

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
"UNIDAD IZTAPALAPA"

Espintensor de Lanczos de tipo O, N, III y conexiones con los campos de Liénard y Wiechert y la ecuación de movimiento de una partícula cargada.

Tesis
que para obtener el grado de
Doctor en Ciencias
Especialidad en Física
P r e s e n t a
Gonzalo Ares de Parga Alvarez

México, D.F.

1991.

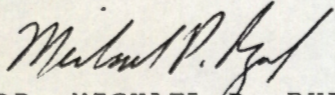
Junio 10, 1991.

DR. F. ROJAS.
COORDINADOR DEL DOCTORADO UAM-I

Por medio de la presente le comunico que por motivos personales no pude asistir al exámen de grado del Prof. Ares de Par-ga.

Recordando que de antemano yo ya había aceptado la tesis.

A T E N T A M E N T E .


DR. MICHAEL P. RYAN.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

ACTA NUMERO _____

LIBRO NUMERO _____

HOJA NUMERO _____

En México, D. F. SE PRESENTARON _____ a las 12:00 horas del día 27 del mes de MAYO del año 1991 en la Unidad IZTAPALAPA de la Universidad Autónoma Metropolitana. los suscritos miembros del Jurado

DR. EDUARDO PIÑA GARZA; DR. MARCO ANTONIO ROSALES MEDINA; DR. OCTAVIO OBREGON DIAZ; DR. MICHAEL PATRICK RYAN ALLEN; DR. JOSE LUIS LOPEZ BONILLA

bajo la Presidencia del primero y con el carácter de Secretario el último se reunieron para proceder al examen de grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS

de GONZALO ARES DE PARGA ALVAREZ

quien presentó una comunicación de resultados, cuya denominación aparece al margen y de acuerdo con el artículo 40, fracciones I III y IV del Reglamento de Estudios de Posgrado de esta Universidad, los miembros del Jurado resolvieron:

APROBADO

Acto continuo, el Presidente del Jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DENOMINACION DE LA TESIS
ESPINTENSOR DE LANCZOS DE TIPO O, N, III Y CONEXIONES CON LOS CAMPOS DE LIENARD Y WIECHERT Y LA ECUACION DE MOVIMIENTO DE UNA PARTICULA CARGADA.



Gonzalo Ares de Parga Alvarez

FIRMA DEL INTERESADO

REVISO
DIRECCION DE SISTEMAS ESCOLARES

Eduardo Piña Garza
DR. EDUARDO PIÑA GARZA
PRESIDENTE

Marco Antonio Rosales M.
DR. MARCO ANTONIO ROSALES M.
VOCAL

Jose Luis Lopez Bonilla
DR. JOSE LUIS LOPEZ BONILLA
SECRETARIO

Octavio Obregon Diaz
DR. OCTAVIO OBREGÓN DIAZ
VOCAL

DR. MICHAEL P. RYAN ALLEN
VOCAL

DR. JOSE LUIS GAZQUEZ M.
DIRECTOR DE DIVISION

CONTENIDO

RESUMEN

INTRODUCCION

Página

CAPITULO I

1.- INTRODUCCIÓN	1
2.- FORMALISMO DE NEWMAN PENROSE	2
3.- CLASIFICACIÓN DE PETROV.	10
4.- SUPERPOTENCIAL DE LANZOS.	14
5.- CONCLUSIÓN Y COMENTARIOS	31

CAPITULO II

1.- INTRODUCCIÓN	33
2.- FORMALISMO DE SYNGE EN LA ELECTRODINÁMICA DE CARGAS PUNTUALES	38
3.- INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL SUPERPOTENCIAL DE WEERT.	54
4.- COORDENADAS DE NEWMAN UNTI Y POTENCIALES PARA EL CAMPO DE LIÉNARD-WIECHERT.	62
5.- FORMALISMO DE NEWMAN PENROSE APLICADO AL TENSOR DE MAXWELL EN COORDENADAS DE NEWMAN-UNTI	72
6.- CONCLUSIONES Y COMENTARIOS	75

CONCLUSION. 76

REFERENCIAS 79

RESUMEN

Se obtienen los espintensores de Lanczos de tipo O, N, Y III en clasificación Petrov. Al encontrarse el resultado en forma general para tres tipos Petrov se proponen métodos para encontrar todos los demás tipos y se rescata la idea de utilizar el superpotencial de Lanczos como una herramienta matemática práctica, en particular para los problemas de la electrodinámica clásica. El superpotencial de Weert para la parte acatada del campo de Liénard - Wiechert es deducido. Se deja abierta la posibilidad de estudiar el problema de la ecuación de movimiento de una partícula cargada utilizando los resultados anteriores.

INTRODUCCION

El problema de la ecuación de movimiento de una partícula cargada no ha sido aún resuelto. Aunque muchísimos intentos llevan a deducir la ecuación de Lorentz-Dirac (LD) ninguno de ellos es contundente; es decir, existen renormalizaciones, potenciales avanzados o cambios en el tensor de esfuerzos en la deducción de ella, lo cual hace dudar de su veracidad. Posiblemente el artículo más serio se debe a Synge (1970), en éste se obtiene la ecuación de LD por una modificación del tensor de Maxwell. Este cambio es necesario pues al calcular la ecuación por un método similar que el que utilizó Dirac³¹, no se obtiene en primera instancia la ecuación de Lorentz-Dirac, Una diferencia es la elección de la 3-superficie, que es distinta. Sin embargo por el proceso a límite uno debiera pensar en obtener el mismo resultado. Todo parece que el problema estriba en el desarrollo por aproximaciones que hace Dirac. Todo esto conduce a un análisis de los campos y tensores generados a partir de la solución de Liénard y Wiechert. Debemos recurrir a nuevos métodos matemáticos que posiblemente den respuesta a las interrogantes. Lanczos estuvo siempre interesado en geometrizar la Electrodinámica al igual que la gravitación. En el proceso descubrió un superpotencial para el tensor de Weyl. Este último ha sido tratado por Newman y Penrose, con un método que es equivalente a tratar la relatividad tensorialmente. En esta tesis trataremos de involucrar estas ideas en el estudio del campo de Liénard-

Wiechert.

Encontraremos en el camino los espintensores de Lanczos de tipo O, N Y III (G. Ares de Parga et al, J. Math Phys 30,1294 (1989)). Resultado muy interesante pues se rompe con la idea de que encontrar el superpotencial de -- Lanczos es un trabajo muy difícil. Además el último resultado sugiere la posibilidad de resolver el problema para todos los demás tipos Petrov. Todo esto muestra que el espintensor de Lanczos puede llegar a convertirse en una herramienta matemática de gran utilidad. Como veremos no sólo en la teoría de la gravitación estas técnicas pueden ser usadas sino en el -- problema de la ecuación de movimiento de una partícula cargada. A simple vista es difícil conectar este último problema con el espintensor de Lanczos pero los resultados que mencionaremos mostrarán la relación. Se demostrará que aunque algunos autores consideraban como satisfactorias una serie de ecuaciones para descubrir el movimiento de una carga, todavía no es conocida ninguna que no lleve a las paradojas típicas del problema (preaceleraciones o autoaceleraciones etc.) (G. Ares de Parga et al, Am J. Phys 57, 5, May (1989)). Al tratar de entender la paradoja Dirac-Synge se encontró la interpretación física de superpotencial de Weert como una densidad para el momento angular intrínseco del campo de Liénard y Wiechert. - Esto nos hizo pensar en utilizar un superpotencial con las propiedades del espintensor de Lanczos y así tratar de encontrar una densidad para el tensor de esfuerzos. La no la calidad del problema hace muy difícil la solución del mismo, llegando finalmente a la conclusión que un tensor de Weyl debe encontrarse para la Electrodinámica clásica y seguir todo el mismo -- procedimiento. El problema queda abierto. Por otro lado por un comentario de Rorhlich al artículo que trata las ecuaciones de movimiento (G. -- Ares de Parga et al, Am J. Phys 57, 5, May (1989)) nos invita a tratar el problema con nuestra técnica desde un punto de vista cuántico, esto debe -- realizarse todavía.

CAPITULO I

1.- INTRODUCCION.

El superpotencial de Lanczos⁴ es de suma importancia en cualquier teoría geométrica. Sin embargo la dificultad para encontrarlo, ha producido su olvido pues sólo se conocían superpotenciales para casos particulares. El objetivo de este primer capítulo es encontrarlo en forma general mediante un método sistemático. Se recurre entonces al formalismo de Newman-Penrose¹ que es una herramienta matemática alternativa al cálculo tensorial. Esto último lo desarrollamos en la segunda sección. La Clasificación Petrov (CP) será presentada en la tercera sección con el formalismo de Newman-Penrose lo que permitirá sentar las bases para la deducción del superpotencial de Lanczos según la CP. En la cuarta sección encontraremos los superpotenciales para los tipos Petrov (O, N, III). Daremos muchos ejemplos al respecto. Sin embargo los ejemplos utilizados de casos particulares - de tipos (D, II, I) nos permitirán intuir cuál es el tipo de solución general para toda la clasificación Petrov. Se darán las bases para poder utilizar el método en el estudio de los campos y tensores que aparecen cuando se estudia en Electrodinámica el caso de Liénard-Wiechert. La clasificación de este último será discutida en la conclusión del segundo capítulo.

2.- FORMALISMO DE NEWMAN-PENROSE.

En esta sección nos ocuparemos de la técnica de tetradas nulas desarrollada por Newman-Penrose^{1,2} (NP), la cual es, como ya dijimos, una herramienta matemática alternativa al cálculo tensorial usualmente empleado en relatividad general; describiremos en forma breve sus principales características que serán de gran utilidad en las demás secciones de nuestro trabajo.

En todo evento del espacio-tiempo (R_4 , signatura +2) construimos el cuarteto de vectores (una barra sobre cualquier cantidad denotará conjugación compleja):

$$(z^r_{(a)}) = (m^r, \bar{m}^r, l^r, n^r) \quad , \quad a = 1, \dots, 4 \quad (1.a)$$

cumpliendo las condiciones de ortonormalidad (aceptamos la convención de suma de Einstein):

$$(z^r_{(a)} z_{(b)r}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.b)$$

es decir:

$$l_a l^a = m^a m_a = n^a n_a = \bar{m}^a \bar{m}_a = 0$$

$$m^a \bar{m}_a = 1, \quad l_a n^a = -1 \quad (1.c)$$

$$n^a m_a = l^a m_a = 0,$$

recuérdese que l^a y n^a son vectores reales.

En términos de la tetrada de NP, el tensor métrico $(g_{ac} = g_{ca})$ adquiere una expresión muy simple:

$$g_{ac} = m_a \bar{m}_c + m_c \bar{m}_a - n_a l_c - n_c l_a, \quad (2)$$

de hecho, cualquier tensor puede escribirse en función de (1.a), por ejemplo, ver (5.b).

La tetrada (1.a) evoluciona (rota) de un punto a otro del espacio-tiempo, y dicha evolución está gobernada por los 12 coeficientes de espín^{1,2,3} (que serán de relevancia en las secciones 4 y 5 de este capítulo porque ellos generarán al espíntensor de Lanczos^{3,4,5,6,12,13} definidos como:

$$\begin{aligned} \kappa &= \gamma_{414} & , \quad \tau &= \gamma_{413} & , \quad \lambda &= \gamma_{232} \\ \rho &= \gamma_{412} & , \quad \nu &= \gamma_{233} & , \quad \pi &= \gamma_{234} \\ \sigma &= \gamma_{411} & , \quad \mu &= \gamma_{231} & , \quad \epsilon &= \frac{1}{2}(\gamma_{434} + \gamma_{214}) \\ \gamma &= \frac{1}{2}(\gamma_{433} + \gamma_{213}) & , \quad \alpha &= \frac{1}{2}(\gamma_{432} + \gamma_{212}) & , \quad \beta &= \frac{1}{2}(\gamma_{431} + \gamma_{211}) \end{aligned} \quad (3.a)$$

las cuales son funciones de los coeficientes de rotación (de uso muy común en geometría diferencial)

$$\gamma_{abc} = -\gamma_{bac} = -z_{(a)r;t} z^{(b)r} z^{(c)t} \quad (3.b)$$

donde ; denota derivada covariante. En general, las cantidades en (3) son complejas debido al carácter complejo de m^r .

El tensor de Riemann tiene la siguiente expresión en términos de los símbolos de Christoffel $\Gamma^a_{cb} = \Gamma^a_{bc}$ ($;$ significa $\frac{\partial}{\partial x^a}$):

$$R^a_{jkm} = \Gamma^a_{jm,k} - \Gamma^a_{jk,m} + \Gamma^a_{ck} \Gamma^c_{jm} - \Gamma^a_{cm} \Gamma^c_{jk} \quad (4.a)$$

y el tensor de Ricci y la curvatura escalar están definidas como:

$$R_{jk} = R^a_{jka} \quad , \quad R = R^b_b \quad (4.b)$$

El tensor de Weyl (asociado a la gravedad pura porque localmente éste tensor no es influenciado por el de Ricci el cual está encadenado a las fuentes físicas vía las ecuaciones de campo) nos queda en 4 dimensiones como:

$$C_{ajkm} = R_{ajkm} + \frac{1}{2}(R_{ak} g_{jm} + R_{jm} g_{ak} - R_{jk} g_{am} - R_{am} g_{jk}) + \quad (4.c)$$

$$+ \frac{R}{6}(g_{am} g_{jk} - g_{ak} g_{jm})$$

de donde es simple obtener las simetrías algebraicas

$$C_{ajkm} = -C_{jakm} = -C_{ajmk}, \quad C_a^j{}_{jm} = 0$$

$$C_{ajkm} + C_{akmj} + C_{amjk} = 0$$

(de aquí se infiere la propiedad $C_{ajkm} = C_{kmaj}$).

En virtud de (4.d) el tensor conformal tiene 10 componentes reales independientes, es decir, 5 cantidades complejas, a saber^{1,2,7}:

$$\psi_0 = C_{abjr} n^a m^b n^j m^r, \quad \psi_1 = C_{abjr} n^a l^b n^j m^r$$

$$\psi_2 = -C_{abjr} l^a m^b n^j m^r, \quad \psi_3 = C_{abjr} l^a n^b l^j m^r \quad (5.a)$$

$$\psi_4 = C_{abjr} l^a m^b l^j m^r,$$

las cuales permiten escribir al tensor de Weyl mediante la expresión ($i = \sqrt{-1}$): $W_{abcd} = \frac{1}{2}(C_{abcd} + i^*C_{abcd})$.

$$\frac{1}{2}(C_{abcd} + i^*C_{abcd}) = \psi_0 U_{ab} U_{cr} + \psi_1 (U_{ab} M_{cr} + U_{cr} M_{ab}) +$$

$$+ \psi_2 (M_{ab} M_{cr} + V_{ab} U_{cr} + V_{cr} U_{ab}) + \quad (5.b)$$

$$+ \psi_3 (V_{ab} M_{cr} + V_{cr} M_{ab}) + \psi_4 V_{ab} V_{cr},$$

donde

$$*C_{abcd} = \frac{1}{2} \eta_{abjk} C^{jk}_{cd} , \quad \eta_{abjk} = -\sqrt{-g} \epsilon_{abjk}$$

$$V_{ab} = n_a m_b - n_b m_a , \quad U_{ab} = -l_a \bar{m}_b + l_b \bar{m}_a \quad (5.c)$$

$$M_{ab} = m_a \bar{m}_b - m_b \bar{m}_a - n_a l_b + n_b l_a$$

En la próxima sección nos apoyaremos en las cantidades (5.a) para explicar la clasificación Petrov^{7,8}, tema de gran importancia en la obtención de los espintensores de Lanczos.¹²

La derivada covariante ;_a = ∇_a es un operador tensorial que al proyectarse sobre la téttrada nula da origen a 4 operadores diferenciales lineales:

$$\delta = m^a \nabla_a , \quad \bar{\delta} = \bar{m}^a \nabla_a , \quad \Delta = l^a \nabla_a , \quad D = n^a \nabla_a \quad (6)$$

que nos permiten estudiar cómo cambian diversas cantidades (τ, ε, ψ₀, ψ₂, etc...) de un evento a otro.

