



CASA ABIERTA AL TIEMPO

UNIVERSIDAD AUTONOMA
METROPOLITANA

IZTAPALAPA

DIVISION DE CIENCIAS BASICAS E INGENIERIA

SOLUCION NUMERICA DE PROBLEMAS
ELIPTICOS Y PARABOLICOS POR
MEDIO DEL METODO DE DOMINIOS
FICTICIOS

T E S I S

PARA LA OBTENCION DEL GRADO DE
MAESTRO EN MATEMATICAS

P R E S E N T A

JORGE LOPEZ LOPEZ

ASESOR: DR. HECTOR JUAREZ VALENCIA

ABRIL DE 1999

**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE PROBLEMAS
ELÍPTICOS
Y PARABÓLICOS POR MEDIO DEL MÉTODO
DE
DOMINIOS FICTICIOS.**

AGRADECIMIENTOS:

En primer lugar agradezco profundamente al Dr. Héctor Juárez Valencia el apoyo que me brindó como asesor de esta tesis. Le agradezco su disponibilidad y la calidad de sus observaciones y sugerencias.

Así mismo, agradezco al Dr. Alfredo Nicolás Carrizosa y al Dr. Jesús López Estrada por las observaciones hechas a este trabajo.

Agradezco al CONACYT por todo el apoyo económico brindado.

México, DF., Abril de 1999.
Jorge López López.

Índice

1 INTRODUCCIÓN	4
1.1 Espacios de Funciones	6
1.2 Formulaciones Débil y Variacional de problemas elípticos.	8
1.3 El Método del Elemento finito.	10
2 EL MÉTODO DE DOMINIOS FICTICIOS	14
2.1 El Problema de Dirichlet	14
2.2 Formulación en dominios ficticios.	15
2.2.1 Multiplicadores de Lagrange.	16
2.2.2 Cálculo del Multiplicador λ	20
2.2.3 Discretización y Convergencia.	22
2.2.4 El Método de Gradiente conjugado para aproximar λ	23
2.2.5 Cálculo de u^{n+1}	25
2.2.6 Gradiente Conjugado con Precondicionamiento para calcular λ	26
3 SOLUCIÓN COMPUTACIONAL DEL PROBLEMA	28
3.1 Detalles de la programación	28
3.1.1 SP1: aproximación de la solución de problemas elípticos del tipo (3.1).	29
3.1.2 SP2: aproximación de g^0	38
3.1.3 SP3: cálculo de $\int_{\gamma} g^n ^2 d\gamma$, $g^n \in \Lambda_h$	41
3.1.4 SP4: cálculo de $\int_{\gamma} u^n d^n d\gamma$, $u^n \in V_h$, $d^n \in \Lambda_h$	41
3.1.5 SP5: aproximación de g^{n+1}	41
3.1.6 Cálculo de la matriz de precondicionamiento $B_{\hat{\gamma}}$	42
3.1.7 SPP2: aproximación de g^0 con precondicionamiento	43
3.1.8 SPP3: cálculo de la nueva norma $b(g^n, g^n)$	44
3.1.9 SPP5: aproximación de g^{n+1} con precondicionamiento	44
3.2 Diagramas de Estructura	45
4 RESULTADOS NUMÉRICOS Y SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CALOR NO ESTACIONARIA	50
4.1 Resultados Numéricos	50
4.2 Solución de la Ecuación de Calor no estacionaria	57
5 CONCLUSIONES	61

Lista de figuras

1.1	Dominio omega	4
1.2	Dominios Ω y ω	5
1.3	Discretización de Ω	10
1.4	Función base local v_i^h	11
2.1	El dominio real ω y el dominio ficticio Ω	15
3.1	Etiquetación de nodos globales.	30
3.2	Etiquetación de triángulos.	30
3.3	Etiquetación de nodos locales.	31
3.4	División de la frontera γ	34
3.5	Un macroelemento.	35
3.6	Casos de intersección de acuerdo a la posición de los nodos.	36
3.7	Intersección de un elemento con uno ó dos segmentos de gama.	37
3.8	Método del Trapecio.	38
3.9	Diagrama de estructura para la subrutina principal ADMTRA.	45
3.10	Puntos que definen Omega.	46
3.11	Diagrama de estructura para ELIPTIC.	46
3.12	Diagrama de Estructura para GRCONJ.	47
3.13	Diagrama de Estructura para GCPREC.	48
4.1	Malla para V_h con $h=1/16$ y malla sobre γ con $M=12$: a) γ círculo y b) γ elipse. . .	51
4.2	Curvas de nivel para el problema 1 con frontera círculo: a) de la solución exacta y b) de la aproximada.	53
4.3	Curvas de nivel para el problema 1 con frontera elipse: a) de la solución exacta y b) de la aproximada.	53
4.4	Curvas de nivel para el problema 2 con frontera círculo: a) de la solución exacta y b) de la aproximada.	55
4.5	Curvas de nivel para el problema 2 con frontera elipse: a) de la solución exacta y b) de la aproximada.	56
4.6	Curvas de nivel para el problema 3: a) de la solución exacta y b) de la aproximada.	57
4.7	Dominio exterior para el problema de calor.	58
4.8	Curvas de nivel para el problema de calor con $T = 2$ y $\theta = 1.0$: a) de la solución exacta y b) de la aproximada.	60

Capítulo 1

INTRODUCCIÓN

Este trabajo trata sobre la solución numérica del siguiente problema elíptico: Encontrar una función u que satisfaga la ecuaciones

$$(1.1) \quad \alpha u - \nu \Delta u = f,$$

$$(1.2) \quad u = g \text{ sobre } \gamma,$$

en un dominio $\omega \subset R^d$, $d = 2, 3$, el cual es un dominio complejo arbitrario con frontera γ en R^d , como se ilustra en la figura 1.1.

Este tipo de problemas aparecen en ingeniería y ciencias en varios contextos. Por ejemplo, al resolver numéricamente las ecuaciones de Navier-Stokes y al discretizar la parte no estacionaria de la ecuación de calor.

Para resolver este problema se puede utilizar el método de diferencias finitas, pero para ello es necesario aplicar técnicas especiales de discretización en la vecindad de la frontera del dominio ω . También se puede utilizar el método de elemento finito pero, otra vez, el problema es la aproximación cerca de la frontera de ω , pues para discretizar adecuadamente el dominio cerca de la frontera es necesario utilizar elementos isoparamétricos. Esto último acarrea dificultades adicionales, sobre todo en lo que se refiere a la programación.

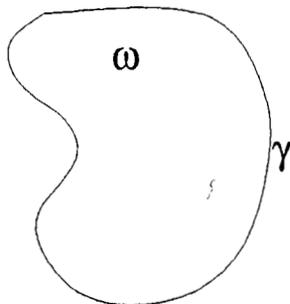


figura 1.1: Dominio omega

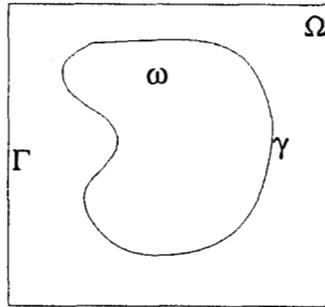


figura 1.2: Dominios Ω y ω

Como una alternativa a los métodos clásicos mencionados se tienen los métodos de dominios ficticios, también denominados métodos de encajamiento de dominios que consisten básicamente en cubrir el dominio original ω con otro dominio Ω , llamado dominio ficticio, el cual tiene frontera Γ sencilla. Por ejemplo para $d = 2$, Ω es un rectángulo (ver figura 1.2). Entonces se escoge un espacio de funciones V que se define sobre todo Ω y es el espacio donde se buscará una solución \tilde{u} tal que $\tilde{u}|_{\omega} = u$. Lo anterior es posible después de extender f adecuadamente a todo el dominio Ω . En el capítulo 2 se verá que la extensión \tilde{f} de f debe ser una función en L^2 tal que se satisface el siguiente problema sobre Ω : Encontrar $\tilde{u} \in V$ tal que

$$(1.3) \quad \alpha \tilde{u} - \nu \Delta \tilde{u} = \tilde{f} \text{ en } \Omega,$$

$$(1.4) \quad \tilde{u} = g \text{ sobre } \gamma.$$

La ventaja es que el problema (1.3)-(1.4) permite el uso de mallas mas o menos estructuradas para resolverlo numéricamente, permitiendo el uso de resolvedores rápidos en dominios triviales. La familia de métodos de dominios ficticios que se utilizan en este trabajo están basados en el uso explícito de multiplicadores de Lagrange definidos sobre la frontera real γ y asociados a las condiciones de frontera. Los métodos de dominios ficticios se han aplicado por diferentes autores a la solución de ecuaciones diferenciales parciales. En [20] se muestra que los métodos directos utilizados para resolver la ecuación discreta de Poisson en dominios rectangulares pueden también ser usados para resolver el problema en regiones irregulares. También puede consultarse [1] para obtener referencias sobre la solución de problemas más complicados utilizando los métodos de dominios ficticios.

En este trabajo se ilustra la aplicación del método de dominios ficticios para resolver el problema (1.1)-(1.2) para el cual la frontera γ es una circunferencia o una elipse, y se presenta una aplicación a la solución de la ecuación de calor no estacionaria en un dominio externo.

La distribución del contenido de esta tesis es como sigue: en lo que resta de este capítulo se tratan los espacios de funciones con los que se trabajará, se hace la formulación variacional del problema elíptico original, se describe el método de elemento finito y asimismo se describen los resultados teóricos básicos así como las dificultades asociadas con este método. En el capítulo 2 se trata la formulación del método de dominios ficticios para el problema elíptico que se desea resolver. En el capítulo 3 se describe la solución computacional del problema, explicando el contenido y la función

de cada subrutina del programa para resolver numéricamente el problema. Estas subrutinas se encuentran agrupadas por módulos, para cada uno de los cuales se presenta un diagrama de estructura que muestra la interrelación de las subrutinas que lo conforman. El capítulo 4 inicia presentando algunos resultados numéricos y comparándolos con otros resultados; se termina presentando una aplicación a la solución de la ecuación de calor no estacionaria en un dominio externo. Finalmente en el capítulo 5 se presentan las conclusiones y el trabajo futuro.

1.1 Espacios de Funciones

Se está interesado en resolver los problemas de tipo elíptico utilizando el método de elemento finito. Para hacer esto es necesario primero obtener lo que se denomina la formulación variacional del problema. Por esta razón primero se definen los espacios de funciones que se utilizarán y sus normas asociadas.

Definición.-Sea $\omega \subset R^n$ un abierto con frontera γ y sea $p \in R$ con $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{1,p}(\omega)$ se define por

$$W^{1,p}(\omega) = \{u \in L^p(\omega) \mid \exists g_1, \dots, g_n \in L^p(\omega) \text{ tal que}$$

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = - \int_{\Omega} g_i \varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(\omega), \forall i = 1, \dots, n\}.$$

Se introduce notación para un caso especial:

$$H^1(\omega) = W^{1,2}(\omega) \quad \text{y} \quad H_0^1(\omega) = \{v \in H^1 \mid v = 0 \text{ sobre } \gamma\}.$$

Para $u \in W^{1,p}(\omega)$ se denota

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = g_i \quad \text{y} \quad \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) = \text{grad } u.$$

El espacio $W^{1,p}(\omega)$ está dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{1,p}(\omega)} = \|u\|_{L^p(\omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\omega)},$$

en donde

$$\|u\|_{L^p(\omega)} = \left[\int_{\omega} |u|^p \right]^{1/p};$$

o también de la norma equivalente

$$\left(\|u\|_{L^p(\omega)}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\omega)}^p \right)^{1/p}.$$

El espacio $H^1(\omega)$ está dotado del producto escalar

$$(u, v)_{H^1(\omega)} = (u, v)_{L^2(\omega)} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\omega)} ;$$

la norma asociada

$$\|u\|_{H^1(\omega)} = \left(\|u\|_{L^2(\omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\omega)}^2 \right)^{1/2} .$$

En [5] Cap. VIII y IX, pueden encontrarse pruebas para las siguientes afirmaciones relativas a los espacios de Sobolev:

Proposición.-El espacio $H^1(\omega)$ es un espacio de Hilbert separable.

Definición.-Los espacios $W^{m,p}(\omega)$ se definen como sigue para $m \geq 2$ y p real, $1 \leq p \leq \infty$:

$$\begin{aligned} W^{m,p}(\omega) &= \left\{ u \in W^{m-1,p}(\omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\omega), \forall i = 1, \dots, n \right\} \\ &= \left\{ u \in L^p(\omega) \mid \forall \alpha \text{ con } |\alpha| \leq m \exists g_\alpha \in L^p(\omega) \text{ tal que} \right. \\ &\quad \left. \int_\omega u D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\omega g_\alpha \varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(\omega) \right\} \end{aligned}$$

se denota $D^\alpha u = g_\alpha$.

El espacio $W^{m,p}(\omega)$ dotado de la norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\omega)}$$

es un espacio de Banach. Se tiene notación para un caso especial:

$$H^m(\omega) = W^{m,2}(\omega),$$

$H^m(\omega)$ dotado del producto escalar

$$(u, v)_{H^m} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\omega)}$$

es un espacio de Hilbert.

Definición.-Sea $1 \leq p \leq \infty$; $W_0^{1,p}(\omega)$ designa el cierre de $C_c^1(\omega)$ en $W^{1,p}(\omega)$. Se denota

$$H_0^1(\omega) = W_0^{1,2}(\omega) = \{v \in H^1 \mid v = 0 \text{ sobre } \gamma\} .$$

El espacio $W_0^{1,p}(\omega)$ dotado de la norma inducida por $W^{1,p}(\omega)$ es un espacio de Banach separable. $H_0^1(\omega)$ es de Hilbert con el producto escalar en H^1 .

Proposición.-(Desigualdad de Poincaré) Sea ω abierto acotado. Entonces existe una constante C (dependiente de ω y de p) tal que

$$\|u\|_{L^p(\omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\omega), 1 \leq p < \infty.$$

La expresión $\|\nabla u\|_{L^p(\omega)}$ es una norma en $W_0^{1,p}(\omega)$ equivalente a la norma $\|u\|_{W^{1,p}(\omega)}$; en $H_0^1(\omega)$. La expresión $\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$ es un producto escalar que induce la norma $\|\nabla u\|_{L^2(\omega)}$ equivalente a la norma $\|u\|_{H^1(\omega)}$.

1.2 Formulaciones Débil y Variacional de problemas elípticos.

Considérese el siguiente problema elíptico. Encontrar u tal que

$$(1.5) \quad -\nu \Delta u + \alpha u = f, \text{ en } \omega \subset \mathbb{R}^2,$$

$$(1.6) \quad u = g \text{ sobre } \gamma = \partial\omega,$$

con $f \in C(\omega)$ y ω abierto acotado. Una solución clásica de este problema es una función $u \in C^2(\omega) \cap C(\bar{\omega})$ que verifica las ecuaciones (1.5) y (1.6). Sin embargo, desde el punto de vista de la aproximación numérica es mucho pedir que u se encuentre en $C^2(\omega)$. Por otro lado, puede resultar que f no necesariamente sea continua o que f sea una función generalizada como la delta de Dirac para las cuales no necesariamente existe solución clásica. Esto motiva que en lugar de resolver el problema (1.5)-(1.6) se haga lo siguiente:

Se multiplica la ecuación (1.5) por una función v llamada de prueba para la cual enseguida quedarán claras sus propiedades. Luego se integra la ecuación resultante sobre el dominio ω para tener

$$-\int_{\omega} \nu(\Delta u)v dx dy + \int_{\omega} \alpha uv dx dy = \int_{\omega} f v dx dy.$$

Utilizando la fórmula de Green se llega a

$$\nu \int_{\omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy - \int_{\partial\omega} \frac{\partial u}{\partial n} v d\gamma + \alpha \int_{\omega} uv dx dy = \int_{\omega} f v dx dy.$$

Si se escoge entonces que v esté en un espacio de funciones V definidas sobre ω y que se anulan en la frontera γ se tiene

$$(1.7) \quad \nu \int_{\omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy + \alpha \int_{\omega} uv dx dy = \int_{\omega} f v dx dy, \forall v \in V.$$

Nótese que esta ecuación tiene sentido si

$$u, v, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y} \in L^2(\omega) \text{ y } f \in L^2(\omega).$$

Por tanto, si definimos $V = \{v \in H^1(\omega) : v = g \text{ sobre } \gamma\}$, entonces el problema es encontrar $u \in V$ tal que

$$(1.8) \quad \nu \int_{\omega} \nabla u \cdot \nabla v dx dy + \alpha \int_{\omega} uv dx dy = \int_{\omega} f v dx dy, \forall v \in H_0^1(\omega)$$

Una función u que satisface (1.8) se llama una solución débil de (1.5)-(1.6), y a (1.8) se le conoce como la formulación débil de (1.5)-(1.6). Obsérvese que se resuelve un problema integral en lugar de un problema diferencial.

Si se hace $u = w + g$, con $g \in H^1(\omega)$ con extensión a $\bar{\omega}$ y $w \in H_0^1(\omega)$, el problema (1.8) se puede escribir como:

$$(1.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } w \in H_0^1(\omega) \text{ tal que} \\ \nu \int_{\omega} \nabla w \cdot \nabla v + \alpha \int_{\omega} wv = \int_{\omega} f v - \nu \int_{\omega} \nabla g \cdot \nabla v - \alpha \int_{\omega} gv, \forall v \in H_0^1(\omega). \end{array} \right.$$

Los problemas (1.8) y (1.9) son equivalentes y aunque en la práctica el que se resuelve es éste último, aquí se prueba la existencia y unicidad para la solución del problema (1.8).

Teorema. -Si $f \in L^2(\omega)$, existe una única solución débil para el problema (1.8).

Demostración: Se supone que existe una función $\tilde{g} \in H^1(\omega) \cap C(\bar{\omega})$ tal que $\tilde{g} = g$ sobre γ . Esta hipótesis se verifica si ω es de clase C^1 y $g \in C^1(\gamma)$. Si ω es suficientemente regular no es necesario suponer que $\tilde{g} \in C(\bar{\omega})$. Aplicando la teoría de trazas, es suficiente saber que $\tilde{g} \in H^1(\omega)$, esto es, que $g \in H^{1/2}(\gamma)$, ver [5].

Se introduce el convexo cerrado

$$K = \{v \in H^1(\omega) : (v - \tilde{g}) \in H_0^1(\omega)\}.$$

El conjunto K es no vacío y es independiente de la elección de \tilde{g} (ver [5], pp. 176).

Obsérvese también que $u \in K$ es una solución débil de (1.8) si y sólo si se verifica

$$(1.10) \quad \nu \int_{\omega} \nabla u \cdot (\nabla v - \nabla u) + \alpha \int_{\omega} u(v - u) = \int_{\omega} f(v - u), \forall v \in K.$$

En efecto, si u es solución débil de (1.8) es claro que

$$\nu \int_{\omega} \nabla u \cdot (\nabla v - \nabla u) + \alpha \int_{\omega} u(v - u) = \int_{\omega} f(v - u), \forall v \in K.$$

Inversamente, si $u \in K$ verifica (1.10) se pone $v = u \pm w$, con $w \in H_0^1(\omega)$ y entonces se tiene

$u \in K$ satisface

$$\nu \int_{\omega} \nabla u \cdot \nabla w + \alpha \int_{\omega} uw = \int_{\omega} fw, \forall w \in H_0^1(\omega),$$

que por definición significa que u es solución débil de (1.8). Además si se pone

$$a(u, v) = \nu \int_{\omega} \nabla u \cdot \nabla v + \alpha \int_{\omega} uv,$$

$$\varphi(v) = \int_{\omega} fv,$$

se tiene que la forma $a(\cdot, \cdot)$ es bilineal, continua y coerciva en H^1 y $\varphi \in (H^1)'$ pues $f \in L^2$. Se aplica entonces el teorema de Stampachia (ver [5], pp. 176) con $H = H^1(\omega)$ y se concluye que existe una única solución débil u de (1.8) y que

$$(1.11) \quad u = \min_{v \in K} \left\{ \frac{1}{2} \left(\nu \int_{\omega} |\nabla v|^2 + \alpha \int_{\omega} v^2 - 2 \int_{\omega} fv \right) \right\}.$$

A la ecuación (1.11) se le conoce como la formulación variacional de (1.5)-(1.6).

El teorema anterior prueba la existencia y unicidad de la solución débil para el problema (1.1)-(1.2). Se tiene que si f y g son suficientemente suaves (continuas, por ej.), entonces la solución débil también es la solución clásica.

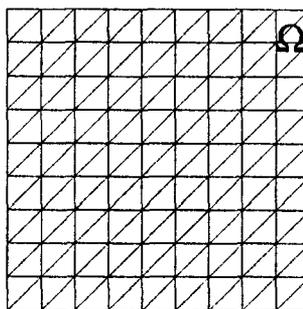


figura 1.3: Discretización de Ω

1.3 El Método del Elemento finito.

Aún y cuando el dominio ω del problema de interés es un dominio complejo, el método de dominios ficticios requiere de la solución por elemento finito de ciertos problemas elípticos pero definidos en un dominio trivial, es decir, un cuadrado o un rectángulo. Por eso la descripción que se hace en esta sección del método de elemento finito se hace sobre un dominio trivial. Por tal particularidad se denota a este por Ω .

