



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA IZTAPALAPA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS E INGENIERÍA

Casa abierta al tiempo
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA

Modelo de masa-consistente para aproximar campos de viento 3D

Tesis que presenta:

Daniel Alberto Jácome Hernández

Para obtener el grado de

Maestro en Ciencias

(Matemáticas Aplicadas e Industriales)

Asesora: Dra. María Luisa Sandoval Solís

Jurado calificador:

Presidente: Dr. Salvador Botello Rionda

Secretario: Dr. Lorenzo Héctor Juárez Valencia

Vocal: Dra. María Luisa Sandoval Solís

México, D.F. Abril 2014.

Agradecimientos

Quiero agradecer a mi asesora de tesis Dra. Ma. Luisa Sandoval Solís, por sus conocimientos brindados y paciencia para llevar a cabo este trabajo.

Agradezco a los miembros del jurado calificador, integrado por el Dr. L. Héctor Juárez Valencia y el Dr. Salvador Botello Rionda, por las valiosas contribuciones que enriquecieron el contenido de esta tesis.

Agradezco a CONACYT por el apoyo económico brindado durante la realización de este proyecto.

Finalmente agradezco a mis profesores y amigos que me apoyaron en todo momento, a Gabriela por sus consejos y sugerencias, al Dr. Roberto Ávila por su gran apoyo y a mi familia que en todo momento me alentó a concluir esta etapa.

Resumen

Los modelos de masa-consistente nos permiten aproximar campos de viento 3D sobre una región de estudio, a partir de la componente horizontal \mathbf{u}^I . Este modelo se basa en la ecuación de continuidad para un dominio Ω con paredes artificiales.

En este trabajo se presenta la formulación del problema que minimiza la diferencia entre el campo ajustado y el campo exacto, sujeto a las condiciones de conservación de masa $\nabla \cdot \mathbf{u}$ y no penetrabilidad sobre el terreno $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$.

Aplicando el método de multiplicadores de Lagrange obtenemos las ecuaciones de Euler-Lagrange, con las cuales se plantea un problema elíptico para el multiplicador de Lagrange λ . Este problema se resuelve mediante la técnica de elemento finito, empleando tetraedros como elementos de discretización del dominio Ω . Una vez calculada λ se aproxima el campo de viento a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange $\mathbf{u} = \mathbf{u}^I + S^{-1}\nabla\lambda$.

Se consideran dos casos de condiciones de frontera sobre las paredes artificiales para el multiplicador λ : (1) Dirichlet sobre las paredes artificiales y (2) Neumann en paredes verticales Γ_V y Dirichlet en la tapa Γ_T . También se utiliza la técnica de nodos fantasma para los dos casos de condiciones de frontera descritos.

Finalmente se dan las conclusiones obtenidas para las diferentes condiciones de frontera a partir de comparar todos los experimentos numéricos realizados.

Índice general

Agradecimientos	III
Resumen	V
1. Introducción	1
1.1. Objetivo de la tesis	3
1.2. Estructura de la tesis	3
2. Problema de estudio	5
2.1. Preliminares	5
2.2. Definición del problema general	7
2.3. Formulación con multiplicadores de Lagrange	8
2.3.1. Condiciones de frontera estándar para el multiplicador	9
2.3.2. Otras condiciones de frontera	12
2.4. Formulaciones variacionales del problema elíptico para λ	12
2.4.1. Condiciones de frontera estándar	12
2.4.2. Otras condiciones de frontera	13
3. Discretización del problema elíptico	15
3.1. Discretización	15
3.2. Funciones de forma	18
3.3. Transformación isoparamétrica	18
3.4. Tetraedros	24
3.5. Fórmulas de integración	26
4. Algoritmo campos de viento 3D	29
4.1. Campo de velocidades discreto	29
4.2. Aproximación de la Divergencia promedio	30
4.3. Formulación con otras condiciones de frontera	31
4.3.1. Funciones de forma 2D	33

4.3.2. Fórmulas de integración 2D	33
4.4. Algoritmo	34
5. Resultados numéricas	37
5.1. Problema <i>Benchmark</i>	37
5.2. Análisis con condiciones de frontera tipo Dirichlet	40
5.3. Análisis con condiciones de frontera tipo Neumann	41
5.4. Nodos fantasma sobre fronteras artificiales	44
5.4.1. Condiciones tipo Dirichlet	44
5.4.2. Condiciones tipo Neumann	46
5.5. Ejemplo caso no lineal	47
6. Conclusiones	49
A. Problemas de minimización con restricciones	51
A.1. Solución de un problema de minimización	51
A.2. Condiciones para existencia de un mínimo	53
B. Construcción de mallas con GID	57
B.1. Problemtipe Campos 3D	57
B.2. Geometría y mallas generadas	61
B.2.1. Datos generados	62
Bibliografía	66

CAPÍTULO 1

Introducción

Varios problemas en meteorología y diversas aplicaciones, como la simulación de la acción del viento sobre estructuras (edificios, puentes, etc.), desarrollo de incendios forestales, producción de energía eólica y transporte y difusión de contaminantes, como se muestran en la figura 1.1, requieren de la aproximación de campos de viento sobre alguna superficie terrestre (topografía) [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7].



Figura 1.1: Aplicaciones de campos de viento

En las últimas décadas se han desarrollado diferentes tipos de modelos para simular campos de viento. Éstos se pueden clasificar principalmente en dos tipos de modelos: de pronóstico o dinámicos y de diagnóstico o cinemáticos [2, 3]. Los primeros describen la evolución en el tiempo de campos variables meteorológicos a partir de un estado inicial e integran los efectos de posibles variaciones en el tiempo de condiciones de frontera. Se basan en ecuaciones de termodinámica e hidrodinámica que dependen del tiempo. Estos modelos por lo regular incluyen efectos advectivos, estratificación,

fuerza de coriolis, radiación y flujos turbulentos de momentum, calor y humedad. Por lo cual la solución numérica de dichas ecuaciones resultan ser computacionalmente caras. Además es común que no se cuente con los datos de los parámetros del modelo.

Por otro lado, los modelos de diagnóstico no se pueden utilizar para predecir en el tiempo, pero son capaces de reconstruir un campo de viento en estado estacionario a partir de un conjunto inicial de datos experimentales satisfaciendo algunas restricciones físicas. Por ejemplo, si la ecuación de continuidad se impone, se asegura conservación de la masa, al modelo resultante se le llama de masa consistente [3, 4, 8, 9, 10, 11].

Los modelos de diagnóstico se pueden aproximar de dos formas: un modelo linealizado que es la solución del estado estacionario de las ecuaciones de Navier-Stokes, o el modelo de masa-consistente que analiza los datos meteorológicos disponibles [2].

Por lo anterior es importante destacar que la solución numérica de estas ecuaciones en estado estacionario son atractivas debido a su simplicidad y porque no requieren muchos datos de entrada, siendo económicas y fáciles de operar [3].

Por su parte, una red de monitoreo atmosférico solamente proporciona algunos valores de la componente horizontal del campo de velocidades. Los modelos de diagnóstico para ajustar campos de viento usan como condición inicial una interpolación de dichos datos, en nuestro caso le llamaremos \mathbf{u}^I . El método de interpolación juega un papel crucial para la determinación de las características finales del campo de viento, ya que diferentes campos vectoriales se pueden generar a partir de los mismos datos experimentales al cambiar el método de interpolación. Por lo regular, el campo vectorial interpolado \mathbf{u}^I , no satisface la conservación de masa. Por ello, para ajustar este campo de viento, se propone el problema siguiente: Dado \mathbf{u}^I se desea encontrar \mathbf{u} tal que la diferencia entre \mathbf{u}^I y \mathbf{u} sea mínima sujeto a la restricción de conservación de masa $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. La finalidad de este trabajo es encontrar la solución del problema anterior considerando que la región de estudio Ω está en tres dimensiones.

Sasaki introdujo el modelo de proyección o mínimos cuadrados, y utilizó el cálculo variacional para transformarlo en un problema de minimización con restricciones. En la referencia [11] se proporciona un formalismo matemático para el modelo de Sasaki, donde descomponen el espacio \mathbf{L}^2 en dos subespacios ortogonales, con el fin de que las condiciones de frontera aparezcan de forma natural. A finales de la década de los setenta se comenzaron a desarrollar modelos de masa consistente que principalmente utilizan técnicas de diferencias finitas o volumen finito usando programación secuencial o paralelo. Una buena descripción de estos trabajos los presenta Sandro Finardi en [6]. Por su parte, el método de elemento finito comenzó a utilizarse con mayor frecuencia en simulaciones atmosféricas desde hace más de 20 años. Esto se

debe a que esta técnica se puede emplear, para regiones con geometría compleja y propiedades homogéneas o variables. Además de poder usar herramientas computacionales ad hoc que reducen significativamente el almacenamiento y la velocidad de las soluciones [12].

En particular este trabajo esta basado en la formulación de Sasaki, es decir, plantea un problema de minimización variacional con restricciones, el cual se resuelve con la técnica de multiplicadores de Lagrange.

1.1. Objetivo de la tesis

El propósito general del trabajo es generar campos de viento 3D a partir de datos experimentales interpolados, \mathbf{u}^I , en un dominio Ω con paredes artificiales. Es decir, se desea encontrar el campo ajustado \mathbf{u} en Ω tal que la diferencia entre \mathbf{u} y \mathbf{u}^I sea mínima, y que satisfaga las condiciones de conservación de masa ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) y la no penetrabilidad sobre el terreno ($\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$).

Debido a que se emplea la técnica de multiplicadores de Lagrange para encontrar la solución del problema de minimización con restricciones, a partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange se plantea un problema elíptico para el multiplicador de Lagrange λ . Un objetivo específico de la tesis es analizar diferentes condiciones de frontera para el multiplicador λ en las paredes artificiales de la región de estudio.

1.2. Estructura de la tesis

El cuerpo de este documento se estructura en 6 capítulos. El capítulo 1 incluye la introducción al tema de estudio y los objetivos de la misma. En el capítulo 2 se define el problema a estudiar y se presenta la formulación con multiplicadores de Lagrange, así como las formulaciones variacionales del problema elíptico usando diferentes condiciones de frontera. El capítulo 3 muestra la discretización para el problema elíptico con condiciones de frontera tipo Dirichlet. En el capítulo 4 se describe el algoritmo final para ajustar un campo de viento 3D. También se presenta la discretización para las condiciones de frontera tipo Neumann. Los resultados numéricos para ajustar el campo de velocidades con las diferentes condiciones de frontera se exponen en el capítulo 5. Por último en el capítulo 6 se dan las conclusiones obtenidas del trabajo de tesis.

CAPÍTULO 2

Problema de estudio

En este capítulo se definen los espacios de funciones necesarios para presentar el problema general de estudio. Así como su correspondiente formulación con multiplicadores de Lagrange, para diferentes condiciones de frontera sobre las paredes artificiales. Se delimita la región de estudio y se mencionan las condiciones que debe satisfacer para garantizar existencia y unicidad de la solución. Por último, se describen las formulaciones variacionales para las condiciones de frontera propuestas.

2.1. Preliminares

En este apartado se definen algunos conceptos útiles asociados a la región Ω y los espacios donde se plantea el problema de estudio ver [13, 14].

Sea Ω un conjunto abierto y conexo. Se dice que Ω es simplemente conexo si, para toda curva cerrada simple C situada en Ω , la región interior a C es también un subconjunto de Ω .

La frontera $\partial\Omega$ es Lipschitz continua si existe un número de conjuntos abiertos \mathcal{O}_i , $i = 1, 2, \dots, m$, que cubren $\partial\Omega$, tal que, para cada i , la intersección $\partial\Omega \cap \mathcal{O}_i$ es la gráfica de una función Lipschitz-continua y $\Omega \cap \mathcal{O}_i$ está sobre un lado de la gráfica.

En particular, la función $T : [a, b] \rightarrow [a, b]$ se dice que es Lipschitz continua si hay una constante $L > 0$ tal que

$$|Tx - Ty| \leq L|x - y| \quad \forall x, y \in [a, b].$$

En tal caso L es llamada la constante de Lipschitz.

El espacio $L^2(\Omega)$ es el conjunto de funciones medibles cuadrado integrables sobre

$\Omega \in \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, es decir,

$$L_2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_{\Omega} u^2 d\Omega < \infty \right\}. \quad (2.1)$$

Señalamos que la integral (2.1) es en el sentido de Lebesgue ver [15]. Sobre este espacio se define el producto interior (\cdot, \cdot) definido por

$$(u, v) = \int_{\Omega} uv d\Omega,$$

que induce la norma $\|u\|_{L_2(\Omega)}$ dada por

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} u^2 d\Omega \right]^{1/2} \quad \forall u \in L_2(\Omega).$$

Cabe mencionar que el espacio $L_2(\Omega)$ es completo con producto interior, por lo cual es un espacio de Hilbert.

El espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$ se define como:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \mid u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, \dots, n \right\}. \quad (2.2)$$

$H^1(\Omega)$ está dotado por el producto escalar $(u, v)_{H^1} = (u, v) + (\nabla u, \nabla v)$, es decir,

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} [u \cdot v + \nabla u \cdot \nabla v] d\Omega \quad \forall u, v \in H^1(\Omega),$$

que induce la norma:

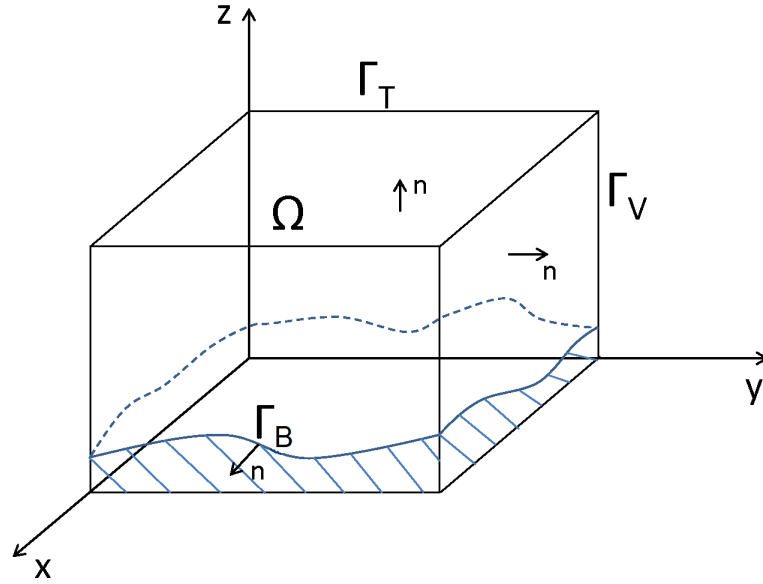
$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left\{ \int_{\Omega} \left[u^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \right] d\Omega \right\}^{1/2} \quad \forall u \in H^1(\Omega). \quad (2.3)$$

Por otro lado, sea $\mathbf{L}_2(\Omega) = L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$ y $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ entonces, si $\mathbf{u} \in \mathbf{L}_2(\Omega)$

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})} = [\|u_1\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u_2\|_{L_2(\Omega)}^2]^{1/2}. \quad (2.4)$$

y $\mathbf{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ con

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^1(\Omega)} = [\|u_1\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|u_2\|_{H^1(\Omega)}^2]^{1/2} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}_1(\Omega). \quad (2.5)$$

Figura 2.1: Dominio general Ω .

2.2. Definición del problema general

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ abierto, simplemente conexo y acotado con frontera Lipschitz continua dada por $\partial\Omega = \Gamma_B \cup \Gamma_V \cup \Gamma_T$, donde Γ_B es la parte de la frontera que representa la superficie del terreno (topografía), las cuatro paredes verticales forman Γ_V y Γ_T es la tapa o parte superior, como se ilustra en la figura 2.1. Observemos que $\Gamma_V \cup \Gamma_T$ son artificiales.

La ecuación de continuidad se escribe como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.6)$$

donde \mathbf{u} es el campo vectorial de velocidad del viento sobre Ω . Si suponemos que la densidad ρ es constante con respecto a tiempo y espacio, entonces el campo vectorial de velocidades satisface la relación

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.7)$$

restringido a la condición de impenetrabilidad en el terreno

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_B. \quad (2.8)$$

Dada una función \mathbf{u}^I en Ω nuestro objetivo es encontrar un campo de velocidades \mathbf{u} que conserve la masa, es decir, que satisfaga la ecuación (2.7) y la condición de impenetrabilidad sobre el terreno (2.8).

Si suponemos que $\mathbf{u}^I \in \mathbf{L}_2(\Omega)$ podemos reformular el problema de estudio en uno de mínimos cuadrados. Para ello definimos el funcional cuadrático a minimizar $J : \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$J(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{v} - \mathbf{u}^I\|_{S, \Omega}^2 = \frac{1}{2} \int_{\Omega} S(\mathbf{v} - \mathbf{u}^I) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{u}^I) d\Omega, \quad (2.9)$$

donde $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega) = \{\mathbf{v} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \nabla \cdot \mathbf{v} \in L^2(\Omega)\}$ y S es una matriz diagonal con parámetros de peso α_{ii}^2 , $i = 1, 2, 3$, llamados módulos de precisión Gaussianos [9]. La norma S de $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ se define como

$$\|\mathbf{v}\|_{S, \Omega} = \left\{ \int_{\Omega} S\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} d\Omega \right\}^{1/2}$$

Entonces, el problema a estudiar se establece como un problema de minimización con restricciones, de la siguiente forma:

Dado $\mathbf{u}^I \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, encontrar $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ tal que

$$J(\mathbf{u}) \leq J(\mathbf{v}) \quad \text{para toda } \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega), \quad (2.10)$$

sujeto a

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sobre } \Gamma_B. \quad (2.12)$$

En nuestro caso, el funcional J está sujeto a dos restricciones dadas en las ecuaciones (2.11) y (2.12). Por lo cual, utilizamos la técnica de multiplicadores de Lagrange que a continuación se describe.

