



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Unidad Iztapalapa

División de Ciencias Básicas e Ingeniería
Posgrado en Ciencias (Matemáticas)

Tesis

“Topologías de Hattori en grupos casi topológicos”

Para obtener el grado de
Doctor en Ciencias (Matemáticas)

Presenta

M. en C. Ángel Calderón Villalobos

Matrícula: 2213801160

Correo electrónico: calderonvillalobos.angel@gmail.com

Número orcid: 0000-0003-1354-3242

Director: Dr. Iván Sánchez Romero

Jurado

Presidente: Dr. Richard Wilson Roberts

Secretario: Dr. Mikhail Tkachenko Gelievich

Vocal: Dr. Rodrigo Jesús Hernández Gutiérrez

Vocal: Dr. Manuel Sanchis López

Vocal: Dr. Roberto Pichardo Mendoza

Iztapalapa, Ciudad de México a 29 de octubre de 2025

*Con todo mi cariño,
dedico a mi familia
el esfuerzo y el tiempo
invertidos en la realización de esta tesis.*

*Este proyecto fue realizado con el apoyo de la beca SECIHTI, con número
997055. Agradezco a esta Secretaría, pues sin su generosa contribución este
trabajo no habría sido posible.*

Índice general

Resumen	VII
Introducción	IX
1. Preliminares	1
1.1. Topología general	1
1.1.1. Espacios topológicos	2
1.1.2. Funciones continuas y homeomorfismos	7
1.1.3. Subespacios y producto de espacios topológicos	9
1.1.4. Axiomas de separación	11
1.1.5. Compacidad	16
1.1.6. Metrizabilidad	19
1.1.7. Ejemplos de espacios topológicos	21
1.1.8. Funciones cardinales	22
1.2. Nociones básicas de retículas	25
2. Topologías de Hattori en $\mathbb{R}$	27
2.1. Espacios de Hattori	27
2.2. Topologías de Hattori en el plano de Niemytzki	31
3. Álgebra topológica	35
3.1. Grupos topológicos y paratopológicos	35
3.1.1. Grupo reflexión y grupo paratopológico 2-oscilante	42
3.2. Grupos casi topológicos	45
3.2.1. Grupos-SP	52

4. Topologías de Hattori en grupos casi topológicos	57
4.1. Topologías de Hattori en grupos casi topológicos	58
4.2. Propiedades topológicas básicas en los espacios de Hattori . . .	64
4.3. Retícula de Hattori	66
4.4. Axiomas de separación	67
4.5. Cerradura de subgrupos	70
4.6. Funciones cardinales	73
5. Propiedades tipo compacidad	83
5.1. Propiedades tipo compacidad	83
5.2. Metrizabilidad	94
6. Subespacios de Hattori	97
6.1. Subespacios de Hattori	97
6.2. Funciones cardinales y axiomas de separación	98
7. Compactos pequeños	117
7.1. Subespacios compactos	117
8. Conclusiones	121
8.1. Problemas abiertos	121
Bibliografía	123

Índice de figuras

1.1.	Vecindades básicas del plano de Niemytzki.	10
1.2.	Espacio topológico T_0	12
1.3.	Espacio topológico T_1	12
1.4.	Espacio topológico T_2	13
1.5.	Espacio topológico regular.	14
1.6.	Espacio topológico normal.	16
2.1.	$(a, 0) \in A$, $(c, 0) \in L \setminus A$ y $b > 0$	33
3.1.	Básico de e en G	46
3.2.	$\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es una base local de la identidad en $\mathbb{S}^2$	49
3.3.	Básico de la identidad en la circunferencia de Sorgenfrey.	50
3.4.	Básico de la identidad en G	51
3.5.	Básico de la identidad en G	51
4.1.	El conjunto U es abierto en $H(A)$. El punto $q \in U$, pero no existe un básico $V \in \tau_*$ tal que $q \in V \subseteq U$	61
4.2.	Los básicos en color azul son básicos de los puntos de A y los básicos en color rojo son básicos de los puntos de $G \setminus A$	63
6.1.	El segmento rojo representa una vecindad básica de $(0, 0)$ en el subespacio $G \setminus A$	114
6.2.	El segmento rojo representa una vecindad básica de $(0, 0)$ en el subespacio $G \setminus A$	115

Resumen

En esta tesis trabajamos dentro del marco del álgebra topológica, enfocándonos principalmente en la teoría de grupos topológicos, paratopológicos y, en particular, en los grupos casi topológicos.

Denotamos por τ_E a la topología usual de $\mathbb{R}$ y por τ_S a la topología de la recta de Sorgenfrey. En 2010, Hattori definió una familia de topologías $\{\tau(A) : A \subseteq \mathbb{R}\}$ en $\mathbb{R}$ tales que $\tau_E \subseteq \tau(A) \subseteq \tau_S$ para cada subconjunto A de $\mathbb{R}$. Denotamos por $H(A)$ al espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau(A))$, el cual se conoce como el espacio de Hattori asociado a A .

Sabemos que $\mathbb{R}$ con su topología usual es un grupo topológico Hausdorff. La recta de Sorgenfrey, $\mathbb{S}$ es un grupo paratopológico que no es un grupo topológico. Más aún, $\mathbb{S}$ es un grupo casi topológico, y $\mathbb{R}$ es el grupo reflexión de $\mathbb{S}$. Así, Hattori construye una familia de topologías entre la topología de un grupo casi topológico y la topología de su grupo reflexión. El problema que dio origen a este proyecto de doctorado fue la siguiente:

Pregunta 1. ¿Podemos extender la construcción de las topologías definidas por Hattori en $\mathbb{R}$ a un grupo casi topológico arbitrario?

Para responder esta pregunta, el Capítulo 1 presenta definiciones y resultados básicos de topología general. En el Capítulo 2, estudiamos los espacios de Hattori en $\mathbb{R}$. Además, se muestra cómo modificar la construcción de Hattori en $\mathbb{R}$ para definir una familia de topologías sobre $\mathbb{R}^2$, utilizando la topología usual de $\mathbb{R}^2$ y la topología del plano de Niemytzki.

En el Capítulo 3, se incluyen definiciones y resultados de la teoría de grupos topológicos y paratopológicos. Si (G, τ) es un grupo paratopológico, denotamos por τ_* a la topología más fina de grupo topológico en G tal que $\tau_* \subseteq \tau$. En el Capítulo 4, damos una respuesta afirmativa a la pregunta planteada.

Dado un grupo casi topológico G , denotamos por G_* a su grupo reflexión. Para cada subconjunto A de G definimos la topología de Hattori generada

por A en G y denotamos por $H(A)$ al espacio topológico $(G, \tau(A))$ llamado el espacio de Hattori en G asociado a A .

El Capítulo 4, se divide en seis secciones:

1. Topologías de Hattori en grupos casi topológicos.
2. Propiedades topológicas básicas en los espacios de Hattori.
3. Retícula de Hattori.
4. Axiomas de separación.
5. Cerradura de subgrupos.
6. Funciones cardinales.

En el Capítulo 5, estudiamos el comportamiento de propiedades tipo compacidad en los espacios de Hattori en grupos casi topológicos. Mostramos que el único espacio de Hattori compacto en un grupo casi topológico propio es su grupo reflexión. Además, damos una caracterización de los espacios de Hattori localmente compactos. También se abordan propiedades relacionadas con la metrizabilidad. Mostramos que si A es un subconjunto propio de un grupo casi topológico G , entonces $H(A)$ es polaco si y sólo si G es regular primero numerable separable y $G \setminus A$ es numerable.

En el Capítulo 6, definimos los subespacios de Hattori. En este capítulo, se presentan ejemplos que muestran cómo algunos espacios topológicos conocidos pueden verse como subespacios de Hattori. A través del estudio de estos subespacios, se puede obtener información sobre dichos espacios topológicos conocidos.

En el Capítulo 7 introducimos el concepto de compactos pequeños. Decimos que un espacio topológico tiene compactos pequeños si todo subespacio compacto es numerable. Demostramos que la clase de espacios topológicos con compactos pequeños es estrictamente distinta de la clase de espacios totalmente imperfectos.

Finalmente, en el Capítulo 8 presentamos las conclusiones generales del trabajo y proponemos una serie de problemas abiertos que, esperamos, resulten de interés para el lector y sirvan como punto de partida para futuras investigaciones en el área.

Introducción

La **topología** es probablemente, la más joven de las ramas clásicas de las matemáticas. A diferencia del álgebra, la geometría y la teoría de números, cuyas raíces se remontan a la antigüedad, la topología surge en el siglo XVII, con el nombre de **analysis situs**, es decir, “análisis de la posición”. Desde entonces, ha evolucionado gradualmente hasta convertirse en una rama fundamental de las matemáticas.

La Topología y el Álgebra mantienen una relación de manera natural. Muchos de los objetos más relevantes de las matemáticas integran simultáneamente estructuras algebraicas y topológicas, lo que ha motivado el desarrollo de dos áreas bien definidas de las matemáticas: el **Álgebra Topológica** y la **Topología Algebraica**.

En la **Topología Algebraica**, se emplean herramientas del álgebra abstracta para clasificar y estudiar los espacios topológicos. Por otro lado, el **Álgebra Topológica**, se enfoca en analizar como las estructuras algebraicas interactúan con topologías que son compatibles con sus operaciones. Dentro de esta área se encuentran los **grupos paratopológicos** y **grupos topológicos** cuya teoría constituye un claro ejemplo de la fructífera interacción entre el álgebra y la topología.

Los grupos topológicos fueron estudiados por primera vez por Schreier en 1926 y por F. Leja en su artículo *Sur la notion du groupe abstrait topologique* (1927), donde se presenta por primera vez la definición de un grupo topológico en un contexto similar al de los grupos de Lie.

El libro [21] de E. Hewitt y K. A. Ross esboza algunas líneas de investigación en esta dirección en un breve capítulo introductorio dedicado a los grupos topológicos. En el siglo XX y durante los últimos años, numerosos topólogos y algebristas han contribuido al Álgebra Topológica. Entre ellos se encuentran destacados matemáticos, como J. Dieudonné, L. S. Pontryagin, A. Weil, H. Weyl, entre otros.

A. D. Alexandroff, N. Bourbaki, M. I. Graev, S. Kakutani, E. van Kampen, A. N. Kolmogorov, A. A. Markov y L. S. Pontryagin estuvieron entre los primeros contribuyentes a la teoría de grupos topológicos. Entre quienes contribuyeron significativamente a este campo se encuentran W. W. Comfort, M. M. Choban, E. van Douwen, V. I. Malykhin, J. van Mill y B. A. Pasynkov. Estos matemáticos también han contribuido significativamente a otros aspectos del álgebra topológica y de la topología general.

El libro [6] de M. Tkachenko constituye una guía fundamental para el estudio del álgebra topológica. Aunque su eje principal son los grupos topológicos, también incluye resultados e investigaciones sobre grupos paratopológicos y estructuras aún más generales, proporcionando así una visión amplia y profunda del área.

En esta tesis contribuimos al desarrollo de esta línea de investigación dentro del álgebra topológica, enfocándonos en el estudio de los grupos casi topológicos. Un **grupo paratopológico** es un grupo dotado de una topología en la que la operación de multiplicación es continua. Si, además, la función que asigna a cada elemento su inverso también es continua, se obtiene un **grupo topológico**.

Como estudiantes de matemáticas, hemos trabajado con grupos topológicos desde etapas tempranas de nuestra formación. Un ejemplo clásico de grupo topológico es el conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, con su topología usual τ_E . Es claro que todo grupo topológico es también un grupo paratopológico. Sin embargo, no todo grupo paratopológico es necesariamente un grupo topológico.

Uno de los ejemplos favoritos para los topólogos para construir contraejemplos es la recta de Sorgenfrey, $\mathbb{S}$, que consiste de los números reales con la topología de Sorgenfrey, τ_S . Esta topología tiene como base la familia de intervalos de la forma $\{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$. Esta topología es más fina que la topología usual de $\mathbb{R}$, es decir, $\tau_E \subseteq \tau_S$.

La recta de Sorgenfrey es un grupo paratopológico que no es un grupo topológico. Motivado por el ejemplo de la recta de Sorgenfrey, M. Fernández introduce en [18] la **clase de los grupos casi topológicos**. Entonces, la recta de Sorgenfrey constituye un ejemplo de grupo casi topológico que no es un grupo topológico. Decimos que un grupo casi topológico es **propio** si no es un grupo topológico.

A lo largo del tiempo, el estudio de los grupos paratopológicos ha dado lugar a diversas generalizaciones y clases particulares, entre las que destacan:

- La familia de los **grupos paratopológicos saturados**, introducida por I. Guran.
- La familia de los **grupos paratopológicos 2-oscilantes**, definida por Taras Banakh y Olexandr Ravsky en 2012 [7].

A partir de los trabajos [7] y [18], se obtienen las siguientes implicaciones entre clases de grupos paratopológicos:

$$\text{casi topológicos} \Rightarrow \text{saturados} \Rightarrow \text{2-oscilante}.$$

De las implicaciones anteriores se deduce que la recta de Sorgenfrey es un grupo paratopológico saturado y, en consecuencia, un grupo paratopológico 2-oscilante. Sin embargo, aunque la recta de Sorgenfrey es un grupo casi topológico, su cuadrado, $\mathbb{S}^2$, proporciona un ejemplo de grupo paratopológico saturado que no es un grupo casi topológico. Mostrando que las clases de grupos casi topológicos y grupos paratopológicos saturados son distintas.

La recta de Sorgenfrey $\mathbb{S}$ y la recta real usual $\mathbb{R}$ están estrechamente relacionadas. Para comprender mejor esta relación, es necesario introducir el concepto de grupo reflexión.

Dado un grupo paratopológico (G, τ) , se define τ_* como la topología más fina entre todas las topologías σ en G tales que (G, σ) es un grupo topológico y $\sigma \subseteq \tau$. El grupo topológico $G_* = (G, \tau_*)$ se le denomina el **grupo reflexión** de G (ver [7]). En particular, el grupo reflexión de la recta de Sorgenfrey $\mathbb{S}$ es $\mathbb{R}$ con su topología usual. Esta relación resulta fundamental en el presente trabajo, ya que permite establecer una conexión con los espacios de Hattori.

En 2010, Hattori definió en [20] una familia $\mathcal{H}(\mathbb{R}) = \{\tau(A) : A \subseteq \mathbb{R}\}$ de topologías sobre $\mathbb{R}$, donde el máximo de esta familia de topologías (ordenada por la inclusión) es la topología de Sorgenfrey, τ_S , y el mínimo es la topología usual de $\mathbb{R}$, τ_E . La topología $\tau(A)$ se le denomina **topología de Hattori** generada por A , y el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau(A))$ se denota por $H(A)$, conocido como el **espacio de Hattori asociado a A** (ver [20]). Algunos autores, como en [28], emplean la notación H_A para estos espacios, refiriéndose a ellos como **H -espacios**.

Las topologías de Hattori cumplen las siguientes propiedades:

- $\tau(\mathbb{R}) = \tau_E$,
- $\tau(\emptyset) = \tau_S$,

- $A \subseteq B$ si y sólo si $\tau(B) \subseteq \tau(A)$ (ver [9]),
- para cada subconjunto A de $\mathbb{R}$:
- $\tau(A)|_A = \tau_E|_A$,
- $\tau(A)|_{\mathbb{R} \setminus A} = \tau_S|_{\mathbb{R} \setminus A}$ (ver [15]).

En 2013, Chatyrko y Hattori [15] demostraron que para cada subconjunto A de $\mathbb{R}$, el espacio de Hattori $H(A)$ es regular, hereditariamente Lindelöf, hereditariamente separable y espacio de Baire, entre otras propiedades topológicas. Estas propiedades topológicas se heredan del hecho de que tanto $\mathbb{R}$ como la recta de Sorgenfrey $\mathbb{S}$ las poseen. Sin embargo, cuando $\mathbb{R}$ tiene una propiedad topológica P que $\mathbb{S}$ no cumple, Chatyrko y Hattori proporcionaron condiciones al complemento de A para garantizar que $H(A)$ tenga la propiedad P . Por ejemplo, sabemos que $\mathbb{R}$ es segundo numerable y $\mathbb{S}$ no lo es, en [15, Proposition 2.3], se demuestra que $H(A)$ es segundo numerable si y sólo si $\mathbb{R} \setminus A$ es numerable.

En 2017, Bouziad y Sukhacheva (ver [10]) continuaron con el trabajo de Chatyrko y Hattori. Ellos demostraron que si A es un subconjunto de $\mathbb{R}$, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones.

- i) $H(A)$ es un espacio polaco si y sólo si $\mathbb{R} \setminus A$ es numerable.
- ii) $H(A)$ es Čech-completo si y sólo si $\mathbb{R} \setminus A$ es numerable.
- iii) $H(A)$ es localmente compacto si y sólo si $\mathbb{R} \setminus A$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y discreto en $\mathbb{S}$.

Estas contribuciones han despertado un creciente interés en los espacios de Hattori, los cuales se han consolidado como un objeto de estudio relevante para la exploración de propiedades topológicas en topologías intermedias en $\mathbb{R}$, situadas entre la topología de Sorgenfrey y la topología usual de $\mathbb{R}$. Además, diversos investigadores han observado que la técnica introducida por Hattori no solo permite generar nuevas topologías sobre $\mathbb{R}$, sino que también puede adaptarse para considerar topologías distintas de τ_E y τ_S . Por ejemplo, en [1], los autores aplican el método de Hattori para construir nuevas topologías sobre el semiplano superior cerrado, ubicándolas entre la topología usual de $\mathbb{R}^2$ y la topología de Niemytzki-Moore.

Es importante destacar que en la familia $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ definida por Hattori, el máximo (respecto a la inclusión) corresponde a la topología de Sorgenfrey τ_S ,

la cual convierte a $\mathbb{R}$ en un grupo casi topológico. El mínimo es la topología del grupo reflexión de $\mathbb{S}$. Esta observación nos lleva a una pregunta natural: ¿podemos extender la construcción de las topologías definidas por Hattori en $\mathbb{R}$ a un grupo casi topológico arbitrario?

En esta tesis respondemos afirmativamente la pregunta anterior, desarrollando una teoría generalizada de espacios de Hattori para grupos casi topológicos. La tesis se divide en ocho capítulos:

- El Capítulo 1 contiene los preliminares del trabajo. En él se presentan resultados fundamentales de la topología general, distribuidos en dos secciones: “Topología general” y “Nociones básicas de retículas.”
- El Capítulo 2 está dedicado al estudio de las topologías de Hattori sobre $\mathbb{R}$, revisando los trabajos de Chatyrko y Hattori (ver [15]), así como los de Bouziad y Sukhacheva (ver [10]). También se analiza cómo estas topologías han sido definidas en el plano de Niemytzki (ver [1]).
- En el Capítulo 3, titulado Álgebra topológica, se presentan resultados sobre grupos paratopológicos y grupos topológicos que serán utilizados a lo largo de la tesis.
- El Capítulo 4 constituye el núcleo de esta tesis. Generalizamos las topologías definidas por Hattori en $\mathbb{R}$ al contexto de un grupo casi topológico. Dado un grupo casi topológico (G, τ) . Definimos una familia de topologías $\{\tau(A) : A \subseteq G\}$ en G tal que el máximo de esta familia de topologías, ordenadas por la inclusión, es τ , y el mínimo es la topología del grupo reflexión τ_* . Denotamos al espacio $(G, \tau(A))$ por $H(A, G)$, o simplemente $H(A)$ cuando no haya confusión, y lo llamamos el **espacio de Hattori de G asociado a A** . En particular, recuperamos las topologías originalmente definidas por Hattori en [20] al considerar $G = \mathbb{S}$. Además, demostramos que estas topologías permiten caracterizar a los grupos casi topológicos (ver corolario 4.1.6). También mostramos algunas propiedades topológicas como las siguientes:
 - i) $A \subseteq B$ si y sólo si $\tau(B) \subseteq \tau(A)$ (ver proposición 4.2.3).
 - ii) $\tau(A)|_A = \tau|_A$ y $\tau(A)|_{(G \setminus A)} = \tau|_{(G \setminus A)}$ (ver proposición 4.2.4).
 - iii) Si $B \subseteq A$ es un subconjunto compacto en G_* , entonces B es compacto en $H(A)$ (ver proposición 4.2.6).

- iv) La familia de topologías $\{\tau(A) : A \subseteq G\}$ forma una retícula con respecto al orden dado por la inclusión (ver teorema 4.3.2).

Los axiomas de separación toman un papel importante en grupos paratopológicos. Sabemos que cada grupo topológico T_0 es Tychonoff (ver [6, Theorem 3.3.11]), es decir, que en la clase de grupos topológicos se cumplen las siguientes implicaciones entre axiomas de separación:

$$T_0 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}.$$

Sin embargo, esta propiedad no siempre se cumple en la clase de grupos paratopológicos. De hecho, existen diversos contraejemplos que muestran lo siguiente:

$$T_0 \nRightarrow T_1 \nRightarrow T_2 \nRightarrow T_3.$$

Un problema que estuvo abierto durante aproximadamente 60 años fue determinar si en grupos paratopológicos regular implica completamente regular. Para sorpresa de muchos matemáticos, Banakh y Ravsky resolvieron afirmativamente esta cuestión, demostrando en [8, Teorema 2] que todo grupo paratopológico regular es completamente regular.

Esto nos motiva a estudiar el comportamiento de los axiomas de separación en los espacios de Hattori en grupos casi topológicos. Obteniendo resultados interesantes como los siguientes:

- Un grupo casi topológico G es regular si y sólo si $H(A)$ es regular para cada subconjunto A de G (ver teorema 4.4.2).
- Si A es un subconjunto propio de un grupo casi topológico G tal que el espacio de Hattori $H(A)$ es Tychonoff, entonces G es Tychonoff (ver corolario 4.4.7).

Diremos que un grupo G es un **grupo-SP** si la cerradura de cualquier subgrupo de G es nuevamente un subgrupo de G . Sabemos por [6, Corolario 1.4.14] que los grupos topológicos son grupos-SP. Sin embargo, este resultado no se puede extender a la categoría de grupos paratopológicos, como se muestra en [6, Ejemplo 1.4.17]. Por otro lado, en [18, Proposición 3.3], M. Fernández demuestra que la clase de los grupos casi topológicos sí satisface esta propiedad, es decir, son grupos-SP.

Motivados por estos resultados, estudiamos el comportamiento de la cerradura en los espacios de Hattori. En la proposición 4.5.1, probamos

que si H es un subconjunto de un grupo casi topológico G , entonces se cumple lo siguiente:

$$\overline{H}^{\tau(A)} = (\overline{H}^{\tau^*} \cap A) \cup (\overline{H}^{\tau} \cap (G \setminus A)).$$

Esto nos lleva a plantear la siguiente pregunta natural: ¿la cerradura de subgrupos en los espacios de Hattori en grupos casi topológicos es necesariamente un subgrupo? La respuesta, en general es negativa. En el ejemplo 4.5.6, mostramos que en general, la cerradura de un subgrupo en un espacio de Hattori no es un subgrupo.

No obstante, en los corolarios 4.5.2, 4.5.3 y la proposición 4.5.7, establecemos condiciones para los cuales la cerradura de subgrupos en espacios de Hattori asociados a grupos casi topológicos sí resultar ser un subgrupo.

Además, en este capítulo se estudian diversas funciones cardinales asociadas a los espacios de Hattori construidos sobre grupos casi topológicos, como la densidad, el carácter, el peso, la separabilidad, entre otras. Se analiza cómo estas funciones se relacionan con las propiedades topológicas del grupo original G como de su grupo reflexión G_* .

En el teorema 4.6.6 demostramos que si A es un subconjunto propio de un grupo casi topológico G , entonces

$$\chi(H(A)) = \chi(G).$$

Sin embargo, en el ejemplo 4.6.8, se muestra que si consideramos $A = G$, se tiene que $\chi(H(A)) < \chi(G)$. Lo que evidencia la particularidad de tomar al conjunto A como subconjunto propio de G . Como consecuencia inmediata del teorema 4.6.6, se deduce que G es primero numerable si y sólo si $H(A)$ es primero numerable.

Dado un grupo paratopológico G con topología τ , la **topología conjugada** τ^{-1} en G se define de la siguiente manera:

$$\tau^{-1} = \{U^{-1} : U \in \tau\}.$$

La estructura $G' = (G, \tau^{-1})$ también es un grupo paratopológico y, la función inversión $Inv: (G, \tau) \rightarrow (G, \tau^{-1})$ es un homeomorfismo. Así, G y G' son homeomorfos. El supremo $\tau^* = \tau \vee \tau^{-1}$ define una topología de grupo topológico en G , y se denomina **grupo correflexión** de G a

$G^* = (G, \tau^*)$. Por como está definido τ^* , podemos observar de manera inmediata que τ^* es la topología más débil que hace a G un grupo topológico y que contiene a τ .

Fucaí Lin y Jiada Li en [29] probaron que $nw(B) = |B| + \omega$ para cualquier subconjunto B de $\mathbb{S}$. Esto nos motivó a estudiar el peso de red en los grupos paratopológicos. En el teorema 4.6.9, demostramos que si H es un subconjunto de un grupo paratopológico G tal que G^* es discreto. Entonces,

$$nw(H, \tau|_H) = |H| + \omega.$$

En el lema 4.6.10, mostramos que los grupos casi topológicos propios tienen grupo correflexión discreto. De ello se deduce que el peso de red de cualquier subespacio infinito de un grupo casi topológico propio coincide con su cardinalidad.

Por [6, Teorema 5.2.5], sabemos que cada grupo topológico G satisface la siguiente desigualdad:

$$w(G) \leq d(G) \cdot \chi(G),$$

donde $w(G)$ es el peso de G , $d(G)$ su densidad y $\chi(G)$ su carácter. Estudiamos el peso en los espacios de Hattori en grupos casi topológicos. En el corolario 4.6.16, demostramos que si A es un subconjunto propio de un grupo casi topológico propio G , entonces se cumple la siguiente igualdad,

$$w(H(A)) = d(G) \cdot \chi(G) \cdot |G \setminus A|.$$

Como consecuencia inmediata, se obtiene que G es segundo numerable si y sólo si G es numerable y primero numerable. Con esto podemos ver fácilmente que la recta de Sorgenfrey $\mathbb{S}$ está “muy lejos” de ser segundo numerable.

Además, mostramos que si G es un grupo casi topológico propio primero numerable, entonces $H(A)$ es segundo numerable si y sólo si G es separable y $|G \setminus A|$ es numerable. Esto generaliza el resultado previamente demostrado por Chatyrko y Hattori en [15] para el caso particular $G = \mathbb{S}$. En consecuencia, si A es un subconjunto propio de un grupo casi topológico propio G , entonces $H(A)$ es metrizable y separable si y sólo si G es regular, primero numerable y $|G \setminus A|$ es numerable (ver corolario 4.6.21).

Para concluir el capítulo 4, demostramos que para todo grupo casi topológico G y cada subconjunto A de G , se cumple que

$$nw(H(A)) = nw(G_*) \text{ o } nw(H(A)) = nw(G)$$

si y sólo si para cada cardinal infinito κ , se tiene que $2^\kappa = \kappa^+$ (ver teorema 4.6.28). En consecuencia, la siguiente afirmación es independiente de los axiomas de ZFC: para cada grupo casi topológico G y cada subconjunto A de G , tenemos que $nw(H(A)) = nw(G_*)$ o $nw(H(A)) = nw(G)$.

- En el Capítulo 5, estudiamos propiedades relacionadas con la compacidad en los espacios de Hattori. En particular, en el corolario 5.1.2, demostramos que el único espacio de Hattori compacto en un grupo casi topológico G es el grupo reflexión G_* . Lo cual ocurre únicamente cuando $A = G$. Es decir, G_* es el único espacio de Hattori compacto que puede construirse sobre G . También mostramos que si A es un subconjunto de un grupo casi topológico G , entonces
 - $H(A)$ es hereditariamente Lindelöf si y sólo si G_* es hereditariamente Lindelöf y $s(H(A)) = \omega$ (ver teorema 5.1.9).
 - Si G_* es hereditariamente Lindelöf, entonces $H(A)$ es Lindelöf si y sólo si $e(H(A)) = \omega$ (ver teorema 5.1.3).
- En el Capítulo 6, definimos los subespacios de Hattori. Dados un subconjunto X de un grupo casi topológico G y un subconjunto A de X , denotamos por $X(A)$, X y X_* a los espacios $(X, \tau(A)|_X)$, $(X, \tau|_X)$ y $(X, \tau_*|_X)$, respectivamente. Decimos que $X(A)$ es el **subespacio de Hattori asociado a A** . Estudiamos el comportamiento de algunas propiedades topológicas en los subespacios de Hattori y extraemos información revelante sobre su estructura.

Para ilustrar la importancia de los subespacios de Hattori, mostramos que varios espacios topológicos conocidos pueden obtenerse como subespacios de Hattori de ciertos grupos casi topológicos. En particular, por los ejemplos 6.1.1, 6.1.2 y 6.1.3, vemos que el plano de Niemytzki, el espacio de disco tangente metrizable y la extensión discreta de $\mathbb{R}$ son subespacios de Hattori. Además, los espacios de Hattori definidos en [1] también pueden obtenerse como subespacios de Hattori.

Dado un espacio X , denotamos por $IP(X)$ al conjunto de puntos aislados de X . En el teorema 6.2.1, demostramos que si X es un subconjunto de un grupo casi topológico G y A un subconjunto de X , entonces

$$d(X(A)) = d(X_*) \cdot |IP(X(A))| + \omega.$$

También mostramos en el teorema 6.2.26 que si X es un subconjunto de un grupo casi topológico propio G , se cumple la siguiente desigualdad:

$$w(X(A)) \leq \chi(G) \cdot d(G) \cdot (|X \setminus A| + \omega).$$

De ello se deduce que si X es un subconjunto de un grupo casi topológico propio G separable, primero numerable y $A \subseteq X$, entonces $X(A)$ es segundo numerable si y sólo si $X \setminus A$ es numerable. Esto permite ver fácilmente que tanto el plano de Niemytzki como la extensión irracional discreta de $\mathbb{R}$ están “muy lejos” de ser segundo numerables.

En el corolario 6.2.58, demostramos que si A es un subconjunto de un grupo casi topológico separable G tal que G_* es primero numerable, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) $H(A)$ es hereditariamente Lindelöf.
- ii) $G \setminus A$ es un subespacio hereditariamente Lindelöf de G .
- iii) $s(H(A)) = \omega$.
- iv) $H(A)$ es hereditariamente separable.

Como consecuencia, concluimos que si G es un grupo casi topológico separable tal que G_* es primero numerable. Entonces G es hereditariamente Lindelöf si y sólo si G es hereditariamente separable.

Terminamos el capítulo con el ejemplo 6.2.60, el cual muestra que existen espacios de Hattori que son hereditariamente Lindelöf, aun cuando el grupo casi topológico en el que se construyen no es Lindelöf. Este ejemplo ilustra que la propiedad de ser hereditariamente Lindelöf en los espacios de Hattori no necesariamente se transfiere al grupo casi topológico que los contiene.

- En el Capítulo 7, definimos los espacios topológicos que tienen compactos pequeños. Decimos que un espacio topológico X **tiene compactos pequeños** si cada subespacio compacto de X es numerable.

Un espacio topológico es **totalmente imperfecto** si no contiene un subconjunto que es homeomorfo al conjunto de Cantor (ver [27]). Es fácil verificar que todo espacio topológico que tiene compactos pequeños es un espacio totalmente imperfecto. Sin embargo, como muestra el ejemplo 7.1.5, estas dos clases de espacios topológicos son diferentes: existen espacios topológicos totalmente imperfectos que no tienen compactos pequeños.

En el teorema 7.1.7, demostramos que si A es un subconjunto de un grupo casi topológico propio G tal que G_* tiene pseudocarácter numerable. Entonces $H(A)$ tiene compactos pequeños si y sólo si A tiene compactos pequeños. Este resultado generaliza el obtenido por Bouziad y Sukacheva en [10, Proposición 2.3] para los espacios de Hattori definidos sobre $\mathbb{R}$. También mostramos que la recta de Sorgenfrey es totalmente imperfecto.

- En el Capítulo 8, presentamos las conclusiones generales del trabajo. Además, proponemos una serie de problemas abiertos que surgen de esta investigación, los cuales podrían servir como punto de partida para futuras líneas de estudio en la teoría de grupos casi topológicos y en la extensión de las topologías de Hattori.

Esperamos que este trabajo contribuya al desarrollo de la teoría de los grupos casi topológicos y proporcione herramientas útiles para seguir explorando y profundizando en el campo del álgebra topológica. Asimismo, confiamos en que los resultados aquí presentados abran nuevas líneas de investigación en torno a la interacción entre propiedades topológicas y estructuras algebraicas, y sirvan como punto de partida para futuras generalizaciones y aplicaciones dentro y fuera de la topología general.

Capítulo 1

Preliminares

Este primer capítulo reúne los conceptos fundamentales de topología general necesarios para la comprensión de esta tesis. Se abordan las nociones de espacios topológicos, funciones cardinales, subespacios, productos cartesianos, axiomas de separación, compacidad, metrizabilidad y se presentan algunos ejemplos clave. El lector familiarizado con estos temas puede omitir este capítulo y proseguir directamente con el siguiente.

1.1. Topología general

En las matemáticas actuales, los conceptos topológicos están presentes en todas sus áreas. La topología se subdivide en varias ramas, como la **topología conjuntista**, la **topología algebraica**, el **álgebra topológica**, entre otras. A pesar de la gran variedad de métodos y aplicaciones propias que poseen estas subáreas, todas ellas comparten una base común conocida como **topología general**.

A pesar de que el término **topología general** no es muy preciso y su significado varía según quién lo utilice, existe consenso en incluir dentro de esta disciplina tanto el estudio de los espacios métricos y sus generalizaciones, como el análisis de conceptos fundamentales, tales como la **compacidad**.

En esta sección pretendemos proporcionar al lector nociones sobre: espacios topológicos, funciones continuas, subespacios y productos de espacios topológicos, axiomas de separación, compacidad y funciones cardinales. Las demostraciones de los resultados de esta sección se pueden encontrar en cualquier libro de topología general como en [17] y [40].

1.1.1. Espacios topológicos

Una **topología** sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X que satisface las siguientes condiciones:

- i) El conjunto vacío $\emptyset$ y X pertenecen a τ .
- ii) Cualquier intersección finita de elementos de τ pertenece a τ .
- iii) Cualquier unión de elementos de τ pertenece a τ .

A la pareja (X, τ) se le llama **espacio topológico**. Los elementos de τ se denominan **conjuntos abiertos** y los elementos de X se llaman **puntos**. Dado un conjunto de X , denotamos por $\mathbb{P}(X)$ al conjunto **potencia** de X , es decir, el conjunto formado por todos los subconjuntos de X . El conjunto potencia $\mathbb{P}(X)$ es una topología para X , conocida como la **topología discreta**. Por otro lado, $\tau = \{\emptyset, X\}$ es una topología para X , conocida como la **topología indiscreta**. Entonces, un conjunto X puede tener diferentes topologías, y con cada una de ellas forma un espacio topológico distinto. Como las topologías de un conjunto X están contenidas en el conjunto potencia $\mathbb{P}(X)$, estas se pueden ordenar por inclusión. Es decir, si tenemos dos topologías τ_1 y τ_2 decimos que $\tau_1 \leq \tau_2$ si $\tau_1 \subseteq \tau_2$, lo que implica que todos los conjuntos abiertos de τ_1 también lo son en τ_2 .

En este contexto, decimos que una topología τ_1 es **más débil** (también llamada **más pequeña**, o **más gruesa**) que otra topología τ_2 , o que, τ_2 es **más fuerte** (o **más grande**, o **más fina**) que τ_1 , si $\tau_1 \subseteq \tau_2$. Es decir, τ_2 contiene más conjuntos abiertos que τ_1 .

De lo anterior, se deduce que la topología indiscreta es la topología más débil de todas, pues solo contiene los conjuntos $\emptyset$ y X como abiertos. Por otro lado, la topología discreta es la más fina de todas, ya que contiene todos los subconjuntos de X como abiertos.

Sea (X, τ) un espacio topológico. Con frecuencia, denotaremos por X al espacio topológico (X, τ) . Decimos que un subconjunto F de X es **cerrado** si su complemento $X \setminus F$ es un elemento de τ , es decir, si su complemento es un conjunto abierto. En particular, en la topología discreta, todos los subconjuntos de X son abiertos y cerrados (también llamados **clopen**). En cambio, en la topología indiscreta, los únicos subconjuntos cerrados (y también abiertos) son $\emptyset$ y X .

Dado un conjunto E en un espacio topológico X , definimos la **cerradura** de E en X como:

$$\overline{E}^X = \bigcap \{F \subseteq X : F \text{ es cerrado en } X \text{ y } E \subseteq F\}.$$

Cuando no tengamos confusión con el espacio donde estemos trabajando, escribiremos $\overline{E}$ para denotar a la cerradura de E en X .

No es difícil verificar las siguientes propiedades básicas de la cerradura:

- i) $\overline{E}$ es un conjunto cerrado, pues es intersección de cerrados;
- ii) $\overline{E}$ es el cerrado más pequeño que contiene a E ;
- iii) $E \subseteq \overline{E}$.

El siguiente resultado muestra que la operación cerradura preserva las contenciones.

Proposición 1.1.1. *Sean A y B subconjuntos de un espacio topológico X . Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.*

De manera dual, se define el interior de un conjunto de la siguiente forma. Si A es un subconjunto de un espacio topológico X , se define el **interior** de A en X como:

$$\text{Int}_X(A) = \bigcup \{U \subseteq X : U \text{ es abierto en } X \text{ y } U \subseteq A\}.$$

Cuando no tengamos problemas de confusión del espacio donde estemos trabajando, denotaremos el interior simplemente por $\text{Int}(A)$.

De esta definición se deducen las siguientes propiedades:

- i) $\text{Int}(A)$ es un conjunto abierto, ya que es unión de abiertos;
- ii) $\text{Int}(A)$ es el abierto más grande contenido en A ;
- iii) $\text{Int}(A) \subseteq A$.

Basándonos en [17], introducimos las siguientes nociones fundamentales:

- i) Decimos que U es una **vecindad** de un punto x en X si $x \in U \in \tau$. Denotamos por $\mathcal{N}(x)$ al conjunto de todas las vecindades de x .

- ii) Una subfamilia $\mathcal{U}_x \subseteq \mathcal{N}(x)$ se denomina una **base local** de x , si para cada vecindad U de x , existe $V \in \mathcal{U}_x$ tal que $x \in V \subseteq U$.
- iii) La colección $\{\mathcal{U}_x : x \in X\}$ se conoce como un **sistema de vecindades** para X .

