



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería

Departamento de Matemáticas

“Análisis de la dinámica del modelo de Maasch-Saltzman
para ciclos glaciares”

Tesis que presenta

Marco Polo García Rivera

Matrícula 2182800631

Para obtener el grado de Maestro en Ciencias (Matemáticas)

Martha Alvarez R.

Directora: Dra. Martha Alvarez Ramírez

Jurados

Dr. Joaquín Delgado Fernández

Dr. Carlos García Azpeitia

Dr. Julio Ernesto Solís Daun

Iztapalapa, Ciudad de México, diciembre 2020.

A la memoria de mi padre

Agradezco a mi hijo y a mi madre por todo el amor y el apoyo incondicional que siempre me han brindado en las buenas como en las malas.

Gracias a mi asesora, la Dra. Martha Alvarez Ramírez por su asesoría, paciencia y amistad a lo largo de la realización de este trabajo de tesis. Además, quiero agradecer al Dr. José Antonio García Rodríguez por haberme permitido compartir con él largas discusiones amenas y de gran aprendizaje acerca de los temas estudiados en el presente trabajo.

Agradezco a los doctores Joaquín Delgado Fernández, Carlos García Azpeitia y Julio Ernesto Solís Daun por haber evaluado esta tesis y hacerme sugerencias que permitieron enriquecer la presentación de los resultados.

Este proyecto de tesis fue llevado a cabo con el apoyo de la beca de CONACyT con el número 905424.

Índice general

Introducción	1
1. El modelo de Maasch-Saltzman	5
1.1. Formulación del modelo	6
1.2. Puntos de equilibrio	9
1.3. Estabilidad lineal de los puntos de equilibrio	10
2. Modelo simétrico lento-rápido	21
2.1. Variedades invariantes	22
2.2. Sistema lento	31
2.3. Bifurcaciones globales	34
3. Modelo asimétrico lento-rápido	45
3.1. Variedades lentas	45
3.2. Centros de organización y bifurcaciones de tipo Hopf	47
3.3. Ecuación de Liénard y bifurcación de Hopf	56
3.4. Análisis de la bifurcación de Bogdanov-Takens	62
Apéndice. Teoremas de Andronov et al. para sistemas en el plano	87
Apéndice 1. El mapeo de Poincaré	89
Apéndice 2. Foco en el origen	90

Apéndice 3. Bifurcación de Hopf	91
Bibliografía	95

Índice de figuras

1. Ciclo límite representativo de 100 Kyr. Cada ciclo es asimétrico: una rápida deglaciación es seguida por una lenta glaciación. . . .	3
1.1. Curvas de valores propios en el plano complejo para $P_0 = (0, 0, 0)$ y $p \in [0, 2]$	11
1.2. Curvas de valores propios en el plano complejo para $P_1 = (x_1, -x_1, -x_1)$ y $p \in [0, 0.9]$	12
1.3. Curvas de valores propios en el plano complejo para $P_2 = (x_2, -x_2, -x_2)$ y $p \in [0, 0.9]$	13
1.4. Curvas de valores propios en el plano complejo para $P_0 = (0, 0, 0)$ y $q \in [0, 2]$	14
1.5. Curvas de valores propios en el plano complejo para $P_0 = (0, 0, 0)$ y $q \in [0, 2]$	15
1.6. Curvas de valores propios en el plano complejo para $P_1 = (x_1, -x_1, -x_1)$ y $r \in [0.9, 2]$	16
1.7. Curvas de valores propios en el plano complejo para $P_2 = (x_2, -x_2, -x_2)$ y $r \in [0.9, 2]$	17
1.8. Curvas de valores propios en el plano complejo para $P_1 = (x_1, -x_1, -x_1)$ y $s \in [0.9, 2]$	19
1.9. Curvas de valores propios en el plano complejo para $P_2 = (x_2, -x_2, -x_2)$ y $s \in [0.9, 2]$	20
2.1. Variedades invariantes desbordantes M , M_1 y M_2 , donde M_1 corresponde a la parte tangencial del flujo en M y M_2 a la parte normal del flujo en M ; figura tomada de [13].	23

2.2.	Trayectoria cercana a la variedad invariante desbordante M ; figura tomada de [13].	24
2.3.	Comportamiento de los vectores tangentes bajo la dinámica lineal en M ; figura tomada de [13].	25
2.4.	Regiones de estabilidad lineal e inestabilidad de los puntos de equilibrio en el plano de parámetros r y p con $q = \frac{1}{\varepsilon}$ y $s = 0$	36
2.5.	Retrato fase del sistema (2.11) con condiciones iniciales en la región I, para $p = 0.2$, $r = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$. El punto P_0 es un nodo estable.	37
2.6.	Retrato fase del sistema (2.11) en la región II para $p = 0.8$, $r = 0.4$, $\varepsilon = 0.01$, para diferentes condiciones iniciales. P_0 es un foco estable.	38
2.7.	Retrato fase del sistema (2.11) en la región III para $p = 1.8$, $r = 1.5$, $\varepsilon = 0.01$. Para dos diferentes condiciones iniciales P_0 es un foco inestable.	38
2.8.	Retrato fase del sistema 2.11 en la región IV para $p = 1.9$, $r = 1.8$ y $\varepsilon = 0.01$ con condiciones iniciales diferentes para las cuales P_0 es un nodo inestable.	39
2.9.	Retrato fase del sistema 2.11 en la región V para $p = 1.9$, $r = 1.95$, $\varepsilon = 0.01$, tomando condiciones iniciales diferentes para las cuales P_0 es un punto silla, mientras que P_1 y P_2 son nodos inestables.	41
2.10.	Retrato fase del sistema (2.11) en la región VI para $p = 1.2$, $r = 1.8$, $\varepsilon = 0.01$, tomando condiciones iniciales diferentes para las cuales P_0 es un punto silla, mientras que P_1 y P_2 son focos inestables.	42
2.11.	Retrato fase del sistema (2.11) en la región VII para $p = 0.4$, $r = 1.2$, $\varepsilon = 0.01$, tomando condiciones iniciales diferentes para las cuales P_0 es un punto silla, mientras que P_1 y P_2 son focos estables.	43
2.12.	Retrato fase del sistema 2.11 en la región VIII para $p = 0.01$, $r = 0.10$, $\varepsilon = 0.01$, tomando condiciones iniciales para las cuales P_0 es un punto silla, P_1 y P_2 son nodos estables.	44
3.1.	Bifurcación de Hopf supercrítica en el espacio fase y de parámetros; figura tomada de [8].	51
3.2.	Bifurcación de Hopf subcrítica en el espacio fase y de parámetros; figura tomada de [8].	52

3.3. Regiones de estabilidad de los puntos de equilibrio P_0, P_1 y P_2 para el sistema (3.5) con $s = 0.8$	56
3.4. Órbitas homoclínicas $\tilde{\Gamma}_0^\pm$: (a) $\delta = 2$ y $\mu \in [0.3, 1.8]$, (b) $\mu = 2$ y $\delta \in [0.3, 1.8]$	67
3.5. Existencia del punto hiperbólico P_η y la perturbación de la órbita homoclínica que conecta al punto de equilibrio silla $P_0 = (0, 0)$ con sí mismo.	68
3.6. Sección normal Σ	69
3.7. Gráficas de $\lambda_0^\pm(\delta)$ a orden cero en η , es decir, $\frac{I_2^\pm(\delta)}{I_0^\pm(\delta)}$	72
3.8. Gráfica de: (a) $\lambda_1^+(\delta) = (u_1^*)^2 + \frac{2u_1^*I_1^+ + I_2^+}{I_0^+}$ y (b) $\lambda_1^-(\delta) = (u_1^*)^2 + \frac{2u_1^*I_1^- + I_2^-}{I_0^-}$	77
3.9. Retrato fase de la ecuación de Duffing (3.43).	78
3.10. Gráficas de $\lambda_0^\pm(\delta)$ y $\lambda_0^\cup(\delta)$. Las tres curvas de bifurcación coinciden para $\lambda = 4/5$ cuando $\delta \rightarrow 0$, generando dos órbitas homoclínicas simétricas.	79
3.11. Gráficas de $\lambda_1^\pm(\delta)$ y $\lambda_1^\cup(\delta)$. Las curvas de bifurcación $\lambda_1^+(\delta)$ y $\lambda_1^\cup(\delta)$ coinciden para $\lambda = 1/9$ cuando $\delta \rightarrow 2$	81
3.12. Digrama de bifurcación de (3.45); figura tomada de [6].	83
3.13. Gráfica de $R(\alpha)$ con las curvas de nivel asociadas; figura tomada de [6].	85
3.14. Terminación del diagrama de bifurcación de (3.45); figura tomada de [6].	85
3.15. Diagrama de despliegue de (2.11) para $\varepsilon = 0.01$ ($q = 100$) con una aproximación del orden $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ en h_ε . Aquí Q es el centro de organización, e_0 está asociada a la bifurcación de Hopf supercrítica para P_0 , mientras que e_1, e_2 están asociadas a la bifurcación de Hopf subcrítica para P_1 y P_2 respectivamente, T se encuentra asociada a una bifurcación de tipo trinche, BH a una bifurcación homoclínica y SN a una bifurcación de tipo silla-nodo.	86
3.16. El origen es un punto silla-nodo; figura tomada de [10].	88
3.17. Cúspide en el origen; figura tomada de [10].	89

3.18. El mapeo de Poincaré; figura tomada de [10].	90
3.19. Retrato fase cuando $\mu \leq 0$ y $\mu > 0$. Figura tomada de [10].	92
3.20. Diagrama de bifurcación y la familia 1-paramétrica de ciclos límite Γ_μ resultando una bifurcación de Hopf. Figura tomada de [10]. . .	93
3.21. Bifurcación supercrítica de Hopf donde el número de Lyapunov $\sigma < 0$.	93
3.22. Bifurcación subcrítica de Hopf donde el número de Lyapunov $\sigma > 0$.	93

Introducción

Los sistemas dinámicos no lineales juegan un papel muy importante en casi todas las áreas de la ciencia y la ingeniería, pues son una herramienta que ayuda a describir con modelos matemáticos los fenómenos del mundo real, los cuales son no lineales.

Cuando se modifican los parámetros de los que depende un sistema dinámico no lineal podría cambiar la estructura cualitativa del flujo del sistema, lo cual es conocido como que ocurre una *bifurcación*. En este escenario pueden aparecer nuevos puntos de equilibrio u órbitas periódicas, o desaparecer los que ya existen, o tal vez cambiar sus estabilidades. En caso de que ocurra esto, se dice que el sistema es estructuralmente inestable, o equivalentemente que ocurre una bifurcación para algunos valores de los parámetros.

Por otro lado, en los sistemas no lineales el análisis del comportamiento de las soluciones puede ser dividido principalmente en dos categorías: análisis local y análisis global. Por ejemplo, comportamientos originados a partir de los puntos de equilibrio del tipo de la bifurcación de Hopf y de la bifurcación silla-nodo se pueden estudiar localmente en una vecindad del punto de equilibrio, en tanto que órbitas heteroclínicas y homoclínicas son prácticamente comportamientos globales y como consecuencia tienen que ser estudiados globalmente.

En este trabajo tenemos como interés estudiar un modelo climático desarrollado por Maasch y Saltzman en [9]. Ellos se enfocaron en describir la dinámica del volumen total de hielo, la concentración de CO_2 y temperatura del océano profundo. Este modelo ha sido investigado durante muchos años y la teoría es resumida en [12] y [3]. La característica importante de ese modelo es la aparición de oscilaciones de relajación que describen las glaciaciones del Pleistoceno.

Nuestro objetivo principal en este trabajo de tesis es realizar un estudio detallado del análisis de la dinámica interna del modelo Maasch-Saltzman llevado a cabo por Engler *et al.* en [3]. Este sistema dinámico está basado en tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que depende de cuatro parámetros adimensionales

positivos, p , q , r y s , que son combinaciones de varios parámetros físicos. Engler *et al.* mostraron que, en la mayoría los regímenes de parámetros, la dinámica del sistema a largo plazo ocurre en ciertas variedades invariantes bidimensionales intrínsecas en el espacio de estados tridimensional. Estas variedades invariantes son variedades lentas cuando las escalas de tiempo que caracterizan a la masa de hielo global total y el volumen de las aguas profundas del Atlántico Norte están muy separadas, y son variedades centrales cuando estas escalas de tiempo características son comparables. En ambos casos, la dinámica reducida en estas variedades está gobernada por singularidades de Bogdanov-Takens, y las curvas de bifurcación asociadas a estas singularidades organizan las regiones de parámetros en las que el modelo exhibe ciclos glaciales. En este trabajo nos concentraremos en la dinámica que ocurre en las variedades lentas.

La organización de esta tesis es la siguiente. En el capítulo 1 enunciamos el modelo en toda su generalidad. En el modelo los parámetros p y r representan las constantes de tasa efectiva de cómo la concentración de CO_2 (y) cambia a medida que el volumen de aguas profundas del Atlántico Norte (z) y la concentración de CO_2 cambian, respectivamente. Por otro lado, q es la razón efectiva de las escalas de tiempo características para la masa de hielo global total (x) y el volumen de aguas profundas del Atlántico Norte; por razones físicas, se considera $q > 1$ [11]. Como consecuencia s es un parámetro de simetría, pues cuando $s = 0$ el modelo tiene una simetría de reflexión; si (x, y, z) es solución entonces $(-x, -y, -z)$ también lo es. Además, incluimos el estudio numérico sobre la existencia de puntos de equilibrio. A partir de los resultados, es claro que un cambio en los valores de los parámetros significa no sólo un cambio en el comportamiento dinámico del sistema, sino también en la ubicación y estabilidad de los puntos de equilibrio del sistema. Con esta información sobre los puntos de equilibrio y su estabilidad lineal en función de los parámetros del modelo estamos en posibilidad de conocer qué esperar dinámicamente (es decir, estado estable o posible ciclo límite) y, por lo tanto, se elige una región en el espacio de parámetros que puede proporcionar soluciones que tienen características compatibles con las observaciones.

Para el análisis de los sistemas lento-rápido que estudiamos en los capítulos 2 y 3, hemos utilizado la teoría geométrica de la perturbación singular con un enfoque basado en teoremas de Fenichel [4, 5].

En el capítulo 2 presentamos el análisis del modelo simétrico lento-rápido de Maasch-Saltzman, el cual es obtenido al considerar $s = 0$ con $q \gg 1$. En estas condiciones, las variables x y y son lentas y z es una variable rápida. Para este régimen de valores de los parámetros se demuestra que hay una familia de variedades invariantes lentas bidimensionales a lo largo de las cuales la variable rápida está subordinada a las variables lentas y en la que todas las soluciones

se relajan rápidamente. El resultado principal obtenido es la existencia de una bifurcación de Bogdanov-Takens, la cual contiene un punto \mathbb{Z}_2 simétrico (llamado centro de organización), desde el cual emergen todas las curvas de bifurcación, donde p y r son los parámetros de bifurcación. Mostramos con detalle las curvas de las bifurcaciones de Hopf, las bifurcaciones homoclínicas y las bifurcaciones silla-nodo de los ciclos límite que determinan las regiones en el espacio de parámetros donde existen los ciclos límite estables.

El capítulo 3 contiene el análisis asimétrico del modelo de Maasch-Saltzman con $s > 0$ con valores asintóticamente grandes de q ($q \gg 1$). En este caso, se obtiene un sistema lento-rápido, con x y y como variables lentas y z como variable rápida. Al igual que ocurre en el caso simétrico, aquí hay una familia de variedades invariantes bidimensionales que son lentas y exponencialmente atractoras, pero la ausencia de simetría hace que la dinámica en las variedades lentas sea más compleja. Ya que $s > 0$, los ciclos límite observados son asimétricos, exhibiendo una deglaciación relativamente rápida y una glaciación relativamente lenta, como se muestra en la figura 1. Para este caso, el punto Bogdanov-Takens o centro de organización que existe para $s = 0$, se divide en dos puntos de organización para $s > 0$, permitiendo mostrar cómo las bifurcaciones de Hopf y bifurcaciones homoclínicas que emanan de estas dos singularidades Bogdanov-Takens determinan los límites de los dominios de lo estable e inestable. En la parte final tomamos valores grandes de q y el límite cuando $s \rightarrow 0$, y posteriormente usamos el método de Melnikov para determinar las regiones en el espacio de parámetros donde existe una bifurcación de tipo silla-nodo. Como consecuencia mostramos la aparición y destrucción de órbitas periódicas.

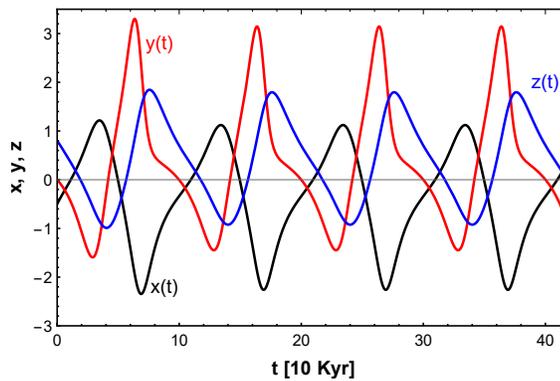


Figura 1: Ciclo límite representativo de 100 Kyr. Cada ciclo es asimétrico: una rápida deglaciación es seguida por una lenta glaciación.

Capítulo 1

El modelo de Maasch-Saltzman

El modelo climático de Maasch-Saltzman (en corto, MS) considera elementos físicos, y enfatiza el papel del CO₂ atmosférico en el desarrollo y evolución de los ciclos glaciares. Este modelo se basa en un conjunto de postulados cualitativos, físicamente plausibles con respecto al comportamiento de tres variables de respuesta a *pronósticos* que se consideran de relevancia: masa globalizada, dióxido de carbono atmosférico, y la medida de la fuerza de la *inyección* de CO₂ oceánico que se cree está relacionado con la cantidad en aguas profundas en el océano Atlántico Norte (NADW). La temperatura media de la superficie, y la extensión del hielo marino permanente son variables adicionales de *diagnóstico* para determinar las variables de pronóstico, mencionadas anteriormente.

El modelo climático del Pleistoceno propuesto por Maasch y Saltzman [9] involucra las siguientes cinco variables de estado, cuyas unidades aparecen entre corchetes:

- Masa total de hielo, I [kg]
- La concentración atmosférica de CO₂, μ [ppm]
- El volumen de las aguas profundas en el Atlántico Norte (NADW), N [m³]
- La temperatura media de la superficie del mar (SST), τ [K]
- El volumen medio permanente del mar (verano), η [m³]

Las variables de estado varían con el tiempo, aunque en escalas de tiempo bastante diferentes. La masa total de hielo global, la concentración de CO₂ atmosférico y el NADW varían en el orden de miles de años, mientras que la TSM

y el hielo marino de verano varían en el orden de décadas o siglos. Aquí estamos interesados en el caso cuando la escala de tiempo es lenta, para la cual suponemos que las variables rápidas se equilibran de forma instantánea. Es decir, la dinámica del sistema climático a largo plazo se describe en términos de las variables I , μ y N (las variables pronóstico); τ y η que son variables de diagnóstico.

1.1. Formulación del modelo

El modelo climático está formulado en términos de anomalías y desviaciones de los promedios a largo plazo. La dependencia de las variables principalmente es lineal, es decir

$$\begin{aligned}\tau' &= -\alpha I' + \beta \mu', \\ \eta' &= e_1 I' - e_\mu \mu'.\end{aligned}\tag{1.1}$$

donde la prima (') denota las desviaciones de los promedios a largo plazo.

En ausencia de fuerzas externas, las ecuaciones que dan la dinámica de I' , μ' y N' son

$$\begin{aligned}\frac{dI'}{dt'} &= -s_1 \tau' - s_2 \mu' + s_3 \eta' - s_4 I', \\ \frac{d\mu'}{dt'} &= r_1 \tau' - r_2 \eta' - (r_3 - b_3 N') N' - (r_4 + b_4 N'^2) \mu' - r_5 I', \\ \frac{dN'}{dt'} &= -c_0 I' - c_2 N',\end{aligned}\tag{1.2}$$

donde el tiempo t' se mide en unidades de 1 año [yr]. Los coeficiente en estas ecuaciones son positivos (o cero). En [9], Maasch y Saltzman también incluyeron un término de fuerza orbital de tierra (la insolación de verano cambia a 65°N) en la ecuación de I' , pero nosotros estamos interesados en la dinámica interna del sistema, por lo tanto no consideraremos ese término.

Las hipótesis físicas subyacentes a las ecuaciones (1.2) son:

- Las variables pronóstico se relajan con sus respectivos promedios a largo plazo, por lo que sus anomalías tienden a cero a medida que aumenta el tiempo; en particular, I' y N' decrecen a una tasa constante, mientras que la tasa de decaimiento de μ' aumenta cuadráticamente con N' . Mayores detalles pueden consultarse en [11].

- Si el SST excede su valor promedio ($\tau' > 0$), la masa total de hielo global y la concentración atmosférica de CO₂ disminuyen (debido a la desgasificación); si el SST es menor que su valor medio ($\tau' < 0$), sucede lo contrario. El acoplamiento es lineal en los ordenes principales.
- Ya que el CO₂ es un gas de efecto invernadero, un aumento en la concentración atmosférica de CO₂ conduce a un clima más cálido y, como consecuencia a una disminución en la masa total de hielo.
- Si el volumen de hielo marino excede su valor medio ($\eta' > 0$), la masa total de hielo global aumenta y la concentración atmosférica de CO₂ disminuye; si el volumen de hielo marino permanente es menor que su valor medio ($\eta' < 0$), ocurre el efecto contrario. El acoplamiento es lineal en el orden principal.
- Una masa de hielo global total mayor que el promedio ($I' > 0$) afecta negativamente en la concentración atmosférica de CO₂ y la fuerza del Atlántico Norte tiende a volcar la circulación; una masa de hielo global total inferior a la media ($I' < 0$) tiene el efecto contrario. El acoplamiento es lineal al orden principal.
- La concentración atmosférica de CO₂ decrece cuando la fuerza de la circulación del vuelco del océano Atlántico Norte aumenta, pero el acoplamiento se debilita (fortalece) cuando la fuerza del NADW está por encima (por debajo) del promedio, ver [11].

Al sustituir las expresiones (1.1) en las ecuaciones (1.2), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dI'}{dt'} &= -a_0 I' - a_1 \mu', \\
\frac{d\mu'}{dt'} &= -b_0 I' + (b_1 - b_4 N'^2) \mu' - (b_2 - b_3 N') N', \\
\frac{dN'}{dt'} &= -c_0 I' - c_2 N',
\end{aligned} \tag{1.3}$$

donde

$$\begin{aligned}
a_0 &= s_4 - (\alpha s_1 + e_1 s_3), & a_1 &= s_2 + \beta s_1 + e_\mu s_3, \\
b_0 &= r_5 + \alpha r_1 + e_1 r_2, & b_1 &= \beta r_1 + e_\mu r_2 - r_4, & b_2 &= r_3.
\end{aligned}$$

Tomaremos condiciones similares a las dadas en [11] y [9], con $b_0 = 0$ y supondremos que los otros coeficientes son positivos. Notemos que a_0 y b_1 implican

contribuciones positivas y negativas, por lo que el supuesto implícito es que dominan las contribuciones positivas.

Ahora consideramos el reescalamiento del tiempo en (1.3) dado por

$$\tau = a_1 t', \quad (1.4)$$

y las variables adimensionales

$$X = \frac{I}{\hat{I}}, \quad Y = \frac{\mu'}{\hat{\mu}}, \quad Z = \frac{N'}{\hat{N}}, \quad (1.5)$$

donde \hat{I} , $\hat{\mu}$ y \hat{N} son valores de referencia de I , μ y N , respectivamente. Ya que $a_0 \approx 10^{-4}$ y r^{-1} , entonces una unidad de tiempo τ corresponde aproximadamente a 10Kyr.

Luego, las ecuaciones (1.3) en términos de las variables adimensionales y en la nueva escala de tiempo, se transforman en

$$\begin{aligned} X' &= -X - \hat{a}_1 Y, \\ Y' &= (\hat{b}_1 - \hat{b}_4 Z^2) Y - (\hat{b}_2 - \hat{b}_3 Z) Z, \\ Z' &= -\hat{c}_0 X - \hat{c}_2 Z, \end{aligned} \quad (1.6)$$

donde la prima ' denota la derivada con respecto de τ , y los coeficientes son combinaciones de parámetros físicos del sistema (1.3) dados por

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 &= \frac{a_1 \hat{\mu}}{a_0 \hat{I}}, & \hat{b}_1 &= \frac{b_1}{a_0}, & \hat{b}_2 &= \frac{b_2 \hat{N}}{a_0 \hat{\mu}}, & \hat{b}_3 &= \frac{b_3 \hat{N}^2}{a_0 \hat{\mu}}, \\ \hat{b}_4 &= \frac{b_4 \hat{N}^2}{a_0}, & \hat{c}_0 &= \frac{c_0 \hat{I}^2}{a_0 \hat{N}}, & \hat{c}_2 &= \frac{c_2}{a_0}. \end{aligned}$$

Ahora, consideramos el siguiente reescalamiento de las variables X , Y y Z ,

$$x = \frac{\hat{c}_0}{\hat{c}_2} \sqrt{\hat{b}_4} X, \quad y = \frac{\hat{a}_1 \hat{c}_0}{\hat{c}_2} \sqrt{\hat{b}_4} Y, \quad z = \sqrt{\hat{b}_4} Z. \quad (1.7)$$

Como consecuencia, las ecuaciones (1.3) del modelo de Maasch-Saltzman en variables adimensionales es descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' &= -x - y, \\ y' &= ry - pz + sz^2 - yz^2, \\ z' &= -qx - qz \end{aligned} \quad (1.8)$$

donde todos los coeficientes

$$p = \frac{\hat{a}_1 \hat{b}_2 \hat{c}_0}{\hat{c}_2}, \quad q = \hat{c}_2, \quad r = \hat{b}_1, \quad s = \frac{\hat{a}_1 \hat{b}_3 \hat{c}_0}{\hat{c}_2 \sqrt{\hat{b}_4}}, \quad (1.9)$$

son positivos.

Notemos que las variables x , y y z representan las anomalías (desviaciones de promedio a largo plazo) de la masa de hielo global total, la concentración atmosférica de CO_2 , y el volumen de las aguas profundas del océano Atlántico Norte (NADW), respectivamente. Además, p es la constante de la velocidad efectiva de cambio de la concentración de CO_2 (y), r es la tasa de cambio de la concentración de CO_2 en NADW (z), q es la relación efectiva de escalas de tiempo características para la masa de hielo global total (x) y el volumen de NADW; por razones físicas, $q > 1$. Por último, s es un parámetro de simetría, es decir, cuando $s = 0$ las ecuaciones (1.8) tienen la simetría de reflexión dada por $(x, y, z) \mapsto (-x, -y, -z)$. En este caso especial, glaciación y deglaciación ocurren a las mismas velocidades; sin embargo, físicamente se observa que la deglaciación ocurre a un ritmo más rápido que la glaciación y $s > 0$ garantiza esta asimetría.

1.2. Puntos de equilibrio

En esta sección estudiaremos bajo qué condiciones existen puntos de equilibrio del sistema (1.8).

Los puntos de equilibrio los obtenemos de la solución del sistema algebraico

$$-x - y = 0, \quad (1.10a)$$

$$ry - pz + sz^2 - yz^2 = 0, \quad (1.10b)$$

$$-qx - qz = 0. \quad (1.10c)$$

Usando las ecuaciones (1.10a) y (1.10c) obtenemos que $x = -y = -z$. Ahora sustituimos esto en la ecuación (1.10b) y llegamos a que

$$x(x^2 + sx + (p - r)) = 0.$$

Como consecuencia, los posibles valores de x en los puntos de equilibrio son

$$x_0 = 0 \quad \text{y} \quad x_{1,2} = \frac{-s \pm \sqrt{s^2 - 4(p - r)}}{2}.$$

Ya que $x = -y = -z$ tenemos que para $p > \frac{s^2}{4} + r$ el $(0, 0, 0)$ es el único punto de equilibrio, si $p = r$ ó $p = \frac{s^2}{4} + r$ hay dos puntos de equilibrio, mientras que para $p < \frac{s^2}{4} + r$ existen tres puntos de equilibrio. Esto lo resumimos en la siguiente proposición.

Proposición 1. Sea $\Delta = s^2 - 4(p - r)$. Luego para el sistema (1.8) se satisface lo siguiente:

1. Si $\Delta < 0$ el único punto de equilibrio es $P_0 = (0, 0, 0)$.
2. Si $\Delta = 0$ existen dos puntos de equilibrio: $P_0 = (0, 0, 0)$ y $P_1 = (-s/2, s/2, s/2)$.
3. Si $\Delta > 0$ tenemos dos casos:
 - Si $p = r$ existen dos puntos de equilibrio: $P_0 = (0, 0, 0)$ y $P_2 = (-s, s, s)$.
 - Si $p \neq r$ existen tres puntos de equilibrio: $P_0 = (0, 0, 0)$, $P_1 = \left(\frac{-s+\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{s-\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{s-\sqrt{\Delta}}{2}\right)$ y $P_2 = \left(\frac{-s-\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{s+\sqrt{\Delta}}{2}, \frac{s+\sqrt{\Delta}}{2}\right)$.

1.3. Estabilidad lineal de los puntos de equilibrio

La linealización de las ecuaciones (1.8) en un entorno de los puntos de equilibrio la obtenemos al evaluar la siguiente matriz jacobiana en los puntos,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & r - z^2 & -p + 2sz - 2yz \\ -q & 0 & -q \end{pmatrix}. \quad (1.11)$$

Luego, el polinomio característico asociado es

$$P(\lambda) = \lambda^3 - (-1 - q + r - z^2)\lambda^2 - (-q + r + qr - z^2 - qz^2)\lambda - qr + qz^2 + q(p - 2sz + 2yz).$$

Tomando en cuenta que en los puntos de equilibrio se cumple que $x = -y = -z$, entonces este polinomio puede reescribirse como

$$P(\lambda) = \lambda^3 + (q - r + 1 + x^2)\lambda^2 + (q(1 - r + x^2) - r)\lambda + q(p - r + (2s + 3x)x). \quad (1.12)$$

Ya que este polinomio depende de los parámetros p , q , r y s , con el fin de calcular los valores propios fijaremos algunos valores de éstos. A partir de ahora, usaremos

λ_{ij} para denotar los valores propios, donde el subíndice j se refiere al j -ésimo valor propio del i -ésimo punto de equilibrio.

En la tabla 1.1 mostramos los valores propios del punto $P_0 = (0, 0, 0)$ para $p \in [0, 2]$. Notemos que si $p \in [0, 0.8]$, los valores propios son reales, excepto en $p = 0.8$ donde uno de los valores propios es 0, mientras que para $p \in [0.9, 2]$ dos de los valores propios son complejos conjugados. Los resultados numéricos están gráficamente mostrados en la figura 1.1.

