

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA
UNIDAD IZTAPALAPA
DEPARTAMENTO DE FISICA

070103

✓ GRUPO DE LIE PARA LA COSMOLOGIA
DE JORDAN Y BRANS-DICKE

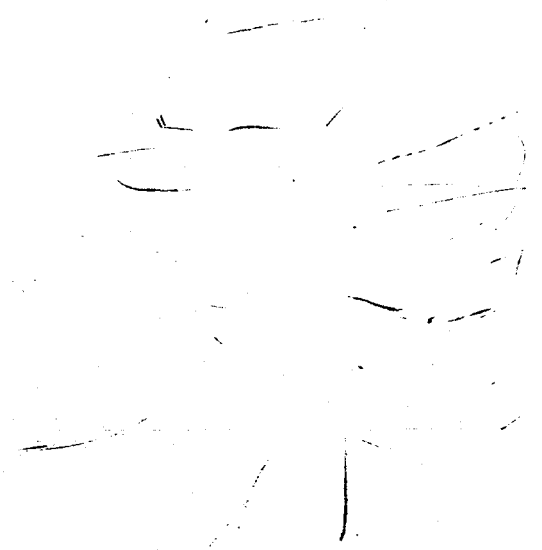
U. A. M. IZTAPALAPA BIBLIOTECA

T E S I S
QUE PARA OBTENER EL GRADO DE
MAESTRO EN CIENCIAS
PRESENTA
GUILLERMO / COVARRUBIAS MALDONADO

MEXICO, D.F.

JULIO, 1978

**GRUPO DE LIE PARA LA COSMOLOGIA
DE JORDAN Y BRANS-DICKE**



A ARLETTE

Agradezco al Dr. Octavio Obregón, coordinador del grupo de Gravitación y Astrofísica relativista, el estímulo y amistad brindados durante el desarrollo de este trabajo.

Debo también reconocimiento al Dr. Jorge Ize por el tiempo, la ayuda y el interés que hubo de otorgarme.

Por último expreso mi gratitud a mi esposa Raquel por su disposición y esfuerzo en el mecanografiado.

I N D I C E

SECCION	PAGINA
1.- INTRODUCCION.....	1
2.- LAS ECUACIONES COSMOLOGICAS.....	2
3.- EL UNIVERSO DE POLVO.....	3
4.- EL UNIVERSO VACIO.....	8
5.- SOLUCIONES.....	10
6.- CONCLUSIONES.....	12
7.- REFERENCIAS.....	14

**APENDICE A. DEDUCCION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES
PARA H.**

**APENDICE B. DEMOSTRACION DE LA EQUIVALENCIA LOGICA ENTRE
LAS ECUACIONES ORIGINALES Y LAS DERIVADAS.**

1. INTRODUCCION.

Uno de los problemas relevantes en Gravitación es el de obtener soluciones exactas a las ecuaciones de campo de las diferentes teorías para distintas situaciones físicas. En particular son de gran importancia los modelos cosmológicos de una teoría de Gravitación pues aparte de intentar una descripción del comportamiento y evolución del universo aportan modos de contrastación empírica de la teoría pues sus predicciones se pueden verificar con la información experimental, principalmente astrofísica y cosmológica, de que se dispone. De esta manera, se obtienen elementos para constituir criterios de validación de las distintas teorías. En este trabajo nos ocupamos de la teoría de Jordan y Brans-Dicke (JBD).

Varios autores han obtenido soluciones cosmológicas exactas a la teoría de JBD, desarrollando diversos métodos de solución. Es bien sabido que cuando se elige una métrica isotrópica (Robertson-Walker) se obtiene un sistema acoplado de tres ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden para cada ecuación de estado del universo. Este sistema se puede reducir a otro de dos ecuaciones de primer orden (con una excepción a la que nos referiremos más adelante). Demostraremos que para el "universo de polvo" ($P=0, \rho R^3 = \text{cte.}$) y para el "universo vacío" ($P=0=\rho$)

el problema de resolver sus ecuaciones acopladas correspondientes es completamente equivalente a dar solución a una sola ecuación de segundo orden y segundo grado para cada ecuación de estado. Estas ecuaciones poseen una relevante simetría que las hace invariantes ante un grupo de transformaciones continuo de Lie para cada una de ellas. Este hecho nos permite reducir el problema original a resolver una ecuación diferencial de primer orden y evaluar una cuadratura en cada caso. De este formalismo podemos obtener todas las soluciones cosmológicas conocidas previamente. Usaremos unidades estándar y coordenadas estándar para los modelos cosmológicos en contraste con algunos autores.¹

