



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

UNIDAD IZTAPALAPA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA
POSGRADO EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

TESIS:

**“PROPIEDADES TOPOLÓGICAS DEL TIPO
CELULAR Q Y LOTS FUNCIONALMENTE
NUMERABLES”**

PARA OBTENER EL GRADO DE:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

PRESENTA:

**M. en C. LUIS ENRIQUE GUTIÉRREZ
DOMÍNGUEZ**

Matrícula: 2182800659
luenriquegudo@gmail.com

DIRECTOR: DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS
CODIRECTOR: DR. RODRIGO JESÚS HERNÁNDEZ GUTIÉRREZ

JURADO:

PRESIDENTE: DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS
SECRETARIO: DR. VLADIMIR TKACHUK
VOCAL: DR. FERNANDO HERNÁNDEZ HERNÁNDEZ
VOCAL: DR. REYNALDO ROJAS HERNÁNDEZ
VOCAL: DR. ROBERTO PICHARDO MENDOZA

IZTAPALAPA, CIUDAD DE MÉXICO, 22 DE NOVIEMBRE DEL 2024.

*Dedicado a
mi abuelita*

Agradecimientos

Quisiera expresar mi más sincero agradecimiento a todas las personas que me han apoyado a lo largo de este camino académico.

- En primer lugar, al Dr. Richard Wilson, por sus enseñanzas y su invaluable tiempo para debatir problemas matemáticos conmigo a lo largo del posgrado. Su orientación y paciencia han sido fundamentales para mi crecimiento académico.
- Al Dr. Rodrigo Hernández, por su dedicación y todos sus valiosos consejos para la escritura de esta tesis. Su apoyo constante y sus sugerencias han sido cruciales para la culminación de este trabajo.
- A la Dra. Ofelia Alas, por compartir su vasto conocimiento y experiencia en este trabajo. Sus aportes han enriquecido significativamente mi investigación y han sido de gran ayuda en todo el proceso.

Índice

Resumen	VII
Introducción	IX
1 Preliminares	1
1.1 Notación y nociones fundamentales	1
1.2 Espacios celular Q y casi celular Q	5
2 Dos subclases de la clase de los espacios tenuemente compactos	13
2.1 ¿Cuándo un espacio celular numerablemente compacto es numerablemente compacto?	13
2.2 Productos de algunas subclases de los espacios tenuemente compactos .	20
2.3 Maximalidad de la celularidad numerablemente compacta	24
3 Dos subclases de la clase de los espacios tenuemente Lindelöf	27
3.1 Espacios celular Lindelöf y casi celular Lindelöf	27
3.2 Productos de algunas subclases de los espacios tenuemente Lindelöf . .	34
4 LOTS funcionalmente numerables	39
4.1 Herramientas para contestar la pregunta	39
4.2 Rectas de Souslin funcionalmente numerables	47
Conclusiones	53
Bibliografía	55

Resumen

El primer capítulo de este trabajo contiene resultados preliminares importantes para el desarrollo de los siguientes dos capítulos. En la primera sección se construye un espacio que se utilizará constantemente para demostrar la no equivalencia entre clases de espacios topológicos; este espacio es el espacio generalizado de Mrówka determinado por familias casi ajenas maximales en algún cardinal infinito κ . En la segunda sección se demuestran propiedades de los espacios celular Q y casi celular Q , cuando Q es una propiedad topológica que se preserva bajo productos con espacios compactos y bajo imágenes continuas.

En el Capítulo 2 se estudian las propiedades celular numerablemente compacto y casi celular numerablemente compacto. En la primera sección se proporcionan condiciones para que la propiedad celular numerablemente compacto sea equivalente a ser numerablemente compacto. En la segunda sección se estudia el comportamiento de la propiedad celular compacto bajo productos con espacios compactos y se proporciona una condición necesaria y suficiente para que el producto de un espacio de Hausdorff y un espacio compacto sea casi celular numerablemente compacto. La última sección se centra en el estudio de la maximalidad de la propiedad celular numerablemente compacto.

En el Capítulo 3 se estudian dos subclases de los espacios tenuemente Lindelöf los cuales son: celular Lindelöf y casi celular Lindelöf. En la primer sección proporcionaremos condiciones para que la clase de los espacios casi celular Lindelöf sea equivalente a la clase de los espacios ω_1 -compactos. En la segunda sección se estudia el comportamiento de estas subclases bajo productos con espacios separables, compactos y P -espacios de Lindelöf.

El último capítulo está dedicado a los LOTS funcionalmente numerables. En este capítulo se demuestra que bajo la existencia de rectas de Souslin se puede concluir que si X es un LOTS que cumple que $X^2 \setminus \Delta$ es funcionalmente numerable, entonces X es un espacio numerable.

Introducción

Decimos que un espacio topológico es celular Lindelöf si para cada familia celular de subconjuntos abiertos no vacíos en el espacio existe un subespacio de Lindelöf que interseca a cada elemento de dicha familia celular de subconjuntos abiertos no vacíos; este concepto fue definido en el año 2017 por A. Bella y S. Spadaro.

En el presente trabajo, generalizamos el concepto de celular Lindelöf; dado un espacio topológico X y una propiedad topológica Q , decimos que el espacio X es celular Q si, para cualquier familia celular de subconjuntos abiertos no vacíos $\mathcal{U}$ de X , podemos encontrar un subconjunto A con la propiedad Q tal que $U \cap A \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Estas propiedades topológicas son de tipo compacidad. El objetivo de esta tesis es presentar condiciones bajo las cuales dos clases de espacios topológicos sean equivalentes; es decir, dada una propiedad topológica Q , estudiaremos en qué clases de espacios tener la propiedad celular Q implica tener la propiedad Q . A lo largo de la tesis se exhiben diversos ejemplos de espacios topológicos que algunos autores han construido para evidenciar las diferencias entre las clases de los espacios con la propiedad Q y con la propiedad celular Q . Estos ejemplos son de gran importancia ya que nos ayudan a cuestionar bajo qué condiciones las clases de estos espacios pueden ser equivalentes. Además, se presentan algunos resultados sobre la maximalidad de la propiedad celular Q y sobre su comportamiento bajo productos con espacios compactos y P -espacios de Lindelöf.

También debilitaremos la propiedad celular Q , esta superclase de espacios es llamada casi celular Q y mostraremos la diferencia entre estas clases para cada propiedad topológica Q . En particular, notaremos que muchas de estas propiedades son subclases de las clases de los espacios tenuemente compactos y de los espacios tenuemente Lindelöf.

En la última parte del trabajo se investiga la propiedad topológica llamada numerabilidad funcional y se estudia en espacios linealmente ordenados (LOTS). Decimos que un espacio topológico X es funcionalmente numerable si $f[X]$ es numerable para cada función continua real valuada. El estudio se enfoca en determinar si un espacio linealmente ordenado, cuyo complemento de su diagonal es funcionalmente numerable, posee un subespacio numerable denso.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Notación y nociones fundamentales

En este trabajo $\mathbb{R}$ denotará al conjunto de los números reales con la topología Euclideana. Dado un espacio topológico (X, τ) , denotaremos por τ^* a la familia de los subconjuntos abiertos no vacíos en X y para indicar que U es un subconjunto abierto en X que contiene a un elemento $a \in X$ utilizaremos la siguiente notación: $U \in \tau(a, X)$. Por $\mathcal{P}(X)$ denotaremos a el conjunto potencia del conjunto X y por $[X]^\kappa$ la colección de subconjuntos de X de cardinalidad κ , mientras que $[X]^{<\kappa}$ será la colección de subconjuntos de X de cardinalidad menor que κ .

En particular, en este capítulo mencionaremos algunos resultados que serán de gran importancia para el entendimiento de los capítulos siguientes, se demostrarán los resultados más relevantes para fines de este trabajo.

Definición 1.1.1. Sea X un espacio topológico; se le llama *celularidad* de X al cardinal

$$c(X) = \sup\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \subset \tau^* \text{ y } \mathcal{U} \text{ es ajena dos a dos}\}.$$

Si $\mathcal{U} \subseteq \tau^*$ es una familia ajena dos a dos, diremos que $\mathcal{U}$ es una familia celular en X .

Definición 1.1.2. Sea X un espacio topológico. Un subespacio $D \subseteq X$ se llama *discreto* si para cada $d \in D$ existe $V \in \tau(d, X)$ tal que $V \cap D = \{d\}$.

Definición 1.1.3. Sea X un espacio topológico. Un subespacio $D \subseteq X$ se llama *fuertemente discreto* si para cada $d \in D$ existe $V_d \in \tau(d, X)$ tal que $V_d \cap D = \{d\}$ y $V_d \cap V_{d'} = \emptyset$ siempre que d y d' sean elementos distintos del subespacio D .

En un espacio de Hausdorff cada subconjunto infinito tiene un subconjunto infinito discreto, pero no siempre existe un subespacio fuertemente discreto, en [22] se presentó un ejemplo de este hecho. La siguiente definición es una generalización de un espacio fuertemente discreto.

Definición 1.1.4. Sea X un espacio topológico. Un subespacio $Y \subseteq X$ se llama *peludo* si existe una familia celular $\{U_y : y \in Y\} \subseteq \tau^*$ tal que $y \in \text{cl}(U_y)$ para cada $y \in Y$.

El siguiente teorema fue demostrado por I. Juhász, L. Soukup y Z. Szentmiklossy en el 2020 y es de gran importancia para probar un resultado relevante en este trabajo:

Teorema 1.1.5 ([24], Teorema 2.3). Cada subconjunto infinito Y en un espacio de Hausdorff X contiene un subconjunto infinito peludo.

Recordemos que una familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos de un espacio topológico X se llama *localmente finita* (respectivamente, *discreta*) si para cada $x \in X$, existe $V \in \tau(x, X)$ tal que V interseca a lo más una cantidad finita de elementos (respectivamente, a lo más a un elemento) de la familia $\mathcal{F}$. Los siguientes dos resultados son del folklore de la Topología General y expondremos sus demostraciones para completez de este trabajo.

Lema 1.1.6. Cada familia localmente finita de subconjuntos abiertos no vacíos $\mathcal{F}$ de cardinalidad κ , tiene un refinamiento celular de cardinalidad κ .

Demostración. Sea $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia localmente finita de subconjuntos abiertos no vacíos. Elegimos $U_0 \subseteq F_0$ tal que U_0 interseca solamente a un número finito de elementos de $\mathcal{F}$, digamos $\mathcal{F}_0 = \{F \in \mathcal{F} : F \cap U_0 \neq \emptyset\}$. Al haber elegido subfamilias finitas $\mathcal{F}_\beta \subseteq \mathcal{F}$ y subconjuntos abiertos mutuamente ajenos U_β para cada $\beta < \alpha < \kappa$ tales que $U_\beta \subseteq F_\beta$; notemos que $|\bigcup\{\mathcal{F}_\beta : \beta < \alpha\}| < |\mathcal{F}|$ y sea $\gamma = \min\{\xi : F_\xi \notin \bigcup\{\mathcal{F}_\beta : \beta < \alpha\}\}$. Como $F_\gamma \cap U_\beta = \emptyset$ para cada $\beta < \alpha$, tomamos U_α un subconjunto abierto no vacío contenido en F_γ , el cual interseca únicamente a un número finito de elementos de la familia $\mathcal{F}$, digamos $\mathcal{F}_\alpha$. De esta forma la familia $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un refinamiento celular de $\mathcal{F}$. □

Lema 1.1.7. Sea X un espacio topológico T_1 y sea $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia localmente finita. Si para cada $\alpha < \kappa$, elegimos $x_\alpha \in F_\alpha$, entonces el conjunto $D = \{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es un subconjunto cerrado y discreto.

Demostración. Primero demostremos que D es un subconjunto cerrado. Sea $z \in X \setminus D$. Entonces, existe $U \in \tau(z, X)$ y una subfamilia $\{F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_n}\} \subseteq \mathcal{F}$ tal que si $\alpha \in \kappa \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$, entonces $F_\alpha \cap U = \emptyset$; así el conjunto $V = U \setminus \{x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_n}\}$ es abierto, contiene a z y es ajeno a D .

Para ver que D es discreto, sea $x_\beta \in D$. Entonces existe $W \in \tau(x_\beta, X)$ y una subfamilia $\{F_{\beta_1}, \dots, F_{\beta_m}\} \subseteq \mathcal{F}$ tal que si $\alpha \in \kappa \setminus \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$, entonces $F_\alpha \cap W = \emptyset$. Así el conjunto $O = W \setminus (\{x_{\beta_j} : 1 \leq j \leq m\} \cup \{x_\beta\})$ cumple $O \cap D = \{x_\beta\}$. Por lo tanto D es un subespacio discreto. □

En lo sucesivo presentaremos dos espacios de gran importancia para este trabajo, ya que los ocuparemos recurrentemente como ejemplos para demostrar que ciertas condiciones son necesarias para que dos propiedades topoógicas sean equivalentes; estos espacios son llamados espacios de tipo Mrówka-Isbell. Antes de definirlos requerimos los siguientes conceptos:

Definición 1.1.8. Sea κ un cardinal infinito; una familia $\mathcal{A} \subset [\kappa]^\kappa$ es una familia *casi ajena* (CA) si para cada $A, B \in \mathcal{A}$ se tiene que $|A \cap B| < \kappa$.

Una familia casi ajena $\mathcal{A}$ es *maximal casi ajena* (MCA) si $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ y $\mathcal{B}$ es casi ajena implica que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.

Lema 1.1.9. Cada familia CA en $[\kappa]^\kappa$ está contenida en una familia MCA.

Demostración. Sean $\mathcal{A}$ una familia CA en $[\kappa]^\kappa$ y $\mathfrak{C}$ una cadena de familias CA en la familia:

$$\mathfrak{B} = \{\mathcal{D} : \mathcal{D} \text{ es una familia CA y } \mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}\}.$$

Sea $\mathcal{M} = \bigcup \mathfrak{C}$. Afirmamos que $\mathcal{M}$ es una familia CA. Para demostrar este hecho, sean $A, B \in \mathcal{M}$, entonces existen $\mathcal{C}_A$ y $\mathcal{C}_B$ en $\mathfrak{C}$ tales que $A \in \mathcal{C}_A$ y $B \in \mathcal{C}_B$, como $\mathfrak{C}$ es una cadena podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{C}_A \subseteq \mathcal{C}_B$. Entonces $A, B \in \mathcal{C}_B$, ya que $\mathcal{C}_B$ es una familia CA, se sigue que $|A \cap B| < \kappa$. Entonces $\mathcal{M}$ es una familia CA. Por el Lema de Zorn se sigue que $\mathfrak{C}$ tiene un elemento maximal. $\square$

En este trabajo estudiaremos dos casos particulares de familias casi ajenas, estos son cuando κ es ω_1 y cuando es igual a ω . El siguiente resultado describe a las familias maximales casi ajenas en ω_1 .

Teorema 1.1.10. En $[\omega_1]^{\omega_1}$ existen familias MCA numerables y de cardinalidad mayor que ω_1 .

Demostración. • Sean L el conjunto de los ordinales límites de ω_1 y $A = \omega_1 \setminus L$; si C es cualquier conjunto infinito no numerable de ω_1 , entonces $C \cap L$ o $C \cap A$ es no numerable. Por lo tanto, $\{L, A\}$ es una familia MCA.

- Sea L el conjunto de los ordinales límites de ω_1 y para cada $n \in \omega$ definimos $A_n = \{\sigma + n \in \omega_1 : \sigma \in L\}$. Si C es cualquier conjunto infinito no numerable de ω_1 , entonces $C \cap A_n$ es no numerable para algún $n \in \omega$. Por lo tanto, $\{A_n : n < \omega\}$ es una familia MCA.
- Supongamos que existe una familia MCA infinita de cardinalidad ω_1 , es decir, $\mathcal{A} = \{A_\sigma : \sigma \in \omega_1\}$. Sea $x_0 \in A_0$; al haber escogido elementos $x_1, \dots, x_\beta$ tales que $x_\beta \in A_\beta \setminus \bigcup \{A_\gamma : \gamma < \beta\}$ para cada $\gamma < \beta < \omega_1$, consideremos el conjunto:

$$S = A_\alpha \setminus \bigcup \{A_\xi : \xi < \alpha\}.$$

Como $|A_\alpha \cap A_\xi| \leq \omega$ para cada $\xi < \alpha < \omega_1$ se tiene que S es un conjunto infinito no numerable. Así, podemos elegir $x_\alpha \in S$. Sea $B = \{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$, entonces B es un subconjunto infinito no numerable de ω_1 y $B \cap A_\gamma \subseteq \{x_0, \dots, x_\gamma\}$ para cada $\gamma < \omega_1$, esto demuestra que $\mathcal{B} = \mathcal{A} \cup \{B\}$ es una familia CA y $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$ lo que contradice que $\mathcal{A}$ es maximal.

Para cada $\nu < \omega_1$ sea $F_\nu = \{\nu\} \times \omega_1 \subseteq \omega_1 \times \omega_1$, así, la familia $\mathcal{F} = \{F_\nu : \nu < \omega_1\}$ es una familia CA en $\omega_1 \times \omega_1$. Puesto que $|\omega_1^2| = |\omega_1|$, podemos asumir que existe una familia $\mathcal{B}$ casi ajena no numerable en ω_1 . Por el Lema 1.1.9 existe una familia maximal casi ajena $\mathcal{C}$ en ω_1 tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}$. Por lo demostrado en el párrafo anterior $|\mathcal{C}| > \omega_1$. □

Los siguientes resultados sobre familias maximales casi ajenas en ω son análogos al resultado anterior y son bien conocidos:

- Existe una familia MCA finita en ω .
- Una familia MCA infinita en $[\omega]^\omega$ es no numerable.

Ejemplo 1.1.11. Existe una familia CA en $[\omega]^\omega$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$.

Demostración. Para cada $r \in \mathbb{R}$ sea $\{x_n^r\}$ una sucesión inyectiva de racionales que converge a r . Sea $\mathcal{A} = \{\{x_n^r\} : r \in \mathbb{R}\}$. Si $r, s \in \mathbb{R}$ son distintos, entonces los conjuntos $\{x_n^r : n \in \omega\}$ y $\{x_n^s : n \in \omega\}$ tienen intersección finita, ya que de lo contrario la intersección de los dos conjuntos determinaría una subsucesión de cada una de las sucesiones que convergería tanto a r como a s . Por lo tanto, $\mathcal{A}$ es una familia casi ajena de cardinalidad $\mathfrak{c}$. □

Corolario 1.1.12. Existe una familia MCA $[\omega]^\omega$ de cardinalidad $\mathfrak{c}$.

Ahora procederemos a construir los dos espacios topológicos prometidos anteriormente:

Si $\mathcal{A} \subseteq [\kappa]^\kappa$ es una familia MCA en κ de cardinalidad $\lambda > \kappa$, tal que $\bigcup \mathcal{A} = \kappa$, entonces podemos definir una topología τ en $\Psi(\mathcal{A}) = \kappa \cup \mathcal{A}$ de la siguiente manera:

- (1) Si $\alpha \in \kappa$, entonces $\{\alpha\}$ es abierto.
 - (2) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces una vecindad básica de A es de la forma $\{A\} \cup (A \setminus C)$, donde $|C| < \kappa$.
- Si $\kappa = \omega$, el espacio se llama un espacio de Mrówka-Isbell en ω o $\Psi(\mathcal{A})$ en ω
 - Si $\kappa = \omega_1$, el espacio se llama un espacio tipo Mrówka-Isbell generalizado en ω_1 o $\Psi(\mathcal{A})$ en ω_1 .

El siguiente concepto se utilizará recurrentemente a lo largo de este trabajo:

Definición 1.1.13. Un espacio topológico X se llama *tenuemente compacto* si cada familia localmente finita de subconjuntos abiertos no vacíos de X es finita.

Recordemos que un espacio se llama *pseudocompacto* si cada función continua real valuada es acotada, este concepto fue introducido en 1948 por E. Hewitt y es bien conocido que en la clase de los espacios de Tychonoff ser pseudocompacto es equivalente a ser tenuemente compacto. Un espacio se llama *numerablemente compacto* si cada cubierta abierta numerable tiene una subcubierta finita o equivalentemente (en la clase de espacios T_1) si cada subconjunto cerrado y discreto es finito. Veamos algunas propiedades básicas del espacio de Mrówka-Isbell en ω en el siguiente resultado:

Proposición 1.1.14. Sea $\mathcal{A}$ una familia MCA infinita en $[\omega]^\omega$; el espacio $(\Psi(\mathcal{A}), \tau)$ tiene las siguientes propiedades:

- (a) Es un espacio de Hausdorff;
- (b) $\Psi(\mathcal{A})$ es separable;
- (c) no es un espacio numerablemente compacto;
- (d) es un espacio pseudocompacto.

Demostración. (a) Sean $A, B \in \mathcal{A}$ distintos. Entonces $F = A \cap B$ es finito y por tanto, $\{A\} \cup (A \setminus F)$ y $\{B\} \cup (B \setminus F)$ son vecindades ajenas de A y B respectivamente.

(b) El subconjunto ω es denso y numerable en $\Psi(\mathcal{A})$.