Valores propios de $P_0 = (0, 0, 0)$			
p	$\lambda_{0,1}$	$\lambda_{0,2}$	$\lambda_{0,3}$
0	0.8	-1	-1.2
0.1	0.77	-0.81	-1.36
0.2	0.73	-0.69	-1.44
0.3	0.69	-0.58	-1.51
0.4	0.64	-0.48	-1.56
0.5	0.59	-0.38	-1.61
0.6	0.53	-0.28	-1.65
0.7	0.45	-0.16	-1.69
0.8	0.32	0	-1.72
0.9	$0.18 + 0.19i$	$0.18 - 0.19i$	-1.76
1.0	$0.19 + 0.31i$	$0.19 - 0.31i$	-1.79
1.1	$0.21 + 0.39i$	$0.21 - 0.39i$	-1.82
1.2	$0.22 + 0.46i$	$0.22 - 0.46i$	-1.84
1.3	$0.24 + 0.52i$	$0.24 - 0.52i$	-1.87
1.4	$0.25 + 0.56i$	$0.25 - 0.56i$	-1.90
1.5	$0.26 + 0.61i$	$0.26 - 0.61i$	-1.92
1.6	$0.27 + 0.65i$	$0.27 - 0.65i$	-1.94
1.7	$0.28 + 0.69i$	$0.28 - 0.69i$	-1.97
1.8	$0.29 + 0.72i$	$0.29 - 0.72i$	-1.99
1.9	$0.30 + 0.75i$	$0.30 - 0.75i$	-2.01
2	$0.31 + 0.78i$	$0.31 - 0.78i$	-2.03

Tabla 1.1: Valores propios del punto de equilibrio $P_0 = (0, 0, 0)$ para $p \in [0, 2]$ con $q = 1.2$, $r = 0.8$ y $s = 0.8$.

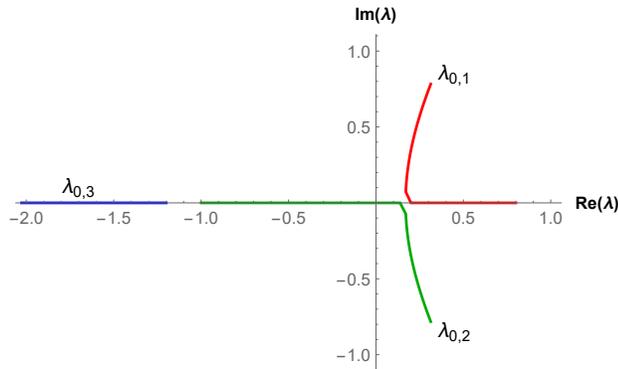


Figura 1.1: Curvas de valores propios en el plano complejo para $P_0 = (0, 0, 0)$ y $p \in [0, 2]$.

En la tabla 1.2 mostramos los valores propios del punto $P_1 = (x_1, -x_1, -x_1)$ para valores de $p \in [0, 0.9]$. Recordemos que para que exista P_1 se debe cumplir la condición $p < s^2/4 + r$, de tal forma que elegimos $s = r = 0.8$ y obtenemos que $p < 0.96$.

Notemos para $p \in [0, 0.7]$, dos de los valores propios son complejos conjugados, mientras que $p = 0.8$ implica $p = r$. Luego, sólo hay dos puntos de equilibrio. Además, la condición $p = r$ implica $x_1 = 0$, de tal forma que el punto de equilibrio P_1 se convierte en P_0 y obtenemos que uno de los valores propios es 0, mientras que si $p = 0.9$ los valores propios son reales. Los resultados numéricos están gráficamente mostrados en la figura 1.2.

		Valores propios de $P_1 = (x_1, -x_1, -x_1)$		
p	x_1	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{1,3}$
0	0.58	$0.19 + 0.78i$	$0.19 - 0.78i$	-2.12
0.1	0.53	$0.19 + 0.73i$	$0.19 - 0.73i$	-2.06
0.2	0.47	$0.19 + 0.67i$	$0.19 - 0.67i$	-2.01
0.3	0.41	$0.19 + 0.61i$	$0.19 - 0.61i$	-1.97
0.4	0.35	$0.19 + 0.54i$	$0.19 - 0.54i$	-1.91
0.5	0.28	$0.19 + 0.46i$	$0.19 - 0.46i$	-1.86
0.6	0.20	$0.18 + 0.35i$	$0.18 - 0.35i$	-1.81
0.7	0.11	$0.18 + 0.21i$	$0.18 - 0.21i$	-1.76
0.8	0	0.32	0	-1.72
0.9	-0.16	0.41	-0.13	-1.70

Tabla 1.2: Valores propios del punto de equilibrio $P_1 = (x_1, -x_1, -x_1)$ para $p \in [0, 0.9]$ con $q = 1.2$, $r = 0.8$ y $s = 0.8$.

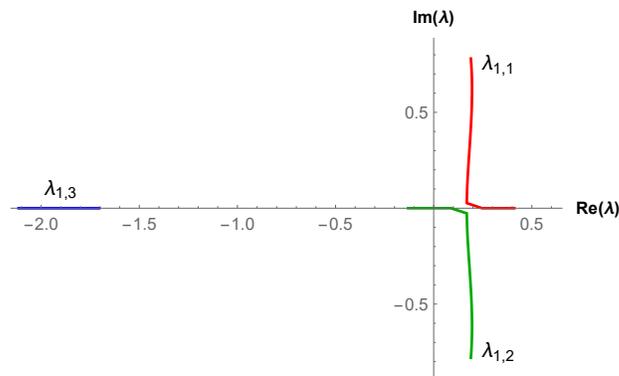


Figura 1.2: Curvas de valores propios en el plano complejo para $P_1 = (x_1, -x_1, -x_1)$ y $p \in [0, 0.9]$.

En la tabla 1.3 mostramos los valores propios del punto $P_2 = (x_2, -x_2, -x_2)$ para $p \in [0, 0.9]$. Ya que $p < 0.96$ con $s = r = 0.8$ garantizamos que P_2 existe. Notemos que para $p \in [0, 0.9]$ siempre hay dos valores propios complejos conjugados, sin embargo en el intervalo $[0, 0.6]$ la parte real de estos valores propios complejos es negativa, mientras que en el intervalo $[0.7, 0.9]$ la parte real es positiva. Este cambio de signo nos dice que hay un cambio de estabilidad en el punto de equilibrio. Además para $p = 0.8$ sólo hay dos puntos de equilibrio, $P_0 = (0, 0, 0)$ y $P_2 = (-0.8, 0.8, 0.8)$. En la figura 1.3 mostramos la gráfica de los resultados numéricos.

p	x_2	Valores propios de $P_2 = (x_2, -x_2, -x_2)$		
		$\lambda_{2,1}$	$\lambda_{2,2}$	$\lambda_{2,3}$
0	-1.38	$-0.11 + 1.02i$	$-0.11 - 1.02i$	-3.09
0.1	-1.33	$-0.09 + 0.99i$	$-0.09 - 0.99i$	-2.97
0.2	-1.27	$-0.08 + 0.96i$	$-0.08 - 0.96i$	-2.86
0.3	-1.21	$-0.06 + 0.93i$	$-0.06 - 0.93i$	-2.74
0.4	-1.15	$-0.05 + 0.88i$	$-0.05 - 0.88i$	-2.63
0.5	-1.08	$-0.03 + 0.84i$	$-0.03 - 0.84i$	-2.51
0.6	-1	$-0.01 + 0.78i$	$-0.01 - 0.78i$	-2.38
0.7	-0.91	$0.01 + 0.70i$	$0.01 - 0.70i$	-2.25
0.8	-0.8	$0.04 + 0.60i$	$0.04 - 0.60i$	-2.11
0.9	-0.64	$0.07 + 0.44i$	$0.07 - 0.44i$	-1.95

Tabla 1.3: Valores propios del punto de equilibrio $P_2 = (x_2, -x_2, -x_2)$ para $p \in [0, 0.9]$ con $q = 1.2$, $r = 0.8$ y $s = 0.8$.

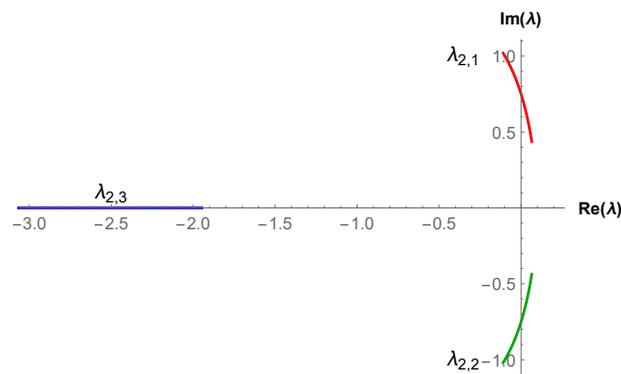


Figura 1.3: Curvas de valores propios en el plano complejo para $P_2 = (x_2, -x_2, -x_2)$ y $p \in [0, 0.9]$.

En la tabla 1.4 mostramos los valores propios del punto $P_0 = (0, 0, 0)$ para

valores de $q \in [0, 2]$. Notemos que para $p = 1$, $r = s = 0.8$, $p > s^2/4 + r$ por lo tanto sólo existe el punto de equilibrio P_0 , además en $q = 0$ uno de los valores propios es 0, uno es positivo y el otro es negativo, mientras que para $q \in [0.1, 0.5]$ los tres valores propios son reales y para $q \in [0.6, 2]$ dos de los valores propios son complejos conjugados. Ver la figura 1.4.

Valores propios de $P_0 = (0, 0, 0)$			
q	$\lambda_{0,1}$	$\lambda_{0,2}$	$\lambda_{0,3}$
0	0.80	0	-1.00
0.1	0.73	0.03	-1.06
0.2	0.66	0.05	-1.11
0.3	0.59	0.09	-1.17
0.4	0.51	0.13	-1.24
0.5	0.41	0.19	-1.30
0.6	$0.28 + 0.09i$	$0.28 - 0.09i$	-1.36
0.7	$0.27 + 0.17i$	$0.27 - 0.17i$	-1.43
0.8	$0.25 + 0.21i$	$0.25 - 0.21i$	-1.50
0.9	$0.23 + 0.24i$	$0.23 - 0.24i$	-1.57
1.0	$0.22 + 0.27i$	$0.22 - 0.27i$	-1.64
1.1	$0.21 + 0.29i$	$0.21 - 0.29i$	-1.71
1.2	$0.19 + 0.31i$	$0.19 - 0.31i$	-1.79
1.3	$0.18 + 0.33i$	$0.18 - 0.33i$	-1.86
1.4	$0.17 + 0.34i$	$0.17 - 0.34i$	-1.94
1.5	$0.16 + 0.35i$	$0.16 - 0.35i$	-2.02
1.6	$0.15 + 0.36i$	$0.15 - 0.36i$	-2.10
1.7	$0.14 + 0.37i$	$0.14 - 0.37i$	-2.18
1.8	$0.13 + 0.38i$	$0.13 - 0.38i$	-2.27
1.9	$0.12 + 0.38i$	$0.12 - 0.38i$	-2.35
2	$0.12 + 0.39i$	$0.12 - 0.39i$	-2.43

Tabla 1.4: Valores propios del punto de $P_0 = (0, 0, 0)$ para $q \in [0, 2]$ con $p = 1.0$, $r = 0.8$ y $s = 0.8$.

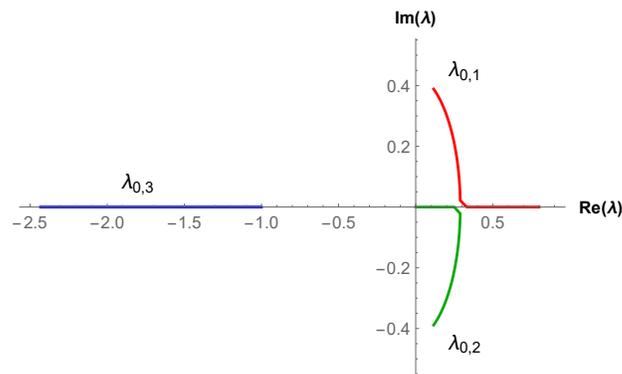


Figura 1.4: Curvas de valores propios en el plano complejo para $P_0 = (0, 0, 0)$ y $q \in [0, 2]$.

En la tabla 1.5 mostramos los valores propios del punto $P_0 = (0, 0, 0)$ para

valores de $r \in [0, 2]$. Notemos que si $r \in [0, 0.9]$ dos de los valores propios son complejos conjugados, más aún, si $r \in [0, 0.3]$ la parte real de estos valores propios es negativa, mientras que para $r \in [0.4, 0.9]$ la parte real es positiva, esto nos dice que existe $r \in (0.3, 0.4)$ tal que los valores propios son imaginarios puros. En $r = 1$ tenemos un valor propio 0, finalmente para $r \in [1.1, 2]$ todos los valores propios son reales. En la figura 1.5 mostramos la gráfica de los resultados numéricos.

Valores propios de $P_0 = (0, 0, 0)$			
r	$\lambda_{0,1}$	$\lambda_{0,2}$	$\lambda_{0,3}$
0	$-0.15 + 0.78i$	$-0.15 - 0.78i$	-1.90
0.1	$-0.11 + 0.75i$	$-0.11 - 0.75i$	-1.88
0.2	$-0.07 + 0.71i$	$-0.07 - 0.71i$	-1.87
0.3	$-0.02 + 0.67i$	$-0.02 - 0.67i$	-1.85
0.4	$0.02 + 0.63i$	$0.02 - 0.63i$	-1.84
0.5	$0.06 + 0.57i$	$0.06 - 0.57i$	-1.83
0.6	$0.11 + 0.50i$	$0.11 - 0.50i$	-1.81
0.7	$0.15 + 0.42i$	$0.15 - 0.42i$	-1.80
0.8	$0.19 + 0.31i$	$0.19 - 0.31i$	-1.79
0.9	$0.24 + 0.10i$	$0.24 - 0.10i$	-1.78
1	0.57	0	-1.77
1.1	0.75	-0.09	-1.76
1.2	0.90	-0.15	-1.75
1.3	1.04	-0.20	-1.74
1.4	1.17	-0.24	-1.73
1.5	1.29	-0.27	-1.72
1.6	1.41	-0.30	-1.71
1.7	1.53	-0.32	-1.70
1.8	1.64	-0.35	-1.69
1.9	1.75	-0.37	-1.69
2	1.86	-0.38	-1.68

Tabla 1.5: Valores propios de $P_0 = (0, 0, 0)$ para $r \in [0, 2]$ con $p = 1.0$, $q = 1.2$ y $s = 0.8$.

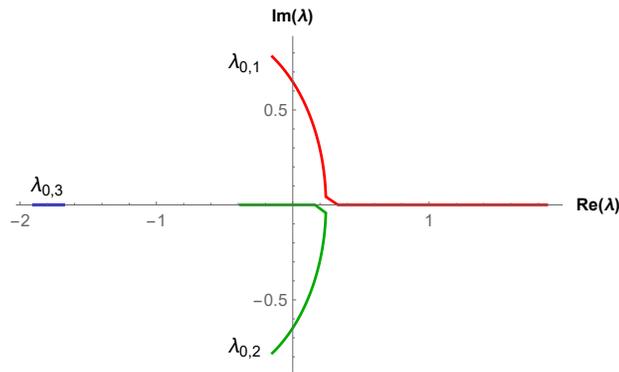


Figura 1.5: Curvas de valores propios en el plano complejo para $P_0 = (0, 0, 0)$ y $q \in [0, 2]$.

En la tabla 1.6 mostramos los valores propios del punto $P_1 = (x_1, -x_1, -x_1)$

para valores de $r \in [0.9, 2]$ ya que para que exista P_1 se debe cumplir $p - s^2/4 < r$ y como hemos fijado $p = 1$, $s = 0.8$, entonces para $r > 0.84$ existe P_1 . Notemos que si $r \in [0.9, 1.2]$ los valores propios son reales, sin embargo en $r = 1$ tenemos que $p = r$ por lo tanto el punto de equilibrio P_1 se convierte en P_0 y en este caso uno de los valores propios es 0, si $r \in [1.3, 2]$ dos de los valores propios son complejos conjugados con parte real positiva. Ver la gráfica en la figura 1.6.

		Valores propios de $P_1 = (x_1, -x_1, -x_1)$		
r	x_1	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{1,3}$
0.9	-0.16	0.51	-0.10	-1.73
1	0	0.57	0	-1.77
1.1	0.11	0.57	0.13	-1.82
1.2	0.20	0.54	0.28	-1.87
1.3	0.28	$0.47 + 0.12i$	$0.47 - 0.12i$	-1.92
1.4	0.35	$0.52 + 0.21i$	$0.52 - 0.21i$	-1.96
1.5	0.41	$0.57 + 0.272i$	$0.57 - 0.27i$	-2.01
1.6	0.47	$0.62 + 0.32i$	$0.62 - 0.32i$	-2.05
1.7	0.53	$0.66 + 0.35i$	$0.66 - 0.35i$	-2.10
1.8	0.58	$0.70 + 0.38i$	$0.70 - 0.38i$	-2.14
1.9	0.63	$0.74 + 0.41i$	$0.74 - 0.41i$	-2.17
2	0.68	$0.78 + 0.43i$	$0.78 - 0.43i$	-2.21

Tabla 1.6: Valores propios de $P_1 = (x_1, -x_1, -x_1)$ para $r \in [0.9, 2]$ con $p = 1.0$, $q = 1.2$ y $s = 0.8$.

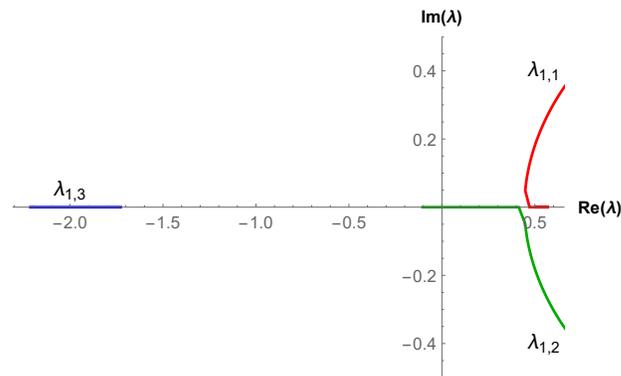


Figura 1.6: Curvas de valores propios en el plano complejo para $P_1 = (x_1, -x_1, -x_1)$ y $r \in [0.9, 2]$.

En la tabla 1.7 mostramos los valores propios del punto $P_2 = (x_2, -x_2, -x_2)$

para valores de $r \in [0.9, 2]$, donde $p = 1$, $s = 0.8$ y P_2 existe pues $r > 0.86$. Notemos que en este estado de referencia hay dos valores propios complejos conjugados con parte real positiva, mientras que en todos el valor propio real es negativo. Ver la gráfica en la figura 1.7.

		Valores propios de $P_2 = (x_2, -x_2, -x_2)$		
r	x_2	$\lambda_{2,1}$	$\lambda_{2,2}$	$\lambda_{2,3}$
0.9	-0.64	$0.12 + 0.42i$	$0.12 - 0.42i$	-1.96
1	-0.8	$0.14 + 0.58i$	$0.14 - 0.58i$	-2.12
1.1	-0.91	$0.16 + 0.68i$	$0.16 - 0.68i$	-2.25
1.2	-1	$0.18 + 0.76i$	$0.18 - 0.76i$	-2.36
1.3	-1.08	$0.20 + 0.82i$	$0.20 - 0.82i$	-2.46
1.4	-1.15	$0.22 + 0.87i$	$0.22 - 0.87i$	-2.55
1.5	-1.21	$0.23 + 0.91i$	$0.23 - 0.91i$	-2.64
1.6	-1.27	$0.25 + 0.96i$	$0.25 - 0.96i$	-2.72
1.7	-1.33	$0.26 + 0.99i$	$0.26 - 0.99i$	-2.79
1.8	-1.38	$0.28 + 1.03i$	$0.28 - 1.03i$	-2.86
1.9	-1.43	$0.29 + 1.06i$	$0.29 - 1.06i$	-2.93
2	-1.48	$0.31 + 1.08i$	$0.31 - 1.08i$	-3.00

Tabla 1.7: Valores propios de $P_2 = (x_2, -x_2, -x_2)$ para $r \in [0.9, 2]$ con $p = 1$, $q = 1.2$ y $s = 0.8$.

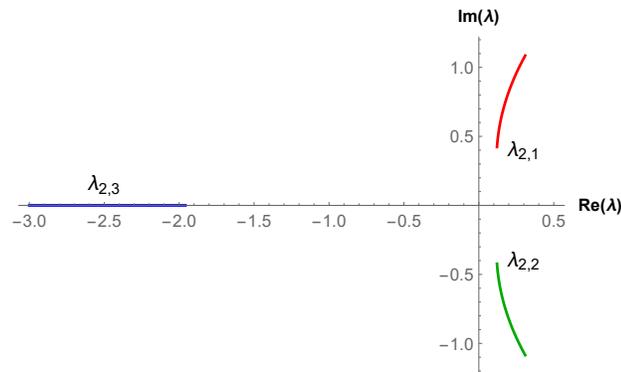


Figura 1.7: Curvas de valores propios en el plano complejo para $P_2 = (x_2, -x_2, -x_2)$ y $r \in [0.9, 2]$.

El siguiente paso es ver cómo son los valores propios en el estado de referencia definido por los valores $p = 1$, $q = 1.2$, $r = 0.8$ y $s \in [0, 2]$, en el punto de equilibrio $P_0 = (0, 0, 0)$. A partir de (1.12) sabemos que el polinomio característico

no depende del parámetro s , de tal forma que para estos valores de los parámetros es dado por

$$P(\lambda) = \lambda^3 + 1.4\lambda^2 - 0.56\lambda + 0.24,$$

cuyos valores propios son $\lambda_{0,1} = 0.19 + 0.31i$, $\lambda_{0,2} = 0.19 - 0.31i$ y $\lambda_{0,3} = -1.79$ para toda $s \in [0, 2]$. Por lo tanto, en este caso no es necesario elaborar una tabla de valores propios.

En la tabla 1.8 mostramos los valores propios del punto $P_1 = (x_1, -x_1, -x_1)$ para $s \in [0.9, 2]$. El punto P_1 existe cuando $s^2 > 4(p-r)$, condición que se cumple para $p = 1$, $r = 0.8$ y $s \geq 0$ pues $s > \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 0.894$. En este caso los tres valores propios son reales, tal que dos son negativos y uno positivo, para toda $s \in [0.9, 2]$. Ver la gráfica en la figura 1.8.

		Valores propios de $P_1 = (x_1, -x_1, -x_1)$		
s	x_1	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$	$\lambda_{1,3}$
0.9	-0.4	0.289	-0.095	-1.754
1.0	-0.28	0.428	-0.204	-1.700
1.1	-0.23	0.460	-0.228	-1.685
1.2	-0.2	0.477	-0.240	-1.685
1.3	-0.18	0.487	-0.248	-1.671
1.4	-0.16	0.495	-0.251	-1.668
1.5	-0.15	0.500	-0.257	-1.665
1.6	-0.14	0.504	-0.259	-1.663
1.7	-0.13	0.507	-0.262	-1.661
1.8	-0.12	0.510	-0.263	-1.660
1.9	-0.11	0.512	-0.265	-1.659
2	-0.10	0.513	-0.266	-1.658

Tabla 1.8: Valores propios de $P_1 = (x_1, -x_1, -x_1)$ para $s \in [0.8, 2]$ con $p = 1.0$, $q = 1.2$ y $r = 0.8$.

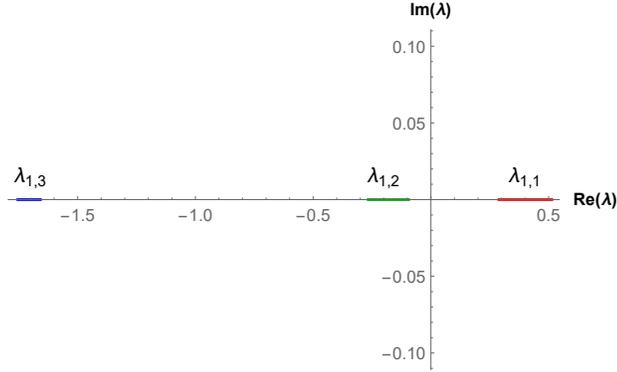


Figura 1.8: Curvas de valores propios en el plano complejo para $P_1 = (x_1, -x_1, -x_1)$ y $s \in [0.9, 2]$.

En la tabla 1.9 mostramos los valores propios del punto $P_2 = (x_2, -x_2, -x_2)$ para valores de $s \in [0.9, 2]$. En este caso P_2 existe para $s > \frac{2\sqrt{5}}{5}$ donde $p = 1$, $r = 0.8$. Notemos que para $s \in [0.9, 2]$ dos de los valores propios son complejos conjugados con parte real negativa y el valor propio real siempre es negativo. Ver las gráfica en al figura 1.9.

		Valores propios de $P_2 = (x_2, -x_2, -x_2)$		
s	x_2	$\lambda_{2,1}$	$\lambda_{2,2}$	$\lambda_{2,3}$
0.9	-0.5	$0.08 + 0.16i$	$0.08 - 0.16i$	-1.81
1.0	-0.72	$-0.03 + 0.44i$	$-0.03 - 0.44i$	-1.99
1.1	-0.87	$-0.01 + 0.56i$	$-0.01 - 0.56i$	-2.14
1.2	-1	$-0.05 + 0.64i$	$-0.05 - 0.64i$	-2.30
1.3	-1.12	$-0.09 + 0.71i$	$-0.09 - 0.71i$	-2.48
1.4	-1.24	$-0.13 + 0.76i$	$-0.13 - 0.76i$	-2.68
1.5	-1.35	$-0.16 + 0.80i$	$-0.16 - 0.80i$	-2.90
1.6	-1.46	$-0.20 + 0.84i$	$-0.20 - 0.84i$	-3.14
1.7	-1.57	$-0.24 + 0.86i$	$-0.24 - 0.86i$	-3.40
1.8	-1.68	$-0.27 + 0.88i$	$-0.27 - 0.88i$	-3.69
1.9	-1.79	$-0.30 + 0.90i$	$-0.30 - 0.90i$	-4.00
2	-1.89	$-0.32 + 0.91i$	$-0.32 - 0.91i$	-4.34

Tabla 1.9: Valores propios de $P_2 = (x_2, -x_2, -x_2)$ para $s \in [0.9, 2]$ con $p = 1.0$, $q = 1.2$ y $r = 0.8$.

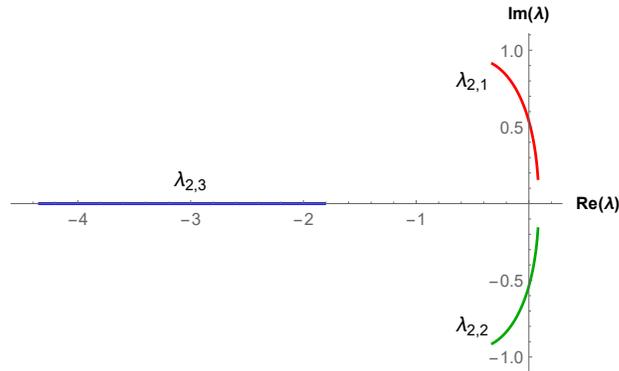


Figura 1.9: Curvas de valores propios en el plano complejo para $P_2 = (x_2, -x_2, -x_2)$ y $s \in [0.9, 2]$.

El resumen de lo que obtuvimos en las tablas 1.1 a 1.9 es el siguiente: Hemos obtenido que los puntos de equilibrio tienen todo tipo de combinaciones de valores propios, los cuales proporcionan información de la riqueza dinámica en el modelo de Maasch-Saltzman. En particular, cuando hay un cambio de signo en la parte real de los valores propios complejos deberá existir un cambio de estabilidad lineal, además de que se generan valores propios imaginarios puros. Estos últimos dan origen a la existencia de una bifurcación de tipo Hopf. Por otro lado, tenemos que para ciertos valores de los parámetros el 0 es valor propio, lo cual es un caso singular y nos permitirá explorar la existencia de otro tipo de bifurcaciones. Finalmente, mencionamos que en los próximos capítulos veremos que $s = 0$ y $s > 0$ nos darán información sobre otros tipos de bifurcación, así como $q \gg 1$.

Capítulo 2

Modelo simétrico lento-rápido

En este capítulo analizaremos el modelo simétrico de Maasch-Saltzman, definido por las ecuaciones (1.8) con $s = 0$ y q grande ($q \gg 1$). La interpretación física de estas condiciones en términos de las variables originales es que la tasa de cambio de NADW es significativamente más grande que la masa de total de hielo.

Con el fin de llevar a cabo el estudio del modelo en estas condiciones, introducimos un parámetro pequeño y positivo $\varepsilon = 1/q$, de tal forma que el sistema (1.8) se transforma en

$$\begin{aligned}x' &= -x - y, \\y' &= ry - pz - yz^2, \\ \varepsilon z' &= -x - z.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Además hacemos el reescalamiento del tiempo $t = \varepsilon^{-1}\tau$ para obtener

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\varepsilon(x + y), \\ \dot{y} &= \varepsilon(ry - pz - yz^2), \\ \dot{z} &= -x - z,\end{aligned}\tag{2.2}$$

donde el punto \cdot denota la derivada con respecto de t . Las variables independientes τ y t son referidas como *tiempo lento* y *rápido*, respectivamente. Más aun, x , y son las variables lentas, mientras que z es la variable rápida, y el parámetro ε es el factor que da la diferencia entre las dos escalas de tiempo.

Los sistema (2.1) y (2.2) son equivalentes cuando $\varepsilon \neq 0$, y para su estudio haremos uso de la teoría de *perturbaciones singulares*, para mayores detalles sobre este tema ver [5, 7]. A partir de ahora nos referiremos a (2.1) como el *modelo simétrico lento-rápido*. Además, suponemos que p y r son $\mathcal{O}(1)$ con respecto a ε .

2.1. Variedades invariantes

Sea $u = x + z$. Con esta nueva variable el sistema (2.2) lo podemos escribir como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\varepsilon(x + y), \\ \dot{y} &= \varepsilon(ry - pu + px - yu^2 - 2xyu - xy^2), \\ \dot{u} &= -u - \varepsilon(x + y).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Si hacemos $\varepsilon = 0$ obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 0, \\ \dot{y} &= 0, \\ \dot{u} &= -u,\end{aligned}\tag{2.4}$$

cuyas soluciones son $\varphi(t) = (x_0, y_0, u_0 e^{-t})$, donde (x_0, y_0, u_0) son las condiciones iniciales.

Definición 1. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$. Se dice que S es *invariante* bajo el campo vectorial $\dot{x} = f(x)$ si para algún $x_0 \in S$ tenemos que $x(t, 0, x_0) \in S$ para todo $t \in \mathbb{R}$, donde $x(0, 0, x_0) = x_0$.

Notemos que $u = 0$ es una variedad, \mathcal{M}_0 , la cual es invariante bajo el flujo del campo vectorial definido por (2.3). Ésta queda descrita localmente como

$$\{(x, y, u) \in \mathbb{R}^3 : x, y \text{ son solución de (2.3) y } u = 0\}.\tag{2.5}$$

Luego, la variedad \mathcal{M}_0 , globalmente es la unión de las cartas (2.5) y es posible que no sea compacta, sin embargo podemos considerar un compacto suficientemente grande que la contenga. En la figura 2.1 se muestra la descomposición de una variedad M en su parte tangencial y normal, notar que es posible tomar un compacto suficientemente grande que contenga a la variedad.