2. LAS ECUACIONES COSMOLOGICAS.

Con el elemento de línea de Robertson-Walker:

$$ds^2 = dt^2 - R^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - \epsilon r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right] \quad (2.1)$$

con $\epsilon = +1, 0, -1$ para los espacios de curvatura positiva, nula y negativa respectivamente, se derivan las siguientes ecuaciones diferenciales de la teoría escalar-tensorial de JBD:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} - \frac{1}{2} \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} \right)^2 + \frac{\epsilon}{R^2} = \beta \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} \left(\frac{1}{4} \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} - \frac{\alpha t}{\alpha t + \delta} \right) \quad (2.2)$$

$$\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2} R^3 = -(\alpha t + \delta), \quad \frac{\kappa}{R^2} \neq \text{const.} \quad (2.3)$$

para la ecuación de estado $P=0$, $\rho R^3 = \text{const.}$, y

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} - \frac{1}{2} \frac{\dot{\kappa}}{\kappa} \right)^2 + \frac{\epsilon}{R^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} \right)^2 \quad (2.2a)$$

$$\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2} R^3 = -\gamma, \quad \frac{\kappa}{R^2} \neq \text{const.} \quad (2.3a)$$

para el universo vacío, $P=0=\rho$. La componente espacial de las ecuaciones de campo es dependiente de las demás sólo si $\kappa/R^2 \neq \text{const.}$ κ representa la constante de gravitación relativista, que es inversamente proporcional al campo escalar ϕ de la teoría:

$$\kappa = 8\pi \frac{(2\omega+4)}{(2\omega+3)} \phi^{-1} \quad (2.4)$$

y

$$\alpha := \frac{R_0^3 \rho_0}{2\omega+4}, \quad \beta := 1 + \frac{2}{3}\omega, \quad \delta = \text{const.}, \quad \gamma = \text{const.}, \quad (2.4a)$$

ω es el parámetro libre de la teoría y ρ_0 y R_0 son los valores hoy en día de la densidad de masa y del radio de curvatura del universo.

3. EL UNIVERSO DE POLVO

Haciendo la definición:

$$H := \frac{R^3}{\kappa} + \frac{1}{4\alpha} (\alpha t + \delta)^2 \quad (3.1)$$

y usando la ecuación (2.3), la derivada logarítmica de κ en términos de t y H es:

$$\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} = \frac{\alpha t + \delta}{\frac{1}{4\alpha}(\alpha t + \delta)^2 - H} \quad (3.2)$$

Además, usando la ecuación (2.3) en la ecuación (2.2) se sigue que:

$$\dot{H}^2 + 9\epsilon \frac{R^4}{\kappa^2} = 9\alpha\beta H. \quad (3.3)$$

Con la definición (3.1), las ecuaciones (3.2) y (3.3) son completamente equivalentes al sistema original (2.2) y (2.3).

Usando las ecuaciones (3.1) y (3.2), y derivando (3.3), se obtiene que una condición necesaria que H debe satisfacer para dar un modelo cosmológico es:

$$(9\alpha\beta H - H'^2) = \frac{3}{4} (H - \frac{1}{4}\alpha\tau^2)(9\alpha\beta - 2H'') \quad (3.4)$$

Para $H' \neq 0$ y $\tau = t + \frac{\delta}{\alpha}$; la prima denota derivada con respecto a τ . El radio de curvatura de los espacios no-planos está relacionado con H mediante la relación:

$$R^2 = 9\epsilon \frac{(H - \frac{1}{4}\alpha\tau^2)^2}{(9\alpha\beta H - H'^2)} \quad (3.5)$$

Deseamos eliminar la ec. (3.3) en favor de la ec. (3.4) en el sistema de ecuaciones equivalente (3.1), (3.2) y (3.3). Sin embargo, la ec. (3.4) es independiente de la curvatura del espacio. Para distinguir entre espacios planos y no-planos de esta ecuación debemos identificar aquellas de sus soluciones que satisfacen la restricción adicional $H'^2 = 9\alpha\beta H$ (espacios planos, véase la ec. (3.3)) y aquellas que no lo satisfacen (espacios no-planos). La ec. (3.4) junto con esta restricción y las ecuaciones (3.1) y (3.2) constituyen una condición suficiente para dar todos los modelos cosmológicos de espacio plano en unidades estándar. Asimismo, la condición de suficiencia para todas las cosmologías de espacios no-planos se obtiene con la ecuación (3.4) bajo la restricción $H'^2 \neq 9\alpha\beta H$, junto con las ecuaciones (3.1), (3.2) y la ecuación (3.5).

Claramente, nuestro problema se ha transformado ahora a encontrar soluciones a la ecuación (3.4). La estructura de esta ecuación tiene simetrías relevantes que permiten identificarla con la de una ecuación de primer orden. Este hecho se revela a través de su invariancia bajo el siguiente grupo continuo de transformaciones de Lie³ de un parámetro:

$$\tilde{H} = a^2 H, \quad \tilde{t} = at \quad (3.6)$$

con $a \in (0, \infty)$.