Una vez obtenida la formulación variacional para un problema elíptico, para obtener una aproximación por elemento finito es necesario tomar un espacio V_h de dimensión finita contenido en el espacio V de las funciones de prueba que intervienen en la formulación variacional. El espacio V_h se forma de la siguiente manera:

EF1.-Se hace una discretización del dominio Ω por medio de triángulos K satisfaciendo (ver figura 1.3)

$$1) \bar{\Omega} = \cup K.$$

$$2) \overset{\circ}{K}_i \cap \overset{\circ}{K}_j = \emptyset \text{ para } i \neq j. (\overset{\circ}{K} = \text{interior de } K).$$

3) Si K_i y K_j son adyacentes dos de sus vértices deben coincidir, es decir, no se permite que un vértice de K_i sea punto interior de un lado de K_j .

EF2.-Se define el espacio V_h y los elementos que serán base para tal espacio. Con la discretización anterior de Ω la cual se denota por τ_h se asocian la siguiente definición y los siguientes espacios de dimensión finita:

Definición.-Si $K \in \tau_h$ entonces se define a h_K como el diámetro del triángulo K , esto es, la longitud del lado más largo de K . Igualmente se define ρ_K como el diámetro del círculo inscrito en K . Se define

$$h = \max_{K \in \tau_h} h_K.$$

Definición.-Para $K \in \tau_h$ y $\Omega \subset R^2$ se define

$$P_1(K) = \{p : K \rightarrow R \mid p(x, y) = a + bx + cy\},$$

$$V_h(\Omega) = \{v \in C^0(\Omega) : v|_K \in P_1(K), \forall K \in \tau_h\},$$

$$W_h(\Omega) = \{v \in V_h(\Omega) : v(n_j) = 0, \forall n_j \in \partial\Omega\}.$$

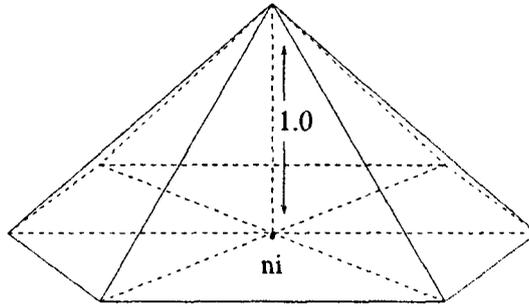


figura 1.4: Función base local v_i^h .

La base de V_h son las funciones v_i^h que están en V_h y que toman los siguientes valores:

$$v_i^h(n_j) = \delta_{ij}$$

para n_j un vértice o nodo de la triangulación τ_h . Se supone que los vértices están etiquetados o numerados de 1 a N . Entonces la base de V_h consta de tantos elementos como nodos tenga la triangulación. La base de W_h son las funciones v_i^h asociadas con los nodos interiores de la triangulación de Ω . Es fácil ver que las v_i^h son linealmente independientes y que cualquier función $u \in V_h$ se puede escribir como una combinación lineal de ellas, esto es, $\{v_i^h\}_{i=1}^N$ es una base para V_h . En figura 1.4 se ilustra una función base v_i^h .

Al espacio V_h que se forma con los pasos anteriores se le llama un espacio de elemento finito. Una vez hecho lo anterior se sustituye V_h por H^1 ó W_h por H_0^1 en la formulación variacional (1.9) para obtener el problema discreto asociado:

$$(1.12) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } w_h \in W_h \text{ tal que} \\ a(w_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle, \forall v_h \in W_h, \end{cases}$$

donde

$$a(w_h, v_h) = \nu \int_{\Omega} \nabla w_h \cdot \nabla v_h + \alpha \int_{\Omega} w_h v_h$$

y

$$\langle f, v_h \rangle = \int_{\Omega} f v_h - \nu \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla v_h - \alpha \int_{\Omega} g v_h.$$

Si

$$w_h = \sum_{i=1}^{N_w} \alpha_i v_i^h, \text{ donde } \{v_i^h\}_{i=1}^{N_w} \text{ es base de } W_h$$

se tiene que las α_i deben satisfacer

$$\sum_{i=1}^{N_w} \alpha_i a(v_i^h, v_j^h) = \langle f, v_j^h \rangle, \quad j = 1, \dots, N_w,$$

o equivalentemente

$$A\alpha = b,$$

donde $a_{ij} = a(v_i^h, v_j^h)$ y $b_j = \langle f, v_j^h \rangle$. La matriz A es simétrica y positiva definida, por lo cual el vector solución α existe y es único, así que la aproximación w_h a la solución w existe y es única. Para el fácil cálculo de los elementos de la matriz A se hace uso de la propiedad de aditividad de la integral y de la forma en que se discretizó el dominio Ω :

$$a_{ij} = \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\nu \nabla v_i^h \cdot \nabla v_j^h + \alpha v_i^h v_j^h).$$

Nótese que $a_{ij} = 0$ si el nodo n_j no es vértice de algún triángulo del que n_i sea vértice. En el capítulo 3 se describen con más detalle los cálculos para obtener la matriz A y el vector b , así como la discretización del dominio Ω .

Se presentan ahora algunos resultados básicos en relación con la solución u del problema

$$(1.13) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } u \in V \text{ tal que} \\ a(u, v) = \varphi(v), \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

donde V es un espacio de Hilbert; la forma $a : V \times V \rightarrow R$ es bilineal, continua, V -elíptica o coerciva y simétrica; y la forma $\varphi : V \rightarrow R$ pertenece a V' , el dual de V . Con estas hipótesis se garantiza, via el teorema de Lax-Milgram (ver [5], pp. 86), la existencia y unicidad de la solución u de (1.13).

Después de hacer una discretización de (1.13) se tiene el problema discreto

$$(1.14) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ a(u_h, v) = \varphi(v), \quad \forall v \in V_h \end{cases}$$

Teorema.-Sea $u \in V$ solución de (1.13) y sea $u_h \in V_h$ solución de (1.14). Entonces

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\gamma}{\alpha} \|u - v\|_V, \quad \forall v \in V_h,$$

con γ y α las constantes de elipticidad y continuidad, respectivamente.

La demostración de este y los siguientes teoremas pueden encontrarse en [8] Cap. II, ó en [13].

Definición.-Sea $a : V \times V \rightarrow R$ una forma con las propiedades mencionadas arriba. Entonces $(u, v)_a = a(u, v)$ es un producto escalar y se define la norma de energía como

$$\|v\|_a^2 = a(v, v).$$

Se tiene que la norma $\|\cdot\|_a$ es equivalente a la norma asociada con V .

Teorema.-Sea $u \in V$ solución de (1.13). Sea $u_h \in V_h$ solución de (1.14). Entonces u_h es la proyección de u sobre V_h ; esto es,

$$\|u - u_h\|_V = \inf_{v \in V_h} \|u - v\|_V.$$

Supóngase ahora que $V = H_0^1(\omega)$, $\omega \subset \mathbb{R}^2$. Considérese el espacio de elemento finito V_h . Supóngase también que existe una constante β independiente de la triangulación τ_h tal que

$$\frac{\rho_k}{h_k} \geq \beta, \forall K \in \tau_h.$$

Con estos supuestos se tiene el siguiente

Teorema.-Sea $K \in \tau_h$ con vértices a^1, a^2, a^3 . Dada una función continua v en K , sea el interpolante $\Pi v \in P_1(K)$ definido por

$$\Pi v(a^i) = v(a^i), i = 1, 2, 3$$

Entonces

$$\|v - \Pi v\|_{L^\infty(K)} \leq 2h_k^2 \max_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|_{L^\infty(K)},$$

donde

$$\|v\|_{L^\infty(K)} = \max_{x \in K} |v(x)|.$$

Teorema.-Sea $u \in V$ solución de (1.13). Sea $u_h \in V_h$ solución de (1.14). Si además $u \in H^2(\omega)$ se tiene que existe C independiente de h tal que

$$\|u - u_h\|_{H^1(\omega)} \leq Ch \|D_2 u\|_{L^2(\omega)}.$$

A partir del teorema anterior se puede demostrar convergencia del método de elemento finito en $H^1(\omega)$, simplemente tomando el límite cuando $h \rightarrow 0$. Finalmente se presenta un último resultado el cual permite tener una estimación del error para cada $x \in \omega$ en el caso que la solución débil u sea también la solución clásica:

Teorema.-Supóngase que la solución u del problema (1.13) está en $C^2(\omega)$ y que u_h es la solución de (1.14) (usando funciones lineales por pedazos). Entonces existe una constante C independiente de h tal que

$$\max_{x \in \omega} |u(x) - u_h(x)| \leq Ch^2 |\ln h| \max_{x \in \omega} |D_2 u(x)|.$$

Capítulo 2

EL MÉTODO DE DOMINIOS FICTICIOS

2.1 El Problema de Dirichlet

Considérese el siguiente problema de Dirichlet. Sea $\omega \subset R^2$ dominio acotado con frontera γ Lipchitz continua, como se muestra en la figura 1.1. Dado $f \in H^{-1}(\omega)$ y $g \in H^{1/2}(\gamma)$ encontrar $u \in H^1(\omega)$ tal que

$$(2.1) \quad \alpha u - \nu \Delta u = f \text{ en } \omega,$$

$$(2.2) \quad u = g \text{ sobre } \gamma,$$

$$\text{con } \alpha \geq 0, \nu > 0.$$

Como ya se dijo en la introducción de esta tesis, se está interesado en encontrar una aproximación numérica para este problema, el cual, según se vió, tiene solución única en $H^1(\omega)$. Esta también es solución del problema variacional:

$$(2.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in V_g = \{v \in H^1(\omega) : v = g \text{ sobre } \gamma\} \text{ tal que} \\ a(u, v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in H_0^1(\omega), \end{array} \right.$$

en donde

$$a(u, v) = \nu \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \alpha \int_{\Omega} uv$$

y

$$\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} fv.$$

En el resto de este capítulo se considerará $\omega \subset R^d$ con $d = 2, 3$. En el capítulo 3 se considera otra vez el caso $d = 2$.

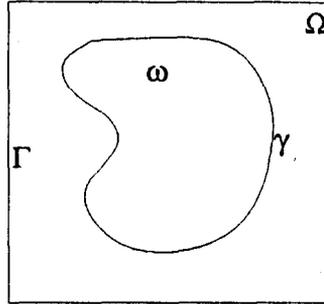


figura 2.1: El dominio real ω y el dominio ficticio Ω

2.2 Formulación en dominios ficticios.

Por simplicidad, se considera $f \in L^2(\omega)$ en lugar de tomar $f \in H^{-1}(\omega)$. Luego se considera un dominio Ω en forma de "caja" (rectangular cuando $d = 2$) que contenga a ω y tal que $\Gamma \cap \gamma = \emptyset$, con $\Gamma = \partial\Omega$. Véase la figura 2.1. Se hace una extensión \tilde{u} de u a Ω de tal forma que $\tilde{u}|_{\omega} = u$ y $\tilde{u} \in V$, un espacio de prueba adecuado sobre Ω . Opciones posibles para V son $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ ó $H_p^1(\Omega)$ donde

$$H_p^1(\Omega) = \{v \mid v \in H^1(\Omega), v \text{ periódica en } \Gamma\}.$$

En este trabajo se escoge $V = H_0^1(\Omega)$. Entonces se extiende f a todo el dominio ficticio Ω , esto es, se define $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ tal que $\tilde{f}|_{\omega} = f$, y de tal manera que se satisfaga la ecuación diferencial (2.1) en todo $\Omega \setminus \gamma$. Con esto se llega al problema "extendido":

$$(2.4) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } \tilde{u} \in V \text{ tal que} \\ \alpha \tilde{u} - \nu \Delta \tilde{u} = \tilde{f}, \text{ en } \Omega \setminus \gamma \\ \tilde{u}|_{\gamma} = g \end{cases}$$

La solución del problema anterior es equivalente al problema de minimización con restricciones (véase capítulo anterior):

$$(2.5) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } \tilde{u} \in V \text{ tal que} \\ J(\tilde{u}) \leq J(v), \forall v \in K = \{v \in V : v|_{\gamma} = g\} \end{cases}$$

en donde

$$(2.6) \quad J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\alpha v^2 + \nu |\nabla v|^2) dx dy - \int_{\Omega} \tilde{f} v dx dy, v \in V$$

2.2.1 Multiplicadores de Lagrange.

El método de multiplicadores de Lagrange es una herramienta para tratar problemas de optimización con restricciones, ya sea maximizar o minimizar. Generalmente se tiene contacto con este método por primera vez cuando se desean encontrar los máximos y los mínimos de una función f definida de R^n en R , y sujeta a algunas restricciones. La aplicación que se hará en este trabajo es una generalización de las ideas ya conocidas. En este caso se debe optimizar sobre un espacio de funciones, es decir, en lugar de una función f se tiene un funcional que se denota en lo sucesivo por J . El funcional J de interés que se considera en este trabajo es (2.6).

La primera variación $\langle \delta J(u), v \rangle$ en $u \in V$ de J está dada por

$$(2.7) \quad \langle \delta J(u), v \rangle := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} J(u + \varepsilon v) = \int_{\Omega} (\nu \nabla u \cdot \nabla v + \alpha uv - fv) dx dy.$$

Se considera el problema en un marco más abstracto. Sea J un funcional arbitrario, $J : H \rightarrow R$, donde H es un espacio de Hilbert. Sea K un subconjunto de H de tal manera que los elementos de K satisfacen la restricción

$$(2.8) \quad Bu = g,$$

donde B es un operador lineal de H en otro espacio de Hilbert Q . Se desea minimizar J en K :

$$(2.9) \quad \begin{array}{l} \text{Encontrar } u \in K \text{ tal que} \\ J(u) \leq J(v), \forall v \in K. \end{array}$$

El método de multiplicadores de Lagrange permite replantear (2.9) como un problema donde se busca un mínimo global. Para tal efecto se introduce el funcional $L : H \times Q' \rightarrow R$ definido por

$$(2.10) \quad L(v, q) = J(v) + [q, Bv - g],$$

donde Q' es el dual de Q y $[\cdot, \cdot]$ denota par de dualidad en $Q' \times Q$. Los elementos $q \in Q'$ son los multiplicadores asociados al problema con restricciones y el funcional L en (2.10) se llama el Lagrangiano correspondiente a J y al conjunto de restricciones K .

Ahora, en lugar de obtener las derivadas con respecto a v y con respecto a q , se calcula la primera variación de L en $(u, p) \in H \times Q'$:

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \langle \delta L(u, p), (v, q) \rangle_{H \times Q'} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} L(u + \varepsilon v, p + \varepsilon q) \\ &= \langle \delta J(u), v \rangle + [p, Bv] + [q, Bu - g], \end{aligned}$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H \times Q'}$ denota par de dualidad en $(H \times Q')' \times (H \times Q')$; $\langle \delta J(u), v \rangle$ es la primera variación de J en u . Demandando que (u, p) sea tal que $\langle \delta L(u, p), (v, q) \rangle_{H \times Q'} = 0$ para arbitrarios $v \in H$ y $q \in Q'$, se llega al problema variacional

$$(2.12) \quad \begin{array}{l} \langle \delta J(u), v \rangle + [p, Bv] = 0, \forall v \in V, \\ [q, Bu - g] = 0, \forall q \in Q'. \end{array}$$

Bajo ciertas condiciones la solución u de (2.12) es la solución del problema (2.9). Sobre esto tratan las siguientes subsecciones.

Condiciones para la existencia de puntos silla.

La introducción del funcional L en (2.10) transforma el problema de minimización (2.9) en un problema de punto silla (2.12). En relación con esto se tiene la siguiente

Definición.-Un punto silla del funcional $L : H \times Q' \rightarrow R$ es un par (u, p) con $u \in H$ y $p \in Q$ tal que

$$L(u, q) \leq L(u, p) \leq L(v, p), \forall v \in H, \forall q \in Q'.$$

Las desigualdades anteriores significan que para q fijo, $L(v, q)$ toma su mínimo en $u \in H$ y para v fijo $L(v, q)$ toma su máximo en $p \in Q$. Puede verse en [9], que existe al menos un punto silla $(u, p) \in H \times Q'$ de $L(v, q)$ y que (u, p) es una solución del problema variacional con condiciones en la frontera (2.12) si se dan las siguientes condiciones:

L-a) Para $q_0 \in Q'$ fijo, $L(v, q_0)$ es estrictamente convexo y diferenciable con respecto a v .

L-b) Para $v_0 \in H$ fijo, $L(v_0, q)$ es concava y diferenciable con respecto a q .

L-c) Se puede encontrar un $q_0 \in Q'$ tal que $L(v, q_0)$ es coercivo con respecto a v en el sentido de que

$$\lim_{\|v\|_H \rightarrow \infty} L(v, q_0) = +\infty.$$

L-d) Se puede encontrar un $v_0 \in H$ tal que $L(v_0, q)$ es (negativamente) coercivo con respecto a q en el sentido de que

$$\lim_{\|q\|_{Q'} \rightarrow \infty} L(v_0, q) = -\infty.$$

Las condiciones mencionadas se establecen sobre L . Enseguida se dan tres condiciones sobre J que son "casi" equivalentes a las anteriores:

J-a) El funcional $J : H \rightarrow R$ es continuo y satisface

— J es diferenciable.

— J es estrictamente convexo.

— J es coercivo, en particular $J(v) \geq C_0 \|v\|_H^2 - C_1(f) \|v\|_H$.

J-b) El operador de restricciones $B : H \rightarrow Q$ es un operador lineal acotado.

J-c) El operador variacional $\delta J : H \rightarrow H'$ es acotado.

Se tiene que J-a) y J-b) corresponden respectivamente con L-a) y L-b). También, ya que

$$\begin{aligned} |[q, Bv - g]| &\leq \|q\|_{Q'} (\|Bv\|_Q + \|g\|_Q) \\ &\leq \|q\|_{Q'} (C_B \|v\|_H + \|g\|_Q), \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} L(v, q) &= J(v) + [q, Bv - g] \\ &\geq C_0 \|v\|_H^2 - (C_1(f) + C_B \|q\|_{Q'}) \|v\|_H - \|q\|_{Q'} \|g\|_Q, \end{aligned}$$

lo cual implica que $L(v, q) \rightarrow \infty$ mientras que $\|v\|_H \rightarrow \infty$ para cualquier q fijo. Así que la condición L-c) sobre L también se da a partir de las condiciones para J .

Pero desafortunadamente, con las condiciones mencionadas para J no se puede verificar la condición L-d) dada para L . Así que las condiciones sobre J son insuficientes para garantizar la existencia de un punto silla de L . Pero si se introduce un lagrangiano perturbado definido por

$$(2.13) \quad L_\varepsilon(v, q) = L(v, q) - \frac{\varepsilon}{2} \|q\|_{Q'}^2,$$

donde $L(v, q)$ está dado por (2.10) y ε es un número positivo arbitrario, y ya que $L_\varepsilon(v, q) \rightarrow -\infty$ cuando $\|q\|_{Q'} \rightarrow \infty$, todas las condiciones L-a)-L-d) sobre L se cumplen; así que existe un punto silla $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ de L_ε en $H \times Q'$ para cada $\varepsilon > 0$. Más aún, $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ es una solución del problema variacional de condiciones a la frontera

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \langle \delta J(u_\varepsilon), v \rangle + [p_\varepsilon, Bv] &= 0, \quad \forall v \in V, \\ [q, Bu_\varepsilon] - \varepsilon [q, p_\varepsilon] &= [q, g], \quad \forall q \in Q'. \end{aligned}$$

Ahora la cuestión que se presenta es si la sucesión de soluciones $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ de (2.14) tiene como límite la solución (u, p) de (2.12) cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. La respuesta es que bajo las condiciones mencionadas, la sucesión $(u_\varepsilon, p_\varepsilon)$ converge débilmente a (u, p) siempre y cuando se suponga

$$(2.15) \quad \|p_\varepsilon\|_{Q'} \leq C_1 = \text{constante independiente de } \varepsilon$$

Pero el requerimiento en (2.15) no se puede garantizar con las condiciones dadas, así que una condición adicional y fundamental es necesaria para completar esta parte de la teoría:

La Condición de Babuska-Brezzi.

Recordando J-c) de las condiciones sobre J para la existencia de un punto silla de L , si $\|u_\varepsilon\|_H \leq C_1$, se debe tener

$$\langle \delta J(u_\varepsilon), v \rangle \geq \|\delta J(u_\varepsilon)\|_{H'} \|v\|_H \leq C_2 \|v\|_H, \quad \forall v \in H.$$

Así que la primera ecuación en (2.14) implica

$$|[p_\varepsilon, Bv]| = |\langle \delta J(u_\varepsilon), v \rangle| \leq C_2 \|v\|_H$$

para funciones de prueba arbitrarias $v \in H$. Así, si una constante $\beta > 0$ existe tal que

$$(2.16) \quad \beta \|p_\varepsilon\|_{Q'} \|v\|_H \leq |[p_\varepsilon, Bv]| \leq C_2 \|v\|_H$$

para v arbitrario en H , se tendría

$$\|p_\varepsilon\|_{Q'} \leq \frac{C_2}{\beta},$$

lo que implicaría que (2.15) se cumple y se garantiza entonces la existencia de una solución para el problema de punto silla (2.12) o (2.14).

