

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA IZTAPALAPA

**"EL ORIGEN DE LAS SOLUCIONES DIVERGENTES
EN EL PROBLEMA DE REACCIÓN DE RADIACIÓN"**

QUE PRESENTA:

PATRICIO VARGAS TORRES
vpatricio1@gmail.com
patricio.vargas@cch.unam.mx

**PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS (FÍSICA)**

DIRECTOR
M. en C JOSÉ LUIS JIMÉNEZ RAMÍREZ



Miembros del Jurado

Dra. Lidia Georgina Jiménez Lara
Presidenta
lidia@xanum.uam.mx

M. en C. José Luis Jiménez Ramírez
Secretario
jlj@xanum.uam.mx

Dr. Carlos Villarreal Luján
Vocal
carlos@fisica.unam.mx

23 DE FEBRERO 2010

AGRADECIMIENTOS

Quiero dar las gracias a los Doctores: Lidia Jiménez Lara, Carlos Villarreal Luján y Román Linares Romero, por sus valiosas observaciones las cuales enriquecieron este trabajo.

También quiero agradecer a los Doctores: Ignacio Campos, Eduardo Roa-Neri, Norberto Aquino y Miguel Ángel López Mariño sus comentarios al trabajo, los cuales hicieron posible una mejor culminación de este.

A todo mi más sincero agradecimiento.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE EXAMEN DE GRADO

No. 00016

Matrícula: 098280205

EL ORIGEN DE LAS SOLUCIONES
DIVERGENTES EN EL PROBLEMA
DE REACCION DE RADIACION

En México, D.F., se presentaron a las 10:00 horas del día 23 del mes de febrero del año 2010 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DRA. LIDIA GEORGINA JIMENEZ LARA
DR. CARLOS VILLARREAL LUJAN
M. EN C. JOSE LUIS JIMENEZ RAMIREZ

Bajo la Presidencia de la primera y con carácter de Secretario el último, se reunieron para proceder al Examen de Grado cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

MAESTRO EN CIENCIAS (FISICA)

DE: PATRICIO VARGAS TORRES

y de acuerdo con el artículo 78 fracción III del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

aprobar

Acto continuo, la presidenta del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.



PATRICIO VARGAS TORRES
ALUMNO

REVISÓ

LIC. JULIO CESAR DE LARA ISASSI
DIRECTOR DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTORA DE LA DIVISIÓN DE CBI

DRA. VERONICA MEDINA BAÑUELOS

PRESIDENTA

DRA. LIDIA GEORGINA JIMENEZ LARA

VOCAL

DR. CARLOS VILLARREAL LUJAN

SECRETARIO

M. EN C. JOSE LUIS JIMENEZ RAMIREZ

ÍNDICE

OBJETIVO	1
CAPÍTULO 1 INTRODUCCIÓN	4
CAPÍTULO 2 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ABRAHAM-LORENTZ	7
2.1 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ABRAHAM-LORENTZ MEDIANTE UN BALANCE ENERGÉTICO	8
2.2 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ABRAHAM-LORENTZ USANDO LA CONSERVACIÓN DEL MOMENTO (LORENTZ)	12
2.3 ECUACIÓN INTEGRODIFERENCIAL DE DIRAC-PLASS	15
CAPÍTULO 3 EL TEOREMA DE DABOUL Y EL CRITERIO DE HURWITZ	19
3.1 EL TEOREMA DE DABOUL	20
3.2 EL CRITERIO DE HURWITZ	22
CAPÍTULO 4 EL CASCARÓN ESFÉRICO	25
4.1 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO PARA UN CASCARÓN ESFÉRICO Y SU ANÁLISIS	26
4.2 ECUACIÓN GENERAL DE MOVIMIENTO PARA UNA PARTÍCULA CON ESTRUCTURA	33
4.3 PROPUESTA DE OLIVER	40
CAPÍTULO 5 FUNCIÓN DE GREEN DE LA ECUACIÓN DE ONDA UNIDIMENSIONAL	42
5.1 DEDUCCIÓN DE LA FUNCIÓN DE GREEN DE LA ECUACIÓN DE ONDA UNIDIMENSIONAL	43
5.2 SOLUCIÓN EXACTA PARA LA ECUACIÓN DE MOVIMIENTO DE UN OSCILADOR ARMÓNICO LIGADO A UNA CUERDA INFINITA	49
5.3 SOLUCIONES DIVERGENTES EN EL MODELO MECÁNICO	55
CONCLUSIONES	60
BIBLIOGRAFÍA	62

OBJETIVO

Desde hace más de cien años existe un problema no resuelto en la electrodinámica clásica; el problema al que nos referimos es el de la fuerza de reacción de radiación. A lo largo de este periodo el problema ha sido abordado por varios autores, sin que hasta el momento exista una solución realmente convincente.

El objetivo del trabajo que se desarrollará en estas páginas no consistirá en hallar la solución a este problema embarazoso, sino que el objetivo será proponer un modelo que nos indique las causas por las cuales todos los intentos por resolver este problema teórico han fracasado, además de formular algunas ideas que buscan esclarecer el por qué de los tropiezos de las propuestas dadas a conocer hasta nuestros días. En el desarrollo del trabajo se revisarán algunas de las ideas elaboradas a lo largo de este periodo.

En el trabajo se expondrán las principales ideas de los primeros intentos por dar solución al problema. Estas son las de Lorentz, quien propone una solución por medio de un modelo puramente electromagnético. También se abordará el modelo propuesto por Planck, el cual consiste en hacer un balance energético. Se analizará también la ecuación resultante, conocida como ecuación de Abraham-Lorentz, la cual aparentemente fue el primer modelo planteado para resolver el problema de la fuerza de reacción de radiación.

También se discutirá la hipótesis que propone Dirac en 1938, la cual corrige una inconsistencia de la ecuación de Abraham-Lorentz relacionada con las soluciones divergentes, pero lo más interesante de esta hipótesis es la aparición de soluciones preaceleradas lo cual nos parece inadecuado pues es una hipótesis impuesta fuera del electromagnetismo.

Es importante decir que Landau y Pearle, con mayor precisión, relacionan las soluciones divergentes con la componente mecánica de la masa cuando se puede considerar negativa... Sobra decir que el concepto de masa negativa es extraño pero buscamos mostrar los diferentes intentos por entender el surgimiento de las soluciones divergentes y, en nuestro caso, como en un modelo puramente mecánico con masa positiva, aparece una masa aparente que puede ser negativa cuando se hacen aproximaciones y da lugar a soluciones divergentes. Se muestra así una vez más que las aproximaciones en el problema de reacción de radiación son muy delicadas.

También se estudiará el modelo que considera a las partículas extendidas como un cascarón esférico de carga, el cual por simplicidad no gira; más tarde se analizará la ecuación general, la cual considera a las distribuciones de carga con simetría esférica las cuales, también por

simplicidad, se considerará que no rotan. Se comentarán las inconsistencias de la hipótesis propuesta por Oliver, quien propone cambio de un signo en la ecuación de Abraham-Lorentz, lo cual corregiría los problemas antes mencionados, sin embargo esto no puede ser posible dentro de la electrodinámica clásica.

A lo largo del trabajo también presentaremos el teorema de Daboul, referente a las condiciones bajo las cuales aparecen soluciones divergentes en ecuaciones diferenciales lineales de orden N , luego presentamos el criterio de Hurwitz, que es mucho más adecuado que el propuesto por Daboul, como veremos esto será fundamental en nuestro trabajo.

Luego usaremos el modelo mecánico propuesto previamente por Burke el cual sirve para modelar el problema electromagnético que nos interesa, el de reacción de radiación.

Al resolver el problema mecánico en forma exacta, nos daremos cuenta que las soluciones divergentes y masas mecánicas aparentes negativas, surgen cuando se hacen aproximaciones.

Por otra parte señalamos que la solución del problema mecánico en tres dimensiones, además de muy complicado, apunta a dificultades similares a las de la electrodinámica.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

Alrededor de 1864 Maxwell unifica el formalismo de la teoría electromagnética que permitía estudiar, con mucho éxito, los fenómenos electromagnéticos. Uno de los resultados fundamentales es que la teoría predice ondas electromagnéticas, las cuales se observaron experimentalmente más tarde. Además esta teoría pudo unificar a la óptica con el electromagnetismo al demostrar que las ondas electromagnéticas se movían con la misma velocidad que la luz, Maxwell concluyó así que la luz era una onda electromagnética.

Por otra parte los problemas que desde un inicio estudió la electrodinámica eran de dos tipos: el primero consistía en encontrar los campos electromagnéticos resolviendo las ecuaciones de Maxwell conociendo las fuentes (densidades de carga y corriente) lo cual resultó bastante exitoso. El segundo era, dada la interacción entre campos, cargas y corrientes determinar el movimiento de las cargas. Parecía que los dos problemas estaban resueltos correctamente, sin embargo en el segundo problema la solución obtenida no es del todo adecuada; veamos por qué. Cuando una carga puntual se acelera emite radiación electromagnética, la cual lleva consigo energía por lo cual modificará la dinámica de la carga, entonces el movimiento determinado usando solamente el campo externo a la carga es inadecuado. La energía radiada por la carga acelerada traerá consigo la aparición de una nueva fuerza, que es la fuerza de reacción de radiación.

Es importante resaltar que un resultado fundamental de la electrodinámica, la emisión de radiación por una carga acelerada, es precisamente lo que origina la dificultad de la electrodinámica a la hora de tratar de resolver el segundo problema.

El problema de reacción de radiación surge a fines del siglo XIX, es decir a los pocos años del establecimiento de las ecuaciones de Maxwell-Lorentz. Con los trabajos de Lorentz, Planck y Abraham se inicia el estudio de la reacción de radiación para una partícula con estructura (no puntual). Después de estos trabajos prácticamente se abandona el problema, hasta que a fines de la década de los treinta Dirac formula una ecuación dinámica relativista analizada más tarde por Plass.

El primer intento por resolver el problema de reacción de radiación conduce a la ecuación conocida como de Abraham-Lorentz (AL), la cual trata de resolver el problema no relativista.

Sin embargo es una ecuación polémica, por ser de tercer orden, lo cual no está de acuerdo con la dinámica newtoniana y requiere de una condición de contorno adicional. A lo anterior hay que agregar que esta ecuación se puede transformar en ecuación integro-diferencial incorporando la condición $\vec{a}(t \rightarrow \infty) = 0$ (Propuesta por Dirac, pero es una condición totalmente ajena al electromagnetismo). Esta trae como consecuencia que la aceleración al tiempo t dependa de la fuerza a tiempos posteriores, lo cual viola el principio de causalidad.

El problema de reacción de radiación se ha enfocado desde tres puntos de vista, primero usando la ley de conservación de la energía por Planck en 1897, (puede verse: Heitler, 1954, Erber 1961, Rohrlich 1965, Jackson 1975). La segunda forma es usando la conservación del momento (interacción entre los diferentes elementos de una distribución de carga), usado por Lorentz en 1902 y Abraham en 1903; (puede verse: Heitler 1954; Panofsky 1962; Jackson 1975).

La tercera forma se basa en las teorías de acción a distancia. Estas teorías aseguran que las cargas interactúan con un retardo temporal, sin necesidad de campos electromagnéticos, esta teoría, en su versión moderna, fue estudiada por Wheeler y Feynman (1945) y Hoyle y Narlikar (1974). Esta propuesta no se discutirá aquí.

CAPÍTULO 2

DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ABRAHAM-LORENTZ

El propósito de este capítulo es presentar y analizar las deducciones más comunes de la ecuación de Abraham-Lorentz, así como presentar cuales son algunos de los principales problemas que presenta esta ecuación, para así facilitar la discusión posterior.

2.1 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ABRAHAM-LORENTZ MEDIANTE UN BALANCE ENERGÉTICO

Posiblemente la deducción más conocida y simple de la ecuación de Abraham-Lorentz, es la propuesta por Planck quien considera que en la ecuación de Newton además de la fuerza externa se debe tomar en cuenta la fuerza de reacción de radiación, la cual se puede obtener mediante un balance de energía. A continuación mostramos la deducción.

De acuerdo con la dinámica de Newton, la ecuación de movimiento para una partícula es

$$m \vec{a} = \vec{F}_{ext}, \quad (2.1.1)$$

donde m es la masa, $\vec{a}$ la aceleración y $\vec{F}_{ext}$ es la fuerza externa, ahora si además la partícula está cargada y acelerada, se tiene que tomar en cuenta la radiación emitida por dicha carga; porque según la electrodinámica clásica, una carga acelerada radiará energía de acuerdo a la fórmula de Larmor

$$P = \frac{2e^2}{3c^3} a^2, \quad (2.1.2)$$

donde P es la potencia radiada, e la carga del electrón y c la velocidad de la luz.

Esto quiere decir que a la ecuación dinámica hay que agregarle una fuerza de reacción de radiación si queremos obtener una ecuación que gobierne el movimiento de la partícula cargada la cual radía energía, con lo cual la nueva ecuación tendrá la siguiente forma

$$m \vec{a} = \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{rad} \quad (2.1.3)$$

donde ahora aparece $\vec{F}_{rad}$ que es la fuerza de reacción de radiación.

Por el momento no se sabe cuál es la expresión para la fuerza de reacción de radiación, sólo sabemos que esta fuerza debe desaparecer cuando la partícula cargada no está acelerada. También sabemos que la fuerza de reacción de radiación debe ser proporcional al cuadrado de

la carga e , como se observa en la fórmula de Larmor, con lo cual los efectos de radiación no son alterados por el signo de la carga y por último la fuerza de reacción de radiación debe contener a la constante

$$\tau = \frac{2e^2}{3mc^3},$$

Donde τ salvo un factor $2/3$ es el tiempo que le toma a la luz cruzar el radio del electrón, llamado tiempo característico.