La transformación infinitesimal U' para el espacio (τ, H, H') es:

$$U' = \tau \frac{\partial}{\partial \tau} + 2H \frac{\partial}{\partial H} + H' \frac{\partial}{\partial H'} \quad (3.7)$$

y las ecuaciones diferenciales características de las superficies invariantes son:

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{dH}{2H} = \frac{dH'}{H'} \quad (3.8)$$

Integrando la primera ecuación se obtienen las curvas de trayectoria del grupo:

$$u = \frac{H}{\tau^2} = \text{const.} \quad (3.9)$$

La integración con el primero y tercer términos da una segunda superficie invariante.

$$v = \frac{H'}{\tau} = \text{const.} \quad (3.10)$$

Siguiendo la teoría de Lie, tomamos u y v como coordenadas invariantes. Las formas diferenciales correspondientes a (3.9) y (3.10) son:

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{\tau} (v-2u) \quad (3.11)$$

y

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{\tau} (H''-v) \quad (3.12)$$

respectivamente, de modo que una trayectoria en el espacio (u,v) estará parametrizada con la coordenada τ de la siguiente manera:

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{du}{v-2u} \quad (3.13)$$

En términos de las coordenadas (u,v) , la ecuación (3.4) es:

$$\frac{dv}{du} = \frac{4v^2-6uv + \frac{3}{2} \alpha v - 9\alpha\beta u - \frac{27}{4} \alpha^2 \beta}{6(u-\frac{1}{4}\alpha)(v-2u)} \quad (3.14)$$

Las ecuaciones (3.13) y (3.14) representan la reducción buscada. Una vez que se obtiene v en términos de u de (3.14), la ecuación (3.13) nos da u en función de τ lo cual nos permite obtener la correspondiente $H(\tau)$ de la ecuación (3.9). Con este esquema podremos reobtener todas las soluciones cosmológicas exactas previamente encontradas.

4.- EL UNIVERSO VACIO.

En esta sección nos limitaremos a enlistar las ecuaciones correspondientes del esquema desarrollado para el universo vacío. Las ecuaciones llevarán los mismos números y tendrán entre ellas las mismas relaciones lógicas que sus correspondientes ecuaciones de la sección 3.

$$H: = \frac{R^3}{K} + \frac{1}{2} \gamma t \quad . \quad (4.1)$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\gamma}{\frac{1}{2}\gamma t - H} \quad . \quad (4.2)$$

$$\dot{H}^2 + 9\epsilon \frac{R^4}{K^2} = \frac{9}{4} \beta \gamma^2 \quad (4.3)$$

$$\frac{3}{2} H'' (H - \frac{1}{2}\gamma t) = (H'^2 - \frac{9}{4}\beta \gamma^2) \quad . \quad (4.4)$$

aquí, sin embargo $\tau = t$.

$$R^2 = 9\epsilon \frac{(H - \frac{1}{2}\gamma t)^2}{\frac{9}{4}\beta \gamma^2 - H'^2} \quad (4.5)$$

$$\tilde{H} = aH, \quad \tilde{\tau} = a\tau \quad . \quad (4.6)$$

con $a \in (0, \infty)$

$$U' = \tau \frac{\partial}{\partial \tau} + H \frac{\partial}{\partial H} . \quad (4.7)$$

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{dH}{H} + \frac{dH'}{0} . \quad (4.8)$$

$$u = \frac{H}{\tau} . \quad (4.9)$$

$$v = H' . \quad (4.10)$$

$$\frac{du}{d\tau} = \frac{1}{\tau} (v-u) . \quad (4.11)$$

$$\frac{dv}{d\tau} = H'' . \quad (4.12)$$

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{du}{v-u} . \quad (4.13)$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{2}{3} \frac{(v^2 - \frac{9}{4}\beta\gamma^2)}{(v-u)(u - \frac{1}{2}\gamma)} . \quad (4.14)$$

5.- SOLUCIONES.

En esta sección obtendremos las soluciones de las ecuaciones (3.14) y (4.14) que corresponden a las soluciones cosmológicas exactas ya conocidas.

5.a) EL UNIVERSO DE POLVO.

La solución de la ecuación (3.14) que genera todos los modelos cosmológicos de espacio plano es:

$$v = \pm \sqrt{\pm 9 |\alpha \beta|} u \quad (5.1)$$

Esta es una solución con 4 ramas que da:

$$H = \pm \left(\frac{3}{2} \sqrt{|\alpha \beta|} \tau + h \right)^2 \quad (5.2)$$

El signo en (5.2) debe ser el mismo que el de dentro del radical en (5.1). Nótese que en este caso ($\epsilon=0$) es preferible resolver directamente la ecuación (3.3), cuya solución general es (5.2). Esta solución junto con (3.1) y (3.2) nos da todas las soluciones cosmológicas para espacio plano. Reobtenemos, entonces, las soluciones cosmológicas reportadas por L.E. Gurevich et al.⁴, y claramente, como caso especial, las de Brans y Dicke⁵.

Las soluciones conocidas para espacio cerrado⁶ corresponden a una curva de trayectoria del grupo de Lie (véase (3.9)) que es también una solución de (3.4):

$$u = - \frac{3}{4} \alpha \quad (5.3)$$

y consecuentemente, de (3.10):

$$v = - \frac{3}{2} \alpha, \quad (5.4)$$

Por lo tanto

$$H = - \frac{3}{4} \alpha \tau^2. \quad (5.5)$$

Los puntos de esta curva son puntos singulares del cambio de coordenadas y por ello la transformación no se efectúa para ellos. Esto es, las ecuaciones (3.11) - (3.14) no son válidas para esta solución.

