2.019 | -.5631E-02 |
| 136 | 10.00 | 2.035 | -.9961E-02 |
| 138 | 10.10 | 2.031 | .4685E-02  |
| 141 | 10.51 | 0.    | 0.         |



[illegible][illegible]

**PRECISION**

000  
W A T A N I . .  
. . . . .  
NONO  
NONO  
NONO

222222222222  
 222222222222  
 22 22  
 22 22  
 22 22  
 22 22  
 22 22  
 22 22  
 22 22

1111111111111111  
 0000000000000000  
 2100000000000000

222222222222  
 222222222222

222222222222  
 222222222222  
 2222  
 2222  
 2222  
 2222  
 2222  
 2222  
 222222222222  
 222222222222

0000000000000000  
 0000000000000000  
 0000000000000000  
 0000000000000000

00000  
 0000000000000000  
 0000000000000000  
 0000000000000000  
 0000000000000000

22 22  
 2222 2222  
 2222 2222  
 222222 2222  
 22 22 2222  
 2222 22 2222  
 2222 22 2222  
 2222 22222222  
 2222 222222  
 2222 2222

22 22222222  
 2222 22222222  
 2222 2222 2222  
 2222 2222 2222  
 2222 2222 2222  
 2222 2222 2222  
 2222 2222 2222  
 22222222 2222  
 22222222 2222  
 2222 2222

2222  
 222222  
 222222  
 2222 2222  
 2222 2222

F-1

A P E N D I C E F

































































G-1

A P E N D I C E - G

\*\*\*\*\*  
FECHA DE EJECUCION DEL PROGRAMA : 27 DE ENERO DE 1986  
PRESA CON DRENAJE

DATOS DEL PROBLEMA

LA FRONTERA LIBRE SE VA A LOCALIZAR CON  
UNA APROXIMACION MENOR O IGUAL A 1000E-01 UNIDADES

NODOS QUE CONSTITUYEN LA FRONTERA LIBRE:  
NODO NUM. DESPLAZAMIENTO VERT. MAXIMO HASTA LA COTA

|                                    |                    |
|------------------------------------|--------------------|
| 55                                 | 4.7000             |
| 57                                 | 4.0000             |
| 57                                 | 4.0000             |
| 77                                 | 4.0000             |
| 73                                 | 4.0000             |
| 87                                 | 3.5000             |
| 95                                 | 3.4000             |
| 95                                 | 3.0000             |
| 105                                | 3.0000             |
| 113                                | 2.7500             |
| 114                                | 2.5000             |
| 114                                | 2.5000             |
| 122                                | 2.1000             |
| 123                                | 1.5000             |
| 135                                | 1.5000             |
| 135                                | 0.1000             |
| 13                                 | 0.1000             |
| 13                                 | 0.1000             |
| SUJETO A DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL |                    |
| NODO                               | MIN. HASTA LA COTA |
| NODO NUM.                          | 10.10              |
| 141                                |                    |

|                                                   |  |     |
|---------------------------------------------------|--|-----|
| NO. DE ELEMENTOS (NELS) =                         |  | 132 |
| NO. DE NODOS (NNDOS) =                            |  | 152 |
| NO. DE ZONAS ESPECIFICADAS (NZNS) =               |  | 24  |
| NO. DE NODOS CON CARGA ESPECIFICADA (NHDS) =      |  | 2   |
| NO. DE ELEMENTOS CON GASTO ESPECIFICADO (NBSND) = |  | 43  |

|      |       |       |
|------|-------|-------|
| NODO | XCORD | YCORD |
| 1    | 2.50  | 2.00  |
| 2    | 1.00  | 2.50  |
| 3    | 1.00  | 2.00  |

[illegible]

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100. 101. 102. 103. 104. 105. 106. 107. 108. 109. 110. 111. 112. 113. 114. 115. 116. 117. 118. 119. 120. 121. 122. 123. 124. 125. 126. 127. 128. 129. 130. 131. 132. 133. 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200. 201. 202. 203. 204. 205. 206. 207. 208. 209. 210. 211. 212. 213. 214. 215. 216. 217. 218. 219. 220. 221. 222. 223. 224. 225. 226. 227. 228. 229. 230. 231. 232. 233. 234. 235. 236. 237. 238. 239. 240. 241. 242. 243. 244. 245. 246. 247. 248. 249. 250. 251. 252. 253. 254. 255. 256. 257. 258. 259. 260. 261. 262. 263. 264. 265. 266. 267. 268. 269. 270. 271. 272. 273. 274. 275. 276. 277. 278. 279. 280. 281. 282. 283. 284. 285. 286. 287. 288. 289. 290. 291. 292. 293. 294. 295. 296. 297. 298. 299. 300. 301. 302. 303. 304. 305. 306. 307. 308. 309. 310. 311. 312. 313. 314. 315. 316. 317. 318. 319. 320. 321. 322. 323. 324. 325. 326. 327. 328. 329. 330. 331. 332. 333. 334. 335. 336. 337. 338. 339. 340. 341. 342. 343. 344. 345. 346. 347. 348. 349. 350. 351. 352. 353. 354. 355. 356. 357. 358. 359. 360. 361. 362. 363. 364. 365. 366. 367. 368. 369. 370. 371. 372. 373. 374. 375. 376. 377. 378. 379. 380. 381. 382. 383. 384. 385. 386. 387. 388. 389. 390. 391. 392. 393. 394. 395. 396. 397. 398. 399. 400. 401. 402. 403. 404. 405. 406. 407. 408. 409. 410. 411. 412. 413. 414. 415. 416. 417. 418. 419. 420. 421. 422. 423. 424. 425. 426. 427. 428. 429. 430. 431. 432. 433. 434. 435. 436. 437. 438. 439. 440. 441. 442. 443. 444. 445. 446. 447. 448. 449. 450. 451. 452. 453. 454. 455. 456. 457. 458. 459. 460. 461. 462. 463. 464. 465. 466. 467. 468. 469. 470. 471. 472. 473. 474. 475. 476. 477. 478. 479. 480. 481. 482. 483. 484. 485. 486. 487. 488. 489. 490. 491. 492. 493. 494. 495. 496. 497. 498. 499. 500. 501. 502. 503. 504. 505. 506. 507. 508. 509. 510. 511. 512. 513. 514. 515. 516. 517. 518. 519. 520. 521. 522. 523. 524. 525. 526. 527. 528. 529. 530. 531. 532. 533. 534. 535. 536. 537. 538. 539. 540. 541. 542. 543. 544. 545. 546. 547. 548. 549. 550. 551. 552. 553. 554. 555. 556. 557. 558. 559. 560. 561. 562. 563. 564. 565. 566. 567. 568. 569. 570. 571. 572. 573. 574. 575. 576. 577. 578. 579. 580. 581. 582. 583. 584. 585. 586. 587. 588. 589. 590. 591. 592. 593. 594. 595. 596. 597. 598. 599. 600. 601. 602. 603. 604. 605. 606. 607. 608. 609. 610. 611. 612. 613. 614. 615. 616. 617. 618. 619. 620. 621. 622. 623. 624. 625. 626. 627. 628. 629. 630. 631. 632. 633. 634. 635. 636. 637. 638. 639. 640. 641. 642. 643. 644. 645. 646. 647. 648. 649. 650. 651. 652. 653. 654. 655. 656. 657. 658. 659. 660. 661. 662. 663. 664. 665. 666. 667. 668. 669. 670. 671. 672. 673. 674. 675. 676. 677. 678. 679. 680. 681. 682. 683. 684. 685. 686. 687. 688. 689. 690. 691. 692. 693. 694. 695. 696. 697. 698. 699. 700. 701. 702. 703. 704. 705. 706. 707. 708. 709. 710. 711. 712. 713. 714. 715. 716. 717. 718. 719. 720. 721. 722. 723. 724. 725. 726. 727. 728. 729. 730. 731. 732. 733. 734. 735. 736. 737. 738. 739. 740. 741. 742. 743. 744. 745. 746. 747. 748. 749. 750. 751. 752. 753. 754. 755. 756. 757. 758. 759. 760. 761. 762. 763. 764. 765. 766. 767. 768. 769. 770. 771. 772. 773. 774. 775. 776. 777. 778. 779. 780. 781. 782. 783. 784. 785. 786. 787. 788. 789. 790. 791. 792. 793. 794. 795. 796. 797. 798. 799. 800. 801. 802. 803. 804. 805. 806. 807. 808. 809. 810. 811. 812. 813. 814. 815. 816. 817. 818. 819. 820. 821. 822. 823. 824. 825. 826. 827. 828. 829. 830. 831. 832. 833. 834. 835. 836. 837. 838. 839. 840.