(c) Sea $x \in \Psi(\mathcal{A}) \setminus \mathcal{A}$, entonces $x \in \kappa$ y $\{x\}$ es una vecindad de x que no intersecta a $\mathcal{A}$. Se sigue que $\mathcal{A}$ es un conjunto cerrado en $\Psi(\mathcal{A})$. Por otro lado, $V_A = \{A\} \cup A$ es una vecindad de A para cada $A \in \mathcal{A}$. Más aún, $V_A \cap \mathcal{A} = \{A\}$, entonces $\mathcal{A}$ es un subespacio infinito, cerrado y discreto de $\Psi(\mathcal{A})$, se sigue que el espacio no es numerablemente compacto.

(d) Supongamos que $f : \Psi(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua y no acotada. Como κ es denso en $\Psi(\mathcal{A})$ tenemos que f no es acotada en κ . Entonces existe una sucesión inyectiva $\{x_n\}$ tal que $f(x_n) > n$ para cada $n \in \omega$; sea $B = \{x_n : n \in \omega\}$. Puesto que $\mathcal{A}$ es una familia MCA existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap B| = \omega$; entonces f no es continua en $(A \cap B) \cup \{A\}$, pues $A \cap B$ es una sucesión que converge a A .

□

1.2 Espacios celular Q y casi celular Q

En esta sección estudiaremos en general la propiedad más importante de este trabajo.

Definición 1.2.1. Sea Q una propiedad topológica. Un espacio X se llama *celular* Q si para cada familia celular $\mathcal{U}$ en X existe un subespacio $A \subseteq X$ con la propiedad Q tal que $A \cap U \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{U}$.

Definición 1.2.2. Sea Q una propiedad topológica. Un espacio X se llama *casi celular* Q si para cada familia celular $\mathcal{U}$ en X existe un subespacio $M \subseteq X$ con la propiedad Q tal que M interseca a $|\mathcal{U}|$ elementos de la familia $\mathcal{U}$.

Evidentemente cada espacio *celular* Q es un espacio *casi celular* Q .

Proposición 1.2.3. Si X contiene un subespacio denso D celular Q (respectivamente, casi celular Q), entonces X es celular Q (respectivamente, casi celular Q).

Demostración. Sean $D \subseteq X$ un subespacio denso celular Q , (respectivamente, casi celular Q) y $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^*$ una familia celular, entonces D interseca a todos los elementos de la familia $\mathcal{U}$. Como D es un espacio celular Q (respectivamente, casi celular Q), podemos encontrar un subconjunto $A \subseteq D$ con la propiedad Q que interseca a todos los elementos de $\mathcal{V} = \{U_\alpha \cap D : \alpha < \kappa\}$ (respectivamente, a κ elementos de la familia $\mathcal{V} = \{U_\alpha \cap D : \alpha < \kappa\}$) y por lo tanto, A también interseca a todos los elementos de la familia $\mathcal{U}$ (respectivamente, a κ elementos de la familia $\mathcal{U}$). $\square$

Corolario 1.2.4. Si X contiene un subespacio denso D con la propiedad Q , entonces X es celular Q .

Proposición 1.2.5. Sea Q una propiedad topológica que se preserva bajo funciones continuas, entonces la imagen continua de un espacio celular Q , (respectivamente, casi celular Q) es un espacio celular Q (respectivamente, casi celular Q).

Demostración. Sean X un espacio celular Q (respectivamente, casi celular Q) y $f : (X, \tau) \rightarrow (Y, \sigma)$ una función continua y sobreyectiva. Supongamos que $\mathcal{V} \subseteq \sigma^*$ es una familia celular, entonces la familia $\mathcal{U} = \{f^{-1}(V) : V \in \mathcal{V}\}$ es una familia celular de subconjuntos abiertos no vacíos en X . Como X es celular Q (respectivamente, casi celular Q), podemos encontrar un subespacio $A \subseteq X$ con la propiedad Q que interseca a todos los elementos de la familia $\mathcal{U}$ (respectivamente, que interseca $|\mathcal{U}|$ elementos de la familia $\mathcal{U}$). Ya que f es una función continua y Q se preserva bajo funciones continuas se tiene que $f(A)$ interseca todos los elementos de la familia $\mathcal{V}$ (respectivamente, que interseca $|\mathcal{V}|$ elementos de la familia $\mathcal{V}$) y $f(A)$ tiene la propiedad Q . $\square$

Recordemos los siguientes conceptos:

Definición 1.2.6. Un espacio topológico X se llama *tenuemente Lindelöf* si cada familia localmente finita de subconjuntos abiertos no vacíos en X es numerable.

Definición 1.2.7. Un espacio topológico X tiene la *DCCC* si cada familia discreta de subconjuntos abiertos no vacíos en X es numerable.

De las definiciones se sigue que cada espacio tenuemente Lindelöf tiene la DCCC. Un espacio se llama *débilmente regular* si para cada subconjunto abierto no vacío U , existe un subconjunto abierto V no vacío tal que $\text{cl}(V) \subseteq U$; el Ejemplo 22 de [28] muestra que estas dos propiedades no son equivalentes en la clase de los espacios de Hausdorff.

Lema 1.2.8. Sea X un espacio topológico débilmente regular. Entonces X es tenuemente Lindelöf si y solo si X tiene la DCCC.

Demostración. ($\Rightarrow$) Inmediato.

($\Leftarrow$) Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ una familia localmente finita de subconjuntos abiertos no vacíos. Por el Lema 1.1.6 existe una familia localmente finita celular $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Como X es un espacio débilmente regular, para cada $\alpha < \omega_1$ existe $W_\alpha \in \tau(X)$ tal que $W_\alpha \subset \text{cl}(W_\alpha) \subset V_\alpha$. Así, la familia $\mathcal{W} = \{W_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia discreta. $\square$

Proposición 1.2.9. Si Q es una propiedad topológica que implica compacidad tenue (respectivamente, la propiedad tenuemente Lindelöf), entonces un espacio celular Q es también tenuemente compacto (respectivamente, tenuemente Lindelöf).

Demostración. Sea (X, τ) un espacio celular Q y supongamos que $\mathcal{U} \subseteq \tau^*$ es una familia infinita (respectivamente, no numerable), celular y localmente finita en X . Sea $A \subseteq X$ un subespacio con la propiedad Q , tal que $A \cap U \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{U}$. Entonces la familia $\mathcal{V} = \{A \cap U : U \in \mathcal{U}\}$ es una familia celular, infinita (respectivamente, no numerable) y localmente finita de subconjuntos abiertos no vacíos en A ; esto contradice el hecho de que A tiene la propiedad Q . $\square$

La demostración del siguiente resultado es análoga a la prueba de la proposición anterior.

Proposición 1.2.10. Si Q es una propiedad topológica que implica la propiedad tenuemente compacto (respectivamente, tenuemente Lindelöf), entonces un espacio casi celular Q es también tenuemente compacto (respectivamente, tenuemente Lindelöf).

Una κ -sucesión de subconjuntos de X es una función $f : \kappa \rightarrow \mathcal{P}(X)$, en donde κ es un cardinal infinito; la cual denotamos por $\langle U_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ si $f(\alpha) = U_\alpha$ para cada $\alpha < \kappa$. Para el siguiente resultado es importante notar la diferencia entre una familia de subconjuntos y una κ -sucesión de subconjuntos. Sea κ un cardinal infinito, entonces una familia de subconjuntos $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es fielmente indizada, es decir, $U_\beta \neq U_\gamma$ siempre que $\beta \neq \gamma$, mientras que esto no necesariamente sucede para una κ -sucesión $\langle U_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$.

Lema 1.2.11. Sea X un espacio topológico; entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. Para cada cardinal κ y cada κ -sucesión $\langle U_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ de subconjuntos no vacíos de X , existe un subespacio $A \subseteq X$ con la propiedad Q tal que $\{\alpha \in \kappa : U_\alpha \cap A \neq \emptyset\}$ tiene cardinalidad κ .
2. Para cada familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos no vacíos de X , existe un subespacio B con la propiedad Q tal que $|\{U \in \mathcal{U} : U \cap B \neq \emptyset\}| = |\mathcal{U}|$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Una familia de subconjuntos es una sucesión fielmente indizada de subconjuntos.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que $\mathcal{V}$ es el rango de la κ -sucesión $\langle U_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ tal que $|\mathcal{V}| = \lambda$. Consideremos los siguientes casos:

(a) Si $\lambda = \kappa$, entonces el resultado es inmediato.

(b) Si $\lambda < \text{cof}(\kappa)$, entonces existe algún $V \in \mathcal{V}$ tal que el conjunto $\{\alpha \in \kappa : U_\alpha = V\}$ tiene cardinalidad κ y así cualquier $B \subseteq X$ con la propiedad Q que interseque a V interseca a κ elementos de la familia $\mathcal{U}$.

(c) Si $\lambda = \text{cof}(\kappa)$, entonces podemos encontrar una λ -sucesión creciente de cardinales regulares $\langle \kappa_\xi \rangle_{\xi < \lambda}$ cuyo supremo es κ y para cada ξ existe $V_\xi \in \mathcal{V}$ tal que el conjunto $\{\alpha \in \kappa : U_\alpha = V_\xi\}$ tiene cardinalidad al menos κ_ξ . Como la cofinalidad es única, es fácil ver que los conjuntos V_ξ se pueden elegir distintos. Aplicando el inciso (2) para la familia $\{V_\xi : \xi \in \lambda\}$, tenemos un subconjunto $B \subseteq X$ con la propiedad Q que interseca a λ elementos de la familia $\{V_\xi : \xi \in \lambda\}$. Así, el conjunto $\{\alpha \in \kappa : U_\alpha \cap B \neq \emptyset\}$ tiene cardinalidad κ .

(d) Si $\text{cof}(\kappa) < \lambda < \kappa$, entonces como en caso (c), podemos encontrar una sucesión creciente de cardinales regulares $\langle \kappa_\xi \rangle_{\xi < \text{cof}(\kappa)}$ cuyo supremo es κ . Fijemos ξ_0 de tal modo que $\kappa_{\xi_0} > \lambda$; como $\kappa = \bigcup \{\{\alpha \in \kappa : U_\alpha = V\} : V \in \mathcal{V}\}$ y $|\mathcal{V}| = \lambda$, se sigue que para cada $\xi > \xi_0$ existe un subconjunto $V_\xi \in \mathcal{V}$ tal que $|\{\alpha \in \kappa : U_\alpha = V_\xi\}| \geq \kappa_\xi$, y otra vez podemos elegir los conjuntos V_ξ distintos. Aplicando el caso (c) obtenemos el resultado. $\square$

Definición 1.2.12. Decimos que una propiedad topológica Q es *compactamente productiva* si X es un espacio topológico con la propiedad Q y K es un espacio compacto de Hausdorff, entonces $X \times K$ tiene la propiedad topológica Q .

Teorema 1.2.13. Sea Q una propiedad topológica compactamente productiva que también se preserva bajo funciones continuas. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes para cualquier espacio de Hausdorff X :

1. El espacio $X \times K$ es casi celular Q para cada espacio compacto K .
2. Para cada familia $\mathcal{U}$ de conjuntos abiertos no vacíos en X , existe un subespacio $N \subseteq X$ con la propiedad Q tal que N interseca $|\mathcal{U}|$ elementos de la familia $\mathcal{U}$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sean $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^*(X)$ y K la compactación unipuntual de un espacio discreto de cardinalidad κ . Sea $\mathcal{W} = \{U_\alpha \times \{\alpha\} : \alpha \in \kappa\} \subseteq X \times K$; como $\mathcal{W}$ es una familia celular en $X \times K$ podemos encontrar un subespacio

$M \subseteq X \times K$ con la propiedad Q que interseca a κ elementos de la familia $\mathcal{W}$. Así, el subespacio $\pi_X[M]$ tiene la propiedad Q e interseca κ elementos de la familia $\mathcal{U}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que K es un espacio compacto y $\mathcal{W}$ es una familia celular en $X \times K$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que cada elemento de la familia $\mathcal{W}$ es un abierto básico en el producto, es decir, $\mathcal{W} = \{U_\alpha \times V_\alpha : \alpha < \kappa\}$, donde $U_\alpha \in \tau^*(X)$ y $V_\alpha \in \tau^*(K)$ para cada $\alpha \in \kappa$. Por el Lema 1.2.11, existe un subespacio $N \subseteq X$ con la propiedad Q que interseca a κ elementos de la κ -sucesión $\langle U_\alpha \rangle_{\alpha \in \kappa}$; como la propiedad Q se preserva bajo productos con espacios compactos, entonces el subespacio $N \times K$ tiene la propiedad Q e interseca a κ elementos de la familia $\mathcal{W}$. $\square$

Denotamos por A_κ la compactación unipuntual de un espacio discreto de cardinalidad κ y por $o(X)$ la cardinalidad de la topología de un espacio X . El siguiente teorema es una pequeña extensión del teorema anterior:

Teorema 1.2.14. Sea Q una propiedad topológica compactamente productiva y que se preserva bajo funciones continuas. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes para cualquier espacio de Hausdorff X :

1. El espacio $X \times K$ es casi celular Q para cada espacio compacto K .
2. $X \times A_\kappa$ es casi celular Q para cada cardinal infinito $\kappa \leq o(X)$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Inmediato

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que K es un espacio compacto y $\mathcal{W}$ es una familia celular en $X \times K$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que cada elemento de la familia $\mathcal{W}$ es un abierto básico en el producto, es decir, $\mathcal{W} = \{U_\alpha \times V_\alpha : \alpha < \kappa\}$, donde $U_\alpha \in \tau^*(X)$ y $V_\alpha \in \tau^*(K)$ para cada $\alpha \in \kappa$. Así, $\langle U_\alpha \rangle_{\alpha \in \kappa}$ es una κ sucesión de subconjuntos abiertos en X . Sea $\mathcal{O} = \{U_\gamma \times \{\gamma\} : \gamma \in \kappa\}$ en el espacio $X \times A_\kappa$, como $\mathcal{O}$ es una familia celular podemos encontrar un subconjunto $A \subseteq X \times A_\kappa$ con la propiedad Q que interseca κ elementos de la familia $\mathcal{O}$. Ya que la propiedad Q se preserva bajo funciones continuas tenemos que $\pi_X[A]$ es un subconjunto en X con la propiedad Q que interseca κ elementos de $\langle U_\alpha \rangle_{\alpha \in \kappa}$. Por lo tanto, $\pi_X[A] \times K \subseteq X \times K$ tiene la propiedad Q e interseca κ elementos de la familia $\mathcal{W}$.

Ahora supongamos que $o(X) = \kappa$ y que existe un subespacio compacto K tal que $X \times K$ no es casi celular Q . Por el Teorema 1.2.13, existe una familia de subconjuntos abiertos $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ en X tal que ningún subconjunto en X con la propiedad Q interseca λ elementos de la familia $\mathcal{U}$. Notemos que $\lambda = |\mathcal{U}| \leq o(X)$ y consideremos el espacio $X \times A_\lambda$. Así, la familia de subconjuntos abiertos $\mathcal{V} = \{U_\beta \times \{\beta\} : \beta < \lambda\}$ es celular en $X \times A_\lambda$, por lo que existe un subespacio $B \subseteq X \times A_\lambda$ que interseca λ elementos de la familia $\mathcal{V}$. Se sigue que $\pi_X[B]$ tiene la propiedad Q e interseca a λ elementos de la familia $\mathcal{U}$, lo cual es una contradicción. $\square$

El siguiente resultado se sigue de los teoremas previos.

Corolario 1.2.15. Sea Q una propiedad topológica compactamente productiva que también se preserva bajo funciones continuas. Entonces los siguientes enunciados son equivalentes para cualquier espacio de Hausdorff X :

1. El espacio $X \times K$ es casi celular Q para cada espacio compacto K .
2. Para cada familia $\mathcal{U}$ de conjuntos abiertos no vacíos en X , existe un subespacio $N \subseteq X$ con la propiedad Q tal que N interseca $|\mathcal{U}|$ elementos de la familia $\mathcal{U}$.
3. $X \times A_\kappa$ es casi celular Q para cada cardinal infinito $\kappa \leq o(X)$.

Proposición 1.2.16. Sea Q una propiedad topológica que se preserva en subespacios cerrados. Si X es un espacio celular Q y $H \subseteq X$ es un espacio cerrado regular, entonces H es celular Q .

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^*(H)$ una familia celular en H , entonces para cada $\alpha < \kappa$ existe $V_\alpha \in \tau^*(X)$ tal que $U_\alpha = V_\alpha \cap H$. Así, la familia $\mathcal{V} = \{V_\alpha \cap \text{int}(H) : \alpha < \kappa\}$ es una familia de subconjuntos abiertos celular en X , donde cada elemento es no vacío, ya que $\text{int}(H)$ es denso en H . Como X es celular Q , existe un subespacio A con la propiedad Q que interseca a cada elemento de la familia $\mathcal{V}$. Por ser H un subespacio cerrado, se sigue que $H \cap A$ es un subconjunto en H con la propiedad Q que interseca a cada elemento de la familia $\mathcal{U}$. $\square$

Definición 1.2.17. Si (X, τ) es un espacio topológico y $x \in X$, entonces una familia $\mathcal{B} \subseteq \tau^*$ es una π -base local en el elemento x , si para cada $U \in \tau(x, X)$ existe $B \in \mathcal{B}$ tal que $B \subseteq U$.

El siguiente resultado generaliza a la Proposición 3.11 de [40] y su demostración es análoga, pero la agregamos para completéz de este trabajo.

Lema 1.2.18. Sea Q una propiedad topológica que se preserva en subespacios cerrados. Si X es un espacio regular celular Q y $p \in X$ es un elemento que no tiene una π -base local ajena, entonces $X \setminus \{p\}$ es celular Q .

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una familia celular en $X \setminus \{p\}$. Tenemos que $\mathcal{U}$ no es una π -base local en p y como X es regular, podemos encontrar una vecindad V de p tal que $U \setminus \text{cl}(V) \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{U}$. El subespacio $Y = \text{cl}(X \setminus \text{cl}(V))$ es celular Q por la Proposición 1.2.16 y la familia $\mathcal{W} = \{U \setminus \text{cl}(V) : U \in \mathcal{U}\}$ es una familia celular en Y . Así, podemos encontrar un subespacio N con la propiedad Q que interseca a cada elemento de $\mathcal{W}$. Por lo tanto, N es testigo de que $X \setminus \{p\}$ es celular Q . $\square$

Si $\mathcal{C}$ es una clase de espacios topológicos y Q es una propiedad topológica, decimos que un espacio (X, τ) es *maximal* Q en la clase $\mathcal{C}$, si siempre que $(X, \sigma) \in \mathcal{C}$ y σ es una topología en X estrictamente más fuerte que τ , entonces (X, σ) no tiene la propiedad Q .

Teorema 1.2.19. Sea Q una propiedad topológica que se hereda por subconjuntos cerrados. Si (X, τ) es un espacio regular y maximal celular Q , entonces cada elemento en X tiene una π -base local celular.

Demostración. Supongamos que $p \in X$ es un elemento que no tiene una π -base local celular, por el Lema 1.2.18 se tiene que $X \setminus \{p\}$ es un espacio celular Q y la topología generada por la subbase $\tau \cup \{\{p\}\}$ también es celular Q , lo que contradice que (X, τ) es maximal celular Q . □

Proposición 1.2.20. Sea Q una propiedad topológica que se preserva bajo uniones numerables. Si $X = \bigcup \{Y_n : n \in \omega\}$ donde Y_n es celular Q (respectivamente, casi celular- Q) para cada $n \in \omega$, entonces X es celular Q (respectivamente, casi celular Q).

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^*$ una familia celular. Notemos que $\mathcal{U}_n = \{Y_n \cap U : U \in \mathcal{U}\}$ es una familia celular en cada Y_n y $\kappa = \sum \{|\mathcal{U}_n| : n \in \omega\}$, entonces podemos encontrar un subconjunto $A_n \subseteq Y_n$ con la propiedad Q para cada $n \in \omega$ que interseca a cada elemento de la familia $\mathcal{U}_n$ (respectivamente, interseca a $|\mathcal{U}_n|$ elementos de la familia $\mathcal{U}_n$). Así, $A = \bigcup \{A_n : n \in \omega\}$ es un subconjunto de X con la propiedad Q que interseca a cada elemento de la familia $\mathcal{U}$ (respectivamente, interseca a κ elementos de la familia $\mathcal{U}$). □

Proposición 1.2.21. Sea Q una propiedad topológica que se preserva bajo uniones numerables. Si $X = \bigcup \{Y_n : n \in \omega\}$ donde Y_n es celular Q (respectivamente, casi celular- Q) para cada $n \in \omega$, entonces X es celular Q (respectivamente, casi celular Q).