2.3. Formulación con multiplicadores de Lagrange

Dado que las relaciones (2.10)-(2.12) definen un problema de minimización con restricciones, en este apartado se emplea la formulación de multiplicadores de Lagrange descrita en el anexo A. Un desarrollo más amplio de esta técnica se encuentra en [16]. Por su parte, el problema de mínimos cuadrados con restricciones, ecuaciones (2.10)-(2.12) también se puede aproximar mediante una formulación de punto silla [17].

2.3.1. Condiciones de frontera estándar para el multiplicador

Se presenta la formulación con el multiplicador de Lagrange asociado al caso en que $\lambda = 0$ en las fronteras artificiales $\Gamma_V \cup \Gamma_T$, las cuales son consideradas condiciones estándar para λ , ver [18], y en la topografía del terreno Γ_B se tiene una condición de Neumann que proviene de la condición de impenetrabilidad, ecuación (2.12). Al emplear la formulación del Anexo A, tenemos que el operador de restricciones está dado por $B : \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ tal que $B(v)$ satisface las condiciones (2.11) y (2.12).

Sea \mathcal{V} es el conjunto de restricciones o conjunto de funciones admisibles que consiste de todos los elementos que satisface las condiciones (2.11) y (2.12), es decir,

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \mid \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \text{ en } \Omega, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_B\}. \quad (2.13)$$

En particular $\mathcal{V} \subset \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$.

Por lo tanto el problema de minimización se escribe como: encontrar $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$ tal que $J(\mathbf{u}) \leq J(\mathbf{v})$ para todo $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$.

Observemos que el dual de $L^2(\Omega)$ es el mismo espacio, entonces podemos definir el funcional de Lagrange L en $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por

$$L(\mathbf{v}, q) = J(\mathbf{v}) + (q, B\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega), q \in L^2(\Omega). \quad (2.14)$$

Al calcular la primera variación del funcional L e igualar a cero, ver el desarrollo en las ecuaciones (A.5)-(A.11), obtenemos el problema variacional con valores en la frontera siguiente:

Encontrar (\mathbf{u}, λ) tal que

$$\langle \delta J(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle + (\lambda, B\mathbf{v}) = 0, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega). \quad (2.15)$$

$$(q, B\mathbf{u}) = 0, \quad \forall q \in L^2(\Omega) \quad (2.16)$$

Cabe señalar que si el funcional de Lagrange, L , cumple con las condiciones (A.14) y (A.15) (condición de Babuška-Brezzi) del Anexo A.2, por el teorema A.2.2 del mismo anexo, se tiene la existencia y unicidad de la solución al problema (2.15) y (2.16), ver [16].

A continuación se describen cada uno de los términos del sistema (2.15) y (2.16). Dado que B satisface las ecuaciones (2.11) y (2.12), de la ecuación (2.16) se tiene

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = 0. \quad (2.17)$$

Aplicando la fórmula de Green, ver [14, 16], la ecuación (2.17) queda expresada de la siguiente manera:

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = \int_{\partial\Omega} q \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla q d\Omega = 0. \quad (2.18)$$

Es decir,

$$\int_{\Gamma_B} q \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_T} q \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_V} q \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla q d\Omega = 0,$$

donde $\int_{\Gamma_B} q \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0$ por la ecuación (2.12), por lo tanto

$$- \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla q d\Omega + \int_{\Gamma_T} q \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_V} q \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0. \quad (2.19)$$

Si $q = 0$ sobre $\Gamma_V \cup \Gamma_T$, entonces podemos definir \mathcal{V}^\perp como

$$\mathcal{V}^\perp = \{ \nabla q : q \in H^1(\Omega), q = 0 \text{ sobre } \Gamma_V \cup \Gamma_T \},$$

entonces debido a la ecuación (2.19) y al conjunto \mathcal{V}^\perp , la igualdad (2.18) se escribe como

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} d\Omega = - \int_{\Omega} \nabla q \cdot \mathbf{u} d\Omega. \quad (2.20)$$

Ahora el primer término del lado izquierdo de la ecuación (2.15), $\langle \delta J(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle$, es la primera variación del funcional $J(\mathbf{u})$, así

$$\begin{aligned} \langle \delta J(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} J(\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{v}) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{1}{2} \|(\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{v}) - \mathbf{u}^I\|_S^2. \end{aligned}$$

De la identidad (2.9) se sigue

$$\begin{aligned} \langle \delta J(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} S((\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{v}) - \mathbf{u}^I) \cdot ((\mathbf{u} + \epsilon \mathbf{v}) - \mathbf{u}^I) d\Omega \right\} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \langle \mathbf{u} + \epsilon \mathbf{v} - \mathbf{u}^I, \mathbf{u} + \epsilon \mathbf{v} - \mathbf{u}^I \rangle_S. \end{aligned}$$

Utilizando las propiedades de producto interno obtenemos

$$\langle \delta J(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \{ \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}^I, \mathbf{u} - \mathbf{u}^I \rangle + 2\epsilon \langle \mathbf{u} - \mathbf{u}^I, \mathbf{v} \rangle + \epsilon^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \}.$$

Derivando parcialmente con respecto a ϵ y tomando el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ se tiene

$$\langle \delta J(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} S(\mathbf{u} - \mathbf{u}^I) \cdot \mathbf{v} d\Omega.$$

Entonces, la ecuación (2.15) queda expresada en forma variacional como

$$\int_{\Omega} S(\mathbf{u} - \mathbf{u}^I) \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} \lambda \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega = 0. \quad (2.21)$$

Por lo tanto, empleando las fórmulas de Green en la identidad anterior se determina la expresión siguiente:

$$\int_{\Omega} S(\mathbf{u} - \mathbf{u}^I) \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \lambda \cdot \mathbf{v} d\Omega = 0, \quad (2.22)$$

es decir,

$$S(\mathbf{u} - \mathbf{u}^I) = \nabla \lambda,$$

con $\lambda \in H_0$, donde definimos a

$$H_0 = \{q \in H^1(\Omega) \mid q = 0 \text{ sobre } \Gamma_T \cup \Gamma_V\}. \quad (2.23)$$

Entonces se tienen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^I + S^{-1} \nabla \lambda. \quad (2.24)$$

Aplicando el operador divergencia en ambos lados de la igualdad (2.24) y sustituyendo la condición de conservación de masa (2.11) se deduce la ecuación elíptica $-\nabla \cdot (S^{-1} \nabla \lambda) = \nabla \cdot \mathbf{u}^I$.

Luego al usar la restricción (2.12) que corresponde a la condición de no penetrabilidad, en las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.24) obtenemos

$$0 = \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n} + S^{-1} \nabla \lambda \cdot \mathbf{n}, \quad (2.25)$$

equivalente a

$$\mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n} = -S^{-1} \nabla \lambda \cdot \mathbf{n} \text{ sobre } \Gamma_B. \quad (2.26)$$

Dado que $\lambda \in \mathcal{V}^\perp$ se debe imponer la condición $\lambda = 0$ sobre las fronteras artificiales $\Gamma_T \cup \Gamma_V$. Por lo tanto, obtenemos el correspondiente problema elíptico para el multiplicador λ descrito por

$$-\nabla \cdot (S^{-1} \nabla \lambda) = \nabla \cdot \mathbf{u}^I \text{ en } \Omega, \quad (2.27)$$

$$\lambda = 0 \text{ sobre } \Gamma_T \cup \Gamma_V, \quad (2.28)$$

$$-S^{-1} \nabla \lambda \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n} \text{ sobre } \Gamma_B. \quad (2.29)$$

Finalmente el campo de velocidades \mathbf{u} se recupera mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.24).

2.3.2. Otras condiciones de frontera

Se presenta la formulación variacional asociada al multiplicador de Lagrange λ , con $\lambda = 0$ sobre la tapa Γ_T y en las paredes verticales imponemos las condición $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n}$ como se muestra en [11, 19].

Análogo al caso anterior, a las ecuaciones Euler-Lagrange (2.24) le aplicamos el producto interior con \mathbf{n} y sustituimos la condición de frontera sobre Γ_V , entonces

$$S^{-1}\nabla\lambda \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.30)$$

Por tanto, el problema elíptico a resolver con estas condiciones de frontera es el siguientes:

$$-\nabla \cdot (S^{-1}\nabla\lambda) = \nabla \cdot \mathbf{u}^I \text{ en } \Omega, \quad (2.31)$$

$$\lambda = 0 \text{ sobre } \Gamma_T, \quad (2.32)$$

$$S^{-1}\nabla\lambda \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma_V, \quad (2.33)$$

$$-S^{-1}\nabla\lambda \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n} \text{ sobre } \Gamma_B. \quad (2.34)$$

En este caso $\mathcal{H}_0 = \{q \in H^1(\Omega) \mid q = 0 \text{ sobre } \Gamma_T\}$ y además $\nabla q \notin \mathcal{V}^\perp$, ya que de la ecuación (2.19) obtenemos

$$\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla q d\Omega = \int_{\Gamma_V} q \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n} d\Gamma \quad (2.35)$$

2.4. Formulaciones variacionales del problema elíptico para λ

En este apartado se presenta la formulación variacional correspondiente al multiplicador λ para las diferentes condiciones de frontera artificiales.

2.4.1. Condiciones de frontera estándar

Sea $q \in H_0$, con H_0 definido por la relación (2.23) y Ω la región de estudio, entonces al multiplicar la ecuación (2.27) por la función de prueba q e integrar sobre Ω se obtiene

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (S^{-1}\nabla\lambda) q d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}^I q d\Omega, \quad \forall q \in H_0. \quad (2.36)$$

Dado que $\nabla \cdot (qS^{-1}\nabla\lambda) = S^{-1}\nabla\lambda \cdot \nabla q + q\nabla \cdot (S^{-1}\nabla\lambda)$, la ecuación (2.36) se transforma en:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} S^{-1}\nabla\lambda \cdot \nabla q d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (qS^{-1}\nabla\lambda) d\Omega = \\ \int_{\Omega} \nabla \cdot (q\mathbf{u}^I) d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{u}^I \cdot \nabla q d\Omega, \quad \forall q \in H_0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Por el teorema de la divergencia de Gauss, ver [14, 16], y dado que $\Gamma = \Gamma_V \cup \Gamma_T \cup \Gamma_B$, los términos de la ecuación (2.37) se pueden ver de la siguiente forma

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} S^{-1} \nabla \lambda \cdot \nabla q d\Omega - \int_{\Gamma_V \cup \Gamma_T} q S^{-1} \nabla \lambda \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma_B} q S^{-1} \nabla \lambda \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \\ & \int_{\Gamma_B} q \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_V \cup \Gamma_T} q \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Omega} \mathbf{u}^I \cdot \nabla q d\Omega, \quad \forall q \in H_0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Dado que $q = 0$ sobre $\Gamma_V \cup \Gamma_T$ ($q \in H_0$), los términos $-\int_{\Gamma_V \cup \Gamma_T} q S^{-1} \nabla \lambda \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0$ y $\int_{\Gamma_V \cup \Gamma_T} q \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0$, entonces la ecuación (2.38) se reescribe como

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} S^{-1} \nabla \lambda \cdot \nabla q d\Omega - \int_{\Gamma_B} q S^{-1} \nabla \lambda \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \\ & - \int_{\Omega} \mathbf{u}^I \cdot \nabla q d\Omega + \int_{\Gamma_B} q \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad \forall q \in H_0. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Al aplicar la condición del terreno (ecuación (2.29)),

$$\int_{\Gamma_B} q \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n} d\Gamma = - \int_{\Gamma_B} q S^{-1} \nabla \lambda \cdot \mathbf{n} d\Gamma,$$

en la relación anterior, obtenemos la formulación variacional para el problema elíptico descrito por las ecuaciones (2.27)-(2.29), el cual consiste en:

Encontrar $\lambda \in H_0$ tal que

$$\int_{\Omega} S^{-1} \nabla \lambda \cdot \nabla q d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{u}^I \cdot \nabla q d\Omega, \quad \forall q \in H_0. \quad (2.40)$$

Observamos que al definir $a(\lambda, q) = \int_{\Omega} S^{-1} \nabla \lambda \cdot \nabla q d\Omega$, la forma bilineal es simétrica, continua y H^1 -elíptica, ver [20]. Además la transformación lineal definida por

$$\mathcal{L}(v) = - \int_{\Omega} \mathbf{u}^I \cdot \nabla v d\Omega$$

es continua, por el teorema de Lax-Milgram el problema variacional (2.40) tiene solución única [14, 20, 21, 22].

2.4.2. Otras condiciones de frontera

De manera análoga al caso de la formulación variacional con condiciones de frontera estándar, se obtiene la formulación variacional para el problema elíptico descrito

en el apartado 2.3.2. Para ello, definimos el espacio $\mathcal{H}_0 = \{q \in H^1(\Omega) \mid q|_{\Gamma_T} = 0\}$. Así, se multiplica la ecuación (2.37) por la función de prueba $q \in \mathcal{H}_0$, se integra en Ω y se emplea la fórmula de Green-Gauss, de esta forma se deduce la expresión siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} S^{-1} \nabla \lambda \cdot \nabla q d\Omega - \int_{\Gamma_B} q S^{-1} \nabla \lambda \cdot \mathbf{n} d\Gamma - \int_{\Gamma_V} q S^{-1} \nabla \lambda \cdot \mathbf{n} d\Gamma = \\ - \int_{\Omega} \mathbf{u}^I \cdot \nabla q d\Omega + \int_{\Gamma_B} q \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_V} q \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad \forall q \in \mathcal{H}_0 \end{aligned} \quad (2.41)$$

De la ecuación (2.34), $\int_{\Gamma_B} q \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n} d\Gamma = - \int_{\Gamma_B} q S^{-1} \nabla \lambda \cdot \mathbf{n} d\Gamma$; al sustituir esta identidad y la condición (2.33) en la igualdad (2.41), obtenemos el problema variacional correspondiente al problema (2.31)-(2.34) de la sección 2.3.2, que consiste en:

Encontrar $\lambda \in \mathcal{H}_0$ tal que

$$\int_{\Omega} S^{-1} \nabla \lambda \cdot \nabla q d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{u}^I \cdot \nabla q d\Omega + \int_{\Gamma_V} q \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad \forall q \in \mathcal{H}_0. \quad (2.42)$$

CAPÍTULO 3

Discretización del problema elíptico

En este capítulo describimos la discretización del problema variacional para calcular el valor del multiplicador de Lagrange λ asociado al problema elíptico con condiciones de frontera estándar, ecuación (2.40). Se presentan las funciones de forma, las transformaciones isoparamétricas y las fórmulas de integración que se utilizan en el método de elemento finito. Resaltamos que el valor de λ también puede ser calculado usando diferencias finitas [2] o volumen finito [23].

3.1. Discretización

Dado el dominio Ω , escogemos tetraedros como elementos de discretización denotados por Ω_e . También pueden emplearse hexaedros como se muestra en [24] o elementos *brick* [25].

Denotemos por Ω_h a la partición de $\bar{\Omega}$ en ne elementos Ω_e , es decir, $\bar{\Omega}_h = \bigcup_{e=1}^{ne} \Omega_e$, donde los elementos Ω_e satisfacen las propiedades siguientes:

Dos tetraedros Ω_e y $\Omega_{e'}$ en Ω_h cumplen lo siguiente:

- No se intersectan, es decir, $\overset{\circ}{\Omega}_e \cap \overset{\circ}{\Omega}_{e'} = \emptyset$, para todo $e, e' = 1, 2, \dots, ne$.
- Si se intersectan, lo hacen en un vértice o en una arista en común o en una cara en común.

En la figura 3.1 se muestra una malla Ω_h del dominio $\bar{\Omega}$ usando tetraedros.

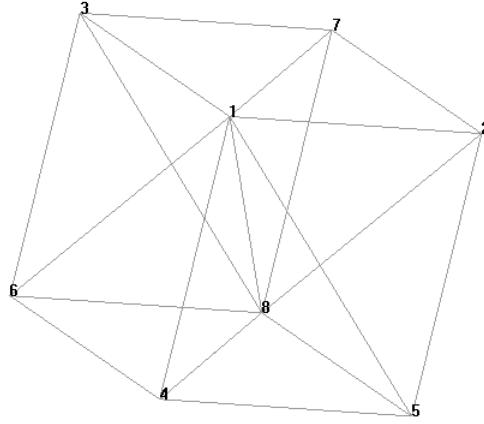


Figura 3.1: Malla tomando el parámetro de discretización $h = 1$.

Note que cualquier tetraedro Ω_e está asociado a un elemento finito, en nuestro caso, definido por la tripleta $(\Omega_e, \mathbb{P}_1(\Omega_e), \sum_e)$, donde

- $\mathbb{P}_1(\Omega_e)$ es el espacio de polinomios de grado menor o igual que uno definidos sobre Ω_e .
- \sum_e es el conjunto de grados de libertad, es decir, si $q \in \mathbb{P}_1(\Omega_e)$ y ψ_λ^e son las funciones base de $\mathbb{P}_1(\Omega_e)$, ver apartado 3.2, $q = q(\mathbf{n}_1)\psi_1 + q(\mathbf{n}_2)\psi_2 + q(\mathbf{n}_3)\psi_3 + q(\mathbf{n}_4)\psi_4$, entonces $\sum_e = \{q(\mathbf{n}_1), q(\mathbf{n}_2), q(\mathbf{n}_3), q(\mathbf{n}_4)\}$ con $\mathbf{n}_i(x_i, y_i, z_i)$ los vértices de Ω_e .