Toda la información concerniente a la curvatura (grave_{dad}) de R₄ está contenida en (4.a), que al proyectarse sobre la téttrada de NP conduce a las 18 ecuaciones complejas siguientes.^{1,2,9,10}

ECUACIONES DE NEWMAN-PENROSE

- (a) $D\rho - \bar{\delta}\kappa = \rho^2 + \sigma\bar{\sigma} + (\epsilon + \bar{\epsilon})\rho - \bar{\kappa}\tau - \kappa(3\alpha + \bar{\beta} - \pi) - \phi_{00}$,
- (b) $D\sigma - \delta\kappa = (\rho + \bar{\rho})\sigma + (3\epsilon - \bar{\epsilon})\sigma - (\tau - \bar{\pi} + \alpha + 3\beta)\kappa + \psi_0$,
- (c) $D\tau - \Delta\kappa = (\tau + \bar{\pi})\rho + (\bar{\tau} + \pi)\sigma + (\epsilon - \bar{\epsilon})\tau - (3\gamma + \bar{\gamma})\kappa + \psi_1 - \phi_{01}$,
- (d) $D\alpha - \bar{\delta}\epsilon = (\rho + \bar{\epsilon} - 2\epsilon)\alpha + \beta\bar{\sigma} - \bar{\beta}\epsilon - \kappa\lambda - \bar{\kappa}\gamma + (\epsilon + \rho)\pi - \bar{\phi}_{01}$,
- (e) $D\beta - \delta\epsilon = (\alpha + \pi)\sigma + (\bar{\rho} - \bar{\epsilon})\beta - (\mu + \gamma)\kappa - (\bar{\alpha} - \bar{\pi})\epsilon + \psi_1$,
- (f) $D\gamma - \Delta\epsilon = (\tau + \bar{\pi})\alpha + (\bar{\tau} + \pi)\beta - (\epsilon + \bar{\epsilon})\gamma - (\gamma + \bar{\gamma})\epsilon + \tau\pi - \nu\kappa + \psi_2 - \phi_{11} + \frac{R}{24}$,
- (g) $D\lambda - \bar{\delta}\pi = \rho\lambda + \bar{\sigma}\mu + \pi^2 + (\alpha - \bar{\beta})\pi - \nu\bar{\kappa} - (3\epsilon - \bar{\epsilon})\lambda - \bar{\phi}_{02}$,
- (h) $D\mu - \delta\pi = \bar{\rho}\mu + \sigma\lambda + \pi\bar{\pi} - (\epsilon + \bar{\epsilon})\mu - \pi(\bar{\alpha} - \beta) - \nu\kappa + \psi_2 - \frac{R}{12}$,
- (i) $D\nu - \Delta\pi = (\pi + \bar{\tau})\mu + (\bar{\pi} + \tau)\lambda + (\gamma - \bar{\gamma})\pi - (3\epsilon + \bar{\epsilon})\nu + \psi_3 - \bar{\phi}_{12}$,
- (j) $\Delta\lambda - \bar{\delta}\nu = -(\mu + \bar{\mu})\lambda - (3\gamma - \bar{\gamma})\lambda + (3\alpha + \bar{\beta} + \pi - \bar{\tau})\nu - \psi_4$,
- (k) $\delta\rho - \bar{\delta}\sigma = \rho(\bar{\alpha} + \beta) - \sigma(3\alpha - \bar{\beta}) + (\rho - \bar{\rho})\tau + (\mu - \bar{\mu})\kappa - \psi_1 - \phi_{01}$,
- (l) $\delta\alpha - \bar{\delta}\beta = \mu\rho - \lambda\sigma + \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - 2\alpha\beta + \gamma(\rho - \bar{\rho}) + \epsilon(\mu - \bar{\mu}) - \psi_2 - \phi_{11} - \frac{R}{24}$,
- (m) $\delta\lambda - \bar{\delta}\mu = (\rho - \bar{\rho})\nu + (\mu - \bar{\mu})\pi + \mu(\alpha + \bar{\beta}) + \lambda(\bar{\alpha} - 3\beta) - \psi_3 - \bar{\phi}_{12}$,
- (n) $\delta\nu - \Delta\mu = \mu^2 + \lambda\bar{\lambda} + (\gamma + \bar{\gamma})\mu - \nu\pi + (\tau - 3\beta - \bar{\alpha})\nu - \phi_{22}$,
- (o) $\delta\gamma - \Delta\beta = (\tau - \bar{\alpha} - \beta)\gamma + \mu\tau - \sigma\nu - \epsilon\bar{\nu} - \beta(\gamma - \bar{\gamma} - \mu) + \alpha\bar{\lambda} - \phi_{12}$,
- (p) $\delta\tau - \Delta\sigma = \mu\sigma + \bar{\lambda}\rho + (\tau + \beta - \bar{\alpha})\tau - (3\gamma - \bar{\gamma})\sigma - \kappa\bar{\nu} - \phi_{02}$,
- (q) $\Delta\rho - \bar{\delta}\tau = -\bar{\rho}\mu - \sigma\lambda + (\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau})\tau + (\gamma + \bar{\gamma})\rho + \nu\kappa - \psi_2 + \frac{R}{12}$,
- (r) $\Delta\alpha - \bar{\delta}\gamma = (\rho + \epsilon)\nu - (\tau + \beta)\lambda + (\bar{\gamma} - \bar{\mu})\alpha + (\bar{\beta} - \bar{\tau})\gamma - \psi_3$,

(7)

donde hemos utilizado las componentes NP del tensor de traza cero:

$$E_{ab} = E_{ba} = R_{ab} - \frac{R}{4} g_{ab} , \quad E^a_a = 0 \quad (8.a)$$

a saber:

$$\begin{aligned} \phi_{00} &= \frac{1}{2} E_{ab} n^a n^b , & \phi_{11} &= \frac{1}{2} E_{ab} m^a \bar{m}^b , \\ \phi_{01} &= \frac{1}{2} E_{ab} m^a n^b , & \phi_{12} &= \frac{1}{2} E_{ab} m^a l^b , \\ \phi_{02} &= \frac{1}{2} E_{ab} m^a m^b , & \phi_{22} &= \frac{1}{2} E_{ab} l^a l^b . \end{aligned} \quad (8.b)$$

Esto significa que toda la información contenida en R_{ijklm} está inmersa en las cantidades ψ_a , ϕ_{ab} y R equivalentes a las 20 componentes reales independientes del tensor de Riemann. Además, la dinámica (evolución) de la curvatura está gobernada por las Identidades de Bianchi:

$$R_{ajkm;r} + R_{ajmr;k} + R_{ajrk;m} = 0 \quad (9)$$

que en el formalismo de NP implican 11 ecuaciones complejas: 1,2,9,10

IDENTIDADES DE BIANCHI

- (a) $\bar{\delta}\psi_0 - D\psi_1 - D\phi_{01} + \delta\phi_{00} = (4\alpha - \pi)\psi_0 - 2(2\rho + \epsilon)\psi_1 + 3\kappa\psi_2 - (\bar{\pi} - 2\bar{\alpha} + 2\beta)\phi_{00} -$
 $- 2(\epsilon + \bar{\rho})\phi_{01} - 2\sigma\bar{\phi}_{01} + 2\kappa\phi_{11} + \bar{\kappa}\phi_{02} ,$
- (b) $\Delta\psi_0 - \delta\psi_1 - D\phi_{02} + \delta\phi_{01} = (4\gamma - \mu)\psi_0 - 2(2\tau + \beta)\psi_1 + 3\sigma\psi_2 - (2\epsilon - 2\bar{\epsilon} + \bar{\rho})\phi_{02} -$
 $- 2(\bar{\pi} - \beta)\phi_{01} - 2\sigma\phi_{11} + 2\kappa\phi_{12} + \bar{\lambda}\phi_{00} ,$
- (c) $\bar{\delta}\psi_3 - D\psi_4 - \bar{\delta}\bar{\phi}_{12} + \Delta\bar{\phi}_{02} = (4\epsilon - \rho)\psi_4 - 2(2\pi + \alpha)\psi_3 + 3\lambda\psi_2 - (2\gamma - 2\bar{\gamma} + \bar{\mu})\bar{\phi}_{02} -$
 $- 2(\bar{\tau} - \alpha)\bar{\phi}_{12} - 2\lambda\phi_{11} + 2\nu\bar{\phi}_{01} + \bar{\sigma}\phi_{22} ,$
- (d) $\Delta\psi_3 - \delta\psi_4 - \bar{\delta}\phi_{22} + \Delta\bar{\phi}_{12} = (4\beta - \tau)\psi_4 - 2(2\mu + \gamma)\psi_3 + 3\nu\psi_2 - (\bar{\tau} - 2\bar{\beta} - 2\alpha)\phi_{22} -$
 $- 2(\gamma + \bar{\mu})\bar{\phi}_{12} - 2\lambda\phi_{12} + 2\nu\phi_{11} + \bar{\nu}\bar{\phi}_{02} ,$
- (e) $D\psi_2 - \bar{\delta}\psi_1 - \Delta\phi_{00} + \bar{\delta}\phi_{01} - \frac{1}{12}DR = -\lambda\psi_0 + 2(\pi - \alpha)\psi_1 + 3\rho\psi_2 - 2\kappa\psi_3 + 2(\bar{\tau} + \alpha)\phi_{01} -$
 $- (2\gamma + 2\bar{\gamma} - \bar{\mu})\phi_{00} + 2\tau\bar{\phi}_{01} - 2\rho\phi_{11} - \bar{\sigma}\phi_{02} ,$
- (f) $\Delta\psi_2 - \delta\psi_3 - D\phi_{22} + \delta\bar{\phi}_{12} - \frac{1}{12}\Delta R = \sigma\psi_4 + 2(\beta - \tau)\psi_3 - 3\mu\psi_2 + 2\nu\psi_1 - 2(\bar{\pi} + \beta)\bar{\phi}_{12} -$
 $- (\bar{\rho} - 2\epsilon - 2\bar{\epsilon})\phi_{22} - 2\pi\phi_{12} + 2\mu\phi_{11} + \bar{\lambda}\bar{\phi}_{02} , \quad (10)$
- (g) $D\psi_3 - \bar{\delta}\psi_2 + D\bar{\phi}_{12} - \delta\bar{\phi}_{02} + \frac{1}{12}\bar{\delta}R = -\kappa\psi_4 + 2(\rho - \epsilon)\psi_3 + 3\pi\psi_2 - 2\lambda\psi_1 + 2(\bar{\rho} - \epsilon)\bar{\phi}_{12} -$
 $- (2\bar{\alpha} - 2\beta - \bar{\pi})\bar{\phi}_{02} + 2\pi\phi_{11} - 2\mu\bar{\phi}_{01} - \bar{\kappa}\phi_{22} ,$
- (h) $\Delta\psi_1 - \delta\psi_2 + \Delta\phi_{01} - \bar{\delta}\phi_{02} + \frac{1}{12}\delta R = \nu\psi_0 + 2(\gamma - \mu)\psi_1 - 3\tau\psi_2 + 2\sigma\psi_3 - 2(\bar{\mu} - \gamma)\phi_{01} -$
 $- (\bar{\tau} - 2\bar{\beta} + 2\alpha)\phi_{02} - 2\tau\phi_{11} + 2\rho\phi_{12} + \bar{\nu}\phi_{00} ,$
- (i) $D\phi_{11} - \delta\bar{\phi}_{01} - \bar{\delta}\phi_{01} + \Delta\phi_{00} + \frac{1}{8}DR = (2\gamma - \mu + 2\bar{\gamma} - \bar{\mu})\phi_{00} + (\pi - 2\alpha - 2\bar{\tau})\phi_{01} + \bar{\sigma}\phi_{02} +$
 $+ (\bar{\pi} - 2\bar{\alpha} - 2\tau)\bar{\phi}_{01} + 2(\rho + \bar{\rho})\phi_{11} + \sigma\bar{\phi}_{02} - \bar{\kappa}\phi_{12} - \kappa\bar{\phi}_{12} ,$
- (j) $D\phi_{12} - \delta\phi_{11} - \bar{\delta}\phi_{02} + \Delta\phi_{01} + \frac{1}{8}\delta R = (-2\alpha + 2\bar{\beta} + \pi - \bar{\tau})\phi_{02} + (\bar{\rho} + 2\rho - 2\bar{\epsilon})\phi_{12} + 2(\bar{\pi} - \tau)\phi_{11} +$
 $+ (2\gamma - 2\bar{\mu} - \mu)\phi_{01} + \bar{\nu}\phi_{00} - \bar{\lambda}\bar{\phi}_{01} + \sigma\bar{\phi}_{12} - \kappa\phi_{22} ,$
- (k) $D\phi_{22} - \delta\bar{\phi}_{12} - \bar{\delta}\phi_{12} + \Delta\phi_{11} + \frac{1}{8}\Delta R = (\rho + \bar{\rho} - 2\epsilon - 2\bar{\epsilon})\phi_{22} + (2\bar{\beta} + 2\pi - \bar{\tau})\phi_{12} - 2(\mu + \bar{\mu})\phi_{11} +$
 $+ (2\beta + 2\bar{\pi} - \tau)\bar{\phi}_{12} + \nu\phi_{01} + \bar{\nu}\bar{\phi}_{01} - \bar{\lambda}\bar{\phi}_{02} - \lambda\phi_{02} ,$

La herramienta de NP es un tema muy amplio,² aquí sólo hemos dado los resultados esenciales para nuestros fines: Potencial de Lanczos (capítulo uno) y Campo de Liénard-Wiechert (capítulo dos).

3.- CLASIFICACIÓN DE PETROV.

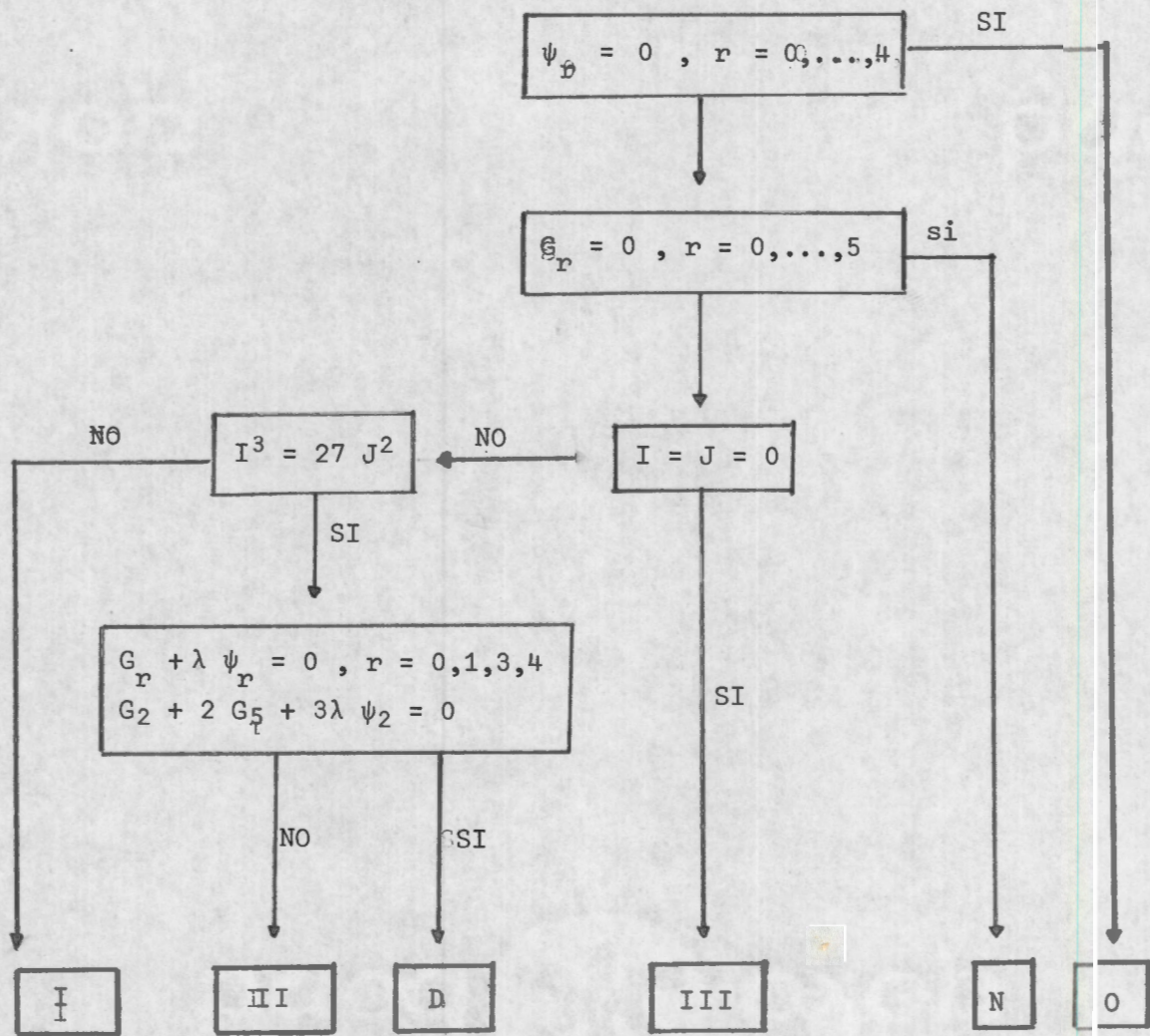
Aquí mostraremos los seis tipos de campos gravitacionales que resultan en virtud de las simetrías (4.d) del tensor de Weyl, con independencia de ecuaciones de campo (por ejemplo, ecuaciones de Einstein de la relatividad general). Este tema es crucial para nosotros porque en la próxima sección será claro que los potenciales de Lanczos son fácilmente calculables con respecto a las tétradas nulas canónicas de cada tipo Petrov, lo cual constituye una contribución original, en efecto: las componentes NP del espíntensor de Lanczos serán proporcionales a los coeficientes de espín definidos en (3.a) para dichas tétradas canónicas.