Ahora bien, a partir de la potencia de Larmor se puede realizar un balance energético en el cual la variación de la energía mecánica de la carga sea igual al negativo de la energía radiada, pues la energía que pierde la carga por radiación debe provenir de la energía mecánica de la carga, de allí que se diga que la carga es como un transductor de energía. En esta deducción la radiación se manifiesta a través de una nueva fuerza, la cual se agregará a la fuerza externa de la dinámica newtoniana. Entonces si E es la energía de la carga,

$$\frac{dE}{dt} = -P = -\frac{2e^2}{3c^3} a^2. \quad (2.1.4)$$

(nótese el signo menos).

Si ahora integramos la ecuación anterior respecto del tiempo tendremos

$$\int_{t_1}^{t_2} dE = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{2e^2}{3c^3} a^2 dt. \quad (2.1.5)$$

Descomponiendo el cuadrado de a , resulta

$$\int_{t_1}^{t_2} dE = \int_{t_1}^{t_2} -\frac{2e^2}{3c^3} (\vec{a} \bullet \vec{a}) dt; \quad (2.1.6)$$

integrando por partes el lado derecho de la ecuación, da

$$\int_{t_1}^{t_2} dE = -\frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d(\vec{a} \bullet \vec{v})}{dt} - \frac{d\vec{a}}{dt} \bullet \vec{v} \right) dt. \quad (2.1.7)$$

.

Si se supone que se trata de un movimiento periódico, donde $t_2 - t_1 = T$ es igual a un periodo o a un múltiplo entero de un periodo; se tendrá que la primera integral se anula y sólo queda la segunda parte de la integral de la derecha, esto es

$$\int_{t_1}^{t_2} dE = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{t_1}^{t_2} (\dot{\vec{a}} \bullet \vec{v}) dt \quad (2.1.8)$$

con lo cual

$$\frac{dE}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{a}} \bullet \vec{v}.$$

Por otra parte como se ha supuesto que el cambio de la energía mecánica del sistema se debe a la potencia radiada y debe ser igual al trabajo por unidad de tiempo producido por la nueva fuerza de reacción de radiación, debe cumplirse entonces

$$P = \frac{dE}{dt} = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\dot{\vec{a}} \bullet \vec{v} \right) = \vec{F}_{rad} \bullet \vec{v}, \quad (2.1.9)$$

De la ecuación anterior llegamos a que

$$\vec{F}_{rad} = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{a}}.$$

Si se sustituye en (2.1.3), se obtiene

$$m \vec{a} - \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{a}} = \vec{F}_{ext}, \quad (2.1.10)$$

que es la ecuación de movimiento, la cual es conocida como ecuación de Abraham-Lorentz (AL). Esta ecuación trata de resolver el problema no relativista de reacción de radiación, sin embargo es una ecuación polémica, por ser de tercer orden, lo cual no está de acuerdo con la dinámica newtoniana, pues en este caso son necesarias tres condiciones iniciales y no dos como en la dinámica de Newton. Además para $\vec{a} = cte$, $\vec{P} \neq 0$ pero $\vec{F}_{rad} = 0$, en contra de lo deseado, y peor aún, hay dificultades con la solución homogénea como podemos ver fácilmente como sigue:

Si

$$\tau = \frac{2e^2}{3mc^3},$$

entonces la ecuación (2.1.10) se transforma en

$$\dot{\vec{a}}(t) - \frac{1}{\tau} \vec{a}(t) = -\frac{1}{m\tau} \vec{F}_{ext}(t), \quad (2.1.11)$$

multiplicando esta ecuación (2.1.11) por el factor integrante

$$\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

resulta,

$$\dot{\vec{a}}(t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \frac{1}{\tau} \vec{a}(t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = -\frac{1}{m\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \vec{F}_{ext}(t), \quad (2.1.12)$$

que puede escribirse como

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{a}(t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) = -\frac{1}{m\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \vec{F}_{ext}(t).$$

Integrando ambos lados de la ecuación desde t_0 hasta t

$$\int_{t_0}^t \frac{d}{dt'} \left(\vec{a}(t') \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) \right) dt' = -\int_{t_0}^t \frac{1}{m\tau} \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) \vec{F}_{ext}(t') dt',$$

donde t_0 es una constante arbitraria.

La integración es inmediata, resulta

$$\vec{a}(t) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \vec{a}(t_0) \exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right) = -\frac{1}{m\tau} \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) \vec{F}_{ext}(t') dt',$$

con lo cual

$$m \vec{a}(t) = \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \left\{ m \vec{a}(t_0) \exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right) - \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) \vec{F}_{ext}(t') dt' \right\}. \quad (2.1.13)$$

Ahora bien, si la fuerza externa es cero, se observa de inmediato que la solución de esta ecuación es

$$\vec{a}(t) = \vec{a}(t_0) \exp\left(\frac{t-t_0}{\tau}\right), \quad (2.1.14)$$

en donde $\vec{a}(t_0)$ es la aceleración inicial, lo cual indica que si $\vec{a}(t_0) \neq 0$, la aceleración crece sin límite; a esto se le conoce como autoaceleración o solución divergente. Se parte de un balance energético el cual se viola con esta solución pues la energía cinética crece sin límite. Es claro entonces que algo está muy mal con esta ecuación para la reacción de radiación.

2.2 DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN DE ABRAHAM-LORENTZ USANDO LA CONSERVACIÓN DEL MOMENTO (LORENTZ)

Lorentz fue el primero en discutir la solución al problema de reacción de radiación a partir de un modelo puramente electromagnético (más tarde lo estudió también Abraham) para una partícula cargada con estructura esféricamente simétrica (para simplificar los cálculos). Se parte de la conservación del momento suponiendo que cada elemento de la estructura ejerce una acción sobre las demás con un cierto retardo. Esto quería decir que era necesario calcular la autofuerza generada por todo el conjunto de elementos de que estaba formada la partícula sobre si misma..

Siguiendo el tratamiento propuesto por Lorentz que aparece en su libro, Theory of Electrons, de 1904; o la versión más moderna de Jackson el cual consiste en usar la conservación del momento o interacción entre los diferentes elementos de una distribución de carga, por lo cual se le conoce como autointeracción, tenemos lo siguiente.

La conservación del momento implica que su derivada es igual a cero, esto es

$$\frac{d\vec{P}_{total}}{dt} = \int (\rho \vec{E} + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B}) d^3x = 0, \quad (2.2.1)$$

donde $\vec{P}_{total}$ es el momento total, ρ la densidad de carga, $\vec{E}$ el campo eléctrico, $\vec{J}$ es la densidad de corriente y $\vec{B}$ es el campo magnético.

La ecuación (2.2.1) la podemos descomponer en dos ecuaciones, una para la fuerza externa, la cual se debe a los campos externos,

$$\vec{F}_{ext} = \int (\rho \vec{E}_{ext} + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B}_{ext}) d^3x, \quad (2.2.2)$$

y otra para los campos debidos a la partícula

$$\vec{F}_{prop} = \int (\rho \vec{E}_p + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B}_p) d^3x. \quad (2.2.3)$$

Si

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (2.2.4)$$

entonces la ecuación (2.2.1) se transforma en

$$\frac{d\vec{P}_{total}}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \vec{F}_{prop} = 0,$$

así

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = - \int (\rho \vec{E}_p + \frac{\vec{J}}{c} \times \vec{B}_p) d^3x. \quad (2.2.5)$$

Ahora suponiendo que la partícula está instantáneamente en reposo y además que la carga es rígida y con simetría esférica, tendremos después de una serie de cálculos que

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{2e^2}{3c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!c^n} G_n \frac{d^n \vec{a}(t)}{dt^n}, \quad (2.2.6)$$

donde

$$G_n = \int d^3x \int d^3x' \rho(x,t) \rho(x',t) |x - x'|^{n-1}. \quad (2.2.7)$$

Si analizamos los primeros términos de la serie tenemos que para $n=0$,

$$\left(\frac{d \vec{p}}{dt} \right)_0 = \frac{2e^2}{3c^2} \int d^3x \int d^3x' \frac{\rho(x,t)\rho(x',t)}{|x-x'|} \vec{a} = \frac{4}{3} \frac{U}{c^2} \vec{a}, \quad (2.2.8)$$

donde U es la energía electrostática de la distribución de carga. Entonces si suponemos que la masa electromagnética está dada por

$$m_{elem} = \frac{4}{3} \frac{U}{c^2}$$

resulta que

$$\left(\frac{d \vec{p}}{dt} \right)_0 = m_{elem} \vec{a}. \quad (2.2.9)$$

Para $n=1$, tendremos la fuerza de reacción de radiación, la cual es independiente de la distribución de carga,

$$\left(\frac{d \vec{p}}{dt} \right)_1 = -\frac{2e^2}{3c^3} \int d^3x \int d^3x' \rho(x) \rho(x') \dot{\vec{a}} = -\frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{a}}$$

así

$$\vec{F}_{rad} = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{a}}. \quad (2.2.10)$$

Despreciando los términos de orden superior suponiendo que el tamaño de la partícula es muy pequeño, llegamos nuevamente a la ecuación de movimiento de Abraham-Lorentz,

$$m_{elem} \vec{a}(t) - \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{a}} = \vec{F}_{ext}. \quad (2.2.11)$$

Podemos decir que las dos ecuaciones (2.1.10) y (2.2.11), obtenidas por diferentes métodos, tienen la misma forma, aunque en esta última aparece un coeficiente $4/3$ que multiplica a la masa electromagnética, lo cual aparentemente está en contradicción con la relatividad especial, además de que no es evidente que las masas de las ecuaciones sean las mismas. Lo que también es claro es que en el modelo de partícula con estructura aparece un nuevo problema: la

estabilidad de la distribución de carga; esto último fue estudiado por Poincaré (1906) pero no lo analizaremos aquí.

Se suele suponer que la partícula tiene una masa mecánica m_0 además de la masa electromagnética, es decir

$$m = m_0 + m_{elem} \quad (2.2.12)$$

siendo m la masa física, con lo cual la ecuación (2.2.11) se transforma en

$$m \vec{a}(t) - \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{a}} = \vec{F}_{ext} . \quad (2.2.13)$$

En la deducción realizada por Lorentz se sumaron los primeros términos de la serie y los demás se desearon, puesto que para $n \geq 2$ los términos se anulan cuando hacemos tender la estructura a una partícula puntual, sin embargo esto trae como consecuencia que la masa electromagnética diverja pues

$$\frac{1}{c^2} \int d^3x \int d^3x' \frac{\rho(x,t)\rho(x',t)}{|x-x'|} \rightarrow \infty \text{ cuando } |x-x'| \rightarrow 0 . \quad (2.2.14)$$

Como puede verse, la ecuación obtenida es la misma, salvo que con esta deducción se hace claro un nuevo problema: Como m es finita si la partícula es muy pequeña m_0 debe compensar el crecimiento de m_{elem} , por lo que algunos autores afirman que m_0 debe ser negativa. ¿Qué sentido tiene esto? Esto se discutirá en la siguiente sección.

2.3 ECUACIÓN INTEGRODIFERENCIAL DE DIRAC-PLASS

La ecuación de Abraham-Lorentz (AL), por ser de tercer orden, requiere de una condición inicial (o final) adicional a las ecuaciones newtonianas, por eso Dirac en 1938 sugirió imponerla de tal forma que se anularan las soluciones divergentes. Más tarde Plass (1961), plasmó esta idea en la ecuación que presentamos a continuación.

La propuesta de Dirac consiste en suponer que cuando t tiende a infinito $a(t)$ tiende a cero. Para incorporar este comportamiento imponemos la condición $a(t) \rightarrow 0$ cuando $t \rightarrow \infty$ en la ecuación 2.1.13 resultando

$$0 = \left\{ m \vec{a}(t_0) \exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right) - \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{\infty} \exp\left(\frac{-t'}{\tau}\right) \vec{F}_{ext}(t') dt' \right\},$$

con lo cual se obtiene

$$\vec{a}(t_0) = \frac{1}{m\tau} \int_{t_0}^{\infty} dt' \exp\left(\frac{t_0 - t'}{\tau}\right) \vec{F}_{ext}(t'). \quad (2.3.1)$$

Aparece un nuevo problema porque la aceleración al tiempo t_0 requiere de conocer $\vec{F}_{ext}(t')$ a todo tiempo t .

Tomando en cuenta la condición 2.3.1 tenemos que la ecuación dinámica toma la forma

$$m \vec{a}(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \left\{ \exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right) \int_{t_0}^{\infty} dt' \exp\left(\frac{t_0 - t'}{\tau}\right) \vec{F}_{ext}(t') - \int_{t_0}^t dt' \exp\left(\frac{-t'}{\tau}\right) \vec{F}_{ext}(t') \right\},$$

o también

$$m \vec{a}(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \left\{ \int_{t_0}^{\infty} dt' \exp\left(\frac{-t'}{\tau}\right) \vec{F}_{ext}(t') - \int_{t_0}^t dt' \exp\left(\frac{-t'}{\tau}\right) \vec{F}_{ext}(t') \right\}. \quad (2.3.2)$$

Simplificando resulta

$$m \vec{a}(t) = \frac{1}{\tau} \int_t^{\infty} dt' \exp\left(\frac{t - t'}{\tau}\right) \vec{F}_{ext}(t'). \quad (2.3.3)$$

Por último si realizamos el cambio de variable

$$s = \frac{t' - t}{\tau},$$

la ecuación (2.1.13) se puede escribir como

$$m \vec{a}(t) = \int_0^{\infty} ds \exp(-s) \vec{F}_{ext}(t + \tau s). \quad (2.3.4)$$

Esta ecuación integrodiferencial, en ocasiones llamada de Dirac-Plass, es la nueva ecuación dinámica.

