. . .

Dos Álgebras de Operadores Relacionadas con la Dinámica del Oscilador Armónico Cuántico.

TESIS QUE PRESENTA EL

Mat. Oswaldo González Gaxiola.

PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE

Maestro en Ciencias (Matemáticas).

ABRIL DE 2001.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA
METROPOLITANA-IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA.

Director de tesis

Dr. Jesús Chargoy Corona.

JChargoy

Expreso mi agradecimiento al **Dr. Roberto Quezada Batalla**, por su motivación, interés y ayuda para la realización del presente trabajo.

Deseo hacer patente mi agradecimiento al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT), por su apoyo a través del proyecto de investigación 28520E y la beca 82859-127960 para la realización del presente trabajo.

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Motivados por ciertos aspectos del formalismo de la dinámica cuántica y la teoría de representaciones de grupos unitarios en los años 30's comenzó el desarrollo de la teoría de álgebras de operadores sobre espacios de Hilbert con una serie de trabajos sobre el tema de John Von Neumann y F. J. Murray. En el presente trabajo se describen dos álgebras de operadores relacionadas con la dinámica del oscilador armónico cuántico.
Las ideas principales se encuentran en las lecciones 3 y 4 de la monografía de William Arveson sobre una serie de conferencias dictadas en Texas Tech University: "Ten Lectures on Operator Algebras" AMS (Regional Conference Series on Mathematics, No. 55; 1984). Sin embargo en esta monografía no se dan demostraciones detalladas ni es autocontenida, por lo cual hemos desarrollado estas ideas proporcionando pruebas detalladas y completándola, para obtener una introducción autocontenida a dos álgebras de operadores relacionadas con la dinámica del oscilador armónico cuántico.
Nuestro interés en desarrollar estas ideas surgió por la aplicación de una de estas álgebras de operadores para dar una versión de la fórmula de Feynman-Kac para el oscilador armónico, en el contexto de la teoría de álgebras de operadores sobre un espacio de Hilbert; llama la atención que esta clase de álgebras han sido poco estudiadas desde el punto de vista matemático, no obstante su estrecha relación con la estructura algebraica de la fórmula de Feynman-Kac.
Los aspectos más relevantes de nuestro trabajo se encuentran en:
(a) Una reformulación del principio de Ehrenfest en términos de $*$-automorfismos utilizando formas sesquilineales no necesariamente acotadas pero densamente definidas.
(b) Una deducción de la ecuación de Schrödinger partiendo del principio de Ehrenfest reformulado en términos de $*$-automorfismos. Para esto fué necesario demostrar que todo grupo de $*$-automorfismos es implementado vía un grupo unitario de operadores, lo cual hicimos de una manera elemental siguiendo un trabajo de V. Bargmann [Barg.].
(c) Una aplicación de la versión del teorema espectral en términos de álgebras de operadores para relacionar el semigrupo de contracciones generado por el Hamiltoniano H del oscilador armónico con el grupo unitario generado por iH.

(d) Demostramos la propiedad de preservar positividad del grupo del oscilador armónico vía una deducción del núcleo de Mehler siguiendo a Barry Simon [Ba.]. Y damos una una demostración del Teorema 4.1.2 que W. Arveson sólo enuncia, siguiendo también a Barry Simon [Ba.].

El trabajo principia con una breve descripción de la dinámica de un sistema cuántico unidimensional, en el segundo capítulo reformulamos el principio de Ehrenfest en términos de $*$-automorfismos del $*$-álgebra de todos los operadores acotados en el espacio de Hilbert $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, y demostramos que es aceptable como principio básico de la dinámica de un sistema cuántico, deduciendo a partir de él la ecuación de Schrödinger para el mismo sistema.

En el tercer capítulo describimos el oscilador armónico cuántico y un álgebra conmutativa estrechamente relacionada con su dinámica, obteniendo de esta manera una forma alternativa de pasar al grupo unitario del oscilador armónico a partir del semigrupo de contracciones de este mismo oscilador; la manera usual de relacionar estos dos objetos es el llamado método de continuación analítica.

En el cuarto capítulo introducimos el proceso del oscilador armónico que en probabilidad se conoce con el nombre del proceso de Ornstein-Uhlenbeck y demostramos que la esperanza matemática de ciertas funcionales de este proceso coincide con el valor esperado de ciertas observables en el estado fundamental *"vacuum expectation"*. Además se consideran perturbaciones del Hamiltoniano del oscilador armónico y se obtiene una versión de la fórmula de Feynman-Kac como una dilatación generada por una perturbación de un grupo unitario de traslaciones por un cociclo.

La propiedad de preservar positividad del semigrupo de contracciones del oscilador armónico se demuestra en un apéndice.

CAPÍTULO 1

LA DINÁMICA DE UN SISTEMA CUÁNTICO.

INTRODUCCIÓN.

La *Mecánica Cuántica* como herramienta en la predicción del espectro de átomos y moléculas se considera como uno de los mayores triunfos de la Física del siglo XX. En este capítulo hacemos una breve introducción a la *Mecánica Cuántica* estableciendo una analogía con la *Mecánica Clásica*. Además, estableceremos la dinámica de un sistema cuántico siguiendo tanto el esquema de *Heisenberg* como el de *Schrödinger*; en el primero, la dinámica se basa en la variación temporal de las obsevables; mientras que en el segundo, la dinámica está basada en la variación temporal de los vectores de estado.

1.1 ECUACIONES DE LA DINÁMICA CUÁNTICA.

En Mecánica Clásica los objetos básicos son el **espacio fase**, un espacio topológico, **las observables**, funciones real-valuadas continuas sobre el espacio fase y las simetrías, **un grupo de homeomorfismos** del espacio fase. En *Mecánica Cuántica* siguiendo la representación de Heisenberg, el espacio fase es reemplazado por un **espacio de Hilbert** separable $\mathcal{H}$, las obsevables son **operadores autoadjuntos** no necesariamente acotados sobre $\mathcal{H}$ y las simetrías son **automorfismos** de la estructura de $\mathbf{C}^*$- álgebra[1] del espacio de operadores lineales sobre $\mathcal{H}$.
Los operadores autoadjuntos se pueden considerar de tres maneras equivalentes:

1. Operadores definidos sobre un subespacio denso de $\mathcal{H}$ y autoadjuntos.
2. Medidas espectrales definidas sobre $\mathbf{R}$.
3. Grupos unitarios (grupos de operadores unitarios) 1-paramétricos fuertemente continuos.

La equivalencia entre 1 y 2 se obtiene de la versión de Von Neumann del teorema espectral y la equivalencia entre 1 y 3 se obtiene del Teorema de Stone.
Las observables en la dinámica física (cuántica) aparecen frecuentemente como operadores diferenciales formales, los cuales son autoadjuntos sobre algún subespacio de $\mathcal{H}$. En lo que sigue llamaremos estado, a un vector unitario en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$.

[1]Un $*$-álgebra es un álgebra A sobre $\mathbf{C}$ con una involución, es decir, una aplicación $a \mapsto a^*$ en A tal que para $a, b \in A$ y $\lambda \in \mathbf{C}$ (i) $a^{**} = a$, (ii) $(a+b)^* = a^* + b^*$, (iii) $(\lambda a)^* = \lambda^* a^*$, y (iv) $(ab)^* = b^* a^*$. Un $*$-álgebra cuya involución satisface (v) $\|a^* a\| = \|a\|^2$, para cada $a \in A$ es llamada $\mathbf{C}^*$-álgebra.

En la representación de Schrödinger la evolución temporal de un sistema cuántico queda especificada diciendo cómo cambian los estados al transcurrir el tiempo. Esta es la contraparte cuántica de las ecuaciones de movimiento clásicas.
Un postulado básico de la teoría cuántica es el siguiente; que establece una relación entre la evolución temporal de un sistema cuántico con su energía total.

POSTULADO 1.1.1

Sea $\psi(t)$ un estado de un sistema cuántico al tiempo t. Entonces, cuando el sistema no sufre alteraciones, $\psi(t)$ satisface la ecuación

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{d}{dt}\psi(t) &= H\psi(t) \qquad (1) \\ con \quad \psi(0) &= \psi_0, \qquad (2) \end{aligned}$$

donde $\hbar$ es la constante de Plank normalizada,$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ y H es el operador Hamiltoniano que describe la energía total del sistema.

El problema de valor inicial (1) y (2) del postulado anterior se llama ecuación de Schrödinger. El operador H es llamado Hamiltoniano del sistema y es la contraparte cuántica de la energía total del correspondiente sistema clásico.
De aquí en adelante el desarrollo de los principios básicos se hará considerando un sistema cuántico unidimensional, en el cual el Hamiltoniano está dado por

$$H = \frac{1}{2}P^2 + V(Q) \qquad (3)$$

donde V es un potencial, es decir,

$$V(x) = \int_0^x F(t)\mathrm{d}t$$

con F localmente integrable sobre R en el sentido de Riemann y P, Q son los operadores lineales sobre el espacio $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ que definimos más adelante.
De aquí en adelante el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ será $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, P y Q son los operadores de posición y momento respectivamente en $\mathcal{L}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$ definidos por:

Q:=multiplicación por x;

con dominio:

$$\mathbf{D}_Q = \{\psi \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}) : x\psi(x) \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})\} \tag{4}$$

P:$=-i\frac{d}{dx}$;

con dominio:

$$\mathbf{D}_P = \{\psi \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}) : \psi \,\text{es absolutamente continua en}\, \mathbf{R}\, y\, \psi' \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})\} \tag{5}$$

P y Q no son operadores muy singulares, pues es fácil ver que $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R})$ es subespacio de $\mathbf{D}_Q$ y $\mathcal{S}(\mathbf{R})$[2] es subespacio de $\mathbf{D}_P$, ambos subespacios densos de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$.
Además los operadores P y Q satisfacen[3]

$$[P,P] = [Q,Q] = 0, \qquad [P,Q] = -i\hbar\mathbf{I}, \tag{6}$$

donde $[.,.]$ es el conmutador que actúa como $[A,B] = AB - BA$, para elementos en su dominio: $\mathbf{D}_{[A,B]} = (\mathbf{D}_{AB}) \cap (\mathbf{D}_{BA})$. Las ecuaciones (6) se llaman ecuaciones (o relaciones) canónicas de conmutación. Además para $\psi \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R})$, pues se tiene que $\mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R})$ es un subespacio denso, tenemos

$$[H,P]\psi(x) = [-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(Q), -i\frac{d}{dx}]\psi(x)$$

[2] $\mathcal{S}(\mathbf{R}) = \{f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}) / \forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}, \quad \sup_x |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty\}$
[3] De aquí en adelante para simplificar tomaremos $\hbar = 1$.

$$= (-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(Q))(-i\frac{d}{dx})\psi(x) - (-i\frac{d}{dx})(-\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V(Q))\psi(x)$$
$$= iV'(x)\psi(x) = i(F)\psi(x).$$

Es decir $[H, P] = i(F)$, de igual manera $[H, Q] = -iP$.

El conmutador es el análogo al corchete de Poisson definidos en Mecánica Clásica.[4] Este "nuevo corchete" nos proporciona una nueva estructura de álgebra de Lie no conmutativa sobre las observables de un sistema cuántico.

Otro concepto básico de la *Mecánica Cuántica* introducido por Max Born en 1926 es el valor esperado de una observable **A** en un estado ψ, el cual está dado por

$$\langle \psi, \mathbf{A}\psi \rangle.$$

El siguiente comentario nos permitirá expresar de una manera cuantitativa cómo evolucionan las observables en un sistema cuántico.

Sea **A** una observable de un sistema cuántico que está descrito por el operador autoadjunto H y ψ_t la solución del problema de valor inicial del **Postulado 1.1.1**. Entonces el valor esperado de **A**, en el estado ψ_t, cambia de acuerdo con

$$\frac{d}{dt}\langle \psi_t, \mathbf{A}\psi_t \rangle = \langle \psi_t, [H, \mathbf{A}]\psi_t \rangle,$$

para $\psi_t \in \mathbf{D}_{HA} \cap \mathbf{D}_{AH}$.

Aplicando lo anterior a las observables P y Q obtenemos.

[4] Véase sección 8.4 de [H. G.]

PRINCIPIO 1.1.2 (Principio de Ehrenfest)

La dinámica de los observables P y Q de un sistema cuántico con un Hamiltoniano H, está descrita por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\langle\psi_t, P\psi_t\rangle &= \langle\psi_t, i[H,P]\psi_t\rangle \\ &= -\langle\psi_t, F\psi_t\rangle \qquad (7) \\ \frac{d}{dt}\langle\psi_t, Q\psi_t\rangle &= \langle\psi_t, i[H,Q]\psi_t\rangle \\ &= \langle\psi_t, P\psi_t\rangle \qquad (8) \end{aligned}$$

con $\psi(0) = \psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

CAPÍTULO 2

EL PRINCIPIO DE EHRENFEST.

INTRODUCCIÓN.

En este capítulo, tomando el *Principio de Ehrenfest* 1.1.2 como fundamento básico de la dinámica de observables; y usando resultados básicos de la teoría de álgebras de operadores (C^*-álgebras), obtendremos la ecuación de Schrödinger para cualquier sistema cuántico unidimensional descrito por un Hamiltoniano H.
Primero mostraremos que el *Principio de Ehrenfest* se puede formular en términos de $*$-automorfismos[5], y después veremos que efectivamente el *Principio de Ehrenfest* es aceptable como principio básico de la dinámica cuántica.

[5]Sean A y B dos $\mathbf{C}^*$-álgebras. Un $*$-morfismo de A en B es una función ψ de A en B tal que $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$, $\psi(\lambda x) = \lambda\psi(x)$, $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ y $\psi(x^*) = \psi(x)^*$ para $x, y \in A$, $\lambda \in \mathbf{C}$. Un $*$-automorfismo es un $*$-morfismo de A en sí misma.

2.1 EL PRINCIPIO DE EHRENFEST EN TÉRMINOS DE $*$-AUTOMORFISMOS.

Sea $\alpha_t(T) = U_t^* T U_t, \quad T \in \mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$; donde $\{U_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ es el grupo unitario cuyo generador infinitesimal es iH. Probaremos que $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ es un grupo de $*$-automorfismos de $\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$.
En efecto,

1. α_t es $*$-automorfismo para cada $t \in \mathbf{R}$:

   - Sean T y G operadores cualesquiera en $\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$, entonces

   $$\alpha_t(TG) = U_t^* TGU_t = U_t^* TU_tU_t^* GU_t$$

   $$= (U_t^* TU_t)(U_t^* GU_t) = \alpha_t(T)\alpha_t(G).$$

   - Sea $T \in \mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$ cualquier operador, entonces

   $$\alpha_t(T^*) = U_t^* T^* U_t = (U_t^* TU_t)^* = \alpha_t(T)^* \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

   - Supongamos que T y G son operadores en $\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$ tales que

   $$\alpha_t(T) = \alpha_t(G) = F. \qquad F \in \mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$$

   es decir,

   $$U_t^* TU_t = U_t^* GU_t \quad \text{lo cual implica} \quad U_tU_t^* TU_t = U_tU_t^* GU_t$$

   es decir,

   $$TU_t = GU_t \quad \text{lo cual implica} \quad TU_tU_t^* = GU_tU_t^*, \quad \text{de donde}$$

   $$T = G.$$

   Por lo tanto α_t es inyectivo para cada $t \in \mathbf{R}$. Así α_t es $*$-automorfismo inyectivo para cada $t \in \mathbf{R}$.