Para una tétrada nula arbitraria (pero cumpliendo (1.c)) pueden calcularse las ψ_r , $r = 0, \dots, 4$ mediante (3.a_{6,7}) y construir las cantidades:

$$\begin{aligned} G_0 &= 2(\psi_0 \psi_2 - \psi_1^2) & , & \quad G_1 = \psi_0 \psi_3 - \psi_1 \psi_2 \\ G_2 &= \psi_2^2 + \psi_0 \psi_4 - 2\psi_1 \psi_3 & , & \quad G_3 = \psi_1 \psi_4 - \psi_2 \psi_3 \\ G_4 &= 2(\psi_2 \psi_4 - \psi_3^2) & , & \quad G_5 = 2(\psi_1 \psi_3 - \psi_2^2) & \quad (11) \\ I &= G_2 - G_5 & , & \quad J = -\psi_3 G_1 + \frac{1}{2}(\psi_2 G_5 + \psi_4 G_0) \\ & & \lambda^2 &= \frac{I}{3} & , & \quad \lambda^3 = -J \end{aligned}$$

y entonces usar nuestro⁸ algoritmo para determinar así el tipo Petrov del espacio-tiempo en un evento dado:

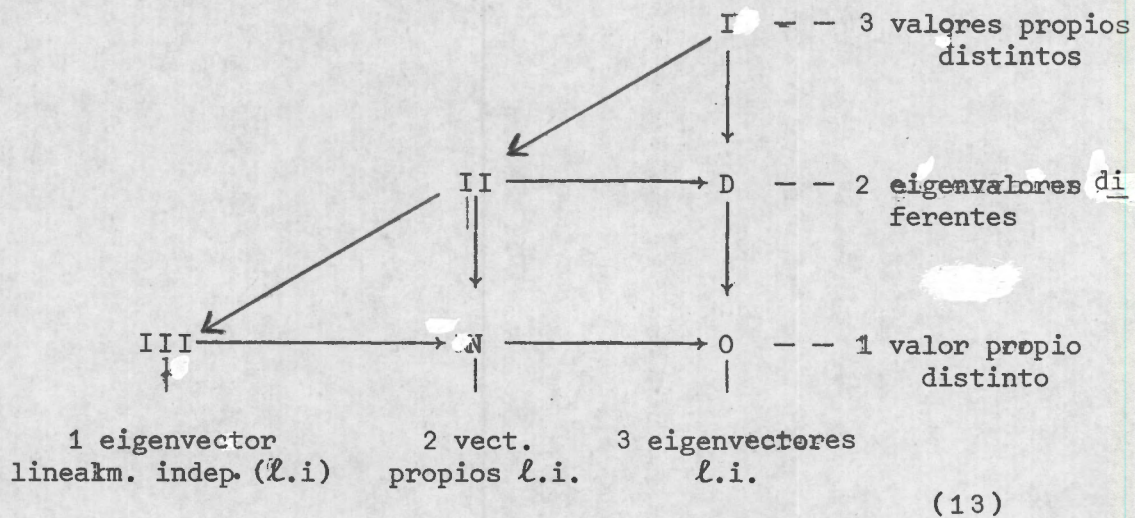
MÉTODO TENSORIAL-TÉTRADAS NULAS



(12)

obteniéndose el diagrama de Penrose^{7,11}

DIAGRAMA DE PENROSE



el cual nos indica cómo el tensor C_{ijkl} posee el tipo general I y se va especializando (como lo muestran las flechas) hasta llegar al tipo 0 donde $C_{ijkl} = 0$ (R_4 con formalmente plano).

La conclusión (13) es válida para toda tetrada (1.a), sin embargo, existen^{7,9,10} en cada punto de R_4 tetradas privilegiadas o canónicas que simplifican (5.b) en el sentido de que diversas ψ_r logran anularse sin causar pérdida de generalidad, así tenemos que:

"En todo evento, la tétrada de NP siempre puede elegirse tal que

$$\begin{aligned}
 O & : \psi_r = 0 & , r = 0, \dots, 4 \\
 N & : \psi_4 = 1 & , \psi_r = 0, r \neq 4 \\
 III & : \psi_3 = -\frac{i}{\sqrt{2}} & , \psi_r = 0, r \neq 3 \\
 D & : \psi_2 = \lambda_1 & , \psi_r = 0, r \neq 2 \\
 II & : \psi_2 = \lambda_1 & , \psi_4 = 1, \psi_r = 0, r \neq 2, 4 \\
 I & : \psi_0 = \psi_4 = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1), \psi_2 = -\frac{1}{2}\lambda_3, \psi_r = 0, r = 1, 3
 \end{aligned} \tag{14.a}$$

donde los λ_r ($\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$) son los eigenvalores - complejos (no necesariamente constantes) de la matriz simétrica 3 x 3 con traza nula:⁸

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(2\psi_2 - \psi_0 - \psi_4) & \frac{i}{2}(\psi_4 - \psi_0) & (\psi_1 - \psi_3) \\ \frac{i}{2}(\psi_4 - \psi_0) & \frac{1}{2}(2\psi_2 + \psi_0 + \psi_4) & i(\psi_1 + \psi_3) \\ \psi_1 - \psi_3 & i(\psi_1 + \psi_3) & -2\psi_2 \end{pmatrix} \tag{14.b}$$

En los tipos II y D el eigenvalor λ_1 es distinto de cero; él esquema (14.a) es compatible con (12). Es valido so el empleo de la tétrada canónica (14.a) porque entonces (7,10) adquieren gran simplificación al cancelarse algunos de los ψ_j , así como el ser constantes ψ_3 y ψ_4 para los tipos III y N respectivamente.

Dada una métrica, no es trivial determinar la correspondiente tétrada canónica, de hecho, puede ser muy di

fácil. Así que la simplicidad (14.a) se obtiene mediante un buen esfuerzo en el cálculo de la tetrada canónica; además, ésta genera sencillez en las ψ_r pero no implica simplicidad en los coeficientes de espín (3.a). En la siguiente sección mostraremos que la dificultad al encontrar el potencial de Lanczos (para el tensor de Weyl) es equivalente a la dificultad para construir la tetrada canónica del tensor conformal.

4.- SUPERPOTENCIAL DE LANCZOS.

Buscando geometrizar el campo electromagnético, Lanczos demostró que en todo 4-espacio de Riemann existe un tensor, no necesariamente único, denotado por K_{ijr} que se conoce ahora como el espintensor o superpotencial de Lanczos^{84,85}. Es interesante hacer notar que éste último existe para cualquier métrica de R_4 ; y por lo tanto será útil tanto en gravitación como en electrodinámica clásica (de hecho en cualquier modelo geométrico en 4 dimensiones con una métrica). Las aplicaciones en electrodinámica se verán en el segundo capítulo de esta tesis.

En realidad, ya desde 1949 en un artículo, Lanczos¹⁴ manejaba tal superpotencial pero hasta 1962 fue definido con toda precisión⁴.

En suma, al tratar de deducir las ecuaciones de campo según un principio variacional tipo Hilbert

$$\delta \int L_0 \sqrt{-g} dx = 0 \quad (15)$$

con $L_0 = *R^{abcd} R_{abcd}$, ver ref.^{82, 83}) y variando con respecto a la métrica g_{ab} , se obtiene que la parte izquierda de (15) es igual a cero. Es decir no aparecen ecuaciones de campo pues la identidad (15) es válida para todo R_4 [ver Buchdall¹⁵ y Kohler-Goenner¹⁶]. Lanczos sugirió considerar en la variación a g_{ab} y $*R^{abcd}$ como independientes. Sin embargo, como en realidad existe una relación entre estas dos últimas cantidades los multiplicadores de Lagrange aparecen. Uno de estos multiplicadores resulta ser el potencial de Lanczos con las siguientes propiedades:

$$K_{ija} = -K_{jia} \quad , \quad K_{ar}^r = 0 \quad , \quad K_{aij} + K_{ija} + K_{jai} = 0 \quad (16.a)$$

generando a su vez el tensor de Weyl (o conformal) de acuerdo a:

$$\begin{aligned} C_{pqjb} = & K_{pqj;b} - K_{pqb;j} + K_{jbp;q} - K_{j bq;p} + \\ & \frac{1}{2} \left[g_{bp} (K_{jq} + K_{qj}) - g_{pj} (K_{qb} + K_{bq}) + \right. \\ & \left. + g_{qj} (K_{pb} + K_{bp}) - g_{qb} (K_{pj} + K_{jp}) \right] \end{aligned} \quad (16.b)$$

donde

$$K_{jr} = K_j^a{}_{r;a} \quad (16.c)$$

y por ello al tensor K_{ija} se le llama superpotencial para el tensor de Weyl. La existencia del superpotencial ha sido demostrada en forma rigurosa por Bampi-Caviglia.⁵

Mientras que C_{ijra} se determina a partir de la métrica g_{ab} , K_{jia} no puede ser determinado tan fácilmente pues para ello es necesario integrar (16.b). Esto hace pensar que el potencial de Lanczos dependerá de la geometría global de R_4 y por lo tanto una tarea formidable aparentemente. En esta sección veremos que no es así para ciertos tipos Petrov.^{6,13}

Sin embargo hay que hacer notar que para algunas métricas se han obtenido el potencial de Lanczos.^{13,27} Aunque las técnicas utilizadas son tensoriales y por lo tanto no aparece una guía para la construcción del tensor K_{abc} . Siguiendo el formalismo de NP¹ se obtiene una gran simplificación en la búsqueda del espintensor. Esta última se mostrará más adelante en esta sección. Por otro lado, es interesante notar que en todas las K_{ijr} conocidas no aparece la estructura global del 4-espacio considerado. Lo cual coincide con los resultados que exponemos en esta sección con relación al tipo Petrov.^{6,13}

Antes de describir los resultados obtenidos a partir de NP, valdría la pena señalar la importancia del superpotencial de Lanczos.

Uno de los resultados más interesantes fue obtenido por Lanczos¹⁴ en el caso de campos gravitacionales débiles. Pues al construir el espintensor, finalmente obtuvo la ecuación de Dirac; lo cual lo condujo a bautizar el tensor como un espintensor y a subrayar la importancia de este mismo con la unificación de la mecánica cuántica y la gravitación. Sin embargo muchos au

tores, entre ellos Taub,¹⁷ señalaban que es una simple coincidencia pues en la deducción del potencial no se utiliza ningún concepto cuántico. Pero otro lado Maher-Zund,¹⁸ Taub¹⁹ y Zund²⁰ obtuvieron en forma espinorial una ecuación para una partícula de masa cero y espín 2, que podría ser el gravitón. Posiblemente lo más relevante sea que Ashtekar²⁸ obtuvo la versión espinorial de (16.b) por medio de la cuantización canónica de la gravedad. Novello-Rodríguez ha utilizado K_{abc} para construir un modelo unificado de la gravedad con interacciones débiles. Cuando Lanczos llamó espintensor a K_{abc} , sembró la idea de que con dicho tensor se puede describir el espín de ciertas partículas, esta idea ha sido adaptada por aquellos que intentan explicar la rotación de las partículas mediante una torsión del 4-espacio, así: consideran a K_{ijr} como una contorsión en teorías de Einstein-Cartan, ver Davis-Atkins-Baker,²⁹ estos autores generalizan también (16.b) a este tipo de teorías. También hay que recalcar que si a un espintensor de Lanczos se le suma otro espintensor de un espacio conformalmente plano, el nuevo tensor sigue siendo un espintensor para el primer espacio (teorías de norma no-Abelianas en relatividad general sugeridas por Zund).²⁰

Regresemos ahora al estudio directo del Superpotencial de Lanczos. Como ya hemos mencionado, el formalismo de NP nos permitirá obtener una simplificación en la búsqueda del espintensor.

Sea

$$Q_{abc} = K_{abc} + i *K_{abc} \quad \text{donde} \quad *K_{abc} = \frac{1}{2} n_{abpq} K^{pq}{}_c \quad (17.a)$$

Claramente se ve que Q_{abc} sigue conservando las mismas propiedades (16.a) de K_{abc} ; es decir:

$$Q_{abc} = - Q_{bac} \quad Q_a^c{}_c = 0 \quad (17.b)$$

Al igual que a partir de C_{abpq} se construyó W_{abcd} en (5.b) para poder expresar este último en función de los tensores U_{ab} , V_{ab} y M_{ab} en (5.c), a sugerencia de Zund,²⁰ Q_{abc} se expondrá según:

$$\begin{aligned} Q_{abc} = 2 [& \Omega_0 U_{ab} \ell_c + \Omega_1 (M_{ac} \ell_c - U_{ab} m_c) + \Omega_2 (V_{ab} \ell_c - M_{ab} m_c) \\ & - \Omega_3 V_{ab} m_c - \Omega_4 U_{ab} \bar{m}_c + \Omega_5 (U_{ab} n_c - M_{ab} \bar{m}_c) \\ & + \Omega_6 (M_{ab} n_c - V_{ab} \bar{m}_c) + \Omega_7 V_{ab} n_c] \end{aligned} \quad (18.a)$$

donde los Ω_a , $a = 0, \dots, 7$ son ocho cantidades complejas que representan las dieciséis componentes reales in dependientes de K_{ijr} , siendo

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= K_{(1)(4)(4)} & , & \quad \Omega_4 = K'_{(1)(4)(1)} \\ \Omega_1 &= K_{(1)(4)(2)} & , & \quad \Omega_5 = K_{(1)(4)(\hat{3})} \\ \Omega_2 &= K_{(3)(2)(4)} & , & \quad \Omega_6 = K_{(3)(2)(1)} \\ \Omega_3 &= K_{(3)(2)(2)} & , & \quad \Omega_7 = K_{(3)(2)(3)} \end{aligned} \quad (18.b)$$

Si contraemos (16.b) con la tetrada nula, obtenemos³

ECUACIONES DE WEYL-LANCZOS

(SIN PEDIR $K_{ab}{}^c{}_{;c} = 0$)

$$\begin{aligned}
 \psi_0 &= 2 \left[-\delta\Omega_0 + D\Omega_4 + (\bar{\alpha} + 3\beta - \bar{\pi})\Omega_0 - 3\sigma\Omega_1 + (-3\epsilon + \bar{\epsilon} - \bar{\rho})\Omega_4 + 3\kappa\Omega_5 \right] , \\
 2\psi_1 &= -\Delta\Omega_0 - 3\delta\Omega_1 + \bar{\delta}\Omega_4 + 3D\Omega_5 + (3\gamma + \bar{\gamma} + 3\mu - \bar{\mu})\Omega_0 + 3(\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi} - \tau)\Omega_1 - \\
 &\quad - 6\sigma\Omega_2 + (-3\alpha + \bar{\beta} - 3\pi - \bar{\tau})\Omega_4 + 3(-\epsilon + \bar{\epsilon} + \rho - \bar{\rho})\Omega_5 + 6\kappa\Omega_6 , \\
 \psi_2 &= -\Delta\Omega_1 - \delta\Omega_2 + \bar{\delta}\Omega_5 + D\Omega_6 + \nu\Omega_0 + (2\mu - \bar{\mu} + \gamma + \bar{\gamma})\Omega_1 + (\bar{\alpha} - \beta - \bar{\pi} - 2\tau)\Omega_2 - \sigma\Omega_3 - \\
 &\quad - \lambda\Omega_4 + (-\alpha + \bar{\beta} - 2\pi - \bar{\tau})\Omega_5 + (\epsilon + \bar{\epsilon} - \rho + 2\bar{\rho})\Omega_6 + \kappa\Omega_7 , \tag{19} \\
 2\psi_3 &= -3\Delta\Omega_2 - \delta\Omega_3 + 3\bar{\delta}\Omega_6 + D\Omega_7 + 3(-\bar{\mu} + \mu + \bar{\gamma} - \gamma)\Omega_2 + 6\nu\Omega_1 + (\bar{\alpha} - 3\beta - 3\tau - \bar{\pi})\Omega_3 - \\
 &\quad - 6\lambda\Omega_5 + 3(\alpha + \bar{\beta} - \tau - \pi)\Omega_6 + (3\epsilon + \bar{\epsilon} - \rho + 3\bar{\rho})\Omega_7 , \\
 \psi_4 &= 2 \left[-\Delta\Omega_3 + \bar{\delta}\Omega_7 + 3\nu\Omega_2 + (-\bar{\mu} - 3\gamma + \bar{\gamma})\Omega_3 - 3\lambda\Omega_6 + (3\alpha + \bar{\beta} - \bar{\tau})\Omega_7 \right] ,
 \end{aligned}$$

Si al espíntensor le pidieramos $K_{ab}{}^c{}_{;c} = 0$ (lo cual no es pérdida de generalidad según la ref. [5]) entonces - obtendríamos las siguientes ecuaciones de NP:

$$\Delta\Omega_2 - \delta\Omega_3 - \bar{\delta}\Omega_6 + D\Omega_7 - 2\nu\Omega_1 + (3\mu + \bar{\mu} + \gamma - \bar{\gamma})\Omega_2 + (\bar{\alpha} - 3\beta + \tau - \bar{\pi})\Omega_3 + 2\lambda\Omega_5 + (-\alpha - \bar{\beta} + \tau - 3\pi)\Omega_6 + (3\epsilon + \bar{\epsilon} - \rho - \bar{\rho})\Omega_7 = 0 ,$$

$$\Delta\Omega_0 - \delta\Omega_1 - \bar{\delta}\Omega_4 + D\Omega_5 + (\mu + \bar{\mu} - 3\gamma - \bar{\gamma})\Omega_0 + (3\tau - \bar{\pi} + \alpha + \beta)\Omega_1 - 2\sigma\Omega_2 + (3\alpha - \bar{\beta} + \tau - \pi)\Omega_4 + (\bar{\epsilon} - \epsilon - \rho - 3\rho)\Omega_5 + 2\kappa\Omega_6 \equiv 0 , \quad (20)$$

$$-\Delta\Omega_1 + \delta\Omega_2 + \bar{\delta}\Omega_5 - D\Omega_6 + \nu\Omega_0 + (\gamma + \bar{\gamma} - 2\mu - \bar{\mu})\Omega_1 + (-\bar{\alpha} + \beta - 2\tau + \bar{\pi})\Omega_2 + \sigma\Omega_3 - \lambda\Omega_4 + (-\alpha + \bar{\beta} - \tau + 2\pi)\Omega_5 + (-\epsilon - \bar{\epsilon} + 2\rho + \bar{\rho})\Omega_6 - \kappa\Omega_7 = 0 .$$

Combinando (19) y (20) se puede obtener un sistema de ecuaciones más simple y equivalente a las relaciones anteriores, que hemos intitulado Ecuaciones de Weyl-Lanzos:

ECUACIONES DE WEYL-LANZOS ($K_{ab}{}^c{}_{;c} = 0$)

$$\begin{aligned} \psi_0 &= 2 \left[-\delta\Omega_0 + D\Omega_4 + (\bar{\alpha} + 3\beta - \bar{\pi})\Omega_0 - 3\sigma\Omega_1 + (-3\epsilon + \bar{\epsilon} - \bar{\rho})\Omega_4 + 3\kappa\Omega_5 \right] , \\ \psi_1 &= 2 \left[-\delta\Omega_1 + D\Omega_5 + \mu\Omega_0 + (\bar{\alpha} + \beta - \bar{\pi})\Omega_1 - 2\sigma\Omega_2 - \pi\Omega_4 + (\bar{\epsilon} - \epsilon - \bar{\rho})\Omega_5 + 2\kappa\Omega_6 \right] , \\ \psi_2 &= 2 \left[-\delta\Omega_2 + D\Omega_6 + 2\mu\Omega_1 + (\bar{\alpha} - \beta - \bar{\pi})\Omega_2 - \sigma\Omega_3 - 2\pi\Omega_5 + (\bar{\epsilon} + \epsilon - \rho)\Omega_6 + \kappa\Omega_7 \right] , \\ \psi_3 &= 2 \left[-\Delta\Omega_2 + \bar{\delta}\Omega_6 + 2\nu\Omega_1 + (-\bar{\mu} + \bar{\gamma} - \gamma)\Omega_2 - \tau\Omega_3 - 2\lambda\Omega_5 + (\alpha + \bar{\beta} - \tau)\Omega_6 + \rho\Omega_7 \right] , \\ \psi_4 &= 2 \left[-\Delta\Omega_3 + \bar{\delta}\Omega_7 + 3\nu\Omega_2 + (-\bar{\mu} - 3\gamma + \bar{\gamma})\Omega_3 - 3\lambda\Omega_6 + (3\alpha + \bar{\beta} - \tau)\Omega_7 \right] , \quad (20') \\ \psi_1 &= 2 \left[-\Delta\Omega_0 + \bar{\delta}\Omega_4 + (-\bar{\mu} + 3\gamma + \bar{\gamma})\Omega_0 - 3\tau\Omega_1 + (-3\alpha + \bar{\beta} - \tau)\Omega_4 + 3\rho\Omega_5 \right] , \\ \psi_2 &= 2 \left[-\Delta\Omega_1 + \bar{\delta}\Omega_5 + \nu\Omega_0 + (\gamma + \bar{\gamma} - \bar{\mu})\Omega_1 - 2\tau\Omega_2 - \lambda\Omega_4 + (-\alpha + \bar{\beta} - \tau)\Omega_5 + 2\rho\Omega_6 \right] , \\ \psi_3 &= 2 \left[-\delta\Omega_3 + D\Omega_7 + 3\mu\Omega_2 + (\bar{\alpha} - 3\beta - \bar{\pi})\Omega_3 - 3\pi\Omega_6 + (3\epsilon + \bar{\epsilon} - \bar{\rho})\Omega_7 \right] . \end{aligned}$$

La ecuación (16.c) puede transcribirse de la misma forma y será muy útil en el segundo capítulo, cuando se analicen los campos de Liénard-Wiechert.