Es claro en la ecuación de Dirac-Plass que si la fuerza externa desaparece la aceleración se hace cero; además por construcción las soluciones divergentes se han eliminado. Sin embargo se presenta un nuevo problema, la aceleración al tiempo t depende de fuerzas que actuarán en tiempos posteriores al tiempo t , con lo cual se viola el principio de causalidad. Esto quiere decir que la ecuación predice aceleraciones antes de que la fuerza esté aplicada sobre la partícula cargada; a esto se le conoce como preaceleración.

Los efectos no causales se limitan a intervalos de tiempo del orden de $\tau=10^{-23}$ seg, el tiempo necesario para que la luz atravesase a las partículas elementales clásicas de radio $2.82 \times 10^{-13} \text{ cm}$. Lo anterior quiere decir que no es fácil medir u observar la acausalidad en el laboratorio si es que existe. Por lo tanto para cuestiones prácticas suele decirse que el modelo satisface las condiciones de causalidad observables (Jackson 1975).

Sin embargo, sería bueno eliminar por completo el comportamiento preacelerado para tener un comportamiento causal, puesto que, después de todo, la electrodinámica clásica es una teoría causal.

Ya sabemos que al resolver la ecuación de AL se obtiene la solución (2.1.13)

$$\vec{m} \vec{a}(t) = \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \left\{ \vec{m} \vec{a}(t_0) \exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right) - \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^t \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) \vec{F}_{ext}(t') dt' \right\}$$

ahora puesto que t_0 es una constante arbitraria si la hacemos tender a infinito, entonces la ecuación (2.1.13) se transforma en

$$\vec{a}(t) = \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \left\{ \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \vec{a}(t_0) \exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right) + \frac{1}{m\tau} \int_t^\infty \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) \vec{F}_{ext}(t') dt' \right\}. \quad (2.3.5)$$

Si queremos eliminar la preaceleración que existe en la ecuación (2.3.4), podemos imponer la

condición para $\vec{a}(t_0)$

$$\lim_{t_0 \rightarrow \infty} \left[\vec{a}(t_0) \exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right) \right] = -\frac{1}{m\tau} \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \int_{-t_0}^{t_0} \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) \vec{F}_{ext}(t') dt'. \quad (2.3.6)$$

Sustituyendo esta condición en la ecuación (2.3.5), tenemos que

$$\vec{a}(t) = \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) \left\{ -\frac{1}{m\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) \vec{F}_{ext}(t') dt' + \frac{1}{m\tau} \int_t^{\infty} \exp\left(-\frac{t'}{\tau}\right) \vec{F}_{ext}(t') dt' \right\}, \quad (2.3.7)$$

simplicando obtenemos que

$$\vec{a}(t) = -\frac{1}{m\tau} \int_{-\infty}^t \exp\left(\frac{t-t'}{\tau}\right) \vec{F}_{ext}(t') dt'. \quad (2.3.8)$$

Con esto el comportamiento preacelerado desaparece, sin embargo de la ecuación (2.3.8) se puede apreciar que la aceleración está dada en sentido contrario a la fuerza externa. Esto significa que la ecuación anterior predice un comportamiento antiacelerado (Pearle (1982) le llama opaceleración). De todo esto podemos concluir que al eliminar las soluciones divergentes aparece la preaceleración, ecuación (2.3.4), y cuando se elimina la preaceleración aparece la antiaceleración.

Una forma de “corregir” el comportamiento que aparece en la ecuación (2.3.8), sería que la masa fuera negativa, lo cual no parece tan descabellado para Pearle.

Con todo esto podemos decir que cada vez que se intenta corregir una deficiencia de la ecuación (2.1.10) se tiene que pagar un costo, pues aparece otra deficiencia.

CAPÍTULO 3

EL TEOREMA DE DABOUL Y EL CRITERIO DE HURWITZ

Sabemos que la electrodinámica es una teoría causal, esto es, la causa precede al efecto, es por ello que la ecuación diferencial que gobierne el comportamiento del movimiento de una partícula, sea puntual o extendida, debe cumplir con este requisito. Además el comportamiento causal quedará reflejado en la función de Green, si es que la ecuación es lineal. Para las ecuaciones diferenciales lineales de orden N es posible analizar si su comportamiento es o no causal a partir de los coeficientes de la ecuación característica asociada con ella. Como veremos hay al menos dos métodos para analizar el comportamiento de las soluciones de una ecuación diferencial, una es usando el teorema de Daboul y otro, que hemos propuesto, mucho más expedito, a través del criterio de Hurwitz.

3.1 EL TEOREMA DE DABOUL

En ocasiones se ha considerado que la incorporación de más términos en la ecuación (2.2.11) puede solucionar los problemas con las soluciones divergentes o la preaceleración. Como se verá a continuación esta suposición es incorrecta.

Para saber si una ecuación diferencial tiene soluciones bien comportadas (no divergentes), al menos tenemos dos opciones, una es usando el criterio de Hurwitz (Uspensky 1948) (el cual analizaremos después) y la otra alternativa es la que propone Daboul en su teorema, el cual asegura que no importa cuantos términos de la serie en el desarrollo de la ecuación de Lorentz se consideren, siempre que el número sea finito, si los signos de la aceleración y de su derivada son contrarios, habrá raíces divergentes.

A continuación presentamos la demostración del teorema.

Teorema: una ecuación de movimiento de la forma

$$F_{ext}(t) = m \left[a - \tau \dot{a} + \dots + c_N \frac{d^N a}{dt^N} \right] = m \sum_{n=0}^N c_n \frac{d^n a}{dt^n} \quad (3.1.1)$$

(que no es otra cosa que la ecuación del tipo de la de Abraham-Lorentz con N términos)

siempre tiene soluciones divergentes.

Bastaría con probar que la ecuación homogénea de (3.1.1) tiene soluciones divergentes.

Entonces se demostrará que

$$\sum_{n=0}^N c_n \frac{d^n a}{dt^n} = 0 \quad (3.1.2)$$

(con $c_1 = -\tau$) tiene soluciones divergentes.

Suponiendo que la solución a la ecuación (3.1.2) es de la forma

$$a(t) = Ae^{-i\omega t} \quad (3.1.3)$$

entonces sustituyendo esta solución en la ecuación (3.1.2) obtenemos

$$f(\omega) \equiv 1 - \tau(-i\omega) + c_2(-i\omega)^2 + \dots + c_N(-i\omega)^N = 0. \quad (3.1.4)$$

factorizando

$$c_N(-i)^N$$

tenemos que

$$f(\omega) \equiv c_N(-i)^N \left[\frac{1}{c_N(-i)^N} + \frac{\tau}{c_N(-i)^{N-1}} \omega + \frac{c_2}{c_N(-i)^{N-2}} \omega^2 + \dots + \omega^N \right] = 0 \quad (3.1.5)$$

usando el teorema fundamental del álgebra, tendremos

$$f(\omega) \equiv c_N(-i)^N [(\omega - \omega_1)(\omega - \omega_2)(\omega - \omega_3) \dots (\omega - \omega_N)] \quad (3.1.6)$$

Lo cual podemos expresar como

$$f(\omega) \equiv c_N(-i)^N \prod_{n=1}^N (\omega - \omega_n) \quad (3.1.7)$$

así

$$f(\omega) = c_N(-i)^N \prod_{n=1}^N (-\omega_n) \left(1 - \frac{\omega}{\omega_n}\right) \quad (3.1.8)$$

la ecuación (3.1.8) se puede transformar en la forma

$$f(\omega) = c_N(-i)^N \left[\prod_{n=1}^N (-\omega_n) \right] \left(1 - \left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{\omega_n}\right) \omega + \dots\right)\right) = 0. \quad (3.1.9)$$

Comparando los términos lineales de las ecuaciones (3.1.4) y (3.1.9) tenemos que

$$\tau = i \sum_{n=1}^N \frac{1}{\omega_n}. \quad (3.1.10)$$

Multiplicando por el conjugado de ω_n al numerador y al denominador obtenemos

$$\tau = \sum_{n=1}^N \frac{i\omega_n^*}{|\omega_n|^2}. \quad (3.1.11)$$

El último paso se sigue de que

$$f(-\omega^*) = f^*(\omega), \quad (3.1.12)$$

lo cual nos lleva a que todos los ceros de $f(\omega)$ son cada uno imaginarios puros,

$$\omega = i \operatorname{Im} \omega; \quad (3.1.13)$$

O también si ocurren en pares

$$\omega_{\pm} = \pm \operatorname{Re} \omega + i \operatorname{Im} \omega. \quad (3.1.14)$$

Ahora como por hipótesis τ es real y mayor que cero

$$\tau = \sum_{n=1}^N \frac{\operatorname{Im} \omega_n}{|\omega_n|^2}. \quad (3.1.15)$$

Entonces, la suma

$$\sum_{n=1}^N \frac{\operatorname{Im} \omega_n}{|\omega_n|^2} \quad (3.1.16)$$

contiene al menos un término con

$$\operatorname{Im} \omega_n > 0,$$

y por lo tanto este término conduce a las soluciones divergentes cuando lo sustituimos en la ecuación (3.1.3).

Lo que demuestra Daboul es que realmente no importa cuantos términos tenga la serie, si los signos de la segunda y tercera derivada de la posición son contrarios tendremos siempre soluciones divergentes.

3.2 EL CRITERIO DE HURWITZ

Si bien el resultado de Daboul es muy interesante, es muy laborioso y por ello a continuación proponemos un nuevo método mucho más práctico (Jiménez et al, 2007).

El criterio de Hurwitz, igual que el teorema de Daboul (1974), nos permite saber como será el comportamiento de las soluciones de una ecuación diferencial, si son o no convergentes o divergentes.

Se usará este criterio para demostrar que la ecuación de Abraham-Lorentz tiene soluciones divergentes y también más adelante, que las soluciones que se obtienen a partir de un modelo exacto son convergentes.

El criterio de Hurwitz establece que la ecuación algebraica con coeficientes reales

$$f(x) = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \dots + p_Nx^N = 0 \quad (3.2.1)$$

tiene todas las raíces con parte real negativa si, y sólo si, los N determinantes

$$D_1 = p_1, \quad D_2 = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 \\ p_3 & p_2 \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 & 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \\ p_5 & p_4 & p_3 \end{vmatrix}$$

$$D_N = \begin{vmatrix} p_1 & p_0 & 0 \dots \dots \dots 0 \\ p_3 & p_2 & p_1 \dots \dots \dots 0 \\ p_5 & p_4 & p_3 \dots \dots \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \dots \dots 0 \\ p_{2N-1} & p_{2N-2} & p_{2N-3} \dots \dots \dots p_N \end{vmatrix} \quad (3.2.2)$$

son positivos.

Para la ecuación de Abraham-Lorentz (2.1.10),

$$m \vec{a} - m \tau \dot{\vec{a}} = \vec{F}_{ext}$$

de inmediato se observa que en su ecuación característica

$$D_1 = -\tau < 0. \quad (3.2.3)$$

Esto quiere decir que la ecuación de AL no cumple el Criterio de Hurwitz (como ya se sabía), por lo tanto tendrá al menos una solución divergente. Es importante resaltar que las soluciones

divergentes aparecen por el signo que precede a $\tau \dot{a}$, el cual es contrario al signo del primer término. Es importante mencionar que este método es más sencillo de aplicar que el propuesto por Daboul, por lo cual lo usaremos más adelante, en la sección 5.3, donde será de suma importancia saber el comportamiento de las soluciones al modelo mecánico tanto exacto, como aproximado.

CAPÍTULO 4

EL CASCARÓN ESFÉRICO

Uno de los problemas más útiles para entender la teoría de partículas extendidas es el problema del cascarón esférico pues admite una solución exacta y con ello se puede empezar a estudiar el origen de las dificultades de la teoría y sugiere como proceder para un análisis más general.

4.1 ECUACIÓN DE MOVIMIENTO PARA UN CASCARÓN ESFÉRICO Y SU ANÁLISIS

Como puede verse del trabajo de Daboul, no se pueden resolver los problemas de la ecuación de AL incorporando más términos de la serie. En ocasiones se olvida que en algunos casos es posible obtener una expresión general para el coeficiente G_n de la ecuación (2.2.7) y así es posible sumar la serie. Esto sucede por ejemplo para el caso de una distribución de carga en forma de cascarón esférico. El problema fue estudiado por Sommerfeld primero, luego por Caldirola, Goedecke y más recientemente por Sharp y Moniz. Veamos en que consiste el método.

Partimos de la ecuación propuesta por Lorentz para una carga con estructura, ecuación (2.2.6)

$$m_0 \vec{a}(t) = \vec{F}_{ext}(t) - \frac{2e^2}{3c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!c^n} G_n \frac{d^n \vec{a}(t)}{dt^n}, \quad (4.1.1)$$

donde como antes

$$G_n = \int d^3x \int d^3x' \rho(\vec{x}) \rho(\vec{x}') \left| \vec{x} - \vec{x}' \right|^{n-1} \quad (4.1.2)$$

y m_0 es la masa mecánica.

