

UNIVERSIDAD AUTONOMA METROPOLITANA – IZTAPALAPA

**Sobre la Aproximación del
Término de Colisión de la
Ecuación de Boltzmann Relativista**

Tesis que presenta

Fis. Guillermo Chacón Acosta

Para obtener el grado de Maestro en Ciencias (Física)



Dr. Hugo A. Morales Técotl

Coasesor

Dr. Leonardo Dagdug Lima

Coasesor

Mayo 2007

Resumen

En esta tesis se estudian algunos aspectos de la teoría cinética relativista. Después de una revisión de los conceptos fundamentales de la teoría cinética no relativista enfocada en la ecuación de Boltzmann, y de recordar algunas nociones básicas de los fluidos relativistas, se aborda la teoría cinética relativista.

Se aplican métodos de aproximación al término de colisión de la ecuación de Boltzmann relativista. Para el caso de un gas relativista de una componente este término da lugar a una ecuación tipo Fokker-Planck (ecuación de Landau).

Al investigar las mezclas binarias se estudiaron dos casos complementarios: Partículas no relativistas difundiéndose en un gas relativista y partículas relativistas difundiéndose en un gas no relativista. En ambos casos el término de colisión se puede aproximar por un operador diferencial actuando sobre la función de distribución. En el primer caso se obtiene una ecuación tipo Fokker-Planck similar a la ecuación para el movimiento browniano del caso no relativista. En el segundo caso se llega a una ecuación semejante a la de Fokker-Planck más un término lineal.

Agradecimientos

Deseo expresar mi agradecimiento a las personas que me apoyaron en la realización de esta tesis tanto de manera personal como académica. Agradezco a mis padres Mercedes y Guillermo, a mi hermano Manuel, a Ariadna y demás familiares y amigos.

Quiero reconocer el respaldo brindado por CONACYT a través de la beca nacional 192994 y a través de la beca mixta que se me aprobó para la estancia en la UFPR en Brasil, así como al apoyo parcial del proyecto SEP-CONACYT 51132. Agradezco a mis asesores Hugo A. Morales Técoatl y Leonardo Dagdug Lima por sus enseñanzas y por su guía durante el desarrollo de esta tesis. Asimismo, agradezco a la Dra. Rosa María Velasco por sus valiosos comentarios.

También deseo agradecer al Profesor Gilberto M. Kremer, con quién desarrollé parte de este proyecto, tanto por sus lecciones en teoría cinética relativista, como por su hospitalidad en la UFPR durante mi estancia en Curitiba.

G. C. A.

México D. F., Mayo 2007

Índice general

1. Introducción	4
2. Elementos de Teoría Cinética no Relativista	8
2.1. Fundamentación heurística de la ecuación de Boltzmann	8
2.2. Ecuación de transferencia	16
2.3. Función de distribución de Maxwell-Boltzmann	17
2.4. Método de Chapman-Enskog	19
2.5. Ecuación de Fokker-Planck y teoría cinética	21
2.5.1. Ecuación de Fokker-Planck para una mezcla de dos compo- nentes a partir de la ecuación de Boltzmann	22
2.5.2. Solución a la ecuación de Fokker-Planck	25
3. Teoría Cinética Relativista	29
3.1. Elementos de relatividad especial	29
3.1.1. Cinemática y dinámica relativista	29
3.1.2. Fluidos relativistas	37
3.2. Descripción heurística de la ecuación de Boltzmann relativista	43
3.2.1. Función de distribución relativista	43
3.2.2. Ecuación de Boltzmann relativista sin colisiones	45
3.2.3. Ecuación de Boltzmann relativista con colisiones	47
3.3. Invariantes de colisión relativistas, momentos de la distribución y ecuaciones de balance	52
3.4. Función de distribución de Maxwell-Jüttner	54
4. Ecuación tipo Fokker-Planck a partir de la Teoría Cinética Rela- tivistista	60
4.1. Ecuación de Fokker-Planck relativista para un gas de una compo- nente. Ecuación de Landau	60
4.2. Ecuación tipo Fokker-Planck relativista para la difusión en una mez- cla binaria	70
4.2.1. Difusión de partículas no relativistas en un gas relativista . . .	72
4.2.2. Difusión de partículas relativistas en un gas pesado no rela- tivistista: Gas de Lorentz.	79

5. Conclusiones y Perspectivas	84
A. Procesos Estocásticos	90
A.1. La ecuación de Langevin y el movimiento browniano	90
A.2. La ecuación de Fokker-Planck	94
A.3. Procesos estocásticos relativistas	96
B. Funciones de Bessel Modificadas	100

Índice de figuras

2.1. Espacio μ para un conjunto de \mathcal{N} partículas.	9
2.2. Dispersión de una parícula con velocidad \mathbf{g}	11
2.3. Cilindro diferencial. Relación entre b y χ	12
2.4. Dispersión de esferas duras.	12
2.5. Proceso de dispersión indicando el ángulo sólido Ω	13
2.6. Colisiones directa e inversa	15
2.7. Función de distribución de Maxwell-Boltzmann	19
2.8. Gráfica tridimensional de la evolución temporal de la función de distribución	28
2.9. Evolución temporal de la función de distribución	28
3.1. Representación de dos sistemas inerciales	30
3.2. Cono de luz.	33
3.3. Línea de mundo	33
3.4. Contracción de la longitud y densidad numérica	37
3.5. Representación en diagramas de espacio-tiempo del volumen inicial del sistema y de su evolución temporal	44
3.6. Tubo de mundo	44
3.7. Vector normal a la 3-superficie	45
3.8. Tubo de líneas de mundo de las partículas.	46
3.9. Hipersuperficie del tubo de mundo	46
3.10. Colisiones entre partículas en el espacio-tiempo	48
3.11. Cilindro de colisión en función de la sección transversal diferencial	50
3.12. Función de distribución de Maxwell-Jüttner	58
4.1. Elección de coordenadas para el momento relativo \mathbf{Q} y \mathbf{Q}'	63
A.1. Movimiento Browniano	93

Capítulo 1

Introducción

La teoría cinética relativista nació en 1911 cuando Jüttner derivó la función de distribución del equilibrio para un gas relativista simple [1]. En 1928 también estableció la forma de la distribución del equilibrio válida para fermiones y bosones que obedecen estadísticas cuánticas [2].

En 1935 Walker da el siguiente paso hacia la descripción del gas relativista encontrando la ecuación de evolución que debe satisfacer la función de distribución, en el caso sin colisiones. La generalización relativista de la ecuación de Boltzmann incluyendo colisiones fue dada por Lichnerowicz y Marrot en 1940 [3].

Uno de los propósitos de la teoría cinética es derivar leyes macroscópicas con base en las ecuaciones de evolución microscópicas. Con estas ideas en mente Marriot y Taub [4] fueron los primeros en mostrar que las leyes de conservación de masa y de energía-momento pueden obtenerse para el gas relativista.

En su libro [5], Synge describe los resultados más importantes para gases relativistas en equilibrio e introduce la notación 4-dimensional.

La década de 1960 fue muy importante y fértil para la teoría cinética relativista. A principios de los 60's Israel [6] y Kelly [7], entre otros autores, adaptaron los métodos de Chapman-Enskog y Grad al dominio de la relatividad. Israel también estudió generalizaciones a sistemas estándar como las partículas de Maxwell. Con estos métodos se pudieron calcular los coeficientes de transporte para el gas relativista a partir de la ecuación de Boltzmann covariante. Una de las consecuencias más importantes es que el gas relativista tiene viscosidad volumétrica a diferencia del gas usual no relativista. Este resultado tiene importantes repercusiones, por ejemplo en el efecto de la viscosidad de los neutrinos en la evolución del universo, el estudio de la formación de galaxias, estrellas de neutrones, etc.

La ecuación de Boltzmann relativista incluyendo el efecto de campos gravitacionales fue escrita por Chernikov [8]. Posteriormente, Stewart [9] hace una descripción de la teoría en espacios curvos. Es en este trabajo, junto con el de Ehlers [10], donde se construye el formalismo matemático de la teoría cinética en el contexto de la relatividad general.

En su libro de 1980 [11] de Groot, van Leeuwen y van Weert estudian la deduc-

ción de la ecuación de Boltzmann a partir de la dinámica subyacente a un sistema de partículas cuánticas relativistas; esta dinámica es proporcionada por la teoría cuántica de campo. En ese trabajo se calculan los coeficientes de transporte para sistemas específicos que tienen un papel importante en teorías astrofísicas y cosmológicas. Sin embargo, no estudian los efectos del campo gravitacional.

La monografía más reciente en el tema es el libro de Cercignani y Kremer de 2002 [12]. En el, además de una revisión de la teoría cinética relativista, se estudian mezclas de gases relativistas en donde ocurren reacciones químicas o nucleares y se analiza la propagación de ondas de choque en un gas relativista.

En esta tesis se siguen los esquemas presentados en los textos [11] y [12].

La teoría cinética relativista tiene una extensa gama de aplicaciones. Históricamente entre las primeras se encuentra el trabajo de Chandrasekhar [13] quien desarrolló la teoría de la estructura estelar para estrellas en equilibrio y en estado estacionario.

En cosmología al estudiar las épocas tempranas en la vida del universo es necesario considerar ciertos procesos disipativos. Por ejemplo, la época del desacoplamiento entre la radiación y la materia. Con herramientas de teoría cinética se ha intentado explicar por qué la radiación cósmica de fondo tiene una distribución de radiación de cuerpo negro. En [14], Bernstein estudia la ecuación de Boltzmann para la métrica de Robertson-Walker y encuentra por ejemplo, que en general no existe solución de equilibrio para la función de distribución de un gas en esa métrica. Por otro lado las reacciones durante la época de la nucleosíntesis ocurren fuera de equilibrio. En el universo temprano las especies que existían (neutrinos, fotones, electrones y positrones) eran todas relativistas. Es clara la necesidad de una teoría cinética relativista para investigar la evolución e interacciones entre las especies en esa época. De alguna forma, la mayor parte de la teoría cosmológica surge de resolver la ecuación de Boltzmann para el universo en expansión con fotones, neutrinos y materia oscura [15], [16], [17].

Las aplicaciones de la teoría cinética relativista en astrofísica son muy diversas. Por ejemplo, en el estudio de los *jets relativistas* (flujos de plasmas colimados con velocidades cercanas a la de la luz), modelos para los destellos de rayos gamma, efectos disipativos producidos por la presencia de vorticidad en estrellas de neutrones, etc. Una revisión de las aplicaciones se puede encontrar en [18] y en [19] vol. II.

Otra aplicación interesante es el efecto Sunyaev-Zeldovich (ver por ejemplo [20] y [21]), donde los fotones de la radiación cósmica de fondo pueden interactuar con electrones libres que se encuentran en ciertas regiones del universo, por ejemplo cercanos a cúmulos de galaxias. Ese proceso afecta la distribución de la radiación. Los primeros intentos para explicar este efecto se hicieron a través de ecuaciones de difusión. Este efecto permite calcular parámetros cosmológicos como la constante de Hubble, el corrimiento al rojo, etc.

Una de las dificultades para tratar la ecuación de Boltzmann, tanto no relativista como relativista, radica en que la expresión para el término de colisión es un término integral del producto de funciones de distribución. Para poder obtener información

de la ecuación de Boltzmann sin tratar directamente con el término de colisión se han propuesto modelos que simplifican la estructura del término de colisión manteniendo sus propiedades fundamentales¹. En el caso de la teoría cinética relativista los modelos que se han propuesto son el modelo de Marle y el modelo de Anderson y Witting² que son extensiones relativistas del modelo BGK de la teoría no relativista. La idea consiste en reemplazar la integral por un término proporcional a la función de distribución con un tiempo característico relacionado al tiempo entre colisiones³. No obstante, existen otros métodos para aproximar el término de colisión. Un método muy interesante consiste en suponer que durante una colisión binaria existe una transferencia de momento muy pequeña⁴, en cuyo caso la integral se puede aproximar por un término en derivadas parciales, de tal forma que la ecuación de Boltzmann se reduce a una ecuación diferencial. En el caso no relativista este término es de la misma forma que la ecuación de Fokker-Planck proveniente de procesos difusivos y estocásticos⁵.

El propósito del presente trabajo es investigar e implementar los métodos que llevan a aproximar la integral de colisión por un operador diferencial en el caso de la ecuación de Boltzmann relativista.

Este trabajo ha resultado necesariamente extenso debido a que se trató de hacer lo más auto-contenido posible para incluir lectores que no estén familiarizados con los temas que se requieren para abordar la teoría cinética relativista. Asimismo se intentó presentar los resultados y cálculos con una notación homogénea. De esta forma aquellos lectores que tengan conocimientos previos en teoría cinética pueden omitir la lectura del capítulo 2. Por otro lado aquellos con estudios anteriores en relatividad pueden excluir la sección 3.1.

La tesis está estructurada de la siguiente manera. En el capítulo 2 se hace una revisión de la teoría cinética no relativista. Se estudia una forma heurística para obtener la ecuación de Boltzmann y se obtiene la función de distribución para el estado de equilibrio cuando se anula el término de colisión. En la última sección de ese capítulo se presenta un método para aproximar el término de colisión de la ecuación de Boltzmann para el caso de una mezcla binaria de dos especies cuya masa y densidad difiere considerablemente. En ese caso se puede aproximar la integral de colisión por un término diferencial del tipo Fokker-Planck. La ecuación obtenida resulta ser idéntica con la ecuación de Fokker-Planck para el movimiento browniano proveniente de los procesos estocásticos.

¹Esencialmente esas las propiedades están relacionadas con los invariantes colisionales y el teorema H.

²Ver [12].

³Ver [22] para el caso no relativista.

⁴Los detalles se verán en los capítulos 2 y 4 respectivamente

⁵La derivación de la ecuación de Fokker-Planck partiendo de la ecuación de Boltzmann puede consultarse en los trabajos de Landau [23] para el caso de interacciones coulombianas, de Green [24] y de Wang Chang y Uhlenbeck [25] para una mezcla de dos componentes, mientras que partiendo de la teoría de los procesos estocásticos puede consultarse el trabajo de Chandrasekhar [26] o bien un texto de procesos estocásticos como el libro de Gardiner [27].

En la primera sección del capítulo 3 se expone una revisión de los conceptos básicos de la relatividad especial y de la hidrodinámica relativista que servirán para abordar la versión relativista de la teoría cinética la cual se desarrolla en las tres siguientes secciones del capítulo donde se describe la ecuación de Boltzmann relativista y su solución de equilibrio.

En el capítulo 4 contiene los principales resultados obtenidos en el presente trabajo. Se describe la manera de aproximar el término de colisión de la ecuación relativista de Boltzmann por operadores diferenciales para diversos casos. El primer caso es un gas relativista de una componente en el cual la transferencia de momento entre las partículas es pequeña, para este sistema se obtiene una ecuación tipo Fokker-Planck conocida como ecuación de Landau. En el caso de una mezcla binaria se tienen dos subcasos, el primero de ellos consiste en un gas relativista ligero donde se difunden partículas pesadas no relativistas. En este caso la aproximación que se obtiene es una ecuación tipo Fokker-Planck cuyo límite no relativista lleva a la misma ecuación estudiada en la sección 2.5, pero ahora incluyendo correcciones relativistas a los coeficientes de transporte. También se calcula el límite ultra relativista. Del mismo modo se estudia el caso inverso donde partículas relativistas ligeras se difunden en un gas no relativista pesado, este es conocido como gas de Lorentz. Se hacen algunas observaciones al caso general de dos especies relativistas donde la aproximación no se puede aplicar directamente.

Finalmente se tiene un capítulo con la discusión de las conclusiones y las perspectivas de los desarrollos de la tesis. Asimismo se incluyen dos apéndices, el primero con una revisión de los procesos estocásticos, el movimiento browniano y su relación con la ecuación de Fokker-Planck. En el segundo apéndice se repasan propiedades generales de las funciones de Bessel, las cuales se utilizan en la formulación de la teoría cinética relativista.

Capítulo 2

Elementos de Teoría Cinética no Relativista

En este primer capítulo se hace una revisión de los elementos de teoría cinética no relativista que serán necesarios para abordar la teoría cinética relativista. Se estudia la fundamentación de la ecuación de Boltzmann para la evolución de la distribución de un sistema de partículas. Se encuentra su solución de equilibrio y se esboza el método de solución de Chapman y Enskog. Por otra parte se analiza un método de aproximación al término integral de colisión de la ecuación de Boltzmann, para una mezcla de dos especies con características particulares, que lo transforma en un operador diferencial tipo Fokker-Planck.

2.1. Fundamentación heurística de la ecuación de Boltzmann

Considérese un sistema formado por \mathcal{N} partículas de masa m contenido en un volumen \mathcal{V} . Las partículas de este sistema están caracterizadas a través de sus posiciones y sus velocidades que corresponden a puntos en el espacio hexadimensional (\mathbf{x}, \mathbf{v}) comúnmente llamado espacio μ . En este espacio el sistema de \mathcal{N} partículas será descrito por \mathcal{N} puntos correspondientes a las posiciones y velocidades de cada partícula. Hay que notar que este espacio no coincide con el espacio fase del sistema que es un espacio de $6\mathcal{N}$ -dimensiones.

Para describir este sistema se define una función de distribución $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ de forma tal que

$$N(t) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x}d\mathbf{v}, \quad (2.1)$$

es el número de partículas que, al tiempo t , se encuentran en el elemento de volumen entre \mathbf{x} y $\mathbf{x} + d\mathbf{x}$, y que tienen velocidades entre \mathbf{v} y $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ (fig. 2.1). Es claro que al integrar sobre el volumen y todas las posibles velocidades, el resultado será el

número total de partículas en el sistema¹

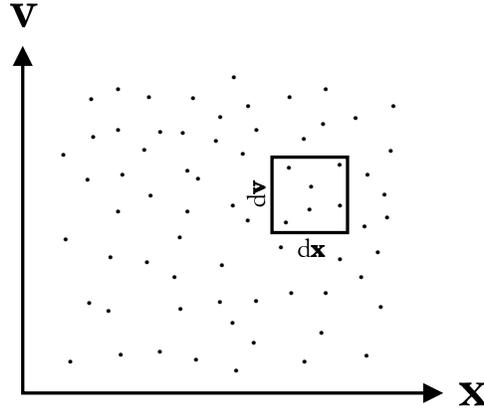


Figura 2.1: Espacio μ para un conjunto de \mathcal{N} partículas. Se muestra el elemento de volumen $d\mathbf{x}d\mathbf{v}$ en dicho espacio.

$$\mathcal{N} = \int \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{x}d\mathbf{v}. \quad (2.2)$$

Supóngase que el sistema está sujeto a un campo externo \mathbf{F} , de tal manera que en un tiempo posterior $t' = t + dt$, las partículas cambiarán sus posiciones y velocidades debido a la acción del campo externo, a un intervalo $d\mathbf{x}'d\mathbf{v}'$ alrededor de \mathbf{x}' y \mathbf{v}' dadas por

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v}dt, \quad (2.3)$$

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \frac{\mathbf{F}}{m}dt. \quad (2.4)$$

De esta manera el número de partículas en este nuevo volumen $d\mathbf{x}'d\mathbf{v}'$ se puede escribir

$$N(t + dt) = f(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t')d\mathbf{x}'d\mathbf{v}'. \quad (2.5)$$

Cuando existen interacciones entre las partículas se produce un cambio en N al evolucionar el elemento de volumen de espacio μ . Este cambio está dado por

$$dN = N(t + dt) - N(t) = f(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t')d\mathbf{x}'d\mathbf{v}' - f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)d\mathbf{x}d\mathbf{v}. \quad (2.6)$$

El elemento de volumen en el espacio μ puede distorsionarse bajo la evolución de las partículas, la relación entre el nuevo elemento y el anterior está dada por

$$d\mathbf{x}'d\mathbf{v}' = |J|d\mathbf{x}d\mathbf{v}, \quad (2.7)$$

¹Si $\mathcal{F}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ es la función de distribución de una partícula, entonces la función de distribución $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ es tal que $f = \mathcal{N}\mathcal{F}$, es decir, el sistema se describe como si fueran \mathcal{N} replicas de una sola partícula.

donde $|J|$ es el Jacobiano de la transformación entre (\mathbf{x}, \mathbf{v}) y $(\mathbf{x}', \mathbf{v}')$. La matriz Jacobiana y su determinante toman la forma

$$|J| = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & dt & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & dt & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & dt \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \frac{dt}{m} & \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \frac{dt}{m} & \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \frac{dt}{m} & 1 + \frac{\partial F_1}{\partial v_1} \frac{dt}{m} & \frac{\partial F_2}{\partial v_1} \frac{dt}{m} & \frac{\partial F_3}{\partial v_1} \frac{dt}{m} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \frac{dt}{m} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \frac{dt}{m} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \frac{dt}{m} & \frac{\partial F_1}{\partial v_2} \frac{dt}{m} & 1 + \frac{\partial F_2}{\partial v_2} \frac{dt}{m} & \frac{\partial F_3}{\partial v_2} \frac{dt}{m} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \frac{dt}{m} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \frac{dt}{m} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \frac{dt}{m} & \frac{\partial F_1}{\partial v_3} \frac{dt}{m} & \frac{\partial F_2}{\partial v_3} \frac{dt}{m} & 1 + \frac{\partial F_3}{\partial v_3} \frac{dt}{m} \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Cuando el determinante se calcula hasta términos de primer orden en dt se obtiene

$$|J| = 1 + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\mathbf{F}}{m} dt + \mathcal{O}(dt^2). \quad (2.9)$$

Por otro lado, si se desarrolla en serie de Taylor $f(\mathbf{x} + \mathbf{v}dt, \mathbf{v} + \frac{1}{m}\mathbf{F}dt, t + dt)$ alrededor del punto $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ hasta primer orden en dt , se obtiene

$$f\left(\mathbf{x} + \mathbf{v}dt, \mathbf{v} + \frac{1}{m}\mathbf{F}dt, t + dt\right) \approx f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}dt + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}}dt + \frac{\partial f}{\partial t}dt, \quad (2.10)$$

sustituyendo (2.9) y (2.10) en la ecuación (2.6), y tomando en cuenta que $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$ y $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}/m$, se obtiene que

$$\frac{dN}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (f\mathbf{F}) \right) dx dv. \quad (2.11)$$

Para calcular el cambio debido a las interacciones entre las partículas correspondiente a (2.11) se hacen varias suposiciones:

- Sólo se consideran encuentros entre pares de partículas (colisiones binarias). Esto se logra al suponer un gas diluido.
- La función de distribución f no influye sobre la sección transversal diferencial.
- La función de distribución f no varía con el tiempo de duración de un encuentro, ni para distancias del orden del alcance del potencial. Se necesitan muchos encuentros para que f cambie considerablemente.
- En cada punto del espacio μ los valores que toma la distribución f para distintos valores de velocidad no están relacionados. A esta suposición se le llama *hipótesis de caos molecular*².

²Esta es una hipótesis completamente probabilística que nada tiene que ver con la dinámica del sistema. Sea $F_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ la función de distribución de dos partículas que a un tiempo dado tienen ciertas velocidades \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 se encuentran en un volumen dado. Se introduce la suposición de que este evento sea el resultado de dos eventos independientes, es decir, $F_2(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = f(\mathbf{v}_1)f(\mathbf{v}_2)$. Esto implica precisamente que las velocidades de las partículas no están correlacionadas.

Dadas estas suposiciones considérense dos partículas con velocidades \mathbf{v} y \mathbf{v}_1 respectivamente, su velocidad relativa será $\mathbf{g} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}$. Un encuentro entre ambas partículas puede considerarse relativo a una de ellas, la de velocidad \mathbf{v} , por ejemplo, y reducirse al problema de una partícula con velocidad \mathbf{g} dispersada por un centro de repulsión situado en la posición de la partícula con velocidad \mathbf{v} . Este proceso está caracterizado por el parámetro de impacto b que es la distancia ortogonal entre la recta que coincide con la velocidad relativa inicial y una recta paralela que pasa por el centro repulsivo (fig. 2.2).

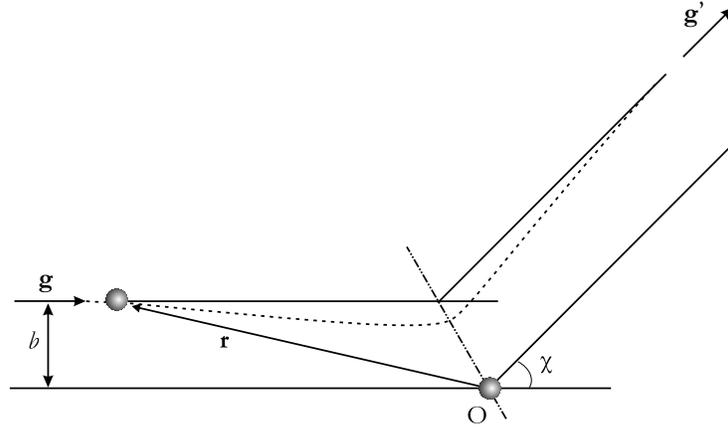


Figura 2.2: Proceso de dispersión de la partícula 1 relativo a la partícula con velocidad \mathbf{v} considerada como fija. Se esquematizan el parámetro de impacto b y el ángulo de dispersión χ .

Para este encuentro existe un plano perpendicular a la velocidad relativa \mathbf{g} donde hay un región acotada por los círculos de radio b y $b+db$. De esta manera la partícula que será dispersada, sólo puede encontrarse en el cilindro diferencial de volumen $gdtb d\epsilon db$. Siendo $d\epsilon$ el ángulo azimutal como se muestra en la figura 2.3.

Se considera ahora un haz de partículas con velocidad \mathbf{v}_1 . La pregunta, ¿cuántos encuentros pueden tener estas partículas con el centro repulsivo? se puede responder al considerar un cilindro asociado con el centro repulsivo y cada una de las partículas con velocidad \mathbf{v}_1 . Se supone que estos cilindros no se superponen (fig. 2.4). Como N_1 es el número de estas partículas está dado por (2.1), como además se tienen tantos cilindros como partículas, el volumen de todos los cilindros será

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}_1 g dt b d\epsilon db. \quad (2.12)$$

Esta cantidad representa el número de encuentros que partículas con velocidad \mathbf{v}_1 pueden tener con el centro repulsivo en un volumen $d\mathbf{x}$. Al haber $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v}$ partículas con velocidad \mathbf{v} en el volumen $d\mathbf{x}$, entonces el número de encuentros entre las partículas con velocidad \mathbf{v} y las que tienen velocidad \mathbf{v}_1 será

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d\mathbf{v} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v}_1 g dt b d\epsilon db. \quad (2.13)$$

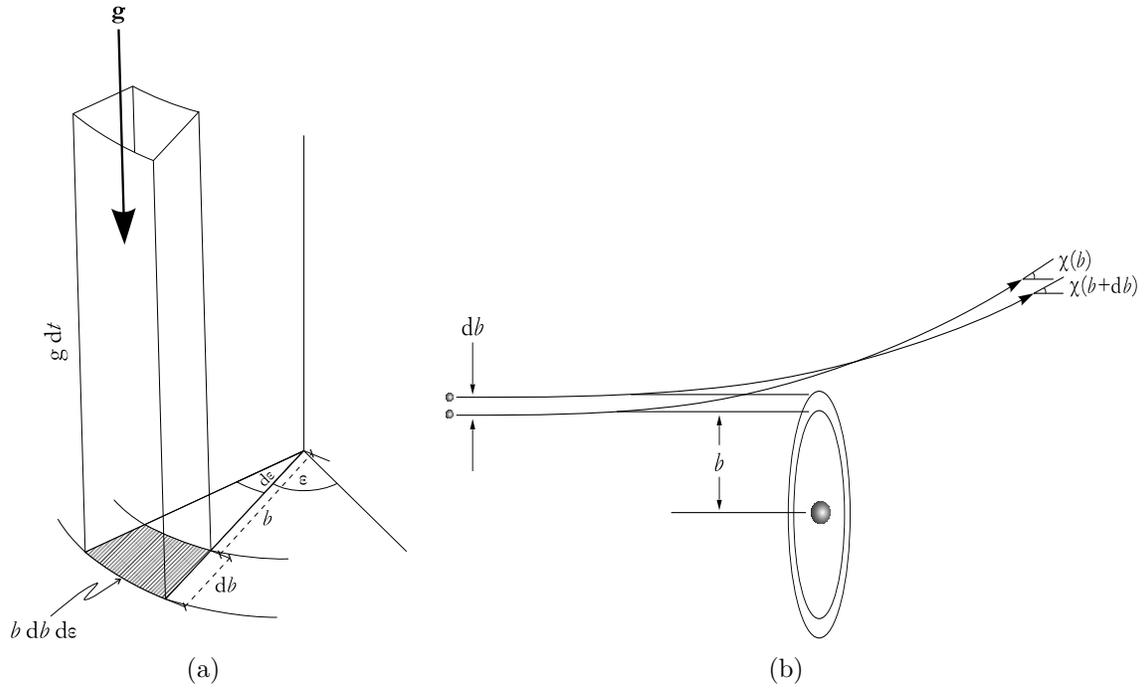


Figura 2.3: (a) Cilindro diferencial de volumen $g dt b db d\epsilon$. (b) Relación entre el parámetro de impacto b y el ángulo de dispersión χ . Nótese que χ decrece como b aumenta.

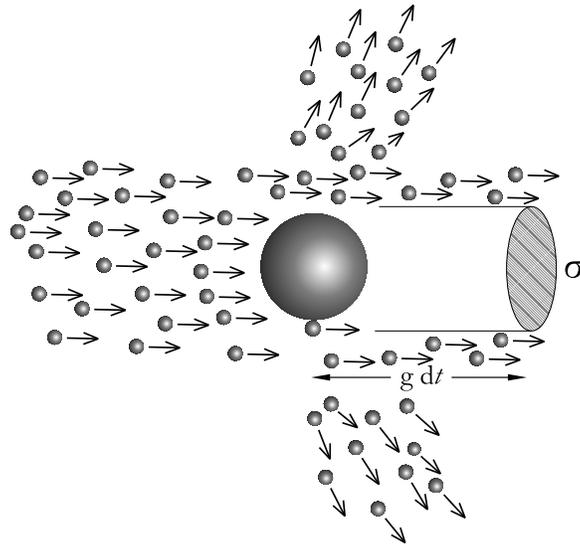


Figura 2.4: Dispersión de un haz de esferas duras por un blanco fijo. Las partículas del haz interactúan con el blanco sólo si sus centros caen dentro del área σ . A esta cantidad se le conoce como sección transversal total σ y es un área efectiva de interacción.

El área diferencial $b d\varepsilon db$ puede escribirse en términos de la llamada *sección transversal diferencial de colisión*³.

La *sección transversal total de colisión* σ es un área efectiva de colisión. Entre mayor sea la sección transversal mayor será el número de partículas dispersadas. En la figura 2.4 puede verse la sección transversal total para un haz de esferas duras dispersado por un blanco fijo.

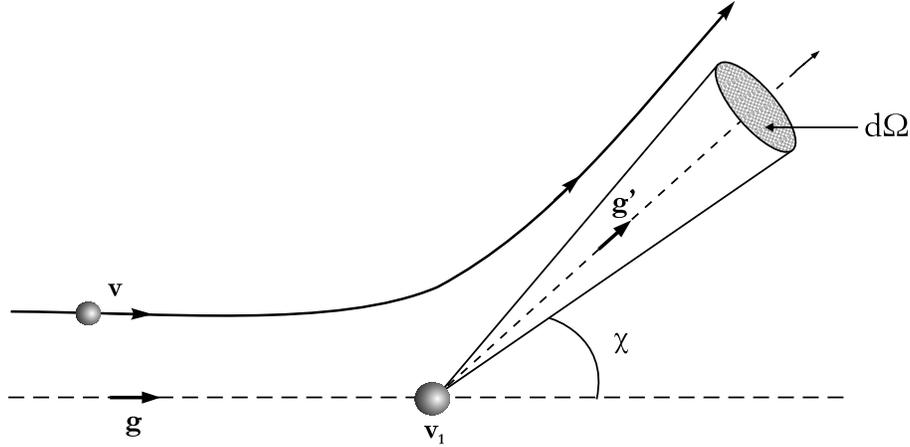


Figura 2.5: Proceso de dispersión indicando el ángulo sólido Ω .

Para interacciones distintas a las colisiones entre esferas duras la sección transversal total se obtiene al integrar la sección transversal diferencial $\sigma(\chi)$ sobre todas las direcciones

$$\sigma = \int \sigma(\chi) d\Omega, \quad (2.14)$$

donde $d\Omega = \sin \chi d\chi d\varepsilon$ es el ángulo sólido o elemento de área en la esfera unitaria. La sección transversal diferencial $\sigma(\chi)$ depende del tipo de partículas que intervengan en el proceso, del tipo de interacción entre ellas y de su energía y en general se define como el cociente entre el número de partículas dispersadas por unidad de tiempo y por unidad de ángulo sólido, y el flujo de partículas incidentes, lo cual se expresa como

$$\sigma(\chi) = \frac{b db d\varepsilon}{d\Omega} = \frac{b}{\sin \chi} \left| \frac{db}{d\chi} \right|, \quad (2.15)$$

en la expresión anterior se introduce el valor absoluto ya que $\sigma(\chi)$ es siempre positiva⁴.

Al sustituir (2.15) la expresión (2.13) toma la forma

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) d\mathbf{x} d\mathbf{v} d\mathbf{v}_1 g dt \sigma d\Omega. \quad (2.16)$$

³Ver por ejemplo [28].

⁴En la figura 2.3 puede verse que b aumenta como χ disminuye, de ahí la necesidad del valor absoluto en (2.15).

En cada encuentro la velocidad de las partículas cambia, esto implica que sale del intervalo de velocidades \mathbf{v} y $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$. Así el número total de partículas que salen del intervalo de velocidades debido a encuentros con otras partículas esta dado por la integración de (2.16) en todas las velocidades \mathbf{v}_1 y todos los ángulos χ y ε

$$dN^- = d\mathbf{x}d\mathbf{v}dt \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t)g\sigma d\Omega d\mathbf{v}_1. \quad (2.17)$$

Si se consideran los encuentros inversos, es decir, los encuentros tales que la velocidad de la partícula después del encuentro esté en el intervalo \mathbf{v} y $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, con los mismos argumentos que antes se puede escribir

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t)f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t)d\mathbf{x}d\mathbf{v}'d\mathbf{v}'_1g'dt\sigma'd\Omega'. \quad (2.18)$$

Sin embargo, la expresión anterior se ve modificada haciendo las siguientes consideraciones: el Jacobiano de la transformación de velocidades es unitario, lo cual implica que $d\mathbf{v}d\mathbf{v}_1 = d\mathbf{v}'d\mathbf{v}'_1$. La magnitud de la velocidad relativa es la misma antes y después de los encuentros $g = g'$. Del mismo modo el producto del ángulo sólido y la sección transversal diferencial no cambia⁵ $\sigma d\Omega = \sigma' d\Omega'$. Así se puede llegar a que

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t)f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t)d\mathbf{x}d\mathbf{v}d\mathbf{v}_1gdt\sigma d\Omega, \quad (2.19)$$

es el número total de encuentros inversos. De esta forma el número total de partículas que entra en el intervalo de velocidades después del encuentro se obtiene al integrar de (2.19) en todas las velocidades \mathbf{v}_1 y todos los ángulos

$$dN^+ = d\mathbf{x}d\mathbf{v}dt \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t)f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t)g\sigma d\Omega d\mathbf{v}_1. \quad (2.20)$$

Sumando las partículas que entran y restando las que salen puede escribirse el cambio neto en el número de partículas debido a los encuentros

$$dN = dN^+ - dN^-. \quad (2.21)$$

Finalmente la ecuación (2.11) toma la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (f\mathbf{F}) = \int (f'f'_1 - ff_1)g\sigma d\Omega d\mathbf{v}_1, \quad (2.22)$$

donde $f'_1 = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t)$. Esta es una ecuación integro-diferencial no lineal que describe la evolución de la función de distribución f . Es conocida como ecuación de Boltzmann ya que fue propuesta originalmente por L. Boltzmann en 1872.⁶

⁵Las colisiones inversas se pueden ver como una composición de una inversión temporal ($t \rightarrow -t$) y una inversión espacial ($\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$), de forma tal que la cantidad $\sigma' d\Omega' = \sigma d\Omega$. A este hecho junto con la invariancia de la velocidad relativa, se le conoce como principio de reversibilidad microscópica.

⁶Este desarrollo se encuentra en el trabajo original de Boltzmann [29] págs. 110-131. Pueden consultarse además [30], [31].



