

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA



**UNIVERSIDAD
AUTÓNOMA
METROPOLITANA**

UNIDAD IZTAPALAPA

**DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
POSGRADO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

Tesis:

**“Cálculo de trayectorias de radiación electromagnética en medios
estratificados y su aplicación a la atmósfera terrestre”**

**Que para obtener el grado de:
Maestro en Ciencias (Física)**

Tesis que presenta:

Lic. Israel López Ireta

Matrícula: 2162800466

israel.ireta.uam@gmail.com

Asesor:

Dr. Marco Antonio Núñez Peralta (UAM-I)

Jurado:

Presidente:

Dr. Eleuterio Castaño Tostado (UAM-I)

Secretario:

Dr. Marco Antonio Núñez Peralta (UAM-I)

Vocal:

Dr. Ángel Refugio Terán Cuevas (CIEMAD-IPN)

Iztapalapa, Ciudad de México a 13 de septiembre de 2024.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA UNIDAD IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
Departamento de Física



**Cálculo de trayectorias de radiación electromagnética en medios estratificados
y su aplicación a la atmósfera terrestre.**

Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias Físicas

Israel López Ireta

Sinodales

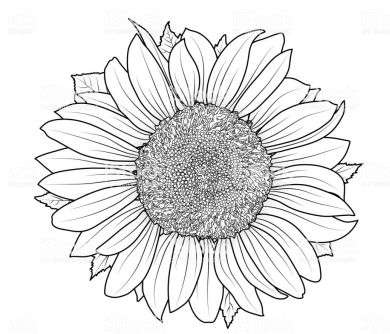
Dr. Eleuterio Castaño Tostado

Dr. Ángel Refugio Terán Cuevas

Dr. Marco Antonio Núñez Peralta

13 de Septiembre del 2024

AGRADECIMIENTOS



INTRODUCCIÓN

La radiación solar es la principal fuente de energía de los procesos atmosféricos, desde la escala atómico-molecular hasta los movimientos de gran escala como los huracanes, procesos que determinan el estado del tiempo día a día y el clima en cada región del planeta. La radiación electromagnética interactúa con los gases, aerosoles y partículas presentes en la atmósfera, lo que resulta en la absorción, reflexión, dispersión y emisión de energía radiante. Estas interacciones determinan la distribución espacial y temporal de la energía y la temperatura en cada punto del espacio. Son precisamente los gradientes espaciales de temperatura los que dan lugar a la circulación atmosférica en sus diferentes escalas espaciales y temporales. En principio, la interacción de la radiación solar con los diferentes componentes del sistema tierra se puede estudiar con mecánica cuántica, pero trabajar en una escala atómico-molecular resulta imposible cuando se desea estimar el campo de radiación en un modelo atmosférico global, por ejemplo, tanto por las dimensiones del sistema tierra (compuesto por la geosfera, la hidrósfera, la atmósfera y la biósfera) como por la heterogeneidad de sus propiedades. Cuando la naturaleza cuántica de la interacción de la radiación con un medio no es relevante, podemos usar el electromagnetismo clásico y la óptica clásica, los cuales están basados en las ecuaciones de Maxwell, la mecánica de Newton y la fuerza de Lorentz. Esta es la aproximación que usaremos en este trabajo.

En el capítulo 1 reportamos la deducción de la ecuación de ondas electromagnéticas para medios isotrópicos lineales no homogéneos (como la atmósfera). En la sección 1.4 se introducen conceptos hidrodinámicos para resolver la ecuación de transporte. El concepto de partícula puntual (o partícula hidrodinámica) permite reemplazar la ecuación de transporte por un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias cuya solución es la trayectoria de partículas hidrodinámicas. Estas trayectorias son ejemplos de las así llamadas curvas características usadas en la literatura matemática para resolver ecuaciones diferenciales parciales de primer orden y de las cuales la ecuación de la eikonal (la principal ecuación de la óptica geométrica) es un caso particular. Para familiarizar al lector con el concepto de curva característica, resolvemos la ecuación de onda unidimensional usando dicho concepto. En la sección 1.5 reportamos la solución de la ecuación de ondas escalares tridimensionales y su aplicación para demostrar el principio de Huygens. En la sección 1.6 se demuestra que la ecuación de ondas escalares tridimensionales admite una solución en serie de potencias de un parámetro pequeño para puntos lejanos a la fuente o para números de onda grandes. Esta serie permite reemplazar la ecuación de onda por un conjunto de ecuaciones de transporte, a orden cero aparece la ecuación de la Eikonal. Damos el método de solución de la eikonal ψ por medio de las así llamadas curvas características en un espacio $xyz\tau$ donde τ es un parámetro. La proyección de estas curvas en el espacio físico xyz son los llamados rayos sobre los cuales se propaga la energía de una onda. Se demuestra que los rayos son ortogonales a una superficie sobre la cual ψ es constante, superficie mejor conocida como un frente de onda. Los resultados generales se ilustran con algunos ejemplos analíticos. Reportamos la forma vectorial de la ecuación de los rayos ya que dicha forma es la que se obtiene a partir de las ecuaciones de Maxwell.

En la sección 1.7 empleo las ecuaciones de Maxwell para un medio isotrópico lineal y no homogéneo (con índice de refracción dependiente de la posición) para deducir la ecuación vectorial de la eikonal S (usando la notación de Max Born) y la ecuación vectorial de los rayos (curvas ortogonales a la superficie $S = \text{constante}$) sobre los cuales se propaga la energía electromagnética. La ecuación vectorial de los rayos es similar a la segunda ley de Newton, con la longitud de arco s jugando el papel del tiempo t . Esto permite usar

métodos de la mecánica para resolver la ecuación vectorial de los rayos. En particular, utilizó los análogos de momento angular y la conservación de la “energía” para demostrar que en un medio con simetría esférica, cada rayo es una curva plana que pertenece al plano definido por su posición y dirección iniciales. Este resultado se usa en este trabajo para calcular numéricamente el rayo que conecta a dos puntos arbitrarios en una atmósfera hidrostática sobre un modelo esférico terrestre (Capítulo 5).

La aproximación de la óptica geométrica es uno de los pilares para calcular el flujo de energía electromagnética en medios isotrópicos lineales como la atmósfera terrestre, ya que se parte del hecho de que la energía se propaga a lo largo de rayos. La ecuación de transferencia radiativa es una ecuación escalar que cuantifica el balance (o conservación) de la energía a lo largo de un rayo arbitrario. Esta es la ecuación fundamental que se resuelve en modelos meteorológicos y en otros campos como la medicina o la percepción remota, para calcular la interacción de la radiación electromagnética con un medio. En la literatura meteorológica se usan modelos de transferencia radiativa donde se parte de la aproximación de que la radiación solar se propaga en líneas rectas y donde el índice de refracción sólo varía en planos paralelos, despreciando la refracción inducida por la variación espacial del índice de refracción. El objetivo principal del presente trabajo es calcular la refracción de un rayo considerando la variación del índice de refracción en una atmósfera hidrostática con simetría esférica. Esto como un paso preliminar para calcular los efectos de la refracción en modelos atmosféricos de balance radiativo.

En el capítulo 2 reportamos los modelos clásicos de Cauchy y Sellmeier para el índice de refracción, modelos que dependen de la frecuencia de oscilación de la radiación. Reportamos el modelo del índice de refracción de Rodgers [1], el cual es una función de la presión, la temperatura y el vapor de agua. En este trabajo usamos el modelo de Rodgers para resolver la ecuación de los rayos de luz debido a que es una expresión sencilla del índice de refracción del aire, que nos permite usar modelos de referencia hidrostáticos de la atmósfera terrestre. Esto plantea la necesidad de calcular la variación espacial de la presión y la temperatura atmosféricas, problema que abordó en el capítulo siguiente.

En el capítulo 3 está dedicado al cálculo de la presión y la temperatura del aire para el caso de una atmósfera hidrostática (en reposo con respecto a una tierra rotante). En la sección 3.1 damos una deducción de la ecuación de estado para la atmósfera y en la sección 3.2 damos un resumen de las relaciones entre variables termodinámicas para el caso de un gas ideal en un recipiente que está en equilibrio termodinámico. Es claro que una atmósfera hidrostática no está en equilibrio termodinámico por que sus propiedades cambian significativamente con la altura. Por ejemplo, la presión y temperatura no es la misma en Acapulco que en el Popocatepetl. En la sección 3.4 describimos la así llamada hipótesis de equilibrio local para justificar el uso de las relaciones termodinámicas de equilibrio, incluida la ecuación de estado, y explicamos el concepto de partícula puntual en un fluido concebido como un medio continuo. En la sección 3.5 aplicó la segunda ley de Newton a una partícula de fluido en una atmósfera fija a la tierra, para deducir la ecuación hidrostática donde aparece el así llamado geopotencial, el cual es la suma del potencial gravitacional y de la función potencial que da lugar a la aceleración centrípeta que experimenta cada partícula de aire por la rotación terrestre. Demostramos que una atmósfera hidrostática es necesariamente barotrópica, es decir, la densidad ρ es función únicamente de la presión p .

La ecuación de estado de gas ideal para la atmósfera sólo permite reemplazar a ρ por la temperatura T en la ecuación hidrostática, por lo que, en general, dicha ecuación sólo puede resolverse si conocemos la variación de T con la altura. Con el propósito de obtener modelos analíticos de la presión p y la temperatura

T como función de la altura, en este trabajo consideramos los casos isotérmico y adiabático. El adiabático es el más realista por que permite la disminución de la temperatura con la altura.

En el capítulo 4 se plantea las ecuaciones escalares de un rayo en diferentes sistemas de referencia fijos a la tierra. En la sección 4.1 damos una revisión de la importancia del cálculo de rayos para la simulación computacional de imágenes. En la sección 4.2 reportamos las expresiones necesarias para definir la posición del sol en un sistema de referencia inercial con origen en el centro de masa terrestre. En la sección 4.3 damos una deducción general de la ecuación vectorial de un rayo en un sistema cartesiano fijo a la tierra, y reportamos las ecuaciones escalares correspondientes. Estas ecuaciones se escriben como un sistema de seis ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para resolverlas numéricamente con el método de Runge-Kuta de cuarto orden. La originalidad y lo que difiere en este trabajo está en la sección 4.3 donde reduzco las ecuaciones escalares a una sola ecuación de segundo orden. Esta simplificación es importante para poder calcular el rayo que va de un punto a otro como un problema con condiciones de frontera, en lugar de un problema de valores iniciales, como normalmente se hace.

En la sección 4.4 introducimos el sistema de referencia primario $X Y Z$ el cual es el sistema fijo a la tierra que se usa en ciencias de la tierra para estudiar fenómenos geofísicos. En este sistema se definen las coordenadas geográficas $\lambda \phi R$ que usamos para calcular el gradiente del índice de refracción ∇n . En la sección 4.5 introducimos un sistema local $x y z$ asociado a la posición de un observador para calcular la posición del sol respecto al observador, y dar los cambios de coordenadas necesarios para calcular ∇n en dicho sistema. En la sección 4.6 introducimos un sistema local $x y_\theta z_\theta$ orientado con el sol para aprovechar la simetría cilíndrica de los rayos del sol que llegan a un observador y calcular dichos rayos resolviendo la ecuación diferencial de segundo orden reportada en la sección 4.3.1 con condiciones a la frontera.

El capítulo 5 esta dedicado a la solución de las ecuaciones escalares de un rayo. Esto incluye la solución del sistema de seis ecuaciones de primer orden con el método de Runge-Kuta de cuarto orden y el método de shooting para resolver la ecuación de la sección 4.3.1 con condiciones a la frontera.

El capítulo 6 esta dedicado a reportar resultados numéricos. Como resultado obtuvimos que al reducir el problema a una sola ecuación de segundo orden sección 4.3 para poder calcular el rayo que va de un punto a otro como un problema con condiciones de frontera, en lugar de un problema de valores iniciales, empleando el método de shooting no lineal se demuestra que se rompe la simetría de la imagen del sol en el eje z del observador dando una mayor similitud a lo que se percibe en la realidad durante un ocaso, lo que prueba que la simulación reportada en [2] no se observa esta característica importante debido al planteamiento como un problema de valores iniciales, reportando una imagen simétrica en ambos ejes como una elipse que a su vez nos permite validarlo con el programa de 6 ecuaciones de primer orden.

ÍNDICE

Agradecimientos	2
INTRODUCCIÓN	3
Índice	6
Índice de figuras	8
Índice de tablas	10
Nomenclatura	11
Capítulo 1: FUNDAMENTOS TEÓRICOS	1
1.1. Ecuaciones de Maxwell	1
1.2. Teorema de Poynting	3
1.3. Ecuación de ondas electromagnéticas	4
1.4. Enfoque hidrodinámico de las ecuaciones de transporte y onda 1D	5
Solución de la ecuación de transporte	6
Solución de la ecuación de onda unidimensional de segundo orden	9
1.5. Ecuación de onda tridimensional	11
1.6. Aproximación de la óptica geométrica para ondas escalares	14
Ecuaciones de la eikonal y de transporte a partir de la serie de Debye	16
Solución de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden	16
Solución de la ecuación de la eikonal en forma paramétrica	18
Ecuación de los rayos en forma vectorial	22
Ortogonalidad entre rayos y frentes de onda	23
1.7. Óptica geométrica para ondas electromagnéticas	25
Ley de intensidad de la óptica geométrica	28
Medio con simetría esférica	30
Capítulo 2: MODELOS DEL ÍNDICE DE REFRACCIÓN	33
2.1. Modelos clásicos del índice de refracción	33
2.2. Modelo de Rodgers	36
Capítulo 3: Estados termodinámicos de la atmósfera	37
3.1. Ecuación de estado para la atmósfera	37
3.2. Termodinámica de gases ideales	38
3.3. Distribución vertical promedio de la temperatura	41
3.4. Hipótesis de equilibrio local y termodinámica de un flujo atmosférico	42
3.5. Ecuación hidrostática	44
Atmósfera isotérmica	47
Atmósfera adiabática	48
Capítulo 4: CÁLCULO DE RAYOS	50
4.1. Introducción al Ray Tracing	50
4.2. Posición del sol en un sistema de referencia inercial	52
4.3. Ecuaciones escalares de un rayo en un sistema fijo a la tierra	54
Ecuación de un rayo en un plano xy para una tierra esférica	57
4.4. Sistema de referencia primario y coordenadas geográficas	58
Cálculo de ∇n para una tierra esférica	60
4.5. Sistema local xyz asociado a un observador terrestre	60
4.6. Ecuación de rayos en un sistema local $xy_\theta z_\theta$	64
4.7. Cálculo de rayos en un espejismo	67
Capítulo 5: SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE UN RAYO	69
5.1. Problema con Valores Iniciales para EDO'S	69
Método de Runge-Kutta.	69

Método de Newton.	70
5.2. Problema con Valores a la Frontera para EDO'S.	70
Método de Shooting Lineal.	71
Método de Shooting para Problemas no Lineales.	72
Capítulo 6: RESULTADOS COMPUTACIONALES	75
Solución a la ecuación de los rayos como un problema de valores iniciales (PVI).	75
6.1. ESPEJISMO COMO PROBLEMA DE VALORES INICIALES.	75
Solución a la ecuación de los rayos como un problema con condiciones de frontera.	76
6.2. IMAGEN DEL SOL.	77
Declinación Solar.	77
Orientación del Sol.	79
Sol sin Refracción.	81
Cálculo de Rayos.	82
Transformación de coordenadas del Sistema local rotado (x, y_θ) al Sistema local (x, y)	85
Imagen del Sol en el solsticio de invierno 2023.	91
Capítulo 7: CONCLUSIONES	95
Apéndices	101
Apéndice A: Pséudocódigos	101
Apéndice B: Solución general de la ecuación de onda en el espacio tridimensional	104
Bibliografía	108

ÍNDICE DE FIGURAS

<i>Número</i>	<i>Página</i>
1.1. Interpretación física de la propagación de una onda [3].	9
1.2. Ilustración del significado de la relación $n\hat{s} = \nabla S$ [1].	29
1.3. Ilustración de la ley de conservación de la óptica geométrica [1].	30
1.4. Sistema de referencia primario con origen en el centro de masa terrestre X, Y, Z	30
2.1. Sistema coordenado para el campo electromagnético y el oscilador atómico [2]	34
3.1. Estructura vertical típica de la temperatura (K) atmosférica, en los 100km más bajos de la atmósfera. Basado en datos de [4]	42
3.2. Modelo esférico terrestre.	47
4.1. Fisiología del ojo humano.	51
4.2. Modelando una escena real en una computadora [5].	51
4.3. El trazado de rayos proyecta rayos desde el punto focal a través del plano de la imagen y en la escena [5]	52
4.4. Posición del Sol en el sistema X_I, Y_I, Z_I	53
4.5. Variación de la declinación solar δ como función de J . [6]	54
4.6. Sistema de referencia cartesiano y^i fijo a la tierra con origen en un punto con posición $\mathbf{R}_c$ y vectores base $\hat{\mathbf{y}}_i$	55
4.7. Sistema de Referencia Primario e inercial con origen en el centro de masa terrestre fijo a la tierra.	58
4.8. Sistema local xyz asociado a un observador terrestre.	61
4.9. Posición del sol en el sistema xyz del observador.	63
4.10. Contorno de la imagen del sol que llega a los ojos de un observador en un sistema local $xy_{\theta=0}z_{\theta=0}$ orientado con el sol.	64
4.11. Sistema $xy_{\theta}z_{\theta}$ donde los ejes y_{θ} y z_{θ} son rotaciones	65
4.12. Para ángulos muy pequeños, los rayos parecen proceder debajo de la carretera como si se reflejara un charco de agua. [3]	68
4.13. Espejismo en la carretera.	68
5.1. Representación método de Newton [7].	71
5.2. Ilustración Gráfica del Método de Shooting lineal [7].	72
5.3. Método de Shooting no lineal [7].	73
6.1. Rayo de Luz curvado hacia la región de mayor índice de refracción.	76
6.2. Sistema de referencia primario (X, Y, Z) no inercial con origen en el centro de masa terrestre.	78
6.3. Variación de la declinación solar δ como función de J . [6]	78
6.4. Variación de la declinación solar δ como función de J , programado en F77.	79
6.5. Geometría para determinar la hora en el que el sol se encuentra por arriba o por debajo del horizonte.	80
6.6. Variación de la posición del Sol en el transcurso del día.	80
6.7. Imagen del Sol sin refracción, programado en F77.	81
6.8. Imagen del Sol sin refracción, programado en F77.	82

6.9.	Condiciones de frontera para resolver la ecuación de los rayos en el sistema local (x, y, z) del observador mediante el método de Shooting no lineal.	83
6.10.	Cálculo de rayos de luz en el plano (x, y_θ)	84
6.11.	Imagen del sol real en la que se observa sólo un eje de simetría [2].	84
6.12.	Transformación de puntos del sistema local (x, y_θ) al sistema local (x, y)	85
6.13.	Posición de la Tierra día 319, a las 12:00 pm.[8]	86
6.14.	Imagen del Sol a partir de la simulación en F77.	88
6.15.	Posición de la Tierra día 319, a las 17:00 pm [8].	89
6.16.	Posición de la Tierra día 319, a las 18:00 pm [8].	89
6.17.	Imagen del Sol sin refracción, programado en F77.	90
6.18.	Imagen del Sol con refracción a partir de la simulación en F77.	90
6.19.	Orientación del Sol 22 de Diciembre, 18:00 pm, 2019.	91
6.20.	Imagen del Sol sin refracción, 22 de Diciembre 18:00 pm, programado en F77.	92
6.21.	Posición de la Tierra día 356,a las 18:00 [8].	92
6.22.	Imagen del Sol, 22 de Diciembre 18:00 pm, a partir de la simulación en F77.	94
7.1.	Fotografía de la puesta del sol [2].	96
7.2.	Simulación de la imagen del sol publicado en [2].	96
7.3.	Imagen del Sol, 22 de Diciembre 18:00 pm, a partir de la simulación en F77.	98
7.4.	Foto real del sol, tomada el 22 de Diciembre del 2023, a las 18:00 pm.	99
7.5.	Foto real del sol empleando un filtro MEXSA 12 FW, tomada el 22 de Diciembre del 2023, a las 18:00 pm.	99
A.1.	Rayo de luz en el plano (x, y_θ) [9].	101
A.2.	Rayo de luz en el plano (x, y_θ) [9].	102
A.3.	Rayo de luz en el plano (x, y_θ) [9].	103
B.1.	Interpretación física de la propagación de una onda.	106

ÍNDICE DE TABLAS

<i>Número</i>		<i>Página</i>
6.1.	Datos para calcular un Espejismo.	76
6.2.	Datos para calcular Rayos del Sol.	77
6.3.	Datos para calcular Rayos del Sol.	80
6.4.	Datos para obtener la imagen del Sol en un plano a 2 metros del observador.	87
6.5.	Datos para obtener la imagen Sol en un plano a 2 metros del observador.	93
7.1.	Métodos de solución a la ecuación de los rayos.	97

NOMENCLATURA

Constantes físicas

t	Tiempo	s
c	Velocidad de la luz	$299,792,458\text{ m/s}$
μ	Permeabilidad relativa	$1.26 \times 10^{-6}, H/m$
g	Aceleración de la gravedad	9.81 m/s^2
ϵ	Permitividad del vacío	$8.85 \times 10^{-12}\text{ F/m}$
P	Presión	$1 \times 10^3\text{ mb}$
T	Temperatura	$288^\circ K$
R_a	Constante de gas atmosférica	$287\text{ J/kg}\cdot^\circ K$
K_a	Constante de boltzman	$1.38 \times 10^{-23}\text{ J/K}$
N_A	Número de Avogadro	$6.02 \times 10^{23}/\text{mol}$
R_T	Radio terrestre	6378 Km
R_S	Radio del sol	$6.96 \times 10^5\text{ Km}$
ρ_a	Densidad estandar a nivel de mar	1.225 Kg/m^3

Abreviaturas

MSNOL Método de Shooting no lineal.

P1OS Programa1 computacional Orientación del Sol.

P2ISSNR Programa2 computacional Imagen del Sol sin refracción.

P3IMSNOL Programa3 computacional Imagen del Sol método de Shooting no lineal.

PVI Problema de valores iniciales.

RTE Ecuación de transferencia radiativa.

Simbología

D Vector de desplazamiento.

B Vector de inducción de campo magnético.

E Vector de campo eléctrico.

H Vector de campo magnético.

ρ_f Densidad de carga eléctrica.

$\mathbf{J}_f$ Vector de corriente eléctrica.

$\mathbf{J}'_f$ Corriente libre de otras fuentes.

P Vector de polarización.

σ	Conductividad.
κ_e	Constante dieléctrica.
κ_m	Suceptibilidad magnética.
$\mathcal{W}$	Energía electromagnética.
u	Densidad total de energía.
$\mathbf{S}$	Vector de Poynting.
$\psi(\mathbf{r}, t)$	Función de onda.
n	Índice de refracción.
$\mathcal{F}$	Transformada de Fourier.
$\mathcal{F}^{-1}$	Transformada inversa de Fourier.
$\mathbf{K}$	Vector de propagación.
w	Frecuencia de oscilación.
$\langle \mathbf{S} \rangle$	Promedio del flujo de energía.
$\langle w_e \rangle$	Promedio de la densidad de energía eléctrica.
$\langle w_m \rangle$	Promedio de la densidad de energía magnética.
$\langle w_m \rangle$	Promedio de la densidad de energía electromagnética.
S	Frente de onda.
$\hat{\mathbf{s}}$	Vector unitario.
I	Intensidad de la luz.
s	longitud de arco.
$\hat{\mathbf{L}}$	Momento angular.
λ	Longitud de onda.
U	Energía interna.
Q	Calor.
V	Volumen.
W	Trabajo.
C_v	Capacidad calorífica a volumen constante.
C_p	Capacidad calorífica a presión constante.
δ	Declinación solar.
H	Entalpía.
S	Entropía.

Capítulo 1

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

En este capítulo damos algunas de las bases teóricas de la óptica geométrica, la cual simplifica la solución de las ecuaciones de Maxwell a la integración de ecuaciones diferenciales ordinarias. En la secciones 1.1 a 1.3 damos un resumen de la deducción de las ecuaciones de ondas electromagnéticas. En la sección 1.4 resolvemos la ecuación de transporte y la ecuación de onda escalar unidimensional con un enfoque hidrodinámico donde aparece por primera vez el concepto de *curva característica*. En la sección 1.5 damos algunas soluciones de la ecuación de onda escalar en el espacio físico tridimensional. La sección 1.6 está dedicada a la solución de la ecuación de onda escalar usando la aproximación de la *óptica geométrica*, la cual es una aproximación asintótica que reemplaza la ecuación de onda por una sucesión de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden, entre las cuales destaca la *ecuación de la eikonal*. Estas ecuaciones se resuelven integrando sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, cuyas soluciones son las así llamadas curvas características. La proyección de las curvas características en el espacio físico xyz son curvas llamadas rayos, sobre los cuales se propaga la energía de una onda. En la sección 1.7 usamos la aproximación de la óptica geométrica a la solución de las ecuaciones de Maxwell en un medio isotrópico y lineal pero no homogéneo como la atmósfera (con índice de refracción variable). El resultado principal es la ecuación de la eikonal para ondas electromagnéticas y la ecuación de los rayos correspondientes, las cuales coinciden con las ecuaciones reportadas en la sección 1.6 para ondas esclares.

1.1. Ecuaciones de Maxwell

Maxwell, estudió cada una de las aportaciones de: Faraday, Gauss y Ampère, cada uno de ellos estudiaron los fenómenos electromagnéticos con diferentes concepciones. La gran contribución de Maxwell consistió en unificar las ideas de cada uno de ellos en las ecuaciones que describen por completo los fenómenos electromagnéticos clásicamente. Las ecuaciones que sintetizan la teoría de Maxwell [10]

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (1.4)$$

El subíndice en ρ y $\mathbf{J}_f$, indica las cargas y corrientes libres. Una de las contribuciones de Maxwell a la teoría electromagnética consistió en agregar el último término de (1.4), conocido como corriente de desplazamiento ya que sin esté término se presentaba una inconsistencia a partir de la conservación de la carga mediante

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_f + \frac{\partial \rho_f}{\partial t} = 0. \quad (1.5)$$

La ecuación (1.1) resume la ley de Coulomb de la fuerza entre cargas puntuales más los efectos eléctricos de la materia. La ecuación (1.2) es una consecuencia de la ley de Ampère de la fuerza entre corrientes y

además nos da información sobre la no existencia de cargas magnéticas libres. La ecuación (1.3) representa la ley de Faraday de la inducción y por último la ecuación (1.4) incluye la ley de Ampère para la fuerza entre corrientes más los efectos magnéticos de la materia.

Una importante y simplificadora situación especial ocurre cuando se manejan medios *isotrópicos homogéneos lineales* (i.l.h.), para tal caso, el vector de desplazamiento [1][11]

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}. \quad (1.6)$$

Para medios i.l.h. el vector de polarización es

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (1.7)$$

evaluando en la expresión (1.6) queda de la siguiente forma

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} (1 + \chi_e) = \kappa_e \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad (1.8)$$

donde el valor de $\kappa_e \epsilon_0 = \epsilon$, el término κ_e recibe el nombre de constante dieléctrica y representan las propiedades eléctricas del material por lo tanto, el vector $\mathbf{D}$ y $\mathbf{E}$ son paralelos como sigue

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}.$$

Para un material magnético isotrópico homogéneo lineal, la magnetización resulta ser proporcional y paralela al campo magnético de modo que

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (1.9)$$

χ_m recibe el nombre de susceptibilidad magnética y es característica de cada material, de la expresión del campo magnético

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} - \mathbf{M}, \quad (1.10)$$

evaluando (1.9) en (1.10) obtenemos

$$\mathbf{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{M} = \mu_0 \kappa_m \mathbf{M},$$

donde el valor $\mu_0 \kappa_m = \mu$, el término κ_m recibe el nombre de permeabilidad relativa. Para este caso pero no universal $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ son paralelos por tanto, queda

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (1.11)$$

Las ecuaciones constitutivas para medios isotrópicos homogéneos lineales son

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (1.12)$$

Además, la corriente libre esta dada por $\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E}$. Puede que existan corrientes libres presentes en el material provenientes de fuentes externas, $\mathbf{J}_{f'}$ representa la corriente libre proveniente de otras fuentes por tanto, la corriente libre total es

$$\mathbf{J}_f = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{f'} \quad (1.13)$$

donde σ es la conductividad, si evaluamos las expresiones (1.12) y (1.13) en (1.1) a (1.4) obtenemos las ecuaciones de Maxwell para medios isotrópicos homogéneos lineales en función de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$.

La atmósfera es un medio *isotrópico y lineal* pero no homogéneo. En este caso las ecuaciones de Maxwell toman la forma [1]

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon} \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (1.15)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \quad (1.16)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}'_f + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (1.17)$$

Las ecuaciones de Maxwell antes mencionadas están dadas en el sistema MKSA (metro, kilogramo, segundo y ampére). Se pueden escribir las expresiones anteriores para el sistema CGS (centímetro, gramo y segundo). Otra distinción que debemos notar entre un sistema a otro es a partir de si se encuentran factores de 4π . Se conoce como sistema racionalizado cuando no existen factores de 4π y se conoce como no racionalizado cuando hay factores de 4π en las ecuaciones de Maxwell. El sistema Gaussiano es un sistema CGS no racionalizado, e indica que aparecerán factores de 4π , las ecuaciones de Maxwell [12] adquieren la forma siguiente

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 4\pi \rho_f \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}_f + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

donde los vectores de campo se relacionan mediante

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi \mathbf{M}. \quad (1.18)$$

La ecuación de continuidad en este sistema conserva su forma (1.5). En (1.18), aparece el vector de polarización y el de magnetización y es debido a la presencia de materia, mediante

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}.$$

1.2. Teorema de Poynting

La rapidez con la que se disipa en calor la energía electromagnética por unidad de volumen está dada por $w = \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E}$. Si integramos sobre un cierto volumen, obtenemos la velocidad total de pérdida de energía electromagnética [12],[13],[14] $\mathcal{W}$

$$\mathcal{W} = \int_V w d\tau = \int_V \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} d\tau, \quad (1.19)$$

usando la relación (1.4) en (1.19) queda expresado en función de los vectores de campo

$$\mathcal{W} = \int_V \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) d\tau - \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\tau \quad (1.20)$$

Desarrollando el integrando del primer término resulta $\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$, de la cual podemos hacer uso de la ley de Faraday y del teorema de la divergencia, la expresión (1.20) queda

$$- \int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d\tau = \mathcal{W} + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a}, \quad (1.21)$$

a está expresión se le conoce como teorema de Poynting de forma general. Resulta más sencillo interpretar este resultado para medios isotrópicamente lineales, de las expresiones (1.12) en (1.21) queda

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2 \right) d\tau = \int_V \mathbf{J}_f \cdot \mathbf{E} d\tau + \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a}. \quad (1.22)$$

El integrando del lado izquierdo es la suma de las densidades de energía eléctrica y magnética, la derivada de esta expresión infiere que los campos varían con el tiempo, esto implica que el integrando representa la densidad total de energía electromagnética

$$u = u_e + u_m = \frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu} \mathbf{B}^2,$$

y la integral representa la energía electromagnética total contenida en el volumen V . Entonces el término de lado izquierdo de (1.22) representa la rapidez de disminución de la energía total. El primer término de lado derecho representa la velocidad con la que esta energía se convierte en calor. Del principio de conservación de la energía cualquier cantidad de energía que no se convierta en calor debe salir del volumen V a través de su frontera S . El último término de (1.22)

$$\oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot d\mathbf{a},$$

representa la rapidez con la que fluye la energía a través de la superficie limitante. El último término del integrando de (1.22)

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (1.23)$$

como la rapidez con la que fluye la energía electromagnética por unidad de superficie. La cantidad $\mathbf{S}$, se conoce como vector de Poynting; su dirección es la misma que la del flujo de energía. En el sistema Gaussiano el vector de Poynting es

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (1.24)$$

1.3. Ecuación de ondas electromagnéticas

El principio, se acepta que cualquier solución de las ecuaciones de Maxwell que satisfaga condiciones de frontera dadas en un posible campo electromagnético que podría ser producido por una distribución apropiada de cargas y corrientes. Sin embargo, en la práctica no resulta conveniente tratar de resolver ecuaciones de Maxwell indiscriminadamente, si no buscar soluciones de algún tipo en particular, o aquellas que parezcan ser apropiadas para la situación de interés en un momento dado. En primer lugar se estudian varios ejemplos de este último procedimiento para campos que dependen del tiempo, postergando de momento la cuestión de cómo se podrían producir dichos campos en caso de que se deseara hacerlo.

Consideremos las ecuaciones de Maxwell (1.14)–(1.17) para medios isotropicos y lineales, omitiremos el subíndice f en la densidad de carga y en la corriente para simplificar la notación. Además vamos a suponer que no existen cargas o corrientes libres externas en la región de interés, es decir se toma $\rho = 0$ y $\mathbf{J} = 0$. Aplicando el rotacional a la Ley de Faraday se obtiene

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \frac{1}{c} \nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) = 0,$$

ya que $\mathbf{H}$, se supone que es una función que muestra un buen comportamiento, las derivadas respecto al espacio y al tiempo pueden intercambiarse y así poder hacer uso de la ley de Ampère y obtener

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{E} \right) + \frac{\epsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0,$$

usando las identidades $\nabla \times (u\mathbf{v}) = u\nabla \times \mathbf{v} + (\nabla u) \times \mathbf{v}$ y $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}$, se tiene

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla(\ln \mu) \times \nabla \times \mathbf{E} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) = 0, \quad (1.25)$$

para el último término de (1.25) junto con la relación constitutiva para el campo $\mathbf{D}$ tomando la divergencia de $\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E})$ dado por

$$\epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla \epsilon = 0,$$

por lo tanto (1.25), se puede escribir de la forma

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \nabla(\ln \mu) \times \nabla \times \mathbf{E} + \nabla(\mathbf{E} \cdot \nabla \ln \epsilon) = 0. \quad (1.26)$$

De una forma similar podemos obtener una ecuación para $\mathbf{H}$, tomando el rotacional de la ley de Ampère quedando

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \nabla(\ln \epsilon) \times \nabla \times \mathbf{H} + \nabla(\mathbf{H} \cdot \nabla \ln \mu) = 0. \quad (1.27)$$

Para medios homogéneos $\nabla \ln \mu = \nabla \ln \epsilon = 0$ lo que reduce (1.26) y (1.27) a

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (1.28)$$

Como veremos abajo, estas expresiones indican la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan a una velocidad $v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}}$.

1.4. Enfoque hidrodinámico de las ecuaciones de transporte y onda 1D

Las ecuaciones (1.28) implican que, para un medio isotrópico lineal y homogéneo, las componentes de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ satisfacen la ecuación de onda, por lo que en esta sección estudiaremos brevemente las propiedades de las soluciones de la ecuación de onda escalar y su cálculo con el concepto de curva característica. En esta sección usamos conceptos hidrodinámicos para resolver la ecuación de transporte y ecuación de onda unidimensional. Este enfoque permite introducir el concepto de curva característica que en el contexto de la óptica geométrica recibe el nombre de rayo, a cuyo cálculo dedicamos los capítulos restantes de esta tesis.

La hidrodinámica clásica es una teoría de campos donde cada punto en un fluido se concibe como una partícula física con propiedades como la temperatura, la densidad de masa, presión, y propiedades cinemáticas como la posición, velocidad y aceleración. Uno de los conceptos básicos de esta teoría de campos es que dada una partícula tiene una identidad propia, es decir, sigue una trayectoria propia y no se intersecta (en un tiempo finito) con la trayectoria de otra partícula. Esta hipótesis equivale a suponer que existe una relación uno a uno entre las coordenadas iniciales (o lagrangianas) x_0, y_0, z_0 , y sus coordenadas instantáneas x, y, z (o eulerianas) [13, 15]

$$x = x(t, x_0, y_0, z_0), \quad y = y(t, x_0, y_0, z_0), \quad z = z(t, x_0, y_0, z_0).$$

Estas relaciones (que llamaremos **mapeo lagrangiano**) constituyen las ecuaciones paramétricas de una curva (o trayectoria de partícula) que parte del punto (x_0, y_0, z_0) . La hipótesis hidrodinámica es que las ecuaciones anteriores son invertibles

$$x_0 = x_0(t, x, y, z), \quad y_0 = y_0(t, x, y, z), \quad z_0 = z_0(t, x, y, z) .$$

A estas últimas relaciones las llamaremos **mapeo euleriano**. El valor de una propiedad q que atribuimos a una partícula podemos indicarla en su forma lagrangiana

$$q_L(t, x_0, y_0, z_0)$$

o en su forma euleriana

$$q_E(t, x, y, z) .$$

Es claro que el valor de q debe ser el mismo en ambas representaciones

$$q_L(t, x_0, y_0, z_0) = q_E[t, x(t, x_0, y_0, z_0), y(t, x_0, y_0, z_0), z(t, x_0, y_0, z_0)] .$$

Derivando con respecto a t y usando la regla de la cadena obtenemos la identidad

$$\frac{dq_L}{dt} = \frac{\partial q_E}{\partial t} + u \frac{\partial q_E}{\partial x} + v \frac{\partial q_E}{\partial y} + w \frac{\partial q_E}{\partial z} .$$

donde u, v, w , son las componentes de la velocidad instantánea

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w ,$$

que podemos considerar en su forma lagrangiana

$$u_L \equiv \frac{dx(t, x_0, y_0, z_0)}{dt}, \quad v_L \equiv \frac{dy(t, x_0, y_0, z_0)}{dt}, \quad w_L \equiv \frac{dz(t, x_0, y_0, z_0)}{dt} .$$

Sustituyendo el mapeo euleriano obtenemos la forma euleriana de u

$$u_E(t, x, y, z) = u_L[t, x_0(t, x, y, z), y_0(t, x, y, z), z_0(t, x, y, z)] ,$$

y análogamente para $v_E(t, x, y, z)$, $w_E(t, x, y, z)$. Vemos cómo aplicar estas ideas para resolver la así llamada ecuación de transporte de una propiedad física.

En la sección 1.5.2 damos un resumen de la teoría para resolver ecuaciones diferenciales parciales de primer orden. De acuerdo con esta teoría, la solución de tales ecuaciones se reduce al cálculo de las *curvas características* que son la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. En el contexto de la hidrodinámica, las curvas características son las trayectorias de todas las partículas que constituyen al fluido.

Solución de la ecuación de transporte

Consideremos el problema de calcular la función $c(t, x, y, z)$ que satisface la *ecuación de transporte*

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u(t, x, y, z) \frac{\partial c}{\partial x} + v(t, x, y, z) \frac{\partial c}{\partial y} + w(t, x, y, z) \frac{\partial c}{\partial z} = f(t, x, y, z, c) , \quad (1.29)$$

sujeta a la condición inicial

$$c = c_0(x, y, z) \quad \text{en } t = 0, \quad (1.30)$$

donde c_0 es la distribución espacial inicial de la variable c . El problema está en forma euleriana ya que x, y, z , son las coordenadas instantáneas de una partícula de fluido con velocidad

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w.$$

Para enfatizar este hecho agregamos el subíndice E

$$\frac{\partial c_E}{\partial t} + u(t, x, y) \frac{\partial c_E}{\partial x} + v(t, x, y) \frac{\partial c_E}{\partial y} + w(t, x, y, z) \frac{\partial c_E}{\partial z} = f_E(t, x, y, c_E) \quad (1.31)$$

con

$$c_E(t, x, y, z) = c_0(x, y, z) \quad \text{en } t = 0. \quad (1.32)$$

El problema (1.31) se resuelve en su forma lagrangiana como sigue:

(i) Integramos el campo de velocidad euleriano

$$\frac{dx}{dt} = u(t, x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = v(t, x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = w(t, x, y, z), \quad (1.33)$$

con $x = x_0, y = y_0, z = z_0$, en $t = 0$, para obtener el **mapeo lagrangiano**

$$x = x(t, x_0, y_0, z_0), \quad y = y(t, x_0, y_0, z_0), \quad z = z(t, x_0, y_0, z_0) \quad (1.34)$$

donde x_0, y_0, z_0 , son las coordenadas lagrangianas y las coordenadas instantáneas x, y, z , son las eulerianas. Despejando x_0, y_0, z_0 , obtenemos el **mapeo euleriano**

$$x_0 = x_0(t, x, y, z), \quad y_0 = y_0(t, x, y, z), \quad z_0 = z_0(t, x, y, z). \quad (1.35)$$

(ii) Sustituyendo (1.34) en $c_E(t, x, y, z)$, $f_E(t, x, y, z, c_E)$, obtenemos las formas lagrangianas de c_E, f_E , a saber,

$$\begin{aligned} c_L(t, x_0, y_0, z_0) &= c_E(t, x, y, z) \\ f_L(t, x_0, y_0, z_0, c_L) &= f_E(t, x, y, z, c_E). \end{aligned} \quad (1.36)$$

(iii) La condición inicial (1.32) es una expresión lagrangiana ya que en $t = 0$ las coordenadas eulerianas y lagrangianas coinciden ($x = x_0, y = y_0, z = z_0$), por lo que podemos escribir

$$c_L(t = 0, x_0, y_0, z_0) = c_0(x_0, y_0, z_0) \quad \text{en } t = 0. \quad (1.37)$$

Derivando la primera identidad en (1.36) y usando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{dc_L}{dt} = \frac{\partial c_E}{\partial t} + u \frac{\partial c_E}{\partial x} + v \frac{\partial c_E}{\partial y}. \quad (1.38)$$

(iv) Usando (1.38), (1.37), (1.36), el problema euleriano (1.31), toma la forma lagrangiana

$$\frac{dc_L}{dt} = f_L(t, x_0, y_0, z_0, c_L) \quad \text{con } c_L = c_0(x_0, y_0, z_0) \quad \text{en } t = 0.$$

donde x_0, y_0, z_0 , son constantes con respecto a t . Resolviendo obtenemos la solución lagrangiana $c_L(t, x_0, y_0, z_0)$.

(v) Sustituyendo el mapeo euleriano (1.35) en $c_L(t, x_0, y_0, z_0)$ obtenemos la forma euleriana

$$c_E(t, x, y, z) = c_L(t, x_0(t, x, y, z), y_0(t, x, y, z), z_0(t, x, y, z)).$$

que es la solución deseada de la ecuación de transporte (1.29) sujeta a la distribución inicial (1.30) de la propiedad transportada c .

Ejemplo. Consideremos la solución de

$$\frac{\partial c}{\partial t} + x \frac{\partial c}{\partial x} - y \frac{\partial c}{\partial y} = 1 + xy \quad \text{con } c = x + y \quad \text{en } t = 0. \quad (\text{E1})$$

Integrando el campo de velocidad $\dot{x} = x$, $\dot{y} = -y$, obtenemos los mapeos lagrangiano

$$x = x_0 e^t, \quad y = y_0 e^{-t}$$

y euleriano

$$x_0 = x e^{-t}, \quad y_0 = y e^t.$$

La forma lagrangiana de $f = 1 + xy$ es $f_L = 1 + (x_0 e^t)(y_0 e^{-t}) = 1 + x_0 y_0$. Así, el problema (E1) toma la forma Lagrangiana

$$\frac{dc_L}{dt} = 1 + x_0 y_0 \quad \text{con } c_L = x_0 + y_0 \quad \text{en } t = 0.$$

Integrando obtenemos

$$c_L = t(1 + x_0 y_0) + x_0 + y_0.$$

Usando el mapeo euleriano obtenemos la forma euleriana deseada

$$c(t, x, y) = t(1 + xy) + x e^{-t} + y e^t.$$

Comprobación. Derivando

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= 1 + xy - x e^{-t} + y e^t \\ x \frac{\partial c}{\partial x} &= txy + x e^{-t} \\ -y \frac{\partial c}{\partial y} &= -txy - y e^t \end{aligned}$$

y sumando

$$\frac{\partial c}{\partial t} + x \frac{\partial c}{\partial x} - y \frac{\partial c}{\partial y} = 1 + xy$$

vemos que $c(t, x, y)$ satisface la ecuación de transporte (E1) y es claro que también satisface la condición inicial en $t = 0$.

Solución de la ecuación de onda de primer orden. Consideremos la ecuación de onda más simple

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + v \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad \text{con } \psi(x, 0) = f(x) \quad \text{para } -\infty < x < \infty. \quad (1.39)$$

La forma lagrangiana de este problema es

$$\frac{d\psi_L}{dt} = 0 \quad \text{con } \psi_L = f(x_0) \quad \text{para } t = 0,$$

cuya solución es inmediata

$$\psi_L = f(x_0).$$

Integrando $\dot{x} = v$ obtenemos $x = vt + x_0$, $x_0 = x - vt$, y la forma euleriana de la solución

$$\psi(x, t) = f(x - vt).$$

Esta solución representa la traslación de la perturbación inicial $f(x_0)$ hacia la derecha del eje x con una velocidad v figura (1.1).

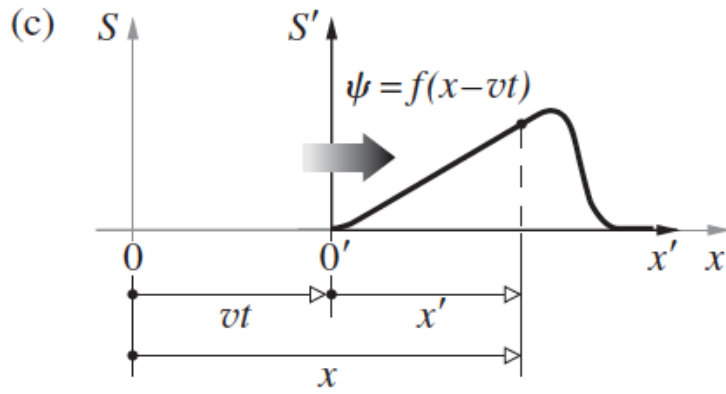


Figura 1.1: Interpretación física de la propagación de una onda [3].