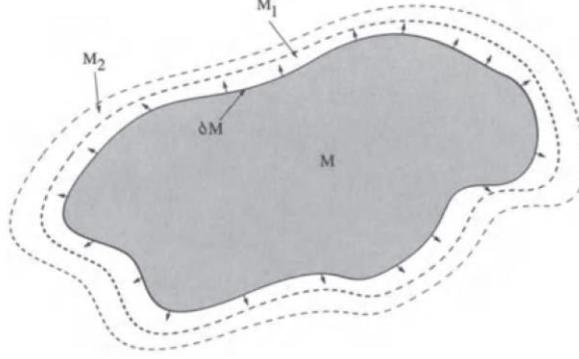


Figura 2.1: Variedades invariantes desbordantes M , M_1 y M_2 , donde M_1 corresponde a la parte tangencial del flujo en M y M_2 a la parte normal del flujo en M ; figura tomada de [13].

Definición 2. Sea $\bar{M} \equiv M \cup \partial M$ una variedad compacta, conexa, de clase \mathcal{C}^r cuya frontera está contenida en \mathbb{R}^n ,

- \bar{M} es llamada una *variedad invariante desbordante* bajo $\dot{x} = f(x)$ si para cada $p \in \bar{M}$, $\varphi_t(p) \in \bar{M}$ para toda $t \leq 0$ y el campo vectorial $\dot{x} = f(x)$ “apunta” estrictamente hacia afuera en ∂M .
- \bar{M} será *invariante bajo el flujo* de $\dot{x} = f(x)$ si para cada $p \in M$, $\varphi_t(p) \in \bar{M}$ para toda $t \geq 0$ y el campo vectorial $\dot{x} = f(x)$ “apunta” estrictamente hacia adentro en ∂M .
- \bar{M} es llamada *invariante* bajo $\dot{x} = f(x)$ si para cada $p \in \bar{M}$, $\varphi_t(p) \in \bar{M}$ para toda $t \in \mathbb{R}$.

Si M es una variedad orientable, invariante en \mathbb{R}^n , con la métrica estándar en \mathbb{R}^n y la norma inducida por esta métrica, localmente tenemos que

$$T\mathbb{R}^n|_M = TM \oplus N,$$

donde N es el haz normal. Sea

$$\Pi : T\mathbb{R}^n|_M \rightarrow N$$

el operador de proyección ortogonal. Ahora consideremos los siguientes operadores lineales construidos a partir del flujo lineal

$$\begin{aligned} A_t(p) &\equiv D\varphi_{-t}|_{M(p)} : T_p M \rightarrow T_{\varphi_{-t}(p)} M, \\ B_t(p) &\equiv \Pi D\varphi_t(\varphi_{-t}(p))|_N : N_{\varphi_{-t}(p)} \rightarrow N_p. \end{aligned}$$

Si $p \in M$ consideramos los siguientes vectores no nulos

$$w_0 \in N_p \quad \text{y} \quad v_0 \in T_p M,$$

y

$$w_{-t} = \Pi D\varphi_{-t}(p)w_0 \quad \text{y} \quad v_{-t} = D\varphi_{-t}(p)v_0.$$

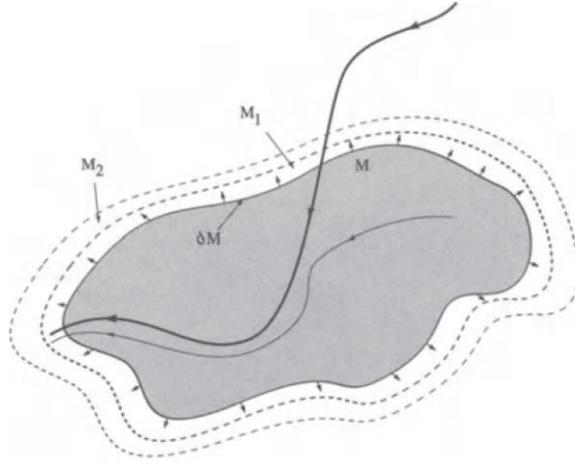


Figura 2.2: Trayectoria cercana a la variedad invariante desbordante M ; figura tomada de [13].

Se dice que M es linealmente estable, si se cumple que para todo $p \in M$, $w_0 \in N_p$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|w_0\|}{\|w_{-t}\|} = 0.$$

Además, las propiedades de diferenciabilidad del flujo cerca de M se caracterizarán por la existencia del siguiente límite para todo $p \in M$, $w_0 \in N_p$, $v_0 \in T_p M$,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|w_0\|^b / \|v_0\|}{\|w_{-t}\|^b / \|v_{-t}\|} = 0.$$

Notemos que para $b = 1$, geoméricamente tenemos que las vecindades de puntos en órbitas que van hacia atrás (tiempos negativos) se aproximan bajo la dinámica lineal del flujo cuando transcurre el tiempo, para $b < 1$, esto mismo ocurre a una velocidad mayor, y las tasas de convergencia de dicho fenómeno pueden ser descritas mediante los llamados *números de Lyapunov generalizados*. Ver figura 2.3.

Sea

$$\nu(p) = \inf \left\{ a : \left(\frac{\|w_0\|}{\|w_{-t}\|} \right) / a^t \rightarrow 0 \text{ cuando } t \uparrow \infty \quad \forall w_0 \in N_p \right\},$$

tal que $\nu(p) < 1$, entonces

$$\sigma(p) = \inf \left\{ b : \frac{\|w_0\|^b / \|v_0\|}{\|w_{-t}\|^b / \|v_{-t}\|} \rightarrow 0 \text{ cuando } t \uparrow \infty \quad \forall v_0 \in T_p M, \quad w_0 \in N_p \right\}.$$

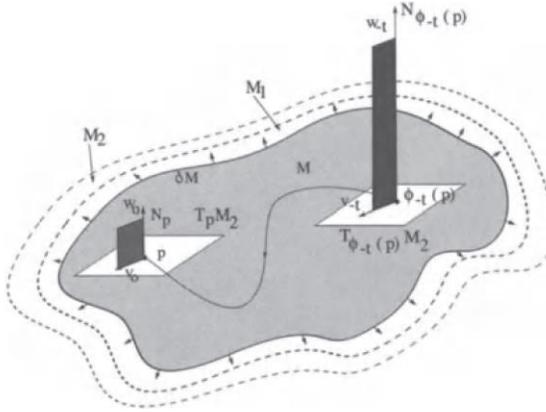


Figura 2.3: Comportamiento de los vectores tangentes bajo la dinámica lineal en M ; figura tomada de [13].

Lema 1. Los números de Lyapunov generalizados son equivalentes a los siguientes límites.

1. $\nu(p) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|B_t(p)\|^{1/t}$.
2. $\sigma(p) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{\log \|A_t(p)\|}{\log \|B_t(p)\|} \right)$, si $\nu(p) < 1$.

Lema 2. Los números de Lyapunov generalizados son constantes en las órbitas, es decir,

$$\nu(p) = \nu(\varphi_{-t}(p)) \quad \text{y} \quad \sigma(p) = \sigma(\varphi_{-t}(p)).$$

La demostración de estos lemas pueden consultarse en [13].

Definición 3. Sea M una variedad invariante bajo el flujo del campo vectorial $\dot{x} = f(x)$ en \mathbb{R}^n de clase \mathcal{C}^r , $r \geq 1$. Decimos que M es *normalmente hiperbólica* si, bajo la dinámica lineal en un entorno de la variedad invariante, los números

de Lyapunov generalizados satisfacen $\nu(p) < 1$ y $\sigma(p) < 1/r$ para toda $p \in M$. Si además $A \subset M$ es un conjunto cerrado invariante y existe una vecindad V de A , tal que para toda $x \in V$, $\varphi_t(x) \in V$ para todo $t \geq 0$ y $\varphi_t(x) \rightarrow A$ cuando $t \rightarrow \infty$, decimos que M es una *variedad normalmente atractora*.

Definición 4. Consideremos el campo vectorial generado por $\dot{x} = f^{\text{pert}}(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Sea $\mathcal{K} \supset M$ un compacto, donde \mathcal{K} es la clausura de un abierto en \mathbb{R}^n que contiene a M . Decimos que el campo vectorial $f(x)$ es ε -cercano de clase \mathcal{C}^1 a $f^{\text{pert}}(x)$ si

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathcal{K}} \|f(x) - f^{\text{pert}}(x)\| &\leq \varepsilon, \\ \sup_{x \in \mathcal{K}} \|Df(x) - Df^{\text{pert}}(x)\| &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

donde $f^{\text{pert}}(x)$ y $f(x)$ son los campos vectoriales con perturbación y sin perturbación, respectivamente.

Teorema 1. (Fenichel [4]) Supongamos que $\dot{x} = f(x)$ es un campo vectorial en \mathbb{R}^n de clase \mathcal{C}^r , $r \geq 1$. Sea $\bar{M} \equiv M \cup \partial M$ una variedad invariante desbordante con frontera, compacta y conexa de clase \mathcal{C}^r bajo el campo vectorial $f(x)$. Supongamos que $\nu(p) < 1$ y $\sigma(p) < 1/r$ para toda $p \in M$. Entonces para cualquier campo vectorial $f^{\text{pert}}(x)$ de clase \mathcal{C}^r ε -cercano de clase \mathcal{C}^1 a $f(x)$, con ε suficientemente pequeño, existe una variedad \bar{M}^{pert} invariante desbordante bajo $f^{\text{pert}}(x)$ de clase \mathcal{C}^r difeomorfa a \bar{M} .

Notemos que la variedad estable de \mathcal{M}_0 en (2.3) es

$$W^s(\mathcal{M}_0) = \bigcup_{(x_0, y_0, 0)} W^s(x_0, y_0, 0) = \bigcup_{(x_0, y_0, 0)} \Pi^{-1}(x_0, y_0, 0).$$

Por lo tanto, si $p = (x_0, y_0, u_0)$ y $\varphi_t(p) = (x_0, y_0, u_0 e^{-t})$, tenemos que para u_0 suficientemente pequeña, se satisface que

$$\begin{aligned} W^s(x_0, y_0, 0) &= \{p : \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(p) = (x_0, y_0, 0)\} \\ &= \{p : \|\varphi_t(p) - (x_0, y_0, 0)\| \leq e^{-t}\}. \end{aligned}$$

Por otro lado, ya que

$$\mathcal{M}_0 = \{\Pi(\varphi(t, x_0, y_0, u_0)) = (x_0, y_0, 0), -\tau < u_0 < \tau\},$$

y considerando que

$$T\mathbb{R}^3|_M = TM \oplus N,$$

obtenemos que la matriz asociada al flujo lineal y el operador de proyección ortogonal son

$$D\varphi_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \Pi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

respectivamente. Por lo tanto, obtenemos que

$$\|A_t(p)\| = 0 \quad \text{y} \quad \|B_t(p)\| = e^{-t},$$

y

$$\begin{aligned} \nu(p) &= \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \|B_t(p)\|^{1/t} = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} (e^{-t})^{1/t} = e^{-1} < 1, \\ \sigma(p) &= \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \left(-\frac{\log \|A_t(p)\|}{\log \|B_t(p)\|} \right) = 0. \end{aligned}$$

Sean $f^{\text{pert}}(x) = X_\varepsilon$ y $f(x) = X_0$ los campos vectoriales perturbado y no perturbado, respectivamente. Aplicando el Teorema 1 (de Fenichel) garantizamos la existencia de una variedad invariante \mathcal{M}_ε para X_ε cercana a \mathcal{M}_0 .

Ahora, supongamos que tenemos la descomposición

$$T\mathbb{R}^n|_M = TM \oplus N^s \oplus N^u,$$

y los operadores de proyección ortogonal asociados

$$\begin{aligned} \Pi^u &: T\mathbb{R}^n|_M \rightarrow N^u, \\ \Pi^s &: T\mathbb{R}^n|_M \rightarrow N^s, \end{aligned}$$

donde $N \equiv N^s \oplus N^u$ es la descomposición del haz normal en los haces normales estable e inestable, respectivamente. Además, supongamos que $TM \oplus N^s$ y $TM \oplus N^u$ son invariantes bajo $D\varphi_t$, para todo $t < 0$. Consideremos los siguientes vectores no nulos

$$u_0 \in N_p^u, \quad w_0 \in N_p^s, \quad v_0 \in T_pM,$$

y

$$u_{-t} = \Pi^u D\varphi_{-t}(p)u_0, \quad w_{-t} = \Pi^s D\varphi_{-t}(p)w_0, \quad v_{-t} = D\varphi_{-t}(p)v_0.$$

Además definimos los siguientes números de Lyapunov generalizados:

$$\begin{aligned} \lambda^u(p) &= \inf \left\{ a : \left(\frac{\|u_{-t}\|}{\|u_0\|} \right) / a^t \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \uparrow \infty \quad \forall u_0 \in N_p^u \right\}, \\ \sigma^{cu}(p) &= \inf \left\{ \rho : \left(\frac{\|u_{-t}\|/\|v_{-t}\|}{\|u_0\|/\|v_0\|} \right) / \rho^t \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \uparrow \infty \quad \forall v_0 \in T_pM, u_0 \in N_p^u \right\}, \\ \sigma^{su}(p) &= \inf \left\{ \rho : \left(\frac{\|u_{-t}\|/\|w_{-t}\|}{\|u_0\|/\|w_0\|} \right) / \rho^t \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \uparrow \infty \quad \forall w_0 \in N_p^s, u_0 \in N_p^u \right\}. \end{aligned}$$

Utilizando estos conceptos, tenemos los siguientes resultados.

Lema 3. Los números de Lyapunov generalizados λ^u , σ^{cu} y σ^{su} son equivalentes a los siguientes límites:

- 1) $\lambda^u(p) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \| \Pi^u D\varphi_{-t}(p)|_{N_p^u} \|^{1/t}$.
- 2) $\sigma^{cu}(p) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \| D\varphi_t|_M(\varphi_{-t}(p)) \|^{1/t} \| \Pi^u D\varphi_{-t}(p)|_{N_p^u} \|^{1/t}$.
- 3) $\sigma^{su}(p) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \| \Pi^u D\varphi_{-t}(p)|_{N_p^u} \|^{1/t} \| \Pi^s D\varphi_t(\varphi_{-t}(p))|_{N_p^s} \|^{1/t}$.

La demostración de este lema puede ser consultada en [13].

El haz normal N puede ser perturbado a un haz transversal N' , tal que

$$N' \equiv N'^s \oplus N'^u,$$

donde N'^s y N'^u son ε -cercanos de clase \mathcal{C}^0 a N^s y N^u , respectivamente.

Sean

$$\begin{aligned} N'_\varepsilon{}^s &\equiv \{(p, v^s) \in N'^s : \|v^s\| \leq \varepsilon\}, \\ N'_\varepsilon{}^u &\equiv \{(p, v^u) \in N'^u : \|v^u\| \leq \varepsilon\}, \end{aligned}$$

y la aplicación

$$\begin{aligned} h &: N'_\varepsilon{}^s \oplus N'_\varepsilon{}^u \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (p, v^s, v^u) &\mapsto p + v^s + v^u. \end{aligned}$$

En [13] se demuestra que existe un $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ la aplicación h es de clase \mathcal{C}^r .

Notemos que cuando consideramos la variedad estable e inestable de un punto fijo hiperbólico, obtenemos que la variedad inestable es tangente al subespacio inestable del campo vectorial linealizado en una vecindad del punto fijo. Similarmente, la variedad inestable de \bar{M} será tangente a $N'_\varepsilon{}^u$, pues las trayectorias con condiciones iniciales en este haz normal tienen el comportamiento asintótico apropiado cuando $t \rightarrow -\infty$, y es posible construir la variedad inestable como la gráfica de $N'_\varepsilon{}^u$. Sin embargo, $N'_\varepsilon{}^u$ podría no estar contenida en \mathbb{R}^n , pero podemos garantizar esto si consideramos la siguiente aplicación

$$\begin{aligned} h_u &: N'_\varepsilon{}^u \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (p, v^u) &\mapsto p + v^u. \end{aligned}$$

Luego, podemos concluir que $h_u(N_\varepsilon'^u) \subset \mathbb{R}^n$, lo cual garantiza la tangencia de la variedad inestable de \bar{M} y $h_u(N_\varepsilon'^u)$.

Teorema 2. (Fenichel [4]) Sean $\dot{x} = f(x)$ un campo vectorial de clase \mathcal{C}^r en \mathbb{R}^n , $r \geq 1$ y $\bar{M} \equiv M \cup \partial M$ una variedad invariante desbordante con frontera, compacta, conexa de clase \mathcal{C}^r bajo el campo vectorial $f(x)$. Si $\lambda^u(p) < 1$, $\sigma^{cu}(p) < 1$ y $\sigma^{su}(p) < 1$ para todo $p \in \bar{M}$, entonces existe una familia paramétrica de conjuntos de dimensión $n - (s + u)$, $\mathcal{F}^u = \cup_{p \in M} f^u(p)$, con $f^u(p)$ de dimensión u con frontera, tal que se cumple lo siguiente:

1. \mathcal{F}^u es una familia paramétrica de conjuntos negativamente invariante, es decir, $\varphi_{-t}(f^u(p)) \subset f^u(\varphi_{-t}(p))$.
2. La superficie $f^u(p)$ es de clase \mathcal{C}^r .
3. $f^u(p)$ es tangente a $h_u(N_p'^u)$ en p .
4. Existen $C_u, \lambda_u > 0$ tal que si $q \in f^u(p)$, entonces

$$\|\varphi_{-t}(q) - \varphi_{-t}(p)\| \leq C_u e^{-\lambda_u t},$$

para todo $t \geq 0$.

5. Si $q \in f^u(p)$ y $q' \in f^u(p')$, entonces

$$\frac{\|\varphi_{-t}(q) - \varphi_{-t}(p)\|}{\|\varphi_{-t}(q') - \varphi_{-t}(p)\|} \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad t \uparrow \infty,$$

excepto cuando $p = p'$.

6. $f^u(p) \cap f^u(p') = \emptyset$, excepto cuando $p = p'$.
7. Si $\nu^s(p) < 1$ y $\sigma^s(p) < 1/r$ para cada $p \in \bar{M}$, entonces la superficie $f^u(p)$ es de clase \mathcal{C}^r con respecto al punto p .
8. $\mathcal{F}^u = W_{\text{loc}}^u(M)$.

Considerando tiempos positivos el teorema anterior nos garantiza la existencia de la variedad estable,

$$W^s(\mathcal{M}_\varepsilon) = \bigcup_{p \in \mathcal{M}_\varepsilon} \Pi^{-1}(p),$$

donde

$$\varphi_t(\Pi^{-1}(p)) \subseteq \Pi^{-1}(\varphi_t(p)),$$

es decir, existe \mathcal{F}^s una familia paramétrica de conjuntos positivamente invariante.

Si $q \notin \mathcal{M}_\varepsilon$, entonces

$$\varphi_t(q) \rightarrow \mathcal{M}_\varepsilon.$$

Además existe una vecindad U de \mathcal{M}_ε y una aplicación $\Pi : U \rightarrow \mathcal{M}_\varepsilon$, tal que si $q \in \Pi^{-1}(p)$, entonces

$$U = W^s(\mathcal{M}_\varepsilon)$$

y

$$\|\varphi_t(q) - \varphi_t(p)\| \leq ce^{-t},$$

por lo tanto es suficiente con conocer la dinámica en \mathcal{M}_ε .

El sistema (2.2) con $\varepsilon = 0$ tiene una variedad invariante con frontera, dada por

$$\mathcal{M}_0 = \{(x, y, z) : z = -x\}.$$

Esta variedad es normalmente hiperbólica (es decir, existe otro flujo “artificial” que casi es conjugado al original con cierta hiperbolicidad en direcciones normales), cuya variedad estable es

$$W^s(\mathcal{M}_0) = \bigcup_{(x_0, y_0, 0)} \underbrace{\Pi^{-1}(x_0, y_0, 0)}_{W^s(x_0, y_0, 0)}$$

donde

$$\begin{aligned} W^s(x_0, y_0, 0) &= \{p : \lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi_\tau(p) = (x_0, y_0, 0)\} \\ &= \{p : \|\varphi_\tau(p) - (x_0, y_0, 0)\| \leq e^{-\tau}\}. \end{aligned}$$

Sea

$$X_\varepsilon = (-\varepsilon(x + y), \varepsilon(ry - pu + px - yu^2 - 2xyu - xy^2), -u - \varepsilon(x + y))$$

el campo vectorial definido por el lado derecho de (2.3). Aplicando el Teorema 1 (de Fenichel) obtenemos el siguiente resultado, el cual nos garantiza la existencia de una variedad invariante para X_ε .

Corolario 1. Sean $\nu(p) = e^{-1} < 1$ y $\sigma(p) = 0$ los números de Lyapunov generalizados. Sean $f^{\text{pert}} = X_\varepsilon$ y $f^0 = X_0$. Entonces existe una variedad invariante \mathcal{M}_ε para X_ε .

Por otro lado, el Teorema 2 (de Fenichel) garantiza la existencia de una variedad estable

$$W^s(\mathcal{M}_\varepsilon) = \bigcup_{p \in \mathcal{M}_\varepsilon} \Pi^{-1}(p),$$

una vecindad U de \mathcal{M}_ε tal que $U = W^s(\mathcal{M}_\varepsilon)$ y un mapeo $\Pi : U \rightarrow \mathcal{M}_\varepsilon$ tal que si $q \in \Pi^{-1}(p)$ entonces

$$\|\varphi_\tau(q) - \varphi_\tau(p)\| < ce^{-\tau}.$$

Como consecuencia obtenemos que nos basta con estudiar la dinámica en \mathcal{M}_ε para conocer la dinámica global.

2.2. Sistema lento

Cuando $\varepsilon = 0$ el sistema (2.1) se reduce al siguiente sistema bidimensional en las variables x y y ,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - y, \\ \dot{y} &= ry - pz - yz^2, \end{aligned} \tag{2.6}$$

tal que $z = -x$. Nos referimos a éste como *sistema lento reducido*.

Utilizando los resultados vistos anteriormente, obtenemos que el sistema (2.1) tiene una variedad crítica dada por $\mathcal{M}_0 = \{(x, y, z) : z = -x\}$, la cual es invariante bajo el flujo. Además,

$$\frac{\partial}{\partial z}(-x - z) = -1$$

para toda (x, y) , donde \mathcal{M}_0 es una variedad normalmente atractora. Aplicando la teoría geométrica de perturbaciones singulares de Fenichel (ver [5, 7]), obtenemos que una consecuencia de que \mathcal{M}_0 sea una variedad normalmente hiperbólica, para cualquier ε suficientemente pequeña y positiva, existe una familia de variedades lentas invariantes normalmente atractoras, las cuales denotamos por

$$\mathcal{M}_\varepsilon = \{(x, y, z) : z = h_\varepsilon(x, y)\}, \tag{2.7}$$

donde las funciones $h_\varepsilon(x, y)$ son de clase \mathcal{C}^k para algún $k > 0$. Ya que $\varepsilon \dot{z} = -x - z$, tenemos que éstas son soluciones de la ecuación de invariancia, es decir,

$$\varepsilon \frac{d}{dt} h_\varepsilon(x, y) = -x - h_\varepsilon(x, y), \tag{2.8}$$

tal que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h_\varepsilon(x, y) = -x.$$

Las funciones $h_\varepsilon(x, y)$ son idénticas en todos los ordenes en potencias de ε y difieren entre sí solamente en términos del orden $\mathcal{O}(e^{c/\varepsilon})$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, para

algún $c > 0$; para mayores detalles ver [5, 7]. La expansión formal de $h_\varepsilon(x, y)$ en serie de potencias de ε es dada por

$$h_\varepsilon(x, y) = h_0(x, y) + \varepsilon h_1(x, y) + \varepsilon^2 h_2(x, y) + \dots = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j h_j(x, y). \quad (2.9)$$

Las funciones coeficientes de esta expansión las podemos encontrar al sustituir (2.9) en (2.8) e igualando los respectivos coeficientes de las potencias de ε . Llevando a cabo este procedimiento obtenemos que $h_0(x, y) = -x$, de tal forma que

$$\varepsilon \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j h_j(x, y) = -x - \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j h_j(x, y)$$

ó equivalentemente

$$\varepsilon \frac{d}{dt} \left(h_0(x, y) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j h_j(x, y) \right) = -x - \left(h_0(x, y) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j h_j(x, y) \right),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \varepsilon \frac{d}{dt} \left(-x + \sum_{j=1}^{\infty} h_j(x, y) \right) &= -x - (-x) - \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j h_j(x, y), \\ \varepsilon \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j h_j(x, y) &= \varepsilon \dot{x} - \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{j-1} h_j(x, y), \end{aligned}$$

de tal forma que

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j h_j(x, y) = \dot{x} - \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^{j-1} h_j(x, y).$$

Aplicando el proceso descrito arriba obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\varepsilon h_1(x, y) + \sum_{j=2}^{\infty} \varepsilon^j h_j(x, y) \right) = \dot{x} - h_1(x, y) - \sum_{j=2}^{\infty} \varepsilon^{j-1} h_j(x, y)$$

lo cual es equivalente a

$$\varepsilon \left(\frac{\partial h_1}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial h_1}{\partial y} \dot{y} \right) + \frac{d}{dt} \sum_{j=2}^{\infty} \varepsilon^j h_j(x, y) = \dot{x} - h_1(x, y) - \sum_{j=2}^{\infty} \varepsilon^{j-1} h_j(x, y).$$

Tomando $\varepsilon = 0$ llegamos a que

$$h_1(x, y) = \dot{x},$$

pero de (1.8) tenemos que $\dot{x} = -(x + y)$, de donde $h_1(x, y) = -(x + y)$.

Continuando con este procedimiento llegamos a que

$$h_k(x, y) = -\frac{d}{dt}h_{k-1}(x, y), \quad \text{para toda } k = 1, 2, \dots$$

y obtenemos que

$$\begin{aligned} h_2(x, y) &= -\frac{d}{dt}h_1(x, y) \\ &= -\frac{d}{dt}(-(x + y)) \\ &= \dot{x} + \dot{y} \\ &= -(x + y) + (ry - p(-x) - y(-x)^2) \\ &= -(x + y) + (ry + px - x^2y). \end{aligned}$$

Ahora, utilizando las expresiones de $h_1(x, y)$ y $h_2(x, y)$ obtenemos que

$$\begin{aligned} h_3(x, y) &= -\frac{d}{dt}h_2(x, y) \\ &= -\frac{d}{dt}(-(x + y) + (ry + px - x^2y)) \\ &= \dot{x} + \dot{y} - r\dot{y} - p\dot{x} + 2x\dot{x}y + x^2\dot{y} \\ &= (1 - p + 2xy)\dot{x} + (1 - r + x^2)\dot{y} \\ &= -(1 - p + 2xy)(x + y) + (1 - r + x^2)(ry + px - x^2y), \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(x, y) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j h_j(x, y) \\ &= h_0(x, y) + \varepsilon h_1(x, y) + \varepsilon^2 h_2(x, y) + \dots \\ &= -x - \varepsilon(x + y) + \varepsilon^2 (-(x + y) + (ry + px - x^2y)) \\ &\quad + \varepsilon^3 (-(1 - p + 2xy)(x + y) + (1 - r + x^2)(ry + px - x^2y)) + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Luego, en la variedad lenta \mathcal{M}_ε , el sistema (2.1) se reduce al siguiente sistema de ecuaciones diferenciales en el plano:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x - y, \\ \dot{y} &= ry - ph_\varepsilon(x, y) - (h_\varepsilon(x, y))^2 y \end{aligned} \tag{2.11}$$

donde $h_\varepsilon(x, y)$ está dada por (2.10).

Para continuar con el estudio, observemos que la dinámica rápida a lo largo de la cual las soluciones se “confinan” en \mathcal{M}_ε , puede ser analizada introduciendo el tiempo rápido $\tau = t/\varepsilon$ y reescribiendo a (2.1) como el siguiente sistema rápido

$$\begin{aligned}x' &= -\varepsilon(x + y), \\y' &= \varepsilon(ry - pz - yz^2), \\z' &= -x - z,\end{aligned}\tag{2.12}$$

donde la prima ' denota la derivada con respecto de τ .

Notemos que para $\varepsilon \neq 0$, los sistemas (2.1) y (2.12) son equivalentes. En el límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$, el sistema rápido (2.12) se reduce a una sola ecuación para z , con x y y constantes en el tiempo.

Sea (x_0, y_0, z_0) una condición inicial. En el tiempo rápido, τ , la solución con condición inicial (x_0, y_0, z_0) se “confinan” hasta el punto $(x_0, y_0, -x_0) \in \mathcal{M}_0$. Entonces, para ε positivo y pequeño, la componente z nuevamente se “confinan” rápidamente en la escala de tiempo τ , ahora en \mathcal{M}_ε , y las componentes x e y cambiarán lentamente siguiendo la dinámica en \mathcal{M}_ε ; ver el Apéndice 3.4.

2.3. Bifurcaciones globales

Una *bifurcación* es un cambio cualitativo en la dinámica de un sistema, el cual puede ocurrir cuando los parámetros se hacen variar desde un cierto valor crítico.

Iniciemos por estudiar el tipo de comportamientos dinámicos que son posibles en el punto de equilibrio $P_0 = (0, 0)$ del sistema (2.11) en \mathcal{M}_ε , el cual en términos físicos es conocido como *estado trivial*.

En la sección anterior vimos que $z = h_\varepsilon(x, y) = -x - \varepsilon(x + y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, de tal forma que el sistema (2.11), ahora lo podemos escribir como

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y, \\ \dot{y} &= ry - p(-x - \varepsilon(x + y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)) - (-x - \varepsilon(x + y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2))^2 y,\end{aligned}$$

ó equivalentemente

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y, \\ \dot{y} &= ry + px - x^2 y + \varepsilon[p(x + y) - 2xy(x + y)] + \mathcal{O}(\varepsilon^2).\end{aligned}\tag{2.13}$$

Los puntos de equilibrio de este sistema satisfacen que $y = -x$, y aplicando esta condición en la segunda ecuación, obtenemos que los puntos de equilibrio son dados por la solución de la siguiente ecuación

$$x(p - r + x^2) + \mathcal{O}(\varepsilon^3) = 0.$$

Si $r > p$ las soluciones son

$$\begin{aligned} x_0 &= \mathcal{O}(\varepsilon^3), \\ x_{1,2} &= \pm\sqrt{r-p} + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \end{aligned}$$

Como consecuencia, obtenemos que a orden ε^3 los puntos de equilibrio son

$$P_0 = (0, 0), \quad p_1 = (x_1^*, -x_1^*), \quad p_2 = (x_2^*, -x_2^*),$$

donde $x_1^* = \sqrt{r-p}$ y $x_2^* = -\sqrt{r-p}$. Ya que P_0 existe para todo valor de p y r , es claro que los puntos P_1 y P_2 emergen de P_0 , en otras palabras, hay una bifurcación simétrica de tipo trinche cuando $r = p$.

Ahora, veremos que en el punto $(p, r) = (\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1+\varepsilon})$ en el espacio de parámetros, el punto de equilibrio P_0 de (2.11) tiene una bifurcación de tipo Bogdanov-Takens (BT) la cual es \mathbb{Z}_2 -simétrica.

Sea $h_\varepsilon(x, y) = -x - \varepsilon(x + y) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, entonces el sistema (2.11) se transforma en

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ p + p\varepsilon & r + p\varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -(1 + 2\varepsilon)x^2y - 2\varepsilon xy^2 + \mathcal{O}(\varepsilon^2, \|(x, y)\|^4) \end{pmatrix}.$$

Con el fin de determinar la estabilidad lineal de los puntos de equilibrio, vamos a evaluar la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ p + p\varepsilon & r + p\varepsilon \end{pmatrix},$$

en los puntos de equilibrio y posteriormente calcular los valores propios.