Figura 2.6: A través de las colisiones directas las partículas salen del intervalo de velocidades \mathbf{v} y $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$, mientras que las colisiones inversas se dan entre partículas con velocidades fuera del intervalo que al chocar adquieren velocidades en \mathbf{v} y $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$.

Por último es importante señalar como se comporta la ecuación de Boltzmann ante transformaciones de inversión temporal, es decir cuando se invierten las direcciones en las velocidades. Si $\phi = f(-\mathbf{v}, -t)$, se puede ver que el miembro izquierdo de la ecuación (2.22) se transforma en

$$- \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\phi \mathbf{F}) \right], \quad (2.23)$$

mientras que el lado derecho, llamado término de colisión y denotado por $\mathcal{J}(\phi, \phi)$, toma la forma⁷

$$\mathcal{J}(\phi, \phi) = \int (\phi' \phi'_1 - \phi \phi_1) g \sigma d\Omega d\mathbf{v}_1, \quad (2.24)$$

por lo tanto

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (\phi \mathbf{F}) = -\mathcal{J}(\phi, \phi). \quad (2.25)$$

La ecuación de Boltzmann no es invariante bajo inversiones temporales, contrario a las ecuaciones de la dinámica de Newton. Se dice entonces que la ecuación de Boltzmann es irreversible. Este hecho es consecuencia de la hipótesis de caos molecular. Esta hipótesis requiere que las velocidades previas de las partículas que se encuentran no estén correlacionadas. Sin embargo, después de la colisión las velocidades de las partículas se ven afectadas entre si y por tanto están muy correlacionadas. Al realizar una transformación de inversión temporal se invierten también las velocidades de modo tal que las partículas que acababan de colisionar regresan al encuentro lo cual implica que sus velocidades están correlacionadas *antes* de la colisión y por tanto no se cumple la hipótesis de caos molecular. Es decir, la inversión temporal induce correlaciones entre las partículas. Esto se observa incluso desde el

⁷Esto se encuentra debido a que existen las colisiones inversas.

término de colisión en donde se hace distinción entre las velocidades pre-colisionales y post-colisionales, lo cual, en cierta manera, introduce una dirección en el tiempo⁸.

2.2. Ecuación de transferencia

En esta sección se describe como, al conocer la solución a la ecuación de Boltzmann, se puede obtener información de las cantidades macroscópicas a partir de la dinámica microscópica. Tales cantidades se determinan a partir de la función de distribución en términos de cantidades promedio. Sea ψ una función de $(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$. El promedio de ψ se define como

$$\langle \psi \rangle = \frac{1}{n} \int \psi f d\mathbf{v}, \quad (2.26)$$

aquí n es la densidad de número de partículas que se define como

$$n(\mathbf{x}) = \int f(\mathbf{x}, \mathbf{v}) d\mathbf{v}. \quad (2.27)$$

La evolución de $\langle \psi \rangle$ se obtiene a partir de la ecuación de evolución de f , multiplicando por ψ la ecuación de Boltzmann y calculando la integral involucrada en el promedio.

$$\int \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (f \mathbf{F}) \right) \psi d\mathbf{v} = \int \int \psi (f' f'_1 - f f_1) g \sigma d\Omega d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}, \quad (2.28)$$

Se realizan integraciones por partes y se hace uso de consideraciones de simetría en las colisiones. Así se escribe la ecuación de transferencia que es una ecuación de evolución para el promedio de ψ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n \langle \psi \rangle) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (n \langle \psi \mathbf{v} \rangle) - n \left\langle \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\rangle - n \left\langle \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle - n \left\langle \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = \\ = \frac{1}{4} \int \int (\psi + \psi_1 - \psi' - \psi'_1) (f' f'_1 - f f_1) g \sigma d\Omega d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

El lado derecho de la ecuación de transferencia (2.29) representa el término de producción de la cantidad ψ debida a las colisiones. Cuando ψ es una cantidad conservada en la colisión entonces el término de producción es cero. Cuando esto

⁸El tema de la irreversibilidad en la ecuación de Boltzmann puede verse desde diversas perspectivas. Puede argumentarse que el Teorema H de Boltzmann da un criterio de irreversibilidad (Ver [30] y [31]). Puede contemplarse también el enfoque de la jerarquía BBGKY, desde el cual, la ecuación de Boltzmann es únicamente una ecuación aproximada irreversible que proviene de una ecuación exacta reversible que es la ecuación de Liouville. Un tratamiento extenso de la ecuación de Liouville y de la jerarquía BBGKY puede verse en el libro de Liboff [32], mientras que introducciones sencillas pueden consultarse en los libros de Harris [33] y Kremer [34].

sucede ψ es llamado *invariante colisional o de suma*. Dependiendo de la elección de ψ se pueden encontrar las ecuaciones de balance de distintas cantidades, por ejemplo, $\psi = m$ se reduce a la ecuación de continuidad que expresa la conservación de la masa, $\psi = m\mathbf{v}$ implica la conservación de la cantidad de movimiento, $\psi = mv^2$ la conservación de la energía y $\psi \propto \ln f$ el balance de entropía.

2.3. Función de distribución de Maxwell-Boltzmann

El equilibrio está definido como un estado estacionario el cual tiene una función de distribución tal que el término de colisión en la ecuación de Boltzmann es nulo⁹

$$\mathcal{J} \left(f^{(0)}, f_1^{(0)} \right) = \int (f'^{(0)} f_1'^{(0)} - f^{(0)} f_1^{(0)}) g \sigma d\Omega d\mathbf{v}_1 = 0. \quad (2.30)$$

Esta integral es cero si se cumple que

$$f'^{(0)} f_1'^{(0)} = f^{(0)} f_1^{(0)}, \quad (2.31)$$

o equivalentemente

$$\ln f'^{(0)} + \ln f_1'^{(0)} = \ln f^{(0)} + \ln f_1^{(0)}. \quad (2.32)$$

La última expresión es satisfecha únicamente por los invariantes colisionales. Para una colisión binaria los únicos invariantes de colisión son la masa, el vector de cantidad de movimiento y la energía. Estas cantidades cumplen con las leyes de conservación

$$m + m_1 = m + m_1, \quad (2.33)$$

$$m\mathbf{v}' + m_1\mathbf{v}'_1 = m\mathbf{v} + m_1\mathbf{v}_1, \quad (2.34)$$

$$mv'^2 + m_1v_1'^2 = mv^2 + m_1v_1^2. \quad (2.35)$$

Como de (2.32) la cantidad $\ln f^{(0)}$ es un invariante colisional, debe ser una combinación de los invariantes involucrados en la colisión

$$\ln f^{(0)} = \alpha + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{v} + \gamma v^2 \quad \Rightarrow \quad f^{(0)} = \exp \left[\alpha + \boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{v} + \gamma v^2 \right], \quad (2.36)$$

si en el argumento de la exponencial de la ecuación (2.36) se suma y resta $(1/2\gamma)\beta$ se puede completar el cuadrado en la exponencial y escribirla como

$$f^{(0)} = A \exp(\gamma \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}), \quad (2.37)$$

donde

$$A = \exp \left(\alpha - \frac{\beta^2}{4\gamma^2} \right) \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \mathbf{v} + \frac{1}{2\gamma} \boldsymbol{\beta}. \quad (2.38)$$

⁹El estado de equilibrio puede también entenderse desde la perspectiva del Teorema H de Boltzmann el cual dice que, cualquier estado inicial tiende al estado de equilibrio si y sólo si $\frac{dH}{dt} = 0$, donde $H(t) \equiv \int f \ln f d\mathbf{v} d\mathbf{x}$. Esta condición implica que la función de distribución f debe cumplir $f' f_1' = f f_1$ y por lo tanto se hace cero el término de colisión.

El coeficiente A y el vector \mathbf{B} se determinan al asegurar que la función de distribución (2.37) dé los valores de masa, densidad de momento lineal y densidad de energía definidos a través de la función de distribución

$$n = \int f^{(0)} d\mathbf{v}, \quad (2.39)$$

$$n\langle\mathbf{v}\rangle = \int \mathbf{v} f^{(0)} d\mathbf{v}, \quad (2.40)$$

$$ne = \frac{3}{2}nkT = \int \frac{m}{2}\mathbf{C} \cdot \mathbf{C} f^{(0)} d\mathbf{v}, \quad (2.41)$$

donde $\mathbf{C} \equiv \mathbf{v} - \langle\mathbf{v}\rangle$ es llamada velocidad peculiar o caótica y e es la energía promedio.

Al sustituir en la expresión para la densidad de partículas (2.39) la función de distribución (2.37) se tiene que

$$n = A \int \exp(\gamma B^2) d\mathbf{B} = 4\pi A \int \exp(\gamma B^2) B^2 dB, \quad (2.42)$$

$$A = n \left(\frac{-\gamma}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}}. \quad (2.43)$$

Por otro lado de la ecuación (2.40) se tiene

$$n\langle\mathbf{v}\rangle = \int \mathbf{B} f^{(0)} d\mathbf{B} - \frac{n}{2\gamma}\boldsymbol{\beta}. \quad (2.44)$$

Como el integrando en el primer término es una función impar de \mathbf{B} , entonces la integral es cero así

$$\langle\mathbf{v}\rangle = -\frac{1}{2\gamma}\boldsymbol{\beta}, \quad (2.45)$$

y se puede reconocer la velocidad caótica

$$\mathbf{B} = \mathbf{v} - \langle\mathbf{v}\rangle = \mathbf{C}. \quad (2.46)$$

Sustituyendo (2.43) y (2.46) en la función de distribución (2.37) se tiene

$$f^{(0)} = n \left(\frac{-\gamma}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp(\gamma C^2). \quad (2.47)$$

Finalmente se utiliza la expresión (2.41) para determinar γ

$$\frac{3}{2}kT = 2\pi m \left(\frac{-\gamma}{\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \int C^4 \exp(\gamma C^2) dC, \quad (2.48)$$

$$\gamma = -\frac{m}{2kT}. \quad (2.49)$$

Por lo tanto la expresión final de la función de distribución del equilibrio es

$$f^{(0)} = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{m}{2kT} (\mathbf{v} - \langle \mathbf{v} \rangle)^2 \right]. \quad (2.50)$$

Esta es la función de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann, propuesta por J. C. Maxwell en 1867, quién la dedujo suponiendo que, en ausencia de interacciones entre las partículas y fuerzas externas, no existen direcciones privilegiadas en las velocidades de las partículas.

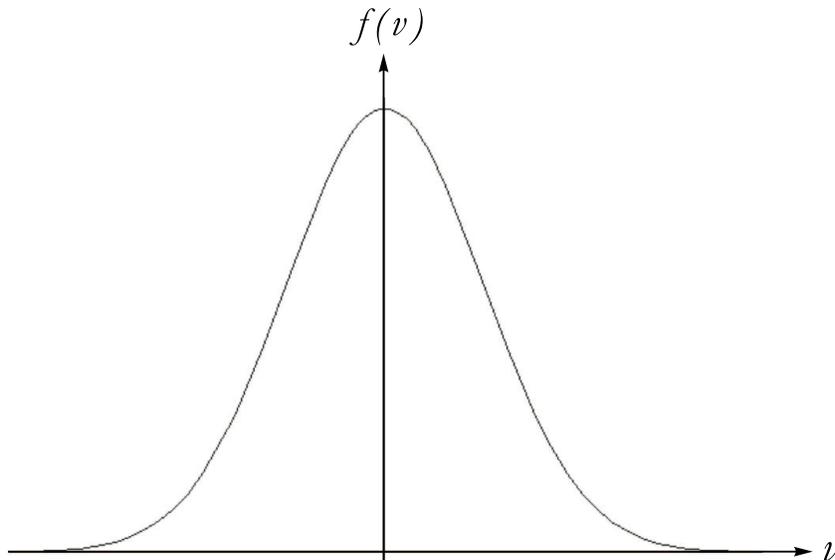


Figura 2.7: Función de distribución de velocidades de Maxwell-Boltzmann. Se grafica la función de distribución adimensional tomando $\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{0}$ y en unidades de $m = 2kT$.

2.4. Método de Chapman-Enskog

La ecuación de Boltzmann (2.22) se puede reescribir de manera adimensional, introduciendo ciertas cantidades características del sistema como la longitud típica L , la velocidad media \bar{v} , alguna densidad numérica de referencia n_0 , etc.

$$\frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{t}} + \hat{\mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \hat{f}}{\partial \hat{\mathbf{x}}} + \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{v}}} \cdot (\hat{f} \hat{\mathbf{A}}) = \frac{1}{\text{Kn}} \hat{\mathcal{J}}(\hat{f}, \hat{f}), \quad (2.51)$$

donde

$$\hat{\mathcal{J}}(\hat{f}, \hat{f}) = \int (\hat{f}' \hat{f}'_1 - \hat{f} \hat{f}_1) \hat{g} \hat{\sigma} d\Omega d\hat{\mathbf{v}}_1. \quad (2.52)$$

En estas ecuaciones

$$\hat{f} = \left(\frac{\bar{v}^3}{n_0} \right) f, \quad \hat{t} = \frac{\bar{v}}{L} t, \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\bar{v}} \mathbf{v}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{L} \mathbf{x},$$

$$\hat{\mathbf{A}} = \frac{L}{m\bar{v}^2}\mathbf{F}, \quad \hat{\mathbf{g}} = \frac{1}{\sqrt{2}\bar{v}}\mathbf{g}, \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{\pi d^2}\sigma. \quad (2.53)$$

Se define el número de Knudsen como

$$\text{Kn} = \frac{\lambda}{L} = \frac{1}{L\sqrt{2}\pi d^2 n_0}, \quad (2.54)$$

donde λ es el camino libre medio y d es el diámetro efectivo de las partículas. El número de Knudsen es un parámetro que escala el término de colisión de la ecuación de Boltzmann sin dimensiones. El método de Chapman-Enskog consiste en un desarrollo para números de Knudsen pequeños. Al escribir nuevamente la ecuación de Boltzmann con dimensiones, se escribe un parámetro adimensional ϵ que juega el mismo papel del número de Knudsen que dará el orden de las cantidades involucradas en las ecuaciones; ϵ se conoce como parámetro de pequeñez. De esta forma la ecuación de Boltzmann se escribe

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot (f\mathbf{F}) = \frac{1}{\epsilon} \mathcal{J}(f, f). \quad (2.55)$$

El número ϵ debe tender a la unidad al final del análisis. Esto es equivalente a regresar a variables con dimensiones en la ecuación (2.51). Nótese que el lado derecho de la ecuación (2.55) debe mantenerse finito ante ϵ pequeños, por esta razón se tiene la condición de que en el límite $\epsilon \rightarrow 0$, el término de colisión $\mathcal{J} \rightarrow 0$. Esto implica claramente que cuando el parámetro de pequeñez se aproxime a cero el sistema tiende al equilibrio, es decir, la función de distribución es la distribución de Maxwell-Boltzmann $f \rightarrow f^{(0)}$.

Partiendo de este hecho, la idea del método de Chapman-Enskog es desarrollar la función de distribución alrededor de la distribución de equilibrio en series del parámetro de pequeñez

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \epsilon^3 f^{(3)} + \dots \quad (2.56)$$

Se tiene además que n , $\langle \mathbf{v} \rangle$ y T deben ser los mismos para cualquier orden en el desarrollo, se escriben entonces las llamadas condiciones de compatibilidad

$$\int (f - f^{(0)}) \psi d\mathbf{v} = 0, \quad (2.57)$$

donde f está dada por la ecuación (2.56) y $\psi = 1, \mathbf{v}, mC^2/2$ son los invariantes en la colisión.

Cabe subrayar que los momentos estadísticos de orden superior de la función de distribución definidos por

$$\mathcal{T}_{i_1 i_2 \dots i_N} = \int m v_{i_1} v_{i_2} \dots v_{i_N} f d\mathbf{v}, \quad (2.58)$$

se relacionan con cantidades físicas conocidas como flujos (de calor, cantidad de movimiento etc.). Macroscópicamente estos flujos están relacionados con las fuerzas

termodinámicas que las producen. Estas relaciones se conocen como ecuaciones constitutivas.

Para considerar estas cantidades en el método de Chapman-Enskog, los flujos también se escriben como series infinitas de ϵ de la misma forma que f , así que cuando se sustituyen en las leyes de conservación surge la necesidad de desarrollar también las derivadas temporales como series en ϵ . De esta manera cada orden en ϵ corresponderá a un nivel de aproximación. A orden ϵ^0 la función de distribución es la distribución del equilibrio, los flujos son cero y las leyes de conservación son las ecuaciones de Euler. En el orden ϵ^1 existe una primera corrección a la función de distribución; aparecen aquí los flujos que satisfacen las relaciones constitutivas conocidas como ecuaciones de Navier-Stokes-Fourier, en las cuales se identifican los coeficientes de transporte. A segundo orden ϵ^2 se obtiene la corrección $f^{(2)}$ y las expresiones para los flujos son las ecuaciones de Burnett con sus respectivos coeficientes de transporte.

No es el propósito de esta sección el desarrollar en su totalidad el método de Chapman-Enskog, lo que se pretende es mostrar la motivación y fundamentos del método para comprender que son distintos los regímenes en que se puede trabajar y que cada uno da nueva información a la solución aproximada. En particular cuando se consideran términos lineales en ϵ se dice que se trabaja en el régimen de Navier-Stokes-Fourier

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)}. \quad (2.59)$$

Éste es el régimen que se considerará a lo largo del trabajo ya que esos términos son suficientes para las siguientes aproximaciones en el término de colisión de la ecuación de Boltzmann que llevan a la obtención de la ecuación de Fokker-Planck.

2.5. Ecuación de Fokker-Planck y teoría cinética

La ecuación de Fokker-Planck fue utilizada primeramente para describir el movimiento browniano. En lugar de calcular la evolución de los valores promedio como hizo Einstein, se investiga cual es la evolución temporal de la probabilidad de encontrar a la partícula browniana en cierto intervalo de velocidades al tiempo t , así la ecuación de Fokker-Planck da la evolución de esa densidad de probabilidad.

De manera más general, esta ecuación aparece al relacionar un proceso gobernado por una ecuación diferencial estocástica y la densidad de probabilidad con la cual se pesan los promedios de las cantidades macroscópicas. Es entonces una ecuación de evolución para la función de distribución de cantidades macroscópicas fluctuantes. Estas relaciones se describen en el apéndice A.

Por otra parte, de las secciones anteriores se sabe que otra ecuación que gobierna la evolución de la función de distribución es la ecuación de Boltzmann (2.22). En esta sección se estudiará las condiciones bajo las cuales el término integral de colisión de la ecuación de Boltzmann se puede aproximar por un término diferencial del

tipo Fokker-Planck. En particular, se considera el caso de una mezcla binaria en condiciones físicas similares a las del movimiento browniano.

2.5.1. Ecuación de Fokker-Planck para una mezcla de dos componentes a partir de la ecuación de Boltzmann

Se considera una mezcla binaria donde las partículas de cada especie tendrán masa m_g y m_b , respectivamente. En este caso se tiene una función de distribución y una ecuación de Boltzmann para cada especie.

$$\frac{\partial f_g}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \frac{\partial f_g}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m_g} \cdot \frac{\partial f_g}{\partial \mathbf{v}_g} = \mathcal{J}(f_g, f_g) + \mathcal{J}(f_g, f_b), \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \mathbf{v}_b \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m_b} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{v}_b} = \mathcal{J}(f_b, f_b) + \mathcal{J}(f_b, f_g), \quad (2.61)$$

El primer término del lado derecho de cada ecuación corresponde a colisiones entre partículas de la misma especie mientras que el segundo se debe a colisiones entre partículas de especies distintas.

Supóngase ahora que una de las especies está formada por partículas muy masivas y la otra de partículas muy ligeras de tal modo que $m_b \gg m_g$. A su vez el número de partículas masivas será muy pequeño¹⁰, y el número de partículas ligeras es muy grande ya que se considera como un gas de fondo. Esto quiere decir que las partículas masivas son tan escasas que los choques entre ellas se pueden despreciar $\mathcal{J}(f_b, f_b) = 0$. Del mismo modo se supone que no influyen en la distribución de las partículas del gas el cual se supondrá en equilibrio

$$f_g = f_g^{(0)}(\mathbf{v}_g) = n_g \left(\frac{m_g}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{m_g v_g^2}{2kT} \right). \quad (2.62)$$

Por lo tanto sólo es necesario escribir la ecuación para las partículas brownianas en el gas

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \mathbf{v}_b \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m_b} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{v}_b} = \mathcal{J}(f_b, f_g^{(0)}), \quad (2.63)$$

donde el término de colisión se puede expresar como

$$\mathcal{J}(f_b, f_g^{(0)}) = \int (f'_b f'_g{}^{(0)} - f_b f_g^{(0)}) g \sigma d\Omega d\mathbf{v}_g. \quad (2.64)$$

Para la función de distribución de las partículas brownianas se supondrá un desarrollo de Chapman-Enskog de orden lineal (2.59)

$$f_b = f_b^{(0)} (1 + h_b), \quad (2.65)$$

¹⁰Desde este momento en adelante a estas partículas, abusando del lenguaje se les llamará partículas brownianas (de ahí el subíndice b), por su similitud con el caso del movimiento browniano donde una partícula muy masiva se difunde en un fluido formado por partículas ligeras. Otra razón para este nombre aparecerá al final de esta sección y en el Apéndice A.

en este caso la función h_b nos dice cual es la desviación respecto a la distribución de equilibrio. En principio h_b depende de las mismas variables que f_b .

Al sustituir (2.65) en el término de colisión (2.64) se obtiene

$$\int (f_b^{(0)} f_g^{(0)} - f_b^{(0)} f_g^{(0)}) g \sigma d\Omega d\mathbf{v}_g + \int (f_b^{(0)} f_g^{(0)} h_b' - f_b^{(0)} f_g^{(0)} h_b) g \sigma d\Omega d\mathbf{v}_g. \quad (2.66)$$

Como en el equilibrio el término de colisión es cero, la primera integral de la expresión anterior es cero. Utilizando la conservación de la energía, el término de colisión se expresa como

$$\mathcal{J}(f_b, f_g^{(0)}) = f_b^{(0)} \int f_g^{(0)} (h_b' - h_b) g \sigma d\Omega d\mathbf{v}_g. \quad (2.67)$$

En esta aproximación se supondrá homogeneidad espacial, es decir que la función de distribución no varía espacialmente, lo cual es justificable dada la homogeneidad espacial del gas. Por lo tanto la dependencia de h_b será sólo en la velocidad de la partícula $h_b = h_b(\mathbf{v}_b)$. Utilizando la conservación del momento en la colisión elástica y la definición de velocidad relativa, se llega a que

$$\mathbf{v}_b' - \mathbf{v}_b = \frac{m_g}{m_b + m_g} (\mathbf{g} - \mathbf{g}') \simeq \frac{m_g}{m_b} (\mathbf{g} - \mathbf{g}'), \quad (2.68)$$

la última aproximación se basa en la relación entre masas, a saber, $m_b \gg m_g$. Debido a que el cociente de masas es muy pequeño las velocidades antes y después de la colisión son muy parecidas, esto permite desarrollar a h_b en serie de Taylor alrededor de la velocidad pre-colisional

$$h_b' - h_b = (\mathbf{v}_b' - \mathbf{v}_b) \cdot \frac{\partial h_b}{\partial \mathbf{v}_b} + \frac{1}{2} (\mathbf{v}_b' - \mathbf{v}_b) (\mathbf{v}_b' - \mathbf{v}_b) : \frac{\partial^2 h_b}{\partial \mathbf{v}_b \partial \mathbf{v}_b} + \dots \quad (2.69)$$

Se puede ahora sustituir (2.68) y (2.69) en (2.67) y así llegar a la siguiente expresión

$$f_b^{(0)} \int f_g^{(0)} \left(-\frac{m_g}{m_b} \Delta \mathbf{g} \cdot \frac{\partial h_b}{\partial \mathbf{v}_b} + \frac{1}{2} \left(\frac{m_g}{m_b} \right)^2 \Delta \mathbf{g} \Delta \mathbf{g} : \frac{\partial^2 h_b}{\partial \mathbf{v}_b \partial \mathbf{v}_b} + \dots \right) g \sigma d\Omega d\mathbf{v}_g, \quad (2.70)$$

esta expresión se puede reducir al integrar $\Delta \mathbf{g}$ en el ángulo azimutal del ángulo sólido, sin embargo aún hace falta considerar el producto $g\sigma$, recordando que la sección transversal es función de la magnitud de la velocidad relativa y del ángulo de dispersión. Para cada problema habrá una σ distinta dependiendo el potencial de interacción que se considere.

Si se considera que ambas especies están a la misma temperatura, junto con el teorema de equipartición de la energía, la energía cinética promedio de la partícula browniana cumple $m_b v_b^2 \simeq m_g v_g^2$. De esta manera se puede decir que el cociente de velocidades satisface $v_b/v_g \ll 1$ y entonces la velocidad relativa se puede aproximar como

$$\mathbf{g} = v_g \left(1 - 2 \frac{v_b}{v_g} \cos \phi + \frac{v_b^2}{v_g^2} \right)^{\frac{1}{2}} \approx v_g \left(1 - \frac{v_b}{v_g} \cos \phi + \dots \right), \quad (2.71)$$

esto permite desarrollar ahora el producto $g\sigma$

$$g\sigma(\chi, g) \approx v_g\sigma(\chi, v_g) - v_b \cos \phi \frac{\partial}{\partial v_g}(v_g\sigma(\chi, v_g)) + \dots \quad (2.72)$$

Se sustituyen ahora estos desarrollos en la integral de colisión (2.70), y se realizan las integraciones considerando los términos de orden más bajo tanto en el cociente de masas, como en el de velocidades. Así se obtiene la siguiente expresión diferencial para el término de colisión

$$\mathcal{J} = \eta \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_b} \cdot (\mathbf{v}_b f_b) + \frac{kT}{m_b} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_b} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_b} f_b \right), \quad (2.73)$$

donde η es el coeficiente de fricción dinámica que proporciona un tiempo de relajamiento característico del sistema y está dado por la siguiente integral

$$\eta = \frac{8}{3} \frac{m_g^2 \pi^2}{m_b kT} \int_0^\infty f_g^{(0)}(v_g) v_g^5 dv_g \int_0^\pi \sigma(\chi, v_g) (1 - \cos \chi) \sin \chi d\chi. \quad (2.74)$$

Cuando se sustituye la función de distribución del equilibrio de las partículas del gas (2.62) en (2.74) se tiene

$$\eta = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{2\pi} n_g}{m_b} \frac{(m_g)^{\frac{7}{2}}}{(kT)^{\frac{5}{2}}} \int_0^\infty v_g^5 e^{\left(-\frac{m_g v^2}{2kT}\right)} dv_g \int_0^\pi \sigma(\chi, v_g) (1 - \cos \chi) \sin \chi d\chi. \quad (2.75)$$

La ecuación resultante incluyendo posibles fuerzas externas es:

$$\frac{\partial f_b}{\partial t} + \frac{\mathbf{F}}{m_b} \cdot \frac{\partial f_b}{\partial \mathbf{v}_b} = \eta \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_b} \cdot (\mathbf{v}_b f_b) + \frac{kT}{m_b} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_b} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_b} f_b \right). \quad (2.76)$$

Esta ecuación para la evolución de f_b se conoce como ecuación de *Fokker-Planck* para el movimiento browniano. Fue obtenida por Chandrasekhar en 1943 a partir de la teoría de procesos estocásticos para el caso particular del movimiento browniano [26]. Fue obtenida también por Green [24] y Wang Chang y Uhlenbeck [25] a partir de la teoría cinética con argumentos similares a los presentados aquí.

Como un ejemplo específico pueden tomarse esferas duras cuya sección transversal diferencial σ es constante. El coeficiente de fricción dinámica resultante es

$$\eta_{ed} = \frac{32}{3} \frac{n_g \sigma}{m_b} \sqrt{2\pi m_g kT}. \quad (2.77)$$

Otro ejemplo son las partículas de Maxwell cuya sección transversal

$$\sigma(\chi, v_g) = \frac{1}{v_g} \mathcal{F}(\chi), \quad (2.78)$$

donde $\mathcal{F}(\chi)$ es una función conocida de χ . En este caso el coeficiente de fricción dinámica es simplemente

$$\eta_M = 2\pi n_g \frac{m_g}{m_b} \mathcal{B}, \quad (2.79)$$

donde

$$\mathcal{B} = \int \mathcal{F}(\chi) (1 - \cos \chi) \sin \chi d\chi. \quad (2.80)$$

2.5.2. Solución a la ecuación de Fokker-Planck

Para encontrar la solución a la ecuación de Fokker-Planck (2.76) se supondrá que no hay fuerzas externas presentes¹¹, de tal forma que (2.76) se convierte en

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 3\eta f + \eta \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \eta \frac{kT}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f. \quad (2.81)$$

Se introducen ahora los siguientes cambios de variable

$$g = e^{-3\eta t} f, \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} e^{\eta t}, \quad (2.82)$$

que transforman al lado derecho de la ecuación (2.81)

$$3\eta g e^{3\eta t} + \eta e^{-\eta t} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} e^{4\eta t} + \eta \frac{kT}{m} e^{5\eta t} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} g, \quad (2.83)$$

mientras que su lado izquierdo es

$$3\eta g e^{3\eta t} + e^{3\eta t} \left[\frac{\partial g}{\partial t} + \eta \mathbf{u} \cdot \frac{\partial g}{\partial \mathbf{u}} \right]. \quad (2.84)$$

Finalmente se obtiene

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \mathcal{D} e^{2\eta t} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} g, \quad (2.85)$$

donde $\mathcal{D} = \eta kT/m$, es el coeficiente de difusión en el espacio de momentos. Para proceder con el análisis es conveniente introducir una nueva variable temporal definida como

$$s = \frac{1}{2\eta} (e^{2\eta t} - 1). \quad (2.86)$$

De este modo (2.85) toma la forma

$$\frac{\partial g}{\partial s} = \mathcal{D} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} g. \quad (2.87)$$

Esta ecuación tiene una solución sencilla en términos de transformadas de Fourier. La transformada inversa de Fourier de $g(\mathbf{u}, s)$ dada por

$$g(\mathbf{u}, s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \hat{g}(\mathbf{k}, s) e^{-i\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}} d\mathbf{k}, \quad (2.88)$$

con transformada directa,

$$\hat{g}(\mathbf{k}, s) = \int g(\mathbf{u}, s) e^{i\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}} d\mathbf{u}, \quad (2.89)$$

llevan a (2.87) a la forma

$$\frac{\partial \hat{g}}{\partial s} = -\mathcal{D} \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} \hat{g}. \quad (2.90)$$

¹¹Se seguirá [35].

La solución a esta ecuación es

$$\hat{g} = \hat{g}_0 e^{-\mathcal{D}\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}s}. \quad (2.91)$$

Si se supone que las partículas tienen exactamente ciertas velocidades iniciales se puede expresar la condición inicial como

$$g_0 = g(\mathbf{u}, 0) = \delta^3(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0). \quad (2.92)$$

La transformada de esta función es

$$\hat{g}_0 = \hat{g}(\mathbf{k}, 0) = e^{i\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{k}}, \quad (2.93)$$

y así (2.91) se expresa en términos de las condiciones iniciales de la siguiente manera

$$\hat{g} = e^{i\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{k} - \mathcal{D}\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}s}. \quad (2.94)$$

Utilizando la forma explícita de \hat{g} se determina g como

$$g(\mathbf{u}, s) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\mathbf{u}_0 - \mathbf{u})\cdot\mathbf{k} - \mathcal{D}\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}s} d\mathbf{k}. \quad (2.95)$$

Estas son tres integrales de la forma

$$\int \exp \left[-\mathcal{D}s \left(k_j^2 - ik_j \frac{u_{j0} - u_j}{\mathcal{D}s} \right) \right] dk_j, \quad (2.96)$$

con $j = x, y, z$, para las cuales se puede completar el cuadrado en el argumento de la exponencial, dando como resultado

$$\exp \left[-\mathcal{D}s \left(\frac{(u_{j0} - u_j)^2}{4\mathcal{D}^2 s^2} \right) \right] \int \exp \left[-\mathcal{D}s \left(k_j - i \frac{u_{j0} - u_j}{2\mathcal{D}s} \right)^2 \right] dk_j, \quad (2.97)$$

la cual es una integral gaussiana cuyo resultado bien conocido es

$$e^{-\frac{(u_j - u_{j0})^2}{4\mathcal{D}s}} \sqrt{\frac{\pi}{\mathcal{D}s}}. \quad (2.98)$$

Por lo tanto

$$g(\mathbf{u}, s) = \left(\frac{1}{4\pi\mathcal{D}s} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)\cdot(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)}{4\mathcal{D}s}}. \quad (2.99)$$

El siguiente paso es regresar a las variables originales a través de las ecuaciones (2.82), (2.86) y la definición del coeficiente de difusión. Haciendo todos estos cambios, la función de distribución, sin normalización, que es solución a la ecuación de Fokker-Planck es:

$$f(\mathbf{v}, t) = \left[\frac{m}{2\pi kT(1 - e^{-2\eta t})} \right]^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 e^{-\eta t}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 e^{-\eta t})}{2kT(1 - e^{-2\eta t})} \right]. \quad (2.100)$$

Aplicando la condición de normalización a la función de distribución anterior se tiene

$$n(t) = \kappa \int f(\mathbf{v}, t) d\mathbf{v} \quad \Rightarrow \quad \kappa = n. \quad (2.101)$$

Por lo que la distribución se debe multiplicar por la densidad numérica n ,

$$f(\mathbf{v}, t) = n \left[\frac{m}{2\pi kT(1 - e^{-2\eta t})} \right]^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 e^{-\eta t}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 e^{-\eta t})}{2kT(1 - e^{-2\eta t})} \right]. \quad (2.102)$$

Hay que notar que si se toma el límite $t \rightarrow \infty$, la ecuación (2.102) tiende a la distribución de Maxwell-Boltzmann

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(\mathbf{v}, t) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2kT} \right). \quad (2.103)$$

Este hecho y la comparación entre ambas distribuciones se ilustra en las figuras 2.8a-b y 2.9.

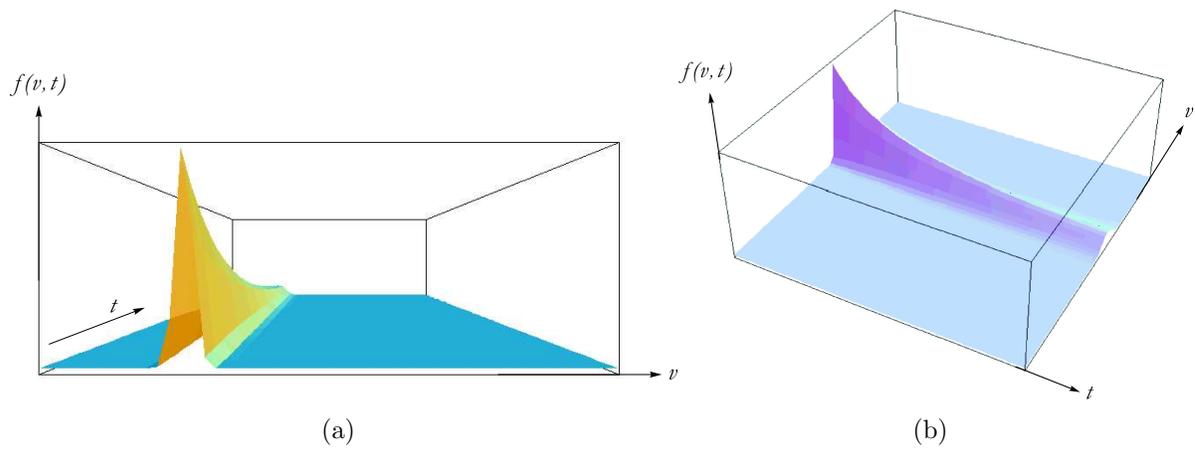


Figura 2.8: Gráficas tridimensionales de la evolución temporal de la función de distribución solución a la ecuación de Fokker-Planck (2.103). (a) Distribución inicial con la delta de Dirac (b) Evolución temporal hacia la distribución de Equilibrio.