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^*$ una familia celular. Notemos que $\mathcal{U}_n = \{Y_n \cap U : U \in \mathcal{U}\}$ es una familia celular en cada Y_n , entonces podemos encontrar un subconjunto $A_n \subseteq Y_n$ con la propiedad Q para cada $n \in \omega$ que interseca a cada elemento de la familia $\mathcal{U}_n$ (respectivamente, interseca a $|\mathcal{U}_n|$ elementos de la familia $\mathcal{U}_n$). Así, $A = \bigcup \{A_n : n \in \omega\}$ es un subconjunto de X con la propiedad Q que interseca a cada elemento de la familia $\mathcal{U}$ (respectivamente, interseca a κ elementos de la familia $\mathcal{U}$). □

Proposición 1.2.22. Sea Q una propiedad topológica que se hereda a subespacios cerrados y que se preserva bajo uniones numerables. Si X es un espacio celular Q (respectivamente, casi celular Q) entonces cada subespacio abierto F_σ es celular Q (respectivamente, casi celular Q).

Demostración. Sean $Z \subseteq X$ un subconjunto abierto F_σ y $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^*(Z)$ una familia celular. Tenemos que $Z = \bigcup \{F_n : n < \omega\}$, donde F_n es un subconjunto cerrado para cada $n < \omega$. Como $\mathcal{U}$ también es una familia celular en X , podemos encontrar un subespacio $A \subseteq X$ con la propiedad Q que interseca a cada elemento de la familia $\mathcal{U}$ (respectivamente, interseca a κ elementos de la familia $\mathcal{U}$). Así, $F = \bigcup \{A \cap F_n : n < \omega\} \subseteq Z$ es un subespacio con la propiedad Q que interseca a cada elemento de la familia $\mathcal{U}$ (respectivamente, interseca a κ elementos de la familia $\mathcal{U}$). □

Capítulo 2

Dos subclases de la clase de los espacios tenuemente compactos

En este capítulo estudiaremos las clases de los espacios *celular numerablemente compactos* y la de los *casi celular numerablemente compactos*. Enfocaremos nuestra atención en los siguientes tres temas:

- Condiciones para que un espacio topológico celular numerablemente compacto sea numerablemente compacto.
- Condiciones para que el producto de un espacio celular numerablemente compacto con un espacio compacto sea un espacio casi celular numerablemente compacto.
- Condiciones para que un espacio sea maximal celular numerablemente compacto.

Todos los resultados en este capítulo sin atribución a algún autor son resultados del artículo [1].

2.1 ¿Cuándo un espacio celular numerablemente compacto es numerablemente compacto?

Recordemos dos conceptos importantes para el entendimiento de esta sección:

Definición 2.1.1. Un espacio topológico X se llama de *Urysohn* si dados dos elementos distintos en el espacio X , existen dos vecindades cerradas ajenas que los contienen respectivamente.

Definición 2.1.2. Sea X un espacio topológico. El *pseudocarácter cerrado* $\psi_c(p, X)$ para algún elemento $p \in X$ está definido por:

$$\psi_c(p, X) = \min\{|\mathcal{U}| : \mathcal{U} \subseteq \tau(p, X) \text{ y } \{p\} = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} \text{cl}(U)\}.$$

Si X es un espacio de Hausdorff, entonces $\psi_c(p, X)$ está definido para cada $p \in X$ y así:

$$\psi_c(X) = \sup\{\psi_c(p, X) : p \in X\}.$$

es el pseudocarácter cerrado del espacio X .

En esta sección se demostrará que un espacio de Hausdorff celular numerablemente compacto con pseudocarácter cerrado numerable es numerablemente compacto, la motivación de este resultado es el siguiente teorema demostrado en [3]:

Teorema 2.1.3 ([3], Corolario 5.12). Si X es un espacio topológico de Urysohn celular numerablemente compacto y primero numerable, entonces X es numerablemente compacto.

Antes de demostrar el resultado principal, analizaremos algunas propiedades importantes de los espacios celular numerablemente compactos.

- Si X contiene un subespacio denso D celular numerablemente compacto (respectivamente, casi celular numerablemente compacto), entonces X es un espacio celular numerablemente compacto (respectivamente, casi celular numerablemente compacto).
- La imagen continua de un espacio celular numerablemente compacto (respectivamente, casi celular numerablemente compacto) es también un espacio celular numerablemente compacto (respectivamente, casi celular numerablemente compacto).

Estos últimos dos enunciados son consecuencias de la Proposición [1.2.3] y de la Proposición [1.2.5]. El siguiente resultado es parte del folklore de la Topología General, el Teorema 3.10.20 de [17] es una versión de este teorema en espacios de Tychonoff.

Teorema 2.1.4. Si X es un espacio T_1 numerablemente compacto, entonces X es tenuemente compacto.

Para espacios normales la implicación recíproca del teorema previo es válida.

Corolario 2.1.5. Si X es un espacio celular numerablemente compacto (respectivamente, casi celular numerablemente compacto), entonces X es tenuemente compacto.

Demostración. Se sigue de la Proposición [1.2.9] y de la Proposición [1.2.10]. □

Veamos que las propiedades celular numerablemente compacto y casi celular numerablemente compacto son distintas en una clase amplia de espacios topológicos.

Teorema 2.1.6. Existe un espacio X de Tychonoff casi celular numerablemente compacto y primero numerable que no es celular numerablemente compacto.

2.1. ¿CUÁNDO UN ESPACIO CELULAR NUMERABLEMENTE COMPACTO ES NUMERABLEMENTE COMPACTO?

Demostración. El espacio de $\Psi(\mathcal{A})$ en ω definido en el Capítulo 1 cumple las condiciones del teorema. Recordemos que $\mathcal{A}$ es una familia MCA infinita no numerable. Para ver que $\Psi(\mathcal{A})$ no es un espacio celular numerablemente compacto, sea $\mathcal{U} = \{\{n\} : n \in \omega\}$ y supongamos que $C \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ es un subconjunto numerablemente compacto que interseca a cada elemento de la familia celular $\mathcal{U}$. Como C es un subespacio numerablemente compacto se tiene que su intersección con el subconjunto cerrado y discreto $\mathcal{A}$ es finita. Sea $\{A_0, \dots, A_k\} = \mathcal{A} \cap C$, entonces existe $A^* \in \mathcal{A} \setminus \{A_0, \dots, A_k\}$, así, A^* es un subconjunto infinito de C que no tiene punto de acumulación en $C \cap \mathcal{A}$ y esto es una contradicción.

Veamos que $\Psi(\mathcal{A})$ en ω es un espacio casi celular numerablemente compacto. Ya que $c(\Psi(\mathcal{A})) = \omega$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{U} = \{U_m : m \in \omega\} \subseteq \tau^*$ es una familia celular en $\Psi(\mathcal{A})$. Para cada $U_m \in \mathcal{U}$ podemos elegir $x_m \in U_m \cap \omega$. Como $B = \{x_m : m \in \omega\}$ es un subconjunto infinito existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap B| = \omega$, se sigue que A es punto de acumulación del subconjunto B y por lo tanto también de la familia $\mathcal{U}$. Se sigue que $\{A\} \cup A$, es un subespacio numerablemente compacto que interseca ω elementos de la familia $\mathcal{U}$. $\square$

En [3] los autores se preguntaron si cada espacio de Hausdorff primero numerable y celular numerablemente compacto es un espacio numerablemente compacto. El teorema subsiguiente responde esta pregunta de forma afirmativa, la demostración es muy similar a la prueba del Teorema 2.7 de [24], pero emplea una hipótesis que a simple vista no es equivalente a la usada en el artículo citado.

Teorema 2.1.7. Si X es un espacio de Hausdorff, celular numerablemente compacto con pseudocarácter cerrado numerable, entonces X es un espacio regular, primero numerable y numerablemente compacto.

Demostración. Supongamos primero que x no es un punto aislado de X y que U es un subconjunto abierto tal que $x \in \text{cl}(U)$. Sea $\{V_n : n \in \omega\}$ una familia de vecindades de x tales que $\bigcap \{\text{cl}(V_n) : n \in \omega\} = \{x\}$. Afirmamos que para cada $n \in \omega$ existe algún $m_n > n$ tal que $V_n \cap U \not\supseteq \text{cl}(V_{m_n}) \cap U$, es decir, $(V_n \setminus \text{cl}(V_{m_n})) \cap U \neq \emptyset$. Pues si no fuera así, para cada $m > n$ tendríamos $\text{cl}(V_m) \cap U \supseteq V_n \cap U$ y entonces:

$$\{x\} = \bigcap \{\text{cl}(V_m) : m > n\} \supseteq \bigcap \{\text{cl}(V_m) \cap U : m > n\} \supseteq V_n \cap U,$$

lo que implicaría que x es un elemento aislado de $\text{cl}(U)$ y por lo tanto un elemento aislado de X . Sea $W_0 = (V_0 \cap U) \setminus (\text{cl}(V_{m_0}) \cap U)$ y para cada $n \in \omega$ definimos recursivamente:

$$W_{n+1} = (V_{m_n} \cap U) \setminus (\text{cl}(V_{m_{n+1}}) \cap U).$$

Así, la familia $\{W_n : n \in \omega\}$ consiste de subconjuntos abiertos ajenos y no vacíos contenidos en U . Además, como X es celular numerablemente compacto, podemos encontrar un subespacio numerablemente compacto $C \subseteq X$ que interseca a W_n para cada $n \in \omega$. Elegimos $c_n \in C \cap W_n$ para cada $n \in \omega$, así el subconjunto $D = \{c_n : n \in \omega\}$ es discreto y como $\text{cl}_C(D)$ es numerablemente compacto, D tiene punto de acumulación

CAPÍTULO 2. DOS SUBCLASES DE LA CLASE DE LOS ESPACIOS TENUEMENTE COMPACTOS

$p \in X$. Además, si $p \neq x$, entonces existe $k \in \omega$ tal que $p \notin V_{m_k}$ lo que contradice que p es un punto de acumulación de D . Esto demuestra que cada subespacio numerablemente compacto que interseca a cada elemento de la familia $\{W_n : n \in \omega\}$ contiene al elemento x .

Veamos que X es un espacio numerablemente compacto; para ello supongamos que $A = \{a_n : n \in \omega\} \subseteq X$ es un subconjunto infinito y discreto. Por el Teorema 1.1.5 existen un subconjunto infinito peludo $E \subseteq A$ y una familia celular $\{U_e : e \in E\}$ tal que $e \in \text{cl}(U_e)$ para cada $e \in E$ y sin pérdida de generalidad podemos asumir que si e es un elemento aislado, entonces $U_e = \{e\}$. Para cada $e \in E$ podemos encontrar una familia celular $\mathcal{W}_e$ (como la construida en el párrafo anterior) contenida en U_e . Entonces $\mathfrak{W} = \bigcup \{\mathcal{W}_e : e \in E\}$ es una familia celular en X , por lo tanto existe un subespacio numerablemente compacto $Y \subseteq X$ que interseca a cada elemento de la familia $\mathfrak{W}$, se sigue que $E \subseteq Y$, por lo que E tiene punto de acumulación, se sigue que A también tiene punto de acumulación en X , así, X es un espacio numerablemente compacto.

Para mostrar que el espacio es regular, supongamos que existe un elemento $q \in X$ y una vecindad V de q que no contiene ninguna vecindad cerrada de q . Sea $\{W_n : n \in \omega\}$ una familia anidada de subconjuntos abiertos tal que $\{q\} = \bigcap \{\text{cl}(W_n) : n \in \omega\}$. Claramente, $\text{cl}(W_n) \setminus V$ es infinito para cada $n \in \omega$ y así podemos elegir elementos distintos $x_n \in \text{cl}(W_n) \setminus V$, como el único posible punto de acumulación del subconjunto $\{x_n : n \in \omega\}$ es p y V es una vecindad de p que no interseca al subconjunto $\{x_n : n \in \omega\}$, lo que es una contradicción, ya que el espacio es numerablemente compacto.

Finalmente, veamos que el espacio es primero numerable. Sea $p \in X$ un punto no aislado, como $\psi(X) \leq \psi_c(X)$ existe una familia de subconjuntos abiertos $\{B_n : n \in \omega\}$ tal que $\bigcap \{B_n : n \in \omega\} = \{p\}$, ya que X es un espacio regular podemos suponer que para cada $n \in \omega$ se cumple que $\text{cl}(B_{n+1}) \subsetneq B_n$. Así, $\mathcal{O} = \{B_n \setminus \text{cl}(B_{n+1}) : n \in \omega\}$ es una familia infinita de subconjuntos abiertos no vacíos cuyo único punto de acumulación es p . Supongamos que $\{B_n : n \in \omega\}$ no es una base local en p , entonces existe $U \in \tau(p, X)$ tal que para cada $n \in \omega$, $B_n \not\subseteq \text{cl}(U)$. Por lo tanto, la familia $\mathcal{W} = \{(B_n \setminus \text{cl}(B_{n+1})) \setminus \text{cl}(U) : n \in \omega\}$ es una familia infinita de subconjuntos abiertos no vacíos localmente finita, lo que contradice que X es numerablemente compacto. □

En el Teorema 4.13 de [39] se demostró que un espacio regular, primero numerable y celular compacto tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$, el siguiente resultado se sigue del Teorema 2.1.7 y lo mencionado anteriormente.

Corolario 2.1.8. Si X es un espacio de Hausdorff, celular compacto y con pseudo-carácter cerrado numerable, entonces $|X| \leq \mathfrak{c}$.

Observación 2.1.9. Notemos que en el Teorema 2.1.7 no es posible sustituir la condición de ser celular numerablemente compacto por casi celular numerablemente compacto,

2.1. ¿CUÁNDO UN ESPACIO CELULAR NUMERABLEMENTE COMPACTO ES NUMERABLEMENTE COMPACTO?

ya que el espacio de Mrówka-Isbell en ω descrito en el Teorema 2.1.6 es un espacio de Tychonoff casi celular numerablemente compacto y primero numerable que no es numerablemente compacto.

El siguiente teorema debe compararse con el Teorema 2.1.7 ya que tienen hipótesis distintas y llegan a la misma conclusión:

Teorema 2.1.10 ([24], Teorema 2.7). Si X es un espacio de Hausdorff con pseudo-carácter cerrado numerable y cumple que la cerradura de cada subespacio numerable fuertemente discreto es numerablemente compacto, entonces X es un espacio regular, primero numerable y numerablemente compacto.

Como consecuencia del Teorema 2.1.10 tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.1.11. Si X es un espacio con pseudocarácter cerrado numerable, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. X es regular, primero numerable y numerablemente compacto;
2. la cerradura de cada subconjunto numerable fuertemente discreto es numerablemente compacto;
3. X es celular numerablemente compacto.

Demostración. • (1) $\Rightarrow$ (2) Inmediato.

- (2) $\Rightarrow$ (3) Se sigue del Teorema 2.1.10.
- (3) $\Rightarrow$ (1) Se sigue del Teorema 2.1.7.

□

Las generalizaciones de los espacios primero numerables han sido un tema de estudio desde el origen de la Topología General, la clase de los espacios de Fréchet y la de los espacios secuenciales son dos de las generalizaciones de la clase de los espacios primero numerables más conocidas; un espacio topológico es de *Fréchet* si para cada $A \subseteq X$ y cada $x \in \text{cl}(A)$ existe una sucesión en A que converge a x y un espacio topológico es *secuencial* si para cada $A \subseteq X$ no cerrado existen $x \in \text{cl}(A) \setminus A$ y una sucesión en A que converge a x ; observemos que cada espacio primero numerable es de Fréchet y cada espacio de Fréchet es secuencial. Recordemos que si X_α es un espacio topológico para cada $\alpha \in I$, entonces un subespacio de $X = \prod \{X_\alpha : \alpha \in I\}$ es llamado un Σ -producto de X , el cual se denota por $\Sigma(\bar{y})$ si es de la forma $\{\bar{x} \in X : \delta(\bar{x}, \bar{y}) \text{ es numerable}\}$ para algún elemento fijo $\bar{y} \in X$, donde $\delta(\bar{x}, \bar{y}) = \{\alpha : x_\alpha \neq y_\alpha\}$, el elemento fijo $\bar{y}$ se llama el punto base del Σ -producto.

El siguiente ejemplo demuestra que en la clase de los espacios de Tychonoff Fréchet la propiedad celular numerablemente compacto no es equivalente a ser numerablemente compacto. Lo que demuestra que las propiedades 2 y 3 del teorema anterior no son equivalentes en dicha clase de espacios.

Ejemplo 2.1.12. Sea $\Sigma(\bar{0})$ el Σ -producto en $\{0, 1\}^{\omega_1}$ con base en $\bar{0}$, es decir, la función idénticamente 0; por el Teorema 2.1 de [29] tenemos que el espacio $\Sigma(\bar{0})$ es un espacio de Fréchet numerablemente compacto. Sea $X = \Sigma(\bar{0}) \setminus \{\bar{0}\}$; el espacio X no es numerablemente compacto, ya que $\bar{0}$ es el límite de una sucesión inyectiva en $\Sigma(\bar{0})$ y en el espacio X esta sucesión es un subespacio infinito, cerrado y discreto.

Veamos que X es celular compacto y por lo tanto celular numerablemente compacto. Por el Teorema 3.13 de [40] basta demostrar que $\Sigma(\bar{0})$ no tiene una π -base local celular en $\bar{0}$. Como $\Sigma(\bar{0})$ es denso en $\{0, 1\}^{\omega_1}$ del Corolario 2.3.18 de [17] se sigue que $c(\Sigma(\bar{0})) = \omega$. Supongamos que $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \omega\}$ es una familia celular de subconjuntos abiertos básicos en $\Sigma(\bar{0})$, digamos $U_n = \bigcap \{\pi^{-1}[a_{n\alpha}] : \alpha \in I_n\} \cap \Sigma(\bar{0})$, donde $a_{n\alpha} \in \{0, 1\}$ e $I_n \subseteq \omega_1$ es un subconjunto finito para cada $n \in \omega$; así $I = \bigcup \{I_n : n \in \omega\}$ es un subconjunto numerable y si elegimos $\beta \in \omega_1 \setminus I$ tenemos que la vecindad abierta $\pi^{-1}[0] \cap \Sigma(\bar{0})$ no contiene ningún elemento de la familia $\mathcal{U}$.

Si X es un espacio topológico y $A \subseteq X$, decimos que una familia $\mathcal{U}$ es una *expansión abierta* de A si $\mathcal{U} = \{U_a : a \in A\}$ y $U_a \in \tau(a, X)$ para cada $a \in A$. Un espacio topológico X se llama *fuertemente Hausdorff* si cada subconjunto infinito $S \subseteq X$ contiene un subconjunto infinito numerable con un expansión abierta celular. Es bien conocido que un espacio regular siempre es fuertemente discreto y en [22] se demostró que cada espacio de Urysohn es fuertemente Hausdorff.

En este trabajo ocuparemos una generalización de los espacios de Hausdorff primero numerables definida por primera vez como “Accessibility spaces” en [46], pero actualmente estos espacios son llamados espacios de Whyburn, decimos que X es un espacio de *Whyburn* si para cada subconjunto $A \subseteq X$ y cada $x \in \text{cl}(A)$, existe $B \subseteq A$ tal que $\text{cl}(B) \setminus A = \{x\}$ y un espacio es *débilmente Whyburn* si para cada subconjunto no cerrado $A \subseteq X$ existe $B \subseteq A$ tal que $\text{cl}(B) \setminus A = \{x\}$ para algún $x \in \text{cl}(A)$. Todo espacio de Hausdorff y de Fréchet es de Whyburn y cada espacio de Hausdorff secuencial es débilmente Whyburn. También se sabe que los espacios de Whyburn secuenciales son de Fréchet.

Teorema 2.1.13. Si X es un espacio de Whyburn, fuertemente Hausdorff, celular numerablemente compacto y cada punto tiene una π -base local celular, entonces X es un espacio de Fréchet numerablemente compacto.

Demostración. Supongamos que $E = \{e_n : n < \omega\} \subseteq X$ es un subconjunto infinito numerable y discreto. Como X es espacio fuertemente Hausdorff podemos encontrar un subconjunto $D = \{d_n : n < \omega\} \subseteq E \subseteq X$ con una expansión abierta celular $\{U_n : n < \omega\}$ y para cada $n \in \omega$ podemos encontrar una π -base local celular $\mathcal{P}_n = \{W_{\alpha n} : \alpha \in I_n\}$ en d_n . Para demostrar que X es numerablemente compacto basta demostrar que el subconjunto D no es cerrado. Si d_n es un punto aislado de X podemos asumir que $U_n = \{d_n\}$ y $\mathcal{P}_n = \{\{d_n\}\}$; para cada $n \in \omega$ y cada $\alpha \in I_n$ sea

2.1. ¿CUÁNDO UN ESPACIO CELULAR NUMERABLEMENTE COMPACTO ES NUMERABLEMENTE COMPACTO?

$V_{\alpha n} = W_{\alpha n} \cap U_n$, así, la familia $\mathcal{D}_n = \{V_{\alpha n} : \alpha \in I_n\}$ también es una π -base local celular en d_n para cada $n \in \omega$ y cumple que $\bigcup \mathcal{D}_n \subseteq U_n$ para cada $n \in \omega$. Notemos que $\mathcal{D} = \bigcup \{\mathcal{D}_n : n \in \omega\}$ es una familia celular de subconjuntos abiertos, por lo que podemos encontrar un subconjunto numerablemente compacto $C \subseteq X$ que interseca a cada $V_{\alpha n}$ para cada $n \in \omega$ y para cada $\alpha \in I_n$.