1. **התאמה:** המסמך מתאים לשימוש כחומר לימודי, ויש להשתמש בו באופן זה.

[illegible]

1557  
569  
570  
71  
72  
73  
74  
75  
76  
77  
78  
79  
80  
81  
82  
83  
84  
85  
86  
87  
88  
89  
90  
91  
92  
93  
94  
95  
96  
97  
98  
99  
100  
101  
102  
103  
104  
105  
106  
107  
108  
109  
110  
111  
112  
113  
114  
115  
116  
117  
118  
119  
120  
121  
122  
123

[illegible][illegible]

[illegible]

.....

[illegible]

100-443887-100

|          |        |        |        |        |      |
|----------|--------|--------|--------|--------|------|
| 1        | 1      | 2      | 3      | 4      | ZCVA |
| ELEMENTO | NODO 1 | NODO 2 | NODO 3 | NODO 4 |      |

**ESSAY**

— — — — —  
— — — — —

[illegible]

1-21M+50V7MMQ7T2M415678  
11111111111

144 213+57+57+57+57  
14 213+57+57+57+57  
15 213+57+57+57+57  
15 213+57+57+57+57  
15 213+57+57+57+57  
15 213+57+57+57+57

143  
145  
147  
149  
143  
145  
147  
149

\_\_\_\_\_

A diagram consisting of three rows of symbols. The top row contains 16 arrows pointing to the right. The middle row contains 16 dots. The bottom row contains 16 circles. The symbols are arranged in a staggered fashion, with each symbol in a row positioned between two symbols in the row above and below it.



[illegible]

CS A 4000 3

[illegible]

```

0.000 114 121
0.000 112 122
0.000 112 123
0.000 113 125
0.000 113 135
0.000 113 138
0.000 114 141

```

## I M P R E S I O N D E R E S U L T A D O S

MATRIZ CON ANCHO DE BANDA (MAXW) DE 25  
CORRESPONDIENTE AL NODO 46

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 141 138 6.116 GRADOS

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-01  
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= 0.3581  
ITERACION NUM. 1

NODO PRESION  
136 0.358126  
138 0.334120

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 141 138 5.589 GRADOS

FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 137 9.942 GRADOS

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-01  
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= 0.2083  
ITERACION NUM. 2

NODO PRESION  
135 0.208332  
138 0.208334

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 141 138 5.470 GRADOS

FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 137 8.914 GRADOS

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-01  
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= .9223E-01  
ITERACION NUM. 3

NODO PRESION  
136 .51820E-01  
138 .76521E-01

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 141 138  
FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 5.454 GRADOS

EN EL ELEMENTO 127 LOS NODOS 136 137 8.732 GRADOS  
FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-01  
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= .6272E-01  
ITERACION NUM. 4

NODO PRESION  
136 -.11337E-01  
138 .18278E-01

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 141 138  
FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 5.542 GRADOS

EN EL ELEMENTO 122 LOS NODOS 135 137  
FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 8.352 GRADOS

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-01  
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= .3610E-01  
ITERACION NUM. 5

NODO PRESION  
136 -.21420E-01  
138 .60246E-02

EN EL ELEMENTO 122 LOS NODOS 141 138  
FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 5.529 GRADOS

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 136 137  
FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 9.015 GRADOS

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-01  
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= .1559E-01  
ITERACION NUM. 5

NODO PRESION  
136 -.15534E-01  
138 .97139E-02

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 141 138  
FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 5.558 GRADOS

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 136 137 9.070 GRADOS  
FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-01  
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= .1659E-01  
ITERACION NUM. 7

NODO PRESION  
136 -.34130E-02  
138 .16530E-01

EN EL ELEMENTO 129 LOS NODOS 141 138  
FORMAN CON EL NODO CENTRAL UN ANGULO DE 5.719 GRADOS

ERROR ALLEVARADO EN ESTA ITERACION = .0077E-02  
ITERACION NUM. 12

LA FRONTERA LIBRE SE LOCALIZO CON UNA UNIDADES  
APROXIMACION MENOR O IGUAL A .96772E-02  
EN 12 ITERACIONES

| FRONTERA LIBRE CALCULADA | ORDENADA | PREISION |
|--------------------------|----------|----------|
| NODO                     | ABSCISA  |          |
| 55                       | 5.250    | 4.804    |
| 57                       | 5.500    | -4.639   |
| 67                       | 6.000    | -4.340   |
| 77                       | 6.250    | -4.198   |
| 78                       | 6.500    | -4.060   |
| 87                       | 7.000    | -3.782   |
| 96                       | 7.250    | -3.642   |
| 97                       | 7.500    | -3.499   |
| 105                      | 8.000    | -3.201   |
| 113                      | 8.250    | -3.045   |
| 114                      | 8.500    | -2.891   |
| 121                      | 8.750    | -2.714   |
| 122                      | 9.000    | -2.535   |
| 128                      | 9.250    | -2.343   |
| 129                      | 9.500    | -2.179   |
| 135                      | 9.750    | -2.029   |
| 136                      | 10.00    | -2.050   |
| 138                      | 10.10    | 2.082    |
| 141                      | 10.49    | 0.       |

CARGA HIDRAULICA Y PREISION DEL FLUIDO CALCULADOS  
NODO CARGA PREISION

|   |        |        |
|---|--------|--------|
| 1 | 4.9933 | 4.9933 |
| 2 | 4.9777 | 4.4777 |
| 3 | 4.9669 | 4.9669 |
| 4 | 4.9660 | 3.9660 |
| 5 | 4.9335 | 4.4335 |
| 6 | 4.9227 | 4.9227 |







H-1

APENDICE H

\*\*\*\*\*  
 FECHA DE EJECUCION DEL PROGRAMA : 9 DE ABRIL DE 1986

FRONT/5

# DATOS DEL PROBLEMA

LA FRONTERA LIBRE SE VA A LOCALIZAR CON  
 UNA APROXIMACION MENOR O IGUAL A .1000E-02 UNIDADES

NODOS QUE CONSTITUYEN LA FRONTERA LIBRE:  
 NODO NUM. DESPLAZAMIENTO VERT. MAXIMO HASTA LA COTA

|      |       |
|------|-------|
| 567  | 4.300 |
| 688  | 4.000 |
| 779  | 4.000 |
| 888  | 3.500 |
| 998  | 3.500 |
| 1000 | 3.500 |
| 1100 | 2.800 |
| 1110 | 2.500 |
| 1120 | 2.500 |
| 1130 | 2.500 |
| 1140 | 2.500 |
| 1150 | 2.500 |
| 1160 | 2.500 |
| 1170 | 2.500 |
| 1180 | 2.500 |
| 1190 | 2.500 |
| 1200 | 2.500 |
| 1300 | 2.500 |
| 1400 | 2.500 |
| 1410 | 2.500 |
| 1420 | 2.500 |
| 1430 | 2.500 |
| 1440 | 2.500 |
| 1450 | 2.500 |

NODO SUJETO A DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL MIN. HASTA LA COTA  
 NODO NUM. DESPLAZAMIENTO 10.00

| NO. DE ELEMENTOS                        | (NELS)  | =   |
|-----------------------------------------|---------|-----|
| NO. DE NODOS                            | (NND)   | 134 |
| NO. DE ZONAS                            | (NZNS)  | 166 |
| NO. DE ESPECIFICACIONES                 | (NHDS)  | 23  |
| NO. DE SUMIDORES                        | (NWLDS) | 0   |
| NO. DE ELEMENTOS CON GASTO ESPECIFICADO | (NGBND) | 41  |

| NODO | XCORD | YCORD |
|------|-------|-------|
| 1    | 0.50  | 0.00  |



[illegible][illegible][illegible][illegible]



[illegible][illegible]

44-38861-1000 (continued)

[illegible][illegible]