Una vez obtenidas las ecuaciones (19) solo basta encontrar una solución a las incógnitas Ω_r para obtener el superpotencial de Lanczos para una métrica dada. Obviamente esto dependerá de qué tetrada nula escojamos y por lo tanto echemos mano de la tetrada canónica pues como hemos descrito en (14.a) según el tipo Petrov se pueden hacer simplificaciones en los ψ_r ; lo que reduce muchísimo (19). Hay que notar que una vez obtenida la tetrada, se determinan los coeficientes de espín $\alpha, \beta, \dots, \pi$ y los operadores $\delta, \bar{\delta}, \Delta, D$.

TIPOS O y N.

Como hemos mencionado anteriormente en (14.a), podemos elegir a la tetrada canónica y en tal caso para estos dos tipos Petrov, el tensor de Weyl tiene la forma:

$$C_{pqjb} = \psi_4 V_{pq} V_{jb} + \bar{\psi}_4 \bar{V}_{pq} V_{jb} \quad (21.a)$$

Para el tipo N, $\psi_4 \neq 0$; en cambio, para el tipo O, $\psi_4 = 0$. Ahora bien, si en (19) sustituimos los valores de Ω_r por:⁶

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= -\frac{\kappa}{2}, & \Omega_1 &= -\frac{\rho}{6}, & \Omega_2 &= \frac{\pi}{6}, & \Omega_3 &= \frac{\lambda}{2}, \\ \Omega_4 &= -\frac{\sigma}{2}, & \Omega_5 &= -\frac{\tau}{6}, & \Omega_6 &= \frac{\mu}{6}, & \Omega_7 &= \frac{\nu}{2}. \end{aligned} \quad (21.b)$$

y utilizamos las ecuaciones de N-P (7), obtenemos (21.a). Por lo tanto hemos encontrado el superpotencial de Lanczos para los tipos 0 y N.

TIPOS 0 y III.

Utilizando de nuevo la tétrada canónica, de (14.a) llegamos a que:

$$C_{pqbj} = \psi_3 (V_{pq} M_{jb} + V_{jb} M_{pq}) + \bar{\psi}_3 (\bar{V}_{pj} \bar{M}_{jb} + \bar{V}_{jb} \bar{M}_{pq}) \quad (22.a)$$

Para el tipo III, $\psi_3 \neq 0$; en cambio, para el tipo 0, $\psi_3 = 0$. Si en (19) empleamos los valores:⁶

$$\Omega_0 = -\kappa, \quad \Omega_1 = -\frac{\rho}{3}, \quad \Omega_2 = \frac{\pi}{3}, \quad \Omega_3 = \lambda \quad (22.b)$$

$$\Omega_4 = -\sigma, \quad \Omega_5 = -\frac{\pi}{3}, \quad \Omega_6 = \frac{\mu}{3}, \quad \Omega_7 = \nu$$

y utilizamos de nuevo (7), obtenemos (22.a). Encontrando el superpotencial de Lanczos para los tipos III y 0. Hay que hacer notar que para el tipo 0 se pudo seleccionar el caso trivial $\Omega_r = 0$; sin embargo, es interesante la existencia de soluciones no triviales para este tipo.

Como ya hemos mencionado, en la literatura da la impresión que encontrar el espíntensor de Lanczos, es un trabajo terrible. Sin embargo hemos encontrado, con ayuda del formalismo de N-P y C-P, el superpotencial de Lanczos para los tipos 0, N y III con gran facilidad.

Desgraciadamente para los tipos I, II y D no hemos podido encontrar una solución. Para poder intuir una solución general para estos tipos, damos una serie de resultados para métricas particulares.^{3,13} Estos espinores que encontramos nos darán una pauta sobre el tipo posible de solución general^{3,6,13} (Aquí en algunos casos pedimos $K_{ab}^c = 0$, es decir, se resolverán las ecs. (20')):

TIPO 0.

Métrica de Kramer-Stephani-MacCallum.⁹

El elemento de línea es:

$$ds^2 = - 2 dx^1 dx^4 + \text{sen}^2(x^4) (dx^{1^2} + dx^{3^2}), \quad (23.a)$$

elegimos entonces la tétrada nula:

$$(m^\alpha) = 2^{-1/2} \text{cs}(x^4) (0, 1, -i, 0)$$

$$(l^\alpha) = (0, 0, 0, 1) \quad (23.b)$$

$$(n^\alpha) = (1, 0, 0, 0)$$

que satisface (21.a) con $\psi_4 = 0$, o bien (22.a) con $\psi_3 = 0$ (esto se obtiene por medio de (7)). Los correspondientes coeficientes de espín se anulan salvo:

$$\mu = \cot(x^4) \quad (23.c)$$

Así, (22.b) conduce al espintensor con:

$$\Omega_r = 0, \quad r \neq 6, \quad \Omega_6 = \frac{1}{6} \cot(x^4) \quad (23.d)$$

TIPO N.

Métrica de Petrov.²²

El elemento de línea es:

$$ds^2 = -2 dx^1 dx^4 + \operatorname{sen}^2(x^4) dx^2{}^2 + \operatorname{senh}^2(x^4) dx^3{}^2 \quad (24.a)$$

empleamos la téttrada de NP:

$$(m^{\alpha}_{\dot{a}}) = 2^{-1/2} (0, \operatorname{cs}(x^4), -i \operatorname{csch}(x^4), 0)$$

$$(\ell^{\alpha}) = (0, 0, 0, 1) \quad (24.b)$$

$$(n^{\alpha}) = (1, 0, 0, 0)$$

cumplíéndose así (21.a) con $\psi_4 = 1$. Se anulan todos los coeficientes de espín excepto:

$$\lambda = \frac{1}{2}(\cot(x^4) - \operatorname{coth}(x^4)) \quad \text{y} \quad (24.c)$$

$$\mu = \frac{1}{2}(\cot(x^4) + \operatorname{coth}(x^4))$$

Obtenemos entonces de (22.b), el espintensor donde:¹³

$$\Omega_a = 0, \quad a \neq 3,6, \quad \Omega_3 = \frac{1}{4} (\cot(x^4) - \coth(x^4))$$

$$\Omega_6 = \frac{1}{12} (\cot(x^4) + \coth(x^4))$$

TIPO III.

Métrica de Kaigorodov.²³

Tenemos:

$$ds^2 = 2(kx)^{-2} (dx^2 + dy^2) - 2 du(dv + 2v x^{-1} dx + \frac{4}{3} k^{-1} x dy + 2x^4 du)$$

$$k = \text{cte} \quad (25.a)$$

Etiquetamos las coordenadas según:

$$x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = v, \quad x^4 = u$$

Utilizamos entonces:

$$(m^\alpha) = \left(\frac{1}{2} kx - \frac{15}{4} i\sqrt{2}, -\frac{1}{2} ikx - \frac{15}{4} i\sqrt{2}, -kv + \frac{1}{9} ix^2, 0 \right)$$

$$(n^\alpha) = \left(0, 0, -\sqrt{2} x^2, 0 \right) \quad (25.b)$$

$$(l^\alpha) = \left(0, \frac{15}{4} \sqrt{2} kx, -\frac{257}{8} \sqrt{2} x^2, -2^{-1/2} x^{-2} \right)$$

Cumpliendo (22.a) con $\psi_3 = 2^{-3/2} ik^2$. Los coeficientes de espín nos quedan como:

$$\alpha = \rho = \sigma = \epsilon = 0, \quad \gamma = \frac{\mu}{98} = \frac{2\lambda}{45} = \frac{ik}{4} \sqrt{2}, \quad (25.c)$$

$$\bar{\alpha} = \beta = -\pi = \frac{8}{153} \quad \nu = \frac{k}{2}$$

y usando (22.b) obtenemos que:

$$\Omega_0 = \Omega_1 = \Omega_4 = 0, \quad \Omega_2 = \Omega_5 = -\frac{k}{6}, \quad \Omega_3 = \left(\frac{45ik}{8}\right) \sqrt{2} \quad (25.d)$$

$$\Omega_6 = \left(\frac{1}{9} \frac{ik}{6}\right) \sqrt{2}, \quad \Omega_7 = \frac{153k}{16}$$

En estos últimos tres ejemplos sólo hemos aplicado los resultados desarrollados para los tipos Petrov 0, N y III, sin embargo buscaremos el espintensor de Lanczos para algunos tipos D, II y I, para poder visualizar la solución general.

TIPO D.

Métrica de Schwarzschild.

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 \quad (26.a)$$

empleamos la téttrada³ (hay que hacer notar que en la referencia,³ se cometió el error tipográfico de poner

2r en vez de $\sqrt{2}r$).

$$\begin{aligned}
 (m^\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2}r} (0, 1, -\frac{i}{\text{sen}\theta}, 0) \\
 (l^\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \right) \quad (26.b) \\
 (n^\alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m}{r}}} \right)
 \end{aligned}$$

Calculando los coeficientes de espín, se obtienen:

$$\begin{aligned}
 \mu = \rho &= -\frac{1}{\sqrt{2}r} \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}, \quad \gamma = \epsilon = \frac{m}{2\sqrt{2} r^2 \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}, \\
 \alpha = -\beta &= -\frac{\text{ctg}\theta}{2\sqrt{2}r}
 \end{aligned} \quad (26.c)$$

los demás coeficientes de espín son cero.

Ahora, si utilizamos (7) encontraremos que:

$$\begin{aligned}
 \psi_a &= 0, \quad a \neq 2, \quad \psi_2 = -\frac{m}{r^3} \\
 &\quad \text{(tipo D y la tetrada es canónica)} \\
 \text{y } \phi_{ab} &= 0 \text{ al igual que } R = 0 \quad (26.d)
 \end{aligned}$$

Si nos vamos ahora a las ecuaciones de Weyl-Lanczos - (20') resulta que los valores

$$\Omega_a = 0, a \neq 1, 6, \Omega_7 = \Omega_8 = \frac{m}{3\sqrt{2} r^2 \sqrt{1 - \frac{2m}{r}}}, r > 2m \quad (26.e)$$

las satisfacen. Y por lo tanto obtuvimos un espintensor de Lanczos en el caso de la métrica de Schwarzschild - que es tipo D.

TIPO II.

Métrica de Robinson-Trautman (ondas gravitacionales esféricas).

$$ds^2 = \frac{r^2}{4\theta^3} (d\theta^2 + d\phi^2) - 2 du dr + (6\theta + \frac{2m}{r}) du^2 \quad (27.a)$$

efiquetando

$$(x^1, x^2, x^3, x^4) = (\theta, \phi, r, u)$$

utilizamos la téttrada que no es canónica³

$$(m^\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{r} \theta^{3/2} (1, i, 0, 0)$$

$$(\ell^\alpha) = (0, 0, 3\theta + \frac{m}{r}, 1) \quad (27.b)$$

$$(n^\alpha) = (0, 0, 1, 0)$$

de donde los coeficientes de espín son:³

$$\rho = -\frac{1}{r}, \quad \alpha = -\beta = \frac{3\sqrt{2}}{4r} \theta^{1/2}, \quad \mu = \frac{3\theta}{r} + \frac{M}{r^2} \quad (27.c)$$

los demás coeficientes se anulan.

Calculando los ψ_a se encuentra que la téttrada no es canónica, sin embargo si después de utilizar las ecuaciones de NP (7), utilizamos las de Weyl-Lanczos (20') llegamos a la conclusión que

$$\Omega_0 = \Omega_7 = 0, \quad \Omega_4 = -3\Omega_1 = -\frac{1}{2} \rho \quad (27.d)$$

$$\Omega_2 = -\Omega_5 = \frac{2}{3} \alpha, \quad \Omega_3 = -3\Omega_6 = -\frac{1}{2} \mu$$

satisfacen a (20'). Y por lo tanto se tiene el espín-tensor para este caso.

TIPO I.

Métrica de Mc Lenaghan²⁵ y Tupper.²⁶

$$ds^2 = \frac{a^2}{x^2} (dx^2 + dy^2) + x^2 d\phi^2 - (dt - 2y d\phi)^2 \quad (28.a)$$

con $a = \text{const.}$

siguiendo el mismo procedimiento que en los dos casos anteriores, utilizando la téttrada³

$$(m^r) = \frac{x}{\sqrt{2a}} (1, -i, 0, 0)$$

$$(\ell^r) = (0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2x}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2y}}{x}) \quad (28.b)$$

$$(n^r) = (0, 0, \frac{1}{\sqrt{2x}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2y}}{x})$$

se llega a:

$$k = -v = \frac{1+2i}{2\sqrt{2a}}, \quad \alpha = -\beta = \frac{1-i}{2\sqrt{2a}} \quad (28.c)$$

los demás se anulan. El espíntensor se describe por -
medio de (20'):

$$\Omega_c = 0, \quad c \neq 0,7 \quad \Omega_0 = -\Omega_1 = \frac{2}{5} (2k - \bar{\alpha}) \quad (28.d)$$

más ejemplos pueden encontrarse en las refs. [3] y [30].

Nota: El espíntensor para la Métrica de Kerr se deduce en una -
carta comunicación a la Revista Mexicana de Física, envía-
da en junio de 1990 por el Dr. José L. López Bonilla.

5.- CONCLUSIÓN Y COMENTARIOS.

En la literatura es común encontrar la idea de que la construcción de K_{abc} es un trabajo terrible, sin embargo en este capítulo se demostró cómo hacerlo en forma relativamente fácil para los tipos 0, N y III. Estamos buscando la solución general para los tipos D, II y I, sin embargo, los resultados de (26), (27) y (28) sugieren que los Ω_r serán también combinaciones lineales de los coeficientes de espín.

Podríamos hacer ahora una serie de comentarios y problemas abiertos interesantes. Cuando se intenta encontrar el superpotencial de Lanczos para el tipo D, si pretendemos que la solución sea una combinación lineal de los coeficientes de espín, como indicamos anteriormente, resulta que algunas de las preguntas que hicimos aunque no conducen al resultado, sugieren una especie de renormalización escalar. Veamos la idea para los casos resueltos. Si, por ejemplo, C_{abrp} es tipo N, entonces $B_{abrp} = f(x^c) C_{abrp}$ también es tipo N, por lo tanto, ¿Cuál es el espintensor para este tensor B_{abrp} ? Algo semejante para el tipo III. Una vez que se tenga el resultado podría aplicarse a cualquier R_4 vacío - Tipo D, por ejemplo métrica de Kerr, y entonces buscar la solución general de este tipo.

Otra pregunta muy relacionada con el concepto del superpotencial es la siguiente: Lanczos¹⁴ obtuvo la existencia de K_{ijr} mediante el hecho de que $\sqrt{-g} L_0$ es una divergencia exacta, es decir:

$$\sqrt{-g} L_0 = A^r_{,r} \longrightarrow K_{abc} \quad (29)$$

En este proceso participan las propiedades algebraicas y diferenciales de C_{abpq} ; sin embargo, F. Bampi⁵ et al dicen que la existencia del espintensor sólo depende de las propiedades algebraicas de C_{abpq} (4.d). Entonces la pregunta sería ¿Podríamos probar que la fórmula $C_{abpq} = K_{abp;q}$ con las propiedades de las Ecs. (4.d) implican la Ec. (29)? (Sin propiedades diferenciales).

Todo esto puede llevarnos a contestar qué significado físico posee (si lo tiene) el espintensor.

CAPITULO II

1.- INTRODUCCION.