Para cada $n \in \omega$ y para $\alpha \in I_n$, podemos elegir $x_{\alpha n} \in V_{\alpha n} \cap C$; así, el subconjunto $\{x_{\alpha n} : \alpha \in I_n\}$ es discreto en X para cada $n \in \omega$, ya que $\mathcal{D}_n$ es una π -base local celular en d_n ; por lo que $d_n \in \text{cl}(\{x_{\alpha n} : \alpha \in I_n\})$ para cada $n \in \omega$. Como X es un espacio de Whyburn podemos encontrar un subconjunto $A_n \subseteq \{x_{\alpha n} : \alpha \in I_n\} \subseteq C$ tal que $\text{cl}(A_n) \setminus \{x_{\alpha n} : \alpha \in I_n\} = \{d_n\}$, por lo que d_n es el único punto de acumulación de A_n , lo que implica $d_n \in C$ para cada $n \in \omega$. Como el subespacio C es numerablemente compacto, concluimos que el subconjunto D no es cerrado.

El Teorema 2.2 de [42] prueba que un espacio de Whyburn y numerablemente compacto es un espacio de Fréchet, pero por completez de este trabajo presentaremos la demostración de este hecho. Para este propósito sean $A \subseteq X$ y $y \in \text{cl}(A) \setminus A$, como X es un espacio de Whyburn podemos encontrar un subconjunto $B \subseteq A$ tal que $\text{cl}(B) \setminus A = \{y\}$. Sea $\mathcal{W}$ una familia celular maximal de subconjuntos abiertos de B tal que $y \notin \text{cl}(W)$ para cada $W \in \mathcal{W}$. Como $\bigcup \mathcal{W}$ es denso en el subconjunto B tenemos que $y \in \text{cl}(\bigcup \mathcal{W})$ y por lo tanto existe un subconjunto $S \subseteq \bigcup \mathcal{W}$ tal que $\text{cl}(S) \setminus (\bigcup \mathcal{W}) = \{y\}$. Para cada $W \in \mathcal{W}$ elegimos $y_W \in S \cap W$, así, el subconjunto $R = \{y_W : W \in \mathcal{W}\}$ es un subconjunto discreto y $(\text{cl}(R) \setminus R) \cap (\bigcup \mathcal{W}) = \emptyset$, se sigue que R es un subconjunto cerrado en S por lo que y es el único punto de acumulación de R en el subespacio numerablemente compacto $S \cup \{y\}$. Por lo tanto, $R \cup \{y\}$ es un espacio infinito numerablemente compacto, donde todos los elementos distintos de y son aislados. Entonces el espacio $R \cup \{y\}$ es la compactación unipuntal de un subespacio discreto, por lo que podemos encontrar una sucesión en $R \subseteq A$ que converge a y . □

Corolario 2.1.14. Si X es un espacio de Whyburn, fuertemente Hausdorff, celular numerablemente compacto con un subconjunto D denso de puntos aislados, entonces X es numerablemente compacto y de Fréchet.

Demostración. La familia $\mathcal{D} = \{\{d\} : d \in D\}$ es una π -base local celular para cada elemento de X . Por lo tanto, X cumple las condiciones del teorema anterior. □

Es natural preguntarse si los resultados del Teorema 2.1.13 se pueden extender a una clase más amplia de espacios topológicos. El siguiente ejemplo muestra que tal extensión no puede ser a la clase de los espacios débilmente Whyburn.

Ejemplo 2.1.15. La Plancha de Tychonoff $T = (\omega_1 + 1) \times (\omega + 1) \setminus \{(\omega_1, \omega)\}$ dotado con la topología de subespacio del producto $(\omega_1 + 1) \times (\omega + 1)$ es un espacio débilmente Whyburn y cada punto en T tiene un π -base local celular. El subconjunto $D = \{(\omega_1, n) :$

$n < \omega\}$ es cerrado y discreto en T , por lo que T no es numerablemente compacto. Falta ver que T es celular numerablemente compacto. En efecto, como ω_1 es un espacio numerablemente compacto y $\omega + 1$ es compacto, tenemos que $\omega_1 \times (\omega + 1)$ es un subespacio numerablemente compacto y es denso en T ; por el Corolario 1.2.4 se sigue que T es celular numerablemente compacto.

Decimos que un espacio X tiene *diagonal* G_δ (respectivamente, *diagonal regular* G_δ) si la diagonal $\Delta = \{(x, x) : x \in X\} \subseteq X \times X$ es la intersección numerable de vecindades abiertas en el producto (respectivamente, es la intersección numerable de vecindades cerradas en el producto). Un espacio con diagonal regular G_δ tiene pseudocarácter cerrado numerable.

Teorema 2.1.16 ([15], Corolario 2.A). Si X es un espacio de Hausdorff numerablemente compacto con diagonal G_δ , entonces X es compacto y metrizable.

Teorema 2.1.17. Si X es un espacio de Hausdorff, celular numerablemente compacto y con diagonal regular G_δ , entonces X es un espacio compacto y metrizable, por lo tanto X tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$.

Demostración. Como X tiene diagonal regular G_δ , se sigue que X tiene pseudocarácter cerrado numerable y por el Teorema 2.1.7, X es un espacio regular, primero numerable, numerablemente compacto. Por el Teorema 2.1.16 se sigue que X es compacto y metrizable. □

2.2 Productos de algunas subclases de los espacios tenuemente compactos

Es bien conocido que la clase de los espacios numerablemente compactos es compactamente productiva, pero el Ejemplo 3.10.19 de [17] muestra que producto de dos espacios numerablemente compactos no necesariamente es un espacio numerablemente compacto. En esta sección estudiaremos el comportamiento de los espacios casi celular compactos y la de los espacios casi celular numerablemente compactos bajo productos. Para este fin necesitamos los siguientes conceptos:

Definición 2.2.1. Sean X un espacio topológico y κ un cardinal infinito. Decimos que p es un *punto de acumulación completo* de una familia $\mathcal{F} = \{F_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$ si cada vecindad de p interseca κ elementos de la familia $\mathcal{F}$.

Una cubierta abierta de un espacio topológico se llama *encadenada* si está linealmente ordenada por la contención.

Definición 2.2.2. Un espacio topológico X se llama *linealmente H -cerrado* si cada cubierta abierta encadenada de X tiene un elemento que es denso en X .

2.2. PRODUCTOS DE ALGUNAS SUBCLASES DE LOS ESPACIOS TENUEMENTE COMPACTOS

El siguiente resultado caracteriza a los espacios linealmente H -cerrados en términos de familias celulares de subconjuntos abiertos no vacíos.

Teorema 2.2.3 ([4], Teorema 2.12). Un espacio topológico es linealmente H -cerrado si y solo si cada familia celular $\mathcal{U} \subseteq \tau^*$ de cardinalidad regular tiene punto de acumulación completo.

A continuación se presenta un resultado que muestra que los espacios casi celular compactos son una subclase de la clase de los espacios linealmente H -cerrados.

Lema 2.2.4 ([6], Teorema 5.4). Si X es un espacio casi celular compacto, entonces cada familia celular $\mathcal{U} \subseteq \tau^*$ tiene un punto de acumulación completo. Por lo tanto, cada espacio casi celular compacto es linealmente H -cerrado.

Notemos que si X es un espacio con celularidad menor que $\aleph_\omega$, entonces cada familia celular en el espacio X es de cardinalidad regular; una consecuencia de esta observación y del lema anterior es el siguiente resultado:

Teorema 2.2.5 ([6], Teorema 5.10). Si X es un espacio localmente compacto y $c(X) < \aleph_\omega$, entonces X es linealmente H -cerrado si y solo si X es casi celular compacto.

El teorema subsecuente es una generalización del Teorema 2.2.5:

Teorema 2.2.6. Si X es un espacio localmente compacto, numerablemente compacto y $c(X) < \aleph_{\omega_1}$, entonces X es linealmente H -cerrado si y solo si X es casi celular compacto.

Demostración. ($\Rightarrow$) Sean $\kappa < \aleph_{\omega_1}$ un cardinal y $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^*$ una familia celular en X .

(1) Si κ es un cardinal regular, como X es linealmente H -cerrado existe un punto de acumulación completo q para la familia $\mathcal{U}$, como X es localmente compacto podemos encontrar una vecindad compacta de q que intersecta a κ elementos de la familia $\mathcal{U}$, se sigue que X es casi celular compacto.

(2) Si $\text{cof}(\kappa) = \omega$, entonces $\kappa = \bigcup_{n \in \omega} \lambda_n$, donde λ_n es un cardinal regular para cada $n \in \omega$. Definimos $\mathcal{U}_0 = \{U_\alpha : \alpha < \lambda_0\} \subseteq \mathcal{U}$ y para cada $0 < n < \omega$ hacemos $\mathcal{U}_n = \{U_\alpha : \lambda_{n-1} \leq \alpha < \lambda_n\} \subseteq \mathcal{U}$. Como X es linealmente H -cerrado, para cada $n < \omega$ existe un punto de acumulación completo p_n de la familia $\mathcal{U}_n$. Consideremos el conjunto $P = \{p_n : n < \omega\}$.

(a) Si P es infinito, por ser X numerablemente compacto P tiene un punto de acumulación, digamos q . Sea W una vecindad compacta de q , entonces existe un subconjunto infinito $J \subseteq \omega$ tal que $p_m \in W$ para cada $m \in J$, así W es una vecindad de p_m para cada $m \in J$, se sigue que q es punto de acumulación completo de la familia $\mathcal{U}_m$ para cada $m \in J$ y por lo tanto $|\{U \in \mathcal{U}_m : W \cap U \neq \emptyset\}| = \lambda_m$ para cada $m \in J$. Entonces

$|\{U \in \bigcup\{\mathcal{U}_m : m \in J\} : W \cap U \neq \emptyset\}| = \sum_{m \in J} \lambda_m = \kappa$. Así W es un subconjunto compacto que intersecciona κ elementos de la familia $\bigcup\{\mathcal{U}_m : m \in J\}$ y por lo tanto también intersecciona a κ elementos de la familia $\mathcal{U}$.

(b) Si P es finito, digamos $P = \{p_0, \dots, p_n\}$, entonces existe $0 \leq j \leq n$ y $J \subseteq \omega$ infinito tal que p_j es punto de acumulación completo para cada familia $\mathcal{U}_m$ con $m \in J$. Sea W una vecindad compacta de p_j , entonces $|\{U \in \bigcup\{\mathcal{U}_m : m \in J\} : W \cap U \neq \emptyset\}| = \sum_{m \in J} \lambda_m = \kappa$. Así W es un subconjunto compacto que intersecciona κ elementos de la familia $\bigcup\{\mathcal{U}_m : m \in J\}$ y por lo tanto también intersecciona a κ elementos de la familia $\mathcal{U}$.

($\Leftarrow$) Del Lema 2.2.4 sabemos que cada familia celular de subconjuntos abiertos no vacíos en un espacio casi celular compacto tiene un punto de acumulación completo y por el Teorema 2.2.3 el espacio es linealmente H -cerrado. □

En el Teorema 4.1 de [4] se demostró que la clase de los espacios linealmente H -cerrados es compactamente productiva, como consecuencia de esto se tiene el siguiente resultado:

Corolario 2.2.7. Si X es un espacio localmente compacto, casi celular compacto y K es un espacio compacto tal que $c(X \times K) < \aleph_\omega$, entonces $X \times K$ es casi celular compacto.

Del Teorema 2.1.7 y del resultado anterior se sigue el siguiente corolario:

Corolario 2.2.8. Si X es un espacio primero numerable, celular compacto y K es compacto primero numerable, entonces $X \times K$ es linealmente H -cerrado, numerablemente compacto, primero numerable y regular.

Corolario 2.2.9. Sean X un espacio primero numerable, celular compacto, localmente compacto y K un espacio compacto y primero numerable; si $c(X \times K) < \aleph_{\omega_1}$, entonces $X \times K$ es casi celular compacto, numerablemente compacto, localmente compacto, primero numerable y regular.

Los siguientes resultados describen el comportamiento de los espacios casi celular numerablemente compactos bajo productos.

Teorema 2.2.10. Si X es un espacio de Hausdorff, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. El espacio $X \times K$ es casi celular numerablemente compacto para cada espacio compacto K .

2.2. PRODUCTOS DE ALGUNAS SUBCLASES DE LOS ESPACIOS TENUEMENTE COMPACTOS

2. Para cada familia $\mathcal{U}$ de conjuntos abiertos no vacíos en X , existe un subespacio $N \subseteq X$ numerablemente compacto tal que N interseca $|\mathcal{U}|$ elementos de la familia $\mathcal{U}$.

Demostración. Es un caso particular del Teorema [1.2.13](#).

□

El siguiente resultado es una extensión del teorema anterior.

Teorema 2.2.11. Si X es un espacio de Hausdorff, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. El espacio $X \times K$ es casi celular numerablemente compacto para cada espacio compacto K .
2. $X \times A_\kappa$ es casi celular numerablemente compacto para cada cardinal infinito $\kappa \leq o(X)$.

Demostración. Es un caso particular del Teorema [1.2.14](#).

□

Para el teorema siguiente recordemos que un espacio topológico se llama k -espacio si es un espacio de Hausdorff y es la imagen cociente de un espacio localmente compacto.

Lema 2.2.12 ([\[17\]](#), Teorema 3.10.13). Si X es un k -espacio numerablemente compacto y Y es un espacio numerablemente compacto, entonces $X \times Y$ es un espacio numerablemente compacto.

Teorema 2.2.13. Si X es un espacio de Hausdorff y para cada familia $\mathcal{U}$ de conjuntos abiertos no vacíos en X , existe un subespacio $N \subseteq X$ tal que N es un k -espacio numerablemente compacto que interseca $|\mathcal{U}|$ elementos de la familia $\mathcal{U}$, entonces $X \times M$ es casi celular numerablemente compacto para cada espacio numerablemente compacto M .

Demostración. Supongamos que M es un numerablemente compacto y $\mathcal{W}$ es una familia celular en $X \times M$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que cada elemento de la familia $\mathcal{W}$ es un abierto básico en el producto, es decir, $\mathcal{W} = \{U_\alpha \times V_\alpha : \alpha < \kappa\}$, donde $U_\alpha \in \tau^*(X)$ y $V_\alpha \in \tau^*(M)$ para cada $\alpha \in \kappa$. Por el Lema [1.2.11](#), existe un k -espacio $N \subseteq X$ numerablemente compacto que interseca a κ elementos de la κ -sucesión $\langle U_\alpha \rangle_{\alpha \in \kappa}$; así, por el Lema [2.2.12](#) tenemos que el subespacio $N \times M$ es numerablemente compacto e interseca κ elementos de la familia $\mathcal{W}$.

□

Corolario 2.2.14. Si X es un espacio de Hausdorff y para cada familia $\mathcal{U}$ de conjuntos abiertos no vacíos en X , existe un subespacio $N \subseteq X$ numerablemente compacto y primero numerable tal que N interseca $|\mathcal{U}|$ elementos de la familia $\mathcal{U}$, entonces $X \times M$ es casi celular numerablemente compacto para cada espacio numerablemente compacto M .

2.3 Maximalidad de la celularidad numerablemente compacta

Es esta sección estudiaremos la maximalidad de la *celularidad numerablemente compacta*. La maximalidad de la compacidad tenue y compacidad numerable ha sido ampliamente estudiada en [31], [14] y [32]. A continuación se expone un resultado demostrado en [32]:

Teorema 2.3.1 ([32], Corolario 5). Si (X, τ) es un espacio de Hausdorff numerablemente compacto y primero numerable, entonces (X, τ) es maximal numerablemente compacto.

Teorema 2.3.2. Si (X, τ) es un espacio de Hausdorff celular numerablemente compacto con pseudocarácter cerrado numerable, entonces (X, τ) es maximal celular numerablemente compacto.

Demostración. Se sigue del Teorema 2.1.7 que el espacio (X, τ) es un espacio regular, primero numerable y numerablemente compacto. Por el Teorema 2.3.1 se sigue que (X, τ) es maximal numerablemente compacto. Como cada topología σ en X más fuerte que τ también tiene pseudocarácter cerrado numerable, se sigue que si (X, σ) es celular numerablemente compacto, entonces es numerablemente compacto y por lo tanto $\sigma = \tau$, esto muestra que (X, τ) es maximal celular numerablemente compacto. □

Teorema 2.3.3. Si (X, τ) es un espacio de Whyburn, fuertemente Hausdorff, celular numerablemente compacto y cada punto tiene una π -base local celular, entonces (X, τ) es maximal celular numerablemente compacto.

Demostración. Del Teorema 2.1.13 se sigue que el espacio (X, τ) es de Fréchet y numerablemente compacto. Para ver que el espacio es maximal celular numerablemente compacto supongamos que σ es un topología estrictamente más fuerte que τ . Como el espacio (X, τ) es de Fréchet, existe una sucesión inyectiva $\langle x_n \rangle$ que converge a algún elemento p en (X, τ) , pero no tiene punto de acumulación en (X, σ) . Sea $S = \{x_n : n \in \omega\}$, como $\langle x_n \rangle$ es inyectiva se tiene que $S \setminus \{p\}$ es un subconjunto infinito, cerrado y discreto en (X, σ) . Sea ξ la topología en X generada por la subbase $\tau \cup (X \setminus S)$; notemos que si $U \in \xi$ y $p \notin U$, entonces $U \in \tau$. El espacio (X, ξ) no es numerablemente compacto, ya que $S \setminus \{p\}$ es un subconjunto infinito, cerrado y discreto en la topología ξ , pero veamos que el espacio (X, ξ) es de Whyburn. Para este fin sea $A \subseteq X$ y supongamos que $p \in \text{cl}_\xi(A) \setminus A$; como $p \notin \text{cl}_\xi(A \cap S)$, entonces $p \in \text{cl}_\xi(A \setminus S)$. Ya que τ y ξ coinciden en $X \setminus S$ y (X, τ) es de Whyburn, se sigue que existe $B \subseteq A \setminus S$ tal que $\text{cl}_\xi(B) \setminus A = \text{cl}_\tau(B) \setminus A = \{p\}$.

Ahora veamos que el espacio (X, σ) no es celular numerablemente compacto, para este propósito es suficiente demostrar que el espacio (X, ξ) no es celular numerablemente compacto. Supongamos lo contrario, es decir, que (X, ξ) es un espacio celular

2.3. MAXIMALIDAD DE LA CELULARIDAD NUMERABLEMENTE COMPACTA

numerablemente compacto. Como $S \cup \{p\}$ es un subespacio compacto en (X, τ) , podemos encontrar una expansión abierta celular $\mathcal{W} = \{U_n : n < \omega\}$. Así, $\mathcal{W}$ es una familia celular de subconjuntos abiertos no vacíos en (X, ξ) tal que $x_n \in U_n$ y $p \notin U_n$ para cada $n < \omega$. Para cada x_n existe una π -base local celular $\mathcal{V}_n$ en (X, τ) tal que $\bigcup \mathcal{V}_n \subseteq U_n$ y $x_n \notin \bigcup \mathcal{V}_n$. Como S es un subconjunto cerrado en (X, ξ) se sigue que $\bigcup \{\mathcal{V}_n : n < \omega\}$ es una π -base local celular en p en (X, ξ) . Por el Teorema 2.1.13, el espacio (X, ξ) es numerablemente compacto, lo que es una contradicción. □

El siguiente resultado es un caso particular del Teorema 1.2.19

Teorema 2.3.4. Si (X, τ) es un espacio regular maximal celular numerablemente compacto, entonces cada $x \in X$ tiene una π -base local celular.

*CAPÍTULO 2. DOS SUBCLASES DE LA CLASE DE LOS ESPACIOS
TENUEMENTE COMPACTOS*

Capítulo 3

Dos subclases de la clase de los espacios tenuemente Lindelöf

Decimos que un espacio X es de *Lindelöf* si cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta abierta numerable. Si X es un espacio topológico, la *extensión* de X , es la función cardinal $e(X)$ y se define como $e(X) = \sup\{|D| : D \subseteq X \text{ es cerrado y discreto}\}$. Un espacio se llama ω_1 -compacto si $e(X) = \omega$. En este capítulo estudiaremos las clases de los espacios *celular Lindelöf* y la de los *casi celular Lindelöf*. Enfocaremos nuestra atención en los siguientes temas:

- Condiciones para que un espacio casi celular Lindelöf sea Lindelöf u ω_1 -compacto.
- Condiciones para que el producto de un espacio casi celular Lindelöf con un espacio compacto sea casi celular Lindelöf.

Todos los resultados en este capítulo sin atribución a algún autor son resultados del artículo [2].

3.1 Espacios celular Lindelöf y casi celular Lindelöf

Los siguientes enunciados son consecuencias de la Proposición 1.2.3 y de la Proposición 1.2.5.

- Si X contiene un subespacio denso D celular Lindelöf (respectivamente, casi celular Lindelöf), entonces X es celular Lindelöf (respectivamente, casi celular Lindelöf).
- La imagen continua de un espacio celular Lindelöf (respectivamente, casi celular Lindelöf) es también un espacio celular Lindelöf (respectivamente, casi celular Lindelöf).