En la figura 2.4 mostramos las diferentes regiones en el plano (p, r) donde cambia el comportamiento cualitativo de los puntos de equilibrio, donde el punto $Q = (\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1+\varepsilon})$ es el *centro de organización*. Las regiones de estabilidad lineal de los puntos de equilibrio están determinadas por las regiones acotadas por las funciones $r = p$, $r = 2\sqrt{p(1+\varepsilon)} - (1 + \varepsilon)p$, $r = 1 - \varepsilon p$, $p = 1 + \varepsilon(1 - 2r)$ y

$$r = \frac{p^2(1 - 2\varepsilon) + 2p(3 + \varepsilon) + 1}{8 - 4\varepsilon(p - 1)}.$$

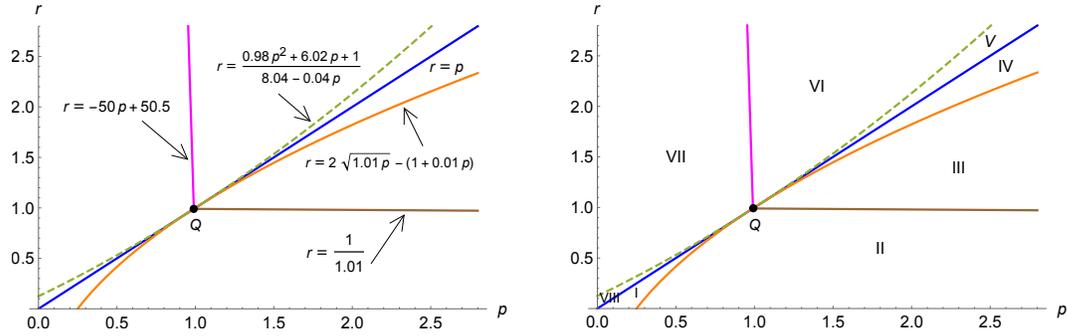


Figura 2.4: Regiones de estabilidad lineal e inestabilidad de los puntos de equilibrio en el plano de parámetros r y p con $q = \frac{1}{\varepsilon}$ y $s = 0$.

En el análisis de la estabilidad de los puntos de equilibrio utilizaremos el hecho de que el polinomio característico de una matriz $A_{2 \times 2}$ está dado por

$$\lambda^2 - (\text{tr}A)\lambda + \det A = 0,$$

donde $\text{tr}A = \text{traza}(A)$ y $\det A$ es el determinante de A , con valores propios

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\text{tr}A \pm \sqrt{(\text{tr}A)^2 - 4 \det A} \right).$$

Además, consideraremos las ocho regiones descritas en la figura 2.4.

En la región I el único punto de equilibrio es el origen, y se cumple la condición $2\sqrt{p(1+\varepsilon)} - (1+\varepsilon p) < r < p$. Notemos que en esta región también se satisface que $r < 1 - \varepsilon p$, por lo tanto $-1 + r + \varepsilon p = \text{tr}A < 0$. Además, $(-1 + r + \varepsilon p)^2 > (-1 + r + \varepsilon p)^2 - 4(p - r)$ pues $p > r$, por lo tanto los valores propios satisfacen

$$\lambda_1 < \lambda_2 < 0,$$

es decir, tenemos dos valores propios reales negativos y distintos, y como consecuencia $P_0 = (0, 0)$ es un nodo estable, ver la figura 2.5.

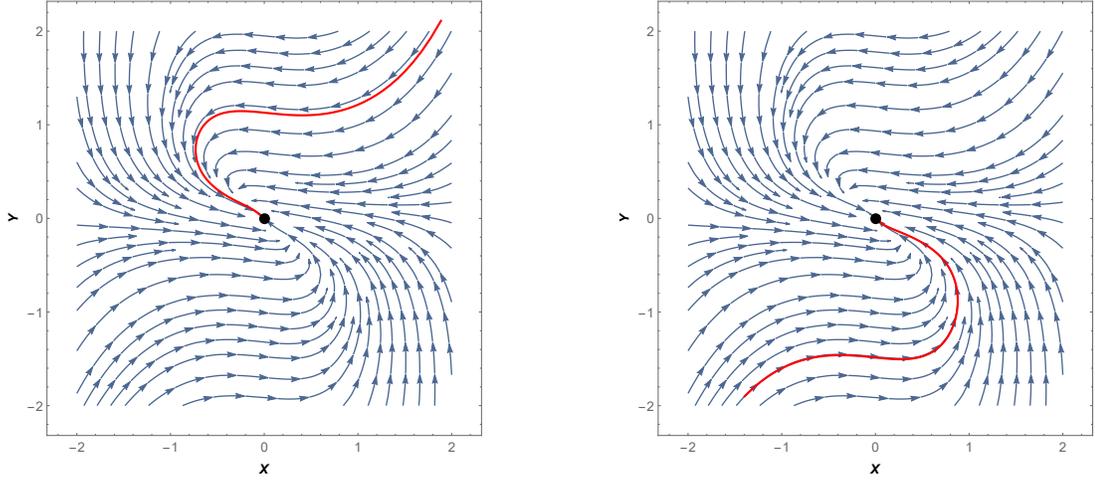


Figura 2.5: Retrato fase del sistema (2.11) con condiciones iniciales en la región I, para $p = 0.2$, $r = 0.1$, $\varepsilon = 0.01$. El punto P_0 es un nodo estable.

En la región II se tiene que $r < p$, $r < 2\sqrt{p(1+\varepsilon)} - (1+\varepsilon p)$ y $r < 1 - \varepsilon p$, por lo tanto $\text{tr}A = -1 + r + p\varepsilon < 0$. Sin embargo

$$r < 2\sqrt{p(1+\varepsilon)} - (1+\varepsilon p)$$

lo cual es equivalente a

$$(-1 + r + p\varepsilon)^2 < 4(p - r),$$

pero $p - r = \det A$, entonces tenemos que $(\text{tr}A)^2 - 4\det A < 0$. Luego, los valores propios son de la forma

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm i\beta, \quad \alpha, \beta > 0,$$

lo cual implica que $P_0 = (0, 0)$ es un foco estable, ver la figura 2.6.

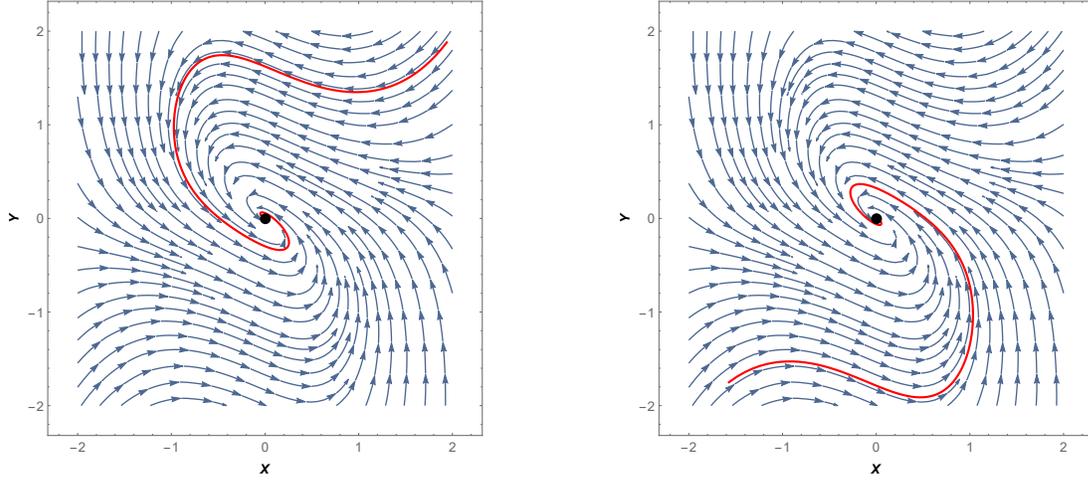


Figura 2.6: Retrato fase del sistema (2.11) en la región II para $p = 0.8$, $r = 0.4$, $\varepsilon = 0.01$, para diferentes condiciones iniciales. P_0 es un foco estable.

En la región III se tiene que $1 - \varepsilon p < r < 2\sqrt{p(1 + \varepsilon)} - (1 + \varepsilon p)$, pero $1 - \varepsilon p < r$ de tal forma que $0 < -1 + r + \varepsilon p = \text{tr}A$. Además $r < 2\sqrt{p(1 + \varepsilon)} - (1 + \varepsilon p)$, lo cual es equivalente a $(-1 + r + \varepsilon p)^2 < 4(p - r)$. Luego se cumple $(\text{tr}A)^2 - 4 \det A < 0$, lo cual implica que los valores propios son de la forma $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ con $\alpha, \beta > 0$. Por lo tanto concluimos que $P_0 = (0, 0)$ es un foco inestable, ver la figura 2.7.

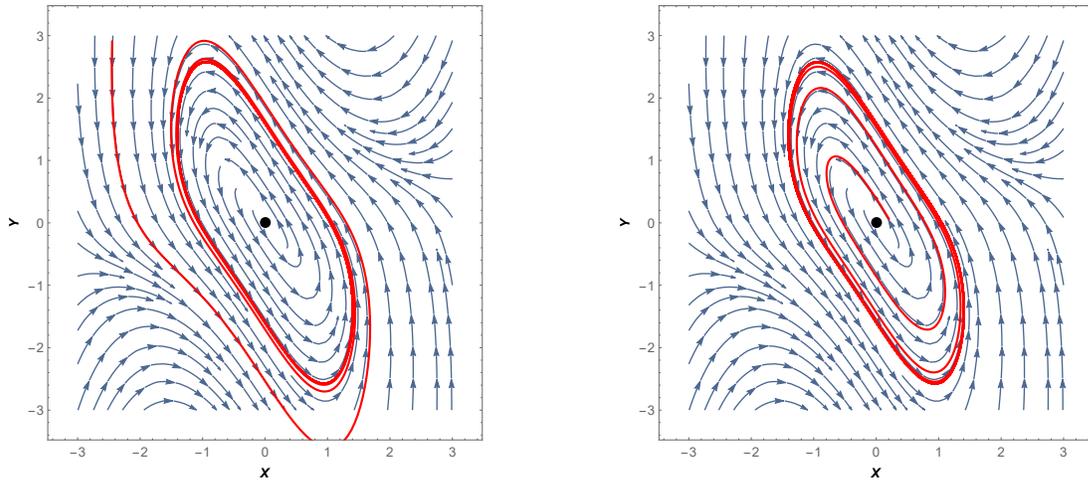


Figura 2.7: Retrato fase del sistema (2.11) en la región III para $p = 1.8$, $r = 1.5$, $\varepsilon = 0.01$. Para dos diferentes condiciones iniciales P_0 es un foco inestable.

En la región IV se cumple $1 - \varepsilon p < 2\sqrt{p(1 + \varepsilon)} - (1 + \varepsilon p) < r < p$, de donde

es inmediato ver que $\text{tr}A = -1 + r + \varepsilon p > 0$. Además

$$2\sqrt{p(1+\varepsilon)} - (1 - \varepsilon p) < r,$$

lo cual es equivalente a $(-1 + r + \varepsilon p)^2 > 4(p - r)$, y por lo tanto

$$(\text{tr}A)^2 - 4 \det A > 0.$$

Por último tenemos que

$$(-1 + r + \varepsilon p)^2 > (-1 + r + \varepsilon p)^2 - 4(p - r), \quad \text{pues} \quad p > r.$$

Como consecuencia los valores propios satisfacen

$$\lambda_1 > \lambda_2 > 0,$$

es decir, los dos valores son reales positivos y diferentes, lo cual implica que $P_0 = (0, 0)$ es un nodo inestable; ver la figura 2.8.

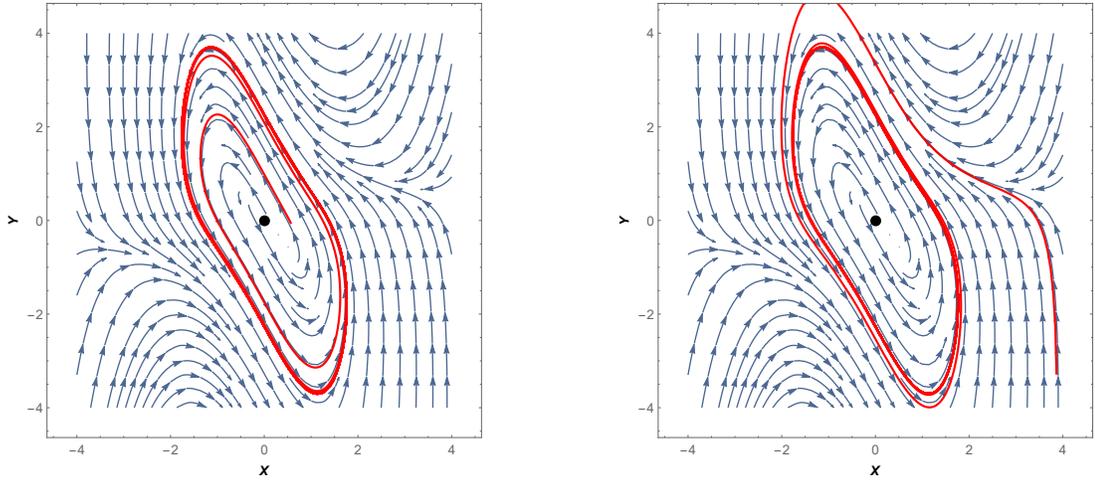


Figura 2.8: Retrato fase del sistema 2.11 en la región IV para $p = 1.9$, $r = 1.8$ y $\varepsilon = 0.01$ con condiciones iniciales diferentes para las cuales P_0 es un nodo inestable.

En las regiones V, VI, VII y VIII se tiene que $r > p$, por lo tanto el sistema (2.11) tiene tres puntos de equilibrio, $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (x_1^*, -x_1^*)$ y $P_2 = (x_2^*, -x_2^*)$ donde $x_1^* = \sqrt{r - p}$ y $x_2^* = -\sqrt{r - p}$. Con el fin de hacer un análisis lineal de la estabilidad en un entorno de los puntos de equilibrio P_1 y P_2 , calculamos la matriz jacobiana

$$J = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ p(1 + \varepsilon) - 2(1 + 2\varepsilon)xy - 2\varepsilon y^2 & r + \varepsilon p - (1 + 2\varepsilon)x^2 - 4\varepsilon xy \end{pmatrix}.$$

Un cálculo inmediato nos dice que

$$\begin{aligned} J(P_1) &= J(P_2) \\ &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ (1+\varepsilon)(2r-p) & p(1-\varepsilon)+2\varepsilon r \end{pmatrix} \\ &= A^*. \end{aligned}$$

Luego, obtenemos que

$$\text{tr}A^* = -1 + p - \varepsilon p + 2\varepsilon r \quad \text{y} \quad \det A^* = 2(r-p),$$

y los valores propios son

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \left(\text{tr}A^* \pm \sqrt{(\text{tr}A^*)^2 - 4 \det A^*} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(-1 + p - \varepsilon p + 2\varepsilon r \pm \sqrt{(-1 + p - \varepsilon p + 2\varepsilon r)^2 - 8(r-p)} \right). \end{aligned}$$

En las regiones V, VI, VII y VIII la curva

$$r = \gamma(p) = \frac{p^2(1-2\varepsilon) + 2p(3+\varepsilon) + 1}{8 - 4\varepsilon(p-1)}$$

juega un papel importante, pues $r = \gamma(p)$ es equivalente a

$$(-1 + p - \varepsilon p + 2\varepsilon r)^2 - 8(r-p) = 0.$$

Antes de analizar la estabilidad lineal de los puntos de equilibrio P_1 y P_2 en las regiones V, VI, VII y VIII, recordemos que la matriz asociada a la linealización del sistema en un entorno de $P_0 = (0,0)$ tiene valores propios

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-1 + r + \varepsilon p \pm \sqrt{(-1 + r + \varepsilon p)^2 - 4(p-r)} \right).$$

Sin embargo, en estas regiones $r > p$, lo cual implica que $(-1+r+\varepsilon p)^2 - 4(p-r) > 0$ y como consecuencia los valores propios son reales y distintos, más aún

$$(-1 + r + \varepsilon p)^2 < (-1 + r + \varepsilon p)^2 - 4(p-r) \quad \text{pues} \quad p < r.$$

Como consecuencia los valores propios son reales y de signo contrario, es decir,

$$\lambda_1 < 0 < \lambda_2,$$

por lo tanto $P_0 = (0,0)$ es un punto silla para las regiones V, VI, VII y VIII. Ahora vamos a estudiar qué tipo de estabilidad lineal tienen los puntos P_1 y P_2 .

En la región V se cumple que

$$p < r < \gamma(p) \quad \text{y} \quad r > \frac{\varepsilon + 1 - p}{2\varepsilon},$$

lo cual implica que $\text{tr}A^* = -1 + p - \varepsilon p + 2\varepsilon r > 0$, además $r < \gamma(p)$ lo que es equivalente a $(\text{tr}A^*)^2 - 4 \det A^* > 0$. Finalmente, observemos que

$$(-1 + p - \varepsilon p + 2\varepsilon r)^2 > (-1 + p - \varepsilon p + 2\varepsilon r)^2 - 8(r - p) \quad \text{pues} \quad r > p,$$

por lo tanto los valores propios satisfacen

$$\lambda_1^* > \lambda_2^* > 0,$$

es decir, los valores propios son reales positivos y distintos, lo cual implica que P_1 y P_2 son nodos inestables; ver la figura 2.9.

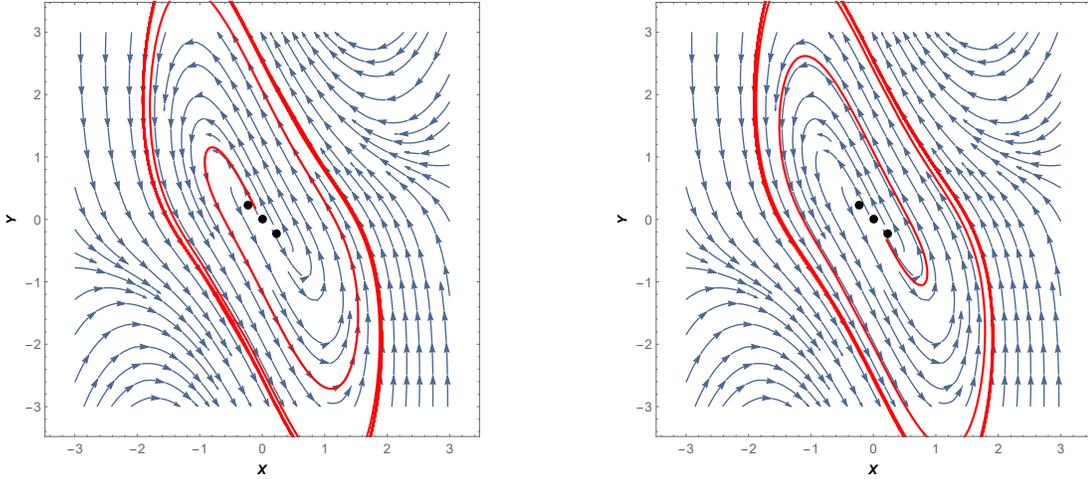


Figura 2.9: Retrato fase del sistema 2.11 en la región V para $p = 1.9$, $r = 1.95$, $\varepsilon = 0.01$, tomando condiciones iniciales diferentes para las cuales P_0 es un punto silla, mientras que P_1 y P_2 son nodos inestables.

En la región VI se tiene

$$p < r, \quad r > \gamma(p) \quad \text{y} \quad r > \frac{\varepsilon + 1 - p}{2\varepsilon}.$$

Notemos que $r > \gamma(p)$ es equivalente a $(-1 + p - \varepsilon p + 2\varepsilon r)^2 < 8(r - p)$, es decir $(\text{tr}A^*)^2 < 4 \det A^*$, además

$$r > \frac{\varepsilon + 1 - p}{2\varepsilon},$$

lo cual implica que $\text{tr}A^* = -1 + p - \varepsilon p + 2\varepsilon r > 0$, por lo tanto los valores propios son de la forma

$$\lambda_{1,2}^* = \alpha^* \pm i\beta^*, \quad \alpha^*, \beta^* > 0,$$

es decir, los valores propios son complejos con $\text{Re}(\lambda_{1,2}^*) > 0$, lo cual implica que los equilibrios P_1 y P_2 son focos inestables, ver la figura 2.10.

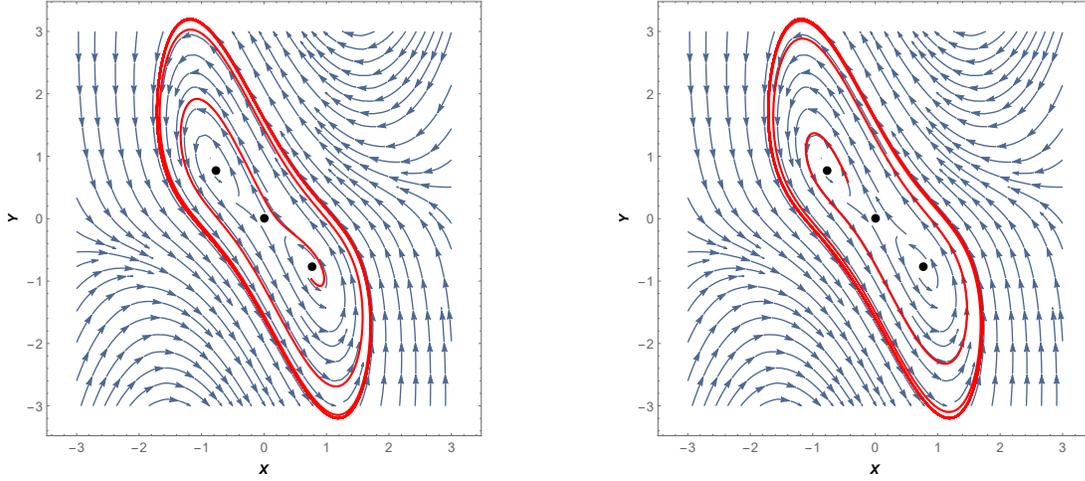


Figura 2.10: Retrato fase del sistema (2.11) en la región VI para $p = 1.2$, $r = 1.8$, $\varepsilon = 0.01$, tomando condiciones iniciales diferentes para las cuales P_0 es un punto silla, mientras que P_1 y P_2 son focos inestables.

En la región VII se cumplen las siguientes condiciones

$$r > p, \quad r > \gamma(p) \quad \text{y} \quad r < \frac{\varepsilon + 1 - p}{2\varepsilon}.$$

Notemos que estas dos últimas condiciones son equivalentes a

$$(-1 + p - \varepsilon p + 2\varepsilon r)^2 < 8(r - p) \quad \text{y} \quad -1 + p - \varepsilon p + 2\varepsilon r < 0,$$

por lo tanto $(\text{tr}A^*)^2 - 4\det A^* < 0$ y $\text{tr}A^* < 0$, entonces los valores propios son de la forma

$$\lambda_{1,2}^* = -\alpha^* \pm i\beta^*, \quad \alpha^*, \beta^* > 0,$$

es decir, los valores propios son complejos con $\text{Re}(\lambda_{1,2}^*) < 0$, lo cual implica que los equilibrios P_1 y P_2 son focos estables, ver la figura 2.11.

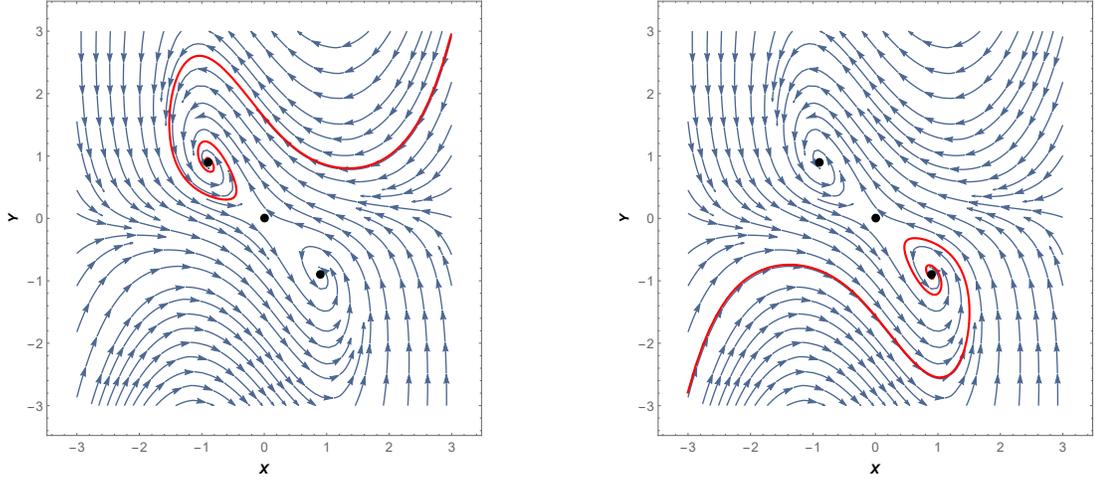


Figura 2.11: Retrato fase del sistema (2.11) en la región VII para $p = 0.4$, $r = 1.2$, $\varepsilon = 0.01$, tomando condiciones iniciales diferentes para las cuales P_0 es un punto silla, mientras que P_1 y P_2 son focos estables.

En la región VIII se tiene

$$r > p, \quad r < \gamma(p) \quad \text{y} \quad r < \frac{\varepsilon + 1 - p}{2\varepsilon},$$

las últimas dos condiciones son equivalentes a $(\text{tr}A^*)^2 - 4\det A^* > 0$ y $\text{tr}A^* < 0$, respectivamente. Además

$$(-1 + p - \varepsilon p + 2\varepsilon r)^2 > (-1 + p - \varepsilon p + 2\varepsilon r)^2 - 8(r - p), \quad \text{ya que } r > p,$$

por lo tanto los valores propios satisfacen

$$\lambda_1^* < \lambda_2^* < 0,$$

es decir, los valores propios son reales negativos y distintos. Luego P_1 y P_2 son nodos estables, ver la figura 2.12.

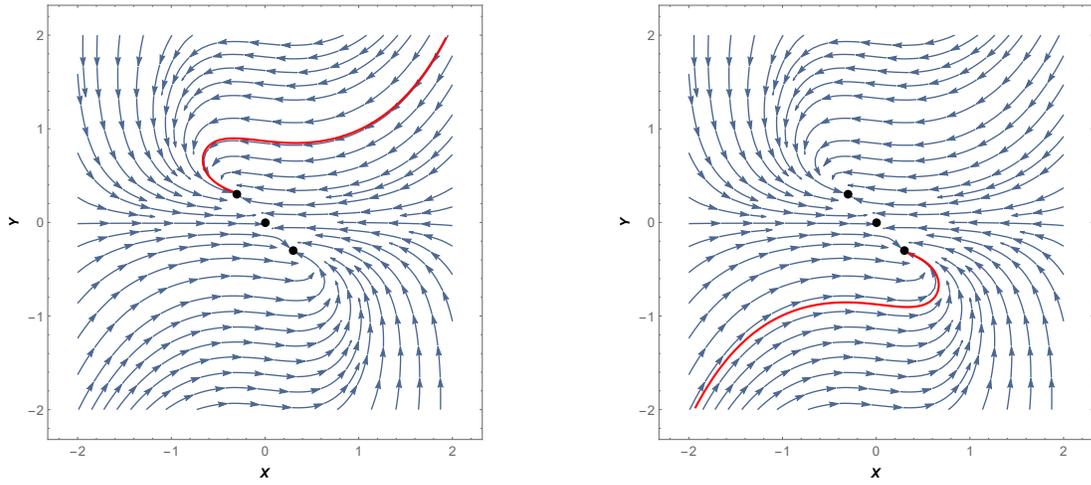


Figura 2.12: Retrato fase del sistema 2.11 en la región VIII para $p = 0.01$, $r = 0.10$, $\varepsilon = 0.01$, tomando condiciones iniciales para las cuales P_0 es un punto silla, P_1 y P_2 son nodos estables.

Capítulo 3

Modelo asimétrico lento-rápido

En este capítulo estudiaremos el efecto de la falta de simetría ($s > 0$) en (1.8), cuando tomamos el límite a lo largo de q , es decir,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y, \\ \dot{y} &= ry - pz + sz^2 - yz^2, \\ \varepsilon \dot{z} &= -x - z,\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde $\varepsilon = 1/q$. A partir de ahora nos referimos a (3.1) como el *modelo asimétrico lento-rápido*.

Al igual que ocurre en (2.1), el sistema (3.1) tiene una familia de variedades invariantes lentas en las que se produce la dinámica del sistema a tiempos grandes.. Por lo tanto al estudiar el flujo en estas variedades lentas es posible establecer la existencia de dos puntos no degenerados de tipo Takens-Bogdanov. Para cada $s > 0$, esos puntos son centros de organización en el plano de parámetros (p, r) . La geometría generada a partir de estos centros de organización, así como las curvas de bifurcación, pueden entenderse como una ruptura de la simetría del único centro de organización del sistema (2.1).