La densidad de carga para un cascarón esférico de radio L está dada por

$$\rho(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi L^2} \delta\left(\left|\vec{x}\right| - L\right). \quad (4.1.3)$$

Sustituyendo la ecuación (4.1.3) en la ecuación (4.1.2) se obtiene para los coeficientes G_n ,

$$G_n = \frac{2}{n+1} (2L)^{n-1}, \quad (4.1.4)$$

y sustituyendo este resultado en la ecuación de inicio (4.1.1), se llega a

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}_{ext}(t)}{m(1 - c\tau/L)} + \zeta \left[\vec{v}\left(t - \frac{2L}{c}\right) - \vec{v}(t) \right] \quad (4.1.5)$$

esta ecuación es aparentemente bien comportada pues $\vec{a} = 0$ si $\vec{F} = 0$, donde m es la masa observable la cual se define como

$$m \equiv m_0 + m_{elem} \quad (4.1.6)$$

donde m_0 es la masa mecánica y m_{elem} es la masa electromagnética la cual se puede demostrar que esta dada como

$$m_{elem} \equiv 2e^2 / 3Lc^2 \quad (4.1.7)$$

y

$$\zeta \equiv \frac{(c/2L)(c\tau/L)}{(1 - c\tau/L)} \quad (4.1.8)$$

donde τ es definido como

$$\tau = \frac{2e^2}{3mc^3}$$

y $\vec{F}_{ext}(t)$ es la fuerza externa.

Lo que nos interesa de la ecuación (4.1.5) es analizar su comportamiento. Para esto primero analizaremos la solución homogénea, es decir vamos a suprimir la fuerza externa, con lo cual se obtiene la ecuación

$$\ddot{\vec{r}}(t) - \zeta \left[\dot{\vec{r}}\left(t - \frac{2L}{c}\right) - \dot{\vec{r}}(t) \right] = 0. \quad (4.1.9)$$

Para esta ecuación se propone, como es usual, una solución de la forma

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(0) \exp(\beta t / \tau). \quad (4.1.10)$$

Sustituyendo la ecuación (4.1.10) en la ecuación (4.1.9), resulta

$$\begin{aligned} & \vec{r}(0)(\beta/\tau)^2 \exp(\beta t / \tau) - \\ & \zeta \left[\vec{r}(0)(\beta/\tau) \exp(\beta t / \tau) \exp(-2L\beta/c\tau) - \vec{r}(0)(\beta/\tau) \exp(\beta t / \tau) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

de donde,

$$\beta/\tau = \zeta[\exp(-2L\beta/c\tau) - 1]. \quad (4.1.12)$$

Lo que nos interesa ahora es resolver la ecuación (4.1.12) para analizar el comportamiento de β , sobre todo es importante conocer el signo de la parte real de esta cantidad, pues si la parte real es positiva la ecuación (4.1.9) exhibirá un comportamiento divergente, y en caso contrario las soluciones serán bien comportadas.

Para realizar el análisis de la ecuación (4.1.12) se usarán dos variables adimensionales,

$$\lambda = \frac{1}{\frac{L}{c\tau} - 1} \quad (4.1.13)$$

y

$$\eta = \frac{2L\beta}{c\tau} \equiv \mu + i\nu. \quad (4.1.14)$$

Sustituyendo la ecuación (4.1.14) en la ecuación (4.1.12) se tiene

$$\frac{c}{2L}(\mu + i\nu) = \frac{(c/2L)(c\tau/L)}{(1 - c\tau/L)} [\exp(-(\mu + i\nu)) - 1], \quad (4.1.15)$$

la cual conduce a que debe satisfacer que

$$\mu = \lambda[\exp(-\mu)\cos\nu - 1] \quad (4.1.16)$$

y

$$\nu = -\lambda\text{sen}\nu\exp(-\mu). \quad (4.1.17)$$

Analizando la ecuación (4.1.16) es claro que, si $\mu > 0$, entonces

$$\exp(-\mu)\cos\nu < 1 \quad (4.1.18)$$

siempre, con lo cual la expresión del corchete en la ecuación (4.1.16) será negativa, y si $\lambda > 0$, entonces tendremos una contradicción, pues por un lado tenemos $\mu > 0$ y del lado derecho una expresión negativa; esto quiere decir que si suponemos que $\lambda > 0$, entonces la ecuación (4.1.16) no admite soluciones positivas para μ .

Ahora si $\mu < 0$, entonces

$$\exp(-\mu)\cos\nu < 1 \quad (4.1.19)$$

para algunos valores de μ , con lo cual en este caso si existirán soluciones, siempre y cuando $\lambda > 0$. Esto querrá decir entonces que

$$\lambda = \frac{1}{\frac{L}{c\tau} - 1} > 0, \quad (4.1.20)$$

de donde se concluye que es necesario que

$$L > c\tau \approx 2 \times 10^{-13} \text{ cm} \quad (4.1.21)$$

Es importante subrayar que el comportamiento divergente de las soluciones sólo aparece cuando $L < c\tau$. Esto quiere decir que después de este límite el modelo ya no es apropiado para analizar el problema, ya que conduce a soluciones que no son físicamente aceptables. Esto es lo que ocurre también con la ecuación de Dirac-Plass: en $\tau \approx 10^{-23} \text{ s}$ aparecían efectos no causales.

Analizando la ecuación (4.1.21) podemos establecer las condiciones que debe satisfacer la masa mecánica que está implícita en esta. Ahora bien, si

$$L > c\left(\frac{2e^2}{3mc^3}\right), \quad (4.1.22)$$

entonces

$$m > \frac{2e^2}{3c^2L}. \quad (4.1.23)$$

Como m es la masa física, entonces

$$m = m_0 + \frac{2e^2}{3Lc^2}. \quad (4.1.24)$$

A partir de la ecuaciones (4.1.23) y (4.1.24) tenemos que

$$m_0 > 0. \quad (4.1.25)$$

Por lo tanto llegamos a la conclusión de que son equivalentes las condiciones expresadas en las ecuaciones (4.1.21) y (4.1.25). Es decir, que las soluciones de la ecuación (4.1.9) son bien comportadas mientras la masa mecánica de la partícula sea positiva. Sin embargo Pearle dice que puede darse el caso en que la masa mecánica de las partículas sea negativa y en este caso

tendríamos soluciones divergentes. Esto es equivalente a decir que el radio de las partículas sea menor que $c\tau$. Por lo tanto a medida que el radio del cascarón es menor que $c\tau$ y éste se aproxima a cero, la masa mecánica tiende a menos infinito y si $\text{Re}(\beta) > 0$ implica que

$\vec{r}$ diverge.

Ahora procederemos a resolver la ecuación manteniendo la fuerza externa $\vec{F}_{\text{ext}}(t)$, esto con el fin de discutir la preaceleración.

Aplicando transformada de Fourier a la ecuación (4.1.5)

$$\mathfrak{I}(\vec{a}(t)) = \frac{\mathfrak{I}(\vec{F}_{\text{ext}}(t))}{m(1 - c\tau/L)} + \zeta \left[\mathfrak{I}\left(\vec{v}\left(t - \frac{2L}{c}\right)\right) - \mathfrak{I}\left(\vec{v}(t)\right) \right], \quad (4.1.26)$$

obtenemos

$$(i\omega)^2 \mathfrak{I}(\vec{r}(t)) = \frac{\mathfrak{I}(\vec{F}_{\text{ext}}(t))}{m(1 - c\tau/L)} + \zeta \left[i\omega \mathfrak{I}\left(\vec{r}\left(t - \frac{2L}{c}\right)\right) - i\omega \mathfrak{I}\left(\vec{r}(t)\right) \right]. \quad (4.1.27)$$

Ya que

$$\mathfrak{I}(\vec{r}(t - 2L/c)) = \exp(-i2\omega L/c) \mathfrak{I}(\vec{r}(t)), \quad (4.1.28)$$

usando esta propiedad en la ecuación (4.1.27), la transformará en

$$(i\omega)^2 \mathfrak{I}(\vec{r}(t)) = \frac{\mathfrak{I}(\vec{F}_{\text{ext}}(t))}{m(1 - c\tau/L)} + i\omega \zeta [\exp(-i2\omega L/c) - 1] \mathfrak{I}(\vec{r}(t)). \quad (4.1.29)$$

Agrupando términos semejantes obtenemos

$$(i\omega)^2 \left[1 - \frac{\zeta \exp(-i2\omega L/c)}{i\omega} + \frac{\zeta}{i\omega} \right] \mathfrak{I}(\vec{r}(t)) = \frac{\mathfrak{I}(\vec{F}_{\text{ext}}(t))}{m(1 - c\tau/L)} \quad (4.1.30)$$

Despejando la transformada de Fourier de $\vec{r}(t)$ de la ecuación (4.1.30)

$$(i\omega)^2 \mathfrak{I}(\vec{r}(t)) = \frac{\mathfrak{I}(\vec{F}_{\text{ext}}(t))}{m(1 - c\tau/L) \left[1 - \frac{\zeta \exp(-i2\omega L/c)}{i\omega} + \frac{\zeta}{i\omega} \right]}, \quad (4.1.31)$$

Sustituyendo el valor de ζ de la ecuación (4.1.8) y factorizando en la ecuación (4.1.31),

tenemos que

$$m(i\omega)^2 \mathfrak{I}(\vec{r}(t)) = \frac{\mathfrak{I}(\vec{F}_{ext}(t))}{(1 - c\tau/L) \left[1 + \frac{(c/2L)(c\tau/L)}{(1 - c\tau/L)} \frac{i}{\omega} (\exp(-i2\omega L/c) - 1) \right]}. \quad (4.1.32)$$

Simplificando la ecuación (4.1.32), obtenemos

$$m(i\omega)^2 \mathfrak{I}(\vec{r}(t)) = \frac{\mathfrak{I}(\vec{F}_{ext}(t))}{1 - c\tau + (c/2L)(c\tau/L) \frac{i}{\omega} (\exp(-i2\omega L/c) - 1)}. \quad (4.1.33)$$

Ahora como

$$(c/2L)(c\tau/L) \frac{i}{\omega} (2Li\omega/c) = -c\tau/L, \quad (4.1.34)$$

haciendo uso de esta relación, la ecuación (4.1.33) se transforma en

$$m(i\omega)^2 \mathfrak{I}(\vec{r}(t)) = \frac{\mathfrak{I}(\vec{F}_{ext}(t))}{1 + (c/2L)(c\tau/L) \frac{i}{\omega} [\exp(-i2\omega L/c) + 2L\omega i/c - 1]}. \quad (4.1.35)$$

Por último aplicando la transformada inversa de Fourier a la ecuación (4.1.35), obtenemos

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp(i\omega(t-t')) \left\{ \frac{1}{1 + (c/2L)(c\tau/L) \frac{i}{\omega} [\exp(-i2\omega L/c) + 2L\omega i/c - 1]} \right\} \vec{F}_{ext}(t). \quad (4.1.36)$$

Finalmente obtenemos que la solución está dada por

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp(i\omega(t-t')) \left\{ 1 + \frac{i}{\omega} (c/2L)(c\tau/L) [\exp(-i2L\omega/c) + i2L\omega/c - 1] \right\}^{-1} \vec{F}_{ext}(t), \quad (4.1.37)$$

donde la función de Green está dada por la expresión

$$G(t-t') = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp(i\omega(t-t')) \left\{ 1 + \frac{i}{\omega} (c/2L)(c\tau/L) [\exp(-i2L\omega/c) + i2L\omega/c - 1] \right\}^{-1}. \quad (4.1.38)$$

Sabemos que la causalidad se cumple si $G[(t-t') < 0] = 0$. Esto querría decir que el denominador de la ecuación (4.1.38) no tiene polos en la mitad inferior del plano complejo, pero esto es cierto pues los ceros del denominador son las raíces de la ecuación (4.1.12). Con lo cual se cumple que, si $L > c\tau$, o lo que es lo mismo, si se tiene una masa positiva, la teoría clásica es como lo dijimos antes, consistente.

Por otra parte el trabajo de Moniz y Sharp tiene como inicio la ecuación de Lorentz para la fuerza de reacción de radiación. Esta ecuación muestra la interacción de la partícula cargada con el autocampo electromagnético. Esta ecuación de movimiento se expresa en términos de la fuerza externa y las coordenadas de la partícula. Es importante resaltar que la velocidad que aparece en esta ecuación es mucho menor que c y además cuando la masa de la partícula se hace tender a cero se recupera la ecuación de Lorentz-Dirac.

Aplicando la ecuación a una distribución de carga en forma de cascarón esférico se obtiene una ecuación diferencial de diferencias.

Es importante resaltar las características de esta ecuación.

- El comportamiento divergente aparece sólo cuando el tamaño de la partícula es menor que el radio clásico o cuando la masa es negativa.
- Cuando la fuerza externa cesa el movimiento de la carga adquiere una velocidad constante, es decir no hay soluciones divergentes.
- La ecuación es causal

Lo anterior quiere decir que la teoría de Moniz y Sharp es consistente siempre y cuando el radio de la partícula sea mayor que $c\tau$, o lo que es equivalente, que la masa de la partícula sea positiva.

4.2 ECUACIÓN GENERAL DE MOVIMIENTO PARA UNA PARTÍCULA CON ESTRUCTURA

Después de deducir la ecuación de movimiento para un cascarón esférico cargado, ahora deduciremos la ecuación general para una partícula cargada con estructura (simetría esférica). Esto se logra partiendo del modelo usado por Lorentz para calcular la fuerza de reacción de radiación, para el cual, al igual que antes, no tomaremos en cuenta los términos no lineales de las derivadas de v , por lo cual la expresión de la que partiremos es la ecuación (2.2.6) rescrita como

$$\vec{F}_{rad} = -\frac{2e^2}{3c^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!c^n} \left(\frac{d^n \vec{a}}{dt^n} \right) \int d^3r \int d^3r' \left| \vec{r} - \vec{r}' \right|^{n-1} \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}'), \quad (4.2.1)$$

donde la distribución $\rho(\vec{r})$ está normalizada a la unidad.