Desde que en 1938 Dirac³¹ publicó su artículo clásico sobre electrones y los efectos de la radiación electromagnética, han aparecido muchas críticas y diferentes formas de obtener la ecuación de Lorentz-Dirac (L-D) - Sobre la ecuación en sí, existe una extensa literatura al respecto, que explica ampliamente las dificultades físicas que acarrea esta última. Para familiarizarse con el problema se podría recomendar recurrir al libro de Jackson³². Para una mejor comprensión del mismo, se podrían analizar los artículos de Jiménez y Campos^{33, 34, 35} que exponen en forma extensiva las principales paradojas que trae consigo la ecuación de Lorentz-Dirac.

Por otra parte, existen muchos métodos distintos para deducir las ecuaciones de L-D y Lorentz-Abraham (L-A) (o sea, la ecuación de L-D en el límite no relativista), pero fundamentalmente son de dos tipos: los que pretenden ser "formales" y los heurísticos. El primer método formal fue propuesto por Dirac³¹. Sin embargo, aparte de las dificultades de la ecuación en sí (divergencias o singularidades, y preaceleraciones), se llega a ella por un método de renormalización que resulta un poco dudoso (el uso de potenciales avanzados parece evitar la renormalización, sin embargo esto puede discutirse ampliamente como veremos después). Otra forma de ver las cosas fue propuesta por Infeld-Wallace,³⁶ basándose en modificar la función Delta que representa la partícula puntual. Aparecieron luego un buen número de artículos tratando de esclarecer el método. De todos ellos, se puede seleccionar el muy elegante artículo

lo de Synge³⁷, que de manera formal elimina el problema de la renormalización, pero deja ciertas dificultades³⁸ (no unicidad del tensor electromagnético). Los métodos se han perfeccionado mucho como se aprecia, - por ejemplo, en el artículo de Tabensky y Villarroel³⁹, o en el de Evans⁴⁰, que en unas cuantas cuartillas obtienen el resultado. Sin embargo, todos los métodos - tienen dificultades, ya sea relacionados con la renormalización o con la no unicidad del tensor electromagnético³⁸.

Por esto último, y por los problemas de la ecuación en sí, han aparecido un sinnúmero de nuevas propuestas - que van desde representaciones en serie⁴¹ o integrales⁴², hasta nuevas ecuaciones de movimiento^{43, 44, 45}. Esto ha sido tan importante que se han puesto en duda - conceptos muy clásicos como el de campo, y las teorías como la de acción a distancia han tomado fuerza^{46, 47, 48}.

Presentar una deducción formal de la ecuación de L-D, aparte de ser muy laborioso como dicen Infeld y Plebanski⁹, estaría fuera de lugar en esta introducción y muy - difícil de superar el trabajo de Synge.³⁷

La primera deducción en forma heurística fue debido a Planck⁵⁰; la deducción en el libro de Jackson³² está basada en esta última y poseen el inconveniente de no ser relativistas y funcionan sólo para sistemas periódicos. Otra deducción muy simple en forma relativista es debida a Infeld y Plebanski⁴⁰, basada en una expansión de Taylor muy interesante. La más simple de las deducciones se debe a Landau y Lifshitz⁵¹ y consiste -

de realizar una contracción de la ecuación de movimiento con la 4-velocidad, utilizando la fórmula de Larmor y la conservación de la masa obtiene la fuerza de frenado por radiación.

Sin embargo estas últimas deducciones no presentan las principales dificultades en la obtención formal de la ecuación. Existen ciertos trabajos heurísticos que de alguna forma señalan las renormalizaciones que se deben de hacer sin recurrir a una exposición muy laboriosa^{5b} 52, 53.

En la última de estas deducciones⁵³, además de mostrar el problema de la renormalización, se muestra la importancia de los campos de Liénard y Wiechert (L-W). En particular se muestra cómo el retraso que llevan implícitos estos campos, influye en la ecuación de movimiento. Algo muy interesante es que en forma heurística, sin hacer un cálculo de los campos de L-W, se nota que el retraso podría no solo generar una ecuación de L-D, sino un sinnúmero, que tienen la forma siguiente:⁵³ - (ver (33.c)).

$$m a^\alpha = e F^{\alpha\beta} v_\beta + A_1 \Sigma_0 m (\dot{a}^\alpha + a^2 v^\alpha) + A_2 \tau_0^2 m (\ddot{a}^\alpha + a_\alpha \dot{a}^\alpha v^\alpha) + \dots \quad (29')$$

donde $\tau_0 = \frac{2e^2}{3c^2}$, los coeficientes A_n deben elegirse según la nueva propuesta de ecuación y los puntos suspensivos se refieren a los siguientes términos obtenidos de combinaciones similares a:

$$v_{\alpha} \ddot{v}^{\alpha} = - \dot{v}^2 \quad \text{y} \quad v_{\alpha} \ddot{\ddot{v}}^{\alpha} = - 2 \dot{v}_{\alpha} \ddot{v}^{\alpha} \quad (30)$$

al contraer con la ec. (29) con v_{α} , se obtiene la conservación de la masa.

Hay que hacer notar que en la deducción de Dirac³¹, él obtiene la ecuación pues propone la solución más sencilla pero deja abierta otras posibilidades y estas son las contempladas en la ec. (29).

La ec. (29) no debe confundirse con la aproximación por series perturbadas^{54,55}

$$m a_{\mu}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_0)^n k_{\mu}^{(n)}(\tau) \quad (31)$$

que se obtiene de la representación integral

$$m a_{\mu}(\tau) = \int_0^{\infty} k^{\mu}(\tau + \alpha\tau_0) e^{-\alpha} d\alpha \quad (32)$$

donde $\alpha = \frac{(\tau^* - \tau)}{\tau_0}$ y $k_{\mu} = m(a_{\mu} - \tau_0 \dot{a}_{\mu})$

Algunos autores^{54,55} pretenden que (31) es una ecuación distinta a la de L-D; sin embargo, por argumentos físicos es fácil descartar esta posibilidad⁵⁵. Más aun, se puede llegar a demostrar matemáticamente la equivalencia para los casos físicos⁵⁶.

También cabe notar que la ec. (31) es, como hemos dicho

la ecuación de L-D, que es un caso particular de la ec. (29), con $A_1 = 1$ y $A_n = 0$ para $n \neq 1$ y no una serie infinita del tipo de la ec. (29).

Por otro lado en la deducción de Synge³⁷, la ecuación de L-D no es encontrada directamente. El tensor de energía-esfuerzo es corregido para obtenerla. Este último resultado y la sugerencia de que la ecuación de L-D no es única, sino que la ec. (29) es compatible con los campos de L-W, nos lleva a la necesidad de un estudio más profundo de los campos de L-W. Para poder entender su comportamiento en las distintas superficies que se proponen en la obtención de la ecuación de L-D, desarrollaremos en la segunda sección el formalismo utilizado por Synge. Esto nos permitirá exponer las descomposiciones de los tensores electromagnéticos que permitan evaluar la importancia y comportamiento de cada parte permitiendo una interpretación física. Si uno es capaz de encontrar superpotenciales para estos tensores, entonces las integrales son inmediatas! En la tercera sección damos una interpretación física de los superpotenciales encontrados. Debido a la no-localidad de uno de los superpotenciales recurrimos a las coordenadas de Newman-Unti que al poseer ellas mismas la historia de la partícula "formalmente" desaparecen la no-localidad. Esto último se desarrolla en la cuarta y quinta sección.

2. FORMALISMO DE SYNGE EN LA ELECTRODINÁMICA DE CARGAS PUNTUALES.

Debido a que el valor de los campos electromagnéticos depende de los efectos de retraso, la descripción de éstas últimas es muy complicada. Cuando uno intenta calcular integrales relacionadas con estos campos, los problemas que surgen son aún más difíciles. Sin embargo Syngé^{57,37} ha desarrollado una técnica que permite simplificar muchísimo ciertos cálculos sin tener que recurrir a aproximaciones, como en algunos artículos clásicos se hacen. Para ello hay que empezar por los siguientes comentarios y definiciones.

Es muy importante hacer notar que dada una línea de universo C , se definen una serie de campos $A(x^\alpha)$ en cada punto del espacio de Minkowski que pueden ser escalares, vectoriales o tensoriales, etc...; por ejemplo: Sea τ el valor del tiempo retardado del evento que representa la intersección de C con la hoja del pasado del cono de luz con vértice en (x^α) . Es claro que τ está unívocamente determinado a partir de (x^α) y C , salvo una constante de iniciación; τ es un campo escalar. Las coordenadas de tal intersección (X^α) representa un campo vectorial; de la misma forma se tiene el vector nulo:

$$k^a = x^a - X^a \quad (33.a)$$

que es también un campo vectorial. Otros campos son la cuatro velocidad

$$v^\alpha = \frac{dX^\alpha(\tau)}{d\tau}, \quad (33.b)$$

la cuatro-aceleración

$$a^\alpha = \frac{d^2 X^\alpha(\tau)}{d\tau^2}, \quad (33.c)$$

o la cuatro-hiperaceleración (4-superaceleración)

$$v^\alpha = \frac{d^3 X^\alpha(\tau)}{d\tau^3}. \quad (33.d)$$

Podemos definir otros campos tensoriales de utilidad -
apartir de combinaciones de estos últimos

$$v_\alpha v^\beta, \quad v^\alpha v^\beta, \quad \text{etc....}$$

Para calcular el tensor electromagnético necesitamos -
conocer derivadas parciales de los campos arriba seña-
lados, por ello tenemos que introducir la noción de -
distancia retardada o distancia de Bhabha^{3.7}. Para ello
formalicemos nuestra notación.

La velocidad de la luz en el vacío $c = 1$.

$$d\tau^2 = - g_{ab} dx^a dx^b \quad (34.a)$$

con $(g_{ab}) = \text{diag}(1, 1, 1, -1)$.

Recordemos ciertas propiedades

$$v_c v^c = -1 \quad (34.b)$$

por lo tanto

$$a^c v_c = 0 \quad \text{y} \quad v^c v_c = -a_c a^c = -a^2 \leq 0 \quad (34.c)$$

Sea el evento (x^a) y la línea de universo C. A partir de (X^a) se escoge un evento (y^a) tal que

$$y^a = X^a + r v^a \quad (35.a)$$

con $r \geq 0$ que llamaremos distancia retardada, tal que

$$(y^a - X^a) (y_a - x_a) = 0 \quad (35.b)$$

Tenemos pues que:

$$r v^a (r v_a - k_a) = 0 \quad (35.c)$$

Se sigue que:

$$r(v^a k_a + r) = 0 \quad (35.d)$$

Como un vector nulo no puede ser ortogonal a uno temporal, a menos que las componentes k_a sean cero, entonces $r = 0$ si (x^a) pertenece a C . Si (x^a) no pertenece a C entonces $r \neq 0$ y tenemos:

$$r = -v^a k_a \geq 0 \quad (35.e)$$

Es claro que cerca de la carga $r \rightarrow 0$, y lejos $r \rightarrow \infty$.

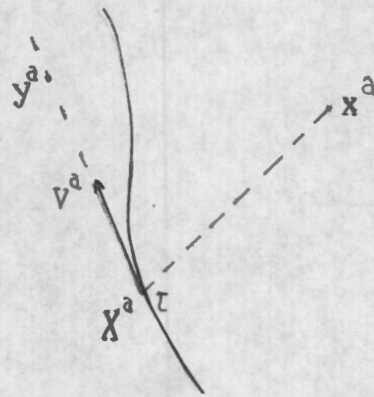


Figura 11-1.

Una vez desarrollada esta notación debemos dar una pequeña exposición de la teoría electromagnética, para poder ver la utilidad de este formalismo.

De las definiciones clásicas de potencial escalar ϕ y potencial vectorial \vec{A} , podemos construir en nuestra notación el cuadripotencial como:

$$(A^a) = (\vec{A}, \phi) \quad (36.a)$$

El tensor de Faraday viene dado por:

$$F_{ab} = A_{b,a} - A_{a,b} = -F_{ba} \quad (36.b)$$

El tensor dual es:

$$*F^{ab} = \frac{1}{2} \epsilon^{abcd} F_{cd} = -*F^{ba} \quad (36.c)$$

En esta notación, la representación matricial de F^{ab} y $*F^{ab}$ es:

$$[F^{ab}] = \begin{bmatrix} 0 & B_z & -B_y & -E_x \\ -B_z & 0 & B_x & -E_y \\ B_y & -B_x & 0 & -E_z \\ E_x & E_y & E_z & 0 \end{bmatrix} \quad (36.d)$$

$$[*F^{ab}] = \begin{bmatrix} 0 & E_z & -E_y & B_x \\ -E_z & 0 & E_x & B_y \\ E_y & -E_x & 0 & B_z \\ -B_x & -B_y & B_z & 0 \end{bmatrix} \quad (36.e)$$

De la ec. (36.b), es claro que para conocer el tensor de Faraday debemos derivar parcialmente el cuadripotencial. Calculemos primero las derivadas involucradas - en esta derivación y es aquí donde el formalismo de - Synge^{37,57} resulta necesario. La más importante, por su reiterada aplicación, es $\tau_{,b}$.

Sabemos que $k_a k^a = 0$, de donde variando:

$$k_a (\delta k^a - \delta X^a) = 0 \quad (37.a)$$

pero $\delta X^a = v^a \delta \tau$, y restringiendo la variación a δX^b , se tiene:

$$k_b + r \tau_{,b} = 0 \quad (37.b)$$

Luego

$$\tau_{,b} = - \frac{k_b}{r} \quad (37.c)$$

Una vez obtenido este resultado los demás se siguen de inmediato. Por ejemplo para $k^a_{,b}$, se tiene:

$$\delta k^a = \delta x^a - \delta X^a = \delta x^a - v^a \delta \tau = \delta x^a + \frac{v^a}{r} k_b \delta x^b \quad (37.d)$$

Se concluye que

$$k^a_{,b} = \delta^a_b + \frac{v^a}{r} k_b \quad (37.e)$$

De la misma forma considerando que $\delta v^a = a^a \delta \tau$ y $\delta a^a = v^a \delta \tau$ se llega a:

$$v^a_{,b} = -\frac{a^a}{r} k_b \quad \text{y} \quad a^a_{,b} = -\frac{v^a}{r} k_b \quad . \quad (37.f)$$

Será necesario conocer también $r_{,b}$

$$\begin{aligned} r_{,b} &= ((-v_a k^a)_{,b}) = -v_{a,b} k^a - v_a k^a_{,b} \\ &= \frac{a_a}{r} k_b k^a - v_a (\delta^a_b + \frac{v^a}{r} k_b) \\ &= \frac{a_a k_b}{r} k^a - v_b + \frac{k_b}{r} = -v_b + \frac{k_b}{r} (a_a k^a + 1) \end{aligned} \quad (37.g)$$

Definiendo $W = -a_a k^a$ y $B = \frac{1}{r} (-W + 1)$ (37.h)

se tiene finalmente

$$r_{,b} = -v_b + B k_b \quad (37.i)$$

y ahora ya estamos en condiciones de deducir los campos potenciales generados por una carga puntual en movimiento.

Sabemos⁵⁹ que las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir de la siguiente forma

$$\partial_a F^{ab} = F^{ab}_{,a} = -4\pi J^b \quad (38.a)$$

$$*F^{ab}_{,a} = 0 \quad (38.b)$$

donde

$$J^b(x^a) \equiv e \int d\tau v^b(\tau) \delta^{(4)}(x^a - X^a(\tau)) \quad (38.c)$$

Debido a la ec. (36.b) se llega a que las ecuaciones - inhomogéneas de Maxwell, se transforman en términos de los potenciales en:

$$F^{ab}_{,a} = A^{b,a}_{,a} - A^{a,b}_{,a} = - 4\pi J^b \quad (38.d)$$

Utilizando la norma de Lorentz

$$A^a_{,a} = 0 \quad (38.e)$$

se llega a

$$A^{b,a}_{,a} = - 4\pi J^b \quad (38.f)$$

Esto es un sistema de ecuaciones inhomogéneas que se - resuelve por el método de Green (hay que hacer notar - que existen dos tipos de soluciones las llamadas retar - dadas y avanzadas, esto ha sido objeto de muchas discu - siones en particular se puede citar los trabajos de - Wheeler y Feynman⁴⁶ donde se utilizan ambas soluciones. Nosotros sólo consideraremos la solución retardada).

Sea la función de Green⁶⁰ retardada

$$D_r(x - y) = - \frac{1}{2\pi} O(x^4 - y^4) \delta(|\vec{x} - \vec{y}|^2) \quad (39.a)$$

donde O representa la función de Heaviside o función - escalera. Por lo tanto

$$A^a(x^b) = 4\pi \int dy^4 D_r(x - y) J^a(y) \quad (39.b)$$

se tiene que

$$A^a(x^b) = - 2e \int dy^4 d\tau \{ O(x^4 - y^4) \delta(|\vec{x} - \vec{y}|^2) v^a(\tau) \delta^{(4)}(y - X(\tau)) \} \quad (39.c)$$

Finalmente,

$$A^a(x^b) = - 2e \int d\tau \{ O(x^0 - X^0(\tau)) \delta(|\vec{x} - \vec{X}(\tau)|^2) v^a(\tau) \} \quad (39.d)$$

o, realizando la integral, se obtiene:

$$A^a(x^b) = \frac{e v^a}{r} \quad (39.e)$$

lo cual constituye el potencial de Liénard-Wiechert - (L-W).

Calculemos ahora el tensor electromagnético.

$$\begin{aligned}
 A^{a,b} &= e \frac{v^a k^b}{r} - \frac{e v^a}{r^2} r^{,b} \\
 &= e \left[-\frac{a^a k^b}{r} - \frac{v^a}{r^2} (-v^b + B k^b) \right]
 \end{aligned}
 \tag{40.a}$$

luego

$$\begin{aligned}
 F^{ab} = A^{b,a} - A^{a,b} &= e \left[\frac{a^a k^b}{r^2} - \frac{a^k k^a}{r^2} + \frac{v v^a}{r^2} (-v^b + B k^b) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{v^b}{r^2} (-v^a + B k^a) \right]
 \end{aligned}
 \tag{40.b}$$

y por lo tanto

$$F^{ab} = \frac{e}{r^2} (U^a k^b - U^b k^a)
 \tag{40.c}$$

donde
$$U^a = a^a + B v^a \tag{40.d}$$

que es la expresión de Synge³⁷ (1970).