Puesto que se utilizan tetraedros, los elementos del espacio $H^1(\Omega)$ se aproximan mediante funciones continuas a trozos (o por tramos), las cuales restringidas al elemento Ω_e son polinomios de grado 1. Entonces $H^1(\Omega)$ se aproxima por el espacio de dimensión finita

$$H_h = \{q_h \in C^0(\Omega) \mid q_h|_{\Omega_e} \in \mathbb{P}_1(\Omega_e), \forall \Omega_e \in \Omega_h\}$$

donde $C^0(\Omega)$ es el conjunto de funciones continuas en Ω .

Observamos que los nodos del elemento finito son los puntos que se utilizan para realizar la aproximación sobre cada elemento Ω_e . En nuestro caso, el conjunto de nodos coincide con los vértices del elemento Ω_e .

Sea $\{\phi_j\}$ funciones base de H_h tales que

$$\phi_j(\mathbf{n}_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, nnt.$$

donde \mathbf{n}_i es el nodo i con coordenadas (x_i, y_i, z_i) y nnt es el número de nodos totales.

El soporte de $\phi_j(x, y, z)$, denotado por $sop(\phi_j)$, está formado por todos los elementos Ω_e que estén conectados con el nodo \mathbf{n}_j , y fuera del soporte compacto, ϕ_j se anula. Además, el conjunto $\{\phi_j\}$ es una base de H_h , esto es, si $\lambda_h \in H_h$, entonces

$$\lambda_h = \sum_{j=1}^{nnt} \lambda_h(\mathbf{n}_j) \phi_j(x_i, y_i, z_i). \quad (3.1)$$

A las constantes $\lambda_h(\mathbf{n}_j) = \lambda_j$, $j = 1, 2, \dots, nnt$ se les denomina grados de libertad globales del problema. Sea $H_{0,h} = \{q_h \in H_h \mid q_h|_{\Gamma_V \cup \Gamma_T} = 0\}$, por lo que la ecuación (2.40) se transforma en el problema variacional discreto:

Encontrar $\lambda_h \in H_{0,h}$ tal que

$$\int_{\Omega_h} S^{-1} \nabla \lambda_h \cdot \nabla q_h \, d\Omega = - \int_{\Omega_h} \mathbf{u}_h^I \cdot \nabla q_h \, d\Omega, \quad \forall q_h \in H_{0,h}. \quad (3.2)$$

Teniendo en cuenta la propiedad de sumabilidad y la relación (3.1), la ecuación (3.2) se convierte en:

$$\sum_{e=1}^{ne} \int_{\Omega_e} S^{-1} \nabla \sum_{j=1}^{nnt} \lambda_j \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, d\Omega = \sum_{e=1}^{ne} - \int_{\Omega_e} \mathbf{u}_h^I \cdot \nabla \phi_i \, d\Omega, \quad \forall \phi_i \in H_{0,h}. \quad (3.3)$$

Por último, dado que el operador integral es lineal la ecuación (3.3) se reescribe como:

$$\sum_{e=1}^{ne} \sum_{j=1}^{nnt} \lambda_j \int_{\Omega_e} S^{-1} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, d\Omega = \sum_{e=1}^{ne} - \int_{\Omega_e} \mathbf{u}_h^I \cdot \nabla \phi_i \, d\Omega, \quad \forall \phi_i \in H_{0,h}. \quad (3.4)$$

Luego la ecuación (3.4) forma un sistema de $nnt \times nnt$, el cual lo podemos representar de la forma siguiente:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F}, \quad (3.5)$$

donde

$$K_{ij} = \int_{\Omega_e} S^{-1} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, d\Omega$$

$$F_i = - \int_{\Omega_e} \mathbf{u}_h^I \cdot \nabla \phi_i \, d\Omega$$

Por lo tanto

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{ne} K_{ij}^e \quad \text{con} \quad K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} S^{-1} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, d\Omega$$

$$F_i = \sum_{e=1}^{ne} F_i^e \quad \text{con} \quad F_i^e = - \int_{\Omega_e} \mathbf{u}_h^I \cdot \nabla \phi_i \, d\Omega \quad (3.6)$$

3.2. Funciones de forma

Si restringimos las funciones base ϕ_i y ϕ_j al elemento Ω_e obtenemos las funciones de forma ψ_μ^e y ψ_ν^e respectivamente, es decir, $\phi_i|_{\Omega_e} = \psi_\mu^e$ y $\phi_j|_{\Omega_e} = \psi_\nu^e$. Cabe resaltar que μ y ν son los índices locales del elemento Ω_e asociados a los índices globales i y j , respectivamente. Así las identidades (3.6) se expresan de la siguiente forma

$$\begin{aligned} K_{ij}^e &= \int_{\Omega_e} S^{-1} \nabla \psi_\nu^e \cdot \nabla \psi_\mu^e d\Omega = K_{\mu\nu}^e \\ F_i^e &= - \int_{\Omega_e} \mathbf{u}_h^I \cdot \nabla \psi_\mu^e d\Omega = F_\mu^e \end{aligned} \quad (3.7)$$

y $K_{\mu\nu}^e$ es un elemento de la matriz K_e de tamaño $nne \times nne$, con nne número de nodos por elemento. La matriz de rigidez K_e y el vector independiente F_e para elementos tetraedros lineales ($nne = 4$) se expresan de la siguiente forma

$$K_e = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{pmatrix}, \quad F_e = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{pmatrix}$$

Dado que $\lambda_h^e \in \mathbb{P}_1(\Omega_e)$ se satisface que

$$\begin{aligned} \lambda_h^e &= \sum_{\mu}^{nne} \lambda_\mu^e \psi_\mu^e(x, y, z) \\ &= \lambda_1^e \psi_1^e(x, y, z) + \lambda_2^e \psi_2^e(x, y, z) + \lambda_3^e \psi_3^e(x, y, z) + \lambda_4^e \psi_4^e(x, y, z), \end{aligned}$$

donde $\lambda_\mu^e = \lambda_h(\mathbf{n}_\mu)$, pues $\phi_i|_{\Omega_e} = \psi_\mu^e$ y $\psi_\mu^e \in \mathbb{P}_1(\Omega_e)$ para $\mu = 1, 2, 3, 4$.

En general tenemos que

$$\psi_\mu^e(\mathbf{n}_\nu) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mu = \nu \\ 0, & \text{si } \mu \neq \nu \end{cases}$$

con $\psi_1^e + \psi_2^e + \psi_3^e + \psi_4^e = 1$

3.3. Transformación isoparamétrica

Consideremos el elemento de referencia $\widehat{\Omega}$ como el tetraedro con coordenadas locales ξ, η y ζ , tal que $0 \leq \xi \leq 1$, $0 \leq \eta \leq 1$ y $0 \leq \zeta \leq 1$. Se define la transformación isoparamétrica $T_e : \widehat{\Omega} \rightarrow \Omega_e$, $T_e(\widehat{\Omega}) = \Omega_e$ (ver figura 3.2) dada por

$$\begin{aligned}
 x &= x(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{j=1}^{nne} x_j \hat{\psi}_j(\xi, \eta, \zeta) \\
 T_e : \quad y &= y(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{j=1}^{nne} y_j \hat{\psi}_j(\xi, \eta, \zeta) \\
 z &= z(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{j=1}^{nne} z_j \hat{\psi}_j(\xi, \eta, \zeta)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

donde $\hat{\psi}_j$ con $j = 1, 2, \dots, nne$, son las funciones base (de forma) en el elemento de referencia $\hat{\Omega}$.

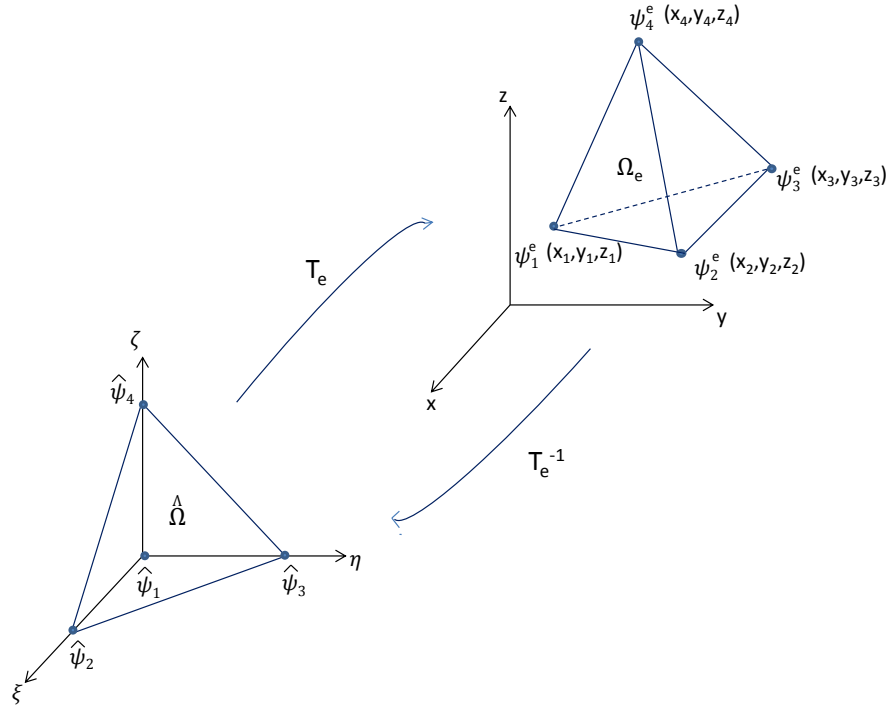


Figura 3.2: Transformación isoparamétrica T_e y su inversa T_e^{-1} .

Supongamos que x, y y z son continuamente diferenciables con respecto a ξ, η y ζ , entonces se tienen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
 dx &= \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta \\
 dy &= \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta \\
 dz &= \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta + \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta
 \end{aligned}$$

el cual podemos reescribir en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} \\ \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

La matriz de derivadas parciales (3.9) es llamada la matriz Jacobiana de la transformación isoparamétrica (3.8) y se denota por $J_e(\xi, \eta, \zeta)$.

Notemos que, una condición necesaria y suficiente para que el sistema (3.9) sea invertible es que el determinante de la matriz Jacobiana $|J_e|$ sea no cero en $(\xi, \eta, \zeta) \in \widehat{\Omega}$. La función $|J_e|$ es llamado el Jacobiano de la transformación (3.8),

$$|J_e| = \frac{\partial x}{\partial \xi} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial x}{\partial \eta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial x}{\partial \zeta} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \quad (3.10)$$

Por lo tanto, siempre que $|J_e| \neq 0$, podemos escribir

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{pmatrix} = J_e^{-1} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(x, y, z) \\ T_e^{-1} : \eta &= \eta(x, y, z) \\ \zeta &= \zeta(x, y, z) \end{aligned} \quad (3.11)$$

con $T_e^{-1}(\Omega_e) = \widehat{\Omega}$, entonces

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \\ d\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \xi}{\partial z} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial z} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

donde la matriz asociada de derivadas parciales es la inversa de la matriz Jacobiana, denotada por J_e^{-1} . Entonces los términos de la ecuación (3.12) están expresados de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \\ &= \frac{1}{|J_e|} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right),\end{aligned}\quad (3.13)$$

donde la última igualdad se obtiene de la inversa de la matriz J_e . De manera análoga se calculan las demás parciales, por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi}{\partial y} &= \frac{1}{|J_e|} \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) & \frac{\partial \xi}{\partial z} &= \frac{1}{|J_e|} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right) \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{1}{|J_e|} \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} \right) & \frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{1}{|J_e|} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \zeta} - \frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial \eta}{\partial z} &= \frac{1}{|J_e|} \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \zeta} \right) & \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= \frac{1}{|J_e|} \left(\frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} \right) \\ \frac{\partial \zeta}{\partial y} &= \frac{1}{|J_e|} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial z}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta} \right) & \frac{\partial \zeta}{\partial z} &= \frac{1}{|J_e|} \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right)\end{aligned}\quad (3.14)$$

Cuando se tiene que el número de nodos del elemento de referencia $\widehat{\Omega}$ es igual al número de nodos de cada elemento (nne) Ω_e se le llama a T_e transformación isoparamétrica.

Aquí, (x_j, y_j, z_j) $j = 1, 2, \dots, nne$ son las coordenadas de los nodos del elemento Ω_e , y $\widehat{\psi}_j(\xi, \eta, \zeta)$ es la función de forma para el elemento de referencia. En particular las funciones de forma satisfacen

$$\psi_j^e(x, y, z) = \widehat{\psi}_j^e(\xi, \eta, \zeta) \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, nne. \quad (3.15)$$

Empleando la transformación isoparamétrica (3.8) podemos reescribir las ecuaciones (3.13) y (3.14) como

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{|J_e|} \left[\left(\sum_{j=1}^{nne} y_i \frac{\partial \widehat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{j=1}^{nne} z_i \frac{\partial \widehat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) - \left(\sum_{j=1}^{nne} y_i \frac{\partial \widehat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) \left(\sum_{j=1}^{nne} z_i \frac{\partial \widehat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) \right] \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{|J_e|} \left[\left(\sum_{j=1}^{nne} x_i \frac{\partial \widehat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) \left(\sum_{j=1}^{nne} z_i \frac{\partial \widehat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) - \left(\sum_{j=1}^{nne} x_i \frac{\partial \widehat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{j=1}^{nne} z_i \frac{\partial \widehat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) \right] \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{|J_e|} \left[\left(\sum_{j=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{j=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) - \left(\sum_{j=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) \left(\sum_{j=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) \right] \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{|J_e|} \left[\left(\sum_{j=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) \left(\sum_{j=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) - \left(\sum_{j=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{j=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) \right] \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{|J_e|} \left[\left(\sum_{j=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{j=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) - \left(\sum_{j=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) \left(\sum_{j=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) \right] \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{|J_e|} \left[\left(\sum_{j=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) \left(\sum_{j=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) - \left(\sum_{j=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{j=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) \right] \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{|J_e|} \left[\left(\sum_{j=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{j=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) - \left(\sum_{j=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{j=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) \right] \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{|J_e|} \left[\left(\sum_{j=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{j=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) - \left(\sum_{j=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{j=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) \right] \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{|J_e|} \left[\left(\sum_{j=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{j=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) - \left(\sum_{j=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{j=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) \right] \quad (3.24)$$

En general si consideramos una función real $g(x, y, z)$ definida en el elemento Ω_e . Entonces podemos convertir a g en una función real $\hat{g}(\xi, \eta, \zeta)$ definida en $\hat{\Omega}$ mediante la transformación isoparamétrica

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= g(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) \\ &= g(T_e(\xi, \eta, \zeta)) \\ &= \hat{g}(\xi, \eta, \zeta), \end{aligned} \quad (3.25)$$

donde $x(\xi, \eta, \zeta)$, $y(\xi, \eta, \zeta)$ y $z(\xi, \eta, \zeta)$ están dadas por la transformación isoparamétrica (3.8).

Considerando lo anterior, se puede calcular la integral sobre el elemento de referencia como

$$\int_{\Omega_e} g(x, y, z) d\Omega = \int_{\hat{\Omega}} \hat{g}(\xi, \eta, \zeta) |J_e(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta \quad (3.26)$$

Ahora para escribir el $\nabla \psi_j^e(x, y, z)$ en función del $\nabla \hat{\psi}_j(\xi, \eta, \zeta)$ se usa la regla de la cadena para obtener las derivadas parciales en función de ξ, η y ζ , es decir,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} &= \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} &= \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_j^e}{\partial z} &= \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.27)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.16)-(3.24) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} &= \frac{1}{|J_e|} \left\{ \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \left[\left(\sum_{i=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{i=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) - \left(\sum_{i=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) \left(\sum_{i=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) \right] \right. \\ &+ \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \left[\left(\sum_{i=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) \left(\sum_{i=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) - \left(\sum_{i=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{i=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) \right] \\ &\left. + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \left[\left(\sum_{i=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{i=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) - \left(\sum_{i=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{i=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} &= \frac{1}{|J_e|} \left\{ \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \left[\left(\sum_{i=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) \left(\sum_{i=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) - \left(\sum_{i=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{i=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) \right] \right. \\ &+ \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \left[\left(\sum_{i=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{i=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) - \left(\sum_{i=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) \left(\sum_{i=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) \right] \\ &\left. + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \left[\left(\sum_{i=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{i=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) - \left(\sum_{i=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{i=1}^{nne} z_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_j^e}{\partial z} = & \frac{1}{|J_e|} \left\{ \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \left[\left(\sum_{i=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{i=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) - \left(\sum_{i=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) \left(\sum_{i=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) \right] \right. \\
& + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \left[\left(\sum_{i=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) \left(\sum_{i=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) - \left(\sum_{i=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{i=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \right) \right] \\
& \left. + \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \zeta} \left[\left(\sum_{i=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) \left(\sum_{i=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) - \left(\sum_{i=1}^{nne} x_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \eta} \right) \left(\sum_{i=1}^{nne} y_i \frac{\partial \hat{\psi}_j}{\partial \xi} \right) \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

Observemos que el sistema de ecuaciones (3.27) se representa en forma matricial como

$$\nabla \psi_j^e = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_j^e}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_j^e}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_j^e}{\partial z} \end{pmatrix} = J_e^{-T} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \hat{\psi}_j^e}{\partial \zeta} \end{pmatrix} = J_e^{-T} \nabla \hat{\psi}_j. \tag{3.31}$$

Por lo tanto, $\nabla \psi_j^e(x, y, z) = J_e^{-T} \nabla \hat{\psi}_j(\xi, \eta, \zeta)$, con

$$J_e^{-T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} & \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \frac{\partial \xi}{\partial z} & \frac{\partial \eta}{\partial z} & \frac{\partial \zeta}{\partial z} \end{pmatrix}$$

3.4. Tetraedros

En el caso del tetraedro lineal definido en la figura 3.3, las funciones de forma $\hat{\psi}_i$ son

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}_1 &= 1 - \xi - \eta - \zeta \\
\hat{\psi}_2 &= \xi \\
\hat{\psi}_3 &= \eta \\
\hat{\psi}_4 &= \zeta
\end{aligned}$$

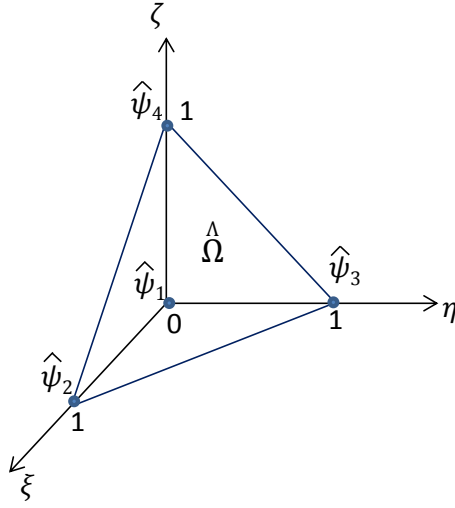


Figura 3.3: Funciones de forma para el elemento de referencia tetraedro lineal $\hat{\Omega}$.