Ejemplo 1.1.2. En cualquier espacio topológico, la colección de todas las vecindades de x constituye una base local de x en X .

El siguiente teorema proporciona una caracterización de los sistemas de vecindades.

Teorema 1.1.3. *Sea X un espacio topológico. Cualquier sistema de vecindades $\{\beta(x) : x \in X\}$ cumple las siguientes condiciones:*

- i) *Si $V \in \beta(x)$, entonces $x \in V$;*
- ii) *si $V_1, V_2 \in \beta(x)$, entonces existe $V_3 \in \beta(x)$ tal que $V_3 \subseteq V_1 \cap V_2$;*
- iii) *si $y \in U \in \beta(x)$, entonces existe $V \in \beta(y)$ tal que $V \subseteq U$.*

Recíprocamente, si a cada punto $x \in X$ se le asigna una colección $\beta(x)$ de subconjuntos de X que cumplen las condiciones anteriores, y

$$\tau = \{U \subseteq X : \text{para todo } x \in U, \text{ existe } V \in \beta(x) \text{ tal que } x \in V \subseteq U\},$$

entonces τ es una topología en X y $\{\beta(x) : x \in X\}$ es un sistema de vecindades de (X, τ) .

La topología en un conjunto X puede describirse sin detallar cada conjunto abierto, proporcionando una base para la topología.

Definición 1.1.4. Sea X un espacio topológico. Decimos que una familia de abiertos β es una **base** para X , si para cada $x \in X$ y toda vecindad U de x , existe $V \in \beta$ tal que $x \in V \subseteq U$. A los elementos de β se les llama **básicos**.

Definición 1.1.5. Sea X un espacio topológico.

- i) Decimos que X es **primero numerable en el punto** x si existe una base local numerable en x .
- ii) Diremos que X es **primero numerable** si es primero numerable en cada uno de sus puntos.

- iii) Diremos que X es **segundo numerable** si existe una base numerable para X .

El siguiente teorema establece que la clase de los espacios topológicos segundo numerables contiene a la clase de espacios topológicos primero numerables.

Teorema 1.1.6. *Todo espacio topológico segundo numerable es primero numerable.*

Algunos ejemplos de base para una topología se dan a continuación.

Ejemplo 1.1.7.

- i) Una base para la **topología usual** τ_E de $\mathbb{R}$ está dada por $\{(a, b) : a < b\}$.
- ii) En un espacio **discreto**, los conjuntos unipuntuales $\{x\}$, con $x \in X$, forman una base para la **topología discreta**.

El siguiente resultado proporciona una caracterización de los conjuntos abiertos para un espacio topológico X .

Teorema 1.1.8. *Sea β una base para X . Entonces, un subconjunto U de X es abierto si y sólo si para todo $x \in U$, existe $B \in \beta$ tal que $x \in B \subset U$.*

A continuación, se presenta un teorema que proporciona una caracterización de una base para una topología en un conjunto X .

Teorema 1.1.9. *Si X es un conjunto y β es una familia de subconjuntos de X , entonces β es base para una topología τ en X si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

- i) $X = \bigcup_{B \in \beta} B$;
- ii) Para cada $B_1, B_2 \in \beta$ y cada $p \in B_1 \cap B_2$, existe $B_3 \in \beta$ tal que

$$p \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Finalmente, cuando se construyen topologías a partir de bases, es útil tener un criterio en términos de la base para determinar si una topología es más fina que la otra. El siguiente teorema nos permite comparar topologías a través de sus bases.

Teorema 1.1.10. *Si β_1 y β_2 son bases para las topologías τ_1 y τ_2 en X respectivamente, entonces $\tau_1 \subseteq \tau_2$ si y sólo si, para todo $B_1 \in \beta_1$ y cada $x \in B_1$, existe $B_2 \in \beta_2$ tal que $x \in B_2 \subset B_1$.*

El siguiente corolario nos da una caracterización de la igualdad de dos topologías usando sus bases respectivas.

Corolario 1.1.11. *Si β_1 y β_2 son bases para las topologías τ_1 y τ_2 en X respectivamente, entonces $\tau_1 = \tau_2$ si y sólo si se cumplen las siguientes dos condiciones:*

- i) *Para todo $B_1 \in \beta_1$ y cada $x \in B_1$, existe $B_2 \in \beta_2$ tal que $x \in B_2 \subset B_1$.*
- ii) *Para todo $B_2 \in \beta_2$ y cada $x \in B_2$, existe $B_1 \in \beta_1$ tal que $x \in B_1 \subset B_2$.*

Existe una topología diferente a la usual en $\mathbb{R}$, la cual es descrita en términos de sistemas de vecindades en el siguiente ejemplo, este ejemplo lo utilizaremos más adelante.

Ejemplo 1.1.12. Para cada $a \in \mathbb{R}$ definimos

$$\beta(a) = \{[a, b) : b > a\},$$

entonces $\{\beta(a) : a \in \mathbb{R}\}$ es un sistema de vecindades para una topología τ_S en $\mathbb{R}$. A esta topología τ_S se le llama la **topología de Sorgenfrey**, el espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau_S)$ es conocido como la **recta de Sorgenfrey** y lo denotaremos por $\mathbb{S}$.

La recta de Sorgenfrey es un ejemplo de espacio topológico primero numerable. Sin embargo, $\mathbb{S}$ no es segundo numerable.

La siguiente observación nos proporciona una comprensión de cómo se relacionan la topología usual de $\mathbb{R}$ y la topología de la recta de Sorgenfrey.

Nota. Dado un elemento básico (a, b) en τ_E y un punto $x \in (a, b)$, el conjunto $[x, b)$ es un conjunto básico en τ_S que satisface $x \in [x, b) \subseteq (a, b)$. Por otro lado, dado un conjunto básico $[x, d)$ en τ_S , no existe un conjunto básico en τ_E que contenga a x y esté completamente contenido en $[x, d)$. Por el teorema 1.1.10, concluimos que la topología de la recta de Sorgenfrey es más fina que la topología usual de $\mathbb{R}$, es decir, $\tau_E \subseteq \tau_S$.

Sea D un conjunto en un espacio topológico X . Decimos que D es **denso** en X si $\overline{D} = X$. Notemos que el único denso y cerrado en X , es X mismo.

Ejemplo 1.1.13.

- i) $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ con su topología usual.

ii) $\mathbb{Q}^n$ es denso en $\mathbb{R}^n$ con la topología usual.

Decimos que un espacio topológico es **separable** si contiene un conjunto denso numerable. Observe que si X es no numerable y tiene la topología discreta, entonces X no es separable. Por el ejemplo 1.1.13, sabemos que $\mathbb{R}$ es separable.

Teorema 1.1.14. *Si X es un espacio topológico segundo numerable, entonces X es separable.*

Sin embargo, el recíproco del teorema 1.1.14 no se cumple. La recta de Sorgenfrey es un ejemplo de un espacio topológico separable que no es segundo numerable.

Un punto x en un espacio topológico X se llama un **punto de acumulación** de un subconjunto A de X si $x \in \overline{A \setminus \{x\}}$. El conjunto de puntos de acumulación de A se llama el **conjunto derivado** de A .

Un punto x se denomina un **punto aislado** de A si x no es un punto de acumulación de A . Un punto x es aislado del conjunto X si y sólo si el conjunto unipuntual $\{x\}$ es abierto. Al conjunto de puntos aislados de X lo denotaremos por $IP(X)$.

1.1.2. Funciones continuas y homeomorfismos

Sea $f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ una función entre espacios topológicos. Decimos que f es **continua** en $x_0 \in X$ si y sólo si para cada vecindad U de $f(x_0)$ en Y , existe una vecindad V de x_0 en X tal que $f(V) \subseteq U$. Decimos que f es continua si es continua en cada punto de X .

De forma equivalente tenemos lo siguiente:

Una función $f: (X, \tau_1) \rightarrow (Y, \tau_2)$ entre espacios topológicos es continua en X si y sólo si para cada abierto U en Y , $f^{-1}(U)$ es abierto en X . Este resultado útil es parte de la siguiente caracterización de las funciones continuas.

Teorema 1.1.15. *Sean X, Y espacios topológicos y $f: X \rightarrow Y$ una función. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- i) f es continua.
- ii) Para cada conjunto abierto U en Y , $f^{-1}(U)$ es abierto en X .
- iii) Para cada conjunto cerrado F en Y , $f^{-1}(F)$ es cerrado en X .
- iv) Para cada $E \subseteq X$, se cumple que $f(\overline{E^X}) \subseteq \overline{f(E)^Y}$.

Sean X y Y espacios topológicos. Una función $f: X \rightarrow Y$ es **abierta** (**cerrada**) si para cada abierto (cerrado) U de X , se tiene que $f(U)$ es abierto (cerrado) en Y . El siguiente resultado nos proporciona una caracterización de las funciones abiertas.

Teorema 1.1.16. *Sean X e Y espacios topológicos. Las siguientes propiedades de una función $f: X \rightarrow Y$ son equivalentes.*

- i) f es abierta;
- ii) para todo subconjunto A de X , se cumple que $f(\text{Int}_X(A)) \subseteq \text{Int}_Y f(A)$;
- iii) f manda miembros de una base de X , en abiertos de Y .

Si X y Y son espacios topológicos, decimos que una función $f: X \rightarrow Y$ es un **homeomorfismo** (entre X y Y) si f es biyectiva, continua y f^{-1} es continua. Los espacios X y Y se dicen **homeomorfos** si existe un homeomorfismo entre ellos. El siguiente resultado nos proporciona una caracterización de los homeomorfismos.

Teorema 1.1.17. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función biyectiva, entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) f es un homeomorfismo;
- ii) f es continua y abierta;
- iii) f es continua y cerrada;
- iv) para cada $A \subseteq X$ se tiene que $f(\overline{A}^X) = \overline{f(A)}^Y$.

Sea $\mathcal{P}$ una propiedad en un espacio topológico. Decimos que $\mathcal{P}$ es una **propiedad topológica** si se preserva bajo homeomorfismos. Es decir, si X y Y son espacios topológicos tales que existe un homeomorfismo entre ellos, entonces X tiene la propiedad $\mathcal{P}$ si y sólo si Y también la tiene. Ejemplos de propiedades topológicas son: ser primero numerable, ser segundo numerable y ser separable.

1.1.3. Subespacios y producto de espacios topológicos

Subespacios

Si (X, τ) es un espacio topológico y $Y \subseteq X$, podemos definir una topología natural τ_Y en Y de la siguiente manera:

$$\tau|_Y = \{Y \cap U : U \in \tau\}.$$

A $\tau|_Y$ se le llama la **topología relativa a Y** , y la pareja $(Y, \tau|_Y)$ recibe el nombre de **subespacio de (X, τ)** . Observemos que si β es una base para X , entonces la familia $\{Y \cap B : B \in \beta\}$ es una base para Y .

Decimos que una propiedad $\mathcal{P}$ es **hereditaria**, si para cada espacio topológico X que posee $\mathcal{P}$, cada subespacio de X también tiene la propiedad $\mathcal{P}$. El siguiente teorema describe cómo se comportan las propiedades de ser primero numerable y segundo numerable respecto a los subespacios.

Teorema 1.1.18. *Sean X un espacio topológico y Y un subespacio de X .*

- i) *Si X es primero numerable, entonces Y es primero numerable.*
- ii) *Si X es segundo numerable, entonces Y es segundo numerable.*

En consecuencia, ser primero numerable y segundo numerable son propiedades hereditarias.

Por otro lado, la propiedad de ser separable no es una propiedad hereditaria, como lo muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.1.19. Sea X el semi-plano superior cerrado de $\mathbb{R}$, es decir,

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}.$$

Definimos P como el conjunto de puntos en el semi-plano superior abierto:

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\},$$

y $L = X \setminus P$, que corresponde al eje x , es decir,

$$L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

- Para cada $x \in L$ y $r > 0$, sea $U(x, r)$ el interior en X de un círculo de radio r tangente a L en x . Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos:

$$U_n(x) = U\left(x, \frac{1}{n}\right) \cup \{x\}.$$

- Para cada $x \in P$ y $r > 0$, sea $U(x, r)$ el interior en X de un círculo de radio r centrado en x , y para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$U_n(x) = U\left(x, \frac{1}{n}\right).$$

La colección $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ forma un sistema de vecindades que genera una topología τ en X . Esta topología se conoce como **la topología del disco tangente**. El espacio topológico (X, τ) , se denomina el **plano de Niemytzki**.

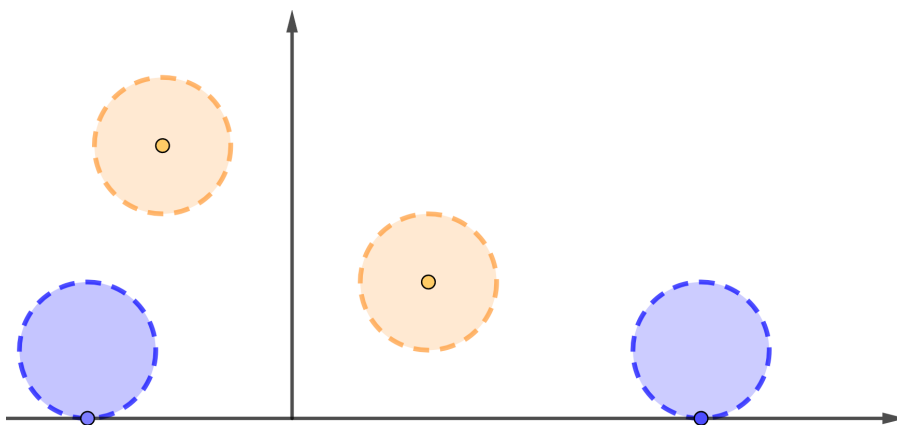


Figura 1.1: Vecindades básicas del plano de Niemytzki.

Dado que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es un subconjunto numerable y denso en X , se concluye que el plano de Niemytzki es separable. Sin embargo, note que la topología relativa a L es la topología discreta y como L es no numerable, se deduce que no existe un subconjunto numerable denso, por lo que L no es separable.

El plano de Niemytzki fue introducido por el matemático polaco Vladimir Vladimirovich Niemytzki en la primera mitad del siglo XX. Su intención fue construir un ejemplo de un espacio topológico con propiedades singulares que ilustrara ciertos fenómenos en topología general. En particular, Niemytzki lo utilizó para mostrar que algunas propiedades topológicas no se heredan a subespacios, como ocurre con la separabilidad.

Este espacio también aparece en la obra del matemático estadounidense Robert Lee Moore, quien lo utilizó en sus cursos de topología y contribuyó a popularizarlo en la comunidad matemática norteamericana. Debido a su papel en la enseñanza y a su enfoque constructivo, el espacio también se conoce como el **plano de Moore**.

Topología producto

Sea $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) : \alpha \in A\}$ una familia de espacios topológicos. **La topología producto** o **la topología Tychonoff** sobre $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ es la topología cuya base está formada por los conjuntos de la forma

$$\prod_{\alpha \in A} U_\alpha,$$

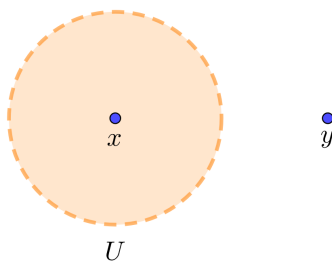
donde para cada $\alpha \in A$ se tiene que $U_\alpha \in \tau_\alpha$ y $U_\alpha = X_\alpha$ excepto para un número finito de índices α . Siempre que consideremos el producto $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, lo supondremos con la topología producto.

1.1.4. Axiomas de separación

Los axiomas de separación son propiedades adicionales que se pueden exigir a un espacio topológico. Estas propiedades fijan el grado en que puntos distintos o conjuntos cerrados pueden ser separados por medio de abiertos de la topología. Existen varios niveles de separación que se pueden pedir a un espacio topológico. Los axiomas de separación suelen denotarse con la letra T (de *Trennung*, separación en alemán) y un subíndice conveniente.

Espacios T_0

Un espacio topológico X se dice que es T_0 o de **Kolmogórov** si, para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$, existe un conjunto abierto que contiene

Figura 1.2: Espacio topológico T_0 .

a uno de ellos y no al otro. Es decir, existe $U \in \tau$ tal que $x \in U$ y $y \notin U$ o bien $x \notin U$ y $y \in U$.

Un ejemplo de un espacio T_0 es el siguiente.

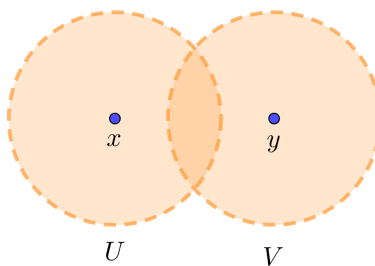
Ejemplo 1.1.20. El espacio $X = \{0, 1\}$ con la topología $\tau = \{X, \emptyset, \{0\}\}$ es llamado **el espacio de Sierpiński**. El espacio de Sierpiński es T_0 .

Espacios T_1

Un espacio topológico (X, τ) se dice que es T_1 , si para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$, existen conjuntos abiertos $U, V \in \tau$ tales que:

- $x \in U$ y $y \notin U$.
- $x \notin V$ y $y \in V$.

Es decir, para dos puntos distintos, cada uno de ellos debe estar contenido en un conjunto abierto que no contenga al otro.

Figura 1.3: Espacio topológico T_1 .

Notemos que todo espacio topológico T_1 es T_0 . Sin embargo, no todo espacio T_0 es T_1 . Por ejemplo, el espacio de Sierpiński es T_0 pero no T_1 . A continuación, presentamos un ejemplo de un espacio topológico T_1 .

Ejemplo 1.1.21. Sea X un conjunto infinito. La **topología cofinita** en X , definida por: $\tau = \{U \subseteq X : X \setminus U \text{ es finito}\} \cup \{\emptyset\}$, es una topología T_1 en X .

La siguiente proposición proporciona una caracterización de los espacios topológicos T_1 .

Proposición 1.1.22. Sea X un espacio topológico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) X es T_1 ;
- ii) todo conjunto unipuntual es cerrado;
- iii) cada subconjunto de X es la intersección de todos los abiertos que lo contienen.

Espacios T_2 o Hausdorff

Un espacio topológico X es T_2 o **Hausdorff** si, para cualesquiera dos puntos distintos $x, y \in X$, existen conjuntos abiertos disjuntos U y V de X tales que $x \in U$ y $y \in V$.

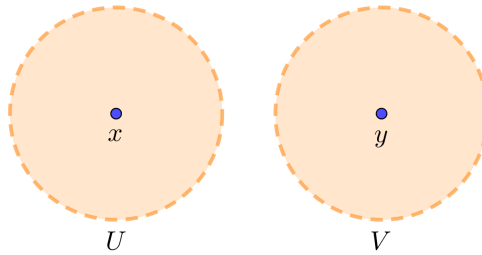


Figura 1.4: Espacio topológico T_2 .

Es claro que todo espacio topológico T_2 es T_1 . Sin embargo, no todo espacio topológico T_1 es T_2 . Por ejemplo, un conjunto infinito X con la topología cofinita es T_1 pero no es Hausdorff.

A continuación presentamos unos ejemplos de espacios Hausdorff.

Ejemplo 1.1.23.

- i) Los espacios discretos son T_2 .
- ii) $\mathbb{R}^n$ es T_2 .
- iii) La recta de Sorgenfrey es T_2 .

Nota. Si τ_1 y τ_2 son dos topologías en X donde τ_1 es Hausdorff y $\tau_1 \subseteq \tau_2$, entonces τ_2 es Hausdorff.

Espacios regulares y T_3

Un espacio topológico X es **regular** si, para cada punto $x \in X$ y cada conjunto cerrado A de X tal que $x \notin A$, existen conjuntos abiertos disjuntos U, V de X tales que $x \in U$ y $A \subseteq V$. Si además X es T_1 , entonces se dice que X es un espacio T_3 .

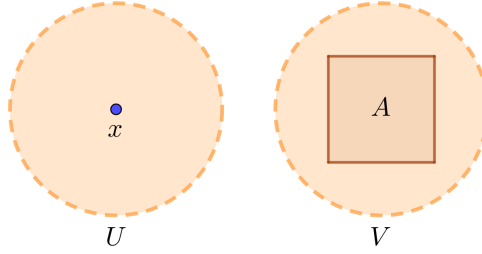


Figura 1.5: Espacio topológico regular.

Es fácil ver que todo espacio topológico T_3 es T_2 . Sin embargo, no todo espacio topológico T_2 es T_3 .

Ejemplo 1.1.24. Sea $X = \mathbb{R}$. Definimos un sistema de vecindades para una topología de la siguiente manera: las vecindades para puntos distintos de 0 son las usuales de $\mathbb{R}$ y en el 0 consideremos las vecindades de la forma $U \setminus A$, donde U es un abierto usual de $\mathbb{R}$ y $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. La topología generada por este sistema de vecindades es T_2 , pues es más fina que la topología usual. Sin embargo, la topología no es T_3 , ya que A es un conjunto cerrado con esta topología que no se puede separar del 0 mediante abiertos ajenos.

Unos ejemplos de espacios T_3 son los siguientes.

Ejemplo 1.1.25. Los espacios discretos y $\mathbb{R}^n$ son espacios T_3 .

Una caracterización útil de los espacios regulares es la siguiente.

Proposición 1.1.26. *Sea X un espacio topológico. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) X es regular;
- ii) si U es abierto en X y $x \in U$, entonces existe un conjunto abierto V de X tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subset U$.

La regularidad es una propiedad que se hereda a subespacios y productos, como se resume a continuación.

Proposición 1.1.27.

- i) Todo subespacio de un espacio regular (T_3) es regular (T_3 , respectivamente).
- ii) El producto de espacios es regular (T_3) si y sólo si cada factor lo es.

Espacios completamente regulares y de Tychonoff

Pedir que se pueda separar un punto de un conjunto cerrado por una función continua es, de hecho, una condición más fuerte que simplemente separarlos mediante conjuntos abiertos disjuntos.

Un espacio topológico X es **completamente regular**, si para cada conjunto cerrado A de X y cada punto $x \notin A$, existe una función continua $f: X \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(x) = 0$ y $f(A) \subseteq \{1\}$. Dicha función se dice que **separa** A de x . Notemos que basta con tener una función continua $\tilde{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{f}(x) = a$ y $\tilde{f}(A) \subseteq \{b\}$ con $a \neq b$, en cuyo caso se puede reescalar $\tilde{f}$ a una función $f: X \rightarrow [0, 1]$ mediante:

$$f(t) = \frac{\tilde{f}(t) - a}{b - a}$$

y esta satisface $f(x) = 0$ y $f(A) \subseteq \{1\}$.

Un espacio topológico X es **Tychonoff** o $T_{3\frac{1}{2}}$ si es T_1 y completamente regular. En [17, Ejemplo 1.5.9] podemos encontrar un ejemplo de un espacio T_3 que no es Tychonoff, mostrando que esta noción es estrictamente más fuerte que la regularidad.

La siguiente proposición nos muestra que la propiedad de ser completamente regular (Tychonoff) se hereda a subespacios y a productos.

Proposición 1.1.28. [40]

- i) Todo subespacio de un espacio completamente regular (Tychonoff) es completamente regular (Tychonoff, respectivamente).
- ii) El producto de espacios topológicos es completamente regular (Tychonoff) si y sólo si cada factor lo es.

Espacios normales y T_4

Un espacio topológico X se dice **normal**, si para cualesquiera dos conjuntos cerrados disjuntos A y B de X , existen conjuntos abiertos ajenos U y V en X tales que $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$. Un espacio es T_4 si es **normal** y T_1 .

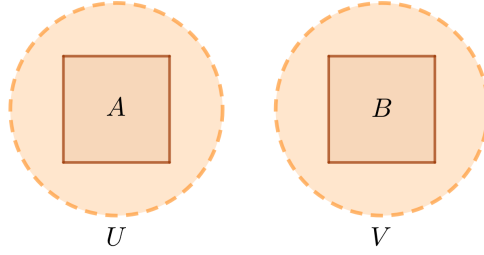


Figura 1.6: Espacio topológico normal.

Cerramos esta sección recordando las siguientes implicaciones entre axiomas de separación en espacios topológicos:

$$T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0.$$

Cabe destacar que ninguna de estas implicaciones admite recíproco en general, es decir:

$$T_0 \not\Rightarrow T_1 \not\Rightarrow T_2 \not\Rightarrow T_3 \not\Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \not\Rightarrow T_4.$$

1.1.5. Compacidad

En esta sección, se aborda el concepto de compacidad, una de las propiedades más fundamentales y estudiadas en la teoría de espacios topológicos. La compacidad es una propiedad central en topología, que generaliza la noción de conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$. Su relevancia se manifiesta en diversos teoremas fundamentales, como el teorema de Tychonoff, el teorema

de Heine-Borel y el lema de Lebesgue. A lo largo de esta sección, analizaremos las definiciones más comunes de compacidad, comenzando con la compacidad estándar y avanzando hacia conceptos más generales, como la compacidad local y la σ -compacidad. Se presentarán algunos teoremas importantes que utilizaremos en este trabajo.

Una **cubierta** de un conjunto X es una familia $\{U_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de X tal que

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X.$$

Si X es un espacio topológico, se dice que $\{U_i\}_{i \in I}$ es una **cubierta abierta** (o **cerrada**) de X si cada conjunto U_i es abierto (o cerrado, respectivamente). Decimos que una cubierta $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ es un **refinamiento** de otra cubierta $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s \in S}$ del mismo conjunto X , si para cada $i \in I$, existe $s \in S$ tal que $V_i \subseteq U_s$. Una cubierta $\mathcal{U}' = \{U'_i\}_{i \in I}$ es una **subcubierta** de otra cubierta $\mathcal{U} = \{U_s\}_{s \in S}$ de X , si $I \subseteq S$ y $U'_i = U_i$ para cada $i \in I$.

Definición 1.1.29. Un espacio topológico X es **compacto** si cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta finita.

La compacidad no es, en general, una propiedad hereditaria: un subespacio de un espacio compacto no necesariamente es compacto. Sin embargo, el siguiente resultado establece una condición suficiente bajo la cual se conserva la compacidad en subespacios.

Teorema 1.1.30. *Sea X un espacio topológico compacto. Entonces, todo subespacio cerrado de X es compacto.*

Por otro lado, la siguiente proposición describe una propiedad importante de los subespacios compactos cuando el espacio es Hausdorff.

Teorema 1.1.31. *Cada subespacio compacto de un espacio Hausdorff X es un subespacio cerrado de X .*

Estas propiedades permiten trasladar la compacidad entre subconjuntos, y presentamos los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.1.32.

- El intervalo cerrado $[0, 1]$ con la topología usual de $\mathbb{R}$ es compacto (teorema de Heine-Borel).

- El intervalo abierto $(0, 1)$ no es compacto en $\mathbb{R}$ con la topología usual, ya que puede cubrirse con abiertos de la forma $(\frac{1}{n}, 1)$ sin que exista subcubierta finita.
- El producto infinito $\prod_{i \in I} \{0, 1\}$ con la topología producto es compacto (teorema de Tychonoff), aún cuando el conjunto índice I sea infinito.

La compacidad también juega un papel fundamental en la teoría de funciones continuas. En particular, la siguiente caracterización es ampliamente utilizada.

Teorema 1.1.33. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua y biyectiva entre espacios topológicos. Si X es compacto y Y es Hausdorff, entonces f es un homeomorfismo.*

Este teorema permite derivar el siguiente corolario útil cuando se comparan dos topologías sobre un mismo conjunto.

Corolario 1.1.34. *Sean τ_1 y τ_2 dos topologías definidas en un conjunto X tales que $\tau_2 \subseteq \tau_1$. Si el espacio (X, τ_1) es compacto y (X, τ_2) es Hausdorff, entonces $\tau_1 = \tau_2$.*

Un espacio topológico X se llama **numerablemente compacto** si cada cubierta abierta numerable de X admite una subcubierta finita. Es claro que todo espacio compacto es numerablemente compacto.

Teorema 1.1.35. *Un espacio topológico X es numerablemente compacto si y sólo si cada subconjunto infinito de X tiene un punto de acumulación.*

Definimos a continuación otras propiedades importantes.

- X es **localmente compacto** si para cada $x \in X$, existe una vecindad U de x tal que $\overline{U}$ es un subespacio compacto de X .
- X es **Lindelöf** si cada cubierta abierta de X admite una subcubierta numerable.
- X es **hereditariamente Lindelöf** si cada subespacio de X es un espacio Lindelöf.
- Un espacio topológico regular se dice **σ -compacto** si puede representarse como la unión de una cantidad numerable de subespacios compactos.

Los siguientes resultados relacionan estas propiedades con otras condiciones topológicas.

Teorema 1.1.36. *Cada espacio segundo numerable es un espacio Lindelöf.*

Teorema 1.1.37. *Cada subespacio cerrado de un espacio Lindelöf es un espacio Lindelöf.*

Teorema 1.1.38. *Un espacio X es hereditariamente Lindelöf si y sólo si cada subespacio abierto de X es Lindelöf.*

Una familia $\mathcal{F} = \{F_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de un conjunto X tiene la **propiedad de la intersección finita** si $\mathcal{F} \neq \emptyset$ y $\bigcap_{k=1}^n F_{i_k} \neq \emptyset$ para cada conjunto finito $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} \subseteq I$.

Por otro lado, decimos que el **diámetro** de un subconjunto A de un espacio topológico X es menor que una cubierta $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ del espacio X y lo denotamos por $\delta(A) \leq \mathcal{U}$, si existe $i \in I$ tal que $A \subseteq U_i$.

Teorema 1.1.39. *Un espacio topológico Tychonoff X es Čech-completo si y sólo si existe una familia numerable $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de cubiertas abiertas del espacio X con la propiedad que cualquier familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados de X que tiene la propiedad de la intersección finita y contiene conjuntos de diámetro menor que $\mathcal{U}_i$ para $i = 1, 2, \dots$, tiene intersección no vacía.*

1.1.6. Metrizabilidad

Dado un conjunto X , una **distancia** (o **métrica**) sobre X es una función $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada par de puntos $x, y \in X$ un número real $d(x, y)$, y que cumple las siguientes condiciones:

- i) $d(x, y) \geq 0$.
- ii) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- iii) $d(x, y) = d(y, x)$ para todo $x, y \in X$.
- iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ para todo $x, y, z \in X$.

Un espacio **métrico** es una pareja (X, d) donde X es un conjunto y d una métrica definida en él. El valor $d(x, y)$ se interpreta como la distancia entre los puntos x e y .

Dado un espacio métrico (X, d) , se define la **bola abierta con centro** en $x \in X$ y radio $r > 0$ como

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

La familia de subconjuntos U de X tales que para cada $x \in U$, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq U$, forma una topología en X denominada **topología inducida por d** , y se denota por τ_d . Un espacio topológico (X, τ) es **metrizable** si existe una métrica d en X tal que $\tau = \tau_d$.

Todo espacio métrico es primero numerable, aunque no necesariamente segundo numerable. A continuación se presenta un teorema que caracteriza cuándo un espacio métrico tiene una base acotada por un cardinal κ .

Teorema 1.1.40. *Sea (X, d) un espacio métrico y κ un número cardinal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

- i) *El espacio X tiene una base de cardinalidad menor o igual a κ .*
- ii) *Cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta de cardinalidad menor o igual a κ .*
- iii) *Cada subespacio discreto de X tiene cardinalidad menor o igual a κ .*
- iv) *X tiene un subconjunto denso de cardinalidad menor o igual a κ .*

Corolario 1.1.41. *Para todo espacio métrico (X, d) , se tiene que las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) *X es segundo numerable.*
- ii) *X es Lindelöf.*
- iii) *X es separable.*

Teorema 1.1.42. *Todo espacio métrico compacto es separable.*

Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en un espacio métrico (X, d) **converge** a un punto $x \in X$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

El punto x es llamado el **límite** de la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una **sucesión de Cauchy** si para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon, \quad \text{para todo } m, n \geq n_0.$$

Cada sucesión convergente en un espacio métrico es una sucesión de Cauchy.

Un espacio métrico (X, d) es **completo** si cada sucesión de Cauchy es convergente a un punto en X . Si existe alguna métrica completa d que induce la topología de X se dice que X es **completamente metrizable**.

A continuación presentamos resultados sobre encajar espacios métricos en espacios completamente metrizable.

Teorema 1.1.43. *Cada espacio metrizable se puede encajar a un espacio completamente metrizable.*

Teorema 1.1.44. *Para cada espacio métrico (X, d) existe un espacio métrico completo $(\tilde{X}, \tilde{d})$ tal que $\tilde{X}$ contiene como subespacio denso isométrico a (X, d) .*

El espacio $(\tilde{X}, \tilde{d})$ es llamado la **completación** del espacio métrico (X, d) .

Una intersección numerable de conjuntos abiertos en un espacio topológico es llamado un **conjunto** G_δ . Una unión numerable de conjuntos cerrados es llamado un **conjunto** F_σ .

Teorema 1.1.45. *La propiedad de ser completamente metrizable se hereda a conjuntos G_δ .*

Teorema 1.1.46. *Si (X, d) es un espacio métrico compacto, entonces la métrica d es completa.*

Teorema 1.1.47. *Si un subespacio M de un espacio metrizable X es completamente metrizable, entonces M es un conjunto G_δ en X .*

Teorema 1.1.48. *Un espacio topológico X es completamente metrizable si y sólo si es Čech-completo.*

1.1.7. Ejemplos de espacios topológicos

En este apartado presentamos algunos ejemplos de espacios topológicos conocidos, que serán utilizados en el Capítulo 6 de este trabajo.

Ejemplo 1.1.49. Sea $X = \mathbb{R}$ con su topología usual τ_E , y sea D un subconjunto denso de X . Definimos τ^* como la **extensión discreta** de τ_E , generada al agregar cada punto de D como un conjunto abierto.

- i) Si $D = \mathbb{Q}$, τ^* se denomina la **extensión racional discreta** de $\mathbb{R}$ (ver [36, Example 70]).
- ii) Si $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, τ^* se conoce como la **extensión irracional discreta** de $\mathbb{R}$ (ver [36, Example 71]).

Algunas propiedades topológicas son las siguientes.

1. La topología τ^* es más fina que τ_E , por lo que (X, τ^*) es T_2 . Además, (X, τ^*) es $T_{3\frac{1}{2}}$.
2. La extensión racional discreta es metrizable y segundo numerable.
3. La extensión irracional discreta es primero numerable, pero no es separable y tampoco es Lindelöf.
4. El espacio (X, τ^*) no es localmente compacto.

Ejemplo 1.1.50. [36, Example 83] Sea S un subconjunto numerable del eje x en el plano. Definimos (X, τ) como el subespacio de la topología de disco tangente (ver ejemplo 1.1.19) a $P \cup S$, donde P es el semiplano superior abierto. El espacio (X, τ) se conoce como el **espacio de disco tangente metrizable**. Como S es numerable, se concluye que X es metrizable y segundo numerable.

1.1.8. Funciones cardinales

A todo espacio topológico se le puede asociar una serie de cardinales que aportan información sobre sus características. Estos se denominan **cardinales invariantes**, ya que se conservan por homeomorfismos.

El cardinal invariante más elemental que podemos asociar a X , que no es propiamente topológico, sino puramente conjuntista, es el cardinal de X como conjunto, denotado por $|X|$. A continuación, definimos las funciones cardinales que emplearemos a lo largo del trabajo.

Sea X un espacio topológico.

- El **peso** de X es:

$$w(X) = \min\{|\beta| : \beta \text{ es una base en } X\} + \omega.$$

- Dado $x \in X$, el **carácter** de X en el punto x es el número cardinal:

$$\chi(x, X) = \min\{|\beta(x)| : \beta(x) \text{ es una base local de } x \in X\} + \omega.$$

El **carácter** del espacio X es:

$$\chi(X) = \sup\{\chi(x, X) : x \in X\}.$$

- La **densidad** de X es:

$$d(X) = \min\{|D| : D \text{ es un subconjunto denso de } X\} + \omega.$$

- Una **familia celular** en X es una colección $\mathcal{C} \subseteq \tau \setminus \{\emptyset\}$ tal que cualesquiera dos elementos distintos de $\mathcal{C}$ son disjuntos. La **celularidad** de X es el número cardinal:

$$c(X) = \sup\{|\mathcal{C}| : \mathcal{C} \text{ es una familia celular en } X\} + \omega.$$

- Una colección $\beta \subseteq \tau$ es una **pseudobase** de x en X si $\{x\} = \bigcap \beta$. El **pseudocarácter** de X en x , es el número cardinal

$$\psi(x, X) = \min\{|\beta| : \beta \text{ es una pseudobase de } x \text{ en } X\} + \omega.$$

El **pseudocarácter** de X es el número cardinal

$$\psi(X) = \sup\{\psi(x, X) : x \in X\}.$$

- La **amplitud** de X es el número cardinal

$$s(X) = \sup\{|D| : D \text{ es un subconjunto discreto de } X\} + \omega.$$

- La **extensión** de X es el número cardinal infinito

$$e(X) = \sup\{|D| : D \text{ es un subconjunto cerrado y discreto de } X\} + \omega.$$

- Una familia $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{P}(X)$ es una **red** para X si para cada subconjunto abierto U de X y $x \in U$ existe $P \in \mathcal{P}$ tal que $x \in P \subseteq U$. El **peso** de **red** de X es el número cardinal:

$$nw(X) = \min\{|\mathcal{P}| : \mathcal{P} \text{ es una red para } X\} + \omega.$$

De estas definiciones se deduce inmediatamente:

- X es segundo numerable si y sólo si $w(X) = \omega$.
- X es primero numerable si y sólo si $\chi(X) = \omega$.
- X es separable si y sólo si $d(X) = \omega$.

Las siguientes desigualdades relacionan entre sí algunas de estas funciones cardinales.

Teorema 1.1.51. [17] Sea X un espacio topológico. Entonces

- $\chi(X) \leq w(X) \leq |X| \cdot \chi(X)$.
- $c(X) \leq d(X) \leq w(X)$.
- $nw(X) \leq w(X)$.
- $e(X) \leq s(X)$

Dado un espacio topológico X , definimos el **número de Lindelöf** de X como el menor cardinal κ tal que para toda cubierta abierta de X existe una subcubierta de cardinalidad menor o igual a κ . Denotamos el número de Lindelöf de X por $L(X)$. Así, un espacio X es Lindelöf si y sólo si $L(X) = \omega$.

Teorema 1.1.52. [17] Si X es un espacio topológico, se tiene que

$$e(x) \leq L(X).$$

Si un espacio topológico X es Lindelöf, no necesariamente posee spread numerable. En general, la propiedad de ser Lindelöf no impone restricciones sobre la cardinalidad de los subespacios discretos. Sin embargo, si X es hereditariamente Lindelöf, entonces todo subespacio de X , en particular cada subespacio discreto, también es Lindelöf. Dado que todo espacio discreto Lindelöf es necesariamente numerable, se sigue que $s(X) = \omega$.

