UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

UN SEMIGRUPO CUÁNTICO DE MARKOV ADJUNTO Y ESTADOS FUERA DE EQUILIBRIO

Tesis que presenta

Jorge Ricardo Bolaños Servín

Para obtener el grado de

Doctor en ciencias (Matemáticas)

Asesores: Dr. Roberto Quezada Batalla
Dr. Franco Fagnola

Jurado:

Presidente	Dr. Jorge Alberto León Vázquez
Secretario	Dr. Julio César García Corte
Vocal	Dr. Jaime Cruz Sampedro
Vocal	Dr. Roberto Quezada Batalla

México, D.F. a 19 de junio de 2014

Agradecimientos

Papá: *Te debo gran parte de quien soy y seré. Gracias por tu amor, tu apoyo y tu paciencia. Espero poder ser algún día tan buen padre como tu lo has sido.*

Diego: *Día a día libramos batallas hombro con hombro en mundos reales e imaginarios y seguimos aquí. Gracias por contribuir a hacer de los cotidianos situaciones interesantes.*

Vania: *El regalo de cumpleaños más dulce que habría podido recibir. Gracias por mostrarme la naturaleza del amor verdadero.*

A Roberto Quezada por haber creído en mi desde el principio. *Su guía, enseñanza y amistad ha sido fundamental en mi formación como matemático. Gracias.*
A Franco Fagnola por las discusiones, las visitas y la confianza con la que siempre me recibió. *Eres uno de los matemáticos que más admiro.*
A Raffaella Carbone por mostrarme el lado más humano de la matemática. *Grazie a te mi ho sentito come in famiglia in Italia.*
A Jaime Cruz por tomarse el tiempo de enseñarme pacientemente las partes más sutiles de la escritura de una tesis de matemáticas. *Gracias por compartirme tus experiencias de vida.*

A los profesores del departamento de matemáticas de la UAM-I por su labor en la licenciatura y el posgrado de la universidad.

Un agradecimiento especial a los revisores de esta tesis por sus valiosos comentarios que contribuyeron a mejorar la presentación y la exposición del contenido de nuestro trabajo.

Agradezco al CONACyT el apoyo otorgado a nuestro programa de investigación mediante el proyecto de colaboración conjunta México-Italia núm. 146364 y la beca de posgrado núm. 221103.

Índice

Resumen

Dados un semigrupo cuántico de Markov (QMS por sus siglas en inglés) $\mathcal{T}$, un estado invariante fiel ρ y una operación de inversión del tiempo Θ, se introduce el semigrupo Θ-KMS adjunto $\mathcal{T}^{\Theta}$ con respecto al estado ρ como el semigrupo adjunto adecuado para medir la desviación del equilibrio Θ-balance detallado cuántico estándar (Θ-SQDB). Desarrollamos un esquema para asociar a cada elemento completamente positivo un estado en un producto tensorial que utilizamos para medir la desviación del equilibrio, mediante la entropía relativa de von Neumann de las familias de estados asociados con el semigrupo y el semigrupo adjunto. Demostramos que el Θ-SQDB es satisfecho si y solo si esta entropía relativa es cero. Damos una generalización del teorema de Qian *et al.* para la clase de QMS circulantes y, mediante un ejemplo, mostramos que no es posible obtener un análogo no conmutativo de este teorema para todo QMS utilizando esta noción de equilibrio.

Palabras clave: Θ-KMS adjunto; estado entrelazado de Fagnola-Rebolledo; estados asociados con transformaciones CP; semigrupo cuántico de Markov; estado estacionario de equilibrio y fuera de equilibrio; entropía relativa de von Neumann; tasa de producción de entropía; semigrupos circulantes.

Introducción

Desde el punto de vista de la termodinámica, un proceso reversible es aquel en donde el equilibrio termodinámico se alcanza a lo largo del proceso sin alterar el sistema ni el medio ambiente, *i. e.*, sin disipación de energía ó, como se dice coloquialmente, con entropía cero.

En el marco de los procesos estocásticos, especificamente en las cadenas de Markov irreducibles a tiempo discreto y continuo con espacio de estados finito, se conocen dos condiciones equivalentes de reversibilidad: la condición de **balance detallado** y el **criterio de reversibilidad de Kolmogorov**. Recientemente, apoyándose en la descomposición en ciclos de cadenas de Markov de Kalpazidou [21], Qian *et al.* [29] establecieron una caracterización del balance detallado en términos de la tasa de producción de entropía (ver definición 1.1.4): una cadena de Markov es reversible si y solo si su tasa de producción de entropía es cero. La técnica usada detrás de esta caracterización consiste en medir la entropía relativa de las distribuciones de la cadena de Markov respecto a la distribución de la cadena en reversa (adjunta). El propósito central de este trabajo es obtener criterios para identificar estados fuera de equilibrio en el caso no conmutativo en términos de la entropía.

El estudio de procesos irreversibles en sistemas cuánticos que interactúan con el medio ambiente, llamados sistemas cuánticos abiertos, empezó en los años setenta con la introducción a la física cuántica de los semigrupos dinámicos cuánticos, que actualmente se conocen como semigrupos cuánticos de Markov (QMS por sus siglas en inglés). Los QMS son semigrupos de operadores completamente positivos que actúan sobre el espacio de operadores acotados en un espacio de Hilbert, ver definición 1.2.1. Estos semigrupos pueden considerarse como una generalización no conmutativa de los semigrupos de Markov clásicos asociados con cadenas de Markov.

Hasta la fecha, existe más de un análogo no conmutativo del concepto de balance detallado clásico con sus respectivos semigrupos adjuntos; sin embargo, el más aceptado es el Θ-balance detallado cuántico estándar (Θ-SQDB) que introdujeron Fagnola y Umanità [15] en términos de un operador de inversión del tiempo Θ, ver definición 1.3.2, y que hasta ahora no contaba con un semigrupo adjunto que lo caracterizara.

En este trabajo introducimos un semigrupo adjunto $\mathcal{T}^{\Theta} = (\mathcal{T}_t^{\Theta})_{t\geq 0}$ de un semigrupo cuántico de Markov dado $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$, sobre el espacio de operadores acotados $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ en un espacio de Hilbert h. A este adjunto le llamamos adjunto Θ-KMS y se depende de un estado invariante ρ del semigrupo $\mathcal{T}$ y de la operación de inversión del tiempo Θ. En uno

En este texto utilizamos la acepción del adjetivo "cuántico" usual en matemáticas para referirse a objetos en contextos no conmutativos con el fin de contrastarlos y diferenciarlos de las versiones conmutativas (clásicas).

de nuestros resultados demostramos que, en analogía a lo que sucede en el caso clásico, $\mathcal{T}$ satisface el Θ-SQDB si y solo si $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{\Theta}$. Por esta razón consideramos que $\mathcal{T}^{\Theta}$ es el candidato natural para medir la desviación del Θ-SQDB.

La entropía relativa se define sobre estados, razón por la que no es posible utilizarla directamente sobre los semigrupos. Para superar este obstáculo proponemos una manera de asociar a un operador completamente positivo Φ_{*t} un estado en el producto tensorial $\mathcal{E}_\rho(\Phi_{*t})$ utilizando un estado fijo ρ de referencia. Hacemos énfasis en que este esquema puede utilizarse con cualquier otra noción de equilibrio y un adjunto $\Phi_{*t}^{\text{adjunto}}$ adecuado para encontrar criterios que caracterizan estados fuera de equilibrio. La entropía relativa que proponemos medir es $S\Big(\mathcal{E}_\rho(\Phi_{*t}), \mathcal{E}_\rho(\Phi_{*t}^{\text{adjunto}})\Big)$ y definimos la tasa de producción de entropía como la derivada en cero de esta entropía relativa.

Regresando a la noción de equilibrio Θ-SQDB, cuando los soportes de $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t})$ y $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}^{\Theta})$ son finito dimensionales, demostramos que los siguientes enunciados son equivalentes:

i) $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ satisface una condición de Θ-SQDB.

ii) $\mathcal{T}_t = \mathcal{T}_t^{\Theta}$ para todo $t \geq 0$.

iii) La entropía relativa cuántica $S\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}), \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}^{\Theta})\Big) = 0$ para todo $t \geq 0$.

Para tener un análogo no conmutativo del teorema de Qian *et al.* para semigrupos cuánticos de Markov se tendría que demostrar que los enunciados precedentes son equivalentes a:

iv) La tasa de producción de entropía cuántica $e_p(\mathcal{T}, \rho) = 0$.

Desafortunadamente esto no es verdad para todo QMS, el semigrupo descrito en el capítulo 4 tiene tasa de producción de entropía cero pero no satisface el Θ-SQDB.

Por último definimos una rica clase de semigrupos, que denominamos QMS circulantes, haciendo alusión a la familia de matrices circulantes. Las matrices circulantes son operadores de Toeplitz que gozan de una gran gama de propiedades interesantes: forman un álgebra conmutativa, son diagonalizables respecto a la misma base y sus valores propios se calculan de una manera simple. La dinámica de los semigrupos circulantes es dictada por una matriz circulante fija, heredando muchas de las simetrías de estas matrices, lo que hace relativamente sencillo el cálculo explícito de la acción del semigrupo, la entropía relativa y la tasa de producción de entropía. Aprovechando esto, demostramos que para lo semigrupos circulantes son equivalentes i)-iv) y, aún más, la tasa de producción de entropía cuántica coincide con la tasa de producción de entropía clásica de Qian *et al.* Esto implica que su comportamiento es escencialmente clásico a pesar de poseer muchos estados invariantes no diagonales. Consideramos que los semigrupos circulantes son una colección de ejemplos útiles para entender propiedades generales de los QMS, tales como la irreducibilidad y el gap espectral [6].

Algunos posibles caminos para investigaciones futuras son:

- ¿Cúal es la clase más grande de semigrupos para los cuales es posible obtener un análogo cuántico del teorema de Qian *et al.* utilizando el Θ-SQDB?

- ¿Es posible encontrar una noción de equilibrio aceptable en donde el teorema de Qian *et al.* sea válido para cualquier QMS?

Una recopilación sistemática de los principales resultados y propiedades de los QMS puede encontrarse en la tesis de doctorado de Umanità [33]. Por otro lado, Agarwal, Alicki, y Frigerio-Gorini-Kossakowski-Verri desarrollaron una generalización cuántica de la condición de balance detallado llamada, como era de esperarse, balance detallado cuántico (QDB). Fagnola y Umanità estudiaron algunas versiones modificadas de la condición de balance detallado cuántico, a las que llamaron balance detallado cuántico estándar (Standard QDB). Estas condiciones están basadas en el concepto de semigrupo dual o adjunto con respecto a un estado invariante ρ. El semigrupo s-adjunto $\mathcal{T}^{(s)} = (\mathcal{T}_t^{(s)})_{t\geq 0}$, $s \in [0, \frac{1}{2}]$ se define mediante la relación de dualidad

$$\mathsf{tr}\Big(\rho^s x \rho^{1-s} \mathcal{T}_t(y)\Big) = \mathsf{tr}\Big(\rho^s \mathcal{T}_t^{(s)}(x) \rho^{1-s} y\Big), \quad \text{para todo } \ x, y \in \mathcal{B}(\mathsf{h}).$$

En [13, 27] se demostró que para $s \in [0, \frac{1}{2}]$ existen esencialmente dos adjuntos distintos: $\mathcal{T}^{(0)}$ y $\mathcal{T}^{(\frac{1}{2})}$. El caso $s = \frac{1}{2}$ corresponde a la simetría KMS estudiada originalmente por Petz [27], Cipriani [9, 10] y Goldstein-Lindsay [11], *i. e.*, el QMS $\mathcal{T}$ es KMS simétrico si y solo si $\mathcal{T} = \mathcal{T}^{(\frac{1}{2})}$.

La condición de balance detallado cuántico discutida por Agarwal se obtiene utilizando el adjunto $s = 0$. Esta toma en cuenta una característica típicamente cuántica de paridad de las observables (como es costumbre nos referimos a los operadores acotados autoadjuntos sobre h como observables) bajo una operación de inversión del tiempo Θ. La operación de inversión del tiempo es intrínseca al modelo de la mecánica cuántica; es una consecuencia directa e inevitable del hecho de que la arena de los modelos de la mecánica cuántica es un espacio de Hilbert complejo. Un operador de inversión del tiempo también aparece de manera natural en el trabajo de Accardi-Mohari [2] sobre procesos de Markov reflejados en el tiempo. Por lo tanto, es natural incorporar este ingrediente a las condiciones de simetría disponibles. En esta dirección, Fagnola y Umanità introdujeron la noción de Θ-balance detallado cuántico estándar utilizando el adjunto obtenido con $s = \frac{1}{2}$, definido como la condición de simetría $\mathcal{T}^{(\frac{1}{2})} = \Theta \circ \mathcal{T} \circ \Theta$. En virtud de las cuatro equivalencias que se demuestran en esta tesis, nuestro adjunto Θ-KMS es un adjunto apropiado para medir la desviación del Θ-SQDB.

Un trabajo reciente de Holevo[19] proporciona una manera diferente de asociar estados a transformaciones completamente positivas, pero su definición no es muy útil para nuestros propósitos.

A continuación describimos brevemente la estructura de este trabajo.

En el primer capítulo damos una descripción del concepto de equilibrio en el caso clásico como motivación de nuestro objetivo, posteriormente presentamos algunos resultados básicos de la teoría de sistemas cuánticos abiertos. Por completez, revisamos brevemente las condiciones de equilibrio cuántico más importantes en la escena de la probabilidad cuántica actual.

El segundo capítulo consta de dos secciones; en la primera construimos un operador que asocia con cada aplicación completamente positiva que preserva la traza un estado sobre $\mathsf{h}\otimes\mathsf{h}$. Demostramos que esta manera de asociar estados puede escribirse de forma conveniente utilizando el estado torcido ó entrelazado (entangled) de Fagnola-Rebolledo, que depende de un estado de referencia fijo ρ. En la segunda sección definimos el adjunto Θ-KMS y utilizando los estados asociados calculamos la entropía de von Neumann como caracterización del Θ-SQDB y mediante un ejemplo demostramos que no es posible obtener una caracterización en términos de la tasa de producción de entropía.

Los semigrupos cuánticos de Markov circulantes se introducen en el capítulo 3. Además de la entropía relativa cuántica, calculamos la tasa de producción de entropía cuántica (QEPR por sus siglas en inglés) de un QMS circulante irreducible con respecto cualquier estado invariante. Por último calculamos la tasa de producción de entropía clásica de Qian *et al.* y la comparamos con la cuántica, obteniendo que para esta familia de QMS ambas coinciden.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo damos un resumen del estudio del equilibrio y la reversibilidad en el caso de cadenas de Markov. Esta teoría nos servirá de guía y punto de partida para nuestro programa de investigación en el caso no conmutativo. Las definiciones básicas de semigrupo cuántico de Markov y un recuento de las nociones de equilibrio que más atañen a nuestro objetivo están contenidas en la última sección.

1.1 Equilibrio clásico y balance detallado

Dentro de la teoría de reversibilidad de las cadenas de Markov encontramos dos condiciones equivalentes de reversibilidad: el criterio de reversibilidad de Kolmogorov y el balance detallado. El concepto de balance detallado, introducido por Boltzmann, caracteriza la reversibilidad mediante los estados invariantes, mientras que el criterio de Kolmogorov caracteriza la reversibilidad comparando las probabilidades de completar trayectorias cíclicas en direcciones opuestas.

Sea $\xi = \{\xi_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ una cadena de Markov a tiempo continuo con espacio de estados finito S. La matriz de intensidades de transición de ξ la denotamos con $Q = (q_{i,j})_{i,j\in S}$ donde

$$\sum_{j\in S-\{i\}} q_{i,j} = -q_{i,i} \quad \text{para todo } i \in S.$$

Como es usual, suponemos que las trayectorias son continuas por la derecha y poseen límites por la izquierda.

Una medida de probabilidad $\pi = \{\pi_i\}_{i\in S}$ sobre S se dice invariante para ξ si $\pi Q = 0$, en nuestro caso, si además la cadena de Markov es irreducible entonces la medida invariante es única.

Definición 1.1.1 *Una cadena de Markov con medida invariante π y espacio de estados S se dice que está en balance detallado ó satisface la condición de balance detallado si*

$$\pi_i q_{i,j} = \pi_j q_{j,i} \quad \textit{para todo } i, j \in S.$$

Definición 1.1.2 *Una cadena de Markov con matriz de intensidades de transición* $Q = (q_{i,j})_{i,j\in S}$ *satisface el criterio de reversibilidad de Kolmogorov si*

$$q_{i_1,i_2}q_{i_2,i_3}\cdots q_{i_{s-1},i_s}q_{i_s,i_1} = q_{i_1,i_s}q_{i_s,i_{s-1}}\cdots q_{i_3,i_2}q_{i_2,i_1},$$

para cualquier colección finita $\{i_1,\ldots,i_s\}$ *de elementos distintos del espacio de estados* S.

Los conceptos de entropía, que surgen en la termodinámica y la teoría de la información, han sido usados recientemente por algunos autores [29] para estudiar medidas invariantes fuera de equilibrio en cadenas de Markov. La noción de tasa de producción de entropía se deriva de la entropía relativa de la distribución de probabilidad de la cadena de Markov con respecto a la distribución de la cadena de Markov con el tiempo en reversa.

Definición 1.1.3 *Dada una cadena de Markov estacionaria e irreducible* ξ *y una medida invariante* π, *la cadena de Markov con tiempo en reversa* ξ^- *se define como* $\xi_t^-(\omega) = \xi_t(r\omega)$, *en donde* $r : \Omega \longrightarrow \Omega$ *es la transformación*

$$r\omega(t) = \lim_{s\uparrow -t}\omega(s), \ \text{para } t\in\mathbb{R}.$$

La matriz de intensidades de transición de ξ^- es

$$Q^- = \left(\frac{\pi_j q_{j,i}}{\pi_i}\right)_{i,j,\in S},$$

π también es medida invariante de ξ^-, *i. e.*, $\pi Q^- = 0$, y denotamos a su distribución de probabilidad con $\mathbb{P}^-$.

Definición 1.1.4 *Sea* ξ *una cadena de Markov estacionaria e irreducible con espacio de estados finito. La tasa de producción de entropía de* ξ *se define por*

$$e_p(\xi,\Pi) = \lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}H(\mathbb{P}_{[0,t]},\mathbb{P}^-_{[0,t]}),$$

donde $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}^-$ *son las distribuciones de probabilidad de* ξ, ξ^- *respectivamente;* $H(\mathbb{P}_{[0,t]},\mathbb{P}^-_{[0,t]})$ *es la entropía relativa de* $\mathbb{P}$ *con respecto a* $\mathbb{P}^-$ *restringidas a la* σ*-álgebra generada por las variables aleatorias* ξ_t *hasta el tiempo* t.

No fue sino hasta hace una década cuando Qian *et al.* [29], utilizando el trabajo de Kalpazidou en *Cycle representation on Markov Processes* [21], demostraron que la reversibilidad de una cadena de Markov corresponde con tasa de producción de entropía cero y viceversa. A este resultado le llamamos el teorema de Qian *et al.* para cadenas de Markov y lo enunciamos a continuación:

Teorema 1.1.5 *Sea* ξ *una cadena de Markov estacionaria e irreducible con matriz de intensidades de transición* $Q = (q_{i,j})_{i,j\in S}$, *con espacio de estados finito* S *y medida invariante* $\pi = (\pi_i)_{i\in S}$. *Entonces, las siguientes aseveraciones son equivalentes:*

i) ξ *es reversible.*

ii) *La cadena de Markov y su cadena de Markov con tiempo en reversa coinciden:* $\xi_t = \xi_{-t}$.

iii) ξ *satisface la condición de balance detallado.*

iv) ξ *satisface el criterio de reversibilidad de Kolmogorov.*

v) *La entropía relativa de* $\mathbb{P}_t$ *respecto a* $\mathbb{P}_t^-$ *es cero para toda* $t \geq 0$*; es decir,*

$$H(\mathbb{P}_{[0,t]}, \mathbb{P}^-_{[0,t]}) = 0.$$

vi) *La tasa de producción de entropía de* ξ *con respecto a la medida* π *es cero,*

$$e_p(\xi, \pi) = 0.$$

1.2 Semigrupos cuánticos de Markov

Sea h un espacio de Hilbert complejo separable con producto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Denotaremos con $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ al álgebra de von Neumann de los operadores acotados sobre h y con $\mathcal{L}_1(\mathsf{h})$ al espacio de Banach de los operadores acotados de traza finita sobre h. La norma en este espacio es $\|\eta\|_1 = \mathsf{tr}|\eta|$, en donde $\mathsf{tr}(x)$ es la traza del operador acotado x.

Definición 1.2.1 *Un semigrupo cuántico de Markov uniformemente continuo en* $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ *es una familia* $\{\mathcal{T}_t : t \geq 0\}$ *de operadores acotados sobre* $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ *que satisfacen las siguientes propiedades:*

i) $\mathcal{T}_0 = \mathbb{1}$.

ii) $\mathcal{T}_{t+s} = \mathcal{T}_t \mathcal{T}_s$ *para todo* $t, s \geq 0$.

iii) $\mathcal{T}_t(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$, *para todo* $t \geq 0$.

iv) *Para cada* $t \geq 0$, $\mathcal{T}_t$ *es una transformación completamente positiva.*

v) *(Continuidad Uniforme)*

$$\lim_{t \to 0^+} \|\mathcal{T}_t - \mathbb{1}\| = 0.$$

El generador infinitesimal $\mathcal{L}$ *es un operador acotado y*

$$\mathcal{T}_t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \mathcal{L}^n,$$

donde, para cada t*, la serie converge en la norma de operadores sobre* $\mathcal{B}(\mathsf{h})$.

Ejemplo 1.2.2 *Sea* H *un operador acotado autoadjunto sobre* h. *El grupo uniformemente continuo* $(\mathcal{T}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ *implementado por el grupo unitario* $(e^{itH})_{t \in \mathbb{R}}$*, es decir,* $\mathcal{T}_t(x) = e^{itH} x e^{-itH}$*, es un QMS uniformemente continuo generado por el operador* $\mathcal{L}$ *definido como*

$$\mathcal{L}(x) = Hx - xH = [H, x], \quad \textit{para todo } x \in \mathcal{B}(\mathsf{h}).$$

Más ejemplos de QMS uniformemente continuos pueden encontrarse en los capítulos 3 y 4 de este trabajo y en [7, 12]. En [22] y [24] se encuentra la siguiente caracterización del generador infinitesimal de un QMS uniformemente continuo:

Teorema 1.2.3 *Un operador acotado $\mathcal{L}$ sobre $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ es el generador infinitesimal de un semigrupo cuántico de Markov uniformemente continuo, si y solo si, existen un operador completamente positivo Φ sobre $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ y un operador acotado $G \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$ tales que*

$$\mathcal{L}(x) = \Phi(x) - G^*x - xG, \qquad \textit{para todo } x \in \mathcal{B}(h) \quad \textit{y}$$

$$G + G^* \leq \mathcal{L}(\mathbb{1}).$$

Al generador infinitesimal de un semigrupo cuántico de Markov uniformemente continuo se le conoce también como generador Gorini-Kossakowski-Sudarshan-Lindblad ó GKSL. A lo largo del texto consideraremos solamente QMS uniformemente continuos y para evitar repeticiones innecesarias omitiremos escribir "uniformemente continuo".

En general, un estado es un funcional continuo ω sobre $\mathcal{B}(h)$, positivo y de norma uno; ω es normal si y solo si $(\omega(a_\alpha))_\alpha$ converge a $\omega(a)$, para cada red creciente de operadores $(a_\alpha)_\alpha$ acotada superiormente por a. Cada estado normal se identifica con un operador positivo ρ sobre h de traza uno, llamado densidad en analogía con las funciones de densidad de la probabilidad clásica, que satisface $\omega(x) = \mathsf{tr}(\rho x)$ para todo $x \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$. Por esta razón denominaremos estados a los operadores ρ sobre h, positivos y de traza uno.

Definición 1.2.4 *Si un estado ρ satisface* $\ker \rho = \{0\}$ *decimos que es fiel.*

Definición 1.2.5 *Se llama predual de $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ al espacio de funcionales lineales σ-débilmente continuos sobre este espacio; se denota con $\mathcal{B}(\mathsf{h})_*$.*

El teorema de Schatten en [31] establece dos isomorfismos isométricos, el primero entre $\mathcal{L}_1(h)^*$ y $\mathcal{B}(h)$ y el segundo entre $\mathcal{B}(\mathsf{h})_*$ y $\mathcal{L}_1(\mathsf{h})$. De esta forma para cada t el operador $\mathcal{T}_t(x) \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$ se identifica con un único elemento $\mathcal{T}_{*t}(\sigma) \in \mathcal{B}(\mathsf{h})_*$, $\sigma \in \mathcal{L}_1(\mathsf{h})$ que satisface $\mathsf{tr}\big(x\mathcal{T}_{*t}(\sigma)\big) = \mathsf{tr}\big(\mathcal{T}_t(x)\sigma\big)$. $(\mathcal{T}_{*t})_{t\geq 0}$ forma a su vez un QMS uniformemente continuo sobre $\mathcal{L}_1(\mathsf{h})$ llamado semigrupo predual. Denotamos a su generador GKSL con $\mathcal{L}_*$.

El generador del semigrupo predual $\mathcal{L}_*$ y el generador del semigrupo en su representación directa $\mathcal{L}$ están relacionados por la misma relación existente entre los semigrupos, $\mathsf{tr}\big(x\mathcal{L}_*(\sigma)\big) = \mathsf{tr}\big(\mathcal{L}(x)\sigma\big)$.