Solución de la ecuación de onda unidimensional de segundo orden

En esta sección resolvemos la ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \quad \text{para } -\infty < x < \infty \quad (1.40)$$

sujeta a las condiciones iniciales

$$\psi(0, x) = f(x), \quad \psi_t(0, x) = g(x) \quad \text{para } t = 0. \quad (1.41)$$

por medio de dos ecuaciones de transporte. En el apéndice A, se reportan otros métodos de solución. El resultado principal es la solución

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2} [f(\xi) + f(\eta)] + \frac{1}{2v} \int_{\eta}^{\xi} g(s) ds \quad (1.42)$$

donde

$$\xi = x + vt, \quad \eta = x - vt. \quad (1.43)$$

La solución ψ puede reescribirse como la superposición de dos ondas viajeras con velocidades v y $-v$ como sigue. Si definimos

$$Q(\tau) = \int_0^{\tau} g(s) ds$$

entonces

$$\int_{\eta}^{\xi} g(s) ds = Q(\xi) - Q(\eta),$$

y ψ (1.42) toma la forma

$$\psi(x, t) = F(x + vt) + G(x - vt). \quad (1.44)$$

con

$$F(\xi) = \frac{1}{2} \left[f(\xi) + \frac{1}{v} Q(\xi) \right], \quad G(\eta) = \frac{1}{2} \left[f(\eta) - \frac{1}{v} Q(\eta) \right].$$

Físicamente F y G son ondas que se propagan a la izquierda y la derecha del eje x , respectivamente.

Demostración de (1.42). Factorizando la ecuación (1.40)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \psi = (\partial_t + v \partial_x) (\partial_t - v \partial_x) \psi = 0. \quad (1.45)$$

y definiendo $W \equiv (\partial_t - v\partial_x)\psi$ aparece la ecuación de transporte

$$W_t + vW_x = 0 \quad \text{con velocidad} \quad \frac{dx}{dt} = v.$$

cuya solución está dada por $W = W_0(x - vt)$ donde W_0 es una función arbitraria. Queda por resolver la ecuación de transporte

$$\psi_t - v\psi_x = W_0(x - vt).$$

Integrando la velocidad correspondiente $dx/dt = -v$ obtenemos $x = x_0 - vt$, $x_0 = x + vt$. Sustituyendo $x = x_0 - vt$ en $W_0(x - vt)$ obtenemos la ecuación de transporte para ψ en su forma lagrangiana

$$\frac{d\psi_L}{dt} = \psi_t - v\psi_x = W_0(x_0 - 2vt),$$

cuya integración es inmediata

$$\psi_L = c_0(x_0) + \int_0^t W_0(x_0 - 2vs) ds$$

donde $c_0(x_0)$ es una función arbitraria de x_0 . Para simplificar la integral usamos el cambio de variable $\tau = x_0 - 2vs$. Esto da $d\tau = -2vds$, $\tau(s=0) = x_0$, $\tau(s=t) = x_0 - 2vt$, y

$$\int_0^t W_0(x_0 - 2vs) ds = \int_{x_0}^{x_0 - 2vt} W_0(\tau) \left(-\frac{1}{2v}\right) d\tau = -\frac{1}{2v} \int_{x_0}^{x_0 - 2vt} W_0(\tau) d\tau.$$

Por lo tanto

$$\psi_L = c_0(x_0) - \frac{1}{2v} \int_{x_0}^{x_0 - 2vt} W_0(s) ds.$$

La forma euleriana de ψ se obtiene sustituyendo $x_0 = x + vt$,

$$\psi(x, t) = c_0(x + vt) + \int_{x-vt}^{x+vt} W_0(s) ds. \quad (1.46)$$

Calculemos c_0 y W_0 a partir de las condiciones iniciales (1.41) que se imponen a la ecuación de onda (1.40). Evaluando (1.46) en $t = 0$ e imponiendo $\psi = f$,

$$\psi(x, t=0) = c_0(x) + \int_x^x W_0(s) ds = f(x),$$

obtenemos

$$c_0(x) = f(x).$$

Para simplificar la notación y usar la condición $\partial_t \psi = g(x)$ en $t = 0$ usamos las variables

$$\xi = x + vt \quad \eta = x - vt, \quad (1.47)$$

con las cuales (1.46) toma la forma

$$\psi(x, t) = f(\xi) + \int_{\eta}^{\xi} W_0(s) ds. \quad (1.48)$$

Derivando

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi &= \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{df(\xi)}{d\xi} + \frac{\partial \xi}{\partial t} W_0(\xi) - \frac{\partial \eta}{\partial t} W_0(\eta) \\ &= v \frac{df(\xi)}{d\xi} + v W_0(\xi) + v W_0(\eta), \end{aligned}$$

evaluando en $t = 0$ e imponiendo $\partial_t \psi = g(x)$, obtenemos

$$W_0(x) = \frac{1}{2v} \left[g(x) - v \frac{df(x)}{dx} \right].$$

Sustituyendo esta expresión en (1.48) obtenemos la solución (1.42).

1.5. Ecuación de onda tridimensional

En esta sección reportamos soluciones de la ecuación de onda tridimensional

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi. \quad (1.49)$$

Ondas esféricas

La ecuación para ondas ψ con simetría esférica es

$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r \psi.$$

Reescribiendo obtenemos la forma de la ecuación de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \psi) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \psi).$$

De acuerdo con lo expuesto arriba, la solución general de esta ecuación tiene la forma [1]

$$\psi(r, t) = \frac{F(r + vt)}{r} + \frac{G(r - vt)}{r}$$

donde $F(x + vt)/r$ es una onda que se aproxima al origen $r = 0$ y $G(x - vt)/r$ se aleja de éste último.

Ondas planas en un paralelepípedo

Consideremos la solución de (1.49) en un cubo Ω centrado en el origen y lados L ,

$$\Omega = \{|x| \leq L/2, |y| \leq L/2, |z| \leq L/2\},$$

y ψ sujeta a condiciones de frontera periódicas

$$\psi|_{x=-L/2} = \psi|_{x=L/2}, \quad \partial_x \psi|_{x=-L/2} = \partial_x \psi|_{x=L/2},$$

análogamente para $y, z = \pm L/2$, y con las condiciones iniciales

$$\psi = f(\mathbf{r}), \quad \partial_t \psi = g(\mathbf{r}) \quad \text{para } t = 0.$$

El problema se reduce a la solución de la ecuación de eigenvalores en una dimensión

$$-\partial_x^2 \varphi = \mu_x \varphi \quad \text{con } \varphi(-a) = \varphi(a), \quad \partial_x \varphi(-a) = \partial_x \varphi(a)$$

donde usamos $a = L/2$ para simplificar la notación. Multiplicando la ecuación de eigenvalores por el complejo conjugado φ^* e integrando por partes obtenemos

$$\langle \varphi | -\partial_x^2 \varphi \rangle_x = -[\varphi \partial_x \varphi]_{-a}^a + \|\partial_x \varphi\|_x^2 = \|\partial_x \varphi\|_x^2 = \mu_x \|\varphi\|_x^2$$

donde usamos el producto interior hermitiano

$$\langle f | g \rangle_x = \int_{-a}^a f^* g \, dx,$$

y la norma correspondiente $\|f\|_x \equiv \langle f | f \rangle_x^{1/2}$. De lo anterior se obtiene

$$\mu_x = \frac{\|\partial_x \varphi\|_x^2}{\|\varphi\|_x^2}.$$

Esto indica que μ_x es un número real no negativo por lo que podemos escribir

$$\mu_x = k_x^2.$$

Para $k_x = 0$ tenemos la eigenfunción $\varphi = 1$. Para $k_x \neq 0$ tenemos la solución general

$$\varphi = c_1 \cos k_x x + c_2 \sin k_x x.$$

Imponiendo las condiciones de frontera periódicas se concluye que k_x está dada por

$$k_x = 2\pi \frac{m}{L} \quad \text{con } m = 0, 1, 2, \dots$$

donde $m = 0$ permite incluir a $k_x = 0$ y su eigenfunción $\varphi = 1$. Al eigenvalor $\lambda_0 = 0$ le corresponde sólo la eigenfunción $\varphi = 1$, a los demás eigenvalores $\mu_x = k_x^2 > 0$ les corresponden las eigenfunciones $\cos k_x x$ y $\sin k_x x$. Usando la fórmula de Euler

$$\cos k_x x = \frac{e^{ik_x x} + e^{-ik_x x}}{2}, \quad \sin k_x x = \frac{e^{ik_x x} - e^{-ik_x x}}{2i}$$

vemos que $\cos k_x x$ y $\sin k_x x$ pueden reemplazarse por una sola expresión

$$\varphi_x = e^{ik_x x} \quad \text{con } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

En forma análoga, los problemas de eigenvalores

$$\begin{aligned} -\partial_y^2 \varphi_y &= \mu_y \varphi_y \\ -\partial_z^2 \varphi_z &= \mu_z \varphi_z \end{aligned}$$

tienen eigenvalores $\mu_y = k_y^2$, $\mu_z = k_z^2$, con

$$k_y = 2\pi \frac{n}{L}, \quad k_z = 2\pi \frac{l}{L}, \quad \text{con } n, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

y las eigenfunciones correspondientes son $\varphi_y = e^{ik_y y}$, $\varphi_z = e^{ik_z z}$. Así, los eigenvalores del operador $-\nabla^2$ sujeto a condiciones de frontera periódicas son

$$\mu = \mu_x + \mu_y + \mu_z = k^2,$$

donde

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 (m^2 + n^2 + l^2),$$

y las eigenfunciones correspondientes son

$$\Phi_{\mathbf{k}} = \varphi_x \varphi_y \varphi_z = e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

donde aparece el así llamado *vector de onda*

$$\mathbf{k} = k_x \mathbf{i} + k_y \mathbf{j} + k_z \mathbf{k} = \frac{2\pi}{L} (m \mathbf{i} + n \mathbf{j} + l \mathbf{k}).$$

El conjunto de eigenfunciones $\Phi_{\mathbf{k}}$ forman una base completa del conjunto de funciones cuadrado integrales en el paralelepípedo Ω por lo que la solución de la ecuación de onda (1.49) en dicha región es una combinación de tales funciones

$$\psi = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}.$$

Sustituyendo en la ecuación de onda (1.49)

$$\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 c_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi = \sum_{\mathbf{k}} c_{\mathbf{k}} (-k^2) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}},$$

vemos que cada $c_{\mathbf{k}}$ debe satisfacer la ecuación

$$\frac{d^2 c_{\mathbf{k}}}{dt^2} + v^2 k^2 c_{\mathbf{k}} = 0.$$

Esto da

$$c_{\mathbf{k}} = c_{\mathbf{k}}^{(+)} e^{i v k t} + c_{\mathbf{k}}^{(-)} e^{-i v k t}.$$

Así llegamos a la solución deseada

$$\psi(t, \mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \left[c_{\mathbf{k}}^{(+)} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + \omega t)} + c_{\mathbf{k}}^{(-)} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \right]$$

con $\omega = v k$. Las constantes $c_{\mathbf{k}}^{(\pm)}$ están determinadas por los coeficientes de Fourier de las series

$$f = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}, \quad g = \sum_{\mathbf{k}} g_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}.$$

correspondientes a las condiciones iniciales $\psi = f(\mathbf{r})$ y $\partial_t \psi = g(\mathbf{r})$ en $t = 0$.

El argumento de las funciones exponenciales $\phi^{\pm} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \pm v k t$ recibe el nombre de fase, v es velocidad de fase, y $e^{i\phi^{\pm}}$ es una onda armónica que se propaga en la dirección de $\mp \mathbf{k}$. Las superficies de fase constante (también llamadas frentes de onda)

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} \pm v k t = \text{cte.}$$

son planos ortogonales a la dirección de propagación $\mp \mathbf{k}$, por lo que las soluciones $e^{i\phi^{\pm}}$ reciben el nombre de ondas planas. En el caso de las ondas con simetría esférica, los frentes de ondas son esferas con centro en el origen.

Solución general de la ecuación de onda en el espacio tridimensional

La solución general de la ecuación de onda (1.49) sujeta a las condiciones iniciales

$$\psi = f(\mathbf{r}), \quad \psi_t = g(\mathbf{r}) \quad \text{para } t = 0$$

es

$$\psi(x, y, z, t) = t \langle g \rangle + \frac{\partial}{\partial t} t \langle f \rangle,$$

donde

$$\begin{aligned} \langle g \rangle &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} g[\mathbf{r} + v t \hat{\mathbf{r}}(\theta, \phi)] \sin \theta d\theta d\phi, \\ \hat{\mathbf{r}}(\theta, \phi) &= \sin \theta [\cos \phi \hat{\mathbf{i}} + \sin \phi \hat{\mathbf{j}}] + \cos \theta \hat{\mathbf{k}}, \end{aligned}$$

es el valor promedio de $g(\mathbf{r})$ sobre la esfera con centro en $\mathbf{r}$ y radio $v t$, y análogamente para $\langle f \rangle$. En el apéndice B, damos una deducción de esta solución.

La interpretación de $\langle g \rangle$ es que la perturbación inicial $g(\mathbf{r})$ se irradia o propaga esféricamente hacia el exterior de manera que un punto (x, y, z) será influenciado por las perturbaciones iniciales dentro de una esfera de radio $v t$ alrededor de dicho punto. Esta solución es una demostración del principio de Huygens [Hectch pág. 107]: Cada punto en un frente de onda en propagación sirve como fuente de trenes de onda esféricas secundarias de tal modo que al cabo de cierto tiempo, el frente será la envolvente de estos frentes de onda. El objetivo principal de este trabajo es calcular los rayos de luz definidos por las curvas ortogonales a un frente de onda, para un medio como la atmósfera con un índice de refracción variable.

1.6. Aproximación de la óptica geométrica para ondas escalares

En esta sección introducimos la aproximación de la óptica geométrica para resolver la ecuación de onda escalar

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t^2} = v^2(\mathbf{r}) \nabla^2 \mathcal{F} \quad (1.50)$$

para una onda monocromática con frecuencia angular ω de la forma

$$\mathcal{F} = e^{\pm i\omega t} u(\mathbf{r}) . \quad (1.51)$$

Parte del planteamiento siguiente fue obtenido de la referencia [Yury A. Kravtsov, Geometrical Optics in Engineering Physics, Alpha Science, 2005]. Sustituyendo (1.51) en (1.50) obtenemos la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 u + k_0^2 n^2 u = 0 \quad (1.52)$$

donde aparece el número de onda k_0 y el índice de refracción n

$$k_0 \equiv \frac{\omega}{c} , \quad n(\mathbf{r}) \equiv \frac{c}{v(\mathbf{r})} .$$

El significado de k_0 es claro para el caso de una onda plana

$$u_P = \exp(i k_0 \hat{\mathbf{k}}_0 \cdot \mathbf{r})$$

con vector de onda $\mathbf{k}_0 = k_0 \hat{\mathbf{k}}_0 = k_{01}\mathbf{i} + k_{02}\mathbf{j} + k_{03}\mathbf{k}$, donde $k_0 = \|\mathbf{k}_0\|$ y $\hat{\mathbf{k}}_0 = \mathbf{k}_0/k_0$ da la dirección de propagación de la onda u_P . Esta onda satisface

$$u_P(x + \lambda_{x0}, y + \lambda_{y0}, z + \lambda_{z0}) = u_P(x, y, z) \quad \text{con } \lambda_{0j} \equiv 2\pi/k_{0j}$$

por lo que u_P es periódica con periodos espaciales λ_{0j} . En el caso general la "longitud de onda"

$$\lambda_0 \equiv \frac{2\pi}{k_0}$$

define una unidad de longitud para cualquier solución u de la ecuación de Helmholtz (1.52).

Usando a λ_0 como unidad de longitud para reescribir (1.52) en términos de las coordenadas adimensionales

$$\hat{x}_j = \frac{x_j}{\lambda_0}$$

obtenemos

$$\hat{\nabla}^2 \hat{u} + (2\pi)^2 n^2 \hat{u} = 0 \quad \text{con} \quad \hat{\nabla}^2 = \sum_j \frac{\partial^2}{\partial \hat{x}_j^2}, \quad \hat{u} = \hat{u}(\hat{x}_j), \quad (1.53)$$

de la cual no es claro cómo simplificarla para valores grandes o pequeños de λ_0 . Usaremos L para especificar el orden de magnitud de las distancias en las cuales deseamos estimar u . En términos de las coordenadas adimensionales

$$\tilde{x}_j = \frac{x_j}{L} \quad \text{con} \quad |x_j| \lesssim L$$

obtenemos

$$\mu^2 \tilde{\nabla}^2 \tilde{u} + n^2 \tilde{u} = 0 \quad \text{con} \quad \tilde{\nabla}^2 = \sum_j \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}_j^2}, \quad \tilde{u} = \tilde{u}(\tilde{x}_j), \quad (1.54)$$

donde aparece el parámetro adimensional

$$\mu = \frac{1}{k_0 L} = \frac{\lambda_0}{2\pi L}. \quad (1.55)$$

Por simplicidad consideramos que la fuente de la onda está en el origen $x_j = 0$. La ecuación (1.54) demuestra que evaluar $\tilde{u}$ lejos de la fuente (usando a λ_0 como unidad de longitud), equivale a usar un parámetro pequeño μ ,

$$\mu \ll 1 \quad \longleftrightarrow \quad \lambda_0 \ll L,$$

con lo cual la ecuación de Helmholtz (1.54) se reduce a la ecuación

$$n^2 \tilde{u} \sim 0 \quad (1.56)$$

que no depende de $\tilde{\nabla}^2$. Cuando una ecuación diferencial se aproxima por otra de menor orden o algebraica como en nuestro caso, decimos que el problema original (1.54) se perturba singularmente. El modelo aproximado (1.56) pierde información ya que no permite imponer condiciones a la frontera que debe satisfacer la solución u del problema original (1.54) pero se gana simplicidad para resolver dicho problema. Para ver como se simplifica (1.54) consideremos el problema unidimensional

$$\frac{d^2}{d\tilde{x}^2} \tilde{u}(\tilde{x}) + k_\mu^2 n(\tilde{x})^2 = 0 \quad \text{con } k_\mu = 1/\mu$$

Esta ecuación tiene soluciones con el comportamiento

$$\tilde{u} \sim \frac{1}{\sqrt{n(\tilde{x})}} \exp \left[\pm \frac{i}{\mu} \int^{\tilde{x}} n(\tilde{x}) \tilde{x} + O(\mu) \right] \quad \text{para } \mu \ll 1$$

[J. D. Murray, Asymptotic analysis, Springer, 1983, pág. 114], las cuales tienen la forma

$$\tilde{u}_a = \tilde{A}(\tilde{x}) e^{i \tilde{\Psi}(\tilde{x})/\mu}.$$

Esto demuestra que cuando $\tilde{u}$ se evalúa más lejos de la fuente ($L \gg \lambda_0$), más precisa es la estimación $\tilde{u}_a$.

La expresión de $\tilde{u}_a$ sugiere buscar la solución de la ecuación de Helmholtz (1.54) en la forma

$$\tilde{u} = \tilde{A}(\tilde{\mathbf{r}}) e^{i \tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{r}})/\mu}. \quad (1.57)$$

Sustituyendo en (1.54)

$$\tilde{\nabla}^2 \tilde{u} + \frac{n^2}{\mu^2} \tilde{u} = \left[\frac{1}{\mu^2} (n^2 - \|\tilde{\nabla} \tilde{\Psi}\|^2) \tilde{A} + \frac{i}{\mu} (2\tilde{\nabla} \tilde{A} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\Psi} + \tilde{A} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\Psi}) + \tilde{\nabla}^2 \tilde{A} \right] e^{i \tilde{\Psi}(\tilde{\mathbf{r}})/\mu} = 0.$$

Expresando a $\tilde{A}$ por medio de la serie

$$\tilde{A} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\mu}{i} \right)^m \tilde{A}_m$$

y agrupando en potencias de μ obtenemos

$$\begin{aligned} \|\tilde{\nabla} \tilde{\Psi}\|^2 &= n^2 \\ 2\tilde{\nabla} \tilde{A}_0 \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\Psi} + \tilde{A}_0 \tilde{\nabla}^2 \tilde{\Psi} &= 0 \quad \text{para } m=0 \\ 2\tilde{\nabla} \tilde{A}_m \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\Psi} + \tilde{A}_m \tilde{\nabla}^2 \tilde{\Psi} &= \tilde{\nabla}^2 \tilde{A}_{m-1} \quad \text{para } m \geq 1. \end{aligned}$$

Reescribiendo estas ecuaciones en términos de las variables dimensionales x, y, z y denotando la fase $\tilde{\Psi}/\mu$ por $k_0\psi$ obtenemos la así llamada *ecuación de la eikonal* ψ

$$\|\nabla\psi\|^2 = n^2(x, y, z) \quad (1.58)$$

y las ecuaciones de transporte para los coeficientes A_m (comparar con (1.29))

$$\begin{aligned} 2\nabla A_0 \cdot \nabla\psi + A_0 \nabla^2\psi &= 0 \quad \text{para } m=0 \\ 2\nabla A_m \cdot \nabla\psi + A_m \nabla^2\psi &= -L\nabla^2 A_{m-1} \quad \text{para } m \geq 1. \end{aligned} \quad (1.59)$$

Estas ecuaciones son la base de la *Óptica Geométrica*, son más sencillas que la ecuación de Helmholtz (1.52) ya que son ecuaciones diferenciales parciales de primer orden cuya solución se reduce a resolver ecuaciones diferenciales ordinarias como veremos más adelante.

Ecuaciones de la eikonal y de transporte a partir de la serie de Debye

Ecuaciones similares a (1.58), (1.59), se pueden obtener usando

$$u(x, y, z) = e^{i k_0 \psi(\mathbf{r})} A(\mathbf{r})$$

con la *serie de Debye*

$$A(\mathbf{r}) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{i k_0} \right)^m \mathcal{A}_m.$$

Sustituyendo en (1.52) obtenemos la misma ecuación de la eikonal (1.58) y las ecuaciones de transporte

$$\begin{aligned} 2\nabla \mathcal{A}_0 \cdot \nabla\psi + \mathcal{A}_0 \nabla^2\psi &= 0 \\ 2\nabla \mathcal{A}_m \cdot \nabla\psi + \mathcal{A}_m \nabla^2\psi &= -\nabla^2 \mathcal{A}_{m-1} \quad \text{para } m \geq 1. \end{aligned} \quad (1.60)$$

La relación entre los coeficientes A_m y $\mathcal{A}_m$ es $\mathcal{A}_m = A_m/L^m$. Las ecuaciones (1.59) y (1.60) son equivalentes, pero el parámetro μ (1.55) es más conveniente por que es pequeño para valores grandes de L para una k_0 dada y no sólo para k_0 grande.

Solución de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden

El contenido de esta sección es un resumen del libro de Elsgoltz [L. Elsgoltz, Ecuaciones Diferenciales y Cálculo Variacional, Mir, 1983].

1. Empezamos por dar el método de solución de la ecuación lineal y homogénea para $\psi(x_1, \dots, x_n)$ con n variables independientes $x_1, \dots, x_n$,

$$\sum_j X_j(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = 0 \quad (1.61)$$

la cual es una variante de la ecuación de transporte (1.29).

Resultado 1. La solución general de (1.61) se obtiene como sigue.

(i) Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO's)

$$\frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} \quad (1.62)$$

usando una de las x_j 's como variable independiente. Sea x_k la variable seleccionada. Entonces (1.62) equivale a resolver el sistema de $n - 1$ ecuaciones ordinarias

$$\frac{dx_j}{dx_k} = \frac{X_j}{X_k} \quad \text{con } j \neq k.$$

Integrando obtenemos

$$x_j = x_j(x_k; c_1, \dots, c_{n-1}) \quad \text{con } j \neq k \quad (1.63)$$

donde c_j son constantes de integración. Las ecuaciones (1.63) definen una familia de curvas en el espacio llamadas *curvas características* correspondientes a la ecuación (1.61). Despejando las c_j de (1.63) obtenemos $n - 1$ ecuaciones de la forma

$$\varphi_l(x_1, \dots, x_n) = c_l \quad 1 \leq l \leq n - 1.$$

Una función $\varphi_l(x_1, \dots, x_n)$ que tiene un valor constante sobre una curva característica se llama *integral del sistema* (1.62). Cada primera integral φ_l es en sí misma una solución $\psi = \varphi_l$ de (1.61):

$$\sum_j X_j(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_j} = 0.$$

(ii) La solución general de (1.61) está dada por $\psi = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$ donde Φ es una función arbitraria

2. La ecuación cuasilineal no homogénea

$$\sum_j X_j(x_1, \dots, x_n; \psi) \frac{\partial \psi}{\partial x_j} = Z(x_1, \dots, x_n; \psi) \quad (1.64)$$

es una generalización de la ecuación de transporte (1.29). La solución se busca en forma implícita

$$u[x_1, \dots, x_n; \psi(x_1, \dots, x_n)] = 0.$$

donde u es solución de la ecuación lineal homogénea

$$\sum_j X_j(x_1, \dots, x_n; \psi) \frac{\partial u}{\partial x_j} + Z_j(x_1, \dots, x_n; \psi) \frac{\partial u}{\partial \psi} = 0. \quad (1.65)$$

por lo que las curvas características asociadas a (1.64) se obtienen integrando el sistema

$$\frac{dx_1}{X_1} = \dots = \frac{dx_n}{X_n} = \frac{d\psi}{Z}. \quad (1.66)$$

Este sistema tiene n primeras integrales

$$\varphi_l(x_1, \dots, x_n, \psi) = c_l \quad 1 \leq l \leq n$$

con las cuales obtenemos la solución general de (1.64) en forma implícita $u = \tilde{\Phi}(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = 0$.

3. La solución del sistema cuasilineal no homogéneo

$$\begin{aligned} P(x, y, u, v) \frac{\partial u}{\partial x} + Q(x, y, u, v) \frac{\partial u}{\partial y} &= R_1(x, y, u, v) \\ P(x, y, u, v) \frac{\partial v}{\partial x} + Q(x, y, u, v) \frac{\partial v}{\partial y} &= R_2(x, y, u, v) \end{aligned} \quad (1.67)$$

se obtiene con las curvas características dadas por el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{R_1} = \frac{dv}{R_2}. \quad (1.68)$$

Este sistema tiene tres primeras integrales $\varphi_j(x, y, u, v) = c_j \quad j = 1, 2, 3$. La solución general $u(x, y)$, $v(x, y)$, está dada en la forma implícita

$$\begin{aligned} \Phi_1(\varphi_1(x, y, u, v), \varphi_2(x, y, u, v), \varphi_3(x, y, u, v)) &= 0 \\ \Phi_2(\varphi_1(x, y, u, v), \varphi_2(x, y, u, v), \varphi_3(x, y, u, v)) &= 0 \end{aligned}$$

donde Φ_1 y Φ_2 son funciones independientes con respecto a u y v . Despejando u y v obtenemos un par de soluciones $u(x, y)$, $v(x, y)$, de (1.69).

Solución de la ecuación de la eikonal en forma paramétrica

Con lo anterior estamos en posición de dar una solución general de la ecuación de la eikonal (1.58). Para simplificar la notación consideraremos la ecuación

$$H(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3) = 0 \quad (1.69)$$

donde usamos la notación $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, y

$$p_j = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}.$$

La idea es reemplazar (1.69) por un sistema de ecuaciones cuasilineales no homogéneas de la forma (1.67) para las p_j 's. Derivando (1.69) con respecto a cada x_j

$$\frac{\partial H}{\partial x_j} + \sum_k \frac{\partial p_k}{\partial x_j} \frac{\partial H}{\partial p_k} = 0$$

y usando

$$\frac{\partial p_k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} \psi = \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} \psi = \frac{\partial p_j}{\partial x_k},$$

obtenemos un sistema de ecuaciones de la forma (1.67)

$$\sum_k \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial p_j}{\partial x_k} = -\frac{\partial H}{\partial x_j}. \quad (1.70)$$

Por analogía con (1.68), las *curvas características* estan dadas por el sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_1}{H_{p_1}} = \frac{dx_2}{H_{p_2}} = \frac{dx_3}{H_{p_3}} = \frac{dp_1}{-H_{x_1}} = \frac{dp_2}{-H_{x_2}} = \frac{dp_3}{-H_{x_3}}$$

Este sistema se puede integrar en términos de un parámetro arbitrario τ que se introduce en la forma

$$d\tau = \frac{dx_1}{H_{p_1}} = \frac{dx_2}{H_{p_2}} = \frac{dx_3}{H_{p_3}} = \frac{dp_1}{-H_{x_1}} = \frac{dp_2}{-H_{x_2}} = \frac{dp_3}{-H_{x_3}}$$

lo que da el sistema de 6 ecuaciones

$$\frac{dx_j}{d\tau} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} \quad (1.71)$$

con $6 + 1$ incógnitas x_j , p_j , ψ . La ecuación para ψ se obtiene de la relación

$$d\psi = \sum_j p_j dx_j \quad (1.72)$$

la cual da

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \sum_j p_j \frac{dx_j}{d\tau} = \sum_j p_j \frac{\partial H}{\partial p_j}. \quad (1.73)$$

Las ecuaciones (1.71) no dependen de ψ por lo que se integran independientemente de ψ . Habiendo resuelto (1.71), la ecuación (1.72) se resuelve por integración directa del lado derecho.

Nota. En el campo del estudio de ondas la proyección de las *curvas características* en el espacio físico $x y z$ recibe el nombre *rayos* y constituyen las curvas sobre las cuales se propaga la energía de una onda.

Para resolver el sistema (1.71), (1.73), debemos especificar condiciones iniciales adecuadas en $\tau = 0$ ya que condiciones iniciales arbitrarias no garantizan que podamos calcular una función $\psi(x, y, z)$ que sea solución de (1.69). Para obtener condiciones iniciales adecuadas buscaremos la solución de (1.69) en forma paramétrica

$$x_j = x_j(\tau, s_1, s_2) \quad (1.74)$$

$$p_j = h_j(\tau, s_1, s_2) \quad (1.75)$$

$$\psi = f(\tau, s_1, s_2), \quad (1.76)$$

donde s_1, s_2 , son parámetros arbitrarios. Estas ecuaciones son válidas para obtener ψ como función de x, y, z , ya que si despejamos a τ, s_1, s_2 , de (1.74)

$$\tau = \tau(x, y, z), \quad s_1 = s_1(x, y, z), \quad s_2 = s_2(x, y, z)$$

y sustituímos en (1.76), obtenemos a ψ como función de x, y, z ,

$$\psi = f(\tau(x, y, z), s_1(x, y, z), s_2(x, y, z)) = \psi(x, y, z). \quad (1.77)$$

Evalutando (1.74), (1.76), en $\tau = 0$ aparecen los valores iniciales x_{j0}, ψ_0 , a los cuales les imponemos funciones arbitrarias de los parámetros s_k

$$x_{j0} = x_{j0}(s_1, s_2), \quad \psi_0 = \psi_0(s_1, s_2). \quad (1.78)$$

Los valores iniciales $p_{j0} = p_j|_{\tau=0}$ no pueden ser arbitrarios ya que deben garantizar que p_j (1.75) y ψ (1.76) satisfagan

$$p_j = \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \text{ para } \tau \geq 0.$$

La ecuación (1.69) evaluada en $\tau = 0$ da la primera ecuación que deben satisfacer los valores iniciales p_{j0}

$$H(x_0, y_0, z_0, p_{x0}, p_{y0}, p_{z0}) = 0. \quad (1.79)$$

Faltan dos ecuaciones para obtener un sistema de ecuaciones cerrado para las p_{j0} 's. Estas ecuaciones se obtienen imponiendo la relación (1.72). Igualando

$$d\psi(\tau, s_1, s_2) = \frac{\partial \psi}{\partial \tau} d\tau + \sum_k \frac{\partial \psi}{\partial s_k} ds_k$$

con (1.72) y usando

$$dx_j(\tau, s_1, s_2) = \frac{\partial x_j}{\partial \tau} d\tau + \sum_k \frac{\partial x_j}{\partial s_k} ds_k$$

obtenemos

$$\begin{aligned} d\psi &= \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial \tau}}_{\text{}} d\tau + \sum_k \underbrace{\frac{\partial \psi}{\partial s_k}}_{\text{}} ds_k = \sum_j p_j \left(\frac{\partial x_j}{\partial \tau} d\tau + \sum_k \frac{\partial x_j}{\partial s_k} ds_k \right) \\ &= \left(\sum_j p_j \frac{\partial x_j}{\partial \tau} \right) d\tau + \sum_k \left(\sum_j p_j \frac{\partial x_j}{\partial s_k} \right) ds_k \quad (\text{reagrupando}) \end{aligned}$$

lo que da las ecuaciones

$$\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s_k} p_j = \frac{\partial \psi}{\partial s_k} \quad \text{para } k = 1, 2, \quad (1.80)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau} = \sum_j p_j \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad (1.81)$$

que deben satisfacerse para $\tau \geq 0$. La ecuación (1.81) coincide con (1.73) por lo que podemos ignorarla. Evaluando (1.80) en $\tau = 0$ obtenemos las ecuaciones deseadas para p_{j0}

$$\sum_j \frac{\partial x_{j0}}{\partial s_k} p_{j0} = \frac{\partial \psi_0}{\partial s_k} \quad \text{para } k = 1, 2. \quad (1.82)$$

Así, (1.79) y (1.82), es un conjunto cerrado de tres ecuaciones para calcular los valores iniciales p_{j0} a partir de las funciones iniciales arbitrarias (1.78) de s_1, s_2 . Se puede demostrar que los valores obtenidos p_{j0} garantizan que la solución de las ecuaciones (1.71) y (1.73), con condiciones iniciales arbitrarias (1.78), dan funciones (1.74), (1.75), (1.76), de las cuales obtenemos una solución $\psi(x, y, z)$ de (1.69) vía la composición (1.77).

Ejemplo 1. Integrar la ecuación bidimensional $(\psi_x)^2 + (\psi_y)^2 = n^2$ con n constante y la condición $\psi = y$ para $x = 0$. Las condiciones iniciales las escribimos en forma paramétrica

$$x_0 = 0, \quad y_0 = s, \quad \psi_0 = s, \quad \text{para } \tau = 0.$$

Tenemos

$$H = \frac{1}{2} \left[\|\nabla \psi\|^2 - n^2 \right] = \frac{1}{2} \left[p_x^2 + p_y^2 - n^2 \right] = 0.$$

Para calcular p_{x0} y p_{y0} usamos (1.79) y (1.82)

$$\begin{aligned} H(p_{x0}, p_{y0}) &= \frac{1}{2} \left[p_{x0}^2 + p_{y0}^2 - n^2 \right] = 0 \rightarrow p_{x0}^2 + p_{y0}^2 = n^2 \\ \frac{dx_0}{ds} p_{x0} + \frac{dy_0}{ds} p_{y0} &= \frac{d\psi_0}{ds} \rightarrow 0 \cdot p_{x0} + 1 \cdot p_{y0} = 1 \rightarrow p_{y0} = 1, \end{aligned}$$

usando $p_{x0}^2 + 1 = n^2$ obtenemos $p_{x0} = \pm \sqrt{n^2 - 1}$ que es una constante. Integrando

$$\begin{aligned} \frac{dp_j}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{dx_j}{d\tau} &= p_j \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= p_x \frac{\partial H}{\partial p_x} + p_y \frac{\partial H}{\partial p_y} = p_x^2 + p_y^2 = n^2 \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} p_x &= p_{x0} = \pm \sqrt{n^2 - 1}, & p_y &= p_{y0} = 1 \\ x &= p_x \tau, & y &= \tau + s \\ \psi &= n^2 \tau + s. \end{aligned}$$

Despejando

$$\tau = \frac{x}{p_x}, \quad s = y - \tau = y - \frac{x}{p_x},$$

obtenemos la solución deseada $\psi = n^2 \frac{x}{p_x} + y - \frac{x}{p_x} = (n^2 - 1) \frac{x}{p_x} + y$ ó $\psi = p_x x + y$.

Ejemplo 2. Integrar $(\psi_x)^2 + (\psi_y)^2 + (\psi_z)^2 = n^2$ con n constante y las condiciones iniciales

$$x_0 = s_1, \quad y_0 = s_2, \quad z_0 = s_1 + s_2, \quad \psi_0 = \text{cte. para } \tau = 0.$$

Estas condiciones iniciales definen al plano $z_0 = x_0 + y_0$ como un plano sobre el cual ψ tiene un valor constante, es decir, el plano es un frente de onda inicial. Tenemos

$$H(p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2} [\|\nabla \psi\|^2 - n^2] = \frac{1}{2} [p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - n^2] = 0.$$

Para calcular p_{x0} , p_{y0} , p_{z0} , usamos (1.79) y (1.82)

$$\begin{aligned} H(p_{x0}, p_{y0}, p_{z0}) &= \frac{1}{2} [p_{x0}^2 + p_{y0}^2 + p_{z0}^2 - n^2] = 0 \rightarrow p_{x0}^2 + p_{y0}^2 + p_{z0}^2 = n^2 \\ \sum \frac{\partial x_{j0}}{\partial s_1} p_{j0} &= \frac{\partial \psi_0}{\partial s_1} \rightarrow 1 \cdot p_{x0} + 0 \cdot p_{y0} + 1 \cdot p_{z0} = 0 \rightarrow p_{x0} = -p_{z0} \\ \sum \frac{\partial x_{j0}}{\partial s_2} p_{j0} &= \frac{\partial \psi_0}{\partial s_2} \rightarrow 0 \cdot p_{x0} + 1 \cdot p_{y0} + 1 \cdot p_{z0} = 0 \rightarrow p_{y0} = -p_{z0}, \end{aligned}$$

usando $p_{x0}^2 + p_{y0}^2 + p_{z0}^2 = n^2$ obtenemos $p_{z0} = \pm n/\sqrt{3}$. Integrando

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= p_x, \quad \frac{dy}{d\tau} = p_y, \quad \frac{dz}{d\tau} = p_z, \\ \frac{dp_x}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \frac{dp_y}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial y} = 0, \quad \frac{dp_z}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial z} = 0, \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= \sum p_j \frac{\partial H}{\partial p_j} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = n^2 \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} p_x &= p_{x0} = -p_{z0}, \quad p_y = p_{y0} = -p_{z0}, \quad p_z = p_{z0} = \pm n/\sqrt{3}, \\ x &= -p_z \tau + s_1, \quad y = -p_z \tau + s_2, \quad z = p_z \tau + s_1 + s_2, \\ \psi &= n^2 \tau + \psi_0. \end{aligned}$$

Despejando $s_1 = x + p_z \tau$, $s_2 = y + p_z \tau$, $z = p_z \tau + x + y + 2p_z \tau = 3p_z \tau + x + y$, $\tau = (z - x - y)/3p_z$, obtenemos

$$\psi = \psi_0 \pm \frac{n}{\sqrt{3}} (z - x - y).$$

Ecuación de los rayos en forma vectorial

Reescribamos la ecuación de la eikonal (1.58) en la forma

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2} \left[\|\nabla\psi\|^2 - n^2 \right] = \frac{1}{2} \left[p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - n^2(x, y, z) \right] = 0. \quad (1.83)$$

1. Usando un parámetro τ para calcular las curvas características [ecs. (1.71), (1.73)] obtenemos

$$\frac{dx_j}{d\tau} = p_j \quad (1.84)$$

$$\frac{dp_j}{d\tau} = -\frac{\partial H}{\partial x_j} = n \frac{\partial n}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial x_j} \quad (1.85)$$

$$\frac{d\psi}{d\tau} = \sum_j p_j \frac{\partial H}{\partial p_j} = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = n^2. \quad (1.86)$$

2. Integrando (1.84), (1.85), con condiciones iniciales arbitrarias

$$x_j = x_{j0}, \quad p_j = p_{j0}, \quad \text{para } \tau = 0 \quad (1.87)$$

obtenemos las ecuaciones paramétricas

$$x_j = x_j(\tau; x_{j0}, p_{j0}) \quad (1.88)$$

$$p_j = p_j(\tau; x_{j0}, p_{j0}). \quad (1.89)$$

Las curvas definidas por (1.88) en el espacio físico xyz se denominan *rayos*. Sustituyendo (1.88), (1.89), en (1.86), ψ se obtiene por integración directa

$$\psi(\tau; x_{j0}, p_{j0}) = \int_0^\tau n^2(\tilde{\tau}; x_{j0}, p_{j0}) d\tilde{\tau} + \psi_0$$

Usando los vectores base $\mathbf{i} = \hat{\mathbf{x}}_1$, $\mathbf{j} = \hat{\mathbf{x}}_2$, $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{x}}_3$, del sistema cartesiano xyz tenemos

$$\mathbf{r} = \sum x_j \hat{\mathbf{x}}_j = \mathbf{r}(\tau; \mathbf{r}_0, \mathbf{p}_0)$$

y las ecuaciones (1.84), (1.85), toman la forma vectorial

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \mathbf{p} = \nabla\psi \quad (1.90)$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \nabla \frac{n^2}{2} \quad (1.91)$$

La ecuación (1.91) tiene la forma de la segunda ley de Newton por lo que pueden aplicarse métodos de la mecánica de partículas para resolver dicha ecuación.

La longitud de arco s a lo largo de un rayo está dada por

$$ds = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} \right\| d\tau = \|\mathbf{p}\| d\tau = n d\tau \quad \text{ó} \quad s = \int_0^\tau n d\tilde{\tau}. \quad (1.92)$$

En este trabajo usaremos s como parámetro para calcular rayos. Usando

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{ds}{d\tau} \frac{d}{ds} = n \frac{d}{ds} \quad (1.93)$$

las ecuaciones (1.90), (1.91), toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{ds} &= \frac{\mathbf{p}}{n} \quad \text{o} \quad \frac{dx_j}{ds} = \frac{p_j}{n} \\ \frac{d\mathbf{p}}{ds} &= \nabla n \quad \text{o} \quad \frac{dp_j}{ds} = \frac{\partial n}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1.94)$$

Usando lo anterior obtenemos la ecuación de los rayos en forma vectorial

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n \quad (1.95)$$

y

$$\frac{d\psi}{ds} = n. \quad (1.96)$$

En la sección 1.6 veremos que (1.95) coincide con la ecuación de los rayos para las ondas electromagnéticas. La forma de la ecuación de la eikonal que da las ecuaciones (1.94)–(1.96), es

$$\mathcal{H} = p - n = 0 \quad \text{con} \quad p = \|\mathbf{p}\| = \|\nabla\psi\| \quad (1.97)$$

como puede comprobarse con las ecuaciones de las curvas características correspondientes

$$ds = \frac{dx_1}{\mathcal{H}_{p_1}} = \frac{dx_2}{\mathcal{H}_{p_2}} = \frac{dx_3}{\mathcal{H}_{p_3}} = \frac{dp_1}{-\mathcal{H}_{x_1}} = \frac{dp_2}{-\mathcal{H}_{x_2}} = \frac{dp_3}{-\mathcal{H}_{x_3}} = \frac{d\psi}{n}.$$

Ortogonalidad entre rayos y frentes de onda

Un frente de onda es una superficie sobre la cual la fase ψ tiene un valor constante c

$$\psi(x, y, z) = c.$$

Para calcular un frente de onda debemos calcular las curvas características con condiciones iniciales

$$x = x_0(s_1, s_2), \quad y = y_0(s_1, s_2), \quad z = z_0(s_1, s_2) \quad (1.98)$$

las cuales son las ecuaciones paramétricas del frente de onda inicial en $\tau = 0$. La condición inicial sobre ψ es simplemente

$$\psi = \psi_0 = c. \quad (1.99)$$

De esta forma, cualquier superficie con ecuaciones paramétricas (1.98) es un frente de onda. Para que el transporte de este frente de onda inicial y arbitrario siga siendo un frente de onda (sobre el cual ψ tiene el valor constante ψ_0), calculamos los valores iniciales p_{j0} que satisfacen las ecuaciones

$$H|_{\tau=0} = \frac{1}{2} \left[p_{x0}^2 + p_{y0}^2 + p_{z0}^2 - n^2(x_0, y_0, z_0) \right] = 0 \quad (1.100)$$

$$\sum_j \frac{\partial x_{j0}}{\partial s_k} p_{j0} = \frac{\partial \psi_0}{\partial s_k} = 0 \quad \text{para } k = 1, 2. \quad (1.101)$$

El significado geométrico de las ecuaciones (1.101) es que el vector

$$\mathbf{p}_0 = \sum_j p_{j0} \hat{\mathbf{x}}_j$$

es ortogonal al frente de onda inicial $\psi = \psi_0$. Para demostrar esta afirmación consideremos una curva arbitraria en la superficie inicial (1.98) con ecuaciones paramétricas $s_k = \varphi_k(\xi)$. El vector

$$\mathbf{r}_0 = \sum_j x_{j0}(s_1, s_2) \hat{\mathbf{x}}_j \quad \text{con } s_k = \varphi_k(\xi)$$

da el vector

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{d\xi} = \sum_k \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial s_k} \frac{ds_k}{d\xi} = \sum_k \left(\sum_j \frac{\partial x_{j0}}{\partial s_k} \hat{\mathbf{x}}_j \right) \frac{ds_k}{d\xi} = \sum_j \left(\sum_k \frac{\partial x_{j0}}{\partial s_k} \frac{ds_k}{d\xi} \right) \hat{\mathbf{x}}_j.$$

el cual es tangente a la curva y, por lo tanto, al frente de onda inicial. Usando (1.101) obtenemos

$$\frac{d\mathbf{r}_0}{d\xi} \cdot \mathbf{p}_0 = \sum_j \left(\sum_k \frac{\partial x_{j0}}{\partial s_k} \frac{ds_k}{d\xi} \right) p_{j0} = \sum_k \left(\sum_j \frac{\partial x_{j0}}{\partial s_k} p_{j0} \right) \frac{ds_k}{d\xi} = 0.$$

para cualquier curva sobre el frente de onda $\psi = \psi_0$ y, por lo tanto, $\mathbf{p}_0$ es ortogonal a dicho frente de onda. Esta ortogonalidad se conserva sobre el frente de onda $\psi(x, y, z) = \psi_0$, calculado con los valores iniciales p_{j0} dados por (1.100), (1.101), como demostramos a continuación.

La integración de (1.84)–(1.86) con las condiciones iniciales dadas por (1.98)–(1.101), da las curvas características

$$x_j = x_j(\tau, s_1, s_2; x_{j0}, p_{j0}) \quad (1.102)$$

$$p_j = h_j(\tau, s_1, s_2; x_{j0}, p_{j0})$$

$$\psi = f(\tau, s_1, s_2; x_{j0}, p_{j0}, \psi_0). \quad (1.103)$$

Despejando τ, s_1, s_2 , de (1.102) y sustituyendo el resultado en (1.103) obtenemos

$$\psi = g(x, y, z).$$

Impongamos a ψ el valor ψ_0

$$g(x, y, z) = \psi_0. \quad (1.104)$$

Una curva arbitraria sobre el frente de onda definido por (1.104) tiene ecuaciones paramétricas $s_k = \varphi_k(\xi)$. Sustituyendo $x_j = x_j(\tau, s_1, s_2; x_{j0}, p_{j0})$ con $s_k = \varphi_k(\xi)$ en (1.104) obtenemos

$$g(x, y, z) = \psi_0 \quad \text{para cada } \xi \text{ y } \tau \geq 0.$$

Derivando

$$\frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial \xi} \frac{\partial g}{\partial x_j} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \cdot \nabla \psi = 0.$$

La identificación de $\partial g / \partial x_j$ como las componentes $\partial \psi / \partial x_j$ de $\nabla \psi$ está garantizada por el cálculo de las p_{j0} 's a partir de (1.100), (1.101). $\partial \mathbf{r} / \partial \xi$ es tangente al frente de onda $\psi = \psi_0$ y $\nabla \psi = d\mathbf{r} / d\tau$ (1.90) es tangente al rayo con ecuaciones (1.102), por lo tanto, este rayo es ortogonal a dicho frente de onda para cada $\tau \geq 0$.