En vista de (2.16) se introduce la siguiente condición adicional:

$$(2.17) \quad \begin{aligned} &\text{Existe una constante } \beta > 0 \text{ tal que} \\ \beta \|q\|_{Q'} &\leq \sup_{v \in H, v \neq 0} \frac{|[q, Bv]|}{\|v\|_H}, \quad \forall q \in Q'. \end{aligned}$$

Claramente, mientras (2.17) se dé se está garantizando la existencia de un $p \in Q'$ para el cual una sucesión de multiplicadores p_ϵ , los cuales son soluciones del problema perturbado (2.14), converge débilmente en Q' .

Condiciones como (2.17) juegan un papel fundamental en el estudio de problemas elípticos con condiciones a la frontera con restricciones. Tales condiciones fueron primero propuestas y estudiadas para problemas lineales elípticos y sus aproximaciones por Babuska (ver [2] y [3]) y por Brezzi (ver [6]) en su importante trabajo en problemas de punto silla. Por tal motivo se conocen estas condiciones como *condiciones de Babuska-Brezzi*. Para terminar con esta sección se resumen los principales resultados en el siguiente

Teorema.-Supóngase que se dan las condiciones J-a) hasta J-c) y que la condición (2.17) también se dá. Entonces existe un único punto silla $(u, p) \in H \times Q'$ del lagrangiano L dado en (2.10) y este punto silla es también la solución del problema (2.12).

Puede mostrarse que bajo leves condiciones adicionales la sucesión (u_ϵ, p_ϵ) converge fuertemente a una solución (u, p) de (2.12). Pero de nuevo la condición de Babuska-Brezzi juega un papel definitivo. La condición de Babuska-Brezzi se considerará otra vez posteriormente pero en una versión discreta.

Aplicando los resultados anteriores sobre multiplicadores de Lagrange a (2.5) se llega al problema de punto silla (obsérvese que $Bv = v|_\gamma$):

$$(2.18) \quad \begin{cases} \langle \delta J(\tilde{u}), v \rangle - [\lambda, v|_\gamma] = 0, \forall v \in V. \\ [\mu, \tilde{u}|_\gamma - g] = 0, \forall \mu \in H^{-1/2}(\gamma). \end{cases}$$

Con lo cual se tiene que el problema (2.5) es equivalente al problema de punto silla: Encontrar $(\tilde{u}, \lambda) \in V \times H^{-1/2}(\gamma)$ tal que

$$(2.19) \quad \begin{cases} a_\Omega(\tilde{u}, v) = \int_\Omega \tilde{f} v + [\lambda, v], \forall v \in V \\ [\mu, \tilde{u}|_\gamma - g] = 0, \forall \mu \in H^{-1/2}(\gamma) \end{cases}$$

donde $a_\Omega(v, w) = \int_\Omega (\alpha v w + \nu \nabla v \cdot \nabla w)$.

Equivalencia entre el problema (2.3) y el problema (2.19) de punto silla. (\Leftarrow): Supóngase que se satisface (2.19). Sea $v \in V$ tal que $v|_\omega \in H_0^1(\omega)$ y $v = 0$ sobre $\Omega \setminus \omega$. Entonces \tilde{u} satisface

$$a_\Omega(\tilde{u}, v) = \int_\Omega \tilde{f} v, \forall v \in H_0^1(\omega).$$

Además, también se satisface $\tilde{u} = g$ sobre γ . Por lo tanto $\tilde{u}|_\omega$ es solución del problema (2.3). (\Rightarrow): Supóngase que (2.3) se satisface. Con las condiciones dadas para \tilde{u} y \tilde{f} se tiene

$$\begin{aligned} \alpha \tilde{u} - \nu \Delta \tilde{u} &= \tilde{f}, \text{ en } \Omega \setminus \gamma, \\ \tilde{u} |_{\gamma} &= g. \end{aligned}$$

Entonces utilizando la fórmula de Green se tiene

$$\int_{\Omega} (\alpha \tilde{u} v + \nu \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v) dx - \int_{\gamma} v \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \right] ds - \int_{\Gamma} v \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} ds = \int_{\Omega} \tilde{f} v dx, \forall v \in V.$$

donde $\left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \right]$ denota el salto de la derivada de \tilde{u} en la dirección normal sobre la frontera γ . De donde se obtiene

$$a_{\Omega}(\tilde{u}, v) = \int_{\Omega} \tilde{f} v dx + \int_{\gamma} v \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \right] ds, \forall v \in V,$$

$$\int_{\gamma} \mu(\tilde{u} - g) d\gamma = 0, \forall \mu \in H^{-1/2}(\gamma).$$

Poniendo $\lambda = \left[\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} \right]$ se obtiene (2.19).

2.2.2 Cálculo del Multiplicador λ .

En lo que sigue se toma $V = H_0^1(\Omega)$ por simplicidad. En ésta sección se muestra que el multiplicador λ es la solución de la ecuación de frontera

$$A\lambda = \beta,$$

donde A es un isomorfismo fuertemente elíptico de $H^{-1/2}(\gamma)$ a $H^{1/2}(\gamma)$.

Considérese el problema siguiente:

$$(2.20) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } u_{\mu} \in V \text{ tal que} \\ a_{\Omega}(u_{\mu}, v) = [\mu, v], \forall v \in V \end{cases}$$

el cual tiene solución única. Se define el operador $A : H^{-1/2}(\gamma) \rightarrow H^{1/2}(\gamma)$ por

$$A\mu = u_{\mu} |_{\gamma}.$$

El operador A definido así satisface:

- $A \in L(H^{-1/2}(\gamma), H^{1/2}(\gamma))$.

- A es 1-1 pues la solución del problema (2.20) es única.

- A es autoadjunto:

$$[\mu', A\mu] = [\mu', u_{\mu}] = a_{\Omega}(u_{\mu'}, u_{\mu}) = a_{\Omega}(u_{\mu}, u_{\mu'}) = [A\mu', \mu].$$

- A es elíptico:

$$[A\mu, \mu] = [u_{\mu}, \mu] = a_{\Omega}(u_{\mu}, u_{\mu}) \geq \|u_{\mu}\|_V^2.$$

También, se define u_0 como la solución del problema

$$(2.21) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } u_0 \in V \text{ tal que} \\ a_\Omega(u_0, v) = \int_\Omega \tilde{f} v dx, \forall v \in V \end{cases}$$

Entonces a partir de la primera ecuación de (2.19) y con la definición de A y de u_0 se tiene que

$$\begin{aligned} a_\Omega(\tilde{u}, v) &= \int_\Omega \tilde{f} v dx + [\lambda, v], \forall v \in V \\ &= a_\Omega(u_0, v) + [\lambda, v], \forall v \in V \end{aligned}$$

De esto se tiene que

$$a_\Omega(\tilde{u} - u_0, v) = [\lambda, v], \forall v \in V.$$

Por lo tanto

$$A\lambda = (\tilde{u} - u_0)|_\gamma = g - u_0|_\gamma$$

Si se pone $\beta = g - u_0|_\gamma$ entonces se tiene que

$$A\lambda = \beta.$$

Por las propiedades de A (ver Apéndice) se puede encontrar λ utilizando el método de gradiente conjugado. Obsérvese que el problema de resolver $A\lambda = \beta$ es equivalente al problema

$$(2.22) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } \lambda \in H^{-1/2}(\gamma) \text{ tal que} \\ \langle \mu, A\lambda \rangle = \langle \mu, g - u_0 \rangle, \forall \mu \in H^{-1/2}(\gamma). \end{cases}$$

Se tiene una dificultad más: Es difícil manipular el espacio $H^{-1/2}(\gamma)$ y como

$$H^{1/2}(\gamma) \subset L^2(\gamma) \subset H^{-1/2}(\gamma),$$

se considera a $L^2(\gamma)$ como el espacio de los multiplicadores y de la imagen de A . Esta simplificación tiene una justificación más: $\lambda = [\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}]$, es decir, λ es el salto de $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}$ en γ y $\lambda \in L^2(\gamma)$ si g es suficientemente suave (esto se da si $g \in H^s(\gamma)$, $s > 1$).

Entonces si la solución λ de (2.22) está en $L^2(\gamma)$, también es solución del problema

$$(2.23) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } \lambda \in L^2(\gamma) \text{ tal que} \\ \int_\Omega (A\lambda)\mu d\gamma = \int_\Omega (g - u_0)\mu d\gamma, \forall \mu \in L^2(\gamma). \end{cases}$$

En la subsección 2.2.4 se verá la aplicación de gradiente conjugado para resolver (2.23).

2.2.3 Discretización y Convergencia.

Para discretizar el problema (2.19) simplemente se toman subespacios $V_h \subset V$ y $\Lambda_h \subset L^2(\gamma)$ de dimensión finita para tener el problema:

$$(2.24) \quad \begin{cases} \text{Encontrar } (u_h, \lambda_h) \in V_h \times \Lambda_h \text{ tal que} \\ a_\Omega(u_h, v_h) = \int_\Omega \tilde{f} v_h + \int_\gamma \lambda_h v_h d\gamma, \forall v_h \in V_h \\ \int_\gamma (u_h - g_h) \mu_h d\gamma = 0, \forall \mu_h \in \Lambda_h, \end{cases}$$

donde g_h es una aproximación de g . En [7] y [10] se puede ver que una condición suficiente para la convergencia de (2.24) cuando $h \rightarrow 0$ es la condición discreta de Babuska-Brezi o *inf-sup*:

$$(2.25) \quad \sup_{v_h \in V_h} \frac{\int_\gamma u_h v_h d\gamma}{\|v_h\|_{1,\Omega}} \geq \beta \|\mu_h\|_{0,\gamma}, \forall \mu_h \in \Lambda_h,$$

para algún $\beta > 0$.

El espacio V_h puede ser un espacio de elemento finito basado en una malla regular de Ω . Λ_h puede estar relacionado directamente a la geometría de γ y no necesita satisfacer propiedades de discretización uniforme. También debe tenerse en cuenta que el espacio Λ_h juega el papel de $L^2(\gamma)$ y de $H^{-1/2}(\gamma)$, el cual es el espacio natural del multiplicador λ . De esto tiene sentido usar un espacio Λ_h consistente de funciones discontinuas sobre γ (funciones constantes por pedazos, por ejemplo). Como se enfatiza en [1], en comparación con los métodos de encajamiento previos, el método de dominios ficticios no requiere ajustar la malla de elemento finito de Ω a la geometría de ω y γ . Además, los espacios Λ_h y V_h son bastante independientes y esto sugiere definir Λ_h a partir de las propiedades geométricas intrínsecas de γ . Esto particularmente conviene en aquellas situaciones en las que ω está sujeto a movimientos de cuerpo rígido.

En [1] se prueba un resultado de convergencia para la solución de (2.24) para el caso particular $g = 0 = g_h$ en (2.19) y (2.24). Con esto se justifica la aproximación (2.24). Para tal resultado se supone que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ y $\{V_h\}_h$ es una familia de espacios de elemento finito asociados a una familia $\{\tau_h\}_h$ de triangulaciones de elemento finito de Ω . Aquí h es la longitud de la arista más larga de τ_h , V_h es definido por

$$V_h = \{v_h : v_h \in V \cap C^0(\bar{\Omega}), v_h|_K \in P_1(K), \forall K \in \tau_h\},$$

y Λ_h definido por

$$\Lambda_h = \left\{ \mu_h : \mu_h \in L^2(\gamma), \mu_h|_{A_i \widehat{A}_{i+1}} = \text{constante}, \forall i \right\},$$

donde $A_i \widehat{A}_{i+1}$, para $i = 1, \dots, M$ y $A_{M+1} = A_1$, son arcos sucesivos de γ que no se traslapan. Además se supone que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max_i \int_{A_i \widehat{A}_{i+1}} d\gamma = 0,$$

y que el ángulo de $\{\tau_h\}_h$ permanece uniformemente alejado de 0 (esto es, existe $\theta_0 \neq 0$ tal que $\theta_h \geq \theta_0, \forall \theta_h$ ángulo de $\tau_h, \forall h$). Con estos supuestos se cumple

$$(2.26) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \|u_h - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)} = 0,$$

donde u_h (respectivamente \tilde{u}) es la solución de (2.24) (respectivamente (2.19)).

2.2.4 El Método de Gradiente conjugado para aproximar λ .

En esta sección se describe el algoritmo de gradiente conjugado para aproximar la solución de la ecuación $A\lambda = \beta$. El algoritmo que se describe enseguida es básicamente el algoritmo GC1 que se presenta en el apéndice pero considerando el producto escalar en $L^2(\gamma)$ en lugar del producto escalar en R^n :

ALGORITMO GC2:

P1: $\lambda^0 \in L^2(\gamma)$ dado.

P2: $g^0 = A\lambda^0 - \beta$. ($\beta = g - u_0 |_\gamma$).

P3: $d^0 = g^0$.

Para $n \geq 0$ suponiendo λ^n, g^n, d^n conocidos, calcular $\lambda^{n+1}, g^{n+1}, d^{n+1}$ como sigue:

P4: $\alpha_n = (\|g^n\|_{L^2(\gamma)}^2) / (Ad^n, d^n)_{L^2(\gamma)}$.

P5: $\lambda^{n+1} = \lambda^n - \alpha_n d^n$.

P6: $g^{n+1} = g^n - \alpha_n Ad^n$. ($g^{n+1} = A\lambda^{n+1} - \beta$).

Checar convergencia:

P7: Si $\|g^{n+1}\|_{L^2(\gamma)} / \|g^0\|_{L^2(\gamma)} \leq \varepsilon^2$ tomar $\lambda = \lambda^{n+1}$ y parar. Si no calcular

P8: $\beta_n = \|g^{n+1}\|_{L^2(\gamma)}^2 / \|g^n\|_{L^2(\gamma)}^2$.

P9: $d^{n+1} = g^{n+1} + \beta_n d^n$. Hacer $n = n + 1$ e ir a P4.

FIN DEL ALGORITMO GC2.

Para aproximar λ falta incorporar la acción del operador A . Enseguida se detallan cada uno de los pasos que consideraran el efecto de A :

En P2: Se debe calcular g^0 como

$$\begin{aligned} g^0 &= A\lambda^0 - \beta. \\ &= A\lambda^0 - (g - u_0) |_\gamma. \end{aligned}$$

Entonces

$$g^0 = u_{\lambda^0} |_\gamma + u_0 |_\gamma - g |_\gamma,$$

donde u_{λ^0} es la imagen de λ^0 bajo A y u_0 es la que se definió en (2.21). De donde

$$g^0 = u^0 |_\gamma - g |_\gamma,$$

donde $u^0 |_\gamma = u_{\lambda^0} |_\gamma + u_0 |_\gamma$. Por lo que g^0 resuelve el problema variacional

$$g^0 \in L^2(\gamma) : \int_\gamma g^0 \mu d\gamma = \int_\gamma (u^0 - g) \mu d\gamma, \forall \mu \in L^2(\gamma)$$

Por lo tanto, para calcular g^0 primero se resuelve

$$u^0 \in V : a_\Omega(u^0, v) = \int_\Omega \tilde{f}v dx + \int_\gamma \lambda^0 v d\gamma, \forall v \in V$$

y entonces se resuelve para g^0 .

En P4: Para calcular α_n debe calcularse $(Ad^n, d^n)_{L^2(\gamma)}$, donde por la forma de actuar del operador A se tiene que $Ad^n = \bar{u}^n$, en donde \bar{u}^n resuelve

$$\bar{u}^n \in V : a_\Omega(\bar{u}^n, v) = \int_\gamma d^n v d\gamma, \forall v \in V.$$

Por lo que una vez calculado \bar{u}^n se calcula α_n como

$$\alpha_n = \frac{\int_\gamma |g^n|^2 d\gamma}{\int_\gamma \bar{u}^n d^n d\gamma}.$$

En P6: Se tiene que calcular g^{n+1} como

$$g^{n+1} = g^n - \alpha_n Ad^n.$$

Entonces

$$g^{n+1} = g^n - \alpha_n \bar{u}^n.$$

donde \bar{u}^n es la que se calculó en P4 y por lo tanto g^{n+1} resuelve el problema variacional

$$g^{n+1} \in L^2(\gamma) : \int_\gamma g^{n+1} \mu d\gamma = \int_\gamma g^n \mu d\gamma - \alpha_n \int_\gamma \bar{u}^n \mu d\gamma, \forall \mu \in L^2(\gamma).$$

Incorporando al algoritmo GC2 los detalles descritos se llega al algoritmo de gradiente conjugado para aproximar la solución del problema $A\lambda = \beta$:

ALGORITMO GC3:

P1: $\lambda^0 \in L^2(\gamma)$ dado.

P2: Resolver los problemas:

$$u^0 \in V : a_\Omega(u^0, v) = \int_\Omega \tilde{f}v dx + \int_\gamma \lambda^0 v d\gamma, \forall v \in V.$$

$$g^0 \in L^2(\gamma) : \int_\gamma g^0 \mu d\gamma = \int_\gamma (u^0 - g) \mu d\gamma, \forall \mu \in L^2(\gamma).$$

P3: $d^0 = g^0$.

Para $n \geq 0$ suponiendo λ^n, g^n, d^n conocidos, calcular $\lambda^{n+1}, g^{n+1}, d^{n+1}$ como sigue:

P4: Resolver

$$\bar{u}^n \in V : a_\Omega(\bar{u}^n, v) = \int_\gamma d^n v d\gamma, \forall v \in V.$$

Calcular

$$\alpha_n = (\int_\gamma |g^n|^2 d\gamma) / (\int_\gamma \bar{u}^n d^n d\gamma).$$

P5: $\lambda_{n+1} = \lambda_n - \alpha_n d^n$.

P6: Resolver

$$g^{n+1} \in L^2(\gamma) : \int_{\gamma} g^{n+1} \mu d\gamma = \int_{\gamma} g^n \mu d\gamma - \alpha_n \int_{\gamma} \bar{u}^n \mu d\gamma, \forall \mu \in L^2(\gamma).$$

Checar convergencia:

P7: Si $\|g^{n+1}\|_{L^2(\gamma)} / \|g^n\|_{L^2(\gamma)} \leq \varepsilon^2$ tomar $\lambda = \lambda_{n+1}$ y parar. Si no calcular

P8: $\beta_n = \|g^{n+1}\|_{L^2(\gamma)}^2 / \|g^n\|_{L^2(\gamma)}^2$.

P9: $d^{n+1} = g^{n+1} - \beta_n d^n$. Hacer $n = n + 1$ e ir a P4.

FIN DEL ALGORITMO GC3.

2.2.5 Cálculo de u^{n+1} .

Recapitulando un poco, se tiene que el método de gradiente conjugado se ha utilizado para aproximar el valor del multiplicador λ de la ecuación

$$a_{\Omega}(\tilde{u}, v) = \int_{\Omega} \tilde{f} v dx + \int_{\gamma} \lambda v d\gamma, \forall v \in V.$$

del problema de punto silla resultante al tratar el problema de minimización (2.19) con el método de multiplicadores de Lagrange. Con el algoritmo GC3 se calcula una sucesión (λ_n) que converge a la solución λ del problema de punto silla (2.19). Para cada λ_n se tiene una solución u^n del problema

$$a_{\Omega}(u^n, v) = \int_{\Omega} \tilde{f} v dx + \int_{\gamma} \lambda_n v d\gamma, \forall v \in V,$$

la que pudiera calcularse una vez conocido λ_n para tener una sucesión (u^n) que converge a la solución \tilde{u} buscada. Pero el problema de calcular los u^n puede simplificarse si se toma en cuenta que si u^n resuelve

$$a_{\Omega}(u^n, v) = \int_{\Omega} \tilde{f} v dx + \int_{\gamma} \lambda_n v d\gamma, \forall v \in V,$$

y u^{n+1} resuelve

$$a_{\Omega}(u^{n+1}, v) = \int_{\Omega} \tilde{f} v dx + \int_{\gamma} \lambda_{n+1} v d\gamma, \forall v \in V,$$

entonces $u^{n+1} - u^n$ resuelve

$$a_{\Omega}(u^{n+1} - u^n, v) = \int_{\gamma} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) v d\gamma, \forall v \in V,$$

por lo que

$$\begin{aligned} a_{\Omega}(u^{n+1} - u^n, v) &= \int_{\gamma} -\alpha_n d^n v d\gamma, \forall v \in V, \\ &= a_{\Omega}(-\alpha_n \bar{u}^n, v), \forall v \in V, \end{aligned}$$

para \bar{u}^n calculada en P4; de donde

$$u^{n+1} - u^n = -\alpha_n \bar{u}^n,$$

y entonces u^{n+1} se puede calcular como

$$(2.27) \quad u^{n+1} = u^n - \alpha_n \bar{u}_n,$$

Así que puede calcularse u^n junto con λ_n solamente añadiendo la ecuación (2.27) en P5 y la ecuación $\bar{u} = u^{n+1}$ en P7 del algoritmo GC3.