Definición 1.2.6 *Un estado ρ se dice invariante (ó estacionario) de un QMS $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ con generador predual $\mathcal{L}_*$ si y solo si $\mathcal{L}_*(\rho) = 0$.*

1.3 Balance detallado no conmutativo

En el contexto de semigrupos cuánticos de Markov hay varias nociónes de equilibrio que no son necesariamente equivalentes. A continuación describimos tres de las más comunes en la literatura y definimos de manera rigurosa la que utilizamos en este trabajo.

a) Un QMS con generador GKSL, que denotamos con $\mathcal{L}$, satisface una condición de balance detallado cuántico (QDB por sus siglas en inglés) en el sentido de Alicki [4] y Frigerio-Gorini-Kossakowski-Verri [23], con respecto a un estado invariante ρ , si existe un operador $\tilde{\mathcal{L}}$ sobre $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ y un operador autoadjunto K tales que para todo $x, y \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$ las siguientes igualdades se cumplen:

$$\begin{aligned} &tr(\rho\tilde{\mathcal{L}}(x)y) = tr(\rho x\mathcal{L}(y)), \\ &\tilde{\mathcal{L}}(\cdot) - \mathcal{L}(\cdot) = 2i[K, \cdot]. \end{aligned} \tag{1.1}$$

El operador $\tilde{\mathcal{L}}$ es llamado el adjunto-ρ de $\mathcal{L}$. En [23] se demuestra que son necesarias condiciones adicionales sobre el semigrupo inicial para asegurar que $\tilde{\mathcal{L}}$ sea un generador GKSL.

b) Otras nociones de balance detallado cuántico fueron introducidas por Fagnola y Umanità en [13, 14, 15]. La idea detrás de su propuesta es la de separar al estado invariante ρ en dos partes ó, de forma equivalente, definir el adjunto utilizando el producto pre-Hilbert $\langle a, b\rangle_s = tr(\rho^{1-s}a^*\rho^s b)$ para $0 \leq s \leq \frac{1}{2}$ y reemplazar las ecuaciones (1.1) por

$$\begin{aligned} &tr(\rho^{1-s}\mathcal{L}'(x)\rho^s y) = tr(\rho^{1-s}x\rho^s\mathcal{L}(y)), \\ &\mathcal{L}'(\cdot) - \mathcal{L}(\cdot) = 2i[K, \cdot]. \end{aligned} \tag{1.2}$$

El balance detallado cuántico (1.1) corresponde con el caso $s = 0$ en (1.2); además, Fagnola y Umanità demostraron que $\mathcal{L}' = \tilde{\mathcal{L}}$ para $0 \leq s < \frac{1}{2}$ y que son distintos para $s = \frac{1}{2}$. La condición que se obtiene con $s = \frac{1}{2}$ se denomina balance detallado cuántico estándar (SQDB) y reservamos la notación $\mathcal{L}'$ únicamente para este caso. La primera relación de (1.2) coincide con la condición KMS definida en [5], razón por la cual $\mathcal{L}'$ se denomina adjunto KMS. El adjunto KMS siempre es generador de un semigrupo cuántico de Markov el cual se denota con $(\mathcal{T}_t')_{t\geq 0}$.

c) Agarwal [3], Majewski [25] y Streater [30] utilizan una operación de inversión del tiempo Θ, que definimos a continuación, para incorporar a sus estudios la paridad de observables bajo Θ, fenómeno típicamente cuántico que no aparece en el contexto clásico.

Definición 1.3.1 *Una operación de inversión del tiempo es un operador* $\Theta : \mathcal{B}(\mathsf{h}) \longrightarrow \mathcal{B}(\mathsf{h})$*, de la forma* $\Theta(x) = \theta x^*\theta$*, donde* θ *es un operador antiunitario.*

Recordamos al lector que un operador $\theta : \mathsf{h} \longrightarrow \mathsf{h}$ es antiunitario si es biyectivo, antilineal y satisface $\langle\theta x, \theta y\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ para cada $x, y \in \mathsf{h}$. El ejemplo típico de un operador antiunitario es la conjugación C respecto a una base ortonormal. Se puede demostrar que todo operador antiunitario es de la forma $\theta = UC$, donde U es unitario, ver apéndice B. Aunque θ es una isometría antilineal, nos abstendremps de utilizar este término para evitar posibles confusiones con las isometrías lineales.

Se sigue de la definición que Θ satisface $\Theta(x^*) = \Theta(x)^*$, $\Theta^2 = I$ y $\Theta(xy) = \Theta(y)\Theta(x)$ para toda x, y en $\mathcal{B}(\mathsf{h})$. En general es complicado ver la acción de Θ como una operación de inversión del tiempo, sin embargo en la evolución de Heisenberg, dada por $\mathcal{T}_t(x) = e^{itH}xe^{-itH}$ donde H es autoadjunto, un breve cálculo muestra que $\Theta(\mathcal{T}_t(\Theta(x))) = \mathcal{T}_{-t}(x)$.

La paridad de las observables se define como sigue: $x \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$ es par si $\Theta(x) = x$ y es impar si $\Theta(x) = -x$. La siguiente noción de equilibrio en el caso no conmutativo, definida en [14], toma en cuenta estas paridades.

Definición 1.3.2 *Un QMS uniformemente continuo $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ satisface una condición de Θ-SQDB, con respecto a la operación de inversión del tiempo Θ y al estado invariante ρ, si*

$$\mathcal{T}_t' = \Theta \circ \mathcal{T}_t \circ \Theta, \quad \textit{para toda } t \geq 0,$$

donde $(\mathcal{T}_t')_{t\geq 0}$ es el semigrupo adjunto KMS definido en la sección previa.

De acuerdo a Fagnola y Umanità, el Θ-SQDB es la generalización no conmutativa más natural del balance detallado clásico entre las condiciones expuestas en esta sección y será aquella sobre la cual centraremos nuestro programa de investigación.

El papel de los adjuntos en este contexto puede considerarse análogo a aquel que juega la matriz Q^- de la cadena con tiempo en reversa. Un estado invariante ρ es a su vez invariante para el semigrupo adjunto. En efecto, tomando $y = \mathbb{1}$ en (1.2), la propiedad del generador $\mathcal{L}(\mathbb{1}) = 0$ implica que

$$0 = \mathsf{tr}\big(\rho^{\frac{1}{2}} x \rho^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}(\mathbb{1})\big) = \mathsf{tr}\big(\rho^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}'(x) \rho^{\frac{1}{2}}\big) = \mathsf{tr}\big(\mathcal{L}_*'(\rho) x\big) \;\text{ para todo } x \in \mathcal{B}(\mathsf{h}) \Rightarrow \mathcal{L}_*'(\rho) = 0.$$

Un cálculo similar se puede hacer con $\tilde{\mathcal{L}}_*$ cuando este es un generador GKSL.

Capítulo 2

Estados asociados a operadores CP y el adjunto Θ-KMS

El desarrollo de una técnica que nos permita medir la entropía relativa de un QMS como índice de desviación del Θ-SQDB presenta dos grandes retos. El primero consiste en encontrar un adjunto que capture de forma natural la desviación del Θ-SQDB así como $\tilde{\mathcal{T}}$ lo hace con el QDB y $\mathcal{T}'$ con el SQDB. El segundo es el hecho de que la entropía relativa de von Neumann se define sobre estados, por lo que es necesario encontrar una manera de asociar estados al semigrupo.

En la primera parte de este capítulo nos enfocamos al problema de asociar a un operador completamente positivo (CP por sus siglas en inglés) un estado en un producto tensorial de "forma conveniente", esto es, evitando los problemas usuales de divergencia en dimensión infinita y utilizando la información de un estado fijo determinado relevante para el operador CP inici—

En la segunda mitad del capítulo definimos un semigrupo adjunto apropiado para el Θ-SQDB y utilizamos la entropía relativa cuántica del estado asociado al semigrupo y al del semigrupo adjunto como una manera de medir la desviación del Θ-SQDB, obteniendo la siguiente caracterización del equilibrio no conmutativo: el Θ-SQDB se satisface si y solo si la entropía relativa es cero.

2.1 Estados asociados a operadores CP que preservan traza

Fijamos una base ortonormal $\{e_i\}_i$ de h y un estado $\rho \in \mathcal{L}_1(\mathsf{h})$. Utilizaremos la notación de Dirac, si $u, v \in \mathsf{h}$ entonces $|u\rangle\langle v|$ denota al operador sobre h tal que $|u\rangle\langle v|w = \langle v, w\rangle u$ para todo $w \in h$. Denotaremos con $\mathcal{CP}(\mathcal{L}_1(\mathsf{h}))$ al conjunto de operadores CP que preservan la traza que actúan sobre $\mathcal{L}_1(\mathsf{h})$.

2.1.1 El operador $\mathcal{E}_\rho$

Iniciamos con una exposición constructiva del operador $\mathcal{E}_\rho$ que asocia estados a operadores completamente positivos con el fin de familiarizarnos con sus propiedades. Si el lector desea entrar directamente al resultado puede dirigirse a la definición 2.1.10.

Sea Φ_* un operador acotado completamente positivo sobre $\mathcal{L}_1(\mathsf{h})$. Definimos la forma sesquilineal $\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)$ sobre span$\{e_k \otimes e_l\}_{kl}$ por medio de

$$\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)(u,v) := \sum_{k,l,k',l'} \overline{u}_{kl} v_{k'l'} \big\langle e_l, \Phi_*(|\rho^{\frac{1}{2}} e_k\rangle\langle \rho^{\frac{1}{2}} e_{k'}|) e_{l'}\big\rangle,$$

si $u = \sum_{k,l} u_{kl} e_k \otimes e_l$ y $v = \sum_{k',l'} v_{k'l'} e_{k'} \otimes e_{l'}$.

Lema 2.1.1 *La forma cuadrática asociada con $\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)$ es acotada y positiva en span$\{e_k \otimes e_l\}_{kl}$. En consecuencia, la forma sesquilinear $\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)$ se extiende continuamente a todo el espacio $\mathsf{h} \otimes \mathsf{h}$.*

Demostración. Para cualquier elemento $u \in$ span$\{e_k \otimes e_l\}_{kl}$, $u = \sum_{k,l} u_{kl} e_k \otimes e_l$, tenemos que si $\Phi_*(x) = \sum_n L_n x L_n^*$ entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)(u,u) &= \sum_{k,l,k',l'} \overline{u}_{kl} u_{k'l'} \big\langle e_l, \Phi_*(|\rho^{\frac{1}{2}} e_k\big\rangle\big\langle \rho^{\frac{1}{2}} e_{k'}|) e_{l'}\big\rangle \\ &= \sum_n \sum_{k,l,k',l'} \overline{u}_{kl} u_{k'l'} \big\langle e_l, L_n|\rho^{\frac{1}{2}} e_k\big\rangle\big\langle \rho^{\frac{1}{2}} e_{k'}| L_n^* e_{l'}\big\rangle \\ &= \sum_n \Big| \sum_{k,l} u_{kl} \langle e_k, \rho^{\frac{1}{2}} L_n^* e_l\rangle \Big|^2.\end{aligned} \tag{2.1}$$

Esto muestra la positividad de la forma cuadrática, por lo tanto satisface la desigualdad de Cauchy-Schwartz para formas sesquilineares, $|\mathcal{E}_\rho(u,v)|^2 \leq \mathcal{E}_\rho(u,u)\ \mathcal{E}_\rho(v,v)$. Basta ver que la forma cuadrática es acotada. En efecto, considerando el producto interno usual en $\mathbb{C}$, una aplicación de la desigualdad de Cauchy-Schwartz en la última linea de (2.1), la positividad completa de Φ_* y, el hecho de que $||\Phi_*(\sigma)||_1 = \mathrm{tr}\Big(\sqrt{\Phi_*(\sigma)^*\Phi_*(\sigma)}\Big) = \mathrm{tr}\Big(\Phi_*(\sigma)\Big)$ si σ es positivo, resulta que

$$\begin{aligned}|\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)(u,u)| &\leq \sum_n \Big(\sum_{kl} |u_{kl}|^2\Big)\Big(\sum_{kl} |\langle e_k, \rho^{\frac{1}{2}} L_n^* e_l\rangle|^2\Big) \\ &= \|u\|^2 \sum_n \sum_{kl} |\langle e_k, \rho^{\frac{1}{2}} L_n^* e_l\rangle|^2 \\ &= \|u\|^2 \sum_{kl} \sum_n \langle e_k, \rho^{\frac{1}{2}} L_n^* e_l\rangle\langle \rho^{\frac{1}{2}} L_n^* e_l, e_k\rangle \\ &= \|u\|^2 \sum_{kl} \Big\langle e_l, \Phi_*\big(\rho^{\frac{1}{2}}|e_k\rangle\langle e_k|\rho^{\frac{1}{2}}\big) e_l\Big\rangle \\ &= \|u\|^2 \sum_{l} \Big\langle e_l, \Phi_*\big(\sum_k \rho^{\frac{1}{2}}|e_k\rangle\langle e_k|\rho^{\frac{1}{2}}\big) e_l\Big\rangle \\ &\leq \|u\|^2 \|\Phi_*\|_{\mathcal{B}(\mathcal{L}_1)} \Big\|\sum_k \rho^{\frac{1}{2}}|e_k\rangle\langle e_k|\rho^{\frac{1}{2}}\Big\|_1 \leq \|u\|^2\ \|\Phi_*\|_{\mathcal{B}(\mathcal{L}_1)}.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Hemos usado que el operador $\sigma = \sum_k \rho^{\frac{1}{2}}|e_k\rangle\langle e_k|\rho^{\frac{1}{2}}$ es positivo y tiene tranza finita; en efecto, la desigualdad de Parseval implica que

$$\mathsf{tr}(\sigma) = \sum_{j,k} |\langle e_j, \rho^{\frac{1}{2}} e_k\rangle|^2 = \sum_k \|\rho^{\frac{1}{2}} e_k\|^2 = \sum_k \langle e_k, \rho^{\frac{1}{2}} e_k\rangle = 1.$$

Hemos demostrado que

$$|\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)(u,v)| \leq \|u\|\ \|v\|\ \|\Phi_*\|_{\mathcal{B}(\mathcal{L}_1)}, \quad \text{para todo} \quad u, v \in \text{span}\{e_k \otimes e_l\}_{kl}. \tag{2.3}$$

Mediante un argumento estándar de densidad, $\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)(u,v)$ se extiende continuamente a todo el espacio $\mathsf{h}\otimes\mathsf{h}$, además existe un operador acotado sobre $\mathsf{h}\otimes\mathsf{h}$, que denotamos con el mismo símbolo $\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)$, satisfaciendo

$$\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)(u,v) = \big\langle u, \mathcal{E}_\rho(\Phi_*)v\big\rangle, \text{ para todo } u, v \text{ en } \mathsf{h}\otimes\mathsf{h}.$$

Este operador es positivo definido y acotado. Esto demuestra el lema. □

El siguiente resultado será útil para conocer la acción de $\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)$ sobre tensores simples del espacio $\mathsf{h}\otimes\mathsf{h}$.

Lema 2.1.2 *Sea e_k un elemento fijo de la base ortonormal $\{e_i\}_i$ y sea θ el operador anti-unitario de conjugación con respecto a esa base, i. e., $\theta u = \sum_j \overline{u}_j e_j$, $u_j = \langle e_j, u\rangle$. Entonces, la aplicación de h en $\mathcal{L}_1(\mathsf{h})$ definida por $u \longmapsto |e_k\rangle\langle\theta u|$ es continua.*

Demostración. Tomemos cualesquiera $u, v \in \mathsf{h}$, $u \neq v$. Simples cálculos muestran que

$$\begin{aligned}
&\Big\||e_k\rangle\langle\theta u| - |e_k\rangle\langle\theta v|\Big\|_1 = \Big\||e_k\rangle\langle\theta(u-v)|\Big\|_1 = \text{tr}\Big(\big(|\theta(u-v)\rangle\langle e_k||e_k\rangle\langle\theta(u-v)|\big)^{\frac{1}{2}}\Big)\\
&= \text{tr}\Big(|\theta(u-v)\rangle\langle\theta(u-v)|^{\frac{1}{2}}\Big) = \mathsf{tr}\Big(\frac{1}{\|\theta(u-v)\|}|\theta(u-v)\rangle\langle\theta(u-v)|\Big)\\
&= \|\theta(u-v)\|.
\end{aligned}$$

Esto termina la demostración. □

Definición 2.1.3 *El operador torcido ó entrelazado (entangled) de Fagnola y Rebolledo ω_ρ sobre $\mathcal{B}(\mathsf{h}\otimes\mathsf{h})$ se define como*

$$\omega_\rho = \Big|\sum_i \rho^{\frac{1}{2}} e_i \otimes e_i\Big\rangle\Big\langle\sum_j \rho^{\frac{1}{2}} e_j \otimes e_j\Big|.$$

Claramente ω_ρ depende tanto del estado ρ como de la base ortonormal elegida. El operador está bien definido pues

$$\Big\|\sum_i \rho^{\frac{1}{2}} e_i \otimes e_i\Big\|^2 = \Big\langle\sum_i \rho^{\frac{1}{2}} e_i \otimes e_i, \sum_j \rho^{\frac{1}{2}} e_j \otimes e_j\Big\rangle = \sum_{i,j}\langle\rho^{\frac{1}{2}} e_i, \rho^{\frac{1}{2}} e_j\rangle\delta_{ij} = \mathsf{tr}\rho = 1 < \infty$$

De este cálculo se sigue que $\omega_\rho \geq 0$ y $\mathsf{tr}\ \omega_\rho = 1$, *i. e.*, es un estado. Este operador fue introducido por Fagnola y Rebolledo [17] en 2009.

Veremos ahora la relación de este operador con nuestro $\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)$.

Proposición 2.1.4 *Para cualquier tensor simple $u \otimes v \in \mathsf{h} \otimes \mathsf{h}$,*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)u \otimes v &= \sum_i e_i \otimes \Phi_*(\rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle\theta u|\rho^{\frac{1}{2}})v \\ &= \Big(\sum_{i,j}(\mathbb{1}\otimes\Phi_*)|e_i\rangle\langle e_j| \otimes \rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle e_j|\rho^{\frac{1}{2}}\Big)u \otimes v \\ &= \big(\mathbb{1}\otimes\Phi_*\big)(\omega_\rho)u\otimes v.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Demostración. Sean $u \otimes v, u' \otimes v'$ dos tensores simples cualesquiera en $\mathsf{h}\otimes\mathsf{h}$. Denotamos con $u_n = \sum_{1\le j\le n}\langle e_j, u\rangle e_j$ a la suma parcial de u. De forma análoga definimos $v_m, u'_{n'}, v'_{m'}$. Entonces,

$$\begin{aligned}\big\langle u\otimes v, \mathcal{E}_\rho(\Phi_*)u'\otimes v'\big\rangle &= \lim_{\substack{n,m\\ n',m'}} \sum_{\substack{k,l\\ k',l'}} \overline{u}_k\overline{v}_l u_{k'}v_{l'}\big\langle e_k\otimes e_l, \mathcal{E}_\rho(\Phi_*)e_{k'}\otimes e_{l'}\big\rangle \\ = \lim_{\substack{n,m\\ n',m'}} \sum_{i,j}\sum_{\substack{k,l\\ k',l'}} &\overline{u}_k\overline{v}_l u_{k'}v_{l'}\langle e_j, e_{k'}\rangle\langle e_k, e_i\rangle\big\langle e_l, \Phi_*(\rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle e_j|\rho^{\frac{1}{2}})e_{l'}\big\rangle \\ = \lim_{\substack{n,m\\ n',m'}} \sum_{i,j} &\langle e_j, u'_{n'}\rangle\big\langle u_n\otimes v_m, e_i\otimes\Phi_*(\rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle e_j|\rho^{\frac{1}{2}})v'_{m'}\big\rangle.\end{aligned}$$

Intercambiaremos los límites con las sumas infinitas utilizando el teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Esto está justificado pues la positividad completa de Φ_*, la desigualdad de Cauchy-Schwartz y la bien conocida desigualdad para un operador acotado A y un operador de la clase de traza B, $\|AB\|_1 \le \|A\|\ \|B\|_1$, nos permiten dominar el término general por una función integrable de i, j. En efecto,

$$\begin{aligned}&|\langle e_j, u'_{n'}\rangle|^2\ |\langle u_n, e_i\rangle|^2\ \left|\Big\langle v_m, \Phi_*\big(\rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle e_j|\rho^{\frac{1}{2}}\big)v'_{m'}\Big\rangle\right|^2 \\ &= |\langle e_j, u'_{n'}\rangle|^2\ |\langle u_n, e_i\rangle|^2\ \left|\Big\langle v_m, \sum_l L_l\big|\rho^{\frac{1}{2}}e_i\big\rangle\big\langle\rho^{\frac{1}{2}}e_j\big|L_l^* v'_{m'}\Big\rangle\right|^2 \\ &= |\langle e_j, u'_{n'}\rangle|^2\ |\langle u_n, e_i\rangle|^2\ \left|\sum_l \Big\langle L_l^* v_m, \rho^{\frac{1}{2}}e_i\Big\rangle\Big\langle\rho^{\frac{1}{2}}e_j, L_l^* v'_{m'}\Big\rangle\right|^2 \\ &\le \|u_n\|^2\ \|u'_{n'}\|^2\left(\sum_l \big|\big\langle L_l^* v_m, \rho^{\frac{1}{2}}e_i\big\rangle\big|^2\right)\left(\sum_l \big|\big\langle\rho^{\frac{1}{2}}e_j, L_l^* v'_{m'}\big\rangle\big|^2\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \|u_n\|^2\ \|u'_{n'}\|^2 \Big\langle v_m, \Phi_*\big(\rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle e_i|\rho^{\frac{1}{2}}\big)v_m\Big\rangle\Big\langle v'_{m'}, \Phi_*\big(\rho^{\frac{1}{2}}|e_j\rangle\langle e_j|\rho^{\frac{1}{2}}\big)v'_{m'}\Big\rangle \\
&= \|u_n\|^2\ \|u'_{n'}\|^2\ \mathrm{tr}\Big(\Phi_*\big(\rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle e_i|\rho^{\frac{1}{2}}\big)|v_m\rangle\langle v_m|\Big)\ \mathrm{tr}\Big(\Phi_*\big(\rho^{\frac{1}{2}}|e_j\rangle\langle e_j|\rho^{\frac{1}{2}}\big)|v'_{m'}\rangle\langle v'_{m'}|\Big) \\
&= \|u_n\|^2\ \|u'_{n'}\|^2\ \Big\|\Phi_*\big(\rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle e_i|\rho^{\frac{1}{2}}\big)|v_m\rangle\langle v_m|\Big\|_1\ \Big\|\Phi_*\big(\rho^{\frac{1}{2}}|e_j\rangle\langle e_j|\rho^{\frac{1}{2}}\big)|v'_{m'}\rangle\langle v'_{m'}|\Big\|_1 \\
&\leq \|u_n\|^2\ \|u'_{n'}\|^2\ \big\||v_m\rangle\langle v_m|\big\|\ \big\||v'_{m'}\rangle\langle v'_{m'}|\big\|\ \Big\|\Phi_*\big(\rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle e_i|\rho^{\frac{1}{2}}\big)\Big\|_1\ \Big\|\Phi_*\big(\rho^{\frac{1}{2}}|e_j\rangle\langle e_j|\rho^{\frac{1}{2}}\big)|\Big\|_1 \\
&\leq \|u\|^2\ \|u'\|^2\ \|v\|^2\ \|v'\|^2\ \|\Phi_*\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{L}_1)}\ \ \big\|\rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle e_i|\rho^{\frac{1}{2}}\big\|_1\ \ \big\|\rho^{\frac{1}{2}}|e_j\rangle\langle e_j|\rho^{\frac{1}{2}}\big\|_1 \\
&= \|u\|^2\ \|u'\|^2\ \|v\|^2\ \|v'\|^2\ \|\Phi_*\|^2_{\mathcal{B}(\mathcal{L}_1)}\ \ \big\langle e_i, \rho e_i\big\rangle \quad \big\langle e_j, \rho e_j\big\rangle,
\end{aligned}
$$

la cual es claramente integrable como función de i, j.

Llevando los límites dentro de la suma, y recordando que, si $u = \sum_k u_k e_k$ entonces $\theta u = \sum_k \overline{u}_k e_k$, la siguiente igualdad es cierta

$$
\Big\langle u \otimes v, \mathcal{E}_\rho(\Phi_*)u' \otimes v'\Big\rangle = \Big\langle u \otimes v, \sum_i e_i \otimes \Phi_*(\rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle \theta u'|\rho^{\frac{1}{2}})v'\Big\rangle,
$$

para cualesquiera $u, v, u', v' \in \mathsf{h}$. La primera igualdad en (2.4) se obtiene por densidad.

Por la continuidad de la aplicación en el lema 2.1.2, las igualdades restantes en (2.4) se siguen de manera directa. Ciertamente,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)u \otimes v &= \sum_i e_i \otimes \Phi_*(\rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle \theta u|\rho^{\frac{1}{2}})v \\
&= \lim_r \sum_i^r e_i \otimes \Phi_*(\rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle \theta u|\rho^{\frac{1}{2}})v \\
&= \lim_{r,s} \sum_{i,j}^{r,s} (\mathbb{1} \otimes \Phi_*)e_i \otimes \rho^{\frac{1}{2}}\big|e_i\big\rangle\big\langle\langle u, e_j\rangle e_j\big|\rho^{\frac{1}{2}}v \\
&= \lim_{r,s} \sum_{i,j}^{r,s} (\mathbb{1} \otimes \Phi_*)|e_i\rangle\langle e_j|u \otimes \rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle e_j\big|\rho^{\frac{1}{2}}v \\
&= \lim_{r,s} \Big(\sum_{i,j}^{r,s} (\mathbb{1} \otimes \Phi_*)|e_i\rangle\langle e_j| \otimes \rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle e_j|\rho^{\frac{1}{2}}\Big)u \otimes v \\
&= (\mathbb{1} \otimes \Phi_*)\Big(\sum_{i,j} |e_i\rangle\langle e_j| \otimes \rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle e_j|\rho^{\frac{1}{2}}\Big)u \otimes v \\
&= (\mathbb{1} \otimes \Phi_*)(\omega_\rho)u \otimes v.
\end{aligned}
$$

□

La siguientes propiedade de un estado fiel nos será de en seguida.

Proposición 2.1.5 *Un estado σ satisface*

$$\sigma \text{ es fiel } \Leftrightarrow \operatorname{Im} \sigma^{\frac{1}{2}} \text{ es denso en } \mathsf{h}, \quad \text{donde } \operatorname{Im} \sigma^{\frac{1}{2}} = \{\sigma^{\frac{1}{2}} u : u \in \mathsf{h}\}.$$

Demostración. Si σ es fiel, claramente $\sigma^{\frac{1}{2}}$ lo es también. Sea $\{v_i\}_i$ la base ortonormal de σ y denotamos con $\{\sigma_i\}_i$ a sus valores propios. Nótese que $\sigma_i > 0$ para todo i. Tenemos que $\sigma^{\frac{1}{2}} v_i = \sigma_i^{\frac{1}{2}} v_i$, ó equivalentemente, $v_i = \sigma_i^{-\frac{1}{2}} \sigma^{\frac{1}{2}} v_i$. Esto implica que $\operatorname{span}\{v_i\} \subseteq \operatorname{Im} \sigma^{\frac{1}{2}}$, así la imagen de $\sigma^{\frac{1}{2}}$ es densa en h.