Estas funciones cumplen con la propiedad siguiente:

$$\hat{\psi}_j(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Dado que estamos trabajando con tetraedros lineales tenemos que el número de nodos por elemento es $nne = 4$, entonces las ecuaciones (3.16)-(3.24), las cuales representan las entradas de J_e^{-T} (transpuesta de la matriz Jacobiana) tienen la forma

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{|J_e|} [(y_3 - y_1)(z_4 - z_1) - (y_4 - y_1)(z_3 - z_1)] \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{|J_e|} [(x_4 - x_1)(z_3 - z_1) - (x_3 - x_1)(z_4 - z_1)] \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{|J_e|} [(x_3 - x_1)(y_4 - y_1) - (x_4 - x_1)(y_3 - y_1)] \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{|J_e|} [(y_4 - y_1)(z_2 - z_1) - (y_2 - y_1)(z_4 - z_1)] \quad (3.35)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{|J_e|} [(x_2 - x_1)(z_4 - z_1) - (x_4 - x_1)(z_2 - z_1)] \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = \frac{1}{|J_e|} [(x_4 - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_4 - y_1)] \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{|J_e|} [(y_2 - y_1)(z_3 - z_1) - (y_3 - y_1)(z_2 - z_1)] \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{1}{|J_e|} [(x_3 - x_1)(z_2 - z_1) - (x_2 - x_1)(z_3 - z_1)] \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{|J_e|} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)] \quad (3.40)$$

3.5. Fórmulas de integración

Para obtener la matriz de rigidez y el vector independiente ecuaciones (3.7), requerimos de la integración sobre el elemento de referencia ecuación 3.26. Entonces, el dominio de integración se transforma del sistema global a el sistema de coordenadas local asociado al elemento de referencia. De esta manera, el dominio de integración es idéntico para todos los elementos pertenecientes al mismo tipo. Ahora bien, las integrales (3.7) se aproximan mediante cuadratura de Gauss. Así, la integral (3.26) se sustituye por una combinación lineal de valores de la función evaluada en los puntos de integración (ξ_l, η_l, ζ_l) , por lo que

$$\int_{\hat{\Omega}} \hat{g}(\xi, \eta, \zeta) |J_e(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta \approx \sum_{l=1}^{npg} \hat{g}(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) |J_e(\xi_l, \eta_l, \zeta_l)| w_l, \quad (3.41)$$

donde w_l son los pesos de cuadratura y $npg = 4$ el número de puntos de Gauss. Cabe señalar que para los cálculos de elemento finito, los esquemas de Gauss son muy populares, debido a su alta precisión en comparación con el costo numérico [25].

Para elementos tetraedros las cuadraturas de Gauss con cuatro puntos de integración se muestra en la tabla 3.1

l	ξ_l	η_l	ζ_l	w_l
1	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{1}{24}$
	$\frac{5 + 3\sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{1}{24}$
2	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 + 3\sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{1}{24}$
	$\frac{5 + 3\sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{1}{24}$
3	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 + 3\sqrt{5}}{20}$	$\frac{1}{24}$
	$\frac{5 + 3\sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 + 3\sqrt{5}}{20}$	$\frac{1}{24}$
4	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{1}{24}$
	$\frac{5 + 3\sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	$\frac{1}{24}$

Tabla 3.1: Cuadraturas de Gauss con 4 puntos de integración

Por su parte, al emplear la relación (3.25) en las ecuaciones (3.7) para integrar sobre el elemento de referencia se tiene que

$$\begin{aligned} K_{\mu\nu}^e &= \int_{\widehat{\Omega}} S^{-1} J_e^{-T} \nabla \widehat{\psi}_\nu \cdot J_e^{-T} \nabla \widehat{\psi}_\mu |J_e| d\widehat{\Omega} \\ F_\mu^e &= - \int_{\widehat{\Omega}} \mathbf{u}^I \cdot \nabla \widehat{\psi}_\mu |J_e| d\widehat{\Omega}. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Por lo tanto, dadas las cuadraturas de Gauss con cuatro puntos de integración de la tabla 3.1, las integrales de las ecuaciones (3.42) se aproximan como

$$K_{\mu\nu}^e \approx \sum_{l=1}^{npg} S^{-1} J_e^{-T}(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) \nabla \widehat{\psi}_\nu(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) \cdot J_e^{-T}(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) \nabla \widehat{\psi}_\mu(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) |J_e(\xi_l, \eta_l, \zeta_l)| w_l \quad (3.43)$$

$$F_\mu^e \approx - \sum_{l=1}^{npg} \mathbf{u}^I \cdot J_e^{-T}(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) \nabla \widehat{\psi}_\mu(\xi_l, \eta_l, \zeta_l) |J_e(\xi_l, \eta_l, \zeta_l)| w_l. \quad (3.44)$$

CAPÍTULO 4

Algoritmo campos de viento 3D

En este capítulo se presenta el algoritmo para ajustar el campo de velocidades 3D, apartado 4.4. Para ello, se describen primero las discretizaciones del campo de velocidades y de la divergencia promedio, apartados 4.1 y 4.2, respectivamente. Asimismo, se desarrolla la formulación variacional discreta del problema elíptico con condiciones de frontera tipo Neumann en las paredes verticales.

4.1. Campo de velocidades discreto

Una vez calculado el multiplicador de Lagrange λ_h , el campo de velocidades \mathbf{u} se recupera mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.24).

Sea $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ y $\mathbf{u} = (u, v, w)$, entonces $u_h = \sum_{i=1}^{nnt} u_i \phi_i$, con $\{\phi_i\}$ la base del espacio discreto V_h de $H^1(\Omega)$, donde definimos

$$V_h = \{v_h \in C^0(\Omega) \mid v_h|_{\Omega_e} \in \mathbb{P}_1(\Omega), \forall \Omega_e \in \Omega_h\}.$$

El valor de la primera componente del vector \mathbf{u} cuando se evalúa en el nodo \mathbf{n}_i se denota por u_i y, de acuerdo a las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.24), está dado por

$$u_i = u_i^I + \alpha_{11}^{-2} \frac{\partial \lambda_h(\mathbf{n}_i)}{\partial x}. \quad (4.1)$$

Observamos que el polinomio de interpolación para el multiplicador es $\lambda_h(x, y, z) = \sum_{i=1}^{nnt} \lambda_h(\mathbf{n}_i) \phi_i(x, y, z)$ pero no se conocen las reglas de correspondencia de las funciones base ϕ_i , solo se sabe cómo es restringido a cada elemento de su soporte, por lo que se debe de trabajar a nivel variacional y posteriormente discretizar para que se pueda utilizar dicha información.

Debido a que ϕ_i es nula fuera de su soporte, para obtener la formulación variacional de la expresión 4.1, la multiplicamos por ϕ_i e integramos sobre $sop(\phi_i)$, esto es

$$\int_{sop(\phi_i)} u_i \phi_i d\Omega = \int_{sop(\phi_i)} u_i^I \phi_i d\Omega + \alpha_{11}^{-2} \int_{sop(\phi_i)} \frac{\partial \lambda_h(\mathbf{n}_i)}{\partial x} \phi_i d\Omega, \quad \phi_i \in V_h. \quad (4.2)$$

La relación anterior se convierte en la siguiente fórmula:

$$u_i = u_i^I + \frac{\alpha_{11}^{-2} \sum_{e=1}^{nesop} \frac{\partial \lambda_h^e(\mathbf{n}_i)}{\partial x} \int_{\Omega_e} \phi_i d\Omega}{\sum_{e=1}^{nesop} \int_{\Omega_e} \phi_i d\Omega}, \quad (4.3)$$

donde $nesop$ es el número de elementos Ω_e del soporte de ϕ_i .

Dadas las funciones de forma y la transformación isoparamétrica del capítulo 3, la ecuación (4.3) se reescribe como

$$u_i = u_i^I + \frac{\alpha_{11}^{-2} \sum_{e=1}^{nesop} \frac{\partial \lambda_h^e(\mathbf{n}_i)}{\partial x} \int_{\hat{\Omega}_e} \hat{\psi}_\mu |J_e| d\hat{\Omega}}{\sum_{e=1}^{nesop} \int_{\hat{\Omega}_e} \hat{\psi}_\mu |J_e| d\hat{\Omega}}, \quad (4.4)$$

para todo $i = 1, 2, \dots, nnt$ excepto en los nodos de frontera con condiciones de tipo Dirichlet. Análogamente se realizan los cálculos correspondientes para las componentes v_h, w_h de la velocidad.

El valor de \mathbf{u} de igual manera se puede aproximar con diferencias finitas centradas y el método SOR como se muestra en [2]. Sin embargo esta técnica no es adecuadamente para dominios complejos.

4.2. Aproximación de la Divergencia promedio

Una vez recuperado el campo de velocidades \mathbf{u}_h mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange, procedemos a calcular el promedio de la divergencia en los nodos o vértices interiores de la región Ω , con el fin de verificar que se cumple la condición conservación de masa.

Definimos a $r(\mathbf{n}_i) = \nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{n}_i)$ la divergencia puntual asociada al nodo \mathbf{n}_i , que es una cantidad escalar, entonces la formulación variacional está expresada de la manera siguiente:

$$\int_{sop(\phi_i)} r(\mathbf{n}_i) \phi_i d\Omega = \int_{sop(\phi_i)} \nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{n}_i) \phi_i d\Omega, \quad \forall \phi_i \in V_h \quad (4.5)$$

Entonces como $r(\mathbf{n}_i)$ es constante, la ecuación (4.5), se expresa como

$$r(\mathbf{n}_i) = \frac{\sum_{e=1}^{nesop} \int_{\Omega_e} \sum_{\mu=1}^{nne} \left(u_\mu \frac{\partial \phi_\mu^e}{\partial x} + v_\mu \frac{\partial \phi_\mu^e}{\partial y} + w_\mu \frac{\partial \phi_\mu^e}{\partial z} \right) \phi_\nu^e d\Omega}{\sum_{e=1}^{nesop} \int_{\Omega_e} \phi_\nu^e d\Omega} \quad (4.6)$$

Al transformar la integral sobre el elemento de referencia $\widehat{\Omega}_e$, la ecuación (4.6) se escribe como:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{n}_i) = \frac{\sum_{e=1}^{nesop} \int_{\widehat{\Omega}_e} \sum_{\mu=1}^{nne} \left(u_\mu \frac{\partial \widehat{\psi}_\mu}{\partial x} + v_\mu \frac{\partial \widehat{\psi}_\mu}{\partial y} + w_\mu \frac{\partial \widehat{\psi}_\mu}{\partial z} \right) \widehat{\psi}_\nu |J_e| d\widehat{\Omega}}{\sum_{e=1}^{nesop} \int_{\widehat{\Omega}_e} \widehat{\psi}_\nu |J_e| d\widehat{\Omega}}, \quad (4.7)$$

ver fórmula (3.26).

Denotamos por $mdiv$ a la divergencia promedio sobre todos los nodos interiores, es decir, $mdiv = \text{media}_{\mathbf{n}_i} \{ \nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{n}_i) \mid \mathbf{n}_i \text{ es un nodo interior} \}$.

Hasta el momento se ha descrito la solución del problema para recuperar campos de viento 3D, donde las condiciones de frontera han sido de tipo Dirichlet sobre las paredes verticales y tapa. En la siguiente sección mostraremos la formulación que se tiene para dicho problema, con condiciones de frontera tipo Neumann sobre las paredes verticales.

4.3. Formulación con otras condiciones de frontera

Análogo al caso con condiciones de frontera tipo Dirichlet, consideremos las condiciones de frontera tipo Neumann sobre las paredes verticales, entonces la formulación variacional para el problema elíptico (2.31)-(2.34) es:

Encontrar $\lambda \in \mathcal{H}_0$ tal que

$$\int_{\Omega} S^{-1} \nabla \lambda \cdot \nabla q d\Omega = - \int_{\Omega} \mathbf{u}^I \cdot \nabla q d\Omega + \int_{\Gamma_V} q \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad \forall q \in \mathcal{H}_0. \quad (4.8)$$

\mathcal{H}_0 está definido en el apartado 2.4.2.

Sea $\mathcal{H}_{0,h} = \{q_h \in C^0(\Omega) \mid q_h|_{\Omega_e} \in \mathbb{P}_1(\Omega_e) \forall \Omega_e \in \Omega_h, q_h|_{\Gamma_T} = 0\}$, por lo que el problema de la ecuación (4.8) se transforma en un problema variacional discreto:

Encontrar $\lambda_h \in \mathcal{H}_{0,h}$ tal que

$$\int_{\Omega_h} S^{-1} \nabla \lambda_h \cdot \nabla q_h \, d\Omega = - \int_{\Omega_h} \mathbf{u}_h^I \cdot \nabla q_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_V} q_h \mathbf{u}_h^I \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma, \quad \forall q_h \in \mathcal{H}_{0,h}. \quad (4.9)$$

Tomando en cuenta los elementos Ω_e , las funciones ϕ_i y la propiedad de sumabilidad se sigue que:

$$\sum_{e=1}^{ne} \sum_{j=1}^{nnt} \lambda_j \int_{\Omega_e} S^{-1} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, d\Omega = \sum_{e=1}^{ne} - \int_{\Omega_e} \mathbf{u}_h^I \cdot \nabla \phi_i \, d\Omega + \sum_{e=1}^{nefv} \int_{\Gamma_V^e} \phi_i \mathbf{u}_h^I \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma, \quad \forall \phi_i \in \mathcal{H}_{0,h} \quad (4.10)$$

donde $nefv$ es el número de elementos de frontera en las paredes verticales.

Entonces la ecuación (4.10) forma un sistema de $nnt \times nnt$ que lo podemos representar como

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_V, \quad (4.11)$$

donde

$$K_{ij} = \sum_{e=1}^{ne} K_{ij}^e \quad \text{con} \quad K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} S^{-1} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, d\Omega \quad (4.12)$$

$$F_i = \sum_{e=1}^{ne} F_i^e \quad \text{con} \quad F_i^e = - \int_{\Omega_e} \mathbf{u}_h^I \cdot \nabla \phi_i \, d\Omega \quad (4.13)$$

$$F_{V_i} = \sum_{e=1}^{nefv} F_{V_i}^e \quad \text{con} \quad F_{V_i}^e = \int_{\Gamma_V^e} \phi_i \mathbf{u}_h^I \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad (4.14)$$

Observamos que las integrales de las relaciones (4.12) y (4.13) se calcula de igual manera que aquellas que aparecen en las ecuaciones (3.43) y (3.44) respectivamente. Nos falta escribir F_V en términos de las funciones de forma y cuadraturas de Gauss en 2D.

4.3.1. Funciones de forma 2D

Las funciones de forma $\hat{\varphi}_i$ que se emplean para las condiciones de frontera tipo Neumann sobre las paredes verticales son

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_1(\xi, \eta) &= 1 - \xi - \eta \\ \hat{\varphi}_2(\xi, \eta) &= \xi \\ \hat{\varphi}_3(\xi, \eta) &= \eta\end{aligned}$$

las cuales están definidas sobre el elemento de referencia en 2D $\hat{\Gamma}$, ver figura 4.1.

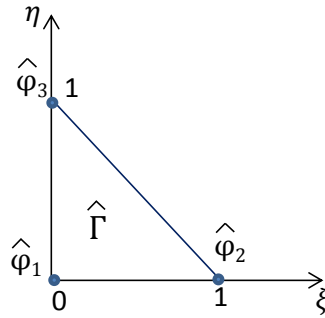


Figura 4.1: Funciones de forma para el elemento de referencia triangular lineal $\hat{\Gamma}$.