3.1. Variedades lentas

Es importante observar que el modelo asimétrico lento-rápido con $\varepsilon = 0$ tiene la misma variedad normalmente hiperbólica que el modelo simétrico lento-rápido, dada por $\mathcal{M}_0 = \{(x, y, z) : z = -x\}$. Esta variedad persiste para todo $0 < \varepsilon \ll 1$, por lo tanto, en analogía con la sección anterior existe una familia de variedades

invariantes lentas \mathcal{M}_ε definidas por la serie

$$h_\varepsilon(x, y) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j h_j(x, y) = h_0(x, y) + \varepsilon h_1(x, y) + \varepsilon^2 h_2(x, y) + \varepsilon^3 h_3(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^4).$$

Al igual que ocurre en el sistema (2.1), aquí también $h_0 = -x$, mientras que los otros términos se obtienen mediante la fórmula

$$h_k(x, y) = -\frac{d}{dt} h_{k-1}(x, y), \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.2)$$

Usando esta relación de recurrencia tenemos que

$$h_1(x, y) = -\frac{d}{dt} h_0(x, y) = -\frac{d}{dt}(-x) = \dot{x} = -(x + y),$$

de forma análoga

$$\begin{aligned} h_2(x, y) &= -\frac{d}{dt} h_1(x, y) \\ &= \frac{d}{dt}(x + y) \\ &= \dot{x} + \dot{y} \\ &= -(x + y) + (ry + px + (s - y)x^2), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h_3(x, y) &= -\frac{d}{dt} h_2(x, y) \\ &= \frac{d}{dt}(x + y - ry - px - sx^2 + yx^2) \\ &= \dot{x} + \dot{y} - r\dot{y} - p\dot{x} - 2sx\dot{x} + 2xy\dot{x} + x^2\dot{y} \\ &= (1 - p - 2sx + 2yx)\dot{x} + (1 - r + x^2)\dot{y} \\ &= -(1 - p + 2x(y - s))(x + y) + (1 - r + x^2)(ry + px + (s - y)x^2). \end{aligned}$$

Finalmente llegamos a que

$$\begin{aligned} h_\varepsilon(x, y) &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j h_j(x, y) \\ &= h_0(x, y) + \varepsilon h_1(x, y) + \varepsilon^2 h_2(x, y) + \varepsilon^3 h_3(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon^4) \\ &= -x - \varepsilon(x + y) - \varepsilon^2((x + y) - (ry + px + (s - y)x^2)) \\ &\quad - \varepsilon^3((1 - p + 2x(y - s))(x + y) - (1 - r + x^2)(ry + px + (s - y)x^2)) \\ &\quad + \mathcal{O}(\varepsilon^4). \end{aligned} \quad (3.3)$$

En la variedad lenta \mathcal{M}_ε , el sistema (3.1) se reduce a las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y, \\ \dot{y} &= ry - ph_\varepsilon(x, y) + s(h_\varepsilon(x, y))^2 - y(h_\varepsilon(x, y))^2.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Para simplificar la representación, estudiaremos la dinámica de (3.4) en la variedad crítica, es decir, tomamos a $h_\varepsilon(x, y) = h_0(x, y) + \mathcal{O}(\varepsilon)$, lo cual nos da

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y, \\ \dot{y} &= ry + px + sx^2 - yx^2.\end{aligned}\tag{3.5}$$

3.2. Centros de organización y bifurcaciones de tipo Hopf

Los puntos de equilibrio del sistema (3.5) son aquellos que satisfacen

$$\begin{aligned}-x - y &= 0, \\ ry + px + sx^2 - yx^2 &= 0.\end{aligned}$$

Luego las soluciones de la ecuación $x^3 + sx^2 + (p-r)x = 0$ determinan esos puntos, la cuales son

$$x_0 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-s \pm \sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right).$$

Es evidente que $P_0 = (0, 0)$ es un punto de equilibrio para todo p, r y s . En el caso $r > p - \frac{1}{4}s^2$, el sistema (3.5) tiene otros dos puntos de equilibrio, $P_1 = (x_1^*, -x_1^*)$ y $P_2 = (x_2^*, -x_2^*)$, donde

$$\begin{aligned}x_1^* &= \frac{1}{2} \left(-s + \sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right), \\ x_2^* &= \frac{1}{2} \left(-s - \sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right).\end{aligned}\tag{3.6}$$

Si elegimos al parámetro s arbitrario pero fijo, tenemos que sobre la recta $r = p - \frac{1}{4}s^2$ se satisface

$$x_2^* = x_1^* = -\frac{s}{2} < 0.$$

Sin embargo, si $p - \frac{1}{4}s^2 < r < p$ llegamos a que

$$x_2^* < x_1^* < 0,$$

mientras que si $p = r$ tenemos que

$$x_2^* = -s < 0 \quad \text{y} \quad x_1^* = 0.$$

Por último, cuando $r > p$ obtenemos

$$x_2^* < 0 < x_1^*.$$

La matriz jacobiana asociada a la linealización del sistema (3.5) en un entorno del punto P_0 es

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ p & r \end{pmatrix},$$

con valores propios

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-1 + r \pm \sqrt{(-1 + r)^2 + 4(r - p)} \right).$$

Para encontrar el centro de organización en P_0 es necesario resolver simultáneamente las ecuaciones $\text{tr}A_0 = \det A_0 = 0$, lo cual se traduce a

$$\begin{aligned} -1 + r &= 0, \\ p - r &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución es $r = p = 1$. Para estos valores obtenemos

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

la cual puede factorizarse como $A_0 = PJP^{-1}$, donde

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto A_0 tiene a 0 como valor propio con multiplicidad algebraica dos y multiplicidad geométrica uno, es decir, el punto $Q_0 = (p, r) = (1, 1)$ es un centro de organización para el sistema (3.5).

Para el punto de equilibrio P_1 tenemos que la matriz jacobiana es

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2r - p & p - \frac{s^2}{2} + \frac{1}{2}s\sqrt{s^2 + 4(r - p)} \end{pmatrix}.$$

Ésta tiene dos valores propios 0 cuando $\text{tr}A_1 = \det A_1 = 0$, lo cual se traduce en las ecuaciones

$$\begin{aligned} -1 + p - \frac{s^2}{2} + \frac{s}{2}\sqrt{s^2 + 4(r - p)} &= 0, \\ 2(r - p) + \frac{s}{2} \left(s - \sqrt{s^2 + 4(r - p)} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

La solución de la primera ecuación es

$$r = \frac{1 - 2p + p^2 + s^2}{s^2}, \quad (3.8)$$

y al sustituir este valor en la segunda ecuación (que es equivalente a $\det A_1 = 0$) y resolver para p , obtenemos que

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 1 + s^2, \quad p_3 = 1 + \frac{1}{2}s^2,$$

de donde se sigue que

$$r_1 = 1, \quad r_2 = 1 + s^2, \quad r_3 = 1 + \frac{1}{4}s^2,$$

respectivamente. Por otro lado, las soluciones del sistema (3.7) son

$$(p_1, r_1) = (1, 1), \quad (p_2, r_2) = (1 + s^2, 1 + s^2), \quad (p_3, r_3) = \left(1 + \frac{1}{2}s^2, 1 + \frac{1}{4}s^2\right).$$

Recordemos que el punto (p_1, r_1) corresponde al centro de organización Q_0 , el cual ya hemos considerado, y si sustituimos (p_2, r_2) en la primera ecuación de (3.7) tenemos que

$$-1 + p - \frac{s^2}{2} + \frac{s}{2}\sqrt{s^2 + 4(r - p)} = -1 + 1 + s^2 - \frac{s^2}{2} + \frac{s^2}{2} = s^2 = 0,$$

de donde concluimos que $s = 0$, pero debido a que estamos en el modelo asimétrico ($s > 0$), (p_2, r_2) no es solución del sistema. Por último, al sustituir (p_3, r_3) en (3.7) obtenemos que este punto es solución para todo $s > 0$, y al evaluar (p_3, r_3) en A_1 llegamos a que

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como consecuencia concluimos que $Q_1 = (1 + \frac{1}{2}s^2, 1 + \frac{1}{4}s^2)$ es también un centro de organización del sistema (3.5), para todo $s > 0$.

Para el punto de equilibrio P_2 tenemos que la matriz jacobiana es

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2r - p & p - \frac{s^2}{2} - \frac{1}{2}s\sqrt{s^2 + 4(r - p)} \end{pmatrix},$$

cuyo polinomio característico $P(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}A_2\lambda + \det A_2$ tiene dos valores propios 0 cuando $\text{tr}A_2 = 0$ y $\det A_2 = 0$, lo cual es equivalente a resolver el siguiente sistema de ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} -1 + p - \frac{s^2}{2} - \frac{s}{2}\sqrt{s^2 + 4(r - p)} &= 0, \\ 2(r - p) + \frac{s}{2}\left(s + \sqrt{s^2 + 4(r - p)}\right) &= 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

La primera ecuación corresponde a $\text{tr}A_2 = 0$, y al resolver para r tenemos la expresión (3.8), es decir,

$$r = \frac{1 - 2p + p^2 + s^2}{s^2}.$$

Ahora sustituyendo (3.8) en la segunda ecuación de (3.9) obtenemos nuevamente

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 1 + s^2, \quad p_3 = 1 + \frac{1}{2}s^2,$$

de donde concluimos que los centros de organización para el sistema (3.5) son

$$Q_0 = (1, 1) \quad \text{y} \quad Q_1 = \left(1 + \frac{1}{2}s^2, 1 + \frac{1}{4}s^2\right). \quad (3.10)$$

La bifurcación de Hopf, es un tipo de bifurcación que ocurre por pérdida de hiperbolicidad en los puntos de equilibrio que presentan algunos sistemas dinámicos, de tal forma que al variar el valor del parámetro de bifurcación del sistema, éste sufre un cambio en la estabilidad del punto de equilibrio en estudio, dando origen o desapareciendo una órbita periódica, las cuales tienen una determinada estabilidad. Dicha estabilidad es proporcionada por el signo del *número de Lyapunov*, denotado por σ , el cual introducimos en la sección ?? del apéndice.

El siguiente paso en nuestro estudio es calcular los números de Lyapunov de (3.5). Iniciemos por considerar el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales analítico en el plano

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax + by + f(x, y), \\ \dot{y} &= cx + dy + g(x, y), \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{i+j \geq 2} a_{ij}x^i y^j = (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) + (a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) + \dots \\ g(x, y) &= \sum_{i+j \geq 2} b_{ij}x^i y^j = (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2) + (b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3) + \dots \end{aligned}$$

con $\Delta = ad - bc > 0$ y $a + d = 0$. La matriz jacobiana en el punto $(0, 0)$ es

$$J(0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

la cual tiene dos valores propios imaginarios puros, y el origen es un foco débil (ver [1, 10]).

Para el sistema (3.11) el número de Lyapunov es dado por

$$\begin{aligned} \sigma = & -\frac{3\pi}{2b\sqrt{\Delta^3}} \{ [ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + ab(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{02}) \\ & + c^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 - b_{20}b_{02}) - b^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) \\ & + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20})] - (a^2 + bc) [3(cb_{03} - ba_{30}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + (ca_{12} - bb_{21})] \}. \end{aligned}$$

Si $\sigma \neq 0$ ocurre una bifurcación de Hopf en el origen, en el caso $\sigma < 0$ hay una bifurcación de Hopf supercrítica, mientras que si $\sigma > 0$ hay una bifurcación de Hopf subcrítica. Para mayores detalles sobre este tema ver [1] y [10].

Cuando hacemos el cambio de variable $\alpha = a + d$, el sistema (3.11) es topológicamente equivalente al siguiente

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - y + f(x, y), \\ \dot{y} &= x + \alpha y + g(x, y), \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde $f(x, y) = \mathcal{O}(\|(x, y)\|^2)$ y $g(x, y) = \mathcal{O}(\|(x, y)\|^2)$ son de clase \mathcal{C}^r , $r \geq 1$. El origen es siempre un punto de equilibrio, el cual es un foco estable para $\alpha < 0$ y un foco inestable para $\alpha > 0$. En el valor crítico $\alpha = 0$ el punto de equilibrio es no linealmente estable y topológicamente equivalente a un foco débil.

Para $\alpha > 0$ el equilibrio está envuelto por un ciclo límite estable, es decir, todas las órbitas inician dentro o fuera del ciclo límite, y las órbitas que salen del origen tienden al ciclo límite cuando $t \rightarrow \infty$. Con lo cual obtenemos una *bifurcación de Hopf supercrítica* que ocurre cuando $\sigma < 0$. Geométricamente esta bifurcación puede representarse en el espacio (x, y, α) , donde la α -familia de ciclos límites forman un paraboloides, ver la figura 3.1.

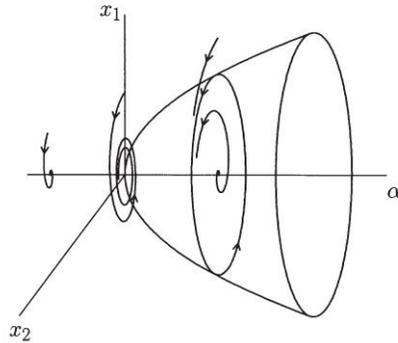


Figura 3.1: Bifurcación de Hopf supercrítica en el espacio fase y de parámetros; figura tomada de [8].

Cuando $\sigma > 0$ tenemos que el origen es un foco estable para $\alpha < 0$, y un foco inestable para $\alpha > 0$, sin embargo en el valor crítico $\alpha = 0$ el punto de equilibrio es no linealmente inestable y topológicamente equivalente a un foco débil. En el caso $\alpha < 0$, el equilibrio está envuelto por un ciclo límite inestable. Con lo cual obtenemos una *bifurcación de Hopf subcrítica*, la α -familia de ciclos límites también forma un paraboloides en el espacio (x, y, α) , como se muestra en la figura 3.2. Para mayores detalles ver [8].

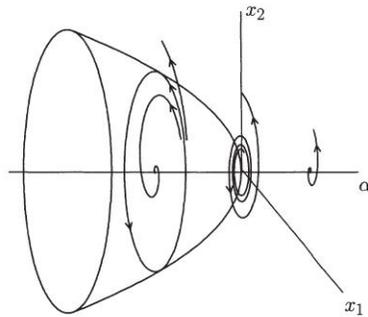


Figura 3.2: Bifurcación de Hopf subcrítica en el espacio fase y de parámetros; figura tomada de [8].

Tomando en cuenta estos resultados, vamos a obtener los números de Lyapunov del sistema (3.5) para varios valores de los parámetros.

En $r = 1$ el sistema (3.5) se transforma en

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y, \\ \dot{y} &= px + y + sx^2 - yx^2.\end{aligned}\tag{3.13}$$

En términos de la notación del (3.11) tenemos que $a = b = -1$, $c = p$, $d = 1$, $f(x, y) = 0$ y $g(x, y) = sx^2 - x^2y$. Luego $\Delta = -1 + p > 0$ para todo $p > 1$ y $a + d = 0$, y como consecuencia el sistema (3.13) tiene dos valores propios imaginarios puros. Por otro lado, $a_{ij} = 0$, $i + j \geq 2$ y $b_{20} = s > 0$, $b_{21} = -1$ y el

resto de los términos $b_{ij} = 0$. Luego el número de Lyapunov es

$$\begin{aligned}
\sigma &= -\frac{3\pi}{2b\sqrt{\Delta^3}} [-(a^2 + bc)(-bb_{21})] \\
&= -\frac{3\pi((-1)^2 - p)((-1)^2)}{2(-1)\sqrt{(p-1)^3}} \\
&= -\frac{3\pi(p-1)}{2\sqrt{(p-1)^3}} \\
&= -\frac{3\pi}{2\sqrt{p-1}} < 0 \quad \text{pues } p > 1.
\end{aligned}$$

Como consecuencia concluimos que el sistema (3.5) tiene una bifurcación de Hopf supercrítica en el origen para $r = 1$ y $p > 1$.

Ahora consideremos el punto de equilibrio $P_1 = (x_1^*, -x_1^*)$ del sistema (3.5), donde

$$x_1^* = \frac{1}{2} \left(-s + \sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right).$$

Aplicando el cambio de variables $(x, y) \mapsto (x + x_1^*, y - x_1^*)$, el sistema (3.5) toma la forma

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= -x - y, \\
\dot{y} &= (2r - p)x + \left(p - \frac{s^2}{2} + \frac{s}{2}\sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right) y + \frac{1}{2} \left(s + \sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right) x^2 \\
&\quad + \left(s - \sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right) xy - x^2 y.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Luego, en la notación de (3.11) tenemos que $a = b = -1$, $d = p - \frac{s^2}{2} + \frac{s}{2}\sqrt{s^2 + 4(r-p)}$, $c = 2r - p$, $f(x, y) = 0$ lo cual implica que $a_{ij} = 0$ para $i + j \geq 2$, y $b_{21} = -1$, $b_{20} = \frac{1}{2} \left(s + \sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right)$, $b_{11} = s - \sqrt{s^2 + 4(r-p)}$ y el resto de los términos $b_{ij} = 0$. Por lo tanto

$$\Delta = 2r - 2p + \frac{s^2}{2} - \frac{s}{2}\sqrt{s^2 + 4(r-p)} > 0 \quad \text{para toda } 0 < p < r,$$

y

$$a + d = -1 + p - \frac{s^2}{2} + \frac{s}{2}\sqrt{s^2 + 4(r-p)} = 0$$

para

$$r = \frac{1 - 2p + p^2 + s^2}{s^2}, \quad \text{con } 0 < p < 1.$$

Tomando en cuenta estas condiciones concluimos que el sistema (3.14) tiene dos valores propios imaginarios puros y el número de Lyapunov es

$$\begin{aligned}\sigma &= -\frac{3\pi}{2b\sqrt{\Delta^3}} [ab(b_{11}^2) - b^2(b_{11}b_{20}) - (a^2 + bc)(-bb_{21})] \\ &= \frac{3\pi}{2\sqrt{\Delta^3}} [b_{11}^2 - b_{11}b_{20} + 1 - c] \\ &= \frac{3\pi \left[\left(s - \sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right)^2 + 1 - p \right]}{2\sqrt{\Delta^3}}.\end{aligned}$$

Ya que $\Delta > 0$, $0 < p < 1$ y $p < r$, obtenemos que $\sigma > 0$, y concluimos que el sistema (3.5) tiene una bifurcación de Hopf subcrítica en el punto de equilibrio P_1 a lo largo de

$$r = \frac{1 - 2p + p^2 + s^2}{s^2}$$

para toda $p \in (0, 1)$.

Ahora consideremos el punto de equilibrio $P_2 = (x_2^*, -x_2^*)$ del sistema (3.5), donde

$$x_2^* = \frac{1}{2} \left(-s - \sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right).$$

Aplicando el cambio de variable $(x, y) \mapsto (x + x_2^*, y - x_2^*)$ el sistema (3.5) se transforma en

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - y, \\ \dot{y} &= (2r - p)x + \left(p - \frac{s^2}{2} - \frac{s}{2}\sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right) y + \frac{1}{2} \left(s - \sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right) x^2 \\ &\quad + \left(s + \sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right) xy - x^2 y.\end{aligned}\tag{3.15}$$

Tomando en cuenta la notación del sistema (3.11) tenemos que $a = b = -1$, $d = p - \frac{s^2}{2} - \frac{s}{2}\sqrt{s^2 + 4(r-p)}$, $c = 2r - p$. Ya que $f(x, y) = 0$ los $a_{ij} = 0$ para $i + j \geq 2$; además, $b_{21} = -1$, $b_{20} = \frac{1}{2} \left(s - \sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right)$, $b_{11} = s + \sqrt{s^2 + 4(r-p)}$. Con esto obtenemos que $\Delta = 2r - 2p + \frac{s^2}{2} + \frac{s}{2}\sqrt{s^2 + 4(r-p)} > 0$, para toda $p < r + \frac{s^2}{4}$. Además

$$a + d = -1 + p - \frac{s^2}{2} - \frac{s}{2}\sqrt{s^2 + 4(r-p)} = 0,$$

para

$$r = \frac{1 - 2p + p^2 + s^2}{s^2}, \quad \text{con} \quad p > 1 + \frac{1}{2}s^2.$$

Con estas condiciones el sistema (3.15) tiene dos valores propios imaginarios puros y el número de Lyapunov es

$$\begin{aligned}
\sigma &= -\frac{3\pi}{2b\sqrt{\Delta^3}} [ab(b_{11}^2) - b^2(b_{11}b_{20}) - (a^2 + bc)(-bb_{21})] \\
&= \frac{3\pi}{2\sqrt{\Delta^3}} [b_{11}^2 - b_{11}b_{20} + 1 - c] \\
&= \frac{3\pi \left[\left(s + \sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right)^2 + 1 - p \right]}{2\sqrt{\Delta^3}}.
\end{aligned}$$

A partir de $r = \frac{1 - 2p + p^2 + s^2}{s^2}$ obtenemos que $p = 1 - s\sqrt{r-1}$, la cual está bien definida pues $r > 1 + \frac{1}{4}s^2$. El número de Lyapunov es

$$\begin{aligned}
\sigma &= \frac{3\pi \left[\left(s + \sqrt{s^2 + 4(r-1 - s\sqrt{r-1})} \right)^2 + 1 - 1 + s\sqrt{r-1} \right]}{2\sqrt{\Delta^3}} \\
&= \frac{3\pi \left[\left(s + \sqrt{s^2 + 4(r-1 - s\sqrt{r-1})} \right)^2 + s\sqrt{r-1} \right]}{2\sqrt{\Delta^3}}
\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que $s > 0$ y $r > 1 + \frac{1}{4}s^2$ tenemos que $s\sqrt{r-1} > 0$. Además $\Delta > 0$, de tal forma que el número de Lyapunov $\sigma > 0$. Como consecuencia el sistema (3.5) tiene una bifurcación de Hopf subcrítica en el punto de equilibrio P_2 a lo largo de $r = \frac{1 - 2p + p^2 + s^2}{s^2}$, para toda $p > 1 + \frac{1}{2}s^2$.

Ahora estamos en posibilidad de describir el tipo de estabilidad de los puntos de equilibrio P_0 , P_1 y P_2 del sistema (3.5) en las cinco regiones dadas en la figura 3.3. En la región I, P_0 es linealmente estable, mientras que a lo largo de e_0 se produce a una bifurcación de tipo Hopf supercrítica, lo cual garantiza la existencia de un ciclo límite estable en la región II. P_1 es linealmente estable en la región V, mientras que a lo largo de e_1 el equilibrio P_1 se produce una bifurcación de Hopf subcrítica, por lo tanto es posible garantizar la existencia de un ciclo límite inestable en la región V. En la región IV el equilibrio P_2 es linealmente estable, mientras que a lo largo de e_2 el equilibrio P_2 da origen a una bifurcación de Hopf subcrítica. Luego es posible garantizar la existencia de un ciclo límite inestable en la región IV.

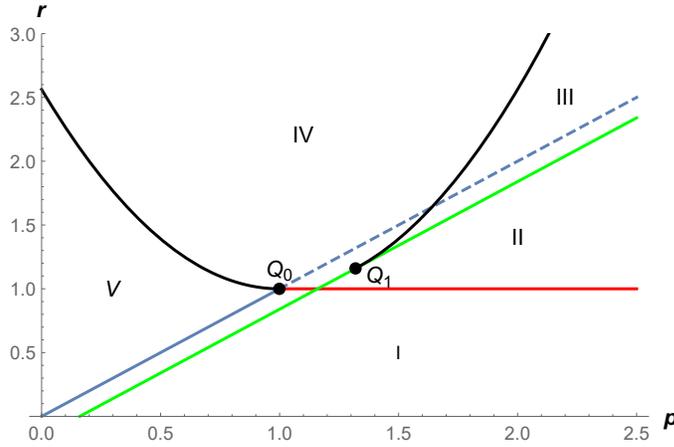


Figura 3.3: Regiones de estabilidad de los puntos de equilibrio P_0 , P_1 y P_2 para el sistema (3.5) con $s = 0.8$.

3.3. Ecuación de Liénard y bifurcación de Hopf

Haciendo el cambio de variables $(x, -(x + y)) \mapsto (x, y)$ en (3.5), obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (r - p)x + (r - 1)y - (s + y)x^2 - x^3. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Un cálculo sencillo nos muestra que este sistema es equivalente a la ecuación de Liénard

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + f(x) = 0, \quad (3.17)$$

donde f y g son las funciones polinómicas

$$f(x) = x^3 + sx^2 - (r - p)x, \quad g(x) = x^2 - (r - 1). \quad (3.18)$$

Hay que notar que en límite cuando $s \rightarrow 0$ el sistema (3.16) es equivalente a una ecuación de tipo Liénard.

El siguiente resultado está enfocado en analizar lo que ocurre alrededor de la bifurcación de Hopf al variar el valor del parámetro de bifurcación en la ecuación de Liénard, éste sufre un cambio en la estabilidad del punto crítico en estudio, dando origen o desapareciendo una órbita periódica, la cual tienen una determinada estabilidad, la cual es proporcionada por el signo del *primer coeficiente de Lyapunov*, denotado por $l^*(0)$ (o número de Lyapunov σ). Para mayores detalles sobre este tema, consultar [8].

Teorema 3. Dada la ecuación

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + f(x) = 0,$$

y x^* un cero simple de f , una bifurcación de Hopf ocurre cuando $f'(x^*) > 0$ y x^* es un cero simple de g , con frecuencia natural $\omega^* = \sqrt{f'(x^*)}$ y el primer coeficiente de Lyapunov está dado por

$$l^*(0) = -\frac{\omega}{8} \frac{d}{dx} \left(\frac{g'(x)}{f'(x)} \right) \Big|_{x=x^*}.$$

Si $l^*(0) < 0$ la bifurcación de Hopf es supercrítica, mientras que para $l^*(0) > 0$ la bifurcación de Hopf es subcrítica.

Demostración. La ecuación (3.17) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -g(x)y - f(x). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Luego los puntos de equilibrio son de la forma $P^* = (x^*, 0)$, donde x^* son ceros simples de f . Por otro lado tenemos que la matriz jacobiana del sistema (3.19) es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(x) - g'(x)y & -g(x) \end{pmatrix},$$

por lo tanto

$$A(P^*) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(x^*) & -g(x^*) \end{pmatrix}.$$

Para que ocurra una bifurcación tipo Hopf requerimos que $\text{tr}A(P^*) = 0$ y $\det A(P^*) > 0$, por lo tanto es necesario que x^* sea un cero simple de g y

$$\det A(P^*) = f'(x^*) > 0,$$

de tal forma que los valores propios son imaginarios puros de la forma

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-f'(x^*)},$$

con frecuencia natural es

$$\omega^* = \sqrt{f'(x^*)}.$$

Ahora hacemos el cambio de variables

$$u(t) = x(t) - x^*, \quad y \quad v(t) = -\frac{1}{\omega^*} \dot{x}$$

en el sistema (3.19) y obtenemos que puede escribirse como

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= -\omega^*v(t), \\ \dot{v}(t) &= -g(u(t) + x^*)v(t) + \frac{1}{\omega^*}f(u(t) + x^*).\end{aligned}\tag{3.20}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\dot{v}(t) &= -g(u(t) + x^*)v(t) + \frac{1}{\omega^*}f(u(t) + x^*) \\ &= \omega^*u(t) - g(u(t) + x^*)v(t) + \frac{1}{\omega^*}f(u(t) + x^*) - \omega^*u(t) \\ &= \omega^*u(t) - g(u(t) + x^*)v(t) + \frac{1}{\omega^*}(f(u(t) + x^*) - (\omega^*)^2u(t)) \\ &= \omega^*u(t) - g(u(t) + x^*)v(t) + \frac{1}{\omega^*}(f(u(t) + x^*) - f'(x^*)u(t)).\end{aligned}$$

Luego el sistema (3.20) se puede escribir como

$$\begin{aligned}\dot{u}(t) &= -\omega^*v(t) \\ \dot{v}(t) &= \omega^*u(t) - g(u(t) + x^*)v(t) + \frac{1}{\omega^*}(f(u(t) + x^*) - f'(x^*)u(t)),\end{aligned}$$

ó bien

$$\begin{pmatrix} \dot{u}(t) \\ \dot{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega^* \\ \omega^* & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P(u(t), v(t)) \\ Q(u(t), v(t)) \end{pmatrix},\tag{3.21}$$

donde $P(u(t), v(t)) = 0$ y

$$Q(u(t), v(t)) = -g(u(t) + x^*)v(t) + \frac{1}{\omega^*}(f(u(t) + x^*) - f'(x^*)u(t)).$$

Además se cumple que $P(0, 0) = Q(0, 0) = 0$ y $DP(0, 0) = DQ(0, 0) = 0$, pues

$$Q(0, 0) = \frac{1}{\omega^*}f(x^*) = 0$$

ya que $f(x^*) = 0$, pues x^* es punto de equilibrio, y

$$\begin{aligned}
DQ(0,0) &= \left. \frac{\partial Q}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial Q}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right|_{(0,0)} \\
&= \left(-v(t) \frac{\partial}{\partial u} g(u(t) + x^*) + \frac{1}{\omega^*} \frac{\partial}{\partial u} f(u(t) + x^*) - \frac{1}{\omega^*} f'(x^*) \right) \dot{u}(t) \\
&\quad + (-g(u(t) + x^*)) \dot{v}(t) \Big|_{(0,0)} \\
&= \left(-v(t) \frac{\partial}{\partial u} g(u(t) + x^*) + \frac{1}{\omega^*} \frac{\partial}{\partial u} f(u(t) + x^*) - \frac{1}{\omega^*} f'(x^*) \right) (-\omega^* v(t)) \\
&\quad + (-g(u(t) + x^*)) \left(-g(u(t) + x^*) v(t) + \frac{1}{\omega^*} f(u(t) + x^*) \right) \Big|_{(0,0)} \\
&= -\frac{1}{\omega^*} g(x^*) f(x^*) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto tenemos que el primer coeficiente de Lyapunov (ver [6]) está dado por,

$$\begin{aligned}
l^*(0) &= \frac{1}{8\omega^*} (P_{uuu} + P_{uvv} + Q_{uuv} + Q_{vvv}) + \frac{1}{8(\omega^*)^2} [P_{uv} (P_{uu} + P_{vv}) \\
&\quad - Q_{uv} (Q_{uu} + Q_{vv}) - P_{uu} Q_{uu} + P_{vv} Q_{vv}] \Big|_{(0,0)} \\
&= \frac{1}{8\omega^*} Q_{uuv} - \frac{1}{8(\omega^*)^2} Q_{uv} Q_{uu} \Big|_{(0,0)} \\
&= -\frac{1}{8\omega^*} \frac{d^2}{du^2} g(u(t) + x^*) \\
&\quad + \frac{1}{8(\omega^*)^2} \frac{d}{du} g(u(t) + x^*) \left[-v(t) \frac{d^2}{du^2} g(u(t) + x^*) + \frac{1}{\omega^*} \frac{d^2}{du^2} f(u(t) + x^*) \right] \Big|_{(0,0)} \\
&= -\frac{1}{8\omega^*} \frac{d^2}{du^2} g(x^*) + \frac{1}{8(\omega^*)^3} \frac{d}{du} g(x^*) \frac{d^2}{du^2} f(x^*) \\
&= -\frac{1}{8\omega^*} g''(x^*) + \frac{1}{8(\omega^*)^3} g'(x^*) f''(x^*) \\
&= -\frac{1}{8\omega^*} \left(\frac{(\omega^*)^2 g''(x^*) - g'(x^*) f''(x^*)}{(\omega^*)^2} \right) \\
&= -\frac{\omega^*}{8} \frac{d}{dx} \left(\frac{g'(x)}{f'(x)} \right) \Big|_{x=x^*},
\end{aligned}$$

donde $' = d/dx$.

Para este último cálculo hemos usado

$$\begin{aligned}
Q_{uvv} &= \frac{\partial^3}{\partial v \partial u^2} \left(-g(u(t) + x^*)v(t) + \frac{1}{\omega^*} (f(u(t) + x^*) - f'(x^*)u(t)) \right) \\
&= -\frac{d^2}{du^2} g(u(t) + x^*), \\
Q_{uv} &= \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} \left(-g(u(t) + x^*)v(t) + \frac{1}{\omega^*} (f(u(t) + x^*) - f'(x^*)u(t)) \right) \\
&= -\frac{d}{du} g(u(t) + x^*), \\
Q_{uu} &= \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(-g(u(t) + x^*)v(t) + \frac{1}{\omega^*} (f(u(t) + x^*) - f'(x^*)u(t)) \right) \\
&= -v(t) \frac{d^2}{du^2} g(u(t) + x^*) + \frac{1}{\omega^*} \frac{d^2}{du^2} f(u(t) + x^*),
\end{aligned}$$

además que $du = dx$, pues $u(t) = x(t) - x^*$.

Finalmente concluimos que una bifurcación de Hopf ocurre cuando $f(x^*) = 0$, $f'(x^*) > 0$ y x^* es un cero simple de g . La frecuencia natural de oscilaciones es $\omega^* = \sqrt{f'(x^*)}$ y el primer coeficiente de Lyapunov en x^* está dado por la expresión

$$l^*(0) = -\frac{\omega^*}{8} \frac{d}{dx} \left(\frac{g'(x)}{f'(x)} \right) \Big|_{x=x^*} = \frac{\omega^*}{8} \left(\frac{f''(x^*)g'(x^*) - f'(x^*)g''(x^*)}{(f'(x^*))^2} \right). \quad (3.22)$$

Los puntos de equilibrio del sistema (3.16) son

$$P_0 = (x_0^*, 0), \quad P_1 = (x_1^*, 0) \quad \text{y} \quad P_2 = (x_2^*, 0)$$

donde $x_0^* = 0$, $x_{1,2}^* = \frac{1}{2} \left(-s \pm \sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right)$.