Por el contrario, supongamos que σ no es fiel. Entonces existe un vector propio v_j de σ tal que $\sigma v_j = 0, v_j \neq 0$ y $\sigma_j = 0$. Sea $M = \operatorname{span}\{v_l : \sigma_l > 0\}$. Por un lado $\operatorname{Im} \sigma^{\frac{1}{2}} \subset M$ pues, si $u = \sigma^{\frac{1}{2}} v, v \in \mathsf{h}$, entonces

$$u = \sigma^{\frac{1}{2}} \sum_i \langle v_i, v \rangle v_i = \sum_i \langle v_i, v \rangle \sigma_i^{\frac{1}{2}} v_i = \sum_{\substack{i \\ \sigma_i > 0}} \langle v_i, v \rangle \sigma_i^{\frac{1}{2}} v_i \in M.$$

Pero $v_j \in M^{\perp}$, lo cual implica que $M^{\perp} \neq \{0\}$. Entonces M no es denso, es decir, $\operatorname{Im} \sigma^{\frac{1}{2}}$ no es denso. $\square$

Proposición 2.1.6 *Si ρ es fiel entonces $\mathcal{E}_\rho$ es inyectivo.*

Demostración. Sean Φ_* y Ψ_* dos operadores acotados CP sobre $\mathcal{L}_1(\mathsf{h})$ tales que $\mathcal{E}_\rho(\Phi_*) = \mathcal{E}_\rho(\Psi_*)$ y sea $u \otimes v \in \mathsf{h} \otimes \mathsf{h}$ arbitrario. Denotemos la expansión de u con respecto a la base $\{e_i\}_i$ por $u = \sum_l u_l e_l$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\left\langle u \otimes v, \mathcal{E}_\rho(\Phi_*) u \otimes v \right\rangle &= \sum_{i,j} \left\langle u \otimes v, |e_i\rangle\langle e_j| \otimes \Phi_* \left(\rho^{\frac{1}{2}} |e_i\rangle\langle e_j| \rho^{\frac{1}{2}}\right) u \otimes v \right\rangle \\
&= \sum_{i,j} \langle u, e_i \rangle \langle e_j, u \rangle \left\langle v, \Phi \left(\rho^{\frac{1}{2}} |e_i\rangle\langle e_j| \rho^{\frac{1}{2}}\right) v \right\rangle \\
&= \sum_{i,j,l,k} \overline{u}_l u_k \delta_{il} \delta_{kj} \left\langle v, \Phi \left(\rho^{\frac{1}{2}} |e_i\rangle\langle e_j| \rho^{\frac{1}{2}}\right) v \right\rangle \\
&= \sum_{i,j} \left\langle v, \Phi_* \left(\rho^{\frac{1}{2}} |\overline{u}_i e_i\rangle\langle \overline{u}_j e_j| \rho^{\frac{1}{2}}\right) v \right\rangle = \left\langle v, \Phi_* \left(\rho^{\frac{1}{2}} |\theta u\rangle\langle \theta u| \rho^{\frac{1}{2}}\right) v \right\rangle.
\end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad podemos tomar θu en vez de u, pues $\{\theta u : u \in \mathsf{h}\}$ sigue siendo denso en h. Con ello,
$0 = \left\langle \theta u \otimes v, \left(\mathcal{E}_\rho(\Phi_*) - \mathcal{E}_\rho(\Psi_*)\right) \theta u \otimes v \right\rangle = \left\langle v, \left(\Phi_*\left(|\rho^{\frac{1}{2}} u\rangle\langle \rho^{\frac{1}{2}} u|\right) - \Psi_*\left(|\rho^{\frac{1}{2}} u\rangle\langle \rho^{\frac{1}{2}} u|\right)\right) v \right\rangle$. Por hipótesis $\operatorname{Im}(\rho^{\frac{1}{2}})$ es denso en h, esto implica que el conjunto $\{|\rho^{\frac{1}{2}} u\rangle\langle \rho^{\frac{1}{2}} u| : u \in \mathsf{h}\}$ es denso en $\mathcal{L}_1(\mathsf{h})$. Por tanto, $\Phi_* = \Psi_*$ coinciden sobre un conjunto denso de $\mathcal{L}_1(\mathsf{h})$. Así concluímos que son iguales.

$\square$

De ahora en adelante supondremos que el estado ρ es fiel.

Lema 2.1.7 *Si ω'_ρ es como en la definición 2.1.10 con la base ortonormal $\{e'_i\}_i$ en vez de $\{e_i\}_i$, y U es el operador unitario que relaciona ambas bases ortonormales, i. e., $Ue_i = e'_i$, entonces*

$$\omega'_\rho = (U\Theta(U) \otimes \mathbb{1})\omega_\rho(U\Theta(U) \otimes \mathbb{1})^*,$$

donde ω_ρ es el estado asociado con la base ortonormal $\{e_i\}_i$ y Θ es el operador de inversión del tiempo asociado a la conjugación respecto a esta base.

Demostración. Por definición, para un tensor simple tenemos que

$$\begin{aligned}
\left\langle u \otimes v, \omega'_\rho u' \otimes v' \right\rangle &= \sum_{ij} \left\langle u \otimes v, Ue_i \otimes \rho^{\frac{1}{2}} Ue_i \right\rangle \left\langle Ue_j \otimes \rho^{\frac{1}{2}} Ue_j, u' \otimes v' \right\rangle \\
&= \sum_{ij} \left\langle u, U\theta U^* Ue_i \right\rangle \left\langle v, \rho^{\frac{1}{2}} Ue_i \right\rangle \left\langle U\theta U^* Ue_j, u' \right\rangle \left\langle \rho^{\frac{1}{2}} Ue_j, v' \right\rangle \\
&= \left\langle u, U\theta U^* \sum_i \langle Ue_i, \rho^{\frac{1}{2}} v \rangle Ue_i \right\rangle \left\langle U\theta U^* \sum_j \langle Ue_j, \rho^{\frac{1}{2}} v' \rangle Ue_j \right\rangle \\
&= \left\langle u, U\theta U^* \rho^{\frac{1}{2}} v \right\rangle \left\langle U\theta U^* \rho^{\frac{1}{2}} v', u' \right\rangle \\
&= \sum_{i,j} \left\langle u, U\theta U^* \theta \langle \rho^{\frac{1}{2}} v, e_i \rangle e_i \right\rangle \left\langle U\theta U^* \theta \langle \rho^{\frac{1}{2}} v', e_j \rangle e_j, u' \right\rangle \\
&= \sum_{i,j} \left\langle u, U\theta U^* \theta e_i \right\rangle \left\langle v, \rho^{\frac{1}{2}} e_i \right\rangle \left\langle U\theta U^* \theta e_j, u' \right\rangle \langle \rho^{\frac{1}{2}} e_j, v' \rangle \\
&= \sum_{i,j} \left\langle u \otimes v, U\theta U^* \theta e_i \otimes \rho^{\frac{1}{2}} e_i \right\rangle \left\langle U\theta U^* \theta e_j \otimes \rho^{\frac{1}{2}} e_j, u' \otimes v' \right\rangle \\
&= \left\langle u \otimes v, (U\theta U^* \theta \otimes \mathbb{1}) \sum_{i,j} \left\langle e_j \otimes \rho^{\frac{1}{2}} e_j, (U\theta U^* \theta \otimes \mathbb{1})^* u' \otimes v' \right\rangle e_i \otimes \rho^{\frac{1}{2}} e_i \right\rangle \\
&= \left\langle u \otimes v, (U\theta U^* \theta \otimes \mathbb{1}) \omega_\rho (U\theta U^* \theta \otimes \mathbb{1})^* u' \otimes v' \right\rangle.
\end{aligned}$$

Por linealidad y densidad se extiende a todo el espacio $\mathsf{h} \otimes \mathsf{h}$. □

Teorema 2.1.8 *Sean $\{e_i\}_i$ y $\{e'_i\}_i$ dos bases ortonormales de h, ρ un estado fijo y Φ_* un operador acotado completamente positivo sobre $\mathcal{L}_1(\mathsf{h})$. Entonces, $\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)$ y $\mathcal{E}'_\rho(\Phi_*)$ satisfacen la siguiente igualdad:*

$$\mathcal{E}'_\rho(\Phi_*) = (U\Theta(U) \otimes \mathbb{1})\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)(U\Theta(U) \otimes \mathbb{1})^*, \tag{2.5}$$

donde U es el operador unitario que relaciona las bases ortonormales, $e'_i = Ue_i$.

Demostración. Consideramos cualquier tensor simple $u \otimes v \in \mathsf{h} \otimes \mathsf{h}$. Por la proposición 2.1.4, lema 2.1.7 y algunos cálculos obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\rho{}'(\Phi_*)u\otimes v &= \big(\mathbb{1}\otimes\Phi_*\big)(\omega_\rho')u\otimes v\\
&= \big(\mathbb{1}\otimes\Phi_*\big)\big((U\theta U^*\theta\otimes\mathbb{1})\omega_\rho(U\theta U^*\theta\otimes\mathbb{1})^*\big)u\otimes v\\
&= \lim_{r,s}\Big(\sum_{i,j}^{r,s}(U\theta U^*\theta\otimes\mathbb{1})(\mathbb{1}\otimes\Phi_*)|e_i\rangle\langle e_j|\otimes\rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle e_j|\rho^{\frac{1}{2}}(U\theta U^*\theta\otimes\mathbb{1})^*\Big)u\otimes v\\
&= (U\theta U^*\theta\otimes\mathbb{1})\lim_{r,s}\Big(\sum_{i,j}^{r,s}(\mathbb{1}\otimes\Phi_*)|e_i\rangle\langle e_j|\otimes\rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle e_j|\rho^{\frac{1}{2}}\Big)(U\theta U^*\theta\otimes\mathbb{1})^*u\otimes v\\
&= \big(U\theta U^*\theta\otimes\mathbb{1}\big)\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)\big(U\theta U^*\theta\otimes\mathbb{1}\big)^*u\otimes v.
\end{aligned}$$

Extendiendo esta identidad a elementos arbitrarios de $\mathsf{h}\otimes\mathsf{h}$ mediante linealidad y densidad se sigue el resultado. □

Teorema 2.1.9 *Sea Φ_* en $\mathcal{CP}(\mathcal{L}_1(\mathsf{h}))$. $\mathcal{E}_\rho$ posee las siguientes propiedades:*

i) *$\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)$ es un operador positivo.*

ii) *$\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)$ satisface la propiedad "**isométrica**",*

$$\|\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)\|_1 = \mathsf{tr}\mathcal{E}_\rho(\Phi_*) = \mathsf{tr}\Phi_*(\rho) = \|\Phi_*(\rho)\|_1. \tag{2.6}$$

Consecuentemente, $\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)$ es un estado si y solo si Φ_* es una transformación CP que preserva la traza.

iii) *$\mathcal{E}_\rho$ es una transformación continua como aplicación del conjunto $\mathcal{CP}(\mathcal{L}_1(\mathsf{h}))$ a $\mathcal{L}_1(\mathsf{h}\otimes\mathsf{h})$. Esto es, $\mathcal{E}_\rho : \mathcal{CP}(\mathcal{L}_1(\mathsf{h}))\to\mathcal{L}_1(\mathsf{h}\otimes\mathsf{h})$ es continua, donde $\mathcal{CP}(\mathcal{L}_1(\mathsf{h}))$ es provisto con la topología de la norma de $\mathcal{B}(\mathcal{L}_1(\mathsf{h}))$.*

iv) *Para cada $u, v, z, w\in\mathsf{h}$,*

$$\Big\langle u\otimes v, \mathcal{E}_\rho(\Phi_*)u'\otimes v'\Big\rangle = \Big\langle v, \Phi_*\big(\rho^{\frac{1}{2}}\theta(|u'\rangle\langle u|)^*\theta\rho^{\frac{1}{2}}\big)v'\Big\rangle.$$

Demostración.

i) Sea u cualquier elemento en $\mathsf{h}\otimes\mathsf{h}$ y $\{u_n\}_n$ una sucesión en $\mathrm{span}\{e_k\otimes e_l\}\subset\mathsf{h}\otimes\mathsf{h}$ tal que $u_n\to u$.

Como $\langle u, \mathcal{E}_\rho(\Phi_*)u\rangle = \lim_{n,m}\langle u_n, \mathcal{E}_\rho(\Phi_*)u_m\rangle$, es suficiente demostrar que existe una subsucesión de $\{\langle u_n, \mathcal{E}_\rho(\Phi_*)u_m\rangle\}_{nm}$ que consiste de elementos no negativos con límite $\langle u, \mathcal{E}_\rho(\Phi_*)u\rangle$. La subsucesión diagonal $\{\langle u_n, \mathcal{E}_\rho(\Phi_*)u_n\rangle\}_n$ converge a $\langle u, \mathcal{E}_\rho(\Phi_*)u\rangle$ y, por el lema 2.1.1, $\mathcal{E}(\Phi_*)$ es positivo sobre $\mathrm{span}\{e_k\otimes e_l\}$. Esto demuestra *i)*.

ii) Por el teorema 2.1.8 y la invariancia de la traza con respecto a conjugaciones unitarias, es suficiente demostrar que (2.6) se satisface en el caso cuando $\{e_i\}$ es la base que diagonaliza a ρ, *i. e.*, $\rho = \sum_i \rho_i |e_i\rangle\langle e_i|$. Tenemos que

$$\begin{aligned}\mathsf{tr}\big(\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)\big) &= \sum_{i,j} \left\langle e_i \otimes e_j, \mathcal{E}_\rho(\Phi_*) e_i \otimes e_j \right\rangle = \sum_{i,j} \left\langle e_j, \Phi_* \left(\rho^{\frac{1}{2}} |e_i\rangle\langle e_i| \rho^{\frac{1}{2}}\right) e_j \right\rangle \\ &= \sum_i \mathsf{tr}\big(\Phi_*(\rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle e_i|\rho^{\frac{1}{2}})\big) = \mathsf{tr}\big(\Phi_*(\sum_i \rho_i |e_i\rangle\langle e_i|)\big) \\ &= \mathsf{tr}\big(\Phi_*(\rho)\big) = \|\Phi_*(\rho)\|_1.\end{aligned}$$

Hemos usado la positividad de $\Phi_*(\rho)$.

iii) $\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)$ es positivo, como una consecuencia directa de *ii)* obtenemos

$$\|\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)\|_1 = \|\Phi_*(\rho)\|_1 \le \|\Phi_*\|_{\mathcal{B}(\mathcal{L}_1)}.$$

Esto demuestra *iii)*.

iv) Mediante un cálculo directo, para cada $u, v, u', v' \in \mathsf{h}$ tenemos que

$$\begin{aligned}&\left\langle u \otimes v, \mathcal{E}_\rho(\Phi_*) u' \otimes v' \right\rangle = \sum_i \left\langle u \otimes v, e_i \otimes \Phi_*(\rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle \theta u'|\rho^{\frac{1}{2}}) v' \right\rangle \\ &= \sum_i \left\langle v, \Phi_*\left(\rho^{\frac{1}{2}} |\langle u, e_i\rangle e_i\rangle\langle \theta u'|\rho^{\frac{1}{2}}\right) v' \right\rangle = \left\langle v, \Phi_*\big(\rho^{\frac{1}{2}}\theta(|u'\rangle\langle u|)^*\theta\rho^{\frac{1}{2}}\big) v' \right\rangle.\end{aligned}$$

□

Ya estamos en posición de enunciar la definición de nuestros estados asociados.

Definición 2.1.10 *Sean ρ un estado en $\mathcal{B}(\mathsf{h})$, $\{e_i\}_i$ una base ortonormal de h. El* ***estado asociado*** *a un operador completamente positivo $\Phi_* \in \mathcal{B}(\mathcal{L}_1(\mathsf{h}))$ es $\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)$.*

Vale la pena notar que cuando $\dim \mathsf{h} = p < \infty$ y $\rho = \frac{1}{p}\mathbb{1}$, $\mathcal{E}_\rho$ se reduce a el bien conocido isomorfismo de Choi-Jamiołkowski, el cual muestra la famosa dualidad entre los canales cuánticos y los estados en la teoría cuántica de la información.

2.2 Desviación del equilibrio

De ahora en adelante consideraremos un QMS uniformemente continuo $(\mathcal{T}_t)_{t\ge 0}$ sobre $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ con un estado invariante fiel ρ.

2.2.1 El QMS adjunto Θ-KMS

El Θ-SQDB parece ser la extensión cuántica del balance detallado clásico más apropiada, sin embargo, hasta ahora en la literatura no se ha discutido ninguna noción de adjunto asociado con la condicion del Θ-SQDB. Para llenar este vacío definimos el semigrupo adjunto Θ-KMS (ó dual) como sigue.

Definición 2.2.1 *El semigrupo adjunto Θ-KMS asociado al QMS uniformemente continuo* $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ *con estado invariante* ρ *y a la operación de inversión del tiempo* Θ *es el semigrupo* $(\mathcal{T}_t^{\Theta})_{t\geq 0}$ *que satisface la relación de dualidad*

$$\mathsf{tr}\Big(\rho^{\frac{1}{2}}\Theta(x^*)\rho^{\frac{1}{2}}\mathcal{T}_t(y)\Big) = \mathsf{tr}\Big(\rho^{\frac{1}{2}}\Theta(\mathcal{T}_t^{\Theta}(x^*))\rho^{\frac{1}{2}}y\Big), \quad \textit{para todo} \;\; x, y \in \mathcal{B}(\mathsf{h}). \tag{2.7}$$

La noción de balance detallado pesado, que se introdujo en [1], es una generalización natural de la condición de balance detallado cuántico de Frigerio, Kossakowski, Gorini, Verri,[23], que define una clase amplia de semigrupos, incluyendo QMS con estados de equilibrio y QMS con estados invariantes fuera de equilibrio. Los generadores de estos semigrupos admiten una representación GKSL especial en el sentido de Parthasarathy

$$\mathcal{L}(x) = i[H, x] - \frac{1}{2}\sum_{k\geq 1}\left(L_k^*L_kx - 2L_k^*xL_k + xL_k^*L_k\right), \tag{2.8}$$

donde $H,\ L_k \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$ con $H = H^*$ y la serie $\sum_{k\geq 1} L_k^*L_k$ es convergente en la norma. El teorema 30.16 de [26] describe estas representaciones.

Teorema 2.2.2 *Sea* $\mathcal{L}$ *el generador de un QMS uniformemente continuo sobre* $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ *y sea* ρ *un estado normal sobre* $\mathcal{B}(\mathsf{h})$. *Entonces existe un operador acotado autoadjunto* H *y una sucesión finita ó infinita* $(L_k)_{k\geq 1}$ *de elementos en* $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ *tal que*

1. $\mathsf{tr}(\rho L_k) = 0$ *para todo* $k \geq 1$.
2. $\sum_{k\geq 1} L_k^*L_k$ *converge en la norma.*
3. *Si* $\sum_{k\geq 0}|c_k|^2 < \infty$ *y* $c_0 + \sum_{k\geq 1} c_kL_k = 0$ *para escalares complejos* $(c_k)_{k\geq 0}$, *entonces* $c_k = 0$ *para todo* $k \geq 0$.
4. *La representación GKSL* (2.8) *se cumple.*

Si $\tilde{H}, (\tilde{L}_k)_{k\geq 1}$ *es otra familia de operadores acotados en* $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ *con* $\tilde{H}$ *autoadjunto y la sucesión* $(\tilde{L}_k)_{k\geq 1}$ *es finita ó infinita entonces las condiciones 1-4 son satisfechas por* $\tilde{H}, (\tilde{L}_k)_{k\geq 1}$ *si y solo si el tamaño de las sucesiones* $(L_k)_{k\geq 1}, (\tilde{L}_k)_{k\geq 1}$ *es el mismo y para algún escalar* $c \in \mathbb{R}$ *y una matriz unitaria* $(u_{lj})_{l,j}$ *se tiene*

$$\tilde{H} = H + c, \quad \tilde{L}_l = \sum_j u_{lj}L_j.$$

Definición 2.2.3 *Un QMS uniformemente continuo* $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ *con generador GKSL* $\mathcal{L}$ *y un estado fiel invariante* ρ *se dice que satisface una condición de balance detallado pesado si* $\mathcal{L}$ *admite una representación GKSL especial, existen una sucesión de pesos positivos* $q := (q_k)_k$ *y operadores acotados* $K, L_k^{'}$ *de (posiblemente otra) representación GKSL especial de* $\mathcal{L}$ *tales que la diferencia* $\mathcal{L}' - \mathcal{L}$ *tiene la estructura*

$$\mathcal{L}'(\cdot) - \mathcal{L}(\cdot) = -2i[K, \cdot] + \Pi,$$

donde $\mathcal{L}'$ *es el adjunto KMS de* $\mathcal{L}$, $K = K^*$ *es acotado y*

$$\Pi(x) = \sum_k (q_k - 1)L_k^{'*}xL_k^{'}. \tag{2.9}$$

Teorema 2.2.4 *Si $\mathcal{T} = (\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ sobre $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ es un QMS uniformemente continuo con un estado fiel invariante ρ, cuyo generador satisface una condición de balance detallado pesado con operadores acotados K y L_k, entonces $\mathcal{T}^{\Theta}$, el QMS adjunto Θ-KMS, existe y satisface*

$$\mathcal{T}^{\Theta} = \Theta \circ \mathcal{T}' \circ \Theta, \tag{2.10}$$

donde $\mathcal{T}'$ es el semigrupo adjunto KMS. Consecuentemente, $\mathcal{T}^{\Theta}$ es uniformemente continuo.

Demostración. Tenemos que para todo $x, y \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$

$$\mathsf{tr}\Big(\rho^{\frac{1}{2}}\mathcal{T}'\big(\Theta(x^*)\big)\rho^{\frac{1}{2}}y\Big) = \mathsf{tr}\Big(\rho^{\frac{1}{2}}\Theta(x^*)\rho^{\frac{1}{2}}\mathcal{T}_t(y)\Big) = \mathsf{tr}\Big(\rho^{\frac{1}{2}}\Theta(\mathcal{T}_t^{\Theta}(x^*))\rho^{\frac{1}{2}}y\Big).$$

Por tanto, $\mathcal{T}^{\Theta} = \Theta\circ\mathcal{T}'\circ\Theta$. Es bien conocido que $\mathcal{T}'$ siempre es un QMS, ver [13]. Claramente $\mathcal{T}^{\Theta}$ es un QMS uniformemente continuo siempre que $\mathcal{T}'$, el semigrupo adjunto KMS, lo sea. Si el generador GKSL de $\mathcal{T}$ satisface una condicion de balance detallado pesado entonces el generador GKSL de $\mathcal{T}'$ tiene la estructura

$$\mathcal{L}'(\cdot) = \mathcal{L}(\cdot) + 2i[K, \cdot] + \sum_k (q_k - 1)L_k^* \cdot L_k,$$

con $q_k > 0$, K y todos los L_k acotados. La continuidad uniforme de $\mathcal{T}$ implica que $\mathcal{L}$ es un operador acotado sobre $\mathcal{B}(\mathsf{h})$, de ahí se sigue que $\mathcal{L}'$ es a su vez un operador acotado de $\mathcal{B}(\mathsf{h})$ en si mismo. Entonces $\mathcal{T}'$, y consecuentemenete $\mathcal{T}^{\Theta}$, son QMS uniformemente continuos. Esto termina la demostración. □

Como consecuencia del teorema 2.2.4 y la definición 1.3.2 tenemos el siguiente teorema:

Corolario 2.2.5 *El Θ-SQDB se satisface si y solo si $\mathcal{T}_t = \mathcal{T}_t^{\Theta}$ para toda $t \geq 0$.*

Esto nos permite concluir que el semigrupo adjunto $\mathcal{T}^{\Theta}$ es un buen semigrupo candidato para medir la desviación del Θ-SQDB utilizando la entropía de von Neumann.

2.2.2 Entropía relativa y tasa de producción de entropía cuántica

La entropía relativa de von Neumann ó entropía relativa cuántica (QRE por sus siglas en inglés) es bien conocida en la literatura como una generalización de la entropía relativa clásica.

Definición 2.2.6 *La QRE de dos estados η y σ con soporte finito dimensional se define como*

$$S(\eta, \sigma) = tr\Big(\eta \log \eta - \eta \log \sigma)\Big)$$

si $\ker(\sigma) \subset \ker(\eta)$ y ∞ en otro caso.

Por cuestión de completez enunciamos sin demostración la propiedad fundamental de no negatividad de la QRE.

Teorema 2.2.7
$$S(\eta,\sigma) \geq 0,$$
para todo η, σ. Aún más, $S(\eta,\sigma) = 0$ si y solo si $\eta = \sigma$.

Una demostración de este teorema puede encontrarse en el apéndice C de este trabajo.

La QRE de los estados $\mathcal{E}_\rho$ asociados con el semigrupo y su adjunto Θ-KMS, es decir, $S\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}), \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}^\Theta)\Big)$, es una medida de la desviación del Θ-SQDB del semigrupo $\mathcal{T}$. Aún más, siguiendo el modelo clásico, definimos la tasa de cambio de la QRE como sigue.

Definición 2.2.8 *La tasa de producción de entropía cuántica (QEPR) del QMS uniformemente continuo $\mathcal{T}_*$, con respecto al estado estacionario ρ, se define como*

$$e_p(\mathcal{T}_*,\rho) = \frac{d}{dt} S\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}), \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}^\Theta)\Big)\Big|_{t=0} \quad \textit{cuando el límite existe.} \tag{2.11}$$

Notemos que en la última definición no se hace referencia a la base ortonormal utilizada para calcular los estados $\mathcal{E}_\rho$ de $\mathcal{T}_*$ y $\mathcal{T}_*^\Theta$. Esto está justificado por el siguiente teorema.