Por lo tanto, si consideramos que $\mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n} = u^I n_1 + v^I n_2 + w^I n_3$, la igualdad (4.14) se expresa como

$$F_{V_\mu}^e = \int_{\hat{\Gamma}} \hat{\varphi}_\mu \left[\sum_{\nu=1}^3 u_\nu^I \hat{\varphi}_\nu \cdot n_1 + v_\nu^I \hat{\varphi}_\nu \cdot n_2 + w_\nu^I \hat{\varphi}_\nu \cdot n_3 \right] |J_e| d\Gamma. \quad (4.15)$$

Observamos que la velocidad \mathbf{u}^I restringido a las paredes verticales varían solamente en un plano, es decir, en dos componentes. Análogamente, en este caso J_e es la matriz Jacobiana de tamaño 2×2 .

4.3.2. Fórmulas de integración 2D

La cuadratura de Gauss que se utiliza para integrar sobre elementos triangulares lineales es de tres puntos. La tabla 4.1 muestra los puntos de cuadratura (ξ_l, η_l) como los respectivos pesos w_l . Observemos que en particular esta cuadratura de Gauss coincide con la fórmula del trapecio para 2D.

Por último, para calcular el campo de viento 3D con condiciones de frontera tipo Neumann sobre las paredes verticales, se emplea el algoritmo descrito a continuación, en la sección 4.4.

l	ξ_l	η_l	w_l
1	0	0	1/6
2	1	0	1/6
3	0	1	1/6

Tabla 4.1: Cuadraturas de Gauss con 3 puntos de integración

4.4. Algoritmo

Para la formulación variacional de las ecuaciones (2.40) y sus correspondientes discretizaciones, se debe seguir el siguiente algoritmo que describe la solución para el problema de campos de viento 3D es:

1. Resolver el problema elíptico, ecuación (3.2)
2. Dado $\mathbf{u}_h = (u_h, v_h, w_h)$, encontrar $u_h \in V_h$ tal que

$$u_i = u_i^I + \frac{\alpha_{11}^{-2} \sum_{e=1}^{nesop} \frac{\partial \lambda_h^e(\mathbf{n}_i)}{\partial x} \int_{\Omega_e} \phi_i d\Omega}{\sum_{e=1}^{nesop} \int_{\Omega_e} \phi_i d\Omega} \quad \forall i = 1, 2, \dots, nnt,$$

donde $u_i = u_h(\mathbf{n}_i)$. Análogamente para v_h y w_h .

3. Calcular

$$e_{vel} = \frac{\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L_2}}{\|\mathbf{u}\|_{L_2}}. \quad (4.16)$$

4. Calcular

$$mdiv = \text{media}_{\mathbf{n}_i} \{ \nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{n}_i) \mid \mathbf{n}_i \text{ es un nodo interior} \},$$

con

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_h(\mathbf{n}_i) = \frac{\sum_{e=1}^{nesop} \int_{\Omega_e} \sum_{\mu=1}^{nne} \left(u_\mu \frac{\partial \phi_\mu^e}{\partial x} + v_\mu \frac{\partial \phi_\mu^e}{\partial y} + w_\mu \frac{\partial \phi_\mu^e}{\partial z} \right) \phi_\nu^e d\Omega}{\sum_{e=1}^{nesop} \int_{\Omega_e} \phi_\nu^e d\Omega}$$

De manera análoga se sigue el mismo algoritmo para resolver el problema variacional descrito por las ecuaciones (4.8) y sus correspondientes discretizaciones. Únicamente se debe cambiar en el paso 1, la ecuación (3.2) por la relación (4.9).

Los sistema de ecuaciones lineales (3.5) y (4.10) obtenido al discretizar el problema elíptico con la teoría desarrollada en los capítulos 3 y 4, respectivamente, se resuelve empleando el método iterativo de gradiente conjugado y un esquema de almacenamiento compacto por columnas [26] para aproximar el valor del multiplicador λ_h .

En el método iterativo de gradiente conjugado se emplean dos criterios de paro, el primero consiste en tomar el residuo relativo definido de la manera siguiente

$$r^2 \leq \text{tol}^2 \|b\|^2 \quad (4.17)$$

donde $r = Ax - b$ y tol es del orden 10^{-8} , el segundo criterio es el número máximo de iteraciones que para todos los ejemplos presentados en el capítulo 5 son 2000 [26].

Los sistemas de ecuaciones antes mencionados se puede resolver con gradiente conjugado preconditionado usando la técnica multigrid [10, 27]. Otros autores utilizan el método bigradiente conjugado estabilizado BI-GASTAB preconditionado con factorización incompleta o la matriz diagonal [28].

Observe que los puntos 2 y 4 están asociados a los apartados 4.1 y 4.2, respectivamente, para calcular el campo de velocidades \mathbf{u} y la divergencia promedio $mdiv$. En el punto 3 se realiza el cálculo de la norma del error relativo del campo de velocidades 3D en el espacio $\mathbf{L}_2(\Omega)$.

Resultados numéricas

En este capítulo se presenta los resultados numérico para resolver el problema elíptico y recuperar el campo de velocidades. Primero se verifica a través de un ejemplo tipo (*Benchmark*) que el problema elíptico 3D con condiciones Dirichlet en toda la frontera $\partial\Omega$ funcione adecuadamente. Después, se encuentra la solución numérica del problema de estudio para diferentes condiciones de frontera, apartados 5.2 y 5.3. Cabe mencionar que todos los algoritmos fueron programados en FORTRAN 90 y MATLAB 7.11.0 (R2010b). Asimismo, el sistema de ecuaciones lineales se resuelve con gradiente conjugado y su criterio de paro esta dado por la ecuación 4.17 con $\text{tol} = 10^{-8}$ y 2000 como número máximo de iteraciones. Además para todas las pruebas numéricas y mallas se empleó una laptop con un procesador CORE i5 y memoria RAM de 8 GHz.

5.1. Problema *Benchmark*

En este apartado se utiliza el problema *Benchmark* 3D definido en la referencia [17], con el objeto de revisar que el algoritmo este programado adecuadamente, el cual consiste en encontrar λ tal que

$$-\nabla \cdot (S^{-1}\nabla\lambda) = 2 \text{ en } \Omega,$$

donde las condiciones de frontera Dirichlet no homogéneas son

$$\begin{aligned}\lambda(x, y, z) &= 0 \text{ sobre } \Gamma_T, \\ \lambda(x, y, z) &= \alpha_3^2(1 - z^2) \text{ sobre } \Gamma_V, \\ \lambda(x, y, z) &= \alpha_3^2 \text{ sobre } \Gamma_B.\end{aligned}$$

En este caso se considera $\Omega = (1, 2) \times (1, 2) \times (0, 1)$ y campo inicial $\mathbf{u}^I(x, y, z) = (x, y, 0)$. Dado que la solución analítica es $\mathbf{u}(x, y, z) = (x, y, -2z)$, de la ecuación (2.24) se deduce que

$$\lambda(x, y, z) = \alpha_3^2(1 - z^2).$$

Se construyeron diversas mallas utilizando el software comercial GID 9.3.1b, ver anexo B. Esto es, $h=1/10, 1/50, 1/100, 1/120$. Cabe señalar que las mallas $h=1/120$ ha sido la más fina que se pudo generar con GID. La tabla 5.1 resume los detalles de las mallas.

h	número de nodos	número de elementos
1/10	1,331	6,000
1/50	132,651	750,000
1/100	1,030,301	6,000,000
1/120	1,771,561	10,368,000

Tabla 5.1: Número total de nodos y elementos (tetraedros) para cada valor de h .

Para la malla con $h = 1/5$ y módulos de precisión Gaussianos iguales a uno, es decir, $S = I$, se recuperan el campo de velocidades como se muestra en la figura 5.1.

La tabla 5.2 presenta los resultados obtenidos para diferentes mallas cuando $S = I$. Contiene el valor h , el error relativo generado al aproximar el multiplicador λ (e_λ), el tiempo (s) de resolución del sistema, el número de iteraciones (*iter*) que se requiere para aproximar la solución del sistema, el error relativo en el cálculo de la velocidad (e_{vel}) y la divergencia promedio (mdiv). Todos los cálculos se realizan en la norma $L_2(\Omega)$.

h	e_λ	tiempo (s)	iter	e_{vel}	mdiv
1/10	3.38×10^{-4}	0	41	8.68×10^{-3}	4.24×10^{-2}
1/50	2.90×10^{-6}	1.84	168	8.42×10^{-4}	9.74×10^{-3}
1/100	3.67×10^{-7}	67.47	327	3.00×10^{-4}	4.93×10^{-3}
1/120	2.13×10^{-7}	101.17	390	2.29×10^{-4}	4.12×10^{-3}

Tabla 5.2: Solución para diferentes mallas con $S = I$.

De manera análoga, si $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ y $\alpha_3 = 0.001$ se tienen los resultados mostrados en la tabla 5.3 para las mismas mallas presentadas en la tabla 5.2.

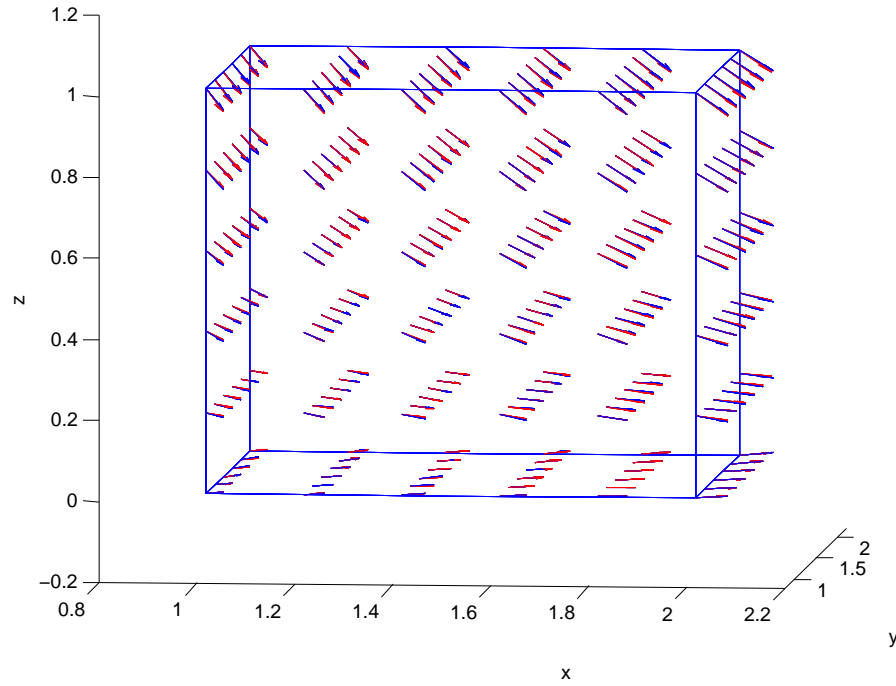


Figura 5.1: Solución numérica cuando $S = I$. Campo exacto $\mathbf{u}(x, y, z) = (x, y, -2z)$ en rojo y campo ajustado \mathbf{u}_h en azul, $h=1/5$.

h	e_λ	tiempo (s)	iter	e_{vel}	mdiv
1/10	1.54×10^{-3}	0	47	8.32×10^{-3}	4.29×10^{-2}
1/50	2.93×10^{-5}	1.66	153	8.35×10^{-4}	9.73×10^{-3}
1/100	5.22×10^{-6}	46.38	304	2.99×10^{-4}	4.93×10^{-3}
1/120	3.31×10^{-6}	126.19	365	2.28×10^{-4}	4.12×10^{-3}

Tabla 5.3: Solución para diferentes mallas con $\alpha_3 = 0.001$.

Así mismo, si $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ y $\alpha_3 = 1000$ los resultados obtenidos para diferentes mallas se presentan en la tabla 5.4.

h	e_λ	tiempo (s)	iter	e_{vel}	mdiv
1/10	3.50×10^{-9}	0.004	43	1.14×10^{-2}	3.85×10^{-2}
1/50	1.32×10^{-8}	1.56	145	3.43×10^{-2}	-1.50×10^{-2}
1/100	3.90×10^{-8}	52.17	266	9.27×10^{-2}	-3.02×10^{-2}
1/120	9.16×10^{-8}	107.05	300	1.57×10^{-1}	7.60×10^{-3}

Tabla 5.4: Solución para diferentes mallas con $\alpha_3 = 1000$.

Al contrastar los resultados de las tablas 5.2 a la 5.4, y tomando como referencia la tabla 5.2 se observa que si se reduce α_3 tres órdenes de magnitud, el error para λ crece un orden y el error de la velocidad es el mismo. En cambio si se aumenta α_3 tres ordenes de magnitud (5.2 y 5.4), el error para λ disminuye en uno o dos ordenes de magnitud, pero el error de la velocidad y la divergencia promedio disminuye. En general, podríamos decir que en los tres casos la divergencia promedio no varía y su mínimo error es del orden de 10^{-3} .

Este mismo problema se ha resuelto con funciones de base radial como se muestra en la referencia [17], donde presentan un error relativo de la velocidad $e_{vel} = 1.98 \times 10^{-4}$ y divergencia promedio $mdiv = -5.59 \times 10^{-6}$. Al comparar estos resultado con los obtenidos en las tablas 5.2 y 5.3 aunque el error de la velocidad es el mismo, la divergencia promedio difiere en tres ordenes de magnitud.

Una vez que se verifica que el algoritmo para el problema elíptico está bien programado, se presenta en los apartados siguientes los resultados numéricos para el problema de recuperación de campos de viento 3D con diferentes condiciones de frontera.

5.2. Análisis con condiciones de frontera tipo Dirichlet

En este apartado se encuentra la solución numérica del problema elíptico utilizando condiciones Dirichlet en las fronteras artificiales $\Gamma_T \cup \Gamma_V$, ecuaciones (2.27)-(2.29) y se ajusta el campo de viento.

En el resto del capítulo se considera el campo exacto $\mathbf{u}(x, y, z) = (x, y, -2z)$ para todo $(x, y, z) \in (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$ y se inicia con el campo de velocidades $\mathbf{u}^I(x, y, z) = (x, y, 0)$.

Los datos obtenidos para las mallas se muestran en la tabla 5.5 considerando $S = I$. Se presenta el número de divisiones (h), el tiempo de CPU (s), el número de iteraciones ($iter$) para resolver el sistema con gradiente conjugado, el error relativo en el cálculo de la velocidad (e_{vel}) y la divergencia promedio ($mdiv$). Así mismo, se exhibe en la figura 5.2(a) el campo de velocidades exacto en rojo y el aproximado en azul, con $h = 1/5$.

La tabla 5.6 presenta los resultados para las mismas mallas que el caso anterior y $\alpha_3 = 0.001$ cuando α_1 y α_2 se mantienen constantes e igual a uno. En la figura 5.2(b) se visualiza el campo de velocidades exacto (rojo) y aproximado (azul) para este caso.

h	t. CPU (s)	iter	e_{vel}	mdiv
1/10	1.15	50	7.78×10^{-1}	4.97×10^{-1}
1/50	71.91	217	7.81×10^{-1}	8.58×10^{-2}
1/100	873.36	408	7.81×10^{-1}	4.29×10^{-2}
1/120	1511.17	488	7.81×10^{-1}	3.57×10^{-2}

Tabla 5.5: Resultados para diferentes mallas y $S = I$, con condiciones Dirichlet en $\Gamma_T \cup \Gamma_V$.

h	t. CPU (s)	iter	e_{vel}	mdiv
1/10	0.91	76	2.62×10^{-1}	2.88×10^{-1}
1/50	89.10	260	1.06×10^{-1}	4.52×10^{-2}
1/100	924.88	468	7.46×10^{-2}	2.23×10^{-2}
1/120	1672.78	628	6.82×10^{-2}	1.85×10^{-2}

Tabla 5.6: Resultados para diferentes mallas y $\alpha_3 = 0.001$, con condiciones Dirichlet en $\Gamma_T \cup \Gamma_V$.

De las figuras 5.2(a) y 5.2(b) al compararlas se observa que el mayor error ocurre en las fronteras artificiales, este efecto se debe al tipo de condiciones de frontera $\lambda = 0$ que se impone en las paredes verticales y a la gráfica de la función λ .

De las tablas 5.5 y 5.6, notemos que al usar $\alpha_3 = 0.001$ mejora la aproximación del campo de velocidades con respecto al caso de $S = I$, esto debido al valor que toma α_3 el cual reescala a la función λ , haciendo que su rango o imagen sea más pequeña. Por lo tanto, la diferencia (o error) entre la condición impuesta $\lambda = 0$ y el valor de la gráfica en la frontera es menor, lo que repercute en la aproximación del campo de velocidades. Es importante mencionar que si la función λ cambia este fenómeno podría cambiar.

5.3. Análisis con condiciones de frontera tipo Neumann

En este apartado se aproxima la solución del problema elíptico con condiciones Neumann en Γ_V , ecuaciones (2.31)-(2.34) y se ajusta el campo de viento.

La figura 5.3 muestra el campo de velocidades exacto en rojo y el aproximado en azul para una malla con $h = 1/5$ y los valores de α_1 , α_2 y α_3 iguales a 1.