Proposición 3.1.1. Si X es un espacio celular Lindelöf (respectivamente, casi celular Lindelöf), entonces X es tenuemente Lindelöf.

Demostración. Se sigue de la Proposición 1.2.9 y de la Proposición 1.2.10. □

Los siguientes dos resultados son casos particulares de las Proposiciones 1.2.21 y 1.2.22 respectivamente.

Proposición 3.1.2. Si $X = \bigcup \{Y_n : n \in \omega\}$ donde Y_n es celular Lindelöf (respectivamente, casi celular Lindelöf) para cada $n \in \omega$, entonces X es celular Lindelöf (respectivamente, casi celular Lindelöf).

Proposición 3.1.3. Si X es un espacio celular Lindelöf (respectivamente, casi celular Lindelöf) entonces cada subespacio abierto F_σ es celular Lindelöf (respectivamente, casi celular Lindelöf).

El siguiente resultado aparece en [23] y es conocido como la desigualdad de Hajnal-Juhász y lo utilizaremos para obtener una cota de la cardinalidad de la clase de los espacios casi celular Lindelöf.

Teorema 3.1.4 ([23], Teorema 2.15 (b)). Si X es un espacio topológico T_1 , entonces $|X| \leq 2^{\chi(X) \cdot c(X)}$.

En [12] los autores definieron el concepto celular Lindelöf y demostraron los siguientes resultados.

Teorema 3.1.5 ([12], Teorema 12). Si X es un espacio de Hausdorff, primero numerable y celular Lindelöf, entonces $c(X) \leq \mathfrak{c}$.

Corolario 3.1.6 ([12], Corolario 13). Si X es un espacio de Hausdorff, primero numerable y celular Lindelöf, entonces $|X| \leq 2^{\mathfrak{c}}$.

Los siguientes resultados son unas ligeras generalizaciones del Teorema 3.1.5 y del Corolario 3.1.6, aunque las demostraciones son análogas a la de los resultados previos incluimos las demostraciones para la completez de este trabajo.

Teorema 3.1.7. Sea X un espacio de Hausdorff primero numerable y casi celular Lindelöf. Entonces $c(X) \leq \mathfrak{c}$.

Demostración. Sea $\mathcal{U}$ una familia celular en X . Como X es casi celular Lindelöf, existe un subespacio de Lindelöf $L \subseteq X$ tal que $|\{U \in \mathcal{U} : L \cap U \neq \emptyset\}| = |\mathcal{U}|$. Se sabe que cada subespacio de Lindelöf en un espacio primero numerable tiene cardinalidad a lo más $\mathfrak{c}$, así $|L| \leq \mathfrak{c}$ y por lo tanto $|\mathcal{U}| \leq \mathfrak{c}$. □

Corolario 3.1.8. Sea X un espacio de Hausdorff primero numerable y casi celular Lindelöf. Entonces $|X| \leq 2^{\mathfrak{c}}$.

Demostración. Se sigue del Teorema 3.1.7 y del Teorema 3.1.4. □

3.1. ESPACIOS CELULAR LINDELÖF Y CASI CELULAR LINDELÖF

Un espacio topológico se llama *fuertemente celular* Q si para cada familia celular $\mathcal{U}$ en X existe un subespacio cerrado $A \subseteq X$ con la propiedad Q tal que $A \cap U \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{U}$. En [9] se demostró que un espacio de Urysohn, fuertemente celular Lindelöf y primero numerable tiene cardinalidad a lo más el continuo; la siguiente pregunta continua abierta: ¿Es cierto que cada espacio X de Hausdorff, primero numerable y celular Lindelöf tiene cardinalidad a lo más el continuo?

Decimos que un espacio topológico X es un P -espacio si la intersección numerable de subconjuntos abiertos no vacíos es un subconjunto abierto en X , el término P -espacio fue acuñado por Gillman y Henriksen en [19], análogamente decimos que $p \in X$ es un P -punto si la intersección numerable de sus vecindades sigue siendo una vecindad de p .

Definición 3.1.9. Un espacio X se llama *débilmente Lindelöf* si cada cubierta abierta $\mathcal{U} \subseteq \tau^*$ de X tiene una subfamilia numerable cuya unión es densa en X .

En [12] se especuló sobre la existencia de un P -espacio celular Lindelöf que no sea débilmente Lindelöf; el Teorema 3.16 de [37] proporciona un ejemplo de un espacio topológico con las propiedades antes mencionadas.

Definición 3.1.10. Un espacio X se llama *débilmente linealmente Lindelöf* si cada familia $\mathcal{U} \subseteq \tau^*$ de cardinalidad regular no numerable tiene punto de acumulación completo.

Proposición 3.1.11 ([25], Proposition 3.10). Sea (X, τ) un espacio topológico. Si $\mathcal{U} \subseteq \tau^*$ es una familia de cardinalidad regular no numerable que no tiene punto de acumulación completo, entonces existe una familia celular $\mathcal{V} \subseteq \tau^*$ de cardinalidad $|\mathcal{U}|$ que no tiene punto de acumulación completo.

De la Proposición 3.1.11 se sigue que un espacio es débilmente linealmente Lindelöf si y solo si cada familia celular $\mathcal{U} \subseteq \tau^*$ de cardinalidad regular no numerable tiene punto de acumulación completo.

Teorema 3.1.12 ([25], Teorema 3.11 (a)). Si X es un espacio débilmente linealmente Lindelöf, entonces X es tenuemente Lindelöf.

Teorema 3.1.13 ([25], Teorema 3.14 (c)). Si X es un espacio débilmente Lindelöf, entonces X es débilmente linealmente Lindelöf.

De los dos teoremas anteriores se sigue inmediatamente que cada espacio débilmente Lindelöf es tenuemente Lindelöf; así, las clases de espacios celular Lindelöf, casi celular Lindelöf y débilmente Lindelöf son subclases de la clase de los espacios tenuemente Lindelöf, los siguientes ejemplos muestran que estas subclases de espacios topológicos son distintas en una clase amplia de espacios topológicos.

Ejemplo 3.1.14. Existe un P -espacio de Tychonoff casi celular Lindelöf que no es celular Lindelöf ni débilmente Lindelöf.

Demostración. El ejemplo requerido es $\Psi(\mathcal{A})$ en ω_1 definido en el Capítulo 1. Para ver que $\Psi(\mathcal{A})$ no es celular Lindelöf, sean $\mathcal{U} = \{\{\alpha\} : \alpha \in \omega_1\}$ y $L \subseteq \Psi(\mathcal{A})$ un subespacio que interseca a cada elemento de la familia $\mathcal{U}$. Notemos que si L fuera un subespacio de Lindelöf, entonces $|L \cap \mathcal{A}| \leq \omega$, por lo que podríamos elegir $A \in \mathcal{A} \setminus L$, así, $A \subseteq L$ es un subconjunto no numerable sin punto de acumulación en L , lo que demuestra la no existencia de un subespacio de Lindelöf que interseca a todos los elementos de la familia celular $\mathcal{U}$.

Para ver que el espacio $\Psi(\mathcal{A})$ no es débilmente Lindelöf, consideremos la cubierta abierta $\mathcal{V} = \{V \cup \{V\} : V \in \mathcal{A}\}$ y supongamos que $\mathcal{W} = \{V_n \cup \{V_n\} : n \in \omega\}$ es una subcolección numerable de $\mathcal{V}$. Como $\mathcal{W}$ tiene cardinalidad numerable podemos encontrar $B \in \mathcal{A} \setminus \{V_n : n \in \omega\}$. Así, para cada $n \in \omega$ se tiene que $|B \cap V_n| = \omega$ y por lo tanto $|\bigcup \{V_n : n \in \omega\} \cap B| = \omega$; se sigue que $B \notin \text{cl}(\bigcup \mathcal{W})$, lo que demuestra que $\Psi(\mathcal{A})$ no es débilmente Lindelöf.

Veamos que $\Psi(\mathcal{A})$ en ω_1 es un espacio casi celular Lindelöf. Ya que $c(\Psi(\mathcal{A})) = \omega_1$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \omega_1\} \subseteq \tau^*$ es una familia celular en $\Psi(\mathcal{A})$. Para cada $U_\alpha \in \mathcal{U}$ podemos elegir $x_\alpha \in U_\alpha \cap \omega_1$. Como $B = \{x_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ es un subconjunto infinito existe $A \in \mathcal{A}$ tal que $|A \cap B| = \omega_1$, se sigue A es punto de acumulación del subconjunto B y por lo tanto también de la familia $\mathcal{U}$. Se sigue que $\{A\} \cup A$, es un subespacio de Lindelöf que interseca ω_1 elementos de la familia $\mathcal{U}$. □

El siguiente ejemplo fue introducido en [8] para mostrar que en la clase de los espacios de Hausdorff primero numerables las propiedades Lindelöf y débilmente Lindelöf no son equivalentes.

Ejemplo 3.1.15. Existe un espacio de Hausdorff débilmente Lindelöf que no es casi celular Lindelöf.

Demostración. Sea $Y = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. El espacio requerido es $Z = (Y \times \kappa) \cup A$, donde κ es un cardinal no numerable con la topología discreta y A es un subconjunto numerable denso de los números irracionales del intervalo $[0, 1]$. El subespacio $Y \times \kappa$ tiene la topología producto y una vecindad abierta básica de un elemento $a \in A$ es de la forma:

$$[(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap A] \cup [(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap Y) \times (\kappa \setminus F)],$$

donde F es un subconjunto finito de κ . En el Ejemplo 2.3 de [8] se demostró que el espacio Z es débilmente Lindelöf. Para ver que el espacio Z no es casi celular Lindelöf, sea $\mathcal{U} = \{Y \times \{\alpha\} : \alpha \in \kappa\}$ y supongamos que L es un subespacio de Z que interseca κ elementos de la familia $\mathcal{U}$. Sea $I = \{\alpha \in \kappa : L \cap (Y \times \{\alpha\}) \neq \emptyset\}$; como κ es un cardinal no numerable, se sigue que existe un elemento $y_0 \in Y$ tal que el conjunto $\{\alpha \in \kappa : (y_0, \alpha) \in L\}$ es no numerable y como $y_0 \notin A$, el conjunto $L \cap \{(y_0, \alpha) : \alpha \in I\}$

3.1. ESPACIOS CELULAR LINDELÖF Y CASI CELULAR LINDELÖF

es un subconjunto cerrado, discreto y no numerable en L , lo que muestra que L no es un subespacio de Lindelöf. □

Definición 3.1.16. Sea X un espacio topológico T_1 , entonces:

$$\nu(X) = \min\{\alpha : \Delta_X \text{ es la intersección de } \alpha \text{ subconjuntos abiertos de } X^2\}.$$

Cuando $\nu(X) = \omega$, decimos que el espacio tiene diagonal G_δ .

Teorema 3.1.17 ([21], Teorema 2.1). Si X es un espacio T_1 , entonces $|X| \leq 2^{\nu(X) \cdot e(X)}$.

Teorema 3.1.18. Si X es un espacio casi celular Lindelöf con diagonal G_δ , entonces $c(X) \leq \mathfrak{c}$.

Demostración. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia celular en X ; como X es un espacio casi celular Lindelöf podemos encontrar un subespacio de Lindelöf $N \subseteq X$ tal que N interseca a κ elementos de la familia $\mathcal{U}$. Por el Teorema 3.1.17, se tiene que $|N| \leq 2^{\omega \cdot \omega}$, se sigue que $c(X) \leq \mathfrak{c}$. □

Definición 3.1.19. Un espacio topológico X se llama *fuertemente Hausdorff por colecciones* si para cada conjunto cerrado y discreto $D = \{d_\alpha : \alpha < \kappa\}$ en X existe una familia discreta de conjuntos abiertos $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$, tal que $d_\alpha \in U_\alpha$ para cada $\alpha < \kappa$.

Teorema 3.1.20. Si X es un espacio fuertemente Hausdorff por colecciones y casi celular Lindelöf, entonces X es ω_1 -compacto.

Demostración. Supongamos que existe un subespacio cerrado y discreto $D = \{d_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq X$. Como X es fuertemente Hausdorff por colecciones, podemos encontrar una familia discreta $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ tal que $d_\alpha \in U_\alpha$ para cada $\alpha < \omega_1$.

Como X es un espacio casi celular Lindelöf, existe un subespacio de Lindelöf $A \subseteq X$ tal que $|\{U_\alpha \in \mathcal{U} : A \cap U_\alpha \neq \emptyset\}| = \omega_1$. Para cada $U_\alpha \in \mathcal{U}$ tal que $U_\alpha \cap A \neq \emptyset$, sea $z_\alpha \in U_\alpha \cap A$. Como $\mathcal{U}$ es una familia discreta se sigue que el conjunto $C = \{z_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq A$ es un subconjunto cerrado y discreto. Lo que contradice que A es de Lindelöf. □

Definición 3.1.21. Un espacio X se llama *perfecto* si cada subconjunto cerrado es un conjunto G_δ .

Definición 3.1.22. Decimos que un espacio topológico X tiene un *desarrollo* si existe una sucesión de cubiertas abiertas $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de X tal que para cada $x \in X$, la sucesión $\{St(x, \mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$ es una base local para x . Un espacio es de *Moore* si es regular y tiene un desarrollo.

Teorema 3.1.23. Si X es un espacio perfecto, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $c(X) = \omega$;
2. X es casi celular Lindelöf

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) : Inmediato.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Supongamos que $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia celular en X . Como X es casi celular Lindelöf, podemos encontrar un subespacio de Lindelöf $E \subseteq X$ tal que $E \cap U_\alpha \neq \emptyset$ para cada $\alpha < \omega_1$. Para cada $\alpha < \omega_1$ sea $x_\alpha \in E \cap U_\alpha$. Entonces el subconjunto $D = \{x_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es un subconjunto discreto de E . Como X es un espacio perfecto, $\bigcup\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\} = \bigcup\{F_n : n < \omega\}$ donde F_n es un subconjunto cerrado para cada $n < \omega$. Así, existe un subconjunto no numerable $N = D \cap F_{n_0} \subseteq X$ para algún $n_0 \in \omega$.

Ahora veamos que el conjunto N es cerrado y discreto en X . Supongamos que z es un punto de acumulación de N . Como F_{n_0} es un subconjunto cerrado, tenemos que $z \in F_{n_0} \subset \bigcup\{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Por lo tanto, existe $\alpha < \omega_1$ tal que $z \in U_\alpha$, se sigue que U_α contiene una cantidad infinita de elementos de N lo que contradice la elección de $\mathcal{U}$. Por lo tanto, $N \subseteq E$ es un conjunto no numerable, cerrado y discreto, lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario 3.1.24. Si X es un espacio perfecto, primero numerable y casi celular Lindelöf, entonces $|X| \leq \mathfrak{c}$.

Demostración. Se sigue de la famosa desigualdad de Hajnal-Juhász $|X| \leq 2^{X(X) \cdot c(X)}$ y del Teorema anterior. $\square$

Corolario 3.1.25. Si X es un espacio de Moore, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $c(X) = \omega$;
2. X es casi celular Lindelöf.

Definición 3.1.26. El *número débil de Lindelöf* de un espacio topológico X , se denota por $wL(X)$ y se define como la mínima cardinalidad tal que cada cubierta abierta en X tiene una subfamilia de cardinalidad $wL(X)$ cuya unión es densa en X .

Teorema 3.1.27. Supongamos que κ es un cardinal infinito y que X es un espacio casi celular Lindelöf tal que $L(X) \leq \kappa^+$, entonces $wL(X) \leq \kappa$.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ es una cubierta abierta de X y que:

$$I = \left\{ \alpha < \kappa^+ : U_\alpha \setminus \text{cl} \left(\bigcup \{U_\beta : \beta < \alpha\} \right) \neq \emptyset \right\}.$$

- Si $|I| \leq \kappa$, como κ^+ es un cardinal regular, podemos encontrar algún $\gamma < \kappa^+$ tal que para cada $\alpha > \gamma$, $\alpha \notin I$ y por lo tanto $\{U_\alpha : \alpha < \gamma\}$ es una subfamilia de $\mathcal{U}$ de cardinalidad a lo más κ cuya unión es densa en X .

3.1. ESPACIOS CELULAR LINDELÖF Y CASI CELULAR LINDELÖF

- Si $|I| = \kappa^+$, como X es casi celular Lindelöf podemos encontrar un subespacio de Lindelöf $L \subseteq X$ que interseca a κ^+ elementos de la familia celular de subconjuntos abiertos no vacíos $\{U_\alpha \setminus \text{cl}(\bigcup\{U_\beta : \beta < \alpha\}) : \alpha \in I\}$. Como L es un subespacio de Lindelöf y $\mathcal{U}$ es una cubierta abierta de X , existe $\gamma < \kappa^+$ tal que el subespacio L está contenido en $\bigcup\{U_\alpha : \alpha < \gamma\}$. Entonces podemos encontrar algún $\lambda \in I$ tal que $\lambda > \gamma$ y así $L \cap (U_\lambda \setminus \text{cl}(\bigcup\{U_\alpha : \alpha < \lambda\})) = \emptyset$, lo que es una contradicción.

□

Corolario 3.1.28. Si X es un espacio casi celular Lindelöf y $L(X) \leq \omega_1$, entonces X es débilmente Lindelöf.

Definición 3.1.29. Si X es un espacio topológico y $\mathcal{U}$ es una familia de subconjuntos de X , entonces la *estrella* de un conjunto $A \subseteq X$ con respecto a la familia $\mathcal{U}$ es el conjunto:

$$St(A, \mathcal{U}) = \bigcup\{U \in \mathcal{U} : U \cap A \neq \emptyset\}.$$

Recursivamente definimos $St^{k+1}(A, \mathcal{U}) = St(St^k(A, \mathcal{U}), \mathcal{U})$, donde $St^0(A, \mathcal{U}) = A$ y por tanto $St^1(A, \mathcal{U}) = St(A, \mathcal{U})$.

Definición 3.1.30. Una familia $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de cubiertas abiertas de un espacio topológico X se llama *sucesión diagonal de orden k* , donde $k \in \omega$, si para cada $x \in X$ se tiene que $\{x\} = \bigcap\{St^k(x, \mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$. Decimos que un espacio X tiene *diagonal de orden k* si existe una sucesión diagonal de orden k en X .

Notemos que un espacio topológico X tiene diagonal G_δ si y solo si existe una familia $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de cubiertas abiertas del espacio tales que para cada par de elementos distintos $x, y \in X$, existe $n \in \omega$ con $y \notin St(x, \mathcal{U}_n)$ o equivalentemente, para cada $x \in X$ se cumple que $\{x\} = \bigcap\{St(x, \mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$, es decir, X tiene diagonal de orden 1.

El siguiente teorema se conoce universalmente como Teorema de Erdős-Rado:

Teorema 3.1.31 ([23], A 4.4). Sea X un conjunto con $|X| > \mathfrak{c}$ y supongamos que $[X]^2 = \bigcup\{P_n : n \in \omega\}$. Entonces existen $n_0 \in \omega$ y un subconjunto S de X con $|S| > \omega$ tal que $[S]^2 \subseteq P_{n_0}$.

Teorema 3.1.32. Si X es un espacio de Hausdorff tenuemente Lindelöf con diagonal de orden 3, entonces la cardinalidad de X es a lo más $\mathfrak{c}$.

Demostración. Supongamos que $|X| > \mathfrak{c}$. Como X tiene diagonal de orden 3, existe una sucesión $\{\mathcal{U}_n : n \in \omega\}$ de cubiertas abiertas de X tales que para cada $x \in X$, tenemos $\{x\} = \bigcap\{St^3(x, \mathcal{U}_n) : n \in \omega\}$. Para cada $n \in \omega$ definimos $P_n = \{\{x, y\} \in [X]^2 : x \notin St^3(y, \mathcal{U}_n)\}$.

Veamos que $[X]^2 = \bigcup\{P_n : n \in \omega\}$. Sea $\{x, y\} \in [X]^2$ y supongamos que $x \in St^3(y, \mathcal{U}_n)$ para cada $n \in \omega$. Entonces $x \in \bigcap\{St^3(y, \mathcal{U}_n) : n \in \omega\} = \{y\}$, así

$x = y$; lo cual es una contradicción; así, $[X]^2 = \bigcup \{P_n : n \in \omega\}$. Por el Teorema 3.1.31 existe un subconjunto no numerable T en X tal que $[T]^2 \subseteq P_{n_0}$ para algún $n_0 \in \omega$. Para ver que X no es tenuemente Lindelöf, basta demostrar que $\{St(x, \mathcal{U}_{n_0}) : x \in T\}$ es una familia no numerable localmente finita de subconjuntos abiertos no vacíos en X .