Teorema 2.2.9 *Sean $\{e_i\}_i$ una base ortonormal de h, Φ_*, Ψ_* dos operadores CP que preservan la traza actuando sobre $\mathcal{L}_1(\mathsf{h})$, y $\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)$, $\mathcal{E}_\rho(\Psi_*)$, los estados sobre $\mathcal{B}(\mathsf{h}\otimes\mathsf{h})$, asociados con Φ_* y Ψ_*, respectivamente. La QRE no depende de la base ortonormal $\{e_i\}_i$.*

Demostración. Es suficiente demostrar que si $\{e'_i\}_i$ es otra base ortonormal de h y $\mathcal{E}'_\rho(\Phi_*)$, $\mathcal{E}'_\rho(\Psi_*)$ son los estados asociados con Φ_* y Ψ_* obtenidos con esta otra base, entonces

$$S\big(\mathcal{E}'_\rho(\Phi_*), \mathcal{E}'_\rho(\Psi_*)\big) = S\big(\mathcal{E}_\rho(\Phi_*), \mathcal{E}_\rho(\Psi_*)\big). \tag{2.12}$$

Usando las propiedades del operador antiunitario θ es fácil ver que $U\Theta(U)\otimes\mathbb{1}$ es un operador unitario. Ahora, (2.12) se sigue de la bien conocida invariancia de la entropía relativa de von Neumann con respecto a conjugaciones unitarias y de la proposición 2.1.8. A su vez, esta invariancia de la entropía relativa es consecuencia de la monotonía de la QRE con respecto a operadores completamente positivos (teorema de Petz-Uhlmann). $\square$

Este último teorema nos permite utilizar de ahora en adelante la base que diagonaliza a ρ para hacer todos los cálculos. Aún más, podemos suponer que el operador antiunitario θ y el estado ρ conmutan. En efecto, si $\rho = \sum_i \rho_i |e_i\rangle\langle e_i|$ y θ es la conjugación respecto a esta base entonces

$$\theta\rho u = \theta\sum_i \rho_i\langle e_i, u\rangle e_i = \sum_i \rho_i \langle u, e_i\rangle e_i = \sum_i \rho_i\langle e_i, \theta u\rangle e_i = \rho\theta u, \text{ para todo } u\in\mathsf{h}.$$

Teorema 2.2.10 *Sea $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ un QMS con un estado invariante fiel y $(\mathcal{T}_t^\Theta)_{t\geq 0}$ el QMS adjunto Θ-KMS, entonces las siguientes aseveraciones son equivalentes:*

i) $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ satisface una condición de Θ-SQDB.

ii) La entropía relativa cuántica se anula para todo $t \geq 0$,

$$S\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}), \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}^\Theta)\Big) = 0, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Consecuentemente, la condición Θ-SQDB implica que $e_p(\mathcal{T}_*, \rho) = 0$ pero no reciprocamente.

Demostración. La equivalencia se sigue del teorema 2.2.7 y de la inyectividad de $\mathcal{E}_\rho$. □

Como consecuencia del teorema anterior, llamaremos estado estacionario fuera de equilibrio a cualquier estado invariante ρ de $\mathcal{T}$ para el cual exista un $t > 0$ tal que $S\big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}), \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}^\Theta)\big) > 0$.

A diferencia del caso clásico, la implicación recíproca: "QEPR cero $\Rightarrow$ Θ-SQDB" es falsa para un QMS general. Un QMS que ilustra esta situación puede consultarse en el capítulo 4.

Para concluir esta sección presentamos una condición bajo la cual basta usar el adjunto KMS para el cálculo de la QEPR.

Definición 2.2.11 *Un operador CP Φ se dice que preserva paridad, con respecto a un operador antiunitario θ, si conmuta con la operación de inversion del tiempo $\Theta(x) = \theta x^* \theta$ $x \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$, i. e., $\Theta \circ \Phi(a) = \Phi \circ \Theta(a)$ para todo $a \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$.*
Un QMS $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ preserva paridad con respecto a θ si y solo si $\mathcal{T}_t$ preserva paridad con respecto a θ para todo $t \geq 0$.

Corolario 2.2.12 *Si el QMS preserva paridad, la QRE satisface*

$$S\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}), \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}^\Theta)\Big) = S\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}), \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}')\Big).$$

En otras palabras, la entropía relativa puede ser calculada utilizando ya sea el adjunto KMS ó el adjunto Θ-KMS presentado en la definición 2.2.1.

Demostración. Recordemos que $\theta^2 = \mathbb{1}$, es entonces inmediato que $\mathcal{T}_t' = \mathcal{T}_t^\Theta$ si el QMS preserva paridad. □

Recordemos que un estado (funcional) lo identificamos con un estado (operador positivo y de traza uno) llamado densidad y viceversa (ver definición 1.2.4). De esta forma podemos definir el estado (funcional) que tiene por densidad al estado (operador) $\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)$.

Definición 2.2.13 *Denotamos con $\omega_\rho(\Phi_*)$ al estado (funcional positivo) sobre $\mathcal{B}(\mathsf{h}\otimes\mathsf{h})$ cuya densidad es $\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)$, i. e., para cada $x \in \mathcal{B}(\mathsf{h}\otimes\mathsf{h})$*

$$\omega_\rho(\Phi_*)(x) = \mathsf{tr}\Big(\mathcal{E}_\rho(\Phi_*)x\Big).$$

Es de interés particular para la próxima sección considerar el par de estados (funcionales) dados por la definición anterior a un QMS $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ y su adjunto Θ-KMS $(\mathcal{T}_t^\Theta)_{t\geq 0}$ con respecto al estado invariante ρ,

$$\overrightarrow{\omega}_\rho(t)(x) = \mathsf{tr}\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t})x\Big), \text{ y } \overleftarrow{\omega}_\rho(t)(x) = \mathsf{tr}\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}^\Theta)x\Big), \tag{2.13}$$

a los cuales llamaremos estado hacia adelante y estado hacia atrás, respectivamente. Vale la pena enfatizar que estos están definidos en todo el espacio $\mathcal{B}(\mathsf{h}\otimes\mathsf{h})$.

2.3 Comparación con el trabajo de Fagnola y Rebolledo

En [17] y [18], Fagnola y Rebolledo dieron una definición de tasa de producción de entropía cuántica usando estados bipuntuales hacia adelante y hacia atrás motivados por las transiciones simples del caso clásico.

Definición 2.3.1 *Sea $\{e_i\}_i$ la base que diagonaliza a un estado invariante ρ de un QMS $\mathcal{T}$. El estado bipuntual hacia adelante de Fagnola y Rebolledo está definido en el producto tensorial (como álgebra de von Neumann) $\mathcal{B}(\mathsf{h}) \otimes \mathcal{B}(\mathsf{h})$ por*

$$\overrightarrow{\Omega}_t(a \otimes b) = \mathsf{tr}\Big(\rho^{\frac{1}{2}}\theta a^* \theta \rho^{\frac{1}{2}} \mathcal{T}_t(b)\Big), \qquad a, b \in \mathcal{B}(\mathsf{h});$$

mientras el estado bipuntual hacia atrás de Fagnola y Rebolledo es

$$\overleftarrow{\Omega}_t(a \otimes b) = \mathsf{tr}\Big(\rho^{\frac{1}{2}}\theta \mathcal{T}_t(a^*) \theta \rho^{\frac{1}{2}} b\Big), \qquad a, b, \in \mathcal{B}(\mathsf{h}),$$

donde θ es el operador antiunitario de conjugación con respecto a la base $\{e_i\}_i$.

Teorema 2.3.2 *(Fagnola-Rebolledo[17]) Las densidades de los estados bipuntuales hacia adelante $\overrightarrow{\Omega}_t$ y hacia atrás $\overleftarrow{\Omega}_t$ están dadas por $\overrightarrow{D}_t = (\mathbb{1} \otimes \mathcal{T}_{*t})(\omega_\rho)$ y $\overleftarrow{D}_t = (\mathcal{T}_{*t} \otimes \mathbb{1})(\omega_\rho)$ respectivamente, i. e.,*

$$\overrightarrow{\Omega}_t(a \otimes b) = \mathsf{tr}\big(\overrightarrow{D}_t a \otimes b\big),$$
$$\overleftarrow{\Omega}_t(a \otimes b) = \mathsf{tr}\big(\overleftarrow{D}_t a \otimes b\big).$$

Fagnola y Rebolledo observaron que el funcional $\Omega(a \otimes b) = \mathsf{tr}(\rho a b)$ no es un estado, ver [17], por tanto $\mathsf{tr}(\rho a \mathcal{T}_t(b)) = \mathsf{tr}(\rho \mathcal{T}_t'(a) b)$ no parece ser la forma adecuada para medir el balance detallado en este contexto. Es por ello que la entropía relativa se define en términos de estas dos densidades.

Recordemos que nuestros estados $\overrightarrow{\omega}_\rho(\mathcal{T}_{*t}), \overleftarrow{\omega}_\rho(\mathcal{T}_{*t})$ están definidos en $\mathcal{B}(\mathsf{h} \otimes \mathsf{h})$ mientras que $\overrightarrow{\Omega}_t$, $\overleftarrow{\Omega}_t$ sobre $\mathcal{B}(\mathsf{h}) \otimes \mathcal{B}(\mathsf{h})$. Como $\mathcal{B}(h) \otimes \mathcal{B}(h) \subset \mathcal{B}(h \otimes h)$, tiene sentido preguntarse sobre la relación entre las extensiónes de $\overrightarrow{\Omega}_t$, $\overleftarrow{\Omega}_t$ a $\mathcal{B}(\mathsf{h} \otimes \mathsf{h})$ y $\overrightarrow{\omega}_\rho(\mathcal{T}_{*t}), \overleftarrow{\omega}_\rho(\mathcal{T}_{*t})$. Ciertamente este es un punto delicado, cuando h no es de dimensión finita la contención anterior es propia; si F es el operador definido sobre tensores simples $Fu \otimes v = v \otimes u, \quad u, v, \in h$, entonces $F \in \mathcal{B}(h \otimes h)$ pero $F \notin \mathcal{B}(h) \otimes \mathcal{B}(h)$. Esto es, F no puede expresarse como $A \otimes B$ donde $A, B \in \mathcal{B}(h)$. Sin embargo, en virtud del siguiente lema, considerando la cerradura del conjunto respecto a alguna topología adecuada, se obtiene el total. Este es el significado de la identidad $\mathcal{B}(h) \otimes \mathcal{B}(h) = \mathcal{B}(h \otimes h)$ en dimensión infinita.

Lema 2.3.3 *Como álgebras de von Neumann, la cerradura de $\mathcal{B}(\mathsf{h}) \otimes \mathcal{B}(\mathsf{h})$ es $\mathcal{B}(\mathsf{h} \otimes \mathsf{h})$ respecto a cualquiera de las topologías débil, σ-débil, fuerte, σ-fuerte, fuerte*, σ-fuerte*.*

Demostración. Por el teorema del biconmutante de von Neumann 2.4.11 en [5] es suficiente mostrar la aseveración en solo una de las topologías mencionadas, elegimos la topología débil. Sea $X \in \mathcal{B}(\mathsf{h} \otimes \mathsf{h})$. Demostraremos que existe una sucesión en $\mathcal{B}(\mathsf{h}) \otimes \mathcal{B}(\mathsf{h})$ que converge debilmente a X. Consideremos $\{e_i \otimes e_j\}_{ij}$ una base ortonormal de $\mathsf{h} \otimes \mathsf{h}$. Para cada n definimos el operador truncado

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{i,j,i',j'}^{n} |e_{i'} \otimes e_{j'}\rangle\langle e_{i'} \otimes e_{j'}|X|e_i \otimes e_j\rangle\langle e_i \otimes e_j| \\ &= \sum_{i,j,i',j'}^{n} \langle e_{i'} \otimes e_{j'}, X e_i \otimes e_j\rangle |e_{i'}\rangle\langle e_i| \otimes |e_{j'}\rangle\langle e_j| \in \mathcal{B}(\mathsf{h}) \otimes \mathcal{B}(\mathsf{h}). \end{aligned}$$

Considerando tensores simples arbitrarios $u \otimes v, z \otimes w \in \mathsf{h} \otimes \mathsf{h}$,

$$\begin{aligned} \langle u \otimes v, X_n z \otimes w\rangle &= \sum_{i,j,i',j'}^{n} \Big\langle e_{i'} \otimes e_{j'}, X e_i \otimes e_j \Big\rangle \Big\langle u \otimes v, |e_{i'}\rangle\langle e_i|z \otimes |e_{j'}\rangle\langle e_j|w\Big\rangle \\ &= \Bigg\langle \sum_{i',j'}^{n} \langle e_{i'} \otimes e_{j'}, u \otimes v\rangle e_{i'} \otimes e_{j'}, X \sum_{i,j}^{n} \langle e_i \otimes e_j, z \otimes w\rangle e_i \otimes e_j \Bigg\rangle, \end{aligned}$$

de donde se sigue que $\langle u \otimes v, X_n z \otimes w\rangle \xrightarrow[n]{} \langle u \otimes v, X z \otimes w\rangle$.

Mientras que para tensores generales $s, t \in \mathsf{h} \otimes \mathsf{h}$, $s = \sum_{m'l'} s_{m',l'}\, e_{m'} \otimes e_{l'}$, $t = \sum_{m,l} t_{ml}\, e_m \otimes e_l$, donde $s_{m',l'}$ y t_{ml} son números complejos tales que

$$\sum_{m',l'} |s_{m',l'}|^2 < \infty, \qquad \sum_{m,l} |t_{ml}|^2 < \infty,$$

$$\begin{aligned} \langle s, X_n t\rangle &= \lim_{h',h \to \infty} \sum_{m',l',m,l}^{h',h} \overline{s}_{m'l'} t_{ml} \Big\langle e_{m'} \otimes e_{l'}, X_n e_m \otimes e_l \Big\rangle \\ &= \lim_{h',h \to \infty} \sum_{m',l',m,l}^{h',h} \overline{s}_{m'l'} t_{ml} \Bigg\langle \sum_{i',j'}^{n} \langle e_{i'} \otimes e_{j'}, e_{m'} \otimes e_{l'}\rangle e_{i'} \otimes e_{j'}, X \sum_{i,j}^{n} \langle e_i \otimes e_j, e_m \otimes e_l\rangle e_i \otimes e_j \Bigg\rangle \\ &= \sum_{i,j,i',j'}^{n} \Bigg\langle \langle e_{i'} \otimes e_{j'}, s\rangle e_{i'} \otimes e_{j'}, X \langle e_i \otimes e_j, t\rangle e_i \otimes e_j \Bigg\rangle \xrightarrow[n]{} \langle s, X t\rangle, \end{aligned}$$

pues X es continuo. $\square$

Para la sucesión construida en la demostración anterior, definiendo los vectores truncados

$$s_n = \sum_{m',l' \leq n} s_{m',l'}\, e_{m'} \otimes e_{l'}, \qquad t_n = \sum_{m,l \leq n} t_{m,l}\, e_m \otimes e_l,$$

observamos que para cada n, $\|s_n\| \leq \|s\|$, $\|t_n\| \leq \|t\|$ y $\langle s, X_n t\rangle = \langle s_n, X t_n\rangle$, entonces

$$|\langle s, X_n t\rangle| \leq \|X\|\, \|s_n\|\, \|t_n\| \leq \|X\|\, \|s\|\, \|t\|,$$

luego $\{X_n\}_n$ es uniformemente acotada.

Teorema 2.3.4 *Para cualquier par de operadores $a, b \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$ tenemos que*

$$\overrightarrow{\omega}_\rho(\Phi_*)(a \otimes b) = \mathsf{tr}\big(\rho^{\frac{1}{2}}\theta a^*\theta\rho^{\frac{1}{2}}\Phi(b)\big) \tag{2.14}$$

$$\overleftarrow{\omega}_\rho(\Phi_*)(a \otimes b) = \mathsf{tr}\big(\rho^{\frac{1}{2}}\theta a^*\theta\rho^{\frac{1}{2}}\Phi^\Theta(b)\big) \tag{2.15}$$

Demostración. (2.14) es inmediata ya que por definición $\overrightarrow{\omega}_\rho(\mathcal{T}_{*t}) = \overrightarrow{\Omega}_t$.
Sobre operadores de rango finito $\overleftarrow{\omega}_\rho$ satisface (2.15) pues

$$\begin{aligned}\overleftarrow{\omega}_\rho(\Phi_*)\big(|u'\rangle\langle u| \otimes |v'\rangle\langle v|\big) &= \mathsf{tr}\big(\mathcal{E}_\rho(\Phi_*^\Theta)|u' \otimes v'\rangle\langle u \otimes v|\big)\\ &= \langle u \otimes v, \mathcal{E}_\rho(\Phi_*^\Theta)u' \otimes v'\rangle\\ &= \Big\langle v, \Phi_*^\Theta\big(\rho^{\frac{1}{2}}\theta(|u'\rangle\langle u|)\theta\rho^{\frac{1}{2}}\big)v'\Big\rangle\\ &= \mathsf{tr}\Big(\rho^{\frac{1}{2}}\theta(|u'\rangle\langle u|)^*\theta\rho^{\frac{1}{2}}\Phi^\Theta\big(|v'\rangle\langle v|\big)\Big).\end{aligned}$$

Consideremos un operador de la forma $a \otimes b$ con $a, b, \in \mathcal{B}(\mathsf{h})$. Existe una sucesión $\{(a \otimes b)_n\}_n$ de operadores de rango finito débilmente convergente a $a \otimes b$. Aún más, como la sucesión es uniformemente acotada es a su vez convergente en la topología σ-débil. Es fácil verificar que $(a \otimes b)_n = a_n \otimes b_n$ para toda n. Como $\overleftarrow{\omega}_\rho(\Phi_*)$ es normal entonces es σ-débil continuo, así

$$\begin{aligned}\overleftarrow{\omega}_\rho(\Phi_*)\big(a \otimes b\big) &= \overleftarrow{\omega}_\rho(\Phi_*)\big(\sigma\text{-w}\lim_n a_n \otimes b_n\big) = \sigma\text{-w}\lim_n \overleftarrow{\omega}_\rho(\Phi_*)\big(a_n \otimes b_n\big)\\ &= \sigma\text{-w}\lim_n \mathsf{tr}\big(\rho^{\frac{1}{2}}\theta a_n^*\theta\rho^{\frac{1}{2}}\Phi^\Theta\big(b_n\big)\big).\end{aligned}$$

Las aplicaciones $a \mapsto \theta a^*\theta$ y $b \mapsto \Phi^\Theta(b)$ son σ-débil continuas, pues Φ^Θ es normal. Además, la aplicación $(a, b) \mapsto \mathsf{tr}\big(\rho^{\frac{1}{2}}a\rho^{\frac{1}{2}}b\big)$ es conjuntamente σ-débil continua, entonces la aplicación

$$(a, b) \mapsto \mathsf{tr}\big(\rho^{\frac{1}{2}}\theta a^*\theta\rho^{\frac{1}{2}}\Phi^\Theta\big(b\big)\big)$$

es σ-débil continua. Finalmente, como la sucesión $a_n\rho^{\frac{1}{2}}b_n$ converge σ-débilmente a $a\rho^{\frac{1}{2}}b$, queda demostrada (2.15) para $a \otimes b$ arbitrario.

□

Teorema 2.3.5 *Los estados $\overrightarrow{\omega}_\rho(\mathcal{T}_{*t}), \overleftarrow{\omega}_\rho(\mathcal{T}_{*t})$ coinciden con los estados $\overrightarrow{\Omega}_t, \overleftarrow{\Omega}_t$.*

Demostración. Solo resta verificar que $\overleftarrow{\omega}_\rho(\mathcal{T}_{*t}) = \overleftarrow{\Omega}_t$. Usando (2.15) obtenemos que

$$\begin{aligned}\overleftarrow{\omega}_\rho(\mathcal{T}_{*t})(a \otimes b) &= \mathsf{tr}\big(\rho^{\frac{1}{2}}\theta a^*\theta\rho^{\frac{1}{2}}\mathcal{T}_t^\Theta(b)\big) = \mathsf{tr}\big(\rho^{\frac{1}{2}}\theta a^*\theta\rho^{\frac{1}{2}}\theta\mathcal{T}_t'(\theta b\theta)\theta\big)\\ &= \mathsf{tr}\big(\theta\rho^{\frac{1}{2}}a^*\rho^{\frac{1}{2}}\mathcal{T}_t'(\theta b\theta)\theta\big) = \mathsf{tr}\big((\rho^{\frac{1}{2}}a^*\rho^{\frac{1}{2}}\mathcal{T}_t'(\theta b\theta))^*\big)\\ &= \mathsf{tr}\big(\mathcal{T}_t'(\theta b^*\theta)\rho^{\frac{1}{2}}a\rho^{\frac{1}{2}}\big) = \mathsf{tr}\big(\theta b^*\theta\rho^{\frac{1}{2}}\mathcal{T}_t(a)\rho^{\frac{1}{2}}\big)\\ &= \mathsf{tr}\big(\theta b^*\rho^{\frac{1}{2}}\theta\mathcal{T}_t(a)\rho^{\frac{1}{2}}\theta\theta\big) = \mathsf{tr}\big((b^*\rho^{\frac{1}{2}}\theta\mathcal{T}_t(a)\theta\rho^{\frac{1}{2}})^*\big)\\ &= \mathsf{tr}\big(\rho^{\frac{1}{2}}\theta\mathcal{T}_t(a^*)\theta\rho^{\frac{1}{2}}b\big)\\ &= \overleftarrow{\Omega}_t(a \otimes b).\end{aligned}$$

Lo cual demuestra el teorema. □

Fagnola y Rebolledo [18] demuestran en la proposición 5 el siguiente teorema para $\overrightarrow{D}_t$ y $\overleftarrow{D}_t$ que, en vista de la equivalencia entre estados dados por el teorema 2.3.5, lo podemos reescribir en términos de nuestro enfoque de la siguiente manera.

Teorema 2.3.6 *La QRE de un QMS $(\mathcal{T}_t)_{t\geq 0}$ con respecto a un estado invariante ρ es simétrica y está dada por la fórmula*

$$S\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}), \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}^\Theta_{*t})\Big) = \frac{1}{2}\mathsf{tr}\Big(\big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}) - \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}^\Theta_{*t})\big)\big(\log \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}) - \log \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}^\Theta_{*t})\big)\Big).$$

Esta fórmula muestra que la QRE es simétrica respecto al semigrupo de referencia y es congruente con el marco teórico del caso clásico pues la entropía relativa clásica H de una cadena de Markov goza también de esta simetría, [29].

Capítulo 3

Semigrupos cuánticos de Markov circulantes

Para ilustrar la teoría desarrollada en el capítulo anterior introduciremos un nuevo tipo de semigrupos cuánticos de Markov finito dimensionales llamados QMS circulantes. A pesar de que estos están íntimamente relacionados con ciertos procesos estocásticos clásicos son suficientemente complejos para admitir estados estacionarios fuera de equilibrio, manteniendo la suficiente simpleza para realizar cálculos explícitos. Presentamos también un breve estudio de sus estados invariantes así como el cálculo de su tasa de producción de entropía cuántica.

En este capítulo los ciclos y las matrices de pasaje son utilizados en el sentido de Qian *et al.* [29], ver también el apéndice D. Para evitar confusión y ayudar con la comprensión de las ideas trataremos a los semigrupos circulantes y circulantes por bloques de manera independiente en las siguientes secciones, sin embargo uno no debe olvidar que ambos son, en escencia, iguales.

3.1 QMS circulantes

Definición 3.1.1 *Sea c cualquier ciclo de longitud máxima en $\mathbb{Z}_p$ y J_c la matriz de pasaje asociada al ciclo. La aplicación lineal CP definida sobre $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ por*

$$\Phi_*(x) = \sum_{i=0}^{p-1} \alpha(p-i) J_c^i x J_c^{*i},$$

para algunos $\alpha(i) \geq 0$ se llama transformación CP circulante.

Consideramos una cadena de Markov a tiempo discreto en un grupo abeliano $\mathbb{Z}_p$ asociada a una distribución de probabilidad dada $\alpha : \mathbb{Z}_p \mapsto [0,1]$, $\sum_i \alpha(i) = 1$. Fijando $\alpha(0) = 0$, la matriz *bi-estocástica*

$$\Pi = \sum_i \alpha(i) J_p^i,$$

donde J_p es la matriz de permutación primaria, *i. e.*, la matriz de pasaje del ciclo ordenado $c_p = (0, 1, \ldots, p-1)$, puede ser considerada como la matriz de transición de probabilidad de la cadena de Markov encajada perteneciente a una cadena de Markov a tiempo continuo con matriz de intensidad de transición $Q = \Pi - \mathbb{1}$, donde $\mathbb{1}$ denota a la matriz identidad en $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Claramente Q es una matriz circulante, ver apéndice E. De acuerdo a la definición 3.1, la extension cuántica en representación pre-dual

$$\begin{aligned}\Phi_*(x) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}_p} \alpha(p-i) J_p^i x J_p^{*i}, \\ \mathcal{L}_*(x) &= \Phi_*(x) - x, \end{aligned} \tag{3.1}$$

de Π y Q respectivamente, donde $x \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ está formada por un operador CP circulante con ciclo asociado $c = (0, 1, \ldots, p-1)$. Le llamamos a $\mathcal{L}_*$ un generador GKSL circulante y QMS circulante al semigrupo generado por él.

Es claro de la definición que operadores CP circulantes asociados a diferentes ciclos de la misma longitud máxima coinciden mediante un reordenamiento de los escalares α. Los QMS circulantes, como veremos, poseen algunas propiedades de simetría que los hacen útiles e interesantes.

Consideremos un operador CP circulante Φ_* y sea c su ciclo asociado. Definimos los subespacios $B_l = \operatorname{span}\{|e_{c(k)}\rangle\langle e_{c(k+l)}| : k = 0, 1, \ldots, p-1\}$ para $l = 0, \ldots, p-1$. Estos subespacios son mutuamente ortogonales con respecto al producto interno Hilbert-Schmidt; aún más, $\{B_l\}_l$ forma una descomposición ortogonal de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Teorema 3.1.2 *Un operador CP circulante Φ_* satisface las siguientes propiedades:*

i) Cada subespacio B_l, $l = 0, 1, \ldots, p-1$, es invariante bajo la acción de Φ_*.

ii) Si c es el ciclo asociado a Φ_*, entonces, bajo el isomorfismo entre B_l y $\mathbb{C}^p$ definido por $|e_{c(k)}\rangle\langle e_{c(k+l)}| \mapsto e_{c(k)}$, se tiene que

$$\Phi_*(|e_{c(k)}\rangle\langle e_{c(k+l)}|) \mapsto e_{c(k)} Q,$$

donde $Q = circ(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{p-1})$ es una matriz circulante de tamaño $p \times p$.