Si uno considera la ecuación de movimiento de una partícula cargada como la ecuación de Lorentz, entonces - se puede analizar el tensor de Faraday para ver que tipo de trayectoria se efectúa. Si los campos son constantes, se puede hacer una clasificación algebraica según los eigenvectores de F^{ab} para determinar el tipo de trayectoria³⁸.

Definamos ahora el tensor de Maxwell T_{ab} que tanta importancia tiene con respecto a la transmisión de energía-momento y la obtención de la ecuación de movimiento de una partícula cargada.

$$T_{ab} = \frac{1}{2}(F_{ac} F_b^c + *F_{ac} *F_b^c) \quad (41.a)$$

que satisface

$$T_{ab} = T_{ba} \text{ y } T^a_a = 0$$

Este tensor es fundamental a la hora de deducir la ecuación de movimiento, pues satisface la ecuación

$$T^{ab}_{,a} = F^{ba} J_a . \quad (41.b)$$

Normalmente lo que se debe calcular es una integral de superficie de T^{ab} y por ello es muy importante lograr descomposiciones tanto de T^{ab} o F^{ba} que además de facilitar los cálculos, permiten interpretaciones físicas de cada término como veremos en la sección 3. Veamos en particular la descomposición de estos últimos tensores debido a Teitelboim⁶¹ para el caso de L-W.

Del formalismo de Synge, se puede obtener una descomposición del vector nulo:

$$k^d = r(p^d + v^d) , p^a v_a = 0 \text{ y } p^a k_a = r \quad (42.a)$$

donde p^d es un vector unitario. Si sustituimos este - resultado en la ec. (40.c), se tiene

$$F^{ab} = \frac{e}{r^2} (U_r^a (p^b + v^b) - U_r^b (p^a + v^a)) \quad (42.b)$$

utilizando la ec. (40.d), se llega a:

$$F^{ab} = \underset{(-1)}{F_{ab}^{(1)}} + \underset{(-2)}{F_{ab}^{(2)}} \quad (42.c)$$

donde

$$\underset{(-1)}{F_{ab}^{(1)}} = e r^{-1} (a_c p^c v_a \times p_b + a_a \times v_b + a_a \times p_b)$$

$$\underset{(-2)}{F_{ab}^{(2)}} = e r^{-2} (v_a \times p_b) \quad (42.e)$$

y se ha utilizado la notación de Lowry⁶²

$$A_a \times B_b = A_a B_b - A_b B_a . \quad (42.f)$$

Lo interesante de esta descomposición es que un término es proporcional a r^{-1} y el otro a r^{-2} , lo cual describe muy bien la importancia de cada uno cerca y lejos de la carga.

Si ahora reemplazamos v^a en la ec. (39.b) con la ayuda de (42.a) se llega a

$$A^a = A_1^a + A_2^a \quad (43.a)$$

donde

$$A_1^a = -e r^{-1} p^a \quad \text{y} \quad A_2^a = e r^{-2} k^a \quad (43.b)$$

Al calcular F^{ab} a partir de la descomposición de la eq. (43.a) se tiene que:

$$F_{ab} = A_{i,b,a} - A_{i,a,b} \quad i = 1, 2 \quad (44)$$

(-i)

La descomposición de F_{ab} corresponde a la descomposición de A^a . De la misma forma se obtiene para el tensor de energía

$$T_{ab} = T_{ab}^{(-2)} + T_{ab}^{(-3)} + T_{ab}^{(-4)} \quad (45.a)$$

donde

$$T_{ab}^{(-2)} = e^2 r^{-4} [a^2 - r^{-2} (k^c a_c)^2] k_a k_b \quad (45.b)$$

$$= e^2 r^{-4} [a^2 - r^{-2} w^2] k_a k_b$$

$$T_{ab}^{(-3)} = e^2 r^{-4} [k_a a_b + k_b a_a - 2r^{-2} k^c a_c k_a k_b + r^{-1} k^c a_c (k_a v_b + k_b v_a)] \quad (45.c)$$

$$T_{ab} = e^2 r^{-4} \left[\frac{1}{2} g_{ab} + r^{-1} (v_a k_b + v_b k_a) - r^{-2} k_a k_b \right] \quad (45.d)$$

(-4)

Es claro que $T_{ab}^{(-2)}$ domina lejos de la carga y es responsable de la fórmula de Larmor. Uno podría preguntarse

porqué si la fórmula de Larmor puede ser obtenida en el sistema de referencia de la partícula en reposo,⁵³ el término importante sigue siendo $T_{ab}^{(-2)}$. La razón es

muy simple pues $T_{ab}^{(-2)}$ no depende de $v_a^{(-2)}$, y por tanto $T_{ab}^{(-2)}$ como $T_{ab}^{(-4)}$ son en algunos términos proporcionales a $v_a^{(-3)}$, los cuales se anulan; los demás términos son responsables de las singularidades. Por lo tanto podemos proponer la siguiente descomposición, más física:

$$T_{ab} = T_{Rab} + T_{Bab} \quad (45.e)$$

donde

$$T_{Rab} = T_{ab}^{(-2)} \quad \text{y} \quad T_{Bab} = T_{ab}^{(-3)} + T_{ab}^{(-4)} \quad (45.f)$$

Se puede demostrar también que fuera de la línea universo C (independencia dinámica) Weert,⁶³ debido a la ec. (45.g), sugirió la existencia de superpotenciales para T_{Rab} y T_{Bab} . Sin embargo sólo obtuvo para la parte acordada

$$T_{Bab} = K_{B, a, c}^c \quad (46.a)$$

donde

$$K_{B\text{ sac}} = - \left(\frac{e^2}{4}\right) r^{-4} \left[r^{-1} (3 + 4k_{ab}^b) (v_s \times k_a) k_c + \right. \\ \left. + 4(a_s \times k_a) k_c + g_{cs} k_a - g_a k_s \right] \quad (46.b)$$

que se conoce como el superpotencial de Weert⁶³. Queda abierto el problema de encontrar un superpotencial local como el anterior para la parte radiativa.

Sin embargo en una carta comunicación privada con el Dr. José L. López Bonilla, Danilo Villarroel demuestra que es posible probar el carácter no-local de $K_{R\text{ abc}}$ sin necesidad de conocer la expresión explícita para $K_{R\text{ abc}}$.

Veamos un bosquejo de la demostración:

Supongamos que $K_{R\text{ sar}}$ sea local, es decir que dependa solo de cantidades retardadas asociadas al punto X, entonces aplicando Stokes sobre una superficie tipo espacio, se llega a que p_{μ}^r es local lo cual es falso.

Las secciones 4 y 5 de este capítulo desarrollarán técnicas posibles para encontrar tal potencial. Aunque de antemano sabemos que no es posible, la idea es utilizar coordenadas no-locales, a saber: coordenadas de Newman-Unti. Posiblemente se encuentre un superpotencial que explícitamente sea local aunque implícitamente sea no-local; es decir, las propias coordenadas contengan la no localidad. En la siguiente sección daremos una in--

interpretación física del potencial de Weert⁶³ además de presentar un potencial para la parte radiativa pero no-local.

3.- INTERPRETACIÓN FÍSICA DEL SUPERPOTENCIAL DE WEERT.

Nuestra carga puntual en movimiento arbitrario genera un campo electromagnético el cual posee un momento angular intrínseco (MAI), aquí probaremos que K_{Bjbc} se comporta como una densidad para este MAI cuando los correspondientes flujos son calculados a través de un tubo de Bhabha⁵⁸-Synge³⁷.

El superpotencial K_{Bjbc} tiene las mismas propiedades del espintensor de Lanczos (ver 16.a)). En nuestro caso, K_{Bjbc} estará asociado con el MAI del campo de LW. En efecto, consideremos el tubo de Bhabha-Synge (ver figura II-2), el cual está compuesto de los conos de luz con vértices en $\tau = \tau_1$ y $\tau = \tau_2$ y de una superficie con distancia retardada constante.

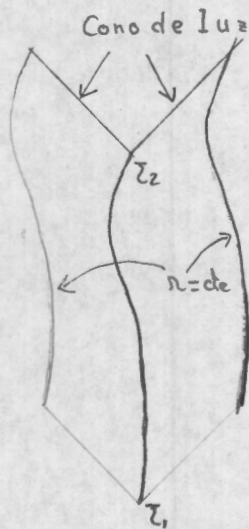


Figura II-2
(Tubo de Bhabha-Synge)

Primero calculemos el flujo de K_{Bjbc} a través de un caso de luz cuya expresión está dada por (ver Synge³⁷):

$$\tilde{M}_{jb} = \int_{\tau=cte} K_{Bjbc} d\sigma^c = \int_{\tau=cte}^r r dr \int d\Omega K_{Bjbc} k^c \quad (47)$$

donde $d\Omega$ es un elemento de ángulo sólido (ver figura II-3). El vector p^c , definido anteriormente en (42.a), puede ser descrito en términos de una triada de Fermi $e_{(\gamma)c}$, $\gamma = 1, 2, 3$

$$\frac{d}{d\tau} e_{(\gamma)}^c = a_{(\gamma)}^c v^c = (a^r e_{(\gamma)r}) v^c \quad (48.a)$$

y entonces

$$\begin{aligned} p^c &= \text{sen}\theta \cos\phi e_{(1)}^c + \text{sen}\theta \text{sen}\phi e_{(2)}^c + \cos\theta e_{(3)}^c \\ &= p_{(\sigma)} e_{(\sigma)}^c = (p^r e_{(\sigma)r}) e_{(\sigma)}^c \end{aligned} \quad (48.b)$$

$$d\Omega = \text{sen}\theta d\theta d\phi$$

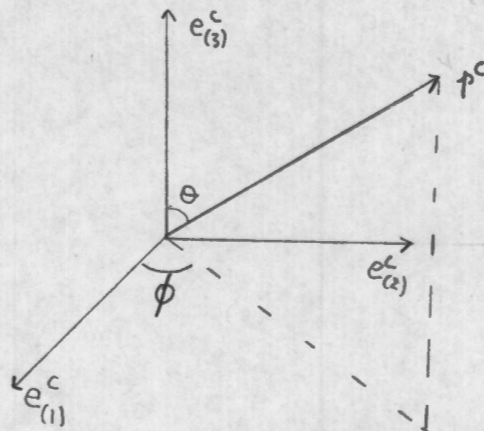


Figura II-3
Triada de Fermi

De la ec. (46,b) es claro que:

$$K_{Bjbc} k^c = 0 \quad (49)$$

así las ecs. (47, 49) implica que $\tilde{M}_{jb} = 0$, es decir, K_{Bjbc} carece de flujo a través de un cono de luz.

Ahora calculemos el flujo de K_{Bjbc} a través del 3-espacio $r = r_0 = \text{cte.}$, la expresión correspondiente se encuentra en Synge³⁷:

$$M_{Ijb} = \int_{r=r} K_{Bjbc} d\sigma^c = r^2 \int_{\tau_2}^{\tau_1} d\tau \int K_{Bjbc}^c r_{,c} d\Omega \quad (50.a)$$

De donde:

$$M_{Ijb} = \frac{8\pi}{3} e^2 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (v_j * a_b) d\tau \quad (50.b)$$

lo cual coincide con el momento angular intrínseco del campo de LW, ver López-Villarroel^{64,65}. Así K_{Bjbc} se comporta como una densidad para dicho momento angular.

El superpotencial de la ec. (46.b) acepta también el rompimiento

$$K_{Bjbc} = \hat{K}_{Bjbc} + \bar{K}_{Bjbc} \quad (51.a)$$

donde

$$\tilde{K}_{Bjbc} = e^2 r^{-4} [(-a_j + r^{-1} W v_j) \times k_b] k_c \quad (51.b)$$

$$\bar{K}_{Bjbc} = -\frac{e^2}{4} r^{-4} [g_{cj} k_b - g_{cb} k_j + 3 r^{-1} (v_j \times k_b) k_c], \quad (51.c)$$

y los potenciales en las ecs. (51.b, 51.c) cumplen todas las propiedades en la ec. (16.a) como los espintensores de Lanczos. Es simple probar que:

$$\int_{\tau=cte} \bar{K}_{Bjbc} d\sigma^c = \int_{r=cte} \bar{K}_{Bjbc} d\sigma^c = 0 \quad (51.d)$$

y entonces

$$M_{IjB} = \int_{r=cte} \tilde{K}_{Bjbc} d\sigma^c, \quad \int_{r=cte} \tilde{K}_{Bjbc} d\sigma^c = 0 \quad (51.e)$$

es decir, \bar{K}_{Bjbc} no contribuye al MAI del campo electromagnético, esto significa que \tilde{K}_{Bjbc} es la parte activa de K_{Bjbc} . Los cálculos en las ecs. (51.d) pueden hacerse directamente, o bien, puede emplearse el teorema de Stokes y la identidad de Rowe⁶⁶:

$$\bar{K}_{Bjbc} = \left(\frac{e^2}{4} r^{-4} D_{jbc}^r \right)_{,r} \quad (51.f)$$

donde D_{jbcn} es un tensor utilizado por Synge³⁷ en otro contexto:

$$D_{sarb} = (g_{sr} k_b - g_{sb} k_r) k_a + (g_{ab} k_r - g_{ar} k_b) k_s$$

Por último, al colocar la ec. (51.a) en (46.a) se obtiene la descomposición

$$T_{Bbc} = \hat{T}_{Bbc} + \bar{T}_{Bbc} \quad (52.a)$$

con $\hat{T}_{Bbc} = \hat{K}_{Bbc,j}^j$ y $\bar{T}_{Bbc} = \bar{K}_{Bbc,j}^j$; (52.b)

La ec. (52.a) es importante en relación al momento angular emitido por la carga, ver López⁶⁷.

Hasta ahora solo hemos tratado con el superpotencial - para la parte acotada, pero no la radiativa. Aquí mostraremos que la parte radiativa de T_{ab} puede escribirse como la suma de dos porciones, una de las cuales no participa en los flujos de energía y momento angular a través del tubo de Bhabha-Synge. Además escribimos un potencial no-local para T_{Rbc} .

Las expresiones en (46.b,f) pueden escribirse en la forma:

$$T_{Rbc} = T_{i bc} + \hat{T}_{Rbc} \quad , \quad (53.a)$$

donde

$$T_{i\ bc} = q^2 r^{-4} (a^2 - 3 r^{-2} W^2) k_b k_c, \quad T_{i\ b, c}^c = 0 \quad (53.b)$$

$$T_{R\ bc} = 2e^2 r^{-6} W^2 k_b k_c, \quad T_{R\ b, c}^c = 0 \quad (53.c)$$

Es simple demostrar que:

$$\int_{\tau=\text{cte} \text{ o } r=\text{cte}} T_{i\ bc} d\sigma^c = 0 \quad (53.d)$$

es decir, la ec. (53.b) no contribuye al flujo de energía a través del tubo de Bhabha-Synge. Similarmente:

$$\int_{r=\text{cte} \text{ o } \tau=\text{cte}} (x^j T_{i\ bc} - x^b T_{i\ jc}) d\sigma_c = 0 \quad (54)$$

Así que $T_{i\ bc}$ tampoco participa en los flujos de momento angular para dicho tubo. Debido a las ecs. (53.d, 54) decimos que el término en la ec. (53.b) es la parte inactiva de T_{ab} respecto a la región de Bhabha-Synge.

La ley de conservación $T_{i\ b, c}^c = 0$ es inmediata de la existencia del superpotencial:

$$K_{i\ jbc} = \frac{e^2}{4} r^{-2} \left[r^{-2} W^2 (g_{cj} k_b - g_{cb} k_j) + r^{-1} W (v_j \times k_b) (a_c - 3r^{-2} W k_c) \right. \\ \left. + (a_j \times k_b) (4r^{-2} W k_c - a_c) \right] \quad (55.a)$$

tal que

$$T_{bc} = K_{bc}^j \quad (55.b)$$

Además, la identidad $\tilde{T}_{Rbc}^c = 0$ es consecuencia de:

$$\tilde{T}_{Rbc}^c = \tilde{K}_{Rbc}^j \quad (55.c)$$

en donde

$$\tilde{K}_{Rbjc}^c = - 2e F_{bj} p(\sigma) p(\gamma) \left[\int_0^\tau a(\sigma) a(\gamma) v_c d\tau + p(\beta) \int_0^\tau a(\sigma) a(\gamma) e_{(\beta)c} d\tau \right] \quad (55.d)$$

en la ec. (55.a) existe suma sobre $\sigma, \gamma, \beta = 1, 2, 3$. Al verificar la ec. (55.c) deben recordarse las relaciones

$$\tau_{,j} = - \frac{k}{r} \quad \text{Derivada retardada (37.c)}$$

$$F_{b,j}^j = 0 \quad \text{Ecs. de Maxwell (38.a)} \quad (55.e)$$

$$F_b^j k_j = \frac{e}{r^2} k_b \quad \text{Eigenvector nulo}$$

$$F_b^j p(\sigma)_{,j} = 0 \quad \text{Triada de Fermi}$$

$$W = - r p(\sigma) a(\sigma)$$

$$k^c = r(v^c + p^c) \quad (42.a)$$

La presencia de integrales en la ec. (55,d) muestra el carácter no-local de \tilde{K}_{Rbjc} , es decir, depende de la historia pasada de la carga.