Con este fin notemos los siguientes hechos:

$$(1) \text{cl}(St(T, \mathcal{U}_{n_0})) \subseteq St^2(T, \mathcal{U}_{n_0}).$$

(2) $\bigcup \{\text{cl}(St(x, \mathcal{U}_{n_0})) : x \in T\} = \text{cl}(St(T, \mathcal{U}_{n_0}))$. Para ver esto es suficiente mostrar que $\{St(x, \mathcal{U}_{n_0}) : x \in T\}$ no tiene punto de acumulación en X . Si y fuera un punto de acumulación de la familia $\{St(x, \mathcal{U}_{n_0}) : x \in T\}$, entonces por (1) tendríamos que $y \in St^2(T, \mathcal{U}_{n_0})$. Por lo que existe $x_0 \in T$ tal que $y \in St^2(x_0, \mathcal{U}_{n_0})$. De esto podemos deducir que si $x \in T \setminus \{x_0\}$ tenemos que $St^2(x_0, \mathcal{U}_{n_0}) \cap St(x, \mathcal{U}_{n_0}) = \emptyset$, pues de otro modo $x \in St^3(x_0, \mathcal{U}_{n_0})$ lo que contradice la elección del conjunto T . Esto muestra que y no es punto de acumulación de $\{St(x, \mathcal{U}_{n_0}) : x \in T\}$; así, hemos demostrado que esta familia no numerable es localmente finita. Por lo tanto, la cardinalidad de X es a lo más $\mathfrak{c}$.

□

Corolario 3.1.33. Si X es un espacio casi celular Lindelöf con diagonal de orden 3, entonces $|X| \leq 2^\omega$.

3.2 Productos de algunas subclases de los espacios tenuemente Lindelöf

Se sabe que el producto de dos espacios de Lindelöf no necesariamente es un espacio de Lindelöf, más aún, en la Proposición 32 de [33] se exhibieron dos subespacios de Lindelöf cuyo producto contiene un subespacio no numerable, abierto, cerrado y discreto; lo que demuestra que tal producto no es ni tenuemente Lindelöf. En esta sección estudiaremos el comportamiento bajo productos de algunas subclases de la clase de los espacios tenuemente Lindelöf.

Teorema 3.2.1. Si X es un espacio celular Lindelöf (respectivamente, casi celular Lindelöf) y Y es un espacio separable, entonces $X \times Y$ es un espacio celular Lindelöf (respectivamente, casi celular Lindelöf).

Demostración. Sea $D = \{d_n : n \in \omega\} \subseteq Y$ un subespacio denso y numerable. Como $X \times \{d_n\}$ es homeomorfo a X se sigue que es un espacio celular Lindelöf (respectivamente, casi celular Lindelöf) para cada $n \in \omega$, por lo que $\bigcup \{X \times \{d_n\} : n \in \omega\}$ también es un espacio celular Lindelöf (respectivamente, casi celular Lindelöf) por ser unión numerable de espacios celular Lindelöf (respectivamente, casi celular Lindelöf) y además es denso en el producto. Por lo tanto, $X \times Y$ es celular Lindelöf (respectivamente, casi celular Lindelöf). □

3.2. PRODUCTOS DE ALGUNAS SUBCLASES DE LOS ESPACIOS TENUEMENTE LINDELÖF

Teorema 3.2.2 ([3], Teorema 5.4). Un espacio celular Lindelöf X cumple que su producto con cualquier espacio compacto es celular Lindelöf si y solo si X contiene un subespacio denso de Lindelöf.

El Ejemplo 2.4 de [16] es un P -espacio de Tychonoff, localmente compacto, celular compacto cuyo producto con un espacio compacto no es celular Lindelöf.

Teorema 3.2.3. Si X es un espacio de Hausdorff, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. El espacio $X \times K$ es casi celular Lindelöf para cada espacio compacto K .
2. Para cada familia $\mathcal{U}$ de conjuntos abiertos no vacíos en X , existe un subespacio $L \subseteq X$ de Lindelöf tal que L interseca $|\mathcal{U}|$ elementos de la familia $\mathcal{U}$.

Demostración. Es un caso particular del Teorema 1.2.13. □

Teorema 3.2.4. Si X es un espacio de Hausdorff, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. El espacio $X \times L$ es casi celular Lindelöf para cada P -espacio de Lindelöf L .
2. Para cada familia $\mathcal{U}$ de conjuntos abiertos no vacíos en X , existe un subespacio $N \subseteq X$ de Lindelöf tal que N interseca $|\mathcal{U}|$ elementos de la familia $\mathcal{U}$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) Sean $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\} \subseteq \tau^*(X)$ y L la lindelöfización unipuntual de un espacio discreto de cardinalidad κ . Sea $\mathcal{W} = \{U_\alpha \times \{\alpha\} : \alpha \in \kappa\} \subseteq X \times L$; como $\mathcal{W}$ es una familia celular en $X \times L$ podemos encontrar un subespacio de Lindelöf $M \subseteq X \times L$ que interseca a κ elementos de la familia $\mathcal{W}$. Así, el subespacio $\pi_X[M]$ es un subespacio de Lindelöf que interseca κ elementos de la familia $\mathcal{U}$.

(2) $\Rightarrow$ (1) Supongamos que L es un P -espacio de Lindelöf y $\mathcal{W}$ es una familia celular en $X \times L$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que cada elemento de la familia $\mathcal{W}$ es un abierto básico en el producto, es decir, $\mathcal{W} = \{U_\alpha \times V_\alpha : \alpha < \kappa\}$, donde $U_\alpha \in \tau^*(X)$ y $V_\alpha \in \tau^*(L)$ para cada $\alpha \in \kappa$. Por el Lema 1.2.11, existe un subespacio de Lindelöf $N \subseteq X$ que interseca a κ elementos de la κ -sucesión $\langle U_\alpha \rangle_{\alpha \in \kappa}$; como la propiedad de Lindelöf se preserva bajo productos con P -espacios de Lindelöf, entonces el subespacio $N \times L$ es de Lindelöf e interseca a κ elementos de la familia $\mathcal{W}$. □

Teorema 3.2.5. Si X es un espacio de Hausdorff y para cada familia $\mathcal{U}$ de conjuntos abiertos no vacíos en X , existe un P -espacio $L \subseteq X$ de Lindelöf tal que L interseca $|\mathcal{U}|$ elementos de la familia $\mathcal{U}$, entonces $X \times M$ es casi celular Lindelöf para cada espacio de Lindelöf M .

Demostración. Supongamos que M es un espacio de Lindelöf y $\mathcal{W}$ es una familia celular en $X \times M$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que cada elemento de la familia $\mathcal{W}$ es un abierto básico en el producto, es decir, $\mathcal{W} = \{U_\alpha \times V_\alpha : \alpha < \kappa\}$, donde $U_\alpha \in \tau^*(X)$ y $V_\alpha \in \tau^*(M)$ para cada $\alpha \in \kappa$. Por el Lema [1.2.11](#), existe un P -espacio de Lindelöf $L \subseteq X$ que interseca a κ elementos de la κ -sucesión $\langle U_\alpha \rangle_{\alpha \in \kappa}$; como la propiedad de Lindelöf se preserva bajo productos con P -espacios de Lindelöf, entonces el subespacio $L \times M$ es de Lindelöf e interseca a κ elementos de la familia $\mathcal{W}$. $\square$

El siguiente resultado demuestra que la propiedad débilmente linealmente Lindelöf es compactamente productiva:

Teorema 3.2.6 ([\[25\]](#), Proposición 11 (f)). Sean X un espacio débilmente linealmente Lindelöf y K un espacio compacto, entonces $X \times K$ es débilmente linealmente Lindelöf.

Es bien conocido que en la clase de los espacios de Hausdorff el producto de un P -espacio de Lindelöf y un espacio Lindelöf es un espacio de Lindelöf; el siguiente lema se requiere para tener una versión del resultado antes mencionado para los espacios débilmente linealmente Lindelöf.

Lema 3.2.7. Un espacio X es débilmente linealmente Lindelöf si y solo si para cada sucesión transfinita $\langle U_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ de subconjuntos abiertos no vacíos con κ un cardinal regular no numerable, existe un elemento $p \in X$ tal que todas sus vecindades intersecan κ elementos de la sucesión transfinita.

Demostración. ($\Leftarrow$) Sea $\{W_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una enumeración fielmente indizada por los términos de la sucesión transfinita $\langle U_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$. Si $\lambda = \kappa$, entonces el resultado es inmediato. Si $\lambda < \kappa$, como κ es un cardinal regular, existe $\beta \in \lambda$ tal que $|\{\alpha \in \kappa : U_\alpha = W_\beta\}| = \kappa$, así cada elemento $p \in W_\beta$ tiene la propiedad requerida. $\square$

Teorema 3.2.8. El producto de un P -espacio débilmente linealmente Lindelöf y un espacio de Lindelöf es un espacio débilmente linealmente Lindelöf.

Demostración. Sean X un P -espacio débilmente linealmente Lindelöf y L un espacio de Lindelöf. Supongamos que $\mathcal{W} = \{U_\alpha \times V_\alpha : \alpha < \kappa\}$ es una familia celular de cardinalidad regular no numerable. Por el Lema anterior la sucesión transfinita $\langle U_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$ tiene un punto de acumulación completo $p \in X$.

Afirmamos que existe $y \in L$ tal que (p, y) es punto de acumulación completo de la familia $\mathcal{W}$. Supongamos lo contrario, es decir, para cada $y \in Y$, el elemento $(p, y) \in X \times L$ tiene una vecindad S_y tal que S_y interseca una cantidad menor que κ elementos de la familia $\mathcal{W}$. Entonces el subespacio de Lindelöf $\{p\} \times L \subseteq X \times L$, está cubierto por la familia $\{S_y : y \in L\}$ y por lo tanto tiene una subcubierta numerable $\{S_{y_n} : n \in \omega\}$. Como X es un P -espacio y κ es un cardinal regular no numerable, $S = \bigcap \{\pi_X[S_{y_n}] :$

3.2. PRODUCTOS DE ALGUNAS SUBCLASES DE LOS ESPACIOS TENUEMENTE LINDELÖF

$n \in \omega\}$ es un conjunto abierto que contiene a p y que interseca una cantidad menor que κ elementos de la sucesión transfinita $\langle U_\alpha : \alpha < \kappa \rangle$.

□

*CAPÍTULO 3. DOS SUBCLASES DE LA CLASE DE LOS ESPACIOS
TENUEMENTE LINDELÖF*

Capítulo 4

LOTS funcionalmente numerables

Un espacio X se llama *funcionalmente numerable* si $f[X]$ es numerable para cada función continua $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Este concepto fue introducido en los años cincuenta en los artículos [30] y [34]. Esta propiedad topológica ha sido estudiada por diversos autores en los siguientes artículos [27], [36], [41]. Dado un conjunto linealmente ordenado $\langle X, < \rangle$, la *topología del orden* es la topología $\tau_<$ generada por todos los intervalos $(\leftarrow, x)$ y $(x, \rightarrow)$ para cada $x \in X$; el par $\langle X, \tau_< \rangle$ llamado *espacio topológico linealmente ordenado* (“linearly ordered topological space”), *LOTS* para abreviar. En este capítulo nos enfocaremos en la siguiente pregunta que aparece en [38]:

Pregunta 4.0.1. *Supongamos que X es un LOTS y $X^2 \setminus \Delta_X$ es funcionalmente numerable. ¿Es cierto que X es separable?*

Todos los resultados en este capítulo sin atribución a algún autor son resultados del artículo [20].

4.1 Herramientas para contestar la pregunta

Los siguientes resultados son mencionados en [38], pero por completez de este trabajo incluimos la demostración del primero.

Teorema 4.1.1 ([38], Proposición 3.1 (b)). Si X es un espacio de Tychonoff funcionalmente numerable, entonces X tiene la DCCC.

Demostración. Supongamos que $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia discreta de subconjuntos abiertos no vacíos. Sea $f : \omega_1 \rightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva. Definimos la siguiente función $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera:

$$g(x) = \begin{cases} f(\alpha), & \text{si } x \in U_\alpha, \\ 0, & \text{si } x \notin \bigcup \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}. \end{cases}$$

Entonces g es una función continua tal que $|g[X]| > \omega$. □

Lema 4.1.2 ([38], Proposición 3.1 (a)). Sean X un espacio funcionalmente numerable y $f : X \rightarrow Y$ una función continua sobreyectiva, entonces Y es un espacio funcionalmente numerable.

Lema 4.1.3 ([38], Proposición 3.2). Si X es un espacio topológico y $X^2 \setminus \Delta$ es funcionalmente numerable, entonces X y X^2 son espacios funcionalmente numerables.

Dado un conjunto linealmente ordenado $\langle X, < \rangle$ y $A, B \subset X$ diremos $A <_s B$ (“ A está antes de B ”) si para $a \in A$ y para cada $b \in B$ se cumple $a < b$. El siguiente resultado es importante para dar respuesta a la primer Pregunta 4.0.1

Lema 4.1.4. Sea $\langle X, \tau_{<} \rangle$ un LOTS. Supongamos que existe una familia no numerable $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ de subconjuntos abiertos no vacíos tales que:

- para cada $\alpha < \omega_1$ existen subconjuntos abiertos no vacíos $I_\alpha, J_\alpha \subset U_\alpha$ tales que $I_\alpha <_s J_\alpha$; y
- si $\alpha, \beta < \omega_1$ tales que $\alpha \neq \beta$, entonces $U_\alpha <_s U_\beta$ o $U_\beta <_s U_\alpha$.

Entonces $\mathcal{W} = \{I_\alpha \times J_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia discreta de subconjuntos abiertos no vacíos en $X^2 \setminus \Delta$. (La Figura 4.1 al final de la demostración ilustra a la familia $\mathcal{U}$).

Demostración. Sean $x, y \in X$ elementos distintos, consideremos los siguientes casos:

- Caso (1.1). Si $y < x$ y existe $z \in (y, x)$, entonces $W = (z, \rightarrow) \times (\leftarrow, z)$ es un abierto que contiene a $\langle x, y \rangle$ y que no interseca a ningún elemento de la familia $\mathcal{W}$.
- Caso (1.2). Si $y < x$ y $(y, x) = \emptyset$, entonces $W = (y, \rightarrow) \times (\leftarrow, x)$ es un abierto que contiene a $\langle x, y \rangle$ y que no interseca a ningún elemento de la familia $\mathcal{W}$.
- Caso (2.1). Si $x < y$ y existen $\alpha, \beta < \omega_1$ con $\alpha \neq \beta$ tales que $(I_\alpha \cup J_\alpha) \cap (x, y) \neq \emptyset$ y $(I_\beta \cup J_\beta) \cap (x, y) \neq \emptyset$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $U_\alpha <_s U_\beta$, entonces $(I_\alpha \cup J_\alpha) <_s (I_\beta \cup J_\beta)$ así podemos encontrar $p \in (I_\alpha \cup J_\alpha) \cap (x, y)$ y $q \in (I_\beta \cup J_\beta) \cap (x, y)$ que cumplen lo siguiente $x < p < q < y$. Así, el conjunto $W = (\leftarrow, p) \times (q, \rightarrow)$ es un conjunto abierto que contiene a $\langle x, y \rangle$. Ahora veamos que W no interseca ningún elemento de la familia $\mathcal{W}$.

Sean $\gamma < \omega_1$ y $\langle a, b \rangle \in W$. Si $U_\gamma \leq_s U_\alpha$, como $b > q$, tenemos que $b \notin I_\gamma \cup J_\gamma$, así $\langle a, b \rangle \notin I_\gamma \times J_\gamma$. Si $U_\gamma >_s U_\alpha$, como $a < p$, tenemos que $a \notin I_\gamma \cup J_\gamma$, así $\langle a, b \rangle \notin I_\gamma \times J_\gamma$.

- Caso (2.2). Si $x < y$ y existe un único $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $(I_{\alpha_0} \cup J_{\alpha_0}) \cap (x, y) \neq \emptyset$. Sean $z \in (I_{\alpha_0} \cup J_{\alpha_0}) \cap (x, y)$ y $W = (\leftarrow, z) \times (z, \rightarrow)$, ahora veamos que W interseca a lo más a un elemento de la familia $\mathcal{W}$.

Sean $\gamma < \omega_1$ y $\langle a, b \rangle \in W$. Si $U_\gamma <_s U_{\alpha_0}$, como $b > z$ tenemos que $b \notin I_\gamma \cup J_\gamma$, así $\langle a, b \rangle \notin I_\gamma \times J_\gamma$. Si $\gamma > \alpha_0$, como $a < z$, tenemos que $a \notin I_\gamma \cup J_\gamma$, así $\langle a, b \rangle \notin I_\gamma \times J_\gamma$. Entonces el único elemento de la familia $\mathcal{W}$ al que W puede intersecar es a lo más a $I_{\alpha_0} \times J_{\alpha_0}$.

- Caso (2.3). Si $x < y$ y para cada $\alpha < \omega_1$ se tiene que $(I_\alpha \cup J_\alpha) \cap (x, y) = \emptyset$, tenemos los siguientes subcasos:

(2.3.1). Si existe $\alpha_0 < \omega_1$ tal que $I_{\alpha_0} \subseteq (\leftarrow, x]$ y $J_{\alpha_0} \subseteq [y, \rightarrow)$, sea $W = (\leftarrow, y) \times (x, \rightarrow)$; ahora veamos que W interseca a lo más a un elemento de la familia $\mathcal{W}$.

Sean $\gamma < \omega_1$ y $\langle a, b \rangle \in W$. Si $U_\gamma <_s U_{\alpha_0}$, como $b > x$, tenemos que $b \notin I_\gamma \cup J_\gamma$, así $\langle a, b \rangle \notin I_\gamma \times J_\gamma$. Si $\gamma > \alpha_0$, tenemos que $a < y$, entonces $a \notin I_\gamma \cup J_\gamma$, así $\langle a, b \rangle \notin I_\gamma \times J_\gamma$. Entonces el único elemento de la familia $\mathcal{W}$ al que W puede intersecar es a lo más a $I_{\alpha_0} \times J_{\alpha_0}$.

(2.3.2). Si para todo $\alpha < \omega_1$ se tiene que $I_\alpha \cup J_\alpha \subseteq (\leftarrow, x]$ o $I_\alpha \cup J_\alpha \subseteq [y, \rightarrow)$. Sea $W = (\leftarrow, y) \times (x, \rightarrow)$, ahora veamos que W no interseca a ningún elemento de la familia $\mathcal{W}$.

Sean $\gamma < \omega_1$ y $\langle a, b \rangle \in W$. Si $I_\gamma \cup J_\gamma \subseteq (\leftarrow, x]$, como $b > x$ se sigue que $b \notin I_\gamma \cup J_\gamma$, así $\langle a, b \rangle \notin I_\gamma \times J_\gamma$. Si $I_\alpha \cup J_\alpha \subseteq [y, \rightarrow)$ como $a < y$ se sigue que $a \notin I_\gamma \cup J_\gamma$, así $\langle a, b \rangle \notin I_\gamma \times J_\gamma$.

Así, la familia $\mathcal{W}$ es una familia discreta de subconjuntos abiertos no vacíos en $X^2 \setminus \Delta$.

□

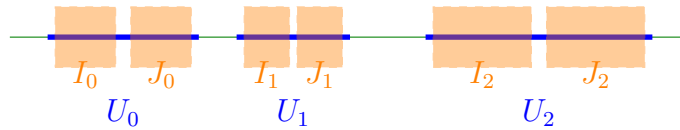


Figura 4.1: Familia $\mathcal{U}$ del Lema 4.1.4

Sean $\langle X, < \rangle$ y $\langle Y, < \rangle$ conjuntos linealmente ordenados, decimos que una función $f : X \rightarrow Y$ es un *encaje ordenado* si para cada par de elementos $x_0, x_1 \in X$ tales que $x_0 < x_1$ se cumple que $f(x_0) < f(x_1)$. Si $f : X \rightarrow Y$ es un encaje ordenado, diremos

que Y contiene una *copia ordenada* de X . Si f es una función sobreyectiva, entonces f se llama *isomorfismo de orden*. Es bien conocido que para cada conjunto linealmente ordenado $\langle X, < \rangle$ existe un conjunto linealmente ordenado $\langle Y, < \rangle$ y un encaje ordenado $g : X \rightarrow Y$ tal que:

- Y es Dedekind completo, es decir, cada subconjunto no vacío de Y tiene supremo e ínfimo; y
- $h[X]$ es topológicamente denso en Y , es decir, cada intervalo abierto en Y tiene intersección no vacía con $h[X]$.

Consideremos al ordinal ω_1 con su orden canónico y denotemos por ω_1^* a ω_1 con el orden inverso del canónico.

Proposición 4.1.5. Sea X un LOTS. Si X contiene una copia ordenada de ω_1 o de ω_1^* , entonces $X^2 \setminus \Delta_X$ no tiene la DCCC y por lo tanto, X no es funcionalmente numerable.

Demostración. Supongamos que X contiene una copia ordenada de ω_1 . Es decir, $\{x_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subset X$ tal que si $\alpha < \beta < \omega_1$ tenemos que $x_\alpha < x_\beta$. Dado $\alpha < \omega_1$ existen ordinales únicos $\gamma < \omega_1$ que es un ordinal límite o es 0 y algún $n < \omega$ tal que $\alpha = \gamma + n$; definimos $U_\alpha = (x_{\gamma+4n}, x_{\gamma+4n+4})$. Sean $I_\alpha = (x_{\gamma+4n}, x_{\gamma+4n+2})$ y $J_\alpha = (x_{\gamma+4n+2}, x_{\gamma+4n+4})$. Entonces la familia $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ satisface las hipótesis del Lemma 4.1.4. Así, X no tiene la DCCC.