2. $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ forma grupo:
   En efecto, sea $T \in \mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$ un operador cualquiera, entonces

   - $\alpha_0(T) = U_0^* TU_0 = T$; es decir, α_0 es la identidad.

- Para todo $T \in \mathbf{R}$ y para t y s en $\mathbf{R}$ se tiene

$$\alpha_t \alpha_s(T) = \alpha_t(U_s^* T U_s) = U_t^*(U_s^* T U_s) U_t = U_{t+s}^* T U_{t+s} = \alpha_{t+s}(T).$$

por lo tanto $\{\alpha_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ es un grupo de $*$-automorfismos.

♣

Las ecuaciones (7) y (8) se pueden escribir en la forma:

$$\frac{d}{dt}\langle \psi_0, U_t^* P U_t \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, i(U_t^*[H,P]U_t)\psi_0 \rangle \tag{9}$$
$$\frac{d}{dt}\langle \psi_0, U_t^* Q U_t \psi_0 \rangle = \langle \psi_0, i(U_t^*[H,Q]U_t)\psi_0 \rangle \tag{10}$$

donde $\psi_t = U_t \psi_0$ es solución del problema de valor inicial dado por las ecuaciones (1) y (2) con $\psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Ahora sean $\alpha_t(P)$ y $\alpha_t(Q)$ las formas sesquilineales definidas para $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ por

$$\alpha_t(P)[\varphi, \psi] = \langle \varphi, U_t^* P U_t \psi \rangle, \text{ y}$$
$$\alpha_t(Q)[\varphi, \psi] = \langle \varphi, U_t^* Q U_t \psi \rangle.$$

Es decir, $\alpha_t(P)$ y $\alpha_t(Q)$ son las formas sesquilineales asociadas a los operadores $U_t^* P U_t$, $U_t^* Q U_t$ respectivamente.

La derivada de una forma sesquilineal es otra forma sesquilineal, tenemos entonces para $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\alpha_t(P)[\varphi_0, \varphi_0] = \frac{d}{dt}\langle \varphi_0, U_t^* P U_t \varphi_0 \rangle &= \langle \varphi_0, i(U_t^*[H,P]U_t)\varphi_0 \rangle \\
&= \langle \varphi_0, -i(U_t^* F(Q) U_t)\varphi \rangle, \\
\frac{d}{dt}\alpha_t(Q)[\varphi_0, \varphi_0] = \frac{d}{dt}\langle \varphi_0, U_t^* Q U_t \varphi_0 \rangle &= \langle \varphi_0, i(U_t^*[H,Q]U_t)\varphi_0 \rangle \\
&= \langle \varphi_0, i(U_t^* P U_t)\varphi_0 \rangle.
\end{aligned}$$

Luego, resumiendo, las ecuaciones anteriores son:

$$\frac{d}{dt}\alpha_t(P)[\varphi_0,\varphi_0] = -i\alpha_t(F(Q))[\varphi_0,\varphi_0],$$

$$\frac{d}{dt}\alpha_t(Q)[\varphi_0,\varphi_0] = i\alpha_t(P)[\varphi_0,\varphi_0].$$

$t \in \mathbf{R}$, $\varphi_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Las igualdades anteriores se tienen como igualdades de formas sesquilineales densamente definidas en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$.

Entonces una manera equivalente de enunciar el *Principio de Ehrenfest* es la siguiente:

La evolución de las observables de un sistema cuántico con Hamiltoniano H está dada por un grupo de $*$-automorfismos $\{\alpha_t : t \in \mathbf{R}\}$ de la $*$-álgebra $\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$, que satisface:

$$\frac{d}{dt}\alpha_t(Q) = i\alpha_t(P) \tag{11}$$

$$\frac{d}{dt}\alpha_t(P) = -i\alpha_t(F(Q)), \tag{12}$$

en el sentido antes descrito. Ahora, tomando esta última forma del *Principio de Ehrenfest* como la base de nuestra dinámica de observables, demostraremos que $\{\alpha_t : t \in \mathbf{R}\}$ es implementado por un operador autoadjunto H, de la siguiente manera:

$$\alpha_t(A) = e^{itH}Ae^{-itH}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R})).$$

El grupo unitario e^{itH} se puede usar para mover los estados de manera que $\psi_t = e^{itH}\psi_0$, es la solución de la ecuación de Schrödinger.
Esto demostrará que el *principio de Ehrenfest* es aceptable como principio básico de la dinámica cuántica.

2.2 MULTIPLICADORES Y EXPONENTES

En la presente sección $\mathcal{N}_0$ será alguna vecindad del cero en $\mathbf{R}$ y U_r un operador unitario para cada $r \in \mathbf{R}$. Además demostraremos que se cumple $U_t U_r = c(s,t)U_{t+r}$, para cada par de números reales s y t, y $c(s,t)$ un número complejo de módulo uno.

DEFINICIÓN 2.2.1

Un *multiplicador local*, es un par $(c, \mathcal{N}_0)$, donde $c : \mathcal{N}_0 \times \mathcal{N}_0 \longrightarrow \mathbf{C}$ es una función continua en cada variable tal que para r, s y $t \in \mathcal{N}_0$ para los cuales $r+s$, $s+t$ y $r+(s+t)$ pertenecen también a $\mathcal{N}_0$ se cumple la igualdad:

$$c(r,s)c(r+s,t) = c(s,t)c(r,s+t). \tag{13}$$

El siguiente teorema será muy útil para nuestros propósitos:

TEOREMA 2.2.2

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, cada $*$-automorfismo α de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ es implementado por un operador unitario U, es decir, $\alpha(T) = U^*TU$, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ para algún operador unitario U sobre $\mathcal{H}$.

Demostración: Véase página 20 de [Arv. 2].

Usando el **Teorema 2.2.2** cada $t \in \mathbf{R}$, el $*$-automorfismo α_t es implementado por un operador unitario U_t, *i.e.*, para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$ tenemos:

$$\alpha_t(A) = U_t A U_t^*.$$

No es evidente que la familia $(U_t)_{t\in\mathbf{R}}$ es un grupo aún cuando α_t lo es. Para demostrar esto necesitaremos varios resultados auxiliares.

PROPOSICIÓN 2.2.3

Si $\{\alpha_t : t \in \mathbf{R}\}$ *es un grupo, entonces* $U_t U_s = c(s,t)U_{s+t}$, $\forall s,t \in \mathbf{R}$. *Donde* $c(.,.)$ *es una función que cumple la condición dada por la ecuación (13).*

Demostración: Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$, la condición $\alpha_s\alpha_t = \alpha_{s+t}$ implica que para $s,t \in \mathbf{R}$,

$$U_s U_t A U_t^* U_s^* = U_{s+t} A U_{s+t}^* \tag{14}$$

Ahora sean $U_1 = U_s U_t$, $\quad U_2 = U_{s+t}$, por lo tanto $U_1^* = U_t^* U_s^*$ *y* $U_2^* = U_{s+t}^*$, por la igualdad (14) se tiene

$$U_1 A U_1^* = U_2 A U_2^* \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R})) \tag{15}$$

luego para $A = U_1$ usando la igualdad (15) obtenemos

$$U_1 U_1 U_1^* U_2 = U_2 U_1 U_2^* U_2 \quad \text{implica que} \quad U_1 U_2 = U_2 U_1.$$

Ahora para $A = U_2$ usando de nuevo la igualdad (15) se obtiene

$$U_1^* U_1 U_2 U_1^* = U_1^* U_2 U_2 U_2^* \quad \text{entonces} \quad U_2 U_1^* = U_1^* U_2 \quad \text{por tanto,} \quad U_1 U_2^* = U_2^* U_1.$$

Nuevamente usando (15) y estas identidades,

$$U_1 U_2^* A = U_2^* U_1 A = U_2^* U_1 A U_1^* U_1$$

$$= U_2^* U_2 A U_2^* U_1 = A U_2^* U_1$$

Entonces $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$, $U_1 U_2^* A = A U_1 U_2^*$.

Es decir, hemos encontrado que

$$U_s U_t U_{s+t}^* A = A U_s U_t U_{s+t}^* \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$$

entonces $U_s U_t U_{s+t}^* = c(s,t)I$ con c número complejo tal que $|c(s,t)| = 1$, $\forall s,t \in \mathbf{R}$; o bien $U_s U_t = c(s,t)U_{s+t}$, $\quad \forall s,t \in \mathbf{R}$.
Que c satisface la ecuación (13) se tiene porque si r, s y t pertenecen a $\mathcal{N}_0$

y son tales que $r+s$, $s+t$ y $r+(s+t)$ pertenecen también a $\mathcal{N}_0$ por la propiedad asociativa

$$(U_rU_s)U_t = U_r(U_sU_t)$$

se tiene, usando el lado izquierdo de la última igualdad

$$c(r,s)U_{r+s}U_t = c(r,s)c(r+s,t)U_{r+s+t}$$

y, usando el lado derecho,

$$U_rc(s,t)U_{s+t} = c(s,t)c(r,s+t)U_{r+s+t}$$

por lo tanto

$$c(r,s)c(r+s,t) = c(s,t)c(r,s+t).$$

♣

Bajo la suposición de que la función $t \longmapsto U_t$ es debilmente medible (continua), se obtiene que el multiplicador $c(.,.)$ es medible (continuo) en cada variable. En efecto, Sea $u \in \mathcal{H}$ y s fija en $\mathbf{R}$, por la **Proposición 2.2.3** tenemos

$$\langle u, U_rU_su\rangle = c(r,s)\langle u, U_{r+s}u\rangle.$$

Si en la igualdad anterior denotamos por $f_{s,u}$ y $g_{s,u}$ a las funciones complejo-valuadas

$$f_{s,u}(r) = \langle u, U_{r+s}u\rangle \qquad g_{s,u}(r) = \langle u, U_rU_su\rangle$$

tenemos que $f_{s,u}$ y $g_{s,u}$ son medibles (continuas) y como $|c(r,s)| = 1$, se tiene que $|f_{s,u}(r)| = |g_{s,u}(r)|$; luego en representación polar,

$$f_{s,u} = \rho_{s,u}(r)e^{i\theta_{s,u}(r)} \qquad g_{s,u}(r) = \rho_{s,u}(r)e^{i\varphi_{s,u}(r)}$$

y de ésto se tiene que

$$c(r,s) = \frac{g_{s,u}(r)}{f_{s,u}(r)} = e^{i(\varphi_{s,u}(r)-\theta_{s,u}(r))}$$

así $c(r,s)$ es medible (continuo) en la variable r; de igual manera se puede ver que c es medible (continuo) en la variable s.

♣

En este trabajo supondremos que la función $t \mapsto U_t$ es debilmente continua y, por lo tanto, $c(r,s)$ es continua en cada variable, y así c es un multiplicador. Más adelante se demuestra, siguiendo a Bargmann [Barg. 1], que cada *multiplicador* sobre $\mathbf{R}$ es necesariamente de la forma

$$c(s,t) = \frac{d(s+t)}{d(s)d(t)},$$

donde $d : \mathbf{R} \longrightarrow \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$ es una función continua.

Si $d : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{C}$ es una función continua tal que $|d(r)| = 1, \quad \forall r \in \mathcal{N}_0$, entonces $U'_r = d(r)U_r$ es también un operador unitario para cada $r \in \mathcal{N}_0$. Ahora, como $U'_r = d(r)U_r$ y aplicando el resultado de la **Proposición 2.2.3** a U'_r obtenemos $c'(r,s)$ tal que, $U'_rU'_s = c'(r,s)U'_{r+s}$, entonces se tiene que $d(r)U_rd(s)U_r = c'(r,s)d(r+s)U_{r+s}$ o bien

$$c(r,s)U_{r+s} = c'(r,s)\frac{d(r+s)}{d(r)d(s)}U_{r+s} \quad \text{de donde se sigue la igualdad:}$$

$$c'(r,s) = c(r,s)\frac{d(r)d(s)}{d(r+s)} \quad (|d(r)| = 1). \tag{16}$$

Esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.2.4

Dos multiplicadores locales $(c, \mathcal{N}_0)$ y $(c', \mathcal{N}'_0)$ son equivalentes si cumplen una relación como la de la igualdad (16) sobre alguna vecindad de cero $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0 \cap \mathcal{N}'_0$, con $d : \mathcal{N}_1 \longrightarrow \mathbf{C}$ función continua de módulo uno.

Para nuestros propósitos será más útil trabajar con exponentes en lugar de multiplicadores, esto será posible vía la siguiente definición:

DEFINICIÓN 2.2.5

Un *exponente local* es un par $(\xi, \mathcal{N}_0)$, donde ξ es una función continua en cada variable $\xi : \mathcal{N}_0 \times \mathcal{N}_0 \longrightarrow \mathbf{R}$ que satisface

$$\xi(0,0) = 0, \tag{17}$$

$$\xi(r,s) + \xi(r+s,t) = \xi(s,t) + \xi(r,s+t), \quad r+s \in \mathcal{N}_0, \quad s+t \in \mathcal{N}_0. \tag{18}$$

Si $\mathcal{N}_0$ es todo $\mathbf{R}$, ξ será llamado exponente sobre $\mathbf{R}$.

Si en (18) hacemos $s = t = 0$ y luego $r = s = 0$ obtenemos

$$\xi(r,0) = 0, \quad \xi(0,t) = 0, \tag{19}$$

y si en (18) hacemos $s = -r$, $t = r$ y aplicamos (19) obtenemos:

$$\xi(r,-r) = \xi(-r,r), \quad \text{para}\, r \in \mathcal{N}_0 \quad y \quad -r \in \mathcal{N}_0. \tag{20}$$

DEFINICIÓN 2.2.6

Dos exponentes locales $(\xi, \mathcal{N}_0)$ $(\xi', \mathcal{N}_0')$ son *equivalentes* si satisfacen una relación de la forma

$$\xi'(r,s) = \xi(r,s) + \Delta_{r,s}[h], \quad \Delta_{r,s}[h] = h(r) + h(s) - h(r+s) \tag{21}$$

sobre $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}_0 \cap \mathcal{N}_0'$, donde $h : \mathcal{N}_1 \longrightarrow \mathbf{R}$ es una función continua y como $\xi(0,0) = 0$, $\xi(0,0) = 0$ entonces $h(0) = 0$.

Cada exponente $(\xi, \mathcal{N}_0)$ define de manera única un factor $(c, \mathcal{N}_0)$, $c(r,s) = e^{i\xi(r,s)}$ y dos exponentes equivalentes definen dos factores equivalentes (cf. (16) y (21)). Inversamente, si se tiene un multiplicador $(c, \mathcal{N})$ y la vecindad $\mathcal{N}$ donde se define es tomada de tal forma que $|c-1|$ es suficientemente pequeño, entonces $\xi(r,s) = -i \log c(r,s)$ es un exponente en $\mathcal{N}$.
Además dos multiplicadores c y c' equivalentes dan lugar a dos exponentes

equivalentes; la relación (21) se tiene en una vecindad donde también $|d(r)-1|$ sea suficientemente pequeño, con $h(r) = -i \log d(r)$.