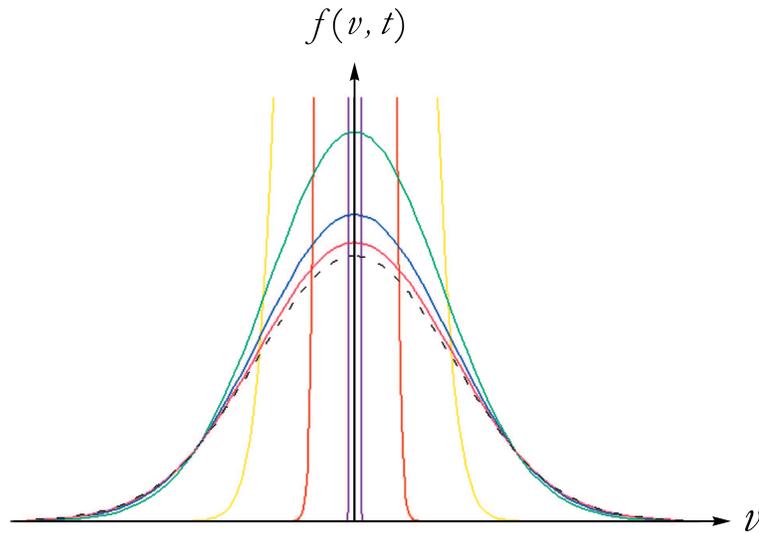


Figura 2.9: Comparación entre la evolución de la función de distribución solución a la ecuación de Fokker-Planck y la distribución del equilibrio. La curva punteada es la función de distribución del equilibrio.

Capítulo 3

Teoría Cinética Relativista

En este capítulo se estudiarán aspectos generales de la teoría cinética relativista. En particular se hará una descripción heurística de la ecuación de Boltzmann relativista y la correspondiente función de distribución del equilibrio. Para ello es conveniente realizar una revisión previa de conceptos básicos de la teoría de la relatividad especial. La primera sección está destinada introducir los conceptos básicos de cinemática, dinámica e hidrodinámica relativista.

3.1. Elementos de relatividad especial

3.1.1. Cinemática y dinámica relativista

La teoría especial de la relatividad está basada en dos postulados que surgen de la imposibilidad de extender las transformaciones de Galileo de la mecánica newtoniana a la teoría electromagnética. Estos postulados son:

- Principio de la relatividad. Todas las leyes de la física son las mismas en todos los marcos de referencia inerciales. (Las leyes de la física deben ser covariantes bajo transformaciones entre sistemas de referencia inerciales).
- La velocidad de propagación de la luz en el vacío tiene el mismo valor $c = 2,9 \times 10^8 \text{m/s}$ para todos los observadores inerciales y es una velocidad límite.

Supónganse dos observadores \mathcal{O} y \mathcal{O}' , tal que \mathcal{O}' se mueve con velocidad constante v en la dirección del eje x con respecto al primer observador (fig. 3.1).

Si se emite una señal de luz con frente de onda esférico desde el origen de los marcos de referencia de ambos observadores, lo cuales coinciden en $t = t' = 0$. Para el observador \mathcal{O} , la distancia recorrida por la onda sería

$$ct^2 = x^2 + y^2 + z^2, \quad (3.1)$$

mientras que para el observador \mathcal{O}'

$$ct'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2. \quad (3.2)$$

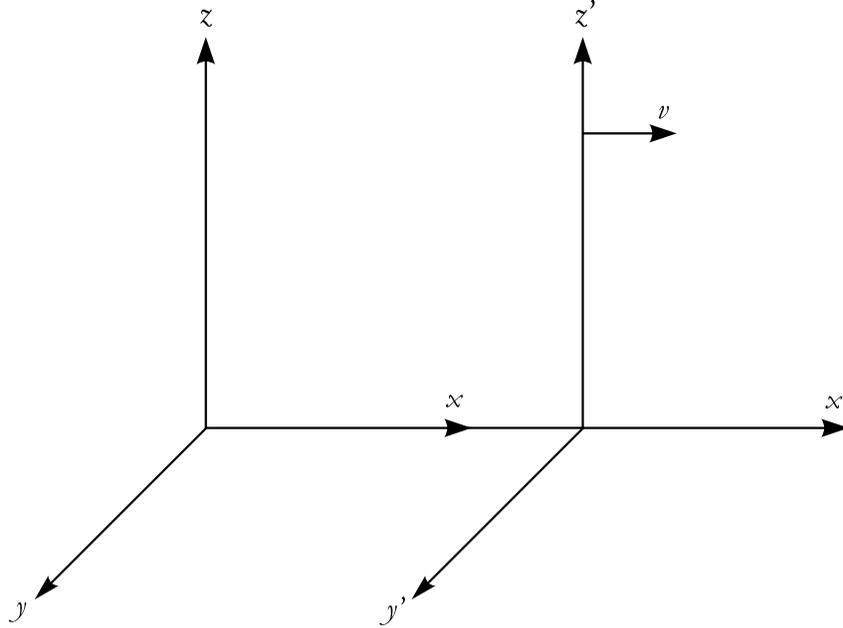


Figura 3.1: Representación de los sistemas \mathcal{O} y \mathcal{O}' , este último se mueve respecto al primero con una velocidad constante v .

Las únicas transformaciones lineales compatibles con los postulados de la relatividad y (3.1)-(3.2) son las llamadas *transformaciones de Lorentz*

$$x' = \gamma(x - vt), \quad (3.3)$$

$$y' = y, \quad (3.4)$$

$$z' = z, \quad (3.5)$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x), \quad (3.6)$$

donde el factor de Lorentz γ y la velocidad relativa β en unidades de la velocidad de la luz se definen como

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (3.7)$$

$$\beta = \frac{v}{c}. \quad (3.8)$$

Obsérvese de (3.3)-(3.6), que en el límite $c \rightarrow \infty$ se recupera las transformaciones de Galileo de la mecánica newtoniana. Entre las consecuencias inmediatas de estas transformaciones se tienen las siguientes. Si el observador \mathcal{O} tiene un reloj con el cual mide cierto intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$; el mismo intervalo de tiempo medido por el observador \mathcal{O}' es

$$\Delta t' = \gamma \left[(t_2 - t_1) - \frac{\beta}{c} (x_2 - x_1) \right], \quad (3.9)$$

el segundo término de esta relación es cero ya que el reloj está fijo con el observador \mathcal{O} , entonces se tiene la llamada *dilatación del tiempo*

$$\Delta t' = \gamma \Delta t. \quad (3.10)$$

Esta ecuación dice que el intervalo de tiempo medido por el observador \mathcal{O}' es más largo que el intervalo medido por el observador \mathcal{O} . Otra consecuencia de las transformaciones de Lorentz es la siguiente: Si el observador \mathcal{O} tiene una barra de longitud $\ell = x_2 - x_1$, en las coordenadas del observador \mathcal{O}' se medirá

$$\ell = \gamma [x'_2 - x'_1 + \beta c (t'_2 - t'_1)], \quad (3.11)$$

pero como \mathcal{O}' determina la posición de los extremos de la barra simultáneamente, entonces $t'_2 = t'_1$. La expresión resultante se conoce como la contracción de la longitud

$$\ell' = \gamma^{-1} \ell. \quad (3.12)$$

Esto quiere decir que un objeto de longitud ℓ en el sistema del observador \mathcal{O} quien lo ve en reposo, será visto con una longitud ℓ' menor que ℓ por \mathcal{O}' . Adviértase que esta contracción sólo sucede a lo largo de la dirección del movimiento. Esta relación lleva a definir la contracción del volumen, si \mathcal{V} es el volumen propio o en reposo visto por \mathcal{O} , entonces el volumen visto por \mathcal{O}' en movimiento será

$$\mathcal{V}' = \gamma^{-1} \mathcal{V}. \quad (3.13)$$

Otra relación importante que surge de las transformaciones de Lorentz es la transformación de la velocidad. Si un objeto se mueve con velocidad \mathbf{u} visto por \mathcal{O} entonces el observador \mathcal{O}' medirá la siguiente velocidad del objeto

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - \frac{u_x v}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}, \quad u'_z = \frac{u_z}{\gamma \left(1 - \frac{u_x v}{c^2}\right)}. \quad (3.14)$$

En relatividad especial se introduce el *intervalo ó separación entre puntos del espacio-tiempo*

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2. \quad (3.15)$$

Cuando se calcula la transformación de Lorentz de esta cantidad se observa que su valor no cambia

$$\Delta s'^2 = \Delta s^2, \quad (3.16)$$

se dice que el intervalo es *invariante* ante transformaciones de Lorentz. La noción de invariante es de importancia central y se usará a lo largo del presente trabajo.

Definido el intervalo espacio-temporal se introduce la notación 4-dimensional de la relatividad espacial, escribiendo al elemento diferencial ds^2 del siguiente modo

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (3.17)$$

donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, por tanto dx^μ es un vector 4-dimensional cuyas componentes son

$$dx^\mu \rightarrow (dx^0, dx^1, dx^2, dx^3) = (cdt, dx, dy, dz). \quad (3.18)$$

La cantidad $\eta_{\mu\nu}$ en (3.17) se denomina la *métrica covariante de Minkowski* o del espacio-tiempo plano y se puede representar en forma matricial de la siguiente forma

$$[\eta_{\mu\nu}] \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

En la relación (3.17) está implícita la convención de suma de Einstein, según la cual los índices repetidos representan una sumatoria de $\mu = 0$ hasta $\mu = 3$.

Las transformaciones de Lorentz (3.3)-(3.6) se pueden escribir en esta notación de la siguiente manera

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu, \quad (3.20)$$

donde

$$[\Lambda^\mu_\nu] \rightarrow \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

Dada la invariancia de intervalo la matriz de Lorentz debe cumplir

$$\eta_{\mu\nu} = \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu \eta_{\rho\sigma}, \quad (3.22)$$

que quiere decir que la métrica es un invariante ante transformaciones de Lorentz. Si $\bar{\Lambda}^\mu_\nu$ es la matriz inversa se tiene que

$$\bar{\Lambda}^\mu_\nu \Lambda^\nu_\lambda = \delta^\mu_\lambda \quad (3.23)$$

donde δ^μ_λ es la delta de Kronecker en 4 dimensiones definida como

$$\delta^\nu_\lambda = \begin{cases} 1, & \nu = \lambda, \\ 0, & \nu \neq \lambda. \end{cases} \quad (3.24)$$

Se introduce la métrica inversa ó contravariante $\eta^{\mu\nu}$ via

$$\eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\lambda} = \delta^\nu_\lambda. \quad (3.25)$$

Debido a la convención de suma de Einstein se puede escribir el producto escalar 4-dimensional de dos vectores como

$$A^\mu B_\mu = A^0 B_0 + A^i B_i = A^0 B_0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}, \quad (3.26)$$

el cual es un invariante.

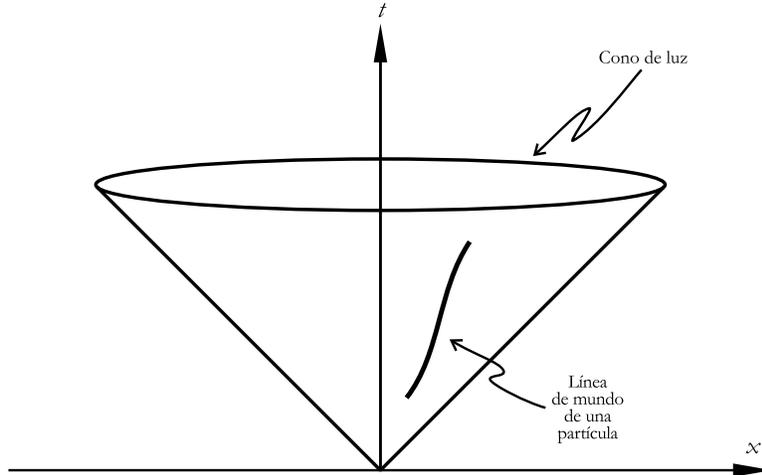


Figura 3.2: Cono de luz de un evento

La representación gráfica de los objetos 4-dimensionales se realiza con base en los *diagramas de espacio-tiempo*, un ejemplo es el de la figura 3.2. En estos diagramas un punto es conocido como *evento*, y la historia de una partícula se representa con líneas cuyas pendientes en cada punto son mayores a 1, lo cual quiere decir que no superan la velocidad de la luz. Estas son conocidas como *líneas de mundo* de las partículas¹.

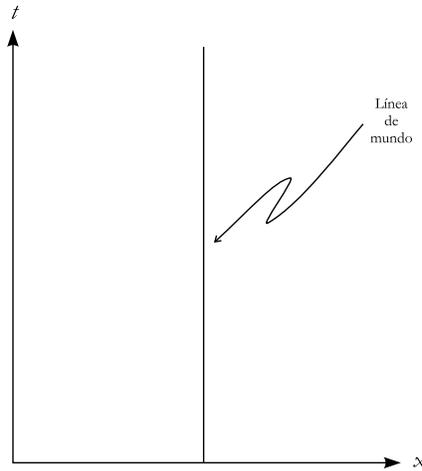


Figura 3.3: Línea de mundo de una partícula en reposo.

La conveniencia de la notación 4-vectorial radica en que estos objetos transforman naturalmente bajo transformaciones de Lorentz. Un ejemplo de esto es la *4-velocidad* de una partícula definida de la siguiente forma

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (3.27)$$

¹Puede consultarse el libro de Schutz [36] para una revisión de los diagramas de espacio-tiempo.

donde $d\tau = c^{-1}ds$ es el llamado tiempo propio. La 4-velocidad está definida de tal modo que cumple con las transformaciones (3.14) y sus componentes son

$$U^\mu \rightarrow (\gamma c, \gamma \mathbf{v}), \quad (3.28)$$

La magnitud de U^μ es $U^\mu U_\mu = c^2$. Otro vector definido de esta forma es el *4-momento* de una partícula de masa en reposo m como

$$p^\mu = mU^\mu. \quad (3.29)$$

Sus componentes son

$$p^\mu \rightarrow (\gamma mc, \gamma m\mathbf{v}) = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p} \right) = (p^0, \mathbf{p}). \quad (3.30)$$

La componente cero o temporal de este vector se identifica con la energía en el sistema co-móvil. En un sistema general la energía se define como $E_{obs} = p_\mu U_{obs}^\mu$, donde U_{obs}^μ es la 4-velocidad del observador general. Es importante notar que cuando la velocidad de la partícula es cero, $\gamma = 1$ y entonces la energía simplemente es $E = mc^2$. Esta es la fórmula de Einstein para la equivalencia entre masa y energía. Si la velocidad es distinta de cero pero cumple con $v \ll c$, se puede hacer un desarrollo de la raíz cuadrada

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx mc^2 \left(1 + \frac{v^2}{2c^2} \right) = mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \quad (3.31)$$

En analogía a la expresión anterior para la energía cinética en el límite no relativista, se define la energía cinética relativista como $\mathcal{K} = E - mc^2$. La magnitud del 4-momento también es un invariante y es igual a $p^\mu p_\mu = m^2 c^2$. Esta expresión da una relación entre la componente temporal y las componentes espaciales del momento conocida como relación de la capa de masa

$$p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2 c^2}. \quad (3.32)$$

Dada la relación entre momento y energía a través del 4-momento, las leyes de conservación pueden expresarse de la siguiente forma, por ejemplo para el caso de una colisión de dos partículas con 4-momento p_1^μ y p_2^μ

$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_1'^\mu + p_2'^\mu. \quad (3.33)$$

Un último vector que se considerará es la *4-fuerza* definida como:

$$\mathcal{F}^\mu = \frac{dp^\mu}{d\tau} = m \frac{dU^\mu}{d\tau}. \quad (3.34)$$

cuyas componentes son

$$\mathcal{F}^\mu \rightarrow (\gamma \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\beta}, \gamma \mathbf{F}), \quad (3.35)$$

donde \mathbf{F} es la fuerza no relativista y $\boldsymbol{\beta} = c^{-1}\mathbf{v}$. A este vector suele llamársele *fuerza de Minkowski*. Es claro que cumple con $\mathcal{F}^\mu U_\mu = 0$, es decir, la fuerza de Minkowski es ortogonal a la 4-velocidad.

A lo largo de las siguientes secciones se necesitarán las transformaciones de elementos de volumen tridimensionales, de espacio-tiempo y de espacio fase, a continuación se describen estas propiedades de transformación.

Sea un vector 4-dimensional A^μ . El elemento de 4-volumen o volumen espacio-temporal $dA^0 dA^1 dA^2 dA^3$ es un invariante ya que el jacobiano de la transformación de Lorentz (3.21) es $|\mathfrak{J}| = 1$

$$dA'^0 dA'^1 dA'^2 dA'^3 = |\mathfrak{J}| dA^0 dA^1 dA^2 dA^3 = dA^0 dA^1 dA^2 dA^3, \quad (3.36)$$

de (3.36) se sigue que $d^4x' = d^4x$ y $d^4p' = d^4p$. Ambas medidas de integración son invariantes bajo transformaciones de Lorentz.

Para saber como transforma el elemento de volumen correspondiente a las componentes espaciales del 4-momento de partícula libre d^3p , es necesario considerar la relación de la capa de masa (3.32). Esta relación permite energías negativas, las cuales se asocian a las antipartículas en la teoría cuántica de campos. Sin embargo, en este caso el sistema de estudio no es cuántico y sólo se considerarán las energías positivas. Por esta razón y considerando la propagación de las partículas hacia el futuro se incluye un factor $\theta(p^0)$ que es la función escalón o de Heaviside. Considérese la siguiente integral²

$$\int_{-\infty}^{\infty} d^4p \delta(p^2 - m^2 c^2) \theta(p^0), \quad (3.37)$$

donde $p^2 = p^\mu p_\mu$ y δ es la delta de Dirac cuyo argumento indica precisamente la condición (3.32). Nótese que tanto $\delta(p^2 - m^2 c^2)$ como $\theta(p^0)$ son invariantes. Para proceder hay que recordar la siguiente propiedad de la delta de Dirac

$$\delta(x^2 - a^2) = \delta[(x+a)(x-a)] = \frac{1}{2a} [\delta(x+a) + \delta(x-a)], \quad (3.38)$$

que proviene de

$$\delta(f(x)) = \frac{\sum_a \delta(x - x_a)}{|df/dx|} \Big|_{f(x)=0}, \quad (3.39)$$

donde x_a son las raíces de $f(x)$.

Sustituyendo (3.38) en (3.37) se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} d^3p dp^0 \frac{1}{2(\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2 c^2})} \times \\ & \times \left[\delta\left(p^0 + \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2 c^2}\right) + \delta\left(p^0 - \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2 c^2}\right) \right] \theta(p^0), \quad (3.40) \end{aligned}$$

²Esta descripción de la invariancia de la medida de integración y los conceptos básicos de la teoría cuántica de campos, pueden encontrarse en [37].

se sigue que

$$\int_0^\infty d^3p \frac{dp^0}{2(\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2c^2})} \delta\left(p^0 - \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2c^2}\right), \quad (3.41)$$

finalmente integrando en p^0 se tiene que

$$\int \frac{d^3p}{2(\sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2c^2})}. \quad (3.42)$$

Como se comenzó con un elemento invariante, el resultado debe ser también invariante. Utilizando (3.32) se puede escribir que el cociente del elemento diferencial de la parte espacial del 4-momento entre p^0 es invariante

$$\frac{d^3p'}{p'^0} = \frac{d^3p}{p^0}, \quad \text{donde } p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2c^2}. \quad (3.43)$$

Para saber como transforma el elemento diferencial de 3-volumen espacial se recurre a la ecuación (3.13), por tanto se tiene que

$$d^3x' = \gamma^{-1}d^3x, \quad (3.44)$$

de esta manera el elemento de volumen de espacio fase 6-dimensional³ se escribe como

$$d^3x'd^3p' = \gamma^{-1}\frac{p'^0}{p^0}d^3xd^3p = d^3xd^3p, \quad (3.45)$$

donde se usó la transformación de la componente temporal del 4-momento dada por (3.30), $p'^0 = \gamma p^0$. De esta forma el elemento de volumen de espacio fase 6-dimensional es invariante.

Para finalizar se enuncia sin probar un resultado que se utilizará más adelante en la descripción de la ecuación de Boltzmann relativista, este es el Teorema de Liouville o la conservación del volumen de espacio fase⁴

Teorema 1 (Teorema de Liouville en espacio-tiempo). *El volumen \mathfrak{V} del espacio fase ocupado por un conjunto de \mathcal{N} partículas idénticas, es independiente del tiempo propio τ de una línea de mundo de una partícula del conjunto. Por lo tanto, \mathfrak{V} no cambia a lo largo de la línea cuyo tiempo propio es τ .*

³Adviértase que no se habla del espacio fase de ocho dimensiones relacionado con las coordenadas del espacio-tiempo y del 4-momento.

⁴Puede consultarse el libro de Misner Thorne y Wheeler [38] para una demostración.

3.1.2. Fluidos relativistas

Se considera un fluido formado por una colección de \mathcal{N} partículas de masa m . Existe un observador \mathcal{O} , para el cual un subconjunto del sistema anterior con $\Delta\mathcal{N}$ partículas, está momentáneamente en reposo (sistema co-móvil). El observador mide un volumen $\Delta\mathcal{V}$ donde las partículas están contenidas. Se tiene que el cociente

$$n = \frac{\Delta\mathcal{N}}{\Delta\mathcal{V}}, \quad (3.46)$$

es la densidad numérica *propia*. Sea ahora un observador \mathcal{O}' quien ve al elemento de fluido moverse con cierta velocidad v a lo largo del eje x' . Este segundo observador medirá un volumen $\Delta\mathcal{V}'$ que difiere de $\Delta\mathcal{V}$ a través de la contracción de Lorentz (3.13). Como el número de partículas del sistema no varía al cambiar de sistema de referencia, entonces $\Delta\mathcal{N}' = \Delta\mathcal{N}$. Cuando el observador \mathcal{O}' calcula la densidad numérica *relativa* a su marco de referencia obtiene que

$$n' = \frac{\Delta\mathcal{N}'}{\Delta\mathcal{V}'} = \gamma \frac{\Delta\mathcal{N}}{\Delta\mathcal{V}} = \gamma n, \quad (3.47)$$

donde n es la densidad numérica en el marco co-móvil. Esto quiere decir que la densidad numérica relativa medida por \mathcal{O}' es siempre mayor que la medida por un referencial co-móvil (fig. 3.4).

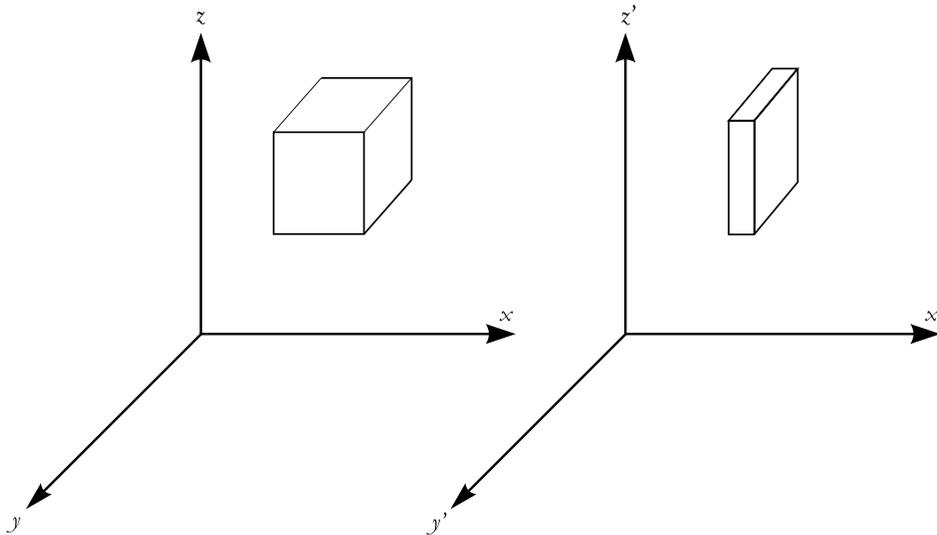


Figura 3.4: La contracción de la longitud provoca que la densidad de número de partículas n dependa del sistema de referencia donde se mida. En la figura se muestra un elemento de volumen que contiene $\Delta\mathcal{N}$ partículas visto desde dos marcos de referencia \mathcal{O} y \mathcal{O}' .

Por otro lado se tiene que el observador \mathcal{O}' mide un flujo a través de una superficie dado por

$$\mathbf{J}' = n'\mathbf{U} = \gamma n\mathbf{U}. \quad (3.48)$$

con \mathbf{U} la velocidad hidrodinámica del elemento de fluido, que para un observador que se mueve a lo largo del eje x es $v\mathbf{e}_x$. Hay que notar que en el marco co-móvil $\mathbf{J} = \mathbf{0}$.

Puede verse que el flujo de partículas y la densidad de partículas transforman, respectivamente, como las componentes temporal y espaciales de un 4-vector. Con la regla de transformación de Lorentz (3.3) y (3.6) las componentes de un vector A^μ transforman como

$$A'^0 = \gamma(A^0 - \beta A^1), \quad (3.49)$$

$$A'^1 = \gamma(A^1 - \beta A^0). \quad (3.50)$$

Si se identifica a nc con la componente temporal y a \mathbf{J} con las componentes espaciales del mismo objeto 4-dimensional las expresiones (3.49) y (3.50) se reducen a (3.47) y (3.48) respectivamente. Así se define el 4-flujo de partículas N^μ cuyas componentes son

$$N^\mu \rightarrow (\gamma nc, \gamma n\mathbf{U}), \quad (3.51)$$

o de manera concisa

$$N^\mu = n\mathcal{U}^\mu, \quad (3.52)$$

donde \mathcal{U}^μ es la 4-velocidad hidrodinámica y n es la densidad numérica propia o en el marco en co-móvil. En necesario hacer un par de observaciones:

- Un fluido general presenta procesos disipativos (conducción de calor y viscosidad), que pueden dar lugar a una modificación del 4-flujo de partículas, de tal forma que la ecuación (3.52) se reemplazaría por

$$N^\mu = n\mathcal{U}^{*\mu} + \Delta N^\mu. \quad (3.53)$$

Esto ocurre porque esta relación depende de la 4-velocidad hidrodinámica que corresponde a un elemento de fluido y no a la velocidad de las partículas individuales. La 4-velocidad puede considerarse asociada al transporte de masa \mathcal{U}^μ , la cual tiene componentes espaciales cero en el marco co-móvil y por tanto corresponde a (3.52). Esta es la versión de Eckart de los fluidos relativistas [39]. Alternativamente, la 4-velocidad puede escogerse como asociada al transporte de energía $\mathcal{U}^{*\mu}$; esta cantidad está relacionada con el flujo de calor y al no tener todas sus componentes espaciales iguales a cero en el sistema co-móvil correspondería a la ecuación (3.53). Esta es la versión de Landau y Lifshitz [40]. Ambas formulaciones son equivalentes, puede mostrarse que el término extra en (3.53) de la versión de Landau y Lifshitz forma parte del tensor de energía momento de la versión de Eckart⁵. En adelante se utilizará el enfoque de Eckart.

⁵Esta relación puede verse explícitamente en [12], y una discusión de la termodinámica de un fluido imperfecto en [41].

- En la formulación de Eckart, con la relación (3.52), es claro que $N^\mu N_\mu = n^2 c^2$, lo cual quiere decir que n es un invariante de Lorentz: todos los marcos inerciales están de acuerdo en que el marco co-móvil determina a n como la densidad de número de partículas, esto es cierto en el mismo sentido en que la masa en reposo m es un invariante de Lorentz aunque la energía dependa del marco de referencia. Por supuesto la densidad numérica propia medida en un marco en reposo es un invariante en ese sentido. La densidad numérica determinada por cada marco de referencia con 4-velocidad U_{obs}^μ cambia de acuerdo a $n' = c^{-2} N_\mu U_{obs}^\mu$.

Siguiendo a Eckart el 4-flujo de partículas está relacionado únicamente con la cantidad de materia, o de partículas que contiene el sistema. Falta considerar cantidades dinámicas tales como el momento y la energía del sistema, para ello se introduce la densidad de energía en el sistema co-móvil. La densidad de energía se escribirá como el producto de la densidad de número de partículas n , multiplicada por la energía por partícula e . Según las ecuaciones (3.30) y (3.47), en el sistema \mathcal{O}' que ve al elemento de fluido con 4-velocidad U^μ la densidad numérica es $n' = \gamma n$ y la energía por partícula es $e' = \gamma e$, así pues la densidad de energía en el sistema \mathcal{O}' es

$$n'e' = \gamma^2 ne, \quad (3.54)$$

esta ecuación es la regla de transformación de la densidad de energía. Nótese que a diferencia de la densidad de partículas, la densidad de energía transforma con el producto de dos factores γ . De la misma forma que n es parte de N^μ , se podría pensar que ne forma parte de algún objeto 4-dimensional. Para poder interpretar correctamente esta regla de transformación hay que advertir varias cosas: Lo primero es que la densidad de energía es el producto de las componentes cero de dos 4-vectores $n'e' = cp^{0'} N^{0'}$, de modo tal que la ecuación (3.54) puede reescribirse con ayuda de (3.21) como

$$cp^{0'} N^{0'} = \Lambda_0^{0'} \Lambda_0^{0'} (cp^0 N^0). \quad (3.55)$$

De esta expresión surge la pregunta ¿La transformación de qué objeto involucra dos matrices de Lorentz? La respuesta inmediata es: un tensor tipo $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Por lo tanto, la densidad de energía debe ser la componente 00 de un tensor tipo $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Cabe entonces preguntarse ¿qué sucede con las demás componentes de dicho tensor?

Para responder esta pregunta es necesario recordar la interpretación de las componentes del 4-flujo de partículas, N^μ es el flujo de partículas a través de la hipersuperficie con normal en la dirección μ (con $\mu = t, x, y, z$). En particular la componente N^0 es el flujo de partículas que cruza una hipersuperficie cuya normal apunta en la dirección temporal, como N^0 es la densidad de partículas nc (en el sistema co-móvil) se puede concluir que un flujo a través de una superficie con normal en la dirección temporal es una densidad. De esta forma la densidad de energía es el flujo de la componente temporal del 4-momento a través de la superficie con normal en la dirección $\mu = 0$.

Con esta interpretación puede hacerse la siguiente generalización definiendo el *tensor de energía-momento* a través de sus componentes en un referencial arbitrario

$$T^{\mu\nu} = \left\{ \text{Flujo de } p^\mu \text{ a través de la superficie con normal en la dirección } \nu \right\}. \quad (3.56)$$

Claramente las componentes del tensor de energía-momento corresponden a las siguientes cantidades:

$$T^{00} = \text{Densidad de energía,}$$

$$T^{0i} = c^{-1} \text{ Flujo de energía a través de la superficie con normal en dirección } i,$$

$$T^{i0} = c \text{ Densidad de momento } p^i,$$

$$T^{ij} = \text{Flujo de momento } p^i \text{ a través de la superficie con normal en dirección } j.$$

Una característica importante de este tensor es que es simétrico, componentes con índices intercambiados son iguales $T^{\alpha\beta} = T^{\beta\alpha}$. $T^{0i} = T^{i0}$ no son sino nombres distintos de la misma cantidad física (dada la relación entre masa y energía). No es difícil convencerse de que la simetría de T^{ij} se debe a la estabilidad mecánica rotacional de los elementos de fluido⁶. El tensor de energía-momento provee una descripción covariante de la energía y el momento del fluido.

Es necesario encontrar una representación adecuada para el tensor de energía-momento análoga a (3.52) para el 4-flujo de partículas. Una opción es

$$T^{\mu\nu} = \frac{ne}{c^2} \mathcal{U}^\mu \mathcal{U}^\nu, \quad (3.57)$$

sin embargo, esta expresión no toma en cuenta todos los flujos involucrados en (3.56).

Para lograr una descripción adecuada primero se introduce el proyector

$$\Delta^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} \mathcal{U}^\mu \mathcal{U}^\nu, \quad (3.58)$$

el cual, al aplicarse a un vector dado lo proyecta en uno ortogonal a la 4-velocidad, ya que $\Delta^{\mu\nu} \mathcal{U}_\nu = 0$. Este proyector tiene las siguientes propiedades

$$\Delta^{\mu\nu} \Delta_{\nu\lambda} = \Delta^\mu_\lambda, \quad \Delta^\mu_\nu \Delta^{\nu\sigma} = \Delta^{\mu\sigma}, \quad \Delta^\mu_\mu = 3. \quad (3.59)$$

Así se pueden escribir los flujos y densidades en las componentes del tensor de energía-momento recordando que *todas las cantidades macroscópicas relacionadas con un elemento fluido en la relatividad son definidas por sus valores en el sistema co-móvil*. Por esta razón se tienen las siguientes definiciones:

⁶Ver discusión en el capítulo correspondiente del libro de Schutz [36].

1. En un referencial genérico se calcula

$$n'e' = \frac{1}{c^2} \mathcal{U}_\mu T^{\mu\nu} \mathcal{U}_\nu, \quad (3.60)$$

que al considerar el sistema co-móvil se reduce a

$$ne = T^{00}, \quad (3.61)$$

que es precisamente la densidad de energía.

2. Se introduce el siguiente vector

$$q'^\mu = \mathcal{U}_\rho T^{\rho\sigma} \Delta_\sigma^\mu, \quad (3.62)$$

el cual en el marco en reposo sólo tiene componentes espaciales

$$q^0 = 0, \quad q^i = cT^{0i}. \quad (3.63)$$

La parte espacial corresponde al flujo de calor.

3. Para las componentes del flujo de momento se define el *tensor de presiones* o *tensor de esfuerzos*. En un marco arbitrario viene dado por

$$P'^{\mu\nu} = \Delta_\sigma^\mu T^{\sigma\rho} \Delta_\rho^\nu, \quad (3.64)$$

mientras que en el marco co-móvil sus componentes se reducen a

$$P^{00} = 0, \quad P^{0i} = P^{i0} = 0, \quad P^{ij} = T^{ij}. \quad (3.65)$$

En la hidrodinámica no relativista se acostumbra separar al tensor de presiones en dos partes: la traza y una parte sin traza⁷. Se calcula la traza en un marco arbitrario

$$P'_\mu{}^\mu = \Delta_{\sigma\rho} T^{\sigma\rho}. \quad (3.66)$$

Sin embargo, en el marco co-móvil la traza es

$$P'_\mu{}^\mu = -T^i{}_i = -3p, \quad (3.67)$$

donde p se identifica con la presión hidrostática la cual será la presión termodinámica en el equilibrio local. De esta forma se escribe que en general

$$p' = -\frac{1}{3} P'_\mu{}^\mu = -\frac{1}{3} \Delta_{\sigma\rho} T^{\sigma\rho}. \quad (3.68)$$

Claramente en esta ecuación p' corresponde al marco que determina \mathcal{U}^μ como velocidad del elemento de fluido.

⁷Ver por ejemplo [19] y [42].

Por otra parte considerando al tensor de presiones completo, se busca un tensor irreducible sin traza que además sólo tenga componentes espaciales en el referencial co-móvil. Se define entonces el tensor

$$\sigma'^{\mu\nu} = P'^{\mu\nu} - p' \Delta^{\mu\nu}, \quad (3.69)$$

que en un marco arbitrario tiene las siguientes componentes

$$\sigma'^{\mu\nu} = \left(\Delta_{\sigma}^{\mu} \Delta_{\rho}^{\nu} - \frac{1}{3} \Delta_{\sigma\rho} \Delta^{\mu\nu} \right) T^{\sigma\rho}. \quad (3.70)$$

En el marco co-móvil, las componentes de $\sigma^{\mu\nu}$ son

$$\sigma^{00} = 0, \quad \sigma^{0i} = \sigma^{i0} = 0, \quad \sigma^{ij} = P^{ij} - p\eta^{ij}. \quad (3.71)$$

Al calcular la traza de (3.70) o de (3.71) es claro que $\sigma'^{\mu}_{\mu} = \sigma^{\mu}_{\mu} = 0$. Este tensor se conoce como *tensor de esfuerzos cortantes* o *tensor viscoso*.

4. Se definen el 4-flujo de entropía \mathcal{S}^{μ} y la densidad de entropía $n's'$ en un referencial inercial genérico como

$$\mathcal{S}^{\mu} = ns\mathcal{U}^{\mu}, \quad n's' = \frac{1}{c^2} \mathcal{S}^{\mu} \mathcal{U}_{\mu}, \quad (3.72)$$

donde ns es la densidad de entropía en el sistema co-móvil y s es la entropía por partícula.

Con las definiciones anteriores se escribe el tensor de energía-momento de la siguiente manera

$$T^{\mu\nu} = \frac{ne}{c^2} \mathcal{U}^{\mu} \mathcal{U}^{\nu} - p \Delta^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} (\mathcal{U}^{\mu} q^{\nu} + q^{\mu} \mathcal{U}^{\nu}) + \sigma^{\mu\nu}. \quad (3.73)$$

Los primeros dos términos de esta expresión corresponden a los que tendría un fluido perfecto, mientras que los dos últimos son términos de disipación [41]. Como sucede en caso del 4-flujo de partículas N^{μ} , al utilizar el formalismo de Landau y Lifshitz el tensor de energía momento (3.73) cambiaría y no incluiría al vector de flujo de calor. El flujo de energía estaría incluido en N^{μ} .