\_\_\_\_\_





418000  
419000  
420000  
421000  
422000  
423000  
424000  
425000  
426000  
427000  
428000  
429000  
430000  
431000  
432000  
433000  
434000  
435000  
436000  
437000  
438000  
439000  
440000  
441000  
442000  
443000  
444000  
445000  
446000  
447000  
448000  
449000  
450000  
451000  
452000  
453000  
454000  
455000  
456000  
457000  
458000  
459000  
460000  
461000  
462000  
463000  
464000  
465000  
466000  
467000  
468000  
469000  
470000  
471000  
472000  
473000  
474000  
475000  
476000  
477000

|       |     |     |
|-------|-----|-----|
| 0:000 | 48  | 78  |
| 0:000 | 79  | 78  |
| 0:000 | 88  | 97  |
| 0:000 | 97  | 98  |
| 0:000 | 106 | 106 |
| 0:000 | 112 | 112 |
| 0:000 | 122 | 122 |
| 0:000 | 123 | 123 |
| 0:000 | 129 | 129 |
| 0:000 | 135 | 135 |
| 0:000 | 140 | 140 |
| 0:000 | 141 | 141 |
| 0:000 | 142 | 142 |
| 0:000 | 143 | 143 |

I M P R E S I O N D E R E S U L T A D O S

MATRIZ CON ANCHO DE BANDA (MAXBW) DE 25  
CORRESPONDIENTE AL NODO 46

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-02  
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= .8857E-02  
ITERACION NUM. 1

NODO 142 PRESION -.20795E-02  
143 .44741E-02  
ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-02  
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= .6333E-02  
ITERACION NUM. 2

NODO 142 PRESION -.20220E-02  
143 .41333E-02  
ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-02  
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= .4583E-02  
ITERACION NUM. 3

NODO 142 PRESION -.183307E-02  
143 .38395E-02  
ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-02  
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= .3546E-02  
ITERACION NUM. 4

```

4780000
4790000
4800000
4810000
4820000
4830000
4840000
4850000
4860000
4870000
4880000
4890000
4900000
4910000
4920000
4930000
4940000
4950000
4960000
4970000
4980000
4990000
5000000
5010000
5020000
5030000
5040000
5050000
5060000
5070000
5080000
5090000
5100000
5110000
5120000
5130000
5140000
5150000
5160000
5170000
5180000
5190000
5200000
5210000
5220000
5230000
5240000
5250000
5260000
5270000
5280000
5290000
5300000
5310000
5320000
5330000
5340000
5350000
5360000
5370000
5380000
5390000
5400000
5410000
5420000
5430000
5440000
5450000
5460000
5470000
5480000
5490000
5500000
5510000
5520000
5530000
5540000
5550000
5560000
5570000
5580000
5590000
5600000
5610000
5620000
5630000
5640000
5650000
5660000
5670000
5680000
5690000
5700000
5710000
5720000
5730000
5740000
5750000
5760000
5770000
5780000
5790000
5800000
5810000
5820000
5830000
5840000
5850000
5860000
5870000
5880000
5890000
5900000
5910000
5920000
5930000
5940000
5950000
5960000
5970000
5980000
5990000
6000000

NOD0 PRESSION - .16580E-02
142 - .35460E-02
143

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-02
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= .3241E-02
ITERACION NUM. 5

NOD0 PRESSION - .15379E-02
142 - .32406E-02
143

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-02
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= .2929E-02
ITERACION NUM. 6

NOD0 PRESSION - .14553E-02
142 - .29290E-02
143

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-02
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= .2622E-02
ITERACION NUM. 7

NOD0 PRESSION - .13864E-02
142 - .26222E-02
143

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-02
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= .2330E-02
ITERACION NUM. 8

NOD0 PRESSION - .13150E-02
142 - .23298E-02
143

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-02
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= .2058E-02
ITERACION NUM. 9

NOD0 PRESSION - .12348E-02
142 - .20578E-02
143

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-02
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= .1809E-02
ITERACION NUM. 10

NOD0 PRESSION - .11456E-02
142 - .18093E-02
143

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= .1000E-02
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= .1528E-02
ITERACION NUM. 11

NOD0 PRESSION - .10572E-02
142 - .15273E-02
143

```

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= :1600E-02  
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= :1549E-02  
ITERACION NUM. 12

NODO PRESION  
142 - :11551E-02  
143 :15494E-02

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= :1000E-02  
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= :1226E-02  
ITERACION NUM. 13

NODO PRESION  
142 - :12057E-02  
143 :12235E-02

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= :1000E-02  
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= :1171E-02  
ITERACION NUM. 14

NODO PRESION  
142 - :11707E-02  
143 :95702E-03

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= :1000E-02  
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= :1070E-02  
ITERACION NUM. 15

NODO PRESION  
142 - :10699E-02  
143 :74649E-03

ERROR PERMITIDO EN FRONTERA LIBRE= :1000E-02  
ERROR ALCANZADO EN ESTA ITERACION= :9827E-03  
ITERACION NUM. 16

H-11

LA FRONTERA LIBRE SE LOCALIZO CON UNA  
APPROXIMACION MENOR O IGUAL A :93265E-03 UNIDADES  
EN 16 ITERACIONES

FRONTERA LIBRE CALCULADA  
NODO ABSOLUTA

ORDENADA

PRESION

50 5.500 4.642 - :3121E-05

67 5.750 4.483 - :4251E-05

68 6.000 4.344 - :4759E-05

73 6.250 4.202 - :5177E-05

79 6.500 4.064 - :5274E-05

88 7.000 3.787 - :4705E-05

97 7.250 3.647 - :3541E-05

98 7.500 3.506 - :2579E-05

106 8.000 3.200 - :3595E-05









I-1

A P E N D I C E    I

```

3 CLS
30 PRINT:PRINT:PRINT I-2
35 PRINT "nombre del programa:PVI.BAS"
40 PRINT:PRINT:PRINT:PRINT
45 PRINT "Objetivo : DETERMINAR LA FRONTERA LIBRE EN PRESA DE TERRACERIA"
50 PRINT
55 PRINT " CON SUS DOS TALUDES VERTICALES.LA FRONTERA LIBRE"
57 PRINT
60 PRINT "  $y=f(x)$  ESTA DADA POR LA MINIMA COTA SUPERIOR"
65 PRINT
68 PRINT " DE LOS VALORES TALES QUE : "
69 PRINT
70 PRINT "  $w(x,y)$  ES MAYOR O IGUAL A CERO."
75 PRINT
80 PRINT: PRINT " PARA CONTINUAR TECLEE CONT ( TECLA F5 )"
85 STOP
90 CLS
95 DEFDBL A-H,O-Z
100 INPUT "DAME EL NOMBRE DEL ARCHIVO DE RESULTADOS";A$
105 PRINT:PRINT
110 C$=A$+".DAT"
115 OPEN "O",#1,C$
120 DIM U(50,60),V(50,60)
125 PRINT:PRINT"DAME EL VALOR DEL ESPESOR DE LA PRESA":PRINT
130 INPUT XC
135 PRINT:PRINT USING "ESPESOR DE LA PRESA =##.##";XC
140 PRINT:PRINT "DAME EL VALOR DE LA ALTURA DEL PRIMER Y SEGUNDO EMBALSES"
145 PRINT:INPUT YA,YD
150 PRINT:PRINT USING"ALTURA DEL PRIMER EMBALSE = ##.##";YA
155 PRINT:PRINT USING"ALTURA DEL SEGUNDO EMBALSE =##.##";YD
160 DM=1.8
165 PRINT:PRINT "DAME EL VALOR DE LA PRECISION" :PRINT
170 INPUT EPSI
175 PRINT:PRINT USING"VALOR DE LA PRECISION = ##.#####";EPSI
180 PRINT:PRINT "DAME EL NUMERO DE INTERVALOS HORIZONTALES Y VERTICALES": PRINT
185 INPUT NX,NY
190 PRINT:PRINT USING"NUMERO DE INTERVALOS HORIZONTALES=###";NX
195 PRINT:PRINT USING"NUMERO DE INTERVALOS VERTICALES =###";NY
200 PRINT:PRINT "DAME EL NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES"
205 PRINT:INPUT NMAXI
210 PRINT:PRINT USING"NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES =###";NMAXI
215 GOSUB 3000
220 NX1=NX+1
225 NY1=NY+1
230 HX=XC/NX
235 HY=YA/NY
240 REM HX, HY, SON LA NORMA DE LA MALLA
245 JJ=YD/HY
250 JJ=FIX(JJ)
255 JD2= JJ+2
260 A0=2!*(1/HX^2+1/HY^2)
265 A1=1!/(HX*HX)
270 A2=1!/(HY*HY)
275 A3=A1
280 A4=A2
285 REM CONSTRUCCION DE LA MATRIZ V
290 FOR J=1 TO NY1
295 V(1,J)=(YA-(J-1)*HY)^2/2!
300 NEXT J
305 FOR I=2 TO NX1
310 V(I,1)=YA^2/2!+(YD^2-YA^2)*(I-1)*HX/(2!*XC)
315 V(I,NY1)=0