A continuación mostraremos que cada exponente es equivalente a uno *diferenciable*, donde el término *diferenciable*, significa una función ξ que en alguna vecindad $\mathcal{N}' \subset \mathbf{R}$, tiene derivadas parciales continuas en todos los ordenes con respecto a r y s.

LEMA 2.2.7

Cada exponente local que sea una función localmente integrable sobre $\mathbf{R}$ *es equivalente a un exponente diferenciable.*

Demostración: Sea $(\xi, \mathcal{N}_0)$ un exponente el cual es integrable en la vecindad $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}_0 \subset \mathbf{R}$, escojamos dos vecindades $\mathcal{N}_1$ y $\mathcal{N}_2$ tales que $\mathcal{N}_1 \subset \mathcal{N}$ y $\mathcal{N}_2 \subset \mathcal{N}_1$. Introduzcamos ahora una función real de variable real $\nu(r)$ sobre todo $\mathbf{R}$ con las siguientes propiedades:

1. ν es una función $\mathbf{C}^\infty(\mathbf{R})$.
2. ν se anula fuera de una bola abierta de radio r, $\mathcal{N}_3$, contenida en $\mathcal{N}_2$ donde $\mathcal{N}_2$ es una bola en $\mathbf{R}$ de radio μ.
3. $\int_{\mathbf{R}} \nu(r) \mathrm{d}r = 1$ (la integral es solamente sobre $\mathcal{N}_3$.)

Una posible elección es $\nu(r) = \gamma \phi_\mu(r)$, donde

$$\phi_\mu(r) = \begin{cases} e^{[-(\mu^2 - |r|^2)^{-1}]}, & r \in \mathcal{N}_3 \\ 0, & r \notin \mathcal{N}_3 \end{cases}$$

la constante γ se elige de manera que (3) se cumpla. Notemos además que $\nu \in \mathbf{C}_0^\infty(\mathbf{R})$.
Difinamos ahora

$$\begin{cases} \xi'(r,s) = \xi(r,s) + \Delta_{r,s}[h], & r, s \in \mathcal{N}_1 \\ h(r) = -\int_{\mathbf{R}} \xi(r,t)\nu(t)\mathrm{d}t, & r \in \mathcal{N}_1 \end{cases} \tag{22}$$

$$\begin{cases} \xi''(r,s) = \xi'(r,s) + \Delta_{r,s}[h'], & r,s \in \mathcal{N}_2 \\ h'(r) = -\int_R \xi'(u,r)\nu(u)\mathrm{d}u, & r \in \mathcal{N}_2 \end{cases} \tag{23}$$

Podemos ver fácilmente que $h(0) = h'(0) = 0$.
De (22) y la definición de ν tenemos, para $r, s \in \mathcal{N}_1$, usando (21)

$$\xi'(r,s) = \int_{\mathbf{R}} \{\xi(r,s) - \xi(r,t) - \xi(s,t) + \xi(r+s,t)\}\nu(t)\mathrm{d}t$$

siempre que $r + s \in \mathcal{N}_1$, $s + t \in \mathcal{N}_1$. Podemos usar la igualdad (18) y escribir la última ecuación como

$$\xi'(r,s) = \int_{\mathbf{R}} \{\xi(r,s+t) - \xi(r,t)\}\nu(t)\mathrm{d}t$$

Ahora,

$$\int_{\mathbf{R}} \xi(r,s+t)\nu(t)\mathrm{d}t = \int_{\mathbf{R}} \xi(r,t)\nu(t-s)\mathrm{d}t.$$

Por tanto

$$\xi'(r,s) = \int_{\mathbf{R}} \xi(r,t)\{\nu(t-s) - \nu(t)\}\mathrm{d}t, \quad r,s \in \mathcal{N}_1. \tag{24}$$

Por un cálculo análogo

$$\xi''(r,s) = \int_{\mathbf{R}} \xi'(u,s)\{\nu(u-r) - \nu(u)\}\mathrm{d}u \quad r,s \in \mathcal{N}_2. \tag{25}$$

Insertando (24) en (25), finalmente obtenemos

$$\xi''(r,s) = \xi(r,s) + \Delta_{r,s}[h''], \quad r,s \in \mathcal{N}_2$$

$$h''(r) = h(r) + h'(r), \quad r \in \mathcal{N}_2$$

$$\xi''(r,s) = \int_{\mathbf{R}} \int_{\mathbf{R}} \xi(u,t)\{\nu(t-s) - \nu(t)\}\{\nu(u-r) - \nu(u)\}\mathrm{d}t\mathrm{d}u$$

En la última integral ν depende solamente de r y s. Así la diferenciabilidad de ξ'' con respecto a r y s se sigue de la diferenciabilidad de ν sobre $\mathcal{N}_0$; luego ξ es equivalente al exponente diferenciable ξ''. ♣

Para finalizar este estudio sobre multiplicadores y exponentes estableceremos el siguiente Lema.

LEMA 2.2.8

Cada exponente sobre $\mathbf{R}$ *es equivalente a cero.*

Demostración: Sea $(\xi_0, \mathcal{N}_0)$ un exponente definido para ρ y σ tales que $-\gamma < \rho$, $\sigma < \gamma$ en $\mathbf{R}$, es decir, $\mathcal{N}_0 = (-\gamma, \gamma)$; por el lema anterior podemos suponer ξ_0 diferenciable.
Haciendo $\psi(\tau, \sigma) = \frac{\partial \xi_0(\tau,\sigma)}{\partial \sigma}$, derivando la igualdad (18) con respecto a t y evaluando en $t = 0$ obtenemos

$$\psi(r + s, 0) = \psi(s, 0) + \psi(r, s), \quad -\gamma < r, s, \quad r + s < \gamma.$$

Definamos ahora

$$h_0(\tau) = \int_0^\tau \psi(\sigma, 0) \mathrm{d}\sigma = \int_0^1 \tau \psi(\mu\tau, 0) \mathrm{d}\mu, \quad |\tau| < \sigma.$$

Entonces $h_0(0) = 0$, y tenemos que para $|s| < \frac{\sigma}{2}$ y $|r| < \frac{\sigma}{2}$,

$$-\Delta_{r,s}[h_0] = h_0(r + s) - h_0(r) - h_0(s) = \int_r^{r+s} \psi(\sigma, 0) \mathrm{d}\sigma - \int_0^s \psi(\sigma, 0) \mathrm{d}\sigma$$

$$= \int_0^s \{\psi(r + \sigma, 0) - \psi(\sigma, 0)\} \mathrm{d}\sigma = \int_0^s \psi(r, \sigma) \mathrm{d}\sigma = \int_0^s (\frac{\partial \xi_0(r, \sigma)}{\partial \sigma}) \mathrm{d}\sigma$$
$$= \xi_0(r, s) - \xi_0(r, 0) = \xi_0(r, s).$$

Así que $\xi_0(r, s) + \Delta_{r,s}[h_0] = 0$; es decir, ξ_0 es equivalente a cero.

♣

Como hemos visto cada exponente local es equivalente a cero, además cada multiplicador local determina a un exponente y viceversa, tenemos así que cada multiplicador local es equivalente a uno. Por (16) obtenemos que cada multiplicador c sobre $\mathbf{R}$ es de la forma

$$c(r, s) = \frac{d(r + s)}{d(r)d(s)} \qquad \forall r, s \in \mathbf{R}.$$

2.3 EL PRINCIPIO DE EHRENFEST Y LA ECUACIÓN DE SCHRÖDINGER.

Por el **Teorema 2.2.2**, cada $*$-automorfismo α_t en el *principio de Ehrenfest* de las ecuaciones (9) y (10) es implementado por un operador unitario U_t, es decir, para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$ y cada $t \in \mathbf{R}$ tenemos:

$$\alpha_t(A) = U_t A U_t^*.$$

Por la **Proposición 2.2.3**, si $\{\alpha_t : t \in \mathbf{R}\}$ es un grupo entonces $U_t U_s = c(t,s) U_{t+s}$ donde c(.,.) es un *multiplicador* sobre $\mathbf{R}$. Además en la anterior sección se probó bajo la hipótesis de que $r \longrightarrow U_r$ es debilmente continua que cada multiplicador sobre $\mathbf{R}$ es de la forma:

$$c(r,s) = \frac{d(r+s)}{d(r)d(s)}, \qquad \forall r, s \in \mathbf{R}.$$

Como para cada $t \in \mathbf{R}$ y para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$ se tiene que $\alpha_t(A) = U_t A U_t^*$ entonces, podemos reemplazar U_t por $W_t = d(t)U_t$ para obtener

$$\alpha_t(A) = W_t A W_t^*.$$

Es fácil verificar que $\{W_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ es un grupo unitario 1-paramétrico debilmente continuo.

Siendo $\{W_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ un grupo debilmente continuo, es fuertemente continuo. Así podemos aplicar el *Teorema de Stone*, véase página 222 de [Wei 1], para obtener un operador autoadjunto H tal que

$$W_t = e^{itH}, \quad t \in \mathbf{R}.$$

PROPOSICIÓN 2.3.1

Sea H el generador del grupo $\{W_t\}_{t\in\mathbf{R}}$, entonces H es igual a $H' = \frac{1}{2}P^2 + V(Q)$ salvo traslación por escalares.

Demostración: Haciendo uso de la representación de Heisenberg y haciendo $t = 0$ en las ecuaciones (7) y (8) obtenemos, para $\hbar = 1$,

$$i[H,Q] = P, \quad i[H,P] = -F(Q).$$

Consideremos el operador

$$H' = \frac{1}{2}P^2 + V(Q).$$

Mostraremos que $H - H'$ es un escalar:
Como el conjunto $\{Q, P\}$ genera la estructura no conmutativa (álgebra de Lie) bajo la operación dada por el conmutador, entonces bastará mostrar que,

$$[H - H', Q] = [H - H', P] = 0.$$

Calculando $[H', Q]$ obtenemos:

$$[H', Q] = \frac{1}{2}[P^2, Q] = \frac{1}{2}P[P,Q] + \frac{1}{2}[P,Q]P = \frac{P}{2i} + \frac{P}{2i} = -iP.$$

La primera igualdad se obtiene debido a que $H' = \frac{1}{2}P^2 + V(Q)$ y $V(Q)$ conmuta con Q, la segunda porque $A \longrightarrow [A, Q]$ es una derivación y la tercera igualdad se sigue de las relaciones canónicas de conmutación. Así obtenemos,

$$[H - H', Q] = [H, Q] - [H', Q] = -iP + iP = 0.$$

Para ver que $H - H'$ también conmuta con P, hagamos

$$[V(Q), P] = -[P, V(Q)] = iV'(Q) = iF(Q),$$

y por lo tanto

$$[H - H', P] = [H, P] - [\frac{1}{2}P^2 + V(Q), P] = iF(Q) - [V(Q), P] = 0,$$

lo cual prueba que $H = H'$+escalar. ♣

Es decir, *el principio de Ehrenfest* es aceptable como principio básico de la dinámica cuántica, pues a partir de él hemos obtenido un grupo unitario de operadores en $\mathcal{H}$ cuyo generador infinitesimal es el Hamiltoniano $\frac{1}{2}P^2+V(Q)$, salvo traslación por escalares. La solución de la correspondiente ecuación de Schrödinger con condición inicial ψ_0 es $\psi_t = W_t\psi_0$ salvo un factor constante de módulo 1.
El grupo de $*$-automorfismos α_t pertenece a una clase de familias de transformaciones llamadas *completamente positivas*[6] del álgebra $\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$ en sí misma, cuyos miembros más generales tienen un papel prinicipal en ciertos modelos de física cuántica donde el estudio de dinámicas no-unitarias o disipativas es importante. En este trabajo no abordaremos el estudio de transformaciones completamente positivas.

[6]Una transformación lineal α del álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de operadores acotados sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ en sí misma se llama completamente positiva si para todo par de sucesiones $\{x_i\}_{i=1}^n \in \mathcal{B}$ y $\{u_j\}_{j=1}^n \in \mathcal{H}$ se tiene que $\sum_{i,j=1}^n \langle u_i, \alpha(x_i^* x_j)u_j\rangle \geq 0$. Cada α_t es una transformación completamente positiva pues

$$\sum_{i,j=1}^{n} \langle u_i, \alpha_t(x_i x_j^*)u_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle u_i, W_t^* x_i^* x_j W_t u_j\rangle$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \langle x_i W_t u_i, x_j W_t u_j\rangle = \| \sum_{k=1}^{n} x_k W_t u_k\|^2 \geq 0.$$

CAPÍTULO 3

EL OSCILADOR ARMÓNICO CUÁNTICO.

INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se analizará el Hamiltoniano H del oscilador armónico cuántico visto como un operador densamente definido; esto se hará con el fin de encontrar una relación (usando álgebras de operadores y teoría espectral) entre el grupo unitario generado por el operador iH y el semigrupo fuertemente continuo generado por $-H$ los cuales caracterizan la dinámica del oscilador armónico cuántico.

3.1 EL HAMILTONIANO DEL OSCILADOR ARMÓNICO.

Consideraremos ahora el Hamiltoniano del oscilador armónico simple unidimensional, el cual es dado por;

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2), \tag{26}$$

y para el cual se cumple la relación $[P, Q] = -iI$.
P y Q son, en la representación de Schrödinger, los operadores sobre el espacio de Hilbert $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ inducidos por

$$P = -i\frac{d}{dt}, \quad Q = \text{multiplicación por } x.$$

Tomaremos como dominio de los operadores H, Q y P el subespacio denso de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$,

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}) = \{f \in \mathbf{C}^\infty(\mathbf{R}) / \forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}, \quad \sup_x |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty\}$$

Es fácil ver que el espacio $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ es invariante bajo los operadores Q, P, y por lo tanto también es invariante bajo el Hamiltoniano H.

Estudiaremos dos propiedades fundamentales de H:
(1).- H *tiene un conjunto completo de funciones propias en* $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$.
(2).- El operador e^{-tH} preserva positividad, en el sentido de que si $f \geq 0$ entonces $e^{-tH} f \geq 0$, $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$.

Tenemos el siguiente Teorema, cuya segunda parte se probará en el resto de la presente sección.

TEOREMA 3.1.1

El operador H es esencialmente autoadjunto y sus valores propios son $\{n + \frac{1}{2} : \quad n = 0, 1, 2, 3...\}$.