Proposición 1.1.53. Si X es un espacio topológico hereditariamente Lindelöf, entonces $s(X) = \omega$.

Finalmente, recordamos un resultado elemental sobre la aritmética de cardinales infinitos (ver [17]).

Teorema 1.1.54. Para todos los cardinales infinitos κ y λ , tenemos que:

$$\kappa + \lambda = \max\{\kappa, \lambda\} = \kappa\lambda.$$

1.2. Nociones básicas de retículas

Una **relación binaria** R en un conjunto X es un subconjunto de $X \times X$. Dada una relación R , escribiremos indistintamente $(a, b) \in R$ ó $a R b$ para señalar que a y b están relacionados según R .

Una relación binaria R en X se dice:

- i) **reflexiva** si para cada $a \in X$, $a R a$;
- ii) **antisimétrica** si siempre que $a, b \in X$ satisfagan $a R b$ y $b R a$, se concluye que $a = b$.
- iii) **transitiva** si para cualesquiera $a, b, c \in X$ con $a R b$ y $b R c$ se tiene que $a R c$.

Un conjunto **parcialmente ordenado** $(X, \leq)$ es un conjunto X en el que se ha definido una relación binaria $\leq$ que es reflexiva, antisimétrica y transitiva. Un ejemplo de orden parcial es $(\mathbb{R}, \leq)$, donde $\leq$ es la relación de orden usual en $\mathbb{R}$. A lo largo del resto de la sección, supondremos que $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado y que Y es un subconjunto de X .

Diremos que $a \in X$ es una **cota superior** (respectivamente, **cota inferior**) de Y si $b \leq a$ (respectivamente, $a \leq b$) para todo $b \in Y$. Por otro lado, se dirá que a es un **supremo** (respectivamente, **ínfimo**) de Y si las siguientes propiedades se satisfacen:

1. a es cota superior (correspondientemente, cota inferior) de Y y
2. para cada cota superior c de Y (respectivamente, para cada cota inferior c de Y) se cumple $a \leq c$ (respectivamente, $c \leq a$).

Un subconjunto de un conjunto parcialmente ordenado puede carecer de cotas superiores como es el caso del intervalo $[0, \infty)$ en $(\mathbb{R}, \leq)$ o por el contrario tener muchas cotas superiores como puede apreciarse en el caso de $[0, 1)$ en $(\mathbb{R}, \leq)$. Sin embargo, el supremo y el ínfimo de un conjunto son únicos, en caso de existir. Si Y posee un supremo lo denotaremos por $\bigvee Y$; análogamente, si Y tiene un ínfimo, el símbolo $\bigwedge Y$ será empleado para representarlo.

Un conjunto parcialmente ordenado $(X, \leq)$ se denomina **retícula**, si dados dos elementos cualesquiera $a, b \in X$, existen en X el supremo y el ínfimo de $\{a, b\}$, a los cuales denotaremos por $a \vee b$ y $a \wedge b$. Una retícula se denomina

completa si para cada subconjunto no vacío Y de X existen $a, b \in X$ tales que a es el supremo de Y y b es el ínfimo de Y ; es decir, $a = \bigvee Y$ y $b = \bigwedge Y$. Observemos que si X es una retícula completa y $X \neq \emptyset$, entonces existen $\bigvee X$ y $\bigwedge X$; por lo tanto, X tiene elemento máximo y mínimo. Note que $(\mathbb{P}(X), \subseteq)$ es una retícula completa.

Capítulo 2

Topologías de Hattori en $\mathbb{R}$

Sabemos que en un conjunto X pueden definirse diversas topologías. En particular, la topología euclidiana τ_E y la topología de la recta de Sorgenfrey τ_S son dos ejemplos de topologías definidas sobre $\mathbb{R}$. A partir de estas, Hattori introdujo en [20] una familia de topologías en $\mathbb{R}$, dando origen a los llamados **espacios de Hattori**.

En este capítulo se presentan y analizan los resultados obtenidos por Bouziad y Sukhacheva [10], Chatyrko y Hattori [15], [16], Kulesza [28], y Lin y Li [29], quienes han estudiado diversas propiedades topológicas y estructurales de estos espacios.

2.1. Espacios de Hattori

Hattori define en [20] una familia de topologías en $\mathbb{R}$, a partir de la topología euclidiana τ_E y la topología de Sorgenfrey τ_S . Dado un subconjunto A de $\mathbb{R}$ se define una topología $\tau(A)$ en $\mathbb{R}$ de la siguiente manera:

- i) Para cada $x \in A$, $\{(x - \varepsilon, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ forma una base local de x .
- ii) Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus A$, $\{[x, x + \varepsilon) : \varepsilon > 0\}$ forma una base local de x .

El espacio topológico $(\mathbb{R}, \tau(A))$ se denota como $H(A)$ y se llama el **espacio de Hattori** asociado a A . La topología $\tau(A)$ se le conoce como la **topología de Hattori** asociada a A . Algunos autores, como en [28], denotan al espacio de Hattori $H(A)$ por H_A y lo llaman el **H -espacio** asociado a A . De la definición se deduce que, para todo subconjunto A de $\mathbb{R}$, se cumple las siguientes

contenciones:

$$\tau_E = \tau(\mathbb{R}) \subseteq \tau(A) \subseteq \tau(\emptyset) = \tau_S.$$

Para cada subconjunto A de $\mathbb{R}$, el espacio de Hattori $H(A)$ siempre es hereditariamente separable, Lindelöf, normal y primero numerable ya que $\mathbb{R}$ con su topología usual y la recta de Sorgenfrey comparten estas propiedades topológicas.

Chatyrko y Hattori en [15] presentan propiedades básicas de estos espacios. El siguiente resultado describe cómo se comporta la topología de subespacios en los espacios de Hattori.

Proposición 2.1.1. [15, Lema 2.1] Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq A$ y $C \subseteq \mathbb{R} \setminus A$. Entonces,

- i) $\tau(A)|_B = \tau_E|_B$.
- ii) $\tau(A)|_C = \tau_S|_C$.

La siguiente proposición muestra cómo se elevan los espacios compactos de $\mathbb{R}$ a los espacios de Hattori $H(A)$.

Proposición 2.1.2. [15, Proposición 2.1] Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Si B es un subconjunto compacto de $\mathbb{R}$ tal que $B \subseteq A$, entonces B es un subespacio compacto en $H(A)$.

Proposición 2.1.3. [9] Dados A y B subconjuntos de $\mathbb{R}$ se tiene que $B \subseteq A$ si y sólo si $\tau(A) \subseteq \tau(B)$.

Notemos que la propiedad de ser segundo numerable no es una propiedad que comparten $\mathbb{R}$ y $\mathbb{S}$, por lo que no todos los espacios de Hattori $H(A)$ son segundo numerables. El siguiente resultado da una caracterización de los espacios de Hattori segundo numerables.

Proposición 2.1.4. [15, Proposición 2.3] Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces $H(A)$ es segundo numerable si y sólo si $\mathbb{R} \setminus A$ es numerable.

Demostración. Primero supongamos que $\mathbb{R} \setminus A$ es numerable. Dado que $\mathbb{R}$ es hereditariamente separable, podemos encontrar $B \subseteq A$ denso numerable en $(A, \tau_E|_A)$. Consideremos la familia

$$\beta = \left\{ \left[x, x + \frac{1}{n} \right) : x \in \mathbb{R} \setminus A, n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right) : x \in B, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Notemos que β es una subfamilia de $\tau(A)$. Además, β es numerable. Veamos que β es base en $H(A)$. Sea $\varepsilon > 0$, tenemos dos casos:

- i) Si $x \in A$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{2}{n} < \varepsilon$. Por la densidad de B podemos encontrar $y \in B \cap (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n})$. De este modo se tiene que

$$x - \varepsilon < x - \frac{2}{n} < y - \frac{1}{n} < x < y + \frac{1}{n} < x + \frac{2}{n} < x + \varepsilon.$$

Por tanto, $(y - \frac{1}{n}, y + \frac{1}{n}) \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

- ii) Si $x \notin A$, consideremos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ y entonces

$$x \in [x, x + \frac{1}{n}) \subseteq [x, x + \varepsilon).$$

Por tanto, β es una base numerable en $H(A)$.

Ahora supongamos que $H(A)$ es segundo numerable. Sea β una base numerable en $H(A)$. Para cada $x \in \mathbb{R} \setminus A$, existe $U_x \in \beta$ tal que $x \in U_x \subseteq [x, x + 1)$. La función que manda elementos de $\mathbb{R} \setminus A$ a elementos de β dada por la regla de correspondencia $x \rightarrow U_x$ es inyectiva. Puesto que $\min(U_x) = x$, la función tomar mínimo es inversa izquierda. En consecuencia,

$$|\mathbb{R} \setminus A| \leq |\beta| \leq \omega.$$

□

Corolario 2.1.5. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces $H(A)$ es metrizable si y sólo si $\mathbb{R} \setminus A$ es numerable.*

Los siguientes resultados muestran algunas propiedades topológicas que comparten $\mathbb{S}$ y $H(A)$ para cada A subconjunto de $\mathbb{R}$.

Proposición 2.1.6. [29, Corolario 3.2] Para un subconjunto arbitrario A de $\mathbb{R}$, se cumple la siguiente igualdad $d(H(A)) = d(\mathbb{S})$.

Demostración. Dado que $\tau(A) \subseteq \tau_{\mathbb{S}}$, todo conjunto denso en $\mathbb{S}$ también es denso en $H(A)$. Se sigue que $d(H(A)) \leq d(\mathbb{S})$. Mostremos la desigualdad contraria. Sea D un subconjunto denso en $H(A)$ tal que $|D| = d(H(A))$. Note que D es denso en $\mathbb{R}$, ya que $\tau(A)$ es una topología más fina que $\tau_{\mathbb{S}}$. Para probar la densidad de D en $\mathbb{S}$, consideremos $U \in \tau_{\mathbb{S}}$ no vacío y $x \in U$. Entonces, existe $\varepsilon > 0$ tal que $[x, x + \varepsilon) \subseteq U$. En consecuencia,

$$\emptyset \neq (x, x + \varepsilon) \cap D \subseteq [x, x + \varepsilon) \cap D \subseteq U \cap D.$$

Por lo tanto, D también es denso en $\mathbb{S}$. Concluimos que $d(H(A)) = d(\mathbb{S})$. □

Un espacio topológico X se llama **espacio de Baire** si cada intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos densos en X también es densa en X . Por lo hecho en la prueba de la proposición 2.1.6, sabemos que si $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia numerable de conjuntos abiertos y densos en $H(A)$, entonces cada U_n también es denso en $\mathbb{S}$. Dado que $\mathbb{S}$ es un espacio de Baire, se sigue que la intersección $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ es densa en $\mathbb{S}$. Dado que $\tau(A) \subseteq \tau_S$, podemos concluir que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ es densa en $H(A)$. De este modo se concluye el siguiente corolario.

Corolario 2.1.7. [29, Corolario 3.3] Para cada subconjunto A de $\mathbb{R}$, $H(A)$ es un espacio de Baire.

Proposición 2.1.8. [29, Proposición 3.8] Para un subconjunto arbitrario B de $\mathbb{S}$, se cumple que $nw(B, \tau_S|_B) = |B| + \aleph_0$.

Las siguientes tres proposiciones son resultados tipo compacidad mostrados por Fucai Lin y Jiada Li en [29].

Proposición 2.1.9. [29, Lema 3.11] Si K es compacto en $H(A)$, entonces $K \cap (\mathbb{R} \setminus A)$ es numerable.

Proposición 2.1.10. [29, Lema 3.12] Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Si $\overline{\mathbb{R} \setminus A}^{\tau(A)}$ es numerable, entonces $H(A)$ es σ -compacto.

Proposición 2.1.11. [29, Teorema 3.13] Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Si $H(A)$ es σ -compacto, entonces $\mathbb{R} \setminus A$ es numerable y denso en ninguna parte en $H(A)$.

Chatyrko, en [16], muestra que el recíproco de la proposición 2.1.11 no se satisface. Además, proporciona una serie de caracterizaciones equivalentes de la σ -compacidad en los espacios de Hattori.

Teorema 2.1.12. [16, Theorem 2.4] Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- a) Existe un subconjunto σ -compacto D y un subconjunto cerrado C de $H(A)$ tal que $\mathbb{R} \setminus A \subseteq C \subseteq D$.
- b) Existe un subconjunto σ -compacto cerrado C de $H(A)$ tal que

$$\mathbb{R} \setminus A \subseteq C.$$

- c) $\overline{\mathbb{R} \setminus A}^{\tau_E}$ es σ -compacto en $H(A)$.
- d) $\overline{\mathbb{R} \setminus A}^{\tau(A)}$ es σ -compacto en $H(A)$.
- e) $H(A)$ es σ -compacto.

Bouziad y Sukhacheva, motivados por el trabajo previo de Chatyrko y Hattori, investigaron los espacios de Hattori en $\mathbb{R}$, obteniendo resultados significativos sobre el comportamiento de diversas propiedades topológicas en dichos espacios. A continuación, se presentan algunos de los resultados más interesantes obtenidos por Bouziad y Sukhacheva.

Proposición 2.1.13. [10, Proposición 3.3] $H(A)$ es un espacio polaco si y sólo si $\mathbb{R} \setminus A$ es numerable.

Proposición 2.1.14. [10, Proposición 3.5] $H(A)$ es Čech-completo si y sólo si $\mathbb{R} \setminus A$ es numerable.

Proposición 2.1.15. [10, Proposición 3.7] $H(A)$ es localmente compacto si y sólo si $\mathbb{R} \setminus A$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y discreto en $\mathbb{S}$.

2.2. Topologías de Hattori en el plano de Niemytzki

Los espacios de Hattori se han convertido en objeto de estudio para diversos investigadores, quienes han analizado el comportamiento de algunas propiedades topológicas en estos espacios. Además, se dieron cuenta de que podían aplicar la técnica utilizada por Hattori no solo para generar nuevas topologías en $\mathbb{R}$, sino también para emplear topologías distintas a τ_E y τ_S . En [1], los autores utilizan la técnica propuesta por Hattori en [20] para generar nuevas topologías en el semiplano superior cerrado, posicionándolas entre la topología usual de $\mathbb{R}^2$ y la topología de Niemytzki-Moore.

Sean

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\} \text{ y } P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\},$$

por lo que el eje x es $L = X \setminus P$. Denotemos por τ_u topología que X hereda de $\mathbb{R}^2$ y por τ_N la topología de Niemytzki-Moore en X .

Observemos que P como subespacio de X con la topología métrica usual coincide con P como subespacio de X con la topología de Niemytzki-Moore. Sea A un subconjunto de L . A continuación, describimos las vecindades de la **topología de Hattori** $\tau(A)$ en X generada por A .

- Los puntos en $A \cup P$ tendrán la misma base local que en (X, τ_u) .
- Los puntos en $L \setminus A$ tendrán la misma base local que en (X, τ_N) .

Al espacio topológico $(X, \tau(A))$ lo llamamos el **espacio de Hattori** generado por A y lo denotamos por $H(A)$. Observemos que si $A = \emptyset$, entonces $H(A)$ es la topología de Niemytzki. Si $A = L$, entonces $\tau(A)$ es la topología que hereda de $\mathbb{R}^2$. A partir de ahora, cuando consideremos X con una topología $\tau(A)$, asumimos que A es un subconjunto propio no vacío de L .

De la definición de las topologías de Hattori en X , podemos observar rápidamente que

$$\tau_u \subseteq \tau(A) \subseteq \tau_N.$$

En consecuencia, los espacios de Hattori $H(A)$ son Hausdorff. Además, sabemos que el espacio de Niemytzki-Moore es Tychonoff, entonces un problema natural es ver cuando los espacios de Hattori en X son Tychonoff. En [1], los autores muestran que los espacios de Hattori $H(A)$ son completamente regulares.

Teorema 2.2.1. [1, Teorema 2.2] Cada espacio de Hattori $H(A)$ es $T_{3\frac{1}{2}}$.

Además, cualquier espacio de Hattori en X es primero numerable y separable, pues τ_u y τ_N comparten estas propiedades topológicas. Sin embargo, dado que el espacio de Niemytzki-Moore no es segundo numerable, no todos los espacios de Hattori en X lo son. El siguiente resultado caracteriza cuando se cumple esta propiedad.

Teorema 2.2.2. [1, Teorema 2.3] Sea $H(A)$ un espacio de Hattori. Los siguientes enunciados son equivalentes:

- i) $L \setminus A$ es numerable.
- ii) $H(A)$ es segundo numerable.
- iii) $H(A)$ es metrizable.

Como consecuencia del resultado anterior se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 2.2.3. [1, Teorema 2.7] Si $L \setminus A$ es numerable, entonces $H(A)$ es Lindelöf.

Si consideramos $A = [a_1, a_2]$ donde $0 < a_1 < a_2$, entonces las vecindades básicas en $H(A)$ se representan gráficamente en la siguiente figura.

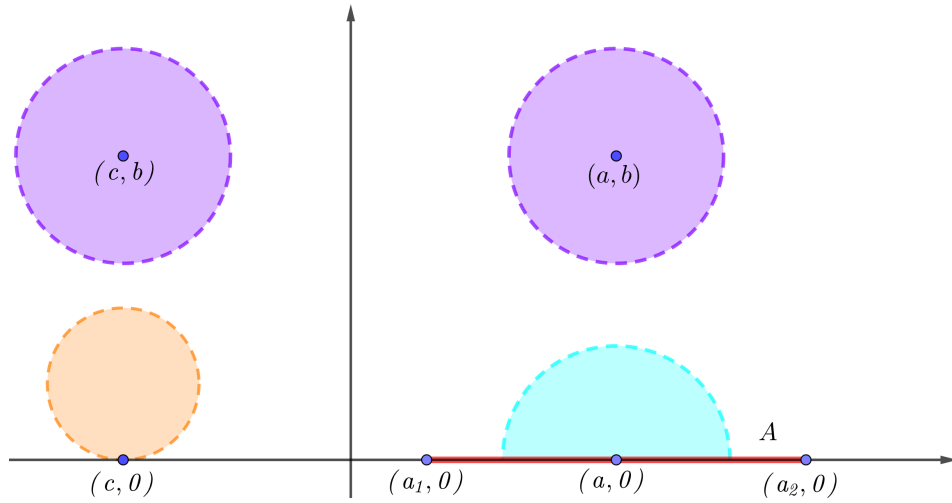


Figura 2.1: $(a, 0) \in A$, $(c, 0) \in L \setminus A$ y $b > 0$.

Capítulo 3

Álgebra topológica

El concepto de espacio topológico se construyó a partir de un conjunto definiendo una colección de abiertos o cerrados. Cuando el conjunto está enriquecido con una estructura de grupo surge un área de la matemática de gran interés llamada **álgebra topológica**.

El **álgebra topológica** analiza la influencia de las estructuras algebraicas equipadas con topologías que se ajustan a ellas de manera adecuada. El estudio de los **grupos paratopológicos** y **grupos topológicos** pertenece a esta rama. Las teorías de **grupos paratopológicos** y **grupos topológicos** son ejemplos destacados de la interacción exitosa entre estas dos áreas de las matemáticas. Los grupos topológicos fueron estudiados por primera vez por Schreier en 1926 y por F. Leja en su artículo *Sur la notion du groupe abstrait topologique* (1927), donde se presenta por primera vez la definición de un grupo topológico en un contexto similar al de los grupos de Lie.

3.1. Grupos topológicos y paratopológicos

Si A y B son subconjuntos de un grupo G definimos

$$AB = \{ab : a \in A, b \in B\}$$

y escribimos aB en lugar de $\{a\}B$. Además,

$$A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}.$$

Decimos que A es **simétrico** si $A = A^{-1}$.

Empezaremos dando una definición donde compaginamos grupos y topología. Un **grupo paratopológico** G es un grupo G con una topología en el conjunto G que hace continua la multiplicación de G .

Dado un grupo G , la función **inversión** $In : G \rightarrow G$ está definida como $In(x) = x^{-1}$, para cada $x \in G$. Un **grupo topológico** es un grupo paratopológico en el que la función inversión es continua.

La recta de Sorgenfrey es un ejemplo de un grupo paratopológico que no es un grupo topológico. Por otro lado, el conjunto de los números reales con su topología usual es un grupo topológico Hausdorff.

Teorema 3.1.1. *Si G es un grupo topológico, entonces la función inversión es un homeomorfismo.*

Demostración. Como G es un grupo topológico, la función inversión es continua y además es su propia inversa. Por lo tanto, la función inversión es un homeomorfismo. $\square$

Sea G un grupo. Fijemos $g \in G$. Consideremos las funciones λ_g y ρ_g , ambas de G a G , definidas como $\lambda_g(x) = gx$ y $\rho_g(x) = xg$ para cada x en G . La función λ_g se llama **traslación izquierda** y a ρ_g se le conoce como **traslación derecha**. Denotaremos por β una base local de la identidad de G .

La siguiente proposición muestra que las funciones de traslación en los grupos paratopológicos juegan un papel fundamental. Además, muestra que describir la topología en grupos paratopológicos y topológicos es generalmente una tarea más fácil que hacerlo en un espacio topológico arbitrario. Basta describir una base local para la identidad del grupo.

Proposición 3.1.2. *Sean G un grupo paratopológico y g un elemento en G . Entonces,*

- i) λ_g y ρ_g son homeomorfismos del espacio G en si mismo.
- ii) Para cualquier base local β de e en G , las familias $\{gU : U \in \beta\}$ y $\{Ug : U \in \beta\}$ son una base local de g en G .

Demostración. i) Dado que G es un grupo paratopológico, las traslaciones λ_g y ρ_g son funciones continuas. Es sencillo comprobar que la inversa de λ_g es $\lambda_{g^{-1}}$. De esta forma concluimos que λ_g es un homeomorfismo. De manera análoga, se puede demostrar que ρ_g también es un homeomorfismo de G en si mismo.

ii) Este resultado se sigue inmediatamente de i).

□

Decimos que un espacio topológico X es **homogéneo** si para cualesquiera $x, y \in X$, existe un homeomorfismo f del espacio X sobre sí mismo tal que $f(x) = y$. El siguiente resultado es consecuencia de la proposición 3.1.2 y nos proporciona ejemplos de espacios homogéneos

Corolario 3.1.3. *Todo grupo paratopológico es homogéneo.*

Demostración. Sean G un grupo paratopológico y $x, y \in G$. Por la proposición 3.1.2, sabemos que la traslación izquierda $\lambda_{yx^{-1}}$ es un homeomorfismo y $\lambda_{yx^{-1}}(x) = y$. Concluimos que G es homogéneo. □

Sabemos que todo grupo paratopológico es un espacio homogéneo. Por lo tanto, para demostrar propiedades locales en los grupos paratopológicos, basta con verificar que la propiedad se cumple en la identidad del grupo. El siguiente teorema nos asegura la existencia de una base de vecindades simétricas para todo grupo topológico.

Teorema 3.1.4. *Todo grupo topológico G tiene una base local en la identidad que consiste de vecindades simétricas.*

Demostración. Sea β una base local de vecindades de la identidad e en G . Definamos

$$\beta' = \{U \cap U^{-1} : U \in \beta\}.$$

Notemos que β' es una familia de conjuntos abiertos, pues U es un conjunto abierto y U^{-1} también es un conjunto abierto ya que la función In es un homeomorfismo. Para cada $V \in \beta'$ se tiene claramente que $V = V^{-1}$, así que β' consiste de conjuntos simétricos. Por último mostremos que β' es una base local de e . Sea W un conjunto abierto en G tal que $e \in W$, entonces existe $U \in \beta$ tal que $e \in U \subseteq W$. Si $V = U \cap U^{-1}$, entonces $e \in V \subset U \subset W$. Por lo tanto, β' es una base local de vecindades simétricas. □

A continuación, estudiaremos las propiedades de separación en los grupos topológicos. En estos grupos, tenemos una gran ventaja, pues la multiplicación y la inversión son funciones continuas.

Teorema 3.1.5. *Si G es un grupo topológico T_0 , entonces G es T_1 .*

Demostración. Sea β una base de vecindades simétricas de e en G , y sean $x, y \in G$ puntos distintos. Como G es T_0 , podemos encontrar un conjunto abierto U tal que $x \in U$ y $y \notin U$. Dado que G es un grupo topológico, por la proposición 3.1.2, $\beta_x = \{Vx : V \in \beta\}$ es una base local de x en G . Así, existe $W \in \beta$ tal que $Wx \subseteq U$; por tanto $y \notin Wx$. Esto implica que $yx^{-1} \notin W$, por consiguiente, $x^{-1} \notin y^{-1}W$. De aquí obtenemos que $x \notin W^{-1}y = Wy$. Por lo tanto, para $x, y \in G$ puntos distintos, existe $W \in \beta$ tal que $x \in Wx$, $y \notin Wx$, $x \notin Wy$ e $y \in W^{-1}y$. Concluimos que G es T_1 . $\square$

Teorema 3.1.6. *Si G es un grupo topológico T_0 , entonces G es T_3 .*

Demostración. Sea β una base de vecindades simétricas de e en G . Como G es homogéneo, basta trabajar con vecindades de la identidad. Sea $U \in \beta$. Como la multiplicación es continua, existe $V \in \beta$ tal que $V^2 \subseteq U$. Si $x \in \overline{V}$, entonces $Vx \cap V \neq \emptyset$, lo que implican que existen $a_1, a_2 \in V$ tales que $a_1x = a_2$. Así, $x = a_1^{-1}a_2 \in V^{-1}V = V^2 \subseteq U$. Por lo tanto, $\overline{V} \subset U$. En consecuencia, G es regular. Como G es T_0 , por el teorema 3.1.5, G es T_1 . Finalmente, concluimos que G es T_3 . $\square$

Se puede demostrar que en grupos topológicos, la propiedad de ser regular implica ser completamente regular (ver [6, Teorema 3.3.11]). Por lo tanto, en grupos topológicos se cumplen las siguientes implicaciones:

$$T_0 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}.$$

Pontryagin en [31], caracteriza cuándo un grupo algebraico dotado de una topología τ es un grupo topológico. Con una pequeña modificación al resultado de Pontryagin, se obtiene el siguiente teorema en grupos paratopológicos.

Teorema 3.1.7. [32] Sean G un grupo paratopológico y β una base local de la identidad e en G . Entonces:

- i) para $U, V \in \beta$, existe un elemento $W \in \beta$ tal que $W \subseteq U \cap V$;
- ii) para cada $U \in \beta$ y cada $x \in U$, existe $V \in \beta$ tal que $Vx \subseteq U$;
- iii) para cada $U \in \beta$ y cada $x \in G$, existe $V \in \beta$ tal que $xVx^{-1} \subseteq U$;
- iv) para cada $U \in \beta$, existe un elemento $V \in \beta$ tal que $V^2 \subseteq U$

Recíprocamente, sean G un grupo y β una familia no vacía de subconjuntos de G tal que cada elemento de β contiene a la identidad e de G y se satisfacen las condiciones i)-iv). Entonces la familia

$$\mathcal{B} = \{Ua : a \in G, U \in \beta\}$$

forma una base para una topología $\tau_{\mathcal{B}}$ en G tal que $(G, \tau_{\mathcal{B}})$ es un grupo paratopológico. Además, la familia $\{aU : a \in G, U \in \beta\}$ también es una base para la misma topología en G .

Demostración. Supongamos que G es un grupo paratopológico y β una base local de la identidad e en G . Probaremos que se cumplen las condiciones i)-iv).

- i) Si $U, V \in \beta$, el conjunto $U \cap V$ es una vecindad abierta de e en G . Por ser β una base local de e , existe $W \in \beta$ tal que $W \subseteq U \cap V$.
- ii) Sean $U \in \beta$ y $x \in U$. Sabemos que la traslación derecha ρ_x es continua. En particular es continua en e . En consecuencia, para cada $U \in \beta$ y $x \in U$, podemos encontrar $V \in \beta$ tal que $\rho_x(V) = Vx \subseteq U$.
- iii) Sean $U \in \beta$ y $x \in U$. Sabemos que las traslaciones derechas e izquierdas son continuas, entonces $\rho_{x^{-1}} \circ \lambda_x$ es una función continua. En particular es continua en e . Entonces, para cada $U \in \beta$ y $x \in G$, existe $V \in \beta$ tal que $xVx^{-1} = \rho_{x^{-1}}(xV) = \rho_{x^{-1}}(\lambda_x(V)) \subseteq U$.
- iv) Dado que G es un grupo paratopológico, la multiplicación del grupo es continua. En particular es continua en (e, e) . Por tanto, para cada $U \in \beta$, podemos encontrar $V_1, V_2 \in \beta$ tales que $V_1V_2 \subseteq U$. Por el inciso i), existe $V \subseteq V_1 \cap V_2$. Es claro que $V^2 \subseteq V_1V_2 \subseteq U$.

Ahora probaremos el recíproco. Sea β una familia de subconjuntos de G que satisface las condiciones i)-iv) y sea τ la familia de todos los subconjuntos W de G que satisfacen: para cada $x \in W$, existe $U \in \beta$ tal que $Ux \subseteq W$.

- a). Afirmación 1: τ es una topología en G .
 - I. Notemos que $\emptyset \in \tau$ por vacuidad. Además, al ser G el espacio donde estamos trabajando. Para cada $x \in G$ y $U \in \beta$ se cumple que $Ux \subseteq G$, por lo cual $G \in \tau$.
 - II. Sea $\{U_\alpha \in \tau : \alpha \in A\}$. Probaremos que $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$.
Sea $x \in \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, entonces existe $\alpha_0 \in A$ tal que $x \in U_{\alpha_0}$. Como

$U_{\alpha_0} \in \tau$, podemos encontrar $V_{\alpha_0} \in \beta$ tal que $V_{\alpha_0}x \subseteq U_{\alpha_0} \subseteq \bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha}$. Por lo tanto, $\bigcup_{\alpha \in A} U_{\alpha} \in \tau$.

III. Sean $U_1, \dots, U_n \in \tau$. Probaremos que $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$.

Sea $x \in \bigcap_{i=1}^n U_i$. Como $x \in U_i$ para $i = 1, \dots, n$, podemos encontrar $V_i \in \beta$ con $i = 1, \dots, n$ tales que $V_i x \subseteq U_i$. De la propiedad i), existe $V \in \beta$ tal que $V \subseteq \bigcap_{i=1}^n V_i$. De lo anterior, obtenemos que

$$Vx \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i.$$

Por lo tanto, $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$.

De I, II, III se sigue que τ es una topología en G .

b) Afirmación 2: $Ux \in \tau$, para cada x en G y cada $U \in \beta$.

Sea $y \in Ux$, entonces $yx^{-1} \in U \in \beta$. Por la propiedad ii), existe un elemento $V \in \beta$ tal que $Vyx^{-1} \subseteq U$, es decir, $Vy \subseteq Ux$. Por lo tanto, el conjunto Ux es un elemento de τ .

c) Afirmación 3: La familia $\mathcal{B} = \{Ua : a \in G, U \in \beta\}$ es una base para la topología τ .

Por la afirmación 2, tenemos que $\mathcal{B}$ es una familia de abiertos en τ . Ahora veamos que es una base τ . Sean $x \in G$ y $O \in \tau$ que contenga a x . Por la definición de τ existe $U \in \beta$ tal que $x \in Ux \subseteq O$. Esto muestra que efectivamente $\mathcal{B}$ es base.

d) Afirmación 4:

La multiplicación en G es continua respecto a la topología τ .

Sean $a, b \in G$ arbitrarios y $O \in \tau$ tales que $ab \in O$, entonces existe $W \in \beta$ tal que $Wab \subseteq O$. Encontraremos $U, V \in \beta$ que cumplan la siguiente contención $UaVb \subseteq Wab$, o equivalentemente, $UaV \subseteq Wa$, que a su vez es equivalente a $U(aVa^{-1}) \subseteq W$. Como $W \in \beta$ elegimos $U, V \in \beta$ tales que $U^2 \subseteq W$, esto se debe a la propiedad iv) y además $aVa^{-1} \subseteq U$ por la propiedad iii), entonces por cómo elegimos U y V , obtenemos que $U(aVa^{-1}) \subseteq U^2 \subseteq W$, así $UaVb \subseteq Wab$. Por lo tanto, la multiplicación en G es continua con respecto a τ .

e) Afirmación 5: $bV \in \tau$ para toda b en G y $V \in \beta$.

Sea $y \in bV$ arbitrario, así que $b^{-1}y \in V$, como $V \in \beta$, por la propiedad

ii) existe $W \in \beta$ tal que $Wb^{-1}y \subseteq V$. Por la propiedad iii), existe $U \in \beta$ tal que $b^{-1}Ub \subseteq W$. De aquí obtenemos que

$$b^{-1}Uy = (b^{-1}Ub)b^{-1}y \subseteq Wb^{-1}y \subseteq V,$$

por lo tanto, $Uy \subseteq bV$, es decir, $bV \in \tau$.

□

Las propiedades i)-iv) del teorema anterior son conocidas como las **condiciones de Pontryagin para grupos paratopológicos**. En lo sucesivo, así haremos referencia a dichas condiciones.

Proposición 3.1.8. *Si G es un grupo paratopológico y β una base local de e en G , entonces G es un grupo topológico si y sólo si se cumple*

v) *para cada $U \in \beta$, existe $V \in \beta$ tal que $V^{-1} \subseteq U$.*

Demostración. Si G es un grupo topológico, entonces la función In es continua, en particular es continua en e . En consecuencia, para cada $U \in \beta$, existe $V \in \beta$ tal que $V^{-1} \subseteq U$.

Ahora supongamos que se cumple la propiedad v). Como G es un grupo paratopológico, la multiplicación es continua. Para mostrar que G es un grupo topológico, debemos mostrar que In es continua. Sea O abierto en G . Veamos que O^{-1} es abierto. Tomemos $x \in O^{-1}$. Notemos que xO es vecindad abierta de e , así que existe $U \in \beta$ tal que $U \subseteq xO$, por lo que existe $V \in \beta$ tal que $V^{-1} \subseteq U$. Por lo cual, $V^{-1} \subseteq U \subseteq xO$. Por consiguiente $V \subseteq O^{-1}x^{-1}$. De aquí $Vx \subseteq O^{-1}$. Como G es un grupo paratopológico, Vx es vecindad básica de x . Por lo tanto, O^{-1} es abierto en G . Concluimos que In es continua. Por lo que G es un grupo topológico. □

El siguiente resultado nos muestra que la cerradura de subgrupos en grupos topológicos es a su vez un subgrupo.

Teorema 3.1.9. *Si H es un subgrupo de un grupo topológico G , entonces $\overline{H}$ es un subgrupo de G .*

Demostración. Sea β una base local en G que consiste de vecindades simétricas de la identidad de G . Note que $\overline{H}$ es un subconjunto no vacío por ser H un subgrupo de G . Sean $x, y \in \overline{H}$, e el neutro de G y $U \in \beta$. Mostraremos que $xy \in \overline{H}$. Dado que $y \in \overline{H}$, existe $h \in yU \cap H$. Se sigue que

$xh \in xyU$. Así, $x \in xyUh^{-1}$. Podemos encontrar una vecindad abierta V de x tal que $V \subseteq xyUh^{-1}$. Esto implica que $Vh \subseteq xyU$. Dado que $x \in \overline{H}$, existe $h' \in V \cap H$. Entonces, $h'h \in Vh \subseteq xyU$. Por ser H un subgrupo de G , se tiene que $hh' \in H$. Por lo tanto, $xyU \cap H \neq \emptyset$. Concluimos que $xy \in \overline{H}$. Sea $x \in \overline{H}$. Demostraremos que $x^{-1} \in \overline{H}$. Dado $U \in \beta$, existe $h \in xU \cap H$. Así $h^{-1} \in U^{-1}x^{-1} = Ux^{-1}$. Entonces, $Ux^{-1} \cap H \neq \emptyset$. En consecuencia, $x^{-1} \in \overline{H}$. Concluimos que $\overline{H}$ es un subgrupo de G . $\square$

A continuación, presentamos un ejemplo que muestra que, en la categoría de grupos paratopológicos, la cerradura de un subgrupo no es necesariamente un subgrupo. Otro ejemplo que ilustra este hecho puede encontrarse en [6, Ejemplo 1.4.17].

Ejemplo 3.1.10. Sea $\mathbb{R}$ el grupo aditivo de los números reales. La familia $\beta = \{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}\}$ es base para una topología de grupo paratopológico en $\mathbb{R}$. Sea H el subgrupo $H = \{0\}$. La cerradura de H en $G = (\mathbb{R}, \tau)$ es $\overline{H} = (-\infty, 0]$, que no es un subgrupo de G .

El siguiente resultado establece una condición necesaria y suficiente para que un grupo topológico sea metrizable. Se trata del teorema de metrización para grupos topológicos.

Teorema 3.1.11. [6, Teorema 3.3.12][G. Birkhoff, S. Kakutani] Un grupo topológico G es metrizable si y sólo si G es primero numerable.

En grupos paratopológicos se tiene el siguiente resultado respecto a la compacidad local.

Teorema 3.1.12. [6, Proposición 2.3.11] Si G es un grupo paratopológico localmente compacto, entonces G es un grupo topológico.

3.1.1. Grupo reflexión y grupo paratopológico 2-oscilante

Comenzaremos esta subsección presentando un resultado que podemos encontrar en [6].

Teorema 3.1.13. [6, Teorema 1.6.2] Sea $\{\tau_\alpha : \alpha \in A\}$ una familia de topologías en un grupo G tal que (G, τ_α) es un grupo topológico para cada $\alpha \in A$. Si τ es la topología más pequeña en G conteniendo a cada τ_α , entonces (G, τ) es un grupo topológico.

Dado un grupo paratopológico (G, τ) , sea τ_* la topología más fina de las topologías σ en G tales que (G, σ) es un grupo topológico y $\sigma \subseteq \tau$. Por el teorema 3.1.13, obtenemos que (G, τ_*) es un grupo topológico. El grupo topológico $G_* = (G, \tau_*)$ es llamado el **grupo reflexión** de G . Es importante notar que esta definición tiene sentido, ya que siempre existe al menos una topología $\sigma \subseteq \tau$ con esta propiedad. En efecto, la topología indiscreta convierte a G en un grupo topológico. Por lo tanto, el conjunto de tales topologías no es vacío y τ_* está bien definida.

Un subconjunto A de G se llama **b-cerrado** (o **b-abierto**) si A es cerrado (o abierto) en la topología τ_* . Se dice que un grupo paratopológico G es **b-separado** si su grupo reflexión G_* es Hausdorff. Además, G es **b-regular** si cada vecindad U de la identidad e en G contiene a una vecindad b-cerrada de e . Note que todo grupo paratopológico Hausdorff b-regular es regular y b-separado (ver [7]).