Ejemplo 3. Integrar $(\psi_x)^2 + (\psi_y)^2 + (\psi_z)^2 = n^2$ con n constante y las condiciones iniciales

$$x_0 = s_1, \quad y_0 = s_2, \quad z_0 = 2s_1 + 3s_2, \quad \psi_0 = \text{cte. para } \tau = 0.$$

Estas condiciones iniciales definen al plano $z_0 = 2x_0 + 3y_0$ como un frente de onda inicial. Tenemos

$$H = \frac{1}{2} [p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - n^2] = 0.$$

Calculamos p_{j0}

$$\begin{aligned} H|_{\tau=0} &= \frac{1}{2} [p_{x0}^2 + p_{y0}^2 + p_{z0}^2 - n^2] = 0 \rightarrow \|\mathbf{p}\| = p_{x0}^2 + p_{y0}^2 + p_{z0}^2 = n^2 \\ \sum \frac{\partial x_{j0}}{\partial s_1} p_{j0} &= \frac{\partial \psi_0}{\partial s_1} \rightarrow 1 \cdot p_{x0} + 0 \cdot p_{y0} + 2 \cdot p_{z0} = 0 \rightarrow p_{x0} = -2p_{z0} \\ \sum \frac{\partial x_{j0}}{\partial s_2} p_{j0} &= \frac{\partial \psi_0}{\partial s_2} \rightarrow 0 \cdot p_{x0} + 1 \cdot p_{y0} + 3 \cdot p_{z0} = 0 \rightarrow p_{y0} = -3p_{z0}, \end{aligned}$$

Usando $\|\mathbf{p}\| = 4p_{z0}^2 + 9p_{z0}^2 + p_{z0}^2 = n^2$ obtenemos $p_{z0} = \pm n/\sqrt{14}$. Integrando

$$\begin{aligned} \frac{dp_j}{d\tau} &= -\frac{\partial H}{\partial x_j} = 0 \\ \frac{dx_j}{d\tau} &= p_j \\ \frac{d\psi}{d\tau} &= n^2 \end{aligned}$$

obtenemos

$$\begin{aligned} p_x &= p_{x0} = -2p_{z0}, \quad p_y = p_{y0} = -3p_{z0}, \quad p_z = p_{z0} = \pm n/\sqrt{14}, \\ x &= -2p_z\tau + s_1, \quad y = -3p_z\tau + s_2, \quad z = p_z\tau + 2s_1 + 3s_2, \\ \psi &= n^2\tau + \psi_0. \end{aligned}$$

Despejando obtenemos $s_1 = x + 2p_z\tau$, $s_2 = y + 3p_z\tau$, y $z = 14p_z\tau + 2x + 3y$, $\tau = (z - 2x - 3y)/14p_z$, con lo cual ψ toma la forma

$$\psi = \psi_0 \pm \frac{n}{\sqrt{14}} (z - 2x - 3y)$$

que satisface la ecuación de la eikonal. El vector tangente a los rayos definidos por la variación de τ es

$$\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \sum \frac{dx_j}{d\tau} \hat{\mathbf{x}}_j = -2p_z \mathbf{i} - 3p_z \mathbf{j} + p_z \mathbf{k}$$

y el vector tangente a una curva arbitraria $s_k = \varphi_k(\xi)$ sobre el frente de onda $\psi = \psi_0$ es

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\xi} = \frac{ds_1}{d\xi} \mathbf{i} + \frac{ds_2}{d\xi} \mathbf{j} + \left(2 \frac{ds_1}{d\xi} + 3 \frac{ds_2}{d\xi} \right) \mathbf{k},$$

entonces

$$\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\xi} = p_z \left[-2 \frac{ds_1}{d\xi} - 3 \frac{ds_2}{d\xi} + 2 \frac{ds_1}{d\xi} + 3 \frac{ds_2}{d\xi} \right] = 0$$

lo que confirma la ortogonalidad entre un frente de onda y los rayos sobre los cuales se propaga dicho frente.

1.7. Óptica geométrica para ondas electromagnéticas

Vamos a seguir el planteamiento de [2], consideremos la propagación de una onda electromagnética monocromática de la forma

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{H}_0(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}, \quad (1.105)$$

en un medio *isotrópico y lineal* (i.h) pero no homogéneo como la atmósfera terrestre, y en ausencia de fuentes y cargas. Sustituyendo en (1.14) – (1.17) obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H}_0 + i k_0 \epsilon \mathbf{E}_0 &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}_0 - i k_0 \mu \mathbf{H}_0 &= 0 \\ \nabla \cdot \epsilon \mathbf{E}_0 &= 0 \\ \nabla \cdot \mu \mathbf{H}_0 &= 0\end{aligned}\tag{1.106}$$

donde

$$k_0 \equiv \frac{\omega}{c}\tag{1.107}$$

y ϵ , μ , son la permeabilidad y la permitividad del vacío. Tomando en cuenta las relaciones de $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, estas expresiones implican que hay interacción con la materia (son las propiedades del material).

Para una onda plana que se propaga en la dirección del vector unitario $\mathbf{s}$, en un medio de índice de refracción $n = \sqrt{\epsilon\mu}$, tenemos $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e} e^{i k_0 n \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}}$, y $\mathbf{H}_0 = \mathbf{h} e^{i k_0 n \mathbf{s} \cdot \mathbf{r}}$. Para un campo dipolar eléctrico en el vacío encontramos que $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e} e^{i k_0 r}$ y $\mathbf{H}_0 = \mathbf{h} e^{i k_0 r}$, siendo r la distancia desde el dipolo, aquí $\mathbf{e}$ y $\mathbf{h}$ ya no son vectores constantes, pero a distancias lo suficientemente alejadas del dipolo ($r \gg \lambda_0$) estos vectores son, una adecuada normalización del momento dipolar, independientes de k_0 .

En regiones que están a muchas longitudes de onda λ_0 de distancia de las fuentes, $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{H}_0$ se representan de forma más general como sigue

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}(\mathbf{r}) e^{i k_0 S(\mathbf{r})}, \quad \mathbf{H}_0 = \mathbf{h}(\mathbf{r}) e^{i k_0 S(\mathbf{r})},\tag{1.108}$$

donde $S(\mathbf{r})$ es la llamada *eikonal* [16] para ondas electromagnéticas y $\mathbf{e}(\mathbf{r})$, $\mathbf{h}(\mathbf{r})$ son funciones vectoriales de posición, que en general pueden ser complejas. Estas expresiones son análogas a (1.57) y generalizan a las expresiones de $\mathbf{E}_0$ y $\mathbf{H}_0$ para ondas planas electromagnéticas.

Sustituyendo (1.108) en (1.106) y usando la aproximación para valores grandes de k_0 obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned}\nabla S \times \mathbf{h} + \epsilon \mathbf{e} &= \mathbf{0} \\ \nabla S \times \mathbf{e} - \mu \mathbf{h} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{e} \cdot \nabla S &= 0 \\ \mathbf{h} \cdot \nabla S &= 0\end{aligned}\tag{1.109}$$

Este conjunto de ecuaciones demuestra que $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$, ∇S , son mutuamente ortogonales. Sustituyendo $\mathbf{h} = \frac{1}{\mu} \nabla S \times \mathbf{e}$ en la primera ecuación

$$\nabla S \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla S \times \mathbf{e} \right) + \epsilon \mathbf{e} = \frac{1}{\mu} [(\nabla S \cdot \mathbf{e}) \nabla S - (\nabla S \cdot \nabla S) \mathbf{e}] + \epsilon \mathbf{e} = \mathbf{0},$$

y usando $\mathbf{e} \cdot \nabla S = 0$ se obtiene

$$\left[-\frac{1}{\mu} \|\nabla S\|^2 + \epsilon \right] \mathbf{e} = \mathbf{0}.$$

Dado que deseamos soluciones no triviales $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$, se concluye que $S(\mathbf{r})$ debe satisfacer la ecuación

$$\|\nabla S\|^2 = \epsilon \mu = n^2(\mathbf{r})\tag{1.110}$$

ó

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2(x, y, z) \quad (1.111)$$

donde consideramos que n puede cambiar de un punto a otro como es el caso de la atmósfera. Usando la ortogonalidad de $\mathbf{e}$, $\mathbf{h}$, ∇S , obtenemos

$$\begin{aligned} \epsilon \mathbf{e} &= \mathbf{h} \times \nabla S \Rightarrow \epsilon \|\mathbf{e}\| = \|\mathbf{h}\| \|\nabla S\| \\ \mu \mathbf{h} &= \nabla S \times \mathbf{e} \Rightarrow \mu \|\mathbf{h}\| = \|\mathbf{e}\| \|\nabla S\| \end{aligned}$$

esto implica

$$\frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{h}\|} = \frac{\|\nabla S\|}{\epsilon} = \frac{\mu}{\|\nabla S\|},$$

lo que equivale a la ecuación de la eikonal (1.110). La ecuación de la eikonal (1.110) es la base de la óptica geométrica. No es casualidad que (1.110) coincida con la ecuación de la eikonal para ondas escalares (1.58) ya que las componentes de los campos $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ y $\mathbf{H}(t, \mathbf{r})$ deben satisfacer ecuaciones escalares de la forma (1.26) y (1.27).

Aplicando $\mathbf{e} \times$ a la segunda ecuación en (1.109), $(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e})\nabla S - (\mathbf{e} \cdot \nabla S)\mathbf{e} = \mu \mathbf{e} \times \mathbf{h}$, y usando $\mathbf{e} \cdot \nabla S = 0$ resulta

$$\nabla S = \frac{\mu}{\|\mathbf{e}\|^2} \mathbf{e} \times \mathbf{h}. \quad (1.112)$$

De acuerdo con (1.108) y (1.111) tenemos

$$\nabla S = \frac{\mu}{\|\mathbf{e}\|^2} e^{-2ik_0 S(\mathbf{r})} \mathbf{E}_0 \times \mathbf{H}_0.$$

Comparando con (1.23) vemos que ∇S tiene la dirección del vector de Poynting, por lo que las superficies $S(\mathbf{r}) = cte$, son ortogonales a las curvas sobre las cuales fluye la energía electromagnética.

Los rayos de luz son curvas a lo largo de las cuales fluye la energía. Estas curvas son ortogonales a frentes de onda $S = cte$. Usemos este hecho para obtener la ecuación de tales curvas a partir de la ecuación de la eikonal. Sea s la longitud de arco de un rayo. Si usamos a s como parámetro para especificar el vector de posición de un punto $\mathbf{r}$ en un rayo, entonces

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{s} \quad (1.113)$$

donde $\mathbf{s}$ es el vector tangente unitario al rayo con dirección en la cual aumenta s . De acuerdo con la relación $\|\nabla S\| = n$, el vector $n^{-1}\nabla S$ es unitario y ortogonal a la superficie $S = cte$, por lo tanto, debe coincidir con $\mathbf{s}$, lo que nos da la relación

$$n \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \nabla S \quad (1.114)$$

De esta ecuación obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n \quad (1.115)$$

o, equivalentemente,

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{ds^2} = \frac{\nabla n}{n} - \frac{1}{n} \frac{dn}{ds} \frac{d\mathbf{r}}{ds} \quad (1.116)$$

que sólo depende del índice de refracción $n(\mathbf{r})$, el cual puede cambiar con la posición $\mathbf{r}$. Esta ecuación es similar a la segunda ley de Newton con la longitud de arco s en lugar del tiempo t . La ecuación (1.115)

coincide con la ecuación de rayos para ondas escalares (1.95), lo cual era de esperarse ya que cada una de las componentes de los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{H}$ para ondas monocromáticas deben satisfacer una ecuación tipo Helmholtz.

Demostración de (1.115). De acuerdo con la regla de la cadena tenemos

$$\frac{d}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \cdot \nabla = \frac{1}{n} \nabla S \cdot \nabla.$$

Aplicando lo anterior a (1.114)

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{1}{n} (\nabla S \cdot \nabla) \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{1}{n} (\nabla S \cdot \nabla) (\nabla S).$$

Usemos la notación $S_i = \frac{\partial S}{\partial x^i}$ para desarrollar el extremo derecho

$$(\nabla S \cdot \nabla) (\nabla S) = \left(S_i \frac{\partial}{\partial x^i} \right) \left(\frac{\partial S}{\partial x^j} \hat{\mathbf{x}}^j \right) = \hat{\mathbf{x}}^j \left(S_i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial S}{\partial x^i} \right)$$

(usamos la convención de suma sobre índices repetidos) donde

$$S_i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial S}{\partial x^i} = S_i \frac{\partial}{\partial x^j} S_i = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{S_i S_i}{2} = \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\|\nabla S\|^2}{2}$$

conduce a

$$(\nabla S \cdot \nabla) (\nabla S) = \hat{\mathbf{x}}^j \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\|\nabla S\|^2}{2} = \nabla \frac{1}{2} \|\nabla S\|^2 = \frac{1}{2} \nabla n^2.$$

Por lo tanto

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \frac{1}{2n} \nabla n^2 = \frac{1}{2n} \frac{dn^2}{dn} \nabla n = \nabla n.$$

En el caso particular de un medio con índice de refracción constante tenemos

$$\mathbf{r} = \mathbf{c}s + \mathbf{d}$$

$\mathbf{c}$ y $\mathbf{d}$ son vectores constantes, por lo que en este caso los rayos son líneas rectas.

Ley de intensidad de la óptica geométrica

Para dar una explicación a los rayos de luz y a la intensidad es necesario hacer énfasis en las densidades de energía eléctrica y magnética dadas por [1]

$$\langle w_e \rangle = \frac{\epsilon}{16\pi} \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^*, \quad \langle w_m \rangle = \frac{\mu}{16\pi} \mathbf{h} \cdot \mathbf{h}^*$$

Estas ecuaciones provienen de ondas escalares, ya que la frecuencia óptica son muy grandes del orden $\omega \approx 10^{15} \text{ s}^{-1}$. De las ecuaciones (1.109) se obtienen las expresiones para cada campo

$$\mathbf{e} = -\frac{1}{\epsilon} \nabla S \times \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} = \frac{1}{\mu} \nabla S \times \mathbf{e}$$

De las expresiones anteriores, se toman respectivamente el complejo conjugado para poder tomar el producto escalar de dichas ecuaciones, además sabemos que el vector de Poynting se define como el producto cruz del campo eléctrico y del campo magnético, pero en este caso es necesario definir el tiempo

promedio del vector de Poynting, que se relaciona con las densidades de energía y esta dado de la siguiente manera

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{2c}{n^2} \langle w_e \rangle \nabla S$$

Dado que las densidades de energía son iguales $\langle w_e \rangle = \langle w_m \rangle$ implica que $\langle w \rangle = \langle w_m \rangle + \langle w_e \rangle = 2\langle w_e \rangle$. A causa de la ecuación de la eikonal se tiene un vector unitario dado por la siguiente expresión

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{\nabla S}{n} = \frac{\nabla S}{|\nabla S|}$$

Podemos ver que el promedio temporal del vector de Poynting se denota como

$$\langle \mathbf{S} \rangle = v \langle w \rangle \hat{\mathbf{s}} \quad (1.117)$$

Esta expresión quiere decir que $\hat{\mathbf{s}}$ va en la misma dirección que el vector de Poynting. Por lo tanto, el promedio del vector de Poynting va en la dirección del frente de onda y la relación (1.117), muestra que el promedio de densidad de energía se propaga con velocidad $v = \frac{v}{n}$.

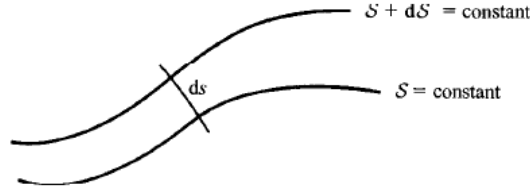


Figura 1.2: Ilustración del significado de la relación $n\hat{\mathbf{s}} = \nabla S$ [1].

De las dos últimas expresiones de (1.109) indica que los vectores de campo eléctrico y magnético son puntos ortogonales al rayo de luz. Ahora consideraremos dos frentes de onda vecinos con la siguiente condición $S = cte$, $S + dS = cte$ figura (1.2), teniendo la relación fundamental

$$\frac{dS}{ds} = \nabla S \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{|\nabla S|^2}{n} = n$$

Por lo tanto la distancia ds entre los puntos en los extremos opuestos de un corte normal a los dos frentes de onda es inversamente proporcional al índice de refracción y directamente proporcional a la velocidad.

Se define la intensidad de luz como I , que es la magnitud del promedio del vector de Poynting como

$$I = |\langle \hat{\mathbf{S}} \rangle| = v \langle w \rangle$$

la ley de conservación se obtiene tomando su divergencia lo que equivale al Teorema de Gauss dado por

$$\nabla \cdot \langle \hat{\mathbf{S}} \rangle = \nabla \cdot (I \hat{\mathbf{s}}) = 0$$

evaluando (1.117) en la expresión anterior nos da una interpretación de la conservación de los rayos lumínicos. Todos los rayos que proceden de ds_1 de un frente de onda $S(\mathbf{r}) = a_1$ y ds_2 corresponde a los rayos que cruzan otro frente de onda $S(\mathbf{r}) = a_1$, figura (1.3). En medios homogéneos los rayos son líneas rectas, para rayos rectilíneos ds_1 y ds_2 están acotadas por líneas de curvatura.

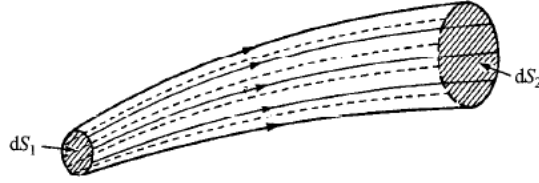


Figura 1.3: Ilustración de la ley de conservación de la óptica geométrica [1].

Medio con simetría esférica

Consideremos a la tierra como una esfera con masa uniformemente distribuida y una atmósfera en reposo con respecto a la tierra. Como demostramos en el capítulo 3, las propiedades termodinámicas de la atmósfera tienen simetría esférica lo que da un índice de refracción $n(r)$, siendo r , la distancia entre un punto y el centro de masa terrestre. En este caso podemos resolver la ecuación de la trayectoria usando argumentos análogos a los usados para resolver el problema de los dos cuerpos de Kepler, con la longitud de arco s en lugar del tiempo t . El resultado principal es que cada rayo está contenido en el plano definido por las condiciones iniciales, y en dicho plano la ecuación del rayo se reduce a una ecuación diferencial separable.

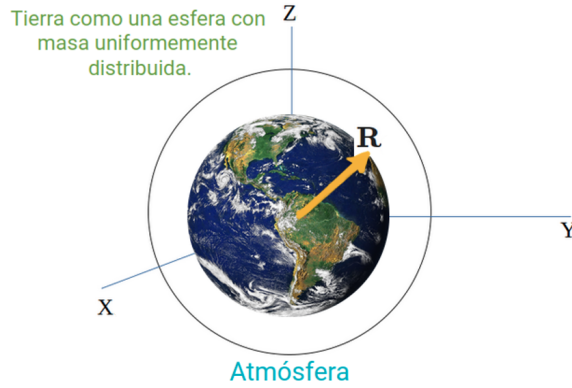


Figura 1.4: Sistema de referencia primario con origen en el centro de masa terrestre X, Y, Z .

Comenzamos por definir un sistema de referencia XYZ con origen en el centro de un modelo esférico terrestre figura (1.4). En este sistema el vector de posición de un punto en un rayo es

$$\mathbf{R} = X\hat{\mathbf{X}} + Y\hat{\mathbf{Y}} + Z\hat{\mathbf{Z}}$$

donde $\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Z}}$, son vectores unitarios del sistema XYZ . Usando la longitud de arco s como el parámetro para definir $\mathbf{r}$, la "velocidad" de una partícula que viaja sobre el rayo es

$$\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{ds},$$

el cual es un vector unitario,

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 1.$$

Consideremos el "momento angular"

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times n(r) \hat{\mathbf{s}}$$

donde n es el índice de refracción. Derivando

$$\frac{d\mathbf{L}}{ds} = \frac{d\mathbf{R}}{ds} \times n\hat{\mathbf{s}} + \mathbf{R} \times \frac{d}{ds}n\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{R} \times \frac{d}{ds}n\hat{\mathbf{s}}$$

y usando la ecuación de los rayos (1.95) obtenemos

$$\frac{d\mathbf{L}}{ds} = \mathbf{R} \times \nabla n.$$

Usando coordenadas esféricas $\mathbf{R} = r\hat{\mathbf{r}}$, $\nabla n = \hat{\mathbf{r}} \frac{dn}{dr}$, obtenemos

$$\frac{d\mathbf{L}}{ds} = \mathbf{R} \times \nabla n = r\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} \frac{dn}{dr} = \mathbf{0}.$$

Por lo tanto, $\mathbf{L}$ es constante sobre la trayectoria de la partícula

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times n(r) \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{R}_0 \times n(r_0) \hat{\mathbf{s}}_0 \equiv \mathbf{L}_0$$

donde $\mathbf{R}_0$ y $\hat{\mathbf{s}}_0$ son la posición y dirección inicial del rayo. La ecuación

$$\mathbf{R} \times n(r) \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{L}_0$$

implica que los vectores $\mathbf{R}$ y $\hat{\mathbf{s}}$ son ortogonales a $\mathbf{L}_0$ en cada punto del rayo,

$$\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{L}_0 \cdot \hat{\mathbf{s}} = 0.$$

La primera ecuación indica que $\mathbf{r}$ (y por tanto todo el rayo) pertenece al plano que es ortogonal a $\mathbf{L}_0$ y que pasa por el origen. La ecuación $\mathbf{L}_0 = \mathbf{R}_0 \times n(r_0) \hat{\mathbf{s}}_0$ implica que el plano está generado por la posición $\mathbf{r}_0$ y dirección $\hat{\mathbf{s}}_0$ iniciales del rayo.

Siguiendo a Born [1] y sin perder generalidad consideremos que el rayo de interés está contenido en el plano XY . Usando coordenadas polares

$$X = R \cos \theta, \quad Y = R \sin \theta,$$

y los vectores base asociados $\hat{\mathbf{R}}(\theta) = \cos \theta \hat{\mathbf{X}} + \sin \theta \hat{\mathbf{Y}}$, $\hat{\theta}(\theta) = -\sin \theta \hat{\mathbf{X}} + \cos \theta \hat{\mathbf{Y}}$, obtenemos

$$\mathbf{R} = R\hat{\mathbf{R}}(\theta), \quad \mathbf{V}_s = \frac{d\mathbf{R}}{ds} = \frac{dR}{ds} \hat{\mathbf{R}} + R \frac{d\theta}{ds} \hat{\theta}(\theta).$$

Esto da

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times n\mathbf{V}_s = nR^2 \frac{d\theta}{ds} \hat{\mathbf{Z}}$$

junto con la relación entre magnitudes

$$L = nR \sin \phi = nR^2 \frac{d\theta}{ds} = L_0 \quad (1.118)$$

donde ϕ es el ángulo entre $\mathbf{R}$ y $\mathbf{V}_s$. Usando a θ como parámetro del rayo obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}}{d\theta} &= \frac{dR}{d\theta} \hat{\mathbf{R}} + R \hat{\theta}(\theta) \\ \mathbf{R} \times \frac{d\mathbf{R}}{d\theta} &= R^2 \hat{\mathbf{Z}} \\ R \left\| \frac{d\mathbf{R}}{d\theta} \right\| \sin \phi \hat{\mathbf{Z}} &= R^2 \hat{\mathbf{Z}}. \end{aligned}$$

De la última ecuación obtenemos

$$\sin \phi = \frac{R}{\sqrt{\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 + R^2}}.$$

Sustituyendo en (1.118)

$$Rn \sin \phi = R^2 n \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 + R^2}} = L_0 ,$$

y despejando a $\frac{dR}{d\theta}$ obtenemos

$$\theta - \theta_0 = \pm \int_{R_0}^R \frac{dR}{R \sqrt{\frac{n^2 R^2}{L_0^2} - 1}} . \quad (1.119)$$

La ecuación (1.119) es adecuada cuando deseamos calcular un rayo a partir de las condiciones iniciales θ_0 , R_0 , pero no es apropiada cuando deseamos calcular el rayo que va de un punto a otro. En este caso debemos integrar la ecuación de los rayos con condiciones a la frontera como se muestra en el capítulo 4 de este trabajo.

Nota. Otra forma de obtener (1.119) consiste en partir de la ecuación de la "velocidad"

$$\|\mathbf{V}_s\|^2 = \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 + R^2 \left(\frac{d\theta}{ds}\right)^2 = 1 .$$

La ecuación (1.118) da $\frac{d\theta}{ds} = L_0 / nR^2$ lo que conduce a la ecuación

$$\left(\frac{dR}{ds}\right)^2 + R^2 \frac{L_0^2}{n^2 R^4} = 1$$

que se integra directamente

$$ds = \pm \left(1 - \frac{L_0^2}{n^2 R^2}\right)^{-1/2} dR .$$

Usando la regla de la cadena para cambiar a s por θ ,

$$\frac{dR}{ds} = \frac{d\theta}{ds} \frac{dR}{d\theta} = \frac{L_0}{nR^2} \frac{dR}{d\theta} ,$$

obtenemos

$$\frac{L_0^2}{n^2 R^4} \left(\frac{dR}{d\theta}\right)^2 + \frac{L_0^2}{n^2 R^2} = 1$$

de donde se obtiene (1.119).

Capítulo 2

MODELOS DEL ÍNDICE DE REFRACCIÓN

En el Capítulo 1, se dedujo la ecuación de los rayos de luz (1.95), es una ecuación diferencial de segundo orden no lineal que depende del índice de refracción. El objetivo de este capítulo es establecer un modelo del índice de refracción para medios estratificados enfocado en la atmósfera terrestre, teniendo en cuenta que esta compuesta de gases traza esto implica que la interacción de la radiación con la atmósfera sufra refracción, es necesario establecer un modelo apropiado que tome en cuenta parámetros termodinámicos y la geometría adecuada para la atmósfera. En éste capítulo se explican dos modelos clásicos del índice de refracción el de Cauchy y Sellmeier que dependen de la frecuencia de oscilación de la radiación, éstos modelos están relacionados con propiedades termodinámicas, tal es el caso, del modelo del índice de refracción de Rodgers que es función de la presión, temperatura y vapor de agua. Este modelo es el que se utiliza para resolver la ecuación de los rayos de luz en éste trabajo de maestría debido a que es una expresión sencilla del índice de refracción del aire, que nos permite usar modelos de referencia hidrostáticos de la atmósfera terrestre.

2.1. Modelos clásicos del índice de refracción

Se conoce como dispersión al fenómeno en el que el índice de refracción de un medio depende de la frecuencia. Para analizar teóricamente la dispersión es necesario incorporar la naturaleza atómica de la materia. Las contribuciones de grandes números de átomos pueden promediarse para representar el comportamiento de un medio dieléctrico isótropo. Cuando un dieléctrico está sujeto a un campo eléctrico aplicado, la distribución de la carga se distorsiona. Debido a la generación de momentos dipolares eléctricos, que a su vez aportan al campo total interno. Mientras que el campo externo separa las cargas negativas de las positivas del medio, cada par forma un dipolo y después aporta un componente adicional del campo. El momento dipolar por unidad de volumen se conoce como polarización eléctrica, $\mathbf{P}$.

Si el dieléctrico es sometido a una onda electromagnética armónica incidente, la estructura de su carga interna experimentará fuerzas, torsiones variables en el tiempo, proporcionales a la componente del campo eléctrico de la onda.

La nube electrónica del átomo está ligada al núcleo positivo por una fuerza eléctrica de atracción que la mantiene en una configuración de equilibrio. Por lo que tiene que existir una fuerza neta, $\mathbf{F}$, para restablecer el equilibrio del sistema.

Un medio material se representa como una agrupación, en el vacío, de un número muy elevado de átomos polarizables, cada uno de los cuales es pequeño (con respecto a la longitud de onda de la luz). Cuando una onda luminosa incide en dicho medio, cada átomo puede considerarse como un oscilador forzado clásico que esta siendo excitado por un campo eléctrico variable en el tiempo de la onda [2].

Si se considera que $\mathbf{r}$, es el desplazamiento del electrón con respecto a su posición de equilibrio, se puede suponer una fuerza mecánica de restitución, $\mathbf{F}_m = -K\mathbf{r} = -m_e\omega_0^2\mathbf{r}$, donde ω_0 es la frecuencia natural de oscilación de la carga, se supone una fuerza de amortiguación del tipo $\mathbf{F}_d = -\xi\mathbf{v} = -m_e\Gamma\mathbf{v}$, donde Γ es

la constante de amortiguación, q es la carga de la masa y $\mathbf{x}(t)$ denota el sistema coordinado interno del oscilador y el movimiento relativo entre las cargas opuestas del núcleo. Los campos que produce la onda originan una fuerza de Lorentz, tomando la fuerza neta como

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = m_e \ddot{\mathbf{x}}(t) = -m_e \Gamma \dot{\mathbf{x}}(t) - m_e \omega_0^2 \mathbf{x}(t) - q \mathbf{e}(Z, t), \quad (2.1)$$

Esta ecuación describe el movimiento de un electrón alrededor de un núcleo debido a una fuerza restauradora por un potencial armónico y sujeto a un campo eléctrico externo ver figura (2.1).

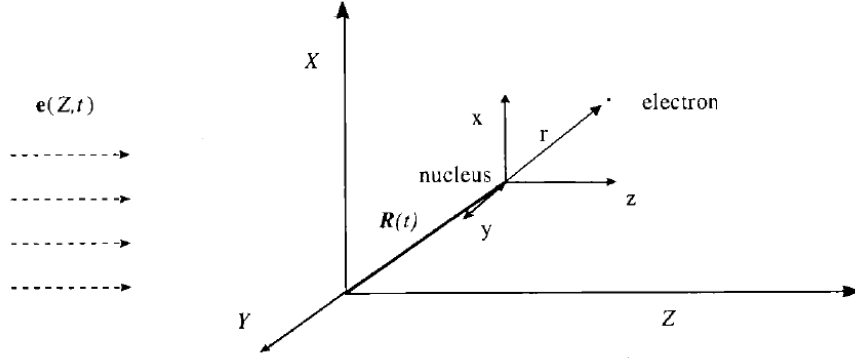


Figura 2.1: Sistema coordinado para el campo electromagnético y el oscilador atómico [2]

Para dar solución a esta ecuación se propone lo siguiente

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(\omega) e^{i\omega t} \quad \text{y} \quad \mathbf{e}(Z, t) = \mathbf{E}(Z, \omega) e^{i\omega t}. \quad (2.2)$$

Calculando $\ddot{\mathbf{x}}(t)$, $\dot{\mathbf{x}}(t)$ y evaluando en (2.1) obtenemos la expresión algebraica

$$\mathbf{X}(\omega) = \frac{q}{m} (\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma)^{-1} \mathbf{E}(Z, \omega).$$

El vector de momento dipolar como función de la frecuencia es $\mu_{\text{dp}}(\omega) = q \mathbf{X}(\omega)$, de la expresión anterior

$$\mu_{\text{dp}}(\omega) = \frac{q^2}{m} (\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma)^{-1} \mathbf{E}(Z, \omega).$$

Se observa de la ecuación anterior que el momento dipolar de este sistema esta alineado con el campo. Dentro del medio hay N_a moléculas absorbentes por unidad de volumen V , el cual podemos introducir la densidad $\rho_a = \frac{N_a}{V}$ y considerando la relación entre el campo y el momento dipolar del medio por

$$\rho_a \langle \mu_{\text{dp}}(\omega) \rangle = \mathbf{P}(Z, \omega) = \epsilon_0 \chi(\omega) \mathbf{E}(Z, \omega),$$

y con ello la permitividad es

$$\epsilon(\omega) = \epsilon_r(\omega) \epsilon_0 = \epsilon_0 + \frac{|\mathbf{P}(Z, \omega)|}{|\mathbf{E}(Z, \omega)|} = (1 + \chi(\omega)) \epsilon_0,$$

$\epsilon_r(\omega)$ es la permitividad relativa, ϵ_0 es la permitividad del espacio libre, $\mathbf{P}(Z, \omega)$ es el vector de polarización y $\chi(\omega)$ es la susceptibilidad eléctrica, sumando sobre todas las transiciones tenemos

$$\mathbf{P}(Z, \omega) = \rho_a \sum_j \langle \mu_{\text{dp}}(\omega) \rangle = \sum_j \frac{\rho_a (q^2/m)_j \mathbf{E}(Z, \omega)}{(\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma)}.$$

Se ha remplazado ω_0 por ω_j que representa a múltiples osciladores. Usando la expresión de la permitividad relativa se convierte en

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \sum_j \frac{\rho \left(\frac{q^2}{\epsilon_0 m} \right)_j}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma_j}$$

Para simplificar la notación usaremos

$$\Delta\epsilon_j = \rho_a \frac{q_j^2}{\epsilon_0 m_j \omega_j} \quad (2.3)$$

$\Delta\epsilon_j$, esta relacionado con la fuerza del oscilador y es proporcional a la densidad $\rho_a = \frac{P_a}{K_B T}$, esto implica que (2.1) es una función de la temperatura y de la presión proporcionando una conexión con variables macroscópicas donde

$$\Delta\epsilon_j = \Delta\epsilon_{j0} \frac{P_a T_0}{P_{a0} T}.$$

Las variables T_0, P_{a0} son temperatura y presión de referencia y $\Delta\epsilon_{j0}$ es el valor a las condiciones de referencia frecuentemente se usa $T_0 = 273K$, $P_{a0} = 1$ atm.

A continuación se darán modelos de índices de refracción mediante este modelo clásico del oscilador como función de la frecuencia.

Modelo de Sellmeier

Para obtener el modelo de Sellmeier [2] usaremos (2.3), evaluando en $\epsilon'_r(\omega) - i\epsilon''_r(\omega)$ y tomando la parte real de la permitividad obtenemos que para un gas ideal a baja presión

$$\epsilon'_r(\omega) - i\epsilon''_r(\omega) = 1 + \sum_j \frac{\omega_j^2 \Delta\epsilon_j}{\omega_j^2 - \omega^2 + i\omega\Gamma_j}.$$

Para obtener la parte real y la parte imaginaria de la permitividad relativa multiplicamos a esta última expresión por su complejo conjugado para obtener la parte real

$$\epsilon'_r(\omega) = 1 + \sum_j \frac{\omega_j^2 \Delta\epsilon_j (\omega_j^2 - \omega^2)}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (\omega\Gamma_j)^2},$$

y la parte imaginaria

$$\epsilon''_r(\omega) = \sum_j \frac{\omega_j^2 \Delta\epsilon_j \omega \Gamma_j}{(\omega_j^2 - \omega^2)^2 + (\omega\Gamma_j)^2}.$$

La parte real esta asociado al índice de refracción mediante

$$\epsilon'_r(\omega) = n^2(\omega) - k_a^2(\omega),$$

considerando ($n \gg k_a$ y $\omega_j^2 - \omega^2 \gg \omega\Gamma_j$) condiciones para la región de transparencia se tiene finalmente que

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_j \frac{\omega_j^2 \Delta\epsilon_j}{\omega_j^2 - \omega^2}. \quad (2.4)$$

la ecuación (2.4) es conocido como el modelo de índice de refracción de Sellmeier, apropiado para gases, líquidos y también sólidos en regiones espectrales de transparencia.

Modelo de Cauchy

El modelo de Cauchy [2] se obtiene tomando una aproximación del modelo de Sellmeier cuando $\omega_j \gg \omega$, consideremos lo siguiente

$$(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots,$$

entonces

$$(1 - x^2)^{-1} = 1 + x^2 + x^4 + \dots \quad (2.5)$$

Considerando $\omega_j \gg \omega$ y utilizando (2.4)

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_j \frac{\Delta\epsilon_j}{1 - \frac{\omega}{\omega_j}}, \quad (2.6)$$

usando (2.5), en (2.6) y $x_j = \frac{\omega}{\omega_j}$ se tiene

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_j \Delta\epsilon_j [1 + x_j^2],$$

finalmente llegamos al modelo del índice de refracción de Cauchy

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} \sum_j \Delta\epsilon_j + \left(\frac{1}{2} \sum_j \frac{\Delta\epsilon_j}{\omega_j^2} \right) \omega^2.$$

Los modelos de Sellmeier y de Cauchy están expresados en términos de la frecuencia ω , para la óptica geométrica se usa la longitud de onda λ podemos dar el modelo de Sellmeier como función de la longitud de onda es

$$\frac{1}{2} [n^2(\lambda) - 1] = n(\lambda) - 1 = \frac{\lambda^2 A_0}{\lambda^2 - \lambda_0^2}. \quad (2.7)$$

la expresión (2.7), contiene parámetros para una variedad de gases y es válido en el rango de longitud de onda entre 3 y $0.3\mu m$ con condiciones ($T = 273K$, $P = 1 \text{ atm}$) y es un modelo para un sólo oscilador.

Para el índice de refracción en regiones de transparencia visible el modelo de Cauchy es

$$n(\lambda) - 1 = A_0 \left(1 + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} \right).$$

De la misma manera depende ciertos parámetros para diferentes tipos de gases válido desde el visible hasta el infrarrojo.

2.2. Modelo de Rodgers

La atmósfera terrestre es un medio refractivo, y sabemos que esta compuesta por una mezcla de gases, y los modelos anteriores dan origen a un modelo reportado en la literatura. Este modelo del índice de refracción nos proporciona como varía respecto a la temperatura (K), presión (mb) y vapor de agua (q), como

$$n = 1 + 7.7624 \times 10^{-5} \frac{P}{T} \left[1 + 0.8335 \left(1 + \frac{5748}{T} \right) q \right].$$

Para poder usar este modelo [17] en el cálculo de rayos en la atmósfera, es necesario conocer la presión (P) y la temperatura (T) en cada punto del sistema primario (X, Y, Z) y posteriormente mapearlo al sistema local del observador (x, y, z) lo que estudiamos en el capítulo siguiente.

Capítulo 3

ESTADOS TERMODINÁMICOS DE LA ATMÓSFERA

En éste capítulo se dan los fundamentos básicos de la termodinámica de la atmósfera, donde la tierra se considera como una esfera con masa uniformemente distribuida y la atmósfera en reposo o equilibrio hidrostático por lo que la fuerza de gravedad debe ser balanceada por la componente vertical de la fuerza del gradiente de presión $\nabla p = \rho \mathbf{g}$, donde la hipótesis de equilibrio local se cumple ya que localmente la atmósfera se comporta como un gas ideal en equilibrio termodinámico.

El objetivo es usar la ecuación de estado para un gas ideal para la atmósfera terrestre, en la ecuación de conservación de Euler, usando modelos de referencia hidrostáticos con una simetría esférica.

El resultado de lo mencionado, son los modelos para la presión y temperatura para una atmósfera adiabática simétricamente esférica ya que el modelo del índice de refracción es función de P y T que se necesita para poder resolver la ecuación de los rayos de luz.

3.1. Ecuación de estado para la atmósfera

La atmósfera se comporta como una mezcla de gases ideales [18]. Si consideramos una pequeña región con volumem V , temperatura T , presión p_i y N_i moléculas del i -ésimo gas que compone a la atmósfera, la ecuación de estado correspondiente es

$$p_i V = k N_i T = R^* n_i T$$

donde k es la constante de Boltzmann, $R^* = k N_a$ es la constante universal de los gases, N_a es la constante de Avogadro, y $n_i = N_i / N_a$ es el número de moles. La ley de Dalton de presiones parciales para una mezcla de gases ideales establece que la presión total en un volumen V es la suma de las presiones parciales

$$p = \sum p_i = R^* \left(\sum n_i \right) \frac{T}{V} = R^* n \frac{T}{V}$$

donde aparece el número total de moles $n = \sum n_i$. Rescribiendo en términos de la masa total

$$M = \sum m_i n_i ,$$

donde m_i es la masa molar,

$$p = R^* \frac{n}{M} \frac{M}{V} T \quad \text{ó} \quad V = R^* n \frac{T}{p} ,$$

aparecen: (i) la densidad atmosférica

$$\rho = \frac{M}{V} ,$$

(ii) la masa molar media

$$\bar{m} = \frac{M}{n} = \sum m_i \frac{n_i}{n} = \sum m_i f_i ,$$

siendo $f_i = n_i / n$ la fracción molar, y (iii) la constante de gas para la atmósfera

$$R_a = \frac{R^*}{\bar{m}} .$$

Con lo anterior la ecuación de estado atmosférica toma la forma usada en la literatura meteorológica con $R_a = 287 \text{ J / kg } ^0\text{K}$ [Holton], a saber,

$$p = R_a T \rho \quad (3.1)$$

Nota. En este trabajo sólo consideramos una atmósfera seca. La presencia de humedad y vapor de agua implica una modificación pequeña de la ecuación de estado.

3.2. Termodinámica de gases ideales

La termodinámica tiene la virtud de proporcionar relaciones generales entre las variables macroscópicas de un sistema sin considerar los procesos moleculares que dan origen a tales propiedades. La atmósfera se comporta *localmente* (es decir, en una pequeña region alrededor de cada punto del espacio) como un *gas ideal* por lo que revisaremos brevemente la descripción termodinámica de un gas ideal.

La **primera ley de la termodinámica** [19] establece la conservación de la energía

$$dU = dQ + dW$$

para procesos reversibles o irreversibles, donde la *energía interna* U es un atributo de cada sistema físico, dQ es el calor que fluye a través de las fronteras del sistema y dW es la resultante del trabajo realizado por el sistema. En el caso de un gas ideal tenemos

$$dW = -p dV$$

con lo cual la primera ley toma la forma

$$dU = dQ - p dV . \quad (3.2)$$

Esta relación da lugar a la definición de la capacidad calorífica a volumen constante

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_V .$$

Reescribiendo la primera ley en términos de la entalpía

$$H(T, p) = U(T, p) + p V(T, p) \quad (3.3)$$

obtenemos

$$dH = dQ + V dp$$

lo que da lugar a la definición de la capacidad calorífica a presión constante

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p .$$

La relación entre C_p y C_V se obtiene derivando la identidad (3.3) lo que da

$$C_p = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_p + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p .$$

Usando la regla de la cadena

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} \right)_p U(T, p) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial T} \right)_V + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial}{\partial V} \right)_T \right] U(T, V)$$

obtenemos

$$C_p = C_v + \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_p. \quad (3.4)$$

Por otro lado, la **Ley de Joule** [20],[21] establece que la energía interna de un *gas ideal* no depende del volumen

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = 0. \quad (3.5)$$

Combinando este resultado con la ecuación de estado (3.1) la ecuación (3.4) se reduce a la relación deseada

$$C_p = C_v + R^* n. \quad (3.6)$$

Hasta aquí hemos trabajado con variables las extesivas U , Q , W , V . La redes meteorológicas operacionales miden la presión p y la temperatura T , y la densidad $\rho = M/V$ se infiere de la relación $p = R_a T \rho$, por lo que en la literatura meteorológica el volumen V se reemplaza por la densidad de masa

$$\rho = \frac{M}{V}.$$

Tenemos

$$dV = d \frac{M}{\rho} = - \frac{M}{\rho^2} d\rho$$

con lo cual la primera ley toma la forma

$$dU = dQ + M \frac{p}{\rho^2} d\rho.$$

Dividiendo entre M obtenemos

$$d \left(\frac{U}{M} \right) = d \left(\frac{Q}{M} \right) + \frac{p}{\rho^2} d\rho$$

aparecen *variables intensivas* que denotaremos con minúsculas

$$u = \frac{U}{M}, \quad q = \frac{Q}{M}.$$

Para la entalpía tenemos

$$h \equiv \frac{H}{M} = \frac{U + pV}{M} = u + \frac{p}{\rho}$$

de donde se obtiene

$$dh = du + \frac{dp}{\rho} - \frac{p}{\rho^2} d\rho.$$

En términos u , q y h la primera ley toma las formas siguientes

$$\begin{aligned} du &= dq + \frac{p}{\rho^2} d\rho \\ dh &= dq + \frac{1}{\rho} dp. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Dividiendo (3.4) entre M y usando

$$c_v = \frac{C_v}{M}, \quad c_p = \frac{C_p}{M},$$

obtenemos

$$c_p = c_v + \left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + p \left(\frac{\partial \rho^{-1}}{\partial T} \right)_p,$$

y la ecuación (3.6) toma la forma

$$c_p = c_v + R_a. \quad (3.8)$$

Usando la ley de Joule y la ecuación de estado obtenemos

$$\begin{aligned} u &= c_v T + u^* \\ h &= u + \frac{p}{\rho} = c_v T + RT + u^* = (c_v + R) T + u^* = c_p T + u^* . \end{aligned}$$

Ejemplo. Consideremos un gas ideal sometido a un **proceso adiabático** (reversible o irreversible). En tal caso la primera ley y la ley de Joule conducen a la ecuación

$$c_v dT = \frac{p}{\rho^2} d\rho .$$

Usando la ecuación de estado (3.1) obtenemos

$$\begin{aligned} c_v \frac{dT}{T} &= \frac{R_a T}{\rho} d\rho \\ d \ln \frac{T}{T_c} &= \frac{R_a}{c_v} d \ln \frac{\rho}{\rho_c} \end{aligned}$$

donde ρ_c , T_c , son constantes arbitrarias usadas para conservar la adimensionalidad del argumento de los logaritmos, integrando

$$\frac{\rho}{\rho_c} = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{c_v/R_a} . \quad (3.9)$$

Para que esta ecuación sea válida ρ_c y T_c deben ser valores de ρ y T en cualquier etapa del proceso adiabático que están relacionadas por la ecuación de estado

$$p_c = R_a T_c \rho_c$$

Dividiendo $p = R_a T \rho$ con la relación anterior,

$$\frac{p}{p_c} = \frac{\rho T}{\rho_c T_c} \rightarrow \frac{\rho}{\rho_c} = \frac{p}{p_c} \left(\frac{T}{T_c} \right)^{-1} ,$$

obtenemos

$$\frac{p}{p_c} = \left(\frac{T}{T_c} \right)^{c_p/R_a} . \quad (3.10)$$

donde usamos $c_p/c_v = R_a/c_v + 1$ (3.8). Usando (3.9), (3.10), obtenemos

$$\rho = \rho_c \left(\frac{p}{p_c} \right)^{1/\gamma} \quad \text{con} \quad \gamma \equiv \frac{c_p}{c_v} . \quad (3.11)$$

Las relaciones (3.9)-(3.11) reciben el nombre de **ecuaciones de Poisson** [15].