En las tablas 5.7 y 5.8 se muestran el número de divisiones (h), el tiempo de CPU (s), el número de iteraciones (iter) para resolver el sistema con gradiente conjugado,

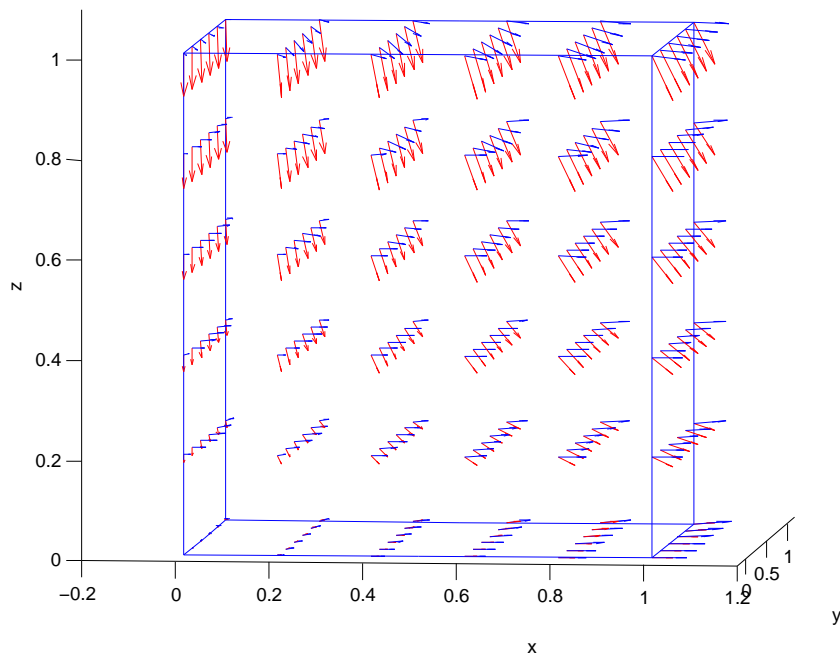
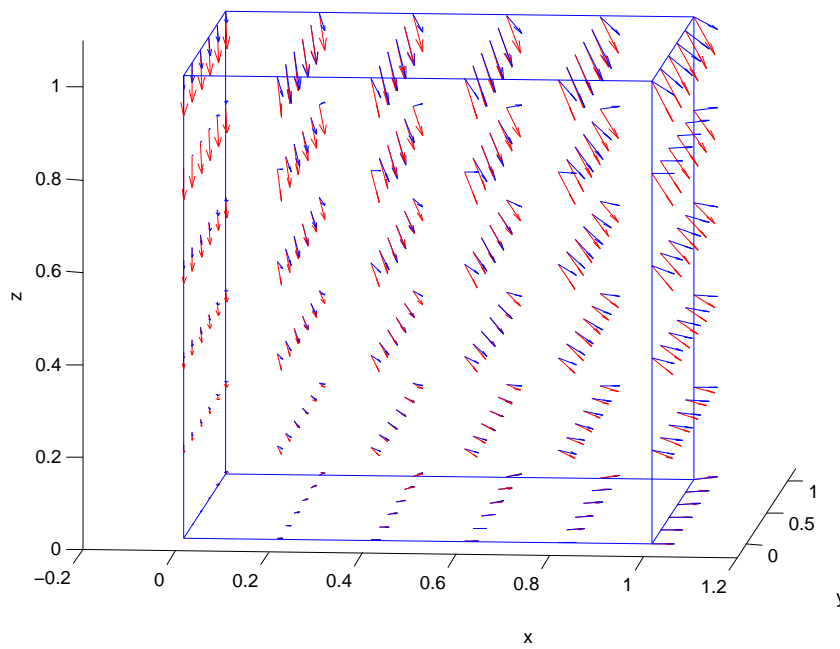
(a) $S = I$ (b) $\alpha_3 = 0.001$

Figura 5.2: Campo exacto en rojo y campo ajustado en azul, condiciones Dirichlet en $\Gamma_T \cup \Gamma_V$ y $h=1/5$.

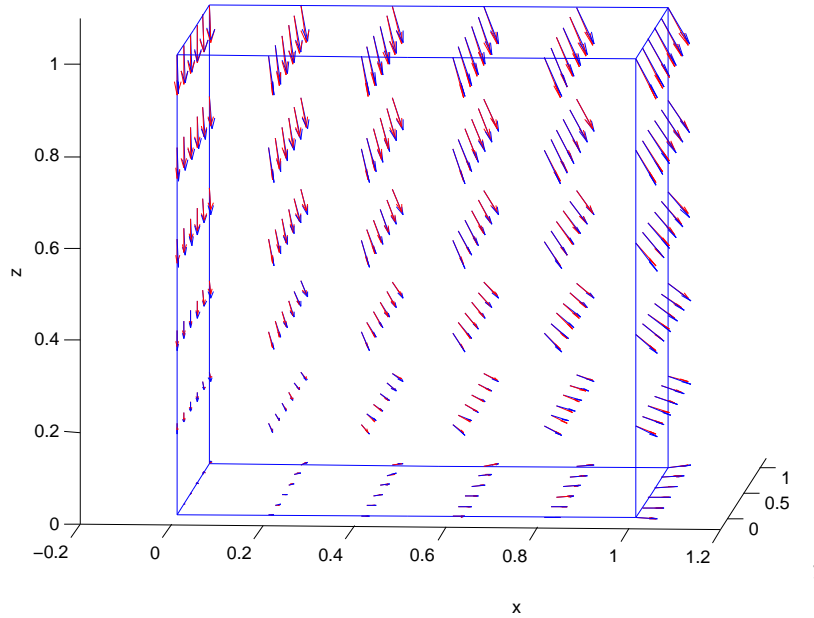


Figura 5.3: Campo exacto en rojo y campo ajustado en azul, condiciones Neumann en Γ_V , $h=1/5$.

el error relativo en el cálculo de la velocidad (e_{vel}) y la divergencia promedio (mdiv), para los valores de $\alpha_3 = 1$ y $\alpha_3 = 0.001$ respectivamente.

h	t. CPU (s)	iter	e_{vel}	mdiv
1/10	0.56	99	1.61×10^{-2}	5.66×10^{-2}
1/50	83.72	362	1.49×10^{-3}	1.02×10^{-2}
1/100	907.89	675	5.27×10^{-4}	5.05×10^{-3}
1/120	1556.86	787	4.01×10^{-4}	4.20×10^{-3}

Tabla 5.7: Resultados para diferentes mallas, $S = I$. Problema con condiciones Neumann sobre Γ_V .

h	tiempo (s)	iter	e_{vel}	mdiv
1/10	0.98	140	1.85×10^{-2}	6.27×10^{-2}
1/50	85.20	544	1.85×10^{-3}	1.04×10^{-2}
1/100	883.00	1124	6.62×10^{-4}	5.11×10^{-3}
1/120	1844.69	1351	5.04×10^{-4}	4.24×10^{-3}

Tabla 5.8: Resultados para diferentes mallas, con $\alpha_3 = 0.001$. Problema con condiciones Neumann sobre Γ_V .

Notemos que cuando se emplean condiciones Neumann el valor de α_{33} no afecta los cálculos para recuperar la velocidad ni a la divergencia, debido a que $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{u}^I \cdot \mathbf{n} = \text{Proy}_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}^I)$ esta proyección es paralela al plano xy en cada punto de las paredes verticales, por lo cual solamente cambiará en las coordenadas xy . Y dado que α_{33} esta ligado a la coordenada z no hay una influencia real de este parámetro en los resultados. También se puede ver que el tiempo de CPU crece de forma exponencial para los diferentes valores de α_3 . Además, el número de iteraciones que requiere el método de gradiente conjugado crece conforme se refina la malla y es mayor para $\alpha_3 = 0.001$, en este caso el reescalamiento en la componente z cambia el espectro de la matriz original, los valores propios de la nueva matriz están más alejados entre si, por tanto el número de iteraciones aumenta.

Si comparamos las tablas 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8 la mejor opción para ajustar el campo de viento es mediante las condiciones de frontera Neumann en Γ_V y $S = I$, considerando tiempo de CPU, número de iteraciones y error en la divergencia promedio. Esto difiere de los resultados en 2D presentados en [11], porque el mejor resultado es para Neumann con $\alpha_3 = 0.001$ y no consiguen mejorar el orden de error en la divergencia promedio (10^{-2}), en cambio obtuvimos mejores resultados si usamos Neumann en las fronteras verticales con $S = I$, reduciendo dos ordenes de magnitud en el error de la velocidad (igual que ellos) y un orden en la divergencia promedio.

5.4. Nodos fantasma sobre fronteras artificiales

Debido a la naturaleza del problema de recuperación de un campo de viento, las condiciones de frontera sobre los límites artificiales juegan un papel fundamental en la precisión de la solución como se expuso en los apartados 5.2 y 5.3. El problema radica en imponer condiciones de frontera adecuadas en las paredes artificiales de tal forma que no generen cambios bruscos en los valores del multiplicador (evitar $\nabla\lambda$ grandes). Por otro lado, se ha observado que estos cambios bruscos afectan a las primeras capas de elementos, por lo que la propuesta es desvanecer este efecto empleando nodos fantasma, ver [17, 29].

La técnica de nodos fantasma consiste en definir un dominio extendido Ω_E de modo que $\Omega \subset \Omega_E$ y resolver el problema elíptico sobre este dominio y su frontera $\partial\Omega_E = \Gamma_{BE} \cup \Gamma_{VE} \cup \Gamma_{TE}$. Después se encuentra el campo ajustado \mathbf{u}_h por medio del método de elemento finito y, se calcula e_{vel} y $mdiv$ sólo en los nodos de Ω .

5.4.1. Condiciones tipo Dirichlet

Se generan varias mallas para la región de estudio con nodos fantasma usando dos capas de elementos sobre $\Gamma_V \cup \Gamma_T$. La tabla 5.9 resume los detalles de las mallas.

h	número de nodos	número de elementos
1/10	3,375	16,464
1/50	166,375	944,784
1/100	1,157,625	6,749,184
1/120	1,953,125	11,439,744

Tabla 5.9: Número total de nodos y tetraedros para cada valor de h , con nodos fantasma en las paredes verticales Γ_V y la tapa Γ_T .

Debido a que se tiene un mejor ajuste del campo cuando $\alpha_3 = 0.001$, solo se proba la técnica de nodos fantasma para este valor.

La tabla 5.10 muestran el número de divisiones (h), el tiempo de CPU (s), el número de iteraciones (iter) para resolver el sistema con gradiente conjugado, el error relativo en el cálculo de la velocidad (e_{vel}) y la divergencia promedio (mdiv) para $\alpha_3 = 0.001$ y condiciones tipo Dirichlet en las fronteras artificiales con nodos fantasmas $\Gamma_{VE} \cup \Gamma_{TE}$. Si comparamos estos resultados con aquellos obtenidos en la tabla 5.6 nos percatamos que error relativo de la velocidad (e_{vel}) se reduce tres ordenes de magnitud, y para la divergencia promedio (mdiv) dos ordenes de magnitud, lo cual era de esperarse porque quitamos las capas perturbadas por las condiciones de frontera.

El campo de viento recuperado (azul) y el exacto (rojo) en el dominio Ω usando nodos fantasma se muestra en la figura 5.4, para $h=1/5$ y $\alpha_3 = 0.001$.

h	t. CPU (s)	iter	e_{vel}	mdiv
1/10	1.72	90	1.00×10^{-3}	3.91×10^{-3}
1/50	120.44	281	9.52×10^{-5}	8.82×10^{-4}
1/100	969.84	543	6.87×10^{-5}	3.25×10^{-4}
1/120	1632.87	649	1.09×10^{-4}	1.77×10^{-3}

Tabla 5.10: Resultados para diferentes mallas con $\alpha_3 = 0.001$ y condiciones tipo Dirichlet sobre $\Gamma_{VE} \cup \Gamma_{TE}$.

Al comparar los resultados obtenidos en las tablas 5.5 y 5.6 con los datos de la tabla 5.10, la mejor aproximación que se obtiene del campo de velocidades hasta el momento es cuando se utiliza nodos fantasma sobre las paredes artificiales con condiciones de frontera Dirichlet con $\alpha_3 = 0.001$.

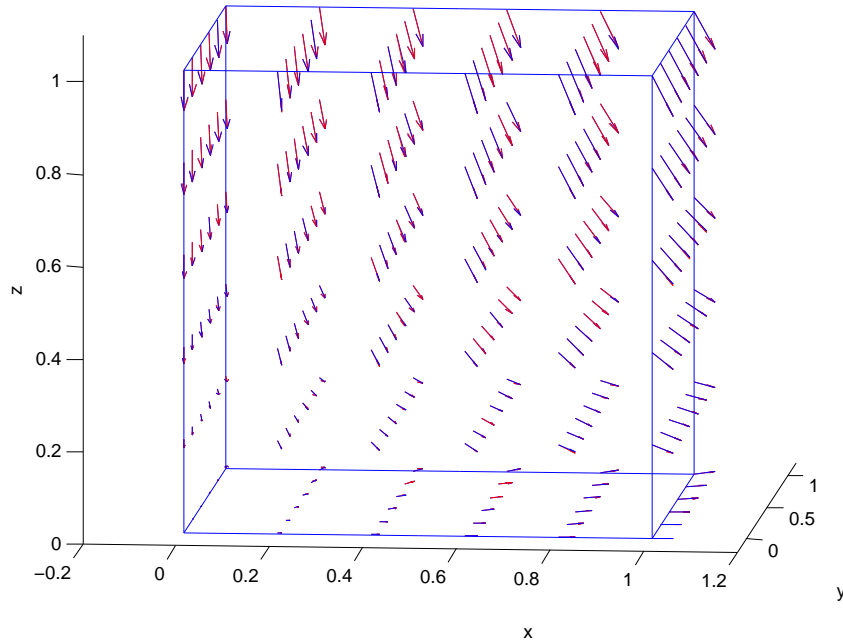


Figura 5.4: Campo exacto en rojo y campo ajustado en azul, con $\alpha_3 = 0.001$ y usando condiciones tipo Dirichlet sobre $\Gamma_{VE} \cup \Gamma_{TE}$.

5.4.2. Condiciones tipo Neumann

En las tablas 5.11 y 5.12 se muestran el número de divisiones (h), el tiempo de CPU (s), el número de iteraciones (iter) para resolver el sistema con gradiente conjugado, el error relativo en el cálculo de la velocidad (e_{vel}) y la divergencia promedio (mdiv), para los valores de $\alpha_3 = 1$ y $\alpha_3 = 0.001$ respectivamente.

h	t. CPU (s)	iter	e_{vel}	mdiv
1/10	1.54	120	5.51×10^{-3}	3.13×10^{-4}
1/50	146.43	386	4.68×10^{-4}	1.30×10^{-5}
1/100	1044.23	698	1.38×10^{-4}	4.65×10^{-6}
1/120	1945.99	814	1.47×10^{-4}	2.81×10^{-5}

Tabla 5.11: Resultados para diferentes mallas, $S = I$. Problema con condiciones Neumann sobre Γ_{VE} .

Comparando los resultados obtenidos en las tablas 5.5, 5.6, 5.7, 5.8, 5.10, con los datos de las tablas 5.11 y 5.12 lo mejor es utilizar condiciones de frontera Neumann en las paredes verticales y $S = I$, así como el imponer nodos fantasmas. De esta manera se consigue el mismo orden de error en el campo de velocidades (10^{-4}) y en la divergencia promedio (10^{-6}) que aquellos obtenidos usando funciones de base radial descritos en [17].

h	tiempo (s)	iter	e_{vel}	mdiv
1/10	2.04	173	7.87×10^{-3}	2.01×10^{-4}
1/50	118.04	588	7.14×10^{-4}	9.07×10^{-6}
1/100	1099.85	1171	2.13×10^{-4}	2.66×10^{-6}
1/120	2212.33	1394	2.29×10^{-4}	3.00×10^{-5}

Tabla 5.12: Resultados para diferentes mallas, con $\alpha_3 = 0.001$. Problema con condiciones Neumann sobre Γ_{VE} .

5.5. Ejemplo caso no lineal

Con el fin de comparar la efectividad del modelo de masa consistente para campos más generales, se prueba con un ejemplo no lineal, el cual está dado por el campo exacto

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2(z-1)x + \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ -y \left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \right] \\ -(z-1)^2 + 1 + \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi z}{2}\right) \end{pmatrix}$$

para todo $(x, y, z) = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ y se inicia con el campo de velocidades

$$\mathbf{u}^I(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2(z-1)x + \frac{2}{\pi} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{2}\right) \\ -y \left[\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi z}{2}\right) \right] \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se emplea las mejores condiciones de frontera, tipo Neumann sobre las paredes verticales, Dirichlet en la tapa y $S = I$. Observemos que cada una de las componentes de este campo tiene dependencia en z .

La figura 5.5 muestra el campo de velocidades exacto en rojo y el aproximado en azul para una malla con $h = 1/5$ y $S = I$, donde visualmente se tiene una buena aproximación del campo de velocidades.