```

```

20 NEXT I
30 JD=YD/HY+1
35 JD=FIX(JD)
40 JD1=JD+1
50 FOR J = 2 TO JD
60 V(NX1,J)=(YD-(J-1)*HY)^2/2!
70 NEXT J
80 FOR J=JD1 TO NY
90 V(NX1,J)=0
99 NEXT J
10 FOR I=2 TO NX
20 X1=(I-1.5)*HX
30 X2=(I-.5)*HX
40 FOR J=2 TO JJ
50 Y1=(J-1.5)*HY
60 Y2=(J-.5)*HY
050 V(I,J)=(1/(4!*XC))*(X2^2-X1^2)*((YD^2-YA^2)*(Y2-Y1)-(YD-YA)*(Y2^2-Y1^2))+(X2
(1)/2!*(YA^2*(Y2-Y1)-YA*(Y2^2-Y1^2)+(Y2^3-Y1^3)/3!))/(HX*HY)
060 NEXT J
070 J=JJ+1
080 Y1=(J-1.5)*HY
090 Y2=(J-1)*HY
100 Y3=(J-.5)*HY
170 V(I,J)=(1/(4!*XC))*(X2^2-X1^2)*((YD^2-YA^2)*(Y2-Y1)-(YD-YA)*(YA^2-Y1^2))+(X2
(1)/2!*(YA^2*(Y2-Y1)-YA*(Y2^2-Y1^2)+(Y2^3-Y1^3)/3!)+(YA^2*(Y3-Y2)-YA*(Y3^2-Y2^2
+(Y3^3-Y2^3)/3!)*((X2-X1)/2!-1/(4!*XC)*(X2^2-X1^2)))/(HX*HY)
180 FOR J=JD2 TO NY
190 Y1=(J-1.5)*HY
200 Y2=(J-.5)*HY
210 V(I,J)=((YA^2*(Y2-Y1)-YA*(Y2^2-Y1^2)+(Y2^3-Y1^3)/3!)*((X2-X1)/2!-1/(4!*XC)*
(2^2-X1^2)))/(HX*HY)
220 NEXT J
230 NEXT I
240 REM VALORES DE LA FUNCION EN LA FRONTERA
250 FOR J=1 TO NY1
260 U(1,J)=0
270 U(NX1,J)=0
280 NEXT J
290 FOR I=2 TO NX
300 U(I,1)=0
310 U(I,NY1)=0
320 NEXT I
330 REM CALCULO DE U(I,J) POR EL METODO DEL RELAJAMIENTO
340 REM LOS VALORES INICIALES DE LAS PRESIONES = 0
350 FOR I=2 TO NX
360 FOR J=2 TO NY
370 U(I,J)=0
380 NEXT J
390 NEXT I
395 CLS
400 NU=0
410 SMAX=0
420 NU=NU+1
425 PRINT " ITERACION NUM. ";NU
430 FOR I=2 TO NX
450 FOR J=2 TO NY
60 F=-A0*V(I,J)+A1*V(I+1,J)+A2*V(I,J+1)+A3*V(I-1,J)+A4*V(I,J-1)-1!
70 Z=(A1*U(I+1,J)+A2*U(I,J+1)+A3*U(I-1,J)+A4*U(I,J-1)+F)/A0
80 Z=DM*Z+(1-DM)*U(I,J)
90 IF Z >= -V(I,J) GOTO 1510
00 Z=-V(I,J)
110 DU=ABS(Z-U(I,J))

```

```

20 IF DU <= SMAX GOTO 1540
30 SMAX=DU
40 U(I,J)=Z
50 NEXT J
60 NEXT I
70 IF SMAX <=EPSI GOTO 1590
80 IF NUCNMAX1 GOTO 1410
90 FOR I=1 TO NX1
100 FOR J=1 TO NY1
110 V(I,J)=V(I,J)+U(I,J)
120 XII=(I-1)*HX
130 YJJ=(J-1)*HY
140 PRINT USING"V(##.##,##.##)=##.#####";XII;YJJ;V(I,J)
150 PRINT #1, USING"V(##.##,##.##)=##.#####";XII;YJJ;V(I,J)
160 NEXT J
170 NEXT I
180 CLOSE #1
190 CLS
200 PRINT:PRINT:PRINT:PRINT:PRINT
210 PRINT "LOS DATOS Y RESULTADOS QUEDARON GRABADOS EN EL ARCHIVO"
220 PRINT:PRINT
230 PRINT "      ";C$
240 SAVE"VA6.BAS"
250 END
260 REM RUTINA DE GRABADO DE LOS RESULTADOS
270 PRINT #1,: PRINT #1, USING" ESPESOR DE LA PRESA =##.##";XC
280 PRINT #1,:PRINT #1," ALTURA DEL PRIMER EMBALSE=";YA
290 PRINT #1,:PRINT #1," ALTURA DEL SEGUNDO EMBALSE=";YD
300 PRINT #1,: PRINT #1, USING" VALOR DE LA PRECISION=#.#####";EPSI
310 PRINT #1,:PRINT #1,USING " NUMERO DE INTERVALOS HORIZONTALES=###";NX
320 PRINT #1,:PRINT #1,USING " NUMERO DE INTERVALOS VERTICALES=###";NY
330 PRINT #1,:PRINT #1,USING " NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES      =###";NMAX1
340 PRINT #1,:PRINT #1,
350 RETURN

```

J-1

A P E N D I C E    J

VALOR DE LA PRECISION=0.00001

NUMERO DE INTERVALOS HORIZONTALES= 20

NUMERO DE INTERVALOS VERTICALES= 30

NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES = 40

V( 0.00, 0.00)= 5.184200286865  
V( 0.00, 0.11)= 4.844346523285  
V( 0.00, 0.21)= 4.516014575958  
V( 0.00, 0.32)= 4.199202060699  
V( 0.00, 0.43)= 3.893909931183  
V( 0.00, 0.54)= 3.600139141083  
V( 0.00, 0.64)= 3.317888021469  
V( 0.00, 0.75)= 3.047157287598  
V( 0.00, 0.86)= 2.787947654724  
V( 0.00, 0.97)= 2.540257930756  
V( 0.00, 1.07)= 2.304089069366  
V( 0.00, 1.18)= 2.079440116882  
V( 0.00, 1.29)= 1.866312026978  
V( 0.00, 1.40)= 1.664704084396  
V( 0.00, 1.50)= 1.474616885185  
V( 0.00, 1.61)= 1.296050071716  
V( 0.00, 1.72)= 1.129003643990  
V( 0.00, 1.82)= 0.973477482796  
V( 0.00, 1.93)= 0.829472005367  
V( 0.00, 2.04)= 0.696986913681  
V( 0.00, 2.13)= 0.576022267342  
V( 0.00, 2.25)= 0.466578006744  
V( 0.00, 2.36)= 0.368654221296  
V( 0.00, 2.47)= 0.282250910997  
V( 0.00, 2.58)= 0.207368001342  
V( 0.00, 2.68)= 0.144005566835  
V( 0.00, 2.79)= 0.092163555324  
V( 0.00, 2.90)= 0.051842000335  
V( 0.00, 3.01)= 0.023040888831  
V( 0.00, 3.11)= 0.005760222208  
V( 0.00, 3.22)= 0.000000000000  
V( 0.08, 0.00)= 4.942630267143  
V( 0.08, 0.11)= 4.614562288805  
V( 0.08, 0.21)= 4.298137215098  
V( 0.08, 0.32)= 3.992548917487  
V( 0.08, 0.43)= 3.698754037367  
V( 0.08, 0.54)= 3.416873988972  
V( 0.08, 0.64)= 3.145982655918  
V( 0.08, 0.75)= 2.886126861946  
V( 0.08, 0.86)= 2.637761792396  
V( 0.08, 0.97)= 2.400851218411  
V( 0.08, 1.07)= 2.175364245714  
V( 0.08, 1.18)= 1.961078951409  
V( 0.08, 1.29)= 1.758009431284  
V( 0.08, 1.40)= 1.566088967056  
V( 0.08, 1.50)= 1.385088431035  
V( 0.08, 1.61)= 1.215094588373  
V( 0.08, 1.72)= 1.056338330028  
V( 0.08, 1.82)= 0.908602053488