La **segunda ley de la termodinámica** establece la existencia de una variable de estado S conocida como **entropía** que para procesos reversibles de un gas ideal satisface la relación

$$dU = T dS - p dV .$$

Dividiendo entre la masa M la segunda ley toma la forma

$$du = T ds + \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (3.12)$$

donde definimos $s = S/M$. Despejando obtenemos

$$ds = \frac{du}{T} - \frac{p}{T\rho^2} d\rho .$$

La ecuación de estado $p = R_a T \rho$ conduce a la relación

$$-\frac{p}{T\rho^2}d\rho = \frac{R_a^2 T}{p} \frac{1}{R_a} \left(\frac{dp}{T} - p \frac{dp}{T^2} \right) = R_a \left(\frac{dT}{T} - \frac{dp}{p} \right) \quad (3.13)$$

y

$$ds = \frac{du}{T} + R_a \left(\frac{dT}{T} - \frac{dp}{p} \right).$$

Usando la ley de Joule y (3.8) obtenemos

$$ds = c_p \frac{dT}{T} - R_a \frac{dp}{p} \quad (3.14)$$

ó

$$\frac{ds}{c_p} = \frac{d(T/T_c)}{T/T_c} - \frac{R_a}{c_p} \frac{d(p/p_c)}{p/p_c} = d \ln(T/T_c) - \frac{R_a}{c_p} d \ln(p/p_c) = d \ln \left(\frac{T}{T_c} \right) \left(\frac{p}{p_c} \right)^{-R_a/c_p}$$

donde introducimos las constantes arbitrarias p_c , T_c , para que el argumento de los logaritmos sean adimensionales. Integrando

$$\frac{s - s_c}{c_p} = \ln \left(\frac{T}{T_c} \right) \left(\frac{p_c}{p} \right)^{R_a/c_p} \quad (3.15)$$

donde s_c es el valor correspondiente al par p_c , T_c . El valor de ρ_c , p_c , T_c , para problemas atmosféricos será claro más adelante cuando usemos la ecuación hidrostática para la atmósfera.

3.3. Distribución vertical promedio de la temperatura

En la atmósfera terrestre se llevan a cabo una variedad de procesos físicos. La atmósfera esta constituida por una mezcla de gases ideales, la mayor parte esta constituida por el oxígeno molecular y nitrógeno.

Un proceso físico relevante es el bombardeo de " fotones solares" en el infra-rojo, visible y uv. Estos fotones son absorbidos por moléculas atmosféricas, principalmente por el ozono y el vapor de agua o nubes e incluso la superficie terrestre absorbe estos fotones generando un calentamiento sobre el mismo. Debido a esté proceso hay una transferencia de calor de una región a otra dando origen a fenómenos tropicales tal como: huracanes, ciclones, etc.

Los principios termodinámicos son esenciales para describir los procesos atmosféricos. En la física atmosférica usamos las definiciones macroscópicas de la temperatura y presión de un gas. Una técnica observacional muy importante es el sondeo remoto [22],[23], el cual consiste en la detección de radiación electromagnética emitida, dispersada o transmitida por la atmósfera terrestre.

La atmósfera esta convencionalmente dividida en capas en la dirección vertical, según la variación de la temperatura con la altura.

La capa desde el suelo hasta unos 15 Km de altitud se le conoce como Troposfera, en el cual la temperatura decrece con la altura y esta limitada por la Tropopausa. La capa desde la Tropopausa hasta unos 50 km de altitud aproximadamente se conoce como Estratosfera en donde la temperatura se eleva con la altura y esta limitada por la Estratopausa [18],[24].

Para la capa después de la Estratopausa hasta unos 80 ~ 90 km de altitud se conoce como Mesosfera en donde la temperatura nuevamente decrece con la altitud y esta limitada por la Mesopausa. Sobre la

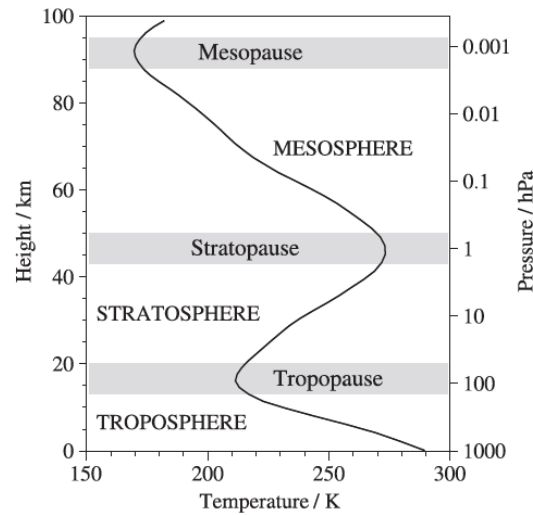


Figura 3.1: Estructura vertical típica de la temperatura (K) atmosférica, en los 100km más bajos de la atmósfera. Basado en datos de [4]

Mesopausa tenemos la Termosfera donde la temperatura se eleva nuevamente con la altitud figura(3.1) [25], [26] .

La Tropopausa es conocida como la atmósfera baja y en esta capa es donde suceden los fenómenos climáticos tal como: ciclones, huracanes, lluvias, nieve, truenos, etc. Para las capas Troposfera y Mesosfera juntas son llamadas atmósfera media [27],[28],[29].

En la Estratosfera se producen las moléculas del Ozono (O_3) mediante el proceso fotoquímico, durante la absorción de fotones en el ultravioleta por las moléculas del Oxígeno presentes, esto es, tres moléculas de O_2 forman 2 moléculas de O_3 .

3.4. Hipótesis de equilibrio local y termodinámica de un flujo atmosférico

Las propiedades termodinámicas de un flujo atmosférico pueden cambiar significativamente de valor de un punto a otro por lo que la atmósfera es un sistema fuera de equilibrio termodinámico y las relaciones termodinámicas reportadas en las secciones anteriores deben usarse con precaución. En el caso de una atmósfera en reposo con respecto a la tierra, la variación de la temperatura con la altura implica que aún en este caso la atmósfera no es un sistema en equilibrio termodinámico. Intuitivamente, si consideramos una pequeña región atmosférica, digamos de un litro o menos, sus propiedades termodinámicas son esencialmente las mismas, por lo que las relaciones termodinámicas de equilibrio "localmente" son válidas. Este hecho es la base de la así llamada **hipótesis del equilibrio local (HEL)** la cual asume que las relaciones termodinámicas de equilibrio son válidas puntualmente, por lo que las propiedades termodinámicas pueden cambiar de una partícula de fluido a otra. En este punto es pertinente aclarar el concepto hidrodinámico de partícula de fluido.

La hidrodinámica clásica es una teoría de campos donde cada punto (matemático) en un fluido se concibe como una partícula de fluido con propiedades físicas como la temperatura, la densidad de masa, presión, y propiedades cinemáticas como la posición, velocidad y aceleración. Para indicar la posición de una partícula consideraremos un sistema de referencia de ejes cartesianos XYZ fijo a la tierra. Un concepto básico de la hidrodinámica es que cada partícula tiene una identidad propia, es decir, sigue una trayectoria propia y no

se intersecta (en un tiempo finito) con la trayectoria de otra partícula. Esta hipótesis equivale a suponer que existe una relación uno a uno entre las coordenadas iniciales (o lagrangianas) x_0, y_0, z_0 , y sus coordenadas instantáneas x, y, z (o eulerianas)

$$x = x(t, x_0, y_0, z_0), \quad y = y(t, x_0, y_0, z_0), \quad z = z(t, x_0, y_0, z_0).$$

Estas relaciones (que llamaremos **mapeo lagrangiano**) constituyen las ecuaciones paramétricas de una curva (o trayectoria de partícula) que parte del punto (x_0, y_0, z_0) . La hipótesis hidrodinámica es que las ecuaciones anteriores son invertibles

$$x_0 = x_0(t, x, y, z), \quad y_0 = y_0(t, x, y, z), \quad z_0 = z_0(t, x, y, z).$$

A estas últimas relaciones las llamaremos **mapeo euleriano**. Una forma equivalente de postular que las ecuaciones de transformación entre coordenadas lagrangiana y euleriana uno a uno, es postular que el campo de velocidad

$$\frac{dx}{dt} = u(t, x, y, z), \quad \frac{dy}{dt} = v(t, x, y, z), \quad \frac{dz}{dt} = w(t, x, y, z)$$

sujeta a las condiciones iniciales $x = x_0, y = y_0, z = z_0$, para $t = 0$, satisface las condiciones del teorema de existencia y unicidad.

Usaremos el subíndice L para indicar el valor de una propiedad q de una partícula identificada por medio de sus *coordenadas lagrangianas* x_0, y_0, z_0

$$q_L(t, x_0, y_0, z_0)$$

y el subíndice E cuando la partícula se identifica con sus coordenadas eulerianas

$$q_E(t, x, y, z).$$

Así, tenemos $p_L = p_L(t, x_0, y_0, z_0)$, $p_E = p_E(t, x, y, z)$, y la ecuación de estado tiene las formas lagrangiana $p_L = R_a T_L \rho_L$ y euleriana $p_E = R_a T_E \rho_E$. Dado que el valor de una propiedad q es el mismo en ambas representaciones, tenemos la identidad

$$q_L(t, x_0, y_0, z_0) = q_E[t, x(t, x_0, y_0, z_0), y(t, x_0, y_0, z_0), z(t, x_0, y_0, z_0)].$$

Derivando con respecto a t y usando la regla de la cadena obtenemos la identidad

$$\frac{dq_L}{dt} = \frac{\partial q_E}{\partial t} + u \frac{\partial q_E}{\partial x} + v \frac{\partial q_E}{\partial y} + w \frac{\partial q_E}{\partial z}.$$

donde u, v, w , son las componentes de la velocidad instantánea

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$

La HEL postula que en una pequeña región alrededor de una partícula puntual, el fluido está en equilibrio hidrodinámico, por lo que las relaciones termodinámicas de equilibrio son válidas en cada punto (entiéndase partícula puntual) de un fluido. Por ejemplo, tenemos la primera ley de la termodinámica (3.7), donde u y q son funciones de las coordenadas lagrangianas o eulerianas de cada partícula.

3.5. Ecuación hidrostática

En esta sección daremos una deducción de la ecuación de estado hidrostática para la atmósfera en un sistema cartesiano fijo a la tierra. Consideremos un sistema de referencia inercial $X_f Y_f Z_f$ otro fijo a la tierra XYZ , con vectores base $\hat{\mathbf{X}}_f, \hat{\mathbf{Y}}_f, \hat{\mathbf{Z}}_f$ y $\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Z}}$, respectivamente. La definición operacional del sistema inercial es

$$\frac{d}{dt}\hat{\mathbf{X}}_f = \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{Y}}_f = \frac{d}{dt}\hat{\mathbf{Z}}_f = \mathbf{0}.$$

Los sistemas de referencia tienen su origen en el centro de masa terrestre, los planos XY y $X_f Y_f$ coinciden con el plano ecuatorial y el eje $\hat{\mathbf{Z}}_f = \hat{\mathbf{Z}}$ coincide con el eje de rotación terrestre. Consideremos que la atmósfera rota junto con la tierra como si ambos fueran un cuerpo rígido. El vector de posición instantánea de una partícula de fluido en este sistema es

$$\mathbf{R} = X_f \hat{\mathbf{X}}_f + Y_f \hat{\mathbf{Y}}_f + Z_f \hat{\mathbf{Z}}_f = X \hat{\mathbf{X}} + Y \hat{\mathbf{Y}} + Z \hat{\mathbf{Z}} \quad \text{con } Z_f = Z.$$

Respecto al sistema inercial cada partícula atmosférica gira alrededor del eje Z con velocidad angular constante

$$\Omega = \frac{2\pi}{1 \text{ día}} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

En el sistema inercial la posición de cada partícula de aire es

$$\mathbf{R} = Z \hat{\mathbf{Z}} + R^\perp \hat{\mathbf{r}}(\theta), \quad \hat{\mathbf{r}}(\theta) \equiv \cos \Lambda(t) \hat{\mathbf{X}}_f + \sin \Lambda(t) \hat{\mathbf{Y}}_f$$

donde $\Lambda(t) = \Omega t + \Lambda_0$ es el ángulo de rotación del sistema XY alrededor del eje Z y

$$R^\perp = (X^2 + Y^2)^{1/2} = (X_f^2 + Y_f^2)^{1/2}.$$

es la proyección ortogonal de $\mathbf{R}$ sobre el plano ecuatorial. Derivando obtenemos la velocidad y aceleración

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \Omega r \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta), \quad \hat{\boldsymbol{\theta}}(\theta) \equiv \sin \Lambda(t) \hat{\mathbf{X}}_f + \cos \Lambda(t) \hat{\mathbf{Y}}_f, \\ \mathbf{A} &= -\Omega^2 R^\perp \hat{\mathbf{r}}(\theta). \end{aligned} \tag{3.16}$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton, la ecuación de movimiento de un volumen de aire ν constituido siempre por las mismas partículas de aire (también llamado *volumen material*) está dada por

$$M_\nu \mathbf{A}_c = \mathbf{F}^e$$

donde M_ν es la masa del volumen, $\mathbf{A}_c$ la aceleración de su centro de masa y $\mathbf{F}^e$ la resultante de las fuerzas externas al volumen. La masa está dada por

$$M_\nu = \int_\nu \rho d\nu$$

donde ρ es la densidad de masa atmosférica. Las fuerzas que actúan sobre el volumen material son: (i) La fuerza de presión

$$\mathbf{F}^e = \oint_{S_\nu} (-p) \hat{\mathbf{n}} dS_\nu = \int_\nu (-\nabla p) d\nu$$

donde $\mathbf{n}$ es el vector normal exterior a la superficie S_ν del volumen ν , p es la presión atmosférica, y usamos el teorema de la divergencia para reescribir la integral de superficie como una de volumen. (ii) La fuerza de gravedad

$$\mathbf{F}_g = M_\nu \mathbf{g}(\mathbf{R}_c),$$

siendo $\mathbf{R}_c$ el vector de posición del centro de masa del volumen material. Usando la expresión de M_v en términos de ρ obtenemos

$$\int_v \rho \mathbf{A}_c dv = \int_v [-\nabla p + \rho \mathbf{g}(\mathbf{R}_c)] dv .$$

Dado que el volumen material v es arbitrario, podemos hacer tender v a cero alrededor de una partícula arbitraria con vector de posición $\mathbf{R}$, con lo cual llegamos a la ecuación de movimiento para cada partícula de fluido

$$\rho \mathbf{A} = -\nabla p + \rho \mathbf{g}(\mathbf{R}) . \quad (3.17)$$

con $\mathbf{A}$ dada por (3.16). Reescribiendo $\mathbf{A}$ como sigue

$$\mathbf{A} = -\Omega^2 (X\hat{\mathbf{X}} + Y\hat{\mathbf{Y}}) = -\Omega^2 \nabla \frac{1}{2} (X^2 + Y^2) = \nabla \Phi_c$$

aparece el potencial

$$\Phi_c = -\frac{\Omega^2}{2} (X^2 + Y^2) .$$

Usando el potencial gravitacional

$$\mathbf{g} = -\nabla \Phi_g$$

la ecuación de movimiento (3.17) toma la forma

$$\nabla \Phi_c = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \Phi_g$$

de donde se obtiene la **ecuación hidrostática**

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p = \nabla \Phi \quad (3.18)$$

donde aparece el así llamado geopotencial

$$\Phi = \Phi_g + \Phi_c . \quad (3.19)$$

La ecuación hidrostática (3.18) tiene dos incógnitas ρ , p , y la ecuación de estado involucra a la temperatura T , por lo que (3.18) no puede integrarse directamente pero podemos obtener información útil como sigue. Aplicando el operador rotacional $\nabla \times$ a ambos lados de (3.18)

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla p \right) = \frac{d\rho^{-1}}{d\rho} \nabla \rho \times \nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \times \nabla p = \mathbf{0} ,$$

obtenemos

$$\nabla \rho \times \nabla p = \mathbf{0} .$$

Esta ecuación indica que las superficies de densidad constante (superficies isocóricas) y de presión constante (superficies isobáricas) tienen el mismo vector normal en cada punto por lo que ambas familias de iso-superficies coinciden; es decir, a cada valor de la presión p le corresponde un único valor de la densidad, por lo que existe una relación uno a uno entre ρ y p , a saber,

$$\rho = \rho(p) .$$

Un fluido cuya densidad es función sólo de la presión p se llama *barotrópico*. En nuestro caso podemos afirmar que una atmósfera en reposo con respecto a una tierra rotante es barotrópica. En términos de la función

$$P(p) = \int^p \frac{d\tilde{p}}{\rho(\tilde{p})}$$

tenemos $\nabla P = \frac{1}{\rho} \nabla p$ con lo cual la ecuación hidrostática (3.18) toma la forma

$$\nabla P(p) = -\nabla \Phi \quad (3.20)$$

Esto implica que las superficies de geopotencial constante coinciden con las iso-superficies de presión p , densidad ρ y, de acuerdo con la ecuación de estado $p = R_a T \rho$, de la temperatura T . La integración de (3.20) es inmediata

$$P[p(\mathbf{R})] + \Phi(\mathbf{R}) = \text{constante numérica.} \quad (3.21)$$

En este trabajo consideramos que la tierra es una esfera con radio r_e y masa M_e uniformemente distribuída por lo que el potencial gravitacional está dado por

$$\Phi_g = -g \frac{r_e^2}{r} \quad \text{con} \quad g \equiv \frac{GM_e}{r_e^2},$$

siendo G la constante de gravitación universal. El geopotencial Φ (3.19) puede simplificarse con el argumento siguiente. La masa de la atmósfera esta concentrada principalmente en la tropósfera con una altura media de 20 km, por lo que podemos considerar que la altura de la atmósfera puede llegar hasta 100 km. Comparando este valor con el radio terrestre promedio $r_e = 6.4 \times 10^3$ km, podemos decir que la distancia de una partícula de aire al centro de masa terrestre es r_e lo cual da

$$|\Phi_g| \sim g r_e = 6.4 \times 10^7 \text{ m}^2 \text{s}^{-2}.$$

Comparando con el potencial

$$|\Phi_c| = \frac{\Omega^2}{2} (X^2 + Y^2) \leq \frac{\Omega^2}{2} r_e^2 = 1.1 \times 10^5 \text{ m}^2 \text{s}^{-2}$$

vemos que Φ_c es despreciable con respecto a Φ_g por lo que usaremos la aproximación

$$\Phi = \Phi_g(r) = -g \frac{r_e^2}{r}.$$

De acuerdo con lo expuesto arriba, la presión, la densidad y la temperatura son funciones de r ,

$$p = p(r), \quad \rho = \rho(r), \quad T = T(r),$$

y las ecuaciones (3.20) y (3.21) toman la forma

$$\frac{dp}{dr} = -g \rho(r)$$

y

$$P[p(r)] + \Phi_g(r) = P[p(r_e)] + \Phi_g(r_e). \quad (3.22)$$

La simetría esférica de p , ρ , T , es importante por que implica que el índice de refracción atmosférico tiene simetría esférica $n(r)$ y, como vimos en el capítulo anterior, un rayo de luz está contenido en el plano definido por su posición y dirección iniciales.

La variable

$$z_s = r - r_e \quad (3.23)$$

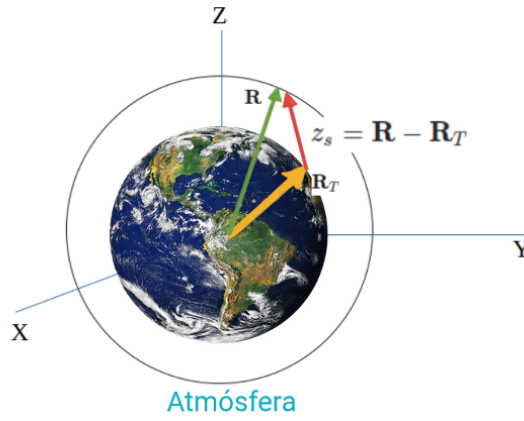


Figura 3.2: Modelo esférico terrestre.

es más adecuada para dar la posición de una partícula de aire respecto a un modelo esférico terrestre figura(3.2). En términos de z_s la ecuación hidrostática (3.20) toma la forma

$$\frac{1}{\rho(z_s)} \frac{dp}{dz_s} = -g \left(\frac{r_e}{r} \right)^2 = -g \left(\frac{r_e}{r_e + z_s} \right)^2 = -g \left(1 + \frac{z_s}{r_e} \right)^2 .$$

Considerando un valor máximo de orden $z_s \sim 100$ km, tenemos

$$\frac{z_s}{r_e} \sim \frac{10^2}{6.4 \times 10^3} = 0.016$$

por lo que podemos usar $1 + \frac{z_s}{r_e} \sim 1$ con buena aproximación, lo que nos lleva a la ecuación hidrostática

$$\frac{dp}{dz_s} = -g \rho(z_s) . \quad (3.24)$$

La forma más común de la ecuación hidrostática es

$$\frac{1}{\rho(z)} \frac{dp}{dz} = -g \quad (3.25)$$

donde z es la altura sobre un plano tangente a la tierra. Como se demuestra en [Nuñez], la ecuación (3.25) es válida cerca del origen del plano tangente y no es de interés en este trabajo por que da estados termodinámicos de la atmósfera sin simetría esférica.

Veamos dos casos donde la ecuación hidrostática (3.24) puede integrarse.

Atmósfera isotérmica

El modelo hidrostático [15] más simple es el de una atmósfera isotérmica con temperatura promedio $T_e = T(r_e) = 300$ °K. En este caso tenemos $\rho^{-1} = R_a T p^{-1}$,

$$P = \int R_a T_e p^{-1} dp = R_a T_e \ln p ,$$

y la ecuación (3.22) toma la forma

$$\frac{p(r)}{p_e} = \exp \left[\frac{g}{R_a T_e} r_e^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_e} \right) \right] = \exp \left[-\frac{z_s}{H_T} \frac{r_e}{r} \right] \quad (3.26)$$

con $p_e \equiv p(r_e)$, donde aparece la altura característica

$$H_T = \frac{R_a T_e}{g} = \frac{287 \text{ J/kg}^\circ\text{K} \times 288^\circ\text{K}}{9.8 \text{ ms}^{-2}} = 8.7 \text{ km} . \quad (3.27)$$

Considerando que la atmósfera puede alcanzar una altura hasta de $z_s \sim 100 \text{ km}$ tenemos

$$\frac{r_e}{r} = \frac{r_e}{z_s + r_e} = \left(1 + \frac{z_s}{r_e}\right)^{-1} \quad \text{con} \quad \frac{z_s}{r_e} \leq \frac{10^2}{6.4 \times 10^3} = 0.016$$

por lo que $r_e/r \sim 1$ es una buena aproximación y (3.26) se reduce a la así llamada fórmula barométrica

$$p = p_e \exp\left(-\frac{z_s}{H_T}\right) . \quad (3.28)$$

Atmósfera adiabática

La ecuación hidrostática y las relaciones termodinámicas permiten calcular el gradiente vertical de temperatura para una atmósfera adiabática como sigue. La primera ley (3.7), la ley de Joule (3.5) y (3.13) conducen a

$$\begin{aligned} c_v dT &= \frac{p}{\rho^2} d\rho = \frac{R_a T}{p} dp - R_a dT \\ (c_v + R_a) dT &= \frac{R_a T}{p} dp \\ \frac{dp}{dT} &= c_p \frac{p}{R_a T} . \end{aligned}$$

Usando la regla de la cadena en el lado derecho de la ecuación hidrostática (3.24) y la ecuación de estado en el izquierdo para reemplazar ρ por T y p

$$\frac{dp}{dz_s} = \frac{dT}{dz_s} \frac{dp}{dT} = \frac{dT}{dz_s} c_p \frac{p}{R_a T} = -g \frac{p}{R_a T}$$

obtenemos el gradiente vertical de temperatura

$$\frac{dT}{dz_s} = -\Gamma_a \quad (3.29)$$

donde

$$\Gamma_a \equiv \frac{g}{c_p} = \frac{9.81}{1004} = 0.00977 \frac{^\circ\text{K}}{\text{km}} .$$

Integrando con la condición de frontera $T(z_s = 0) = T_e = 300^\circ\text{K}$ obtenemos

$$T = T_e - \Gamma_a z_s = \Gamma_a (H_a - z_s) = T_e \left(1 - \frac{z_s}{H_a}\right)$$

En términos de la altura característica

$$H_a = \frac{T_e}{\Gamma_a} = \frac{T_e c_p}{g} = 30706 \text{ km} .$$

obtenemos

$$T = \Gamma_a (H_a - z_s) = T_e \left(1 - \frac{z_s}{H_a}\right)$$

lo que implica que una atmósfera hidrostática y adiabática tiene una altura finita H_a . Sustituyendo lo anterior en la ecuación hidrostática (3.24)

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dz_s} &= -g \frac{p}{R_a T} = -g \frac{p}{R_a \Gamma_a (H_a - z_s)} = -\frac{c_p}{R_a} \frac{p}{H_a - z_s} \\ d \ln p / p_c &= \frac{c_p}{R_e} \frac{d(1 - z_s / H_a)}{1 - z_s / H_a} = d \ln (1 - z_s / H_a)^{c_p / R_a}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde p_c es una constante de integración. La condición de frontera $p = p_e$ en $z_s = 0$ da $p_c = p_e$ y

$$p = p_e \left(1 - \frac{z_s}{H_a}\right)^{c_p / R_a}.$$

Finalmente, usando la ecuación de estado obtenemos

$$\rho = \rho_e \left(1 - \frac{z_s}{H_a}\right)^{c_v / R_a}$$

y la versión siguiente de las ecuaciones de Poisson (3.9)-(3.11)

$$p = p_e \left(\frac{T}{T_e}\right)^{c_p / R_a}, \quad \rho = \rho_e \left(\frac{T}{T_e}\right)^{c_v / R_a} = \rho_e \left(\frac{p}{p_e}\right)^{1/\gamma},$$

donde vemos que las constantes de integración p_c , ρ_c , T_c , en (3.9)-(3.11) están determinadas por valores promedio sobre la superficie de un modelo esférico terrestre.

Terminamos esta sección con el cálculo de la entropía. De acuerdo con (3.14) el gradiente vertical de entropía está dado por

$$\frac{ds}{dz_s} = \frac{c_p}{T} \frac{dT}{dz_s} - \frac{R_a}{p} \frac{dp}{dz_s},$$

sustituyendo los gradientes de temperatura (3.29) y presión (3.30)

$$\frac{ds}{dz_s} = \frac{c_p}{\Gamma_a (H_a - z_s)} (-\Gamma_a) - \frac{R_a}{p} \left(-\frac{c_p}{R_a} \frac{p}{H_a - z_s}\right) = 0,$$

obtenemos el resultado esperado: la entropía es constante en una atmósfera adiabática en equilibrio hidrostático $s(z_s) = s_e$ para $0 \leq z_s \leq H_a$. Usando este resultado en (3.15)

$$\frac{s - s_c}{c_p} = \ln \left(\frac{T}{T_c}\right) \left(\frac{p_c}{p}\right)^{R_a / c_p} = 0 \quad \text{para } 0 \leq z_s \leq H_a, \quad (3.31)$$

en particular para $z_s = 0$,

$$\ln \left(\frac{T_e}{T_c}\right) \left(\frac{p_c}{p_e}\right)^{R_a / c_p} = 0$$

por lo tanto $p_c = p_e$, $T_c = T_e$, como era de esperarse.

En meteorología se define la temperatura potencial

$$\theta = T \left(\frac{p_e = 1000 \text{ hPa}}{p}\right)^{R_a / c_p}$$

para cualesquiera valores de T y p . En el caso de una atmósfera hidrostática y adiabática la ecuación (3.31) equivale a

$$\frac{\theta(z_s)}{T_e} = 1$$

por lo que $\theta(z_s)$ es constante y la ecuación (3.15) toma la forma

$$\frac{\theta(z_s)}{T_e} = \exp \left(\frac{s - s_e}{c_p}\right)$$

por lo que θ es una variable equivalente a la entropía s , pero con la ventaja de que puede medirse con datos de redes de monitoreo atmosférico.

Capítulo 4

CÁLCULO DE RAYOS

En este capítulo planteamos las ecuaciones escalares de un rayo en diferentes sistemas de referencia fijos a la tierra. En la sección 4.1 damos una revisión de la importancia del cálculo de rayos para la simulación computacional de imágenes. En la sección 4.2 reportamos las expresiones necesarias para definir la posición del sol en un sistema de referencia inercial con origen en el centro de masa terrestre. En la sección 4.3 damos una deducción general de la ecuación vectorial de un rayo en un sistema cartesiano fijo a la tierra, y de las ecuaciones escalares correspondientes. Estas ecuaciones se escriben como un sistema de seis ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden para dar solución numérica, con el método de Runge-Kuta de cuarto orden en el Capítulo 6.

Para una tierra esférica con masa uniformemente distribuída, las variables termodinámicas de una atmósfera hidrostática y, consecuentemente, el índice de refracción tienen simetría esférica (Capítulo 3), por lo que un rayo se propaga en el plano definido por su posición y dirección inicial (Capítulo 1). En la sección 4.3 reducimos las ecuaciones escalares a una sola ecuación de segundo orden. Esta simplificación es importante para poder calcular el rayo que va de un punto a otro como un problema con condiciones de frontera, en lugar de un problema de valores iniciales, como normalmente se hace. En el capítulo 5 reportamos el método de shooting para resolver una ecuación de segundo orden con condiciones a la frontera.

En la sección 4.4 introducimos el sistema de referencia primario XYZ el cual es el sistema fijo a la tierra que se usa en ciencias de la tierra para estudiar fenómenos geofísicos. En este sistema se definen las coordenadas geográficas $\lambda\phi R$ que usamos para calcular el gradiente del índice de refracción ∇n . En la sección 4.5 introducimos un sistema local xyz asociado a la posición de un observador para calcular la posición del sol respecto al observador, y dar los cambios de coordenadas necesarios para calcular ∇n en dicho sistema. En la sección 4.6 introducimos un sistema local $xy_\theta z_\theta$ orientado con el sol para aprovechar la simetría cilíndrica de los rayos del sol que llegan a un observador y calcular dichos rayos resolviendo la ecuación diferencial de segundo orden descrita en la sección 4.3.1 con condiciones a la frontera.

4.1. Introducción al Ray Tracing

Proceso Visual

Cuando miramos un objeto, hay una serie de procesos antes de poder verlo realmente. Es precisamente por que, cuando una fuente de radiación (luz) interactúa con éstos, absorben, emiten y reflejan radiación. Parte de esta radiación que es reflejada se propaga en todas la direcciones, cuando llega a nuestro ojo es absorbida y viaja a través de nuestra pupila que actúa como un punto focal, a partir de aquí la radiación (luz) se proyecta en nuestra retina haciendo que nuestras funciones nerviosas transmitan información a nuestro cerebro para que interprete estas señales y las traduzca en una imagen coherente ver figura (4.1) [30].

Modelo de Visión

Podemos imaginarnos modelando este proceso exacto en una computadora. Elegiríamos un punto arbitrario como nuestro punto focal. También necesitamos un plano de proyección, que podamos colocar delante del punto focal en lugar de atrás. Podemos subdividir el plano en los píxeles de una pantalla de computadora. Luego generamos rayos de luz de una fuente y los enviamos a rebotar en la escena. Cada vez que una onda de luz viaja a través de la pantalla y al punto focal, coloreamos el píxel por el que pasa ver figura (4.2).

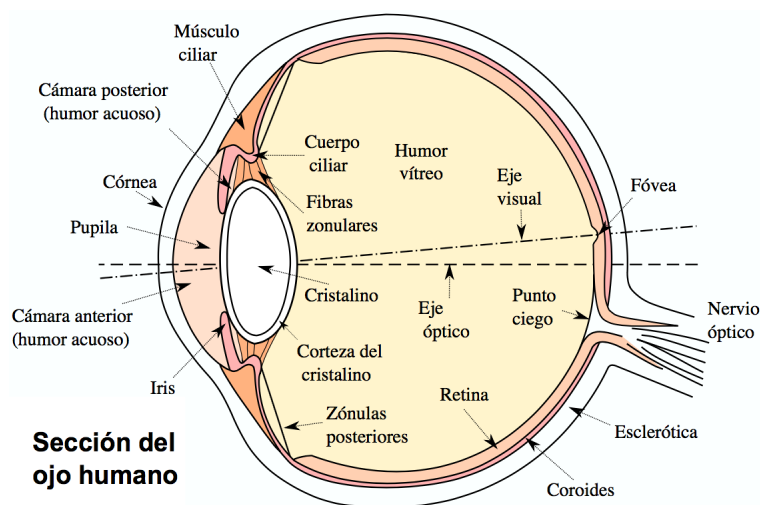


Figura 4.1: Fisiología del ojo humano.

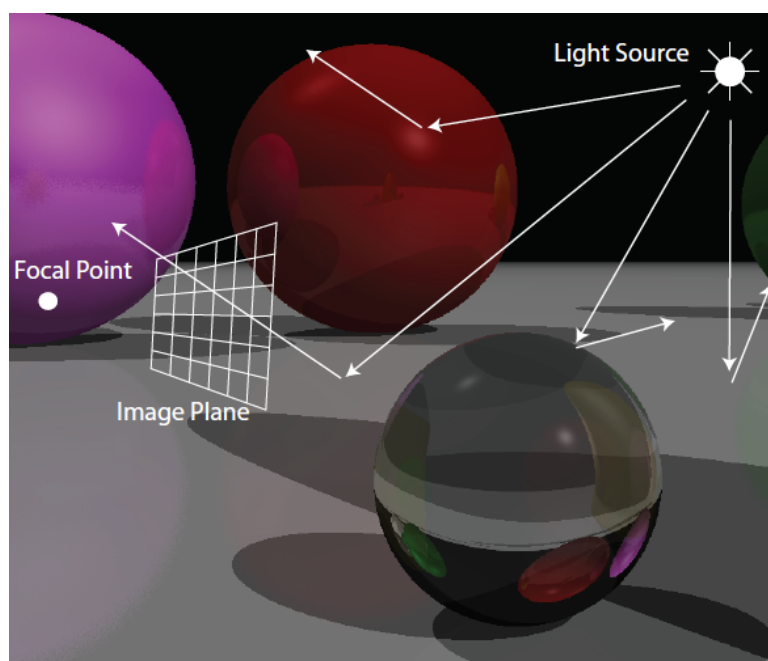


Figura 4.2: Modelando una escena real en una computadora [5].

Ray tracing ó trazado de rayos

El Ray Tracing, es una técnica para la síntesis de imágenes: crear una imagen en 2-D de un mundo en 3-D, se basa en lanzar una serie de rayos a partir de una fuente de luz y rastrearlos al momento que son interceptados por algún objeto en una escena. Por lo tanto crea imágenes que son resultado de reflexiones y refracciones que dependen de la superficie de los cuerpos que se encuentran en el ambiente de la escena ver figura (4.3).

El proceso básico se basa en trazar un rayo a través de cada uno de los píxeles del plano de proyección, tomando como origen los rayos y la posición del observador. Y para cada uno de estos rayos trazados se

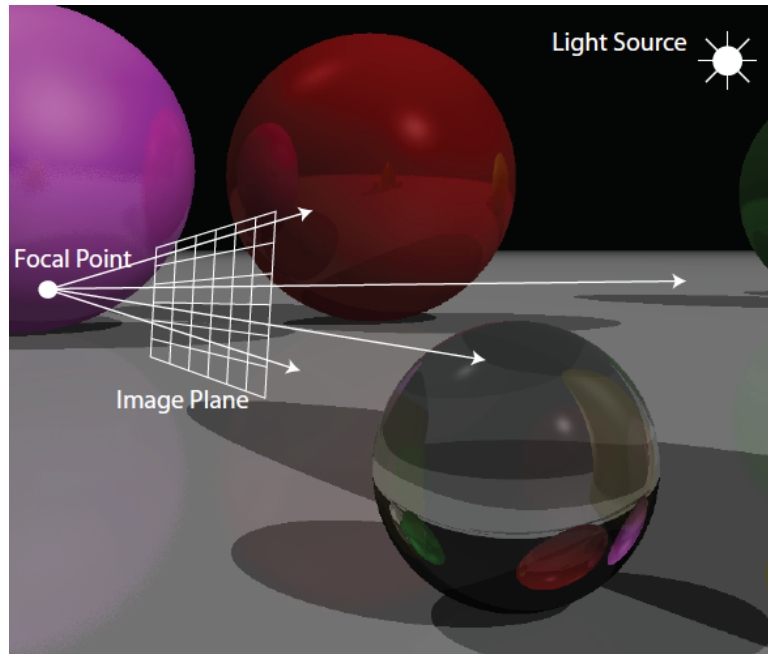


Figura 4.3: El trazado de rayos proyecta rayos desde el punto focal a través del plano de la imagen y en la escena [5]

análiza si se produce una intersección con alguno de los objetos de la escena. Si no se encuentra ningún objeto se termina el proceso para ese píxel y se le asigna un color de fondo por defecto. Los rayos se tratan como líneas rectas (índice de refracción constante)

Cuando el rayo interactúa con el objeto, examinamos el punto de colisión para determinar qué tipo de luz podría reflejarse desde ese punto y luego a lo largo del rayo incidente en la escena. Esto reduce exponencialmente el trabajo computacional, ya que ya no estamos generando rayos extraños que no contribuyen en nada a la imagen final.

El algoritmo que se emplea es el siguiente: Para cada píxel en el plano de la imagen, trace un rayo desde el punto focal a través de ese píxel hasta el plano de la imagen. Si ese rayo cruza cualquier objeto en la escena, encuentra el punto de intersección más cercano. Se recopilan datos sobre la luz que podría reflejarse desde el punto de intersección hacia el plano focal para usar estos datos para colorear el píxel.

4.2. Posición del sol en un sistema de referencia inercial

El problema del movimiento del sistema Sol-Tierra, conocido como problema de Kepler o problema de dos cuerpos, es uno de los problemas que motivó el desarrollo de los principios de la mecánica clásica [13],[31],[32],[14]. En un sistema de referencia inercial, este problema consiste en resolver las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \mathbf{r}_1}{dt^2} &= \mathbf{F}_{21}(r) \\ m_2 \frac{d^2 \mathbf{r}_2}{dt^2} &= \mathbf{F}_{12}(r) \end{aligned}$$

donde $r = \|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\|$ y $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$, $\mathbf{F}_{ij}$ es la fuerza de la partícula puntual con masa m_i sobre la partícula con masa m_j . En términos de las variables

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}_{cm} = (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) / (m_1 + m_2)$$

las ecuaciones se desacoplan como sigue

$$\begin{aligned}\frac{d^2 \mathbf{r}_{cm}}{dt^2} &= \mathbf{0}, \\ \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} &= -\frac{1}{\mu} F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \mu^{-1} = 1/m_1 + 1/m_2.\end{aligned}$$

La ecuación de la trayectoria de una partícula con masa μ y posición $\mathbf{r}$ para $F(r)$ proporcional a $1/r^2$ es

$$\frac{\alpha}{R} = 1 + \epsilon \cos \theta.$$

donde α y ϵ dependen de los parámetros del sistema y ϵ está determinada por la energía mecánica del sistema. Esta ecuación no es útil cuando lo que deseamos es conocer la posición del sol con respecto a un observador en la superficie terrestre [6],[23]. En esta sección abordamos este problema.

Para precisar la posición del sol con respecto a un observador sobre un modelo esférico terrestre usamos un sistema de referencia cartesiano inercial $X_I Y_I Z_I$ con origen en el centro de masa terrestre de un modelo esférico terrestre con masa uniformemente distribuida figura (4.4). El plano $X_I Y_I$ y el eje Z_I coinciden con el plano ecuatorial y el eje de rotación terrestre, respectivamente. Este sistema puede considerarse inercial ya que estamos interesados en el cálculo de la refracción de un rayo del sol que llega a la superficie terrestre.