En la tabla 5.13 se muestran el número de divisiones (h), el tiempo de CPU (s), el número de iteraciones (iter) para resolver el sistema con gradiente conjugado, el error relativo en el cálculo de la velocidad (e_{vel}) y la divergencia promedio (mdiv) para el problema no lineal. Debido a que estamos utilizando elementos lineales el error en la aproximación de λ y \mathbf{u} en la norma L_2 es de orden h^2 , en nuestro caso si $h = 1/120$ tenemos un orden de 10^{-4} . Por otro lado la divergencia promedio es de

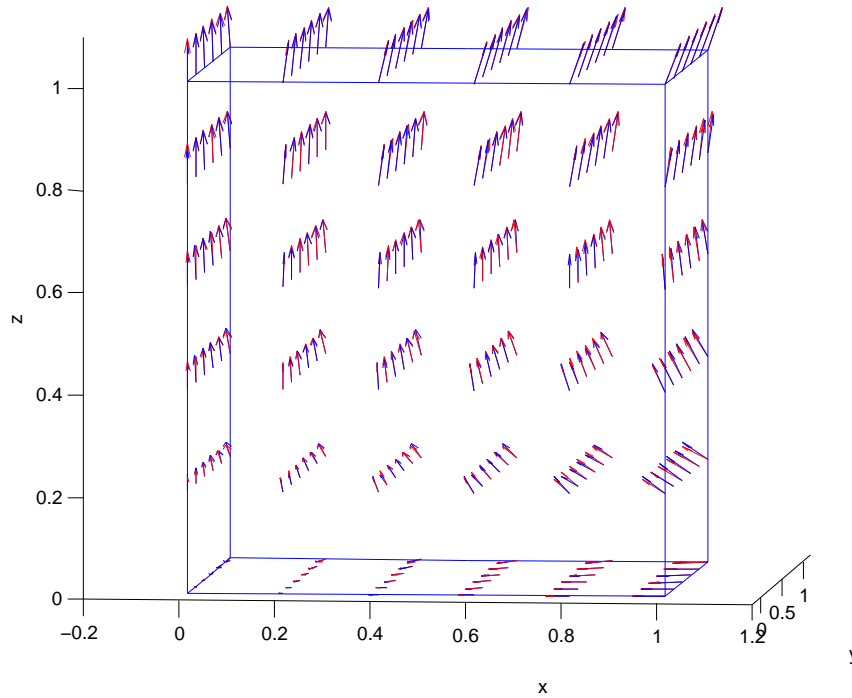


Figura 5.5: Campo exacto en rojo y campo ajustado en azul, con $S = I$ y usando condiciones tipo Neumann sobre Γ_V .

orden 10^{-4} lo cual esta de acuerdo con los resultados obtenidos con el campo de viento lineal utilizado en los apartado anteriores. Cabe señalar que este mismo orden aparece en los ejemplos probados en la referencia [17].

h	tiempo (s)	iter	e_{vel}	mdiv
1/10	0.54	99	1.55×10^{-2}	-1.85×10^{-2}
1/50	93.97	355	8.84×10^{-4}	-6.62×10^{-4}
1/100	870.17	674	3.08×10^{-4}	-1.63×10^{-4}
1/120	1761.56	796	2.34×10^{-4}	-1.13×10^{-4}

Tabla 5.13: Resultados para diferentes mallas, con $S = I$. Problema no lineal con condiciones Neumann sobre Γ_V .

CAPÍTULO 6

Conclusiones

En este trabajo se generó campos de viento 3D, a partir de datos experimentales interpolados, \mathbf{u}^I , en un dominio con paredes artificiales. Para ello se formuló un problema que minimice la diferencia entre el campo ajustado \mathbf{u} y el campo horizontal dado \mathbf{u}^I , sujeto a las condiciones de conservación de masa y la no penetrabilidad sobre el terreno. Por lo cual utilizamos la técnica de multiplicadores de Lagrange en dimensión infinita.

Al calcular los puntos críticos del funcional de Lagrange se deducen las ecuaciones de Euler-Lagrange y a partir de ellas se plantea un problema elíptico para el multiplicador de Lagrange λ . Este problema se resolvió con el método de elemento finito empleando tetraedros como elementos de discretización del dominio Ω , programando este método en FORTRAN 90 y MATLAB, siendo estos códigos una de las aportaciones de este trabajo, que servirá de base para resolver problemas más generales. También se aprendió a utilizar el paquete GID para generar las mallas que se utilizaron en este trabajo.

Probamos dos casos de condiciones de frontera: (1) Dirichlet sobre las paredes artificiales y (2) Neumann en paredes verticales y Dirichlet en la tapa ambos casos se probaron sin y con reescalamiento de la componente z . Los resultados numéricos muestran que se obtiene una mejor aproximación cuando se imponen las condiciones de frontera del caso (2) sin reescalar ($S = I$).

Por otro lado se extendió el dominio original aplicando la técnica de nodos fantasma. Para los dos casos de condiciones de frontera descritos en el párrafo anterior sin y con reescalamiento. Concluimos que es mejor utilizar condiciones de tipo Neumann sobre las paredes verticales y $S = I$.

Como trabajo futuro se resolverá el problema probando diversas condiciones de frontera sobre la tapa y cambiando el dominio de estudio.

ANEXO A

Problemas de minimización con restricciones

A.1. Solución de un problema de minimización

En esta sección utilizamos todos los resultados de cálculo variacional para encontrar el mínimo de un funcional lineal con restricciones.

Consideremos problemas de minimización en los cuales el mínimo del funcional J se obtiene en algunos subconjuntos de funciones admisibles en H que satisfacen ciertas condiciones, tales como

$$Bu = g \tag{A.1}$$

donde B es un operador lineal definido de H a un espacio de Hilbert Q , es decir, $g \in Q$.

El subconjunto \mathcal{K} de H ($\mathcal{K} \subset H$) consiste de todos los elementos que satisfacen la restricción (A.1) conocido como el conjunto de restricciones o el conjunto de funciones admisibles

$$\mathcal{K} = \{v \in H \mid Bv = g\} \tag{A.2}$$

Ahora el problema de minimización consiste en encontrar $u \in \mathcal{K}$ tal que

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in \mathcal{K} \tag{A.3}$$

El método de multiplicadores de Lagrange es una técnica en la cual se encontrará el mínimo en todo el espacio H , no sólo en las restricciones \mathcal{K} . Además, se introduce un segundo espacio de funciones Q' , que es un espacio de Hilbert llamado el espacio de multiplicadores de Lagrange. Observamos que Q' es el espacio dual de Q que contiene

los elementos Bu , es decir, $B : H \rightarrow Q$, se define el funcional $L : H \times Q' \rightarrow \mathbb{R}$, definido por

$$L(v, q) = J(v) + [q, Bv - g] \quad (\text{A.4})$$

donde $v \in H$, $q \in Q'$ y $[\cdot, \cdot]$ denota un par dual en $Q' \times Q$, es decir, es una forma bilineal.

Luego, si $q \in Q'$ se satisface que q sea una transformación lineal

$$q(g) \equiv [q, g] \in \mathbb{R}, \quad g \in Q \quad (\text{A.5})$$

$$q(\alpha g_1 + \beta g_2) \equiv \alpha[q, g_1] + \beta[q, g_2], \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ y } \forall g_1, g_2 \in Q \quad (\text{A.6})$$

Los elementos $q \in Q'$ son los multiplicadores (de la restricción) y el funcional L de la ecuación (A.4) es llamado el Lagrangiano correspondiente a J y el conjunto de restricciones K . Entonces

$$\begin{aligned} L(u + \epsilon v, p + \epsilon q) &= J(u + \epsilon v) + [p + \epsilon q, B(u + \epsilon v) - g] \\ &= J(u + \epsilon v) + [p, B(u + \epsilon v) - g] + [\epsilon q, B(u + \epsilon v) - g] \\ &= J(u + \epsilon v) + [p, Bu] + \epsilon[p, Bv] - [p, g] + \epsilon[q, Bu] + \epsilon^2[q, Bv] - \epsilon[q, g] \\ &= J(u + \epsilon v) + [p, Bu - g] + \epsilon[p, Bv] + \epsilon[q, Bu - g] + \epsilon^2[q, Bv] \end{aligned}$$

Por su parte, el límite cuando $\epsilon \rightarrow 0$ de la derivada parcial con respecto a ϵ se escribe como

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} L(u + \epsilon v, p + \epsilon q) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \{ J(u + \epsilon v) + [p, Bu - g] + \epsilon[p, Bv] + \epsilon[q, Bu - g] + \epsilon^2[q, Bv] \}$$

Notemos que $\langle \delta J(u), v \rangle$ es la primer variación de J evaluada en u y como B se asume lineal, hemos utilizado el hecho

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} [p + \epsilon q, B(u + \epsilon v) - g] = [p, Bv] + [q, Bu - g] \quad (\text{A.7})$$

De donde, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} L(u + \epsilon v, p + \epsilon q) = \langle \delta J(u), v \rangle + [p, Bv] + [q, Bu - g]$.

Por lo tanto, la primera variación de L en $(u, p) \in H \times Q'$ es

$$\langle \delta L(u, p), (v, q) \rangle_{H \times Q'} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} L(u + \epsilon v, p + \epsilon q) \quad (\text{A.8})$$

$$= \langle \delta J(u), v \rangle + [p, Bv] + [q, Bu - g] \quad (\text{A.9})$$

Observemos que el conjugado B^* de B tiene la propiedad $B^* : Q' \rightarrow H'$ y para cualquier valor arbitrario de $q \in Q'$ y $v \in H$, se sigue que

$$[q, Bv] = \langle B^* q, v \rangle_{H' \times H}$$

Entonces, cumple que la variación al aplicar el operador dual (A.9) se puede escribir también como

$$\langle \delta L(u, p), (v, q) \rangle_{H \times Q'} = \langle \delta J(u), v \rangle + \langle B^* p, v \rangle + \langle B^* q, u \rangle - [q, g] \quad (\text{A.10})$$

Cabe mencionar que las condiciones son sobre la divergencia, esta forma es muy útil dado que

$$[q, B\mathbf{v}] = \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega = (q, B\mathbf{v})$$

es igual a

$$[q, B\mathbf{v}] = \langle B^* q, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \nabla q \cdot \mathbf{v} d\Omega$$

donde $B^* q = \nabla q$.

Si (u, p) es tal que $\langle \delta L(u, p), (v, q) \rangle_{H \times Q'} = 0$ para $v \in H$ y $q \in Q'$, se obtiene el problema variacional con valores en la frontera siguiente:

$$\begin{aligned} \langle \delta J(u), v \rangle + [p, Bv] &= 0, \quad \forall v \in H \\ [q, Bu - g] &= 0, \quad \forall q \in Q' \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Definiendo adecuadamente los espacios de J y B , las solución u de las ecuaciones (A.11) es precisamente la solución del problema de minimización con restricciones ecuaciones (A.3) y (A.1).

A.2. Condiciones para existencia de un mínimo

En está sección se presentan los criterios para la existencia del problema de minimización con restricciones. Para ello primero plantearemos el problema de minimización sin restricciones.

Los argumentos de minimización se aplican siempre al funcional J que tiene las siguientes propiedades:

- a) J es diferenciable. En otras palabras, J es tal que siempre es posible calcular su primera variación,

$$\langle \delta J(u), v \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \epsilon} J(u + \epsilon v),$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota la pareja dual en $H' \times H$; esto es, si H' es el dual de H , entonces $\delta J(u) \in H'$ y $\delta J(u)(v) \equiv \langle \delta J(u), v \rangle$.

- b) J es estrictamente convexo. Esto es, si u y v son elementos arbitrarios del espacio H sobre el cual J está definido y $\theta \in (0, 1)$, entonces

$$J(\theta u + (1 - \theta)v) < \theta J(u) + (1 - \theta)J(v)$$

siempre que $u, v \neq 0$, $u \neq v$.

- c) J es coercivo. Esto significa que si $\|\cdot\|_H$ es una norma apropiada en H , la magnitud del valor de J en u crece conforme $\|u\|_H$ crece, es decir,

$$\lim_{\|u\|_H \rightarrow \infty} J(u) = +\infty$$

(A.12)

Bajo estas condiciones, tenemos el siguiente teorema de minimización.

Teorema A.2.1 *Sea H un espacio de Hilbert con producto interno $(\cdot, \cdot)_H$ y norma $\|\cdot\|_H = \{(\cdot, \cdot)_H\}^{1/2}$. Sea $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional que satisface las condiciones (A.12). Entonces, existe un único elemento u en H el cual minimiza J sobre todo H :*

$$J(u) \leq J(v) \quad \forall v \in H.$$

Además, el mínimo se caracteriza por la ecuación variacional de Euler-Lagrange

$$\langle \delta J(u), v \rangle = 0 \quad \forall v \in H.$$

Por otro lado, un problema de minimización con restricciones se puede transformar en un problema de punto silla. Un punto silla de un funcional $L : H \times Q' \rightarrow \mathbb{R}$, es un par $(u, p) \in H \times Q'$ tal que

$$L(u, q) \leq L(u, p) \leq L(v, p) \quad \forall v \in H, \forall q \in Q'.$$

A continuación presentamos las condiciones para la existencia de un punto silla, las cuales son similares a las enlistadas en el teorema anterior:

- a) Para $q_0 \in Q'$ fijo, $L(v, q_0)$ es estrictamente convexo y diferenciable con respecto a v , esto es,

$$\langle \delta_v L(u, q_0), (v, q_0) \rangle_{H \times Q'} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial L(u + \epsilon v, q_0)}{\partial \epsilon}$$

existe para todo $u \in H$ y para $u, v \neq 0$,

$$L(\theta u + (1 - \theta)v, q_0) < \theta L(u, q_0) + (1 - \theta)L(v, q_0),$$

donde $0 < \theta < 1$.

- b) Para $v_0 \in H$ fijo, $L(v_0, q)$ es cóncavo y diferenciable con respecto a q , es decir,

$$\langle \delta_q L(v_0, p), (v_0, q) \rangle_{H \times Q'} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\partial L(v_0, p + \epsilon q)}{\partial \epsilon}$$

existe para todo $p \in Q'$ y para $p, q \neq 0$,

$$L(v_0, \theta p + (1 - \theta)q) \geq \theta L(v_0, p) + (1 - \theta)L(v_0, q),$$

donde $0 \leq \theta \leq 1$

- c) Se puede encontrar $q_0 \in Q'$ tal que $L(v, q_0)$ es coercivo con respecto a v , es decir,

$$\lim_{\|v\|_H \rightarrow \infty} L(v, q_0) = +\infty.$$

- d) Se puede encontrar $v_0 \in H$ tal que $L(v_0, q)$ es negativamente coercivo con respecto a q , esto es,

$$\lim_{\|q\|_{Q'} \rightarrow \infty} L(v_0, q) = -\infty.$$

(A.13)

Se puede demostrar que si se tienen las condiciones (A.13), existe al menos un punto silla $(u, p) \in H \times Q'$ de $L(\cdot, \cdot)$ y que (u, p) es una solución del problema variacional con valores en la frontera (A.11).

Suposiciones adicionales, apliquemos las condiciones anteriores al funcional $L(\cdot, \cdot)$ definido en (A.4), suponiendo que se cumplen las condiciones siguientes:

- a) El funcional $J : H \rightarrow \mathbb{R}$ es continuo y satisface las condiciones del teorema A.2.1; en particular, suponga que
- $$J(v) \geq C_0 \|v\|_H^2 - C_1(f) \|v\|_H$$
- para todo $v \in H$, donde C_0 y C_1 son constantes positivas y C_1 depende de los datos de f .
- b) El operador de restricciones $B : H \rightarrow Q$ es un operador lineal acotado; esto es, existe una constante $C_B > 0$ tal que para cada $V \in H$,
- $$\|Bv\|_Q \leq C_B \|v\|_H.$$
- c) El operador variacional $\delta J : H \rightarrow H'$ es acotado; esto es, si $\|v\|_H \leq C_1$, entonces $\|\delta J(v)\|_{H'} \leq C_2$, C_1 y C_2 son constantes.

(A.14)

Es importante señalar que las condiciones A.14.(a) y A.14.(b) se utilizan para demostrar que se cumplen las condiciones A.13.(a) y A.13.(b). Ahora, si J es coercivo, entonces el funcional L es coercivo para un q fijo y con esto se cumple la condición A.13.(c). Debido a que las condiciones A.14 no son suficientes para mostrar el inciso A.13.(d) se requiere la siguiente condición.

Condición de Babuška-Brezzi. Existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$\beta \|q\|_{Q'} \leq \sup_{\substack{v \in H \\ (v \neq 0)}} \frac{|[q, Bv]|}{\|v\|_H} \quad \forall q \in Q'. \quad (\text{A.15})$$

Teorema A.2.2 *Si se cumplen las condiciones (A.14) y (A.15), entonces existe un único punto silla $(u, p) \in H \times Q'$ del operador de Lagrange (A.4) y ese punto es también solución del sistema (A.11).*

Construcción de mallas con GID

Las mallas que se presentan en este documento se construyeron por medio del software comercial GID [30]. Para ello, hemos generado un Problemtyp llamado Campos3D, el cual consta de tres archivos con extensiones *.prb, *.cnd y *.bas; los códigos se muestran en el apartado B.1. En el apartado B.1 se ejemplifica, mediante una malla pequeña, los datos que se obtienen al utilizar el problemtyp diseñado.