Antes de concluir esta subsección considérense la siguientes observaciones:

-La forma bilineal $a_\Omega(\cdot, \cdot)$ es independiente de ω y γ , lo cual es una justificación para el método de dominios ficticios.

-El efecto de la geometría real del problema (ω, γ) , toma lugar en todas las integrales de línea sobre la frontera γ y en la forma en que se construye \tilde{f} .

-Para obtener la forma discreta del algoritmo GC3 simplemente se reemplaza V por V_h y $L^2(\gamma)$ por Λ_h .

2.2.6 Gradiente Conjugado con Precondicionamiento para calcular λ .

La teoría de GC dice que el número de iteraciones k crece como $k \sim \mathcal{O}(n^{5/2})$, en donde $n = 1/h$, si el número de condición es $K(A) = n^5$. El análogo discreto de A tiene como número de condición $K(A) = n$, así que en este caso el número de iteraciones k crece conforme $\mathcal{O}(n^{1/2}) = \mathcal{O}(h^{-1/2})$.

Como se sabe (ver el Apéndice), se puede usar precondicionamiento para reducir el número de iteraciones. Para una frontera suave $\gamma = \gamma(s)$, con s la longitud de arco, se tiene que

$$(2.28) \quad A \sim B = \left(\frac{\alpha}{\nu} I - \frac{d^2}{ds^2} \right)^{-1/2}.$$

Entonces B puede usarse como preconditionador para el algoritmo de gradiente conjugado, así que el nuevo producto escalar sobre γ es

$$(2.29) \quad b(\mu, \mu') = \int_\gamma (B\mu)\mu' d\gamma, \quad \forall \mu, \mu' \in L^2(\gamma).$$

El algoritmo de GC con preconditionador para resolver $A\lambda = \beta$ es el siguiente:

ALGORITMO GCP2:

P1: $\lambda^0 \in L^2(\gamma)$ dado.

P2: Resolver los problemas:

$$u^0 \in V : a_\Omega(u^0, v) = \int_\Omega \tilde{f}v dx + \int_\gamma \lambda^0 v d\gamma, \quad \forall v \in V.$$

$$g^0 \in L^2(\gamma) : b(g^0, \mu) = \int_\gamma (u^0 - g)\mu d\gamma, \quad \forall \mu \in L^2(\gamma).$$

P3: $d^0 = g^0$.

Para $n \geq 0$ suponiendo λ^n, g^n, d^n conocidos, calcular $\lambda^{n+1}, g^{n+1}, d^{n+1}$ como sigue:

P4: Resolver

$$\bar{u}^n \in V : a_\Omega(\bar{u}^n, v) = \int_\gamma d^n v d\gamma, \quad \forall v \in V.$$

Calcular

$$\alpha_n = b(g^n, g^n) / \int_\gamma \bar{u}^n d^n d\gamma.$$

P5: $\lambda^{n+1} = \lambda^n - \alpha_n d^n$. $u^{n+1} = u^n - \alpha_n \bar{u}_n$.

P6: Resolver

$$g^{n+1} \in L^2(\gamma) : b(g^{n+1}, \mu) = b(g^n, \mu) - \alpha_n \int_{\gamma} \bar{u}^n \mu d\gamma, \forall \mu \in L^2(\gamma).$$

Checar convergencia:

P7: Si $b(g^{n+1}, g^{n+1})/b(g^0, g^0) \leq \varepsilon^2$ tomar $\lambda = \lambda_{n+1}$ y parar. Si no calcular

P8: $\beta_n = b(g^{n+1}, g^{n+1})/b(g^n, g^n)$.

P9: $d^{n+1} = g^{n+1} + \beta_n d^n$. Hacer $n = n + 1$ e ir a P4.

FIN DEL ALGORITMO GCP2.

Nótese que en el algoritmo básico con preconditionamiento que aparece en el apéndice los cálculos en cada paso involucran la inversa de la matriz de preconditionamiento, mientras que en el algoritmo anterior lo que se utiliza es el preconditionador B y no su inverso. Lo que se hizo fue hacer el cambio siguiente:

$$g^n = B\tilde{g}^n.$$

Con esto se tiene que los algoritmos son equivalentes. Para obtener la forma discreta del algoritmo GCP2 se reemplaza V por V_h y $L^2(\gamma)$ por Λ_h y la implantación del algoritmo via elemento finito es directa, unicamente debe establecerse el producto escalar discreto asociado con el operador discreto correspondiente a B de (2.28):

Mapeando los puntos de la división de γ a los puntos de la malla uniforme con paso $\hat{h} = 1/M$, sobre el círculo $\hat{\gamma}$ de longitud unidad, donde M es el número de puntos sobre γ , se tiene que

$$(2.30) \quad B = \left(\frac{\alpha}{\nu} I - \frac{1}{s^2} \frac{d^2}{d\xi^2} \right)^{-1/2}, \quad \xi \in [0, 1], \quad s = \text{longitud de } \gamma,$$

y entonces el preconditionador discreto es

$$(2.31) \quad B_{\hat{h}} = \left(\frac{\alpha}{\nu} I_M - \frac{1}{s^2} \Delta_{\hat{h}} \right)^{-1/2},$$

donde I_M es la matriz identidad de orden $M \times M$ y

$$-\Delta_{\hat{h}} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Los vectores y valores propios de $-\Delta_{\hat{h}}$ son conocidos explícitamente. Por tanto se puede calcular (2.31) sin mucha dificultad. En el siguiente capítulo, que es donde se describe el desarrollo de la programación del método de dominios ficticios para el problema de interés, se encontrarán más detalles sobre esto. También se puede consultar [1] y [14].

Capítulo 3

SOLUCIÓN COMPUTACIONAL DEL PROBLEMA

3.1 Detalles de la programación

En esta sección se describen los detalles de programación de los algoritmos GC3 y GCP2. Para llevar a cabo tal programación se consideran cinco subproblemas bien definidos. Se trata primero el caso para el algoritmo GC3 y luego se hace lo correspondiente para el algoritmo GCP2. Entonces, los subproblemas y sus divisiones para el caso GC3 son:

SP1: Aproximar por elemento finito la solución de problemas de la forma

$$(3.1) \quad \begin{cases} \text{Dados } f \in L^2(\Omega) \text{ y } \lambda \in \Lambda_h, \text{ encontrar } u \in V_h \text{ tal que} \\ a_\Omega(u, v) = \int_\Omega \tilde{f} v dx + \int_\gamma \lambda v d\gamma, \forall v \in V_h. \end{cases}$$

SP2: Aproximar la solución de problemas variacionales de la forma

$$(3.2) \quad \begin{cases} \text{Dado } u^0 \in V_h, \text{ encontrar } g^0 \in \Lambda_h \text{ tal que} \\ \int_\gamma g^0 \mu d\gamma = \int_\gamma (u^0 - g) \mu d\gamma, \forall \mu \in \Lambda_h. \end{cases}$$

SP3: Calcular la norma L^2 de funciones en Λ_h :

$$(3.3) \quad \int_\gamma |g^n|^2 d\gamma, \quad g \in \Lambda_h.$$

SP4: Calcular integrales de frontera de la forma

$$(3.4) \quad \int_\gamma u^n d^n d\gamma, \quad u^n \in V_h, \quad d^n \in \Lambda_h.$$

SP5: Aproximar la solución de problemas variacionales de la forma

$$(3.5) \quad \begin{cases} \text{Dados } \bar{u}^n \in V_h, \quad g^n \in \Lambda_h, \text{ encontrar } g^{n+1} \in \Lambda_h \text{ tal que} \\ \int_\gamma g^{n+1} \mu d\gamma = \int_\gamma g^n \mu d\gamma - \alpha_n \int_\gamma \bar{u}^n \mu d\gamma, \quad \forall \mu \in \Lambda_h, \end{cases}$$

En seguida se desglozan los detalles para cada uno de estos subproblemas.

3.1.1 SP1: aproximación de la solución de problemas elípticos del tipo (3.1).

Como se mencionó en la sección 1.3, donde se describen los resultados básicos del método de elemento finito, resolver el problema (3.1) es equivalente a resolver un sistema lineal de la forma

$$Au = b,$$

donde los coeficientes a_{ij} de la matriz A están dados por $a_{ij} = a_{\Omega}(v_i, v_j)$, con v_i los elementos de la base para V_h . Asumiendo que N es la dimensión de V_h se tiene que $u = (u_1, \dots, u_N)$ es el vector de aproximación para la solución u :

$$u_i = u(n_i), \quad i = 1, \dots, N.$$

para n_i el nodo i de la discretización de Ω . Las coordenadas del vector b están dadas por

$$(3.6) \quad b_i = \int_{\Omega} \tilde{f}v_i dx + \int_{\gamma} \lambda v_i d\gamma, \quad i = 1, \dots, N.$$

Como se puede observar, en cada iteración del algoritmo GC3 debe calcularse un problema de la forma (3.1), donde sólo cambia el vector b . Así que la matriz A se calcula una sola vez resolviendo los sistemas lineales asociados por factorización de Cholesky. Entonces, para resolver (3.1) debe calcularse y factorizarse la matriz A y deben calcularse

$$\int_{\Omega} \tilde{f}v_i dx \quad \text{y} \quad \int_{\gamma} \lambda v_i d\gamma, \quad \text{para cada } i = 1, \dots, N.$$

Cálculo y factorización de A .

El cálculo eficiente de A tiene que ver con la discretización de Ω , o mejor dicho, con la forma de identificar cada triángulo o elemento de la discretización; esto implica etiquetar cada triángulo y saber que nodos lo forman. Enseguida se describe cómo se etiquetaron nodos y triángulos para este trabajo. Téngase en cuenta que para el método de dominios ficticios se utilizan mallas regulares, pues con esto es suficiente para obtener resultados satisfactorios. Las mallas utilizadas son como las que se muestran en las figuras 3.1 y 3.2, en las que se muestran la etiquetación de nodos y triángulos, las cuales siguen las siguientes reglas:

R1.- La numeración de nodos avanza de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba.

R2.- la numeración de triángulos avanza de izquierda a derecha y de abajo hacia arriba y aunque la regla es un poco más complicada que la anterior, es fácil deducirla de la figura 3.2.

Una vez definida la forma de la malla deben definirse o calcularse las coordenadas de los nodos y deben asociarse con cada triángulo los nodos que lo definen identificándolos localmente como 1, 2 y 3. Para los dos tipos de triángulo que intervienen los nodos locales están situados como se muestra en la figura 3.3.

Entonces, para tener bien definido cada triángulo de la discretización debe conocerse la relación entre nodos locales y nodos globales. Por ejemplo, para el triángulo 81 en la figura 3.2 se tiene

$$\begin{aligned} \text{nodo local 1} &= \text{nodo global 45,} \\ \text{nodo local 2} &= \text{nodo global 46,} \\ \text{nodo local 3} &= \text{nodo global 56,} \end{aligned}$$

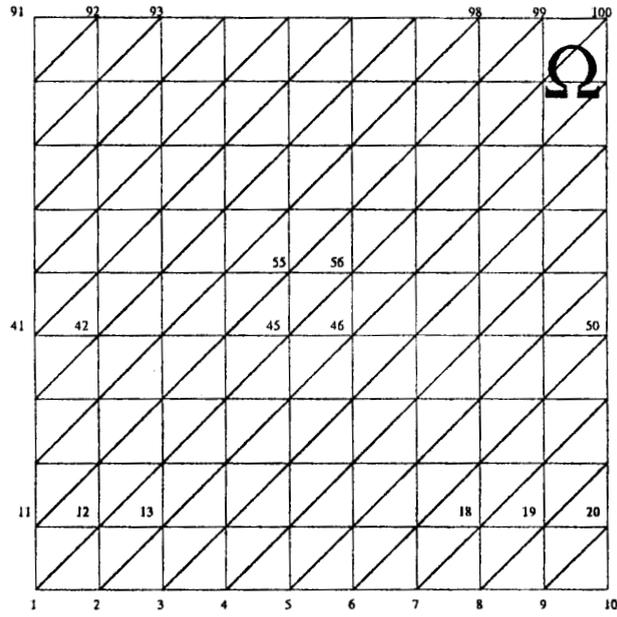


figura 3.1: Etiquetación de nodos globales.

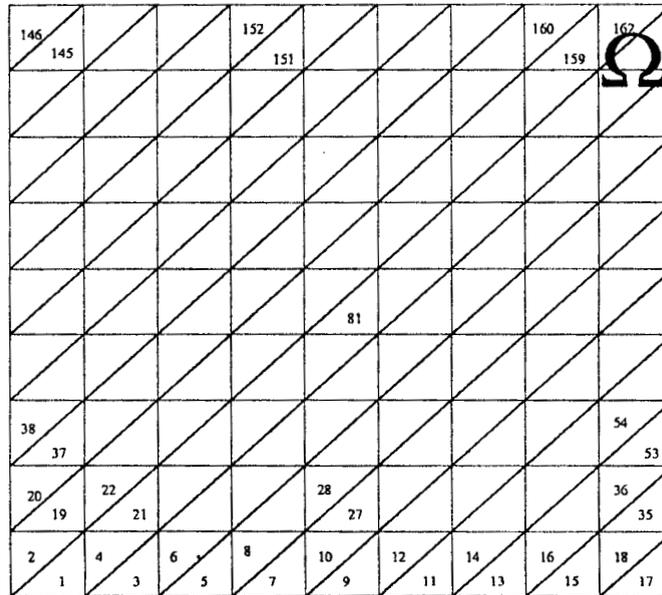


figura 3.2: Etiquetación de triángulos.

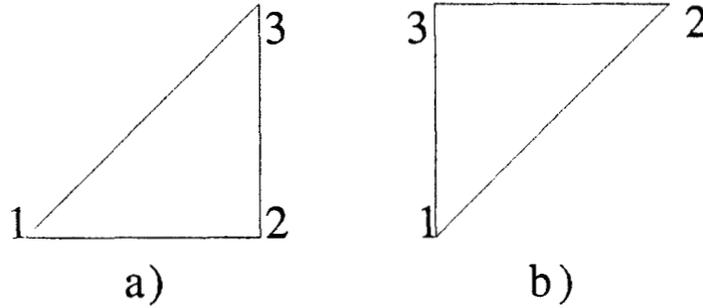


figura 3.3: Etiquetação de nodos locais.

La etiquetação de triángulos y nodos globales, así como el cálculo de las coordenadas de los nodos globales, relación de nodos globales con locales para cada triángulo y nodos frontera se hace automáticamente, solamente especificando el número de triángulos en la base y el número de triángulos en la altura del dominio ficticio.

Enseguida se describen las características principales del cálculo de A . Ya se definió en la sección 1.3 la base $\{v_i\}_1^N$ para V_h , la cual satisface

$$v_i(n_j) = \delta_{ij},$$

donde n_j representa al nodo j de la triangulación τ_h para Ω , y se considera que

$$v_i|_K = a_k + b_k x + c_k y,$$

para cada $K \in \tau_h$. Se sabe que las funciones base locales se pueden definir en términos de las coordenadas de los nodos que definen K . Se sabe también que

$$a_{ij} = a_\Omega(v_i, v_j) = \sum_{K \in \tau_h} a_K(v_i, v_j) = \sum_{K \in \tau_h} \int_K (\alpha v_i v_j + \nu \nabla v_i \cdot \nabla v_j) dx.$$

Entonces los cálculos se hacen elemento por elemento y se acumulan al respectivo a_{ij} . Por ejemplo, al hacer los cálculos sobre el triángulo 81, sólo contribuirá a

$$\begin{array}{ccc} a_{45,45} & a_{45,46} & a_{45,56} \\ a_{46,45} & a_{46,46} & a_{46,56} \\ a_{56,45} & a_{56,46} & a_{56,56} \end{array}$$

Pero puesto que la forma bilineal $a_\Omega(\cdot, \cdot)$ es simétrica, solo es necesario calcular la participación para

$$\begin{array}{ccc} a_{45,45} & & \\ a_{46,45} & a_{46,46} & \\ a_{56,45} & a_{56,46} & a_{56,56} \end{array}$$

Es decir, se calcula solo la parte inferior de la matriz A . Un detalle importante es que la matriz A es rala y bandeada, así que para su almacenamiento y procesamiento se utiliza lo que se conoce como almacenamiento "sky line" (ver [21]). Esto implica el uso de un apuntador, ya que además de almacenar solo la parte inferior de la banda de A , esto se hace en un arreglo lineal. La factorización de Cholesky obviamente se hace utilizando la banda y el almacenamiento lineal de A . Para cada

a_{ij} , deben calcularse integrales de la forma $\int_K (v_i v_j) dx$, las cuales tambien intervienen en el cálculo que sigue, por lo cual se describen enseguida.

Cálculo de $\int_{\Omega} f v_i dx$, para cada $i = 1, \dots, N$.

Se tiene que f es una función definida en cada nodo de Ω . Entonces se puede escribir

$$f = \sum_{j=1}^N f_j v_j,$$

donde f_j representa el valor de f en el nodo j : $f_j = f(n_j)$. Así que

$$\int_{\Omega} f v_i dx = \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^N f_j v_j \right) v_i dx = \sum_{j=1}^N f_j \int_{\Omega} v_i v_j dx.$$

Puede entonces escribirse el vector

$$(3.7) \quad \begin{pmatrix} \int_{\Omega} f v_1 dx \\ \vdots \\ \int_{\Omega} f v_N dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \int_{\Omega} v_1 v_1 dx + f_2 \int_{\Omega} v_1 v_2 dx + \dots + f_N \int_{\Omega} v_1 v_N dx \\ \vdots \\ f_1 \int_{\Omega} v_N v_1 dx + f_2 \int_{\Omega} v_N v_2 dx + \dots + f_N \int_{\Omega} v_N v_N dx \end{pmatrix},$$

al cual se identificará en lo sucesivo como VINTF. Luego utilizando la aditividad de la integral sobre el dominio de integración y puesto que para cada elemento o triángulo K de la discretización existen tres funciones base locales v_l^K se debe calcular

$$(3.8) \quad \int_K v_l^K v_p^K dx,$$

para $l = 1, 2, 3$, $p = 1, 2, 3$ y para cada triángulo K . Los índices l y p denotan funciones base locales o nodos locales por lo cual l y p tienen asociados sus respectivos nodos globales o funciones base globales. Sean i, j los nodos globales asociados con los índices l y p , respectivamente. Entonces el valor

$$f_i \int_K v_l^K v_p^K dx,$$

se acumula a la componente j del vector en (3.7) y el valor

$$f_j \int_K v_l^K v_p^K dx,$$

se acumula a la componente i del vector en (3.7). Además, debido a la regularidad de la malla se tiene que

$$\int_K v_i^K v_p^K dx = \int_{Ke} v_i^{Ke} v_p^{Ke} dx,$$

con Ke el triángulo cuyos nodos son $(0,0)$, $(h,0)$ y (h,h) si el triángulo K es como el de la figura 3.3a y

$$\int_K v_i^K v_p^K dx = \int_{Ke} v_i^{Ke} v_p^{Ke} dx,$$

con Ke el triángulo cuyos nodos son $(0,0)$, (h,h) y $(0,h)$ si el triángulo K es como el de la figura 3.3b. En realidad, para fines de calcular las integrales (3.8) da lo mismo trabajar con cualquiera de los triángulos Ke pues para Ke como en la figura 3.3a las funciones base locales son

$$\begin{aligned} v_1^e(x, y) &= 1 - \frac{x}{h} \\ v_2^e(x, y) &= \frac{1}{h}(x - y) \\ v_3^e(x, y) &= \frac{y}{h} \end{aligned}$$

y para Ke como en la figura 3.3b las funciones base locales son

$$\begin{aligned} v_1^e(x, y) &= 1 - \frac{y}{h} \\ v_2^e(x, y) &= \frac{x}{h} \\ v_3^e(x, y) &= \frac{1}{h}(y - x) \end{aligned}$$

y es fácil verificar que en los dos casos se tiene

$$\int_{Ke} v_i^e v_p^e dx = \begin{cases} \frac{1}{12} h^2 & \text{si } l = p \\ \frac{1}{24} h^2 & \text{si } l \neq p \end{cases}$$

Con todo esto, solo falta ir ensamblando el vector de (3.7) para tener las integrales de interés.

Cálculo de $\int_\gamma \lambda v_i d\gamma$, para $\lambda \in \Lambda_h$ y para cada $i = 1, \dots, N$.