Nos interesa determinar el signo de $l^*(0)$ para estos puntos de equilibrio. Observemos que

$$l^*(0) = \frac{\omega^*}{8} \left(\frac{f''(x^*)g'(x^*) - f'(x^*)g''(x^*)}{(f'(x^*))^2} \right),$$

entonces el signo de $l^*(0)$ es el mismo que el de la expresión

$$f''(x^*)g'(x^*) - f'(x^*)g''(x^*),$$

pues $\omega^* = \sqrt{f'(x^*)} > 0$.

Usando el hecho de que el sistema (3.16) puede escribirse en la forma (3.19) con $f(x) = x^3 + sx^2 - (r-p)x$ y $g(x) = x^2 - (r-1)$, obtenemos

$$\begin{aligned}
f''(x^*)g'(x^*) - f'(x^*)g''(x^*) &= (6x^* + 2s)(2x^*) - (3(x^*)^2 + 2sx - (r-p))(2) \\
&= 12(x^*)^2 + 4sx^* - 6(x^*)^2 - 4sx^* + 2(r-p) \\
&= 2(3(x^*)^2 + r-p),
\end{aligned}$$

de donde concluimos que el signo de $l^*(0)$ es igual al signo de $3(x^*)^2 + r - p$.

Lo siguiente es observar que la recta $r = 1$ para $p > 1$ está asociada al equilibrio $P_0 = (x_0^*, 0) = (0, 0)$, por lo tanto el signo del primer coeficiente de Lyapunov $l_0^*(0)$ es el mismo que el de $1 - p$, el cual es negativo. Luego, bajo estas condiciones tenemos una bifurcación de Hopf supercrítica con frecuencia natural es $\omega_0^* = \sqrt{f'(x_0^*)} = \sqrt{p - 1}$.

El equilibrio $P_1 = (x_1^*, 0) = \left(\frac{1}{2} \left(-s + \sqrt{s^2 + 4(r - p)}\right), 0\right)$ se encuentra asociado a la curva

$$r = \frac{1 - 2p + p^2 + s^2}{s^2},$$

para $p \in (0, 1)$, y en este punto el signo del primer coeficiente de Lyapunov $l_1^*(0)$ es el mismo que el de

$$3(x_1^*)^2 + r - p = 3 \left(\frac{1}{2} \left(-s + \sqrt{s^2 + 4(r - p)} \right) \right)^2 + r - p > 0,$$

ya que para $p \in (0, 1)$ tenemos $r > p$. Por lo tanto $l_1^* > 0$, y bajo estas condiciones tenemos una bifurcación de Hopf subcrítica con frecuencia natural

$$\begin{aligned} \omega_1^* &= \sqrt{f'(x_1^*)} \\ &= \sqrt{3(x_1^*)^2 + 2sx_1^* - (r - p)} \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}s^2 + 3(r - p) - \frac{3}{2}s\sqrt{s^2 + 4(r - p)} - s^2 + s\sqrt{s^2 + 4(r - p)} - (r - p)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}s^2 + 2(r - p) - \frac{1}{2}s\sqrt{s^2 + 4(r - p)}}, \end{aligned}$$

debido a que

$$r = \frac{1 - 2p + p^2 + s^2}{s^2},$$

para $p \in (0, 1)$ tenemos que $p = 1 - s\sqrt{r - 1}$, y por lo tanto

$$\omega_1^* = \sqrt{2(r - 1) + s\sqrt{r - 1}}.$$

Ahora consideremos el equilibrio $P_2 = (x_2^*, 0) = \left(\frac{1}{2} \left(-s - \sqrt{s^2 + 4(r - p)}\right), 0\right)$, el cual está asociado a la curva

$$r = \frac{1 - 2p + p^2 + s^2}{s^2},$$

para $p > 1 + \frac{1}{2}s^2$. Notemos que

$$3(x_2^*)^2 + r - p = 3 \left(\frac{1}{2} \left(-s - \sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right) \right)^2 + r - p > 0,$$

la cual se cumple para $s > 0$ y $p - \frac{1}{4}s^2 \leq r$, puesto que $r > 1 + \frac{1}{4}s^2$. En resumen, la desigualdad siempre se cumple dadas las condiciones anteriores, de tal forma que el primer coeficiente de Lyapunov $l_2^* > 0$ y tenemos una bifurcación de Hopf subcrítica con frecuencia natural

$$\begin{aligned} \omega_2^* &= \sqrt{f'(x_2^*)} \\ &= \sqrt{3(x_2^*)^2 + 2sx_2^* - (r-p)} \\ &= \sqrt{3 \left(\frac{1}{2} \left(-s - \sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right) \right)^2 + 2s \left(\frac{1}{2} \left(-s - \sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right) \right) - (r-p)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}s\sqrt{s^2 + 4(r-p)} + 2(r-p)} \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que

$$r = \frac{1 - 2p + p^2 + s^2}{s^2}$$

para $p > 1 + \frac{1}{2}s^2$ tenemos que $p = 1 + s\sqrt{r-1}$ obtenemos

$$\omega_2^* = \sqrt{2(r-1) - s\sqrt{r-1}}.$$

□

3.4. Análisis de la bifurcación de Bogdanov-Takens

En esta sección presentamos el análisis de despliegue de los puntos BT no degenerados del sistema (3.5), denotados por Q_0 y Q_1 .

Primero realizamos el cambio de variables $(x, -(x+y)) \mapsto (x, y)$, y obtenemos que (3.5) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= (r-p)x + (r-1)y - (s+y)x^2 - x^3. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Los puntos de equilibrio de este sistema son $P_0 = (0, 0)$, $P_1 = (x_1^*, 0)$ y $P_2 = (x_2^*, 0)$, donde

$$x_1^* = \frac{1}{2} \left(-s + \sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right) \quad \text{y} \quad x_2^* = \frac{1}{2} \left(-s - \sqrt{s^2 + 4(r-p)} \right).$$

Ahora reescalamos las variables y los parámetros de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x(t) &= \eta u(\tau), & y(t) &= \eta^2 v(\tau), & \tau &= \eta t, \\ \mu &= \frac{r-p}{\eta^2}, & \lambda &= \frac{r-1}{\eta^2}, & \delta &= \frac{s}{\eta}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Con este reescalamiento el sistema (3.23) toma la forma

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= \mu u - \delta u^2 - u^3 + \eta(\lambda - u^2)v, \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde $\cdot = \frac{d}{d\tau}$.

Tomando el límite cuando $\eta \rightarrow 0$ y $\mu = 1$, las ecuaciones (3.25) se transforman en

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= u - \delta u^2 - u^3. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Estas ecuaciones tienen estructura de sistema hamiltoniano con función hamiltoniana

$$H(u, v) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}\delta u^3 + \frac{1}{4}u^4.$$

Los puntos de equilibrio del sistema (3.26) son $(0, 0)$, $(u_1^*, 0)$ y $(u_2^*, 0)$, donde

$$u_1^*(\delta) = \frac{1}{2} \left(-\delta + \sqrt{\delta^2 + 4} \right), \quad u_2^*(\delta) = \frac{1}{2} \left(-\delta - \sqrt{\delta^2 + 4} \right).$$

Notemos que la matriz hessiana de la función hamiltoniana es

$$\text{Hess}(H) = \begin{pmatrix} -1 + 2\delta u + 3u^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde se sigue que $(0, 0)$ es un punto silla y $(u_1^*, 0)$, $(u_2^*, 0)$ son mínimos relativos de H .

Ahora vamos a comprobar que en la curva de nivel dada por $H(u, v) = 0$ hay una órbita homoclínica. Iniciemos por considerar

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{3}\delta u^3 - \frac{1}{4}u^4$$

ó equivalentemente

$$v = \pm \sqrt{u^2 - \frac{2}{3}\delta u^3 - \frac{1}{2}u^4}.$$

Usando el sistema (3.26) obtenemos que $\dot{u} = v$ y por lo tanto

$$\pm \frac{1}{\sqrt{u^2 - \frac{2}{3}\delta u^3 - \frac{1}{2}u^4}} \frac{du}{dt} = 1.$$

Tomando la raíz positiva y suponiendo que $u > 0$ obtenemos

$$\frac{1}{u\sqrt{1 - \frac{2}{3}\delta u - \frac{1}{2}u^2}} \frac{du}{dt} = 1.$$

Ahora integramos de $u(0) = u_0$ a $u(t) = u$ para y llegamos a que

$$\int_{u_0}^u \frac{ds}{s\sqrt{1 - \frac{2}{3}\delta s - \frac{1}{2}s^2}} = t,$$

es decir,

$$\operatorname{arctanh} \left[\frac{\delta u - 3}{\sqrt{-\frac{9}{2}u^2 - 6\delta u + 9}} \right] - \operatorname{arctanh} \left[\frac{\delta u_0 - 3}{\sqrt{-\frac{9}{2}u_0^2 - 6\delta u_0 + 9}} \right] = t.$$

Tomando el límite cuando $u_0 \rightarrow \frac{2}{3} \left(-\delta + \sqrt{\delta^2 + \frac{9}{2}} \right)^+$, tenemos

$$\operatorname{arctanh} \left[\frac{\delta u - 3}{\sqrt{-\frac{9}{2}u^2 - 6\delta u + 9}} \right] - \operatorname{arctanh}[\infty] = t$$

o equivalentemente

$$\operatorname{arctanh} \left[\frac{\delta u - 3}{\sqrt{-\frac{9}{2}u^2 - 6\delta u + 9}} \right] + \frac{i\pi}{2} = t,$$

y finalmente

$$u(\alpha(t)) = \frac{\mp \sqrt{\delta^2 (-12 \tan^2(\alpha) - 12)^2 - 4(18 \tan^2(\alpha) + 18)(2\delta^2 - 9 \tan^2(\alpha)) + 12\delta \tan^2(\alpha) + 12\delta}}{2(2\delta^2 - 9 \tan^2(\alpha))}, \quad (3.27)$$

donde $\alpha = -\frac{1}{2}(\pi + 2it)$.

Usando la identidad

$$\tan \left(\frac{1}{2}(-\pi - 2it) \right) = -i \coth(t)$$

la expresión (3.27) se transforma en

$$u(t) = -\frac{3 \left(-2\delta \mp \sqrt{2} \sqrt{(2\delta^2 + 9) \coth^2(t) \operatorname{csch}^2(t) + 2\delta \coth^2(t)} \right)}{2\delta^2 + 9 \coth^2(t)} \quad (3.28)$$

la cual es equivalente a

$$u(t) = \frac{\pm 3\sqrt{2} \sqrt{(2\delta^2 + 9) \coth^2(t) \operatorname{csch}^2(t) - 6\delta \operatorname{csch}^2(t)}}{2\delta^2 + 9 \coth^2(t)}.$$

Para simplificar esta expresión usamos identidades trigonométricas hiperbólicas y obtenemos

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{6 \left(\pm \sqrt{2} \sqrt{(2\delta^2 + 9) \coth^2(t) \operatorname{csch}^2(t) - 2\delta \operatorname{csch}^2(t)} \right)}{4\delta^2 + 9 \operatorname{csch}^2(t) + 9 \cosh(2t) \operatorname{csch}^2(t)} \\ &= -\frac{6 \left(\mp \coth(t) \operatorname{csch}(t) \sqrt{2(2\delta^2 + 9)} + 2\delta \operatorname{csch}^2(t) \right)}{4\delta^2 + 9 \operatorname{csch}^2(t) (1 + \cosh(2t))} \\ &= -\frac{6 \left(\mp \frac{\cosh(t)}{\sinh^2(t)} \sqrt{2(2\delta^2 + 9)} + \frac{2\delta}{\sinh^2(t)} \right)}{4\delta^2 + \frac{9}{\sinh^2(t)} (2 \cosh^2(t))} \\ &= -\frac{6 \left(\mp \cosh(t) \sqrt{2(2\delta^2 + 9)} + 2\delta \right)}{4\delta^2 \sinh^2(t) + 18 \cosh^2(t)} \\ &= -\frac{6 \left(\mp \cosh(t) \sqrt{2(2\delta^2 + 9)} + 2\delta \right)}{(4\delta^2 + 18) \cosh^2(t) - 4\delta^2} \\ &= \frac{\pm 6}{2\sqrt{\delta^2 + \frac{9}{2}} \cosh(t) \pm 2\delta} = \frac{\pm 3}{\sqrt{\frac{2\delta^2 + 9}{2}} \left(\cosh(t) \pm \delta \sqrt{\frac{2}{2\delta^2 + 9}} \right)} \\ &= \frac{\pm 3 \sqrt{\frac{2}{2\delta^2 + 9}}}{\cosh(t) \pm \delta \sqrt{\frac{2}{2\delta^2 + 9}}}. \end{aligned}$$

Por otro lado sabemos que $\dot{u} = v$ lo cual nos permite afirmar que

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\pm 3 \sqrt{\frac{2}{2\delta^2 + 9}}}{\cosh(t) \pm \delta \sqrt{\frac{2}{2\delta^2 + 9}}} \right) = \frac{\mp 3 \sqrt{\frac{2}{2\delta^2 + 9}} \sinh(t)}{\left(\cosh(t) \pm \delta \sqrt{\frac{2}{2\delta^2 + 9}} \right)^2} = v.$$

A partir de estas expresiones obtenemos que el punto silla está conectado a sí mismo por un par de órbitas homoclínicas asimétricas, Γ_0^+ y Γ_0^- , que contienen a los puntos de equilibrio $(u_1^*, 0)$ y $(u_2^*, 0)$, respectivamente.

Las órbitas homoclínicas están dadas explícitamente por

$$\Gamma_0^\pm : (u_0^\pm(t), v_0^\pm(t)) = \left(\frac{\pm 3\beta}{\cosh(t) \pm \beta\delta}, \frac{\mp 3\beta \sinh(t)}{(\cosh(t) \pm \beta\delta)^2} \right), \quad (3.29)$$

donde $\beta = \sqrt{\frac{2}{2\delta^2+9}}$.

En general para $\mu > 0$ tenemos que

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{3\mu \left(2\delta \mp \sqrt{2} \sqrt{(2\delta^2 + 9\mu) \coth^2(\sqrt{\mu}t) \operatorname{csch}^2(\sqrt{\mu}t) - 2\delta \coth^2(\sqrt{\mu}t)} \right)}{2\delta^2 + 9\mu \coth^2(\sqrt{\mu}t)} \\ &= \frac{3\mu \left(-2\delta \mp \cosh(\sqrt{\mu}t) \sqrt{2} \sqrt{2\delta^2 + 9\mu} \right)}{2\delta^2 (\cosh^2(\sqrt{\mu}t) - 1) + 9\mu \cosh^2(\sqrt{\mu}t)} \\ &= \frac{\pm 3\mu \sqrt{2}}{\sqrt{2\delta^2 + 9\mu} \cosh(\sqrt{\mu}t) \pm \sqrt{2}\delta} = \frac{\pm 3\sqrt{\mu}}{\sqrt{\left(\frac{\delta}{\sqrt{\mu}}\right)^2 + \frac{9}{2} \cosh(\sqrt{\mu}t) \pm \frac{\delta}{\sqrt{\mu}}}} \\ &= \frac{\pm 3\sqrt{\mu} \sqrt{\frac{2}{9+2\left(\frac{\delta}{\sqrt{\mu}}\right)^2}}}{\cosh(\sqrt{\mu}t) \pm \sqrt{\frac{2}{9+\left(\frac{\delta}{\sqrt{\mu}}\right)^2}} \frac{\delta}{\sqrt{\mu}}}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$u(t) = \frac{\pm 3\tilde{\beta}\sqrt{\mu}}{\cosh(\sqrt{\mu}t) \pm \tilde{\beta}\tilde{\delta}},$$

donde

$$\tilde{\delta} = \frac{\delta}{\sqrt{\mu}} \quad \text{y} \quad \tilde{\beta} = \sqrt{\frac{2}{9 + 2(\tilde{\delta})^2}}.$$

Ya que $\dot{u} = v$, obtenemos

$$\frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\pm 3\tilde{\beta}\sqrt{\mu}}{\cosh(\sqrt{\mu}t) \pm \tilde{\beta}\tilde{\delta}} \right) = \frac{\mp 3\mu\tilde{\beta} \sinh(\sqrt{\mu}t)}{(\cosh(\sqrt{\mu}t) \pm \tilde{\beta}\tilde{\delta})^2} = v.$$

Finalmente, las órbitas homoclínicas que conectan al punto silla $(0, 0)$ a sí mismo están dadas por $\tilde{\Gamma}_0^+$ y $\tilde{\Gamma}_0^-$, las cuales encierran (envuelven) a los puntos de equilibrio

$(u_1, 0)$ y $(u_2, 0)$, respectivamente, donde

$$u_{1,2} = \frac{1}{2} \left(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 4\mu} \right).$$

Las expresiones explícitas de las órbitas homoclínicas están dadas por

$$\tilde{\Gamma}_0^\pm : (u_0^\pm(t), v_0^\pm(t)) = \left(\frac{\pm 3\tilde{\beta}\sqrt{\mu}}{\cosh(\sqrt{\mu}t) \pm \tilde{\beta}\tilde{\delta}}, \frac{\mp 3\mu\tilde{\beta} \sinh(\sqrt{\mu}t)}{(\cosh(\sqrt{\mu}t) \pm \tilde{\beta}\tilde{\delta})^2} \right). \quad (3.30)$$

En la figura 3.4 mostramos órbitas homoclínicas para $\delta = 2$ y $\mu \in [0.3, 1.8]$, así como para $\mu = 2$ y $\delta \in [0.3, 1.8]$.

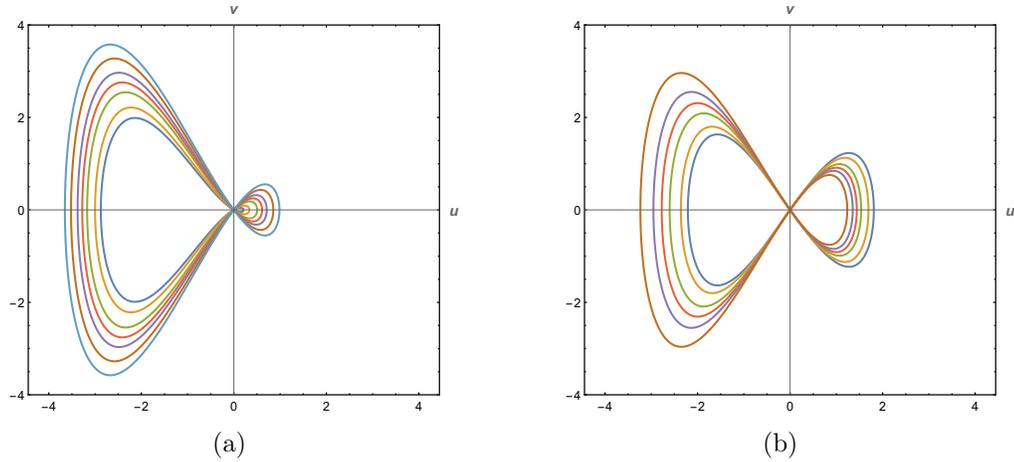


Figura 3.4: Órbitas homoclínicas $\tilde{\Gamma}_0^\pm$: (a) $\delta = 2$ y $\mu \in [0.3, 1.8]$, (b) $\mu = 2$ y $\delta \in [0.3, 1.8]$.

En lo que sigue, vamos a verificar cuáles órbitas homoclínicas se preservan. Iniciemos por observar que (3.25) puede escribirse en la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \mu u - \delta u^2 - u^3 \end{pmatrix} + \eta \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda - u^2)v \end{pmatrix} = J\nabla H + \eta X, \quad (3.31)$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con el fin de llevar a cabo el análisis de este sistema fijaremos $\mu = 1$ (para $\mu > 0$ el análisis es similar) y $\eta = 0$. Ya que el punto $P_0 = (0, 0)$ es hiperbólico y en la curva de nivel $H_0 = H(u, v) = 0$ hay dos órbitas homoclínicas, podemos garantizar que

$$\varphi_0(t) \subseteq W^s(P_0) \cap W^u(P_0).$$

Por otro lado, es inmediato ver que el sistema (3.31) es una perturbación del sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = J\nabla H, \quad (3.32)$$

es decir de (3.26). Luego, aplicando el teorema de la función implícita y el teorema de la variedad estable, para η suficientemente pequeña existe un punto fijo hiperbólico de (3.31), denotado por P_η , tal que $W^s(P_\eta)$ y $W^u(P_\eta)$ varían suavemente con respecto a η . Ver la figura 3.5.

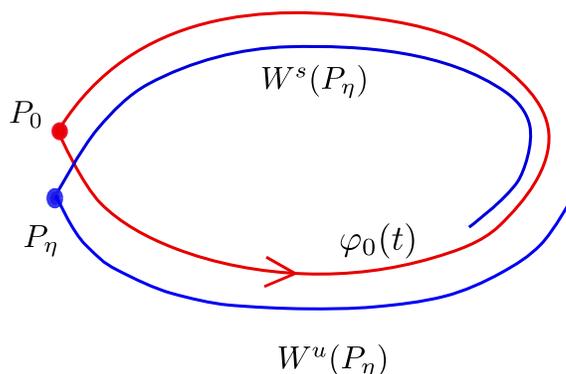


Figura 3.5: Existencia del punto hiperbólico P_η y la perturbación de la órbita homoclínica que conecta al punto de equilibrio silla $P_0 = (0, 0)$ con sí mismo.

Sean $z = \varphi_0(t_0) \in W^s(P_0) \cap W^u(P_0)$ y Σ una sección normal de z , entonces existen

$$\begin{aligned} z_\varepsilon^s &\in \Sigma \cap W_\varepsilon^s(P_0), \\ z_\varepsilon^u &\in \Sigma \cap W_\varepsilon^u(P_0). \end{aligned}$$

Ver la figura 3.6.

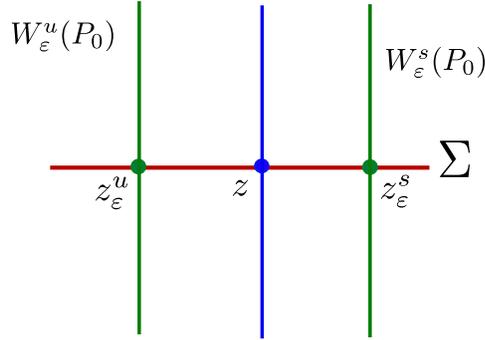


Figura 3.6: Sección normal Σ .

Si $z_\varepsilon^s = z_\varepsilon^u$, entonces hay una órbita homoclínica, o equivalentemente

$$H(z_\varepsilon^s) - H(z_\varepsilon^u) = 0.$$

Expandiendo en serie de Taylor tenemos

$$\begin{aligned} H(z_\varepsilon^s) - H(z_\varepsilon^u) &= [H(z_\varepsilon^s) - H(z_\varepsilon^u)]|_{\varepsilon=0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [H(z_\varepsilon^s) - H(z_\varepsilon^u)] \Big|_{\varepsilon=0} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} [H(z_\varepsilon^s) - H(z_\varepsilon^u)] \Big|_{\varepsilon=0} + \dots \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \frac{\partial^j}{\partial \varepsilon^j} [H(z_\varepsilon^s) - H(z_\varepsilon^u)] \Big|_{\varepsilon=0}, \end{aligned}$$

pero

$$[H(z_\varepsilon^s) - H(z_\varepsilon^u)]|_{\varepsilon=0} = H(z) - H(z) = 0,$$

por lo tanto

$$0 = \varepsilon M(z) + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial \varepsilon^2} [H(z_\varepsilon^s) - H(z_\varepsilon^u)] \Big|_{\varepsilon=0} + \dots,$$

donde

$$M(z) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [H(z_\varepsilon^s) - H(z_\varepsilon^u)] \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Sea $z^u(t, \varepsilon)$ solución del sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = J\nabla H + X, \quad \text{con } (u(0), v(0)) = z_\varepsilon^u,$$

entonces

$$\frac{\partial}{\partial t} z^u(t, \varepsilon) = J\nabla H + X,$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}H(z^u(t, \varepsilon)) &= \nabla H \cdot \frac{\partial}{\partial t}z^u(t, \varepsilon) \\ &= \nabla H \cdot J\nabla H + \nabla H \cdot X \\ &= \nabla H \cdot X,\end{aligned}$$

pues $\nabla H \cdot J\nabla H = 0$. Luego

$$\int_A^0 \frac{\partial}{\partial t}H(z^u(t, \varepsilon))dt = \int_A^0 \nabla H \cdot X dt,$$

o equivalentemente

$$H(z^u(0, \varepsilon)) - H(z^u(A, \varepsilon)) = \int_A^0 \nabla H \cdot X dt.$$

Evaluando en $\varepsilon = 0$ y tomando $A \rightarrow -\infty$ tenemos

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (H(z_\varepsilon^u) - H(P_\eta)) \right|_{\varepsilon=0} = \int_{-\infty}^0 \nabla H \cdot X(\varphi_0(t)) ds, \quad (3.33)$$

similarmente

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} (H(P_\eta) - H(z_\varepsilon^s)) \right|_{\varepsilon=0} = \int_0^\infty \nabla H \cdot X(\varphi_0(t)) ds. \quad (3.34)$$

Sumando (3.33) y (3.34) tenemos

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varepsilon} [H(z_\varepsilon^u) - H(z_\varepsilon^s)] \right|_{\varepsilon=0} = \int_{-\infty}^\infty \nabla H \cdot X(\varphi_0(t)) ds,$$

por lo tanto

$$M(z) = \int_{-\infty}^\infty \nabla H \cdot X(\varphi_0(t)) ds.$$

Ésta es llamada *función de Melnikov*.

Sea $D^\pm(\delta, \lambda)$ la distancia entre las variedades $W^s(P_\eta)$ y $W^u(P_\eta)$, definida mediante la siguiente expansión asintótica en potencias de η ,

$$D^\pm(\delta, \lambda) = \eta M^\pm(\delta, \lambda) + \mathcal{O}(\eta^2), \quad (3.35)$$

donde las funciones de Melnikov son

$$\begin{aligned}
M^\pm(\delta, \lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\nabla H \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda - u^2)v \end{pmatrix} \right) \Big|_{\Gamma_0^\pm} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} -u + \delta u^2 + u^3 \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda - u^2)v \end{pmatrix} \Big|_{\Gamma_0^\pm} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\lambda - (u_0^\pm(t))^2 \right) (v_0^\pm(t))^2 dt \\
&= \lambda I_0^\pm(\delta) - I_2^\pm(\delta),
\end{aligned}$$

y las integrales son

$$\begin{aligned}
I_0^\pm(\delta) &= \int_{-\infty}^{\infty} (v_0^\pm(t))^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mp 3\sqrt{\frac{2}{2\delta^2+9}} \sinh(t)}{\left(\cosh(t) \pm \delta\sqrt{\frac{2}{2\delta^2+9}} \right)^2} \right)^2 dt \\
&= \frac{3\beta^2 \left((\beta^2\delta^2 + 2) \sqrt{1 - \beta^2\delta^2} + 6\beta\delta \tan^{-1} \left(\frac{\beta\delta \mp 1}{\sqrt{1 - \beta^2\delta^2}} \right) \right)}{(1 - \beta^2\delta^2)^{5/2}} \\
&= \frac{4}{27} \left(3(\delta^2 + 3) + \sqrt{2}\delta(2\delta^2 + 9) \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}\delta \mp \sqrt{2\delta^2 + 9}}{3} \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2^\pm(\delta) &= \int_{-\infty}^{\infty} (u_0^\pm(t)v_0^\pm(t))^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pm 3\beta}{\cosh(t) \pm \beta\delta} \right)^2 \left(\frac{\mp 3\beta \sinh(t)}{(\cosh(t) \pm \beta\delta)^2} \right)^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{-9\beta^2 \sinh(t)}{(\cosh(t) \pm \beta\delta)^3} \right)^2 dt \\
&= \frac{27}{20} \beta^4 \left(\frac{30\beta\delta(4\beta^2\delta^2 + 3) \tan^{-1} \left(\frac{\beta\delta \mp 1}{\sqrt{1 - \beta^2\delta^2}} \right)}{(1 - \beta^2\delta^2)^{9/2}} + \frac{6\beta^4\delta^4 + 83\beta^2\delta^2 + 16}{(\beta^2\delta^2 - 1)^4} \right) \\
&= \frac{2 \left(3(70\delta^4 + 345\delta^2 + 216) + 5\sqrt{2}\delta(28\delta^4 + 180\delta^2 + 243) \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2}\delta \mp \sqrt{2\delta^2 + 9}}{3} \right) \right)}{1215},
\end{aligned}$$

donde $\beta = \sqrt{\frac{2}{2\delta^2+9}}$.

Como consecuencia la ecuación de bifurcación $D^\pm(\delta, \lambda) = 0$ nos da el conjunto de parámetros para los cuales persisten las órbitas homoclínicas Γ_0^\pm a P_0 . Éstas persisten para

$$\lambda = \lambda_0^\pm(\delta) = \frac{I_2^\pm(\delta)}{I_0^\pm(\delta)} + \mathcal{O}(\eta).$$

En la figura 3.7 mostramos las gráficas de $\frac{I_2^\pm(\delta)}{I_0^\pm(\delta)}$.

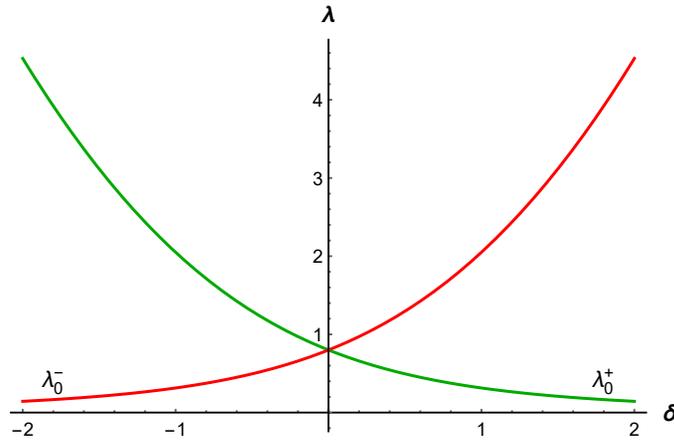


Figura 3.7: Gráficas de $\lambda_0^\pm(\delta)$ a orden cero en η , es decir, $\frac{I_2^\pm(\delta)}{I_0^\pm(\delta)}$.