5.6) EL UNIVERSO VACIO.

$$v^2 = \frac{9}{4} \beta \gamma^2 \quad (5.6)$$

es la solución de la ecuación (4.14) que reproduce la familia de soluciones exactas para espacio plano conocida⁷; la solución de la ecuación (4.4) correspondientes es:

$$H = \pm \frac{3}{2} \sqrt{\beta} \gamma \tau + h' \quad , \quad (5.7)$$

$h' = \text{const.}$

Se puede ver con facilidad de (4.3) que (5.7) es la solución general de la ecuación (4.4) para espacios planos. Por tanto, nuestro esquema asegura que esta familia de soluciones incluye todas las soluciones para la cosmología de espacio vacío.

6. CONCLUSIONES.

Se ha desarrollado un método para reducir el problema de encontrar soluciones cosmológicas al sistema acoplado original de ecuaciones diferenciales de la teoría de JBD, para una métrica de Robertson Walker y las ecuaciones de estado de un universo de polvo y de un universo vacío.

Para el universo de polvo, el sistema agrandado (2.2), (2.3) y (3.1) es completamente equivalente al sistema (3.1), (3.2) y (3.3). Este primer esquema es suficiente para resolver completamente la cosmología de espacio plano. Para las cosmologías de espacios no-planos se hace un segundo desarrollo. Como primer paso se establece la ecuación (3.4), la cual es una condición necesaria para que la función H introducida por (3.1) dé un modelo cosmológico. Las ecuaciones (3.1), (3.2), (3.5) y (3.4) con la restricción $H'^2 = 9\alpha\beta H$ son también condiciones suficientes. Hasta este punto, el

problema de encontrar soluciones al sistema original de ecuaciones (2.2) y (2.3) ha sido traducido al problema de resolver la ecuación (3.4). La invariancia de esta ecuación bajo un grupo continuo de transformaciones de Lie nos permite reducir su orden de segundo a primero. Esta ecuación va acompañada de una cuadratura (cf. Ecs. (3.13) y (3.14)).

El mismo esquema es válido para el universo vacío y el procedimiento específico puede ser descrito como se ha hecho en el párrafo anterior, entendiéndose que las ecuaciones (2.2) y (2.3) se toman por las ecuaciones (2.2a) y (2.3a) respectivamente y que las ecuaciones de la sección 3 se deben tomar paralelas a las de la sección 4.

Nuestro objetivo ha sido presentar un esquema más general del cual se pueden reobtener las soluciones cosmológicas previamente encontradas. Creemos, además, que la reducción del problema al de resolver una ecuación de primer orden y una cuadratura es prometedor para investigar la estructura matemática de las ecuaciones cosmológicas y para obtener más soluciones.

7. REFERENCIAS.

- ¹ R.E. Morganstern, Phys. Rev. D3, 2946 (1971)
- ² G. Lessner, Astrophys. Space Sci. 30, L5 (1974).
- ³ Véase, por ejemplo, Bluman and Cole, *Similarity Methods for differential equations* (Springer-Verlag, N.Y., (1974)).
- ⁴ L.E. Gurevich, A.M. Finkelstein, and V.A. Ruban, Astrophys. Space Sci. 22, 231 (1973).
- ⁵ C. Brans and R. D. Dicke, Phys. Rev. 124, 925 (1961).
- ⁶ H. Dehnen and O. Obregón, Astrophys. Space Sci. 14, 454 (1971).
- ⁷ J. O'Hanlon and B. O. J. Tupper, Il Nuovo Cimento 7b, 305 (1972).

APENDICE A

DEDUCCION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES PARA H.

A-1) UNIVERSO DE POLVO

En esta sección presentamos la deducción de las ecuaciones (3.2), (3.3), (3.4) y (3.5) a partir de la definición (3.1).

Para obtener la ecuación (3.3), escribiremos la ecuación (2.3) en la forma:

$$\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} = -(\alpha t + \delta) \frac{\kappa}{R^3} . \quad (A-1.1)$$

Sustituyendo en (2.2) se obtiene:

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} + \frac{1}{2}(\alpha t + \delta) \frac{\kappa}{R^3} \right)^2 + \frac{\epsilon}{R^2} = \beta(\alpha t + \delta) \frac{\kappa}{R^3} \left(\frac{1}{4}(\alpha t + \delta) \frac{\kappa}{R^3} + \frac{\alpha}{\alpha t + \delta} \right) . \quad (A-1.2)$$

Si se multiplica a ambos lados de la ecuación por $\frac{R^6}{\kappa^2}$ y se tiene en cuenta que

$$\frac{\dot{R}R^2}{\kappa} = \frac{1}{3} \frac{(R^3)^{\cdot}}{\kappa} = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{R^3}{\kappa} \right)^{\cdot} + \frac{R^3 \dot{\kappa}}{\kappa^2} \right] = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{R^3}{\kappa} \right)^{\cdot} - (\alpha t + \delta) \left(\frac{R^3}{\kappa} \right) \right] , \quad (A-1.3)$$

donde la última igualdad se obtiene mediante sustitución de (A-1.1), (A-1.2) se convierte en:

$$\frac{1}{9} \left[\left(\frac{R^3}{\kappa} \right)^{\cdot} + \frac{1}{2}(\alpha t + \delta) \left(\frac{R^3}{\kappa} \right) \right]^2 + \epsilon \frac{R^4}{\kappa^2} = \alpha \beta \left[\frac{R^3}{\kappa} + \frac{1}{4\alpha} (\alpha t + \delta)^2 \right] . \quad (A-1.4)$$