El punto crucial de la deducción reside en notar que la serie (4.2.1) puede sumarse no sólo para un cascarón esférico, como se hizo en la sección anterior, sino que se puede sumar en general, notando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!c^n} R^n \frac{d^n \vec{a}}{dt^n} = \vec{a} \left(t - \frac{R}{c} \right). \quad (4.2.2)$$

donde $R = \left| \vec{r} - \vec{r}' \right|$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (4.2.1), tenemos que la fuerza de reacción de radiación queda expresada como

$$\vec{F}_{rad} = -\frac{2e^2}{3c^2} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{R} \vec{a} \left(t - \frac{R}{c} \right), \quad (4.2.3)$$

con lo cual la ecuación de movimiento será

$$m \vec{a} = \vec{F}_{ext} - \frac{2e^2}{3c^2} \int d^3r \int d^3r' \frac{1}{R} \rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}') \vec{a} \left(t - \frac{R}{c} \right), \quad (4.2.4)$$

la cual es precisamente la ecuación general de movimiento que queríamos para una partícula con estructura.

Podemos reescribirla de forma más compacta; para ello procedemos como sigue. Si definimos

$$I = \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}')}{R} a(t - \frac{R}{c}), \quad (4.2.5)$$

y como antes tomamos

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}', \quad (4.2.6)$$

entonces

$$d^3r' = -d^3R, \quad (4.2.7)$$

con lo cual (4.2.5) se transforma en

$$I = - \int d^3r \int d^3R \frac{\rho(\vec{r})\rho(\vec{r}-\vec{R})}{R} a(t - \frac{R}{c}), \quad (4.2.8)$$

Si definimos la transformada de Fourier de la distribución ρ como

$$\rho(\vec{r}) = \int d^3k \exp(i\vec{k} \bullet \vec{r}) \rho(\vec{k}), \quad (4.2.9)$$

entonces (4.2.5) se puede escribir como

$$I = - \int d^3r \int d^3R \frac{1}{R} a(t - \frac{R}{c}) \int d^3k \int d^3k' \rho(\vec{k}) \rho(\vec{k}') \exp(-i\vec{k}' \bullet \vec{R}) \exp(i\vec{k}' \bullet (\vec{r} - \vec{R})). \quad (4.2.10)$$

La integral sobre r es inmediata puesto que

$$\int d^3r \exp(i(\vec{k} + \vec{k}') \bullet \vec{r}) = 2\pi \delta(\vec{k} + \vec{k}'). \quad (4.2.11)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (4.2.10), obtenemos

$$I = -2\pi \int d^3R a(t - \frac{R}{c}) \frac{1}{R} \int d^3k \int d^3k' \rho(\vec{k}) \rho(\vec{k}') \exp(-i\vec{k}' \bullet \vec{R}) \delta(\vec{k} + \vec{k}'). \quad (4.2.12)$$

Ahora la integración sobre k' es inmediata, sólo tenemos que hacer $\vec{k}' \rightarrow -\vec{k}$, así la integral (4.2.12) se convierte en

$$I = -2\pi \int d^3R a(t - \frac{R}{c}) \frac{1}{R} \int d^3k \rho(\vec{k}) \rho(-\vec{k}) \exp(i\vec{k} \bullet \vec{R}). \quad (4.2.13)$$

Por otro lado como ρ es real $\rho(-\vec{k}) = \rho^*(\vec{k})$, entonces

$$I = -2\pi \int d^3R a(t - \frac{R}{c}) \frac{1}{R} \int d^3k \left| \rho(\vec{k}) \right|^2 \exp(i\vec{k} \bullet \vec{R}). \quad (4.2.14)$$

Ahora procedemos a integrar sobre k , para lo cual usamos la simetría esférica supuesta desde el principio ($\vec{R}/\hat{\kappa}$), con lo cual podemos usar

$$d^3k = k^2 \sin\theta dk d\theta d\phi \quad (4.2.15)$$

y transformar la ecuación (4.2.14) en

$$I = 2\pi \int d^3R \vec{a}(t - \frac{R}{c}) \frac{1}{R} \int dk k^2 du d\phi \left| \rho(\vec{k}) \right|^2 \exp(ikRu) \quad (4.2.16)$$

donde $u = \cos\theta$. Efectuando las integraciones sobre ϕ y u , resulta

$$I = 8\pi^2 \int d^3R \vec{a}(t - \frac{R}{c}) \frac{1}{R^2} \int dk k \left| \rho(\vec{k}) \right|^2 \sin kR. \quad (4.2.17)$$

Ahora vamos a integrar sobre R , para lo cual usamos que

$$d^3R = R^2 \sin\theta dR d\theta d\phi \quad (4.2.18)$$

Sustituyendo en la ecuación (4.2.17)

$$I = 8\pi^2 \int R^2 \sin\theta dR d\theta d\phi \vec{a}(t - \frac{R}{c}) \frac{1}{R^2} \int dk k \left| \rho(\vec{k}) \right|^2 \sin kR \quad (4.2.19)$$

y realizando las integrales con respecto a θ y a ϕ , obtenemos

$$I = -32\pi^3 \int dR \vec{a}(t - \frac{R}{c}) \int dk k \left| \rho(\vec{k}) \right|^2 \sin kR. \quad (4.2.20)$$

Ahora, si se usa la definición

$$t' = t - \frac{R}{c}, \quad (4.2.21)$$

entonces

$$cdt' = -dR, \quad (4.2.22)$$

y así la ecuación (4.2.20) se transforma en

$$I = 32\pi^3 c \int dt' \vec{a}(t - \frac{R}{c}) \int dk k \left| \rho(\vec{k}) \right|^2 \sin kR. \quad (4.2.23)$$

Si ahora se define el factor de estructura $g(r)$ como

$$g(r) = \int_0^\infty k \left| \rho(\vec{k}) \right|^2 \sin kr dk \quad (4.2.24)$$

entonces la ecuación (4.2.23) se transforma en

$$I = 32\pi^3 c \int_{-\infty}^t g((c(t-t')) \vec{a}(t') dt' . \quad (4.2.25)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación de movimiento (4.2.4), tenemos que

$$m \vec{a}(t) = \vec{F}_{ext} - \frac{64e^2}{3c} \pi^3 \int_{-\infty}^t g(c(t-t')) \vec{a}(t') dt' . \quad (4.2.26)$$

Ahora lo que nos interesa es demostrar que esta ecuación general tiene un comportamiento causal. Vamos a demostrarlo. Primero escribiremos la ecuación (4.2.26) como la ecuación de Dirac-Plass (2.3.3), en términos de la función de Green.

De aquí en adelante vamos a suponer que la fuerza externa depende únicamente del tiempo y vamos a definir también

$$g_0(t) = \frac{64e^2}{3c} \pi^3 \Theta(t) g(t) , \quad (4.2.27)$$

donde $\Theta(t)$ es la función de escalón de Heaviside. Así la integral de la ecuación (4.2.26) se puede extender hasta $+\infty$, con lo cual la ecuación de movimiento se puede expresar como

$$m \vec{a}(t) = \vec{F}_{ext}(t) - \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(c(t-t')) \vec{a}(t') dt' , \quad (4.2.28)$$

que es mas fácil de manipular.

Aplicando la definición de convolución a g_0 y a $\vec{a}(t')$, tendremos que la ecuación (4.2.28) se transforma en

$$m[\vec{a}(t) + \frac{1}{m} (g_0 * \vec{a})(t)] = \vec{F}_{ext}(t) , \quad (4.2.29)$$

donde $*$ representa el producto de convolución.

Aplicando la transformada de Fourier a (4.2.29),

$$m[\mathfrak{I}(\vec{a}(\omega)) + \frac{1}{m} \mathfrak{I}((g_0 * \vec{a})(\omega))] = \mathfrak{I}(\vec{F}_{ext}(\omega)) , \quad (4.2.30)$$

tenemos que

$$m[\mathfrak{I}(\vec{a}(\omega)) + \frac{1}{m} \sqrt{2\pi} \mathfrak{I}(g_0(\omega)) \mathfrak{I}(\vec{a}(\omega))] = \mathfrak{I}(\vec{F}_{ext}(\omega)) . \quad (4.2.31)$$

Si definimos

$$\Im(G(\omega)) = \frac{1}{m} \frac{1}{1 + \frac{1}{m} \sqrt{2\pi} \Im(g_0(\omega))}, \quad (4.2.32)$$

entonces podemos escribir

$$\Im(\vec{a}(\omega)) = \Im(G(\omega)) \Im(\vec{F}_{ext}(\omega)), \quad (4.2.33)$$

y usando nuevamente el teorema de convolución obtenemos que

$$\vec{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (G * \vec{F}_{ext})(t), \quad (4.2.34)$$

o bien

$$\vec{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t') \vec{F}_{ext}(t - t') dt', \quad (4.2.35)$$

que también se puede expresar como

$$\vec{a}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(t - t') \vec{F}_{ext}(t') dt'. \quad (4.2.36)$$

En esta ecuación G es la función de Green, y tendrá un comportamiento causal si

$$G(t - t') = 0 \quad \text{para} \quad t < t'$$

y

$$G(t - t') \neq 0 \quad \text{para} \quad t > t'. \quad (4.2.37)$$

Vamos a demostrar que esto se cumple.

Sabemos que $G(t)$ se puede escribir como

$$G(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Im(G(\omega)) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (4.2.38)$$

Para establecer el comportamiento de la función de Green para $t > 0$, el contorno sobre el plano complejo es un semicírculo infinito en el semiplano superior, mientras que para $t < 0$ se usa el semiplano inferior. Así la condición (4.2.37) es equivalente a la condición de que todos los polos de $\Im(G(z))$ con $z = \omega + i\sigma$, estén en el semiplano superior.

Si, en la ecuación (4.2.32), $m > 0$, los polos de $\Im(G(z))$ son la solución de

$$1 + \frac{1}{m} \sqrt{2\pi} \Im(g_0(z)) = 0. \quad (4.2.39)$$

Entonces primero necesitamos calcular $\Im(g_0(z))$. Tenemos así que

$$\begin{aligned} \Im(g_0(z)) &= \int dt \exp(-izt) \int_0^\infty dk k \left| \rho(\vec{k}) \right|^2 \text{sen} kr = \int dt \exp(-i(\omega + i\sigma)t) \int_0^\infty dk \left| \rho(\vec{k}) \right|^2 \text{sen} kr \\ &= \int_0^\infty dt \exp(-i\omega t) \exp(\sigma t) \int_0^\infty dk k \left| \rho(\vec{k}) \right|^2 \text{sen} kct dk \end{aligned} \quad (4.2.40)$$

Para $\sigma < 0$, la integración sobre t se puede llevar a cabo de inmediato. Si definimos

$$T = \int_0^\infty dt \exp(-i\omega t) \exp(\sigma t) \text{sen} kct = \int_0^\infty dt \exp(-izt) \text{sen} kct \quad (4.2.41)$$

obtenemos que

$$T = \int_0^\infty dt \exp(-izt) \text{sen} kct = \frac{kc}{k^2 c^2 - z^2}. \quad (4.2.42)$$

Sustituyendo la ecuación (4.2.42) en (4.2.40), obtenemos

$$\Im(g_0(z)) = \int_0^\infty \frac{k^2 c}{k^2 c^2 - z^2} \left| \rho(\vec{k}) \right|^2 dk. \quad (4.2.43)$$

Entonces la ecuación (4.2.39) se transforma en

$$1 + \frac{1}{m} \sqrt{2\pi} \int_0^\infty dk \frac{k^3 c}{k^2 c^2 - z^2} \left| \rho(\vec{k}) \right|^2 = 0. \quad (4.2.44)$$

Ahora procedemos a determinar las partes real e imaginaria de esta ecuación,

$$k^2 c^2 - z^2 = k^2 c^2 - (\omega + i\sigma)^2 = k^2 c^2 - \omega^2 + \sigma^2 - 2i\omega\sigma. \quad (4.2.45)$$

Entonces la ecuación (4.2.44) se transforma en

$$1 + \frac{1}{m} \sqrt{2\pi} \int_0^\infty dk \frac{k^3 c}{k^2 c^2 - \omega^2 + \sigma^2 - 2i\omega\sigma} \left| \rho(\vec{k}) \right|^2 = 0, \quad (4.2.46)$$

que puede reescribirse como

$$1 + \frac{32e^2}{3mc} \pi^2 \sqrt{2\pi} \int_0^\infty dk \frac{k^3 c [k^2 c^2 - \omega^2 + \sigma^2 + 2i\omega\sigma]}{(k^2 c^2 - \omega^2 + \sigma^2)^2 + 4\omega^2 \sigma^2} \left| \rho(\vec{k}) \right|^2 = 0, \quad (4.2.47)$$

con lo cual la parte real es

$$1 + \frac{1}{m} \sqrt{2\pi} \int_0^\infty dk \frac{k^3 c [k^2 c^2 - \omega^2 + \sigma^2]}{(k^2 c^2 - \omega^2 + \sigma^2)^2 + 4\omega^2 \sigma^2} \left| \rho(\vec{k}) \right|^2 = 0 \quad (4.2.48)$$

y la parte imaginaria es

$$\frac{1}{m} \sqrt{2\pi} \int_0^\infty dk \frac{2\omega \sigma k^3 c}{(k^2 c^2 - \omega^2 + \sigma^2)^2 + 4\omega^2 \sigma^2} \left| \rho(\vec{k}) \right|^2 = 0. \quad (4.2.49)$$

Como la integral en (4.2.49) es positiva, entonces ω debe anularse para que exista solución cuando $\sigma < 0$. Pero para $\omega = 0$ la integral en (4.2.48) es también positiva y no tiene solución si $m \geq 0$. Por lo tanto no hay polos en el semiplano complejo inferior, ni habrá polos sobre el eje real si se supone que $g(r)$ se encuentra sobre un conjunto de medidas diferentes de cero, pero entonces de (4.2.39) se tiene que

$$1 + \frac{1}{m} \sqrt{2\pi} \Im(g_0(z)) = 0. \quad (4.2.50)$$

Esto es, debería cumplirse que,

$$\Im(g_0(\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty g_0(t) \exp(-i\omega t) dt = -\frac{m}{\sqrt{2\pi}}. \quad (4.2.51)$$

Esto ocurre sólo si $g_0(t) = m\delta(t)$.