Demostración.

i) Sea $x^{(l)} = \sum_{j=0}^{p-1} x_{j,j+l} |e_{c(j)}\rangle\langle e_{c(j+l)}| \in B_l$, entonces

$$\begin{aligned}\Phi_*(x^{(l)}) &= \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{p-1} \alpha(p-k) x_{j,j+l} |e_{c(j-k)}\rangle\langle e_{c(j+l-k)}| \\ &= \sum_{j=0}^{p-1}\left(\sum_{k=0}^{p-1} \alpha(p-k) x_{j+k,j+k+l}\right) |e_{c(j)}\rangle\langle e_{c(j+l)}| \in B_l.\end{aligned}$$

ii) Usando el isomorfismo inducido por c obtenemos

$$\Phi_*(|e_{c(j)}\rangle\langle e_{c(j+l)}|) = \sum_{k=0}^{p-1} \alpha(p-k)|e_{c(j-k)}\rangle\langle e_{c(j-k+l)}| \longmapsto$$

$$\sum_{k=0}^{p-1} \alpha(p-k)e_{c(j-k)} = e_{c(j)} \begin{pmatrix} \alpha(0) & \alpha(1) & \alpha(2) & \cdots & \alpha(p-1) \\ \alpha(p-1) & \alpha(0) & \alpha(1) & \cdots & \alpha(p-2) \\ \alpha(p-2) & \alpha(p-1) & \alpha(0) & \cdots & \alpha(p-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha(1) & \alpha(2) & \alpha(3) & \cdots & \alpha(0) \end{pmatrix}.$$

□

3.2 QMS circulantes por bloques

Definición 3.2.1 *Sean c_p y c_q dos ciclos de longitud máxima en $\mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Z}_q$, respectivamente, mientras que J_{c_p}, J_{c_q} son las matrices de pasaje asociadas a estos ciclos. El operador lineal CP definido sobre $\mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ por*

$$\Phi_*(x) = \sum_{i=0,j=0}^{p-1,q-1} \alpha(p-i,q-j)(J_{c_p}^i \otimes J_{c_q}^j)x(J_{c_p}^i \otimes J_{c_q}^j)^*,$$

para algunos $\alpha(i,j) \geq 0$ se llama transformación CP circulante por bloques.

De manera análoga a la sección anterior, consideramos una cadena de Markov a tiempo discreto sobre el grupo abeliano $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ asociada a una distribución de probabilidad $\alpha : \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q \mapsto [0,1]$, $\sum_{i,j} \alpha(i,j) = 1$. Fijando $\alpha(0,0) = 0$, la matriz *bi-estocástica*

$$\Pi = \sum_{i,j} \alpha(i,j)(J_p^i \otimes J_q^j),$$

donde J_p y J_q son las matrices de de permutación primaria, *i. e.*, las matrices de pasaje de los ciclos ordenados $c_p = (0,1,\ldots,p-1)$, $c_q = (0,1,\ldots,q-1)$, pueden ser considerada como la matriz de transición de probabilidad de la cadena de Markov encajada perteneciente a una cadena de Markov a tiempo continuo con matriz de intensidades de transición $Q = \Pi - \mathbb{1}$, donde $\mathbb{1}$ denota a la matriz identidad en $\mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$. Q es una matriz circulante por bloques con bloques circulantes, ver apéndice E. De acuerdo a la definición 3.2.1, la extensión cuántica en representación pre-dual

$$\begin{aligned} \Phi_*(x) &= \sum_{(i,j)\in\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q} \alpha(p-i,q-j)(J_p^i \otimes J_q^j)x(J_p^i \otimes J_q^j)^*, \\ \mathcal{L}_*(x) &= \Phi_*(x) - x, \end{aligned} \tag{3.2}$$

de Π y Q respectivamente, donde $x \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$, está formada por un operador CP circulante por bloques con ciclos asociados $c_p = (0,1,\ldots,p-1), c_q = (0,1,\ldots,q-1)$. Le

llamamos a $\mathcal{L}_*$ un generador GKSL circulante por bloques y QMS circulante por bloques al semigrupo generado por él.
Es claro de la definición que operadores CP circulantes por bloques asociados a diferentes ciclos de la misma longitud máxima coinciden mediante un reordenamiento de los escalares α.

Los QMS circulantes, como veremos, poseen algunas propiedades simétricas que los hacen útiles e interesantes. Para evitar confusión y ayudar con la comprensión de las ideas trataremos a los circulantes y circulantes por bloques de manera independiente en las siguientes secciones, sin embargo uno no debe olvidar que ambos son, en escencia, iguales, lo que se demuestra en la sección 3.3.

Las propiedades correspondientes de un operador CP circulante por bloques Φ_* con ciclos asociados c_p, c_q se muestran a continuación. Definimos los subespacios pq-dimensionales de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$ para todo $(k,l) \in \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_q$ como sigue

$$B_{kl} = \operatorname{span}\{|e_{c_p(i)}\rangle\langle e_{c_p(i+k)}| \otimes |e_{c_q(j)}\rangle\langle e_{c_q(j+l)}| : 0 \leq i \leq p-1,\ 0 \leq j \leq q-1\}.$$

Estos subespacios son mutuamente ortogonales con respecto al producto interno Hilbert-Schmidt, en efecto,

$$\mathsf{tr}\Big(|e_{c(i+k)} \otimes e_{c(j+l)}\rangle\langle e_{c(i)} \otimes e_{c(j)}||e_{c(i)} \otimes e_{c(j)}\rangle\langle e_{c(i+k')} \otimes e_{c(j+l')}|\Big) = \delta_{kk',ll'},$$

por tanto, $\bigoplus_{kl} B_{kl} = \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{M}_q(\mathbb{C})$.

Teorema 3.2.2 *Una transformación CP circulante por bloques Φ_* como el dado en la definición 3.1.1 satisface las siguientes propiedades:*

i) Cada subespacio B_{kl}, $(k,l) \in \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_q$, es invariante bajo la acción de Φ_*.

ii) Si c_p y c_q son los ciclos asociados a Φ_*, entonces, bajo el isomorfismo entre B_{kl} y $\mathbb{C}^p \otimes \mathbb{C}^q$ definido por $|e_{c_p(i)} \otimes e_{c_q(j)}\rangle\langle e_{c_p(i+k)} \otimes e_{c_q(j+l)}| \mapsto e_{c_p(i)} \otimes e_{c_q(j)}$, se tiene que

$$\Phi_*(|e_{c_p(i)}\rangle\langle e_{c_p(i+k)}| \otimes |e_{c_q(j)}\rangle\langle e_{c_q(j+l)}|) \mapsto (e_{c(i)} \otimes e_{c(j)})Q,$$

donde $Q = circ(Q_0, Q_1, \cdots, Q_{p-1})$ es la matriz de tamaño $pq \times pq$, circulante por bloques circulantes de la forma

$$Q_i = \begin{pmatrix} \alpha(i,0) & \alpha(i,1) & \alpha(i,2) & \cdots & \alpha(i,q-1) \\ \alpha(i,q-1) & \alpha(i,0) & \alpha(i,1) & \cdots & \alpha(i,q-2) \\ \alpha(i,q-2) & \alpha(i,q-1) & \alpha(i,0) & \cdots & \alpha(i,q-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha(i,1) & \alpha(i,2) & \alpha(i,3) & \cdots & \alpha(i,0) \end{pmatrix},\ 0 \leq i \leq p-1. \quad (3.3)$$

Demostración.

i) La invariancia de B_{kl} es consecuencia de *i*) del teorema 3.1.2.

ii) Usando el isomorfismo inducido por los ciclos c_p y c_q

$$\begin{aligned}
&\Phi_*(|e_{c_p(i)}\rangle\langle e_{c_p(i+k)}| \otimes |e_{c_q(j)}\rangle\langle e_{c_q(j+l)}|) \\
&= \sum_{i',j'} \alpha(p-i', q-j')\Big(J_{c_p}^{i'} \otimes J_{c_q}^{j}\Big)|e_{c_p(i)} \otimes e_{c_q(j)}\rangle\langle e_{c_p(i+k)} \otimes e_{c_q(j+l)}|\Big(J_{c_p}^{i'} \otimes J_{c_q}^{j'}\Big)^* \\
&= \sum_{i',j'} \alpha(p-i', q-j')|e_{c_p(i-i')} \otimes e_{c_q(j-j')}\rangle\langle e_{c_p(i-i'+k)} \otimes e_{c_q(j-j'+l)}| \mapsto \\
&\sum_{i',j'} \alpha(p-i', q-j')(e_{c_p(i-i')} \otimes e_{c_q(j-j')}) = (e_{c_p(i)} \otimes e_{c_q(j)})Q.
\end{aligned}$$

Esto demuestra el teorema.

□

Obsérvese que podemos elegir cualquier número finito n de ciclos de longitud máxima c_k en $\mathbb{Z}_{p_k}$, respectivamente, y repetir los cálculos en la misma forma que hemos hecho utilizando el grupo $\times_{k=0}^{n-1}\mathbb{Z}_{p_k}$. Aún más, si $\mathbb{Z}_p$ es de orden primo entonces cada potencia J_c^k de la matriz de pasaje J_c es, a su vez, matriz de pasaje de algún ciclo $c_k \neq c$ si $k \neq 0, 1$ (mod p).

3.3 Descomposición en ciclos

Teniendo en mente la descomposición en ciclos de Kalpazidou [21] de una cadena de Markov irreducible con medida invariante uniforme $\pi = \{\frac{1}{p}\}$ y generador circulante Q, tenemos que

$$\frac{1}{p}Q = \sum_{c\in\mathcal{C}_\infty} w_c J_c - \frac{1}{p}I,$$

donde w_c son los pesos asociados a cada ciclo c. Podemos considerar a las ecuaciones en (3.1) y (3.2) como una descomposición en ciclos cuántica del generador GKSL circulante $\mathcal{L}_*$ con pesos $(\alpha(i,j))_{(i,j)\in\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q}$. Esto motiva la siguiente definición.

Definición 3.3.1 *Dado un generador GKSL acotado cuyo Hamiltoniano tiene espectro discreto, llamamos descomposición en ciclos de la parte CP*

$$\Phi(x) = \sum_k L_k^* x L_k,$$

a una representación GKSL de Φ de la forma

$$\Phi(x) = \sum_l \alpha_l U_l^* x U_l,$$

donde para cada l, $\alpha_l > 0$ y U_l es una matriz de pasaje de algún ciclo.

Parthasarathy identifica a la parte CP de un generador GKSL con la cadena de Markov encajada cuántica, ver el ejemplo 30.5 pág. 260 en [26]. Claramente, cualquier descomposición en ciclos de la cadena encajada cuántica induce una descomposición en ciclos de $\mathcal{L}$. Hacemos la observación de que cualquier operador diagonal en la base $\{u_{mn}\}_{mn}$ que aparece en el teorema 3.4.1 abajo puede considerarse como un Hamiltoniano con espectro discreto asociado al generador GKSL circulante.

Recordemos que una matriz compleja A de tamaño $p \times p$ se dice **reducible** si existe una matriz de permutación P tal que

$$PAP^* = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

donde B y D son matrices cuadradas de cualquier tamaño. Una matriz se dice **irreducible** si no es reducible. Es bien sabido que toda matriz irreducible de permutacion A es similar, mediante una matriz de permutación, a la matriz de permutación primaria J_p, *i. e.*, existe una matriz de permutación P tal que $A = PJ_pP^{-1}$. Consultar el teorema 5.18 en el libro de Zhang [32].

Lema 3.3.2 *Para toda matriz irreducible de permutacion $J \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ existe un único ciclo c de longitud máxima tal que $J = J_c$ es la matriz de pasaje del ciclo c.*

Demostración. Siendo J una matriz de permutación irreducible, es similar mediante permutación a J_p, *i .e.*, existe una matriz de permutación P tal que $J = PJ_pP^{-1}$. Así, para cada elemento de la base canónica $\{e_i\}_i$ de $\mathbb{C}^p$ tenemos

$$JPe_i = PJ_pe_i = Pe_{i-1}.$$

Definamos el ciclo c por medio de la matriz de permutación P de manera que $e_{c(i)} = Pe_{i-1}$. Claramente c es único y $J = J_c$ pues $Je_{c(i)} = e_{c(i-1)}$. $\square$

Es inmediato que productos tensoriales de la forma $J_p^i \otimes J_q^j$ son matrices irreducibles de tamaño $pq \times pq$. Por el lema 3.3.2, son matrices de pasaje de ciclos en $\mathbb{Z}_{pq}$. Esto muestra la relación entre las definiciones de operadores circulantes y circulantes por bloques, así como de las extensiones que involucran cualquier número finito de ciclos ó productos tensoriales de orden mayor.

También motivada por la descomposición en ciclos de Kalpazidou para cadenas de Markov clásicas, una descomposición en ciclos distinta para semigrupos de Markov genéricos fue obtenida recientemente por Fagnola-Umanità [16]. Esta descomposición para la diferencia de los generadores GKSL hacia adelante y hacia atrás extiende aquella de Kalpazidou utilizando las corrientes clásicas $\mathcal{J}_{lm} = \pi_l q_{lm} - \pi_m q_{ml}$ y reemplazando las matrices de pasaje por operadores completamente positivos llamados operadores de pasaje ampliados. Resulta de esto que todos los ciclos involucrados en esta descomposición son de longitud tres. La descomposición de Kalpazidou involucra ciclos de cualquier longitud menor a la dimensión del espacio. Nos preguntamos si la aparición de ciclos de longitud solo tres es una propiedad intrínseca a la clase de QMS genéricos o es un efecto secundario del método usado por Fagnola-Umanità.

En contraste, nuestra descomposición en ciclos (3.1) para el generador GKSL de un QMS circulante involucra ciclos de cualquier longitud menor al orden del grupo abeliano de simetrías subyaciente. Aún más, en nuestra descomposición para la diferencia de los generadores GKSL hacia adelante y hacia atrás las corrientes (cuánticas), que en el caso de $\mathbb{Z}_p$ tienen la forma $\mathbb{J}_i := \alpha(i) - \alpha(p-i)$, colectan la contribución de más de una corriente clásica, ver (3.8). Ciertamente, si el operador CP (ó la cadena encajada cuántica) es $\Phi_*(x) = \sum_i \alpha(p-i) J_c^i x J_c^{i*}$, tenemos la fórmula

$$\begin{aligned}\mathbb{J}_i = \alpha(i) - \alpha(p-i) &= \sum_k \sum_{\tilde{c}\in\mathcal{C}_\infty} (w_{\tilde{c}} - w_{\tilde{c}^-}) J_{\tilde{c}}(c(k), c(k+l)) \\ &= \sum_k \mathcal{J}_{c(k),c(k+i)} = p\, \mathcal{J}_{c(0),c(i)},\end{aligned}$$

donde $\mathcal{C}_\infty$ es el conjunto de todos los ciclos en $\{0, \cdots p-1\}$ salvo permutaciones cíclicas, c es el ciclo de longitud máxima asociado con Φ_* y $w_{\tilde{c}}$ son los pesos clásicos en el sentido de Kalpazidou-Qian. Observamos que, debido a la propiedad circulante de Φ_*, todas las corrientes clásicas $\mathcal{J}_{c(k),c(k+i)}$, $0 \leq k \leq p-1$ coinciden.

3.4 Desviación del equilibrio de QMS circulantes

De ahora en adelante consideraremos un QMS circulante por bloques con los ciclos ordenados $c_p = (0, 1, \ldots, p-1)$ y $c_q = (0, 1, \ldots, q-1)$ en $\mathbb{Z}_p$ y $\mathbb{Z}_q$ respectivamente. Mediante un reordenamiento apropiado de los elementos de los grupos, cualquier otro par de ciclos de longitud máxima puede llevarse a la forma de c_p y c_q. Consideramos que trabajar con un QMS circulante por bloques ofrece una mayor recompensa al lector, pues le permitirá comprender de manera más precisa el comportamiento detrás de esta clase de semigrupo.

Por el teorema 3.2.2, cada subespacio B_{kl} es invariante bajo Φ_*, $\mathcal{L}_*$, y consecuentemente, también bajo la acción del semigrupo $\mathcal{T}_* = \left(\mathcal{T}_{*t}\right)_{t\geq 0}$ generado por $\mathcal{L}_*$. El estado $\rho = \frac{1}{pq}(\mathbb{1}\otimes\mathbb{1})$ es claramente invariante para $\mathcal{T}_*$,

$$\mathcal{L}_*(\rho) = \frac{1}{pq}\Big(\sum_{(i,j)\neq(0,0)} \alpha(p-i, q-j)\mathbb{1}\otimes\mathbb{1} - \mathbb{1}\otimes\mathbb{1}\Big) = 0,$$

pues $\sum_{(i,j)\neq(0,0)} \alpha(p-i, q-j) = 1$.

La representación directa tiene la forma

$$\mathcal{L}'(x) = \sum_{(i,j)\neq(0,0)} \alpha(i,j)(J_p^i \otimes J_q^j)^* x (J_p^i \otimes J_q^j) - x.$$

3.4.1 Entropía relativa cuántica y tasa de producción de entropía cuántica

Para esta familia de semigrupos es posible calcular además de la QRE la QEPR con respecto al estado invariante diagonal $\rho = \frac{1}{pq}\mathbb{1}$, otros estados invariantes se estudian en la sección 3.4.2. Vale la pena enfatizar que, dado que el estado invariante es la unidad normalizada, los estados asociados dados por $\mathcal{E}_\rho$ son precisamente los estados de Choi-Jamiołkowski. Recordemos que cada subespacio B_{kl} de $\mathcal{M}_p \otimes \mathcal{M}_q$ es invariante bajo la acción de los elementos de $\mathcal{T}_*$.

Teorema 3.4.1 *Siguiendo la notación para matrices circulantes, cuya referencia puede consultarse en el apéndice E, $\mathcal{T}_*$ satisface las siguientes propiedades:*

i) Para cualquier par $(i,j),(i',j') \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, usando el isomorfismo introducido del teorema 3.2.2, se tiene que

$$\mathcal{T}_{*t}(|e_i \otimes e_j\rangle\langle e_{i'} \otimes e_{j'}|) \mapsto (e_i \otimes e_j)e^{tQ} = \frac{1}{pq}\sum_{m,n} \Phi_{m-i,n-j}(t)(e_m \otimes e_n)$$

$$\mapsto \frac{1}{pq}\sum_{m,n} \Phi_{m,n}(t)|e_{m+i} \otimes e_{n+j}\rangle\langle e_{m+i'} \otimes e_{n+j'}|.$$

donde

$$\Phi_{m,n}(t) = \sum_{k,l} \omega_p^{mk}\omega_q^{nl}e^{t\lambda_{kl}}, \quad \lambda_{kl} = \sum_{i,j} \alpha(i,j)\overline{\omega}_p^{ik}\overline{\omega}_q^{jl}.$$

Recordemos que estamos en el caso cuando $\alpha(0,0) = -1$ y $\sum_{(i,j)\neq(0,0)} \alpha(i,j) = 1$. Aún más, las funciones $\Phi_{m,n}(t)$ son real valuadas, pues Q y, por lo tanto, e^{tQ} son matrices reales.

ii) La acción explícita del semigrupo está dada por

$$\mathcal{T}_t(x) = \frac{1}{pq}\sum_{m,n} \Phi_{m,n}(t)(J_p^m \otimes J_q^n)x(J_p^m \otimes J_q^n)^*.$$

iii) El estado $\mathcal{E}_\rho$ asociado a $\mathcal{T}_{*t}$ para el estado invariante $\rho = \frac{1}{pq}\mathbb{1}$ y la base canónica $\{e_i \otimes e_j\}_{i,j}$ de $\mathbb{C}^p \otimes \mathbb{C}^q$ es

$$\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}) = \frac{1}{pq}\sum_{m,n} \Phi_{m,n}(t)|u_{mn}\rangle\langle u_{mn}|,$$

donde $u_{mn} = \sum_{ij} \rho_{ij}^{\frac{1}{2}}(e_i \otimes e_j) \otimes (e_{m+i} \otimes e_{n+j}).$

Demostración. El inciso i) es consecuencia directa del teorema E.2.3 y el corolario E.2.4. El ii) se sigue de i) teniendo en cuenta que J_p, J_s son operadores de desplazamiento (shift) con respecto a las bases canónicas de $\mathbb{C}^p$ y $\mathbb{C}^q$ respectivamente. Por otra parte, un cálculo directo usando i) muestra que

$$\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}) = \sum_{i,j,r,s} \rho_{ij}^{\frac{1}{2}}\rho_{rs}^{\frac{1}{2}}\big(|e_i \otimes e_j\rangle\langle e_r \otimes e_s|\big) \otimes \mathcal{T}_{*t}\big(|e_i \otimes e_j\rangle\langle e_r \otimes e_s|\big)$$

$$= \sum_{m,n} \frac{\Phi_{m,n}(t)}{pq}\Big|\sum_{i,j} \rho_{ij}^{\frac{1}{2}}(e_i \otimes e_j) \otimes (e_{m+i} \otimes e_{n+j})\Big\rangle\Big\langle \sum_{r,s} \rho_{rs}^{\frac{1}{2}}(e_r \otimes e_s) \otimes (e_{m+r} \otimes e_{n+s})\Big|$$

$$= \frac{1}{pq}\sum_{m,n} \Phi_{m,n}(t)|u_{mn}\rangle\langle u_{mn}|,$$

demostrando *iii*). Esto termina la demostración. □

La representación explícita del semigrupo nos permite verificar de forma sencilla la preservación de paridad.

Lema 3.4.2 *Los semigrupos circulantes por bloques preservan paridad.*

Demostración. La operación de inversión del tiempo en este contexto es $\Theta(x) = (\theta_p \otimes \theta_q)x^*(\theta_p \otimes \theta_q)$, donde θ_s denota la conjugación con respecto a la base canónica de $\mathbb{C}^s$, $s = p, q$ y $x \in \mathbb{C}^p \otimes \mathbb{C}^q$. Por *ii)* del teorema 3.4.1 y el apéndice B.0.13,

$$(\theta_p \otimes \theta_q)\mathcal{T}_{*t}(x)^*(\theta_p \otimes \theta_q) = (\theta_p \otimes \theta_q)\sum_{m,n}\Phi_{m,n}(t)(J_p \otimes J_q)x^*(J_p \otimes J_q)^*(\theta_p \otimes \theta_q)$$
$$= \sum_{m,n}\Phi_{m,n}(t)(J_p \otimes J_q)(\theta_p \otimes \theta_q)x^*(\theta_p \otimes \theta_q)(J_p \otimes J_q)^*.$$

□

Así, por el corolario 2.2.12, podemos calcular la QRE usando el adjunto KMS con respecto a ρ, denotado con $\mathcal{T}'$. A continuación presentamos el análogo al teorema 3.4.1 para $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}'_{*t})$. Por la forma del adjunto KMS, no es de sorprender que los subespacios B_{kl} son también invariantes para el semigrupo $\mathcal{T}'_{*t}$.

Teorema 3.4.3 *Siguiendo la notación para matrices circulantes del apéndice E, el adjunto KMS $\mathcal{T}'_*$ satisface la siguientes propiedades:*

i) *Para todo $(i, j), (i', j') \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, usando el isomorfismo introducido en en el teorema 3.2.2, tenemos*

$$\mathcal{T}'_{*t}(|e_i \otimes e_j\rangle\langle e_{i'} \otimes e_{j'}|) \mapsto (e_i \otimes e_j)e^{tQ^*} = \frac{1}{pq}\sum_{m,n}\Phi'_{m-i,n-j}(t)(e_m \otimes e_n)$$
$$\mapsto \frac{1}{pq}\sum_{m,n}\Phi'_{m,n}(t)|e_{m+i} \otimes e_{n+j}\rangle\langle e_{m+i'} \otimes e_{n+j'}|,$$

donde Q^* es la transpuesta de Q y $\Phi'_{m,n} = \Phi_{p-m,q-n}$.

ii) *La acción explícita del semigrupo está dada por*

$$\mathcal{T}'_t(x) = \frac{1}{pq}\sum_{m,n}\Phi'_{m,n}(t)(J_p^m \otimes J_q^n)x(J_p^m \otimes J_q^n)^*,$$

donde $\Phi'_{m,n} = \Phi_{p-m,q-n}$.

iii) *El estado $\mathcal{E}_\rho$ asociado a $\mathcal{T}'_{*t}$ con estado invariante $\rho = \frac{1}{pq}\mathbb{1}$ y la base canónica $\{e_i \otimes e_j\}_{i,j}$ de $\mathbb{C}^p \otimes \mathbb{C}^q$ es*

$$\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}'_{*t}) = \frac{1}{pq}\sum_{m,n}\Phi_{p-m,q-n}(t)|u_{mn}\rangle\langle u_{mn}|,$$

Es posible en este momento dar una expresión de la QRE en términos de las funciones $\Phi_{m,n}(t)$,

$$S\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}), \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}'_{*t})\Big) = \sum_{m,n} \big(\Phi_{m,n}(t) - \Phi_{p-m,q-n}(t)\big) \log \frac{\Phi_{m,n}(t)}{\Phi_{p-m,q-n}(t)}.$$

Aprovechando la forma explícita de la QRE debida a las simetrías con las que cuentan los semigrupos circulantes podemos demostrar la existencia de la tasa de producción de entropía y obtener la implicación inversa faltante en el caso general del teorema 2.2.10 para los semigrupos circulantes.

Teorema 3.4.4 *Sea $\mathcal{L}_*$ un generador GKSL de un semigrupo circulante por bloques. La tasa de producción de entropía cuántica con respecto al estado invariante diagonal $\rho = \frac{1}{pq}\mathbb{1}$ existe y es*

$$e_p(\mathcal{T}_*, \rho) = \frac{1}{2} \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q} \big(\alpha(m,n) - \alpha(p-m, q-n)\big) \log \frac{\alpha(m,n)}{\alpha(p-m,q-n)}.$$

Demostración. Es necesario demostrar la existencia del siguiente límite

$$\begin{aligned} e_p(\mathcal{T}_*, \rho) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{S(\mathcal{T}_{*t}, \mathcal{T}'_{*t}) + S(\mathcal{T}'_{*t}, \mathcal{T}_{*t})}{t} \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\mathsf{tr}\Big(\big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}) - \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}'_{*t})\big)\big(\log \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}) - \log \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}'_{*t})\big)\Big). \end{aligned}$$

Para el primer factor dentro de la traza recordemos que $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t})$ y $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}'_{*t})$ son diagonales con respecto a la misma base $\{u_{mn}\}_{m,n}$, los teoremas 3.4.1 y 3.4.3. En esta base es inmediato que $\mathcal{E}_\rho(\mathbb{1}) = |u_{00}\rangle\langle u_{00}|$. Consideramos las diferencias $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}) - \mathcal{E}_\rho(\mathbb{1})$ y $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}'_{*t}) - \mathcal{E}_\rho(\mathbb{1})$.