Lo siguiente es llevar a cabo el análisis de las órbitas homoclínicas para $\mu \in (-\delta^2/4, 0)$. Sin pérdida de generalidad fijamos $\mu = -1$ y tomamos el límite cuando $\eta \rightarrow 0$ en el sistema (3.25), y obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -u - \delta u^2 - u^3. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Este sistema tiene tres puntos de equilibrio,

$$P_0 = (u_0, v_0) = (0, 0) \quad \text{y} \quad P_{1,2} = (u_{1,2}^*, v_{1,2}^*) = \left(\frac{1}{2} \left(-\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4} \right), 0 \right).$$

Notemos que las ecuaciones (3.36) tienen estructura de sistema hamiltoniano cuya función hamiltoniana es

$$H(u, v) = \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{3}\delta u^3 + \frac{1}{4}u^4.$$

Es fácil verificar que $P_1 = (u_1^*, v_1^*)$ es un punto silla y $P_0 = (0, 0)$, $P_2 = (u_2^*, v_2^*)$ son mínimos de la función hamiltoniana. Ahora realizamos el siguiente cambio de coordenadas $(u, v) \rightarrow (u_1^* + u, v)$, de tal forma que el sistema (3.25) se transforma en

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= -(u_1^* + u) - \delta(u_1^* + u)^2 - (u_1^* + u)^3 + \eta(\lambda - (u_1^* + u)^2)v.\end{aligned}$$

Usando los valores de las coordenadas de P_1 podemos simplificar la segunda ecuación,

$$\begin{aligned}\dot{v} &= -(u_1^* + u) - \delta(u_1^* + u)^2 - (u_1^* + u)^3 + \eta(\lambda - (u_1^* + u)^2)v \\ &= -(1 + \delta u_1^* + (u_1^*)^2)u_1^* - (1 + 2\delta u_1^* + 3(u_1^*)^2)u - (\delta + 3u_1^*)u^2 - u^3 \\ &\quad + \eta(\lambda - (u_1^*)^2 - 2u_1^*u - u^2)v \\ &= -(1 + 2\delta u_1^* + 3(u_1^*)^2)u - (\delta + 3u_1^*)u^2 - u^3 + \eta(\lambda - (u_1^*)^2 - 2u_1^*u - u^2)v \\ &= -(1 + \delta u_1^* + (u_1^*)^2 + \delta u_1^* + 2(u_1^*)^2)u - (\delta + 3u_1^*)u^2 - u^3 \\ &\quad + \eta(\lambda - (u_1^*)^2 - 2u_1^*u - u^2)v \\ &= -u_1^*(\delta + 2u_1^*)u - (\delta + 3u_1^*)u^2 - u^3 + \eta(\lambda - (u_1^*)^2 - 2u_1^*u - u^2)v \\ &= -u_1^*\sqrt{\delta^2 - 4} - (\delta + 3u_1^*)u^2 - u^3 + \eta(\lambda - (u_1^*)^2 - 2u_1^*u - u^2)v.\end{aligned}$$

Aquí usamos que $1 + \delta u_1^* + (u_1^*)^2 = 0$, la cual es una condición de los puntos de equilibrio, además que $\delta + 2u_1^* = \sqrt{\delta^2 - 4}$ ya que $u_1^* = \frac{1}{2}(-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4})$. Luego (3.25) lo reescribimos como

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v \\ \dot{v} &= \nu u - \kappa u^2 - u^3 + \eta(\lambda - (u_1^*)^2 - 2u_1^*u - u^2)v,\end{aligned}\tag{3.37}$$

donde $\nu = -u_1^*\sqrt{\delta^2 - 4}$ y $\kappa = \delta + 3u_1^*$.

Notemos que debido a que $P_1 = (u_1^*, v_1^*)$ es un punto silla de la función hamiltoniana entonces $u_1^* < 0$, lo cual implica que $\nu > 0$.

Tomando el límite cuando $\eta \rightarrow 0$ en el sistema (3.37), éste se transforma en un sistema hamiltoniano cuya función hamiltoniana es

$$\mathcal{H}(u, v) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}\nu u^2 + \frac{1}{3}\kappa u^3 + \frac{1}{4}u^4.$$

La curva de nivel $\mathcal{H} = 0$ corresponde a un par de órbitas homoclínicas que conectan al punto silla P_1 con él mismo.

A partir de (3.30) conocemos que las órbitas homoclínicas para P_0 con $\mu > 0$ son

$$\tilde{\Gamma}_0^\pm : (u_0^\pm(t), v_0^\pm(t)) = \left(\frac{\pm 3\tilde{\beta}\sqrt{\mu}}{\cosh(\sqrt{\mu}t) \pm \tilde{\beta}\tilde{\delta}}, \frac{\mp 3\mu\tilde{\beta} \sinh(\sqrt{\mu}t)}{(\cosh(\sqrt{\mu}t) \pm \tilde{\beta}\tilde{\delta})^2} \right),$$

donde

$$\tilde{\delta} = \frac{\delta}{\sqrt{\mu}} \quad \text{y} \quad \tilde{\beta} = \sqrt{\frac{2}{9 + 2(\tilde{\delta})^2}}.$$

Sean

$$\mu = \nu > 0, \quad \delta = \kappa, \quad \alpha = \left(\kappa^2 + \frac{9}{2}\nu \right)^{-1/2}.$$

Tomando en cuenta estas definiciones tenemos que

$$\tilde{\beta} = \sqrt{\frac{2}{9 + 2(\tilde{\delta})^2}} = \left(\frac{9}{2} + \frac{\delta^2}{\mu} \right)^{-1/2} = \left(\frac{9}{2} + \frac{\kappa^2}{\nu} \right)^{-1/2} = \sqrt{\nu} \left(\frac{9}{2}\nu + \kappa^2 \right)^{-1/2} = \alpha\sqrt{\nu},$$

y

$$\tilde{\beta}\tilde{\delta} = \alpha\sqrt{\nu} \left(\frac{\kappa}{\sqrt{\nu}} \right) = \alpha\kappa.$$

Como consecuencia tenemos que las órbitas homoclínicas Γ_1^\pm que conectan a P_1 están dadas por

$$\Gamma_1^\pm : (u_1^\pm(t), v_1^\pm(t)) = \left(\frac{\pm 3\alpha\nu}{\cosh(\sqrt{\nu}t) \pm \alpha\kappa}, \frac{\mp 3\alpha\nu\sqrt{\nu} \sinh(\sqrt{\nu}t)}{(\cosh(\sqrt{\nu}t) \pm \alpha\kappa)^2} \right). \quad (3.38)$$

La expansión asintótica para D^\pm en potencias de η , la cual contiene a la función de Melnikov M^\pm , está dada por

$$\begin{aligned} D^\pm(\delta, \lambda) &= \eta M^\pm(\delta, \lambda) + \mathcal{O}(\eta^2) \\ &= \eta \int_{-\infty}^{\infty} \left(\nabla H \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda - (u_1^*)^2 - 2u_1^*u - u^2)v \end{pmatrix} \right) \Big|_{\Gamma_1^\pm} dt + \mathcal{O}(\eta^2) \\ &= \eta \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} -\nu u + \kappa u^2 + u^3 \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ (\lambda - (u_1^*)^2 - 2u_1^*u - u^2)v \end{pmatrix} \Big|_{\Gamma_1^\pm} dt + \mathcal{O}(\eta^2) \\ &= \eta \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - (u_1^*)^2 - 2u_1^*(u_1^\pm(t)) - (u_1^\pm(t))^2) (v_1^\pm(t))^2 dt + \mathcal{O}(\eta^2). \end{aligned} \quad (3.39)$$

La ecuación $D^\pm(\delta, \lambda) = 0$ nos proporciona los valores de los parámetros δ y λ , para los cuales las órbitas homoclínicas persisten bajo perturbaciones en el sistema hamiltoniano. Es decir,

$$\lambda_1^\pm = (u_1^*)^2 + \frac{2u_1^* I_1^\pm + I_2^\pm}{I_0^\pm}, \quad (3.40)$$

donde

$$\begin{aligned} I_0^\pm &= \int_{-\infty}^{\infty} (v_1^\pm(t))^2 dt, \\ I_1^\pm &= \int_{-\infty}^{\infty} u_1^\pm(t) (v_1^\pm(t))^2 dt, \\ I_2^\pm &= \int_{-\infty}^{\infty} (u_1^\pm(t)v_1^\pm(t))^2 dt. \end{aligned}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} I_0^\pm &= \int_{-\infty}^{\infty} (v_1^\pm(t))^2 dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\mp 3\alpha\nu\sqrt{\nu} \sinh(\sqrt{\nu}t)}{(\cosh(\sqrt{\nu}t) \pm \alpha\kappa)^2} \right)^2 dt \\ &= 2 \int_0^{\infty} \left(\frac{\mp 3\alpha\nu\sqrt{\nu} \sinh(\sqrt{\nu}t)}{(\cosh(\sqrt{\nu}t) \pm \alpha\kappa)^2} \right)^2 dt \\ &= 3\alpha^2\nu^{5/2} \left(\frac{\alpha^2\kappa^2 + 2}{(\alpha^2\kappa^2 - 1)^2} + \frac{6\alpha\kappa \tan^{-1}\left(\frac{\alpha\kappa \mp 1}{\sqrt{1 - \alpha^2\kappa^2}}\right)}{(1 - \alpha^2\kappa^2)^{5/2}} \right) \\ &= \frac{4}{9}\sqrt{\nu}(\kappa^2 + 3\nu) + \frac{4\kappa\sqrt{2\kappa^2 + 9\nu} \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\kappa \mp \sqrt{2\kappa^2 + 9\nu}}}{3\sqrt{\nu}}\right)}{27\sqrt{\frac{1}{4\kappa^2 + 18\nu}}} \\ &= \frac{4}{9} \left(\sqrt{\nu}(\kappa^2 + 3\nu) + \frac{\sqrt{2}}{3}\kappa(2\kappa^2 + 9\nu) \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2\kappa \mp \sqrt{2\kappa^2 + 9\nu}}}{3\sqrt{\nu}}\right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1^\pm &= \int_{-\infty}^{\infty} u_1^\pm(t) (v_1^\pm(t))^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pm 3\alpha\nu}{\cosh(\sqrt{\nu}t) \pm \alpha\kappa} \right) \left(\frac{\mp 3\alpha\nu\sqrt{\nu} \sinh(\sqrt{\nu}t)}{(\cosh(\sqrt{\nu}t) \pm \alpha\kappa)^2} \right)^2 dt \\
&= 2 \int_0^{\infty} \left(\frac{\pm 3\alpha\nu}{\cosh(\sqrt{\nu}t) \pm \alpha\kappa} \right) \left(\frac{\mp 3\alpha\nu\sqrt{\nu} \sinh(\sqrt{\nu}t)}{(\cosh(\sqrt{\nu}t) \pm \alpha\kappa)^2} \right)^2 dt \\
&= \frac{9}{4} \alpha^3 \nu^{7/2} \left(\frac{\alpha\kappa (2\alpha^2\kappa^2 + 13)}{(\alpha^2\kappa^2 - 1)^3} - \frac{6 (4\alpha^2\kappa^2 + 1) \tan^{-1} \left(\frac{\alpha\kappa \mp 1}{\sqrt{1-\alpha^2\kappa^2}} \right)}{(1 - \alpha^2\kappa^2)^{7/2}} \right) \\
&= -\frac{1}{27} \kappa \sqrt{\nu} (10\kappa^2 + 39\nu) - \frac{\sqrt{2\kappa^2 + 9\nu} (10\kappa^2 + 9\nu) \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2\kappa \mp \sqrt{2\kappa^2 + 9\nu}}}{3\sqrt{\nu}} \right)}{81 \sqrt{\frac{1}{4\kappa^2 + 18\nu}}} \\
&= -\frac{1}{27} \left(\kappa \sqrt{\nu} (10\kappa^2 + 39\nu) + \frac{\sqrt{2}}{3} (2\kappa^2 + 9\nu) (10\kappa^2 + 9\nu) \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2\kappa \mp \sqrt{2\kappa^2 + 9\nu}}}{3\sqrt{\nu}} \right) \right),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2^\pm &= \int_{-\infty}^{\infty} (u_1^\pm(t) v_1^\pm(t))^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\pm 3\alpha\nu}{(\cosh(\sqrt{\nu}t) \pm \alpha\kappa)} \frac{\mp 3\alpha\nu\sqrt{\nu} \sinh(\sqrt{\nu}t)}{(\cosh(\sqrt{\nu}t) \pm \alpha\kappa)^2} \right)^2 dt \\
&= 2 \int_0^{\infty} \left(\frac{-9\alpha^2\nu^2\sqrt{\nu} \sinh(\sqrt{\nu}t)}{(\cosh(\sqrt{\nu}t) \pm \alpha\kappa)^3} \right)^2 dt \\
&= \frac{27}{20} \alpha^4 \nu^{9/2} \left(\frac{30\alpha\kappa (4\alpha^2\kappa^2 + 3) \tan^{-1} \left(\frac{\alpha\kappa \mp 1}{\sqrt{1-\alpha^2\kappa^2}} \right)}{(1 - \alpha^2\kappa^2)^{9/2}} + \frac{6\alpha^4\kappa^4 + 83\alpha^2\kappa^2 + 16}{(\alpha^2\kappa^2 - 1)^4} \right) \\
&= \frac{2}{81} \left(\frac{\sqrt{\nu}}{5} (70\kappa^4 + 345\kappa^2\nu + 216\nu^2) \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sqrt{2}}{3} \kappa (14\kappa^2 + 27\nu) (2\kappa^2 + 9\nu) \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{2\kappa \mp \sqrt{2\kappa^2 + 9\nu}}}{3\sqrt{\nu}} \right) \right).
\end{aligned}$$

Recordemos que

$$\begin{aligned}
\nu &= -u_1^* \sqrt{\delta^2 - 4} = -\frac{1}{2} \delta^2 + \frac{1}{2} \delta \sqrt{\delta^2 - 4} + 2, \\
\kappa &= \delta + 3u_1^* = -\frac{1}{2} \delta + \frac{3}{2} \sqrt{\delta^2 - 4},
\end{aligned}$$

ya que $u_1^* = \frac{1}{2}(-\delta + \sqrt{\delta^2 - 4})$, por lo tanto

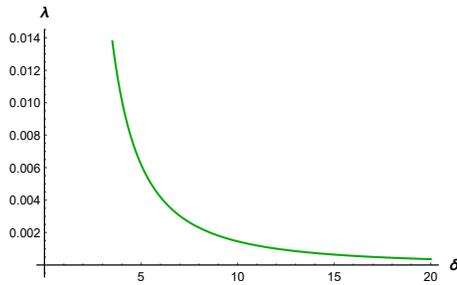
$$I_0^\pm(\delta) = \frac{2\sqrt{2}}{27} \left(3(\delta^2 - 3) \sqrt{\delta(\sqrt{\delta^2 - 4} - \delta)} + 4 + 2\delta(2\delta^2 - 9) \tan^{-1}(\theta^\pm(\delta)) \right),$$

$$I_1^\pm(\delta) = \frac{\delta}{162\sqrt{2}} \left(3\sqrt{\delta^2 - 4} + \delta \right) \left(-41\delta^2 + 21\delta\sqrt{\delta^2 - 4} + 144 \right) \tan^{-1}(\theta^\pm(\delta)) \\ - \frac{1}{27\sqrt{2}} \left(4\delta^3 + (6\delta^2 + 3)\sqrt{\delta^2 - 4} - 21\delta \right) \sqrt{\delta(\sqrt{\delta^2 - 4} - \delta)} + 4,$$

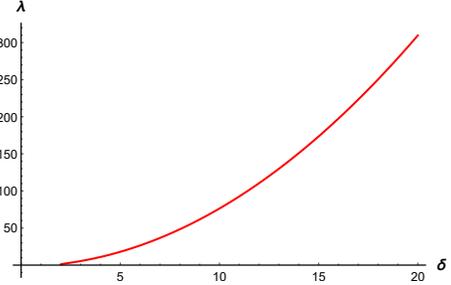
$$I_2^\pm(\delta) = \frac{\sqrt{2}}{810} \left(26\delta^4 - 231\delta^2 + (114\delta^3 - 531\delta)\sqrt{\delta^2 - 4} + 648 \right) \sqrt{\delta(\sqrt{\delta^2 - 4} - \delta)} + 4 \\ + \frac{\sqrt{2}\delta}{243} (2\delta^2 - 9) \left(43\delta^2 - 15\delta\sqrt{\delta^2 - 4} - 144 \right) \tan^{-1}(\theta^\pm(\delta)),$$

donde

$$\theta^\pm(\delta) = \left(\frac{3\sqrt{\delta^2 - 4} \mp \sqrt{\delta(3\sqrt{\delta^2 - 4} + \delta)} - \delta}{3\sqrt{\delta(\sqrt{\delta^2 - 4} - \delta)} + 4} \right).$$



(a)



(b)

Figura 3.8: Gráfica de: (a) $\lambda_1^+(\delta) = (u_1^*)^2 + \frac{2u_1^*I_1^+ + I_2^+}{I_0^+}$ y (b) $\lambda_1^-(\delta) = (u_1^*)^2 + \frac{2u_1^*I_1^- + I_2^-}{I_0^-}$.

A partir del reescalamiento (3.24) tenemos la relación

$$\mu = \frac{r - p}{\eta^2} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{r - 1}{\eta^2},$$

y por tanto

$$\lambda(r - p) = \mu(r - 1), \quad \forall \eta, \lambda, \mu \neq 0,$$

o equivalentemente $(\lambda - \mu)r = \lambda p - \mu$, pero

$$\begin{aligned}(\lambda - \mu)r &= \lambda p - \mu \\ &= \lambda p - \mu + \lambda - \lambda \\ &= \lambda(p - 1) + (\lambda - \mu),\end{aligned}$$

por lo tanto

$$(\lambda - \mu)r - (\lambda - \mu) = \lambda(p - 1).$$

Finalmente llegamos a la siguiente relación lineal entre r y p :

$$(\lambda - \mu)(r - 1) = \lambda(p - 1). \quad (3.41)$$

Esta fórmula produce la pendiente de la recta tangente a las curvas de bifurcaciones homoclínicas en el centro de organización Q_0 , para $\mu > 0$.

Con el fin de establecer la existencia y persistencia de las órbitas homoclínicas de lazo doble, debemos hacer notar que éstas convergen en el límite simétrico cuando $\delta \rightarrow 0$ (cuando $s \rightarrow 0$), $\mu = 1$ y $\eta = 0$ en el sistema (3.25) al par de órbitas homoclínicas del modelo

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= u - u^3.\end{aligned} \quad (3.42)$$

Este sistema es equivalente a la ecuación de Duffing

$$\ddot{u} - u + u^3 = 0, \quad (3.43)$$

cuyas órbitas homoclínicas son

$$\Gamma_0^\pm : (u_0^\pm(t), v_0^\pm(t)) = \left(\pm\sqrt{2} \operatorname{sech}(t), \mp\sqrt{2} \operatorname{sech}(t) \tanh(t) \right).$$

En la figura 3.9 mostramos el retrato fase de la ecuación de Duffing (3.43).

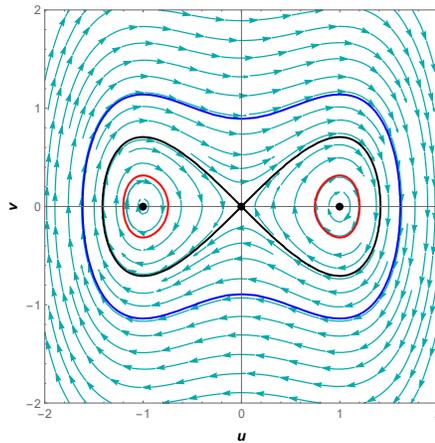


Figura 3.9: Retrato fase de la ecuación de Duffing (3.43).

La órbita homoclínica de lazo doble está dada por la unión $\Gamma_0^- \cup \Gamma_0^+$, es decir, son las órbitas homoclínicas localizadas a la izquierda y a la derecha de P_0 . Las órbitas homoclínicas de lazo doble se originan por la suma de funciones de Melnikov de lazo único. Usando de la ecuación de bifurcación $D^\pm(\delta, \lambda) = 0$ podemos calcular la persistencia de las homoclínicas de lazo doble a P_0 dadas por

$$\lambda = \lambda_0^U = \frac{I_2^+ + I_2^-}{I_0^+ + I_0^-} + \mathcal{O}(\eta).$$

Un cálculo inmediato nos permite verificar que

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lambda_0^\pm(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \lambda_0^U(\delta) = \frac{4}{5},$$

Luego, fijando $\mu = 1$ y tomando el límite cuando $\delta \rightarrow 0$, las órbitas homoclínicas derecha e izquierda a P_0 cuando $\lambda = 4/5$ coinciden con las órbitas homoclínicas simétricas dadas por la ecuación de Duffing.

Ahora, utilizando la ecuación (3.41) tenemos que

$$\left(\frac{4}{5} - 1\right)(r - 1) = \frac{4}{5}(p - 1),$$

ó bien

$$r - 1 = -4(p - 1),$$

que corresponde a la recta tangente a la curva de bifurcaciones homoclínicas con las condiciones dadas previamente.

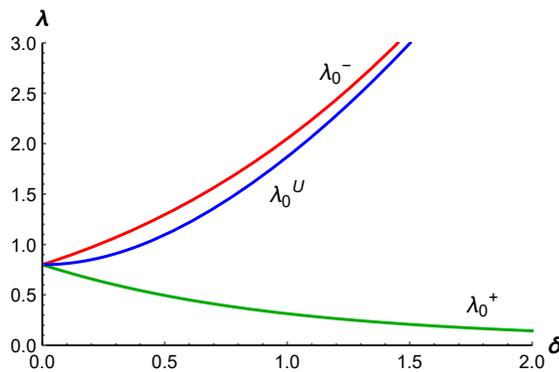


Figura 3.10: Gráficas de $\lambda_0^\pm(\delta)$ y $\lambda_0^U(\delta)$. Las tres curvas de bifurcación coinciden para $\lambda = 4/5$ cuando $\delta \rightarrow 0$, generando dos órbitas homoclínicas simétricas.

Por otra lado, usando el reescalamiento (3.24) tenemos que,

$$\begin{aligned}
(\lambda - \mu)r &= \lambda p - \mu \\
&= \lambda p + \lambda \left(-1 + 1 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2}s^2 \right) + \mu(-1) \\
&= \lambda p - \lambda \left(1 + \frac{1}{2}s^2 \right) + \frac{1}{4}s^2(\lambda + \mu) + (\lambda - \mu) \left(1 + \frac{1}{4}s^2 \right).
\end{aligned}$$

En otras palabras

$$(\lambda - \mu)r - (\lambda - \mu) \left(1 + \frac{1}{4}s^2 \right) = \lambda p - \lambda \left(1 + \frac{1}{2}s^2 \right) + \frac{1}{4}s^2(\lambda + \mu),$$

de donde obtenemos la siguiente relación lineal entre r y p :

$$(\lambda - \mu) \left(r - \left(1 + \frac{1}{4}s^2 \right) \right) = \lambda \left(p - \left(1 + \frac{1}{2}s^2 \right) \right) + \frac{1}{4}s^2(\lambda + \mu). \quad (3.44)$$

Esta fórmula produce la pendiente de la recta tangente a las curvas de bifurcaciones homoclínicas en el centro de organización Q_1 para $\mu \in (-\delta^2/4, 0)$. En este caso las órbitas homoclínicas de lazo doble están dadas por la unión $\Gamma_1^- \cup \Gamma_1^+$. Las órbitas homoclínicas derecha e izquierda a P_1 y la ecuación de bifurcación $D^\pm(\delta, \lambda) = 0$ nos proporciona los valores de los parámetros δ y λ para los cuales persisten las órbitas homoclínicas de lazo doble a P_1 , dadas por

$$\lambda = \lambda_1^\cup(\delta) = (u_1^*)^2 + \frac{2u_1^*(I_1^+ + I_1^-) + (I_2^+ + I_2^-)}{I_0^+ + I_0^-} + \mathcal{O}(\eta).$$

Como consecuencia de que

$$\lim_{\delta \rightarrow 2} \lambda_1^+(\delta) = \lim_{\delta \rightarrow 2} \lambda_1^\cup(\delta) = \frac{1}{9} \quad \text{y} \quad \lim_{\delta \rightarrow 2} \lambda_1^-(\delta) = 1,$$

obtenemos que fijando $\mu = -1$ y tomando el límite cuando $\delta \rightarrow 2$, las órbitas homoclínicas derecha y de lazo doble a P_1 colapsan cuando $\lambda = 1/9$, mientras que la órbita homoclínica izquierda tiende a $\lambda = 1$ cuando $\delta \rightarrow 2$. Por otro lado tenemos que $\delta^2 + 4\mu = \delta^2 - 4 \geq 0$, por lo tanto $\delta \geq 2$, es decir, las órbitas homoclínicas de lazo único y de lazo doble a P_1 persisten para $\delta \in [2, \infty)$, con λ a orden uno.

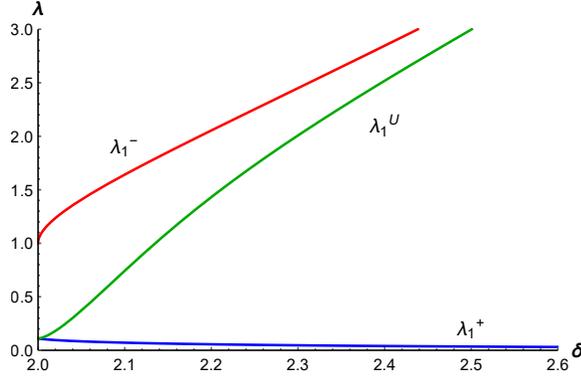


Figura 3.11: Gráficas de $\lambda_1^\pm(\delta)$ y $\lambda_1^\cup(\delta)$. Las curvas de bifurcación $\lambda_1^+(\delta)$ y $\lambda_1^\cup(\delta)$ coinciden para $\lambda = 1/9$ cuando $\delta \rightarrow 2$.

Lo siguiente es observar que cuando tomamos el límite cuando $s \rightarrow 0$ en (3.23) llegamos al sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu_1 x + \mu_2 y - x^3 - x^2 y, \end{aligned} \tag{3.45}$$

donde $\mu_1 = r - p$ y $\mu_2 = r - 1$.

Para $\mu_1 < 0$ el único punto de equilibrio del sistema (3.45) es $P_0 = (0, 0)$, mientras que para $\mu_1 > 0$ el sistema (3.45) tiene tres puntos de equilibrio,

$$P_0 = (0, 0) \quad \text{y} \quad P_{1,2} = (\pm\sqrt{\mu_1}, 0).$$

Introduciendo el siguiente rescalamiento de las variables y los parámetros

$$x = \varepsilon u, \quad y = \varepsilon^2 v, \quad \mu_1 = \varepsilon^2 \xi_1, \quad \mu_2 = \varepsilon^2 \xi_2, \quad t \rightarrow \varepsilon t,$$

el sistema (3.45) se transforma en

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= \xi_1 u + \varepsilon \xi_2 v - u^3 - \varepsilon u^2 v. \end{aligned} \tag{3.46}$$

Eligiendo $\xi_1 = 1$ y $\varepsilon = 0$ obtenemos el sistema hamiltoniano

$$\begin{aligned} \dot{u} &= v, \\ \dot{v} &= u - u^3, \end{aligned}$$

cuya función hamiltoniana es

$$H(u, v) = \frac{1}{2}v^2 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4}u^4. \quad (3.47)$$

Como vimos antes, este sistema hamiltoniano es equivalente a la ecuación de Duffing

$$\ddot{u} - u + u^3 = 0.$$

Los respectivos puntos de equilibrio $P_{1,2} = (\pm 1, 0)$ son mínimos de $H(u, v)$ y el punto de equilibrio $P_0 = (0, 0)$ es un punto silla de $H(u, v)$. Además en la curva de nivel $H_0 = H(u, v) = 0$ tenemos la pareja de órbitas homoclínicas simétricas

$$\Gamma_0^\pm : (u_0^\pm(t), v_0^\pm(t)) = \left(\pm\sqrt{2} \operatorname{sech}(t), \mp\sqrt{2} \operatorname{sech}(t) \tanh(t) \right),$$

que conectan al punto silla. Ya hemos mostrado que una conexión doble de tipo silla ocurre para $\xi_2 = 4/5$, ó bien en términos de μ_1 y μ_2 ocurre en una curva tangente a $\mu_2 = \frac{4}{5}\mu_1$ cuando $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$, equivalentemente en un curva tangente a

$$r - 1 = -4(p - 1),$$

cuando $(r, p) = (1, 1)$.

Observemos que para $\mu_2 < 0$ no existen órbitas periódicas, pues por el criterio de Bendixson tenemos que

$$\operatorname{div}(f) = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} = \mu_2 - x^2 < 0 \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R},$$

donde

$$f(x, y) = (y, \mu_1 x + \mu_2 y - x^3 - x^2 y).$$

A partir de esto inferimos que las órbitas periódicas que rodean a los tres puntos de equilibrio deben desaparecer en alguna curva de bifurcación en el primer cuadrante, la cual debe estar localizada entre las rectas $\mu_2 = \frac{4}{5}\mu_1$ y $\mu_2 = 0$. Con el fin de comprobar esto, consideremos el sistema hamiltoniano perturbado (3.46) con $\xi_1 = 1$, es decir,

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ u - u^3 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ (\xi_2 - u^2)v \end{pmatrix} = J\nabla H + \varepsilon X,$$

donde

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Usando el método de Melnikov obtenemos la siguiente expansión asintótica para D^\pm en potencias de ε .

$$D^\pm(\xi_2) = \varepsilon M^\pm(\xi_2) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),$$

donde la función de Melnikov es

$$\begin{aligned} M^\pm(\xi_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\nabla H \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ (\xi_2 - u^2)v \end{pmatrix} \right) \Big|_{\Gamma_0^\pm} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} -u + u^3 \\ v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ (\xi_2 - u^2)v \end{pmatrix} \Big|_{\Gamma_0^\pm} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\xi_2 - (u_0^\pm(t))^2 \right) (v_0^\pm(t))^2 dt. \end{aligned}$$

Como consecuencia obtenemos que $M^\pm(\xi_2) = 0$ cuando

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (u_0^\pm(t)v_0^\pm(t))^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} (v_0^\pm(t))^2 dt} = \frac{2 \int_0^\infty \operatorname{sech}^4(t) \tanh^2(t) dt}{\int_0^\infty \operatorname{sech}^2(t) \tanh^2(t) dt} \\ &= \frac{\frac{4}{15} \tanh(t) - \frac{2}{5} \tanh(t) \operatorname{sech}^4(t) + \frac{2}{15} \tanh(t) \operatorname{sech}^2(t)}{\frac{1}{3} \tanh^3(t)} \Big|_0^\infty = \frac{4}{5}. \end{aligned}$$

Por lo tanto las órbitas homoclínicas del sistema hamiltoniano perturbado (3.46) que conectan al punto silla P_0 se preservan para $\xi_2 = \frac{4}{5}$ cuando $\xi_1 = 1$, lo cual ya era conocido.

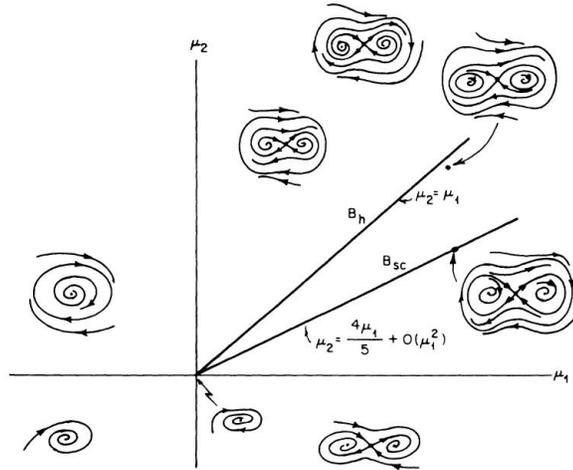


Figura 3.12: Digrama de bifurcación de (3.45); figura tomada de [6].