3.2. Descripción heurística de la ecuación de Boltzmann relativista

3.2.1. Función de distribución relativista

Considérese ahora un sistema formado por \mathcal{N} partículas de masa m , del mismo modo que en la sección 2.1. En analogía con la teoría cinética no relativista, se introduce la función de distribución *relativista* f de forma tal que el 4-vector de flujo se puede escribir en términos de esta función de la siguiente manera

$$N^\mu = c \int \frac{d^3p}{p^0} p^\mu f(x, p), \quad (3.74)$$

donde p^μ es el 4-momento de una de las \mathcal{N} partículas del conjunto cuya geodésica tiene como parámetro afín $\lambda = \tau/m$, con τ su tiempo propio.

Es pertinente hacer varias observaciones sobre esta relación. Primero hay que notar que la función de distribución del capítulo 2, definida en la ecuación (2.1) es la densidad de partículas en el espacio fase de *posiciones y velocidades* de una partícula, mientras que la función de distribución que se considera en (3.74), es la densidad de partículas en el espacio fase de *posiciones y de momentos* de una partícula. Esto es porque las variables de momento son naturales en el estudio de colisiones en el contexto de la relatividad especial. También hay que decir que la componente temporal de esta ecuación es similar a la definición (2.27) de la densidad numérica multiplicada por c , mientras que las componentes espaciales corresponden al flujo dado por la ecuación (2.40). Por otro lado se sabe de (3.51) que este 4-vector de flujo transforma del mismo modo que el 4-momento, con esto se pueden inferir las propiedades de transformación de la función de distribución. También se sabe por (3.43) que el elemento diferencial en la ecuación (3.74), d^3p/p^0 es un invariante, entonces la función de distribución f debe ser un escalar. La distribución f se interpreta como la densidad de partículas en el espacio μ (ahora coordenadas y momentos).

Como ya se dijo el número de partículas N en la región determinada por el elemento de fluido es invariante, lo mismo sucede con el volumen de espacio fase $d\mathfrak{V} = d^3x d^3p$, por tanto como $N = f d\mathfrak{V}$, la función de distribución es ciertamente un escalar. La ecuación (3.74) permite dar una descripción 4-dimensional al sistema, por este motivo la función de distribución definida en (3.74) depende, en principio, de todas las coordenadas espacio-temporales y de las coordenadas de 4-momento $f(x^\mu, p^\mu)$. Sin embargo, al igual que en la sección 2.1, el sistema se describirá como si se trataran \mathcal{N} replicas de una partícula, todas con la misma masa en reposo. La magnitud de p^μ se encuentra restringida por la capa de masa (3.32): $p^\mu p_\mu = m^2 c^2 \Rightarrow p^0 = \sqrt{|\mathbf{p}|^2 + m^2 c^2}$. Así la función de distribución relativista depende del momento tridimensional, las posiciones y el tiempo $f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$.

La representación 4-dimensional de las condiciones iniciales de este sistema de partículas puede esquematizarse en un diagrama de espacio-tiempo como un seg-

mento horizontal que representa el volumen del sistema al tiempo inicial (fig. 3.5 (a)). Como se sabe en este diagrama una partícula se caracteriza por su línea de mundo. De esta manera el conjunto de las líneas de mundo de las partículas del sistema forman un tubo llamado *tubo de mundo*, el cual por lo tanto, simboliza su historia (fig. 3.6).

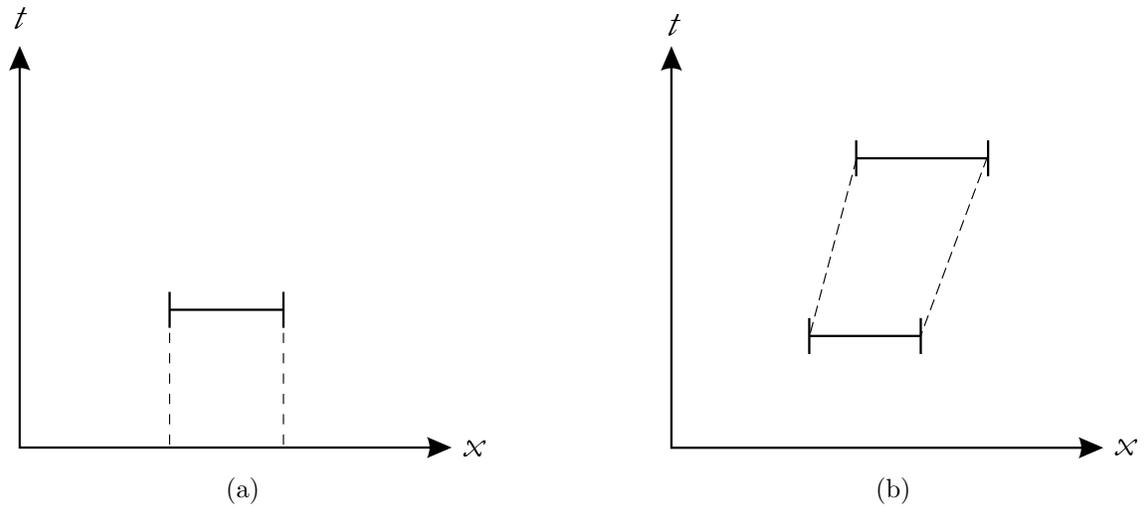


Figura 3.5: (a) Diagrama espacio-temporal donde se representa el volumen del sistema de \mathcal{N} partículas al tiempo inicial. (b) Evolución temporal del sistema.

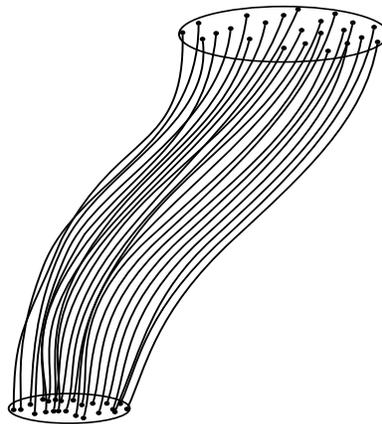


Figura 3.6: Tubo de mundo de un conjunto de partículas. Este tubo representa las historias de las partículas que forman el sistema.

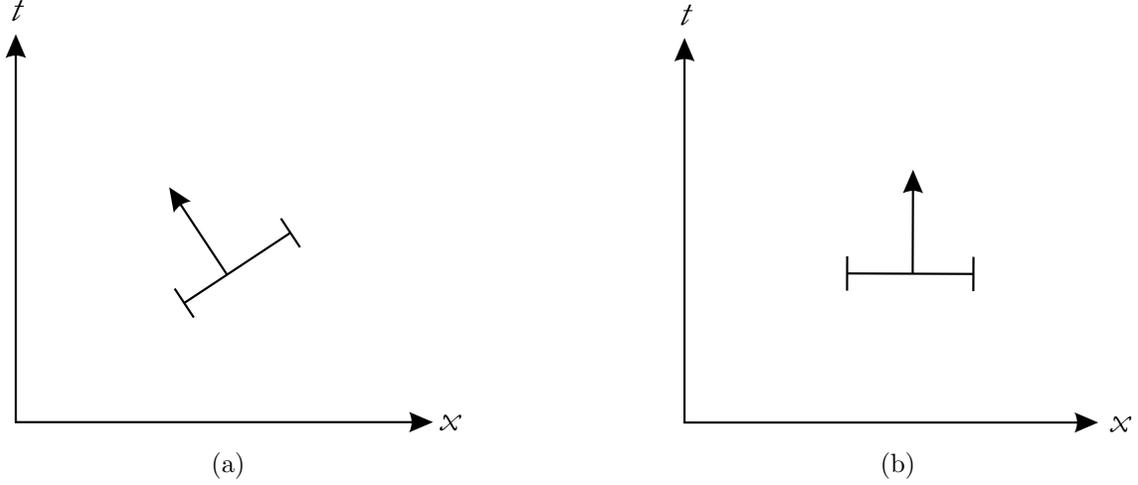


Figura 3.7: (a) Vector unitario \hat{n}^μ normal a la 3-superficie espacio-temporal. (b) Si el \hat{n}^μ apunta en la direcci3n temporal la 3-superficie ser3 un volumen espacial.

3.2.2. Ecuaci3n de Boltzmann relativista sin colisiones

Consid3rese ahora un elemento de 3-superficie en el espacio-tiempo el cual est3 caracterizado por un vector normal \hat{n}^μ , donde $d\mathbf{S}^\mu = \hat{n}^\mu d^3S$ (fig. 3.7 (a)).

Al ser N^μ el flujo de part3culas en el espacio-tiempo, entonces el n3mero de l3neas de mundo que cruzan la 3-superficie diferencial se obtiene

$$dN_{LM} = \frac{1}{c} N^\mu \hat{n}_\mu d^3S = f(x, p) p^\mu \hat{n}_\mu d^3S \frac{d^3p}{p^0}. \quad (3.75)$$

Esta expresi3n se puede interpretar como el n3mero de l3neas de mundo que atraviesan la hipersuperficie $d\mathbf{S}^\mu$ cuyos momentos caen dentro de un 3ngulo s3lido $d\Omega_p = d^3p/p^0$ alrededor de p^μ (fig. 3.8).

Elijiendo coordenadas tales que el vector unitario 3nicamente tenga componente temporal, $\hat{n}^\mu \rightarrow (1, 0, 0, 0)$, la 3-superficie ser3 completamente espacial (fig. 3.7 (b)) $d^3S = d^3x$. De esta manera la ecuaci3n (3.75) se reduce a

$$dN_{LM} = f(x, p) p^0 \hat{n}_0 d^3x \frac{d^3p}{p^0} = f(x, p) d^3x d^3p. \quad (3.76)$$

Esta ecuaci3n, en el l3mite de bajas velocidades, se reduce directamente a la ecuaci3n (2.1) que corresponde al n3mero de part3culas en el volumen d^3x , en un intervalo de momentos d^3p . Esto implica que la funci3n de distribuci3n relativista consistentemente se reduce a la no relativista cuando se considera una hipersuperficie espacial y en el l3mite de bajas velocidades.

Sup3ngase ahora que se tiene una hipersuperficie S que sea frontera de una regi3n espacio-temporal $\mathcal{V}_x = d^4x$, es decir, $S = \partial\mathcal{V}_x$. Integrando (3.75) sobre la

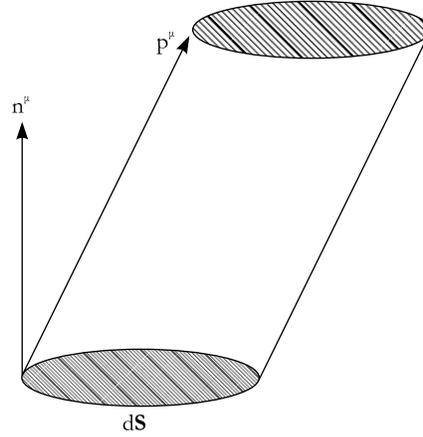


Figura 3.8: Representación del tubo de líneas de mundo de las partículas que atraviesan la hipersuperficie d^3S .

hipersuperficie S y sobre un intervalo espacial de momentos Δ^3p , se tiene que

$$N_{LM} = \int_S \int_{\Delta^3p} f(x, p) p^\mu \hat{n}_\mu d^3S \frac{d^3p}{p^0}, \quad (3.77)$$

esta integral da el número total de líneas de mundo que cruzan la 3-superficie S y tienen momento en el intervalo Δ^3p . Por lo tanto, también es el número de líneas de mundo que salen (ó entran) del volumen espacio-temporal \mathcal{V}_x .

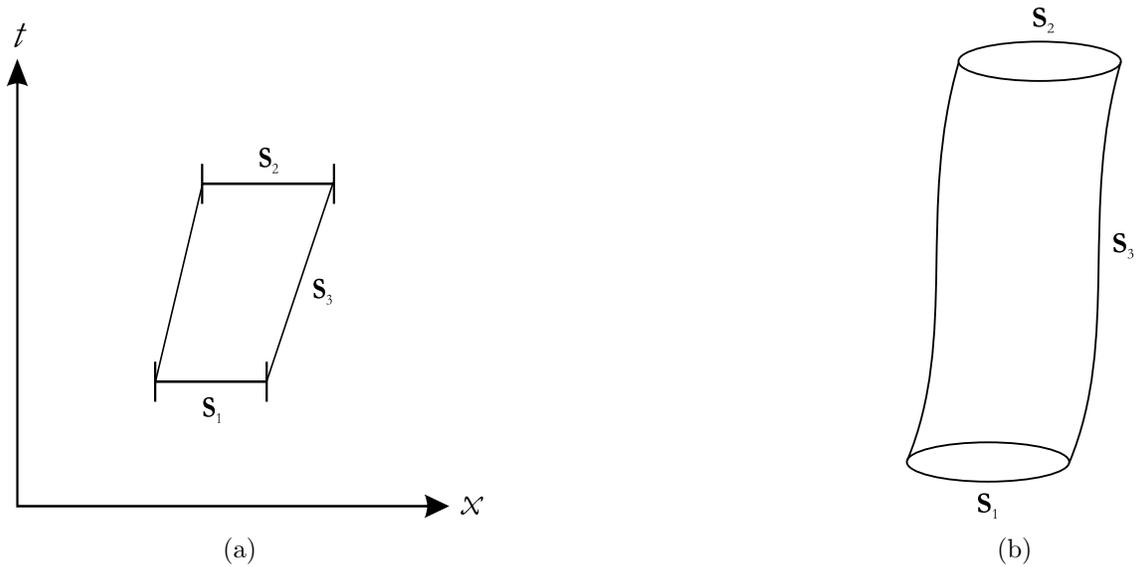


Figura 3.9: Hipersuperficie del tubo de mundo $S = S_1 + S_2 + S_3$.

Si la región S es la hipersuperficie del tubo de mundo de las partículas conformado por las superficies S_1 , S_2 y S_3 como se muestra en la figura 3.9, entonces aplicando el teorema de Gauss relativista⁸ a la ecuación (3.77) se obtiene

$$\int_{\partial\mathcal{V}_x} \int_{\Delta^3p} f p^\mu \hat{n}_\mu d^3S \frac{d^3p}{p^0} = \int_{\mathcal{V}_x} \int_{\Delta^3p} \partial_\mu f p^\mu d^4x \frac{d^3p}{p^0}. \quad (3.78)$$

Es claro que cuando no hay ninguna interacción entre las partículas, estas no pueden salir de la región \mathcal{V}_x , por lo tanto el lado izquierdo de la ecuación (3.77) da $N_{LM} = 0$.

Considerando arbitrarios los intervalos espacio-temporales \mathcal{V}_x y de momentos Δ^3p la ecuación (3.78) es equivalente a

$$p^\mu \partial_\mu f = p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \frac{df}{d\lambda} = 0, \quad (3.79)$$

con $\lambda = \tau/m$. Esta es la ecuación de transporte relativista de *Boltzmann* en el caso sin colisiones. Escribiendo esta ecuación en componentes se tiene

$$\frac{p^0}{c} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + U^i \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = 0, \quad (3.80)$$

donde U^i son las componentes espaciales de la 4-velocidad de la partícula. Excepto por el factor (p^0/c) , esta ecuación es idéntica en forma a la ecuación de Boltzmann no relativista (2.22) con $\mathcal{J} = 0$ y sin fuerzas externas. Por otro lado el límite de bajas velocidades (2.22) se obtiene a partir de (3.80).

3.2.3. Ecuación de Boltzmann relativista con colisiones

En seguida se considerará el caso en que existan colisiones entre las partículas. Estas se representan como intersecciones en las líneas de mundo de las partículas que forman el sistema⁹ (fig. 3.10).

Si existen colisiones entre las partículas el número de líneas de mundo que entra al hipervolumen \mathcal{V}_x es distinto al número de partículas que salen, es decir, $N_{LM} \neq 0$. Para cuantificar este hecho se realiza un análisis semejante al de la sección 2.1. Se consideran dos haces de partículas con velocidades \mathbf{v} y \mathbf{v}_1 , respectivamente. Por la ecuación (2.16), el número de colisiones en un volumen espacial d^3x que ocurren en un lapso dt entre los dos haces de partículas, en un marco de referencia inicialmente co-móvil con el haz de partículas con velocidad \mathbf{v} es

$$n' n'_1 g d^3x dt \sigma d\Omega, \quad (3.81)$$

⁸Una demostración sencilla puede hallarse en el libro de Schutz [36], para un tratamiento más amplio del teorema de la divergencia en relatividad ver el libro de Synge [43].

⁹En esta sección se seguirá [44] para la descripción de las colisiones relativistas.

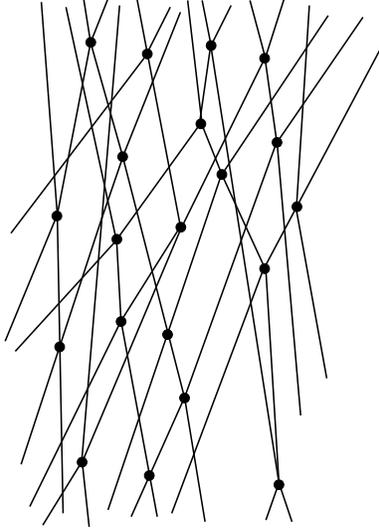


Figura 3.10: Representación espacio-temporal de las colisiones entre partículas en un gas relativista.

donde, invocando la transformación de la densidad numérica (3.47), se tiene que $n' = n$ con $\gamma = 1$, mientras que para n'_1 se tiene

$$n'_1 = n_1 \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = n_1 \left(1 - \frac{g^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.82)$$

ya que $g = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}|$ es la velocidad relativa entre los haces de partículas. En la ecuación (3.81) es claro que el número de colisiones es invariante ante cambio de marco de referencia, también lo es el producto d^3xdt ; de esta manera la cantidad $n'n'_1g\sigma d\Omega$ debe ser un invariante. Sin embargo, esta cantidad está expresada en el sistema co-móvil de las partículas con velocidad \mathbf{v} . Es conveniente expresarla en un marco de referencia inercial genérico y para esto es necesario encontrar la regla de transformación de $g\sigma d\Omega$. Con ese fin la cantidad $n'n'_1g\sigma d\Omega$ se reescribe del siguiente modo

$$n'n'_1g\sigma d\Omega = \frac{nn_1g\sigma d\Omega}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}}}. \quad (3.83)$$

Si ahora se multiplica y divide por los factores de Lorentz correspondientes a cada velocidad se pueden reconocer las transformaciones de las densidades numéricas

$$\frac{\gamma n \gamma_1 n_1 g \sigma d\Omega}{\gamma \gamma_1 \sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}}} = n' n'_1 \frac{(g \sigma d\Omega)}{\gamma \gamma_1 \sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}}}. \quad (3.84)$$

Para reconocer el último término del lado derecho se considera la cantidad $p_\mu p_1^\mu$ en

el marco de referencia co-móvil de las partículas con velocidad \mathbf{v}

$$p_\mu p_1^\mu = \frac{mm_1c^2}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}}} \Rightarrow \frac{p_\mu p_1^\mu}{mm_1c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{g^2}{c^2}}}. \quad (3.85)$$

Así, al sustituir (3.85) en (3.84) se tiene que

$$n' n'_1 (g \sigma d\Omega) \frac{p_\mu p_1^\mu}{p^0 p_1^0}. \quad (3.86)$$

Entonces para un marco genérico este producto es invariante, y por lo tanto la forma invariante del número de colisiones es

$$n' n'_1 g \frac{p_\mu p_1^\mu}{p^0 p_1^0} \sigma d\Omega d^3 x dt. \quad (3.87)$$

Se introduce la velocidad de Møller g_\circ definida como

$$g_\circ \equiv g \frac{p_\mu p_1^\mu}{p^0 p_1^0} = \sqrt{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})^2 - \frac{1}{c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{v}_1)^2} = g \left(1 - \frac{v_i v_1^i}{c^2} \right), \quad (3.88)$$

que en el límite de bajas velocidades $g_\circ \rightarrow g$. Con esta definición el número de colisiones se expresa

$$n' n'_1 g_\circ \sigma d\Omega d^3 x dt = f f_1 d^3 p d^3 p_1 g_\circ \sigma d\Omega d^3 x dt. \quad (3.89)$$

Esta ecuación es la extensión relativista de la ecuación (2.16).

Lo que resta es contar el número de pérdidas y ganancias en el número de partículas en el volumen fase $d^3 x d^3 p$. El número de partículas que deja el elemento $d^3 x d^3 p$ se obtiene integrando (3.89) sobre todos los posibles momentos p_1 y sobre todo el ángulo sólido Ω

$$dN^- = \int_{\Omega} \int_{p_1} f f_1 g_\circ \sigma d\Omega d^3 p_1 d^3 p d^3 x dt. \quad (3.90)$$

Si ahora se toma la colisión de dos haces de partículas con velocidades $\tilde{\mathbf{v}}$ y $\tilde{\mathbf{v}}_1$, el número de partículas que dejan el elemento $d^3 \tilde{x} d^3 \tilde{p}$ y entra en el elemento $d^3 x d^3 p$ es

$$dN^+ = \int_{\tilde{\Omega}} \int_{\tilde{p}_1} \tilde{f} \tilde{f}_1 \tilde{g}_\circ \tilde{\sigma} d\tilde{\Omega} d^3 \tilde{p}_1 d^3 \tilde{p} d^3 \tilde{x} d\tilde{t}; \quad (3.91)$$

aquí la tilde se refiere a cantidades medidas después de la colisión.

Para relacionar (3.90) y (3.91), hay que notar primero que $g_\circ \neq \tilde{g}_\circ$ y $\sigma d\Omega \neq \tilde{\sigma} d\tilde{\Omega}$. No obstante, por el teorema de Liouville (1) se sabe que para un volumen en el espacio fase $\mathfrak{V} = \tilde{\mathfrak{V}}$. Entonces el volumen en el espacio fase ocupado por las partículas con velocidad \mathbf{v} es $d^3 x d^3 p = d^3 \tilde{x} d^3 \tilde{p}$. Por otra parte el volumen de espacio fase ocupado por las partículas con velocidad \mathbf{v}_1 se puede calcular considerando el

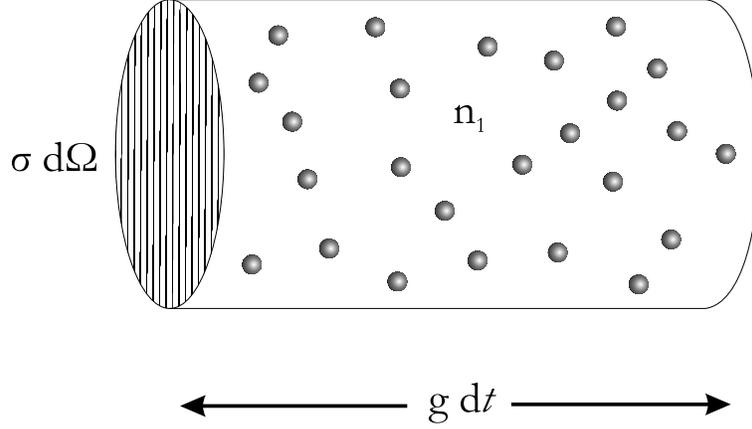


Figura 3.11: Cilindro de colisión en función de la sección transversal diferencial σ y del ángulo sólido $d\Omega$

cilindro de colisión de base $\sigma d\Omega$ y de altura $g_\phi dt$ (fig. 3.11). Con esto el volumen de espacio fase será $g_\phi dt \sigma d\Omega d^3 p_1 = \tilde{g}_\phi d\tilde{t} \tilde{\sigma} d\tilde{\Omega} d^3 \tilde{p}_1$. Por tanto se tiene que¹⁰

$$g_\phi dt \sigma d\Omega d^3 p_1 d^3 x d^3 p = \tilde{g}_\phi d\tilde{t} \tilde{\sigma} d\tilde{\Omega} d^3 \tilde{p}_1 d^3 \tilde{x} d^3 \tilde{p}. \quad (3.92)$$

Al hacer el balance de las pérdidas y las ganancias $dN = dN^+ - dN^-$, se llega a que el número neto de partículas en la región de espacio fase es

$$dN = \int_{\Omega, p_1} (\tilde{f} \tilde{f}_1 - f f_1) g_\phi \sigma d\Omega d^3 p_1 d^3 x d^3 p dt. \quad (3.93)$$

Resulta útil introducir otra magnitud conocida como *flujo invariante*:

$$F = \frac{p^0 p_1^0}{c} g_\phi \Rightarrow g_\phi = F \frac{c}{p^0 p_1^0}. \quad (3.94)$$

De esta manera (3.93) se escribe como

$$dN = \int_{\Omega, p_1} (\tilde{f} \tilde{f}_1 - f f_1) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \left(d^4 x \frac{d^3 p}{p^0} \right). \quad (3.95)$$

Al integrar (3.95) sobre un intervalo de momentos $\Delta^3 p$ y un volumen espacio-temporal \mathcal{V}_x , lo que se obtiene es exactamente N_{LM} , que por la ecuación (3.78) resulta

$$\int_{\mathcal{V}_x} \int_{\Delta^3 p} \partial_\mu f p^\mu d^4 x \frac{d^3 p}{p^0} = \int_{\mathcal{V}_x} \int_{\Delta^3 p} \left[\int_{\Omega, p_1} (\tilde{f} \tilde{f}_1 - f f_1) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \right] d^4 x \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (3.96)$$

¹⁰La ecuación (3.92) y las consideraciones anteriores son el equivalente a el principio de reversibilidad microscópica en el caso no relativista.

Siendo los intervalos de integración arbitrarios se llega a que la ecuación de transporte es

$$p^\mu \partial_\mu f = \int_{\Omega, p_1} \left(\tilde{f} \tilde{f}_1 - f f_1 \right) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0}, \quad (3.97)$$

esta es la *ecuación de Boltzmann relativista* en el caso de haber colisiones. En el caso que existieran fuerzas externas la ecuación se modificaría del modo siguiente¹¹

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + m \frac{\partial (f \mathcal{F}^\mu)}{\partial p^\mu} = \int_{\Omega, p_1} \left(\tilde{f} \tilde{f}_1 - f f_1 \right) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0}, \quad (3.98)$$

donde \mathcal{F}^μ es el 4-vector de fuerza externa de Minkowski (3.35). Para comparar está ecuación con la ecuación de Boltzmann no relativista, se pueden escribir todas las componentes de las sumas involucradas en la contracción de índices

$$\frac{p^0}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{mc}{p^0} \frac{\partial \mathcal{F}^0}{\partial p^0} + \frac{mc}{p^0} \frac{\partial \mathcal{F}^i}{\partial p^i} \right) f = \mathcal{Q}(f, \tilde{f}), \quad (3.99)$$

aquí $\mathcal{Q}(f, \tilde{f})$ es el término de colisión que cumple con $c\mathcal{Q}/p^0 = \mathcal{J}$, donde $\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}^{(no\ rel)}$ en el límite de bajas velocidades. Entonces

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{mc}{p^0} \left(\frac{\partial \mathcal{F}^0}{\partial p^0} + \frac{\partial \mathcal{F}^i}{\partial p^i} \right) \right] f = \mathcal{J}(f, \tilde{f}). \quad (3.100)$$

Como la fuerza de Minkowski cumple con $p^\mu \mathcal{F}_\mu = 0$, entonces se pueden relacionar las componentes espacial y temporal de \mathcal{F}^μ . Por otro lado, dada la condición de la capa de masa, la componente temporal del 4-momento depende de las componentes espaciales $p^0(p^i)$, se cumple que la derivada es

$$\frac{\partial p^0}{\partial p^i} = \frac{p_i}{p_0}. \quad (3.101)$$

De esta manera la ecuación (3.100) finalmente resulta

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial (f F^i)}{\partial p^i} = \int \left(\tilde{f} \tilde{f}_1 - f f_1 \right) g_\phi \sigma d\Omega d^3 p_1, \quad (3.102)$$

donde $F^i = mc\mathcal{F}^i/p^0 = \gamma^{-1}\mathcal{F}^i$, es la fuerza ordinaria en el marco en co-móvil. Esta ecuación es idéntica en forma a la ecuación (2.22), y ciertamente tiende a dicha ecuación en el límite de bajas velocidades.

¹¹Para incluir fuerzas se necesitaría tener $p'^\mu = p^\mu + \mathcal{F}^\mu \Delta\tau$, hacer un desarrollo en series de f , alrededor de p^μ antes de la colisión. Los detalles se pueden consultar en [11].

3.3. Invariantes de colisión relativistas, momentos de la distribución y ecuaciones de balance

De la misma forma que en la sección 2.2 se puede escribir la ecuación de evolución para el promedio de una función $\psi(p^\alpha)$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \int \psi p^\alpha f \frac{d^3 p}{p^0} - \int \left[p^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x^\alpha} + m \mathcal{F}^\alpha \frac{\partial \psi}{\partial p^\alpha} \right] f \frac{d^3 p}{p^0} = \\ & = \frac{1}{4} \int (\psi + \psi_1 - \tilde{\psi} - \tilde{\psi}_1) (\tilde{f} \tilde{f}_1 - f f_1) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0} \frac{d^3 p}{p^0}. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Esta es la ecuación de transferencia, que en el límite de bajas velocidades se reduce a la ecuación (2.29). Su obtención es similar a la ecuación no relativista e involucra a la relación (3.92)¹².

De la misma forma que en el caso no relativista el término de producción del miembro derecho es cero cuando la cantidad ψ se conserva en la colisión

$$\psi + \psi_1 = \tilde{\psi} + \tilde{\psi}_1. \quad (3.104)$$

Los invariantes colisionales deben ser cantidades físicas que se conservan en las colisiones. En relatividad especial se tiene la conservación del momento y la energía a través del 4-momento. Por esta razón, se espera que los invariantes colisionales sean combinaciones lineales del 4-momento. Se presenta sin demostrar el siguiente teorema

Teorema 2 (Invariantes colisionales relativistas). *Una función $\psi(p^\alpha)$ diferenciable de clase C^2 es un invariante colisional relativista sí y sólo sí es dado por*

$$\psi = A + B_\alpha p^\alpha, \quad (3.105)$$

donde A es una constante y B^α es un 4-vector que no depende del 4-momento p^α .

Algunas demostraciones de este teorema fueron dadas por Chernikov [45], Ehlers [10], Cercignani y Kremer [12] y [46].

Los momentos estadísticos de la distribución dan la descripción macroscópica del sistema y se definen del siguiente modo

$$\mathcal{J}^{\alpha\beta\dots\sigma\tau} = c \int p^\alpha p^\beta \dots p^\sigma p^\tau f \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (3.106)$$

El primer momento corresponde a la definición del 4-flujo de partículas (3.74). Según la ecuación de transferencia (3.103), el balance de N^α se obtiene cuando $\psi = c$

$$\partial_\alpha N^\alpha = 0. \quad (3.107)$$

¹²Ver [12].

El segundo momento se identifica con el tensor de energía-momento $T^{\alpha\beta}$

$$T^{\alpha\beta} = c \int p^\alpha p^\beta f \frac{d^3p}{p^0}. \quad (3.108)$$

Puede verificarse que las componentes del tensor de energía-momento así definidas, efectivamente corresponden a la definición de las componentes en la sección 3.1.2¹³. Hay que notar que en las componentes de este tensor aparece la energía relativista cp^0 , en lugar de la energía cinética como en el caso no relativista. La ecuación de transferencia para $\psi = cp^\alpha$ se convierte en la ecuación de balance para el tensor de energía-momento

$$\partial_\beta T^{\alpha\beta} = 0. \quad (3.109)$$

Puede verse en [12] que la contracción del tercer momento de la distribución $\mathcal{J}^{\alpha\beta\gamma}$ está relacionado con el 4-flujo de partículas N^α

$$\mathcal{J}^{\alpha\beta}{}_\beta = m^2 c^2 N^\alpha, \quad (3.110)$$

por tanto su ecuación de balance es

$$\partial_\alpha \mathcal{J}^{\alpha\beta}{}_\beta = 0. \quad (3.111)$$

Otra opción es elegir la función $\psi = -kc \ln(h^3 f)$, donde k es la constante de Boltzmann y h^3 es la constante de Planck que se introduce para hacer el argumento del logaritmo adimensional. Para esta cantidad la ecuación de transporte es

$$\partial_\alpha S^\alpha = \varsigma, \quad (3.112)$$

donde

$$S^\alpha = -kc \int p^\alpha f \ln(h^3 f) \frac{d^3p}{p^0}, \quad (3.113)$$

$$\varsigma = \frac{kc}{4} \int \ln\left(\frac{\tilde{f}\tilde{f}_1}{f f_1}\right) (\tilde{f}\tilde{f}_1 - f f_1) F \sigma d\Omega \frac{d^3p_1}{p_1^0} \frac{d^3p}{p^0}. \quad (3.114)$$

En estas ecuaciones S^α corresponde al 4-flujo de entropía y ς es el término de producción de entropía. Entonces (3.112) es la ecuación de balance del 4-flujo de entropía. Es fácil probar [12] que el término de producción de entropía es positivo definido $\varsigma \geq 0$.

¹³Las componentes de $T^{\alpha\beta}$ pueden verse explícitamente en [11].

3.4. Función de distribución de Maxwell-Jüttner

El estado de equilibrio se define como aquel que anula el término de colisión¹⁴, esto implica que se cumple

$$\tilde{f}^{(0)} \tilde{f}_1^{(0)} = f^{(0)} f_1^{(0)}, \quad \Rightarrow \quad \ln \tilde{f}^{(0)} + \ln \tilde{f}_1^{(0)} = \ln f^{(0)} + \ln f_1^{(0)}. \quad (3.115)$$

Esta ecuación es satisfecha por los invariantes colisionales, de tal forma que dada la ecuación (3.105) se tiene

$$\ln f^{(0)} = -(A + B_\alpha p^\alpha), \quad \Rightarrow \quad f^{(0)} = a \exp(-B_\alpha p^\alpha), \quad (3.116)$$

donde $a = e^{-A}$ y el signo negativo se escoge por conveniencia. Es muy importante notar que, al ser la densidad de espacio fase un invariante, entonces tanto el coeficiente a como la exponencial y por lo tanto su argumento $B_\alpha p^\alpha$, también *deben* ser invariantes.

Para determinar las cantidades a y B^α , se sustituye la función de distribución del equilibrio (3.116) en la definición del 4-flujo de partículas (3.74)

$$N^{\alpha(0)} = c \int \frac{d^3 p}{p^0} p^\alpha f^{(0)} = ac \int \frac{d^3 p}{p^0} p^\alpha e^{-B_\alpha p^\alpha}. \quad (3.117)$$

Definiendo la siguiente integral

$$\Xi = \int \frac{d^3 p}{p^0} e^{-B_\alpha p^\alpha}, \quad (3.118)$$

se puede escribir (3.117) como

$$N^{\alpha(0)} = -ac \frac{\partial \Xi}{\partial B_\alpha}, \quad (3.119)$$

así el problema radica en resolver la integral Ξ . Nótese que Ξ *debe* ser un invariante, ya que tanto el elemento diferencial, como la exponencial son invariantes. Por consiguiente no importa en que sistema se calcule Ξ . Una forma que es usual en la teoría cinética relativista¹⁵ implica escoger el referencial en donde el 4-vector arbitrario B_α sólo tenga componente temporal¹⁶, es decir

$$B_\alpha \rightarrow (B, \mathbf{0}), \quad (3.120)$$

Con esta suposición, Ξ se reduce a

$$\Xi = \int \frac{d^3 p}{p^0} e^{-B p^0}. \quad (3.121)$$

¹⁴El estado de equilibrio se relaciona con el estado de entropía mínima, esto implica que la producción de entropía en ese estado es cero $\zeta = 0$. De la ecuación (3.114) esto se cumple precisamente cuando $\tilde{f}\tilde{f}_1 = f f_1$.

¹⁵Ver los trabajos de Cercignani y Kremer [12] y de Groot [11].

¹⁶Más adelante se verá a que referencial corresponde esto.