Sea $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{L}_*) := \lim_{t\to 0^+} \dfrac{\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}) - \mathcal{E}_\rho(\mathbb{1})}{t}$ y denotemos por δ_{mn} la delta de Kronecker, $\delta_{mn} = 1$ si $m = n$ y cero en otro caso. Este límite existe pues

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\rho(\mathcal{L}_*) :&= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{pq} \sum_{m,n} \frac{\Phi_{m,n}(t) - \delta_{mn}}{t} |u_{mn}\rangle\langle u_{mn}| \\ &= \sum_{m,n\neq 0} \alpha(m,n)|u_{mn}\rangle\langle u_{mn}| - |u_{00}\rangle\langle u_{00}|, \end{aligned}$$

donde un cálculo sencillo muestra que para todo m y n

$$\begin{aligned} &\frac{1}{pq} \lim_{t\to 0^+} \frac{\Phi_{m,n}(t) - \delta_{mn}}{t} = \\ &\lim_{t\to 0^+} \left\langle e_0 \otimes e_0, \frac{e^{tQ} - I}{t} e_m \otimes e_n \right\rangle + \frac{\langle e_0 \otimes e_0, e_m \otimes e_n\rangle}{t} - \frac{\delta_{mn}}{t} \\ &= \langle e_0 \otimes e_0, Q(e_m \otimes e_n)\rangle = \alpha(m,n). \end{aligned} \tag{3.4}$$

El límite para $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{L}'_*)$ existe por un argumento similar.

Para el segundo factor, recordando que $\Phi_{0,0}(t) = \Phi_{p,q}(t)$,

$$\lim_{t\to 0^+} \log \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}) - \log \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}'_{*t}) = \lim_{t\to 0^+} \sum_{m,n} \Big(\log \Phi_{m,n}(t) - \log \Phi_{p-m,p-n}(t) \Big) |u_{mn}\rangle\langle u_{mn}|$$

$$= \lim_{t\to 0^+} \sum_{m,n\neq 0} \log \frac{\Phi_{m,n}(t)\frac{1}{t}}{\Phi_{p-m,q-n}(t)\frac{1}{t}} |u_{mn}\rangle\langle u_{mn}|$$

$$= \sum_{m,n\neq 0} \Big(\log \alpha(m,n) - \log \alpha(p-m,q-n) \Big) |u_{mn}\rangle\langle u_{mn}|.$$

Con ello,

$$e_p(\mathcal{T}_*,\rho) = \frac{1}{2}\sum_{m,n} \Big(\alpha(m,n) - \alpha(p-m,q-n) \Big)\, log \frac{\alpha(m,n)}{\alpha(p-m,q-n)}.$$

□

Por el teorema 2.2.10 sabemos que $\mathcal{T}$ satisface la condición de Θ-SQDB si y solo si $\Phi_{m,n}(t) = \Phi_{p-m,q-n}(t)$ para todo $(m,n) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, de la construcción de las funciones $\Phi_{m,n}(t)$ se puede deducir que esto último pasa si y solo si $\alpha(m,n) = \alpha(p-m,q-n)$. Es decir, en este caso la tasa de producción de entropía cuántica nos está dando directamente la condición de equilibrio Θ-SQDB sobre los parámetros del semigrupo circulante.

Teorema 3.4.5 *Sea $\mathcal{T}$ un QMS circulante y ρ un estado invariante. Son equivalentes:*

i) $\mathcal{T}$ *y* ρ *satisfacen la condición de* Θ*-SQDB.*

ii) $S\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}), \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}'_{*t})\Big) = 0$ *para toda* $t \geq 0$.

iii) $e_p(\mathcal{T}_*,\rho) = 0$

iv) $\alpha(m,n) = \alpha(p-m,q-n)$ *para todo* $(m,n) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$.

Esta es una versión no conmutativa del teorema 1.1.5 para semigrupos circulantes.

Definición 3.4.6 *Decimos que un semigrupo circulante es irreducible si la matriz circulante Q asociada es irreducible en el sentido de la Sección 3.3.*

La QEPR tiene como propósito generalizar a su contraparte clásica, por lo tanto es natural esperar alguna relación entre ellas. Mostraremos que la tasa de producción de entropía clásica para cadenas de Markov irreducibles resultantes de la restricción de QMS circulantes (con matrices Q irreducibles) a el álgebra conmutativa B_{00} coincide con la cuántica. Enfatizamos el hecho de que en esta parte la irreducibilidad de la matriz Q es de gran importancia, además de que esta condición impone ciertas restricciones en la distribución de probabilidad inicial $\{\alpha(i,j)\}_{i,j}$. Este ángulo de los semigrupos circulantes será estudiado en un trabajo posterior.

De acuerdo a Qian *et al.* [29], la tasa de producción de entropía clásica de una cadena de Markov irreducible con matriz de intensidad de transición $Q = (q_{ij})_{i,j\in S}$ y medida estacionaria $\pi = (\pi_i)_{i\in S}$ con espacio de estados finito S es

$$e_p = \frac{1}{2}\sum_{i,j\in S}(\pi_i q_{ij} - \pi_j q_{ji})\log\frac{\pi_i q_{ij}}{\pi_j q_{ji}}. \tag{3.5}$$

Por el teorema 3.2.2, la restricción de $\mathcal{L}_*$ a B_{00} se reduce a la acción de la matriz circulante por bloques $Q = circ(Q_0, Q_1, \ldots, Q_{p-1})$, con bloques circulantes de la forma (3.3) y $\alpha(0,0) = -1$. En términos de la distribución α, cada elemento de matriz de Q está dado por la fórmula $q_{ij} = \alpha\big((l-k)_p, (r_j - r_i)_q\big)$ en donde para cada par $0 \le i,j \le pq-1$ escribimos $i = qk + r_i$, $j = ql + r_j$, $0 \le k,l \le p-1$, $0 \le r_i, r_j \le q-1$, y para cada $-(s-1) \le x \le s-1$, $s = p,q$, definimos

$$(x)_s = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ s + x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Es fácil verificar que $(-x)_s = s - (x)_s$.

Corolario 3.4.7 *La tasa de producción de entropía cuántica de un QMS circulante coincide con la tasa de producción de entropía clásica de su cadena de Markov diagonal-restringida,*

$$e_p(\mathcal{T}_*, \rho) = e_p.$$

Demostración. Usando la foŕmula (3.5), reordenando la suma de acuerdo con el orden de los bloques y haciendo el cambio de varibles $m = (l-k)_p$, $n = (r_j - r_i)_q$, se obtiene

$$\begin{aligned} e_p =& \frac{1}{2}\frac{1}{pq}\sum_{k,l=0}^{p-1}\sum_{r_i,r_j=0}^{q-1}\Big(\alpha\big((l-k)_p,(r_j-r_i)_q\big) - \alpha\big((k-l)_p,(r_i-r_j)_q\big)\Big)\times \\ & \log\frac{\alpha\big((l-k)_p,(r_j-r_i)_q\big)}{\alpha\big((k-l)_p,(r_i-r_j)_q\big)} \\ =& \ \frac{1}{2}\sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q}\Big(\alpha(m,n) - \alpha(p-m,q-n)\Big)\log\frac{\alpha(m,n)}{\alpha(p-m,q-n)} \\ =& \ e_p(\mathcal{T}_*,\rho). \end{aligned}$$

Esto prueba el corolario. □

Por lo anterior podemos concluir que el único estado invariante que es diagonal de un semigrupo cuántico de Markov circulante (con matriz Q irreducible) satisface una condición de Θ-SQDB si y solo si la única medida estacionaria de la cadena de Markov con matriz de intensidad de transición Q, obtenida de la restricción del semigrupo a la álgebra conmutativa diagonal, es de balance detallado.

3.4.2 QEPR con respecto estados estacionarios no diagonales

La irreducibilidad tiene consecuencia directa sobre la forma del núcleo de $\mathcal{L}_*$. En general un semigrupo circulante satisface que

$$\text{si } C \text{ es matriz circulante } \Rightarrow C \in \ker(\mathcal{L}_*).$$

Si el semigrupo es irreducible se tiene la igualdad $\ker(\mathcal{L}_*) = \text{span}\,\{J_p^i \otimes J_q^j : i \in \mathbb{Z}_p, j \in \mathbb{Z}_q\}$. Como consecuencia, la siguiente proposición da información acerca de la naturaleza del conjunto de estados invariantes.

Proposición 3.4.8 *Todo estado invariante de $\mathcal{L}_*$ circulante e irreducible es de la forma*

$$\rho = \frac{1}{pq}\mathbb{1}_p \otimes \mathbb{1}_q + \sum_{ij} \rho_{ij} J_p^i \otimes J_q^j, \tag{3.6}$$

donde ρ_{ij} son números complejos adecuados de manera que ρ sea positivo.

Demostración. Descomponiendo a ρ en sus componentes mutuamente ortogonales en los subespacios B_{kl}, digamos $\rho = \sum_{kl} \hat{\rho}_{kl}$, es claro que $\mathcal{L}_*(\rho) = 0$ si y solo si $\mathcal{L}_*(\hat{\rho}_{kl}) = 0$ para cada $(k,l) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$. Como consecuencia del teorema 3.2.2, y usando el isomorfismo ahí definido, cada una de las condiciones sobre las componentes ortogonales dá lugar a un sistema lineal de ecuaciones $\hat{\rho}_{kl}Q = 0$, cuya matriz asociada es la misma matriz circulante Q para todos. Toda solución de estos sistemas es de la forma $\hat{\rho_{kl}} = \rho_{kl}(1, 1 \ldots, 1), \rho_{kl} \in \mathbb{C}$. De ahí se sigue (3.6). Aunque cualquier elección de constantes complejas ρ_{kl} dan una solución de $\mathcal{L}_*(\rho) = 0$, no todas ellas determinan un estado ρ. De hecho, $\rho_{00} = \frac{1}{pq}$ por la condicion de la traza $tr\rho = 1$ mientras que los $\rho_{kl}'s$ restantes están restringidos por la positividad de ρ. Por otro lado, si un estado ρ es de la forma (3.6) entonces es inmediato verificar que $\mathcal{L}_*(\rho) = \rho \left(\sum_{ij \neq 0} \alpha(p-i, q-j)\mathbb{1}_p \otimes \mathbb{1}_q - \mathbb{1}_p \otimes \mathbb{1}_q \right) = 0.$ □

La proposición anterior muestra que cualquier matriz circulante positiva ρ es un estado invariante para el QMS, así como lo opuesto. En otras palabras, una matriz circulante ρ es un estado invariante del QMS circulante si y solo si es positiva y tiene traza uno.

Por el lema E.2.2, cualquier estado invariante ρ es diagonalizado por la transformada de Fourier discreta, ciertamente,

$$\rho = \sum_{lk} \tilde{\rho}_{kl} |\tilde{e}_l \otimes \tilde{e_k}\rangle\langle \tilde{e}_l \otimes \tilde{e_k}|, \text{ donde } \tilde{\rho}_{lk} = \frac{1}{pq} + \sum_{ij} \rho_{ij} \overline{\omega}_p^{ik} \overline{\omega}_q^{jl} \text{ y } \tilde{e}_l = F_p^* e_l, \tilde{e}_k = F_q^* e_k.$$

En los siguientes cálculos se entiende que las sumas en la primera coordenada del producto tensorial van de 0 a $p-1$ y las de la segunda coordenada van de 0 a $q-1$. También usaremos la notación y los resultados del teorema 3.4.1.

Calcularemos el estado $\mathcal{E}$ asociado con $\mathcal{T}_*$ usando la base orthonormal $\{\tilde{e}_i \otimes \tilde{e}_j\}_{(i,j)\in\mathbb{Z}_p\times\mathbb{Z}_q}$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\tilde{\rho}}(\mathcal{T}_{*t}) =& \sum_{ii'jj'} |\tilde{e}_i \otimes \tilde{e}_{i'}\rangle\langle \tilde{e}_j \otimes \tilde{e}_{j'}| \otimes \mathcal{T}_{*t}(\rho^{\frac{1}{2}}|\tilde{e}_i \otimes \tilde{e}_{i'}\rangle\langle \tilde{e}_j \otimes \tilde{e}_{j'}|\rho^{\frac{1}{2}}) \\
=& \frac{1}{pq} \sum_{\substack{ii'jj' \\ nn'rr'}} \tilde{\rho}_{ii'}^{\frac{1}{2}} \tilde{\rho}_{jj'}^{\frac{1}{2}} \overline{\omega}_p^{ni} \overline{\omega}_q^{n'i'} \omega_p^{rj} \omega_q^{r'j'} |e_n \otimes e_{n'}\rangle\langle e_r \otimes e_{r'}| \otimes \mathcal{T}_{*t}(|\tilde{e}_i \otimes \tilde{e}_{i'}\rangle\langle \tilde{e}_j \otimes \tilde{e}_{j'}|) \\
=& \frac{1}{(pq)^2} \sum_{\substack{ii'jj' \\ nn'rr' \\ NN'RR'}} \tilde{\rho}_{ii'}^{\frac{1}{2}} \tilde{\rho}_{jj'}^{\frac{1}{2}} \overline{\omega}_p^{(n+N)i} \overline{\omega}_q^{(n'+N')i'} \omega_p^{(r+R)j} \omega_q^{(r'+R')j'} \times \\
& |e_n \otimes e_{n'}\rangle\langle e_r \otimes e_{r'}| \otimes \mathcal{T}_{*t}\left(|e_N \otimes e_{N'}\rangle\langle e_R \otimes e_{R'}|\right) \\
=& \frac{1}{pq} \sum_{\substack{nn'rr' \\ NN'RR' \\ MM'}} \Phi_{M,M'}(t)\beta(n,N,n',N')\times \\
& \beta(r,R,r',R')|e_n \otimes e_{n'}\rangle\langle e_r \otimes e_{r'}| \otimes |e_{N+M} \otimes e_{N'+M'}\rangle\langle e_{R+M} \otimes e_{R'+M'} \\
=& \frac{1}{pq} \sum_{mm'} \Phi_{m,m'}(t)|u_{mm'}\rangle\langle u_{mm'}|,
\end{aligned}
$$

donde $u_{mm'} = \frac{1}{\sqrt{pq}} \sum_{ll'LL'} \beta(l,L,l',L')(e_l \otimes e_{l'}) \otimes (e_{L+m} \otimes e_{L'+m'})$, y

$\beta(l,L,l',L') = \frac{1}{\sqrt{pq}} \sum_{ii'} \tilde{\rho}_{ii'}^{\frac{1}{2}} \overline{\omega}_p^{(l+L)i} \overline{\omega}_q^{(l'+L')i'}$.

De manera análoga al caso diagonal es inmediato verificar la preservación de paridad del semigrupo. Para cualquier estado invariante de la forma (3.6), el adjunto KMS tiene la misma forma (salvo constantes) que en el caso diagonal dada por el teorema 3.4.3.

$$
\mathcal{E}_{\tilde{\rho}}(\mathcal{T}'_{*t}) = \frac{1}{pq} \sum_{m,m'} \Phi_{p-m,q-m'}(t)|u_{mm'}\rangle\langle u_{mm'}|. \tag{3.7}
$$

Finalmente, la tasa de producción de entropía cuántica con respecto a cualquier estado invariante ρ de la forma (3.6) coincide con la dada por el teorema 3.4.4. Esto implica que los estados invariantes de un semigrupo cuántico de Markov circulante con matriz Q irreducible tienen el comportamiento: todos son de equilibrio (Θ-SQDB) ó ninguno lo es.

3.4.3 Balance detallado cuántico para QMS circulantes

Terminamos este capítulo con un breve estudio del balance detallado cuántico. Cálculos directos nos permiten ver que para cualquier estado invariante ρ el adjunto-ρ definido en la sección 1.1, $\tilde{\mathcal{L}}$, tiene la representación GKSL dada por

$$
\tilde{\mathcal{L}}(x) = \sum_{i,j} \tilde{L}_{ij}^* x \tilde{L}_{ij} - x,
$$

con $\tilde{L}_{ij} = L_{ij}^*$ y $L_{ij} = \alpha(p-i, q-j)^{\frac{1}{2}}(J_p^i \otimes J_q^j)$. Con ello $\tilde{L}_{ij} = \alpha(i,j)^{\frac{1}{2}}(J_p^i \otimes J_q^j)$. Es decir, $\tilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}'$. La diferencia entre $\mathcal{L}$ y $\tilde{\mathcal{L}}$ es

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}(x) - \mathcal{L}(x) &= \sum_{(i,j)\neq(0,0)} \big(\alpha(i,j) - \alpha(p-i, q-j)\big)(J_p^i \otimes J_q^j)^* x (J_p^i \otimes J_q^j) \\ &= \sum_{(i,j)\neq(0,0)} \big(q(i,j) - 1\big) L_{ij}^* x L_{ij}, \end{aligned} \tag{3.8}$$

con $q(i,j) = \alpha(i,j)\alpha(p-i,q-j)^{-1}$ y los L_{ij}'s arriba escritos. Por lo tanto, el semigrupo $\mathcal{T}_*$ satisface una condición de balance detallado pesado en el sentido de Accardi-Fagnola-Quezada [1], con pesos $q(i,j) = \alpha(i,j)\alpha(p-i,q-j)^{-1}$, ver la ecuación (3.8). Con ello, por el corolario 2 de [1], el balance detallado cuántico se satisface si y solo si

$$\alpha(p-i, q-j) = \alpha(i,j), \text{ para todo } (i,j) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q, i \neq 0, j \neq 0. \tag{3.9}$$

Las corrientes cuánticas $\mathbb{J}_{i,j} := \alpha(i,j) - \alpha(p-i,q-j)$, $(i,j) \neq (0,0)$ miden la desviación del balance detallado cuántico.

Resumimos los resultados pertinentes al equilibrio de semigrupos cuánticos circulantes en el siguiente teorema.

Teorema 3.4.9 *Sea $\mathcal{T}_*$ un QMS circulante con matriz Q irreducible y ρ un estado invariante. Son equivalentes:*

i) $\mathcal{T}_*$ *y* ρ *satisfacen la condición de* Θ*-SQDB.*

ii) *Todos los estados invariantes de* $\mathcal{T}_*$ *satisfacen la condición de* Θ*-SQDB.*

iii) $\mathcal{T}_*$ *y* ρ *satisface la condición de QDB.*

iv) *Todos los estados invariantes de* $\mathcal{T}_*$ *satisfacen la condición de QDB.*

v) $\alpha(m,n) = \alpha(p-m, q-n)$ *para todo* $(m,n) \in \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$.

vi) $S\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}), \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}^\Theta)\Big) = S\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}), \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}'_{*t})\Big) = 0$ *para toda* $t \geq 0$.

vii) *La QRE respecto a cualquier estado invariante es cero para todo* $t \geq 0$

viii) $e_p(\mathcal{T}_*, \rho) = 0$

ix) *La QEPR respecto a cualquier estado invariante es cero.*

Demostración. La equivalencia entre $iii)$ y $v)$ es consecuencia de la ecuación (3.9). La equivalencia entre $v)$ y $vi)$ es consecuencia de la construcción de las funciones $\Phi_{m,n}(t)$, ver apéndice E. La equivalencias entre $v)$ y cada una de $vii), viii), ix)$ se siguen del teorema 3.4.4. Por último, las equivalencias entre $v)$ y $i), ii), iv)$ restantes son consecuencias inmediatas de la independencia de la QEPR respecto a distintos estados invariantes. $\square$

Como una observación final, si se inicia con una distribución de probabiidad separable en el sentido $\alpha(i,j) = \alpha_p(i)\alpha_q(j)$, los teoremas 3.4.1, 3.4.3 muestran que los estados $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t})$, $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}'_{*t})$ son separables también. En efecto, $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}) = \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t})_p \otimes \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t})_q$, con

$$\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t})_s = \frac{1}{s}\sum_{m=0}^{s-1} \Phi_m^{(s)}(t)|u_m^{(s)}\rangle\langle u_m^{(s)}|,$$

donde $\Phi_m^{(s)}(t) = \sum_j \omega^{mj} e^{t\lambda_j^{(s)}}$, $\lambda_j^{(s)} = \sum_k \alpha_s(k)\overline{\omega}^{kj}$, y $u_m^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{s}}\sum_n |e_n\rangle\langle e_{n+m}|$, $s = p, q$.

Capítulo 4

Un semigrupo con QEPR cero, que no satisface el Θ-SQDB

Aquí presentamos una familia de QMS, introducidos en [18], que poseen estados invariantes que no satisfacen el Θ-SQDB a pesar de tener tasa de producción de entropía cuántica cero.

Sea $\{e_1, e_2\}$ la base canónica de $\mathbb{C}^2$. Consideramos el semigrupo sobre $\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$ con generador GKSL dado por

$$\mathcal{L}(x) = L_1^* x L_1 + L_2^* x L_2 + G^* x + xG, \quad \text{donde}$$
$$L_1 = |e_2\rangle\langle e_1|, \quad L_2 = |e_1\rangle\langle e_2|, \quad H = i\kappa(L_1 - L_2), \kappa \in \mathbb{R} - \{0\} \;\text{ y }\; G = -\frac{1}{2}\mathbb{1} - iH.$$

Veremos como se vé la teoría desarrollada en este capítulo en este caso particular. Para ello necesitamos calcular el semigrupo predual $\mathcal{T}_*$ y el semigrupo adjunto Θ-KMS en su representación predual $\mathcal{T}_*^\Theta$ respecto a un estado invariante ρ. Utilizamos la relación de predualidad para calcular el generador del semigrupo predual:

$$\mathcal{L}_*(x) = L_1 x L_1^* + L_2 x L_2^* + xG^* + Gx.$$

Un estado invariante fiel está dado por $\rho = \frac{1}{2}\mathbb{1}$, en efecto es fácil ver que $\mathcal{L}_*(\rho) = 0$.

Sea θ el operador antiunitario de conjugación respecto a la base canónica y Θ la operación de inversión de tiempo asociada a θ. Recordemos que $\mathcal{L}^\Theta = \Theta \circ \mathcal{L}' \circ \Theta$.

Usando la ciclicidad de la traza en cada término del generador $\mathcal{L}$ obtenemos que el adjunto KMS coincide con el predual, $\mathcal{L}'(x) = \mathcal{L}_*(x)$. La linealidad de Θ nos permite encontrar las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
\Theta(L_1\Theta(x)L_1^*) &= \theta(L_1(\theta x^*\theta)L_1^*)^*\theta = L_1 x L_1^* = L_2^* x L_2,\\
\Theta(L_2\Theta(x)L_2^*) &= \theta(L_2(\theta x^*\theta)L_2^*)^*\theta = L_2 x L_2^* = L_1^* x L_1,\\
\Theta(G\Theta(x)) &= \theta(G(\theta x^*\theta)^*\theta = x\theta G^*\theta = xG^*,\\
\Theta(\Theta(x)G^*) &= \theta((\theta x^*\theta)G^*)^*\theta = \theta G\theta x = Gx,
\end{aligned} \tag{4.1}$$

y apartir de ellas calcular el generador del semigrupo adjunto Θ-KMS, en su representación directa y predual respectivamente.

$$\mathcal{L}^{\Theta}(x) = L_1^* x L_1 + L_2^* x L_2 + Gx + xG^*,$$
$$\mathcal{L}_*^{\Theta}(x) = L_1 x L_1^* + L_2 x L_2^* + xG + G^* x.$$

Este semigrupo no satisface la condición de Θ-SQDB. Para ver esto es suficiente con verificar que el generador y su adjunto Θ-KMS no coinciden. Si esto fuera así tendriamos que $0 = \mathcal{L}^{\Theta}(x) - \mathcal{L}(x) = Gx + xG^* - G^*x - xG$ para todo x en $\mathcal{B}(\mathbb{C}^2)$, lo cual es cierto si y solo si $G = G^*$. El operador G no es autoadjunto, por lo tanto no hay Θ-SQDB.

Para calcular la entropía relativa es necesario conocer la representación explícita de los semigrupos $\mathcal{T}_*$ y $\mathcal{T}_*^{\Theta}$ en los proyectores $|e_i\rangle\langle e_j|$, $i, j = 1, 2$. Para simplificar los cálculos trabajaremos con el semigrupo obtenido con $\kappa = \frac{1}{4}$.

Consideremos la matriz de tamaño 4×4 que representa a $\mathcal{L}_*$, como un operador actuando por la izquierda sobre $\mathbb{C}^4$, respecto a la base obtenida mediante el isomorfismo de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ a $\mathbb{C}^4$ dado por $\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d)$,

$$\mathcal{L}_* \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix} = (a, b, c, d) \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & -1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -1 & 0 \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Denotaremos a esta matriz con $\mathcal{L}_*$. Diagonalizando esta matriz tenemos que

$$\mathcal{L}_* = V \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} V^{-1}$$

En donde las matrices de vectores propios son

$$V = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y mediante la exponencial de esta matriz calculamos la representación matricial del semigrupo $\{\mathcal{T}_{*t}\}_{t \geq 0}$,

$$
\begin{aligned}
e^{t\mathcal{L}_*} &= V \begin{pmatrix} e^{-\frac{3}{2}t} & te^{-\frac{3}{2}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\frac{3}{2}t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} V^{-1} \\
&= \frac{e^{-\frac{3}{2}t}}{4} \begin{pmatrix} 2+2e^{\frac{3}{2}t}-t & -2+2e^{\frac{3}{2}t}+t & t & t \\ -2+2e^{\frac{3}{2}t}+t & 2+2e^{\frac{3}{2}t}-t & -t & -t \\ -t & t & 2+2e^{\frac{t}{2}}+t & 2-2e^{\frac{t}{2}}+t \\ -t & t & 2-2e^{\frac{t}{2}}+t & 2+2e^{\frac{t}{2}}+t \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Hacemos actuar el semigrupo en cada proyector $|e_i\rangle\langle e_j|$ en $\mathbb{C}^4$ y posteriormente los regresamos al espacio original $\mathcal{B}(\mathcal{C}^2)$, esto con el fin de calcular el estado $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t})$ asociado al semigrupo en el producto tensorial.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{*t}\big(\rho^{\frac{1}{2}}|e_1\rangle\langle e_1|\rho^{\frac{1}{2}}\big) &= \frac{1}{2}(1,0,0,0)e^{t\mathcal{L}_*} = \frac{e^{-\frac{3}{2}t}}{8} \begin{pmatrix} 2+2e^{\frac{3}{2}t}-t \\ -2+2e^{\frac{3}{2}t}+t \\ t \\ t \end{pmatrix}^\top \\
&= \frac{e^{-\frac{3}{2}t}}{8} \begin{pmatrix} 2+2e^{\frac{3}{2}t}-t & t \\ t & -2+2e^{\frac{3}{2}t}+t \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{*t}\big(\rho^{\frac{1}{2}}|e_1\rangle\langle e_2|\rho^{\frac{1}{2}}\big) &= \frac{1}{2}(0,0,1,0)e^{t\mathcal{L}_*} = \frac{e^{-\frac{3}{2}t}}{8} \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 2+2e^{\frac{t}{2}}+t \\ 2-2e^{\frac{t}{2}}+t \end{pmatrix}^\top \\
&= \frac{e^{-\frac{3}{2}t}}{8} \begin{pmatrix} -t & 2+2e^{\frac{t}{2}}+t \\ 2-2e^{\frac{t}{2}}+t & t \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{*t}\big(\rho^{\frac{1}{2}}|e_2\rangle\langle e_1|\rho^{\frac{1}{2}}\big) &= \frac{1}{2}(0,0,0,1)e^{t\mathcal{L}_*} = \frac{e^{-\frac{3}{2}t}}{8} \begin{pmatrix} -t \\ t \\ 2-2e^{\frac{t}{2}}+t \\ 2+2e^{\frac{t}{2}}+t \end{pmatrix}^\top \\
&= \frac{e^{-\frac{3}{2}t}}{8} \begin{pmatrix} -t & 2-2e^{\frac{t}{2}}+t \\ 2+2e^{\frac{t}{2}}+t & t \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}_{*t}\big(\rho^{\frac{1}{2}}|e_2\rangle\langle e_2|\rho^{\frac{1}{2}}\big) &= \frac{1}{2}(0,1,0,0)e^{t\mathcal{L}_*} = \frac{e^{-\frac{3}{2}t}}{8} \begin{pmatrix} -2+2e^{\frac{3}{2}t}+t \\ 2+2e^{\frac{3}{2}t}-t \\ -t \\ -t \end{pmatrix}^\top \\
&= \frac{e^{-\frac{3}{2}t}}{8} \begin{pmatrix} -2+2e^{\frac{3}{2}t}+t & -t \\ -t & 2+2e^{\frac{3}{2}t}-t \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

El estado $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t})$ asociado a $\mathcal{T}_{*t}$ tiene la forma

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}) &= \sum_{i,j=1}^{2} \mathbb{1}\otimes\mathcal{T}_{*t}\big(\rho^{\frac{1}{2}}|e_i\rangle\langle e_j|\rho^{\frac{1}{2}}\big)\\ &= \frac{e^{-\frac{3}{2}t}}{8}\begin{pmatrix} 2+2e^{\frac{3}{2}t}-t & t & -t & 2+2e^{\frac{t}{2}}+t\\ t & -2+2e^{\frac{3}{2}t}+t & 2-2e^{\frac{t}{2}}+t & t\\ -t & 2-2e^{\frac{t}{2}}+t & -2+2e^{\frac{3}{2}t}+t & -t\\ 2+2e^{\frac{t}{2}}+t & t & -t & 2+2e^{\frac{3}{2}t}-t\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Vale la pena observar que, como consecuencia de la ciclicidad de la traza y la propiedad de invariancia bajo conjugaciones unitarias del logaritmo $\log(UAU^*) = U\log(A)U^*$, solo basta conocer los valores propios de $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t})$ para el cálculo del primer término $\mathsf{tr}\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t})\log\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t})\Big)$ de la entropía relativa.