Por tanto, si se hace la definición (3.1), se obtiene (3.3):

$$\dot{H}^2 + 9\epsilon \frac{R^4}{\kappa^2} = 9\alpha\beta H, \quad (3.3)$$

$$H = \frac{R^3}{\kappa} + \frac{1}{4\alpha} (\alpha t + \delta)^2. \quad (3.1)$$

Si escribimos la definición (3.1) como

$$\frac{\kappa}{R^3} = \frac{1}{H - \frac{1}{4\alpha} (\alpha t + \delta)^2} \quad (A-1.5)$$

y sustituímos en (A-1.1), obtenemos la ecuación (3.2):

$$\frac{\dot{\kappa}}{\kappa} = \frac{\alpha t + \delta}{\frac{1}{4\alpha} (\alpha t + \delta)^2 - H}. \quad (3.2)$$

Si $\epsilon \neq 0$, podemos escribir (3.3) en la siguiente forma:

$$\frac{\kappa^2}{R^4} = 9\epsilon \frac{1}{(9\alpha\beta H - \dot{H}^2)}; \quad (A-1.6)$$

y la definición (3.1) se puede poner como:

$$\frac{R^3}{\kappa} = H - \frac{1}{4\alpha} (\alpha t + \delta)^2. \quad (A-1.7)$$

Multiplicando el cuadrado de (A-1.7) con (A-1.6) miembro a miembro se obtiene la ecuación (3.5), válida únicamente para espacios no-planos:

$$R^2 = 9\epsilon \frac{(H - \frac{1}{4\alpha} \alpha \tau^2)^2}{(9\alpha\beta H - H'^2)}, \quad (3.5)$$

donde se ha hecho $\tau = t + \frac{\delta}{\alpha}$ y H' denota derivada respecto a τ .

Para obtener la ecuación (3.4), derivamos la ecuación (3.3):

$$2H'H'' + 36\varepsilon \frac{R^3}{\kappa^2} R' - 18\varepsilon \frac{R^4}{\kappa^3} \kappa' = 9\alpha\beta H' \quad (A-1.8)$$

y rearmamos como:

$$12\varepsilon \frac{R}{\kappa} \left[3 \frac{R^2}{\kappa} R' - \frac{9}{6} \frac{R^3}{\kappa^2} \kappa' \right] = (9\alpha\beta - 2H'')H'. \quad (A-1.8')$$

Claramente la ecuación (2.3) se puede obtener de las ecuaciones (3.1) y (3.2). Si utilizamos la relación (A-1.3) para el primer término en el paréntesis cuadrado de (A-1.8) y la ecuación (2.3) para el segundo se sigue que:

$$12\varepsilon \frac{R}{\kappa} \left[\left(\frac{R^3}{\kappa} \right)' + \frac{1}{2} \alpha \tau \right] = (9\alpha\beta - 2H'')H' \quad (A-1.9)$$

0, de (3.1),

$$\bullet \quad 12\varepsilon \frac{R}{\kappa} = (9\alpha\beta - 2H''), \quad H' \neq 0. \quad (A-1.10)$$

De (3.3) y de (A-1.5) se puede deducir fácilmente la siguiente relación

$$9\varepsilon \frac{R}{\kappa} = \frac{9\alpha\beta H - H'^2}{H - \frac{1}{4}\alpha\tau^2}. \quad (A-1.11)$$

Por lo tanto la ecuación (3.4) se sigue de las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.3) con su derivada:

$$(9\alpha\beta H - H'^2) = \frac{3}{4} (H - \frac{1}{4}\alpha\tau^2)(9\alpha\beta - 2H''), H' \neq 0 \quad (3.4)$$

A-2) EL UNIVERSO VACIO

La derivación de las ecuaciones (4.2), (4.3), (4.4) y (4.5) es enteramente análoga a la de la sección anterior, por lo que únicamente escribiremos las ecuaciones correspondientes etiquetadas con los mismos números. El procedimiento específico puede seguirse según se describe en el penúltimo párrafo de la sección 6.

$$\frac{\dot{K}}{K} = -\gamma \frac{K}{R^3} \quad (A-2.1)$$

$$\left(\frac{\dot{R}}{R} + \frac{1}{2}\gamma \frac{K}{R^3}\right)^2 + \frac{\epsilon}{R^2} = \frac{1}{4} \beta \gamma^2 \frac{K^2}{R^6} \quad (A-2.2)$$

$$\frac{\dot{R}R^2}{K} = \frac{1}{3} \frac{(R^3)^\cdot}{K} = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{R^3}{K}\right)^\cdot + \frac{R^3 \dot{K}}{K^2} \right] = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{R^3}{K}\right)^\cdot - \gamma \right] \quad (A-2.3)$$