Para resolver esta integral se escribe el elemento diferencial en coordenadas esféricas y se recuerda la relación de la componente temporal y las componentes espaciales del 4-momento a través de la capa de masa. Considerando a p^0 la variable de integración la integral se vuelve

$$\Xi = 4\pi \int e^{-Bp^0} [(p^0)^2 - m^2c^2]^{\frac{1}{2}} dp^0. \quad (3.122)$$

Si se factoriza m^2c^2 y se define una nueva variable para efectuar la integración $y = p^0/mc$ y $\zeta = Bmc$ se tiene

$$\Xi = 4\pi m^2 c^2 \int_1^{\infty} e^{-\zeta y} (y^2 - 1)^{\frac{1}{2}} dy, \quad (3.123)$$

de la ecuación (B.3) del apéndice B, se encuentra que la integral tiene como solución una función de Bessel modificada

$$\Xi = 4\pi m^2 c^2 \frac{K_1(\zeta)}{\zeta}. \quad (3.124)$$

Para obtener el 4-flujo de partículas resta calcular la derivada de Ξ respecto a B_α , sin embargo, Ξ es función de la magnitud de este vector por lo que se debe usar

$$\frac{\partial \Xi}{\partial B_\alpha} = \frac{\partial \Xi}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial B_\alpha}, \quad (3.125)$$

donde el segundo factor del lado derecho es sencillo de calcular

$$\frac{\partial \zeta}{\partial B_\alpha} = \frac{mc}{B} B^\alpha. \quad (3.126)$$

Es importante hacer énfasis en que las componentes espaciales de este gradiente son cero en el marco seleccionado

$$\frac{\partial \zeta}{\partial B_\alpha} \rightarrow (mc, \mathbf{0}). \quad (3.127)$$

Por otro lado la derivada de Ξ en ζ se calcula con la relación (B.5) produciendo

$$\frac{\partial \Xi}{\partial \zeta} = -4\pi m^2 c^2 \frac{K_2(\zeta)}{\zeta}, \quad (3.128)$$

y de esta forma se tiene que el 4-flujo de partículas es

$$N^{\alpha(0)} = 4\pi m^4 c^4 ac \frac{K_2(\zeta)}{\zeta^2} B^\alpha. \quad (3.129)$$

Hay que notar que las componentes espaciales en esta ecuación son cero, por tanto la única componente es la temporal

$$nc = 4\pi m^4 c^4 ac \frac{K_2(\zeta)}{\zeta^2} B, \quad (3.130)$$

despejando el escalar a se obtiene

$$a = \frac{n\zeta}{4\pi m^3 c^3 K_2(\zeta)}, \quad (3.131)$$

y sustituyendo en (3.129) para después despejar el 4-vector B^α se llega a que

$$B^\alpha = \left(\frac{\zeta}{nmc^2} \right) N^{\alpha(0)}. \quad (3.132)$$

Haciendo uso de la ecuación (3.52) que relaciona al 4-flujo de partículas con la 4-velocidad hidrodinámica, la ecuación anterior queda

$$B^\alpha = \left(\frac{\zeta}{mc^2} \right) \mathcal{U}^\alpha, \quad (3.133)$$

así se muestra que el marco de referencia donde B^α sólo tiene componente temporal corresponde al sistema co-móvil del fluido. Obsérvese que al contraer B^α con el 4-momento, esto debe ser un invariante

$$B_\alpha p^\alpha = \left(\frac{\zeta}{mc^2} \right) \mathcal{U}_\alpha p^\alpha = \left(\frac{\zeta}{mc^2} \right) E_{\mathcal{U}}, \quad (3.134)$$

donde $E_{\mathcal{U}}$ es la energía que mide un observador que ve al fluido con 4-velocidad \mathcal{U}^α arbitraria, esto implica que ζ/mc^2 debería transformar como el inverso de la energía.

Al sustituir (3.133) y (3.131) en la función de distribución (3.116), se puede escribir

$$f^{(0)} = \frac{n\zeta}{4\pi m^3 c^3 K_2(\zeta)} e^{-\left(\frac{\zeta}{mc^2}\right) \mathcal{U}_\alpha p^\alpha}. \quad (3.135)$$

Falta por encontrar el parámetro ζ . Para esto se introducirá la función de distribución (3.135) en la definición del tensor de energía-momento (3.108)

$$T^{\alpha\beta(0)} = \frac{n\zeta}{4\pi m^3 c^2 K_2(\zeta)} \int p^\alpha p^\beta e^{-\left(\frac{\zeta}{mc^2}\right) \mathcal{U}_\alpha p^\alpha} \frac{d^3 p}{p^0}. \quad (3.136)$$

De la misma manera que el 4-flujo N^α , el tensor de energía-momento está relacionado con la integral Ξ a través de

$$T^{\alpha\beta(0)} = ac \frac{\partial^2 \Xi}{\partial B_\alpha \partial B_\beta}. \quad (3.137)$$

De (3.131) se conoce a y Ξ está dada por la ecuación (3.124), así que la segunda derivada se obtiene al aplicar dos veces la relación (B.5). Utilizando lo encontrado para B^α (3.133) el tensor de energía-momento queda

$$T^{\alpha\beta(0)} = -\frac{nmc^2}{\zeta} \left(\eta^{\alpha\beta} - \zeta \frac{K_3(\zeta)}{K_2(\zeta)} \frac{\mathcal{U}^\alpha \mathcal{U}^\beta}{c^2} \right). \quad (3.138)$$

Ahora es necesario relacionar este tensor con las cantidades macroscópicas. Por ejemplo, la densidad de energía (3.60) para este tensor es

$$ne^{(0)} = \frac{1}{c^2} \mathcal{U}_\alpha T^{\alpha\beta} \mathcal{U}_\beta = \frac{nm c^2}{\zeta} \left(\zeta \frac{K_3(\zeta)}{K_2(\zeta)} - 1 \right). \quad (3.139)$$

También se puede calcular la densidad de entropía utilizando las expresiones (3.72) y (3.113) obteniendo que

$$S^{\alpha(0)} = -k \left[\ln \left(\frac{hn\zeta}{4\pi m^3 c^3 K_2(\zeta)} \right) N^\alpha - \frac{\zeta}{mc^2} T^{\alpha\beta} \mathcal{U}_\beta \right], \quad (3.140)$$

para el 4-flujo de entropía, y para la densidad de entropía

$$ns^{(0)} = -k \left[\ln \left(\frac{hn\zeta}{4\pi m^3 c^3 K_2(\zeta)} \right) n - \frac{\zeta}{mc^2} ne^{(0)} \right], \quad (3.141)$$

al dividir entre n , calcular la diferencial de la expresión anterior y usando (3.139) se obtiene

$$ds^{(0)} = \frac{k\zeta}{mc^2} \left(de^{(0)} - \frac{mc^2}{\zeta n} dn \right). \quad (3.142)$$

Utilizando la definición (3.68) se calcula la presión

$$p^{(0)} = \frac{nm c^2}{\zeta}, \quad (3.143)$$

que puede sustituirse en (3.142), dando lugar a la siguiente expresión

$$ds^{(0)} = \frac{k\zeta}{mc^2} \left(de^{(0)} - \frac{p^{(0)}}{n^2} dn \right) \Rightarrow de^{(0)} = \frac{mc^2}{k\zeta} ds^{(0)} + \frac{p^{(0)}}{n^2} dn. \quad (3.144)$$

Recuérdese que esta ecuación es válida para el equilibrio, por lo tanto, se puede *comparar* con la ecuación de Gibbs¹⁷ para la energía

$$de = Tds - pdv, \quad (3.145)$$

de esta forma el parámetro ζ se relaciona con la temperatura de equilibrio

$$\zeta = \frac{mc^2}{kT^{(0)}}. \quad (3.146)$$

Sustituyendo ζ en la función de distribución (3.135) se obtiene finalmente la llamada distribución de Maxwell-Jüttner para el equilibrio de un gas relativista^{18 19}

$$f^{(0)} = \frac{n}{4\pi kT^{(0)} m^2 c K_2(\zeta)} e^{-\left(\frac{u_\alpha p^\alpha}{kT^{(0)}}\right)}. \quad (3.147)$$

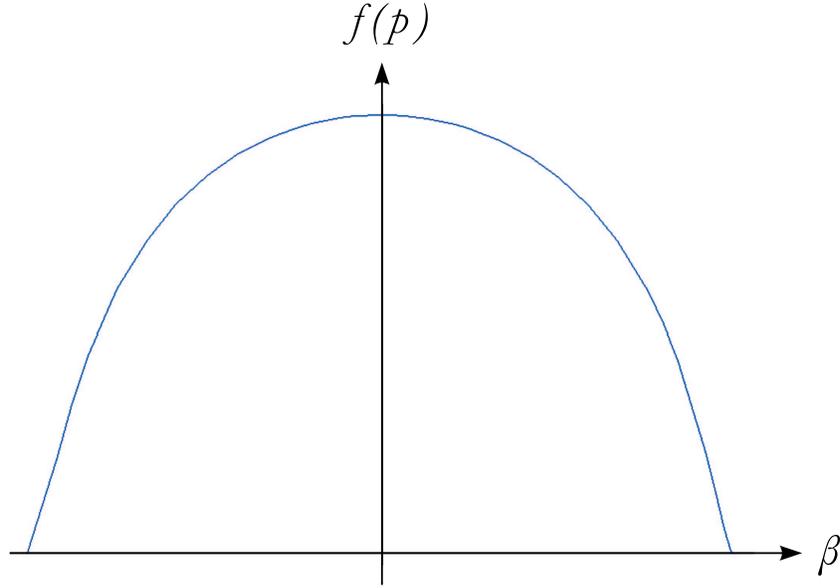


Figura 3.12: Función de distribución relativista de Maxwell-Jüttner. Se grafica la función de distribución adimensional $e^{-\zeta(1-\beta^2)^{-1/2}}/K_2(\zeta)$ para el caso $\zeta = 1$.

Se deben advertir varias cosas. Como la densidad de espacio fase es un invariante, el coeficiente y el argumento de la exponencial en (3.147) deben ser también invariantes. Sin embargo, las propiedades de transformación de las cantidades involucradas no son evidentes de (3.147) ya que todas son cantidades medidas en el sistema co-móvil. En particular, la regla de transformación de la temperatura no es del todo clara²⁰.

Por otra parte el parámetro ζ es un cociente de energías, la energía en reposo y la energía térmica. Este cociente sirve para definir los casos límite. Para temperaturas muy bajas $\zeta \gg 1$ se tiene el límite no relativista que corresponde a bajas velocidades; para muy altas temperaturas o para masas en reposo muy pequeñas $\zeta \ll 1$, se tiene el límite ultra-relativista.

En el límite no relativista $v \ll c$ y $\zeta \gg 1$, la función de Maxwell-Jüttner en el marco co-móvil, tiende a la función de distribución de Maxwell-Boltzmann (2.50) del equilibrio. En el sistema co-móvil

$$f^{(0)} = \frac{n}{4\pi kT^{(0)}m^2cK_2(\zeta)} e^{-\frac{mc^2}{kT^{(0)}}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}}, \quad (3.148)$$

y el argumento de la exponencial se puede aproximar como en (3.31), mientras que

¹⁷Ver por ejemplo ecuaciones TdS en [47], o [48].

¹⁸Se puede revisar el libro de Synge [5] o el trabajo original de Jüttner [1]. Algunos autores llaman a esta función la distribución de Synge-Jüttner.

¹⁹En la presente derivación se siguió [11], [12] y [49].

²⁰Se discutirá un poco más a este respecto en el capítulo de conclusiones y perspectivas.

para la función de Bessel se tiene el desarrollo asintótico (B.7) del apéndice B

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}, \quad K_2(\zeta) \approx \sqrt{\frac{\pi kT^{(0)}}{2mc^2}} e^{-\frac{mc^2}{kT^{(0)}}}. \quad (3.149)$$

Al sustituir en (3.148) se recupera la distribución de Maxwell-Boltzmann

$$f_{MB}^{(0)} = \frac{n}{(2\pi kT^{(0)}m)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT^{(0)}}\right). \quad (3.150)$$

En el caso ultra-relativista $v = c$ y $\zeta \ll 1$ se tiene el desarrollo (B.8) para la función de Bessel, cuyo término dominante es $\zeta/2$, sustituyendo todo esto en la función de distribución (3.147) se tiene

$$f^{(0)} = \frac{n}{8\pi} \left(\frac{c}{kT^{(0)}}\right)^3 e^{\frac{-E}{kT^{(0)}}}, \quad (3.151)$$

donde E es la energía relativista de las partículas²¹.

Hay que notar que esta función no corresponde a la distribución de Planck para la radiación del cuerpo negro. Sin embargo, esto no es de sorprender ya que (3.151) no toma en cuenta la naturaleza cuántica de los fotones, mientras que la distribución de Planck sí. Ciertamente la función (3.151) es más parecida a la llamada ley de Wien, la cual está basada en la hipótesis de que la distribución de Maxwell se mantiene también para la radiación²².

Los efectos de las estadísticas cuánticas se toman en cuenta en la ecuación relativista de *Uehling-Uhlenbeck*²³

$$p^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} + m \frac{\partial (f\mathcal{F}^\mu)}{\partial p^\mu} = \int \left[\tilde{f} \tilde{f}_1 \left(1 + \epsilon \frac{h^3}{\mathbf{g}} f\right) \left(1 + \epsilon \frac{h^3}{\mathbf{g}} f_1\right) - f f_1 \left(1 + \epsilon \frac{h^3}{\mathbf{g}} \tilde{f}\right) \left(1 + \epsilon \frac{h^3}{\mathbf{g}} \tilde{f}_1\right) \right] F \sigma_Q d\Omega \frac{d^3 p_1}{p_1^0}, \quad (3.152)$$

donde \mathbf{g} es el factor de degeneración, σ_Q se calcula a través de la teoría cuántica de dispersión y $\epsilon = -1$ corresponde al caso de la estadística de Fermi-Dirac, $\epsilon = +1$ a la de Bose-Einstein y $\epsilon = 0$ a la estadística clásica. La distribución del equilibrio es

$$f_Q^{(0)} \propto \frac{1}{\mathbf{c} e^{\frac{E}{kT}} + \epsilon}, \quad (3.153)$$

esta distribución corresponde al caso de Planck para bosones.

²¹De acuerdo con Synge [5] (pág. 37), esta función es la distribución de un gas simple compuesto de fotones si $E = h\nu$.

²²Para una revisión de la estadística en la teoría cuántica ver [50].

²³Ver el trabajo original de [51] y para la versión relativista la sección 2.3 de [12].

Capítulo 4

Ecuación tipo Fokker-Planck a partir de la Teoría Cinética Relativista

En este capítulo final se estudian las aproximaciones que llevan el término integral de colisión de la ecuación de Boltzmann relativista a una estructura de operador diferencial. Se consideran varios casos. En el primero se considera un gas de una componente el cual se puede expresar mediante un operador diferencial tipo Fokker-Planck conocido como ecuación de Landau y se obtiene su solución estacionaria. En el segundo caso se considera una mezcla binaria. Cuando una especie es no relativista, muy escasa y se difunde en otra que es relativista, se puede encontrar un operador diferencial tipo Fokker-Planck semejante a la del movimiento browniano en la versión no relativista, además de correcciones relativistas a los coeficientes de transporte. En el caso complementario la ecuación efectiva tipo Fokker-Planck contiene un término lineal adicional.

4.1. Ecuación de Fokker-Planck relativista para un gas de una componente. Ecuación de Landau

Considérese un gas relativista de una sola componente, la ecuación de Boltzmann Relativista para una partícula del gas que se caracteriza por sus coordenadas espacio-temporales x_1^α y las componentes de su 4-momento p_1^α se escribe según la ecuación (3.99), como:

$$p_1^\alpha \frac{\partial f_1}{\partial x_1^\alpha} + m_1 \frac{\partial (f_1 \mathcal{F}^\alpha)}{\partial p_1^\alpha} = \int (f_2' f_1' - f_2 f_1) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_2}{p_2^0}. \quad (4.1)$$

Como se vio en el capítulo anterior esta es una ecuación escalar, y tiene la siguiente definición de flujo invariante

$$F = \frac{p_1^0 p_2^0}{c} g_\phi, \quad (4.2)$$

donde g_ϕ es la velocidad relativa de Møller definida en la ecuación (3.88).

Las correcciones relativistas se encuentran dentro de la velocidad de Møller, en la sección diferencial de dispersión y en la definición del 4-momento.

La finalidad de esta sección es escribir una expresión aproximada del término de colisión. El primer paso es suponer que durante la colisión de dos partículas sus momentos espaciales p_1^i , p_2^i se ven modificados sólo por pequeñas cantidades Δp_1^i , Δp_2^i , entonces, la función de distribución $f' = f(p^{i'}, x^i, t)$ puede expresarse como un desarrollo en serie de Taylor alrededor del momento de la partícula antes de la colisión. Considerando únicamente los términos de primer y segundo orden en Δp_1^i se escribe

$$f(p_1^{i'}) = f(p_1^i + \Delta p_1^i) = f(p_1^i) + \Delta p_1^i \frac{\partial f_1}{\partial p_1^i} + \frac{1}{2} \Delta p_1^i \Delta p_1^j \frac{\partial^2 f_1}{\partial p_1^i \partial p_1^j}, \quad (4.3)$$

donde $f_1 = f(p_1^i)$. Se tiene una expresión similar para la función de distribución de partículas con momento p_2^i . Al multiplicar las expresiones para f_1' y f_2' y restarles el producto $f_1 f_2$ se tiene hasta segundo orden en Δp_1^i y Δp_2^i

$$\begin{aligned} f_2' f_1' - f_2 f_1 &= f_2 \Delta p_1^i \frac{\partial f_1}{\partial p_1^i} + f_1 \Delta p_2^i \frac{\partial f_2}{\partial p_2^i} + \Delta p_1^i \Delta p_2^j \frac{\partial f_1}{\partial p_1^i} \frac{\partial f_2}{\partial p_2^j} + \\ &+ \frac{f_1}{2} \Delta p_2^i \Delta p_2^j \frac{\partial^2 f_2}{\partial p_2^i \partial p_2^j} + \frac{f_2}{2} \Delta p_1^i \Delta p_1^j \frac{\partial^2 f_1}{\partial p_1^i \partial p_1^j}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Antes de introducir (4.4) en el término de colisión de la ecuación (4.1), es conveniente introducir las variables de momento total y momento relativo que están definidas de la siguiente manera

$$P^\alpha = p_2^\alpha + p_1^\alpha, \quad (4.5)$$

$$Q^\alpha = p_2^\alpha - p_1^\alpha, \quad (4.6)$$

el cambio de variables inverso es el siguiente

$$\begin{aligned} p_1^\alpha &= \frac{1}{2} (P^\alpha - Q^\alpha), \\ p_2^\alpha &= \frac{1}{2} (P^\alpha + Q^\alpha). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Estas variables cumplen las siguientes relaciones

$$P^\alpha = P'^\alpha, \quad P^\alpha Q_\alpha = P'^\alpha Q'_\alpha = 0, \quad (4.8)$$

$$Q^2 = P^2 - 2(m_2^2 + m_1^2)c^2, \quad (4.9)$$

donde P^2 y Q^2 están definidas como

$$P^2 = P^\alpha P_\alpha, \quad Q^2 = -Q^\alpha Q_\alpha. \quad (4.10)$$

Como se trata del mismo tipo de partículas se puede reemplazar $m_1 = m_2 = m$ en la ecuación (4.9) y escribir

$$Q^2 = P^2 - 4m^2c^2. \quad (4.11)$$

De esta forma se puede escribir las diferencias Δp_1^α y Δp_2^α en términos de estas nuevas variables

$$\begin{aligned} \Delta p_1^\alpha &= p_1'^\alpha - p_1^\alpha = -\frac{1}{2}\Delta Q^\alpha, \\ \Delta p_2^\alpha &= p_2'^\alpha - p_2^\alpha = \frac{1}{2}\Delta Q^\alpha. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Cuando se sustituyen las ecuaciones (4.12) en el integrando del término de colisión (4.4) y se toma en cuenta la dependencia de cada función, entonces se tiene

$$\begin{aligned} f_2'f_1' - f_2f_1 &= \frac{1}{2}\Delta Q^i \left(\frac{\partial}{\partial p_2^i} - \frac{\partial}{\partial p_1^i} \right) f_1f_2 + \\ &+ \frac{1}{8}\Delta Q^i \Delta Q^j \left(\frac{\partial}{\partial p_2^i} - \frac{\partial}{\partial p_1^i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial p_2^j} - \frac{\partial}{\partial p_1^j} \right) f_1f_2. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Notando que la diferencia de las derivadas es

$$\frac{\partial}{\partial Q^i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial p_2^i} - \frac{\partial}{\partial p_1^i} \right), \quad (4.14)$$

se llega a una expresión para el integrando del término de colisión

$$f_2'f_1' - f_2f_1 = \Delta Q^i \frac{\partial}{\partial Q^i} (f_1f_2) + \frac{1}{2}\Delta Q^i \Delta Q^j \frac{\partial}{\partial Q^i} \frac{\partial}{\partial Q^j} (f_1f_2). \quad (4.15)$$

La integral de colisión relativista para este caso queda

$$\mathcal{Q}(f_1, f_2) = \int \left(\Delta Q^i \frac{\partial}{\partial Q^i} (f_1f_2) + \frac{1}{2}\Delta Q^i \Delta Q^j \frac{\partial}{\partial Q^i} \frac{\partial}{\partial Q^j} (f_1f_2) \right) F \sigma d\Omega \frac{d^3p_2}{p_{02}}. \quad (4.16)$$

En estas variables se pueden calcular las integrales sobre los ángulos del diferencial de ángulo sólido $d\Omega = \sin \chi d\chi d\varepsilon$, donde χ es el ángulo de dispersión. Primero se escoge el sistema del *centro de masa* donde las componentes espaciales del momento total pueden eliminarse

$$P^\alpha \rightarrow (P^0, \mathbf{0}), \quad Q^\alpha \rightarrow (0, \mathbf{Q}); \quad (4.17)$$

la segunda expresión de (4.17) se sigue de las propiedades (4.8).

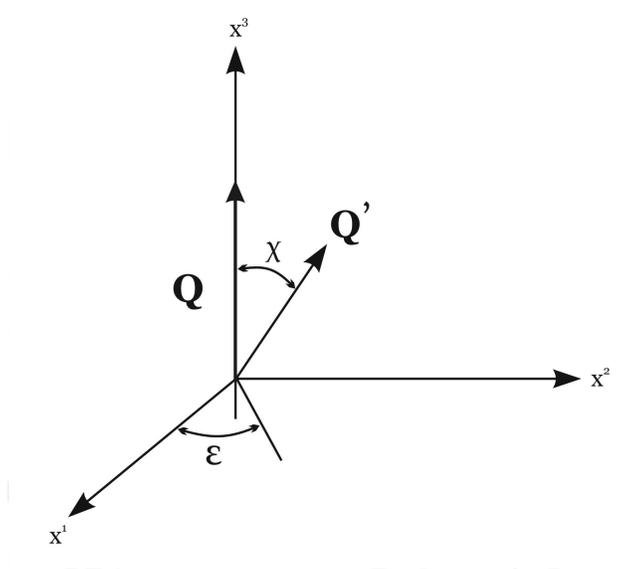


Figura 4.1: Se elige el momento relativo \mathbf{Q} en dirección x^3 de forma tal que \mathbf{Q}' se exprese en coordenadas esféricas en términos del ángulo de dispersión.

En este marco se escribe la diferencia ΔQ^i , recordando que sólo son las componentes espaciales de Q^α . Si se considera que \mathbf{Q} está en dirección del eje x^3 , como en la figura 4.1, y se escribe \mathbf{Q}' en coordenadas esféricas, se tiene que

$$Q^\alpha \rightarrow Q \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad Q'^\alpha \rightarrow Q \begin{pmatrix} 0 \\ \text{sen } \chi \cos \varepsilon \\ \text{sen } \chi \text{ sen } \varepsilon \\ \cos \chi \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

de tal forma que la diferencia se escribe

$$\Delta Q^\alpha \rightarrow Q \begin{pmatrix} 0 \\ \text{sen } \chi \cos \varepsilon \\ \text{sen } \chi \text{ sen } \varepsilon \\ \cos \chi - 1 \end{pmatrix}. \quad (4.19)$$

Lo siguiente es realizar la integral en los ángulos. Integrando en ε

$$\begin{aligned} \int \Delta Q^i d\varepsilon \sigma \text{sen } \chi d\chi &= Q \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \text{sen } \chi \cos \varepsilon \\ \text{sen } \chi \text{ sen } \varepsilon \\ \cos \chi - 1 \end{pmatrix} d\varepsilon \sigma \text{sen } \chi d\chi \\ &= Q \int \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\pi(\cos \chi - 1) \end{pmatrix} \sigma \text{sen } \chi d\chi \\ &= 2\pi Q^i \int (\cos \chi - 1) \sigma \text{sen } \chi d\chi. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Si se define la siguiente cantidad

$$\Phi = 2\pi \int (1 - \cos \chi) \sigma \sin \chi d\chi, \quad (4.21)$$

la ecuación (4.20) se puede escribir como

$$\int \Delta Q^i d\varepsilon \sigma \sin \chi d\chi = -Q^i \Phi. \quad (4.22)$$

Para efectuar la integral del producto $\Delta Q^i \Delta Q^j$ se debe notar que dicho producto se puede arreglar como la siguiente matriz

$$Q^2 \begin{pmatrix} \sin^2 \chi \cos^2 \varepsilon & \sin^2 \chi \cos \varepsilon \sin \varepsilon & (\cos \chi - 1) \sin \chi \cos \varepsilon \\ \sin^2 \chi \cos \varepsilon \sin \varepsilon & \sin^2 \chi \sin^2 \varepsilon & (\cos \chi - 1) \sin \chi \sin \varepsilon \\ (\cos \chi - 1) \sin \chi \cos \varepsilon & (\cos \chi - 1) \sin \chi \sin \varepsilon & (\cos \chi - 1)^2 \end{pmatrix}, \quad (4.23)$$

y entonces se integra cada entrada de la matriz sobre el ángulo ε . Así se tiene que

$$\begin{aligned} & \int \Delta Q^i \Delta Q^j d\varepsilon \sigma \sin \chi d\chi = \\ & = Q^2 \int \begin{pmatrix} \pi \sin^2 \chi & 0 & 0 \\ 0 & \pi \sin^2 \chi & 0 \\ 0 & 0 & 2\pi(\cos \chi - 1)^2 \end{pmatrix} \sigma \sin \chi d\chi. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Puesto que se consideró que el cambio en el momento es pequeño, y por tanto ΔQ^i también lo es, entonces el ángulo de dispersión será también pequeño, de esta forma la siguiente aproximación es válida

$$\cos \chi - 1 \simeq -\frac{1}{2}\chi^2, \quad (4.25)$$

$$\sin^2 \chi \simeq 2(1 - \cos \chi), \quad (4.26)$$

por ser de orden χ^4 se puede despreciar el término $(\cos \chi - 1)^2$ y así la ecuación (4.24) se puede escribir como

$$\begin{aligned} & \int \Delta Q^i \Delta Q^j d\varepsilon \sigma \sin \chi d\chi = Q^2 \int \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} 2\pi(1 - \cos \chi) \sigma \sin \chi d\chi \\ & = Q^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(2\pi \int (1 - \cos \chi) \sigma \sin \chi d\chi \right) = Q^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Phi. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Donde se usó la definición de Φ (4.21). La matriz de la ecuación (4.27) puede identificarse en el sistema del centro de masa de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow -\eta^{ij} - \frac{Q^i Q^j}{Q^2}, \quad (4.28)$$

donde η^{ij} es la parte espacial de la métrica del espacio plano. Finalmente esto permite escribir el valor de la integral como

$$\int \Delta Q^i \Delta Q^j d\varepsilon \sigma \sin \chi d\chi = -(Q^2 \eta^{ij} + Q^i Q^j) \Phi. \quad (4.29)$$

Las integrales (4.22) y (4.29) pueden relacionarse a través de la divergencia de (4.29)

$$\frac{\partial}{\partial Q^i} \int \Delta Q^i \Delta Q^j d\varepsilon F \sigma \sin \chi d\chi = -\frac{\partial}{\partial Q^i} [F \Phi (Q^2 \eta^{ij} + Q^i Q^j)], \quad (4.30)$$

realizando la derivada en el lado derecho de (4.30) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Q^i} [F \Phi (Q^2 \eta^{ij} + Q^i Q^j)] &= (Q^2 \eta^{ij} + Q^i Q^j) \frac{\partial}{\partial Q^i} (F \Phi) + F \Phi \frac{\partial}{\partial Q^i} (Q^2 \eta^{ij} + Q^i Q^j) \\ &= (Q^2 \eta^{ij} + Q^i Q^j) \frac{\partial}{\partial Q} (F \Phi) \frac{\partial Q}{\partial Q^i} + F \Phi \left(2Q \frac{\partial Q}{\partial Q^i} \eta^{ij} + \frac{\partial}{\partial Q^i} (Q^i Q^j) \right). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Calculando las derivadas de Q tomando en cuenta que $Q = \sqrt{-Q^\alpha Q_\alpha}$, y recordando que $Q^0 = 0$, entonces

$$\frac{\partial Q}{\partial Q^i} = \frac{-Q_i}{Q}. \quad (4.32)$$

Si esta última expresión se sustituye en (4.31) entonces resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Q^i} [F \Phi (Q^2 \eta^{ij} + Q^i Q^j)] &= -(Q^2 \eta^{ij} + Q^i Q^j) \frac{\partial(F \Phi)}{\partial Q} \left(\frac{Q_i}{Q} \right) + \\ &\quad + F \Phi \left(-2Q \left(\frac{Q_i}{Q} \right) \eta^{ij} + Q^i \delta_i^j + Q^j \delta_i^i \right) = \\ &= -\frac{\partial(F \Phi)}{\partial Q} (-Q Q^j + Q Q^j) + F \Phi (-2Q^j + 4Q^j), \end{aligned} \quad (4.33)$$

y por lo tanto, la divergencia (4.30) es

$$\frac{\partial}{\partial Q^i} \int \Delta Q^i \Delta Q^j d\varepsilon F \sigma \sin \chi d\chi = -2F \Phi Q^j. \quad (4.34)$$

A partir de la ecuación (4.22) se puede escribir

$$\frac{\partial}{\partial Q^i} \int \Delta Q^i \Delta Q^j d\varepsilon F \sigma \sin \chi d\chi = 2 \int \Delta Q^j d\varepsilon F \sigma \sin \chi d\chi. \quad (4.35)$$

Esta última expresión se puede sustituir en la integral de colisión (4.16), dando como resultado

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(f_1, f_2) &= \int \frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial Q^i} (f_1 f_2) \frac{\partial}{\partial Q^j} (\Delta Q^i \Delta Q^j F \sigma) d\Omega \frac{d^3 p_2}{p_{02}} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \int \Delta Q^i \Delta Q^j \frac{\partial}{\partial Q^i} \frac{\partial}{\partial Q^j} (f_1 f_2) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_2}{p_{02}}, \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial Q^i} \int \left[\frac{\partial}{\partial Q^j} (f_1 f_2) \right] \Delta Q^i \Delta Q^j F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_2}{p_{02}}. \tag{4.36}
\end{aligned}$$

Debido a la diferencia de las derivadas dada por (4.14), la ecuación (4.36) se puede separar en dos partes correspondientes a las dos derivadas

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(f_1, f_2) &= \frac{1}{4} \int \frac{\partial}{\partial p_2^i} \left[\int \frac{\partial}{\partial Q^j} (f_1 f_2) \Delta Q^i \Delta Q^j F \sigma d\Omega \right] \frac{d^3 p_2}{p_{02}} + \\
&\quad - \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial p_1^i} \left[\int \frac{\partial}{\partial Q^j} (f_1 f_2) \Delta Q^i \Delta Q^j F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_2}{p_{02}} \right]. \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de la divergencia se tiene que el primer término de (4.37) es cero en una superficie en infinito, de tal forma que sólo sobrevive el segundo término

$$\mathcal{Q}(f_1, f_2) = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial p_1^i} \left[\int \frac{\partial}{\partial Q^j} (f_1 f_2) \Delta Q^i \Delta Q^j F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_2}{p_{02}} \right]. \tag{4.38}$$

La ecuación (4.38) es usualmente llamada ecuación de Landau¹. Para la ecuación (4.38) se puede realizar una derivación parcial y utilizar de nuevo (4.14), así se llega a la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(f_1, f_2) &= -\frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial p_1^i} \int \left(\frac{\partial}{\partial p_2^j} - \frac{\partial}{\partial p_1^j} \right) (f_1 f_2 \Delta Q^i \Delta Q^j F \sigma) d\Omega \frac{d^3 p_2}{p_{02}} + \\
&\quad + \frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial p_1^i} \int (f_1 f_2) \frac{\partial}{\partial Q^j} (\Delta Q^i \Delta Q^j F \sigma) d\Omega \frac{d^3 p_2}{p_{02}}. \tag{4.39}
\end{aligned}$$

Usando (4.35) y de nuevo el teorema de la divergencia en una superficie en infinito se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(f_1, f_2) &= \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial p_1^i} \frac{\partial}{\partial p_1^j} \int (f_1 f_2 \Delta Q^i \Delta Q^j F \sigma) d\Omega \frac{d^3 p_2}{p_{02}} + \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_1^i} \int (f_1 f_2 \Delta Q^i F \sigma) d\Omega \frac{d^3 p_2}{p_{02}}, \tag{4.40}
\end{aligned}$$

al cambiar ΔQ^i por Δp_1^i gracias a las relaciones (4.12) se obtiene

¹Esta ecuación fue obtenida en el caso no relativista por Landau [23]. La relación entre la ecuación de Boltzmann, de Landau y Fokker-Planck en el caso no relativista pueden consultarse [52] y [30].

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(f_1, f_2) = & \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial p_1^i} \frac{\partial}{\partial p_1^j} \left(f_1 \int f_2 \Delta p_1^i \Delta p_1^j F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_2}{p_{02}} \right) + \\ & - \frac{\partial}{\partial p_1^i} \left(f_1 \int f_2 \Delta p_1^i F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_2}{p_{02}} \right). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Ahora, recordando que los momentos estadísticos tensoriales de la distribución están definidos por

$$M^{ABC\dots} = \int f_2 \Delta p_1^A \Delta p_1^B \dots F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_2}{p_{02}}, \quad (4.42)$$

se puede reescribir (4.41) identificando los dos primeros momentos de la distribución

$$\mathcal{Q}(f_1, f_2) = -\frac{\partial}{\partial p_1^i} (f_1 A^i) + \frac{\partial^2}{\partial p_1^i \partial p_1^j} (f_1 D^{ij}), \quad (4.43)$$

donde

$$A^i = \int f_2 \Delta p_1^i F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_2}{p_{02}}, \quad (4.44)$$

$$D^{ij} = \frac{1}{2} \int f_2 \Delta p_1^i \Delta p_1^j F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_2}{p_{02}}. \quad (4.45)$$

La ecuación (4.43) tiene la misma forma que la ecuación de Fokker-Planck al reconocer el primer momento A^i con el coeficiente de fricción dinámica y el segundo momento $2D^{ij}$ con el tensor de difusión. La expresión (4.43) para el término de colisión de la ecuación de Boltzmann relativista fue obtenida previamente en un trabajo de Akama en 1970 [53], por un método diferente al presentado aquí.

Es importante notar que esta ecuación no está escrita en una forma manifiestamente covariante como el lado izquierdo de la ecuación de Boltzmann (4.1) de la que se partió.

Todos los cálculos anteriores son válidos en el sistema de referencia donde la diferencia de energías es $\Delta p_1^0 = 0$. En general $\Delta p_1^0 \neq 0$ en un marco de referencia arbitrario. Sin embargo, dado un sistema arbitrario siempre puede hallarse una transformación al marco del centro de masa de las partículas consideradas, donde (4.43) es válida. Entonces, para escribir el término de colisión en un marco genérico, dado que (4.43) es una ecuación escalar, es necesario sumar las componentes A^0 , D^{00} , D^{0i} y D^{i0} que son cero en el sistema que se escogió para trabajar². De esta manera se puede escribir (4.43) de un modo completamente covariante

$$p_1^\alpha \frac{\partial f_1}{\partial x_1^\alpha} + m \frac{\partial (f_1 \mathcal{F}^\alpha)}{\partial p_1^\alpha} = -\frac{\partial}{\partial p_1^\alpha} (f_1 A^\alpha) + \frac{\partial^2}{\partial p_1^\alpha \partial p_1^\beta} (f_1 D^{\alpha\beta}). \quad (4.46)$$

²Esto es análogo a escoger el sistema geodésico en relatividad general [36].

Esta ecuación es una ecuación tipo Fokker-Planck covariante. El mérito de esta ecuación radica en que se pudo aproximar la integral de colisión, que es un invariante, por un término diferencial, también invariante y además manifiestamente covariante.