Λ_h es un espacio de funciones constantes por pedazos sobre γ . Esto implica tener una división de la curva cerrada γ , la cual es definida por medio de los puntos A_1, \dots, A_M de tal manera que se tengan M segmentos $\gamma_1, \dots, \gamma_M$ sobre γ . En los cálculos posteriores interviene el punto A_{M+1} . Se toma $A_{M+1} = A_1$. Para mayor claridad véase la figura 3.4. Se supone además que se conoce una parametrización de la frontera γ ; en el caso de este trabajo se consideran sólo fronteras que son círculos o elipses, así que se usa la parametrización siguiente de la frontera:

$$(3.9) \quad \begin{aligned} x &= a \cos \theta + h, \\ y &= b \sin \theta + k. \end{aligned}$$

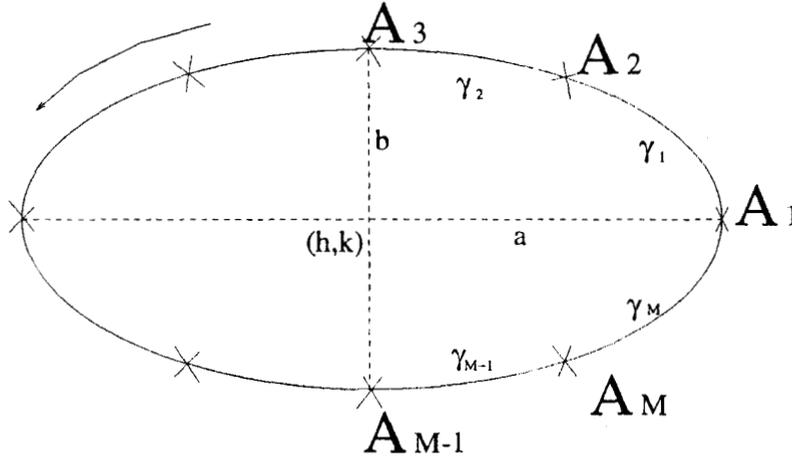


figura 3.4: División de la frontera γ .

donde (h, k) representa el centro de la elipse o el círculo en cuestión, a es la longitud del semieje horizontal y b es la longitud del semieje vertical en el caso de elipse y $a = b$ es el radio en el caso de que la frontera sea un círculo. Se denota como θ_i al valor que define al punto A_i bajo la parametrización dada. Siempre se considera A_1 como el punto que corresponde a $\theta = 0$, esto es, las coordenadas de A_1 son siempre $(a + h, k)$. Cuando la frontera γ es un círculo se toma la división definida por

$$A_i = (a \cos[(i - 1)\Delta\theta] + h, b \sin[(i - 1)\Delta\theta] + k),$$

donde

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{M},$$

para M el número de divisiones de γ . Cuando la frontera considerada es una elipse se toma una división inicial como la anterior y luego se modifica ésta de tal manera que los puntos A_i queden distribuídos uniformemente; la modificación se hace considerando que la distancia entre dos puntos sobre una elipse parametrizada como en este trabajo está dada por la ecuación

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(a \sin \theta)^2 + (b \cos \theta)^2} d\theta$$

Una base para las funciones constantes por pedazos para una tal división de γ consta de las funciones $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_M$ sobre γ tal que

$$(3.10) \quad \mu_i |_{\gamma_j} = \delta_{ij}.$$

Como ya se mencionó, la discretización de γ es independiente de la discretización de Ω , solo limitada por la condición de *Babuska-Brezi* o condición *inf-sup* (2.25). Puede verse en [15] que para

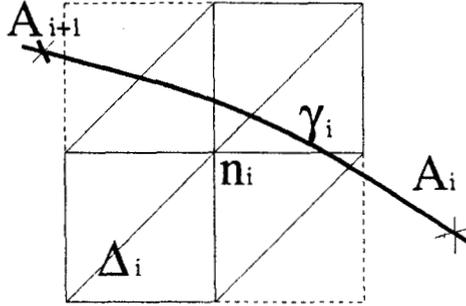


figura 3.5: Un macroelemento.

que se satisfaga (2.25) es suficiente que para cada segmento γ_i se pueda encontrar un nodo n_i en τ_h tal que el macroelemento Δ_i consistente de los seis triángulos de τ_h con vértice común n_i satisfaga las siguientes propiedades (ver figura 3.5):

i) γ_i intersecta al menos un segmento interior de Δ_i a una distancia d_i que no es más grande que la mitad de la longitud de este segmento. En otras palabras, d_i representa el punto más cercano de ese segmento a γ_i .

ii) Los puntos finales de γ_i no pertenecen al interior de Δ_i .

iii) Si Δ_i y Δ_j , $i \neq j$, son dos segmentos de γ , $\Delta_i \cap \Delta_j$ es o bien vacío o se reduce a un nodo o a un segmento de τ_h ; dicho de otra manera, los macroelementos asociados con γ no se traslapan.

Una vez hecha la división de γ , la idea principal para el cálculo de las integrales de la forma

$$(3.11) \quad \int_{\gamma} \lambda v_i d\gamma,$$

que se identificarán como las componentes del vector VINTLV, es trabajar triángulo por triángulo. Esto es, no se calcula primero (3.11) para una función base v_i en particular, sino que se van calculando simultáneamente las integrales para todas las i , conforme se avanza sobre todos los triángulos. Lo anterior se puede hacer debido a que asociadas con cada triángulo hay tres funciones base locales las cuales cada una forma parte de una función base global. Así que localmente se calculan para cada triángulo K las integrales

$$\int_{\gamma \cap K} \lambda v_i^K d\gamma, \quad i = 1, 2, 3.$$

Cada uno de los valores anteriores se acumulan adecuadamente a cantidades que después de avanzar sobre todos los triángulos son iguales a las integrales (3.11). Entonces para cada triángulo lo primero que se debe hacer es definir si tiene intersección con γ . Para esto se clasifica a los nodos del triángulo en turno en interiores, exteriores y frontera de acuerdo a su situación con respecto a γ . Los casos que se consideran como de intersección de γ con un elemento o triángulo son (ver figura 3.6):

C1-Cuando se tienen 2 nodos interiores y uno exterior.

C2-Cuando se tienen 2 nodos exteriores y uno interior.

C3-Cuando se tienen 1 nodo interior, uno exterior y un nodo frontera.

C4-Cuando se tienen 2 nodos frontera y uno exterior (por la concavidad de la frontera)

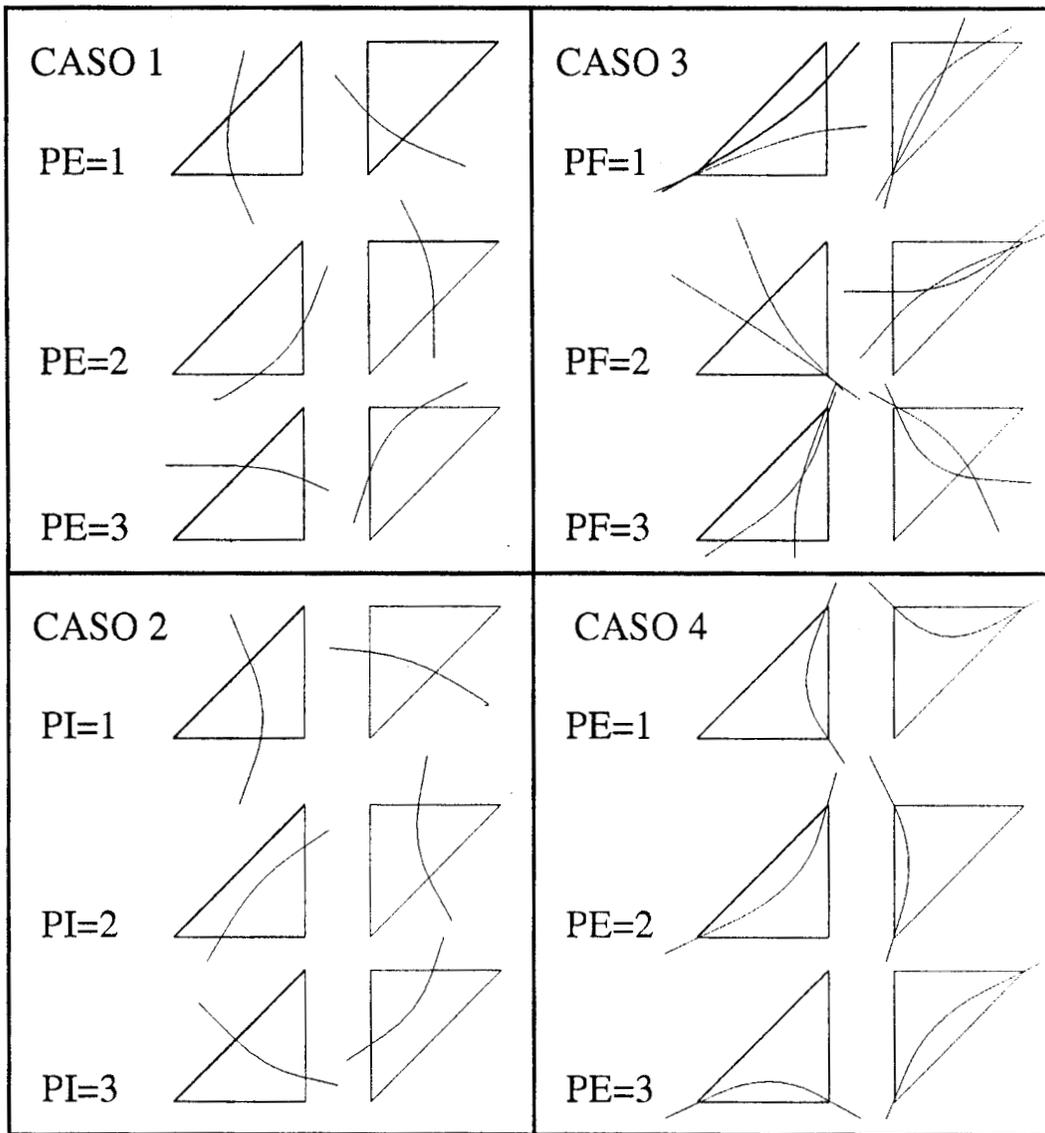


figura 3.6: Casos de intersección de acuerdo a la posición de los nodos.

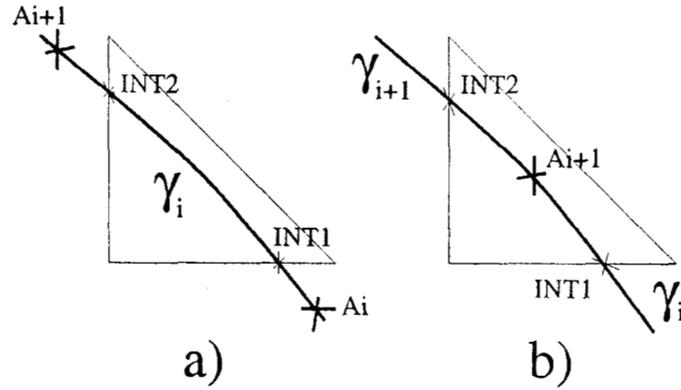


figura 3.7: Intersección de un elemento con uno ó dos segmentos de gama.

Por el tipo de fronteras consideradas se tiene que los puntos de γ satisfacen una relación de la forma $f(x, y) = 1$, donde

$$f(x, y) = \frac{(x - h)^2}{a^2} + \frac{(y - k)^2}{b^2}.$$

Así que la clasificación de los nodos se hace evaluando f en las coordenadas (x, y) de cada nodo y evaluando si $f(x, y) = 1$, si $f(x, y) < 1$ o si $f(x, y) > 1$; cada uno de estos casos está asociado con nodo frontera, nodo interior y nodo exterior, respectivamente.

Si un triángulo no tiene intersección con γ se pasa al siguiente triángulo. Caso contrario se calculan los extremos INT1 e INT2 de la intersección del elemento con γ .

Dadas las características uniformes de las mallas usadas, las intersecciones se pueden calcular fácilmente si se tiene en cuenta el caso en que se clasificaron los nodos y cuáles se clasificaron como interiores, exteriores o frontera. También ayuda el tener en cuenta que tipo de triángulo se está considerando, de acuerdo a las opciones que se muestran en la figura 3.3. Para saber que tipo de triángulo se está considerando se toma en cuenta la relación de nodos locales con nodos globales: para un triángulo como el de la figura 3.3a el número de nodo global para el nodo local 3 es menor que el número de nodo global para el nodo local 2 mientras que para el triángulo 3.3b el número de nodo global para el nodo local 3 es mayor que el número de nodo global para el nodo local 2. En la figura 3.6 se ilustran los casos y subcasos considerados para calcular las intersecciones de γ con cada elemento cuya intersección sea no vacía.

Enseguida se calculan los parámetros θ_1 y θ_2 que definen los puntos de intersección INT1, e INT2 en la parametrización para γ . Esto se hace para calcular la integral de línea sobre γ de las funciones base locales. Luego se identifican el o los segmentos de γ que intersectan a K . Además se calculan las constantes a_i , b_i , c_i que definen a cada una de las tres funciones base locales. Esto se hace en función de las coordenadas de los nodos que definen el triángulo. Se considera a las funciones base locales de la forma

$$f(x, y) = a + bx + cy.$$

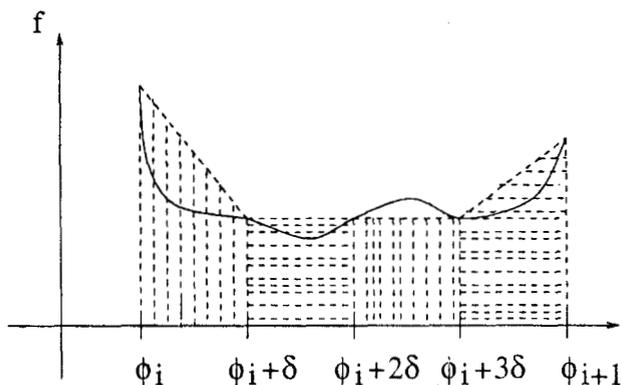


figura 3.8: Método del Trapecio.

Se calcula enseguida (ver figura 3.7)

$$\lambda_j \int_{INT1}^{INT2} v_i^K(x, y) d\gamma, \quad i = 1, 2, 3$$

si solamente un segmento de γ , el segmento γ_j , interseca a K . Si son dos los segmentos de γ que participan en la intersección de γ con K se calculan

$$\lambda_j \int_{INT1}^{A_{j+1}} v_i^K(x, y) d\gamma, \quad i = 1, 2, 3$$

y

$$\lambda_{j+1} \int_{A_{j+1}}^{INT2} v_i^K(x, y) d\gamma, \quad i = 1, 2, 3,$$

donde λ_j denota el valor de λ en el segmento γ_j . A_{j+1} denota el punto sobre γ que separa al segmento γ_j del segmento γ_{j+1} , ver figura 3.7.

Las integrales de línea se aproximan numéricamente utilizando regla del trapecio (ver figura 3.8) y teniendo en cuenta que la parametrización para γ está dada por (3.9). Finalmente, los valores calculados en el paso anterior se acumulan a la componente correspondiente del vector VINTLV la cual se encuentra utilizando la relación entre nodos locales y nodos globales. Con esto termina lo relacionado al subproblema 1.

3.1.2 SP2: aproximación de g^0

La ecuación (3.2) debe satisfacerse para toda μ en Λ_h . Para ello basta con que se satisfaga para cada uno de los elementos μ_i de la base para Λ_h mencionada anteriormente. Entonces se tiene el problema: Dados $u \in V_h$ y $g \in L^2(\gamma)$, encontrar $g^0 \in \Lambda_h$ tal que

$$\int_{\gamma} g^0 \mu_i d\gamma = \int_{\gamma} (u - g) \mu_i d\gamma, \quad i = 1, \dots, M.$$

Como $g^0 \in \Lambda_h$, se puede escribir

$$g^0 = g_1^0 \mu_1 + \dots + g_M^0 \mu_M,$$

de donde

$$\int_{\gamma} (g_1^0 \mu_1 + \dots + g_M^0 \mu_M) \mu_i d\gamma = \int_{\gamma} (u - g) \mu_i d\gamma, \quad i = 1, \dots, M.$$

Por las propiedades de cada μ_i , ver(3.10), la expresión anterior se reduce a

$$\int_{\gamma_i} g_i^0 d\gamma = \int_{\gamma_i} (u - g) d\gamma, \quad i = 1, \dots, M.$$

Con lo cual

$$g_i^0 = \left(\int_{\gamma_i} u d\gamma - \int_{\gamma_i} g d\gamma \right) / \left(\int_{\gamma_i} d\gamma \right), \quad i = 1, \dots, M.$$

La integral que aparece como divisor se calcula como

$$\int_{\gamma_i} d\gamma = \int_{\theta_i}^{\theta_i+1} (a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta)^{1/2} d\theta,$$

por la parametrización que se está tomando de γ . La última integral se aproxima por regla del trapecio.

Cálculo de $\int_{\gamma_i} u d\gamma$.

Para calcular $\int_{\gamma_i} u d\gamma$ se tiene en cuenta que se puede escribir

$$\int_{\gamma_i} u d\gamma = \sum_{K \in \tau_h} \left(\int_{K \cap \gamma_i} u d\gamma \right),$$

y

$$u = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_N v_N$$

con

$$u_j = u(n_j)$$

Mas aún, localmente, para cada triángulo K en τ_h se puede escribir

$$u|_K = u_1^k v_1^k + u_2^k v_2^k + u_3^k v_3^k$$

donde v_l^k son las funciones base locales asociados con el triángulo K y $u_l^k = u_j$ si al nodo local l le corresponde el nodo global j . Entonces otra vez la base de los cálculos es avanzar triángulo por triángulo y calcular

$$u_l^k \int_{INT1}^{INT2} v_l^k d\gamma, \quad l = 1, 2, 3$$

si el segmento q es el único que intersecta al triángulo K ; estos valores se acumula a la componente q del vector VINTUSG cuyas M componentes son

$$\int_{\gamma_i} u d\gamma, \quad i = 1, \dots, M;$$

si el segmento q y el segmento $q + 1$ intersectan al triángulo K calcular

$$u_l^k \int_{INT1}^{A_{q+1}} v_l^k d\gamma, \quad l = 1, 2, 3$$

y

$$u_l^k \int_{A_{q+1}}^{INT2} v_l^k d\gamma, \quad l = 1, 2, 3$$

Los primeros tres valores se acumulan a la componente q y los últimos tres valores se acumulan a la componente $q + 1$ del vector VINTUSG.

Nótese la similitud en los cálculos para obtener

$$\int_{\gamma_i} u d\gamma, \quad i = 1, \dots, M, \quad u \in V_h$$

y para obtener

$$\int_{\gamma} \lambda v_i d\gamma, \quad i = 1, \dots, N; \quad \lambda \in \Lambda_h$$

que interviene en el subproblema 1. Los triángulos que participan en ambos problemas son los mismos y debe igualmente calcularse las intersecciones de γ con cada triángulo, etc. Los detalles geométricos son los mismos, solo varían los valores que se calculan y el acoplamiento de estos valores.

Cálculo de $\int_{\gamma_i} g d\gamma, i = 1, \dots, M.$

Para el cálculo de estas integrales se considera que g es una función sobre la frontera γ para la cual se conocen al menos los valores que toma en los puntos A_1, A_2, \dots, A_M . Las integrales se calculan como sigue:

$$\int_{\gamma_i} g d\gamma = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} g(x(\theta), y(\theta)) \|(x'(\theta), y'(\theta))\| d\theta.$$

Por la parametrización utilizada lo anterior se reduce a

$$\int_{\gamma_i} g d\gamma = \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} g(x(\theta), y(\theta)) \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

Para aproximar la integral anterior se aplica trapecio.

3.1.3 SP3: cálculo de $\int_{\gamma} |g^n|^2 d\gamma$, $g^n \in \Lambda_h$

Se tiene que

$$\int_{\gamma} |g^n|^2 d\gamma = \sum_{i=1}^M \int_{\gamma_i} |g_i^n|^2 d\gamma,$$

donde g_i^n es el valor que toma g^n en el segmento γ_i . Entonces

$$\int_{\gamma} |g^n|^2 d\gamma = \sum_{i=1}^M (g_i^n)^2 \int_{\gamma_i} d\gamma = \sum_{i=1}^M (g_i^n)^2 \int_{\theta_i}^{\theta_{i+1}} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta;$$

esta última integral se calcula como ya se indicó anteriormente

3.1.4 SP4: cálculo de $\int_{\gamma} u^n d^n d\gamma$, $u^n \in V_h$, $d^n \in \Lambda_h$.

Como $u^n \in V_h$ se puede escribir

$$u^n = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_N v_N.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} u^n d^n d\gamma &= \int_{\gamma} (u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_N v_N) d^n d\gamma \\ &= u_1 \int_{\gamma} v_1 d^n d\gamma + u_2 \int_{\gamma} v_2 d^n d\gamma + \dots + u_N \int_{\gamma} v_N d^n d\gamma. \end{aligned}$$

En los detalles asociados con el subproblema 1 se describió cómo calcular el vector VINTLV cuyas N componentes son

$$\int_{\gamma} \lambda v_i d\gamma, \quad i = 1, \dots, N.$$

Entonces sustituyendo d^n por λ sólo debe hacerse el producto punto de este vector con el vector cuya i -ésima componente es u_i para obtener el valor de la integral en cuestión.