Un grupo paratopológico es **2-oscilante** si $\{UU^{-1} : U \in \beta_e\}$ forma una base local de e en G_* , donde β_e es una base local de e en G .

Corolario 3.1.14. *Si G es un grupo paratopológico 2-oscilante, entonces $\{UU^{-1}U : U \in \beta_e\}$ es una base local de e en G_* .*

Demostración. Sea $O \in \tau_*$ tal que $e \in O$. Como G es 2-oscilante, existen $U, V \in \beta_e$ tales que

$$VV^{-1}V \subseteq (VV^{-1})^2 \subseteq UU^{-1} \subseteq O.$$

Por tanto, $\{UU^{-1}U : U \in \beta_e\}$ es una base local de e en G_* . □

Lema 3.1.15. *Si G es un grupo paratopológico 2-oscilante, entonces para cada $U \in \beta_e$ existe $V \in \beta_e$ tal que $V^{-1}V \subseteq UU^{-1}$.*

Demostración. Por el corolario 3.1.14, sabemos que para cada $U \in \beta_e$ existe $V \in \beta_e$ tal que $V^{-1}V \subseteq VV^{-1}V \subseteq UU^{-1}$. □

Siguiendo a I. Guran (ver [7]), se dice que un grupo paratopológico G es **saturado** si, para cualquier vecindad U de la identidad e en G , el conjunto U^{-1} tiene interior no vacío en G . Un ejemplo estándar de grupo paratopológico saturado que no es un grupo topológico es la recta de Sorgenfrey. El siguiente resultado establece que todo grupo paratopológico saturado es 2-oscilante.

Proposición 3.1.16. [7] *La clase de grupos paratopológicos 2-oscilantes contiene a la clase de grupos paratopológicos saturados.*

Demostración. Sean (G, τ) un grupo paratopológico saturado y β_* una base local simétrica de e en G_* . Sean $U, V \in \beta_*$ tales que $V^2 \subseteq U$. Notemos que $V \in \tau$. En consecuencia, podemos encontrar $W \in \beta_e$ tal que $W \subseteq V$. Note que $WW^{-1} \subseteq V^2 \subseteq U$. Entonces $\{WW^{-1} : W \in \beta_e\}$ es una base local de e en G_* . Concluimos que G es un grupo paratopológico 2-oscilante. $\square$

El siguiente lema será de utilidad en el teorema 4.4.2.

Lema 3.1.17. [7, Teorema 3] Si G es un grupo paratopológico 2-oscilante regular, entonces para cada $U \in \beta_e$ existe $V \in \beta_e$ tal que $\overline{V}^{\tau_*} \subseteq U$.

Demostración. Sea U una vecindad de e en G . Como G es regular, podemos suponer que U es cerrado en G . Sea $V \in \beta_e$ tal que $V^3 \subseteq U$. Para demostrar que $\overline{V}^{\tau_*} \subseteq U$, consideremos $x \notin U$. Vamos a demostrar que $x \notin \overline{V}^{\tau_*}$. Como U es cerrado, podemos encontrar $W \in \beta_e$ tal que $xW \cap U = \emptyset$. Además, podemos suponer que $xWx^{-1} \subseteq V$ y $W \subseteq V$. Entonces $Wx^{-1} \subseteq x^{-1}V$. Como G es 2-oscilante por el corolario 3.1.14, podemos encontrar $O \in \beta_e$ tal que $O^{-1}OO^{-1} \subseteq WW^{-1}W$. Note que $xO^{-1}OO^{-1} \in \tau_*$. Veamos que $xOO^{-1}O \cap V = \emptyset$. Supongamos que $xOO^{-1}O \cap V \neq \emptyset$. En consecuencia, $x \in VO^{-1}OO^{-1} \subseteq VWW^{-1}W$. Se sigue que $xW^{-1} \cap VWW^{-1} \neq \emptyset$. Así, $Wx^{-1} \cap WW^{-1}V^{-1} \neq \emptyset$. Entonces, $x^{-1}V \cap WW^{-1}V^{-1} \neq \emptyset$. Luego,

$$V^{-1}x \cap VWW^{-1} \neq \emptyset.$$

De aquí obtenemos lo siguiente $x \in VVWW^{-1} \subseteq V^3W^{-1}$. Por lo que

$$\emptyset \neq xW \cap V^3 \subseteq xW \cap U.$$

Lo que es una contradicción. Por tanto, $xOO^{-1}O \cap V = \emptyset$. Concluimos que $x \notin \overline{V}^{\tau_*}$. Finalmente, $\overline{V}^{\tau_*} \subseteq U$. $\square$

El siguiente resultado describe cómo obtener el grupo reflexión del producto de grupos paratopológicos saturados.

Proposición 3.1.18. [39] Sea $\{G_i : i \in I\}$ una familia de grupos paratopológicos saturados y sea $G = \prod_{i \in I} G_i$. Entonces, el grupo reflexión G_* es topológicamente isomorfo a $\prod_{i \in I} G_{i*}$.

3.2. Grupos casi topológicos

La recta de Sorgenfrey es un ejemplo clásico de un grupo paratopológico que no es un grupo topológico. Además, sabemos que $\mathbb{S}$ tiene las siguientes propiedades:

- $\tau_E \subseteq \tau_S$ y $(\mathbb{R}, \tau_E)$ es un grupo topológico.
- Para cada básico $U = [a, b)$ de $\mathbb{S}$, el conjunto $U \setminus \{a\}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}$.

Con estas propiedades en mente, se define una clase de grupos paratopológicos, **los grupos casi topológicos**.

Definición 3.2.1. [18] Un **grupo casi topológico** es un grupo paratopológico (G, τ) que satisface las siguientes condiciones:

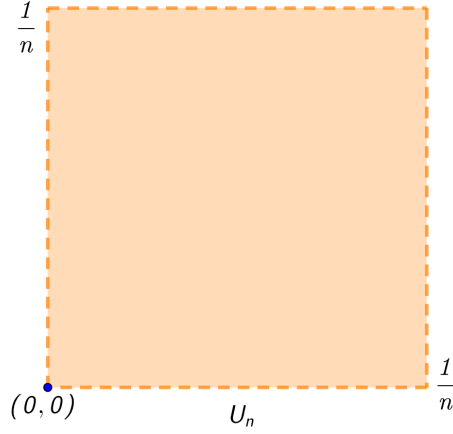
- a) El grupo G admite una topología Hausdorff de grupo topológico $\sigma \subseteq \tau$.
- b) Existe una base local β_e de la identidad e del grupo paratopológico (G, τ) tal que $U \setminus \{e\}$ es abierto en (G, σ) , para cada $U \in \beta_e$.

De la definición 3.2.1, se observa que todo grupo topológico es también un grupo casi topológico. La recta de Sorgenfrey es un ejemplo de un grupo casi topológico que no es un grupo topológico. Sea G un grupo casi topológico. Si G no es un grupo topológico, diremos que G es un **grupo casi topológico propio**. A continuación, presentamos un ejemplo de un grupo casi topológico propio distinto de la recta de Sorgenfrey.

Ejemplo 3.2.2. [8] Consideremos el grupo aditivo $\mathbb{R}^2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos el conjunto:

$$U_n = \{(0, 0)\} \cup \left(0, \frac{1}{n}\right) \times \left(0, \frac{1}{n}\right).$$

La familia $\beta = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisface las condiciones del teorema 3.1.7, por lo que β es una base local en $(0, 0)$ para una topología τ tal que $G = (\mathbb{R}^2, \tau)$ es un grupo paratopológico. Además, G es un grupo casi topológico Hausdorff. Note que para $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\overline{U_n} = [0, \frac{1}{n}] \times [0, \frac{1}{n}]$. Por consiguiente, no existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{U_n} \subseteq U_1$. Por lo tanto, G no es regular T_3 . La topología que satisface el inciso a) de la definición 3.2.1 es la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

Figura 3.1: Básico de e en G .

Los siguientes resultados establecen algunas propiedades de los grupos casi topológicos.

Teorema 3.2.3. *Si H es un subgrupo de un grupo casi topológico G , entonces H es un grupo casi topológico.*

Demostración. Dado que G es un grupo casi topológico, existe una topología $\sigma \subseteq \tau$ tal que $\tilde{G} = (G, \sigma)$ es un grupo topológico Hausdorff. Como H es un subgrupo de G , $\tilde{H} = (H, \sigma|_H)$ es también un grupo topológico Hausdorff y $\sigma|_H \subseteq \tau|_H$. Observemos que la familia $\beta_H(e) = \{U \cap H : U \in \beta_e\}$ forma una base local de e en H . Además, tenemos que:

$$(U \cap H) \setminus \{e\} = (U \setminus \{e\}) \cap H \in \sigma \cap H.$$

Por lo tanto, H es un grupo casi topológico. □

Proposición 3.2.4. [18] *Si G es un grupo casi topológico, entonces G es saturado.*

Demostración. Si G es discreto, entonces G es saturado. Supongamos que G no es discreto. Como G es un grupo casi topológico, existe una topología $\sigma \subseteq \tau$ tal que $\tilde{G} = (G, \sigma)$ es un grupo topológico. Sea $U \in \beta_e$. Dado que G es un grupo casi topológico, se tiene lo siguiente

$$\emptyset \neq U \setminus \{e\} \in \sigma \subseteq \tau.$$

Además, $\emptyset \neq (U \setminus \{e\})^{-1} \in \sigma \subseteq \tau$. Se sigue que $(U \setminus \{e\})^{-1} \subseteq U^{-1}$. Por tanto, $\text{Int}_G(U^{-1}) \neq \emptyset$. Concluimos que G es saturado. $\square$

De las proposiciones 3.1.16 y 3.2.4 se sigue el siguiente resultado.

Corolario 3.2.5. *Cada grupo casi topológico es 2-oscilante.*

El siguiente resultado nos permite identificar la topología σ mencionada en el inciso a) de la definición 3.2.1.

Proposición 3.2.6. *Si G es un grupo casi topológico no discreto, entonces $\sigma = \tau_*$.*

Demostración. Como G es un grupo casi topológico, podemos encontrar una topología $\sigma \subseteq \tau$ tal que (G, σ) es un grupo topológico Hausdorff. Además, existe una base local β_e de la identidad e del grupo paratopológico (G, τ) tal que $U \setminus \{e\}$ es abierto en (G, σ) , para cada $U \in \beta_e$. Por definición del grupo reflexión se tiene que $\sigma \subseteq \tau_* \subseteq \tau$. Ahora demostraremos que $\tau_* \subseteq \sigma$. Por el corolario 3.2.5, sabemos que $\{UU^{-1} : U \in \beta_e\}$ es una base local de e en G_* . Sea $U \in \beta_e$. Mostraremos que $UU^{-1} \in \sigma$ para cada $U \in \beta_e$. Afirmamos que

$$UU^{-1} = (U \setminus \{e\})(U \setminus \{e\})^{-1} \cup (U \setminus \{e\}) \cup (U \setminus \{e\})^{-1}.$$

Es claro que

$$(U \setminus \{e\})(U \setminus \{e\})^{-1} \cup (U \setminus \{e\}) \cup (U \setminus \{e\})^{-1} \subseteq UU^{-1}.$$

Veamos que se cumple la contención contraria. Sea $x \in UU^{-1}$. Si $x = e$, entonces $x = aa^{-1}$ para cada $a \in U \setminus \{e\}$. Se sigue que $x \in (U \setminus \{e\})(U \setminus \{e\})^{-1}$. Si $x \neq e$, dado que $x \in UU^{-1}$, existen $a, b \in U$ tales que $x = ab^{-1}$. Si $a = e$ o $b = e$, entonces $x \in U \setminus \{e\}$ o $x \in (U \setminus \{e\})^{-1}$. Si $a \neq e \neq b$, se sigue que $x \in U \setminus \{e\}(U \setminus \{e\})^{-1}$. Por tanto, se cumple la igualdad deseada. En consecuencia $UU^{-1} \in \sigma$. Concluimos que $\tau_* = \sigma$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que la proposición 3.2.6 no se cumple si G es un grupo topológico discreto.

Ejemplo 3.2.7. Consideremos a $\mathbb{R}$ con la operación usual de suma y dos topologías: la topología discreta $\mathbb{P}(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$ y la topología usual euclidiana τ_E sobre $\mathbb{R}$. Es claro que $\tau_E \subseteq \mathbb{P}(\mathbb{R})$. Además, si tomamos la familia $\beta_e = \{\{0\}\}$,

esta constituye una base local en el neutro 0 para la topología discreta. Note que

$$\sigma = \tau_E \subseteq \tau = \mathbb{P}(\mathbb{R}).$$

Sin embargo, la topología reflexión coincide con la topología discreta, es decir, $\tau_* = \mathbb{P}(\mathbb{R})$, lo cual muestra que $\tau_* \neq \sigma$. Esto contradice la igualdad establecida en la proposición 3.2.6, ilustrando que la hipótesis de que el grupo no sea discreto es esencial para la validez del resultado.

De la proposición 3.2.6, se deduce el siguiente corolario.

Corolario 3.2.8. $\mathbb{S}_* = \mathbb{R}$

La proposición 3.2.6, nos proporciona una definición alternativa de los grupos casi topológicos.

Un grupo paratopológico G es un **grupo casi topológico** si τ_* es Hausdorff y existe una base local β_e de e en G tal que para cada $U \in \beta_e$, se tiene que $U \setminus \{e\} \in \tau_*$.

Por las proposiciones 3.1.16 y 3.2.4, obtenemos las siguientes implicaciones entre las clases de grupos paratopológicos:

$$\text{casi topológicos} \Rightarrow \text{saturados} \Rightarrow \text{2-oscilante}.$$

El recíproco de estas implicaciones no se cumple en general, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.2.9. El grupo paratopológico $\mathbb{S}^2$ es un grupo paratopológico saturado. Sin embargo, $\mathbb{S}^2$ no es un grupo casi topológico.

Demostración. Sabemos que $\mathbb{S}^2$ es un grupo paratopológico aditivo. Una base local de la identidad $(0, 0)$ en $\mathbb{S}^2$ está dada por la familia $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$, donde

$$U_\varepsilon = [0, \varepsilon) \times [0, \varepsilon).$$

Para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $x \in U_\varepsilon^{-1}$ y $\varepsilon_0 > 0$ tales que

$$xU_{\varepsilon_0} \subseteq U_\varepsilon^{-1}.$$

En consecuencia, $\mathbb{S}^2$ es un grupo paratopológico saturado.

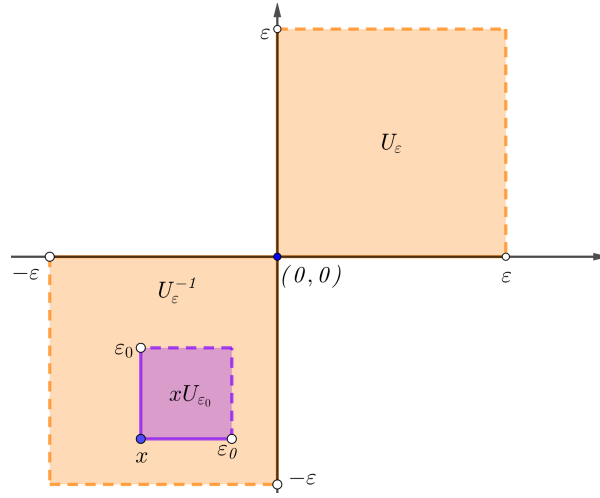


Figura 3.2: $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es una base local de la identidad en $\mathbb{S}^2$.

Por la proposición 3.1.18, podemos concluir que $\mathbb{S}_*^2 = \mathbb{R}^2$. Denotemos por τ la topología del grupo casi topológico del ejemplo 3.2.2 y por τ_S la topología de $\mathbb{S}^2$. Note que $\tau_S \subseteq \tau$ y que $\tau_S \neq \tau$.

Supongamos que $\mathbb{S}^2$ es un grupo casi topológico. Sea β_e la base local de $(0, 0)$ en $\mathbb{S}^2$ que satisface la definición de grupo casi topológico. Note que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $U \in \beta_e$ tal que $U \subseteq U_{\frac{1}{n}}$. Como $U \setminus \{e\}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$, tenemos que

$$U \subseteq \{(0, 0)\} \cup \left(0, \frac{1}{n}\right) \times \left(0, \frac{1}{n}\right).$$

En consecuencia, $\tau \subseteq \tau_S$. Se sigue que $\tau = \tau_S$. Lo que es una contradicción ya que $\tau \neq \tau_S$. Por tanto, $\mathbb{S}^2$ no es un grupo casi topológico. $\square$

El ejemplo 3.2.9 nos permite concluir que la clase de los grupos casi topológicos no es cerrada bajo productos.

A continuación, presentamos más ejemplos de grupos casi topológicos propios.

Ejemplo 3.2.10. Consideremos el grupo multiplicativo

$$\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| = 1\},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$U_n = \left\{ e^{i\theta} : 0 \leq \theta < \frac{1}{n} \right\}.$$

La familia $\beta = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisface las condiciones del teorema 3.1.7, por lo que induce una topología τ en $\mathbb{S}^1$ tal que $G = (\mathbb{S}^1, \tau)$ es un grupo paratopológico. El grupo G es un grupo casi topológico. El grupo reflexión G_* es el grupo círculo con la topología euclidiana usual. Denominamos a G la **circunferencia de Sorgenfrey**.

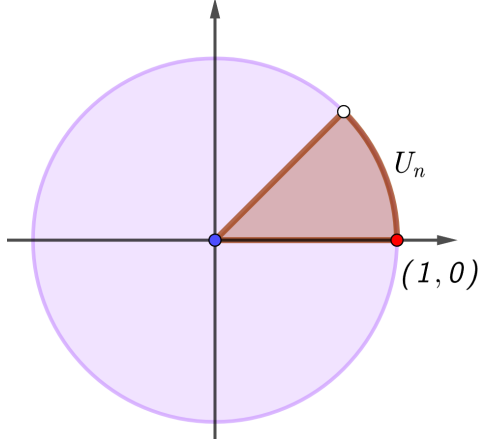
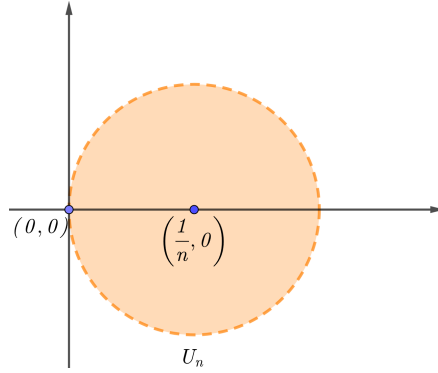


Figura 3.3: Básico de la identidad en la circunferencia de Sorgenfrey.

Ejemplo 3.2.11. [32, Ejemplo 1.2] Consideremos el grupo aditivo $\mathbb{R}^2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$U_n = \{(0, 0)\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + y^2 < \frac{1}{n^2} \right\}.$$

La familia $\beta = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisface las condiciones del teorema 3.1.7, por lo que induce una topología τ en $\mathbb{R}^2$ que convierte a $G = (\mathbb{R}^2, \tau)$ en un grupo paratopológico. Este grupo es además un grupo casi topológico. Su grupo reflexión es $\mathbb{R}^2$ con la topología usual.

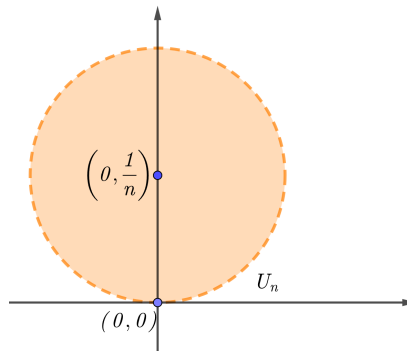
Figura 3.4: Básico de la identidad en G .

Haciendo una pequeña modificación a [32, Ejemplo 1.2], obtenemos el siguiente ejemplo de un grupo casi topológico.

Ejemplo 3.2.12. Consideremos el grupo aditivo $\mathbb{R}^2$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$U_n = \{(0, 0)\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 < \frac{1}{n^2} \right\}.$$

La familia $\beta = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisface las condiciones del teorema 3.1.7, por lo que define una topología τ tal que $G = (\mathbb{R}^2, \tau)$ es un grupo paratopológico. Este grupo es un grupo casi topológico cuya reflexión es nuevamente $\mathbb{R}^2$ con la topología usual.

Figura 3.5: Básico de la identidad en G .

Ejemplo 3.2.13. [4, Ejemplo 35] Consideremos el grupo aditivo $\mathbb{R}^2$. Definimos β como la familia de todos los subconjuntos V de $\mathbb{R}^2$ que contienen al origen $(0, 0)$ y que satisfacen las siguientes condiciones:

- 1) $V \setminus \{(0, 0)\} \in \tau_u$, donde τ_u denota la topología euclidiana de $\mathbb{R}^2$.
- 2) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\{(x, 0) : 0 \leq x \leq \varepsilon\} \subseteq V$.

La familia β satisface las condiciones del teorema 3.1.7, por lo que define una topología τ tal que $G = (\mathbb{R}^2, \tau)$ es un grupo paratopológico. Este grupo es un grupo casi topológico cuya reflexión es nuevamente $\mathbb{R}^2$ con la topología usual.

3.2.1. Grupos-SP

Un grupo paratopológico G se denomina un **grupo-SP** si la cerradura de cada subgrupo de G es nuevamente un subgrupo. Por el teorema 3.1.9, sabemos que todo grupo topológico es un grupo-SP. Sin embargo, como muestra el ejemplo 3.1.10, no todo grupo paratopológico posee esta propiedad. En esta subsección, mostraremos que todo grupo casi topológico es un grupo-SP.

Lema 3.2.14. *Sea $\{(G_i, \tau_i) : i \in \{1, \dots, n\}\}$ una familia de grupos casi topológicos. Sea $\mathcal{R}$ la familia de topologías σ en el producto*

$$G = \prod_{i=1}^n G_i,$$

dadas por las topologías producto de la forma $\prod_{i=1}^n \sigma_i$, donde para cada i , $\sigma_i \in \{\tau_i, \tau_{i}\}$.*

Sea H un subgrupo de G . Supongamos que para toda topología $\sigma \in \mathcal{R}$ que sea estrictamente más débil que $\tau = \prod_{i=1}^n \tau_i$, la cerradura $\overline{H}^\sigma$ de H en (G, σ) es un subgrupo. Entonces, la cerradura $\overline{H}$ de H en (G, τ) también es un subgrupo de G .

Demostración. Es claro que el neutro $e = (e_1, \dots, e_n)$ de G pertenece a $\overline{H}$. Además, como la multiplicación en G es continua, se tiene

$$\overline{H} \overline{H} = \overline{H}.$$

Por tanto, para probar que $\overline{H}$ es un subgrupo basta demostrar que

$$\overline{H} \subseteq \overline{H}^{-1}.$$

Sea $x = (x_1, \dots, x_n) \in \overline{H}$. Consideremos un conjunto básico $U = \prod_{i=1}^n U_i$ en G , donde $U_i \in \beta_{e_i}$ para cada i , y β_{e_i} es la base local de e_i que cumple la condición de grupo casi topológico para (G_i, τ_i) .

Definimos ahora $V = \prod_{i=1}^n V_i$ de la siguiente manera: Si G_i no es grupo topológico, entonces $V_i = U_i$. Si G_i es grupo topológico, tomamos V_i una vecindad abierta simétrica de e_i tal que

$$V_i \subseteq U_i \quad \text{y} \quad x_i V_i x_i^{-1} \subseteq U_i.$$

Claramente, V es una vecindad abierta de e contenida en U . Como x es un elemento de $\overline{H}$ y xV es una vecindad de x en G , existen $v = (v_1, \dots, v_n) \in V$ y $h = (h_1, \dots, h_n) \in H$ tales que

$$xv = h.$$

Caso 1. Si $v = e$. En este caso, $x = h \in H$. Como H es un subgrupo, $x^{-1} \in H \subseteq \overline{H}$. Por tanto, $x \in \overline{H}^{-1}$.

Caso 2. Si $v \neq e$. Definimos el conjunto

$$A = \{i \in \{1, \dots, n\} : v_i \neq e_i\}.$$

Construimos una topología $\sigma = \prod_{i=1}^n \sigma_i$ en G dada por:

$$\sigma_i = \begin{cases} \tau_{i*}, & \text{si } i \in A, \\ \tau_i, & \text{si } i \notin A. \end{cases}$$

Claramente, $\sigma \subseteq \tau$ y $\sigma \in \mathcal{R}$.

- Supongamos primero que σ es estrictamente más débil que τ . Definimos el conjunto

$$O = \prod_{i=1}^n O_i, \quad \text{donde } O_i = \begin{cases} V_i \setminus \{e_i\}, & \text{si } i \in A, \\ V_i, & \text{si } i \notin A. \end{cases}$$

Note que $O \in \sigma$ y $v \in O$. Además, Oh^{-1} es una vecindad de x^{-1} en (G, σ) . Como $x \in \overline{H} \subseteq \overline{H}^\sigma$ y por hipótesis $\overline{H}^\sigma$ es un subgrupo, tenemos que x^{-1} es un elemento de $\overline{H}^\sigma$. Por tanto,

$$Oh^{-1} \cap H \neq \emptyset,$$

lo que implica que $O \cap H \neq \emptyset$. Ahora note que $e \in OH$, el conjunto $x^{-1}OH$ es una vecindad abierta de x^{-1} en (G, σ) . Dado que $x^{-1} \in \overline{H}^\sigma$, se sigue que

$$x^{-1}OH \cap H \neq \emptyset,$$

lo cual equivale a

$$x^{-1}O \cap H \neq \emptyset.$$

Esto implica que

$$\emptyset \neq x^{-1}V \cap H \subseteq x^{-1}U \cap H.$$

Por lo tanto, $x^{-1} \in \overline{H}$.

- Ahora supongamos que la topología $\sigma = \tau$. En este caso, G_i es un grupo topológico para cada $i \in A$.

Consideremos el elemento

$$h^{-1} = (v_1^{-1}x_1^{-1}, \dots, v_n^{-1}x_n^{-1}).$$

Analicemos cada coordenada h_i^{-1} por separado:

- Si $i \notin A$, entonces $v_i = e_i$ y, por tanto,

$$h_i^{-1} = x_i^{-1} \in x_i^{-1}U_i.$$

- Si $i \in A$, como G_i es un grupo topológico y por la elección de V_i , sabemos que:

1. V_i es simétrica, es decir, $V_i = V_i^{-1}$,
2. $x_i V_i x_i^{-1} \subseteq U_i$.

De esto se sigue que

$$h_i^{-1} = v_i^{-1}x_i^{-1} \in V_i x_i^{-1} \subseteq x_i^{-1}U_i.$$

En consecuencia, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ se cumple que $h_i^{-1} \in x_i^{-1}U_i$. Por lo tanto,

$$h^{-1} \in x^{-1}U = \prod_{i=1}^n x_i^{-1}U_i.$$

Como $h \in H$, se tiene que $h^{-1} \in x^{-1}U \cap H$. Esto implica que

$$x^{-1}U \cap H \neq \emptyset,$$

y, por tanto, $x^{-1} \in \overline{H}$. Hemos demostrado que $x^{-1} \in \overline{H}$. Combinando esto con el hecho de que $\overline{H}\overline{H} = \overline{H}$, concluimos que $\overline{H}$ es un subgrupo de G . $\square$

Proposición 3.2.15. *Si H es un subgrupo de un grupo casi topológico G . Entonces, $\overline{H}$ es subgrupo de G .*

Demostración. Se sigue del lema 3.2.14. □

Además, se tiene el siguiente resultado general sobre productos arbitrarios de grupos casi topológicos.

Teorema 3.2.16. [18, Teorema 3.7] Sea $\{G_i\}_{i \in I}$ una familia de grupos casi topológicos. Denotemos por $G = \prod_{i \in I} G_i$. Entonces la cerradura de cualquier subgrupo de G es un subgrupo de G .

Capítulo 4

Topologías de Hattori en grupos casi topológicos

Comenzamos este capítulo presentando el problema que motivó el desarrollo de este trabajo. En el Capítulo 2, estudiamos cómo Hattori, en [20], define una familia de topologías $\{\tau(A) : A \subseteq \mathbb{R}\}$ sobre $\mathbb{R}$, donde el mínimo con respecto a la inclusión es la topología euclidiana τ_E y el máximo es la topología de Sorgenfrey τ_S .

Posteriormente, en el Capítulo 3, analizamos la relación entre las topologías τ_E y τ_S desde el punto de vista de los grupos casi topológicos. Observamos que $\mathbb{S}_* = \mathbb{R}$. Esta observación sugiere una conexión natural entre las topologías de Hattori y los grupos casi topológicos.

Entonces, Hattori introduce una familia de topologías que se sitúan entre la topología original de un grupo casi topológico y la topología de su grupo reflexión. A partir de estas ideas, surge de manera natural el siguiente problema:

Problema 1. *Extender las topologías definidas por Hattori en $\mathbb{R}$ a un grupo casi topológico arbitrario G .*

En este capítulo abordamos dicho problema: generalizamos las topologías introducidas por Hattori en la recta real al contexto de grupos casi topológicos y analizamos el comportamiento de diversas propiedades topológicas dentro de esta nueva clase de espacios, que denominamos **espacios de Hattori en grupos casi topológicos**.

4.1. Topologías de Hattori en grupos casi topológicos

Sean (G, τ) un grupo casi topológico y β_e una base local de la identidad en G que satisface el inciso b) de la definición 3.2.1. Por el corolario 3.2.5, sabemos que $\{UU^{-1} : U \in \beta_e\}$ es una base local de la identidad en G_* . Para cada $x \in G$, definimos:

- $\beta_x = \{Ux : U \in \beta_e\}$, una base local de x en G .
- $\beta'_x = \{UU^{-1}x : U \in \beta_e\}$, una base local de x en G_* .

Dado un subconjunto A de G , consideremos la colección

$$\{\beta(x) : x \in G\},$$

donde

$$\beta(x) = \begin{cases} \beta'_x, & \text{si } x \in A. \\ \beta_x, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

A continuación se muestra que esta colección constituye una base de una topología $\tau(A)$ en G .

Teorema 4.1.1. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico G . Entonces, $\{\beta(x) : x \in G\}$ es un sistema de vecindades que define una topología Hausdorff $\tau(A)$ en G . Además, $\tau_* \subseteq \tau(A)$.*

Demostración. Veamos que la familia $\{\beta(x) : x \in G\}$ satisface las condiciones del teorema 1.1.3, para concluir que $\{\beta(x) : x \in G\}$ es un sistema de vecindades.

- i) Para cada $x \in G$ y $U \in \beta_e$, se cumple que $x \in Ux \subseteq UU^{-1}x$.
- ii) Si $x \in G$, para cada $U, V \in \beta_e$ existe $W \in \beta_e$ tal que $W \subseteq U \cap V$. Entonces, $Wx \subseteq Ux \cap Vx$ y $WW^{-1}x \subseteq UU^{-1}x \cap VV^{-1}x$.
- iii) Sean $x \in G$ y $y \in P \in \beta(x)$. Mostraremos que existe $O \in \beta(y)$ tal que $O \subseteq P$.

Caso I) Si $x \notin A$, entonces $P = Ux$ para algún $U \in \beta_e$.

4.1. TOPOLOGÍAS DE HATTORI EN GRUPOS CASI TOPOLÓGICOS 59

- a) Si $y \notin A$, por el teorema 3.1.7, podemos encontrar $V \in \beta_e$ tal que $Vy \subseteq Ux = P$. Note que $O = Vy \in \beta(y)$.
- b) $y \in A$. Note que $y = ux$ para algún $u \in U$. Se sigue que $yx^{-1} = u \in U$. Como $x \notin A$, se tiene que $yx^{-1} \in U \setminus \{e\} \in \tau_*$. Entonces existe $W \in \beta_e$ tal que

$$WW^{-1}yx^{-1} \subseteq U \setminus \{e\} \subseteq U,$$

por lo que

$$WW^{-1}y \subseteq Ux.$$

En este caso, podemos observar que $O = WW^{-1}y \in \beta(y)$.

Caso II) Si $x \in A$, entonces $P = UU^{-1}x$ para algún $U \in \beta_e$.

- a) Si $y \in A$, por las condiciones de Pontryagin de grupos topológicos podemos encontrar $V \in \beta_e$ tal que $VV^{-1}y \subseteq UU^{-1}x = P$. Note que $O = VV^{-1}y \in \beta(y)$.
- b) $y \notin A$. Note que $y = u_1u_2x$, donde $u_1 \in U$ y $u_2 \in U^{-1}$. Como $yx^{-1} = u_1u_2 \in UU^{-1}$, existe $W \in \beta_e$ tal que $WW^{-1}yx^{-1} \subseteq UU^{-1}$. Así

$$Wy \subseteq WW^{-1}y \subseteq UU^{-1}x.$$

En este caso obtenemos que $O = WW^{-1}y \in \beta(y)$.

De i), ii) y iii) podemos concluir que $\{\beta(x) : x \in G\}$ es un sistema de vecindades para una topología $\tau(A)$ en G .

Afirmamos que $\tau_* \subseteq \tau(A)$ para cada subconjunto A de G .

Sean $U \in \tau_*$ y $x \in U$. Note que $U \in \tau$. Si $x \notin A$, existe $V \in \beta_e$ tal que $Vx \subseteq U$. Si $x \in A$, existe $V \in \beta_e$ tal que $VV^{-1}x \subseteq U$. Podemos concluir que $\tau_* \subseteq \tau(A)$ para cada subconjunto A de G . Por tanto, $\tau(A)$ es una topología Hausdorff en G . $\square$

La topología $\tau(A)$ del teorema 4.1.1 se ha definido utilizando bases locales generadas por la traslación derecha en G y en G_* . A continuación, consideraremos bases locales generadas por la traslación izquierda, lo que nos permitirá definir una topología $\tau(A)_L$ en G . Consideremos un subconjunto A de G y $x \in G$. Entonces,

- ${}_x\beta = \{xU : U \in \beta_e\}$, base local de x en G .

- ${}_x\beta' = \{xUU^{-1} : U \in \beta_e\}$, base local de x en G_* .

Entonces, definimos:

$$\beta(x)_\mathcal{L} = \begin{cases} {}_x\beta', & \text{si } x \in A. \\ {}_x\beta, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

El siguiente teorema garantiza la existencia de la topología $\tau(A)_\mathcal{L}$ en G . La demostración es análoga al teorema 4.1.1.

Teorema 4.1.2. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico G . Entonces, $\{\beta(x)_\mathcal{L} : x \in G\}$ es un sistema de vecindades para una topología Hausdorff $\tau(A)_\mathcal{L}$ en G .*

Por el inciso iii) del teorema 3.1.7, obtenemos el siguiente resultado.

Proposición 4.1.3. *Si A es un subconjunto de un grupo casi topológico G , se cumple que $\tau(A) = \tau(A)_\mathcal{L}$.*

La proposición 4.1.3 establece que las topologías definidas a partir de las bases locales generadas por las traslaciones derecha e izquierda coinciden. Denotaremos al espacio topológico $(G, \tau(A))$ como $H(A, G)$, y lo llamaremos el **espacio de Hattori de G asociado a A** . Cuando no haya riesgo de confusión sobre el grupo casi topológico en el que estemos trabajando, simplificaremos la notación y denotaremos este espacio simplemente como $H(A)$. Con esta definición, podemos obtener las topologías propuestas por Hattori en $\mathbb{R}$, al considerar la recta de Sorgenfrey $\mathbb{S}$ como el grupo casi topológico.

Con lo hecho anteriormente, obtenemos una familia $\mathcal{H} = \{\tau(A) : A \subseteq G\}$ de topologías en G . Note que si G es un grupo topológico, entonces

$$\tau_* = \tau(A) = \tau$$

para cada subconjunto A de G . Además, se cumplen las siguientes igualdades: $\tau(G) = \tau_*$ y $\tau(\emptyset) = \tau$.

Por la proposición 3.2.4, sabemos que todo grupo casi topológico es un grupo paratopológico saturado. Sin embargo, el ejemplo 3.2.9 muestra que existen grupos paratopológicos saturados que no son grupos casi topológicos. Esto plantea una pregunta natural: ¿se pueden definir las topologías de Hattori en grupos paratopológicos saturados? La respuesta a esta pregunta es negativa en general, como muestra el siguiente resultado.

4.1. TOPOLOGÍAS DE HATTORI EN GRUPOS CASI TOPOLÓGICOS 61

Proposición 4.1.4. *La colección $\{\beta(x) : x \in G\}$ descrita en el teorema 4.1.1 no siempre genera una topología. En otras palabras, no es posible definir, en general, las topologías de Hattori sobre un grupo paratopológico arbitrario.*

Demostración. Supongamos que es posible definir las topologías de Hattori en cualquier grupo paratopológico, y en particular, en cualquier grupo paratopológico saturado. Consideremos el grupo paratopológico $G = \mathbb{S}^2$. Por el ejemplo 3.2.9, sabemos que G es un grupo paratopológico saturado que no es un grupo casi topológico. Además, su grupo reflexión G_* es $\mathbb{R}^2$ con su topología usual. Sea

$$A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$$

con su respectiva topología de Hattori $\tau(A)$. Consideremos el punto $x = (0, \sqrt{2})$. Nótese que $x \notin A$. Definamos el conjunto

$$U = [0, 5) \times [\sqrt{2}, \sqrt{2} + 5),$$

el cual cumple que $x \in U$. De acuerdo con la construcción de $\tau(A)$, se tendría que $U \in \tau(A)$. Sin embargo, observemos que el punto $q = (0, 3)$ también pertenece a U . Si U fuera abierto en $\tau(A)$, debería existir un conjunto básico $V \in \tau_*$ tal que $q \in V \subseteq U$.

No obstante, como se aprecia en la Figura 4.1, tal conjunto V no puede existir. Esto se debe a que en la topología τ_* los abiertos alrededor de q tienen cierta forma que impide su contención completa en U . Si V es una vecindad de radio ε de q , el punto $y = (-\frac{\varepsilon}{2}, 3)$ pertenece a V pero no a U , ya que U solo contiene puntos con primera coordenada no negativa.

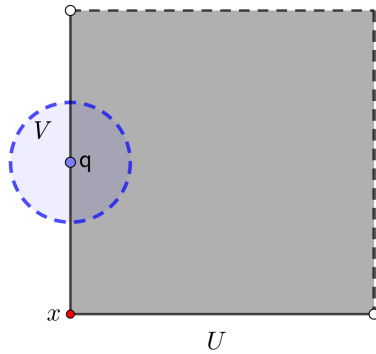


Figura 4.1: El conjunto U es abierto en $H(A)$. El punto $q \in U$, pero no existe un básico $V \in \tau_*$ tal que $q \in V \subseteq U$.