Demostración. Definimos los operadores de **creación y aniquilación** respectivamente por

$$A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q - iP) \tag{27}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q + iP) \tag{28}$$

Así

$$[A, A^\dagger] = 1 \quad y \quad [A^\dagger, A] = -1 \tag{29}$$

luego, por cálculo directo se obtiene que

$$H = \frac{1}{2}(P^2 + Q^2) = A^\dagger A + \frac{1}{2}I. \tag{30}$$

Más aún,

$$[H, A] = -A \quad , \quad [H, A^\dagger] = A^\dagger \quad y \quad [H, A^{\dagger n}] = A^{\dagger n}. \tag{31}$$

De (30) podemos ver que si Ω_0 es un vector no nulo en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ tal que $A\Omega_0 = 0$, entonces Ω_0 es un vector propio de H, es decir, $H\Omega_0 = \frac{1}{2}\Omega_0$.
Usando la ecuación (28) obtenemos que la condición $A\Omega_0 = 0$, es equivalente a

$$\frac{d\Omega_0}{dx} = -x\Omega_0.$$

Resolviendo esta última ecuación diferencial se obtiene que

$$\Omega_0(x) = ke^{-\frac{x^2}{2}} = \pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

donde $k = \pi^{-\frac{1}{4}}$ se obtiene pidiendo que $\|\Omega_0\| = 1$, donde $\|.\|$ denota la norma en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$. Usando (31) podemos ver que como Ω_0 es un vector propio de H, entonces $A^{\dagger^n}\Omega_0$ también lo es para toda $n \geq 0$. En efecto, usando (31)

$$HA^{\dagger^n}\Omega_0 = A^{\dagger^n}H\Omega_0 + [H, A^{\dagger^n}]\Omega_0 = A^{\dagger n}\frac{1}{2}\Omega_0 + [H, A^\dagger]A^{\dagger n-1}\Omega_0 + A^\dagger[H, A^{\dagger n-1}]\Omega_0$$

$$= \frac{1}{2}A^{\dagger n}\Omega_0 + A^{\dagger n}\Omega_0 + A^{\dagger}[H, A^{\dagger n-1}]\Omega_0 \qquad (32)$$

$$= (\frac{1}{2}+1)A^{\dagger n}\Omega_0 + A^{\dagger}([H, A^{\dagger}]A^{\dagger n-2}\Omega_0 + A^{\dagger}[H, A^{\dagger n-2}]\Omega_0) = ... = (\frac{1}{2}+n)A^{\dagger^n}\Omega_0.$$

Por lo tanto el espectro de H contiene al conjunto $\{\frac{1}{2}+n : \forall n \geq 0\}$.

Demostremos que no hay valores propios de H diferentes de $\frac{1}{2}+n$, $n \geq 0$. Si esto ocurriera, como H es un operador simétrico el vector propio asociado con el nuevo valor propio $\lambda \neq 0$ sería un vector ortogonal al conjunto $\{A^{\dagger n}\Omega_0\}_{n\geq 0}$, que es un sistema ortonormal completo en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, lo cual es una contradicción.

Para completar la prueba del teorema, necesitamos ver que las funciones propias $\{A^{\dagger^n}\Omega_0,\, n \geq 0\}$ forman un conjunto ortonormal completo en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$. Se dará una prueba de esto más adelante en la **Proposición 3.1.4**. Aunque por ahora supondremos algunas veces que $\{A^{\dagger^n}\Omega_0\}_{n\geq 0}$ es un conjunto ortonormal completo en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$.

Para probar que H es esencialmente autoadjunto veamos primero que

$$A^{\dagger^n}\Omega_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R}), \quad \forall n \geq 0.$$

En efecto, pues $A^{\dagger^n} = (\frac{1}{\sqrt{2}})^n(Q-iP)^n$, y como $\Omega_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ entonces $(\frac{1}{\sqrt{2}})^n(Q-iP)^n\Omega_0 \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ pues Q y P dejan invariante a $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ y lo mismo ocurre con cualquier potencia y producto de ellos.
Veamos ahora que H es esencialmente autoadjunto[7] sobre el subespacio denso $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, es decir existe un único operador autoadjunto que coincide con H en $\mathcal{S}(\mathbf{R})$.

Supongamos que H tiene un conjunto completo (*a priori*) de vectores propios $\Omega_n \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, y demostremos que entonces H es esencialmente autoadjunto; supongamos que no lo es, *i.e.*, i es un valor propio de H^*, es decir, existe $f \neq 0$ en el dominio de H^* que es una solución de la ecuación

[7]Autoadjunticidad esencial de un operador simétrico H definido sobre un conjunto denso $\mathcal{D}$ se tiene si H^* no tiene a $\pm i$ como valores propios.

$H^*f = if$, entonces para todo natural n se tiene con E_n valor propio de Ω_n

$$0 = \langle (H^* - iI)f, \Omega_n\rangle = \langle f, (H + iI)\Omega_n\rangle = \langle f, \Omega_n\rangle(E_n + i).$$

Así que

$$\langle f, \Omega_n\rangle = 0, \quad \forall n \geq 0 \text{ y por completez, } f = 0.$$

♣

Veamos ahora algunas propiedades explícitas de las funciones propias Ω_n.

Para normalizar a estos vectores calculemos $\|A^{\dagger^n}\Omega_0\|^2$,

$$\langle \Omega_0, A^n A^{\dagger^n}\Omega_0\rangle = \langle \Omega_0, A^{n-1}[A, A^{\dagger^n}]\Omega_0\rangle = n\langle \Omega_0, A^{n-1}A^{\dagger^n}\Omega_0\rangle = \ldots = n!,$$

así que

$$\Omega_n = (n!)^{-\frac{1}{2}} A^{\dagger^n}\Omega_0 \tag{32}$$

es un vector propio de norma 1.
Las siguientes relaciones se cumplen:

$$\begin{aligned} A^\dagger\Omega_n &= \sqrt{n+1}\Omega_{n+1} \\ A\Omega_n &= \sqrt{n}\Omega_{n-1} \\ A^\dagger A\Omega_n &= n\Omega_n \end{aligned} \tag{33}$$

Y tienen la interpretación física siguiente:

Ω_n es el estado n-ésimo del oscilador armónico con frecuencia μ y energía $\mu\hbar$.

- *El operador $A^\dagger$ **añade** o **crea** una partícula al estado Ω_n e incrementa su energía en $\mu\hbar$/unidades.*
- *El operador A **absorbe** o **aniquila** una partícula del estado Ω_n perdiendo energía en $\mu\hbar$/unidades.*

- *Para cualquier estado $\theta = \sum c_n\Omega_n$, $|c_n|^2$ es la probabilidad de que θ contenga n partículas, y*

$$\langle\theta, A^\dagger A\theta\rangle = \sum n|c_n|^2$$

es el número esperado de partículas. Así $A^\dagger A$ es el operador que ***mide el número*** *de partículas en el estado.*

Los operadores $A^\dagger$, A y $A^\dagger A$ reciben el nombre de operador de creación, operador de aniquilación y operador de número, respectivamente.

Mostraremos que los estados $\Omega_n(x)$ son las funciones de Hermite $\{e^{-\frac{x^2}{2}}H_n(x)\}$ normalizadas, las cuales cumplen la conocida relación de ortogonalidad

$$\int_{\mathbf{R}} e^{-x^2} H_n(x)H_m(x)\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, \text{ si } m \neq n \\ 2^n n!\sqrt{\pi}, \text{ si } n = m \end{cases} \tag{34}$$

$H_n(x)$ es el n-ésimo polinomio de Hermite que está dado por

$$H_n(x) = \sum_{j=0}^{\lceil\frac{n}{2}\rceil}(-1)^j C_{n,j}x^{n-2j} \qquad \forall n \geq 0$$

donde $C_{n,j} = \frac{n!}{(n-2j)!2^j j!}$.
Para los coeficientes de $H_n(x)$, $n \geq 0$, se cumple,

$$C_{n,j} = (1 - \frac{2j}{n+1})C_{n+1,j} = \frac{2(j+1)}{(n+1)(n-2j)}C_{n+1,j+1}.$$

Ahora, teniendo en cuenta la relación anterior y la propiedad recursiva de los polinomios de Hermite:

$$(x - \frac{d}{dx})H_n(x) = H_{n+1}(x)$$

se tiene la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.1.2

$$(A^{\dagger^n}\Omega_0)(x) = H_n(\sqrt{2}x)\Omega_0(x)$$
$$\Omega_n(x) = (n!)^{-\frac{1}{2}}H_n(\sqrt{2}x)\Omega_0(x)$$

Demostración. La proposición es verdadera para $n = 0$. Por inducción, suponiendo que se tiene la relación para n, entonces

$$\Omega_{n+1}(x) = (n+1)^{-\frac{1}{2}}A^{\dagger}\Omega_n(x) = ((n+1)!)^{-\frac{1}{2}}A^{\dagger}H_n(\sqrt{2}x)\Omega_0(x)$$

pero $A^{\dagger} = 2^{-\frac{1}{2}}(x - \frac{d}{dx})$, así que

$$\Omega_{n+1}(x) = ((n+1)!)^{-\frac{1}{2}}[2^{-\frac{1}{2}}xH_n(\sqrt{2}x) - 2^{-\frac{1}{2}}\frac{dH_n(\sqrt{2}x)}{dx}]\Omega_0(x)$$

y por la recursividad de $H_n(x)$ tenemos $\Omega_{n+1}(x) = (n+1)!^{-\frac{1}{2}}H_{n+1}(\sqrt{2}x)\Omega_0(x)$.

♣

Ahora, denotando por $H_n(\sqrt{2}Q)$ al operador de multiplicación por el polinomio $H_n(\sqrt{2}x)$, $\forall n \geq 0$, se tiene la siguiente definición.

DEFINICIÓN 3.1.3

Definimos las potencias de **Q** en el orden de Wick por

$$: Q^n := 2^{-\frac{n}{2}}H_n(\sqrt{2}Q).$$

Equivalentemente sobre el dominio dado por el conjunto $lin\{\Omega_n\}$, las combinaciones lineales finitas de las Ω_n's, se tiene

$$: Q^n := 2^{-\frac{n}{2}}\sum_{j=0}^{n} C_j^n A^{\dagger^j}A^{n-j}.$$

La igualdad anterior se obtiene tomando $Q = 2^{-\frac{1}{2}}(A^{\dagger} + A)$ y el desarrollo binomial de Newton.

PROPOSICIÓN 3.1.4

Las funciones Hermitianas normalizadas $\Omega_n(y)$ son un conjunto ortonormal completo en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$.

Demostración. Por la **Definición 3.1.3** y la **Proposición 3.1.2** vemos que el espacio generado por $\{\Omega_n\}_{n=0}^{\infty}$ coincide con el espacio generado por $\{: Q^n : \Omega_0\}_{n=0}^{\infty}$. Nos falta ver que $lin\{\Omega_n\}$ es denso en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, pero esto se logra teniendo en cuenta que $\{: Q^n : \Omega_0\}_{n\geq 0}$ es una base para $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, véase [Kol.] capítulo VIII , es decir, para cada $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ se tiene la representación:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle f, : Q^n : \Omega_0 \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R})} : Q^n : \Omega_0(x).$$

♣

Para finalizar este estudio sobre el oscilador armónico mencionaremos el hecho de que e^{-tH} es un operador que preserva positividad, ésto se prueba en el **Apéndice A.1** y es de gran utilidad para el desarrollo de la siguiente sección.

3.2 C*-ÁLGEBRAS Y LA DINÁMICA DEL OSCILADOR ARMÓNICO CUÁNTICO.

En esta sección se hará un estudio para encontrar desde el punto de vista del álgebra de operadores y la teoría espectral, una relación entre el grupo unitario generado por iH y el semigrupo generado por $-H$ que caracterizan la dinámica del oscilador armónico cuántico.

Como un resumen de lo estudiado en la pasada sección podemos enunciar el siguiente teorema cuya demostración queda hecha reuniendo los resultados obtenidos sobre el Hamiltoniano del oscilador armónico.

TEOREMA 3.2.1

El operador H es esencialmente autoadjunto; el grupo unitario fuertemente continuo $U_t = e^{itH}$, $t \in \mathbf{R}$ tiene como generador infinitesimal a iH; H tiene espectro en $\mathbf{R}^+$. Además $\{P_t = e^{-tH}, t \geq 0\}$ es un semigrupo de operadores que preserva positividad, en el sentido de que para cada $f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ y $t \geq 0$ se tiene

$$f \geq 0 \Rightarrow e^{-tH} f \geq 0.$$

Ahora por el Teorema Espectral, se tiene la existencia de una medida espectral E en $\mathbf{R}$ tal que

$$U_t = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dE(\lambda).$$

Ya hemos mencionado que un operador autoadjunto se puede considerar en tres formas equivalentes: un operador autoadjunto densamente definido, un grupo unitario fuertemente continuo y como una medida espectral sobre $\mathbf{R}$. Bajo ciertas condiciones, que precisaremos enseguida, un operador autoadjunto también se puede considerar como un semigrupo fuertemente continuo de contracciones.
Aplicando transformada de Laplace, tenemos que, si definimos

$$P_t = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dE(\lambda),$$

entonces $\{P_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracciones, fuertemente continuo y satisface $P_0 = I$, $P_t^* = P_t$, $t \geq 0$.

Recíprocamente si $\{P_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de contracciones con las propiedades anteriores, entonces exite un único grupo unitario 1-paramétrico $\{U_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ cuyo generador infinitesimal tiene espectro positivo y de él se obtiene $\{P_t\}_{t\geq 0}$ de la manera anterior. Esto se demuestra de la siguiente manera.

Consideremos la estructura de $\mathbf{C}^*$-álgebra de Banach conmutativa en $A = \mathbf{L}^1[0,\infty)$ con $\|f\|_1 = \int_0^\infty |f(t)|dt$ y con la operación

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x-t)dt,$$

y donde la involución es $f^*(x) = \overline{f(x)}$.

Ahora, para cada $f \in A$, definimos la forma sesquilineal π, $\pi : \mathbf{L}^2(\mathbf{R}) \times \mathbf{L}^2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{C}$ por

$$\pi(f)[\varphi, \psi] = \int_0^\infty f(x)\langle\varphi, P_x\psi\rangle dx.$$

Para cada $f \in A$ tenemos que

$$|\pi(f)[\varphi]| \leq \int_0^\infty |f(x)||\langle\varphi, P_x\varphi\rangle|dx \leq \|\varphi\|^2\|f\|_1 \quad \forall\varphi \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}),$$

entonces $\pi(f)$ es acotada y, por lo tanto, existe un único operador al que también denotaremos por $\pi(f)$ asociado con la forma sesquilineal de manera que $\pi(f)[\varphi,\psi] = \langle\varphi, \pi(f)\psi\rangle$. Si además f es positiva, entonces

$$\pi(f)[\varphi] = \int_0^\infty f(x)\langle\varphi, P_x\varphi\rangle dx \geq 0, \quad \forall\varphi \in \mathcal{H},$$

entonces $\pi(f)$ es una forma sesquilineal positiva y su operador asociado también es positivo definido. Como todo operador acotado y positivo es autoadjunto, tenemos que el operador $\pi(f)$ es autoadjunto para cada $f \in A$, f positiva. Por lo anterior, podemos considerar a π como una transformación de A en $\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$, es decir, $\pi : A \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$. Ahora de todo lo anterior tenemos la siguiente proposición.

PROPOSICIÓN 3.2.2

π es un $*$-homomorfismo, es decir, π es una transformación lineal que satisface

$$\pi(f^*) = \pi(f)^* \quad y \quad \pi(f * g) = \pi(f) \cdot \pi(g), \quad f, g \in A.$$

Así que π es una $*$-representación de A en $\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$, además π es inyectivo.