Entonces las ec. (45.e), 46.a, 53.a, 55.b, 55.c) implican:

$$T_{kc} = (K_{Bb}^j{}_c + K_{i}^j{}_b{}_c + \tilde{K}_{Rb}^j{}_c) ;j \quad (56)$$

así el tensor de Maxwell asociado al campo de L-W es una divergencia exacta.

Sin embargo el hecho de que la parte radiativa sea no-local nos implica mucho el manejo del superpotencial. En las próximas secciones trataremos este problema con los métodos del primer capítulo, ayudándonos de las coordenadas de Newman-Unti⁶⁹ para tratar de integrar la no-localidad a las coordenadas y no al superpotencial.

4.- COORDENADAS DE NEWMAN-UNTI Y POTENCIALES PARA EL CAMPO DE LIÉNARD-WIECHERT.

Newman y Unti⁶⁹ construyeron un sistema de coordenadas que se adapta notablemente al estudio de situaciones físicas donde los campos correspondientes dependen de efectos retardados y de la trayectoria $X^a(\tau)$ de una partícula; es decir, el estado de movimiento de una masa puntual participa explícitamente en la construcción de este sistema de coordenadas. Estas coordenadas de NU pueden adaptarse a espacio-tiempos, curvos asintóticamente planos, a partir de lo cual Newman et al^{70,71,72,73} han propuesto un nuevo método de análisis del problema del movimiento en relatividad general.

La idea básica de NU⁶⁹ consiste en construir un nuevo sistema coordinado, que denotaremos por $(x^1, x^2, x^3 = r, x^4 = \tau)$, de manera que se simplifique la expresión para el 4-potencial de Liénard-Wiechert aunque se sacrifique la simplicidad de la métrica de Minkowski. También calcularemos los tensores de Faraday y Maxwell y sus superpotenciales, con el objeto de mostrar la utilidad de las coordenadas y preparar el cálculo de $R^j_{i c}$ con ayuda del Formalismo de N-P.

Tomemos una curva arbitraria tipo-tiempo $q^a(\tau)$ en el espacio de Minkowski (que después haremos coincidir con la trayectoria de una carga puntual). Las coordenadas (x, y, z, t) y (x^1, x^2, r, τ) se relacionan entre sí por las expresiones:^{69,74}

$$\begin{aligned}
 x &= q^1(\tau) + \frac{r(\eta + \bar{\eta})}{2^{3/2} p}, & y &= q^2(\tau) + \frac{i r(\bar{\eta} - \eta)}{2^{3/2} p} \\
 z &= q^3(\tau) + \frac{r(\eta \bar{\eta} - 1)}{2^{3/2} p}, & t &= q^4(\tau) + \frac{r(\eta \bar{\eta} + 1)}{2^{3/2} p}
 \end{aligned}
 \tag{57.a}$$

con

$$P = \frac{1}{2^{3/2}} \left[(\dot{q}^4 + \dot{q}^3) + (\dot{q}^4 - \dot{q}^3) \bar{\eta} \eta - (\dot{q}^1 - i \dot{q}^2) \eta - (\dot{q}^1 + i \dot{q}^2) \bar{\eta} \right]$$

donde $\eta = x^1 + i x^2$, un punto sobre una cantidad denota su derivada respecto a τ y una barra su conjugada compleja. Nótese que en la función P está involucrada la 4-velocidad \dot{q}^a ; es decir, las coordenadas NU ya poseen intrínsecamente información sobre el movimiento de la partícula.

Al sustituir (57.a) en la métrica, se obtiene:

$$ds^2 = g_{ab} dx^a dx^b = \frac{r^2}{2p^2} d\eta d\bar{\eta} - 2 dr d\tau - \left(1 - \frac{2\dot{p}}{p} r\right) d\tau^2,
 \tag{57.b}$$

que matricialmente se representa por:

$$(g_{ab}) = \begin{pmatrix} \frac{r}{2p^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{r}{2p^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -(1 - 2\frac{\dot{p}}{p} r) \end{pmatrix}
 \tag{57.c}$$

Hay que hacer notar que p no es sólo función de τ , sino que también depende de η y $\bar{\eta}$, por lo cual \dot{p} en realidad es la derivada parcial con respecto a τ ; sin embargo \ddot{q}^a aparece, lo que significa que la aceleración interviene en la construcción de la métrica del espacio-tiempo.

Evidentemente la ec. (57.b) es más complicada que la métrica de Minkowski, sin embargo veremos que las expresiones del campo electromagnético radiado por una carga puntual se simplifican.

Como en las ecuaciones que gobiernan a los superpotenciales aparecen derivadas covariantes entonces es necesario conocer los símbolos de Christoffel diferentes de cero, estos resultan ser:75

$$\Gamma_{11}^1 = -\Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = -\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x^1}, \quad \Gamma_{13}^1 = \Gamma_{23}^2 = \frac{1}{r}$$

$$\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial x^2}, \quad \Gamma_{11}^4 = \Gamma_{22}^4 = \frac{r}{2p^2}$$

$$\Gamma_{24}^2 = \Gamma_{14}^1 = -\Gamma_{44}^4 = \Gamma_{34}^3 = -\frac{\dot{p}}{p}$$

$$\Gamma_{44}^1 = -\frac{2p^2}{r} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\dot{p}}{p} \right), \quad \Gamma_{44}^2 = -\frac{2p^2}{r} \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\dot{p}}{p} \right) \quad (57.d)$$

$$\Gamma_{14}^3 = -r \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\dot{p}}{p} \right), \quad \Gamma_{24}^3 = -r \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\dot{p}}{p} \right)$$

$$\Gamma_{11}^3 = \Gamma_{22}^3 = -\frac{r}{2p^2} \left(1 - r \frac{\dot{p}}{p} \right)$$

$$\Gamma_{44}^3 = 3r \left(\frac{\dot{p}}{p} \right)^2 - r \frac{\ddot{p}}{p} - \frac{\dot{p}}{p}$$

Es importante notar que Γ_{44}^3 depende de \ddot{p} , es decir, - aparece la superaceleración³⁷ $q^{ab}(\tau)$ de gran relevancia en la ecuación de Lorentz-Dirac³¹ que describe el movimiento de partículas clásicas cargadas que toma en cuenta la reacción de radiación.

Por otra parte, como el tensor de curvatura correspondiente debe anularse puesto que el espacio de Minkowski es plano, entonces obtenemos las siguientes identidades:⁷⁵

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[p^2 \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\dot{p}}{p} \right) \right] = 0 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\frac{1}{p} \frac{\partial p}{\partial \eta} \right] = \frac{1}{8p^2} \quad (57.e)$$

$$4p^2 \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \bar{\eta}} \left(\frac{\dot{p}}{p} \right) + \frac{\dot{p}}{p} = 0$$

que serán de gran utilidad cuando construyamos el superpotencial para el tensor de Faraday. Si se usan las coordenadas de NU (x^1, x^2, r, τ) se obtienen las expresiones simples para los correspondientes 4-potencial A^c y tensor de Faraday F^{ab} .^{69,75}

$$(A^c) = e(0, 0, \frac{\dot{p}}{p}, \frac{1}{r}) \quad (58)$$

que satisface la condición de Lorentz, y

$$F^{ab} = 0 \quad \text{excepto por:}$$

$$F^{13} = - \frac{2e}{r^2} p^2 \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\dot{p}}{p} \right) \quad (59)$$

$$F^{23} = - \frac{2e}{r^2} p^2 \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\dot{p}}{p} \right)$$

$$F^{34} = - \frac{e}{r^2}$$

que satisfacen las ecuaciones de Maxwell en el vacío

$$F^{ab}{}_{;b} = 0 \quad (60)$$

Para obtener este resultado, se debe excluir la línea de universo, sin embargo utilizando coordenadas naturales se puede incluir la línea de universo apareciendo el 4-vector de corriente (38.c).

Uno podría pensar simplemente en transformar este último a coordenadas de NU y por lo tanto obtener las ecuaciones de Maxwell en coordenadas de NU en todo el 4-espacio. El inconveniente es que las coordenadas de NU no están definidas sobre la línea de universo.

Construyamos ahora el superpotencial para el 4-potencial A^c en la ec. (58); es decir, buscamos un tensor antisimétrico W^{bc} tal que:

$$A^b = W^{bc}{}_{;c} \quad (61.a)$$

de esta manera la condición de Lorentz se satisface obviamente. Utilizando el valor de los símbolos de Christoffel y la expresión de A^c en la ec. (58), se puede proponer una solución (no-única) para la ec. (61.a).

$$W^{bc} = 0 \text{ excepto } W^{34} = -W^{43} = -\frac{e}{2} \quad (61.b)$$

Por otro lado, sabemos que en coordenadas de NU

$$(v^c) = (0, 0, r \frac{p}{p}, 1) \text{ y } (k^c) = (0, 0, r, 0) \quad (61.c)$$

Entonces W^{bc} puede ser escrito como

$$W^{bc} = \frac{e}{2r} (v^b k^c - v^c k^b) \quad (61.d)$$

y esta expresión es válida en cualquier sistema de coordenadas.

El superpotencial para F^{ab} se encuentra resolviendo:

$$F^{ab} = K_{F \quad ;c}^{acb} \quad (62.a)$$

y si exigimos además $K_{F \quad ijr} = -K_{F \quad jir}$, las ecuaciones de Maxwell en el vacío se satisfacen. Aparte de utilizar los símbolos de Christoffel y los valores de F^{ab} en coordenadas de NU, hay que utilizar la ec. (59) para resolver la ec. (62,a); y entonces tenemos que $K_{F \quad abc} = 0$ excepto

$$\begin{aligned} K_{F \quad 341} &= K_{F \quad 134} = -K_{F \quad 143} = 2 \frac{ep}{r^2} \frac{\partial p}{\partial x^1} \\ K_{F \quad 342} &= K_{F \quad 234} = -K_{F \quad 243} = 2 \frac{ep}{r^2} \frac{\partial p}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (62.b)$$

es solución (no-única) de la ec. (62.a),

De la misma forma que anteriormente introducimos un conjunto de vectores, una tétrada nula de NP

$$(m^c) = \frac{p}{r}(i, -1, 0, 0) \quad , \quad (\ell^c) = (0, 0, -\frac{1}{2} + \frac{\dot{p}}{p} r, 1)$$

$$(n^c) = (0, 0, 1, 0) \quad , \quad \alpha = -\frac{i}{r} \frac{\partial p}{\partial \eta} \quad (62.c)$$

$$V^{ab} = n^a m^b - n^b m^a \quad , \quad U^{ab} = \bar{m}^a \ell^b - \bar{m}^b \ell^a$$

$$M^{ab} = m^a \bar{m}^b - m^b \bar{m}^a + \ell^a n^b - \ell^b n^a$$

y por lo tanto podemos expresar al superpotencial:

$$\begin{aligned} K_{F}^{abc} = -e & \left| (M^{ab} + \bar{M}^{ab})(\alpha m^c + \bar{\alpha} \bar{m}^c) + 2(\bar{\alpha} V^{ab} + \alpha \bar{V}^{ab}) n^c \right. \\ & \left. + 2(\alpha V^{ab} + \bar{\alpha} \bar{V}^{ab}) \ell^c \right| \end{aligned} \quad (62.d)$$

Siempre podremos agregar a la ec. (62.d) otro superpotencial $\tilde{K}_{F,abc}$ tal que genera un tensor de Faraday idénticamente cero; o sea:

$$\tilde{K}_{F,abc} = 0 \quad (62.e)$$

Resolviendo la ec. (62.e) de la misma forma, se obtiene:

$$\underset{F}{\tilde{K}}{}^{abc} = 0 \quad \text{excepto} \quad \underset{F}{\tilde{K}}{}^{343} = \frac{p^3}{r^2} \quad (62.f)$$

Utilizando la ec. (62.c), se tiene:

$$\underset{F}{\tilde{K}}{}^{abc} = - \frac{p^3}{2r^2} (M^{ab} + \overline{M}^{ab}) n^c \quad (62.g)$$

$\underset{F}{\tilde{K}}{}^{abc}$ puede agregársele a $\underset{F}{K}{}^{abc}$ y sigue satisfaciendo -
(62.a).

Estos últimos resultados son originales y puede ser -
que arrojen nueva luz sobre la estructura del potencial
electromagnético y de las ecuaciones de Maxwell para -
el caso de Liénard-Wiechert.

Construyamos, de la misma forma, el superpotencial -
 $\underset{B}{K}{}^{abc}$ de Weert. A diferencia de Weert que sólo construyó
el superpotencial sin indicar el procedimiento, el
método anterior permite obtener el superpotencial en -
forma natural. Las componentes en coordenadas de NU -
de $\underset{B}{T}{}_{ac}$ están dadas por^{61,65,35,75}

$$\underset{B}{T}{}^{11} = \underset{B}{T}{}^{22} = \frac{e^2 p^2}{r^6} \quad \underset{B}{T}{}^{13} = - \frac{2 e^2 p^2}{r^4} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\dot{p}}{P} \right)$$

$$\underset{B}{T}{}^{23} = - \frac{2 e^2 p^2}{r^4} \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\dot{p}}{P} \right) \quad , \quad \underset{B}{T}{}^{34} = \frac{e^2}{2r^4} \quad (63.a)$$

$$\underset{B}{T}{}^{33} = - \frac{e^2}{2r^4} \left(1 - 2r \frac{\dot{p}}{P} \right)$$

Queremos resolver

$$T_{B}^{ab} = K_{B}^{ajb} ; j \quad (63.b)$$

Utilizando de nuevo (57,d), se tiene la solución

$$K_{B}^{131} = K_{B}^{232} = - \frac{e^2}{2r^5} p^2, \quad K_{B}^{343} = \frac{e^2}{2r^3}$$

$$K_{B}^{133} = \frac{2 e^2 p^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\dot{p}}{p} \right), \quad K_{B}^{233} = \frac{2 e^2 p^2}{r^3} \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\dot{p}}{p} \right) \quad (63.c)$$

o, en forma tensorial

$$K_{B}^{abc} = \frac{e^2}{4r^3} (V^{ab} \bar{m}^c + \bar{V}^{ab} m^c) + \frac{e^2}{r^2} \left[v V^{ab} + \bar{v} \bar{V}^{ab} - \frac{1}{4r} (\bar{M}^{ab} + M^{ab}) \right] n^c$$

donde

$$v = 2 i p \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\dot{p}}{p} \right)$$

lo que coincide con el resultado de Weert.

Por otro lado si queremos hacer lo mismo para T_{R}^{ab} tenemos solo como referencia para superpotencial, uno no-local³ [ver (55.d)]. Sin embargo el hecho de que las coordenadas de NU llevan consigo el pasado de la partícula puede ser que en estas coordenadas la expresión para K_{R}^{abc} sea muy simple; es decir que las propiedades

no locales queden inmersas en el propio sistema de coor
denadas. Proponemos entonces darle el mismo tratamien
to a T_{Rab} que el que se le dió a T_{Bab} . Las ecuaciones -
no son tan simples y el problema queda abierto.

Debemos pues tratar de simplificar el problema. Posi-
blemente utilizando el método de NP con coordenadas de
NU, aparezca algún avance.

5.- FORMALISMO DE NEWMAN PENROSE APLICADO AL TENSOR DE MAXWELL EN COORDENADAS DE NEWMAN-UNTI.

En el primer capítulo se desarrolló el formalismo de Newman-Penrose, sin embargo solo se expusieron las ecuaciones de NP y de Weyl-Lanczos. Si queremos ahora utilizar las técnicas de NP para resolver la ec. (63.b) debemos escribir en este formalismo. A diferencia del primer capítulo, donde el método de N-P fue utilizado con coordenadas naturales, se usan ahora las coordenadas de N-U.