Si X contiene una copia ordenada de ω_1^* , podemos concluir de forma análoga que X no tiene la DCCC. □

La existencia de copias ordenadas de ω_1 o de ω_1^* está relacionado con el primer axioma de numerabilidad de la siguiente manera:

Lema 4.1.6. Sean Y un conjunto linealmente ordenado Dedekind completo y $X \subset Y$ topológicamente denso en Y . Entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

1. X no contiene copias ordenadas de ω_1 ni de ω_1^* ,
2. Y no contiene copias ordenadas de ω_1 ni de ω_1^* , y
3. Y es primero numerable con la topología del orden.

En la Proposición 3.14 [41] se demostró $(1) \Rightarrow (2)$ y las otras implicaciones se siguen del Problema 3.12.4 de [17].

Corolario 4.1.7. Sea X un LOTS. Si $(X \times X) \setminus \Delta_X$ es funcionalmente numerable, entonces X no contiene copias ordenadas de ω_1 ni de ω_1^* .

Corolario 4.1.8. Sea $\langle X, \tau_{<} \rangle$ un LOTS tal que $X^2 \setminus \Delta$ es un espacio DCCC, entonces X es primero numerable.

Corolario 4.1.9. Sea X un LOTS. Si $(X \times X) \setminus \Delta_X$ es funcionalmente numerable, entonces X es primero numerable.

Lema 4.1.10. Sean X un espacio linealmente ordenado, $D \subseteq X$ y $h : D \rightarrow (0, 1)$ un encaje ordenado con $Im(h)$ denso en $(0, 1)$. Entonces existe una función continua $H : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $H \upharpoonright_D = h$.

Demostración. Para cada $x \in X$, sea $A_x = \{h(d) : d \in D \text{ y } d \leq x\}$ y definimos la siguiente función:

$$H(x) = \begin{cases} \sup(A_x), & \text{si } A_x \neq \emptyset, \\ 0, & \text{si } A_x = \emptyset \end{cases}$$

entonces H es una función continua y $H : X \rightarrow [0, 1]$.

Veamos que H es una función continua, para este fin sean $x \in X$ y $\epsilon > 0$.

- Supongamos que $A_x \neq \emptyset$, entonces $H(x) = \sup\{h(d) : d \in D, d \leq x\}$. Como $h[D]$ es denso en $(0, 1)$, podemos encontrar $h(d_0) \in (H(x) - \epsilon, H(x))$ y $h(d_1) \in (H(x), H(x) + \epsilon)$. Basta probar que $x \in (d_0, d_1)$ y que para cada $y \in (d_0, d_1)$, se cumple que $H(y) \in (H(x) - \epsilon, H(x) + \epsilon)$. Como h es un encaje ordenado se cumple que $h(d_0) < h(d_1)$.

Para probar la primer parte, primero supongamos que:

1. $x \leq d_0$, entonces $H(x) = \sup\{h(d) : d \in D, d \leq x\}$. Como $x < d_0$, se tiene que $h(d_0)$ es cota superior de A_x . Así, $H(x) \leq h(d_0)$, lo que contradice que $h(d_0) \in (H(x) - \epsilon, H(x))$.
2. Ahora supongamos que $d_1 \leq x$. Entonces $h(d_1) \in A_x$, por lo que $h(d_1) \leq H(x)$, lo que contradice que $h(d_1) \in (H(x), H(x) + \epsilon)$.

Para probar la segunda parte, sea $y \in (d_0, d_1)$. Tenemos que $H(x) - \epsilon < h(d_0) \leq H(y)$, ya que $h(d_0) \in A_y$. Por otro lado, $h(y) \in A_{d_1}$, y $h(d_1) < H(x) + \epsilon$, por lo que $h(y) \leq H(d_1) < H(x) + \epsilon$. De las dos desigualdades anteriores tenemos que $H(y) \in (H(x) - \epsilon, H(x) + \epsilon)$.

- Si $A_x = \emptyset$;
 1. Si $x = \inf(D)$. Como $h[D]$ es denso en $(0, 1)$, existe $d_0 \in D$ tal que $h(d_0) \in (0, \epsilon)$. Sea $d \in (\leftarrow, d_0)$. Si $x < d$, entonces $H(d) \leq h(d_0) < \epsilon$ y si $d \leq x$, entonces $H(d) = 0 < \epsilon$.
 2. Si $x \neq \inf(D)$. Sea $z \in X$ con $x < z$ y $z \leq d$, para cada $d \in D$, así $U = (\leftarrow, z)$ es un abierto tal que $H[U] = \{0\} \subseteq [0, \epsilon)$.

Veamos que la imagen de H es todo el intervalo $[0, 1]$. Si $x < d$ para cada $d \in D$, entonces $H(x) = 0$ y si $x > d$ para algún $d \in D$, entonces A_x es no vacío y 1 es cota superior de A_x , por lo que $H(x) \in [0, 1]$.

□

Definición 4.1.11. Un conjunto linealmente ordenado $\langle X, < \rangle$ es una *Recta de Aronszajn* si:

1. $|X| > \omega$;
2. X no contiene copias ordenadas de ω_1 ni de ω_1^* ; y
3. cualquier subconjunto de X que es isomorfo a un subconjunto de $\mathbb{R}$ es numerable.

Teorema 4.1.12. Sea X un LOTS no numerable con $X^2 \setminus \Delta$ funcionalmente numerable, entonces X es una Recta de Aronszajn.

Demostración. Basta demostrar que cualquier subconjunto de X que es isomorfo a un subconjunto de $\mathbb{R}$ es numerable. Para este fin, supongamos que $Y \subseteq X$ es un subconjunto no numerable y que $j : Y \rightarrow (0, 1)$ es un encaje ordenado. Sean:

- $Z = j[Y]$;
- $Z_0 = \bigcup \{(a, b) \cap Z : a, b \in \mathbb{Q}, a < b, \text{ y } |(a, b) \cap Z| \leq \omega\}$;
- $I = \inf(Z \setminus Z_0)$ y $S = \sup(Z \setminus Z_0)$.
- $Z_1 = \{x \in Z \setminus Z_0 : \text{ existe } y \in Z \setminus Z_0 \text{ con } (y, x) \cap (Z \setminus Z_0) = \emptyset\}$;
- $Z_2 = Z \setminus (Z_0 \cup Z_1 \cup \{I, S\})$.

Supongamos que Z_2 es un subconjunto numerable del intervalo $(0, 1)$. Notemos que $Z \subseteq Z_2 \cup (Z_0 \cup Z_1 \cup \{I, S\})$ y que Z_0 es un subconjunto numerable por ser la unión numerable de subconjuntos numerables. Dado $x \in Z_1$, existe $y \in Z \setminus Z_0$ tal que $(y, x) \cap (Z \setminus Z_0) = \emptyset$, por la densidad de los racionales existe $q_x \in (y, x) \cap \mathbb{Q}$. Como $\phi : Z_1 \rightarrow \mathbb{Q}$, dada por $\phi(x) = q_x$ es inyectiva, tenemos que $|Z_1| = \omega$. Entonces Z está contenido en la unión finita de subconjuntos numerables, lo que es una contradicción. Por lo tanto $|Z_2| > \omega$.

Veamos que dados $a, b \in Z_2$ con $a < b$, se tiene que $(a, b) \cap Z_2 \neq \emptyset$. Para demostrar esto, supongamos que existen $a_0, b_0 \in Z_2$, $a_0 < b_0$ y $(a_0, b_0) \cap Z_2 = \emptyset$. Si $I, S \notin (a_0, b_0)$, entonces $(a_0, b_0) \cap (Z \setminus Z_0) \subseteq Z_1$. Sea $c \in Z_1 \cap (a_0, b_0)$, entonces existe $w \in Z \setminus Z_0$ tal que $(w, c) \cap (Z \setminus Z_0) = \emptyset$. Si $w < a_0$, entonces $a_0 \in (w, c) \cap (Z \setminus Z_0)$, lo que es una contradicción, por lo que $a_0 \leq w$. Notemos que existe $y \in (Z \setminus Z_0) \cap (c, b_0)$, de lo contrario c sería un elemento aislado en $Z \setminus Z_0$. Entonces existe $v \in Z \setminus Z_0$ tal que $(v, y) \cap (Z \setminus Z_0) = \emptyset$. Si $v < c$, entonces $c \in (v, y) \cap (Z \setminus Z_0)$, lo que es una contradicción;

así $c \leq v$. Entonces $v \in Z_1$, por lo que existe $u \in Z \setminus Z_0$, tal que $(u, v) \cap (Z \setminus Z_0) = \emptyset$, esto implica que v es elemento aislado de $Z \setminus Z_0$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, dados cualesquiera $a, b \in Z_2$ con $a < b$, se tiene que $(a, b) \cap Z_2 \neq \emptyset$.

Sea $Q \subseteq Z_2$ un subconjunto denso numerable (topológicamente). Veamos que dados $a, b \in Q$, con $a < b$, entonces $(a, b) \cap Q \neq \emptyset$. Para ver esto, sean $a, b \in Q$, con $a < b$. Por lo demostrado anteriormente tenemos que $U = (a, b) \cap Z_2 \neq \emptyset$, es decir, U es un subconjunto abierto no vacío en Z_2 , como Q es denso topológicamente en Z_2 , existe $p \in Q \cap U$, es decir, $a < p < b$.

Veamos que Z_2 no tiene elemento mínimo ni máximo, para este fin sean:

- $W = j^{-1}[Z_2] \subseteq Y \subseteq X$;
- $D = j^{-1}[Q] \subseteq W \subseteq Y \subseteq X$;

Como j es un isomorfismo de orden, se tiene que para cualesquiera $d_0, d_1 \in D$ tales que $d_0 < d_1$, existe $d \in D$ tal que $d_0 < d < d_1$, además, D no tiene elemento mínimo ni máximo. Por el Teorema 10.2 de [26], D es isomorfo como orden a $\mathbb{Q} \cap (0, 1)$. Sea $h : D \rightarrow \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ el isomorfismo de orden. Para cada $x \in X$, sea $A_x = \{h(d) : d \in D \text{ y } d \leq x\}$ y definimos $H : X \rightarrow [0, 1]$ de la siguiente forma:

$$H(x) = \begin{cases} \sup(A_x), & \text{si } A_x \neq \emptyset, \\ 0, & \text{si } A_x = \emptyset \end{cases}$$

Por el Lema 4.1.10, H es una función continua y es no decreciente; por lo tanto Q tampoco tiene elemento mínimo ni máximo.

Veamos que $H \upharpoonright_W$ es una función inyectiva; para este propósito sean $w_0, w_1 \in W \subseteq Y$ con $w_0 < w_1$, entonces existen $d_0, d_1 \in D$ tales que $w_0 < d_0 < d_1 < w_1$, así $h(d_0) < h(d_1)$. Como el subconjunto A_{w_0} está acotado superiormente por $h(d_0)$, tenemos que $\sup(A_{w_0}) \leq h(d_0)$. Además, $h(d_1) \in A_{w_1}$, se sigue que $h(d_1) \leq \sup(A_{w_1})$. Por lo tanto:

$$H(w_0) \leq H(d_0) < H(d_1) \leq H(w_1)$$

Se sigue que $H \upharpoonright_W$ es inyectiva. Como $|W| > \omega$, tenemos que $H[X]$ es no numerable en $[0, 1]$, lo que contradice que X es funcionalmente numerable, por lo tanto $|Y| = \omega$. $\square$

Corolario 4.1.13. Si X es un LOTS funcionalmente numerable, entonces X no contiene copias ordenadas de subconjuntos no numerables de $\mathbb{R}$.

Un espacio topológico se llama *disperso* si cada subespacio no vacío tiene un punto aislado. Decimos que $\langle X, \tau_{<} \rangle$ es un *espacio ordenado generalizado* (“*generalized ordered space*”) si es un subespacio de un LOTS; para abreviar diremos que $\langle X, \tau_{<} \rangle$ es un espacio GO por sus siglas en inglés.

Teorema 4.1.14 ([41], Teorema 3.10). Si $\langle X, \tau_{<} \rangle$ es un espacio GO funcionalmente numerable y $A \subseteq X$ es un subconjunto numerable, entonces $\text{cl}(A)$ también es numerable.

El siguiente ejemplo demuestra que en la clase de los espacios GO ser funcionalmente numerable no es equivalente a tener la propiedad en donde la cerradura de cada subespacio numerable sea también numerable.

Ejemplo 4.1.15. Sea $X = (\mathbb{Q} \times \{0, 2\}) \cup (\mathbb{R} \times \{1\})$ con la topología de subespacio de $\mathbb{R} \times 3$ con el orden lexicográfico. Primero notemos que si $p_1 = (x, 1) \in \mathbb{R} \times \{1\}$ y tomamos el intervalo $V = (p_0, p_2)_{<}$, donde $p_0 = (x, 0)$ y $p_2 = (x, 2)$, entonces $p_1 \in V$ y $V \cap X = \{p_1\}$, por lo que los elementos de $\mathbb{R} \times \{1\}$ son puntos aislados. Ahora, sea $N \subseteq X$ un subespacio numerable, observemos que $M = (N \cap (\mathbb{R} \times \{1\})) \cup (\mathbb{Q} \times \{0, 2\})$ es un subconjunto numerable, por lo que $X \setminus M$ es un subconjunto abierto por ser un subconjunto de puntos aislados y $N \subseteq M$. Por lo tanto, $\text{cl}(N) \subseteq M$ y como M es un subconjunto numerable, se sigue que $\text{cl}(N)$ también lo es. Como $\mathbb{R} \times \{1\}$ es una copia isomorfa (no homeomorfa) a $\mathbb{R}$, se sigue del Corolario 4.1.13 que X no es funcionalmente numerable.

4.2 Rectas de Souslin funcionalmente numerables

Para responder la Pregunta 4.0.1 planteada al inicio del capítulo, es necesario definir un tipo especial de puntos en un conjunto linealmente ordenado.

Definición 4.2.1. Sea $\langle X, \tau_{\leftarrow} \rangle$ un conjunto linealmente ordenado, decimos que x es *solitario* en X si sucede alguno de los siguientes casos:

1. $x = \min(X)$ y existe $a \in X$, con $a > x$, $(x, a) = \emptyset$, $(a, \rightarrow) \neq \emptyset$ y $a = \inf((a, \rightarrow))$;
2. $x = \max(X)$ y existe $a \in X$, con $a < x$, $(a, x) = \emptyset$, $(\leftarrow, a) \neq \emptyset$ y $a = \sup((\leftarrow, a))$;
3. existen $a, b \in X$ con $a < x < b$, $(a, b) = \{x\}$, $(b, \rightarrow) \neq \emptyset \neq (\leftarrow, a)$, $a = \sup((\leftarrow, a))$ y $b = \inf((b, \rightarrow))$.

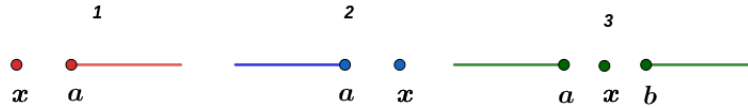


Figura 4.2: Puntos solitarios de un LOTS

Denotaremos por $S(X)$ al conjunto de elementos solitarios de un espacio X .

Sean X un LOTS y $Y \subseteq X$, un intervalo abierto en Y se denotará por $(a, b)_Y = (a, b) \cap Y$, donde (a, b) es intervalo abierto en X .

Lema 4.2.2. Si X es un LOTS y $Y = X \setminus S(X)$, entonces $S(Y) = \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $S(Y) \neq \emptyset$. Sea $p \in S(Y) \subseteq Y = X \setminus S(X)$, entonces tenemos los siguiente casos:

1. $p = \min(Y)$, entonces existe $y \in Y$ con $p < y$ tal que $(p, y)_Y = \emptyset$ y $y = \inf_Y(y, \rightarrow)$. Como $(p, y) \cap Y = \emptyset$, se sigue que $(p, y) \subseteq X \setminus Y = S(X)$. Si $|(p, y)| \geq 2$. Sean $x_1, x_2 \in (p, y) \subseteq S(X)$ con $x_1 < x_2$, entonces existe z_1 con $x_1 < z_1$ tal que $(x_1, z_1) = \emptyset$ y $z_1 = \inf_X(z_1, \rightarrow)$. Como z_1 no es un elemento aislado de X se tiene que $z_1 \notin (p, y) \subseteq S(X)$, así, $z_1 \geq y$ lo que es una contradicción, ya que $x_2 \in (x_1, y) \subseteq (p, y)$ y $(x_1, z_1) = \emptyset$. Entonces $|(p, y)| \leq 1$.
 - Si $p = \min(X)$. Sea $x_1 \in (p, y) \subseteq S(X)$. Notemos $(\leftarrow, p) = \emptyset$, por lo que x_1 no puede ser solitario.
 - Si $p \neq \min(X) = m$. Sea $x_1 \in (p, y) \subseteq S(X)$. Si $(m, p) = \emptyset$, tenemos que $\{x_1\} = (p, y)$, $y = \inf_X((y, \rightarrow))$, pero $p \neq \sup_X((\leftarrow, p))$, por lo tanto $x_1 \notin S(X)$. Supongamos que $|(m, p)| \geq 2$. Sean $w_1, w_2 \in (m, p) \subseteq S(X)$ con $w_1 < w_2$, entonces existe d_1 con $w_1 < d_1$ tal que $(w_1, d_1) = \emptyset$ y $d_1 = \inf_X(d_1, \rightarrow)$. Como d_1 no es un elemento aislado de X se tiene que $d_1 \notin (m, y) \subseteq S(X)$, así, $d_1 \geq y$, lo que es una contradicción, ya que $w_2 \in (w_1, y) \subseteq (m, y)$ y $(w_1, d_1) = \emptyset$. Entonces $|(m, p)| \leq 1$. Sea $w_1 \in (m, p) \subseteq S(X)$, pero w_1 es sucesor de m , lo que contradice que w_1 es solitario.

2. $p = \max(Y)$. Es análogo al caso 1, tomando las desigualdades recíprocas.
3. existen $a, b \in Y \subseteq X$ con $a < p < b$, $(a, b) = \{p\}$, $a = \sup((\leftarrow, a))$ y $b = \inf((b, \rightarrow))$, también es análogo. Es una combinación de los casos 1 y 2.

□

Lema 4.2.3. Si X es un LOTS y $Y = X \setminus S(X)$, entonces Y es un LOTS.

Recordemos el siguiente concepto:

Definición 4.2.4. Un conjunto linealmente ordenado $\langle X, < \rangle$ es una *Recta de Souslin* si:

- $d(X) > \omega$; y
- $c(X) = \omega$.

Es bien conocido que la existencia de Rectas de Souslin es independiente de los axiomas de ZFC.

Definición 4.2.5. Decimos que una función continua $\psi : X \rightarrow Y$ es una retracción si $Y \subset X$ y para cada $y \in Y$, $\psi(y) = y$.

Teorema 4.2.6. Sea X un LOTS no numerable tal que $X^2 \setminus \Delta$ es funcionalmente numerable, entonces $Y = X \setminus S(X)$ es una Recta de Souslin y existe una retracción $h : X \rightarrow Y$ con fibras convexas de cardinalidad menor o igual a dos.

Demostración. Sean $Y = X \setminus S(X)$ y $h : X \rightarrow Y$, dada por:

$$h(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in Y, \\ x^+, & \text{si } x \in S(X), x \neq \max(X) \\ x^-, & \text{si } x \in S(X), x = \max(X) \end{cases}$$

Veamos que h tiene fibras de cardinalidad menor o igual a dos, para este fin, sea $y \in Y$:

- Si $y \neq \max(Y)$ y existe $x \in S(X)$ tal que $y = x^+$, entonces $h(x) = y$ y $h(x^+) = y$, por lo que $h^{-1}[\{y\}] \subseteq \{y, y^-\}$.
- si $y = \max(Y)$ y existe $x \in S(X)$ tal que $y = x^-$, entonces $h(x) = y$ y $h(x^-) = y$, por lo que $h^{-1}[\{y\}] \subseteq \{y, y^+\}$.

Por lo tanto, $|h^{-1}[\{y\}]| \leq 2$ para cada $y \in Y$.

Para ver que h es una función continua, sea $U = (a, \rightarrow) \cap Y$, si:

- $a \in S(X)$, entonces $h^{-1}[U] = (a, \rightarrow) \cup \{a\}$, como a es un punto aislado, se sigue que $h^{-1}[U]$ es un subconjunto abierto.
- $a \in X \setminus S(X)$, entonces $h^{-1}[U] = (a, \rightarrow)$.