Encontramos que

$$\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}) = S\begin{pmatrix}\lambda_1(t) & & & \\ & \lambda_2(t) & & \\ & & \lambda_3(t) & \\ & & & \lambda_4(t)\end{pmatrix}S^{-1}, \qquad \begin{aligned}\lambda_1(t) &= \frac{1}{4}\big(1-e^{-t}-te^{-\frac{3}{2}t}\big),\\ \lambda_2(t) &= \frac{1}{4}\big(1-e^{-t}+te^{-\frac{3}{2}t}\big),\\ \lambda_3(t) &= \frac{1}{4}\big(1+e^{-t}-e^{-\frac{3}{2}t}\sqrt{4+t^2}\big),\\ \lambda_4(t) &= \frac{1}{4}\big(1+e^{-t}+e^{-\frac{3}{2}t}\sqrt{4+t^2}\big).\end{aligned}$$

De esta forma el primer término de la QRE es:

$$\mathsf{tr}\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t})\log\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t})\Big) = \lambda_1(t)\log\lambda_1(t)+\lambda_2(t)\log\lambda_2(t)+\lambda_3(t)\log\lambda_3(t)+\lambda_4(t)\log\lambda_4(t).$$

Repetimos el procedimiento ahora con la matriz resultante de aplicar el isomorfismo a $\mathcal{L}_*^\Theta$.

$$\mathcal{L}_*^\Theta\begin{pmatrix} a & c\\ d & b\end{pmatrix} = (a,b,c,d)\begin{pmatrix} -1 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4}\\ 1 & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -1 & 0\\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

La diagonalización de $\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}^\Theta)$ es la siguiente:

$$\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}^\Theta) = S^\Theta\begin{pmatrix}\lambda_1(t) & & & \\ & \lambda_2(t) & & \\ & & \lambda_3(t) & \\ & & & \lambda_4(t)\end{pmatrix}S^{\Theta^{-1}}.$$

Las matrices de vectores propios tienen la forma

$$S^{\Theta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dfrac{2+\sqrt{4+t^2}}{t} & \dfrac{2-\sqrt{4+t^2}}{t} \\ 0 & 1 & -\dfrac{2+\sqrt{4+t^2}}{t} & -\dfrac{2-\sqrt{4+t^2}}{t} \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$S^{\Theta^{-1}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -\dfrac{2-\sqrt{4+t^2}}{2\sqrt{4+t^2}} & \dfrac{t}{2\sqrt{4+t^2}} & -\dfrac{t}{2\sqrt{4+t^2}} & -\dfrac{2-\sqrt{4+t^2}}{2\sqrt{4+t^2}} \\ \dfrac{2+\sqrt{4+t^2}}{2\sqrt{4+t^2}} & -\dfrac{t}{2\sqrt{4+t^2}} & \dfrac{t}{2\sqrt{4+t^2}} & \dfrac{2+\sqrt{4+t^2}}{2\sqrt{4+t^2}} \end{pmatrix}.$$

El segundo término de la QRE queda

$$\begin{aligned}
&\mathsf{tr}\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t})\log\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}^{\Theta})\Big) = \mathsf{tr}\left(S^{\Theta^{-1}}\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t})S^{\Theta}\log\begin{pmatrix}\lambda_1(t) & & & \\ & \lambda_2(t) & & \\ & & \lambda_3(t) & \\ & & & \lambda_4(t)\end{pmatrix}\right) \\
&= \lambda_1(t)\log\lambda_1(t) + \lambda_2(t)\log\lambda_2(t) \\
&+ \left[\lambda_4(t) - \frac{2e^{-\frac{3}{2}t}}{\sqrt{4+t^2}}\right]\log\lambda_3(t) + \left[\lambda_3(t) + \frac{2e^{-\frac{3}{2}t}}{\sqrt{4+t^2}}\right]\log\lambda_4(t).
\end{aligned}$$

Juntando todos los cálculos anteriores

$$\begin{aligned}
&S\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}), \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}^{\Theta})\Big) = \mathsf{tr}\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t})\log\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t})\Big) - \mathsf{tr}\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t})\log\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}^{\Theta})\Big) \\
&= \left[\frac{2e^{-\frac{3}{2}t}}{\sqrt{4+t^2}} + \lambda_3(t) - \lambda_4(t)\right]\log\lambda_3(t) + \left[\lambda_4(t) - \lambda_3(t) - \frac{2e^{-\frac{3}{2}t}}{\sqrt{4+t^2}}\right]\log\lambda_4(t) \\
&= -\frac{t^2e^{-\frac{3}{2}t}}{2\sqrt{4+t^2}}\log\frac{1}{4}\big(1+e^{-t} - e^{-\frac{3}{2}t}\sqrt{4+t^2}\big) + \frac{t^2e^{-\frac{3}{2}t}}{2\sqrt{4+t^2}}\log\frac{1}{4}\big(1+e^{-t} + e^{-\frac{3}{2}t}\sqrt{4+t^2}\big).
\end{aligned}$$

El segundo término de $\dfrac{S\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}), \mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}^{\Theta})\Big)}{t}$ trivialmente tiende a cero cuando $t \to 0^+$. En cuanto al primero, del factor $t\log\frac{1}{4}\big(1+e^{-t} - e^{-\frac{3}{2}t}\sqrt{4+t^2}\big)$ obtenemos una forma indeterminada al tomar el límite, utilizando la regla de L'Hôpital para evaluarla obtenemos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\log \frac{1}{4}\big(1+e^{-t}-e^{-\frac{3}{2}t}\sqrt{4+t^2}\big)}{t^{-1}} = \lim_{t\to 0^+} \left(-e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}t}\sqrt{4+t^2}-\frac{te^{-\frac{3}{2}t}}{\sqrt{4+t^2}}\right)\frac{\frac{1}{1+e^{-t}-e^{-\frac{3}{2}t}\sqrt{4+t^2}}}{-t^{-2}}.$$

El primer factor de este producto tiene límite finito mientras que el segundo presenta una forma indeterminada. Aplicando nuevamente L'Hôpital a dicho factor

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+e^{-t}-e^{-\frac{3}{2}t}\sqrt{4+t^2}}}{-t^{-2}} &= \lim_{t\to 0^+} \frac{-t^2}{1+e^{-t}-e^{-\frac{3}{2}t}\sqrt{4+t^2}} \\
&= \lim_{t\to 0^+} \frac{-2t}{-e^{-t}+\frac{3}{2}e^{-\frac{3}{2}t}\sqrt{4+t^2}-\frac{te^{-\frac{3}{2}t}}{\sqrt{4+t^2}}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto el estado ρ es un estado del semigrupo $\mathcal{T}$ que no es de Θ-SQDB pero tiene tasa de producción de entropía nula

$$e_p(\mathcal{T}_*,\rho) = \lim_{t\to 0^+} \frac{S\Big(\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}),\mathcal{E}_\rho(\mathcal{T}_{*t}^{\Theta})\Big)}{t} = 0.$$

Conclusiones y perspectivas

Dentro del esquema que proponemos para medir la entropía relativa cuántica como caracterización de alguna noción de equilibrio aparecen dos dificultades. La primera es que es necesario contar de antemano con algun adjunto apropiado a la noción de equilibrio. La segunda se presenta cuando los estados asociados al semigrupo y a su adjunto no son diagonales en la misma base, pues el cálculo de los operadores involucrados dentro de la traza pueden ser muy complicados. Sin embargo, consideramos que nuestra manera de asociar estados a operadores CP puede ser útil para estudiar propiedades de los operadores completamente positivos con soporte finito.

A pesar de haber obtenido el mismo par de estados (funcionales) que Fagnola y Rebolledo nuestro enfoque parte de principios distintos pues nosotros seguimos el modelo clásico de comparación la evolución directa y la evolución con el tiempo en reversa mediante la entropía relativa.

Por otro lado pensamos que los semigrupos cuánticos circulantes, definidos en el capítulo 3, son una buena opción para ilustrar nuevas ideas para QMS debido a que poseen estados estacionarios no diagonales y pueden manipularse de manera relativamente sencilla. El hecho de que sus operadores de Kraus tengan una clara conexión con ciclos clásicos (siguiendo a Qian *et al.*)puede dar más pistas acerca de qué debería ser una descomposición en ciclos cuántica más general.

Algunas sugerencias y pespectivas son:

1. En relación con la QEPR:

    1.1 Investigar la existencia en general de la tasa de producción de entropía cuántica y caracterizar el conjunto máximo de semigrupos que satisfacen una versión no conmutativa del teorema de las Qian *et al.*

    1.2 Atacar el caso en que los soportes de los estados no sean finito dimensionales usando una definición de la entropía de von Neumann adecuada.

    1.3 Hacer una compilación sistemática, organizada y rigurosa de la teoría de operadores antiunitarios y operadores de inversión del tiempo.

    1.4 Explorar más las propiedades de la aplicación $\mathcal{E}_\rho$ que asocia estados a operadores CP y ver que relación podría tener en otras areas afines.

2. En relación a los QMS circulantes:

    2.1 Extender los teoremas 3.4.4 y 3.4.9 usando un grupo general abeliano en vez de $\mathbb{Z}_p$, y posteriormente investigar el caso de grupos no abelianos.

2.2 Generalizar el concepto de QMS circulante a espacios de dimensión infinita.

2.3 Estudiar la irreducibilidad de QMS circulantes y cómo afecta de manera precisa al espacio de estados invariantes.

2.4 Investigar las propiedades espectrales de semigrupos cuánticos circulantes, el gap espectral cuántico, las constantes de log Sobolev y las desigualdades de la entropía. En esta dirección el autor de la tesis y Raffaella Carbone han demostrado que el gap espectral cuántico coincide con el valor propio más pequeño de la matriz circulante Q asociada al QMS circulante.

2.5 Recientemente tuvimos conocimiento de un artículo de Chruściński y Kossakowski [8] donde demuestran que los estados invariantes de los semigrupos circulantes con matriz irreducible son positivos bajo la transposición parcial, propiedad estrechamente relacionada con el llamado entrelazamiento (entanglement).

Apéndice A

Producto tensorial de espacios de Hilbert

A continuación presentamos solo las propiedades básicas, para una construcción detallada consultar [31].

Sean h_1 y h_2 dos espacios de Hilbert complejos con productos internos $\langle\cdot,\cdot\rangle_{h_1}$ y $\langle\cdot,\cdot\rangle_{h_2}$ respectivamente. Definimos para $\varphi \in h_1$ y $\psi \in h_2$ la forma sesquilineal $[\varphi\otimes\psi] : h_1 \times h_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ como

$$[\varphi \otimes \psi](x, y) = \langle x, \varphi\rangle\langle y, \psi\rangle, \text{ como } (x, y) \in h_1 \times h_2.$$

Sea $\mathbb{E}$ el conjunto de todas las combinaciones lineales finitas de formas sesquilineales de este tipo. Podemos definir sobre este espacio un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definidor por

$$\langle\varphi_1 \otimes \psi_1, \varphi_2 \otimes \psi_2\rangle = \langle\varphi_1, \varphi_2\rangle_{h_1}\langle\psi_1, \psi_2\rangle_{h_2}, \text{ donde } \varphi_1, \varphi_2 \in h_1, \text{ y } \psi_1, \psi_2 \in h_2.$$

Es facil ver que este es efectivamente un producto interno bien definido.

Definición A.0.10 *Se le llama producto tensorial $h_1 \otimes h_2$ a la completación de $\mathbb{E}$ bajo el producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$.*

Dadas dos bases ortonormales $\{\varphi_i\}_i$ y $\{\psi_j\}_j$ de h_1 y h_2 respectivamente, $\{\varphi_i \otimes \psi_j\}_{i,j}$ es una base para el producto tensorial $h_1 \otimes h_2$, por tanto un elemento general del producto tensorial es de la forma

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij}\varphi_i \otimes \psi_j, \text{ donde } \alpha_{ij} \in \mathbb{C}, \text{ y } \sum_{i,j} |\alpha_{ij}|^2 < \infty.$$

Los elementos donde solo aparece un término de la suma anterior se llaman tensores simples y satisfacen las siguientes propiedades operativas para un escalar $\alpha \in \mathbb{C}$:

1. $\alpha(\varphi \otimes \psi) = \alpha\varphi \otimes \psi = \varphi \otimes \alpha\psi$
2. $\varphi_1 \otimes \psi + \varphi_2 \otimes \psi = (\varphi_1 + \varphi_2) \otimes \psi$
3. $\varphi \otimes \psi_1 + \varphi \otimes \psi_2 = \varphi \otimes (\psi_1 + \psi_2)$

Si $A \in \mathcal{B}(h_1)$ y $B \in \mathcal{B}(h_2)$ entonces el operador acotado $A \otimes B : h_1 \otimes h_2 \longrightarrow h_1 \otimes h_2$ se define sobre los tensores simples por

$$(A \otimes B) u \otimes v = Au \otimes Bv.$$

En dimensión finita todo operador acotado es de la forma anterior y está dado por el producto de Kronecker,

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{00}B & \cdots & a_{0,p-1}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p-1,0}B & \cdots & a_{p-1,p-1}B \end{pmatrix}, \text{ si } A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C}) \text{ y } B \in \mathcal{M}_q(\mathbb{C}).$$

Si la dimensión de los espacios de Hilbert es finita entonces

$$\dim h_1 \otimes h_2 = \dim h_1 \times \dim h_2.$$

Cuando la dimensión de alguno de los espacios de Hilbert es infinita ver el lema 2.3.3.

Apéndice B

Operadores antiunitarios

Definición B.0.11 *Un operador antilineal biyectivo $\theta : \mathsf{h} \longrightarrow \mathsf{h}$ se dice antiunitario si*

$$\langle \theta u, \theta v \rangle = \langle v, u \rangle, \qquad \text{para todo } u, v \in \mathsf{h}.$$

Es inmediato de la definición que los operadores antiunitarios son operadores acotados. Aún más, son isometrías antilineales y por lo tanto mandan bases ortonormales en bases ortonormales.

Los operadores antiunitarios más usados en la física son aquellos que satisfacen que $\theta^2 = \mathbb{1}$.

Proposición B.0.12 *Un operador antiunitario θ posee las siguientes propiedades:*

i) *Su adjunto θ^* también es un operador antilineal y está definido por $\langle u, \theta v \rangle = \langle v, \theta^* u \rangle$. Si $\theta^2 = \mathbb{1}$, entonces $\theta = \theta^*$.*

ii) *$\theta\theta^* = \theta^*\theta = \mathbb{1}$.*

iii) *$\theta x \theta$ es un operador lineal que satisface $(\theta x \theta)^* = \theta^* x^* \theta^*$. Si $\theta^2 = \mathbb{1}$, entonces $(\theta x \theta)^* = \theta x^* \theta$.*

iv) *La composición de dos operadores antiunitarios es un operador unitario.*

v) *La composición de un operador unitario y un antiunitario es un operador antiunitario.*

vi) *Cada operador antiunitario θ es la composición de un operador unitario y una conjugación con respecto a una base ortonormal.*

Demostración.

i) Fijemos $u \in \mathsf{h}$ y consideremos la aplicación $v \mapsto \overline{\langle u, \theta v \rangle}$. Este es un funcional lineal y continuo sobre h. Por el teorema de Riesz existe un único u' tal que $\langle u', v \rangle = \overline{\langle u, \theta v \rangle}$. Definimos $\theta^* u := u'$. Ese es un operador antilineal continuo que satisface $\overline{\langle v, \theta^* u \rangle} = \overline{\langle u, \theta v \rangle}$. En efecto, para todo $u, v, z \in \mathsf{h}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}\overline{\langle z, \theta^*(\alpha u + \beta v) \rangle} &= \overline{\langle \alpha u + \beta v, \theta z \rangle} = \overline{\langle \alpha u, \theta z \rangle} + \overline{\langle \beta v, \theta z \rangle} \\ &= \alpha \overline{\langle z, \theta^* u \rangle} + \beta \overline{\langle z, \theta^* v \rangle} = \overline{\langle z, \overline{\alpha}\theta^* u + \overline{\beta}\theta^* v) \rangle}\end{aligned}$$

mientras que

$$\|\theta^* u\| = \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle v, \theta^* u\rangle| = \sup_{\|v\|\leq 1} |\langle u, \theta v\rangle| \leq \|\theta\|\|u\|.$$

Finalmente, si $\theta^2 = \mathbb{1}$, entonces $\langle u, \theta^* v\rangle = \langle v, \theta u\rangle = \langle \theta^2 u, \theta v\rangle = \langle u, \theta v\rangle$ para todo $u, v, \in \mathsf{h}$.

ii) De la definición de operador antiunitario y la relación con su adjunto tenemos que $\langle u, \theta v\rangle = \langle v, \theta^* u\rangle = \langle \theta\theta^* u, \theta v\rangle$. Recordando que θ es sobreyectivo se sigue que $\theta\theta^* = \mathbb{1}$. Mediante un argumento similar $\theta^*\theta = \theta\theta^* = \mathbb{1}$.

iii) Es claro que $\theta x\theta$ es un operador lineal y $\langle u, (\theta x\theta)^* v\rangle = \langle \theta x\theta u, v\rangle = \langle \theta^* v, x\theta u\rangle = \langle x^*\theta^* v, \theta u\rangle = \langle u, \theta^* x^* \theta^* v\rangle$, para todo $u, v, \in \mathsf{h}$.

iv) Si θ_1, θ_2 son operadores antiunitarios, se sigue directamente que la composición es un operador lineal. Aún más, $\langle \theta_1\theta_2 u, \theta_1\theta_2 v\rangle = \langle \theta_2 v, \theta_2 u\rangle = \langle u, v\rangle$.

v) Sea U un operador unitario. La composición $U\theta$ es obviamente antilineal. Ahora, para todo $u, v \in \mathsf{h}$, $\langle U\theta u, U\theta v\rangle = \langle \theta u, \theta v\rangle = \langle v, u\rangle$. La demostración para θU es completamente análoga.

vi) Consideramos una base ortonormal $\{e_i\}_i$. Sabemos que $\{\theta e_i\}_i$ es también una base ortonormal. Sea U el operador antiunitario que relaciona a estas dos bases, esto es, $U\theta e_i = e_i$ para toda i. Para cualquier $u \in \mathsf{h}$, sea $u = \sum_i u_i e_i$, $u_i \in \mathbb{C}$, su representación en la base $\{e_i\}_i$. Por la antilinealidad de θ, $U\theta u = \sum_i \overline{u_i} U\theta e_i = \sum_i \overline{u_i} e_i = Cu$, donde C es la conjugación con respecto de $\{e_i\}_i$. Concluímos que $\theta = U^* C$.

□

Debido a vi), al trabajar con un operador antiunitario θ y una base ortonormal $\{e_i\}_i$, salvo transformaciones unitarias, podemos identificar a θ con la conjugación con respecto de $\{e_i\}_i$, de modo que $\theta e_i = e_i$ y $\theta u = \sum_i \bar{u}_i e_i$ si $u = \sum_i u_i e_i$.

Se debe de ser cauteloso al operar con operadores antiunitarios, pues su comportamiento puede ser contraintuitivo debido a la antilinealidad, como hemos visto, por ejemplo, con el operador adjunto.

Lema B.0.13 *Sea θ el operador unitario de conjugación con respecto a la base ortonormal $\{e_i\}_i$. Las siguientes propiedades se satisfacen:*

i) $\theta|e_i\rangle\langle e_j|\theta = |\theta e_i\rangle\langle\theta e_j| = |e_i\rangle\langle e_j|$

ii) $\theta|e_i\rangle\langle e_j| = |e_i\rangle\langle e_j|\theta$

Demostración. Sea $u = \sum_k u_k e_k$ cualquier elemento en h y recordemos que $\theta e_i = e_i$. Entonces, para la primera igualdad,

$$\begin{aligned}\theta|e_i\rangle\langle e_j|\theta u &= \sum_k \theta|e_i\rangle\langle e_j|\overline{u}_k e_k = \sum_k \theta\overline{u}_k\langle e_j, e_k\rangle e_i \\ &= u_j e_i = \langle e_j, u\rangle e_i = |e_i\rangle\langle e_j|u = |\theta e_i\rangle\langle\theta e_j|u.\end{aligned}$$

Mientras que para la segunda,

$$\theta|e_i\rangle\langle e_j|u = \theta \sum_k u_k \langle e_j, e_k\rangle e_i = \overline{u}_j e_i = \langle u, e_j\rangle e_i = \langle \theta e_j, \theta u\rangle e_i = |e_i\rangle\langle e_j|\theta u.$$

□

Apéndice C

No negatividad de la entropía relativa cuántica

Para la demostración de este resultado es necesario extender algunas desigualdades clásicas al caso no conmutativo. Para un operador autoadjunto A, denotamos con $\sigma(A)$ a su espectro.

Teorema C.0.14 ***(Desigualdad de Jensen no conmutativa)*** *Sea A un operador compacto autoadjunto sobre un espacio de Hilbert separable h y ρ un estado. Si f es una función real, convexa, definida en un intervalo abierto que contiene a $\sigma(A)$ y a $\mathsf{tr}(\rho A)$, entonces*

$$f\Big(\mathsf{tr}(\rho A)\Big) \leq \mathsf{tr}\Big(\rho f(A)\Big).$$

Demostración. Fijemos $\phi \in h$ tal que $\|\phi\| = 1$. Sea $A = \sum_i a_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ la descomposición espectral de A, por tanto $\phi = \sum_i c_i \varphi_i$ para algunos $c_i \in \mathbb{C}$ que satisfacen $\sum_i |c_i|^2 = 1$. Como f es convexa, también es continua. Sea λ_n la suma parcial $\lambda_n = \sum_{i=1}^n |c_i|^2$. Entonces

$$\langle \phi, f(A)\phi \rangle = \Big\langle \phi, \lim_{n\to\infty} \sum_i^n f(a_i) |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|\phi \Big\rangle = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(a_i) \langle \phi, \varphi_i\rangle\langle\varphi_i, \phi\rangle,$$

de donde al usar la convexidad de f y $\lambda_n \to 1$ obtenemos

$$= \lim_{n\to\infty} \lambda_n \sum_{i=1}^n f(a_i) \frac{|c_i|^2}{\lambda_n} \geq \lim_{n\to\infty} \lambda_n f\Big(\sum_{i=1}^n a_i \frac{|c_i|^2}{\lambda_n}\Big) = f\Big(\langle \phi, A\phi\rangle\Big).$$

Finalmente usando la descomposición espectral de ρ y la convexidad f queda demostrado el teorema.

$\square$

Lema C.0.15 *Sea f una función real, convexa y diferenciable, entonces para todo $a, b \in \mathbb{R}$*

$$(a - b) f'(b) \leq f(a) - f(b).$$

Teorema C.0.16 ***(Klein)*** *Sea f una función real valuada, convexa y diferenciable. Si $A, B \in \mathcal{L}_1(h)$ son tales que $\sigma(A), \sigma(B) \subset Dom(f)$, entonces*

$$\mathsf{tr}\Big((A - B) f'(B)\Big) \leq \mathsf{tr}\Big(f(A) - f(B)\Big)$$

Demostración. Consideremos la descomposición espectral de $B = \sum_i b_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$. Para todo ψ_i

$$\begin{aligned}
\langle\psi_i, (A-B)f'(B)\psi_i\rangle &= f'(b_i)\Big[\langle\psi_i, A\psi_i\rangle - b_i\Big] \\
&\leq f(\langle\psi_i, A\psi_i\rangle) - f(b_i) \\
&\leq \langle\psi_i, f(A)\psi_i\rangle - f(b_i) \\
&= \langle\psi_i, f(A)\psi_i\rangle - \langle\psi_i, f(B)\psi_i\rangle.
\end{aligned}$$

En la primera desigualdad usamos el teorema anterior y en la segunda la desigualdad de Jensen. □

Cabe notar en el teorema anterior el caso cuando f es una función estrictamente convexa con segunda derivada y $\mathsf{tr}(A) \neq \mathsf{tr}(B)$. En esta situación existe un vector propio ψ_j de B tal que $\langle\psi_j, A\psi_j\rangle \neq \langle\psi, B\psi_j\rangle = b_j$. Bajo estas hipótesis sobre f se tiene que f' es estrictamente creciente, y utilizando el teorema del valor medio se tiene

$$f'(b_j)\Big[\langle\psi_j, A\psi_j\rangle - b_j\Big] < f\Big(\langle\psi_j, A\psi_j\rangle\Big) - f(b_j),$$

Utilizando la desigualdad de Jensen no conmutativa en el primer término

$$0 < f\Big(\langle\psi_j, A\psi_j\rangle\Big) - f(b_j) - f'(b_j)\Big[\langle\psi_j, A\psi_j\rangle - b_j\Big]$$

$$\leq \langle\psi_j, f(A)\psi_j\rangle - \langle\psi_j, f(B)\psi_j\rangle - \langle\psi_j, Af'(B)\psi_j\rangle + \langle\psi_j, Bf'(B)\psi_j\rangle,$$

De donde se sigue el teorema de Klein con desigualdad estricta

$$\mathsf{tr}\Big((A-B)f'(B)\Big) < \mathsf{tr}\Big(f(A) - f(B)\Big).$$

Definición C.0.17 *Dadas dos distribuciones de probabilidad discretas p, q sobre un conjunto X, la entropía relativa de Shannon se define como sigue*

$$H(p||q) = \sum_{x\in X} p(x)\log\frac{p(x)}{q(x)}.$$

Con la convención usual de que $0\cdot\log 0 = 0$ y $0\cdot\log\frac{x}{0} = \infty$.