La ecuación (4.46) se puede reescribir de la siguiente manera

$$p_1^\alpha \frac{\partial f_1}{\partial x_1^\alpha} = -\frac{\partial}{\partial p_1^\alpha} \mathcal{S}^\alpha, \quad (4.47)$$

donde la densidad de corriente es

$$\mathcal{S}^\alpha = f_1 (A^\alpha + m\mathcal{F}^\alpha) - \frac{\partial}{\partial p_1^\beta} (f_1 D^{\alpha\beta}). \quad (4.48)$$

En el caso espacialmente homogéneo sin fuerzas externas la ecuación se reduce a

$$p_1^0 \frac{\partial f_1}{\partial x^0} + \frac{\partial}{\partial p_1^\alpha} \mathcal{S}^\alpha = 0. \quad (4.49)$$

La solución estacionaria de esta ecuación se tiene cuando $\mathcal{S}^\alpha = 0$, lo cual lleva a la siguiente relación

$$D^{\alpha\beta} \frac{\partial \ln f}{\partial p^\beta} = A^\alpha - \frac{\partial}{\partial p_1^\beta} (D^{\alpha\beta}). \quad (4.50)$$

Para resolver (4.50) para la función de distribución se requiere que el tensor de difusión tenga inversa $D_{\alpha\gamma} D^{\alpha\beta} = \delta_\gamma^\beta$, con lo que se escribe como

$$\frac{\partial \ln f}{\partial p^\beta} = D_{\alpha\gamma} \left[A^\alpha - \frac{\partial}{\partial p_1^\beta} (D^{\alpha\beta}) \right] \equiv Z_\gamma, \quad (4.51)$$

esta ecuación no puede satisfacerse para todo A^α y $D^{\alpha\beta}$. Como el lado izquierdo de (4.51) es un gradiente, el lado derecho debe serlo también, por tanto debe cumplir la siguiente condición

$$\frac{\partial Z_\gamma}{\partial p^\epsilon} = \frac{\partial Z_\epsilon}{\partial p^\gamma}, \quad (4.52)$$

estas condiciones son conocidas como *condiciones de potencial* en el caso no relativista [27]. Integrando (4.51) se obtiene

$$\ln f(p^\gamma) = \int Z_\gamma dp^\gamma + \mathcal{C}, \quad (4.53)$$

o bien

$$f(p^\gamma) = \mathcal{A} \exp \left[\int Z_\gamma dp^\gamma \right], \quad (4.54)$$

donde $\mathcal{A} = e^{\mathcal{C}}$ es la constante de normalización.

Siguiendo a Cercignani [31], se pueden introducir consideraciones de isotropía según las cuales el vector de fricción dinámica y el tensor de difusión tienen la siguiente representación³

$$A^\alpha = \frac{A}{m} p^\alpha, \quad (4.55)$$

$$D^{\alpha\beta} = -\frac{D}{2} \eta^{\alpha\beta}, \quad (4.56)$$

donde A es el coeficiente de fricción, m es la masa de la partícula y D es el coeficiente de difusión. En este caso es fácil corroborar que la condición (4.52) se satisface. Con (4.55) y (4.56), Z_γ definida en (4.51) se puede escribir como

$$Z_\gamma = D_{\alpha\gamma} A^\alpha = -\frac{2A}{Dm} p_\gamma, \quad (4.57)$$

y la ecuación (4.54) se puede escribir como

$$f(p^\gamma) = \mathcal{A} \exp\left(-\frac{A}{Dm} p_\gamma p^\gamma\right) = \mathcal{A} e^{-\frac{A}{D} mc^2}, \quad (4.58)$$

utilizando la relación de capa de masa. Por otro lado se sabe que la solución estacionaria debe coincidir con la solución a la ecuación de Boltzmann que anula el término de colisión. Como se vio en la sección 3.4 esta distribución es la de Maxwell-Jüttner (3.147). Identificando (3.147) con (4.58) se llega a que

$$\frac{A}{D} mc^2 = \frac{1}{kT} \mathcal{U}_\alpha p^\alpha, \quad \text{o bien,} \quad \frac{kTA}{D} = \frac{\mathcal{U}_\alpha p^\alpha}{mc^2}. \quad (4.59)$$

Al considerar el límite no relativista de (4.59) en un marco co-móvil, se obtiene que (4.59) se aproxima por

$$\frac{kTA}{D} \simeq 1 + \frac{v^2}{2c^2} + \dots, \quad (4.60)$$

el término dominante coincide con la relación conocida en el caso no relativista⁴ para el teorema de fluctuación-disipación⁵ $D = kTA$.

³Nótese que para encontrar la relación entre los coeficientes de transporte en el caso general, se tendría que igualar el argumento de la exponencial en (4.54) con el argumento de la exponencial en la distribución de Jüttner, i.e. $\int Z_\alpha dp^\alpha = -\mathcal{U}_\alpha p^\alpha / kT$.

⁴Otra forma de llegar a estas relaciones se muestra en [54] para el caso no relativista y consiste en considerar desde el inicio a la distribución de Jüttner como solución estacionaria y sustituirla en $\mathcal{S}^\alpha = 0$ para encontrar la relación (4.60).

⁵El teorema de fluctuación-disipación expresa que la disipación (representada por la fricción dinámica A) entre el fluido y una de las partículas que lo forman, es proporcional al coeficiente de difusión. En la teoría del movimiento browniano disipación se relaciona con la función de correlación de la fuerza estocástica responsable de generar las fluctuaciones. En el apéndice A se muestra la relación de Einstein, correspondiente a la ecuación de Langevin (A.14). Para la obtención de esta expresión el caso no relativista ver pág. 90 [31].

4.2. Ecuación tipo Fokker-Planck relativista para la difusión en una mezcla binaria

Considérese una mezcla de dos especies de partículas. En este caso la evolución está regida por un sistema de ecuaciones de Boltzmann relativistas

$$p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + m \frac{\partial(f\mathcal{F}^\alpha)}{\partial p^\alpha} = \mathcal{Q}(f_G, f) + \mathcal{Q}(f, f), \quad (4.61)$$

$$p_G^\alpha \frac{\partial f_G}{\partial x_G^\alpha} + m_G \frac{\partial(f_G \mathcal{F}_G^\alpha)}{\partial p_G^\alpha} = \mathcal{Q}(f, f_G) + \mathcal{Q}(f_G, f_G), \quad (4.62)$$

donde el término \mathcal{Q} es la integral de colisión y su argumento indica a qué especie involucra en cada caso.

Una de las especies está formada por partículas cuya masa es mucho mayor a la masa de las partículas ligeras $m \gg m_G$. El número de partículas ligeras es mucho mayor que la de las partículas pesadas $n_G \gg n$, es decir, las partículas ligeras forman un gas⁵.

Al ser tan escasas las partículas pesadas los choques entre ellas casi no suceden y el segundo término de la ecuación (4.61) se puede despreciar. Asimismo se supone que las partículas pesadas no influyen en la evolución del gas, de modo que el primer término de la ecuación (4.62) también se elimina⁶.

De este modo la ecuación (4.61) para las partículas pesadas queda de la siguiente forma

$$p^\alpha \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} + m \frac{\partial(f\mathcal{F}^\alpha)}{\partial p^\alpha} = \int (f'_G f' - f_G f) F \sigma d\Omega \frac{d^3 p_G}{p_{0G}}. \quad (4.63)$$

Si se multiplica la ecuación anterior por un factor de (c/p^0) se puede reescribir como

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial(fF^i)}{\partial p^i} = \int (f'_G f' - f_G f) g_\sigma \sigma d\Omega d^3 p_G. \quad (4.64)$$

Esta ecuación es idéntica en forma a la ecuación de Boltzmann en la teoría cinética no relativista, excepto que la velocidad relativa en cuestión es la velocidad de Møller.

Por otra parte, como se supone que las partículas en el gas no se ven afectadas por las partículas pesadas, y que el gas se encuentra en equilibrio a temperatura T , su función de distribución es la distribución de Maxwell-Jüttner

$$f_G = f_G^{(0)} = \frac{n_G}{4\pi m_G^2 c k T K_2(\zeta)} e^{-\frac{u_\alpha p_G^\alpha}{kT}}, \quad (4.65)$$

donde $\zeta = m_G c^2 / kT$. Como consecuencia el término de colisión de la ecuación (4.64) toma la forma

$$\mathcal{J}(f_G, f) = \int (f_G^{(0)'} f' - f_G^{(0)} f) g_\sigma \sigma d\Omega d^3 p_G. \quad (4.66)$$

⁵En analogía con la sección 2.5.1, para las partículas ligeras se usará el índice G , mientras que para las partículas pesadas no se usará ningún índice.

⁶Ver la primera parte de la sección 2.5.1, en el presente apartado se siguen los mismos argumentos.

Por otro lado la función de distribución para las partículas pesadas se supone cercana a la del equilibrio. Se considera un desarrollo de Chapman-Enskog a orden lineal, de tal forma que la función de distribución se expresa como

$$f = f^{(0)} (1 + h(p^i)), \quad (4.67)$$

donde $f^{(0)}$ es la función de distribución del equilibrio de las partículas

$$f^{(0)} = \frac{n}{4\pi m^2 c k T K_2(\zeta_*)} e^{-\frac{u_\alpha p^\alpha}{kT}}, \quad (4.68)$$

con $\zeta_* = mc^2/kT$. La función h es una desviación de la distribución de equilibrio, que en principio depende de los mismos argumentos que f . Como se supone homogeneidad en el sistema, h sólo será función del momento. Sustituyendo (4.67) en (4.66) se obtendrán dos integrales, la primera de las cuales es cero

$$\int (f_G'^{(0)} f^{(0)} - f_G^{(0)} f^{(0)}) g_\phi \sigma d\Omega d^3 p_G = 0, \quad (4.69)$$

para la otra integral se escoge un marco co-móvil $\mathcal{U}_\alpha \rightarrow (c, \mathbf{0})$ y se considera la conservación de la energía

$$p^0 + p_G^0 = p^{0'} + p_G^{0'}. \quad (4.70)$$

De esta manera se tiene

$$f^{(0)'} f_G^{(0)'} = f^{(0)} f_G^{(0)}, \quad (4.71)$$

y la integral de colisión que queda se reduce a

$$\mathcal{J}(f_G, f) = f^{(0)} \int (h' - h) f_G^{(0)} g_\phi \sigma d\Omega d^3 p_G = f^{(0)} I. \quad (4.72)$$

De aquí en adelante se trabajará con la integral I . El propósito es convertir la integral de colisión \mathcal{J} en un operador diferencial que actúe sobre la función de distribución. Para ello se harán ciertas aproximaciones en la integral I , luego se sustituirá de regreso en (4.72) para obtener el término de colisión completo.

Al igual que en la sección 2.5.1, primero se supone que en la colisión el momento p^i de las partículas pesadas cambia sólo por pequeñas cantidades Δp^i , así se desarrolla la función $h' = h(p^{i'})$ después de la colisión, en series de Taylor alrededor del momento pre-colisional p^i . Si se mantienen sólo términos de primer y segundo orden en Δp^i entonces se tiene que

$$h' = h(p^i + \Delta p^i) = h(p^i) + \Delta p^i \frac{\partial h}{\partial p^i} + \frac{1}{2} \Delta p^i \Delta p^j \frac{\partial^2 h}{\partial p^i \partial p^j} \dots, \quad (4.73)$$

utilizando (4.73), la integral I definida en (4.72) se puede escribir como

$$I = \int \left(\Delta p^i \frac{\partial h}{\partial p^i} + \frac{1}{2} \Delta p^i \Delta p^j \frac{\partial^2 h}{\partial p^i \partial p^j} \right) f_G^{(0)} g_\phi \sigma d\Omega d^3 p_G. \quad (4.74)$$

Para continuar con las aproximaciones el siguiente paso es introducir la velocidad relativa definida de la siguiente forma

$$g^i \equiv c \frac{p_G^i}{p_G^0} - c \frac{p^i}{p^0}, \quad (4.75)$$

con esta definición se calcula la diferencia antes y después de la colisión

$$g^{i'} - g^i = c \left(\frac{p_G^{i'}}{p_G^0} - \frac{p^{i'}}{p^0} \right) - c \left(\frac{p_G^i}{p_G^0} - \frac{p^i}{p^0} \right). \quad (4.76)$$

A partir de este momento se separan dos casos complementarios. El primero será el caso de la difusión de partículas pesadas no relativistas en un gas formado por partículas relativistas. En segundo lugar se discutirá el caso complementario en el que partículas relativistas se difunden en un gas formado por partículas pesadas que no son relativistas.

4.2.1. Difusión de partículas no relativistas en un gas relativista

Primero se analizará el caso más sencillo, se supondrá que las partículas pesadas son no relativistas, entonces al orden dominante la componente cero del momento de las partículas pesadas es el mismo antes y después de la colisión $p^{0'} \approx p^0$. Por la conservación de la energía (4.70) se tiene que $p_G^{0'} \approx p_G^0$. De esta manera la ecuación (4.76) se escribe como

$$g^{i'} - g^i = \frac{c}{p_G^0} (p_G^{i'} - p_G^i) - \frac{c}{p^0} (p^{i'} - p^i). \quad (4.77)$$

Por otro lado se tiene la conservación de las componentes espaciales del momento

$$p_G^{i'} - p_G^i = - (p^{i'} - p^i). \quad (4.78)$$

Al sustituir (4.78) en (4.77) se llega a

$$g^{i'} - g^i = -c \left(\frac{1}{p_G^0} + \frac{1}{p^0} \right) (p^{i'} - p^i). \quad (4.79)$$

Esta ecuación es la más general para la diferencia entre la velocidades relativas en el caso estudiado. Para continuar es necesario introducir algunas aproximaciones en el término que involucra a las componentes temporales en la última expresión (4.79).

Para comenzar con las aproximaciones hay que recordar que, de la ecuación (3.31) se desprende la definición de energía cinética relativista, de modo tal que la energía relativista de una partícula es la suma de su energía en reposo y su energía cinética

$$cp^0 = mc^2 + \mathcal{K}. \quad (4.80)$$

La energía relativista promedio de una partícula se puede calcular a partir de la densidad de energía, se calcula la componente 00 del tensor de energía momento para un fluido en equilibrio (3.139) con la definición de (3.146) para el parámetro ζ . Así la *energía cinética promedio* es la energía promedio menos la energía en reposo y esta dada por la siguiente expresión

$$\overline{\mathcal{K}} = mc^2 \left(\frac{K_3(\zeta)}{K_2(\zeta)} - \frac{kT}{mc^2} - 1 \right). \quad (4.81)$$

Considérense los casos límite de la expresión anterior. El límite no relativista se obtiene al suponer bajas temperaturas $\zeta \gg 1$

$$\overline{\mathcal{K}}_{no\ rel} \cong mc^2 \left(1 + \frac{5}{2} \frac{kT}{mc^2} - \frac{kT}{mc^2} - 1 \right) = \frac{3}{2} kT, \quad (4.82)$$

esta expresión corresponde a la bien conocida relación entre temperatura y energía en la mecánica estadística no relativista, dada por el teorema de equipartición de la energía. Por otra parte, el límite ultra relativista correspondiente a masas pequeñas (o nulas), o altas temperaturas, se obtiene cuando $\zeta \ll 1$

$$\overline{\mathcal{K}}_{ultra} \cong (4kT - kT) = 3kT. \quad (4.83)$$

Con estos resultados se deben hacer algunas observaciones. En el caso de tener una mezcla de una componente no relativista y un gas ultra relativista (semejante al caso de estudio en esta sección) se puede apreciar de las ecuaciones (4.82) y (4.83), que $\overline{\mathcal{K}}_{ultra} = 2\overline{\mathcal{K}}_{no\ rel}$. Existe una repartición de la energía cinética entre las distintas componentes de la mezcla debido a su carácter relativista [5]. Por otro lado, de la ecuación (4.81), es claro que en el caso relativista genérico no existe una relación directa entre la energía cinética y la temperatura como en los casos no relativista y ultra relativista. Sin embargo, tomando como cotas dichos casos límite, puede estimarse el orden de magnitud de la energía cinética en relación con la temperatura. De esta manera se considerará la siguiente aproximación para la energía cinética relativista

$$\mathcal{K} \approx kT, \quad (4.84)$$

con esto la energía relativista (4.80) se escribe como

$$cp^0 \cong mc^2 + kT. \quad (4.85)$$

Continuando con la aproximación hay que recordar que en el caso de estudio ambas especies están a la misma temperatura. Como las partículas pesadas que se difunden son no relativistas se cumple que

$$kT \ll mc^2. \quad (4.86)$$

Como están a la misma temperatura se puede sustituir la ecuación (4.85) para la energía de las partículas del gas en (4.86) llevando a

$$cp_G^0 - m_G c^2 \ll mc^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{p_G^0}{mc} \ll 1 + \frac{m_G}{m}. \quad (4.87)$$

Dada la relación entre las masas $m \gg m_G$, el último término de (4.87) se desprecia y resulta

$$p_G^0 \ll mc = p^0. \quad (4.88)$$

Con esta última expresión se tiene una relación entre componentes temporales del 4-momento para aproximar (4.79). En una notación simplificada se escribe

$$\Delta g^i = -\frac{c}{p_G^0} \Delta p^i \quad \Rightarrow \quad \Delta p^i = -\frac{p_G^0}{c} \Delta g^i. \quad (4.89)$$

Con estos resultados se sustituye (4.89) en la integral I de la ecuación (4.74) y, al notar que el ángulo entre los vectores espaciales g^i y $g^{i'}$ es el ángulo de dispersión χ , se tiene que

$$I = \int \left(-\frac{p_G^0}{c} \Delta g^i \frac{\partial h}{\partial p^i} + \frac{(p_G^0)^2}{2c^2} \Delta g^i \Delta g^j \frac{\partial^2 h}{\partial p^i \partial p^j} \right) f_G^{(0)} g_\sigma \sigma d\Omega d^3 p_G, \quad (4.90)$$

sustituyendo la distribución de equilibrio de las partículas del gas (4.65),

$$I = \mathcal{A} \int \left(-\frac{p_G^0}{c} \Delta g^i \frac{\partial h}{\partial p^i} + \frac{(p_G^0)^2}{2c^2} \Delta g^i \Delta g^j \frac{\partial^2 h}{\partial p^i \partial p^j} \right) e^{-\frac{u_\alpha p_G^\alpha}{kT}} (g_\sigma \sigma) d\Omega d^3 p_G, \quad (4.91)$$

donde

$$\mathcal{A} = \frac{n_G}{4\pi m_G^2 c k T K_2(\zeta)}. \quad (4.92)$$

Se escribe el elemento de ángulo sólido $d\Omega = \sin \chi d\chi d\epsilon$, donde χ y ϵ son los ángulos polares de $g^{i'}$ respecto a g^i . Así se puede integrar con respecto a ϵ

$$\int_0^{2\pi} \Delta g^i d\epsilon = -2\pi (1 - \cos \chi) g^i, \quad (4.93)$$

$$\int_0^{2\pi} \Delta g^i \Delta g^j d\epsilon = 2\pi \left\{ \left[(1 - \cos \chi)^2 - \frac{1}{2} \sin^2 \chi \right] g^i g^j - \frac{|\mathbf{g}|^2}{2} \eta^{ij} \sin^2 \chi \right\}, \quad (4.94)$$

sustituyendo las anteriores relaciones en la integral (4.91)

$$I = 2\pi \mathcal{A} \int e^{-\frac{u_\alpha p_G^\alpha}{kT}} (g_\sigma \sigma) \sin \chi d\chi d^3 p_G \left[\frac{p_G^0}{c} \frac{\partial h}{\partial p^i} g^i (1 - \cos \chi) + \frac{(p_G^0)^2}{4c^2} \frac{\partial^2 h}{\partial p^i \partial p^j} \left\{ (1 - 4 \cos \chi + 3 \cos^2 \chi) g^i g^j - |\mathbf{g}|^2 \eta^{ij} \sin^2 \chi \right\} \right]. \quad (4.95)$$

Si se escribe el elemento de volumen del gas dp_G en coordenadas esféricas $d^3 p_G = \sin \phi d\phi d\vartheta |\mathbf{p}_G|^2 d|\mathbf{p}_G|$ y se hace la integración en el ángulo azimutal ϑ de g^i y $g^i g^j$, de la misma manera que se hizo en las integrales (4.93) y (4.94), el resultado es

$$c \int_0^{2\pi} \left(\frac{p_G^i}{p_G^0} - \frac{p^i}{p^0} \right) d\vartheta = 2\pi c \left(\frac{|\mathbf{p}_G|}{|\mathbf{p}|} \frac{p^0}{p_G^0} \cos \phi - 1 \right) \frac{p^i}{p^0}, \quad (4.96)$$

$$c^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{p_G^i}{p_G^0} - \frac{p^i}{p^0} \right) \left(\frac{p_G^j}{p_G^0} - \frac{p^j}{p^0} \right) d\vartheta = 2\pi c^2 \left\{ \left[\left(\frac{|\mathbf{p}_G|}{|\mathbf{p}|} \frac{p^0}{p_G^0} \cos \phi - 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{p}_G|^2}{|\mathbf{p}|^2} \frac{(p^0)^2}{(p_G^0)^2} \sin^2 \phi \right] \frac{p^i p^j}{(p^0)^2} - \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{p}_G|^2}{(p_G^0)^2} \eta^{ij} \sin^2 \phi \right\}. \quad (4.97)$$

Si se sustituyen estos resultados en la integral I (4.95) se obtiene que

$$I = 4\pi^2 \mathcal{A} \int e^{-\frac{u_\alpha p_G^\alpha}{kT}} (g_\sigma) |\mathbf{p}_G|^2 d|\mathbf{p}_G| \sin \chi d\chi \sin \phi d\phi \times \left\{ (1 - \cos \chi) p_G^0 \times \right. \\ \times \frac{\partial h}{\partial p^i} \frac{p^i}{p^0} \left(\frac{|\mathbf{p}_G|}{|\mathbf{p}|} \frac{p^0}{p_G^0} \cos \phi - 1 \right) + \frac{(p_G^0)^2}{4} \frac{\partial^2 h}{\partial p^i \partial p^j} \left[(1 - 4 \cos \chi + 3 \cos^2 \chi) \times \right. \\ \times \left. \left\{ \frac{p^i p^j}{(p^0)^2} \left(\frac{|\mathbf{p}_G|^2}{|\mathbf{p}|^2} \frac{(p^0)^2}{(p_G^0)^2} \cos^2 \phi - 2 \frac{|\mathbf{p}_G|}{|\mathbf{p}|} \frac{p^0}{p_G^0} \cos \phi + 1 - \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{p}_G|^2}{|\mathbf{p}|^2} \frac{(p^0)^2}{(p_G^0)^2} \sin^2 \phi \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \eta^{ij} \frac{|\mathbf{p}_G|^2}{(p_G^0)^2} \sin^2 \phi \right\} - \frac{|\mathbf{g}|^2}{c^2} \eta^{ij} \sin^2 \chi \right] \left. \right\}. \quad (4.98)$$

Para poder continuar con las aproximaciones a la integral I se analizará el producto (g_σ) . La sección transversal diferencial en este caso será función del ángulo de dispersión y de el flujo invariante, $\sigma = \sigma(F, \chi)$. De modo tal que para F se puede escribir

$$F = \sqrt{(p_\alpha p_G^\alpha)^2 - m^2 m_G^2 c^4} \quad (4.99)$$

$$= p^0 |\mathbf{p}_G| \sqrt{1 - 2 \frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \frac{p_G^0}{|\mathbf{p}_G|} \cos \phi + \frac{|\mathbf{p}|^2}{(p^0)^2} \sin^2 \phi + \frac{(p_G^0)^2}{(p^0)^2} \frac{|\mathbf{p}|^2}{|\mathbf{p}_G|^2}}. \quad (4.100)$$

Al ser la partícula no relativista se sabe que el cociente $|\mathbf{p}|/p^0$ es pequeño, además se supone que el gas es cercanamente relativista $p_G^0 \sim |\mathbf{p}_G|$, de modo que se utilizará como parámetro para aproximar F . Despreciando el último término en (4.100), se puede aproximar el producto $F\sigma$, el cual se desarrolla en series de Taylor como sigue

$$F\sigma(F, \chi) \cong p^0 |\mathbf{p}_G| \sigma(|\mathbf{p}_G|, \chi) \left(1 - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \frac{p_G^0}{|\mathbf{p}_G|} \cos \phi \left(1 + \frac{|\mathbf{p}_G|}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial |\mathbf{p}_G|} \right) \right), \quad (4.101)$$

que en términos de la velocidad de Møller queda

$$g_\sigma \sigma(F, \chi) \cong c \frac{|\mathbf{p}_G|}{p_G^0} \sigma(|\mathbf{p}_G|, \chi) \left(1 - \frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \frac{p_G^0}{|\mathbf{p}_G|} \cos \phi \left(1 + \frac{|\mathbf{p}_G|}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial |\mathbf{p}_G|} \right) \right). \quad (4.102)$$

Se puede hacer la misma aproximación para el cociente de la magnitud de la velocidad relativa $|\mathbf{g}|^2/c^2$

$$\frac{|\mathbf{g}|^2}{c^2} = \frac{|\mathbf{p}_G|^2}{(p_G^0)^2} + \frac{|\mathbf{p}|^2}{(p^0)^2} - 2 \frac{|\mathbf{p}_G|}{p_G^0} \frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \cos \phi, \quad (4.103)$$

considerando únicamente el primer término de esta ecuación. El hecho de que las partículas pesadas sean no relativistas es necesario para comparar los ordenes del cociente $|\mathbf{p}|/p^0$ en la ecuación (4.98); se desprecian todos los términos de orden $|\mathbf{p}|/p^0$ y mayores, para que la integral quede a primer orden⁷.

Al sustituir (4.102) y (4.103) en la expresión para I (4.98), dejando únicamente términos de primer orden y realizando la integración en ángulo ϕ , se obtiene entonces

$$\begin{aligned}
I = 4\pi^2 c\mathcal{A} \int e^{-\frac{u_{\alpha} p_G^{\alpha}}{kT}} \sigma(|\mathbf{p}_G|, \chi) |\mathbf{p}_G|^3 \frac{d|\mathbf{p}_G|}{p_G^0} \sin \chi d\chi & \left\{ -2(1 - \cos \chi) p_G^0 \frac{\partial h}{\partial p^i} \frac{p^i}{p^0} \times \right. \\
& \times \left[1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{|\mathbf{p}_G|}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial |\mathbf{p}_G|} \right) \right] + \frac{(p_G^0)^2}{4} \frac{\partial^2 h}{\partial p^i \partial p^j} \left[(1 - 4 \cos \chi + 3 \cos^2 \chi) \times \right. \\
& \left. \left. \times \left(-\frac{2}{3} \eta^{ij} \frac{|\mathbf{p}_G|^2}{(p_G^0)^2} \right) - 2 \sin^2 \chi \eta^{ij} \frac{|\mathbf{p}_G|^2}{(p_G^0)^2} \right] \right\}, \quad (4.104)
\end{aligned}$$

al factorizar $(1 - \cos \chi)$ se tiene que

$$\begin{aligned}
I = 4\pi^2 c\mathcal{A} \int e^{-\frac{u_{\alpha} p_G^{\alpha}}{kT}} \sigma(|\mathbf{p}_G|, \chi) |\mathbf{p}_G|^3 \frac{d|\mathbf{p}_G|}{p_G^0} (1 - \cos \chi) \sin \chi d\chi \\
\left\{ -2p_G^0 \frac{\partial h}{\partial p^i} \frac{p^i}{p^0} \left[1 + \frac{1}{3} \left(1 + \frac{|\mathbf{p}_G|}{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial |\mathbf{p}_G|} \right) \right] - \frac{2}{3} (p_G^0)^2 \frac{\partial^2 h}{\partial p^i \partial p^j} \eta^{ij} \frac{|\mathbf{p}_G|^2}{(p_G^0)^2} \right\}. \quad (4.105)
\end{aligned}$$

Integrando por partes la derivada de la sección transversal σ , escogiendo un marco co-móvil en el cual $\mathcal{U}_{\alpha} \rightarrow (c, \mathbf{0})$ y haciendo explícita la dependencia de p_G^0 en p_G^i , se llega a la siguiente relación

$$\int d|\mathbf{p}_G| |\mathbf{p}_G|^4 e^{-\frac{u_{\alpha} p_G^{\alpha}}{kT}} \frac{\partial \sigma}{\partial |\mathbf{p}_G|} = - \int d|\mathbf{p}_G| \left[4|\mathbf{p}_G|^3 - \frac{c}{kT p_G^0} |\mathbf{p}_G|^5 \right] e^{-\frac{u_{\alpha} p_G^{\alpha}}{kT}} \sigma. \quad (4.106)$$

Sustituyendo la expresión anterior en (4.105) se obtiene

$$\begin{aligned}
I = \frac{8}{3} \pi^2 c\mathcal{A} \int e^{-\frac{u_{\alpha} p_G^{\alpha}}{kT}} \sigma(|\mathbf{p}_G|, \chi) |\mathbf{p}_G|^5 \frac{d|\mathbf{p}_G|}{p_G^0} (1 - \cos \chi) \sin \chi d\chi \times \\
\times \left[-\frac{\partial h}{\partial p^i} p^i \frac{c}{kT p^0} - \eta^{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial p^i \partial p^j} \right]. \quad (4.107)
\end{aligned}$$

Hasta este punto se ha trabajado con la integral I , ahora hay que regresar al término de colisión original escrito en la ecuación (4.72), para ello es necesario multiplicar I por la función de distribución del equilibrio de las partículas pesadas. Para el caso en que las partículas son no relativistas se mostró en la sección 3.4, con las

⁷Esta misma aproximación también resulta al tomar como parámetro el cociente de energías $p_G^0/p^0 \ll 1$ notando que, con la restricción en las masas $|\mathbf{p}_G| \sim |\mathbf{p}|$.

aproximaciones (3.149), que la función (4.68) tiende a la función de distribución de Maxwell-Boltzmann. De este modo el término de colisión \mathcal{J} se puede escribir como

$$\mathcal{J}(f_G, f) = \tilde{\eta} \left[mkT \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p^i} + \frac{\partial(f p^i)}{\partial p^i} \right], \quad (4.108)$$

donde el coeficiente de fricción dinámica $\tilde{\eta}$ es

$$\tilde{\eta} = \frac{2}{3} \frac{n_G \pi}{m(m_G kT)^2 K_2(\zeta)} \times \int \sigma(|\mathbf{p}_G|, \chi) (1 - \cos \chi) \sin \chi d\chi e^{-\frac{u_\alpha p_G^\alpha}{kT}} |\mathbf{p}_G|^5 \frac{d|\mathbf{p}_G|}{p_G^0}. \quad (4.109)$$

La ecuación resultante para la evolución de f se aproxima por una ecuación tipo Fokker-Planck:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(f F^i)}{\partial p^i} = \tilde{\eta} \left[mkT \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p^i} + \frac{\partial(f p^i)}{\partial p^i} \right]. \quad (4.110)$$

Al ser una mezcla entre partículas relativistas y no relativistas, a este caso puede llamársele semi-relativista. La ecuación (4.110) no es manifiestamente covariante, lo cual no es de sorprender ya que este análisis comenzó con una versión de la ecuación relativista de Boltzmann que no es manifiestamente covariante, a diferencia del análisis de la sección anterior que condujo a la ecuación de Fokker-Planck completamente covariante (4.46). No obstante, al ser la ecuación de evolución de la distribución de partículas no relativistas, no es necesaria dicha descripción.

Por otro lado cuando se compara la última expresión (4.110) con la ecuación de Fokker-Planck para el movimiento browniano (2.76) se encuentra que ambas expresiones son muy similares, únicamente difieren en la definición del respectivo coeficiente de fricción dinámica, y en la definición del 4-momento, donde se encuentran las correcciones relativistas.

La ecuación (2.76), que fue obtenida aproximando el término de colisión de la ecuación de Boltzmann, es idéntica a la ecuación (A.31) obtenida a partir de los procesos estocásticos y por esta razón la ecuación (2.76) es llamada ecuación de Fokker-Planck para el movimiento browniano. Con la similitud existente entre la ecuación (2.76) y la ecuación (4.110) podría pensarse que la última es la ecuación de Fokker-Planck para la versión relativista del movimiento browniano. Sin embargo, hay que advertir dos cosas: Las aproximaciones realizadas en esta sección, aunque similares, no son iguales a las que llevan al movimiento browniano. Además, el movimiento browniano, definido a través de las fluctuaciones del sistema, es un proceso estocástico. La comparación de la ecuación de evolución proveniente de la ecuación de Boltzmann y la que se obtiene de la ecuación de Langevin a nivel relativista constituye un problema delicado ya que no hay un consenso en la definición de un proceso estocástico relativista. De hecho existen muchas y muy diversas versiones de los procesos estocásticos en relatividad⁸. Lo que expresa la ecuación (4.110) es

⁸El tema de los procesos estocásticos relativistas se aborda en el último capítulo y en el apéndice A se hace una breve revisión.

que el sistema formado por partículas relativistas y no relativistas, evoluciona por colisiones del mismo modo que lo haría un sistema donde las partículas se difunden.

Regresando a la ecuación (4.110), se había dicho que las correcciones relativistas se encuentran esencialmente en el coeficiente de fricción. Para calcular un coeficiente de fricción se requiere evaluar la integral en (4.109), para ello es necesario especificar la sección transversal σ . Como un ejemplo se puede considerar el caso de esferas duras caracterizadas por una sección transversal diferencial constante. Este caso se puede comparar con el caso no relativista que ya se resolvió en la sección 2.5.1. Considerando σ constante y evaluando la integral en el ángulo de dispersión se obtiene que

$$\tilde{\eta}_{ed} = \frac{4\pi}{3} \frac{n_G \sigma}{m(m_G kT)^2 K_2(\zeta)} \int e^{-\frac{u_\alpha p_G^2}{kT}} |\mathbf{p}_G|^5 \frac{d|\mathbf{p}_G|}{p_G^0}. \quad (4.111)$$

Si se escoge, como hasta ahora, un marco co-móvil para integrar, y se introduce una variable nueva definida como $y = p_G^0/m_G c$, entonces (4.111) se escribe

$$\tilde{\eta}_{ed} = \frac{4\pi}{3} \frac{n_G \sigma}{m(m_G kT)^2 K_2(\zeta)} \int_1^\infty e^{-\zeta y} (y^2 - 1)^2 dy. \quad (4.112)$$

Al integrar el lado derecho de (4.112) resulta

$$\tilde{\eta}_{ed} = \frac{4\pi}{3} \frac{n_G \sigma}{m(m_G kT)^2 K_2(\zeta)} (m_G c)^5 \frac{8}{\zeta^5} e^{-\zeta} (3 + \zeta(3 + \zeta)), \quad (4.113)$$

donde se reconoce el factor $\zeta = m_G c^2/kT$. La ecuación anterior se puede reescribir de manera concisa

$$\tilde{\eta}_{ed} = \frac{32\pi}{3} \frac{n_G \sigma kT}{m c K_2(\zeta)} \frac{e^{-\zeta}}{\zeta^2} (3 + 3\zeta + \zeta^2). \quad (4.114)$$

La ecuación (4.114) es la expresión final del coeficiente de fricción dinámica para un gas relativista de esferas duras.

Para el caso no relativista de bajas temperaturas $\zeta \gg 1$, se puede usar una expresión para la función de Bessel de segunda clase como una serie⁹, así se obtiene la siguiente expresión para el coeficiente de fricción

$$\tilde{\eta}_{ed} = \frac{32}{3} \frac{n_G \sigma}{m} (2m_G \pi kT)^{1/2} \left[1 + \frac{9}{8\zeta} + \frac{9}{128\zeta^2} - \frac{765}{1024\zeta^3} + \dots \right]. \quad (4.115)$$

Puede verse que el primer término de la serie corresponde al coeficiente de fricción del caso no relativista (2.77) y los términos siguientes son las correcciones relativistas

$$\tilde{\eta}_{ed} = \eta_{ed} \left[1 + \frac{9}{8\zeta} + \frac{9}{128\zeta^2} - \frac{765}{1024\zeta^3} + \dots \right]. \quad (4.116)$$

⁹Ver ecuación (B.7) del apéndice B.

En el límite ultra relativista el parámetro $\zeta \ll 1$, condición satisfecha cuando la temperatura es muy alta, la función de Bessel puede aproximarse¹⁰ a lo siguiente

$$\tilde{\eta}_{ed} = 16\pi \frac{n_G \sigma kT}{mc} \left[1 + \frac{\zeta^2}{12} + \frac{\zeta^4}{64} \left(1 + 4 \ln \left(\frac{\zeta}{2} \right) + 4\gamma \right) - \frac{\zeta^5}{45} + \dots \right], \quad (4.117)$$

donde $\gamma = 0,577215664\dots$ es la constante de Euler.