V( 0.08, 1.93) = 0.772030650075  
V( 0.08, 2.04) = 0.646328411934  
V( 0.08, 2.15) = 0.532053037055  
V( 0.08, 2.25) = 0.428619876712  
V( 0.08, 2.36) = 0.336628209205  
V( 0.08, 2.47) = 0.255679003783  
V( 0.08, 2.58) = 0.185869423720  
V( 0.08, 2.68) = 0.127132365995  
V( 0.08, 2.79) = 0.079543595690  
V( 0.08, 2.90) = 0.043071345416  
V( 0.08, 3.01) = 0.017697896729  
V( 0.08, 3.11) = 0.003356381184  
V( 0.08, 3.22) = 0.000000000000  
V( 0.16, 0.00) = 4.701060247421  
V( 0.16, 0.11) = 4.384465659438  
V( 0.16, 0.21) = 4.080113220279  
V( 0.16, 0.32) = 3.786690824656  
V( 0.16, 0.43) = 3.503939805314  
V( 0.16, 0.54) = 3.233247974645  
V( 0.16, 0.64) = 2.974159105018  
V( 0.16, 0.75) = 2.725651882059  
V( 0.16, 0.86) = 2.488021768929  
V( 0.16, 0.97) = 2.261878101044  
V( 0.16, 1.07) = 2.047136001793  
V( 0.16, 1.18) = 1.843199334642  
V( 0.16, 1.29) = 1.650199207892  
V( 0.16, 1.40) = 1.467818431513  
V( 0.16, 1.50) = 1.295940950814  
V( 0.16, 1.61) = 1.134453721628  
V( 0.16, 1.72) = 0.983796970118  
V( 0.16, 1.82) = 0.843854473279  
V( 0.16, 1.93) = 0.714675304235  
V( 0.16, 2.04) = 0.595888365636  
V( 0.16, 2.15) = 0.488080235721  
V( 0.16, 2.25) = 0.390924421027  
V( 0.16, 2.36) = 0.304653263731  
V( 0.16, 2.47) = 0.229321643127  
V( 0.16, 2.58) = 0.164409496421  
V( 0.16, 2.68) = 0.110352546980  
V( 0.16, 2.79) = 0.067074057191  
V( 0.16, 2.90) = 0.034512827354  
V( 0.16, 3.01) = 0.012615765661  
V( 0.16, 3.11) = 0.001262755872  
V( 0.16, 3.22) = 0.000000000000  
V( 0.24, 0.00) = 4.459490203857  
V( 0.24, 0.11) = 4.154702542333  
V( 0.24, 0.21) = 3.861701680911  
V( 0.24, 0.32) = 3.580684825888  
V( 0.24, 0.43) = 3.310002816839  
V( 0.24, 0.54) = 3.050181004093  
V( 0.24, 0.64) = 2.802245831726  
V( 0.24, 0.75) = 2.565424073033  
V( 0.24, 0.86) = 2.339056289009  
V( 0.24, 0.97) = 2.123675367544  
V( 0.24, 1.07) = 1.919554100072  
V( 0.24, 1.18) = 1.726028632995  
V( 0.24, 1.29) = 1.542928309592  
V( 0.24, 1.40) = 1.370009169710  
V( 0.24, 1.50) = 1.207138291169  
V( 0.24, 1.61) = 1.054216426204

V( 0.24, 1.72) = 0.911496807918  
V( 0.24, 1.82) = 0.779401628830  
V( 0.24, 1.93) = 0.657230226044  
V( 0.24, 2.04) = 0.545665463833  
V( 0.24, 2.15) = 0.444335256929  
V( 0.24, 2.25) = 0.353425561085  
V( 0.24, 2.36) = 0.273107924427  
V( 0.24, 2.47) = 0.203117521950  
V( 0.24, 2.58) = 0.143244707069  
V( 0.24, 2.68) = 0.093957003658  
V( 0.24, 2.79) = 0.055058825106  
V( 0.24, 2.90) = 0.026438516325  
V( 0.24, 3.01) = 0.008144810598  
V( 0.24, 3.11) = 0.000000000000  
V( 0.24, 3.22) = 0.000000000000  
V( 0.32, 0.00) = 4.217920207977  
V( 0.32, 0.11) = 3.925287268165  
V( 0.32, 0.21) = 3.643782316040  
V( 0.32, 0.32) = 3.374355264182  
V( 0.32, 0.43) = 3.116112425487  
V( 0.32, 0.54) = 2.868062677965  
V( 0.32, 0.64) = 2.631051176581  
V( 0.32, 0.75) = 2.405480270362  
V( 0.32, 0.86) = 2.190672102205  
V( 0.32, 0.97) = 1.986387341184  
V( 0.32, 1.07) = 1.792816768212  
V( 0.32, 1.18) = 1.609563782668  
V( 0.32, 1.29) = 1.436253723247  
V( 0.32, 1.40) = 1.272577312130  
V( 0.32, 1.50) = 1.118551757895  
V( 0.32, 1.61) = 0.974031497034  
V( 0.32, 1.72) = 0.839546297177  
V( 0.32, 1.82) = 0.714949473216  
V( 0.32, 1.93) = 0.600266210374  
V( 0.32, 2.04) = 0.495692163469  
V( 0.32, 2.15) = 0.401005642760  
V( 0.32, 2.25) = 0.316582808405  
V( 0.32, 2.36) = 0.242118481756  
V( 0.32, 2.47) = 0.177542928276  
V( 0.32, 2.58) = 0.122839255260  
V( 0.32, 2.68) = 0.078268425858  
V( 0.32, 2.79) = 0.043681338463  
V( 0.32, 2.90) = 0.019101429541  
V( 0.32, 3.01) = 0.004504541458  
V( 0.32, 3.11) = 0.000000000000  
V( 0.32, 3.22) = 0.000000000000  
V( 0.41, 0.00) = 3.976350212097  
V( 0.41, 0.11) = 3.695820694488  
V( 0.41, 0.21) = 3.426456647965  
V( 0.41, 0.32) = 3.168541478937  
V( 0.41, 0.43) = 2.922126921240  
V( 0.41, 0.54) = 2.686302848842  
V( 0.41, 0.64) = 2.460891323847  
V( 0.41, 0.75) = 2.246402650321  
V( 0.41, 0.86) = 2.042843329108  
V( 0.41, 0.97) = 1.849697441441  
V( 0.41, 1.07) = 1.666796400013  
V( 0.41, 1.18) = 1.493584055593  
V( 0.41, 1.29) = 1.329848879146  
V( 0.41, 1.40) = 1.175269591066