Pero esto no es físicamente plausible; como muestra la ecuación (4.2.24), este comportamiento es el de una carga extendida infinitamente. Entonces si $\rho(\vec{k})$ no tiene polos para $k \geq 0$, $G(\omega)$ no tiene polos sobre el eje real y por lo tanto todos los polos se ubican estrictamente en el semiplano superior; la única excepción posible para este resultado exige el uso de distribuciones de carga muy peculiares.

La ecuación (4.2.40) muestra que, siempre que $\omega + i\sigma$ es un polo, entonces también lo es $-\omega + i\sigma$, para esta carga únicamente el signo de la parte imaginaria de $\Im(g_0(z))$, se anula en la ecuación (4.2.49).

Así los polos ocurren en pares en el semiplano superior, arreglados simétricamente alrededor del eje imaginario. Se nota que, en general, el origen no representa un par de polos, pensando

hay formas de $\vec{\rho}(\vec{r})$ para las cuales esto puede ocurrir, así la partícula puntual no necesariamente es el caso límite de la distribución de carga extendida.

Lo importante de la demostración anterior depende de suponer que $m \geq 0$. Esta condición permite que podamos determinar la zona de causalidad.

Por último diremos que la solución general se puede usar para resolver el problema particular del cascarón esférico, el cual ya se resolvió anteriormente.

4.3 PROPUESTA DE OLIVER

Hay otro tipo de propuestas, la de Oliver, quien recientemente argumentó que el trabajo realizado por la reacción de radiación está dado por

$$\int \vec{F}_{rad} \bullet d\vec{r} = \int \frac{2e^2}{3c^3} a^2 dt, \quad (4.3.1)$$

donde se cambió el signo de la potencia radiada (véase la sección 2.1). Esto conduce de inmediato a que la fuerza de reacción de radiación cambie de signo y entonces la ecuación de movimiento será

$$m(\vec{a} + \tau \dot{\vec{a}}) = \vec{F}_{ext}, \quad (4.3.2)$$

la cual de acuerdo con lo discutido previamente no tiene soluciones divergentes, pero se basa en una condición impuesta sin justificación adecuada.

Si la propuesta de Oliver fuera consistente con la electrodinámica entonces el problema de reacción de radiación estaría resuelto.

Como se mostró en (4.2.2)

$$\vec{a}_{ret} = \vec{a} \left(t - \frac{|\vec{x} - \vec{x}'|}{c} \right);$$

(donde *ret* significa retardada)

con lo cual su desarrollo de Taylor contiene el término $-m\tau \dot{\vec{a}}$, lo cual significa que el signo menos no se puede cambiar y las soluciones divergentes no se pueden evitar considerando la ecuación (4.3.2). Desafortunadamente, un cambio en el signo de la fuerza de radiación como lo propone Oliver no es posible, pues esto no es consistente con las leyes fundamentales de la electrodinámica.

CAPÍTULO 5

FUNCIÓN DE GREEN DE LA ECUACIÓN DE ONDA UNIDIMENSIONAL

La parte principal de esta sección se sustenta en la solución de la ecuación de onda unidimensional; es entonces necesaria la función de Green para esta ecuación.

Vamos a deducirla detalladamente, pues resulta además que en una de las referencias más comunes aparece incorrectamente dada la función de Green. Por ello esta sección reviste mucha relevancia.

5.1 DEDUCCIÓN DE LA FUNCIÓN DE GREEN DE LA ECUACIÓN DE ONDA UNIDIMENSIONAL

Un elemento esencial para la obtención de los resultados de la sección 5.2 es la función de Green para la ecuación de onda en una dimensión.

Es importante detallar la deducción de la función de Green de la ecuación de onda unidimensional, puesto que la deducción de esta función dada en el libro de Good es incorrecta, por lo cual es necesario obtener el resultado correcto que usaremos en éste trabajo.

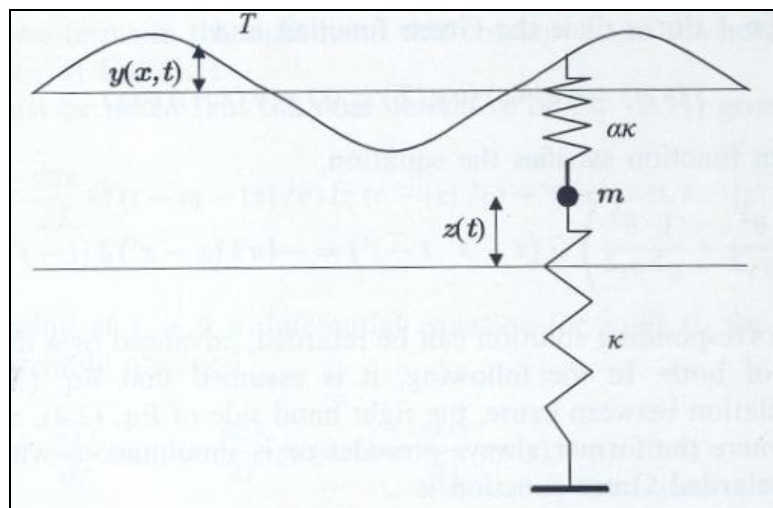


Figura 1

En la figura 1 se supone que la masa m está inicialmente en $x = 0$, los resortes y la masa oscilan, pero este oscilador está acoplado a una cuerda infinita, la cual simulará el medio que

rodea a la carga, por esta cuerda la masa radiará energía, la cual influirá sobre el movimiento de la masa, simulando la fuerza de reacción de radiación electromagnética.

La ecuación de onda unidimensional, es

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\alpha\kappa}{T} (z - y(x, t)) \delta(x) \quad (5.1.1)$$

cuya solución es la suma de las soluciones homogénea e inhomogénea. Esta última está dada por

$$Y_I(x, t) = \int dx' dt' G(x - x', t - t') s(x', t'), \quad (5.1.2)$$

donde $G(x - x', t - t')$ es la función de Green, que satisface la ecuación

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(x - x', t - t') = -4\pi \delta(x - x') \delta(t - t'), \quad (5.1.3)$$

y

$$s(x, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\alpha\kappa}{T} (z(t) - y(x, t)) \delta(x). \quad (5.1.4)$$

Para calcular la función de Green, procederemos de la siguiente manera: escribimos G en la forma

$$G(x - x', t - t') = \int dk d\omega \exp[i(k(x - x') - \omega(t - t'))] g(k, \omega) \quad (5.1.5)$$

donde $g(k, \omega)$ es una función k y ω que se va a determinar y

$$\delta(x - x') \delta(t - t') = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk d\omega \exp[i(k(x - x') - \omega(t - t'))]. \quad (5.1.6)$$

Por lo que sustituyendo las ecuaciones (5.1.5) y (5.1.6) en la ecuación (5.1.3), tenemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \int dk d\omega \exp[i(k(x - x') - \omega(t - t'))] g(k, \omega) = \\ -\frac{4\pi}{(2\pi)^2} \int dk d\omega \exp[i(k(x - x') - \omega(t - t'))] \end{aligned}$$

Realizando las operaciones indicadas y simplificando el lado derecho, tenemos

$$\int dk d\omega \left[(ik)^2 - \frac{1}{v^2} (-i\omega)^2 \right] g(k\omega) \exp[i(k(x-x') - \omega(t-t'))] =$$

$$- \frac{1}{\pi} \int dk d\omega \exp[i(k(x-x') - \omega(t-t'))]$$

Agrupando los términos de la ecuación en el lado izquierdo resulta

$$\int dk d\omega \left\{ \left[-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2} \right] g(k, \omega) + \frac{1}{\pi} \right\} \exp[i(k(x-x') - \omega(t-t'))] = 0.$$

Como la función exponencial es arbitraria, la solución más simple es

$$\left[-k^2 + \frac{\omega^2}{v^2} \right] g(k, \omega) + \frac{1}{\pi} = 0;$$

entonces

$$g(k, \omega) = -\frac{1}{\pi} \frac{v^2}{\omega^2 - k^2}, \quad (5.1.7)$$

y al sustituir la ecuación (5.1.7) en la ecuación (5.1.5), obtenemos la función de Green

$$G(x-x', t-t') = \int dk d\omega \exp[i(k(x-x') - \omega(t-t'))] \left[-\frac{1}{\pi} \frac{v^2}{\omega^2 - k^2} \right]. \quad (5.1.8)$$

La integral respecto a omega queda en la forma

$$I_\omega = -\frac{v^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega^2 - k^2 v^2}, \quad (5.1.9)$$

donde

$$\tau = t - t'.$$

Como es usual, vamos a suponer que ω es complejo; entonces

$$\exp[-i(\omega_{\text{Re}} + i\omega_{\text{Im}})\tau] = \exp(-i\omega_{\text{Re}}\tau) \exp(\omega_{\text{Im}}\tau). \quad (5.1.10)$$

La integral I_ω existe,

$$\text{si } \tau > 0, \quad t-t' > 0, \quad t > t', \quad \omega_{\text{Im}} < 0, \quad G \neq 0$$

$$\text{si } \tau < 0, \quad t-t' < 0, \quad t < t', \quad \omega_{\text{Im}} > 0, \quad G = 0. \quad (5.1.11)$$

Pero como se impone que $\tau < 0$, o $\tau > 0$ entonces si $\tau < 0$, no hay polos, por lo tanto la integral es cero (Teorema de Cauchy).

Evaluando la integral por el teorema del residuo,

$$I_{\omega} = -\frac{v^2}{\pi} \Theta(\tau) (-2\pi i) \sum \text{Re } s, \quad (5.1.12)$$

obtenemos directamente

$$I_{\omega} = \frac{2\pi i v^2}{\pi} \Theta(\tau) \left\{ \frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega - kv} \Big|_{\omega=-kv} + \frac{\exp(-i\omega\tau)}{\omega + kv} \Big|_{\omega=kv} \right\}, \quad (5.1.13)$$

Que al evaluarla nos da

$$I_{\omega} = \frac{2v}{k} \Theta(\tau) \left\{ \frac{\exp(ikv\tau) - \exp(-ikv\tau)}{2i} \right\} \quad (5.1.14)$$

o de forma equivalente,

$$I_{\omega} = \frac{2v}{k} \Theta(\tau) \{ \text{sen } kv\tau \}. \quad (5.1.15)$$

Sustituyendo la ecuación (5.1.15) en la ecuación (5.1.8), tenemos

$$\begin{aligned} G(x - x', t - t') &= 2v \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp[i(kR)] \left[\frac{\exp(ikv\tau) - \exp(-ikv\tau)}{2ik} \right] = \\ &= v \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[\frac{\exp(ik(R + v\tau)) - \exp(ik(R - v\tau))}{ik} \right]. \end{aligned} \quad (5.1.16)$$

Hay que aclarar que hasta aquí no hay problema con el resultado de Good, sin embargo entre las ecuaciones (24.24) y (24.28) este autor “demuestra” que

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\exp(ikx)}{k} = \Theta(x) - \frac{1}{2}, \quad (5.1.17)$$

lo cual es incorrecto, pues del libro de Gradshteyn tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\exp(ikx)}{k} = i\pi \text{sgn}(x). \quad (5.1.18)$$

Además, según el libro de Hsu, se tiene que

$$\text{sgn}(\xi) = \Theta(\xi) - \Theta(-\xi). \quad (5.1.19)$$

Con lo cual como $R + c\tau$ no tiene signo definido, el resultado de la ecuación (24.29) del libro de Good and Nelson

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa \frac{\text{sen} \kappa c \tau \exp(ikR)}{k} = \pi(\Theta(R + c\tau) - \Theta(R - c\tau)) \quad (5.1.20)$$

es incorrecto.