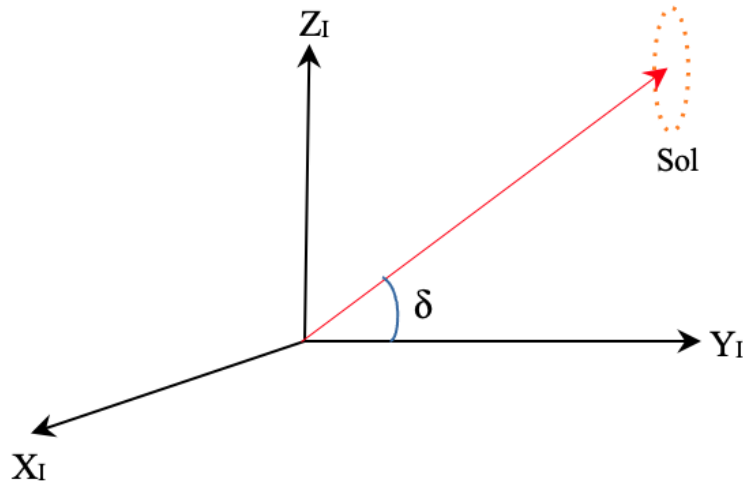


Figura 4.4: Posición del Sol en el sistema X_I, Y_I, Z_I

El tiempo que tarda dicho rayo en atravesar la atmósfera es despreciable por lo que podemos ignorar la traslación de la tierra alrededor del sol para calcular el efecto de la refracción atmosférica. Así, los vectores base asociados $\hat{\mathbf{X}}_I, \hat{\mathbf{Y}}_I, \hat{\mathbf{Z}}_I$, no cambian con el tiempo,

$$\frac{d}{dt} \hat{\mathbf{X}}_I = \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{Y}}_I = \frac{d}{dt} \hat{\mathbf{Z}}_I = \mathbf{0}.$$

La orientación del sistema $X_I Y_I Z_I$ en un día dado es tal que, el centro del sol pertenece al plano $Y_I Z_I$ y está sobre la parte positiva del eje Y_I , de manera que el vector de posición del centro del sol está dado por

$$\mathbf{R}_S = R_S \cos \delta \hat{\mathbf{Y}}_I + R_S \sin \delta \hat{\mathbf{Z}}_I$$

donde δ es la **declinación solar** [27],[33], la cual está dada por

$$\delta = 0.006918 - 0.399912 \cos \Gamma + 0.070257 \sin \Gamma - 0.006758 \cos 2\Gamma + 0.000907 \sin 2\Gamma,$$

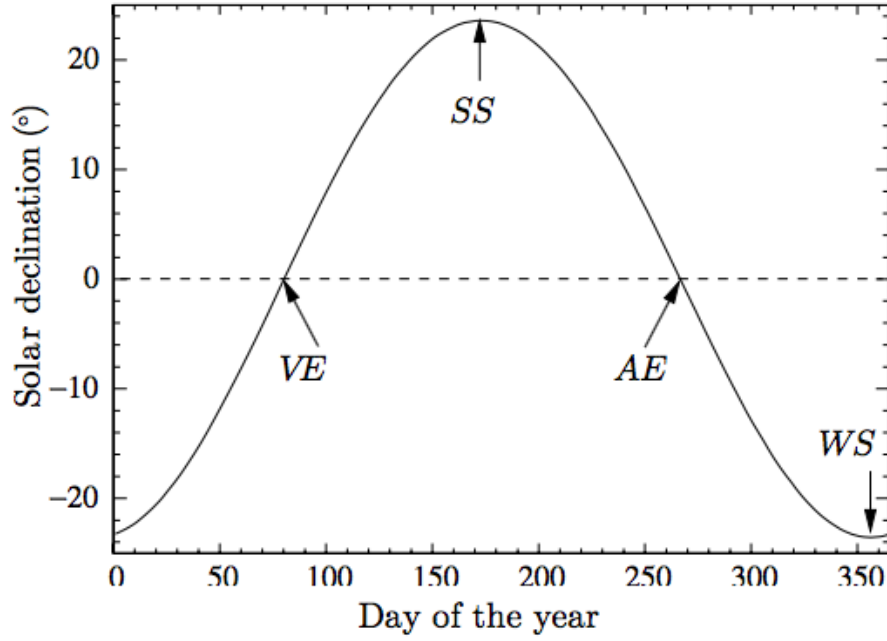


Figura 4.5: Variación de la declinación solar δ como función de J . [6]

con

$$\Gamma \equiv \frac{2\pi}{365} (J - 1)$$

y J es el número del día de interés en el calendario Juliano para años no bisiestos [34]. La declinación solar esta acotada $-23^{\circ}27' \leq \delta \leq 23^{\circ}27'$ donde $\delta = -23^{\circ}27'$ y $\delta = 23^{\circ}27'$ [5],[35], corresponden a los solsticios de invierno (22 de diciembre) y verano (21 de junio) para el hemisferio norte, respectivamente ver figura (4.5). La distancia R_S entre los centros de masa terrestre y solar está dada por

$$\left(\frac{a}{R_S}\right)^2 = f_0 + f_1 \cos \Gamma + f_2 \sin \Gamma + f_3 \cos 2\Gamma + f_4 \sin 2\Gamma$$

4.3. Ecuaciones escalares de un rayo en un sistema fijo a la tierra

Consideremos un sistema de referencia cartesiano y^i fijo a la tierra con origen en un punto con posición $\mathbf{R}_c$ y vectores base $\hat{\mathbf{y}}_i$ que obedecen la regla de la mano derecha $\hat{\mathbf{y}}_1 \times \hat{\mathbf{y}}_2 = \hat{\mathbf{y}}_3$. Esta relación equivale a la ecuación siguiente que da lugar a la definición del símbolo de Levi-Civita

$$\varepsilon_{ijk} \equiv \hat{\mathbf{y}}_i \cdot \hat{\mathbf{y}}_j \times \hat{\mathbf{y}}_k = \begin{cases} 1 & \text{para } ijk = 123, 312, 231, \\ -1 & \text{para } ijk = 132, 321, 213, \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El sistema inercial X_I^j también es un sistema derecho. La relación entre los vectores base

$$\hat{\mathbf{y}}_i = R_{ij} \hat{\mathbf{X}}_I^j \quad (4.1)$$

esta dada en términos de una matriz $R = \{R_{ij}\}$ que es ortogonal,

$$R^T R = R R^T = I \quad \text{ó} \quad (R R^T)_{ij} = R_{ik} R_{jk} = \delta_{ij}, \quad (4.2)$$

y tiene determinante $\det(R) = \varepsilon_{123} = 1$, por lo que R es una matriz de rotación del tiempo t ya que $\hat{\mathbf{y}}_i$ rota junto con la tierra. Usando (4.1) obtenemos la relación entre las componentes de un vector arbitrario

$$\mathbf{b} = b_i \hat{\mathbf{y}}_i = b_I^j \hat{\mathbf{X}}_I^j,$$

a saber,

$$b_i = R_{ij} b_I^j. \quad (4.3)$$

Para ver cómo se transforma $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ consideremos $\mathbf{c} = c^m \hat{\mathbf{y}}_m$, $\mathbf{a} = a^j \hat{\mathbf{y}}_j$, $\mathbf{b} = b^k \hat{\mathbf{y}}_k$. Esto da $c^m \hat{\mathbf{y}}_m = a^j b^k \hat{\mathbf{y}}_j \times \hat{\mathbf{y}}_k$, multiplicando por $\hat{\mathbf{y}}_i \cdot$ obtenemos $c^i = a^j b^k \hat{\mathbf{y}}_i \cdot \hat{\mathbf{y}}_j \times \hat{\mathbf{y}}_k$ donde aparece la definición de ε_{ijk} y el resultado deseado

$$c^i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k$$

el cual puede escribirse en la forma usual

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{y}}_1 & \hat{\mathbf{y}}_2 & \hat{\mathbf{y}}_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}.$$

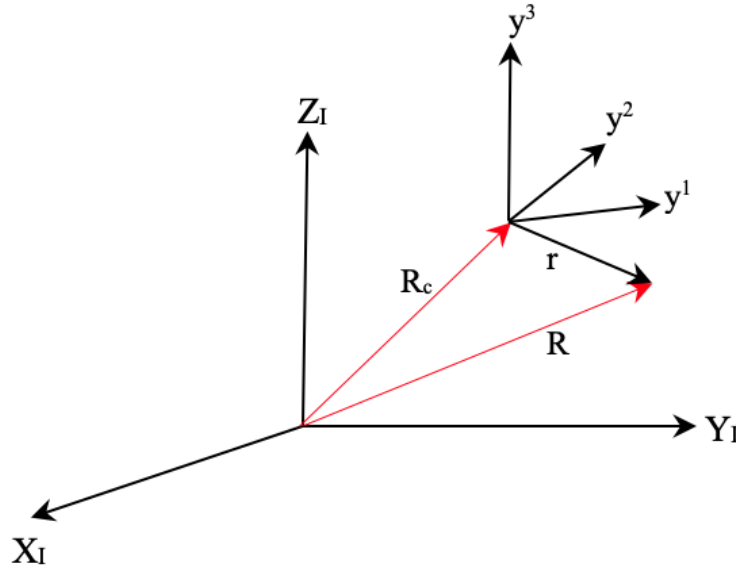


Figura 4.6: Sistema de referencia cartesiano y^i fijo a la tierra con origen en un punto con posición $\mathbf{R}_c$ y vectores base $\hat{\mathbf{y}}_i$

De acuerdo con la figura (4.6), la relación entre los vectores de posición $\mathbf{R}$ y $\mathbf{r}$ de un mismo punto en el espacio es

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{R}_c.$$

Usando

$$\mathbf{R} = X_I^j \hat{\mathbf{X}}_I^j, \quad \mathbf{r} = y^i \hat{\mathbf{y}}_i, \quad \mathbf{R} = y_c^j \hat{\mathbf{y}}_j = X_{Ic}^j \hat{\mathbf{X}}_I^j$$

y (4.3) obtenemos las ecuaciones de transformación

$$y^i + y_c^i = R_{ij} X_I^j \quad \text{ó} \quad y^i = R_{ij} (X_I^j - X_{Ic}^j). \quad (4.4)$$

El operador gradiente inicialmente se define en el sistema inercial como

$$\nabla = \hat{\mathbf{X}}_I^j \frac{\partial}{\partial X_I^j},$$

su forma en el sistema y^i se obtiene con la regla de la cadena, las ecuaciones de transformación (4.4),

$$\frac{\partial}{\partial X_I^j} = \frac{\partial y^i}{\partial X_I^j} \frac{\partial}{\partial y^i} = R_{ij} \frac{\partial}{\partial y^i},$$

y el cambio de base $\hat{\mathbf{X}}_I^j = R_{kj} \hat{\mathbf{y}}_k$. Esto da

$$\nabla = (R_{kj} \hat{\mathbf{y}}_k) \left(R_{ij} \frac{\partial}{\partial y^i} \right) = \hat{\mathbf{y}}_k (R_{kj} R_{ij}) \frac{\partial}{\partial y^i} = \hat{\mathbf{y}}_k \delta_{ki} \frac{\partial}{\partial y^i} = \hat{\mathbf{y}}_i \frac{\partial}{\partial y^i}$$

donde usamos (4.2), es decir, la forma de ∇ no cambia cuando pasamos de un sistema cartesiano a otro

$$\nabla = \hat{\mathbf{y}}_i \frac{\partial}{\partial y^i}. \quad (4.5)$$

Con lo anterior estamos en posición de obtener la ecuación vectorial de un rayo en un sistema y^i fijo a la tierra y las correspondientes ecuaciones escalares. Comencemos con la ecuación en el SRI en un instante arbitrario t

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{R}}{ds} \right) = \nabla n. \quad (4.6)$$

Usando

$$\mathbf{R}(s) = \mathbf{r}(s) + \mathbf{R}_c = (y^i(s) + y_c^i) \hat{\mathbf{y}}_i(t)$$

obtenemos

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{R}}{ds} \right) = \frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right)$$

y, por lo tanto,

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n \quad (4.7)$$

con ∇ dado por (4.5). Dado que la base $\hat{\mathbf{y}}_i$ no depende de s , podemos prescindir de ella para obtener las ecuaciones escalares de un rayo

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dy^i}{ds} \right) = \frac{\partial n}{\partial y^i}. \quad (4.8)$$

Este sistema de ecuaciones de segundo orden lo sustituiremos por un sistema de ecuaciones de primer orden para su solución numérica como sigue. El uso de la longitud de arco s como parámetro implica que el vector tangente al rayo

$$\hat{\mathbf{s}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dy^i}{ds} \hat{\mathbf{y}}_i \quad (4.9)$$

es unitario

$$\|\hat{\mathbf{s}}\| = 1. \quad (4.10)$$

Las componentes

$$\alpha^i(s) \equiv \frac{dy^i}{ds} \quad (4.11)$$

son los cosenos directores de $\hat{\mathbf{s}}$. Desarrollando el lado izquierdo de (4.8)

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{dy^i}{ds} \right) = n \frac{d\alpha^i}{ds} + \alpha^i \frac{dn}{ds}$$

Como vimos en capítulos previos n es una función explícita de la temperatura T , la presión p , y la humedad q , que a su vez dependen de las coordenadas y^i de cada punto en el espacio, por lo que usamos la regla de la cadena para calcular dn/ds

$$\frac{dn}{ds} = \frac{dy^j}{ds} \frac{\partial n}{\partial y^j} = \alpha^j \frac{\partial n}{\partial y^j}.$$

Así llegamos al sistema de seis ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned}\frac{dy^i}{ds} &= \alpha^i \\ \frac{d\alpha^i}{ds} &= \left(\frac{\partial n}{\partial y^i} - \alpha^j \frac{\partial n}{\partial y^j} \alpha^i \right) \frac{1}{n}.\end{aligned}\quad (4.12)$$

Ecuación de un rayo en un plano xy para una tierra esférica

Para una tierra esférica el índice de refracción tiene simetría esférica $n(r)$ y, como vimos el capítulo 1, un rayo se mueve en el plano definido por su posición y la dirección iniciales

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}|_{s=0}, \quad \hat{\mathbf{s}}_0 = \left. \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right|_{s=0}.\quad (4.13)$$

En el plano definido $\mathbf{R}_0$ y $\hat{\mathbf{s}}_0$ (que suponemos no son paralelos) definimos un sistema cartesiano xy . En este sistema las ecuaciones (4.12) se reducen a

$$\ddot{x} = q_x - \dot{x}\dot{q}, \quad \ddot{y} = q_y - \dot{y}\dot{q}, \quad \text{con } q \equiv \ln[n(x, y)], \quad (4.14)$$

donde usamos la notación $\dot{x} = dx/ds$, $\ddot{x} = d^2x/ds^2$, $\dot{q} = \dot{x}q_x + \dot{y}q_y$, $q_x = \partial_x q$, $q_y = \partial_y q$. Reemplazaremos la longitud de arco s por x como parámetro del rayo para reducir la solución del sistema (4.14) a una sola ecuación de segundo orden. Aplicando la regla de la cadena a la identidad $f(s) \equiv \tilde{f}[x(s)]$ obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}f[x(s)] &= \dot{x}\frac{d\tilde{f}}{dx} \\ \frac{d}{ds}\frac{d\tilde{f}}{dx} &= \frac{d}{ds}\left[\dot{x}\frac{d\tilde{f}}{dx}\right] = \ddot{x}\frac{d\tilde{f}}{dx} + \dot{x}^2\frac{d^2\tilde{f}}{dx^2} \quad \text{ó} \quad \ddot{f} = \ddot{x}\tilde{f}' + \dot{x}^2\tilde{f}''\end{aligned}$$

donde $\tilde{f}' \equiv d\tilde{f}/dx$, $\tilde{f}'' \equiv d^2\tilde{f}/dx^2$. Para y tenemos $\dot{y} = \dot{x}y'$, $\ddot{y} = \dot{x}^2y'' + \ddot{x}y'$. Sustituyendo $\dot{y} = \dot{x}y'$ en $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$ [ec. (4.10)], obtenemos

$$\dot{x}^2 = \left[1 + (y')^2\right]^{-1} \quad \text{sólo como función de } x.$$

Apliquemos lo anterior a la ecuación para $\ddot{y}$ (4.14)

$$\begin{aligned}\dot{x}^2 y'' + (q_x - \dot{x}\dot{q}) y' &= q_y - \dot{y}\dot{q} \quad \text{usando } \ddot{x} = q_x - \dot{x}\dot{q}, \\ \dot{x}^2 y'' + q_x y' - \dot{y}\dot{q} &= q_y - \dot{y}\dot{q} \quad \text{usando } \dot{y} = \dot{x}y', \\ \dot{x}^2 y'' &= q_y - q_x y' .\end{aligned}$$

Así llegamos a la ecuación deseada

$$y'' = \left[1 + (y')^2\right] [q_y - y'q_x] \quad \text{donde } q = \ln[n(x, y)]. \quad (4.15)$$

Desde el punto de vista numérico la ecuación (4.15) es más fácil resolver que el sistema de seis ecuaciones (4.12). La ecuación (4.15) es particularmente útil para obtener la imagen del sol que llega a un observador como un problema de condiciones a la frontera. En el capítulo siguiente reportamos el método de disparo para resolver (4.15) con condiciones a la frontera y el capítulo 6 reportamos los resultados.

4.4. Sistema de referencia primario y coordenadas geográficas

Para precisar la posición del sol con respecto a un observador sobre un modelo esférico terrestre usaremos el Sistema de Referencia Primario (SP) el cual es un sistema cartesiano fijo a la tierra $X = X^1, Y = X^2, Z = X^3$. Los sistemas primario X^i e inercial X_I^j tiene su origen en el centro de masa terrestre, los planos $X_I Y_I$ y XY coinciden con el plano ecuatorial y el eje $Z_I = Z$ coincide con el eje de rotación terrestre figura (4.7). Los ejes X y Y giran alrededor del eje $Z_I = Z$ con velocidad angular

$$\Omega = 2\pi/1\text{día} = 7.27 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}.$$

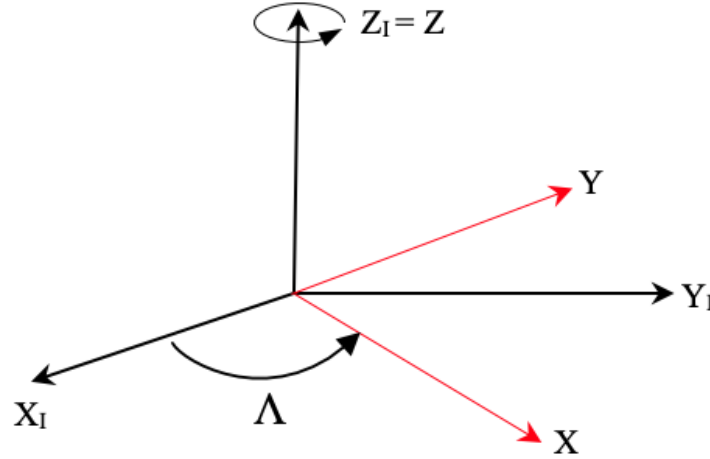


Figura 4.7: Sistema de Referencia Primario e inercial con origen en el centro de masa terrestre fijo a la tierra.

Sea $\hat{\mathbf{X}} = \hat{\mathbf{X}}^1, \hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{X}}^2, \hat{\mathbf{Z}} = \hat{\mathbf{X}}^3$, la base del sistema primario. La relación entre bases

$$\hat{\mathbf{X}}^i = R_{ij}^{(SP)} \hat{\mathbf{X}}_I^j \quad (4.16)$$

está dada por los elementos $R_{ij}^{(SP)}$ de la matriz

$$R^{(SP)} = \begin{pmatrix} \cos \Lambda^{(SP)} & \sin \Lambda^{(SP)} & 0 \\ -\sin \Lambda^{(SP)} & \cos \Lambda^{(SP)} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

y

$$\Lambda^{(SP)} = \Omega t + \Lambda_0 \quad (4.18)$$

es el ángulo que va del eje positivo X_I al eje positivo X , Λ_0 es una constante determinada por la posición del sistema primario respecto al inercial en $t = 0$. De acuerdo con la identidad

$$\mathbf{R} = X^i \hat{\mathbf{X}}^i = X_I^j \hat{\mathbf{X}}_I^j.$$

la relación entre las coordenadas de un punto en los sistemas inercial y primario es

$$X^i = R_{ij}^{(SP)} X_I^j. \quad (4.19)$$

Para calcular las componentes de ∇n en el sistema primario X^i usamos el sistema de *coordenadas geográficas* λ (longitud), ϕ (latitud), R , dadas por las ecuaciones

$$X = R \cos \phi \cos \lambda, \quad Y = R \cos \phi \sin \lambda, \quad Z = R \sin \phi. \quad (4.20)$$

En el sistema de referencia inercial X_I^i tenemos básicamente las mismas coordenadas geográficas

$$X_I = R \cos \phi \cos \Lambda, \quad Y_I = R \cos \phi \sin \Lambda, \quad Z_I = R \sin \phi. \quad (4.21)$$

La relación entre las longitudes λ y Λ es

$$\Lambda = \lambda + \Lambda^{(SP)}(t). \quad (4.22)$$

Usando el vector de posición de un punto con coordenadas λ, ϕ, R ,

$$\mathbf{R} = R [\cos \phi (\cos \lambda \hat{\mathbf{X}} + \sin \lambda \hat{\mathbf{Y}}) + \sin \phi \hat{\mathbf{Z}}],$$

obtenemos la base covariante τ_i asociada a un dicho punto

$$\tau_\lambda = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \lambda}, \quad \tau_\phi = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi}, \quad \tau_r = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial R}. \quad (4.23)$$

Dividiendo entre los factores métricos

$$h_\lambda \equiv \|\tau_\lambda\| = R \cos \phi, \quad h_\phi \equiv \|\tau_\phi\| = R, \quad h_r \equiv \|\tau_r\| = 1. \quad (4.24)$$

obtenemos la base ortonormal

$$\hat{\lambda} = \frac{\tau_\lambda}{h_\lambda}, \quad \hat{\phi} = \frac{\tau_\phi}{h_\phi}, \quad \hat{\mathbf{r}} = \tau_r = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{X^i}{R} \hat{\mathbf{X}}_i. \quad (4.25)$$

La relación entre bases

$$\begin{pmatrix} \hat{\lambda} \\ \hat{\phi} \\ \hat{\mathbf{r}} \end{pmatrix} = \mathbb{R}^{(CG)}(\lambda, \phi) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{X}} \\ \hat{\mathbf{Y}} \\ \hat{\mathbf{Z}} \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

está dada por la matriz de rotación

$$\mathbb{R}^{(CG)}(\lambda, \phi) = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \phi \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda & \cos \phi \\ \cos \phi \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda & \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Para calcular ∇ en el sistema $\lambda\phi r$ usamos la notación $\lambda = s^1, \phi = s^2, R = s^3$. Usando la regla de la cadena obtenemos

$$\nabla = \hat{\mathbf{X}}^i \frac{\partial}{\partial X^i} = \hat{\mathbf{X}}^i \frac{\partial s^j}{\partial X^i} \frac{\partial}{\partial s^j} = \eta^j \frac{\partial}{\partial s^j} \quad (4.28)$$

donde aparece la definición de la base covariante asociada η^j a las coordenadas geográficas λ, ϕ, R ,

$$\eta^j = \nabla s^j = \hat{\mathbf{X}}^i \frac{\partial s^j}{\partial X^i}.$$

Esta base es recíproca de la base covariante: $\tau_k \cdot \eta^j = \delta_{ik}$. En efecto, tenemos

$$\tau_k \cdot \eta^j = \left(\hat{\mathbf{X}}^m \frac{\partial X^m}{\partial s^k} \right) \cdot \left(\hat{\mathbf{X}}^i \frac{\partial s^j}{\partial X^i} \right) = \frac{\partial X^m}{\partial s^k} \frac{\partial s^j}{\partial X^m} = \frac{\partial s^j}{\partial s^k} = \delta_{ik}.$$

Usemos la reciprocidad para obtener η^j en la base $\hat{\mathbf{s}}^k$. Como $\hat{\mathbf{s}}^i$ es una base existen coeficientes b_i^j tales que $\eta^j = b_i^j \hat{\mathbf{s}}^i$. Multiplicando por $\tau_k \cdot$

$$\tau_k \cdot \eta^j = \tau_k \cdot b_i^j \hat{\mathbf{s}}^i = b_i^j \left(\tau_k \cdot \hat{\mathbf{s}}^i \right) = b_i^j h_k \delta_{ki} = b_k^j h_k = \delta_{ik},$$

por lo tanto $b_k^j = \delta_{ik} / h_k$ y

$$\eta^k = \frac{\hat{\mathbf{s}}^k}{h_k} \quad (\text{sin sumar en } k).$$

Sustituyendo en (4.28) obtenemos

$$\nabla = \frac{\hat{\mathbf{s}}^k}{h_k} \frac{\partial}{\partial s^k} = \frac{\hat{\lambda}}{h_\lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\hat{\phi}}{h_\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} + \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial R} \quad \text{con } \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{X^i}{R} \hat{\mathbf{X}}_i. \quad (4.29)$$

Cálculo de ∇n para una tierra esférica

En el capítulo 3 vimos que la temperatura, la presión y la densidad de una atmósfera en reposo con respecto a nuestro modelo esférico terrestre están dados por la altura respecto a la tierra $z_s = R - R_e$, $R = \|\mathbf{R}\|$, $T = T(z_s)$, $p = p(z_s)$, los cuales, a su vez, dan el índice de refracción [17]

$$n = 1 + a \frac{p}{T} \left[1 + 0.8335 \left(1 + \frac{5748}{T} \right) q \right] \quad \text{con } a = 7.7 \times 10^{-5} \frac{^\circ\text{K}}{\text{mb}}. \quad (4.30)$$

En este trabajo consideramos una atmósfera seca: $q = 0$. Usando ∇ (4.29) y la altura respecto a la esfera terrestre $z_s = R - R_e$ (R_e es el radio terrestre) obtenemos

$$\nabla n = \hat{\mathbf{r}} \frac{dn}{dz_s} = \hat{\mathbf{X}}_i \frac{X^i}{R} \frac{dn}{dz_s}$$

donde

$$\frac{dn}{dz_s} = \frac{dT}{dz_s} \frac{\partial n}{\partial T} + \frac{dp}{dz_s} \frac{\partial n}{\partial p} = \frac{a}{T} \left[-\frac{dT}{dz_s} \frac{p}{T} + \frac{dp}{dz_s} \right].$$

La ecuación hidrostática (3.24)

$$\frac{dp}{dz_s} = -g\rho$$

y la ecuación de estado $p = \mathcal{R}_a T \rho$ conducen a la expresión

$$\frac{dn}{dz_s} = -\frac{ap}{T^2} \left[\frac{dT}{dz_s} + \frac{g}{\mathcal{R}_a} \right] \quad (4.31)$$

que usaremos para calcular ∇n en el sistema de referencia primario

$$\frac{\partial n}{\partial X^j} = \frac{X^i}{R} \frac{dn}{dz_s}. \quad (4.32)$$

Para una atmósfera isotérmica tenemos [ecs. (3.28), (3.29)]

$$\frac{dn}{dz_s} = -\frac{g a p}{\mathcal{R}_a T^2} e^{-z_s/H_T}.$$

Para una atmósfera adiabática las ecuaciones (3.8), (3.28), (3.29), dan

$$\frac{dT}{dz_s} + \frac{g}{\mathcal{R}_a} = -\frac{g}{c_p} + \frac{g}{\mathcal{R}_a} = \frac{g}{\mathcal{R}_a c_p} (c_p - \mathcal{R}_a) = \frac{g}{\mathcal{R}_a} \frac{c_v}{c_p} = \gamma \frac{g}{\mathcal{R}_a}, \quad \gamma \equiv \frac{c_p}{c_v},$$

por lo tanto

$$\frac{dn}{dz_s} = -\gamma \frac{g a p}{\mathcal{R}_a T^2}$$

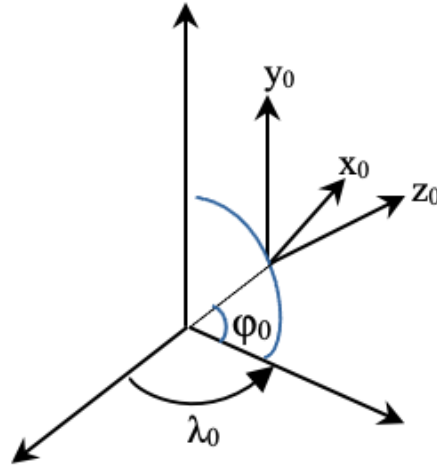
con

$$T = T_e \left(1 - \frac{z_s}{H_a} \right), \quad p = p_e \left(1 - \frac{z_s}{H_a} \right)^{c_p/\mathcal{R}_a}, \quad H_a = \frac{T_e c_p}{g} = 29.5 \text{ Km}$$

4.5. Sistema local xyz asociado a un observador terrestre

En esta sección y la siguiente introducimos sistemas locales asociados a un observador para calcular los rayos del sol que llegan a un observador con coordenadas geográficas λ_o, ϕ_o, r_e . Consideremos un sistema xyz con origen en la posición de un observador y ejes orientados con los vectores base

$$\hat{\mathbf{x}}_o = \hat{\mathbf{x}}_o^1 = \hat{\lambda}_o(\lambda_o, \phi_o), \quad \hat{\mathbf{y}}_o = \hat{\mathbf{x}}_o^2 = \hat{\phi}_o(\lambda_o, \phi_o), \quad \hat{\mathbf{z}}_o = \hat{\mathbf{x}}_o^3 = \hat{\mathbf{r}}_o(\lambda_o, \phi_o), \quad (4.33)$$

Figura 4.8: Sistema local xyz asociado a un observador terrestre.

$\hat{\mathbf{x}}_o$ y $\hat{\mathbf{y}}_o$ están dirigidos hacia el este y norte, respectivamente, para el hemisferio norte y $\hat{\mathbf{z}}_o$ es ortogonal a la esfera terrestre figura (4.8). La relación con el sistema primario es [ec. (4.26), (4.27)]

$$\hat{\mathbf{x}}_o = -\sin \lambda_o \hat{\mathbf{X}} + \cos \lambda_o \hat{\mathbf{Y}} \quad (4.34)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_o = -\sin \phi_o (\cos \lambda_o \hat{\mathbf{X}} + \sin \lambda_o \hat{\mathbf{Y}}) + \cos \phi_o \hat{\mathbf{Z}}$$

$$\hat{\mathbf{z}}_o = \cos \phi_o (\cos \lambda_o \hat{\mathbf{X}} + \sin \lambda_o \hat{\mathbf{Y}}) + \sin \phi_o \hat{\mathbf{Z}}.$$

Los cambios de base (4.16), (4.34), dan las relaciones con los vectores base de los sistemas primario e inercial

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_o^i &= R_{ij}^{(CG)}(\lambda_o, \phi_o) \hat{\mathbf{X}}^j \\ &= R_{ij}^{(CG)}(\lambda_o, \phi_o) R_{jk}^{(SP)}(t) \hat{\mathbf{X}}_I^k. \end{aligned} \quad (4.35)$$

El vector de posición del observador respecto a los sistemas inercial y primario es

$$\mathbf{R}_c = R_e \delta_{i3} \hat{\mathbf{x}}_o^i = R_e \hat{\mathbf{z}}_o = R_e \hat{\mathbf{r}}_o.$$

Para calcular n y ∇n en un punto (x, y, z) necesitamos las ecuaciones de transformación entre las coordenadas de un mismo punto en los sistemas primario X^j y local x^i . De acuerdo con las relaciones

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{R}_o \quad (4.36)$$

con

$$\mathbf{R} = X^j \hat{\mathbf{X}}_j = X^j \hat{\mathbf{X}}_I^j, \quad \mathbf{r} = x^i \hat{\mathbf{x}}_o^i, \quad \mathbf{R}_o = R_e \delta_{i3} \hat{\mathbf{x}}_o^i$$

y los cambios de base (4.35), tenemos

$$\begin{aligned} x^i + R_e \delta_{i3} &= R_{ij}^{(CG)}(\lambda_o, \phi_o) X^j \\ &= R_{ij}^{(CG)}(\lambda_o, \phi_o) R_{jk}^{(SP)}(t) X_I^k. \end{aligned} \quad (4.37)$$

y las ecuaciones de transformación inversa

$$\begin{aligned} X^j &= R_{ji}^{(CG)}(\lambda_o, \phi_o) (x^i + R_e \delta_{i3}) \\ X_I^k &= R_{kj}^{(SP)}(t) R_{ji}^{(CG)}(\lambda_o, \phi_o) (x^i + R_e \delta_{i3}). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Las ecuaciones de un rayo en el sistema xyz son

$$\begin{aligned}\frac{dx^i}{ds} &= \alpha^i \\ \frac{d\alpha^i}{ds} &= \left(\frac{\partial n}{\partial x^i} - \alpha^j \frac{\partial n}{\partial x^j} \alpha^i \right) \frac{1}{n}.\end{aligned}\quad (4.39)$$

Las componentes de

$$\nabla u = \hat{\mathbf{x}}_o^i \frac{\partial n}{\partial x^i}$$

están dadas por el gradiente $\partial n / \partial X^j$ (4.32) y el cambio de base (4.35), a saber,

$$\frac{\partial n}{\partial x^i} = R_{ij}^{(CG)}(\lambda_o, \phi_o) \frac{\partial n}{\partial X^j}.$$

Para calcular los rayos del sol que llegan a un observador, es necesario conocer la posición del sol en el sistema xyz del observador. El plano xy y el eje z son el horizonte y zenit del observador, respectivamente. El ángulo cenital del sol ζ_S es el ángulo entre el eje z (vector $\hat{\mathbf{z}}_o = \hat{\mathbf{r}}_o$) y el vector de posición del sol $\mathbf{R}_S$ que va del origen del centro de masa terrestre al centro del sol figura (4.9). El vector unitario con la dirección del sol en el sistema primario está dado por la declinación solar δ y la longitud del sol λ_S en el sistema primario

$$\hat{\mathbf{r}}_S = \cos \delta (\cos \lambda_S \hat{\mathbf{X}} + \sin \lambda_S \hat{\mathbf{Y}}) + \sin \delta \hat{\mathbf{Z}}. \quad (4.40)$$

donde λ_S se determina como se explica abajo. Por un lado tenemos $\cos \zeta_S = \hat{\mathbf{r}}_o \cdot \hat{\mathbf{r}}_S$, por otro, calculando $\hat{\mathbf{r}}_o \cdot \hat{\mathbf{r}}_S$ con la base del sistema primario,

$$\hat{\mathbf{r}}_o \cdot \hat{\mathbf{r}}_S = \cos \phi_o \cos \delta (\cos \lambda_o \cos \lambda_S + \sin \lambda_o \sin \lambda_S) + \sin \phi_o \sin \delta,$$

por lo tanto

$$\cos \zeta_S = \cos \phi_o \cos \delta \cos (\lambda_o - \lambda_S) + \sin \phi_o \sin \delta. \quad (4.41)$$

El segundo ángulo que da la posición del sol en el sistema xyz es ángulo acimutal solar α_S definido como el ángulo entre la proyección del sol en el plano xy y el eje y positivo. Usando la posición del sol en el sistema xyz

$$\hat{\mathbf{r}}_S = \sin \zeta_S (\sin \alpha_S \hat{\mathbf{x}}_o + \cos \alpha_S \hat{\mathbf{y}}_o) + \cos \zeta_S \hat{\mathbf{z}}_o$$

obtenemos

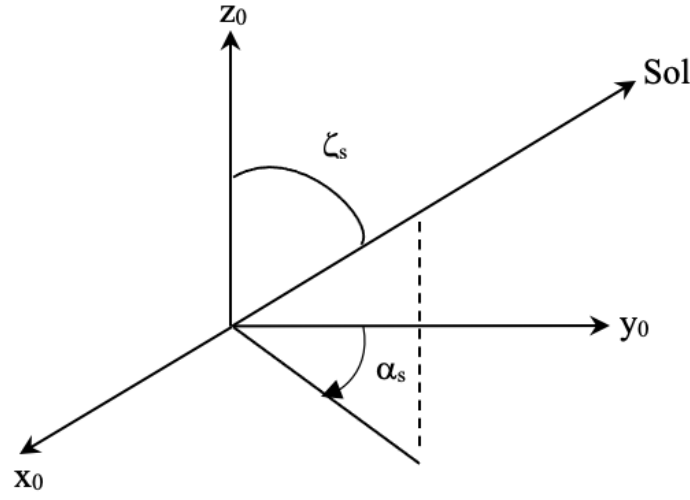
$$\hat{\mathbf{r}}_S \cdot \hat{\mathbf{y}}_o = \sin \zeta_S \cos \alpha_S.$$

En el sistema primario tenemos $\hat{\mathbf{r}}_S \cdot \hat{\mathbf{y}}_o = -\cos \delta \sin \phi_o \cos (\lambda_o - \lambda_S) + \sin \delta \cos \phi_o$, por lo tanto

$$\cos \alpha_S = \frac{\sin \delta \cos \phi_o - \cos \delta \sin \phi_o \cos (\lambda_o - \lambda_S)}{\sin \zeta_S}. \quad (4.42)$$

Para calcular la posición del sol con respecto al observador a una hora determinada de un día dado podemos usar las coordenadas geográficas $\Lambda \phi R$ en el sistema inercial X_I^i . La orientación del sistema inercial X_I^i para un día arbitrario del calendario juliano se escoge de manera que el sol está en el plano $Y_I Z_I$ y en dirección del eje Y_I positivo, por lo que su vector de posición $\mathbf{R}_S$ tiene las componentes

$$X_{I,S} = 0, \quad Y_{I,S} = R_S \cos \delta, \quad Z_{I,S} = R_S \sin \delta, \quad (4.43)$$

Figura 4.9: Posición del sol en el sistema xyz del observador.

durante todo un día. El vector de posición $\mathbf{R}_o$ del observador es

$$X_{I,o} = R_e \cos \phi_o \cos \Lambda_o, \quad Y_{I,o} = R_e \cos \phi_o \sin \Lambda_o, \quad Z_{I,o} = R_e \sin \phi_o.$$

Escogemos el meridiano de referencia ($\Lambda = 0$) como el meridiano que atraviesa los ejes positivos X_I y Z_I , de manera que la longitud del sol siempre es $\Lambda_S = \pi/2$ en el día de interés. La longitud del observador es tal que a las 0:00 horas el observador está en el meridiano opuesto al del sol Λ_S ; es decir,

$$\Lambda_o(t=0) = -\frac{\pi}{2}.$$

Entonces la longitud del observador para un instante arbitrario t es [ec. (4.18)]

$$\Lambda_o(t) = \Omega t - \pi/2. \quad (4.44)$$

Lo anterior equivale a decir que el meridiano de referencia de las coordenadas geográficas $\lambda\phi R$ es el meridiano del observador: $\lambda_o = 0$ y la longitud del sistema primario $\Lambda^{(SP)}$ es la longitud del observador $\Lambda^{(SP)} = \Lambda_o(t)$. En esta forma, la longitud del sol λ_S está dada por

$$\lambda_S = \Lambda_S - \Lambda_o(t) = \frac{\pi}{2} - \left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \pi - \Omega t. \quad (4.45)$$

Al medio día el sol y el observador están en el mismo meridiano lo que reduce (4.41) a $\cos \zeta_S(t=12\text{hrs}) = \cos(\phi_o - \delta)$. De la ec. (4.41) obtenemos las horas en las cuales el sol está en el horizonte ($\zeta_S = 90^\circ$),

$$\cos(\lambda_o - \lambda_S) = \cos(-\lambda_S) = \cos(\Omega t - \pi) = -\cos(2\Omega t) = -\tan \phi_o \tan \delta$$

a saber,

$$\Omega t = \cos^{-1} [\tan \phi_o \tan \delta].$$

Un camino alternativo para conocer la posición del sol respecto al observador es calcular las coordenadas locales del sol con las ecuaciones de transformación

$$x_S^i + R_e \delta_{i3} = R_{ij}^{(CG)}(\lambda_o, \phi_o) R_{jk}^{(SP)}(t) X_{I,S}^k.$$

con X_I^k dadas por (4.43). En el sistema local xyz el sol tiene las coordenadas geográficas locales definidas en la forma usual

$$x_S = r_S \cos \phi_{\text{loc}} \cos \lambda_{\text{loc}}, \quad y_S = r_S \cos \phi_{\text{loc}} \sin \lambda_{\text{loc}}, \quad z_S = r_S \sin \phi_{\text{loc}}. \quad (4.46)$$

donde $r_S = \|\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_o\|$. La ecuación $z_S = 0$ da las horas en las cuales el sol está en el horizonte del observador.

4.6. Ecuación de rayos en un sistema local $xy_\theta z_\theta$

Para calcular el contorno de la imagen del sol que llega a los ojos de un observador usamos un sistema local $xy_{\theta=0}z_{\theta=0}$ orientado con el sol figura (4.10). El significado del subíndice θ se aclara abajo. En el sistema inercial el sol y el observador tienen las posiciones

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_S &= R_S \cos \delta \hat{\mathbf{Y}}_I + R_S \sin \delta \hat{\mathbf{Z}}_I \\ \mathbf{R}_O &= R_e \cos \phi_o (\cos \Lambda_o \hat{\mathbf{X}}_I + \sin \Lambda_o \hat{\mathbf{Y}}_I) + R_e \sin \phi_o \hat{\mathbf{Z}}_I.\end{aligned}$$

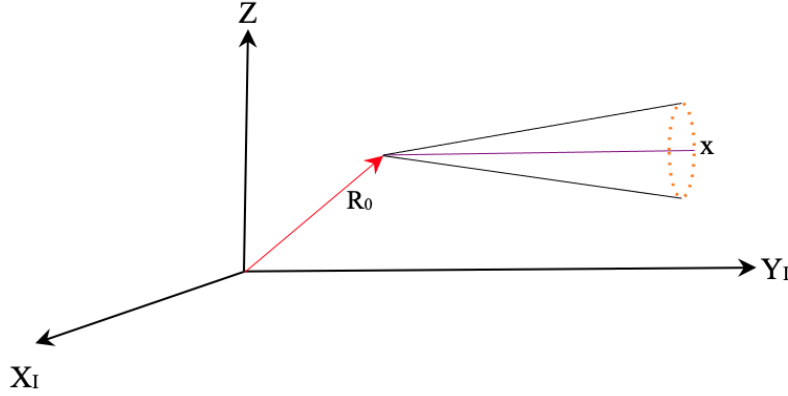


Figura 4.10: Contorno de la imagen del sol que llega a los ojos de un observador en un sistema local $xy_{\theta=0}z_{\theta=0}$ orientado con el sol.

El eje x va del observador al centro del sol por lo que el vector base correspondiente es

$$\hat{\mathbf{x}}_{os} = \frac{\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_O}{\|\mathbf{R}_S - \mathbf{R}_O\|}. \quad (4.47)$$

El eje positivo $z_{\theta=0}$ es ortogonal al plano formado por $\mathbf{R}_S$ y $\mathbf{R}_O$ y tiene vector base

$$\hat{\mathbf{z}}_{\theta=0} = \frac{\mathbf{R}_S \times \mathbf{R}_O}{\|\mathbf{R}_S \times \mathbf{R}_O\|}. \quad (4.48)$$

Para que $xy_{\theta=0}z_{\theta=0}$ sea un sistema derecho el eje positivo $y_{\theta=0}$ está orientado con el vector

$$\hat{\mathbf{y}}_{\theta=0} = \hat{\mathbf{z}}_{\theta=0} \times \hat{\mathbf{x}}. \quad (4.49)$$

De las ecuaciones anteriores obtenemos la relación entre vectores base

$$\hat{\mathbf{x}}_{\theta=0}^j = R_{jk}^{(\theta=0)} \hat{\mathbf{X}}_I^k \quad (4.50)$$

donde usamos la notación $\hat{\mathbf{x}}_{\theta=0}^1 = \hat{\mathbf{x}}_{os}$, $\hat{\mathbf{x}}_{\theta=0}^2 = \hat{\mathbf{y}}_{\theta=0}$, $\hat{\mathbf{x}}_{\theta=0}^3 = \hat{\mathbf{z}}_{\theta=0}$.

En ausencia de refracción la imagen del sol que llega a un observador está limitada por un círculo C_S cuyo centro es atravesado por el eje x con dirección $\hat{\mathbf{x}}_{os}$. Para estimar esta imagen calcularemos un conjunto de rayos que van del observador al círculo solar C_S . Dado que estamos considerando una tierra esférica, cada rayo es una curva plana que pertenece al plano definido por el vector de posición del cual parte el rayo (posición del observador) y un vector de dirección inicial $\hat{\mathbf{s}}_\theta$. Para aprovechar esta propiedad, usamos un

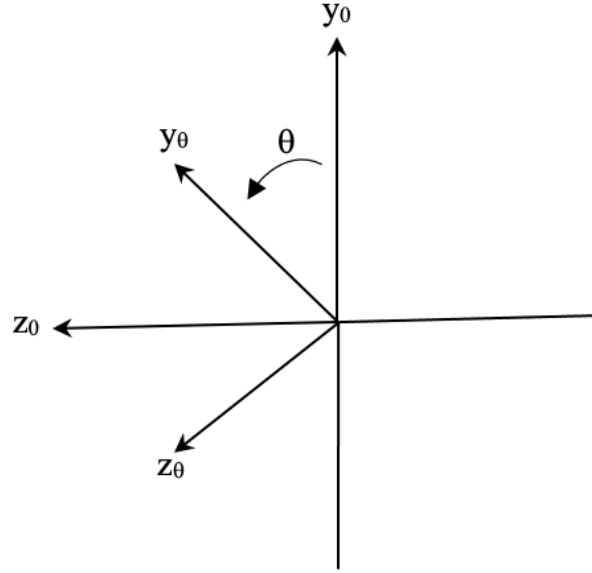


Figura 4.11: Sistema $xy_\theta z_\theta$ donde los ejes y_θ y z_θ son rotaciones .

sistema $xy_\theta z_\theta$ donde los ejes y_θ y z_θ son rotaciones de $y_{\theta=0}$ y $z_{\theta=0}$ como se muestra en la figura (4.11). Esto da

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_\theta \\ \hat{\mathbf{y}}_\theta \\ \hat{\mathbf{z}}_\theta \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{os} \\ \hat{\mathbf{y}}_{\theta=0} \\ \hat{\mathbf{z}}_{\theta=0} \end{pmatrix} \quad \text{con } R(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

La relación entre $\hat{\mathbf{x}}_\theta^1 = \hat{\mathbf{x}}_\theta$, $\hat{\mathbf{x}}_\theta^2 = \hat{\mathbf{y}}_\theta$, $\hat{\mathbf{x}}_\theta^3 = \hat{\mathbf{z}}_\theta$, y las bases $\hat{\mathbf{x}}_{\theta=0}^j$, $\hat{\mathbf{X}}_I^k$, $\hat{\mathbf{X}}^l$, es inmediata, a saber,

$$\hat{\mathbf{x}}_\theta^i = R_{ij}(\theta) \hat{\mathbf{x}}_{\theta=0}^j = R_{ij}(\theta) R_{jk}^{(\theta=0)} \hat{\mathbf{X}}_I^k. \quad (4.52)$$

Denotemos con

$$\tilde{\mathbf{r}} = \tilde{x}^i \hat{\mathbf{x}}_\theta^i$$

a la posición de un punto en el sistema $xy_\theta z_\theta$. La relación entre $\mathbf{r}_\theta$ y la posición de dicho punto en el sistema inercial $\mathbf{R}$ es

$$\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{r}} + \mathbf{R}_o \quad (4.53)$$

con $\mathbf{R} = X_I^k \hat{\mathbf{X}}_I^k$, $\mathbf{R}_o = X_{I,o}^k \hat{\mathbf{X}}_I^k$. De acuerdo con (4.52) la relación entre coordenadas $\tilde{x}^i$ y X_I^k es

$$\begin{aligned} \tilde{x}^i &= R_{ij}(\theta) R_{jk}^{(\theta=0)} (X_I^k - X_{I,o}^k) \\ X_I^k &= R_{kj}^{(\theta=0)} R_{ji}(\theta) \tilde{x}^i + X_{I,o}^k. \end{aligned} \quad (4.54)$$

En ausencia de atmósfera (o refracción) los rayos que van del observador al círculo solar C_s forma un cono como se muestra en la figura 4.9. Para calcular la refracción de los rayos generada por la atmósfera consideramos que la atmósfera tiene una altura finita h_{atm} sobre la esfera terrestre, es decir, la atmósfera está acotada por una esfera $S(R_{\text{atm}})$ con radio $R_{\text{atm}} = R_e + h_{\text{atm}}$. La recta que va del observador al centro del sol está dada por la ecuación

$$\mathbf{R}_\tau = \mathbf{R}_o + \tau \Delta \mathbf{R} \quad \text{con} \quad \Delta \mathbf{R} = \mathbf{R}_s - \mathbf{R}_o.$$

Los puntos donde $\mathbf{R}_\tau$ intersecta a la esfera $S(R_{\text{atm}})$ estan dados por la ecuación

$$\mathbf{R}_\tau \cdot \mathbf{R}_\tau = R_e^2 + 2\tau \mathbf{R}_o \cdot \Delta \mathbf{R} + \tau^2 \|\Delta \mathbf{R}\|^2 = R_{\text{atm}}^2.$$

Las raíces son $\tau_1 = 8.7786 \times 10^{-7}$ y $\tau_2 = -6.5167 \times 10^{-5}$, el valor positivo τ_1 corresponde al caso donde el sol está a la "vista" del observador. La figura 4.9, muestra que el círculo solar C_S proyectado sobre la esfera $S(R_{\text{atm}})$ un círculo $C^{(\text{proy})}$ con radio $R^{(\text{proy})}$ dado por

$$\tan \alpha = \frac{R_S}{\|\Delta \mathbf{R}\|} = \frac{R^{(\text{proy})}}{\|\tau_1 \Delta \mathbf{R}\|}$$

como se ve en la figura 4.10. El valor calculado es ¿ h_{atm} ó $R^{(\text{proy})} = 0.61099 \text{ km}$?. La ecuación del círculo $C^{(\text{proy})}$ en el sistema $xy_\theta z_\theta$ es

$$\mathbf{r}_{\text{proy}}(\theta) = \mathbf{r}_1 + R^{(\text{proy})} \hat{\mathbf{y}}_\theta \quad \text{con} \quad \mathbf{r}_1 = \tau_1 \Delta \mathbf{R} = x_1 \hat{\mathbf{x}}_{os}. \quad (4.55)$$

De esta expresión obtenemos las coordenadas del punto (x_1, y_θ) donde el plano xy_θ intersecta al círculo C_{proy}

$$x_1 = \tau_1 \|\Delta \mathbf{R}\|, \quad y_\theta^{(\text{proy})} = R^{(\text{proy})}. \quad (4.56)$$

El problema siguiente es calcular el rayo en el plano xy_θ que va del observador al punto $(x_1, y_\theta = R^{(\text{proy})})$. De acuerdo con los resultados de la sección 4.3.1, la ecuación del rayo es

$$\frac{d^2 y_\theta}{dx^2} = \left[1 + \left(\frac{dy_\theta}{dx} \right)^2 \right] \left[\frac{\partial q}{\partial y_\theta} - \frac{dy_\theta}{dx} \frac{\partial q}{\partial x} \right] \frac{1}{n} \quad \text{donde } q = \ln [n(x, y_\theta)]. \quad (4.57)$$

En este trabajo resolvemos esta ecuación sujeta a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} y_\theta &= 0 & \text{para } x=0 & \text{(posición del observador)} \\ y_\theta &= R^{(\text{proy})} & \text{para } x=x_1. \end{aligned}$$

Para calcular las componentes del gradiente de n en un punto (x_1, y_θ) , calculamos las coordenadas XYZ de dicho punto en el sistema primario por medio de (4.54) y (4.19). Calculamos ∇n en el sistema primario [ecs. (4.31), (4.32)] y con el cambio de base (4.52) obtenemos ∇n en el sistema $xy_\theta z_\theta$

$$\frac{\partial n}{\partial \hat{\mathbf{x}}^i} = R_{ij}(\theta) R_{jk}^{(\theta=0)} R_{lk}^{(SP)} \frac{\partial n}{\partial X^l}$$

Ecuaciones de transformación entre los sistemas de referencia primario y local

Queremos representar la base del sistema local $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}_0, \hat{\mathbf{z}})$ en terminos de la base del sistema primario $(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{Y}}, \hat{\mathbf{Z}})$ para validar los cálculos que se realicen en el sistema local, ya que las propiedades termodinámicas del índice de refracción dependen de las coordenadas del sistema primario, por lo tanto las ecuaciones de transformación están dadas a partir de la relación (4.55).

$$\hat{\mathbf{x}} = R_{11} \hat{\mathbf{X}}^0 + R_{12} \hat{\mathbf{Y}}^0 + R_{13} \hat{\mathbf{Z}}^0, \quad \hat{\mathbf{y}}_0 = R_{21} \hat{\mathbf{X}}^0 + R_{22} \hat{\mathbf{Y}}^0 + R_{23} \hat{\mathbf{Z}}^0, \quad \hat{\mathbf{z}} = R_{31} \hat{\mathbf{X}}^0 + R_{32} \hat{\mathbf{Y}}^0 + R_{33} \hat{\mathbf{Z}}^0.$$

donde cada una de las componentes $R_{i,j}$ con $i, j = 1, 2, 3$ son

$$\begin{aligned}
 R_{11} &= \alpha(d_{ts} \cos \delta - R_T \cos \phi \cos \Lambda) \\
 R_{12} &= \alpha(-R_T \cos \phi \sin \Lambda) \\
 R_{13} &= \alpha(d_{ts} \sin \delta - R_T \sin \phi) \\
 R_{21} &= (R_{32} R_{13} - R_{33} R_{12}) \\
 R_{22} &= (R_{33} R_{11} - R_{31} R_{13}) \\
 R_{23} &= (R_{31} R_{12} - R_{32} R_{11}) \\
 R_{31} &= \beta(-d_{ts} \cdot R_T \cos \phi \sin \Lambda \sin \delta) \\
 R_{32} &= \beta(d_{ts} \cdot R_T \sin \delta \cos \phi \cos \Lambda - d_{ts} \cdot R_T \cos \delta \sin \phi) \\
 R_{33} &= \beta(d_{ts} \cdot R_T \cos \delta \cos \phi \sin \Lambda)
 \end{aligned}$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}, \quad \beta = \frac{1}{\|\mathbf{R}_s \times \mathbf{R}_o\|}$$

Podemos representar la transformación de una base a otra como sigue

$$\hat{\mathbf{x}}_k = R_{kj} \hat{\mathbf{X}}_o^j.$$

En el sistema local con origen en el observador, el rayo de luz que le llega del sol a él se mueve en el plano $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}_\theta)$, se ha desarrollado un código en *Fortran*, donde se realiza el cálculo de rayos en el sistema primario en el que definimos al índice de refracción como $n = n(\mathbf{X}^0, \mathbf{Y}^0, \mathbf{Z}^0)$.