V( 0.41, 1.50) = 1.030073854550  
V( 0.41, 1.61) = 0.894038855650  
V( 0.41, 1.72) = 0.767945640905  
V( 0.41, 1.82) = 0.651241034438  
V( 0.41, 1.93) = 0.544086600578  
V( 0.41, 2.04) = 0.446560648226  
V( 0.41, 2.15) = 0.358681326944  
V( 0.41, 2.25) = 0.280751585424  
V( 0.41, 2.36) = 0.212102764708  
V( 0.41, 2.47) = 0.152909048782  
V( 0.41, 2.58) = 0.103367655454  
V( 0.41, 2.68) = 0.063483941208  
V( 0.41, 2.79) = 0.033234508122  
V( 0.41, 2.90) = 0.012656355126  
V( 0.41, 3.01) = 0.001633577287  
V( 0.41, 3.11) = 0.000000000000  
V( 0.41, 3.22) = 0.000000000000  
V( 0.49, 0.00) = 3.734780120850  
V( 0.49, 0.11) = 3.466361109590  
V( 0.49, 0.21) = 3.209265846951  
V( 0.49, 0.32) = 2.963392221638  
V( 0.49, 0.43) = 2.728696861944  
V( 0.49, 0.54) = 2.504779342600  
V( 0.49, 0.64) = 2.291261991962  
V( 0.49, 0.75) = 2.088152330377  
V( 0.49, 0.86) = 1.893532755076  
V( 0.49, 0.97) = 1.713204872229  
V( 0.49, 1.07) = 1.540904154280  
V( 0.49, 1.18) = 1.377786221927  
V( 0.49, 1.29) = 1.223585443422  
V( 0.49, 1.40) = 1.078401691246  
V( 0.49, 1.50) = 0.942155592401  
V( 0.49, 1.61) = 0.815051985088  
V( 0.49, 1.72) = 0.697419550644  
V( 0.49, 1.82) = 0.588725767494  
V( 0.49, 1.93) = 0.489127605181  
V( 0.49, 2.04) = 0.398733739734  
V( 0.49, 2.15) = 0.317874532293  
V( 0.49, 2.25) = 0.245951341490  
V( 0.49, 2.36) = 0.183095226782  
V( 0.49, 2.47) = 0.129392121627  
V( 0.49, 2.58) = 0.084916446789  
V( 0.49, 2.68) = 0.049695791660  
V( 0.49, 2.79) = 0.023859325827  
V( 0.49, 2.90) = 0.007286100524  
V( 0.49, 3.01) = 0.000000000000  
V( 0.49, 3.11) = 0.000000000000  
V( 0.49, 3.22) = 0.000000000000  
V( 0.57, 0.00) = 3.493210220337  
V( 0.57, 0.11) = 3.237109329978  
V( 0.57, 0.21) = 2.992246062938  
V( 0.57, 0.32) = 2.758498411894  
V( 0.57, 0.43) = 2.535790535601  
V( 0.57, 0.54) = 2.323608797985  
V( 0.57, 0.64) = 2.121650251932  
V( 0.57, 0.75) = 1.929928092879  
V( 0.57, 0.86) = 1.748403532008  
V( 0.57, 0.97) = 1.577007576711  
V( 0.57, 1.07) = 1.415491851385  
V( 0.57, 1.18) = 1.262789087292

V( 0.57, 1.29) = 1.118604851811  
V( 0.57, 1.40) = 0.983095737575  
V( 0.57, 1.50) = 0.856097038559  
V( 0.57, 1.61) = 0.738128267655  
V( 0.57, 1.72) = 0.628974486053  
V( 0.57, 1.82) = 0.528303231091  
V( 0.57, 1.93) = 0.436290236914  
V( 0.57, 2.04) = 0.353359949617  
V( 0.57, 2.15) = 0.278941817821  
V( 0.57, 2.25) = 0.213031072273  
V( 0.57, 2.36) = 0.155947930635  
V( 0.57, 2.47) = 0.107627428350  
V( 0.57, 2.58) = 0.068061047904  
V( 0.57, 2.68) = 0.037527438486  
V( 0.57, 2.79) = 0.015958692451  
V( 0.57, 2.90) = 0.003354748487  
V( 0.57, 3.01) = 0.000000000000  
V( 0.57, 3.11) = 0.000000000000  
V( 0.57, 3.22) = 0.000000000000  
V( 0.65, 0.00) = 3.251640129089  
V( 0.65, 0.11) = 3.007959043634  
V( 0.65, 0.21) = 2.775469698634  
V( 0.65, 0.32) = 2.553633951421  
V( 0.65, 0.43) = 2.342714462725  
V( 0.65, 0.54) = 2.142376365918  
V( 0.65, 0.64) = 1.952159156406  
V( 0.65, 0.75) = 1.772149965962  
V( 0.65, 0.86) = 1.602417138696  
V( 0.65, 0.97) = 1.442648291268  
V( 0.65, 1.07) = 1.292244306994  
V( 0.65, 1.18) = 1.150025905236  
V( 0.65, 1.29) = 1.015974152909  
V( 0.65, 1.40) = 0.890049876748  
V( 0.65, 1.50) = 0.772407654942  
V( 0.65, 1.61) = 0.663332358456  
V( 0.65, 1.72) = 0.562404138461  
V( 0.65, 1.82) = 0.469440306730  
V( 0.65, 1.93) = 0.385189858458  
V( 0.65, 2.04) = 0.309046538984  
V( 0.65, 2.15) = 0.240742096943  
V( 0.65, 2.25) = 0.180948295308  
V( 0.65, 2.36) = 0.129637109076  
V( 0.65, 2.47) = 0.086587523075  
V( 0.65, 2.58) = 0.052160118851  
V( 0.65, 2.68) = 0.026387994582  
V( 0.65, 2.79) = 0.009194543740  
V( 0.65, 2.90) = 0.000635669542  
V( 0.65, 3.01) = 0.000000000000  
V( 0.65, 3.11) = 0.000000000000  
V( 0.65, 3.22) = 0.000000000000  
V( 0.73, 0.00) = 3.010070037842  
V( 0.73, 0.11) = 2.778692144889  
V( 0.73, 0.21) = 2.558524765802  
V( 0.73, 0.32) = 2.348778215766  
V( 0.73, 0.43) = 2.149809099872  
V( 0.73, 0.54) = 1.961894055308  
V( 0.73, 0.64) = 1.784389659434  
V( 0.73, 0.75) = 1.616745121679  
V( 0.73, 0.86) = 1.458878000307  
V( 0.73, 0.97) = 1.310452983417

V( 0.73, 1.07) = 1.170748378891  
V( 0.73, 1.18) = 1.038731586630  
V( 0.73, 1.29) = 0.914550886380  
V( 0.73, 1.40) = 0.798237281755  
V( 0.73, 1.50) = 0.689955084733  
V( 0.73, 1.61) = 0.589758249470  
V( 0.73, 1.72) = 0.496983333506  
V( 0.73, 1.82) = 0.412559483032  
V( 0.73, 1.93) = 0.335660300697  
V( 0.73, 2.04) = 0.266168362401  
V( 0.73, 2.15) = 0.204724717121  
V( 0.73, 2.25) = 0.151194956616  
V( 0.73, 2.36) = 0.105531164388  
V( 0.73, 2.47) = 0.067886576113  
V( 0.73, 2.58) = 0.038367101397  
V( 0.73, 2.68) = 0.017145989264  
V( 0.73, 2.79) = 0.004284690811  
V( 0.73, 2.90) = 0.000000000000  
V( 0.73, 3.01) = 0.000000000000  
V( 0.73, 3.11) = 0.000000000000  
V( 0.73, 3.22) = 0.000000000000  
V( 0.81, 0.00) = 2.768500137329  
V( 0.81, 0.11) = 2.549372340716  
V( 0.81, 0.21) = 2.341660328842  
V( 0.81, 0.32) = 2.144889902478  
V( 0.81, 0.43) = 1.958756841847  
V( 0.81, 0.54) = 1.783378587154  
V( 0.81, 0.64) = 1.618230484324  
V( 0.81, 0.75) = 1.462518675654  
V( 0.81, 0.86) = 1.316079955348  
V( 0.81, 0.97) = 1.178790515956  
V( 0.81, 1.07) = 1.050019763415  
V( 0.81, 1.18) = 0.928694844547  
V( 0.81, 1.29) = 0.814862582910  
V( 0.81, 1.40) = 0.708608074014  
V( 0.81, 1.50) = 0.610100352463  
V( 0.81, 1.61) = 0.518707223234  
V( 0.81, 1.72) = 0.434849967805  
V( 0.81, 1.82) = 0.357857239081  
V( 0.81, 1.93) = 0.288137474702  
V( 0.81, 2.04) = 0.225895722724  
V( 0.81, 2.15) = 0.170837838370  
V( 0.81, 2.25) = 0.123077263844  
V( 0.81, 2.36) = 0.083090852816  
V( 0.81, 2.47) = 0.050766075320  
V( 0.81, 2.58) = 0.026182512232  
V( 0.81, 2.68) = 0.009446241005  
V( 0.81, 2.79) = 0.001031590052  
V( 0.81, 2.90) = 0.000000000000  
V( 0.81, 3.01) = 0.000000000000  
V( 0.81, 3.11) = 0.000000000000  
V( 0.81, 3.22) = 0.000000000000  
V( 0.89, 0.00) = 2.526930046082  
V( 0.89, 0.11) = 2.320565453864  
V( 0.89, 0.21) = 2.125767487184  
V( 0.89, 0.32) = 1.942014599945  
V( 0.89, 0.43) = 1.768445044147  
V( 0.89, 0.54) = 1.605080577420  
V( 0.89, 0.64) = 1.452078022486  
V( 0.89, 0.75) = 1.308882704812