Demostración: Sean $f, g \in \mathbf{L}^1[0, \infty) = A$, $\quad \varphi \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, luego

$$\pi(f * g)[\varphi] = \int_0^\infty (f * g)(x)\langle \varphi, P_x\varphi\rangle dx \qquad (1)$$

ahora consideremos el producto de los operadores $\pi(f)$ y $\pi(g)$:

$$\langle \varphi, \pi(f) \cdot \pi(g)\varphi\rangle = \pi(f)[\varphi, \pi(g)\varphi] = \int_0^\infty f(x)\langle \varphi, P_x\pi(g)\varphi\rangle dx$$

$$= \int_0^\infty f(x)\langle P_x\varphi, \pi(g)\varphi\rangle dx = \int_0^\infty f(x)\pi(g)[P_x\varphi, \varphi]dx$$

$$= \int_0^\infty f(x)\int_0^\infty g(t)\langle P_x\varphi, P_t\varphi\rangle dtdx \qquad (2).$$

Donde hemos aplicado que $P_x^* = P_x$, $x \geq 0$.
Ahora debemos probar (1) = (2); aplicando el Teorema de Tonelli y la propiedad de semigrupo en (2) tenemos

$$\int_0^\infty f(x)\int_0^\infty g(t)\langle P_x\varphi, P_t\varphi\rangle dtdx = \int_0^\infty g(t)dt\int_0^\infty f(x)\langle \varphi, P_{t+x}\varphi\rangle dx$$

$$= \int_0^\infty g(t)dt\int_t^\infty f(\tau - t)\langle \varphi, P_\tau\varphi\rangle d\tau.$$

En la última integral, con t fijo y haciendo $\tau = t + x$, $d\tau = dx$ se tiene que ésta integral es igual a,

$$\int_0^\infty (\int_0^\tau g(t)f(\tau - t)dt)\langle \varphi, P_\tau\varphi\rangle d\tau = \int_0^\infty (f * g)(x)\langle \varphi, P_x\varphi\rangle dx.$$

Así (1) = (2), por lo tanto

$$\pi(f * g)[\varphi] = \langle \varphi, \pi(f) \cdot \pi(g)\varphi\rangle = (\pi(f) \cdot \pi(g))[\varphi],$$

donde el último término denota a la forma sesquilineal asociada con el producto de operadores $\pi(f) \cdot \pi(g)$.
La linealidad se sigue directamente de la definición de π.

♣

Como π es un $*$-homomorfismo, entonces tenemos que $\pi : A \longrightarrow \mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$ es una $*$-representación de A en $\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$, y así tenemos que $\overline{\pi(A)}$ es una subálgebra cerrada de operadores en $\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$, donde $\overline{\pi(A)}$ denota a la cerradura la imagen de A bajo π en la norma de $\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$.

AFIRMACIÓN 3.2.3

$\overline{\pi(A)}$ es conmutativa y, por lo tanto, normal.

Demostración. Sean a y $b \in \overline{\pi(A)}$, *i.e*, $a = \lim_n \pi(f_n)$ y $b = \lim_n \pi(g_n)$, $(f_n)_{n\geq 1}$, $(g_n)_{n\geq 1}$ sucesiones en A. Entonces

$$a \cdot b = \lim_{n\to\infty} \pi(f_n) \lim_{n\to\infty} \pi(g_n) = \lim_{n\to\infty} \pi(f_n \cdot g_n) = \lim_{n\to\infty} \pi(g_n) \lim_{n\to\infty} \pi(f_n) = b \cdot a.$$

El límite es en la norma de operadores, y se ha usado el hecho de que el producto de operadores es una función continua en la norma de operadores.

♣

Ahora denotaremos con $\widehat{A}$ el espacio de los *homomorfismos complejos* sobre A, es decir, las funcionales lineales sobre A que cumplen $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y)$ y $\phi(x^*) = \phi(x)^*$ para cada $x, y \in A$, entonces

$$\widehat{A} = \{\omega : A \longrightarrow \mathbf{C} \, : \, \omega \, es \, homomorfismo \, complejo \, tal \, que \, \omega(a^*) = \omega(a)^*\}.$$

Podemos identificar $\widehat{A}$ con $[0, \infty)$, de la siguiente manera; para $\lambda \in [0, \infty)$ hagamos

$$\widehat{f}(\lambda) := \omega_\lambda(f) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} f(x) dx, \qquad f \in \mathbf{L}^1[0, \infty)$$

como podemos ver $\omega_\lambda(f)$ es *la transformada de Laplace* de $f \in \mathbf{L}^1[0,\infty)$, evaluada en λ por lo tanto es un homomorfismo complejo sobre A para cada $\lambda \in [0,\infty)$.
Ahora veremos que a cada funcional multiplicativo $\omega \in \widehat{A}$ corresponde un $\lambda \in [0,\infty)$, en efecto: Sea $\omega \in \widehat{A}$, por el *Teorema de representación de Riesz*, véase la sección 9.4 de [Rud 2], existe $h \in \mathbf{L}^\infty[0,\infty)$ tal que

$$\omega(f) = \int_0^\infty f(x)h(x)dx \qquad f \in A = \mathbf{L}^1[0,\infty).$$

Entonces, para f y g en A, se tiene usando el teorema de Fubini,

$$\omega(f * g) = \int_0^\infty (f * g)(x)h(x)dx = \int_0^\infty h(x)dx \int_0^x f(y)g(x-y)dy$$

$$= \int_0^\infty h(x)dx \int_0^x f(x-y)g(y)dy = \int_0^\infty g(y)dy \int_y^\infty f(x-y)h(x)dx$$

$$= \int_0^\infty g(y)dy \int_0^\infty f(x)h(x+y)dx. \qquad (1)$$

Por otra parte

$$\omega(f)\omega(g) = \omega(f) \int_0^\infty g(y)h(y)dy. \qquad (2)$$

Supongamos ω no identicamente cero. Fijemos $f \in A$ de manera que $\omega(f) \neq 0$. Como (1)=(2), por la unicidad en el Teorema de representación de Riesz se debe tener que

$$\omega(f)h(y) = \int_0^\infty f(x)h(x+y)dx \qquad \text{para casi toda} \quad y \in [0,\infty).$$

o bien,

$$\int_0^\infty f(x)[h(x)h(y) - h(x+y)]dx = 0 \quad \forall f \in \mathbf{L}^1[0,\infty)$$

tomando $f(x) = 1_{[0,t)}(x)$ se tiene para toda $t > 0$

$$\int_0^t [h(x)h(y) - h(x+y)]dx = 0.$$

y por lo tanto,

$$h(x+y) = h(x)h(y), \qquad \text{para casi toda} \quad x, y \in [0,\infty).$$

Como h no es idénticamente cero, la igualdad anterior arroja que $h(0) = 1$ y como h es continua casi en todas partes. Entonces que existe un $\epsilon > 0$ tal que

$$\int_0^{\epsilon} h(y)dy = k \neq 0.$$

Por lo tanto

$$kh(x) = \int_0^{\epsilon} h(y)h(x)dy = \int_0^{\epsilon} h(y+x)dy = \int_x^{x+\epsilon} h(y)dy.$$

Como h es continua, la última integral en la igualdad anterior es una función diferenciable de x, $x \geq 0$, por tanto h resulta ser una función diferenciable. Derivando $h(x+y) = h(x)h(y)$ con respecto a y, y haciendo $y = 0$ el resultado es

$$h'(x) = h'(0)h(x),$$

usando separación de variables con la condición inicial $h(0) = 1$, obtenemos

$$h(x) = e^{h'(0)x}.$$

Como h es esencialmente acotada en $[0, \infty)$, entonces h está acotada casi en todas partes en $[0, \infty)$, entonces como en general $h'(0)$ es un número complejo, $h'(0) = -\lambda + it$, así $h(x) = e^{-\lambda x}e^{itx}$ con $\lambda \geq 0$. Por lo tanto se tiene

$$\omega(f) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}e^{itx}f(x)dx$$

y como ω es un $*$-homomorfismo, entonces se cumple $\omega(f^*) = \omega(f)^*$ lo cual implica que $t = 0$. Y así

$$\omega(f) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}f(x)dx,$$

lo cual queríamos probar.

$\overline{\pi(A)}$ es un álgebra que puede verse inmersa en un álgebra con unidad, esto siempre se tiene para un álgebra conmutativa como $\overline{\pi(A)}$.

TEOREMA 3.2.4

Si A es un $*$-subálgebra normal cerrada de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ la cual contiene al operador identidad, y si Δ es el espacio de ideales maximales de A, entonces existe una única medida espectral E sobre los Borelianos de Δ que satisface

$$T = \int_{\Delta} \widehat{T} dE.$$

Para cada $T \in A$, donde $\widehat{T}$ es la transformada de Gelfand de T[8] .

Demostración: La prueba es similar a la del Teorema 12.22 en [Rud.1, p. 306].

En el caso de $*$-álgebras cada ideal maximal corresponde con un homomorfismo complejo ω que satisface $\omega(f^*) = \omega(f)^*$.

Aplicando este teorema a la subálgebra conmutativa $\overline{\pi(A)}$ obtenemos una medida espectral E sobre los borelianos de $[0, \infty)$. La existencia de $\{U_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ es equivalente a la existencia de la medida espectral E en $[0, \infty)$, esto por el teorema de Stone. Hemos visto que suponiendo la existencia del semigrupo $\{P_t\}_{t \geq 0}$ con $P_0 = I$ y $P_t^* = P_t$, $t \geq 0$, tenemos la existencia del grupo unitario $\{U_t\}_{t \in \mathbf{R}}$. Esta es una manera rigurosa, usando conceptos y resultados de la teoría de $*$-álgebras, de realizar el así llamado "método de continuación analítica".

[8] Sea Δ el conjunto de todos los homomorfismos complejos de un álgebra de Banach conmutativa A. La igualdad

$$\widehat{x}(h) = h(x) \quad h \in \Delta$$

asigna a cada $x \in A$ una función $\widehat{x} : \Delta \to \mathbf{C}$; $\widehat{x}$ es llamada la **Transformada de Gelfand** de x.

CAPÍTULO 4

ÁLGEBRAS DE OPERADORES Y LA FÓRMULA DE FEYNMAN-KAC.

INTRODUCCIÓN.

En este capítulo introducimos el proceso del oscilador armónico que en probabilidad se conoce como *proceso de Ornstein-Uhlenbeck* o *proceso de velocidades de Ornstein-Uhlenbeck* y se demuestra que la esperanza matemática de ciertas funcionales de este proceso coincide con el valor esperado de ciertas observables en el estado fundamental.
Se establece una cierta álgebra de operadores que está en el centro de la dinámica del oscilador armónico cuántico y al considerar ciertas perturbaciones del Hamiltoniano del oscilador armónico se obtiene una versión de la fórmula de Feynman-Kac como dilatación generada por el grupo unitario de traslaciones por un cociclo.

4.1 EL PROCESO DEL OSCILADOR ARMÓNICO.

Nuevamente consideraremos al Hamiltoniano H_0 del oscilador armónico en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ que es la cerradura autoadjunta del operador simétrico inducido por

$$H_0 = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}. \tag{35}$$

Como podemos ver H_0 es una traslación del Hamiltoniano considerado en el capítulo anterior, es decir, $H_0 = H - \frac{1}{2}I$.
Como hemos visto en el capítulo anterior, H_0 es un operador positivo y autoadjunto cuyos valores propios son una sucesión creciente de números reales no-negativos

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$$

$$\text{equiespaciados} \quad \lambda_n - \lambda_{n-1} = \lambda_m - \lambda_{m-1}, \quad n, m \geq 1.$$

En el capítulo pasado también vimos que H_0 genera el semigrupo de contracciones

$$P_t = e^{-tH_0} \qquad t \geq 0.$$

P_t es un operador autoadjunto y positivo definido para cada $t \geq 0$, *i.e.*, $\langle u, P_t u\rangle \geq 0, \quad \forall u \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ y $P_t^* = P_t$.

Denotaremos por M_f el operador de multiplicación por f sobre $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ para $f \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R})$, es decir,

$$M_f g(x) = f(x)g(x), \quad g \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R}).$$

M_f preserva positividad si $f \geq 0$. Por lo tanto cualquier producto finito de $P_t's$ y $M_f's$ $(f \geq 0)$ es un operador que preserva positividad.

Como el vector de estado base o estado fundamental

$$\Omega_0(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

tiene las propiedades $H_0\Omega_0 = 0$, $H_0 x\Omega_0 = x\Omega_0$, y $\|\Omega_0\| = 1$, y es una función positiva en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, tenemos

$$\langle M_{f_1} P_{s_1} M_{f_2} P_{s_2} \cdots P_{s_{n-1}} M_{f_n} \Omega_0, \Omega_0\rangle \geq 0.$$

Para cada $n \geq 0$, $f_i \geq 0$ en $\mathbf{C}_0(\mathbf{R})$, y s_i en $\mathbf{R}$.

DEFINICIÓN 4.1.1

El *proceso del oscilador* es una familia $(q_t)_{t\in\mathbf{R}}$ de variables aleatorias Gaussianas con media cero y covarianza

$$E(q_t q_s) = \frac{1}{2} e^{-|t-s|}.$$

Aceptaremos la existencia de una versión continua de la familia $(q_t)_{t\in\mathbf{R}}$.

Denotaremos por $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ al espacio de probabilidad donde está definido $(q_t)_{t\in\mathbf{R}}$, y para abreviar, $\mathbf{L}^2(\Omega) = \mathbf{L}^2(\Omega, P)$. Podemos pensar a Ω como el espacio de trayectorias continuas, es decir, Ω es el conjunto

$$\Omega = \{\omega : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R} : \omega\, es\, continua\}$$

tales que

$$q_t(\omega) = \omega(t), \quad t \in \mathbf{R}.$$

Ahora tenemos el siguiente teorema, el cual es básico en lo que sigue.

TEOREMA 4.1.2

Sean $f_0, ..., f_n \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ y $-\infty < s_0 < s_1 < ... < s_n < \infty$. Entonces

$$E(f_0(\omega(s_0)) \cdots f_n(\omega(s_n))) = \langle \Omega_0, M_{f_0} e^{-t_1 H_0} M_{f_1} \cdots e^{-t_n H_0} M_{f_n} \Omega_0\rangle, \quad (36)$$

donde $t_i = s_i - s_{i-1}$, $i = 1, 2, ..., n$. Además P es la única medida de probabilidad que satisface la propiedad (36).