Por lo tanto, U no puede ser un abierto en $\tau(A)$, lo que contradice la hipótesis de que $\tau(A)$ es una topología. En consecuencia, concluimos que no siempre es posible definir las topologías de Hattori sobre un grupo paratopológico arbitrario. $\square$

Así, si G es un grupo casi topológico, entonces podemos definir los espacios de Hattori $H(A)$ para cualquier subconjunto A de G . Por otro lado, por la proposición 4.1.4, las topologías de Hattori no se pueden definir en grupos paratopológicos arbitrarios. Esto sugiere la siguiente pregunta: ¿pueden las topologías de Hattori caracterizar a los grupos casi topológicos? La respuesta a esta pregunta es afirmativa. Es decir, los grupos casi topológicos se pueden caracterizar precisamente por la existencia de topologías de Hattori.

Sean G un grupo paratopológico, β_e y β'_e bases locales de la identidad de G y G_* , respectivamente. Para cada $x \in G$, definimos:

- $\beta_x = \{Ux : U \in \beta_e\}$, base local de x en G .
- $\beta'_x = \{Ux : U \in \beta'_e\}$, base local de x en G_* .

Para cada subconjunto A de G , consideremos la colección

$$\beta_A = \{\beta(x) : x \in G\},$$

donde

$$\beta(x) = \begin{cases} \beta'_x, & \text{si } x \in A. \\ \beta_x, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Teorema 4.1.5. *Si G es un grupo paratopológico tal que para cada subconjunto A de G , la familia β_A es un sistema de vecindades que define una topología Hausdorff $\tau(A)$ en G , entonces G es un grupo casi topológico.*

Demostración. Primero, notemos que $\tau(G) = \tau_*$ y $\tau(\emptyset) = \tau$. Así, G admite una topología Hausdorff de grupo topológico, con $\tau_* \subseteq \tau$. Si consideramos $A = G \setminus \{e\}$, obtenemos la topología de Hausdorff $\tau(A)$. Dado que $e \notin A$, se tiene que $U \in \tau(A)$, para cada $U \in \beta_e$. En consecuencia, $U \setminus \{e\} \in \tau(A)$. Afirmamos que $U \setminus \{e\} \in \tau_*$. En efecto, sea $x \in U \setminus \{e\}$. Note que $x \neq e$, así $x \in A$. Entonces, para cada $V \in \beta'_e$, se tiene que $Vx \subseteq U \setminus \{e\}$. Concluimos que $U \setminus \{e\} \in \tau_*$. Por tanto, G es un grupo casi topológico. $\square$

4.1. TOPOLOGÍAS DE HATTORI EN GRUPOS CASI TOPOLÓGICOS 63

De los teoremas 4.1.1 y 4.1.5, se obtiene la siguiente caracterización de los grupos casi topológicos.

Corolario 4.1.6. *Sea G un grupo paratopológico. Entonces, G es un grupo casi topológico si y sólo si para cada subconjunto A de G , la familia β_A es un sistema de vecindades para una topología Hausdorff $\tau(A)$ en G .*

El siguiente ejemplo ilustra visualmente cómo se comportan las vecindades básicas en los espacios de Hattori construidos sobre grupos casi topológicos.

Ejemplo 4.1.7. Sean G el grupo casi topológico como en el ejemplo 3.2.12 y $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$. Entonces, los puntos en el espacio de Hattori $H(A)$ tienen vecindades básicas como sigue:

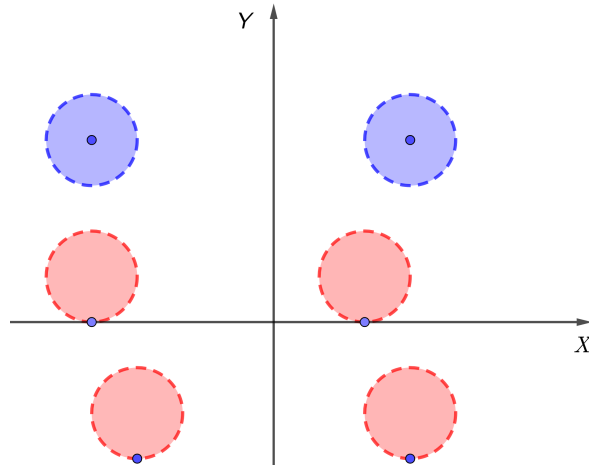


Figura 4.2: Los básicos en color azul son básicos de los puntos de A y los básicos en color rojo son básicos de los puntos de $G \setminus A$.

4.2. Propiedades topológicas básicas en los espacios de Hattori

En esta sección analizamos el comportamiento de las vecindades básicas en los espacios de Hattori. Analizaremos cómo se comportan las topologías relativas a subconjuntos de A y de $G \setminus A$. Estudiaremos algunas propiedades fundamentales de las topologías de Hattori.

Proposición 4.2.1. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico G . Si $U \in \beta_e$, entonces se cumple lo siguiente:*

- $UU^{-1}x \in \tau(A)$, para cada $x \in G$.
- $Ux \in \tau(A)$, para cada $x \in G \setminus A$.

Demostración. Primero demostraremos que $UU^{-1}x \in \tau(A)$. Sea $y \in UU^{-1}x$. Note que $y = ab^{-1}x$ con $a, b \in U$. Se sigue que $yx^{-1} = ab^{-1} \in UU^{-1}$. Por las condiciones de Pontryagin, existe $V \in \beta_e$ tal que $VV^{-1}yx^{-1} \subseteq UU^{-1}$. De ello se sigue que

$$Vy \subseteq VV^{-1}y \subseteq UU^{-1}x.$$

En consecuencia, si $y \in A$ se tiene que $VV^{-1}y \subseteq UU^{-1}x$. Si $y \notin A$, entonces $Vy \subseteq UU^{-1}x$. Por lo tanto, en ambos casos $UU^{-1}x \in \tau(A)$, para cada $x \in G$.

Ahora, demostraremos que $Ux \in \tau(A)$ para cada $x \in G \setminus A$. Sea $y \in Ux$. Si $y \notin A$, por el teorema 4.1.1 inciso iii), Caso I) a), existe $V \in \beta_e$ tal que $Vy \subseteq Ux$. Si $y \in A$, por el teorema 4.1.1 inciso iii), Caso I) b), existe $V \in \beta_e$ tal que $VV^{-1}y \subseteq Ux$. Por lo tanto, $Ux \in \tau(A)$, para cada $x \in G \setminus A$. $\square$

De la proposición 4.2.1, podemos obtener una base $\beta(A)$ para $\tau(A)$.

Corolario 4.2.2. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico G . Entonces, la familia*

$$\beta(A) = \{UU^{-1}x : x \in A, U \in \beta_e\} \cup \{Ux : x \in G \setminus A, U \in \beta_e\},$$

es una base para $\tau(A)$.

El siguiente resultado generaliza la proposición 2.1.3.

Proposición 4.2.3. *Si A y B son subconjuntos de un grupo casi topológico propio G , entonces $\tau(A) \subseteq \tau(B)$ si y sólo si $B \subseteq A$.*

4.2. PROPIEDADES TOPOLÓGICAS BÁSICAS EN LOS ESPACIOS DE HATTORI 65

Demostración. Supongamos que $\tau(A) \subseteq \tau(B)$ y demostraremos que $B \subseteq A$. Sea $x \in B$. Si $x \notin A$, por la proposición 4.2.1, tenemos que para cada $V \in \beta_e$, $Vx \in \tau(A) \subseteq \tau(B)$. Como $x \in B$, existe $W \in \beta_e$ tal que $WW^{-1}x \subseteq Vx$, lo que implica que $WW^{-1} \subseteq V$. Esto es una contradicción, ya que G no es un grupo topológico. Concluimos que $x \in A$.

Ahora, supongamos que $B \subseteq A$ y probemos que $\tau(A) \subseteq \tau(B)$. Por el corolario 4.2.2, tenemos que

$$\beta(A) = \{UU^{-1}x : x \in A, U \in \beta_e\} \cup \{Ux : x \in G \setminus A, U \in \beta_e\}$$

es una base para $\tau(A)$ y

$$\beta(B) = \{UU^{-1}x : x \in B, U \in \beta_e\} \cup \{Ux : x \in G \setminus B, U \in \beta_e\}$$

es una base para $\tau(B)$. Sean $U \in \beta_e$ y $x \in G$.

- i) Si $x \notin A$, note que $x \notin B$. En consecuencia, si $x \notin A$, se sigue que $Ux \in \beta(B)$.
- ii) Si $x \in A \cap B$, entonces $UU^{-1}x \in \beta(B)$.
- iii) Si $x \in A \cap (G \setminus B)$, note que $Ux \subseteq UU^{-1}x$ y $Ux \in \beta(B)$.

De i), ii) y iii) podemos concluir que $\tau(B) \subseteq \tau(A)$, por el teorema 1.1.10. $\square$

La proposición siguiente describe cómo se comportan las topologías relativas inducidas por $\tau(A)$ sobre los subconjuntos A y $G \setminus A$. Además, generaliza el lema 2.1.1.

Proposición 4.2.4. Sean A , B y C subconjuntos de un grupo casi topológico G tales que $B \subseteq A$ y $C \subseteq G \setminus A$. Entonces,

$$\tau(A)|_B = \tau_*|_B, \text{ y } \tau(A)|_C = \tau|_C.$$

Demostración. Es claro que $\tau_*|_B \subseteq \tau(A)|_B$. Demostremos que se cumple la contención contraria. Si $x \in B$, entonces $(WW^{-1}x \cap B) \in \tau_*|_B$, para cada $W \in \beta_e$. Se sigue que $\tau(A)|_B = \tau_*|_B$.

Por otro lado, es claro que $\tau(A)|_C \subseteq \tau|_C$. Probemos que se cumple la contención contraria. Sea $U \in \tau|_C$. Para cada $x \in U$, existe $W \in \beta_e$ tal que $Wx \cap C \subseteq U$. Concluimos que $\tau(A)|_C = \tau|_C$. $\square$

A continuación, presentamos algunas consecuencias inmediatas del resultado anterior.

Corolario 4.2.5. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico G .*

- *Si A es un subgrupo de G , entonces $(A, \tau(A)|_A)$ es un grupo topológico.*
- *Si $C = G \setminus A$ es un subgrupo de G , entonces $(C, \tau(A)|_C)$ es un grupo paratopológico.*

El siguiente resultado se deduce también de la proposición 4.2.4.

Proposición 4.2.6. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico G . Si B es un subconjunto compacto de A en G_* , entonces B es compacto en $H(A)$.*

4.3. Retícula de Hattori

Dado un grupo casi topológico propio (G, τ) , por el teorema 4.1.1, obtenemos una familia de topologías por

$$\mathcal{H}(G) = \{\tau(A) : A \subseteq G\}.$$

Definimos un orden parcial $\leq$ en $\mathcal{H}(G)$ mediante la inclusión: para $\tau(A), \tau(B) \in \mathcal{H}$, decimos que $\tau(A) \leq \tau(B)$ si, y sólo si, $\tau(A) \subseteq \tau(B)$. A continuación, mostraremos que $(\mathcal{H}(G), \leq)$ forma una retícula. Para ello, utilizaremos el siguiente lema.

Lema 4.3.1. *Si S es un subconjunto no vacío de $\mathcal{H}(G)$, entonces existen $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{H}(G)$ tales que $\vee S = \tau_1$ y $\wedge S = \tau_2$.*

Demostración. Dado que S es un subconjunto no vacío de $\mathcal{H}(G)$, existe una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de subconjuntos de G tal que $S = \{\tau(A_i) : A_i \subseteq G, i \in I\}$. Consideremos los conjuntos

$$A = \bigcap_{i \in I} A_i \text{ y } B = \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Como A y B son subconjuntos de G , las topologías $\tau(A)$ y $\tau(B)$ son elementos de $\mathcal{H}(G)$.

Para cada $i \in I$, se tiene que

$$A \subseteq A_i \subseteq B.$$

Por la proposición 4.2.3, se deduce que

$$\tau(A_i) \subseteq \tau(A) \text{ y } \tau(B) \subseteq \tau(A_i).$$

En consecuencia, $\tau(A)$ es una cota superior de S y $\tau(B)$ es una cota inferior de S . Supongamos ahora que $\tau(C)$ es una cota superior de S , es decir, $\tau(A_i) \subseteq \tau(C)$ para cada $i \in I$. Por la proposición 4.2.3, se deduce que $C \subseteq A_i$ para cada $i \in I$, es decir, $C \subseteq A$. Por tanto, $\tau(A) \subseteq \tau(C)$, lo cual prueba que $\tau(A)$ es la mínima cota superior (supremo) de S .

Análogamente, si $\tau(D)$ es una cota inferior de S , entonces $A_i \subseteq D$ para todo $i \in I$, lo cual implica que $B \subseteq D$. Por tanto, $\tau(D) \subseteq \tau(B)$, y $\tau(B)$ es la mayor cota inferior (ínfimo) de S .

Podemos concluir que

$$\bigvee S = \tau \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \text{ y } \bigwedge S = \tau \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right).$$

Denotaremos por τ_1 a $\tau \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right)$ y por τ_2 a $\tau \left(\bigcup_{i \in I} A_i \right)$. □

Del lema 4.3.1, podemos concluir el siguiente resultado.

Teorema 4.3.2. *Si G es un grupo casi topológico, entonces $(\mathcal{H}(G), \leq)$ es una retícula completa.*

4.4. Axiomas de separación

Los axiomas de separación son fundamentales en el estudio de los grupos paratopológicos. Se sabe que todo grupo topológico T_0 es completamente regular. Lo que implica que en grupos topológicos se cumple lo siguiente:

$$T_0 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}.$$

Es importante destacar que estas implicaciones son falsas en espacios topológicos generales, como lo vimos en el Capítulo 1. En el caso de los grupos paratopológicos, el comportamiento de los axiomas de separación es diferente

al que se presenta en la categoría de los grupos topológicos. Por ejemplo, si consideremos el grupo G presentado en el ejemplo 3.2.2, podemos observar que G es Hausdorff, pero no es regular. De hecho, en grupos paratopológicos se tiene que:

$$T_0 \not\Rightarrow T_1 \not\Rightarrow T_2 \not\Rightarrow T_3.$$

Durante aproximadamente 60 años permaneció abierto el problema de determinar si la implicación:

$$T_3 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$$

era válida en la categoría de grupos paratopológicos. Sorprendentemente, Banakh y Ravsky demostraron en [8] que dicha implicación sí es verdadera.

Teorema 4.4.1. [8, Corolario 5] Un grupo paratopológico G es completamente regular si y sólo G es regular.

A continuación, caracterizamos la regularidad en los espacios de Hattori.

Teorema 4.4.2. *Sea G un grupo casi topológico. Entonces, G es regular si y sólo si $H(A)$ es regular para cada subconjunto A de G .*

Demostración. Supongamos que G es regular. Sea A un subconjunto de G . Consideremos U_0 un conjunto abierto no vacío en $H(A)$ y $x \in U_0$.

- Si $x \notin A$, existe $U \in \beta_e$ tal que $Ux \subseteq U_0$. Por el lema 3.1.17 y el corolario 3.2.5, existe $V \in \beta_e$ tal que $\overline{V}^{r*}x \subseteq Ux$. Entonces,

$$x \in Vx \subseteq \overline{Vx}^{\tau(A)} \subseteq \overline{Vx}^{r*} \subseteq Ux \subseteq U_0.$$

- Si $x \in A$, existe $U \in \beta_e$ tal que $UU^{-1}x \subseteq U_0$. Como G_* es Hausdorff, por el teorema 3.1.6, G_* es regular. En consecuencia, existe $V \in \beta_e$ tal que $\overline{VV^{-1}x}^{r*} \subseteq UU^{-1}x$. Entonces,

$$x \in VV^{-1}x \subseteq \overline{VV^{-1}x}^{\tau(A)} \subseteq \overline{VV^{-1}x}^{r*} \subseteq UU^{-1}x \subseteq U_0.$$

Por la proposición 1.1.26, podemos concluir que $H(A)$ es regular.

Recíprocamente, si $H(A)$ es regular para cada subconjunto A de G , entonces en particular $H(\emptyset) = G$ es regular. $\square$

Como consecuencia inmediata, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.4.3. *Un grupo casi topológico G es T_3 si y sólo si $H(A)$ es T_3 para cada subconjunto A de G .*

Ejemplo 4.4.4. Existe un subconjunto A de un grupo casi topológico G no regular tal que $H(A)$ es regular.

Demostración. Consideremos al grupo G como el que se presenta en el ejemplo 3.2.2 y $A = \emptyset$. Sabemos que G no es regular. Sin embargo, $H(G) = G_* = \mathbb{R}^2$ es regular. $\square$

El siguiente resultado nos permite utilizar los espacios de Hattori para determinar si G es regular.

Teorema 4.4.5. *Sea A un subconjunto propio de un grupo casi topológico G . Si $H(A)$ es regular, entonces G es regular.*

Demostración. Dado que A es un subconjunto propio de G , existe $x \in G \setminus A$. Como $H(A)$ es regular, para cada $U \in \beta_e$ existe $V \in \beta_e$ tal que

$$x \in \overline{Vx}^\tau \subseteq \overline{Vx}^{\tau(A)} \subseteq Ux.$$

Como G es homogéneo, podemos concluir que G es regular. $\square$

Por los teoremas 4.4.2 y 4.4.5, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 4.4.6. *Sea A un subconjunto propio de un grupo casi topológico G . Entonces G es regular si y sólo si $H(A)$ es regular.*

Por el teorema 4.4.1, obtenemos lo siguiente:

Corolario 4.4.7. *Sea A un subconjunto propio de un grupo casi topológico G . Si $H(A)$ es Tychonoff, entonces G es Tychonoff.*

Motivados por el teorema 4.4.2 y el corolario 4.4.7, planteamos la siguiente pregunta.

Problema 2. *Sea G un grupo casi topológico Tychonoff. ¿Es cierto que $H(A)$ es Tychonoff para todo subconjunto $A \subseteq G$?*

4.5. Cerradura de subgrupos

En esta sección estudiamos la cerradura de subgrupos en los espacios de Hattori. El objetivo principal es determinar bajo qué condiciones la cerradura en los espacios de Hattori de un subgrupo sigue siendo un subgrupo.

En la siguiente proposición se describe el comportamiento de la cerradura en los espacios de Hattori.

Proposición 4.5.1. *Para cada subconjunto H de G se tiene que*

$$\overline{H}^{\tau(A)} = (\overline{H}^{\tau*} \cap A) \cup (\overline{H}^{\tau} \cap (G \setminus A)).$$

Demostración. Es claro que $\overline{H}^{\tau(A)} \subseteq (\overline{H}^{\tau*} \cap A) \cup (\overline{H}^{\tau} \cap (G \setminus A))$. Veamos la contención contraria. Sea $x \in (\overline{H}^{\tau*} \cap A) \cup (\overline{H}^{\tau} \cap (G \setminus A))$.

- Si $x \in \overline{H}^{\tau*} \cap A$, para cada $U \in \beta_e$ se tiene que $UU^{-1}x \cap H \neq \emptyset$ por lo que $x \in \overline{H}^{\tau(A)}$.
- Si $x \in \overline{H}^{\tau} \cap (G \setminus A)$, se sigue que $x \in \overline{H}^{\tau(A)}$.

Por lo tanto, se satisface la igualdad deseada. □

Sabemos por el teorema 3.1.9 que la cerradura de cualquier subgrupo de un grupo topológico es un subgrupo. Este resultado no se puede extender a grupos paratopológicos, como lo muestra el ejemplo 3.1.10. Sin embargo, sí se extiende a grupos casi topológicos (ver la proposición 3.2.15). Los dos resultados siguientes se derivan de la proposición 4.5.1. En ellos se establecen condiciones bajo las cuales la cerradura de subgrupos en los espacios de Hattori es, nuevamente, un subgrupo.

Corolario 4.5.2. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico G . Si A es cerrado en G_* , para cada subconjunto H de A se tiene que $\overline{H}^{\tau(A)} = \overline{H}^{\tau*}$.*

Corolario 4.5.3. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico G . Si A es abierto en G_* , para cada subconjunto H de $G \setminus A$ se tiene que $\overline{H}^{\tau(A)} = \overline{H}^{\tau}$.*

Corolario 4.5.4. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico G . Si A es cerrado en G_* , entonces $\overline{H}^{\tau(A)}$ es un subgrupo de G para cada subgrupo $H \subseteq A$.*

Corolario 4.5.5. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico G . Si A es abierto en G_* , entonces $\overline{H}^{\tau(A)}$ es un subgrupo para cada subgrupo H contenido en $G \setminus A$.*

El siguiente ejemplo muestra que la cerradura de subgrupos en los espacios de Hattori no siempre vuelve a ser un subgrupo. Además, ilustra que las conclusiones de los corolarios 4.5.4 y 4.5.5 no se cumplen si A solo es abierto o cerrado en G .

Ejemplo 4.5.6. Sea G el grupo casi topológico como en el ejemplo 3.2.11. Primero, consideremos

$$A = \{0\} \times (\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}) \subseteq G$$

y $H = \{0\} \times \mathbb{Q}$. Note que A es un subconjunto cerrado y discreto en G y $H \subseteq A$. Tenemos que $\overline{H}^\tau = H$ y $\overline{H}^{\tau*} = \{0\} \times \mathbb{R}$. De la proposición 4.5.1 se sigue que:

$$\overline{H}^\tau \subseteq H \cup \{(0, \sqrt{2})\} = \overline{H}^{\tau(A)}.$$

Consecuentemente, $\overline{H}^{\tau(A)}$ no es un subgrupo de G , pues $(0, -\sqrt{2}) \notin \overline{H}^{\tau(A)}$. Ahora, consideremos $B = G \setminus (\{0\} \times (\mathbb{Q} \cup \{2\sqrt{2}\}))$ y $H = \{0\} \times \mathbb{Q}$. Note que B es un abierto en G y $H \subseteq G \setminus B$. De la proposición 4.5.1 se deduce que

$$\overline{H}^{\tau(B)} = \{0\} \times (\mathbb{R} \setminus \{2\sqrt{2}\}).$$

Luego $\overline{H}^{\tau(B)}$ no es un subgrupo de G , pues $(0, -2\sqrt{2}) \in \overline{H}^{\tau(B)}$, sin embargo $(0, 2\sqrt{2}) \notin \overline{H}^{\tau(B)}$. $\square$

El siguiente resultado también presenta condiciones bajo las cuales la cerradura de subgrupos en el espacio de Hattori $H(A)$ de grupos casi topológicos es nuevamente un subgrupo.

Proposición 4.5.7. *Sea H un subgrupo de un grupo casi topológico G . Si $A = H$ o $A = G \setminus H$, entonces $\overline{H}^{\tau(A)}$ es un subgrupo de G .*

Demostración. Primero supongamos que $A = H$. Por la proposición 4.5.1, tenemos que

$$\overline{H}^{\tau(A)} = H \cup (\overline{H}^\tau \cap (G \setminus H)) = \overline{H}^\tau.$$

Por la proposición 3.2.15, tenemos que $\overline{H}^{\tau(A)}$ es un subgrupo de G . Ahora mostraremos el teorema para $A = G \setminus H$. Por la proposición 4.5.1, tenemos que

$$\overline{H}^{\tau(A)} = \left(\overline{H}^{\tau_*} \cap (G \setminus H) \right) \cup H = \overline{H}^{\tau_*}.$$

Note que $\overline{H}^{\tau_*}$ es un subgrupo de G . Por lo tanto, si $A = H$ o $A = G \setminus H$, concluimos que $\overline{H}^{\tau(A)}$ es un subgrupo de G . $\square$

El siguiente teorema generaliza este comportamiento al producto de grupos casi topológicos.

Teorema 4.5.8. *Sea $\{(G_i, \tau_i) : i \in I\}$ una familia de grupos casi topológicos tales que $A_i \in \tau_{i*}$, $\tau = \prod_{i \in I} \tau_i$, $\tau_* = \prod_{i \in I} \tau_{i*}$, y $\tau(A) = \prod_{i \in I} \tau_i(A_i)$ donde $A = \prod_{i \in I} A_i$. Si H es un subgrupo de $G = \prod_{i \in I} G_i$ tal que $H \subseteq \prod_{i \in I} (G_i \setminus A_i)$, entonces $\overline{H}^{\tau(A)}$ es un subgrupo de G .*

Demostración. Como $\tau_* \subseteq \tau(A) \subseteq \tau$, tenemos que

$$\overline{H}^{\tau} \subseteq \overline{H}^{\tau(A)} \subseteq \overline{H}^{\tau_*} \subseteq \prod_{i \in I} (G_i \setminus A_i).$$

Afirmamos que $\overline{H}^{\tau} = \overline{H}^{\tau(A)}$. En efecto, sea $x = (x_i)_{i \in I} \in \overline{H}^{\tau(A)}$ y un conjunto abierto básico $U = \prod_{i \in I} U_i$ en τ tal que $x \in U$. Observe que si $U_i \neq G_i$, entonces $U_i = V_i x_i \in \tau_i(A_i)$ para algún $V_i \in \beta_{e_i}$, ya que $x_i \notin A_i$, para toda $i \in I$. Entonces, $U \in \tau(A)$. Por lo que $U \cap H \neq \emptyset$. Entonces $x \in \overline{H}^{\tau}$. Por lo tanto, $\overline{H}^{\tau} = \overline{H}^{\tau(A)}$ y por el teorema 3.2.16 podemos concluir que $\overline{H}^{\tau(A)}$ es un subgrupo de G . $\square$

Teorema 4.5.9. *Sea $\{(G_i, \tau_i) : i \in I\}$ una familia de grupos casi topológicos tales que $(G_i \setminus A_i) \in \tau_{i*}$, $\tau = \prod_{i \in I} \tau_i$, $\tau(A) = \prod_{i \in I} \tau_i(A_i)$ donde $A = \prod_{i \in I} A_i$ y $\tau_* = \prod_{i \in I} \tau_{i*}$. Si H es un subgrupo de $G = \prod_{i \in I} G_i$ y $H \subseteq \prod_{i \in I} A_i$, entonces $\overline{H}^{\tau(A)}$ es un subgrupo de G .*

Demostración. Dado que $\tau_* \subseteq \tau(A) \subseteq \tau$, tenemos que

$$\overline{H}^{\tau} \subseteq \overline{H}^{\tau(A)} \subseteq \overline{H}^{\tau_*} \subseteq \prod_{i \in I} A_i.$$

Afirmamos que $\overline{H}^{\tau_*} = \overline{H}^{\tau(A)}$. En efecto, consideremos $x = (x_i)_{i \in I} \in \overline{H}^{\tau_*}$ y un abierto básico $U = \prod_{i \in I} U_i$ en $\tau(A)$ tal que $x \in U$. Observe que si $U_i \neq G_i$,

entonces $U_i = V_i V_i^{-1} x_i \in \tau_i$ para alguna $V_i \in \beta_{e_i}$, ya que $x_i \in A_i$, para toda $i \in I$. Entonces, $U \in \tau_*$. Por lo que $U \cap H \neq \emptyset$. En consecuencia, $x \in \overline{H}^{\tau(A)}$. Por lo tanto, $\overline{H}^{\tau_*} = \overline{H}^{\tau(A)}$. Por el teorema 3.1.9, concluimos que $\overline{H}^{\tau(A)}$ es un subgrupo de G . $\square$

4.6. Funciones cardinales

En la Sección 8 del Capítulo 1, se abordaron brevemente las funciones cardinales en espacios topológicos generales. En esta sección, nos centraremos en las funciones cardinales en los espacios de Hattori, dentro del contexto de grupos casi topológicos. Comenzaremos con el estudio de la función de densidad. En grupos casi topológicos se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.6.1. *Si G es un grupo casi topológico, entonces $d(G) = d(G_*)$.*

Demostración. Como la topología de G_* es más débil que la de G , cualquier conjunto denso D en G es también denso en G_* , por lo tanto $d(G_*) \leq d(G)$. Ahora demostremos la desigualdad contraria. Si G es discreto se cumple que $d(G) = d(G_*)$. Supongamos que G no es discreto. Sean D un subconjunto denso en G_* y U un subconjunto abierto no vacío en G . Consideremos $x \in U$. Podemos encontrar $V \in \beta_e$ tal que

$$(V \setminus \{e\})x \subseteq Vx \subseteq U.$$

Como D es denso en G_* , el conjunto $(V \setminus \{e\})x \cap D$ es no vacío. Además, $(V \setminus \{e\})x \cap D \subseteq U \cap D$. Por tanto, D es denso en G . Concluimos que $d(G) = d(G_*)$. $\square$

Como consecuencia del teorema 4.6.1, se deducen los siguientes resultados en los espacios de Hattori.

Proposición 4.6.2. *Sea G un grupo casi topológico. Para cada subconjunto A de G , se tiene que*

$$d(G_*) = d(H(A)) = d(G).$$

Corolario 4.6.3. *Sea G un grupo casi topológico. Para cada subconjunto A de G , se tiene que $H(A)$ es separable si y sólo si G es separable.*

Un espacio topológico X es llamado un **espacio de Baire** si cada intersección de una colección numerable de conjuntos abiertos densos en X también es densa en X . En grupos casi topológicos se tiene el siguiente resultado.

Teorema 4.6.4. [19, Proposición 6.5] Si G es un grupo casi topológico, entonces G es un espacio de Baire si y sólo si G_* es un espacio de Baire.

Como consecuencia, obtenemos la siguiente proposición en los espacios de Hattori.

Proposición 4.6.5. *Sea G un grupo casi topológico. Entonces, para todo subconjunto A de G se tiene que $H(A)$ es un espacio de Baire si y sólo si G es un espacio de Baire.*

Demostración. Sean $C \subseteq G$ y $B \subseteq C$. Por la proposición 4.2.3, $\tau(C) \subseteq \tau(B)$. Supongamos que $H(B)$ es un espacio de Baire. Si O es un subconjunto denso abierto en $\tau(C)$, entonces O es un subconjunto abierto denso en $H(B)$. Como $H(B)$ es un espacio de Baire, podemos concluir que $H(C)$ también es un espacio de Baire. Por tanto, si $H(\emptyset) = G$ es un espacio de Baire, se sigue que $H(A)$ es un espacio de Baire. Similarmente, si $H(A)$ es un espacio de Baire, obtenemos que $H(G) = G_*$ es un espacio de Baire y por la proposición 4.6.4, podemos concluir que G es un espacio de Baire. $\square$

El siguiente teorema nos muestra cómo podemos calcular el carácter en los espacios de Hattori.

Teorema 4.6.6. *Si A es un subconjunto propio de un grupo casi topológico G , entonces $\chi(G) = \chi(H(A))$.*

Demostración. Como $\chi(G_*) \leq \chi(G)$, entonces $\chi(H(A)) \leq \chi(G)$. Veamos que se cumple la desigualdad contraria. Note que $G \setminus A \neq \emptyset$. Consideremos $x \in G \setminus A$. Sea $\mathcal{B}_x$ una base local de x en $H(A)$ tal que $|\mathcal{B}_x| = \chi(H(A)) = \kappa$. Como $\tau(A) \subseteq \tau$, $\mathcal{B}_x$ es una familia de subconjuntos abiertos de G . Afirmamos que $\mathcal{B}_x$ es una base local de x en G . En efecto, si W es una vecindad abierta de x en G , podemos encontrar $V \in \beta_e$ tal que $x \in Vx \subseteq W$. Por la proposición 4.2.1, sabemos que $Vx \in \tau(A)$. Como $\mathcal{B}_x$ una base local de x en $H(A)$, existe $B \in \mathcal{B}_x$ tal que $x \in B \subseteq Vx \subseteq W$. Concluimos que $\mathcal{B}_x$ es una base local de x en G . Como G es homogéneo, se concluye que $\chi(G) \leq \kappa = \chi(H(A))$. Por tanto, $\chi(G) = \chi(H(A))$. $\square$

Corolario 4.6.7. *Sea A un subconjunto propio de un grupo casi topológico G . Entonces G es primero numerable si y sólo si $H(A)$ es primero numerable.*

El siguiente ejemplo muestra que si $A = G$, el teorema 4.6.6 puede ser falso.

Ejemplo 4.6.8. Sea G el grupo casi topológico del ejemplo 3.2.13. Entonces, se tiene lo siguiente

$$\chi(H(G)) = \chi(G_*) = \omega < 2^\omega = \chi(G).$$

La demostración de la igualdad $\omega < 2^\omega = \chi(G)$, se encuentra en [4, Ejemplo 35].

Dado un grupo paratopológico G con topología τ , definimos la topología conjugada τ^{-1} en G por

$$\tau^{-1} = \{U^{-1} : U \in \tau\}.$$

Entonces, $G' = (G, \tau^{-1})$ también es un grupo paratopológico, y la función inversión $x \rightarrow x^{-1}$ es un homeomorfismo de G a G' . La topología $\tau^* = \tau \vee \tau^{-1}$ es una topología en G tal que (G, τ^*) es un grupo topológico y $G^* = (G, \tau^*)$ es llamado **grupo correflexión** de G . Podemos observar que τ^* es la topología más pequeña que vuelve a G un grupo topológico y además, $\tau \subseteq \tau^*$ (ver [35]).

El siguiente resultado nos permite determinar el peso de red en grupos casi topológicos.

Teorema 4.6.9. *Sea G un grupo paratopológico tal que G^* es discreto. Entonces, $nw(H, \tau|_H) = |H| + \omega$, para cada subconjunto H de G .*

Demostración. Si H es finito, el resultado es inmediato. Supongamos que H es infinito. Sea $\mathcal{P}$ una red arbitraria del subespacio H tal que $|\mathcal{P}| = nw(H)$. Por hipótesis, existe $V \in \beta_e$ que satisface que $V \cap V^{-1} = \{e\}$. Para cada $h \in H$, fijemos $P_h \in \mathcal{P}$ que cumple que

$$h \in P_h \subseteq Vh \cap H.$$

Afirmamos que si $x, y \in H$ son tales que $x \neq y$, entonces $P_x \neq P_y$. En efecto, supongamos que $P_x = P_y$. Se sigue que $x \in P_y \subseteq Vy$ y $y \in P_x \subseteq Vx$. Por lo que $xy^{-1} \in V$ y $yx^{-1} \in V$. En consecuencia, $xy^{-1} \in V \cap V^{-1}$. Por la elección de V obtenemos que $x = y$. Lo que es una contradicción y nos demuestra que si $x \neq y$, entonces $P_x \neq P_y$. Podemos concluir que $|H| \leq nw(H)$. Por tanto, $nw(H, \tau|_H) = |H| + \omega$. $\square$

Lema 4.6.10. *Si G es un grupo casi topológico propio, G^* es discreto.*

Demostración. Como G no es un grupo topológico, existe $U \in \beta_e$ tal que $U \cap U^{-1}$ es denso en ninguna parte en G . Como $U \in \beta_e$, los conjuntos $U \setminus \{e\}$ y $U^{-1} \setminus \{e\}$ son abiertos en G^* . Por tanto, $(U \setminus \{e\}) \cap (U^{-1} \setminus \{e\}) = \emptyset$. Se sigue que $U \cap U^{-1} = \{e\}$. Concluimos que G^* es discreto. $\square$

Por el teorema 4.6.9 y el lema 4.6.10 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.6.11. *Sea G un grupo casi topológico propio. Si H es un subconjunto de G , entonces $nw(H, \tau|_H) = |H| + \omega$.*

A continuación, estudiaremos el comportamiento del peso en los espacios de Hattori en grupos casi topológicos. Para ello, recordemos el siguiente resultado que se cumple en grupos topológicos.

Teorema 4.6.12. [6, Teorema 5.2.5] Cada grupo topológico G satisface la siguiente desigualdad:

$$w(G) \leq d(G) \cdot \chi(G).$$

Teorema 4.6.13. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico G . Entonces,*

$$w(H(A)) \leq d(G) \cdot \chi(G) \cdot (|G \setminus A| + \omega).$$

Demostración. Sea $d(G) \cdot \chi(G) \cdot (|G \setminus A| + \omega) = \kappa$. Si $A = \emptyset$, entonces $H(\emptyset) = G$, $|G| + \omega \leq \kappa$ y $\chi(G) \leq \kappa$. Por lo que

$$w(G) \leq \chi(G) \cdot (|G| + \omega) \leq \kappa.$$

Ahora supongamos que $A \neq \emptyset$. Consideremos $|\beta_e| = \chi(G)$. Por hipótesis, tenemos que $\chi(G) \leq \kappa$, $|G \setminus A| + \omega \leq \kappa$. Por el teorema 4.6.12, obtenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$d(A, \tau_*|_A) \leq w(A, \tau_*|_A) \leq w(G_*) \leq d(G_*) \cdot \chi(G_*) \leq d(G) \cdot \chi(G) \leq \kappa.$$

Sea B un subconjunto de A tal que B es denso en el espacio $(A, \tau_*|_A)$ y $|B| + \omega \leq \kappa$. Consideremos la siguiente familia:

$$\beta = \{Wx : x \in G \setminus A, W \in \beta_e\} \cup \{WW^{-1}x : x \in B, W \in \beta_e\}.$$

Note que

$$|\beta| \leq (|G \setminus A| + \omega) \cdot \chi(G) \cdot (|B| + \omega) \leq \kappa.$$

Mostremos que β es una base para $\tau(A)$. En efecto, sea U un subconjunto abierto no vacío en $H(A)$. Tomemos $x \in U$. Si $x \notin A$, existe $W \in \beta_e$ tal que $x \in Wx \subseteq U$. Por otro lado, si $x \in A$, podemos encontrar $V, W \in \beta_e$ tales que $VV^{-1}x \subseteq U$ y $(WW^{-1})^2 \subseteq VV^{-1}$. Note que $\emptyset \neq (WW^{-1}x \cap A) \in \tau_*|_A$. Por lo que $WW^{-1}x \cap A \cap B \neq \emptyset$. Entonces, existe $y \in B$ tal que $y \in WW^{-1}x$, de donde podemos encontrar $a, b \in W$ de forma que $y = ab^{-1}x$. Se sigue que

$$x = ba^{-1}y \in WW^{-1}y \subseteq WW^{-1}WW^{-1}x \subseteq (WW^{-1})^2x \subseteq VV^{-1}x \subseteq U.$$

Podemos concluir que β es una base para $\tau(A)$. Por tanto,

$$w(H(A)) \leq |\beta| + \omega \leq \kappa.$$

□

El siguiente resultado lo obtenemos del teorema 4.6.13.

Corolario 4.6.14. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico G . Si G es primero numerable, separable y $|G \setminus A| \leq \omega$, entonces $H(A)$ es segundo numerable.*

La desigualdad en el teorema 4.6.13 puede ser estricta, si G es como en el ejemplo 3.2.13 y considerando $A = G$. El siguiente resultado nos muestra que se satisface la desigualdad contraria para subconjuntos propios de G .