V( 0.89, 0.86) = 1.174780927739  
V( 0.89, 0.97) = 1.049229939825  
V( 0.89, 1.07) = 0.931670040029  
V( 0.89, 1.18) = 0.821188444831  
V( 0.89, 1.29) = 0.717777418756  
V( 0.89, 1.40) = 0.621592351382  
V( 0.89, 1.50) = 0.532453316980  
V( 0.89, 1.61) = 0.450179317929  
V( 0.89, 1.72) = 0.374274757502  
V( 0.89, 1.82) = 0.305384610988  
V( 0.89, 1.93) = 0.243332128874  
V( 0.89, 2.04) = 0.187800697180  
V( 0.89, 2.15) = 0.139076951853  
V( 0.89, 2.25) = 0.097516802092  
V( 0.89, 2.36) = 0.063069833742  
V( 0.89, 2.47) = 0.035872482803  
V( 0.89, 2.58) = 0.016150744180  
V( 0.89, 2.68) = 0.004138946222  
V( 0.89, 2.79) = 0.000000000000  
V( 0.89, 2.90) = 0.000000000000  
V( 0.89, 3.01) = 0.000000000000  
V( 0.89, 3.11) = 0.000000000000  
V( 0.89, 3.22) = 0.000000000000  
V( 0.97, 0.00) = 2.285359954834  
V( 0.97, 0.11) = 2.092079492567  
V( 0.97, 0.21) = 1.909921483899  
V( 0.97, 0.32) = 1.738787503456  
V( 0.97, 0.43) = 1.578270353459  
V( 0.97, 0.54) = 1.428056357783  
V( 0.97, 0.64) = 1.287910737723  
V( 0.97, 0.75) = 1.157242923025  
V( 0.97, 0.86) = 1.035266169712  
V( 0.97, 0.97) = 0.921379015500  
V( 0.97, 1.07) = 0.815130889201  
V( 0.97, 1.18) = 0.715699700836  
V( 0.97, 1.29) = 0.623006137963  
V( 0.97, 1.40) = 0.537117478365  
V( 0.97, 1.50) = 0.457700211999  
V( 0.97, 1.61) = 0.384218017856  
V( 0.97, 1.72) = 0.317005230280  
V( 0.97, 1.82) = 0.255896697849  
V( 0.97, 1.93) = 0.200929616243  
V( 0.97, 2.04) = 0.152297762127  
V( 0.97, 2.15) = 0.109988479832  
V( 0.97, 2.25) = 0.074246657072  
V( 0.97, 2.36) = 0.045295655088  
V( 0.97, 2.47) = 0.023275078190  
V( 0.97, 2.58) = 0.008351707014  
V( 0.97, 2.68) = 0.000740351770  
V( 0.97, 2.79) = 0.000000000000  
V( 0.97, 2.90) = 0.000000000000  
V( 0.97, 3.01) = 0.000000000000  
V( 0.97, 3.11) = 0.000000000000  
V( 0.97, 3.22) = 0.000000000000  
V( 1.05, 0.00) = 2.043790054321  
V( 1.05, 0.11) = 1.863478524247  
V( 1.05, 0.21) = 1.694477719026  
V( 1.05, 0.32) = 1.536710875297  
V( 1.05, 0.43) = 1.389462896460  
V( 1.05, 0.54) = 1.252117478131

V( 1.05, 0.64) = 1.124559619072  
V( 1.05, 0.75) = 1.006546013915  
V( 1.05, 0.86) = 0.897264037190  
V( 1.05, 0.97) = 0.795732495133  
V( 1.05, 1.07) = 0.701275793288  
V( 1.05, 1.18) = 0.613099455862  
V( 1.05, 1.29) = 0.531247165530  
V( 1.05, 1.40) = 0.455643504069  
V( 1.05, 1.50) = 0.385669840498  
V( 1.05, 1.61) = 0.321346980567  
V( 1.05, 1.72) = 0.262535706038  
V( 1.05, 1.82) = 0.209324145465  
V( 1.05, 1.93) = 0.161750375655  
V( 1.05, 2.04) = 0.119798235186  
V( 1.05, 2.15) = 0.083718859333  
V( 1.05, 2.25) = 0.053754451179  
V( 1.05, 2.36) = 0.030204531032  
V( 1.05, 2.47) = 0.013149948490  
V( 1.05, 2.58) = 0.002937073836  
V( 1.05, 2.68) = 0.000000000000  
V( 1.05, 2.79) = 0.000000000000  
V( 1.05, 2.90) = 0.000000000000  
V( 1.05, 3.01) = 0.000000000000  
V( 1.05, 3.11) = 0.000000000000  
V( 1.05, 3.22) = 0.000000000000  
V( 1.13, 0.00) = 1.802220153809  
V( 1.13, 0.11) = 1.635345217842  
V( 1.13, 0.21) = 1.479615678484  
V( 1.13, 0.32) = 1.334825432600  
V( 1.13, 0.43) = 1.200769533258  
V( 1.13, 0.54) = 1.076996778315  
V( 1.13, 0.64) = 0.962953064102  
V( 1.13, 0.75) = 0.858004969473  
V( 1.13, 0.86) = 0.761378072903  
V( 1.13, 0.97) = 0.672245177214  
V( 1.13, 1.07) = 0.589872342389  
V( 1.13, 1.18) = 0.513326173889  
V( 1.13, 1.29) = 0.442606750033  
V( 1.13, 1.40) = 0.377365676709  
V( 1.13, 1.50) = 0.317181039323  
V( 1.13, 1.61) = 0.261985279164  
V( 1.13, 1.72) = 0.211582426927  
V( 1.13, 1.82) = 0.166183115583  
V( 1.13, 1.93) = 0.125725819970  
V( 1.13, 2.04) = 0.090417909224  
V( 1.13, 2.15) = 0.060520797475  
V( 1.13, 2.25) = 0.036259173672  
V( 1.13, 2.36) = 0.017939949970  
V( 1.13, 2.47) = 0.005764585837  
V( 1.13, 2.58) = 0.000000000000  
V( 1.13, 2.68) = 0.000000000000  
V( 1.13, 2.79) = 0.000000000000  
V( 1.13, 2.90) = 0.000000000000  
V( 1.13, 3.01) = 0.000000000000  
V( 1.13, 3.11) = 0.000000000000  
V( 1.13, 3.22) = 0.000000000000  
V( 1.22, 0.00) = 1.560649871826  
V( 1.22, 0.11) = 1.407138677352  
V( 1.22, 0.21) = 1.264855131430  
V( 1.22, 0.32) = 1.133768739436