$$\frac{1}{9} \left[\left(\frac{R^3}{K}\right)^\cdot + \frac{1}{2} \gamma \right]^2 + \epsilon \frac{R^4}{K^2} = \frac{1}{4} \beta \gamma^2 \quad (A-2.4)$$

$$\dot{H}^2 + 9\epsilon \frac{R^4}{K^2} = \frac{9}{4} \beta \gamma^2 \quad (4.3)$$

$$H: = \frac{R^3}{K} + \frac{1}{2} \gamma t \quad (4.1)$$

$$\frac{K}{R^3} = \frac{1}{H - \frac{1}{2}\gamma t} \quad (A-2.5)$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\gamma}{\frac{1}{2}\gamma t - H} \quad (4.2)$$

$$\frac{\kappa^2}{R^4} = 9\epsilon \frac{1}{\frac{9}{4}\beta\gamma^2 - \dot{H}^2} \quad (\text{A-2.6})$$

$$\frac{R^3}{\kappa} = H - \frac{1}{2} \gamma t \quad (\text{A-2.7})$$

$$R^2 = 9\epsilon \frac{(H - \frac{1}{2} \gamma t)^2}{(\frac{9}{4}\beta\gamma^2 - H'^2)}, \quad \tau = t \quad (4.5)$$

$$2H'H'' + 36\epsilon \frac{R^3}{\kappa^2} R' - 18\epsilon \frac{R^4}{\kappa^3} \kappa' = 0 \quad (\text{A-2.8})$$

$$6\epsilon \frac{R}{\kappa} \left[3 \frac{R^2}{\kappa} R' - \frac{9}{6} \frac{R^3}{\kappa^2} \kappa' \right] = -H' H'' \quad (\text{A-2.8'})$$

$$6\epsilon \frac{R}{\kappa} \left[\left[\left(\frac{R^3}{\kappa} \right)' + \frac{1}{2} \gamma \right] \right] = -H' H'' \quad (\text{A-2.9})$$

$$6\epsilon \frac{R}{\kappa} = -H'' , \quad H' \neq 0 \quad (\text{A-2.10})$$

$$9\epsilon \frac{R}{\kappa} = \frac{\frac{9}{4}\beta\gamma^2 - H'^2}{H - \frac{1}{2}\gamma t} \quad (\text{A-2.11})$$

$$\frac{3}{2} H'' (H - \frac{1}{2}\gamma t) = (H'^2 - \frac{9}{4}\beta\gamma^2), \quad H' \neq 0 \quad (4.4)$$

APENDICE B.

DEMOSTRACION DE LA EQUIVALENCIA LOGICA ENTRE LAS ECUACIONES ORIGINALES Y LAS DERIVADAS

B-1) UNIVERSO DE POLVO.

La traducción del problema original que consiste en resolver las ecuaciones (2.2] y (2.3] al de dar solución a la ecuación (3.4) es válida siempre y cuando existan las relaciones lógicas que se mencionan después de la ecuación (3.5). Ellas aseguran que después de haberse obtenido una solución de (3.4), las funciones definidas por (3.2) serán soluciones de las ecuaciones originales. El radio del universo correspondiente a (3.2) se obtiene mediante la definición (3.1). Esto es suficiente para espacios planos. Para espacios no-planos es necesario que se satisfaga la ecuación (3.5) también. Demostraremos que este hecho no es tan restrictivo como aparece a primera vista; el radio del universo obtenido mediante (3.1) satisfará la ecuación (3.5) salvo por una constante multiplicativa, lo cual es equivalente a decir, que esta ecuación decide a que tipo de espacio corresponde la solución de (3.4) ($\epsilon=1$ ó -1), debido a que tal constante se debe hacer 9ϵ (recuérdese que (3.4) no da información explícita de la curvatura).

Comenzaremos por demostrar que para métrica plana las ecuaciones (3.1), (3.2) y (3.4) con la restricción $H'^2 = 9\alpha\beta H$ son suficientes para resolver (2.2) y (2.3).

La solución general de

$$H'^2 = 9\alpha\beta H \quad (B-1.1)$$

es

$$H = \pm \left[\frac{3}{2} \sqrt{|\alpha\beta|} \tau + h \right]^2, \quad h = \text{const.} \quad (5.2)$$

y todas ellas son soluciones de (3.4). Esto se sigue inmediatamente de considerar que $H' - 9\alpha\beta H$ aparece de un lado de la igualdad en (3.4) y del otro lado aparece su derivada dividida entre H' ($H' \neq 0$ *). Por tanto (3.4) y (B-1.1) es equivalente a (B-1.1) únicamente.