Para representar un punto $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ del sistema local en el sistema primario es

$$X^j = X_o^j + R_{kj} x^k.$$

Está última ecuación nos permite conocer la transformación correspondiente del índice de refracción $n(\mathbf{X}^0, \mathbf{Y}^0, \mathbf{Z}^0) \longrightarrow n(\mathbf{x}, \mathbf{y}_\theta)$.

4.7. Cálculo de rayos en un espejismo

A partir de la ecuación del rayo (4.6), podemos explicar el fenómeno del espejismo [3],[36]. Se trata de un fenómeno producido por la diferencia de temperatura a la cual se encuentran las distintas capas de la atmósfera, que genera variaciones en el índice de refracción de las diversas capas atmosféricas, de modo que la luz no se propaga en línea recta, sino que se va curvando gradualmente. El espejismo se produce, finalmente, porque el ojo sitúa la imagen en la prolongación rectilínea de los rayos que inciden en él.

De acuerdo con la ecuación $p/T = R_a \rho$, a una presión fija, cuanto más caliente esta el asfalto, menor será ρ y el índice de refracción n del aire situado por encima del asfalto. Por lo que un rayo se desvía hacia la región con mayor índice de refracción y atravesará más cantidad de aire menos denso que si se hubiera desplazado en línea recta como se muestra en la figura (4.12), mientras que en la figura (4.13) se aprecia un espejismo formado en una carretera. Este fenómeno, lo podemos modelar mediante la ecuación de los rayos.

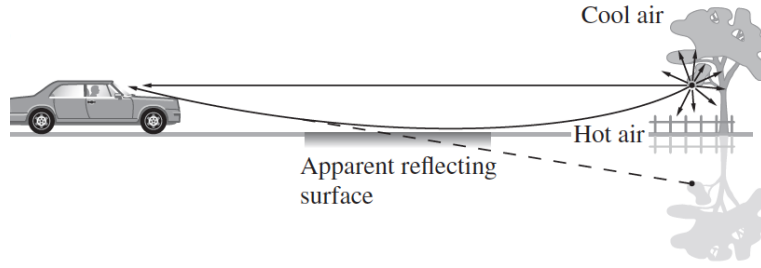


Figura 4.12: Para ángulos muy pequeños, los rayos parecen proceder debajo de la carretera como si se reflejara un charco de agua.[3]



Figura 4.13: Espejismo en la carretera.

Consideremos el modelo de Rodgers (4.30) sin humedad ($q = 0$). De acuerdo con la ecuación de estado $p/T = R_a \rho$ por lo que (4.30) toma la forma

$$n = 1 + aR_a \rho \quad (4.58)$$

en una vecindad del asfalto podemos usar el modelo

$$\rho = \rho_a - bz_s \quad \text{con } b > 0,$$

donde $\rho_a = 1.225 \text{ kg m}^{-3}$ que es la densidad estándar a nivel de mar para $z = 0$ el valor de $b = 1.225 \text{ kg m}^{-4}$. El gradiente ∇n está dado por (4.32) con el gradiente vertical dado por (4.58)

$$\frac{dn}{dz_s} = -aR_ab. \quad (4.59)$$

En el capítulo 5 usaremos (4.58) para resolver numéricamente la ecuación de rayos para resolver el problema, de como un observador ve un espejismo y modelar el doblamiento de un haz de luz que pasa por un medio que es menos denso (aire caliente).

Capítulo 5

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LAS ECUACIONES DE UN RAYO

5.1. Problema con Valores Iniciales para EDO'S

Las ecuaciones diferenciales sirven para modelar problemas que involucren el cambio de una variable respecto a otra. En la mayor parte de ellos hay que resolver un problema con valores iniciales, es decir, resolver una ecuación diferencial que satisface una condición inicial.

El primer problema planteado, es dar la solución general de la ecuación de los rayos como un sistema de seis ecuaciones de primer grado con condiciones iniciales, usando el método numérico de Runge-kutta de 4° orden.

$$\begin{aligned}\frac{dy^i}{ds} &= \alpha^i \\ \frac{d\alpha^i}{ds} &= \left(\frac{\partial n}{\partial y^i} - \alpha^j \frac{\partial n}{\partial y^j} \alpha^i \right) \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

con las condiciones iniciales $\mathbf{r}_0$ (posición inicial del rayo) y α^i cosenos directores (dirección inicial del rayo).

Método de Runge-Kutta.

Un procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales es usando el método de Runge-Kutta [7]. Consideremos un problema de valores iniciales

$$y' = f(x, y)$$

con

$$y(x_0) = y_0$$

A diferencia de usar series de Taylor de orden superior se volverán difíciles de manejar por las derivadas de orden superior de $f(x, y)$. Sin embargo, es posible desarrollar expresiones a las series de Taylor sin la necesidad de involucrar derivadas de $f(x, y)$.

La expresión clásica de Runge-Kutta es una que es equivalente a la serie de Taylor (cinco primeros términos)

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n + \frac{h^3}{3!}y'''_n + \frac{h^4}{4!}y''''_n$$

La fórmula de Runge-Kutta [7], involucra un promedio de valores de $f(x, y)$ tomados en diferentes puntos del intervalo $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ con

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_{n_1} + 2k_{n_2} + 3k_{n_3} + k_{n_4})$$

donde

$$\begin{aligned}k_{n_1} &= f(x, y) \\k_{n_2} &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{n_1}\right) \\k_{n_3} &= f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{n_2}\right) \\k_{n_4} &= f(x_n + h, y_n + hk_{n_3})\end{aligned}$$

El término $\frac{h}{6}(k_{n_1} + 2k_{n_2} + 3k_{n_3} + k_{n_4})$, se interpreta como una pendiente promedio. El método de Runge-Kutta es muy preciso.

Método de Newton.

Esté método es una de las técnicas más conocidas para resolver un problema de búsqueda de raíces $f(x) = 0$. Una forma de introducir el Método de Newton [7], se basa en la implementación de los polinomios de Taylor.

Supongamos que $f(x) \in C^2[a, b]$ y sea $p_0 \in [a, b]$ una aproximación de p tal que $f'(p_0) \neq 0$ y $|p - p_0|$ es "pequeño". Consideremos el Primer Polinomio de Taylor para $f(x)$ alrededor de p_0 y evaluando en $x = p$.

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2}f''(\xi(p))$$

donde $\xi(p)$ esta entre p y p_0 , tomando $f(p) = 0$ da

$$0 = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2}f''(\xi(p))$$

El método de Newton se obtiene suponiendo que $|p - p_0|$ es muy pequeño, por lo tanto, $(p - p_0)^2$ es mucho menor entonces

$$0 \approx f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0)$$

Ahora despejando p obtenemos

$$p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \equiv p_1$$

Este resultado se dio para una aproximación en p_0 , y genera una sucesión $\{p_n\}_{n=0}$

$$p_n \approx p_0 - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})} \quad \text{para} \quad n \geq 1$$

La figura (5.1), ilustra como la aproximación es obtenida usando sucesivamente tangentes.

5.2. Problema con Valores a la Frontera para EDO'S.

En esta sección damos la solución de problemas con valores en la frontera, en los cuales las condiciones iniciales son remplazadas por condiciones de frontera que involucran valores de la solución y la de sus derivadas en dos puntos específicos, conocidos como puntos de frontera [7],[37].

Los problemas con valor en la frontera de dos puntos incluyen una ecuación diferencial de segundo orden como

$$y'' = f(x, y, y') \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b$$

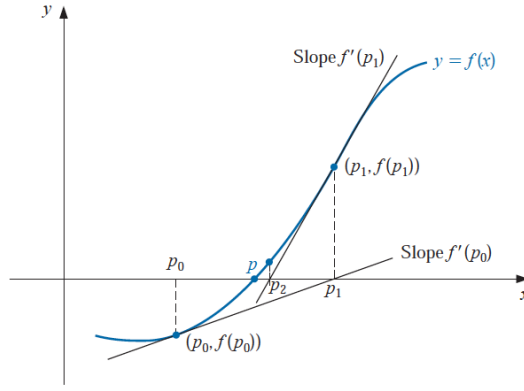


Figura 5.1: Representación método de Newton [7].

con las condiciones de frontera

$$y(a) = \alpha \quad \text{y} \quad y(b) = \beta$$

Para resolver la ecuación de los rayos en un plano con simetría esférica con condiciones a la frontera a partir de

$$y'' = [1 + (y')^2] [q_y - y' q_x],$$

con condiciones a la frontera

$$y(a) = \alpha \quad \text{y} \quad y(b) = \beta,$$

donde a y b son los límites de integración

$$a = 0 \quad , \quad b = r \frac{d_{TS}}{R_S}$$

siendo d_{TS} la distancia Tierra-Sol y R_S el radio del Sol sin refractarse, por lo que

$$\alpha = 0 \quad \text{y} \quad \beta = r,$$

donde r es un punto del disco solar proyectado en la atmósfera terrestre (sol refractado).

Método de Shooting Lineal.

La ecuación diferencial es lineal cuando

$$f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x)$$

Para aproximar la solución única de este sistema lineal, primero consideremos los problemas con valor inicial

$$y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x) \quad \text{con} \quad a \leq x \leq b \quad (5.1)$$

con las condiciones $y(a) = \alpha$ y $y'(a) = 0$ y

$$y'' = p(x)y' + q(x)y \quad \text{con} \quad a \leq x \leq b \quad (5.2)$$

con las condiciones $y(a) = 0$ y $y'(a) = 1$.

Sea $y_1(x)$ solución de la ecuación (5.1) y sea $y_2(x)$ solución de la ecuación (5.2), suponiendo que $y_2(b) \neq 0$. Definimos

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x) \quad (5.3)$$

$y(x)$ es la solución al problema lineal de condiciones a la frontera. De lo cual si tomamos

$$y'(x) = y_1'(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2'(x), \quad y''(x) = y_1''(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2''(x) \quad (5.4)$$

Si evaluamos en la ecuación original (5.1), las expresiones (5.4) satisfacen la ecuación diferencial, de lo cual

$$y(a) = y_1(a) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(a) = \alpha + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} \cdot 0 = \alpha \quad \text{con} \quad y_2(a) = y_2'(a) = 0$$

y

$$y(b) = y_1(b) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(b) = y_1(b) + \beta - y_1(b) = \beta$$

donde α y β son las condiciones de frontera en los extremos en a y b .

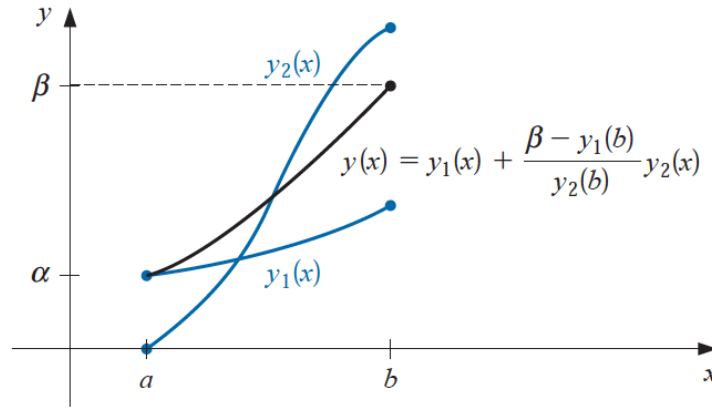


Figura 5.2: Ilustración Gráfica del Método de Shooting lineal [7].

El método de shooting para las ecuaciones lineales se basa en la sustitución del problema lineal con valor en la frontera por dos problemas con valores iniciales [7], tal como las ecuaciones (5.1) y (5.2). Anteriormente dimos un método para aproximar las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$, la solución del problema con valor en la frontera se aproxima mediante la expresión (5.3), figura (5.2).

En este caso se usa el método de Runge-Kutta de cuarto orden, para obtener las aproximaciones de $y_1(x)$ y $y_2(x)$. Este método proporciona aproximaciones a la derivada de la solución del problema con valores en la frontera y además a la solución del problema mismo.

Método de Shooting para Problemas no Lineales.

El método del disparo para el problema no lineal con condiciones a la frontera de segundo orden de la forma

$$y'' = f(x, y, y') \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b \quad \text{con} \quad y(a) = \alpha \quad \text{y} \quad y(b) = \beta \quad (5.5)$$

A diferencia del problema lineal, para este caso la solución no puede expresarse como una combinación lineal de las soluciones de dos problemas con valores iniciales. Se requiere utilizar soluciones de una sucesión de problemas de valores iniciales que involucren un parámetro t como

$$y'' = f(x, y, y') \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b \quad \text{con} \quad y(a) = \alpha \quad \text{y} \quad y'(a) = t \quad (5.6)$$

Esto es eligiendo los parámetros $t = t_k$, para asegurar que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y(b, t_k) = y(b) = \beta \quad (5.7)$$

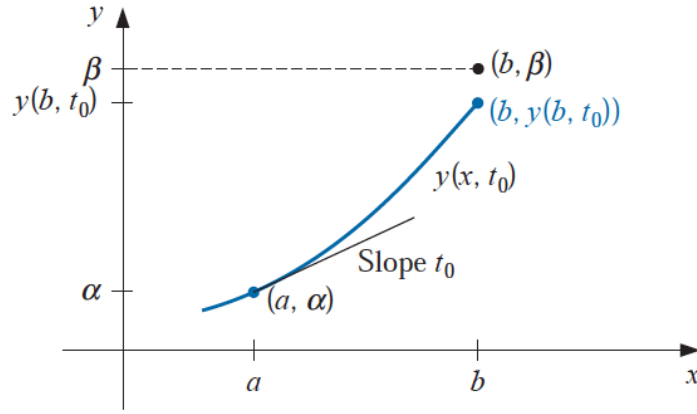


Figura 5.3: Método de Shooting no lineal [7].

donde $y(x, t_k)$, denota la solución al problema de valores iniciales (5.7) con $t = t_k$ y $y(x)$ denota la solución al problema de condiciones a la frontera (5.5), figura (5.3).

Comenzamos, con un valor t_0 , el cual representa una elevación inicial en el cual se le "dispara" al objetivo desde el punto (a, α) y a lo largo de la curva descrita por la solución al problema de valor inicial.

$$y'' = f(x, y, y') \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b \quad \text{con} \quad y(a) = \alpha \quad \text{y} \quad y'(a) = t_0$$

Si $y(b, t_0)$ no esta muy cerca de β , se corrige la aproximación y se eligen nuevamente elevaciones t_1, t_2 y así sucesivamente hasta que $y(b, t_k)$ sea lo suficientemente cerca de " acertar " en el " objetivo " β . Para determinar los parámetros t_k , sea $y(x, t)$ denota la solución al problema de valores iniciales (5.6), determinamos t con

$$y(b, t) - \beta = 0.$$

La ecuación (5.6), es una ecuación no lineal en la variable t . El procedimiento que abordaremos para generar la sucesión t_k es por el método de Newton, visto anteriormente, ya que es el más poderoso, el cual sólo necesita una aproximación en t_0 , y la iteración es

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{\frac{d}{dy}(b, t_{k-1})}, \quad (5.8)$$

La expresión (5.8) requiere conocer de $\frac{d}{dy}(b, t_{k-1})$, esto es un problema ya que no conocemos a $y(b, t)$ explícitamente, sólo conocemos los valores $y(b, t_0), y(b, t_1) \dots y(b, t_{k-1})$. Para poder solucionarlo, hacemos que el problema de valor inicial (5.6), su solución es de la forma

$$y''(x, t) = f(x, y(x, t), y'(x, t)) \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b \quad \text{con} \quad y(a, t) = \alpha \quad \text{y} \quad y'(a, t) = t \quad (5.9)$$

y' denota la derivada respecto a x , para determinar $\frac{d}{dy}(b, t)$ cuando $t = t_{k-1}$ hacemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial y''}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial f}{\partial t}(x, y(x, t), y'(x, t)) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y'}{\partial t}(x, t) \end{aligned}$$

como x y t son independientes $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$. Se simplifica la ecuación a

$$\frac{\partial y''}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y(x, t), y'(x, t)) \frac{\partial y'}{\partial t}(x, t),$$

para $a \leq x \leq b$ con las condiciones iniciales

$$\frac{\partial y}{\partial t}(a, t) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{\partial y}{\partial t}(a, t) = 1.$$

Estas nuevas condiciones vienen de tomar las derivadas de las condiciones al problema de valores iniciales. Denotando a $z(x, t)$ a las derivadas parciales de y respecto a t , entonces el problema de valores iniciales se puede reescribir como

$$z''(x, t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y')z(x, t) + \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y')z'(x, t) \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b \quad (5.10)$$

con $z(a, t) = 0$ y $z(a, t) = 1$. Donde hemos podido invertir el orden de derivación de x y de t a partir de las condiciones iniciales previas. Por lo tanto, el método de Newton requiere de dos problemas de valores iniciales (5.9) y (5.10), que sean resueltos en cada iteración y la ecuación de t_k queda

$$t_k = t_{k-1} - \frac{y(b, t_{k-1}) - \beta}{z(b, t_{k-1})}.$$

Ninguno de estos problemas con valor inicial se resuelve exactamente, las soluciones se aproximan usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, que requiere el método de Newton.

El uso de los tres métodos numéricos: Runge-kutta, Shooting lineal y no lineal nos permiten verificar la validez de la solución numérica del cálculo de rayos. La solución de la ecuación de los rayos (1.115) en el sistema primario (X, Y, Z) es independiente del sistema de coordenadas y lo usamos para poder verificar todos los cálculos de rayos. El método de Shooting lineal, da la solución al problema del espejismo en el sistema local del observador (x, y, z) . Mientras que el método de Shooting no lineal resuelve el problema con condiciones a la frontera de la imagen del sol que llega a los ojos de un observador.

RESULTADOS COMPUTACIONALES

Solución a la ecuación de los rayos como un problema de valores iniciales (PVI).

En este capítulo presentamos los resultados obtenidos al resolver la ecuación de los rayos

$$\frac{d}{ds} \left(n \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right) = \nabla n, \quad (6.1)$$

en un sistema de referencia primario (X, Y, Z) como un problema de valores iniciales (PVI) con las condiciones del vector de posición $\mathbf{R}_o$ y dirección $\mathbf{v}_o = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$, usando el método de Runge-Kutta para la solución de un sistema de seis ecuaciones de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds} &= \alpha^i \\ \frac{d\alpha^i}{ds} &= \left[\frac{\partial n}{\partial x^i} - \alpha^j \left(\alpha^j \frac{\partial n}{\partial x^j} \right) \right] \frac{1}{n}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

para calcular un rayo de luz en la atmósfera terrestre necesitamos emplear una atmósfera de referencia adiabática, por que la temperatura T y la presión P cambian respecto a la altura y esto hace que el índice de refracción sea función de (P, T) reportado en el capítulo 3, la solución de la ecuación (6.2) es relevante para verificar el cálculo de rayos que realizamos a continuación.

6.1. ESPEJISMO COMO PROBLEMA DE VALORES INICIALES.

Vamos a resolver la ecuación de los rayos

$$y'' = \left[1 + (y')^2 \right] [q_y - y' q_x], \quad (6.3)$$

junto con la variación de ∇n

$$\frac{\partial n(z_s)}{\partial x^i} = (-a R_a b) \frac{X^i}{R}, \quad (6.4)$$

después de haber reducido el sistema de seis ecuaciones de primer orden en el sistema (X, Y, Z) a un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden, ecuación (6.3) en el sistema local del observador (x, y, z) , tal como se realizó en la sección 4.4. Para dar solución a la ecuación (6.3) utilizaremos el método numérico de Shooting lineal.

Para modelar el efecto de los espejismos producidos por el calentamiento de una superficie usaremos los siguientes parámetros de la tabla 6.1.

A partir de estos parámetros planteados y empleados en las ecuaciones (6.3) y (6.4) en los programas desarrollados en Fortran 77 ver algoritmo apéndice A.3, obtenemos lo siguiente (ver figura 6.1).

Tabla 6.1: Datos para calcular un Espejismo.

Datos.			
Distancia Km	Densidad std a nivel de mar ρ_a	Parámetro (b) $\frac{Kg}{m^3}$	Constante de gas Atmosférica $R_a(\frac{J}{Kg^{\circ}K})$
3	1.225	1.225	287
3	1.225	2	287

ESPEJISMO

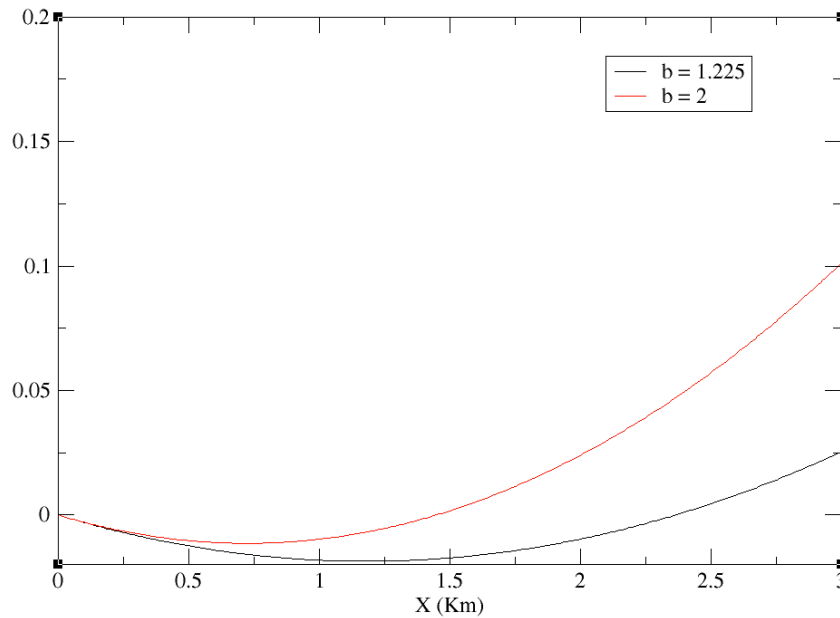


Figura 6.1: Rayo de Luz curvado hacia la región de mayor índice de refracción.

Solución a la ecuación de los rayos como un problema con condiciones de frontera.

La solución a la ecuación de los rayos

$$y'' = [1 + (y')^2] [q_y - y' q_x], \quad (6.5)$$

con condiciones a la frontera

$$y(a) = \alpha \quad y \quad y(b) = \beta, \quad (6.6)$$

donde a y b son los límites de integración

$$a = 0 \quad , \quad b = r \frac{d_{TS}}{R_S} \quad (6.7)$$

siendo d_{TS} la distancia Sol-Tierra y R_S el radio del Sol sin refractarse, por lo que

$$\alpha = 0 \quad y \quad \beta = r, \quad (6.8)$$

donde r es un punto del disco solar proyectado en la atmósfera terrestre (sol refractado). En el problema de condiciones a la frontera se utiliza el método de Shooting no lineal para resolver un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden a partir de soluciones de una sucesión de problemas con valores iniciales que involucren un parámetro t , para generar tal sucesión empleamos el método de Newton-Raphson, siendo

útil para poder modelar un rayo proveniente del Sol y así poder generar la imagen del disco Solar que se proyecta en la atmósfera durante el crepúsculo vespertino.

La forma de verificar nuestros resultados numéricos, del cálculo de rayos de un espejismo y para la imagen del sol es mediante la transformación de coordenadas del sistema local del observador (x, y, z) al sistema primario (X, Y, Z) a partir de

$$X^j = X_o^j + R_{kj} x^k \text{ donde } R_{kj} \text{ es la matriz de rotación,} \quad (6.9)$$

debido a que la solución de la ecuación de los rayos (6.2), en el sistema primario es independiente del sistema de coordenadas, al verificar un mismo rayo en ambos sistemas la diferencia es mínima por que son diferentes mallas, en el sistema primario se integra respecto a la longitud de arco s de un rayo y en el sistema local se integra respecto a la variable x .

6.2. IMAGEN DEL SOL.

Para calcular la imagen del sol que llega a un observador en la superficie terrestre, utilizando el método de Ray Tracing de forma clásica (solución a la ecuación de los rayos de luz (6.1), tipo segunda ley de Newton para la óptica), se desarrollaron cuatro programas computacionales en F77 (Fortran 77), a partir de los siguientes datos conocidos de la tabla 6.2.

Tabla 6.2: Datos para calcular Rayos del Sol.

Datos.			
Fecha	Φ_o	Día	t (hrs)
15/11/23	$\frac{13\pi}{120}$	216	12
15/11/23	$\frac{13\pi}{120}$	216	18

Los datos de la tabla anterior, se conocen como datos de entrada de nuestros programas principales, que a continuación se describirán de forma detallada, ya que obtendremos información relevante para poder estimar un rayo proveniente del sol a una cierta distancia del observador.

Declinación Solar.

El plano en el que se mueve la Tierra alrededor del Sol [38],[39], se le conoce como plano ecuatorial figura 6.2, sabemos que la Tierra gira sobre un eje de rotación conocido como eje polar el cual tiene una inclinación aproximada de 23.5° de la normal al plano ecuatorial. El ángulo mínimo que forma el plano ecuatorial y la línea que une los centros de masa del sol y de la tierra cambia cada día. Este ángulo se llama declinación solar y se representa como δ . La declinación [40],[41] es cero en los equinoccios (la noche y el día tienen la misma duración) de primavera y otoño, teniendo un valor de 23.5° en el solsticio de verano y cerca de -23.5° en el solsticio de invierno, por convención de la geometría a utilizar se usaran radianes en lugar de grados.

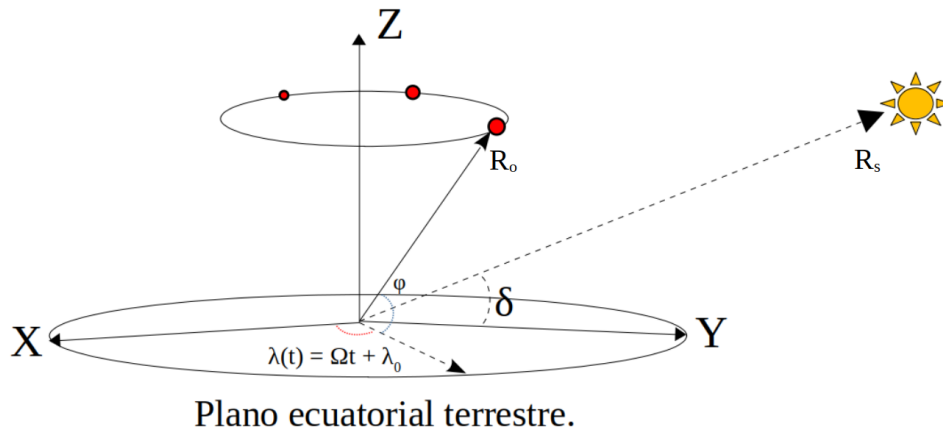


Figura 6.2: Sistema de referencia primario (X,Y,Z) no inercial con origen en el centro de masa terrestre.

Se puede obtener el valor de δ [6] mediante fórmulas y expresiones aproximadas, dando su valor con cierta precisión como función del número del día Juliano ¹, expresado por

$$\delta = 0.006918 - 0.399912 \cos \Gamma + 0.070257 \sin \Gamma - 0.006758 \cos 2\Gamma + 0.000907 \sin 2\Gamma, \quad (6.10)$$

con δ expresado en radianes y $\Gamma = \frac{2\pi}{365}(J - 1)$, donde J es el día juliano, conocido como ángulo de rotación también expresado en radianes. Esta fórmula aproximada tiene un error en δ menor a 12'. La figura 6.3 representa la gráfica de δ como función del día Juliano.

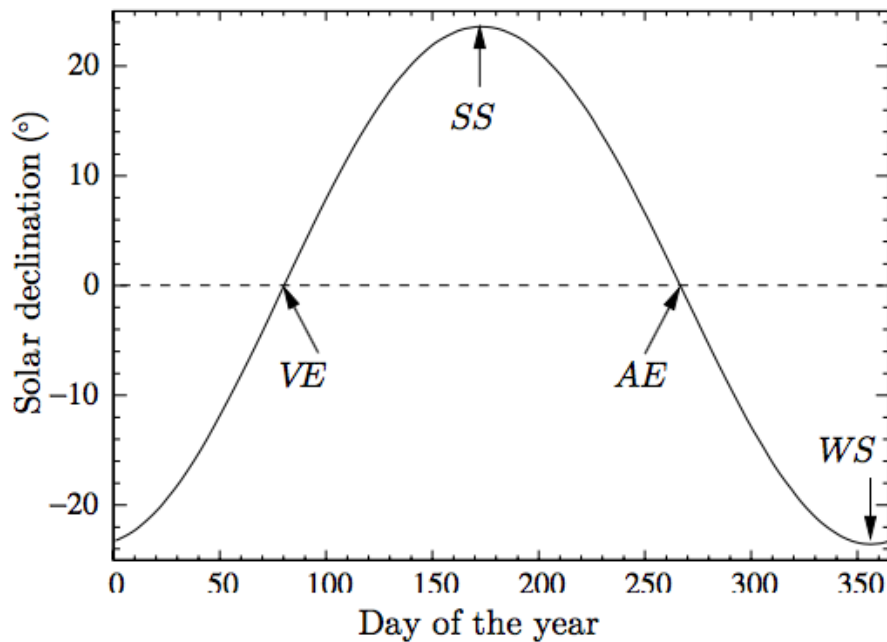


Figura 6.3: Variación de la declinación solar δ como función de J . [6]

La figura 6.3, es lo reportado en la literatura, la siguiente figura 6.4, muestro la misma gráfica mediante la programación para el valor de delta (δ) ecuación (6.10) reportado en la literatura [6].

Podemos observar de las gráficas, que a partir de un cierto día tenemos un sólo valor de delta, entonces con estos parámetros encontramos los vectores de posición del observador y del sol utilizados para construir el sistema local del observador.

¹Es un método que sirve para contar los días de un año normal de 365 días comenzando con el número 1, para el día 1 de Enero.

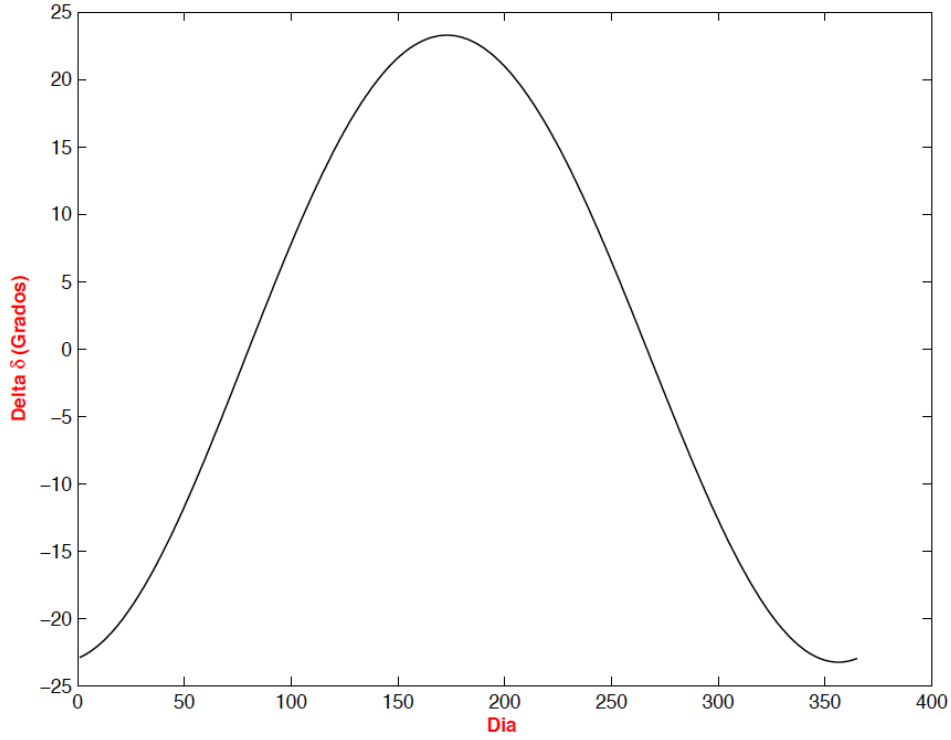


Figura 6.4: Variación de la declinación solar δ como función de J, programado en F77.

Orientación del Sol.

Hasta ahora con los datos proporcionados por la tabla 6.2, para el día 15-Nov-2023, que corresponde al día 319, el valor de $\delta = -0.3205178652$ y para un observador que se encuentra en la CDMX (Ciudad de México) tiene una latitud de $\Phi_0 = \frac{13\pi}{120}$. Con estos parámetros podemos obtener la orientación del sol, es decir podemos estimar la salida y puesta del sol para un observador que se ubica en la CDMX, a partir de

$$\mathbf{R}_o = R_T \cos \phi (\hat{\mathbf{X}}^0 \cos \Lambda + \hat{\mathbf{Y}}^0 \sin \Lambda) + R_T \sin \phi \hat{\mathbf{Z}}^0. \quad (6.11)$$

$$\mathbf{R}_s = d_{ts} \cos \delta \hat{\mathbf{X}}^0 + d_{ts} \sin \delta \hat{\mathbf{Z}}^0. \quad (6.12)$$

Para una hora del día y δ dados, podemos conocer los vectores de posición del observador y del sol ecuaciones (6.11) y (6.12) en un sistema de referencia primario (X, Y, Z) y así mismo construir el sistema local del observador figura 6.5.

El ángulo en el que el sol se encuentra por debajo o por encima del plano del observador visto en la sección 4.4 es

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{z_s}{\sqrt{x_s^2 + y_s^2}} \right). \quad (6.13)$$

El programa uno Orientación del sol (**PIOS**) realizado en Fortran77 apéndice A.1, determina para que longitud $\Lambda_0 = -\frac{\pi}{2} + 15 \frac{\pi}{180} t$, se debe encontrar el observador en el sistema local (x, y, z) , para observar a que hora del día, ve la salida o la puesta del Sol.

A partir de los siguientes datos mostrados en la tabla 6.3, se realizó el cálculo de rayos para generar la imagen del sol que le llega a un observador en la superficie terrestre, para el día 15 de Noviembre del 2023 y otro para el 22 de Diciembre del 2023 (solsticio de invierno).

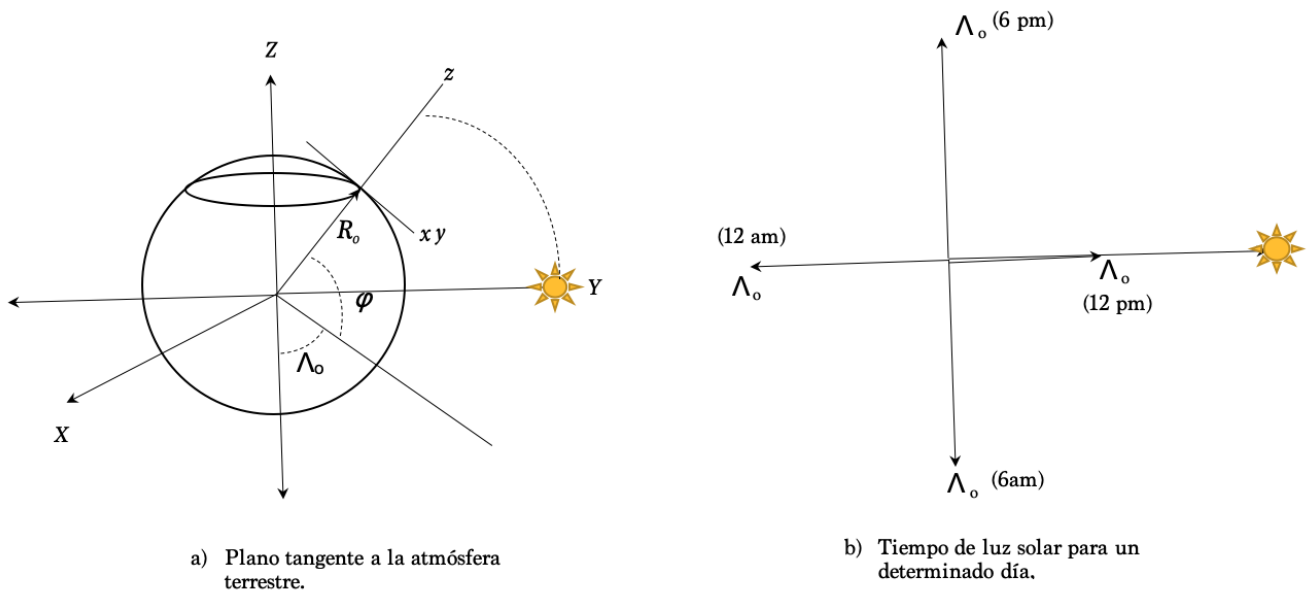


Figura 6.5: Geometría para determinar la hora en el que el sol se encuentra por arriba o por debajo del horizonte.

Tabla 6.3: Datos para calcular Rayos del Sol.

Datos.					
Fecha	Φ_o	Λ_o	Día	δ	t (hrs)
15/11/23	$\frac{13}{120}\pi$	1.571	319	-0.3205178652	12
15/11/23	$\frac{13}{120}\pi$	3.142	319	-0.3205178652	18
22/12/23	$\frac{13}{120}\pi$	1.571	356	-0.4057854415	12
22/12/23	$\frac{13}{120}\pi$	3.142	356	-0.4057854415	18

Orientación del Sol para el día 15 de Noviembre 2023.

La figura 6.6, nos indica, para el día 15 de Noviembre, la orientación del sol a cualquier hora del día para un observador en la CDMX.

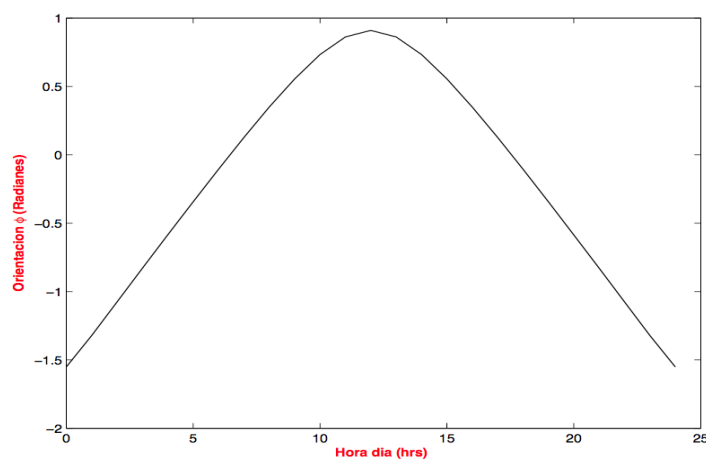


Figura 6.6: Variación de la posición del Sol en el transcurso del día.

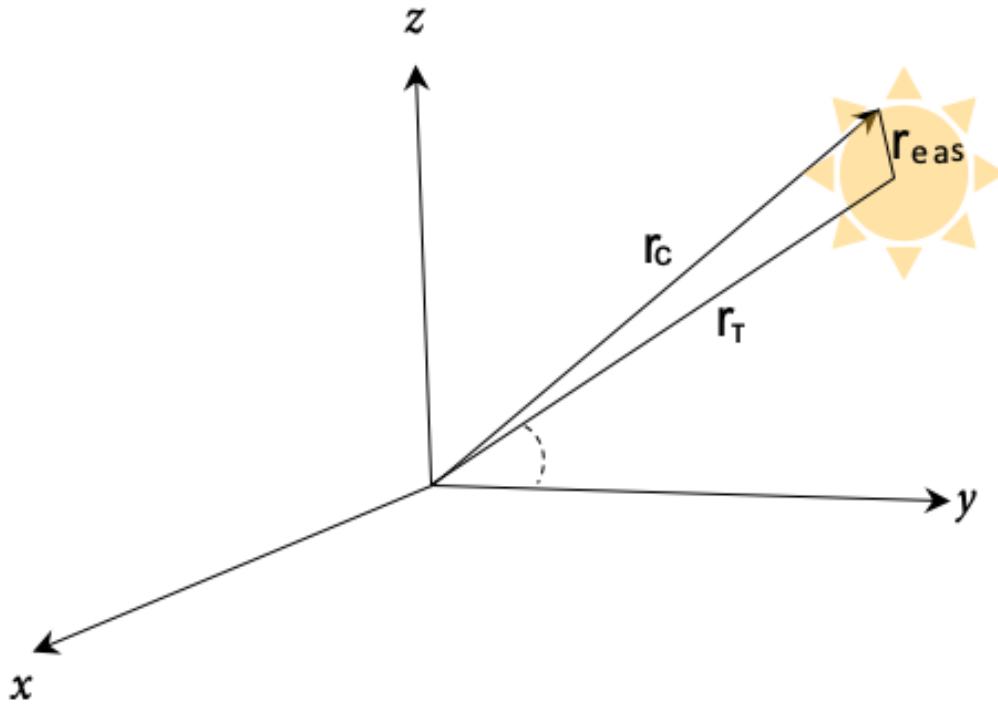
Sol sin Refracción.

Figura 6.7: Imagen del Sol sin refracción, programado en F77.

Ahora podemos calcular la imagen del sol que le llega a un observador antes de refractarse debido a la atmósfera terrestre mediante la ecuación paramétrica (6.14) en el sistema local del observador, donde los rayos provenientes del sol no sufren refracción y después poder comparar, como los rayos sufren refracción debido a la presencia de la atmósfera terrestre a una altura de 100 Km y cuando consideramos una atmósfera de referencia adiabática la altura es aproximadamente 44 Km.

$$\mathbf{r}_c = \mathbf{r}_t + r_{eas} \hat{\mathbf{y}}_\theta, \quad (6.14)$$

donde $\mathbf{r}_c$ representa la parametrización del disco solar figura 6.7, justo antes de refractarse, $\mathbf{r}_t$ es el vector que intersecta con la esfera atmosférica, r_{eas} es el radio del disco solar proyectado en la atmósfera terrestre, por último $\hat{\mathbf{y}}_\theta$ es una rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj, para generar un punto del disco solar, tomando los datos proporcionados de la tabla 6.3, el resultado de la imagen del sol justo antes de refractarse se aprecia en la figura 6.8.

El programa denominado la imagen del sol a partir de la ecuación (6.14), nos proporciona el radio del sol aproximadamente de 0.253786209 Km. Este valor para el radio, es muy importante ya que para nuestro siguiente programa denominado método de Shooting no lineal, toma este parámetro para resolver un problema de condiciones a la frontera, en presencia de una atmósfera de referencia adiabática, es decir cuando hay un medio que refracte los rayos provenientes del sol al ojo humano o a una cámara digital.

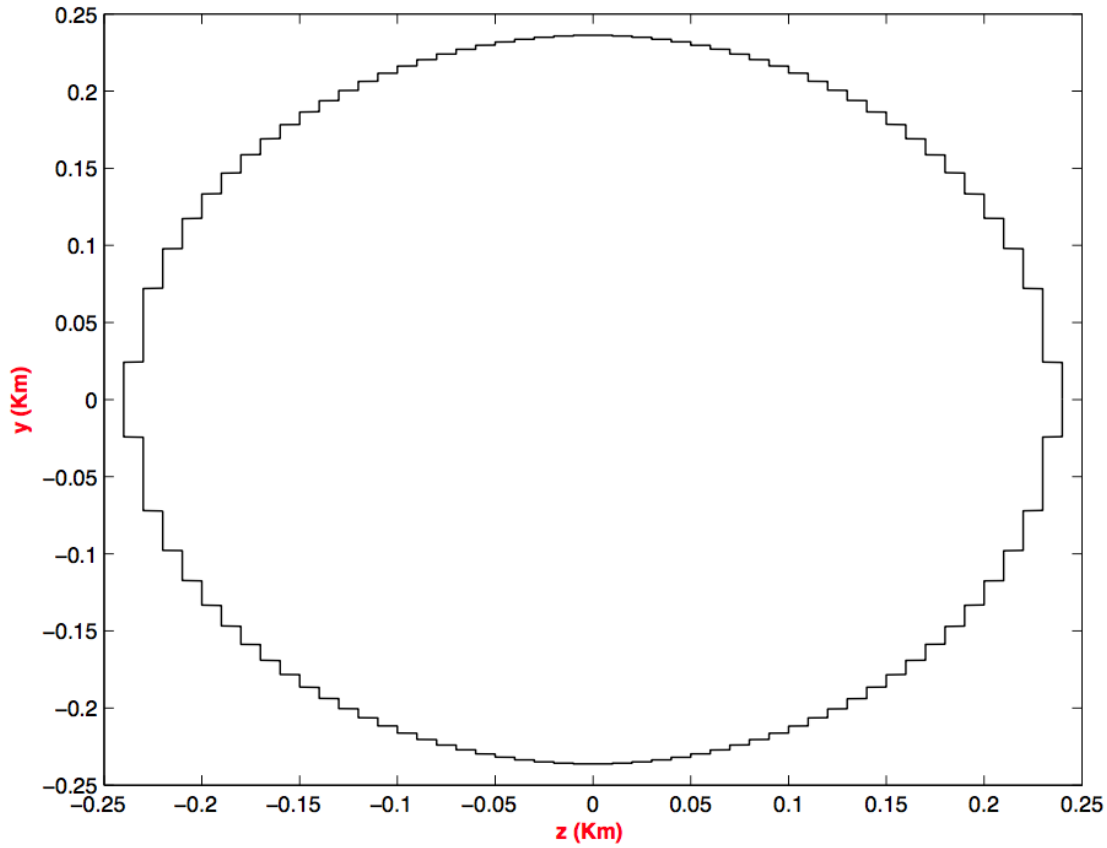


Figura 6.8: Imagen del Sol sin refracción, programado en F77.