En la sección 2.5.2 se resolvió la ecuación de Fokker-Planck en el caso no relativista, la solución está dada por la ecuación (2.102). Análogamente la solución a (4.110) viene dada por

$$f(p^i, t) = \frac{n}{[2m\pi kT(1 - e^{-2\tilde{\eta}t})]^{\frac{3}{2}}} \exp \left[\frac{(p^i - p_0^i e^{-\tilde{\eta}t}) \cdot (p_i - p_{i0}) e^{-\tilde{\eta}t}}{2mkT(1 - e^{-2\tilde{\eta}t})} \right], \quad (4.118)$$

donde $\tilde{\eta}$ está dada por alguna de las ecuaciones (4.114), (4.116) o (4.117) según sea el caso. Las correcciones relativistas a la función de distribución se tienen a través de los coeficientes de transporte.

4.2.2. Difusión de partículas relativistas en un gas pesado no relativista: Gas de Lorentz.

Considérese ahora un sistema formado por dos especies de partículas, la densidad numérica de la especie que se difunde es mucho menor que la densidad de partículas del gas $n \ll n_G$. En contraste con el caso anterior, el gas es mucho más pesado que la especie que se difunde $m \ll m_G$. Se supondrá que las partículas que conforman el gas se mueven con velocidades no relativistas $v_G \ll c$, mientras que las partículas que se difunden son tratadas como relativistas. En la versión no relativista este caso fue estudiado por Lorentz para describir electrones en un metal, por lo que se le conoce como *gas de Lorentz* [30], [55].

La evolución de este sistema está gobernada por el sistema de ecuaciones de Boltzmann (4.61) y (4.62). Con parte de las aproximaciones de la sección anterior (4.64)-(4.71), se puede expresar el término de colisión (4.72) y trabajar con la integral I escrita en (4.74). En este caso las relaciones entre masas y energías están invertidas con respecto al caso anterior (4.88), aquí la diferencia entre la velocidad relativa antes y después de la colisión dada por la ecuación (4.76) se aproxima de otra forma. Debido a que las partículas del gas son no relativistas $p_G^0 = p_G^{0'}$ y por la conservación del 4-momento (4.70) y (4.78) se tiene la misma ecuación (4.79)

$$\Delta g^i = -c \left(\frac{1}{p_G^0} + \frac{1}{p^0} \right) \Delta p^i. \quad (4.119)$$

No obstante, como se tiene la condición $p^0/p_G^0 \ll 1$, entonces (4.119) se aproxima por

$$\Delta g^i \cong -c \frac{\Delta p^i}{p^0}, \quad \Rightarrow \quad \Delta p^i \cong -\frac{p^0}{c} \Delta g^i. \quad (4.120)$$

¹⁰Ver ecuación (B.8) del apéndice B.

En contraste con la ecuación (4.89) esta relación involucra a la componente cero del momento de la especie que se difunde y no de la especie que forma el gas. Sustituyendo (4.120) en la ecuación (4.74) para I , e integrando en el ángulo ϵ con las mismas relaciones (4.93) y (4.94), se obtiene

$$I = 2\pi\mathcal{A} \int e^{-\frac{u_{\alpha}p_G^{\alpha}}{kT}} (g_{\phi}\sigma) \sin\chi d\chi d^3p_G \left[\frac{p^0}{c} \frac{\partial h}{\partial p^i} g^i (1 - \cos\chi) + \frac{(p^0)^2}{4c^2} \frac{\partial^2 h}{\partial p^i \partial p^j} \left\{ (1 - 4\cos\chi + 3\cos^2\chi) g^i g^j - |\mathbf{g}|^2 \eta^{ij} \sin^2\chi \right\} \right], \quad (4.121)$$

donde \mathcal{A} está dada por (4.92). Escribiendo al elemento d^3p_G en coordenadas esféricas y utilizando las relaciones (4.96) y (4.97) para integrar en el ángulo azimutal se obtiene

$$I = 4\pi^2\mathcal{A} \int e^{-\frac{u_{\alpha}p_G^{\alpha}}{kT}} (g_{\phi}\sigma) |\mathbf{p}_G|^2 d|\mathbf{p}_G| \sin\chi d\chi \sin\phi d\phi \left\{ (1 - \cos\chi) p^0 \times \right. \\ \times \frac{\partial h}{\partial p^i} \frac{p^i}{p^0} \left(\frac{|\mathbf{p}_G| p^0}{|\mathbf{p}| p_G^0} \cos\phi - 1 \right) + \frac{(p^0)^2}{4} \frac{\partial^2 h}{\partial p^i \partial p^j} \left[(1 - 4\cos\chi + 3\cos^2\chi) \times \right. \\ \times \left. \left\{ \frac{p^i p^j}{(p^0)^2} \left(\frac{|\mathbf{p}_G|^2 (p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2 (p_G^0)^2} \cos^2\phi - 2 \frac{|\mathbf{p}_G| p^0}{|\mathbf{p}| p_G^0} \cos\phi + 1 - \frac{1}{2} \frac{|\mathbf{p}_G|^2 (p^0)^2}{|\mathbf{p}|^2 (p_G^0)^2} \sin^2\phi \right) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} \eta^{ij} \frac{|\mathbf{p}_G|^2}{(p_G^0)^2} \sin^2\phi \right\} - \frac{|\mathbf{g}|^2}{c^2} \eta^{ij} \sin^2\chi \right] \left. \right\}. \quad (4.122)$$

En este caso como $p^0/p_G^0 \ll 1$ y como el gas no es relativista, la aproximación para el flujo invariante F es la siguiente

$$F \cong p_G^0 |\mathbf{p}| \left(1 - \frac{p^0}{p_G^0} \frac{|\mathbf{p}_G|}{|\mathbf{p}|} \cos\phi \right). \quad (4.123)$$

El primer término de (4.123) coincide con la aproximación de Kox [56] para el estudio del gas de Lorentz relativista. El objetivo principal en el trabajo de Kox es comparar los coeficientes de transporte exactos obtenidos a través del método de Chapman-Enskog, con coeficientes calculados con aproximaciones en las integrales. Cabe destacar que aquí se hicieron las mismas aproximaciones sobre el carácter relativista de las especies y la relación entre sus energías. No obstante, en el presente análisis lo que pretende es aproximar la integral de colisión completa, por un nuevo término de colisión diferencial en donde se reconocerán los coeficientes de fricción y difusión en el espacio de momentos. No es posible realizar una comparación directa de resultados ya que los coeficientes de difusión encontrados por Kox se refieren a procesos de difusión en el espacio de configuraciones.

El siguiente paso del análisis es aproximar la sección transversal σ . Dada la aproximación (4.123), y al considerar p_G^0 constante debido al carácter no relativista

de las partículas del gas, la sección transversal es aproximada a primer orden como $\sigma(F, \chi) \simeq \sigma(|\mathbf{p}|, \chi)$, a este orden no depende de la variable de integración \mathbf{p}_G . De esta forma el producto $F\sigma$ (análoga a la ecuación (4.101)) se escribe como

$$F\sigma(F, \chi) \cong p_G^0 |\mathbf{p}| \sigma(|\mathbf{p}|, \chi) \left(1 - \frac{p^0}{p_G^0} \frac{|\mathbf{p}_G|}{|\mathbf{p}|} \cos \phi \right), \quad (4.124)$$

y en términos de la velocidad de Møller

$$g_\phi \sigma(F, \chi) \cong c \frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \sigma(|\mathbf{p}|, \chi) \left(1 - \frac{p^0}{p_G^0} \frac{|\mathbf{p}_G|}{|\mathbf{p}|} \cos \phi \right). \quad (4.125)$$

Con esta expresión no se puede llevar a cabo el mismo proceso de integración por partes en la derivada de σ como en (4.106). Lo que resta entonces es sustituir (4.125) en (4.122) considerando a la velocidad relativa aproximada por $|\mathbf{g}|^2/c^2 \cong |\mathbf{p}|^2/p^0{}^2$, y despreciar todos los términos de orden $|\mathbf{p}_G|/p_G^0$ o mayor. De esta forma al integrar en ϕ la integral (4.122) queda

$$I = 8\pi^2 c \frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \mathcal{A} \int e^{-\frac{u_{\alpha p_G^0}}{kT}} |\mathbf{p}_G|^2 d|\mathbf{p}_G| \sigma(\chi) (1 - \cos \chi) \sin \chi d\chi \left\{ -p^i \frac{\partial h}{\partial p^i} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 h}{\partial p^i \partial p^j} \left[(1 - 3 \cos \chi) p^i p^j - (1 + \cos \chi) \eta^{ij} |\mathbf{p}|^2 \right] \right\}, \quad (4.126)$$

que también se puede escribir como

$$I = -\mathcal{C}_1 p^i \frac{\partial h}{\partial p^i} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 h}{\partial p^i \partial p^j} \left(\mathcal{C}_2 p^i p^j - \mathcal{C}_3 \eta^{ij} |\mathbf{p}|^2 \right), \quad (4.127)$$

donde

$$\mathcal{C}_1 = 8\pi^2 c \frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \mathcal{A} \int e^{-\frac{u_{\alpha p_G^0}}{kT}} |\mathbf{p}_G|^2 d|\mathbf{p}_G| \sigma(\chi) (1 - \cos \chi) \sin \chi d\chi, \quad (4.128)$$

$$\mathcal{C}_2 = 8\pi^2 c \frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \mathcal{A} \int e^{-\frac{u_{\alpha p_G^0}}{kT}} |\mathbf{p}_G|^2 d|\mathbf{p}_G| \sigma(\chi) (1 - 4 \cos \chi + 3 \cos^2 \chi) \sin \chi d\chi, \quad (4.129)$$

$$\mathcal{C}_3 = 8\pi^2 c \frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \mathcal{A} \int e^{-\frac{u_{\alpha p_G^0}}{kT}} |\mathbf{p}_G|^2 d|\mathbf{p}_G| \sigma(\chi) \sin^3 \chi d\chi. \quad (4.130)$$

Recordando la ecuación (4.72) para este caso se puede escribir el término de colisión aproximado de la siguiente forma

$$\mathcal{J} = f^{(0)} \left[-\mathcal{C}_1 p^i \frac{\partial h}{\partial p^i} + \frac{1}{4} \frac{\partial^2 h}{\partial p^i \partial p^j} \left(\mathcal{C}_2 p^i p^j - \mathcal{C}_3 \eta^{ij} |\mathbf{p}|^2 \right) \right], \quad (4.131)$$

Para calcular estos coeficientes es necesario especificar la dependencia de σ en el ángulo de dispersión. Como las partículas que se difunden son relativistas, se

puede considerar a la sección transversal como constante al orden dominante¹¹, de tal forma que se puede realizar la integración en χ en las ecuaciones (4.128)-(4.130) y escribir

$$\mathcal{J} = f^{(0)}\hat{\eta} \left[-p^i \frac{\partial h}{\partial p^i} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial p^i \partial p^j} \left(p^i p^j - \frac{1}{3} \eta^{ij} |\mathbf{p}|^2 \right) \right], \quad (4.132)$$

el segundo término se puede identificar como un tensor simétrico y sin traza $\mathcal{M}^{ij} = p^i p^j - \eta^{ij} |\mathbf{p}|^2/3$, así

$$\mathcal{J} = f^{(0)}\hat{\eta} \left[-p^i \frac{\partial h}{\partial p^i} + \frac{1}{2} \mathcal{M}^{ij} \frac{\partial^2 h}{\partial p^i \partial p^j} \right]. \quad (4.133)$$

En (4.132) y (4.133) el coeficiente de transporte es

$$\hat{\eta} \equiv 16\pi^2 \sigma c \frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \mathcal{A} \int e^{-\frac{u_\alpha p_\alpha^0}{kT}} |\mathbf{p}_G|^2 d|\mathbf{p}_G|, \quad (4.134)$$

para calcular esta integral es necesario recordar que el gas está formado por partículas no relativistas y como se demostró en la sección 3.4, la función de distribución de Jüttner tiende a la distribución de Maxwell-Boltzmann (3.150). Con esto (4.134) se escribe

$$\hat{\eta} = 16\pi^2 \sigma c \frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \frac{n_G}{(2\pi kT m_G)^{\frac{3}{2}}} \int e^{-\frac{|\mathbf{p}_G|^2}{2kT m_G}} |\mathbf{p}_G|^2 d|\mathbf{p}_G|, \quad (4.135)$$

la integral es inmediata y da como resultado

$$\hat{\eta} = 2\pi n_G \sigma \left(c \frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \right). \quad (4.136)$$

El término de colisión aproximado (4.133) se puede reescribir como una ecuación diferencial para la función $f_1 = f^{(0)}h$. Esta función es la contribución a primer orden en el desarrollo de Chapman-Enskog (2.56) a la función de distribución f .

De esta forma la ecuación resultante de la aproximación será una ecuación de evolución para la función f_1 . Para conocer la distribución f únicamente hay que sumar la función de equilibrio a la solución obtenida, dicha ecuación es la siguiente

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + F^i \frac{\partial f_1}{\partial p^i} = D^{ij} \frac{\partial^2 f_1}{\partial p^i \partial p^j} - A^{ij} \frac{\partial}{\partial p^i} (f_1 p_j) - C f_1, \quad (4.137)$$

donde

$$D^{ij} = \frac{1}{2} \hat{\eta} \left(p^i p^j - \eta^{ij} \frac{|\mathbf{p}|^2}{3} \right), \quad (4.138)$$

$$A^{ij} = \hat{\eta} \left\{ \alpha \frac{p^i p^j}{p^0} + \eta^{ij} \left[1 - \frac{1}{3} \alpha \left(\frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \right)^2 \right] \right\}, \quad (4.139)$$

$$C = \hat{\eta} \left[1 - \frac{1}{3} \alpha \left(\frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \right)^2 + 2\alpha(1 - \alpha) \left(\frac{|\mathbf{p}|}{p^0} \right)^4 \right], \quad (4.140)$$

¹¹Ver por ejemplo la obtención de la sección transversal de la dispersión de fotones en un gas de electrones no relativista en [11].

en las expresiones (4.139)-(4.140) se abrevió $\alpha = cp^0/kT$.

La ecuación (4.137) es semejante a la ecuación de Fokker-Planck pero contiene un término extra que es lineal en la función f_1 . En la literatura se encuentran ecuaciones con la misma estructura que (4.137) asociados a distintos procesos. Uno de ellos es conocido como *doble difusión* [57]. En este proceso el coeficiente del término lineal corresponde a un tiempo característico de algún proceso interno del sistema distinto de la difusión ordinaria. Otra opción consiste en suponer que el sistema es no-Markoviano, en cuyo caso la ecuación de Fokker-Planck que modela al sistema contiene términos lineales que refieren a procesos retardados, de hecho el coeficiente del término lineal está relacionado con la intensidad de la memoria que tiene el sistema [58]. Se encuentran incluso soluciones a ecuaciones tipo Fokker-Planck con términos lineales extra donde los coeficientes dependen del tiempo [59].

Sin embargo, la ecuación (4.137) es más complicada que los casos discutidos ya que todos los coeficientes de transporte dependen del momento de la especie que se difunde, de una manera complicada. Cualquiera que fuera el caso, no es claro como identificar el proceso interno físico que ocurre en este sistema, o bien, si realmente el coeficiente del término lineal es producto de un efecto retardado o de memoria.

Hay que destacar que no se ha considerado completamente el carácter relativista de la especie que se difunde. Es probable que con una formulación manifiestamente covariante pueda darse una mejor interpretación de los coeficientes obtenidos.

Capítulo 5

Conclusiones y Perspectivas

Este trabajo inicia con un repaso de los conceptos fundamentales de la teoría cinética no relativista tales como la ecuación de Boltzmann y la función de distribución del equilibrio conocida como distribución de Maxwell-Boltzmann. Se incluyeron también algunos elementos básicos de hidrodinámica relativista la cual es importante desde el punto de vista de la teoría cinética relativista ya que, por un lado es posible verificar el correcto límite galileano, y por otro permite motivar el vínculo de los promedios microscópicos con las cantidades macroscópicas en el régimen relativista. Es importante mencionar que se trabajó con la descripción de Eckart [39] para los fluidos relativistas. Como se mencionó en el capítulo 3 existen diferentes versiones de la hidrodinámica relativista. El enfoque de Landau y Lifshitz [40], por ejemplo, es equivalente al de Eckart. No obstante, existen otros formalismos que no coinciden con los de Eckart y Landau, tal es el caso de Sandoval y García-Colín [19] quienes proponen una formulación relativista de la termodinámica irreversible lineal en el esquema de Meixner-Prigogine. Esta versión conlleva una modificación a la teoría cinética relativista resultante.

En particular en [60], Sandoval y García-Colín tratan el problema de definir la velocidad caótica o peculiar en la teoría cinética relativista. Con esta velocidad se puede introducir la temperatura como el promedio del cuadrado de la velocidad caótica. Esto es un problema que existe en la formulación que se estudió en esta tesis debida a de Groot y colaboradores [11], donde la temperatura es considerada como un parámetro global y constante y la velocidad caótica no está definida.

Otra posible versión es dada por Schieve y colaboradores en [61]. Ellos derivan la teoría cinética relativista a partir de la mecánica cuántica como teoría fundamental. Una diferencia con de Groot es que consideran como parámetro de evolución el tiempo propio de un observador fuera del sistema al que llaman tiempo histórico.

En esta tesis se analizaron diferentes formas de aproximar la integral de colisión de la ecuación de Boltzmann relativista para una y dos especies.

Para un gas relativista de una sola especie en donde el momento transferido es pequeño, el término de colisión se aproximó por un término diferencial de la forma de la ecuación de Fokker-Planck. Este término de colisión ya había sido encontrado

por Akama [53] por un método distinto al que se presentó en este trabajo. Además, él encuentra la ecuación de Landau para sistemas específicos como un gas de fotones. La importancia del presente trabajo es que la ecuación tipo Fokker-Planck que se obtuvo se pudo escribir de una forma manifiestamente covariante. De este modo el vector de fricción dinámica y un tensor de difusión se escribieron en términos de integrales de productos del momento transferido como objetos 4-dimensionales. Se obtuvo además la solución estacionaria de la ecuación relativista de Fokker-Planck que coincide con la distribución de Maxwell-Jüttner. En ese caso los coeficientes de transporte deben satisfacer cierta relación¹.

Por otra parte se analizó una mezcla binaria con una componente relativista y otra no.

Primero se consideró un gas relativista formado por partículas ligeras, en el que se difunde otra especie mucho menos abundante compuesta por partículas muy masivas que se supusieron no relativistas. Para este sistema se derivó una ecuación tipo Fokker-Planck como aproximación del término de colisión de la ecuación de evolución para las partículas que se difunden. Se obtuvieron expresiones para los coeficientes de transporte en términos de las propiedades del sistema como la masa de las partículas, la densidad, la temperatura etc. Se encontraron los casos límite no relativista y ultra relativista para el coeficiente de fricción dinámica. En el límite no relativista se escribió una serie cuyo término dominante es el coeficiente de fricción correspondiente al caso no relativista en el que partículas muy pesadas se difunden en un gas muy ligero.

Con las consideraciones que se estudiaron este caso es físicamente análogo al movimiento browniano e igualmente se llegó a una ecuación tipo Fokker-Planck para aproximar el término de colisión.

Se estudió también el caso complementario en el cual un conjunto de partículas ligeras y relativistas se difunden en un gas no relativista formado por partículas muy pesadas. Este caso se conoce como gas de Lorentz. Siguiendo el mismo método se aproximó el término de colisión a un término diferencial semejante al de Fokker-Planck pero con un término extra lineal en la función de distribución, el coeficiente de este término da un tiempo de relajación característico de algún otro proceso interno del sistema. Algo importante que se debe decir es que los coeficientes de transporte en este caso sólo dependen de las propiedades de las partículas que se difunden (las relativistas) y no del gas pesado. Este caso relativista fue estudiado primeramente por Kox [56] quién encuentra el coeficiente de difusión en el espacio de coordenadas, claramente no es el mismo coeficiente que el encontrado en esta tesis el cual es el coeficiente de difusión en el espacio de momentos. El proceso en el espacio de momentos correspondiente a los coeficientes de transporte que se encontraron para este caso parece ser más complejo aún que la difusión en el caso del espacio de configuraciones.

Para el caso de una mezcla de dos partículas relativistas el método de aproxi-

¹Esto es semejante a los teoremas de fluctuación-disipación del caso no relativista cuando hay isotropía y cuando el vector A^i es proporcional al momento.

mación que se utilizó en los casos anteriores no puede realizarse sin cambios importantes, es decir, este método sólo es válido sólo si una de las dos especies es no relativista. De hecho, para el caso de partículas relativistas difundiendo en la especie no relativista, sería deseable considerar una ecuación tipo-Fokker-Planck relativista manifiestamente covariante. En la literatura se encuentran diferentes versiones de la ecuación de Fokker-Planck relativista. Recientemente dentro de las aplicaciones astrofísicas, Bertschinger [62] escribe ecuaciones de Fokker-Planck covariantes para la evolución de materia oscura en el universo. Dagan y Horwitz [63] también estudian la ecuación covariante de Fokker-Planck y la probabilidad de transición a tiempos cortos para el problema de los cúmulos globulares. Es de notarse que en su formulación utilizan a la métrica como tensor de difusión.

Un trabajo interesante es el de Ben-Ya'acov [64] quién estudia un sistema formado por átomos de dos niveles (que considera como no relativistas) y radiación. Para este sistema encuentra una ecuación de Fokker-Planck covariante. Su interés es demostrar que no existe inconsistencia entre la distribución planckiana para la radiación y la distribución maxwelliana para las partículas materiales. Las suposiciones del trabajo coinciden con las realizadas aquí en la última sección del capítulo 4. De hecho, quizá si se considera una formulación semejante a la de Ben-Ya'acov es posible que se tenga una descripción totalmente covariante relativista y así se puedan explicar de manera consistente los coeficientes obtenidos en las ecuaciones (4.137)-(4.140).

En este punto hay que mencionar que del mismo modo que en el caso no relativista, la ecuación de Boltzmann relativista y las ecuaciones tipo Fokker-Planck aquí encontradas, si bien son ecuaciones cerradas para la función de distribución, estas describen una evolución del sistema que será irreversible². Por tanto los resultados de este trabajo son una aproximación a la evolución real del sistema. Tal evolución se obtiene a partir de una teoría fundamental de la dinámica microscópica cuyas ecuaciones refieren a un proceso reversible. En el caso no relativista a través de la ecuación de Liouville que lleva al sistema de ecuaciones acopladas que forman la jerarquía BBGKY, y en el caso cuántico relativista a partir de la descripción de la función de Wigner en la teoría cuántica de campos³.

Una diferencia importante entre la ecuación de Boltzmann y las ecuaciones tipo Fokker-Planck aquí encontradas, es que a través de estas ecuaciones no es posible encontrar relaciones constitutivas para, por ejemplo, el flujo de calor o el tensor viscoso. Esta aproximación únicamente provee información sobre los coeficientes de fricción dinámica y difusión.

La ecuación de Fokker-Planck también se encuentra en el ámbito del movimiento browniano relativista. Como se puede ver en la última sección del apéndice A, cada formulación de los procesos estocásticos relativistas es diferente. En un trabajo reciente [65] Debbasch muestra que incluso en la interpretación física de estos procesos

²En el caso de la ecuación de Boltzmann aparece al introducir la hipótesis de caos molecular y en el caso de Fokker-Planck por que dicha ecuación describe un proceso estocástico markoviano.

³Ver por ejemplo [32].

no hay claridad aún. Hasta ahora no parece haber un consenso en este tema.

En un artículo reciente sobre el tema [66], Dunkel y Hänggi comienzan con un modelo microscópico de las colisiones y a partir de ahí construyen un criterio para identificar las distribuciones del equilibrio de las partículas. Primero formulan estos criterios en el caso no relativista y así reconocen la función de distribución de Maxwell. Entonces aplican los mismos criterios en el caso relativista y, siguiendo sus resultados anteriores⁴, encuentran que la función de distribución relativista que satisface esos criterios, es tal que difiere de la distribución relativista del Maxwell-Jüttner por un factor proporcional al inverso de la energía cinética relativista.

Como se estudió en el capítulo 3, en el marco de la teoría cinética relativista al estudiar a la función de distribución del equilibrio como invariante de colisión, se encontró que tal función es una combinación lineal de un escalar arbitrario y del 4-momento. Así se obtiene la distribución de Maxwell-Jüttner para el equilibrio (3.147) la cual sólo depende de la energía a través de la exponencial y no en la amplitud.

Podría pensarse entonces que los resultados obtenidos por Hänggi para la función de distribución del equilibrio a través de procesos estocásticos están en desacuerdo con la teoría microscópica.

Sin embargo, es de llamar la atención que la función de distribución (3.147), está escrita en el marco co-móvil y no en una forma manifiestamente covariante. Dada esta situación, aludir al carácter escalar de la función de distribución no permite inferir de manera única las propiedades de transformación de las cantidades involucradas en dicha función, como es el caso de la temperatura. Llevado al extremo se puede pensar que una versión manifiestamente covariante podría permitir establecer una conexión con las soluciones dependientes de la energía halladas por Hänggi y tal vez otras más generales⁵.

De hecho uno de los temas en donde aún no hay consenso definitivo es en como transforma la temperatura ante transformaciones de Lorentz.

Inicialmente Einstein [72], Planck [73] y Tolman [74] argumentan que ciertas cantidades termodinámicas como la presión y la entropía no deben cambiar ante transformaciones de Lorentz. Al considerar la covariancia de la primera y la segunda leyes de la termodinámica, encontraron que la temperatura debe transformar como $T' = T/\gamma$, donde T es la temperatura que mide un observador co-móvil con el sistema. Esto implica que un observador que se mueve respecto al sistema lo verá más frío que el observador co-móvil. Edington, Møller, junto con Ott [75], proponen que la temperatura transforma como $T' = \gamma T$, lo que implica que el observador moviéndose respecto al sistema lo verá más caliente que el co-móvil. En sus trabajos [76] y [77] Landsberg argumenta que la temperatura debe ser un escalar, es decir, que no cambia ante transformaciones de Lorentz $T' = T$. En estos trabajos siempre se supone a la entropía como escalar argumentando que al ser una cantidad de

⁴Ver [67], [68] y el apéndice A.

⁵Para una discusión más amplia sobre la invariancia de la función de distribución refiérase a [69] y a [70], [71] para la invariancia del estado de equilibrio.

naturaleza estadística, proveniente de contar estados, un número resultado de un conteo no debe verse afectado por el cambio de marco de referencia y por lo tanto $S' = S$ en todos los casos. No obstante, hay autores que proponen a la entropía como una cantidad dependiente del marco de referencia [78].

Además de estas transformaciones existen muchas otras. Por ejemplo algunos autores ([79], [80] y referencias ahí citadas) suponen a la temperatura como parte de un 4-vector $\Theta^\mu = \mathcal{U}^\mu/kT$, en analogía al 4-flujo de partículas, en este caso Θ^μ es el vector de temperatura inversa.

En cosmología se estudia como debe transformarse la temperatura de para un observador que se mueve con cierta velocidad dentro de radiación en equilibrio, en ese caso la transformación de la temperatura está asociada con el corrimiento Doppler de la frecuencia de la radiación, por lo que es anisotrópica [81]. En ese caso tampoco hay consenso de como definir la temperatura de equilibrio. Hay quienes toman promedios sobre todos los ángulos de una potencia de la temperatura anisotrópica.

No existe un acuerdo general acerca de si las leyes de la termodinámica cambian con las transformaciones de Lorentz, quizá al verse modificadas al lenguaje covariante las leyes de la termodinámica, las propiedades de transformación sean directas de identificar⁶. Algunos más proponen que las transformaciones en realidad dependen del tipo de medición que se realice y de las definiciones que se consideren [83], [84]. Hay autores que defienden la postura de que el calor es una forma de energía y por tanto debe transformarse como la componente temporal de un 4-vector. También se puede pensar que la temperatura debe aparecer como asociada al promedio de cantidades microscópicas de la teoría cinética relativista [85], en cuyo caso todo apunta a que las transformaciones correspondientes serían las propuestas por Ott. No obstante, como la temperatura es una de las cantidades macroscópicas que aparece en la función de distribución que por construcción es un escalar, debería ser evidente la correcta regla de transformación para la temperatura al tener una versión manifiestamente covariante de la función de distribución⁷.

Dentro de las perspectivas más interesantes que se desprenden de este trabajo se encuentran

- Adaptar el método actual o encontrar uno diferente, para hallar una ecuación tipo Fokker-Planck manifiestamente covariante relativista para el caso de una mezcla de dos especies relativistas, como el caso que se estudió de una especie relativista difundiéndose en una especie que no lo es. Un método posible es una generalización 4-dimensional al trabajo de Lewis [87] donde obtiene la ecuación de Fokker-Planck para una mezcla en el caso de interacciones electromagnéticas. Otro método que involucra cambios de variable se encuentra en [88].

⁶Por ejemplo en [82] se propone $dS^\mu = \Theta_\nu dp^\nu$ para la segunda ley.

⁷Una revisión introductoria en relación a las transformaciones de la temperatura puede encontrarse en [86].

- Aplicar los resultados obtenidos a problemas específicos. Un ejemplo es el efecto Sunyaev-Zeldovich. Los primeros modelos que se intentaron para describir este proceso fueron basados en ecuaciones de difusión⁸. Posibles correcciones debidas al carácter relativista de las especies podrían hallarse a través de los métodos que se estudiaron en este trabajo.
- La gravedad cuántica intenta resolver el problema de la descripción de la estructura del espacio-tiempo a escalas microscópicas determinadas por la escala de Planck $\ell_p = 10^{-33}$ cm. Entre las teorías propuestas se encuentra la gravedad cuántica de lazos (loop quantum gravity) la cual combina los principios fundamentales de la mecánica cuántica y de la relatividad general [89]. Un resultado fundamental en esta propuesta es que los operadores cuánticos de entes geométricos como la longitud, el área y el volumen tienen un espectro discreto [90]. Tal estructura discreta plantea las preguntas ¿Cómo se recupera la relatividad general clásica de la gravedad cuántica? ¿Cómo aproximar la variedad continua por un conjunto discreto?

Una manera un tanto superficial de pensar este problema es considerar una analogía con el movimiento browniano de una partícula en un medio. En el caso de la gravedad cuántica una partícula relativista sujeta a un movimiento browniano en un espacio-tiempo curvo a nivel microscópico, revelaría la micro estructura del espacio-tiempo. Existen algunas propuestas en esa dirección, por ejemplo la gravedad estocástica [91], [92]. Esta teoría está basada en una generalización a las ecuaciones de movimiento de la relatividad general llamada ecuación de Einstein-Langevin la cual describe las fluctuaciones de los campos cuánticos de materia en espacio-tiempos curvos. A partir de esta ecuación se tomó el límite difusivo y se ha encontrado una ecuación de Fokker-Planck para la difusión en el espacio-tiempo fluctuante. Otra propuesta son las fluctuaciones debidas al carácter discreto del espacio-tiempo considerado como un conjunto causal [93], [94], en donde existe difusión de partículas materiales debida a la granularidad del espacio-tiempo. Se podrían aplicar los métodos desarrollados aquí para contribuir con propuestas en esta dirección.

⁸Ver por ejemplo [14], [18], [21] y [20].

Apéndice A

Procesos Estocásticos

A.1. La ecuación de Langevin y el movimiento browniano

Sea una partícula de masa M suspendida en un fluido en condiciones normales de presión y temperatura. La masa m de las moléculas que constituyen el fluido es mucho menor que M , es decir, $m \ll M$. Se observa que la partícula M hace un movimiento irregular el cual se identifica con la dinámica de los procesos estocásticos. Según la teoría cinética la partícula sufre alrededor de 10^8 colisiones/seg, esta trayectoria no corresponde a un movimiento determinista ya que los detalles de las colisiones individuales son imposibles de seguir. Entonces la velocidad $\mathbf{v}(t)$ y la posición $\mathbf{x}(t)$ de la partícula se considerarán como variables estocásticas en cuanto a su dependencia en el tiempo. Así pues, la ecuación de movimiento para M que, según la dinámica de Newton es

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(t), \quad (\text{A.1})$$

ahora será una ecuación estocástica en la cual la fuerza neta \mathbf{F} que actúa sobre la partícula debe contener una parte estocástica. El resultado más importante de la teoría de Einstein fue explicar la trayectoria de la partícula a través de un movimiento difusivo. Si \mathbf{v} es la velocidad de la partícula en el seno del líquido, de acuerdo con la hidrodinámica clásica, en un modelo de esferas duras, la partícula experimenta una fuerza de fricción proporcional a esta velocidad, si esta fuera la única fuerza a tiempos muy grandes se tendría que $|\mathbf{v}| \rightarrow 0$ exponencialmente. Según Langevin esto es incorrecto. El teorema de equipartición de la energía cinética entre los grados de libertad de un sistema en equilibrio térmico requiere que una partícula posea una energía cinética promedio

$$\frac{1}{2} M \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle = \frac{3}{2} kT. \quad (\text{A.2})$$

De este modo, a tiempos muy grandes, la velocidad cuadrática promedio no es cero sino está dada por (A.2), de acuerdo con la ley de distribución de velocidades de

Maxwell, por tanto la fuerza debe estar dada por

$$\mathbf{F}(t) = -\frac{1}{\mathcal{B}}\mathbf{v} + \mathbf{S}(t), \quad (\text{A.3})$$

donde \mathcal{B} es la movilidad del sistema¹ y \mathbf{S} es la fuerza estocástica que se origina por la irregularidad de los impactos de las moléculas del líquido con la partícula browniana, de tal forma que \mathbf{F} oscila al rededor del valor hidrodinámico. La magnitud de \mathbf{S} es tal que mantiene la agitación de la partícula que la viscosidad detendría si no existiera. La ecuación de movimiento queda entonces

$$M \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{1}{\mathcal{B}}\mathbf{v} = \mathbf{S}(t). \quad (\text{A.4})$$

Esta ecuación es llamada *ecuación de Langevin*. La ecuación de Langevin gobierna los llamados procesos estocásticos de *Orstein-Uhlenbeck*. El proceso de Orstein-Uhlenbeck $\mathbf{v}(t)$ y su integral $\mathbf{x}(t)$ describen juntos el movimiento browniano².

La fuerza estocástica \mathbf{S} tiene significado físico sólo en cierta escala de tiempos. Su valor es despreciable para tiempos del orden de duración de una colisión, ya que se necesitan muchísimas colisiones para ver su efecto sobre la partícula browniana. Por otro lado su valor promedio en un tiempo mucho muy grande es cero, lo que se expresa como

$$\langle \mathbf{S}(t) \rangle = \mathbf{0}. \quad (\text{A.5})$$

Para encontrar una expresión del desplazamiento cuadrático promedio se considera la ecuación de Langevin (A.4) multiplicada por \mathbf{x}

$$M \left[\frac{d}{dt} (\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}}) - \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} \right] = -\frac{1}{\mathcal{B}}\mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{S}(t). \quad (\text{A.6})$$

Suponiendo que para toda \mathbf{x} el valor de \mathbf{S} no está *correlacionado* con la posición, es decir,

$$\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{S}(t) \rangle = \langle \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{S}(t) \rangle = 0. \quad (\text{A.7})$$

Tomando promedios en el tiempo en la ecuación (A.6) y considerando la ecuación (A.2), se obtiene que

$$M \frac{d}{dt} \langle \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} \rangle - 3kT + \frac{1}{\mathcal{B}} \langle \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} \rangle = 0, \quad (\text{A.8})$$

esta ecuación tiene como solución

$$\langle \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} \rangle = C \exp(-\xi t) + 3kT\mathcal{B}, \quad (\text{A.9})$$

¹Si se cumple la ley de Stokes $\mathcal{B} = 1/(6\pi\nu a)$, donde ν es el coeficiente de viscosidad y a es el radio de la partícula suponiendo partículas esféricas.