Demostración (a) Para cada n-ada $t_1, ..., t_n$ fija, se afirma que existe una medida Gaussiana G_n tal que

$$\langle \Omega_0, f_0 e^{-t_1 H_0} f_1 \cdots e^{-t_n H_0} f_n \Omega_0\rangle = \int_{\mathbf{R}^{n+1}} f_0(x_0) f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) dG_n. \quad (37)$$

Sean $n=1$ y $h(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)$. Usando, para $g \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, que (véase [Mc B])

$$(e^{-\theta\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}}g)(x)=(2\pi\theta)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\theta}|x-y|^2}g(y)dy.$$

Ahora por la fórmula de Trotter [Ba], para $f_0, f_1 \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$

$$\langle\Omega_0, f_0(s-\lim_m(e^{-\frac{t}{m}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}}e^{-\frac{t}{m}h})^m)f_1\Omega_0\rangle$$

$$=\lim_m\langle\Omega_0, f_0(e^{-\frac{t}{m}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}}e^{-\frac{t}{m}h})\cdots(e^{-\frac{t}{m}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}}e^{-\frac{t}{m}h})f_1\Omega_0\rangle$$

$$=\lim_m[\int_{-\infty}^{\infty}\Omega_0(x)f_0(x)\{(e^{-\frac{t}{m}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}}e^{-\frac{t}{m}h(x)})^m f_1\Omega_0\}(x)dx]$$

$$=\lim_m[K_i(m,t)\int_{-\infty}^{\infty}\Omega_0(x)f_0(x)dx\int_{-\infty}^{\infty}dx_1e^{-\frac{|x_1-x|^2}{\frac{2t}{m}}}e^{-\frac{t}{2m}(x_1^2-1)}\{(e^{-\frac{t}{m}\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}}e^{-\frac{t}{m}h})^{m-1}f_1\Omega_0\}(x_1)]$$

$$=\lim_m[K_m(t)\int_{-\infty}^{\infty}dx\Omega_0(x)f_0(x)\int_{-\infty}^{\infty}dx_me^{-\frac{1}{\frac{2t}{m}}|x-x_m|^2}e^{-\frac{t}{m}(x_m^2-1)}\ldots$$

$$\cdots\int_{-\infty}^{\infty}dye^{-\frac{1}{\frac{2t}{m}}|x_1-y|^2}e^{-\frac{t}{m}(y^2-1)}f_1(y)\Omega_0(y)]$$

$$=\cdots=\int_{\mathbf{R}^2}f_0(x)f_1(y)dG_1.$$

Donde $K_m(t)=\prod_{i=1}^m K_i(m,t)$ con cada $K_i(m,t)$ convergente, por ejemplo, calculando la primera de las integrales se obtiene

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx_1[e^{-\frac{m}{2t}|x_1-x|^2}e^{-\frac{t}{2m}|x_1^2-1|}e^{-\frac{m}{2t}|x_2-x_1|^2}]$$

$$=\sqrt{\frac{m^2}{2m^2+t^2}}e^{\{\frac{4x^2 8xx_2+4x_2+2x_2^2(\frac{2m^2+t^2}{tm})+\frac{2}{tm}(2m^2+t^2)x^2+\frac{1}{m^2}(2m^2+t^2)}{\frac{2(2m^2+t^2)}{tm}}\}}.$$

De donde se ve que $K_1(m,t)=\sqrt{(\frac{m^2}{2m^2+t^2})}$ de nuevo haciendo cálculos se obtiene

$$K_2(m,t)=\sqrt{(\frac{2m^4+m^2t^2}{m^4+3t^2m^2+t^4})}.$$

En general se tiene la igualdad (37).

(b) G_n es la distribución de probabilidad conjunta de $q_{s_0}, ..., q_{s_n}$; para ver esto calculemos la covarianza de G_n.
Tenemos que para $i < j$

$$\int_{\mathbf{R}^{n+1}} x_i x_j dG_n = \langle x_i, x_j \rangle_{\mathbf{L}^2(\mathbf{R}^{n+1}, dG_n)} = \int_{\mathbf{R}^{n+1}} 1(x_0) \cdots x_i 1(x_{i+1}) \cdots x_j \cdots 1(x_n) dG_n$$

$$= \langle \Omega_0, 1e^{-t_1 H_0} 1 \cdots e^{-t_i H_0} x_i e^{-t_{i+1} H_0} \cdots e^{-t_j H_0} x_j e^{-t_{j+1} H_0} \cdots e^{-t_n H_0} 1 \Omega_0 \rangle$$

$$= \langle \Omega_0, e^{-(\sum_{k=1}^{i} t_k) H_0} x_i e^{-(\sum_{k=i+1}^{j} t_k) H_0} x_j e^{-(\sum_{k=j+1}^{n} t_k) H_0} \Omega_0 \rangle$$

$$= \langle \Omega_0, e^{-(s_i - s_0) H_0} x_i e^{-(s_j - s_i) H_0} x_j e^{-(s_n - s_j) H_0} \Omega_0 \rangle$$

$$= e^{-\frac{1}{2}|s_j - s_i|} \langle x\Omega_0, x\Omega_0 \rangle = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}|s_j - s_i|}.$$

Donde $1(x)$ es la función constante igual a 1, $x \in \mathbf{R}$.
La tercera igualdad se demuestra utilizando (37) y el *Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue*, aproximando cada función en el producto por funciones de soporte compacto.
Para obtener las últimas igualdades hemos usado que

$$e^{-\tau H_0} \Omega_0 = \Omega_0, \quad H_0 x \Omega_0 = x \Omega_0 \quad y \quad e^{-\tau H_0} x \Omega_0 = e^{-\tau} x \Omega_0.$$

La conclusión del teorema se tiene usando un Teorema de Kolmogorov véase [Ba 1,p.9] con el cual se tiene la unicidad y se obtiene que $(G_n)_{n \geq 1}$ es la familia de distribuciones de probabilidad conjunta del proceso $(q_t)_{t \geq 0}$.

♣

COMENTARIOS 4.1.3

(1). Un espacio algebraico de probabilidad [Acc.] es un par $(\mathcal{A}, \rho)$ donde $\mathcal{A}$ es una $*$-álgebra y ρ es un estado sobre $\mathcal{A}$. ρ es un estado si es un $*$-funcional que envía elementos positivos de $\mathcal{A}$, es decir, elementos de la forma $a^* a$ en reales positivos y es unital, es decir, $\rho(e) = e$, donde e es la identidad en $\mathcal{A}$. Si $\mathcal{A}$ es no conmutativa el par $(\mathcal{A}, \rho)$ es un espacio de probabilidad cuántica.
Todo espacio de probabilidad clásica es un espacio algebraico de probabilidad pues basta reemplazar la terna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ por el par $(\mathbf{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P), \rho)$ donde $\mathbf{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ es la $*$-álgebra de todas las funcionales complejas, $\mathcal{F}$-medibles

y acotadas en Ω con la involución dada por la conjugación y ρ es el estado sobre $\mathbf{L}^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ definido mediante

$$\rho(f) = \int_\Omega f dP = Ef.$$

(2). La fórmula (36) nos da una relación entre la probabilidad clásica y la probabilidad cuántica; es decir, hay dos conceptos de valor esperado involucrados en esta fórmula. El lado izquierdo es el valor esperado de una variable aleatoria definida sobre el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ y el lado derecho es el valor esperado de una variable aleatoria en un espacio de probabilidad cuántica.

En el lado derecho de (36) se tiene el valor esperado del operador autoadjunto $M_{f_0}e^{-t_1 H_0}M_{f_1}\cdots e^{-t_n H_0}M_{f_n}$ de la $*$-álgebra $\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$ respecto del estado η definido por

$$\eta(A) = \langle \Omega_0, A\Omega_0 \rangle,$$

el valor esperado en el estado fundamental, "vacuum expectation". En este último caso $(\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R})), \eta)$ también es un espacio algebraico de probabilidad, de hecho, un espacio de probabilidad cuántica.

DEFINICIÓN 4.1.4

Definimos la *traslación* como la acción de $\mathbf{R}$ sobre Ω dada para cada $a \in \mathbf{R}$ por

$$\tau_a\omega(x) = \omega(x + a).$$

Y la *reflexión* de Ω en Ω dada para cada $\omega \in \Omega$ por

$$r\omega(t) = \omega(-t).$$

La cual invierte el sentido del tiempo. Además r es un homeomorfismo de Ω que satisface

$$r^2 = id, \quad r\tau_a = \tau_{-a}r, \forall a \in \mathbf{R}.$$

PROPOSICIÓN 4.1.5

P es invariante bajo traslaciones $\tau_s\omega(t) = \omega(t+s)$, y bajo la reflexión $r\omega(t) = \omega(-t)$.

Demostración: Fijemos $a \in \mathbf{R}$, y sea P_a la medida sobre Ω definida por $P_a(S) = P(\tau_a^{-1}(S))$, $S \subseteq \Omega$, S medible. Debemos probar que $P_a = P$. Por la unicidad de la medida P en el **Teorema 4.1.2**, es suficiente mostrar que

$$\int_\Omega f_1(\omega(t_1))f_2(\omega(t_2))\cdots f_n(\omega(t_n))dP_a(\omega)$$

$$= \langle M_{f_1}P_{t_2-t_1}M_{f_2}P_{t_3-t_2}\cdots P_{t_n-t_{n-1}}M_{f_n}\Omega_0, \Omega_0\rangle \cdots (1),$$

Para $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$, $f_i \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R})$. Por la fórmula de cambio de variables aplicada al lado izquierdo de la igualda anterior y considerando solamente una función cilíndrica f obtenemos, para $E \in \mathcal{F}$ y $f(\omega) = \chi_E(\omega)$,

$$\int_\Omega f(\omega)dP_a(\omega) = \int_\Omega \chi_E(\omega)dP_a(\omega) = \int_E dP_a(\omega) = P_a(E)$$

$$= P(\tau_a^{-1}(E)) = \int_{\tau_a^{-1}(E)} dP(\omega) = \int_\Omega \chi_{\tau_a^{-1}(E)}dP(\omega) = \int_\Omega \chi_E(\tau_a(\omega))dP(\omega).$$

Lo anterior se tiene por la igualdad

$$\chi_{\tau_a^{-1}(E)}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in \tau_a^{-1}(E) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Y así

$$\chi_{\tau_a^{-1}(E)}(\omega) = \chi_E(\tau_a(\omega)).$$

Todo lo anterior se ha hecho suponiendo solamente una función cilíndrica f y suponiendo que ésta, a su vez, es la función indicadora de un conjunto medible en Ω, pero lo mismo se hace cuando f es una función simple, y luego como f es no negativa ésta se puede aproximar por una sucesión creciente de funciones medibles y se aplica a cada una lo probado anteriormente y se tiene así el resultado para f no negativa en general; f se puede suponer siempre no negativa tomando para ello f^+ y f^-.
Por lo anterior el lado izquierdo de la igualdad (1) es

$$\int_\Omega f_1(\tau_a\omega(t_1))f_2(\tau_a\omega(t_2))\cdots f_n(\tau_a\omega(t_n))dP(\omega)$$

$$= \int_\Omega f_1(\omega(t_1+a))f_2(\omega(t_2+a))\cdots f_n(\omega(t_n+a))dP(\omega).$$

Claramente $t_1 + a \leq t_2 + a \leq ... \leq t_n + a$, luego haciendo $s_i = t_i + a$, entonces la definición de P implica que el lado derecho de la igualdad (1) es

$$\langle M_{f_1}P_{s_2-s_1}M_{f_2}P_{s_3-s_2}\cdots P_{s_n-s_{n-1}}M_{f_n}\Omega_0, \Omega_0\rangle,$$

y la afirmación se sigue porque $s_i - s_{i-1} = t_i - t_{i-1}$, $2 \leq i \leq n$.
Para probar la invarianza bajo la reflexión, hagamos $\tilde{P}(S) = P(r^{-1}(S))$, para $S \subseteq \Omega$, S medible, y notemos nuevamente que tenemos que probar la igualdad:

$$\int_\Omega f_1(\omega(t_1)) \cdots f_n(\omega(t_n))d\tilde{P}(\omega) = \langle M_{f_1}P_{t_2-t_1} \cdots P_{t_n-t_{n-1}}M_{f_n}\Omega_0, \Omega_0\rangle ...(2)$$

Para $t_1 \leq t_2 \leq ... \leq t_n$ en $\mathbf{R}$ y para toda $f_i \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R})$ el espacio de las funciones medibles y esencialmente acotadas sobre $\mathbf{R}$. Como ambos lados de la igualdad (2) son multilineales en las $f_i's$, podemos suponer que cada f_i es real.
Aplicando la fórmula de cambio de variables al lado izquierdo de la igualdad (2) considerando solamente una función cilíndrica f obtenemos, para $E \in \mathcal{F}$ y $f(\omega) = \chi_E(\omega)$ se obtiene,

$$\int_\Omega f(\omega)d\tilde{P}(\omega) = \int_\Omega \chi_E(\omega)d\tilde{P}(\omega) = \int_E d\tilde{P}(\omega) = \tilde{P}(E)$$

$$= P(r^{-1}(E)) = \int_{r^{-1}(E)} dP(\omega) = \int_\Omega \chi_{r^{-1}(E)}(\omega)dP(\omega) = \int_\Omega \chi_E(r(\omega))dP(\omega).$$

Lo anterior se tiene por la igualdad,

$$\chi_{r^{-1}(E)}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in r^{-1}(E) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

o bien, de manera equivalente

$$\chi_E(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } r(\omega) \in E \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Lo cual nos da la igualdad

$$\chi_{r^{-1}(E)}(\omega) = \chi_E(r(\omega)).$$

Lo anterior se hizo para una sola función cilíndrica f, pero lo mismo se puede hacer cuando f es una función simple, y luego como f es una función no negativa, f puede ser siempre aproximada por una sucesión creciente de funciones medibles y se aplica lo antes probado y se obtiene el resultado para una f no negativa en general; f se puede siempre suponer no negativa tomando para ello f^+ y f^-. Por lo anterior el lado izquierdo de la igualdad (2) es

$$\int_\Omega f_1(\omega(-t_1))f_2(\omega(-t_2))\cdots f_n(\omega(-t_n))dP(\omega)$$
$$= \int_\Omega f_n(\omega(-t_n))f_{n-1}(\omega(-t_{n-1}))\cdots f_1(\omega(-t_1))dP(\omega).$$

Puesto que $-t_n \leq -t_{n-1} \leq \cdots - t_2 \leq -t_1$, la última ecuación es

$$\langle M_{f_n}P_{t_n-t_{n-1}}M_{f_{n-1}}P_{t_{n-1}-t_{n-2}}\cdots P_{t_2-t_1}M_{f_1}\Omega_0,\Omega_0\rangle$$
$$= \langle \Omega_0, M_{f_1}P^*_{t_2-t_1}\cdots M_{f_{n-1}}P^*_{t_n-t_{n-1}}M_{f_n}\Omega_0\rangle$$
$$= \langle \Omega_0, M_{f_1}P_{t_2-t_1}\cdots P_{t_n-t_{n-1}}M_{f_n}\Omega_0\rangle = \langle M_{f_1}P_{t_2-t_1}\cdots P_{t_n-t_{n-1}}M_{f_n}\Omega_0,\Omega_0\rangle.$$

La primera igualdad es directa, la segunda es porque $P_t^* = P_t$, y la tercera es porque las funciones Ω_0 y $M_{f_1}P_{t_2-t_1}\cdots P_{t_n-t_{n-1}}M_{f_n}\Omega_0$ son real valuadas.

♣

4.2 PERTURBACIONES DEL OSCILADOR ARMÓNICO (FÓRMULA DE FEYNMAN-KAC).

En esta sección consideraremos al operador $H = H_0 + M_V$, donde V es una función continua, $V : \mathbf{R} \to [0, \infty)$. Uno de los problemas fundamentales en mecánica cuántica consiste en determinar cuándo H es autoadjunto. Este problema se puede tratar de manera "indirecta" contruyendo un semigrupo de contracciones $(Q_t)_{t\geq 0}$ en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ cuyo generador infinitesimal sea $-H$ ó alguna extensión autoadjunta de este operador.