Cálculo de Rayos.

El programa dos nombrado imagen del sol sin refracción (**P2ISSNR**) apéndice A.2, obtenemos el radio del sol proyectado en la atmósfera, para usarlo en la solución del cálculo de rayos con condición de frontera usando el método de Shooting no lineal, representado como

$$y'' = f(x, y, y') \quad \text{para} \quad a \leq x \leq b \quad \text{con} \quad y(a) = \alpha \quad \text{y} \quad y(b) = \beta \quad (6.15)$$

donde los valores de a y b son los límites de integración de nuestro sistema, siendo b el límite de integración dentro de la atmósfera de referencia adiabática, tomando los siguientes valores para

$$a = 0 \quad \text{y} \quad b = r \frac{d_{TS}}{R_s}, \quad (6.16)$$

del cual $r = R_a \frac{R_s}{\sqrt{d_{TS}^2 + R_s^2}}$, es el radio aparente del sol proyectado en la atmósfera terrestre, donde $R_a = R_T + R_{ad}$ es el radio de la atmósfera a partir del radio terrestre más el espesor de la atmósfera adiabática, d_{TS} es la distancia relativa entre Sol-Tierra y R_s es el radio real del Sol. Mientras que $\alpha = 0$ y $\beta = r$ son las condiciones de frontera figura 6.9.

El programa tres nombrado imagen del sol método de shooting no lineal (**P3IMSNOL**) apéndice A.3, resuelve la ecuación diferencial de los rayos de luz expresión (6.5), utilizando los valores de la tabla 6.3, resolvemos un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden en el sistema local del observador, haciendo uso de métodos numéricos como: RK4 (Runge Kutta de orden 4), Newton-Raphson y Shooting no lineal, cada uno descritos en el Capítulo 5.

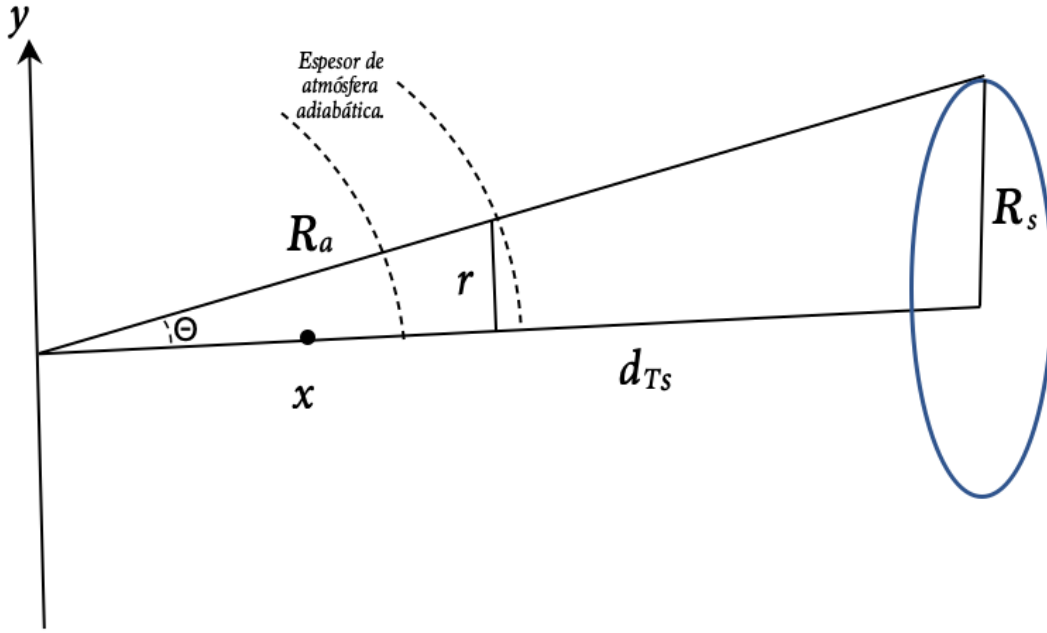


Figura 6.9: Condiciones de frontera para resolver la ecuación de los rayos en el sistema local (x, y, z) del observador mediante el método de Shooting no lineal.

Para calcular un rayo de luz en el sistema local del observador, usamos como dato inicial la longitud Φ_0 del observador. Posteriormente para un día dado calculamos la declinación solar δ para conocer la orientación del sol que es útil en el programa (**P1OS**) para poder conocer los vectores de posición del observador $\mathbf{R}_o$ y del sol $\mathbf{R}_s$, necesarios para poder determinar la latitud Λ_0 y el ángulo ϕ_0 en la que el observador ve el sol, justo arriba o debajo del horizonte.

Teniendo δ , Φ_0 , Λ_0 , resulta fácil conocer $\mathbf{R}_o$ y $\mathbf{R}_s$ para dar las condiciones de frontera expresión (6.16), para realizar el cálculo de rayos a 2m del observador. El programa (**P3IMSNOL**), tiene la estructura de subrutinas o módulos nombrados: RK4, índice de refracción y Derivs. La subrutina RK4 se encarga de integrar el sistema de cuatro ecuaciones de primer orden usando el método numérico de Runge-Kutta de cuarto orden. La subrutina índice de refracción contiene los datos termodinámicos presión P , temperatura T y la altura $z_s = 44$ Km, para una atmósfera de referencia adiabática.

Mientras que la subrutina Derivs contiene la transformación de ∇n del sistema primario (X, Y, Z) al sistema local del observador (x, y, z) usando la regla de la cadena

$$\frac{\partial n(z_s)}{\partial x^i} = \frac{\partial z_s}{\partial x^i} \frac{dn}{dz_s}. \quad (6.17)$$

Esté procedimiento se realiza iteradamente mediante un ciclo Do, el ciclo se detiene cuando el cálculo sobrepase la atmósfera adiabática, los 44Km de altura.

El procedimiento antes mencionado, se realiza para un sólo rayo en el plano del observador, posteriormente se hace una rotación figura 6.10 del plano (x, y) con la expresión

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y_\theta (\cos\theta\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\hat{\mathbf{z}}), \quad (6.18)$$

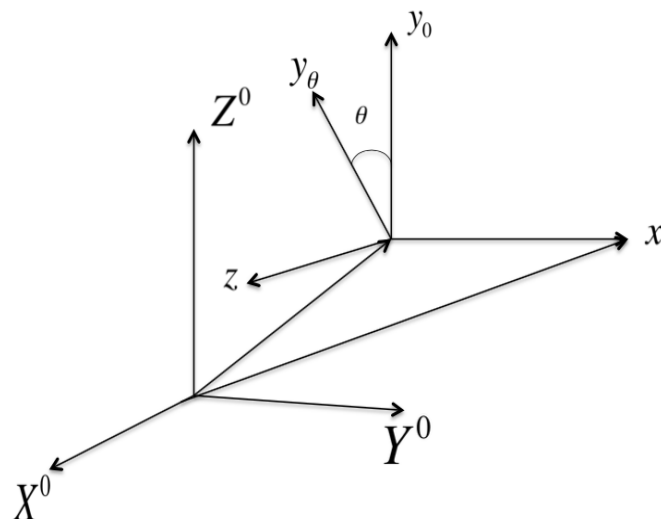


Figura 6.10: Cálculo de rayos de luz en el plano (x, y_θ) .

la expresión (6.18) ayuda a generar planos con diferentes rayos provenientes del sol, al realizar este procedimiento comparamos las soluciones para cada plano que contiene un rayo y notamos que la imagen del sol tiene sólo un eje de simetría el eje y , esto es justamente lo que se observa en la naturaleza figura 6.11

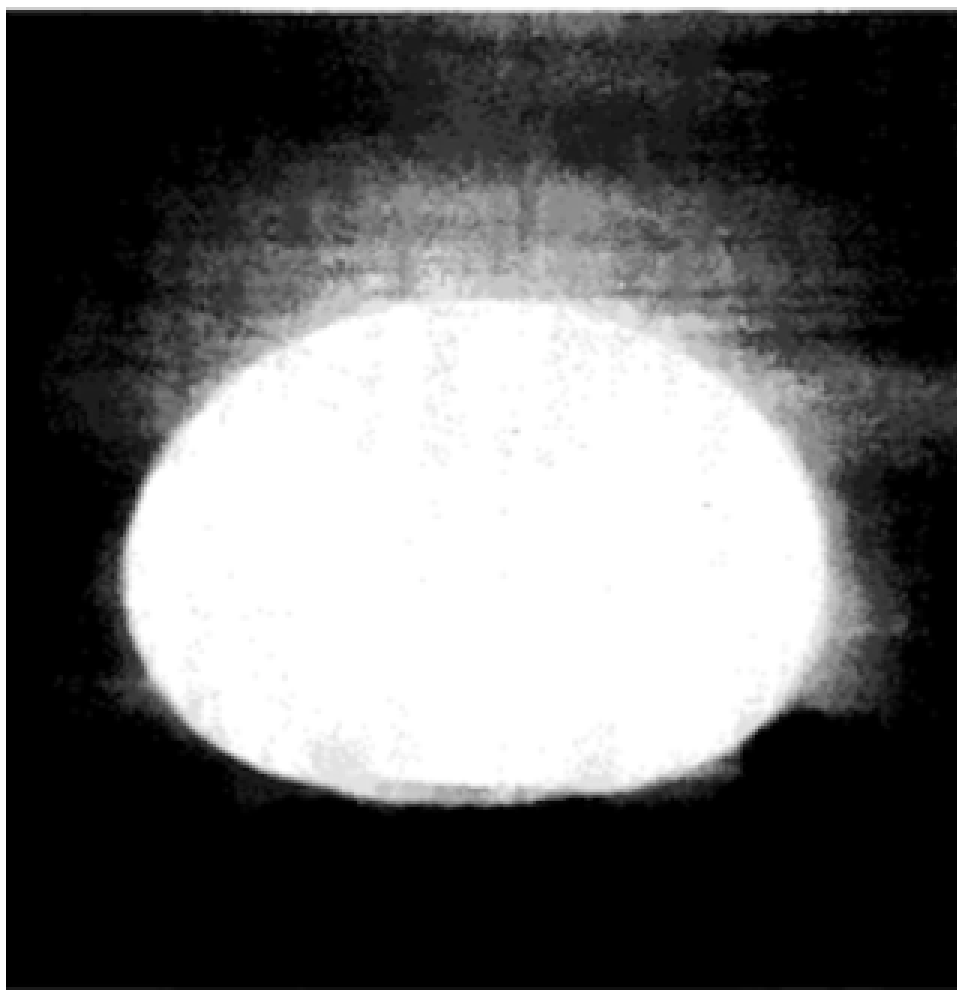


Figura 6.11: Imagen del sol real en la que se observa sólo un eje de simetría [2].

Transformación de coordenadas del Sistema local rotado (x, y_θ) al Sistema local (x, y) .

Los puntos obtenidos por el programa cálculo de rayos, en el sistema local rotado contienen la información de un sólo rayo proveniente de un sólo punto perteneciente al disco solar, para poder obtener un conjunto de rayos, se requiere hacer el cálculo en diferentes planos variando el ángulo θ , para obtener un rayo para cada plano figura 6.12.

Los datos se guardan en archivos que contienen la información del rayo para un cierto plano, para fines prácticos y tiempo de computo, se realizaron 17 cálculos de rayos, es decir un rayo por cada plano. Cabe mencionar que obtenemos 4000 datos por cada rayo, de los cuáles sólo se toma un punto del rayo que se encuentra a $2m$ del observador, ya que a esa distancia definimos el plano imagen (escena), en la que proyectamos la imagen del disco solar, a partir del Ray Tracing.

Empleando la siguiente ecuación de transformación (6.19), podemos mapear los puntos de un rayo en un plano (x, y_θ) , al sistema local del observador (x, y) y observar la intersección de los rayos en el plano imagen para poder apreciar la imagen del Sol que vemos a una cierta hora del día.

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y_\theta (\cos\theta\hat{\mathbf{y}} - \sin\theta\hat{\mathbf{z}}) \quad (6.19)$$

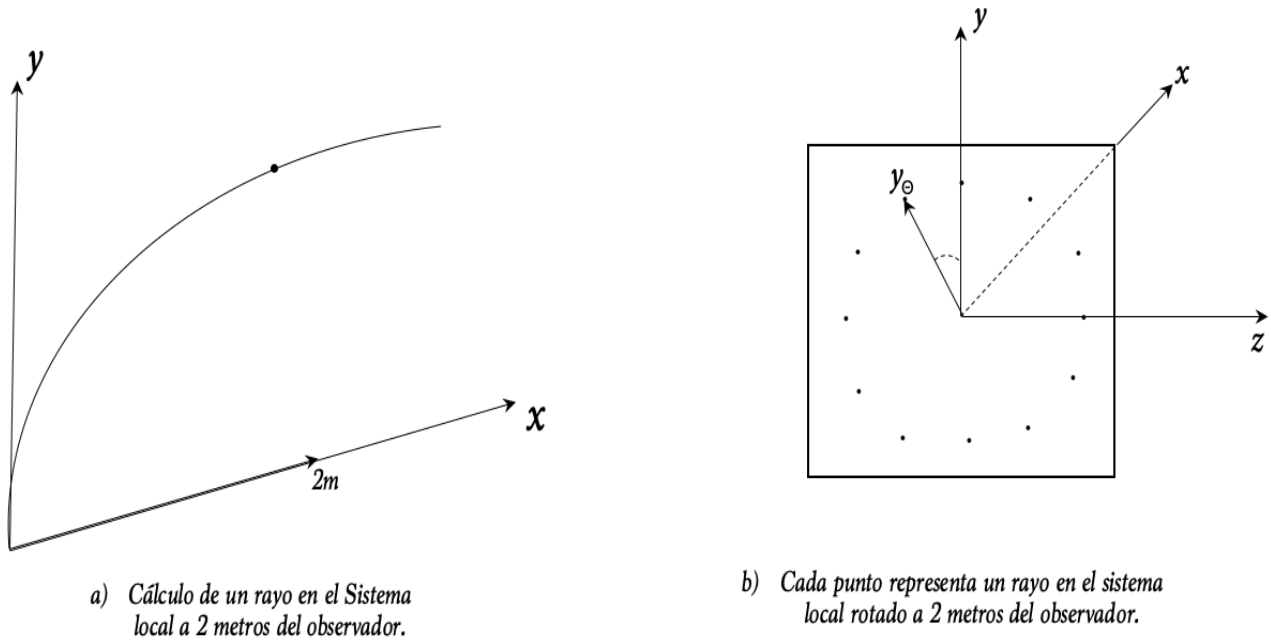


Figura 6.12: Transformación de puntos del sistema local (x, y_θ) al sistema local (x, y) .

Imagen del Sol 12:00 pm 15 de Noviembre 2023.

Para esta fecha y hora del día, percibimos luz solar como se muestra en la figura 6.13.

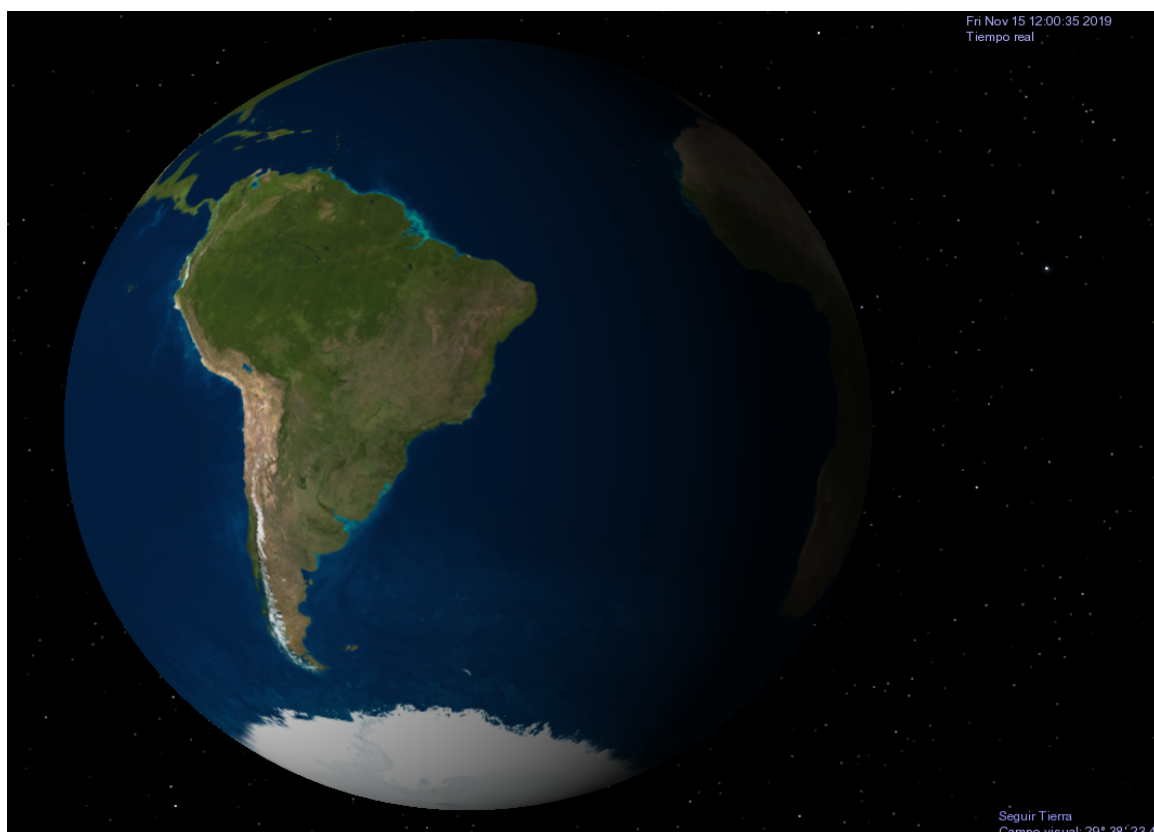


Figura 6.13: Posición de la Tierra día 319, a las 12:00 pm.[8]

Los siguientes datos proporcionados en la tabla 6.4, los obtenemos al resolver la expresión (6.5) como un problema de condiciones a la frontera (6.16), en diferentes planos con origen en el observador, después realizamos la transformación de los puntos de cada plano (x, y_θ) a 2 metros del observador en el plano (x, y) y estos valores son los que utilizamos para graficarlos en Matlab y a su vez validamos nuestros cálculos con el problema de seis ecuaciones de primer orden expresión (6.2), con condiciones iniciales $(\mathbf{R}_0)$ y $(\mathbf{v}_0)$.

Tabla 6.4: Datos para obtener la imagen del Sol en un plano a 2 metros del observador.

Datos 15/Nov/23 12:00 pm.	
Coordenada y	Coordenada z
0.11835452E-03	0.00000000E+00
0.10249839E-03	-0.59177475E-04
0.83689941E-04	-0.83689941E-04
0.59178055E-04	-0.10249940E-03
0.72470796E-20	-0.11835770E-03
-0.59179645E-04	-0.10250215E-03
-0.83693123E-04	-0.83693123E-04
-0.10250317E-03	-0.59180230E-04
-0.11836088E-03	-0.14494549E-19
-0.10250317E-03	0.59180230E-04
-0.83693123E-04	0.83693123E-04
-0.59179645E-04	0.10250215E-03
-0.21741239E-19	0.11835770E-03
0.59178055E-04	0.10249940E-03
0.83689941E-04	0.83689941E-04
0.10249839E-03	0.59177475E-04
0.11835452E-03	0.28987539E-19

Obtenemos la figura 6.14, al graficar los datos de la tabla 6.4 en Matlab, representó la simulación de la imagen del sol con refracción a las 12 : 00 p.m con una atmósfera de referencia adiabática de espesor de 44 Km, que llega a un observador a 2 metros de distancia, calculando como un problema con condiciones a la frontera, usando el método de Shooting no lineal, presentando un sólo eje de simetría en el eje y .

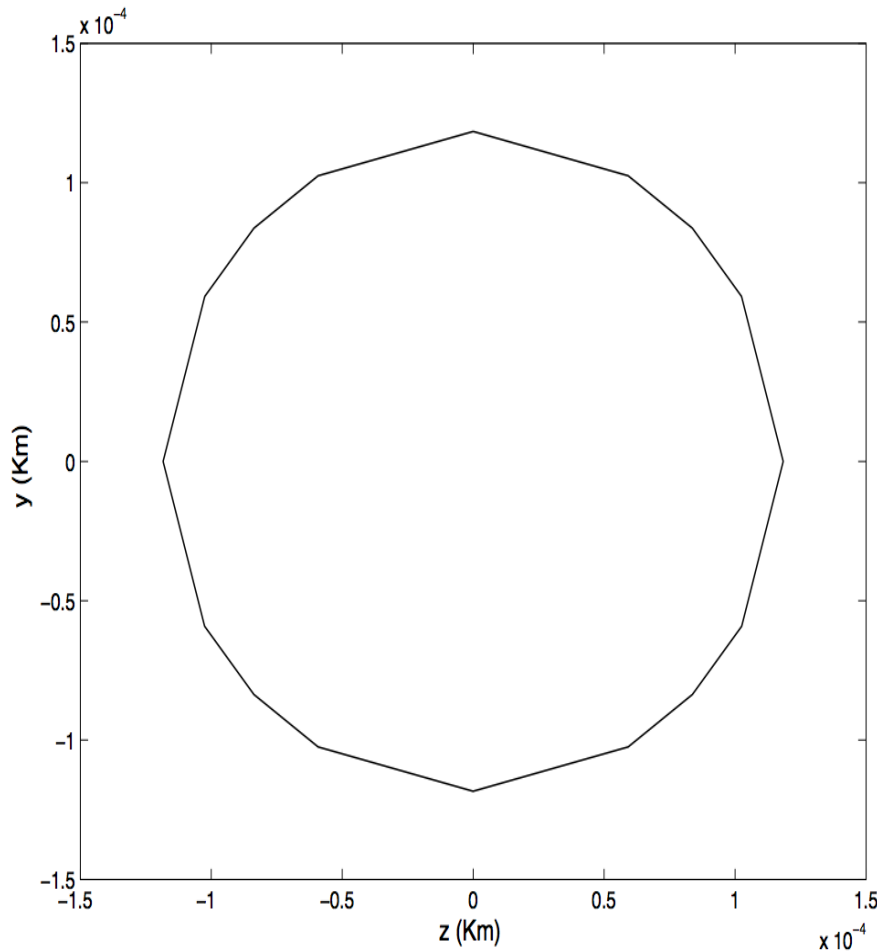


Figura 6.14: Imagen del Sol a partir de la simulación en F77.

Imagen del Sol 18:00 pm 15 de Noviembre 2023.

Se realizó otro cálculo, para el mismo día a las 18:00 pm, ya que el programa (**PIOS**) nos indica a que hora se encuentra por debajo del horizonte figura 6.5, percibiéndolo aún debido a la refracción que sufren los rayos de luz al pasar por la atmósfera terrestre.

Podemos observar que en la figura 6.15, a las 17:00 pm seguimos percibiendo poca luz solar mientras que en la figura 6.16, a las 18:00 pm no tenemos luz solar, sin embargo aún lo vemos debido a la refracción atmosférica.

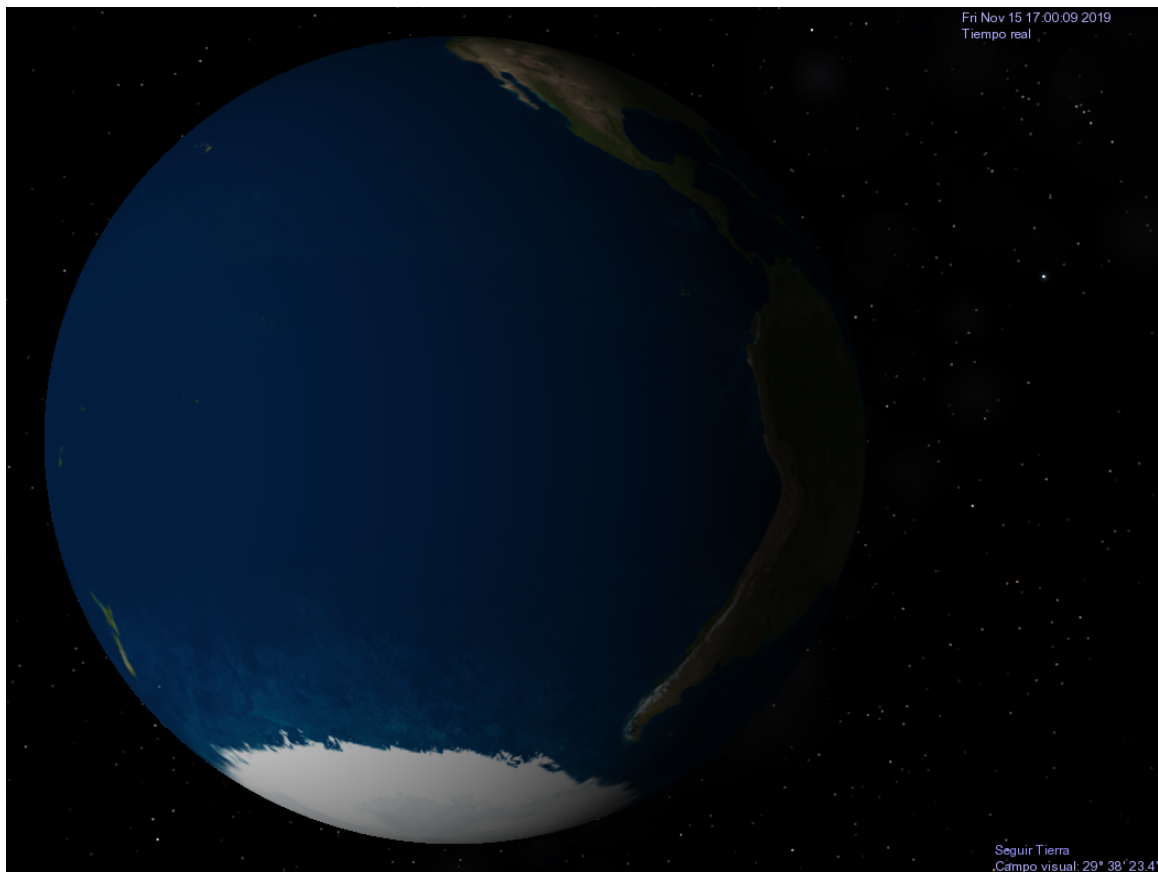


Figura 6.15: Posición de la Tierra día 319, a las 17:00 pm [8].

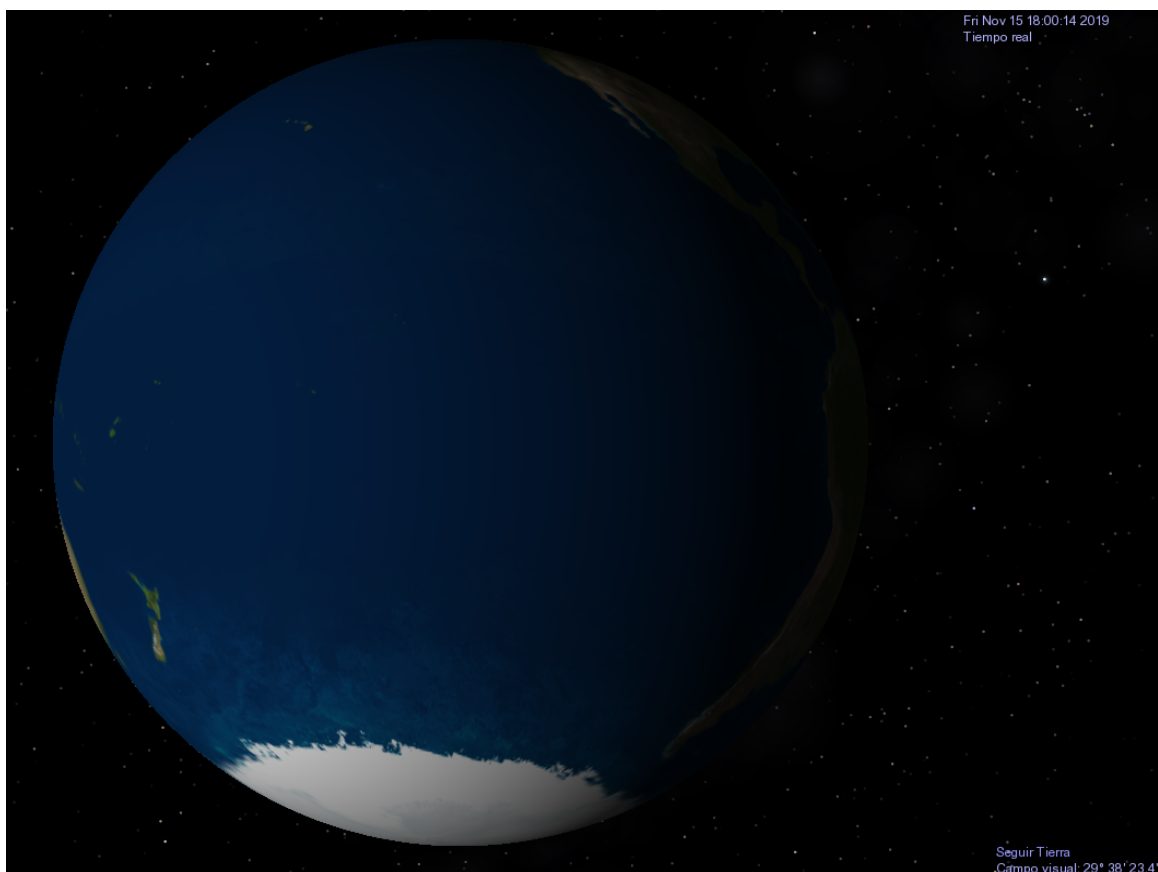


Figura 6.16: Posición de la Tierra día 319, a las 18:00 pm [8].

La simulación de la imagen del Sol sin refracción para las 18:00 pm, podemos apreciarlo en la figura 6.17, obtenida a partir de los datos de la tabla 6.3 y empleando el programa Sol sin refracción (**P10S**).

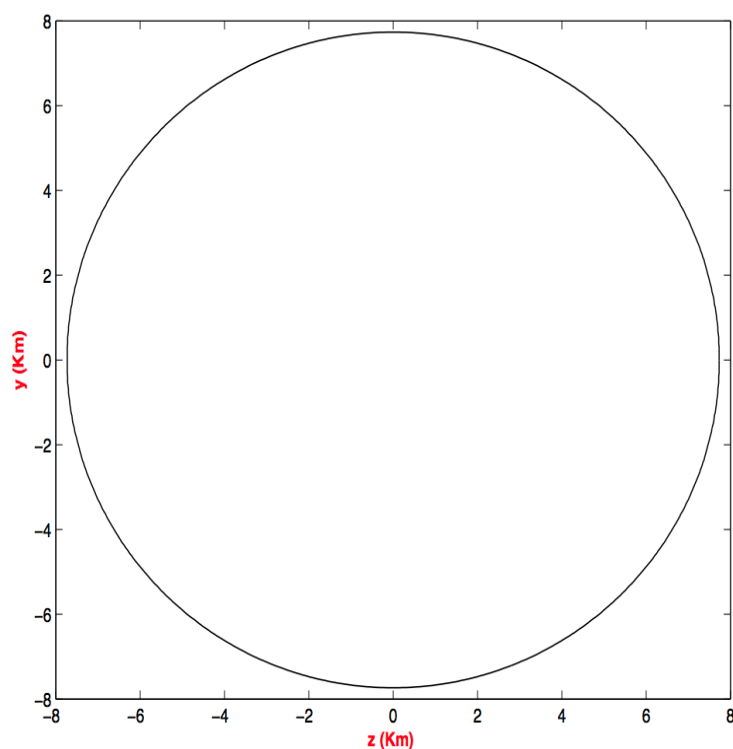


Figura 6.17: Imagen del Sol sin refracción, programado en F77.

Ahora bien, siguiendo el mismo procedimiento anterior podemos obtener una simulación de la imagen del Sol con refracción que llega a un observador a 2 metros de distancia para las 18:00 pm, con ayuda del programa Shooting no lineal como se puede ver en la figura 6.18.

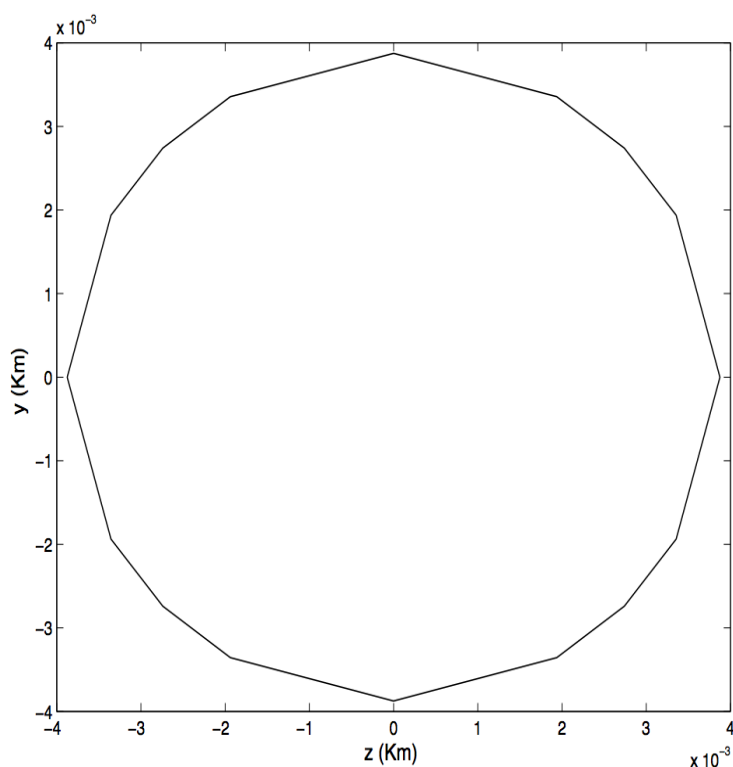


Figura 6.18: Imagen del Sol con refracción a partir de la simulación en F77.

Imagen del Sol en el solsticio de invierno 2023.

El camino aparente del Sol se conoce como eclíptica y pasa sobre el ecuador de la tierra a principios de primavera y otoño. Estos puntos son conocidos como equinoccios. En ellos el día y la noche duran lo mismo.

Mientras que los puntos de la eclíptica más alejados del ecuador se les conoce como solsticios e indican el inicio del invierno y del verano ver figura 6.2.

Durante los solsticios los rayos solares caen más verticales sobre uno de los dos hemisferios y lo calienta más, esto es en verano. Por otra parte, en el otro hemisferio recibe rayos solares de forma inclinada ($\approx -23.24^\circ$), por lo que atraviesan más espacio de la atmósfera y se enfrían antes de llegar a la superficie y se conoce como invierno.

Se realizó el cálculo de rayos para llevar a cabo la simulación de la imagen del Sol, en el solsticio de invierno (22 de Diciembre), empleando los datos de la tabla 6.3, junto con el orden de los programas antes explicados.

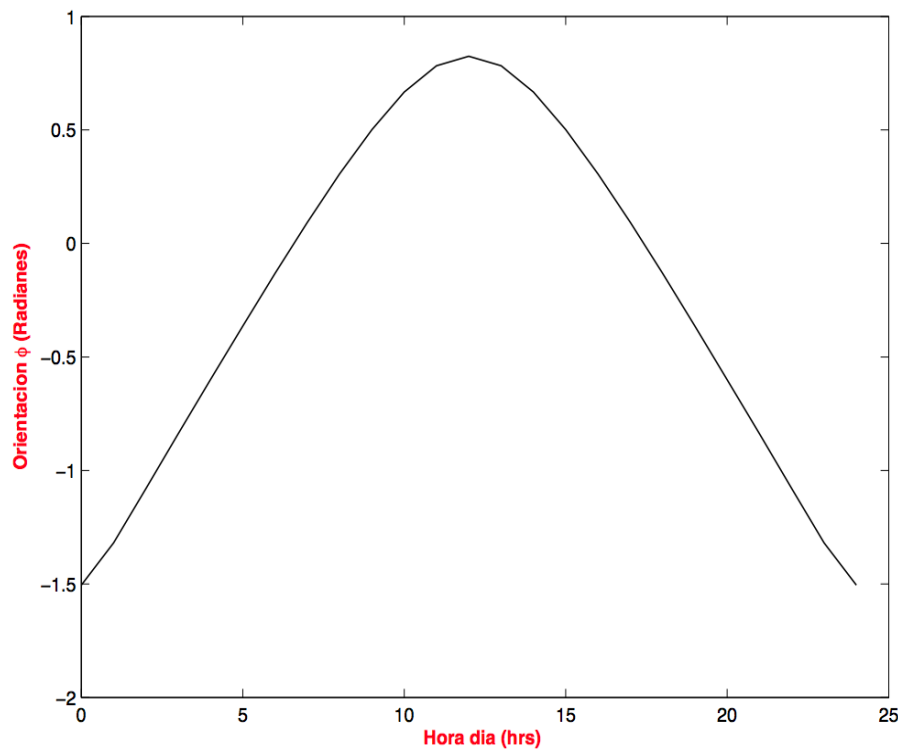


Figura 6.19: Orientación del Sol 22 de Diciembre, 18:00 pm, 2019.

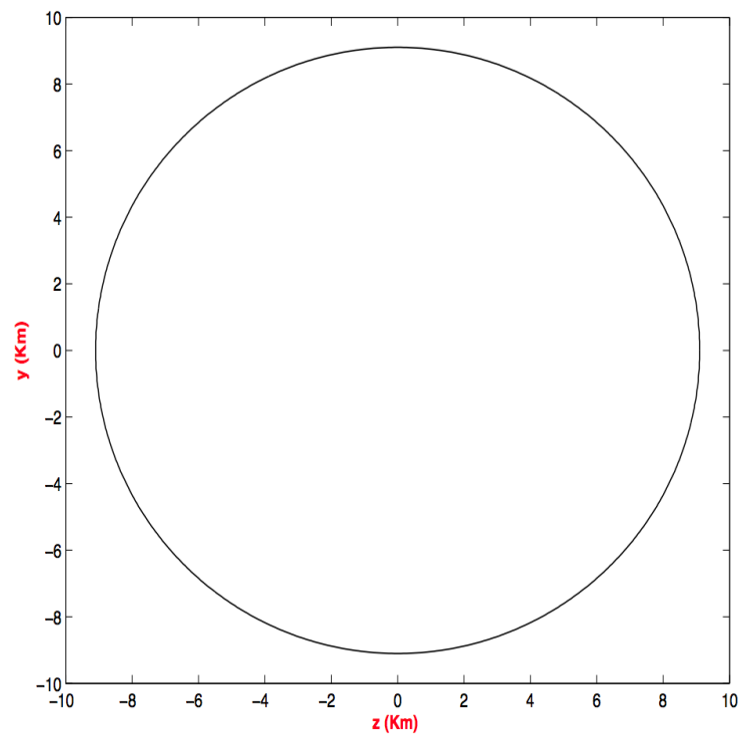


Figura 6.20: Imagen del Sol sin refracción, 22 de Diciembre 18:00 pm, programado en F77.

Para esta fecha y hora del día, percibimos luz solar como se muestra en la figura 6.21

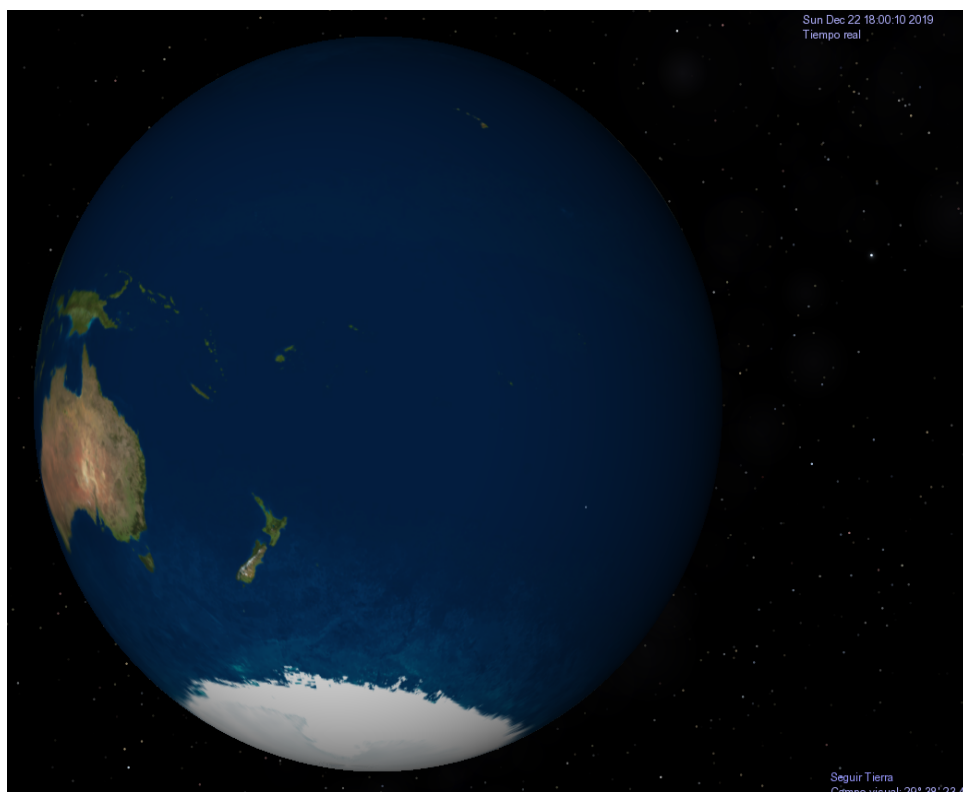


Figura 6.21: Posición de la Tierra día 356,a las 18:00 [8].

Obtuvimos los siguientes datos de la tabla 6.5, al realizar el cálculo de rayos expresión (6.5) con refracción en el sistema local (x, y, z) , como un problema con condiciones a la frontera (6.16) para el solsticio de invierno, en diferentes planos con origen en el observador, después realizamos la transformación de los puntos de cada plano (x, y_θ) a 2 metros del observador en el plano (x, y) y estos valores son los que utilizamos para graficarlos en Matlab y a su vez validamos nuestros cálculos con el problema de seis ecuaciones de primer orden expresión (6.2), con condiciones iniciales $(\mathbf{R}_0)$ y $(\mathbf{v}_0)$.

Tabla 6.5: Datos para obtener la imagen Sol en un plano a 2 metros del observador.

Datos 22/Dic/23 18:00 pm.	
Coordenada y	Coordenada z
0.45600344E-02	0.00000000E+00
0.39491062E-02	-0.22800175E-02
0.32244323E-02	-0.32244323E-02
0.22800186E-02	-0.39491080E-02
0.27921269E-18	-0.45600398E-02
-0.22800212E-02	-0.39491126E-02
-0.32244378E-02	-0.32244378E-02
-0.39491143E-02	-0.22800222E-02
-0.45600452E-02	-0.55842603E-18
-0.39491143E-02	0.22800222E-02
-0.32244378E-02	0.32244378E-02
-0.22800213E-02	0.39491126E-02
-0.83763806E-18	0.45600398E-02
0.22800186E-02	0.39491080E-02
0.32244323E-02	0.32244323E-02
0.39491062E-02	0.22800176E-02
0.45600344E-02	0.11168494E-17

Como resultado obtenemos la figura 6.22, la simulación de la imagen del Sol con refracción que llega a un observador a 2 metros de distancia para las 18:00 pm, con ayuda del programa Shooting no lineal y mapear los puntos del rayo en el plano (x, y_θ) al sistema local del observador (x, y) , se observa que se rompe la simetría respecto al eje z del observador.

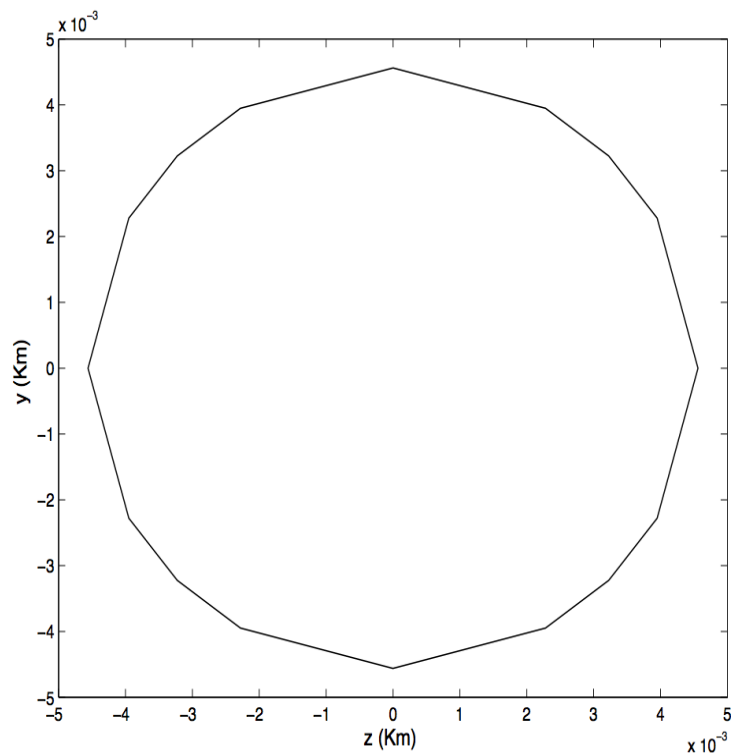


Figura 6.22: Imagen del Sol, 22 de Diciembre 18:00 pm, a partir de la simulación en F77.

Esté es el resultado de la simulación del Ray Tracing, de la imagen del Sol, para el solsticio de invierno para el 22 de Diciembre del año 2023.

CONCLUSIONES

El estudio de la ecuación de transferencia radiativa (RTE) [42] por sus siglas en inglés, nos introdujo en un nuevo campo conocido como RayTracing. Ya que la teoría RTE, nos menciona sobre el proceso complejo de la interacción de la energía con la materia como: absorción, transmisión y emisión de la misma.