Usando los resultados de Gradshteyn y de Hsu, tenemos que si I_1 es la primera integral de (5.1.16)

$$I_1 = v \int dk \left[\frac{\exp(ik(R + v\tau))}{ik} \right], \quad (5.1.21)$$

de la integración resulta que

$$I_1 = \pi v \text{sgn}(R + v\tau), \quad (5.1.22)$$

y usando el resultado de Hsu (5.1.19), obtenemos

$$I_1 = \pi v \{\Theta(R + v\tau) - \Theta(-R - v\tau)\}. \quad (5.1.23)$$

Así

$$I_1 = \pi v \{\Theta(R + v\tau)\Theta(R) + \Theta(R + v\tau)\Theta(-R) - \Theta(-R - v\tau)\Theta(R) - \Theta(-R - v\tau)\Theta(-R)\}.$$

Simplificando esta ecuación llegamos a la expresión

$$I_1 = \pi v \{1 + \Theta(R + v\tau)\Theta(-R) - \Theta(-R - v\tau)\Theta(-R)\}, \quad (5.1.24)$$

o también

$$I_1 = \pi v \{1 + \Theta(-|R| + v\tau) - \Theta(|R| - v\tau)\}. \quad (5.1.25)$$

Para la segunda integral de (5.1.16) tenemos que

$$I_2 = v \int dk \left[\frac{\exp(ik(R - v\tau))}{ik} \right]. \quad (5.1.26)$$

De nuevo al efectuar la integración resulta

$$I_2 = \pi v \operatorname{sgn}(R - v\tau), \quad (5.1.27)$$

con lo cual

$$I_2 = \pi v \{ \Theta(R - v\tau) - \Theta(-R + v\tau) \}. \quad (5.1.28)$$

Conviene reescribir esta expresión como

$$I_2 = \pi v \{ \Theta(R - v\tau) \Theta(R) + \Theta(R - v\tau) \Theta(-R) - \Theta(-R + v\tau) \Theta(R) - \Theta(-R + v\tau) \Theta(-R) \},$$

que al simplificar resulta

$$I_2 = \pi v \{ \Theta(R - v\tau) \Theta(R) + \Theta(-R + v\tau) \Theta(R) - 1 \}. \quad (5.1.29)$$

O de otra forma

$$I_2 = \pi v \{ \Theta(|R| - v\tau) + \Theta(-|R| + v\tau) - 1 \} \quad (5.1.30)$$

Con los resultados (5.1.25) y (5.1.30) tenemos que

$$I_1 - I_2 = \pi v \{ 1 + \Theta(-|R| + v\tau) - \Theta(|R| - v\tau) - \Theta(|R| - v\tau) - \Theta(-|R| + v\tau) + 1 \},$$

que puede reescribirse como

$$I_1 - I_2 = \pi v \{2 - 2\Theta(|R| - v\tau)\}, \quad (5.1.31)$$

con lo cual la ecuación (5.1.16) se transforma en

$$G(|x - x'|, t - t') = 2\pi v \{1 - \Theta(|R| - v\tau)\}, \quad (5.1.32)$$

o bien

$$G(x - x', t - t') = 2\pi v \{1 + \Theta(R + v\tau)\Theta(-R) - \Theta(R - v\tau)\Theta(R)\}, \quad (5.1.33)$$

que es la función de Green. Evidentemente **no es la misma** que obtiene Good en su libro, pues la función de este último es expresada como

$$G(x - x', t - t') = \pi v \{\Theta(R + v\tau) - \Theta(R - v\tau)\}, \quad (5.1.34)$$

5.2 SOLUCION EXACTA PARA LA ECUACION DE MOVIMIENTO DE UN OSCILADOR ARMONICO LIGADO A UNA CUERDA INFINITA

En su trabajo Burke muestra que, al realizar aproximaciones a la ecuación de movimiento exacta de un oscilador armónico ligado a una cuerda infinita, aparecen soluciones divergentes; esto motiva a suponer que, probablemente, las divergencias en la ecuación de movimiento de Abraham-Lorentz se deban precisamente a aproximaciones que se realizan (Jackson, 1975). Debe tenerse presente además que en ambos casos aparecen ecuaciones de tercer orden. En esto consiste nuestro interés, tratar de analizar la ecuación de movimiento exacta, la cual esperamos no contenga soluciones divergentes. Es decir esperamos que sea una ecuación bien comportada, que tenga las soluciones deseadas y se pueda establecer con mayor precisión cómo surgen las soluciones no deseadas.

A pesar de que Daboul demuestra que las ecuaciones generalizadas de Abraham-Lorentz, esto es de orden superior, tiene soluciones divergentes, nosotros vamos a mostrar cómo la ecuación exacta, siendo de orden superior, no contiene soluciones divergentes.

Sabemos que la propagación de una onda a través de una cuerda satisface la ecuación

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f(x, t). \quad (5.2.1)$$

Esta ecuación la podemos transformar en

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{1}{T} f(x, t), \quad (5.2.2)$$

donde T es la tensión sobre la cuerda y ρ es la densidad lineal de ésta, $f(x, t)$ es el acoplamiento entre la cuerda y la partícula de masa m . Por otro lado, la partícula está forzada a oscilar armónicamente, con lo cual debe satisfacer la ecuación dinámica

$$m \ddot{z} + \kappa z = \int dx f(x, t). \quad (5.2.3)$$

La función de acoplamiento $f(x, t)$ será expresada como

$$f(x, t) = -\alpha \kappa (z - y(x, t)) \delta(x). \quad (5.2.4)$$

Como la velocidad de una onda en una cuerda satisface la relación

$$v^2 = \frac{T}{\rho}, \quad (5.2.5)$$

entonces la ecuación (5.2.2) se transforma en

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{1}{T} f(x, t), \quad (5.2.6)$$

con lo cual el modelo mecánico queda representado por dos ecuaciones acopladas, las cuales son

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\alpha \kappa}{T} (z - y(x, t)), \quad (5.2.7)$$

y

$$\ddot{z} + \frac{\kappa}{m} z = -\alpha \frac{\kappa}{m} (z - y(x=0, t)). \quad (5.2.8)$$

La solución general de la ecuación (5.2.7) será la suma de la solución homogénea y la solución inhomogénea.

La solución inhomogénea está dada por

$$y_I(x, t) = \int dx' dt' G(x - x', t - t') S(x', t'), \quad (5.2.9)$$

donde $G(x - x', t - t')$ es la función de Green y la función $S(x', t')$ la definimos como

$$S(x, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\alpha\kappa}{T} (z(t) - y(x, t)) \delta(x). \quad (5.2.10)$$

La función de Green satisface la ecuación asociada

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(x - x', t - t') = -4\pi \delta(x - x') \delta(t - t'). \quad (5.2.11)$$

La solución de esta ecuación diferencial ya se obtuvo en el capítulo correspondiente a la función de Green, obteniéndose la expresión

$$G(|x - x'|, t - t') = 2\pi v \{1 - \Theta(|x - x'| - v(t - t'))\}, \quad (5.2.12)$$

o también

$$G(x - x', t - t') = 2\pi v \{1 + \Theta(x - x' + v(t - t'))\Theta(x' - x) - \Theta(x - x' - v(t - t'))\Theta(x - x')\}. \quad (5.2.13)$$

Ahora sustituyendo las ecuaciones (5.2.10), (5.2.12) o (5.2.13) en la ecuación (5.2.9), tenemos que

$$y_I = \int dx' dt' 2\pi v \{1 + \Theta(x - x' + v(t - t'))\Theta(x' - x) - \Theta(x - x' - v(t - t'))\Theta(x - x')\} \left\{ \frac{1}{4\pi} \frac{\alpha\kappa}{T} (z(t') - y(x', t')) \delta(x') \right\}. \quad (5.2.14)$$

Simplificando tenemos que

$$y_I = \frac{v\alpha\kappa}{2T} \int dx' dt' \{1 + \Theta(x - x' + v(t - t'))\Theta(x' - x) - \Theta(x - x' - v(t - t'))\Theta(x - x')\} \{(z(t') - y(x', t'))\delta(x')\}. \quad (5.2.15)$$

la cual es equivalente a

$$y_I = \frac{v\alpha\kappa}{2T} \int dx' dt' \{1 - \Theta(|x - x'| - v(t - t'))\} \{(z(t') - y(x', t'))\delta(x')\}.$$

Integrando con respecto a x' , tenemos que

$$y_I = \frac{v\alpha\kappa}{2T} \Theta(t - t_0 - \frac{|x|}{v}) \int_{t_0}^{t - \frac{|x|}{v}} dt' (z(t') - y(x' = 0, t')), \quad (5.2.16)$$

donde t_0 es el tiempo inicial y la función escalón garantiza la condición

$$t_0 < t - \frac{|x|}{v}. \quad (5.2.17)$$

Se pueden escoger las condiciones iniciales dadas por

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_0 & \frac{\partial y}{\partial t}(x, t) &= \dot{y}_0 \\ y_0(x, t_0) &\rightarrow 0 & \dot{y}_0(x, t_0) &\rightarrow 0 & |x| &\rightarrow \infty \\ z(t_0) &= z_0 & \dot{z}(t_0) &= \dot{z}_0. \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

Esta es la solución inhomogénea de la ecuación (5.2.7), sin embargo para tener la solución completa de esta ecuación diferencial será necesario encontrar también la solución homogénea. Es decir, habrá que resolver la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \quad (5.2.19)$$

cuya solución está dada por

$$y_H(x, t) = \frac{1}{2} \{y_0(x + vt) + y_0(x - vt)\} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} dx' \dot{y}_0(x'). \quad (5.2.20)$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación (5.2.7) será la suma de las ecuaciones (5.2.16) y (5.2.20), obteniéndose finalmente

$$y(x, t) = \frac{1}{2} \{y_0(x + vt) + y_0(x - vt)\} + \frac{1}{2v} \int_{x-vt}^{x+vt} dx' \dot{y}_0(x') + \frac{v\alpha\kappa}{2T} \Theta(t - t_0 - \frac{|x|}{v}) \int_{t_0}^{t - \frac{|x|}{v}} dt' (z(t') - y(x'=0, t')). \quad (5.2.21)$$

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (5.2.16), tenemos que

$$\frac{\partial y_I}{\partial t} = \frac{v\alpha\kappa}{2T} \Theta(t - t_0 - \frac{|x|}{v}) (z(t - \frac{|x|}{v}) - y(x'=0, t - \frac{|x|}{v})). \quad (5.2.22)$$

Evaluable la ecuación en $x=0$ y aplicando la condición de la propiedad de la función de Heaviside

$$\Theta(t - t_0 - \frac{|x|}{v}),$$

para $t > t_0$, se obtiene que la ecuación diferencial se simplifica, quedando en la forma

$$\frac{\partial y_I}{\partial t}(0, t) + \frac{v\alpha\kappa}{2T} y_I(0, t) = \frac{v\alpha\kappa}{2T} (z(t) - y_H(0, t)). \quad (5.2.23)$$

Resolviendo esta ecuación encontramos que su solución queda determinada por

$$y_I(0, t) = \frac{v\alpha\kappa}{2T} \exp\left(-\frac{v\alpha\kappa}{2T}t\right) \int_{t_0}^t dt' (z(t') - y_H(0, t')) \exp\left(\frac{v\alpha\kappa}{2T}t'\right). \quad (5.2.24)$$

Ahora se procederá a obtener la ecuación de movimiento para la partícula sustituyendo el resultado de la ecuación (5.2.24) en la ecuación (5.2.8), obteniéndose

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{\kappa}{m}(1 + \alpha)z = \alpha \frac{\kappa}{m} \left[y_H(0, t) + \frac{v\alpha\kappa}{2T} \exp\left(-\frac{v\alpha\kappa}{2T}t\right) \int_{t_0}^t dt' (z(t') - y_H(0, t')) \exp\left(\frac{v\alpha\kappa}{2T}t'\right) \right]}, \quad (5.2.25)$$

la cual es una ecuación integrodiferencial con respecto a la función $z(t)$. Todos los términos que aparecen en ésta han sido previamente definidos. La solución de esta ecuación puede encontrarse usando transformadas de Laplace o de Fourier, al menos en teoría, pues los cálculos se vuelven un poco complicados.

Por otra parte se puede obtener una ecuación que sea puramente diferencial. Esto se logra derivando nuevamente la ecuación (5.2.25) con respecto al tiempo, obteniéndose

$$\begin{aligned} \dddot{z} + \frac{\kappa}{m}(1 + \alpha)\dot{z} &= \alpha \frac{\kappa}{m} \bullet \\ \left[\dot{y}_H(0, t) + \frac{v\alpha\kappa}{2T} (z(t) - y_H(0, t)) - \left(\frac{v\alpha\kappa}{2T}\right)^2 \exp\left(-\frac{v\alpha\kappa}{2T}t\right) \int_{t_0}^t dt' (z(t') - y_H(0, t')) \exp\left(\frac{v\alpha\kappa}{2T}t'\right) \right] &. \end{aligned} \quad (5.2.26)$$

De la ecuación (5.2.26) se puede eliminar la integral, despejando ésta de la ecuación (5.2.25) y sustituyéndola en esta ecuación, obteniendo finalmente

$$\boxed{\dddot{z} + \frac{v\alpha\kappa}{2T} \ddot{z} + \frac{\kappa}{m}(1 + \alpha)\dot{z} + \frac{v\alpha\kappa^2}{2mT} z = \alpha \frac{\kappa}{m} \dot{y}_H(0, t),} \quad (5.2.27)$$

La cual es análoga a la ecuación de Abraham-Lorentz (2.1.10),

$$ma(t) - \frac{2e^2}{3c^3} \dot{a} = F_{ext}$$

la cual se puede expresar como

$$m\ddot{z} - m\tau\dddot{z} = F_{ext},$$

donde m es la masa observada de la partícula y

$$\tau = \frac{2e^2}{3mc^3}.$$

Se sabe que la ecuación de A-L tiene soluciones divergentes, entonces lo que interesa es conocer el comportamiento de las soluciones de la ecuación (5.2.27), lo cual se analizará posteriormente.

En la siguiente sección se hará una discusión sobre las soluciones divergentes para el modelo mecánico. Como la aparición de soluciones divergentes depende de las aproximaciones realizadas, lo relevante del modelo mecánico es que no se hacen aproximaciones para obtener la ecuación de movimiento.

5.3 SOLUCIONES DIVERGENTES EN EL MODELO MECÁNICO

En el modelo mecánico, la ecuación de movimiento para la partícula puntual es similar a la ecuación de Abraham-Lorentz. En esta sección del trabajo se mostrará que la ecuación exacta de movimiento no tiene soluciones divergentes, sin embargo estas pueden aparecer cuando se realizan aproximaciones a la ecuación de movimiento.

La ecuación de movimiento para la partícula puntual, ecuación (5.2.27), puede escribirse como

$$m \ddot{z} + m \frac{1}{\xi} \dddot{z} + m \frac{\eta}{\xi} \dot{z} = -\kappa z + \frac{\alpha \kappa}{\xi} \dot{y}_H(0, t), \quad (5.3.1)$$

donde

$$\xi = \frac{\alpha \kappa}{2\nu\rho} \quad \text{y} \quad \eta = \frac{\kappa}{m}(1 + \alpha); \quad (5.3.2)$$

y el lado derecho se puede considerar como una fuerza externa. Por lo tanto el análogo a la fuerza de reacción de radiación tiene dos términos: el primero depende de la derivada de la aceleración, como en la ecuación de Abraham-Lorentz, y el segundo depende de la velocidad. Esto último es muy importante en electrodinámica, pues trae consigo que la contribución de la velocidad a la fuerza de reacción de radiación la haga no lineal, la cual desaparece cuando la

partícula está instantáneamente en reposo. El problema de reacción de radiación en el modelo mecánico tiene muchas diferencias con el modelo electrodinámico expuesto anteriormente.