Supongamos que H es una solución de (B-1.1), que se ha obtenido κ con (3.2) y finalmente que R se obtiene mediante (3.1), entonces de (3.1):

$$R^3 = \left(H - \frac{1}{4}\alpha\tau^2 \right) \kappa \quad (\tau = t + \frac{\delta}{\alpha}) \quad (B-1.2)$$

=>

$$\frac{R'}{R} = \frac{1}{3} \frac{H' - \frac{1}{2}\alpha\tau}{H - \frac{1}{4}\alpha\tau^2} + \frac{1}{3} \frac{\kappa'}{\kappa}, \quad (B-1.3)$$

y de (3.2) se obtiene:

$$\frac{R'}{R} - \frac{1}{2} \frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{1}{3} \frac{H'}{H - \frac{1}{4}\alpha\tau^2}. \quad (B-1.4)$$

* $H' = 0$ da soluciones $\kappa \propto R^2$. Véase (2.3)

Por otro lado, también de (3.2):

$$\begin{aligned} \beta \frac{\kappa'}{\kappa} \left(\frac{1}{4} \frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{1}{\tau} \right) &= \beta \frac{\alpha \tau}{\frac{1}{4} \alpha \tau^2 - H} \left(\frac{1}{4} \frac{\alpha \tau}{\frac{1}{4} \alpha \tau^2 - H} - \frac{1}{\tau} \right) \\ &= \alpha \beta \frac{H}{\left(\frac{1}{4} \alpha \tau^2 - H \right)^2} \end{aligned} \quad (\text{B-1.5})$$

Por último, si utilizamos (B-1.1):

$$\begin{aligned} \left(\frac{R'}{R} - \frac{1}{2} \frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 &= \frac{1}{9} \frac{H'^2}{\left(H - \frac{1}{4} \alpha \tau^2 \right)^2} = \alpha \beta \frac{H}{\left(\frac{1}{4} \alpha \tau^2 - H \right)^2} \\ &= \beta \frac{\kappa'}{\kappa} \left(\frac{1}{4} \frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{1}{\tau} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Si se elimina H de (3.2) utilizando (3.1) se obtiene (2.3). Nótese que la demostración no es válida cuando $H = \frac{1}{4} \alpha \tau^2$, lo cual en vista de (5.2) sucede sólo cuando $|\beta| = \frac{1}{9}$.

Podemos concluir también como corolario inmediato que no existen más soluciones cosmológicas para espacio plano que las correspondientes a (5.2) (Sección 5-a).

Para espacios no-planos la equivalencia lógica existe entre las ecuaciones (3.2), (3.3), (3.5) y (3.4) con la restricción $H'^2 \neq 9\alpha\beta H$ y las ecuaciones (2.2) y (2.3), habiéndose hecho la definición (3.1).

Sea H una solución de (3.4) tal que $H'^2 \neq 9\alpha\beta H$.

Si se obtiene κ de (3.2) y R de (3.1), se satisfacen

(B-1.4) y (B-1.5) y de ellas se sigue que:

$$\left(\frac{R'}{R} - \frac{1}{2} \frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 - \beta \frac{\kappa'}{\kappa} \left(\frac{1}{4} \frac{\kappa'}{\kappa} - \frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{9} \frac{H'^2 - 9\alpha\beta H}{\left(\frac{1}{4}\alpha\tau^2 - H\right)^2} \quad (\text{B-1.6})$$

Como $H'^2 \neq 9\alpha\beta H$:

$$(9\alpha\beta H - H'^2) = \frac{3}{4} (H - \frac{1}{4}\alpha\tau^2) (9\alpha\beta - 2H'') \quad (3.4)$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{2H'}{H - \frac{1}{4}\alpha\tau^2} = \frac{3}{2} \frac{(9\alpha\beta - 2H'')H'}{(9\alpha\beta H - H'^2)}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\alpha\tau}{\frac{1}{4}\alpha\tau^2 - H} = 2 \frac{H' - \frac{1}{2}\alpha\tau}{H - \frac{1}{4}\alpha\tau^2} - \frac{3}{2} \frac{(9\alpha\beta H' - 2H'H'')}{(9\alpha\beta H - H'^2)}$$

$\Leftrightarrow$

$$\int \frac{\alpha\tau}{\frac{1}{4}\alpha\tau^2 - H} = \text{Ln} \left[a_1 (H - \frac{1}{4}\alpha\tau^2)^2 \right] - \text{Ln} \left[(a_2 (9\alpha\beta H - H'^2))^{3/2} \right] + a_3$$

(B-1.7)

($\int f$ se utiliza para denotar cualquier función cuya derivada sea f y a_1, a_2 y a_3 son constantes. a_2 debe hacer que la cantidad que se eleva al exponente correspondiente sea positiva).

$\Leftrightarrow$

$$\frac{\alpha\tau}{\frac{1}{4}\alpha\tau^2 - H} = b_1 \frac{(H - \frac{1}{4}\alpha\tau^2)^2}{[a_2(9\alpha\beta H - H'^2)]^{\frac{3}{2}}} = b_2\kappa$$

(b_1 y b_2 son constantes. Para la última igualdad se utilizó (3.2))

<=>

$$R^3 = b_3 \frac{(H - \frac{1}{4}\alpha\tau^2)^3}{[a_2(9\alpha\beta H - H'^2)]^{\frac{3}{2}}}, \quad b_3 = \text{const.}$$

(de (3.1))

<=>

$$R^2 = C \frac{(H - \frac{1}{4}\alpha\tau^2)^2}{(9\alpha\beta H - H'^2)}, \quad C = \text{const.} \quad (\text{B-1.8})$$

Esto demuestra que (3.4), (3.1) y (3.2) implican (3.5) salvo por una constante. Haciendo $C=9\epsilon$, de (3.5), obtenemos finalmente:

$$-\frac{\epsilon}{R^2} = \frac{1}{9} \frac{H'^2 - 9\alpha\beta H}{(H - \frac{1}{4}\alpha\tau^2)^2} \quad (\text{B-1.9})$$

y por tanto, en vista de (B-1.6), se satisface (2.2).