Teorema 4.6.15. *Sea A un subconjunto propio de un grupo casi topológico propio G . Entonces,*

$$d(G) \cdot \chi(G) \cdot |G \setminus A| \leq w(H(A)).$$

Demostración. Por el teorema 4.6.6, tenemos que $\chi(G) = \chi(H(A)) \leq w(H(A))$. Por la proposición 4.6.2 se tiene que $d(G) = d(H(A)) \leq w(H(A))$. Supongamos que $|G \setminus A| > \kappa = w(H(A))$. Por la proposición 4.2.4, se sigue que $w(G \setminus A, \tau|_{G \setminus A}) \leq \kappa$. Por el corolario 4.6.11, podemos concluir que

$$\kappa < |G \setminus A| = nw(G \setminus A, \tau|_{G \setminus A}) \leq w(G \setminus A, \tau|_{G \setminus A}) \leq \kappa.$$

Lo que es una contradicción. Por tanto, $|G \setminus A| \leq w(H(A))$. Esto completa la demostración. □

De los teoremas 4.6.13 y 4.6.15, obtenemos el siguiente corolario, que nos muestra cómo calcular el peso en los espacios de Hattori.

Corolario 4.6.16. *Sea A un subconjunto propio de un grupo casi topológico propio G . Entonces,*

$$w(H(A)) = d(G) \cdot \chi(G) \cdot |G \setminus A|.$$

Los siguientes resultados se obtienen del corolario 4.6.16.

Corolario 4.6.17. *Sea A un subconjunto propio de un grupo casi topológico propio G . Entonces $H(A)$ es segundo numerable si y sólo si G es primero numerable, separable y $|G \setminus A| \leq \omega$.*

Corolario 4.6.18. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico propio primero numerable G . Entonces $H(A)$ es segundo numerable si y sólo si G es separable y $|G \setminus A| \leq \omega$.*

Demostración. Por los corolarios 4.6.14 y 4.6.17, queda mostrar que si $H(G) = G_*$ es segundo numerable, entonces G es separable, lo cual es consecuencia de la proposición 4.6.2. $\square$

El resultado anterior implica lo siguiente.

Proposición 4.6.19. [15] Si $G = \mathbb{S}$ y $A \subseteq G$, entonces $H(A)$ es segundo numerable si y sólo si $\mathbb{R} \setminus A$ es numerable.

Si consideramos $A = \emptyset$ en el corolario 4.6.17, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 4.6.20. *Sea G un grupo casi topológico propio. Entonces G es segundo numerable si y sólo si G es primero numerable y numerable.*

Por el corolario 4.6.20, podemos ver fácilmente que la recta de Sorgenfrey, $\mathbb{S}$, está muy lejos de ser segundo numerable.

El siguiente resultado es una consecuencia de los corolarios 4.4.6 y 4.6.16.

Corolario 4.6.21. *Sea A un subconjunto propio de un grupo casi topológico propio G . Entonces, $H(A)$ es metrizable separable si y sólo si G es regular, primero numerable, separable y $|G \setminus A| \leq \omega$.*

Los siguientes hechos nos ayudan a mostrar los teoremas 4.6.25 y 4.6.28.

Ejemplo 4.6.22. Sea κ un cardinal infinito. Definimos lo siguiente:

$$[\kappa]^{<\omega} = \{A \subseteq \kappa : A \text{ es finito}\}.$$

Consideremos el grupo $G = (\mathbb{R}^\kappa, +)$ y denotemos por 0_G a la identidad de G . Sea

$$U_{A,n} = \left\{ \left(0, \frac{1}{n}\right)^A \times \mathbb{R}^{\kappa \setminus A} \right\} \cup \{0_G\}.$$

Entonces la familia $\beta = \{U_{A,n} : A \in [\kappa]^{<\omega}, n \in \mathbb{N}\}$ satisface las condiciones del teorema 3.1.7. Por el teorema 3.1.7, β genera una topología τ en G tal que (G, τ) es un grupo paratopológico. Por el teorema 3.1.18, se tiene que $G_* = \mathbb{R}^\kappa$ con su topología usual. Dado que $U_{A,n} \setminus \{0_G\}$ es un abierto en la topología usual de $\mathbb{R}^\kappa$, se concluye que G es un grupo casi topológico propio. Además, por [17, Teorema 2.3.13] tenemos que $w(G_*) \leq \kappa$ y como $|\beta| = \kappa \cdot \aleph_0$, podemos concluir que $\chi(G) \leq \kappa$.

Lema 4.6.23. [6, Teorema 5.2.15] Si G es un grupo topológico, entonces

$$|G| \leq 2^{nw(G)}.$$

Proposición 4.6.24. [32, Proposición 2.3] Si G es un grupo paratopológico, entonces

$$w(G) = nw(G) \cdot \chi(G).$$

Para cada cardinal κ existe el número cardinal más pequeño mayor que κ y se denota por κ^+ (ver [17]).

Teorema 4.6.25. Para cada grupo casi topológico G y cada subconjunto A de G , se tiene que $w(H(A)) = w(G_*)$ o $w(H(A)) = w(G)$ si y sólo si para cada cardinal infinito κ , se cumple que $2^\kappa = \kappa^+$.

Demostración. Supongamos que para cada grupo casi topológico G y cada subconjunto A de G , tenemos que

$$w(G_*) = w(H(A)) \text{ o } w(H(A)) = w(G).$$

Entonces para cada cardinal infinito κ , consideramos a G como en el ejemplo 4.6.22. Como G es un grupo casi topológico propio, por la proposición 4.6.2, se cumple que

$$d(G) = d(G_*) \leq w(G_*) \leq \kappa.$$

Por el corolario 4.6.11, obtenemos que $nw(G) = |G| = 2^\kappa$ y por la proposición 4.6.24, se sigue que

$$w(G) = \chi(G) \cdot nw(G) = \kappa \cdot 2^\kappa = 2^\kappa.$$

Sabemos que $w(G_*) \leq \kappa$ y $\chi(G_*) \leq \kappa$. Consideremos un subconjunto A de G tal que $|G \setminus A| = \kappa^+$. Como A es un subconjunto propio de G , por el corolario 4.6.16, podemos concluir que

$$w(H(A)) = \kappa^+ \leq 2^\kappa = w(G).$$

Por hipótesis, $w(H(A)) = w(G)$. Por tanto, $\kappa^+ = 2^\kappa$.

Ahora supongamos que para cada cardinal infinito κ , tenemos que $2^\kappa = \kappa^+$. Sea G un grupo casi topológico. Si G es un grupo topológico, entonces

$$w(G_*) = w(H(A)) = w(G),$$

para cada subconjunto A de G . Supongamos que A es un subconjunto de un grupo casi topológico propio de G tal que $\kappa = w(G_*) < w(H(A))$. Note que A es un subconjunto propio de G y G es infinito. Por la proposición 4.6.24, sabemos que $w(G) = \chi(G) \cdot nw(G)$. De aquí obtenemos dos casos:

- Si $w(G) = \chi(G)$, por el teorema 4.6.6, obtenemos lo siguiente:

$$w(G) = \chi(G) = \chi(H(A)) \leq w(H(A)) \leq w(G).$$

Se sigue que $w(G) = w(H(A))$.

- Si $w(G) = nw(G)$, el corolario 4.6.16, y el lema 4.6.23 implican que

$$w(G) = nw(G) = |G| = |G_*| \leq 2^{nw(G_*)} = 2^\kappa.$$

Entonces,

$$\kappa^+ \leq w(H(A)) \leq w(G) \leq 2^\kappa.$$

Como $\kappa^+ = 2^\kappa$, concluimos que $w(H(A)) = w(G)$.

□

Se sabe que para todo cardinal infinito κ , la igualdad $2^\kappa = \kappa^+$ es independiente a los axiomas de ZFC (ver [23]). Este último hecho y el teorema 4.6.25 implican el siguiente corolario.

Corolario 4.6.26. *La siguiente afirmación es independiente de los axiomas de ZFC: para todo grupo casi topológico G y cada subconjunto A de G , tenemos que $w(H(A)) = w(G_*)$ o $w(H(A)) = w(G)$.*

Para el siguiente resultado tenga en cuenta que para cada subconjunto A de un grupo casi topológico G se cumple lo siguiente:

$$nw(G_*) \leq nw(H(A)) \leq nw(G).$$

Teorema 4.6.27. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico propio G . Entonces $nw(H(A)) = nw(G_*) \cdot (|G \setminus A| + \omega)$.*

Demostración. Si $A = G$, se sigue que

$$nw(H(A)) = nw(G_*) = nw(G_*) \cdot \omega = nw(G_*) \cdot (|G \setminus A| + \omega).$$

Ahora supongamos que A es un subconjunto propio de G . Entonces, $G \setminus A$ es un subconjunto no vacío de G . Por la proposición 4.2.4 y el corolario 4.6.16, tenemos lo siguiente:

$$|G \setminus A| + \omega = nw(G \setminus A, \tau|_{(G \setminus A)}) = nw(G \setminus A, \tau(A)|_{(G \setminus A)}) \leq nw(H(A)).$$

Por tanto, $nw(G_*) \cdot (|G \setminus A| + \omega) \leq nw(H(A))$.

A continuación, mostraremos la desigualdad contraria. Sea

$$\kappa = nw(G_*) \cdot (|G \setminus A| + \omega).$$

Entonces, $|G \setminus A| + \omega \leq \kappa$ y $nw(G_*) \leq \kappa$. Sea $\mathcal{P}$ una red de G_* tal que $|\mathcal{P}| \leq \kappa$. Consideramos

$$\mathcal{K} = \mathcal{P} \cup \{\{x\} : x \in G \setminus A\}.$$

Afirmamos que $\mathcal{K}$ es una red para $H(A)$. En efecto, sea $U \in \tau(A)$ y $x \in U$. Si $x \in A$, entonces existe $V \in \beta_e$ tal que $x \in VV^{-1}x \subseteq U$. Dado que $\mathcal{P}$ es una red para G_* , existe $P \in \mathcal{P} \subseteq \mathcal{K}$ tal que

$$x \in P \subseteq VV^{-1}x \subseteq U.$$

Si $x \in G \setminus A$, tenemos que $x \in \{x\} \subseteq U$. De ello se concluye que $\mathcal{K}$ es una red para $H(A)$ y $|\mathcal{K}| \leq \kappa$. Por lo tanto, $nw(H(A)) \leq \kappa = nw(G_*) \cdot (|G \setminus A| + \omega)$. Esto completa la prueba. $\square$

Teorema 4.6.28. *Para cada grupo casi topológico G y cada subconjunto A de G , tenemos que $nw(H(A)) = nw(G_*)$ o $nw(H(A)) = nw(G)$ si y sólo si para cada cardinal infinito κ , tenemos que $2^\kappa = \kappa^+$.*

Demostración. Supongamos que para cada grupo casi topológico G y cada subconjunto A de G , tenemos que

$$nw(G_*) = nw(H(A)) \text{ o } nw(H(A)) = nw(G).$$

Entonces, para cada cardinal infinito κ , consideramos G como en el ejemplo 4.6.22. Dado que G es un grupo casi topológico propio, por el corolario 4.6.11, tenemos que

$$nw(G_*) \leq w(G_*) \leq \kappa < 2^\kappa = |G| = nw(G).$$

Consideremos $A \subseteq G$ tal que $|G \setminus A| = \kappa^+$. Dado que $\kappa < \kappa^+ = |G \setminus A|$, por el teorema 4.6.27, podemos concluir que $nw(H(A)) = \kappa^+ \leq 2^\kappa = nw(G)$.

Dado que $nw(G_*) = \kappa < \kappa^+ = nw(H(A))$, por hipótesis, obtenemos que $nw(H(A)) = nw(G)$. Por lo tanto, $\kappa^+ = 2^\kappa$.

Ahora suponemos que para cada cardinal infinito κ , se cumple que $2^\kappa = \kappa^+$. Sea G un grupo casi topológico. Si G es un grupo topológico, entonces $nw(G_*) = nw(H(A)) = nw(G)$, para todo subconjunto A de G .

Supongamos que A es un subconjunto de un grupo casi topológico propio G tal que $\kappa = nw(G_*) < nw(H(A))$. Por el corolario 4.6.11, se deduce que

$$\kappa = nw(G_*) < nw(H(A)) \leq nw(G) = |G| = |G_*|.$$

Las últimas desigualdades y el lema 4.6.23 implican que

$$\kappa^+ \leq nw(H(A)) \leq nw(G) = |G_*| \leq 2^{nw(G_*)} = 2^\kappa.$$

Como $\kappa^+ = 2^\kappa$, podemos concluir que $nw(H(A)) = nw(G)$. □

Corolario 4.6.29. *La siguiente afirmación es independiente de los axiomas de ZFC: para cada grupo casi topológico G y cada subconjunto A de G , tenemos que $nw(H(A)) = nw(G_*)$ o $nw(H(A)) = nw(G)$.*

Capítulo 5

Propiedades tipo compacidad

5.1. Propiedades tipo compacidad

En esta sección, estudiamos el comportamiento de diversas propiedades relacionadas con la compacidad en los espacios de Hattori definidos sobre grupos casi topológicos. Consideramos propiedades como compacidad, compacidad local, σ -compacidad, Lindelöf, entre otras.

El teorema 5.1.1 caracteriza las condiciones bajo las cuales los espacios de Hattori son compactos.

Teorema 5.1.1. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico G . Entonces $H(A)$ es compacto si y sólo si G_* es compacto y $\tau(A) = \tau_*$.*

Demostración. Si G_* es compacto y $\tau(A) = \tau_*$, es claro que $H(A)$ es compacto. Si $H(A)$ es compacto, es claro que G_* es compacto. Utilizando el corolario 1.1.34, concluimos que $\tau_* = \tau(A)$. $\square$

Note que en el teorema anterior no se concluye que $A = G$. De hecho, si G es un grupo topológico, entonces $\tau_* = \tau(A) = \tau$ para todo subconjunto A de G . Combinando el teorema 5.1.1 con la proposición 4.2.3, obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.1.2. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico propio G . Entonces $H(A)$ es compacto si y sólo si G_* es compacto y $A = G$.*

A continuación, estudiaremos la propiedad de ser Lindelöf.

Teorema 5.1.3. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico G tal que G_* es hereditariamente Lindelöf. Entonces, $H(A)$ es Lindelöf si y sólo si $e(H(A)) = \omega$.*

Demostración. Por el teorema 1.1.52, sabemos que si $H(A)$ es Lindelöf, entonces $e(H(A)) = \omega$.

Supongamos que $e(H(A)) = \omega$. Sea $\mathcal{C} = \{V_x\}_{x \in G}$ una cubierta básica de $H(A)$ donde $x \in V_x$ para cada $x \in G$. Entonces,

$$\mathcal{C}_* = \{V_x\}_{x \in A} \cup \{V_x \setminus \{x\}\}_{x \in G \setminus A}$$

es una familia de conjuntos abiertos de G_* . Sea $U = \bigcup \mathcal{C}_*$. Dado que G_* es hereditariamente Lindelöf, podemos encontrar una subcubierta numerable $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}_*$ de U en G_* . En consecuencia, existe una subcubierta numerable $\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}$ de U en $H(A)$. Observe que U es abierto en $H(A)$, así $G \setminus U$ es cerrado en $H(A)$. Afirmamos que $G \setminus U$ es discreto en $H(A)$. En efecto, sea $x \in G \setminus U$. Si $y \in G \setminus U$ y $x \neq y$, entonces $V_y \setminus \{y\} \subseteq U$. Por lo tanto, $x \notin V_y \setminus \{y\}$. De ello se deduce que $V_x \cap (G \setminus U) = \{x\}$. Por lo tanto, $G \setminus U$ es un subconjunto cerrado y discreto de $H(A)$. Como $e(H(A)) = \omega$, podemos concluir que $G \setminus U$ es numerable. Consideremos $\mathcal{C}_1 = \{V_x : x \in G \setminus U\}$. Entonces $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}$ es una subcubierta numerable de $\mathcal{C}$ en $H(A)$. Finalmente, $H(A)$ es Lindelöf. $\square$

En particular, si $A = \emptyset$ en el teorema 5.1.3, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 5.1.4. *Sea G un grupo casi topológico tal que G_* es hereditariamente Lindelöf. Entonces G es Lindelöf si y sólo si $e(G) = \omega$.*

El último resultado implica lo siguiente.

Corolario 5.1.5. $e(\mathbb{S}) = \omega$.

A continuación, estudiaremos el comportamiento de la propiedad de ser hereditariamente Lindelöf en los espacios de Hattori en grupos casi topológicos.

Teorema 5.1.6. *Sea G un grupo casi topológico. Entonces $H(A)$ es hereditariamente Lindelöf si y sólo si G_* es hereditariamente Lindelöf y $G \setminus A$ es hereditariamente Lindelöf en G .*

Demostración. Si $H(A)$ es hereditariamente Lindelöf, es claro que G_* es hereditariamente Lindelöf. Por la proposición 4.2.4, obtenemos que $G \setminus A$ es hereditariamente Lindelöf en G , ya que $\tau(A)|_{G \setminus A} = \tau|_{G \setminus A}$.

Supongamos ahora que G_* es hereditariamente Lindelöf y que $G \setminus A$ es hereditariamente Lindelöf en G . Por el teorema 1.1.38, basta mostrar que cada subespacio abierto de $H(A)$ es Lindelöf. Sean H un subespacio abierto de $H(A)$ y $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de H . Note que

$$H = (H \cap A) \cup (H \cap (G \setminus A)).$$

Entonces,

$$(H \cap A) = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap A) \quad \text{y} \quad H \cap (G \setminus A) = \bigcup_{i \in I} (U_i \cap (G \setminus A)).$$

Tenemos que $\{U_i \cap A\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta de $H \cap A$. Por la proposición 4.2.4 se deduce que $U_i \cap A \in \tau_*|_{H \cap A}$ para todo $i \in I$. Dado que G_* es hereditariamente Lindelöf, existe $I_1 \subseteq I$ tal que $|I_1| \leq \omega$ y

$$(H \cap A) = \bigcup_{i \in I_1} (U_i \cap A).$$

Observe que $\{U_i \cap (G \setminus A)\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta de $H \cap (G \setminus A)$. Por la proposición 4.2.4 se deduce que $U_i \cap (G \setminus A) \in \tau|_{H \cap (G \setminus A)}$ para cada $i \in I$. Dado que $G \setminus A$ es hereditariamente Lindelöf en G , existe $I_2 \subseteq I$ tal que $|I_2| \leq \omega$ y

$$H \cap (G \setminus A) = \bigcup_{i \in I_2} (U_i \cap (G \setminus A)).$$

Finalmente, $\{U_i\}_{i \in I_1 \cup I_2}$ es una cubierta abierta numerable de H . Concluimos que H es Lindelöf. Por tanto, $H(A)$ es hereditariamente Lindelöf. $\square$

Corolario 5.1.7. *Sea G un grupo casi topológico tal que G_* es hereditariamente Lindelöf. Si A es un subconjunto de G tal que $|G \setminus A| \leq \omega$, entonces $H(A)$ es hereditariamente Lindelöf.*

El siguiente resultado es una consecuencia inmediata del teorema 1.1.38 y este nos permite demostrar el teorema 5.1.9.

Lema 5.1.8. *Un espacio topológico X es hereditariamente Lindelöf si y sólo si para cada familia $\mathcal{U}$ de subconjuntos abiertos de X , existe una subfamilia numerable $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_0} U$.*

Teorema 5.1.9. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico G . Entonces $H(A)$ es hereditariamente Lindelöf si y sólo si G_* es hereditariamente Lindelöf y $s(H(A)) = \omega$.*

Demostración. Si $H(A)$ es hereditariamente Lindelöf, es claro que G_* es hereditariamente Lindelöf. Además, como cada subconjunto discreto de $H(A)$ es Lindelöf, podemos concluir que $s(H(A)) = \omega$.

Ahora supongamos que G_* es hereditariamente Lindelöf y $s(H(A)) = \omega$. Sea $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos abiertos de $H(A)$. Para cada $U \in \mathcal{U}$, consideramos $\text{Int}_{G_*}(U)$. Dado que G_* es hereditariamente Lindelöf, existe $\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} \text{Int}_{G_*}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \text{Int}_{G_*}(U_n).$$

Sea $D = (\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U) \setminus (\bigcup_{U \in \mathcal{U}} \text{Int}_{G_*}(U))$. Afirmamos que D es discreto en $H(A)$. En efecto, elijamos $x \in D$. Entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Note que $x \notin A$, de lo contrario $x \notin D$. Como $x \notin A$, podemos encontrar $V \in \beta_e$ tal que $x \in Vx \subseteq U$. Dado que G es un grupo casi topológico, tenemos que $(V \setminus \{e\}) \in \tau_*$. Note que $(V \setminus \{e\})x \subseteq \text{Int}_{G_*}(U)$. En consecuencia, $(V \setminus \{e\})x \cap D = \emptyset$. De ello se deduce que $Vx \cap D = \{x\}$. Podemos concluir que D es discreto en $H(A)$. Por lo tanto, D es numerable. Por el lema 5.1.8, concluimos que $H(A)$ es hereditariamente Lindelöf. $\square$

Como consecuencia inmediata del Teorema 5.1.9, al tomar $A = \emptyset$, se obtiene el siguiente resultado.

Corolario 5.1.10. *Sea G un grupo casi topológico. Entonces G es hereditariamente Lindelöf si y sólo si G_* es hereditariamente Lindelöf y $s(G) = \omega$.*

A continuación, iniciamos el estudio de la propiedad de ser hereditariamente separable en los espacios de Hattori. Decimos que un espacio topológico X es **hereditariamente separable** si cada subespacio de X es separable. El teorema 5.1.11 caracteriza cuándo los espacios de Hattori son hereditariamente separables.

Teorema 5.1.11. *Sea G un grupo casi topológico. Entonces $H(A)$ es hereditariamente separable si y sólo si G_* es hereditariamente separable y $G \setminus A$ es hereditariamente separable en G .*

Demostración. Es claro que si $H(A)$ es hereditariamente separable, entonces G_* es hereditariamente separable y por la proposición 4.2.4, se sigue que $G \setminus A$ es hereditariamente separable.

Ahora, mostremos el converso. Sea H un subconjunto de $H(A)$. Dado que G_* es hereditariamente separable, existe $D_1 \subseteq H \cap A$ numerable tal que

$\overline{D_1}^{\tau_*}|_{H \cap A} = H \cap A$. Observe que $H \cap A \subseteq \overline{D_1}^{\tau_*} \cap A$. Dado que $G \setminus A$ es hereditariamente separable en G , existe $D_2 \subseteq H \cap (G \setminus A)$ numerable tal que $\overline{D_2}^{\tau}|_{H \cap (G \setminus A)} = H \cap (G \setminus A)$. Observe que $H \cap (G \setminus A) \subseteq \overline{D_2}^{\tau} \cap (G \setminus A)$. Sea $D = D_1 \cup D_2$. Note que D es numerable y

$$\begin{aligned} H &\supseteq \overline{D}^{\tau(A)|_H} = \overline{D_1 \cup D_2}^{\tau(A)|_H} = (\overline{D_1 \cup D_2})^{\tau(A)} \cap H \\ &= (\overline{D_1}^{\tau(A)} \cup \overline{D_2}^{\tau(A)}) \cap H \\ &\supseteq ((\overline{D_1}^{\tau_*} \cap A) \cup (\overline{D_2}^{\tau} \cap (G \setminus A))) \cap H \\ &\supseteq ((H \cap A) \cup (H \cap (G \setminus A))) \cap H = H. \end{aligned}$$

Por tanto, D es un subconjunto denso numerable en H . Podemos concluir que $H(A)$ es hereditariamente separable. $\square$

Corolario 5.1.12. *Sea G un grupo casi topológico tal que G_* sea hereditariamente separable. Si A es un subconjunto de G tal que $|G \setminus A| \leq \omega$, entonces $H(A)$ es hereditariamente separable.*

En el Capítulo 6, presentaremos nuevas caracterizaciones para las propiedades de ser hereditariamente Lindelöf y hereditariamente separable.

A continuación, estudiaremos el comportamiento de la compacidad local en los espacios de Hattori $H(A)$, dentro del contexto de grupos casi topológicos. Primero, analizaremos los puntos en A .

Teorema 5.1.13. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico propio G tal que G_* es localmente compacto. Si $A \in \tau_*$, entonces para cada $x \in A$ existe $V \in \beta_e$ tal que $\overline{VV^{-1}x}^{\tau(A)}$ es compacto en $H(A)$.*

Demostración. Supongamos que $A \in \tau_*$. Sea $x \in A$. Dado que G_* es localmente compacto, existe $U \in \beta_e$ tal que $\overline{UU^{-1}x}^{\tau_*}$ es compacto. Como G_* es regular y $A \in \tau_*$, podemos encontrar $V \in \beta_e$ tal que

$$x \in VV^{-1}x \subseteq \overline{VV^{-1}x}^{\tau_*} \subseteq UU^{-1}x \cap A \subseteq UU^{-1}x \subseteq \overline{UU^{-1}x}^{\tau_*}.$$

Entonces $\overline{VV^{-1}x}^{\tau_*}$ es compacto en G_* y $\overline{VV^{-1}x}^{\tau_*} \subseteq A$. Por la proposición 4.2.4, podemos concluir que $\overline{VV^{-1}x}^{\tau_*}$ es compacto en $H(A)$. Por lo tanto, $\overline{VV^{-1}x}^{\tau(A)}$ es compacto en $H(A)$. $\square$

Teorema 5.1.14. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico propio G . Si para cada $x \in A$, existe $V \in \beta_e$ tal que $\overline{VV^{-1}x}^{\tau(A)}$ es compacto en $H(A)$, entonces $A \in \tau_*$.*

Demostración. Supongamos que para cada $x \in A$, existe $V \in \beta_e$ tal que $\overline{VV^{-1}x}^{\tau(A)}$ es compacto en $H(A)$. Sean $U \in \beta_e$ y $x \in A$. Podemos encontrar $W \in \beta_e$ tal que $\overline{WW^{-1}x}^{\tau(A)}$ es compacto en $H(A)$ y $WW^{-1}x \subseteq UU^{-1}x$. Por el teorema 1.1.33, sabemos que $\left(\overline{WW^{-1}x}^{\tau(A)}, \tau(A)|_{\overline{WW^{-1}x}^{\tau(A)}}\right)$ es homeomorfo a $\left(\overline{WW^{-1}x}^{\tau(A)}, \tau_*|_{\overline{WW^{-1}x}^{\tau(A)}}\right)$ donde el homeomorfismo está dado por la función identidad. Se sigue que $(WW^{-1}x, \tau_*|_{WW^{-1}x})$ es homeomorfo a $(WW^{-1}x, \tau(A)|_{WW^{-1}x})$ donde el homeomorfismo está dado por la función identidad. Si existe $y \in WW^{-1}x \cap (G \setminus A)$, podemos encontrar $V \in \beta_e$ tal que

$$y \in Vy \subseteq WW^{-1}x \cap Uy \subseteq WW^{-1}x.$$

Note que Vy es un conjunto abierto en $(WW^{-1}x, \tau(A)|_{WW^{-1}x})$. En consecuencia, Vy es abierto en $(WW^{-1}x, \tau_*|_{WW^{-1}x})$. Se deduce que

$$Vy = WW^{-1}x \cap O,$$

donde $O \in \tau_*$. Entonces $Vy \in \tau_*$. Como $y \in Vy \in \tau_*$, existe $V_0 \in \beta_e$ tal que $V_0V_0^{-1}y \subseteq Vy \subseteq Uy$. Por lo tanto, $V_0V_0^{-1} \subseteq U$. Esto es una contradicción, ya que G es un grupo casi topológico propio. Por lo tanto, $WW^{-1}x \subseteq A$. Podemos concluir que $A \in \tau_*$. $\square$

Por los teoremas 5.1.13 y 5.1.14, obtenemos el siguiente resultado, que caracteriza cuando los puntos en A satisfacen la propiedad de compacidad local.

Corolario 5.1.15. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico propio G tal que G_* es localmente compacto. Entonces $A \in \tau_*$ si y sólo si para cada $x \in A$, existe $V \in \beta_e$ tal que $\overline{VV^{-1}x}^{\tau(A)}$ es compacto en $H(A)$.*

Seguimos con el estudio de la compacidad local en los espacios de Hattori $H(A)$. Ahora, analizaremos los puntos de $G \setminus A$.

Teorema 5.1.16. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico propio G . Si para cada $x \in G \setminus A$ existe $V \in \beta_e$ tal que $\overline{Vx}^{\tau(A)}$ es compacto en $H(A)$, entonces $G \setminus A$ es discreto en G .*

Demostración. Sean $U \in \beta_e$ y $x \in G \setminus A$. Por hipótesis, existe $V \in \beta_e$ tal que $Vx \subseteq Ux$ y $\overline{Vx}^{\tau(A)}$ es compacto en $H(A)$. Por el teorema 1.1.33, $(\overline{Vx}^{\tau(A)}, \tau(A)|_{\overline{Vx}^{\tau(A)}})$ es homeomorfo a $(\overline{Vx}^{\tau(A)}, \tau_*|_{\overline{Vx}^{\tau(A)}})$ donde el homeomorfismo está dado por la función identidad. En consecuencia,

$$(Vx \setminus \{x\}, \tau(A)|_{Vx \setminus \{x\}})$$

es homeomorfo a $(Vx \setminus \{x\}, \tau_*|_{Vx \setminus \{x\}})$ donde el homeomorfismo está dado por la función identidad.

Si existe $y \in (Vx \setminus \{x\}) \cap (G \setminus A)$, podemos encontrar $W \in \beta_e$ tal que

$$Wy \subseteq (Vx \setminus \{x\}) \cap Uy \subseteq Vx \setminus \{x\}.$$

Note que Wy es un conjunto abierto en $(Vx \setminus \{x\}, \tau(A)|_{Vx \setminus \{x\}})$. Se sigue que Wy es abierto en $(Vx \setminus \{x\}, \tau_*|_{Vx \setminus \{x\}})$. Por lo tanto,

$$Wy = (Vx \setminus \{x\}) \cap O,$$

donde $O \in \tau_*$. Entonces $Wy \in \tau_*$. Como $y \in Wy \in \tau_*$, existe $W_0 \in \beta_e$ tal que $W_0 W_0^{-1} y \subseteq Wy \subseteq Uy$. De ello se deduce que $W_0 W_0^{-1} \subseteq U$. Esto es una contradicción, ya que G es un grupo casi topológico propio. Por lo tanto, $Vx \setminus \{x\} \subseteq A$. Podemos concluir que $G \setminus A$ es discreto en G . $\square$

De los teoremas 5.1.13 y 5.1.16 obtenemos lo siguiente.

Corolario 5.1.17. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico propio G . Si $H(A)$ es localmente compacto, entonces $G \setminus A$ es cerrado en G_* y discreto en G .*

El siguiente ejemplo muestra que el converso del corolario 5.1.17 no se satisface.

Ejemplo 5.1.18. Sea G como el ejemplo 3.2.11. Consideremos

$$G \setminus A = \{(0, 0)\}.$$

Note que $G \setminus A$ es cerrado en G_* y discreto en G . Dado $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$U_{n_0} = \{(0, 0)\} \cup \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{n_0} \right)^2 + y^2 < \frac{1}{n_0^2} \right\}$$

es un básico de $(0, 0)$ en $H(A)$. Observe que $\overline{U_{n_0}}^{\tau(A)} = \overline{U_{n_0}}^{\tau*}$. Afirmamos que $\overline{U_{n_0}}^{\tau(A)}$ no es numerablemente compacto. En efecto, definamos la siguiente sucesión en $\overline{U_{n_0}}^{\tau(A)}$:

$$\alpha(\theta_n) = \left(\frac{1}{n_0} + \frac{\cos(\theta_n)}{n_0}, \frac{\sin(\theta_n)}{n_0} \right),$$

con $\theta_n \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ y $\theta_n \rightarrow \pi$. Entonces $\{\alpha(\theta_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $\overline{U_{n_0}}^{\tau(A)}$ y $\{\alpha(\theta_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene puntos de acumulación en $H(A)$. Por el teorema 1.1.35, $\overline{U_{n_0}}^{\tau(A)}$ no es numerablemente compacto en $H(A)$. Consecuentemente, $\overline{U_{n_0}}^{\tau(A)}$ no es compacto en $H(A)$. Concluimos que $H(A)$ no es localmente compacto.

Por el corolario 5.1.17 obtenemos el siguiente resultado.

Corolario 5.1.19. *Sea A un subconjunto de $G = \mathbb{S}$. Si $H(A)$ es localmente compacto, entonces $\mathbb{R} \setminus A$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y discreto en $\mathbb{S}$.*

Por la proposición 2.1.15, sabemos que si $G = \mathbb{S}$, entonces tenemos que $H(A)$ es localmente compacto si y sólo si $\mathbb{R} \setminus A$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y discreto en $\mathbb{S}$. Sin embargo, el ejemplo 5.1.18, nos muestra que este resultado no se puede generalizar a todos los grupos casi topológicos propios. Pero el corolario 5.1.17 nos muestra que tenemos una implicación. El siguiente lema nos ayudará a demostrar una caracterización de la compacidad local en los espacios de Hattori en grupos casi topológicos propios.

Lema 5.1.20. *Sean A y U subconjuntos de un grupo casi topológico G . Si $\overline{U}^{\tau(A)}$ es compacto en $H(A)$, entonces $\overline{U}^{\tau*} = \overline{U}^{\tau(A)}$.*

Demostración. Como $\overline{U}^{\tau(A)}$ es compacto en $H(A)$, tenemos que $\overline{U}^{\tau(A)}$ es compacto en G_* . Nótese que G_* es Hausdorff y en consecuencia $\overline{U}^{\tau(A)}$ es cerrado en G_* . Se sigue que

$$\overline{U}^{\tau*} \subseteq \overline{\overline{U}^{\tau(A)}}^{\tau*} = \overline{U}^{\tau(A)} \subseteq \overline{U}^{\tau*}.$$

Por tanto, $\overline{U}^{\tau(A)} = \overline{U}^{\tau*}$. □

Finalmente, presentamos una caracterización completa de los espacios de Hattori localmente compactos en los grupos casi topológicos propios.

Teorema 5.1.21. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico propio G . Entonces $H(A)$ es localmente compacto si y sólo si G_* es localmente compacto, $G \setminus A$ es cerrado en G_* y para cada $x \in G \setminus A$, existe $U \in \beta_e$ tal que $\overline{Ux}^{\tau*} \cap (G \setminus A) = \{x\}$ y $\overline{Ux}^{\tau*} \setminus Vx$ es cerrado en G_* , para cada $V \in \beta_e$.*

Demostración. Supongamos que $H(A)$ es localmente compacto. Si $A = \emptyset$, tenemos que $H(\emptyset) = G$ es localmente compacto. Por el teorema 3.1.12, G es un grupo topológico, lo cual es una contradicción ya que G es un grupo casi topológico propio. En consecuencia, $A \neq \emptyset$. Para cada $x \in A$, existe $U_0 \in \beta_e$ tal que $\overline{U_0U_0^{-1}x}^{\tau(A)}$ es compacto en $H(A)$. Por el lema 5.1.20, tenemos que $\overline{U_0U_0^{-1}x}^{\tau*}$ es compacto en G_* . Así, G_* es localmente compacto. Por el corolario 5.1.20, $G \setminus A$ es cerrado en G_* y discreto en G . Entonces, para cada $x \in G \setminus A$, existe $W \in \beta_e$ tal que $\overline{Wx}^{\tau(A)}$ es compacto en $H(A)$ y $Wx \cap (G \setminus A) = \{x\}$. Note que $H(A)$ es regular. Como $H(A)$ es regular, podemos encontrar $U \in \beta_e$ tal que $\overline{Ux}^{\tau(A)} \subseteq Wx$. De ello se deduce que $\overline{Ux}^{\tau(A)} \cap (G \setminus A) = \{x\}$ y que $\overline{Ux}^{\tau(A)}$ es compacto en $H(A)$. Por el lema 5.1.20, $\overline{Ux}^{\tau*} = \overline{Ux}^{\tau(A)}$. En consecuencia, $\overline{Ux}^{\tau*} \setminus Vx$ es compacto en $H(A)$, para cada $V \in \beta_e$. Por lo tanto, $\overline{Ux}^{\tau*} \setminus Vx$ es compacto en G_* , para cada $V \in \beta_e$. Finalmente, $\overline{Ux}^{\tau*} \setminus Vx$ es cerrado en G_* , para cada $V \in \beta_e$.