Sea $\gamma = (u_\alpha(t), v_\alpha(t))$ una órbita periódica elegida arbitrariamente dentro ó fuera de la órbita homoclínica Γ_0 , cuya función hamiltoniana es $H(u_\alpha, v_\alpha) = \alpha$ de periodo T_α . Tomando una de las curvas de nivel $\gamma^\alpha = H_0^{-1}(\alpha)$ tenemos que la función de Melnikov puede ser descrita por

$$\begin{aligned} M^\alpha(\xi_2) &= \int_0^{T_\alpha} (\xi_2 - u_\alpha^2(t)) v_\alpha^2(t) dt \\ &= \xi_2 \int_0^{T_\alpha} v_\alpha^2(t) dt - \int_0^{T_\alpha} u_\alpha^2(t) v_\alpha^2(t) dt \\ &= \xi_2 \int_{\gamma^\alpha} v du - \int_{\gamma^\alpha} u^2 v du, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $v = \frac{du}{dt}$ para convertir la integración con respecto de la variable t , en una integral de línea a lo largo de la órbita periódica γ^α .

Para poder evaluar las integrales es necesario expresar a v en términos de u a través de la función hamiltoniana (3.47). Para que una órbita periódica persista necesitamos que $M^\alpha(\xi_2) = 0$, lo cual ocurre cuando

$$\xi_2 = \frac{\int_{\gamma^\alpha} u^2 v du}{\int_{\gamma^\alpha} v du} = R(\alpha). \quad (3.48)$$

En [2], J. Carr usó propiedades de integrales elípticas para demostrar que $R(\alpha)$ tiene la forma que se muestra en la figura 3.13, además demostró que tiene un único punto mínimo en $c \approx 0.752$, para algún $\alpha > 0$. Además, $R(\alpha)$ toma valores grandes cuando $\alpha \rightarrow \infty$, de tal forma que para $\xi_2 \in (1, \infty)$ se conserva una única órbita periódica próxima a una de las curvas de nivel para algún $\alpha > 0$, mientras que para $\xi_2 \in (4/5, 1)$ se preservan tres órbitas periódicas, dos de estas para $\alpha \in (-1/4, 0)$ y una para algún $\alpha > 0$. En $\xi_2 = 4/5$ hay una órbita homoclínica de lazo doble que conecta al punto silla la cual tiene una separatriz. Para $\xi_2 \in (c, 4/5)$ hay dos órbitas periódicas, una atractora y la otra repulsora, las cuales contienen a los tres puntos de equilibrio. Estas órbitas periódicas se fusionan en $\xi_2 = c$ y desaparecen cuando $\xi_2 < c$. Para $\xi_2 \in (-\infty, c)$ el punto de equilibrio $P_0 = (0, 0)$ es una silla y los otros dos puntos de equilibrio son topológicamente equivalentes a un nodo. Luego en $\xi_2 = c$ ocurre una bifurcación de tipo silla-nodo, ó bien en términos de μ_1 y μ_2 hay en una curva tangente a $\mu_2 = c\mu_1$ cuando $(\mu_1, \mu_2) = (0, 0)$, que equivale a en una curva tangente a

$$r - 1 = \frac{c}{c - 1} (p - 1),$$

cuando $(r, p) = (1, 1)$. Mas aun, ya que $c \approx 0.752$ obtenemos que la curva de bifurcación silla-nodo es tangente a la curva

$$r - 1 \approx -3.032(p - 1).$$

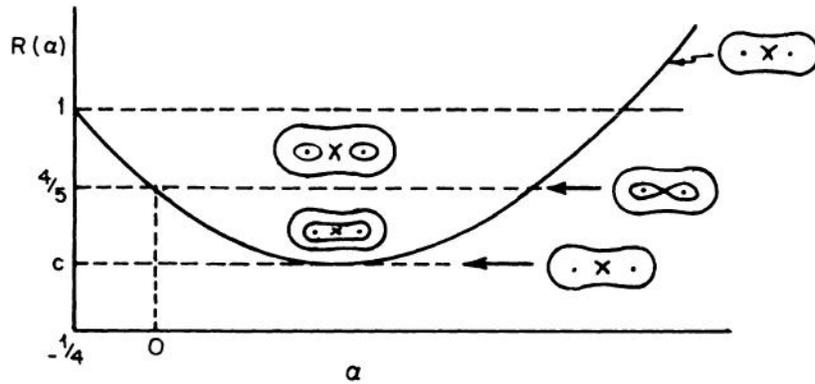


Figura 3.13: Gráfica de $R(\alpha)$ con las curvas de nivel asociadas; figura tomada de [6].

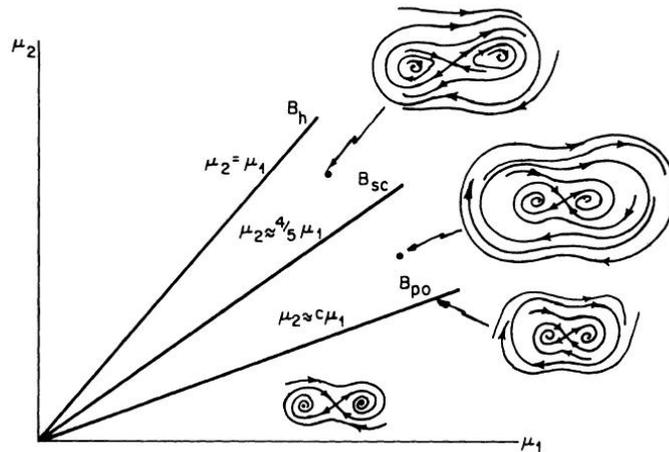


Figura 3.14: Terminación del diagrama de bifurcación de (3.45); figura tomada de [6].

En conclusión tenemos que para el sistema (2.11) el único centro de organización es el punto

$$Q = \left(\frac{1}{1+\varepsilon}, \frac{1}{1+\varepsilon} \right),$$

además, a lo largo de la recta $r = p$ ocurre una bifurcación de tipo trinche.

En e_0 dada por la recta $r = 1 - \varepsilon p$ la cual se encuentra definida para $p > \frac{1}{1+\varepsilon}$ el punto de equilibrio P_0 del sistema (2.11) se somete a una bifurcación de Hopf supercrítica, mientras que en e_1 y e_2 dadas (ambas) por la relación $p = 1 + \varepsilon(1 - 2r)$

las cuales se encuentran definidas para $p < \frac{1}{1+\varepsilon}$, los puntos de equilibrio P_1 y P_2 de (2.11) se someten a una bifurcación de Hopf subcrítica.

Por otra lado la recta $r - (1 - \varepsilon) = -4(p - (1 - \varepsilon))$ es tangente a la curva de bifurcación homoclínica para el sistema (2.11), mientras que una bifurcación de tipo silla-nodo es tangente a la curva

$$r - (1 - \varepsilon) \approx -3.032(p - (1 - \varepsilon)).$$

Concluimos el análisis para el despliegue del campo vectorial perturbado del sistema (2.11) con parte lineal

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

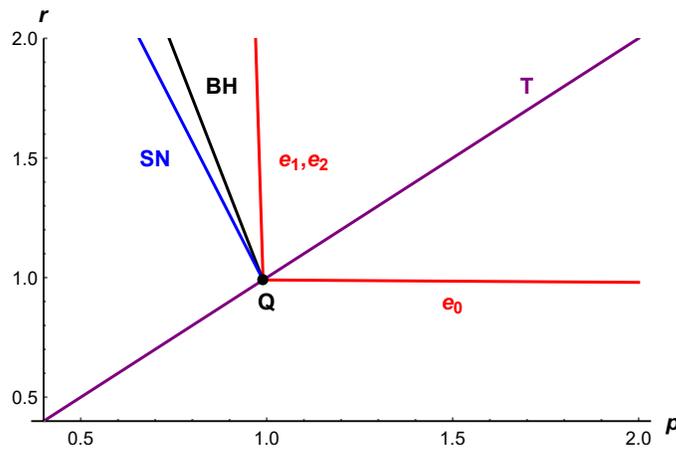


Figura 3.15: Diagrama de despliegue de (2.11) para $\varepsilon = 0.01$ ($q = 100$) con una aproximación del orden $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ en h_ε . Aquí Q es el centro de organización, e_0 está asociada a la bifurcación de Hopf supercrítica para P_0 , mientras que e_1, e_2 están asociadas a la bifurcación de Hopf subcrítica para P_1 y P_2 respectivamente, T se encuentra asociada a una bifurcación de tipo trinche, BH a una bifurcación homoclínica y SN a una bifurcación de tipo silla-nodo.

Teoremas de Andronov et al. para sistemas en el plano

Las versiones de los teoremas presentados aquí, han sido tomadas de los libros de A. A. Andronov et al. [1] y de L. Perko [10].

Consideremos que el origen es un punto de equilibrio aislado del sistema en el plano definido por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y),\end{aligned}\tag{3.50}$$

donde el punto denota la derivada con respecto de t , y P, Q son funciones analíticas en un entorno del origen.

Sea $\mathbf{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ y $A = D\mathbf{f}(0, 0)$ la matriz de la parte lineal evaluada en el origen.

Vamos a estudiar los retratos fase de (3.50) cuando la matriz A tiene valores propios cero pero $A \neq 0$.

Primero consideremos el caso cuando A tiene un valor propio cero, es decir, $\det A = 0$, pero $\text{tr}A \neq 0$. En el libro de Andronov et al. [1] página 338, se demostró que el sistema (3.50) puede ser escrito en la siguiente forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p_2(x, y), \\ \dot{y} &= y + q_2(x, y),\end{aligned}\tag{3.51}$$

donde p_2 y q_2 son analíticas en un entorno del origen y tienen una expansión en serie en las variables x y y que inicia con términos de segundo orden.

El siguiente teorema fue demostrado en la página 340 en [1].

Teorema 4. Sea el origen un punto de equilibrio aislado para el sistema analítico (3.51). Sea $y = \phi(x)$ la solución de la ecuación $y + q_2(x, y) = 0$ en un entorno del origen y sea la expansión de la función $\psi(x) = p_2(x, \phi(x))$ en un entorno de

$x = 0$ de la forma $\psi(x) = a_m x^m + \dots$ donde $m \geq 2$ y $a_m \neq 0$. Entonces (1) para m impar y $a_m > 0$, el origen es un nodo estable, (2) para m impar y $a_m < 0$, el origen es (topológicamente) un silla y (3) para m par, el origen es un silla nodo, ver la figura 3.16.

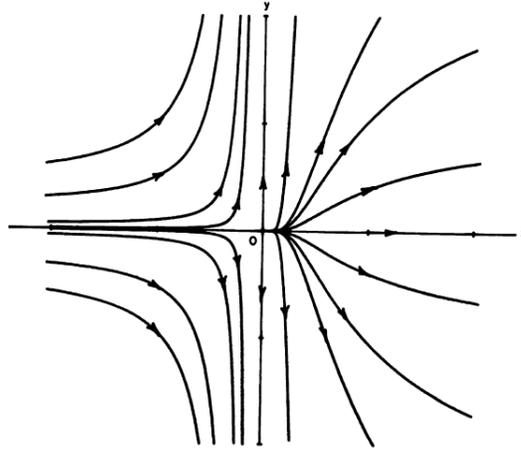


Figura 3.16: El origen es un punto silla-nodo; figura tomada de [10].

Ahora, vamos a considerar el caso cuando A tiene dos valores propios cero, es decir, $\det A = 0$ y $\text{tr}A = 0$, pero $A \neq 0$. Para este caso, en [1] página 356, demostraron que el sistema (3.50) puede ser escrito en la forma normal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a_k x^k [1 + h(x)] + b_n x^n y [1 + g(x)] + y^2 R(x, y) \end{aligned} \quad (3.52)$$

donde $h(x)$, $g(x)$ y $R(x, y)$ son analíticas en un entorno del origen, $h(0) = g(0) = 0$, $k \geq 2$, $a_k \neq 0$ y $n \geq 1$. Los siguientes dos teoremas fueron demostrados en [1] páginas 357-362.

Teorema 5. Sea $k = 2m + 1$ con $m \geq 1$ en (3.52) y sea $\lambda = b_n^2 + 4(m + 1)a_k$. Entonces si $a_k > 0$, el origen es (topológicamente) una silla. Si $a_k < 0$, el origen es (1) un foco o un centro si $b_n = 0$ y también si $b_n \neq 0$ y $n > m$ ó si $n = m$ y $\lambda < 0$, (2) un nodo si $b_n \neq 0$, n es un número par y $n < m$ y también si $b_n \neq 0$, n es un número par, $n = m$ y $\lambda \geq 0$ y (3) un punto de equilibrio con dominio elíptico si $b_n \neq 0$, n es un número impar y $n < m$ y también si $b_n \neq 0$, n es un número impar, $n = m$ y $\lambda \geq 0$.

Teorema 6. Sea $k = 2m$ con $m \geq 1$ en (3.52). Entonces el origen es (1) una cúspide si $b_n = 0$ y también si $b_n \neq 0$ y $n \geq m$ y (2) es un silla-nodo si $b_n \neq 0$ y $n < m$. Ver las figuras 3.16 y 3.17, respectivamente.

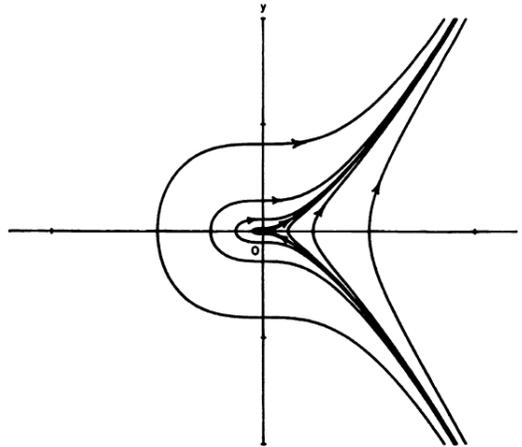


Figura 3.17: Cúspide en el origen; figura tomada de [10].

En resumen, si $D\mathbf{f}(x_0, y_0)$ tiene un valor propio cero, entonces el punto de equilibrio (x_0, y_0) es un nodo, una (topológicamente) silla, o un silla-nodo; y si $D\mathbf{f}(x_0, y_0)$ tiene dos valores propios cero, entonces el punto de equilibrio (x_0, y_0) , es un foco, un centro, un nodo, una (topológicamente) silla, un silla-nodo, una cúspide, o un punto de equilibrio con un dominio elíptico.

El mapeo de Poincaré

En esta sección definimos el mapeo de Poincaré, el cual es una herramienta muy usada para el estudio de la estabilidad y bifurcaciones de órbitas periódicas.

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{3.53}$$

donde $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ y E es un subconjunto abierto en \mathbb{R}^n .

Sea Γ una órbita periódica del sistema (3.53), la cual pasa por el punto \mathbf{x}_0 , y Σ es un hiperplano perpendicular a Γ en \mathbf{x}_0 , entonces para cualquier punto $\mathbf{x} \in \Sigma$ suficientemente cercano a \mathbf{x}_0 , las solución de (3.53) a través de \mathbf{x} en $t = 0$, $\phi_t(\mathbf{x})$, cruzará a Σ nuevamente en un punto $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ cerca de \mathbf{x}_0 ; ver la figura 3.18. El mapeo $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{P}(\mathbf{x})$ es llamado *mapeo de Poincaré*.

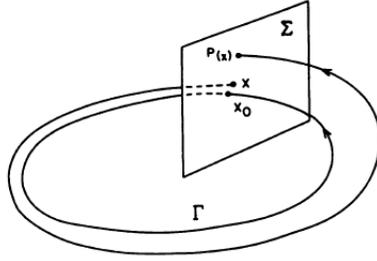


Figura 3.18: El mapeo de Poincaré; figura tomada de [10].

El mapeo de Poincaré también puede ser definido cuando Σ es una superficie suave, a través de un punto $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$, la cual no es tangente a Γ en \mathbf{x}_0 . En ese caso, la superficie Σ se dice que interseca la curva transversalmente en \mathbf{x}_0 .

Definición 5. Sea $\mathbf{P}(s)$ el mapeo de Poincaré para un ciclo Γ de un sistema analítico en el plano (3.53) y sea

$$d(s) = \mathbf{P}(s) - s$$

la *función desplazamiento*. Entonces si

$$d(0) = d'(0) = \dots = d^{k-1}(0) = 0 \quad \text{y} \quad d^{(k)}(0) \neq 0,$$

Γ es llamada un *ciclo límite simple de multiplicidad k* . Si $k = 1$ entonces Γ es llamado un *ciclo límite simple*.

Foco en el origen

Supongamos que el sistema (3.53) tiene un foco en el origen y que $Df(0, 0) \neq 0$. Entonces (3.53) es linealmente equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= ax - by + p(x, y), \\ \dot{y} &= bx + ay + q(x, y), \end{aligned} \tag{3.54}$$

con $b \neq 0$, donde

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \sum_{i+j \geq 2} a_{ij} x^i y^j \\ &= (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) + (a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) + \dots \\ q(x, y) &= \sum_{i+j \geq 2} b_{ij} x^i y^j \\ &= (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2) + (b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3) + \dots \end{aligned}$$

El siguiente teorema fue demostrado en [1], pág. 241.

Teorema 7. Sea $\mathbf{P}(s)$ el mapeo de Poincaré para un foco en el origen del sistema analítico en el plano (3.54) con $b \neq 0$ y supongamos que $\mathbf{P}(s)$ es definido para $0 < s < \delta_0$. Entonces existe un $\delta > 0$ tal que $\mathbf{P}(s)$ puede ser extendido a una función analítica para $|s| < \delta$. Más aún, $\mathbf{P}(0) = 0$, $\mathbf{P}'(0) = \exp(2\pi a(|b|))$, y si $d(s) = \mathbf{P}(s) - s$ entonces $d(s)d(-s) < 0$ para $0 < |s| < \delta$.

El hecho de que $d(s)d(-s) < 0$ para $0 < |s| < \delta$ puede ser usado para mostrar que si

$$d(0) = d'(0) = \dots = d^{(k-1)}(0) = 0 \quad \text{y} \quad d^{(k)}(0) \neq 0$$

entonces k es impar; i.e., $k = 2m + 1$. El entero $m = (k - 1)/2$ es llamado la *multiplicidad* del foco. Si $m = 0$ el foco es llamado un *foco simple*, y del teorema anterior obtenemos que el sistema (3.54), con $b \neq 0$, tiene un foco simple en el origen si y solo si $a \neq 0$. El signo de $d'(0)$, i.e., el signo de a determina la estabilidad del origen en este caso. Si $a < 0$, el origen es un foco estable y si $a > 0$, el origen es un foco inestable. Si $d'(0) = 0$, i.e., si $a = 0$, entonces (3.54) tiene un foco múltiple o centro en el origen. Si $d'(0) = 0$ entonces la primera derivada diferente de cero $\sigma \equiv d^k(0) \neq 0$ es llamada el *número de Lyapunov* para el foco. Si $\sigma < 0$ entonces el foco es estable y si $\sigma > 0$ es inestable. Si $d'(0) = d''(0) = 0$ y $d'''(0) \neq 0$ entonces el número de Lyapunov para el foco en el origen de (3.54) es dado por la fórmula

$$\begin{aligned} \sigma = d'''(0) = \frac{3\pi}{2b} \left\{ [3(a_{30} + b_{03}) + (a_{12} + b_{21})] \right. \\ \left. - \frac{1}{b} [2(a_{20}b_{20} - a_{02}b_{02}) - a_{11}(a_{02} + a_{20}) + b_{11}(b_{02} + b_{20})] \right\}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Bifurcación de Hopf

En esta sección estamos interesados en conocer qué tipo de bifurcaciones ocurren en un punto de equilibrio no hiperbólico \mathbf{x}_0 del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales dependiente de un parámetro

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mu) \quad (3.56)$$

donde $\mathbf{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^n$, E es un subconjunto abierto en \mathbb{R}^n y $\mu \in \mathbb{R}$ es el parámetro. En particular nos interesa estudiar el caso cuando la matriz $D\mathbf{f}(\mathbf{x}_0, \mu_0)$ tiene un par de valores imaginarios puros y ningún otro valor propio con parte real cero. En este caso, el teorema de la función implícita garantiza que para cada μ cercano a μ_0 existirá un único punto de equilibrio \mathbf{x}_μ cercano a \mathbf{x}_0 ; sin embargo, si los valores

proprios de $Df(\mathbf{x}_\mu, \mu)$ cruzan el eje imaginario en $\mu = \mu_0$, entonces las dimensiones de las variedades estables e inestables de \mathbf{x}_μ cambiarán, y el retrato de fase local de (3.56) cambiará cuando μ pase a través del valor de bifurcación μ_0 .

Iniciemos por estudiar el sistema en el plano definido por

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - y + p(x, y), \\ \dot{y} &= x + \mu y + q(x, y),\end{aligned}\tag{3.57}$$

donde las funciones analíticas

$$\begin{aligned}p(x, y) &= \sum_{i+j \geq 2} a_{ij} x^i y^j \\ &= (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) + (a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) + \dots\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}q(x, y) &= \sum_{i+j \geq 2} b_{ij} x^i y^j \\ &= (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2) + (b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3) + \dots\end{aligned}$$

El siguiente teorema fue demostrado en [1] páginas 261-264.

Teorema 8 (Bifurcación de Hopf). Si $\sigma \neq 0$, entonces una bifurcación de Hopf ocurre en el origen de (3.57) en el valor de bifurcación $\mu = 0$; en particular, si $\sigma < 0$, entonces un único ciclo límite estable bifurca del origen de (3.57) cuando μ crece desde cero y si $\sigma > 0$, entonces un único ciclo límite inestable bifurca del origen de (3.57) cuando μ decrece desde cero. Si $\sigma < 0$, los retratos de fase locales para (3.57) son topológicamente equivalentes al que se muestra en la figura 3.19 y existe una superficie de órbitas periódicas las cuales tienen un tangencia cuadrática con en el plano (x, y) en el origen de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$; ver la figura 3.20

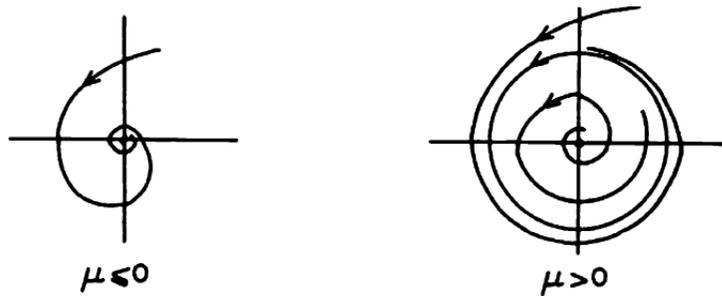


Figura 3.19: Retrato fase cuando $\mu \leq 0$ y $\mu > 0$. Figura tomada de [10].

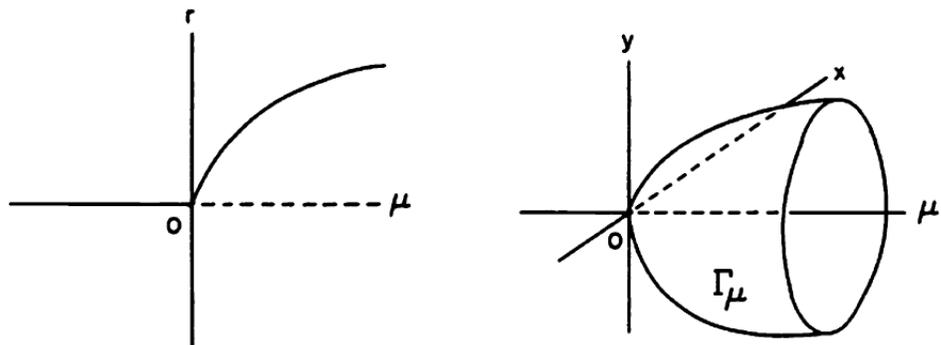


Figura 3.20: Diagrama de bifurcación y la familia 1-paramétrica de ciclos límite Γ_μ resultando una bifurcación de Hopf. Figura tomada de [10].

En primer caso ($\sigma < 0$) del Teorema 8 el punto de equilibrio genera un ciclo límite *estable* cuando μ cruza a través del valor de bifurcación $\mu = 0$, y obtenemos lo que se llama *bifurcación de Hopf supercrítica* (ver la figura 3.21) y en el segundo caso ($\sigma > 0$) en el Teorema 8 donde el punto de equilibrio genera un ciclo límite *inestable* cuando μ pasa a través del valor de bifurcación $\mu = 0$, y obtenemos lo que se llama una *bifurcación de Hopf subcrítica* (ver la figura 3.22).

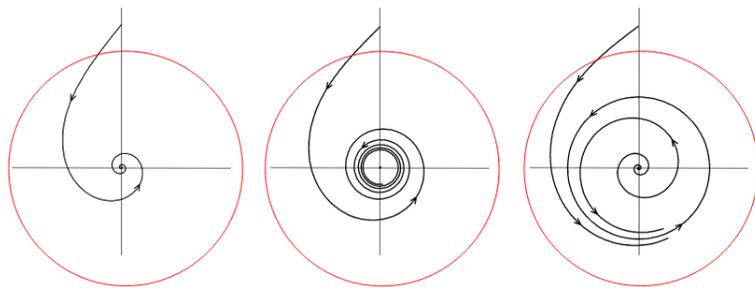


Figura 3.21: Bifurcación supercrítica de Hopf donde el número de Lyapunov $\sigma < 0$.

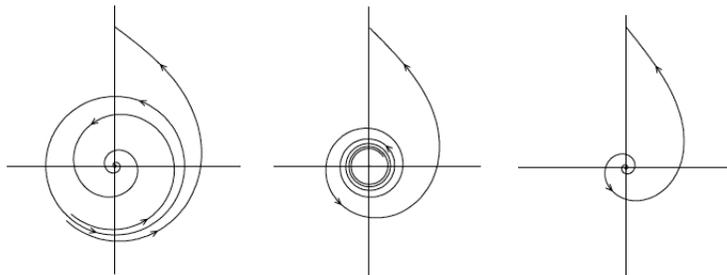


Figura 3.22: Bifurcación subcrítica de Hopf donde el número de Lyapunov $\sigma > 0$.

Ahora, consideremos el caso general de un sistema analítico en el plano

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by + p(x, y), \\ \dot{y} &= cx + dy + q(x, y),\end{aligned}\tag{3.58}$$

donde

$$\begin{aligned}p(x, y) &= \sum_{i+j \geq 2} a_{ij} x^i y^j \\ &= (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) + (a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) + \dots \\ q(x, y) &= \sum_{i+j \geq 2} b_{ij} x^i y^j \\ &= (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2) + (b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3) + \dots\end{aligned}$$

La matriz de la parte lineal de (3.58) en el origen es

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

tal que $\Delta = \det A = ad - bc > 0$, y la traza de A es cero, es decir, $a + d = 0$.
Luego

$$Df(0) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tendrá un par de valores propios imaginarios puros y el origen será un foco débil. En este caso el número de Liapunov, denotado por σ , está dado por la siguiente fórmula

$$\begin{aligned}\sigma &= -\frac{3\pi}{2b\Delta^{3/2}} \left\{ \left[ac(a_{11}^2 + a_{11}b_{02} + a_{02}b_{11}) + ab(b_{11}^2 + a_{20}b_{11} + a_{11}b_{02}) \right. \right. \\ &\quad + c^2(a_{11}a_{02} + 2a_{02}b_{02}) - 2ac(b_{02}^2 - a_{20}a_{02}) - 2ab(a_{20}^2 - b_{20}b_{02}) \\ &\quad \left. \left. - b^2(2a_{20}b_{20} + b_{11}b_{20}) + (bc - 2a^2)(b_{11}b_{02} - a_{11}a_{20}) \right] \right. \\ &\quad \left. - (a^2 + bc) \left[3(c b_{03} - b a_{30}) + 2a(a_{21} + b_{12}) + (c a_{12} - b b_{21}) \right] \right\},\end{aligned}\tag{3.59}$$

ver [1], página 253. Para $\sigma \neq 0$ en (3.59), el teorema 8 con $\mu = a + d$ se cumple para el sistema (3.58).

Bibliografía

- [1] A.A. Andronov, E.A. Leontovich, I.I. Gordon & A.G. Maier: *Qualitative theory of second-order dynamical systems*, John Wiley and Sons, New York, 1973.
- [2] J. Carr: *Applications of Center Manifold Theory*, Springer-Verlag, New York, 1981, pp. 67-87.
- [3] H. Engler, H. G. Kaper, T. J. Kaper & T. Vo: *Dynamical systems analysis of the Maasch-Saltzman model for glacial cycles*, Phys. D **359** (2017), 1-20.
- [4] N. Fenichel: *Persistence and smoothness of invariant manifolds for flows*. Ind. Univ. Math. J., **26** (1971), 193-225.
- [5] N. Fenichel: *Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations*, J. Differential Equations 31 (1979) 53-98.
- [6] J. Guckenheimer & P. Holmes: *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, vol. 42. Springer, 1983.
- [7] T. J. Kape: *An introduction to geometric methods and dynamical systems theory for singular perturbation problems*, in: R.E. O'Malley Jr, J. Cronin (Eds.), *Analyzing Multi-Scale Phenomena using Singular Perturbation Methods*. Proceedings of the Symposium on Applied Mathematics, vol. 56, American Mathematical Society, Providence, RI, 1999, pp. 85-132.
- [8] Y.A. Kuznetsov: *Elements of applied bifurcation theory*, vol. 112. Springer, Berlin (2013).
- [9] K.A. Maasch & B. Saltzman: *A low-order dynamic model of global climate variability over the full Pleistocene*. Geophys. Res. Atmospheres **95** (1990), 1955-1963.
- [10] L. Perko: *Differential equations and dynamical systems*. Third edition. Springer-verlag, New York, 1991.

- [11] B. Saltzman & K.A. Maasch: Carbon cycle instability as a cause of the late Pleistocene ice age oscillations: modeling the asymmetric response. *Global Biogeochem. Cycles* **2** (1988), 177-185.
- [12] B. Saltzman: *Dynamical paleoclimatology: generalized theory of global climate change*, vol. 80, 2002. San Diego Academic Press.
- [13] S. Wiggins: *Normally hiperbolic invariant manifolds in Dynamical Systems*, vol. 105. Springer, 1994.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00208

Matrícula: 2182800631

Análisis de la dinámica del modelo de Maasch-Saltzman para ciclos glaciares.



MARCO POLO GARCIA RIVERA
ALUMNO

REVISÓ

MTRA. ROSALIA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

Con base en la Legislación de la Universidad Autónoma Metropolitana, en la Ciudad de México se presentaron a las 12:00 horas del día 4 del mes de diciembre del año 2020 POR VÍA REMOTA ELECTRÓNICA, los suscritos miembros del jurado designado por la Comisión del Posgrado:

DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ
DR. CARLOS GARCIA AZPEITIA
DR. JULIO ERNESTO SOLIS DAUN

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: MARCO POLO GARCIA RIVERA

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

DR. JESUS ALBERTO OCHOA TAPIA

PRESIDENTE

DR. JOAQUIN DELGADO FERNANDEZ

VOCAL

DR. CARLOS GARCIA AZPEITIA

SECRETARIO

DR. JULIO ERNESTO SOLIS DAUN

El presente documento cuenta con la firma –autógrafa, escaneada o digital, según corresponda- del funcionario universitario competente, que certifica que las firmas que aparecen en esta acta – Temporal, digital o dictamen- son auténticas y las mismas que usan los c.c. profesores mencionados en ella