Como en el caso anterior ($\epsilon=0$), (3.1) y (3.2) implican directamente (2.3).

Por completez, hacemos notar que la demostración no sería válida si

$$H = -\frac{1}{4} \alpha \tau^2 ;$$

puede verse fácilmente que esta función no es solución de (3.4) y por tanto no restringe la demostración.

B-2) UNIVERSO VACIO

Como hemos venido haciendo, enlistaremos las ecuaciones correspondientes al apartado anterior para esta ecuación de estado, etiquetándolas con los mismos números y entendiéndolo que las relaciones lógicas entre ellas serán las mismas que las de sus correspondientes relaciones.

$$H'^2 = \frac{9}{4} \beta \gamma^2 \quad (B-2.1)$$

$$H = \pm \frac{3}{2} \sqrt{\beta} \gamma \tau + h', \quad h' = \text{const.} \quad (5.7)$$

$$R^3 = (H - \frac{1}{2} \gamma \tau) \kappa \quad (B-2.2)$$

$$\frac{R'}{R} = \frac{1}{3} \frac{H' - \frac{1}{2} \gamma}{H - \frac{1}{2} \gamma \tau} + \frac{1}{3} \frac{\kappa'}{\kappa} \quad (B-2.3)$$

$$\frac{R'}{R} - \frac{1}{2} \frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{1}{3} \frac{H'}{H - \frac{1}{2} \gamma \tau} \quad (B-2.4)$$

$$\frac{1}{4} \beta \left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right) = \frac{\frac{1}{4} \beta \gamma^2}{(H - \frac{1}{2} \gamma \tau)^2} \quad (B-2.5)$$

$$\left(\frac{R'}{R} - \frac{1}{2} \frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2 = \frac{1}{9} \frac{H'^2}{(H - \frac{1}{2} \gamma \tau)^2} = \frac{1}{4} \frac{\beta \gamma^2}{(H - \frac{1}{2} \gamma \tau)^2} = \frac{1}{4} \beta \left(\frac{\kappa'}{\kappa} \right)^2, \quad (2.2a)$$

En este caso la demostración no es válida para $\beta = \frac{1}{9}$ únicamente.

$$\left(\frac{R'}{R} - \frac{1}{2} \frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 - \beta \left(\frac{\kappa'}{\kappa}\right)^2 = \frac{1}{9} \frac{H'^2 - \frac{3}{2}\beta\gamma^2}{(H - \frac{1}{2}\gamma\tau)^2} \quad (B-2.6)$$

$$(H'^2 - \frac{9}{4}\beta\gamma^2) = \frac{3}{2} H'' (H - \frac{1}{2}\gamma\tau) \quad (4.4)$$

<=>

$$\frac{2H'}{(H - \frac{1}{2}\gamma\tau)} = \frac{3}{2} \frac{2H'H''}{(H'^2 - \frac{9}{4}\beta\gamma^2)}$$

<=>

$$\frac{\gamma}{\frac{1}{2}\gamma\tau - H} = 2 \frac{H' - \frac{1}{2}\gamma}{H - \frac{1}{2}\gamma\tau} - \frac{3}{2} \frac{2H'(-H'')}{(\frac{9}{4}\beta\gamma^2 - H'^2)}$$

<=>

$$\int \frac{\gamma}{\frac{1}{2}\gamma\tau - H} = \ln [a_1 (H - \frac{1}{2}\gamma\tau)^2] - \ln [(a_2 (\frac{9}{4}\beta\gamma^2 - H'^2))^{\frac{3}{2}}] + a_3 \quad (B-2.7)$$

(a_1, a_2, a_3 son constantes)

<=>

$$\int \frac{\gamma}{\frac{1}{2}\gamma\tau - H} = b_1 \frac{(H - \frac{1}{2}\gamma\tau)^2}{[a_2 (\frac{9}{4}\beta\gamma^2 - H'^2)]^{\frac{3}{2}}} = b_2 \kappa$$

(b_1 y b_2 son constantes)

<=>

$$R^3 = b_3 \frac{(H - \frac{1}{2}\gamma\tau)^3}{[a_2 (\frac{9}{4}\beta\gamma^2 - H'^2)]^{\frac{3}{2}}}, \quad b_3 = \text{const.}$$

B8

<=>

$$R^2 = C \frac{(H - \frac{1}{2}\gamma\tau)^2}{(\frac{9}{4}\beta\gamma^2 - H'^2)} \quad (B-2.8)$$

$$- \frac{\epsilon}{R^2} = \frac{1}{9} \frac{H'^2 - \frac{9}{4}\beta\gamma^2}{(H - \frac{1}{2}\gamma\tau)^2} \quad (B-2.9)$$