A continuación presentamos la desigualdad de Jensen clásica (conmutativa) que puede encontrarse en muchos libros de probabilidad.

Lema C.0.18 ***(Desigualdad de Jensen para distribuciones de probabilidad)*** *Si f es una función convexa y Y una variable aleatoria, entonces*

$$f(\mathbb{E}Y) \leq \mathbb{E}f(Y).$$

Aún más, si f es estrictamente convexa entonces la igualdad implica que $Y = \mathbb{E}Y$ c.d.

Proposición C.0.19 ***(No negatividad de la entropía relativa de Shanon)***

$$H(p||q) \geq 0$$

en donde hay igualdad si y solo si $p(x) = q(x)\ \forall x$

Teorema C.0.20 ***(Desigualdad de Klein no conmutativa)*** *Sea* A, B *operadores positivos en* $\mathcal{L}_1(h)$ *tales que* $\mathsf{tr}\Big(A\log B\Big), \mathsf{tr}\Big(B\log B\Big), \mathsf{tr}\Big(A\log A\Big) < \infty$. *Entonces*

$$\mathsf{tr}\Big(A - B\Big) \leq \mathsf{tr}\Big(A\log A - A\log B\Big).$$

con igualdad si y solo si $A = B$

Demostración. La función $f(x) = x\log x$ es convexa y diferenciable en $(0, \infty)$, así por el teorema de Klein

$$\mathsf{tr}\Big(A\log B - B\log B\Big) + \mathsf{tr}\Big(A - B\Big) = \mathsf{tr}\Big((\log B + I)(A - B)\Big) \leq \mathsf{tr}\Big(A\log A - B\log B\Big)$$

Con lo que

$$\mathsf{tr}\Big(A - B\Big) \leq \mathsf{tr}\Big(A\log A - B\log B - A\log B + B\log B\Big) = \mathsf{tr}\Big(A\log A - A\log B\Big)$$

Hemos visto que si $\mathsf{tr}(A) \neq \mathsf{tr}(B)$ entonces en el teorema C.0.16 se tiene desigualdad estricta, imposibilitando así el resultado del teorema en cuestión. Resta solamente verificar el caso en que $\mathsf{tr}(A) = \mathsf{tr}(B)$. Sean las descomposiciones espectrales de cada operador $A = \sum a_i|u_i\rangle\langle u_i|$, $B = \sum b_j|v_j\rangle\langle v_j|$. Para cada i, j hacemos $c_{ij} = |\langle u_i, v_j\rangle|^2$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwartz tenemos que $c_{ij} \leq 1$ y fijando alguno de los índices $\sum_j c_{ij} = \sum_j \langle u_i|v_j\rangle\langle u_i|v_j\rangle = \langle u_i, u_i\rangle = 1$. Notando que $\langle u_i, A\log B u_i\rangle = \sum_j a_i \log b_j c_{ij}$, y nombrando $r_i = \sum_j c_{ij} b_j$ calculamos

$$\begin{aligned} 0 = \mathsf{tr}(A - B) = \mathsf{tr}(A\log A - A\log B) &= \sum_i a_i\Big(\log a_i - \sum_j c_{ij}\log b_j\Big) \\ &\geq \sum_i a_i\Big(\log a_i - \log(\sum_j c_{ij} b_j)\Big) = H(a_i||r_i). \end{aligned} \tag{C.1}$$

Por la proposición C.0.19, $a_i = r_i$ para todo i, y de la convexidad extricta de $-\log\cdot$ se tiene

$$0 \geq \sum_i a_i\Big(\log a_i - \sum_j c_{ij}\log b_j\Big) = \sum_i r_i\Big(\log r_i - \sum_j c_{ij}\log b_j\Big) \geq 0.$$

Se sigue que para cada i $\log r_i = \sum_j c_{ij}\log b_j$. Eso es el caso de igualdad en la desigualdad de Jensen conmutativa, entonces $\log b_j$ es constante para cada i. Es decir, para cada i hay un único l tal que $\log r_i = \log b_l \sum_j c_{ij} = \log b_l$, por lo que $a_i = b_l$. A y B tienen el mismo espectro y para cada i hay un j tal que $\langle u_i, v_{j'}\rangle = 0$ cuando $j' \neq j$. Así $u_i =$

$\sum_{j'} \langle v_{j'}, u_i \rangle v_{j'} = \langle v_j, u_j \rangle v_j$. Utilizando estas relaciones es fácil ver que $Au_i = a_i u_i$ y $Bv_j = b_j v_j = a_i v_j$. Finalmente A y B conmutan, pues $BAu_i = a_i Bu_i = a_i^2 v_j$ mientras que $ABu_i = A\langle v_j, u_i \rangle Bv_j = a_i^2 u_i$, además tienen el mismo espectro y vectores propios, por lo tanto $A = B$.
□

Demostración del teorema 2.2.7. Usando la desigualdad de Klein se obtiene que para cada par de estados η y ρ,

$$0 = \mathsf{tr}\Big(\eta - \rho\Big) \leq \mathsf{tr}\Big(\eta \log \eta - \eta \log \rho\Big) = S(\eta, \rho).$$

Con igualdad si y solo si $\eta = \rho$.

Apéndice D

Ciclos y matrices de pasaje

Sea S un conjunto numerable y c una función periódica de $\mathbb{Z}$ a el conjunto S. Siguiendo la notación de Qian *et al.*[29], llamamos a los valores $c(n)$ de c vértices (ó nodos) de c, mientras que las parejas $(c(n), c(n+1))$ se llaman aristas (arcos ó arcos dirigidos) de c. El periodo de c es el entero más pequeño p tal que $c(n+p) = c(n)$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Dos funciones periódicas c y c' son equivalentes si una es una translación de la otra, i.e., existe un $i \in \mathbb{Z}$ tal que $c'(n) = c(n+i)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Esta relación resulta ser una relación de equivalencia y es claro que dos funciones periódicas poseen los mismo vértices y el mismo periodo. Un **circuito dirigido** es una clase de equivalencia de la relación definida anterioremente. Cualquier circuito dirigido está determinado ya sea por su periodo p y cualquier $(p+1)$-tupla $(i_0, i_1, \cdots, i_p)$ con $i_p = i_0$; ó por su perdiodo p y p parejas ordenadas $(i_0, i_1), (i_1, i_2), \cdots, (i_{p-1}, i_p)$ con $i_p = i_0$, donde $i_l = c(n+l-1),\ 0 \leq i_l \leq p-1$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Definición D.0.21 *El ciclo (ó ciclo dirigido) asociado a un circuito dirigido* $\hat{c} = (i_0, i_1, \cdots, i_{p-1}, i_1),\ p \geq 1$, *con vértices diferentes* $i_0, i_1, \cdots i_{p-1}$, *es la sucesión ordenada* $c = (i_0, i_1, \cdots i_{p-1})$.

Todo ciclo es invariante bajo permutaciones cíclicas de sus vértices. Para todo circuito dirigido $\hat{c} = (i_0, i_1, \ldots, i_{p-1}, i_0)$, el circuito en **reversa** $\hat{c}_-$ se define como $\hat{c}_- = (i_0, i_{p-1}, \ldots, i_1, i_0)$.

Si todos los puntos del ciclo c son distintos excepto por los extremos, definimos

$$J_c(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j) \text{ es una arista de } c; \\ 0 & \text{otro.} \end{cases}$$

Por lo que cada ciclo c tiene asociada una única matriz $J_c = (J_c(i,j))$ llamada **matriz de pasaje** de c.

Ejemplo. Si $c_0 = (0123)$ y $c_p = (0312)$, entonces

$$J_{c_0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad J_{c_p} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de pasaje J_{c_0} del ciclo de longitud máxima $c_0 = (0, 1, 2, \ldots, p-1)$ es usualmente llamada la *matriz de permutación primaria*. Denotaremos a esta matriz por J_p. Notemos que para cualquier ciclo dado $c = (c(0), c(1), \cdots, c(p-1))$, su matriz de pasaje puede escribirse en términos de la base canónica $\{|e_i\rangle\langle e_j| : 0 \leq i, j \leq p-1\}$ del espacio de matrices complejo $p \times p$ dimensional como

$$J_c = \sum_{i=0}^{p-1} |e_{c(i)}\rangle\langle e_{c(i+1)}|,$$

donde $\{e_j\}_{0 \leq j \leq p-1}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^p$.

Vale la pena observar que J_c mueve a la base canónica de $\mathbb{C}^p$ de acuerdo al ciclo c, i.e., $J_c e_{c(i)} = e_{c(i-1)}$ para toda i. De modo que la matriz de permutación primaria J_p es, de hecho, el operador de translación ó desplazamiento hacia la izquierda con respecto a la base canónica de $\mathbb{C}^p$.

Apéndice E

Matrices circulantes

Definición E.0.22 *Una matriz $Q = (q_{ij})$ de tamaño $p \times p$ se llama circulante si $q_{ij} = q_{j-i}$, donde la operación en el subíndice es módulo p, para $i, j = 0, 1, \ldots, p-1$, $q_i \in \mathbb{C}$,*

$$Q = \begin{pmatrix} q_0 & q_1 & \cdots & q_{p-1} \\ q_{p-1} & q_0 & \cdots & q_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_0 \end{pmatrix}.$$

Es claro de la definición que una matriz circulante de tamaño $p \times p$ está completamente determinada por una p-tupla $(q_0, q_1, \ldots, q_{p-1})$. Otra notación usual para las matrices circulantes es $Q = circ(q_0, q_1, \ldots, q_{p-1})$.

E.1 Cadenas de Markov sobre grupos finitos

Sea $(G, \circ)$ un grupo finito. Sea $p = |G|$ y denotamos con hg al producto $h \circ g$, $h, g \in G$. Dada una distribución de probabilidad μ sobre G, las probabilidades de transición

$$p(g, hg) = \mu(\{h\}),$$

definen una cadena de Markov discreta sobre en G.

Ejemplo 1. Considérese el grupo cíclico $\mathbb{Z}_p = \{0, 1, \cdots, p-1\}$ y cualquier distribución de probabilidad $\alpha = \{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{p-1}\}$ sobre $\mathbb{Z}_p$. La matriz de probabilidades de transición es la matriz circulante

$$A = \mathrm{circ}(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{p-1}) = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_{p-1} \\ \alpha_{p-1} & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_{p-2} \\ \alpha_{p-2} & \alpha_{p-1} & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{p-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_0 \end{pmatrix}.$$

Observamos que A es una combinación lineal convexa de potencias de la matriz de permutación primaria $J_p = \sum_{j=0}^{p-1} |e_j\rangle\langle e_{j+1}|$ definida en el apéndice D;

$$A = \sum_{j=0}^{p-1} \alpha_j J_p^j. \tag{E.1}$$

Ejemplo 2. Sea G el grupo abeliano $G = \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ en donde el símbolo $\times$ denota el producto directo, con $p,\ q \geq 2$. Fijamos el orden lexicográfico en $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ y tomamos cualquier distribución de probabilidad sobre G, $\alpha = \{\alpha(0,0), \cdots, \alpha(0,q-1), \alpha(1,0), \cdots, \alpha(1,q-1), \cdots, \alpha(p-1,0), \cdots, \alpha(p-1,q-1)\}$. Es fácil calcular la matriz de probabilidades de transición de la cadena de Markov correspondiente que es la matriz circulante por bloques

$$R = \mathrm{circ}(R_0, R_1, \cdots, R_{p-1}),$$

con bloques circulantes

$$R_i = \begin{pmatrix} \alpha(i,0) & \alpha(i,1) & \alpha(i,2) & \cdots & \alpha(i,q-1) \\ \alpha(i,q-1) & \alpha(i,0) & \alpha(i,1) & \cdots & \alpha(i,q-2) \\ \alpha(i,q-2) & \alpha(i,q-1) & \alpha(i,0) & \cdots & \alpha(i,q-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha(i,1) & \alpha(i,2) & \alpha(i,3) & \cdots & \alpha(i,0) \end{pmatrix}, i = 0, 1, \cdots, p-1.$$

La matriz anterior R es una combinación lineal convexa de productos tensoriales de las matrices de permutación primaria $J_p = \sum_{i=0}^{p-1} |e_i\rangle\langle e_{i+1}|$ y $J_q = \sum_{j=0}^{q-1} |e_j\rangle\langle e_{j+1}|$;

$$R = \sum_{0\leq i\leq p-1,\, 0\leq j\leq q-1} \alpha(i,j) J_p^i \otimes J_q^j. \tag{E.2}$$

Observación E.1.1 *Por el teorema de Birkhoff, cada matriz bi-estocástica es una combinación lineal convexa de matrices de permutación. Observemos que (E.1) y (E.2) son representaciónes de Birkhoff de matrices bi-estocásticas y circulantes por bloques respectivamente.*

E.2 Diagonalización de matrices circulantes

La transformada de Fourier discreta (DFT por sus siglas en inglés) ó también llamada transformada de Fourier cuántica sobre $\mathbb{C}^p$ es el operador unitario definido por medio de

$$F_p = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{0\leq j,k\leq p-1} w_p^{kj} |e_k\rangle\langle e_j|,$$

en donde w_p es una raiz p-ésima primitiva de la unidad y $\{e_j\}_{0\leq j\leq p-1}$ es la base canónica de $\mathbb{C}^p$. Antes de ver la demostración de la diagonalización de matrices circulantes por la DFT es necesaria la siguiente relación de ortogonalidad entre las p-ésimas raíces de la unidad.

Proposición E.2.1 *Para cada par* $i, k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$

$$\sum_{l=0}^{p-1} w_p^{(k-i)l} = p\delta_{ik}$$

Demostración. Fijemos $i, k \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Cualquier raiz p-ésima de la unidad w_p satisface

$$w_p^k \overline{\omega}_p^i \frac{1}{p} \sum_l w_p^{lk} \overline{\omega}_p^{il} = \frac{1}{p} \sum_l w_p^{(l+1)k} \overline{\omega}_p^{(l+1)i} = \frac{1}{p} \sum_l w_p^{lk} \overline{\omega}_p^{il},$$

por lo tanto $(w_p^{(k-i)} - 1)\frac{1}{p}\sum_l w_p^{(k-i)l} = 0$. Como $w_p^{(k-i)} - 1 = 1 - \delta_{ik}$ el resultado queda demostrado. $\square$

Lema E.2.2 *Sea* $Z_p = diag(1, \overline{\omega}_p, \overline{\omega}_p^2, \cdots, \overline{\omega}_p^{p-1})$, *entonces*

i) $F_p J_p F_p^* = Z_p$,

ii) $(F_p \otimes F_q)(J_p \otimes J_q)(F_p \otimes F_q)^* = Z_p \otimes Z_q$.

Demostración. Cálculos directos muestran que

$$F_p J_p = \frac{1}{\sqrt{p}} \sum_{k,l} w_p^{kl} |e_k\rangle\langle e_{l+1}|,$$

$$\begin{aligned} F_p J_p F_p^* &= \frac{1}{p}\Big(\sum_{k,l} w_p^{kl}|e_k\rangle\langle e_{l+1}|\Big)\Big(\sum_{i,j} \overline{\omega}_p^{ij}|e_j\rangle\langle e_i|\Big) = \frac{1}{p}\sum_{i,k,l} w_p^{kl-(l+1)i}|e_k\rangle\langle e_i| \\ &= \frac{1}{p}\sum_{i,k}\Big(\sum_l w_p^{(k-i)l}\Big) w_p^{-i}|e_k\rangle\langle e_i| = \sum_k \overline{\omega}_p^k |e_k\rangle\langle e_k| = Z_p. \end{aligned}$$

Esto demuestra i). El inciso ii) se sigue directamente de i). $\square$

Como toda matriz circulante puede expresarse en términos de la matriz de permutación primaria J_p, la DFT diagonaliza toda matriz circulante así como las matrices circulantes por bloques con bloques circulantes.

Teorema E.2.3 *Si* $A = \sum_i \alpha(i) J_p^i$ *y* $B = \sum_{i,j} \alpha(i,j) J_p^i \otimes J_q^j$, *entonces*

i)

$$F_p A F_p^* = \sum_k \lambda_k |e_k\rangle\langle e_k|,$$

con $\lambda_k = \sum_i \alpha(i) \overline{w}_p^{ki}$, *y*

ii)
$$(F_p \otimes F_q)B(F_p \otimes F_q)^* = \sum_{k,l} \lambda_{k,l} |e_k \otimes e_l\rangle\langle e_k \otimes e_l|,$$

con $\lambda_{kl} = \sum_{i,j} \alpha(i,j)\overline{w}_p^{ik}\overline{w}_q^{jl}$.

Demostración. Usando el lema E.2.2, obtenemos
$$F_pAF_p^* = \sum_i \alpha(i)F_pJ_p^iF_p^* = \sum_i \alpha(i)\sum_k \overline{w}_p^{ik}|e_k\rangle\langle e_k| = \sum_k\Big(\sum_i \alpha(i)\overline{w}_p^{ki}\Big)|e_k\rangle\langle e_k|.$$
Lo cual demuestra i).

Para el inciso ii)
$$\begin{aligned}(F_p \otimes F_q)B(F_p \otimes F_q)^* &= \sum_{i,j}\alpha(i,j)(F_pJ_p^iF_p^*)\otimes(F_qJ_q^jF_q^*)\\ &= \sum_{i,j}\alpha(i,j)\Big(\sum_k \overline{w}_p^{ik}|e_k\rangle\langle e_k\Big)\otimes\Big(\sum_l \overline{w}_q^{jl}|e_l\rangle\langle e_l|\Big)\\ &= \sum_{k,l}\Big(\sum_{i,j}\alpha(i,j)\overline{w}_p^{ik}\overline{w}_q^{jl}\Big)|e_k\otimes e_l\rangle\langle e_k\otimes e_l|.\end{aligned}$$
Esto concluye la demostración.

□

Corolario E.2.4 *Usando la notación del lema pasado,*

i)
$$e^{tA} = \frac{1}{p}\sum_{j,l}\Phi_{l-j}(t)|e_j\rangle\langle e_l|,$$

con $\Phi_m(t) = \sum_k w_p^{mk}e^{t\lambda_k}$, *y*

ii)
$$e^{tB} = \frac{1}{pq}\sum_{i,j,m,n}\Phi_{m-i,n-j}(t)|e_i\otimes e_j\rangle\langle e_m\otimes e_n|,$$

con $\Phi_{i,j}(t) = \sum_{k,l} w_p^{ik}w_q^{jl}e^{t\lambda_{kl}}$.

Demostración. Usando el lema anterior y calculando directamente
$$e^{tA} = F_p^*\mathrm{diag}(e^{t\lambda_k})F_p = \frac{1}{p}\sum_{j,l}\Big(\sum_k w_p^{(l-j)k}e^{t\lambda_k}\Big)|e_j\rangle\langle e_l| = \frac{1}{p}\sum_{j,l}\Phi_{l-j}(t)|e_j\rangle\langle e_l|.$$

De manera similar
$$\begin{aligned}e^{tB} &= (F_p\otimes F_q)^*\mathrm{diag}(e^{t\lambda_{kl}})(F_p\otimes F_q)\\ &= \frac{1}{pq}\sum_{i,j,k,l,m,n}\overline{w}_p^{ik}\overline{w}_q^{jl}e^{t\lambda_{kl}}w_p^{km}w_q^{ln}|e_i\otimes e_j\rangle\langle e_m\otimes e_n|\\ &= \frac{1}{pq}\sum_{i,j,m,n}\Phi_{m-i,n-j}(t)|e_i\otimes e_j\rangle\langle e_m\otimes e_n|.\end{aligned}$$

□

Bibliografía

[1] Accardi, L., Fagnola, F. and Quezada R., Weighted detailed balance for non-equilibrium stationary states, in *Proceedings of the International Conference in Memoriam of Shuichi Tasaki, Bussei Kenkyu* Vol. 97 (3) (YITP, Kyoto Univ. 2011) 318–356.

[2] Accardi, L. and Mohari, A., Time reflected Markov processes, *Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. Relat. Top.* **2**, (1999), 397–425.

[3] Agarwal, G.S., Open quantum Markovian systems and the microreversibility, *Z. Physik*, **258** (1973) 409–422.

[4] Alicki, R., On the detailed balance condition for non-Hamiltonian systems, *Rep. Math. Phys.*, **10** (1976) 249-258.

[5] Bratelli, O., W.Robinson, D., *Operator Algebras and Quantum Statistial Mechanics I second edition* (Springer-Verlag 1987).

[6] Bolaños-Servín, J.R, Carbone, R., Spectral Properties of Circulant Quantum Markov Semigroups, 2013 (submitted).

[7] Chebotarev A.M., Lectures on Quantum Probability; SMM Aportaciones Matemáticas (Textos nivel avanzado) 14: México, 2000.

[8] Chruściński, D., Kossakowski, A., On circulant states with positive partial transpose, Phys. Rev. **A 76**, (2006).

[9] Cipriani, F., Dirichlet forms and Markovian semigroups on standard forms of von neumann algebras.*J. Funct. Anal.* **147** (1997) 259–300.

[10] Cipriani, F., Dirichlet forms on noncommutative spaces. In: Quantum Potential Theory, Lecture Notes in Math., 1954, Berlin-Heidelberg-New York: Springer 2008, 161-276

[11] Goldstein, S., Lindsay, J.M.: KMS symmetric semigroups. *Math. Z.* **219** (1995), 591–608.

[12] Fagnola, F., Quantum Markov semigroups and quantum flows, *Proyecciones* 18, 1-144, 1999.

[13] Fagnola, F., Umanità, V., Generators of Detailed Balance Quantum Markov Semigroups, *Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. Relat. Top.* **10**, (2007) 335–363.

[14] Fagnola, F., Umanità, V., Detailed Balance, Time Reversal, and Generators of Quantum Markov Semigroups, *Mathematical Notes* **84** (2008) 108-115.

[15] Fagnola, F., Umanità, V., Generatirs of KMS Symmetric Markov Semigroupss on $\mathcal{B}(h)$: Symmetry and Quantum Detailed Balance, *Commun. Math. Phys.* **298**, (2010), 523-547.

[16] Fagnola, F., Umanità, V., Generic Quantum Markov Semigroups, Cycle Representation and Deviation From Equilibrium, *Inf. Dim. Anal. Quant. Prob. Relat. Top.* **15**, (2012), 1250016.

[17] Fagnola, F., Rebolledo, R., From classical to quantum entropy production, in *Proceedings of the 29th Conference on Quantum Probability and Related Topics, QP-PQ Quantum Probability and White Noise Analysis* Vol. 25, (2010) 245-261.

[18] Fagnola, F., Rebolledo, R., Entropy production for quantum Markov semigroups, arXiv:1212.1366v1 [math-phy] 6 Dec. 2012.

[19] Holevo, A.S., On the Choi-Jamiolkowski Correspondence in Infinite Dimensions, J. Math. Phys. 52, (2011), 042202.

[20] Jamiołkowski, A., Linear transformations which preserve trace and positive definitydness of operators, *Reports on Mathematical Physics* **3** (1972) 275-278.

[21] Kalpazidou, S.L., *Cycle representations of Markov processes* (Springer-Verlag 1995).

[22] Kraus K., General state changes in quantum theory, Ann. Phys. 64, 311-335, 1970.

[23] Kossakowski, A., Frigerio, A., Gorini,V., Verri, M., Quantum detailed balance and KMS condition, *Comm. Math. Phys.* **57** (1977) 97-110.

[24] Lindblad L., On the generators of quantum dynamical semigroups, Commun. Math. Phys. 48, 119-130, 1976.

[25] Majewski, W.A., The detailed balance condition in quantum statistical mechanics, J. Math. Phys. 25(3), 614-616, 1984.

[26] Parthasarathy, K.R., *An Introduction to Quantum Stochastic Calculus* (Birkhäuser-Verlag 1992).

[27] Petz, D., Conditional Expectation in quantum probability, in *Quantum Probability and Applications III.* Lecture Notes in Mathematics **1303** Springer, Berling-Heildelberg-New York 1988, 251260.

[28] Petz, D., *Quantum Information Theory and Quantum Statistics* (Springer, 2008).

[29] Min Qian, Min-Ping Qian, Da-Quan Jiang, *Mathematical Theory of Nonequilibrium Steady States* (Springer 2003).

[30] Streater, R.F., J. Phys. A 31, no. 39, 7981?7995, 1988.

[31] Reed, M., Simon, B., Modern Methods of Mathematical Physics, vol I, Functional Analysis, Academic Press, 1975.

[32] Zhang, F., *Matrix Theory: Basic Results and Techniques,* 2^{nd}*edition* (Springer 2011).

[33] Umanità, V., *Classification and decomposition of Quantum Markov Semigroups*[2005], Ph.D Thesis, Politecnico di Milano, Italy.

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA-IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

UN SEMIGRUPO CUÁNTICO DE MARKOV ADJUNTO Y ESTADOS FUERA DE EQUILIBRIO

Tesis que presenta
Jorge Ricardo Bolaños Servín
Para obtener el grado de
Doctor en ciencias (Matemáticas)

Asesores:	Dr. Roberto Quezada Batalla
	Dr. Franco Fagnola
Jurado:	
Presidente	Dr. Jorge Alberto León Vázquez
Secretario	Dr. Julio César García Corte
Vocal	Dr. Jaime Cruz Sampedro
Vocal	Dr. Roberto Quezada Batalla

México, D.F. a 19 de junio de 2014