Ahora, supongamos que G_* es localmente compacto, $G \setminus A$ es cerrado en G_* y para cada $x \in G \setminus A$, existe $U \in \beta_e$ tal que $\overline{Ux}^{\tau*} \cap (G \setminus A) = \{x\}$ y $\overline{Ux}^{\tau*} \setminus Vx$ es cerrado en G_* , para cada $V \in \beta_e$. Demostraremos que $H(A)$ es localmente compacto. Tomemos $x \in G$. Si $x \in A$, por el corolario 5.1.15, sabemos que para cada $x \in A$, existe $V \in \beta_e$ tal que $\overline{VV^{-1}x}^{\tau(A)}$ es compacto en $H(A)$. Si $x \notin A$, existe $W \in \beta_e$ tal que $\overline{WW^{-1}x}^{\tau*}$ es compacto en G_* . Además, existe $U \in \beta_e$ tal que $\overline{Ux}^{\tau*} \cap (G \setminus A) = \{x\}$ y $\overline{Ux}^{\tau*} \setminus Vx$ es cerrado en G_* , para cada $V \in \beta_e$. Afirmamos que $\overline{WW^{-1}x}^{\tau*} \cap \overline{Ux}^{\tau*}$ es compacto en $H(A)$. De hecho, sea $\mathcal{U}$ una cubierta abierta básica de $\overline{WW^{-1}x}^{\tau*} \cap \overline{Ux}^{\tau*}$ en $H(A)$. Como $x \notin A$, podemos encontrar $V \in \beta_e$ tal que $Vx \in \mathcal{U}$. Tenga en cuenta que

$$\begin{aligned} (\overline{WW^{-1}x}^{\tau*} \cap \overline{Ux}^{\tau*}) \setminus Vx &= (\overline{WW^{-1}x}^{\tau*} \cap \overline{Ux}^{\tau*}) \cap (G \setminus Vx) \\ &= \overline{WW^{-1}x}^{\tau*} \cap (\overline{Ux}^{\tau*} \cap (G \setminus Vx)) \\ &= \overline{WW^{-1}x}^{\tau*} \cap (\overline{Ux}^{\tau*} \setminus Vx). \end{aligned}$$

Entonces $\overline{WW^{-1}x}^{\tau*} \cap (\overline{Ux}^{\tau*} \setminus Vx)$ es cerrado en G_* y

$$\overline{WW^{-1}x}^{\tau*} \cap (\overline{Ux}^{\tau*} \setminus Vx) \subseteq A.$$

De ello se deduce que $\overline{WW^{-1}x}^{\tau*} \cap (\overline{Ux}^{\tau*} \setminus Vx)$ es compacto en G_* . Por la proposición 4.2.6, $\overline{WW^{-1}x}^{\tau*} \cap (\overline{Ux}^{\tau*} \setminus Vx)$ es compacto en $H(A)$. Obsérvese que $\mathcal{U}' = \mathcal{U} \setminus \{Vx\}$ es una cubierta básica abierta de $\overline{WW^{-1}x}^{\tau*} \cap (\overline{Ux}^{\tau*} \setminus Vx)$ en $H(A)$. Por lo tanto, existe una subcubierta finita $\mathcal{U}''$ de $\mathcal{U}'$. Entonces $\mathcal{U}'' \cup \{Vx\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$. Podemos concluir que $\overline{WW^{-1}x}^{\tau*} \cap \overline{Ux}^{\tau*}$ es compacto en $H(A)$. Como

$$\overline{WW^{-1}x \cap Ux}^{\tau(A)} \subseteq \overline{WW^{-1}x}^{\tau*} \cap \overline{Ux}^{\tau*} \subseteq \overline{WW^{-1}x}^{\tau*} \cap \overline{Ux}^{\tau*},$$

tenemos que $\overline{WW^{-1}x \cap Ux}^{\tau(A)}$ es compacto en $H(A)$. Podemos encontrar $O \in \beta_e$ tal que $O \subseteq U \cap W$. De ello se deduce que $\overline{Ox}^{\tau(A)} \subseteq \overline{WW^{-1}x \cap Ux}^{\tau(A)}$. Por lo tanto, $\overline{Ox}^{\tau(A)}$ es compacto en $H(A)$. Por lo tanto, $H(A)$ es localmente compacto. $\square$

Por el teorema 5.1.21, obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 5.1.22. *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces $H(A)$ es localmente compacto si y sólo si $\mathbb{R} \setminus A$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y discreto en $\mathbb{S}$.*

Demostración. Si $H(A)$ es localmente compacto, por el corolario 5.1.19, concluimos que $\mathbb{R} \setminus A$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y discreto en $\mathbb{S}$. Si $\mathbb{R} \setminus A$ es cerrado en $\mathbb{R}$ y discreto en $\mathbb{S}$, para cada $x \in \mathbb{R} \setminus A$, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $[x, y) \cap (\mathbb{R} \setminus A) = \{x\}$. Podemos hallar $z \in A \cap (x, y)$ y entonces $\overline{[x, z]}^{\tau_E} = [x, z]$. Para cada $\varepsilon \geq 0$, tenemos que $[x, z] \setminus [x, x + \varepsilon)$ es cerrado en $\mathbb{R}$. Podemos concluir por el teorema 5.1.21 que $H(A)$ es localmente compacto. $\square$

Corolario 5.1.23. *Sea A un subconjunto del círculo de Sorgenfrey G (ver el ejemplo 3.2.10), entonces $H(A)$ es localmente compacto si y sólo si $G \setminus A$ es cerrado en G_* y discreto en G .*

Demostración. Si $H(A)$ es localmente compacto, por el corolario 5.1.17, tenemos que $G \setminus A$ es cerrado en G_* y discreto en G . Si $G \setminus A$ es cerrado en G_* y discreto en G , para cada $e^{i\theta} \in G \setminus A$, existe $e^{i\gamma} \in G$ tal que $[\theta, \gamma) \cap (G \setminus A) = \{\theta\}$. Podemos encontrar $\alpha \in A \cap (\theta, \gamma)$, luego $\overline{[\theta, \alpha]}^{\tau*} = [\theta, \alpha]$. De donde, para cada $\varepsilon \geq 0$, tenemos que $[\theta, \alpha] \setminus [\theta, \theta + \varepsilon)$ es cerrado en G_* . Por el teorema 5.1.21, podemos concluir que $H(A)$ es localmente compacto. $\square$

Por el ejemplo 5.1.18, sabemos que no todos los grupos casi topológicos propios cumplen la siguiente propiedad:

- Si $G \setminus A$ es cerrado en G_* y discreto en G , entonces $H(A)$ es localmente compacto.

A continuación, presentamos resultados que nos permiten encontrar espacios de Hattori localmente compactos en los grupos casi topológicos propios que no cumplen con la propiedad mencionada anteriormente.

Corolario 5.1.24. *Si A es un subconjunto de un grupo casi topológico G como en el ejemplo 3.2.2, entonces $H(A)$ es localmente compacto si y sólo si $A = G$.*

Demostración. Si $A = G$, está claro que $H(A)$ es localmente compacto ya que $H(A)$ es $\mathbb{R}^2$ con su topología habitual. Si $H(A)$ es localmente compacto, note que $A \neq \emptyset$, de lo contrario, $H(\emptyset) = G$ es localmente compacto y por la proposición 3.1.12, tenemos que G es un grupo topológico. Sin embargo, G es un grupo casi topológico propio. Entonces, $A \neq \emptyset$. Supongamos que A es un subconjunto propio de G . Sea $x = (a, b)$ tal que $x \in G \setminus A$. Por el Teorema 5.1.21, existe $U \in \beta_e$ tal que $\overline{Ux}^{\tau_*} \cap (G \setminus A) = \{x\}$ y, además, para cada $V \in \beta_e$, el conjunto $\overline{Ux}^{\tau_*} \setminus Vx$ es cerrado en G_* . Nótese que

$$\overline{U}^{\tau_*} = [a, a + \varepsilon] \times [b, b + \delta] \quad \text{con } \varepsilon, \delta > 0,$$

y que

$$V = [a, a + \varepsilon_0) \times [b, b + \delta_0) \quad \text{con } \varepsilon_0, \delta_0 > 0.$$

Por tanto, los conjuntos

$$X = \{(a, y) : b < y \leq b + \delta\} \quad \text{y} \quad Y = \{(y, b) : a < y \leq a + \varepsilon\}$$

están contenidos en $\overline{Ux}^{\tau_*} \setminus Vx$. Sin embargo, todo entorno básico de x en G_* intersecta tanto a X como a Y . En consecuencia, $x \in \overline{\overline{Ux}^{\tau_*} \setminus Vx}^{\tau_*}$, lo cual contradice la elección de U . Por lo tanto, concluimos que $A = G$. $\square$

La demostración de los siguientes corolarios son análogas a la demostración del corolario 5.1.24.

Corolario 5.1.25. *Si A es un subconjunto de un grupo casi topológico G como en el ejemplo 3.2.11, entonces $H(A)$ es localmente compacto si y sólo si $A = G$.*

Corolario 5.1.26. *Si A es un subconjunto de un grupo casi topológico G como en el ejemplo 3.2.12, entonces $H(A)$ es localmente compacto si y sólo si $A = G$.*

Corolario 5.1.27. *Si A es un subconjunto de un grupo casi topológico G como en el ejemplo 3.2.13, entonces $H(A)$ es localmente compacto si y sólo si $A = G$.*

Para finalizar esta sección, presentamos dos resultados en los que estudiamos cómo se comporta la σ -compacidad en los espacios de Hattori en los grupos casi topológicos. Para ello, recordemos que un espacio topológico X es **perfecto** si cada conjunto cerrado en X es un conjunto G_δ .

Teorema 5.1.28. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico G . Si G_* es un espacio perfecto σ -compacto y $\overline{G \setminus A}^{\tau^*}$ es numerable, entonces $H(A)$ es σ -compacto.*

Demostración. Sea $U = G \setminus \left(\overline{G \setminus A}^{\tau^*}\right)$. Note que $U \subseteq A$ y $U \in \tau_*$. Como G_* es σ -compacto y U es un conjunto F_σ por ser G perfecto, tenemos que U es σ -compacto en G_* . Se deduce que $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ con K_n compacto. Observe que $K_n \subseteq A$. Por la proposición 4.2.6, K_n es compacto en $H(A)$. Así $G = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n\right) \cup \overline{G \setminus A}^{\tau^*}$. Podemos concluir que $H(A)$ es σ -compacto. $\square$

Corolario 5.1.29. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico G . Si G_* es primero numerable σ -compacto y $\overline{G \setminus A}^{\tau^*}$ es numerable, entonces $H(A)$ es σ -compacto.*

Demostración. Como G_* es primero numerable, por el teorema 3.1.11, tenemos que G_* es metrizable. Se deduce que G_* es perfecto. Por el teorema 5.1.28, podemos concluir que $H(A)$ es σ -compacto. $\square$

5.2. Metrizabilidad

En esta sección estudiaremos las propiedades relacionadas a la metrizabilidad en los espacios de Hattori en grupos casi topológicos.

Teorema 5.2.1. *Sea A un subconjunto propio de un grupo casi topológico propio G . Si $H(A)$ es metrizable, entonces G es primero numerable, regular y $|G \setminus A| \leq d(G)$.*

Demostración. Si $H(A)$ es metrizable, por la proposición 4.2.4, podemos concluir que $(G \setminus A, \tau|_{G \setminus A})$ es metrizable. Se sigue que

$$nw(G \setminus A, \tau|_{G \setminus A}) = w(G \setminus A, \tau|_{G \setminus A}) = d(G \setminus A, \tau|_{G \setminus A}) \leq d(G).$$

Por el corolario 4.6.11, obtenemos lo siguiente:

$$|G \setminus A| = nw(G \setminus A, \tau|_{G \setminus A}) = w(G \setminus A, \tau|_{G \setminus A}) = d(G \setminus A, \tau|_{G \setminus A}) \leq d(G).$$

Como $H(A)$ es metrizable, $H(A)$ es primero numerable y regular. Por los corolarios 4.4.6 y 4.6.7, obtenemos que G es primero numerable y regular. $\square$

El siguiente resultado es una consecuencia del teorema 5.2.1.

Corolario 5.2.2. *Sea G un grupo casi topológico propio. Si G es metrizable, entonces G es primero numerable regular y $|G| = d(G)$.*

Motivados por el teorema 5.2.1, proponemos la siguiente pregunta.

Problema 3. *Sea A un subconjunto propio de un grupo casi topológico G . Si G es primero numerable y regular, y además $|G \setminus A| \leq d(G)$, ¿es $H(A)$ metrizable?*

En el siguiente teorema, analizamos la propiedad de ser completamente metrizable en los espacios de Hattori dentro del contexto de los grupos casi topológicos.

Teorema 5.2.3. *Sea A un subconjunto propio de un grupo casi topológico propio G . Si $H(A)$ es completamente metrizable, entonces G es regular primero numerable, $|G \setminus A| \leq d(G)$ y $G \setminus A$ es un conjunto F_σ en G_* .*

Demostración. Si $H(A)$ es completamente metrizable, por el teorema 5.2.1, tenemos que G es regular primero numerable y $|G \setminus A| \leq d(G)$. Demostraremos que $G \setminus A$ es un conjunto F_σ en G_* . Por los teoremas 1.1.39 y 1.1.48, existe una familia numerable $\{\mathcal{U}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de cubiertas abiertas del espacio $H(A)$ con la propiedad de que cualquier familia $\mathcal{F}$ de subconjuntos cerrados de $H(A)$, que tiene la propiedad de intersección finita y contiene conjuntos de diámetro menor que $\mathcal{U}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tiene intersección no vacía.

Definamos $O_n = \bigcup_{U \in \mathcal{U}_n} \text{Int}_*(U)$. Probaremos que $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$. Nótese que para cada $x \in A$, existe $U \in \mathcal{U}_n$ tal que $x \in U \in \tau(A)$, ya que $\mathcal{U}_n$ es una cubierta abierta de $H(A)$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego existe $V \in \beta_e$ tal que $x \in VV^{-1}x \subseteq U$. De ello se deduce que $x \in \text{Int}_*(U) \subseteq O_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $A \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$. Ahora, supongamos que existe $x \in (\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n) \setminus A$. Como $x \in O_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $U(n) \in \mathcal{U}_n$ tal que $x \in \text{Int}_*(U(n))$. Como G no es un grupo topológico, por el lema 4.6.10, podemos encontrar $V \in \beta_e$ tal que $V \cap V^{-1} = \{e\}$. Sea $\{V_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \beta_e$ tal que $V_1 \subseteq V$,

$V_{n+1}^2 \subseteq V_n$ y $V_n V_n^{-1}x \subseteq \text{Int}_*(U(n))$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Ahora, tomemos $x_n \in (V_n \setminus \{e\})^{-1}x$, ya que G no es discreto, tenemos que $V_n \setminus \{e\} \neq \emptyset$. Consideramos $F_n = \{x_m : n \leq m\}$. Nótese que $\{x_n\}$ es una sucesión que converge a x en G_* , ya que $\{V_n V_n^{-1}x : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local de x en G_* . Sin embargo, x no es un punto de acumulación de F_n en $H(A)$, ya que $(Vx \setminus \{x\}) \cap F_n = \emptyset$. Entonces F_n es cerrado en $H(A)$. En consecuencia, $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de subconjuntos cerrados de $H(A)$ y $\mathcal{F}$ tiene la propiedad de intersección finita. Además, nótese que $F_n \subseteq U(n)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que si $z \in F_n$, entonces

$$z \in (V_n \setminus \{e\})^{-1}x \subseteq V_n V_n^{-1}x \subseteq \text{Int}_*(U(n)) \subseteq U(n) \in \mathcal{U}_n.$$

Es decir, $\mathcal{F}$ contiene conjuntos de diámetro menor que $\mathcal{U}_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. Esto es una contradicción, ya que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \emptyset$. Por lo tanto, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n \subseteq A$. Podemos concluir que $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$. De ello se sigue que $G \setminus A$ es un conjunto F_σ en G_* . $\square$

Motivados por el teorema 5.2.3, proponemos la siguiente pregunta.

Problema 4. *Sea A un subconjunto propio de un grupo casi topológico G tal que G_* es completamente metrizable. Si G es regular, primero numerable, $|G \setminus A| \leq d(G)$, y $G \setminus A$ es un F_σ -conjunto en G_* , ¿es $H(A)$ completamente metrizable?*

Capítulo 6

Subespacios de Hattori

En los capítulos anteriores, logramos extender las topologías definidas por Hattori en $\mathbb{R}$ a los grupos casi topológicos, lo que nos permitió definir los espacios de Hattori en este tipo de grupos. Estudiamos el comportamiento de algunas propiedades topológicas en estos espacios, logrando generalizar resultados obtenidos en los espacios de Hattori clásicos. En este capítulo, nos centraremos en los subespacios de los espacios de Hattori en grupos casi topológicos. Definiremos los subespacios de Hattori, exploraremos algunas de sus propiedades topológicas y, para resaltar su relevancia, examinaremos ejemplos de espacios topológicos conocidos que son subespacios de Hattori.

6.1. Subespacios de Hattori

Sean X un subconjunto de un grupo casi topológico G y A un subconjunto de X . Consideremos el espacio de Hattori $H(A)$ sobre G asociado a A . Decimos que $(X, \tau(A)|_X)$ es el **subespacio de Hattori** asociado a A . Denotamos por $X(A)$, X y X_* a los espacios $(X, \tau(A)|_X)$, $(X, \tau|_X)$ y $(X, \tau_*|_X)$, respectivamente. Nótese que $X(\emptyset) = X$ y $X(X) = X_*$.

Los siguientes ejemplos nos muestran que algunos espacios topológicos conocidos pueden verse como subespacios de Hattori.

Ejemplo 6.1.1. Sea G el grupo casi topológico como en el ejemplo 3.2.12,

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \quad \text{y} \quad L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Consideramos $X = P \cup L$. Si $A = P$, entonces $X(A)$ es el plano de Niemytzki (ver ejemplo 1.1.19).

Ejemplo 6.1.2. Sea G el grupo casi topológico como en el ejemplo 3.2.12, $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ y $L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Sea S un subconjunto numerable de L . Consideramos $X = P \cup S$. Si $A = P$, entonces $X(A)$ es el espacio de disco tangente metrizable (ver ejemplo 1.1.50).

Ejemplo 6.1.3. Sea G el grupo casi topológico como en el ejemplo 3.2.12, $X = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ y A un subconjunto denso de X_* tal que $X \setminus A$ es denso en X_* . Entonces $X(A)$ es homeomorfo a la extensión discreta de $\mathbb{R}$.

Observe que:

- i) Si $A = \{(x, 0) : x \notin \mathbb{Q}\}$ en el ejemplo 6.1.3, entonces $X(A)$ es la extensión racional discreta de $\mathbb{R}$ (ver en el ejemplo 1.1.49 inciso i)).
- ii) Si $A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{Q}\}$ en el ejemplo 6.1.3, entonces $X(A)$ es la extensión irracional discreta de $\mathbb{R}$ (ver en el ejemplo 1.1.49 inciso ii)).

En la Sección 2.2 del Capítulo 2, exploramos la técnica utilizada por Hattori en [20] para generar nuevas topologías en el semiplano superior cerrado, que se encuentran entre la topología usual y la topología de Niemytzki. Utilizando los subespacios de Hattori, podemos obtener estas topologías de la siguiente manera.

Ejemplo 6.1.4. Sea G el grupo casi topológico como en el ejemplo 3.2.12, $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ y $L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Consideremos $X = P \cup L$. Sea B un subconjunto de L . Si $A = P \cup B$, entonces $X(A)$ es el espacio de Hattori del plano de Niemytzki asociado a A definido en [1].

6.2. Funciones cardinales y axiomas de separación

Por la proposición 4.6.2, sabemos que si A es un subconjunto de un grupo casi topológico G , entonces

$$d(G) = d(H(A)) = d(G).$$

El teorema 6.2.1 nos muestra cómo calcular la densidad de subespacios de Hattori. Para esto, denotemos por $IP(X)$ al conjunto de puntos aislados de un espacio topológico X .

Teorema 6.2.1. *Sean X un subconjunto de un grupo casi topológico G y A un subconjunto de X . Entonces,*

$$d(X(A)) = d(X_*) \cdot (|IP(X(A))| + \omega)$$

Demostración. Note que $d(X_*) \leq d(X(A))$. Si $|IP(X(A))| + \omega \leq d(X(A))$, se sigue que

$$d(X_*) \cdot (|IP(X(A))| + \omega) \leq d(X(A)).$$

Supongamos que $d(X(A)) < |IP(X(A))|$. Sea D un subconjunto denso de $X(A)$ tal que $|D| = d(X(A))$. Como $d(X(A)) < |IP(X(A))|$, podemos encontrar $x \in IP(X(A))$ tal que $x \notin D$. Como $x \in IP(X(A))$, $\{x\}$ es abierto en $X(A)$. Sin embargo, $D \cap \{x\} = \emptyset$ esto es una contradicción. Entonces,

$$|IP(X(A))| \leq d(X(A)).$$

En consecuencia,

$$d(X_*) \cdot (|IP(X(A))| + \omega) \leq d(X(A)).$$

Ahora, demostraremos que

$$d(X(A)) \leq d(X_*) \cdot (|IP(X(A))| + \omega).$$

Nótese que si $|X(A)| = |IP(X(A))|$, entonces $d(X(A)) = |IP(X(A))| + \omega$. Por lo tanto,

$$d(X(A)) = d(X_*) \cdot (|IP(X(A))| + \omega).$$

Suponemos que $|IP(X(A))| < |X(A)|$. Sea D un subconjunto denso de X_* tal que $|D| = d(X_*)$. Demostraremos que $D_0 = D \cup IP(X(A))$ es un subconjunto denso en $X(A)$. Sea U un conjunto abierto no vacío en $X(A)$. Tomemos $x \in U$. Si $x \in IP(X(A))$, obtenemos que $D_0 \cap U \neq \emptyset$. Si $x \notin IP(X(A))$, observe que U es abierto en X , entonces existe $V \in \beta_e$ tal que $Vx \cap X \subseteq U$. Como x no es un punto aislado de $X(A)$, tenemos que $(V \setminus \{e\})x \cap X$ es un subconjunto abierto no vacío de X . De donde, $((V \setminus \{e\})x \cap X) \cap D \neq \emptyset$. Podemos concluir que $U \cap D_0 \neq \emptyset$. Por lo tanto,

$$d(X(A)) \leq |D_0| \leq d(X_*) \cdot (|IP(X(A))| + \omega).$$

Finalmente,

$$d(X(A)) = d(X_*) \cdot (|IP(X(A))| + \omega).$$

□

Al tomar $A = \emptyset$ en el teorema 6.2.1, obtenemos un caso particular que permite calcular la densidad de cualquier subespacio de un grupo casi topológico.

Corolario 6.2.2. *Sea X un subconjunto de un grupo casi topológico G . Entonces*

$$d(X) = d(X_*) \cdot (|IP(X)| + \omega).$$

A partir del corolario anterior, obtenemos los siguientes resultados.

Corolario 6.2.3. *Sea X un subconjunto de un grupo casi topológico G tal que X tiene una cantidad numerable de puntos aislados. Entonces $d(X) = d(X_*)$.*

Corolario 6.2.4. *Sea X un subconjunto de un grupo casi topológico G tal que X tiene una cantidad numerable de puntos aislados. Entonces para cada subconjunto A de X , tenemos que*

$$d(X) = d(X(A)) = d(X_*).$$

Demostración. Es claro que

$$d(X_*) \leq d(X(A)) \leq d(X)$$

para cada subconjunto A de X . Por el corolario 6.2.2, tenemos la siguiente desigualdad $d(X) = d(X_*)$. Por lo tanto,

$$d(X_*) = d(X(A)) = d(X_*).$$

□

Corolario 6.2.5. *Sea X un subconjunto de un grupo casi topológico G tal que X tiene una cantidad numerable de puntos aislados. Entonces, para cada subconjunto A de X , tenemos que $X(A)$ es separable si y sólo si X es separable.*

El teorema 6.2.1 nos permite deducir los siguientes resultados clásicos.

Corolario 6.2.6. [36, Ejemplo 82] El plano de Niemytzki es separable.

Demostración. Recuerde que construimos el plano de Niemytzki usando a G como en el ejemplo 3.2.12, $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ y $L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Consideramos $X = P \cup L$. Si $A = P$, entonces $X(A)$ es el plano de Niemytzki. Observe que $IP(X(A)) = \emptyset$. Ahora, recuerde que G_* es $\mathbb{R}^2$ con su topología

usual. Como G_* es separable metrizable, tenemos que $d(X_*) = \omega$. Por el teorema 6.2.1, obtenemos que

$$d(X(A)) = d(X_*) \cdot (|IP(X(A))| + \omega) = \omega \cdot \omega = \omega.$$

Por lo tanto, el plano de Niemytzki es separable. $\square$

Corolario 6.2.7. [36, Ejemplo 83] El espacio del disco tangente metrizable es separable.

Demostración. Recuerde que construimos el espacio del disco tangente metrizable usando G como en el ejemplo 3.2.12, $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ y $L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Sea S un subconjunto numerable de L . Consideremos $X = P \cup S$. Si $A = P$, entonces $X(A)$ es el espacio del disco tangente metrizable. Observe que $IP(X(A)) = \emptyset$. Ahora, recuerde que G_* es $\mathbb{R}^2$ con su topología usual. Como G_* es separable y metrizable, tenemos que $d(X_*) = \omega$. Por el teorema 6.2.1, obtenemos que

$$d(X(A)) = d(X_*) \cdot (|IP(X(A))| + \omega) = \omega \cdot \omega = \omega.$$

Por lo tanto, el espacio del disco tangente metrizable es separable. $\square$

Corolario 6.2.8. Sean G el grupo casi topológico como en el ejemplo 3.2.12, $X = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ y A un subconjunto denso de X_* tal que $X \setminus A$ es denso en X_* . Entonces $X(A)$ es homeomorfo a la extensión discreta de $\mathbb{R}$, por lo que $X(A)$ es separable si y sólo si $X \setminus A$ es numerable.

Demostración. Recuerde que G_* es $\mathbb{R}^2$ con su topología usual. Observe que X es homeomorfo a $\mathbb{R}$ con su topología usual. En consecuencia, $d(X) = \omega$. Nótese que $IP(X(A)) = X \setminus A$. Por el teorema 6.2.1, tenemos que

$$d(X(A)) = d(X_*) \cdot (|IP(X(A))| + \omega) = \omega \cdot (|X \setminus A| + \omega).$$

Podemos concluir que $X(A)$ es separable si y sólo si $X \setminus A$ es numerable. $\square$

Corolario 6.2.9. [36, Ejemplo 70] La extensión racional discreta de $\mathbb{R}$ es separable.

Demostración. Observe que $X(A)$ es la extensión racional discreta de $\mathbb{R}$, donde G es como en el ejemplo 3.2.12, $X = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ y $A = \{(x, 0) : x \notin \mathbb{Q}\}$. Nótese que $IP(X(A)) = X \setminus A$. Entonces,

$$|IP(X(A))| = |X \setminus A| = |\mathbb{Q} \times \{0\}| = \omega.$$

Por el corolario 6.2.8, obtenemos que la extensión racional discreta de $\mathbb{R}$ es separable. $\square$

Corolario 6.2.10. [36, Ejemplo 71] La extensión irracional discreta de $\mathbb{R}$ no es separable.

Demostración. Observe que $X(A)$ es la extensión irracional discreta de $\mathbb{R}$, donde G es como en el ejemplo 3.2.12, $X = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}^2\}$ y $A = (x, 0) : x \in \mathbb{Q}\}$. Nótese que $IP(X(A)) = X \setminus A$. Entonces,

$$|IP(X(A))| = |X \setminus A| = (|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| \times \{0\}) > \omega.$$

Por el corolario 6.2.8, la extensión irracional discreta de $\mathbb{R}$ no es separable. $\square$

Corolario 6.2.11. [1] Todo espacio de Hattori del plano de Niemytzki es separable.

Demostración. Recuerde que construimos los espacios de Hattori del plano de Niemytzki utilizando G como en el ejemplo 3.2.12, $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ y $L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Consideramos $X = P \cup L$ y un subconjunto B de L . Si $A = P \cup B$, entonces $X(A)$ es el espacio de Hattori del plano de Niemytzki. Observe que $IP(X(A)) = \emptyset$. Ahora, recuerde que G_* es $\mathbb{R}^2$ con su topología usual. Como G_* es separable y metrizable, tenemos que $d(X_*) = \omega$. Por el teorema 6.2.1, obtenemos lo siguiente

$$d(X(A)) = d(X_*) \cdot (|IP(X(A))| + \omega) = \omega \cdot \omega = \omega.$$

Por lo tanto, cada espacio de Hattori del plano de Niemytzki es separable. $\square$

Teorema 6.2.12. Sea X un subconjunto de un grupo casi topológico G . Si G es regular, entonces $X(A)$ es regular para cada subconjunto A de X .

Demostración. Como G es regular, por el teorema 4.4.2, tenemos que $H(A)$ es regular para cada subconjunto A de G . Como la regularidad es una propiedad hereditaria a los subespacios, podemos concluir que $X(A)$ es regular para cada subconjunto A de X . $\square$

Como los grupos casi topológicos que usamos para construir los siguientes espacios topológicos son regulares, por el teorema 6.2.12, obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 6.2.13. [36, Ejemplo 82] El plano de Niemytzki es regular.

Corolario 6.2.14. [36, Ejemplo 83] El espacio de disco tangente metrizable es regular.

Corolario 6.2.15. [36, Ejemplo 71] La extensión discreta de $\mathbb{R}$ es regular.

Corolario 6.2.16. [36, Ejemplo 70] La extensión racional discreta de $\mathbb{R}$ es regular.

Corolario 6.2.17. [36, Ejemplo 71] La extensión irracional discreta de $\mathbb{R}$ es regular.

Corolario 6.2.18. [1] Todo espacio de Hattori del plano de Niemytzki es regular.

Teorema 6.2.19. *Sea X un subconjunto de un grupo casi topológico G . Si G es primero numerable, entonces $X(A)$ es primero numerable para cada subconjunto A de X .*

Demostración. Como G es primero numerable, por el teorema 4.6.6 tenemos que $H(A)$ es primero numerable para cada subconjunto A de G . Como ser primero numerable es una propiedad hereditaria a subespacios, se deduce que $X(A)$ es primero numerable para cada subconjunto A de X . $\square$

Como los grupos casi topológicos que usamos para construir los siguientes espacios topológicos son primero numerables, por el teorema 6.2.19, obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 6.2.20. [36, Ejemplo 82] El plano de Niemytzki es primero numerable.

Corolario 6.2.21. [36, Ejemplo 83] El espacio de disco tangente metrizable es primero numerable.

Corolario 6.2.22. [36, Ejemplo 71] La extensión discreta de $\mathbb{R}$ es primero numerable.

Corolario 6.2.23. [36, Ejemplo 70] La extensión racional discreta de $\mathbb{R}$ es primero numerable.

Corolario 6.2.24. [36, Ejemplo 71] La extensión irracional discreta de $\mathbb{R}$ es primero numerable.

Corolario 6.2.25. [1] Todo espacio de Hattori del plano de Niemytzki es primero numerable.

A continuación, analizamos el comportamiento del peso en los subespacios de Hattori, acotándolo mediante un producto de cardinales.

Teorema 6.2.26. *Sean X un subconjunto de un grupo casi topológico G y A un subconjunto de X . Entonces,*

$$w(X(A)) \leq \chi(G) \cdot d(G) \cdot (|X \setminus A| + \omega).$$

Demostración. Sea $\kappa = \chi(G) \cdot d(G) \cdot (|X \setminus A| + \omega)$. Si $A = \emptyset$, entonces

$$w(X(\emptyset)) = w(X) \leq (|X| + \omega) \cdot \chi(X) \leq \kappa \cdot \kappa = \kappa.$$

Supongamos que $A \neq \emptyset$. Por el teorema 4.6.12, tenemos que

$$w(G_*) = d(G_*) \cdot \chi(G).$$

Observe que $\chi(G) \leq \kappa$ y $d(G) \leq \kappa$. Entonces,

$$d(A, \tau_*|_A) \leq w(A, \tau_*|_A) \leq w(G_*) = d(G_*) \cdot \chi(G_*) \leq d(G) \cdot \chi(G) \leq \kappa.$$

Tomemos B un subconjunto de A tal que B es denso en el espacio $(A, \tau_*|_A)$ y $|B| \leq \kappa$. Consideremos la siguiente familia:

$$\beta = \{Wx \cap X : x \in X \setminus A, W \in \beta_e\} \cup \{WW^{-1}x \cap X : x \in B, W \in \beta_e\}.$$

Observe que $|\beta| \leq (|X \setminus A| + \omega) \cdot \chi(G) \cdot |B|$. Demostraremos que β es una base para $X(A)$. En efecto, sean $x \in X$ y un conjunto abierto no vacío O de $X(A)$ tal que $x \in O$. Si $x \in X \setminus A$, existe $U \in \beta_e$ tal que $x \in Ux \cap X \subseteq O$ y observemos que $Ux \cap X \in \beta$. Si $x \in A$, podemos encontrar $U \in \beta_e$ tal que $x \in UU^{-1}x \cap X \subseteq O$. Como $U \in \beta_e$, existe $V \in \beta_e$ tal que $(VV^{-1})^2 \subseteq UU^{-1}$. Como $x \in A$, tenemos que $VV^{-1}x \cap A \neq \emptyset$. Se sigue que $VV^{-1}x \cap B \neq \emptyset$. Entonces, existe $y \in B$ tal que $y \in VV^{-1}x$, es decir, existen $a, b \in V$ tales que $y = ab^{-1}x$. De donde,

$$x = ba^{-1}y \in VV^{-1}y \subseteq (VV^{-1})^2x \subseteq UU^{-1}x.$$

En consecuencia,

$$x \in VV^{-1}y \cap X \subseteq UU^{-1}x \cap X \subseteq O.$$

Observe que $VV^{-1}y \cap X \in \beta$. Podemos concluir que β es una base para $X(A)$. Por lo tanto,

$$w(X(A)) \leq d(G) \cdot \chi(G) \cdot (|X \setminus A| + \omega).$$

□

Corolario 6.2.27. Sean X un subconjunto de un grupo casi topológico G y A un subconjunto de X . Si G es primero numerable separable y $X \setminus A$ es numerable, entonces $X(A)$ es segundo numerable.

Demostración. Por el teorema 6.2.26, tenemos que

$$w(X(A)) \leq d(G) \cdot \chi(G) \cdot (|X \setminus A| + \omega) = \omega \cdot \omega \cdot (\omega + \omega) = \omega$$

Por lo tanto, $X(A)$ es segundo numerable. $\square$

Usando el corolario 6.2.27, podemos obtener los siguientes cuatro resultados conocidos.

Corolario 6.2.28. [36, Ejemplo 82] El espacio de disco tangente metrizable es metrizable separable.

Demostración. Recordemos que construimos el espacio de disco tangente metrizable usando a G como en el ejemplo 3.2.12, $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ y $L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Sea S un subconjunto numerable de L . Consideramos $X = P \cup S$. Si $A = P$, entonces $X(A)$ es el espacio de disco tangente metrizable. Sabemos que G es primero numerable separable. Nótese que $X \setminus A = S$. Ya que S es numerable, por el corolario 6.2.27, podemos concluir que el espacio de disco tangente metrizable es segundo numerable. Además, por el corolario 6.2.14, tenemos que el espacio de disco tangente metrizable es regular. Por lo tanto, es metrizable separable. $\square$

Corolario 6.2.29. [36, Ejemplo 71] Sean G el grupo casi topológico como en el ejemplo 3.2.12, $X = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ y A un subconjunto denso de X_* tal que $X \setminus A$ es denso en X_* . Entonces $X(A)$ es homeomorfo a la extensión discreta de $\mathbb{R}$. Si $X \setminus A$ es numerable, entonces $X(A)$ es separable metrizable.

Demostración. Sabemos que G es primero numerable separable. Por el corolario 6.2.27, se sigue que si $X \setminus A$ es numerable, entonces $X(A)$ es segundo numerable. Por el corolario 6.2.15, tenemos que $X(A)$ es regular. Por lo tanto, $X(A)$ es separable metrizable. $\square$

Corolario 6.2.30. [36, Ejemplo 70] La extensión racional discreta de $\mathbb{R}$ es separable metrizable.

Demostración. Puesto que $X(A)$ es homeomorfo a la extensión racional discreta de $\mathbb{R}$, donde G es como en el ejemplo 3.2.12, $X = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ y $A = \{(x, 0) : x \notin \mathbb{Q}\}$, entonces

$$|X \setminus A| = |\mathbb{Q} \times \{0\}| = \omega.$$

Por el corolario 6.2.29, podemos concluir que la extensión racional discreta de $\mathbb{R}$ es metrizable separable. $\square$

Corolario 6.2.31. [1, Teorema 2.3] Sean G el grupo casi topológico como en el ejemplo 3.2.12, $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, $L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, $X = P \cup L$ y B un subconjunto de L . Si $A = P \cup B$, entonces $X(A)$ es el espacio de Hattori del plano de Niemytzki como en [1]. Si $X \setminus A$ es numerable, entonces el espacio de Hattori $X(A)$ del plano de Niemytzki es metrizable separable.

Demostración. Sabemos que G es un grupo casi topológico primero numerable separable. Por el corolario 6.2.18 y el corolario 6.2.27, el espacio de Hattori del plano de Niemytzki es regular y segundo numerable. Por lo tanto, el espacio de Hattori del plano de Niemytzki es metrizable separable. $\square$

Corolario 6.2.32. Sean X un subconjunto de un grupo casi topológico G y A un subconjunto de X . Si G es primero numerable separable y $X \setminus A$ es numerable, entonces $X(A)$ es de Lindelöf.

Demostración. Por el corolario 6.2.27, tenemos que $X(A)$ es de segundo numerable. De ello se deduce que $X(A)$ es de Lindelöf. $\square$

Teorema 6.2.33. Si X es un subconjunto de un grupo casi topológico propio G , entonces $|X \setminus A| \leq w(X(A))$.

Demostración. Denotemos por κ a $w(X(A))$. Supongamos que $|X \setminus A| > \kappa$. Nótese que $X \setminus A \subseteq G \setminus A$. Por la proposición 4.2.4, obtenemos que $\tau(A)|_{X \setminus A} = \tau|_{X \setminus A}$. Por el corolario 4.6.11, podemos concluir que

$$\begin{aligned} \kappa < |X \setminus A| &= nw(X \setminus A, \tau|_{X \setminus A}) = nw(X \setminus A, \tau(A)|_{X \setminus A}) \\ &\leq w(X \setminus A, \tau(A)|_{X \setminus A}) \leq w(X(A)) = \kappa. \end{aligned}$$

Esto es una contradicción. Por lo tanto, $|X \setminus A| \leq \kappa$. $\square$

Por el teorema 6.2.33, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 6.2.34. *Sean X un subconjunto de un grupo casi topológico propio G y A un subconjunto de X . Si $X(A)$ es segundo numerable, entonces $X \setminus A$ es numerable.*

Por el teorema 6.2.26 y el teorema 6.2.33, tenemos el siguiente resultado.

Teorema 6.2.35. *Sea X un subconjunto de un grupo casi topológico propio G tal que $\chi(G) \leq \kappa$, $d(G) \leq \kappa$ y A un subconjunto de X para algún cardinal infinito κ . Entonces $w(X(A)) \leq \kappa$ si y sólo si $|X \setminus A| \leq \kappa$.*

Corolario 6.2.36. *Sea X un subconjunto de un grupo casi topológico propio primero numerable separable G y un subconjunto propio A de X . Entonces,*

$$w(X(A)) = |X \setminus A| + \omega.$$

Demostración. Por el teorema 6.2.33, tenemos que $|X \setminus A| + \omega \leq w(X(A))$. Por el teorema 6.2.26, obtenemos que

$$w(X(A)) \leq d(G) \cdot \chi(G) \cdot (|X \setminus A| + \omega) = \omega \cdot \omega \cdot (|X \setminus A| + \omega) \leq |X \setminus A| + \omega.$$

Por lo tanto,

$$w(X(A)) = |X \setminus A| + \omega.$$

□

Corolario 6.2.37. *Sea X un subconjunto de un grupo casi topológico propio, separable primero numerable G y un subconjunto A de X . Entonces $X(A)$ es segundo numerable si y sólo si $X \setminus A$ es numerable.*

Corolario 6.2.38. *[1, Teorema 2.3] Sea G el grupo casi topológico como en el ejemplo 3.2.12, $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, $L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, $X = P \cup L$ y un subconjunto B de L . Si $A = P \cup B$, entonces $X(A)$ es el espacio de Hattori del plano de Niemytzki como en [1]. Entonces el espacio de Hattori $X(A)$ del plano de Niemytzki es segundo numerable si y sólo si $X \setminus A$ es numerable.*

Demostración. Sabemos que G es un grupo casi topológico propio separable primero numerable. Por el corolario 6.2.37, el espacio de Hattori del plano de Niemytzki es segundo numerable si y sólo si $X \setminus A$ es numerable. □

Por el corolario 6.2.36, podemos ver fácilmente que el plano de Niemytzki y la extensión irracional discreta de $\mathbb{R}$ están “muy lejos” de ser segundo numerable.