3.1.5 SP5: aproximación de g^{n+1}

Procediendo igual que en el cálculo de g^0 se tiene que

$$g_i^{n+1} = \frac{[-\alpha_n \int_{\gamma_i} \bar{u}^n d\gamma + g_i^n \int_{\gamma_i} d\gamma]}{\int_{\gamma_i} d\gamma},$$

donde

$$g^{n+1} = \sum_{i=1}^M g_i^{n+1} \mu_i.$$

Las integrales involucradas ya se describieron en el cálculo de g^0 , así que solo deben hacerse los cálculos asociados.

Los subproblemas SP1 a SP5 descritos anteriormente corresponden a detalles asociados con el algoritmo de gradiente conjugado sin preconditionamiento (GC3) para resolver el problema elíptico $A\lambda = \beta$. Cuando se utiliza preconditionamiento para resolver este problema el nuevo producto escalar sobre γ incluye el preconditionador (ver ecuación (2.29)). Así que es necesario incorporar los detalles asociados a este cambio, en particular sobre los subproblemas SP2, SP3 y SP5. Esta descripción se hace a continuación, empezando con el cálculo de la matriz de preconditionamiento $B_{\hat{h}}$ dada por (2.31).

3.1.6 Cálculo de la matriz de preconditionamiento $B_{\hat{h}}$

Se tiene que si M , el número de divisiones en γ es par entonces los vectores propios de $-\Delta_h$ son (ver [1] y [14]):

$$C_j = \left\{ \cos[2\pi j(i-1)\hat{h}] \right\}_{i=1}^M, \quad 0 \leq j \leq M/2,$$

$$S_j = \left\{ \sin[2\pi j(i-1)\hat{h}] \right\}_{i=1}^M, \quad 1 \leq j \leq M/2 - 1,$$

con los correspondientes valores propios

$$\lambda_j = \frac{4}{\hat{h}^2} \sin^2[\pi j \hat{h}].$$

Si M es impar entonces los vectores propios son

$$C_j = \left\{ \cos[2\pi j(i-1)\hat{h}] \right\}_{i=1}^M, \quad 0 \leq j \leq (M-1)/2,$$

$$S_j = \left\{ \sin[2\pi j(i-1)\hat{h}] \right\}_{i=1}^M, \quad 1 \leq j \leq (M-1)/2,$$

y los valores propios son como antes. Entonces

$$B_{\hat{h}} = ED^{-1/2}E^T,$$

donde E es la matriz unitaria cuyas columnas son los vectores propios de $-\Delta_h$ pero normalizados y D es una matriz diagonal; es decir, si M es par entonces

$$E = (\bar{C}_0 \bar{C}_1 \bar{S}_1 \cdots \bar{C}_{M/2-1} \bar{S}_{M/2-1} \bar{C}_{M/2})$$

y

$$D = (\hat{\lambda}_0 \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_1 \cdots \hat{\lambda}_{M/2-1} \hat{\lambda}_{M/2-1} \hat{\lambda}_{M/2}),$$

mientras que si M es impar se tiene

$$E = (\bar{C}_0 \bar{C}_1 \bar{S}_1 \cdots \bar{C}_{(M-1)/2} \bar{S}_{(M-1)/2})$$

y

$$D = (\widehat{\lambda}_0 \widehat{\lambda}_1 \widehat{\lambda}_1 \cdots \widehat{\lambda}_{(M-1)/2} \widehat{\lambda}_{(M-1)/2}).$$

Tanto para M par o impar se tiene

$$\widehat{\lambda}_i = \frac{\alpha}{\nu} + \frac{\lambda_i}{s^2},$$

con s la longitud de la frontera γ .

Para la programación del cálculo de $B_{\widehat{h}}$ se considera primero la matriz S cuyas columnas son los vectores propios C_j y S_j de $-\Delta_h$ sin normalizar. Se calcula S y se va almacenando por renglones en un arreglo lineal. En otro arreglo lineal se almacena el cuadrado de la norma de los vectores propios, las cuales se van calculando simultáneamente con las componentes de S . Luego se considera a S^T como un arreglo lineal ordenado por columnas de tal manera que el arreglo para S y S^T sea idéntico en contenido y longitud y entonces en el mismo arreglo se guardan las dos matrices. Además del ahorro de memoria esto permite calcular fácilmente la matriz $B_{\widehat{h}}$ ya que

$$(B_{\widehat{h}})_{ij} = (ED^{-1/2}E^T)_{ij} = \sum_{k=1}^M E_{ik} d_k^{-1/2} E_{kj}^T = \sum_{k=1}^M \frac{S_{ik}}{l_k} d_k^{-1/2} \frac{S_{kj}^T}{l_k} = \sum_{k=1}^M \frac{1}{l_k^2} S_{ik} d_k^{-1/2} S_{kj}^T,$$

donde l_k^2 denota el cuadrado de la norma del k -ésimo vector propio y d_k es el k -ésimo valor en la diagonal de D , y la componente S_{ik} se encuentra almacenada en la posición $(i-1)M+k$ mientras que la componente S_{kj}^T se encuentra almacenada en la posición $(j-1)M+k$ del arreglo para S . La matriz $B_{\widehat{h}}$ se almacena en otro arreglo lineal ordenado por renglones ya que posteriormente se debe operar con estos. Una vez descrito el cálculo de la matriz de preconditionamiento $B_{\widehat{h}}$ se detallan los subproblemas en los que participa, en relación con el algoritmo GCP2:

3.1.7 SPP2: aproximación de g^0 con preconditionamiento

La ecuación que define a g^0 debe satisfacerse para todo elemento en Λ_h , esto es, debe satisfacerse para cada elemento de la base de Λ_h . Entonces como (ver ecuación (2.29)).

$$b(g^0, \mu_i) = \int_{\gamma} (B_{\widehat{h}} g^0) \mu_i d\gamma, \quad i = 1, \dots, M,$$

deben satisfacerse las ecuaciones siguientes :

$$\int_{\gamma_i} (B_i \cdot g^0) d\gamma = \int_{\gamma_i} (u^0 - g) d\gamma, \quad i = 1, \dots, M,$$

donde $B_i \cdot g^0$ denota el producto punto del renglón i de $B_{\widehat{h}}$ con g^0 , este último visto como vector en R^M . Además si g^0 se escribe como

$$g^0 = g_1^0 \mu_1 + g_2^0 \mu_2 + \dots + g_M^0 \mu_M$$

se tiene entonces que

$$\int_{\gamma_i} \left(\sum_{j=1}^M (B_{ij} g_j^0) \right) d\gamma = \sum_{j=1}^M (g_j^0 \int_{\gamma_i} B_{ij} d\gamma), \quad i = 1, \dots, M,$$

Entonces para cada $i = 1, \dots, M$ se tiene la ecuación

$$\sum_{j=1}^M (g_j^0 \int_{\gamma_i} B_{ij} d\gamma) = \int_{\gamma_i} (u^0 - g) d\gamma,$$

lo que significa que para encontrar g^0 , es decir, para encontrar las g_i^0 es necesario resolver un sistema lineal de la forma $Ax = b$ donde $a_{ij} = \int_{\gamma_i} B_{ij} d\gamma = B_{ij} \int_{\gamma_i} d\gamma$, $x = (g_1^0, \dots, g_M^0)$ y $b_i = \int_{\gamma_i} (u^0 - g) d\gamma$. El cálculo de la integral para b y de las integrales $\int_{\gamma_i} d\gamma$ ya se describieron anteriormente en relación con el algoritmo GC3. El sistema lineal asociado se resuelve por factorización LU. Se hace esto porque en cada iteración de gradiente conjugado debe resolverse un sistema lineal que difiere del mencionado aquí solo en el lado derecho; el sistema está relacionado con el cálculo de g^{n+1} .

3.1.8 SPP3: cálculo de la nueva norma $b(g^n, g^n)$

Se tiene que

$$\begin{aligned} b(g^n, g^n) &= \int_{\gamma} (B g^n) g^n d\gamma = \sum_{i=1}^M \int_{\gamma_i} (B_i \cdot g^n) g_i^n d\gamma \\ &= \sum_{i=1}^M (B_i \cdot g^n) g_i^n \int_{\gamma_i} d\gamma. \end{aligned}$$

En la sumatoria anterior $(B_i \cdot g^n)$ denota el producto interior del renglón i de la matriz $B_{\bar{n}}$ con g^n visto como vector. La integral involucrada en la sumatoria ya se dijo como se calcula.

3.1.9 SPP5: aproximación de g^{n+1} con preconditionamiento

$$g^{n+1} \in \Lambda_h : b(g^{n+1}, \mu) = b(g^n, \mu) - \alpha_n \int_{\gamma} u^n \mu d\gamma, \quad \forall \mu \in \Lambda_h, \quad u^n \in V_h.$$

Si se escribe

$$g^{n+1} = g_1^{n+1} \mu_1 + \dots + g_M^{n+1} \mu_M$$

ya se procede como en el cálculo de g^0 . Se tiene que las g_i^{n+1} resuelven un sistema lineal de la forma $Ag = b^n$, en donde A es la misma que para resolver g^0 y b^n se calcula de la siguiente manera:

$$b_i^n = (B_i \cdot g^n) \int_{\gamma_i} d\gamma - \alpha_n \int_{\gamma_i} u^n d\gamma, \quad i = 1, \dots, M.$$

Las integrales involucradas ya se sabe como calcularlas; en particular la integral última se describió en los detalles del subproblema SP2.

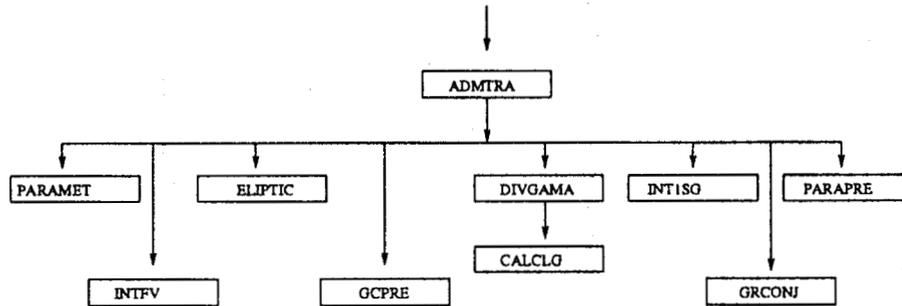


figura 3.9: Diagrama de estructura para la subrutina principal ADMTRA.

3.2 Diagramas de Estructura

Como se mencionó en la sección 3.1 para la solución computacional del problema se consideraron 5 subproblemas que están bien definidos en los algoritmos GC3 y GCP2, que son los algoritmos que se programaron. Estos subproblemas se etiquetaron como SP1, SP2,.....,SP5 para el caso del algoritmo GC3, el cual considera gradiente conjugado sin condicionamiento. Para el caso del algoritmo GCP2, en lugar de tener los subproblemas SP2, SP3 y SP5 se tienen los subproblemas SPP2, SPP3 y SPP5, ya descritos en la sección 3.1. Los subproblemas SP1 y SP4 son idénticos en los dos algoritmos.

Enseguida se detalla como están organizadas las subrutinas programadas y cuales resuelven cada subproblema. En primer lugar, lo que se programó es un conjunto de subrutinas; así que el usuario debe tener un programa principal que llame a estas. La comunicación entre el programa principal y las subrutinas programadas se hace a través de la subrutina ADMTRA, la cual tiene el diagrama de estructura que se muestra en la figura 3.9.

Enseguida se hace una descripción de cada una de las subrutinas de la figura 3.9.

1. PARAMET: Lee y calcula los parámetros que definen la malla y el espacio de elemento finito que se utilizará sobre el dominio ficticio Ω ; así como los parámetros que definen la frontera del dominio original ω , y el parámetro que define la división de esta frontera. Específicamente los parámetros que lee son:

NTB: Número de divisiones en la base de Ω .

NTH: Número de divisiones en la altura de Ω .

XA: Coordenada x del punto A de la figura 3.10, la cual representa a Ω .

YA: Coordenada y del punto A de la figura 3.10.

XB: Coordenada x del punto B de la figura 3.10.

YB: Coordenada y del punto B de la figura 3.10.

INSL3H: Número de divisiones sobre γ .

PARAMA, PARAMB, X0, Y0: Parámetros que definen la frontera γ , los cuales satisfacen la ecuación

$$(3.12) \quad \frac{(x - X0)^2}{PARAMA^2} + \frac{(y - Y0)^2}{PARAMB^2} = 1.$$

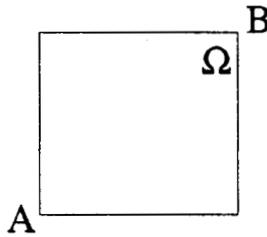


figura 3.10: Puntos que definen Omega.

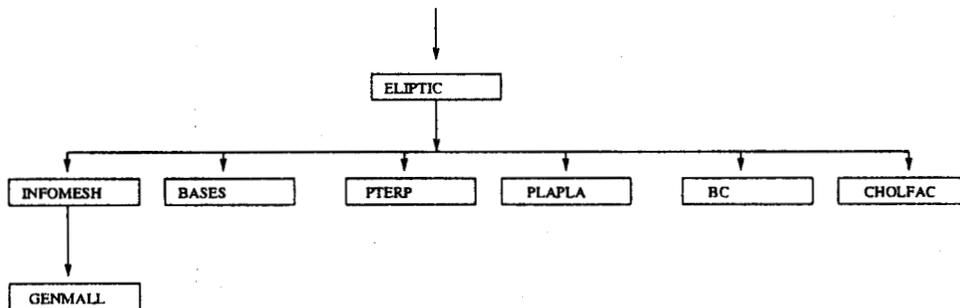


figura 3.11: Diagrama de estructura para ELIPTIC.

Los parámetros que calcula son:

H: La longitud de los catetos de los triángulos que definen la discretización de Ω .

NP: El número de nodos de la discretización.

NTRIA: El número de triángulos de la discretización.

NNBC: El número de nodos frontera.

2. ELIPTIC: Calcula y factoriza la matriz de masa asociada con los problemas elípticos de la forma (2.1)-(2.2). También incorpora a tal matriz las condiciones de frontera. En la figura 3.11 se muestran las subrutinas que utiliza, las cuales se describen mas adelante.

3. DIVGAMA: Hace la división de γ calculando los valores del parámetro θ que define a cada punto de división sobre γ . Esto se hace en la subrutina DEFTETAS. También calcula la longitud de la curva γ vía la subrutina CALCLG.

4. INTFV: Calcula las integrales

$$\int_{\Omega} f v dx dy$$

para cada $v \in V_h$.

5. INT1SG: Calcula las integrales

$$\int_{\gamma_i} d\gamma, \quad i = 1, \dots, M.$$

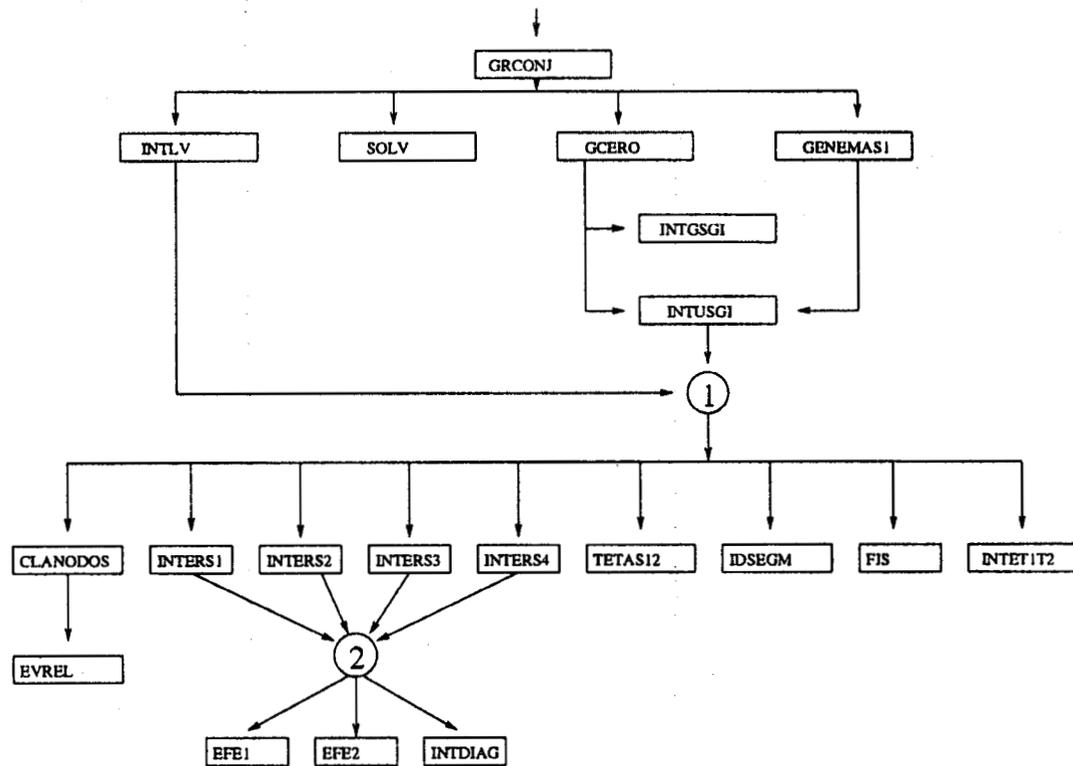


figura 3.12: Diagrama de Estructura para GRCONJ.

6. PARAPRE: Esta subrutina se llama si se desea utilizar preconditionamiento; Calcula la matriz de preconditionamiento B_h por medio de la subrutina CALCULAB y calcula la matriz asociada con el cálculo de g^0 y g^{n+1} . Finalmente factoriza en LU esta última matriz por medio de la subrutina LUFACT.

7. GRCONJ: Contiene básicamente la programación del algoritmo GC3. En la figura 3.12 se muestra el correspondiente diagrama de estructura para esta subrutina.

8. GCPREC: Contiene la programación del algoritmo GCP2. En la figura 3.13 se muestra el correspondiente diagrama de estructura para esta subrutina.

A continuación se da una descripción de las subrutinas que llama ELIPTIC (ver figura 3.11):

2.1 INFOMESH: Calcula las coordenadas de los nodos y la relación entre nodos globales y nodos locales por medio de la subrutina GENMALL. También define los nodos que son frontera.

2.2 BASES: Calcula las derivadas de las funciones base locales. Esta subrutina es general, es decir, funciona para mallas no uniformes.

2.3 PTERP: Define los valores del apuntador para almacenar la matriz de masa.

2.4 PLAPLA: Calcula la matriz de masa.

2.5 CHOLFAC: Hace la factorización de Cholesky de la matriz de masa.

2.6 BC: Incorpora las condiciones de frontera a la matriz de masa factorizada.

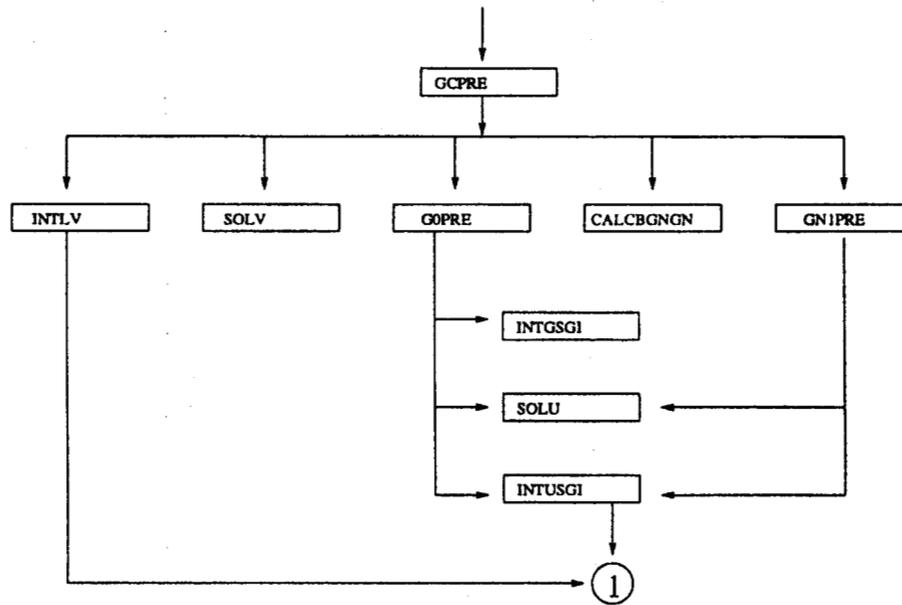


figura 3.13: Diagrama de Estructura para GCPREC.

Enseguida se describen las subrutinas que llama GRCONJ (ver figura 3.12):

7.1 INTLV: Calcula las integrales

$$\int_{\gamma} \lambda v d\gamma, \forall v \in V_h, \lambda \in \Lambda_h.$$

7.2 SOLV: Resuelve sistemas de ecuaciones lineales utilizando factorización de Cholesky. Obsérvese que resolver el subproblema SP1 consiste en llamar a esta subrutina una vez que se tiene la información de las subrutinas ELIPTIC, INTFV y INTLV.