Con referencia a la **Proposición 4.1.5** podemos definir dos operadores unitarios U_t y R sobre $\mathbf{L}^2(\Omega)$ mediante

$$(U_t F)(\omega) = F(\tau_t \omega), \quad t \in \mathbf{R}$$

$$y \qquad (RF)(\omega) = F(r\omega), \quad F \in \mathbf{L}^2(\Omega).$$

$(U_t)_{t\in\mathbf{R}}$ es un grupo fuertemente continuo de operadores unitarios en $\mathbf{L}^2(\Omega)$, y se tiene la relación

$$RU_t = U_{-t}R.$$

PROPOSICIÓN 4.2.1
Para cada $f \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R})$ *considérese el operador* $\sigma(f)$ *sobre* $\mathbf{L}^2(\Omega)$ *dado por*

$$\sigma(f)F(\omega) = f(\omega(0))F(\omega), \quad f \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R}), \quad F \in \mathbf{L}^2(\Omega)$$

define una $*$*-representación de* $\mathbf{C}_0(\mathbf{R})$ *sobre* $\mathbf{L}^2(\Omega)$.
Demostración. Sean $f, g \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R})$, $F \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ $\;y\;$ $\alpha \in \mathbf{C}$.

1. σ *es lineal.* En efecto

$$\sigma(\alpha f + g)F(\omega) = (\alpha f + g)(\omega(0))F(\omega) = (\alpha f(\omega(0)) + g(\omega(0)))F(\omega)$$

$$= \alpha f(\omega(0))F(\omega) + g(\omega(0))F(\omega) = \alpha\sigma(f)F(\omega) + \sigma(g)F(\omega).$$

2. $\sigma(f \cdot g) = \sigma(f) \cdot \sigma(g)$. En efecto,

$$\sigma(f \cdot g)F(\omega) = (f \cdot g)(\omega(0))F(\omega) = f(\omega(0)) \cdot g(\omega(0))F(\omega)$$

$$= \sigma(f)g(\omega(0))F(\omega) = \sigma(f) \cdot \sigma(g)F(\omega).$$

3. $\sigma(f^*)F(\omega) = \sigma(f)^*F(\omega)$. Esto es directo pues,

$$\begin{aligned}\sigma(f^*)F(\omega) &= \sigma(\overline{f})F(\omega) = \overline{f}(\omega(0))F(\omega)\\ &= \overline{f(\omega(0))}F(\omega) = \sigma(f)^*F(\omega).\end{aligned}$$

   Por lo tanto σ es un $*$-homomorfismo y así una $*$-representación del álgebra $\mathbf{C}_0(\mathbf{R})$ sobre el espacio de Hilbert $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

♣

Sea $\mathcal{A}$ el álgebra débilmente cerrada de operadores sobre $\mathbf{L}^2(\Omega)$ generada por

$$\{\sigma(f) : f \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R})\} \cup \{U_t : t \geq 0\}.$$

$\mathcal{A}$ es un álgebra de operadores no conmutativa y no autoadjunta sobre $\mathbf{L}^2(\Omega)$. En efecto,

1. *$\mathcal{A}$ es no conmutativa.* Basta ver que no conmutan dos elementos generadores, sea $f \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R})$, $F \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, entonces

$$\begin{aligned}\sigma(f)U_tF(\omega(x)) &= \sigma(f)F(\tau_t\omega(x)) = f(\tau_t\omega(0))F(\tau_t\omega(x))\\ &= f(\omega(t))F(\omega(x+t))\end{aligned}$$

   y por otra parte

$$\begin{aligned}U_t\sigma(f)F(\omega(x)) &= U_tf(\omega(0))F(\omega(x)) = f(\omega(0))U_tF(\omega(x))\\ &= f(\omega(0))F(\omega(x+t))\end{aligned}$$

   luego $\sigma U_t \neq U_t\sigma \quad \forall t > 0$.

2. *$\mathcal{A}$ no es autoadjunta.* Efectivamente, pues $U_{-t} = U_t^*$ no pertenece al álgebra $\mathcal{A}$.

♣

Un subespacio cerrado $\mathcal{M}$ de $\mathbf{L}^2(\Omega)$ se dice que es *semi-invariante* bajo el álgebra $\mathcal{A}$ (Ver [sa.]) si la proyección Q sobre $\mathcal{M}$ satisface $QABQ = QAQBQ$ para todos A, $B \in \mathcal{A}$.

PROPOSICIÓN 4.2.2

La transformación lineal

$$M_f\Omega_0 \longmapsto \sigma(f)\cdot 1, \quad f\in \mathbf{C}_0(\mathbf{R}).$$

Se extiende de manera única a una isometría W de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ en $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Además W satisface

$$P_{s_1}M_{f_1}P_{s_2}M_{f_2}...P_{s_n}M_{f_n} = W^*U_{s_1}\sigma(f_1)U_{s_2}\sigma(f_2)...U_{s_n}\sigma(f_n)W, \tag{38}$$

para $n\geq 1$ y para $s_i\in\mathbf{R}$, $s_i\geq 0$ y $f_i\in\mathbf{C}_0(\mathbf{R})$.

Comentario previo a la demostración. Denotaremos por $\tilde{\mathcal{M}}$ al subespacio de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, $\tilde{\mathcal{M}} = \{M_f\Omega_0 : f\in\mathbf{C}_0(\mathbf{R})\}$.
Sea $\tilde{W}:\tilde{\mathcal{M}}\longrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ definido por

$$\tilde{W}(M_f\Omega_0) = \sigma(f)\cdot 1 = f(\omega(0))\cdot 1.$$

Donde $1\in\mathbf{L}^2(\Omega)$ es la función constante identicamente igual a 1. W será una extensión de $\tilde{W}$ a todo $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$.
Además W satisface la ecuación (38) como una igualdad en $\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$ nótese que si A es un operador en el álgebra $\mathcal{A}$, entonces $W^*AW\in\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$,

$$\mathbf{L}^2(\mathbf{R})\underbrace{\longrightarrow}_{W}\mathbf{L}^2(\Omega)\underbrace{\longrightarrow}_{A}\mathbf{L}^2(\Omega)\underbrace{\longrightarrow}_{W^*}\mathbf{L}^2(\mathbf{R}).$$

Demostración. Por la definición de la medida P, tenemos para cada $f\in\mathbf{C}_0(\mathbf{R})$, que

$$\|\sigma(f)\cdot 1\|^2 = \int_\Omega |\sigma(f)1(\omega)|^2 dP(\omega) = \int_\Omega |f(\omega(0))|^2 dP(\omega) = \langle\Omega_0, M_{|f|^2}\Omega_0\rangle$$

$$= \langle\Omega_0, M_{\bar{f}f}\Omega_0\rangle = \langle\Omega_0, M_f^*M_f\Omega_0\rangle = \langle M_f\Omega_0, M_f\Omega_0\rangle = |M_f\Omega_0|^2.$$

Por lo tanto

$$\|\tilde{W}M_f\Omega_0\|^2 = |M_f\Omega_0|^2.$$

Aquí $|\cdot|$, $\langle .,.\rangle$ y $\|\cdot\|$, $\langle\langle .,.\rangle\rangle$ denotan las normas y productos internos en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ y $\mathbf{L}^2(\Omega)$ respectivamente.
Por lo tanto la transformación indicada $\tilde{W}$ de $\tilde{\mathcal{M}}$ en $\mathbf{L}^2(\Omega)$ es una isometría parcial. La extensión W de $\tilde{W}$ existe si $\tilde{\mathcal{M}}$ es un subespacio denso en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$.

Sea $g \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ y sea $\{g_n\}_{n\geq 1} \subset C_0(\mathbf{R})$ tal que $g_n \longrightarrow g$ en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, hagamos $f_n = \frac{1}{\Omega_0} g_n \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R})$, $n \geq 1$. Entonces $M_{f_n}\Omega_0 = g_n \longrightarrow g$ en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$. Por lo tanto, como $\mathbf{C}_0(\mathbf{R})$ es subespacio denso de $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, tenemos por lo anterior que $\tilde{\mathcal{M}}$ es denso en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, así existe una extensión W de $\tilde{W}$, que preserva la norma de $\tilde{W}$, es decir, es una isometría.
Para demostrar (38) sean $s_j = t_j - t_{j-1}$, para $t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ en $\mathbf{R}$. Entonces para $\xi = M_g\Omega_0$, $\eta = M_h\Omega_0$ con $g, h \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R})$, tenemos, usando los **Teoremas 4.1.2** y **4.1.5**,

$$
\begin{aligned}
&\langle P_{s_1} M_{f_1} P_{s_2} \cdots P_{s_n} M_{f_n} \xi, \eta\rangle \\
&= \langle M_{h^*} P_{t_1-t_0} M_{f_1} P_{t_2-t_1} \cdots P_{t_n-t_{n-1}} M_{f_n g}\Omega_0, \Omega_0\rangle \\
&= \int_\Omega h^*(\omega(t_0)) f_1(\omega(t_1)) \cdots f_{n-1}(\omega(t_{n-1})) f_n(\omega(t_n)) g(\omega(t_n)) dP(\omega) \\
&= \int_\Omega h^*(\omega(0)) f_1(\omega(t_1-t_0)) \cdots f_{n-1}(\omega(t_{n-1}-t_0)) f_n(\omega(t_n-t_0)) g(\omega(t_n-t_0)) dP(\omega) \\
&= \langle\langle U_{t_1-t_0}\sigma(f_1) U_{t_2-t_1}\sigma(f_2) \cdots U_{t_n-t_{n-1}}\sigma(f_n)\sigma(g)\cdot 1, \sigma(h)\cdot 1\rangle\rangle \\
&= \langle\langle U_{t_1-t_0}\sigma(f_1) U_{t_2-t_1}\sigma(f_2) \cdots U_{t_n-t_{n-1}}\sigma(f_n) W\xi, W\eta\rangle\rangle \\
&= \langle W^* U_{s_1}\sigma(f_1) U_{s_2}\sigma(f_2) \cdots U_{s_n}\sigma(f_n) W\xi, \eta\rangle.
\end{aligned}
$$

Y el resultado se obtiene de la densidad de ξ y η en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$.

♣

Como consecuencia directa de la igualdad (38), en la **Proposición 4.2.2** se tiene que si A y B son operadores en el álgebra $\mathcal{A}$ de la forma

$$A = U_{s_1}\sigma(f_1) U_{s_2}\sigma(f_2) \cdots U_{s_m}\sigma(f_m), \quad B = U_{t_1}\sigma(g_1) U_{t_2}\sigma(g_2) \cdots U_{t_n}\sigma(g_n),$$

donde s_i, $t_i \geq 0$, g_i, $f_i \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R})$, entonces

$$W^*AWW^*BW = W^*ABW.$$

De ésto se sigue que la aplicación $A \longmapsto WW^*AWW^*$ es multiplicativa sobre el álgebra $\mathcal{A}$.
También como consecuencia de la **Proposición 4.2.2** se tiene el siguiente resultado.

Corolario 4.2.3

El rango de W es un subespacio semi-invariante para el álgebra de operadores $\mathcal{A}$.

Es decir, si $W : \mathbf{L}^2(\mathbf{R}) \longrightarrow \mathbf{L}^2(\Omega)$ es una isometría y si E es la proyección sobre $W(\mathbf{L}^2(\mathbf{R}))$ entonces $E = WW^*$.

Demostación. Basta probar que si $F \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, entonces $EF = WW^*F$. Sea $F = Wg + f_1$ con $g \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$ *y* $f_1 \in (W(\mathbf{L}^2(\mathbf{R})))^\perp$, nótese que

$$\langle W^* f_1, f \rangle = \langle\langle f_1, Wf \rangle\rangle = 0, \quad \forall f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}),$$

entonces $W^* f_1 = 0$ por lo tanto $W^*F = W^*Wg$; además, como W es una isometría se tiene

$$\langle g, f \rangle = \langle\langle Wg, Wf \rangle\rangle = \langle W^*Wg, f \rangle, \quad \forall f \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R}),$$

entonces $W^*Wg = g$ y aplicando W obtenemos $WW^*Wg = Wg$, entonces $WW^*F = Wg = EF$.

♣

LEMA 4.2.4

Para cada $t \geq 0$ y cada $F \in B[0,t]$, el operador $M_F U_t$ pertenece a $\mathcal{A}$. Donde para cada $t \geq 0$, $B[0,t]$ denota a la subálgebra débil-$*$ cerrada de $\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ generada por las funciones (cilíndricas) de la forma

$$\omega \longmapsto f(\omega(s)) \quad f \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R}) \quad y \quad 0 \leq s \leq t.$$

Demostración. Como $B[0,t]$ es el álgebra débil-$*$ cerrada generada por las funciones $\omega \longmapsto f(\omega(s))$, $s \in [0,t]$ $f \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R})$, entonces las funciones cilíndricas pertenecen y son densas en $B[0,t]$, pues los elementos $B \in B[0,t]$ son de la forma $B = \omega^* - \lim_n B_n$ con B_n de la forma

$$B_n(\omega) = f_1(\omega(s_1)) \cdots f_n(\omega(s_n)), \quad f_j \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R}) \quad 0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_n \leq t.$$

La función de $\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ en $\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\Omega))$ definida por $F \longmapsto M_F$ es continua cuando en $\mathbf{L}^\infty(\Omega)$ ponemos la topología débil-$*$: $F_n \longmapsto^{\omega^*} F \iff (G, F_n) \longrightarrow (G, F)$, $G \in \mathbf{L}^1(\Omega)$ donde $(.,.)$ es el par de dualidad entre $\mathbf{L}^1(\Omega)$ y $\mathbf{L}^\infty(\Omega)$. Y en $\mathcal{B}(\mathbf{L}^2(\Omega))$ la topología débil:
$M_{F_n} \longrightarrow^\omega M_F \iff \langle u, M_{F_n} v\rangle \longrightarrow \langle u, M_F v\rangle \quad \forall u, v \in \mathbf{L}^2(\Omega)$.
En efecto, sea $\phi \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ y supongamos $\{F_n\}_{n\geq 1}$ es una red en $\mathbf{L}^2(\Omega)$ tal que $F_n \longmapsto^{\omega^*} F$.

$$\begin{aligned}\langle\langle \phi, F_n\phi\rangle\rangle &= \int_\Omega \phi^* M_{F_n}\phi dP(\omega) = \int_\Omega \phi^* F_n \phi dP(\omega) = \int_\Omega F_n(\omega)|\phi|^2(\omega) dP(\omega)\\ &= (F_n, |\phi|^2) \longrightarrow (F, |\phi|^2) = \langle\langle \phi, M_F\phi\rangle\rangle. \quad \forall \phi \in \mathbf{L}^2(\Omega).\end{aligned}$$

Por lo tanto $F \longmapsto M_F$ es continua.
Ahora podemos suponer que F es cilíndrica y en este caso

$$\begin{aligned}M_F U_t = f_1(\omega(s_1))\cdots f_n(\omega(s_n))U_t &= U_{s_1}\sigma(f_1)U^*_{s_1}U_{s_2}\sigma(f_2)U^*_{s_2}\cdots U_{s_n}\sigma(f_n)U^*_{s_n}U_t\\ &= U_{s_1}\sigma(f_1)U_{s_2-s_1}\sigma(f_2)\cdots U_{s_n-s_{n-1}}\sigma(f_n)U_{t-s_n} \in \mathcal{A}.\end{aligned}$$

El caso general se tiene por la densidad de $B[0,t]$ y por la continuidad de $F \mapsto M_F$.