Corolario 6.2.39. [36, Ejemplo 82] El peso del plano de Niemytzki es $\mathfrak{c}$.

Demostración. Recuerde que construimos el plano de Niemytzki usando a G como en el ejemplo 3.2.12, $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ y $L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$. Consideramos $X = P \cup L$. Si $A = P$, entonces $X(A)$ es el plano de Niemytzki. Sabemos que G es un grupo casi topológico propio separable primero numerable. Por el corolario 6.2.36, podemos concluir que

$$w(X(A)) = |X \setminus A| + \omega = |L| + \omega = |\mathbb{R}| = \mathfrak{c}.$$

□

Corolario 6.2.40. [36, Ejemplo 71] El peso de la extensión irracional discreta de $\mathbb{R}$ es $\mathfrak{c}$.

Demostración. Recuerde que $X(A)$ es la extensión irracional discreta de $\mathbb{R}$, donde G es como en el ejemplo 3.2.12, $X = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ y $A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{Q}\}$. Sabemos que G es un grupo casi topológico propio separable, primero numerable. Por el corolario 6.2.36, tenemos que

$$w(X(A)) = |X \setminus A| + \omega = |(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \{0\}| + \omega = \mathfrak{c}.$$

□

Corolario 6.2.41. Sea X un subconjunto de un grupo casi topológico propio G . Entonces X es segundo numerable si y sólo si X es primero numerable y numerable.

Demostración. Si X es segundonumerable, está claro que X es primero numerable. Puesto que $X(\emptyset) = X$ es segundo numerable, por el corolario 6.2.37, podemos concluir que X es numerable. Si X es primero numerable y numerable, por el teorema 1.1.51, tenemos que

$$w(X) \leq |X| \cdot \chi(X) \leq \omega.$$

□

Corolario 6.2.42. Sea X un subconjunto de un grupo casi topológico propio primero numerable separable G . Entonces X es segundo numerable si y sólo si X es numerable.

Corolario 6.2.43. *Si X es un subespacio de $\mathbb{S}$, entonces X es segundo numerable si y sólo si X es numerable.*

Corolario 6.2.44. *Sean G la circunferencia de Sorgenfrey y un subespacio X de G , entonces X es segundo numerable si y sólo si X es numerable.*

Corolario 6.2.45. *Sean G el grupo casi topológico como en el ejemplo 3.2.2 y un subespacio X de G , entonces X es segundo numerable si y sólo si X es numerable.*

Corolario 6.2.46. *Sean G el grupo casi topológico como en el ejemplo 3.2.11 y un subespacio X de G , entonces X es segundo numerable si y sólo si X es numerable.*

Corolario 6.2.47. *Sean G el grupo casi topológico como en el ejemplo 3.2.12 y un subespacio X de G , entonces X es segundo numerable si y sólo si X es numerable.*

Corolario 6.2.48. *Sean X un subconjunto de un grupo casi topológico propio primero numerable regular separable G y un subconjunto A de X . Entonces $X(A)$ es metrizable separable si y sólo si $X \setminus A$ es numerable.*

Demostración. Si $X(A)$ es metrizable separable, por el corolario 6.2.37, podemos concluir que $X \setminus A$ es numerable. Si $X \setminus A$ es numerable, por el corolario 6.2.37, obtenemos que $X(A)$ es segundo numerable. Como G es regular, entonces $X(A)$ es regular por el teorema 6.2.12. Por lo tanto, $X(A)$ es metrizable separable. $\square$

Corolario 6.2.49. [1, Teorema 2.3] Sean G el grupo casi topológico como en el ejemplo 3.2.12, $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$, $L = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$, $X = P \cup L$ y un subconjunto B de L como en [1]. Si $A = P \cup B$, entonces $X(A)$ es el espacio de Hattori del plano de Niemytzki. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

- i) $X \setminus A$ es numerable.
- ii) $X(A)$ es segundo numerable
- iii) $X(A)$ es metrizable separable.

Demostración. Sabemos que G es un grupo casi topológico propio regular separable primero numerable. Por el corolario 6.2.48, el espacio de Hattori $X(A)$ del plano de Niemytzki es metrizable separable si y sólo si $X \setminus A$ es numerable. En el corolario 6.2.38, demostramos que $X(A)$ es segundo numerable si y sólo si $X \setminus A$ es numerable. $\square$

A continuación, estudiamos el comportamiento de la compacidad en los subespacios de Hattori. En el siguiente capítulo profundizaremos en este tema, analizando en detalle la compacidad de los subespacios de Hattori definidos sobre grupos casi topológicos.

Teorema 6.2.50. *Sean K un subconjunto de un grupo casi topológico propio, separable, primero numerable G y un subconjunto A de K . Si $K(A)$ es compacto, entonces K_* es compacto y para cada $x \in K \setminus A$, existe $W \in \beta_e$ tal que $(W \setminus \{e\})^{-1}x \cap K = \emptyset$.*

Demostración. Es claro que K_* es compacto. Como G no es un grupo topológico, por el lema 4.6.10, existe $V \in \beta_e$ tal que $V \cap V^{-1} = \{e\}$. Sea $\{V_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \beta_e$ tal que $V_1 = V$ y $V_{n+1}^2 \subseteq V_n$. Note que la familia $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local de e en G . Supongamos que existe $x \in K \setminus A$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$, $(V_n \setminus \{e\})^{-1}x \cap K \neq \emptyset$. Tome $x_n \in (V_n \setminus \{e\})^{-1}x \cap K$. Nótese que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión que converge a x en K_* , ya que $\{V_n V_n^{-1}x : n \in \mathbb{N}\}$ es una base local en x en G_* . Sin embargo, $\{x_n\}$ no converge en $K(A)$, ya que para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $x_n \notin Vx \cap K$, por la elección de V . Esto es una contradicción, ya que $K(A)$ es homeomorfo a K_* . De donde, para cada $x \in K \setminus A$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(V_n \setminus \{e\})^{-1}x \cap K = \emptyset$. Queda por considerar $W = V_n$. $\square$

El siguiente ejemplo muestra que el inverso del teorema 6.2.50 no se cumple.

Ejemplo 6.2.51. Sea G el grupo casi topológico como en el ejemplo 3.2.11 y $n_0 \in \mathbb{N}$. Consideramos

$$K = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x - \frac{1}{n_0} \right)^2 + y^2 \leq \frac{1}{n_0^2} \right\}$$

y $A = K \setminus \{(0, 0)\}$. Observe que K_* es compacto y $K \setminus A$ es finito. Nótese que $-(U_{n_0} \setminus \{(0, 0)\}) \cap K = \emptyset$. Afirmamos que $K(A)$ no es numerablemente compacto. En efecto, sea

$$\alpha(\theta_n) = \left(\frac{1}{n_0} + \frac{\cos(\theta_n)}{n_0}, \frac{\sin(\theta_n)}{n_0} \right),$$

con $\theta_n \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ y $\theta_n \rightarrow \pi$. Entonces $\{\alpha(\theta_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en $K(A)$ y $\{\alpha(\theta_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ no tiene puntos de acumulación en $K(A)$. Por lo tanto, $K(A)$ no es compacto.

Teorema 6.2.52. *Sean X un subconjunto de un grupo casi topológico G tal que G_* es hereditariamente Lindelöf y un subconjunto A de X . Entonces $X(A)$ es Lindelöf si y sólo si $e(X(A)) = \omega$.*

Demostración. Si $X(A)$ es Lindelöf, por el teorema 1.1.52, tenemos que $e(X(A)) = \omega$. Ahora supongamos que $e(X(A)) = \omega$. Sabemos que

$$\{Vx \cap X : x \in X \setminus A, V \in \beta_e\} \cup \{VV^{-1}x \cap X : x \in A, V \in \beta_e\}$$

es una base de $X(A)$. Sea $\mathcal{C}$ una cubierta por conjuntos básicos de $X(A)$.

Es importante enfatizar que $\mathcal{C}$ es una colección arbitraria de tales básicos; puede haber varios elementos de $\mathcal{C}$ asociados al mismo punto x . Escribimos $\mathcal{C} = \{B_i : i \in I\}$. Para cada índice $i \in I$ definimos un abierto O_i de X_* de la siguiente manera:

- Si $B_i = WW^{-1}x \cap X$ con $x \in A$, tomamos $O_i := WW^{-1}x \cap X$.
- Si $B_i = Wx \cap X$ con $x \in X \setminus A$, consideramos $O_i = Wx \setminus \{x\} \cap X$.

Sea ahora $\mathcal{O} := \{O_i : i \in I\}$ y $U := \bigcup_{i \in I} O_i$. Observamos que U es un abierto de X_* . Como G_* es hereditariamente Lindelöf, podemos encontrar una subcubierta numerable $\mathcal{O}_0 = \{O_{i_n} : n \in \mathbb{N}\}$ de $\mathcal{O}$. Sea $I_0 = \{i_n : n \in \mathbb{N}\}$ el subconjunto de índices y sea $\mathcal{C}_0 = \{B_{i_n} : n \in \mathbb{N}\}$ la correspondiente subfamilia de $\mathcal{C}$.

Sea $D = X \setminus U$. Note que D es un subconjunto cerrado de $X(A)$. Vamos a ver que D es discreto en $X(A)$. Tomemos $x \in D$. Nótese que $X \setminus U \subseteq X \setminus A$. Si $x \in IP(X(A))$, existe $V \in \beta_e$ tal que $Vx \cap X = \{x\}$. De donde, $Vx \cap (X \setminus U) = \{x\}$. Si $x \notin IP(X(A))$, existe $i \in I$ tal que $x \in B_i = Wx \cap X$ con $W \in \beta_e$. Note que $O_i = (Wx \setminus \{x\}) \cap X \subseteq U$. De ello se sigue que $Wx \cap (X \setminus U) = \{x\}$. Por lo tanto, D es un subconjunto cerrado y discreto de $X(A)$. Como $e(X(A)) = \omega$, D es numerable. Escribiendo $D = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ definimos la subfamilia adicional $\mathcal{C}_1 := \{V_{x_k} : k \in \mathbb{N}\}$, donde para cada x_k elegimos algún básico $V_{x_k} \in \mathcal{C}$ que contiene a x_k (existe al menos uno porque $\mathcal{C}$ cubre $X(A)$). Entonces $\mathcal{C}_0 \cup \mathcal{C}_1$ es una subfamilia numerable de $\mathcal{C}$ que cubre $X(A)$. Concluimos que $X(A)$ es Lindelöf. □

Teorema 6.2.53. Sean X un subconjunto de un grupo casi topológico G tal que G_* es hereditariamente Lindelöf y un subconjunto A de X . Entonces $X(A)$ es hereditariamente Lindelöf si y sólo si $s(X(A)) = \omega$.

Demostración. Si $X(A)$ es hereditariamente Lindelöf, por la proposición 1.1.53, tenemos que $s(X(A)) = \omega$. Ahora, si $s(X(A)) = \omega$, sea $\mathcal{U}$ una familia de subconjuntos abiertos de $X(A)$. Para cada $U \in \mathcal{U}$, consideramos $Int_{X_*}(U)$. Como X_* es hereditariamente Lindelöf, existe $\{U_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que

$$\bigcup_{U \in \mathcal{U}} Int_{X_*}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Int_{X_*}(U_n).$$

Pongamos $Y = (\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U) \setminus (\bigcup_{U \in \mathcal{U}} Int_{X_*}(U))$. Afirmamos que Y es un subespacio discreto de $X(A)$. En efecto, sea $x \in Y$. Entonces existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Si $x \in A$, existe $V \in \beta_e$ tal que $VV^{-1}x \cap X \subseteq U$. Se sigue que $x \in Int_{X_*}(U)$. Por lo tanto, $x \in X \setminus Y$. Esto es una contradicción. Por lo tanto, $x \notin A$ y podemos encontrar $V \in \beta_e$ tal que $x \in Vx \cap X \subseteq U$. Supóngase que $(V \setminus \{e\})x \cap Y \neq \emptyset$. Entonces existe $y \in (V \setminus \{e\})x \cap Y$. Por lo tanto, $y \in (V \setminus \{e\})x \cap X \subseteq Int_{X_*}(U)$. En consecuencia, $y \in X \setminus Y$. Esto es una contradicción. Por lo tanto, $Vx \cap Y = \{x\}$. Por lo tanto, Y es discreto. Como $s(X(A)) = \omega$, Y es numerable. Por el lema 5.1.8, podemos concluir que $X(A)$ es hereditariamente Lindelöf. $\square$

Corolario 6.2.54. $s(\mathbb{S}) = \omega$.

Poniendo $A = \emptyset$ en el teorema 6.2.53, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 6.2.55. Sea X un subconjunto de un grupo casi topológico G tal que G_* es hereditariamente Lindelöf. Entonces X es hereditariamente Lindelöf si y sólo si $s(X) = \omega$.

Corolario 6.2.56. Sea X un subconjunto de un grupo casi topológico separable G tal que G_* es primero numerable. Entonces X es hereditariamente Lindelöf si y sólo si X es hereditariamente separable.

Demostración. Nótese que como G_* es separable metrizable, entonces G_* es hereditariamente Lindelöf. Supóngase que X es hereditariamente Lindelöf. Sea Y un subespacio de X . Entonces Y es hereditariamente Lindelöf y el conjunto $IP(Y)$ es numerable. Nótese que $d(Y_*) = \omega$. Por el teorema 6.2.1, tenemos que

$$d(Y) = d(Y_*) \cdot (|IP(Y)| + \omega) = \omega \cdot (\omega + \omega) = \omega.$$

Por lo tanto, Y es separable. Finalmente, X es hereditariamente separable. Si X es hereditariamente separable, está claro que $s(X) = \omega$. Por el teorema 6.2.53, podemos concluir que X es hereditariamente Lindelöf. $\square$

Corolario 6.2.57. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico separable G tal que G_* es primero numerable. Entonces $H(A)$ es hereditariamente Lindelöf si y sólo si $H(A)$ es hereditariamente separable.*

Demostración. Nótese que como G_* es metrizable separable, entonces G_* es hereditariamente Lindelöf. Supóngase que $H(A)$ es hereditariamente Lindelöf. Sea Y un subespacio de $H(A)$. Consideremos $B = A \cap Y$. Entonces el subespacio Y coincide con el subespacio de Hattori $Y(B)$. Nótese que $d(Y_*) = \omega$. Además, $Y(B)$ es hereditariamente Lindelöf y entonces $IP(Y(B))$ es numerable. Por el teorema 6.2.1, tenemos que

$$d(Y(B)) = d(Y_*) \cdot (|IP(Y(B))| + \omega) = \omega \cdot (\omega + \omega) = \omega.$$

Por lo tanto, $Y(B)$ es separable. Finalmente, $H(A)$ es hereditariamente separable. Si $H(A)$ es hereditariamente separable, está claro que cada subespacio discreto de $H(A)$ es numerable. Por el teorema 5.1.9, podemos concluir que $H(A)$ es hereditariamente Lindelöf. $\square$

Corolario 6.2.58. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico separable G tal que G_* es primero numerable. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

- i) $H(A)$ es hereditariamente Lindelöf.
- ii) $G \setminus A$ es un subespacio hereditariamente Lindelöf de G .
- iii) $s(H(A)) = \omega$.
- iv) $H(A)$ es hereditariamente separable.

Demostración. Por el teorema 5.1.6, tenemos que $H(A)$ es hereditariamente Lindelöf si y sólo si $G \setminus A$ es un subespacio hereditariamente Lindelöf de G . Por el teorema 5.1.9, obtenemos que $H(A)$ es hereditariamente Lindelöf si y sólo si $s(H(A)) = \omega$. Finalmente, por el corolario 6.2.57, $H(A)$ es hereditariamente Lindelöf si y sólo si $H(A)$ es hereditariamente separable. $\square$

Corolario 6.2.59. *Sea G un grupo casi topológico separable tal que G_* es primero numerable. Entonces G es hereditariamente Lindelöf si y sólo si G es hereditariamente separable.*

Los siguientes ejemplos muestran que es posible construir espacios de Hattori que son hereditariamente Lindelöf, incluso cuando el grupo casi topológico subyacente no posee la propiedad de Lindelöf.

Ejemplo 6.2.60. Sean G el grupo casi topológico descrito en el ejemplo 3.2.2 y

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$$

Dado que $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio discreto cerrado no numerable de G , podemos concluir que G no es Lindelöf. Nótese que

$$G \setminus A = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

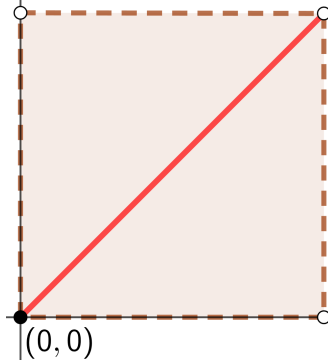


Figura 6.1: El segmento rojo representa una vecindad básica de $(0, 0)$ en el subespacio $G \setminus A$.

Entonces, $(G \setminus A, \tau|_{G \setminus A})$ es homeomorfo a $\mathbb{S}$. Se sigue que $G \setminus A$ es un subespacio hereditariamente Lindelöf de G . Por el corolario 6.2.58, podemos concluir que $H(A)$ es hereditariamente Lindelöf y hereditariamente separable.

Ejemplo 6.2.61. Sean G el grupo casi topológico descrito en el ejemplo 3.2.11 y

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}.$$

Dado que $\{(0, y) : y \in \mathbb{R}\}$ es un subespacio cerrado discreto no numerable de G , podemos concluir que G no es Lindelöf. Nótese que

$$G \setminus A = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

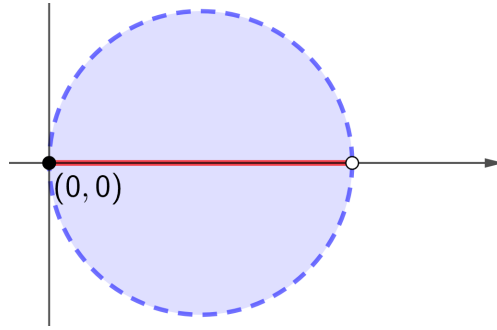


Figura 6.2: El segmento rojo representa una vecindad básica de $(0, 0)$ en el subespacio $G \setminus A$.

Entonces, $(G \setminus A, \tau|_{G \setminus A})$ es homeomorfo a $\mathbb{S}$. Se sigue que $G \setminus A$ es un subespacio hereditariamente Lindelöf de G . Por el corolario 6.2.58, $H(A)$ es hereditariamente Lindelöf y hereditariamente separable.

Capítulo 7

Compactos pequeños

7.1. Subespacios compactos

A continuación, estudiaremos el comportamiento de los subespacios compactos en los espacios de Hattori definidos en los grupos casi topológicos. Gracias al teorema 6.2.33, es posible acotar la cardinalidad de estos subespacios compactos de la siguiente manera:

Teorema 7.1.1. *Sean K un subconjunto de un grupo casi topológico propio G y A un subconjunto de K . Si $K(A)$ es compacto, entonces $|K \setminus A| \leq w(G_*)$.*

Demostración. Como $K(A)$ es compacto, por el teorema 1.1.33, tenemos que $K(A)$ es homeomorfo a K_* . En consecuencia, $w(K(A)) = w(K_*)$. Por el teorema 6.2.33, podemos concluir que

$$|K \setminus A| \leq w(K_*) \leq w(G_*).$$

□

Si ponemos $A = \emptyset$, en el teorema 7.1.1, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 7.1.2. *Sea K un subconjunto de un grupo casi topológico propio G . Si K es compacto, entonces $|K| \leq w(G_*)$.*

Sean X y Y dos espacios topológicos. Una función $f: X \rightarrow Y$ se llama **condensación** si f es continua y biyectiva. El siguiente resultado nos ayudará a mostrar el teorema 7.1.4.

Teorema 7.1.3. [2],[3],[38] Si G es un grupo topológico con pseudocarácter numerable, existe una condensación f de G a un espacio metrizable.

Teorema 7.1.4. Sean K un subconjunto de un grupo casi topológico propio G y A un subconjunto de K . Si $K(A)$ es compacto y G_* tiene pseudocarácter numerable, entonces $|K \setminus A| \leq \omega$.

Demostración. Por el teorema 7.1.3, existe una condensación f de G_* sobre un espacio metrizable Y . Por lo tanto, $f(K_*)$ es un espacio metrizable compacto. En consecuencia, es segundo numerable. Como $K(A)$, K y $f(K_*)$ son homeomorfos, tenemos que $K(A)$ también es segundo numerable. Por el teorema 6.2.33, $K \setminus A$ es numerable. $\square$

Sea $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$ el **espacio de Cantor**, donde $2 = \{0, 1\}$ y la topología en $\mathcal{C}$ es la topología producto, con $\{0, 1\}$ dotado de la topología discreta. Sabemos que el espacio de Cantor es un espacio compacto no numerable (ver [34]). Un espacio topológico X es **totalmente imperfecto** si no contiene un subconjunto que es homeomorfo al conjunto de Cantor.

Decimos que un espacio topológico X **tiene compactos pequeños** si cada subespacio compacto no vacío de X es numerable. Es fácil de ver que todo espacio topológico X que tiene compactos pequeños es totalmente imperfecto. Sin embargo, podemos encontrar un espacio totalmente imperfecto que contiene subespacios compactos no numerables.

El siguiente ejemplo muestra que la clase de espacios totalmente imperfectos es distinta de la clase de espacios que tienen compactos pequeños.

Ejemplo 7.1.5. Existe un espacio totalmente imperfecto X tal que X tiene un subespacio compacto no numerable.

Demostración. Consideramos $\mathbb{A}$ como el espacio de doble flecha. La doble flecha es un espacio compacto no numerable. Demostraremos que $\mathbb{A}$ es totalmente imperfecto. Si $\mathcal{C}$ es un subespacio de $\mathbb{A}$, por [22, Proposición 2.1], obtenemos que $\mathcal{C}$ es homeomorfo a $\mathbb{A}$. Esto es una contradicción. Por lo tanto, $\mathbb{A}$ es totalmente imperfecto. $\square$

En el teorema 7.1.7, estudiamos cuándo los espacios de Hattori en grupos casi topológicos tienen compactos pequeños. El siguiente lema nos ayudará a demostrar el teorema 7.1.7.

Lema 7.1.6. *Si X tiene compactos pequeños y es un espacio polaco, entonces X es numerable.*

Demostración. Si X es un espacio polaco no numerable, entonces, por [27, Corolario 6.5], X contiene el espacio de Cantor. Dado que X tiene compactos pequeños, se deduce que el espacio de Cantor es numerable. Lo cual es una contradicción. Por lo tanto, X es numerable. $\square$

Teorema 7.1.7. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico propio G tal que G_* tiene pseudocarácter numerable. Entonces $H(A)$ tiene compactos pequeños si y sólo si A tiene compactos pequeños.*

Demostración. Primero, supongamos que $H(A)$ tiene compactos pequeños. Sea K un subespacio compacto de A . Por la proposición 4.2.6, K también es un subespacio compacto de $H(A)$. Dado que $H(A)$ tiene compactos pequeños, se deduce que K es numerable. Por lo tanto, podemos concluir que A tiene compactos pequeños.

Ahora, supongamos que A tiene compactos pequeños. Sea K un subespacio compacto de $H(A)$. Por la proposición 7.1.4, sabemos que $K \setminus A$ es numerable. En consecuencia, $K \setminus A$ es un conjunto G_δ en K . Por el teorema 1.1.46, $(K, \tau_*|_K)$ es un espacio polaco. Dado que $K \setminus A$ es un conjunto G_δ en K , también es un espacio polaco. Como A tiene compactos pequeños, entonces $K \cap A$ tiene compactos pequeños y es un espacio polaco; por lo tanto, por el lema 7.1.6 es numerable. Podemos concluir que K es numerable. Por lo tanto, $H(A)$ tiene compactos pequeños. $\square$

Por el teorema 7.1.7, obtenemos los siguientes resultados.

Proposición 7.1.8. [10, Proposición 2.3] *Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}$. Entonces $H(A)$ tiene compactos pequeños si y sólo si A tiene compactos pequeños.*

Corolario 7.1.9. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico propio G . Si A tiene compactos pequeños, entonces $H(A)$ es totalmente imperfecto.*

Corolario 7.1.10. *Sea A un subconjunto de un grupo casi topológico propio G . Si $H(A)$ tiene compactos pequeños, entonces A es totalmente imperfecto.*

Motivados por los corolarios 7.1.9 y 7.1.10, proponemos el siguiente problema.

Problema 5. *Caracterice las condiciones bajo las cuales los espacios de Hattori en grupos casi topológicos son totalmente imperfectos.*

Teorema 7.1.11. *Sea $\{X_i : i \in \{1, 2, \dots, n\}\}$ una familia de espacios topológicos. Entonces, X_i tiene compactos pequeños para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ si y sólo si $X = \prod_{i=1}^n X_i$ tiene compactos pequeños.*

Demostración. Primero, supongamos que X_i tiene compactos pequeños para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Sea K un subespacio compacto de X . Denotamos por p_i la proyección de X sobre X_i para $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Note que $p_i(K)$ es un subespacio compacto de X_i . Como cada X_i tiene compactos pequeños, obtenemos que $p_i(K)$ es numerable para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. En consecuencia, K es numerable. Por lo tanto, X tiene compactos pequeños.

Ahora, supongamos que X tiene compactos pequeños. Sea K_i un subespacio compacto de X_i para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. Consideramos $K = \prod_{i=1}^n K_i$. Por el teorema de Tychonoff, K es un subespacio compacto de X . Dado que X tiene compactos pequeños, se deduce que K es numerable. Por lo tanto, K_i debe ser numerable para cada i . Por lo tanto, X_i tiene compactos pequeños para cada $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. $\square$

Considerando $A = \emptyset$ en el teorema 7.1.4, obtenemos el siguiente corolario.

Corolario 7.1.12. *Sea G un grupo casi topológico propio. Si G tiene pseudocarácter numerable, entonces G tiene compactos pequeños.*

Por el corolario 7.1.12, podemos obtener los siguientes corolarios.

Corolario 7.1.13. [17, Ejercicio 3.1.B] *La recta de Sorgenfrey tiene compactos pequeños.*

Corolario 7.1.14. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $\mathbb{S}^n$ tiene compactos pequeños. En consecuencia, $\mathbb{S}^n$ es totalmente imperfecto.*

Corolario 7.1.15. *La circunferencia de Sorgenfrey tiene compactos pequeños.*

Corolario 7.1.16. *Si G es como en el ejemplo 3.2.2, entonces G tiene compactos pequeños.*

Corolario 7.1.17. *Si G es un grupo paratopológico como en el ejemplo 3.2.11, entonces G tiene compactos pequeños.*

Corolario 7.1.18. *Si G es como en el ejemplo 3.2.12, entonces G tiene compactos pequeños.*

Corolario 7.1.19. *Si G es como en el ejemplo 3.2.13, entonces G tiene compactos pequeños.*

Capítulo 8

Conclusiones

En este trabajo logramos extender de manera general las topologías definidas por Hattori en $\mathbb{R}$ al contexto de grupos casi topológicos arbitrarios. A partir de esta generalización, desarrollamos una teoría que permite estudiar el comportamiento de diversas propiedades topológicas en los espacios de Hattori asociados a estos grupos.

Estudiamos el comportamiento de las funciones cardinales, axiomas de separación, propiedades relacionadas con la compacidad, metrizabilidad, entre otras. Mostramos cómo el estudio de los espacios de Hattori no solo proporciona información estructural sobre las topologías definidas en ellos, sino que también permite obtener resultados relevantes sobre los grupos casi topológicos.

Asimismo, introducimos la noción de subespacio de Hattori, lo cual nos permitió reinterpretar algunos espacios topológicos clásicos como subespacios de Hattori. Por ejemplo, mostramos que el plano de Niemytzki-Moore puede ser visto naturalmente como un subespacio de un espacio de Hattori de un grupo casi topológico.

Finalmente, en la siguiente sección planteamos algunos problemas y líneas de investigación que podrían resultar de interés para el lector, con el objetivo de motivar futuros desarrollos en esta dirección.

8.1. Problemas abiertos

Motivados por el Teorema 4.4.2, en la Sección 4.4 propusimos el siguiente problema:

Problema 6. Sea G un grupo casi topológico Tychonoff. ¿Es cierto que $H(A)$ es Tychonoff para todo subconjunto A de G ?

A partir de los resultados obtenidos, surgen naturalmente varias preguntas y líneas de investigación futura:

Problema 7. Caracterizar cuándo la semirregularización de un grupo casi topológico vuelve a ser un grupo casi topológico.

Problema 8. ¿Existe un grupo casi topológico G que no sea regular, tal que su semirregularización G_r también sea un grupo casi topológico?

Problema 9. Caracterizar cuándo los espacios de Hattori asociados a grupos casi topológicos son normales.

El **número débil de Lindelöf** $wl(X)$ de un espacio topológico X se define como el mínimo cardinal $\kappa \geq \aleph_0$ tal que toda cubierta abierta de X contiene una subfamilia de cardinalidad menor o igual a κ cuya unión es densa en X . Es fácil ver que $wl(X) \leq l(X)$ y $wl(X) \leq c(X)$ para todo espacio topológico X . Si $wl(X) \leq \aleph_0$, se dice que X es **débilmente Lindelöf**.

Problema 10. Dado un subconjunto A de un grupo casi topológico G , calcular $wl(H(A))$.

Problema 11. Caracterizar cuándo un espacio de Hattori asociado a un grupo casi topológico propio es metrizable.

Problema 12. Caracterizar cuándo un espacio de Hattori asociado a un grupo casi topológico propio es completamente metrizable.

Problema 13. Identificar espacios topológicos conocidos que puedan ser vistos como subespacios de Hattori.

Problema 14. Caracterizar cuándo los espacios de Hattori son totalmente imperfectos.

Recientemente, diversos autores han introducido variantes de los espacios de Hattori definidos en $\mathbb{R}$ utilizando otras topologías, tales como la topología de los rayos abiertos o la topología conjugada de la recta de Sorgenfrey. Estas variantes son conocidas como espacios híbridos.

Problema 15. Definir una versión de los espacios híbridos en el contexto de grupos paratopológicos.

Problema 16. Extender la construcción de las topologías de Hattori a clases más generales de espacios, como los espacios cuasi-uniformes.

Bibliografía

- [1] D. Abuzaid, M. Alqahtani, L. Kalantan, New topologies between the usual and Niemytzki, *Applied General Topology*, no. 1 (2020) 71-76.
- [2] A.V. Arhangel'skii, *Topological spaces and mappings. Remarks on topological groups*, Mosc. Univ. Publ., Moscow, 1969.
- [3] A.V. Arhangel'skii, Relations among the invariants of topological groups and their subspaces, *Russian Math. Surveys*, 35 (1980) 1-23; Russian original in *Uspekhi Mat. Nauk*, 35 (1980) 3-22.
- [4] A.V. Arhangel'skii, D. K. Burke, Space with a regular G_δ -diagonal, *Topol. Appl.* 153 (11) (2006) 1917-1929.
- [5] A.V. Arhangel'skii, E.A. Reznichenko, Paratopological and semitopological groups versus topological groups, *Topology Appl.* 151 (2005) 107-119.
- [6] A.V. Arhangel'skii, M.G. Tkachenko, *Topological Groups and Related Structures*, Atlantis Studies in Mathematics, Vol. I, Atlantis Press/World Scientific, Paris-Amsterdam, 2008.
- [7] T. Banakh and O. Ravsky, Oscillator topologies on a paratopological group and related number invariants, in *Third International Algebraic Conference in Ukraine (2001): Algebraic Structures and Their Applications (Ukrainian)*. Kiev: Natsional. Akad. Nauk Ukraïni, Inst. Mat., 2002. 140-153
- [8] T. Banakh, A. Ravsky, Each regular paratopological group is completely regular, *Proceedings of the American Mathematical Society*, Volume 145, Number 3, March 2017, pages 1373-1382.

- [9] R.B. Beshimov, F.G. Mukhamadiev, Cardinal properties of Hattori spaces and their hyperspaces, *Quest. Answ. Gen. Topol.* 33 (2015) 33–38.
- [10] A. Bouziad, E. Sukhacheva, On Hattori spaces, *Comment. Math. Univ. Carol.* 58(2) (2017) 213–217.
- [11] A. Calderón-Villalobos, I. Sánchez, Hattori topologies on almost topological groups, *Topol. Appl.* 326 (2023) 108411.
- [12] A. Calderón-Villalobos, I. Sánchez, Compactness-like properties on Hattori spaces, *Topology and its Applications* 341 (2024) 108754.
- [13] A. Calderón-Villalobos, I. Sánchez, Hattori subspaces, *Topology and its Applications* 357 (2024) 109077.
- [14] A. Calderón-Villalobos, I. Sánchez, Small compacts, *Topology and its Applications* 373 (2025) 109490.
- [15] V. A. Chatyrko, Y. Hattori, A poset of topologies on the set of real numbers, *Comment. Math. Univ. Carolin.* 54 (2013), no. 2, 189–196.
- [16] V. A. Chatyrko, On σ -compact Hattori spaces, *Appl. Gen. Topol.* 25, no. 1 (2024), 35–40.
- [17] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [18] M. Fernández, On some classes of paratopological groups, *Topology Proc.* 40 (2012), 63–72.
- [19] M. Fernández, M. Tkachenko, Subgroups of paratopological groups and feebly compact groups, *Appl. Gen. Topol.* 15, no. 2(2014), 235–248.
- [20] Y. Hattori, Order and topological structures of posets of the formal balls on metric spaces, *Mem. Fac. Sci. Shimane Univ. Series B: Mathematical Science* 43 (2010), pp. 13–26.
- [21] E. Hewitt, K. A. Ross, *Abstract Harmonic Analysis, Vol. I* (Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York), 1963.
- [22] R. Hernández-Gutiérrez, Countable dense homogeneity and the double arrow space, *Topology and its Applications* 160 (2013) 1123–1128.

- [23] T. Jech, Set Theory, The Third Millennium Edition revised and expanded, New York, Springer, 2002.
- [24] I. Juhász, Cardinal functions in topology—ten years later, second ed., Mathematical Centre Tracts, vol. 123, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980.
- [25] V. Kannan, M. Rajagopalan, On scattered spaces, Proc. Amer. Math. Soc., 43(2)(1974), 402–408.
- [26] M. Katětov, On H-closed extensions of topological spaces, Časopis Pěst. Mat. Fys. 72 (1947), 17–32.
- [27] A. S. Kechris, Classical Descriptive Set Theory, Graduate texts in mathematics, vol. 156, Springer-Verlag, New York, 1995.
- [28] J. Kulesza, Results on spaces between the Sorgenfrey line and usual topologies on $\mathbb{R}$, Topology and its Applications 231 (2017), 266–275.
- [29] F. Lin, J. Li, Some topological properties of spaces between the Sorgenfrey and usual topologies on real number, arXiv:1807.06938 [math.GN].
- [30] X. Liu, F. Lin, C. Liu, A note on almost topological groups, Journal of Mathematician Research with Applications, Jan., 2015, Vol. 35, No. 1, pp. 85–91.
- [31] L. S. Pontryagin, Continuous Groups, third edition, Nauka, Moscow, 1973.
- [32] O.V. Ravsky, Paratopological groups I, Matematychni Studii 16 (2001), No. 1, 37–48.
- [33] O.V. Ravsky, Paratopological groups II, Matematychni Studii 17 (2002), No. 1, 93–101.
- [34] H. L. Royden, P. M. Fitzpatrick, Real Analysis, Fourth Edition, <https://zbmath.org/1191.26002>, 2010.
- [35] M. Sanchis, M.G. Tkachenko, Totally Lindelöf and totally ω -narrow paratopological groups, Topol. Appl. 155 (2007) 322–334.

- [36] L. A. Steen, J. A. Seebach, Counterexamples in Topology, Dover Publications Inc. New York, 1995.
- [37] M. H. Stone, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. 41 (1937), 375-481.
- [38] M. Tkachenko, Topological groups for topologists: Part I, Bol. Soc. Mat. Mexicana 5 (2), 237-280.
- [39] M. Tkachenko, Group reflection and precompact paratopological groups, Topological Algebra and its Applications (2013), 22-30.
- [40] S. Willard, General Topology, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., New York, 1970.



Casa abierta al tiempo

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

ACTA DE DISERTACIÓN PÚBLICA

No. 00097

Matrícula: 2213801160

TOPOLOGÍAS DE HATTORI EN
GRUPOS CASI TOPOLÓGICOS.

En la Ciudad de México, se presentaron a las 12:00 horas del día 29 del mes de octubre del año 2025 en la Unidad Iztapalapa de la Universidad Autónoma Metropolitana, los suscritos miembros del jurado:

DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS
DR. ROBERTO PICHARDO MENDOZA
DR. MANUEL SANCHIS LOPEZ
DR. RODRIGO JESUS HERNANDEZ GUTIERREZ
DR. MIKHAIL TKACHENKO GALIEVICH

Bajo la Presidencia del primero y con carácter de Secretario el último, se reunieron a la presentación de la Disertación Pública cuya denominación aparece al margen, para la obtención del grado de:

DOCTOR EN CIENCIAS (MATEMÁTICAS)

DE: ANGEL CALDERÓN VILLALOBOS

y de acuerdo con el artículo 78 fracción IV del Reglamento de Estudios Superiores de la Universidad Autónoma Metropolitana, los miembros del jurado resolvieron:

APROBAR

Acto continuo, el presidente del jurado comunicó al interesado el resultado de la evaluación y, en caso aprobatorio, le fue tomada la protesta.

REVISÓ

MTRA. ROSALÍA SERRANO DE LA PAZ
DIRECTORA DE SISTEMAS ESCOLARES

DIRECTOR DE LA DIVISIÓN DE CBI

Román Linares Romero
DR. ROMAN LINARES ROMERO

PRESIDENTE

Richard Gordon Wilson Roberts
DR. RICHARD GORDON WILSON ROBERTS

VOCAL

Roberto Pichardo Mendoza
DR. ROBERTO PICHARDO MENDOZA

VOCAL
Vocal 1

Manuel Sanchis Lopez
DR. MANUEL SANCHIS LOPEZ

VOCAL

Rodrigo J. Hernández G.
DR. RODRIGO JESUS HERNANDEZ
GUTIERREZ

SECRETARIO

Mikhail Tkachenko Galievich
DR. MIKHAIL TKACHENKO GALIEVICH