V( 1.22, 0.43) = 1.013397173241  
V( 1.22, 0.54) = 0.903053383798  
V( 1.22, 0.64) = 0.802348015851  
V( 1.22, 0.75) = 0.710833762451  
V( 1.22, 0.86) = 0.627610539898  
V( 1.22, 0.97) = 0.551543136161  
V( 1.22, 1.07) = 0.481653238895  
V( 1.22, 1.18) = 0.416980433570  
V( 1.22, 1.29) = 0.357459248736  
V( 1.22, 1.40) = 0.302659299710  
V( 1.22, 1.50) = 0.252352067856  
V( 1.22, 1.61) = 0.206295868659  
V( 1.22, 1.72) = 0.164448336683  
V( 1.22, 1.82) = 0.126797136542  
V( 1.22, 1.93) = 0.093464738520  
V( 1.22, 2.04) = 0.064645729084  
V( 1.22, 2.15) = 0.040635668723  
V( 1.22, 2.25) = 0.021862666720  
V( 1.22, 2.36) = 0.008673282761  
V( 1.22, 2.47) = 0.001327949487  
V( 1.22, 2.58) = 0.000000000000  
V( 1.22, 2.68) = 0.000000000000  
V( 1.22, 2.79) = 0.000000000000  
V( 1.22, 2.90) = 0.000000000000  
V( 1.22, 3.01) = 0.000000000000  
V( 1.22, 3.11) = 0.000000000000  
V( 1.22, 3.22) = 0.000000000000  
V( 1.30, 0.00) = 1.319079971313  
V( 1.30, 0.11) = 1.179285876033  
V( 1.30, 0.21) = 1.050671774576  
V( 1.30, 0.32) = 0.933000074164  
V( 1.30, 0.43) = 0.826279991910  
V( 1.30, 0.54) = 0.730036157142  
V( 1.30, 0.64) = 0.643474829894  
V( 1.30, 0.75) = 0.565832623359  
V( 1.30, 0.86) = 0.496242744895  
V( 1.30, 0.97) = 0.433584332534  
V( 1.30, 1.07) = 0.376643235735  
V( 1.30, 1.18) = 0.324271600714  
V( 1.30, 1.29) = 0.276222063072  
V( 1.30, 1.40) = 0.232121738215  
V( 1.30, 1.50) = 0.191769961899  
V( 1.30, 1.61) = 0.154853631058  
V( 1.30, 1.72) = 0.121419808243  
V( 1.30, 1.82) = 0.091494935425  
V( 1.30, 1.93) = 0.065138156233  
V( 1.30, 2.04) = 0.042646111442  
V( 1.30, 2.15) = 0.024426526046  
V( 1.30, 2.25) = 0.010945216160  
V( 1.30, 2.36) = 0.002657156425  
V( 1.30, 2.47) = 0.000000000000  
V( 1.30, 2.58) = 0.000000000000  
V( 1.30, 2.68) = 0.000000000000  
V( 1.30, 2.79) = 0.000000000000  
V( 1.30, 2.90) = 0.000000000000  
V( 1.30, 3.01) = 0.000000000000  
V( 1.30, 3.11) = 0.000000000000  
V( 1.30, 3.22) = 0.000000000000  
V( 1.38, 0.00) = 1.077510070801  
V( 1.38, 0.11) = 0.951373040082

V( 1.38, 0.21) = 0.836589113319  
V( 1.38, 0.32) = 0.732949267789  
V( 1.38, 0.43) = 0.640199496196  
V( 1.38, 0.54) = 0.557940939347  
V( 1.38, 0.64) = 0.485652528867  
V( 1.38, 0.75) = 0.422600631793  
V( 1.38, 0.86) = 0.367615210063  
V( 1.38, 0.97) = 0.319079999778  
V( 1.38, 1.07) = 0.275467692220  
V( 1.38, 1.18) = 0.235619643319  
V( 1.38, 1.29) = 0.199257734551  
V( 1.38, 1.40) = 0.166083296747  
V( 1.38, 1.50) = 0.135737770448  
V( 1.38, 1.61) = 0.108067837355  
V( 1.38, 1.72) = 0.083065211771  
V( 1.38, 1.82) = 0.060706536803  
V( 1.38, 1.93) = 0.041172894094  
V( 1.38, 2.04) = 0.024791106273  
V( 1.38, 2.15) = 0.012041924241  
V( 1.38, 2.25) = 0.003566742661  
V( 1.38, 2.36) = 0.000000000000  
V( 1.38, 2.47) = 0.000000000000  
V( 1.38, 2.58) = 0.000000000000  
V( 1.38, 2.68) = 0.000000000000  
V( 1.38, 2.79) = 0.000000000000  
V( 1.38, 2.90) = 0.000000000000  
V( 1.38, 3.01) = 0.000000000000  
V( 1.38, 3.11) = 0.000000000000  
V( 1.38, 3.22) = 0.000000000000  
V( 1.46, 0.00) = 0.835939788818  
V( 1.46, 0.11) = 0.723706974996  
V( 1.46, 0.21) = 0.622819187143  
V( 1.46, 0.32) = 0.533044237444  
V( 1.46, 0.43) = 0.454456751467  
V( 1.46, 0.54) = 0.386800400526  
V( 1.46, 0.64) = 0.329372499135  
V( 1.46, 0.75) = 0.281387882577  
V( 1.46, 0.86) = 0.241714619816  
V( 1.46, 0.97) = 0.208134546954  
V( 1.46, 1.07) = 0.178530815787  
V( 1.46, 1.18) = 0.151629540195  
V( 1.46, 1.29) = 0.127252535740  
V( 1.46, 1.40) = 0.105052144186  
V( 1.46, 1.50) = 0.084781340856  
V( 1.46, 1.61) = 0.066319539368  
V( 1.46, 1.72) = 0.049681217003  
V( 1.46, 1.82) = 0.034857967084  
V( 1.46, 1.93) = 0.022016185193  
V( 1.46, 2.04) = 0.011452097997  
V( 1.46, 2.15) = 0.003818029458  
V( 1.46, 2.25) = 0.000000000000  
V( 1.46, 2.36) = 0.000000000000  
V( 1.46, 2.47) = 0.000000000000  
V( 1.46, 2.58) = 0.000000000000  
V( 1.46, 2.68) = 0.000000000000  
V( 1.46, 2.79) = 0.000000000000  
V( 1.46, 2.90) = 0.000000000000  
V( 1.46, 3.01) = 0.000000000000  
V( 1.46, 3.11) = 0.000000000000  
V( 1.46, 3.22) = 0.000000000000

V( 1.54, 0.00) = 0.594369888306  
V( 1.54, 0.11) = 0.495986375440  
V( 1.54, 0.21) = 0.409168159166  
V( 1.54, 0.32) = 0.333646353881  
V( 1.54, 0.43) = 0.269274018632  
V( 1.54, 0.54) = 0.216117166156  
V( 1.54, 0.64) = 0.173938956617  
V( 1.54, 0.75) = 0.142045565436  
V( 1.54, 0.86) = 0.119135750995  
V( 1.54, 0.97) = 0.101497733922  
V( 1.54, 1.07) = 0.086381107187  
V( 1.54, 1.18) = 0.072824467856  
V( 1.54, 1.29) = 0.060653211212  
V( 1.54, 1.40) = 0.049542929522  
V( 1.54, 1.50) = 0.039382135782  
V( 1.54, 1.61) = 0.030141883448  
V( 1.54, 1.72) = 0.021810795839  
V( 1.54, 1.82) = 0.014420504869  
V( 1.54, 1.93) = 0.008083100592  
V( 1.54, 2.04) = 0.003037861381  
V( 1.54, 2.15) = 0.000000000000  
V( 1.54, 2.25) = 0.000000000000  
V( 1.54, 2.36) = 0.000000000000  
V( 1.54, 2.47) = 0.000000000000  
V( 1.54, 2.58) = 0.000000000000  
V( 1.54, 2.68) = 0.000000000000  
V( 1.54, 2.79) = 0.000000000000  
V( 1.54, 2.90) = 0.000000000000  
V( 1.54, 3.01) = 0.000000000000  
V( 1.54, 3.11) = 0.000000000000  
V( 1.54, 3.22) = 0.000000000000  
V( 1.62, 0.00) = 0.352799987793  
V( 1.62, 0.11) = 0.268400222063  
V( 1.62, 0.21) = 0.195520877838  
V( 1.62, 0.32) = 0.134162008762  
V( 1.62, 0.43) = 0.084323555231  
V( 1.62, 0.54) = 0.046005558223  
V( 1.62, 0.64) = 0.019207799110  
V( 1.62, 0.75) = 0.003930889070  
V( 1.62, 0.86) = 0.000000000000  
V( 1.62, 0.97) = 0.000000000000  
V( 1.62, 1.07) = 0.000000000000  
V( 1.62, 1.18) = 0.000000000000  
V( 1.62, 1.29) = 0.000000000000  
V( 1.62, 1.40) = 0.000000000000  
V( 1.62, 1.50) = 0.000000000000  
V( 1.62, 1.61) = 0.000000000000  
V( 1.62, 1.72) = 0.000000000000  
V( 1.62, 1.82) = 0.000000000000  
V( 1.62, 1.93) = 0.000000000000  
V( 1.62, 2.04) = 0.000000000000  
V( 1.62, 2.15) = 0.000000000000  
V( 1.62, 2.25) = 0.000000000000  
V( 1.62, 2.36) = 0.000000000000  
V( 1.62, 2.47) = 0.000000000000  
V( 1.62, 2.58) = 0.000000000000  
V( 1.62, 2.68) = 0.000000000000  
V( 1.62, 2.79) = 0.000000000000  
V( 1.62, 2.90) = 0.000000000000  
V( 1.62, 3.01) = 0.000000000000

$U(1.52, 3.11) = 0.000000000000$   
 $U(1.52, 3.22) = 0.000000000000$

J-13