7.3 GCERO: Resuelve el subproblema SP2, es decir calcula g^0 llamando a las subrutinas INTGSGI y INTUSGI.

7.4 GENEMAS1: Resuelve el subproblema SP5; esto es calcula g^{n+1} . Lo anterior se hace después de llamar a la subrutina INTUSGI con $u \in V_h$ una cierta función que ya se calculó antes.

7.3.1 INTGSGI: Calcula la integral de g sobre cada uno de los segmentos de la frontera γ .

7.3.2 INTUSGI: Calcula la integral de u sobre cada uno de los segmentos de la frontera γ .

7.1.1 CLANODOS: Clasifica los nodos de un triángulo en interiores, exteriores o frontera por medio de la relación entre el valor de la función que define el lado izquierdo de (3.12) y el valor 1.0, donde (x,y) son las coordenadas de cada nodo. El valor de (3.12) para los tres nodos de un triángulo se calcula llamando a la subrutina EVREL.

7.1.2 INTERS1: Calcula las intersecciones de γ con los lados de un triángulo cuando este tiene un nodo exterior y dos interiores.

7.1.2 INTERS2: Calcula las intersecciones de γ con los lados de un triángulo cuando este tiene un nodo interior y dos exteriores.

7.1.4 INTERS3: Calcula las intersecciones de γ con los lados de un triángulo cuando este tiene un nodo frontera, un interior y un exterior.

7.1.5 INTERS4: Calcula las intersecciones de γ con los lados de un triángulo cuando este tiene un nodo exterior y dos frontera.

7.1.6 TETAS12: Calcula los valores θ_1 y θ_2 de θ que definen bajo la parametrización de γ a los puntos de intersección calculados en INT1, ..., INT4.

7.1.7 IDSEGM: Identifica qué segmentos de γ tienen intersección con un triángulo, una vez que se sabe que la intersección es no vacía.

7.1.8 FIS: Calcula los coeficientes que definen a las tres funciones base locales asociadas con un elemento. Estas se suponen de la forma

$$\varphi_i = a_i + b_i x + c_i y.$$

7.1.9 INTET1T2: Calcula las integrales

$$\int_{p_1}^{p_2} \varphi_i(\theta) D(\theta) d\theta.$$

donde $D(\theta)$ es el factor de transformación de coordenadas y p_1 y p_2 dependen de θ_1 y θ_2 y de los valores de θ que definen a los puntos de división de γ .

las funciones EF1 y EF2 calculan la coordenada x de un punto sobre γ si se conoce la coordenada y y viceversa, respectivamente. La función INTDIAG calcula la coordenada x de la intersección de γ con la diagonal de un elemento.

Se puede observar que la subrutina GRCONJ llama casi las mismas subrutinas que GCPRE, por lo cual sólo falta describir las subrutinas de GCPRE que no son llamadas por GRCONJ:

8.1 GOPRE: Calcula la solución del subproblema SPP2; esto es, calcula g^0 cuando se considera preconditionamiento.

8.2 CALCBGnGn: Resuelve el subproblema SPP3; es decir calcula la integral

$$\int_{\gamma} (B g^n) g^n d\gamma.$$

8.3 GN1PRE: Resuelve el subproblema SPP5; esto es, calcula g^{n+1} cuando se considera preconditionamiento.

8.4 SOLU: Resuelve sistemas de ecuaciones lineales por factorización LU.

Para terminar la descripción de las subrutinas y los diagramas de estructura falta mencionar que los subproblemas SP3 y SP4 se resuelven en la subrutina GRCONJ ó GCPREC sin llamar a otra subrutina en especial pues el primero es demasiado sencillo y el segundo es una aplicación adecuada del cálculo que se hace en la subrutina INTLV (ver subsección 3.1.4)

Capítulo 4

RESULTADOS NUMÉRICOS Y SOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE CALOR NO ESTACIONARIA

4.1 Resultados Numéricos

En esta sección se describen los problemas de prueba utilizados para validar las subrutinas desarrolladas. Asimismo se presentan los resultados numéricos obtenidos. Para ello se propone una solución exacta u del problema (2.1)-(2.2) en un dominio dado ω y se calcula el lado derecho f de (2.1) y la condición de frontera g en (2.2), y a continuación se resuelve el problema numéricamente utilizando el método de dominios ficticios descrito en el capítulo 2 con el programa descrito en el capítulo 3.

Problema de prueba 1: Se consideran dos casos:

- a) ω el círculo con centro en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y radio 0.375
- b) ω el interior de la elipse con centro $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y semiejes de longitud $a = 0.4$ y $b = 0.2$.

En ambos casos se utiliza

$$u(x, y) = \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y)$$

con lo cual se obtiene

$$f(x, y) = (\alpha + 2\nu\pi^2)u(x, y),$$

en donde se escogió $\alpha = 1$ y $\nu = 1$. Como dominio ficticio exterior se toma $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ en ambos casos. Como espacio V en el problema (2.19) se tomó

$$V = H_0^1(\omega) = \{v \in H^1 \mid v = 0 \text{ sobre } \gamma\}.$$

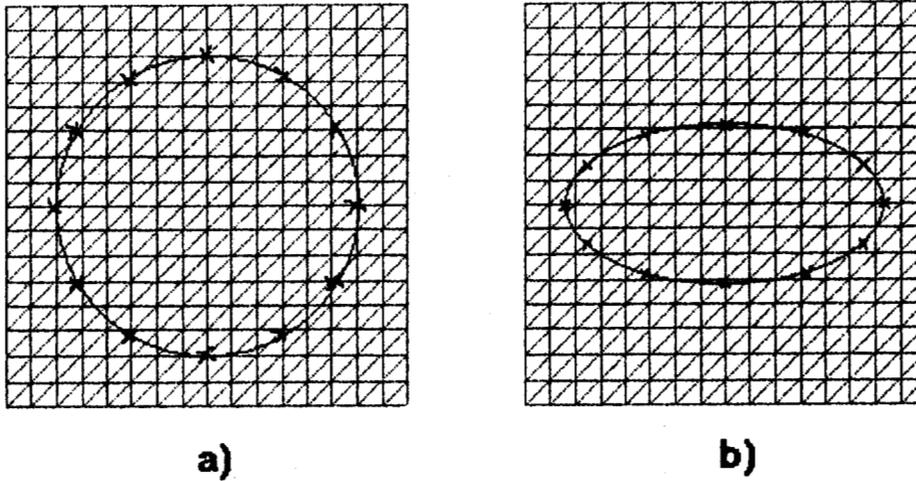


figura 4.1: Malla para V_h con $h=1/16$ y malla sobre γ con $M=12$: a) γ círculo y b) γ elipse.

Como espacio V_h y Λ_h en el problema (2.24) se tomó:

$$V_h = \{v_h : v_h \in V \cap C^0(\bar{\Omega}), v_h|_K \in P_1(K), \forall K \in \tau_h\},$$

donde τ_h es una triangulación de Ω como la que se indica en la figura 4.1 y P_1 es el espacio de polinomios de dos variables de grado menor o igual a uno, y

$$\Lambda_h = \{\mu_h : \mu_h = \text{constante en cada segmento que une dos puntos consecutivos de la malla sobre } \gamma\}.$$

Estos espacios son los mismos que se utilizan en los problemas de prueba que se describen más adelante, por lo cual ya no se mencionarán. La malla sobre Ω es una triangulación uniforme. Asimismo la malla sobre γ también es uniforme.

Para resolver los problemas resultantes de la forma (3.1) se utilizó el método de Cholesky (ver sección 3.1.1 para mayores detalles).

En las tablas 1 y 2 se muestran los cuadros de convergencia para las variantes a) y b) respectivamente del problema de prueba 1. En esas tablas M es el número de subdivisiones en la frontera γ y h es la longitud de discretización uniforme del dominio ficticio Ω . Asimismo se muestra el número de iteraciones realizadas por el algoritmo de gradiente conjugado con y sin preconditionamiento. El error absoluto se mide por

$$\|u - u_h\|_{\infty},$$

y el error relativo por

$$\frac{\|u - u_h\|_{\infty}}{\|u\|_{\infty}}$$

De acuerdo a los resultados mostrados en ambas tablas se observa que los órdenes de convergencia son 1.84 y 1.81 para los casos a) y b) respectivamente, basado en un cálculo sobre los tres últimos resultados. (es decir, tomando $1/h=32,64,128$). Estos resultados están acordes con los predichos por la teoría y consideramos que son satisfactorios.

En la figura 4.2 se muestran las curvas de nivel tanto de la solución exacta como de la aproximada para el problema 1a). En este caso, las curvas de nivel de la solución aproximada se obtuvieron con $h=1/128$ y $M=96$.

Las correspondientes curvas de nivel para el problema 1b) se muestran en la figura 4.3. Obsérvese que en ambos casos, las curvas de nivel obtenidas para la solución exacta y para la solución aproximada son indistinguibles.

M	1/h	iteraciones		error absoluto	error relativo
		sin prec	y con prec		
12	16	6	5	1.44E-2	1.44E-2
24	32	9	6	3.31E-3	3.31E-3
48	64	20	11	7.49E-4	7.49E-4
96	128	33	13	2.06E-4	2.06E-4

Tabla 1. Cuadro de convergencia para el problema 1 con frontera γ círculo.

M	1/h	iteraciones		error absoluto	error relativo
		sin prec	y con prec		
16	16	15	15	5.051E-2	5.051E-2
32	32	22	16	1.31E-2	1.31E-2
64	64	36	17	3.77E-3	3.77E-3
128	128	53	18	8.68E-4	8.68E-4

Tabla 2. Cuadro de convergencia para el problema 1 con frontera γ elipse.

Problema de prueba 2: Aquí se consideran de nuevo los casos a) y b) del problema de prueba 1, pero ahora se escoge

$$u(x, y) = x^2 y^2 (x - 1)(y - 1)$$

como la solución del problema de Dirichlet (2.1)-(2.2), donde $\alpha = 100$ y $\nu = 0.1$. Entonces

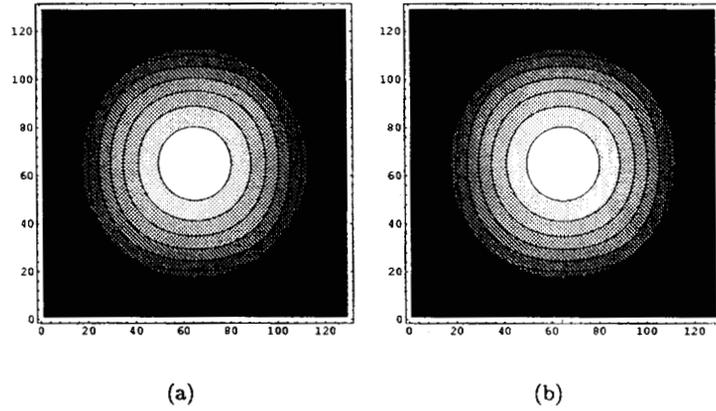


figura 4.2: Curvas de nivel para el problema 1 con frontera círculo: a) de la solución exacta y b) de la aproximada.

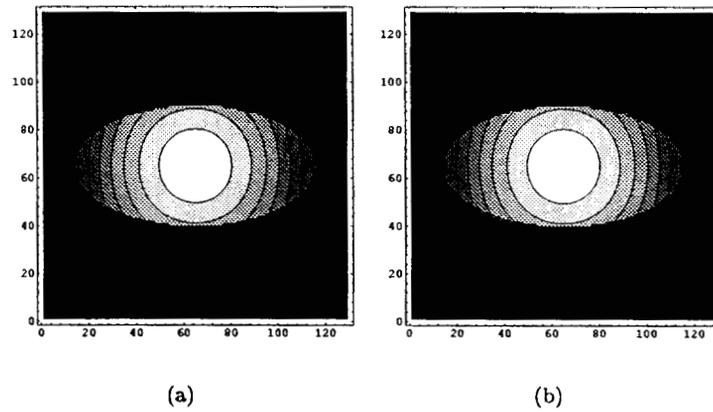


figura 4.3: Curvas de nivel para el problema 1 con frontera elipse: a) de la solución exacta y b) de la aproximada.

$$f(x, y) = \alpha u(x, y) - \nu[y^2(y-1)(6x-2) + x^2(x-1)(6y-2)].$$

Se toma $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. Este problema de prueba se introduce con el objeto de comparar nuestros resultados con aquellos obtenidos en [1] para un problema muy similar. En [1] se considera $u(x, y) = x^3 - y^3$ y $a=0.25$, $b=0.125$ como las longitudes de los semiejes de una elipse centrada en $(1/2, 1/2)$. Los demás parámetros son iguales.

En las tablas 4 y 5 se muestran los cuadros de convergencia para los dos tipos de dominio ω , (uno con frontera γ circular y el otro con frontera γ elíptica). Los errores absoluto y relativo se definen de la misma manera que en el problema de prueba 1. En este caso los órdenes de convergencia son 1.9 para el problema con frontera circular, y 1.82 para el problema con frontera elíptica. Con el objeto de comparar los resultados obtenidos en este trabajo (Tabla 5) con los presentados en [1], se reproduce a continuación la tabla correspondiente publicada en [1]:

M	1/h	iteraciones		error absoluto	error relativo
		sin prec	y con prec		
12	16	12	12	1.06E-3	1.06E-3
24	32	17	14	2.74E-4	2.74E-4
48	64	25	16	7.13E-5	7.13E-5
96	128	35	17	1.89E-5	1.89E-5

Tabla 3. Cuadro de convergencia reportado en [1].

M	1/h	iteraciones		error absoluto	error relativo
		sin prec	y con prec		
12	16	7	7	8.93E-4	4.46E-2
24	32	10	10	1.54E-4	7.703E-3
48	64	16	12	4.31E-5	2.15E-3
96	128	21	12	1.12E-6	5.60E-4

Tabla 4. Cuadro de convergencia para el problema 2 con frontera γ círculo.

M	1/h	iteraciones		error absoluto	error relativo
		sin prec	y con prec		
15	16	12	12	2.35E-3	1.11E-1
30	32	16	14	5.30E-4	2.52E-2
60	64	23	16	1.50E-4	7.14E-3
120	128	32	16	3.44E-5	1.63E-3

Tabla 5. Cuadro de convergencia para el problema 2 con frontera γ elipse.

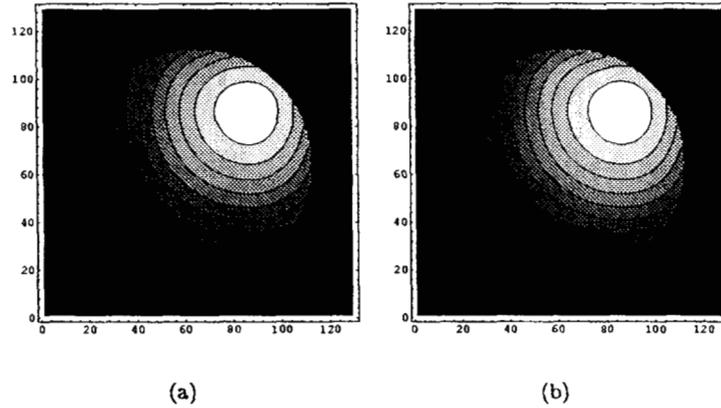


figura 4.4: Curvas de nivel para el problema 2 con frontera círculo: a) de la solución exacta y b) de la aproximada.

Comparando las tablas 3 y 5 se observa que los errores obtenidos en este trabajo son aproximadamente el doble que los obtenidos en [1]. Puede haber varias razones para explicar esta diferencia. Por ejemplo, se observa que el número de iteraciones en la tabla 5 es siempre menor que en la tabla 3, y por tanto es de esperarse que se obtenga un error ligeramente mayor. Por otro lado, los problemas son similares pero no son exactamente los mismos, ya que en este trabajo $a=0.4$ y $b=0.2$, mientras que en [1] se tomó $a=0.25$ y $b=0.125$, con lo cual la frontera del dominio ω está más cerca de la del dominio ficticio exterior $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ que aquella del dominio en [1]. Además, la expresión para el lado derecho del problema de Dirichlet en este caso es $f(x, y) = \alpha x^2 y^2 (x - 1)(y - 1) - \nu [y^2 (y - 1)(6x - 2) + x^2 (x - 1)(6y - 2)]$, mientras que en [1] es simplemente $f(x, y) = \alpha(x^3 - y^3) - 6\nu(x - y)$, lo cual resulta en un menor número de operaciones de punto flotante para resolver el problema en este último caso. Recuérdese además que en este trabajo se utiliza como espacio de funciones de prueba al espacio $V = H_0^1(\Omega)$, mientras que en [1] se utilizó $V = H_1^1(\Omega)$. Así que lo que realmente indica la equivalencia entre ambos resultados es el orden de convergencia, que en nuestro caso es 1.82, y en [1] es 1.88. Por lo tanto, puede considerarse que los resultados obtenidos son aceptables.

En las figuras 4.4 y 4.5 se muestran las curvas de nivel de las soluciones exacta y aproximada de los problemas 2a) y 2b) respectivamente. Las curvas de nivel aproximadas se obtuvieron con $h=1/128$, $M=96$.

El siguiente problema de prueba se considera con el objeto de analizar como influye en la convergencia del método de "dominios ficticios" la forma como se hace la extensión del lado derecho f definido en ω al dominio ficticio Ω .

Problema de prueba 3: Sea ω el círculo con centro en $(x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y radio $r=0.375$, y escójase

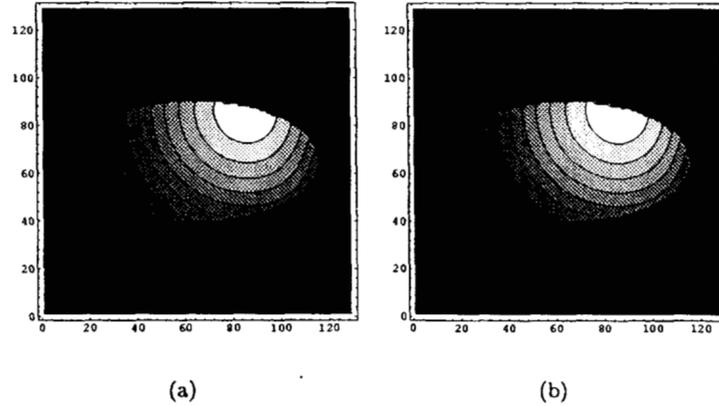


figura 4.5: Curvas de nivel para el problema 2 con frontera elipse: a) de la solución exacta y b) de la aproximada.

$$u(x, y) = [r^2 - (x - x_0)^2 - (y - y_0)^2]xy$$

como la solución del problema (2.1)-(2.2), donde $\alpha = 1$ y $\nu = 1$. Entonces se tiene que

$$f(x, y) = u(x, y) + 12xy - 4(x_0y + xy_0) \text{ sobre } \omega.$$

Una vez más se escoge $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$. En los ejemplos anteriores se tomó la extensión de f definida en ω al dominio ficticio Ω en forma continua. En este ejemplo se escoge una extensión discontinua de f :

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & \text{si } (x, y) \in \omega. \\ 0, & \text{si } (x, y) \in \Omega \setminus \omega. \end{cases}$$

En la tabla 6 se muestra el cuadro de convergencia. De acuerdo a estos resultados se obtiene un orden de convergencia igual a 0.79. Es decir, se pierde la convergencia cuadrática obtenida en los ejemplos anteriores. Sin embargo, los errores aún decrecen conforme las mallas se refinan, pero el error ya no decrece como antes, por supuesto.

Finalmente, en la figura 4.6 se muestran las curvas de nivel para las soluciones exacta y aproximada de este problema. Las curvas de nivel de la solución aproximada se obtuvieron con $h=1/128$, $M=96$.

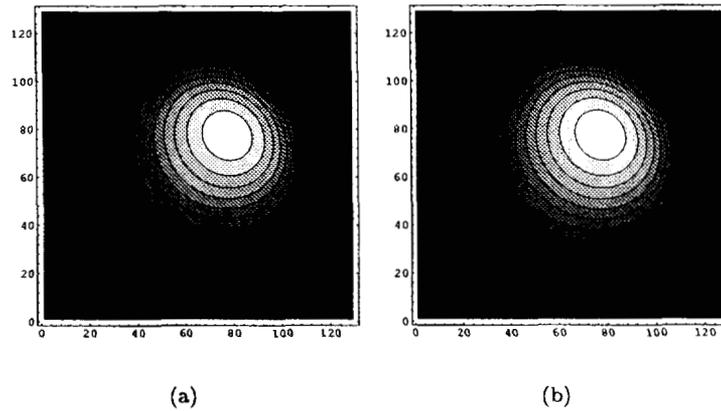


figura 4.6: Curvas de nivel para el problema 3: a) de la solución exacta y b) de la aproximada.

M	1/h	iteraciones		error absoluto	error relativo
		sin prec	y con prec		
12	16	8	7	6.47E-3	1.29E-1
24	32	14	10	3.71E-3	7.42E-2
48	64	22	13	1.80E-3	3.60E-2
96	128	31	12	8.94E-4	1.78E-2

Tabla 6. Cuadro de convergencia para el problema 3 con frontera γ círculo.