B.1. Problemtyp Campos 3D

El problemtyp para generar campos de viento 3D mediante GID consta de tres archivos que se describen a continuación

Campos3D.prb

En este archivo se define la información general del problema como las unidades y el título del proyecto. A continuación se presenta el código

```
PROBLEM DATA
QUESTION:Unit_System#CB#(SI)
VALUE: SI
QUESTION: Title
VALUE: CAMPOS DE VIENTO 3D
END GENERAL DATA
```

Campos3D.cnd

En este archivo se especifican las condiciones de frontera. Debido a que la región Ω es un cubo se definen seis condiciones de frontera, una por cada cara. El código se muestra a continuación

```
NUMBER:1 CONDITION: CF_Cara1
CONDTYPE: over surface
```



```
CONDMESHTYPE: over face elements
QUESTION: CF_Cara1
VALUE: 1
END CONDITION
```

```
NUMBER:2 CONDITION: CF_Cara2
CONDTYPE: over surface
CONDMESHTYPE: over face elements
QUESTION: CF_Cara2
VALUE: 2
END CONDITION
```

```
NUMBER:3 CONDITION: CF_Cara3
CONDTYPE: over surface
CONDMESHTYPE: over face elements
QUESTION: CF_Cara3
VALUE: 3
END CONDITION
```

```
NUMBER:4 CONDITION: CF_Cara4
CONDTYPE: over surface
CONDMESHTYPE: over face elements
QUESTION: CF_Cara4
VALUE: 4
END CONDITION
```

```
NUMBER:5 CONDITION: CF_Tapa
CONDTYPE: over surface
CONDMESHTYPE: over face elements
QUESTION: CF_Tapa
VALUE: 5
END CONDITION
```

```
NUMBER:6 CONDITION: CF_Terreno
CONDTYPE: over surface
CONDMESHTYPE: over face elements
QUESTION: CF_Terreno
VALUE: 6
END CONDITION
```

Campos3D.bas

En este archivo se diseña o programa el formato de salida de los datos que ge-

nera GID. El fichero o archivo donde guarda los datos se llama Campos3D.dat. A continuación se presenta el código del Campos3D.bas

```

*# TITULO
*GenData(Title)
*#-----
*# Número Elementos, Número Nodos, Dimensión, Nodos X elemento:
*# WRITES "NELEM", "NNT", "NSD", "NNE"
*format "%8i%8i%8i%8i"
*nelem *npoin *ndime *nnode
*#-----
*# Lista de Coordenadas:
*set elems(all)
*loop nodes
*format "%14.8e%14.8e%14.8e"
*NodesCoord(1,real) *NodesCoord(2,real) *NodesCoord(3,real)
*end nodes
*#-----
*# Lista de Conectividades:
*# Elementos Node(1) Node(2) Node(3) Node(4)
*loop elems
*format "%10i%10i%10i%10i"
*ElemsConec
*end elems
*#-----
*# Cálculo del número de elementos de frontera (aristas) totales
*#
*#      Número de entidades CONDICION-FRONTERA-Cara1
*Set Cond CF_Cara1 *nodes
*set var nnc1(int)=CondNumEntities(int)
*set Cond CF_Cara1 *elems
*loop elems *OnlyInCond
*set var nec1(int)=Operation(nec1(int)+1)
*end elems
*#      Número de entidades CONDICION-FRONTERA-Cara2
*Set Cond CF_Cara2 *nodes
*set var nnc2(int)=CondNumEntities(int)
*set Cond CF_Cara2 *elems
*loop elems *OnlyInCond
*set var nec2(int)=Operation(nec2(int)+1)
*end elems
*#      Número de entidades CONDICION-FRONTERA-Cara3
*Set Cond CF_Cara3 *nodes
```

```

*set var nnc3(int)=CondNumEntities(int)
*set Cond CF_Cara3 *elems
*loop elems *OnlyInCond
*set var nec3(int)=Operation(nec3(int)+1)
*end elems
*#      Número de entidades CONDICION-FRONTERA-Cara4
*Set Cond CF_Cara4 *nodes
*set var nnc4(int)=CondNumEntities(int)
*set Cond CF_Cara4 *elems
*loop elems *OnlyInCond
*set var nec4(int)=Operation(nec4(int)+1)
*end elems
*#      Número de entidades CONDICION-FRONTERA-Tapa
*Set Cond CF_Tapa *nodes
*set var nnta(int)=CondNumEntities(int)
*set Cond CF_Tapa *elems
*loop elems *OnlyInCond
*set var neta(int)=Operation(neta(int)+1)
*end elems
*#      Número de entidades CONDICION-FRONTERA-Terreno
*Set Cond CF_Terreno *nodes
*set var nnte(int)=CondNumEntities(int)
*set Cond CF_Terreno *elems
*loop elems *OnlyInCond
*set var nete(int)=Operation(nete(int)+1)
*end elems
*#      Número de nodos totales
*set var nntf(int)=nnc1+nnc2+nnc3+nnc4+nnta+nnte
*set var netf(int)=nec1+nec2+nec3+nec4+neta+nete
*nntf *netf
*# -----
*# Lista de Conectividades para Elementos de Frontera
*#
*# ELEMENTOS CON CONDICION DE FRONTERA CARA1
*nnc1 *nec1
*Set Cond CF_Cara1 *elems
*loop elems *OnlyInCond
*format "%10i%10i%10i%10i"
*globalnodes *cond(CF_Cara1)
*end elems
*# ELEMENTOS CON CONDICION DE FRONTERA CARA2
*nnc2 *nec2
*Set Cond CF_Cara2 *elems

```

```
*loop elems *OnlyInCond
*format "%10i%10i%10i%10i"
*globalnodes *cond(CF_Cara2)
*end elems
*# ELEMENTOS CON CONDICION DE FRONTERA CARA3
*nnc3 *nec3
*Set Cond CF_Cara3 *elems
*loop elems *OnlyInCond
*format "%10i%10i%10i%10i"
*globalnodes *cond(CF_Cara3)
*end elems
*# ELEMENTOS CON CONDICION DE FRONTERA CARA4
*nnc4 *nec4
*Set Cond CF_Cara4 *elems
*loop elems *OnlyInCond
*format "%10i%10i%10i%10i"
*globalnodes *cond(CF_Cara4)
*end elems
*# ELEMENTOS CON CONDICION DE FRONTERA TAPA
*nnta *neta
*Set Cond CF_Tapa *elems
*loop elems *OnlyInCond
*format "%10i%10i%10i%10i"
*globalnodes *cond(CF_Tapa)
*end elems
*# ELEMENTOS CON CONDICION DE FRONTERA TERRENO
*nnte *nete
*Set Cond CF_Terreno
*elems *loop elems *OnlyInCond
*format "%10i%10i%10i%10i"
*globalnodes *cond(CF_Terreno)
*end elems
```

B.2. Geometría y mallas generadas

En este apartado se presenta el archivo de datos de una malla pequeña realizada con el programa GID, en la región delimitada por Ω , usando el `problemtyp` `Campos3D`. Para ello, previamente se define la simetría que es el cubo definido por $\Omega = (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1)$, y se definen quienes son las fronteras de Ω . Se elige que particione cada arista en dos elementos y se obtiene los siguientes datos:

B.2.1. Datos generados

La malla está generada por 48 tetraedros y 27 nodos correspondientes a la figura B.1. La información contenida en el archivo Campos3D.dat es.

CAMPOS DE VIENTO 3D

48 27 3 4

% Los valores representan el número de elementos totales, número

% de nodos totales, dimensión y nodos por elemento, respectivamente

% Coordenadas de cada uno de los nodos en la malla.

1.00000000e+00	1.00000000e+00	1.00000000e+00
5.00000000e-01	1.00000000e+00	1.00000000e+00
1.00000000e+00	1.00000000e+00	5.00000000e-01
1.00000000e+00	5.00000000e-01	1.00000000e+00
1.00000000e+00	5.00000000e-01	5.00000000e-01
5.00000000e-01	1.00000000e+00	5.00000000e-01
5.00000000e-01	5.00000000e-01	1.00000000e+00
5.00000000e-01	5.00000000e-01	5.00000000e-01
0.00000000e+00	1.00000000e+00	1.00000000e+00
1.00000000e+00	1.00000000e+00	0.00000000e+00
1.00000000e+00	0.00000000e+00	1.00000000e+00
0.00000000e+00	1.00000000e+00	5.00000000e-01
1.00000000e+00	5.00000000e-01	0.00000000e+00
5.00000000e-01	1.00000000e+00	0.00000000e+00
5.00000000e-01	0.00000000e+00	1.00000000e+00
0.00000000e+00	5.00000000e-01	1.00000000e+00
1.00000000e+00	0.00000000e+00	5.00000000e-01
5.00000000e-01	0.00000000e+00	5.00000000e-01
0.00000000e+00	5.00000000e-01	5.00000000e-01
5.00000000e-01	5.00000000e-01	0.00000000e+00
1.00000000e+00	0.00000000e+00	0.00000000e+00
0.00000000e+00	1.00000000e+00	0.00000000e+00
0.00000000e+00	0.00000000e+00	1.00000000e+00
5.00000000e-01	0.00000000e+00	0.00000000e+00
0.00000000e+00	0.00000000e+00	5.00000000e-01
0.00000000e+00	5.00000000e-01	0.00000000e+00
0.00000000e+00	0.00000000e+00	0.00000000e+00

% Matriz o tabla de conectividades

26	19	8	22
22	26	20	8
12	6	8	22

22	14	6	8
22	12	19	8
14	20	8	22
24	18	8	27
27	24	20	8
25	19	8	27
27	26	19	8
27	25	18	8
26	20	8	27
6	2	9	8
8	6	12	9
7	16	9	8
8	19	16	9
8	7	2	9
19	12	9	8
19	16	23	8
8	19	25	23
7	15	23	8
8	18	15	23
8	7	16	23
18	25	23	8
14	6	8	10
10	14	20	8
3	5	8	10
10	13	5	8
10	3	6	8
13	20	8	10
13	5	8	21
21	13	20	8
17	18	8	21
21	24	18	8
21	17	5	8
24	20	8	21
5	4	1	8
8	5	3	1
7	2	1	8
8	6	2	1
8	7	4	1
6	3	1	8
18	15	11	8
8	18	17	11
7	4	11	8
8	5	4	11

8	7	15	11
5	17	11	8

% Tabla de Conectividades de elementos de frontera

54 48 % Número de nodos nodos totales y número de elementos de
% frontera totales

9 8 % El primer término representa el número de nodos y el segundo
% término es el número de elementos de la malla, correspondiente
% a cada una de las seis caras

	27	18	24	1
	27	25	18	1
	18	23	15	1
	18	25	23	1
	21	18	17	1
	21	24	18	1
	18	15	11	1
	18	11	17	1
9 8	10	5	3	2
	10	13	5	2
	21	5	13	2
	21	17	5	2
	5	4	1	2
	5	1	3	2
	5	11	4	2
	5	17	11	2
9 8	22	6	12	3
	22	14	6	3
	6	2	9	3
	6	9	12	3
	10	6	14	3
	10	3	6	3
	6	1	2	3
	6	3	1	3
9 8	22	19	26	4
	22	12	19	4
	27	19	25	4
	27	26	19	4
	19	9	16	4
	19	12	9	4

	19	16	23	4
	19	23	25	4
9 8				
	7	16	9	5
	7	9	2	5
	7	15	23	5
	7	23	16	5
	7	2	1	5
	7	1	4	5
	7	4	11	5
	7	11	15	5
9 8				
	22	26	20	6
	22	20	14	6
	27	24	20	6
	27	20	26	6
	10	14	20	6
	10	20	13	6
	21	13	20	6
	21	20	24	6

La figura B.1 muestra la malla creada por GID con la numeración de los nodos. Si dividimos el cubo en 8 octantes y en cada octante tenemos 6 tetraedros, entonces la figura B.1 exhibe 48 tetraedros.

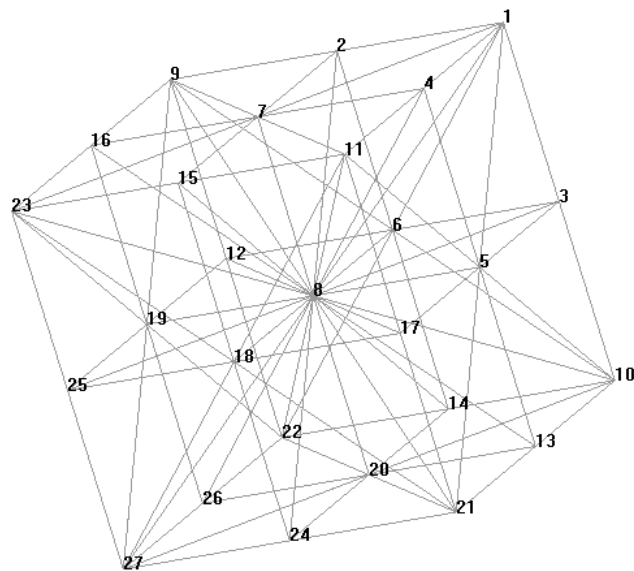


Figura B.1: Malla con dominio Ω en GID.

Bibliografía

- [1] L. Ferragut, M. I. Asensio, and J. Simon. High definition local adjustment model of 3D wind fields performing only 2D computations. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 27:510–523, 2011.
- [2] F. B. Hacène, M. T. Abbès, N. K. Merzouk, L. Loukarfi, H. Mahmoudi, and M. F. A. Goosen. Development of a simulation model for a three-dimensional wind velocity field using Ténès Algeria as a case study. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 16:29–36, 2012.
- [3] C. F. Ratto, R. Festa, and C. Romeo. Mass-Consistent models for wind fields over complex terrain: The state of the art. *Environmental Software*, 9:247–268, 1994.
- [4] C. A. Sherman. A Mass-Consistent for Wind Field over Complex Terrain. *Journal of applied meteorology*, 17:312–319, 1977.
- [5] A. Oliver, G. Montenegro, E. Rodríguez, J.M. Escobar, and A. Pérez-Foguet. Adaptive finite element simulation of stack pollutant emissions over complex terrains. *Energy*, 49:47–60, 2013.
- [6] S. Finardi, G. Tinarelli, A. Nanni, G. Brusasca, and G. Carbani. Evaluation of 3-D flow and pollutant dispersion modelling system to estimate climatological ground-level concentrations in complex coastal sites. *International Journal of Environment and Pollution*, 16:472–482, 2001.
- [7] M.I. Asensio, L. Ferragut, and J. Simon. A convection model for fire spread simulation. *Applied Mathematics Letters*, 18:673–677, 2005.
- [8] L. Ferragut, R. Montenegro, G. Montero, E. Rodríguez, M.I. Asensio, and J.M. Escobar. Comparison between 2.5-D and 3-D realistic models for wind field adjustment. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 98:548–558, 2010.

-
- [9] Y. Sasaki. An objective analysis based on the variational method. *Journal of Meteorological Society of Japan*, 36:77–88, 1958.
- [10] J.M. Cascón and L. Ferragut. An adaptive mixed finite element method for wind field adjustment. *ScienceDirect*, 38:350–357, 2007.
- [11] C. Flores, H. Juárez, M. A. Núñez, and M. L. Sandoval. Algorithms for Vector Field Generation in Mass Consistent Models. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 26:826–842, 2010.
- [12] D. W. Pepper and X. Wang. An h-Adaptive Finite-Element Technique for Constructing 3D Wind Fields. *Journal of Applied Meteorology and Climatology*, 48:580–599, 2009.
- [13] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*. John Wiley & Sons, Inc., University of Windsor, 1989.
- [14] S. C. Brenner and L. R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Elemental Methods*. Springer Texts in Applied Mathematics, New York, USA, third edition, 2008.
- [15] W. Rudin. *Principios de Análisis Matemático*. McGraw-Hill, University of Wisconsin-Madison, tercera edición, 1980.
- [16] G. F. Carey and J. T. Oden. *Finite Elements a second course*, volume II. Prentice-Hall, Inc, The University of Texas at Austin, second edition, 1983.
- [17] L. H. Juárez, M. L. Sandoval, J. López, and R. Reséndiz. *Mass Consistent Wind Field Models: Numerical Techniques by L2 Projection Methods*.
- [18] T. Kitada and K. Igarashi. Numerical Analysis of air Pollution in Combined Field of Land/Sea breeze and Mountain/Valley Wind. *Journal of climate and applied meteorology*, 25:767–748, 1985.
- [19] C. F. Flores. *Modelación computacional de problemas en mecánica de fluidos*. PhD thesis, Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapalapa, México, 2009.
- [20] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite Elements Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer Series in Computational Mathematics 5, Berlin Heidelberg, segunda edición, 1986.
- [21] F. G. Ciarlet. *The Finite Element Method for Elliptic Problems*. Northh-Holland Publishing Company.
- [22] C. Johnson. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Cambridge University Press, Sweden, 1987.

-
- [23] G. Srinivasan and K. Lipnikov. On the Reconstruction of Darcy Velocity in Finite-Volume Methods. *Transp Porous Med*, 96:337–351, 2013.
- [24] S.T. Chan and G. Sugiyama. A New Model for Generating Mass-Consistent Wind Fields Over Continuous Terrain. In *American Nuclear Society's Sixth Topical Meeting on Emergency Preparedness and Response*, 1997.
- [25] G. Dhondt. *The Finite Elemental Method for Three-Dimensional Thermomechanical Applications*. John Wiley & Sons, Ltd, Munich, Germany, 2004.
- [26] Y. Saad. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Minneapolis, Minnesota, 2003.
- [27] Y. Wang, C. Williamson, D. Garvey, S. Chang, and J. Cogan. Application of a Multigrid Method to a Mass-Consistent Diagnostic Wind Model. *Journal of applied meteorology*, 44:1078–1089, 2005.
- [28] G. Montero, R. Montenegro, and J.M. Escobar. A 3-D diagnostic model for wind adjustment. *Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics*, 74-76:249–261, 1998.
- [29] L. H. Juárez, M. L. Sandoval, and J. López. Reconstruction of Velocity Wind Fields from Horizontal Data by Projection Methods. In *Internacional First Symposium on Inverse Problems and its Applications*, 2011.
- [30] <http://gid.cimne.upc.es/>.