²Para profundizar estos temas puede consultarse el trabajo de Chandrasekhar [26] y el trabajo original de Orstein y Uhlenbeck [95].

con $\xi = 1/M\mathcal{B}$, dadas las condiciones iniciales $t = 0$, $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, se tiene que $C = -3kT\mathcal{B}$, por lo tanto

$$\langle \mathbf{x} \cdot \dot{\mathbf{x}} \rangle = 3kT\mathcal{B}(1 - e^{-\xi t}) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \rangle, \quad (\text{A.10})$$

al integrar queda

$$\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \rangle = 6kT\mathcal{B} \left[t - \frac{1}{\xi}(1 - e^{-\xi t}) \right], \quad (\text{A.11})$$

este es el valor del desplazamiento medio cuadrado en función del tiempo. Para tiempos cortos $t \ll \xi^{-1}$, se puede entonces desarrollar la exponencial hasta segundo orden en x , en la ecuación (A.11) y se llega al siguiente resultado

$$\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \rangle \simeq (3kT\mathcal{B}\xi)t^2 = \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \rangle t^2, \quad (\text{A.12})$$

esto es consistente con las ecuaciones reversibles de la dinámica no estocástica donde $|\mathbf{x}| = |\mathbf{v}|t$. Por otro lado si $t \gg \xi^{-1}$ se tiene

$$\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \rangle = (6kT\mathcal{B})t \quad (\text{A.13})$$

que corresponde a una partícula que se *difunde* en un líquido siguiendo un camino aleatorio. Esta ecuación tiene un carácter evidentemente irreversible al ser lineal en t . Se puede reconocer en esta expresión el llamado *coeficiente de difusión* \mathcal{D}

$$\mathcal{D} = \mathcal{B}kT, \quad (\text{A.14})$$

este coeficiente da una relación entre la movilidad y el coeficiente de difusión y es comúnmente llamada *relación de Einstein*³. Esta relación nos dice que la fuente final de la viscosidad y de la difusión está en las fuerzas aleatorias y fluctuantes que aparecen del constante movimiento de las moléculas en el fluido.

Los mismos resultados pueden obtenerse a través de un enfoque macroscópico fenomenológico. Supóngase que $n(\mathbf{x}, t)$ es la densidad de partículas suspendidas en un líquido. Según la ley de Fick la corriente de difusión inducida por el gradiente de densidad es

$$\mathbf{J} = -\mathcal{D}\nabla n, \quad (\text{A.15})$$

donde \mathbf{J} es el flujo de partículas que atraviesa una unidad de área por unidad de tiempo. Por la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J}, \quad (\text{A.16})$$

se tiene que

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \mathcal{D}\nabla^2 n \quad (\text{A.17})$$

³Puede consultarse el trabajo original de Einstein sobre el movimiento browniano [96].

que es la *ecuación de difusión*. La solución se obtiene por los métodos descritos en la sección 2.5.2 y es la siguiente

$$n(\mathbf{x}, t) = \mathcal{N} \left(\frac{1}{4\pi\mathcal{D}t} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}{4\mathcal{D}t} \right), \quad (\text{A.18})$$

donde \mathcal{N} está dada por la integración de n en todo el espacio. Sacando ahora el promedio del desplazamiento cuadrático pesado con esta función se tiene que

$$\langle \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) n(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}}{\int_{-\infty}^{+\infty} n(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}} = 6\mathcal{D}t \quad (\text{A.19})$$

comparando con (A.13) se tiene que $\mathcal{D} = kT\mathcal{B}$ que es idéntica a la ecuación (A.14) y es consistente dicha ecuación con la interpretación de un movimiento difusivo.



Figura A.1: Ejemplo de trayectorias brownianas.

A.2. La ecuación de Fokker-Planck

La ecuación de Langevin (A.4) es conocida en la teoría de procesos estocásticos como la *ecuación diferencial estocástica de Ito*, en una dimensión la variable estocástica será $v(t)$. La forma general de esta ecuación es la siguiente

$$dv(t) = a[v(t), t] dt + b[v(t), t] dW(t), \quad (\text{A.20})$$

con dW un proceso de Wiener⁴. Nótese que si se diferencia (A.20) con respecto a t se recupera la ecuación de Langevin identificando la fuerza estocástica con la derivada temporal de W esto define a $v(t)$ como un proceso de Markov.

En el cálculo de Ito hay resultados importantes que mencionar como el cambio de variables. Considérese una funcional arbitraria de $v(t)$, $\phi[v(t)]$. La pregunta a responder es: Dada la ecuación estocástica (A.20), ¿qué ecuación diferencial estocástica obedece ϕ ? Lo que se hace es desarrollar $d\phi$ hasta segundo orden en $dv(t)$

$$d\phi[v(t)] = \phi[v(t) + dv(t)] - \phi[v(t)] = \phi'[v(t)] dv(t) + \frac{1}{2} \phi''[v(t)] dv(t)^2, \quad (\text{A.21})$$

sustituyendo (A.20) en (A.21) y utilizando una de las propiedades de los procesos de Wiener que es $dW^2 = dt$ se tiene que

$$d\phi[v(t)] = \left\{ a[v(t), t] \phi'[v(t)] + \frac{1}{2} b^2[v(t), t] \phi''[v(t)] \right\} dt + b[v(t), t] \phi'[v(t)] dW(t). \quad (\text{A.22})$$

Esta ecuación se conoce como la *fórmula de Ito*.

En tres dimensiones se tiene que la ecuación diferencial estocástica es

$$d\mathbf{v}(t) = \mathbf{A}[\mathbf{v}(t), t] dt + \mathbb{B}[\mathbf{v}(t), t] \cdot d\mathbf{W}(t). \quad (\text{A.23})$$

La fórmula de Ito correspondiente es

$$d\phi[\mathbf{v}(t)] = \left\{ A_i \frac{\partial \phi}{\partial v_i} + \frac{1}{2} B_{ik} B_{jk} \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{\partial}{\partial v_j} \phi \right\} dt + B_{ik} \frac{\partial \phi}{\partial v_i} dW_k, \quad (\text{A.24})$$

donde hay suma en índices repetidos.

Para conectar las ecuaciones diferenciales estocásticas con los procesos de difusión y la ecuación de Fokker-Planck se considera la evolución temporal de la funcional ϕ

$$\frac{\langle d\phi[v(t)] \rangle}{dt} = \left\langle \frac{d\phi[v(t)]}{dt} \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle \phi[v(t)] \rangle. \quad (\text{A.25})$$

⁴Para un tratamiento más extenso de los procesos estocásticos pueden consultarse las referencias [27], [97] y [98], [99] para una introducción.

Asociada al valor promedio hay una densidad de probabilidad $f(v, t)$, de tal forma que

$$\frac{d}{dt} \langle \phi [v(t)] \rangle = \frac{d}{dt} \int dv \phi(v) f(v, t) = \int dv \phi(v) \frac{\partial}{\partial t} f(v, t). \quad (\text{A.26})$$

Por otro lado se sustituye la fórmula de Ito para $d\phi$ en el segundo miembro de la ecuación (A.25)

$$\left\langle \frac{d\phi [v(t)]}{dt} \right\rangle = \left\langle a(v, t) \frac{\partial}{\partial v} \phi(v) + \frac{1}{2} b^2(v, t) \frac{\partial^2}{\partial v^2} \phi(v) \right\rangle, \quad (\text{A.27})$$

ya que el promedio de $dW/dt = 0$. Escribiendo el promedio en términos de la función f , integrando por partes el lado derecho de (A.27) y finalmente igualando con (A.26) debido a (A.25), se tiene que

$$\int dv \phi(v) \frac{\partial f}{\partial t} = \int dv \phi(v) \left\{ -\frac{\partial}{\partial v} [a(v, t) f(v, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} [b^2(v, t) f(v, t)] \right\}, \quad (\text{A.28})$$

al ser ϕ arbitraria se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v} (af) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} (b^2 f). \quad (\text{A.29})$$

Esta es la *ecuación de Fokker-Planck*. Esto muestra que bajo ciertas aproximaciones y suposiciones los procesos de difusión y los procesos estocásticos son equivalentes.

El mismo procedimiento se puede generalizar al caso de tres dimensiones

$$\frac{\partial f(\mathbf{v}, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial v_i} [A_i(\mathbf{v}, t) f(\mathbf{v}, t)] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v_i} \frac{\partial}{\partial v_j} [B_{ik}(\mathbf{v}, t) B_{jk}(\mathbf{v}, t) f(\mathbf{v}, t)]. \quad (\text{A.30})$$

La ecuación de Fokker-Planck es una ecuación diferencial parcial parabólica que describe la evolución irreversible de la densidad de probabilidad f de un estado inicial hacia el equilibrio. El término que contiene la derivada de primer orden describe el mecanismo de frenado del sistema el cual se conoce como fricción dinámica, mientras que el término de segunda derivada se refiere a la difusión⁵. Así pues la ecuación de Fokker-Planck describe la superposición de un proceso de ficción y uno de difusión en el espacio de variables v_i .

Cuando se especifican los coeficientes a y b de la ecuación (A.29) se tienen diferentes procesos estocásticos. Para el proceso de Orstein-Uhlenbeck se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \eta \frac{\partial f}{\partial v} + \mathcal{D} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}, \quad (\text{A.31})$$

que es la ecuación de Fokker-Planck para el movimiento browniano en una dimensión.

⁵Ver [52].

A.3. Procesos estocásticos relativistas

Existen diversas versiones que intentan extender los procesos estocásticos al régimen relativista. En esta sección se describen algunas de estas formulaciones.

En [100] Zygadlo estudia una generalización del movimiento browniano que dice ser consistente con la termodinámica, empleando relaciones de la dinámica relativista. En su trabajo investiga las correcciones a los tiempos de la relajación debidas al carácter relativista del sistema. Parte de la ecuación de Langevin usual y utiliza las transformaciones de Lorentz para encontrar la ecuación de Langevin y la función de distribución correspondientes a un marco inercial con velocidad V ya sí encuentra la correspondiente ecuación de Fokker-Planck. Los problemas con esta formulación son que no considera a la función de distribución como un invariante de Lorentz y que no escribe las ecuaciones en forma manifiestamente covariante.

En otro trabajo [101] Oron y Horwitz derivan una ecuación relativista de Fokker-Planck. Utilizan como parámetro de evolución el tiempo invariante universal τ semejante al que aparece en la dinámica de Newton.

En su trabajo se describe el problema de las correlaciones en 4 dimensiones cuando se definen de manera análoga al caso no relativista estudiado en la sección anterior:

$$dW_\rho dW_\sigma = \mathfrak{D}\eta_{\rho\sigma} d\tau. \quad (\text{A.32})$$

Sin embargo, al considerar las componentes temporales de (A.32) se tendría que

$$dW_0 dW_0 = -\mathfrak{D}d\tau, \quad (\text{A.33})$$

lo cual es imposible dado que las correlaciones se definen entre 0 y 1, es decir, son positivas definidas. Para subsanar este problema ellos consideran un proceso en el espacio-tiempo que está físicamente restringido a saltos tipo-espacio. Así consideran una ecuación de Langevin relativista 4 dimensional de la forma

$$dx^\mu(\tau) = a^\mu(x^\mu, \tau)d\tau + b^{\mu\nu}(x^\mu, \tau)dW_\nu(\tau), \quad (\text{A.34})$$

donde el coeficiente del primer término del lado derecho es una fuerza externa (la fricción por ejemplo), y el segundo término es un proceso al azar que es la generalización del proceso de Wiener definido en la sección anterior. A partir de esta ecuación construyen un operador de D'Alambert que considera por separado los procesos al azar o fluctuantes que ocurren en la región tipo-espacio y la tipo-tiempo, para después hacer una continuación analítica de cada región en la otra. De esta forma encuentran una generalización a la ecuación de Fokker-Planck (o de Smoluchowski) para la difusión en el espacio-tiempo que es covariante

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu}(a^\mu \rho) + D \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \rho, \quad (\text{A.35})$$

donde D está dada por las correlaciones de dW^μ y ρ es la densidad de probabilidad que depende de (x^μ, τ) . La ecuación (A.35) presenta ciertos problemas, el significado

de $\boldsymbol{\tau}$ no es claro, además no es un parámetro natural en la relatividad especial. Hay que recalcar que (A.35) es una ecuación de difusión en el espacio-tiempo y no en el espacio de momentos como la ecuación de Fokker-Planck que se ha estudiado.

En [102] y [103] Debbasch y colaboradores construyen un proceso de Orstein-Uhlenbeck relativista que describe la difusión relativista de una partícula de masa m en un fluido de velocidad U , para su descripción escogen el marco de referencia global donde el fluido donde se difunden las partículas está en reposo. Las ecuaciones estocásticas relativistas con el límite galileano correcto que definen el proceso son

$$d\mathbf{r} = \frac{\mathbf{p}}{m\gamma(\mathbf{p})}dt, \quad (\text{A.36})$$

$$d\mathbf{p} = -\alpha \frac{\mathbf{p}}{\gamma(\mathbf{p})}dt + \sqrt{2D}dW_t, \quad (\text{A.37})$$

donde $\gamma(\mathbf{p})$ es el factor de Lorentz y se toma como función de \mathbf{p} , α es la amplitud de la fuerza de fricción que experimenta la partícula, D es la amplitud del término de ruido y dW_t es el proceso de Wiener usual del movimiento browniano. Así, obtienen una versión de la ecuación de Fokker-Planck para la densidad de espacio fase $\Pi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$

$$\partial_t \Pi + \partial_{\mathbf{r}} \cdot \left(\frac{\mathbf{p}}{m\gamma(\mathbf{p})} \Pi \right) - \alpha \partial_{\mathbf{p}} \cdot \left(\frac{\mathbf{p}}{\gamma(\mathbf{p})} \Pi \right) = D \nabla_{\mathbf{p}}^2 \Pi, \quad (\text{A.38})$$

esta ecuación admite como solución de equilibrio la distribución de Jüttner y un teorema de fluctuación-disipación relativista

$$\alpha = \frac{D}{mkT}. \quad (\text{A.39})$$

Los autores también estudian el caso de un sistema de referencia genérico no necesariamente inercial y escriben las ecuaciones con una notación manifiestamente covariante [104], [105]. En un trabajo posterior hacen la generalización al caso del espacio-tiempo curvo [106]. En dichos casos las ecuaciones estocásticas son

$$\frac{dx^\mu}{ds} = u^\mu, \quad (\text{A.40})$$

$$\frac{dp^\mu}{ds} = -m\lambda_\nu^\mu(u^\nu - U^\nu) + m\lambda_\nu^\rho u_\rho(u^\nu - U^\nu)u^\mu + F^\mu, \quad (\text{A.41})$$

donde s es la distancia propia a lo largo de la línea de mundo de la partícula, el tensor λ es la generalización del coeficiente de fricción, U^μ es la 4-velocidad hidrodinámica del fluido y F^μ es la fuerza estocástica. La correspondiente ecuación de Fokker-Planck covariante es

$$p^\mu \partial_{x^\mu} f + \partial_{p^\mu} (I^\mu f) - \partial_{p^\mu p^\nu} (J^\mu f) = 0, \quad (\text{A.42})$$

donde I^μ y J^μ son tensores que involucran a U^μ , a la fuerza determinista y a la fuerza estocástica. En (A.42) f esta dada por

$$\Pi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \int_{\mathbb{R}} f(x, p) \delta(p_0 - \gamma(\mathbf{p})) dp_0. \quad (\text{A.43})$$

El último trabajo que se expondrá en esta sección es el de Dunkel y Hänggi, quienes en [67], [68] construyen una teoría del movimiento browniano relativista construyendo una versión relativista de la ecuación de Langevin

$$dx^\alpha = \frac{p^\alpha}{m} d\tau, \quad (\text{A.44})$$

$$dp^\alpha = -\nu_\beta^\alpha (p^\beta - mU^\beta) d\tau + dW^\alpha(\tau), \quad (\text{A.45})$$

con τ el tiempo propio de la partícula browniana, dW^α el proceso de Wiener generalizado que cumple

$$\langle dW^\alpha(\tau) dW^\beta(\tau) \rangle = D^{\alpha\beta}, \quad (\text{A.46})$$

con $D^{\alpha\beta}$ el tensor de correlación. En el sistema co-móvil del laboratorio escriben

$$dp = -\nu p dt + dW. \quad (\text{A.47})$$

Este proceso estocástico es muy similar al proceso de Orstein-Uhlenbeck relativista formulado por Debbasch, de hecho la diferencia principal radica en la elección del ruido. En el primero se elige un ruido blanco gaussiano en el marco del fluido que rodea a la partícula browniana, mientras que en este caso se escoge un ruido blanco gaussiano en el marco de la partícula browniana.

Definen un proceso como $dy = dW/\sqrt{\gamma}$ y así reescriben (A.48) de la siguiente manera

$$dp = -\nu p dt + \sqrt{\gamma} dy. \quad (\text{A.48})$$

La diferencia entre los procesos definidos por Debbasch y Hänggi, puede verse al comparar las ecuaciones (A.37) y (A.48), de ahí es claro que los procesos difieren en el tipo de ruido.

Con (A.48) escriben la correspondiente ecuación de Fokker-Planck como

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial p} = 0. \quad (\text{A.49})$$

Sin embargo, obtienen que esta ecuación no es única, j depende de la formulación de los procesos estocásticos que se elija (Ito, Stratonovich o Hänggi-Klimontovich)

$$-\frac{(j - \nu p f)}{D} = \begin{cases} \partial_p(\gamma f) & \text{Ito,} \\ \sqrt{\gamma} \partial_p(\sqrt{\gamma} f) & \text{Stratonovich,} \\ \gamma \partial_p(f) & \text{Hänggi-Klimontovich.} \end{cases} \quad (\text{A.50})$$

Encuentran una solución estacionaria de (A.49) por cada j . Solamente con la formulación de Hänggi-Klimontovich se recupera la función de distribución relativista de Maxwell-Jüttner para el estado del equilibrio. Las otras versiones llevan a funciones de distribución que difieren de la de Jüttner por factores que dependen de la energía

$$f(p, t) = \mathfrak{C} \exp\left(-\frac{E}{kT}\right), \quad \text{con } \mathfrak{C} = \begin{cases} \mathfrak{A} mc^2/E, & \text{Ito,} \\ \mathfrak{A} \sqrt{mc^2/E}, & \text{Stratonovich,} \\ \mathfrak{A}, & \text{Hänggi-Klimontovich,} \end{cases} \quad (\text{A.51})$$

con \mathfrak{A} una constante de normalización. Aunque ha habido intentos por mejorar este hecho [66], es claro que esta diferencia entre las distribuciones, constituye un problema para la interpretación de la versión relativista de los procesos estocásticos que proponen.

Otro de los problemas existentes en este caso es que, aunque hay una generalización al caso $(3+1)$ no existe una versión manifiestamente covariante y en espacio-tiempo curvo.

En los dos últimos casos se han supuesto una serie de propiedades para asegurar que las ecuaciones relativistas se reduzcan a las ecuaciones conocidas no relativista en el límite galileano.

Como se puede observar los procesos estocásticos relativistas presentan una serie de problemas que aún no han sido resueltos y que son necesarios para su completa definición. Por lo tanto, al no haber un consenso absoluto acerca de cual es el proceso relativista correcto, ésta se convierte en un área con mucha actividad de investigación actual.

Apéndice B

Funciones de Bessel Modificadas

Las funciones de Bessel modificadas de segunda especie $I_{\pm n}(z)$ y $K_n(z)$ satisfacen la siguiente ecuación diferencial para $w(z)$

$$z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + z \frac{\partial w}{\partial z} - (z^2 + n^2)w = 0. \quad (\text{B.1})$$

En este apéndice se describen algunas propiedades de la segunda de estas soluciones. Una de las representaciones integrales de la función K_n es la siguiente

$$K_n(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh \vartheta} \cosh(n\vartheta) d\vartheta. \quad (\text{B.2})$$

Otra representación integral de estas funciones es

$$K_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_1^\infty e^{-zx} (x^2 - 1)^{n-\frac{1}{2}} dx. \quad (\text{B.3})$$

Para la función $K_n(z)$ se tienen las siguientes relaciones de recurrencia

$$K_{n-1}(z) - K_{n+1}(z) = -\frac{2n}{z} K_n(z), \quad (\text{B.4})$$

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{K_n(z)}{z^n} \right) = -\frac{K_{n+1}(z)}{z^n}, \quad (\text{B.5})$$

$$\frac{d}{dz} (z^n K_n(z)) = -z^n K_{n-1}(z). \quad (\text{B.6})$$

El desarrollo asintótico de $K_n(z)$ para valores grandes del parámetro, es decir, para $z \gg 1$, está dada por la siguiente expresión

$$K_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \frac{1}{e^z} \left[1 + \frac{4n^2 - 1}{8z} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}{2!(8z)^2} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)(4n^2 - 25)}{3!(8z)^3} + \dots \right]. \quad (\text{B.7})$$

Para valores pequeños $z \ll 1$, se tiene la siguiente aproximación para $K_n(z)$

$$K_n(z) = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{n+2k}}{k!(n+k)!} \left[\ln \frac{z}{2} - \frac{1}{2}\psi(k+1) - \frac{1}{2}\psi(n+k+1) \right] + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{(n-k-1)!}{k! \left(\frac{z}{2}\right)^{n-2k}}, \quad (\text{B.8})$$

donde $\psi(n)$ está definida como

$$\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad \psi(1) = -\gamma, \quad (\text{B.9})$$

con $\gamma = 0.577215664$ es la constante de Euler.

Estas funciones son iguales ante el cambio $n \rightarrow -n$

$$K_n(z) = K_{-n}(z), \quad (\text{B.10})$$

para el valor particular $n = 1/2$ y el cambio $z \rightarrow 2z$ se tiene que

$$K_{\frac{1}{2}}(2z) = \sqrt{\frac{\pi}{4z}} e^{-2z}. \quad (\text{B.11})$$

Bibliografía

- [1] F. Jüttner, *Das Maxwell'sche Gesetz der Geschwindigkeitsverteilung in der Relativtheorie*. Ann. Physik und Chemie **34**, 856-882 (1911).
- [2] F. Jüttner, *Die relativistische Quantentheorie des idealen Gases*. Zeitschr. Phys. **47**, 542-566 (1928).
- [3] A. G. Walker, Proc. Edinburgh Math. Soc. **2**, 238 (1934-36).
A. Lichnerowicz and R. Marrot, Compt. Rend. Acad. Sci. **210**, 759 París (1940).
R. Marrot, J. Math Pures et Appl. **25**, 93 (1946).
- [4] A. H. Taub, *Relativistic Rankine- Hugoniot Equation*. Phys. Rev. **74**, 328-334 (1948).
- [5] J. L. Synge, *The Relativistic Gas*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1957).
- [6] W. Israel, *Relativistic Kinetic Theory of a simple gas*. J. Math. Phys. **4**, 1163-1181 (1963).
- [7] D. C. Kelly, *The Kinetic Theory of a Relativistic Gas*. Unpublished Report. Miami University, Oxford (1963).
- [8] N. A. Chernikov, *The Relativistic Gas in the Gravitational Field*. Acta Phys. Pol. **23** 629-645 (1963).
- [9] J. M. Stewart, *Non-equilibrium relativistic kinetic theory*. Lecture Notes in Physics vol.10 Springer, Heidelberg (1971).
- [10] J. Ehlers, *General Relativity and Kinetic Theory* en los *Proceedings of the International School of Physics, Enrico Fermi* pág. 1-70, Ed. R. K. Sach, Academic Press (1971.)
- [11] S. R. de Groot, W. A. van Leeuwen and Ch. G. van Weert, *Relativistic Kinetic Theory*. North-Holland, Amsterdam (1980).

- [12] C. Cercignani and G. M. Kremer, *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*. Progress in Mathematical Physics vol. 22 Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin (2002).
- [13] S. Chandrasekhar, *An Introduction to the Study of Stellar Structure*. Dover Publications Inc. (1958).
- [14] J. Bernstein, *Kinetic Theory in the Expanding Universe*. Cambridge University Press, Paperback Ed. (2004).
- [15] A. R. Liddle, D. H. Lyth, *Cosmological Inflation and Large Scale Structure*. Cambridge University Press (2000).
- [16] J. A. Peacock, *Cosmological Physics*. Cambridge University Press (1999).
- [17] E. W. Kolb, M. S. Turner, *The Early Universe*. Paperback Ed. Westview Press (1994).
- [18] L. García-Colín Scherer, *Introducción a la Física Estadística*. El Colegio Nacional, México (2005).
- [19] L. García-Colín Scherer y P. Goldstein Menache, *La Física de los Procesos Irreversibles*. Vol I y Vol. II. El Colegio Nacional México (2003).
- [20] R. A. Sunyaev, Y. B. Zeldovich, *The observations of relic radiation as a test of the nature of x-ray radiation from the clusters of galaxies*. Comments on Astrophysics and Space Physics **4**, 173-178 (1972).
- [21] N. Itoh, Y. Kohyama, S. Nozawa, *Relativistic corrections to the Sunyaev-Zeldovich effect for clusters of galaxies*. Astrophys. J. **502**, 7-15 (1998).
- [22] H. Struchtrup, *Macroscopic Transport Equations for Rarefied Gas Flows*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2005).
- [23] L. D. Landau, Phis. Z. Sowj Un. **10**, 154 (1936).
- [24] M. S. Green, *Brownian Motion in a Gas of Noninteracting Molecules*. J. Chem. Phys. **19**, 1036-1046 (1951).
- [25] C. S. Wang Chang and G. E. Uhlenbeck, *The kinetic theory of a gas in alternating outside force fields: A generalization of the Rayleigh problem in Studies in Statistical Mechanics Vol. IV*, ed. J. de Boer and G.E. Uhlenbeck (1970) pp. 76-100.
- [26] S. Chandrasekhar, *Stochastics Problems in Physics and Astronomy*. Mod. Phys. **15**, 1-89 (1943).

- [27] C. W. Gardiner, *Handbook of Stochastic Methods for Physics Chemistry and the Natural Sciences*. Springer (1997).
- [28] J. V. José and E. J. Saletan, *Classical Dynamics: A Contemporary Approach*. Cambridge University Press (1998).
- [29] L. Boltzmann, *Lectures on Gas Theory*. Dover Publications Inc. New York (1995).
- [30] S. Chapman and T. G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*. 3th ed. Cambridge University Press, Cambridge (1970).
- [31] C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and Its Applications*. Applied Mathematical Sciences vol. 67 Springer-Verlag, New York Inc. (1988).
- [32] R. L. Liboff, *Kinetic Theory. Classical, Quantum and Relativistic Descriptions*. Prentice Hall, Inc. (1990).
- [33] S. Harris, *An Introduction to the Theory of the Boltzmann Equation*, Holt, Rinehart and Wilson Inc. (1971).
- [34] G. M. Kremer, *Uma introdução à Equação de Boltzmann*. Editora da USP, São Paulo (2005).
- [35] F. Reif, *Fundamentals of Statistical and Thermal Physics*. McGraw-Hill Inc. (1965).
- [36] B. F. Schutz, *A First Course in General Relativity*, Cambridge University Press, (1990).
- [37] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, 2nd Ed. Cambridge University Press, (1996).
- [38] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman and Company New York (1973).
- [39] C. Eckart *Thermodynamics of Irreversible Processes III. Relativistic Theory of the Simple Fluid*, Phys. Rev. **58**, 919-924 (1940).
- [40] L. D. Landau y E. M. Lifshitz, *Mecánica de Fluidos*. Editorial Reverté, S. A. 2a. Reimpresión (2001).
- [41] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, Inc., New York (1972).
- [42] R. M. Velasco Belmont, *Introducción a la Hidrodinámica Clásica*. Fondo de Cultura Económica, México (2005).

- [43] J. L. Synge, *Relativity: The Special Theory*. North-Holland Publishing Company, (1972).
- [44] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 4th ed. Pergamon Press, Oxford (1980).
- [45] N. A. Chernikov, *Equilibrium distribution function of the relativistic gas*. Acta Phys. Pol. **26** 1069-1092 (1964).
- [46] C. Cercignani and G. M. Kremer, *On relativistic collisional invariants*. J. Stat. Phys. **96**, 439-445 (1999).
- [47] L. García-Colín Scherer, *Introducción a la Termodinámica Clásica*. Editorial Trillas México, 4a ed. (2002).
- [48] E. Piña Garza, *Termodinámica*. Editorial Limusa México (1978).
- [49] G. M. Kremer, *Uma introdução à Teoria Cinética Relativística*. Editora da UFPR, Curitiba (1998).
- [50] L. García-Colín Scherer, *La Naturaleza Estadística de la Teoría de los Cuantos*. Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, Colección CBI. México (1987).
- [51] E. A. Uehling and G. E. Uhlenbeck, *Transport phenomena in Einstein-Bose and Fermi-Dirac gases I*. Phys. Rev. **43**, 552-561 (1933).
- [52] R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*. John Wiley and Sons, Inc. New York (1975).
- [53] H. Akama, *Relativistic Boltzmann Equation for Plasmas*. J. Phys. Soc. Japan **28** (2), 478-488 (1970).
- [54] E. M. Lifshitz and L. P. Pitaevskii, *Physical Kinetics*. Pergamon Press, Oxford (1981).
- [55] H. A. Lorentz, Proc. Amst. Acad. **7**, 438, 585, 684 (1905).
- [56] J. Kox, *On Relativistic Kinetic Gas Theory. XVIII Diffusion in a Lorentz Gas of Hard Spheres*. Physica A **84**, 603-882 (1976).
- [57] B. D. Hughes, *Random Walks and Random Environments Vol. 1: Random Walks*. Clarendon Press Oxford (1995).
- [58] K. Zabrocki, S. Tatur, S. Trimper, R. Mahnke, *Relationship between a Non-Markovian Process and Fokker-Planck equation*. cond-mat/0603252 (2006).
- [59] C. F. Lo, *Propagator of the Fokker-Planck equation with a linear force-Lie algebraic approach*. Europhys. Lett. **39**(3), 263-267 (1997).

- [60] A. Sandoval-Villalbaz and L.S. García-Colín, *The relativistic kinetic formalism revisited*. Physica A **278**, 428-439 (2000).
- [61] L. P. Horwitz, S. Shashoua and W. Schieve, *A manifestly covariant relativistic Boltzmann equation for the evolution of a system of events*. Phys. A **161**, 300-338 (1989).
- [62] E. Bertschinger, *Brownian Motion of Stars, Dust, and Invisible Matter*. Albert Einstein Century International Conference. AIP Conference Proceedings Volume **861**, pp. 97-105 (2006).
- [63] G. Horwitz and E. Dagan, *The covariant Boltzmann-Fokker-Planck equation and its associated short-time transition probability*. J. Phys. A: Math. Gen. **21**, 1017-1028 (1988).
- [64] U. Ben-Ya'acov, *Relativistic Brownian motion and the spectrum of thermal radiation*. Phys. Rev. D **23**, 1441-1459 (1981).
- [65] F. Debbasch, *Relativistic Stochastic Processes: A review*. Albert Einstein Century International Conference. AIP Conference Proceedings Volume **861**, pp. 488-493 (2006).
- [66] J. Dunkel and P. Hänggi, *One-dimensional non-relativistic and relativistic Brownian motions: a microscopic collision model*. Phys. A **374**, 559-572 (2006).
- [67] J. Dunkel and P. Hänggi, *Theory of relativistic Brownian motion: The (1+1)-dimensional case*. Phys. Rev. E **71**, 016124 (2005).
- [68] J. Dunkel and P. Hänggi, *Theory of relativistic Brownian motion: The (3+1)-dimensional case*. Phys. Rev. E **72**, 036106 (2005).
- [69] F. Debbasch, J. P. Rivet and W.A. van Leeuwen, *Invariance of the relativistic one-particle distribution function*. Phys. A **301** 181-195, (2001).
- [70] R. Balescu, T. Kotera and E. Piña, *Lorentz Transformations in Phase Space and in Physical Space*. Physica **33**, 581-594 (1967).
- [71] E. Piña and R. Balescu, *Some Aspects of Relativistic Statistical Mechanics*. Acta Phys. Austriaca **28**, 309-319 (1968).
- [72] A. Einstein, *Jahrb der Radioaktivität und Elektronik* **4**, 411 (1907).
- [73] M. Planck, *Ann. Physik* **26**, 1 (1908).
- [74] R. C. Tolman, *Relativity, Thermodynamics and Cosmology*. (Publicación del trabajo de 1934) Dover Publications Inc. (1987)
- [75] H. Ott, *Z. Physik* **175**, 70 (1963).

- [76] P. T. Landsberg, *Does a moving body appears cool?* Nature **213**, 571 (1966).
- [77] P. T. Landsberg, *Does a moving body appears cool?* Nature **214**, 903 (1967)
- [78] R. Zygadlo, $T' = T$, $S' = \gamma S$, $P' = \gamma^2 P$, $V' = V'/\gamma$ and $U' = \gamma U$. cond-mat/0310022, (2003).
- [79] N. G. van Kampen, *Relativistic Thermodynamics of Moving Systems*. Phys. Rev. **173** , 295-301 (1968).
- [80] H. Stephani, *Relativity*. 3rd. Ed. Cambgridge University Press (2004).
- [81] A. P. Lightman, W. H. Press, R. H. Rice and S. A. Teukolsky, *Problem Book in Relativity and Gravitation*. Princeton University Press (1975).
- [82] T. K. Nakamura, *Covariant Thermodynamics of an Object with Finite Volume*. Phys. Lett. A **352**, 175-177 (2006).
- [83] S. S. Costa and G. E. A. Matsas, *Temperature and Relativity*. Phys. Lett. A **209**, 155-159 (1995).
- [84] W. Z. Jiang, *Is the Temperature as a Lorentz scalar?* physics/0303091 (2003).
- [85] M. Khaleghy and F. Qassemi, *Relativistic Temperature Transformation Revisited, One hundred years after Relativity Theory*. physics/0506214 (2006).
- [86] H. Callen and G. Horwitz, *Relativistic Thermodynamics*. Am. J. Phys. **39**, 938-947 (1971).
- [87] M. B. Lewis, *The Boltzmann and Fokker-Planck Equation* Chapter V of *Kinetic Processes in Gases and Plasmas* edited by A. R. Hochstim. Academic Press (1969).
- [88] J. Fernandez de la Mora and J. M. Mercer, *Modified Fokker-Planck Equation for the motion of Brownian particles in a nonuniform gas*, Phys. Rev. A **26**, 2178-2186 (1982).
- [89] C. Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press (2004).
- [90] L. Smolin, *Atomos del Espacio y del Tiempo*. Scientific American Latinoamérica **20** 58-67, (2004).
- [91] B. L. Hu and E. Verdaguer, *Stochastic gravity: a primer with applications*, Class. Quantum Grav. **20** R1-R42 (stacks.iop.org/CQG/20/R1), (2003).
- [92] B. L. Hu and E. Verdaguer, *Stochastic Gravity: Theory and Applications*, Living Rev. Relativity **7**, 3 (<http://www.livingreviews.org/lrr-2004-3>), (2004) .

- [93] F. Dowker, J. Henson and R. D. Sorkin, *Quantum Gravity Phenomenology, Lorentz invariance and discreteness*. Mod. Phys. Lett. **A19** 1829-1840, (2004).
- [94] F. Dowker, *Causal sets and the deep structure of spacetime*. gr-qc/0508109, (2005).
- [95] G. E. Uhlenbeck and L. S. Orstein, *On the Theory of the Brownian Motion*. Phys. Rev. **36**, 823-841 (1930).
- [96] A. Einstein, *Investigations on the Theory of the Brownian Movement*. Dover Publications, Inc. (1956).
- [97] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*. Springer (1996).
- [98] D. S. Lemons, *An Introduction to Stochastic Processes in Physics*. The John Hopkins University Press. Baltimore and London. (2002).
- [99] R. K. Pathria, *Statistical Mechanics*. 2nd Edition. Butterworth Heinemann. (2001).
- [100] R. Zygadlo, *Free Brownian motion of relativistic particles*. Phys. Lett. A **345**, 323-329 (2005).
- [101] O. Oron and L. P. Horowitz, *Relativistic Brownian Motion in 3+1 Dimensions*. math-ph/0312003, (2003).
- [102] F. Debbasch, K. Mallick and J. P. Rivet, *Relativistic Ornstein-Uhlenbeck Process*. J. Stat. Phys. **88** 945-966 (1997).
- [103] F. Debbasch, and J. P. Rivet, *A Diffusion Equation from the Relativistic Ornstein-Uhlenbeck Process*. J. Stat. Phys. **90** 1179-1199 (1998).
- [104] C. Barbachoux, F. Debbasch, and J.P. Rivet *Covariant Kolmogorov equation and entropy current for the relativistic Ornstein-Uhlenbeck process*. Eur. Phys. J. B **23**, 487 (2001).
- [105] C. Barbachoux, F. Debbasch, and J.P. Rivet, *The spatially one-dimensional relativistic Ornstein-Uhlenbeck process in an arbitrary inertial frame*. Eur. Phys. J. B **19**, 37 (2001).
- [106] F. Debbasch, *A diffusion process in curved space-time* J. Math. Phys. **45** 2744-2760 (2004).
- [107] G. Arfken, *Mathematical Methods for Physicists*. Third Edition. Academic Press, Inc. (1985).
- [108] M. Abramowitz and I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover (1968).