La ec. (63.b) se escribe entonces ³ :

$$T_{(\frac{1}{2})(1)} = \delta(\Omega_5 - \bar{\Omega}_2) - \Delta\Omega_4 + D\bar{\Omega}_3 + \bar{\nu}\bar{\Omega}_0 + \bar{\lambda}(2\bar{\Omega}_1 - \Omega_1) + (-\bar{\alpha} + \beta - 3\bar{\pi})\bar{\Omega}_2 + (-\bar{\rho} - \epsilon + 3\bar{\epsilon})\bar{\Omega}_3 + (-\mu - \bar{\gamma} + 3\bar{\tau})\Omega_4 + (\bar{\alpha}_6 - \bar{\beta} - 3\bar{\tau})\Omega_5 + \sigma(2\Omega_6 - \bar{\Omega}_6) + k\bar{\Omega}_7,$$

$$T_{(1)(2)} = -\delta\bar{\Omega}_5 - \bar{\delta}\Omega_5 + D(\Omega_6 + \bar{\Omega}_6) + \bar{\mu}\Omega_1 + \bar{\pi}\Omega_2 - \pi\bar{\Omega}_2 + \lambda\Omega_4 + \bar{\lambda}\bar{\Omega}_4 + (\mu + \bar{\mu})\bar{\Omega}_1 + (\alpha - \bar{\beta} - 2\pi)\Omega_5 + (\bar{\alpha} - \beta - 2\bar{\pi})\bar{\Omega}_5 + (\epsilon + \bar{\epsilon} - 2\rho)\Omega_6 + (\epsilon + \bar{\epsilon} - 2\bar{\rho})\bar{\Omega}_6 + \kappa\Omega_7 + \bar{\kappa}\bar{\Omega}_7,$$

$$T_{(1)(3)} = \delta\Omega_6 + \bar{\delta}\bar{\Omega}_3 - \Delta(\bar{\Omega}_2 + \Omega_5) + \bar{\nu}(\Omega_1 + 2\bar{\Omega}_1) - \bar{\lambda}\bar{\Omega}_2 + (\gamma - \bar{\gamma} - 3\bar{\mu})\bar{\Omega}_2 + (3\bar{\beta} - \alpha - \bar{\tau})\bar{\Omega}_3 + \nu\Omega_4 + (\gamma - \bar{\gamma} - 2\mu)\Omega_5 + (\bar{\alpha} + \beta - 2\bar{\tau})\Omega_6 - \bar{\tau}\bar{\Omega}_6 + \sigma\Omega_7 + \rho\bar{\Omega}_7,$$

$$T_{(1)(4)} = -\delta\bar{\Omega}_1 - \bar{\delta}\Omega_4 + D(\bar{\Omega}_2 + \Omega_5) + \bar{\mu}\Omega_0 - \bar{\pi}\Omega_1 + (\bar{\alpha} + \beta - 2\bar{\pi})\Omega_1 + \\ + \bar{\lambda}\bar{\Omega}_0 + (\bar{\epsilon} - \epsilon - \bar{\rho})\bar{\Omega}_2 + \bar{\kappa}\bar{\Omega}_3 + (3\alpha - \bar{\beta} - \bar{\pi})\Omega_4 + (\bar{\epsilon} - \epsilon - \\ - 3\rho)\Omega_5 - \sigma\bar{\Omega}_5 + \kappa(2\Omega_6 + \bar{\Omega}_6) ,$$

$$T_{(3)(3)} = \delta\Omega_7 + \bar{\delta}\bar{\Omega}_7 - \Delta(\Omega_6 + \bar{\Omega}_6) + \bar{\nu}\Omega_2 + \nu\bar{\Omega}_2 - \bar{\lambda}\Omega_3 - \lambda\bar{\Omega}_3 + 2(\nu\Omega_5 + \\ \bar{\nu}\bar{\Omega}_5) - (\gamma + \bar{\gamma} + 3\mu)\Omega_6 - (\gamma + \bar{\gamma} + 3\bar{\mu})\bar{\Omega}_6 + (-\tau + \bar{\alpha} + 3\beta)\Omega_7 \\ + (-\bar{\tau} + \alpha + 3\bar{\beta})\bar{\Omega}_7 ,$$

$$T_{(4)(4)} = -\delta\bar{\Omega}_0 - \bar{\delta}\Omega_0 + D(\Omega_1 + \bar{\Omega}_1) + (3\alpha + \bar{\beta} - \bar{\pi})\Omega_0 + (3\bar{\alpha} + \beta - \pi)\bar{\Omega}_0 \\ - (\epsilon + \bar{\epsilon} + 3\rho)\Omega_1 - (\bar{\epsilon} + \epsilon + 3\bar{\rho})\bar{\Omega}_1 + 2(k\Omega_2 + \bar{k}\bar{\Omega}_2) - \sigma\Omega_4 - \\ - \bar{\sigma}\bar{\Omega}_4 + \bar{k}\Omega_5 + k\bar{\Omega}_5 . \quad (64)$$

Utilizando la t etra (62.c), tenemos que los coeficien-
tes de espín son:

$$\tau = \kappa = \sigma = \pi = \epsilon = \lambda = 0 , \quad \rho = 2\mu = -\frac{1}{r} \quad (65)$$

$$\gamma = -\frac{\dot{p}}{2p} , \quad \nu = 2ip \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\dot{p}}{p} \right) , \quad \alpha = -\bar{\beta} = -\frac{i}{r} \frac{\partial p}{\partial \eta}$$

Consideremos al tensor de Maxwell acotado en coordena-
das de NU (ver ec. (63.q) y proyectemoslo sobre la t etra
da; tenemos:

$$T_{(a)(b)} = 0 \quad \text{excepto para} \quad (66)$$

$$T_{B(1)(2)} = \frac{q^2}{2r^4}, \quad T_{B(1)(3)} = -\frac{q^2}{r^3} \bar{v}$$

Sustituyendo los resultados de las ecs. (65) y (66) en las ecs. (64), la ec. (63.b) se reduce mucho, siendo una solución la siguiente

$$\Omega_{B^a} = 0, \quad a \neq 6,7, \quad \Omega_{B6} = -\frac{q^2}{4r^2}, \quad \Omega_{B7} = \frac{q^2}{r^2} v \quad (67)$$

Sustituyendo estos valores de Ω_a en la ec. (18.a) se obtiene el superpotencial de Weert (ver ec. (63.d)).

Si queremos hacer lo mismo para T_{ab} nos encontramos con un sistema de ecuaciones que no hemos podido resolver. Cabe aclarar que la expresión en coordenadas de $N\bar{U}$ para K_{abc} no se puede obtener a partir de la correspondiente expresión Minkowskiana debido a la presencia de las integrales ya mencionadas. Sin embargo cuando se resuelva el sistema de ecuaciones tendremos una expresión formalmente local, en coordenadas de NU ; aunque sepamos que la no-localidad del superpotencial va estar contenida en las propias coordenadas, habremos eliminado las integrales. Esto último posiblemente sea muy útil, sobre todo a la hora de hacer integraciones sobre superficies, etc....

6.- CONCLUSIONES Y COMENTARIOS.

Aparentemente el utilizar coordenadas de NU nos puede llevar como hemos dicho anteriormente, a encontrar, con la ayuda del formalismo de NP; el superpotencial de Lanczos para el tensor de esfuerzos radiativos. La pregunta sería si contradice esto al resultado de D. Villarroel citado anteriormente, es decir: La respuesta es no.

Una vez encontrado el superpotencial de Lanczos para todo el tensor de esfuerzos, qué utilidad podríamos encontrarle directamente con la ecuación de Lorentz-Dirac. Todo esto nos llevaría a tener que escribir la ecuación de L-D en coordenadas de NU con el formalismo de N-P. Surje entonces el problema de si se puede escribir la ecuación o no en estas coordenadas con este formalismo. Queda pues abierto el problema.

Por otro lado, una vez encontrado el superpotencial de Lanczos para el tensor de esfuerzos total, podríamos obtener un tensor de Weyl de la misma forma de la ec. y por lo tanto obtener una clasificación Petrov. Algo parecido se hace en el artículo de J.L. López B.⁷⁶ y D. M. Tun. Pero aún no tenemos el superpotencial; sin embargo el problema puede plantearse a la inversa, es decir: a partir del tensor de esfuerzos construir el tensor de Weyl y por lo tanto obtener el tipo Petrov que pueda darnos el superpotencial.

CONCLUSION

Hemos mostrado la poderoso que es el formalismo de NP; CP y las coordenadas de NU. Aunque varios tópicos - han quedado pendientes.

- 1) Debe encontrarse el superpotencial de Lanczos para los tipos D, II y I.
- 2) Debe encontrarse el superpotencial de Lanczos para el tensor de esfuerzos de una carga puntual.
- 3) Todo lo que se ha hecho en espacio plano para el campo de L-W, debe ser generalizado para espacio curvo.
- 4) El dar un significado físico o geométrico al superpotencial de Lanczos, puede traer ciertas consecuencias:
 - 4.a) Una interpretación podría servir para un nuevo método para la búsqueda de la ecuación de movimiento de una partícula cargada.
 - 4.b) Es posible que clasifique porque Synge³⁷ no obtiene la ecuación de L-D, directamente y - tenga que modificar el tensor de esfuerzos - (sin embargo, otra línea de ataque⁷⁷ sería - simplemente considerar los términos debido a la contorsión de las superficies de integración).
- 5) El problema de dos cargas, tan relacionada a veces - con la ecuación de movimiento de una partícula carga

da, puede ser analizada desde el punto de vista de las coordenadas de N-U. (Un trabajo realizado por G. Ares de Parga⁷⁹, O. Chavoya y L.J. López B., obtiene la solución para ciertos casos, sin embargo para otros casos la solución es oscilante y absurda. Un método a mejor orden parece desaparecer los problemas; sin embargo todo está basado en cuadricular el espacio en forma parecida a lo que se hace con las coordenadas de N-U.

Por último quisiera hacer notar que sobre el problema de la ecuación de movimiento de una partícula clásica no se puede dejar aparte las influencias cuánticas^{80,81}. Esta línea de ataque debe ser considerada.

Nota: El Dr. Fritz Rohrlich me hizo notar que el cam a seguir para entender la ecuación de movimiento de una carga puntual, debe ser a partir de la Electrodinámica Cuántica a la manera de E.J. Moniz y D.H. Sharp (Phys. Rev. D10, 2850 (1977), como lo expone él mismo en un artículo aún no publicado: "There is Good Physics in Theory - Reduction". Este comentario lo hizo por la semejanza de las series que aparecen en estos últimos artículos con nuestro artículo referencia [56].

REFERENCIAS

- 1.- E.T. Newman, R. Penrose. J. Math. Phys. 3, 566 (1962).
- 2.- J.A. Torres M. "Formalismo de Newman-Penrose en Relatividad General", Tesis de Maestría E.S.F.M.-IPN, México (1985).
- 3.- Gonzalo Ares de Parga, J. L. López B., G. Ovando, T. Matos. Rev. Mex. Fís. 35, 393 (1989).
- 4.- C. Lanczos. Rev. Mod. Phys. 34, 379 (1962).
- 5.- F. Bampi, G. Caviglia. G.R.G. 15, 375 (1983).
- 6.- G. Ares de Parga, O. Chavoya, J.L. López B. J. Math. Phys. 30, 1294 (1989).
- 7.- G. Ovando. "Clasificación de Petrov del Campo Gravitacional", Tesis de Maestría, ESFM-IPN, México (1985).
- 8.- G. Ares de Parga, O. Chavoya, J.L. López B., G. Ovando. Rev. Mex. Fís. 35, 202 (1989).
- 9.- D. Kramer, H. Stephani, M. Mac Callum, E. Herlt. "Exact Solutions of the Field Equation", Cambridge - U.P., Cambridge, (1980).
- 10.- J.L. Fernández Ch. "R₄ Inmerso en E₆", Tesis Doctoral, Facultad de Ciencias UNAM, México (1986).
- 11.- R. Penrose. Ann. of Phys. 10, 171 (1960).
- 12.- G. Ares de Parga, O. Chavoya, J.L. López B., J. Morales, "Superpotencial de Lanczos para el Tensor de Weyl", Rev. Colomb. Fís. (1989) (por aparecer).

- 13.- G. Ares de Parga, O. Chavoya, J.L. López B., J. Morales, J.L. Fernández Ch. Rev. Mex. Fís. 36, 85 (1990).
- 14.- C. Lanczos. Rev. Mod. Phys. 21, 497 (1949).
- 15.- H.A. Buchdahl, J. Math. Phys. 1, 537 (1960).
- 16.- M. Kihler, H. Goenner. N. Cim. B25, 308 (1975).
- 17.- A.H. Caub. Perspectives in Geometry and Relativity. Ed. B. Hoffmann p. 360, (1966).
- 18.- W.F. Maher, J.D. Zund. N. Cim. A57, 638 (1968).
- 19.- A.H. Caub. Camp. Maths. with Appls. 1, 377 (1975).
- 20.- J.D. Zund. Ann. Math. Pura. Appl. 82, 381 (1969); 104, 239 (1975).
- 21.- E.T. Newmann, H.F. Goenner. "General Relativity and Gravitation, Ed. B. Bertotti, F. de Felice, A. Pascoloni, D. Reidel, p. 208 (1984).
- 22.- A.Z. Petrov. Recent Developments in General Relativity, Pergamon Press (1962).
- 23.- V.R. Kaigorodov, Sov. Phys. Doklady 7, 893 (1963).
- 24.- I. Robinson, A. Crautman. Proc. Roy. Soc. London - A265, 463 (1962).
- 25.- R.G. Mac Lenaglan, and Tariq. J. Math. Phys. 15, 11 - (1975).
- 26.- B.O.J. Tupper. G.R.G. 7 479 (1976).
- 27.- M. Novello, A.L. Velloso, GRG 19, 1251 (1987).

- 28.- M. Novello, L.M.C.S. Rodríguez, Lett. N..Cim. 43, 292 (1985).
- 29.- W.R. Davis, W.K. Atkins, W.M. Baker. N. Cim. B44, 33 (1978).
- 30.- R. Becerril B., "Comportamiento Asintótico del - Campo Gravitacional", Tesis de Maestría, ESFM-IPN (1986).
- 31.- P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. London A176, 148 - (1938).
- 32.- J.D. Jackson, "Classical Electrodynamics", Wiley, New York, Chap. 17 (1975).
- 33.- J.L. Jiménez y I. Campos, Am. J. Phys. 55, 11 - (1987).
- 34.- J.L. Jiménez, Ciencia 40, 257 (1989).
- 35.- I. Campos y J.L. Jiménez, Am. J. Phys. 57, 7 (1989).
- 36.- L. Infeld, P.R. Wallace, Phys. Rev. 57, 797 (1940).
- 37.- J.L. Synge, Ann. Math. Pura Appl. 84, 33 (1970).
- 38.- J.L. López Bonilla, "Electrodinámica de Partículas Clásicas Cargadas", Tesis Doctoral, ESFM-IPN, Cap. 3 (1982).
- 39.- R. Tabensky y D. Villarroel, J. Math. Phys. 16, 7 (1975).
- 40.- A.B. Evans. Found. Phys. 15, 7 (1985).
- 41.- R.J. Cook, Am. J. Phys. 52, 894 (1984).

- 42.- H. Levine, E.J. Moniz, D.H. Sharp, Am. J. Phys. 45,
(1977).
- 43.- E.N. Glass, J. Huschhilt, G. Szamozi, Am. J. Phys.
52, 5 (1984).
- 44.- Tse Chin Mo, C.H. Papas, Phys. Rev. D4, 15 (1971).
- 45.- C.S. Shen, Phys. Rev. D6, 15 (1972).
- 46.- J.A. Wheeler and R.P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 17,
157 (1945).
- 47.- F. Hoyle, J.V. Narlikar, "Action at a distance in
Physics and Cosmology, Freeman, San Francisco, -
(1974).
- 48.- M.A. Rosales y G. Ares de Parga, Act. Mex. Cie. y
Tec. Vol. IV, 13-14, 33-38 (1986).
- 49.- L. Infeld, J. Plebanski, Bull. Acad. Pol. Scie. -
Cl. III-Vol. IV, No. 6, 347 (1956).
- 50.- M. Planck, Ann. D. Phys. 63, 419 (1897).
- 51.- J. Cohn. Am. J. Phys. 35, 10 (1967).
- 52.- R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, Ch. Feynman -
"Lectures on Physics", Vol. 2, Addison-Wesley, -
28-4 (1964).
- 53.- G. Ares de Parga, Rev. Mex. Fís. 35, No. 1, 162 &
(1989).
- 54.- R.J. Cook, Am. J. Phys. 52, 894 (1984).

- 55.- P.C. Peters, Am. J. Phys. 54, 569 (1986) (y la respuesta de R.J. Cook, 569).
- 56.- G. Ares de Parga y M.A. Rosales, Am. J. Phys. 57, 5, May (1989).
- 57.- J.L. Synge, Proc. Roy. Soc. London, A177, 118 (1940).
- 58.- H.J. Bhabha, Proc. Roy. Soc. London, A172, 384 . - (1939).
- 59.- Referencia 32, Cap. 11.
- 60.- Referencia 32, Cap. 12.
- 61.- C. Teitelboim, Phys. Rev. D1, 1572 (1970).
- 62.- E.S. Lowry, Phys. Rev. 117, 616 (1960).
- 63.- Ch.G. Van Weert, Phys. Rev. D9, 339 (1974).
- 64.- C.A. López y D. Villarroel, Phys. Rev. D11, 2724 - (1975).
- 65.- J.L. López B. Rev. Colomb. Fís. 17, 1 (1985).
- 66.- E.G.P. Rawe, Phys. REv. D18, 3639 (1978).
- 67.- C.A. López, Phys. Rev. D17, 2004 (1978).
- 68.- G. Ares de Parga, J.L. López B., G. Ovando y T. Matos Ch., Rev. Mex. Fís. 36, 2, (1990).
- 69.- E.T. Newman, T.W.J. Unti, J. Math. Phys. 4, 1467, - (1963).
- 70.- E.T. Newman, R. Posadas, Phys. Rev. Lett. 22, 1196 (1969).

- 71.- E.T. Newman, y R. Posadas, Phys. Rev. Lett. 187, 1784 (1969).
- 72.- E.T. Newman, R. Posadas, J. Math. Phys. 12, 2319 - (1971).
- 73.- R.W. Lind, J. Messmer y E.T. Newman, J. Math. Phys. 13, 1884 (1972).
- 74.- E.T. Newman, GRG 1, 401 (1971).
- 75.- G. Ares de Parga, O. Chavoya, J.L. López B., E. Luna, J. Morales. Rev. Mex. Fís. 36, 2, 607 (1990).
- 76.- J.L. López B. y D.M. Tun, Boletín ESFM-IPN, Vol. - III 2, 57, (1983).
- 77.- G. Ares de Parga y M.A. Rosales, Eur. J. Phys. 10, 71 (1989).
- 78.- G.M. Andersen y H. Van Boeyer. Annals of Physics, - 60, 67 (1970).
- 79.- G. Ares de Parga, O. Chavoya y J.L. López B., "A Numerical Approach to the Two Body Problem in Classical Relativistic Electrodynamics". (por enviar se a publicación, ESFM-IPN, UAM-A).
- 80.- G. Ares de Parga, M.A. Rosales y C. García M. Act. Mex. Cienc Tec. Vol. III, 11-12, 15 (1985).
- 81.- A.O. Barut (Ed). "Electrodynamics and Classical - Theory of Fields and Particles", (Dover) D.H. Sharp p. 127 (1980).
- 82.- J.L. López Bonilla, Rep. Inv. 66 DCBI UAM-A, México (1982).

- 83.- C. Lanczos, Ann. Of Math. 39, 842 (1938).
- 84.- M. García V., "Espintensor de Lanczos", Tesis de -
Licenciatura, ESFM (1985).
- 85.- J.L. Fernández, J.L. López Bonilla, G. Ovando, M.A.
Rosales, Rep. Inv. Nos. 159 y 160 DCBI UAM-A, Méxi-
co (1986).