4.2 Solución de la Ecuación de Calor no estacionaria

En esta sección se describe una aplicación del método de dominios ficticios para resolver problemas del tipo (2.1)-(2.2). Considérese el problema de difusión de calor dado por las ecuaciones

$$(4.1) \quad u_t - k\Delta u = F(x, y, t) \text{ en } \omega.$$

$$(4.2) \quad u = g(x, y, t) \text{ sobre } \gamma \text{ y sobre } \Gamma.$$

$$(4.3) \quad u(x, y, 0) = u_0(x, y) \text{ en } \omega.$$

en donde ω es el dominio exterior al círculo con frontera γ e interior al cuadrado $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ de tal manera que $\Omega \setminus \omega$ es el círculo con centro en $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y radio $r = 0.2$ como se muestra en la figura 4.7.

Tomando la función

$$u(x, y, t) = \frac{1}{1+t} \text{sen}(\pi x) \text{sin}(\pi y)$$

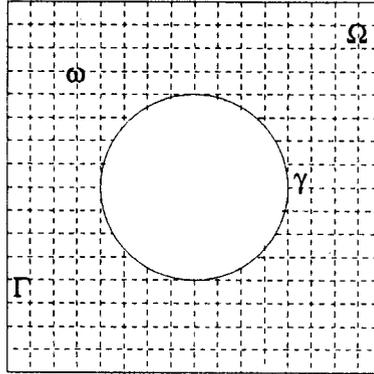


figura 4.7: Dominio exterior para el problema de calor.

como la solución exacta del problema (4.1)-(4.3) se tiene que

$$g(x, y, t) = \begin{cases} \frac{1}{1+t} \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y) & \text{si } (x, y) \in \gamma, \\ 0 & \text{si } (x, y) \in \Gamma. \end{cases}$$

$$u_0(x, y) = \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y), \quad (x, y) \in \omega.$$

$$F(x, y, t) = (2\pi^2 k - \frac{1}{1+t}) u(x, y, t), \quad (x, y) \in \omega.$$

La ecuación (4.1) se puede discretizar de la siguiente manera: escoger $u^0 = u_0$ y considerar

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} - k[\theta \Delta u^{n+1} + (1 - \theta) \Delta u^n] = F^{n+1},$$

donde Δt representa el incremento en el tiempo y $u^n = u(x, y, n\Delta t)$ y $F^n = F(x, y, n\Delta t)$. Con lo anterior se llega al problema discreto

$$\begin{aligned} u^{n+1} - k\theta \Delta t \Delta u^{n+1} &= u^n + (1 - \theta) k \Delta t \Delta u^n + h_t F^{n+1} \text{ sobre } \omega. \\ u^{n+1} &= g^{n+1} \text{ sobre } \gamma \text{ y sobre } \Gamma. \end{aligned}$$

Así que para tener la solución del problema de calor en cada intervalo de tiempo es necesario resolver un problema elíptico del tipo (2.1)-(2.2) con $u = u^{n+1}$, $\alpha = 1$, $\nu = k\theta \Delta t$ y $f^{n+1} = u^n + (1 - \theta) k \Delta t \Delta u^n + \Delta t F^{n+1}$, donde la extensión para cada f^{n+1} al dominio ficticio Ω se hizo en forma continua extendiendo de igual manera F^{n+1} y u^n .

En este trabajo se consideran los valores para $\theta = 1.0$ y $\theta = 0.5$. El tiempo final considerado es $T = 2.0$. En las tablas 6 y 7 se muestran los cuadros de convergencia para $\theta = 1.0$ y $\theta = 0.5$ respectivamente; en estos se consideran incrementos de tiempo Δt tales que el error debido a la

discretización en el tiempo no sea mayor a aquel obtenido por el método de dominios ficticios. Para el caso $\theta = 1.0$ los experimentos numéricos mostraron que es posible obtener los mismos niveles de error con incrementos de tiempo Δt mayores, lo cual está relacionado con la estabilidad incondicional del esquema en este caso.

Las tablas 7 y 8 también ilustran el hecho de que en esta aplicación a la ecuación de calor la convergencia del método de dominios ficticios es semejante a la de los ejemplos de prueba anteriores, ya que en este caso el orden de convergencia fué 1.81.

Finalmente, en la figura 4.8 se muestran las curvas de nivel tanto de la solución exacta como de la solución aproximada considerando $T = 2.0$, $h = 1/128$, $N = 96$ y $\theta = 1.0$. Para el caso $\theta = 0.5$ no se muestran gráficas puesto que es prácticamente la misma solución numérica que la que se obtiene con $\theta = 1.0$.

N	1/h	iterac. con prec.	error abs	error relativo	tiempo
14	16	9	3.44E-3	1.03E-2	$\Delta t=0.05$
28	32	10	7.84E-4	2.35E-3	$\Delta t=0.025$
56	64	12	2.24E-4	6.72E-4	$\Delta t=0.01$
112	128	14	6.00E-5	1.80E-4	$\Delta t=0.005$

Tabla 7. Cuadro de convergencia para el problema de calor con $\theta=1.0$ y $T=2.0$.

N	1/h	iterac. con prec.	error abs	error relativo	tiempo
14	16	9	3.46E-3	1.03E-2	$\Delta t=0.05$
28	32	10	7.94E-4	2.38E-3	$\Delta t=0.025$
56	64	12	2.29E-4	6.87E-4	$\Delta t=0.01$
112	128	14	6.08E-5	1.82E-4	$\Delta t=0.005$

Tabla 8. Cuadro de convergencia para el problema de calor con $\theta=0.5$ y $T=2.0$.

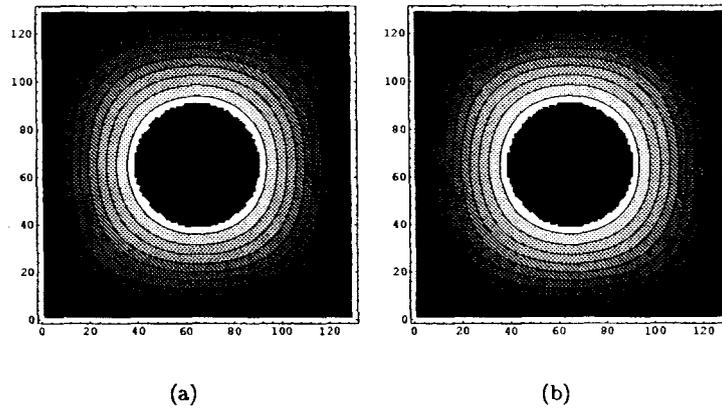


figura 4.8: Curvas de nivel para el problema de calor con $T = 2$ y $\theta = 1.0$: a) de la solución exacta y b) de la aproximada.

Capítulo 5

CONCLUSIONES

El desarrollo del presente trabajo permitió la elaboración de un programa que resuelve en forma eficiente problemas elípticos de la forma (2.1)-(2.2). El método utilizado es un método de dominios ficticios, el cual está basado en el uso explícito de multiplicadores de Lagrange definidos sobre la frontera real γ del dominio real ω , y asociado a las condiciones de frontera del problema. El algoritmo se utilizó para resolver varios problemas de prueba, así como para resolver un problema parabólico no estacionario, a saber, la ecuación de calor en un dominio bidimensional no trivial.

La validación del código elaborado se muestra resolviendo los problemas de prueba 1, 2 y 3 en la sección 4.1. En todos los casos los resultados numéricos convergen a la solución exacta conforme las mallas se refinan. El orden de convergencia obtenido al resolver los problemas de prueba 1 y 2 resultó ser 1.81, mientras que para el problema de prueba 3 fué 0.79. Estos órdenes de convergencia pudieran parecer extraños, y por tanto, merecen ser explicados. En [15] se establece que los ordenes de convergencia del método cuando se utilizan elementos finitos de Lagrange lineales para aproximar u en el dominio ficticio Ω y funciones constantes por pedazos sobre γ para aproximar los multiplicadores, dependen solamente de la regularidad de la solución (\tilde{u}, λ) , la cual en el peor de los casos pertenece a $H^{3/2-\epsilon}(\Omega)$, para algún $\epsilon > 0$ y en el mejor de los casos \tilde{u} pertenece a $H^2(\Omega)$. Esto se traduce en que en el mejor de los casos el orden de convergencia es del orden de h en la norma $H^1(\Omega)$ y del orden de h^2 en la norma L^∞ mientras que en el peor de los casos el orden de convergencia es del orden de $h^{1/2-\epsilon}$ en la norma $H^{3/2-\epsilon}(\Omega)$. Sin embargo, los resultados numéricos hacen sospechar que en realidad los ordenes de convergencia son $2 - \epsilon$ y $1 - \epsilon$ para extensiones continuas y discontinuas, respectivamente. Es bien sabido que cuando se resuelve numéricamente en forma estandar el problema (2.1)-(2.2) utilizando elementos finitos lineales conformes, el orden de convergencia es 2 (ver [8]). Cuando se utiliza el método de dominios ficticios escogido en este trabajo, la discretización de la frontera γ del dominio ω juega un papel importante. Recuérdese que para aproximar los multiplicadores λ sobre la frontera γ se utilizaron funciones constantes por pedazos, con lo cual formalmente se obtiene un orden de convergencia 1 al calcularlos numéricamente, y ésta es una de las razones por las cuales se espera que el método en su conjunto tenga un orden de convergencia menor a 2. Esto explica en parte por qué se obtienen órdenes de convergencia menores a 2, pero desde el punto de vista de la implementación práctica del método no es claro cuál es el valor de ϵ asociado al problema particular por resolver, y en qué forma la geometría del problema afecta la convergencia. Los resultados numéricos obtenidos en este trabajo pueden aclarar un poco este aspecto. Obsérvese que en los problemas de prueba 1 y 2 la frontera Γ del dominio ficticio

Ω es "cercana" a la frontera γ del dominio real ω , y el orden de convergencia es 1.81, mientras que en [1] ambas fronteras están más "apartadas", y el orden de convergencia es 1.88. Lo anterior puede indicar que no solo es importante la correcta implementación del método sino que también es necesario tener cuidado de la forma en que se escoge el dominio ficticio Ω . Por lo menos se puede decir que el dominio ficticio Ω debe escogerse de tal forma que su frontera Γ no sea muy cercana a la frontera γ del dominio real. Sin embargo, el dominio Ω no puede escogerse arbitrariamente grande pues esto aumentaría el tamaño del problema y por ende el tiempo de cómputo así como la memoria necesaria para resolver el problema numéricamente.

Cabe aclarar que la utilización de mallas uniformes para discretizar el dominio ficticio Ω no es un requisito indispensable del método, y que se pueden utilizar también mallas no estructuradas. Sin embargo, para utilizar mejor el potencial de esta metodología es preferible usar mallas uniformes o al menos estructuradas por varias razones: su simplicidad geométrica; los elementos finitos asociados a estas mallas son más fáciles de manipular; se pueden usar resolvedores rápidos para los sistemas lineales resultantes; el código es más fácil de paralelizar.

La discretización de la frontera γ para aproximar los multiplicadores λ tampoco necesita satisfacer propiedades de uniformidad. Además, como se enfatiza en [1], el método no requiere ajustar esta malla a la malla del dominio Ω , como se hace en otros métodos de encajamiento de dominios. De hecho, la única limitación al discretizar γ es que los espacios de funciones discretas Λ_h y V_h asociados a γ y a Ω respectivamente satisfagan la condición de Babuska-Brezzi (ver sección 2.2.1). Sin embargo, la discretización uniforme de γ ofrece varias ventajas. Una de ellas es que, cuando se pretende usar preconditionamiento en el algoritmo de gradiente conjugado para calcular los multiplicadores λ , se puede utilizar el preconditionador introducido en la sección 2.2.6 y construido en la sección 3.1.6, el cual fue deducido suponiendo uniformidad. En el caso que la discretización de γ no sea uniforme se puede seguir utilizando el mismo preconditionador, pero este ya no es tan eficiente. Por supuesto, es posible también construir preconditionadores asociados a discretizaciones no uniformes de γ , pero esto requiere de un mayor esfuerzo, ya que es probable que estos no puedan encontrarse de manera exacta. En este trabajo se utilizaron mallas uniformes para γ obteniéndose aproximadamente el mismo número de iteraciones, con el algoritmo de gradiente conjugado con y sin preconditionamiento, que los reportados en [1]. Además se encontró que hay un número óptimo M de subdivisiones de la frontera γ para cada malla de Ω , y ese número se indica en los cuadros de convergencia en cada caso (Obsérvese que no siempre es 12, 24, 48 y 96 para $h=1/16, 1/32, 1/64$ y $1/128$ respectivamente). Los tipos de frontera γ considerados en este trabajo fueron sólo círculos y elipses, para los cuales se tiene una parametrización sencilla. Para fronteras γ más complicadas basta construir una parametrización total o por segmentos de la misma para que de esta manera se pueda dividir y refinar en forma automática.

Finalmente, cabe destacar que se aplicó con éxito el método de dominios ficticios para resolver un problema de calor en el cual las principales características son que: este es un problema no estacionario en el cual para cada nivel de tiempo se resuelve un problema elíptico de la forma (2.1)-(2.2); el dominio ω no es interno al dominio ficticio Ω , sino externo, y, por tanto, la extensión de los datos es hacia el interior de γ ; el grado de convergencia de las soluciones es similar al obtenido en los problemas de prueba, siempre y cuando el error en la discretización en el tiempo no sea mayor al de los subproblemas elípticos obtenidos en cada paso del tiempo. La utilización del método para resolver problemas más generales (no lineales y no estacionarios) se puede hacer de manera más o menos directa una vez que se obtenga una formulación adecuada de los mismos y se le dé un tratamiento adecuado a los términos no lineales vía un método iterativo adecuado.

En lo que respecta al trabajo futuro se consideran principalmente dos aspectos:

El primero es en relación con un estudio numérico más extenso acerca de la convergencia del método, la cual tiene que ver con el tipo de extensión de los datos al dominio ficticio Ω y con la relación geométrica que guardan los dominios real y ficticio ω y Ω , así como sus fronteras; dentro de este aspecto se considera el poder hacer automáticamente extensiones no triviales de los datos.

El otro aspecto tiene que ver con utilizar métodos similares para resolver problemas más complicados como son problemas lineales de convección-difusión con convección algo dominante (no potenciales), problemas no lineales de difusión, problemas de Stokes y Navier-Stokes, así como problemas con fluidos newtonianos y no newtonianos; todo ellos implican obtener una formulación adecuada del problema y simultáneamente dar un tratamiento adecuado a los términos no lineales.

Capítulo 6

Apéndice. El Método de Gradiente Conjugado

El método de gradiente conjugado GC es un método iterativo efectivo para encontrar la solución a sistemas grandes de ecuaciones lineales de la forma

$$(6.1) \quad Ax = b,$$

donde A es una matriz cuadrada de $n \times n$, simétrica y definida positiva (o positiva indefinida). Además, el método de GC puede adaptarse para resolver problemas de la forma

$$(6.2) \quad Ax = b,$$

donde $A \in L(H, H)$ con H espacio vectorial no necesariamente de dimensión finita. El método de GC para resolver (6.1), ver [18], se describe a continuación:

ALGORITMO GC1:

x_0 dado

$$d_0 = r_0 = b - Ax_0$$

$$\alpha_i = \frac{r_i^T \cdot r_i}{d_i^T \cdot Ad_i}$$

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i d_i$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i Ad_i$$

$$\beta_{i+1} = \frac{r_{i+1}^T \cdot r_{i+1}}{r_i^T \cdot r_i}$$

$$d_{i+1} = r_{i+1} + \beta_{i+1} d_i$$

FIN ALGORITMO GC1.

Teóricamente este algoritmo encuentra la solución en n iteraciones pero al considerar los errores de redondeo es necesario introducir un criterio de paro pues la convergencia no se dará en n pasos. Para mejorar la convergencia del algoritmo anterior se introduce la idea de preconditionamiento, la cual supone que existe una matriz M simétrica y positiva definida que aproxima a A y que es fácil de invertir. Entonces se resuelve (6.1) indirectamente resolviendo

$$M^{-1}Ax = M^{-1}b.$$

El problema es que la matriz $M^{-1}A$ puede no ser simétrica ni definida positiva aún y cuando M y A lo sean. Esta dificultad se salva si se considera que para M con las propiedades supuestas existe una matriz E (no necesariamente única) tal que se puede escribir

$$EE^T = M$$

y entonces haciendo algunas consideraciones adicionales, ver [18], se transforma el problema 6.1 en

$$E^{-1}AE^{-T}\hat{x} = E^{-1}b, \hat{x} = E^T x,$$

el cual se resuelve para \hat{x} y luego para x .

Nótese que las matrices $M^{-1}A$ y $E^{-1}AE^{-T}$ tienen los mismos valores característicos. Además, debido a que $E^{-1}AE^{-T}$ es simétrica y positiva definida, \hat{x} puede ser aproximado utilizando GC por medio del siguiente algoritmo:

ALGORITMO GCP1:

x_0 dado

$$r_0 = b - Ax_0$$

$$d_0 = M^{-1}r_0$$

$$\alpha_i = \frac{r_i^T \cdot M^{-1}r_i}{d_i^T \cdot Ad_i}$$

$$x_{i+1} = x_i + \alpha_i d_i$$

$$r_{i+1} = r_i - \alpha_i A d_i$$

$$\beta_{i+1} = \frac{r_{i+1}^T \cdot M^{-1} r_{i+1}}{r_i^T \cdot M^{-1} r_i}$$

$$d_{i+1} = M^{-1} r_{i+1} + \beta_{i+1} d_i$$

FIN ALGORITMO GCP1.

Para aplicar estos algoritmos a los problemas del tipo (6.2) es necesario que A sea autoadjunto (simétrico) y elíptico (definido positivo). Además, debe sustituirse el producto interior en R^n por el producto interior asociado con H .

Bibliografía

- [1] R. Glowinski, T-W Pan, J. Periaux, *A Fictitious Domain Method for Dirichlet Problem and Applications*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 111, 283-303, 1994.
- [2] I. Babuska and A. K. Aziz, *Survey Lectures on the Mathematical Foundations of the Finite Elements Method*, en *The Mathematical Foundations of the Finite Elements Method with Applications to Partial Differential Equations*, A. K. Aziz (Ed.), Academic Press, New York, 1972.
- [3] I. Babuska, J. T. Oden and J. K. Lee, *Mixed-Hybrid Finite Element Aproximations of Second-Order Elliptic Boundary-Value Problems*, Comput. Meth. Appl. Mech. Eng., 11, 175-206, 1977.
- [4] I. Babuska, *The Finite Element Method with Lagrange Multipliers*, Numer. Math., 20, 179-192. 1973.
- [5] H. Brezis, *Analisis funcional. Teoria y aplicaciones*, Alianza Editorial, 1978.
- [6] F. Brezzi, *On the Existence, Uniqueness and Aproximation of Saddle-Point Problems Arising from Lagrangian Multipliers*, Revue Francaise d'Automatique Informatique et Recherche Operationnelle Nume. Anal. R2, 129-151, 1974.
- [7] F. Brezzi, M. Fortin, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [8] P. G. Ciarlet, *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland, 1978.
- [9] I. Ekeland, R. Temam, *Convex Analysis and Variational Problems*, North-Holland, Amsterdam, 1976.
- [10] V. Girault, P. A. Raviart, *Finite Element methods for Navier-Stokes Equations*, Springer, Berlin, 1986.
- [11] G. F. Carey and J. T. Oden, *FINITE ELEMENTS: A first Course*, Prentice-Hall, 1983.
- [12] G. F. Carey and J. T. Oden, *FINITE ELEMENTS: A Second Course*, Prentice-Hall, 1983.
- [13] G. F. Carey and J. T. Oden, *FINITE ELEMENTS: Mathematical Aspects*, Prentice-Hall, 1983.
- [14] R. Glowinski, O. Pironneau, *Numerical Methods for the biharmonic equation and for the two-dimensional Stokes problem*, SIAM Review 21. 1979, 167-212.

- [15] V. Girault, R. Glowinski. *Error Analysis of a Fictitious Domain Method Applied to a Dirichlet Problem*, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 12, No. 3, 487-514, Octobre 1995.
- [16] P. Prenter, *Splines and Variational Methods*, J. Wiley Sons, New York, 1975.
- [17] J. T. Oden, *An Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, New York, 1976.
- [18] J. R. Shewchuk, *An Introduction to the Conjugate Gradient Method Without the Agonizing Pain*, School of Computer Science Carnegie Mellon University, Pittsburgh, PA 15213. August 4, 1994.
- [19] V. S. Melezhik, *New Method for Solving Multidimensional Scattering Problem*, Journal of Computational Physics, No 92, 1991, 67-81.
- [20] B. L. Buzbee, F. W. Dorr, J. A. George, G. H. Golub, *The Direct Solution of the Discrete Poisson Equation on irregular regions*, SIAM, J. Num. Anal. 8, 1971, 722-736.
- [21] A. Perronnet, *Les Methodes de Resolution des Systemes Lineaires. Leur Technique de Storage*, Universite Pierre et Marie Curie. LABORATOIRE ANALYSE NUMERIQUE. No. Enregistrement: 81 022.