El modelo de la RTE, contiene los tres parámetros antes mencionados, generando una ecuación integrodiferencial. Esta ecuación nos da información sobre la interacción, del transporte de energía con la materia.

La teoría nos demostró que es necesario entender como primera instancia la trayectoria de la propagación de la energía en el medio. Durante el estudio del comportamiento de la transferencia radiativa en la atmósfera terrestre, a consecuencia del modelo de placas paralelas, establece que las capas de la atmósfera se pueden dividir en placas y que la energía se propaga en líneas rectas. Mientras que la óptica geométrica afirma, que la energía se dobla hacia el mayor índice de refracción del medio de propagación. Ya que los gases que constituyen la atmósfera terrestre hace que el índice de refracción dependa de la presión y de la temperatura y a su vez, estas dependen de la atmósfera que varía con la vertical.

En la literatura proponen un modelo para la variación del índice de refracción conocido como modelo de Rodgers, expresado como

$$n = 1 + 7.7624 \times 10^{-5} \frac{P}{T} \left[1 + 0.8335 \left(1 + \frac{5748}{T} \right) q \right].$$

donde se ha despreciado la humedad presente en la atmósfera, tal modelo proviene de un caso clásico visto en el Capítulo 2. Nos permite conocer la naturaleza de la dependencia de la P y T, a partir de los modelos de Cauchy y Sellmeier en el cual ambos índices dependen de la frecuencia, dando origen al modelo reportado por Rodgers empleando tablas para ciertas composiciones de gases.

El estudio del comportamiento del índice de refracción nos orienta a considerar la teoría de la óptica geométrica, visto en el Capítulo 1, demostrando que a partir de la ecuación de la eikonal (1.58), podemos obtener una ecuación tipo 2ª Ley de Newton para la óptica geométrica (1.95).

En [2], proponen una solución a la ecuación (1.95), empleando las siguientes condiciones

$$z'(x' = 0) = z'_0 \quad \text{y} \quad \frac{dz'}{dx'}(x' = 0) = \tan \delta, \quad (7.1)$$

simplificándola a una sola ecuación diferencial junto con el siguiente modelo para el índice de refracción

$$m(r') = n(r') + \frac{z'}{r_e}, \quad (7.2)$$

donde $r_e = 6378.4\text{Km}$, por lo que proponen expresar (7.2), por un polinomio cuadrático

$$m(z) = 1 + A + Bz + Cz^2, \quad (7.3)$$

donde los coeficientes A , B y C son funciones de la temperatura, de la presión atmosférica total, presión parcial de vapor de agua y de la frecuencia. De tal forma empleando aproximaciones directamente en las ecuaciones diferenciales es como obtienen una solución a la ecuación (1.95).

Un problema de aplicación en la que emplean la teoría de cálculo de rayos es en la obtención de la imagen del sol en el atardecer ver figuras 7.1 y 7.2 .

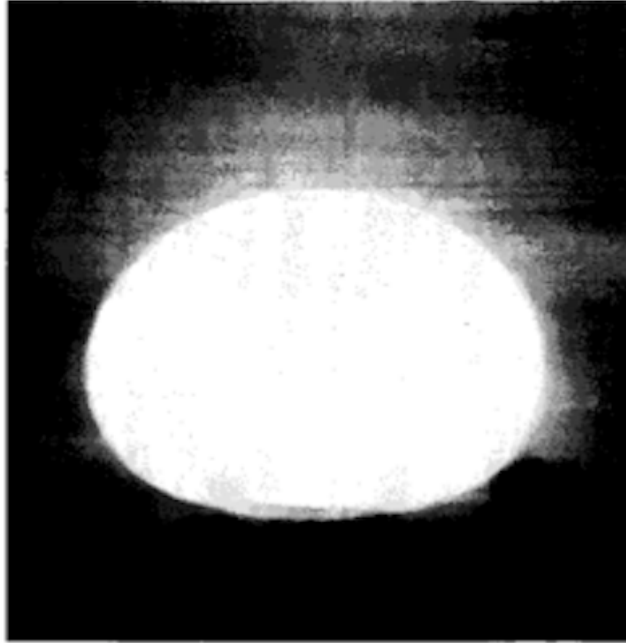


Figura 7.1: Fotografía de la puesta del sol [2].

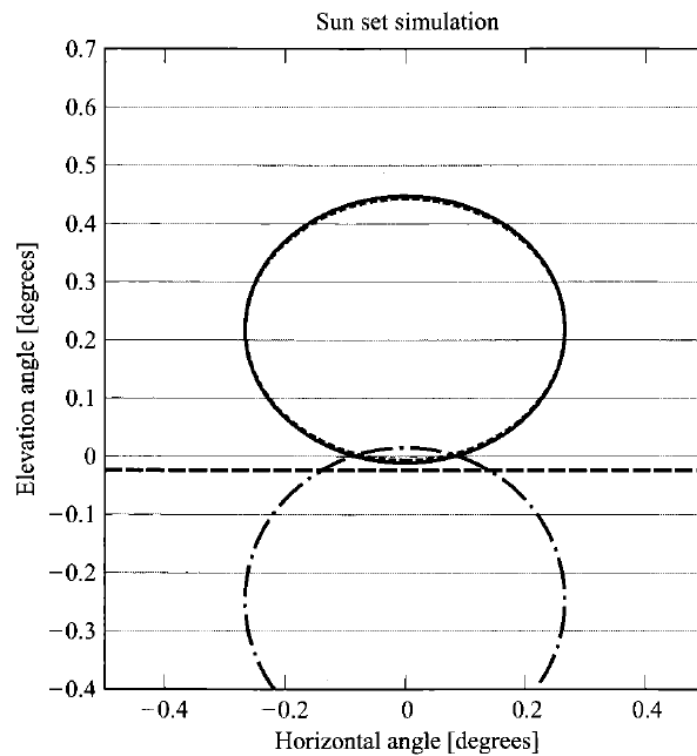


Figura 7.2: Simulación de la imagen del sol publicado en [2].

Por lo que el objetivo principal en este trabajo, fue emplear el modelo propuesto por Rodgers [17] ya que en (7), depende de la variación de cantidades termodinámicas.

Se propusieron tres métodos para resolver (1.95), tal como se muestra en la tabla 7.1.

Método	
Solución de un Sistema de 6 ecuaciones de primer orden sujeto a condiciones iniciales	Con este método se propone resolver el problema mediante un sistema de ecuaciones (4.12) en el sistema primario (X, Y, Z) con origen en el centro de masa terrestre, usando una simetría esférica y dos modelos de atmósfera de referencia: adiabático e isotérmico. Tomando condiciones de valores iniciales al vector de posición y su tangente.
Solución de un sistema de 4 ecuaciones de primer orden sujeto a condiciones iniciales	Se trabajó en simplificar el problema anterior a partir de la conservación del momento angular, esto implica que el vector de posición y el vector tangente son ortogonales al vector de momento y por lo tanto la trayectoria es plana y permite reemplazar la longitud de arco (s) por la variable x . Por lo que podemos construir un sistema de referencia local (x, y, z) con origen en el observador y realizar los cálculos en tal plano y poder simplificarlo a un sistema de 4 ecuaciones de primer orden (4.15), con condiciones iniciales.
Solución de un sistema de 4 ecuaciones de primer orden sujeto a condiciones de frontera usando el Método de Shooting no lineal	La finalidad de haber empleado (4.15), nos permite usar este método numérico y hacerlo más preciso ya que en lugar de resolver un PVI, resuelve un problema de condiciones a la frontera empleando la solución de una iteración de PVI. Tomando las condiciones, el vector de posición del observador y un punto del disco solar.

Tabla 7.1: Métodos de solución a la ecuación de los rayos.

Por lo que, se optó por trabajar con el método de shooting no lineal ya que una forma de verificar que estamos obteniendo una solución correcta es mediante la comparación con el programa de (P3IMSNOL), y este a su vez nos permite validarlo con el programa de 6 ecuaciones de primer orden, teniendo en cuenta que son mallas diferentes debido a que uno emplea la longitud de arco s y los otros dependen de la variable x .

Por lo tanto, podemos observar en la figura 7.3 que se rompe la simetría en el eje z del observador y poder comparar la simulación computacional con la realidad figuras (7.4 y 7.5), para la imagen del sol en el solsticio de invierno a partir de la teoría del Raytracing implementada en este trabajo de maestría.

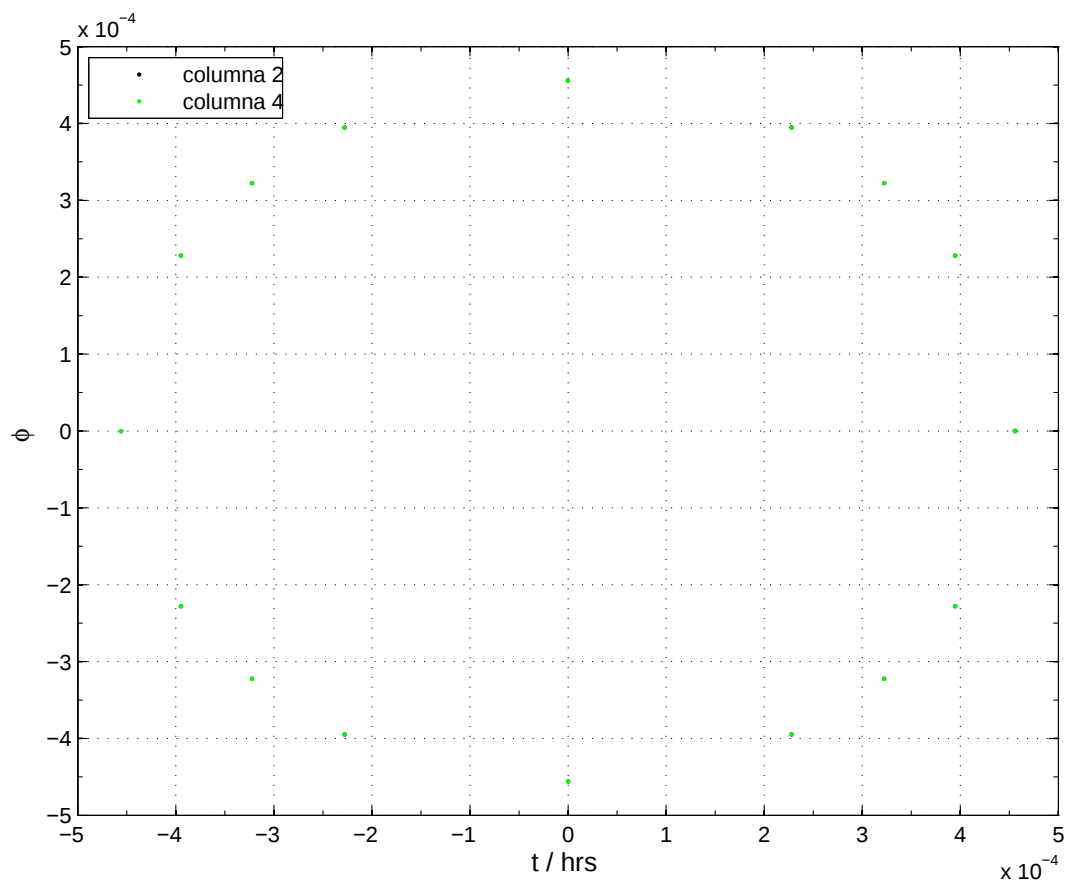


Figura 7.3: Imagen del Sol, 22 de Diciembre 18:00 pm, a partir de la simulación en F77.

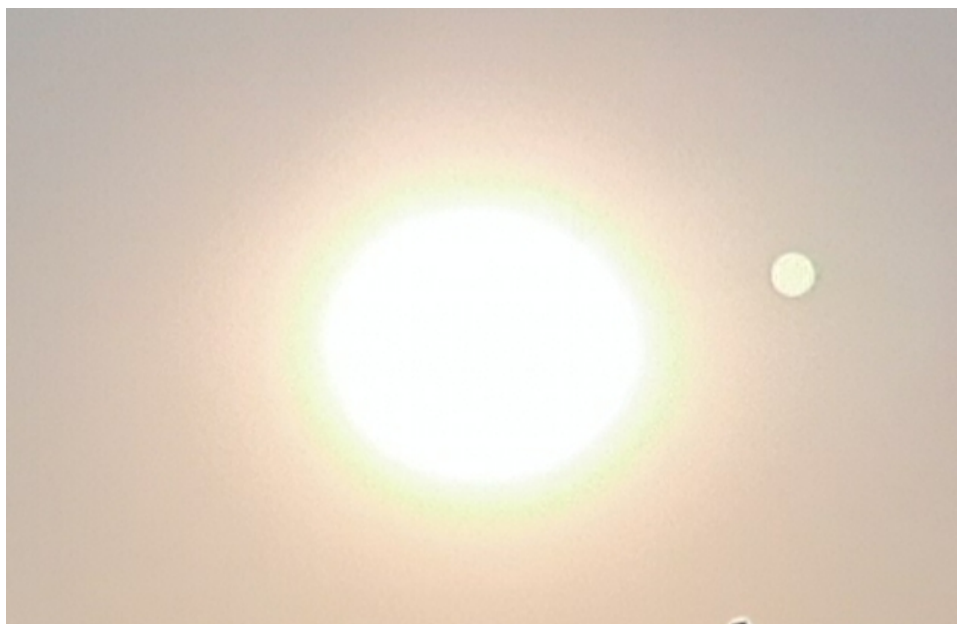


Figura 7.4: Foto real del sol, tomada el 22 de Diciembre del 2023, a las 18:00 pm.



Figura 7.5: Foto real del sol empleando un filtro MEXSA 12 FW, tomada el 22 de Diciembre del 2023, a las 18:00 pm.

PSÉUDOCÓDIGOS

Diagramas de flujo de Programas realizados en F77.

Orientación del Sol.

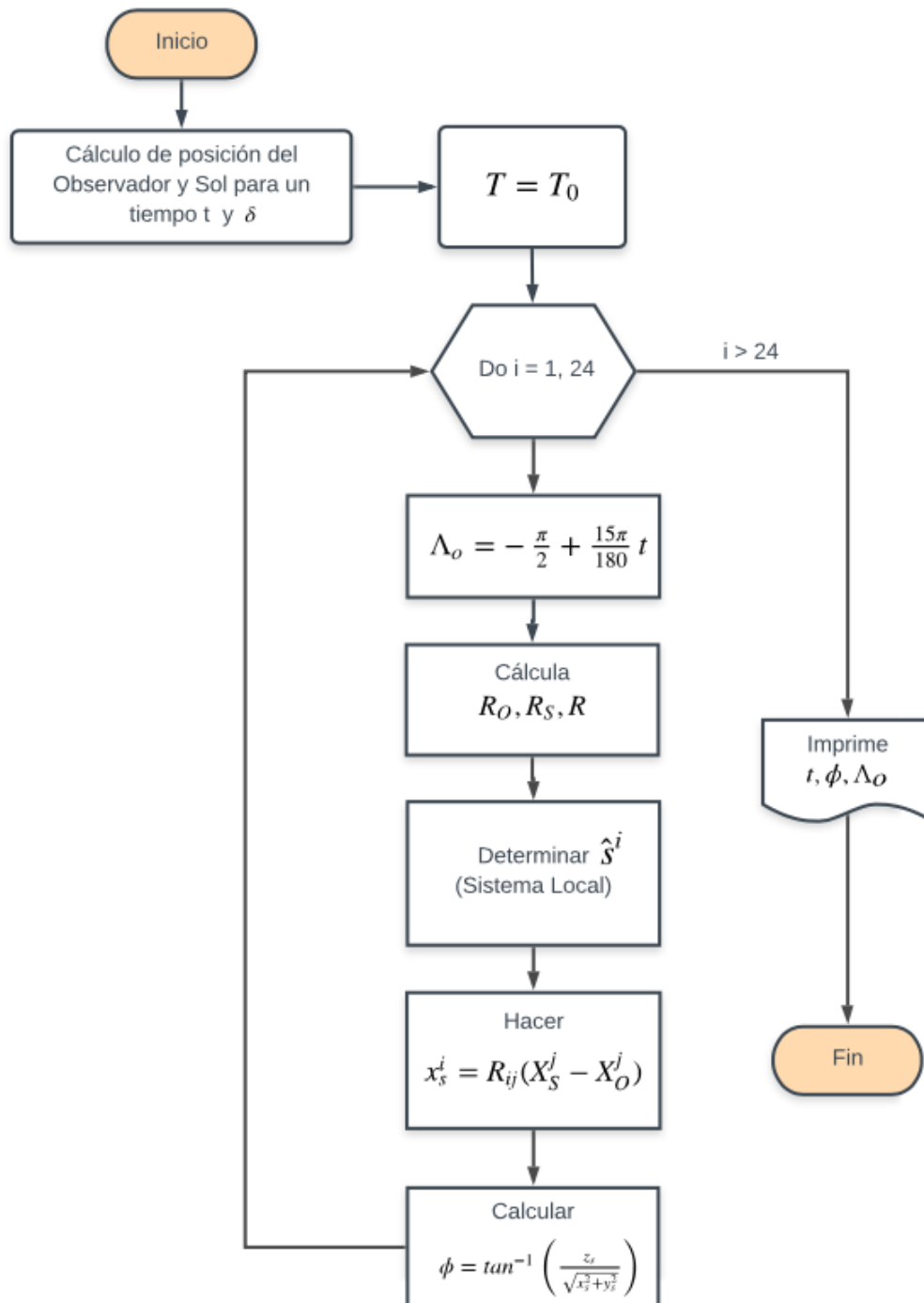
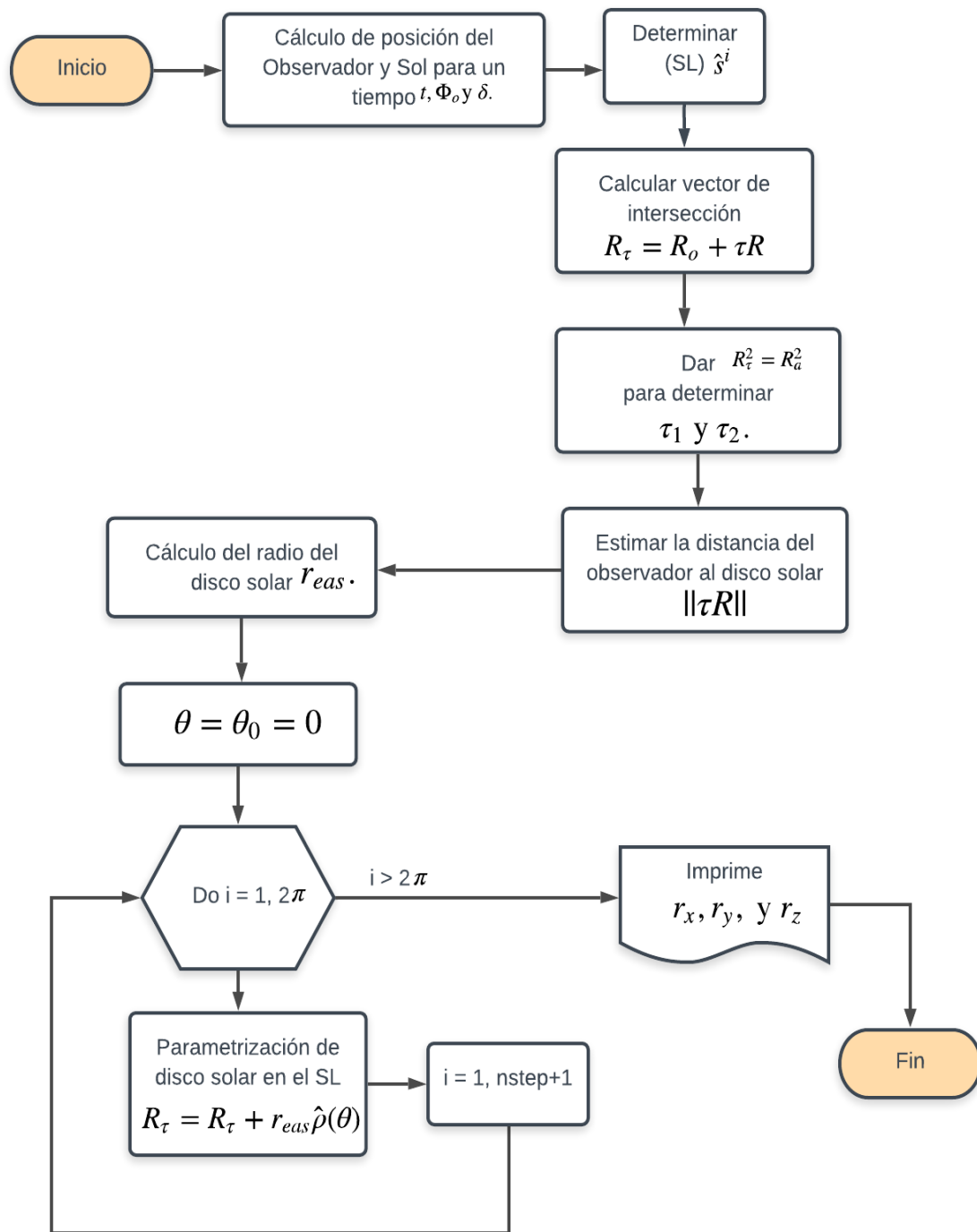
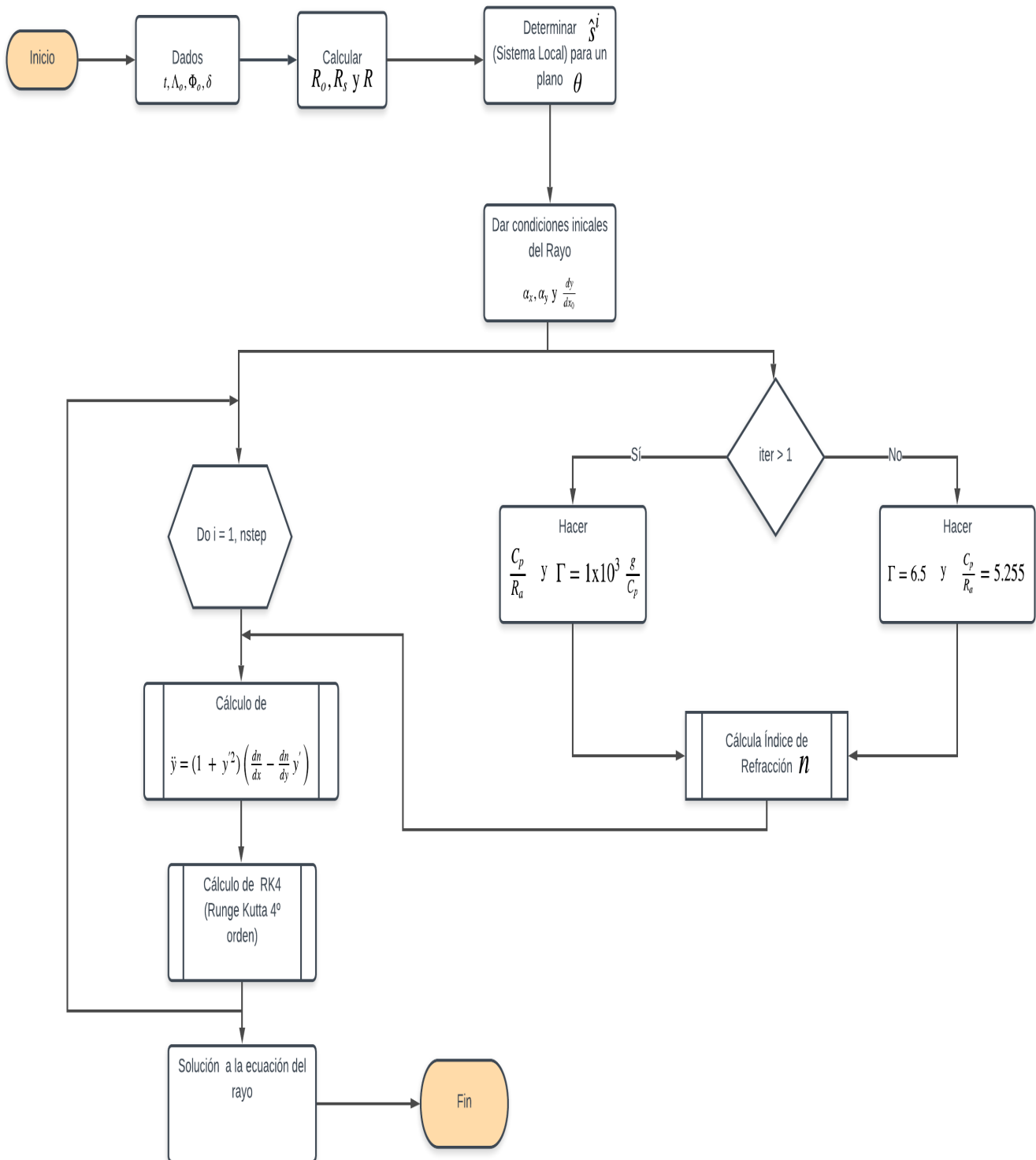


Figura A.1: Rayo de luz en el plano (x,y_θ) [9].

Imagen del Sol sin refracción.Figura A.2: Rayo de luz en el plano (x, y_θ) [9].

Cálculo de Rayos con Shooting no lineal.Figura A.3: Rayo de luz en el plano (x, y_θ) [9].

Apéndice B

SOLUCIÓN GENERAL DE LA ECUACIÓN DE ONDA EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL

La solución a la ecuación de onda en tres dimensiones

$$\psi_{tt} - v^2 \nabla^2 \psi = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (\text{B.1})$$

sujeto a condiciones de frontera periódicas $\psi|_{x=-\frac{L}{2}} = \psi|_{x=\frac{L}{2}}$ y $\partial_x \psi|_{x=-\frac{L}{2}} = \partial_x \psi|_{x=\frac{L}{2}}$ análogamente para $y, z = \pm \frac{L}{2}$ y sujeto a las condiciones iniciales $\psi(t=0, \mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$, $\partial_t \psi(t=0, \mathbf{r}) = g(\mathbf{r})$. Desarrollando el problema en series de Fourier mediante

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_{kmn} \psi_{kmn}(t) \phi_{kmn}(\mathbf{r}) \\ f &= \sum_{kmn} f_{kmn}(t) \phi_{kmn} \\ g &= \sum_{kmn} g_{kmn}(t) \phi_{kmn}. \end{aligned}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en (B.1) se tiene

$$\partial_{tt} \psi + v^2 (-\nabla^2) \psi = \sum_{kmn} \phi_{kmn} [\ddot{\psi}_{kmn}(t) + v^2 \lambda_{kmn} \psi_{kmn}] = 0.$$

Por lo tanto ψ_{kmn} debe satisfacer

$$\ddot{\psi}_{kmn} + v^2 \lambda_{kmn} \psi_{kmn} = 0, \quad (\text{B.2})$$

con $\psi_{kmn}(0) = f_{kmn}$, $\dot{\psi}_{kmn}(0) = g_{kmn}$, conviene definir $w_{kmn} \equiv \sqrt{\lambda_{kmn}}$ entonces (B.2) queda

$$\ddot{\psi}_{kmn} + v^2 w_{kmn}^2 \psi_{kmn} = 0,$$

y tiene como solución

$$\psi_{kmn} = c_1 \cos v w_{kmn} t + c_2 \sin v w_{kmn} t = \tilde{c}_1 e^{i v w_{kmn} t} + \tilde{c}_2 e^{-i v w_{kmn} t},$$

con $\tilde{c}_1, \tilde{c}_2$ determinadas por las condiciones iniciales, generando un sistema de ecuaciones

$$\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 = f_{kmn}$$

$$\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 = g_{kmn}.$$

Así llegamos a la solución

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{kmn} \left[\tilde{c}_{kmn}^1 e^{i v w_{kmn} t} + \tilde{c}_{kmn}^2 e^{-i v w_{kmn} t} \right] e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}, \quad (\text{B.3})$$

en (B.3) aparecen dos tipos de soluciones fundamentales

$$\begin{aligned} \psi^{(+)} &= e^{i(\mathbf{k}_{kmn} \cdot \mathbf{r} + v w_{kmn} t)} \quad \text{onda que se mueve en la dirección } -\mathbf{k}_{kmn} \\ \psi^{(-)} &= e^{i(\mathbf{k}_{kmn} \cdot \mathbf{r} - v w_{kmn} t)} \quad \text{onda que se mueve en la dirección } \mathbf{k}_{kmn} \end{aligned}$$

La solución de onda plana en $\mathbb{R}^3$, mediante la serie triple de Fourier tal que

$$\tilde{f}(\mathbf{r}) = \sum_{kmn} f_{kmn} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \sum_{kmn} \frac{1}{L^3} \langle e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} | f \rangle e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{kmn} \langle e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} | f \rangle e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \Delta w_x \Delta w_y \Delta w_z,$$

con $\Delta w_x \equiv \frac{2\pi}{L} = \Delta w_y = \Delta w_z$. En el límite cuando $L \rightarrow \infty$ obtenemos

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{f}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d k_x d k_y d k_z, \quad (\text{B.4})$$

considerando que $\tilde{f}(\mathbf{k}) \equiv \tilde{f}(k_x, k_y, k_z) = \mathcal{F}[f(\mathbf{r})] \equiv \int f(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}$, esto nos permite conocer que $\mathcal{F}\left[\frac{\partial}{\partial x} f\right] = i k_x \mathcal{F}[f]$ y por tanto $\mathcal{F}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} f\right] = (i k_x)^2 \mathcal{F}[f]$.

Aplicando la transformada de Fourier al problema (B.1) resulta

$$\tilde{\psi}_{tt} + v^2(k_x^2, k_y^2, k_z^2)\tilde{\psi} = 0 \quad \text{con} \quad \tilde{\psi} = \tilde{f}, \quad \partial_t \tilde{\psi} = \tilde{g}, \quad (\text{B.5})$$

vamos a definir a $k \equiv +\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$ y expresar a (B.5) de la forma $\tilde{\psi}_{tt} + v^2 k^2 \tilde{\psi} = 0$ con la solución del tipo

$$\tilde{\psi} = c_1 e^{i v k t} + c_2 e^{-i v k t}, \quad (\text{B.6})$$

empleando las condiciones del problema obtenemos un sistema de ecuaciones para las constantes como sigue

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= \tilde{f} \\ c_1 - c_2 &= \frac{\tilde{g}}{i v k} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c_1 &= \frac{1}{2} \left[\tilde{f} + \frac{\tilde{g}}{i v k} \right] \\ c_2 &= \frac{1}{2} \left[\tilde{f} - \frac{\tilde{g}}{i v k} \right]. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (B.6) la solución queda

$$\tilde{\psi} = \frac{1}{2} \left[\tilde{f} + \frac{\tilde{g}}{i v k} \right] e^{i v k t} + \frac{1}{2} \left[\tilde{f} - \frac{\tilde{g}}{i v k} \right] e^{-i v k t},$$

esto da la expresión deseada

$$\psi = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{\psi}] = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{\psi}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} \quad \text{con} \quad d\mathbf{k} = d k_x d k_y d k_z,$$

donde ψ es

$$\psi = \frac{1}{2(2\pi)^3} \left\{ \int \left[\tilde{f} + \frac{\tilde{g}}{i v k} \right] \underbrace{e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + k v t)}}_{\psi^{(-)}} d\mathbf{k} + \int \left[\tilde{f} - \frac{\tilde{g}}{i v k} \right] \underbrace{e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - k v t)}}_{\psi^{(+)}} d\mathbf{k} \right\}, \quad (\text{B.7})$$

en (B.7) aparecen ondas planas expresadas por $\psi^{(-)} = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + k v t)}$ y $\psi^{(+)} = e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - k v t)}$.

Como $\hat{\mathbf{k}}$ toma todas las direcciones en la integral, concluimos que $\psi(\mathbf{r}, t)$ es la superposición de ondas planas en todas las direcciones que se mueve con velocidad v .

Para simplificar la integral consideramos primero el caso $f(\mathbf{r}) = 0$ reescribimos la integral de $\tilde{g} = \mathcal{F}[g]$

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int \frac{\tilde{g}}{i v k} (e^{i v k t} - e^{-i v k t}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \tilde{g} \frac{\text{sen}(k v t)}{k v} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left[\int e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} g(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right] \frac{\text{sen}(k v t)}{k v} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{k} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \left[\int \frac{\text{sen}(k v t)}{k v} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d\mathbf{k} \right] g(\mathbf{r}') d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Para calcular la integral en $\mathbf{k}$ usamos coordenadas esféricas a partir de la geometría representada en la figura B.1.

²En el caso de $\psi^{(+)}$, el conjunto de puntos definidos por la ecuación $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - k v t = 0$ ó $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} = v t$ es un plano ortogonal a $\hat{\mathbf{k}}$ que se aleja del origen en la dirección $\mathbf{k}$ con velocidad v , en forma análoga para la función $\psi^{(-)}$, la ecuación $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + k v t = 0$ ó $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} = -v t$, es la ecuación de un plano ortogonal a $\hat{\mathbf{k}}$ que se mueve en la dirección $-\hat{\mathbf{k}}$ con velocidad v .

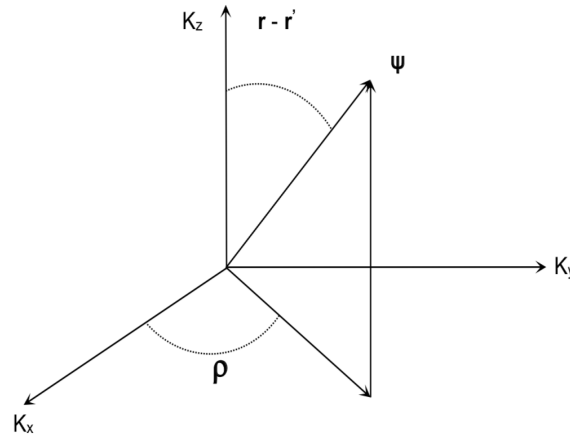


Figura B.1: Interpretación física de la propagación de una onda.

De la figura B.1, se tiene $k_x = k \sin \psi \cos \rho$, $k_y = k \sin \psi \sin \rho$, $k_z = k \cos \psi$, esto da $d\mathbf{k} = k^2 \sin \psi d\mathbf{k} d\psi d\rho$, mientras que $\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') = k \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \cos \psi$ y la integral en $\mathbf{k}$ toma la forma

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin(kvt)}{kv} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d\mathbf{k} &= \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{\sin(kvt)}{kv} e^{ik\|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| \cos \psi} \cdot k^2 \sin \psi d\rho d\psi dk \\ &= 2\pi \int_0^\infty \frac{k \sin(kvt)}{v} \left[\int_0^\pi e^{ikR \cos \psi} \sin \psi d\psi \right] dk \quad \text{con } \|\mathbf{r} - \mathbf{r}'\| = R, \end{aligned}$$

el resultado de la integral dentro del corchete es $\frac{2}{kR} \sin(kR)$ por tanto

$$\int \frac{\sin(kvt)}{kv} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d\mathbf{k} = \frac{4\pi}{vR} \int_0^\infty \sin(kR) \cdot \sin(kvt) dk,$$

por lo que $\psi(\mathbf{r}, t)$ queda

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{i}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{v} \int d\mathbf{r}' \frac{g(\mathbf{r}')}{R} \left[\int_0^\infty \sin(kR) \cdot \sin(kvt) dk \right].$$

Para simplificar esta integral usamos la transformación

$$x' - x = R \sin \theta \cos \phi, \quad y' - y = R \sin \theta \sin \phi, \quad z' - z = R \cos \theta, \quad (\text{B.9})$$

la cual conduce a

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{(2\pi)^3 v} \int_0^\infty dR \cdot R \cdot g(\mathbf{r}') \int_0^\pi d\theta \cdot \sin \theta \int_0^{2\pi} d\phi \left[\int_0^\infty \sin(kR) \cdot \sin(kvt) dk \right],$$

la integral entre parentesis cuadrado se simplifica con una identidad como sigue: sea $F(x)$ una función impar en

$L^2(-\infty, \infty)$ entonces

$$\tilde{F}(k) = \mathcal{F}[F] = \int_{-\infty}^\infty F(x') e^{-ikx'} dx' = -2i \int_0^\infty F(x') \sin kx' dx',$$

donde $\tilde{F}$ es impar, $\tilde{F}(-k) = -\tilde{F}(k)$ por lo que

$$\begin{aligned} F(x) &= \mathcal{F}^{-1}[\tilde{F}] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \tilde{F}(k) e^{ikx} dk \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \tilde{F}(k) [\cos kx + i \sin kx] dk, \\ &= \frac{2i}{2\pi} \int_0^\infty \tilde{F}(k) \sin kx dk = \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \tilde{F}(k) \sin kx dk, \end{aligned}$$

sustituyendo $\tilde{F}(k) = -2i\mathcal{F}_s(F)$ obtenemos

$$F(x) = \frac{i}{\pi} \int_0^\infty \sin kx \cdot dk \left[-2i \int_0^\infty F(x') \sin kx' dx' \right],$$

lo que se reduce a la identidad

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin kx \cdot dk \left[\int_0^\infty F(x') \sin kx' dx' \right],$$

reescribiendo obtenemos a siguiente identidad

$$\int_0^\infty \sin kx \cdot dk \left[\int_0^\infty F(R) \sin kR dR \right] = \frac{\pi}{2} F(x),$$

de acuerdo a la identidad anterior

$$\int_0^\infty \sin(k \cdot \underbrace{vt}_x) dk \cdot \left[\int_0^\infty \underbrace{Rg(x', y', z')}_{F(R)} \cdot \sin(kR) dR \right] = \frac{\pi}{2} F(R)|_{R=vt}$$

donde x', y', z' se obtienen de las ecuaciones de transformación (B.9).

Así llegamos a la solución deseada

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \frac{t}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} g[\mathbf{r}' = \mathbf{r} + vt\hat{\mathbf{r}}(\theta, \phi)] \sin\theta d\theta d\phi = t \langle g \rangle_{\mathbf{r}}, \quad (\text{B.10})$$

donde $\hat{\mathbf{r}} = \sin\theta \cos\phi \mathbf{i} + \sin\theta \sin\phi \mathbf{j} + \cos\theta \mathbf{k}$ y $t \langle g \rangle_{\mathbf{r}}$ es el valor promedio de $g(\mathbf{r})$ sobre la esfera de radio vt con centro en $\mathbf{r}$. El área de la esfera con centro en $\mathbf{r}$ y radio vt es $dS = (vt)^2 \sin\theta d\theta d\phi$ con $S = 4\pi(vt)^2$, el valor medio de una función en dicha esfera es

$$\begin{aligned} \langle g \rangle_s &= \frac{1}{S} \int_S g[\mathbf{r}' = \mathbf{r} + vt\hat{\mathbf{r}}] dS, \\ &= \frac{1}{4\pi(vt)^2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} g[\mathbf{r}' = \mathbf{r} + vt\hat{\mathbf{r}}] (vt)^2 \sin\theta d\phi d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} g(\mathbf{r}' = \mathbf{r} + vt\hat{\mathbf{r}}) \cdot \sin\theta d\phi d\theta, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\psi(\mathbf{r}, t) = t \langle g \rangle_s. \quad (\text{B.11})$$

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Born Max y E. Wolf. Principles of optics: Eelectromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light. In *Cambridge UP*, August 2009.
- [2] Thomas Michael Eugene. Inverse Optical Propagation in Linear Media: Atmospheric Gases and Particles, Solid-State Components, and Water. In *Oxford: Oxford UP*, 2006.
- [3] Eugene Hecht. Óptica. In *Boston: Pearson Education*, 2017.
- [4] E. L,Fleming, S, Chandra, J. J,Barnett, y M,Corney. *Zonal mean temperature, pressure, zonal wind and geopotential height as functions of latitude*. Springer-Verlag London, 1990.
- [5] Redmon Joe. *Ray Tracing*. PhD thesis, Middlebury College, May 20011.
- [6] Wilford. Zdunkowski, Trautmann Thomas., y Bott Andreas. *Radiation in the Atmosphere A Course in Theoretical Meteorology*. Cambridge University Press, 2007.
- [7] Faires J. Douglas y Richard L.Burden. Análisis Numérico. In *Madrid: International Thomson Editores*, 2004.
- [8] Laurel Chris. Celestia. <https://celestia.es>, 2001.
- [9] Lucid Software Inc. Lucidchart. <https://www.lucidchart.com/pages/es>, 2008.
- [10] John David Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc. Printed in the United States of America, 1999.
- [11] Griffiths David, J. Introduction to Electrodynamics. In *Cambridge,United Kingdom: Cambridge UP*, 2019.
- [12] Roald K Wangsness. Campos Electromagnéticos. In *Editorial Limusa, S.A DE C.V*, 2001.
- [13] Landau L.D. Teoría Clasica de los Campos. In *Editorial Reverté, S.A,España*, 1992.
- [14] Jerry B. Marion y Mark A. Heald. *Classical Electromagnetic Radiation*. John Wiley & Sons, Inc. Printed in the United States of America, 1995.
- [15] Núñez Peralta Marco. Libro de Meteorología. In *Universidad Autónoma Metropolitana*, 1992.
- [16] Torres del Castillo G.F y Rubalcava-García I. Solutions of the helmholtz equation given by solutions of the eikonal equation. *Revista Mexicana de Física*, 63:211–213, May 2017.
- [17] Rodgers C.D. Inverse Methods for Atmospheric Sounding: Theory and Practice. In *Singapore: World Scientific*, 2008.
- [18] Ambaum Maarten H.P. *Thermal Physics of the Atmosphere*. Wiley-Blackwell, 2010.
- [19] Piña Garza Eduardo. *Termodinámica*. Impreso en México, Editorial Limusa, 1978.
- [20] Salby Murry L. *Fundamentals of Atmospheric Physics*. Academic Press, 1995.
- [21] Melnikova Irina N. *Short-wave Solar Radiation in the Earth's Atmosphere: Calculation, Observation, Interpretation*. Berlin:Springer, 2010.
- [22] Rizzi R y R. Saunders. *Principles of remote sensing of atmospheric parameters from space*. ., 1998.
- [23] Sen Zekai. *Solar Energy Fundamentals and Modeling Techniques*. Springer-Verlag London, 2008.

- [24] Steiner Andrea, et al. *New Horizons in Occultation Research Studies in Atmosphere and Climate*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- [25] Geoffrey K Vallis. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*. Princeton University, New Jersey, 2006.
- [26] Roger Smith K. *Lectures on Tropical Meteorology*. ., Junio 2003.
- [27] K. N. Liou. *An Introduction to Atmospheric Radiation*. Academic Press. An imprint of Elsevier Science, 2002.
- [28] Andrews David G. *An Introduction to atmospheric Physics*. Cambridge, UK: Cambridge UP, 2000.
- [29] Caballero Rodrigo. *Physics of the atmosphere*. Stockholm University, Sweden, 2012.
- [30] Andrew S Glassner. *An Introduction to Ray Tracing*. Academic Press. United States, 1989.
- [31] Grant R. Fowles y George L Cassiday. *Analytical Mechanics*. Printed in the United States of America, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2005.
- [32] Goldstein Hebert. *Classical Mechanics*. Impreso en España, Editorial REVERTÉ, 1987.
- [33] Huelmo Dario. Eenergía solar uso en industrias de procesos. Technical report, Material basado en trabajo Ing. Raúl Prando, .
- [34] López-Puertas Manuel y Frederic William Taylor. *Non-LTE Radiative Transfer in the Atmosphere*. River Edge(N.J): World Scientific, 2001.
- [35] Roman L Roberto. Eenergía solar y chile: Desafíos y oportunidades. Technical report, Universidad de Chile, .
- [36] Foster. Robert, Ghassemi. Majid, y Cota Alma. *Solar Energy Renewable Energy and the Environment*. CRC Press Taylor & Francis Group, 2010.
- [37] Graziani Frank. *Computational Methods in Transport*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Printed in Netherlands, 2006.
- [38] Williams Earl G. *Fourier Acoustics: Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holography*. Academic Press. Printed in the United Kingdom at the University Press, Cambridge, 1999.
- [39] Perrin Agnë Ben Sari-Zizi, Najate y Jean Demaison. *Remote Sensing of the Atmosphere for Environmental Security*. New York: Springer, 2006.
- [40] Gorbunov Michael, Stefanescu Razbvan, Irisov Vladimir, y Zupanski Dusanka. Variational assimilation of radio occultation observations into numerical weather prediction models: Equations, strategies, and algorithms. *Remote Sensing*, 11:2–22, December 2019.
- [41] Siegel Robert y John R. Howell. *Radiation Transfer With Absorbing, Emitting, and Scattering Media*, tomo 3. National Aeronautics and Space Administration, 1971.
- [42] R.M. Goody y Yung Y.L. *Atmospheric Radiation Theoretical Basis*. Oxford University Press, 1989.
- [43] Bohren Craig, F y Bruce A. Albrecht. *Atmospheric Thermodynamics*. New York: Oxford UP , 1998.
- [44] Zemansky Mark W. *Física general*. Aguilar, 1981.
- [45] Edgar Codd, E. Nehru, y Y. Wu. Online algorithms considered harmful. *TOCS*, 1:20–24, April 2005.
- [46] James R Holton. *An introduction to dynamic meteorology*. Department of atmospheric Sciences University of Washington Seattle, Washington, 2004.
- [47] Advanced Computation y Exploration of data. Qtgrace. <https://qtgrace.soft112.com>, .

- [48] A. Milton Kimball y Schwinger J. *Electromagnetic Radiation: Variational Methods, Waveguides and Accelerators*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.
- [49] Stephen T. Thorton y Jerry B Marion. *Classical Mechanics*. Printed in the United States of America, Brooks/Cole, Cengage Learning, 2008.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00141

Matrícula: 2162800466

Cálculo de trayectorias de radiación electromagnética en medios estratificados y su aplicación a la atmósfera terrestre.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 17:00 horas del día 13 del mes de septiembre del año 2024 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. ELEUTERIO CASTAÑO TOSTADO
DR. ANGEL REFUGIO TERAN CUEVAS
DR. MARCO ANTONIO NUÑEZ PERALTA

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)

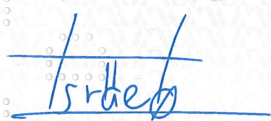
DE: ISRAEL LOPEZ IRETA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

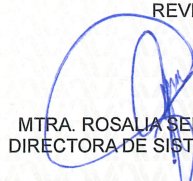
Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

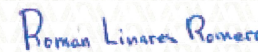



ISRAEL LOPEZ IRETA
ALUMNO

REVISÓ


MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI


DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE


DR. ELEUTERIO CASTAÑO TOSTADO

VOCAL


DR. ANGEL REFUGIO TERAN CUEVAS

SECRETARIO


DR. MARCO ANTONIO NUÑEZ PERALTA