Ahora, sea $U = (\leftarrow, a) \cap Y$, si:

- $a = \max(X)$ y $a \in S(X)$, entonces $h^{-1}[U] = (\leftarrow, a) \cup \{a\} = X$.
- $a = \max(X)$ y $a \in X \setminus S(X)$, entonces $h^{-1}[U] = (\leftarrow, a)$.
- $a \neq \max(X)$ y a no tiene antecesor inmediato, entonces $h^{-1}[U] = (\leftarrow, a)$.
- $a \neq \max(X)$ y a tiene antecesor inmediato b , pero $b \in X \setminus S(X)$, entonces $h^{-1}[U] = (\leftarrow, a)$.
- $a \neq \max(X)$ y a tiene antecesor inmediato b con $b \in S(X)$, entonces $h^{-1}[U] = (\leftarrow, b)$.

Por lo tanto, h es una función continua.

Notemos que Y es un subconjunto no numerable; ya que si $|S(X)| = \omega$, entonces $|Y| > \omega$ y si $|S(X)| > \omega$, entonces $\{x^+ : x \in S(X), x \neq \max(X)\}$ es un subconjunto no numerable de Y , y por lo tanto $|Y| > \omega$.

Como $X^2 \setminus \Delta$ es funcionalmente numerable, entonces X es un espacio funcionalmente numerable por el Lema 4.1.3 y como $h : X \rightarrow Y$ es una función continua, se sigue que Y es funcionalmente numerable. Si $D \subseteq Y$ es un subconjunto numerable, por el Teorema 4.1.14 tenemos que $\text{cl}(D)$ es numerable, por lo tanto Y no es separable.

Veamos que $c(Y) = \omega$, para este fin supongamos lo contrario, es decir, que $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia celular en Y y que para cada $\alpha < \omega_1$ el subconjunto U_α es convexo. Definimos $A = \{x \in Y : \{x\} \text{ es un subconjunto abierto}\}$. Si A es un subconjunto numerable, entonces $\mathcal{V} = \{U \in \mathcal{U} : A \cap U = \emptyset\}$, es una subcolección de $\mathcal{U}$ de cardinalidad ω_1 con las propiedades del Lema 4.1.4, lo que es una contradicción; si A es un subconjunto no numerable, entonces para cada par $a, b \in A$, definimos $a \sim b$ si $a = b$ o $[\min\{a, b\}, \max\{a, b\}]$ es finito. Notemos que $a \sim a$ para cada $a \in A$, si $a \sim b$, entonces $[\min\{a, b\}, \max\{a, b\}] = [\min\{b, a\}, \max\{b, a\}]$, por lo que $b \sim a$; para ver que la relación es transitiva sean $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $[\min\{a, b\}, \max\{a, b\}]$ y $[\min\{b, c\}, \max\{b, c\}]$ son subconjuntos finitos, entonces $[\min\{a, c\}, \max\{a, c\}]$ es un subconjunto finito ya que está contenido en la unión de dos subconjuntos finitos; por lo que $\sim$ es una relación de equivalencia en A . Sea $\mathcal{E} = A / \sim$ y veamos que cada

clase de equivalencia de $\mathcal{E}$ es convexa, para demostrar esto supongamos que $E \in \mathcal{E}$ y sean $e_1, e_2 \in E$; si z es un elemento tal que $e_1 < z < e_2$, entonces $||[e_1, e_2]|| < \omega$ y $[e_1, z] \subseteq [e_1, e_2]$, por lo que $||[e_1, z]|| < \omega$, así $z \sim e_1$, y por lo tanto $z \in E$ se sigue que cada elemento de $\mathcal{E}$ es un subconjunto convexo. Por el Lema 4.2.3 de la definición de Y se puede ver que cada elemento de $\mathcal{E}$ tiene cardinalidad al menos dos.

Observemos que si $E \in \mathcal{E}$ y $\min(E) = e_0$, $\max(E) = e_1$ existen, entonces $E = [e_0, e_1]$ y como $||[e_0, e_1]|| = n \in \omega$, se sigue que E es isomorfo a n con $n \geq 2$. Ahora, si $\min(E) = e_0$ existe, pero E no tiene máximo, entonces para cada $e \in E$ tenemos que $||[e_0, e]||$ es un número entero positivo y definimos $\lambda : E \rightarrow \omega$ por $\lambda(e) = ||[e_0, e]|| - 1$.

La función λ es inyectiva, veamos que λ es sobreyectiva, para este fin supongamos que existe $m = \min\{l \in \omega : l \notin \lambda[E]\}$, entonces $m - 1 = \lambda(e)$ para algún $e \in E$, como E no tiene máximo existe $e^* \in E$ tal que $e < e^*$, así $||[e, e^*]|| = k < \omega$ con $k \geq 2$, por lo que existe $e' \in (e, e^*]$ tal que $e' = e^+$, se sigue que $\lambda(e') = m$, lo que es una contradicción, por lo tanto λ es una función sobreyectiva. Por la tanto, E es isomorfo a ω . De forma análoga se puede ver que si E tiene máximo, pero no mínimo, entonces E es isomorfo a ω^* y si E no tiene elemento mínimo ni máximo, entonces usando las dos conclusiones previas se tiene que E es isomorfo a $\mathbb{Z}$.

Así, cada elemeto de $\mathcal{E}$ es un subconjunto abierto, numerable con al menos dos elementos. Como A es un subconjunto no numerable, también lo es $\mathcal{E}$. Por lo que podemos tomar una subcolección no numerable de $\mathcal{E}$, es decir, sea $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha < \omega_1\} \subseteq \mathcal{E}$ tal que $\mathcal{V}$ es una familia celular de subconjuntos convexos de cardinalidad al menos dos.

Para cada $\alpha < \omega_1$ sean I_α, J_α subconjuntos abiertos no vacíos tales que $I_\alpha \cup J_\alpha \subseteq V_\alpha$ con $I_\alpha <_s J_\alpha$. Por el Lema 4.1.4 tenemos que $\{I_\alpha \times J_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ es una familia discreta en $Y^2 \setminus \Delta_Y$. Definimos $g : X^2 \setminus \Delta_X \rightarrow Y^2 \setminus \Delta_Y$ por $g((x, y)) = (h(x), h(y))$ para cada $(x, y) \in X^2 \setminus \Delta_X$. Veamos que $\{g^{-1}[I_\alpha \times J_\alpha] : \alpha < \omega_1\}$ es una familia discreta en $X^2 \setminus \Delta_X$. Para este fin, sea $(x_0, x_1) \in X^2 \setminus \Delta_X$. Si $h(x_0) \neq h(x_1)$, entonces $g((x_0, x_1)) = (h(x_0), h(x_1)) \in Y^2 \setminus \Delta_Y$, por lo que existe un subconjunto abierto $W \subseteq Y^2 \setminus \Delta_Y$ tal que $g((x_0, x_1)) \in W$ y W interseca a lo más a un elemento de la familia $\{I_\alpha \times J_\alpha : \alpha < \omega_1\}$. Así, $g^{-1}[W]$ es un subconjunto abierto de $X^2 \setminus \Delta_X$ con $(x_0, x_1) \in g^{-1}[W]$ y $g^{-1}[W]$ interseca a lo más a un elemento de la familia $\{g^{-1}[I_\alpha \times J_\alpha] : \alpha < \omega_1\}$. Ahora, si $h(x_0) = h(x_1)$. Entonces x_0 o x_1 es un punto solitario, sin pérdida de generalidad, supongamos que $x_0 < x_1$ con $x_1 \neq \max(X)$ y que $x_0 \in S(X)$. Como x_0 es un punto aislado, se sigue que $W = \{x_0\} \times (x_0 \rightarrow)$ es un subconjunto abierto que contiene a (x_0, x_1) . Observemos que si $\alpha < \omega_1$ y $W \cap g^{-1}[I_\alpha \times J_\alpha]$ es no vacío es equivalente a $W \cap (h^{-1}[I_\alpha] \times h^{-1}[J_\alpha])$ es no vacío, lo que implica que $x_0 \in h^{-1}[I_\alpha]$, es decir, $h(x_0) \in I_\alpha$. Como $\mathcal{V}$ es una familia celular, se sigue que $h(x_0)$ pertenece a un único elemento I_α . Por lo tanto, a lo más un elemento de $\{g^{-1}[I_\alpha \times J_\alpha] : \alpha < \omega_1\}$ interseca a W .

Así, se ha demostrado que $\{g^{-1}[I_\alpha \times J_\alpha] : \alpha < \omega_1\}$ es una familia discreta no numerable de subconjuntos abiertos no vacíos en $X^2 \setminus \Delta_X$, lo que es una contradicción ya que el espacio $X^2 \setminus \Delta_X$ es funcionalmente numerable. De esta contradicción se sigue que $c(Y) = \omega$ y por lo tanto Y es una Recta de Souslin. □

De los teoremas previos podemos concluir lo siguiente:

Teorema 4.2.7. Si X es un LOTS no numerable tal que $X^2 \setminus \Delta_X$ es funcionalmente numerable. Entonces

- X es una recta de Aronszajn,
- $Y = X \setminus \{x \in X : x \text{ es solitario}\}$ es una recta de Souslin, y
- existe una retracción $f: X \rightarrow Y$ con fibras convexas de cardinalidad menor o igual a 2.

Pregunta 4.2.8 ([38], Pregunta 4.11). Sea X un LOTS y supongamos que $(X \times X) \setminus \Delta_X$ es funcionalmente numerable. ¿Es cierto que X es separable?

Así, en cualquier modelo de ZFC donde no existen rectas de Souslin tenemos una respuesta a la pregunta anterior.

Corolario 4.2.9. Asumimos que no existen rectas de Souslin. Sea X un LOTS tal que $X^2 \setminus \Delta_X$ es funcionalmente numerable. Entonces X es numerable.

Conclusiones

En este trabajo se presentaron nuevos resultados y un panorama amplio de las propiedades celular Q y casi celular Q . Aunque todavía hay mucho trabajo por hacer en estos temas, por ejemplo, se tienen las siguientes preguntas:

Pregunta 4.2.10. Si X es un espacio celular ω_1 -compacto o casi celular ω_1 -compacto, ¿es cierto que X es tenuemente Lindelöf?

Pregunta 4.2.11. Si X es un espacio celular ω_1 -compacto y K es un espacio compacto, ¿es cierto que $X \times K$ es celular ω_1 -compacto?

Pregunta 4.2.12. Si X es un espacio celular ω_1 -compacto y cada subespacio cerrado es celular ω_1 -compacto, ¿es cierto que X es maximal celular ω_1 -compacto?

Otra subclase de los espacios tenuemente Lindelöf es la de los espacios débilmente Lindelöf, respecto a este tema, algo interesante es saber cuándo un espacio topológico de Hausdorff es maximal débilmente Lindelöf. Es bien conocido que cada P -espacio regular y débilmente Lindelöf es un espacio de Lindelöf, también se sabe que en la clase de los espacios de Hausdorff un espacio es maximal Lindelöf si y solo si es un P -espacio, por lo que naturalmente surgen las siguientes preguntas en la clase de los espacios de Hausdorff:

Pregunta 4.2.13. Si (X, τ) es un espacio maximal débilmente Lindelöf, ¿es cierto que X es un P -espacio?

Pregunta 4.2.14. Si (X, τ) es un P -espacio débilmente Lindelöf, ¿es cierto que X es maximal débilmente Lindelöf?

En la segunda parte del trabajo se contestó una pregunta abierta sobre la propiedad funcionalmente numerable en LOTS, por lo que es natural preguntarse si este resultado se puede extender a la clase de los espacios normales por colecciones, es decir, ¿es cierto que si X es un espacio normal por colecciones y $X^2 \setminus \Delta_X$ es funcionalmente numerable se cumple que X es un espacio separable? Actualmente la clase de los espacios funcionalmente numerables sigue siendo estudiada por reconocidos autores, por lo que queda mucho trabajo por hacer en este tema. Para futuros trabajos dos preguntas que resultan interesantes son las siguientes:

Pregunta 4.2.15. Si (X, τ) es un espacio maximal funcionalmente numerable, ¿es cierto que X es un P -espacio?

Pregunta 4.2.16. Si (X, τ) es un espacio funcionalmente numerable en el que cada subespacio cerrado es funcionalmente numerable, ¿es cierto que X es maximal funcionalmente numerable?

Bibliografía

- [1] O. T. Alas, L. E. Gutiérrez-Domínguez y R. G. Wilson, *Compact productivity of Lindelöf-type properties*, Acta Math. Hungarica, **167** (2022), 548–560, <https://doi.org/10.1007/s10474-022-01254-x>.
- [2] O. T. Alas, L. E. Gutiérrez-Domínguez y R. G. Wilson, *When is a cellular-countably-compact space, countably compact?*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM, **117** No. 4 (2023), Paper No. 163, 12 pages. <https://doi.org/10.1007/s13398-023-01495-7>
- [3] O. T. Alas, L. R. Junqueira, M. Passos y R. G. Wilson, *On cellular-compactness and related properties*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM, **114** No. 2 (2020), Paper No. 101, 13 pages.
- [4] O. T. Alas, L. R. Junqueira y R. G. Wilson, *On linearly H -closed spaces*, Topology Appl., **258** (2019), 161-171.
- [5] O. T. Alas, L. R. Junqueira y R. G. Wilson, *When is a P -space weakly discretely generated*, Topology Appl., **163** (2014), 2-10.
- [6] O. T. Alas, J. A. Martínez-Cadena y R. G. Wilson, *Product theorems in classes of feebly compact spaces*, Houston J. Math., **47** No. 2 (2021), 409-425.
- [7] C. E. Aull, *A certain class of topological spaces*, Prace. Mat., **11** (1967), 49-53.
- [8] M. Bell, J. Ginsburg y R. G. Woods, *Cardinal inequalities for topological spaces involving the weak Lindelöf number*, Pacific J. Math., **79** (1978), 306-311.
- [9] A. Bella, *On cellular-compact and related spaces*, arXiv:1910.10445v1 [math.GN], 23 Oct 2019.
- [10] A. Bella, N. Carlson y I. Gotchev, *On spaces with a π -base with elements with compact closure*, (preprint).
- [11] A. Bella, N. Carlson y S. Spadaro, *Cardinal inequalities involving the Hausdorff pseudocharacter*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM, **117** (2023), Paper No. 129, 16 pages.

- [12] A. Bella y S. Spadaro, *On the cardinality of almost discretely Lindelöf spaces*, Monatsh. Math., **186** No. 2 (2018), 345-353.
- [13] A. Bella y S. Spadaro, *Cardinal invariants of cellular-Lindelöf spaces*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM, **113** No. 3 (2019), 2805-2811.
- [14] D. Cameron, *A Class of Maximal Topologies*, Pacific Journal of Mathematics, **70** (1977), 101-104.
- [15] J. Chaber, *Conditions which imply compactness in countably compact spaces* Bull. Acad. Pol. Sci., **24** (1976), 993-998.
- [16] A. Dow y R. M. Stephenson, *Productivity of cellular-Lindelöf spaces*, Topology Appl., **290** (2021), 107606, 15 pages.
- [17] R. Engelking, *General Topology*, Helderman Verlag, Berlin (1989).
- [18] I. Glicksberg, *Stone-Čech compactifications of products*, Trans. Amer. Math. Soc., **90** (1959), 369-382.
- [19] L. Gillman y M. Henriksen, *Concerning rings of continuous functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **77** (1954) 340-362.
- [20] L. E. Gutiérrez-Domínguez y R. Hernández-Gutiérrez, *When is the complement of the diagonal of a LOTS functionally countable?*, Acta Math. Hungar., **169** (2) (2023).
- [21] J. Ginsburg y R. G. Woods, *A cardinal inequality for topological spaces involving closed discrete sets*, Proc. Amer. Mathe. Soc. **64**(2), (1977) 357-360.
- [22] A. Hajnal y I. Juhász, *Some remarks on a property of topological cardinal functions*, Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae, **20** (1969), 25-37.
- [23] I. Juhász, *Cardinal Functions in Topology - ten years later*, Math. Centrum Tracts 123, Amsterdam, 1980.
- [24] I. Juhász, L. Soukup y Z. Szentmiklossy, *On cellular-compact spaces*, Acta Math. Hungarica, **162** (2020), 549-556.
- [25] I. Juhász, V. V. Tkachuk y R. G. Wilson, *Weakly linearly Lindelöf monotonically normal spaces are Lindelöf*, Studia Sci. Math. Hungarica., **54** No. 4 (2017), 523-535.
- [26] K. Kunen, *Set Theory: An Introduction to Independence Proofs*, North-Holland, Amsterdam, 1980.

- [27] R. Levy y M. V. Matveev, *Functional separability*, Comment. Math. Univ. Carolin., 51, 4(2010) 705-711.
- [28] M. V. Matveev, *A survey on star covering properties*, Topology Atlas preprint, April 15, 1998.
- [29] N. Noble, *The continuity of functions on Cartesian products*, Trans. Amer. Math. Soc., **149** (1970), 369-382.
- [30] A. Pelczynski y Z. Semadi, *Spaces of continuous functions III, (Spaces $C(\Omega)$ for ω without perfect subsets* Studia Math., (1959), 18:211-222.
- [31] J. R. Porter, R. M. Stephenson y R. G. Woods, *Maximal feebly compact spaces*, Topology Appl., **52** (1993), 203-219.
- [32] A. B. Raha, *Maximal Topologies*, J. Austral. Math. Soc, **15** (1973), 279-290.
- [33] A. D. Rojas-Sánchez y A. Tamariz-Mascarúa *Spaces with star countable extent*, Comm. Math. Univ. Carolin., **57** (2016), 381-395.
- [34] W. Rudin, *Continuous fuctions on compact spaces without perfect subsets*, Proc. Amer. Math. Soc., 8:39-42, 1947.
- [35] S. Singh, *On star-cellular-Lindelöf spaces*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM, **115** (2021), Paper 190, 12 pages.
- [36] J. Steprans, *Trees and continuous mapping into the real line*, Topology and its applications, 12 (1981), 181-185.
- [37] V. V. Tkachuk, *Weakly linearly Lindelöf spaces revisited*, Topology and its applications, **269** No. 2 (2019), 128-135.
- [38] V. V. Tkachuk, *A Corson compact space is countable if the complement of its diagonal is functionally countable*, *Studia Sci. Math. Hungar.* **58** (2021) no. 3, 398-407.
- [39] V. V. Tkachuk y R. G. Wilson, *Maximal countably compact spaces and embeddings in MP-spaces*, Acta Math. Hungarica, **145** (2015), 191-204.
- [40] V. V. Tkachuk y R. G. Wilson, *Cellular-compact spaces and their applications*, Acta Math. Hungarica, **159** No. 2 (2019), 674-688.
- [41] V. V. Tkachuk y R. G. Wilson, *Functional countability in GO spaces*, *Topology Appl.* **320** (2022), 108233.
- [42] V. V. Tkachuk y I. V. Yaschenko, *Almost closed sets and topologies they determine*, Comment. Math. Univ. Carolinae, **42** No. 2 (2001), 395-405.

- [43] Wei-Feng Xuan y Yan-Kui Song, *On cellular-Lindelöf spaces*, Bulletin Iranian Math. Soc., **44** (2018), 1485-1491.
- [44] Wei-Feng Xuan y Yan-Kui Song, *More on cellular-Lindelöf spaces*, Topology Appl., **266** (2019), 106861, 12 pages.
- [45] Wei-Feng Xuan y Yan-Kui Song, *A study of cellular-Lindelöf spaces*, Topology Appl., **251** (2019), 1-9.
- [46] G.T. Whyburn, *Accessibility spaces*, Proceedings Amer. Math. Soc. 24 (1970), 181-185.
- [47] R. G. Wilson y R. Benitez, *Topología general*, Trillas, Ciudad de México, México, 2017.

Asesor : Dr. Richard Wilson Roberts

Coasesor : Dr. Rodrigo Hernández Gutiérrez



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00094

Matrícula: 2182800659

Propiedades topológicas del tipo celular Q y LOTS funcionalmente numerables.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 13:00 horas del día 22 del mes de noviembre del año 2024 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS
DR. FERNANDO HERNANDEZ HERNANDEZ
DR. REYNALDO ROJAS HERNANDEZ
DR. ROBERTO PICHARDO MENDOZA
DR. VLADIMIR TKATCHOUK

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

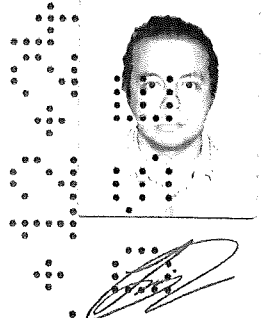
DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: LUIS ENRIQUE GUTIERREZ DOMINGUEZ

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

Aprobar

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

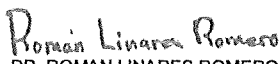


LUIS ENRIQUE GUTIERREZ DOMINGUEZ
ALUMNO



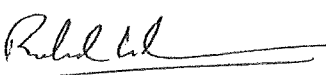
REVISÓ
MTRA. ROSALÍA GERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI



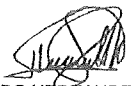
DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE



DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS

VOCAL



DR. FERNANDO HERNANDEZ HERNANDEZ

VOCAL



DR. REYNALDO ROJAS HERNANDEZ

VOCAL



DR. ROBERTO PICHARDO MENDOZA

SECRETARIO



DR. VLADIMIR TKATCHOUK