El hecho de que la velocidad esté presente en la ecuación (5.3.1) es conveniente, pues se puede proponer la solución

$$\dot{z} = Ae^{st} \quad (5.3.3)$$

para encontrar la solución de la ecuación homogénea. La ecuación característica está dada por

$$1 + \frac{\xi}{\eta} s + \frac{1}{\eta} s^2 = 0. \quad (5.3.4)$$

Los determinantes correspondientes son

$$D_1 = m \frac{\alpha}{2(1+\alpha)v\rho} \quad (5.3.5)$$

y

$$D_2 = m^2 \frac{\alpha}{2\kappa(1+\alpha)^2 v\rho}, \quad (5.3.6)$$

respectivamente. Se supone que m es positiva, con lo cual la ecuación (5.2.27) no tiene soluciones divergentes. De hecho las soluciones de la ecuación (5.3.4) son

$$s_{1,2} = -\frac{\xi}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\eta}{\xi^2}} \right), \quad (5.3.7)$$

las cuales tienen la parte real negativa. Sin embargo, las soluciones divergentes aparecen cuando la masa mecánica es negativa.

Ahora bien, la ecuación de movimiento (5.3.1) puede escribirse como

$$m \ddot{z} + m \frac{1}{\xi} \dddot{z} + m \frac{\eta}{\xi} \dot{z} + \kappa z = \frac{\alpha\kappa}{\xi} \dot{y}_H(0, t), \quad (5.3.8)$$

para lo cual se propone una solución de la forma

$$z = Ae^{st}, \quad (5.3.9)$$

con la que obtenemos la ecuación característica dada por

$$1 + \frac{m}{\kappa} \frac{\eta}{\xi} s + \frac{m}{\kappa} s^2 + \frac{m}{\kappa} \frac{1}{\xi} s^3 = 0, \quad (5.3.10)$$

la cual tiene los siguientes determinantes,

$$D_1 = \frac{2v\rho}{\alpha\kappa}(1+\alpha), \quad (5.3.11)$$

$$D_2 = m \frac{2v\rho}{\kappa^2} \quad (5.3.12)$$

y

$$D_3 = m^2 \frac{4v^2\rho^2}{\alpha\kappa^4}. \quad (5.3.13)$$

Las soluciones divergentes aparecen otra vez cuando m es negativa. Además, si κ fuera negativa y m positiva en ambas ecuaciones (5.3.1) y (5.3.8) aparecerían soluciones divergentes.

De la ecuación (5.2.27) se pueden obtener varias ecuaciones de movimiento realizando aproximaciones. A continuación se mostrará como la aparición de soluciones divergentes también depende de las aproximaciones realizadas. Si se supone que m es positiva la ecuación (5.2.25) se puede escribir como sigue:

$$\ddot{z} + \eta z = \varphi(t) + \theta \xi \exp(-\xi t) \int_0^t dt' \exp(\xi t') z(t'), \quad (5.3.14)$$

donde

$$\theta = \alpha \frac{\kappa}{m}, \quad \eta = \frac{\kappa}{m}(1+\alpha) \quad (5.3.15)$$

y

$$\varphi(t) = \theta \left[y_H(0, t) - \xi \exp(-\xi t) \int_0^t dt' \exp(\xi t') y_H(0, t') \right]; \quad (5.3.16)$$

η y ξ se definen como antes.

También $t_0 = 0$ fue definido de esa forma.

El siguiente paso es sustituir $z(t')$ por su serie de Taylor y así la ecuación de movimiento para la partícula corregida será

$$\ddot{z} + \eta z = \varphi(t) + \theta \xi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{(n)}(t)}{n!} \int_0^t dt' (t-t')^n \exp \xi(t'-t), \quad (5.3.17)$$

donde

$$z^{(n)}(t) = \frac{d^{(n)}z}{dt'^n}(t'=t). \quad (5.3.18)$$

La integral se evalúa fácilmente obteniendo como resultado

$$\ddot{z} + \eta z = \varphi(t) + \theta \xi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{(n)}(t) \left[\frac{1}{\xi^{n+1}} - \exp(-\xi t) \sum_{m=0}^n \frac{m! t^{n-m}}{n! \xi^{m+1}} \right]. \quad (5.3.19)$$

Cuando $t \rightarrow \infty$ el segundo término del corchete tiende a desaparecer, con lo cual la ecuación de movimiento será

$$\ddot{z} + \eta z = \varphi(t) + \theta \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{(n)}(t)}{\xi^n}. \quad (5.3.20)$$

Una aproximación adicional consiste en truncar la serie en $n = N$. Por ejemplo para $N = 3$ la ecuación correspondiente obtenida a partir de la ecuación (5.3.20) es

$$\frac{\theta}{\xi} \dot{z} + \left(1 - \frac{\theta}{\xi^2}\right) \ddot{z} + \frac{\theta}{\xi^3} \dddot{z} = (\theta - \eta)z + \varphi(t). \quad (5.3.21)$$

Esta ecuación muestra que la partícula adquiere una masa adicional como consecuencia del uso de series de potencia en $z(t')$. Por lo tanto la masa efectiva está dada por

$$m_{efec} = m \left(1 - \frac{\theta}{\xi^2}\right), \quad (5.3.22)$$

la cual como se observa puede ser positiva o negativa. En el caso en que $\frac{\theta}{\xi^2} > 1$, tendremos

una masa negativa. Vale la pena notar que en la relación

$$\frac{\theta}{\xi^2} = \frac{4v^2 \rho^2}{m\alpha\kappa}, \quad (5.3.23)$$

el numerador depende de las propiedades de la onda mientras que el denominador depende de las propiedades del oscilador armónico. Desde otro punto de vista es importante destacar que la masa es negativa para un acoplamiento débil, es decir, cuando $\alpha \ll 1$.

De nuevo la solución completa de la ecuación (5.3.21) es divergente si la solución homogénea también lo es. La solución adecuada propuesta es de la forma

$$\dot{z} = Ae^{st} \quad (5.3.24)$$

para la cual su ecuación característica es

$$1 + \left(\frac{\xi}{\theta} - \frac{1}{\xi} \right) s + \frac{1}{\xi^2} s^2 = 0. \quad (5.3.25)$$

Los determinantes para esta ecuación, de acuerdo al criterio de Hurwitz, son

$$D_1 = \frac{\xi}{\theta} \left(1 - \frac{\theta}{\xi^2} \right) \quad (5.3.26)$$

y

$$D_2 = \frac{1}{\xi^2} D_1, \quad (5.3.27)$$

respectivamente. Las soluciones divergentes aparecen solamente cuando la masa efectiva de la partícula es negativa. El mismo resultado es obtenido en electrodinámica, el cual es mostrado en otra parte.

Es evidente que el uso de aproximaciones es un tema muy delicado. La ecuación diferencial correspondiente de cuarto grado es

$$\frac{\theta}{\xi} z + \left(1 - \frac{\theta}{\xi^2} \right) \ddot{z} + \frac{\theta}{\xi^3} \dddot{z} - \frac{\theta}{\xi^4} \ddddot{z} = (\theta - \eta)z + \varphi(t), \quad (5.3.28)$$

cuya ecuación característica de su ecuación homogénea está dada por

$$1 + \left(\frac{\xi}{\theta} - \frac{1}{\xi} \right) s + \frac{1}{\xi^2} s^2 - \frac{1}{\xi^3} s^3 = 0. \quad (5.3.29)$$

En este caso sus determinantes serán

$$D_1 = \frac{\xi}{\theta} \left(1 - \frac{\theta}{\xi^2} \right), \quad (5.3.30)$$

$$D_2 = \frac{1}{\xi\theta} > 0 \quad (5.3.31)$$

y

$$D_3 = -\frac{1}{\xi^4\theta} < 0. \quad (5.3.32)$$

Por lo tanto la ecuación (5.3.28) tiene soluciones divergentes no importando si la masa efectiva es positiva o negativa.

CONCLUSIONES

Consideramos haber contribuido a establecer que la gran mayoría de las dificultades que han caracterizado al problema de reacción de radiación son consecuencia directa de las aproximaciones hechas para obtener la ecuación de movimiento o de las hipótesis adicionales que se imponen a las soluciones resultantes. Las soluciones divergentes son consecuencia, en la electrodinámica y en el modelo analizado, de aproximar ecuaciones integrales mediante ecuaciones diferenciales. Este es un paso delicado en extremo, asociado en electrodinámica con la aproximación de partícula puntual.

Es claro también que el problema de acausalidad, que caracteriza a la ecuación de Dirac-Plass, proviene de imponer una condición ajena a la teoría. Hemos podido ver que si se quiere forzar la eliminación de soluciones divergentes manteniendo la causalidad tenemos que considerar ya sea una antiaceleración, o una masa negativa. Obviamente el costo es muy alto; esto muestra que las ecuaciones obtenidas no permiten se les impongan condiciones al gusto.

Mediante la solución exacta del modelo propuesto por Burke hemos demostrado también cómo la solución exacta, aun asociada con una ecuación que incluye terceras derivadas temporales, tiene un buen comportamiento (no diverge). Más aun, con este modelo hemos podido esclarecer como la propuesta de Pearle de asociar el origen de las soluciones divergentes con una masa negativa, es infundada. En este modelo se ve claramente que, si se parte de una masa positiva en la ecuación exacta, al hacer aproximaciones aparece una "masa efectiva" que puede ser negativa y dar lugar a soluciones divergentes, las cuales no aparecen en ausencia de dichas aproximaciones.

Puede verse de lo anterior que esto apunta en la dirección expresada por Einstein,... "tal parece que el electrón (puntual) es ajeno a la electrodinámica."

BIBLIOGRAFÍA

Arfken, G., *Mathematical methods for physicists*, (Academic Press, New York, 1981).

Burke, W. L., *A simple model for radiation damping* Phys Rev., 12, 401 (1970) A2, 1501.

Caldirola, P. *A New Model of Classical Electron*, Nuovo Cimento 3, Suppl. 2, 297-343 (1956).

Chernicoff, M., García, J. A. y Güijosa, A. arXiv: 0903.2047v2{hep-th} 2009.

Daboul, J., *On generalizing Abraham-Lorentz equation*, Int. J. Theoret. Phys. 11, 145-147 (1974).

de la Peña, L., J. L. Jiménez and R. Montemayor, *The classical motion of an extended charged particle revisited*, Nuovo Cimento 69B, 71-88 (1982).

Eliezer, C. J., *The interaction of electrons and electromagnetic field*, Rev Mod. Phys. 19, 147-184 (1947).

Erber, T., *The Classical Theories of Radiation Reaction*, Fortschritte der Physik 9, 343-392 (1961).

Good, R. H. jr. and Nelson, T. J., *Classical Theory of Electric and Magnetic Fields*, (Academic Press, New York, 1971).

Heitler, W. *Quantum Theory of Radiation*, (Oxford, Londres, 1954) 3a edición.

Hoyle, F. y J. V. Narlikar, *Action at a Distance in Physics and Cosmology*, (Freeman, San Francisco, 1974).

Hsu, H. P., *Fourier analysis*, (Simon & Schuster, Inc. New York, 1970).

Jackson, J. D., *Classical Electrodynamics*, (Wiley, New York, 1975), 2nd edn.

Jiménez, J. L. and I. Campos, *A critical examination of the Abraham-Lorentz equation for a radiating charged particle*, Am. J. Phys. 55, 1017-1023 (1987).

Jiménez, J. L. and I. Campos, *Models of the classical electron after a century*, Found. Phys. Lett. 12, 127-146 (1999).

Jiménez, J. L. and Montemayor R., *The Spectral Distribution for a Nonrelativistic Gas of Particles with Structure*, Nuovo Cimento 73B, 246-257 (1983).

Jiménez, J. L., *La reacción de radiación en electrodinámica clásica*, Ciencia 40, 257-274 (1989).

Jiménez, J.L., J. A. E. Roa-Neri, P. Vargas, *A mechanical model for analyzing the runaway solutions in the radiation problem*, Foundations of Physics 37, 410-426 (2007).

Landau, L. D. and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, (Pergamon, London, 1974).

Levine, H. E., J. Moniz, and D. H. Sharp, *Motion of extended charges in classical electrodynamics*, Am. J. Phys. 45, 75-78 (1977).

Lidesky, V. V. Theor. Math Phys 143 583 (2005).

Oliver, M. A., *A simple derivation of the equation of motion for classical electrodynamics*, Found. Phys. Lett. 12, 81-91 (1999).

Panofsky and Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd edn. (Addison Wesley, Reading, Massachusetts, 1962).

Pearle P., *Classical electron models*, in *Electromagnetism*, D. Teplitz, ed. (Plenum, New York, 1982). pp. 211-295.

Roa-Neri, J. A. E., *La reacción de radiación en la física cuántica*, Tesis de Doctorado. Posgrado en Ciencias Físicas, UNAM 1994.

Rohrlich, F., *Classical Charged Particles-Foundations*, (Addison-Wesley, Reading, 1965).

Rohrlich, F., *Why the principles of inertia and of equivalence hold despite self-interaction*,
Phys Rev D 63, 127701 (2001).

Uspensky, W. K. H., *Theory of Equations*, (McGraw-Hill, New York, 1948). J. V.

Wheeler, J. A. y R. P. Feynman, Rev Mod Phys (1945) 17, 157.