♣

Procederemos ahora a construir el semigrupo de contracciones $\{Q_t\}_{t\geq 0}$, que tendrá a -H como su generador infinitesimal y además $Q^*_t = Q_t \quad \forall t \geq 0$.

Para cada $t \geq 0$ se define el funcional $C_t : \Omega \longrightarrow (0, \infty)$ mediante

$$C_t(\omega) = e^{-\int_0^t V(\omega(s))ds}.$$

La familia $\{C_t\}_{t\geq 0}$ tiene las siguientes propiedades:
(i) $0 < C_t(\omega) \leq 1$, $C_0(\omega) = 1$, $\omega \in \Omega$;
(ii) $C_{t+s}(\omega) = C_s(\omega)C_t(\tau_s\omega)$, (**propiedad de cociclo**).

Demostración La demostración de la igualdad (i) se obtiene directamente de la forma como se ha definido a la familia $\{C_t\}_{t\geq 0}$.
(ii) Tenemos que

$$C_{t+s}(\omega) = e^{-\int_0^{s+t} V(\omega(\tau))d\tau} = e^{-\int_0^s V(\omega(\tau))d\tau} e^{-\int_s^{s+t} V(\omega(\tau))d\tau}$$

$$C_s(\omega)e^{-\int_0^t V(\tau_s\omega(\tau))d\tau} = C_s(\omega)C_t(\tau_s\omega).$$

Una familia $\{C_t\}_{t\geq 0}$ con las propiedades (i) y (ii) se llama *cociclo.*

PROPOSICIÓN 4.2.5

Las condiciones (i) y (ii) son suficientes para que la familia $A_t = M_{C_t}U_t$ sea un semigrupo de contracciones en $\mathbf{L}^2(\Omega)$.

Demostración Tenemos que

$$(A_{s+t}F)(\omega) = (M_{C_{s+t}}U_{s+t}F)(\omega) = C_{s+t}(\omega)(U_{s+t}F)(\omega) = C_s(\omega)C_t(\tau_s\omega)F(\tau_{s+t}\omega),$$

por otra parte

$$(A_sA_tF)(\omega) = C_s(\omega)(A_tF)(\tau_s\omega) = C_s(\omega)C_t(\tau_s\omega)F(\tau_{s+t}\omega).$$

Y además $A_t \to I$ cuando $t \to 0^+$ por la propiedad (i) de la familia $\{C_t\}_{t\geq 0}$.

♣

PROPOSICIÓN 4.2.6

La familia $A_t = M_{C_t}U_t$ pertenece a $\mathcal{A}$ para cada $t \geq 0$.

Demostración Sean $\omega \in \Omega$ y $t \geq 0$ fijos. Como V es continua, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} V(\omega(\frac{kt}{n})) = \int_0^t V(\omega(s))ds.$$

Entonces si u_n es la función continua en $\mathbf{R}$ definida por

$$u_n(x) = e^{-\frac{t}{n}V(x)},$$

tenemos que

$$C_t(\omega) = \lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n} u_n(\omega(\frac{kt}{n})).$$

Si cada u_n pertenece a $\mathbf{C}_0(\mathbf{R})$ el resultado se sigue del **Lema 4.2.4**, pues para cada $t \geq 0$, $C_t \in B[0,t]$ ya que cada sucesión acotada convergente casi en todas partes es convergente en la topología débil-$*$ de $\mathbf{L}^\infty(\Omega)$. En el caso general, cada u_n se puede aproximar uniformemente en compactos de $\mathbf{R}$ por una sucesión en $\mathbf{C}_0(\mathbf{R})$.

♣

Sea E la proyección WW^*. Puesto que $\{M_{C_t}U_t : t \geq 0\}$ es un semigrupo en $\mathcal{A}$ y por el **Corolario 4.2.3** $W(\mathbf{L}^2(\mathbf{R})) \subset \mathbf{L}^2(\Omega)$ es un subespacio semi-invariante de $\mathcal{A}$, tenemos

$$EM_{C_{s+t}}U_{s+t}E = EM_{C_s}U_sM_{C_t}U_tE = EM_{C_s}U_sEM_{C_t}U_tE.$$

De aquí se sigue que la familia de operadores $\{Q_t : t \geq 0\}$ en $\mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, definidos por

$$Q_t = W^*M_{C_t}U_tW = W^*A_tW,$$

es un semigrupo de contracciones fuertemente continuo.

PROPOSICIÓN 4.2.7

$Q_t^* = Q_t$, *para cada* $t \geq 0$.

Demostración. Para probar esto, usaremos el operador de reflexión en el tiempo R. Afirmamos que $RW = W$. Por la definición de W, es suficiente probar que R deja fija cada función F en $\mathbf{L}^2(\Omega)$ de la forma $F(\omega) = f(\omega(0))$, donde $f \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R})$. Pero

$$RF(\omega) = F(r\omega) = f(r\omega(0)) = f(\omega(0)) = F(\omega),$$

puesto que $r\omega(0) = \omega(-0) = \omega(0)$. Ahora podemos escribir

$$Q_t^* = (W^*M_{C_t}U_tW)^* = W^*U_{-t}M_{C_t}W$$

$$= W^*RU_{-t}M_{C_t}RW = W^*U_tRM_{C_t}RW,$$

la última igualdad se sigue de la propiedad de conmutación $RU_{-t} = U_tR$. Podemos calcular de manera sencilla que $RM_{C_t}R$ es la multiplicación por la función

$$D(\omega) = e^{-\int_0^t V(\omega(-s))ds},$$

así que $U_tRM_{C_t}R$ es de la forma $U_tM_D = M_{\tilde{D}}U_t$, donde $\tilde{D}$ es la función

$$\tilde{D}(\omega) = D(\tau_t\omega) = e^{-\int_0^t V(\omega(t-s))ds} = C_t(\omega).$$

De esto se sigue que

$$Q_t^* = W^* M_{C_t} U_t W = Q_t,$$

como se deseaba probar. ♣

Por lo anterior $\{Q_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo fuertemente continuo y por lo tanto tiene un generador infinitesimal $-H$, que será una extensión de $-(H_0 + V)$. Es decir,

$$e^{-tH} = Q_t \quad \text{o bien} \quad e^{-tH} = W^* M_{C_t} U_t W. \tag{39}$$

La ecuación (39) es una reformulación de la fórmula de **Feynman-Kac** en términos de álgebras de operadores.

COMENTARIOS

1. Si en la ecuación (39) $V \equiv 0$, entonces $C_t \equiv 1$ y tenemos

$$P_t = e^{-tH_0} = W^* U_t W.$$

   Es decir, el semigrupo de contracciones P_t tiene una dilatación generada por el grupo de traslaciones U_t en el espacio de probabilidad (Ω, P).

2. En el caso en que $V \neq 0$, podemos decir que el semigrupo perturbado e^{-tH} tiene una dilatación de la forma $M_{C_t} U_t$, que es una perturbación de $(U_t)_{t\in\mathbf{R}}$ a través del cociclo C_t el cual fue definido en términos de V.

APÉNDICE A.1

En el este apéndice se obtendrá el *Núcleo de Mehler*, con el cual se prueba que el semigrupo de contracciones del oscilador armónico preserva positividad.

La positividad de e^{-tH} y el núcleo de Mehler.

Usando el resultado del **Teorema 4.1.2** obtendremos el núcleo $Q_t(x,y)$ para el operador e^{-tH_0}, es decir,

$$(e^{-tH_0}f)(x) = \int_{\mathbf{R}} Q_t(x,y)f(y)dy.$$

Usando la igualdad (36) del **Teorema 4.1.4**, para $f, g \in \mathbf{C}_0(\mathbf{R})$ se obtiene

$$\langle g, e^{-tH_0}f\rangle = \int_{\mathbf{R}}(e^{-tH_0}f)(x)g(x)dx = \int_{\mathbf{R}}(\int_{\mathbf{R}} Q_t(x,y)f(y)dy)g(x)dx$$

$$= \int_{\mathbf{R}^2} f(y)g(x)Q_t(x,y)dxdy = \int_{\mathbf{R}^2} f(y)\Omega_0^{-1}(y)\Omega_0(y)g(x)\Omega_0^{-1}(x)\Omega_0(x)Q_t(x,y)dxdy$$

$$= \int_{\mathbf{R}^2} f(y)\Omega_0^{-1}(y)g(x)\Omega_0^{-1}(x)dG_t(x,y) = \langle\Omega_0, (g\Omega_0^{-1})e^{-tH_0}(f\Omega_0^{-1})\Omega_0\rangle$$

$$= E(g\Omega_0^{-1}(q(s_0))f\Omega_0^{-1}(q(s_1))), \quad \text{con} \quad t = s_1 - s_0. \quad -\infty < s_0 < s_1 < \infty.$$

Lo cual nos dice que $G_t(x,y)$ es la distribución de probabilidad conjunta de las variables aleatorias $g\Omega_0^{-1}$ y $f\Omega_0^{-1}$. Calculemos ahora $Q_t(x,y)$:
La distribución conjunta de las variables aleatorias Gaussinas $d\Omega_0^{-1}$ y $f\Omega_0^{-1}$ es

$$dG_t(x,y) = (2\pi)^{-1}(detA)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j}^{2} b_{i,j}x_ix_j},$$

en nuestro caso $A = (a_{i,j})_{2x2}$ $(a_{i,j} = a_{j,i})$ es la matriz de covarianza conjunta de $g\Omega_0^{-1}$ y $f\Omega_0^{-1}$ y $B = A^{-1}$; donde

$$a_{i,j} = \int_{\mathbf{R}^2} f_if_jdG_t(x,y) = \langle x\Omega_0, e^{-(s_j-s_i)H_0}x\Omega_0\rangle.$$

En nuestro caso, usando cálculo funcional se obtiene

$$\langle x\Omega_0, x\Omega_0\rangle = \frac{1}{2}$$

y para τ real por cálculo funcional

$$e^{-\tau H_0}x\Omega_0 = e^{-\tau}x\Omega_0.$$

Así tenemos,

$$a_{11} = a_{22} = \langle x\Omega_0, x\Omega_0\rangle = \frac{1}{2}$$

$$a_{12} = a_{21} = \langle x\Omega_0, e^{-tH_0}x\Omega_0\rangle = \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Entonces la matriz de covarianza es

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & e^{-t} \\ e^{-t} & 1 \end{pmatrix}$$

calculando la inversa obtenemos para $t > 0$

$$B = \frac{2}{(1-e^{-2t})}\begin{pmatrix} 1 & -e^{-t} \\ -e^{-t} & 1 \end{pmatrix}$$

de donde

$$dG_t(x,y) = \pi^{-1}(1-e^{-2t})e^{\{-(1-e^{-2t})^{-1}(x^2+y^2-2xye^{-t})\}}dxdy$$

luego como $\Omega_0(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ entonces $\Omega_0^{-1}(x) = \pi^{\frac{1}{4}}e^{\frac{x^2}{2}}$ y finalmente obtenemos la fórmula o el núcleo de Mehler:

$$Q_t(x,y) = G_t(x,y)\Omega_0^{-1}(x)\Omega_0^{-1}(y)$$

$$= \pi^{-\frac{1}{2}}(1-e^{-2t})^{-\frac{1}{2}}e^{\{-(1-e^{-2t})^{-1}(x^2+y^2-2xye^{-t})+\frac{1}{2}(x^2+y^2)\}}.$$

Hemos obtenido el núcleo $Q_t(x,y)$ para e^{-tH_0} el cual es una función Gaussiana, por lo tanto, no negativa y así es claro que si f es no negativa entonces como se requería

$$P_t f = (e^{-tH_0}f)(x) = \int_{\mathbf{R}} Q_t(x,y)f(y)dy \geq 0.$$

CONCLUSIONES.

En el presente trabajo establecimos la dinámica para un sistema cuántico unidimensional cuyo Hamiltoniano H es un operador densamente definido, esto se hizo mediante una reformulación del principio de Ehrenfest en términos de $*$-automorfismos del álgebra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ de todos los operadores acotados en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, que resulta aceptable como principio básico de la dinámica cuántica. También se demostró que bajo ciertas condiciones de continuidad en la variable t, cada grupo de $*$-automorfismos $\{\alpha_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ es implementado por un grupo $\{U_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ fuertemente continuo de operadores unitarios cuyo generador infinitesimal es el Hamiltoniano de Schrödinger salvo constantes. En el tercer capítulo se hizo una revisión del modelo del oscilador armónico cuántico y se demostró, usando la versión a la Gelfand del teorema espectral, que la dinámica también es descrita por el semigrupo fuertemente continuo de contracciones que tiene por generador infinitesimal al Hamiltoniano del oscilador armónico H; en esta parte el objeto principal fué una $*$-representación del álgebra $\mathbf{L}^1[0,\infty)$.

En el cuarto capítulo retomamos el Hamiltoniano del oscilador armónico para establecer una versión de la fórmula de Feynman-Kac en términos de álgebras de operadores, para ello consideramos perturbaciones de un grupo unitario por cociclos. Aquí el objeto central resulta ser un álgebra de operadores no conmutativa y no autoadjunta.

Exiten fórmulas tipo Feynman-Kac para la ecuación de Dirac en términos de funcionales de ciertos procesos estocásticos, véase por ejemplo [R.Q], y un problema interesante sería describir, en su caso, la clase de álgebras de operadores asociadas con estas representaciones.

BIBLIOGRAFÍA.

[*Acc*] L. Accardi, Quantum Probability: an introduction to some basic ideas and trends, por aparecer en "Modelos Estocásticos". Memorias del VI Simposio de Probabilidad y Procesos Estocásticos, Gto. México; 2000.

[*Arv*1] W. Arveson, Ten Lectures On Operator algebras, Conference Board of the Mathematical Sciences by the AMS, Vol. 55; Providence, R. I.,1983.

[*Arv*2] W. Arveson, An Invitation to C^*-algebras, Graduate Texts in Math; no. 39, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1980.

[*Barg*] V. Bargmann, On Unitary Ray Representations of Continuos Groups, Ann. Math. 59, 1-46, 1954.

[*Ba*] Barry Simon, Functional Integration and Quantum Physics, Academic Press, New York 1979.

[*Kol.*] A.N. Kolmogórov y S. V. Fomín, Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional, Editorial Mir-Moscú, URSS, 1975.

[*H.G.*] H. Goldstein, Classical Mechanics, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. New York, 1964.

[*McB*] A.C.McBride, Semigroups of Linear Operators an Introduction, John Wiley and Sons, Inc. New York, 1987.

[*R.Q*] R. Quezada, Path Integral For Dirac Equation In Momentum Space, Univ. Iagellonicae, Acta Math., 29, 1980.

[*Rud*1] W. Rudin, Functional analysis, Mc Graw-Hill, New York, 1973.

[*Rud*2] W. Rudin, Real and Complex Analysis, Mc Graw-Hill, New York, 1966.

[*Sa*] D. Sarason, On Spectral Sets Having Connected Complement, Acta Sci. math. (Szeded), 26, 289-299.

[*We*1] J. Weidmann, Linear Operators in Hilbert Spaces, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1980.